



HAL
open science

Sous-variétés lagrangiennes monotones

Agnès Gadbled

► **To cite this version:**

Agnès Gadbled. Sous-variétés lagrangiennes monotones. Mathématiques [math]. Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2008. Français. NNT: . tel-00286624v3

HAL Id: tel-00286624

<https://theses.hal.science/tel-00286624v3>

Submitted on 26 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex

Sous-variétés lagrangiennes monotones

par

Agnès GADBLED

Thèse soutenue le 14 juin 2008 devant le jury composé de

Michèle AUDIN	Directrice de thèse
Kai CIELIEBAK	Rapporteur externe
Mihai DAMIAN	Invité
Viatcheslav KHARLAMOV	Rapporteur interne
Dusa MCDUFF	Examinatrice
Jean-Claude SIKORAV	Rapporteur externe

Remerciements

Je veux commencer par remercier ma directrice de thèse Michèle Audin qui a dirigé mon travail durant ces quatre années. Je tiens également à remercier Mihai Damian de s'être autant investi dans le rôle de co-directeur de thèse. Je ne saurais suffisamment les remercier pour tout le temps qu'ils m'ont consacré, pour toutes les connaissances et les intuitions dont ils ont su me faire profiter, ainsi que pour leur aide et leurs encouragements.

Je voudrais ensuite exprimer toute ma reconnaissance à Kai Cieliebak et Dusa McDuff pour l'aide qu'ils m'ont apportée et l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail. Kai Cieliebak a bien voulu être rapporteur de cette thèse, ainsi que Viatcheslav Kharlamov et Jean-Claude Sikorav, et je les en remercie. Je suis aussi particulièrement reconnaissante à Jean-Claude Sikorav du soin avec lequel il a relu une première version de ce texte et de toutes les remarques et les commentaires dont il m'a fait part. Je suis très honorée que Dusa McDuff ait accepté de présider mon jury de thèse.

J'aimerais également remercier tous ceux qui m'ont entourée pendant ces années et avec qui j'ai eu de nombreuses discussions à propos des mathématiques, de l'enseignement, et de la vie en général. Un grand merci à Yasha, Marie, Emmanuel, Anne-Laure, Agnès et tant d'autres... et un merci tout particulier à Catherine et Nicolas qui par leur accueil chaleureux à Meaux m'ont permis d'assister aux séminaires Symplect'X.

Enfin, je voudrais en profiter pour exprimer ici toute ma gratitude à ma famille et en particulier à mes parents, pour leur soutien et leur dévouement depuis le tout début de ma scolarité.

Cette thèse a été financée par une allocation du ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie ainsi qu'un monitorat et un poste d'ATER de l'université Louis Pasteur. Je l'ai effectuée à l'institut de recherche mathématique avancée (Strasbourg).

Introduction

La théorie de Floer a été construite à l'origine pour démontrer une conjecture d'Arnold (voir Arnold [1]) qui relie le nombre minimum de points fixes d'un difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique au nombre de points critiques d'une fonction sur cette variété et à la topologie de la variété via la théorie de Morse. Plus précisément, la conjecture d'Arnold peut être énoncée de la façon suivante : si les solutions de période 1 d'un système hamiltonien dépendant du temps sur une variété symplectique compacte sont non dégénérées, alors leur nombre est au moins égal à la somme des nombres de Betti de la variété.

La conjecture d'Arnold a été démontrée sous des hypothèses de plus en plus générales sur la variété symplectique. Elle a été tout d'abord prouvée pour les tores par Conley et Zehnder [13]. Floer [17] l'a démontré ensuite, en donnant une première construction de son homologie, pour des variétés symplectiques dont la forme symplectique s'annule sur le π_2 . C'est en cherchant à étendre sa construction qu'il a introduit la notion de monotonie [20] pour une variété symplectique, ce qui lui a permis de montrer la conjecture d'Arnold pour une plus large classe de variétés symplectiques.

L'homologie de Floer lagrangienne a été, pour sa part, initialement définie par Floer [18] pour des sous-variétés lagrangiennes dont le π_2 relatif est nul. En introduisant une notion de monotonie pour les sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique, Oh [35] a pu, de la même façon que l'avait fait Floer dans le cas d'un difféomorphisme hamiltonien, étendre la construction de l'homologie de Floer lagrangienne. Cette homologie de Floer pour les sous-variétés lagrangiennes monotones a été utilisée depuis pour démontrer divers résultats sur les sous-variétés lagrangiennes dans les espaces projectifs, ou plus généralement les produits d'espaces projectifs avec d'autres variétés symplectiques (Seidel [44], Biran et Cieliebak [9], Biran [8])...

Dans les deux situations, l'hypothèse de monotonie intervient essentiellement pour définir la différentielle du complexe de Floer et montrer qu'il s'agit effectivement d'une différentielle (c'est-à-dire que son carré est nul). La

preuve repose sur l'étude de la compacité d'espaces de trajectoires ayant un indice (de Conley-Zehnder, respectivement de Maslov) prescrit. La monotonie permet alors d'éviter les phénomènes de "bubbling", c'est-à-dire l'apparition de bulles, de sphères ou de disques J -holomorphes, lors de la convergence d'une suite de trajectoires. Elle intervient aussi pour démontrer des relations entre l'homologie de Floer et l'homologie ordinaire de la variété symplectique ou de la sous-variété lagrangienne (dans le cas de l'homologie de Floer lagrangienne).

Dans le cas de l'homologie de Floer hamiltonienne, Hofer et Salamon [26] ont affaibli encore cette hypothèse et ont construit une homologie de Floer pour des variétés symplectiques dites faiblement monotones, pour lesquelles les phénomènes de bubbling sont encore évités. Notons que, dans le cas de l'homologie de Floer lagrangienne, beaucoup de questions restent ouvertes même avec des hypothèses plus fortes que la monotonie, comme le montre l'exemple des sous-variétés lagrangiennes exactes dans le cotangent.

Dans cette thèse, nous exploitons les hypothèses de monotonie en théorie de Floer sous deux aspects. Un premier aspect est l'étude d'une nouvelle famille d'exemples de variétés monotones et de leurs sous-variétés lagrangiennes monotones. Un second aspect est la construction d'une homologie de type Floer-Novikov pour des sous-variétés lagrangiennes dites monotones sur les lacets afin d'obtenir des résultats d'obstruction de plongements monotones dans les cotangents.

La suite du présent texte est organisée de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, nous commençons par un rappel des diverses définitions de monotonie : variétés symplectiques monotones, sous-variétés lagrangiennes monotones au sens habituel, monotones sur les lacets et nous expliquons en quoi cette notion est utile pour la construction d'homologies de type Floer.

Dans un deuxième chapitre, nous décrivons une classe de variétés symplectiques monotones construites par un procédé appelé découpe symplectique (dû à Lerman [29]) à partir du cotangent de variétés munies d'une action libre du cercle. Si V est une variété fermée munie d'une action libre du cercle, cette action induit une action hamiltonienne du cercle sur le cotangent T^*V de V . Si on note H le hamiltonien associé à cette action, W_ξ la variété symplectique obtenue par découpe symplectique de T^*V au niveau ξ et Q_ξ la variété réduite $H^{-1}(\xi)/\mathbb{S}^1$, alors W_ξ possède les propriétés suivantes :

- 1) (Lemme 2.2.8) La variété W_ξ est un fibré en droites complexes sur Q_ξ .
- 2) (Proposition 2.2.5) Le quotient Q_ξ est une sous-variété symplectique de W_ξ difféomorphe au cotangent de $B = V/S^1$. Si e est la classe d'Euler du fibré en cercles $V \rightarrow B$ et q est la projection $Q_\xi \rightarrow B$, alors la classe de la forme symplectique sur Q_ξ est $-2\pi\xi q^*e$.
- 3) (Proposition 2.2.7) La classe dans $H^2(W_\xi; \mathbb{R})$ de la forme symplectique de W_ξ est reliée à la première classe de Chern de W_ξ par la formule :

$$[\omega_\xi] = -2\pi\xi c_1(W_\xi).$$

En particulier, W_ξ est monotone pour $\xi < 0$.

- 4) (Proposition 2.4.9) La variété W_ξ est munie d'une action hamiltonienne du cercle dont la somme des poids en un point fixe est égal à 1.
- 5) (Théorème 2.3.1) La section nulle V du cotangent peut être plongée comme une sous-variété lagrangienne monotone de W_ξ pour un niveau ξ strictement négatif.
- 6) (Corollaire 2.4.2) Toute sous-variété lagrangienne compacte exacte de classe de Maslov nulle de T^*V peut être plongée comme sous-variété lagrangienne monotone de W_ξ pour un certain niveau $\xi < 0$.

Dans le cas général d'une sous-variété lagrangienne monotone dans une variété symplectique, Seidel a montré que, sous de bonnes hypothèses sur la variété symplectique et la sous-variété lagrangienne monotone, l'homologie de Floer peut être graduée de façon absolue. Il a aussi montré que si la variété symplectique est munie d'une action hamiltonienne du cercle, l'homologie de Floer de la sous-variété lagrangienne est périodique pour la graduation absolue, de période la somme des poids de l'action en un point fixe. Nous donnons ici une démonstration du fait que la période ainsi obtenue ne dépend pas du point fixe choisi (proposition 2.4.8).

En appliquant les méthodes de Seidel aux sous-variétés lagrangiennes monotones de la découpe symplectique W_ξ , on obtient :

- 1) (Théorèmes 2.4.12 (résultat que l'on peut aussi obtenir autrement en adaptant des méthodes de Lalonde et Sikorav) et 2.4.11) Des résultats sur l'indice du groupe fondamental d'une sous-variété lagrangienne compacte exacte de classe de Maslov nulle dans le groupe fondamental du cotangent d'une variété qui est l'espace total d'un fibré principal en cercles
- 2) (Théorème 2.5.1) Un résultat d'obstruction à l'existence d'une sous-variété lagrangienne compacte et simplement connexe dans une découpe symplectique monotone sous certaines conditions sur la classe d'Euler e .

- 3) (Théorème 2.5.5) Les tores lagrangiens monotones dans une découpe symplectique simplement connexe ont un nombre de Maslov égal à 2.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à une hypothèse de monotonie pour les sous-variétés lagrangiennes dans le cotangent légèrement plus forte que l'hypothèse usuelle, mais qui englobe le cas des sous-variétés lagrangiennes exactes : la monotonie sur les lacets. Nous décrivons la construction d'une homologie de type Floer-Novikov pour les sous-variétés lagrangiennes monotones sur les lacets dans le cotangent d'une variété. Nous montrons qu'elle peut être reliée à l'homologie de Novikov $H_*(\bar{L}, f^*u)$ de la sous-variété lagrangienne à l'aide d'une suite spectrale (théorème 3.4.7) :

Théorème. *Soient M une variété fermée et L une sous-variété lagrangienne de T^*M monotone sur les lacets.*

*On suppose que l'application induite par l'inclusion $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(T^*M)$ est surjective et que le nombre de Maslov N_L de L est supérieur ou égal à 2.*

Il existe une suite spectrale $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) $E_0^{p,q} = C_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \otimes A^{pN_L}$ et $d_0 = \partial_0 \otimes 1$, où ∂_0 est la différentielle de Morse-Novikov ;
- (2) $E_1^{p,q} = H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \otimes A^{pN_L}$ et $d_1 = [\partial_1] \otimes \tau$ où

$$[\partial_1] : H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \longrightarrow H_{p+1+q-(p+1)N_L}(\bar{L}, f^*u) ;$$

- (3) $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ s'achève à la page $\kappa + 1$, où $\kappa = \lceil \frac{\dim(L)+1}{N_L} \rceil$ et la suite spectrale converge vers $FH(L, u)$, i.e.

$$\bigoplus_{p+q=\ell} E_\infty^{p,q} \cong FH^{\ell(\bmod N_L)}(L, u) ;$$

- (4) pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,q} \cong FH(L, u)$.

Dans ce théorème, la classe $u \in H^1(M, \mathbb{R})$ désigne le flux de l'isotopie symplectique de T^*M utilisée pour la construction de $FH(L, u)$, A est le Λ_u -module $A = \Lambda_u[T, T^{-1}]$ des polynômes de Laurent à coefficients dans Λ_u , $A^{pN_L} = \mathbb{Z}/2T$, et $\tau_i : A \rightarrow A$ est la multiplication par T^i .

Nous déduisons de cette suite spectrale des obstructions à l'existence de sous-variétés lagrangiennes monotones dans le cotangent d'une variété qui est l'espace total d'une fibration sur le cercle, étendant ainsi des résultats de Damian [14] sur les sous-variétés lagrangiennes exactes dans ce type de cotangents (théorème 3.1.5) :

Théorème. *Soit M une variété fermée qui est l'espace total d'une fibration $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ sur le cercle.*

*Soit L une sous-variété lagrangienne de T^*M monotone sur les lacets.*

On suppose de plus que soit $N_L \geq \dim(M) + 1$, soit ($N_L \geq \dim(M)$ et $[\pi_1(M) : \pi_1(L)]$ est fini). On a :

(i) *Si $\langle g_1, g_2, \dots, g_p | r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ est une présentation finie de $\pi_1(L)$, alors*

$$p - q \leq 1.$$

(ii) *Le groupe fondamental $\pi_1(L)$ n'est pas isomorphe à un produit libre de deux groupes non triviaux (de présentation finie).*

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	iii
1 Monotonie	1
1.1 Variétés symplectiques monotones	1
1.1.1 Définition	1
1.1.2 Exemples de variétés symplectiques monotones	2
1.1.3 Utilisation en homologie de Floer	3
1.2 Sous-variétés lagrangiennes monotones	4
1.2.1 Définition, remarques	4
1.2.2 Exemples de sous-variétés lagrangiennes monotones	7
1.2.3 Utilisation en homologie de Floer lagrangienne	10
2 Exemples de variétés symplectiques monotones obtenues par découpe symplectique d'un cotangent	13
2.1 Construction	13
2.2 Étude de la monotonie de la découpe symplectique	20
2.2.1 Étude de la variété symplectique réduite Q_ξ	20
2.2.2 Conséquences pour la découpe symplectique W_ξ	23
2.3 Monotonie de la sous-variété lagrangienne V dans W_ξ	26
2.4 Sous-variétés lagrangiennes dans le cotangent plongées dans la découpe symplectique	31
2.4.1 Monotonie d'une sous-variété lagrangienne du cotangent dans la découpe symplectique	32
2.4.2 Périodicité de Seidel associée à une action hamiltonienne du cercle	35
2.4.3 Sous-variétés lagrangiennes compactes exactes du cotangent	41
2.5 Plongements lagrangiens monotones dans une découpe symplectique	46

2.5.1	Sphère dans une découpe symplectique	47
2.5.2	Tore monotone dans une découpe symplectique	50
2.5.3	Produit monotone de deux sphères dans une découpe symplectique	54
3	Sous-variétés lagrangiennes monotones dans le cotangent	57
3.1	Introduction	57
3.2	Novikov theory	61
3.3	The Floer type complex	62
3.3.1	Preliminary results	63
3.3.2	The action one-form	66
3.3.3	The gradient	68
3.3.4	Transversality and compactness	70
3.3.5	The differential of the Floer complex	73
3.3.6	Hamiltonian invariance	78
3.4	Floer homology and Novikov theory	83
	Appendix	96
	Appendices	99
A	Découpe symplectique avec action semi-libre de cercle	99
A.1	Somme des poids	99
A.2	Monotonie de cette découpe	101
B	Sphère lagrangienne dans une découpe symplectique du cotan- gent à un niveau positif	104
	Bibliographie	110

Chapitre 1

Monotonie

1.1 Variétés symplectiques monotones

1.1.1 Définition

Soit (W, ω) une variété symplectique. Elle peut être munie d'une structure presque complexe J compatible avec la forme ω et on peut donc définir la première classe de Chern du triplet (W, ω, J) . Comme l'espace des structures presque complexes compatibles est contractile (Gromov [24], voir aussi [4]), cette première classe de Chern ne dépend pas de la structure presque complexe compatible choisie sur la variété W . On la notera $c_1(W, \omega)$ ou simplement $c_1(W)$ s'il n'y a aucune ambiguïté sur la forme symplectique.

Notation 1.1.1. *On notera N_W le premier nombre de Chern de la variété symplectique (W, ω) , c'est-à-dire le générateur positif du sous-groupe $\langle c_1(W), \pi_2(W) \rangle$ de \mathbb{Z} .*

Une variété symplectique est monotone si sa première classe de Chern et la classe de sa forme symplectique sont (positivement) proportionnelles sur $\pi_2(W)$:

Définition 1.1.2 (Floer, [20]). *Une variété symplectique (W, ω) est dite monotone s'il existe une constante $K_W \geq 0$ telle que*

$$\text{pour tout } u \in \pi_2(W), [\omega](u) = K_W c_1(W, \omega)(u). \quad (1.1)$$

Remarque 1.1.3. On peut aussi s'intéresser à des variétés symplectiques vérifiant (1.1) mais sans condition de positivité sur la constante K_W (voir par exemple [43]). Nous utiliserons ici essentiellement la monotonie de la définition 1.1.2, sauf à l'appendice B.

Remarque 1.1.4. Une variété dont la classe de la forme symplectique est nulle sur $\pi_2(W)$ est monotone au sens de la définition 1.1.2 : il suffit pour cela de choisir la constante K_W égale à zéro. Si de plus $c_1(W, \omega)$ est nulle sur $\pi_2(W)$, n'importe quelle constante positive peut convenir.

1.1.2 Exemples de variétés symplectiques monotones

La variété symplectique \mathbb{R}^{2n}

La variété symplectique \mathbb{R}^{2n} munie de sa forme symplectique canonique $\sum dp_i \wedge dq_i$ est monotone d'après la remarque 1.1.4 puisqu'à la fois la classe de la forme symplectique et la première classe de Chern sont nulles.

Les espaces projectifs

Le groupe $\pi_2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ est engendré par le plongement d'une sphère $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, par exemple celle donnée en coordonnées homogènes par l'application $z \mapsto [z : 1 : 0 : \dots : 0]$. La première classe de Chern d'une telle sphère est $(n + 1)$ (voir par exemple [32]). Le premier nombre de Chern de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est donc $n + 1$.

Si on considère la forme symplectique usuelle sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui induit la métrique de Fubini-Study (voir par exemple [31]), l'aire d'une sphère $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est égale à π , donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est monotone et sa constante de monotonie est égale à $K_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} = \frac{n+1}{\pi}$. On peut aussi choisir de normaliser la forme symplectique de sorte que l'aire du générateur soit égale à 1 ; la constante de monotonie est alors égale à $N_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ c'est-à-dire $n + 1$.

Remarque 1.1.5. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un cas particulier de variété symplectique dont le π_2 est isomorphe à \mathbb{Z} . Si la classe de la forme symplectique n'est pas nulle, pour que de telles variétés soient monotones, il suffit que la classe de la forme symplectique et la première classe de Chern soient de même signe sur un générateur du π_2 .

Les cotangents

Soit M une variété fermée. Soit λ_M la 1-forme de Liouville sur T^*M , qui peut s'écrire en coordonnées locales : $\sum p_i dq_i$. La forme symplectique canonique sur le cotangent T^*M est définie comme la différentielle de la 1-forme de Liouville $\omega_{\text{can}} = d\lambda_M$. Sa classe dans $H^2(T^*M, \mathbb{R})$ est donc nulle et a fortiori, elle s'annule sur $\pi_2(T^*M)$.

D'autre part, on sait que sa première classe de Chern $c_1(T^*M, \omega_{\text{can}})$ est un élément d'ordre 2 de $H^2(T^*M, \mathbb{Z})$. En effet, si $T(T^*M)|_M$ est la restriction

à M du fibré tangent de T^*M , alors $T(T^*M)|_M \simeq TM \otimes \mathbb{C}$ et d'après [32], $2c_1(TM \otimes \mathbb{C}) = 0$. Cette classe s'annule donc sur $\pi_2(T^*M)$. Etant donnée la remarque 1.1.4, le cotangent T^*M entre dans la classe des variété symplectiques monotones pour n'importe quelle constante de monotonie positive.

Les produits

Le produit de variétés monotones (W_1, ω_1) et (W_2, ω_2) ayant la même constante de monotonie est monotone pour la forme $\omega_1 \oplus \omega_2$. C'est le cas par exemple pour un produit fini d'espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de même dimension et munis de la même forme symplectique, d'un produit d'un espace projectif et d'un cotangent ou d'un produit d'espace projectif et d'une variété symplectique dont le π_2 est nul.

Les variétés toriques

L'espace projectif est aussi un cas particulier de variété torique projective. Rappelons qu'une variété torique projective est kählerienne, donc symplectique (pour la 2-forme associée à la métrique de Kähler). Une variété torique projective est monotone en tant que variété symplectique si et seulement si elle est de Fano (voir [15]). Il n'y a donc qu'un nombre fini de variétés toriques projectives monotones en chaque dimension. Par exemple, en dimension 2 (c'est-à-dire en dimension réelle 4), il n'y a que cinq variétés toriques de Fano : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ainsi que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ éclaté en 1, 2 ou 3 point(s).

1.1.3 Utilisation en homologie de Floer

L'hypothèse de monotonie sur la variété symplectique intervient à plusieurs niveaux en homologie de Floer. Tout d'abord, elle est nécessaire à la définition de la différentielle du complexe de Floer car elle permet de montrer la compacité des espaces de trajectoires. Elle implique que la première classe de Chern d'une sphère J -holomorphe non constante est strictement positive. On évite ainsi les phénomènes de «bubbling» de sphères J -holomorphes lors de la convergence de suites de trajectoires de classe de Maslov égale à 1 ou 2. Floer [20] l'utilise également pour montrer que cette homologie est isomorphe à l'homologie ordinaire de la variété symplectique.

Hofer et Salamon [26] ont remarqué que l'on peut éviter les phénomènes de «bubbling» sous une hypothèse plus faible sur l'aire et la classe de Chern des sphères, hypothèse qu'ils ont appelée la monotonie faible. Ils ont ainsi montré qu'on peut définir une homologie de Floer à coefficients dans un

anneau de Novikov pour des variétés symplectiques faiblement monotones et ont montré que les groupes de cette homologie de Floer sont isomorphes aux groupes de cohomologie de la variété symplectique à coefficients dans ce même anneau de Novikov.

1.2 Sous-variétés lagrangiennes monotones

1.2.1 Définition, remarques

On considère toujours une variété symplectique (W, ω) . Soit $2n$ sa dimension. On s'intéresse maintenant aux sous-variétés lagrangiennes de (W, ω) , c'est-à-dire aux sous-variétés de dimension n de W sur lesquelles la forme symplectique s'annule.

Avant de définir la monotonie pour une sous-variété lagrangienne, on rappelle la définition de la classe de Maslov d'un disque à bord dans une sous-variété lagrangienne.

Soit L une sous variété lagrangienne de (W, ω) . Soit $u : (D^2, \mathbb{S}^1) \rightarrow (W, L)$ un disque dans W à bord dans L . Puisque D^2 est contractile, on peut trivialisier le fibré tangent TW sur le disque :

$$\begin{array}{ccc} D^2 \times \mathbb{R}^{2n} \simeq u^*TW & \longrightarrow & TW \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & \xrightarrow{u} & W. \end{array}$$

La restriction $u|_{\mathbb{S}^1}$ étant à valeurs dans L , $(u|_{\mathbb{S}^1})^*TL$ est un lacet dans TL . Il définit donc, dans la trivialisatoin de u^*TW , un lacet dans la grassmannienne Λ_n des sous-espaces vectoriels lagrangiens de \mathbb{R}^{2n} . La classe de Maslov $\mu_L^W(u)$ du disque u est la classe de Maslov (ordinaire, voir par exemple l'appendice de [7]) de ce lacet de Λ_n .

Définition 1.2.1. *On appelle classe de Maslov de L et on note μ_L^W (ou simplement μ_L s'il n'y a pas d'ambiguité sur la variété symplectique ambiante) l'application*

$$\mu_L^W : \pi_2(W, L) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ainsi définie.

Notation 1.2.2. *On notera N_L le nombre de Maslov de la sous-variété lagrangienne L , c'est-à-dire le générateur positif du sous-groupe $\langle \mu_L, \pi_2(W, L) \rangle$ de \mathbb{Z} .*

Remarques 1.2.3. (i) La classe de Maslov est invariante par isotopie symplectique.

- (ii) Si un disque v de $\pi_2(W, L)$ est l'image d'une sphère u de $\pi_2(W)$, on a les relations : $\mu(v) = 2c_1(u)$ (voir par exemple [35]) et donc N_L divise toujours $2N_W$.
- (iii) Si L est simplement connexe, $N_L = 2N_W$.

Rappelons aussi que dans le cas d'un cotangent, la classe de Maslov peut être étendue aux lacets de la sous-variété lagrangienne :

Notation 1.2.4. *Si (W, ω) est une variété symplectique, soit $\Lambda(W) \rightarrow W$ le fibré associé au fibré tangent dont la fibre en un point est l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de l'espace tangent à W en ce point.*

Si L est une sous-variété lagrangienne de W , on note $\gamma_L^W : L \rightarrow \Lambda(W)$ l'application de Gauss qui à un point de L associe l'espace tangent à L en ce point.

Proposition 1.2.5 (Viterbo [47]). *Si (W, ω) est une variété symplectique vérifiant $2c_1(W, \omega) = 0$ dans $H^2(W, \mathbb{Z})$, alors il existe une classe de Maslov $\mu^W \in H^1(\Lambda(W); \mathbb{Z})$ qui prolonge la classe de Maslov ordinaire sur chaque fibre de $\Lambda(W) \rightarrow W$. La classe de Maslov $\mu_L^W \in H^1(L; \mathbb{Z})$ d'une sous-variété lagrangienne L dans W est alors par définition*

$$\mu_L^W = (\gamma_L^W)^* \mu^W.$$

On a rappelé au paragraphe 1.1.2 que le cotangent T^*M d'une variété M est une variété symplectique dont la première classe de Chern vérifie $2c_1(T^*M) = 0$ dans $H^2(T^*M; \mathbb{Z})$. La classe de Maslov d'une sous-variété lagrangienne L de T^*M peut donc bien être définie comme un morphisme de $\pi_1(L)$ dans \mathbb{Z} .

Dans le cas d'une sous-variété lagrangienne, la monotonie décrit le fait que la forme symplectique et la classe de Maslov sont positivement proportionnelles sur les disques à bord dans L .

Définition 1.2.6 (Oh [35]). *Une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique (W, ω) est dite monotone s'il existe une constante $K_L \geq 0$ telle que pour tout v de $\pi_2(W, L)$,*

$$[\omega](v) = K_L \mu_L(v). \tag{1.2}$$

Oh a remarqué que si une variété symplectique admet une sous-variété lagrangienne monotone, la variété symplectique est alors nécessairement monotone :

Proposition 1.2.7 (Oh [35]). *Si une variété symplectique W admet une sous-variété lagrangienne monotone L , alors W elle-même est monotone. Si de plus $c_1(W, \omega)$ est non nul sur $\pi_2(W)$, on a la relation suivante entre les constantes de monotonie de W et de L :*

$$K_W = 2K_L.$$

Démonstration. Si a est un élément non nul de $\pi_2(W)$, on peut prendre son image par l'homomorphisme canonique $j : \pi_2(W) \rightarrow \pi_2(W, L)$ et le voir comme un élément de $\pi_2(W, L)$. On a alors :

$$[\omega](a) = [\omega](j(a)) \tag{1.3}$$

$$\text{et } \mu_L(j(a)) = 2c_1(W, \omega)(a). \tag{1.4}$$

Si la sous-variété lagrangienne L est monotone, il existe une constante positive K_L telle que

$$[\omega](j(a)) = K_L \mu_L(j(a)).$$

On en déduit que

$$[\omega](a) = 2K_L c_1(W, \omega)(a).$$

□

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

Lemme 1.2.8. *Une sous-variété lagrangienne simplement connexe dans une variété symplectique monotone est monotone.*

Démonstration. Si une sous-variété lagrangienne L d'une variété symplectique monotone W est simplement connexe, alors l'homomorphisme canonique $j : \pi_2(W) \rightarrow \pi_2(W, L)$ est surjectif, de sorte que la monotonie sur les sphères de W entraîne la monotonie sur les disques à bord dans L . □

Dans [8], Biran a utilisé un résultat semblable au lemme 1.2.8 pour des sous-variétés lagrangiennes L telles que $H_1(L; \mathbb{Z})$ soit de q -torsion (c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in H_1(L; \mathbb{Z})$, $q\alpha = 0$). On utilisera par la suite :

Lemme 1.2.9. *Si L est une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique monotone (W, ω) et si $\pi_1(L)$ est de q -torsion (c'est-à-dire $a^q = 1$ pour tout a de $\pi_1(L)$ avec $q \neq 0$), alors L est monotone dans W et $2N_W$ divise qN_L .*

Démonstration. Puisque W est monotone, il existe une constante positive K_W telle que, pour tout u de $\pi_2(W)$,

$$[\omega](u) = K_W c_1(W, \omega)(u). \quad (1.5)$$

Soit v un élément de $\pi_2(W, L)$. Le bord de v est un élément de $\pi_1(L)$ et donc si $\pi_1(L)$ est de q -torsion, $(\partial v)^q = \partial(v^q) = 1$ dans $\pi_1(L)$. Cela signifie que v^q est l'image d'une sphère u de W .

On a alors les relations suivantes :

$$2c_1(W, \omega)(u) = \mu_L(v^q) = q\mu_L(v) \quad (1.6)$$

et

$$[\omega](u) = [\omega](v^q) = q\omega(v). \quad (1.7)$$

La relation (1.5) entraîne :

$$2q[\omega](v) = K_W q\mu_L(v)$$

et donc la monotonie de L dans W puisque q n'est pas nul.

De plus, d'après la relation (1.6), pour tout v de $\pi_2(W, L)$, $2N_W$ divise $q\mu_L(v)$ et donc $2N_W$ divise qN_L . □

Remarque 1.2.10. La même démonstration (hormis la relation entre le nombre de Maslov et le nombre de Chern) montre que si $\pi_1(L)$ est de torsion, alors L est monotone.

Dans le cas où on considère des sous-variétés lagrangiennes dans le cotangent T^*M d'une variété, on utilisera au chapitre 3 la notion plus forte de monotonie sur les lacets :

Définition 1.2.11. Une sous-variété lagrangienne L dans T^*M est dite monotone sur les lacets s'il existe une constante $k_L \geq 0$ telle que :

$$\text{pour tout } \gamma \in \pi_1(L), \int_{\gamma} \lambda_M = k_L \mu_L(\gamma).$$

1.2.2 Exemples de sous-variétés lagrangiennes monotones

Des sous-variétés lagrangiennes «locales»

Nous appelons sous-variété lagrangienne «locale» une sous-variété lagrangienne de \mathbb{R}^{2n} plongée comme une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique de dimension $2n$ grâce à une carte de Darboux.

Par exemple, il existe des tores lagrangiens locaux dans toutes les variétés symplectiques. On peut construire un plongement du tore dans \mathbb{R}^{2n} pour que l'image soit une sous-variété lagrangienne monotone de \mathbb{R}^{2n} : si $j : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un plongement du cercle dans \mathbb{R}^2 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$j \times j \times \cdots \times j : (\mathbb{S}^1)^n = \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

est un plongement lagrangien monotone d'un tore dans \mathbb{R}^{2n} muni de sa forme symplectique canonique. On peut aussi définir un plongement monotone du tore dans \mathbb{R}^{2n} par un produit de plongements différents du cercle dans \mathbb{R}^2 pourvu que chaque cercle borde un disque de même aire. Les tores monotones dans \mathbb{R}^{2n} ont toujours le même nombre de Maslov :

Théorème 1.2.12 (Buhovski [12], Fukaya, Oh, Ohta et Ono [22]).
Un tore monotone dans \mathbb{R}^{2n} a un nombre de Maslov égal à 2.

Dans l'espace projectif complexe

L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une sous-variété lagrangienne monotone de nombre de Maslov $n + 1$ (voir [36]).

Dans [35], Oh a montré que le tore de Clifford dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'image dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ du tore $\mathbb{T}^{n+1} = \mathbb{S}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$, produit des cercles $\mathbb{S}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ centrés en l'origine de rayon $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$:

$$\mathbb{T}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}(1) \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}(1)/\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

est monotone de nombre de Maslov égal à 2.

Variétés toriques

Soit X une variété torique projective. Elle est naturellement munie d'une action de tore de dimension moitié. Rappelons que cette action est hamiltonienne. On note $J : X \rightarrow (\mathbb{R}^N)^\vee$ son application moment et $P = J(X)$ le polytope image. Pour tout point $y \in \text{Int}(P)$, la fibre $J^{-1}(y)$ est un tore lagrangien dans X .

