



HAL
open science

Sur l'implantation d'équipement dans un réseau : le problème de m-centre

Cyrille Mukendi

► **To cite this version:**

Cyrille Mukendi. Sur l'implantation d'équipement dans un réseau : le problème de m-centre. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1975. Français. NNT : . tel-00286993

HAL Id: tel-00286993

<https://theses.hal.science/tel-00286993>

Submitted on 10 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
en MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Option : Recherche Opérationnelle

Cyrille MUKENDI

*Sur l'implantation d'équipement
dans un réseau :
le problème de m - centre.*

Thèse soutenue le 10 juin 1975 devant la commission d'examen

Président : J. KUNTZMANN
Examineurs { P.J. LAURENT
M. SAKAROVITCH
M. BALINSKI

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF

Présidents

M. Louis NEEL

M. Gabriel CAU

Vice-Présidents

MM. Lucien BONNETAIN

Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.
=====

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUJ Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERTEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrometallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
----------------------	------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND François	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOUME Jean Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique
---------------------	-------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées
--------------------	--------------------------

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Jean KUNTZMANN en acceptant de présider le jury de cette thèse, et je lui en exprime ici mes vifs remerciements.

Je voudrais aussi remercier Monsieur Pierre-Jean LAURENT, qui m'honore de sa présence dans ce jury. Je profite de cette occasion pour dire mon admiration pour l'enseignant exceptionnel qu'il est.

Que Messieurs Michel SAKAROVITCH et Jean-Pierre UHRY trouvent ici le témoignage de ma gratitude ; le premier, non seulement pour m'avoir admis dans l'équipe qu'il anime, me fournissant ainsi l'occasion d'un épanouissement certain, mais aussi pour la patience, la compétence et l'habileté qu'il met dans la direction de mon travail de recherche -il y a là d'autant plus de mérite que ce ne fut pas toujours commode ; quant au second, qu'il me suffise de dire que sa très vive intelligence, sa disponibilité et sa lucidité furent et restent les conditions indispensables de mon progrès, dans ce projet-ci et dans bien d'autres.

Je leur dis ici combien leur clairvoyance m'est précieuse, et pas seulement en Recherche Opérationnelle.

Je remercie Monsieur Michel BALINSKI d'avoir bien voulu faire partie de ce jury.

Madame NEUMANN, Monsieur IGLESIAS et son équipe m'ont beaucoup impressionné par leur efficacité, et je les remercie pour le soin qu'ils ont mis à la réalisation matérielle de cette thèse.

MUKENDI wa MALOLI

Je dédie cette thèse à NARCISSE.

TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I : PRESENTATION DU PROBLEME ET FORMULATION MATHE-</u> <u>MATIQUE</u>	5
I - <i>Présentation du problème</i>	7
II - <i>Une procédure heuristique</i>	9
III - <i>Formulations mathématiques</i>	10
IV - <i>Principe de résolution</i>	16
<u>CHAPITRE II : ETUDE DU PROGRAMME LINEAIRE CONTINU DU PRO-</u> <u>BLEME DE M-CENTRE</u>	17
I - <i>Etude du programme linéaire (P_C)</i>	19
II - <i>Version à couts d'investissements - Problèmes</i> - <i>duaux</i>	24
III - <i>Problèmes à critères de distance maximum</i>	26
IV - <i>Etude du problème à variables de construction</i> - <i>fixées</i>	28
V - <i>Formulation par les étoiles</i>	38
VI - <i>Interprétation économique des problèmes duaux</i> ..	43
VII - <i>Remarque sur l'inégalité triangulaire</i>	46
<u>CHAPITRE III : METHODES DE DECOMPOSITION POUR LA RESOLUTION</u> <u>DU PROGRAMME LINEAIRE DU PROBLEME DE M-CENTRE</u>	49
I - <i>Mise en oeuvre du principe de décomposition de</i> - <i>Dantzig-Wolfe</i>	51
II - <i>La méthode des étoiles</i>	61
III - <i>Adaptation du principe de décomposition de Rosen</i> ..	65
IV - <i>Principe de décomposition de Benders</i>	88
<u>CHAPITRE IV : METHODE DU SOUS-GRADIENT ET METHODE BRANCH</u> <u>AND BOUND</u>	95
I - <i>Présentation de la méthode du sous-gradient</i>	97
II - <i>La méthode Branch and Bound</i>	110
<u>CHAPITRE V : RELATIONS AVEC QUELQUES PROBLEMES COMBINATOIRES -</u> <u>ETUDE SUR LES CONTRAINTES D'INTEGRITE</u>	119
I - <i>Relations avec quelques problèmes combinatoires</i>	121
II - <i>Contraintes d'intégrité</i>	125

INTRODUCTION

Le nombre constant de publications qui, dans les revues de Recherche Opérationnelle, sont consacrées aux problèmes d'implantation d'équipements (location problems) et d'allocation de ressources, témoigne de l'intérêt croissant que ces problèmes suscitent. Une bibliographie récente, réf. [7], de près de 200 titres, et sans aucune prétention d'exhaustivité, fournit une bonne image de l'éventail des situations dans lesquelles ces problèmes se rencontrent le plus couramment.

Le problème que T.C. HU, dans réf. [11], appelle "m-center problem", ou problème de m-centre, est certainement de ce type ; on le rencontre aussi sous le nom de "p-median", et il y a d'autres désignations, correspondant à des versions différentes de ce problèmes, qui, pour l'essentiel, peut se présenter de la manière suivante :

Dans un graphe $G = (X, U, \Delta)$ où

X est l'ensemble des sommets,

U l'ensemble des arcs,

Δ_{ij} la plus courte distance parcourue pour aller du sommet i au sommet j dans G ,

on cherche les emplacements optimaux d'un nombre limité de centres ; ces centres sont à situer sur des sommets du graphe G et les emplacements sont à choisir de façon à minimiser "l'éloignement" global des autres sommets de X à ces centres construits.

Le problème que nous envisageons dans ce travail est donc purement combinatoire, puisqu'il est exigé que les centres soient situés sur des sommets du graphe G ⁽¹⁾. Les possibilités d'application de ce problème sont multiples, allant de la localisation d'équipements collectifs (point de consommation, entrepôts, usines ou emplois, à situer aux sommets d'un réseau) à des plans de desserte et de distribution optimale, et même à des problèmes combinatoires que ne sont pas du tout des problèmes d'implantation de ressources.

Notre démarche pour l'étude et la résolution de ce problème combinatoire est la suivante : nous proposons une formulation du problème de m-centre comme un programme linéaire en nombres entiers (plus précisément, un programme linéaire en variables bivalentes). De ce programme linéaire nous "oublions" les

(1) On pourrait aussi étudier un problème plus "continu", en se permettant, par exemple, de localiser un centre sur un arc, ou n'importe où dans le plan. Ce genre de problèmes n'est pas abordé ici.

contraintes exigeant l'intégrité des variables, et nous étudions le programme linéaire "continu" ainsi obtenu.

La formulation que nous proposons présente deux avantages qui la rendent fort intéressante :

Le premier de ces avantages est que la solution optimale du programme linéaire continu est très souvent entière, fournissant ainsi immédiatement la solution du problème combinatoire. Même dans les cas où la solution optimale du programme linéaire n'est pas entière, elle fournit en général une excellente évaluation de la valeur optimale du programme en nombres entiers.

Le second avantage de cette formulation est que le programme linéaire continu que l'on est conduit à étudier peut être résolu de manière efficace - une procédure efficace étant pour nous une procédure rapide, peu encombrante, pouvant venir à bout des problèmes de grande taille (plus de 100 sommets), mais aussi assez souple que pour être utilisée lors de la résolution des problèmes partiels générés lors d'une phase "branch and bound" éventuelle.

De ce point de vue, l'étude du programme linéaire continu associé au problème de m -centre est très fructueuse : c'est un programme linéaire de grande dimension, dont la structure en fait un problème "idéal" pour les méthodes linéaires de décomposition.

On peut aussi souligner un troisième avantage de la formulation proposée, et qui est une "généralisation" du problème de m -centre, généralisation qui permet de résoudre par ce formalisme des problèmes qui ne sont pas du tout des problèmes d'implantation de biens d'équipement. En effet, dans la formulation que nous faisons du problème de m -centre, nous n'utilisons pas le fait que Δ est une matrice des distances, et qu'en particulier elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\Delta_{ij} \leq \Delta_{ik} + \Delta_{kj}, \quad \forall i, j, k.$$

Pour les problèmes dans lesquels la matrice vérifie ces inégalités, la solution optimale du programme linéaire continu est presque toujours entière ; sinon la construction de la solution optimale entière nécessite un nombre très faible d'étapes d'une procédure "branch and bound".

Par contre, lorsque la matrice Δ ne vérifie pas cette propriété d'inégalité triangulaire, le problème de m-centre correspondant est d'une résolution plus laborieuse. Ceci n'est pas réellement surprenant, si on considère que, dans ce formalisme, le problème de m-centre contient des problèmes combinatoires réputés difficiles, tel le problème de la recherche d'un ensemble stable minimum dans un graphe, et plus généralement du recouvrement minimum d'un hypergraphe par des arêtes. _____

Le problème de m-centre est donc un problème combinatoire pour lequel la démarche que nous avons décrite, à savoir :

- 1) Formulation comme un programme linéaire en nombres entiers,
- 2) Etude du programme linéaire continu associé, et résolution du problème combinatoire grâce à la résolution de ce programme linéaire,

s'est avérée fructueuse. C'est de cette manière que Held et Karp, réf. (9), ont procédé pour l'étude du problème du voyageur de commerce, et ils aboutissent à une procédure très efficace, pouvant résoudre des problèmes de grande taille ; il en est de même pour les travaux de Fargier, qui lui étudie un problème d'implantation d'infrastructures de réseaux de transport. Nul doute que d'autres problèmes combinatoires soient passibles de cette démarche. _____

Nous avons divisé ce travail en cinq chapitres. Le chapitre I est consacré à une présentation du problème de m-centre, et de ces différentes versions.

Ce chapitre I présente aussi une première formulation du problème de m-centre, comme un programme linéaire en variables mixtes.

Le chapitre II étudie le programme linéaire continu associé à ce programme linéaire en variables mixtes. Cette étude débouche sur une autre formulation linéaire du problème de m-centre ; elle prépare aussi les divers outils dont on fera un abondant usage, au chapitre III, pour décrire les diverses méthodes linéaires de résolution du programme linéaire continu.

Au chapitre IV est présentée la mise en oeuvre de la méthode du sous-gradient ; nous y présentons aussi les éléments d'une procédure par séparation et évaluation (branch and bound) pour la résolution du programme linéaire en variables mixtes. C'est aussi dans ce chapitre qu'est présentée

une brève étude comparative des performances numériques des divers algorithmes étudiés.

Enfin, le chapitre V aborde la difficile question des contraintes d'intégrité ; on y étudie aussi les rapports entre le problème de m-centre et quelques problèmes "classiques" en Recherche Opérationnelle, tels par exemple le problème du stable maximum et le problème du couplage.

CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROBLEME ET FORMULATION MATHEMATIQUE

I - PRESENTATION DU PROBLEME

Soit $G = (X, U)$ un graphe simple, dont X est l'ensemble des sommets et U l'ensemble des arcs. A chaque arc (i, j) de U est associée une "longueur" d_{ij} nombre réel positif ou nul. Soit n le nombre de sommets de G : $n = |X|$.

I-1 - Problème à nombre de centres fixés

Dans la première version du problème de m -centre, telle qu'elle apparaît dans réf. [1], il s'agit de trouver, parmi les sommets X de G , les emplacements de m "centres" ou "points de consommation" (m est un entier compris entre 1 et $n-1$), emplacements à choisir de façon à minimiser la distance parcourue par les "usagers" qui se rendent d'un sommet quelconque du graphe à l'un des points de consommation.

Le critère numérique à minimiser peut être :

(*) Soit la somme des distances parcourues :

$$\sum_{i \in X} \delta_i,$$

où δ_i est nul si un point de consommation a été construit au sommet i , sinon δ_i est égal à la plus courte distance de i au plus proche centre construit.

(*) Soit le maximum des distances parcourues :

$$\delta_{\max} = \max_{i \in X} \delta_i$$

Dans ce cas, on cherche à minimiser le désagrément du moins bien desservi des usagers. Le critère sera dit de la distance maximum.

Prenons un exemple : dans le graphe G représenté à la figure 1, la longueur d'un arc, quand elle n'est pas indiquée sur la figure, est prise égale à 10.

Supposons avoir à construire $m = 3$ centres dans ce graphe. Il y a plusieurs solutions optimales équivalentes, qui sont du type : construire un centre en 1, un centre en 4, et le troisième centre en n'importe quel autre sommet. Cette solution est optimale pour le critère linéaire et pour le critère de la distance maximum. _____

I-2 - Problème à coûts d'investissement

Dans la seconde version du problème de m -centre, il est associé un "coût d'investissement" a_i à chaque sommet i de X ; ce coût d'investissement a_i est un réel positif. Il s'agit de trouver le nombre et l'emplacement des centres à construire, de manière à minimiser un coût total, somme des coûts d'investissement des centres construits et des distances parcourues par les sommets usagers. Le coût d'investissement est donc considéré comme "homogène" à une distance.

Cette seconde version du problème de m -centre sera dite "à coûts d'investissement", par opposition à la première version, qui sera appelée "à nombre de centres fixé".

Pour reprendre l'exemple précédent, prenons un coût d'investissement uniforme égal à $a_i = 2$. La solution que nous avons indiquée ci-dessus est encore optimale. Si le coût d'investissement est pris uniformément égal à 3, la solution optimale est de construire seulement 2 centres, un centre en 1, et un centre en 4. _____

I-3 - Remarque : Capacité maximale d'accueil

On peut songer à d'autres problèmes du même type dans lesquels on ajouterait par exemple une contrainte de capacité en chaque sommet : à chaque sommet $i \in X$ serait associée une capacité maximale d'accueil k_i , nombre entier compris entre 0 et n et on chercherait l'emplacement des centres de façon à ce que le nombre d'usagers utilisant un centre construit ne dépasse pas la capacité de ce centre.

Les formulations que nous proposons, et en particulier la formulation en étoiles, sont suffisamment souples pour prendre aisément en compte des contraintes de ce genre ; les contraintes de capacité ne changent donc pas

essentiellement la nature du problème de m-centre. Dans ce travail, nous nous bornerons à l'étude des deux versions que nous venons de présenter.

