



HAL
open science

Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire

Michel Sakarovitch

► **To cite this version:**

Michel Sakarovitch. Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1975. tel-00286236

HAL Id: tel-00286236

<https://theses.hal.science/tel-00286236>

Submitted on 9 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR ES SCIENCES
MATHEMATIQUES

Michel SAKAROVITCH

SUR QUELQUES PROBLEMES
D'OPTIMISATION COMBINATOIRE

Soutenue le 14 mars 1975 devant la Commission d'Examen :

J. KUNTZMANN : Président
P. CAMION : Rapporteur
M. BALINSKI : Examineur
C. BENZAKEN : "
C. BERGE : "

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF

Présidents

M. Louis NEEL

M. Gabriel CAU

Vice-Présidents

MM. Lucien BONNETAIN

Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.
=====

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
Mv.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.M.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrometallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
----------------------	------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND Francis	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOUME Jean Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique
---------------------	-------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées
--------------------	--------------------------

*"Efficace ne s'oppose pas à théorique mais
à l'opposition du théorique et du pratique"*

R. Debray

AVANT-PROPOS

Certaines applications des Mathématiques sont orientées vers la résolution de problèmes issus de diverses branches de la Science ou de la Technique (Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur,...). D'autres applications sont orientées vers ce qu'on peut appeler de manière très générale "les problèmes de la Cité". Ce sont ces applications qui intéressent la Recherche Opérationnelle qu'on a pu caractériser également comme "l'approche scientifique des problèmes de prise de décision". Cette caractérisation rend en fait assez mal compte, à mon sens, de la problématique de la Recherche Opérationnelle. L'objectif du "chercheur opérationnel" est en effet double : il s'agit bien sûr d'appliquer une démarche scientifique à la résolution de problèmes concrets, mais il s'agit aussi de considérer les modèles des problèmes étudiés comme sources d'inspiration pour un enrichissement des outils théoriques (et en particulier mathématiques), enrichissement qui permettra à son tour une plus grande ouverture du domaine d'application de la Recherche Opérationnelle. La découverte dans les 30 dernières années d'outils aussi importants que la programmation linéaire, la programmation dynamique, la théorie des flots dans les réseaux, la programmation en nombres entiers -pour n'en citer que quelques uns- témoigne de la fécondité de cette approche.

Ce va et vient dialectique entre Pratique et Théorie fait de la Recherche Opérationnelle une discipline, à mes yeux, passionnante. Mais ce va et vient présente l'inconvénient qu'il donne à la Recherche Opérationnelle un caractère bâtard et que, par conséquent, cette discipline a toujours eu quelques difficultés à s'acclimater dans le sein de l'Université (au moins de l'Université Française). Et, en effet, il y a là une difficulté profonde car si la Recherche Opérationnelle est à la fois un Art (au sens où la cuisine en est un) et une Science, on se trouve fort embarrassé lorsqu'il s'agit de mettre sur pieds un enseignement qui participe à la fois de l'un et de l'autre. Sans avoir perdu l'espoir d'aboutir à une solution plus satisfaisante dans un proche avenir, nous nous sommes contentés, à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, ainsi que cela se pratique dans la plupart des Universités où cette discipline est reconnue, d'organiser un enseignement des "techniques mathématiques de la Recherche Opérationnelle" sans essayer vraiment de transmettre aux étudiants la partie "tour de main", c'est à dire la construction des Modèles.

Sur le plan de la Recherche, il n'en est évidemment pas de même et le plupart des travaux entrepris dans l'Équipe de Recherche Opérationnelle trouvent leur source dans des problèmes concrets qui nous ont été soumis. Cependant lorsqu'il s'est agi pour moi de préparer un travail qui pût me donner le titre de Docteur ès Sciences, je n'ai pas eu suffisamment d'imagination (ni d'audace) pour soutenir une thèse qui fût réellement de Recherche Opérationnelle et qui alliât un travail pratique à une recherche théorique. Aussi le travail que je présente ici est exclusivement de Mathématiques appliquées à certains problèmes d'optimisation combinatoire qui peuvent avoir à faire, de près ou de loin, avec des problèmes rencontrés dans la résolution de modèles de la Recherche Opérationnelle.

Ce travail ne présente pas d'autre unité que celle que peut lui donner l'intérêt que je porte aux problèmes d'optimisation combinatoire, c'est à dire que chacune des 3 parties traite de problèmes très distincts. La première partie est constituée par les travaux les plus anciens et ne comporte, sauf quelques résultats secondaires du chapitre II et le théorème 4 de l'Appendice, aucun résultat réellement original. Son seul intérêt est de montrer comment un certain nombre de théorèmes de "dualité combinatoire" et de théorèmes sur les "biflots" peuvent être dérivés de manière simple à partir du théorème de dualité en programmation linéaire mettant ainsi ces théorèmes de dualité combinatoire dans une même perspective d'une part, permettant de comprendre la raison profonde pour laquelle le flot maximum est égal à la capacité de la coupe minimum dans le cas des biflots non orientés, d'autre part.

La seconde partie est un travail sur les graphes. Il s'agit d'étudier les ensembles de sommets d'un graphe tels que le sous-graphe engendré soit sans cycle (ensemble cycliquement stable) ; j'étudie les bornes du nombre de stabilité cyclique (cardinal d'un ensemble cycliquement stable maximum) et j'étudie comment ce nouveau paramètre peut être utilisé pour avoir une meilleure intelligence de la structure des graphes cubiques. Enfin dans la troisième partie, je montre que l'utilisation de la terminologie et des méthodes de la théorie des graphes et des hypergraphes peut rendre de grands services dans l'étude des matrices à éléments dans $\{-1, 0, +1\}$ et en particulier je dégage un concept de connexité dont l'utilisation se révèle très féconde. Les démonstrations des résultats de la seconde partie sont plus complexes, les développements de la troisième partie ont peut-être fait davantage travailler mon imagination. Une description plus détaillée du contenu des deuxième et troisième parties se trouve aux pages 55 et 59.

Je tiens à remercier les personnes qui ont bien voulu être membres de mon Jury et en particulier Monsieur Kuntzmann qui, après m'avoir accueilli à Grenoble et encouragé à entreprendre ce travail, a accepté de présider ce jury, Claude Berge qui a agi comme "rapporteur extérieure" et Paul Camion qui a bien voulu s'intéresser à ma recherche et m'a fort utilement guidé dans la troisième partie.

Mes remerciements vont également à Charles Payan et à Christiane Neumann. Le premier doit être considéré comme le co-auteur de la plupart des résultats de la seconde partie ; j'ai apprécié au cours de ce travail en commun sa cordialité chaleureuse qui a rendu cette collaboration très agréable. La seconde a tapé avec une diligence toujours aimable et avec une grande compétence les textes rébarbatifs que je lui portais.

Enfin je remercie le personnel du Service de Reproduction pour la qualité de la présentation de ce travail.

M. SAKAROVITCH

TABLE DES MATIERES

	Pages
Notations	7
<u>Première partie</u> : Applications combinatoires du théorème de dualité en programmation linéaire	9
<u>Chapitre I</u> : Quelques théorèmes de dualité combinatoire	11
1 - Théorème fondamental de dualité linéaire	11
2 - Théorèmes de dualité combinatoire	15
Annexe : Démonstration du théorème fondamental de dualité linéaire	23
<u>Chapitre II</u> : Problème du flot de deux produits dans un réseau non orienté	27
1 - Introduction	27
2 - Formulation équivalente du problème (I)	29
3 - Résultats fondamentaux	32
4 - Algorithme pour trouver un biflot maximum	37
5 - Biflots maximum entiers	44
Appendice à la première partie : Matrices quasi-équilibrées	49
<u>Deuxième partie</u> : Nombre de stabilité cyclique dans les graphes	53
Introduction à la seconde partie	55
<u>Chapitre III</u> : Etude des bornes du nombre de stabilité cyclique	57
1 - Etude de la borne supérieure de $s(G)$	57
2 - Borne inférieure de $s(G)$ pour les graphes cubiques	58
3 - Borne inférieure de $s(G)$ pour les graphes de degré quelconque	63
<u>Chapitre IV</u> : Ensembles cycliquement stables dans les graphes cubiques ; cas des graphes simples cubiques cycli- quement 4-arêtes connexes	69
1 - Une propriété des graphes cubiques	69
2 - Valeur de $s(G)$ pour les graphes cubiques cycliquement 4-arêtes connexes	72
3 - Quelques autres propriétés des ensembles cycliquement stables maximum dans le cas des graphes cubiques cycliquement 4-connexes	82

<u>Troisième partie</u> : Etude des matrices à éléments dans $\{-1, 0, +1\}$ à l'aide des méthodes de la théorie des graphes et des hypergraphes	87
Introduction à la troisième partie	89
<u>Chapitre V</u> : Connexité dans les hypergraphes généraux	93
1 - Définition de la connexité dans les hypergraphes généraux ; pseudo-cycles, pseudo-cocycles	93
2 - Inclusion propre ; hypergraphes séparés	100
3 - h-arbres, h-forêts ; h-chaînes, h-cycles	103
<u>Chapitre VI</u> : Hypergraphes unimodulaires	115
1 - Bicolorations équitables des hypergraphes unimodulaires	115
2 - Connexité dans les hypergraphes unimodulaires	121
3 - Flots et tensions dans les hypergraphes unimodulaires ...	126
4 - Caractérisation des hypergraphes unimodulaires	131
Bibliographie	137

NOTATIONS

La terminologie et les notations utilisées ici sont :

. Pour ce qui concerne les graphes et hypergraphes, celles de C. Berge dans son livre "graphes et hypergraphes" avec la seule exception que nous appellerons "hypergraphe" dans la troisième partie un être mathématique plus général que l'hypergraphe au sens de Berge.

En particulier, il convient de rappeler que si X et Y sont deux ensembles et si $Y \subset X$, alors :

$X-Y$ désigne l'ensemble des éléments de X qui ne sont pas dans Y
 $|X|$ désigne le cardinal de X .

. Pour ce qui concerne la programmation linéaire, celles qu'on trouve dans la plupart des traités et en particulier dans mon livre "Notes on linear programming" ou dans mon cours photocopié à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble. En particulier, il convient de rappeler que :

- si c et x sont deux vecteurs dont on écrit le produit scalaire cx alors c est un vecteur "ligne" dont les composantes sont c^1, c^2, \dots, c^k et x est un vecteur "colonne" dont les composantes sont x_1, x_2, \dots, x_k . La convention consistant à écrire les indices des composantes des vecteurs lignes en position haute a été abandonnée dans la troisième partie car elle se révélait plus gênante qu'utile ;

- si A est une matrice A^T désigne la transposée de A ;

- si A est une matrice $n \times m$ et si

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$
 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$

Alors :

- . A_i (resp. A^j) désigne la i ème ligne (resp. la j ème colonne) de A
- . A_I (resp. A^J) désigne la sous-matrice de A obtenue en conservant les lignes A_i pour $i \in I$ (resp. les colonnes A^j pour $j \in J$).
- . $A_I^J = (A_I)^J = (A^J)_I$

PREMIERE PARTIE

APPLICATIONS COMBINATOIRES DU THEOREME DE DUALITE

EN PROGRAMMATION LINEAIRE

CHAPITRE I

QUELQUES THEOREMES DE DUALITE COMBINATOIRE

L'algorithme du simplexe, inventé en 1947 par G.B. Dantzig, est un outil exemplaire d'"optimisation combinatoire". Cet algorithme permet en effet de résoudre une large classe de problèmes d'optimisation (les problèmes linéaires d'optimisation qu'on appelle "programmes linéaires" [12], [20], [52], [55]) et la finitude de cet algorithme permet de déduire facilement le théorème de dualité en programmation linéaire qui est un puissant instrument combinatoire.

L'objet de ce chapitre est de mettre en évidence la parenté qui unit un certain nombre de résultats de dualité dans les problèmes combinatoires (théorème des arcs colorés généralisés, théorème de la coupe minimale généralisé, théorème d'Hoffmann généralisé, inégalité longueur-largeur) en montrant que tous ces théorèmes peuvent se déduire très simplement du théorème de dualité en programmation linéaire.

Aucun des résultats de ce chapitre n'est à proprement parler original ; le seul intérêt de cette présentation est de replacer dans une même perspective un certain nombre de théorèmes connus.

1 - Théorème fondamental de dualité linéaire

Définition : 1) Un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est dit "totalement ordonné" si $(x,y) \in C, (x',y') \in C, x < x' \Rightarrow y \leq y'$. Un ensemble totalement ordonné maximal est appelé "courbe croissante".

Remarques :

1) C est une courbe croissante si et seulement si C rencontre une fois et une seule toute droite $y + \alpha x = b \quad \alpha > 0, b$ quelconque.

2) Si C est une courbe croissante $\{x \mid (xy) \in C\}$ et $\{y \mid (xy) \in C\}$ sont des intervalles, disons $[\underline{x}, \bar{x}]$ et $[\underline{y}, \bar{y}]$ respectivement.

Définitions : 2) Etant donnée une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^{(1)}$ on dit que y_0 est un sous-gradient de ϕ en x_0 si $\phi(x_0)$ est fini et si :

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) + (x-x_0) * y_0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Cette notation est courante dans les ouvrages traitant d'optimisation convexe [38].

L'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de ϕ en x_0 sera appelé sous-différentiel de ϕ en x_0 et sera noté $\partial\phi(x_0)$.

3) Une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sera dite convexe si $C = \{x, \partial\phi(x)\}$ est une courbe croissante. A partir d'une courbe croissante C on obtient les fonctions convexes ϕ telles que $C = \{x, \partial\phi(x)\}$ par

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x v(u) du$$

où :

$$x_0 \in [\underline{x}, \overline{x}]$$

$$(u, v(u)) \in C \quad \forall u \in [x_0, x]$$

Notons que l'intégrale est parfaitement définie au sens de Riemann puisque $v(u)$ est monotone non décroissante. De même on pose :

$$\phi^*(y) = \int_{y_0}^y u(v) dv + x_0 y_0$$

où

$$y_0 \in [\underline{y}, \overline{y}] \quad (x_0, y_0) \in C$$

$$(v, u(v)) \in C \quad \forall v \in [y_0, y]$$

Remarque :

3) On peut montrer [44] que ϕ et ϕ^* sont "polaires" l'une de l'autre, c'est à dire que :

$$\phi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [xy - \phi(x)]$$

$$\phi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} [xy - \phi^*(y)]$$

Le théorème suivant est un résultat de Berge [6] qui peut être démontré à partir de la théorie de la convexité [38].

Théorème 1 (Berge [6]) : Soient F et T deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de \mathbb{R}^n et soient m fonctions convexes ϕ_i ($i=1,2,\dots,m$) dont les polaires sont ϕ_i^* et soient C_i les courbes croissantes correspondant aux ϕ_i . On considère les deux problèmes de minimisation :

$$(I) \alpha = \min_{f \in F} \phi(f) \quad \text{avec} \quad \phi(f) = \sum_{i=1}^m \phi_i(f_i)$$

$$(II) \beta = \min_{t \in T} \phi^*(t) \quad \text{avec} \quad \phi^*(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i^*(t_i)$$

a) S'il existe $f \in F$ et $t \in T$ tels que $\phi(f) < \infty$, $\psi(t) < \infty$ alors les problèmes (I) et (II) ont une solution et on a :

(i) $\alpha + \beta = 0$.

(ii) Pour tout couple \bar{f}, \bar{t} de solution de (I) et (II) :

(i) $(\bar{f}_i, \bar{t}_i) \in C_i$.

(iii) Tout couple $\bar{f} \in F, \bar{t} \in T$ satisfaisant à la relation ci-dessus est un couple de solutions de (I) et (II).

b) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha = -\infty$ (resp. $\beta = -\infty$) est que $\{t \in T | \psi^*(t) < \infty\} = \emptyset$ (resp. $\{f \in F | \phi(f) < \infty\} = \emptyset$).

Nous n'utiliserons ici qu'un cas particulier de ce théorème, celui où les fonctions ϕ_i sont linéaires par morceaux, c'est à dire le cas où les courbes C_i sont des courbes en escalier. Ce cas particulier du théorème 1 sera appelé théorème fondamental de dualité linéaire ; on donne en annexe une démonstration du théorème fondamental de dualité linéaire utilisant uniquement le théorème de dualité en programmation linéaire. Le résultat suivant montre que les 2 théorèmes sont en fait équivalents.

Théorème 2 : Le théorème fondamental de dualité linéaire implique le théorème de dualité en programmation linéaire.

Démonstration : Considérons les programmes linéaires :

(P) $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ cx = z \text{ (Min)} \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \Pi^T A \leq c \\ \Pi^T b = w \text{ (Max)} \end{cases}$

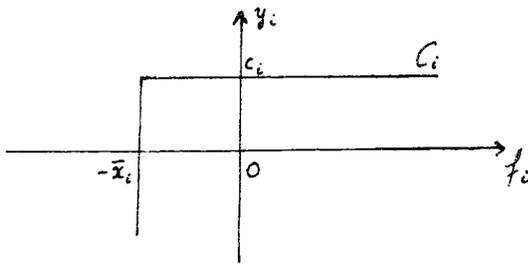
et supposons que le système $Ax = b$ ait une solution \bar{x} . Alors (P) s'écrit (en posant $f = x - \bar{x}$) :

(P) $\begin{cases} Af = 0 \\ cf + c\bar{x} = z \text{ (Min)} \end{cases}$ $f \geq -\bar{x}$

F est le noyau de l'application linéaire définie par A, T est le sous-espace vectoriel orthogonal et supplémentaire :

$T = \{y | y = A^T \Pi\}$

On considère les m courbes croissantes :



$$\phi_i(f_i) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f_i < -\bar{x}_i \\ c_i(f_i + \bar{x}_i) & \text{si } f_i \geq -\bar{x}_i \end{cases}$$

et en posant :

$$(I) \begin{cases} f \in F \\ \sum_{i=1}^m \phi_i(f_i) = z \text{ (Min)} \end{cases}$$

on voit que (I) est équivalent à (P). Le problème (II) s'écrit :

$$(II) \begin{cases} y \in T \\ \sum_{i=1}^m \phi_i^*(y_i) = w' \text{ (Min)} \end{cases}$$

avec :

$$\phi_i^*(y_i) = \begin{cases} -\bar{x}_i y_i & \text{si } y_i \leq c_i \\ +\infty & \text{si } y_i > c_i \end{cases}$$

Donc le problème (II) s'écrit :

$$(II') \begin{cases} y^T = \Pi^T A \leq c \\ -y^T x = w' \text{ (Min)} \end{cases}$$

et en tenant compte de ce que $A\bar{x} = b$, (II') s'écrit :

$$(D') \begin{cases} \Pi^T A \leq c \\ -\Pi^T b = w' \text{ (Min)} \end{cases}$$

qui est -au signe près de la fonction objective- le dual de (P)

c.q.f.d.

Remarques :

4) Si le système $Ax = b$, $x \geq 0$ n'a pas de solution il peut se faire que $\Pi^T A \leq c$ n'ait pas de solution non plus. Cependant si, dans ce cas $\Pi^T A \leq c$ a une solution alors (D) n'a pas de solution finie.

5) Le théorème (faible) des écarts complémentaires est en fait exprimé dans la relation (1).

2 - Théorèmes de dualité combinatoire

Définition 4 : Dans la suite F et T désigneront deux sousespaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de \mathbb{R}^m . A tout vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ on associe $S(x) = \{i | x_i \neq 0\}$ dit "support" de x. $x \in F$ sera dit "élémentaire" si :

$$\left. \begin{array}{l} x' \in F \\ S(x') \subset S(x) \quad (\text{inclusion stricte}) \end{array} \right\} \Rightarrow x' = 0$$

c'est à dire qu'un vecteur est élémentaire s'il est à support minimal.

Soient x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^m . On dit que x est conforme à y si $x_i \neq 0 \Rightarrow x_i y_i > 0$. Donc si x est conforme à y on a $S(x) \subset S(y)$.

Le lemme suivant est démontré dans [17] et [43] :

Lemme 1 .- Soit $f \in F$ sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Alors :

$$f = f^1 + f^2 + \dots + f^k$$

où les f^j sont des vecteurs élémentaires de F conformes à f ($j = 1, 2, \dots, k$).

Les résultats qui sont regroupés dans ce paragraphe n'ont d'autre point commun que de pouvoir être démontrés directement de manière semblable à partir du théorème fondamental de dualité linéaire. Les différents théorèmes seront énoncés d'abord puis on en donnera les démonstrations. A la fin du paragraphe on montrera que le théorème fort des écarts complémentaires peut être déduit assez simplement du lemme des arcs colorés généralisés.

A - Lemme des arcs colorés généralisé .- Supposons qu'on ait affecté l'une des couleurs Noir, Rouge ou Vert aux indices $i = 1, 2, \dots, n$, l'indice 1 ayant reçu la couleur Noire. L'une et l'une seulement des deux propositions suivantes est vérifiée :

- a) Il existe un vecteur élémentaire $f \in F$ tel que :
 - $f_1 > 0$
 - $S(f)$ ne contienne que des indices rouges et noirs
 - les indices noirs de $S(f)$ sont dans $S^+(f) = \{i | f_i > \rho\}$

b) Il existe un vecteur élémentaire $t \in T$ tel que :

$$- t_1 > 0$$

- $S(t)$ ne contienne que des indices verts et noirs.

- les indices noirs de $S(t)$ sont dans $S^+(t) = \{i | t_i > 0\}$.

B - Théorème de la coupe minimale généralisé .- Supposons qu'on ait affecté à chaque indice $i = 2, 3, \dots, m$ une "capacité" $c_i \in \mathbb{R}^+$. Tout vecteur $t \in T$ tel que $t_1 = -1$ sera appelé une "coupe". La capacité d'une coupe étant :

$$c(t) = \sum_{i=2}^n |c_i t_i|$$

$f \in F$ sera appelé un flot et f_1 sera "la valeur" de ce flot. Alors

$$\text{Max}_{\{f \in F | |f_i| \leq c_i, i=2, \dots, m\}} [f_1] = \text{Min}_{\{t \in T | t_1 = -1\}} [c(t)]$$

C - Théorème d'Hoffman généralisé .- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in F$ tel que :

$$b_i \leq f_i \leq c_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (b_i, c_i \in \mathbb{R}, b_i \leq c_i)$$

est que pour tout vecteur élémentaire $t \in T$ on ait :

$$(2) \quad \sum_{\{i | t_i > 0\}} c_i t_i + \sum_{\{i | t_i < 0\}} b_i t_i \geq 0$$

D - L'inégalité longueur-largeur .- Associons à chaque indice $i = 2, 3, \dots, m$ une longueur $l_i \in \mathbb{R}^+$ et une largeur $w_i \in \mathbb{R}^+$; posons :

$$\lambda = \text{Min}_{\{f \in F | f_1 = 1\}} \sum_{i=2}^m |f_i| l_i$$

$$\omega = \text{Min}_{\{t \in T | t_1 = 1\}} \sum_{i=2}^m |t_i| w_i$$

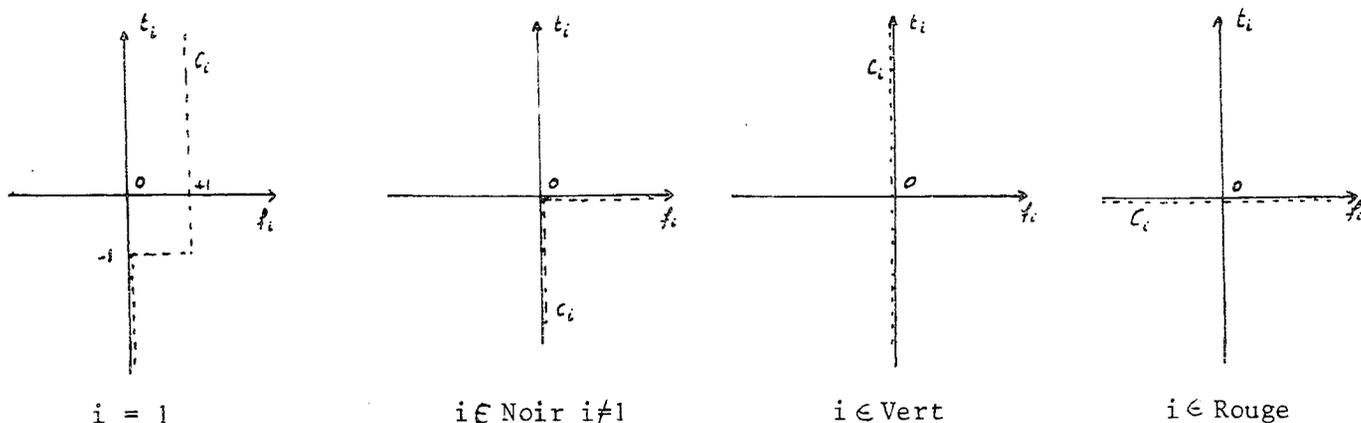
alors on a l'inégalité :

$$\lambda \omega \leq \sum_{i=2}^m l_i w_i$$

Démonstrations :

A - Les deux termes de l'alternative sont mutuellement exclusifs ; en effet sinon on aurait mis en évidence un couple $f \in F, t \in T$ avec $f^T t > 0$.

Associons aux différentes composantes les courbes croissantes en escalier suivantes :



On définit à partir des courbes C_i les problèmes (I) et (II) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire. Comme $\phi(0) < \infty$ et $\phi^*(0) < \infty$, il existe un couple \bar{f}, \bar{t} de solutions optimales des problèmes (I) et (II) :

- a) Si $\bar{f}_1 > 0$, $i \in S(\bar{f}) \Rightarrow i$ est noir ou rouge
 $i \in S(\bar{f})$ et i est noir $\Rightarrow \bar{f}_i > 0$.

D'après le lemme 1, il existe \hat{f} élémentaire, conforme à \bar{f} et tel que $\hat{f}_1 > 0$.

- b) Si $\bar{t}_1 < 0$, $i \in S(\bar{t}) \Rightarrow i$ est noir ou vert
 $i \in S(\bar{t})$ et i est noir $\Rightarrow \bar{t}_i < 0$.

D'après le lemme 1, il existe \hat{t} élémentaire conforme à \bar{t} et tel que $\hat{t}_1 < 0$.
 $-\hat{t}$ satisfait aux énoncés

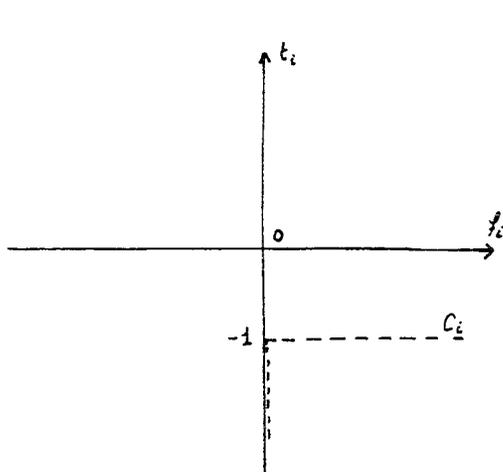
c.q.f.d.

B - Soit $f \in F$ tel que $-c_i \leq f_i \leq c_i$ $i = 2, \dots, n$ et soit $t \in T$ tel que $t_1 = -1$. On a :

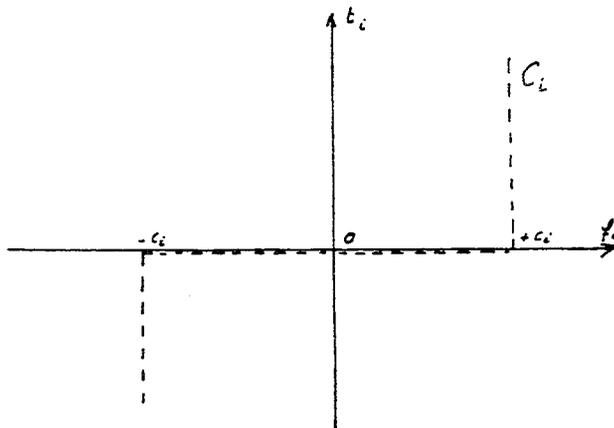
$$t^T f = t_1 f_1 + \sum_{i=2}^n t_i f_i = 0$$

$$(3) \quad f_1 = -\sum_{i=2}^n t_i f_i \leq \sum_{i=2}^n |t_i| c_i = c(t).$$

Il faut exhiber un $t \in T$ et un $f \in F$ tels que l'égalité soit vérifiée dans (3).
 Associons aux différentes composantes les courbes croissantes :



$i = 1$



$i = 2, 3, \dots, m$

On définit à partir des courbes C_i les problèmes (I) et (II) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire.

$\phi(0) < \infty$; si t est une coupe $\phi^*(t) < \infty$ donc s'il existe une coupe alors les problèmes (I) et (II) possèdent un couple de solutions optimales \bar{f}, \bar{t} pour lequel, d'après (1) :

$$\bar{t}_i > 0 \Rightarrow \bar{f}_i = c_i$$

$$\bar{t}_i < 0 \Rightarrow \bar{f}_i = -c_i$$

donc pour le couple \bar{f}, \bar{t} (3) est vérifiée avec le signe =.

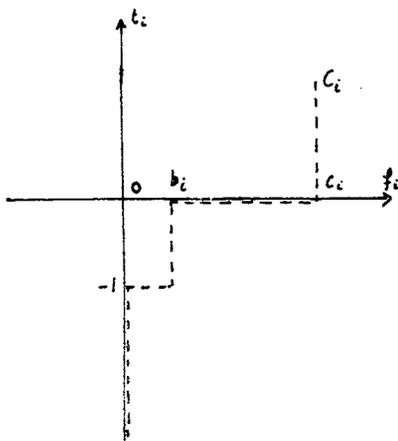
S'il n'existe pas de coupe : $\text{Sup}(f_1) = +\infty$.

c.q.f.d.

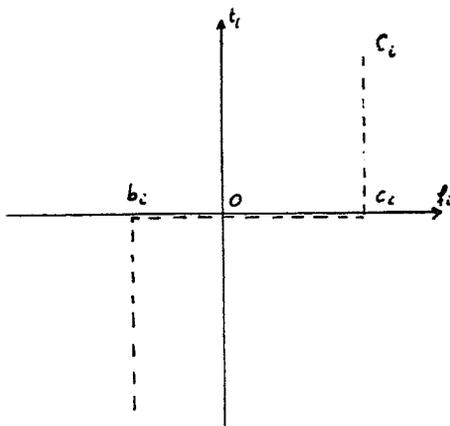
C - La condition (2) est certainement nécessaire. En effet $\forall t \in T$ on a :

$$0 = \sum_{\{i|t_i < 0\}} t_i f_i + \sum_{\{i|t_i < 0\}} t_i f_i \leq \sum_{\{i|t_i > 0\}} t_i c_i + \sum_{\{i|t_i < 0\}} t_i b_i$$

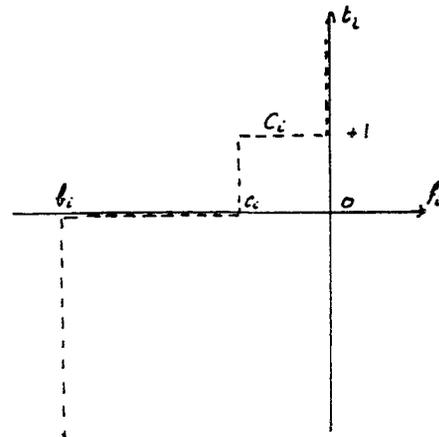
Pour démontrer le caractère suffisant de (2) associons aux différentes composantes les courbes croissantes suivantes :



$b_i > 0$



$b_i \leq 0 \leq c_i$



$c_i < 0$

On définit à partir des courbes C_i les problèmes (I) et (II) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire. Comme $\phi(0) < \infty$ et $\phi^*(0) < \infty$ il existe un couple \bar{f}, \bar{t} de solutions optimales des problèmes (I) et (II). Supposons par ailleurs qu'il n'existe pas de $f \in F$ tel que $b_i \leq f_i \leq c_i$ $i = 1, 2, \dots, m$. On a alors nécessairement :

$$\bar{f}_i < b_i \text{ ou } \bar{f}_i > c_i \text{ pour au moins un } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

D'autre part :

$$\bar{t}^T \bar{f} = 0 = \sum_{i=1}^m \bar{t}_i \bar{f}_i = \sum_{\{i | \bar{t}_i > 0\}} \bar{t}_i \bar{f}_i + \sum_{\{i | \bar{t}_i < 0\}} \bar{t}_i \bar{f}_i$$

Or, d'après les courbes choisies et (1), on a :

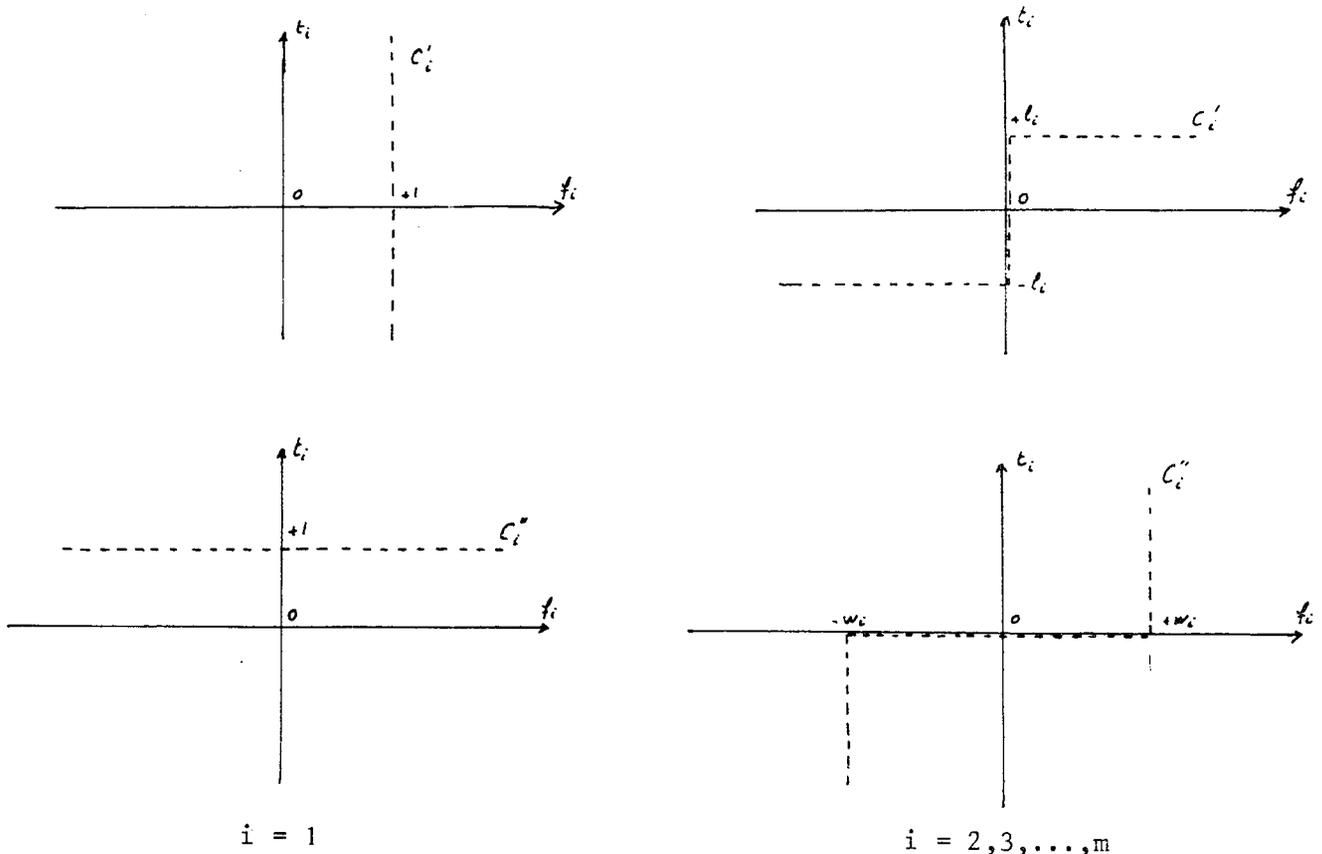
$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_i > 0 &\Rightarrow \bar{f}_i \geq c_i \\ \bar{t}_i < 0 &\Rightarrow f_i \leq b_i \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{avec l'inégalité stricte pour} \\ \text{au moins un indice} \end{array}$$

Donc :

$$0 > \sum_{\{i | \bar{t}_i > 0\}} \bar{t}_i c_i + \sum_{\{i | \bar{t}_i < 0\}} \bar{t}_i b_i$$

c.q.f.d.

