



HAL
open science

Estimation semi-classique du courant quantique en présence d'un grand champ magnétique variable

Sourour Negra

► **To cite this version:**

Sourour Negra. Estimation semi-classique du courant quantique en présence d'un grand champ magnétique variable. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT : . tel-00286992

HAL Id: tel-00286992

<https://theses.hal.science/tel-00286992>

Submitted on 10 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XI
U. F. R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI, ORSAY

Spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Sourour Negra

Sujet :

**Estimation semi-classique du
courant quantique en présence
d'un grand champ magnétique
variable**

Soutenue le 26 juin 2008 devant la Commission d'examen :

M. Søren FOURNAIS	Directeur de thèse
M. Christian GÉRARD	Examinateur
M. Bernard HELFFER	Directeur de thèse
M. Thierry RAMOND	Examinateur
M. Didier ROBERT	Rapporteur
M. Alexander SOBOLEV	Rapporteur

*À Raouf et Hayet,
mes chers parents...
À Aziz,
mon frère adoré...
Et à toi Nizar...*

Mes remerciements...

Il m'est très difficile de résumer en quelques lignes ma reconnaissance envers tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de cette thèse de Doctorat.

Mes premières pensées vont naturellement à mes deux directeurs de thèse : Søren Fournais (MC HDR à l'Institut des mathématiques de l'Université d'Aarhus) et Bernard Helffer (Prof. de l'université Paris-XI), chacun d'eux mérite un remerciement particulier. J'aimerais remercier Søren Fournais de m'avoir donné le courage de me lancer dans le monde de la recherche. Je lui suis reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses compétences et sa grande gentillesse m'ont beaucoup aidée à surmonter de nombreuses difficultés. J'aimerais remercier Bernard Helffer d'avoir accepté de diriger cette thèse avec beaucoup de disponibilité. Grâce à son enthousiasme et sa curiosité, j'ai découvert un univers de mathématiques passionnant. Ses larges connaissances, son dynamisme et sa rigueur m'ont permis de mener à bien cette étude. Sa bonne humeur et les conseils avisés qu'il a su me donner durant ma thèse m'ont souvent été d'une aide précieuse.

J'adresse ma plus sincère reconnaissance au Prof. Didier Robert de l'université de Nantes et au Prof. Alexander Sobolev de l'université de Londres pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs de ma thèse. Je les remercie pour le temps qu'ils ont consacré à ce travail, pour les précieuses remarques ainsi que pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en participant au jury.

Je suis également très honorée de la participation de Christian Gérard (Prof. de l'université de Paris-XI) et de Thierry Ramond (MC HDR de l'université de Paris-XI) à ce jury. Je les remercie très sincèrement.

Faire ma thèse à l'université d'Orsay a été une chance et je tiens ici à remercier tous les membres du laboratoire de mathématiques. Je voudrais en particulier remercier l'équipe d'Analyse numérique et Equations aux dérivées

partielles d'avoir su maintenir un niveau scientifique tellement impressionnant tout en conservant une ambiance très agréable.

Je voudrais aussi remercier Valérie Lavigne et Catherine Poupon pour leur assistance continue et leur efficacité au-delà du moment des dossiers administratifs.

Parce qu'ils ont toujours fait régner une solidarité et une excellente ambiance, je tiens à remercier mes compagnons de route les joyaux thésards joyeux du bâtiment 440. Merci aux anciens, je pense notamment à Antoine Gournay, Jérôme Martinet, Cathy Maugis et Annalisa Panati mais aussi aux nouveaux : Pierre Barbillon et Nicolas Raymond. J'ai vraiment beaucoup apprécié leur compagnie.

Un merci particulier à mes amis libanais préférés : Ayman Kachmar et Kassem Hamze. Merci à Ayman non seulement pour les discussions mathématiques intenses mais surtout pour son amitié sincère. Merci à Kassem pour sa bonne humeur et sa joie de vivre contagieuses. Je me souviendrai toujours de nos repas animés au CESFO et des pauses-café qui ont fait que ces années à Orsay sont passées très vite.

Mes derniers remerciements et non les moindres vont à ceux qui ont toujours été là pendant ces longues années d'études. Un énorme merci à toute ma petite famille qui m'a toujours encouragée et soutenue.

Je pense tout d'abord à mon père qui a été toujours un père exemplaire, qui a élevé en moi l'amour de la connaissance et qui m'a un jour dit : " Je sais que tu peux y arriver..." Je dois avouer que ce travail n'aurait jamais été possible sans l'amour infini et le soutien inconditionnel de mon père. Merci d'être toujours là pour moi.

Je pense aussi à ma mère qui a toujours cru en moi et qui m'a appris que l'important était de donner le meilleur de soi-même.

Je pense à mon frère qui m'a toujours encouragée et à qui j'ai promis de ne pas baisser les bras et de continuer jusqu'au bout...

Enfin, je pense à Nizar mon cher époux, ma bouffée d'oxygène quotidienne qui a été si patient et si compréhensif durant ces années de thèse. Je sais que ce n'était pas toujours facile de supporter mes humeurs pas souvent très joyeuses.

Sourour...

Estimation semi-classique du courant quantique en présence d'un grand champ magnétique variable

Résumé. L'opérateur de Pauli décrit l'énergie d'un électron soumis à un champ magnétique et à un potentiel électrique externe. La présence d'un champ magnétique induit naturellement l'existence d'une quantité : le courant. D'une manière formelle, cette quantité peut être considérée comme étant la dérivée de l'énergie par rapport au potentiel magnétique.

Dans cette thèse, nous établissons une asymptotique du courant en présence d'un champ magnétique variable de grande intensité. Pour ce calcul nous utilisons une identité de commutateur qui nous conduit à l'estimation de la somme des valeurs propres négatives d'un opérateur de Pauli modifié. La technique utilisée s'appuie sur la construction des états cohérents (pour approcher les fonctions propres) et des inégalités de Lieb-Thirring pour contrôler les termes d'erreur.

Mots clés : Opérateur de Pauli magnétique, théorie spectrale, analyse semi-classique, états cohérents, inégalités de Lieb-Thirring.

Semiclassical estimate of the quantum current in the presence of a strong non homogenous magnetic field

Abstract. The Pauli operator describes the energy of an electron subject to a magnetic field and to an external electric potential. The presence of the magnetic field induces a natural quantity, the current. Formally, the current can be considered as the derivative of the energy with respect to the magnetic potential.

In this thesis, we establish an asymptotic formula of the current in the presence of a strong variable magnetic field. In the calculations we use a commutator identity that leads us to estimate the sum of eigenvalues of a modified Pauli operator. The technique of the proof relies on the construction of coherent states inequalities (in order to approximate the eigenfunctions) and the Lieb-Thirring inequalities in order to control the error terms.

Keywords : magnetic Pauli operator, spectral theory, semi-classical analysis, coherent states, Lieb-Thirring inequalities.

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Historique	13
1.2	L'opérateur de Pauli et l'opérateur Courant	15
1.3	Énergie semi-classique	18
1.4	Résultat principal	21
1.5	Organisation du travail	22
2	Théorie spectrale pour l'opérateur de Pauli	25
2.1	Inégalité de Lieb-Thirring	25
2.2	Quelques résultats sur la théorie spectrale	29
2.3	Réalisation auto-adjointe	32
3	Approximation du champ magnétique	39
3.1	Énergie semi-classique modifiée	39
3.2	Approximations	43
4	États cohérents	57
4.1	Présentation	57
4.2	Fonctions de Landau dans \mathbb{R}^2	58
4.3	Fonctions de Landau dans \mathbb{R}^3	65
4.4	États cohérents de l'opérateur de Pauli	67
5	Borne inférieure pour l'énergie	71
5.1	Présentation	71
5.2	États cohérents locaux	75
5.3	Schrödinger magnétique modifié	76
5.4	Localisations	79
5.5	Approximations	89
5.6	Calcul du terme principal	92
5.7	Contrôle du reste	103
5.8	Démonstration du théorème principal	110

6	Développement limité du courant	113
6.1	Théorème principal	113
6.2	Une formule du commutateur	116
6.3	Estimation du terme potentiel	127
6.4	Le terme différentiel	131
6.5	Démonstration du théorème principal	143
A	Appendice	151
A.1	Rappels sur les opérateurs à trace	151
A.2	Divers opérateurs à trace	152

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

Ces dernières années, de nombreuses recherches mathématiques se sont concentrées sur l'étude de la mécanique quantique en présence d'un champ magnétique dans un cadre semi-classique. Nous pouvons interpréter ces travaux comme une tentative pour comprendre des problèmes quantiques à travers des modèles classiques. L'énergie et la densité sont souvent étudiées pour leurs comportements semi-classiques.

Si un système physique est soumis à un potentiel électromagnétique (\vec{A}, V) et possède une énergie $E(h, \vec{A}, V)$ (voir par exemple (1.25)), alors la densité ρ peut être considérée comme la dérivée de l'énergie par rapport à V . Plus précisément, on essayera de donner un sens à la distribution

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ni v \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)v(x) dx = \left. \frac{dE(h, \vec{A}, V + tv)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.1)$$

Les énergies que nous considérerons seront invariantes de jauge en ce sens qu'elles restent inchangées si \vec{A} est remplacé par $\vec{A} + \nabla\phi$. Elles ne dépendront donc en fait que du champ magnétique $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ engendré par \vec{A} . La présence du champ magnétique induit naturellement l'existence d'une quantité : le courant. D'une manière formelle, nous pouvons considérer en effet le courant \vec{j} comme étant la dérivée de l'énergie par rapport au potentiel magnétique \vec{A} , c'est à dire comme étant la distribution

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \ni \vec{a} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(x) \cdot \vec{a}(x) dx = \left. \frac{dE(h, \vec{A} + t\vec{a}, V)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.2)$$

Jusqu'à récemment le courant n'a que peu suscité l'intérêt des mathématiciens. C'est probablement parce que le courant est une caractéristique des

problèmes avec champ magnétique et que dans un premier temps les mathématiciens ont simplement essayé d'étendre au cas avec le potentiel magnétique ce qu'ils avaient démontré auparavant sur l'opérateur de Schrödinger sans potentiel magnétique. Or le courant d'une particule dont la dynamique est gouvernée par un opérateur de Schrödinger *sans champ magnétique* est nul. De plus les études de S. Fournais sur la limite semi-classique *standard* du courant quantique dans [18] montrent que le premier terme "naturel" du développement semi-classique est nul. Cependant, il existe un autre régime asymptotique introduit par Lieb, Solovej et Yngvason dans [29] et [30], puis reprise par Erdős et Solovej dans [10]. Dans ce régime asymptotique, les auteurs ont introduit un paramètre β (mesurant l'intensité du champ magnétique) qui peut varier lorsque h tend vers zéro. Ce régime asymptotique a été introduite afin d'étudier les propriétés de l'état fondamental atomique quand le nombre N d'électrons est grand et que l'atome est soumis à un champ magnétique fort.

Dans [16] S. Fournais s'est intéressé au courant dans ce régime ; il a trouvé des formules asymptotiques du courant d'un gaz d'électrons dans un champ magnétique fort et *constant*.

Notre but dans ce travail est de généraliser ce résultat à des champs magnétiques non nécessairement constants. Plus précisément, nous allons calculer des expressions asymptotiques du courant et du moment magnétique dans le cas où le gaz d'électrons est soumis à un champ magnétique fort mais *non nécessairement constant*. Le passage d'un champ magnétique constant à un champ magnétique non constant n'est pas trivial. Pour surmonter cette difficulté nous utilisons une technique de localisation. Plus précisément nous recouvrons \mathbb{R}^3 par des " boules " de rayon $\lambda(h, \beta)$ où $\lambda(h, \beta)$ sera à choisir soigneusement. Dans ces " boules " nous approchons le champ magnétique variable par un champ constant et nous appliquons alors des méthodes développées pour le cas où le champ magnétique est constant. Il reste ensuite à contrôler les erreurs dûes à cette approximation.

Pour l'analyse des systèmes semi-classiques dans le cas d'un champ magnétique fort, nous pouvons citer deux approches pour attaquer ces problèmes. La première est d'utiliser un calcul pseudo-différentiel précis que nous appliquons presque directement au courant mais cette technique impose certaines hypothèses de régularité restrictives sur le potentiel. Les résultats (les expressions asymptotiques de l'énergie) les plus précis ont été obtenus par Ivrii dans [21] et Sobolev dans [36], [35] et [34]. Dans [18] et [16] S. Fournais a utilisé les techniques microlocales de Ivrii [21] et de Sobolev [36]. Il a ensuite montré que ces techniques ne sont pas optimales pour le calcul du courant. Ces techniques exigent en général l'existence d'un grand nombre de dérivées sur V (même s'il existe depuis peu des travaux sur la limite semi-classique

relaxant fortement cette condition (voir le travail de Bronstein et Ivrii dans [3], celui d'Ivrii dans [22], [23], et celui de Zielinski dans [47].

La seconde approche est une approche variationnelle qui a été utilisée dans [10] pour calculer l'énergie et la densité. Cette méthode utilise des états cohérents introduits dans [42, 41, 43, 44] pour approcher l'état fondamental puis utilise les inégalités de Lieb-Thirring pour contrôler les termes d'erreurs. Dans ce travail nous appliquerons cette même technique pour calculer le courant. (Voir aussi le travail récent de Solovej et Spitzer dans [46].) Les inégalités de Lieb-Thirring font l'objet de plusieurs articles. Citons ici les travaux de Lieb-Thirring [26], de L. Erdős et J.P. Solovej dans [9, 12, 13]), et de A. Sobolev [38, 39]. (Voir aussi [5], [4] et un compte rendu récent [27] sur ce sujet). Nous généralisons également au cas du champ magnétique variable une identité de commutateur pour le courant établie dans [16] dans le cas où le champ magnétique est constant.

1.2 L'opérateur de Pauli et l'opérateur Courant

Nous rappelons le produit scalaire de deux éléments $z = (z_1, z_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ dans \mathbb{C}^2 par

$$\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle z_1, w_1 \rangle_{\mathbb{C}} + \langle z_2, w_2 \rangle_{\mathbb{C}}. \quad (1.3)$$

Nous définissons le produit scalaire de deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ par

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{C}^2} dx. \quad (1.4)$$

Nous introduisons maintenant le modèle spécifique que nous allons analyser tout au long de ce travail.

Considérons un champ magnétique

$$\vec{B}_0 \in C^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3). \quad (1.5)$$

De plus nous supposons que

$$B_0(x) = \|\vec{B}_0(x)\|_{\mathbb{R}^3} \quad (1.6)$$

est minoré et majoré uniformément.

Plus précisément, nous supposons choisies deux constantes c_1 et C_1 telles que

$$0 < c_1 < C_1$$

et nous supposons que la fonction $B_0(x)$ vérifie

$$c_1 \leq B_0(x) \leq C_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.7)$$

Nous supposons que V vérifie

$$V \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap L^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \nabla V \in W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3). \quad (1.8)$$

Nous considérons $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ un opérateur hamiltonien reflétant les propriétés d'un gaz d'électrons soumis au champ magnétique \vec{B}_0 et au potentiel scalaire V . L'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ dépend d'un paramètre semi-classique h qui tend vers zéro et d'un paramètre β qui mesure l'intensité du champ magnétique. Nous nous intéressons au cas d'un champ magnétique non constant et fort. Plus précisément nous supposons choisies deux constantes C_{min} et C_{max} telles que

$$0 < C_{min} < C_{max}$$

et nous supposons que (β, h) vérifient

$$C_{min}h^{-1} \leq \beta \leq C_{max}h^{-1}, \quad \forall h \in]0, 1]. \quad (1.9)$$

Nous serons éventuellement amenés dans nos preuves à remplacer (un nombre fini de fois) l'intervalle initial de définition pour $h :]0, 1]$ par $]0, h_0]$ avec h_0 assez petit.

Le choix de l'hamiltonien dépend de la nature de la limite que nous considérons. Il est important dans notre cas d'inclure l'interaction de l'électron-spin avec le champ magnétique extérieur. Nous utilisons alors l'opérateur de Pauli (qui décrit justement l'interaction du gaz d'électrons non relativistes avec le champ magnétique) donné par

$$\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) = (-ih\nabla + \beta \vec{A}_0(x))^2 + \beta h \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(x) + V(x), \quad (1.10)$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$. Plus précisément, $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ opère de la manière suivante

$$\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) = (-ih\nabla + \beta \vec{A}_0(x))^2 \otimes I_{\mathbb{C}^2} + \beta h \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(x) + V(x) \otimes I_{\mathbb{C}^2}. \quad (1.11)$$

Ici $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est le vecteur des matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Le champ de vecteur \vec{A}_0 est le vecteur potentiel magnétique défini par la jauge de Coulomb

$$\vec{A}_0(x) = \int_0^1 s \left(\vec{B}_0(sx) \wedge x \right) ds, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.13)$$

Nous désignons par

$$\vec{n}_0(x) := \frac{\vec{B}_0(x)}{B_0(x)} \quad (1.14)$$

la direction du champ magnétique \vec{B}_0 . Tout au long de ce travail, nous écrivons

$$-i\nabla = \vec{p} \quad (1.15)$$

et

$$\vec{P}_{h,\beta A_0} := (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0) \quad (1.16)$$

pour simplifier l'écriture.

Avant de présenter nos résultats principaux qui feront l'objet de la sous-section suivante, introduisons quelques définitions et notations sur le courant.

Définition 1.2.1.

Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ tel que $\vec{P}_{h,\beta A_0}\psi \in (L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2))^3$. Le courant dans l'état (ou courant de ψ) est la distribution $\vec{j}_{h,\beta}^\psi$ donnée par

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \ni \vec{a} \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_{h,\beta}^\psi(x) \cdot \vec{a}(x) dx = \langle \psi; \vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}, \quad (1.17)$$

où $\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$ est l'opérateur courant défini par

$$\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a}) = \mathcal{J}_{h,\beta}^p(\vec{a}) \otimes I_{\mathbb{C}^2} + h\vec{\sigma} \cdot \vec{b}, \quad (1.18)$$

avec

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \quad (1.19)$$

et

$$\mathcal{J}_{h,\beta}^p(\vec{a}) := \vec{a} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{a}. \quad (1.20)$$

Remarque 1.2.2.

L'écriture $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_{h,\beta}^\psi(x) \cdot \vec{a}(x) dx$ est bien entendue abusive et doit toujours être comprise au sens du membre de droite dans (1.17). La " fonction " $\vec{j}_{h,\beta}^\psi$ n'est définie que comme distribution et pas comme fonction.

L'opérateur $J_{h,\beta}^p(\vec{a}) \otimes I_{\mathbb{C}^2}$ opère diagonalement. Il est appelé opérateur du courant permanent. L'opérateur Courant $\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$ opère alors sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ de la manière suivante

$$\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} \psi_1 + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{a} \psi_1 + h b_3 \psi_1 + h (b_1 - i b_2) \psi_2 \\ \vec{a} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} \psi_2 + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{a} \psi_2 + h (b_1 + i b_2) \psi_1 - h b_3 \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Pour définir le courant total (la quantité que nous souhaitons étudier), nous sommons le courant pour une base orthonormée de vecteurs propres de l'espace propre associée aux valeurs propres inférieures à zéro :

$$\vec{j} = \sum_{\lambda_i < 0} \vec{j}_{\psi_i}. \quad (1.22)$$

En d'autres termes $\vec{j}_{h,\beta}$ est la distribution

$$\vec{a} \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_{h,\beta}(x) \cdot \vec{a}(x) dx \equiv \text{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a}) 1_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)) \right]. \quad (1.23)$$

Ici l'écriture $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_{h,\beta}(x) \cdot \vec{a}(x) dx$ est aussi comprise au sens du membre de droite dans (1.23).

1.3 Énergie semi-classique

Dans le cas d'un champ magnétique non constant, L. Erdős et J.P. Solovej ont prouvé dans [11] que la somme des valeurs propres négatives

$$\begin{aligned} & \sum_k e_k(h, \beta \vec{B}_0, V) \\ & := \text{tr} \left[\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) 1_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)) \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

est finie. Mentionnons ici que le bas du spectre essentiel de l'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ est égal à zéro. La somme des valeurs propres négatives représente l'énergie

quantique $E_Q(h, \beta \vec{B}_0, V)$ du gaz d'électrons dans un potentiel électrique V et un potentiel magnétique \vec{A}_0 :

$$E_Q(h, \beta \vec{B}_0, V) = \text{tr} \left[\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) 1_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)) \right]. \quad (1.25)$$

De plus, dans [10, théorème 3.1] (et dans [29, théorème 4.1] pour le cas du champ magnétique non constant) les auteurs ont prouvé une formule semi-classique généralisée qui dépend du champ magnétique et qui est notée $E_{scl}(h, \beta \vec{B}_0, V)$. Plus précisément, ils ont montré qu'il existe une fonction g réelle positive

$$]0, h_0] \ni h \mapsto g(h) \quad (1.26)$$

telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$$

et il existe une fonction f

$$(h, \beta) \mapsto f(h, \beta), \quad (1.27)$$

telles que, pour tout (h, β) vérifiant (1.9), on ait

$$E_Q(h, \beta \vec{B}_0, V) = E_{scl}(h, \beta \vec{B}_0, V)(1 + f(h, \beta)), \quad (1.28)$$

où $f(h, \beta)$ vérifie

$$|f(h, \beta)| \leq g(h).$$

Ici l'énergie semi-classique est définie par

$$E_{scl}(h, \beta \vec{B}_0, V) := -h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} P\left(h\beta \|\vec{B}_0(x)\|_{\mathbb{R}^3}, [V(x)]_-\right) dx, \quad (1.29)$$

où, pour $(b, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, la fonction $P(b, w)$ est définie par

$$P(b, w) = \frac{b}{3\pi^2} \left(w^{3/2} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} [2\nu b - w]_-^{3/2} \right), \quad (1.30)$$

où

$$[x]_- = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (1.31)$$

Lemme 1.3.1.

Soit P la fonction introduite en (1.30). Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left| P(b, w) \right| \leq c \left(b w^{3/2} + w^{5/2} \right) \quad \forall b \in \mathbb{R}_+, \forall w \in \mathbb{R}_+. \quad (1.32)$$

Démonstration.

Nous avons

$$[2\nu b - w]_-^{3/2} = b^{3/2} [2\nu - \frac{w}{b}]_-^{3/2}. \quad (1.33)$$

Soit

$$N := \lfloor \frac{w}{2} \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N}; n \leq \frac{w}{2}\}.$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} [2\nu - w]_-^{3/2} &= \sum_{\nu=1}^N (w - 2\nu)^{3/2} \\ &\leq N \max_{1 \leq \nu \leq N} (w - 2\nu)^{3/2} \\ &\leq \frac{w}{2} \max_{1 \leq \nu \leq N} (w - 2\nu)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

En utilisant une estimation du type

$$|f + g|^p \leq C_p (|f|^p + |g|^p), \quad (1.35)$$

nous obtenons

$$\frac{w}{2} \max_{1 \leq \nu \leq N} (w - 2\nu)^{3/2} \leq C_{3/2} \frac{w}{2} \max_{1 \leq \nu \leq N} (w^{3/2} + (2\nu)^{3/2}). \quad (1.36)$$

De plus

$$\begin{aligned} C_{3/2} \frac{w}{2} \max_{1 \leq \nu \leq N} (w^{3/2} + (2\nu)^{3/2}) &\leq C_{3/2} \frac{w}{2} (w^{3/2} + (2N)^{3/2}) \\ &\leq C_{3/2} \frac{w}{2} (w^{3/2} + 2^{3/2} w^{3/2}) \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{2} w^{5/2}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

En combinant (1.37), (1.34), (1.33) et (1.30), nous obtenons bien l'existence d'une constante $c > 0$ tel que

$$\left| P(b, w) \right| \leq c \left(b w^{3/2} + w^{5/2} \right) \quad \forall b \in \mathbb{R}_+, \forall w \in \mathbb{R}_+. \quad (1.38)$$

□

Application

Il résulte de l'inégalité (1.32) appliquée pour tout x avec $b = B_0(x)$ et $w = [V]_-(x)$, que l'intégrale en (1.29) est finie lorsque

$$B_0 := \|\vec{B}_0\|_{\mathbb{R}^3} \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

et

$$[V]_- \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

1.4 Résultat principal

Introduisons l'énergie semi-classique indépendante du paramètre h :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}_+, \quad E_\mu(\vec{B}_0, V) := - \int_{\mathbb{R}^3} P\left(\mu B_0(u), [V(u)]_-\right) du, \quad (1.39)$$

où pour $(b, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, la fonction $P(b, w)$ est définie en (1.30).

La définition du courant dans (1.23) a été inspirée de la dérivée de l'énergie quantique (1.2). D'une manière formelle, on s'attend à ce que le comportement semi-classique du courant soit donné par la dérivée de l'énergie semi-classique par rapport au champ magnétique \vec{B} :

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_{h,\beta}(x) \cdot \vec{a}(x) dx = \mu^{-1} \frac{dE_\mu(\vec{B}_0 + s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}, V)}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (1.40)$$

En utilisant

$$\frac{d(\|\vec{B}_0 + s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}\|)}{ds} \Big|_{s=0} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \cdot \vec{n}_0, \quad (1.41)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} E_\mu(\vec{B}_0 + s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}, V) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{-2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(x) \cdot \vec{n}_0(x) \right) \left[2\nu\mu B_0(x) + V(x) \right]_-^{3/2} dx \\ &+ \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \nu \mu B_0 \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(x) \cdot \vec{n}_0(x) \right) \left[2\nu\mu B_0(x) + V(x) \right]_-^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ici

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{et} \quad d_\nu = \frac{1}{\pi}, \quad \forall \nu \geq 1. \quad (1.43)$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette thèse, mais il ne concerne que le comportement semi-classique du courant lorsque la fonction test \vec{a} est orthogonale au champ magnétique \vec{B}_0 . Le courant parallèle au champ magnétique est beaucoup plus difficile à analyser.

Théorème 1.4.1.

Soient $\vec{a} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et \vec{B}_0 vérifiant (1.5)-(1.7) et $\vec{B}_0 \cdot \vec{a} = 0$. Supposons que $[V]_-$ vérifie (1.8) et qu'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\beta(h) = \mu. \quad (1.44)$$

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{J}_{h,\beta}(x) \cdot \vec{a}(x) dx = \mu^{-1} \frac{d}{ds} E_\mu(\vec{B}_0 + s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}, V) \Big|_{s=0}. \quad (1.45)$$

Remarque 1.4.2.

Dans le cas où le champ magnétique est constant :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{n}_0,$$

nous retrouvons le résultat établi par S.Fournais dans [16, théorème 1.3].

1.5 Organisation du travail

Chapitre 1 : Introduction.

Dans ce chapitre nous introduisons l'opérateur de Pauli reflétant les propriétés d'un gaz d'électrons soumis au champ magnétique \vec{B}_0 et au potentiel scalaire V

$$\mathcal{H}(\vec{B}_0, V) = (-i\nabla + \vec{A}_0(x))^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(x) + V(x), \quad (1.46)$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$. Puis nous présentons le résultat principal qui décrit le comportement semi-classique du courant $\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$ lorsque la fonction test \vec{a} est orthogonale au champ magnétique \vec{B}_0 en tout point de \mathbb{R}^3 .

Chapitre 2 : Théorie spectrale de l'opérateur de Pauli.

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous intéressons à la réalisation auto-adjointe de l'opérateur de Pauli. Nous montrons que sous les hypothèses (1.5)-(1.9) l'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta \vec{A}_0, V)$ défini en (1.10) est auto-adjoint. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous définissons $\mathcal{F}_{h,\beta}(V)$ et $\mathcal{G}_{h,\beta}(V)$ comme respectivement les fonctionnelles réduite et non réduite de Lieb-Thirring, puis nous rappelons une estimation (du type Lieb-Thirring) obtenue par [10] et par [30] sur la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$.

Chapitre 3 : Approximation du champ magnétique.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats sur l'énergie semi-classique introduite par E.H. Lieb, J.P. Solovej et J. Yngvason dans le cas où le champ magnétique est constant, puis reprises par L. Erdős et J.P. Solovej dans le cas où le champ magnétique est non constant. Dans une deuxième section de ce chapitre, nous généralisons le résultat sur l'énergie

semi-classique. Nous considérons une famille \mathcal{H}_t d'opérateurs de Pauli modifié et nous montrons que l'expression semi-classique donnée en (1.29), reste vraie pour l'opérateur de Pauli modifié avec champ magnétique non constant. Dans la dernière section de ce chapitre nous réécrivons la partie cinétique de l'opérateur de Pauli modifié ($\mathcal{H}_t - V$) sous la forme d'un opérateur avec champ magnétique constant plus des termes d'erreurs dûs à l'approximation.

Chapitre 4 : États cohérents pour l'opérateur de Pauli avec champ magnétique constant.

Nous rappelons quelques définitions et propriétés classiques sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique constant égal à $-\partial_{x_1}^2 + (-i\partial_{x_2} + x_1)^2$ dans \mathbb{R}^2 . Nous rappelons en particulier que le spectre est décrit comme la réunion des niveaux de Landau $(2\nu + 1); \nu \in \mathbb{N}$. Nous construisons une famille de projecteurs $(\mathbb{F}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ associé à chaque niveau de Landau, qui vérifient l'identité suivante

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{F}_\nu = \text{Id}. \quad (1.47)$$

Puis dans la troisième section de ce chapitre, nous considérons l'opérateur de Schrödinger magnétique dans \mathbb{R}^3 et nous remplaçons la famille de projecteurs $(\mathbb{F}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ par une famille de projecteurs $(\Pi'_0(\xi))_{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}}$ définie sur $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ qui vérifie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \Pi'_0(\xi) d\xi = 1_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}.$$

Dans la dernière section de ce chapitre, nous construisons finalement des états cohérents à l'aide d'une famille $(\mathcal{K}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de fonctions propres généralisées de l'opérateur de Pauli avec champ magnétique constant

$$\mathcal{H}_{0,A} = (\vec{p} + \vec{A})^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}.$$

Chapitre 5 : Borne inférieure

Dans ce chapitre, nous utilisons l'approximation du champ magnétique et les états cohérents convenablement construits pour établir une borne inférieure pour la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli modifié. Pour contrôler les termes d'erreurs dûs à l'approximation et à la localisation, nous utilisons les inégalités de Lieb-Thirring.

Chapitre 6 : Application (calcul du courant).

Dans ce chapitre, nous prouvons une formule de commutateur pour l'opérateur du courant $\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$. Puis, nous utilisons l'estimation sur la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli modifié et le principe variationnel pour calculer le courant et prouver le théorème principal de notre travail (théorème 1.4.1).

Chapitre 2

Théorie spectrale

2.1 Inégalité de Lieb-Thirring

Dans ce travail, on s'intéresse aux valeurs propres de l'opérateur de Pauli qui sont au dessous du spectre essentiel. En définissant l'opérateur de Dirac par

$$\mathcal{D} = \vec{\sigma} \cdot (-ih\nabla + \vec{A}(x)), \quad (2.1)$$

on vérifie la relation suivante entre ce dernier et l'opérateur de Pauli

$$\left[\vec{\sigma} \cdot (-ih\nabla + \vec{A}(x)) \right]^2 + V(x) = (-ih\nabla + \vec{A}(x))^2 + V(x) + h\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(x). \quad (2.2)$$

Sous des hypothèses très générales sur le potentiel scalaire V et le champ magnétique \vec{B} , et d'après un résultat de Helffer-Nourrigat-Wang [20], Erdős et Solovej montrent que le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Pauli est en zéro [10, p. 128-129].

Dans le cas d'un champ magnétique constant, l'opérateur de Pauli $\left[\vec{\sigma} \cdot (-ih\nabla + \vec{A}(x)) \right]^2$ n'a que du spectre essentiel $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ (niveaux de Landau). En conséquence, si $V \in L^{3/2} \cap L^{5/2}$, l'opérateur de Pauli perturbé $\left[\vec{\sigma} \cdot (-ih\nabla + \vec{A}(x)) \right]^2 + V$ et l'opérateur non-perturbé ($V = 0$) ont le même bas du spectre essentiel (théorème de Weyl). Ceci montre dans ce cas particulier que le bas du spectre de l'opérateur perturbé est en 0.

On s'intéresse alors à la suite croissante des valeurs propres strictement négatives de l'opérateur $\mathcal{H}(B, V)$ défini en (2.2) qu'on note $\left(e_j(B, V) \right)_{j=1}^{N(B, V)}$

($N(B, V)$ étant fini ou infini). Dans les articles [45] et [38] dans le cas d'un champ magnétique constant, les auteurs ont prouvé qu'il y a une infinité de valeurs propres négatives. Cependant la somme de ces valeurs propres négatives est finie. Les auteurs se sont intéressés dans un premier temps au comportement semi-classique de la somme des valeurs propres négatives. La première borne de Lieb-Thirring pour l'opérateur de Pauli a été établie dans [29, thm 2.1] pour le cas où le champ magnétique est constant. Les auteurs ont établi une estimation sur la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli

$$\mathcal{H}(B, V) = (\vec{p} + \vec{A})^2 + \vec{B} \cdot \vec{\sigma} + V, \quad (2.3)$$

où

$$B = \|\vec{B}\|.$$

Théorème 2.1.1.

Soit V tel que $[V]_- \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et soit $\left(e_j(B, V)\right)_{j=1}^{N(B, V)}$ ($N(B, V)$ étant fini ou infini), la suite des valeurs propres négatives de l'opérateur $\mathcal{H}(B, V)$ défini en (2.3). Alors

$$\sum_{j=1}^{\infty} |e_j(B, V)| \leq L_1 B \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{3/2} dx + L_2 \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx, \quad (2.4)$$

où

$$L_1 = \frac{4}{3\pi} \quad (2.5)$$

et

$$L_2 = \frac{8\sqrt{6}}{5\pi}. \quad (2.6)$$

Ici on a utilisé (1.31).

En insérant le paramètre semi-classique $h > 0$, l'opérateur $\mathcal{H}(B, V)$ devient,

$$\mathcal{H}(h, B, V) = (h\vec{p} + \vec{A})^2 + h\vec{B} \cdot \vec{\sigma} + V. \quad (2.7)$$

Remarquons que

$$\mathcal{H}(h, B, V) = h^2 \mathcal{H}(h^{-1}B, h^{-2}V). \quad (2.8)$$

Par suite, compte tenu de l'universalité des constantes L_1 et L_2 , l'inégalité (2.4) devient

$$\sum_{j=1}^{\infty} |e_j(h, B, V)| \leq L_1 h^{-2} B \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{3/2} dx + h^{-3} L_2 \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx. \quad (2.9)$$

où L_1, L_2 ont été définies respectivement en (2.5) et (2.6).

Ici nous avons introduit le paramètre semi-classique dans la notation de la suite croissante $(e_j(h, B, V))_{j=1}^{\infty}$ des valeurs propres négatives de l'opérateur $\mathcal{H}(h, B, V)$.

Dans [10], L. Erdős et J.P. Solovej généralisent le Théorème 2.1.1 au cas où le champ magnétique est variable. Ils s'intéressent à l'opérateur $H(B, V)$ défini en (2.3) et ils supposent que l'intensité B du champ magnétique \vec{B} est bornée, non nulle et que les gradients de $\vec{n} = \frac{\vec{B}}{B}$ et de $\ln(B)$ sont bornés également. Il posent alors

$$\ell(\vec{B})^{-1} := \|\nabla \vec{n}\|_{\infty} = \|\nabla(\frac{\vec{B}}{B})\|_{\infty} < \infty, \quad (2.10)$$

et

$$L(\vec{B})^{-1} := \|\frac{|\nabla B|}{B}\|_{\infty} < \infty. \quad (2.11)$$

Ici $\ell(\vec{B})$ décrit l'échelle sur laquelle la direction du champs varie et $L(\vec{B})$ décrit l'échelle sur laquelle le logarithme de l'intensité du champ magnétique varie. Ils supposent aussi que le potentiel scalaire V vérifie

$$[V]_- \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}). \quad (2.12)$$

Théorème 2.1.2.

Il existe une constante $\underline{C} > 0$ telle qu'avec les notations et les hypothèses (2.10)-(2.12), la somme des valeurs propres strictement négatives $(e_j(B, V))_{j=1}^{\infty}$ de l'opérateur de Pauli $\mathcal{H}(B, V)$ vérifie

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |e_j(B, V)| \leq \underline{C} & \left(\int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} (B(x) + \underline{d}^{-2}(\vec{B})) [V(x)]_-^{3/2} dx \right. \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} (B(x) + \underline{d}^{-2}(\vec{B})) \underline{d}^{-1}(\vec{B}) [V(x)]_- dx \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}^3} (B(x) + \underline{d}^{-2}(\vec{B})) |\nabla [V(x)]_-| dx \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

où

$$\underline{d}(\vec{B}) := \min\{ \|B\|_\infty^{-1/4} \ell^{1/2}(\vec{B}), L(\vec{B}), \ell(\vec{B}) \}. \quad (2.14)$$

En insérant le paramètre semiclassique $h > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |e_j(h, B, V)| &\leq \underline{C} \left(h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx \right. \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(h^{-2} B(x) + h^{-1} \underline{d}^{-2}(h, \vec{B}) \right) [V(x)]_-^{3/2} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left(h^{-1} B(x) + \underline{d}^{-2}(h, \vec{B}) \right) \underline{d}^{-1}(h, \vec{B}) [V(x)]_- dx \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} \left(h^{-1} B(x) + \underline{d}^{-2}(h, \vec{B}) \right) |\nabla[V(x)]_-| dx \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

où

$$\underline{d}(h, \vec{B}) := \min\{ h^{1/4} \|B\|_\infty^{-1/4} \ell^{1/2}(\vec{B}), L(\vec{B}), \ell(\vec{B}) \}. \quad (2.16)$$

Rappelons que dans notre application, nous nous intéressons à l'opérateur de Pauli $H(h, B, V)$ lorsque le potentiel scalaire V satisfait (1.8) et lorsque le champ magnétique \vec{B} n'est pas nécessairement constant et s'écrit

$$\vec{B} = \beta \vec{B}_0, \quad (2.17)$$

où \vec{B}_0 satisfait (1.5)-(1.7). En comparant notre application avec (2.15) et (2.16), nous remarquons que lorsque β est suffisamment grand, plus précisément, pour β vérifiant

$$\beta^{1/4} \geq \max\{ L^{-1}(\vec{B}_0) \ell^{1/2}(\vec{B}_0) h^{1/4} \|B_0\|_\infty^{-1/4}, \ell^{-1/2}(\vec{B}_0) h^{1/4} \|B_0\|_\infty^{-1/4} \},$$

nous avons

$$\underline{d}(h, \beta \vec{B}_0) = h^{1/4} \beta^{-1/4} \|B_0\|_\infty^{-1/4} \ell^{1/2}(\vec{B}_0). \quad (2.18)$$

En remplaçant (2.18) dans (2.15), nous obtenons l'existence d'une constante \underline{C}_1 telle que, pour tout B_0 vérifiant (2.10)-(2.11), pour tout $h \in]0, 1]$, et pour tout $[V]_- \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |e_j(B, V)| &\leq \underline{C}_1 \left(h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx + h^{-2} \beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{3/2} dx \right. \\ &\quad + h^{-5/4} \beta^{5/4} \|B_0\|_\infty^{5/4} \ell^{-1/2}(\vec{B}_0) \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_- dx \\ &\quad \left. + h^{-1} \beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla[V(x)]_-| dx \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nous définissons la fonctionnelle réduite de Lieb-Thirring par :

$$L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ni V \mapsto \mathcal{F}_{h,\beta}(V), \quad (2.20)$$

où

$$\mathcal{F}_{h,\beta}(V) = h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx + h^{-2}\beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{3/2} dx. \quad (2.21)$$

Puis nous définissons la fonctionnelle non réduite de Lieb-Thirring par :

$$L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap W^{1,1} \ni V \mapsto \mathcal{G}_{h,\beta}(V), \quad (2.22)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{h,\beta}(V) := & h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{5/2} dx + h^{-2}\beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_-^{3/2} dx \\ & + h^{-5/4}\beta^{5/4} \|B_0\|_\infty^{5/4} \ell^{-1/2}(\vec{B}_0) \int_{\mathbb{R}^3} [V(x)]_- dx \\ & + h^{-1}\beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla[V(x)]_-| dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Il résulte de (2.19) et de (2.23) que la somme des valeurs propres strictement négatives $\left\{ e_k(h, \beta \vec{B}_0, V) \right\}_{k=1}^{N(h,\beta)}$ de l'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ vérifie :

$$\sum_{k=1}^{N(h,\beta)} \left| e_k(h, \beta \vec{B}_0, V) \right| \leq \underline{C}_1 \mathcal{G}_{h,\beta}([V]_-) \leq \underline{C}_1 \mathcal{G}_{h,\beta}(V), \quad (2.24)$$

pour toute paire (h, β) vérifiant (1.9) et tout V qui satisfait (1.8). Ici \underline{C}_1 a été introduite en (2.19).