Le problème de m-centre est de nature très combinatoire : le nombre de solutions distinctes à explorer se comporte comme la factorielle de n. Dans la version à nombre de centres fixés, la "complexité" du problème augmente, puis diminue, quand m passe de 1 à n-1, cette complexité étant symétrique par rapport à $n/2$. _____

II - UNE PROCEDURE HEURISTIQUE

Il est toujours utile de connaître de "bonnes solutions" au problème combinatoire que nous posons, surtout si ces bonnes solutions peuvent être construites à partir d'une procédure heuristique peu coûteuse et facile à mettre en oeuvre. Ces bonnes solutions nous fourniront aussi d'excellents points initiaux pour les diverses méthodes que nous décrirons dans la suite.

Le critère de la distance maximum donne lieu à la version la plus combinatoire du problème de m-centre : il y a toujours beaucoup de solutions optimales équivalentes (ce qui, au niveau des programmes linéaires associés, se traduit par un degré de dégénérescence très élevé). C'est pour ce critère que nous exposons les principes d'une procédure heuristique dont nous avons pu expérimentalement constater l'efficacité - nous omettrons l'exposé des variantes adaptées aux autres versions du problème.

Pour mettre en oeuvre cette procédure heuristique, il est nécessaire de construire au préalable la matrice Δ des plus courtes distances entre les sommets de X : Δ_{ij} est, pour $i \neq j$, la plus courte distance entre le sommet i et le sommet j dans le réseau (X, U, d) ; Δ_{ii} est pris égal à zéro.

S'il s'agit de construire $m > 1$ centres dans le graphe G, la procédure heuristique consiste à choisir pour premier centre construit un sommet i_1 extrémité terminale d'un arc de longueur minimum, c'est à dire réalisant

$$\Delta_{j_1 i_1} = \text{Min}_{i \neq j} \Delta_{ij}$$

On pose alors $C_1 = \{i_1\}$. Puis on détermine une séquence C_2, C_3, \dots, C_m d'ensembles de sommets de X, C_{k+1} s'obtenant à partir de C_k par adjonction à celui-ci du sommet de X- C_k le plus éloigné du sommet qui lui est le plus proche parmi les sommets de C_k . L'ensemble C_m constitue alors une bonne solution du problème de m-centre. _____

III - FORMULATION MATHEMATIQUE

III-1 - Le programme linéaire en variables bivalentes

Pour la formulation du problème de m-centre comme un programme linéaire, nous aurons besoin de la matrice Δ des plus courtes distances entre les sommets de X.

Nous associons, à chaque sommet i de X , une variable y_i , dite de construction. De même à chaque couple (i,j) , $i \neq j$, des sommets de X , nous associons une variable x_{ij} . Les variables y_i et x_{ij} sont bivalentes et voici leur signification : une variable y_i égale à 1 représente la décision de construire un centre au sommet i de X , tandis que $y_i = 0$ signifie qu'il ne sera pas construit de centre en i ; une variables x_{ij} égale à 1 signifie que l'usager du sommet i se rend au sommet j , parcourant ainsi une distance Δ_{ij} .

Considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{l}
 \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_j = 1 \quad i \in X \quad (1) \\
 - x_{ij} + y_j \geq 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j \quad (2) \\
 \sum_{j=1}^n y_j = m \quad (3) \\
 y_j = 0 \text{ ou } 1 \quad (4) \\
 x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (5) \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} = w(\text{Min})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

L'objet de la proposition 1 qui suit est d'établir que le programme linéaire en nombres entiers (P) exprime le problème de la recherche des emplacements optimaux de m centres dans le graphe G .

Proposition 1 : Toute solution optimale de (P) définit une solution optimale du problème de m-centre.

Démonstration : Les contraintes (1) signifient que chaque sommet i doit se rendre en un centre construit : soit en restant chez lui-même (y_i est alors égal à 1), soit en se rendant en un (et un seul) centre $j \neq i$;

les contraintes (2), $x_{ij} \leq y_j$, signifient que i ne peut se rendre en j qu'à la condition qu'un centre ait été construit en j ;

la contrainte (3) exige la construction du nombre de centres fixé.

Le coût d'une solution réalisable (x,y) est exactement la distance totale parcourue par l'ensemble des sommets usagers en lesquels il n'a pas été construit de centre.

(P) est donc un programme linéaire en nombres entiers dont la solution optimale fournit bien la solution du problème de m -centre. _____

Remarque : Intégrité des variables x

Nous verrons, au chapitre II, que les contraintes (4) de (P) impliquent les contraintes (5) dans toute solution de base : il suffit d'exiger l'intégrité des variables y pour obtenir aussi l'intégrité des variables x . Ceci nous permet d'omettre les contraintes d'intégrité sur les x et nous continuons à appeler (P) le programme linéaire en variables mixtes qui en résulte. _____

III-2 - Formulation du problème à coûts d'investissements

De la même manière, pour formuler le problème de m -centre dans sa version à coûts d'investissements fixés, on écrira le programme linéaire en variables mixtes sous la forme suivante :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i = 1 \quad i \in X \quad (1) \\ -x_{ij} + y_j \geq 0 \quad (2) \\ y_j = 0 \text{ ou } 1 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i y_i = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

où les a_i sont les coûts d'investissement associés aux sommets de X . Dans cette version du problème, le nombre de centres à construire n'est pas spécifié, mais il est entendu qu'on construit au moins un centre.

Cependant ceci n'apparaît pas explicitement sous forme d'une contrainte dans le programme (P_1) et la proposition 2 ci-dessous explique pourquoi nous pourrions nous dispenser d'une telle contrainte.

Proposition 2 : Dans toute solution réalisable de (P_1) , les variables y_i vérifient

$$\sum_{i=1}^n y_i \geq 1$$

(ce qui signifie qu'on construit au moins un centre).

Démonstration : Soit (x,y) une solution réalisable de (P_1) . Pour un i quelconque de X , on a l'égalité

$$1 = \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i$$

et grâce aux contraintes (2) de (P_1) , on peut écrire l'inégalité

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i \leq \sum_{j=1}^n y_j,$$

d'où la proposition. _____

III-3 - Remarque

Pour les variantes du problème de m -centre dans lesquelles la desserte d'un sommet n'a pas la même importance que celle d'un autre sommet (c'est le cas, par exemple, lorsque le nombre d'usagers issus d'un sommet i est plus grand que celui des usagers issus d'un autre sommet j), et que l'on désire tenir compte de cette disparité dans le modèle, on introduit des coefficients de pondération $h_i \geq 0$ (assortis éventuellement d'une condition de normalisation du type $\sum h_i = 1$). Ces pondérations sont aisément prises en compte dans la fonction objective, en posant

$$\Delta'_{ij} = \Delta_{ij} h_i$$

et en prenant pour critère à minimiser la fonction $\sum \sum x_{ij} \Delta'_{ij}$.

Il est toutefois à signaler que si la matrice (Δ_{ij}) vérifie l'inégalité triangulaire, la matrice (Δ'_{ij}) ainsi construite peut ne pas vérifier cette propriété et ceci peut avoir des conséquences sur les temps de calculs (voir, à ce sujet, la remarque 7 au chapitre II). _____

III-4 - Problèmes à critère de distance maximum

Quant aux problèmes à critère de distance maximum, on les formule en écrivant, pour m fixé, le programme linéaire en variables mixtes (P')

$$\begin{array}{l}
 (P') \left\{ \begin{array}{l}
 \sum x_{ij} + y_i = 1 \\
 -x_{ij} \quad y_j \geq 0 \\
 \sum_{j=1}^n y_j = m \\
 y_j = 0 \text{ ou } 1 \\
 \rho - \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} \geq 0 \\
 \rho = w(\text{Min})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

La variable ρ représente la distance parcourue par l'usager le plus mal loti :

$$\rho = \text{Max}_i \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij}$$

Pour le problème à coûts d'investissements fixés, seule se transforme la fonction objective de (P'), qui devient

$$\rho + \sum_{i=1}^n y_i a_i = w(\text{Min})$$

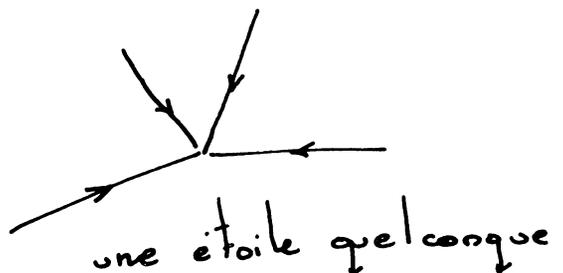
III-5 - Formulation comme un problème de recouvrement

Pour la version du problème de m -centres à coûts d'investissements fixés, nous allons proposer une formulation du problème de m -centres comme celui de la recherche d'un recouvrement d'un graphe par des sous-graphes particuliers, que nous appelons des étoiles.

Une étoile est un graphe qui constitue une anti-arborescence telle que tout chemin compte au plus un arc.

Voici des exemples d'étoiles :

•
un sommet isolé



Pour formuler le problème de m -centres, nous considérons le réseau $G' = (X, U', \Delta)$ où U' est défini par

$$U' = \{(i, j) / i, j \in X \text{ et } i \neq j\}$$

A un arc de U' est associé le réel Δ_{ij} , plus courte distance parcourue dans le réseau (X, U, d) pour aller de i à j .

Soit E l'ensemble de toutes les étoiles de G' . Posons $R = |E|$, et désignons chaque étoile par un indice compris entre 1 et R :

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_R\}.$$

A l'étoile e_j de E associons un poids c_j ainsi défini :

soit $l \in X$ l'anti-racine* de l'étoile e_j , alors

$$c_j = a_l + \sum_{\{k/k \in \text{étoile } e_j\}} \Delta_{kl}$$

Soit B la matrice d'incidence sommet-étoile, dont les éléments sont b_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, R$, avec

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est dans l'étoile } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème de m -centre à coûts d'investissements fixés peut alors s'exprimer comme le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$(E) \begin{cases} B v \geq 1 & \text{soit } \sum_{r=1}^R b_{ir} v_r \geq 1 \quad i \in X \\ v_r = 0 \text{ ou } 1 \\ c v = w(\text{Min}) \end{cases}$$

Le problème (E) est un problème de recouvrement** : on cherche une couverture minimale (au sens du poids) des sommets de X par des étoiles de G' .

Appelons solution réalisable du problème de m -centre tout sous-graphe partiel de G' dont chacune des composantes connexes est une étoile.

* Nous dirons plus simplement la racine.

** Voir réf. | |.

Il est clair qu'une solution réalisable du problème de m -centre est optimale si la somme des poids des étoiles qui la composent est la plus petite possible.

Proposition 3 :

1) Toute solution réalisable du problème de m -centre définit une solution réalisable de (E).

2) Toute solution optimale de (E) définit une solution réalisable (et donc optimale) du problème de m -centre.

Démonstration : Evidente. _____

Nous étudierons, au chapitre II, les relations entre ces deux formulations du problème de m -centre.

Pour l'instant, nous remarquerons que cette formulation par les étoiles permet de prendre en compte des contraintes de capacité maximale d'accueil : soit, associée à chaque sommet i de X , une capacité maximale, représentée par un entier compris entre 0 et n . On se propose de situer des centres dans X , de manière à ce qu'aucun centre n'accueille plus d'utilisateurs qu'il n'en a la capacité.

Pour tenir compte de telles contraintes de capacité, il suffit d'exclure de la famille des étoiles E , celles de racine i et qui comportent plus de k_i arcs entrant en i , et de poser le problème de couverture des sommets de X par des éléments de cette famille restreinte d'étoiles. Nous verrons même que cette restriction ne modifie pas le mode opératoire proposé pour la résolution du problème (E).

Il est aussi à remarquer que si dans cette dernière formulation, le nombre des variables est très grand ($R = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n!}{q!(n-1-q)!}$), le nombre d'inégalités est n , et on sait que du point de vue de la programmation linéaire, il vaut mieux avoir des "bases" de la plus petite taille possible. Ce nombre faible de contraintes est donc un très net avantage de cette formulation sur la première, qui comptait n^2 contraintes. _____

IV - PRINCIPE DE RESOLUTION

Nous sommes donc parvenus à exprimer le problème de m-centre comme un programme linéaire en nombres entiers ou en variables mixtes.

Pour résoudre ce programme linéaire, nous oublierons momentanément les contraintes exigeant l'intégrité des variables et résoudrons le programme linéaire en variables continues qui en résulte. On observe que très souvent ce programme linéaire continu admet une solution optimale qui est entière et qui est aussi la solution optimale du problème de m-centre.

Quand la solution optimale du programme linéaire continu n'est pas entière, nous nous servons de la valeur optimale du programme continu pour mettre en oeuvre une procédure par séparation et évaluation (branch and bound).

Cette façon de procéder équivaut à une "convexification" d'un problème en nombres entiers et constitue une des méthodes les plus efficaces en optimisation combinatoire : Held et Karp, réf. |9|, ont ainsi procédé pour résoudre le problème du voyageur de commerce ; plus récemment, le travaux de Fargier |4| sur l'implantation d'infrastructures dans un problème de transport, utilisent elles aussi cette technique, et de la façon la plus fructueuse.

Le programme linéaire continu est de très grande taille en général, et n'est guère passible de la méthode du simplexe classique. Mais la structure même de ce programme linéaire, ainsi que quelques unes de ses propriétés que nous mettrons en évidence au chapitre II, invitent à recourir à des méthodes de décomposition, ou, plus généralement, à des méthodes de sous-gradient.

On pourrait penser que ces formulations sont coûteuses parce qu'elles exigent au préalable la construction de la matrice (Δ_{ij}) des plus courtes distances. En fait, par rapport à la complexité du problème de m-centres, l'effort de recherche des n^2 plus courts chemins est tout à fait négligeable. ce dernier problème est d'ailleurs très bien résolu, par les algorithmes de Dantzig et de Murchland notamment (voir références |6|, | |).