Le tore de Clifford est un cas particulier de telle fibre : il est la fibre du barycentre des sommets du polytope associé à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Entov et Polterovich [16] ont montré qu'il existe dans toute variété torique monotone un point p_{spec} de $\text{Int}(P)$ (dit point spécial) dont la fibre $J^{-1}(p_{spec})$ (dite fibre spéciale) est un tore lagrangien monotone.

Le lemme suivant montre que ces fibres sont les seules fibres monotones :

Lemme 1.2.13. *Si une fibre lagrangienne $J^{-1}(p)$ est monotone dans une variété torique X , alors elle est l'unique fibre lagrangienne monotone dans X .*

Démonstration. Supposons que $T = J^{-1}(p)$ soit un tore monotone dans une variété torique X (qui est alors nécessairement de Fano), alors (voir proposition 1.2.7) pour tout disque $u \in \pi_2(X, T)$,

$$[\omega](u) = \frac{K_X}{2} \mu_T(u),$$

où K_X est la constante de monotonie de X .

Sur $J^{-1}(\text{Int}(P))$, il existe des coordonnées action-angle globales (voir par exemple [5, chapitre 4])

$$(J_1, \dots, J_n; \theta_1, \dots, \theta_n)$$

où (J_1, \dots, J_n) sont les composantes de l'application moment

$$J : J^{-1}(\text{Int}(P)) \rightarrow \text{Int}(P),$$

de sorte que pour tout y de $\text{Int}(P)$ la fibre $J^{-1}(y)$ peut s'écrire

$$\{(y; \theta_1, \dots, \theta_n) \mid \theta_i \in \mathbb{S}^1\}$$

dans ces coordonnées.

Si $y = (y_1, \dots, y_N)$ est un point de $\text{Int}(P)$ distinct de $p = (p_1, \dots, p_N)$, il existe au moins un indice $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $y_i \neq p_i$. On suppose pour simplifier que $y_1 \neq p_1$. On montre que $L = J^{-1}(y)$ n'est pas monotone dans X .

On considère alors le lacet $\gamma : t \mapsto (y; e^{2i\pi t}, 1, \dots, 1)$ dans $J^{-1}(y)$ et un disque $v : D^2 \rightarrow X$ de bord γ (un tel disque existe puis X est simplement connexe).

Le lacet γ est homotope à un lacet dans $J^{-1}(p)$ par l'homotopie

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{S}^1 \times [0; 1] &\longrightarrow J^{-1}(\text{Int}(P)) \\ (t, s) &\longmapsto ((1-s)y + sp; e^{2i\pi t}, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

La somme connexe de cette homotopie et du disque v le long de γ est un disque $u : D^2 \rightarrow X$ à bord dans $J^{-1}(p)$.

La classe de Maslov de u est égale à celle de v . Cependant l'aire de u est égale à

$$[\omega](u) = \int h^* \omega + [\omega](v).$$

Or

$$\int h^*\omega = (p_1 - y_1) \int \gamma^*\lambda$$

est proportionnelle à la longueur $\int \gamma^*\lambda$ du lacet γ (où λ est une primitive de ω sur $\text{Int}(P)$) avec $p_1 - y_1 \neq 0$.

Comme $[\omega](u) = \frac{K_X}{2} \mu_T(u)$, par monotonie de T ,

$$\begin{aligned} [\omega](v) - \frac{K_X}{2} \mu_L(v) &= (p_1 - y_1) \int \gamma^*\lambda \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

La fibre $L = J^{-1}(y)$ n'est donc pas monotone dans X . □

Dans le cotangent d'une variété

La section nulle d'un cotangent est clairement une sous-variété lagrangienne monotone et donc toute image de cette section nulle par une isotopie hamiltonienne l'est aussi.

Plus généralement, une sous-variété lagrangienne exacte d'un cotangent, c'est-à-dire telle que la 1-forme de Liouville soit exacte sur cette sous-variété est elle aussi monotone, de constante de monotonie nulle.

1.2.3 Utilisation en homologie de Floer lagrangienne

L'homologie de Floer lagrangienne a été initialement définie (voir [18]) pour des sous-variétés lagrangiennes L d'une variété symplectique W telles que la classe de la forme symplectique s'annule sur $\pi_2(W, L)$. Grâce à la notion de monotonie pour les sous-variétés lagrangiennes que nous venons de rappeler, Oh ([35]) a pu étendre la construction à une large classe de sous-variétés lagrangiennes.

Rappelons brièvement la définition de l'homologie de Floer lagrangienne. Afin de définir l'homologie de Floer lagrangienne d'une sous-variété lagrangienne L compacte et monotone dans une variété symplectique (W, ω) (à géométrie bornée au sens de [6]), on déforme la sous-variété L à l'aide d'une isotopie hamiltonienne (Φ_t) de sorte que les intersections de L et de $\Phi_1(L)$ soient transverses.

Le complexe de Floer est l'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ engendré par les points d'intersection de L et $\Phi_1(L)$:

$$CF(L, \Phi_1(L)) = \{x \in L \cap \Phi_1(L) \mid [t \mapsto \Phi_t^{-1}(x)] = 0 \in \pi_1(W, L)\}.$$

La différentielle ∂ est définie en comptant les bandes J -holomorphes (pour une famille lisse de structures presque complexes ω -compatibles J_t) entre L et $\Phi_1(L)$ qui relie deux points d'intersection de L et $\Phi_1(L)$. Plus précisément, on considère l'espace $\mathcal{M}(x, y)$ des applications $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow W$ telles que :

- u est J -holomorphe : $\frac{\partial u}{\partial s} + J_t \frac{\partial u}{\partial t} = 0$;
- d'énergie finie : $\int u^* \omega < \infty$;
- u est une bande entre L et $\Phi_1(L)$: $u(\cdot, 0) \in L$ et $u(\cdot, 1) \in \Phi_1(L)$;
- u relie deux points d'intersections x et y :

$$u(-\infty, \cdot) = x \text{ et } u(+\infty, \cdot) = y;$$

- l'indice de Maslov $\mu_u(x, y)$ de u (voir la définition dans ce cas dans [38] par exemple) est égal à 1.

Le nombre d'incidence de deux points d'intersection $[x, y]$ est défini comme le cardinal de l'espace de modules obtenu en quotientant l'espace $\mathcal{M}(x, y)$ par l'action de \mathbb{R} par translation selon la variable s .

L'hypothèse de monotonie est utilisée pour démontrer que ∂ est bien définie et que ∂ est une différentielle de complexe. En effet, elle implique que tout disque J -holomorphe non constant a une classe de Maslov strictement positive. Ceci est utile pour démontrer la compacité des espaces de trajectoires du gradient de la 1-forme d'action entre deux points d'intersection. On peut ainsi montrer que l'espace de modules défini ci-dessus est une variété compacte de dimension 0 dont on peut bien considérer le cardinal. La compacité permet aussi d'interpréter la composée $\partial \circ \partial$ comme le bord d'une variété compacte de dimension 1 et ainsi montrer que cette composée est bien nulle.

En utilisant la monotonie, Oh a aussi pu relier l'homologie de Floer d'une sous-variété lagrangienne à son homologie usuelle :

Théorème 1.2.14 (Oh, [38]). *Soit L une sous-variété lagrangienne compacte monotone d'une variété symplectique (W, ω) telle que $N_L \geq 2$. On désigne par $HF(L, L)$ son homologie de Floer.*

(i) Si $N_L \geq \dim(L) + 2$, alors

$$HF(L, L) \cong \bigoplus_k H^k(L; \mathbb{Z}/2) ;$$

(ii) Si $N_L = \dim(L) + 1$, alors

$$HF(L, L) \cong \bigoplus_k H^k(L; \mathbb{Z}/2) \text{ ou } \bigoplus_{k \neq 0, \dim(L)} H^k(L; \mathbb{Z}/2).$$

Chapitre 2

Exemples de variétés symplectiques monotones obtenues par découpe symplectique d'un cotangent

2.1 Construction

Soit $\pi : V \rightarrow B$ un fibré principal en cercles dont la base B est supposée connexe par arcs. On note X le champ de vecteurs fondamental de l'action de cercle sur V . Comme cette action de \mathbb{S}^1 est libre, le champ de vecteurs fondamental ne s'annule pas.

Remarque 2.1.1. On trouvera à l'appendice A une étude du cas d'une action semi-libre du cercle.

On note $e \in H^2(B; \mathbb{Z})$ la classe d'Euler du fibré principal π et N_e le générateur positif du sous-groupe $\langle e, \pi_2(B) \rangle$ de \mathbb{Z} .

Exemple 0 : Dans le cas du fibré trivial $V = B \times \mathbb{S}^1 \rightarrow B$, π est la projection sur le premier facteur, l'action de cercle est la multiplication sur le facteur \mathbb{S}^1 (vu comme le groupe des nombres complexes de module 1) et la classe d'Euler est nulle.

Un sous-cas est le cas de \mathbb{S}^1 agissant sur lui-même par multiplication, le quotient B étant réduit à un point.

Exemple 1 : Si $V = \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow B = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$) est le fibré de Hopf, la classe d'Euler est égale à l'opposé du générateur de $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ (ceci peut

aussi être considéré comme un choix de générateur de $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$.

Exemple 2 : Soit V l'espace lenticulaire L_p^{2n+1} , quotient de la sphère \mathbb{S}^{2n+1} par l'action du sous-groupe \mathbb{Z}/p de \mathbb{S}^1 formé des racines p -ièmes de l'unité.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2n+1} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & L_p^{2n+1} \\ & \swarrow & \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

L'action libre de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^{2n+1} nous permet de définir une action libre de \mathbb{S}^1 sur L_p^{2n+1} de quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, telle que la classe d'Euler du fibré principal en cercles $L_p^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ soit $-p$ fois le générateur (choisi à l'exemple 1) de $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$.

Exemple 3 : On peut aussi considérer la variété de Stiefel $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ formée des couples de vecteurs orthonormés de \mathbb{R}^{n+2} . Cette variété $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ peut aussi être décrite comme le quotient $SO(n+2)/SO(n)$. Le sous-groupe $SO(2) \simeq \mathbb{S}^1$ de $SO(n+2)$ agit librement sur $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$, le quotient de cette action étant la grassmannienne $B = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ des plans (de dimension 2) orientés dans \mathbb{R}^{n+2} .

Cette grassmannienne peut être identifiée à la quadrique Q^n d'équation $\sum_{j=0}^{n+1} z_j^2 = 0$ dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. Pour le voir, on peut utiliser la première description de la variété de Stiefel $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ comme un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^{n+2})^2$:

$$V_2(\mathbb{R}^{n+2}) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{n+2})^2 \mid x \cdot y = 0, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

L'action de $SO(2) \simeq \mathbb{S}^1$ peut alors s'écrire :

$$e^{i\theta} \cdot (x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} V_2(\mathbb{R}^{n+2}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \\ (x, y) & \longmapsto & [x + iy] \end{array}$$

passé au quotient et définit un plongement de la grassmannienne $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. De plus, son image est la quadrique Q^n . En effet, la relation

$\|x\|^2 = \|y\|^2$ signifie que la partie réelle de la somme $\sum_{j=0}^{n+1} z_j^2$ s'annule pour le vecteur $z = x + iy$ et la partie imaginaire de cette somme est aussi nulle puisque $x \cdot y = 0$, de sorte que $x + iy$ satisfait l'équation de la quadrique. Réciproquement, tout point de la quadrique peut s'écrire comme image d'un élément de $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$.

Pour $n \geq 3$, d'après le théorème de section hyperplane de Lefschetz, le plongement de la quadrique induit un isomorphisme entre $H^2(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}); \mathbb{Z})$ et $H^2(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Par conséquent, $H^2(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}); \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z} , un générateur préféré étant donné par l'image du générateur préféré de $H^2(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. De plus, $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ est l'espace total du fibré tiré en arrière du fibré de Hopf $\mathbb{S}^{2n+3} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ par le plongement j de $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccc} j^*\mathbb{S}^{2n+3} = V_2(\mathbb{R}^{n+2}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2n+3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \end{array}$$

En effet, grâce à l'application $V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \mathbb{S}^{2n+3}$ donnée par

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$$

et la projection $V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$, le diagramme ci-dessus commute. On déduit par naturalité de la classe d'Euler que :

$$e(V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})) = j^*e(\mathbb{S}^{2n+3} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}))$$

et donc, pour $n \geq 3$, la classe d'Euler du fibré $V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ est égale à l'opposé du générateur de $H^2(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}); \mathbb{Z})$.

Pour les dimensions $n = 1$ et $n = 2$, la description des variétés de Stiefel et des grassmanniennes correspondantes est bien connue (voir par exemple [42]). On déduit alors de la suite exacte longue associée au fibré principal en cercles $V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ les valeurs de N_e pour $n < 3$: pour $n = 1$, $N_e = 2$ et pour $n = 2$, $N_e = 1$.

Action hamiltonienne associée sur le cotangent

Pour $u \in \mathbb{S}^1$, on désigne par $\rho(u) : V \rightarrow V$ (défini par $\rho(u)(x) = u \cdot x$) l'action de \mathbb{S}^1 sur V . A cette action libre de \mathbb{S}^1 sur V est associée une action

de \mathbb{S}^1 sur T^*V :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times T^*V &\longrightarrow T^*V \\ (u, (x, \varphi)) &\longmapsto (u \cdot x, u \cdot \varphi) \end{aligned}$$

où

$$u \cdot \varphi = {}^t(T_x \rho(u)^{-1})(\varphi),$$

c'est-à-dire, si $v \in T_{u \cdot x}V$, alors

$$u \cdot \varphi = \varphi(T_x \rho(u)^{-1}v).$$

Si T^*V est muni de sa structure symplectique canonique, cette action est hamiltonienne de hamiltonien :

$$\begin{aligned} H : T^*V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \varphi) &\longmapsto \langle \varphi, X(x) \rangle \end{aligned}$$

(voir [31, exercice 3.12] par exemple).

Cette action est libre car l'action est libre sur V et la projection canonique $p_V : T^*V \rightarrow V$ est une application équivariante.

En particulier, cette action est sans point fixe, le champ de vecteur hamiltonien associé X_H ne s'annule jamais (car la projection de X_H sur TV par Tp_V est X , qui ne s'annule jamais) et toutes les valeurs du hamiltonien sont régulières.

Découpe symplectique du cotangent

Etant donnée une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne du cercle, Lerman [29] a donné une construction qui permet de plonger les espaces réduits comme sous-variété symplectique de codimension 2 d'une variété symplectique (appelée découpe symplectique).

On décrit cette construction dans le cas du cotangent T^*V . Cette découpe symplectique est naturellement munie d'une action hamiltonienne du cercle (proposition 2.4.9). On s'intéresse à la monotonie de cette variété symplectique (paragraphe 2.2) pour pouvoir y appliquer un résultat de Seidel [44] (rappelé au paragraphe 2.4.2) sur la périodicité de l'homologie de Floer lagrangienne.

Pour définir le procédé de découpe symplectique, on considère l'action hamiltonienne de \mathbb{S}^1 suivante sur le produit $T^*V \times \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times (T^*V \times \mathbb{C}) &\longrightarrow T^*V \times \mathbb{C} \\ (u, (x, \varphi, z)) &\longmapsto (u \cdot x, u \cdot \varphi, \bar{u}z) \end{aligned}$$

de hamiltonien associé :

$$\begin{aligned} \tilde{H} : T^*V \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \varphi, z) &\longmapsto H(x, \varphi) - \frac{1}{2}|z|^2. \end{aligned}$$

De la même façon que pour H , cette action est libre et les niveaux du hamiltonien \tilde{H} sont réguliers.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$ une valeur (régulière) de \tilde{H} . Le niveau $\tilde{H}^{-1}(\xi)$ se décompose en deux parties disjointes, d'une part

$$\{(x, \varphi, 0) \mid H(x, \varphi) = \xi\}$$

difféomorphe à $H^{-1}(\xi)$ et d'autre part

$$\{(x, \varphi, z) \mid H(x, \varphi) > \xi \text{ et } |z| = \sqrt{2(H(x, \varphi) - \xi)}\}$$

difféomorphe à $H^{-1}(] \xi, +\infty[) \times \mathbb{S}^1$, l'action de \mathbb{S}^1 préservant chaque partie.

Remarquons que \mathbb{S}^1 agit également librement sur le niveau $H^{-1}(\xi)$ puisque

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\xi : H^{-1}(\xi) &\longrightarrow V \\ (x, \varphi) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est une fibration équivariante (voir le lemme 2.2.1) et que l'action est libre sur la base.

Comme \mathbb{S}^1 agit librement sur le niveau régulier $\tilde{H}^{-1}(\xi)$, on peut effectuer une réduction symplectique. Muni de la forme symplectique réduite, le quotient $W_\xi = \tilde{H}^{-1}(\xi)/\mathbb{S}^1$ est une variété symplectique appelée découpe symplectique de T^*V au niveau ξ . La décomposition précédente passe au quotient, l'image de la partie $H^{-1}(\xi)$ est une sous-variété symplectique Q_ξ de W_ξ difféomorphe à $H^{-1}(\xi)/\mathbb{S}^1$. Son complémentaire est symplectiquement homéomorphe à l'ouvert $H^{-1}(] \xi, +\infty[)$ (voir la figure 2.1.1).

Remarque 2.1.2. Si $\xi < 0$, alors $H^{-1}(] \xi, +\infty[)$ est un voisinage de la section nulle dans le cotangent T^*V et ce voisinage se plonge symplectiquement comme un ouvert de W_ξ . En particulier, V est une sous-variété lagrangienne de W_ξ .

A cause de la remarque 2.1.2 ainsi que de la condition de monotonie sur W_ξ (proposition 2.2.7), on traitera par la suite essentiellement le cas où $\xi < 0$. On trouvera cependant quelques remarques concernant le cas $\xi > 0$ à l'appendice B.

Exemple 0 : On commence par considérer le cas du cercle $V = \mathbb{S}^1$ agissant sur lui-même par multiplication, le quotient B étant réduit à un

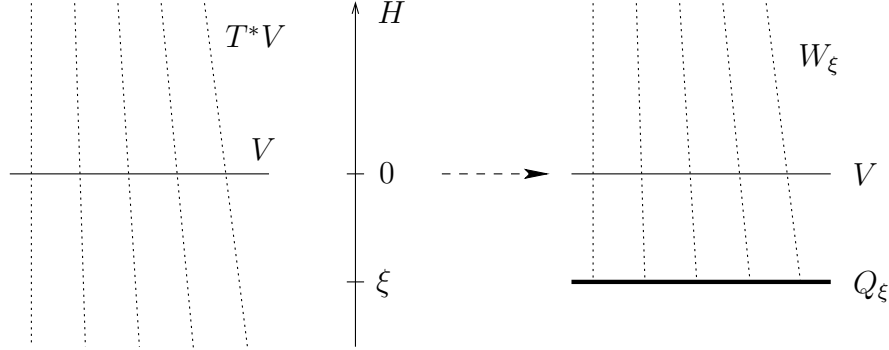


FIG. 2.1.1 – Le cotangent (à gauche) et sa découpe symplectique (à droite)

point. Le champ fondamental de l'action au point x est alors ix (en plongeant \mathbb{S}^1 comme le cercle unité de \mathbb{C}). Le cotangent $T^*\mathbb{S}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$: si x est un point de \mathbb{S}^1 et φ est un élément de $T_x^*\mathbb{S}^1$, il existe un unique réel λ tel que $\varphi = \langle \lambda iu, \cdot \rangle$ (en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$). Un difféomorphisme explicite entre $T^*\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ peut alors être défini en associant au couple (x, φ) le couple (x, λ) .

L'action du cercle sur $T^*\mathbb{S}^1$ peut alors s'écrire sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$:

$$u \cdot (x, \lambda) = (ux, \lambda)$$

et les hamiltoniens deviennent :

$$H(x, \lambda) = H(x, \varphi) = \varphi(ix) = \lambda$$

et

$$\tilde{H}(x, \lambda, z) = H(x, \varphi, z) = \lambda - \frac{1}{2}|z|^2.$$

Le niveau $H^{-1}(\xi) = \{(x, \xi) | x \in \mathbb{S}^1\}$ est un cercle et son quotient par l'action du cercle $Q_\xi = H^{-1}(\xi)/\mathbb{S}^1$ est un point.

Pour \tilde{H} , le niveau $\tilde{H}^{-1}(\xi)$ est l'ensemble $\{(x, \xi + \frac{1}{2}|z|^2, z) | x \in \mathbb{S}^1, z \in \mathbb{C}\}$ et le quotient $W_\xi = \tilde{H}^{-1}(\xi)/\mathbb{S}^1$ est symplectomorphe à \mathbb{C} .

En effet, l'injection

$$i_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow W_\xi \\ z \longmapsto [1, \xi + \frac{1}{2}|z|^2, z]$$

est aussi une surjection puisque tout élément

$$\left[x, \xi + \frac{1}{2}|z|^2, z \right] = \left[1, \xi + \frac{1}{2}|z|^2, x^{-1}z \right]$$

de W_ξ , peut s'écrire comme l'image par $i_{\mathbb{C}}$ d'un nombre complexe ($x^{-1}z = \bar{x}z$ ici).

De plus, la forme symplectique ω_ξ^W sur W_ξ est obtenue par réduction symplectique de la 2-forme $\omega_{\text{can}} \oplus \omega_{\text{std}}$ où ω_{can} est la forme symplectique canonique sur $T^*\mathbb{S}^1$ et ω_{std} est la forme symplectique standard de \mathbb{C} . Mais si $\tilde{\iota}$ est le plongement de \mathbb{C} dans $\tilde{H}^{-1}(\xi)$ défini par :

$$\tilde{\iota}(z) = \left(1, \xi + \frac{1}{2}|z|^2, z \right),$$

alors

$$\begin{aligned} (i_{\mathbb{C}}^* \omega_\xi^W)_z(\zeta_1, \zeta_2) &= (\tilde{\iota}^*(\omega_{\text{can}} \oplus \omega_{\text{std}}))_z(\zeta_1, \zeta_2) \\ &= \omega_{\text{std}}(\zeta_1, \zeta_2) \end{aligned}$$

car $z \mapsto (1, \xi + \frac{1}{2}|z|^2)$ est à valeurs dans une fibre de la projection $T^*\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et les fibres sont des sous-variétés lagrangiennes.

La variété $V = \mathbb{S}^1$ se plonge comme la section nulle dans T^*V et comme l'image de l'application

$$x \longmapsto [x, 0, \sqrt{-2\xi}] = [1, 0, \bar{x}\sqrt{-2\xi}]$$

dans W_ξ si $\xi < 0$. Son image dans \mathbb{C} par le difféomorphisme symplectique décrit précédemment est le cercle centré en l'origine et de rayon $\sqrt{-2\xi}$. Ce cercle borde un disque d'aire $-2\pi\xi$ (qui est aussi l'aire du cylindre délimité par la section nulle et le niveau ξ) (voir la figure 2.1.2).

Dans le cas général d'un produit $V = B \times \mathbb{S}^1 \rightarrow B$ (où B n'est plus nécessairement réduit à un point), on a un difféomorphisme symplectique $T^*V \simeq T^*B \times T^*\mathbb{S}^1$. L'action du cercle sur V étant concentrée sur le facteur \mathbb{S}^1 , l'action sur T^*V est concentrée sur $T^*\mathbb{S}^1$ et le hamiltonien correspondant sur $T^*B \times T^*\mathbb{S}^1$ s'écrit pour $((b, \varphi), (x, \lambda)) \in T^*B \times T^*\mathbb{S}^1$,

$$H((b, \varphi), (x, \lambda)) = \lambda.$$

La découpe symplectique de T^*V (au niveau ξ) est par conséquent le produit de T^*B et de la découpe symplectique de $T^*\mathbb{S}^1$ (également au niveau ξ), donc est symplectomorphe à $T^*B \times \mathbb{C}$.

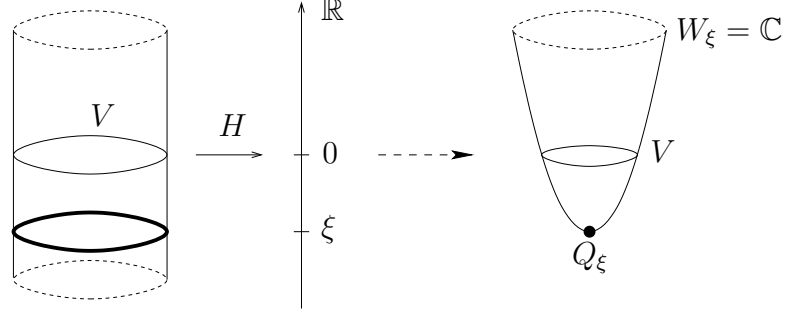


FIG. 2.1.2 – Découpe symplectique du cotangent du cercle

Lorsque ξ est strictement négatif, $V = B \times \mathbb{S}^1$ se plonge comme le produit de la section nulle de T^*B et du cercle centré en l'origine de rayon $\sqrt{-2\xi}$.

Nous étudions maintenant les structures de ces variétés. Nous souhaiterions en particulier savoir si, sous certaines conditions, W_ξ peut être monotone (partie 2.2) et dans ce cas, si la section nulle est monotone dans W_ξ (partie 2.3).

2.2 Étude de la monotonie de la découpe symplectique

On va voir que la structure symplectique et la première classe de Chern de W_ξ peuvent être déduites de celles de Q_ξ . On étudie tout d'abord cette variété réduite Q_ξ .

2.2.1 Étude de la variété symplectique réduite Q_ξ

Lemme 2.2.1. *La projection $\tilde{q}_\xi : H^{-1}(\xi) \rightarrow V$ est une fibration équivariante et passe au quotient en une fibration*

$$q_\xi : \begin{array}{ccc} Q_\xi & \longrightarrow & B \\ [x, \varphi] & \longmapsto & \pi(x). \end{array}$$

Démonstration. Commençons par examiner cette projection pour $\xi = 0$. Dans ce cas,

$$\tilde{q}_0 : \{(x, \varphi) \mid \langle \varphi, X(x) \rangle = 0\} \longrightarrow V$$

est un sous-fibré vectoriel du fibré cotangent $T^*V \rightarrow V$: c'est l'annulateur du champ de vecteurs X dans le fibré cotangent. Par passage au quotient, q_0 est aussi un fibré vectoriel sur B .

Soit $\{\alpha_x\}_{x \in V}$ une famille de formes linéaires $\alpha_x \in T_x^*V$ telle que pour tout $x \in V$, $\langle \alpha_x, X(x) \rangle = 1$ et pour tout $u \in \mathbb{S}^1$, $\alpha_{u \cdot x} = u \cdot \alpha_x$. Elle peut par exemple être définie en utilisant une métrique riemannienne g sur V invariante sous l'action de \mathbb{S}^1 en posant $\alpha_x = g_x(\cdot, X(x))$. Pour tout ξ , cela nous permet de définir un difféomorphisme équivariant :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\xi : H^{-1}(\xi) &\longrightarrow H^{-1}(0) \\ (x, \varphi) &\longmapsto (x, \varphi - \xi \alpha_x). \end{aligned}$$

En passant au quotient, le difféomorphisme $\tilde{\Phi}_\xi$ définit un difféomorphisme $\Phi_\xi : Q_\xi \rightarrow Q_0$ tel que $\tilde{q}_\xi = \tilde{q}_0 \circ \tilde{\Phi}_\xi$ et $q_\xi = q_0 \circ \Phi_\xi$. \square

Corollaire 2.2.2. *Le niveau $H^{-1}(0)$ (et donc aussi $H^{-1}(\xi)$) a le type d'homotopie de V et le quotient Q_0 (et donc Q_ξ) a le type d'homotopie de B , les équivalences d'homotopie étant données par les projections.*

De plus, le fibré q_0 est un fibré particulier sur B :

Lemme 2.2.3. *L'espace Q_0 muni de la forme symplectique réduite à partir de la forme canonique sur T^*V est symplectomorphe au fibré cotangent T^*B .*

On peut trouver une preuve du lemme 2.2.3 dans [2, Section 5].

Corollaire 2.2.4. *La première classe de Chern $c_1(TQ_\xi \rightarrow Q_\xi)$ de Q_ξ est nulle dans $H^2(Q_\xi; \mathbb{R})$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2.3, Q_0 est symplectomorphe à T^*B . Or $c_1(T(T^*B) \rightarrow T^*B)$ est un élément de 2-torsion dans $H^2(T^*B; \mathbb{Z})$ (voir paragraphe 1.1.2), donc $c_1(TQ_0 \rightarrow Q_0)$ est un élément de 2-torsion dans $H^2(Q_0; \mathbb{Z})$.

De plus, Q_ξ dépend de façon continue de ξ et la première classe de Chern de Q_ξ est à valeurs dans un espace discret, de sorte que $c_1(TQ_\xi \rightarrow Q_\xi)$ est aussi un élément de 2-torsion de $H^2(Q_\xi; \mathbb{Z})$ et par conséquent est nul dans $H^2(Q_\xi; \mathbb{R})$. \square

On détermine la classe $[\omega_\xi]$ de la forme symplectique sur Q_ξ grâce à la formule de Duistermaat-Heckman (voir par exemple [5], on utilise ici les conventions de signe de [5]) :

Proposition 2.2.5. *La classe dans $H^2(Q_\xi; \mathbb{R})$ de la forme symplectique réduite sur Q_ξ est égale à :*

$$[\omega_\xi] = -2\pi\xi q_\xi^* e.$$

Démonstration. En effet, puisque tous les niveaux sont réguliers pour H , d'après la formule de Duistermaat-Heckman, pour tous ξ, ξ_0 dans \mathbb{R} ,

$$[\omega_\xi] - [\omega_{\xi_0}] = (\xi - \xi_0) (-2\pi e(H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi))$$

dans $H^2(Q_{\xi_0}; \mathbb{R})$, où $e(H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi)$ est la classe d'Euler du fibré principal en cercles $\pi_Q : H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi$.

Il ne reste plus qu'à déterminer cette classe d'Euler $e(H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi)$. Puisque $H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi$ est le fibré tiré en arrière par la projection $q_\xi : Q_\xi \rightarrow B$ du fibré $\pi : V \rightarrow B$:

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(\xi) & \xrightarrow{\tilde{q}_\xi} & V \\ \downarrow \pi_Q & & \downarrow \pi \\ Q_\xi & \xrightarrow{q_\xi} & B \end{array}$$

on a par naturalité :

$$e(H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi) = q_\xi^*(e(V \rightarrow B)) = q_\xi^*e,$$

où $q_\xi^* : H^2(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(Q_\xi; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Finalement, la formule de Duistermaat-Heckman donne :

$$[\omega_\xi] - [\omega_{\xi_0}] = (\xi - \xi_0)(-2\pi q_\xi^*e).$$

En particulierisant $\xi_0 = 0$, la variété (Q_0, ω_0) est symplectomorphe au cotangent $(T^*B, \omega_{\text{can}})$. Or ω_{can} est une forme exacte, donc la classe $[\omega_{\text{can}}]$ et a fortiori la classe $[\omega_0]$ sont nulles. Ainsi, la formule de Duistermaat-Heckman devient avec $\xi_0 = 0$:

$$[\omega_\xi] = -2\pi\xi q_\xi^*e.$$

□

Remarque 2.2.6. On pourrait aussi utiliser [2, section 5] et décrire Q_ξ comme un fibré cotangent magnétique. On rappelle qu'un fibré cotangent magnétique est un fibré cotangent $q : T^*B \rightarrow B$ dont la forme symplectique diffère de la forme symplectique canonique par une perturbation $q^*\sigma$ où σ est une 2-forme fermée sur B . Ici $\sigma = \xi F(\alpha)$ où $F(\alpha)$ est la courbure d'une 1-forme de connection α pour le fibré $\pi : V \rightarrow B$.

Exemple 0 : Dans le cas du fibré produit, Q_ξ est symplectomorphe à T^*B pour tout ξ , puisque la composante de la 1-forme α dans T^*B est nulle. La 2-forme ω_ξ est toujours exacte et $[\omega_\xi] = 0$ dans $H^2(Q_\xi; \mathbb{R})$ ce qui est confirmé par la proposition 2.2.5.

Exemples 1, 2 et 3 : Dans le cas du fibré de Hopf pour $n \geq 1$ (et de façon analogue dans le cas des variétés de Stiefel pour $n \geq 3$), la classe $[\omega_\xi]$ est égale à -2π fois le pull-back sur $T^*\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de l'image dans $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{R})$ du générateur préféré de $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ (respectivement du pull-back sur $T^*\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ de l'image du générateur préféré de $H^2(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}); \mathbb{Z})$). Dans l'exemple 2, cette classe est par $-2\pi p$ fois le générateur.