2.2 Théorie spectrale

Rappelons le théorème de Kato-Rellich (voir par exemple [32]).

Théorème 2.2.1. (*Kato-Rellich*)

Supposons que L soit un opérateur auto-adjoint de domaine $D(L)$. Soit B un opérateur borné et supposons qu'il existe deux constantes $a \in [0, 1[$ et $b > 0$ telles que :

$$\|Bu\| \leq a\|Lu\| + b\|u\|, \quad \forall u \in D(L)$$

Alors, l'opérateur $L + B$ de domaine $D(L)$ est auto-adjoint.

Théorème 2.2.2. (*Principe variationnel*)

Soient $N \in \mathbb{N}$, et C_N l'ensemble des familles orthonormées $(f_i)_{i=1}^N$. Supposons que $\mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})$ est de trace finie. Alors

$$\mathrm{tr} [\mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})] = \inf_{\substack{(f_1, \dots, f_N) \in C_N \\ N \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^N \langle \mathcal{H} f_k ; f_k \rangle. \quad (2.25)$$

Démonstration.

Par la définition de la trace, nous avons pour toute base $(f_k)_{k=1}^\infty$ orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$

$$\mathrm{tr} [\mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})] = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}) f_k ; f_k \rangle. \quad (2.26)$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}) f_k ; f_k \rangle \leq \sum_{k=1}^N \langle \mathcal{H} f_k ; f_k \rangle. \quad (2.27)$$

En combinant (2.26) et (2.27), on déduit que

$$\mathrm{tr} [\mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})] \leq \inf_{\substack{(f_1, \dots, f_N) \in C_N \\ N \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^N \langle \mathcal{H} f_k ; f_k \rangle. \quad (2.28)$$

Inversement, en prenant $(g_k)_{k=1}^\infty$ une base orthonormée de l'espace propre négatif de l'opérateur \mathcal{H} , on a d'une part

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} [\mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})] &= \sum_{\lambda_k(\mathcal{H}) < 0} \lambda_k(\mathcal{H}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathcal{H} g_k ; g_k \rangle. \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'autre part, on a

$$\inf_{\substack{(f_1, \dots, f_N) \in C_N \\ N \in \mathbb{N}}} \sum_{k=1}^N \langle \mathcal{H} f_k ; f_k \rangle \leq \sum_{k=1}^{N'} \langle \mathcal{H} g_k ; g_k \rangle \quad \forall N' \in \mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{(f_1, \dots, f_N) \in C_N \\ N \in \mathbb{N}}} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathcal{H} f_k ; f_k \rangle &\leq \inf_{N' \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N'} \langle \mathcal{H} g_k ; g_k \rangle \\ &\leq \mathrm{tr} [\mathcal{H}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

□

Lemme 2.2.3.

Supposons que H est un opérateur auto-adjoint semi borné dans un espace d'Hilbert \mathfrak{H} tel que l'opérateur $H \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(H)$ est un opérateur à trace. Alors pour tout projecteur orthogonal γ tel que $H\gamma$ est à trace, on a :

$$\mathrm{tr} (H \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(H)) \leq \mathrm{tr}(H\gamma).$$

Démonstration.

Soit H un opérateur auto-adjoint non borné, soit $(\lambda_k)_k$ la suite des valeurs propres strictement négatives de H (comptés avec leur multiplicité). Soient $(f_k^-)_{k \in \mathbb{Z}^-}$ une base orthonormée de fonctions propres et $(P_k)_k$ les projecteurs orthogonaux associés aux espaces propres.

On désigne par P_+ et P_- respectivement les projecteurs sur les spectres positif et négatif de H . L'opérateur $H\gamma$ étant à trace, alors on a,

$$\mathrm{tr}(H\gamma) = \mathrm{tr}(H\gamma P_+) + \mathrm{tr}(H\gamma P_-).$$

Par ailleurs, en utilisant la cyclicité de la trace,

$$\mathrm{tr}(H\gamma P_+) = \mathrm{tr}(P_+ H\gamma).$$

En Tenant compte que P_+ est un projecteur et qu'il commute avec H , on écrit,

$$\mathrm{tr}(P_+ H\gamma) = \mathrm{tr}(P_+ P_+ H\gamma) = \mathrm{tr}(P_+ H P_+ \gamma).$$

Ce dernier terme est positif car γ est un projecteur et l'opérateur $P_+ H P_+$ est positif. En fait, d'après la cyclicité de la trace,

$$\mathrm{tr}(P_+ H P_+ \gamma) = \mathrm{tr}(P_+ H P_+ \gamma^2) = \mathrm{tr}(\gamma P_+ H P_+ \gamma) \geq 0.$$

Il suffit maintenant de montrer que $\mathrm{tr}(H\gamma P_-) \geq \mathrm{tr} (H \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(H))$. Comme expliqué ci-dessus, on a

$$\mathrm{tr}(H\gamma P_-) = \mathrm{tr}(P_- H P_- \gamma).$$

Considérons le plus petit espace fermé K qui est la somme directe hilbertienne des espaces propres correspondants aux valeurs propres strictement négatives $(\lambda_k)_k$. Soit $(f_k^-)_{k \in \mathbb{Z}^-}$ une base orthonormée de K et $(f_k^+)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ une base orthonormée de K^\perp , telle que $(f_k^+ \cup f_k^-)$ soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$. Alors

$$\mathrm{tr}(P_- H P_- \gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^-} \langle P_- H P_- \gamma f_k^-, f_k^- \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} \langle P_- H P_- \gamma f_k^+, f_k^+ \rangle. \quad (2.32)$$

D'une part,

$$\langle P_- H P_- \gamma f_k^+, f_k^+ \rangle = \langle H P_- \gamma f_k^+, P_- f_k^+ \rangle = 0. \quad (2.33)$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $f_k^+ \perp K$ et que P_- est le projecteur orthogonale sur l'espace propre K associé aux valeurs propres λ_k . D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_k \langle P_- H P_- \gamma f_k^-, f_k^- \rangle &= \sum_k \langle \gamma f_k^-, P_- H P_- f_k^- \rangle \\ &= \sum_k \lambda_k \langle \gamma f_k^-, f_k^- \rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comme $\lambda_k < 0$ et que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \gamma f_k^-, f_k^- \rangle &\leq \|f_k^-\|^2 \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

nous obtenons

$$\lambda_k \leq \langle \lambda_k \gamma f_k^-, f_k^- \rangle \leq 0. \quad (2.36)$$

□

2.3 La réalisation auto-adjointe de l'opérateur de Pauli

Rappelons comment on peut définir la réalisation auto-adjointe de l'opérateur $\vec{P}_{A_0}^2$, où

$$\vec{P}_{A_0} := (-i\nabla + \vec{A}_0). \quad (2.37)$$

Nous partons de la forme quadratique

$$u \rightarrow q_{A_0}(u) = \|\vec{P}_{A_0} u\|_{\left(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3}^2 \quad (2.38)$$

qui a pour domaine naturel

$$H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2); \vec{P}_{A_0} u \in \left(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3 \right\}. \quad (2.39)$$

Nous définissons naturellement la norme hilbertienne $\|\cdot\|_{H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}$ par

$$\|u\|_{H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 = \|\vec{P}_{A_0} u\|_{\left(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2. \quad (2.40)$$

Comme q_{A_0} est semi-borné, on obtient par le théorème de Friedrichs l'existence d'une réalisation auto-adjointe $\vec{P}_{A_0}^2$ de domaine

$$\mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2) = \left\{ u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2); \vec{P}_{A_0}^2 u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \right\}. \quad (2.41)$$

Nous définissons naturellement la norme du graphe $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2)}$ par

$$\|u\|_{\mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2)}^2 = \|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2). \quad (2.42)$$

Nous allons démontrer que

$$\mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2) = H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2), \quad (2.43)$$

où

$$H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) = \left\{ u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2); \vec{P}_{A_0} u \in \left(H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3 \right\}. \quad (2.44)$$

En effet, d'une part nous vérifions aisément que

$$H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \subset \mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2). \quad (2.45)$$

D'autre part, si $u \in \mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2)$ alors, par définition,

$$u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \text{ et } \vec{P}_{A_0}^2 u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2). \quad (2.46)$$

Il résulte de [8, lemme 13.3] que $u \in H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ et qu'il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de u telle que

$$\|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \leq C_0 \left(\|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \right), \quad (2.47)$$

où

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 &= \sum_{|j|+|k|\leq 2} \|\vec{P}_{A_0, j} \vec{P}_{A_0, k} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 + \|\vec{P}_{A_0} u\|_{\left(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3}^2 \\ &+ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ici nous avons noté

$$\vec{P}_{A_{0,j}} = (-i\partial_j + \vec{A}_{0,j}),$$

où $\vec{A}_0 = (A_{0,1}, A_{0,2}, A_{0,3})$. Ceci montre de plus que les normes $\|\cdot\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(\vec{P}_{A_0}^2)}$ sont équivalentes. A l'aide du théorème de Kato-Rellich, nous obtenons que l'opérateur de Pauli $\mathcal{H}(h, \beta\vec{A}_0, V)$ défini en (1.10) est auto-adjoint. En donnant la démonstration de cette propriété, nous comprendrons mieux l'origine des hypothèses posées sur V .

Lemme 2.3.1.

Supposons que $\vec{A}_0 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ alors

$$H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \quad (2.49)$$

Ici $H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ a été introduit dans (2.39), et \hookrightarrow signifie "injection continue".

Démonstration.

Rappelons que pour tout $u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, nous avons par l'inégalité diamagnétique (voir [28]), :

$$|u| \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \quad (2.50)$$

et,

$$\left| \nabla |u(x)| \right| \leq \left| (\nabla + i\vec{A}_0)(u(x)) \right| \quad (2.51)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$.

Il résulte alors par intégration du carré dans (2.51),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u(x)||^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{P}_{A_0} u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.52)$$

Il résulte de l'injection continue de Sobolev :

$$H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \quad (2.53)$$

appliquée à $|u|$ l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^6 dx \right)^{1/6} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u(x)||^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \quad (2.54)$$

En combinant (2.52) et (2.54), nous obtenons

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^6 dx \right)^{1/6} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{P}_{A_0} u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \quad (2.55)$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

Proposition 2.3.2.

Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, pour toute $u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u(x)|^2 dx \right| \leq c \|V\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \|u\|_{H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2. \quad (2.56)$$

Démonstration.

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u(x)|^2 dx \right| \leq \|V\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \|u\|_{L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2. \quad (2.57)$$

Nous utilisons maintenant l'injection continue de Sobolev (2.49). Plus précisément, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \leq c \|u\|_{H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}, \quad \forall u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \quad (2.58)$$

Par suite (2.57) devient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u(x)|^2 dx \right| \leq c \|V\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \|u\|_{H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2, \quad \forall u \in H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \quad (2.59)$$

□

Lemme 2.3.3.

Supposons que $\vec{A}_0 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ alors

$$H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \hookrightarrow W_{A_0}^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \quad (2.60)$$

où, pour $p > 0$, $W_{A_0}^{1,p}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ est défini par :

$$W_{A_0}^{1,p}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}); \vec{P}_{A_0} u \in (L^p(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))^3\}. \quad (2.61)$$

Démonstration.

Soit $u \in H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ alors par définition u et $\vec{P}_{A_0} u$ sont dans $(H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))^3$.

De plus, l'injection continue de Sobolev (2.49) implique que u et $\vec{P}_{A_0} u$ sont dans $(L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))$ et $(L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))^3$ respectivement. Ceci achève la preuve de la première injection dans (2.60).

Nous démontrons maintenant la deuxième injection. Il résulte de l'inégalité diamagnétique (cf (2.51)) que, pour tout $u \in W_{A_0}^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$,

$$|u| \in W^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \quad (2.62)$$

et

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u(x)||^6 dx \right)^{1/6} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{P}_{A_0} u(x)|^6 dx \right)^{1/6} \quad (2.63)$$

Nous utilisons l'injection continue de Sobolev (cf [1])

$$W^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \quad (2.64)$$

où

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) = \left\{ u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}); \sup_{x,y \in \mathbb{R}^3} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, 0 < \alpha < 1 \right\}. \quad (2.65)$$

Plus précisément, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|v\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \leq c \|v\|_{W^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}, \quad \forall v \in W^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \quad (2.66)$$

où

$$\|v\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^3} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |v(x)|. \quad (2.67)$$

Nous déduisons de (2.63) et de (2.64) que, si $u \in W_{A_0}^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, alors $|u| \in W^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et $|u| \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Plus précisément, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| |u| \|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \leq c \|u\|_{W_{A_0}^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}, \quad \forall u \in W_{A_0}^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \quad (2.68)$$

Pour achever la démonstration de l'injection $W_{A_0}^{1,6}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} &= \| |u| \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ &\leq \| |u| \|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

□

Proposition 2.3.4.

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tous $u \in H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et $V \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, nous avons l'estimation suivante

$$\int_{\mathbb{R}^3} |V(x)u(x)|^2 dx \leq \|V\|_{L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} (\varepsilon \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2 + C\varepsilon^{-2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2). \quad (2.70)$$

Démonstration.

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} |V(x)u(x)|^2 dx \leq \|V\|_{L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \|u\|_{L^{10/3}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2.$$

Il résulte aussi de l'injection continue de Sobolev (2.60) l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \leq C \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}. \quad (2.71)$$

Notons maintenant que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^{10/3} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 |u(x)|^{4/3} dx \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^{4/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2,$$

et ensuite, grâce à (2.71), que

$$\|u\|_{L^{10/3}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^{3/5} \leq C \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^{4/5} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^{6/5}.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité (du type Young) suivante :

$$ab \leq \varepsilon_1 a^p + \tilde{C}(\varepsilon_1) b^q \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

avec $a = \|u\|_{L^{10/3}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^{4/5}$, $b = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^{6/5}$, $\tilde{C}(\varepsilon_1) = \frac{C_{p,q}}{\varepsilon_1^{q/p}}$, où $C_{p,q}$ est une constante qui dépend uniquement de p et q ($p = 5/2$ et $q = 5/3$).

Alors, nous obtenons,

$$\|u\|_{L^{10/3}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2 \leq C \left(\varepsilon_1 \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2 + \tilde{C}(\varepsilon_1) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}^2 \right).$$

En prenant $\varepsilon_1 = \varepsilon C^{-1}$, et $\tilde{C}(\varepsilon_1) = C\varepsilon^{-2/3}$, nous achevons la preuve de cette proposition. \square

Théorème 2.3.5. (*application du théorème Kato-Rellich*)

Supposons que $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et que $\vec{B}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Alors l'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta \vec{A}_0, V)$ est auto-adjoint, de domaine $H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ et le domaine de la forme quadratique associée est $H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$. Ici $H_{A_0}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ et $H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ ont été introduits respectivement en (2.39) et (2.41).

Démonstration.

D'après la proposition 2.3.4, nous avons

$$\|Vu\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 \leq \|V\|_{L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} (\varepsilon \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2). \quad (2.72)$$

En utilisant la définition de la norme $\|\cdot\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}$ introduite en (2.48), nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \|Vu\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 &\leq \epsilon \|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 + \epsilon \|\vec{P}_{A_0} u\|_{\left(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3}^2 \\ &\quad + (\epsilon + C(\epsilon)) \|V\|_{L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

De plus, par une intégration par parties, nous avons

$$\|\vec{P}_{A_0} u\|_{\left(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)\right)^3}^2 = \langle \vec{P}_{A_0}^2 u; u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \quad (2.74)$$

Par l'inégalité (du type Cauchy-Schwarz), nous avons

$$\langle \vec{P}_{A_0}^2 u; u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \leq \|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2. \quad (2.75)$$

Comme

$$\|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 \leq 2\|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 + 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2, \quad (2.76)$$

alors

$$\|Vu\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 \leq 3\epsilon \|\vec{P}_{A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2 + (2\epsilon + (\epsilon + C(\epsilon))) \|V\|_{L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}^2. \quad (2.77)$$

D'après le théorème de Kato-Rellich appliqué avec $a = 3\epsilon$ (et $\epsilon < \frac{1}{3}$), l'opérateur $\vec{P}_{A_0}^2 + V$ est auto-adjoint de domaine $H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$. Comme \vec{B}_0 est borné, $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ est auto-adjoint également. La preuve du dernier point du théorème découle de la proposition 2.3.2. \square

Chapitre 3

Approximation du champ magnétique

3.1 Énergie semi-classique modifiée

Pour calculer le courant (voir (1.17) et (1.23)), on utilise une identité que nous démontrerons dans le chapitre 6, et qui est valide pour le courant de n'importe quelle fonction propre ψ de l'opérateur de Pauli $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ introduit en (1.10). Cette identité s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi ; \vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = \\ & + \left\langle \psi ; \left[\left(\vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot M \vec{P}_{h,\beta A_0} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left((D \vec{B}_0) \vec{a} \right) \right] \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \\ & + \left\langle \psi ; \left[\frac{1}{2} h^2 \Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) - \vec{a} \cdot \nabla V \right] \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ici nous définissons \vec{a} par

$$\vec{a} = \frac{\vec{n}_0 \wedge \vec{a}}{B_0}. \quad (3.2)$$

Nous définissons aussi $D \vec{a}$ par

$$D \vec{a} = \left(\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{a}_1 & \partial_2 \tilde{a}_1 & \partial_3 \tilde{a}_1 \\ \partial_1 \tilde{a}_2 & \partial_2 \tilde{a}_2 & \partial_3 \tilde{a}_2 \\ \partial_1 \tilde{a}_3 & \partial_2 \tilde{a}_3 & \partial_3 \tilde{a}_3 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

et nous notons $M = -\left[D\vec{a} + (D\vec{a})^\dagger\right]$.

En sommant le courant pour une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres négatives, l'identité de commutateur (3.1) se traduit par une identité de trace suivante

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\beta\vec{a}) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}) \right] = \\ \operatorname{tr} \left[\left((\vec{P}_{h,\beta A_0} M \vec{P}_{h,\beta A_0}) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0)\vec{a} + \vec{b} \right) \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}) \right] \\ + \operatorname{tr} \left[\left(\frac{1}{2}h^2\Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) - \vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ici nous utiliserons le lemme A.2.1 et le lemme A.2.10 pour montrer que l'opérateur

$$\left((\vec{P}_{h,\beta A_0} M \vec{P}_{h,\beta A_0}) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0)\vec{a} \right) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})$$

et l'opérateur

$$\left(\frac{1}{2}h^2\Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) - \vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H})$$

sont deux opérateurs à trace.

Afin de calculer

$$\operatorname{tr} \left[\left((\vec{P}_{h,\beta A_0} M \vec{P}_{h,\beta A_0}) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0)\vec{a} \right) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}) \right], \quad (3.5)$$

nous sommes amenés à définir une famille \mathcal{H}_t (indexée par $t \in [-1, 1]$) d'opérateurs de Pauli modifiés avec un champ électrique et un champ magnétique variable par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(h, \beta\vec{B}_0, V, \vec{a}) = \vec{P}_{h,\beta A_0} M_t(x) \vec{P}_{h,\beta A_0} + h\beta\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{B}_0(x) + t\vec{b}(x) \right) \\ + th\beta \left((D\vec{B}_0(x))\vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) + V(x). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ici $\vec{A}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le potentiel magnétique défini en (1.13), $\vec{\sigma}$ est le vecteur des matrices de Pauli introduit en (1.12) et V est un potentiel scalaire qui décrit le champ électrique et vérifie (1.8). Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrirons \mathcal{H}_t pour $\mathcal{H}_t(h, \beta\vec{B}_0, V)$. L'opérateur \mathcal{H}_t fait intervenir M_t définie par

$$M_t = I + tM, \quad (3.7)$$

où $M = \{M_{ik}\}_{i,k=1}^3$ est une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans l'ensemble des matrices 3×3 réelles et symétriques.

Nous noterons dans la suite par \mathcal{M}_s l'ensemble des matrices 3×3 réelles et symétriques.

Lorsque $t \neq 0$, il résulte de (3.4) que

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h\beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) + h\beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}) \right] \\ &= \frac{1}{t} \left(\operatorname{tr} [(\mathcal{H}_t - \mathcal{H}) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H})] \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ceci nous conduit à chercher en gros une estimation uniforme par rapport à t et à h de

$$\operatorname{tr} [\mathcal{H}_t \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H})]. \quad (3.9)$$

Dans un premier temps, nous nous intéressons en particulier à l'expression semi-classique de la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli avec champ magnétique constant $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ (voir (1.28)). Notre but est alors de montrer qu'une modification de cette formule semi-classique reste vraie pour l'opérateur de Pauli modifié avec champ magnétique non constant. Afin de trouver une expression semi-classique analogue à (1.28),

$$\operatorname{tr} [\mathcal{H}_t \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0))] = E_{scl, t}(1 + o(1)), \quad (3.10)$$

l'énergie semi-classique n'est plus en effet exprimée comme dans (1.28), mais à l'aide d'une décomposition de la fonction $P(b, w)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, nous notons

$$P_k(b, w) := \frac{1}{3\pi^2} \sum_{\nu=k}^{\infty} b \left[2\nu b - w \right]_-^{3/2} \quad (3.11)$$

Comme nous allons voir dans le théorème 3.1.1, l'énergie semi-classique modifiée s'exprime à l'aide de $P_0(b, w)$ et de $P_1(b, w)$ (voir 3.21).

Remarquons que

$$P(b, w) = P_0(b, w) + P_1(b, w). \quad (3.12)$$

Avant d'énoncer le théorème, nous aurons besoin d'introduire les notations suivantes :

Soit $t_0 > 0$ tel que

$$t_0 \|M\|_\infty < \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

où

$$\|M\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \|M(x)\| \quad \text{avec} \quad \|M\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|_{\mathbb{R}^3}}{\|u\|_{\mathbb{R}^3}}. \quad (3.14)$$

Pour $t \in [-t_0; t_0]$, nous noterons

$$N_t = \sqrt{(I + tM)}. \quad (3.15)$$

Soit une matrice $\mathcal{C} = \{C_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 3}$ dans la base (e_1, e_2, e_3) . Nous associons à \mathcal{C} la matrice $\mathcal{C}^{(2)}$ dans la base $(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2)$ vérifiant

$$\mathcal{C}^{(2)}(u \wedge v) = \mathcal{C}(u) \wedge \mathcal{C}(v). \quad (3.16)$$

Plus explicitement, $\mathcal{C}^{(2)}$ est donnée par

$$\mathcal{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_{22}c_{33} - c_{23}^2 & c_{23}c_{13} - c_{33}c_{12} & c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13} \\ c_{23}c_{13} - c_{33}c_{12} & c_{11}c_{33} - c_{31}^2 & c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} \\ c_{12}c_{23} - c_{22}c_{31} & c_{13}c_{12} - c_{11}c_{32} & c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Théorème 3.1.1.

Supposons que V vérifie (1.8) et que \vec{B}_0 vérifie (1.5)-(1.7). Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, soit

$$\vec{B}_{0,t}(u) = N_t^{(2)}(u)\vec{B}_0(u), \quad (3.18)$$

où N_t est introduite en (3.15) et $N_t^{(2)}$ est associée à N_t par l'application (5.6). Soient

$$\Lambda_t(u) = \det |N_t(u)|, \quad (3.19)$$

$$\Delta_t(u) := \left| \vec{B}_0(u) + t \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \right) \right|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^3. \quad (3.20)$$

Ici \vec{b} est donné en (1.19) et $D\vec{a}(u)$ a été défini en (3.3).

Nous notons

$$\begin{aligned} & E_{scl,t}(h\beta, B, V) \\ &= -h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B(u), h\beta B(u) - V(u) - h\beta \Delta_t(u) \right) du \\ & \quad - h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_t^{-1}(u) P_0 \left(h\beta B(u), -h\beta B(u) - V(u) + h\beta \Delta_t(u) \right) du, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où, pour un entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction P_k a été introduite en (3.11). Alors il existe une fonction g réelle positive $h \mapsto g(h)$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$$

et telle que, pour tout (h, β) vérifiant (1.9) et $t \in [-t_0, t_0]$, on ait

$$\sum_k e_k(\mathcal{H}_t) \geq E_{scl,t}(h, \beta, B_{0,t}, V)(1 + f(h, \beta, t)), \quad (3.22)$$

où $f(h, \beta, t)$ vérifie

$$|f(h, \beta, t)| \leq g(h). \quad (3.23)$$

Ici $\{e_k(\mathcal{H}_t)\}_k$ désigne la suite des valeurs propres négatives de l'opérateur \mathcal{H}_t introduite en (3.6).

Pour le cas où $t = 0$, le théorème 3.1.1 est en accord avec le résultat établi dans [11] et dont l'énoncé est rappelé dans la sous-section 1.3 (voir (1.24)-(1.30)).

3.2 Approximation des vecteurs champ et potentiel magnétiques

Le but de cette sous-section est de réécrire la partie cinétique de l'opérateur de Pauli modifié sous la forme d'un opérateur avec champ magnétique constant plus des termes d'erreurs que nous souhaitons contrôler. Plus tard, nous utiliserons cette décomposition pour obtenir précisément une borne inférieure pour la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli modifié. Nous introduisons un ingrédient important : une formule de localisation qui est souvent utilisée (voir par exemple [7]) pour établir des estimations semi-classiques.

Lemme 3.2.1.

Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $S \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_s)$. Alors, pour tout $\delta \in]0, 1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ nous avons les estimations (ponctuelles) suivantes :

$$\begin{aligned} \left\| S(x) [\vec{P}_{h, \beta A_0}(gf)](x) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 &\leq (1 + \delta) \left\| g(x) S(x) [\vec{P}_{h, \beta A_0}(f)](x) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\quad + 2\delta^{-1} h^2 \left\| f(x) S(x) \nabla g(x) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \left\| g(x)S(x)[\vec{P}_{h,\beta A_0}(f)](x) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 &\geq (1-\delta) \left\| S(x)[\vec{P}_{h,\beta A_0}(gf)](x) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\quad - 2\delta^{-1}h^2 \left\| f(x)S(x)\nabla g(x) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Démonstration.

Nous utilisons la formule de Leibniz pour écrire :

$$\begin{aligned} \left\| S[\vec{P}_{h,\beta A_0}(gf)] \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 &= 2\Re \left\langle gS[\vec{P}_{h,\beta A_0}(f)]; hfS[\vec{p}g] \right\rangle_{\mathbb{C}^3} + h^2 \left\| fS(\nabla g) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\quad + \left\| gS[\vec{P}_{h,\beta A_0}(f)] \right\|_{\mathbb{C}^3}^2. \end{aligned}$$

Puis nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et plus précisément

$$2\Re \langle X; Y \rangle_{\mathbb{C}^3} \leq \delta \|X\|_{\mathbb{C}^3}^2 + \delta^{-1} \|Y\|_{\mathbb{C}^3}^2, \quad \forall \delta > 0.$$

Nous obtenons alors

$$2\Re \left\langle gS[\vec{P}_{h,\beta A_0}(f)]; hfS[\vec{p}g] \right\rangle_{\mathbb{C}^3} \leq \delta \left\| gS[\vec{P}_{h,\beta A_0}(f)] \right\|_{\mathbb{C}^3}^2 + \delta^{-1}h^2 \left\| fS(\nabla g) \right\|_{\mathbb{C}^3}^2.$$

Ceci achève la preuve de (3.24).

L'inégalité (3.25) découle de (3.24). En effet il suffit de multiplier (3.24) par $(1+\delta)^{-1}$ et de remarquer que $1-\delta \leq (1+\delta)^{-1} \leq 1$. \square

Lemme 3.2.2.

Supposons que $S \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_s)$ et supposons que $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, nous avons la formule de localisation suivante

$$\begin{aligned} \Re \langle \tilde{\chi}^2 g; (\vec{P}_{h,\beta A_0} S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0}) g \rangle &= \langle \tilde{\chi} g; (\vec{P}_{h,\beta A_0} S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0}) \tilde{\chi} g \rangle \\ &\quad - h^2 \langle g; (\nabla \tilde{\chi}) \cdot (S^2(\nabla \tilde{\chi})) g \rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Démonstration.

Une intégration par parties nous donne

$$\langle \tilde{\chi}^2 g; (\vec{P}_{h,\beta A_0} S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0}) g \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi}^2 g)](x) \cdot \overline{[S^2(\vec{P}_{h,\beta A_0})g](x)} dx. \quad (3.27)$$

En utilisant la formule de Leibniz

$$\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi}^2 g) = \tilde{\chi} \vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g) - i h (\nabla \tilde{\chi}) \tilde{\chi} g, \quad (3.28)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi}^2 g)](x) \cdot \overline{[S^2(\vec{P}_{h,\beta A_0})g](x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\chi}(x) [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x) \cdot \overline{[S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0} g](x)} dx \\
&\quad - i h \int_{\mathbb{R}^3} [(\nabla \tilde{\chi}) \tilde{\chi} g](x) \cdot \overline{[S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0} g](x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x) \cdot \tilde{\chi}(x) \overline{[S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0} g](x)} dx \\
&\quad - i h \int_{\mathbb{R}^3} [(\nabla \tilde{\chi}) \tilde{\chi} g](x) \cdot \overline{[S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0} g](x)} dx .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

La formule de Leibniz nous donne aussi

$$\tilde{\chi} \vec{P}_{h,\beta A_0} g = \vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g) + i h (\nabla \tilde{\chi}) g, \tag{3.30}$$

que nous remplaçons dans (3.29) :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x) \cdot \overline{S^2[\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g) + i h (\nabla \tilde{\chi}) g](x)} dx \\
&\quad - i h \int_{\mathbb{R}^3} [(\nabla \tilde{\chi}) \tilde{\chi} g](x) \cdot \overline{[S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0} g](x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x) \cdot \overline{S^2[\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x)} dx \\
&\quad - i h \int_{\mathbb{R}^3} \left[\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)(x) \cdot \overline{S^2(\nabla(\tilde{\chi})g)(x)} - (\tilde{\chi}(\nabla \tilde{\chi})g)(x) \cdot \overline{S^2(\vec{P}_{h,\beta A_0})g(x)} \right] dx .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Nous utilisons encore une fois (3.30) que nous remplaçons dans (3.31) et obtenons

$$\begin{aligned}
& \Re \left(\int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x) \cdot \overline{S^2[\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x)} dx \right. \\
&\quad - i h \int_{\mathbb{R}^3} \left[(\tilde{\chi} \vec{P}_{h,\beta A_0} g)(x) - i h (\nabla \tilde{\chi}) g(x) \right] \cdot \overline{S^2((\nabla \tilde{\chi})g)(x)} \\
&\quad \left. - (\tilde{\chi}(\nabla \tilde{\chi})g)(x) \cdot \overline{S^2(\vec{P}_{h,\beta A_0})g(x)} \right] dx \Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x) \cdot \overline{S^2[\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi} g)](x)} dx \\
&\quad - h^2 \int_{\mathbb{R}^3} (g \nabla \tilde{\chi})(x) \cdot \overline{(S^2 \nabla \tilde{\chi})g(x)} dx .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Enfin une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi}g)](x) \cdot \overline{S^2[\vec{P}_{h,\beta A_0}(\tilde{\chi}g)](x)} dx \\
& - h^2 \int_{\mathbb{R}^3} (g\nabla\tilde{\chi})(x) \cdot \overline{(S^2\nabla\tilde{\chi})g(x)} dx \\
& = \langle \tilde{\chi}g; (\vec{P}_{h,\beta A_0} S^2 \vec{P}_{h,\beta A_0}) \tilde{\chi}g \rangle - h^2 \langle g; (\nabla\tilde{\chi}) \cdot (S^2(\nabla\tilde{\chi}))g \rangle.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

En combinant (3.27)-(3.33), nous achevons la preuve du lemme. \square

Rappelons un résultat classique dans le lemme suivant :

Lemme 3.2.3.

Soit \vec{A}_0 le vecteur potentiel magnétique défini en (1.13). Alors pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe $\phi_{u,1} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\vec{A}_0(x) = \int_0^1 s\vec{B}_0\left(sx + (1-s)u\right) \wedge (x-u) ds + \nabla\phi_{u,1}. \tag{3.34}$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, définissons $\vec{B}_{0,u}$ par

$$\vec{B}_{0,u} : \mathbb{R}^3 \ni z \mapsto \vec{B}_0(z+u). \tag{3.35}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^3$ et $z = x - u$, nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{B}_0\left(sx + (1-s)u\right) &= \vec{B}_0(sz+u) \\
&= \vec{B}_{0,u}(sz),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

et

$$\int_0^1 s\vec{B}_0\left(sx + (1-s)u\right) \wedge (x-u) ds = \int_0^1 s\vec{B}_{0,u}(sz) \wedge z ds. \tag{3.37}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{\text{rot}}_x \left(\int_0^1 s\vec{B}_0\left(sx + (1-s)u\right) \wedge (x-u) ds \right) \\
& = \overrightarrow{\text{rot}}_z \left(\int_0^1 s\vec{B}_{0,u}(sz) \wedge z ds \right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Nous utilisons le fait que, pour tout \vec{B} tel que $\text{div } \vec{B} = 0$, alors

$$\vec{A}(z) = \int_0^1 s\vec{B}(sz) \wedge z ds, \tag{3.39}$$

vérifie

$$\overrightarrow{\text{rot}}_z \vec{A}(z) = \vec{B}(z). \quad (3.40)$$

Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}_x \left(\int_0^1 s \vec{B}_0 \left(sx + (1-s)u \right) \wedge (x-u) ds \right) \\ = \vec{B}_{0,u}(z) \\ = \vec{B}_0(x). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nous avons montré que

$$\overrightarrow{\text{rot}}_x \vec{A}_0(x) = \overrightarrow{\text{rot}}_x \left(\int_0^1 s \vec{B}_0 \left(sx + (1-s)u \right) \wedge (x-u) ds \right). \quad (3.42)$$

Il résulte de (3.42) que $\vec{A}_0(x)$ et $\int_0^1 s \vec{B}_0 \left(sx + (1-s)u \right) \wedge (x-u) ds$ ont même rotationnel dans \mathbb{R}^3 . Ils sont par conséquent équivalents de jauge. Il existe alors $\phi_{u,1}$ dans C^∞ tel que

$$\vec{A}_0(x) = \int_0^1 s \vec{B}_0 \left(sx + (1-s)u \right) \wedge (x-u) ds + \nabla \phi_{u,1}. \quad (3.43)$$

□

Dans la suite, pour $u \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, nous notons $\mathcal{B}(u, \lambda)$ la boule de centre u et de rayon \mathbb{R}^3 .

Lemme 3.2.4.

Soit \vec{A}_0 le vecteur potentiel magnétique défini en (1.13). Alors il existe $c_0 > 0$, et pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe $\phi_u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$|\vec{A}_0(x) - \vec{A}_{0,u}(x)| \leq c_0 \lambda^2, \quad \forall x \in \mathcal{B}(u, \lambda), \quad (3.44)$$

avec

$$\vec{A}_{0,u}(x) := \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x + \nabla \phi_u. \quad (3.45)$$

Démonstration.

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 s \vec{B}_0 \left(sx + (1-s)u \right) \wedge (x-u) ds \\ = \int_0^1 s \vec{B}_0(u) \wedge (x-u) ds \\ + \int_0^1 s \left(\vec{B}_0 \left(sx + (1-s)u \right) - \vec{B}_0(u) \right) \wedge (x-u) ds. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Par ailleurs

$$\int_0^1 s \vec{B}_0(u) \wedge (x - u) ds = -\frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge u + \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x. \quad (3.47)$$

Posons

$$\vec{U} = -\frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge u. \quad (3.48)$$

\vec{U} étant un champ de vecteurs constant (en fonction de x), alors

$$\vec{U} = \nabla \phi_{u,2}, \quad (3.49)$$

où

$$\phi_{u,2} = \vec{U} \cdot \vec{x}.$$

En remplaçant (3.46)-(3.48) dans (3.34), nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{A}_0(x) &= \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x + \nabla(\phi_{u,1} + \phi_{u,2}) \\ &+ \int_0^1 s \left(\vec{B}_0(sx + (1-s)u) - \vec{B}_0(u) \right) \wedge (x - u) ds. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nous avons sur le support de \vec{a} , l'existence d'une constante $c_0 > 0$ tel que

$$\left| \vec{B}_0(sx + (1-s)u) - \vec{B}_0(u) \right| \leq c_0 |s| |x - u|, \quad (3.51)$$

que nous remplaçons dans

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 s \left(\vec{B}_0(sx + (1-s)u) - \vec{B}_0(u) \right) \wedge (x - u) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 s \left| \vec{B}_0(sx + (1-s)u) - \vec{B}_0(u) \right| |x - u| ds. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nous obtenons alors que, pour $x \in \mathcal{B}(u, \lambda)$,

$$\left| \int_0^1 s \left(\vec{B}_0(sx + (1-s)u) - \vec{B}_0(u) \right) \wedge (x - u) ds \right| \leq \frac{c_0}{3} \lambda^2. \quad (3.53)$$

En combinant (3.50), (3.53) et en écrivant

$$\phi_u = \phi_{u,1} + \phi_{u,2}, \quad (3.54)$$

nous obtenons finalement que

$$\left| \vec{A}_0(x) - \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x - \nabla \phi_u \right| \leq \frac{c_0}{3} \lambda^2, \quad \forall x \in \mathcal{B}(u, \lambda). \quad (3.55)$$

□

Soit $\vec{A}_{0,u}$ le potentiel magnétique défini par

$$\vec{A}_{0,u}(x) := \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x. \quad (3.56)$$

La proposition suivante nous donne diverse formules de localisation.

Proposition 3.2.5.