D - On considère les deux ensembles de courbes croissantes :



On définit à partir des courbes C_i' (resp. C_i'') les problèmes (I') (II') (resp. (I'') (II'')) auxquels on peut appliquer le théorème fondamental de dualité linéaire. Si on suppose que :

$$\{f \in F \mid f_1 = 1\} \neq \emptyset \quad \{t \in T \mid t_1 = 1\} \neq \emptyset$$

les problèmes (I') et (II') (resp. (I'') et (II'')) admettent un couple de solutions optimales \bar{f}' , \bar{t}' (resp. \bar{f}'' , \bar{t}'').

D'autre part, les problèmes (I') et (II'') s'écrivent :

$$(I') \quad \text{Min}_{\{f \in F \mid f_1 = 1\}} \sum_{i=2}^m |f_i| \ell_i$$

$$(II'') \quad \text{Min}_{\{t \in T \mid t_1 = 1\}} \sum_{i=2}^m |t_i| w_i$$

et par conséquent :

$$\lambda = \sum_{i=2}^m |\bar{f}'_i| \ell_i$$

$$\omega = \sum_{i=2}^m |\bar{t}''_i| w_i$$

Or :

$$0 = \bar{f}'_1 \bar{t}'_1 + \sum_{i=2}^n \bar{f}'_i \bar{t}'_i$$

$$\bar{f}'_i > 0 \Rightarrow \bar{t}'_i = \ell_i$$

$$\bar{f}'_i < 0 \Rightarrow \bar{t}'_i = -\ell_i$$

et comme $\bar{f}'_1 = 1$, on en déduit $\bar{t}'_1 = -\lambda$. On montrerait de même que $\bar{f}''_1 = -\omega$.

Enfin :

$$0 = \sum_{i=1}^m \bar{f}''_i \bar{t}'_i = \bar{f}''_1 \bar{t}'_1 + \sum_{i=2}^n \bar{f}''_i \bar{t}'_i$$

avec :

$$-w_i \leq \bar{f}''_i \leq w_i$$

$$-\ell_i \leq \bar{t}'_i \leq \ell_i$$

soit :

$$\lambda \omega = - \sum_{i=2}^n \bar{f}''_i \bar{t}'_i \leq \sum_{i=2}^m w_i \ell_i$$

On montre finalement comment le théorème fort des écarts complémentaires en programmation linéaire peut se déduire du théorème fondamental de dualité linéaire et du lemme des arcs colorés généralisé.

Théorème fort des écarts complémentaires .- Soit un couple de programmes duaux :

$$(P) \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ cx = z(\text{Min}) \end{cases} \quad (D) \quad \begin{cases} \Pi^T A \leq c \\ \Pi^T b = N(\text{Max}) \end{cases}$$

tel que $\{x | Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ et $\{\Pi | \Pi^T A \leq c\} \neq \emptyset$. Alors il existe un couple de solutions optimales de (P) et (D) $\bar{x}, \bar{\Pi}$ tel que :

$$\begin{aligned} \bar{x}_i = 0 &\Rightarrow \bar{\Pi}^T A^i < c^i \\ \bar{\Pi}^T A^i = c^i &\Rightarrow \bar{x}_i > 0 \end{aligned}$$

Démonstration : Supposons la propriété annoncée fautive et soit $\bar{x}, \bar{\Pi}$ un couple de solutions optimales de (P) et (D) respectivement tel que :

$$K = \{i | \bar{\Pi}^T A^i = c^i \text{ et } \bar{x}_i = 0\}$$

soit de cardinalité minimum. On pose :

$$I = \{i | \bar{\Pi}^T A^i = c^i\}$$

$$J = \{i | \bar{x}_i = 0\}$$

D'après le théorème (faible) des écarts complémentaires $I+J = \{1,2,\dots,m\}$ et, par définition, $K = I \cap J$.

On colore les indices $i \in \{1,2,\dots,m\}$ de la manière suivante :

- les indices de K en noir (sans perte de généralité on suppose $1 \in K$),
- les indices de I-J en rouge,
- les indices de J-I en vert,

et on pose :

$$F = \{f | Af = 0\} \quad T = \{t | t = \Pi^T A\}$$

D'après le lemme des arcs colorés généralisé, il existe soit :

- a) $\hat{f} \in F$ \hat{f} élémentaire $S(\hat{f}) \subset I, S^+(\hat{f}) \subset K, \hat{f}_1 > 0$
- b) $\hat{t} \in T$ \hat{t} élémentaire $S(\hat{t}) \subset J, S^+(\hat{t}) \subset K, \hat{t}_1 > 0$

Dans le cas a, on peut trouver $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\bar{x}' = \bar{x} + \varepsilon \hat{f} \geq 0$. D'autre part, on peut appliquer au couple de solutions réalisables \bar{x}' , $\bar{\pi}$ le théorème faible des écarts complémentaires qui montre que \bar{x}' est solution optimale de (P). Finalement si on pose :

$$K' = \{i \mid \bar{\pi}'^T A^i = c^i \text{ et } \bar{x}'_i = 0\}$$

on a $|K'| < |K|$, une contradiction.

Dans le cas b, on peut trouver $\varepsilon < 0$ tel que :

$$\bar{\pi}'^T A + \varepsilon \hat{t} \leq c$$

on a $\hat{t} = \hat{\pi}'^T A$ et si on pose $\bar{\pi}' = \bar{\pi} + \varepsilon \hat{\pi}$ on vérifie que $\bar{\pi}'$ est solution optimale de (D) et on aboutit à la même contradiction que ci-dessus.

c.q.f.d.

ANNEXE

DEMONSTRATION DU THEOREME FONDAMENTAL DE DUALITE LINEAIRE

Le principe de la démonstration consiste à montrer qu'il existe un programme linéaire (P) équivalent au problème (I) et que le dual de (P) est équivalent au problème (II) (au signe près de la fonction objective).

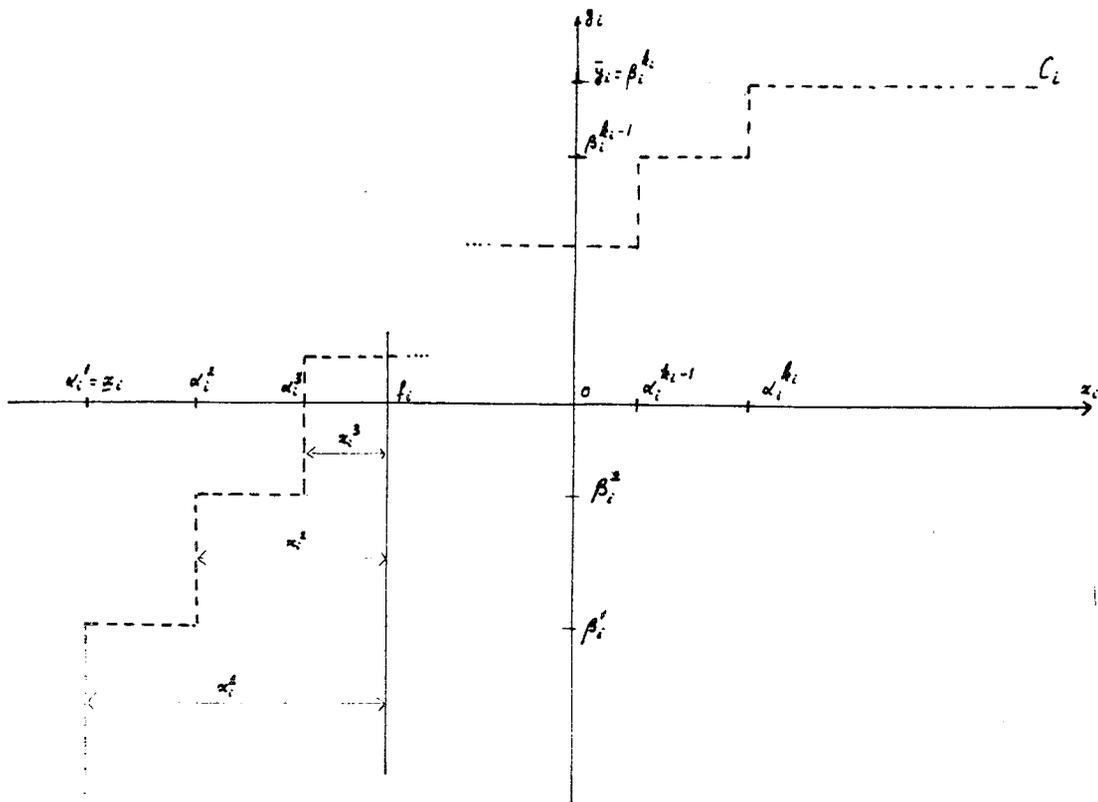
Les fonctions convexes ϕ_i ($i=1,2,\dots,m$) sont supposées données par les courbes croissantes en escalier C_i . Les bornes des intervalles $[\underline{x}_i, \bar{x}_i] = \{x_i | (x_i, y_i) \in C_i\}$ et $[\underline{y}_i, \bar{y}_i] = \{y_i | (x_i, y_i) \in C_i\}$ sont liées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{x}_i > -\infty &\iff \underline{y}_i = -\infty \\ \bar{x}_i < +\infty &\iff \bar{y}_i = +\infty \end{aligned}$$

Pour alléger les notations nous supposons dans la suite que $\underline{x}_i > -\infty$, $\bar{x}_i = +\infty$.

Le principe de la démonstration reste évidemment valable dans les 3 autres cas.

Les notations sont définies sur le schéma suivant :



Si on avait $\bar{x}_i = \underline{x}_i$ ou $\bar{y}_i = \underline{y}_i$ on poserait $k_i = 1$ α_i^1, β_i^1 déterminés par $(\alpha_i^1, \beta_i^1) \in C_i, \alpha_i^1 = \beta_i^1$.

Soit A la matrice de l'application linéaire dont le noyau est F. On considère les programmes linéaires :

$$(P_i) \begin{cases} -f_i + x_i^1 & = -\alpha_i^1 \\ -f_i + x_i^2 & \geq -\alpha_i^2 \\ -f_i + x_i^3 & \geq -\alpha_i^3 \\ \vdots & \\ -f_i + x_i^{k_i-1} & \geq -\alpha_i^{k_i-1} \\ -f_i + x_i^{k_i} & \geq -\alpha_i^{k_i} \end{cases} \quad x_i^j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,k_i-1,k_i.$$

$$\beta_i^1 x_i^1 + (\beta_i^2 - \beta_i^1) x_i^2 + (\beta_i^3 - \beta_i^2) x_i^3 + \dots + (\beta_i^{k_i} - \beta_i^{k_i-1}) x_i^{k_i} = z_i(\min)$$

Posons :

x_i : le vecteur dont les k_i composantes sont $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{k_i}$.

α_i : " " " " " $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{k_i}$

$\bar{\beta}_i$: " " " " " $\beta_i^1, \beta_i^2 - \beta_i^1, \beta_i^3 - \beta_i^2, \dots, \beta_i^{k_i} - \beta_i^{k_i-1}$

B_i : le vecteur dont les k_i composantes sont égales à -1.

U_i : la matrice unité à k_i lignes et colonnes.

On a :

$$(P_i) \begin{cases} B_i f_i + U_i x_i \begin{pmatrix} \bar{\beta}_i \\ \underline{\beta}_i \end{pmatrix} - \alpha_i \\ \bar{\beta}_i x_i = z_i(\min) \end{cases} \quad x_i \geq 0$$

Proposition 1 .- Le programme linéaire

$$(P) \begin{cases} Af = 0 \\ B_i f_i + U_i x_i \begin{pmatrix} \bar{\beta}_i \\ \underline{\beta}_i \end{pmatrix} - \alpha_i \\ \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i x_i = z(\min) \end{cases} \quad x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m)$$

est équivalent au problème (I) dans le sens suivant : si $z(f)$ représente le minimum de la fonction objective de (P) lorsque f est donné alors :

$$z(f) = \phi(f) = \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i^1}^{f_i} v_i(u) du \quad ((u, v_i(u)) \in C_i)$$

Démonstration : Soit \bar{x}_i ($i=1,2,\dots,m$) une solution optimale de (P) lorsque $f \in F$ est fixé. On a, d'après les contraintes de (P_i) et le fait que

$$\bar{\beta}_i^j = \beta_i^j - \beta_i^{j-1} > 0 \quad \text{pour } j > 1 :$$

$$\bar{x}_i^j = \text{Max}(0, f_i - \alpha_i^j) \quad j = 1, 2, \dots, k_i$$

c'est à dire que si p est tel que $\alpha_i^p \leq f_i < \alpha_i^{p+1}$ on a :

$$\bar{x}_i^j = f_i - \alpha_i^j \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$\bar{x}_i^j = 0 \quad j = p+1, \dots, k_i$$

$$z_i = \beta_i^1(f_i - \alpha_i^1) + (\beta_i^2 - \beta_i^1)(f_i - \alpha_i^2) + (\beta_i^3 - \beta_i^2)(f_i - \alpha_i^3) + \dots + (\beta_i^p - \beta_i^{p-1})(f_i - \alpha_i^p)$$

$$z_i = \beta_i^1(\alpha_i^2 - \alpha_i^1) + \beta_i^2(\alpha_i^3 - \alpha_i^2) + \dots + \beta_i^{p-1}(\alpha_i^p - \alpha_i^{p-1}) + \beta_i^p(f_i - \alpha_i^p) = \phi_i(f_i).$$

c.q.f.d.

Construisons le dual de (P). Soit Π les variables duales associées aux contraintes $Af = 0$. Soit y_i^j ($j=1,2,\dots,k_i$) les variables duales associées aux contraintes de (P_i) . Le dual de (P) s'écrit :

$$(D) \quad \begin{cases} \Pi^T A^i - \sum_{j=1}^{k_i} y_i^j & = 0 \\ y_i^1 & \leq \beta_i^1 & i = 1, 2, \dots, m \\ y_i^2 & \leq \beta_i^2 - \beta_i^1 & y_i^j \geq 0 \quad j = 2, 3, \dots, k_i \\ \dots & \dots \\ y_i^{k_i} & \leq \beta_i^{k_i} - \beta_i^{k_i-1} \\ - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_i^j y_i^j & = W(\text{Max}) \end{cases}$$

Proposition 2 .- Le programme linéaire (D) est équivalent à (II) dans le sens suivant : si $W(\Pi)$ représente le maximum de la fonction objective de (D) lorsque Π est fixé alors :

$$W(\Pi) = \phi^*(A^T \Pi)$$

Démonstration : Soit \bar{y}_i ($i=1,2,\dots,m$) une solution optimale de (D) lorsque Π est fixé. Posons :

$$\bar{t}_i = \sum_{j=1}^{k_i} \bar{y}_i^j$$

Soit q tel que $\beta_i^q \leq \bar{t}_i < \beta_i^{q+1}$. Comme on a :

$$\alpha_i^1 < \alpha_i^2 < \dots < \alpha_i^{k_i}$$

il en résulte que :

$$\bar{y}_i^{-1} = \beta_i^1, \bar{y}_i^{-2} = \beta_i^2 - \beta_i^1, \dots, \bar{y}_i^{-q} = \beta_i^q - \beta_i^{q-1}, \bar{y}_i^{-q+1} = \bar{t}_i - \beta_i^q$$

et si on pose :

$$W_i = - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_i^j \bar{y}_i^{-j}$$

il vient :

$$W_i = -\alpha_i^1 \beta_i^1 - \alpha_i^2 (\beta_i^2 - \beta_i^1) - \alpha_i^3 (\beta_i^3 - \beta_i^2) \dots - \alpha_i^q (\beta_i^q - \beta_i^{q-1}) - \alpha_i^{q+1} (\bar{t}_i - \beta_i^q)$$

$$W_i = -\alpha_i^1 \beta_i^1 - \int_{\beta_i^1}^{\bar{t}_i} u_i(v) dv$$

$$\text{avec } (u_i(v), v) \in C_i$$

c.q.f.d.

Conclusion : La condition a(i) du théorème 1 est la conséquence directe de l'égalité des valeurs des fonctions objectives à l'optimum pour les programmes linéaires duaux (P) et (D). Les conditions a(ii) et a(iii) sont l'expression du théorème (faible) des écarts complémentaires sur les programmes linéaires (P) et (D). Le paragraphe b du théorème 1 se déduit également du théorème de dualité entre (P) et (D).

CHAPITRE II

PROBLEME DU FLOT DE 2 PRODUITS DANS UN RESEAU NON ORIENTE

1 - INTRODUCTION

Le problème du "flot maximum" dans un réseau est posé et résolu par Ford et Fulkerson dans leur livre [16]. Ces auteurs donnent également dans cet ouvrage les applications combinatoires de leur célèbre "théorème de la coupe minimale" ainsi que la manière dont ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du théorème de dualité en programmation linéaire.

Le problème du flot maximum trouve son origine dans la modélisation de situation concrètes (réseau électrique, réseau de tuyauteries...) et les algorithmes proposés par Ford et Fulkerson ont eu des applications très larges. Cependant certains problèmes de réseau ne sont pas réductibles à ce schéma : ainsi dans un réseau de communications (postales ou téléphoniques), dans un réseau de trafic urbain, les flots (de messages, de véhicules) doivent être distingués suivant leur origine : on dit qu'on a un flot de plusieurs produits ou multiflot. En bref, dans un problème de multiflot les flots de chaque produit doivent être conservatifs aux sommets tandis que la contrainte de capacité s'exerce, sur chaque arc, sur la somme des flots parcourant cet arc.

On peut distinguer deux types de problèmes de multiflot : les multiflots "orientés" qui correspondent au cas d'un réseau de communication postale ou de trafic dans des rues à sens unique, problèmes dans lesquels le graphe sous-jacent est orienté ; les multiflots "non orientés" qui correspondent au cas d'un réseau de communication téléphonique où la capacité d'une ligne est la borne supérieure du nombre de communications que celle-ci peut porter, indépendamment du sens, problèmes dans lesquels le graphe sous-jacent est non orienté.

Ford et Fulkerson donnèrent en 1958 [15] une méthode de solution des problèmes de multiflots orientés, méthode qui, étendue à un programme linéaire général, devait donner la méthode de décomposition de Dantzig et Wolfe. D'autres méthodes de résolution spécifiques au problème du multiflot orienté ont été proposées par Jewell [33], Saigal [49], Netter [41], Grinold [25]. Kleitman [35] a donné une méthode valable dans certains cas particuliers.

D'autres approches ont consisté à appliquer des méthodes générales de décomposition des grands programmes linéaires. Ainsi Saigal [49] met-il en oeuvre une méthode de résolution de Saigal et Sakarovitch [50]; tandis que Grigoriadis et White [24] utilisent la méthode de décomposition de Rosen [45]. Dans [51] nous avons donné un algorithme qui, comme celui de Ford et Fulkerson, peut être étendu à la décomposition des programmes linéaires de grandes dimensions [1]. La méthode proposée peut s'interpréter comme une méthode de sous-gradient (cf. Held, Wolfe et Crowder [26]). Le principal résultat combinatoire de [51] sur les multiflots orientés est énoncé dans l'appendice à la première partie.

T.C. Hu a formulé [30] le problème du multiflot non orienté et a proposé un algorithme pour le résoudre dans le cas où il y a 2 produits. Cet algorithme permettait de démontrer, de manière constructive, un certain nombre de résultats combinatoires sur le problème du biflot non orienté. Rotschild et Whinston donnèrent quelques propriétés supplémentaires des solutions de ce problème [46] et [47]. L'algorithme de Hu aussi bien que les démonstrations de Rotschild et Wilson sont complexes et ne permettent pas de comprendre la structure du problème et la raison profonde pour laquelle les propriétés démontrées sont vraies. Dans ce chapitre, nous montrons que les résultats de T.C. Hu et de Rotschild et Whinston peuvent se retrouver de manière simple par des arguments de programmation linéaire; de plus, on présente un algorithme de résolution très efficace fondé sur la théorie développée, ainsi que quelques résultats nouveaux sur le problème du biflot dans un réseau non orienté. Ce chapitre est une rédaction légèrement corrigée de [54].

Le problème traité par Hu dans [30] est le suivant: Etant donné un graphe simple sans boucle (orienté) anti-symétrique $G = (X, U)$, une fonction $b : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ et quatre sommets distincts de $G : s^1, s^2, t^1, t^2$, trouver sur G un flot f^1 de s^1 à t^1 et un flot f^2 de s^2 à t^2 tels que le flot total soit maximum.

En d'autres termes il s'agit de résoudre le programme linéaire :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{y \in X} f^i(xy) - \sum_{y \in X} f^i(yx) = \begin{cases} F^i & \text{si } x = s^i \\ 0 & \text{si } x \neq s^i, t^i, \\ -F^i & \text{si } x = t^i \end{cases} \quad i = 1, 2 \\ (2) \quad |f^1(xy)| + |f^2(xy)| \leq b(xy), \quad \forall (xy) \in U \\ F^1 + F^2 = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Remarques : 1) Le problème (I) sera appelé problème de la recherche d'un biflot maximum dans le réseau $R = (X, U, b)$. Remarquer que bien que le graphe (X, U) soit antisymétrique le problème (I) est symétrique car des flots négatifs sont autorisés. Ainsi :

- Les sommets s^1 et t^1 (resp. s^2 et t^2) peuvent être échangés sans que le problème (I) soit altéré (on remplace f^1 par $-f^1$ dans la solution).
- Tout arc $(xy) \in U$ peut être remplacé, dans G , par l'arc opposé (yx) à condition de prendre $b(yx) = b(xy)$.

2) Ainsi que T.C. Hu l'avait noté et que la méthode de solution présentée ici le fait apparaître les propriétés remarquables du problème du biflot non orienté sont perdues quand il y a plus de deux produits.

2 - Formulation équivalente du problème (I)

Définitions : 1) Soit \tilde{A} la matrice d'incidence aux arcs du graphe G et A , la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne correspondant au sommet s^1 . R^1 et R^2 sont deux $n-1$ vecteurs définis de la manière suivante :

$$R_i^1 = \begin{cases} +1 & \text{si la } i\text{ème ligne de la matrice } A \text{ correspond au sommet } t^1 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$R_i^2 = \begin{cases} +1 & \text{si la } i\text{ème ligne de la matrice } A \text{ correspond au sommet } t^2 \\ -1 & \text{si la } i\text{ème ligne de la matrice } A \text{ correspond au sommet } s^2 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

2) Un réseau $R = (X, U, b)$ est "Eulérien" si $b : U \rightarrow \mathbb{N}$ et si, de plus :

$$\hat{b}(x) = \sum_{(xy) \in U} b(xy) + \sum_{(yx) \in U} b(yx) \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall x \in X$$

(Cette définition, qui est une extension naturelle du concept classique de graphe Eulérien, est due à Rotschild et Whinston [46]).

Les contraintes (2) peuvent s'écrire :

$$(3) \begin{cases} -b(xy) \leq f^1(xy) + f^2(xy) \leq b(xy) \\ -b(xy) \leq f^1(xy) - f^2(xy) \leq b(xy) \end{cases} \quad \forall (xy) \in U$$

Ce qui suggère le changement de variables :

$$(4) \begin{cases} \phi^1(xy) = \frac{1}{2}[f^1(xy) + f^2(xy)], \\ \phi^2(xy) = \frac{1}{2}[f^1(xy) - f^2(xy)] ; \end{cases}$$

$$(4') \begin{cases} f^1(xy) = \phi^1(xy) + \phi^2(xy), \\ f^2(xy) = \phi^1(xy) - \phi^2(xy) ; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \psi^1(xy) = \frac{1}{2}[f^1(xy) + f^2(xy) + b(xy)] = \phi^1(xy) + \frac{1}{2} b(xy), \\ \psi^2(xy) = \frac{1}{2}[f^1(xy) - f^2(xy) + b(xy)] = \phi^2(xy) + \frac{1}{2} b(xy) ; \end{cases}$$

$$(5') \begin{cases} f^1(xy) = \psi^1(xy) + \psi^2(xy) - b(xy), \\ f^2(xy) = \psi^1(xy) - \psi^2(xy). \end{cases}$$

Tenant compte de (4') les contraintes (1) s'écrivent :

$$\begin{aligned} A(\phi^1 + \phi^2) + R^1 F^1 &= 0, \\ A(\phi^1 - \phi^2) + R^2 F^2 &= 0 ; \end{aligned}$$

et on a la formulation équivalente du problème (I) :

$$(II) \begin{cases} A\phi^1 + R^1(\frac{1}{2} F^1) + R^2(\frac{1}{2} F^2) = 0, \\ A\phi^2 + R^1(\frac{1}{2} F^1) + R^2(\frac{1}{2} F^2) = 0, \\ -\frac{1}{2} b \leq \phi^1 \leq \frac{1}{2} b, \\ -\frac{1}{2} b \leq \phi^2 \leq \frac{1}{2} b, \\ F^1 + F^2 = F(\text{Max}). \end{cases}$$

dont le dual s'écrit :

$$(III') \begin{cases} \alpha^1 A + \beta^1 - \gamma^1 = 0, \\ \alpha^2 A + \beta^2 - \gamma^2 = 0, \\ \alpha^1(t^1) + \alpha^2(t^1) = 2, \quad \beta^i, \gamma^i \geq 0, \\ \alpha^1(t^2) - \alpha^1(s^2) - \alpha^2(t^2) + \alpha^2(s^2) = 2, \\ \frac{1}{2}[\beta^1 + \gamma^1 + \beta^2 + \gamma^2] b = w(\text{Min}). \end{cases}$$

Utilisant le changement de variables (5), (5'), (I) devient :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\psi^1 + R^1\left(\frac{1}{2} F^1\right) + R^2\left(\frac{1}{2} F^2\right) = \frac{1}{2} Ab, \\ A\psi^2 + R^1\left(\frac{1}{2} F^1\right) - R^2\left(\frac{1}{2} F^2\right) = \frac{1}{2} Ab, \\ \psi^1 \leq b, \quad \psi^1, \psi^2 \geq 0, \\ \psi^2 \leq b, \\ F^1 + F^2 = F(\text{Max}). \end{array} \right.$$

Remarques : 3) Soit $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2$ une solution optimale de (II'), alors $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2$ est une solution optimale du dual de (III).

Réciproquement soit $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2$ une solution optimale du dual de (III), alors $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\gamma}^1 = \hat{\alpha}^1 A + \hat{\beta}^1, \hat{\gamma}^2 = \hat{\alpha}^2 A + \hat{\beta}^2$ est une solution optimale de (II').

4) Soient σ^1 et σ^2 respectivement les variables d'écart relatives aux inéquations $\psi^1 \leq b$ et $\psi^2 \leq b$ dans (III) et soit $\hat{\psi}^1, \hat{\psi}^2, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2$ une solution optimale de (II), alors :

$$\hat{\psi}^1 = \hat{\sigma}^1, \quad \hat{\psi}^2 = \hat{\sigma}^2, \quad \hat{\sigma}^1 = \hat{\psi}^1, \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\psi}^2$$

correspond à une solution optimale du problème obtenu à partir du problème posé en échangeant les sommets s^1 et t^1 et les sommets s^2 et t^2 (cf. remarque 1).

5) On comprend mieux l'intérêt des changements de variables (4) et (5) si on se reporte à la figure 1 où le domaine de $f^1(xy), f^2(xy)$ réalisables (i.e. satisfaisant la contrainte (2)) a été représenté ainsi que les nouveaux axes de coordonnées $\phi^1(xy), \phi^2(xy)$ et $\psi^1(xy), \psi^2(xy)$.

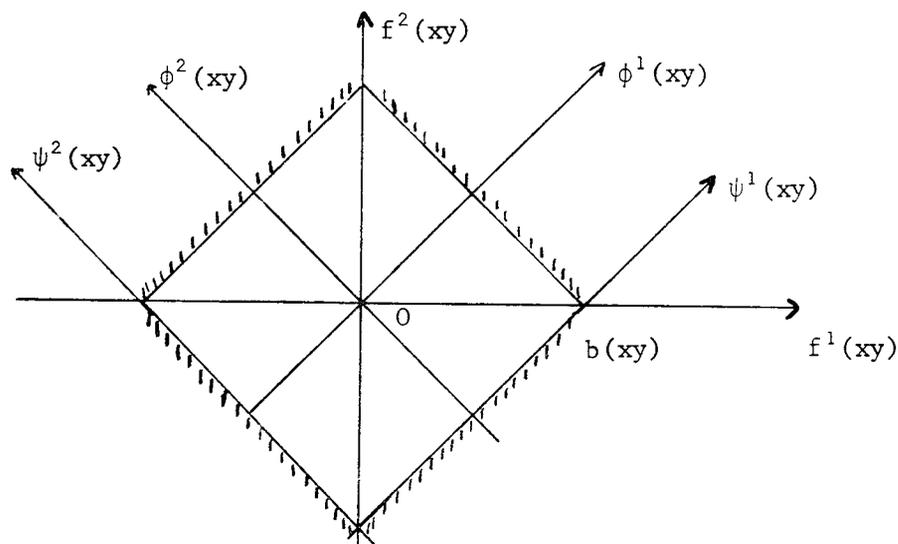


Figure 1

3 - Résultats fondamentaux

Définition 3 : $C \subset U$ est une "coupe" si C a une intersection non vide avec toutes les chaînes joignant s^1 à t^1 et toutes les chaînes joignant s^2 à t^2 et si, de plus, C est minimal pour ces propriétés.

La "capacité" $b(C)$ d'un ensemble d'arcs C est :

$$b(C) = \sum_{(xy) \in C} b(xy)$$

Lemme 1 : Pour tout solution réalisable de (I) la valeur de la fonction objective F est inférieure ou égale à la capacité de toute coupe.

Démonstration : A une coupe C correspond soit :

- (a) Un cocycle élémentaire $\Omega(Y)$
- (b) Deux cocycles élémentaires disjoints $\Omega(Y^1)$ et $\Omega(Y^2)$.

A une coupe C on peut faire correspondre une solution réalisable de (II') de la manière suivante :

(a') Si on est dans le cas (a) ci-dessus, on pose :

$$\beta^1(xy) = \begin{cases} 2 & \text{si } (xy) \in \Omega^+(Y) \text{ et } s^1 \in Y \text{ ou } (xy) \in \Omega^-(Y) \text{ et } s^1 \in X-Y \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\gamma^1(xy) = \begin{cases} 2 & \text{si } (xy) \in \Omega^+(Y) \text{ et } s^1 \in X-Y \text{ ou } (xy) \in \Omega^-(Y) \text{ et } s^1 \in Y \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

$$\beta^2(xy) = \gamma^2(xy) = 0 \quad \forall (xy) \in U$$

(b') Si on est dans le cas (b) ci-dessus, on suppose que $\Omega(Y^1)$ sépare s^1 de t^1 et $\Omega(Y^2)$ sépare s^2 de t^2 . On pose :

$$\beta^i(xy) = \begin{cases} 2 & \text{si } (xy) \in \Omega^+(Y^i) \text{ et } s^i \in Y^i \text{ ou } (xy) \in \Omega^-(Y^i) \text{ et } s^i \in X-Y^i \text{ (i=1,2)} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\gamma^i(xy) = \begin{cases} 2 & \text{si } (xy) \in \Omega^+(Y^i) \text{ et } s^i \in Y^i \text{ ou } (xy) \in \Omega^-(Y^i) \text{ et } s^i \in X-Y^i \text{ (i=1,2)} \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

La proposition est alors une conséquence directe de la partie faible du théorème de dualité en programmation linéaire appliquée au couple de programmes (II) et (II').

c.q.f.d.

Définition 4 : Soit $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2$ une solution optimale de (II'), le dual de (II). Posons :

$$\begin{cases} C^i = \{(xy) \in U \mid \hat{\beta}^i(xy) + \hat{\gamma}^i(xy) > 0\} & i = 1, 2 \\ C = C^1 \cup C^2 \end{cases}$$

Lemme 2 : C, défini ci-dessus, contient une coupe.

Démonstration : On montre que C a une intersection non nulle avec toute chaîne joignant s^1 à t^1 . Supposons la propriété fautive, c'est à dire qu'il existe P^1 telle que :

$$P^1 \cap C = \emptyset$$

Des contraintes de (II') on tire :

$$\hat{\alpha}^i(y) - \hat{\alpha}^i(x) = \hat{\beta}^i(xy) - \hat{\gamma}^i(xy) \quad \forall (xy) \in U \quad i = 1, 2$$

et, d'après l'hypothèse, on a :

$$\hat{\alpha}^i(y) - \hat{\alpha}^i(x) = 0 \quad \forall (xy) \in P$$

c'est à dire, en sommant sur tous les arcs de la chaîne P :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}^1(t^1) = 0 \\ \hat{\alpha}^2(t^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui contredit une des contraintes de (II').

On montrerait de même qu'on aboutit à une contradiction si on suppose qu'il existe une chaîne P^2 joignant s^2 à t^2 et telle que :

$$P^2 \cap C = \emptyset$$

c.q.f.d.

Définition 5 : Conformément à l'usage [12], [52] et [55] étant donné un programme linéaire :

$$(P) \begin{cases} Ax = b & x \geq 0 \\ cx(\text{Min}) \end{cases}$$

dont la matrice des contraintes A contient m lignes indépendantes et n colonnes on appelle "base" un ensemble d'indices $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tel que la sous-matrice A^I dite "matrice de base" soit carrée non singulière (pour les notations cf. [55]). La solution de base associée à la base I est obtenue par :

$$\begin{cases} x_I = (A^I)^{-1}b \\ x_i = 0 \quad i \in I \end{cases}$$

D'après la théorie de la programmation linéaire, on sait que si un programme linéaire admet une solution optimale, il admet une solution optimale de base. On appelle "base optimale" la base correspondant à cette solution optimale de base.

Lemme 3 : Toute matrice de base correspondant à une base optimale du programme linéaire (III) est triangulaire et par conséquent a un déterminant égal à ± 1 .

Démonstration : Si une matrice comporte une colonne (resp. une ligne) dont tous les éléments sont nuls sauf un et si la matrice obtenue (nous dirons par réduction) en supprimant cette colonne et la ligne correspondante (resp. cette ligne et la colonne correspondante) est triangulaire, c'est que la matrice de départ était triangulaire.

On effectue sur la matrice de base correspondant à une base optimale de (III) les opérations de réduction suivantes :

. On prend une colonne correspondant à une variable d'écart dont l'indice figure dans la base (et la ligne correspondante).

. On prend une ligne pour laquelle l'indice de la variable $\psi^i(xy)$ figure dans la base mais l'indice de la variable d'écart correspondante n'y figure pas (et la colonne correspondante).

Quand on ne peut plus continuer à réduire la matrice de base par les opérations ci-dessus, cette matrice a été mise sous la forme :

$$D = \begin{bmatrix} A^1 & 0 & R^1 & R^2 \\ 0 & A^2 & R^1 & -R^2 \end{bmatrix}$$

D contient $2(n-1)$ lignes ; une colonne de A^i correspond à un arc (xy) pour lequel simultanément les indices de $\psi^i(xy)$ et de la variable d'écart associée figurent dans la base. Soient U^1 et U^2 les arcs correspondant respectivement aux colonnes A^1 et A^2 . D'après le théorème de dualité on a :

$$(xy) \in U^i \Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta}^i(xy) = 0 \\ \hat{\alpha}^i(x) - \hat{\alpha}^i(y) + \hat{\beta}^i(xy) = 0 \end{cases}$$

où $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2$ désigne une solution optimale de (III'), le dual de (III).

D'après la remarque (3) on a :

$$(xy) \in U^i \Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta}^i(xy) = 0 \\ \hat{\gamma}^i(xy) = 0 \end{cases}$$

où $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2$ désigne une solution optimale de (II'). Il résulte du Lemme 1 que le graphe partiel (X, U^1) (resp. X, U^2) possède au moins deux composantes connexes l'une d'entre elles contenant s^1 (resp. s^2) l'autre t^1 (resp. t^2).

Soit H la composante connexe de (X, U^2) contenant s^1 et supposons -sans perte de généralité- que H contienne t^2 . H est un arbre (puisque les colonnes de D sont linéairement indépendantes) et par conséquent H possède un sommet pendant ($\neq t^2$ si H possède plus d'un sommet). On peut effectuer une opération de réduction sur D car la ligne correspondant à ce sommet pendant a tous ses éléments nuls sauf 1. Par réductions successives H est amené à ne comporter que le sommet t^2 . Une opération de réduction est alors effectuée sur la ligne correspondant au sommet t^2 et sur la dernière colonne. D devient :

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} A^1 & 0 & R^1 \\ 0 & A^2 & R^1 \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire pour la raison suivante : en multipliant les (n-1) premières lignes de D par -1 la matrice obtenue peut être considérée comme la matrice d'incidence aux arcs d'un graphe (matrice de laquelle on a retiré une ligne, celle correspondant à s^1 dans le groupe des n-1 premières contraintes) ; ce graphe étant sans cycle puisque les lignes de \hat{D} sont linéairement indépendantes on sait, d'après un célèbre théorème de Dantzig [12], que \hat{D} est triangulaire.

c.q.f.d.