2.2.2 Conséquences pour la découpe symplectique W_ξ

Dans ce paragraphe, nous montrons que

Proposition 2.2.7. *Si $V \rightarrow B$ est un fibré principal en cercles et si $\xi < 0$, alors la découpe symplectique W_ξ est monotone et contient V comme sous-variété lagrangienne.*

Cette proposition est une conséquence de la structure de fibré de W_ξ :

Lemme 2.2.8. *Le quotient W_ξ est l'espace total d'un fibré en droites complexes sur Q_ξ , ce fibré étant le fibré en droites complexes associé au fibré principal en cercles : $H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi$.*

Démonstration. Par définition, le fibré en droites complexes associé au fibré principal en cercles : $H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi$ est $H^{-1}(\xi) \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C} \rightarrow Q_\xi$ où \mathbb{S}^1 agit sur $H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C}$ par

$$u \cdot (x, \varphi, z) = (u \cdot x, u \cdot \varphi, \bar{u}z)$$

et l'application

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{-1}(\xi) &\longrightarrow H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C} \\ (x, \varphi, z) &\longmapsto (x, \varphi - \frac{1}{2}|z|^2\alpha_x, z) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme équivariant pour les actions de \mathbb{S}^1 . Elle passe au quotient en un difféomorphisme $W_\xi \rightarrow Q_\xi$. \square

Corollaire 2.2.9. (i) *La projection $p_\xi : W_\xi \rightarrow Q_\xi$ est une équivalence d'homotopie. En conséquence, c'est aussi le cas de $q_\xi \circ p_\xi : W_\xi \rightarrow B$.*

(ii) *La première classe de Chern du fibré $p_\xi : W_\xi \rightarrow Q_\xi$ est égale à la classe d'Euler du fibré en cercles : $H^{-1}(\xi) \rightarrow Q_\xi$.*

(iii) *Le fibré $p_\xi : W_\xi \rightarrow Q_\xi$ est le fibré normal de Q_ξ dans W_ξ .*

Démonstration de (iii) : D'après le lemme 2.2.8, $W_\xi \rightarrow Q_\xi$ est isomorphe au fibré $H^{-1}(\xi) \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C} \rightarrow Q_\xi$. Or ce fibré $H^{-1}(\xi) \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C} \rightarrow Q_\xi$ est le fibré normal de l'espace réduit Q_ξ dans W_ξ (voir [29, remarque 1.7]).

En effet, le difféomorphisme $H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^{-1}(\xi)$ induit un isomorphisme au niveau des fibrés tangents

$$T(H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} T\tilde{H}^{-1}(\xi).$$

Donc si $j_\xi : H^{-1}(\xi) \rightarrow \tilde{H}^{-1}(\xi)$ désigne l'injection de $H^{-1}(\xi)$ dans $\tilde{H}^{-1}(\xi)$, alors $j_\xi^*T(H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} j_\xi^*T\tilde{H}^{-1}(\xi)$.

Mais $j_\xi^*T(H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C})$ est isomorphe en tant que fibré sur $H^{-1}(\xi)$ à la somme de Whitney de $TH^{-1}(\xi)$ et du fibré trivial $H^{-1}(\xi) \times \mathbb{C}$.

Toutes les applications considérées ici sont équivariantes par l'action de \mathbb{S}^1 et induisent un isomorphisme de fibrés sur Q_ξ :

$$i_\xi^*TW_\xi \simeq TQ_\xi \oplus (H^{-1}(\xi) \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C})$$

en notant $i_\xi : Q_\xi \rightarrow W_\xi$ le plongement de Q_ξ comme section nulle de W_ξ . \square

Le corollaire 2.2.9 nous permet de déterminer la première classe de Chern de $TW_\xi \rightarrow W_\xi$:

Lemme 2.2.10. *La première classe de Chern de W_ξ dans $H^2(W_\xi; \mathbb{R})$ est*

$$c_1(W_\xi) = (q_\xi \circ p_\xi)^*e.$$

Démonstration. D'après le (iii) du corollaire 2.2.9,

$$c_1(i_\xi^*TW_\xi \rightarrow Q_\xi) = i_\xi^*c_1(TW_\xi \rightarrow W_\xi) = c_1(TQ_\xi \rightarrow Q_\xi) + c_1(W_\xi \rightarrow Q_\xi)$$

et si on applique l'isomorphisme inverse p_ξ^* de i_ξ^* :

$$c_1(TW_\xi \rightarrow W_\xi) = p_\xi^*(c_1(TQ_\xi \rightarrow Q_\xi) + c_1(W_\xi \rightarrow Q_\xi)).$$

Mais par le corollaire 2.2.4, la première classe de Chern $c_1(TQ_\xi \rightarrow Q_\xi)$ est nulle dans $H^2(Q_\xi; \mathbb{R})$ et la relation précédente devient dans $H^2(W_\xi; \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} c_1(TW_\xi \rightarrow W_\xi) &= p_\xi^*(c_1(W_\xi \rightarrow Q_\xi)) \\ &= (q_\xi \circ p_\xi)^*e. \end{aligned}$$

\square

Corollaire 2.2.11. *Le premier nombre de Chern N_{W_ξ} de W_ξ est égal à N_e (le générateur positif de $\langle e, \pi_2(B) \rangle$).*

La structure de fibré de $W_\xi \rightarrow Q_\xi$ nous permet aussi de déterminer la classe de la forme symplectique sur W_ξ :

Proposition 2.2.12. *Si on note ω_ξ^W la forme symplectique sur W_ξ obtenue par réduction symplectique,*

$$[\omega_\xi^W] = -2\pi\xi(q_\xi \circ p_\xi)^*e$$

dans $H^2(W_\xi; \mathbb{R})$.

Démonstration. Puisque Q_ξ est une sous-variété symplectique de W_ξ , on a

$$\omega_\xi = i_\xi^* \omega_\xi^W$$

(où i_ξ désigne toujours le plongement de Q_ξ dans W_ξ) et donc

$$[\omega_\xi] = i_\xi^* [\omega_\xi^W] \text{ dans } H^2(Q_\xi; \mathbb{R}).$$

En appliquant l'isomorphisme inverse p_ξ^* de i_ξ^* , on obtient

$$[\omega_\xi^W] = p_\xi^* [\omega_\xi] \text{ dans } H^2(W_\xi; \mathbb{R}).$$

Or on a montré que $[\omega_\xi] = -2\pi\xi q_\xi^* e$, d'où

$$[\omega_\xi^W] = -2\pi\xi(q_\xi \circ p_\xi)^* e.$$

□

Démonstration de la proposition 2.2.7. On peut maintenant comparer la classe de la forme symplectique $[\omega_\xi^W]$ et la première classe de Chern $c_1(W_\xi)$ dans $H^2(W_\xi; \mathbb{R})$:

$$[\omega_\xi^W] = -2\pi\xi c_1(W_\xi)$$

sur $\pi_2(W)$. En se souvenant de la remarque 2.1.2, cette égalité nous donne la proposition. □

Remarque 2.2.13. On aurait aussi pu effectuer une découpe symplectique en considérant le hamiltonien $(x, \varphi, z) \mapsto H(x, \varphi) + \frac{1}{2}|z|^2$ à la place de \tilde{H} . Dans ce cas, c'est l'ouvert $H^{-1}(] - \infty, \xi])$ qui se plonge symplectiquement dans la nouvelle variété symplectique W'_ξ et la première classe de Chern est $c_1(W'_\xi \rightarrow Q_\xi) = (q_\xi \circ p_\xi)^*(-e)$. C'est donc pour $\xi > 0$ que W'_ξ est monotone et contient V comme sous-variété lagrangienne.

Reprenons nos exemples.

Exemple 0 : Dans le cas du fibré produit, la classe d'Euler et la classe de la forme symplectique sont nulles dans $H^2(W_\xi; \mathbb{R})$, ce qu'on savait déjà

puisque W_ξ est symplectomorphe au produit d'un cotangent et de \mathbb{C} .

Exemple 1 : Dans le cas du fibré de Hopf, la variété symplectique réduite W_ξ est simplement connexe, de premier nombre de Chern $N_{W_\xi} = 1$. Pour $\xi < 0$, elle est monotone et la sphère \mathbb{S}^{2n+1} s'y plonge comme une sous-variété lagrangienne.

Exemple 2 : Dans le cas où $V = L_p^{2n+1}$ est l'espace lenticulaire de dimension $2n+1$, W_ξ est une variété symplectique simplement connexe de premier nombre de Chern $N_{W_\xi} = p$, monotone pour $\xi < 0$ et l'espace lenticulaire L_p^{2n+1} se plonge dans W_ξ en une sous-variété lagrangienne.

Exemple 3 : Pour $n \geq 3$, $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ est simplement connexe et la classe d'Euler du fibré $V_2(\mathbb{R}^{n+2}) \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ est égale à -1 fois le générateur. La découpe symplectique W_ξ est donc une variété simplement connexe de premier nombre de Chern $N_{W_\xi} = 1$. Pour $\xi < 0$, W_ξ est une variété symplectique monotone, dans laquelle la variété de Stiefel $V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ se plonge en une sous-variété lagrangienne.

Pour les petites dimensions $n = 1$ et $n = 2$, la grassmannienne $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ et la découpe symplectique sont simplement connexes de premiers nombres de Chern : pour $n = 1$, $N_{W_\xi} = 2$ et pour $n = 2$, $N_{W_\xi} = 1$.

2.3 Monotonie de la sous-variété lagrangienne V dans W_ξ

En considérant toujours l'hypothèse où $V \rightarrow B$ est un \mathbb{S}^1 -fibré principal, on suppose ici que W_ξ est la variété obtenue par découpe symplectique du cotangent de V au niveau ξ , ξ étant un réel strictement négatif. Pour alléger les notations, on omettra tous les indices ξ par la suite.

Les remarques 1.2.3 et les lemmes 1.2.8 et 1.2.9 du chapitre 1 sont utiles pour étudier nos exemples :

Exemple 0 : Pour l'action de \mathbb{S}^1 sur lui-même par multiplication, on sait que :

$$\pi_2(W, \mathbb{S}^1) = \pi_2(\mathbb{C}, \mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

De plus, la classe de Maslov du disque centré en l'origine et de rayon $\sqrt{-2\xi}$ (un générateur de $\pi_2(W, \mathbb{S}^1)$) est 2 (son bord est un cercle dans \mathbb{C}), alors que

son aire est $-2\pi\xi$. Cela signifie que l'aire du disque est égale à $-\pi\xi$ fois sa classe de Maslov et que \mathbb{S}^1 est monotone dans \mathbb{C} .

Exemples 1 et 3 : Dans le cas du fibré de Hopf (ou des variétés de Stiefel), puisque la sphère $V = \mathbb{S}^{2n+1}$ pour $n \geq 1$ (ou la variété de Stiefel $V = V_2(\mathbb{R}^{n+2})$ pour $n \geq 3$) est simplement connexe, V est monotone dans W et $N_V = 2N_W = 2$. Ces variétés V sont même 2-connexes, donc la suite exacte longue associée au couple (W, V) donne un isomorphisme entre $\pi_2(W, V)$ et $\pi_2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$ (ou $\pi_2(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})) \simeq \mathbb{Z}$).

Exemple 2 : Si V est l'espace lenticulaire L_p^{2n+1} , son groupe fondamental est \mathbb{Z}/p et en particulier, $\pi_1(V)$ est de p -torsion. D'après le lemme 1.2.9, V est monotone dans W et $2N_W$ divise pN_V , c'est-à-dire $2p$ divise pN_V et donc 2 divise N_V .

Montrons que l'exemple 0 est en fait le prototype de ce qui se passe en général dans la découpe symplectique du cotangent de V , c'est-à-dire :

Théorème 2.3.1. *Soit $\pi : V \rightarrow B$ un \mathbb{S}^1 -fibré principal et soit W la découpe symplectique de T^*V au niveau ξ , où $\xi < 0$.*

Alors $\pi_2(W, V)$ est isomorphe à \mathbb{Z} , la sous-variété lagrangienne V est monotone dans W de constante de monotonie $-\pi\xi$ et son nombre de Maslov dans W est 2.

On commence par calculer $\pi_2(W, V)$:

Lemme 2.3.2. *Soit $\pi : V \rightarrow B$ un fibré principal en cercles et soit W la découpe symplectique de T^*V au niveau ξ pour un réel $\xi < 0$.*

Alors $\pi_2(W, V)$ est isomorphe à \mathbb{Z} , un générateur ϕ étant donné par l'image du disque de \mathbb{C} centré en l'origine et de rayon $\sqrt{-2\xi}$ dans une fibre du fibré en droites complexes $W \rightarrow Q$.

Démonstration du lemme 2.3.2. On montre que $\pi_2(W, V)$ est isomorphe à $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en reliant la suite exacte du couple (W, V) à la suite exacte longue associée au fibré en cercles $V \rightarrow B$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_2(V) & \longrightarrow & \pi_2(B) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \pi_1(V) & \longrightarrow & \pi_1(B) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow = & & \downarrow \simeq & & \downarrow \Phi & & \downarrow = & & \downarrow \simeq & & \\ \pi_2(V) & \longrightarrow & \pi_2(W) & \longrightarrow & \pi_2(W, V) & \longrightarrow & \pi_1(V) & \longrightarrow & \pi_1(W) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et on définit une application $\Phi : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_2(W, V)$ qui fait commuter ce diagramme.

D'après le corollaire 2.2.9, la projection $q_\xi \circ p_\xi : W \rightarrow B$ est une équivalence d'homotopie. Les applications $\pi_1(B) \rightarrow \pi_1(W)$ et $\pi_2(B) \rightarrow \pi_2(W)$ du diagramme ci-dessus sont induites par l'inclusion de B dans W et sont les isomorphismes inverses des applications induites par $q_\xi \circ p_\xi$.

Si on note x_0 le point base de $\pi_1(V)$, b_0 son projeté sur B , on considère la fibre de $b_0 \in B \subset Q$ pour la fibration en droites complexes $W \rightarrow Q$. On peut décrire un difféomorphisme symplectique entre \mathbb{C} et cette fibre en adaptant la formule utilisée pour produire le difféomorphisme entre \mathbb{C} et la découpe symplectique de $T^*\mathbb{S}^1$ dans l'exemple 0 de la partie 2.1 :

$$i_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow W \\ z \longmapsto [x_0, (\xi + \frac{1}{2}|z|^2) \alpha_{x_0}, z].$$

L'image du disque de \mathbb{C} centré en l'origine et de rayon $\sqrt{-2\xi}$ est bien un disque dans W à bord dans V , puisque V se plonge dans T^*V comme la section nulle, puis dans W par :

$$V \longrightarrow W \\ x \longmapsto [x, 0, \sqrt{-2\xi}]$$

et si $z = \sqrt{-2\xi}u$ avec $u \in \mathbb{S}^1$, alors $i_{\mathbb{C}}(z) = [x_0, 0, \sqrt{-2\xi}u] = [\bar{u} \cdot x_0, 0, \sqrt{-2\xi}]$ appartient bien à l'image de V dans W .

On peut aussi remarquer que le centre du disque est envoyé sur l'image de b_0 dans W : $i_{\mathbb{C}}(0) = [x_0, \xi \alpha_{x_0}, 0]$ (en effet, B se plonge dans Q par $[x] \mapsto [x, \xi \alpha_x]$ et Q est plongé dans W par $[x, \varphi] \mapsto [x, \varphi, 0]$).

Pour définir Φ , il suffit d'associer au générateur $t \mapsto e^{-2i\pi t}$ de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ le disque

$$\phi : D(0, \sqrt{-2\xi}) \longrightarrow W \\ z \longmapsto [x_0, (\xi + \frac{1}{2}|z|^2) \alpha_{x_0}, z]$$

de W à bord dans V image par $i_{\mathbb{C}}$ du disque de rayon $\sqrt{-2\xi}$ de \mathbb{C} . Vérifions qu'avec l'application Φ ainsi définie, les diagrammes commutent.

Les carrés

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V) & \longrightarrow & \pi_1(B) \\ \downarrow = & & \downarrow \simeq \\ \pi_1(V) & \longrightarrow & \pi_1(W) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \pi_2(V) & \longrightarrow & \pi_2(B) \\ \downarrow = & & \downarrow \simeq \\ \pi_2(V) & \longrightarrow & \pi_2(W) \end{array}$$

sont commutatifs car l'équivalence d'homotopie entre B et W est donnée par la projection $q_\xi \circ p_\xi$.

Le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \pi_1(V) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow = \\ \pi_2(W, V) & \longrightarrow & \pi_1(V) \end{array}$$

est commutatif par construction-même de Φ . En effet, l'image du générateur $t \mapsto e^{-2i\pi t}$ de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ par l'inclusion de \mathbb{S}^1 dans la fibre de x_0 est $u \mapsto \bar{u} \cdot x_0$ et l'image de la classe de ϕ par l'application de bord est la classe de $u \mapsto [x_0, 0\sqrt{-2\xi} u] = [\bar{u} \cdot x_0, 0, \sqrt{-2\xi}]$ ce qui décrit bien le lacet $u \mapsto \bar{u} \cdot x_0$ de V dans W .

Enfin, le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(B) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \Phi \\ \pi_2(W) & \longrightarrow & \pi_2(W, V) \end{array}$$

est aussi commutatif. La suite exacte longue associée au fibré $V \rightarrow B$ correspond à la suite exacte du couple (V, \mathbb{S}^1) où on a identifié $\pi_i(V, \mathbb{S}^1)$ à $\pi_i(B)$ par l'isomorphisme π_* , l'application $\pi_i(V, \mathbb{S}^1) \simeq \pi_i(B) \rightarrow \pi_{i-1}(\mathbb{S}^1)$ étant l'application de bord.

Ainsi, si $w : S^2 \rightarrow B$ est une sphère de B avec $w(1) = b_0$, on peut la relever en un disque v dans V à bord dans la fibre de b_0 , (c'est-à-dire $\pi(v) = w$) tel que $v(1) = x_0$. L'image de la classe de w par l'application $\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ est alors la classe du bord ∂v de v et son image par la composée $\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_2(W, V)$ est obtenue en lui associant le disque $\Phi(\partial v)$ construit à partir du lacet ∂v de \mathbb{S}^1 en prolongeant le lacet par un disque dans la fibre de b_0 pour la fibration $W \rightarrow Q$.

D'autre part, l'image de la classe d'une sphère w de B par l'application $\pi_2(B) \rightarrow \pi_2(W)$ est la classe de w vue comme une sphère dans W et l'image de la classe d'une sphère w de W par $\pi_2(W) \rightarrow \pi_2(W, V)$ est simplement la classe de w considérée comme un disque à bord dans V .

Pour vérifier que le diagramme commute, il suffit de vérifier que dans $\pi_2(W, V)$, la classe de cette sphère est la classe de $\Phi(\partial v)$.

Comme le disque v (le relevé de la sphère w de B) se trouve dans V , sa classe dans $\pi_2(W, V)$ est triviale. Par conséquent, la classe dans $\pi_2(W, V)$ du disque obtenu en faisant la somme connexe de v et de $\Phi(\partial v)$ et notée $v\#\Phi(\partial v)$ est

$$[v\#\Phi(\partial v)] = [\Phi(\partial v)].$$

Or v et $\Phi(\partial v)$ ont le même bord, donc $v\#\Phi(\partial v)$ est une sphère représentant un élément de $\pi_2(W)$. On sait déjà que $[\Phi(\partial v)]$ dans $\pi_2(W, V)$ est l'image

d'un élément de $\pi_2(W)$. Il reste à voir que dans W , $v\#\Phi(\partial v)$ est homotope à la sphère w . Mais pour cela, il suffit de composer le disque par la projection $q_\xi \circ p_\xi$ qui donne l'équivalence d'homotopie entre W et B . Comme v est à valeurs dans V , $q_\xi \circ p_\xi(v) = \pi(v) = w$ et $q_\xi \circ p_\xi(\Phi(\partial v)) = b_0$ dans B (puisque Φ est construite de telle sorte que l'image d'un lacet soit dans la fibre de b_0). Finalement, dans W , $v\#\Phi(\partial v)$ est homotope à $q_\xi \circ p_\xi(v\#\Phi(\partial v)) = w\#b_0$ qui est homotope à w , autrement dit $[v\#\Phi(\partial v)] = [w]$ dans $\pi_2(W)$ et le dernier carré est bien commutatif.

Le lemme des cinq nous permet alors de conclure que Φ est un isomorphisme (donc que $\pi_2(W, V)$ est isomorphe à \mathbb{Z}) et que l'image de l'application $\pi_2(W) \rightarrow \pi_2(W, V)$ est la même que celle de $\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$, c'est-à-dire $N_e\mathbb{Z} = \langle e, \pi_2(B) \rangle$. \square

On peut alors déterminer le nombre de Maslov de V dans W grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(W) & \longrightarrow & \pi_2(W, V) & \longrightarrow & \pi_1(V) & \longrightarrow & \pi_1(W) \\ \downarrow = & & \downarrow \mu_V^W & & \downarrow \gamma_V & & \downarrow = \\ \pi_2(W) & \xrightarrow{2c_1(W)} & \pi_1(\Lambda_n) & \longrightarrow & \pi_1(\Lambda(W)) & \longrightarrow & \pi_1(W) \end{array}$$

On a $\mu \circ e = 2c_1(W)$ et donc si la classe d'Euler e n'est pas nulle sur $\pi_2(B)$ (en particulier, $\pi_2(B)$ ne doit pas être trivial), alors

$$\mu_V^W : \pi_2(W, V) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\Lambda_n) \simeq \mathbb{Z}$$

est la multiplication par 2 ou -2 et le nombre de Maslov de V est $N_V = 2$.

En particulier, si la classe e n'est pas nulle sur $\pi_2(B)$, on peut dire que la classe de Maslov du générateur de $\pi_2(W, V)$ est 2 ou -2 . Cependant, si on veut conclure quant à la monotonie de V , il nous faut déterminer le signe de cette classe. Cette fois encore, on utilise ce qui se passe dans l'exemple 0.

Lemme 2.3.3. *La classe de Maslov dans W du générateur ϕ de $\pi_2(W, V)$ est 2.*

Démonstration du lemme 2.3.3. On a rappelé la définition de la classe de Maslov d'un disque au chapitre 1 (définition 1.2.1).

Ici, le disque ϕ se trouve dans la fibre de $W \rightarrow Q$. On commence par décrire TW au voisinage de cette fibre. Soit \mathcal{U} un voisinage contractile de b_0

dans B de sorte que le fibré $V \rightarrow B$ peut être trivialisé sur \mathcal{U} :

$$\begin{array}{ccc} V|_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{U} \times \mathbb{S}^1 \\ & \searrow \pi & \swarrow \\ & \mathcal{U} & \end{array}$$

Sur l'ouvert $V|_{\mathcal{U}}$ de V , la restriction de π est un fibré trivial. Nous sommes donc dans le cas de l'exemple 0. Cela signifie que $W|_{\mathcal{U}}$ ($= (p \circ q)^{-1}(\mathcal{U})$) est symplectomorphe à $T^*\mathcal{U} \times \mathbb{C}$ et $V|_{\mathcal{U}}$ se plonge dans $T^*\mathcal{U} \times \mathbb{C}$ comme le produit de la section nulle de $T^*\mathcal{U}$ et du cercle centré en l'origine et de rayon $\sqrt{-2\xi}$. La classe de Maslov du disque ϕ est donc égale à la classe de Maslov du lacet $u \mapsto \sqrt{-2\xi}u$ dans \mathbb{C} , c'est-à-dire 2. \square

Démonstration du théorème 2.3.1. Grâce au symplectomorphisme entre \mathbb{C} et la fibre, on connaît aussi l'aire du disque ϕ : elle est égale à l'aire du disque de \mathbb{C} centré à l'origine et de rayon $\sqrt{-2\xi}$, c'est-à-dire $-2\pi\xi$. De la même façon que dans le cas de $T^*\mathbb{S}^1$,

$$[\omega](v) = -\pi\xi \mu_V^W(v)$$

si v est le disque ϕ et donc pour tout v de $\pi_2(W, V)$. \square

On s'intéresse maintenant aux autres sous-variétés lagrangiennes monotones d'une découpe symplectique. On commence par considérer celles contenues dans l'ouvert de W_ξ symplectomorphe à $H^{-1}(] \xi, +\infty[)$.

2.4 Sous-variétés lagrangiennes dans le cotangent plongées dans la découpe symplectique

On se place toujours sous les hypothèses de la partie 2.1 à savoir que V est l'espace total d'un fibré principal en cercles $\pi : V \rightarrow B$ et on considère une découpe symplectique du cotangent T^*V à un niveau ξ strictement négatif.

Soit L une sous-variété lagrangienne compacte dans T^*V . Alors pour $|\xi|$ assez grand, elle est contenue dans $H^{-1}(] \xi, +\infty[)$ et peut donc être plongée comme une sous-variété lagrangienne de W_ξ . Ce ξ étant désormais fixé, on omettra les indices ξ par la suite.

2.4.1 Monotonie d'une sous-variété lagrangienne du cotangent dans la découpe symplectique

On étudie sous quelle(s) condition(s) L peut être une sous-variété lagrangienne monotone dans W . Pour déterminer sa classe de Maslov dans W , on utilise la définition de la classe de Maslov dans le cas particulier d'un cotangent (voir la proposition 1.2.5).

La formule reliant la classe de Maslov de L dans W à celle de V dans W et de L dans T^*V est analogue à celle donnée par Lalonde et Sikorav dans [27]. Reprenons également leurs notations : on notera i l'inclusion de L dans T^*V et f la composée de cette inclusion et de la projection de T^*V sur V

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & T^*V \\ & \searrow f & \downarrow p_V \\ & & V \end{array}$$

Ecrivons la suite exacte en homotopie associée au triplet (W, T^*V, L) :

$$\pi_2(T^*V, L) \longrightarrow \pi_2(W, L) \longrightarrow \pi_2(W, T^*V) \longrightarrow \pi_1(T^*V, L).$$

La projection est une équivalence d'homotopie entre T^*V et V , de sorte que $\pi_2(W, T^*V)$ est isomorphe à $\pi_2(W, V)$ et la composée de cet isomorphisme avec $\pi_2(W, L) \rightarrow \pi_2(W, T^*V)$ est une application que l'on note f_* (c'est en fait $(id, f)_*$).

On peut alors écrire la formule liant les classes de Maslov :

Lemme 2.4.1.

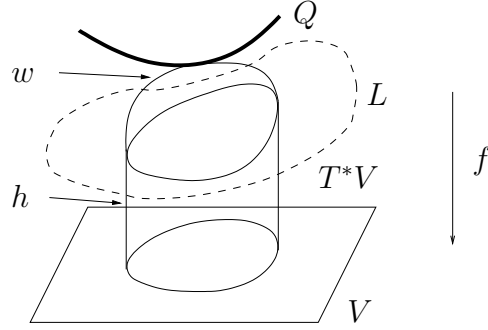
$$\mu_L^W = \mu_V^W \circ f_* + \mu_L^{T^*V} \circ \partial \tag{2.1}$$

où $\partial : \pi_2(W, L) \rightarrow \pi_1(L)$ désigne l'application de bord.

Démonstration. Soit $w : (D^2, S^1) \rightarrow (W, L)$ un disque à bord dans L . L'application $\pi_2(W, L) \rightarrow \pi_2(W, T^*V)$ associe à la classe du disque w vu comme un disque à bord dans L la classe de w vu comme un disque à bord dans T^*V . Grâce à la rétraction dans les fibres de la projection $p_V : T^*V \rightarrow V$, on a une homotopie h entre ∂w et $p_V(\partial w)$ et on peut décrire l'image de la classe de w par l'isomorphisme $\pi_2(W, T^*V) \rightarrow \pi_2(W, V)$ comme étant la classe du disque $\tilde{w} = w \# h$ obtenu en recollant w et h (voir la figure 2.4.1), de sorte que $f_*[w] = [\tilde{w}]$.

Or h est à valeurs dans T^*V , donc la différence

$$\mu_L^W(w) - \mu_V^W \circ f_*(w) = \mu_L^W(w) - \mu_V^W(\tilde{w})$$


 FIG. 2.4.1 – \tilde{w} obtenu en recollant w et h

est simplement la classe de Maslov dans T^*V du bord de h (vu comme une application de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans T^*V) c'est-à-dire la différence entre les classes de Maslov dans T^*V des bords de w et de \tilde{w} . Mais \tilde{w} est un lacet dans la section nulle V de T^*V , donc sa classe de Maslov est nulle et il reste :

$$\mu_L^W(w) - \mu_V^W(\tilde{w}) = \mu^{T^*V}(\partial w).$$

□

Pour montrer la monotonie de L , il nous faut une formule analogue pour la classe de la forme symplectique. Avec les notations de la démonstration précédente, cette relation peut s'écrire :

$$\int_{D^2} w^* \omega_W = \int_{D^2} \tilde{w}^* \omega_W - \int_{S^1} (\partial w)^* \lambda \quad (2.2)$$

où λ est la 1-forme canonique de T^*V .

En effet, on a $\tilde{w} = w \# h$, donc

$$\begin{aligned} \int_{D^2} \tilde{w}^* \omega_W &= \int_{D^2} w^* \omega_W + \int_{[0,1] \times [0,1]} h^* \omega_W \\ &= \int_{D^2} w^* \omega_W - \int_{S^1} (p_V(\partial w))^* \lambda + \int_{S^1} (\partial w)^* \lambda. \end{aligned}$$

Or $p_V(\partial w)$ est un lacet dans V et V est exacte dans T^*V donc l'intégrale $\int_{S^1} (p_V(\partial w))^* \lambda$ est nulle.

Corollaire 2.4.2. *Toute sous-variété lagrangienne compacte exacte de classe de Maslov nulle dans le cotangent de V peut être plongée comme sous-variété lagrangienne monotone dans une découpe symplectique de T^*V (pour un niveau bien choisi).*

Démonstration. Si on se restreint au cas des sous-variétés lagrangiennes du cotangent qui sont à la fois exactes et de classe de Maslov nulle, la monotonie de V (théorème 2.3.1) entraîne la monotonie de L dans W puisque (2.1) et (2.2) s'écrivent alors : pour tout disque $w : (D^2, \mathbb{S}^1) \rightarrow (W, L)$,

$$\begin{aligned} \mu_L^W([w]) &= \mu_V^W(f_*[w]) = \mu_V^W([\tilde{w}]), \\ \int_{D^2} w^* \omega_W &= \int_{D^2} \tilde{w}^* \omega_W. \end{aligned} \quad (2.3)$$

□

Corollaire 2.4.3. *Toute sous-variété lagrangienne de T^*V*

- (i) *contenue dans $H^{-1}(]\xi; +\infty[)$;*
 - (ii) *monotone sur les lacets (au sens de la définition 1.2.11) dans T^*V ;*
 - (iii) *de constante de monotonie égale à $-\pi\xi$*
- est monotone dans W .*

Démonstration. Comme V est monotone dans W de constante de monotonie $-\pi\xi$, pour tout disque w de W à bord sur L , on a :

$$\int_{D^2} (f_* w)^* \omega_W = -\pi\xi \mu_V^W \circ f_*(w).$$

Si de plus L est monotone dans T^*V de même constante de monotonie que V dans W , on a aussi :

$$\int_{\mathbb{S}^1} (\partial w)^* \lambda_V = -\pi\xi \mu_L^{T^*V} \partial w.$$

Par conséquent,

$$\int_{D^2} w^* \omega_W = -\pi\xi \mu_L^W(w),$$

d'où la monotonie de L dans W . □

2.4.2 Périodicité de Seidel associée à une action hamiltonienne du cercle

Comme annoncé au paragraphe 2.1, on va appliquer des résultats de périodicité de Seidel [44] aux sous-variétés lagrangiennes compactes exactes de T^*V . On appliquera aussi ces résultats au paragraphe 2.5 à des sous-variétés lagrangiennes de la découpe symplectique qui ne sont pas préalablement plongées dans le cotangent. On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats généraux sur cette périodicité. On commence par l'énoncé du théorème de Seidel :

Théorème 2.4.4 (Seidel [44]). *Soit (W, ω) une variété symplectique monotone, à géométrie bornée, munie d'une action hamiltonienne du cercle. Soit w la somme des poids de l'action linéarisée en un point fixe.*

Supposons qu'il existe un entier strictement positif N tel que $2c_1(W, \omega)$ soit trivial dans $H^2(W; \mathbb{Z}/N)$.

Soit L une sous-variété lagrangienne monotone de W (avec $N_L \geq 2$) telle que $(\gamma_L^W)^(\mu^N)$ s'annule dans $H^1(L; \mathbb{Z}/N)$.*

Alors l'homologie de Floer de L est graduée de façon absolue par \mathbb{Z}/N et elle est périodique de période $2w$.

Remarque 2.4.5. La classe $\mu^N \in H^1(\Lambda(W); \mathbb{Z}/N)$ utilisée dans le théorème 2.4.4 est définie de façon analogue à la classe μ^W à la proposition 1.2.5 : puisque $2c_1(W, \omega) = 0$ dans $H^2(W; \mathbb{Z}/N)$, il existe (voir [44]) une classe de Maslov μ^N dans $H^1(\Lambda(W); \mathbb{Z}/N)$ qui prolonge la réduction modulo N de la classe de Maslov sur chaque fibre de $\Lambda(W) \rightarrow W$.