CHAPITRE II

ETUDE DU PROGRAMME LINEAIRE CONTINU
DU PROBLEME DE M-CENTRE

I - ETUDE DU PROGRAMME LINEAIRE (P_c)

I-1 - Le programme en variables continues associé à (P)

Nous nous proposons d'étudier le programme linéaire (P_c) obtenu à partir de (P) en omettant de ce dernier les contraintes exigeant l'intégrité des variables y_i :

$$\begin{array}{l}
 (P_c) \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i = 1 \\
 -x_{ij} + y_j \geq 0 \\
 \sum_{j=1}^n y_j = m \\
 y \geq 0 \\
 x \geq 0 \\
 \sum \sum x_{ij} \Delta_{ij} = w(\text{Min})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Dans ce problème (P_c) les contraintes $y \geq 0$ sont redondantes : en effet

$$x \geq 0, \quad x_{ij} \leq y_j \Rightarrow y_j \geq 0.$$

Cependant, il nous est commode de conserver explicitement ces contraintes dans (P_c) : les contraintes portant sur les variables (y) sont les plus significatives de toutes et l'utilité de conserver $y \geq 0$ dans (P_c) devient plus claire au cours de cet exposé.

Des contraintes (P_c) il résulte immédiatement que les composantes de toute solution réalisable (x,y) de (P_c) sont comprises entre zéro et un

$$\begin{array}{l}
 0 \leq x_{ij} \leq 1 \\
 0 \leq y_j \leq 1
 \end{array}$$

Les cas $m = 1$ et $m = n-1$ sont très particuliers, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1 : Pour $m = 1$ et $m = n-1$ toute solution optimale de base de (P_c) est entière.

Démonstration : Nous distinguerons les deux cas $m = 1$ et $m = n-1$. Dans chacun de ces deux cas, nous montrons d'abord qu'il existe une solution optimale entière, ensuite nous montrons que toute solution optimale est combinaison convexe de solutions optimales entières.

(A) Prenons d'abord le cas $m = 1$.

A.1. Dans toute solution réalisable (x,y) on a

$$x_{ij} = y_j \quad \forall i, j \quad i \neq j,$$

ceci parce que les relations

$$\begin{aligned} x_{ij} &\leq y_j \\ 1 = y_i + \sum_{j \neq i} x_{ij} &\leq \sum_{j=1}^n y_j = 1, \end{aligned}$$

obtenues à partir des contraintes de (P_c) , impliquent

$$x_{ij} = y_j$$

A.2. Soit $\delta = \text{Min}_{\ell=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n \Delta_{i\ell}$

Il est clair que si un indice ℓ_0 vérifie

$$\delta = \sum_{i=1}^n \Delta_{i\ell_0},$$

alors la solution $(\tilde{x}^{\ell_0}, \tilde{y}^{\ell_0})$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\ell_0}^{\ell_0} &= 1 & \tilde{x}_{i\ell_0}^{\ell_0} &= 1 & i \neq \ell_0 \\ \tilde{y}_j^{\ell_0} &= 0 & j \neq \ell_0 & \tilde{x}_{ij}^{\ell_0} &= 0 & i \neq j \end{aligned}$$

est solution optimale de (P_c) .

En effet, pour toute solution réalisable (x,y) de (P_c) , on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} y_j \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} \geq \sum_{j=1}^n y_j \delta = \delta = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \tilde{x}_{ij}^{\ell_0} \Delta_{ij}.$$

Cette solution $(\tilde{x}^{\ell_0}, \tilde{y}^{\ell_0})$ est évidemment de base, elle est donc solution optimale de base de (P_c) .

A.3. Soit (\hat{x}, \hat{y}) une solution optimale de (P_c) , et soit $L = \{\ell / \hat{y}_\ell > 0\}$.

Si $|L| = 1$, cette solution optimale (\hat{x}, \hat{y}) est entière.

Supposons que $|L| > 1$.

Alors $\forall \ell \in L$, on a $0 < y_\ell < 1$.

Nous allons voir que (\hat{x}, \hat{y}) est combinaison convexe de solutions optimales de base de (P_c) .

En effet, $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \hat{x}_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{\ell \in L} \hat{y}_\ell \sum_{i=1}^n \Delta_{i\ell} = \delta$, cette dernière égalité puisque (\hat{x}, \hat{y}) est optimale.

Comme $\sum_{i=1}^n \Delta_{i\ell} \geq \delta$ et $\sum_{\ell \in L} \hat{y}_\ell = 1$, l'égalité précédente entraîne que $\forall \ell \in L$

$$\text{on a } \sum_{i=1}^n \Delta_{i\ell} = \delta,$$

ce qui prouve que (\hat{x}, \hat{y}) est combinaison convexe des solutions optimales $(\tilde{x}^\ell, \tilde{y}^\ell)$, $\ell \in L$, chacune d'elles affectée du coefficient \hat{y}_ℓ .

(B) Considérons à présent le cas $m = n-1$.

B.1. On remarquera tout d'abord que dans toute solution (x, y) réalisable de (P_c) on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1,$$

car

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} = n - \sum_{j=1}^n y_j = n-m = 1.$$

B.2. Soit $\bar{\delta} = \min_{i \neq j} \Delta_{ij}$

Pour tout (i_0, j_0) tel que $\Delta_{i_0 j_0} = \bar{\delta}$, la solution $(\tilde{x}^{i_0, j_0}, \tilde{y}^{i_0, j_0})$ ainsi

définie :

$$\tilde{y}_\ell^{i_0, j_0} = 1 \quad \text{si } \ell \neq i_0$$

$$\tilde{y}_{i_0}^{i_0, j_0} = 0$$

$$\tilde{x}_{i_0, j_0}^{i_0, j_0} = 1, \quad \tilde{x}_{\ell, k}^{i_0, j_0} = 0, \quad \text{pour tout couple } (\ell, k) \neq (i_0, j_0)$$

est optimale de (P_c) .

En effet, pour toute solution réalisable (x, y) de (P_c) on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \bar{\delta} = \bar{\delta}$$

B.3. Soit (\hat{x}, \hat{y}) une solution optimale de (P_c) .

(*) Soit $L = \{\ell / y_\ell < 1\}$ et $K = \{k / y_k = 1\}$.

Il est clair que $k \in K \Rightarrow \forall j \neq k, x_{kj} = 0$.

De plus, on a l'égalité

$$|K| + \sum_{\ell \in L} y_\ell = n-1 = m$$

(*) La quantité $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \hat{x}_{ij} \Delta_{ij}$ est donc égale à $\sum_{\ell \in L} \sum_{j \neq \ell} x_{\ell j} \Delta_{\ell j}$.

Or $\sum_{\ell \in L} \sum_{j \neq \ell} \hat{x}_{\ell j} \Delta_{\ell j} \geq \sum_{\ell \in L} \sum_{j \neq \ell} \hat{x}_{\ell j} \bar{\delta} = \bar{\delta}$ et puisque (\hat{x}, \hat{y}) est optimale, cette

inégalité est en fait une égalité :

$$\sum_{\ell \in L} \sum_{j \neq \ell} \hat{x}_{\ell j} \Delta_{\ell j} = \bar{\delta} \sum_{\ell \in L} \sum_{j \neq \ell} \hat{x}_{\ell j},$$

soit

$$\sum_{\ell \in L} \sum_{j \neq \ell} \hat{x}_{\ell j} [\Delta_{\ell j} - \bar{\delta}] = 0$$

D'où, $\forall \ell \in L, \forall j \neq \ell, \hat{x}_{\ell j} [\Delta_{\ell j} - \bar{\delta}] = 0$,

soit encore

$$\hat{x}_{\ell j} \neq 0 \Rightarrow \Delta_{\ell j} = \bar{\delta}$$

(*) Appelons IJ l'ensemble des couples (ℓ, j) tels que $\hat{x}_{\ell j} \neq 0$.

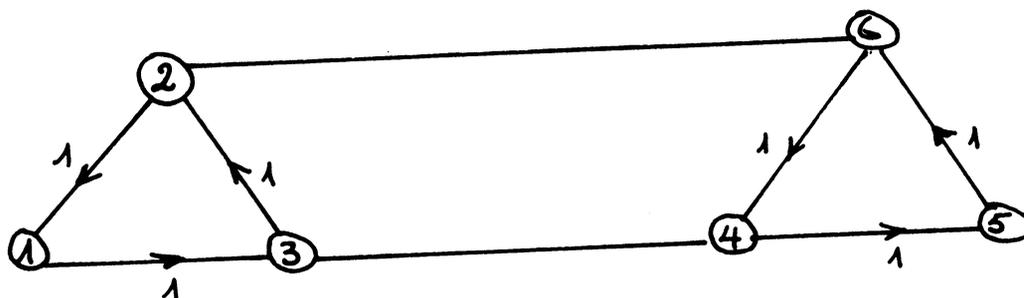
Ce qui précède permet d'affirmer que $\forall (\ell, j) \in IJ$, la solution $(\tilde{x}^{\ell, j}, \tilde{y}^{\ell, j})$ est optimale de (P_c) .

Par ailleurs on a $\sum_{(\ell, j) \in IJ} \hat{x}_{\ell j} = 1$, ce qui signifie bien qu'on peut écrire

(\hat{x}, \hat{y}) comme combinaison convexe des solutions optimales $(\tilde{x}^{\ell, j}, \tilde{y}^{\ell, j})$, $(\ell, j) \in IJ$, chacune affectée du coefficient $\hat{x}_{\ell j}$. _____

I-2 - Solutions non entières de (P_c)

Si la solution optimale de base de (P_c) est toujours entière pour $m=1$ et $m = n-1$, ceci n'est pas nécessairement le cas pour les autres valeurs de m , comme on le constate en résolvant le programme linéaire (P_c) associé au problème de m -centre sur le graphe suivant, avec $m = 3$.



Sur les arcs de ce graphe, les longueurs non indiquées sont prises égales à 10.

La solution optimale de (P_c) est :

$$y_i = 1/2, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$x_{13} = x_{32} = x_{21} = 1/2$$

$$x_{45} = x_{56} = x_{64} = 1/2,$$

les autres x_{ij} étant nuls. Cette solution est l'unique solution optimale de (P_c) , elle est donc de base.

Cependant, lors de l'étude expérimentale qui a été entreprise, il s'est avéré plutôt rare de rencontrer des solutions optimales de (P_c) qui soient non entières ; et pour reprendre l'exemple ci-dessus, la solution optimale de (P_c) est fractionnaire pour $m = 3$ et entière pour toutes les autres valeurs de m , à savoir $m = 1, 2, 4, 5$ et 6 .

Le théorème 1 éclaire peut-être cette observation : si le graphe présente une sectorisation suffisamment marquée, c'est à dire si ses sommets se regroupent nettement en plusieurs "secteurs", les distances intra-secteurs (entre les sommets d'un même secteur) étant très faibles par rapport aux distances intersecteurs (entre sommets de secteurs différents), alors la résolution de (P_c) équivaut à l'attribution de centres aux différents secteurs.

S'il a été attribué 1 ou $n_s - 1$ centres à un secteur (n_s étant le nombre de sommets de ce secteur), le théorème 1 indique que le problème (P_c) , restreint à chaque secteur, conduit à une solution entière ; les centres peuvent aussi "mal" se répartir par rapport aux secteurs et il apparaît alors des solutions fractionnaires.

II - VERSION A COÛTS D'INVESTISSEMENTS - PROBLÈMES DUAUX

Pour la version à coûts d'investissements fixés, le problème en variables continues associé au problème (P_1) est le programme linéaire (P_{1c})

$$(P_{1c}) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ -x_{ij} + y_j \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sum \sum x_{ij} \Delta_{ij} + \sum a_i y_i = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

Pour ce problème (P_{1c}) on n'a pas un résultat du type du théorème 1. La ressemblance dans les formes des programmes linéaires (P_{1c}) et (P_c) sera exploitée dans toute la mesure du possible, mais ces deux problèmes sont loin d'être "équivalents". Ainsi, par exemple, dans la circonstance où (P_{1c}) admet plusieurs solutions optimales différentes, celles-ci n'ont pas nécessairement le même nombre $\sum_{i=1}^n y_i$ de centres construits.

Les problèmes duaux associés à (P_{1c}) et à (P_c) permettent d'établir un premier lien entre ces deux versions du problème de m-centre.

Le dual (Q) de (P_c) est le problème

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \quad i \neq j \quad (1) \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad i \neq j \quad (2) \\ \mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} - \tau \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \sum \mu_i - m\tau = Z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Dans ce programme linéaire (Q), les variables ne sont pas contraintes à la positivité : elles correspondent à des égalités de (P_c) ; nous noterons aussi que les contraintes (3) peuvent se remplacer par des égalités :

$$\mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} - \tau = 0$$

Quant au problème (P_{1c}) , son dual est le programme linéaire (Q_1) :

$$(Q_1) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \quad (1) \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad (2) \\ \mu_i + \sum_{l \neq i} \lambda_{li} \leq a_i \quad (3) \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = Z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Les contraintes (3) de (Q_1) peuvent aussi s'écrire comme des égalités. Du rapprochement de ces deux problèmes (Q) et (Q_1) il apparaît que la variable τ de (Q) joue le rôle d'un coût d'investissement ; le problème à nombre de centres fixés peut donc être considérée comme un problème dans lequel on cherche à :

- fixer le niveau optimal d'un coût de construction uniforme (identique pour tous les sommets) ;

- construire le schéma optimal correspondant à ce niveau de coût de construction.

Nous donnerons plus loin une interprétation des variables (μ_i, λ_{ij}) de (Q_1) . Pour l'instant voici un résultat qui permet d'éliminer certaines contraintes de (Q_1) .

Proposition 2 : S'il existe un couple (i_o, j_o) tel que

$$\Delta_{i_o j_o} > a_{i_o}$$

alors dans toute solution optimale (\bar{x}, \bar{y}) de (P_{1c}) on a

$$x_{i_o j_o} = 0.$$

Démonstration : Soit (\bar{x}, \bar{y}) une solution optimale de (P_{1c}) .

Si $\bar{x}_{i_o j_o} > 0$, c'est que $\bar{y}_{i_o} < 1$.

Soit alors $\varepsilon = \text{Min} (1 - \bar{y}_{i_o}, \bar{x}_{i_o, j_o}) > 0$.