Soient $h_0 > 0$, $c_2 > 0$, $]0, h_0] \ni h \mapsto \lambda(h) \in \mathbb{R}_+$ une fonction satisfaisant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) h^{-1/2} = 0. \quad (3.57)$$

Il existe des constantes $C_1 > 1$ ne dépend que de (h_0, c_2) et $\tilde{h}_0 \in]0, h_0]$ ne dépend que de λ et de c_2 , tel que pour tous $f = (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, $g \in C_0^\infty(\mathcal{B}(u, \lambda(h)), \mathbb{R})$, $S \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_s)$, vérifiant

$$\|S(x)\| \leq c_2, \quad (3.58)$$

$$\epsilon(h) = C_1 \max \left(h^{\frac{1}{4}}, \lambda(h), \lambda(h)^4 h^{-2} \right), \quad (3.59)$$

et pour $i \in \{1, 2\}$, nous avons les estimations suivantes :

1.

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{-i\frac{\phi_u}{h}} g f_i ; \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot S^2 [\vec{P}_{h, \beta A_0} (e^{-i\frac{\phi_u}{h}} g f_i)] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \leq (1 + \epsilon(h)) \left\langle g^2 f_i ; \vec{P}_{h, \beta \hat{A}_{0,u}} \cdot S^2 [\vec{P}_{h, \beta \hat{A}_{0,u}} (f_i)] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \quad + \epsilon(h) \left\langle g f_i ; g f_i \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \quad + h \epsilon(h) \left\langle f_i \nabla g ; f_i \nabla g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

2.

$$\begin{aligned} & \left\langle g f_i ; \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot S^2 [\vec{P}_{h, \beta A_0} (g f_i)] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \geq (1 - \epsilon(h)) \left\langle e^{i\frac{\phi_u}{h}} g f_i ; \vec{P}_{h, \beta \hat{A}_{0,u}} \cdot S^2 [\vec{P}_{h, \beta \hat{A}_{0,u}} (e^{i\frac{\phi_u}{h}} g f_i)] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \quad - \epsilon(h) \left\langle g f_i ; g f_i \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle g f ; h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(x) g f \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \left\langle g f ; h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) g f \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \right| \\ & \leq \epsilon(h) \left\langle g f ; g f \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

4.

$$\begin{aligned} & \left| \langle gf ; h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x)gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \langle gf ; h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u)gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \right| \\ & \leq \epsilon(h) \langle gf ; gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

5.

$$\begin{aligned} & \left| \langle gf ; [(D\vec{B}_0(x)\vec{a}(x)) \cdot \vec{\sigma}]gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \langle gf ; [(D\vec{B}_0(u)\vec{a}(u)) \cdot \vec{\sigma}]gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \right| \\ & \leq (h\beta)^{-1} \epsilon(h) \langle gf ; gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ici \vec{b} et \vec{a} ont été introduits respectivement en (1.19) et en (3.2).

Démonstration.

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\|a + b\|_{\mathbb{C}^3}^2 \leq (1 + \delta) \|a\|_{\mathbb{C}^3}^2 + \frac{1}{4} \delta^{-1} \|b\|_{\mathbb{C}^3}^2, \quad (3.65)$$

avec $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Sous l'hypothèse (3.58), nous avons donc l'estimation ponctuelle, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} & \|S(x)[\vec{P}_{h, \beta A_0}(e^{-i\frac{\phi_u}{h}} gf_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ & = \|S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u}(x)) + (\beta\vec{A}_0(x) - \beta\vec{A}_{0,u}(x))(e^{-i\frac{\phi_u}{h}} gf_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ & \leq (1 + \delta) \|S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u}(x))(e^{-i\frac{\phi_u}{h}} gf_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ & \quad + \frac{1}{4} c_2 \delta^{-1} \|(\beta\vec{A}_0(x) - \beta\vec{A}_{0,u}(x))gf_i\|_{\mathbb{C}^3}^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Rappelons de la démonstration du lemme 3.2.4 que

$$\vec{A}_{0,u} = \vec{\tilde{A}}_{0,u} + \nabla\phi_u. \quad (3.67)$$

De plus, en utilisant

$$\vec{p}(e^{-i\frac{\phi_u}{h}} gf_i) = e^{-i\frac{\phi_u}{h}} \left(\vec{p}(gf_i) - \frac{1}{h} \nabla\phi_u(gf_i) \right), \quad (3.68)$$

nous obtenons

$$\|S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u}(x))(e^{-i\frac{\phi_u}{h}} gf_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 = \|S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{\tilde{A}}_{0,u}(x))(gf_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2. \quad (3.69)$$

En combinant (3.66) et (3.69), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|S(x)[\vec{P}_{h,\beta A_0}(e^{-i\frac{\phi u}{h}} g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 &\leq (1 + \delta) \|S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u}(x))](g f_i)(x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} c_2 \delta^{-1} \|(\beta\vec{A}_0(x) - \beta\vec{A}_{0,u}(x)) g f_i\|_{\mathbb{C}^3}^2. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Nous appliquons le lemme 3.2.1 à $S(x)$ et à $\vec{A}_{0,u}(x)$ puis nous utilisons l'hypothèse (3.58) et nous remplaçons dans (3.70). Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} &\|S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0(x))(e^{-i\frac{\phi u}{h}} g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\leq (1 + \delta)^2 \|g(x) S(x)[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u}(x))(f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\quad + 2c_2 h^2 \delta^{-1} (1 + \delta) \|f_i(x) \nabla g(x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} c_2 \delta^{-1} \|(\beta\vec{A}_0(x) - \beta\vec{A}_{0,u}(x)) g f_i(x)\|_{\mathbb{C}^3}^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Puis, pour contrôler

$$\frac{1}{4} c_2 \delta^{-1} \beta^2 \|(\vec{A}_0(x) - \vec{A}_{0,u}(x)) g f_i(x)\|_{\mathbb{C}^3}^2,$$

sur le support de g , c'est à dire pour $x \in \mathcal{B}(u, \lambda(h))$, nous utilisons (3.44) et obtenons

$$\frac{1}{4} \beta^2 c_2 \delta^{-1} \|\vec{A}_0(x) - \vec{A}_{0,u}(x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \leq \frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta^{-1} \lambda^4(h), \quad \forall x \in \mathcal{B}(u, \lambda(h)). \quad (3.72)$$

Nous utilisons le fait que, pour tout $p \in \{1, 2, 3\}$, nous avons

$$\langle \phi; \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^p)} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \phi; \psi \rangle_{\mathbb{C}^p} dx. \quad (3.73)$$

Alors (3.71) s'écrit

$$\begin{aligned} &\langle S[\vec{P}_{h,\beta A_0}(e^{-i\frac{\phi u}{h}} g f_i)] ; S[\vec{P}_{h,\beta A_0}(e^{-i\frac{\phi u}{h}} g f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &\leq (1 + \delta)^2 \langle g S[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] ; g S[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &\quad + 2c_2 \delta^{-1} (1 + \delta) h^2 \langle f_i \nabla g ; f_i \nabla g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta^{-1} \lambda^4(h) \langle g f_i ; g f_i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Estimation de $\langle gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] ; gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}$
 Comme g est réelle, nous écrivons

$$\begin{aligned} & \langle gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] ; gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &= \langle g^2S[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] ; S[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

La formule de Leibniz nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \langle g^2S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] ; S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &= \Re \langle S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(g^2f_i)] ; S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ & \quad - 2h\Re \langle gf_i S(\nabla g) ; S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

De plus $S(x)$ est symétrique, nous avons alors

$$\begin{aligned} & \langle S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(g^2f_i)] ; S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &= \langle [\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(g^2f_i)] ; S^2[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Puis par une intégration par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle [\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(g^2f_i)] ; S^2[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &= \Re \langle g^2f_i ; \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} \cdot S^2[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

En combinant (3.75)-(3.78), nous obtenons enfin

$$\begin{aligned} & \Re \langle gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] ; gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ &= \Re \langle g^2f_i ; \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} \cdot S^2[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \quad - 2h\Re \langle gf_i S(\nabla g) ; S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant (3.58) et en appliquant une estimation du type Cauchy-Schwarz au dernier terme de droite, nous écrivons

$$\begin{aligned} & | - 2h\Re \langle gf_i S(\nabla g) ; S[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} | \\ & \leq \delta^{-1}h^2 \|f_i \nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}^2 + \delta \|gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}^2. \end{aligned} \quad (3.80)$$

En remplaçant (3.80) dans (3.79), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] ; gS[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_{0,u})(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\ & \leq (1 - \delta)^{-1} \Re \langle g^2f_i ; \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} \cdot S^2[\vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & \quad + \delta^{-1}(1 - \delta)^{-1}h^2 \Re \langle f_i \nabla g ; f_i \nabla g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

En remplaçant (3.81) dans (3.74), nous trouvons

$$\begin{aligned}
& \langle S[\vec{P}_{h,\beta A_0}(e^{-i\frac{\phi u}{h}} g f_i)] ; S[\vec{P}_{h,\beta A_0}(e^{-i\frac{\phi u}{h}} g f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \leq \\
& (1 + \delta)^2 (1 - \delta)^{-1} \langle g^2 f_i ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}} \cdot S^2[\vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}}(f_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\
& + \delta^{-1} (1 + \delta) h^2 ((1 + \delta)(1 - \delta)^{-1} + 2c_2) \langle f_i \nabla g ; f_i \nabla g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\
& + \frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta^{-1} \lambda^4(h) \langle g f_i ; g f_i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Pour prouver (3.61), nous utilisons (après avoir ajouté et retranché $\vec{A}_{0,u}(x)$) l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|a + b\|_{\mathbb{C}^3} \geq (1 - \delta) \|a\|_{\mathbb{C}^3}^2 - \frac{1}{4} \delta^{-1} \|b\|_{\mathbb{C}^3}^2,$$

avec $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

En utilisant (3.58), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0(x))(g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 & \geq (1 - \delta) \|S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_{0,u}(x))(g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\
& - \frac{1}{4} \beta^2 c_2 \delta^{-1} \|(\vec{A}_0(x) - \vec{A}_{0,u}(x))(g f_i)(x)\|_{\mathbb{C}^3}^2.
\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant (3.44) et obtenons

$$\begin{aligned}
\|S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0(x))(g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 & \geq (1 - \delta) \|S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_{0,u}(x))(g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\
& + \frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta^{-1} \lambda^4(h) \|g f_i(x)\|_{\mathbb{C}}^2.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

De plus, en utilisant

$$\vec{p}(e^{i\frac{\phi u}{h}} g f_i) = e^{i\frac{\phi u}{h}} \left(\vec{p}(g f_i) + \frac{1}{h} \nabla \phi_u(g f_i) \right), \tag{3.84}$$

et (3.56), nous trouvons

$$\begin{aligned}
& \|S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_{0,u}(x))(e^{i\frac{\phi u}{h}} g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2 \\
& = \|S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_{0,u}(x))(g f_i)](x)\|_{\mathbb{C}^3}^2.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

En combinant (3.83), (3.85) et (3.73), nous écrivons

$$\begin{aligned}
& \langle S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0(x))(g f_i)](x) ; S(x)[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0(x))(g f_i)](x) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \geq \\
& (1 - \delta) \langle S(x)[\vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}}(e^{i\frac{\phi u}{h}} g f_i)](x) ; S(x)[\vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}}(e^{i\frac{\phi u}{h}} g f_i)](x) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)} \\
& - \frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta^{-1} \lambda^4(h) \langle g f_i ; g f_i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Enfin une intégration par parties nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \Re \langle gf_i ; \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot S^2[\vec{P}_{h, \beta A_0}(gf_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \geq \\ & (1 - \delta) \Re \langle e^{i \frac{\phi u}{h}} gf_i ; (h\vec{p} + \beta \vec{A}_{0,u}) \cdot S^2[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_{0,u})(e^{i \frac{\phi u}{h}} gf_i)] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})} \\ & - \frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta^{-1} \lambda^4(h) \langle gf_i ; gf_i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Pour la preuve des deux dernières estimations, nous utilisons (1.7), (1.9) et le contrôle de la variation du champ magnétique sur le support de g (sur $\mathcal{B}(0, \lambda(h))$) :

$$|\vec{B}_0(x) - \vec{B}_0(u)| \leq c_0 \lambda(h), \quad \forall x \in \mathcal{B}(u, \lambda(h)), \quad \forall u \in \mathbb{R}^3, \quad (3.88)$$

Nous obtenons ainsi l'existence d'une constante $\widehat{c}_0 > 0$ telle que nous avons sur le support de g (sur $\mathcal{B}(0, \lambda(h))$)

$$\begin{aligned} & h\beta |\langle gf ; \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(x) gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \langle gf ; \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}| \\ & \leq \widehat{c}_0 \lambda(h) \langle gf ; gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Rappelons que \vec{b} a été défini en (1.19). D'après le théorème des accroissements finis, nous avons sur le support de g , (sur $\mathcal{B}(0, \lambda(h))$) que

$$|\vec{b}(x) - \vec{b}(u)| \leq \|\nabla \vec{b}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lambda(h). \quad (3.90)$$

Il résulte de (3.90) l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & h\beta |\langle gf, \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \langle gf, \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}| \\ & \leq c_2 \lambda \langle gf, gf \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Il résulte de (1.5), l'existence d'une constante $\tilde{c}_0 > 0$ telle que

$$|D\vec{B}_0(x) - D\vec{B}_0(u)| \leq \tilde{c}_0 \lambda(h), \quad \forall x \in \mathcal{B}(u, \lambda(h)), \quad \forall u \in \mathbb{R}^3. \quad (3.92)$$

Il résulte de la définition (3.2), l'existence d'une constante $\tilde{c}_1 > 0$ telle que

$$|\vec{a}(x) - \vec{a}(u)| \leq \tilde{c}_1 \lambda(h), \quad \forall x \in \mathcal{B}(u, \lambda(h)), \quad \forall u \in \mathbb{R}^3. \quad (3.93)$$

En combinant (3.92) et (3.93), nous obtenons l'existence d'une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & h\beta |\langle gf ; [(D\vec{B}_0(x))\vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma}] gf \rangle - \langle gf ; [(D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \cdot \vec{\sigma}] gf \rangle| \\ & \leq c_3 \lambda(h) \langle gf ; gf \rangle. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Notons

$$\tilde{C}_{max} = \hat{c}_0 + c_2 + c_3. \quad (3.95)$$

Pour achever la preuve de la proposition 3.2.5, nous rappelons que $\epsilon(h)$ est cherché sous la forme (3.59) et nous cherchons $\delta = \delta(h)$ sous la forme :

$$\delta(h) = C_2 \max \left(h^{\frac{3}{4}}, \lambda(h), \lambda(h)^4 h^{-2} \right), \quad (3.96)$$

où les constantes C_1, C_2 , vérifient $1 < C_2 < C_1$ sont cherchées telles que les conditions suivantes

$$(1 - \delta(h))^{-1} (1 + \delta(h))^2 \leq (1 + \epsilon(h)), \quad (3.97)$$

$$\delta^{-1}(h) (1 + \delta(h)) h^2 [2c_2 + (1 - \delta(h))^{-1} (1 + \delta(h))] \leq h \epsilon(h), \quad (3.98)$$

$$\frac{1}{4} \beta^2 c_2 c_0^2 \delta(h)^{-1} \lambda^4(h) \leq \epsilon(h), \quad (3.99)$$

et

$$2\tilde{C}_{max} \lambda(h) \leq \epsilon(h) \quad (3.100)$$

soient satisfaites. Ici $\epsilon(h)$ a été introduite en (3.59).

Pour h assez petit la condition (3.97) conduit à

$$4C_2 \leq C_1. \quad (3.101)$$

La condition (3.98) conduit à

$$4h \leq C_1 C_2 \max \left(h^{\frac{3}{4}}, \lambda(h), \lambda(h)^4 h^{-2} \right) \max \left(h^{\frac{1}{4}}, \lambda(h) \right). \quad (3.102)$$

En discutant selon le signe de $\lambda(h)$ et de $h^{-1/4}$, la condition (3.98) est vérifiée si

$$C_1 C_2 \geq 4. \quad (3.103)$$

La condition (3.100) conduit à

$$2\tilde{C}_{max} < C_1. \quad (3.104)$$

Nous pouvons par exemple prendre

$$C_1 = \max(10, 2\tilde{C}_{max} + 1), \quad (3.105)$$

et

$$C_2 = \frac{C_1}{5}. \quad (3.106)$$

□

Chapitre 4

États cohérents pour l'opérateur de Pauli avec champ magnétique constant

4.1 Présentation

Nous rappelons dans ce chapitre comment on peut utiliser les états cohérents pour l'opérateur de Pauli avec un champ magnétique constant

$$\mathcal{H}_0 = (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{B} \wedge x)^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad (4.1)$$

où $\vec{p} = -i\nabla$, $\vec{B} = (0, 0, 1)$ est le champ magnétique et $\vec{\sigma}$ est le vecteur des matrices de Pauli introduit en (1.12). L'opérateur \mathcal{H}_0 agit sur $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$. Il se décompose naturellement de la manière suivante

$$\mathcal{H}_0 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{B} \wedge x)^2 + 1 \right] f_1 \\ \left[(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{B} \wedge x)^2 - 1 \right] f_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

En d'autres termes

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}_0^\uparrow & 0 \\ 0 & \mathfrak{h}_0^\downarrow \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

où

$$\mathfrak{h}_0^\uparrow = (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{B} \wedge x)^2 + 1$$

et

$$\mathfrak{h}_0^\perp = (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{B} \wedge x)^2 - 1$$

opèrent sur $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

Le but de ce chapitre est de construire une famille indexée par $(\nu, \xi)_{\{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}\}}$ de projecteurs

$$\Pi^\nu(\xi) = \begin{pmatrix} \Pi_\uparrow^\nu(\xi) & 0 \\ 0 & \Pi_\downarrow^\nu(\xi) \end{pmatrix}, \quad (\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R})$$

sur $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ (appelée états cohérents) qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{\mathbb{R}} \Pi^\nu(\xi) d\xi = 1_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}, \quad (4.4)$$

et

$$\mathcal{H}_0 \Pi^\nu(\xi) = (2\nu + \xi^2) \Pi^\nu(\xi). \quad (4.5)$$

Le point important est qu'il découle de ces propriétés la décomposition suivante de \mathcal{H}_0 :

$$\mathcal{H}_0 = \sum_\nu \int_{\mathbb{R}} (2\nu + \xi^2) \Pi^\nu(\xi) d\xi. \quad (4.6)$$

Cette construction va nous permettre de calculer la somme des valeurs propres strictement négatives de $\mathcal{H}_0 + V$, pour un potentiel V . Cette construction est utilisée dans les travaux de [29, 30, 10], et elle s'appuie sur la construction des fonctions de Landau (fonctions propres 'généralisées' de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant).

Rappelons que si $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors

$$f = \sum_\nu (\langle f, f_\nu \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}) f_\nu = \sum_\nu \left(f_\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f_\nu(x)} dx \right). \quad (4.7)$$

4.2 Fonctions de Landau pour l'opérateur de Schrödinger magnétique dans \mathbb{R}^2

Nous commençons par rappeler des propriétés classiques du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique constant. Considérons le cas où le potentiel magnétique \vec{A} est de la forme $\vec{A} = (0, x_1)$. L'opérateur de Schrödinger s'écrit

$$P_A^\perp = -\partial_{x_1}^2 + (-i\partial_{x_2} + x_1)^2. \quad (4.8)$$

Afin d'analyser le spectre de l'opérateur P_A^\perp , définissons les transformations unitaires suivantes :

$$U_1 : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_\xi) \\ f & \longmapsto & U_1 f \end{array} \quad (4.9)$$

où

$$U_1 f(x_1, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_2 \xi} f(x_1, x_2) dx_2, \quad (4.10)$$

et

$$U_2 : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_\xi) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_\xi) \\ f & \longmapsto & U_2 f, \end{array} \quad (4.11)$$

où

$$(U_2 f)(y, \xi) = f(y - \xi, \xi). \quad (4.12)$$

Notons que la transformation U_1 est la transformation de Fourier partielle par rapport à la deuxième variable x_2 , et que U_2 correspond à une translation par rapport à la première variable x_1 .

Définissons

$$U = U_2 U_1, \quad L^{(2)} = U P_A^\perp U^*. \quad (4.13)$$

Alors l'opérateur $L^{(2)}$ s'exprime sous la forme,

$$L^{(2)} : D(L^{(2)}) \ni u \mapsto L^{(2)} u = (-\partial_y^2 + y^2) u, \quad (4.14)$$

où le domaine de $L^{(2)}$ est donné par

$$D(L^{(2)}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_{\xi_2}) ; \right. \\ \left. \partial_y^j u \in L^2(\mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_{\xi_2}), y^j u \in L^2(\mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_{\xi_2}), j = 1, 2 \right\}. \quad (4.15)$$

Nous remarquons que l'opérateur $L^{(2)}$ est l'oscillateur harmonique agissant sur la variable y , dont le spectre est donné par les 'niveaux de Landau' :

$$\{(2\nu + 1) ; \nu \in \mathbb{N}\}.$$

Les fonctions propres de l'oscillateur harmonique sont données par les fonctions d'Hermite, $(h_\nu)_{\{\nu \in \mathbb{N}\}}$, qui forment une base orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour $\nu \in \mathbb{N}$, la fonction h_ν est définie par

$$h_\nu(y) = c_\nu (-1)^\nu \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \frac{d^\nu}{dy^\nu} \exp(-y^2), \quad (4.16)$$

où c_ν est une constante positive introduite pour normaliser h_ν :

$$\int_{\mathbb{R}} |h_\nu(x)|^2 dx = 1. \quad (4.17)$$

Nous avons

$$(-\partial_y^2 + y^2)h_\nu = (2\nu + 1)h_\nu. \quad (4.18)$$

Comme h_ν est la ν -ième fonction propre de l'oscillateur harmonique, alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_\xi)$, la fonction

$$(y, \xi) \mapsto f(\xi)h_\nu(y) \quad (4.19)$$

est une fonction propre de l'opérateur $L^{(2)}$ correspondant à la valeur propre $(2\nu + 1)$ avec $\nu \in \mathbb{N}$.

Ensuite, définissons une famille de projecteurs $(F_\nu^{(2)})_{\nu \in \mathbb{N}}$, où, pour $\nu \in \mathbb{N}$, le projecteur $F_\nu^{(2)}$ est donné par

$$F_\nu^{(2)} = U_2^* F_\nu^{(1)}. \quad (4.20)$$

Ici U_2 est la transformation unitaire introduite en (4.11) et pour $\nu \in \mathbb{N}$, le projecteur $F_\nu^{(1)}$ est donné par

$$F_\nu^{(1)} : L^2(\mathbb{R}^2) \ni u(t, \xi) \longmapsto h_\nu(\xi) \int_{\mathbb{R}} u(z, \xi) h_\nu(t - z) dz. \quad (4.21)$$

Lemme 4.2.1.

La famille de projecteurs $(F_\nu^{(2)})_{\nu \in \mathbb{N}}$ satisfait

$$L^{(2)} F_\nu^{(2)} = (2\nu + 1)F_\nu^{(2)}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (4.22)$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu^{(2)} = Id. \quad (4.23)$$

Démonstration.

Il suffit de démontrer que

$$L^{(2)} F_\nu^{(1)} = (2\nu + 1)F_\nu^{(1)}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (4.24)$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu}^{(1)} = U_2. \quad (4.25)$$

La propriété (4.24) découle immédiatement de la définition de $F_{\nu}^{(1)}$ en (4.21) et de la formule (4.18).

Prenons $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et montrons que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu}^{(1)} u = U_2 u. \quad (4.26)$$

Après un changement de variable, il découle de la définition de $F_{\nu}^{(1)}$,

$$(F_{\nu}^{(1)} u)(t, \xi) = h_{\nu}(\xi) \int_{\mathbb{R}} u(t - z, \xi) h_{\nu}(z) dz, \quad \forall (t, \xi) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (F_{\nu}^{(1)} u)(t, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\langle u(t - \cdot, \xi), h_{\nu} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}) h_{\nu}(\xi), \quad (4.27)$$

où $(h_{\nu})_{\nu}$ sont les fonctions d'Hermite. Comme $(h_{\nu})_{\nu}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, on a d'après (4.7),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\langle u(t - \cdot, \xi), h_{\nu} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}) h_{\nu}(\xi) = u(t - \xi, \xi).$$

En substituant cette dernière formule dans (4.27), nous achevons la démonstration de (4.26). \square

Définition 4.2.2.

Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, définissons un projecteur

$$\mathbb{F}_{\nu} : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$$

par

$$\mathbb{F}_{\nu} = U^* F_{\nu}^{(2)} U.$$

Ici, $F_{\nu}^{(2)}$ est le projecteur introduit en (4.20) et U est la transformation unitaire introduite en (4.13).

Il découle immédiatement de la définition de \mathbb{F}_{ν} , du lemme 4.2.1 et des formules (4.13) et (4.14) la proposition suivante :

Proposition 4.2.3.

La famille de projecteurs $(\mathbb{F}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. P_A^\perp étant l'opérateur de Schrödinger magnétique introduit en (4.8), on a pour tout $\nu \in \mathbb{N}$,

$$P_A^\perp \mathbb{F}_\nu = (2\nu + 1)\mathbb{F}_\nu. \quad (4.28)$$

2. On a la décomposition suivante de l'identité,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{F}_\nu = \text{Id}. \quad (4.29)$$

Proposition 4.2.4.

La famille de projecteurs $(\mathbb{F}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ satisfait, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{F}_\nu f = F_\nu * f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad (4.30)$$

où la fonction F_ν est définie pour tout $x_\perp = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} F_\nu(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{-ix_1x_2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(ix_2\eta) h_\nu\left(\eta + \frac{x_1}{2}\right) \\ &\quad \times h_\nu\left(\eta - \frac{x_1}{2}\right) d\eta. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De plus, la fonction F_ν s'exprime sous la forme

$$F_\nu(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{-ix_1x_2}{2}\right) \exp\left(\frac{-|x_\perp|^2}{4}\right) L_\nu^{(0)}\left(\frac{|x_\perp|^2}{2}\right). \quad (4.32)$$

Ici, $L_\nu^{(0)}$ sont les polynômes de Laguerre définis par

$$L_\nu^0(x) = \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-m)! \times (\nu+m)!} \frac{(-x)^m}{m!}. \quad (4.33)$$

Démonstration.

Prenons $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et posons $u(z, \xi) = (U_2 U_1 f)(z, \xi)$. Notons que, d'après la définition de $F_\nu^{(1)}$ et après un changement de variable dans (4.21), on a :

$$[U_2^* F_\nu^{(2)} U_2 U_1 f](x_1, \xi) = h_\nu(\xi) \int_{\mathbb{R}} u(x_1 - z + \xi, \xi) h_\nu(z + \xi) dz. \quad (4.34)$$

En écrivant

$$u(x_1 - z + \xi, \xi) = U_2^* u(x_1 - z, \xi)$$

et en appliquant U_1^* : la transformation de Fourier inverse partielle en ξ , on obtient,

$$\begin{aligned} [U_1^* U_2^* F_\nu^{(2)} U_2 U_1 f] (x_1, x_2) = \\ (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left[(U_1^* (h_\nu(z + \cdot) h_\nu(\cdot)))(x_2) *_{x_2} (U_1^* U_2^* u(x_1 - z, \cdot))(x_1, x_2) \right] dz. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ici, $*_{x_2}$ désigne la convolution par rapport à la deuxième variable x_2 . Nous avons utilisé aussi le fait que la transformation de Fourier du produit de deux fonctions est, à multiplication par $(2\pi)^{-1/2}$ près, la convolution des transformations de Fourier de ces fonctions.

En écrivant

$$h_\nu(\xi) h_\nu(z + \xi) = U_2^* h_\nu(\xi) h_\nu(z)$$

et en utilisant la définition de u , l'identité (4.35) s'écrit sous la forme,

$$[U_1^* U_2^* F_\nu^{(2)} U_2 U_1 f] (x_1, x_2) = (2\pi)^{1/2} \left[(U_1^* U_2^* (g_\nu)) * f \right] (x_1, x_2), \quad (4.36)$$

où la fonction g_ν est définie par

$$g_\nu : \mathbb{R}^2 \ni (y, \xi) \mapsto h_\nu(y) h_\nu(\xi).$$

Le seul point à vérifier maintenant est que la fonction $(U_1^* U_2^* (g_\nu))(x_1, x_2)$ est en fait égale à la fonction F_ν introduite en (4.31).

D'après la définition de la transformation de Fourier inverse, on a,

$$(U_1^* U_2^* (g_\nu))(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(ix_2 \xi) h_\nu(\xi) h_\nu(x_1 + \xi) d\xi. \quad (4.37)$$

Soit $\eta = x_1/2 + \xi$, alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \exp(ix_2 \xi) h_\nu(\xi) h_\nu(x_1 + \xi) d\xi \\ &= \exp\left(\frac{-ix_1 x_2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(ix_2 \eta) h_\nu\left(\eta + \frac{x_1}{2}\right) h_\nu\left(\eta - \frac{x_1}{2}\right) d\eta. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pour calculer l'intégrale à droite de (4.38), utilisons le lemme suivant (cf. [14, théorème 1.104]) dont le résultat a été énoncé probablement pour la première fois par Kaluder [24].

Lemme 4.2.5.

Soient $x_{\perp} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\eta \in \mathbb{R}$, soit $\nu \in \mathbb{N}$. Considérons h_{ν} la fonction d'Hermite définie en (4.16). Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \exp(ix_2\eta) h_{\nu}\left(\eta + \frac{x_1}{2}\right) h_{\nu}\left(\eta - \frac{x_1}{2}\right) d\eta \\ &= \exp\left(-\frac{|x_{\perp}|^2}{4}\right) L_{\nu}^{(0)}\left(\frac{|x_{\perp}|^2}{2}\right), \end{aligned}$$

où les $L_{\nu}^{(0)}$ sont les polynômes de Laguerre définis en (4.33).

Il résulte du lemme 4.2.5, avec $x_{\perp} = (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{-ix_1x_2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(ix_2\eta) h_{\nu}\left(\eta + \frac{x_1}{2}\right) h_{\nu}\left(\eta - \frac{x_1}{2}\right) d\eta \\ &= \exp\left(\frac{-ix_1x_2}{2}\right) \exp\left(\frac{-|x_{\perp}|^2}{4}\right) L_{\nu}^{(0)}\left(\frac{|x_{\perp}|^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En combinant (4.37)-(4.39), nous obtenons que

$$(U_1^* U_2^*(g_{\nu})) = F_{\nu}. \quad (4.40)$$

En rappelant (4.36), nous achevons la preuve de la proposition 4.2.3. \square

Corollaire 4.2.6.

Pour toute fonction $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $\nu \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\chi \mathbb{F}_{\nu} \chi$ est un opérateur à trace dont la trace est donnée par :

$$\text{tr}(\chi \mathbb{F}_{\nu} \chi) = \frac{1}{2\pi} \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Ici, \mathbb{F}_{ν} est le projecteur introduit dans la définition 4.2.2.

Démonstration.

D'après la proposition 4.2.3, l'opérateur $\chi \mathbb{F}_{\nu} \chi$ est un opérateur à noyau dont le noyau intégral est dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ et donné par

$$\mathfrak{F}_{\nu}(x, y) : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \chi(x) F_{\nu}(x - y) \chi(y),$$

où la fonction F_{ν} a été introduite en (4.31). Ce noyau étant dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ cet opérateur est à trace et

$$\begin{aligned} \text{tr}(\chi \mathbb{F}_{\nu} \chi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{F}_{\nu}(y, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\chi(y)|^2 F_{\nu}(0) dy = \frac{1}{2\pi} \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

\square

4.3 Fonctions de Landau pour l'opérateur de Schrödinger magnétique dans \mathbb{R}^3

Considérons le cas où le champ magnétique \vec{B} est de la forme $\vec{B} = (0, 0, 1)$. Définissons le champ de vecteurs

$$\mathbb{R}^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \vec{A}(x) = (0, x_1, 0).$$

Considérons l'opérateur de Schrödinger magnétique dans \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \vec{P}_A^2 &= (-i\nabla + \vec{A})^2 \\ &= -\partial_{x_1}^2 + (-i\partial_{x_2} + x_1)^2 - \partial_{x_3}^2. \end{aligned}$$

Définissons la suite de fonctions de Landau pour l'opérateur \vec{P}_A^2 ,

$$g_{\nu, \xi} : \mathbb{R}^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto F_\nu(x_1, x_2) \exp(i\xi x_3), \quad \forall (\nu, \xi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad (4.41)$$

où la fonction F_ν a été introduite en (4.31).

Définissons aussi une famille de projecteur $(\Pi_0^\nu(\xi))_{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}}$,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \mapsto (\Pi_0^\nu(\xi))(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) g_{\nu, \xi}(x - y) dy. \quad (4.42)$$

Proposition 4.3.1.

La famille $(\Pi_0^\nu(\xi))_{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}}$ satisfait,

1.

$$\vec{P}_A^2 \Pi_0^\nu(\xi) = (2\nu + 1 + \xi^2) \Pi_0^\nu(\xi), \quad \forall (\nu, \xi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad (4.43)$$

2.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \Pi_0^\nu(\xi) d\xi = 1_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \quad (4.44)$$

Démonstration.

Prenons $(\nu, \xi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. D'après l'expression de $g_{\nu, \xi}$ en (4.41) et de \vec{P}_A^2 , on a,

$$\vec{P}_A^2 g_{\nu, \xi} = \exp(i\xi_3 x_3) [-\partial_{x_1}^2 - (\partial_{x_2} + x_1)^2 + \xi^2] F_\nu(x_1, x_2).$$

Comme F_ν est une fonction propre de l'opérateur de Schrödinger dans \mathbb{R}^2 , on obtient,

$$\begin{aligned} \vec{P}_A g_{\nu, \xi}(x) &= (2\nu + 1 + \xi^2) F_\nu(x_1, x_2) \exp(i\xi_3 x_3) \\ &= (2\nu + 1 + \xi^2) g_{\nu, \xi}(x). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ceci suffit, d'après la définition de (4.42), à déduire (4.43).

Montrons maintenant (4.44) : Soit $v \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, nous souhaitons prouver que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\Pi_0^\nu(\xi) v \right) d\xi = v. \quad (4.46)$$

En rappelant la définition de l'opérateur $\Pi_0^\nu(\xi)$ en (4.42),

$$\Pi_0^\nu(\xi)v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} g_{\nu,\xi}(x-y) v(y) dy, \quad (4.47)$$

où la fonction $g_{\nu,\xi}$ a été introduite en (4.41).

Alors, nous obtenons que,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} g_{\nu,\xi}(x-y) v(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} F_\nu(x_\perp - y_\perp) \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right) v(y) dy \\ &= \int_{y_3} \int_{y_\perp} F_\nu(x_\perp - y_\perp) \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right) v(y_\perp, y_3) dy_\perp dy_3 \\ &= \int_{y_3} \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right) \left(\int_{y_\perp} F_\nu(x_\perp - y_\perp) v(y_\perp, y_3) dy_\perp \right) dy_3. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Il résulte de la proposition 4.2.3, que

$$\sum_{\nu} \int_{\mathbb{R}^2} F_\nu(x_\perp - y_\perp) v(y_\perp, y_3) dy_\perp = v(x_\perp, y_3). \quad (4.49)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\Pi_0^\nu(\xi) v \right) d\xi \\ &= \int_{y_3} \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right) \left(\int_{y_\perp} F_\nu(x_\perp - y_\perp) v(y_\perp, y_3) dy_\perp \right) dy_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{y_3} \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right) v(x_\perp, y_3) dy_3 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\xi x_3\right) \left(\int_{y_3} \exp\left(-i\xi y_3\right) v(x_\perp, y_3) dy_3 \right) d\xi. \end{aligned} \quad (4.50)$$

De plus, nous remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-i\xi y_3) v(x_\perp, y_3) dy_3 = (2\pi)^{1/2} (\mathcal{F}_{y_3 \rightarrow \xi} v)(x_\perp, \xi), \quad (4.51)$$

où $\mathcal{F}_{y_3 \rightarrow \xi}$ est la transformation de Fourier partielle par rapport à la troisième variable y_3 . Alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \exp(i \xi x_3) \left(\int_{y_3} \exp(-i \xi y_3) v(x_{\perp}, y_3) d y_3 \right) d \xi \\
&= (2\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(i \xi x_3) (\mathcal{F}_{y_3 \rightarrow \xi} v)(x_{\perp}, \xi) d \xi \\
&= 2\pi \left(\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x_3}^{-1} \left(\mathcal{F}_{y_3 \rightarrow \xi} v \right) (x_{\perp}, x_3) \right) (\xi) \\
&= 2\pi v(x_{\perp}, x_3) \\
&= 2\pi v(x).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

□

4.4 États cohérents de l'opérateur de Pauli avec un champ magnétique constant

Nous revenons dans cette section à notre but principal : construire des états cohérents pour l'opérateur de Pauli défini par

$$\mathcal{H}_{0,A} = (\vec{p} + \vec{A})^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \tag{4.53}$$

où $\vec{A} = (0, x_1, 0)$ et $\vec{B} = (0, 0, 1)$.