Remarque 2.4.6. Si W est une variété symplectique simplement connexe, l'hypothèse « $2c_1(W, \omega)$ est trivial dans $H^2(W; \mathbb{Z}/N)$ » peut être remplacée par « N divise $2N_W$ » et l'hypothèse « $(\gamma_L^W)^*(\mu^N)$ s'annule dans $H^1(L; \mathbb{Z}/N)$ » par « N divise N_L ».

A l'aide du théorème de Oh ([38, Théorème II], rappelé au chapitre 1, théorème 1.2.14), Seidel a montré qu'il n'y a pas de sous-variété lagrangienne simplement connexe dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (pour le résultat précis, voir [44, Théorème 3.1]).

Proposition 2.4.7. *La découpe symplectique est à géométrie bornée.*

Démonstration. On rappelle (voir [6]) qu'une variété symplectique sans bord (W, ω) est à géométrie bornée s'il existe sur W une structure presque complexe J et une métrique riemannienne complète g telles que :

- a) J est uniformément calibrée par ω , c'est-à-dire qu'il existe des constantes α et β strictement positives telles que :

$$\omega(X, JX) \geq \alpha g(X, X)$$

et

$$|\omega(X, Y)| \leq \beta \|X\|_g \|Y\|_g \quad (2.4)$$

pour tous $X, Y \in TW$.

- b) Il existe un majorant pour la courbure sectionnelle de (W, g) et un minorant strictement positif pour le rayon d'injectivité de (W, g) .

On rappelle également que le cotangent $(T^*V, \omega_{\text{can}})$ est à géométrie bornée. Il suffit pour le voir de choisir une métrique g sur T^*V induite par une métrique riemannienne sur V et une structure presque complexe J calibrée par ω_{can} et homogène par rapport aux dilatations uniformes dans les fibres. On peut par exemple choisir la structure presque complexe induite par la connexion de Levi-Civita (de la même façon que dans [21] et [38]).

Le produit de T^*V avec $(\mathbb{C}, \omega_{\text{std}}, J_{\text{std}}, g_{\text{std}})$ est alors aussi à géométrie bornée.

Dans le cas où V est munie d'une action libre du cercle, on peut choisir une métrique riemannienne sur V qui soit invariante par l'action du cercle. La métrique sur le produit $T^*V \times \mathbb{C}$ est alors aussi invariante pour l'action hamiltonienne induite et donc par restriction, on a bien les majorations et minoration de a) et b) sur le niveau $\tilde{H}^{-1}(\xi)$. Lorsqu'on passe au quotient, la métrique et la structure presque complexe induites vérifient bien a) et b), de sorte que W_ξ est à géométrie bornée. \square

Rappelons comment sont définis les poids d'une action hamiltonienne du cercle.

Si (W, ω) est muni d'une action hamiltonienne du cercle, cette action définit une application de \mathbb{S}^1 dans le groupe des difféomorphismes symplectiques de W :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \text{Sp}(W) \\ u &\longmapsto (x \mapsto u \cdot x). \end{aligned}$$

En un point fixe x , les actions linéarisées $T_x \rho(u)$ (pour $u \in \mathbb{S}^1$) sont des endomorphismes de $T_x W$ dont les matrices dans une base de diagonalisation simultanée ont la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u^{m_n} \end{pmatrix}$$

Les m_i sont appelés les poids de l'action.

Exemple : Dans [44], Seidel a appliqué le théorème 2.4.4 à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ muni de l'action de cercle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (u, [z]) &\longmapsto [uz_0, z_1, \dots, z_n] \end{aligned}$$

de hamiltonien

$$H([z]) = \frac{|z_0|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}.$$

Les points fixes sont les points de l'hyperplan $z_0 = 0$, pour lesquels la somme des poids est 1 et le point de coordonnées homogènes $[1, 0, \dots, 0]$ pour lequel la somme des poids est $-n$.

Dans cet exemple où $N_W = n + 1$, on peut remarquer que les classes dans \mathbb{Z}/N_W des sommes des poids sont égales. Ainsi, on obtient pour tous les points fixes la même période 2 quand l'homologie de Floer est graduée par \mathbb{Z}/N avec N divisant N_W . Ceci est un fait général :

Proposition 2.4.8. *La classe dans \mathbb{Z}/N_W de la somme des poids en un point fixe ne dépend pas du point fixe considéré.*

Ceci est sans doute bien connu des spécialistes. On inclut néanmoins une preuve :

Démonstration. La variété W étant connexe, il suffit de vérifier que si x et y sont deux points critiques tels qu'il existe une trajectoire du gradient du hamiltonien H associé à l'action hamiltonienne et reliant ces points, alors

$$w(x) \equiv w(y) \pmod{N_W}$$

où $w(x)$ désigne la somme des poids en le point critique x .

Si x et y sont deux tels points critiques, on peut construire une sphère (de gradient) dans W ayant ces points aux pôles. On obtiendra le résultat en étudiant la relation entre la première classe de Chern de cette sphère et les poids de l'action aux pôles.

Soit donc φ^t une trajectoire du gradient reliant ces deux points x et y . Cela signifie que φ^t vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^t}{dt} &= -\text{grad}_{\varphi^t} H, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t &= x \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t = y. \end{aligned}$$

Pour construire la sphère de gradient, on considère les trajectoires φ_u^t obtenues à partir de φ^t en faisant agir \mathbb{S}^1 , c'est-à-dire si $u \in \mathbb{S}^1$, alors

$$\varphi_u^t : t \mapsto u \cdot \varphi^t.$$

Montrons qu'il s'agit aussi d'une trajectoire de gradient.

On a (en notant toujours ρ l'action)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_u^t}{dt} &= T_{\varphi^t} \rho(u) \frac{d\varphi^t}{dt} \\ &= -T_{\varphi^t} \rho(u) \operatorname{grad}_{\varphi^t} H. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $T_{\varphi^t} \rho(u) \operatorname{grad}_{\varphi^t} H = \operatorname{grad}_{u \cdot \varphi^t} H$ ou plus généralement que pour tout point z de W , $T_z \rho(u) \operatorname{grad}_z H = \operatorname{grad}_{u \cdot z} H$. Ceci est vrai si on choisit une métrique g sur W invariante par l'action de \mathbb{S}^1 .

On a de plus, $\lim_{t \rightarrow -\infty} (u \cdot \varphi^t) = u \cdot \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t \right) = u \cdot x = x$ (comme x est un point critique de H , c'est un point fixe de l'action) et de même, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u \cdot \varphi^t = y$.

En prolongeant le cylindre sans bord

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow W \\ (u, t) &\longmapsto u \cdot \varphi^t \end{aligned}$$

à $\mathbb{S}^1 \times [-\infty, +\infty] \rightarrow W$ par les limites x et y respectivement, puis en quotientant les bords du cylindre à bord ainsi obtenu, on obtient une sphère de gradient $f : S^2 \rightarrow W$.

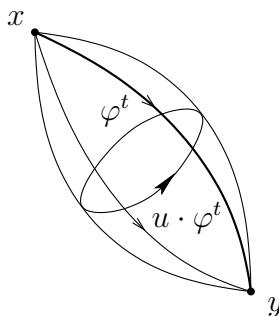


FIG. 2.4.2 – Une sphère de gradient entre x et y

On montre que $w(y) - w(x) = c_1(f)$.

Pour faire intervenir la classe de Chern de la sphère f , on considère le pull-back par f du fibré déterminant sur W :

$$\begin{array}{ccc} f^* \det(TW) & \longrightarrow & \det(TW) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^2 & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

La projection du fibré tangent est équivariante sous l'action de \mathbb{S}^1 . Elle induit une projection équivariante $\det(W) \rightarrow W$.

De plus, l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & W \\ (u, t) & \longmapsto & u \cdot \varphi^t \end{array}$$

est aussi équivariante si on fait opérer \mathbb{S}^1 par multiplication sur le premier facteur de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Cette action se prolonge à $\mathbb{S}^1 \times [-\infty, +\infty] \rightarrow W$ puis passe au quotient ce qui rend l'application f et la projection du fibré en droite $f^* \det(TW) \rightarrow S^2$ équivariantes elles aussi.

Mais si on décompose la sphère S^2 en la réunion des ouverts \mathbb{S}_+^2 et \mathbb{S}_-^2 obtenus en retirant à la sphère respectivement le pôle sud (pour $+\infty$, c'est-à-dire y) et le pôle nord (pour $-\infty$, c'est à dire x), on peut trivialisier ce fibré sur chacun des deux ouverts contractiles \mathbb{S}_+^2 et \mathbb{S}_-^2 :

$$\begin{array}{ccc} f^* \det(TW) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{S}_+^2 & \end{array}$$

(et de même pour \mathbb{S}_-^2).

L'action de \mathbb{S}^1 sur $\mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ s'écrit :

$$u \cdot (z_1, \zeta_1) = (uz_1, u^{w(x)} \zeta_1)$$

et sur $\mathbb{S}_-^2 \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$u \cdot (z_2, \zeta_2) = (\bar{u}z_2, u^{w(y)} \zeta_2).$$

En effet, l'action linéarisée dans une carte \mathbb{C}^n autour de x est par définition des poids :

$$u \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{m_1(x)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u^{m_n(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et le déterminant de la matrice est $u^{w(x)}$.

Le fibré en droites complexes $f^* \det(TW) \rightarrow \mathbb{S}^2$ est obtenu en recollant $\mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{C}$ et $\mathbb{S}_-^2 \times \mathbb{C}$ le long de leur bord commun $|z_1| = |z_2| = 1$. L'application de recollement s'exprime en fonction de la première classe de Chern :

$$\Phi(z_1, \zeta_1) = (\bar{z}_1, z_1^{c_1(f)} \zeta_1).$$

L'action de \mathbb{S}^1 doit être compatible avec le recollement, donc :

$$\Phi(u \cdot (z_1, \zeta_1)) = u \cdot \Phi(z_1, \zeta_1).$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi(u \cdot (z_1, \zeta_1)) &= \Phi(uz_1, u^{w(x)} \zeta_1) \\ &= (\overline{uz_1}, (uz_1)^{c_1(f)} u^{w(x)} \zeta_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u \cdot \Phi(z_1, \zeta_1) &= u \cdot (\bar{z}_1, z_1^{c_1(f)} \zeta_1) \\ &= (\overline{uz_1}, u^{w(y)} z_1^{c_1(f)} \zeta_1). \end{aligned}$$

On a donc : $c_1(f) + w(x) = w(y)$ et comme N_W divise $c_1(f)$,

$$w(x) \equiv w(y) \pmod{N_W}.$$

□

Dans le cas de la découpe symplectique du cotangent, on a :

Proposition 2.4.9. *La découpe symplectique du cotangent W_ξ est munie d'une action hamiltonienne du cercle de somme des poids égale à 1.*

Démonstration. La découpe symplectique W_ξ du fibré cotangent est munie de l'action hamiltonienne du cercle :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times W_\xi &\longrightarrow W_\xi \\ (u, [x, \varphi, z]) &\longmapsto [x, \varphi, uz] \end{aligned}$$

de hamiltonien

$$\begin{aligned} h : W_\xi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [x, \varphi, z] &\longmapsto \frac{1}{2}|z|^2. \end{aligned}$$

Comme l'action de \mathbb{S}^1 est libre sur T^*V , les points fixes de cette action sont les points pour lesquels $z = 0$ c'est-à-dire les points de Q_ξ .

En un point (x, φ) de Q_ξ , l'action de \mathbb{S}^1 se linéarise selon la décomposition

$$T_{[x, \varphi, 0]}W_\xi \simeq T_{[x, \varphi]}Q_\xi \oplus (H^{-1}(\xi) \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{C})_{[x, \varphi]}$$

en

$$\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

d'où on en déduit que la somme des poids vaut 1. \square

Remarque 2.4.10. Ceci est (modulo N_{W_ξ}) la plus petite somme des poids non nulle qu'on puisse obtenir. Lorsqu'il est possible d'utiliser les techniques de Seidel, l'homologie de Floer relative d'une sous-variété lagrangienne est périodique de période 2.

Nous utiliserons le théorème de Seidel au paragraphe 2.4.3 pour obtenir des obstructions à l'existence de sous-variétés lagrangiennes dans la découpe symplectique. Pour cela, nous montrerons que leur homologie de Floer n'est pas périodique de période 2.

Pour la sous-variété V dans W_ξ , d'après le théorème 2.3.1, V est monotone, de nombre de Maslov $N_V = 2$. Son homologie de Floer est bien définie et graduée par $\mathbb{Z}/2$. Dans ce cas, il n'y a aucune contradiction avec le fait que la cohomologie doit être de période 2.

2.4.3 Sous-variétés lagrangiennes compactes exactes du cotangent

Vérification des hypothèses du théorème de Seidel

On examine si le théorème 2.4.4 peut être appliqué dans la découpe symplectique aux sous-variétés lagrangiennes compactes exactes et de classe de Maslov nulle dans le cotangent. On vérifie en particulier que $(\gamma_L^W)^*(\mu^N)$ s'annule dans $H^1(L; \mathbb{Z}/N)$.

On a rappelé au paragraphe 1.2.1 pourquoi on peut définir une classe de Maslov $\mu^{T^*V} \in H^1(\Lambda(T^*V); \mathbb{Z})$. On notera $(\mu^{T^*V})^N \in H^1(\Lambda(T^*V); \mathbb{Z}/N)$ la réduction modulo N de la classe de Maslov μ^{T^*V} .

Puisque l'injection de $H^{-1}([\xi, +\infty[)$ dans W_ξ est symplectique, on a une injection

$$i_\Lambda : \Lambda(H^{-1}([\xi, +\infty[)) \longrightarrow \Lambda(W_\xi)$$

et si $2c_1(W_\xi) = 0$ dans $H^2(W_\xi; \mathbb{Z}/N)$ (c'est-à-dire, si $2e = 0$ dans $H^2(B; \mathbb{Z}/N)$), alors

$$(\mu^{T^*V})^N_{|\Lambda(H^{-1}([\xi, +\infty[))} = i_\Lambda^* \mu^N.$$

Ainsi, si L est une sous-variété lagrangienne de $H^{-1}(] \xi, +\infty[)$,

$$\begin{aligned} (\gamma_L^W)^* \mu^N &= (i_\Lambda \circ \gamma_L^{T^*V})^* \mu^N \\ &= (\gamma_L^{T^*V})^* (i_\Lambda)^* \mu^N \\ &= (\gamma_L^{T^*V})^* (\mu^{T^*V})^N_{|\Lambda(H^{-1}(] \xi, +\infty[))}. \end{aligned}$$

Donc $(\gamma_L^W)^* \mu^N$ est la réduction modulo N de la classe de Maslov $(\gamma_L^{T^*V})^* \mu^{T^*V}$ de L dans T^*V .

En particulier, si L est de classe de Maslov nulle dans le cotangent, $(\gamma_L^W)^* \mu^N$ est nulle dans $H^1(L; \mathbb{Z}/N)$.

Application du théorème de Seidel aux sous-variétés lagrangiennes simplement connexes

On applique le théorème de Seidel aux sous-variétés lagrangiennes compactes et simplement connexes de T^*V :

Théorème 2.4.11. *Soit B une variété compacte de dimension $d - 1$ avec $d \geq 2$.*

Soit e un élément de $H^2(B, \mathbb{Z})$ tel que e soit non nul sur $\pi_2(B)$ et $2e = 0$ dans $H^2(B; \mathbb{Z}/N)$ pour un entier $N > 2$.

Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en cercles de classe d'Euler e .

*Si $N > d + 2$ ou $N = d + 2$ avec d impair, il n'y a pas de sous-variété lagrangienne compacte et simplement connexe dans T^*V .*

*Si $N = d + 2$ avec d pair, les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ d'une sous-variété lagrangienne compacte et simplement connexe dans T^*V sont isomorphes à ceux de $\mathbb{P}^{d/2}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Supposons que $2e = 0$ dans $H^2(B, \mathbb{Z}/N)$ pour un certain entier $N > 2$. Comme N divise $2N_e$, on a alors $2N_e = 2N_W > 2$.

Supposons que L soit une sous-variété lagrangienne compacte et simplement connexe dans T^*V . Elle est alors en particulier exacte et de classe de Maslov nulle dans le cotangent. De plus, son nombre de Maslov dans la découpe symplectique W est $N_L = 2N_W$ (d'après la remarque 1.2.3 (iii)), il est donc divisible par $N > 2$, et en particulier $N_L \geq 2$. D'après le théorème 2.4.4, l'homologie de Floer de L est bien définie graduée par \mathbb{Z}/N et elle est 2-périodique.

Si de plus $N \geq d + 2$, alors $N_L \geq d + 2$ et on peut donc appliquer le théorème de Oh : l'homologie de Floer de L est isomorphe à son homologie ordinaire :

$$HF(L, L) \cong \bigoplus_i H^i(L; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Il y a contradiction avec la période 2 si $N \geq d + 3$ (voir figure 2.4.3); et si $N = d + 2$, la périodicité entraîne que les groupes de cohomologie (à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$) de L sont isomorphes aux groupes de cohomologie de $\mathbb{P}^{d/2}(\mathbb{C})$ pour un entier pair d et doivent être nuls si d est impair, ce qui fournit une nouvelle contradiction.

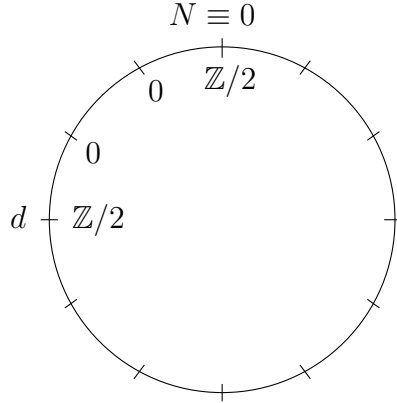


FIG. 2.4.3 – L’homologie de Floer de L quand $N_L \geq d + 2$

□

Cas B simplement connexe

Lalonde et Sikorav ont montré dans [27] que si L est une sous-variété lagrangienne exacte de T^*V , alors $f_*(\pi_1(L))$ est d’indice fini dans $\pi_1(V)$.

Dans le cas où B (et donc W) est simplement connexe, le théorème de Seidel (son énoncé simplifié, voir la remarque 2.4.6) permet de montrer :

Théorème 2.4.12. *Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en \mathbb{S}^1 dont la base est une variété compacte et simplement connexe B et dont la classe d’Euler e est non nulle.*

*Soit L une sous-variété lagrangienne compacte et exacte dans T^*V . On suppose que sa classe de Maslov dans le cotangent est nulle.*

Alors, si on note m l’indice de $f_(\pi_1(L))$ dans $\pi_1(V)$,*

- (i) m divise N_e où N_e est le générateur positif de $\langle e, \pi_2(B) \rangle \subset \mathbb{Z}$;
- (ii) $2m \leq d + 2$;

Pour la preuve du théorème 2.4.12, on utilise le lemme suivant, qui décrit le groupe fondamental de V lorsque B est simplement connexe

Lemme 2.4.13. *Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré en cercles dont la base est une variété B compacte et simplement connexe.*

Si N_e désigne le générateur positif du sous-groupe $\langle e, \pi_2(B) \rangle$ de \mathbb{Z} , alors $\pi_1(V) = \mathbb{Z}/N_e$. En particulier, $\pi_1(V)$ est cyclique.

Corollaire 2.4.14. *Si L est une sous-variété lagrangienne compacte exacte dans T^*V avec B simplement connexe et si m est l'indice de $f_*(\pi_1(L))$ dans $\pi_1(V)$, alors le quotient $\pi_1(V)/f_*(\pi_1(L)) \cong \mathbb{Z}/m$ est également cyclique.*

Démonstration du lemme 2.4.13 : La suite exacte longue associée au fibré $V \rightarrow B$ permet de calculer $\pi_1(V)$:

$$\pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(B) = \{0\}.$$

Comme l'image de $\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ est $N_e\mathbb{Z}$, $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}/N_e$ (on savait donc déjà qu'elle était monotone dans W d'après la remarque 1.2.9). \square

Démonstration du théorème 2.4.12 : D'après la formule (2.3), $\mu_L^W = \mu_V^W \circ f_*$. Or l'image de $f_* : \pi_2(W, L) \rightarrow \pi_2(W, T^*V)$ est $m\mathbb{Z}$ (car l'indice de $f_*(\pi_1(L))$ dans $\pi_1(V)$ est m) et μ_V^W est la multiplication par 2, donc le nombre de Maslov de L est $N_L = 2m$.

On sait aussi que N_L divise $2N_W = 2N_e$ (remarque 1.2.3), donc m divise N_e et on a (ii).

Enfin, si $N_L \geq d+2$, alors d'une part, $N_L \geq 2$ ce qui permet de considérer l'homologie de Floer de L et d'autre part, on est sous les hypothèses du théorème de Oh ([38]), donc l'homologie de Floer est isomorphe à l'homologie ordinaire de L .

D'après le théorème 2.4.4 et la proposition 2.4.9, puisque W est simplement connexe et que $2m$ divise N_L et $2N_W$, l'homologie de Floer de L est graduée par $\mathbb{Z}/2m$:

$$HF^i(L, L) = H^i(L; \mathbb{Z}/2).$$

et elle doit être de période 2. Dans le cas où $N_L \geq d+3$ cette périodicité est en contradiction avec le théorème de Oh. \square

Corollaire 2.4.15. *Sous les hypothèses du théorème 2.4.12, si $2N_e > d+2$, alors $H^1(L; \mathbb{Z}/N_e) \neq \{0\}$. En particulier, L ne peut être simplement connexe (résultat déjà contenu dans le théorème 2.4.11).*

Démonstration. Si $2N_e > d+2$, comme $2m \leq d+2$ d'après le théorème 2.4.12, l'indice m de $f_*(\pi_1(L))$ dans $\pi_1(V)$ est strictement plus petit que le cardinal N_e du groupe $\pi_1(V)$. Donc le sous-groupe $f_*(\pi_1(L))$ n'est pas trivial, f_* est un morphisme non nul de $\pi_1(L)$ vers \mathbb{Z}/N_e et $H^1(L; \mathbb{Z}/N_e) \neq \{0\}$. \square

Appliqué aux espaces lenticulaires, le théorème 2.4.12 et le corollaire 2.4.15 permettent de montrer :

Proposition 2.4.16. *Si L est une sous-variété lagrangienne exacte de classe de Maslov nulle dans le cotangent d'un espace lenticulaire L_p^{2n+1} , alors le quotient $\pi_1(V)/f_*(\pi_1(L))$ est cyclique et son cardinal, c'est à dire l'indice de $f_*(\pi_1(L))$ dans $\pi_1(V)$, est inférieur ou égal à $n + 1$ et divise p .*

En particulier, si p est un nombre premier strictement supérieur à $n + 1$, alors cet indice est égal à 1.

Démonstration. Dans le cas des espaces lenticulaires, $V = L_p^{2n+1}$, $B = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est simplement connexe et $N_e = p$. La conclusion du théorème 2.4.12 s'écrit : m divise p et $2m \leq 2n + 3$. À cause de la parité, le cas $2m = 2n + 3$ ne peut se réaliser, et finalement on a $m \leq n + 1$.

En particulier, si p est un nombre premier, m doit être égal à 1 ou p et si $p > n + 1$, alors $m = 1$. \square

Corollaire 2.4.17. *Soit L une sous-variété lagrangienne dans le cotangent d'un espace lenticulaire L_p^{2n+1} pour un entier p tel que $p > n + 1$.*

Alors $H^1(L; \mathbb{Z}/p) \neq \{0\}$.

En particulier, L ne peut pas être simplement connexe ni avoir un groupe fondamental fini de cardinal q tel que $\text{pgcd}(q, p) = 1$.

Cependant dans le cas où le groupe fondamental de V est cyclique, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.18. *Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré en cercles dont la base est une variété B compacte et simplement connexe.*

*Soit L une sous-variété lagrangienne compacte exacte dans T^*V .*

Alors l'application induite par f :

$$f_* : \pi_1(L) \longrightarrow \pi_1(V)$$

est surjective.

Démonstration : D'après le lemme 2.4.13, $\pi_1(V) = \mathbb{Z}/N_e$ est un quotient de $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

A tout sous-groupe abélien $m\mathbb{Z}/N_e \subset \mathbb{Z}/N_e$ (m un diviseur de N_e) est associé un revêtement cyclique fini à m feuillets $\tilde{V} \rightarrow V$. La restriction de ce revêtement à chaque fibre est juste le revêtement connexe à m feuillets de \mathbb{S}^1 . En particulier, si on relève l'action du cercle $\rho(u)$ sur V (pour $u \in \mathbb{S}^1$) en un flot $\tilde{\rho}(u)$ sur \tilde{V} (pour $u \in \mathbb{R}$), alors $\tilde{\rho}(1)$, le flot au temps 1, est le générateur du groupe d'automorphismes du revêtement \tilde{V} . Ainsi, si on considère le revêtement associé $T^*\tilde{V} \rightarrow T^*V$, alors le générateur de son groupe de

revêtement (noté χ) est isotope à l'identité, par une isotopie hamiltonienne (de hamiltonien H).

Maintenant, si on suppose que $j : L \rightarrow T^*V$ est un plongement lagrangien exact tel que l'image $j_*(\pi_1(L))$ soit un sous-groupe $m\mathbb{Z}/N_e$ avec $m > 1$. Alors ce plongement se relève en un plongement $\tilde{j} : L \rightarrow T^*\tilde{V}$, et il a la propriété que $\chi(\tilde{j}(L)) \cap \tilde{j}(L)$ est vide. Cependant, on sait que χ est hamiltonniennement isotope à l'identité, on obtient donc une contradiction avec les résultats de base (Gromov, Floer) sur les sous-variétés lagrangiennes exactes. Donc $m = 1$. \square

2.5 Plongements lagrangiens monotones dans une découpe symplectique

Étudions maintenant le plongement lagrangien monotone de certaines variétés compactes dans une découpe symplectique (sans supposer que ces variétés étaient préalablement plongées dans le cotangent T^*V).

Remarquons que si on étudie le plongement lagrangien d'une variété compacte et simplement connexe, on a :

Théorème 2.5.1. *Soit B une variété compacte de dimension $d - 1$ avec $d \geq 2$.*

Soit e un élément de $H^2(B, \mathbb{Z})$ tel que e soit non nul sur $\pi_2(B)$ et $2e = 0$ dans $H^2(B; \mathbb{Z}/N)$ pour un entier $N > 2$.

Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en cercles de classe d'Euler e .

*On désigne par W une découpe symplectique monotone (c'est-à-dire effectuée à un niveau strictement négatif) de T^*V .*

Si $N > d + 2$ ou $N = d + 2$ avec d impair, il n'y a pas de sous-variété lagrangienne compacte et simplement connexe dans W .

Si $N = d + 2$ avec d pair, les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ d'une sous-variété lagrangienne compacte et simplement connexe dans W sont isomorphes à ceux de $\mathbb{P}^{d/2}(\mathbb{C})$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 2.4.11 pour une sous-variété lagrangienne L compacte et simplement connexe de W . \square

Examinons ensuite le plongement lagrangien monotone de certaines variétés particulières dans la découpe symplectique.

2.5.1 Sphère dans une découpe symplectique

Le théorème 2.5.1 s'applique bien entendu au cas du plongement lagrangien d'une sphère. Il existe toutefois des obstructions supplémentaires dans ce cas :

Théorème 2.5.2. *Soit B une variété compacte (de dimension $d - 1$ avec $d \geq 2$).*

Soit e un élément de $H^2(B, \mathbb{Z})$ tel que e soit non nul sur $\pi_2(B)$ et $2e = 0$ dans $H^2(B; \mathbb{Z}/N)$ pour un entier $N > 2$.

Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en cercles de classe d'Euler e .

*On désigne par W une découpe symplectique monotone (c'est-à-dire effectuée à un niveau négatif) de T^*V .*

Si $N > d + 2$ ou $N < d + 2$ et N ne divise pas $d + 1$, alors la sphère \mathbb{S}^d ne peut être une sous-variété lagrangienne de W , sauf éventuellement lorsque $N = 4$ et $d \equiv 2 \pmod{4}$.

Démonstration. De façon analogue à la démonstration du théorème 2.4.11, N divise $2N_e = 2N_W$.

Puisque $d \geq 2$, $L = \mathbb{S}^d$ est simplement connexe donc monotone de nombre de Maslov $N_L = 2N_W = 2N_e \geq 4$. D'après le théorème de Seidel (Théorème 2.4.4), l'homologie de Floer de L est bien définie, graduée par \mathbb{Z}/N et périodique de période 2.

On utilise alors le lemme suivant qui nous donne l'homologie de Floer de la sphère pour certaines valeurs de N_W

Lemme 2.5.3. *Soit W une variété de dimension $2d$ ($d \geq 2$), symplectique, monotone, de premier nombre de Chern $N_W \geq 1$ et qui admet une sphère \mathbb{S}^d comme sous-variété lagrangienne.*

Alors l'homologie de Floer de la sphère \mathbb{S}^d est bien définie et si $2N_W$ ne divise pas $d + 1$, elle est isomorphe à la cohomologie ordinaire :

$$HF(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(\mathbb{S}^d; \mathbb{Z}/2).$$

Si N ne divise pas $d + 1$, alors $2N_W$ ne divise pas $d + 1$ et d'après ce lemme 2.5.3, l'homologie de Floer est isomorphe à l'homologie ordinaire de la sphère. Ceci est en contradiction la période 2 sauf lorsque $N = 4$ et $d \equiv 2 \pmod{4}$. \square

Démonstration du lemme 2.5.3 :

Puisque la sphère $L = \mathbb{S}^d$ est simplement connexe pour $d \geq 2$, elle est monotone et $N_L = 2N_W \geq 2$. Ainsi l'homologie de Floer de L est bien définie.

Si $N_L \geq d + 2$, on peut appliquer directement le théorème de Oh [38, Théorème II] et l'homologie de Floer de la sphère est isomorphe à sa cohomologie ordinaire.

Pour étendre le résultat au cas où $2N_W < d + 2$, on examine la démonstration du théorème de Oh. On conserve les notations du paragraphe 1.2.3.

Tout d'abord, Oh a défini une homologie de Floer locale qui est isomorphe à la cohomologie de Morse de L : étant donné un voisinage de Darboux U de L et une isotopie Φ assez proche de l'identité pour que $\Phi_1(L)$ soit contenue dans U , l'homologie de Floer locale est définie à partir du même complexe que l'homologie de Floer «globale», mais la différentielle ne compte que les solutions qui ne s'échappent pas de U .

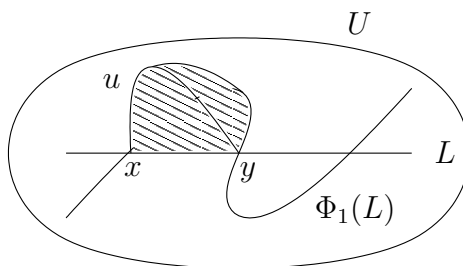


FIG. 2.5.1 – Une solution u qui ne sort pas du voisinage U

On peut se restreindre aux isotopies hamiltoniennes construites à partir d'une fonction de Morse $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ sur L : comme U est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle dans T^*L , on définit un hamiltonien sur U en le définissant sur T^*L par la composée de f et de la projection π du cotangent :

$$\begin{aligned} H : T^*L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto f(\pi(p)). \end{aligned}$$

Si f est assez petite au sens C^1 , l'isotopie hamiltonienne définie par H est assez proche de l'identité, et si f est assez petite au sens C^2 , on peut définir un isomorphisme entre l'homologie de Floer locale et la cohomologie de Morse (voir [38] et [21]).

On peut alors étendre H à toute la variété W en imposant qu'elle soit nulle en dehors d'un voisinage de U . Tout revient dès lors, pour montrer le

même résultat en ce qui concerne la homologie de Floer (globale), à prouver que lorsque Φ est assez proche de l'identité (f assez petite au sens C^2), aucune solution de l'équation de Floer ne s'échappe de U .

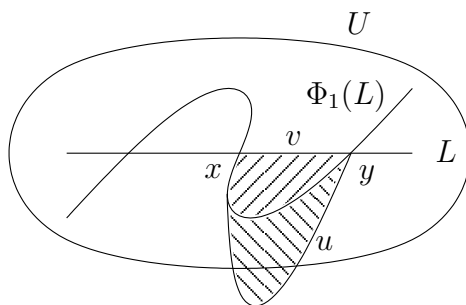


FIG. 2.5.2 – Une solution u qui s'échappe de U

On suppose qu'une solution u s'échappe de U . On peut coller à u une petite bande $v : [0, 1] \times [1, 2] \rightarrow U \subset W$ dans U entre L et $\Phi_1(L)$, de sorte qu'on obtient un disque

$$w : [0, 1] \times [0, 2] \longrightarrow W$$

à bord dans L . Le fait que la solution u ne reste pas dans U entraîne (voir [38, Proposition 4.1]) que l'aire symplectique de u est plus grande que l'aire de la petite bande v contenue dans U , de sorte que l'aire symplectique $\int w^* \omega$ de w est strictement positive. La monotonie de L implique alors que $\mu_L(w) > 0$.