Corollaire : Toute matrice de base correspondant à une base optimale du programme linéaire (II) est triangulaire.

Remarques : 6) La matrice des contraintes du programme linéaire (III) n'est pas totalement unimodulaire. On pourrait montrer en suivant une démarche analogue à celle qui précède que le déterminant de toute sous-matrice carrée de la matrice des contraintes de (III) est égal à 0, ± 1 , ± 2 .

7) Camion a montré que les résultats de cette section s'étendraient au cas plus général où la matrice A, dans le programme linéaire (III)

était une matrice totalement unimodulaire quelconque. Nous démontrerons cette extension en utilisant le matériel développé sur les matrices totalement unimodulaires dans la 3ème partie (cf. chapitre VI, paragraphe 4).

Théorème 1 (de la coupe minimale dans le cas des biflots - Hu [30]) : Soit \hat{F} la valeur de la fonction objective pour une solution optimale de (I) ; il existe une coupe C telle que : $\hat{F} = b(C)$.

Démonstration : Soit $\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2$ une solution optimale de (II') ; d'après le corollaire du lemme 3 et le fait que le membre de droite des contraintes de (II') est pair on déduit que $\hat{\beta}^i(xy)$ et $\hat{\gamma}^i(xy)$ sont pairs. D'après le théorème de dualité appliqué au couple de programmes linéaires (II), (II') on a :

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^2 \sum_{(xy) \in C^i} (\hat{\beta}^i(xy) + \hat{\gamma}^i(xy)) b(xy) \geq \sum_{(xy) \in C^1} b(xy) + \sum_{(xy) \in C^2} b(xy)$$

soit :

$$\hat{F} \geq \sum_{(xy) \in C} b(xy) + \sum_{(xy) \in C^1 \cap C^2} b(xy)$$

Ce qui, d'après le Lemme 1, entraîne :

$$(6) \begin{cases} C^1 \cap C^2 = \emptyset \\ \hat{F} = \sum_{(xy) \in C} b(xy) \end{cases}$$

c.q.f.d.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences directes du corollaire du Lemme 2 et du Lemme 3 (respectivement) :

Théorème 2 (Hu [30]) : Il existe un biflot maximum entier si les capacités sont paires.

Théorème 3 (Rotschild et Whinston [46]) : Il existe un biflot maximum entier si le réseau est Eulérien.

4 - Algorithme pour trouver un biflot maximum

Définition 6 : On considère les deux graphes $G' = (X', U')$ et $G'' = (X'', U'')$ isomorphes au graphe G . On associe aux arcs de G' et de G'' les capacités inférieures et supérieures suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \underline{b}'(x'y') &= \underline{b}''(x''y'') = -\frac{1}{2} b(xy) \\ \bar{b}'(x'y') &= \bar{b}''(x''y'') = \frac{1}{2} b(xy) \end{aligned} \right\} \forall (xy) \in U$$

$(x'y')$, $(x''y'')$ étant "en correspondance" avec l'arc (xy) dans les isomorphismes définies ci-dessus.

Soient $s_1^1, s_2^1, t_1^1, t_2^1$ (resp. $s_1'', s_2'', t_1'', t_2''$) les sommets de X' resp. (X'') qui correspondent à s^1, s^2, t^1, t^2 .

Si $Y' \subset X'$, $s_i^1 \in Y'$, $t_i^1 \in \bar{Y}' = X - Y'$ (resp. $Y'' \subset X''$, $s_i'' \in Y''$, $t_i'' \in \bar{Y}'' = X - Y''$) ($i=1,2$) l'ensemble des arcs :

$$(Y' ; \bar{Y}') = \Omega(Y') = \Omega^+(Y') \cup \Omega^-(Y')$$

$$\text{(resp. } (Y'' ; \bar{Y}'') = \Omega(Y'') = \Omega^+(Y'') \cup \Omega^-(Y'')$$

est appelé "une coupe séparant s_i^1 de t_i^1 " (resp. s_i'' de t_i'') ($i=1,2$). La "capacité" d'une telle coupe est :

$$b'(Y' ; \bar{Y}') = \sum_{(x'y') \in \Omega^+(Y')} \bar{b}'(x'y') - \sum_{(x'y') \in \Omega^-(Y')} \underline{b}'(x'y')$$

$$\text{(resp. } b''(Y'' ; \bar{Y}'') = \sum_{(x''y'') \in \Omega^+(Y'')} \bar{b}''(x''y'') - \sum_{(x''y'') \in \Omega^-(Y'')} \underline{b}''(x''y'')$$

Si le graphe G' (resp. G'') porte du flot ϕ' (resp. ϕ''), la coupe $(Y' ; \bar{Y}')$ (resp. $(Y'' ; \bar{Y}'')$) est dite saturée si :

$$\phi'(x'y') = \bar{b}'(x'y') \quad \forall (x'y') \in \Omega^+(Y') \quad \text{(resp. } \phi''(x''y'') = \bar{b}''(x''y'') \quad \forall (x''y'') \in \Omega^+(Y''))$$

$$\phi'(x'y') = \underline{b}'(x'y') \quad \forall (x'y') \in \Omega^-(Y') \quad \text{(resp. } \phi''(x''y'') = \underline{b}''(x''y'') \quad \forall (x''y'') \in \Omega^-(Y''))$$

Algorithme :

(1) Trouver un flot réalisable dans le réseau :

$$F = (X' \cup X'', U' \cup U'' \cup \{(t_1^1 s_1'')\} \cup \{(t_1'' s_1^1)\})$$

tel que $\phi(t_1^1 s_1'')$ soit maximum. Ceci peut être obtenu en utilisant l'algorithme de marquage de Ford et Fulkerson [16]. Soit $\hat{\phi}$ le flot ainsi obtenu.

(2) Trouver un flot réalisable dans le réseau :

$$\tilde{R} = (X' \cup X'', U' \cup U'' \cup \{(t_1' s_1'')\} \cup \{(t_1'' s_1')\} \cup \{(t_2' t_2'')\} \cup \{(s_2'' s_2')\})$$

(où les arcs $(t_1' s_1'')$ et $(t_1'' s_1')$ ont des capacités inférieures et supérieures égales à $\hat{\phi}(t_1' s_1'') = \hat{\phi}(t_1'' s_1')$) tel que le flot sur l'arc $(t_2' t_2'')$ soit maximum.

Ceci peut également être obtenu en utilisant l'algorithme de marquage de Ford et Fulkerson, en partant du flot réalisable $\hat{\phi}$ obtenu à la fin de l'étape précédente. Soit $\hat{\phi}$ le flot ainsi obtenu.

Lemme 4 : A la fin du pas (1) de l'algorithme ci-dessus il y a une coupe saturée $(Y' ; \bar{Y}')$ dans G' séparant s_1' de t_1' et une coupe saturée correspondante (par l'isomorphie de la définition 6) $(Y'' ; \bar{Y}'')$ dans G'' séparant s_1'' de t_1'' .

A la fin du pas (2) il y a soit une coupe saturée $(Z' ; \bar{Z}')$ dans G' séparant s_2' de t_2' ou une coupe saturée $(Z'' ; \bar{Z}'')$ dans G'' séparant t_2'' de s_2'' (ou peut-être les deux).

Alors on a :

$$(i) (Y' ; \bar{Y}') \cap (Z' ; \bar{Z}') = \emptyset \Rightarrow s_1' \in Z' ; t_1' \in \bar{Z}' \quad (\text{ou } s_1' \in \bar{Z}' \text{ et } t_1' \in Z')$$

$$(ii) (Y'' ; \bar{Y}'') \cap (Z'' ; \bar{Z}'') = \emptyset \Rightarrow s_1'' \in Z'' ; t_1'' \in \bar{Z}'' \quad (\text{ou } s_1'' \in \bar{Z}'' \text{ et } t_1'' \in Z'')$$

Démonstration : Nous ne démontrerons que (i) ; la démonstration de (ii) se fait de manière analogue.

Supposons donc :

$$s_1', t_1' \in \bar{Z}'$$

On pose :

$$A' = (Z' ; \bar{Z}') \cap (Y' ; \bar{Y}')$$

$$B' = (Y' ; \bar{Y}') - A'$$

$$C' = (Z' ; \bar{Z}') - A'$$

et soient A, B et C les ensembles d'arcs de G qui correspondent respectivement à A', B' et C' par l'isomorphie de la définition 6. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}(t_1' s_1'') = \tilde{\phi}(t_1'' s_1') = \frac{1}{2} [b(B) + b(A)] \\ \tilde{\phi}(t_2' t_2'') = \tilde{\phi}(s_2'' s_2') = \frac{1}{2} [b(C) + b(A)] \end{array} \right.$$

En effet :

. $\tilde{\phi}(t_1's_1'') = \tilde{\phi}(t_1''s_1') = \hat{\phi}(t_1's_1'') = \hat{\phi}(t_1''s_1')$ puisque les valeurs de ces flots sont fixés au début du pas (2).

. Il s'ensuit que $\tilde{\phi}(t_2't_2'') = \tilde{\phi}(s_2''s_2')$; il suffit de considérer la coupe : $\{(t_1's_1''), (t_1''s_1'), (t_2't_2''), (s_2''s_2')\}$.

Dans G'' les ensembles d'arcs B'' et C'' correspondant à B et C constituent une coupe séparant s_1'', t_2'' de s_2'', t_1'' (cf. figure 2) :

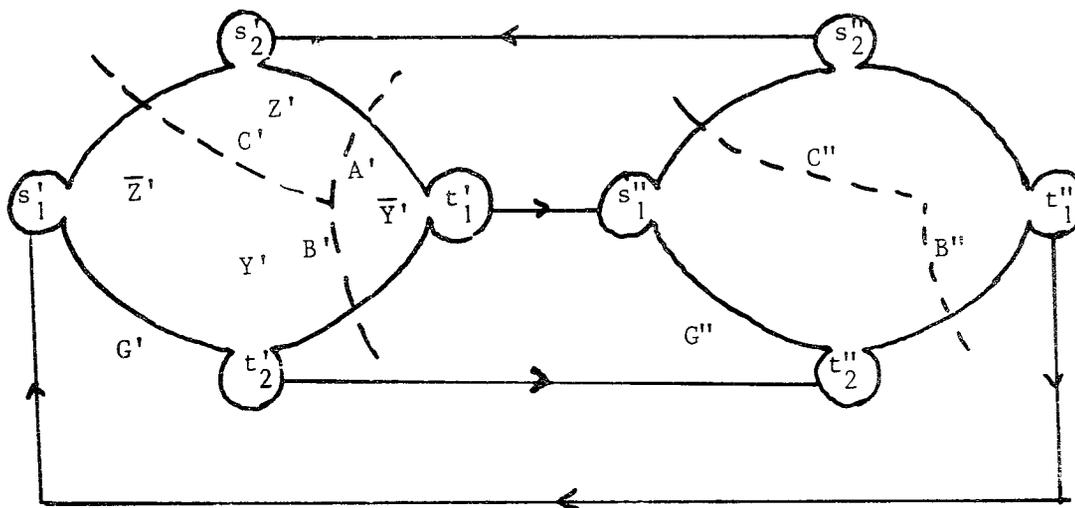


Figure 2

La capacité de cette coupe est $\frac{1}{2} [b(B) + b(C)]$ et on a, par conséquent :

$$2 [\tilde{\phi}(t_1's_1'') + \tilde{\phi}(t_2't_2'')] = b(B) + b(C) + 2b(A) \leq b(B) + b(C)$$

ce qui implique $b(A) = 0$

c.q.f.d.

Théorème 4 : Soit $\tilde{\phi}$ le flot dans le réseau \tilde{R} obtenu par l'application de l'algorithme ci-dessus. Alors :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} f^1(xy) = \tilde{\phi}(x'y') + \tilde{\phi}(x''y'') \\ f^2(xy) = \tilde{\phi}(x'y') - \tilde{\phi}(x''y'') \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{où } (xy), (x'y') \text{ et } (x''y'') \text{ sont en} \\ \text{correspondance par les isomorphismes} \\ \text{de la définition 6.} \end{array} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} F^1 = 2 \tilde{\phi}(t'_1 s''_1) \\ F^2 = 2 \tilde{\phi}(t'_2 t''_2) \end{array} \right.$$

est une solution optimale du problème (II).

Démonstration :

(i) \bar{f}^1 défini par (7) satisfait les équations de conservation (1). Ceci est évident pour les noeuds intermédiaires ; montrons que c'est également le cas pour s^1 , s^2 , t^1 et t^2 en examinant, par exemple le cas de s^1 :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f^1(s^1 x) - \sum_{x \in X} f^1(x s^1) &= \sum_{x' \in X'} [\tilde{\phi}(s'_1 x'_1) - \tilde{\phi}(x' s'_1)] + \sum_{x'' \in X''} [\tilde{\phi}(s''_1 x''_1) - \tilde{\phi}(x'' s''_1)] \\ &= \tilde{\phi}(t''_1 s'_1) + \tilde{\phi}(t'_1 s''_1) = F^1. \end{aligned}$$

(ii) Les contraintes (2) sont également satisfaites :

$$|f^1(xy)| + |f^2(xy)| \leq 2 \text{Max} \left[|\tilde{\phi}(x'y')|, |\tilde{\phi}(x''y'')| \right] \leq b(xy)$$

(iii) Montrons que le flot défini par les équations (7) sature une coupe C de G. On a deux cas à examiner :

(a) $s'_1 \in Z'$, $t'_1 \in \bar{Z}'$ (resp. $s''_1 \in Z''$, $t''_1 \in \bar{Z}''$) on pose $C = (Z ; \bar{Z})$ (Z correspond à Z' (resp. Z'') par l'isomorphie de la définition 6.

$$F^1 + F^2 = 2 \tilde{\phi}(t'_1 s''_1) + 2 \tilde{\phi}(t'_2 t''_2) = 2 b'(Z' ; \bar{Z}') = (\text{resp. } 2 b''(Z'' ; \bar{Z}'')) = b(C)$$

(b) $s'_1, t'_1 \in Z'$ ou bien $s'_1, t'_1 \in \bar{Z}'$ ou bien $s''_1, t''_1 \in Z''$ ou bien $s''_1, t''_1 \in \bar{Z}''$. Sans perte de généralité on suppose qu'on est dans le premier de ces cas. On pose :

$$C = (Y ; \bar{Y}) \cup (Z ; \bar{Z})$$

où Y correspond à Y' et Z correspond à Z' dans l'isomorphie de la définition 6.

D'après le lemme 4 on a :

$$(Y ; \bar{Y}) \cap (Z ; \bar{Z}) = \emptyset$$

D'autre part, comme $s'_1, t'_1 \in Z'$ on a :

$$\tilde{\phi}(s''_2 s'_2) = b'(Z' ; \bar{Z}')$$

Enfin $s'_1, t'_1 \in Z' \Rightarrow s'_2, t'_2 \in Y'$ (ou bien $s'_2, t'_2 \in \bar{Y}'$) car si cela n'était pas vrai ($Y' ; \bar{Y}'$) aurait été une coupe saturée au début du pas (2) et on serait dans le cas ci-dessus. Or, a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t'_1 s'_1) &= b'(Y' ; \bar{Y}') \\ F^1 + F^2 &= 2 \tilde{\phi}(t'_1 s'_1) + 2 \tilde{\phi}(s'_2 s'_2) = 2 b'(Y' ; \bar{Y}') + 2 b'(Z' ; \bar{Z}') = b(C) \\ &\text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

L'algorithme ci-dessus donne une démonstration constructive des théorèmes 1 et 2 ci-dessus. De plus, le théorème 4 possède le corollaire suivant (qui avait été également démontré par Hu) :

Corollaire : Si \hat{F}^1 est la valeur maximum de F^1 dans G quand $F^2 = 0$, il existe une solution optimale de (I) telle que $F^1 = \hat{F}^1$.

Remarques : 8) L'algorithme de cette section peut être décrit grossièrement comme une sorte d'algorithme "primal-dual" sur le problème (II). Cet algorithme est correct parce que le corollaire ci-dessus est valide. On voit que ce type de méthode ne peut pas être étendu au problème de biflot maximum dans un réseau orienté.

9) Le Lemme 4 n'exprime rien d'autre que l'égalité (6). On voit d'autre part que les deux cas distingués dans la démonstration du théorème 4 correspondent aux deux cas distingués dans celle du Lemme 1.

Description de l'algorithme sur un exemple : On reprend (cf. figure 3) l'exemple donné par Hu [31]. Le flot maximum sur R à la fin du pas (1) est porté sur la figure 4. Les deux nombres qui sont associés à chaque arc désignent respectivement le flot $\hat{\phi}$ sur cet arc et la capacité de cet arc (la moitié de la capacité de l'arête correspondante dans le réseau original). Le flot maximum sur R à la fin du pas est donné figure 5, tandis que sur la figure 6 le biflot optimal tel qu'il résulte de l'application des formules (7) et (8) est donné de la manière suivante : les deux nombres associés à chaque arc désignent respectivement le flot du produit 1 et du produit 2 sur cet arc (avec un signe moins si le flot coule dans le sens opposé à l'orientation de l'arc).

Remarque : 10) Appliqué sans précaution (ainsi qu'il a été fait à dessein sur l'exemple), cet algorithme possède la propriété d'autoriser des flots positifs sur des circuits ne contenant pas l'arc de retour (cf. le triangle en haut et à droite pour l'exemple). Ceci n'a aucune importance et peut être réduit facilement.

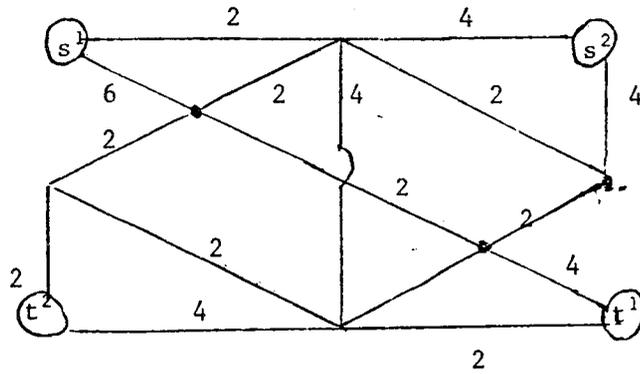


Figure 3

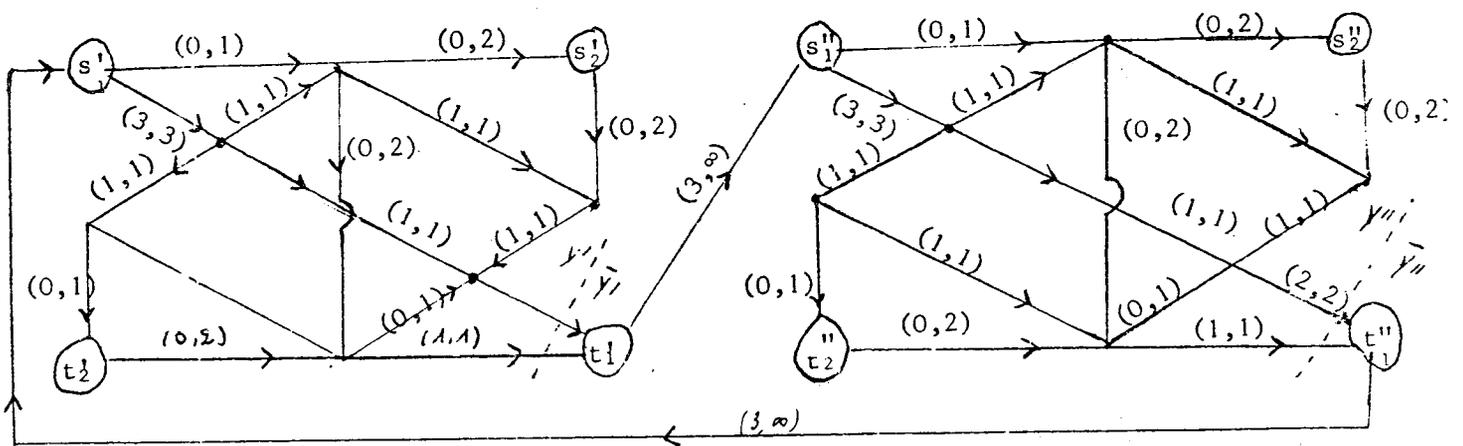


Figure 4

5 - Biflotes maximum entiers

Définition 7 : On définit les 4 classes d'arcs :

$$C^i = \{C \subset U \mid P \cap C \neq \emptyset \text{ pour toute chaîne } P \text{ de } s^i \text{ à } t^i ; b(C) \text{ est minimum}\} \quad (i=1,2)$$

$$C^3 = \{C \subset U \mid P \cap C \neq \emptyset \text{ pour toute chaîne } P \text{ de } s^1 \text{ à } t^1, \text{ de } s^1 \text{ à } t^2, \text{ de } s^2 \text{ à } t^1 \text{ et de } s^2 \text{ à } t^2 ; b(C) \text{ est minimum}\}$$

$$C^4 = \{C \subset U \mid P \cap C \neq \emptyset \text{ pour toutes les chaînes } P \text{ de } s^1 \text{ à } t^1, \text{ de } s^1 \text{ à } s^2, \text{ de } t^2 \text{ à } s^2 \text{ et de } t^2 \text{ à } t^1 ; b(C) \text{ est minimum}\}$$

et on pose :

$$c_j = b(C) \quad \text{pour } C \in C^j \quad j = 1, 2, \dots, 4.$$

Remarque : 11) Les valeurs de c_j sont faciles à déterminer. On considère les réseaux $\tilde{N} = (X, \tilde{U}, \tilde{b})$, $N' = (X', U', b')$, $N'' = (X', U'', b'')$ définis de la manière suivante :

$$X' = X \cup \{s\} \cup \{t\}$$

$$\tilde{U} = U \cup \{(xy) \mid (yx) \in U\}$$

$$U' = \tilde{U} \cup \{(ss^1)\} \cup \{(ss^2)\} \cup \{(t^1 t)\} \cup \{(t^2 t)\}$$

$$U'' = \tilde{U} \cup \{(ss^1)\} \cup \{(st^2)\} \cup \{(t^1 t)\} \cup \{(s^2 t)\}$$

$$\tilde{b}(xy) = \begin{cases} b(xy) & \text{si } (xy) \in U \\ b(xy) & \text{si } (yx) \in U \end{cases}$$

$$b'(xy) \text{ (resp. } b''(xy)) = \begin{cases} b(xy) & \text{si } (xy) \in \tilde{U} \\ \infty & \text{si } (xy) \in U' - \tilde{U} \text{ (resp. } (xy) \in U'' - \tilde{U}) \end{cases}$$

c_1 (resp. c_2) est la valeur du flot maximum de s^1 à t^1 (resp. de s^2 à t^2) dans \tilde{N} ; c_3 (resp. c_4) est la valeur du flot maximum de s à t dans N' (resp. N'').

Théorème 5 : Si $b : U \rightarrow \mathbb{N}$ et si $c_3 \neq c_4$, alors il existe un biflot maximum entier.

Démonstration : D'après la remarque 1 on peut, sans perte de généralité (par permutation de s^2 et t^2 si nécessaire), supposer que $c_3 < c_4$.

Supposons que $b(xy)$ soit entier, qu'il n'existe pas de biflot maximum entier et que $\sum_{(xy) \in U} b(xy)$ soit minimum pour ces propriétés. Alors tout arc appartient

à une coupe minimale de C^1 de C^2 ou de C^3 . En effet si l'arc (xy) n'appartenait à aucune coupe, la capacité de cet arc pourrait diminuer de une unité sans que la valeur du biflot maximum soit affectée (d'après le théorème 1 ci-dessus) ; d'après l'hypothèse de minimalité, il existerait alors un biflot maximum entier dans le nouveau réseau qui serait également un biflot maximum entier dans l'ancien ; d'où une contradiction.

On sait, d'après la remarque 1, qu'on peut changer l'orientation de chaque arc de G sans modifier le problème. On suppose donc que chaque arc (xy) est orienté de telle sorte que $x \in Y, y \in \bar{Y} = X - Y$ avec :

$$\begin{aligned} \cdot s^1 \in Y, t^1 \in \bar{Y} & \quad \text{si } (xy) \in C = (Y ; \bar{Y}) \subset C^1 \cup C^3 \\ \cdot s^2 \in Y, t^2 \in \bar{Y} & \quad \text{si } (xy) \in C = (Y ; \bar{Y}) \subset C^2 \end{aligned}$$

Pour la solution optimale on a donc :

$$(10) \quad f^1(xy) \geq 0, f^2(xy) \geq 0 \quad f^1(xy) + f^2(xy) = b(xy) \quad \forall (xy) \in U.$$

Soit \hat{F}^1 la valeur du flot maximum de s^1 à t^1 dans R et \hat{F} la valeur de la fonction objective de (I) pour une solution optimale. Posons $\tilde{N}' = (X', \tilde{U}', \tilde{b}')$ avec :

$$X' = X \cup \{s\} \cup \{t\}$$

$$\tilde{U}' = U \cup \{(ss^1)\} \cup \{(ss^2)\} \cup \{(t^1t)\} \cup \{(t^2t)\}$$

$$\tilde{b}'(xy) = \begin{cases} b(xy) & \text{si } (xy) \in U \\ \hat{F}^1 & \text{si } (xy) = (ss^1) \text{ ou } (t^1t) \\ \hat{F} - \hat{F}^1 & \text{si } (xy) = (ss^2) \text{ ou } (t^2t) \end{cases}$$

Il existe d'après ce qui précède un flot maximum \tilde{f}' dans \tilde{N}' tel que tous les arcs soient saturés. Soit \hat{f}' un flot entier dans \tilde{N}' tel que

$$\hat{f}'(ss^1) = \hat{f}'(t^1t) = \hat{F}^1$$

$$\hat{f}'(ss^2) = \hat{f}'(t^2t) = 0$$

D'après la théorie des flots dans les réseaux [16, chapitre 1], on peut passer du flot \hat{f}' au flot maximum \tilde{f}' ($\hat{f}'(xy) \leq \tilde{f}'(xy), \forall (xy) \in \tilde{U}'$) par une succession d'augmentations le long de chemins de s à t c'est à dire le flot varie de manière monotone et par pas entiers. Il en résulte qu'on peut poser :

$$\left. \begin{aligned} f^1(xy) &= \hat{f}'(xy) \\ f^2(xy) &= \tilde{f}'(xy) - \hat{f}'(xy) \end{aligned} \right\} \forall (xy) \in U$$

et qu'on a donc un biflot maximum entier.

c.q.f.d.

Définition 8 : Nous qualifierons un sommet $x \in X$ de "pair" ou "impair" suivant que $b(x) = \sum_{(xy) \in U} b(xy) + \sum_{(yx) \in U} b(xy)$ est pair ou impair.

Théorème 6 : Il existe un biflot maximum entier si $b(xy)$ est entier $\forall (xy) \in U$ et si tous les sommets sont pairs sauf peut-être s^1, s^2, t^1 et t^2 .

Démonstration : Le nombre de sommets impairs étant pair nous avons 3 cas à examiner :

(i) Les quatre sommets s^1, s^2, t^1, t^2 sont impairs. On ajoute à $G = (X, U)$ deux arcs $(s^1 t^1)$ et $(s^2 t^2)$ de capacité 1. Le réseau ainsi obtenu est Eulérien et, d'après le théorème 3 possède un biflot maximum entier.

(ii) Les sommets s^1 et t^1 (resp. s^2 et t^2) sont impairs. Le même argument que ci-dessus est encore valable.

(iii) Les sommets s^1 et s^2 (ou t^1 et t^2) sont impairs. A cause de la symétrie du problème (cf. remarque 1) on peut supposer, sans perte de généralité, que s^1 et s^2 sont impairs, t^1 et t^2 pairs.

$\forall C \in C^3, b(C)$ est pair, $\forall C \in C^4, b(C)$ est impair donc $c_3 \neq c_4$ et d'après le théorème 5 la proposition est démontrée.

c.q.f.d.

Lemme 5 : Soient θ^1, θ^2 satisfaisant :

$$(II) \left\{ \begin{aligned} 0 &\leq \theta^1 \leq c_1 \\ 0 &\leq \theta^2 \leq c_2 \\ 0 &\leq \theta^1 + \theta^2 \leq \text{Min}(c_3, c_4) \end{aligned} \right.$$

Alors il existe un biflot réalisable avec $F^1 = \theta^1, F^2 = \theta^2$.

Démonstration : Cette proposition est une conséquence directe du corollaire du théorème 3.

Remarque : 12) Le domaine (D) peut être représenté dans le plan F^1, F^2 ainsi qu'il est proposé sur la figure 7.

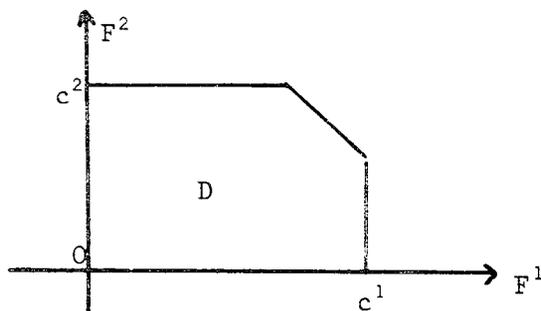


Figure 7

Théorème 7 : Soient θ^1, θ^2 entiers satisfaisant à :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta^1 \leq c_1 \\ 0 &\leq \theta^2 \leq c_2 \\ 0 &\leq \theta^1 + \theta^2 < \text{Min} [c_3, c_4] \end{aligned}$$

Alors, si b est entier, il existe un biflot entier avec $F^1 = \theta^1$ et $F^2 = \theta^2$.

Démonstration : Considérons le réseau :

$$\hat{N} = (X, U', b')$$

défini par :

$$X' = X \cup \{s_1'\} \cup \{s_2'\}$$

$$U' = U \cup \{(s_1's')\} \cup \{(s_2's')\}$$

$$b'(xy) = \begin{cases} b(xy) & \text{si } (xy) \in U \\ \theta^i & \text{si } (xy) = (s_i's^i) \quad (i=1,2) \end{cases}$$

D'après le théorème 5 il existe un biflot maximum entier dans \hat{N} , dont la restriction à R donne un biflot entier satisfaisant les hypothèses.

c.q.f.d.

Théorème 8 (Rotschild et Whinston [47]) : Soient θ^1, θ^2 entiers satisfaisant à :

$$(12) \quad \begin{cases} 0 \leq \theta^1 \leq c_1 \\ 0 \leq \theta^2 \leq c_2 \\ 0 \leq \theta^1 + \theta^2 \leq \text{Min} [c_3, c_4] \end{cases}$$

Si b est entier et si tous les sommets sont pairs sauf peut-être s^1, s^2, t^1, t^2 il existe un biflot réalisable entier avec :

$$F^1 = \theta^1 + 1, \quad F^2 = \theta^2 - 1$$

ou

$$F^1 = \theta^1, \quad F^2 = \theta^2$$

Démonstration :

$$(i) \hat{b}(s^i) \not\equiv \hat{b}(t^i) \pmod{2}$$

Alors on peut prendre, sans perte de généralité (cf. remarque 1),

$$\theta^i \equiv \hat{b}(s^i) \pmod{2} \quad (i=1,2)$$

On définit le même réseau \hat{N} que dans la démonstration du théorème précédent et le résultat est une conséquence du théorème 6.

$$(ii) \theta^1 \equiv \hat{b}(s^1) \equiv \hat{b}(t^1) \pmod{2} \quad (i=1,2)$$

Le même argument que ci-dessus démontre la proposition.

$$(iii) \theta^i \not\equiv \hat{b}(s^i) \equiv \hat{b}(t^i) \pmod{2} \quad i = 1, 2 \quad \theta^1 < c_1. \text{ Posons :}$$

$$\bar{\theta}^1 = \theta^1 + 1$$

$$\bar{\theta}^2 = \theta^2 - 1$$

et nous sommes ramenés au cas (ii).

$$(iv) \theta^1 \not\equiv \hat{b}(s^1) \equiv \hat{b}(t^1) \pmod{2}$$

$$\theta^2 \equiv \hat{b}(s^2) \equiv \hat{b}(t^2) \pmod{2}$$

On a :

$$\theta^1 + \theta^2 \not\equiv \hat{b}(s^1) + \hat{b}(s^2) \equiv \hat{b}(s^1) + \hat{b}(t^2) \equiv \hat{b}(t^1) + \hat{b}(s^2) \pmod{2}$$

$$\hat{b}(t^1) + \hat{b}(t^2) \equiv \text{Min} [c_3, c_4] \pmod{2}$$

ce qui entraîne

$$\theta^1 + \theta^2 \not\equiv \text{Min} [c_3, c_4] \pmod{2}$$

soit

$$\theta^1 + \theta^2 < \text{Min} [c_3, c_4]$$

et la propriété est vraie d'après le théorème 7.

$$(v) \theta^i \not\equiv \hat{b}(s^i) \equiv \hat{b}(t^i) \pmod{2} \quad (i=1,2) \quad \theta^1 = c_1.$$

Une coupe minimale $C \in C^1$ appartient alors nécessairement aussi (pour des raisons de parité) à C^3 ou à C^4 . Il s'ensuit (cf. (12)) que $\theta^2 = 0$ et la proposition en résulte.

c.q.f.d.

APPENDICE A LA PREMIERE PARTIE

MATRICES QUASI-EQUILIBREES

Définition 1 : Etant donnés :

- . A matrice à m lignes et n colonnes à éléments réels
- . b un m-vecteur colonne à éléments réels
- . c un n-vecteur ligne à éléments réels.

on considère le couple des programmes linéaires duaux :

$$(P) \begin{cases} Ax + Us = b & x, s \geq 0 \\ cx = z(\text{Max}) \end{cases} \quad (D) \begin{cases} yA - tV = c & y, t \geq 0 \\ yb = w(\text{Min}) \end{cases}$$

où U et V sont les matrices unités de dimensions respectives m et n.

Posons :

$$I \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad \bar{I} = \{1, 2, \dots, n\} - I$$

$$J \subset \{1, 2, \dots, m\} \quad \bar{J} = \{1, 2, \dots, m\} - J$$

$$(1) \quad |I| + |\bar{I}| = n$$

$$(1') \quad |J| + |\bar{J}| = m$$

Nous dirons que (I, J) (resp. (J, I)) est une "base" de (P) (resp. de (D)) si :

$$(2) \quad |I| + |J| = m \quad (\text{resp. } (|J| + |I| = n))$$

$$(3) \quad (A^I, U^J) \text{ est de rang } m \quad (\text{resp. } \begin{pmatrix} A_J \\ V_I \end{pmatrix} \text{ est de rang } n).$$

Théorème 1 (des bases complémentaires) : Une condition nécessaire et suffisante pour que (I, J) soit une base de (P) est que (\bar{J}, \bar{I}) soit une base de (D).

Démonstration : Si (I, J) est une base de (P), on a, d'après (1), (1') et (2) :

$$|\bar{J}| + |\bar{I}| = n$$

et d'après (1), ceci entraîne :

$$(4) \quad |I| = |\bar{J}|.$$

Il résulte de (3) que $A^I_{\bar{J}}$ est non singulière. Par conséquent il en est de même de $\begin{pmatrix} A_{\bar{J}} \\ V_I \end{pmatrix}$.

La condition suffisante est une conséquence de la réciprocité entre programmes linéaires duaux.

c.q.f.d.

Définition 2 : A une base (I,J) de (P) (resp. une base (\bar{J}, \bar{I}) de (D)) on fait correspondre la "solution de base associée", solution du système :

$$(5) \begin{cases} A_J^I x_I = b_J^- \\ x_J^- = 0 \\ s_J = b_J - A_J^I x_I \\ s_J^- = 0 \end{cases} \quad (\text{resp. } (5')) \begin{cases} t^I = 0 \\ t^{\bar{I}} = y^{\bar{J}} A_{\bar{J}}^{\bar{I}} - c^{\bar{I}} \\ y^J = 0 \\ y^{\bar{J}} A_{\bar{J}}^I = c^I \end{cases}$$

Une solution de base sera dite "réalisable" si la solution du système (5) (resp. (5')) est non négative. Par abus de langage nous dirons qu'une base est réalisable (resp. optimale) si la solution de base associée est réalisable (resp. optimale).

Une conséquence du théorème de dualité en programmation linéaire est le :

Théorème 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que la base réalisable (I,J) du programme linéaire (P) soit une base optimale est que (\bar{J}, \bar{I}) soit une base réalisable de (D).

Définition 3 : Une matrice A m x n dont les éléments valent 0 ou 1 sera dite "quasi-équilibrée" si les sommets du polyèdre $\{y | yA^i \geq 1, i=1,2,\dots,n ; y \geq 0\}$ sont entiers.

Remarques : 1) Les matrices équilibrées au sens de Berge [5] sont quasi-équilibrées.

2) Soit G = (X,U) un graphe orienté et s, p ∈ X.