On définit une nouvelle solution (\hat{x}, \hat{y}) en posant :

$$\hat{x}_{ij} = \begin{cases} \bar{x}_{ij} & \text{si } (i, j) \neq (i_o, j_o) \\ \hat{x}_{i_o j_o} = \bar{x}_{i_o j_o} - \varepsilon & \end{cases}$$

$$\hat{y}_\ell = \begin{cases} \bar{y}_\ell & \text{si } \ell \neq i_0 \\ \hat{y}_{i_0} = \bar{y}_{i_0} + \varepsilon \end{cases}$$

Cette solution est réalisable de (P_{1c}) et sa valeur est

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \bar{x}_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{y}_i + \varepsilon (-\Delta_{i_0 j_0} + a_{i_0}) < \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \bar{x}_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{y}_i$$

ce qui contredit le caractère optimal de (\bar{x}, \bar{y}) .

Du point de vue dual, pour un tel (i_0, j_0) , la contrainte $\mu_{i_0} - \lambda_{i_0 j_0} \leq \Delta_{i_0 j_0}$

est redondante, car des contraintes (1) et (3) de (Q') on tire

$$\mu_{i_0} - a_{i_0}$$

d'où

$$\mu_{i_0} - \lambda_{i_0 j_0} \leq a_{i_0} < \Delta_{i_0 j_0}$$

Dans la suite nous supposons avoir procédé à l'élimination, dans (P_{1c}) et dans (Q_1) , des variables et contraintes correspondant à la situation décrite dans cette proposition 2. _____

III - PROBLEMES A CRITERES DE DISTANCE MAXIMUM

La structure de $(P'c)$ et (P'_{1c}) , programmes linéaires en variables continues associés aux programmes (P') et (P'_1) ,

$$(P'_c) \begin{cases} \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i = 1 \\ -x_{ij} + y_j \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n y_j = m \\ \rho - \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \rho = w(\text{Min}) \end{cases}$$

est suffisamment analogue à celle de (P_c) pour que nous puissions dans la suite nous permettre d'omettre la répétition de certains résultats établis pour (P_c) et qui s'appliquent sans changement à (P'_c) ou à (P'_{1c}) .

La nature même du critère de la distance maximum fait que le programme linéaire (P'_c) admet plusieurs solutions très voisines et de même valeur ; ceci introduit dans (P'_c) un caractère de dégénérescence beaucoup plus prononcé que dans les autres programmes linéaires que nous avons mentionnés. Mais en outre, le critère de la distance maximum introduit dans (P'_c) une autre caractéristique aux conséquences fâcheuses : la valeur optimale du programme continu (P'_c) peut être très inférieure à la valeur optimale du programme discret (P'_c) .

Ainsi dans le cas $m = 1$, la solution optimale de (P') est alors de construire l'unique centre autorisé en un sommet i_0 vérifiant

$$\delta_{i_0} = \text{Min}_i \delta_i$$

où

$$\delta_i = \text{Max}_{\ell \neq i} \Delta_{\ell i}$$

Prenons pour solution réalisable (x, y) de (P'_c) celle définie par $x_{ij} = y_j = 1/n$.

La valeur de cette solution est

$$\rho_{i_1} = \text{Max}_i \rho_i$$

avec

$$\rho_i = \frac{\sum_{\ell \neq i} \Delta_{\ell i}}{n}$$

Cette quantité ρ_{i_1} peut être très inférieure à δ_{i_0} : on construit aisément une matrice Δ telle qu'on puisse prendre $i_1 = i_0$, et dans laquelle le rapport $\frac{\rho_{i_0}}{\delta_{i_0}}$ est inférieur à 1%.

Ces propos laissent présager que les problèmes (P') ou (P'_1) seront les plus difficiles à résoudre, nécessitant de nombreuses étapes du "branch and bound".

IV - ETUDE DU PROBLEME A VARIABLES DE CONSTRUCTION FIXEES

IV-1 - Le problème $P_c(y)$

La première formulation que nous avons proposée du problème de m -centre utilise deux groupes de variables distinctes : les variables y , associées à la décision de construction d'un centre, et les variables x , qui sont des variables "de transport" (ou de déplacement), x_{ij} représentant le déplacement de l'utilisateur du sommet i qui se rend en un centre construit au sommet j . De ces deux groupes de variables, les variables y sont les plus déterminantes, et il est donc naturel d'étudier le problème $P_c(y)$ qui résulte de (P_c) quand on considère les variables y comme fixées :

$$P_c(y) \left\{ \begin{array}{ll} \sum x_{ij} & = 1 - y_i \quad i = 1, \dots, n \\ x_{ij} & \leq y_j \quad i \neq j \\ x_{ij} & \geq 0 \\ \sum \sum x_{ij} \Delta_{ij} & = w(y) (\text{Min}) \end{array} \right.$$

La structure très particulière de ce problèmes, ainsi que la facilité de sa résolution, sont un avantage essentiel de la formulation linéaire que nous avons proposée. L'analyse des solutions optimales de $P_c(y)$ nous permettra, non seulement d'élaborer des procédures efficaces de résolution de (P_c) , mais aussi de découvrir de nouvelles expressions du programme linéaire du problème de m -centre.

Avant de passer à l'analyse de ce problème $P_c(y)$, nous allons introduire deux matrices d'indices, σ et β , définies à partir de la matrice Δ , et très utiles pour la suite.

IV-1-1 - La matrice σ est une matrice $n \times n$ entière, à éléments dans $\{1, 2, \dots, n\}$. L'élément $\sigma_{i\ell}$ (qui sera aussi écrit $\sigma_i(\ell)$) de σ est ainsi défini :

$\sigma_i(\ell) = j \iff j$ est le i ème plus proche voisin du sommet i .

$\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, avec la convention $\sigma_i(0) = i$ (car $\Delta_{ii} = 0$).

La i ème ligne de σ correspond donc à la permutation des sommets $\{1, 2, \dots, n\}$ qui les range en ordre croissant des distances Δ_{ij} :

$$\Delta_{i\sigma_i(0)} \leq \Delta_{i\sigma_i(1)} \leq \Delta_{i\sigma_i(2)} \leq \dots$$

Pour prendre un exemple, si Δ est la matrice 4×4 suivante :

0	2	1	5
2	0	3	3
1	3	0	6
5	3	6	0

La matrice σ est

1	3	2	4
2	1	3	4
3	1	2	4
4	2	1	3

On remarque que la seconde ligne de cette matrice σ aurait aussi bien pu être :

2	1	4	3
---	---	---	---

Il n'y a donc pas unicité de la matrice σ associée à Δ .

IV-1-2 - La matrice β est entière $n \times n$, à éléments dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$. L'élément β_{ij} (ou $\beta_i(j)$) de β est défini comme le rang du sommet j du point de vue de son éloignement du sommet i .

La matrice β associée à la matrice Δ de l'exemple ci-dessus est :

0	2	1	3
1	0	2	3
1	2	0	3
2	1	3	0

IV-1-3 - Propriétés et construction des matrices σ et β

Les deux propriétés les plus significatives découlent de la définition même de σ et β ; ce sont :

- (1) $\beta_i(\sigma_i(r)) = r$, $\forall r \in \{0, \dots, n-1\}$
 (2) $\sigma_i(\beta_i(j)) = j$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$

La construction de σ est fort simple ; la i ème ligne de σ est obtenue en réarrangeant les indices $\{1, 2, \dots, n\}$ par ordre croissant d'éloignement de i .

A partir de σ , la matrice β est construite aisément grâce à la propriété (1), en faisant

$$\beta_i(\sigma_i(r)) = r, \text{ pour } r \text{ allant de zéro à } n-1. \text{ -----}$$

IV-2 - Résolution de $P_c(y)$

IV-2-1 - Résultats fondamentaux

Soit donc y un vecteur fixé.

Il n'est que d'examiner les contraintes de $(P_c(y))$ pour constater que la résolution de ce problème équivaut à la résolution des n programmes linéaires $P_c^i(y)$:

$$P_c^i(y) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 - y_i \\ x_{ij} \leq y_j \quad j \neq i \\ \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} = w_i(\text{Min}) \end{array} \right.$$

pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Le dual $DP_c^i(y)$ de $P_c^i(y)$ est le programme linéaire :

$$DP_c^i(y) \left\{ \begin{array}{l} \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad j \neq i \\ \lambda_{ij} \geq 0 \\ (1-y_i)\mu_i - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} y_j = z_i(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Ce dual $DP_c^i(y)$ est toujours réalisable.

Pour les cas où le vecteur y vérifie les inégalités suivantes :

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \geq 1$$

nous définirons la famille d'indices $p(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, associée au vecteur y (famille que nous appellerons aussi $p_y(i)$, quand il faudra être plus explicite), l'indice $p(i)$ étant défini comme le plus petit entier k compris entre 0 et $n-1$ et vérifiant :

$$\sum_{r=0}^{k-1} y_{\sigma_i(r)} < 1$$

et

$$\sum_{r=0}^k y_{\sigma_i(r)} \geq 1$$

Les solutions optimales de $P_c^i(y)$ et $DP_c^i(y)$ s'expriment alors très simplement en fonction de ces indices $p(i)$:

Théorème 4 : Soit y un vecteur vérifiant les inégalités

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \geq 1$$

Alors la solution optimale de $P_c^i(y)$ est :

$$x_{i\sigma_i(r)}^* = \begin{cases} y_{\sigma_i(r)} & , \quad 0 \leq r < p_y(i) \\ 1 - \sum_{r=0}^{p_y(i)-1} y_{\sigma_i(r)} & , \quad r = p_y(i) \\ 0 & , \quad r > p_y(i) \end{cases}$$

La solution optimale de $DP_c^i(y)$ est :

$$\begin{aligned} \mu_i^* &= \Delta_{i\sigma_i}(p_y(i)) \\ \lambda_{i\sigma_i(r)}^* &= \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i}(p_y(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) & , \quad 0 \leq r \leq p_y(i) \\ 0 & , \quad r > p_y(i) \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration : En effet, (x_{ij}^*) et $(\mu_i^*, \lambda_{ij}^*)$ constituent un couple de solutions primale et duale réalisables, vérifiant les conditions des écarts complémentaires.

Nous montrerons plus loin que $(\mu_i^*, \lambda_{ij}^*)$ est un sommet du polyèdre DP_c^i , c'est à dire une solution optimale de base du programme linéaire $DP_c^i(y)$.

Décrivons à présent les sommets et les rayons extrémaux du polyèdre DP_c^i . Nous aurons besoin de ceux-ci, au chapitre III, lors de la mise en oeuvre des diverses procédures de résolution du problème (P_c) .

Théorème 5 : Les sommets du polyèdre DP_c^i

$$DP_c^i \begin{cases} \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij}, & j \neq i \\ \lambda_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

sont de la forme

$$\begin{aligned} \mu_i^* &= \Delta_{i\sigma_i(k)} \\ \lambda_{i\sigma_i(r)} &= \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i(k)} - \Delta_{i\sigma_i(r)} & \text{pour } 0 \leq r \leq k \\ 0 & \text{pour } k < r \leq n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

où $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Les rayons extrémaux de ce polyèdre sont de la forme

$(\xi \mu_i^*, \xi \lambda_{ij}^*)$, $\xi \geq 0$, où $(\mu_i^*, \lambda_{ij}^*)$ est de la forme de l'un des trois vecteurs suivants :

$$(1) \mu_i^* = \lambda_{ij}^* = 1$$

$$(2) \mu_i^* = -1 ; \lambda_{ij}^* = 0, \quad j \neq i$$

$$(3) \mu_i^* = 0 ; \lambda_{ij_0}^* = 1 ; \lambda_{ij}^* = 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i, j_0\}$$

Démonstration : On vérifie sans peine les résultats suivants, qui découlent soit directement de la définition de sommet et de rayon extrémal, soit de la forme particulière du polyèdre DP_c^i .

a) Un vecteur de la forme $\mu_i^* = \Delta_{i\sigma_i(k)}$, $\lambda_{ij} = \text{Max}(0, \Delta_{i\sigma_i(k)} - \Delta_{ij})$,

est un sommet de DP_c^i .

b) Un vecteur de la forme $(\xi \mu_i^*, \xi \lambda_{ij}^*)$ où $\mu_i^* = \lambda_{ij}^* = 1/n$ et $\xi \geq 0$

est un rayon extrémal de DP_c^i . Ce vecteur $(\mu_i^*, \lambda_{ij}^*)$ est un sommet du polyèdre

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \quad j \neq i \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \\ |\mu_i| + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = 1 \end{array} \right.$$

c) Un vecteur de la forme $\mu_i^* = -1$, $\lambda_{ij}^* = 0$ est un rayon extrémal de DP_c^i .

d) Un vecteur de la forme $\mu_i^* = 0$, $\lambda_{ij_0}^* = 1$, $\lambda_{ij}^* = 0 \quad j \neq j_0$ est un rayon extrémal de DP_c^i .

Par ailleurs tout programme linéaire dont le polyèdre des contraintes est DP_c^i :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \\ c\mu_i + \sum_{j \neq i} d_j \lambda_{ij} = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

peut s'écrire comme un problème $DP_c^i(y)$: il suffit pour cela de prendre

$$\begin{array}{l} y_i = 1-c \\ y_j = -d_j \quad j \neq i \end{array}$$

(H) se résoudra par les considérations du IV-2-2.

Pour établir que l'ensemble des vecteurs de la forme décrite au a), b),

c) ou d) constitue une énumération exhaustive des sommets et rayons extrémaux de DP_c^i , il suffit de voir que lorsque (H) est non borné, le rayon $(\bar{\mu}_i, \bar{\lambda}_{ij})$,

le long duquel (H) diverge, peut s'écrire sous la forme $\sum \mu_s u_s + \sum_{j \neq i} \mu'_s v_s$, avec $\mu_s \geq 0$, $\sum \mu_s = 1$, les u_s étant des vecteurs de la forme décrite au B.1 et les v_s de la forme décrite au b), c) ou d).

Soit donc $(\bar{\mu}_i, \bar{\lambda}_{ij})_{j \neq i}$ la solution optimale -ou une direction de divergence- du problème (H).

e) S'il existe un k tel que

$$\Delta_{i \sigma_i}(k) \leq \bar{\mu}_i \leq \Delta_{i \sigma_i}(k+1)$$

alors la solution $(\bar{\mu}_i, \bar{\lambda}_{ij})_{j \neq i}$ est une combinaison convexe de deux vecteurs

de la forme du B.1.

f) Si $\bar{\mu}_i > \Delta_{i \sigma_i}(n-1)$, alors la solution $(\bar{\mu}_i, \bar{\lambda}_{ij})$ s'écrit sous la forme d'une combinaison $u + \mu v$, où u est la solution

$$\mu_i^* = \Delta_{i \sigma_i}(n-1), \quad \lambda_{ij}^* = \Delta_{i \sigma_i}(n-1) - \Delta_{ij},$$

et v le rayon extrémal

$$\mu_i^* = \lambda_{ij}^* = 1$$

g) Dans les autres cas $(\bar{\mu}_i, \bar{\lambda}_{ij})$ s'écrit sous forme d'une combinaison $\sum \mu'_s v_s$ où v_s est un vecteur de la forme du b), c) ou d).