$\mathcal{H}_{0,A}$ opère sur $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, et son domaine est donné par :

$$D(\mathcal{H}_{0,A}) = \{(f_1, f_2) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) ; (\vec{p} + \vec{A})^j f_i \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), i, j = 1, 2\}. \tag{4.54}$$

En définissant

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\uparrow} &= \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.55}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\downarrow} &= \frac{1}{2} (1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.56}$$

nous avons

$$\mathcal{H}_{0,A}\mathcal{P}^\uparrow = \mathcal{P}^\uparrow\mathcal{H}_{0,A}, \quad (4.57)$$

$$\mathcal{H}_{0,A}\mathcal{P}^\downarrow = \mathcal{P}^\downarrow\mathcal{H}_{0,A}, \quad (4.58)$$

et

$$\mathcal{P}^\uparrow + \mathcal{P}^\downarrow = I. \quad (4.59)$$

Il est naturel alors d'effectuer la décomposition suivante

$$\mathcal{H}_{0,A} = \mathcal{H}_{0,A}\mathcal{P}^\uparrow + \mathcal{H}_{0,A}\mathcal{P}^\downarrow, \quad (4.60)$$

Nous appellerons

$$\mathcal{H}_{0,A}^\uparrow = (\mathcal{H}_{0,A})_{/Im\mathcal{P}^\uparrow}, \quad (4.61)$$

$$\mathcal{H}_{0,A}^\downarrow = (\mathcal{H}_{0,A})_{/Im\mathcal{P}^\downarrow}, \quad (4.62)$$

Notons que

$$\mathcal{H}_{0,A}^\uparrow : \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ((\vec{p} + \vec{A})^2 + 1)u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

$$\mathcal{H}_{0,A}^\downarrow : \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ ((\vec{p} + \vec{A})^2 - 1)u \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

agissant respectivement sur les espaces

$$X^\uparrow = \{(u, 0) ; u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}, \quad (4.65)$$

$$X^\downarrow = \{(0, u) ; u \in L^2(\mathbb{R}^3)\} \quad (4.66)$$

qu'on peut identifier à $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Il résulte de [32] que

$$\text{Spec } \mathcal{H}_{0,A} = \left(\text{Spec } \mathcal{H}_{0,A}^\uparrow \right) \cup \left(\text{Spec } \mathcal{H}_{0,A}^\downarrow \right). \quad (4.67)$$

Construisons une famille $(\mathcal{K}_\nu^\xi)_{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}}$ de fonctions propres 'généralisées' de $\mathcal{H}_{0,A}$

$$\mathcal{K}_\nu^\xi(x_1, x_2, x_3) = K_\nu(x_\perp) \exp(i\xi x_3), \quad (4.68)$$

où

$$K_\nu(x_\perp) = \begin{pmatrix} F_{\nu-1}(x_1, x_2) \\ F_\nu(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Ici $F_{-1} \equiv 0$ et pour $\nu \in \mathbb{N}$, F_ν est introduite en (4.31). Il découle de la proposition 4.3.1 la propriété suivante,

$$\mathcal{H}_{0,A} \mathcal{K}_\nu^\xi = [2\nu + \xi^2] \mathcal{K}_\nu^\xi. \quad (4.70)$$

Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, nous définissons l'opérateur $\Pi^\nu(\xi)$ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ dont le noyau est défini par

$$\begin{aligned} \pi^\nu(\xi)(x, y) &= \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right) \times (F_{\nu-1}(x_\perp - y_\perp) \mathcal{P}^\dagger + F_\nu(x_\perp - y_\perp) \mathcal{P}^\downarrow) \\ &= \mathcal{K}_\nu^\xi(x - y). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Par convention, nous posons $\Pi_{-1} \equiv 0$. En remplaçant l'expression de F_ν que nous avons introduite en (4.31), nous obtenons pour tout $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \pi^\nu(\xi)(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-i(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\right) \exp\left(-\frac{|x_\perp - y_\perp|^2}{4}\right) \\ &\times \left(L_{\nu-1}\left(\frac{|x_\perp - y_\perp|^2}{2}\right) \mathcal{P}^\dagger + L_\nu\left(\frac{|x_\perp - y_\perp|^2}{2}\right) \mathcal{P}^\downarrow\right) \exp\left(i\xi(x_3 - y_3)\right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Proposition 4.4.1.

Soient $\mathcal{H}_{0,A}$ l'opérateur de Pauli introduit en (4.53) et $\Pi^\nu(\xi)$ l'opérateur défini en (4.72), alors nous avons

$$\mathcal{H}_{0,A} \Pi^\nu(\xi) = [2\nu + \xi^2] \Pi^\nu(\xi), \quad (4.73)$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \Pi^\nu(\xi) d\xi = 1_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \quad (4.74)$$

Démonstration.

Soit $f = (f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, nous avons

$$\Pi^\nu(\xi)(f) = \begin{pmatrix} \Pi_0^{\nu-1}(\xi)(f_1) \\ \Pi_0^\nu(\xi)(f_2) \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

où $\Pi_0^\nu(\xi)$ a été défini en (4.42). Nous avons d'après la proposition 4.3.1

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \Pi_0^\nu(\xi)(f_1) d\xi = f_1, \quad (4.76)$$

et, comme $\Pi_{-1} \equiv 0$ par convention,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \Pi_0^{\nu-1}(\xi)(f_2) d\xi = f_2. \quad (4.77)$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \Pi^\nu(\xi)(f) d\xi = f. \quad (4.78)$$

□

Chapitre 5

Borne inférieure pour l'énergie

5.1 Présentation

Le but de ce chapitre est d'établir une borne inférieure pour la somme des valeurs propres strictement négatives de l'opérateur de Pauli modifié \mathcal{H}_t . Rappelons ici la définition de l'opérateur \mathcal{H}_t donnée en (3.6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(h, \beta \vec{B}_0, V, \vec{a}) = & \vec{P}_{h, \beta \vec{A}_0} M_t(x) \vec{P}_{h, \beta \vec{A}_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{B}_0(x) + t \vec{b}(x) \right) \\ & + t h \beta \left((D \vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) + V(x) \otimes I. \end{aligned} \quad (5.1)$$

L'opérateur \mathcal{H}_t dépend de plusieurs paramètres :

1. Un paramètre semiclassique $h \in]0, 1[$, et un paramètre $\beta = \beta(h)$ vérifiant l'hypothèse (1.9). Ce paramètre est introduit afin de mesurer l'intensité du champ magnétique appliqué.
2. Le champ magnétique $\vec{B}_0 \in C^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ (nous notons $B_0 = \|\vec{B}_0\|$);
3. Un champ de vecteurs $\vec{A}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_0 = \vec{B}_0$ (cf. (1.13)),
4. $\vec{\sigma}$ est le vecteur des matrices de Pauli (cf. (1.12));
5. La fonction $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ est un potentiel scalaire qui décrit le champ électrique et vérifie $\nabla V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$;
6. La matrice M_t définie par

$$M_t = I + tM, \quad (5.2)$$

où $M = \{M_{ik}\}_{i,k=1}^3$ est une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans l'ensemble des matrices 3×3 réelles et symétriques, et $t \in \mathbb{R}$ un paramètre assez petit.

7. Un champ de vecteurs $\vec{a} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{B}_0 = 0$ auquel on associe son rotationnel $\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$ et le champ de vecteurs $\vec{\tilde{a}} = \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{a}}{|\vec{B}_0|^2}$.

Rappelons aussi l'expression de l'énergie semi-classique $E_{scl,t}$ introduite en (3.21),

$$\begin{aligned} E_{scl,t}(h\beta, B_{0,t}, V) &= -h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_t^{-1}(u) P_1(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) - V(u) - h\beta \Delta_t(u)) du \\ &\quad - h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_t^{-1}(u) P_0(h\beta B(u), -h\beta B_{0,t}(u) - V(u) + h\beta \Delta_t(u)) du, \end{aligned} \quad (5.3)$$

où Λ_t , est défini par

$$\Lambda_t(u) = |\det(N_t(u))|, \quad N_t(u) = \sqrt{I + tM(u)}. \quad (5.4)$$

Rappelons que $N_t^{(2)}$ est la matrice associée à N_t dans la base $(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2)$ vérifiant la relation (5.6) :

$$\mathcal{C}^{(2)}(u \wedge v) = \mathcal{C}(u) \wedge \mathcal{C}(v). \quad (5.5)$$

Plus explicitement, $\mathcal{C}^{(2)}$ est donnée par

$$\mathcal{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_{22}c_{33} - c_{23}^2 & c_{23}c_{13} - c_{33}c_{12} & c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13} \\ c_{23}c_{13} - c_{33}c_{12} & c_{11}c_{33} - c_{31}^2 & c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} \\ c_{12}c_{23} - c_{22}c_{31} & c_{13}c_{12} - c_{11}c_{32} & c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Rappelons que le champ magnétique $\vec{B}_{0,t}$ est défini par

$$\vec{B}_{0,t}(u) = N_t^{(2)}(u) \vec{B}_0(u).$$

Rappelons aussi

$$\vec{\Delta}_t(u) = \vec{B}_0(u) + t \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}^3. \quad (5.7)$$

Définissons la direction du vecteur $\vec{\Delta}_t$ par

$$\vec{n}_t(u) = \frac{\vec{\Delta}_t(u)}{|\vec{\Delta}_t(u)|} \quad \forall u \in \mathbb{R}^3. \quad (5.8)$$

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, définissons les projections suivantes

$$\mathcal{P}_u^\dagger = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_t(u)), \quad (5.9)$$

et

$$\mathcal{P}_u^\downarrow = \frac{1}{2}(1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_t(u)). \quad (5.10)$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction P_k est définie par,

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ni (b, w) \mapsto P_k(b, w) := \frac{1}{3\pi^2} \sum_{\nu=k}^{\infty} b \left[2\nu b - w \right]_-^{3/2} \quad (5.11)$$

Nous énonçons dans le théorème suivant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.1.1.

Avec les hypothèses et les notations du théorème 3.1.1, il existe une fonction g réelle positive $h \mapsto g(h)$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$$

et telle que, pour tout (h, β) vérifiant (1.9) et $t \in [-t_0, t_0]$, on ait

$$\sum_n e_n(\mathcal{H}_t) \geq E_{scl,t}(h\beta, B_{0,t}, V)(1 + f(h, \beta, t)), \quad (5.12)$$

où $f(h, \beta, t)$ vérifie

$$|f(h, \beta, t)| \leq g(h).$$

Ici $\{e_n(\mathcal{H}_t)\}_{n=1}^{\infty}$ désigne la suite des valeurs propres strictement négatives de l'opérateur \mathcal{H}_t introduit en (5.1) et $E_{scl,t}(h\beta, B_{0,t}, V)$ est l'énergie semi-classique introduite en (5.3).

Remarque 5.1.2.

En tenant compte du théorème 5.1.1, il est raisonnable de penser qu'on a le développement asymptotique

$$\sum_n e_n(\mathcal{H}_t) = E_{scl,t}(h\beta, B_{0,t}, V)(1 + o(1)). \quad (5.13)$$

Lorsque $t = 0$ qui correspond au cas de l'opérateur de Pauli classique, ce développement asymptotique a été établi par L. Erdős et J.P Solovej dans [11, théorème 4.1]. Néanmoins, pour estimer le courant, seule la borne inférieure sur la somme des valeurs propres strictement négatives de l'opérateur de Pauli modifié \mathcal{H}_t est utile.

Expliquons brièvement les principes de la démonstration du théorème 5.1.1. Nous estimons la trace $\sum_n e_n(\mathcal{H}_t)$ à l'aide d'une base orthonormée $(f_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ du sous-espace propre K associé au spectre négatif de \mathcal{H}_t :

$$\sum_n e_n(\mathcal{H}_t) = \sum_k \langle f_k, \mathcal{H}_t f_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)},$$

où l'espace \mathcal{S} désigne l'espace de Schwartz des fonctions rapidement décroissantes.

Afin de ramener le problème à celui avec un champ magnétique constant, nous introduisons pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ l'opérateur (cf. les lemmes 5.4.10 et 5.5.1 pour l'énoncé précis)¹

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{t,u} \approx & \vec{P}_{h,\beta\vec{A}_{t,u}} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta\vec{A}_{t,u}} + h\beta\vec{\sigma} \cdot (\vec{B}_{0,t}(u) + t\vec{b}(u)) \\ & + th\beta \left((D\vec{B}_{0,t}(u))\vec{a}(u) \cdot \vec{\sigma} \right) + V \otimes I \end{aligned} \quad (5.14)$$

avec $\vec{A}_{t,u}(x) = \frac{1}{2}\vec{B}_{0,t}(u) \times x$ à un changement de jauge près. Alors (cf. (5.108) et (5.109) pour un énoncé précis)²,

$$\sum_k \langle f_k, \mathcal{H}_t f_k \rangle \gtrsim \sum_k \int_{\mathbb{R}^3} \langle f_k, \tilde{\mathcal{H}}_{t,u} f_k \rangle du. \quad (5.15)$$

Afin de minorer le terme à droite ci-dessus à l'aide de la trace d'un opérateur borné, nous introduisons des états cohérents 'locaux' $(\Pi_t^\nu(u, \xi))_{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}}$ tels que (cf. le lemme 5.3.3 pour un énoncé précis)

$$\frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{\mathbb{R}} \Pi_t^\nu(u, \xi) d\xi = 1_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)}.$$

En substituant cette identité dans (5.15), nous obtenons,

$$\sum_k \langle f_k, \mathcal{H}_t f_k \rangle \gtrsim \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}} \sum_k \sum_\nu \langle f_k, \tilde{\mathcal{H}}_{t,u} \Pi_t^\nu(u, \xi) f_k \rangle d\xi du. \quad (5.16)$$

Comme $\tilde{\mathcal{H}}_{t,u} \Pi_t^\nu(u, \xi)$ s'exprime essentiellement en fonction de l'expression suivante (cf. 5.3.3),

$$[2\nu h\beta B_{0,t}(u) + h^2 \xi^2] \Pi_t^\nu(u, \xi),$$

¹Pour deux fonctions $A(h)$ et $B(h)$, la notation $A(h) \approx B(h)$ veut dire que $A(h) = B(h)(1 + o(1))$

² $A(h) \gtrsim B(h)$ veut dire que $A(h) \geq B(h)(1 + o(1))$

on arrive dans (5.16) au calcul explicite des traces des opérateurs bornés (cf. e.g. (5.137)), qui s'expriment en fonction de l'énergie semiclassique $E_{scl,t}$.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. La section 5.2 est consacrée à la construction des états cohérents 'locaux'. La section 5.4 est consacrée à ramener le problème à celui avec un champ magnétique constant, c'est-à-dire à la justification de la formule (5.15). La section 5.6 est consacrée au calcul explicite du terme principale à droite de (5.16). Finalement, la section 5.7 est consacrée au contrôle des restes et à achever la démonstration du théorème 5.1.1.

5.2 États cohérents locaux de l'opérateur de Pauli modifié

Dans cette section, nous construisons une famille d'états cohérents (projecteurs sur les bandes de Landau)

$$\left(\Pi_t^\nu(u, \xi) \right)_{\nu \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}^3, \xi \in \mathbb{R}}$$

dont les propriétés ont été établies au chapitre 4.

Il résulte de (4.72) que si \vec{B} est un vecteur constant alors le noyau intégral de la projection $\Pi_B^\nu(\xi)$ de $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ sur le sous-espace de Landau d'indice $\nu \geq 0$ est défini par

$$\begin{aligned} \pi_{B,\xi}^\nu(x, y) &= \frac{\beta B}{2\pi h} \exp \left(\frac{\beta B}{2h} \left[-i(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) - \frac{|x_\perp - y_\perp|^2}{2} \right] \right) \\ &\quad \times \left(L_{\nu-1} \left(|x_\perp - y_\perp|^2 \frac{\beta B}{2h} \right) \mathcal{P}_u^\uparrow + L_\nu \left(|x_\perp - y_\perp|^2 \frac{\beta B}{2h} \right) \mathcal{P}_u^\downarrow \right) \\ &\quad \times \exp(i \xi (x_3 - y_3)) . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ici \mathcal{P}_u^\uparrow et \mathcal{P}_u^\downarrow sont les projections définies respectivement en (5.9) et en (5.10). Pour retrouver (le cas où $\nu = 0$), nous convenons que

$$L_0 \equiv 1 \quad \text{et} \quad L_{-1} \equiv 0 . \tag{5.18}$$

Ici les L_ν désignent les polynômes de Laguerre introduits en (4.33), normalisé par $L_\nu(0) = 1$.

Dans le cas du champ magnétique généralisé $\vec{B}_{0,t}(u)$ donné en (3.18), le noyau intégral de la projection $\Pi_t^\nu(u, \xi)$ est exprimé par

$$\begin{aligned} \pi_{t,u,\xi}^\nu(x, y) &= \frac{\beta B_{0,t}(u)}{2\pi h} \exp\left(\frac{\beta B_{0,t}(u)}{2h} \left[-i(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) - \frac{|x_\perp - y_\perp|^2}{2}\right]\right) \\ &\times \left(L_{\nu-1}\left(\frac{\beta B_{0,t}(u)}{2h} |x_\perp - y_\perp|^2\right) \mathcal{P}_u^\dagger + L_\nu\left(\frac{\beta B_{0,t}(u)}{2h} |x_\perp - y_\perp|^2\right) \mathcal{P}_u^\downarrow\right) \\ &\times \exp(i\xi(x_3 - y_3)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

La pertinence de cette construction de $\Pi_t^\nu(u, \xi)$ apparaît dans le lemme 5.3.3. Notons que lorsque $t = 0$, nous avons

$$B_{0,t}(u) = B, \quad (5.20)$$

et que

$$\Pi_t^\nu(u, \xi) = \Pi_B^\nu(\xi). \quad (5.21)$$

D'après (5.19), nous avons pour chaque $\nu \in \mathbb{N}$

$$\pi_{t,u,\xi}^\nu(x, x) = (2\pi)^{-1} h^{-1} \beta B_{0,t}(u). \quad (5.22)$$

5.3 L'opérateur de Schrödinger magnétique modifié

Dans cette section, nous allons préciser les règles de changement de coordonnées de l'opérateur

$$(h\vec{p} + \beta\vec{A})^2$$

lorsqu'on effectue un changement de coordonnées linéaire associé à une matrice N

Lemme 5.3.1.

Soit N une matrice constante, réelle et symétrique, soit \tilde{U} un opérateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$(\tilde{U}f)(x) = \Lambda^{\frac{1}{2}} f(Nx), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (5.23)$$

avec

$$\Lambda = |\det N|; \quad (5.24)$$

alors

$$(\hbar\vec{p} + \beta\vec{A})N^2(\hbar\vec{p} + \beta\vec{A}) = \tilde{U}^{-1}(\hbar\vec{p} + \beta\vec{\tilde{A}})^2\tilde{U}, \quad (5.25)$$

où

$$\vec{\tilde{A}}(x) = N\vec{A}(Nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (5.26)$$

Démonstration.

Par la définition de l'opérateur \tilde{U} nous avons

$$\tilde{U}^{-1}\phi(Nx)\tilde{U} = \phi(x)$$

$$\tilde{U}^{-1}\nabla\tilde{U} = N\nabla.$$

Nous pouvons alors écrire que

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{-1}(\hbar\vec{p} + \beta\vec{\tilde{A}}(x))^2\tilde{U} &= \tilde{U}^{-1}(\hbar\vec{p} + \beta N\vec{A}_0(Nx))\tilde{U} \cdot \tilde{U}^{-1}(\hbar\vec{p} + \beta N\vec{A}(Nx))\tilde{U} \\ &= N(\hbar\vec{p} + \beta\vec{A}(x)) \cdot N(\hbar\vec{p} + \beta\vec{A}(x)) \\ &= (\hbar\vec{p} + \beta\vec{A}(x)) \cdot N^2(\hbar\vec{p} + \beta\vec{A}(x)). \end{aligned}$$

□

Application

Soient M une matrice constante, réelle et symétrique, $t \in]-t_0, t_0[$ et $M_t = I + tM$. Soit $N_t = \sqrt{I + tM}$, en prenant $N = N_t$, $\tilde{U} = \tilde{U}_t$, $\vec{A} = \vec{\tilde{A}}_{0,u}$ et $\vec{\tilde{A}} = \vec{\tilde{A}}_{u,t}$ dans le lemme 5.3.1. Nous obtenons

$$(\hbar\vec{p} + \beta\vec{\tilde{A}}_{0,u})M_t(\hbar\vec{p} + \beta\vec{\tilde{A}}_{0,u}) = \tilde{U}_t^{-1}(\hbar\vec{p} + \beta\vec{\tilde{A}}_{u,t})^2\tilde{U}_t, \quad (5.27)$$

avec

$$\vec{\tilde{A}}_{u,t}(x) = N_t\vec{\tilde{A}}_{0,u}(N_t x). \quad (5.28)$$

Ici $\vec{\tilde{A}}_{0,u}(x) = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \wedge x$ est le potentiel que nous avons introduit en (3.56).

Remarque 5.3.2.

Remarquons que $\vec{A}_{u,t}(x)$ et $\frac{1}{2}\vec{B}_{0,t}(u) \wedge x$ que nous avons définis respectivement en (5.28) et en (3.18), ont même rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_{u,t}(x) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{2} \vec{B}_{0,t}(u) \wedge x \right). \quad (5.29)$$

Ils sont donc invariants de jauge, il existe alors $\phi_{t,u}$ tel que

$$\vec{A}_{u,t}(x) = \frac{1}{2} \vec{B}_{0,t}(u) \wedge x + \nabla \phi_{t,u}. \quad (5.30)$$

En définissant $U_{t,u}$ l'opérateur unitaire par

$$U_{t,u} = e^{\frac{-i}{\hbar} \phi_{t,u}} \tilde{U}. \quad (5.31)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \left(\hbar \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x \right) M_t \left(\hbar \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{B}_0(u) \wedge x \right) = \\ U_{t,u}^{-1} \left(\hbar \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{B}_{0,t}(u) \wedge x \right)^2 U_{t,u}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Il découle de la proposition 4.4.1 et de la proposition 4.3.1, les propriétés suivantes de la famille $\left(\Pi_t^\nu(u, \xi) \right)_{\nu \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}}$.

Lemme 5.3.3.

Soit $\Pi_t^\nu(u, \xi)$ la projection définie en (5.19), soient $\mathcal{P}_u^\uparrow, \mathcal{P}_u^\downarrow$ les projections définies respectivement en (5.9) et en (5.10). Définissons

$$\Pi_{t,\nu}^\uparrow(u, \xi) = \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow, \quad (5.33)$$

et

$$\Pi_{t,\nu}^\downarrow(u, \xi) = \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\downarrow. \quad (5.34)$$

Alors nous avons l'identité suivante

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \Pi_t^\nu(u, \xi) d\xi = 1_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \quad (5.35)$$

De plus

$$\begin{aligned} \left(P_{h,\beta \hat{A}_{u,t}}^2 + h\beta \vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta}_t(u) \right) \Pi_{t,\nu}^\uparrow(u, \xi) = \\ \left((2\nu - 1)h\beta B_{0,t}(u) + h^2 \xi^2 + h\beta |\vec{\Delta}_t(u)| \right) \Pi_{t,\nu}^\uparrow(u, \xi), \end{aligned} \quad (5.36)$$

et

$$\begin{aligned} \left(P_{h,\beta\hat{A}_{u,t}}^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta}_t(u) \right) \Pi_{t,\nu}^\downarrow(u, \xi) = \\ \left((2\nu + 1)h\beta B_{0,t}(u) + h^2\xi^2 - h\beta|\vec{\Delta}_t(u)| \right) \Pi_{t,\nu}^\downarrow(u, \xi). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ici $\vec{\hat{A}}_{u,t}$ est le potentiel magnétique défini en (5.30) et $\vec{\Delta}(u)$ est défini en (5.7).

5.4 Localisations

Nous introduisons

$$\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad (5.38)$$

telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)^2 dx = 1, \quad (5.39)$$

$$\text{supp } \theta \subset B(0, 1). \quad (5.40)$$

Étant donné $\lambda > 0$, nous définissons

$$\theta_\lambda(x) = \lambda^{-3/2}\theta(x/\lambda), \quad (5.41)$$

et nous appelons

$$\theta_u^\lambda(x) := \theta_\lambda(x - u) \quad (5.42)$$

la fonction de localisation en u à l'échelle λ . Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \theta_u^\lambda(x)^2 dx = 1, \quad (5.43)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla \theta_u^\lambda(x) \right|^2 dx = d_0 \lambda^{-2}. \quad (5.44)$$

Observons que par simple changement de variable nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla \theta_\lambda(x) \right|^2 dx = d_0 \lambda^{-2}, \quad (5.45)$$

où

$$d_0 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\theta(x)|^2 dx. \quad (5.46)$$

Plus tard dans notre application, λ dépendra du paramètre h et nous aurons besoin de supposer que $\lambda = \lambda(h)$ vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) = 0, \quad (5.47)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\lambda(h)^{-1} = 0, \quad (5.48)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1/2}\lambda(h) = 0. \quad (5.49)$$

Définition 5.4.1.

Soit \mathbf{T} l'opérateur défini par

$$\mathbf{T} := (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)M_t(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0. \quad (5.50)$$

L'opérateur de Pauli modifié \mathcal{H}_t introduit en (3.6) s'écrit alors

$$\mathcal{H}_t = \mathbf{T} + V + t h\beta \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b} + \left((D\vec{B}_0)\vec{a} \right) \cdot \vec{\sigma} \right). \quad (5.51)$$

L'idée est de décomposer l'opérateur \mathbf{T} de manière à pouvoir contrôler plus tard les termes d'erreurs.

Définition 5.4.2.

Soient $\delta_1 \in]0, \frac{1}{4}[$ et

$$\alpha = \frac{1 - \delta_1/2}{1 - \delta_1}. \quad (5.52)$$

Définissons

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\delta_1} &= (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)M_t(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0) \\ &+ \alpha h\beta \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 + \frac{t}{\alpha(1 - \delta_1)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{b} + ((D\vec{B}_0)\vec{a}) \cdot \vec{\sigma}) \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Rappelons que nous notons par \mathcal{M}_s l'ensemble des matrices 3×3 réelles et symétriques.

Lemme 5.4.3.

Soit $x \mapsto M(x) = \{M_{ik}\}_{i,k=1}^3$ appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_s)$. Soit $t_0 > 0$ tel que $t_0 \|M\| \leq \frac{1}{2}$, soit $t \in [-t_0, t_0]$ et soit $M_t = I + tM$. Alors, pour tout $\delta_1 \in]0, \frac{1}{4}[$, nous avons

$$\mathcal{H}_t \geq (1 - \delta_1) \mathbf{T}_{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] + V. \quad (5.54)$$

Ici \mathbf{T}_{δ_1} a été introduit en (5.53).

Démonstration.

Pour $\delta_1 \in]0, \frac{1}{4}[$, nous écrivons

$$\mathbf{T} = (1 - \delta_1) \mathbf{T} + \delta_1 \mathbf{T}, \quad (5.55)$$

Soit $t_0 > 0$ tel que $t_0 \|M\| \leq \frac{1}{2}$, soit $t \in [-t_0, t_0]$ alors

$$\begin{aligned} M_t &= I + tM \\ &\geq \frac{1}{2} I. \end{aligned} \quad (5.56)$$

En remplaçant (5.56) dans (5.50), nous obtenons

$$\delta_1 \mathbf{T} \geq \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] + \frac{\delta_1}{2} h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0. \quad (5.57)$$

En combinant (5.55) et (5.57), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} + t h \beta \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b} + ((D\vec{B}_0)\vec{a}) \cdot \vec{\sigma} \right) \\ &\geq (1 - \delta_1) \left[(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0) M_t (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0) + \alpha h \beta [\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{\alpha(1 - \delta_1)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{b} + ((D\vec{B}_0)\vec{a}) \cdot \vec{\sigma}) \right] \\ &\quad + \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

En combinant (5.51) et (5.58), nous achevons la preuve. \square

Définition 5.4.4.

Soit $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\tilde{\chi} \equiv 1 \quad \text{sur} \quad \mathcal{B}(0, 3/2), \quad (5.59)$$

$$\tilde{\chi} \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(0, 2). \quad (5.60)$$

Observons que

$$0 \leq \tilde{\chi} \leq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (5.61)$$

Soit

$$\tilde{\chi}_\lambda = c\lambda^{-3}\tilde{\chi}\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad (5.62)$$

où

$$c = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\chi}(x) dx \right)^{-1}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\chi}_\lambda(x) dx = 1. \quad (5.63)$$

Pour $\varrho \geq 1$, nous introduisons

$$\begin{aligned} \Theta_{\varrho,\lambda} &= 1_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})} * \tilde{\chi}_\lambda \\ &= \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})} \tilde{\chi}_\lambda(x-y) dy. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Lemme 5.4.5.

La fonction $\Theta_{\varrho,\lambda}$ satisfait les propriétés suivantes

$$0 \leq \Theta_{\varrho,\lambda} \leq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (5.65)$$

$$\Theta_{\varrho,\lambda} \equiv 1 \quad \text{sur } \mathcal{B}(0, \varrho + \lambda), \quad (5.66)$$

$$\text{supp } \Theta_{\varrho,\lambda} \subset \mathcal{B}(0, 2\lambda + \varrho), \quad (5.67)$$

et, il existe une constante $c_5 > 0$ telle que

$$|\nabla \Theta_{\varrho,\lambda}| \leq c_5 \|\nabla \tilde{\chi}\|_\infty \min\left(\left(\varrho + \frac{\lambda}{2}\right)^3 \lambda^{-4}, \lambda^{-1}\right). \quad (5.68)$$

Démonstration.

Nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq \Theta_{\varrho,\lambda}(x) &= \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})} \tilde{\chi}_\lambda(x-y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\chi}_\lambda(z) dz \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ceci achève la preuve de (5.65).

Soit $x \in \mathcal{B}(0, \varrho + \lambda)$, alors, pour tout $y \in \mathcal{B}(0, 3/2\lambda)$, $x - y \in \mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})$, nous avons

$$\begin{aligned} \Theta_{\varrho, \lambda}(x) &= \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{3\lambda}{2})} 1_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})}(x - y) \tilde{\chi}_\lambda(y) dy \\ &\leq \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{3\lambda}{2})} \tilde{\chi}_\lambda(z) dz \\ &= 1. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Ceci achève la preuve de (5.66).

Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(0, \varrho + 2\lambda)$, alors pour tout $y \in \mathcal{B}(0, \frac{3\lambda}{2})$ nous avons

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\geq \left| \|x\| - \|y\| \right| \\ &\geq \|x\| - \|y\| \\ &\geq \varrho + \lambda/2. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Ainsi

$$(x - y) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(0, \varrho + \lambda/2), \tag{5.72}$$

et

$$\begin{aligned} \Theta_{\varrho, \lambda}(x) &= \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{3\lambda}{2})} 1_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})}(x - y) \tilde{\chi}_\lambda(y) dy \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Ceci achève la preuve de (5.67).

Nous avons

$$\begin{aligned} \nabla \Theta_{\varrho, \lambda}(x) &= \nabla \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})} \tilde{\chi}_\lambda(x - y) dy \\ &= c\lambda^{-3} \nabla \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})} \tilde{\chi}_\lambda\left(\frac{x - y}{\lambda}\right) dy \\ &= c\lambda^{-4} \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})} \nabla \tilde{\chi}\left(\frac{x - y}{\lambda}\right) dy. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Alors

$$\begin{aligned} |\nabla \Theta_{\varrho, \lambda}(x)| &\leq c\lambda^{-4} \|\nabla \tilde{\chi}\|_\infty \int_{\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2}) \cap \mathcal{B}(0, \lambda)} dy \\ &\leq c\lambda^{-4} \|\nabla \tilde{\chi}\|_\infty \min\left(|\mathcal{B}(0, \varrho + \frac{\lambda}{2})|, |\mathcal{B}(0, \lambda)|\right) \\ &\leq c_5 \lambda^{-4} \|\nabla \tilde{\chi}\|_\infty \min\left(\left(\varrho + \frac{\lambda}{2}\right)^3, \lambda^3\right). \end{aligned} \tag{5.75}$$

Ceci achève la preuve de (5.68). \square

Lemme 5.4.6.

Supposons que $S \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_s)$. Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall \varrho \geq 1, \quad \forall \delta_1 \in]0, 1/4], \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \langle f, (\vec{P}_{h, \beta A_0} S^2 \vec{P}_{h, \beta A_0}) f \rangle &\geq (1 - \delta_1) \langle f, \Theta_{\varrho, \lambda} (\vec{P}_{h, \beta A_0} S^2 \vec{P}_{h, \beta A_0}) \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle \\ &\quad - 2c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f, |\nabla \Theta_{\varrho, \lambda}|^2 f \rangle. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Ici $\Theta_{\varrho, \lambda}$ a été introduite en (5.64).

Démonstration.

Il résulte du Lemme 3.2.1 appliqué à $g = \Theta_{\varrho, \lambda}$ et $\delta = \delta_1$ que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| S \left[(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) (\Theta_{\varrho, \lambda} f) \right] (x) \right|^2 dx &\leq (1 + \delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left[(\Theta_{\varrho, \lambda}) S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) (f) \right] (x) \right|^2 dx \\ &\quad + 2\delta_1^{-1} h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| (Sf)(x) \right|^2 \left| (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})(x) \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Par ailleurs, une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} \langle f; \Theta_{\varrho, \lambda} (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) S^2 (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle \\ = \langle S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) (\Theta_{\varrho, \lambda} f); S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) (\Theta_{\varrho, \lambda} f) \rangle. \end{aligned} \quad (5.78)$$

En combinant (5.77) et (5.78), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle f; \Theta_{\varrho, \lambda} (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) S^2 (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle \\ \leq (1 + \delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left[(\Theta_{\varrho, \lambda}) S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) (f) \right] (x) \right|^2 dx \\ + 2\delta_1^{-1} h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| (Sf)(x) \right|^2 \left| (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})(x) \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Comme $\Theta_{\varrho, \lambda} \leq 1$ et que nous supposons que S est bornée, alors il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \langle f; \Theta_{\varrho, \lambda} (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) S^2 (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle \\ \leq (1 + \delta_1) \langle S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) f; S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) f \rangle \\ + 2c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f; |\nabla \Theta_{\varrho, \lambda}|^2 f \rangle. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Puis, une intégration par parties nous permet d'écrire

$$\langle S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) f; S (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) f \rangle = \langle f; (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) S^2 (h\vec{p} + \beta \vec{A}_0) f \rangle. \quad (5.81)$$

En combinant (5.80) et (5.81), nous écrivons

$$\begin{aligned} & \langle f ; (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)f \rangle \\ & \geq (1 + \delta_1)^{-1} \langle f ; \Theta_{\varrho,\lambda}(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle \\ & \quad - 2c_3h^2\delta_1^{-1}(1 + \delta_1)^{-1} \langle f ; |\nabla\Theta_{\varrho,\lambda}|^2f \rangle. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Comme $\delta_1 > 0$ alors

$$1 > (1 + \delta_1)^{-1} \geq (1 - \delta_1).$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

Lemme 5.4.7.

Supposons que $S \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_s)$. Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall \varrho \geq 1, \quad \forall \delta_1 \in]0, 1/4], \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2),$$

nous avons

$$\begin{aligned} & \langle f ; \Theta_{\varrho,\lambda}(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho,\lambda}\theta_u^\lambda f ; (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\theta_u^\lambda\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle du \\ & \quad - c_3h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho,\lambda}f ; |\nabla\theta_u^\lambda|^2\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle du. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Ici $\Theta_{\varrho,\lambda}$ et θ_u^λ sont introduites respectivement en (5.64) et (5.41).

Démonstration.

Nous utilisons (5.45), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \langle f ; \Theta_{\varrho,\lambda}(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\theta_u^\lambda)^2 f ; \Theta_{\varrho,\lambda}(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle du. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Comme

$$\langle f ; \Theta_{\varrho,\lambda}(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle$$

est réel, alors nous appliquons le lemme 3.2.2 avec $\tilde{\chi} = \theta_u^\lambda$, et $g = \Theta_{\varrho,\lambda}f$, et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle f ; \Theta_{\varrho,\lambda}(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho,\lambda}\theta_u^\lambda f ; (h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)S^2(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)\theta_u^\lambda\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle du \\ & \quad - h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\nabla\theta_u^\lambda)\Theta_{\varrho,\lambda}f ; S^2(\nabla\theta_u^\lambda)\Theta_{\varrho,\lambda}f \rangle du. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Il résulte d'une intégration par parties et du fait que S^2 est borné, l'existence d'une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\langle (\nabla \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f ; S^2 (\nabla \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle \leq c_3 \langle \Theta_{\varrho, \lambda} f ; |\nabla \theta_u^\lambda|^2 \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle. \quad (5.86)$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

Définition 5.4.8.

Définissons la fonction

$$\Theta_{\varrho, \lambda}^* \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

par

$$\Theta_{\varrho, \lambda}^* = \Theta_{\varrho + \lambda, \lambda}. \quad (5.87)$$

Étant donné $\varrho \geq 1$, nous définissons la fonction χ_ϱ par

$$\chi_\varrho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{B}(0, \varrho) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.88)$$

Définition 5.4.9.

Définissons $\tilde{\mathcal{H}}_t$ l'opérateur de Pauli localisé par

$$\tilde{\mathcal{H}}_t = (1 - 2\delta_1) \Theta_{\varrho, \lambda} \mathbf{T}_{\delta_1} \Theta_{\varrho, \lambda} + V \chi_\varrho(u), \quad (5.89)$$

où \mathbf{T}_{δ_1} a été introduite en (5.53).

Définissons l'opérateur reste \mathcal{R} par

$$\mathcal{R} = \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0)^2 + \beta h \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] + \mathcal{W}_r, \quad (5.90)$$

où

$$\mathcal{W}_r = V - (V \chi_\varrho) * (\theta_\lambda)^2 - c_4 h^2 \lambda^{-2} \delta_1^{-1} (\Theta_{\varrho, \lambda}^*)^2. \quad (5.91)$$

Ici $\Theta_{\varrho, \lambda}^*$ a été introduite en (5.87).

Lemme 5.4.10.

Soit $\Theta_{\varrho, \lambda}$ la fonction de localisation définie en (5.64), soit χ_ϱ la fonction caractéristique définie en (5.88). Alors, il existe une constante $c_4 > 0$ telle que

$$\forall \varrho \geq 1, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall t \in [-t_0, t_0], \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \quad (5.92)$$

nous avons

$$\langle f, \mathcal{H}_t f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \geq \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} du + \langle f, \mathcal{R} f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \quad (5.93)$$

Ici \mathcal{H}_t est l'opérateur de Pauli modifié introduit en (3.6).

Démonstration.