Or les classes de Maslov sont reliées de la façon suivante :

$$\mu_L(w) = \mu_u(x, y) - \mu_v(x, y) = 1 - \mu_v(x, y).$$

Comme v est une petite bande entre L et $\Phi_1(L)$, son indice de Maslov est (voir aussi [47]) :

$$\mu_v(x, y) = \text{ind}_f(y) - \text{ind}_f(x) \geq -\dim(L),$$

où $\text{ind}_f(x)$ est l'indice de Morse de x pour la fonction f .

Donc

$$\mu_L(w) = \mu_u(x, y) - \mu_v(x, y) = 1 - (\text{ind}_f(y) - \text{ind}_f(x)) \leq 1 + d.$$

Mais $\mu_L(w) > 0$ et par définition du nombre de Maslov relatif, N_L divise $\mu_L(w)$. On retrouve ici le (i) du théorème de Oh : si $N_L \geq d + 2$, aucune solution ne s'échappe de U et l'homologie de Floer est celle de Morse.

Ici, on s'intéresse au cas où $L = \mathbb{S}^d$ et on peut choisir comme fonction de Morse f sur L la fonction « hauteur » n'ayant que deux points critiques : un minimum d'indice 0 et un maximum d'indice d . Dans ce cas, pour que $\mu_L(w)$ soit strictement positif et que N_L divise $\mu_L(w)$, il faut que $\mu_L(w) = 1 + d$.

En conséquence, dans le cas où $N_L < d + 2$, si N_L ne divise pas $d + 1$, aucune solution ne s'échappe de U . L'homologie de Floer est alors isomorphe à la cohomologie locale, qui est elle-même isomorphe à la cohomologie ordinaire. \square

Remarque 2.5.4. On trouvera un résultat d'obstruction au plongement lagrangien d'une sphère dans une découpe symplectique à un niveau positif à l'appendice B.

2.5.2 Tore monotone dans une découpe symplectique

Le cas du tore monotone dans une découpe symplectique fournit un exemple supplémentaire de tore monotone ayant un nombre de Maslov égal à 2. Ceci est à rapprocher du résultat concernant les tores monotones dans \mathbb{C}^n et rappelé au chapitre 1 (Théorème 1.2.12).

Théorème 2.5.5. *Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en cercles dont la base est une variété compacte et simplement connexe B et dont la classe d'Euler non nulle.*

*On note W une découpe symplectique monotone (c'est-à-dire effectuée à un niveau strictement négatif) de T^*V .*

Supposons qu'un tore $i : \mathbb{T}^d \hookrightarrow W$ se plonge dans W comme une sous-variété lagrangienne monotone et que sa classe de Maslov soit non nulle.

Alors son nombre de Maslov est égal à 2.

Démonstration. D'après 2.2.7, W est monotone et son nombre de Chern minimal est $N_W = N_e$ où N_e est le générateur positif du sous-groupe $\langle e, \pi_2(B) \rangle$ de \mathbb{Z} (et e désigne la classe d'Euler du fibré $V^d \rightarrow B^{d-1}$).

Le tore étant orienté, son nombre de Maslov N est pair, donc au moins égal à 2. Comme de plus, \mathbb{T} est supposé monotone dans W , l'homologie de Floer du tore \mathbb{T} est bien définie. En outre, d'après le théorème de Seidel (théorème 2.4.4), cette homologie $HF(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ est graduée (de façon absolue) par \mathbb{Z}/N et elle est périodique de période 2 pour cette graduation.

Supposons que $N \geq 3$. On va obtenir une contradiction en étudiant la suite spectrale de Oh [38], et plus précisément la description de cette suite spectrale donnée par Biran.

Soit $A = \mathbb{Z}/2[T, T^{-1}]$ l'algèbre des polynômes de Laurent sur $\mathbb{Z}/2$ en la variable T . On définit le degré de T comme étant N_L . Alors $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ où $A^i = \mathbb{Z}/2T^{i/N_L}$ si i est un multiple de N_L et $A^i = \{0\}$ sinon.

Théorème 2.5.6 (Biran [8]). *Soient (M, ω) une variété symplectique à géométrie bornée et L une sous-variété lagrangienne monotone de (M, ω) de nombre de Maslov $N_L \geq 2$.*

Alors il existe une suite spectrale $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) *Pour tout $r \geq 0$, $E_r^{p,q}$ s'écrit sous la forme $E_r^{p,q} = V_r^{p,q} \otimes A^{pN_L}$ avec $d_r = \delta_r \otimes \tau_r$, où τ_r est la multiplication par T^r , $V_r^{p,q}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Z}/2$, $\delta_r : V_r^{p,q} \rightarrow V_r^{p+r, q-r+1}$ sont des homomorphismes et satisfont $\delta_r \circ \delta_r = 0$. De plus,*

$$V_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker(\delta_r : V_r^{p,q} \rightarrow V_r^{p+r, q-r+1})}{\text{Im}(\delta_r : V_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow V_r^{p,q})};$$

- (2) *Pour $r = 1$, $V_1^{p,q} = H^{p+q-pN_L}(L; \mathbb{Z}/2)$;*
 (3) *$\{E_r^{p,q}, d_r\}$ s'achève à la $\nu + 1$ -ième page, où $\nu = \lfloor \frac{\dim(L)+1}{N_L} \rfloor$ et la suite converge vers $HF(L, L)$, c'est-à-dire*

$$\bigoplus_{p+q=\ell} E_\infty^{p,q} \cong HF^{\ell(\text{mod } N_L)}(L, L);$$

- (4) *Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,*

$$\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,q} \cong HF(L, L).$$

De plus, Buhovski [11] a muni cette suite spectrale de Biran d'une structure multiplicative :

Théorème 2.5.7 (Buhovski, [11]). *La suite spectrale du théorème 2.5.6 a une structure multiplicative, c'est-à-dire que, pour tout $r \geq 1$, il existe un produit :*

$$m_r : E_r^{p,q} \otimes E_r^{p',q'} \longrightarrow E_r^{p+p', q+q'}$$

telle que la différentielle d_r vérifie la règle de Leibniz par rapport à ce produit. De plus, cette structure coïncide sur E_1 avec le cup produit usuel sur la cohomologie $H^(L; \mathbb{Z}/2)$.*

Dans le cas du tore \mathbb{T} dans W , la différentielle à la première page est :

$$\delta_1 : H^{p+q-pN}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{p+1+q-(p+1)N}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2).$$

En particulier, si $p = 0$ et $q = 1$, $\delta_1 : H^1(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{2-N}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$ et donc, si $N \geq 3$, δ_1 est nulle sur $V_1^{0,1}$. Mais la cohomologie du tore est engendrée par les éléments de $H^1(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$, de sorte que la règle de Leibniz pour δ_1 par rapport au cup produit entraîne que δ_1 est nulle.

En conséquence, $V_2^{p,q} = V_1^{p,q} = H^{p+q-pN}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$. Mais pour $r \geq 2$, δ_r décroît le degré de $rN - 1 > 3$. On obtient par récurrence que $\delta_r = 0$ et $E_1 = E_2 = \dots = E_r = E_\infty = HF(\mathbb{T}, \mathbb{T})$.

Finalement, $HF(\mathbb{T}, \mathbb{T}) = H^*(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$. L'homologie de Floer est graduée par \mathbb{Z}/N et périodique de période 2, ce qui peut s'écrire : pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^{j+kN}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^{j+2+kN}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2).$$

Au niveau des dimensions, cette égalité s'écrit :

$$\text{pour tout } j \in \mathbb{Z}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{d}{j+kN} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{d}{j+2+kN}$$

(avec la convention $\binom{d}{k} = 0$ si $k \notin \{0, \dots, d\}$).

Ceci signifie, en notant pour $j \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$S_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{d}{j+kN}$$

que :

$$\begin{cases} S_0 = S_2 = \dots = S_{N-2} \\ S_1 = S_3 = \dots = S_{N-1}. \end{cases}$$

Comme N est pair, $N = 2m$, on effectue la somme des S_j pour les indices j pairs :

$$S_0 + S_2 + \dots + S_{2m-2} = \sum_{\ell=0, \ell \text{ pair}}^d \binom{d}{\ell} = 2^{d-1}$$

et pour les indices j impairs :

$$S_1 + S_3 + \dots + S_{2m-1} = \sum_{\ell=0, \ell \text{ impair}}^d \binom{d}{\ell} = 2^{d-1},$$

et on obtient que $mS_0 = mS_1 = 2^{d-1}$. Tous les S_j sont donc égaux et pour tout j de \mathbb{Z} , $NS_j = 2^d$.

Remarquons que pour N fixé, si la propriété

$$\text{pour tout } j \in \mathbb{Z}, N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{d}{j + kN} = 2^d \quad (2.5)$$

est vraie pour $d = d_0 \geq 2$, alors par récurrence, en utilisant le triangle de Pascal, la propriété est vraie pour tout $d \geq d_0$.

Pour obtenir une contradiction, on vérifie que pour tout $d_0 \geq 2$, il existe $d \geq d_0$ tel que $NS_0 \neq 2^d$. On donne pour cela une autre expression de S_0 .

Soit $\zeta = \exp(\frac{2i\pi}{N})$ une racine primitive N -ième de l'unité. En développant $(1 + \zeta^k)^d$ pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, puis en sommant en utilisant les égalités :

$$1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{2m-1} = 0$$

où ξ est une racine N -ième de l'unité, on obtient :

$$\begin{aligned} NS_0 &= \sum_{k=0}^{N-1} (1 + \zeta^k)^d \\ &= 2^d + \sum_{k=1}^{N-1} (1 + \zeta^k)^d \\ &= 2^d + \sum_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{kd\pi}{N}\right) \left(\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)^d. \end{aligned}$$

Pour $d_0 \geq 2$, on choisit $d \geq d_0$ un multiple de $2N$. Alors $\cos\left(\frac{kd\pi}{N}\right) = 1$ et comme $0 < \frac{\pi}{N} \leq \frac{k\pi}{N} \leq \frac{(N-1)\pi}{N} < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) > 0$, ce qui entraîne

$$\sum_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{kd\pi}{N}\right) \left(\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)^d > 0$$

et

$$NS_0 > 2^d.$$

L'homologie de Floer du tore n'est donc pas 2-périodique et par conséquent $N = 2$. \square

Remarque 2.5.8. On peut aussi faire le raisonnement en utilisant à la place de la suite spectrale de Biran munie de la structure multiplicative de Burdakovski le théorème de Biran et Cornea [10] : un tore monotone dans une

variété symplectique a son homologie de Floer nulle ou isomorphe à son homologie ordinaire et dans le cas où l'homologie de Floer est nulle, le nombre de Maslov est 2. La preuve ci-dessus montre que l'homologie de Floer ne peut être isomorphe à l'homologie ordinaire et on peut donc en conclure que l'homologie de Floer du tore est nulle et que son nombre de Maslov est 2.

2.5.3 Produit monotone de deux sphères dans une découpe symplectique

D'autres exemples de variétés pour laquelle la structure de cup produit est facile à décrire sont les produits de sphères $\mathbb{S}^\ell \times \mathbb{S}^m$:

Théorème 2.5.9. *Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en cercles de base une sous-variété compacte et simplement connexe B et de classe d'Euler non nulle.*

*On note W une découpe symplectique monotone (i.e. effectuée à un niveau négatif) de T^*V .*

Supposons qu'un produit de deux sphères $\mathbb{S}^\ell \times \mathbb{S}^m$ (pour $1 \leq \ell \leq m$, $\ell + m = d$) se plonge dans W comme une sous-variété lagrangienne monotone et que sa classe de Maslov soit non nulle.

Alors son nombre de Maslov est inférieur ou égal à $m+1$ sauf éventuellement lorsque $\ell = 1$ et $m = 2$ ou lorsque $\ell = 4$ et $m = 6$.

Démonstration. D'après le théorème de Kunneth, la cohomologie ordinaire (à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$) de $L = \mathbb{S}^\ell \times \mathbb{S}^m$ est, lorsque $\ell < m$:

$$H^k(L; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } k = 0, \ell, m, \ell + m \\ \{0\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et lorsque $\ell = m$:

$$H^k(L; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } k = 0, 2m \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{si } k = m \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la même façon que pour le tore monotone, l'homologie de Floer de L est bien définie, graduée de façon absolue par \mathbb{Z}/N , si N est le nombre de Maslov de L , et elle est 2-périodique pour cette graduation.

On montre une fois de plus que la suite spectrale décrite par Biran [8] qui converge vers l'homologie de Floer est, sous l'hypothèse $N \geq m + 2$, isomorphe à la cohomologie ordinaire de L , ce qui est la plupart du temps impossible à cause de la 2-périodicité.

A la première page de la suite spectrale, pour $p = 0$, la différentielle $\delta_1 : H^q(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{q+1-N}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$ est nulle si $N \geq m + 2$, donc δ_1 est nulle sur $V_1^{0,q}$ pour $q \leq m$. Il reste à examiner si $\delta_1 : V_1^{0,q} \rightarrow V_1^{1,q}$ peut être non nulle pour $q = \ell + m$. Mais $H^{\ell+m}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$ est engendré par $H^\ell(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$ et $H^m(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$, et de la même façon que pour le tore, la règle de Leibniz pour δ_1 par rapport au cup produit entraîne que δ_1 est nulle. De même, δ_1 est nulle sur tous les $V_1^{p,q}$.

En conséquence, $V_2^{p,q} = V_1^{p,q} = H^{p+q-pN_{\mathbb{T}}}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/2)$. Mais pour $r \geq 2$, δ_r décroît le degré de $rN - 1 > q + 1$. On en déduit par récurrence que $\delta_r = 0$ et $E_1 = E_2 = \dots = E_r = E_\infty = HF(L, L)$.

Finalement, $HF(L, L) = H^*(L; \mathbb{Z}/2)$. Or cette homologie de Floer doit aussi être 2-périodique. Lorsque $\ell < m$ et $N = m + 2$, ceci n'est possible que lorsque $m = 2$ (et $\ell = 1$) ou lorsque $m = 6$ et $\ell = 4$.

Si $\ell < m$ et $N > m + 2$ ou si $\ell = m$, on ne peut avoir la 2-périodicité. \square

Chapitre 3

Sous-variétés lagrangiennes monotones dans le cotangent

Ce chapitre traite des obstructions sur les sous-variétés lagrangiennes monotones sur les lacets dans un cotangent. Ces obstructions sont l'objet d'un article "Obstructions to the existence of monotone Lagrangian embeddings into cotangent bundles" qui à été soumis pour publication. On reproduit ici le texte de l'article.

3.1 Introduction

Let M be a closed manifold and $\pi : T^*M \rightarrow M$ its cotangent bundle. Denote by λ_M the Liouville one-form of M and $\omega_M = d\lambda_M$ the canonical symplectic form on T^*M .

We are interested in compact Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle T^*M . Only a few types of examples are known:

1. the zero section or more generally the graph L_f of a function $f : M \rightarrow \mathbb{R}$;
2. any Hamiltonian displacement of L_f (i.e. $L = \varphi_1(L_f)$ where (φ_t) is a Hamiltonian isotopy);
3. any symplectic displacement of L_f (as in 2 but with (φ_t) a symplectic isotopy);
4. the "local" Lagrangian submanifolds: any Lagrangian submanifold of \mathbb{C}^n can be embedded in a Darboux chart $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ of T^*M .

Note that the two first types of examples have the additional property of being exact (that is, the restriction of the Liouville one-form on the Lagrangian submanifold is exact). It is conjectured that the examples (1) and

(2) are the only possible examples of exact Lagrangian submanifolds in T^*M and much work has been done to prove this conjecture. It has been proved for $L = M = S^2$ (Hind [25]) but in general, we know only topological restrictions on the exact Lagrangian embeddings $i : L \rightarrow T^*M$ of a closed manifold L . In the following, $f : L \rightarrow M$ denotes the composition $\pi \circ i$.

1. (Audin [3]) If L and M are orientable, then $\chi(L) = \deg(f)^2\chi(M)$ and the same is true modulo 4 if L and M are not orientable.
2. (Lalonde and Sikorav [27]) The index $[\pi_1(M) : f_*(\pi_1(L))]$ is finite.
3. (Viterbo [48]) If M is simply connected, then L cannot be an Eilenberg-MacLane space.
4. (Fukaya, Seidel and Smith [23], Nadler [33], see also Buhovski [11]) If M is simply connected and L is spin with zero Maslov class, then the projection f has degree ± 1 , and induces an isomorphism $H^*(L, K) \simeq H^*(M, K)$ for any arbitrary field K of characteristic not equal to 2.
5. (Ritter [41]) If M is simply connected, then $\pi^* : H^2(M) \rightarrow H^2(L)$ is injective and the image of $f_* : \pi_2(L) \rightarrow \pi_2(M)$ has finite index.
6. (Damian [14]) If M has dimension $n \geq 3$ and is the total space of a fibration over \mathbb{S}^1 , we have:
 - a) For any finite presentation $\langle g_1, g_2, \dots, g_p \mid r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ of the fundamental group $\pi_1(L)$, $p - q \leq 1$.
 - b) The fundamental group $\pi_1(L)$ is not isomorphic to the free product $G_1 * G_2$ of two non-trivial groups.

The idea of the proof of Damian is the following: if M is the total space of a fibration $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ over the circle, then one can use the pull-back $\alpha = p^*d\theta$ of the one-form $d\theta$ on \mathbb{S}^1 to displace an exact Lagrangian submanifold L of T^*M from itself by a symplectic isotopy (defined by $\varphi_t(q, p) = (q, p + t\alpha)$).

But given a symplectic isotopy (φ_t) , Damian has constructed a Floer-type complex $C(L, \varphi_t)$ spanned by the intersection points of L and $\varphi_1(L)$, with coefficients in a Novikov ring associated to $\pi_1(M)$ and endowed with a differential which is an analogue in the Lagrangian Floer theory of the Morse-Novikov differential.

The homology of this complex only depends on the flux $[\varphi_1^*\lambda_M - \lambda_M] = u$ of (φ_t) . It is called the Floer-Novikov homology of L and denoted $HF(L, u)$. Damian has proved that this homology $HF(L, u)$ is isomorphic to the Novikov homology $H^*(\bar{L}, f^*u)$ of L . The Novikov homology of L must then be trivial

when φ_t is the isotopy induced by α , that is when $u = [\alpha]$, and this gives the obstructions on the fundamental group of L .

Here we are interested in the more general case of monotone Lagrangian submanifolds of T^*M . In the usual sense, a Lagrangian submanifold L is monotone (on the disks) if there exists a non-negative constant K_L such that:

$$\text{for all } u \in \pi_2(T^*M, L), \int_u \omega_M = K_L \mu_L(u) \quad (3.1)$$

where μ_L denotes the Maslov class of L in T^*M .

For instance, any local Lagrangian submanifold which is monotone in \mathbb{C}^n is also monotone in T^*M (see Remark 3.1.2 (iii)).

We would like to know if there are also “global” monotone Lagrangian submanifolds in T^*M . It is possible to get topological obstructions on the monotone Lagrangian embeddings by extending the construction of the Floer-Novikov type complex of Damian to the monotone case. In order to carry out this construction, we need a stronger monotonicity assumption:

Definition 3.1.1. *A Lagrangian submanifold of T^*M is said to be monotone on the loops if there exists a non-negative constant k_L such that:*

$$\text{for all } \gamma \in \pi_1(L), \int_\gamma \lambda_M = k_L \mu_L(\gamma) \quad (3.2)$$

where μ_L denotes the Maslov class of L in T^*M .

Remarks 3.1.2. (i) This assumption is necessary to bound from above the energy of solutions having the same Maslov index (see Section 3.3.5).

(ii) We recover the exact case when $k_L = 0$.

(iii) If L is a Lagrangian submanifold of T^*M which is monotone on the loops, then it is monotone in the usual sense (i.e. on the disks) with the same constant $k_L = K_L$.

(iv) Note that the converse of (iii) is not necessarily true in general. It is true for instance if M is simply connected.

(v) This definition of monotone Lagrangian submanifold was already introduced by Polterovich [40] for Lagrangian submanifolds of \mathbb{C}^n , but in this case, it coincides with the usual definition.

Notation 3.1.3. *If L is a Lagrangian submanifold in T^*M which is monotone on the disks, we will call Maslov number of L and denote N_L the non-negative generator of the subgroup $\langle \mu_L, \pi_2(L) \rangle$ of \mathbb{Z} .*

As in the exact case, we will use a suitable version of Floer-Novikov homology. The differences are the following:

- (i) There is no action functional, so we will have to work with the action one-form (see Remark 3.3.11).
- (ii) The fact that $[\pi_1(M) : f_*(\pi_1(L))]$ is finite does not hold in the monotone case without further assumption on the Maslov class of L . For instance, for any local monotone Lagrangian submanifold in a Darboux chart, $f_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is trivial and the index is not finite unless $\pi_1(M)$ is finite.
- (iii) In the monotone case, we have to take into account the bubbling of J -holomorphic disks. This makes the definition of Floer-Novikov homology more intricate.
- (iv) There are also differences on more technical points. For instance, in the proof of invariance, we cannot use an extension of a symplectic isotopy of T^*L to T^*M as in the exact case.
- (v) In the monotone case, the Floer homology is not always isomorphic to the Novikov homology $H_*(\bar{L}, f^*u)$. We will prove that it is the limit of a spectral sequence (see Theorem 3.4.7, this is a “Novikov version” of the spectral sequence described by Biran in [8] for the usual Lagrangian Floer homology).

Theorem 3.1.4. *Let u be an element of $H^1(M)$. Assume that the Lagrangian submanifold L is monotone on the loops, and of Maslov number $N_L \geq 2$. There exists a spectral sequence $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ satisfying the following properties:*

(1) $E_0^{p,q} = C_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \otimes A^{pN_L}$ and $d_0 = \partial_0 \otimes 1$, where ∂_0 is the Morse-Novikov differential;

(2) $E_1^{p,q} = H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \otimes A^{pN_L}$ and $d_1 = [\partial_1] \otimes \tau$ where

$$[\partial_1] : H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \rightarrow H_{p+1+q-(p+1)N_L}(\bar{L}, f^*u);$$

(3) $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ collapses at the page $\kappa+1$, where $\kappa = \lfloor \frac{\dim(L)+1}{N_L} \rfloor$ and the spectral sequence converges to $FH(L, u)$, i.e.

$$\bigoplus_{p+q=\ell} E_\infty^{p,q} \cong FH^{\ell \pmod{N_L}}(L, u);$$

(4) For all $p \in \mathbb{Z}$, $\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E_{\infty}^{p,q} \cong FH(L, u)$.

Here A is the Λ_u -module $A = \Lambda_u[T, T^{-1}]$ of Laurent polynomials with coefficients in Λ_u (see section 3.2) and $\tau_i : A \rightarrow A$ is the multiplication by T^i . The degree of T is equal to N_L and $A^{pN_L} = \mathbb{Z}/2 T^p$.

In particular, when $N_L \geq \dim(M) + 2$, the spectral sequence above collapses at the first page and the Floer-Novikov homology is equal to the Novikov homology $H(L, \pi^*u)$.

Using the techniques of Damian, we prove:

Theorem 3.1.5. *Let M be a closed manifold which is the total space of a fibration $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ on the circle. Let L be a Lagrangian submanifold of T^*M which is monotone on the loops. Assume either that $N_L \geq \dim(M) + 1$ or ($N_L = \dim(M)$ and $[\pi_1(M) : \pi_1(L)]$ is finite). We have:*

(i) *If $\langle g_1, g_2, \dots, g_p | r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ is a finite presentation of $\pi_1(L)$, then*

$$p - q \leq 1.$$

(ii) *The fundamental group $\pi_1(L)$ is not isomorphic to a free product $G_1 \star G_2$ of two non trivial groups.*

3.2 Novikov theory

Let us recall the definition of Novikov homology ([34], for a more detailed study, see [45]) and the results of Damian [14].

Let L be a closed manifold and $u \in H^1(L, \mathbb{R})$. Denote by Λ the ring $\mathbb{Z}/2[\pi_1(L)]$ and by $\widehat{\Lambda} = \mathbb{Z}/2[[\pi_1(L)]]$ the group of formal series.

Let Λ_u be the completed ring of series

$$\Lambda_u = \left\{ \sum n_i g_i \in \widehat{\Lambda} \mid g_i \in \pi_1(L), n_i \in \mathbb{Z}/2, u(g_i) \rightarrow +\infty \right\}$$

where $u(g_i) \rightarrow +\infty$ means here that for all $A > 0$, the set

$$\{g_i \mid n_i \neq 0 \text{ and } u(g_i) < A\}$$

is finite.

Definition 3.2.1. Let $C(\tilde{L})$ be the free Λ -complex spanned by fixed lifts of the cells of a CW-decomposition of L to the universal cover \tilde{L} of L and

$$C(L, u) = \Lambda_u \otimes_{\Lambda} C(\tilde{L}).$$

The homology of this complex $C(L, u)$ is the Novikov homology $H(L, u)$.

Definition 3.2.2 (Morse-Novikov homology). Let α be a closed generic one-form in the class of $u \in H^1(L, \mathbb{R})$ and ξ be the gradient of α with respect to some generic metric on L . For every critical point c of α , fix a lift \tilde{c} of c in the universal cover \tilde{L} .

Let $C(\alpha, \xi)$ be the Λ_u -complex spanned by the zeros of α and whose differential is such that if c and d are zeros of index difference equal to 1 then their incidence number is the algebraic number of flow lines that joins c to d and lifts to a path in \tilde{L} from $g_i \tilde{c}$ to \tilde{d} .

By generic, we mean here that α has Morse-type singularities and ξ satisfies the Morse-Smale condition.

Theorem 3.2.3 (Novikov [34], Latour [28], see also Pazhitnov [39]). For any generic pair (α, ξ) , the homology of this complex is isomorphic to $H(L, u)$.

Remark 3.2.4. In these two descriptions of the Novikov homology, one could replace \tilde{L} by any integration covering of L (i.e. such that the pull-back of u is zero). We will use this in our comparison between the Floer-type homology constructed here and the Novikov homology of L .

Let us end this section by recalling results proved in [14]:

Proposition 3.2.5 (Damian [14], Sikorav [45]). Let L be a closed manifold and $u \in H^1(L, \mathbb{R})$.

- a) Let $\langle g_1, g_2, \dots, g_p | r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ be a presentation of the fundamental group $\pi_1(L)$ which satisfies $p - q \geq 2$. If $u \neq 0$, then $H_1(L, u) \neq 0$.
- b) Suppose that $\pi_1(L) = G_1 * G_2$ is a free product of two groups, none of them being trivial. If $u \neq 0$, then $H_1(L, u) \neq 0$.

3.3 The Floer type complex

Let $i : L \hookrightarrow T^*M$ be a Lagrangian embedding of a closed manifold L . Assume that the image of L in T^*M is monotone on the loops. Let (φ_t) be a symplectic isotopy of T^*M and denote by L_t the image of L by (φ_t) .

Remark 3.3.1. As they are the images of L by symplectomorphisms, the Lagrangian submanifolds L_t are not necessarily monotone on the loops but they are monotone on the disks. We can therefore apply to them all the results concerning monotone (in the usual sense) Lagrangian submanifolds.

Let $u \in H^1(M; \mathbb{R})$ denote the flux (or Calabi invariant) of (φ_t) , that is the class:

$$\text{Cal}(\varphi_t) = [\varphi_1^* \lambda_M - \lambda_M] \in H^1(T^*M, \mathbb{R}) \simeq H^1(M, \mathbb{R}).$$

We define a complex spanned by the intersection points of L and $\varphi_1(L)$ and prove that this complex depends only on L and $\text{Cal}(\varphi_t)$.

3.3.1 Preliminary results

Let us first notice that it is possible to restrict our symplectic isotopies to isotopies of the following type:

Lemma 3.3.2. *There exists a symplectic isotopy (ψ_t) on T^*M such that $\psi_{1|L} = \varphi_{1|L}$ which is spanned by $\alpha + dH_t$, where α is a closed one-form in u and $H : T^*M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ has compact support.*

Proof. As in the proof of [14, Lemma 3.2] (which does not use the exactness assumption of L), consider a family of one-forms α_t on M in the class of $\varphi_t^* \lambda_M - \lambda_M$. Note that the composition of (φ_t) and of the symplectic isotopy spanned by $-\alpha_t$ is a Hamiltonian compactly supported isotopy χ_t . The isotopy (ψ_t) can then be defined as the composition of χ_t with the symplectic isotopy spanned by α_1 . \square

We will also require in the construction and applications that the induced map $f_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is surjective. It is enough to suppose that the index $[\pi_1(M) : f_*(\pi_1(L))]$ is finite:

Remark 3.3.3. If $f_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is not surjective, let M_1 be the covering of M induced by the subgroup $f_*(\pi_1(L))$ of $\pi_1(M)$. The manifold L can be lifted as a Lagrangian submanifold of T^*M_1 which is monotone on the loops (and which has the same Maslov class).

If $[\pi_1(M) : f_*(\pi_1(L))]$ is finite, then M_1 is closed and the conclusion of Theorem 3.1.5 in T^*M is then just a consequence of the same theorem for T^*M_1 where the surjectivity condition is satisfied.

But, although the index $[\pi_1(T^*M) : f_*(\pi_1(L))]$ is always finite in the exact case (Lalonde and Sikorav, [27, Theorem 1 a])), this assumption is not always fulfilled in the monotone case.

However, the index is necessarily finite for monotone Lagrangian submanifolds if the Maslov number of L is large enough:

Proposition 3.3.4. *Let L be a Lagrangian submanifold of T^*M which is monotone (on the disks). If $N_L \geq \dim(M) + 1$, then the index of $\pi_1(L)$ in $\pi_1(M)$ is finite.*

Proof. If $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is not surjective, consider again the covering M_1 of M induced by the subgroup $f_*(\pi_1(L))$ of $\pi_1(M)$ and the lift of L into T^*M_1 .

If the covering group of $M_1 \rightarrow M$ is infinite, then M_1 is open and the Lagrangian submanifold L can be displaced from itself by a Hamiltonian isotopy (see [27, Proposition 1]) so that the usual Floer homology $HF(L, L)$ (with $\mathbb{Z}/2$ coefficients) must be trivial. But if the Maslov number of L is greater than $\dim(M) + 2$, we know by Oh's theorem ([38, Theorem II (i)]) that this homology is isomorphic to the usual cohomology $H^*(L, \mathbb{Z}/2)$ of L and this is in contradiction with the vanishing of $HF(L, L)$.

If $N_L = \dim(M) + 1$, then by [38, Theorem II (ii)],

$$HF(L, L) \approx \bigoplus_{i=0}^{\dim(M)} H^i(L, \mathbb{Z}/2) \text{ or } \bigoplus_{i=1}^{\dim(M)-1} H^i(L, \mathbb{Z}/2)$$

and this also leads to a contradiction unless L is a $\mathbb{Z}/2$ -homology sphere.

However, if L is a $\mathbb{Z}/2$ -homology sphere, then $H^1(L, \mathbb{R}) = 0$ and in particular L is exact so that we can directly apply the result of Lalonde and Sikorav to see that the index is finite. \square

If $N_L \leq \dim(L)$, we will have to add the assumption that the index of $\pi_1(L)$ in $\pi_1(T^*M)$ is finite.

Remark 3.3.5. We cannot expect to remove the assumption $N_L \geq \dim(M) + 1$ in Proposition 3.3.4. Indeed, Polterovich proved in [40] (see also Audin [3] for the construction) that for every two integer numbers $2 \leq k \leq n$, there exists a compact manifold $L_{n,k}$ which admits a monotone Lagrangian embedding in \mathbb{C}^n (and consequently "local" monotone Lagrangian submanifolds in any cotangent bundle) with Maslov number equal to k such that:

- a) $L_{n,n} = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 / \tau_{n-1} \times \tau_1$ where $\tau_j : \mathbb{S}^j \rightarrow \mathbb{S}^j$ is the antipodal involution;
- b) $L_{n,k} = L_{k,k} \times \mathbb{S}^{n-k}$ where $k < n$.