IV-2-2 - Résolution effective des problèmes $P_c^i(y)$ et $DP_c^i(y)$

Voici le mode opératoire de la résolution effective du couple de programmes duaux $P_c^i(y)$ et $DP_c^i(y)$.

IV-2-2-1 - Le primal est-il réalisable ?

(*) Si $\sum_{j=1}^n y_j < 1$, poser CAS = 1 et aller en IV-2-2-3.

(*) Si $y_i > 1$, poser CAS = 2 et aller en IV-2-2-3.

(*) S'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$ tel que $y_j < 0$, poser CAS = 3 et aller en IV-2-2-3.

Sinon aller en IV-2-2-2.

IV-2-2-2 - Le primal $P_c^i(y)$ admet une solution optimale

Algorithme d'affectation aux plus proches voisins

Le vecteur y vérifie donc les inégalités

$$0 \leq y_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (*)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \geq 1$$

a) Pour construire une solution optimale de $P_c^i(y)$

(1) Poser $\varepsilon = 1 - y_i$

$$p(i) = k = 0$$

(2) Si $\varepsilon = 0$, poser

$$p(i) = k$$

$$x_{i\sigma_i(\ell)} = 0 \quad \forall \ell > p(i)$$

et terminer.

(3) Sinon ε est strictement positif.

Faire $k = k+1$

$$x_{i\sigma_i(k)} = \text{Min}[\varepsilon, y_{\sigma_i(k)}]$$

$$\varepsilon = \varepsilon - x_{i\sigma_i(k)}$$

et aller en (2).

Pour les références ultérieures, ce procédé sera appelé l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins.

b) Construction d'une solution optimale (de base) de $DP_c^i(y)$.

Le procédé que nous venons de décrire détermine un indice $p(i)$,

qui est le plus petit indice k tel que $0 \leq k \leq n-1$, $\sum_{r=0}^{k-1} y_{\sigma_i(r)} < 1$ et

$$\sum_{r=0}^k y_{\sigma_i(r)} \geq 1.$$

(*) Pour la résolution du problème $P_c^i(y)$, on peut avoir $y_i < 0$ sans que cela ne gêne sa résolution. Bien entendu, dans ce cas, les autres problèmes $P_c^j(y)$, $j \neq i$, n'ont pas de solution.

A partir de cet indice $p(i)$, on définit une solution optimale de $DP_c^i(y)$ en posant :

$$\mu_i = \Delta_{i\sigma_i}(p(i))$$

$$\lambda_{i\sigma_i}(r) = \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i}(p(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) & \text{pour } r \leq p(i) \\ 0 & \text{pour } r \geq p(i) \end{cases}$$

$r=1, \dots, n-1$

C'est au théorème 4 que nous montrons pourquoi cette solution est optimale de base du problème $DP_c^i(y)$

On remarquera, à propos de $p(i)$, que si $y_i < 1$ on a $p(i) > 0$; par ailleurs si $p(i) = n-1$, alors $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ et $p(j) = n-1, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

IV-2-2-3 - Le primal n'est pas réalisable

Le problème $DP_c^i(y)$ est non borné et "diverge" le long d'un rayon extrémal que nous allons mettre en évidence.

CAS 1 : $\sum_{j=1}^n y_j < 1$.

On ne peut réaliser la première contrainte de $P_c^i(y)$; la fonction objective de $DP_c^i(y)$ tend vers $+\infty$ dans la direction du vecteur

$$\mu_i^* = \lambda_{ij}^* = 1$$

Ce vecteur $(\mu_i^*, \lambda_{ij}^*)$ constitue bien une solution réalisable de $DP_c^i(y)$; il en est de même de la famille des vecteurs $(\xi \mu_i^*, \xi \lambda_{ij}^*)$, où ξ est un réel ≥ 0 .

La valeur d'un tel vecteur est $\xi [(1-y_i)\mu_i^* - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}^* y_j] = \left[1 - \sum_j y_j\right] \xi$; et cette quantité tend bien vers l'infini quand ξ tend vers $+\infty$.

CAS 2 : $y_i > 1$

Dans ce cas $1-y_i < 0$, et le primal est non réalisable. Le problème $DP_c^i(y)$ diverge dans la direction

$$\mu_i^* = -1$$

$$\lambda_{ij}^* = 0 \quad j \in \{1,2,\dots,n\}-\{i\}$$

CAS 3 : Il existe un $j_0 \in \{1,2,\dots,n\}-\{i\}$ tel que $y_{j_0} < 0$.

Le problème $DP_c^i(y)$ diverge le long de la direction définie par le vecteur

$$\mu_i^* = 0$$

$$\lambda_{ij_0}^* = 1$$

$$\lambda_{ij}^* = 0, \quad j \in \{1,2,\dots,n\}-\{i\}$$

Nous concluons ce paragraphe par l'énoncé de deux corollaires de ce théorème 4.

Corollaire 6 : Dans une solution optimale (\bar{x}, \bar{y}) de (P_c) , si les variables \bar{y} sont entières, alors les variables \bar{x} le sont également. _____

Corollaire 7 : Soit y un vecteur fixé, vérifiant

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum y_i \geq 1$$

et soit $x(y)$ la solution optimale de $P_c(y)$.

Alors pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$, la quantité $\sum_{j \neq i} \Delta_{ij} x_{ij}(y)$ (c'est à dire la distance parcourue par un usager du sommet i est égale à

$$\sum_{r=0}^{p(i)-1} y_{\sigma_i(r)} \Delta_{i\sigma_i(r)} + \left[1 - \sum_{r=0}^{p(i)-1} y_{\sigma_i(r)} \right] \Delta_{i\sigma_i(p(i))},$$

où les $p(i)$ sont ceux construites à partir de y par l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins. _____

On notera que l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins résoud également les problèmes $P_c'(y)$ et $P_{1c}'(y)$, obtenus à partir du problème à critère de distance maximum en considérant comme fixées les variables de construction y . _____

V - RELATION AVEC LA FORMULATION PAR LES ETOILES

V-1 - Le programme linéaire continu du problème de recouvrement

La formulation par les étoiles (chapitre I, III-5) nous a conduit à l'expression du problème de m centre à coûts d'investissement fixés comme un programme linéaire en nombres entiers :

$$(E) \begin{cases} \sum_{r=1}^R b_{ir} v_r \geq 1 & i = 1, \dots, n & (1) \\ v_r = 0 \text{ ou } 1 & r = 1, \dots, R & (2) \\ \sum_{r=1}^R c_r v_r = w(\text{Min}) \end{cases}$$

où la matrice (b_{ir}) est la matrice d'incidence sommet-étoile ; chaque étoile e_r est représentée par une variable discrète v_r ; à chaque étoile est associée un poids c_r , somme du coût d'investissement de sa racine et de la longueur (dans G') des arcs qui la constituent.

Remplaçons dans (E) les contraintes (2) par les contraintes (2') : $v_r \geq 0$; nous obtenons ainsi un programme linéaire en variables continues (E_c) :

$$(E_c) \begin{cases} \sum_{r=1}^R b_{ir} v_r \geq 1 & (1) \\ v_r \geq 0 & (2') \\ \sum_{r=1}^R c_r v_r = w(\text{Min}) \end{cases}$$

Un premier résultat à propos de (E_c) est la proposition suivante :

Proposition 8 : Toute solution optimale \bar{v} de (E_c) a toutes ses composantes comprises entre 0 et 1.

Démonstration : Ceci résulte du fait que les c_r sont tous positifs ou nuls. _____

Du point de vue de la fréquence des solutions optimales entières du problème continu, la formulation par les étoiles n'est pas plus avantageuse que la formulation (P_c) -en fait l'étude qui suit montre l'équivalence de ces deux formulations.

Le dual (DU_c) de (E_c) s'écrit :

$$(DE_c) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \mu_i b_{ir} \leq c_r \quad r = 1, 2, \dots, R \\ \mu_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Ce programme linéaire est donc celui de la recherche d'un système de pondérations μ_i des sommets de G, de somme maximum et tel que pour toute étoile e_r , la somme des pondérations des sommets de l'étoile e_r soit inférieure au poids c_r de cette étoile. _____

V-2 - Equivalence des deux programmes linéaires

Afin d'étudier les rapports entre les deux formulations, nous écrirons le problème (P₁) sous une forme légèrement modifiée (\tilde{P}_1) :

$$(\tilde{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i \geq 1 \\ -x_{ij} + y_i \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y_i = 0 \text{ ou } 1 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} + \sum a_i y_i = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

Puisque les (Δ_{ij}) et les (a_i) sont tous positifs ou nuls, la solution optimale de (\tilde{P}_1) a toutes ses composantes égales à zéro ou un ; elle est donc solution optimale de (P₁).

Soit (\tilde{P}_{1c}) le programme linéaire obtenu à partir de (\tilde{P}_1) en remplaçant dans celui-ci les contraintes $y_i = 0 \text{ ou } 1$ par les contraintes $y_i \geq 0$.

Nous allons établir l'équivalence des programmes linéaires (E_c) et (\tilde{P}_{1c}), cette notion d'équivalence étant précisée dans le théorème 9.

Théorème 9 :

(A) Toute solution réalisable de (\tilde{P}_{1c}) définit une solution réalisable de (E_c) de même valeur.

(B) Toute solution réalisable de (E_c) définit une solution réalisable de (\tilde{P}_{1c}) de même valeur.

Les programmes linéaires (E_c) et (\tilde{P}_{1c}) sont donc équivalents.

Démonstration :

(A) Soit (x,y) une solution réalisable de (\tilde{P}_{1c}) .

Voici un procédé constructif qui lui associe une famille d'étoiles dite définie par (x,y) et une solution v réalisable de (E_c) .

(0) Poser $v_\ell = 0, \forall \ell \in \{1,2,\dots,R\}$

Pour chaque sommet $j \in \{1,2,\dots,n\}$

(1) Poser $\rho = y_j$

et considérer comme "arcs non encore utilisés" tous les arcs (i,j) arrivant en j et tels que $x_{ij} > 0$.

(2) (*) S'il existe des arcs non encore utilisés aboutissant en j ,
poser $\delta = \text{Min } x_{ij}$

(i,j) non encore utilisé

(ce δ est > 0) et aller en (3).

(*) S'il n'existe pas d'arcs non encore utilisés et

. si $\rho > 0$

poser $\delta = \rho$ et aller en (3).

. si $\rho = 0$

passer au sommet suivant : $j+1$.

(3) Soit e_ℓ l'étoile définie de la manière suivante :

- elle est de racine j ,

- elle comporte les arcs (i,j) tels que

* (i,j) est non encore utilisé

* $x_{ij} = \delta$

cet ensemble d'arcs pouvant être vide.

Poser $v_\ell = \delta$

$\rho = \rho - \delta$

Considérer les arcs de cette étoile comme "déjà utilisés" (id est $x_{ij} = x_{ij} - \delta$)
et aller en (1).

On remarquera que cette étoile e_ℓ introduit un poids $c_\ell v_\ell$ qui est égal à $c_\ell \delta$, soit

$$\sum_{(i,j) \in e_\ell} x_{ij} \Delta_{ij} + v_\ell a_j$$

Ce procédé est fini, puisqu'à chaque fois, le nombre des arcs non encore utilisés diminue strictement (ou alors on change de sommet-racine).

Bien évidemment, on a $v_\ell \geq 0$, $\forall \ell \in \{1, 2, \dots, R\}$.

Par ailleurs, par construction de v , on a

$$\sum_{r=1}^R b_{ir} v_r = \sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i \geq 1$$

Le vecteur v est donc solution réalisable de (E_c) .

On a $\sum_{r=1}^R c_r v_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^n y_i a_i$, ceci à cause de la remarque faite au pas (3).

On trouvera plus loin un exemple illustrant cet algorithme.

(B) Soit v une solution réalisable de (E_c) . On définit une solution (x, y) réalisable de (P_{1c}) , associée à v , de la manière suivante :

$$y_j = \sum_r v_r \quad \{r/e_r \text{ est une étoile de racine } j\}$$

$$x_{ij} = \sum_r v_r \quad \{r/e_r \text{ est une étoile (de racine } j) \text{ comptant l'arc } (i, j)\}.$$

Il est clair qu'ainsi définie (x, y) vérifie

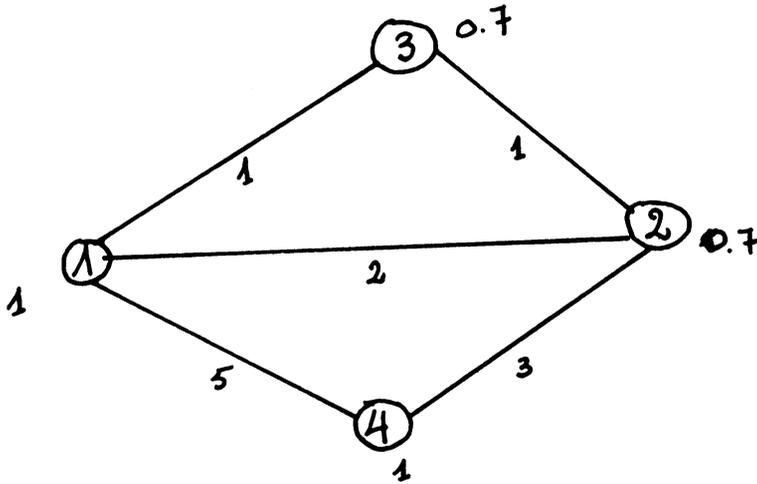
$$x_{ij} \leq y_i$$

Par ailleurs

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i = \sum_{r=1}^R b_{ir} v_r \geq 1$$

c. q. f. d.

Voici un exemple illustrant l'application du procédé décrit dans la démonstration du théorème 9.