Soit C¹, C², ..., Cⁿ la liste des chemins élémentaires qui dans G joignent les sommets s et p et A la matrice d'incidence aux arcs des chemins C¹, C², ..., Cⁿ :

$$A_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si le chemin } C^j \text{ contient l'arc } u_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors une conséquence de la théorie des flots dans les réseaux [16] est que A est une matrice quasi-équilibrée.

3) Soit G = (X,E) un graphe non orienté et s, p ∈ X.

Une conséquence directe de la remarque précédente est que la matrice d'incidence aux arêtes des chaînes de s à p est quasi-équilibrée.

4) Soit G = (X,E) un graphe non orienté et s¹, s², t¹, t² ∈ X.

Alors d'après les résultats du chapitre II, la matrice d'incidence aux arêtes des chaînes de s¹ à t¹ et des chaînes de s² à t² est quasi-équilibrée.

5) Considérons l'hypergraphe $H = (E, F)$ (au sens de Berge [4]) dont A est la matrice d'incidence aux arêtes. $T \subset E$ sera dit un "transversal" de H si :

$$T \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in F$$

Soit T l'ensemble des transversaux minimaux de H . Le triplet (E, F, T) est appelé par Fulkerson "système bloquant" [17]. Par analogie avec l'exemple de la remarque 2, si la matrice A est quasi-équilibrée, Fulkerson dit que le système bloquant satisfait le théorème de la coupe minimale. Une étude détaillée des systèmes bloquants, polyèdres bloquants et antibloquants est donnée dans [17] et [18].

Définition 4 : Après Lehman [39] nous appellerons "w- ℓ " une matrice A $m \times n$ dont les éléments valent 0 ou 1 et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad , \quad \bar{I} = \{1, 2, \dots, n\} - I$$

$$\forall J \subset \{1, 2, \dots, m\} \quad , \quad \bar{J} = \{1, 2, \dots, m\} - J$$

tels que

$$(6) \quad . \quad A_{\bar{J}}^{\bar{I}} \text{ est carrée non singulière}$$

$$(7) \quad . \quad e^{\bar{I}} (A_{\bar{J}}^{\bar{I}})^{-1} > 0 \quad (\text{e est le n-vecteur ligne dont toutes les composantes sont égales à 1})$$

$$(8) \quad . \quad e^{\bar{I}} (A_{\bar{J}}^{\bar{I}})^{-1} A_{\bar{J}}^{\bar{I}} \geq e^{\bar{I}} \quad (\text{les composantes sont égales à 1})$$

Alors $A_{\bar{J}}^{\bar{I}}$ est une matrice de permutation.

Théorème 3 (Lehman [39]) : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A soit quasi-équilibrée est qu'elle soit w- ℓ .

Démonstration : Il suffit de montrer que le programme linéaire :

$$(I) \quad \begin{cases} yA \geq e & y \geq 0 \\ yb = w(\text{Min}) \end{cases}$$

a une solution optimale entière $\forall b \in \mathbb{R}^m$ si et seulement si A est w- ℓ .

Soit \hat{y} et \hat{x} un couple de solutions optimales de (I) et de son dual respectivement, tel que la relation forte des écarts complémentaires soit satisfaite pour ce couple de solutions. Posons :

$$\bar{J} = \{j | \hat{y}^j \neq 0\}$$

$$I = \{i | \hat{x}_i \neq 0\}$$

Alors d'après les théorèmes 1 et 2 on a :

$$|I| = |\bar{J}|$$

$$A_{\bar{J}}^I x_I = b_{\bar{J}}$$

possède une solution unique, $x_I \geq 0$. Alors les conditions (6), (7) et (8) sont satisfaites et

$$A_{\bar{J}}^I \text{ matrice de permutation} \iff \hat{y}^j = 1 \text{ si } j \in \bar{J}$$

c.q.f.d.

Théorème 4 [51] : Soient $G = (X, U)$ un graphe planaire, F une face de G et $s^1, s^2, \dots, s^{2q-1}, s^{2q}$ des sommets de G adjacents à F et rencontrés dans cet ordre lorsqu'on décrit la frontière de F . Alors la matrice d'incidence aux arcs des chemins de s^i à s^{2q+1-i} ($i = 1, 2, \dots, q$) est quasi-équilibrée.

Remarque: 6) De Ghellinck [22] a donné une démonstration de ce théorème plus simple que celle de [51].

DEUXIEME PARTIE

NOMBRE DE STABILITE CYCLIQUE DANS LES GRAPHS

INTRODUCTION A LA SECONDE PARTIE

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est X et l'ensemble des arêtes, E , une famille de parties à 2 éléments de X . On posera :

$$\Gamma(x) = \{y \in X \mid \exists e \in E ; x, y \in e\}$$

Par abus de langage nous dirons que la paire (xy) , $x \neq y$, est :

- une "arête simple" de G si $|\{e \in E \mid x, y \in e\}| = 1$;
- une "arête multiple", de "multiplicité" k si

$$|\{e \in E \mid x, y \in e\}| = k$$

et $m(xy)$ désignera la multiplicité de la paire (xy) . Un graphe dont toutes les arêtes sont simples sera dit graphe simple.

Soit $Y \subset X$, nous noterons G_Y le sous-graphe engendré par Y .

$S \subset X$ sera dit "cycliquement stable" si G_S ne contient pas de cycle, c'est à dire si G_S est une forêt. Un ensemble cycliquement stable sera dit "maximum" s'il est de cardinalité maximum.

On appellera "nombre de stabilité cyclique" $s(G)$ d'un graphe G le cardinal d'un ensemble cycliquement stable maximum.

Peu de travaux, à notre connaissance, ont été consacrés aux ensembles cycliquement stables. F. Sterboul a étudié le nombre de stabilité faible de l'hypergraphe des cycles d'un graphe et a tenté de relier le nombre de stabilité cyclique au nombre co-chromatique [55]. F. Jaeger a relié la recherche d'ensembles cycliquement stables maximaux à des problèmes d'orientation et étudié le cas des graphes cubiques planaires [31].

Dans le chapitre III, nous donnons les bornes du paramètre $s(G)$ en fonction des degrés des sommets de G . Si la borne supérieure a une expression simple, la borne inférieure est très différente selon que le degré maximum des sommets est 3 ou supérieur ou égal à 4 ; en particulier les bornes inférieures et supérieures du nombre de stabilité cyclique sont relativement "proches" (le rapport de la borne inférieure à la borne supérieure est de l'ordre de $\frac{8}{9}$). Aussi dans le chapitre IV nous concentrons notre attention sur l'étude des ensembles cycliquement stables dans les graphes cubiques : le nombre de stabilité cyclique est utilisé ici comme un outil pour obtenir une meilleure compréhension de la structure des graphes cubiques. Tout d'abord, on montre que

dans un graphe cubique connexe sans boucle qui n'est pas le 4-clique, il existe un ensemble cycliquement stable maximum dont la complémentaire est un stable. Mais le résultat le plus important de ce chapitre -et le plus délicat à établir- est que dans un graphe cubique simple cycliquement 4-arêtes connexe (c'est à dire tel que tout cocycle qui sépare le graphe en composantes comportant des cycles soit de cardinal supérieur ou égal à 4) la cardinalité d'un ensemble cycliquement stable maximum est toujours à sa borne supérieure. On donne enfin quelques autres propriétés des ensembles cycliquement stables dans les graphes cubiques cycliquement 4-arêtes connexes.

Cette recherche représente la synthèse d'un travail mené en collaboration avec C. Payan. J'ai également profité de nombreuses discussions avec F. Jaeger.

CHAPITRE III

ETUDE DES BORNES DU NOMBRE DE STABILITE CYCLIQUE $s(G)$

Définition 1 : Soit $G = (X,E)$ un graphe sans boucle et soit $S \subset X$; un sommet $x \in X$ est dit "de degré k par rapport à S " si :

$$k = \sum_{y \in S} m(xy)$$

et on note :

$$d_S(x) = k.$$

Si $S = X$ on dit que x est de degré k dans G ou, simplement; que x est de degré k et on note :

$$d(x) = d_X(x)$$

Si $x \in S$ on pourra dire aussi que x est de degré k dans G_S . De plus on pose :

$$\delta = \text{Min}_{x \in X} d(x) \quad (\text{degré minimum des sommets de } G)$$

$$\Delta = \text{Max}_{x \in X} d(x) \quad (\text{degré maximum des sommets de } G)$$

1 - Etude de la borne supérieure de $s(G)$

Théorème 1⁽¹⁾ : Soit $G = (X,E)$ un graphe sans boucle d'ordre n dont le degré minimum des sommets est δ et le degré maximum $\Delta > 1$, alors

$$s(G) \leq \frac{(2\Delta - \delta)n - 2}{2(\Delta - 1)}$$

Démonstration : Soit p le nombre de composantes connexes de la forêt G_S où S est un ensemble cycliquement stable maximum. Soit r_i ($i=0,1,2,\dots,\Delta$) le nombre de sommets hors de S de degré i par rapport à S ; comme S est maximum on a $r_1 = r_0 = 0$. Comptons le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G :

$$s(G) + r_2 + r_3 + \dots + r_\Delta = |X| = n$$

$$s(G) - p + \frac{\Delta+2}{2} r_2 + \frac{\Delta+3}{2} r_3 + \frac{\Delta+4}{2} r_4 + \dots + \Delta r_\Delta = |E| \geq \frac{\delta n}{2}$$

(1) Ce théorème est dû à F. Jaeger dans le cas des graphes cubiques.

on tire de ce système le résultat annoncé en éliminant r_Δ entre les 2 relations et en tenant compte de ce que $p \geq 1$, $r_i \geq 0$ ($i=2,3,\dots,\Delta$).

c.q.f.d.

Théorème 2⁽¹⁾ : Soit $G = (X,E)$ un graphe à $n = k\Delta$ sommets, régulier de degré Δ et tel que $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ avec G_{X_i} est la Δ -clique ($i=1,2,\dots,k$), alors :

$$s(G) = \frac{2n}{\Delta}.$$

Démonstration : Soit S un ensemble cycliquement stable maximum. On a nécessairement :

$$1 \leq |S \cap X_i| \leq 2 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Il faut montrer que $|S \cap X_i| = 2$ pour $i = 1, 2, \dots, k$. Supposons donc que $\{a\} = S \cap X_1$.

$\forall x \in X_1 - \{a\}$ $G_{S \cup \{x\}}$ contient un cycle C_x qui contient nécessairement a et le voisin de a n'appartenant pas à X_1 . Soient C_x , et $C_{x''}$ deux tels cycles ($x' \neq x''$) ; posons :

$$A = C_x \cap C_{x''} \neq \emptyset$$

Soit $b \in A$, $b \neq a$ tel que les voisins de b sur C_x , et $C_{x''}$ ne soient pas les mêmes et supposons que $b \in X_2$ alors :

$$|S \cap X_2| = 3$$

une contradiction.

c.q.f.d.

Corollaire : Dans un graphe régulier de degré Δ dont l'ensemble des sommets est décomposable en Δ -cliques, tout ensemble cycliquement stable maximal est maximum.

2 - Borne inférieure de $s(G)$ pour les graphes cubiques

Définitions : 2) Soit $G = (X,E)$ un graphe (possédant éventuellement des boucles). On définit les 3 opérations suivantes :

- α) Si $\Gamma(x) = \{x', x''\}$ x, x' et x'' distincts (xx') et (xx'') arêtes simples on pose :

$$F_x(G) = \text{graphe obtenu en ajoutant } (x'x'') \text{ à } G_{X-\{x\}}.$$

(1) Ce résultat est dû à C. Payan dans le cas des graphes cubiques.

β) Si $\Gamma(x) = \{x'\}$ $x \neq x'$ (xx') arête double ; poser :

$H_x(G) =$ graphe obtenu en ajoutant une boucle incidente à x' dans $G_{X-\{x\}}$.

γ) Si $\Gamma(x) = \{x'\}$ $x \neq x'$ (xx') arête simple ; poser :

$J_x(G) = G_{X-\{x\}}$.

Soit $\Phi(G)$ le graphe obtenu à partir de G par applications successives (tant que celles-ci sont possibles) des opérations α, β, γ .

3) Soit $G = (X,E)$ un graphe cubique connexe sans boucle et soit $a \in X$. Le "graphe réduit de G par rapport à a " est :

$R_a(G) = \Phi(G_{X-\{a\}})$

on notera que $R_a(G)$ n'est pas nécessairement connexe et peut admettre des boucles.

Les résultats suivants sont des conséquences directes des définitions ci-dessus :

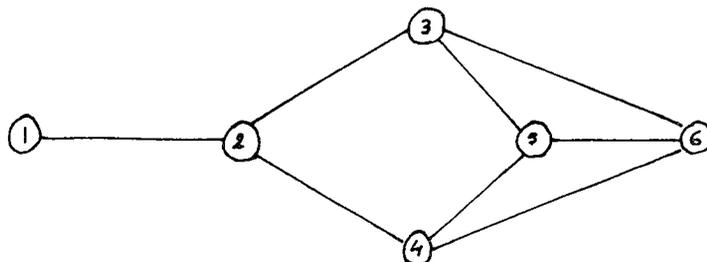
Lemme 1 : Soit G un graphe connexe dont le degré maximum des sommets est 3 :

- (i) $\Phi(G)$ est un graphe régulier de degré 3 ou bien $\Phi(G) = (\{x\}, \{(x,x)\})$
- (ii) $s(G) = s(F_x(G)) + 1$
- (iii) $s(G) = s(H_x(G)) + 1$
- (iv) $s(G) = s(J_x(G)) + 1$

Lemme 2 : Si G est un graphe simple cubique connexe sans boucle $s(G) \geq s(R_a(G))+3$.

Définitions : 4) Nous appellerons G_0 le graphe :

$(\{1,2,3,4,5,6\} ; \{(12), (23), (24), (35), (36), (45), (46), (56)\})$



5) Soit $G = (X, E)$ un graphe dont le degré maximum des sommets est 3 ; on pose :

$$n(G) = |X| \text{ nombre de sommets de } G$$

$$p(G) = \text{nombre des sous-graphes de } G \text{ isomorphes à } G_0$$

$$\ell(G) = \text{nombre d'arêtes doubles de } G$$

$$b(G) = \text{nombre de boucles de } G$$

$$k(G) = p(G) + \ell(G) + 2b(G)$$

et on définit l'application $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(a, b) = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 4, \quad b = 0 \\ 3 & \text{si } a = 5, \quad b = 0 \\ 5 & \text{si } a = 8, \quad b = 0 \\ \frac{2a-b}{3} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Lemme 3 : Soient $G = (X, E)$ et $G' = (X', E')$ deux graphes dont le degré maximum des sommets est 3. Alors

$$\left. \begin{array}{l} n(G') = n(G) - 4 \\ k(G') \leq k(G) + 1 \\ s(G') \geq g(n(G'), k(G')) \\ s(G) \geq s(G') + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow s(G) \geq g(n(G), k(G))$$

Démonstration : Pour $k(G') = 0$, $n(G') = 4$ ou $n(G') = 8$, vérification directe immédiate. Dans les autres cas :

$$s(G) \geq \frac{2(n(G)-4)-k(G')}{3} + 3 = \frac{2n(G)-(k(G)+1)}{3} \geq \frac{2n(G)-k(G)}{3}$$

Théorème 3 : Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe dont le degré maximum des sommets est 3 ayant n sommets, ℓ arêtes multiples, p sous-graphes isomorphes à G_0 et b boucles. On a :

$$s(G) \geq g(n, k)$$

avec $k = \ell + p + 2b$.

Démonstration :

A - Supposons que la proposition soit fausse. Soit G un graphe sur n sommets pour lequel la proposition n'est pas satisfaite et tel que n soit minimum pour cette propriété. On vérifie directement que $n > 4$. On peut supposer sans perte de généralité à cause du Lemme 1- que G est un graphe cubique.

B - Si G comporte une boucle incidente au sommet x on pose $G' = G_{X-\{x\}}$;
on a :

$$n(G') = n(G)-1 ; \ell(G') = \ell(G) ; p(G') = p(G) ; b(G') = b(G)-1$$

$$k(G') = k(G)-2$$

$$s(G) = s(G') \geq \frac{2n(G')-k(G')}{3} = \frac{2n(G)-k(G)}{3}$$

et on a une contradiction.

C - Si G comporte un sous-graphe isomorphe à G_0 soit $G' = R_5(G)$; on a :

$$n(G') = n(G)-4 ; p(G') = p(G)-1 ; \ell(G') = \ell(G) ; b(G') = b(G)+1$$

$$k(G') = k(G)+1$$

et, d'après le Lemme 3, on a une contradiction.

D - Si G est un graphe cubique sans boucle, sans sous-graphe isomorphe à G_0 et possédant un isthme (x_1x_2) , $\Phi[(X, E-\{(x_1x_2)\})]$ comporte deux composantes connexes G_1 et G_2 qui sont des graphes cubiques. On a :

$$s(G) = s(G_1) + s(G_2) + 2 \geq g(n(G_1), k(G_1)) + g(n(G_2), k(G_2)) + 2$$

$$n(G) = n(G_1) + n(G_2) + 2$$

$k(G_i) = 0 \Rightarrow n(G_i) \neq 4, 5$ ($i=1, 2$) puisque G ne comporte pas de sous-graphe isomorphe à G_0 .

α) $n(G_1) = n(G_2) = 8$ $k(G_1) = k(G_2) = 0$: la contradiction se vérifie directement.

$$\beta$$
) $n(G_1) = 8, k(G_1) = 0$ $g(n(G_2), k(G_2)) = \frac{2n(G_2)-k(G_2)}{3}$

$$s(G) \geq 5 + \frac{2(n(G)-10)-k(G_2)}{3} + 2 \geq \frac{2n(G)-k(G)}{3}$$

car $k(G_2) \leq k(G)+1$

et on a une contradiction.

$$\gamma$$
) $g(n(G_i), k(G_i)) = \frac{2n(G_i)-k(G_i)}{3}$ ($i=1, 2$)

$$s(G) \geq \frac{2[n(G_1)+n(G_2)]-k(G_1)-k(G_2)}{3} + 2 \geq \frac{2n(G)-k(G)}{3}$$

car $k(G_1) + k(G_2) \leq k(G) + 2$

et on a une contradiction.

E - Si G est un multigraphe cubique sans isthme possédant une arête double (x_1, x_2) on pose $G' = G_{X-\{x_1, x_2\}}$ et on a :

$$n(G') = n(G) - 2 ; p(G') = p(G) ; \ell(G') = \ell(G) - 1 ; b(G') = b(G)$$

$$k(G') = k(G) - 1$$

$$s(G) \geq s(G') + 1 \geq \frac{2(n(G)-2) - (k(G)-1)}{3} + 1 = \frac{2n(G) - k(G)}{3}$$

et on a une contradiction.

F - Si G est un graphe simple sans boucle cubique 2-connexe. Ou bien :

- G admet deux sous-graphes qui sont des triangles, ces deux sous-graphes ayant une arête (ab) en commun.
- G admet un sous-graphe qui est un triangle a, b, c dont chaque sommet est adjacent à un autre triangle de G (Figure 1). Les 3 triangles T_a, T_b, T_c sont disjoints puisque G est 2-connexe.

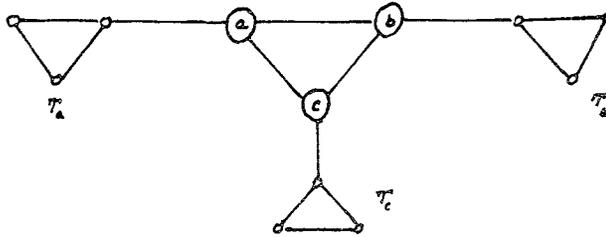


Figure 1

- G admet un sous-graphe qui est un triangle et soit a un sommet de ce triangle non adjacent à un sommet d'un autre triangle de G .
- G n'admet pas de sous-graphe qui soit un triangle. Soit $a \in X$.

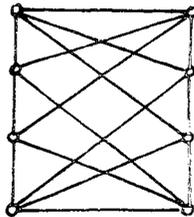
Dans chacun de ces quatre cas on peut vérifier, en posant $G' = R_a(G)$, que $k(G') \leq k(G) + 1$. D'après le Lemme 3 on a donc une contradiction.

c.q.f.d.

Remarque : On peut noter (c'est une conséquence directe du théorème 3) que si G est un graphe cubique sur 8 sommets alors $s(G) = 5$ et que si G' est un graphe partiel de G , $s(G') > 5$. D'une manière générale on appellera "s-critiques" des graphes G tels que pour tout G' graphe partiel de G on ait :

$$s(G') > s(G).$$

On peut construire une famille de graphes G_n^s d'ordre n s -critiques de la manière suivante : on remplace une arête de la $(n-s+2)$ -clique par une chaîne de longueur $s-1$. Il existe d'autres multigraphes s -critiques en particulier ceux qui sont décrits dans les énoncés du théorème 4, ou le graphe suivant, régulier de degré 4 sur 8 sommets qui est 4-critique.



3 - Borne inférieure de $s(G)$ pour les graphes de degré quelconque

Définitions : 6) Pour un ensemble cycliquement stable S d'un graphe $G = (X, E)$ on appelle S_1, S_2, \dots, S_p les composantes connexes de G_S .

7) Un sommet $x \in X-S$ sera dit "associé" à une composante S_j si le degré de x par rapport à S_j est supérieur ou égal à 2 (cf. définition 2). Si S est un ensemble cycliquement stable maximal, tout sommet hors de S est associé à au moins une composante de G_S . Soit A_j l'ensemble des sommets associés à S_j . Soit A_j' l'ensemble des sommets hors de S dont le degré par rapport à S_j est égal à 1.

8) On associe à un ensemble cycliquement stable maximum S sur le graphe $G = (X, E)$ un graphe $\hat{G}(S) = (\{1, 2, \dots, p\}, \hat{E})$ avec :

- $(ij) \in \hat{E}$ si on a, soit :

$$\cdot A_i \cap A_j \neq \emptyset$$

$$\cdot |A_i' \cap A_j| + |A_i \cap A_j'| \geq 2$$

c'est à dire :

$$2|A_i \cap A_j| + |A_i' \cap A_j| + |A_i \cap A_j'| \geq 2.$$

Lemme 4 : Si S est un ensemble cycliquement stable maximum du graphe $G = (X, E)$ et si $I \subset \{1, 2, \dots, p\}$ est une composante connexe de $\hat{G}(S)$ alors S_I est un ensemble cycliquement stable maximum dans $G_{S_I \cup A_I}$ avec :

$$S_I = \bigcup_{i \in I} S_i$$

$$A_I = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Démonstration : D'après la définition du graphe $\hat{G}(S)$, si S'_I est cycliquement stable dans $G_{S'_I U A_I}$ alors $S' = S'_I \cup (\bigcup_{i \in I} S_i)$ est cycliquement stable dans G .

c.q.f.d.

Théorème 4 : Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe sans boucle dont le degré maximum des sommets est $\Delta \geq 4$. Si

i) lorsque $\Delta = 2q$ G n'est pas la $(q+1)$ -clique dont toutes les arêtes sont doubles,

ii) lorsque $\Delta = 2q+1$ G ne comporte pas de sous-graphe partiel qui est la $(q+1)$ -clique dont toutes les arêtes sont doubles,

iii) G n'est pas la $(\Delta+1)$ -clique,

iv) lorsque $\Delta = 4$ G n'est pas un cycle impair dont toutes les arêtes sont doubles.

Alors :

$$(2) \quad s(G) \geq \frac{2n}{\Delta}$$

Démonstration : Soit G un graphe dont le degré maximum des sommets est Δ qui satisfait les hypothèses du théorème et tel que cependant (2) ne soit pas vérifiée. Soit n minimum pour cette propriété.

Soit S un ensemble cycliquement stable maximum dans G tel que p soit maximum. D'après le Lemme 4 et la propriété de minimalité de n on voit que le graphe $\hat{G}(S)$ est connexe. Posons :

$$A = \bigcup_{i=1}^p A_i \quad a = |A|$$

$$s_i = |S_i| \quad s = \sum_{i=1}^p s_i$$

A - La relation (2) s'écrit de manière équivalente

$$(2') \quad 2a \leq (\Delta-2)s$$

D'après la définition des sommets associés et du graphe \hat{G} on a (en comptant les valences libres de G_{S_i}) :

$$(3) \quad 2a \leq (\Delta-2)s + 2$$

comme (2') n'est pas satisfait par hypothèse on a :

$$(4) \quad 2a = (\Delta-2)s + 2$$

ou bien

$$(5) \quad 2a = (\Delta-2)s + 1$$

De ces équations on déduit que $\hat{G}(S)$ est toujours un arbre. De plus, dans le cas (4), on a :

$$(6.1) \quad - y \in S \quad \Rightarrow \quad d(y) = \Delta$$

$$(6.2) \quad - x \in A \quad \Rightarrow \quad d_{S_i}(x) \leq 2 \quad (i=1,2,\dots,p)$$

$$(6.3) \quad - (ij) \in \hat{E} \quad \Rightarrow \quad 2|A_i \cap A_j| + |A_i' \cap A_j| + |A_i \cap A_j'| = 2$$

$$(6.4) \quad - (ij) \notin \hat{E} \quad \Rightarrow \quad 2|A_i \cap A_j| + |A_i' \cap A_j| + |A_i \cap A_j'| = 0$$

Dans le cas (5) on a les mêmes implications si ce n'est qu'il existe :

$$(7.1) \quad - \text{soit un } y \text{ (unique)} \in S \text{ tel que } d(y) = \Delta-1$$

$$(7.2) \quad - \text{soit un } x \text{ (unique)} \in A \text{ tel que pour un certain } i : d_{S_i}(x) = 3$$

$$(7.3) \quad - \text{soit un } (ij) \text{ (unique)} \in \hat{E} \text{ tel que } 2|A_i \cap A_j| + |A_i' \cap A_j| + |A_i \cap A_j'| = 3$$

$$(7.4) \quad - \text{soit un } (ij) \text{ (unique)} \notin \hat{E} \text{ tel que } |A_i' \cap A_j| = 1$$

B - p > 1 : Supposons que {1} soit un sommet pendent de G(S). De plus, comme un arbre possède au moins 2 sommets pendants, on peut, sans perte de généralité d'après les résultats de A, supposer que :

$$(8.1) \quad - \forall y \in S_1 \quad d(y) = \Delta$$

$$(8.2) \quad - \forall x \in A_1 \quad d_{S_1}(x) = 2$$

$$(8.3) \quad - |A_1'| \leq 2$$

$$(8.4) \quad - \left| A_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^P A_i \right) \right| = 1 \Rightarrow |A_1'| = 0$$

$$(8.5) \quad - \left| A_1' \cap \left(\bigcup_{j=2}^P A_j \right) \right| + \left| A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^P A_j' \right) \right| = 3 \Rightarrow |A_1'| = 0 \text{ ou } 2$$

On pose :

$$\tilde{A}_1' = A_1' - \left(\bigcup_{i=2}^P A_i \right)$$

C - Si $\{1\}$ est un sommet pendent de $\hat{G}(S)$ (ou si $p=1$), $|S_1| \leq 2$.
Supposons $|S_1| \geq 3$ et montrons qu'on aboutit à une contradiction.

$$\cdot \text{ Si } x \in \tilde{A}_1 = A_1 - \left(\bigcup_{i=2}^p A_i \right) - \left(\bigcup_{i=2}^p A_i' \right), d_{S_1}(x) = 2, (xy) \in E, y \in S_1.$$

Alors :

- (xy) arête simple de G
- y sommet pendent de G_{S_1} .

En effet si ces deux conditions n'étaient pas satisfaites $S' = S \cup \{x\} - \{y\}$ serait un ensemble cycliquement stable tel que G_{S_1} contient plus de p composantes connexes, une contradiction.

G_{S_1} est une chaîne : soient y' et y'' deux sommets pendants de G_{S_1} adjacents à un sommet $x \in \tilde{A}_1$, $d_{S_1}(x) = 2$. Si G_{S_1} n'est pas une chaîne joignant y' à y'' alors il existe, sur la chaîne joignant y' à y'' et contenue dans G_{S_1} , un sommet y tel que $d_{S_1}(y) \geq 3$. $S' = S \cup \{x\} - \{y\}$ est un ensemble cycliquement stable de G et $G(S')$ contient plus de p composantes connexes, une contradiction.

D'après (8.2), on voit que la chaîne G_{S_1} n'a pas de sommet intermédiaire. On a donc une contradiction.

D - $p = 1$: On examine différents cas suivant les valeurs de $|S_1| = s$

a) $s = 1$:

$\cdot \Delta = 2q \Rightarrow a = q$ on trouve que G est la $q+1$ clique dont chaque arête est double, cas exclu en iii).

$\cdot \Delta = 2q+1 \Rightarrow a = q+1$ on trouve que G a un graphe partiel qui est la $q+1$ clique dont chaque arête est double, cas exclu en ii).

b) $s = 2$: on est dans le cas (4) et $a = \Delta - 1$. On trouve que G est la $(\Delta+1)$ -clique (si deux sommets $x, y \in A_1$ n'étaient pas adjacents, il existerait un sommet $z \in S_1$ tel que $S_1 \cup \{x, y\} - \{z\}$ soit cycliquement stable) cas exclu en iii).

c) $s > 2$. Ceci est impossible d'après les résultats des § A et B. En effet si v est un sommet intermédiaire de la chaîne G_{S_1} , $d(y) \geq 4$. Cependant le degré de y dans G_{S_1} est 2 et y est adjacent à au plus un sommet hors de S

(le sommet hors de S de degré 3 par rapport à S, disons x). Mais si (xy) est une arête double de G alors $S' = S \cup \{x\} - \{y\}$ est cycliquement stable dans G et $G_{S'}$ possède 2 composantes connexes, une contradiction.

$$E - p > 1, |S_1| = 1$$

E-1 : $|A'_1| = 1$. D'après (8.4) on a :

$$A_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^p A_i \right) = \emptyset$$

Soient alors :

$$z \in A_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^p A'_i \right) (\neq \emptyset \text{ puisque } \hat{G}(S) \text{ est connexe})$$

$$x \in \tilde{A}_1 (\neq \emptyset \text{ d'après (8.5) et le fait que } \Delta \geq 4)$$

tels que de plus (xz) ne soit pas une arête double de G. Un tel couple existe nécessairement (sinon G contiendrait la $\frac{\Delta+1}{2}$ clique dont toutes les arêtes sont doubles, cas exclu en ii) dans l'énoncé du théorème). Alors $S' = S \cup \{x, z\} - S_1$ est un ensemble cycliquement stable de cardinalité supérieure à celle de S.

E-2 : $|A'_1| = 0$ ou 2. Δ est pair d'après (8.1), (8.2).

D'après les résultats du § A, $G_{A_1 \cup S_1}^{\sim}$ est la $\frac{\Delta}{2}$ clique dont toutes les arêtes sont multiples (en fait doubles) et $\forall x \in \tilde{A}_1$ on a :

$$d_{X-(S_1 \cup \tilde{A}_1)}(x) = 2.$$

En effet si ce degré était inférieur à 2, $S' = S - S_1 \cup \{x\}$ serait cycliquement stable maximum dans G et $\hat{G}(S')$ comporte deux composantes connexes, une contradiction.

- Si $|A'_1| = 2$ ou s'il existe $x \in \tilde{A}_1$ ayant deux voisins distincts dans $X-(S_1 \cup \tilde{A}_1)$ (disons v' et v'') posons :

$$\tilde{G}'_1 = G_{X-(S_1 \cup \tilde{A}_1)} \text{ auquel on a rajouté l'arête } (v'v'')$$

- Si $|A'_1| = 0$ et si tout $x \in \tilde{A}_1$ possède un voisin unique dans $X-(S_1 \cup \tilde{A}_1)$ soient $v', v'' \in X-(S_1 \cup \tilde{A}_1)$ v' et v'' étant l'un et l'autre adjacents à au moins un sommet de $S_1 \cup \tilde{A}_1$. Posons :

$$\tilde{G}'_1 = G_{X-(S_1 \cup \tilde{A}_1)} \text{ auquel on a rajouté l'arête double } (v'v'').$$

Si $\Delta = 4$ ou si on se trouve dans le premier des cas ci-dessus, l'examen des cas pour lesquels la propriété (2) n'est pas satisfaite et l'hypothèse de minimalité de n montrent que $s(\tilde{G}'_1) \geq \frac{2(n-\Delta/2)}{\Delta}$. Or si \tilde{S}'_1 est un ensemble cycliquement stable de \tilde{G}'_1 , il est clair, d'après le mode de construction de \tilde{G}'_1 , que G comporte un ensemble cycliquement stable S tel que $|S| = |\tilde{S}'_1| + 1$ et on a une contradiction.

Reste à examiner le cas $\Delta = 4$, $\tilde{A}_1 = \{x\}$, $S_1 = \{y\}$, y' est l'unique voisin de y distinct de x et x' l'unique voisin de x distinct de y . Si \tilde{G}'_1 est un cycle impair dont toutes les arêtes sont doubles (cas incluant celui de la 3-clique dont toutes les arêtes sont doubles), G est également un cycle impair dont toutes les arêtes sont doubles, cas exclu en iv). On a donc une contradiction.

$F - p > 1$, $|S_1| = 2$.- D'après les résultats précédents si $x \in A_1$ on a $d_{S_1}(x) = 2$ et $y \in S_1 \Rightarrow (xy)$ arête simple de G . De plus si $x', x'' \in A_1$ on a $(x'x'') \in E$. En effet si tel n'était pas le cas $S' = S \cup \{x', x''\} - \{y'\}$ (avec $S_1 = \{y', y''\}$) serait un ensemble cycliquement stable, une contradiction.

- Si $|A_1| = \Delta - 1$, G est la $\Delta + 1$ clique et on a une contradiction.

- Si $|A_1| = \Delta - 2$, chaque sommet de $S_1 \cup A_1$ est adjacent à un sommet de $X - (S_1 \cup A_1)$. Soit \tilde{G}'_1 le graphe obtenu à partir de $G_{X - (S_1 \cup A_1)}$ en ajoutant une arête $(v'v'')$ où v' et v'' sont deux sommets de $X - (S_1 \cup A_1)$ adjacents à au moins un sommet de $S_1 \cup A_1$. Les sommets v' et v'' peuvent être choisis de manière à ce que \tilde{G}'_1 ne soit pas un des cas i), ii), iii) ou iv). Si \tilde{S}'_1 est un ensemble cycliquement stable maximum de \tilde{G}'_1 on a : $|\tilde{S}'_1| \geq \frac{2(n-\Delta)}{\Delta}$ et on peut trouver dans G un ensemble cycliquement stable tel que $|S| = |\tilde{S}'_1| + 2$. On a donc une contradiction.

c.q.f.d.

CHAPITRE IV

ENSEMBLES CYCLIQUEMENT STABLES DANS LES GRAPHEs CUBIQUES ;
CAS DES GRAPHEs SIMPLes CUBIQUES CYCLIQUEMENT 4-ARETES CONNEXES

1 - Une propriété des graphes cubiques

Théorème 1 : Dans un graphe connexe sans boucle $G = (X,E)$ dont le degré maximum des sommets est 3 et qui n'est pas la 4-clique, il existe un ensemble cycliquement stable maximum S tel que $X-S$ soit un stable.

Démonstration : Parmi tous les ensembles cycliquement stables maximum de G , choisissons en un S tel que le nombre r_2 de sommets de $X-S$ de degré 2 par rapport à S soit minimum. Montrons que $r_2 = 0$ (ce qui prouve le théorème). Pour ce faire on suppose $r_2 > 0$, $a^{(0)} \in X-S$, $d_S(a^{(0)}) = 2$ et on donne un algorithme de marquage des sommets de X dont on montre qu'il peut se poursuivre indéfiniment. Comme, par hypothèse, G est un graphe fini on a bien une contradiction.

Algorithme de marquage :

- (0) Poser $i = 0$. Marquer le sommet $a^{(0)}$
- (1) $a^{(i)}$ possède au moins un de ses voisins qui n'est pas marqué et qui est dans S , soit $b^{(i)}$ un tel voisin. Aller en (2).
- (2) Marquer tous les sommets de la composante de G_S à laquelle $b^{(i)}$ appartient. $b^{(i)}$ a un voisin hors de S qui n'est pas $a^{(i)}$, soit $a^{(i+1)}$ un tel voisin, marquer $a^{(i+1)}$. Faire $i := i+1$; aller en (1).

On a les propriétés suivantes :

Propriété 1 : Si $a^{(i)}$ possède 2 voisins non marqués $b^{(i)}$ et $c^{(i)}$ alors $b^{(i)}$ et $c^{(i)}$ appartiennent à S et la composante de G_S à laquelle $b^{(i)}$ et $c^{(i)}$ appartiennent est une chaîne joignant $b^{(i)}$ à $c^{(i)}$ ($i=0,1,2,\dots$).