Remark 3.3.6. Thanks to Remark 3.3.3 and Proposition 3.3.4, it is enough to prove Theorem 3.1.5 when the induced map

$$f_\star : \pi_1(L) \longrightarrow \pi_1(M)$$

is surjective. From now on, we will always suppose that **f_\star is surjective.**

Thanks to the surjectivity assumption on f_\star , we can consider a connected covering of the Lagrangian submanifold L in the cotangent bundle of the universal cover of M :

Lemma 3.3.7. *Let $\widetilde{M} \rightarrow M$ be the universal covering of M and $\widetilde{p} : T^*\widetilde{M} \rightarrow T^*M$ be the induced covering on the cotangent bundles. Denote by $y \mapsto y^g$ the right action of $\pi_1(M)$ on $T^*\widetilde{M}$.*

Let $\bar{L} \rightarrow L$ be the pull-back of the covering $T^\widetilde{M} \rightarrow T^*M$ by the embedding $i : L \rightarrow T^*M$. Then:*

- (i) \bar{L} is path-connected if and only if the map $f_\star : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is surjective.
- (ii) The covering $\bar{L} \rightarrow L$ corresponds to the covering of L associated with the subgroup $K = \ker(\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M))$ of $\pi_1(L)$.
- (iii) The map $\tilde{\iota} : \bar{L} \rightarrow T^*\widetilde{M}$ is a monotone Lagrangian embedding and for all $g \in \pi_1(M)$, $\tilde{x} \in \bar{L}$,

$$\tilde{\iota}(\tilde{x}^g) = (\tilde{\iota}(\tilde{x}))^g.$$

The proof of this lemma uses only basic algebraic topology and can be found in the appendix.

Lemma 3.3.8. *Let (φ_t) be the symplectic isotopy generated by $\alpha + dH_t$. Then this isotopy lifts to a Hamiltonian isotopy $(\tilde{\varphi}_t)$ on $T^*\widetilde{M}$.*

Moreover, if $L_t = \varphi_t(L)$ and $\bar{L}_t = \tilde{\varphi}_t(\bar{L})$, then

$$\bar{L} \cap \bar{L}_1 = \bigcup_{x \in L \cap L_1} \tilde{p}^{-1}(x).$$

Proof. As in the proof of [14, Lemma 3.6], which does not involve any assumption on the exactness/monotonicity of L , we can define the isotopy $(\tilde{\varphi}_t)$ as the isotopy spanned by the pullback of $\alpha + dH_t$ to $T^*\widetilde{M}$. \square

3.3.2 The action one-form

In this section, L is assumed to be a closed Lagrangian submanifold of T^*M . It is also assumed that L is monotone on the loops and that $f_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is surjective.

Let (φ_t) be a symplectic isotopy as in Lemma 3.3.2. Denote by $u \in H^1(M; \mathbb{R})$ its flux.

If $L_t = \varphi_t(L)$, let $\Omega(L_0, L_1)$ be the space of paths from L_0 to L_1 :

$$\Omega(L_0, L_1) = \{z \in C^\infty([0, 1]; T^*M) \mid z(i) \in L_i, i = 0, 1\}.$$

We define a one-form on $\Omega(L_0, L_1)$ by:

$$\nu_z(V) = \int_0^1 \omega_M(z'(t), V(t)) dt.$$

The zeros of ν are the constant maps, that is, the intersection points of L_0 and L_1 .

The integral of ν on a loop involves the one-form u , as in the exact case, but also the monotonicity constant k_L of L :

Proposition 3.3.9. *Let $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Omega(L_0, L_1)$ be a loop. Then*

$$\int_\gamma \nu = \lambda_M(\gamma_0) - \lambda_M(\varphi_1^{-1}(\gamma_1)) - u(\gamma_0) \quad (3.3)$$

$$= k_L(\mu_{L_0}(\gamma_0) - \mu_{L_1}(\gamma_1)) - u(\gamma_0) \quad (3.4)$$

denoting $\gamma_i = \gamma(\mathbb{S}^1 \times \{i\})$ for $i = 0, 1$.

Proof. Considering the loop γ as a map $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow T^*M$, we get

$$\int_\gamma \nu = \int_{\mathbb{S}^1} \nu \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) ds = \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^1 \omega_M \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) dt ds = - \int_{\gamma(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])} \omega_M.$$

Then, by the Stokes formula,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \nu &= \int_{\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{0\})} \lambda_M - \int_{\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{1\})} \lambda_M \\ &= \int_{\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{0\})} \lambda_M - \int_{\varphi_1^{-1}(\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{1\}))} \varphi_1^* \lambda_M \\ &= \int_{\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{0\})} \lambda_M - \int_{\varphi_1^{-1}(\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{1\}))} \lambda_M - \int_{\varphi_1^{-1}(\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{1\}))} (\varphi_1^* \lambda_M - \lambda_M). \end{aligned}$$

As $\varphi_1^* \lambda_M - \lambda_M$ is a closed one-form in the cohomology class $u = \text{Cal}(\varphi_t)$, the third term is equal to:

$$u(\varphi_1^{-1}(\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{1\}))) = u(\gamma(\mathbb{S}^1 \times \{0\})).$$

So that

$$\int_{\gamma} \nu = \lambda_M(\gamma_0) - \lambda_M(\varphi_1^{-1}(\gamma_1)) - u(\gamma_0).$$

We now use the monotonicity of L to write:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nu &= k_L(\mu_L(\gamma_0) - \mu_L(\varphi_1^{-1}(\gamma_1))) - u(\gamma_0) \\ &= k_L(\mu_{L_0}(\gamma_0) - \mu_{L_1}(\gamma_1)) - u(\gamma_0) \end{aligned}$$

since φ_1 is a symplectic isotopy. \square

Corollary 3.3.10. *The action one-form ν is closed.*

Proof. The formula (3.3) proves that $\int_{\gamma} \nu$ depends only on the homotopy class of γ in $\Omega(L_0, L_1)$. \square

Remark 3.3.11. We could also lift ν to $\Omega(\bar{L}_0, \bar{L}_1)$ (as in the exact case, see [14]) but the one-form is not necessarily exact on this space. Nevertheless, we will be able to carry out the construction of the complex without needing a primitive of ν .

Alternative setting

We can also define a one-form on $\Omega(L, L)$. This setting will be useful in the proof of Hamiltonian invariance (section 3.3.6).

Let $X_t^{\alpha+dH_t}$ be the symplectic dual of $\alpha+dH_t$, defined by $\omega_M(\cdot, X_t^{\alpha+dH_t}) = (\alpha+dH_t)(\cdot)$. Denote by (φ_t) the isotopy spanned by $X_t^{\alpha+dH_t}$.

We can define a one-form $\hat{\nu}$ on $\Omega(L, L)$ by:

$$\hat{\nu}_z(V) = \int_0^1 \omega_M(z'(t), V(t)) + (\alpha + dH_t)(V(t)) dt.$$

The zeros of $\hat{\nu}$ are the flow trajectories beginning on L (at time 0) and ending on L (at time 1).

If $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Omega(L, L)$ is a loop in $\Omega(L, L)$, we have as in Proposition 3.3.9:

$$\int_{\gamma} \hat{\nu} = - \int_{\mathbb{S}^1 \times [0,1]} \gamma^* \omega_M + \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^1 (\alpha + dH_t) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) dt ds$$

with

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^1 (\alpha + dH_t) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) dt ds &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_0^1 \alpha \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) dt ds = \int_0^1 \int_{\gamma(\cdot, t)} \alpha dt \\ &= \int_{\gamma(\cdot, 0)} \alpha = u(\gamma_0) \end{aligned}$$

since $\int_{\gamma(\cdot, t)} \alpha$ does not depend on t . We have thus

$$\int_{\gamma} \widehat{\nu} = \lambda_M(\gamma_0) - \lambda_M(\gamma_1) + u(\gamma_0) \quad (3.5)$$

$$= k_L(\mu_L(\gamma_0) - \mu_L(\gamma_1)) + u(\gamma_0). \quad (3.6)$$

Remark 3.3.12. Note that these two settings are equivalent: if ν_- is the one-form defined on $\Omega(L_0, \varphi^{-1}(L_0))$ from the symplectic isotopy (φ_t^{-1}) , then the map $\Gamma(z) = \varphi_t^{-1}(z)$ is a 1 to 1 correspondence between $\Omega(L, L)$ and $\Omega(L_0, \varphi^{-1}(L_0))$ and we have

$$\Gamma^* \nu_- = \widehat{\nu}.$$

(The fact that the correspondence uses φ_t^{-1} instead of φ_t explains the difference of signs between the relations (3.3) and (3.4) on one hand, and (3.5) and (3.6) on the other hand.)

3.3.3 The gradient

Let (J_t) be a family of almost complex structures on T^*M that are compatible with ω_M and (g_t) be the family of associated Riemannian metrics on T^*M . We consider the trajectories of the opposite of the gradient of the one-form ν with respect to the induced metric on $\Omega(L_0, L_1)$. These are, as maps of two variables, solutions of the Cauchy-Riemann equation. We define for a solution v of the Cauchy-Riemann equation its energy

$$E(v) = \int_{\mathbb{R} \times [0, 1]} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt ds.$$

Denote then by $\mathcal{M}(L_0, L_1)$ the space of trajectories of finite energy:

$$\mathcal{M}(L_0, L_1) = \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1], T^*M) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial s} + J_t(v) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ v(s, 0) \in L_0 \text{ and } v(s, 1) \in L_1 \\ E(v) < \infty \end{array} \right. \right\}.$$

In particular, if $v \in \mathcal{M}(L_0, L_1)$, then as in Proposition 3.3.9:

$$E(v) = \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} v^* \omega_M = \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \omega_M \left(\frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt ds = - \int_v \nu.$$

Denote also for $x, y \in L_0 \cap L_1$:

$$\mathcal{M}(x, y) = \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1], T^*M) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial s} + J_t(v) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} v(s, \cdot) = x \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} v(s, \cdot) = y \end{array} \right. \right\}$$

and

$$\mathcal{M}^*(x, y) = \begin{cases} \mathcal{M}(x, y) & \text{for } x \neq y \\ \mathcal{M}(x, x) \setminus \{x\} & \text{for } x = y. \end{cases}$$

From [18] and [35] we have

Theorem 3.3.13.

$$\mathcal{M}(L_0, L_1) = \bigcup_{x, y \in L_0 \cap L_1} \mathcal{M}(x, y).$$

If (\tilde{J}_t) is a family of almost complex structures on $T^*\tilde{M}$ obtained by lifting the family (J_t) and if $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{L}_0, \tilde{L}_1)$, $\tilde{\mathcal{M}}^*(\tilde{x}, \tilde{y})$ are the spaces of solutions in $T^*\tilde{M}$ defined in a similar way, they also satisfy Theorem 3.3.13 and \tilde{p} maps $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{L}_0, \tilde{L}_1)$ onto $\mathcal{M}(L_0, L_1)$ so that a solution and its image by \tilde{p} have the same energy.

In the alternative setting, we consider the trajectories of the opposite of the gradient of the one-form \hat{v} with respect to the metric defined on $\Omega(L, L)$ by a family of compatible almost complex structures (\hat{J}_t) .

Denote

$$\widehat{\mathcal{M}}(L, L) = \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1], T^*M) \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} + \hat{J}_t(\hat{v}) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - X_t^{\alpha + dH_t(\hat{v})} \right) = 0 \\ v(s, 0) \in L \text{ and } v(s, 1) \in L \\ E(v) < \infty \end{array} \right. \right\},$$

with the energy defined by the same formula as above.

If $\widehat{v} \in \mathcal{M}(L, L)$, then again

$$\begin{aligned}
E(\widehat{v}) &= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \left\| \frac{\partial \widehat{v}}{\partial s} \right\|^2 dt ds = \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \omega_M \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial s}, \widehat{J}_t(\widehat{v}) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial s} \right) dt ds \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \omega_M \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial s}, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} - X^{\alpha + dH_t}(\widehat{v}) \right) dt ds \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \omega_M \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial s}, \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} \right) dt ds - \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} (\alpha + dH_t) \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial s} \right) dt ds \\
&= - \int_{\widehat{v}} \widehat{v}
\end{aligned}$$

and we define analogously the space of solutions $\widehat{\mathcal{M}}(x, y)$ and $\widehat{\mathcal{M}}^*(x, y)$.

Remark 3.3.14. There is also a correspondence between the two settings for the gradient trajectories. For all $\widehat{v} \in \widehat{\mathcal{M}}(L, L)$, we can associate the map v defined by

$$v(s, t) = \varphi_t^{-1}(\widehat{v}(s, t)).$$

Let (J_t) and (\widehat{J}_t) be two families of compatible almost complex structures on T^*M such that

$$\widehat{J}_t = (\varphi_t)_* J_t (\varphi_t^{-1})_*.$$

Then

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J_t(v) \frac{\partial v}{\partial t} = (\varphi_t^{-1})_* \left[\frac{\partial \widehat{v}}{\partial s} + \widehat{J}_t(\widehat{v}) \left(\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} - X_t^{\alpha + dH_t}(\widehat{v}) \right) \right],$$

and

$$E(\widehat{v}) = E(v)$$

so that the map $\widehat{v} \mapsto v$ defines a bijection between $\widehat{\mathcal{M}}(L, L)$ and $\mathcal{M}(L_0, \varphi_1^{-1}(L_0))$.

3.3.4 Transversality and compactness

In order to define our Floer-type homology, let us check now the transversality and compactness requirements.

Transversality

We have a classical transversality result of Floer theory:

Theorem 3.3.15. *Assume that L_0 and L_1 are transverse.*

Then for a generic choice of J_t , the spaces $\mathcal{M}(x, y)$ are manifolds of finite dimension, of local dimension at $v \in \mathcal{M}(x, y)$ the Maslov-Viterbo index of v . The same result is true for $\widetilde{\mathcal{M}}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ and the map \widetilde{p} induces a diffeomorphism

$$\widetilde{p}: \widetilde{\mathcal{M}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \rightarrow \mathcal{M}(x, y)$$

for $\widetilde{p}(\widetilde{x}) = x$ and $\widetilde{p}(\widetilde{y}) = y$.

Proof. It is a transversality result analogous to [14, Theorem 3.12] and it can be proved as in [19] (see also [35]). \square

Remark 3.3.16. In the case of the alternative setting, a one-form $\alpha + dH_t$ being given, there exists a generic Hamiltonian h_t (with compact support) such that, if (ψ_t) is the symplectic isotopy spanned by $\alpha + dH_t + dh_t$, then L and $\psi_1(L)$ are transverse.

Using the correspondence 3.3.14, we are then able to deduce from Theorem 3.3.15 that the spaces $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ are submanifolds for a generic choice of family of compatible almost complex structure.

Compactness

Let x and y be two intersection points of L_0 and L_1 and let $A > 0$. Denote

$$\mathcal{M}_A^*(x, y) = \{v \in \mathcal{M}^*(x, y) \mid E(v) \leq A\}$$

the space of solutions of finite energy between x and y .

The translation in the s variable (defined by $(\sigma \cdot v)(s, t) = v(\sigma + s, t)$) induces a free action of \mathbb{R} on $\mathcal{M}^*(x, y)$. Let $\mathcal{L}(x, y)$ denote the quotient $\mathcal{M}^*(x, y)/\mathbb{R}$.

Let us recall the result of convergence modulo bubbling of a sequence of elements of $\mathcal{M}_A^*(x, y)$ (as stated in [35, Proposition 3.7]): if (v_n) is a sequence of elements of $\mathcal{M}_A^*(x, y)$ with a fixed index equal to I , then there exists a subsequence converging (modulo translations, i.e. in the quotient $\mathcal{L}(x, y)$) to a ‘‘cusp’’ curve $(\underline{v}, \underline{w}, \underline{u})$ (where \underline{v} is a finite collection of solutions $v^i \in \mathcal{M}_A^*(z_i, z_{i+1})$, \underline{w} is a finite collection of J -holomorphic disks and \underline{u} is a finite collection of J -holomorphic spheres) such that

$$\begin{aligned} \sum_i \int (v^i)^* \omega + \sum_j \int (w^j)^* \omega + \sum_k \int (u^k)^* \omega &\leq A \\ \sum_i \mu(v^i) + \sum_j \mu(w^j) + \sum_k 2c_1(u^k) &= \mu_0. \end{aligned}$$

In our case, the ambient symplectic manifold is the cotangent bundle of the manifold M so that no bubbling of J -holomorphic spheres occurs.

Proposition 3.3.17. *Let L be a monotone Lagrangian manifold of Maslov number $N_L \geq 3$. Then:*

- (i) *For any sequence of elements (v_n) in the one-dimensional component of $\mathcal{M}_A^*(x, y)$, there exists a sequence (σ_n) of real numbers, such that a subsequence of $(\sigma_n \cdot v_n)$ converges in $\mathcal{M}_A^*(x, y)$;*
- (ii) *if (v_n) is a sequence of elements of $\mathcal{M}_A^*(x, z)$ of index 2, then*
- *either there exists a sequence (σ_n) of real numbers such that a subsequence of $(\sigma_n \cdot v_n)$ converges to a solution v in $\mathcal{M}_A^*(x, z)$;*
 - *or there exists a pair of sequences $((\sigma_n^1), (\sigma_n^2))$ of real numbers and a pair of solutions $(v^1, v^2) \in \mathcal{M}_A^*(x, y) \times \mathcal{M}_A^*(y, z)$, for some intersection point y , such that, for every $i \in \{1; 2\}$, a subsequence of $(\sigma_n^i \cdot v_n)$ converges to v^i (in this case one says that (v_n) converges to the broken orbit (v^1, v^2)).*

Remark 3.3.18. The statement (i) in Proposition 3.3.17 also holds in the case $N_L = 2$. We will deal with the case $N_L = 2$ in the proof of Lemma 3.3.21.

Proof of Proposition 3.3.17.

- (i) If (v_n) is a sequence of elements of $\mathcal{M}_A^*(x, y)$ of index 1, then there exists a subsequence that converges to a « cusp » curve $(\underline{v}, \underline{w}, \emptyset)$ such that

$$\sum_i \int (v^i)^* \omega + \sum_j \int (w^j)^* \omega \leq A \quad (3.7)$$

$$\sum_i \mu(v^i) + \sum_j \mu(w^j) = 1. \quad (3.8)$$

Since the area of a J -holomorphic disk w^j is non-negative, the monotonicity assumption on L (the monotonicity on the disks is sufficient here) gives $\mu(w^j) \geq 3$. Because of (3.8), there is no bubbling of J -holomorphic disk ($\underline{w} = \emptyset$). Moreover, the dimension of $\mathcal{M}^*(x, y)$ is at least 1 (because of the free action of \mathbb{R}), so that the Maslov class of a solution v^i is at least 1. Hence, the collection \underline{v} can only contain one element that belongs to $v \in \mathcal{M}_A^*(x, y)$.

- (ii) As in (i), no bubbling of J -holomorphic disks can occur. As a consequence, there is a subsequence converging to a broken orbit \underline{v} such that

$$\sum_i \mu(v^i) = 2$$

and hence \underline{v} admits at most two components. □

For the construction of the complex we need a homotopy lemma:

Lemma 3.3.19. *Let (v_n) be a sequence of elements of $\mathcal{M}_A^*(x, y)$ of index either 1 or 2 having a subsequence converging either to $\underline{v} = v^1 \in \mathcal{M}_A^*(x, y)$ or to $\underline{v} = \{v^1, v^2\}$ with $(v^1, v^2) \in \mathcal{M}_A^*(x, y) \times \mathcal{M}_A^*(y, z)$.*

Let $\gamma_n : [-\infty; +\infty] \rightarrow L_0$ be the path defined by $\gamma_n(s) = v_n(s, 0)$ (extended at $s = -\infty$ by x and at $s = +\infty$ by y). Let $\gamma^i : [-\infty; +\infty] \rightarrow L_0$ be the paths defined analogously for the v^i .

Then, for n large enough, γ_n is homotopic to either γ^1 (when $\underline{v} = v^1$) as a path from x to y , or to the concatenation of paths $\gamma^1 \star \gamma^2$ (when $\underline{v} = \{v^1, v^2\}$) as a path from x to z .

Proof. The proof is similar to [14, Lemma 3.16] if we add the assumption on the index ensuring that no bubbling of J -holomorphic disks can occur. \square

3.3.5 The differential of the Floer complex

Let x and y be two intersection points of L_0 and L_1 . In this section, we define an incidence number $[x, y]$.

Let $\mathcal{L}^0(x, y)$ be the zero-dimensional component of $\mathcal{L}(x, y)$. For all $z \in L_0 \cap L_1$, fix a lift $\tilde{z} \in T^*\widetilde{M}$. For $g \in \pi_1(M)$, denote by $\mathcal{L}_g^0(x, y) \subset \mathcal{L}^0(x, y)$ the subset of trajectories that lift to $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{x}^g, \tilde{y})$ (with the same notation for the action of $\pi_1(M)$ as in Lemma 3.3.7).

Let us state and prove a lemma that will replace [14, Lemma 3.16] in our construction.

Lemma 3.3.20. *Assume that $N_L \geq 2$. For all x, y in $L_0 \cap L_1$ and all g in $\pi_1(M)$, the set $\mathcal{L}_g^0(x, y)$ is finite.*

If n_g denotes the cardinal modulo $\mathbb{Z}/2$, the number $\sum n_g$ belongs to the Novikov ring Λ_{-u} .

Proof. The elements of $\mathcal{L}_g^0(x, y)$ are classes of solutions v which belong to the one-dimensional component of $\mathcal{M}^*(x, y)$. We prove that these solutions all have the same energy. For that purpose, we prove that two solutions from x to y , which have the same index, and which can be both lifted to trajectories from \tilde{x}^g to \tilde{y} , have the same energy.

We consider a solution

$$v : [-\infty, +\infty] \times [0, 1] \longrightarrow T^*M$$

in $\mathcal{M}(x, y)$ as a path in $\Omega(L_0, L_1)$ from x to y . If v is such a path, let

$$\bar{v} : [-\infty, +\infty] \times [0, 1] \longrightarrow T^*M$$

be the “inverse” path defined by

$$\bar{v}(s, t) = v(-s, t).$$

Let v_1 and v_2 be two elements of $\mathcal{M}(x, y)$ satisfying $\mu(v_1) = \mu(v_2)$. If we denote by $\gamma = v_2 \# \bar{v}_1$ the concatenation of the paths v_2 and \bar{v}_1 (in this order), then γ is a loop in $\Omega(L_0, L_1)$ based in x (using the same notation for the original space $\Omega(L_0, L_1)$ of Section 3.3.2 and the space of pathes from L_0 to L_1 which are piecewise smooth) (see figure 3.3.1).

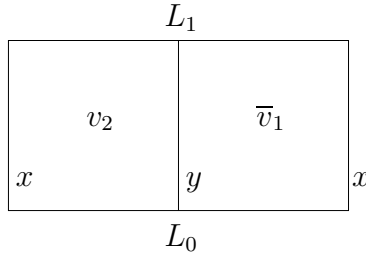


Figure 3.3.1: the loop γ

Then

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nu &= - \int \gamma^* \omega_M \\ &= - \int v_2^* \omega_M + \int v_1^* \omega_M \\ &= E(v_1) - E(v_2). \end{aligned}$$

and thanks to the monotonicity on the loops, by Proposition 3.3.9,

$$\int_{\gamma} \nu = k_L(\mu_{L_0}(\gamma_0) - \mu_{L_1}(\gamma_1)) - u(\gamma_0)$$

with $\mu_{L_0}(\gamma_0) - \mu_{L_1}(\gamma_1) = \mu(v_2) - \mu(v_1) = 0$.

Moreover, if the lifts of v_1 and v_2 are trajectories from \tilde{x}^g to \tilde{y} , γ_0 can be lifted to a loop based in \tilde{x}^g . Therefore, γ_0 is homotopic to the constant loop in T^*M and this implies that $u(\gamma_0) = 0$ and $\int_{\gamma} \nu = 0$. We have thus proved that v_1 and v_2 have the same energy.

Assume that $N_L \geq 2$. We can then apply Proposition 3.3.17 and Remark 3.3.18: a sequence of solutions (v_n) between x and y of Maslov index 1 has a subsequence converging to a solution of $\mathcal{M}^*(x, y)$. Thanks to Lemma 3.3.19, this solution can be lifted to a trajectory from \tilde{x}^g to \tilde{y} . This

means that the space $\mathcal{L}_g^0(x, y)$ is a compact space of dimension zero and hence it has only a finite number of elements.

For the second part of the lemma, it is enough to show that for $C > 0$, the set

$$\bigcup_{-u(g) \leq C} \mathcal{L}_g^0(x, y)$$

is compact (so that it is finite). A sequence (\underline{v}_n) in this space can be lifted to a sequence (v_n) in the one-dimensional component of $\mathcal{M}^*(x, y)$. But if v_1 and v_2 are two solutions from x to y with same Maslov class, we have:

$$E(v_1) - E(v_2) = k_L(\mu(v_2) - \mu(v_1)) - u(\gamma_0) = -u(\gamma_0).$$

If v_1 can be lifted to a trajectory from \tilde{x}^{g_1} to \tilde{y} and v_2 to a trajectory from \tilde{x}^{g_2} to \tilde{y} , w_0 can be lifted as a path from \tilde{x}^{g_2} to \tilde{x}^{g_1} so that $u(\gamma_0) = u(g_2^{-1}g_1)$ and

$$E(v_1) - E(v_2) = u(g_2) - u(g_1).$$

As a consequence, if we consider a sequence of solutions (v_n) , each v_n being lifted as a trajectory from \tilde{x}^{g_n} to \tilde{y} with $-u(g_n) \leq C$, then:

$$E(v_n) = E(v_0) - u(g_n) + u(g_0) \leq C + E(v_0) + u(g_0).$$

The energy of the elements of this sequence is bounded and we can apply Proposition 3.3.17: (v_n) has a converging subsequence and the limit of this subsequence can be lifted to a path from \tilde{x}^{g_∞} to \tilde{y} which satisfy:

$$-u(g_\infty) = E(v_\infty) - E(v_0) + u(g_0) \leq C.$$

This means that (\underline{v}_n) has a converging subsequence in $\bigcup_{-u(g) \leq C} \mathcal{L}_g^0(x, y)$ which is therefore compact. \square

We can now define the incidence number:

$$[x, y] = \sum_{g \in \pi_1(M)} n_g(x, y)g,$$

where $n_g(x, y)$ is the cardinality of $\mathcal{L}_g^0(x, y)$. We define the complex $C_\star(L_0, L_1, J_t)$ as the Λ_u -vector space spanned by the intersection points of L_0 and L_1 endowed with the differential:

$$\partial x = \sum_{g \in \pi_1(M); y \in L_0 \cap L_1} n_g(x, y)gy.$$

Lemma 3.3.21. *If $N_L \geq 2$, $\partial \circ \partial = 0$.*

Proof. In order to prove the relation $\partial^2 = 0$, one has to prove that for all $g \in \pi_1(M)$ and all $x, z \in L_0 \cap L_1$, we have

$$\sum_{y \in L_0 \cup L_1, g', g'' \in \pi_1(M), g'g''=g} n_{g'}(x, y)n_{g''}(y, z) = 0. \quad (3.9)$$

When $N_L \geq 3$, this is, using Proposition 3.3.17 as in [14, Lemma 3.18], a consequence of the compactification of the one-dimensional component of $\mathcal{L}_g(x, y)$ with broken trajectories (see figure 3.3.2). This compactification is a compact 1-dimensional manifold whose boundary is

$$\bigcup_{y \in L_0 \cup L_1, g', g'' \in \pi_1(M), g'g''=g} \mathcal{L}_{g'}^0(x, y) \times \mathcal{L}_{g''}^0(y, z).$$

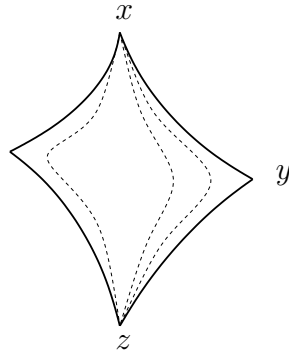


Figure 3.3.2: The compactification with broken trajectories

Let us consider now the case $N_L = 2$. Oh noticed in [37] that his extension of the Floer complex to the monotone case is possible under this assumption. This is also possible for the Floer-Novikov complex. Indeed, in the proof that the zero-dimensional component of $\mathcal{L}_g(x, y)$ is compact, one only needs that $N_L \geq 2$ and it is then possible to define the Floer differential.

The condition $N_L \geq 3$ is only used to avoid bubbling in the convergence of a sequence of solutions of index 2 and prove that the square of the differential is zero. Let us prove that this is also true for $N_L = 2$.

The only sequences for which the bubbling of a J -holomorphic disk can occur are sequences of solutions from an intersection point x to itself that have Maslov index 2. Then the “bubble” also has Maslov index 2.

In this case, it is possible to compactify the one-dimensional component of $\mathcal{L}_g(x, x)$ by adding to the broken trajectories the pairs formed by a constant trajectory and a J -holomorphic disk with boundary either on L_0 or L_1 (this is similar to [37]).

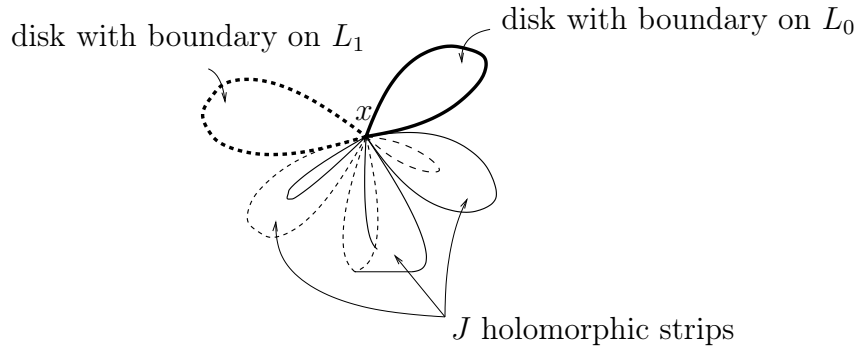


Figure 3.3.3: The compactification with disks (the plain lines correspond to boundaries on L_0 , the dashed lines to boundaries on L_1)

Note also that only a sequence of solutions that can be lifted to paths from \tilde{x} to \tilde{x} can converge to a J -holomorphic disk, so that this type of compactification is only needed for $\mathcal{L}_e(x, x)$, where e is the identity element of $\pi_1(M)$. Hence (3.9) holds also for $g \neq e$ with the previous type of compactification.

When $g = e$, we have as in [37],

$$\sum_{y \in L_0 \cup L_1, g', g'' \in \pi_1(M), g'g'' = g} n_{g'}(x, y)n_{g''}(y, z) = \Phi_{L_0}(x) + \Phi_{L_1}(x)$$

where $\Phi_{L_i}(x)$ is the number (modulo 2) of J -holomorphic disks with Maslov index 2 with boundary on L_i and that pass through the point x . Here we use that $\Phi_{L_i}(x)$ is preserved under symplectic isotopies (in [37], Oh uses only Hamiltonian isotopies but the proof is similar with symplectic isotopies) to see that $\Phi_{L_0}(x) + \Phi_{L_1}(x) = 0 \pmod{2}$. Therefore, $\partial \circ \partial = 0$ even in the case $N_L = 2$. \square

Remark 3.3.22. One can define the same way a complex $C_\star(L, \varphi_t, \widehat{J}_t)$ spanned by the zeros of the one-form \widehat{v} and define a differential using the spaces $\widehat{\mathcal{M}}(x, y)$. By the correspondence 3.3.14, the Λ_u -complexes $C_\star(L, \varphi_t, \widehat{J}_t)$ and $C_\star(L_0, \varphi_1^{-1}(L_0), J_t)$ are isomorphic.

3.3.6 Hamiltonian invariance

Denote $H_*(L_0, L_1, J_t)$ the homology of the complex defined in Section 3.3.5. We have assumed that $L_1 = \varphi_1(L_0)$ where the isotopy (φ_t) is supposed to be spanned by $\alpha + dH_t$ with α a closed one-form on M and H a Hamiltonian with compact support on $T^*M \times [0, 1]$.

We now prove that this homology does not depend on the generic choice of the pair (J_t, H_t) . For that purpose, we will use the “alternative” setting and the complex $C_*(L, \varphi_t, J_t)$. We denote by $H_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t)$ its homology.

Theorem 3.3.23. *For any two generic pairs (H_t, J_t) and (H'_t, J'_t) , there exists an isomorphism*

$$\Psi : H_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t) \longrightarrow H_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH'_t}, J'_t).$$

Proof. As in the proof of [14], define a morphism of Λ_u -complexes

$$\Psi_* : C_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t) \longrightarrow C_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH'_t}, J'_t)$$

associated to a family of functions $H_{s,t} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ and a family of compatible almost complex structures $J_{s,t}$ continuous in $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ and satisfying:

$$(H_{(s,t)}, J_{(s,t)}) = \begin{cases} (H_t, J_t) & \text{for } s < -R \\ (H'_t, J'_t) & \text{for } s > R. \end{cases}$$

Consider the space

$$\mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(L) = \left\{ v : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow T^*M \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial s} + J_{s,t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X_{s,t}^{\alpha+dH_{s,t}} \right) \\ v(s, i) \in L \text{ pour } i = 0, 1, s \in \mathbb{R} \\ E(v) < \infty \end{array} \right. \right\}.$$

An element v of this space converges to a zero x of the one-form \widehat{v} when s goes to $-\infty$ and to a zero y of the one-form \widehat{v}' (which corresponds to the Hamiltonian H'_t) when s goes to $+\infty$. As in Theorem 3.3.13, we have:

$$\mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(L) = \bigcup_{x,y} \mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y)$$

with

$$\mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y) = \left\{ v : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow T^*M \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial s} + J_{s,t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X_{s,t}^{\alpha+dH_{s,t}} \right) \\ v(s, i) \in L \text{ for } i = 0, 1, s \in \mathbb{R} \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} v(s, t) = x(t) \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} v(s, t) = y(t) \end{array} \right. \right\},$$

where x (respectively y) are the zeros of the one-form \widehat{v} (respectively \widehat{v}').