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$; d'après (5.54) nous pouvons écrire

$$\langle f, \mathcal{H}_t f \rangle \geq (1 - \delta_1) \langle f, \mathbf{T}_{\delta_1} f \rangle + \frac{\delta_1}{2} \langle f, [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] f \rangle + \langle f, V f \rangle. \quad (5.94)$$

Par ailleurs, il résulte du lemme 5.4.6 appliqué à $S = M_t$ que

$$\langle f, \mathbf{T}_{\delta_1} f \rangle \geq (1 - \delta_1) \langle f, \Theta_{\varrho, \lambda} \mathbf{T}_{\delta_1} \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle - c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f, (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle. \quad (5.95)$$

D'autre part, il résulte du lemme 5.4.7 appliqué à $S = M_t$ que

$$\begin{aligned} \langle f; \Theta_{\varrho, \lambda} \mathbf{T}_{\delta_1} \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho, \lambda} \theta_u^\lambda f; \mathbf{T}_{\delta_1} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle du \\ &\quad - c_3 h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho, \lambda} f; |\nabla \theta_u^\lambda|^2 \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle du. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Puis nous utilisons (5.45) dans (5.96) et obtenons

$$\begin{aligned} \langle f; \Theta_{\varrho, \lambda} \mathbf{T}_{\delta_1} \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle &\geq \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho, \lambda} \theta_u^\lambda f; \mathbf{T}_{\delta_1} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle du \\ &\quad - c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle. \end{aligned} \quad (5.97)$$

En combinant (5.95) et (5.97), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle f; \mathbf{T}_{\delta_1} f \rangle &\geq (1 - \delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho, \lambda} \theta_u^\lambda f; \mathbf{T}_{\delta_1} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle du \\ &\quad - c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle \\ &\quad - c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f; (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Ici nous avons utilisé

$$1 - \delta_1 > 0, \quad \delta_1 \in]0, \frac{1}{4}[. \quad (5.99)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \langle f; (1 - \delta_1) \mathbf{T}_{\delta_1} f \rangle &\geq (1 - \delta_1)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho, \lambda} \theta_u^\lambda f; \mathbf{T}_{\delta_1} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle du \\ &\quad - (1 - \delta_1) c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle \\ &\quad - c_3 (1 - \delta_1) h^2 \delta_1^{-1} \langle f; (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Nous utilisons (5.99) et que

$$(1 - \delta_1)^2 \geq (1 - 2\delta_1). \quad (5.101)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_1)\langle f ; \mathbf{T}_{\delta_1} f \rangle &\geq (1 - 2\delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Theta_{\varrho, \lambda} \theta_u^\lambda f ; \mathbf{T}_{\delta_1} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f \rangle du \\
&\quad - c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f ; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle \\
&\quad - c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f ; (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle.
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
(1 - 2\delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f ; \left(\Theta_{\varrho, \lambda} \mathbf{T}_{\delta_1} \Theta_{\varrho, \lambda} + (V\chi_\varrho)(u) \right) \theta_u^\lambda f \rangle du \\
= (1 - 2\delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f ; \Theta_{\varrho, \lambda} \mathbf{T}_{\delta_1} \Theta_{\varrho, \lambda} \theta_u^\lambda f \rangle du \\
+ (1 - 2\delta_1) \langle f, (V\chi_\varrho) * \theta_\lambda^2 f \rangle.
\end{aligned} \tag{5.103}$$

En combinant (5.102) et (5.103), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_1)\langle f ; \mathbf{T}_{\delta_1} f \rangle &\geq (1 - 2\delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f ; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle du \\
&\quad - c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f ; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle \\
&\quad - c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f ; (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle \\
&\quad - (1 - 2\delta_1) \langle f, (V\chi_\varrho) * \theta_\lambda^2 f \rangle.
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Il résulte de (5.104) que

$$\begin{aligned}
&\langle f, \left((1 - \delta_1) \mathbf{T}_{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0)^2 + h\beta \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] + V \right) f \rangle \\
&\geq (1 - 2\delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f ; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle du \\
&\quad + \frac{\delta_1}{2} \langle f, [(h\vec{p} + \beta \vec{A}_0)^2 + h\beta \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] f \rangle \\
&\quad - \langle f, (V\chi_\varrho) * \theta_\lambda^2 f \rangle + \langle f, Vf \rangle \\
&\quad - c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f ; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle - c h^2 \delta_1^{-1} \langle f ; (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle.
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Pour contrôler les deux derniers termes de droite dans (5.105), nous utilisons (5.87) et obtenons l'existence d'une constante $c_4 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
c_3 h^2 d_0 \lambda^{-2} \langle f ; (\Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle + c_3 h^2 \delta_1^{-1} \langle f ; (\nabla \Theta_{\varrho, \lambda})^2 f \rangle \\
\leq c_4 h^2 d_0 \lambda^{-2} \delta_1^{-1} \langle f ; (\Theta_{\varrho, \lambda}^*)^2 f \rangle.
\end{aligned} \tag{5.106}$$

En combinant (5.105) et (5.106), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \langle f, \left((1 - \delta_1) \mathbf{T}_{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] + V \right) f \rangle \\
& \geq (1 - 2\delta_1) \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle du \\
& \quad + \frac{\delta_1}{2} \langle f, [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] f \rangle \\
& \quad + \langle f, \left(V - (V\chi_\varrho) * \theta_\lambda^2 - c_4 h^2 d_0 \lambda^{-2} \delta_1^{-1} (\Theta_{\varrho, \lambda}^*)^2 \right) f \rangle.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Finalemnt, en combinant (5.107) et (5.94), nous achevons la preuve de (5.93). \square

5.5 Approximations

Soit $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ tel que $\{f_k\}_{k=1}^N$ soit une base orthonormée. Nous souhaitons estimer (uniformément en N)

$$\sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} \langle \theta_u^\lambda f_k; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle du. \tag{5.108}$$

Ici $\tilde{\mathcal{H}}_t$ est l'opérateur de Pauli localisé introduit en (5.89).

Lemme 5.5.1.

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe une fonction $\phi_u \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ telles que

$$\forall \delta_3 \in]0, \frac{1}{4}[, \quad \forall t \in]-1, 1[, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$$

et pour tout (h, β) vérifiant (1.9) on ait, avec $f_u = e^{-i\phi_u/h} f$,

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta_3)^{-1} \langle \theta_u^\lambda f; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle \geq \\
& \quad + \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u, \vec{P}_{h, \beta \hat{A}_{0, u}} M_t(u) \vec{P}_{h, \beta \hat{A}_{0, u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad + \frac{1 - (\delta_3/2)}{1 - \delta_3} \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u, h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad + \frac{4 - 2\delta_3}{(4 - \delta_3)(1 - \delta_3)} \times \\
& \quad \quad \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u, t h \beta \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) + ((D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \cdot \vec{\sigma}) \right] \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad - \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u, \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.109}$$

Ici $\vec{A}_{0,u}$ est le potentiel magnétique défini en (3.56).

Démonstration.

Soit $x \in \mathcal{B}(u, \lambda)$, nous écrivons

$$\begin{aligned} M_t(x) &= M_t(u) + M_t(x) - M_t(u) \\ &\geq M_t(u) - \sup_{x \in \mathcal{B}(u, \lambda)} |M_t(x) - M_t(u)| I. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Notons ici que l'inégalité matricielle ci-dessus est comprise au sens qu'elle est vérifiée pour chaque élément.

Soit

$$F_\lambda(u) = 2 \sup_{x \in \mathcal{B}(u, \lambda)} |M_t(x) - M_t(u)|. \quad (5.111)$$

En combinant (5.110) et (5.56), nous obtenons que

$$M_t(x) \geq M_t(u) \left(1 - F_\lambda(u)\right). \quad (5.112)$$

De plus, il existe $\ell_0 > 0$ tel que

$$F_\lambda(u) \leq \ell_0 \lambda, \quad (5.113)$$

alors (5.112) s'écrit

$$M_t(x) \geq M_t(u)(1 - \ell_0 \lambda). \quad (5.114)$$

Par la définition (5.89) et par (5.114), nous avons

$$\begin{aligned} &\langle \theta_u^\lambda f ; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle \\ &\geq (1 - 2\delta_1)(1 - \ell_0 \lambda) \langle \theta_u^\lambda \Theta_{e,\lambda} f ; \vec{P}_{h,\beta A_0} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta A_0} \theta_u^\lambda \Theta_{e,\lambda} f \rangle \\ &\quad + \alpha h \beta (1 - 2\delta_1) \langle \theta_u^\lambda \Theta_{e,\lambda} f ; \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \theta_u^\lambda \Theta_{e,\lambda} f \rangle \\ &\quad + t h \beta (1 - 2\delta_1) (1 - \delta_1)^{-1} \times \\ &\quad \quad \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{e,\lambda} f ; \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u)) \vec{a}(u) \cdot \vec{\sigma} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{e,\lambda} f \right\rangle \\ &\quad + \langle \theta_u^\lambda f ; (V\chi_e)(u) \theta_u^\lambda f \rangle. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Nous appliquons la proposition 3.2.5 (avec $S^2 = M_t$, $g = \theta_u^\lambda$

et $f = \Theta_{\rho,\lambda} e^{i\phi_u/h} f_u$.

$$\begin{aligned}
& \langle \theta_u^\lambda f ; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \rangle \\
& \geq (1 - 2\delta_1)(1 - \ell_0\lambda)(1 - \epsilon) \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \vec{P}_{\hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{\hat{A}_{0,u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad - (1 - 2\delta_1)(1 - \ell_0\lambda)\epsilon \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \rangle \\
& \quad + \alpha h \beta (1 - 2\delta_1) \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad - \alpha h \beta (1 - 2\delta_1)\epsilon \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \rangle \\
& \quad + t h \beta (1 - 2\delta_1)(1 - \delta_1)^{-1} \times \\
& \quad \quad \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u)) \vec{a}(u) \cdot \vec{\sigma} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad - t h \beta (1 - 2\delta_1)(1 - \delta_1)^{-1} \epsilon \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \rangle \\
& \quad + \langle \theta_u^\lambda f_u ; (V\chi_\rho)(u) \theta_u^\lambda f_u \rangle.
\end{aligned} \tag{5.116}$$

En prenant, $\delta_3 = 4\delta_1$ et en rappelant que $\alpha > 1$ (par définition, voir (5.52)), la formule (5.116) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta_3)^{-1} \left\langle \theta_u^\lambda f ; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \right\rangle \geq \\
& \quad \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \vec{P}_{\hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{\hat{A}_{0,u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad + \alpha \left(\frac{1 - 2\delta_1}{1 - \delta_3} \right) h \beta \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad + \frac{(1 - 2\delta_1)}{(1 - \delta_1)(1 - \delta_3)} t h \beta \times \\
& \quad \quad \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) + ((D\vec{B}_0(u)) \vec{a}(u)) \cdot \vec{\sigma} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \right\rangle \\
& \quad + \left\langle \theta_u^\lambda f_u ; \frac{(V\chi_\rho)(u)}{1 - \delta_3} \theta_u^\lambda f_u \right\rangle \\
& \quad - 10\epsilon \left[\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \rangle + h \beta \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \rangle \right. \\
& \quad \quad \left. + t h \beta \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u ; \theta_u^\lambda \Theta_{\rho,\lambda} f_u \rangle \right].
\end{aligned} \tag{5.117}$$

En utilisant le fait que $0 \leq \Theta_{\rho,\lambda} \leq 1$ et que $t \in]-1, 1[$, nous réécrivons la

formule (5.117) sous la forme :

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_3)^{-1} \left\langle \theta_u^\lambda f ; \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f \right\rangle &\geq \\
\left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u ; \vec{P}_{\hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{\hat{A}_{0,u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle & \\
+ \frac{(1 - 2\delta_1)}{(1 - \delta_3)} h \beta \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u ; \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle & \\
+ \frac{(1 - 2\delta_1)}{(1 - \delta_1)(1 - \delta_3)} t h \beta \times & \\
\left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u ; \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) + ((D\vec{B}_0(u)) \vec{a}(u)) \cdot \vec{\sigma} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle & \\
- \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u ; \frac{[(V\chi_\varrho)(u) - 10C_{max}\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_u \right\rangle. & \tag{5.118}
\end{aligned}$$

Ici, la constante C_{max} à été introduite en (1.9). Ceci achève la démonstration. \square

Remarque 5.5.2.

Comme la famille $(f_k)_k$ est un système orthonormal, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $(f_{k,u})_k$ l'est aussi. Pour cette raison nous omettrons dans tout ce qui suit la dépendance en u dans la notation et nous écrirons simplement f_k au lieu de $f_{k,u}$.

5.6 Calcul du terme principal

Soit $\tilde{\mathcal{H}}_t$ l'opérateur de Pauli localisé introduit en (5.89) et soit P_k que nous avons défini en (5.11).

Étant données deux fonctions $f(h, t; x)$ et $g(h, t; x)$, nous écrivons

$$f(h, t; x) = \mathcal{O}_{unif}(g(h, t; x))$$

pour dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $t \in]-1, 1[$ et $h \in]0, 1[$, nous avons

$$|f(h, t; x)| \leq C |g(h, t; x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Le cœur de la démonstration du théorème 5.1.1 est contenu dans l'énoncé du lemme suivant.

Lemme 5.6.1.

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $\varrho \geq 1$, $\lambda > 0$, $t \in]-1, 1[$, $\delta_3 > 0$ et (h, β) le couple de paramètres vérifiant (1.9), on ait,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \sum_k \langle \theta_u^\lambda f_k, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle du \\
& \geq -h^{-3} \int_{\{|u| \leq \varrho + 3\lambda\}} \left[P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right) \right. \\
& \quad \left. + P_0 \left(h\beta B_{0,t}(u), -h\beta B_{0,t}(u) + \frac{W^\downarrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\downarrow(u) \right) \right] du \\
& \quad - C\lambda(\varrho + 3\lambda)^2,
\end{aligned} \tag{5.119}$$

où

$$r_h^\uparrow(u) = \mathcal{O}_{unif}(\delta_3) \left(h\beta \Delta_t(u) \right), \tag{5.120}$$

$$r_h^\downarrow(u) = \mathcal{O}_{unif}(\delta_3) \left(-h\beta \Delta_t(u) \right), \tag{5.121}$$

$$W^\uparrow(u) = -V(u) - h\beta \Delta_t(u), \tag{5.122}$$

et

$$W^\downarrow(u) = -V(u) + h\beta \Delta_t(u). \tag{5.123}$$

Ici $\Delta_t(u)$ a été introduite en (3.20), ϵ a été défini en (3.59), et pour $k \in \mathbb{N}$, P_k a été introduit en (5.11).

Démonstration.

Nous commençons par estimer séparément les quatres termes du membre de droite dans (5.109). Commençons par calculer le premier terme.

$$\text{Calcul de } \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
& \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\
& = \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; U_{t,u}^{-1} U_{t,u} \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta\hat{A}_{0,u}} U_{t,u}^{-1} U_{t,u} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle,
\end{aligned} \tag{5.124}$$

où $U_{t,u}$ est l'opérateur unitaire défini en (5.31).

Par application de (5.32), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; U_{t,u}^{-1} (U_{t,u} \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}} U_{t,u}^{-1}) U_{t,u} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & = \langle (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{t,u}}^2 (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle, \end{aligned} \quad (5.125)$$

où $\vec{A}_{t,u}$ est le potentiel magnétique défini en (5.30). Par ailleurs, nous avons

$$\mathcal{P}_u^\uparrow + \mathcal{P}_u^\downarrow = I, \quad (5.126)$$

où \mathcal{P}_u^\uparrow et \mathcal{P}_u^\downarrow ont été définis respectivement en (5.9) et (5.10). En utilisant (5.126), nous écrivons

$$\begin{aligned} & \langle (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{t,u}}^2 (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & = \langle (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{t,u}}^2 \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & \quad + \langle (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{t,u}}^2 \mathcal{P}_u^\downarrow (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} & \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}} M_t(u) \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{0,u}} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & = \langle (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{t,u}}^2 \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & \quad + \langle (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} ; \vec{P}_{h,\beta \hat{A}_{t,u}}^2 \mathcal{P}_u^\downarrow (U_{t,u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Nous calculons maintenant le deuxième terme du membre de droite dans (5.109).

$$\text{Calcul de } \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} , h\beta \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0(u) + t \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(u) + t(D\vec{B}_0) \vec{a} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle$$

Rappelons que

$$\vec{\Delta}_t = \vec{B}_0 + t\vec{b} + t(D\vec{B}_0)\vec{a}.$$

En utilisant

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_t(u) = \mathcal{P}_u^\uparrow - \mathcal{P}_u^\downarrow,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} , h\beta \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta}_t(u) \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & = \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} , h\beta \left(\Delta_t(u) \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_t(u) \right) \mathcal{P}_u^\uparrow \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & = \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} , h\beta \Delta_t(u) \mathcal{P}_u^\uparrow \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle \\ & \quad - \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} , h\beta \Delta_t(u) \mathcal{P}_u^\downarrow \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho,\lambda} f_{k,u} \rangle. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Enfin, nous calculons le dernier terme du membre de droite dans (5.109).

$$\text{Calcul de } \left\langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \right\rangle$$

En utilisant (5.126), nous écrivons

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \langle \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right) \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right) \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \rangle \quad (5.130) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right) \mathcal{P}_u^\downarrow (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \rangle. \end{aligned}$$

Conclusion

En combinant (5.128)-(5.130) et (5.109), nous obtenons

$$\begin{aligned} (1 - \delta_3)^{-1} \sum_k \langle \theta_u^\lambda f_k, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \tilde{\mathcal{H}}_t^\uparrow \mathcal{P}^\uparrow (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \tilde{\mathcal{H}}_t^\downarrow \mathcal{P}^\downarrow (U_{t, u} \theta_u^\lambda) \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \rangle, \end{aligned} \quad (5.131)$$

où

$$\tilde{\mathcal{H}}_t^\uparrow = P_{\hat{A}_{u, t}}^2 + h \beta \Delta_t(u) - \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right), \quad (5.132)$$

et

$$\tilde{\mathcal{H}}_t^\downarrow = P_{\hat{A}_{u, t}}^2 - h \beta \Delta_t(u) - \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} \right). \quad (5.133)$$

Nous utilisons l'identité (5.35) dans (5.131), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-1} (1 - \delta_3)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \theta_u^\lambda f_k, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle U_{t, u} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \tilde{\mathcal{H}}_t^\uparrow \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow U_{t, u} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \right\rangle d\xi \quad (5.134) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle U_{t, u} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u}, \tilde{\mathcal{H}}_t^\downarrow \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\downarrow U_{t, u} \theta_u^\lambda \Theta_{\varrho, \lambda} f_{k, u} \right\rangle d\xi, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{H}}_t^\uparrow$ et $\tilde{\mathcal{H}}_t^\downarrow$ ont été définis respectivement en (5.132) et en (5.133). Nous utilisons (5.36) pour écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_t^\uparrow \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow &= \left([(2\nu - 1)h\beta B_{0,t}(u) + h^2\xi^2] + h\beta\Delta_t(u) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right) \right) \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow, \end{aligned} \quad (5.135)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_t^\downarrow \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\downarrow &= \left([(2\nu + 1)h\beta B_{0,t}(u) + h^2\xi^2] - h\beta\Delta_t(u) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} + r_h^\downarrow(u) \right) \right) \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\downarrow. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Ici Δ_t est introduite en (3.20). Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_{t,u}\theta_u^\lambda)_{\Theta_{\varrho,\lambda}} f_{k,u}, \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u}\theta_u^\lambda)_{\Theta_{\varrho,\lambda}} f_{k,u} \rangle \\ &\leq \text{tr} [(U_{t,u}\theta_u^\lambda) \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u}\theta_u^\lambda)], \end{aligned} \quad (5.137)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} &\text{tr} [(U_{t,u}\theta_u^\lambda) \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u}\theta_u^\lambda)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (U_{t,u}\theta_u^\lambda)(x) \Pi_t^\nu(u, \xi)(x, x) \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u}\theta_u^\lambda)(x) dx. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Nous utilisons (5.22) et (5.39) nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^3} (U_{t,u}\theta_u^\lambda)(x) \Pi_t^\nu(u, \xi)(x, x) \mathcal{P}_u^\uparrow (U_{t,u}\theta_u^\lambda)(x) dx = \frac{\beta B_{0,t}(u)}{2\pi h \Lambda_t(u)}. \quad (5.139)$$

D'une manière similaire, nous calculons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_{t,u}\theta_u^\lambda)_{\Theta_{\varrho,\lambda}} f_{k,u}, \Pi_t^\nu(u, \xi) \mathcal{P}_u^\downarrow (U_{t,u}\theta_u^\lambda)_{\Theta_{\varrho,\lambda}} f_{k,u} \rangle \leq \frac{\beta B_{0,t}(u)}{2\pi h \Lambda_t(u)}. \quad (5.140)$$

En combinant (5.134)-(5.140), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^{-1}(1 - \delta_3)^{-1} \sum_k \langle \theta_u^\lambda f_k, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle \\
& \geq - \int_{\mathbb{R}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta B_{0,t}(u)}{2\pi h \Lambda_t(u)} \left[(2\nu - 1)h\beta B_{0,t}(u) + h^2 \xi^2 \right. \\
& \quad \left. - h\beta \Delta_t(u) - \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right) \right]_- d\xi \quad (5.141) \\
& \quad - \int_{\mathbb{R}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta B_{0,t}(u)}{2\pi h \Lambda_t(u)} \left[(2\nu + 1)h\beta B_{0,t}(u) + h^2 \xi^2 \right. \\
& \quad \left. - h\beta \Delta_t(u) - \left(\frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} + r_h^\downarrow(u) \right) \right]_- d\xi.
\end{aligned}$$

Remarquons ici que la première somme sur ν dans (5.141) commence à $\nu = 1$. Ceci résulte du fait que, pour $\nu = 0$, $\Pi^0(u, \xi) \mathcal{P}_u^\dagger \equiv 0$ et en conséquence, $\tilde{\mathcal{H}}_t \Pi^0(u, \xi) \mathcal{P}_u^\dagger \equiv 0$.

Nous calculons explicitement les intégrales par rapport à ξ dans (5.141). Posons

$$\begin{aligned}
W_\varrho^\uparrow(u) &= \frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} - h\beta \Delta_t(u) \\
W_\varrho^\downarrow(u) &= \frac{[V\chi_\varrho(u) - C\epsilon]_-}{1 - \delta_3} + h\beta \Delta_t(u).
\end{aligned} \quad (5.142)$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta_3)^{-1} \sum_k \langle \theta_u^\lambda f_k, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle \\
& \geq - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta B_{0,t}(u)}{3(h\pi)^2 \Lambda_t(u)} \left[(2\nu - 1)h\beta B_{0,t}(u) - \left(W_\varrho^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u) \right) \right]_-^{3/2} \quad (5.143) \\
& \quad - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta B_{0,t}(u)}{3(h\pi)^2 \Lambda_t(u)} \left[(2\nu + 1)h\beta B_{0,t}(u) - \left(W_\varrho^\downarrow(u) + r_h^\downarrow(u) \right) \right]_-^{3/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition (5.11), avec $B = \beta B_{0,t}(u)$, $W = W_\varrho^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u)$

pour $k = 0$ et $W = W_\varrho^\downarrow(u) + r_h^\downarrow(u)$ pour $k = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \sum_k \langle \theta_u^\lambda f_k, \tilde{\mathcal{H}}_t \theta_u^\lambda f_k \rangle du \\ & \geq -h^{-3} \int_{\{|u| \leq \varrho + 3\lambda\}} \Lambda_t^{-1}(u) \left[P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W_\varrho^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u) \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + P_0 \left(h\beta B_{0,t}(u), -h\beta B_{0,t}(u) + W_\varrho^\downarrow(u) + r_h^\downarrow(u) \right) \right] du. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Pour achever la démonstration, il suffit de remplacer W_ϱ^\uparrow (respectivement W_ϱ^\downarrow) par W^\uparrow (respectivement W^\downarrow) dans (5.144). En fait, on a,

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u| \leq \varrho + 3\lambda\}} \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W_\varrho^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u) \right) du \\ & = \int_{\{|u| \leq \varrho\}} \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W_\varrho^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u) \right) du \\ & \quad + \int_{\{\varrho \leq |u| \leq \varrho + 3\lambda\}} \Lambda_t^{-1}(u) \\ & \quad \times P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + \frac{C\epsilon}{1 - \delta_3} - \left(1 + o(\delta_3)\right) \left(h\beta \Delta_t(u) \right) \right) du. \end{aligned}$$

Comme $\chi_\varrho(u) = 1$ lorsque $|u| \leq \varrho$ et comme il existe une constante $M > 0$ telle que

$$0 \leq \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + \frac{C\epsilon}{1 - \delta_3} - \left(1 + o(\delta_3)\right) \left(h\beta \Delta_t(u) \right) \right) \leq M$$

pour tous $u \in \mathbb{R}^3$, $\delta_3 \in]0, 1/4[$ et $\epsilon \in]0, 1[$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u| \leq \varrho + 3\lambda\}} \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W_\varrho^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u) \right) du \\ & \leq \int_{\{|u| \leq \varrho\}} \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W^\uparrow + r_h^\uparrow(u) \right) du + 9\pi M \lambda (\varrho + 3\lambda)^2 \\ & \leq \int_{\{|u| \leq \varrho + 3\lambda\}} \Lambda_t^{-1}(u) P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W^\uparrow(u) + r_h^\uparrow(u) \right) du + \widetilde{M} \lambda (\varrho + 3\lambda)^2. \end{aligned}$$

De la même manière on estime le terme

$$\int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} \Lambda_t^{-1}(u) P_0 \left(h\beta B_{0,t}(u), -h\beta B_{0,t}(u) + W_\varrho^\downarrow(u) + r_h^\downarrow(u) \right) du.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Afin d'extraire complètement le terme principal de la trace négative de l'opérateur de Pauli \mathcal{H} , il reste à estimer les deux termes (cf. Lemme 5.6.1)

$$\int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} \left[P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right) \right] du$$

et

$$\int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} \left[P_0 \left(h\beta B_{0,t}(u), -h\beta B_{0,t}(u) + \frac{W^\downarrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\downarrow(u) \right) \right] du.$$

Ceci fait l'objet des deux lemmes suivants qui complètent l'énoncé du lemme 5.6.1.

Lemme 5.6.2.

Soient $\varrho \geq 1$, $\lambda > 0$, $t \in]-1, 1[$, soit (h, β) le couple de paramètres vérifiant (1.9), et soit $\delta_3 \in]0, 1[$. De plus, soient $B_{0,t}$ l'intensité du champ magnétique $\vec{B}_{0,t}$ que nous avons défini en (3.18), W^\uparrow le potentiel modifié introduit en (5.122) et $r_h^\uparrow(u)$ le reste défini en (5.120).

Alors il existe une constante $C > 0$ et une fonction

$$]0, h_0] \times \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[\times]0, h_0] \times]-1, 1[\times]0, 1[\ni (h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3) \mapsto R(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3)$$

telles que

$$\begin{aligned} & h^{-3} \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} P_1 \left(h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + \left(\frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right) \right) du \\ & \leq h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} P_1 (h\beta B_{0,t}(u), h\beta B_{0,t}(u) + W^\uparrow(u)) du + R(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3). \end{aligned} \quad (5.145)$$

Ici, la fonction $R(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3)$ satisfait

$$\begin{aligned} & \exists M > 0, \quad \forall (h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[\times]0, 1[\times]-1, 1[\times]0, 1[\\ & |R(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3)| \leq M \left[(\delta_3 + \epsilon^{1/2}(\varrho + 3\lambda)^3) h^{-3} + \delta_3 \mathcal{F}_{h,\beta}(W^\uparrow) \right], \end{aligned}$$

et $\mathcal{F}_{h,\beta}$ est la fonctionnelle de Lieb-Thirring réduite que nous avons définie en (2.21).

Démonstration.

Rappelons que $P_1(b, w)$ a été introduite en (3.11). Définissons

$$P^\uparrow(b, w) = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} b \left[2(\nu - 1)b - w \right]_-^{3/2}. \quad (5.146)$$

Remarquons que

$$P_1(b, b+w) = P^\dagger(b, w). \quad (5.147)$$

Nous vérifions aisément que les fonctions

$$w \mapsto P^\dagger(hb, w),$$

et

$$w \mapsto \partial_2 P^\dagger(hb, w) = \frac{\partial}{\partial w} P^\dagger(hb, w), \quad (5.148)$$

sont croissantes.

Il résulte du théorème des accroissements finis que

$$\begin{aligned} 0 &\leq |P^\dagger(hB, W + \widetilde{W}) - P^\dagger(hB, W)| \\ &\leq |\widetilde{W}| \max\{\partial_2 P^\dagger(hB, W + \widetilde{W}), \partial_2 P^\dagger(hB, W)\}. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Nous appliquons (5.149) avec

$$\widetilde{W} = \left(\frac{W^\dagger(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\dagger(u) \right) - W^\dagger(u), \quad (5.150)$$

et

$$W = W^\dagger(u), \quad (5.151)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| P^\dagger \left(h\beta B_{0,t}(u), \frac{W^\dagger(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\dagger(u) \right) - P^\dagger \left(h\beta B_{0,t}(u), W^\dagger(u) \right) \right| \\ &\leq 2 \left| W^\dagger(u) + r_h^\dagger(u) + C\epsilon \right| \times \\ &\quad \max \left\{ \partial_2 P^\dagger \left(h\beta B_{0,t}(u), \frac{W^\dagger(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\dagger(u) \right), \partial_2 P^\dagger \left(h\beta B_{0,t}(u), W^\dagger(u) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Le seul point qui reste maintenant est d'estimer le reste, c'est-à-dire le terme à droite de (5.152).

Il résulte de (1.32) l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\forall h \in]0, 1], \quad \forall B \in \mathbb{R}_+, \quad W \in \mathbb{R}_+, \quad (5.153)$$

nous avons

$$0 \leq \partial_2 P^\uparrow(hB, W) \leq chB|W|^{1/2} + c|W|^{3/2}. \quad (5.154)$$

En combinant (5.152) et (5.154), nous obtenons une constante $\tilde{c} > 0$ telle que, après intégration, nous avons,

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u| \leq \varrho + 3\lambda\}} |\Lambda_t^{-1}(u)| \times \\ & \left| P^\uparrow \left(h\beta B_{0,t}(u), \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right) - P^\uparrow(h\beta B_{0,t}(u), W^\uparrow(u)) \right| du \\ & \leq \tilde{c} \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} |\delta_3 W^\uparrow(u) + C\epsilon + r_h^\uparrow(u)| \max \left\{ h\beta \|B_{0,t}\|_\infty |W^\uparrow|^{1/2} + |W^\uparrow|^{3/2}, \right. \\ & \left. h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{1/2} + \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{3/2} \right\} du. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Ici nous avons utilisé que $\Lambda_t^{-1}(u)$ est borné uniformément par rapport à t et à u .

Grâce à (5.120), r_h^\uparrow est à support compact et il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que, pour tous $h \in]0, 1]$, $t \in]-1, 1[$ et $\delta_3 \in]0, 1/4[$, on a,

$$\begin{aligned} & \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} |\delta_3 W^\uparrow(u) + C\epsilon + r_h^\uparrow(u)| \max \left\{ h\beta \|B_{0,t}\|_\infty |W^\uparrow|^{1/2} + |W^\uparrow|^{3/2}, \right. \\ & \left. h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{1/2} + \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{3/2} \right\} du \\ & \leq \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} |\delta_3 W^\uparrow(u) + C\epsilon| \max \left\{ h\beta \|B_{0,t}\|_\infty |W^\uparrow|^{1/2} + |W^\uparrow|^{3/2}, \right. \\ & \left. h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{1/2} + \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{3/2} \right\} du + \tilde{C}\delta_3. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Ici, nous avons utilisé aussi l'hypothèse sur $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3)$ et les deux estimations suivantes :

$$|W^\uparrow|^{1/2} \leq c_1 \left(1 + |W^\uparrow|^{3/2} \right), \quad |W^\uparrow|^{3/2} \leq c_1 \left(1 + |W^\uparrow|^{5/2} \right), \quad (5.157)$$

où $c_1 > 0$ est une constante universelle.

Comme pour tout $p > 0$, il existe une constante $c_p > 0$ telle que

$$\left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^p \leq c_p \left[\left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} \right|^p + \left| r_h^\uparrow(u) \right|^p \right],$$

il résulte de nouveau des propriétés de r_h^\uparrow (r_h^\uparrow est à support compact et a l'ordre de δ_3) et des estimations (5.157),

$$\begin{aligned}
& \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} |\delta_3 W^\uparrow(u) + C\epsilon| \max \left\{ h\beta \|B_{0,t}\|_\infty |W^\uparrow|^{1/2} + |W^\uparrow|^{3/2}, \right. \\
& \left. h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{1/2} + \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\uparrow(u) \right|^{3/2} \right\} du \\
& \leq \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} |\delta_3 W^\uparrow(u) + C\epsilon| \max \left\{ h\beta \|B_{0,t}\|_\infty |W^\uparrow|^{1/2} + |W^\uparrow|^{3/2}, \right. \\
& \left. h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} \right|^{1/2} + \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} \right|^{3/2} \right\} du + \tilde{C}' \delta_3,
\end{aligned} \tag{5.158}$$

où \tilde{C}' est une constante positive.

Comme $C > 0$, $\epsilon > 0$ et $\delta_3 \in]0, 1/4[$, on obtient l'existence d'une constante $\tilde{c} > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ h\beta \|B_{0,t}\|_\infty |W^\uparrow|^{1/2} + |W^\uparrow|^{3/2}, \right. \\
& \left. h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} \right|^{1/2} + \left| \frac{W^\uparrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} \right|^{3/2} \right\} \\
& \leq \tilde{c} h\beta \|B_{0,t}\|_\infty [|W^\uparrow(u)|^{1/2} + |W^\uparrow(u)|^{3/2} + \epsilon^{1/2}].
\end{aligned} \tag{5.159}$$

En utilisant les estimations en (5.157), on obtient,

$$\begin{aligned}
& \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} \epsilon h\beta \|B_{0,t}\|_\infty [|W^\uparrow(u)|^{1/2} + |W^\uparrow(u)|^{3/2} + \epsilon^{1/2}] du \\
& \leq 2c_1 \epsilon h\beta \|B_{0,t}\|_\infty \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} [1 + |W^\uparrow(u)|^{3/2} + |W^\uparrow(u)|^{5/2}] du \\
& \leq 2c_1 \epsilon h\beta \left[\pi(\varrho + 3\lambda)^3 + \int_{\mathbb{R}^3} (|W^\uparrow(u)|^{3/2} + |W^\uparrow(u)|^{5/2}) du \right].
\end{aligned} \tag{5.160}$$

De la même manière on estime le terme

$$\begin{aligned}
& \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} |\delta_3 W^\uparrow(u)| [|W^\uparrow(u)|^{1/2} + |W^\uparrow(u)|^{3/2} + \epsilon^{1/2}] du \\
& \leq \tilde{c}' \delta_3 \left(\pi \epsilon^{1/2} (\varrho + 3\lambda)^3 + \int_{\mathbb{R}^3} (|W^\uparrow(u)|^{3/2} + |W^\uparrow(u)|^{5/2}) du \right),
\end{aligned} \tag{5.161}$$

où \tilde{c}' est une constante positive.

En combinant les estimations (5.152)-(5.161), nous achevons la démonstration du lemme. \square

En suivant les mêmes étapes que dans la démonstration du lemme 5.6.2, nous obtenons dans le lemme suivant le contrôle des erreurs dues aux termes ‘spin down’.

Lemme 5.6.3. *Soient $\varrho \geq 1$, $\lambda > 0$, $t \in]-1, 1[$, soit (h, β) le couple de paramètres vérifiant (1.9), et soit $0 < \delta_3 < 1$. De plus, soient $B_{0,t}$ l’intensité du champ magnétique $\vec{B}_{0,t}$ défini en (3.18), W^\downarrow le potentiel modifié introduit en (5.122) et $r_h^\downarrow(u)$ le reste défini en (5.120).*

Alors il existe une constante $C > 0$ et une fonction

$$]0, h_0] \times \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[\times]0, 1[\times]-1, 1[\times]0, 1[\ni (h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3) \mapsto R'(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3)$$

telles que

$$\begin{aligned} & h^{-3} \int_{|u| \leq \varrho + 3\lambda} P_0 \left(h\beta B_{0,t}(u), -h\beta B_{0,t}(u) + \left(\frac{W^\downarrow(u) + C\epsilon}{1 - \delta_3} + r_h^\downarrow(u) \right) \right) du \\ & \leq h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} P_0 \left(h\beta B_{0,t}(u), -h\beta B_{0,t}(u) + W^\downarrow(u) \right) du + R'(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3). \end{aligned} \quad (5.162)$$

Ici, la fonction $R'(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3)$ satisfait

$$\begin{aligned} & \exists M > 0 \quad \forall (h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[\times]0, 1[\times]-1, 1[\times]0, 1[, \\ & |R'(h, \beta, \varrho, \lambda, t, \delta_3)| \leq M \left[(\delta_3 + \epsilon^{1/2}(\varrho + 3\lambda)^3) h^{-3} + \delta_3 \mathcal{F}_{h,\beta}(W^\downarrow) \right], \end{aligned}$$

et $\mathcal{F}_{h,\beta}$ est la fonctionnelle de Lieb-Thirring réduite définie en (2.21).

5.7 Contrôle du reste

Afin de compléter la démonstration du théorème 5.1.1, il reste (grâce aux lemmes 5.4.10, 5.6.1, 5.6.2 et 5.6.3) à contrôler le reste $\sum_k \langle \mathcal{R}f_k, f_k \rangle$ qui apparaît en (5.54). Ici,

$$\mathcal{R} = \frac{\delta_1}{2} [(h\vec{p} + \beta\vec{A}_0)^2 + \beta h \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0] + \mathcal{W}_r, \quad (5.163)$$

et

$$\mathcal{W}_r = V - (V\chi_\varrho) * (\theta_\lambda)^2 - c_4 h^2 \lambda^{-2} \delta_1^{-1} (\Theta_{\varrho,\lambda}^*)^2. \quad (5.164)$$

La clé de l’estimation est l’implémentation d’une inégalité de Lieb-Thirring (cf. le théorème 2.1.1) qui nous conduit à l’estimation d’une fonction du potentiel \mathcal{W}_r seulement.

Lemme 5.7.1.

Il existe une constante $C > 0$ telle que, avec les notations ci-dessus, on ait,

$$\forall \delta_1 \in]0, 1[, \quad \forall h \in]0, 1], \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=1}^N \langle \mathcal{R}f_k, f_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)} \geq -C\delta_1 \mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} [\mathcal{W}_r]_- \right),$$

où $\mathcal{G}_{h,\beta}$ est la fonctionnelle de Lieb-Thirring définie en (2.23).

Démonstration.

Notons que

$$\mathcal{R} = \frac{\delta_1}{2} \mathcal{H} \left(h, \beta \vec{B}_0, \frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right),$$

où $\mathcal{H} \left(h, \beta \vec{B}_0, \frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right)$ est l'opérateur de Pauli introduit en (2.7).

Rappelons que $(f_k)_k$ est une base orthonormée de l'espace propre $K \subset L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ associé au spectre négatif de l'opérateur de Pauli

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(h, \beta \vec{B}_0, V, \vec{a}) &= \vec{P}_{h, \beta \vec{A}_0} M_t(x) \vec{P}_{h, \beta \vec{A}_0} + h\beta \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{B}_0(x) + t \vec{b}(x) \right) \\ &\quad + t h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) + (V \otimes I)(x). \end{aligned}$$

Il résulte du principe variationnel (théorème 2.2.2) que

$$\sum_k \langle \mathcal{R}f_k, f_k \rangle \geq \frac{\delta_1}{2} \sum_k e_k \left(\mathcal{H} \left(h, \beta \vec{B}_0, \frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right) \right),$$

où $e_k \left(\mathcal{H} \left(h, \beta \vec{B}_0, \frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right) \right)$ désigne la suite croissante des valeurs propres strictement négatives de l'opérateur $\mathcal{H} \left(h, \beta \vec{B}_0, \frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right)$.

L'application du théorème 2.1.2 achève la démonstration du lemme. \square

Le reste de cette section est donc consacré à l'estimation du terme d'erreur

$$\mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} [\mathcal{W}_r]_- \right).$$

Ceci sera exprimé à l'aide des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(h, \beta, \varrho) &:= h^3 \left[\mathcal{G}_{h,\beta}(V; \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)) \right], \\ \varepsilon_-(h, \lambda) &= h^3 \sup_{|y| \leq \lambda} \left[\mathcal{G}_{h,\beta}(V(\cdot - y) - V) \right]. \end{aligned} \tag{5.165}$$

Ici, $\beta = \beta(h)$, $\varrho = \varrho(h)$, $\lambda = \lambda(h)$ et la fonctionnelle $\mathcal{G}_{h,\beta}(V; \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho))$ est définie par :

$$L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cap W^{1,1} \ni V \mapsto \mathcal{G}_{h,\beta}(V; \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)), \quad (5.166)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{h,\beta}(V; \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)) &:= h^{-3} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| [V(x)]_- \right|^{5/2} dx \\ &+ h^{-2} \beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| [V(x)]_- \right|^{3/2} dx \\ &+ h^{-5/4} \beta^{5/4} \|B_0\|_\infty^{5/4} \ell^{-1/2}(\vec{B}_0) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| [V(x)]_- \right| dx \\ &+ h^{-1} \beta \|B_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| \nabla [V(x)]_- \right| dx. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Lemme 5.7.2.