Propriété 2 : Si $a^{(i)}$ possède un seul voisin non marqué $b^{(i)} \in S$ alors $(a^{(i)} b^{(i)})$ est une arête double et la composante de G_S à laquelle $b^{(i)}$ appartient est réduite au sommet $b^{(i)}$ ($i=0,1,2,\dots$).

Propriété 3 : Pour $i = 0, 1, 2, \dots$, $b^{(i)}$ possède exactement un voisin hors de S distinct de $a^{(i)}$.

Propriété 4 : Pour $i = 0, 1, 2, \dots$, $a^{(i+1)}$ possède exactement un voisin marqué à l'étape i : $b^{(i)}$.

Démonstrations des propriétés 1 à 4 : Pour toute valeur de i posons :

$$S^{(i)} = S \cup \left(\bigcup_{j=0}^i \{a^{(j)}\} \right) - \left\{ \bigcup_{j=0}^{i-1} b^{(j)} \right\}$$

$$\hat{S}^{(i)} = S^{(i)} - b^{(i)}$$

et notons que :

1°) $|S^{(i)}| > |S|$ et que par conséquent si $S^{(i)}$ est cycliquement stable, on a une contradiction.

2°) $|\hat{S}^{(i)}| = |S|$, le nombre de sommets de $X-S^{(i)}$ de degré 2 par rapport à $S^{(i)}$ est inférieur au nombre de sommets de $X-S$ de degré 2 par rapport à S et que par conséquent si $\hat{S}^{(i)}$ est cycliquement stable on a une contradiction.

Pour montrer la propriété k ($k=1,2,3,4$) à l'ordre i ($i=0,1,2,\dots$) on suppose qu'on a démontré les propriétés 1, 2, 3 et 4 à l'ordre $i-1$ et les propriétés 1, 2, \dots , $k-1$ à l'ordre i .

1) . Si $b^{(i)}$ et $c^{(i)}$ appartiennent à deux composantes distinctes de G_S , alors $S^{(i)}$ est cycliquement stable, une contradiction.

. Si $b^{(i)}$ n'est pas un sommet pendant de la composante de G_S à laquelle $b^{(i)}$ et $c^{(i)}$ appartiennent alors $\hat{S}^{(i)}$ est cycliquement stable, une contradiction.

. S'il existe un sommet f de degré 3 par rapport à S sur la chaîne qui, dans G_S , joint $b^{(i)}$ à $c^{(i)}$ alors $S^{(i)} - \{f\}$ est un ensemble cycliquement stable qui contredit la minimalité de r_2 pour S .

2) . Si l'arête $(a^{(i)} b^{(i)})$ était simple $S^{(i)}$ serait cycliquement stable.

. Si la composante de G_S à laquelle $b^{(i)}$ appartient n'est pas un sommet isolé alors $\hat{S}^{(i)}$ est cycliquement stable.

3) . Si $d(b^{(i)}) = 2$ alors $\hat{S}^{(i)}$ est cycliquement stable. Il s'ensuit (en utilisant les propriétés 1 et 2) que la propriété 3 est démontrée.

4) Il suffit de montrer que $(a^{(i+1)}c) \in E$, c marqué à l'étape $i \Rightarrow c = b^{(i)}$.

a) Cas $i = 0$

Si la composante de G_S à laquelle $b^{(0)}$ appartient est réduite à $b^{(0)}$ et si $(a^{(0)}a^{(1)}) \in E$ alors $S^{(1)}$ est cycliquement stable, une contradiction. Donc on peut supposer sans perte de généralité que la composante de G_S à laquelle $b^{(0)}$ appartient est une chaîne joignant $c^{(0)}$ et $b^{(0)}$ et soit \hat{c} le voisin de $a^{(1)}$ le plus proche de $c^{(0)}$ dans G_S .

α) Si $(\hat{c}b^{(0)}) \in E$ alors $S^{(1)} - \{\hat{c}\}$ contredit la minimalité de r_2 pour S .

β) Si $(\hat{c}b^{(0)}) \in E$, $\hat{c} \neq c^{(0)}$, $(a^{(0)}a^{(1)}) \in E$ alors $S^{(0)} \cup \{a^{(1)}\} - \{\hat{c}\}$ est cycliquement stable, une contradiction.

γ) Si $(\hat{c}b^{(0)}) \in E$, $\hat{c} \neq c^{(0)}$, $(a^{(0)}a^{(1)}) \in E$ alors $S^{(0)} \cup \{a^{(1)}\} - \{\hat{c}\}$ contredit la minimalité de r_2 pour S .

δ) Si $(\hat{c}b^{(0)}) \in E$, $\hat{c} = c^{(0)}$, $(a^{(0)}a^{(1)}) \in E$ alors $S^{(1)}$ est cycliquement stable, une contradiction.

ϵ) Si $(\hat{c}b^{(0)}) \in E$, $\hat{c} = c^{(0)}$, $(a^{(0)}a^{(1)}) \in E$ alors G est la 4-clique, cas exclu dans les hypothèses du théorème.

b) Cas $i > 0$

S'il existe un voisin de $a^{(i+1)}$ déjà marqué à l'étape i et différent de $b^{(i)}$ alors il existe un tel voisin $c \in S$. Soit \hat{c} le voisin de $a^{(i+1)}$, le plus proche de $c^{(j)}$ ($j \leq i$) dans G_S .

α) $(\hat{c}b^{(i)}) \in E$ alors $S^{i+1} - \{\hat{c}\}$ contredit la minimalité de r_2 dans S .

β) $(a^{(0)}a^{(i+1)}) \in E$, $S \cup \{a^{(i)}a^{(i+1)}\} - \{b^{(i)}\}$ contredit la minimalité de r_2 pour S .

γ) $(\hat{c}b^{(i)}) \in E$, $(a^{(0)}a^{(i+1)}) \in E$ alors $S^{(i+1)}$ est cycliquement stable, une contradiction.

c.q.f.d.

Remarque : 1) B. Grünbaum a introduit la notion de coloration acyclique d'un graphe : on dit qu'un graphe G admet une (k_1, k_2, \dots, k_q) coloration acyclique si l'on peut colorier ses sommets en $k = k_1 + k_2 + \dots + k_q$ couleurs, cet ensemble de k couleurs étant partitionné en q sous-ensembles K_1, K_2, \dots, K_q

$(k_i = |K_i|, i=1,2,\dots,q)$ de telle sorte que l'ensemble des sommets ayant reçu deux couleurs quelconques d'un même ensemble K_i soit cycliquement stable.

Un corollaire du théorème 1 est donc qu'un graphe dont le degré maximum des sommets est 3 qui n'admet pas de composante connexe qui soit la 4-clique, admet une (1-2) coloration acyclique. En effet étant donné un ensemble cycliquement stable maximum S de G pour lequel $r_2 = 0$ on colorie avec la couleur 1 les sommets de $X-S$ et les sommets de S sont coloriés avec les couleurs 2 et 3 de manière à ce que G_S soit bicolorié. Cette bicoloration est certainement possible puisque G_S est une forêt.

On voit, en particulier, qu'on obtient comme corollaire du théorème 1 la proposition suivante : "Les graphes cubiques sont 3-coloriables"

2 - Valeur de $s(G)$ pour les graphes cubiques cycliquement 4 arêtes connexes

Définition 1 : Dans un graphe (simple, sans boucle) $G = (X,E)$ nous appellerons "c-cocycle" un cocycle $\omega(A)$ tel que G_A et G_{X-A} contiennent chacun un cycle. Un graphe est "cycliquement k arêtes connexe" (ou cycliquement k connexe) si k est inférieur ou égal à la cardinalité de tout c-cocycle.

Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour un graphe cubique cycliquement 4 connexe ⁽¹⁾ G , $s(g)$ est égal à sa plus grande valeur possible (cf. théorème 1, chapitre III), c'est à dire $\left\lfloor \frac{3n-2}{4} \right\rfloor$. Ce résultat peut paraître surprenant car un graphe cycliquement 4 connexe est "mieux connecté" qu'un graphe qui ne possède pas cette propriété.

Remarque : 2) La propriété annoncée ($s(G) = \left\lfloor \frac{3n-2}{4} \right\rfloor$) est fausse pour les graphes cubiques sans triangle ainsi que le montre l'exemple suivant :

(1) On remarquera qu'un graphe cubique cycliquement 4 connexe est nécessairement un graphe simple sans boucle.

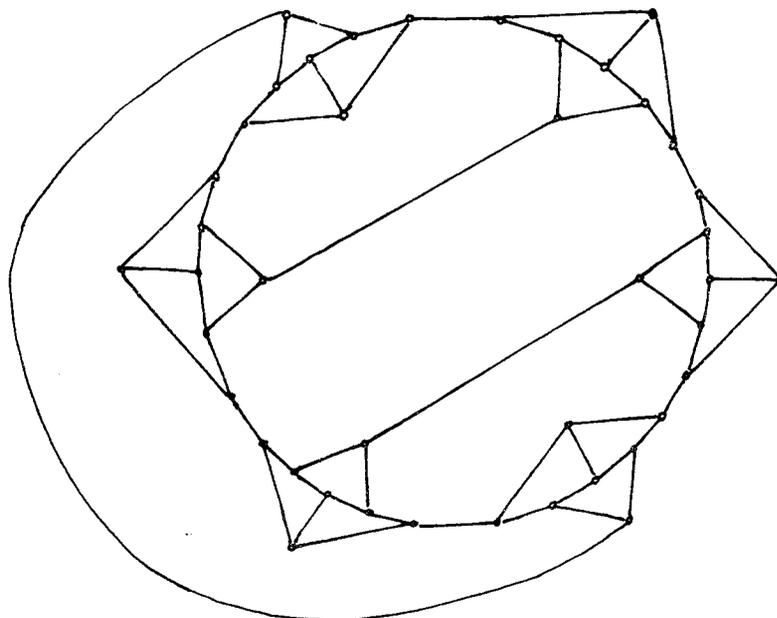


Figure 1

Définition 2 : On dira qu'un graphe cubique $G = (X,E)$ cycliquement 4 connexe est "minimal" si $\forall a \in X, R_a(G)$ est un graphe non cycliquement 4 connexe (cf. définition 3 du chapitre III).

On voit, en utilisant les résultats du Lemme 2 du chapitre III, qu'il suffit de montrer la propriété annoncée pour les graphes cubiques cycliquement 4 connexe minimaux. D'autre part, un graphe cycliquement 4 connexe est certainement 2-connexe et d'après les résultats du théorème 3, chapitre III, on voit qu'il suffit de considérer les cas où le nombre de sommets est supérieur à 10 (en effet pour $n \leq 10, g(n,0) = \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil$).

Lemme 1 : Soit $G = (X,E)$ un graphe cubique cycliquement 4 connexe. Si pour $a \in X$ il n'existe pas d'arête de G adjacente à a et appartenant à un c -cocycle de cardinalité 4, alors $R_a(G)$ est cycliquement 4 connexe.

Démonstration : Si $\omega(A)$ est un c -cocycle de $R_a(G)$ de cardinal inférieur ou égal à 3, il existe $(ax) \in E$ tel que $\omega(A) \cup \{(ax)\}$ est un c -cocycle de G de cardinalité ≤ 4 .

c.q.f.d.

Corollaire : Soit $G = (X,E)$ un graphe cubique cycliquement 5 connexe, alors $\forall a \in X, R_a(G)$ est cycliquement k connexe avec $k \geq 4$.

Lemme 2⁽¹⁾ : Tout graphe $G = (X,E)$ cubique cycliquement 4 connexe minimal contient un cycle de longueur 4.

Démonstration :

1 - Toutes les arêtes d'un c-cocycle de G de cardinalité 4 sont non adjacentes 2 à 2, sinon G ne serait pas cycliquement 4 connexe.

2 - Soit $\omega(A) = \{(aa'), (bb'), (cc'), (dd')\}$ un c-cocycle de cardinal 4 (un tel c-cocycle existe d'après le Lemme 1) tel que $A = \{a,b,c,d\} \subset A$ soit minimal pour cette propriété. Alors on a $A = \{a,b,c,d\}$.

En effet sinon soit $z \in A - \{a,b,c,d\}$; il existe, d'après le Lemme 1, $t \in A$ (tz) $\in E$ tel que $(tz) \in \omega(A')$ c-cocycle de G de cardinal 4 puisque $R_z(G)$ n'est pas cycliquement 4 connexe. Soit E_A l'ensemble des arêtes de G_A .

$$|\omega(A') \cap E_A| \geq 2$$

Sinon G ne serait pas cycliquement 4 connexe.

Dans tous les cas ($|\omega(A') \cap E_A| = 2, 3$ ou 4) on voit que A n'est pas minimal et on a donc une contradiction.

c.q.f.d.

Dans la suite (Lemmes 3, 4, 5, 6, 7, 8), on considèrera un graphe $G = (X,E)$ cubique sur $n > 10$ sommets cycliquement 4 connexe minimal admettant donc un sous-graphe G_A , qui est un cycle de longueur 4.

Soit $A = \{x \in X \mid \exists x' \in A', (xx') \in E\}$; puisque G est cycliquement 4 connexe $|A| = 4$ et on pose : $A = \{x,y,u,v\}$. On pose également :

$$X' = X - A'$$

$$G' = G_{X'}$$

$$\forall C \subset X', \omega'(C) = \text{cocycle relatif à } C \text{ dans } G'$$

et on a :

$$(1) \quad |\omega(C)| = |\omega'(C)| + |C \cap A|$$

Lemme 3 : G_A ne contient pas de sommet de degré 2.

Démonstration : Supposons que x soit, disons, adjacent à u et v . Alors : $|\omega(A') \cup \{x,u,v\}| = 3 \Rightarrow |X' - \{x,u,v\}| = 1$ (puisque G est cycliquement 4 connexe).

Ce qui contredit le fait que le nombre de sommets de G est supérieur à 10.

c.q.f.d.

(1) La démonstration de ce lemme est due à C. Payan.

Lemme 4 : Pour tout c-cocycle $\omega'(C)$ de G' on a :

- (i) $|\omega'(C)| \geq 2$
- (ii) $|\omega'(C)| = 2 \Rightarrow |C \cap A| = |(X'-C) \cap A| = 2$
- (iii) $|\omega'(C)| = 2 \Rightarrow E(A) \cap \omega'(C) = \emptyset$
- (iv) $|\omega'(C)| = 3 \Rightarrow |C \cap A| \geq 1, |(X'-C) \cap A| \geq 1$

Démonstration : (i), (ii) et (iv) sont des conséquences directes de (1) et du fait que G est cycliquement 4 connexe.

Supposons que $x, y \in C, u, v \in X'-C (xu) \in E$ alors on a :

$|\omega(C-\{x\})| = 3$ qui implique $C = \{x, y\}$ puisque G est cycliquement 4 connexe.

Une contradiction avec le fait que $\omega'(C)$ est un c-cocycle.

c.q.f.d.

Lemme 5 : Soient deux c-cocycles $\omega'(C_1)$ et $\omega'(C_2)$ de G' tels que :

$$|\omega'(C_1)| = |\omega'(C_2)| = 2$$

alors

$$|C_1 \cap C_2 \cap A| = 0 \text{ ou } 2.$$

Démonstration : Supposons $|C_1 \cap C_2 \cap A| = 1$ et posons :

$$H_1 = C_1 \cap C_2$$

$$H_2 = C_1 \cap (X'-C_2)$$

$$H_3 = (X'-C_1) \cap C_2$$

$$H_4 = (X'-C_1) \cap (X'-C_2)$$

D'après le Lemme 4 (ii) on a :

$$|H_1 \cap A| = |H_2 \cap A| = |H_3 \cap A| = |H_4 \cap A| = 1$$

et par conséquent

$$|\omega'(H_i)| \geq 2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et comme d'autre part, par hypothèse :

$$|\omega'(H_1 \cup H_2)| = |\omega'(H_1 \cup H_3)| = 2$$

on a

$$|\omega'(H_i)| = 2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et donc que chaque H_i ne comporte qu'un sommet, ce qui est impossible puisque $\omega'(C_1)$ et $\omega'(C_2)$ sont des c-cocycles.

c.q.f.d.

Lemme 6 : Soient deux c-cocycles $\omega'(C)$ et $\omega'(D)$ de G' tels que $|\omega'(C)| = 2$, $|\omega'(D)| = 3$; alors :

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in X ; u, v \in X'-C \\ x \in D \quad |A \cap D| = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y \in D$$

Démonstration : Supposons $x, u \in D$; $y, v \in X'-D$ et posons :

$$H_1 = C \cap D$$

$$H_2 = C \cap (X'-D)$$

$$H_3 = (X'-C) \cap D$$

$$H_4 = (X'-C) \cap (X'-D)$$

On a :

$$x \in H_1, y \in H_2, u \in H_3, v \in H_4$$

et donc :

$$|\omega'(H_i)| \geq 2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et comme $|\omega'(H_1 \cup H_2)| = 2$ et $|\omega'(H_1 \cup H_3)| = 3$ on trouve que soit C , soit $X'-C$ ne comporte que 2 sommets, une contradiction avec le fait que $\omega'(C)$ est un c-cocycle.

c.q.f.d.

Lemme 7 : Soient 3 c-cocycles $\omega'(D_1)$, $\omega'(D_2)$, $\omega'(D_3)$ de G' tels que : $|\omega'(D_1)| = |\omega'(D_2)| = |\omega'(D_3)| = 3$, alors :

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in D_1 \quad u, v \in X'-D_1 \\ x, v \in D_2 \quad y, u \in X'-D_2 \\ x \in D_3 \quad |D_3 \cap A| = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow u \in X'-D_3$$

Démonstration : Supposons $u \in D_3$ et posons :

$$H_1 = D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

$$H_2 = D_1 \cap (X'-D_2) \cap (X'-D_3)$$

$$H_3 = (X'-D_1) \cap D_2 \cap (X'-D_3)$$

$$H_4 = (X'-D_1) \cap (X'-D_2) \cap D_3$$

$$H_5 = (X'-D_1) \cap D_2 \cap D_3$$

$$H_6 = D_1 \cap D_2 \cap (X'-D_3)$$

$$H_7 = D_1 \cap (X'-D_2) \cap D_3$$

$$H_8 = (X'-D_1) \cap (X'-D_2) \cap (X'-D_3)$$

on a :

$$x \in H_1, y \in H_2, u \in H_3, v \in H_4$$

$(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8)$ est une partition de X' .

Posons :

$$x_{ij} = |\{(ab) \in E \mid a \in H_i, b \in H_j\}| \quad i, j = 1, 2, \dots, 8 \quad i < j$$

$$z_i = |H_i| \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

et comme G est cubique et cycliquement 4 connexe on a :

$$(2) \quad z_i = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_j x_{ij} = 2 & \text{si } i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \sum_j x_{ij} = 3 & \text{si } i = 5, 6, 7 \text{ ou } 8 \end{cases}$$

$$(3) \quad z_i > 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_j x_{ij} \geq 3 & \text{si } i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \sum_j x_{ij} \geq 4 & \text{si } i = 5, 6, 7 \text{ ou } 8 \end{cases}$$

On posera donc :

$$f(z) = \begin{cases} 2 & \text{si } z = 1 \\ \geq 3 & \text{si } z > 1 \end{cases} \quad g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ 3 & \text{si } z = 1 \\ \geq 4 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

et les contraintes auxquelles doivent satisfaire les x_{ij} sont :

		12	13	14	15	16	17	18	23	24	25	26	27	28	34	35	36	37	38	45	46	47	48	56	57	58	67	68	78			
I	{	1 1 1							1 1 1 1				1			1 1				1 1			1 1			1 1			1 1	= 3		
		1	1						1 1 1	1 1				1			1 1 1 1									1 1 1 1				= 3		
		1 1			1	1			1 1	1			1 1	1			1				1			1 1			1 1			1	= 3	
II	{	1 1 1 1 1 1 1 1																													= $f(z_1)$	
		1								1 1 1 1 1 1 1																						= $f(z_2)$
			1							1							1 1 1 1 1															= $f(z_3)$
				1							1					1						1 1 1 1 1										= $f(z_4)$
III	{				1										1					1				1 1 1							= $g(z_5)$	
						1									1					1			1	1		1 1					= $g(z_6)$	
							1								1					1			1	1	1	1	1					= $g(z_7)$
								1							1					1			1	1	1	1	1	1				= $g(z_8)$

Posons :

$$x_G = x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{67} + x_{68} + x_{78}$$

$$x_H = x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{35} + x_{36} + x_{38} + x_{45} + x_{47} + x_{48}$$

$$x_I = x_{18} + x_{25} + x_{37} + x_{46}$$

$$x_J = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34}$$

Si on fait la somme des 3 équations I, des 4 inéquations II et des 4 inéquations III, il vient :

$$(I^*) \quad x_H + 2x_G + 2x_J + 3x_I = 9$$

$$(II^*) \quad x_H + 2x_J + x_I \geq f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_4)$$

$$(III^*) \quad x_H + 2x_I \geq g(z_5) + g(z_6) + g(z_7) + g(z_8)$$

Comme $f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_4) \geq 8$ on tire de (I^*) et (II^*) :

$$2x_G + 2x_I \leq 1 \Rightarrow x_G = x_I = 0$$

et par conséquent $f(z_1) + f(z_2) + f(z_3) + f(z_4) = 9$

c'est à dire $z_i > 1 \Rightarrow z_j = 1 \quad j \neq i \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

ou en d'autres termes, 3 des ensembles H_1, H_2, H_3, H_4 sont réduits à un point.

(I^*) et (III^*) s'écrivent :

$$(I^*) \quad x_H + 2x_J = 9$$

$$(III^*) \quad x_H \geq g(z_5) + g(z_6) + g(z_7) + g(z_8)$$

5 cas sont à envisager :

1°) Les 4 ensembles H_5, H_6, H_7, H_8 sont vides alors (III^*) et (I^*) donnent :

$$x_H = 0, 2x_J = 9, \text{ une impossibilité.}$$

2°) Un seul des 4 ensembles H_5, H_6, H_7, H_8 est non vide. En cherchant des valeurs de $f(z_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) et $g(z_j)$ ($j=5, 6, 7, 8$) pour lesquelles le système I, II, III a une solution dans N on trouve quatre cas possibles :

$$- z_1 > 1, z_2 = z_3 = z_4 = 1, z_5 = z_6 = z_7 = 0, z_8 = 1, x_J = 3$$

$$- z_1 = 1, z_2 > 1, z_3 = z_4 = 1, z_5 = 1, z_6 = z_7 = z_8 = 0, x_J = 3$$

$$- z_1 = z_2 = 1, z_3 > 1, z_4 = 1, z_5 = z_6 = z_8 = 0, z_7 = 1, x_J = 3$$

$$- z_1 = z_2 = z_3 = 1, z_4 > 1, z_6 > 1, z_5 = z_7 = z_8 = 0, x_J = 3$$

Le premier de ces cas correspond à celui qui est représenté sur la figure 2.

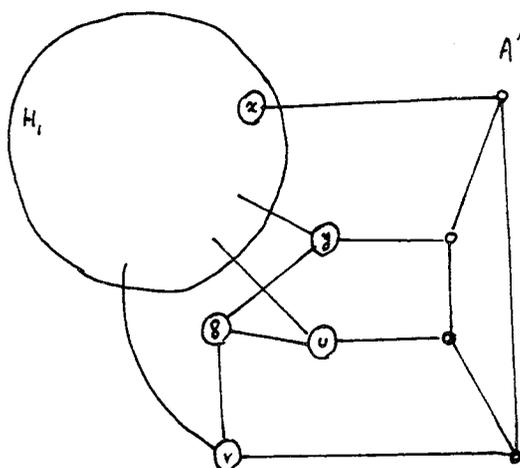


Figure 2

Si x était adjacent à un des sommets y , u ou v on aurait $z_1 = 2$, une contradiction avec le fait que G comporte plus de 10 sommets.

Si x n'est pas adjacent ni à u , ni à y , ni à v , alors $R_8(G)$ est cycliquement 4 connexe. Le graphe considéré n'était pas minimal, une contradiction.

Les autres cas se traitent de manière similaire, car ils donnent lieu à des graphes isomorphes à celui de l'exemple ci-dessus.

3°) Deux des 4 ensembles H_5, H_6, H_7, H_8 sont non vides. En raisonnant comme au 2°), on voit qu'alors $x_j = 2$ et par conséquent ((II*) et (III*)) l'un des ensembles H_5, H_6, H_7 ou H_8 est réduit à un seul sommet. La réduction du graphe par rapport à ce sommet donne un graphe cycliquement 4 connexe ainsi que l'illustre la figure 3.

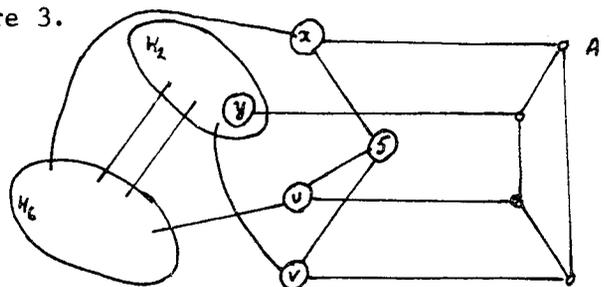


Figure 3

$R_5(G)$ est encore un graphe cycliquement 4 connexe et le graphe considéré n'était pas minimal, une contradiction.

(Les autres cas possibles sont également isomorphes à l'exemple ci-dessus).

4°) 3 des quatre ensembles H_5, H_6, H_7 et H_8 sont non vides.

Alors d'après (I*) et (III*) ces 4 ensembles sont réduits chacun à un sommet. Les seuls cas possibles sont :

$$z_1 > 1, z_2 = z_3 = z_4 = 1, z_5 = z_6 = z_7 = 1, z_8 = 0$$

$$z_1 = 1, z_2 > 1, z_3 = z_4 = 1, z_5 = 0, z_6 = z_7 = z_8 = 1$$

$$z_1 = z_2 = 1, z_3 > 1, z_4 = 1, z_5 = z_6 = 1, z_7 = 0, z_8 = 1$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 1, z_4 > 1, z_5 = z_6 = z_7 = 1, z_8 = 0.$$

Les 4 graphes correspondant sont identiques (à une renumérotation près des sommets). Le premier d'entre eux est celui de la figure 4.

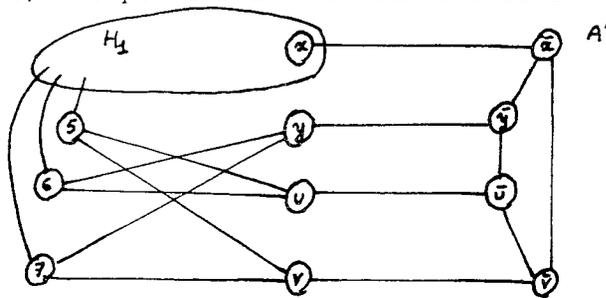


Figure 4

$R_u(G)$ est cycliquement 4 connexe, une contradiction.

5°) H_5, H_6, H_7, H_8 sont non vides alors :

$$x_H \geq g(z_5) + g(z_6) + g(z_7) + g(z_8) \geq 12 \quad \text{contredit (I*)}$$

c.q.f.d.

Lemme 8 : On peut accoupler les sommets de $A = \{x, y, u, v\}$ (disons (xu) et (yv)) de sorte que $\hat{G}' = (X', E_{X'} \cup \{(xu), (yv)\})$ soit cubique et cycliquement 4 connexe.

Démonstration : Il est clair que \hat{G}' est cubique. Il faut montrer que \hat{G}' est cycliquement 4 connexe. Pour $C \subset X', \hat{\omega}(C)$ désigne le cocycle relatif à C dans \hat{G}' .

On distingue 2 cas :

1°) Il existe un c-cocycle $\omega'(C)$ dans G' tel que $|\omega'(C)| = 2$.

Sans perte de généralité on suppose $x, y \in C$; $u, v \in X' - C$.

- S'il existe un c-cocycle $\omega'(C')$ dans G' tel que $|\omega'(C')| = 2$ on a $|\hat{\omega}(C')| = 4$ d'après le Lemme 5.

- S'il existe un c-cocycle $\omega'(D)$ dans G' tel que $|\omega'(D)| = 3$ on a $|\hat{\omega}(D)| \geq 4$ d'après le Lemme 6.

2°) Il n'existe pas, dans G' , de c-cocycle de cardinal 2. Supposons qu'il existe dans G' deux c-cocycles $\omega'(D_1), \omega'(D_2)$ tels que :

$$\begin{aligned} |\omega'(D_1)| &= |\omega'(D_2)| = 3 \\ |D_1 \cap A| &= |D_2 \cap A| = 2 \\ |D_1 \cap D_2 \cap A| &= 1 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \{x\} &= D_1 \cap D_2 \cap A \\ \{y\} &= D_1 \cap A - \{x\} \\ \{v\} &= D_2 \cap A - \{x\} \end{aligned}$$

Alors, d'après le Lemme 7, quelque soit le c-cocycle $\omega'(D)$ de cardinal 3 dans G' , on a $|\hat{\omega}(D)| \geq 4$.

c.q.f.d.

Théorème 2 : Pour tout graphe $G = (X, E)$ sur n sommets cubique cycliquement

4 arêtes connexe $s(G) = \left\lfloor \frac{3n-2}{4} \right\rfloor$

Démonstration : i) Supposons la propriété fautive et soit G un graphe cubique cycliquement 4 connexe minimal tel que $s(G) < \left\lfloor \frac{3n-2}{4} \right\rfloor$ et ayant un nombre de sommets n minimum pour cette propriété. Soit $A' \subset X$ tel que $G_{A'}$ soit un cycle de longueur 4 (Lemme 2) et soit \hat{G}' le graphe cubique cycliquement 4 connexe construit à partir de $G_{X-A'}$, comme il est indiqué au Lemme 8. Le nombre de sommets de \hat{G}' est $n-4$ et par conséquent si S' est un ensemble cycliquement stable maximum de \hat{G}' on a :

$$|\hat{S}'| = \left\lfloor \frac{3(n-4)-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n-2}{4} \right\rfloor - 3$$

On considère les composantes connexes de $G'(\hat{S}')$ (et non de $\hat{G}'(\hat{S}')$). A cause de la présence des arêtes (xu) et (yv) dans \hat{G}' on a :

- x et u (resp. y et v) n'appartiennent pas à la même composante connexe de $G'(\hat{S}')$.

- Si x et y (resp. u et v) appartiennent à la même composante de $G'(\hat{S}')$ alors u et v (resp. x et y) n'appartiennent pas à la même composante.

Supposons donc que x et y appartiennent à la même composante de $G'(\hat{S}')$; alors $S = \hat{S}' \cup \{y, u, v\}$ (où \bar{y} , \bar{u} , \bar{v} sont les sommets de A adjacents à y , u , v respectivement) est cycliquement stable dans G et on a :

$$|S| = |\hat{S}'| + 3$$

une contradiction.

c.q.f.d.

3 - Quelques autres propriétés des ensembles cycliquement stables maximum dans le cas des graphes cubiques cycliquement 4 connexe

Soit \mathcal{S} la famille des ensembles cycliquement stables de cardinalité maximum. On va montrer que dans le cas des graphes cubiques cycliquement 4 connexe on a :

$$\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \emptyset$$

Remarque : 3) Le résultat annoncé est, en un sens, le meilleur possible. Dans le graphe ci-dessous (pour lequel on a cependant $s(G) = \left\lceil \frac{3n-2}{4} \right\rceil$), $\Sigma = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$ n'est pas un stable de G .

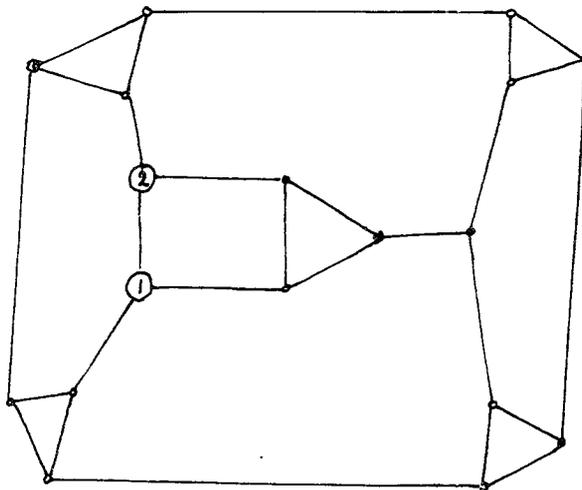


Figure 5

1 et 2 appartiennent à tout ensemble cycliquement stable maximum.

Pour démontrer la propriété annoncée on va prouver que dans un graphe cycliquement 4 connexe, pour tout sommet x il existe un ensemble cycliquement stable maximum S_x tel que $x \notin S_x$. On aura besoin du résultat suivant :

Lemme 9 : Soit G un graphe cycliquement 4 connexe qui n'est pas cycliquement 5 connexe, qui n'est pas la 4 clique et qui ne possède pas de cycle de longueur 4 ; alors il existe deux sommets a et b tels que :

- (i) $\Gamma(a) \cap \Gamma(b) = \emptyset, \quad a \notin \Gamma(b)$
- (ii) $R_a(G)$ et $R_b(G)$ sont cycliquement 4 connexe.

Démonstration : Soit $\omega(A)$ un c -cocycle de G de cardinal 4 tel que A soit minimal par inclusion pour cette propriété. Comme, par hypothèse, G ne contient pas de cycle de longueur 4, il existe un sommet $a \in A$ qui n'est adjacent à aucun sommet de $X-A$; $R_a(G)$ est alors cycliquement 4 connexe (cf. Lemme 2). De même il existe $b \in X-A$ tel que $R_b(G)$ soit cycliquement 4 connexe et b n'est adjacent à aucun sommet de A . Par construction a et b satisfont (i) et (ii).
c.q.f.d.

Théorème 3 : Si $G = (X,E)$ est un graphe cubique cycliquement 4 connexe, alors :

$$\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \emptyset$$

Démonstration : Soit G un graphe cycliquement 4 connexe tel que $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset$ et dont le nombre de sommets est minimum pour cette propriété.

1°) Si G est cycliquement 5 connexe, on sait, d'après le corollaire du Lemme 1 que $\forall x \in X \quad R_x(G)$ est cycliquement 4 connexe. Soient S'_x un ensemble cycliquement stable dans $R_x(G)$ et x_1, x_2, x_3 les voisins de x . Alors :

$$S_x = S'_x \cup \{x_1, x_2, x_3\}$$

est cycliquement stable maximum dans G . On a donc une contradiction.

2°) Si G n'est pas cycliquement 5 connexe et ne contient pas de cycle de longueur 4, on peut appliquer le Lemme 9 et soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 les voisins de a et b respectivement.

Pour tout sommet $x \in R_a(G)$ (resp. $y \in R_b(G)$) il existe, d'après l'hypothèse de minimalité de G , un ensemble cycliquement stable maximum S_x dans $R_a(G)$ (resp. S_y dans $R_b(G)$) tel que $x \notin S_x$ (resp. $y \notin S_y$). De plus d'après

le Théorème 2 :

$$S_a = S_x \cup \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$S_b = S_y \cup \{b_1, b_2, b_3\}$$

sont des ensembles cycliquement stables maximum. Comme tout sommet de G appartient nécessairement à $R_a(G)$ ou à $R_b(G)$ (puisque la condition (i) du Lemme 9 est satisfaite) on a une contradiction.

3°) Soit $A' = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\}$ tel que $G_{A'}$ soit un cycle. On définit G' à partir de $G(X-A')$ comme dans les énoncés du Lemme 8. Puisque \hat{G}' a 4 sommets de moins que G, pour tout sommet $a \in X'$ il existe \hat{S}'_a cycliquement stable dans \hat{G}' tel que $a \notin \hat{S}'_a$.

Avec les notations définies dans la démonstration du Théorème 2

on a :

$$S^-_x = \hat{S}'_u \cup \{\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\}$$

$$S^-_u = \hat{S}'_x \cup \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}\}$$

$$S^-_y = \hat{S}'_v \cup \{\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}\}$$

$$S^-_v = \hat{S}'_y \cup \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\}$$

$$\text{et pour } a \in X' \quad S_a = \begin{cases} \hat{S}'_a \cup \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\} & \text{si } u \text{ et } v \text{ appartiennent à la même} \\ & \text{composante connexe de } G'(S'_a) \\ \hat{S}'_a \cup \{\bar{v}, \bar{u}, \bar{v}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et par conséquent on a une contradiction.

c.q.f.d.