L'algorithme donne les étoiles suivantes :

<u>Etoile</u>	<u>Valeur de la composante de v correspondante</u>
③	0.7
②	0.7
	0.3
①	0.7
④	1

V-3 - Lien avec le problème à nombre de centres fixé

Quand le nombre de centres est fixé, nous avons vu que le dual du problème continu était

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad (1) \\ \mu_i + \sum \lambda_{li} - \tau \leq 0 \quad (2) \\ \sum \mu_i - m\tau = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

La variable τ apparaît comme un coût d'investissement, le même pour tous les sommets de G .

Voici comment retrouver le problème de couverture de G par des étoiles.

Appelons n -étoile toute étoile à n sommets, c'est à dire un graphe partiel connexe de G qui est une étoile.

Les contraintes (2) de (Q) entraînent que la somme des pondérations μ_i sur une n -étoile doit être inférieure ou égale au poids de cette étoile :

En effet

$$\tau \geq \mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} \geq \mu_i + \sum_{\ell \neq i} (\mu_\ell - \Delta_{\ell i})$$

qui s'écrit aussi

$$\tau + \sum_{\ell \neq i} \Delta_{\ell i} \geq \sum_{j=1}^n \mu_j$$

Pour τ fixé, (Q) est le problème de recherche d'une couverture minimale de G par une classe particulière d'étoiles. _____

V-4 - Remarque

Cette équivalence, que nous venons d'établir entre (\tilde{P}_{1c}) et (E_c) autorise l'introduction dans (Q_1) des contraintes

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ceci sans altérer l'ensemble des solutions optimales de Q_1 .

Ces contraintes nous seront utiles au chapitre III. _____

VI - ETUDE ET INTERPRETATION DU PROBLEME Q_1

VI-1 - Signification des variables

Il paraît utile de connaître la signification des variables (μ, λ) du programme linéaire (Q_1)

$$Q_1 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \\ \mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} \leq a_i \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons de l'étude d'un problème proche de (Q_1) des indications utiles pour l'élaboration d'une interprétation plausible de ces variables (μ, λ) .

Supposons avoir fixé, dans (P_{1c}) , certaines variables à zéro, certaines autres à n :

Soit I_0 l'ensemble des indices i tels que y_i est fixé à zéro (il est interdit de construire un centre au site i).

I_1 l'ensemble $i \neq y_i = 1$ des sommets où l'on construit obligatoirement un centre.

$I_2 = \{1, 2, \dots, n\} - I_0 \cup I_1$, l'ensemble des sommets de X où la de construction (ou de non construction) n'est pas encore déterminée.

Pour déterminer celle-ci, on peut modifier (P_{1c}) et écrire :

$$\left(\begin{array}{ll} \sum_{j \in I_1 \cup I_2} x_{ij} & = 1, \quad i \in I_0 \\ \sum_{j \in I_1 \cup I_2} x_{ij} + y_i & = 1, \quad i \in I_2 \\ -x_{ij} + y_j & \geq 0, \quad i \in I_0 \cup I_2, j \in I_2 \\ x_{ij} & \geq 0, \quad i \in I_0 \cup I_2, j \in I_2 \\ y_j & \geq 0, \quad j \in I_2 \\ \sum_{i \in I_0 \cup I_2} \sum_{j \in I_2} x_{ij} \Delta_{ij} + \sum_{i \in I_2} a_i y_i & = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

programme linéaire dont le dual est

$$\left(\begin{array}{ll} \lambda_{ij} & \geq 0 \quad i \in I_0 \cup I_2, j \in I_2 \\ \mu_i - \lambda_{ij} & \leq \Delta_{ij} \quad i \in I_0 \cup I_2, j \in I_2 \\ \mu_i & \leq \Delta_{ij} \quad i \in I_0 \cup I_2, j \in I_1 \\ \mu_i + \sum_{l \in I_0 \cup I_2} \lambda_{li} & \leq a_i \quad i \in I_2 \\ \sum_{i \in I_0 \cup I_2} \mu_i & = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Ce dernier programme linéaire nous éclaire sur la signification des variables de (Q^1) :

Du point de vue du sommet i , la variable μ_i détermine un découpage du graphe G en 3 zones :

- une zone de consommation obligatoire : celle de tous les sommets j tels que $\mu_i > \Delta_{ij}$;

- une zone de consommation interdite : celle des sommets j tel que $\mu_i < \Delta_{ij}$;

- une zone où la consommation est libre, celle des sommets j tels que $\mu_i = \Delta_{ij}$.

La variable μ_i apparaît donc comme un rayon d'action, distance du sommet i au sommet le plus éloigné auquel i a la permission d'aller se fournir.

La variable λ_{ij} est une pénalité, un préjudice subi par la communauté lorsque, à cause d'une construction insuffisante dans sa proximité, l'usager du sommet i est obligé de dépasser le sommet j pour aller se fournir à des centres situés à une distance μ_i , ceci afin de totaliser le quantum (ou l'unité) de consommation qu'il requiert.

Ce préjudice est posé égal au supplément de distance parcourue pour dépasser le sommet j , soit

$$\lambda_{ij} = \mu_i - \Delta_{ij}.$$

A cause des contraintes (3) de (Q^1) , maximiser la somme des μ_i tend à minimiser $\sum \sum \lambda_{ij}$, c'est à dire minimiser le préjudice total subi par la communauté.

Pour un sommet i , $\sum_{j \neq i} \lambda_{ji}$ est le préjudice subi par la communauté à cause d'une construction insuffisante de centre en i ; la contrainte (3) de (Q^1) signifie donc que le déplacement maximal de i , ajouté à la pénalité pour construction insuffisante de centre en i , reste inférieur à a_i -sinon il deviendrait alors plus intéressant de construire le centre.

VI-2 - Ebauche d'un algorithme de résolution de Q'

Cette interprétation suggère un procédé de résolution du problème (P_{1c}) , procédé dont l'attrait principal est que son évolution peut être aisément visualisée et donc guidée -ce serait là un algorithme interactif.

En voici une description :

(0) Se fixer des rayons d'action initiaux μ_i .

(1) Construire un vecteur solution (x,y) vérifiant les contraintes de consommation imposées par les μ_i , à savoir :

$\mu_i > \Delta_{ij} \Rightarrow x_{ij} = y_i$, dans la zone de consommation obligatoire.

$\mu_i < \Delta_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0$, dans la zone de consommation interdite.

$\mu_i = \Delta_{ij} \Rightarrow x_{ij} \leq y_i$, dans la zone de consommation libre.

(2) Calculer, en chaque sommet, la quantité

$$g_i = 1 - y_i - \sum_{j \neq i} x_{ij},$$

qui est le surplus ($g_i > 0$) ou le déficit ($g_i \leq 0$) de consommation du sommet i . Si $g_i = 0$ pour tout $i \in X$, la solution actuelle est optimale.

(3) Sinon, grâce à l'information fournie par les surplus et les déficits le décideur modifie les rayons d'action, diminuant le rayon de ceux qui ont trop de consommation et augmentant le rayon de ceux qui ne consomment pas assez. Avec ces nouveaux μ_i , on reprend le procédé en (1). _____

VII - REMARQUE SUR LA MATRICE Δ

Pour conclure ce chapitre, nous remarquerons que toute l'étude des paragraphes précédents n'a jamais explicitement utilisé le fait que (Δ_{ij}) est une matrice des plus courtes distances.

La seule propriété de (Δ_{ij}) qui ait été mise à contribution est la positivité des éléments de Δ :

$$\Delta_{ij} \geq 0, \Delta_{ii} = 0.$$

On pourrait voir là une "généralisation" du problème de m -centre, et se dire que tout problème combinatoire pouvant se mettre sous la forme du programme linéaire en nombres entiers (P) est résolu par les procédés que nous proposons aux chapitres III et IV.

En fait, on est obligé de déchanter, car l'expérience numérique montre que quand Δ ne vérifie pas l'inégalité du triangle

$$\Delta_{ij} \leq \Delta_{ik} + \Delta_{kj}$$

la solution optimale de (P_c) est rarement entière, et l'écart entre la valeur optimale de (P_c) et celle de (P) est fort important.

Tout se passe comme si, dans R^{n^2} , le polyèdre des (x,y) défini par les contraintes de (P_c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum x_{ij} + y_i = 1 \\ -x_{ij} + y_j \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0 \\ y_j \geq 0 \end{array} \right.$$

avait une densité de sommets entiers plus importante dans certaines régions que dans d'autres ; quand la matrice Δ vérifie l'inégalité du triangle, l'hyperplan qu'elle définit dans R^{n^2} semble être du côté du polyèdre où la densité des points extrémaux entiers est grande.

L'analyse précise de l'influence de cette propriété d'inégalité triangulaire sur l'intégrité des solutions optimales de (P_c) reste une question ouverte.

CHAPITRE III

METHODES DE DECOMPOSITION POUR LA RESOLUTION DU PROGRAMME LINEAIRE
DU PROBLEME DE M-CENTRE

L'extrême facilité de résolution du problème à variables de construction fixées, ainsi que la connaissance détaillée que nous avons des polyèdres DP_c^i , recommandent la recherche de méthodes de résolution dans lesquelles, par un artifice quelconque, on "escamote" les variables (x_{ij}) du programme linéaire, l'effort essentiel portant alors sur la détermination du niveau optimal des variables y_i .

I - MISE EN OEUVRE DU PRINCIPE DE DECOMPOSITION DE DANTZIG-WOLFE

Ce principe de décomposition consiste à écrire tout point d'un polyèdre comme combinaison linéaire de points extrémaux (sommets ou rayons extrémaux) de ce polyèdre ; les variables sont alors les coefficients de cette combinaison linéaire et on recherche la combinaison optimale par la méthode révisée du simplexe.

Dans le cas du problème de m-centre, à coûts d'investissement par exemple, la procédure la plus simple et la plus efficace est celle qui résulte de l'application de ce principe au dual (Q_1) du programme linéaire (P_{c1})

$$(Q_1) \left\{ \begin{array}{l} \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \neq i \quad (1) \\ \mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} \leq a_i \quad (2) \\ \lambda_{ij} \geq 0 \quad (3) \\ \sum_{i=1}^n \mu_i = z(\text{Max}) \quad (4) \end{array} \right.$$

I-1 - Appelons DP_c^i le polyèdre de R^n défini par les contraintes

$$DP_c^i \left\{ \begin{array}{l} \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad \forall j \neq i \\ \lambda_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

et soit $S^{(i)}$ l'ensemble des points extrémaux (c'est à dire des sommets ou rayons extrémaux) de DP_c^i .

Ces points extrémaux sont repérés par un double indice (ℓ, i) , $\ell = 1, 2, \dots, N(i) = |S^{(i)}|$. Les sommets de DP_c^i seront repérés par un (ℓ, i) , où ℓ va de 1 à $N_1(i)$, les rayons extrémaux de DP_c^i par un indice (ℓ, i) , où

ℓ va de $N_1(i)+1$ à $N(i)$. Un élément quelconque de $S^{(i)}$ sera noté $(\mu_i^{-\ell,i}, \bar{\lambda}_{ij}^{\ell,i})$
 $j \neq i, j = \{1, \dots, n\}$

Une étude détaillée de cet ensemble $S^{(i)}$ a été faite au chapitre précédent, étude que nous reprendrons en temps utile. _____

I-2 - Toute solution (μ, λ) réalisable de (Q_1) définit une solution réalisable (μ_i, λ_{ij}) de DP_c^i , solution qui peut être écrite comme une combinaison $j=1, \dots, n, j \neq i$ des points de $S^{(i)}$:

$$\mu_i = \sum_{\ell=1}^{N(i)} \gamma^{\ell,i} \mu_i^{-\ell,i}$$

$$\lambda_{ij} = \sum_{\ell=1}^{N(i)} \gamma^{\ell,i} \mu_{ij}^{\ell,i}$$

avec $\gamma^{\ell,i} \geq 0$ pour $\ell = 1, 2, \dots, N(i)$ et

$$\sum_{\ell=1}^{N_1(i)} \gamma^{\ell,i} = 1$$

Une expression équivalente du problème (Q_1) est donc le programme linéaire "extrémal" suivant :

$$(QE) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^{N_1(i)} \gamma^{\ell,i} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \gamma^{\ell,i} \geq 0 \quad i=1, \dots, n, \ell=1, 2, \dots, N(i) \\ \sum_{\ell=1}^{N(i)} \mu_i^{-\ell,i} \gamma^{\ell,i} + \sum_{j \neq i} \sum_{\ell=1}^{N(j)} \bar{\lambda}_{ji}^{\ell,i} \gamma^{\ell,j} = a_i \\ \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^{N(i)} \mu_i^{-\ell,i} \gamma^{\ell,i} = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Le programme (QE) comporte $2n$ contraintes, ce qui constitue une réduction importante par rapport aux n^2 contraintes de (Q_1) . (QE) compte $\sum_{i=1}^n N(i)$

colonnes (ou variables), chacune correspondant à un sommet ou à un rayon extrémal de DP_c^i , $i = 1, \dots, n$.

Il sera utile de connaître le dual (DPE) de ce programme ; ce dual a la forme suivante :

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \rho_i + \pi_i \bar{\mu}_i^{-\ell,i} + \sum_{j \neq i} \pi_j \bar{\lambda}_{ij}^{-\ell,i} \geq \bar{\mu}_i^{-\ell,i} \quad , \quad \ell = 1, 2, \dots, N_1(i) \\
 \text{(id est, pour } (\ell, i) \text{ désignant un sommet de } DP_c^i) \\
 \\
 \pi_i \bar{\mu}_i^{-\ell,i} + \sum_{j \neq i} \pi_j \bar{\lambda}_{ij}^{-\ell,i} \geq \bar{\mu}_i^{-\ell,i} \quad , \quad \ell = N_1(i)+1, \dots, N(i) \\
 \text{(id est, pour } (\ell, i) \text{ désignant un rayon extrêmeal de } DP_c^i) \\
 \\
 \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{i=1}^n \pi_i a_i = w(\text{Min})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Nous donnerons plus loin une interprétation de ce problème (DPE) ; disons pour l'instant que les π_i optimaux fournissent les variables optimales de construction dans le problème (P_{1c}) :

$$\pi_i^* = y_i^*$$

et que les ρ_i apparaissent comme les distances parcourues par chacun des usagers i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. _____

I-3 - Mise en oeuvre de l'algorithme révisé du simplexe

I-3-1 - Rappel du principe

Le problème (QE) étant sous forme canonique par rapport à une base, le principe de la méthode (révisée) du simplexe est de rechercher une colonne (une solution réalisable) dont le coût réduit soit positif et de l'introduire dans la base. Si les coûts réduits de toutes les solutions réalisables sont négatifs ou nuls, la solution de base actuelle est optimale.