Soient $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$, $V \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$. Supposons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varrho(h) = +\infty, \quad (5.168)$$

et que $\beta(h)$ vérifie l'hypothèse (1.9). Alors on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h, \beta(h), \varrho(h)) = 0. \quad (5.169)$$

Démonstration.

Sous l'hypothèse (1.9) sur $\beta(h)$, on peut trouver deux constantes $C > 0$ et $h_0 \in]0, 1[$ telle que pour tout $h \in]0, h_0[$, on a :

$$\begin{aligned} h^3 \left[\mathcal{G}_{h,\beta}(V; \mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)) \right] &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| [V(x)]_- \right|^{5/2} dx \right. \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| [V(x)]_- \right|^{3/2} dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| [V(x)]_- \right| dx \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left| \nabla [V(x)]_- \right| dx \right). \end{aligned} \quad (5.170)$$

Nous notons

$$\Theta(\varrho) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} \left(\left| [V(x)]_- \right|^{5/2} + \left| [V(x)]_- \right|^{3/2} + \left| [V(x)]_- \right| + \left| \nabla [V(x)]_- \right| \right) dx. \quad (5.171)$$

Sous les hypothèses $V \in L^2(\mathbb{R}^{3/2}) \cap L^2(\mathbb{R}^{5/2})$, $V \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$, on a d'après le Théorème de convergence de Lebesgue

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \Theta(\varrho) = 0.$$

Comme $\varrho = \varrho(h)$ est tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \varrho(h) = +\infty$, et que

$$\varepsilon_2(h, \beta(h), \varrho(h)) \leq C\Theta(\varrho(h)). \quad (5.172)$$

On en déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h, \beta(h), \varrho(h)) = 0. \quad (5.173)$$

□

Lemme 5.7.3.

Soit $V \in L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_1(\lambda) = 0, \quad (5.174)$$

où

$$\Gamma_1(V, \lambda) = \sup_{|y| \leq \lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |V(x-y) - V(x)| dx. \quad (5.175)$$

Démonstration.

Soient $V \in L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |V(x) - V_n(x)| dx = 0. \quad (5.176)$$

Soit $n \geq n_0$ tel que

$$\|V - V_n\|_{L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On a par la formule de Taylor

$$\Gamma_1(V_n, \lambda) \leq \left(\sup |\nabla V_n| \right) \left(\text{Vol}(\text{Supp} V_n) \right) |\lambda|. \quad (5.177)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(V, \lambda) &\leq \Gamma_1(V_n, \lambda) + 2\|V - V_n\|_{L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})} \\ &\leq \Gamma_1(V_n, \lambda) + \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

Il résulte de (5.177) que pour tout

$$|\lambda| \leq \epsilon \left(3 \|\nabla V_n\|_\infty \text{Vol}(\text{Supp}V_n) \right)^{-1},$$

on a

$$\Gamma_1(V_n, \lambda) \leq \|\nabla V_n\|_\infty \text{Vol}(\text{Supp}V_n) |\lambda| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (5.179)$$

En combinant (5.178) et (5.179), nous obtenons que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \lambda_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad \Gamma_1(V, \lambda) < \epsilon \quad \forall \lambda, \quad |\lambda| < \lambda_0. \quad (5.180)$$

Ceci achève la preuve du lemme 5.7.3. \square

Lemme 5.7.4.

Soient $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^3(\mathbb{R}^3)$, $V \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$. Supposons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) = 0, \quad (5.181)$$

et que $\beta(h)$ vérifie l'hypothèse (1.9). Alors on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_-(h, \lambda(h)) = 0. \quad (5.182)$$

Démonstration.

Sous l'hypothèse (1.9) sur $\beta(h)$, on peut trouver deux constantes $C > 0$ et $h_0 \in]0, 1[$ telle que pour tout $h \in]0, h_0[$, on a :

$$\mathcal{G}_{h,\beta}(V(\cdot - y) - V) \leq C \Gamma(y), \quad (5.183)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma(y) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| [V(x-y) - V(x)]_- \right|^{5/2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left| [V(x-y) - V(x)]_- \right|^{3/2} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \left| [V(x-y) - V(x)]_- \right| dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla [V(x-y) - V(x)]_- \right| dx. \end{aligned} \quad (5.184)$$

On a

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda) &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|y| \leq \lambda} \left| [V(x-y) - V(x)]_- \right|^{5/2} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|y| \leq \lambda} \left| [V(x-y) - V(x)]_- \right|^{3/2} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|y| \leq \lambda} \left| [V(x-y) - V(x)]_- \right| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|y| \leq \lambda} \left| \nabla [V(x-y) - V(x)]_- \right| dx, \end{aligned} \quad (5.185)$$

où

$$\Gamma(\lambda) = \sup_{|y| \leq \lambda} \Gamma(y).$$

Notons maintenant que, si $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, le théorème de Lebesgue nous donne

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sup_{|y| \leq \lambda} \Gamma(y) \right) = 0. \quad (5.186)$$

Dans le cas général, on a par un argument de densité (voir le lemme 5.7.3) le même résultat.

Comme $\lambda = \lambda(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ et $\varepsilon_-(h, \lambda(h)) \leq C \Gamma(\lambda(h))$, on en déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_-(h, \lambda(h)) = 0.$$

□

La fonctionnelle $\mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} [\mathcal{W}_r]_- \right)$ s'estime à l'aide de l'inégalité de Jensen (voir par exemple [19]), dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Lemme 5.7.5. (*Jensen*)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable tel que $\mu(\Omega) = 1$. Si g est une fonction à valeur réelle et μ -intégrable, et si

$$\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

est une fonction convexe, alors,

$$\phi \left(\int_{\Omega} g \, d\mu \right) \leq \int_{\Omega} \phi(g) \, d\mu.$$

Revenons maintenant à l'estimation de $\mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right)$.

Lemme 5.7.6.

Il existe une constante $C > 0$ telle que, avec les notations ci-dessus, on ait

$$\forall \delta_1 \in]0, 1[, \quad \forall h \in]0, 1[, \quad \forall \lambda \in]h, 1[, \quad \forall \varrho \geq 1, \\ h^3 \mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right) \leq C \delta_1^{-3/2} \left[\varepsilon_2(h, \beta, \varrho) + \varepsilon_-(h, \lambda) + \delta_1^{-5/2} \lambda^{-2} h^2 (\varrho + 3\lambda)^5 \right].$$

Ici $\varepsilon_2(h, \beta, \varrho)$ et $\varepsilon_-(h, \lambda)$ ont été introduites en (5.165).

Démonstration.

Dans tout ce qui suit, C désigne une constante positive indépendante de h et de δ_1 et qui peut changer d'une ligne à l'autre.

Il découle de la définition de $\mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right)$ (cf. (2.23)),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{h,\beta} \left(\frac{2}{\delta_1} \mathcal{W}_r \right) &\leq C \delta_1^{-5/2} \left[\mathcal{G}_{h,\beta} \left((1 - \chi_\varrho) V * (\theta_\lambda)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G}_{h,\beta} \left(V - V * (\theta_\lambda)^2 \right) + \mathcal{G}_{h,\beta} \left(h^2 \lambda^{-2} \delta_1^{-1} (\Theta_{\varrho,\lambda}^*)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.187)$$

Comme la fonction $\Theta_{\varrho,\lambda}^*$ est à support dans la boule $B(0, \varrho + 3\lambda)$, le dernier terme en (5.187) s'estime simplement sous la forme :

$$\mathcal{G}_{h,\beta} \left(h^2 \lambda^{-2} \delta_1^{-1} (\Theta_{\varrho,\lambda}^*)^2 \right) \leq C \delta_1^{-5/2} \lambda^{-2} h^2 (\varrho + 3\lambda)^5, \quad (5.188)$$

où nous avons utilisé aussi le fait que $\lambda \geq h$.

Les deux autres termes à droite de (5.187) s'estiment à l'aide du lemme de Jensen. Montrons que :

$$\mathcal{G}_{h,\beta} \left((1 - \chi_\varrho) V * (\theta_\lambda)^2 \right) \leq C h^{-3} \varepsilon_2(h, \beta, \varrho). \quad (5.189)$$

En fait, notons que, d'après la définition de la convolution,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} |(1 - \chi_\varrho) V * (\theta_\lambda)^2(x)|^{5/2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [(1 - \chi_\varrho) V(x)] (\theta_\lambda)^2(x - y) dy \right|^{5/2} dx. \end{aligned} \quad (5.190)$$

Comme la fonction

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto |s|^{5/2}$$

est convexe et

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\theta_\lambda)^2(x - y) dy = 1,$$

on a d'après le lemme 5.7.5 (appliqué avec la mesure $(\theta_\lambda)^2(x - y)dy$),

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [(1 - \chi_\varrho) V(x)] (\theta_\lambda)^2(x - y) dy \right|^{5/2} dx \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |(1 - \chi_\varrho) V(x)|^{5/2} (\theta_\lambda)^2(x - y) dy dx. \end{aligned} \quad (5.191)$$

En utilisant le théorème de Fubini et le fait que $\int_{\mathbb{R}^3} \theta_\lambda(x) dx = 1$, on obtient,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |(1 - \chi_\varrho)V(x)|^{5/2} (\theta_\lambda)^2(x - y) dy dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} |(1 - \chi_\varrho)V(x)|^{5/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\theta_\lambda)^2(x - y) dy \right) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} |(1 - \chi_\varrho)V(x)|^{5/2} dx. \end{aligned} \quad (5.192)$$

En combinant (5.190)-(5.192), et en utilisant le fait que χ_ϱ est la fonction caractéristique de la boule $B(0, \varrho) \subset \mathbb{R}^3$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |(1 - \chi_\varrho)V * (\theta_\lambda)^2(x)|^{5/2} dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varrho)} |V(x)|^{5/2} dx. \end{aligned} \quad (5.193)$$

En faisant la même analyse pour les autres termes en $\mathcal{G}_{h, \beta}((1 - \chi_\varrho)V * (\theta_\lambda)^2)$, puis en rappelant la définition de $\varepsilon_2(h, \beta, \varrho)$ en (5.165), nous déduisons en suite l'estimation (5.189).

Par des arguments similaires, nous démontrons que

$$\mathcal{G}_{h, \beta}(V - V * (\theta_\lambda)^2) \leq C\varepsilon_-(h, \lambda). \quad (5.194)$$

En combinant (5.187), (5.188), (5.189) et (5.194), nous achevons la démonstration du lemme. \square

5.8 Fin de la démonstration du théorème 5.1.1

La démonstration du théorème 5.1.1 découle maintenant simplement des lemmes 5.4.10, 5.6.1, 5.6.2, 5.6.3, 5.7.1 et 5.7.6. En fait, il résulte de la combinaison de ces lemmes la minoration suivante :

$$\sum_k e_n(\mathcal{H}_t) \geq E_{scl,t}(h, \beta, B_{0,t}, V) - h^{-3} \tilde{R}, \quad (5.195)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & C \left[\delta_3 + (\lambda + \epsilon^{1/2})(\varrho + 3\lambda)^3 \right. \\ & \left. + \delta_1^{-3/2} \left(\varepsilon_2(h, \beta, \varrho) + \varepsilon_-(h, \lambda) + \delta_1^{-5/2} \lambda^{-2} h^2 (\varrho + 3\lambda)^5 \right) \right], \end{aligned}$$

et $C > 0$ est une constante positive indépendante des paramètres du problème.

Nous choisissons les paramètres $\delta_1, \delta_3, \lambda, \varrho$ d'une manière telle que le reste \tilde{R} est petit lorsque $h \rightarrow 0$. En fait, prenons

$$\lambda(h) \in]h^{7/8}, h^{7/10}[.$$

On vérifie que

$$\epsilon(h) = C_1 h^{1/4}$$

et

$$\lambda^{-2} h^2 \leq \epsilon(h).$$

Ici $C_1 > 1$ est introduite dans la proposition 3.2.5. Puis prenons ϱ tel que

$$\epsilon(h)^{1/2} (\varrho + 3\lambda)^3 \ll 1 \quad (h \rightarrow 0).$$

Nous prenons finalement $\delta_3 = 4\delta_1$ et

$$\delta_1 = [\varepsilon_2(h, \beta, \varrho) + \varepsilon_-(h, \lambda) + \epsilon(h)^{1/2} (\varrho + 3\lambda)^3]^{1/8} \ll 1,$$

lorsque $h \rightarrow 0$. Avec ce choix de paramètres, on obtient $\tilde{R} = o(h)$ et en conséquence, (5.195) devient

$$\sum_k e_n(\mathcal{H}_t) \geq E_{scl,t}(h\beta, B_{0,t}, V) + o(h^{-3}). \quad (5.196)$$

Pour conclure, notons que, avec nos hypothèses sur B, V et la matrice M_t , il existe des constantes $C' > 0, C'' > 0, t_0 > 0$ et $h_0 > 0$ telles que, pour tous

$$h \in]0, h_0] \quad \text{et} \quad t \in [-t_0, t_0]$$

on a

$$C' h^{-3} \leq E_{scl,t}(h\beta, B_{0,t}, V) \leq C'' h^{-3}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 5.1.1.

Chapitre 6

Développement asymptotique du courant en régime semi-classique

6.1 Théorème principal

Rappelons la définition de l'opérateur de Pauli

$$\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) = (-ih\nabla + \beta \vec{A}_0)^2 + \beta h \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 + V, \quad (6.1)$$

où le potentiel scalaire $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3)$ vérifie

$$\nabla V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad [V]_- \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3),$$

et le champ magnétique $B_0 \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ vérifie

$$c_1 < |B_0(x)| < C_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad (6.2)$$

pour deux constantes positives c_1 et C_1 .

Nous prenons le potentiel magnétique A_0 sous la forme

$$\vec{A}_0(x) = \int_0^1 s \left(\vec{B}_0(sx) \wedge x \right) ds \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

tel que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}_0$.

Notons $\mathbb{I}_{]-\infty, 0[}$ ($\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$) le projecteur spectral sur l'espace propre associé au spectre négatif de l'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$. Le but de ce chapitre est de décrire le terme principal du courant $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_{h,\beta}(x) \cdot \vec{a}(x) dx$ lorsque le paramètre semi-classique h tend vers zéro. Rappelons que, le courant total est défini comme la distribution :

$$\vec{j}_{h,\beta} : C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \ni \vec{a} \mapsto \text{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[} \left(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) \right) \right], \quad (6.3)$$

où l'opérateur Courant $\vec{J}_{h,\beta}$ est défini par :

$$\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a}) = \vec{J}_{h,\beta}^p(\vec{a}) \otimes \text{Id}_{\mathbb{C}^2} + h \vec{\sigma} \cdot \vec{b},$$

avec

$$\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}, \quad \vec{J}_{h,\beta}^p = \vec{a} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{a}. \quad (6.4)$$

Rappelons aussi la définition du gradient magnétique

$$\vec{P}_{h,\beta A_0} = (-i\nabla + \beta \vec{A}_0), \quad (6.5)$$

Introduisons l'énergie semi-classique indépendante du paramètre h :

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathbb{R}_+, \quad E_\mu(\vec{B}_0, V) := & - \int_{\mathbb{R}^3} P_1(\mu B_0(u), [V(u)]_-) du \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} P_0(\mu B_0(u), [V(u)]_-) du, \end{aligned} \quad (6.6)$$

où, pour un entier $k \in \mathbb{N}$, nous rappelons que la fonction P_k est définie par

$$P_k(b, w) := \frac{1}{3\pi^2} \sum_{\nu=k}^{\infty} b [2\nu b - w]_-^{3/2}. \quad (6.7)$$

Introduisons aussi l'expression de l'énergie semi-classique $E_{\mu,t}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in]-t_0, t_0[$,

$$\begin{aligned} E_{\mu,t}(B_{0,t}, V) \\ = & - \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_t^{-1}(u) P_1(\mu B_{0,t}(u), \mu B_{0,t}(u) - V(u) - \mu \Delta_t(u)) du \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_t^{-1}(u) P_0(\mu B_{0,t}(u), -\mu B_{0,t}(u) - V(u) + \mu \Delta_t(u)) du, \end{aligned} \quad (6.8)$$

où Λ_t est défini pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ par

$$\Lambda_t(u) = |\det(N_t(u))|, \quad (6.9)$$

et

$$N_t(u) = \sqrt{I + tM(u)}. \quad (6.10)$$

Rappelons que $N_t^{(2)}$ est la matrice associée à N_t dans la base $(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2)$ vérifiant la relation :

$$\mathcal{C}^{(2)}(u \wedge v) = \mathcal{C}(u) \wedge \mathcal{C}(v). \quad (6.11)$$

Plus explicitement, $\mathcal{C}^{(2)}$ est donnée par

$$\mathcal{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_{22}c_{33} - c_{23}^2 & c_{23}c_{13} - c_{33}c_{12} & c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13} \\ c_{23}c_{13} - c_{33}c_{12} & c_{11}c_{33} - c_{31}^2 & c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} \\ c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13} & c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} & c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Rappelons que le champ magnétique $\vec{B}_{0,t}$ est défini par

$$\vec{B}_{0,t}(u) = N_t^{(2)}(u) \vec{B}_0(u). \quad (6.13)$$

Rappelons aussi

$$\Delta_t(u) = \left| \vec{B}_0(u) + t \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u)) \vec{a}(u) \right) \right|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^3. \quad (6.14)$$

Ici nous rappelons que \vec{a} est défini par

$$\vec{a} = \frac{\vec{n}_0 \wedge \vec{a}}{B_0}. \quad (6.15)$$

Nous rappelons aussi que

$$D\vec{a} = \left(\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{a}_1 & \partial_2 \tilde{a}_1 & \partial_3 \tilde{a}_1 \\ \partial_1 \tilde{a}_2 & \partial_2 \tilde{a}_2 & \partial_3 \tilde{a}_2 \\ \partial_1 \tilde{a}_3 & \partial_2 \tilde{a}_3 & \partial_3 \tilde{a}_3 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de ce chapitre, mais il ne concerne que le comportement semi-classique du courant $\vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a})$ lorsque la fonction test \vec{a} est orthogonale en tout point au champ magnétique \vec{B}_0 .

Théorème 6.1.1.

Avec les hypothèses du théorème 1.4.1, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{J}_{h,\beta}(x) \cdot \vec{a}(x) dx &= \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial t} E_{\mu,t}(B_0, V) \Big|_{t=0} \\ &+ \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial s} E_{\mu} \left(B_0, V + s(\vec{a} \cdot \nabla V) \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ici les énergies semi-classiques $E_{\mu,t}$ et E_{μ} ont été introduites dans (6.8) et (6.6).

6.2 Une formule du commutateur

Dans cette section, nous prouvons une formule du commutateur pour l'opérateur du courant $\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$. Cette formule décompose $\vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$ en la somme d'un opérateur plus simple à calculer et d'un commutateur avec \mathcal{H} . Nous gagnons dans cette décomposition le fait que la trace de ce commutateur est nulle, ce qui facilitera le calcul de $\text{tr } \vec{J}_{h,\beta}(\vec{a})$.

Théorème 6.2.1.

Supposons que $\vec{a} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et que \vec{B}_0 satisfait (1.5), (1.7) et $\vec{B}_0 \cdot \vec{a} = 0$. Supposons que V vérifie (1.8) et que $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ soit une fonction propre de \mathcal{H} ($\mathcal{H}\psi = \lambda\psi$). Alors

$$\begin{aligned} & \langle \psi ; \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\beta\vec{a})\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = \\ & + \left\langle \psi ; \left[- \left(\vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \left(D\vec{a} + (D\vec{a})^t \right) \vec{P}_{h,\beta A_0} \right) + h\beta\vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0)\vec{a} \right) \right] \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \\ & + \left\langle \psi ; \left[-\frac{1}{2}h^2\Delta \left(\text{div } \vec{a} \right) + \vec{a} \cdot \nabla V \right] \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ici \vec{a} a été introduite en (3.2) et $\mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})$ est le courant permanent qui a été défini en(1.20).

Ce théorème est une conséquence immédiate des lemmes 6.2.4 et 6.2.5, mais commençons par un lemme élémentaire d'algèbre linéaire.

Lemme 6.2.2.

Soient $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{B}_0 = (B_{0,1}, B_{0,2}, B_{0,3}) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{B}_0 \neq \vec{0}$ et $\vec{B}_0 \cdot \vec{\alpha} = 0$. Alors il existe un unique $\vec{\tilde{\alpha}}$ dans \mathbb{R}^3 tel que

$$\vec{\tilde{\alpha}} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (6.19)$$

$$\vec{\tilde{\alpha}} = \mathbb{B}_0 \vec{\alpha}, \quad (6.20)$$

$$\text{avec } \mathbb{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_{0,3} & -B_{0,2} \\ -B_{0,3} & 0 & B_{0,1} \\ B_{0,2} & -B_{0,1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ donné par}$$

$$\vec{\tilde{\alpha}} = \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{a}}{B_0^2}. \quad (6.21)$$

Démonstration.

La preuve consiste à résoudre l'équation

$$\vec{\alpha} = \mathbb{B}_0 \vec{\tilde{\alpha}} \quad \text{pour un } \vec{\alpha} \text{ donné .}$$

Dans le cas $\vec{\alpha} = (0, 0, 0)$, nous pouvons prendre $\vec{\tilde{\alpha}} = (0, 0, 0)$. Supposons alors que $\vec{\tilde{\alpha}} \neq (0, 0, 0)$, supposons de plus que

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{B}_0 \neq (0, 0, 0)$$

alors

$$\vec{\tilde{\alpha}} = \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{\alpha}}{|\vec{B}_0|^2}$$

est une solution. En effet après avoir remarqué que

$$\mathbb{B}_0 \vec{\tilde{\alpha}} = \vec{\tilde{\alpha}} \wedge \vec{B}_0 ,$$

nous résolvons plutôt l'équation suivante

$$\vec{\tilde{\alpha}} \wedge \vec{B}_0 = \vec{\alpha} . \tag{6.22}$$

Soit le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que

$$\vec{i} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} , \tag{6.23}$$

$$\vec{j} = \frac{\vec{B}_0}{|\vec{B}_0|} , \tag{6.24}$$

et

$$\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j} . \tag{6.25}$$

De plus le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vérifie les propriétés suivantes

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} . \tag{6.26}$$

Nous écrivons

$$\vec{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}_1 \vec{i} + \tilde{\alpha}_2 \vec{j} + \tilde{\alpha}_3 \vec{k} . \tag{6.27}$$

En utilisant (6.27) et (6.24), nous obtenons

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{B}_0 = |\vec{B}_0|(\tilde{\alpha}_1 \vec{i} + \tilde{\alpha}_2 \vec{j} + \tilde{\alpha}_3 \vec{k}) \wedge \vec{j}. \quad (6.28)$$

Nous utilisons maintenant (6.25) et (6.26) pour obtenir

$$|\vec{B}_0|(\tilde{\alpha}_1 \vec{i} + \tilde{\alpha}_2 \vec{j} + \tilde{\alpha}_3 \vec{k}) \wedge \vec{j} = |\vec{B}_0|(\tilde{\alpha}_1 \vec{k} - \tilde{\alpha}_3 \vec{i}). \quad (6.29)$$

En utilisant (6.28), (6.29) et (6.23) nous réécrivons (6.22) comme suit

$$|\vec{B}_0|(\tilde{\alpha}_1 \vec{k} - \tilde{\alpha}_3 \vec{i}) = |\vec{\alpha}| \vec{i}.$$

Par identification, nous obtenons que

$$\tilde{\alpha}_1 = 0; \quad \tilde{\alpha}_3 = -\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{B}_0|}.$$

Par suite $\vec{\alpha}$ est de la forme

$$\vec{\alpha} = \tilde{\alpha}_2 \vec{j} - \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{B}_0|} \vec{k}.$$

Nous concluons alors que l'ensemble des solutions de l'équation (6.22) est

$$\left\{ \tilde{\alpha}_2 \vec{j} - \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{B}_0|} \vec{k}; \tilde{\alpha}_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

De plus

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{B}_0 = \tilde{\alpha}_2 |\vec{B}_0|.$$

Comme $\|\vec{B}_0\| \neq 0$, l'équation $\vec{\alpha} \cdot \vec{B}_0 = 0$ implique que $\tilde{\alpha}_2 = 0$.

Si $\tilde{\alpha}_2 = 0$ alors

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= -\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{B}_0|} \vec{k} \\ &= -\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{B}_0|} \left(\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \wedge \frac{\vec{B}_0}{|\vec{B}_0|} \right) \\ &= \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{\alpha}}{|\vec{B}_0|^2}. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.2.3.

Soit $\vec{a} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, supposons que $\vec{B}_0 \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ soit tel que

$$B_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (6.30)$$

Il résulte du lemme 6.2.2 appliqué à $\vec{\alpha} = \vec{a}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, l'existence d'un unique $\vec{\tilde{a}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\vec{a}(x) = B_0(x) \cdot \vec{\tilde{a}}(x) \quad (6.31)$$

et

$$\vec{\tilde{a}}(x) \cdot \vec{B}_0(x) = 0, \quad (6.32)$$

donné par (3.2).

Lemme 6.2.4.

Soient \vec{a}, \vec{B}_0 et $\vec{\tilde{a}}$ comme dans (6.30)-(6.32). Supposons que V vérifie (1.8). Alors pour tout ψ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, nous avons

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, \mathbf{J}_{h,\beta}^p(\vec{\tilde{a}})]\psi &= -2ih\beta \left(\mathbf{J}_{h,\beta}^p(\vec{a}) \right) \psi - 2ih \left(\vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \left(D\vec{a} + (D\vec{a})^t \right) \vec{P}_{h,\beta A_0} \right) \psi \\ &\quad - ih^3 \left(\Delta \left(\operatorname{div}(\vec{\tilde{a}}) \right) \right) \psi + 2ih^2 \beta \left(\left((D\vec{B}_0)\vec{\tilde{a}} \right) \cdot \vec{\sigma} \right) \psi \\ &\quad + 2ih \left(\vec{\tilde{a}} \cdot \nabla V \right) \psi. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Nous rappelons que \mathcal{H} a été introduit en (1.10) et $\mathbf{J}_{h,\beta}^p$ en (1.20). Nous avons utilisé également la notation $D\vec{a}$ introduite en (6.16).

Démonstration.

La preuve consiste en un calcul de commutateurs. Nous rappelons que $\vec{P}_{h,\beta A_0}^2 \otimes I_{\mathbb{C}^2}$ et $\mathbf{J}_{h,\beta}^p(\vec{\tilde{a}})$ sont diagonaux :

$$\begin{aligned} \vec{P}_{h,\beta A_0}^2 \otimes I_{\mathbb{C}^2} &= \begin{pmatrix} \vec{P}_{h,\beta A_0}^2 & 0 \\ 0 & \vec{P}_{h,\beta A_0}^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}_{h,\beta}^p(\vec{\tilde{a}}) &= \begin{pmatrix} \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}} & 0 \\ 0 & \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire le premier calcul ci-dessus pour les opérateurs scalaires $\vec{P}_{h,\beta A_0}^2$ et $\vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}}$. Nous avons

$$[\vec{P}_{h,\beta A_0}^2, \mathbf{J}_{h,\beta}^p(\vec{\tilde{a}})] = [\vec{P}_{h,\beta A_0}^2, \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [\vec{P}_{h,\beta A_0}^2, \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}}]. \quad (6.34)$$

En utilisant la propriété

$$[A, BC] + [A, CB] = [A, B]C + B[A, C] + [A, C]B + C[A, B], \quad (6.35)$$

avec

$$A = \vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \quad B = \vec{a}, \quad \text{et} \quad C = \vec{P}_{h, \beta A_0}, \quad (6.36)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a} \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \vec{a}] \\ &= \vec{a} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] \cdot \vec{a} \\ &+ \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Calcul de $\vec{a} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] \cdot \vec{a}$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] \cdot \vec{a} \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j [P_{A_0,k}^2, P_{A_0,j}] + \sum_{j,k=1}^3 [P_{A_0,k}^2, P_{A_0,j}] \tilde{a}_j. \end{aligned} \quad (6.38)$$

En utilisant encore une fois la propriété (6.35), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j [P_{A_0,k}^2, P_{A_0,j}] + \sum_{j,k=1}^3 [P_{A_0,k}^2, P_{A_0,j}] \tilde{a}_j \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j \left(P_{A_0,k} [P_{A_0,k}, P_{A_0,j}] + [P_{A_0,k}, P_{A_0,j}] P_{A_0,k} \right) \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 \left(P_{A_0,k} [P_{A_0,k}, P_{A_0,j}] + [P_{A_0,k}, P_{A_0,j}] P_{A_0,k} \right) \tilde{a}_j. \end{aligned} \quad (6.39)$$

En utilisant l'expression du commutateur

$$[P_{A_0,j}, P_{A_0,k}] = -i\beta h \mathbb{B}_{0,j,k}, \quad (6.40)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j \left(P_{A_0,k} [P_{A_0,k}, P_{A_0,j}] + [P_{A_0,k}, P_{A_0,j}] P_{A_0,k} \right) \\ &= -ih\beta \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j P_{A_0,k} \mathbb{B}_{0,k,j} - ih\beta \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j \mathbb{B}_{0,k,j} P_{A_0,k} \end{aligned} \quad (6.41)$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^3 (P_{A_{0,k}}[P_{A_{0,k}}, P_{A_{0,j}}] + [P_{A_{0,k}}, P_{A_{0,j}}]P_{A_{0,k}}) \tilde{a}_j \\ &= -ih\beta \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,k}} \mathbb{B}_{0,k,j} \tilde{a}_j - ih\beta \sum_{j,k=1}^3 \mathbb{B}_{0,k,j} P_{A_{0,k}} \tilde{a}_j. \end{aligned} \quad (6.42)$$

D'une part, en utilisant la définition de $\vec{\tilde{a}}$ introduite en (3.2), nous obtenons

$$\sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,k}} \mathbb{B}_{0,k,j} \tilde{a}_j = \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}} \quad (6.43)$$

et

$$\sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j \mathbb{B}_{0,k,j} P_{A_{0,k}} = \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0}. \quad (6.44)$$

D'autre part, en utilisant

$$P_{A_{0,k}} \tilde{a}_j - \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} = ih \partial_k \tilde{a}_j, \quad (6.45)$$

nous pouvons écrire

$$-ih\beta \sum_{j,k=1}^3 \mathbb{B}_{0,k,j} P_{A_{0,k}} \tilde{a}_j = -ih\beta \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0} + \beta h^2 \partial_k \tilde{a}_j \quad (6.46)$$

et

$$-ih\beta \sum_{j,k=1}^3 \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} \mathbb{B}_{0,k,j} = -ih\beta \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}} - \beta h^2 \partial_k \tilde{a}_j. \quad (6.47)$$

En combinant (6.43)-(6.47), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (-ih\beta \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}}) - (ih\beta \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0}) - (ih\beta \vec{\tilde{a}} \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0} - \beta h^2 \partial_k \tilde{a}_j) \\ & - (ih\beta \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \vec{\tilde{a}} + \beta h^2 \partial_k \tilde{a}_j) = -2ih\beta J_{h, \beta}^p(\vec{\tilde{a}}). \end{aligned} \quad (6.48)$$

En combinant (6.38)-(6.48), nous retrouvons alors

$$\vec{\tilde{a}} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{P}_{h, \beta A_0}] \cdot \vec{\tilde{a}} = -2ih\beta J_{h, \beta}^p(\vec{\tilde{a}}). \quad (6.49)$$

Calcul de $\vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0}$

Nous nous intéressons maintenant à

$$\vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] + [\vec{P}_{h, \beta A_0}^2, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0} &= \sum_{j,k=1}^3 P_{A_j} [P_{A_{0,k}}^2, \vec{a}_j] \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 [P_{A_{0,k}}^2, \vec{a}_j] P_{A_j}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

En utilisant la propriété (6.35), nous écrivons

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} [P_{A_{0,k}}^2, \vec{a}_j] + \sum_{j,k=1}^3 [P_{A_{0,k}}^2, \vec{a}_j] P_{A_{0,j}} \\ &= \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \left(P_{A_{0,k}} [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] + [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] P_{A_{0,k}} \right) \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 \left(P_{A_{0,k}} [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] + [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] P_{A_{0,k}} \right) P_{A_{0,j}}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Observons que

$$[P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] = -i\hbar \partial_k \vec{a}_j, \quad (6.52)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} &(i\hbar)^{-1} \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \left(P_{A_{0,k}} [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] + [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] P_{A_{0,k}} \right) \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 \left(P_{A_{0,k}} [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] + [P_{A_{0,k}}, \vec{a}_j] P_{A_{0,k}} \right) P_{A_{0,j}} \\ &= - \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} P_{A_{0,k}} \partial_k \vec{a}_j - \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \partial_k \vec{a}_j P_{A_{0,k}} \\ &- \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,k}} \partial_k \vec{a}_j P_{A_{0,j}} - \sum_{j,k=1}^3 \partial_k \vec{a}_j P_{A_{0,k}} P_{A_{0,j}}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Notons que dans (6.53) nous avons

$$\sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} + \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,k}} \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,j}} = \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \left(D\vec{a} + (D\vec{a})^t \right) \vec{P}_{h, \beta A_0}. \quad (6.54)$$

Il nous reste à calculer

$$\sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} P_{A_{0,k}} \partial_k \tilde{a}_j$$

et

$$\sum_{j,k=1}^3 \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} P_{A_{0,j}};$$

pour cela nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} P_{A_{0,k}} \partial_k \tilde{a}_j + \sum_{j,k=1}^3 \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} P_{A_{0,j}} \\ &= \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} - \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} [P_{A_{0,k}}, \partial_k \tilde{a}_j] \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,k}} \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,j}} - \sum_{j,k=1}^3 [\partial_k \tilde{a}_j, P_{A_{0,k}}] P_{A_{0,j}}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Dans (6.55), nous avons

$$\sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,k}} + \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,k}} \partial_k \tilde{a}_j P_{A_{0,j}} = \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \left(D\vec{a} + (D\vec{a})^t \right) \vec{P}_{h, \beta A_0}. \quad (6.56)$$

En utilisant

$$[P_{A_{0,k}}, \partial_k \tilde{a}_j] = -i\hbar \partial_k^2 \tilde{a}_j, \quad (6.57)$$

nous terminons par le calcul :

$$\begin{aligned}
& ih \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} [P_{A_{0,k}}, \partial_k \tilde{a}_j] + ih \sum_{j,k=1}^3 [\partial_k \tilde{a}_j, P_{A_{0,k}}] P_{A_{0,j}} \\
&= h^2 \sum_{j,k=1}^3 P_{A_{0,j}} \partial_k^2 \tilde{a}_j - h^2 \sum_{j,k=1}^3 \partial_k^2 \tilde{a}_j P_{A_{0,j}} \\
&= h^2 \sum_{j,k=1}^3 [P_{A_{0,j}}, \partial_k^2 \tilde{a}_j] \\
&= -ih^3 \sum_{j,k=1}^3 \partial_j \partial_k^2 \tilde{a}_j \\
&= -ih^3 \Delta(\operatorname{div}(\vec{a})).
\end{aligned} \tag{6.58}$$

En combinant (6.50)-(6.58), nous trouvons bien

$$\begin{aligned}
& \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot [\vec{P}_{h,\beta A_0}^2, \vec{a}] + [\vec{P}_{h,\beta A_0}^2, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} \\
&= -2ih \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot (D\vec{a} + (D\vec{a})^t) \vec{P}_{h,\beta A_0} - ih^3 \Delta(\operatorname{div}(\vec{a})).
\end{aligned} \tag{6.59}$$

En sommant (6.49) et (6.59), nous obtenons

$$\begin{aligned}
[\vec{P}_{h,\beta A_0}^2, \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})] &= -2ih \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a}) - 2ih \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot (D\vec{a} + (D\vec{a})^t) \vec{P}_{h,\beta A_0} \\
&\quad - ih^3 \Delta(\operatorname{div}(\vec{a})).
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Calcul de $[h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0, \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})]$

Nous avons

$$[h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0, \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})] = h\beta \sum_{k=1}^3 \sigma_k \sum_{j=1}^3 [B_{0,k}, \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})_j]. \tag{6.61}$$

Nous nous intéressons donc à $[B_{0,k}, \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})_j]$. Par la définition (1.20) de $\mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})$ nous écrivons

$$[B_{0,k}, \mathbb{J}_{h,\beta}^p(\vec{a})_j] = [B_{0,k}, \tilde{a}_j P_{A_{0,j}}] + [B_{0,k}, P_{A_{0,j}} \tilde{a}_j]. \tag{6.62}$$

En appliquant (6.35), nous obtenons

$$[B_{0,k}, \tilde{a}_j P_{A_{0,j}}] + [B_{0,k}, P_{A_{0,j}} \tilde{a}_j] = \tilde{a}_j [B_{0,k}, P_{A_{0,j}}] + [B_{0,k}, P_{A_{0,j}}] \tilde{a}_j. \tag{6.63}$$

Puis nous utilisons $[B_{0,k}, P_{A_{0,j}}] = ih\partial_j B_{0,k}$, pour écrire

$$\tilde{a}_j[B_{0,k}, P_{A_{0,j}}] + [B_{0,k}, P_{A_{0,j}}]\tilde{a}_j = 2ih\partial_j B_{0,k}\tilde{a}_j. \quad (6.64)$$

En combinant (6.61)-(6.64), nous trouvons

$$\begin{aligned} [h\beta\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0, J_{h,\beta}^p(\vec{a})] &= 2ih^2\beta \sum_{k=1}^3 \sigma_k \sum_{j=1}^3 \partial_j B_{0,k}\tilde{a}_j \\ &= 2ih^2\beta\vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0)\vec{a} \right). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Calcul de $[V, J_{h,\beta}^p(\vec{a})]$

Ici de nouveau, on peut se contenter du calcul scalaire (composante par composante). Nous nous intéressons à

$$[V, J_{h,\beta}^p(\vec{a})].$$

Nous utilisons la définition de $J_{h,\beta}^p(\vec{a})$ pour écrire

$$[V, J_{h,\beta}^p(\vec{a})] = [V, \vec{a} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [V, \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{a}]. \quad (6.66)$$

En utilisant (6.35), nous obtenons

$$\begin{aligned} [V, \vec{a} \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [V, \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot \vec{a}] &= \vec{a} \cdot [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [V, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} \\ &\quad + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot [V, \vec{a}] + [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] \cdot \vec{a}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

En utilisant

$$[V, \vec{a}] = 0, \quad (6.68)$$

nous obtenons que

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [V, \vec{a}] \cdot \vec{P}_{h,\beta A_0} + \vec{P}_{h,\beta A_0} \cdot [V, \vec{a}] + [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] \cdot \vec{a} \\ = \vec{a} \cdot [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] \cdot \vec{a}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Notons que

$$\vec{a} \cdot [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] + [V, \vec{P}_{h,\beta A_0}] \cdot \vec{a} = \sum_{j=1}^3 \tilde{a}_j [V, P_{A_{0,j}}] + \sum_{j=1}^3 [V, P_{A_{0,j}}] \tilde{a}_j. \quad (6.70)$$

En utilisant

$$[V, P_{A_0,j}] = ih \partial_j V, \quad (6.71)$$

nous obtenons

$$\sum_{j=1}^3 \tilde{a}_j [V, P_{A_0,j}] + \sum_{j=1}^3 [V, P_{A_0,j}] \tilde{a}_j = 2ih \sum_{j=1}^3 \tilde{a}_j \partial_j V = 2ih \vec{\tilde{a}} \cdot \nabla V. \quad (6.72)$$

En combinant (6.66)-(6.72), nous obtenons

$$[V, J_{h,\beta}^p(\vec{\tilde{a}})] = 2ih \vec{\tilde{a}} \cdot \nabla V. \quad (6.73)$$

En sommant (6.60), (6.65) et (6.73), nous achevons la preuve du lemme 6.2.4. \square

Lemme 6.2.5. (*Théorème du viriel*)

Soient \mathcal{H} l'opérateur de Pauli introduit en (1.10) et $J_{h,\beta}^p(\vec{a})$ l'opérateur défini en (1.20). Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ une fonction propre de \mathcal{H} ($\mathcal{H}\psi = \lambda\psi$) et supposons de plus que \vec{a} soit dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Alors

$$\langle \psi; [\mathcal{H}, J_{h,\beta}^p(\vec{a})]\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = 0. \quad (6.74)$$

Démonstration.