Définition 3 : Soit $G = (X, E)$ un graphe et $e', e'' \in E$ on définit

$\tilde{G} = (\tilde{X}, \tilde{E}) = D_{e', e''}(G)$ de la manière suivante :

- . Soient a', b' et a'', b'' les extrémités des arêtes e' et e'' respectivement.
- . $\tilde{X} = X \cup \{x', x''\}$
- . $\tilde{E} = E - \{e', e''\} \cup \{(a'x'), (b'x'), (a''x''), (b''x''), (x'x'')\}$

c'est à dire qu'on 'ajoute un sommet sur les arêtes e' et e'' et on relie entre eux les sommets nouvellement créés".

Remarque : 4) Si G est un graphe cubique $D_{e', e''}(G)$ est également cubique ; Si G est cycliquement 4 connexe et si e' et e'' ne sont pas adjacents alors $D_{e', e''}(G)$ est cycliquement 4 connexe.

Lemme 10 : Soit $G = (X, E)$ un graphe cubique d'ordre $n \equiv 2 \pmod{4}$) cycliquement 4 connexe. Soient S un ensemble cycliquement stable maximum dans G et $A \in X$ tel que G_A soit un cycle de longueur 4. On a :

- i) G_S est connexe
- ii) $\{x \in X-S \mid d_S(x) < 3\} = \emptyset$
- iii) $|S \cap A| = 3$

Démonstration : Les 2 premières propositions sont des conséquences directes du théorème 2 et de la démonstration du théorème 1, chapitre III (si

$s(G) = \frac{3n-2}{4}$ on a $p = 1$ et $r_2 = 0$).

Supposons que $S \cap A = \{x', y'\}$ et soient x et y les voisins de x' et y' respectivement dans $X-A$. Posons :

$$G' = (X', E') = G_{X-A}$$

$$\hat{G}' = (X', E' \cup \{(xu), (yv)\})$$

où u et v sont les voisins dans $X-A$ des sommets de $S \cap A$ distincts de x' et y' .

Alors $S \cap (X-A)$ est cycliquement stable dans \hat{G}' et on a une contradiction puisque

$$\hat{G}' \text{ est cubique et } |S \cap (X-A)| > \left\lfloor \frac{3|X'| - 2}{4} \right\rfloor.$$

c.q.f.d.

Théorème 4 : Si $G = (X, E)$ est un graphe cubique cycliquement 4 connexe il possède un ensemble cycliquement stable maximum S tel que G_S soit connexe.

Démonstration : Dans le cas où $n \equiv 2$ (modulo 4) la proposition est prouvée au Lemme 10.

Dans le cas où $n \equiv 0$ (modulo 4) soit $(a'a'') \in E$ et $e', e'' \in E$ telles que :

- . e' soit incidente à a' , $e' \neq (a'a'')$
- . e'' soit incidente à a'' , $e'' \neq (a'a'')$.

Comme G est cycliquement 4 connexe, G ne contient pas de triangle et par conséquent e' et e'' ne sont pas adjacents. Il résulte de la remarque 4 que $\tilde{G} = D_{e', e''}(G)$ est cubique cycliquement 4 connexe.

Par construction $A = \{a', a'', x', x''\}$ est tel que \tilde{G}_A est un cycle de longueur 4. Soit \tilde{S} un ensemble cycliquement stable maximum de \tilde{G} tel que $a' \notin \tilde{S}$ (un tel \tilde{S} existe d'après le Théorème 3). Posons :

$$S = \tilde{S} - \{x', x''\}$$

Alors S est un ensemble cycliquement stable maximum dans G et

\tilde{G}_S connexe $\Rightarrow G_S$ connexe.

c.q.f.d.

TROISIEME PARTIE

ETUDE DES MATRICES A ELEMENTS DANS $\{-1, 0, +1\}$ A L'AIDE DES METHODES
DE LA THEORIE DES GRAPHS ET DES HYPERGRAPHS

INTRODUCTION A LA TROISIEME PARTIE

La notion de graphe -c'est bien connu- est redondante par rapport à celle de relation binaire. Aussi n'est-il pas sans intérêt de se demander pour quelles raisons l'utilisation du langage de la théorie des graphes a eu des développements si féconds. La réponse à cette question illustre parfaitement le caractère dialectique de la démarche de l'intelligence humaine. Du point de vue pratique les graphes se trouvent être un précieux outil de modélisation des problèmes réels ; les contextes dans lesquels le graphe se trouve être un outil irremplaçable sont en effet fort variés (Economie, Sociologie, Recherche Opérationnelle, Chimie...). Du point de vue théorique, le fait que les graphes possèdent une représentation "graphique" claire aide l'intuition et stimule l'imagination ; ce sont en effet les représentations graphiques qui ont permis à la théorie de connaître des développements considérables au cours des 20 dernières années. En d'autres termes, un grand nombre des résultats (souvent fort abstraits) obtenus en théorie des graphes l'ont été parce qu'"on peut faire des petits dessins".

Nul doute que l'une des idées de C. Berge quand il a introduit le concept d'hypergraphe ait été d'utiliser le langage très imagé et les méthodes de la théorie des graphes pour étudier les matrices dont les éléments valent 0 ou 1, considérées comme généralisation des matrices d'incidence aux arêtes des graphes non orientés. L'un des intérêts de la théorie des hypergraphes telle qu'elle a été développée par C. Berge est de mettre en évidence le fait que certains concepts de la théorie des graphes peuvent se généraliser de plusieurs manières différentes suivant la propriété caractéristique qu'on choisit de conserver et la manière dont on envisage d'effectuer cette généralisation. Ainsi, par exemple, si on concentre son intérêt sur les problèmes de coloration, selon qu'on choisit la propriété d'admettre, pour un graphe non orienté et tous ses sous-graphes, une bicoloration ou une bicoloration équitable, le concept de graphe biparti s'étend en celui d'hypergraphe équilibré (théorème de Berge) ou en celui d'hypergraphe unimodulaire (théorème de Ghouila-Houri).

Partant de ces remarques comme point de départ, je propose dans cette partie :

. de faire correspondre à toute matrice A dont les éléments valent $+1$, -1 ou 0 un "hypergraphe (général)" H dont A peut être considéré comme "matrice d'incidence aux arcs" c'est à dire que les lignes de A sont en bijection avec les sommets de H et les colonnes de A en bijection avec les "arcs" de H .
 . d'appeler "pseudo-chaîne joignant x_i et x_j " un hypergraphe (général) dont la matrice d'incidence aux arcs a la propriété que toutes ses colonnes et toutes ses lignes -sauf celles qui correspondent aux sommets x_i et x_j - possèdent un nombre pair d'éléments non nuls. Il est clair qu'une pseudo-chaîne ainsi définie peut être considérée comme une certaine généralisation du concept de chaîne en théorie des graphes.

On définit alors une relation binaire dite de "connexité" sur les sommets d'un hypergraphe (général) :

$$h_H(x_i, x_j) \iff \begin{cases} \text{il existe une pseudo-chaîne joignant } x_i \text{ et } x_j \text{ qui est} \\ \text{un hypergraphe partiel de } H \text{ ou bien } x_i = x_j. \end{cases}$$

et on montre dans le chapitre V que ce concept de connexité appliqué aux hypergraphes (généraux) est une "bonne" généralisation du concept de connexité en théorie des graphes parce que bon nombre de résultats de théorie des graphes se retrouvent, dans le cas des hypergraphes, sous une forme extrêmement voisine. En particulier les concepts d'arbre et de forêt trouvent une généralisation très "naturelle" : on peut caractériser un arbre comme étant un hypergraphe connexe minimal et on retrouve une série de propriétés caractéristiques de ces arbres qui sont tout à fait analogues à celles des arbres en théorie des graphes, par exemple le fait qu'un arbre est connexe et possède $n-1$ arcs ou est connexe et sans cycle, etc... Comme la notion d'inclusion peut être elle-même généralisée de deux manières différentes (inclusion et inclusion "propre") c'est en fait dix propriétés équivalentes qui caractérisent les dits arbres (Théorème V-6).

Un graphe est une famille de parties à 2 éléments, on aurait pu penser à généraliser cette notion en définissant des familles à un nombre pair d'éléments. Les développements du chapitre V montrent que cette idée n'est pas dépourvue d'intérêts car les arcs de cardinal impair jouent un rôle très particulier : ils ont en fait un rôle analogue aux "boucles" en théorie des graphes.

La conclusion de ce chapitre V est donc que ce concept de connexité permet d'avoir une meilleure intelligence de la structure des hypergraphes (généraux) et que, par conséquent, le langage de la théorie des graphes se trouve être un bon outil pour l'étude des matrices dont les éléments valent +1, -1 ou 0.

Le chapitre VI est consacré à l'étude de ce que peut apporter le concept de connexité défini au chapitre V dans l'étude des matrices totalement unimodulaires (qui peuvent elles-même être considérées comme une généralisation possible des matrices d'incidence aux arcs des graphes orientés). On voit qu'il y a une relation très étroite entre les composantes connexes (les classes de la relation de connexité) et les différentes manières de "bicolorer équitablement" les sommets d'un hypergraphe unimodulaire. Puis on montre que les notions de flot et de tension ainsi que les théorèmes classiques de la théorie des flots se généralisent de manière immédiate sur les hypergraphes (généraux) unimodulaires. Enfin on vérifie que les théorèmes de caractérisation connus des matrices totalement unimodulaires se retrouvent de manière directe en utilisant les notions définies ici.

Je tiens à remercier tout particulièrement Paul Camion qui m'a aidé à dégager dans toute sa généralité le concept de connexité que j'avais d'abord introduit dans le cas des hypergraphes unimodulaires.



CHAPITRE V

CONNEXITE DANS LES HYPERGRAPHES GENERAUX

1 - Définition de la notion de connexité dans les hypergraphes généraux ; pseudo-cycles, pseudo-cocycles

Définitions : 1) A une matrice A $n \times m$ dont les éléments valent 0, +1 ou -1, on associe un "hypergraphe" $H = (X, A)$ où :

- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ensemble des "sommets", est en bijection avec l'ensemble des lignes de A .

- $A = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, ensemble des "arcs" est en bijection avec l'ensemble des colonnes de A .

On dira que l'arc E_j ($j = 1, 2, \dots, m$) est incident vers l'extérieur (resp. incident vers l'intérieur, non incident) au sommet x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) suivant que $A_i^j = 1$ (resp. $A_i^j = -1$, $A_i^j = 0$).

La matrice A associée à l'hypergraphe H sera dite "matrice d'incidence aux arcs" de H . Nous restreindrons notre attention aux hypergraphes dont les matrices d'incidence aux arcs ne contiennent pas de colonne de 0.

L'arc E_j est dit "pair" ou "impair" suivant que l'arc E_j est incident à un nombre pair ou impair de sommets c'est à dire suivant que la colonne A^j de la matrice A contient un nombre pair ou impair d'éléments non nuls.

On désigne par $A^{(o)}$ (resp. $A^{(e)}$) l'ensemble des arcs impairs (resp. pairs) de H et on posera :

$$\left. \begin{array}{l} m_o = |A^{(o)}| \\ m_e = |A^{(e)}| \end{array} \right\} m = m_o + m_e$$

Sans perte de généralité on supposera que :

$$E_j \in A^{(e)} \Rightarrow 1 \leq j \leq m_e$$

et par conséquent

$$E_j \in A^{(o)} \Rightarrow m_e + 1 \leq j \leq m$$

Un hypergraphe sera dit "pair" si $A^{(o)} = \emptyset$.

2) Un hypergraphe sera dit "Booléen" ou "hypergraphe au sens de Berge" (et nous les désignerons par B-hypergraphe)⁽¹⁾ si sa matrice d'incidence aux arcs ne contient que des 0 et des +1. Un B-hypergraphe sera dit aussi "non orienté" et les arcs d'un B-hypergraphe seront appelés "arêtes".

3) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe dont la matrice d'incidence aux arcs est A et $X' \subset X$, $A' \subset A$. Posons :

$$A'_{X'} = \{E \cap X' \mid E \subset A', E \cap X' \neq \emptyset\}$$

A' = sous matrice de A obtenue en conservant les lignes correspondant aux sommets de H inclus dans X' et toutes les colonnes, puis en supprimant les colonnes de 0 de la matrice ainsi obtenue.

A'' = sous matrice de A obtenue en conservant les colonnes correspondant aux arcs de H inclus dans A' et toutes les lignes.

A''' = sous matrice de A obtenue en conservant les lignes correspondant aux sommets de H inclus dans X' et les colonnes correspondant aux arcs de H inclus dans A' , puis en supprimant les colonnes de 0 de la matrice ainsi obtenue.

Les hypergraphes $H_{X'} = (X', A_{X'})$, (X, A') et $(X', A'_{X'})$ dont les matrices d'incidences aux arcs sont respectivement A' , A'' et A''' sont appelées :

- $H_{X'}$: "sous hypergraphe de H construit sur X' "
- (X, A') : "hypergraphe partiel de H construit sur A' "
- $(X', A'_{X'})$: "sous hypergraphe partiel de H construit sur X' et A' "

4) A un hypergraphe H dont la matrice d'incidence aux arcs est A on associe l'hypergraphe "dual" dont la matrice d'incidence aux arcs est A^T .

5) On appelle "degré" d'un sommet $x_i \in X$ (et on désigne par $d_H(x_i)$) le nombre d'éléments non nuls de la i ème ligne de la matrice d'incidence aux arcs de H .

6) On appelle "pseudo-chaîne joignant x_i et x_j " un hypergraphe pair $H = (X, C)$ (avec $x_i, x_j \in X$) dont tous les sommets sont de degré pair sauf x_i et x_j qui sont de degré impair.

Une pseudo-chaîne (X, C) joignant x_i et x_j est "élémentaire" si elle est minimale c'est à dire s'il n'existe pas d'hypergraphe partiel de (X, C) qui soit une pseudo-chaîne joignant x_i et x_j .

(1) Pour des raisons de commodité de lecture, les exemples représentés sur les figures des chapitres V et VI seront toujours des B-hypergraphes.

7) On appelle "pseudo-cycle" un hypergraphe pair $H = (X, C)$ dont tous les sommets sont de degré pair. Un pseudo-cycle est élémentaire s'il est minimal.

Soit (X, A) un hypergraphe, un pseudo-cycle (resp. une pseudo-chaîne) (X, C) sera dit "pseudo-cycle de H " (resp. dite "pseudo-chaîne de H ") si (X, C) est un hypergraphe partiel de H .

Remarques :

1) Il est clair que les concepts de pseudo-chaîne et de pseudo-cycle introduits ici généralisent d'une certaine manière les concepts de chaîne et de cycle en théorie des graphes. Un pseudo-cycle est caractérisé par le fait que sa matrice d'incidence aux arcs contient un nombre pair d'éléments non nuls dans chaque ligne et chaque colonne. Une telle matrice est qualifiée d'"Eulérienne" par Camion [9]. Nous utiliserons également ce terme.

2) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une pseudo-chaîne (resp. un pseudo-cycle) $H = (X, C)$ soit élémentaire est que H n'admette pas d'hypergraphe partiel qui soit un pseudo-cycle.

Définition : 8) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe, $A^{(e)}$ et $A^{(o)}$ l'ensemble des arcs respectivement pairs et impairs de H (cf. définition 1). Soit A la matrice d'incidence aux arcs de H et \bar{A} la matrice d'incidence aux arcs de $(X, A^{(e)})$. A l'hypergraphe H on associe le B -hypergraphe $B(H) = (X, E)$ dont, par définition, la matrice d'incidence aux arêtes est B donnée par :

$$B_i^j \equiv A_i^j \pmod{2}$$

Soient $E^{(e)}$ et $E^{(o)}$ les ensembles d'arêtes de $B(H)$ correspondant à $A^{(e)}$ et $A^{(o)}$ respectivement et \bar{B} la matrice d'incidence aux arêtes de $(X, E^{(e)})$.

On considère les espaces vectoriels \mathbb{F}_2^n et \mathbb{F}_2^m et on appellera "support" de $y \in \mathbb{F}_2^n$ (resp. $z \in \mathbb{F}_2^m$) :

$$S(y) = \{x_i \in X \mid y_i = 1\}$$

(resp. $S(z) = \{E_j \in A^{(e)} \mid z_j = 1\}$)

A $Y \subset X$ (resp. $\Omega \subset A^{(e)}$) on associe le vecteur $b^Y \in \mathbb{F}_2^n$ (resp. $b^\Omega \in \mathbb{F}_2^m$) défini par :

$$S(b^Y) = Y$$

(resp. $S(b^\Omega) = \Omega$)

A H on associe les sous espaces vectoriels M et M^\perp orthogonaux et supplémentaires de \mathbb{F}_2^n ainsi que les sous espaces vectoriels N et N^\perp orthogonaux et supplémentaires de \mathbb{F}_2^{me} définis de la manière suivante :

- . M est le sous espace vectoriel de \mathbb{F}_2^n engendré par les colonnes de \bar{B} .
- . M^\perp est le sous espaces vectoriel de \mathbb{F}_2^n orthogonal et supplémentaire de M.
- . $N = \{f \in \mathbb{F}_2^{me} \mid \bar{B}f = 0\}$
- . $N^\perp = \{t \in \mathbb{F}_2^{me} \mid \exists \Pi \in \mathbb{F}_2^n \text{ tel que } t = \Pi \bar{B}\}$ est le sous espace vectoriel de \mathbb{F}_2^{me} orthogonal et supplémentaire de N.

Remarque :

3) Une condition nécessaire et suffisante pour que (X,C) soit un pseudo-cycle (resp. un pseudo-cycle élémentaire) de l'hypergraphe $H = (X,A)$ est qu'il existe $f \in N$ (resp. f vecteur élémentaire de N) tel que :

$$C = S(f)$$

Définitions : 9) Un "pseudo-cocycle" (resp. un "pseudo-cocycle élémentaire") d'un hypergraphe $H = (X,A)$ est un ensemble d'arcs Ω de H tel qu'il existe $t \in N^\perp$ (resp. t vecteur élémentaire de N^\perp) tel que :

$$\Omega = S(t)$$

Utilisant la définition de N^\perp (définition 8) et par analogie avec le cas des graphes on désignera parfois un pseudo-cocycle Ω par $\Omega(Y)$ si $\Omega = S(t)$, $t = \Pi \bar{B}$ et $Y = S(\Pi)$ ($Y \subset X$).

On notera que le même cocycle Ω peut s'écrire $\Omega(Y')$ ou $\Omega(Y'')$ si et seulement si

$$b^{Y'} + b^{Y''} \in M^\perp$$

ce qui, ainsi que nous le verrons au Théorème 1 ci-dessous, est une généralisation correcte de ce qui se passe dans le cas des graphes.

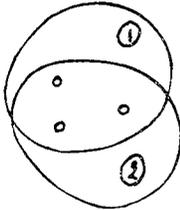
10) On définit la relation binaire de connexité sur les sommets d'un hypergraphe $H = (X,A)$ par :

$$h_H(x_i, x_j) \iff \begin{cases} \text{"il existe une pseudo-chaîne de H joignant } x_i \text{ et } x_j \text{ ou bien} \\ x_i = x_j \end{cases}$$

La relation de connexité sur les sommets d'un hypergraphe H est une relation d'équivalence. On appelle "composantes connexes" les classes de cette relation d'équivalence. Un hypergraphe est connexe s'il ne contient qu'une composante connexe.

Remarque :

4) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe dont les composantes connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p . Alors, comme le montre l'exemple de la figure 1, on n'a pas nécessairement : H_{X_i} est connexe.



(En effet $X_1 = \{1, 2\}$ est une composante connexe de l'hypergraphe de la figure 1)

Figure 1

Définitions : 11) On appellera "h-cocycle" (élémentaire) d'un hypergraphe $H = (X, A)$ un ensemble d'arcs Ω tel que $(X, A - \Omega)$ comporte plus de composantes connexes que H et que Ω soit minimal pour cette propriété.

Théorème 1 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe. On a :

$$h_H(x_i, x_j) \iff \forall w \in M^\perp, x_i \in S(w) \iff x_j \in S(w)$$

Démonstration :

A - Supposons que H contienne une pseudo-chaîne (X, C) joignant x_i et x_j et qu'il existe $w \in M^\perp$ tel que $w_i + w_j = 1$; soit e un $|C|$ -vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 et C la matrice d'incidence aux arêtes de (X, C) . On a :

$$\begin{aligned} wC &= 0 && \text{puisque } w \in M^\perp \\ w(Ce) &= 1 && \text{d'après la définition d'une pseudo-chaîne et le fait que} \\ &&& w_i + w_j = 1, \text{ une contradiction.} \end{aligned}$$

B - Soit \bar{B} la matrice d'incidence aux arêtes paires de $B(H)$. Supposons que le système :

$$\begin{cases} w\bar{B} = 0 \\ w_i + w_j = 1 \end{cases}$$

n'ait pas de solution dans \mathbb{F}_2^n . Alors, d'après le théorème des alternatives, le système :

$$\bar{B}\bar{Y} = c$$

avec :

$$c_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ ou } j \\ 0 & \text{si } k \neq i, j \end{cases}$$

possède une solution $\bar{Y} \in \mathbb{F}_2^{me}$. $(X, S(\bar{Y}))$ est une pseudo-chaîne de H joignant x_i et x_j .

c.q.f.d.

Corollaire 1 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe ayant p composantes connexes.

On a :

- (i) $\dim(M^1) \leq p$ $\dim(M) \geq n-p$
(ii) $\dim(N^1) \geq n-p$ $\dim(N) \leq m-n+p$
(iii) $p \geq n-m$

Démonstration :

(i) Soit (w^1, w^2, \dots, w^q) une base de M^1 ; d'après le théorème 1 on a :

$$q \leq p$$

(ii) D'après la définition de N (cf. définition 8) on a :

$$\dim(N) = n - \dim(M^1)$$

Le résultat annoncé est alors une conséquence de (i).

(iii) est une conséquence directe de (ii).

c.q.f.d.

Corollaire 2 : Un h -cocycle est un pseudo-cocycle élémentaire.

Démonstration : Soit Ω un h -cocycle de l'hypergraphe $H = (X, A)$; soit $B(H)$ le B -hypergraphe associé à H et \tilde{B} la matrice d'incidence aux arêtes paires de $B((X, A - \Omega))$ (cf. définition 8).

D'après le théorème 1, il existe x_i, x_j sommets appartenant à la même composante connexe de H et tels que le système :

$$\begin{cases} \tilde{w}\tilde{B} = 0 \\ w_i + w_j = 1 \end{cases}$$

a une solution \tilde{w} . Soit \bar{B} la matrice d'incidence aux arêtes paires de $B(H)$.

A cause de la minimalité de Ω on a :

$$\Omega = S(\tilde{w}\bar{B}).$$

c.q.f.d.

Remarque :

5) Dans l'hypergraphe H de la figure 2 l'arête unique de H est un pseudo-cocycle élémentaire qui n'est pas un h -cocycle.

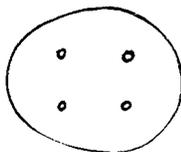


Figure 2

Corollaire 3 : Soit $\Omega = \Omega(Y)$ un pseudo-cocycle élémentaire de l'hypergraphe $H = (X, A)$ dont les composantes connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p . Soit $\bar{Y} = X - Y$. Les composantes connexes de $\tilde{H} = (X, A - \Omega(Y))$ sont $X_1 \cap Y, X_1 \cap \bar{Y}, X_2 \cap Y, X_2 \cap \bar{Y}, \dots, X_p \cap Y, X_p \cap \bar{Y}$.

Démonstration : Soient \bar{B} et \tilde{B} les matrices d'incidence aux arêtes paires de $B(H)$ et $B(\tilde{H})$. Alors $b^Y \bar{B} = 0$ et, d'après le théorème 1, si $x_i \in Y$ et $x_j \in \bar{Y}$ on ne peut avoir $h_{\tilde{H}}(x_i, x_j)$.

Soient $x_i, x_j \in X_1 \cap Y$ (disons) et supposons qu'il existe $w \in \mathbb{F}_2^n$ tel que :

$$\begin{cases} w \tilde{B} = 0 \\ w_i + w_j = 1 \end{cases}$$

Posons :

$$z = w + b^Y$$

D'après les définitions de w et de Y on a

$$\begin{cases} z \bar{B} = 0 \\ z_i + z_j = 1 \end{cases}$$

ce qui contredit le fait que x_i et x_j appartiennent à la même composante connexe de H .

c.q.f.d.

Corollaire 4 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un pseudo-cocycle élémentaire $\Omega(Y)$ d'un hypergraphe $H = (X, A)$ dont les composantes sont X_1, X_2, \dots, X_p soit un h-cocycle est que les partitions $(Y, X - Y)$ et (X_1, X_2, \dots, X_p) de X soient non comparables.

Corollaire 5 : Soit Ω un h-cocycle d'un hypergraphe $H = (X, A)$ comportant p composantes connexes. $\tilde{H} = (X, A - \Omega)$ comporte au plus $2p$ composantes connexes.

Exemple : L'hypergraphe H de la figure 3 comporte 2 composantes connexes. L'hypergraphe obtenu à partir de H en supprimant l'arête de cardinal 2 comporte 4 composantes connexes.



Figure 3

2 - Inclusion propre ; hypergraphes séparés

Définition : 12) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe pair et B la matrice d'incidence aux arêtes de $B(H)$ (cf. définition 8). H sera dit "contenir proprement" un de ses sous hypergraphe partiel $H' = (X', A'_{X'})$ (avec $A' \subset A$, $X' \subset X$) si on a :

$$(1) \quad w' \hat{B}' + w'' \hat{B}'' \Rightarrow w' B' = 0$$

où B' , B'' , \hat{B}' , \hat{B}'' sont les matrices d'incidence aux arêtes de $B((X', A'_{X'}))$, $B((X'', A''_{X''}))$, $B((X', \hat{A}'_{X'}))$, $B((X'', \hat{A}''_{X''}))$ respectivement (avec $X'' = X - X'$, $\hat{A}' = A - A'$).

En d'autres termes les matrices B' , B'' , \hat{B}' , \hat{B}'' sont les sous matrices de la matrice d'incidence aux arêtes B de $B(H)$ définies par le diagramme :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A' & \hat{A}' \\ \hline X' & \left(\begin{array}{c|c} B' & \hat{B}' \\ \hline B'' & \hat{B}'' \end{array} \right) \\ X'' & \end{array} \end{array}$$

Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe et $A^{(e)}$ l'ensemble des arcs pairs de H . $(X', A'_{X'})$ est contenu proprement dans H s'il est contenu proprement dans $(X, A^{(e)})$.

Remarques :

6) Soit $G = (X, E)$ un graphe, $E' \subset E$ et

$$X' = \{x \in X \mid \exists e \in E' \text{ tel que } x \text{ soit une extrémité de } e\}.$$

Alors (X', E') est inclus proprement dans H . Un graphe contient donc proprement ses sous graphes construits sur ses composantes connexes. Nous verrons ci-dessous (théorème 3) comment cette propriété se généralise.

7) Un hypergraphe contient proprement tous ses hypergraphes partiels.

8) La relation "H contient proprement H'" est transitive.

Théorème 2 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe qui contient proprement un de ses hypergraphes partiels $(X', A'_{X'})$. Alors en utilisant les notations de la définition 12), on a :

$$\forall w = (w', w'') \text{ tel que } wB = 0 \text{ alors } w'B' = 0$$

Démonstration : $wB = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} w'B' + w''B'' = 0 \\ w'\hat{B}' + w''\hat{B}'' = 0 \end{cases}$$

et à cause de la relation (1) on a bien le résultat annoncé.

c.q.f.d.

Corollaire 1 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe qui contient proprement un hypergraphe connexe $(X', A'_{X'})$. Alors tous les sommets de X' appartiennent à la même composante connexe de H .

Corollaire 2 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe qui contient proprement $(X', A'_{X'})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega \in A'$ soit un pseudo-cocycle de H est que $\Omega \cap X'$ soit un pseudo-cocycle de $(X', A'_{X'})$.

Définition : 13) Un hypergraphe $H = (X, A)$ comportant p composantes connexes sera dit "séparé" si (cf. définition 8) :

$$p = \dim(M^1)$$

Remarque :

9) Si $p = 1$ ou 2 , H est séparé.

Théorème 3 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe dont les composantes connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p . Soit $A^{(e)}$ l'ensemble des arcs pairs de H et les sous hypergraphes partiels $H_1 = (X_1, A^{(e)}_{X_1}), H_2 = (X_2, A^{(e)}_{X_2}), \dots, H_p = (X_p, A^{(e)}_{X_p})$. Les conditions suivantes sont équivalentes et caractérisent un hypergraphe séparé (cf. définition 8 pour les notations) :

- (i) $p = \dim(M^1)$
- (ii) $b^{X_1}, b^{X_2}, \dots, b^{X_p}$ constitue une base de M^1
- (iii) Les hypergraphes H_1, H_2, \dots, H_p sont pairs et connexes.
- (iv) Les hypergraphes H_1, H_2, \dots, H_p sont contenus proprement dans H .
- (v) Tout pseudo-cocycle élémentaire de H est un h-cocycle.

Démonstration : Remarquons d'abord que si $b^{X_1}, b^{X_2}, \dots, b^{X_p} \in M^1$ alors ces vecteurs constituent une base de M^1 . Soit en effet K le sous espace vectoriel de F_2^n construit sur $b^{X_1}, b^{X_2}, \dots, b^{X_p}$ et supposons qu'il existe $w \in M^1 - K$ ($w \neq 0$). Alors, d'après le théorème 1, H aurait plus de p composantes connexes.

- (i) \Rightarrow (ii) : Soit w^1, w^2, \dots, w^q une base de M^1 . Si $q = p$ compte-tenu du théorème 1, les vecteurs $b^{X_1}, b^{X_2}, \dots, b^{X_p}$ constituent une base de M^1 .
- (ii) \Rightarrow (i), (ii) \Rightarrow (iii), (ii) \Rightarrow (iv) : évident.

(ii) \Rightarrow (v) : Soit $\Omega(Y)$ un pseudo-cocycle élémentaire de H. D'après la définition d'un pseudo-cocycle on a :

$$b^\Omega = b^{\overline{Y}_B}$$

et comme $b^{\overline{Y}}$ n'appartient pas à M^1 , Ω est un h-cocycle.

(v) \Rightarrow (ii) : Supposons que les vecteurs $b^{X_1}, b^{X_2}, \dots, b^{X_p}$ ne constituent pas une base de M^1 . D'après la remarque du début de la démonstration l'un de ces vecteurs au moins, disons b^{X_1} , n'appartient pas à M^1 . $b^{X_1} \in N^1$ et si on pose Ω tel que :

$$b^\Omega = b^{X_1 \overline{B}}$$

on voit qu'on a mis en évidence un pseudo-cocycle qui ne contient aucun h-cocycle.

(iii) \Rightarrow (ii) : Si les hypergraphes H_i sont pairs les vecteurs $b^{X_1}, b^{X_2}, \dots, b^{X_p} \in M^1$. La proposition est alors une conséquence de la remarque du début de la démonstration.

(iv) \Rightarrow (ii) : Soient B^1, B^2, \dots, B^p les matrices d'incidence aux arêtes de $B(H_1), B(H_2), \dots, B(H_p)$. On a :

$$w^1 B^1 + w^2 B^2 + \dots + w^p B^p = 0 \Rightarrow w^1 B^1 = w^2 B^2 = \dots = w^p B^p = 0$$

c.q.f.d.

Corollaire 1 : Soit H un hypergraphe séparé dont les composantes connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p et soit Ω un h-cocycle de H. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega \cap X_i$ soit un h-cocycle de H_i est que $\Omega \cap X_j$ ne soit pas un h-cocycle de H_j ($j = 1, 2, \dots, p$; $j \neq i$).

Démonstration : D'après la proposition (v) du théorème 3 il suffit de prouver la proposition si Ω est un pseudo-cocycle élémentaire.

Soit \overline{B} la matrice d'incidence aux arêtes paires de B(H) et soient $\overline{B}^1, \overline{B}^2, \dots, \overline{B}^p$ les matrices d'incidence aux arêtes de $B(H_1), B(H_2), \dots, B(H_p)$ respectivement. Posons :

$$N^1 = \{t \in \mathbb{F}_2^{me} \mid \exists \Pi \in \mathbb{F}_2^n \text{ tel que } t = \Pi \overline{B}\}$$

$$N_i^1 = \{t^i \in \mathbb{F}_2^{me} \mid \exists \Pi^i \in \mathbb{F}_2^{|X_i|} \text{ tel que } t^i = \Pi^i \overline{B}^i\} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Alors il résulte de la proposition (ii) du théorème 3 que

$$\dim(N^1) = \dim(N_1^1) + \dim(N_2^1) + \dots + \dim(N_p^1)$$

et par conséquent t est un vecteur élémentaire de N si et seulement si pour un certain i, t est un vecteur élémentaire de N_i^1 .

c.q.f.d.

Corollaire 2 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe séparé dont les composantes connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p . Il existe une partition de $A = (A^1, A^2, \dots, A^p)$ telle que les sous hypergraphes partiels $(X_1, A_{X_1}^1), (X_2, A_{X_2}^2), \dots, (X_p, A_{X_p}^p)$ soient connexes et contenues proprement dans H .

Démonstration : On construit la partition de A de la manière suivante :

(0) Poser $j = 1, A^{(1)} = A ; A^1 = A^2 = \dots = A^p = \emptyset$.

(1) Si $(X, A^{(j)} - \{E_j\})$ contient p composantes connexes, aller en (2).

Si $(X, A^{(j)} - \{E_j\})$ contient plus de p composantes connexes, aller en (3).

(2) Il existe i tel que $E_j \cap X_i \neq \emptyset$. Poser :

$$A^{(j)} := A^{(j)} \cup \{E_j\}$$

$$A^{(j+1)} := A^{(j)} - \{E_j\}$$

Aller en (4).

(3) Il existe, d'après le corollaire 1, un hypergraphe H_i (unique) tel que E_j soit un h-cocycle de H_i . Poser :

$$A^{(j)} := A^{(j)} \cup \{E_j\}$$

Aller en (4).

(4) Si $j = m$, terminer. Sinon poser :

$$j := j+1$$

Aller en (1).

La procédure décrite construit une partition de A qui répond à la question.

c.q.f.d.

3 - h-arbres, h-forêts, h-chaînes, h-cycles

Définitions : (4) Un "h-arbre" est un hypergraphe H connexe et minimal pour cette propriété (c'est à dire que tout hypergraphe partiel de H n'est plus connexe).

(5) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe et $E \in A$. Nous désignerons par H^E l'hypergraphe partiel de H construite sur $A - \{E\}$:

$$H^E = (X, A - \{E\})$$

Remarque :

10) Soit $H = (X, A)$ un h-arbre, on déduit des paragraphes précédents que :

- (i) H possède au moins $n-1$ arcs (corollaire 1 du théorème 1)
- (ii) H est séparé (remarque 9)
- (iii) $\forall E \in A$ $H^E = (X, A - \{E\})$ comporte deux composantes connexes (corollaire 2 du théorème 3) et par conséquent H^E est séparé (remarque 9).

Exemples : Les hypergraphes des figures 4 et 5 ci-dessous sont des h-arbres.

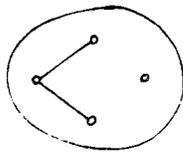


Figure 4

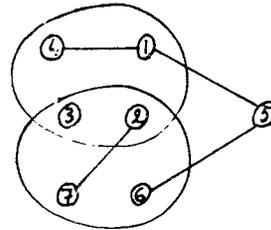


Figure 5

L'hypergraphe de la figure 4 est le seul hypergraphe sur $n \leq 4$ sommets qui soit un h-arbre sans être un arbre. La structure du h-arbre de la figure 5 est notablement plus complexe que celle d'un arbre ; ceci est mis en évidence dans le tableau 1 ci-dessous où on a porté, en regard de chaque arête du h-arbre les composantes h-connexes de H^E , disons Y_E et \bar{Y}_E .

E	Y_E	\bar{Y}_E
{1,2,3,4}	{1,3,4,5,6}	{2,7}
{2,3,6,7}	{1,4,5,6}	{2,3,7}
{1,4}	{1,3,5,6}	{2,4,7}
{1,5}	{1,4}	{2,3,5,6,7}
{5,6}	{1,4,5}	{2,3,6,7}
{2,7}	{1,4,5,6,7}	{2,3}

Tableau 1

Remarque :

11) Il n'existe pas, pour le h-arbre de la figure 5, d'arête E telle que l'une des composantes h-connexes de H^E soit de cardinal 1. C'est à dire qu'un h-arbre ne possède pas, en général, d'arc ni de sommet "pendant".

D'autre part, ainsi que l'illustre le h-arbre de la figure 6, un h-arbre ne possède pas nécessairement un arc de cardinal 2.

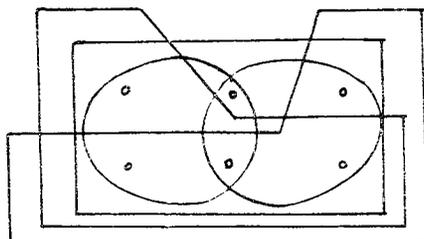


Figure 6

Définition : 16) Une "h-forêt" est un hypergraphe H séparé dont tout arc est un h-cocycle (tout hypergraphe partiel de H comporte plus de composantes connexes que H).