I-3-2 - Expression des coûts réduits

Quand le programme linéaire (QE) est sous forme canonique par rapport à une base, cette base définit un vecteur multiplicateur $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n ;$

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$.

L'expression du coût réduit d'une colonne $(\mu_i, \lambda_{ij}_{j=1, \dots, n, j \neq i})$ est alors :

- soit $(1-\pi_i)\mu_i - \sum_{j \neq i} \pi_j \lambda_{ij} - \rho_i$

si cette colonne correspond à un sommet de DP_c^i

- soit $(1-\pi_i)\mu_i - \sum_{j \neq i} \pi_j \lambda_{ij}$

si cette colonne correspond à un rayon extrémal de DP_c^i .

I-3-3 - Recherche d'une colonne entrante - Test d'optimalité

Pour mettre en évidence un point extrémal de coût réduit positif, on résoudra, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, le couple de programmes linéaires duaux $DP_c^i(\pi)$ et $P_c^i(\pi)$:

$$\begin{array}{l}
 DP_c^i(\pi) \left\{ \begin{array}{l}
 \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \forall j \neq i \\
 \lambda_{ij} \geq 0 \\
 (1-\pi_i)\mu_i - \sum_j \pi_j \lambda_{ij} = z(\text{Max})
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 P_c^i(\pi) \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 - \pi_i \\
 -x_{ij} \geq -\pi_j \\
 x_{ij} \geq 0 \\
 \sum_{j \neq i} x_{ij} \Delta_{ij} = w(\text{Min})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Pour la résolution de ce couple de problèmes duaux, nous avons donné, au chapitre précédent, un procédé très simple qui construit toujours, quel que soit π , un point extrémal de DP_c^i .

Tous les points extrémaux ainsi mis en évidence, et qui sont de coût réduit positif, sont à introduire dans la base (-on peut aussi choisir de n'introduire dans la base que celui dont le coût réduit est le plus grand).

Si, pour tous les problèmes $DP_c^i(\pi)$, $i = 1, \dots, n$, les points extrémaux construits sont de coût réduit négatif ou nul, la solution de base actuelle est optimale.

I-3-4 - Interprétation

La négativité des coûts réduits exprime exactement la réalisabilité des contraintes de (DQE) pour le vecteur multiplicateur courant (ρ, π) .

La recherche d'une colonne entrante équivaut à la recherche d'une contrainte de (DQE) qui ne soit pas vérifiée. Quand tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls, le vecteur multiplicateur est devenu dual réalisable et la base actuelle est optimale.

I-3-5 - Base initiale et vecteur multiplicateur correspondant

Il est très commode d'avoir pour base initiale une base dont les colonnes constituent une matrice identité.

Ceci présente de nombreux avantages : on n'a pas à inverser la première base et le calcul du vecteur multiplicateur est immédiat ; d'une base à l'autre, en une seule opération de pivotage, on obtient l'inverse de la nouvelle base : elle est constituée par les colonnes actuelles de la base initiale.

Dans notre cas, les contraintes de (QE) étant des égalités, on ne peut utiliser la base des variables d'écart. Cependant un choix judicieux des colonnes de (QE) permet d'obtenir pour première base réalisable une matrice identité -voici comment procéder.

a) Pour les n premières contraintes de (QE) (contraintes de convexité) les colonnes de base choisies sont celles correspondant aux sommets $(\bar{\mu}_i = 0, \bar{\lambda}_{ij} = 0)$ de chacun des polyèdres $DP_c^{(i)}$ $j \neq i$

b) Pour les n contraintes suivantes de (QE) (contraintes de liaison), on définit, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'indice $q(i)$ comme étant

$$q(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \leq n-1 \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

soit encore $q(i) = i+1 \pmod{n}$.

Et dans la n ième colonne de base on met le rayon extrémal de $DP_c^{(q(i))}$ suivant

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{q(i)} = 0 \\ \bar{\lambda}_{q(i),i} = 1 \\ \bar{\lambda}_{q(i),j} = 0 & j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i, q(i)\} \end{cases}$$

qui sera de base dans la n ième contrainte de (QE).

Les colonnes de (QE) sont

- soit

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \hline
 \lambda_{i1} \\
 \lambda_{i2} \\
 \vdots \\
 \lambda_{ii-1} \\
 \mu_i \\
 \lambda_{ii+1} \\
 \vdots \\
 \lambda_{in}
 \end{array}$$

si elle correspond à un sommet de DP_c^i .

- soit

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 0 \\
 \hline
 \lambda_{i1} \\
 \lambda_{i2} \\
 \vdots \\
 \lambda_{ii-1} \\
 \mu_i \\
 \lambda_{ii+1} \\
 \vdots \\
 \lambda_{in}
 \end{array}$$

si elle correspond à un rayon extrémal de DP_c^i .

La matrice des colonnes que nous venons de décrire est bien la matrice identité. Nous la désignerons par B.

Le vecteur multiplicateur associé à cette base initiale est nul

$$\rho_i = \pi_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

I-3-6 - Description de l'itération

I-3-6-1 - L'essentiel de l'itération se fera comme suit :

. Le problème étant sous forme canonique par rapport à une base courante, le vecteur (ρ, π) se lit, au signe près, à la ligne de la fonction objective et aux colonnes de B, correspondant à la base initiale.

. Avec (ρ, π) et grâce au procédé décrit au IV-2 du chap. II, on met en évidence :

- soit l'optimalité de la base actuelle,
- soit un point extrémal de coût réduit positif, définissant une colonne entrante.

. Cette colonne est mise à jour des pivotages précédents grâce à sa multiplication par la matrice B des colonnes de la base initiale. Le coût réduit (coefficient dans la fonction objective) de cette colonne est :

$$(1-\pi_i)\mu_i - \sum_{j \neq i} \pi_j \lambda_{ij} = \begin{cases} \rho_i & \text{s'il s'agit d'un sommet} \\ 0 & \text{si c'est un rayon extrémal} \end{cases}$$

. Le pivotage s'effectue alors d'après les règles classiques ; on obtient une nouvelle base et on recommence l'itération. Au bout d'un nombre fini d'itérations, ce processus construit une solution (ρ^*, π^*) duale optimale et des coefficients γ^{*l_i} , grâce auxquels on peut définir une solution (μ^*, λ^*) optimale de (Q). _____

I-3-6-2 - Théorème 1 : A l'optimum (c'est à dire à l'arrêt du procédé que nous venons de décrire), les variables π du vecteur multiplicateur (ρ^*, π^*) définissent les variables optimales de construction dans (P_c) :

$$\pi^* = y^*$$

Démonstration : Appliquons le procédé du IV-2 aux problèmes $P_c^i(\pi^*)$, $i=1, \dots, n$. Ce procédé ne construira pas de rayon extrémal, car le coût réduit d'un tel rayon extrémal serait strictement positif et la base actuelle ne serait pas optimale.

Les problèmes $P_c^i(\pi^*)$ sont donc réalisables et on construit leur solution optimale x_i^* .

La solution (x^*, π^*) est réalisable pour le problème (P_c) .

Pour établir qu'elle est optimale, il nous suffit de montrer que (x^*, π^*) et (μ^*, λ^*) définissent un couple de solutions primale et duale réalisables de même valeur.

En effet :

a) (μ^*, λ^*) définit une solution $(\mu_i^*, \lambda_{ij}^*)_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}}$ réalisable de $DP_c^i(\pi)$ et

qui est en fait optimale - ceci parce que

$$(1 - \pi_i^*) \mu_i^* - \sum_{j \neq i} \pi_j^* \lambda_{ij}^* = \rho_i^*$$

b) Comme x_i^* est une solution optimale de $P_c^i(\pi^*)$, on a l'égalité

$$\sum_{j \neq i} x_{ij}^* \Delta_{ij} = (1 - \pi_i^*) \mu_i^* - \sum_{j \neq i} \pi_j^* \lambda_{ij}^* (= \rho_i^*)$$

d'où, en sommant en i , on tire :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^n \mu_i^* - \sum_{i=1}^n \pi_i^* \left[\mu_i^* + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} \right] = \sum_{i=1}^n \mu_i^* - \sum_{i=1}^n \pi_i^* a_i$$

c. q. f. d.

I-4 - Une nouvelle forme du programme linéaire du problème de m-centre

Un même polyèdre C peut être décrit par plusieurs systèmes différents de contraintes linéaires ; ceci fait qu'un problème linéaire déterminé peut s'exprimer par plusieurs programmes linéaires de formes différentes, chacune de ces formes étant propice à un mode de résolution particulier.

La forme nouvelle du programme linéaire du problème de m-centre que nous allons décrire à présent peut se déduire "directement" des considérations "physiques" sur le problème de m-centre - nous le ferons d'ailleurs au chapitre IV.

Nous avons cependant trouvé intéressant de retrouver cette forme à partir :

- des rayons extrémaux des polyèdres DP_c^i d'une part, et d'autre part
- du dual (DQE) du programme écrit sous forme extrémale :

$$(DQE) \left\{ \begin{array}{l} \rho_i + \pi_i \bar{\mu}_i^{-\ell, i} + \sum_{j \neq i} \pi_j \bar{\lambda}_{ij}^{-\ell, i} \geq \bar{\mu}_i^{-\ell, i} \\ \text{si } (\ell, i) \text{ désigne un sommet de } DP_c^i \\ \pi_i \bar{\mu}_i^{-\ell, i} + \sum_{j \neq i} \pi_j \bar{\lambda}_{ij}^{-\ell, i} \geq \bar{\mu}_i^{-\ell, i} \\ \text{si } (\ell, i) \text{ désigne un rayon extrémal de } DP_c^i \\ \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{i=1}^n \pi_i a_i = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

Chaque point extrême de DP_c^i définit une contrainte de (DQE).
Puisque nous connaissons ces points extrêmes, nous allons réécrire explicitement chacune des contraintes de (DQE).

Une énumération exhaustive des points extrêmes des polyèdres DP_c^i a été donnée au théorème 1 - on remarquera à ce propos que tous les points extrêmes sont entiers.

I-4-1 - Contraintes introduites dans (DQE) par des sommets

I-4-1-1 - Le vecteur $\mu_i = 0 = \lambda_{ij} \quad \forall j \neq i$ est un sommet de DP_c^i . La contrainte d'un tel sommet défini est

$$\rho_i \geq 0$$

I-4-1-2 - Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, le vecteur

$$\mu_i = \Delta_{i\sigma_i}(k), \quad \lambda_{i\sigma_i}(\ell) = \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(\ell) & \text{pour } \ell \leq k \\ 0 & \text{pour } \ell > k \end{cases}$$

est un sommet de DP_c^i , qui définit la contrainte

$$\rho_i + \pi_i \Delta_{i\sigma_i}(k) + \sum_{\ell=1}^{k-1} \pi_{\sigma_i}(\ell) \left| \Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(\ell) \right| \geq \Delta_{i\sigma_i}(k)$$

I-4-2 - Contraintes définies par des rayons extrêmes

I-4-2-1 - Le vecteur $\mu_i = \lambda_{ij} = 1/n$ est un rayon extrême de DP_c^i .
Pour la contrainte introduite, on pourra aussi bien considérer le vecteur $\mu_i = \lambda_{ij} = 1$.

La contrainte correspondante est

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \geq 1$$

Dans cette catégorie de contraintes, il y a donc $(n-1)$ contraintes redondantes dans (DQE).

I-4-2-2 - Au rayon extrême de la forme

$$\mu_i = 1, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i$$

est associée la contrainte $\pi_i \leq 1$.

I-4-2-3 - Enfin, la contrainte correspondant à

$$\mu_i = 0, \quad \lambda_{ij_0} = 1, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i, j_0\}$$

est

$$\pi_{j_0} \geq 0$$

I-4-3 - Nouvelle forme du programme linéaire et interprétation

On aboutit donc à un nouveau programme linéaire, équivalent à (P_c) et qui s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_i & \geq 0 & (1) \\ \pi_i & \geq 0 & (2) \\ -\pi_i & \geq -1 & (3) \\ \sum_{j=1}^n \pi_j & \geq 1 & (4) \\ \rho_i + \pi_i \Delta_{i\sigma_i}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} \pi_{\sigma_i(r)} \left[\Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] & \geq \Delta_{i\sigma_i}(k) & (5) \\ & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{i=1}^n \pi_i a_i & = w(\text{Min}) \end{cases}$$

A cause de la forme de la fonction objective w, on peut écrire :

$$\rho_i = \text{Max} \left[0, \text{Max}_{k=1, 2, \dots, n-1} \left[\left[1 - \sum_{r=0}^{k-1} \pi_{\sigma_i(r)} \right] \Delta_{i\sigma_i}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} \pi_{\sigma_i(r)} \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] \right]$$

Grâce au corollaire 7, on reconnaît dans le second maximande le problème DP_cⁱ(π). La variable ρ_i est donc à l'optimum la valeur optimale du problème DP_cⁱ(π), c'est à dire la distance parcourue par l'utilisateur i.

Dans la méthode de Dantzig-Wolfe, on dispose, à chaque pas, d'un vecteur multiplicateur (ρ, π), qui ne sera (DQE) réalisable qu'à la dernière itération. Les contraintes (5) de (G) font apparaître ρ_i comme un majorant de la distance parcourue par l'utilisateur i pour obtenir l'unité de consommation qu'il requiert.

A chaque pas, résoudre le sous-problème $P_C^i(\pi)$ et tester la duale-réalisabilité de (ρ, π) équivaut à rechercher si l'utilisateur peut se fournir aux différents centres construits et obtenir l'unité de consommation requise, ceci sans parcourir une distance qui soit plus grande que ρ_i .

Si ceci est possible dans tous les sous-problèmes, la solution actuelle est optimale. Sinon, il s'agit de changer

- soit le niveau des variables de construction π_i , et ceci se fait par l'introduction d'une nouvelle colonne qui soit de base dans une des n dernières contraintes de (QE) ;

- soit les rayons d'action ρ_i , et ceci se fait par l'introduction dans la base d'un sommet qui soit de base dans une des n premières contraintes de (QE). _____

II - LA METHODE DES ETOILES

Le procédé que nous venons de décrire peut sembler une instrumentation lourde, et par suite inefficace, de la méthode révisée du simplexe -et l'expérience numérique vient d'ailleurs confirmer cette impression.