We also have a transversality result for these spaces: for a generic choice of the pair $(H_{s,t}, J_{s,t})$, the spaces $\mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y)$ are manifolds of local dimension given by the Maslov index of a solution.

We also need a compactness result:

Lemma 3.3.24. *For all $A > 0$, the zero-dimensional component of*

$$\mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y; A) = \left\{ v \in \mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y) \mid E(v) \leq A \right\}$$

is finite.

Proof. The proof is standard since no bubbling occurs in dimension 0 (see e.g. [14, Lemma 3.22]). \square

As before, we fix a lift \widetilde{x} in $T^*\widetilde{M}$ for every zero x of the one-form \widehat{v} and a lift \widetilde{y} for every zero y of the one-form \widehat{v}' (remember that the zeros of \widehat{v} are flow trajectories beginning on L and ending on L). Consider for all g of $\pi_1(M)$ and all zeros x and y of \widehat{v} and \widehat{v}' respectively, the space $\mathcal{M}_{g,s}(x, y) \subset \mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y)$ of solutions that can be lifted to $T^*\widetilde{M}$ in paths from \widetilde{x}^g to \widetilde{y} . We show that:

Proposition 3.3.25. *For any fixed index I , let*

$$\mathcal{M}_{g,s}^I(x, y) = \mathcal{M}_{g,s}(x, y) \cap \mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}^I(x, y)$$

be the space of elements of index I in $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$. The energy of any element of $\mathcal{M}_{g,s}^I(x, y)$ is bounded from above by some positive constant A , that is :

$$\mathcal{M}_{g,s}^I(x, y) \subset \mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(x, y; A).$$

Corollary 3.3.26. *The space $\mathcal{M}_{g,s}^0(x, y)$ is finite.*

Proof of Proposition 3.3.25. Here again, we adapt the proof of [14] (see also [46]). We do not have a primitive of \widehat{v} but it is possible to bound from above the difference of the energy of two solutions by a constant independent of the solutions.

Consider the norm defined by the compatible metric $\omega_M(\cdot, J_{(s,t)}\cdot)$. The energy of a solution v of $\mathcal{M}_{H_{(s,t)}, J_{(s,t)}}(L)$ can be written:

$$\begin{aligned}
 E(v) &= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt ds \\
 &= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \omega_M \left(\frac{\partial v}{\partial s}, J_{s,t} \frac{\partial v}{\partial s} \right) dt ds \\
 &= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \omega_M \left(\frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial t} - X_{s,t}^{\alpha + dH_{s,t}} \right) dt ds \\
 &= \int_v \omega_M - \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} (\alpha + dH_{s,t}) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) dt ds.
 \end{aligned}$$

Let $z_0 \in \Omega(L, L)$ and let w be a fixed path in $\Omega(L, L)$ that joins y to z_0 .

We consider $v : [-\infty, +\infty] \times [0, 1]$ as a path in $\Omega(L, L)$ from x to y and we use the concatenation $v\#w$ of v and w .

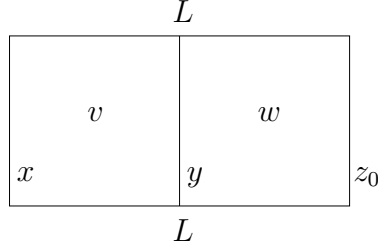


Figure 3.3.4: The path $v\#w$

Suppose that w has been chosen in such a way that it can be lifted to a path joining \tilde{y} and \tilde{z}_0 .

We prove

$$\int_{v\#w} \hat{v} - \int_w \hat{v}' = -E(v) + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v) dt ds + C_1 \quad (3.10)$$

where

$$C_1 = \int_{[0,1]} H_t(z_0) - H'_t(z_0) dt$$

is independant of v .

We have:

$$\begin{aligned}
\int_{v\#w} \widehat{v} - \int_w \widehat{v}' &= - \int_{v\#w} \omega_M + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} (\alpha + dH_t) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) dt ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} (\alpha + dH_t) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) dt ds \\
&\quad + \int_w \omega_M - \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} (\alpha + dH'_t) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) dt ds \\
&= - \int_v \omega_M + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} (H_t(v) + H_t(w) - H'_t(w)) dt ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right),
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} (H_t(v) + H_t(w) - H'_t(w)) dt ds &= \\
&= \int_{[0,1]} H'_t(y) - H_t(x) dt + \int_{[0,1]} H_t(z_0) - H'_t(z_0) dt \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} H_{s,t}(v) dt ds + C_1 \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} dH_{s,t} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) dt ds + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v) dt ds + C_1.
\end{aligned}$$

Consequently

$$\begin{aligned}
\int_{v\#w} \widehat{v} - \int_w \widehat{v}' &= - \int_v \omega_M + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} (\alpha + dH_{s,t}) \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) dt ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v) dt ds + C_1 \\
\int_{v\#w} \widehat{v} - \int_w \widehat{v}' &= -E(v) + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v) dt ds + C_1. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Now, let v_1 and v_2 be two elements of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$. From (3.10), we have:

$$\begin{aligned}
E(v_1) - E(v_2) &= - \int_{v_1\#w} \widehat{v} + \int_{v_2\#w} \widehat{v} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v_1) dt ds - \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v_2) dt ds.
\end{aligned}$$

As

$$\frac{\partial H}{\partial s} : \mathbb{R} \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$$

has compact support, there exists a constant $C_2 \geq 0$ that does not depend on the v_i ($i = 1, 2$) such that

$$\int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v_1) dt ds - \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, v_2) dt ds \leq C_2.$$

Moreover, if γ is a loop (based in x) of $\mathcal{M}(L, L)$ obtained by concatenation of the paths $v_2 \# w$ and $v_1 \# w$, then by the monotonicity condition (and Formula (3.6))

$$\begin{aligned} - \int_{v_1 \# w} \widehat{v} + \int_{v_2 \# w} \widehat{v} &= \int_{\gamma} \widehat{v} \\ &= k_L (\mu_L(\gamma_0) - \mu_L(\gamma_1)) + u(\gamma_0) \end{aligned}$$

with $\mu_L(\gamma_0) - \mu_L(\gamma_1) = \mu(v_2) - \mu(v_1) = 0$.

But v_1 and v_2 belong to $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$, so that γ can be lifted to a path from \tilde{x}^g to \tilde{x}^g . The path γ_0 is then homotopic to the constant path and we obtain the inequality:

$$E(v_1) - E(v_2) \leq C_2.$$

This proves that if we fix an element v_0 in $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$, then for all v in $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$, $E(v) \leq E(v_0) + K$ and consequently $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ is contained in $\mathcal{M}_{H(s,t), J(s,t)}(x, y; A)$ for some positive constant A . This proves Proposition 3.3.25. \square

The space $\mathcal{M}_{g,s}^0(x, y)$ is thus finite and we can define the morphism of complexes

$$\Psi_{\star} : C_{\star}(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t) \longrightarrow C_{\star}(L, \varphi_t^{\alpha+dH'_t}, J'_t)$$

by

$$\Psi_{\star}(x) = \sum_{g \in \pi_1(M), y} m_g(x, y) gy$$

where $m_g(x, y)$ is the cardinality of $\mathcal{M}_{g,s}^0(x, y)$ modulo 2.

In order to check that the coefficients belong to Λ_u , we use the computations in the proof of 3.3.25 but this time with v_1 in $\mathcal{M}_{g_1,s}(x, y)$ and v_2 in $\mathcal{M}_{g_2,s}(x, y)$ for two elements g_1 and g_2 of $\pi_1(M)$. The loop γ can then be lifted to a path from \tilde{x}^{g_2} to \tilde{x}^{g_1} so that $u(\gamma_0) = u(g_2^{-1}g_1) = -u(g_2) + u(g_1)$ and

$$E(v_1) - E(v_2) \leq u(g_1) - u(g_2) + C_2.$$

If v_0 is a fixed element of $\mathcal{M}_{g_0,s}(x, y)$, we have for all v of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ with $u(g) < C$,

$$E(v) \leq E(v_0) + C - u(g_0) + C_2,$$

and this implies that $\bigcup_{u(g) < C} \mathcal{M}_{g,s}^0(x, y)$ is contained in $\mathcal{M}_{H(s,t), J(s,t)}^0(x, y; A)$ for some positive constant A , so that this union is finite.

We use the usual methods of Floer theory to finish the proof of the theorem:

- The fact that Ψ_* commutes with the differentials comes from the study of the compactification with the help of broken trajectories of the 1-dimensionnal component of $\mathcal{M}_{H(s,t), J(s,t)}(x, y)$.
- The map Ψ_* induces an isomorphism in homology: to prove this, it is enough to consider the morphism defined analogously between

$$C_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t'}, J_t') \text{ and } C_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t)$$

and to show that the composition of these morphisms are homotopic to the identity. \square

Notation 3.3.27. *By Theorem 3.3.23, the homology of the complex $C_*(L, \varphi_t, J_t)$ only depends on the flux u of the symplectic isotopy (φ_t) . Hence we will denote its homology by $FH(L, u)$ in the following.*

3.4 Floer homology and Novikov theory

Denote by $H(\bar{L}, \pi^*u)$ the Novikov homology of L associated to f^*u and the covering $\bar{L} \rightarrow L$ (defined in Lemma 3.3.7 as the pull-back of the covering $T^*\tilde{M} \rightarrow T^*M$, see also Remark 3.2.4).

We first prove that the Floer-Novikov homology $FH(L, u)$ is invariant by small rescaling of u :

Proposition 3.4.1. *Let u be an element of $H^1(M)$.*

Assume that the Lagrangian submanifold L is monotone on the loops with Maslov number $N_L \geq 2$.

Then there exists $\varepsilon > 0$ such that for every real number σ satisfying $|\sigma| < \varepsilon$,

$$HF(L, (1 + \sigma)u) \simeq HF(L, u).$$

Proof. In the exact case, Damian uses the symplectic isotopy of T^*L spanned by a 1-form in the class of f^*u , and thanks to the exactness of L , extends it to T^*M , so that the zeros of the associated one-form are constant paths.

This is particularly useful for the choice of a one-form representing u in the definition of $HF(L, (1 + \sigma)u)$.

In the monotone case, we cannot use this result on the extension of symplectic isotopies of T^*L to T^*M . But, what we actually need for the proof (see [14] and [46]) is a symplectic isotopy with the property that the projection of the flow trajectories on the base space M (and in particular the projection of the zeros of the one-form $\widehat{\nu}$ associated to this isotopy) lie in “small” balls.

More precisely, let α be a closed one-form in the class of u and J be a fixed compatible almost complex structure. Assume that this almost complex structure induces a complete metric g_J on T^*M .

Lemma 3.4.2. *There exists a constant $c_1 > 0$ such that, for every $\delta > 0$, there exists a Hamiltonian*

$$H : [0, 1] \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$$

with compact support and a family of almost complex structures (J_t) satisfying $\|H_t\|_\epsilon < \delta$ and $\|J_t - J\| < \delta$ such that:

- (i) *the pair $(\alpha + dH_t, J_t)$ satisfies the transversality assumption;*
- (ii) *the canonical projection π of T^*M maps a zero x of the one-form $\widehat{\nu}$ associated to the symplectic isotopy spanned by $\alpha + dH_t$ into a ball in M centered in $\pi(x(0))$ with radius $c_1\delta$.*

The norm $\|\cdot\|_\epsilon$ is the usual norm on the Hamiltonians used in transversality results (see [19], [46]):

$$\|h\|_\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \|h\|_{C^k([0,1] \times T^*M)}$$

where $\epsilon_k > 0$ is a sufficiently rapidly decreasing sequence.

Proof. The symplectic isotopy φ_t^α of T^*M spanned by the symplectic dual X^α of α can be written:

$$\varphi_t^\alpha(p, q) = (p + t\alpha_q, q).$$

Note that the trajectory $\varphi_t^\alpha(p_0, q_0)$ of X^α in T^*M with initial condition the point (p_0, q_0) lies in the fiber of $q_0 \in M$.

Note also that φ_t^α does not necessarily satisfy the transversality assumption between L and $\varphi_1^\alpha(L)$ so that it may not be possible to use this isotopy for the description of $HF(L, u)$.

Nevertheless, by the transversality theorem (Theorem 3.3.15) and Remark 3.3.16, for every $\delta > 0$, there exists a Hamiltonian $H : [0, 1] \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ with compact support and a family of almost complex structures (J_t) satisfying $\|H_t\|_\epsilon < \delta$ and $\|J_t - J\| < \delta$ and such that the pair $(\alpha + dH_t, J_t)$ satisfies the transversality assumption.

Let $\zeta(t)$ be the trajectory of $X^{\alpha+dH_t}$ with initial condition the point (p_0, q_0) of T^*M . Denote by $q(t)$ its image in M by the canonical projection $\pi : T^*M \rightarrow M$ of the cotangent bundle. We have:

$$\frac{d}{dt}q(t) = T_{\zeta(t)}\pi \left(\frac{d}{dt}\zeta(t) \right) = T_{\zeta(t)}\pi (X^\alpha(\zeta(t)) + X^{dH_t}(\zeta(t))).$$

Since the isotopy φ_t^α spanned by X^α satisfies: $\pi(\varphi_t^\alpha)(p, q) = q$,

$$T_{\zeta(t)}\pi (X^\alpha(\zeta(t))) = 0,$$

so that:

$$\frac{d}{dt}q_t = T_{\zeta(t)}\pi (X^{dH_t}(\zeta(t))).$$

Moreover, for all $z \in T^*M$, we have:

$$\begin{aligned} \|X^{dH_t}(z)\|^2 &= d_z H_t (-J(z)X^{dH_t}(z)) \\ &\leq \|d_z H_t\| \| -J(z)X^{dH_t}(z) \| = \|d_z H_t\| \|X^{dH_t}(z)\| \end{aligned}$$

for the norm associated to the scalar product g_J . Hence,

$$\|X^{dH_t}(z)\| \leq \|d_z H_t\| \leq \frac{\delta}{\epsilon_1}$$

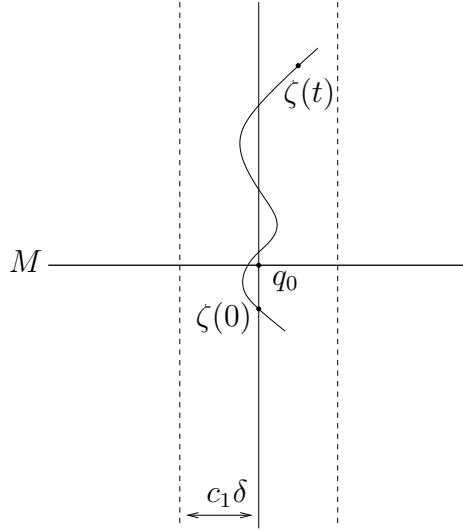
(where ϵ_1 is the first term of the sequence defining the norm $\|\cdot\|_\epsilon$).

Notice that $\|T_{\zeta(t)}\pi\|$ is bounded on T^*M : it is bounded on each trivialising open set for the cotangent bundle $T^*M \rightarrow M$; the base space M being compact, it is bounded on the whole T^*M . Thus, there exists a constant c_1 (which does not depend on H) such that,

$$\left\| \frac{d}{dt}q_t \right\| \leq \|T_{\zeta(t)}\pi\| \|X^{dH_t}(\zeta(t))\| \leq c_1\delta,$$

and consequently, for all $\tau \in [0, 1]$, we have:

$$d(q(\tau), q_0) \leq \int_0^\tau \left\| \frac{d}{dt}q_t \right\| \leq \tau c_1\delta.$$

Figure 3.4.1: the trajectory ζ

This means that, on $[0, 1]$, the trajectories of $X^{\alpha+dH_t}$ lie in the fibers of the points of M which belongs to the ball of radius $c_1\delta$ centered in the projection of the initial condition (see figure 3.4.1).

This is in particular true for the zeros x_i of the one-form \widehat{v} . \square

Let \mathcal{V}_i be a neighborhood of each trajectory x_i such that the projection of \mathcal{V}_i is contained in $B(\pi(x_i(0)), c_1\delta)$. Denote \mathcal{V} the union of the \mathcal{V}_i .

Lemma 3.4.3. *There exists $c_2 > 0$ such that for all $z \in \Omega(L, L)$ whose image is not contained in \mathcal{V} ,*

$$\|z'(t) - X^{\alpha+dH_t}(z(t))\|_{L^2} \geq c_2.$$

Proof. The proof is analogous to [14, Lemma 4.4]. Assume the contrary: there exists a sequence $(z_n) \in \Omega(L, L)$ of paths whose images are not contained in \mathcal{V} such that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z'_n(t) - X^{\alpha+dH_t}(z_n(t))\|_{L^2} = 0$$

One has then to prove that this sequence admits a subsequence converging to a zero of \widehat{v} . This contradicts the fact that the images of the z_n 's are not contained in \mathcal{V} . \square

We can now choose $\delta > 0$ small enough so that there exists a closed one-form $\eta \in u$ such that

$$\eta = 0 \text{ on } \bigcup_i B(\pi(x_i(0)), c_1\delta).$$

We also fix $\varepsilon > 0$ such that $\varepsilon\|\eta\| < c_2/3$. In particular, the one-form (still denoted η) lifted to T^*M is zero on \mathcal{V} , a property that we need in the computations (see Proposition 3.4.4, and also [14], [46]).

Choose a real number $\sigma < \varepsilon$ and consider the isotopy $\varphi_t^{\alpha+\sigma\eta+dH_t}$ spanned by $X^{\alpha+\sigma\eta+dH_t}$. The constant ε is chosen small enough so that $\varphi_1^{\alpha+\sigma\eta+dH_t}(L)$ is transverse to L .

Applying the transversality theorem 3.3.15 to $\alpha + \sigma\eta + dH_t$, we deduce the existence of a compatible almost complex structure J'_t such that $\|J'_t - J\| < \delta$ and such that the pair $(\alpha + \sigma\eta + dH_t, J'_t)$ satisfies the transversality assumption.

Since $\Lambda_u = \Lambda_{\tau u}$ for all $\tau > 0$, we can define the Λ_u -complexes

$$C_*(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t) \text{ and } C_*(L, \varphi_t^{\alpha+\sigma\eta+dH_t}, J'_t).$$

Let us prove that the homologies of this complexes are isomorphic. This will achieve the proof of Proposition 3.4.1.

As in Section 3.3.6, we define a morphism of complexes associated to a homotopy between the pairs $(\alpha + dH_t, J_t)$ and $(\alpha + dH_t + \sigma\eta, J'_t)$. Let χ be a monotone increasing function on \mathbb{R} that vanishes for $s \leq -R$ and is equal to 1 for $s \geq R$. Let $J_{s,t}$ be a homotopy of compatible almost complex structures such that $J_{s,t} = J_t$ for $s \leq -R$, $J_{s,t} = J'_t$ for $s \geq R$ and $\|J_{s,t} - J\| < \delta$. The homotopy is defined as:

$$(\alpha + \chi(s)\sigma\eta + dH_t, J_{t,s}).$$

Consider the space of solutions

$$v : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow T^*M$$

of finite energy $E(v)$ (for the norm defined defined by g_J) of the partial differential equation:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + J_{s,t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X_{s,t}^{\alpha+\chi(s)\sigma\eta+dH_{s,t}}(v) \right) = 0 \quad (3.12)$$

such that $v(s, i) \in L$ for $i = 0, 1$.

These solutions converge to an orbit of $X^{\alpha+dH_t}$ (respectively of $X^{\alpha+\sigma\eta+dH_t}$) when s goes to $-\infty$ (respectively $+\infty$).

We define as in the previous sections the spaces $\mathcal{M}_{\chi, J_{(s,t)}}(x, y)$ of solutions between two orbits x et y . By transversality, these spaces are manifolds the local dimension of which is given by the Maslov class.

Let $\mathcal{M}_{g,s}(x, y) \subset \mathcal{M}_{\chi, J_{(s,t)}}(x, y)$ be the space of solutions that can be lifted to $T^*\widetilde{M}$ in paths from \widetilde{x}^g to \widetilde{y} (for fixed lifts \widetilde{x} and \widetilde{y}). In the following, we prove that the zero-dimensional component of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ is compact, so that we can define a morphism

$$\Gamma_\star : C_\star(L, \varphi_t^{\alpha+dH_t}, J_t) \longrightarrow C_\star(L, \varphi_t^{\alpha+\sigma\eta+dH_t}, J'_t)$$

by

$$\Gamma_\star(x) = \sum_{g \in \pi_1(M), y} m_g(x, y) g y$$

where $m_g(x, y)$ is the cardinality (modulo 2) of the space $\mathcal{M}_{g,s}^0(x, y)$.

We prove now the compactness of $\mathcal{M}_{g,s}^0(x, y)$ and we check that

$$\sum_{g \in \pi_1(M), y} m_g(x, y) g \in \Lambda_u.$$

Proposition 3.4.4. *For any fixed index I , the energy of any element of $\mathcal{M}_{g,s}^I(x, y)$ is bounded from above by some positive constant $A > 0$.*

Proof. Let v_1 and v_2 be two elements of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ with the same Maslov index I . If $\gamma : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow T^*M$ is the concatenation of v_2 and $\overline{v_1}$, then γ is, after reparametrization of in the s variable, a loop $\Omega(L, L)$ based at x .

We have:

$$\begin{aligned} \int \widehat{v} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_1) \right) \right\rangle dt ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_2) \right) \right\rangle dt ds. \end{aligned}$$

We prove that:

1) for any $s \in \mathbb{R}$,

$$- \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_1) \right) \right\rangle dt \geq \frac{1}{3} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|_{L^2}^2; \quad (3.13)$$

2) for any $s \in \mathbb{R}$,

$$-\int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_2) \right) \right\rangle dt \leq \frac{5}{3} \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|_{L^2}^2. \quad (3.14)$$

Using 1) and 2), we will deduce that

$$\frac{1}{3}E(v_1) \leq u(\gamma_0) + \frac{5}{3}E(v_2) \quad (3.15)$$

and use this inequality to achieve the proof of Proposition 3.4.4.

Proof of 1): If v is a solution of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$, we have:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v) \right) \right\rangle dt = \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J \left(J_{s,t} \frac{\partial v}{\partial s} + X^{\alpha+\chi(s)\sigma\eta+dH_t}(v) - X^{\alpha+dH_t}(v) \right) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J J_{s,t} \frac{\partial v}{\partial s} \right\rangle dt + \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J X^{\chi(s)\sigma\eta}(v) \right\rangle dt \\ &= - \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial v}{\partial s}, J_{s,t} \frac{\partial v}{\partial s} \right\rangle dt - \int_0^1 \omega_M \left(\frac{\partial v}{\partial s}, X^{\chi(s)\sigma\eta}(v) \right) dt \\ &= - \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt - \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial v}{\partial s}, (J_{s,t} - J) \frac{\partial v}{\partial s} \right\rangle dt \\ &\quad - \int_0^1 \chi(s)\sigma\eta \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

- Assume firstly that $v(s, \cdot)$ takes values in \mathcal{V} . Since η vanishes on this neighborhood of the zeros, we have:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v) \right) \right\rangle dt = \\ &= - \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt + \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial v}{\partial s}, (J - J_{s,t}) \frac{\partial v}{\partial s} \right\rangle dt \\ &\leq - \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt + \delta \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt \\ &\leq -(1 - \delta) \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt. \end{aligned}$$

We can assume that $\delta < 2/3$, so that:

$$\int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v) \right) \right\rangle dt \leq -\frac{1}{3} \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 dt.$$

- If $v(s, \cdot)$ does not take its values in \mathcal{V} , by the same argument as in [14] and using Lemma 3.4.3, we also have in this case that:

$$\int_0^1 \left\langle \frac{\partial v}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v) \right) \right\rangle dt \leq -\frac{1}{3} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|_{L^2}^2,$$

if we choose δ small enough.

Applying this to v_1 we get 3.13 and integrating in the s variable:

$$\frac{1}{3} E(v_1) \leq - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_1) \right) \right\rangle dt ds.$$

Proof of 2): We use the relation (3.16):

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_2) \right) \right\rangle dt &= \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|^2 dt + \int_0^1 \left\langle J \frac{\partial v_2}{\partial s}, (J - J_{s,t}) \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \chi(s) \sigma(-\eta) \left(\frac{\partial v_2}{\partial s} \right) dt. \end{aligned}$$

We distinguish again the two cases:

- either $v_2(s, \cdot)$ takes its values in \mathcal{V} , so that we have:

$$- \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_2) \right) \right\rangle dt \leq (1 + \delta) \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|_{L^2}^2,$$

- or $v_2(s, \cdot)$ does not take all its values in \mathcal{V} and we use Lemma 3.4.3. Firstly, we have:

$$- \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_2) \right) \right\rangle dt \leq (1 + \delta) \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|_{L^2}^2 + \frac{c_2}{3} \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|_{L^2}.$$

By a consequence of Lemma 3.4.3 (see [14]):

$$\frac{c_2}{3} \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|_{L^2} \leq \left(\frac{2}{3} - \delta \right) \left\| \frac{\partial v_2}{\partial s} \right\|_{L^2}^2.$$

In both cases, we have (3.14) and by integration:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial s}, J \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} - X^{\alpha+dH_t}(v_2) \right) \right\rangle dt ds \leq \frac{5}{3} E(v_2).$$

To prove (3.15), we use that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{v} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right)$$

is the value of the one-form \widehat{v} on the loop γ based in x . Thanks to (3.6), this term is equal to $u(\gamma_0)$ if the two solutions have the same Maslov class.

By assumption, v_1 and v_2 can be lifted to paths between \widetilde{x}^g and \widetilde{y} , the loop γ_0 is homotopic to the constant loop based in x .

We thus have, fixing an element v_0 in $\mathcal{M}_{g,s}^I(x, y)$, for all v of $\mathcal{M}_{g,s}^I(x, y)$,

$$E(v) \leq 5E(v_0).$$

To end the proof of Proposition 3.4.4, we choose $A = 5E(v_0)$. \square

Looking at the proof of Proposition 3.4.4, we see that the sum

$$\sum_{g \in \pi_1(M)} m_g(x, y) g \in \Lambda_u.$$

Indeed, if v_1 can be now lifted as a path from \widetilde{x}^{g_1} to \widetilde{y} and v_2 as a path from \widetilde{x}^{g_2} to \widetilde{y} , we have $u(\gamma_0) = u(g_1) - u(g_2)$, so that (3.15) becomes:

$$\frac{1}{3} E(v_1) \leq u(g_1) - u(g_2) + \frac{5}{3} E(v_2).$$

This implies that if v_0 is a fixed element of $\mathcal{M}_{g_0,s}(x, y)$, we have then for all v of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ with $u(g) < C$,

$$E(v) \leq 3(C - u(g_0)) + 5E(v_0)$$

and this prove that

$$\bigcup_{u(g) < C} \mathcal{M}_{g,s}^0(x, y) \subset \mathcal{M}_{\chi, J_{s,t}}(x, y; A)$$

for the positive constant $A = 3(C - u(g_0)) + 5E(v_0)$.

The map Γ_\star is a morphism of complexes. This is a consequence of the compactification of the one-dimensional component of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ by broken trajectories (v^1, v^2) , where

- one of the v^i 's satisfies (3.12);
- the other is solution of the Floer equation corresponding to $(\alpha + dH_t, J_t)$ or $(\alpha + dH_t + \sigma\eta, J'_t)$.

As in Theorem 3.3.23, we use the usual methods of Floer theory to prove that the morphism of complexes Γ_\star that induces an isomorphism in homology. \square

Now, we prove that, with an additional assumption on the Maslov number of L , $HF(L, \sigma u)$ is the Novikov homology of L for σ small enough.

Proposition 3.4.5. *Let u be an element of $H^1(M)$. Assume that the Lagrangian submanifold L is monotone on the loops and that its Maslov number N_L satisfies*

$$N_L \geq \dim(M) + 2.$$

Then there exists $\varepsilon > 0$ (depending on u) such that for all real number σ satisfying $|\sigma| < \varepsilon$,

$$FH(L, \sigma u) \simeq H(\bar{L}, f^*u).$$

Proof. We begin (as in [14]) by substituting in the proof of Proposition 3.4.1 the one-form $\alpha \in u$ by an exact one-form dg where $g : M \rightarrow \mathbb{R}$. For σ small enough, we obtain a morphism of Λ_u -complexes:

$$\Gamma_\star^0 : C_\star(L, \varphi_t^{dg+dH_t}, J_t) \longrightarrow C_\star(L, \varphi_t^{dg+\sigma\eta+dH_t}, J'_t)$$

which induces an isomorphism in homology. The first complex is a Λ -complex whose coefficients have been extended to Λ_u . There is a natural isomorphism

$$C_\star(L, \varphi_t^{dg+dH_t}, J_t) \simeq \Lambda_u \otimes_\Lambda C_\star(L, \varphi_t^{dg+dH_t}, J_t).$$

By Hamiltonian invariance, we know that the homotopy type of the complex $C_\star(L, \varphi_t^{dg+dH_t}, J_t)$ does not depend on a regular choice of the pair (H_t^0, J_t^0) .

In order to define an isomorphism between $FH(L, \sigma u)$ and $H_\star(L, u)$, we use an other choice of Hamiltonian. For that purpose, in the monotone case, we need to adapt a construction of Oh ([38]). We consider a local Floer homology, namely the Floer homology in a Darboux neighborhood \mathcal{U} of L in T^*M . Considering \mathcal{U} as the neighborhood of the zero section in T^*L , we can define the Hamiltonian $\mathcal{H} = h \circ \pi_L$ on \mathcal{U} , where h is a Morse function on L and $\pi_L : T^*L \rightarrow L$ is the canonical projection of the cotangent.

If h is small enough (in the C^2 -topology) and if its gradient for a metric on L is Morse-Smale, the local Floer complex is spanned by the intersection points of L and its displacement $L + dh$ and we have a bijection between the J -holomorphic strips of the Floer homology and the trajectories of the gradient of h which define the Morse differential.

To go back to T^*M , it is then enough to extend the Hamiltonian \mathcal{H} to T^*M (setting $\mathcal{H} = 0$ outside a neighborhood containing \mathcal{U}). Oh has proved that under the assumption that L is monotone (on the disks) in T^*M and $N_L \geq \dim(M) + 2$, a Floer trajectory in T^*M stays in the Darboux neighborhood and hence the trajectories that define the “global” Floer differential are those that were already counted in the local differential.

The end of the proof is similar to [14]. The Novikov ring which defines the Novikov homology associated to f^*u and the covering $\bar{L} \rightarrow L$ is Λ_u , so that the Morse complex above is exactly $C_\star(\bar{L} \rightarrow L, h, \xi)$. The Λ_u -complexes

$$\Lambda_u \otimes_\Lambda C_\star(L, \varphi_t^{dg+dH_t}, J_t) \text{ and } \Lambda_u \otimes_\Lambda C_\star(\bar{L} \rightarrow L, h, \xi)$$

are homotopy equivalent, so that the homologies

$$FH(L, \sigma u) \simeq H(\bar{L}, f^*u)$$

are isomorphic. □

Propositions 3.4.1 and 3.4.5 imply that the set

$$\{\sigma \in]0; +\infty[\mid FH(L, u) \simeq H_\star(\bar{L}, f^*u)\}$$

is nonempty, open and closed, hence equal to $]0; +\infty[$ so that we have proved the following theorem:

Theorem 3.4.6. *Let u be an element of $H^1(M)$.*

Assume that the Lagrangian submanifold L is monotone on the loops and its Maslov number N_L satisfies

$$N_L \geq \dim(M) + 2.$$

*Then the Floer homology $FH(L, u)$ is isomorphic to the Novikov homology $H(\bar{L}, f^*u)$.*

If we only assume that $N_L \geq 2$, we do not necessarily have an isomorphism between the Floer homology and the Novikov homology of L . This is also the case in usual Floer theory, but we have the spectral sequence described by Biran in [8] to relate it to the singular homology of the Lagrangian submanifold. We can also define in the monotone case a spectral sequence

whose first page is the Novikov homology of L and that converges to the Floer-Novikov homology. The following theorem gives a precise description of this spectral sequence.

Let A be the Λ_u -module $A = \Lambda_u[T, T^{-1}]$ of Laurent polynomials with coefficients in Λ_u . Let $\tau_i : A \rightarrow A$ be the multiplication by T^i . We define the degree of T to be N_L . Then

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i,$$

where $A^i = \mathbb{Z}/2T^{i/N_L}$ if $i \equiv 0 \pmod{N_L}$ and $A^i = \{0\}$ otherwise.