Remarques :

12) Cette définition est bien une extension aux hypergraphes de la notion de forêt en théorie des graphes. Pour un graphe il suffit de dire que tout arc est un h-cocycle pour caractériser une forêt. L'hypergraphe de la figure 7 est un exemple d'un hypergraphe dont chaque arc est un h-cocycle et qui n'est pas une h-forêt.

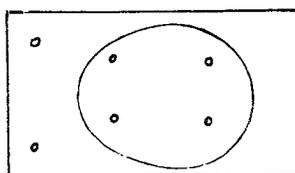


Figure 7

13) La circonstance mentionnée ci-dessus, à savoir un hypergraphe p -connexe minimal n'est pas nécessairement séparé constitue une première difficulté lorsqu'on passe de l'étude des graphes à celle des hypergraphes. Une seconde difficulté réside dans le fait qu'un hypergraphe partiel d'une h-forêt n'est pas nécessairement une h-forêt. Ainsi l'hypergraphe de la figure 8' est un hypergraphe partiel de la h-forêt de la figure 8, il n'est pas séparé et contient un arc qui n'est pas un h-cocycle.

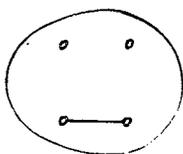


Figure 8

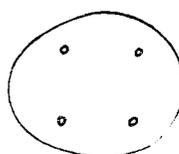


Figure 8'

14) Il existe des h-forêts $H = (X, A)$ pour lesquelles $\forall E \in A, H^E$ n'est pas une h-forêt. Pour construire une telle h-forêt on considère (X, A) le h-arbre de la figure 5. Soient (X', A') et (X'', A'') deux hypergraphes isomorphes à (X, A) , $1'$ et $1''$ les sommets de X' et X'' correspondant à 1 et $E' E''$ les arcs de A', A'' correspondant à $E \in A$. On pose :

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X' \cup X'' \\ \tilde{A} &= \bigcup_{E \in A} (E' \cup E'') \cup \{(1'1'')\}\end{aligned}$$

$\tilde{H} = (\tilde{X}, \tilde{A})$ est une h-forêt qui possède la propriété ci-dessus.

15) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe séparé dont les composantes sont X_1, X_2, \dots, X_p et soit (A^1, A^2, \dots, A^p) la partition de A définie dans le corollaire 2 du théorème 5. Une condition nécessaire et suffisante pour que H soit une h-forêt est que les sous-hypergraphes partiels $(X_1, A_{X_1}^1), (X_2, A_{X_2}^2), \dots, (X_p, A_{X_p}^p)$ soient des h-arbres.

Lemme 1 : Soit $H = (X, A)$ un h-arbre et $E \in A$, alors H^E est une h-forêt.

Démonstration : On sait, d'après la remarque 0 (iii) que H^E est séparé et contient deux composantes connexes Y_E et \bar{Y}_E . Soit $E' \in A, E' \neq E$ alors $\{E'\}$ est un h-cocycle de H^E . Supposons en effet que $(X, A - \{E, E'\})$ comporte les mêmes composantes connexes que H^E , alors $(X, A - \{E'\})$ serait connexe, ce qui contredit le fait que H est un h-arbre.

c.q.f.d.

Théorème 4 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergraphe $H = (X, A)$ soit un h-arbre est qu'il soit connexe et possède $n-1$ arcs.

Démonstration :

A - Soit $H = (X, A)$ un h-arbre. Si $n \leq 3$ la propriété est certainement vraie puisqu'alors $H^e = (X, A^{(e)})$ est un graphe. Supposons la propriété vraie pour les h-arbres de moins de n sommets et soit $E \in A$. D'après le Lemme 1, H^E est une forêt à 2 composantes connexes et d'après la remarque 15 et l'hypothèse de récurrence :

$$|A| - 1 = n - 2$$

B - La condition suffisante est une conséquence directe du corollaire 1 du théorème 1.

c.q.f.d.

Corollaire 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergraphe $H = (X, A)$ comportant p composantes connexes soit une h-forêt est que H possède $n-p$ arcs.

Démonstration : Il suffit de montrer que si H possède $n-p$ arcs, H est séparé. Ceci est également une conséquence du corollaire du Théorème 1. En effet si H possède $n-p$ arcs on a :

$$\dim(M) \leq n-p \Rightarrow \dim(M) = n-p$$

et donc

$$\dim(M^\perp) = p$$

c.q.f.d.

Corollaire 2 : Soit $H = (X, A)$ une h-forêt et $A' \subset A$. Soient p et p' respectivement le nombre de composantes connexes de H et $H' = (X, A-A')$. Une condition nécessaire et suffisante pour que H' soit une h-forêt est que :

$$p' - p = |A'|.$$

Définition : 17) On appelle "h-chaîne" un hypergraphe $H = (X, C)$ qui est une pseudo-chaîne et qui est connexe. Une h-chaîne est élémentaire si la pseudo-chaîne est élémentaire.

Lemme 2 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes et caractérisent une h-chaîne élémentaire.

- (i) H est une pseudo chaîne élémentaire connexe joignant les sommets x_i et x_j .
- (ii) H est un h-arbre possédant deux sommets x_i et x_j de degré impair.
- (iii) H est un h-arbre et $\forall E \in A$ x_i et x_j appartiennent à des composantes distinctes de H^E .

Démonstration :

(i) \Rightarrow (ii), (i) \Rightarrow (iii) : puisque H est connexe et est une pseudo chaîne élémentaire.

(ii) \Rightarrow (i) : H est une pseudo chaîne élémentaire car sinon les colonnes de B , matrice d'incidence aux arêtes de $B(H)$ ne seraient pas linéairement indépendantes.

(iii) \Rightarrow (i) : H possède un hypergraphe partiel qui est une pseudo chaîne élémentaire joignant x_i et x_j ; tout arc $E \in A$ appartient à cette pseudo chaîne, par hypothèse.

c.q.f.d.

Définition : 18) Un "h-cycle" (élémentaire) est un hypergraphe $H = (X, A)$ tel que, $\forall E \in A \ H^E = (X, A - \{E\})$ soit un h-arbre.

Remarque :

16) Tout h-cocycle d'un h-cycle comporte deux arcs.

Théorème 5 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergraphe $H = (X, A)$ possédant $n-1$ arcs soit un h-arbre est que toute sous matrice carrée de dimension $n-1$ extraite de la matrice d'incidence aux arêtes B de $B(H)$ soit non singulière.

Démonstration : Si H est un h-arbre $\dim(M^\perp) = 1$ et par conséquent :

$$M^\perp = \{0, e\}$$

(où e est le n -vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1). Ce qui implique que toute sous matrice carrée de B de dimension $n-1$ est non singulière.

Si toute sous matrice carrée de B de dimension $n-1$ est non singulière, les colonnes de B sont indépendantes et par conséquent :

$$\dim(M^\perp) = n - \dim(M) = 1$$

Alors H est un h-arbre d'après le théorème 4.

c.q.f.d.

Corollaire 1 : Un h-arbre H possède au moins deux sommets de degré impair.

Démonstration : Le nombre de sommets de degré impair de H est pair (puisque H est un hypergraphe pair). Si tous les sommets de H étaient de degré pair, soit f le m -vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 ; on aurait :

$$Bf = 0$$

une contradiction.

c.q.f.d.

Corollaire 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergraphe $H = (X, A)$ soit un h-cycle est que :

$$. \ m = n$$

. toute sous matrice carrée de dimension $n-1$ extraite de la matrice d'incidence aux arêtes de $B(H)$ est non singulière.

Corollaire 3 : Le dual d'un h-cycle est un h-cycle.

Corollaire 4 : Un h-cycle est un pseudo-cycle élémentaire.

Corollaire 5 : Un pseudo-cycle contient proprement un h-cycle.

Démonstration : Il suffit de considérer le cas d'un pseudo-cycle élémentaire (d'après la remarque 8) $H = (X, C)$ qui est un B-hypergraphe pair dont la matrice d'incidence aux arêtes est B.

$$Bf = 0, \quad f \in \mathbb{F}_2^m \Rightarrow f = (1, 1, \dots, 1)$$

Par conséquent il existe $\Pi \in \mathbb{F}_2^n$ tel que :

$$\Pi B = 0$$

$$|S(\Pi)| = m$$

$(S(\Pi), C_{S(\Pi)})$ est un h-cycle contenu proprement dans H.

c.q.f.d.

Corollaire 6 : Soit A une matrice carrée de dimension n dont les éléments valent +1, -1 ou 0 et dont toute sous matrice carrée de dimension n-1 est non singulière. Alors A est Eulérienne.

Lemme 3 : Soit $H = (X, A)$ un h-arbre, H contient proprement une h-chaîne élémentaire et une seule joignant tout couple de sommets.

Démonstration : La propriété est vraie pour les h-arbres comportant moins de quatre sommets qui sont des arbres au sens de la théorie des graphes. Supposons la propriété vraie pour les h-arbres de moins de n sommets et soient $x_i, x_j \in X$.

Si H est une h-chaîne joignant x_i et x_j , H ne peut contenir proprement d'autre h-chaîne que lui-même joignant x_i et x_j (cf. Lemme 2).

Si H n'est pas une h-chaîne joignant x_i et x_j , il existe $E \in A$ tel que x_i et x_j appartiennent à une même composante connexe de H^E . Mais H^E est une h-forêt d'après le Lemme 1 ; la propriété se déduit maintenant des remarques 8 et 15.

c.q.f.d.

Lemme 4 : Soit $H = (X, D)$ un h-cycle. H contient proprement deux h-chaînes élémentaires distinctes joignant tout couple de sommets.

Démonstration : Soient $x_i, x_j \in X$ et $E \in D$. H^E est un h-arbre et donc contient proprement une h-chaîne élémentaire joignant les sommets x_i et x_j .

Soit E' un arc de cette h-chaîne, $H^{E'}$ est un h-arbre et donc contient proprement une h-chaîne élémentaire, distincte de la précédente, joignant x_i et x_j . Il ne peut y avoir d'autre h-chaîne joignant x_i et x_j que ces deux là.

c.q.f.d.

Théorème 6 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe sur n sommets. Les propositions suivantes sont équivalentes et caractérisent un h-arbre :

- (i) H est connexe, minimal.
- (ii) H est connexe et possède $n-1$ arcs.
- (iii) H est pair, connexe et n'admet pas d'hypergraphe partiel qui est un pseudo cycle.
- (iii') H est pair, connexe et ne contient pas proprement de h-cycle.
- (iv) H est pair, possède $n-1$ arcs et n'admet pas d'hypergraphe partiel qui est un pseudo-cycle.
- (iv') H est pair, possède $n-1$ arcs et ne contient pas proprement de h-cycle.
- (v) H est pair, n'admet pas d'hypergraphe partiel qui est pseudo-cycle et est maximal pour cette propriété.
- (v') H est pair, ne contient pas proprement de h-cycle et est maximal pour cette propriété.
- (vi) H est pair et à tout couple de sommets on sait associer un hypergraphe partiel (et un seul) qui est une pseudo-chaîne joignant ces sommets.
- (vi') H est pair et contient proprement une h-chaîne (et une seule) joignant tout couple de sommets.

Démonstration :

(i) \iff (ii) : d'après le Théorème 4.

(i) \implies (iii) : Si H est un h-arbre, toutes les colonnes de la matrice d'incidence aux arêtes B de $B(H)$ sont linéairement indépendantes.

(iii) \implies (iv) : H possède au moins $n-1$ arcs d'après le corollaire 1 du Théorème 1. Si H possédait plus de $n-1$ arcs, les colonnes de B ne pourraient être linéairement indépendantes (puisque $\dim(M^1) \geq 1$) et H admettrait un hypergraphe partiel qui est un pseudo-cycle.

(iv) \Rightarrow (v) : Soit H' l'hypergraphe obtenu en ajoutant à H un arc de cardinal pair ; les colonnes de la matrice d'incidence aux arêtes de $B(H)$ ne seraient plus linéairement indépendantes (cf. (iii) \Rightarrow (iv)).

(v) \Rightarrow (vi) : Soit $u^{i,j}$ le n -vecteur défini par :

$$u_k^{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ ou } j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Les colonnes de la matrice $(B, u^{i,j})$ ne sont pas linéairement indépendantes d'après le raisonnement précédent. Soit $(f, 1) \in \mathbb{F}_2^{m+1}$ la combinaison linéaire (non nulle), unique, des colonnes de $(B, u^{i,j})$ qui est égale à 0. $(X, S(f))$ définit la pseudo-chaîne unique joignant x_i à x_j .

(vi) \Rightarrow (i) : H est certainement connexe. Montrons que tout arc E de H appartient à une pseudo-chaîne. Supposons en effet qu'il existe un arc E qui n'appartienne à aucune pseudo-chaîne et soit c la colonne de la matrice d'incidence aux arêtes B de $B(H)$ correspondant à E . Sans perte de généralité on prendra :

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, 2, \dots, 2k \\ 0 & \text{si } i = 2k+1, \dots, n \end{cases}$$

Soient g^1, g^2, \dots, g^k les vecteurs indicateurs des colonnes de B correspondant aux pseudo-chaînes de x_1 à x_2 , de x_3 à x_4 , ..., de x_{2k+1} à x_{2k} respectivement et soit C l'ensemble d'arcs de H correspondant aux colonnes de B dont le vecteur indicateur est :

$$g = c + g^2 + g^3 + \dots + g^k \quad (\text{somme modulo } 2)$$

Alors, par construction, (X, C) est une pseudo-chaîne de H reliant les sommets x_1 et x_2 . Cette pseudo-chaîne contient E , une contradiction.

Soit (X, C) un hypergraphe partiel de H joignant x_i et x_j et soit $E \in C$. Alors $(X, A - \{E\})$ n'est plus connexe puisque (X, C) est l'unique hypergraphe partiel de H qui est une pseudo-chaîne joignant x_i et x_j . Comme tout arc appartient à une pseudo-chaîne H est bien connexe, minimal.

(i) \Rightarrow (vi') : d'après le Lemme 3.

(vi') \Rightarrow (iii') : d'après le Lemme 4.

(iii') \Rightarrow (iv') : Soit H un hypergraphe pair connexe ne contenant pas proprement de h -cycle tel que $m > n-1$ et que n soit minimum pour ces propriétés. On a certainement $n > 3$ puisque les hypergraphes pairs sur $n \leq 3$ sommets sont des graphes.

Si $\forall F \in A \quad H^E$ est connexe, H est un h-cycle et on a une contradiction. Soit donc $\tilde{E} \in A$, X_1 et X_2 les composantes connexes de $\tilde{H} = H^{\tilde{E}}$. H est un hypergraphe séparé et donc, d'après le corollaire 2 du Théorème 3, il existe une partition (A^1, A^2) de $A - \{\tilde{E}\}$ telle que $H_1 = (X_1, A_{X_1}^1)$ et $H_2 = (X_2, A_{X_2}^2)$ soient des hypergraphes connexes contenus proprement dans H . Comme $m \geq n$, on a :

$$|A^i| \geq |X_i| \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2$$

Donc, d'après l'hypothèse de minimalité de n , l'un des hypergraphes H_1 ou H_2 contient proprement un h-cycle. Le résultat annoncé est alors une conséquence de la remarque 8.

(iv') \Rightarrow (iv) : d'après le corollaire 5 du Théorème 5.

(iii') \Rightarrow (v') : démonstration analogue à celle de (iii') \Rightarrow (iv')

(v') \Rightarrow (vi') : Supposons que H ne contienne pas proprement de h-chaîne joignant x_i et x_j . Soit E un arc incident à x_i et x_j alors $(X, A \cup \{E\})$ ne contiendrait pas proprement de h-cycle, une contradiction. Si pour un couple de sommets H contenait proprement deux h-chaînes joignant ce couple de sommets, H contiendrait proprement un h-cycle, une contradiction.

(vi') \Rightarrow (i') : H est connexe d'après le corollaire 1 du Théorème 2. Tout arc appartient à une h-chaîne au moins. Donc H est connexe minimal.

c.q.f.d.

Théorème 7 : Soit $H = (X, A)$ un h-arbre. Les h-chaînes auxquelles il est fait référence ci-dessous sont les h-chaînes élémentaires contenues proprement dans H . Soient $a, b, c, d \in X$:

(i) Si c appartient à la h-chaîne qui joint a et b , alors a n'appartient pas à la h-chaîne qui joint b et c .

(ii) Si d est un sommet commun des h-chaînes H' et H'' qui joignent respectivement a à b et b à c et si $d \neq b$, alors b n'appartient pas à la h-chaîne qui joint a à c .

(iii) Si c et d sont des sommets de la h-chaîne qui joint a à b , (a, b, c, d distincts) alors a et b ne peuvent appartenir l'un et l'autre à la chaîne qui joint c et d .

Démonstration : Pour $E \in A$ on posera Y_E et \bar{Y}_E les composantes connexes de H^E et on supposera, sans perte de généralité, que $a \in Y_E$. De plus dans (i) et (iii) on pourra supposer que H est une h-chaîne joignant a et b .

(i) Par définition de la h-chaîne on a $b \in \bar{Y}_E \quad \forall E \in E$. Si a appartenait à la h-chaîne qui joint b et c cela impliquerait que $c \in Y_E \quad \forall E \in E$. Mais alors la h-chaîne contenue proprement dans H et joignant a et c (qui existe d'après le Lemme 3) ne comporterait pas d'arc, une contradiction.

(ii) D'après ce qui précède il existe $E \in A$ tel que $d \in Y_E, b \in \bar{Y}_E$. Si $c \in \bar{Y}_E$ alors d n'appartient pas à la h-chaîne qui joint b à c , une contradiction. Par conséquent $c \in Y_E$ et b n'appartient pas à la h-chaîne qui joint a et c .

(iii) Supposons que la h-chaîne qui joint c et d dans le h-arbre H (qui est une h-chaîne joignant a et b) contienne a et b . Cela implique que H est à la fois une h-chaîne joignant a et b et une h-chaîne joignant c et d . Mais ceci est impossible d'après le Lemme 2.

c.q.f.d.

Remarque :

17) Les propriétés décrites dans le Théorème 7 sont des propriétés triviales des arbres en théorie des graphes. Certaines autres propriétés, tout aussi triviales que celles-ci ne s'étendent cependant pas au hypergraphes. Ainsi dans un arbre la chaîne qui joint a à c est contenue dans la réunion des chaînes qui joignent a à b et b à c .

Dans le h-arbre H de la figure 9, qui est une h-chaîne joignant a à c , les h-chaînes contenues proprement dans H et qui joignent respectivement a à b et b à c sont :

$(\{a,b\}, \{(a,b)\})$ et $(\{b,c\}, \{(a,b,c,d)\}_{\{b,c\}})$.

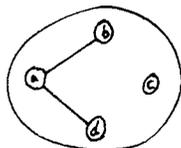


Figure 9

CHAPITRE VI

HYPERGRAPHES UNIMODULAIRES

L'objet de ce chapitre est de montrer comment le concept de connexité peut être utilisé pour étudier les hypergraphes unimodulaires.

1 - Bicolorations équitables des hypergraphes unimodulaires

Définitions : 1) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe. Dans ce chapitre, comme dans le précédent, on prendra :

$$\begin{aligned} n &= |X| \\ m &= |A| \end{aligned}$$

et on appellera A la matrice d'incidence aux arcs de H , B la matrice d'incidence aux arêtes de $B(H)$ et \bar{B} la matrice d'incidence aux arêtes paires de $B(H)$ (cf. Définition V-8).

A une bipartition (V, R) de l'ensemble X , on associe un vecteur "représentatif" de cette bipartition y à $n = |X|$ composantes, tel que :

$$y_i = \begin{cases} +1 & \text{si le sommet } x_i \in V \\ -1 & \text{si le sommet } x_i \in R \end{cases}$$

Deux bipartitions dont les vecteurs représentatifs sont opposés ne seront pas distinguées.

2) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe $\tilde{X} \subset X$, (V, R) une bipartition de X , \tilde{A} la matrice d'incidence aux arcs de $\tilde{H} = H_{\tilde{X}}$ et $E_j \in A$. On pose :

$$d_{(V,R)}^{\tilde{X}}(E_j) = |\tilde{y} \tilde{A}^j|$$

où \tilde{y} est le vecteur représentatif de la bipartition $(V \cap \tilde{X}, R \cap \tilde{X})$ de \tilde{X} . On note, pour alléger l'écriture :

$$d_{(V,R)}^{\tilde{X}}(E_j) = d_{(V,R)}^X(E_j) = |y A^j|$$

où y est le vecteur représentatif de la bipartition (V, R) .

On appelle "bicoloration équitable des sommets" de l'hypergraphe $H = (X, A)$ une bipartition (V, R) des sommets de H telle que :

$$d_{(V,R)}^X(E_j) \leq 1 \quad \forall E_j \in A.$$

On appelle "bicoloration équitale des arcs" de H une bicoloration équitale des sommets de son dual. On utilisera quelquefois les termes "bicoloration équitale" sans plus de précision ; il s'agira alors d'une bicoloration équitale des sommets.

3) On appelle "hypergraphe unimodulaire" un hypergraphe dont la matrice d'incidence A est totalement unimodulaire (c'est à dire que toute sous-matrice carrée non singulière extraite de A possède un déterminant de module 1). D'après un théorème de Camion [8] et de Ghouila-Houri [23] on sait qu'un hypergraphe est unimodulaire si, et seulement si, tous ses sous hypergraphes partiels admettent une bicoloration équitale.

Théorème 1 : Soient (V',R') et (V'',R'') deux bicolorations équitales distinctes de l'hypergraphe unimodulaire $H = (X,A)$. Posons :

$$Y = (V' \cap V'') \cup (R' \cap R'')$$

$$\bar{Y} = (V' \cap R'') \cup (R' \cap V'') = X - Y$$

Alors :

(i) $(V' \cap Y = V'' \cap Y, R' \cap Y = R'' \cap Y)$ et $(V' \cap \bar{Y} = R'' \cap \bar{Y}, R' \cap \bar{Y} = V'' \cap \bar{Y})$ sont des bicolorations équitales de H_Y et $H_{\bar{Y}}$ respectivement.

(ii) Si $E_j \in A^{(e)}$ (E_j^j arc pair) on a :

$$d_{(V',R')}^Y(E_j) = d_{(V'',R'')}^Y(E_j) = d_{(V',R')}^{\bar{Y}}(E_j) = d_{(V'',R'')}^{\bar{Y}}(E_j) = 0$$

(iii) Quels que soient (V_Y, R_Y) et $(V_{\bar{Y}}, R_{\bar{Y}})$ bicoloration équitale de H_Y et $H_{\bar{Y}}$ respectivement $(V_Y \cup V_{\bar{Y}}, R_Y \cup R_{\bar{Y}})$ est bicoloration équitale de H.

Démonstration : Soient y' et y'' les vecteurs représentatifs des bicolorations équitales (V',R') et (V'',R'') . Posons :

$$W' = \{x_i \in X \mid A_i^j y'_i = +1\} \quad \bar{W}' = X - W'$$

$$W'' = \{x_i \in X \mid A_i^j y''_i = -1\} \quad \bar{W}'' = X - W''$$

$$\alpha = |W' \cap W''|$$

$$\beta = |\bar{W}' \cap W''|$$

$$\gamma = |W' \cap \bar{W}''|$$

$$\delta = |\bar{W}' \cap \bar{W}''|$$

On a :

$$\left. \begin{aligned} |(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)| &= \varepsilon \\ |(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)| &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \varepsilon = 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant que } E_j^j \text{ est un arc pair ou impair.}$$

D'où on tire :

$$|\alpha - \delta| + |\beta - \gamma| = \varepsilon$$

Les 3 propositions annoncées s'en déduisent, après avoir remarqué que :

$$\begin{aligned} E_j^j \cap Y &= (W' \cap W'') \cup (\bar{W}' \cap \bar{W}'') \\ E_j^j \cap \bar{Y} &= (W' \cap \bar{W}'') \cup (\bar{W}' \cap W'') \end{aligned}$$

c. q. f. d.

Corollaire 1 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire, $E_j \in A$ et $(V', R'), (V'', R'')$ un couple de bicolorations équitables de $H^{E_j} = (X, A - \{E_j\})$ telles que :

$$d_{(V', R')} (E_j) + d_{(V'', R'')} (E_j) \equiv 0 \pmod{4}$$

Alors il existe un couple de bicolorations équitables de $H (\tilde{V}', \tilde{R}'), (\tilde{V}'', \tilde{R}'')$ tel que :

$$\begin{aligned} (\tilde{V}' \cap \tilde{V}'') \cup (\tilde{R}' \cap \tilde{R}'') &= (V' \cap V'') \cup (R' \cap R'') = Y \\ (\tilde{V}' \cap \tilde{R}'') \cup (\tilde{R}' \cap \tilde{V}'') &= (V' \cap R'') \cup (R' \cap V'') = \bar{Y} \end{aligned}$$

Démonstration : Soient y' et y'' les vecteurs représentatifs des bipartitions (V', R') et (V'', R'') et définissons $W', W'', \bar{W}', \bar{W}'', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme dans dans la démonstration du Théorème 1. On a :

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \beta + \delta + \varepsilon' & (\varepsilon' = \pm d_{(V', R')} (E_j)) \\ \alpha + \beta &= \gamma + \delta + \varepsilon'' & (\varepsilon'' = \pm d_{(V'', R'')} (E_j)) \end{aligned}$$

D'après les hypothèses ε' et ε'' et donc $(\alpha - \delta)$ et $(\beta - \gamma)$ sont pairs. Il en est donc de même de $\alpha + \delta$ et $\beta + \gamma$. Soient (V_Y, R_Y) et $(V_{\bar{Y}}, R_{\bar{Y}})$ un couple de bicolorations équitables de H_Y et $H_{\bar{Y}}$ respectivement. Alors :

$$(\tilde{V}' = V_Y \cup V_{\bar{Y}}, \tilde{R}' = R_Y \cup R_{\bar{Y}}) \text{ et } (\tilde{V}'' = V_Y \cup R_{\bar{Y}}, \tilde{R}'' = R_Y \cup V_{\bar{Y}})$$

constitue, d'après le Théorème 1, un couple de bicolorations équitables de H qui satisfait à la condition énoncée.

c. q. f. d.

Corollaire 2 : Soit $\Omega(Y)$ un pseudo-cocycle élémentaire de l'hypergraphe unimodulaire $H = (X, A)$. Alors il existe (V, R) bicoloration équitable de H et (\tilde{V}, \tilde{R}) bicoloration équitable de $\tilde{H} = (X, A - \Omega(Y))$ telles que :

$$\begin{aligned} Y &= (V \cap \tilde{V}) \cup (R \cap \tilde{R}) \\ \bar{Y} &= (V \cap \tilde{R}) \cup (R \cap \tilde{V}) \\ d_{(\tilde{V}, \tilde{R})} (E_j) &= 2 \quad \forall E_j \in \Omega(Y) \end{aligned}$$

Démonstration : D'après les développements du chapitre V on sait que :

$${}_b \Omega(Y) = {}_b Y_B$$

Soient (V_Y, R_Y) et $(V_{\bar{Y}}, R_{\bar{Y}})$ des bicolorations équitables de H_Y et $H_{\bar{Y}}$ respectivement. Alors des deux bicolorations équitables de \tilde{H} (cf. Théorème 2) :

$$(V = V_Y \cup V_{\bar{Y}}, R = R_Y \cup R_{\bar{Y}}) \quad \text{et} \quad (\tilde{V} = V_Y \cup R_{\bar{Y}}, \tilde{R} = R_Y \cup V_{\bar{Y}})$$

l'une (disons (V, R)) est nécessairement une bicoloration équitable de H tandis que pour l'autre on a :

$$d_{(\tilde{V}, \tilde{R})}(E_j) = 2 \quad \forall E_j \in \Omega(Y)$$

puisque $\Omega(Y)$ est un pseudo-cocycle élémentaire.

c.q.f.d.

Corollaire 3 : Soit $\Omega(Y)$ un pseudo-cocycle élémentaire de l'hypergraphe uni-modulaire $H = (X, A)$. Soit (\hat{V}, \hat{R}) une bicoloration équitable de $\tilde{H} = (X, A - \Omega(Y))$ telle que :

$$d_{(\hat{V}, \hat{R})}(E_j) > 2 \quad \text{pour un certain } E_j \in \Omega(Y)$$

Alors il existe (\tilde{V}, \tilde{R}) bicoloration équitable de \tilde{H} telle que :

$$d_{(\tilde{V}, \tilde{R})}(E_j) \equiv 0 \quad (\text{mod } 4)$$

Démonstration : E_j est un arc pair puisque $E_j \in \Omega(Y)$. Supposons que :

$$d_{(\hat{V}, \hat{R})}(E_j) = 4k+2$$

et soit (\tilde{V}, \tilde{R}) la bicoloration équitable de \tilde{H} mise en évidence dans le corollaire 2 ci-dessus. Posons :

$$Z = (\hat{V} \cap \tilde{V}) \cup (\hat{R} \cap \tilde{R})$$

$$\bar{Z} = (\hat{V} \cap \tilde{R}) \cup (\hat{R} \cap \tilde{V})$$

et soient (V_Z, R_Z) une bicoloration équitable de H_Z , $(V^1 = V_Z \cup (\hat{V} \cap \bar{Z}),$

$R^1 = R_Z \cup (\hat{R} \cap \bar{Z}), (V^2 = V_Z \cup (\tilde{V} \cap \bar{Z}), R^2 = R_Z \cup (\tilde{R} \cap \bar{Z}))$. Alors on a :

$$d_{(V^1, R^1)}(E_j) \not\equiv d_{(V^2, R^2)}(E_j) \quad (\text{mod } 4)$$

c.q.f.d.

Corollaire 4 : Soit $\Omega(Y)$ un pseudo-cocycle élémentaire de l'hypergraphe uni-modulaire $H = (X, A)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega(Y)$ soit un h-cocycle est que pour toute bicoloration équitable (\tilde{V}, \tilde{R}) de $\tilde{H} = (X, A - \Omega(Y))$ qui n'est pas bicoloration équitable de H on ait :

$$d_{(\tilde{V}, \tilde{R})}(E_j) = 2 \quad \forall E_j \in \Omega(Y)$$

Démonstration : La proposition est une conséquence des corollaires 1 et 3 ci-dessus ainsi que du corollaire 3 du Théorème V-1.

Remarques :

1) Le corollaire 4 ci-dessus nous permet d'affirmer immédiatement que l'arc unique de l'hypergraphe de la figure 1 est un pseudo-cocycle élémentaire qui n'est pas un h-cocycle.

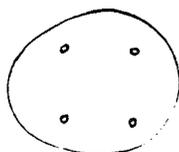


Figure 1

2) Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire dont les composantes h-connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p . Comme le montre l'exemple de la figure 2, si (V,R) est bicoloration équitale de H , $(V \cap X_i, R \cap X_i)$ n'est pas nécessairement bicoloration équitale de H_{X_i} . ($\{1,2\}$ est une composante connexe de l'hypergraphe de la figure 2).

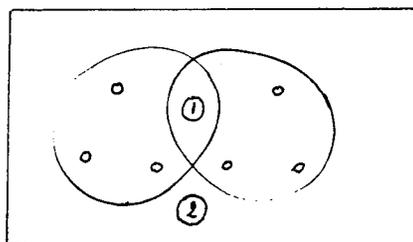


Figure 2

Cependant, une conséquence immédiate du Théorème V-3 est que si $H = (X,A)$ est un hypergraphe unimodulaire séparé dont les composantes connexes sont X_1, X_2, \dots, X_p et si (V,R) est une bicoloration équitale de H alors $(V \cap X_i, R \cap X_i)$ est une bicoloration équitale de H_{X_i} ($i = 1,2,\dots,p$).

Définition : 4) Un hypergraphe unimodulaire $H = (X,A)$ dont la matrice d'incidence aux arcs est A sera dit "maximal" s'il n'est pas possible d'ajouter de nouvelles colonnes à A de telle sorte que la matrice obtenue soit encore unimodulaire.

Théorème 2 (Heller [27]) : Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire dont les arcs sont tous différents. On a :

$$|A| \leq |X| * (|X|+1)$$

La matrice d'incidence A d'un hypergraphe unimodulaire pour lequel la relation ci-dessus est vérifiée avec le signe égal est $(U, -U, K, -K)$ où U désigne la matrice unité et K la matrice d'incidence d'un graphe orienté complet sur n sommets.

Conjecture : Si $H = (X,A)$ est un hypergraphe unimodulaire maximal, H est séparé.

Remarques :

3) L'exemple de l'hypergraphe de la figure 3 montre qu'un hypergraphe maximal n'est pas nécessairement connexe.

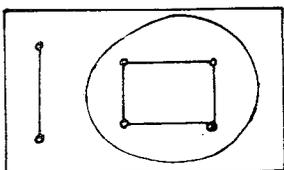


Figure 3

4) La difficulté de la démonstration de la conjecture provient de la remarque suivante :

"Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire $E \in A$ et (V',R') , (V'',R'') un couple de bicolorations équitables de H . Soient :

$$Y = (V' \cap V'') \cup (R' \cap R'')$$

$$\bar{Y} = (V' \cap R'') \cup (R' \cap V'') = X - Y$$

Alors l'hypergraphe $(X, A \cup \{E \cap Y\})$ n'est pas nécessairement unimodulaire".

Cette remarque est illustrée par l'exemple de l'hypergraphe de la figure 4 : l'adjonction de l'arête (12) à l'hypergraphe de la figure 4 rend celui-ci non unimodulaire.

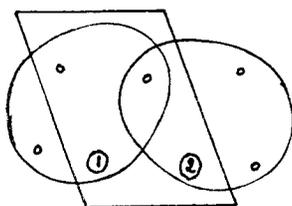


Figure 4

5) Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire non séparé dont la matrice d'incidence aux arcs est A alors A ne possède pas nécessairement deux lignes identiques, ainsi que le montre l'exemple de l'hypergraphe de la figure 5.

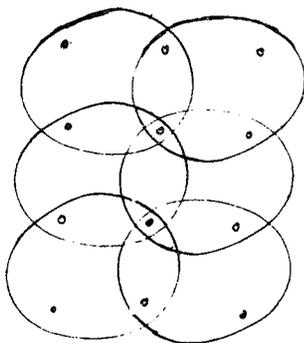


Figure 5

2 - Connexité dans les hypergraphes unimodulaires

Définition : 5) Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire, on définit une relation binaire sur les sommets de H :

$$\hat{h}_H(x_i, x_j) \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout couple de bicolorations équitables } (V', R') \text{ et } (V'', R'') \\ \text{de } H \text{ on a :} \\ x_i \in (V' \cap V'') \cup (R' \cap R'') \iff x_j \in (V' \cap V'') \cup (R' \cap R'') \end{array} \right.$$

Remarque :

6) Si on considère que les hypergraphes unimodulaires sont une généralisation des graphes bipartis, on peut voir que la relation binaire \hat{h}_H (qui est une relation d'équivalence) est bien une généralisation de la notion de connexité. Cette remarque est précisée par le :

Théorème 3 : Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire :

$$\hat{h}_H(x_i, x_j) \iff h_H(x_i, x_j) \quad (\text{cf. définition V-10})$$

1ère démonstration :

A - Soient $x_i, x_j \in X$ tels qu'on n'ait pas $\hat{h}_H(x_i, x_j)$. Par hypothèse, il existe deux bicolorations équitables (V', R') et (V'', R'') de H telles que :

$$\begin{aligned} x_i \in Y &= (V' \cap V'') \cup (R' \cap R'') \\ x_j \in \bar{Y} &= (V' \cap R'') \cup (R' \cap V'') \end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème 1, on a :

$$b_{\bar{B}}^{Y} = 0$$

(où \bar{B} est la matrice d'incidence aux arêtes paires de $B(H)$). Et par conséquent on n'a pas $h_H(x_i, x_j)$, d'après le Théorème V-1.

B - Soient $x_i, x_j \in X$ tels qu'on n'ait pas $h_H(x_i, x_j)$. Alors d'après le Théorème V-1, le système :

$$\begin{cases} w_{\bar{B}} = 0 \\ w_i + w_j = 1 \end{cases}$$

possède une solution \tilde{w} . Posons :

$$Y = S(\tilde{w})$$

$(V_Y, R_Y), (V_{\bar{Y}}, R_{\bar{Y}})$ bicolorations équitables de H_Y et $H_{\bar{Y}}$ respectivement.