Rappelons que le domaine de \mathcal{H} est égal à $H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ (voir le théorème 2.3.5). De plus $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ est dense dans $H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ et les deux normes $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(\vec{P}_{A_0})}$ et $\|\cdot\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}$ sont équivalentes. Nous considérons une suite $\{\psi_n\}_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = 0,$$

Notons que par la définition de la norme $\|\cdot\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}$ donnée en (2.40), nous avons

$$\|\vec{P}_{h,\beta A_0}^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \leq \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \quad \forall u \in H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2). \quad (6.75)$$

De plus, il résulte de la proposition 2.3.4, l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\|Vu\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \leq c \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}, \quad \forall u \in H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2). \quad (6.76)$$

Comme \vec{B}_0 est borné, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}(\psi_n - \psi)\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = 0. \quad (6.77)$$

Notons qu'également la définition de la norme $\|\cdot\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}$, nous donne

$$\|\vec{P}_{h, \beta A_0} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \leq \|u\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \quad \forall u \in H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2). \quad (6.78)$$

Rappelons de (1.20) que $J_{h, \beta}^p(\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{P}_{h, \beta A_0} + \vec{P}_{h, \beta A_0} \cdot \vec{a}$. En combinant (6.78) et le fait que \vec{a} est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{h, \beta}^p(\vec{a})(\psi_n - \psi)\|_{H_{A_0}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = 0. \quad (6.79)$$

Nous avons par la définition du commutateur

$$\begin{aligned} \langle \psi_n ; [\mathcal{H}, J_{h, \beta}^p(\vec{a})] \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} &= \langle \psi_n ; (\mathcal{H} J_{h, \beta}^p(\vec{a}) - J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \mathcal{H}) \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \\ &= \langle \psi_n ; \mathcal{H} J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \\ &\quad - \langle \psi_n ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \mathcal{H} \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}. \end{aligned}$$

Par une intégration par parties, nous obtenons

$$\langle \psi_n ; \mathcal{H} J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = \langle \mathcal{H} \psi_n ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}.$$

Après passage à la limite, nous obtenons

$$\langle \psi ; [\mathcal{H}, J_{h, \beta}^p(\vec{a})] \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} = \langle \mathcal{H} \psi ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \langle \psi ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \mathcal{H} \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}.$$

Ici, nous avons utilisé (6.77) et (6.79). Comme nous supposons que ψ est une fonction propre de \mathcal{H} associée à la valeur propre λ ($\mathcal{H} \psi = \lambda \psi$), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{H} \psi ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \langle \psi ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \mathcal{H} \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \\ &= \lambda \langle \psi ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} - \lambda \langle \psi ; J_{h, \beta}^p(\vec{a}) \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

6.3 Estimation du terme potentiel

Comme on s'intéresse au calcul de la trace de l'opérateur

$$\vec{J}_{h, \beta}(\beta \vec{a}) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)),$$

on est conduit, d'après le théorème 6.2.1, à estimer la trace

$$\text{tr} \left[\left(-\frac{1}{2} h^2 \Delta (\text{div } \vec{a}) + \vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right]. \quad (6.80)$$

Citons le théorème suivant du [11], qui estime l'énergie quantique

$$E_Q(h, \beta B_0, V) = \text{tr} [\mathcal{H}(h, \beta B_0, V) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V))], \quad (6.81)$$

qui correspond à la trace négative de l'opérateur $\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)$.

Théorème 6.3.1.

Supposons que $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3)$, $[V]_- \in W^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ et $B_0 \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ vérifiant (6.2). Alors, pour toute $\phi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante $h_0 > 0$ et deux fonctions

$$[-1, 1] \times]0, h_0] \ni (s, h) \mapsto f(s, h), \quad]0, h_0] \ni h \mapsto g(h) \in \mathbb{R}_+$$

telles que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0,$$

$$|f(s, h)| \leq g(h), \quad \forall (s, h) \in]-1, 1[\times]0, h_0],$$

et

$$E_Q(h, \beta B_0, V + s\phi) = E_{scl}(h, \beta B_0, V + s\phi)(1 + f(s, h)), \\ \forall (s, h) \in]-1, 1[\times]0, h_0].$$

Ici, l'énergie semi-classique E_{scl} a été introduite en (3.21).

Théorème 6.3.2.

Supposons qu'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\beta(h) = \mu.$$

Pour tout $\phi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^3 \text{tr} [\phi \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V))] = \left. \frac{d}{ds} E_\mu(B_0, V + s\phi) \right|_{s=0}.$$

Ici, l'énergie E_μ a été définie en (6.6).

Démonstration.

Soit

$$H(s) = \mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V + s\phi), \quad (6.82)$$

où $\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)$ est l'opérateur de Pauli défini en (6.1).
Soit

$$\begin{aligned} E_Q(s) &:= E_Q(h, \beta \vec{B}_0, V + s\phi) \\ &= \text{tr} [H(s) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(s))] . \end{aligned} \quad (6.83)$$

Il résulte du théorème 2.2.3, que

$$E_Q(s) \leq \text{tr} [H(s) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] \quad (6.84)$$

En notant que $H(s) = H(0) + s\phi$, nous réécrivons (6.84) sous la forme

$$\begin{aligned} E_Q(s) &\leq \text{tr} [(H(0) + s\phi) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] \\ &= \text{tr} [H(0) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] + s \text{tr} [\phi \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] . \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$E_Q(s) - E_Q(0) \leq s \text{tr} [\phi \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] . \quad (6.86)$$

Lorsque $s > 0$, (6.86) devient

$$\frac{E_Q(s) - E_Q(0)}{s} \leq \text{tr} [\phi \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] . \quad (6.87)$$

Lorsque $s < 0$, (6.86) devient

$$\frac{E_Q(s) - E_Q(0)}{s} \geq \text{tr} [\phi \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] . \quad (6.88)$$

Il résulte du théorème 6.3.1 que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(h^3 \frac{E_Q(s) - E_Q(0)}{s} \right) = \frac{E_\mu(s) - E_\mu(0)}{s}, \quad \forall s \in \mathbb{R} . \quad (6.89)$$

Ici, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $E_\mu(s) = E_\mu(B_0, V + s\phi)$.

En combinant (6.87)-(6.89), nous obtenons enfin que pour tout $s > 0$,

$$\frac{E_\mu(s) - E_\mu(0)}{s} \leq \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \text{tr} [\phi \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(H(0))] \leq -\frac{E_\mu(-s) - E_\mu(0)}{s} . \quad (6.90)$$

En prenant $s \rightarrow 0_+$, on achève la démonstration du théorème. \square

Il découle maintenant des théorèmes 6.3.1 et 6.3.2 une estimation de (6.80).

Lemme 6.3.3.

Avec les hypothèses du théorème 6.2.1, s'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\beta(h) = \mu,$$

alors on a,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \text{tr} \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\ = \frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div} \left(B_0(u) \vec{a}(u) \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} du \\ - \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a} \cdot \left(\nabla(\mu B_0(u)) \wedge \vec{n}_0(u) \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \nu [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{1/2} du. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Ici

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{et} \quad d_\nu = \frac{1}{\pi}, \quad \forall \nu \geq 1. \quad (6.92)$$

Démonstration.

Nous utilisons le théorème 6.3.2 avec

$$\phi(u) = \vec{a}(u) \cdot \nabla V(u). \quad (6.93)$$

Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned} h^3 \text{tr} \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\ = \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} B_0(u) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{1/2} \left(\vec{a}(u) \cdot \nabla V(u) \right) du + o(1). \end{aligned} \quad (6.94)$$

En utilisant l'identité suivante

$$\begin{aligned} (\nabla V)[2\nu\mu B_0 + V]_-^{1/2} &= -[2\nu\mu B_0 + V]_-^{1/2} (2\nu\mu \nabla B_0) \\ &\quad - \frac{2}{3} \nabla [2\nu\mu B_0 + V]_-^{3/2}, \end{aligned}$$

la formule (6.94) devient

$$\begin{aligned}
& h^3 \text{tr} \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[} (\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&= \frac{-2\mu}{3\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \int_{\mathbb{R}^3} \left(B_0(u) \vec{a}(u) \right) \left(\nabla [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} \right) du \\
&\quad - \frac{\mu}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \int_{\mathbb{R}^3} \left(B_0(u) \vec{a}(u) \right) \left(2\nu\mu \nabla B_0 \right) [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{1/2} du \\
&\quad + o(1).
\end{aligned} \tag{6.95}$$

Par une intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} B_0(u) \vec{a}(u) \cdot \nabla ([2\nu h \beta B_0(u) + V(u)]_-^{3/2}) du \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} \text{div} \left(B_0(u) \vec{a}(u) \right) [2\nu h \beta B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} du.
\end{aligned} \tag{6.96}$$

Ceci nous permet d'écrire (6.95) sous la forme

$$\begin{aligned}
& h^3 \text{tr} \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[} (\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&= \frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div} \left(B_0(u) \vec{a}(u) \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} du \\
&\quad - \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a} \cdot \left(\nabla (\mu B_0(u)) \wedge \vec{n}_0(u) \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \nu [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{1/2} du. \\
&\quad + o(1).
\end{aligned} \tag{6.97}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 6.3.3. \square

6.4 Estimation du terme faisant intervenir l'opérateur de Pauli

Cette sous-section est consacrée à l'estimation de la trace de l'opérateur

$$\left[\vec{P}_{h, \beta A_0} M \vec{P}_{h, \beta A_0} + h\beta \vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0) \vec{a} \right) + h\beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right] \mathbb{1}_{(-\infty, 0]}(H(0)).$$

Rappelons la définition de l'opérateur de Pauli modifié

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(h, \beta \vec{B}_0, V, \vec{a}) &= \vec{P}_{h, \beta A_0} (I + t M(x)) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{B}_0(x) + t \vec{b}(x) \right) \\ &\quad + t h \beta \left((D \vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) + V(x). \end{aligned} \quad (6.98)$$

Lorsque $t = 0$, nous écrivons simplement \mathcal{H} pour $\mathcal{H}_0(h, \beta \vec{B}_0, V)$.

Lemme 6.4.1.

Avec les notations et les hypothèses du théorème 6.2.1, et s'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \beta(h) = \mu, \quad (6.99)$$

alors nous avons

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} h^3 \text{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left((D \vec{B}_0) \vec{a} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) \mathbb{1}_{(-\infty, 0]}(\mathcal{H}) \right] \\ &= \left. \frac{d}{dt} E_{\mu, t}(B_0, [V]_-) \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Ici $M = - \left(D \vec{a} + (D \vec{a})^t \right)$ et l'énergie $E_{\mu, t}$ a été introduite en (6.8).

Démonstration.

D'après la définition de l'opérateur de Pauli modifié (6.98), nous remarquons que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(h, \beta \vec{B}_0, V, \vec{a}) &= \mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V) \\ &\quad + t \left[\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) + h \beta \left((D \vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Pour simplifier l'écriture, nous notons dans la suite

$$\mathcal{H}_0(h, \beta \vec{B}_0, V) = \mathcal{H}(0), \quad (6.102)$$

et

$$\mathcal{H}_t(h, \beta \vec{B}_0, V, \vec{a}) = \mathcal{H}(t). \quad (6.103)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} & t \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ &= \operatorname{tr} [\mathcal{H}(t) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0))] - \operatorname{tr} [\mathcal{H}(0) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0))] . \end{aligned} \quad (6.104)$$

Le principe variationnel rappelé au théorème 2.2.3 (voir aussi [25]) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} [\mathcal{H}(t) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0))] &\geq \operatorname{tr} [\mathcal{H}(t) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(t))] \\ &:= E_Q(t) . \end{aligned} \quad (6.105)$$

Par conséquent

$$\operatorname{tr} [\mathcal{H}(t) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0))] - \operatorname{tr} [\mathcal{H}(0) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0))] \geq E_Q(t) - E_Q(0) . \quad (6.106)$$

Par ailleurs, il résulte du théorème 5.1.1 que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \left(h^3 E_Q(t) \right) \geq E_{\mu, t}(B_0, V) , \quad (6.107)$$

et il résulte aussi de (1.28),

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left(h^3 E_Q(0) \right) \leq E_{\mu}(B_0, V) , \quad (6.108)$$

où $E_{\mu} = E_{\mu, 0}$.

Par conséquent, en combinant (6.108), (6.107), (6.106) et (6.104), nous obtenons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \liminf_{h \rightarrow 0} t h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ & \geq E_{\mu, t}(B_0, V) - E_{\mu}(B(u), V) . \end{aligned} \quad (6.109)$$

Soit $t > 0$, en divisant par t , nous obtenons de (6.109) que

$$\begin{aligned} & \liminf_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ & \geq \frac{1}{t} \left(E_{\mu, t}(B_0(u), V) - E_{\mu}(\vec{B}_0(u), V) \right) . \end{aligned} \quad (6.110)$$

En faisant tendre t vers zéro, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \liminf_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ & \geq \frac{d}{dt} E_{\mu, t}(B_0(u), V) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Soit $t < 0$, en divisant par t , nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ & \leq \frac{1}{t} \left(E_{\mu, t}(B_0(u), V) - E_{\mu}(\vec{B}_0(u), V) \right). \end{aligned} \quad (6.112)$$

En faisant tendre t vers zéro, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ & \leq \frac{d}{dt} E_{\mu, t}(B_0(u), V) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

En conclusion, nous avons

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M(x) \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b}(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + h \beta \left((D\vec{B}_0(x)) \vec{a}(x) \cdot \vec{\sigma} \right) \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(0)) \right] \\ & = \frac{d}{dt} E_{\mu, t}(B_0(u), V) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.114)$$

□

Démonstration du théorème 6.1.1

Sous les hypothèses du théorème 6.2.1, il résulte de (6.18) que

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tr} \left[\vec{\mathbb{J}}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&= \operatorname{tr} \left[\left(\left(\vec{P}_{h,\beta A_0} M \vec{P}_{h,\beta A_0} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0) \vec{a} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&+ \operatorname{tr} \left[\left(\frac{-1}{2} h^2 \Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) + \vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right].
\end{aligned} \tag{6.115}$$

D'après le théorème 6.3.2, on a pour toute fonction $\phi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{5/2}(\mathbb{R}^3)$ et lorsque $h \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
& h^3 \operatorname{tr} \left[\phi \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&= \left. \frac{d}{ds} E_\mu(B_0, V + s\phi) \right|_{s=0} + o(1) \\
&= - \left[\frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} B_0(u) \left([V(u)]_-^{1/2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{1/2} \right) \phi(u) du \right] + o(1).
\end{aligned} \tag{6.116}$$

Utilisons (6.116) avec

$$\phi(u) = \frac{-1}{2} \Delta(\operatorname{div} \vec{a}), \tag{6.117}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
& h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\frac{-1}{2} \Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&= \frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} B_0(u) \left([V(u)]_-^{1/2} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{1/2} \right) \Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) du \\
&+ o(1),
\end{aligned} \tag{6.118}$$

et ensuite,

$$\begin{aligned}
& h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\frac{-1}{2} h^2 \Delta \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) + \vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&= h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\
&+ \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned} \tag{6.119}$$

Il résulte du théorème 6.4.1 et de (6.116) appliquée à

$$\phi = \vec{a} \cdot \nabla V \quad (6.120)$$

que

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} E_{\mu,t}(B_0, V) \Big|_{t=0} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial s} E_{\mu} \left(B_0, V + s(\vec{a} \cdot \nabla V) \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (6.121)$$

$$\square \quad (6.122)$$

Lemme 6.4.2.

Nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{0,t}(u) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} B_0(u) \langle [\operatorname{tr}[M(u)]I - M(u)] \vec{n}_0(u); \vec{n}_0(u) \rangle \\ &:= \zeta(u), \end{aligned} \quad (6.123)$$

$$\frac{d}{dt} \Lambda_t(u) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[M(u)], \quad (6.124)$$

et

$$\frac{d}{dt} \Delta_t(u) \Big|_{t=0} = \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u)) \vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u). \quad (6.125)$$

Démonstration.

D'après la définition de N_t (6.10), nous avons

$$\frac{d}{dt} N_t^2(u) \Big|_{t=0} = M(u). \quad (6.126)$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} N_t(u) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} M(u). \quad (6.127)$$

Comme $N_t^{(2)}$ est associée à N_t par l'application (6.12), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} N_t^{(2)}(u) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} [\operatorname{tr}[M(u)]I - M(u)]. \quad (6.128)$$

D'après la définition de $\vec{B}_{0,t}$ (6.13), nous avons

$$\frac{d}{dt}\vec{B}_{0,t}(u)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}N_t^{(2)}(u)\Big|_{t=0}\right)\vec{B}_0(u). \quad (6.129)$$

En utilisant (6.128), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\vec{B}_{0,t}(u)\Big|_{t=0} = \left(\frac{1}{2}[\operatorname{tr}[M(u)]I - M(u)]\right)\vec{B}_0(u). \quad (6.130)$$

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\vec{B}_{0,t}(u)\|^2\Big|_{t=0} &= 2\left\langle\frac{d}{dt}\vec{B}_{0,t}(u); \vec{B}_{0,t}(u)\right\rangle\Big|_{t=0} \\ &= 2\left\langle\frac{1}{2}[\operatorname{tr}[M(u)]I - M(u)]\vec{B}_0(u); \vec{B}_0(u)\right\rangle. \end{aligned} \quad (6.131)$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|\vec{B}_{0,t}(u)\|\Big|_{t=0} = 2\left(\frac{d}{dt}\|\vec{B}_{0,t}(u)\|\Big|_{t=0}\right)\|\vec{B}_{0,t}(u)\|\Big|_{t=0}. \quad (6.132)$$

En combinant (6.131) et (6.132), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\vec{B}_{0,t}(u)\|\Big|_{t=0} &:= \frac{d}{dt}B_{0,t}(u)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2B_0(u)}\left\langle[\operatorname{tr}[M(u)]I - M(u)]\vec{B}_0(u), \vec{B}_0(u)\right\rangle \end{aligned} \quad (6.133)$$

Ceci achève la preuve de (6.123).

Nous avons par la définition (6.10) de N_t que

$$\det(N_t) = \left(\det(I + tM)\right)^{1/2}. \quad (6.134)$$

Par ailleurs

$$\det(I + tM) = 1 + t\operatorname{tr}[M] + o(t^2). \quad (6.135)$$

En conséquence, nous avons

$$\det(N_t) = 1 + \frac{t}{2}\operatorname{tr}[M] + o(t^2). \quad (6.136)$$

Par la définition (6.9) de Λ_t , nous écrivons pour tout $u \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt}\Lambda_t(u)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}[M]. \quad (6.137)$$

Ceci achève la preuve de (6.124).

Il résulte de la définition (6.14) de Δ_t que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt} \Delta_t(u) \Big|_{t=0} = \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u). \quad (6.138)$$

Ceci achève la preuve du lemme 6.4.2. \square

Lemme 6.4.3.

Nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \right) \Big|_{t=0} = \zeta(u) - \frac{1}{2} B_0 \text{tr}[M(u)]. \quad (6.139)$$

Ici $\zeta(u)$ a été définie en (6.123).

Nous avons aussi, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[(2\nu - 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) + \mu \Delta_t(u) \right]_{-}^{3/2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{-3\mu}{2} \left(2\nu \zeta(u) + B_0(u) \text{tr}[D\vec{a}(u)] + \vec{b}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \right. \\ & \quad \left. + (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \right) \left[2\nu \mu B_0(u) + V(u) \right]_{-}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.140)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[(2\nu + 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) - \mu \Delta_t(u) \right]_{-}^{3/2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{-3\mu}{2} \left(2\nu \zeta(u) - \text{tr}[D\vec{a}(u)] - \vec{b}(u) \cdot \vec{n}(u) \right. \\ & \quad \left. - (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \right) \left[2\nu \mu B_0(u) + V(u) \right]_{-}^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Ici $\Delta_t(u)$ a été défini en (6.14).

Démonstration.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \right) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{\Lambda_t(u)^2 \Big|_{t=0}} \left\{ \frac{d}{dt} B_{0,t}(u) \Big|_{t=0} \times \Lambda_t(u) \Big|_{t=0} \right\} \\ & \quad - \frac{1}{\Lambda_t(u)^2 \Big|_{t=0}} \left\{ B_{0,t}(u) \Big|_{t=0} \times \frac{d}{dt} \Lambda_t(u) \Big|_{t=0} \right\}. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Il est clair que

$$\Lambda_t(u) \Big|_{t=0} = 1, \quad (6.143)$$

et

$$B_{0,t}(u) \Big|_{t=0} = B_0(u). \quad (6.144)$$

Il résulte de (6.123) et de (6.124) que

$$\frac{d}{dt} \frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \Big|_{t=0} = \zeta(u) - \frac{1}{2} B_0 \operatorname{tr}[M(u)]. \quad (6.145)$$

Ceci achève la preuve de (6.139).

Nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\left[(2\nu - 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) + \mu \Delta_t(u) \right]_-^{3/2} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{-3}{2} \frac{d}{dt} \left[(2\nu - 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) + \mu \Delta_t(u) \right]_- \Big|_{t=0} \\ & \quad \times \left[(2\nu - 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) + \mu \Delta_t(u) \right]_-^{1/2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{-3}{2} \left((2\nu - 1)\mu \left(\frac{d}{dt} B_{0,t}(u) \Big|_{t=0} \right) + \mu \frac{d}{dt} \Delta_t(u) \Big|_{t=0} \right) \\ & \quad \times \left[2\nu \mu B_0(u) - [V(u)]_- \right]_-^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Nous utilisons (6.125) et (6.123) et obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{-3}{2} \left((2\nu - 1)\mu \left(\frac{d}{dt} B_{0,t}(u) \Big|_{t=0} \right) + \mu \frac{d}{dt} \Delta_t(u) \Big|_{t=0} \right) \\ & \quad \times \left[2\nu \mu B_0(u) - [V(u)]_- \right]_-^{1/2} \\ &= \frac{3}{2} \left((2\nu - 1)\mu \zeta(u) + \mu \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) \right) \\ & \quad \times \left[2\nu \mu B_0(u) - [V(u)]_- \right]_-^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.147)$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} -\zeta(u) + \left(\vec{b}(u) + (D\vec{B}_0(u))\vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) &= B_0(u) \operatorname{tr} \left[D\vec{a}(u) \right] + \vec{b}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \\ & \quad + \left(D\vec{B}_0(u)\vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u), \end{aligned} \quad (6.148)$$

nous achevons la preuve de (6.140). D'une manière similaire, nous obtenons (6.141). \square

On s'intéresse maintenant au calcul de la dérivée de l'énergie $E_{\mu,t}(B_0, V)$ en $t = 0$. Ceci fait l'objet du lemme suivant, qui découle essentiellement du lemme 6.4.3.

Rappelons que \vec{a} et ζ ont été définis respectivement en (3.2) et en (6.123). Notons

$$\eta = \left((D\vec{B}_0)\vec{a} \right) \cdot \vec{n}_0. \quad (6.149)$$

Lemme 6.4.4. *Nous avons*

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} E_{\mu,t}(B_0, V) \right|_{t=0} \\ &= -\frac{\mu}{3\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \eta(u) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} \right) du \\ &+ \frac{\mu^2}{2\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} B_0(u) \left(2\nu\zeta(u) + B_0(u) \operatorname{tr}[D\vec{a}(u)] + \vec{b}(u) \cdot \vec{n}(u) \right. \\ &+ \left(D\vec{B}_0(u)\vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) - \left(D\vec{a}(u)\vec{B}_0(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) \left[2\nu\mu B_0(u) + V(u) \right]_-^{1/2} du. \\ &+ \frac{\mu^2}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} B_0(u) \left(2\nu\zeta(u) - B_0(u) \operatorname{tr}[D\vec{a}(u)] - \vec{b}(u) \cdot \vec{n}(u) \right. \\ &- \left. \left(D\vec{B}_0(u)\vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) + \left(D\vec{a}(u)\vec{B}_0(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) \right) \left[2\nu\mu B_0(u) + V(u) \right]_-^{1/2} du. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Démonstration.

D'après la définition de l'énergie semi-classique (6.8), nous avons

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} E_{\mu,t}(B_0, V) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{-1}{3\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mu \left(\frac{d}{dt} \frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \Big|_{t=0} \right) \\
&\quad \times \left[(2\nu - 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) + \mu \Delta_t(u) \right]_{-}^{3/2} \Big|_{t=0} du \\
&\quad + \frac{-1}{3\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mu \left(\frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \Big|_{t=0} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{d}{dt} \left[(2\nu - 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) + \mu \Delta_t(u) \right]_{-}^{3/2} \Big|_{t=0} \right) du \tag{6.151} \\
&\quad + \frac{-1}{3\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mu \left(\frac{d}{dt} \frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \Big|_{t=0} \right) \\
&\quad \times \left[(2\nu + 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) - \mu \Delta_t(u) \right]_{-}^{3/2} \Big|_{t=0} du \\
&\quad + \frac{-1}{3\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} h\beta \left(\frac{B_{0,t}(u)}{\Lambda_t(u)} \Big|_{t=0} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{d}{dt} \left[(2\nu + 1)\mu B_{0,t}(u) + V(u) - \mu \Delta_t(u) \right]_{-}^{3/2} \Big|_{t=0} \right) du.
\end{aligned}$$

En remplaçant (6.139), (6.140) et (6.141) dans (6.151), nous obtenons enfin

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} E_{\mu,t}(B_0, V) \Big|_{t=0} \\
&= -\frac{1}{3\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mu \eta(u) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [2\nu\mu B_0(u) + V(u)]_-^{3/2} \right) du \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(u) \left[\mu 2\nu \zeta(u) + \mu B_0(u) \operatorname{tr}[D\vec{a}(u)] + \mu \vec{b}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \right. \\
&+ \mu \left(D\vec{B}_0(u) \vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) - \mu \left(D\vec{a}(u) \vec{B}_0(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) \left. \right] \left[2\nu\mu B_0(u) - [V(u)]_- \right]_-^{1/2} du \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(u) \left[\mu 2\nu \zeta(u) - \mu B_0(u) \operatorname{tr}[D\vec{a}(u)] - \mu \vec{b}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \right. \\
&- \mu \left(D\vec{B}_0(u) \vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) + \mu \left(D\vec{a}(u) \vec{B}_0(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) \left. \right] \left[2\nu\mu B_0(u) - [V(u)]_- \right]_-^{1/2} du.
\end{aligned} \tag{6.152}$$

□

Rappelons que $\zeta(u) = -B_0(u) \operatorname{tr}[D\vec{a}(u)] + \eta(u)$, où $\eta(u)$ a été introduite en (6.149). Il résulte immédiatement des lemmes 6.4.4 et 6.4.1 le lemme suivant.

Lemme 6.4.5.

Avec les notations et les hypothèses du théorème 6.2.1, nous avons

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\left(\vec{P}_{h, \beta A_0} M \vec{P}_{h, \beta A_0} + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0) \vec{a} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)) \right] \\
&= -\frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \eta(u) \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left[2\nu\mu B_0(u) + V(u) \right]_-^{3/2} du \\
&+ \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \mu B_0(u) \left(2\nu \zeta(u) \right) \left[2\nu\mu B_0(u) + V(u) \right]_-^{1/2} du \\
&+ \frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(u) \left(\eta(u) - B_0(u) \operatorname{tr}[D\vec{a}(u)] - \vec{b}(u) \cdot \vec{n}_0(u) \right. \\
&- \left. \left(D\vec{B}_0(u) \vec{a}(u) \right) \cdot \vec{n}_0(u) \right) \left[V(u) \right]_-^2 du.
\end{aligned} \tag{6.153}$$

6.5 Démonstration du théorème principal

Dans cette sous-section, nous montrons le théorème 1.4.1. Mais commençons par ce lemme :

Lemme 6.5.1.

Soit $x \rightarrow \vec{\nu}(x)$ tel que $\|\vec{\nu}(x)\|^2 = 1$ et

$$\vec{a}(x) \cdot \vec{\nu}(x) = 0. \quad (6.154)$$

Alors on a

$$\vec{a}(x) \cdot \vec{\text{rot}} \vec{\nu}(x) = \vec{a}(x) \cdot \left(\vec{\nu}(x) \wedge D(\vec{\nu})(x) \vec{\nu}(x) \right). \quad (6.155)$$

Démonstration.

Montrons d'abord que (6.155) est invariante par un changement de coordonnées orthogonales.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, considérons le changement de variable suivant

$$y = Ax, \quad (6.156)$$

où A vérifie

$$A^t A = I, \quad \det A = 1. \quad (6.157)$$

En posant

$$\sum_{j=1}^3 \nu_j dx_j = \sum_{k=1}^3 \tilde{\nu}_k dx_k. \quad (6.158)$$

Il résulte de (6.156) que

$$\vec{\nu} = A^t \vec{\tilde{\nu}}. \quad (6.159)$$

En utilisant (6.159) et le fait que

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \\ \partial_{y_3} \end{pmatrix}, \quad (6.160)$$

nous obtenons

$$\vec{\text{rot}} \vec{\nu} = \left(A^t \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \\ \partial_{y_3} \end{pmatrix} \right) \wedge \left(A^t \vec{\tilde{\nu}} \right). \quad (6.161)$$

Il résulte de (6.157) que

$$(A\vec{u} \wedge A\vec{v}) = A(\vec{u} \wedge \vec{v}). \quad (6.162)$$

Nous utilisons (6.162), alors (6.161) devient

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= A^t \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \\ \partial_{y_3} \end{pmatrix} \wedge \vec{v} \\ &= A^t \text{rot } \vec{v}. \end{aligned} \quad (6.163)$$

Par ailleurs, on a

$$\vec{a} = A^t \vec{a}. \quad (6.164)$$

En combinant (6.164) et (6.163), nous obtenons

$$\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{v}. \quad (6.165)$$

En utilisant (6.159) et (6.160), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left[(D\vec{v})\vec{v} \right]_i &= \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_i} \nu_j) \nu_j \\ &= \sum_{l=1}^3 (\partial_{x_i} \tilde{\nu}_l) \tilde{\nu}_l \\ &= \sum_{k=1}^3 (A^t)_{ik} \sum_{l=1}^3 (\partial_{y_k} \tilde{\nu}_l) \tilde{\nu}_l \\ &= \sum_{k=1}^3 (A^t)_{ik} \left[(\tilde{D}\vec{v})\vec{v} \right]_k. \end{aligned} \quad (6.166)$$

Nous avons alors montré

$$\left[(D\vec{v})\vec{v} \right] = A^t \left[(\tilde{D}\vec{v}) \cdot \vec{v} \right]. \quad (6.167)$$

En conclusion, on a

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{v}_0 \wedge D(\vec{v})\vec{v}) &= \det \left(\vec{a}, \vec{v}, D(\vec{v})\vec{v} \right) \\ &= \det \left(A^t \vec{a}, A^t \vec{v}, A^t (D(\vec{v})\vec{v}) \right) \\ &= \det \left(\vec{a}, \vec{v}, D(\vec{v})\vec{v} \right). \end{aligned} \quad (6.168)$$

Dans cette dernière ligne, nous avons utilisé (6.157) et le fait que

$$\det(A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}) = (\det A)\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \quad (6.169)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$, tel que $\vec{n}_0(x_0) = (0, 0, 1)$.

Après une translation, on se ramène à $x_0 = 0$. Un développement limité pour $\vec{n}_0(x)$ en x_0 , nous donne

$$\vec{n}_0(x) = (0, 0, 1) + M(x - x_0) + O(|x - x_0|^2). \quad (6.170)$$

Il résulte de $\|\vec{\nu}(x)\|^2 = 1$, que

$$M = D\vec{\nu}(x_0) = \begin{pmatrix} m_{11}(x_0) & m_{12}(x_0) & m_{13}(x_0) \\ m_{21}(x_0) & m_{22}(x_0) & m_{23}(x_0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.171)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \vec{\nu}(x) &= \begin{pmatrix} m_{11}(x_0)(x_1 - x_{01}) + m_{12}(x_0)(x_2 - x_{02}) + m_{13}(x_0)(x_3 - x_{03}) \\ m_{21}(x_0)(x_1 - x_{01}) + m_{22}(x_0)(x_2 - x_{02}) + m_{23}(x_0)(x_3 - x_{03}) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + O(|x - x_0|^2). \end{aligned} \quad (6.172)$$

Il résulte de (6.172), que

$$\text{rot } \vec{\nu}(x) \Big|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} -m_{23}(x_0) \\ m_{13}(x_0) \\ m_{21}(x_0) - m_{12}(x_0) \end{pmatrix}. \quad (6.173)$$

Il résulte de (6.154) que $a_3(x_0) = 0$ et

$$\vec{a}(x) \cdot \text{rot } \vec{\nu}(x) \Big|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} -a_1(x_0)m_{23}(x_0) \\ a_2(x_0)m_{13}(x_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.174)$$

Par ailleurs,

$$\vec{\nu}(x) \wedge (D\vec{\nu}(x))\vec{\nu}(x) \Big|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} -m_{23}(x_0) \\ m_{13}(x_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.175)$$

et

$$\vec{a}(x) \cdot (\vec{\nu}(x) \wedge (D\vec{\nu}(x))\vec{\nu}(x)) \Big|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} -a_1(x_0)m_{23}(x_0) \\ a_2(x_0)m_{13}(x_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.176)$$

Ceci achève la preuve de (6.155). \square

Lemme 6.5.2. *Considérons le champ magnétique \vec{B}_0 tel que $\vec{B}_0 = B_0 \vec{n}_0$ et $\|\vec{n}_0\|^2 = 1$ alors*

$$\vec{n}_0 \wedge \nabla B_0(x) = \vec{n}_0 \wedge (D\vec{B}_0)^t \vec{n}_0. \quad (6.177)$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} D\vec{B}_0 &= D(B_0 \vec{n}_0) \\ &= \partial_{x_j} (B_0 n_0^i) \\ &= n_0^i \cdot \partial_{x_j} B_0 + B_0 D\vec{n}_0. \end{aligned} \quad (6.178)$$

et

$$(D\vec{B}_0)^t = n_0^j \cdot \partial_{x_i} B_0 + B_0 (D\vec{n}_0)^t. \quad (6.179)$$

On en déduit

$$(D\vec{B}_0)^t \vec{n}_0 = \nabla B_0 + B_0 (D\vec{n}_0)^t \vec{n}_0. \quad (6.180)$$

Par ailleurs, il résulte du fait que $\|\vec{n}_0\|^2 = 1$

$$(D\vec{n}_0)^t \vec{n}_0 = 0. \quad (6.181)$$

En utilisant (6.180) et (6.181), nous obtenons

$$\vec{n}_0 \wedge (D\vec{B}_0)^t \vec{n}_0 = \vec{n}_0 \wedge \nabla B_0. \quad (6.182)$$

Ceci achève la preuve de (6.177). \square

Sous les hypothèses du théorème 6.2.1, il résulte de (6.18) et de (6.119) que

$$\begin{aligned} &h^3 \text{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\ &= h^3 \text{tr} \left[\left(\left(\vec{P}_{h,\beta A_0} M \vec{P}_{h,\beta A_0} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \left((D\vec{B}_0) \vec{a} \right) + h \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] \\ &\quad + h^3 \text{tr} \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla V \right) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(\mathcal{H}(h, \beta B_0, V)) \right] + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (6.183)$$

D'autre part, en combinant (6.91), (6.153), (6.183), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) 1_{(-\infty, 0]}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)) \right] \\
&= \frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left(-\eta(x) + \operatorname{div} \left(B_0(x) \vec{a}(x) \right) \right) [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{3/2} dx \\
&\quad + \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mu B_0(x) \zeta(x) - \vec{a}(x) \cdot \left(\nabla \mu B_0(x) \wedge \vec{n}_0(x) \right) \right) \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \nu [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{1/2} dx \\
&\quad + \frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(x) \left(\eta(x) - B_0(x) \operatorname{tr}[D\vec{a}(x)] - \vec{b}(x) \cdot \vec{n}_0(x) \right. \\
&\quad \left. - \left(D\vec{B}_0(x) \vec{a}(x) \right) \cdot \vec{n}_0(x) \right) [V(x)]_-^{1/2} dx.
\end{aligned} \tag{6.184}$$

Nous réécrivons $\zeta(x)$, et $\eta(x)$ qui ont été respectivement définis en (6.123), et en (6.149) en fonction de \vec{a} .