Theorem 3.4.7. *There exists a spectral sequence $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ satisfying the following properties:*

- (1) $E_0^{p,q} = C_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \otimes A^{pN_L}$ and $d_0 = \partial_0 \otimes 1$;
- (2) $E_1^{p,q} = H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \otimes A^{pN_L}$ and $d_1 = [\partial_1] \otimes \tau$ where

$$[\partial_1] : H_{p+q-pN_L}(\bar{L}, f^*u) \longrightarrow H_{p+1+q-(p+1)N_L}(\bar{L}, f^*u)$$

is induced by ∂_1 ;

- (3) For all $r \geq 1$, $E_r^{p,q}$ can be written $E_r^{p,q} = V_r^{p,q} \otimes A^{pN_L}$ with $d_r = \delta_r \otimes \tau_r$, $V_r^{p,q}$ are modules on Λ_u , $\delta_r : V_r^{p,q} \rightarrow V_r^{p+r, q-r+1}$ are morphisms and satisfy $\delta_r \circ \delta_r = 0$. Moreover,

$$V_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker(\delta_r : V_r^{p,q} \rightarrow V_r^{p+r, q-r+1})}{\text{Im}(\delta_r : V_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow V_r^{p,q})};$$

- (4) $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ collapses at page $\kappa + 1$, where $\kappa = \lfloor \frac{\dim(L)+1}{N_L} \rfloor$ and the spectral sequence converges to $FH(L, u)$, i.e.

$$\bigoplus_{p+q=\ell} E_\infty^{p,q} \cong FH^{\ell(\text{mod } N_L)}(L, u).$$

- (5) For all $p \in \mathbb{Z}$, $\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,q} \cong FH(L, u)$.

Proof. In order to describe the spectral sequence, we look at the proof of Proposition 3.4.5 and the Hamiltonian \mathcal{H} defined with the C^2 -small function h . We suppose, as in [8], that h has exactly one relative minimum x_0

and we use x_0 as base point for the Floer complex so that we can fix the grading by \mathbb{Z}/N_L . As we have the decomposition (see [38]):

$$C_{i(\bmod N_L)}(L, \varphi_t^{H_t^0}, J_t^0) = \bigoplus_{j \equiv i(\bmod N_L)} C_j(\bar{L}, f^*u).$$

we can decompose the differential

$$\partial : C_{\star \bmod N_L}(L, \varphi_t^{H_t^0}, J_t^0) \longrightarrow C_{\star+1 \bmod N_L}(L, \varphi_t^{H_t^0}, J_t^0)$$

in $\partial = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \partial_j$ with

$$\partial_j : C_{\star}(\bar{L}, f^*u) \rightarrow C_{\star+1-jN_L}(\bar{L}, f^*u).$$

Moreover, by the index computations of [38],

$$\partial_j = 0 \text{ if } j < 0 \text{ or } j > \kappa = \left\lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rfloor,$$

so that

$$\partial = \partial_0 + \dots + \partial_{\kappa}.$$

The differential ∂_0 counts the trajectories that stay in the neighborhood \mathcal{U} , it corresponds to the differential of the local Floer homology and as before, the homology of the complex $(C_{\star}(\bar{L}, f^*u), \partial_0)$ can be identified to the Novikov homology $H(\bar{L}, f^*u)$. The other operators $\partial_1, \dots, \partial_{\kappa}$ count the trajectories that leave the neighborhood \mathcal{U} .

In order to define and prove the properties of the spectral sequence, it suffices to substitute the coefficients in $\mathbb{Z}/2$ in the proof of [8, Theorem 5.2] by coefficients in Λ_u . \square

Remark 3.4.8. Note that if $N_L \geq \dim(M) + 2$, the spectral sequence collapses at page $\kappa + 1 = 1$ and we recover Theorem 3.4.6.

When M is the total space of a fibration on the circle, Theorems 3.4.6 and 3.4.7 enable us to prove Theorem 3.1.5 in the case where $f_{\star} : \pi_1(L) \longrightarrow \pi_1(M)$ is surjective. Thanks to Remark 3.3.6, this will be enough to prove the theorem under the hypothesis $N_L \geq \dim(M) + 1$ or ($N_L = \dim(M)$ and $[\pi_1(M) : \pi_1(L)]$ is finite).

Proof of Theorem 3.1.5 in the case $N_L \geq \dim(M) + 1$. Since the manifold M is the total space of a fibration on the circle, there exists a closed one-form α that does not vanish on M . Consider the symplectic isotopy φ_t of T^*M spanned by X^{α} :

$$\varphi_t(p, q) = (p + t\alpha_q, q).$$

For T large enough, $\varphi_T(L) \cap L = \emptyset$ and without restricting generality we can assume that $T = 1$. Then the Floer complex defined in Section 3.3 is empty and the Floer homology $HF(L, u)$ is trivial.

But, as $u \neq 0$ and as $f_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is surjective, $f^*u \neq 0$ and by Proposition 3.2.5, if the presentation of the fundamental group of L satisfies $p - q \geq 2$ or if the fundamental group is a free product of two non trivial groups, then $H_1(\bar{L}, f^*u) \neq 0$.

If $N_L \geq \dim(M) + 2$, this contradicts Theorem 3.4.6. If $N_L = \dim(M) + 1 \geq 2$, then the spectral sequence defined in Theorem 3.4.7 collapses at page $\kappa + 1 = 2$ and converges to the Floer homology of L . But for $p = 0$ and $q = 1$,

$$[\partial_1] : H_1(\bar{L}, f^*u) \longrightarrow H_{2-N_L}(\bar{L}, f^*u) = \{0\}$$

and

$$[\partial_1] : H_{N_L}(\bar{L}, f^*u) = \{0\} \longrightarrow H_1(\bar{L}, f^*u),$$

hence $E_{0,1}^2 = H_1(\bar{L}, f^*u)$. We get also a contradiction in this case. \square

Proof of Theorem 3.1.5 in the case $N_L \geq \dim(M)$. We can even extend the result to the case $N_L = \dim(M)$ thanks to a property of the Novikov homology $H_*(\bar{L}, f^*u)$ (see Latour [28] or Levitt [30]).

Since $f^*u \neq 0$, there exists in the class of f^*u a one-form α' which has no critical point of index 0 or $\dim(M)$. In particular, the groups $H_0(\bar{L}, f^*u)$ and $H_{\dim(M)}(\bar{L}, f^*u)$ are trivial.

By Theorem 3.4.7, there exists a spectral sequence converging to the Floer homology of L and whose first page can be described with the Novikov homology of L . In the case $N_L = \dim(M) \geq 2$, the spectral sequence collapses at the second page,

$$[\partial_1] : H_1(\bar{L}, f^*u) \longrightarrow H_{2-N_L}(\bar{L}, f^*u) = \{0\}$$

and

$$[\partial_1] : H_{N_L}(\bar{L}, f^*u) = \{0\} \longrightarrow H_1(\bar{L}, f^*u),$$

so that $E_{0,1}^2 = H_1(\bar{L}, f^*u)$. As before, this leads to a contradiction. \square

Appendix: Proof of Lemma 3.3.7

- (i) Assume first that \bar{L} is path-connected. Choose a base point ℓ in L and let $m = i(\ell)$ be its image in T^*M . Choose also a lift $\tilde{\ell}$ of ℓ in \bar{L} . Let g be an element of $\pi_1(M)$. As \bar{L} is path-connected, there exists a path $\tilde{\gamma}$

from $\tilde{\ell}$ to $\tilde{\ell}^g$ in \bar{L} . The image $(\pi \circ \tilde{p} \circ \tilde{i})(\tilde{\gamma})$ of that path in M is a loop representing g and its image in L is thus a loop γ such that $f_*([\gamma]) = g$. Conversely, assume that the map $\pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ is surjective. As L is supposed to be path-connected, to prove that \bar{L} is path-connected, it is enough to prove that two points in the same fiber can be joined by a path in \bar{L} . Let $\tilde{\ell}_1$ and $\tilde{\ell}_2$ two elements of \bar{L} in the fiber of the point ℓ of L . The two points $\tilde{i}(\tilde{\ell}_1)$ and $\tilde{i}(\tilde{\ell}_2)$ of $T^*\tilde{M}$ can be joined in $T^*\tilde{M}$ by a path which projection on T^*M is a loop c such that $\tilde{i}(\tilde{\ell}_2) = \left(\tilde{i}(\tilde{\ell}_1)\right)^{[c]}$. But by assumption, the element $[c]$ of the group $\pi_1(M)$ has an antecedent in $\pi_1(L)$. Let γ be a loop in L based in ℓ representing this antecedent. If $\tilde{\gamma}$ is the lift with starting point $\tilde{\ell}_1$ of γ in \bar{L} , its endpoint $\tilde{\ell}_1^{[\gamma]}$ must have $\left(\tilde{i}(\tilde{\ell}_1)\right)^{[c]}$ as image by \tilde{i} , and this proves that $\tilde{\gamma}$ is a path from $\tilde{\ell}_1$ to $\tilde{\ell}_2$.

(ii) By definition, \bar{L} fits into the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \bar{L} & \xrightarrow{\tilde{i}} & T^*\tilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ L & \xrightarrow{i} & T^*M \end{array}$$

As $T^*\tilde{M}$ is simply connected, the diagram induced on the fundamental groups gives that $\text{Im}(\pi_1(\bar{L}) \rightarrow \pi_1(L))$ is included in K . Conversely, any loop of L whose image in M is homotopic to the constant path can be lifted to $T^*\tilde{M}$ in a loop of \bar{L} .

(iii) The embedding is monotone because the symplectic structure (and the Liouville form) on $T^*\tilde{M}$ are obtained by taking the pull-back of those of T^*M .

The one-dimensional component of $\mathcal{M}_{g,s}(x, y)$ can be compactified by broken trajectories (v^1, v^2) , where

- one of the v^i 's satisfies (3.12);
- the other is solution of the Floer equation corresponding to $(\alpha + dH_t, J_t)$ or $(\alpha + dH_t + \sigma\eta, J'_t)$.

Appendices

A Découpe symplectique avec action semi-libre de cercle

On suppose dans cette section que l'action de \mathbb{S}^1 sur V est semi-libre. Elle induit comme dans le cas de l'action libre sur V une action hamiltonienne sur T^*V dont le hamiltonien s'écrit :

$$H(x, \varphi) = \langle \varphi, X(x) \rangle.$$

Les points fixes de l'action induite sur T^*V sont contenus dans le niveau 0 de H . Tous les autres niveaux de H sont réguliers et l'action de \mathbb{S}^1 sur ces niveaux est libre. En conséquence, les niveaux non nuls de \tilde{H} sont aussi réguliers et on peut effectuer la découpe symplectique à ces niveaux. Cette fois encore, on va s'intéresser à la découpe symplectique à un niveau négatif. En effet, la découpe symplectique de T^*V effectuée à un niveau strictement positif est égale à la découpe symplectique effectuée au même niveau du cotangent de la variété obtenue en privant V des points fixes de l'action.

Par la suite, on supposera que ξ est un nombre réel strictement négatif. On cherche à déterminer si, dans ce cas encore, la variété symplectique obtenue (toujours notée W_ξ) est monotone.

A.1 Somme des poids

On peut tout d'abord remarquer que les points fixes de l'action de \mathbb{S}^1 sur T^*V sont contenus dans les fibres de ces points fixes de V pour la projection de T^*V sur V . De plus, ces points fixes appartiennent à $H^{-1}(0)$ et donc se plongent dans toutes les découpes symplectiques effectuées à un niveau négatif. Les points fixes de l'action du cercle sur la découpe symplectique ne sont donc plus seulement les points de la sous-variété symplectique Q_ξ . On souhaiterait aussi déterminer la somme des poids en ces «nouveaux» points fixes.

En particulier, tout point fixe de V devient après plongement dans la découpe symplectique un point fixe de l'action du cercle sur W_ξ . Montrons que la somme des poids pour ces points est nulle.

On note toujours ρ l'action de \mathbb{S}^1 sur V et on note $\tilde{\rho}$ l'action qu'elle induit sur T^*V :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times (T^*V \times \mathbb{C}) &\longrightarrow T^*V \times \mathbb{C} \\ (u, (x, \varphi, z)) &\longmapsto (u \cdot x, u \cdot \varphi, \bar{u}z). \end{aligned}$$

En restriction à la partie $H^{-1}(]\xi; +\infty[)$, l'action de \mathbb{S}^1 sur la découpe symplectique décrite au paragraphe 2.4.2 est juste l'action initiale de \mathbb{S}^1 sur le cotangent. Il nous suffit donc de calculer la somme des poids pour cette action.

Lemme A.1. *La somme des poids de l'action sur le cotangent T^*V en un point fixe de V (de la section nulle du cotangent) est nulle.*

Démonstration. En un point fixe x de V , pour tout $u \in \mathbb{S}^1$,

$$T_x\rho(u) : T_xV \rightarrow T_xV$$

est un endomorphisme de T_xV . On choisit cette fois encore une métrique g sur V qui soit invariante par l'action du cercle. Cela signifie que $T_x\rho(u)$ est une isométrie pour le produit scalaire sur T_xV induite par la métrique sur V . On note $A(u)$ sa matrice dans une base orthonormée pour le produit scalaire sur T_xV .

On sait que l'action du cercle sur T^*V est hamiltonienne, en particulier symplectique. Par définition, la somme des poids en un point fixe est la somme des exposants de la variable $u \in \mathbb{S}^1$ lorsqu'on écrit la matrice de l'action dans une base de diagonalisation. Pour montrer que la somme des poids est nulle, il suffit de montrer que le déterminant de cette matrice est égal 1 pour tout u .

Exprimons la matrice de l'action de \mathbb{S}^1 sur T^*V à l'aide de la matrice de l'action sur V . Sur la section nulle du cotangent, l'espace tangent à x peut se décomposer en :

$$T_{(x,0)}(T^*V) \simeq T_xV \oplus T_x^*V.$$

Dans la base obtenue en considérant la réunion de la base orthonormée sur T_xV qu'on a utilisée pour définir $A(u)$ et de sa base duale, la matrice de $T_x\tilde{\rho}(u)$ est :

$$\tilde{A}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & {}^tA(u)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & A(u) \end{pmatrix}.$$

La matrice $\tilde{A}(u)$ est donc un élément de $O(2d)$ (car $A(u) \in O(d)$) et de $Sp(2d)$ (puisque l'action est symplectique).

De plus, on peut choisir comme structure presque complexe J_g sur le cotangent celle définie à partir d'une connection de Levi-Civita pour la métrique sur V (comme dans [21] , [38]). Elle envoie les vecteurs tangents verticaux sur les vecteurs tangents horizontaux. En particulier, pour la décomposition de l'espace tangent en x , si $v \in T_x V$, $J_g(v) = g(v, \cdot)$, de sorte que la matrice $\tilde{A}(u)$ de $O(2d) \cap Sp(2d) \simeq U(d)$ correspond à la matrice $A(u)$ dans $U(d)$.

Or, on sait déjà que $\det(A(u)) \in \{-1; 1\}$ puisque $A(u)$ est orthogonale. De plus, l'application $u \mapsto \det(A(u))$ est continue et $\det(A(0)) = \det(\text{Id}) = 1$ donc cette application est constante égale à 1 et la somme des poids est bien égale à 0. \square

A.2 Monotonie de cette découpe

Pour étudier la découpe symplectique dans le cas d'une action semi-libre du cercle, on va faire intervenir la variété V_{reg} obtenue en privant V des points fixes. Le cercle agit librement sur V_{reg} et on note $B_{\text{reg}} = V_{\text{reg}}/\mathbb{S}^1$ le quotient.

Puisque l'action du cercle est semi-libre, une conséquence du théorème de la tranche (voir par exemple [5, Théorème I.2.1]) est que les sous-variétés de points fixes sont au moins de codimension 2 et V_{reg} (et par conséquent B_{reg}) sont connexes.

Les niveaux réguliers $H^{-1}(a)$ de H (pour $a \neq 0$) sont, dans ce cas encore, isomorphes à des fibrés vectoriels sur V_{reg} (ils sont isomorphes au fibré vectoriel $H^{-1}(0)|_{V_{\text{reg}}} \rightarrow V_{\text{reg}}$) et donc se rétractent sur V_{reg} .

De même, les quotients $Q_a = H^{-1}(a)/\mathbb{S}^1$, pour $a \neq 0$, sont, comme dans le cas de l'action libre, des fibrés sur B_{reg} isomorphes à T^*B_{reg} et ont donc le type d'homotopie de B_{reg} .

Pour montrer que $W = W_\xi$ est monotone si $\xi < 0$, on étudie $H_2(W)$.

Soient

$$\mathcal{U} = H^{-1}(]a; +\infty[) \text{ et } \mathcal{V} = H^{-1}(] \xi; b]) \sqcup Q_\xi$$

pour $\xi < a < b < 0$ (voir figure A.1). Ce sont deux ouverts de W tels que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = H^{-1}(]a; b])$, \mathcal{U} se rétracte sur V (grâce à la restriction de la rétraction du cotangent sur sa section nulle), \mathcal{V} se rétracte sur Q_ξ (c'est un fibré en disque ouvert sur Q_ξ avec pour projection la restriction de celle qu'on avait pour $W \rightarrow Q$ dans le cas de l'action libre) et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ se rétracte sur un niveau régulier de H , donc a le type d'homotopie de V_{reg} .

On peut déterminer $H_2(W)$ en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris pour le découpage en ouverts de $W = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Elle s'écrit ici :

$$H_2(V) \oplus H_2(B_{\text{reg}}) \xrightarrow{f_1} H_2(W) \xrightarrow{f_2} H_1(V_{\text{reg}}) \xrightarrow{f_3} H_1(V) \oplus H_1(B_{\text{reg}}),$$

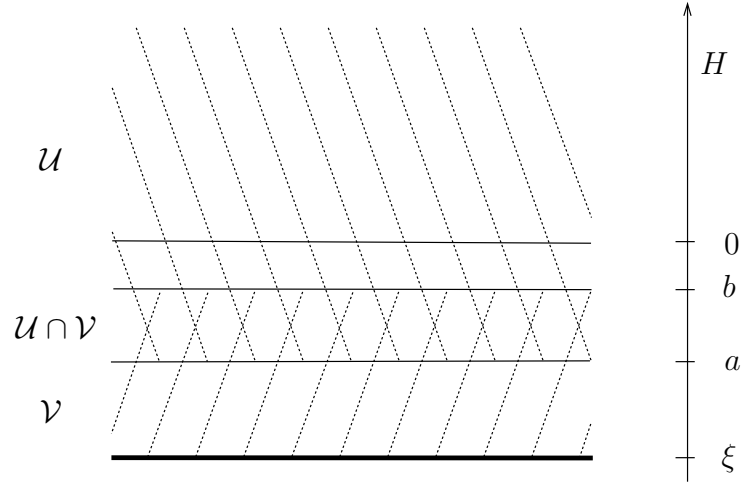


FIG. A.1 – La réunion $W = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$

où f_3 est l'application induite par l'inclusion de V_{reg} dans V et la projection de V_{reg} sur B_{reg} .

Si on construit une section s de l'application

$$\bar{f}_2 : H_2(W) \longrightarrow \text{Ker } f_3$$

induite par f_2 , alors d'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, $H_2(W)$ est engendré par l'image par f_1 de $H_2(V) \oplus H_2(Q)$ dans $H_2(W)$ et par l'image de la section s .

Décrivons une telle section s . On commence par décrire $\text{Ker } f_3$. Si on choisit un point régulier $x \in V$ dans le voisinage d'une sous-variété de points fixes de codimension 2, alors l'orbite de ce point sous l'action du cercle est un cycle (de dimension 1) dans V_{reg} dont l'image dans V par l'inclusion et l'image dans B_{reg} par la projection sont homologues à des points.

On montre ensuite que de tels cycles dans le voisinage des sous-variétés de points fixes de codimension 2 engendrent $\text{Ker } f_3$. D'une part, d'après la suite exacte longue en homotopie associée à la fibration en cercles $V_{\text{reg}} \rightarrow B_{\text{reg}}$, les cycles (de dimension 1) de V_{reg} qui se projettent sur des cycles homologues à un point dans B_{reg} sont les orbites sous l'action de \mathbb{S}^1 des points de V_{reg} . D'autre part, si V_{vois} désigne un voisinage des sous-variétés de points fixes de V donné par le théorème de la tranche, alors la suite exacte de Mayer-Vietoris pour la réunion $V = V_{\text{reg}} \cup V_{\text{vois}}$ montre que l'orbite sous l'action

de \mathbb{S}^1 d'un point de V_{reg} est homologue à un point dans V si et seulement si cette orbite est dans V_{vois} .

Une section s peut alors être définie de la façon suivante. Soit x_0 un point fixe de l'action du cercle sur V . Le point $[x_0, 0, \sqrt{-2\xi}] \in H^{-1}(0)$ est alors un point critique du hamiltonien h de l'action du cercle sur la découpe symplectique (voir paragraphe 2.4.2). Soit $[x, \varphi, z]$ un point régulier appartenant à la sous-variété instable de $[x_0, 0, \sqrt{-2\xi}]$ et telle que x soit dans un voisinage (donné par le théorème de la tranche) de x_0 . On suppose a et b choisis de sorte que $[x, \varphi, z]$ appartienne à $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

La trajectoire γ_t du gradient de h qui passe par le $[x, \varphi, z]$ pour $t = 0$ a pour limite $[x_0, 0, \sqrt{-2\xi}]$ quand t tend vers $-\infty$. Pour $t > 0$, γ_t appartient au fibré en disques \mathcal{V} sur Q donc γ_t converge quand t tend vers $+\infty$ vers un point fixe q qui appartient à Q . En faisant agir l'action du cercle sur cette trajectoire de gradient, on obtient une sphère de gradient de pôle nord x_0 , de pôle sud q , dont l'«équateur» $\mathbb{S}^1 \cdot \gamma_0$ se projette sur $\mathbb{S}^1 \cdot x$ dans V_{reg} qui est un lacet autour du point fixe x_0 . On peut ainsi associer à tout cycle autour d'une sous-variété de codimension 2 de V une sphère de gradient dans W et définir ainsi une section s de \bar{f}_2 .

Il suffit donc maintenant, pour établir la monotonie de W de la vérifier sur les images de $H_2(\mathcal{U})$, $H_2(\mathcal{V})$ et sur les sphères de gradient image de la section s .

- 1) L'ouvert \mathcal{U} est un ouvert de T^*V qui se plonge symplectiquement dans W .
Donc pour un élément c de $H_2(\mathcal{U})$, et de la même façon que dans T^*V , $c_1(W)(c) = 0$ et $[\omega](c) = 0$ (la forme est exacte sur cet ouvert).
- 2) Si on effectue la construction de la découpe symplectique $W_{|\text{reg}}$ au niveau ξ pour le fibré principal $V_{\text{reg}} \rightarrow B_{\text{reg}}$, \mathcal{V} est un fibré en disques contenu dans le fibré en droites $W_{|\text{reg}} \rightarrow Q_\xi$. Or on a montré que dans le cas d'une action libre, on a dans $H^2(W_{|\text{reg}}; \mathbb{R})$:

$$[\omega](c) = -2\pi\xi c_1(W_{\text{reg}})(c) = -2\pi\xi c_1(\mathcal{V})(c).$$

- 3) Déterminons la monotonie au niveau des sphères de gradient. Soit γ une trajectoire de gradient de h entre un point fixe x_0 de V et un point fixe q de Q . L'action du cercle sur γ permet de définir une sphère de gradient $\mathbb{S}^1 \cdot \gamma$. Son aire est égale à

$$[\omega](\mathbb{S}^1 \cdot \gamma) = 2\pi \int_{\gamma} i_{X_h} \omega$$

où X_h le champ hamiltonien associé à h (voir par exemple [5, preuve du théorème VIII.1.1]). De plus, comme γ est une trajectoire du gradient

de h ,

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\text{grad } h = JX_h.$$

En conséquence,

$$\int_{\gamma} i_{X_h} \omega = \int \omega(X_h, JX_h) = \int_{\gamma} \|X_h\|^2 = \int \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2$$

est égale à l'énergie de cette trajectoire, c'est-à-dire :

$$[\omega](\mathbb{S}^1 \cdot \gamma) = 2\pi(h(x_0) - h(x_q)) = 2\pi(-\xi).$$

D'autre part, la classe de Chern de cette sphère est la différence des sommes des poids en x_0 et q , c'est-à-dire

$$c_1(\mathbb{S}^1 \cdot \gamma) = w(q) - w(x_0) = 1$$

d'après le paragraphe 2.4.2 et le paragraphe A.1. Les sphères de gradient vérifient donc elles aussi $[\omega](c) = -2\pi\xi c_1(\mathcal{V})(c)$.

B Sphère lagrangienne dans une découpe symplectique du cotangent à un niveau positif

On considère toujours l'hypothèse où $V \rightarrow B$ est un \mathbb{S}^1 -fibré principal. Dans cet appendice, on considère la variété W_{ξ} obtenue par découpe symplectique du cotangent de V à un niveau ξ , ξ étant un réel positif ou nul.

La variété symplectique W_{ξ} vérifie alors

$$[\omega_{\xi}^W] = -2\pi\xi c_1(W_{\xi})$$

avec une constante de proportionnalité $-2\pi\xi$ négative ou nulle. On dit que W_{ξ} est « monotone négative ».

D'après Welschinger [49], le fait qu'il n'existe pas de membranes J -holomorphes (voir [50]) dans des variétés symplectiques monotones négatives implique que l'homologie de Floer d'une sphère lagrangienne $L = \mathbb{S}^d$ est bien définie dans W_{ξ} , absolument graduée par $N_{\mathbb{S}^d} = 2N_{W_{\xi}} = 2N_e$ et isomorphe à la cohomologie ordinaire de la sphère \mathbb{S}^d .

Si $N_e > 2$ ou si $N_e = 2$ et la dimension de la sphère est impaire, alors cette homologie ne peut être périodique de période 2. On en déduit le résultat suivant :

Théorème B.1. *Soit $V^d \rightarrow B^{d-1}$ un fibré principal en cercles dont la base est une variété compacte et simplement connexe B et dont la classe d'Euler e est non nulle. On désigne par N_e le générateur positif du sous-groupe $\langle e, \pi_2(B) \rangle$ de \mathbb{Z} .*

*On note W une découpe symplectique « monotone négative » (c'est-à-dire effectuée à un niveau positif ou nul) de T^*V .*

Une sphère \mathbb{S}^d ne peut être plongée en une sous-variété lagrangienne de W sauf éventuellement si $N_e = 1$ ou si $N_e = 2$ et d est pair.

Bibliographie

- [1] V. I. ARNOL'D – « The first steps of symplectic topology », *Uspekhi Mat. Nauk* **41** (1986), no. 6(252), p. 3–18, 229.
- [2] V. ARNOL'D et S. P. NOVIKOV – « Integrable systems II », Dynamical systems, VII, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 16, Springer-Verlag, Berlin, 1994, p. 83–259.
- [3] M. AUDIN – « Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels », *Comment. Math. Helv.* **63** (1988), no. 4, p. 593–623.
- [4] — , « Symplectic and almost complex manifolds », Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, With an appendix by P. Gauduchon, p. 41–74.
- [5] — , *Torus actions on symplectic manifolds*, revised éd., Progress in Mathematics, vol. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [6] M. AUDIN, F. LALONDE et L. POLTEROVICH – « Symplectic rigidity : Lagrangian submanifolds », Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, p. 271–321.
- [7] A. BANYAGA – « An introduction to symplectic geometry », Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, With an appendix by M. Audin, F. Lalonde, L. Polterovich and the author, p. 17–40.
- [8] P. BIRAN – « Lagrangian non-intersections », *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), no. 2, p. 279–326.
- [9] P. BIRAN et K. CIELIEBAK – « Lagrangian embeddings into subcritical Stein manifolds », *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 221–244.
- [10] P. BIRAN et O. CORNEA – « Quantum Structures for Lagrangian Submanifolds », *arXiv :0708.4221*.
- [11] L. BUHOVSKI – « Homology of Lagrangian submanifolds in Cotangent Bundles », *arXiv :math/0312265*.

- [12] — , « Multiplicative structure in Lagrangian Floer homology », *arXiv :math/0608063*.
- [13] C. C. CONLEY et E. ZEHNDER – « The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 1, p. 33–49.
- [14] M. DAMIAN – « On some obstructions to the existence of exact lagrangian embeddings into cotangent bundles », *à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici*.
- [15] O. DEBARRE – « Fano varieties », Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, p. 93–132.
- [16] M. ENTOV et L. POLTEROVICH – « Rigid subsets of symplectic manifolds », *arXiv :0704.0105*.
- [17] A. FLOER – « Holomorphic curves and a Morse theory for fixed points of exact symplectomorphisms », Aspects dynamiques et topologiques des groupes infinis de transformation de la mécanique (Lyon, 1986), Travaux en Cours, vol. 25, Hermann, Paris, 1987, p. 49–60.
- [18] A. FLOER – « Morse theory for Lagrangian intersections », *J. Differential Geom.* **28** (1988), no. 3, p. 513–547.
- [19] — , « The unregularized gradient flow of the symplectic action », *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), no. 6, p. 775–813.
- [20] — , « Symplectic fixed points and holomorphic spheres », *Comm. Math. Phys.* **120** (1989), no. 4, p. 575–611.
- [21] — , « Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory », *J. Differential Geom.* **30** (1989), no. 1, p. 207–221.
- [22] K. FUKAYA, Y.-G. OH, H. OHTA et K. ONO – « Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction », *preprint* ((2000)).
- [23] K. FUKAYA, P. SEIDEL et I. SMITH – « Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles », *arXiv :math/0701783*.
- [24] M. GROMOV – « Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.* **82** (1985), no. 2, p. 307–347.
- [25] R. HIND – « Lagrangian spheres in $S^2 \times S^2$ », *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), no. 2, p. 303–318.
- [26] H. HOFER et D. A. SALAMON – « Floer homology and Novikov rings », The Floer memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 483–524.

- [27] F. LALONDE et J.-C. SIKORAV – « Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents », *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), no. 1, p. 18–33.
- [28] F. LATOUR – « Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de de Rham », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1994), no. 80, p. 135–194.
- [29] E. LERMAN – « Symplectic cuts », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 3, p. 247–258.
- [30] G. LEVITT – « 1-formes fermées singulières et groupe fondamental », *Invent. Math.* **88** (1987), no. 3, p. 635–667.
- [31] D. MCDUFF et D. SALAMON – *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, Oxford Science Publications.
- [32] J. W. MILNOR et J. D. STASHEFF – *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [33] D. NADLER – « Microlocal branes are constructible sheaves », *arXiv :math/0612399*.
- [34] S. P. NOVIKOV – « Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **260** (1981), no. 1, p. 31–35.
- [35] Y.-G. OH – « Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), no. 7, p. 949–993.
- [36] — , « Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. II. ($\mathbf{CP}^n, \mathbf{RP}^n$) », *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), no. 7, p. 995–1012.
- [37] — , « Addendum to : Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. I. », *Comm. Pure Appl. Math.* **48** (1995), no. 11, p. 1299–1302.
- [38] — , « Floer cohomology, spectral sequences, and the Maslov class of Lagrangian embeddings », *Internat. Math. Res. Notices* (1996), no. 7, p. 305–346.
- [39] A. V. PAZHITNOV – « Surgery on the Novikov complex », *K-Theory* **10** (1996), no. 4, p. 323–412.
- [40] L. POLTEROVICH – « Monotone Lagrange submanifolds of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles », *Math. Z.* **207** (1991), no. 2, p. 217–222.

- [41] A. F. RITTER – « Novikov-symplectic cohomology and exact Lagrangian embeddings », *arXiv :0711.1396*.
- [42] V. ROKHLIN et D. FUKS – *Premier cours de topologie. Chapitres géométriques. Traduit du russe par A. Sossinski.*, Moscou : Editions Mir. 493 p. R. , 1981.
- [43] D. SALAMON – « Lectures on Floer homology », *Symplectic geometry and topology* (Park City, UT, 1997), IAS/Park City Math. Ser., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 143–229.
- [44] P. SEIDEL – « Graded Lagrangian submanifolds », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 1, p. 103–149.
- [45] J.-C. SIKORAV – « Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré 1 », *Thèse Orsay* (1987).
- [46] L. H. VÂN et K. ONO – « Symplectic fixed points, the Calabi invariant and Novikov homology », *Topology* **34** (1995), no. 1, p. 155–176.
- [47] C. VITERBO – « Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens », *Bull. Soc. Math. France* **115** (1987), no. 3, p. 361–390.
- [48] — , « Functors and computations in Floer homology with applications. I », *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), no. 5, p. 985–1033.
- [49] J.-Y. WELSCHINGER – *En préparation*.
- [50] — , « Optimalité, congruences et calculs d'invariants des variétés symplectiques réelles de dimension quatre », *arXiv :0707.4317*.