On a :

$$x_i \in Y, x_j \in \bar{Y} \quad (\text{par construction})$$

$(V' = V_Y \cup V_{\bar{Y}}, R' = R_Y \cup R_{\bar{Y}}), (V'' = V_Y \cup R_{\bar{Y}}, R'' = R_Y \cup V_{\bar{Y}})$ bicolorations équitables de H , donc on n'a pas $\hat{h}_H(x_i, x_j)$. c.q.f.d.

Nous allons donner une seconde démonstration du Théorème 1 qui utilisera exclusivement le théorème de dualité en programmation linéaire. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 1 : Soit C la matrice d'incidence aux arcs d'un hypergraphe (X, A) unimodulaire qui est une pseudo-chaîne joignant x_i et x_j . Alors l'un et l'un seulement des deux systèmes suivants possède une solution :

$$(I) \begin{cases} cY = c \\ \gamma_j = \pm 1 \end{cases}$$

$$(I') \begin{cases} cY = c' \\ \gamma_j = \pm 1 \end{cases}$$

avec

$$c_k = \begin{cases} +1 & \text{si } k = i \text{ ou } j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$c'_k = \begin{cases} +1 & \text{si } k = i \\ -1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Démonstration : L'un des deux systèmes (I) et (I') au moins possède une solution puisque (X, C) est unimodulaire et admet donc une bicoloration équitale de ses arcs.

Supposons que (I) et (I') admettent une solution disons $\hat{\gamma}$ et $\hat{\gamma}'$ respectivement. Alors $(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}')/2$ a pour composantes 0, +1 ou -1 et

$$\frac{1}{2} C(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}') = d$$

avec :

$$d_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

ce qui contredit le fait que les arcs de (X, A) sont tous de cardinal pair.

c.q.f.d.

Définition : 6) Une pseudo-chaîne (X, C) qui est un hypergraphe unimodulaire sera dite "impaire" ou "paire" suivant que le système (I) ou le système (I') possède une solution.

Si le système (I') possède une solution pour laquelle toutes les composantes du vecteur γ sont égales à +1 (resp. toutes les composantes de γ sont égales à -1) la pseudo-chaîne (X, C) sera dite "pseudo-chemin de x_i à x_j " (resp. "pseudo-chemin de x_j à x_i ").

Lemme 2 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire dont chaque arc est de cardinal pair et dont la matrice d'incidence aux arcs est A . Le programme linéaire

$$(1) \begin{cases} yA = 0 \\ -1 \leq y_i \leq 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ yc = z(\text{Max}) \end{cases}$$

possède une solution optimale dont les composantes valent +1 ou -1 $\forall c \in \mathbb{Z}^n$.

Démonstration : Soit \bar{y} le vecteur représentatif d'une bicoloration équitale des sommets de H , le programme linéaire (1) est équivalent à :

$$(1') \begin{cases} (y + \bar{y})A = 0 \\ 0 \leq y_i + \bar{y}_i \leq 2 & i \in \{j \mid \bar{y}_j = +1\} \\ -2 \leq y_i + \bar{y}_i \leq 0 & i \in \{j \mid \bar{y}_j = -1\} \\ yc = z(\text{Max}) \end{cases}$$

C'est à dire, en posant :

$$\eta_i = \begin{cases} y_i + \bar{y}_i & \text{si } i \in \{j \mid \bar{y}_j = +1\} \\ -y_i - \bar{y}_i & \text{si } i \in \{j \mid \bar{y}_j = -1\} \end{cases}$$

et en modifiant en conséquence la matrice A et le vecteur c, (1) est équivalent à :

$$(1'') \begin{cases} \eta A' = 0 & 0 \leq \eta \\ \eta \leq 2 \\ \eta c' = z(\text{Max}) \end{cases}$$

La matrice des contraintes de (1'') est totalement unimodulaire et le second membre étant pair on a pour toute solution optimale de (1'') $\eta_i = 0$ ou $+2$, la solution correspondante, y de (1) est donnée par :

$$y_i = \begin{cases} +1 & \text{si } \eta_i = 2 \text{ et } \bar{y}_i = 1 \text{ ou } \eta_i = 0 \text{ et } \bar{y}_i = -1 \\ -1 & \text{si } \eta_i = 0 \text{ et } \bar{y}_i = +1 \text{ ou } \eta_i = 2 \text{ et } \bar{y}_i = -1 \end{cases}$$

c.q.f.d.

Lemme 3 : Soit \hat{A} une matrice totalement unimodulaire $n \times m$ dont toutes les colonnes ont un nombre pair d'éléments non nuls. Le programme linéaire :

$$(2) \begin{cases} y^+ \hat{A} - y^- \hat{A} = 0 & y^+, y^- \geq 0 \\ y^+ + y^- = e \\ y^+ c - y^- c = z(\text{Max}) \end{cases}$$

(où e est un n-vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1) possède une solution optimale dont les composantes valent 0 ou 1 $\forall c \in \mathbb{Z}^n$.

Démonstration : On pose :

$$\eta = y^+ - y^-$$

(2) s'écrit alors :

$$(2') \begin{cases} \eta \hat{A} = 0 \\ -1 \leq \eta_i \leq 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ \eta c = z(\text{Max}) \end{cases}$$

et d'après les résultats du Lemme 2, (2') possède toujours une solution optimale $\hat{\eta}$ dont les composantes valent $+1$ ou -1 . La solution optimale correspondante de (2) est :

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_i = +1 &\Rightarrow \hat{y}_i^+ = +1, \quad \hat{y}_i^- = 0 \\ \hat{\eta}_i = -1 &\Rightarrow \hat{y}_i^+ = 0, \quad \hat{y}_i^- = 1 \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Remarque :

7) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire dont la matrice d'incidence aux arcs est A . On associe à H l'hypergraphe unimodulaire $\hat{H} = (\hat{X}, \hat{A})$ obtenu en adjoignant à chaque arc de cardinal impair un sommet qui n'appartient qu'à cet arc. Il est clair qu'il existe une bijection entre les bicolorations équitables de H et celles de \hat{H} .

2ème démonstration du Théorème 3 :

A - Soit (X, C) un hypergraphe partiel de H qui est une pseudo-chaîne joignant x_i et x_j . Faisons la démonstration dans le cas où cette pseudo-chaîne est impaire (le cas où (X, C) est une pseudo-chaîne paire se traite de manière analogue). D'après le théorème des alternatives (Lemme de Farkas, cf. []), le système :

$$(II) \begin{cases} yC = 0 \\ yC \neq 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution puisque le système (I) (cf. Lemme 1) possède une solution. Par conséquent, pour toute bicoloration équitale des sommets de H , x_i et x_j reçoivent des couleurs différentes et on a bien $h_H(x_i, x_j)$.

B - Soit $\hat{H} = (\hat{X}, \hat{A})$ l'hypergraphe obtenu à partir de H ainsi qu'il est indiqué dans la remarque 7. Soit \hat{A} la matrice d'incidence aux arcs de \hat{H} . On suppose que $\hat{h}_H(x_i, x_j)$ et on fait la démonstration dans le cas où x_i et x_j reçoivent, pour toute bicoloration équitale des sommets de \hat{H} , deux couleurs différentes (la démonstration dans l'autre cas serait analogue). Le programme linéaire :

$$(3) \begin{cases} y^+ \hat{A} - y^- \hat{A} = 0 & y^+, y^- \geq 0 \\ y^+ + y^- = e \\ y^+ c - y^- c = z(\text{Max}) \end{cases}$$

a une solution optimale entière d'après le Lemme 3. Or, toute solution entière de (3) correspondant à une bicoloration équitale des sommets de \hat{H} ; la valeur de la fonction objective pour une solution optimale de (3) est donc, à cause de l'hypothèse, égale à 0.

Le programme linéaire dual de (3) s'écrit :

$$(4) \begin{cases} \zeta \geq c - \hat{A}\xi \\ \zeta \geq -(c - \hat{A}\xi) \\ \sum_{i=1}^n \zeta_i = w(\text{Min}) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$(4') \begin{cases} \zeta_i \geq |c_i - \hat{A}_i \xi| \\ \sum \zeta_i = w(\text{Min}) \end{cases}$$

or, d'après le théorème de dualité en programmation linéaire on sait que pour une solution optimale de (4') $w = 0$. Il s'ensuit que le système :

$$(5) \quad \hat{A}\xi = c$$

possède une solution. Comme la matrice \hat{A} est totalement unimodulaire et que les composantes de c valent 0 ou 1, il existe une solution $\hat{\xi}$ du système (5) dont les composantes valent 0, +1 ou -1. On pose :

$$C = S(\hat{\xi})$$

C ne peut contenir d'arcs de H ayant un nombre impair de sommets étant donnée la manière dont \hat{A} a été construite et par conséquent C est bien une pseudo-chaîne dans H joignant x_i et x_j .

c.q.f.d.

Corollaire : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega \subset A$ soit un pseudo-cocycle élémentaire est que $(X, A - \Omega)$ admette plus de bicolorations équitables que H et que Ω soit minimal pour cette propriété.

3 - Flots et tensions dans les hypergraphes unimodulaires

Définition : 7) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire dont la matrice d'incidence aux arcs est A . Soit $A^{(e)}$ l'ensemble des arcs pairs de H et \bar{A} la matrice d'incidence aux arcs de $(X, A^{(e)})$ (cf. Définition V-8) ; on pose :

$$F = \{f \in \mathbb{R}^{m_e} \mid \bar{A}f = 0\} \text{ espace des "flots"}$$

$$T = \{t \in \mathbb{R}^{m_e} \mid \exists \Pi \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } t = \Pi \bar{A}\} \text{ espace des "tensions".}$$

Remarque :

8) Utilisant les propriétés fondamentales des matrices totalement unimodulaires (cf. Définition 3) on voit que (cf. Définition V-8) :

$$f \in F \text{ (resp. } t \in T) \iff \begin{cases} \text{il existe } \tilde{f} \in N \text{ (resp. } \tilde{t} \in N^{\perp}) \text{ tel que} \\ S(f) = S(\tilde{f}) \text{ (resp. } S(t) = S(\tilde{t})). \end{cases}$$

Puisque \bar{A} est totalement unimodulaire tout vecteur élémentaire de F ou T dont l'une des composantes est de module 1 a toutes ses composantes de module 1. On peut donc associer à tout pseudo-cycle élémentaire (resp. à tout pseudo-cocycle élémentaire) un vecteur élémentaire de F (resp. de T) dont toutes

les composantes non nulles sont de module 1. On retrouve alors dans ce formalisme l'orthogonalité des vecteurs représentatifs des pseudo-cycles et des pseudo-cocycles (au sens du produit scalaire dans \mathbb{R}^{me}).

Définition : 8) Soit (X, D) un pseudo-cocycle élémentaire (resp. $\Omega(Y)$ un pseudo-cocycle élémentaire) de l'hypergraphe unimodulaire $H = (X, A)$. Il existe un vecteur élémentaire $f \in F$ (resp. $t = b^{X-Y-A}$) dont toutes les composantes non nulles sont de module 1 tel que :

$$D = S(f) \quad (\text{resp. } \Omega(Y) = S(t))$$

On pose :

$$D^+ = \{E_j \in D \mid f_j = 1\} \quad D^- = \{E_j \in D \mid f_j = -1\}$$

$$(\text{resp. } \Omega^+(Y) = \{E_j \in \Omega(Y) \mid t_j = 1\} \quad \Omega^-(Y) = \{E_j \in \Omega(Y) \mid t_j = -1\})$$

Le pseudo-cycle élémentaire (X, D) (resp. le pseudo-cocycle élémentaire $(X, \Omega(Y))$) sera dit "pseudo-circuit" (resp. "pseudo-cocircuit") élémentaire si $D^+ = \emptyset$ ou $D^- = \emptyset$ (resp. si $\Omega^+(Y) = \emptyset$ ou $\Omega^-(Y) = \emptyset$).

Pemarque :

9) Nous avons donné (cf. Définition 5) la définition d'un "pseudo-chemin" de x_i à x_j . Si (X, C) est un pseudo-chemin de x_i à x_j , si $R^{j,i}$ désigne l'arc incident extérieurement à x_j et intérieurement à x_i et si, de plus, $H = (X, CV\{R^{j,i}\})$ est un hypergraphe unimodulaire, alors H est un pseudo-circuit.

Définition : 9) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire (pair, sans perte de généralité⁽¹⁾) dont la matrice d'incidence aux arcs est A (A est $m \times n$). Soit r un n -vecteur défini par :

$$r_i = \begin{cases} +1 & \text{si } i = n \\ -1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

On appellera, par extension du cas des graphes, "flot de x_1 à x_n dans H " tout m -vecteur f solution de

$$Af + rz = 0$$

z est un scalaire qui sera appelé "valeur du flot f ".

(1) On notera que les arcs de cardinal impair dans les hypergraphes unimodulaires jouant un rôle analogue aux boucles dans les graphes ; c'est à dire qu'en ce qui concerne les problèmes de flots, ils ne jouent aucun rôle.

Remarque :

10) D'après le Théorème V-1 on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un flot de x_1 à x_n de valeur non nulle dans H est que x_1 et x_n appartiennent à la même composante connexe de H.

Par conséquent, et en tenant compte des résultats du chapitre V, on voit qu'on peut supposer sans perte de généralité que H est connexe et pair.

Définitions : 10) Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire (pair) dont la matrice d'incidence aux arcs est A et $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Par analogie avec le cas des graphes orientés on appelle le programme linéaire :

$$(F) \begin{cases} Af + rz = 0 & f \geq 0 \\ f \leq c \end{cases}$$

z(Max)

"problème du flot maximum de x_1 à x_n dans le réseau (X, A, c) ".

11) On appelle "h-coupe séparant x_n de x_1 dans H" un pseudo-cocycle élémentaire $\Omega(Y)$ tel que $x_1 \in Y$, $x_n \in X-Y$. Comme H est supposé connexe, H est séparé (remarque V-8) et par conséquent une h-coupe est un h-cocycle.

A une h-coupe $\Omega(Y)$ séparant x_n de x_1 dans H on fait correspondre la "capacité" de cette h-coupe définie de la manière suivante :

$$c[\Omega(Y)] = \sum_{E_j \in \Omega^+(Y)} c_j$$

Remarques :

11) Il n'est pas nécessaire de pousser les développements plus loin pour conclure que le théorème de la coupe minimale trouve ici un énoncé identique à celui qu'il a en théorie des graphes. De même, si on associe à chaque arc $E_j \in A$, une "capacité inférieure" b_j et une "capacité supérieure" c_j on aura un énoncé identique à celui du théorème d'Hoffman :

"Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in F$, $b \leq f \leq c$ est que pour tout pseudo-cocycle élémentaire $\Omega(Y)$ on ait :

$$\sum_{E_j \in \Omega^-(Y)} b_j \leq \sum_{E_j \in \Omega^+(Y)} c_j "$$

12) Si les énoncés du théorème de la coupe minimale et du théorème d'Hoffman sont identiques à ceux qu'on rencontre dans le cas des graphes (puisque la propriété est une conséquence de la seule totale unimodularité

de la matrice des contraintes) les algorithmes de marquage, applicables dans le cas des graphes ne peuvent pas s'étendre au cas des hypergraphes unimodulaires. Ceci est une conséquence de la remarque V-10 : un h-arbre ne possède pas en général d'arc pendant c'est à dire que la matrice d'incidence aux arcs d'un h-arbre, amputée d'une de ses lignes, n'est pas nécessairement triangulaire.

13) Les résultats du paragraphe II-3 se généralisent également de manière très simple au cas où la matrice A, au lieu d'être la matrice d'incidence aux arcs d'un graphe antisymétrique, est la matrice d'incidence aux arcs d'un hypergraphe général (pair) unimodulaire (ceci avait été montré par Camion d'une autre manière - communication privée). Pour les démonstrations il suffit de remplacer dans les arguments du paragraphe II-3 "chaîne" par "pseudo-chaîne", "cycle" par "pseudo-cycle", "coupe" par "h-coupe" etc... On obtient finalement le théorème de la coupe minimale pour les biflots non orientés sur des hypergraphes unimodulaires.

Définitions : 12) Soit $H = (X,A)$ un hypergraphe unimodulaire (pair) dont la matrice d'incidence aux arcs est A et $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Par analogie avec le cas des graphes non orientés on appellera le programme linéaire :

$$(\bar{P}) \begin{cases} Af + rz = 0 \\ f \leq c \\ f \geq -c \\ z(\text{Max}) \end{cases}$$

"problème du flot non orienté de x_1 à x_n dans le réseau (X,A,c) ".

13) Dans le cas non orienté la "capacité" d'une h-coupe $\Omega(Y)$ séparant x_1 de x_n est égale à :

$$\bar{c}(\Omega(Y)) = \sum_{E_j \in \Omega(Y)} c_j$$

Remarque :

14) La matrice des contraintes de \bar{P} n'est pas totalement unimodulaire.

Théorème 4 : La valeur de la fonction objective pour une solution optimale de (\bar{P}) est égale à la capacité d'une coupe séparant x_n de x_1 (au sens de la Définition 13) de capacité minimale.

Démonstration : (\bar{P}) s'écrit de manière équivalente :

$$(\bar{P}) \begin{cases} Af' - Af'' + rz = 0 & f', f'' \geq 0 \\ f' + f'' \leq c \\ z(\text{Max}) \end{cases}$$

dont la matrice des contraintes n'est pas unimodulaire. Considérons le programme linéaire :

$$(\tilde{P}) \begin{cases} Af' - Af'' + rz = 0 & f', f'' \geq 0 \\ f' \leq c \\ f'' \leq c \\ z(\text{Max}) \end{cases}$$

qui est un problème de flot maximum orienté sur un hypergraphe symétrique. A une solution optimale \tilde{f}' , \tilde{f}'' , \tilde{z} de (\tilde{P}) on fait correspondre :

$$\begin{aligned} \hat{f}'_j &= \text{Max}(0, \tilde{f}'_j - \tilde{f}''_j) \\ \hat{f}''_j &= \text{Max}(0, \tilde{f}''_j - \tilde{f}'_j) \\ \hat{z} &= \tilde{z} \end{aligned}$$

qui est une solution optimale de (\hat{P}) pour laquelle il existe une h-coupe $\Omega(Y)$ telle que :

$$\hat{z} = \bar{c}[\Omega(Y)]$$

c.q.f.d.

Corollaire 4 : Si B désigne la matrice d'incidence des pseudo-chaînes joignant x_1 et x_n dans l'hypergraphe unimodulaire $H = (X, A)$ c'est à dire

$$B_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si la } k\text{ième pseudo-chaîne contient l'arc } E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le programme linéaire :

$$\begin{cases} yB \geq 1 & y \geq 0 \\ yc = w(\text{Min}) \end{cases}$$

a une solution entière pour tout $c \in \mathbb{R}^m$, $c \geq 0$.

Remarque :

15) En utilisant la terminologie de l'appendice de la première partie, le corollaire ci-dessus devient : "La matrice d'incidence des pseudo-chaînes joignant deux sommets donnés dans un hypergraphe unimodulaire est quasi-équilibrée (ou w-ℓ)".

Conjecture : Etant donnée une matrice quasi-équilibrée B on peut trouver un hypergraphe unimodulaire tel que B soit la matrice d'incidence aux arêtes des pseudo-chaînes joignant deux sommets de cet hypergraphe.

Corollaire 2 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe unimodulaire $s^1, s^2, t^1, t^2 \in X$. La matrice d'incidence des ensembles de pseudo-chaînes qui joignent respectivement s^1 et t^1 d'une part s^2 et t^2 d'autre part est quasi équilibrée.

4 - Caractérisation des hypergraphes unimodulaires

Définition : 14) Un h-cycle (cf. chapitre V) est un hypergraphe $H = (X, A)$ tel que $\forall E \in A \quad H^E = (X, A - \{E\})$ soit un h-arbre. Nous restreignons notre attention maintenant aux h-cycles H tels que $\forall E \in A \quad H^E$ soit un h-arbre unimodulaire. Un tel h-cycle sera dit "pair" ou "impair" suivant que H est ou n'est pas unimodulaire lui-même.

Lemme 4 : Soit $H = (X, A)$ un h-cycle impair et $E \in A$. Soit (V, R) une bicoloration équitale de H^E . On a :

$$d_{(V,R)}(E) = ||V \cap E| - |R \cap E|| = 2$$

Démonstration : Soit $E' \in A - \{E\}$, $H' = (X, A - \{E, E'\})$ admet deux composantes connexes exactement Y et \bar{Y} . Soient (V_Y, R_Y) et $(V_{\bar{Y}}, R_{\bar{Y}})$ respectivement les bicolorations équitales de H_Y et $H_{\bar{Y}}$ et posons :

$$\begin{aligned} V &= V_Y \cup V_{\bar{Y}}, & R &= R_Y \cup R_{\bar{Y}} \\ \hat{V} &= V_Y \cup R_{\bar{Y}}, & \hat{R} &= R_Y \cup V_{\bar{Y}} \end{aligned}$$

On a :

$$d_{(V,R)}^Y(E') = d_{(V,R)}^{\bar{Y}}(E') = d_{(V,R)}^Y(E) = d_{(V,R)}^{\bar{Y}}(E) = 1$$

et comme $d_{(V,R)}(E') = 0$ et que, par hypothèse, H n'admet pas de bicoloration équitale on a $d_{(V,R)}(E) = 2$.

c.q.f.d.

Lemme 5 : La matrice d'incidence aux arcs d'un h-cycle impair a un déterminant qui vaut ± 2 .

Démonstration : Soit $H = (X, A \cup \{E\})$ un h-cycle impair ; $H = (X, A)$ est un h-arbre dont la matrice d'incidence aux arcs est A ; soit a la matrice d'incidence de l'arc E . Posons :

$$\begin{aligned} A_{(i)} &: \text{ sous matrice de } A \text{ obtenue en supprimant la } i\text{ème ligne.} \\ \Delta_i &= \text{déterminant } (A_{(i)}) \end{aligned}$$

y_i : composante correspondant au sommet x_i du vecteur représentatif de la bicoloration équitale unique de H.

$e_{i,j}$: n-vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i ème et la j ème qui valent respectivement y_i et y_j .

$e'_{i,j}$: n-vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i ème et la j ème qui valent respectivement y_i et $-y_j$.

D'après le Théorème V-5 on a :

$$\det(A, e_{i,j}) + \det(A, e'_{i,j}) = \pm 2$$

D'autre part, comme $(A, e'_{i,j})$ admet une bicoloration équitale y pour laquelle

$$v \star (A, e'_{i,j}) = 0$$

on a

$$\det(A, e'_{i,j}) = 0$$

et par conséquent :

$$|\det(A, e_{i,j})| = 2$$

Il en résulte que :

$$(-1)^i v_i \Delta_i \star (-1)^j v_j \Delta_j = 1$$

C'est à dire que :

$$(-1)^i \Delta_i = \varepsilon y_i \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Par conséquent :

$$|\det(A, a)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \star (-1)^i \Delta_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \star y^i \right| = 2$$

d'après le Lemme 4.

c.q.f.d.

La matrice d'incidence aux arcs d'un h-cycle pair étant singulière (il existe une combinaison linéaire à coefficients non nuls des lignes qui est égale à 0) on a le résultat suivant :

Théorème 5 : Un h-cycle est pair ou impair suivant que le déterminant de sa matrice d'incidence aux arcs vaut 0 ou ± 2 .

Remarque :

16) On notera que cet énoncé a un correspondant pour les graphes non orientés.

Lemme 6 : Soit $H = (X, A)$ un hypergraphe non unimodulaire ; H possède un sous hypergraphe partiel qui est un h-cycle impair.

Démonstration : Soit $\tilde{H} = (\tilde{X}, \tilde{A}_{\tilde{X}})$ un sous hypergraphe partiel de H qui n'est pas unimodulaire et qui est minimal (au sens de ses sous hypergraphes partiels) pour cette propriété. Alors :

- \tilde{H} n'admet pas de bicoloration équitale.
- $\forall \tilde{E} \in \tilde{A} \quad (\tilde{X}, [\tilde{A} - \{\tilde{E}\}]_{\tilde{X}})$ admet une bicoloration équitale unique
- $\forall \tilde{E}', \tilde{E}'' \in \tilde{A} \quad (\tilde{X}, [\tilde{A} - \{\tilde{E}', \tilde{E}''\}]_{\tilde{X}})$ admet plus d'une bicoloration équitale.

c.q.f.d.

Des Lemmes 5 et 6 on tire le résultat suivant, dû à Gomory (cité dans [9]) :

Corollaire (Gomory) : Si A est une matrice dont les éléments valent 0, +1 ou -1 et qui n'est pas unimodulaire il existe une sous matrice carrée Eulérienne B de A telle que $|\det(B)| = 2$.

Une autre conséquence du Lemme 6 est le :

Théorème 6 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergraphe soit unimodulaire est qu'il ne comporte pas de sous hypergraphe partiel qui est un h-cycle impair.

Remarques :

17) On notera la similitude formelle de cet énoncé avec celui de la proposition correspondante en théorie des graphes : "Une CNS pour qu'un graphe soit biparti est qu'il ne comporte pas de cycle impair".

18) Las Vergnas [37] donne la conjecture suivante : "Soit H un B-hypergraphe tel que :

i) Dans tout cycle (au sens de Berge) de longueur supérieure ou égale à 3, il existe une arête contenant 3 des sommets du cycle.

ii) Aucun sous hypergraphe partiel de H n'est isomorphe à H_0 (cf. figure 7).

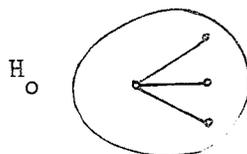


Figure 7

Alors H est unimodulaire".

L'exemple de l'hypergraphe de la figure 8 montre que cette conjecture est fausse. Ainsi que l'a fait remarquer Las Vergnas une version correcte (mais affaiblie) de cette conjecture est de remplacer H_0 par H_1 dans (ii) (cf. figure 9). L'étude de la conjecture de Las Vergnas constitue le point de départ du présent travail.

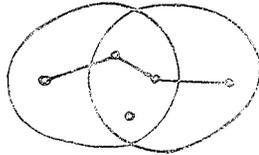


Figure 8

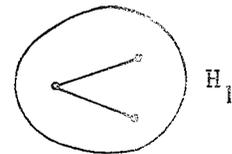


Figure 9

Corollaire 1 (Camion [9]) : A, matrice dont les éléments valent +1, -1 ou 0 est totalement unimodulaire si et seulement si toute sous matrice carrée Eulérienne extraite de A est singulière.

Démonstration : La condition suffisante est une conséquence directe du Théorème 5.

Si A est totalement unimodulaire toute sous matrice carrée Eulérienne B extraite de A admet une bicoloration équitale. Le vecteur représentatif y de cette bicoloration équitale satisfait

$$y * B = 0$$

c.q.f.d.

Corollaire 2 (Camion [9]) : A matrice dont les éléments valent +1, -1 ou 0 est totalement unimodulaire si et seulement si pour toute sous matrice carrée Eulérienne A_{I}^J extraite de A on a :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} A_{i}^j \equiv 0 \pmod{4}$$

Démonstration : Condition Nécessaire : Soit A une matrice totalement unimodulaire et A_I^J une matrice carrée Eulérienne extraite de A. Soit y_I le vecteur représentatif d'une bicoloration équitale de l'hypergraphe dont la matrice d'incidence aux arcs est A_I^J . On a :

$$y_I * A_I^J = 0$$

Si $y_i = +1 \quad \forall i \in I$ la propriété est démontrée. Sinon supposons que $y_i = -1$ pour un certain $i \in I$. Posons :

$$\bar{y}_k = \begin{cases} y_k & \text{si } k \in I, k \neq i \\ -y_i & \text{si } k = i \end{cases}$$

Alors :

$$\bar{b} = \bar{y} * A_I^J = +2 * A_i^J$$

et comme A_i^J est Eulérien on a :

$$\sum_{k \in J} \bar{b}_k \equiv 0 \quad (\text{Mod.4})$$

Si \bar{y} a toutes ses composantes égales à +1, la propriété est démontrée ; sinon on recommence l'opération ci-dessus.

Condition suffisante : D'après le Théorème 5 et le Lemme 5, il suffit de montrer que si A est la matrice d'incidence aux arcs d'un h-cycle impair on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i^j \equiv 2 \quad (\text{Mod.4})$$

Mais, en utilisant le même procédé que dans la démonstration de la condition nécessaire on voit que ce résultat est une conséquence directe du Lemme 4.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ABADIE, M. SAKAROVITCH :
 "Two methods of decomposition for linear programs".
 Mathematical Programming symposium. Princeton University Press (1967).
- [2] M. BALINSKI :
 "Integer programming : methods, uses, computation" in Mathematics
 for the decision sciences. Vol. 11 of lectures in Applied Mathematics
 (1968). The American Mathematical Society. Providence. Rhode
 Island.
- [3] M. BECKMANN, C.B. Mc GUIRE, C.B. WINSTEN :
 "Studies in the economics of transportation".
 Yale University Press. New Haven 1956.
- [4] C. BERGE :
 "Graphes et hypergraphes".
 Dunod 1970.
- [5] C. BERGE :
 "Balanced matrices".
 Mathematical Programming. Vol. 2 (1972), N° 1, pp. 19-31.
- [6] C. BERGE, A. GHOUILA HOURI :
 "Programmes, jeux et réseaux de Transports".
 Dunod (1962).
- [7] M. BRUYNNOGHE, A. GIBERT, M. SAKAROVITCH :
 "Un modèle d'affectation du Traffic".
 Vth symposium on traffic flow. Karlsruhe (1968).
- [8] P. CAMION :
 "Matrices totalement unimodulaires et problèmes combinatoires".
 Thèse, Université libre de Bruxelles, (1963).
- [9] P. CAMION :
 "Caractérisation des matrices totalement unimodulaires".
 Cahiers du C.E.R.O., Vol. 5, n° 4, (1963).
- [10] P. CAMION :
 "Application d'une généralisation du lemme de Minty à un problème
 d'infimum de fonction convexe". Cahiers du C.E.R.O., Vol. 7, n° 3-4,
 (1965).
- [11] P. CAMION :
 "Modules unimodulaires".
 J. Comb. Theory, Vol. 4 (1968), pp. 301-362.
- [12] G.B. DANTZIG :
 "Linear programming and extensions".
 Princeton University Press (1967).
- [13] G.B. DANTZIG, P. WOLFE :
 "The decomposition algorithm for linear programming".
 Econometrica, Vol. 29 (1961), n° 4.

- [14] L.R. FORD, D.R. FULKERSON :
"Maximal flow through a network".
Canadian J. of Math., Vol. 8, (1956), p. 399.
- [15] L.R. FORD, D.R. FULKERSON :
"A suggested computation for maximal multicommodity network flows".
Management Science, Vol. 5, (1958), pp. 97-101.
- [16] L.R. FORD, D.R. FULKERSON :
"Flows in networks".
Princeton University Press (1968).
- [17] D.R. FULKERSON :
"Networks, frames and blocking systems" in Mathematics for the
decision sciences. Vol. 11 of Lectures in Applied Mathematics (1968).
The American Mathematical Society. Providence. Rhode Island.
- [18] D.R. FULKERSON :
"Blocking and antiblocking pairs of polyhedra".
Mathematical programming. Vol. 1 (1971), N° 2.
- [19] D. GALE :
"The basic theorems of real linear Equations, Inequalities, Linear
programming and game theory".
Naval Res. Logist. quart., Vol. 3 (1956), pp. 193-200.
- [20] D. GALE :
"The theory of linear economic models".
Mc Graw Hill (1960).
- [21] G. DE GHELLINCK :
"Aspects de la notion de dualité en théorie des graphes".
Cahiers du C.E.P.O. (Bruxelles), Vol. 3 (1961), pp. 94-102.
- [22] G. DE GHELLINCK, H. DIAZ :
Multicommodity maximum flow in planar networks. The D-Algorithm
approach". Core discussion paper n°7212. Univ. Catholique de Louvain.
- [23] A. GHOUILA-HOURI :
"Flots et tensions dans un graphe".
Thèse, Université de Paris (1969). Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 81,
(1964), pp. 267-339.
- [24] M. GRIGORIADIS, W. WHITE :
"A partitioning algorithm for the multicommodity network flow
problem. Math. Programming, Vol. 3 (1972), N° 2.
- [25] R.C. GRINOLD :
"A multicommodity max-flow algorithm".
Operations Research, Vol. 16 (1968), pp. 1234-1238.
- [26] M. HELD, P. WOLFE, H.P. CROWDER :
"Validation of subgradient optimization".
Mathematical Programming, Vol. 6 (1974), N° 1, pp. 62-88.
- [27] I. HELLER :
"On linear systems with integral valued solutions".
Pacific Journal of Math. (1957), pp. 1351-1364.

- [28] A.J. HOFFMAN :
"Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis".
Proc. Symposia on applied math., Vol. 10 (1960).
- [29] A.J. HOFFMAN, J.B. KRUSKAL :
"Integral boundary points of convex polyhedra".
Linear inequality and related systems. Annals of Math. Study. 38.
Princeton University Press (1956), pp. 223-246.
- [30] T.C. HU :
"Multicommodity network flows".
Operations Research, Vol. 11 (1963), pp. 344-360.
- [31] T.C. HU :
"Integer programming and network flows".
Addison Wesley (1969).
- [32] F. JAEGER :
"On vertex induced forests in cubic graphs".
Vth Southeastern conference on combinatorics, graph theory and
computing. Boca Raton (1974).
- [33] W.S. JEWELL :
"A primal dual multicommodity flow algorithm".
Operations Research Center. University of California. Berkeley
(1966). N° 66, 24.
- [34] W.S. JEWELL :
"Multicommodity network solutions".
Operations Research Center. University of California. Berkeley
(1966), n°66, 23.
- [35] D.J. KLEITMAN :
"An algorithm for certain multicommodity flow problems".
Networks, Vol. 1 (1971), pp. 75-90.
- [36] J. KUNTZMANN :
"Théorie des réseaux ; graphes".
Dunod (1972).
- [37] M. LAS VERGNAS :
"Problèmes de couplage et problèmes hamiltoniens en théorie des
graphes".
Thèse présentée à l'Université de Paris VI (1973).
- [38] P.J. LAURENT :
"Approximation et optimisation".
Hermann (1972).
- [39] A. LEHMAN :
"On the width length inequality".
(Mimeo).
- [40] G.J. MINTY :
"Montone Networks".
Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 257 (1960), pp. 194-212.

- [41] J.P. NETTER :
 "Meshings : A primal type of approach to the maximum flow in a multicommodity network".
 Ph. D. dissertation (1971). The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
- [42] C. PAVAN, M. SAKAROVITCH :
 "Ensembles cycliquement stables et graphes cubiques".
 Actes des journées Franco-Belges sur la théorie de graphes et hypergraphes (1974). A paraître dans les cahiers du C.E.R.O. (Bruxelles).
- [43] R.T. ROCKAFELLAR :
 "The elementary vectors of a subspace of R^N ".
 Proc. of Chapel Hill Sympos. On combinatorial math. and its Applications (1968).
- [44] R.T. ROCKAFELLAR :
 "Convex analysis"
 Princeton University Press (1970).
- [45] J.B. ROSEN :
 "Primal partition programming for block diagonal matrices".
 Numerische mathematik, Vol. 6 (1964), pp. 250-260.
- [46] B. ROTSCHILD, A. WHINSTON :
 "On two commodity network flows".
 Operations Research, Vol. 14 (1966), pp. 377-387.
- [47] B. ROTSCHILD, A. WHINSTON :
 "Feasibility of two commodity network flows".
 Operations Research, Vol. 14 (1966), pp. 1121-1124.
- [48] B. ROY :
 "Algèbre moderne et théorie des graphes".
 Dunod (1969).
- [49] R. SAIGAL
 "Multicommodity flows in directed networks".
 Operations Research Center, University of California, Berkeley (1967), n° 67-38.
- [50] R. SAIGAL, M. SAKAROVITCH :
 "An extension of generalized upper bounding techniques for structured linear programs".
 SIAM J. Appl. Math., Vol. 15, n° 4 (1967).
- [51] M. SAKAROVITCH :
 "The multicommodity maximum flow problem"
 Operations Research Center, Report n°66-25. University of California, Berkeley (1966).
- [52] M. SAKAROVITCH :
 "Notes on linear programming"
 Van Nostrand, Reinhold (1970).

- [53] M. SAKAROVITCH :
"Réseaux de Transport"
Cours polycopié de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1972).
- [54] M. SAKAROVITCH :
"Two commodity network flows and linear programming"
Mathematical programming, Vol. 4, N° 1, pp. 1-20 (1973).
- [55] M. SAKAROVITCH :
"Programmation linéaire".
Cours polycopié, IRMA, (1973).
- [56] M. SAKAROVITCH
"Quasi-balanced matrices".
A paraître dans Math. Programming.
- [57] F. STERBOUL :
"L'hypergraphe des cycles d'un graphe".
Mimeo.