En utilisant la définition de \vec{a} en (3.2), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= B_0(x) \langle (D\vec{a}(x)) \vec{n}_0(x); \vec{n}_0(x) \rangle \\
&= \vec{a}(x) \cdot \left[\vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right].
\end{aligned} \tag{6.185}$$

En utilisant

$$\operatorname{tr}[D\vec{a}(x)] = \operatorname{div}(\vec{a}(x)),$$

nous réécrivons

$$\zeta(x) = -B_0(x) \operatorname{div}(\vec{a}(x)) + \eta(x). \tag{6.186}$$

Nous utilisons la définition de \vec{a} en (3.2), le fait que pour tout \vec{u} , \vec{v} , et tout f on a

$$\operatorname{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\operatorname{rot}}(\vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}), \tag{6.187}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}(f \vec{u}) = f \vec{\operatorname{rot}} \vec{u} + (\nabla f) \wedge \vec{u}, \tag{6.188}$$

nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \vec{b}(x) \cdot \vec{n}_0(x) \\ &+ \vec{a}(x) \cdot \left[\vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) - \text{rot } \vec{n}_0(x) + \frac{\nabla B_0(x)}{B_0(x)} \wedge \vec{n}_0(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.189)$$

Ici $\vec{b} = \text{rot } \vec{a}$. On utilise (6.187) encore une fois, on obtient

$$\text{div} \left(B_0(x) \vec{a}(x) \right) = -\vec{b}(x) \cdot \vec{n}(x) + \vec{a}(x) \cdot \text{rot } \vec{n}(x). \quad (6.190)$$

En utilisant (6.186), nous écrivons

$$B_0(x) \text{div } \vec{a}(x) = \vec{a} \cdot \left(\text{rot } \vec{n}_0 - \frac{\nabla B_0}{B_0} \wedge \vec{n}_0 \right) - \vec{n}_0(x) \cdot \vec{b}(x). \quad (6.191)$$

Nous utilisons (6.190) et (6.185), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \left(-\eta(x) + \text{div} \left(B_0(x) \vec{a}(x) \right) \right) [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{3/2} dx \\ &= -\frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \left(\text{rot } \vec{a}(x) \cdot \vec{n}(x) \right) [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{3/2} dx \\ &+ \frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a}(x) \cdot \left[\text{rot } \vec{n}_0(x) - \vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right] \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{3/2} dx. \end{aligned} \quad (6.192)$$

En utilisant (6.185) et (6.186), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mu B_0(x) \zeta(x) - \vec{a}(x) \cdot \left(\nabla \mu B_0(x) \wedge \vec{n}_0(x) \right) \right) \\ & \times \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \nu [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{1/2} dx \\ &= \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \nu \left(\text{rot } \vec{a}(x) \cdot \mu \vec{B}_0(x) \right) [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{1/2} dx \\ & - \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(x) \vec{a}(x) \cdot \left[\text{rot } \vec{n}_0(x) - \vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right] \\ & \times \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} [2\nu\mu B_0(x) + V(x)]_-^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (6.193)$$

En utilisant (6.185) et (6.191), nous écrivons

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(x) \left(\eta(x) - B_0(x) \operatorname{tr}[D\vec{a}(x)] - \vec{b}(x) \cdot \vec{n}_0(x) \right. \\
& \quad \left. - \left(D\vec{B}_0(x) \vec{a}(x) \right) \cdot \vec{n}_0(x) \right) [V(x)]_-^{1/2} dx \\
&= \frac{\mu}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a} \cdot \left(\left(\vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right) - \operatorname{rot} \vec{n}_0 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\nabla B_0(x)}{B_0(x)} \wedge \vec{n}_0(x) - \left(D\vec{B}_0(x) \vec{a}(x) \right) \cdot \vec{n}_0(x) \right) \mu B_0(x) [V(x)]_-^{1/2} dx \\
&= \frac{\mu^2}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a} \cdot \left(\left(\vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right) - \operatorname{rot} \vec{n}_0 \right. \\
& \quad \left. - \vec{n}_0(x) \wedge \nabla B_0(x) + \vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{B}_0(x) \right)^t \vec{n}_0(x) \right) [V(x)]_-^{1/2} dx .
\end{aligned} \tag{6.194}$$

En remplaçant (6.192), (6.193) et (6.194) dans (6.184), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \operatorname{tr} \left[\vec{J}_{h,\beta}(\beta \vec{a}) 1_{(-\infty,0]}(\mathcal{H}(h, \beta \vec{B}_0, V)) \right] \\
&= -\frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left(\operatorname{rot} \vec{a}(x) \cdot \vec{n}(x) \right) \left[2\nu\mu B_0(x) + V(x) \right]_-^{3/2} dx \\
&\quad + \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \nu \left(\operatorname{rot} \vec{a}(x) \cdot \mu \vec{B}_0(x) \right) \left[2\nu\mu B_0(x) + V(x) \right]_-^{1/2} dx \\
&\quad + \frac{2\mu}{3\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a}(x) \cdot \left[\operatorname{rot} \vec{n}_0(x) - \vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right] \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left[2\nu\mu B_0(x) + V(x) \right]_-^{3/2} dx \tag{6.195} \\
&\quad - \frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mu B_0(x) \vec{a}(x) \cdot \left[\operatorname{rot} \vec{n}_0(x) - \vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{n}_0(x) \right) \vec{n}_0(x) \right] \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left[2\nu\mu B_0(x) + V(x) \right]_-^{1/2} dx \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a} \cdot \left(\left(\vec{n}_0(x) \wedge (\vec{n}_0(x) \cdot \nabla) \vec{n}_0(x) \right) - \operatorname{rot} \vec{n}_0(x) \right. \\
&\quad \left. - \vec{n}_0(x) \wedge \nabla B_0(x) + \vec{n}_0(x) \wedge \left(D\vec{B}_0(x) \right)^t \vec{n}_0(x) \right) \left[V(x) \right]_-^{1/2} dx.
\end{aligned}$$

Ici d_ν a été défini en (6.92). Pour terminer la preuve du théorème 6.1.1, il suffit d'appliquer le lemme 6.5.1 et le lemme 6.5.2 alors il ne reste que les deux premiers termes à droite dans (6.195) qui correspondent à

$$\mu^{-1} \frac{d}{dt} E_{scl}(\mu, B_0 + t \operatorname{rot} \vec{a}) \Big|_{t=0}, \tag{6.196}$$

puis de combiner (6.195) avec (6.3) tout en remarquant que lorsque $h \rightarrow 0$

$$h^3 = \mu \frac{h^2}{\beta(h)} \left(1 + o(1) \right). \tag{6.197}$$

Annexe A

Appendice

A.1 Rappels sur les opérateurs à trace

Nous rappelons ici quelques unes des définitions classiques pour lesquelles nous renvoyons à [32].

Théorème A.1.1.

Soit $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ une base orthonormée d'un Hilbert \mathbb{H} . Alors pour tout opérateur borné et positif A , nous définissons

$$\mathrm{tr}A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, A\phi_n \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Le nombre $\mathrm{tr}A$ est appelé la trace de A et il est indépendant du choix de la base.

La trace satisfait

$$\mathrm{tr}A \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}A, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathrm{tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{tr}A \quad \text{pour tout opérateur unitaire } U, \quad (\text{A.5})$$

et

$$\text{si } 0 \leq A \leq B \quad \text{alors } \mathrm{tr}A \leq \mathrm{tr}B. \quad (\text{A.6})$$

Remarque A.1.2.

Bien entendu, on a une théorie analogue pour les opérateurs bornés négatifs.

Définition A.1.3.

*Un opérateur borné A sur \mathbb{H} est appelé opérateur à trace si $\text{tr}|A| < \infty$ où $|A| = \sqrt{A^*A}$. L'ensemble des opérateurs à trace est noté \mathcal{L}_1 .*

Théorème A.1.4.

- \mathcal{L}_1 est un espace vectoriel.
- Si $A \in \mathcal{L}_1$ et B est borné, alors $AB \in \mathcal{L}_1$ et $BA \in \mathcal{L}_1$.
- Si $A \in \mathcal{L}_1$ alors $A^* \in \mathcal{L}_1$.

Définition A.1.5. *L'application $\text{tr} : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\text{tr}A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, A\phi_n \rangle, \quad (\text{A.7})$$

où $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une base orthonormée, est appelée l'application trace.

Théorème A.1.6.

$$(a) \quad \text{tr}(\cdot) \quad \text{est linéaire et continue}, \quad (\text{A.8})$$

$$(b) \quad \overline{\text{tr}A} = \text{tr}A^*, \quad (\text{A.9})$$

et

$$(c) \quad \text{tr}AB = \text{tr}BA \quad \text{si } A \in \mathcal{L}_1 \quad \text{et si } B \text{ est borné.} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Divers opérateurs à trace provenant de l'étude de l'opérateur de Pauli modifié

L'objet de cet appendice est de démontrer le théorème suivant

Théorème A.2.1.

Soit $a \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et à support compact, soit $V \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Considérons le champ magnétique \vec{B} qui vérifie (1.7). Soit $P_A = -\Delta_A + \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + V$ et $C > 0$ tel que $(P_A + C)$ soit inversible. Supposons de plus que $P_A 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est à trace. Alors $a(x) 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est un opérateur à trace.

La difficulté dans cet énoncé est d'obtenir cette propriété avec des hypothèses minimales sur V . Certains commutateurs ne sont donc pas autorisés. La preuve comporte plusieurs étapes permettant de se ramener à la situation plus classique du Laplacien. Comme étape préliminaire, considérons alors le Laplacien scalaire

$$\Delta : L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$$

Lemme A.2.2. *Soit $a \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, alors pour tout $C > 0$, $a(-\Delta + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt.*

Démonstration.

Il est clair par Fourier, que $(-\Delta + C)$ est inversible. Considérons donc l'opérateur $T = a(x)(-\Delta + C)^{-1}$. Soit \mathcal{F} la transformation de Fourier, alors l'opérateur T est unitairement équivalent à $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$.

On a

$$Tf = a(x)(-\Delta + C)^{-1}f \quad (\text{A.11})$$

et

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}T)(f)(\xi) &= \left(\mathcal{F}\left(a(x)(-\Delta + C)^{-1}\right) \right)(f)(\xi) \\ &= \mathcal{F}(a)(\xi) * \left(\mathcal{F}\left((-\Delta + C)^{-1}\right)(f)(\xi) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En calculant le noyau intégral de $(-\Delta + C)^{-1}$ qui est donné par

$$K(x, y) = \int_{\mathcal{R}^3} e^{i(x-y)\xi} (1 + \xi^2)^{-1} d\xi, \quad (\text{A.13})$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1})(g)(\xi) &= \mathcal{F}(a)(\xi) * \left((\xi^2 + C)^{-1}(g)(\xi) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathcal{F}(a)(\xi - \eta)}{(\eta^2 + C)} g(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Il résulte de (A.14) que l'opérateur $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ est un opérateur à noyau dont le noyau est donné par

$$K_T(\xi, \eta) = \frac{\mathcal{F}(a)(\xi - \eta)}{(\eta^2 + C)}. \quad (\text{A.15})$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |K_T(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathcal{F}(a)(\xi - \eta)|^2}{|\eta^2 + C|^2} d\xi d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\eta^2 + C|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}(a)(\xi - \eta)|^2 d\xi \right) d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\eta^2 + C|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}(a)(z)|^2 dz \right) d\eta.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Comme $a \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(a) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et par suite $K \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Il résulte du [32, théorème IV.23] que $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt. Ceci implique que T est un opérateur Hilbert-Schmidt. \square

Lemme A.2.3.

Soit $V \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ alors il existe C_V tel que $\forall C \geq C_V$, $(-\Delta + V + C)$ est inversible. Soit $a \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ alors $a(-\Delta + V + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt.

Démonstration.

Il résulte immédiatement de la formule de la résolvante :

$$(-\Delta + V + C)^{-1} - (-\Delta + C)^{-1} = -(-\Delta + C)^{-1}V(-\Delta + V + C)^{-1}. \tag{A.17}$$

Ceci implique

$$a(-\Delta + V + C)^{-1} = a(-\Delta + C)^{-1} - a(-\Delta + C)^{-1}V(-\Delta + V + C)^{-1}. \tag{A.18}$$

D'après le lemme A.2.2, $a(-\Delta + C)^{-1}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt. Pour prouver que $a(-\Delta + V + C)^{-1}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt, il suffit de remarquer dans la formule (A.18) que $V(-\Delta + V + C)^{-1}$ est borné. Ceci implique que $-a(-\Delta + C)^{-1}V(-\Delta + V + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt. \square

Lemme A.2.4.

Avec les hypothèses du lemme A.2.3 et si de plus a est à support compact, l'opérateur $a(H + C)^{-2}$ est un opérateur à trace, où

$$H = -\Delta + V.$$

Démonstration.

Soit $a_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que $a_1 = 1$ sur le support de a . Alors $a = aa_1$ et on a

$$\begin{aligned} a(H+C)^{-2} &= a(H+C)^{-1}a_1(H+C)^{-1} \\ &\quad + a\left[a_1, (H+C)^{-1}\right](H+C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

D'après le lemme A.2.2, le premier terme à droite dans (A.19) est un opérateur à trace comme composé de deux opérateurs Hilbert-Schmidt. Il reste à prouver que

$$a\left[a_1, (H+C)^{-1}\right](H+C)^{-1}$$

est un opérateur à trace. On a

$$\begin{aligned} &a\left[a_1, (H+C)^{-1}\right](H+C)^{-1} \\ &= -a(H+C)^{-1}(-\Delta a_1)(H+C)^{-1}(H+C)^{-1} \\ &\quad - 2a(H+C)^{-1}(\nabla a_1)\left(\nabla(H+C)^{-1}\right)(H+C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Pour le premier terme à droite dans (A.20) :

D'après le lemme A.2.3 $a(H+C)^{-1}$ et $(-\Delta a_1)(H+C)^{-1}$ sont des opérateurs Hilbert-Schmidt aussi et $(H+C)^{-1}$ est borné. Alors $-a(H+C)^{-1}(-\Delta a_1)(H+C)^{-1}(H+C)^{-1}$ est un opérateur à trace. Comme composé de deux opérateurs Hilbert-Schmidt et d'un opérateur borné.

Pour le deuxième terme à droite dans (A.20) :

$$-2a(H+C)^{-1}(\nabla a_1)\left(\nabla(H+C)^{-1}\right)(H+C)^{-1}.$$

Il suffit pour traiter ce second terme de montrer que

$$(\nabla a_1)\left(\nabla(H+C)^{-1}\right)(H+C)^{-1}$$

est Hilbert-Schmidt. Malheureusement $(\nabla a_1)\left(\nabla(H+C)^{-1}\right)$ n'est pas en général un opérateur Hilbert-Schmidt. Cependant, on a

$$\begin{aligned} &(\nabla a_1)(\nabla(H+C)^{-1})(H+C)^{-1} \\ &= (\nabla a_1)(\nabla(-\Delta + C)^{-1})(H+C)^{-1} \\ &\quad + (\nabla a_1)\nabla\left((H+C)^{-1} - (-\Delta + C)^{-1}\right)(H+C)^{-1} \\ &= (\nabla a_1)(-\Delta + C)^{-1}\nabla(H+C)^{-1} \\ &\quad + (\nabla a_1)\nabla\left((-\Delta + C)^{-1}(-V)(H+C)^{-1}\right)(H+C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

D'une part, il est clair que $(\nabla a_1)(-\Delta + C)^{-1}\nabla(H + C)^{-1}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt puisque

$$(\nabla a_1)(-\Delta + C)^{-1}$$

est Hilbert-Schmidt et

$$\nabla(H + C)^{-1}$$

est borné.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & (\nabla a_1)\nabla(-\Delta + C)^{-1}(-V)(H + C)^{-2} \\ &= \nabla(-\Delta + C)^{-1}(-V)(\nabla a_1)(H + C)^{-2} \\ &+ \left[\nabla a_1, \nabla(-\Delta + C)^{-1} \right](-V)(H + C)^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Pour

$$\nabla(-\Delta + C)^{-1}(-V)(\nabla a_1)(H + C)^{-2},$$

on a $\nabla(-\Delta + C)^{-1}$ est borné et

$$\begin{aligned} (-V)(\nabla a_1)(H + C)^{-2} &= (-V)(H + C)^{-1}(\nabla a_1)(H + C)^{-1} \\ &+ (-V)\left[\nabla a_1, (H + C)^{-1} \right](H + C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Le premier terme à droite dans (A.23) est un opérateur Hilbert-Schmidt puisque $(-V)(H + C)^{-1}$ est borné et $(\nabla a_1)(H + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt. Pour le deuxième terme à droite dans (A.23), on a

$$\begin{aligned} -V\left[\nabla a_1, (H + C)^{-1} \right](H + C)^{-1} &= V(H + C)^{-1}\left[\nabla a_1, (H + C) \right](H + C)^{-2} \\ &= V(H + C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla(H + C)^{-1}(H + C)^{-1} \\ &+ V(H + C)^{-1}\check{a}_1(H + C)^{-1}(H + C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Ici \tilde{a}_1 est une matrice dont les coefficients sont dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et \check{a}_1 est un champ de vecteurs. L'opérateur $V(H + C)^{-1}\check{a}_1(H + C)^{-1}(H + C)^{-1}$ étant un opérateur Hilbert-Schmidt comme composé de deux opérateurs bornés et d'un opérateur Hilbert-Schmidt. Il suffit de montrer que

$$V(H + C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla(H + C)^{-1}(H + C)^{-1}$$

est Hilbert-Schmidt. Pour cela, on écrit

$$(H + C)^{-1} = (-\Delta + C)^{-1} + (H + C)^{-1} - (-\Delta + C)^{-1}, \quad (\text{A.25})$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
& V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla(H+C)^{-1}(H+C)^{-1} \\
&= V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1(-\Delta+C)^{-1}\nabla(H+C)^{-1} \\
&\quad + V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla\left[(-\Delta+C)^{-1}V(H+C)^{-1}\right](H+C)^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

le premier terme à droite dans (A.26) est un opérateur Hilbert-Schmidt comme composé de deux opérateurs bornés et d'un opérateur Hilbert-Schmidt. Il reste à vérifier alors que

$$V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla\left[(-\Delta+C)^{-1}V(H+C)^{-1}\right](H+C)^{-1}$$

est Hilbert-Schmidt.

Soit $\tilde{a}_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que $\tilde{a}_2 = 1$ sur le support de \tilde{a}_1 . Alors $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1\tilde{a}_2$ et on a

$$\begin{aligned}
& V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla\left[(-\Delta+C)^{-1}V(H+C)^{-1}\right](H+C)^{-1} \\
&= V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}\tilde{a}_2V(H+C)^{-2} \\
&+ V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}[-\Delta, \tilde{a}_2](-\Delta+C)^{-1}V(H+C)^{-1}(H+C)^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Pour montrer que le premier terme à droite dans (A.27) est un opérateur Hilbert-Schmidt, il suffit de montrer que

$$\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}\tilde{a}_2V(H+C)^{-2} \tag{A.28}$$

est un opérateur Hilbert-Schmidt. Pour cela, soit $V = V_+ - V_-$ avec $V_+ = \sup(V, 0)$, $V_- = \sup(-V, 0)$ et $V_+, V_- \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On travaille avec V_\pm et on écrit

$$\begin{aligned}
& \tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}\tilde{a}_2V_\pm(H+C)^{-2} \\
&= \left[\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}V_\pm^{1/2}\right]\left[\tilde{a}_2V_\pm^{1/2}(H+C)^{-2}\right].
\end{aligned} \tag{A.29}$$

D'une part l'opérateur

$$\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}V_\pm^{1/2} = \tilde{a}_1\left(\nabla(-\Delta+C)^{-1/2}\right)\left((- \Delta+C)^{-1/2}V_\pm^{1/2}\right) \tag{A.30}$$

est borné. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_2V_\pm^{1/2}(H+C)^{-2} &= V_\pm^{1/2}(H+C)^{-1}\tilde{a}_2(H+C)^{-1} \\
&\quad + V_\pm^{1/2}(H+C)^{-1}\nabla\tilde{a}_2(H+C)^{-1} \\
&\quad + V_\pm^{1/2}(H+C)^{-1}\tilde{a}_5(H+C)^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Ici \tilde{a}_5 est une matrice dont les coefficients sont dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Comme précédemment $V_\pm^{1/2}(H+C)^{-1}\nabla$ est borné alors $\tilde{a}_2 V_\pm^{1/2}(H+C)^{-2}$ est Hilbert-Schmidt comme somme d'opérateur Hilbert-Schmidt.

Pour le deuxième terme à droite dans (A.27), un calcul de commutateur nous donne :

$$\begin{aligned} & V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\left(\nabla(-\Delta+C)^{-1}\nabla\right)\nabla\tilde{a}_2(-\Delta+C)^{-1}V(H+C)^{-2} \\ & + V(H+C)^{-1}\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}\tilde{a}_4(-\Delta+C)^{-1}V(H+C)^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Ici \tilde{a}_4 est une matrice dont les coefficients sont dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Chaque terme de la somme (A.32) est un opérateur Hilbert Schmidt comme composé de trois opérateurs bornés et d'un opérateur Hilbert-Schmidt.

Pour le deuxième terme à droite dans (A.22), nous avons

$$\begin{aligned} & \left[\nabla a_1, \nabla(-\Delta+C)^{-1}\right](-V)(H+C)^{-2} \\ & = [\nabla a_1, \nabla](-\Delta+C)^{-1}(-V)(H+C)^{-2} \\ & + \nabla\left[\nabla a_1, (-\Delta+C)^{-1}\right](-V)(H+C)^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

L'opérateur $[\nabla a_1, \nabla](-\Delta+C)^{-1}(-V)(H+C)^{-2}$ est Hilbert-Schmidt comme composé d'un opérateur Hilbert-Schmidt et d'un opérateur borné. Pour l'opérateur $\nabla\left[\nabla a_1, (-\Delta+C)^{-1}\right](-V)(H+C)^{-2}$, on écrit

$$\begin{aligned} & \nabla\left[\nabla a_1, (-\Delta+C)^{-1}\right](-V)(H+C)^{-2} \\ & = -\nabla(-\Delta+C)^{-1}\left[\nabla a_1, (-\Delta+C)\right](-\Delta+C)^{-1}(-V)(H+C)^{-2} \\ & = -\nabla(-\Delta+C)^{-1}\nabla\tilde{a}_1(-\Delta+C)^{-1}(-V)(H+C)^{-2} \\ & + \left(-\nabla(-\Delta+C)^{-1}\nabla\right)\tilde{a}_1\nabla(-\Delta+C)^{-1}(-V)(H+C)^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Le premier opérateur à droite dans (A.34) est un opérateur Hilbert-Schmidt comme composée de deux opérateurs bornés et d'un opérateur Hilbert-Schmidt. Après un calcul de commutateur, on utilise le fait que (A.28) est Hilbert-Schmidt pour montrer que le deuxième terme à droite dans (A.34) est un opérateur Hilbert-Schmidt. \square

Considérons maintenant le cas avec potentiel magnétique.

Lemme A.2.5. *Soit $a \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et à support compact, soit $V \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, soit $\Delta_A = (i\nabla - \vec{A})^2$ et $C > 0$ tel que $(-\Delta_A + V + C)$ soit inversible. Alors $a(-\Delta_A + V + C)^{-1}$ est un opérateur Hilbert-Schmidt.*

Démonstration.

D'après [6, théorème 1.3], on sait que $R_C = (-\Delta + V + C)^{-1}$ et $R_{A,C} = (-\Delta_A + V + C)^{-1}$ sont compactes. Résumons une démonstration de ce résultat pour analyser le caractère Hilbert-Schmidt. D'après [31], on a

$$R_{A,C} = \int_0^{+\infty} e^{-t(-\Delta_A + V + C)} dt, \quad (\text{A.35})$$

et

$$R_C = \int_0^{+\infty} e^{-t(-\Delta + V + C)} dt. \quad (\text{A.36})$$

D'après [2, théorème 2.3], on a que

$$e^{-t(-\Delta_A + V + C)} \leq e^{-t(-\Delta + V + C)}. \quad (\text{A.37})$$

Ici, on utilise la notation suivante

$$B \leq C$$

si est seulement si

$$|B\phi| \leq C|\phi| \quad \forall \phi.$$

Ceci implique que

$$R_{A,C} \leq R_C. \quad (\text{A.38})$$

Comme

$$a R_{A,C} \leq |a| R_C$$

et que $|a| R_C$ étant Hilbert-Schmidt, on obtient par le théorème 2.2 dans [2] et par la Remarque 1 dans [2] que $a R_{A,C}$ est Hilbert-Schmidt. \square

Lemme A.2.6.

Soit $a \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et à support compact, soit $V \in L^{5/2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Considérons le champ magnétique \vec{B} qui vérifie (1.7). Soit $P_A = -\Delta_A + \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + V$ et $C > 0$ tel que $(P_A + C)$ soit inversible. Alors $a(P_A + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt.

Remarque A.2.7. a peut être remplacé par une matrice à coefficients dans C_0^∞ .

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} & a(P_A + C)^{-1} - a(-\Delta_A + V + C)^{-1} \\ &= -a(-\Delta_A + V + C)^{-1} \otimes I(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})(P_A + C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

D'après le Lemme A.2.5, $a(-\Delta_A + V + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt. Par ailleurs, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})(P_A + C)^{-1}$ est borné. Il en résulte que

$$a(P_A + C)^{-1} - a(-\Delta_A + V + C)^{-1}$$

est Hilbert-Schmidt. On utilise encore une fois le fait que $a(-\Delta_A + V + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt pour conclure. \square

Lemme A.2.8.

Avec les hypothèses du lemme A.2.6, $a(P_A + C)^{-2}$ est un opérateur à trace.

Démonstration.

Il s'agit des mêmes arguments utilisés dans le lemme A.2.4. En fait, on remplace H par P_A et on utilise le fait que $a(x)(P_A + C)^{-1}$ est Hilbert-Schmidt (le résultat du lemme A.2.6). \square

Démonstration du Théorème A.2.1

Démonstration.

Choisissons $C > 0$ tel que $(P_A + C)$ soit inversible. On écrit

$$\begin{aligned} a(x)1_{]-\infty, 0[}(P_A) &= a(x)(P_A + C)^{-1}(P_A + C)1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &= a(x)(P_A + C)^{-1}P_A1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &\quad + C a(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty, 0[}(P_A). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Comme on a supposé que $P_A1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est à trace et que $a(x)(P_A + C)^{-1}$ est borné alors le premier terme à droite dans (A.40) est un opérateur à trace. Montrons maintenant que $C a(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est un opérateur à trace. On écrit

$$\begin{aligned} a(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty, 0[}(P_A) &= a(x)(P_A + C)^{-2}P_A1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &\quad + C a(x)(P_A + C)^{-2}1_{]-\infty, 0[}(P_A). \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Comme $P_A1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est un opérateur à trace et que $a(x)(P_A + C)^{-2}$ est un opérateur borné alors $a(x)(P_A + C)^{-2}P_A1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est un opérateur à trace. Pour le deuxième terme à droite dans (A.41), on utilise le fait que $a(x)(P_A + C)^{-2}$ est à trace et que $1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est borné. \square

Remarque A.2.9. Rappelons que $\text{tr} \left[P_A 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \right]$ représente la somme des valeurs propres négatives de l'opérateur de Pauli P_A . Il résulte de l'inégalité de Lieb-Thirring (2.1.2) que l'opérateur $P_A 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ (qui est évidemment négatif) est de trace finie donc à trace.

Théorème A.2.10.

Soit $a \in C_0^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, soit V vérifiant (1.8). Considérons le champ magnétique \vec{B} qui satisfait (1.7). Soit $P_A = -\Delta_A + \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + V$ et $C > 0$ tel que $(P_A + C)$ soit inversible. Alors $\partial_{x_j} a(x) 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ et $a(x) \partial_{x_j} \partial_{x_k} 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ sont deux opérateurs à trace.

Démonstration.

Commençons par montrer que l'opérateur

$$\partial_{x_j} a(x) 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$$

est un opérateur à trace. Soit χ une fonction à support compact tel que $\chi a = a$, on a

$$\begin{aligned} \chi(x) \partial_{x_j} a(x) 1_{]-\infty, 0[}(P_A) &= \chi(x) \partial_{x_j} a(x) (P_A + C)^{-1} P_A 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &\quad + C \chi(x) \partial_{x_j} a(x) (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Le premier terme à droite dans (A.42) est un opérateur à trace comme composé de l'opérateur borné $\chi(x) \partial_{x_j} a(x) (P_A + C)^{-1}$ et de l'opérateur à trace $P_A 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$. Regardons le deuxième terme :

$$\begin{aligned} &\chi(x) \partial_{x_j} a(x) (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &= \chi(x) \partial_{x_j} (P_A + C)^{-1} a(x) 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &\quad + \chi(x) \partial_{x_j} \left[a(x), (P_A + C)^{-1} \right] 1_{]-\infty, 0[}(P_A). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

On a montré par le théorème A.2.1 que $a(x) 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$ est un opérateur à trace. De plus $\chi(x) \partial_{x_j} (P_A + C)^{-1}$ est borné. Il en résulte que le premier terme à droite dans (A.43) est un opérateur à trace. Le deuxième terme du membre de droite dans (A.43) s'écrit

$$\begin{aligned} &\chi(x) \partial_{x_j} \left[a(x), (P_A + C)^{-1} \right] 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &= \sum_k \chi(x) \partial_{x_j} (P_A + C)^{-1} \partial_{x_k} a_{jk} (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \\ &\quad + \chi(x) \partial_{x_j} (P_A + C)^{-1} b_j (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Or on a montré précédemment (voir (A.41)) que

$$b(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty,0[}(P_A)$$

est un opérateur à trace pour tout $b \in C_0^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On conclut alors en observant que

$$\chi(x)\partial_{x_j}(P_A + C)^{-1}\partial_{x_k} = \chi(x)\partial_{x_j}(P_A + C)^{-1}\partial_{x_k}\tilde{\chi}(x) \quad (\text{A.45})$$

et

$$\chi(x)\partial_{x_j}(P_A + C)^{-1/2} \quad \text{et} \quad (P_A + C)^{-1/2}\partial_{x_k}\tilde{\chi}(x) \quad (\text{A.46})$$

sont deux opérateurs bornés.

Traitons maintenant

$$a(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}1_{]-\infty,0[}(P_A).$$

Après commutation, on a

$$\begin{aligned} & \chi(x)a(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}1_{]-\infty,0[}(P_A) \\ &= \left[\chi(x)a(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1} \right] \left[P_A 1_{]-\infty,0[}(P_A) \right] \\ & \quad + C\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}a(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty,0[}(P_A). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Le premier membre de droite dans (A.47) est un opérateur à trace comme composé d'un opérateur à trace et d'un opérateur borné. Le deuxième terme de droite dans (A.47) s'écrit

$$\begin{aligned} & C\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}a(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty,0[}(P_A) \\ &= C \left[\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1} \right] \left[a(x)1_{]-\infty,0[}(P_A) \right] \\ & \quad + C \sum_l \left[\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1} \right] \left[\partial_{x_l} a_{lj}(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty,0[}(P_A) \right] \\ & \quad + C \left[\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1} \right] \left[b(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty,0[}(P_A) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Comme $\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1}$ est un opérateur borné, il en résulte que l'opérateur

$$\left[\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1} \right] \left[a(x)1_{]-\infty,0[}(P_A) \right]$$

et l'opérateur

$$\left[\chi(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}(P_A + C)^{-1} \right] \left[b(x)(P_A + C)^{-1}1_{]-\infty,0[}(P_A) \right]$$

sont deux opérateurs à trace comme composé d'un opérateur à trace et d'un opérateur borné. Il reste à traiter

$$C \sum_l \chi(x) \partial_{x_j} \partial_{x_k} (P_A + C)^{-1} \partial_{x_l} a_{\ell j} (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A).$$

Ceci nous ramène à montrer que

$$\tilde{\chi} \partial_{x_l} a_{\ell} (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A)$$

est un opérateur à trace. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} \partial_{x_l} a_{\ell} (P_A + C)^{-1} 1_{]-\infty, 0[}(P_A) &= \left[\tilde{\chi} \partial_{x_l} (P_A + C)^{-1} \right] \left[a_{\ell} 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \right] \\ &+ \sum_j \left[\tilde{\chi} \partial_{x_l} (P_A + C)^{-1} \partial_{x_j} \check{\chi} \right] \left[b_{\ell j} 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \right] \\ &+ \left[\tilde{\chi} \partial_{x_{\ell}} (P_A + C)^{-1} \right] \left[c_{\ell} 1_{]-\infty, 0[}(P_A) \right], \end{aligned} \tag{A.49}$$

où a_{ℓ}, c_{ℓ} sont les coefficients des matrices dans C_0^{∞} . Les trois termes obtenus à droite dans (A.49) sont des opérateurs à trace comme composé d'un opérateur borné et d'un opérateur à trace. \square

Bibliographie

- [1] R. Adams : *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York-London, (1975).
- [2] J. Avron, I. Herbst et B. Simon : Schrödinger operators with magnetic fields. I General interaction, Duke Mathematical Journal, Vol 45, 4, 847-882, (1978).
- [3] M. Bronstein et V. Ivrii : Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients. I. Pushing the limits. Comm. Partial Differential Equations, 28(1-2) 83- 102, (2003)
- [4] L. Bugliaro, C. Fefferman et G. M. Graf : A Lieb-Thirring bound for a magnetic Pauli Hamiltonian, II, Rev. Mat. Iberoamericana, 15, 593-619, (1999).
- [5] L. Bugliaro, C. Fefferman, J. Fröhlich, G.M. Graf et J. Stubbe : A Lieb-Thirring bound for a magnetic Pauli Hamiltonian, Commun. Math. Phys. 187, 567-582, (1997).
- [6] J.M. Combes, R. Schrader, R. Seiler : Classical bounds and limits for Energy Distributions of Hamilton operators in Electromagnetic fields. Annals of Physics. 111, p.1-18 (1978).
- [7] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon : Schrödinger operators. Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [8] M. Dimassi, J. Sjöstrand : Spectral asymptotics in the semiclassical limit : Spectral theory for perturbed periodic problems. Cambridge London Mathematical society.
- [9] L. Erdős : Magnetic Lieb-Thirring inequalities. Commun. Math. Phys. 170, 629-668, (1995).
- [10] L. Erdős et J.P. Solovej : Semiclassical eigenvalue estimates for Pauli operator with strong non-homogeneous magnetic fields. I. Non-asymptotic Lieb-Thirring type estimate. Duke. Math. Jour. 96, 127-173, (1999).
- [11] L. Erdős et J.P. Solovej : Semiclassical eigenvalue estimates for Pauli operator with strong non-homogeneous magnetic fields. II. Leading order asymptotic estimates. Commun. Math. Phys. 188, 599-656, (1997).

- [12] L. Erdős et J.P. Solovej : Magnetic Lieb-Thirring inequalities with optimal dependence on the field strength. *Journal of Statistical Physics.* 116, (1-4), 475-506, (2004).
- [13] L. Erdős et J.P. Solovej : Uniform Lieb-thirring inequality for the three dimensional Pauli operator with a strong non-homogeneous magnetic field. *Annales Henri Poincaré.* 5, (4), 671-741, (2004).
- [14] G.B Folland : *Harmonic analysis in phase space*, Princeton university press. Princeton, New Jersey, (1989).
- [15] S. Fournais : Semiclassics of the quantum current in very strong magnetic fields. *Ann. Inst. Fourier*, vol 52, 1901-1945, (2002).
- [16] S. Fournais : On the semiclassical asymptotics of the current and the magnetic moment of a non-interacting electron gas at zero temperature in a strong constant magnetic field. *Ann. Henri Poincaré* 2, 1189-1212, (2001).
- [17] S. Fournais : Semiclassics of the quantum current in a strong constant magnetic field. *Communications in Partial Differential Equations*, volume 26 no.7, 1427-1496 (2001).
- [18] S. Fournais : Semiclassics of the quantum current, *Comm. in P.D.E* 23, no 3-4, 601-628, (1998).
- [19] F. Hansen : Jensen's Inequality for Conditional Expectations, *Journal of inequalities in pure and applied mathematics*, Volume 6, issue 5, article 133, (2005).
- [20] B. Helffer, J. Nourrigat et X.P. Wang : Sur le spectre de l'équation de Dirac (dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) avec redchamp magnétique. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e serie t. 22, 515-533, (1989).
- [21] V. Ivrii : *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*. Springer-Verlag, Berlin, (1998).
- [22] V. Ivrii : Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients. *Internat. Math. Res. Notices*, 22, 1155-1166, (2000).
- [23] V. Ivrii : Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients. II Domains with boundaries and degenerations. *Comm. Partial Differential Equations*, 28, (1-2) 103-128, (2003)
- [24] J.R. Kaluder, The design of radar signals having both high range resolution and high velocity resolution, *Bell System Tech. J.* 39, 809-820, (1960).
- [25] E.H. Lieb, A variational principle for many-fermion systems. *Phys. Rev. Lett.* 46, 457-459, (1981) ; Erratum 47, 69, (1981).

- [26] E.H. Lieb et W. Thirring : Inequalities for moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities. *Studies in Mathematical Physics* (E. Lieb, B. Simon, A. Wightman eds.) Princeton University Press, 269-330, (1975).
- [27] E.H. Lieb, Lieb-Thirring inequalities, *Kluwer Encyclopedia of Mathematics*, Supplement vol.II, 311-313, (2000).
- [28] E. H. Lieb, M. Loss : *Analysis Graduate Studies in Mathematics*, Volume 14, (2001).
- [29] E.H Lieb, J.P Solovej et J. Yngvason : Asymptotics of heavy atoms in high magnetic fields. II. Semiclassical regions. *Commun. Math. Phys.* 161, 77-124, (1994).
- [30] E.H. Lieb, J.P. Solovej et J. Yngvason : Ground states of large quantum dots in magnetic fields. *Phys. Rev. B* 51, 10646-10665, (1995).
- [31] A. Pazy : *Linear Operator Semigroup Theory and Applications to Partial Differential Equations*. SpringerVerlag, (1983).
- [32] M. Reed, B. Simon : *Methods of modern mathematical physics : Analysis of operators*, Academic press, New york, (1979).
- [33] B. Simon : *Trace Ideals and their applications*, Second edition, American mathematical society, *Mathematical Surveys and monographs*, Volume 120.
- [34] A. Sobolev : The quasi-classical asymptotics of local Riesz means for the Schrödinger operator in a strong homogeneous magnetic field. *Duke Math. J.* 74, (2), 319-429, (1994).
- [35] A. Sobolev : Quasi-classical asymptotics of local Riesz means for the Schrödinger operator in a moderate magnetic field. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* 62, (4), 325-360, (1995).
- [36] A. Sobolev : Discrete spectrum asymptotics for the Schrödinger operator with a singular potentiel and a magnetic field. *Rev. Math. Phys.* 8, (6), 861- 903, (1996).
- [37] A. Sobolev : Asymptotic behavior of the energy levels of a quantum particle in a homegeneous magnetic field, perturbed by decreasing electric field. *J. Sov. Math.* 35, 2201-2212, (1986).
- [38] A. Sobolev : On the Lieb-Thirring estimates for the Pauli operator, *Duke Math. J.* 82, 607-635, (1996).
- [39] A. Sobolev : On the Lieb-Thirring inequalities for the Pauli operator in three dimensions, *IMA vol. Math. Appl.* 95, 155-188, (1997).

- [40] S. N. Solnyshkin : The asymptotic behavior of the energy of bound states of the Schrödinger in the presence of electric and magnetic fields. *Probl. Mat. Fiz.* 10, 266-278, (1982).
- [41] J.P. Solovej et E.H. Lieb : Quantum coherent operators : A generalisation of coherent states. *Lett. Math. Phys.* 22, 145-154, (1991).
- [42] J.P. Solovej : Quantum coherent operators, in proceedings of the international symposium coherent states past, present, and future, D.H. Feng, J.R. Kaluder, M.R Strayer (Eds), 507-513 World scientific, (1994).
- [43] J.P. Solovej, W.D. Evans, R. Lewis et H. Siedentop : Counting eigenvalues using coherent states with an application to Dirac and Schrödinger operators in the semi-classical limit, *Arkiv för Mat.* 34 no. 2, 265-283, (1996).
- [44] J.P. Solovej et W. Spitzer : A new coherent states approach to semiclassics which gives Scott's correction, *Commun. Math. Phys.* 241, 383-420, (2003).
- [45] S.N. Solnyshkin, The asymptotic behavior of the energy of bound states of the Schrödinger operator in the presence of electric and magnetic fields. *Probl. Mat. Fiz.* 10, 266-278, (1982).
- [46] J.P. Solovej et W.L. Spitzer : A new coherent states approach to semiclassics with a singular potential and a magnetic field. *Rev. Math. Phys.*, 241, (2-3), 383-420, (2003).
- [47] L. Zielinski : Sharp spectral asymptotics and Weyl formula for elliptic operators with non-smooth coefficients. *Math. Anal. Geom* 2(3) 291-321, (1999).