Bien heureusement, il existe une autre manière, plus simple, de mettre en oeuvre la méthode révisée du simplexe, c'est celle qui résulte de l'aménagement de cette méthode pour la résolution du problème (E_c) et aboutit à un procédé qui, lui, est fort efficace. Rappelons la forme de (E_c) :

$$(E_c) \left\{ \begin{array}{l} R \\ \sum_{r=1} b_{ir} v_r \geq 1 \\ \\ v_r \geq 0 \\ \\ R \\ \sum_{r=1} c_r v_r = w(\text{Min} \end{array} \right.$$

A chaque étoile c_r est associée une variable v_r ; le vecteur b_{ir} est le vecteur incidence sommet $-e_r$; le coût c_r de l'étoile e_r est la somme du coût d'investissement de sa racine et de la longueur des arcs qui la constituent. (E_c) ne compte que n contraintes ; ses bases sont donc des matrices $n \times n$, ce qui est un gain notable par rapport au $2n \times 2n$ de la formulation précédente.

II-1 - Base initiale

On prendra pour base initiale les n étoiles réduites aux sommets de G . La matrice D correspondante est la matrice unité. Tout au long de l'algorithme, les colonnes de D fourniront, au signe près, les variables duales (vecteur multiplicateur) .

Pour la base initiale que nous avons choisie, le vecteur multiplicateur est celui des coûts d'investissement : $\underline{\mu_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.}$

II-2 - Description de l'itération

II-2-1 - Recherche d'une colonne entrante

On cherche une étoile e_j telle que son coût réduit soit négatif ; l'expression du coût réduit d'une étoile e_r est :

$$c_r - \sum_{\ell} \mu_{\ell} e_r$$

où les μ_{ℓ} sont les composantes du vecteur multiplicateur associé à la base courante.

Voici comment procéder pour trouver l'étoile de coût réduit le plus petit :

(1) Poser $\Delta'_{ij} = \Delta_{ij} - \mu_i \quad \forall i, j \quad j \neq i$

(2) Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ évaluer

$$\rho_1(j) = \sum_{\ell / \Delta'_{\ell j} < 0} \Delta'_{\ell j}$$

S'il n'existe aucun arc (ℓ, j) qui soit tel que $\Delta'_{\ell j} < 0$, on posera $\rho_1(j) = 0$.

On évalue alors :

$$\rho(j) = \rho_1(j) + a_j - \mu_j$$

L'étoile

- de racine j

- dont les arcs sont les arcs (ℓ, j) tels que $\Delta'_{\ell j} < 0$

est l'étoile de racine j et de coût réduit le plus petit - ce coût étant $\rho(j)$.

(3) Parmi toutes les étoiles ainsi mises en évidence, choisir celle de coût réduit le plus petit

$$\rho(j_0) = \min_j \rho(j) \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Si $\rho(j_0) \geq 0$, terminer : la solution actuelle est optimale.

Sinon, prendre pour colonne entrante le vecteur d'incidence à l'étoile e_{r_0} de coût réduit le plus petit.

II-2-2 - Mise à jour de la colonne entrante

On multiplie le vecteur d'incidence à e_{r_0} par les colonnes de D. Le coefficient correspondant à e_{r_0} dans la fonction objective est

$$c_{r_0} - \sum_l \mu_l e_{r_0}^l$$

Soit e'_{r_0} la colonne entrante : $e'_{r_0} = D e_{r_0}$.

II-2-3 - Recherche de la colonne sortante

On repère la ligne (id est, le sommet) i_0 qui a le plus petit rapport $\frac{b_i}{e_{r_0}^i}$

$$\frac{b_{i_0}}{e_{r_0}^{i_0}} = \text{Min} \left\{ \frac{b_l}{e_{r_0}^l} / l / e_{r_0}^l > 0 \right\}$$

L'indice i_0 détermine alors une colonne sortante. Dans la mesure du possible, choisir comme colonne sortante la colonne correspondante à une étoile de même racine que e_{r_0} .

II-2-4 - Pivotage

- On réduit la colonne e'_{r_0} à un 1 en ligne i_0 et à des zéros par ailleurs.

- On élimine le coût réduit de e_{r_0} de la fonction objective, ce qui donne de nouvelles variables duales μ .

Remarques

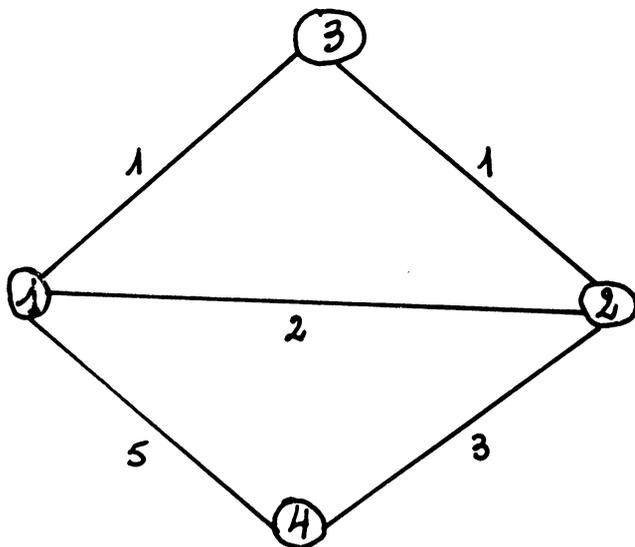
Remarque 1 : Si une étoile est dans la base courante, son coût réduit est nul, c'est à dire que la somme des pondérations de ses sommets est égale à son poids :

$$c_r = \sum e_r$$

Remarque 2 : Rechercher la variable de coût réduit le plus petit revient à chercher la contrainte du dual la plus mal vérifiée. Si toutes les contraintes du dual sont vérifiées, le vecteur μ est dual réalisable et la solution courante est optimale.

II-3 - Un exemple illustratif

Soit à résoudre le problème (E_c) associé au graphe symétrique de la figure ci-dessous, dans lequel le coût d'investissement est uniformément pris égal à $a_i = 3$.



1	2	3	4	1	
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1
-3	-3	-3	-3	-3	12

← racine

↑b

Au départ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 3$
 L'étoile de coût réduit le plus

petit est



qui correspond à la colonne réduite

1
1
1
0

et au coût réduit -3.

1	2	3	4	1	
1	0	0	0	1	1
-1	1	0	0	0	0
-1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	-3	-3	-3	0	9

← racine

↑b

Après introduction de cette colonne
 et pivotage le vecteur devient

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 3$$

pour ce vecteur il n'y a aucune étoile à
 coût réduit strictement négatif : la so-
 lution est optimale et l'on a :

$$y_1 = 1 \quad y_4 = 1$$

III - ADAPTATION DU PRINCIPE DE DECOMPOSITION DE ROSEN

III-1 - Introduction et présentation

Le principe de décomposition de Rosen, exposé dans réf [13], est une stratégie de résolution de "gros" systèmes linéaires, conçue pour des programmes linéaires (P_c) comportant deux groupes de variables distincts (x) et (y). Les programmes linéaires (Q) duaux de tels programmes (P_c) présentent une structure de blocs. L'idée de Rosen est l'exploitation astucieuse de cette structure de blocs, qui permet d'écrire toute base "complète" du programme linéaire Q en fonction des bases des blocs de Q -et schématiquement, le mode opératoire que Rosen propose peut être envisagé comme la construction d'une solution de base optimale de (Q) par l'ajustement progressif des bases des sous-problèmes.

Il nous a semblé utile de présenter aussi une démarche primale qui aboutit, en l'occurrence, et à la faveur de la structure très particulière du problème de m -centre, au même mode opératoire. Cette démarche présente un grand intérêt. En exploitant la signification des variables de notre problème (P_c), nous aboutissons à une interprétation physique qui nous permet de simplifier énormément le programme linéaire de Rosen et ainsi élaborer une procédure efficace.

Cette procédure peut, pour l'essentiel, être présentée de la façon suivante.

Soit y un vecteur de R^n vérifiant les inégalités

$$0 \leq \tilde{y}_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \leq n$$

Un tel vecteur sera dit "réalisable pour le problème de m -centre".

C'est à de tels vecteurs que nous avons associé un couple de programmes linéaires duaux $P_c(\tilde{y})$ et $DP_c(\tilde{y})$ (cf. § IV-1 et suivants, au chapitre II),

$$\begin{array}{l}
 P_c(\tilde{y}) \left\{ \begin{array}{l}
 \sum x_{ij} = 1 - \tilde{y}_i \\
 x_{ij} \leq \tilde{y}_j \\
 x_{ij} \geq 0 \\
 \sum \sum x_{ij} \Delta_{ij} = w(\tilde{y}) \text{ (Min)}
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 DP_c(\tilde{y}) \left\{ \begin{array}{l}
 \lambda_{ij} \geq 0 \\
 \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \\
 \sum_{i=1}^n \mu_i - \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i [\mu_i + \sum \lambda_{\ell i}] = z(y) \text{ (Max)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Nous avons déjà remarqué que les contraintes de $DP_c(\tilde{y})$ ne dépendent pas de \tilde{y} . Une solution optimale $\tilde{x}(\tilde{y})$ de $P_c(\tilde{y})$ définit, comme on l'a vu au IV-2, une solution optimale de base $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ de $DP_c(\tilde{y})$. Le fait essentiel, qui sera exploité dans cette méthode, est que $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ peut être une solution optimale de plusieurs problèmes $DP_c(y)$. Il s'agit alors de rechercher, parmi de tels y , l'un de ceux qui donnent la meilleure valeur à la fonction objective de P_c ; puis grâce à un tel y , changer de sommet dans le polyèdre DP_c .

Un algorithme s'inspirant de ces observations serait du type suivant :

(1) Résoudre $P_c(\tilde{y})$ et $DP_c(\tilde{y})$ et construire $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ solution optimale de base de $DP_c(\tilde{y})$.

(2) Chercher un nouvel y^* pour lequel

(2-1) Cette solution $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ reste encore duale optimale, c'est à dire optimale pour $DP_c(y^*)$.

(2-2) On améliore la fonction objective de (P_c) .

(3) Si une telle solution (y^*) existe, résoudre $P_c(y^*)$ et $DP_c(y^*)$ en veillant à obtenir une solution optimale (μ^*, λ^*) de base de $DP_c(y^*)$ qui soit différente de $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$.

Sinon, soit établir l'optimalité de y , soit changer $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$. _____

Une telle procédure utilise donc explicitement le caractère dégénéré des programmes linéaires étudiés. Nous allons à présent l'élaborer dans son détail : au § III-3-1, nous indiquerons la manière de rechercher le "meilleur" y^* vérifiant la condition 2-1 ; puis, au III-3-2, nous élaborons la condition d'optimalité de \tilde{y} , condition qui contient aussi des indications pour le changement de la base duale. Le § III-2 est consacré à des définitions et des rappels nécessaires avant d'entamer l'étude de la procédure proprement dite. _____

III-2 - Définitions et Rappels

III-2-1 - Les indices $p(i)$

A tout vecteur y solution réalisable du problème de m -centre, nous avons associé, au § II-4, une famille d'indices $p(i)$, $i = 1, \dots, n$; l'indice $p(i)$ étant défini comme le plus petit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ vérifiant

$$1) \sum_{r=0}^{k-1} y_{\sigma_i(r)} < 1$$

(Cette somme étant considérée comme nulle si $k = 0$).

$$2) \sum_{r=0}^k y_{\sigma_i(r)} \geq 1$$

On remarquera que si $y_i < 1$, on a $p(i) > 0$. Ces indices $p(i)$ déterminent entièrement la solution optimale de $P_c(y)$ et une solution optimale de base de $DP_c(y)$.

Dans le cas où $\sum_{r=0}^{p(i)} y_{\sigma_i(r)} = 1$ et $p(i) < n-1$, nous définirons un autre indice, $p^*(i)$, en posant $p^*(i) = p(i)+1$.

Ces indices $p(i)$ et $p^*(i)$ nous seront d'une grande utilité par la suite. _____

III-2-2 - Support faible et support fort

. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et k un entier compris entre 0 et $n-1$. On définit l'ensemble $S(i, k)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S(i, k) &= \{j / \exists \ell \in \{0, 1, \dots, k\} \text{ tel que } \sigma_i(\ell) = j\} \\ &= \{j / \beta_i(j) \leq k\} \end{aligned}$$

Les arcs (i, j) , pour $j \in S(i, k)$ sont donc les k "premiers" -premiers au sens de la proximité définie par les distances Δ_{ij} .

. Soit y solution réalisable du problème de m -centre, on appelle support faible de y en i l'ensemble $S(i, p(i)-1)$, cet ensemble pouvant être vide. Pour chaque arc (i, j) , où j est dans le support faible de y en i , on a l'égalité $x_{ij}(y) = y_j$ dans la solution $x(y)$ optimale de $P_c(y)$.

. Le support fort de y en i est l'ensemble $S(i, p(i))$, qui contient au moins 2.

Remarque

Nous verrons qu'en termes de support, changer de y dans les conditions décrites dans l'introduction (III-1) signifie simplement qu'on ne s'autorise qu'à prendre des y^* dont le support fort est le support faible de l'ancienne solution \tilde{y} (ou l'inverse). L'algorithme, que nous décrirons bientôt, progresse donc en ajoutant ou en otant un arc (et un seul) aux supports de la solution actuelle. _____

III-2-3 - Rappel sur la résolution du problème $DP_c(y)$

L'algorithme d'affectation aux plus proches voisins construit très simplement une solution du problème $P_c(y)$, où y est une solution réalisable du problème de m -centre. Cet algorithme fournit aussi les $p(i)$ associés à de vecteur y . (Voir le théorème 4 du chapitre II).

Nous avons vu que pour obtenir une solution optimale de $DP_c(y)$, nous pouvons utiliser ces $p(i)$ et poser

$$\mu_i = \Delta_{i\sigma_i}(p(i))$$

$$\lambda_{i\sigma_i}(\ell) = \begin{cases} (\Delta_{i\sigma_i}(p(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(\ell)) & 0 \leq \ell \leq p(i) \\ 0 & \ell > p(i) \end{cases}$$

Pour les références ultérieures, cette solution sera dite de type 1.

Dans le cas où $\sum_{i=1}^n y_i > 1$, on obtient une autre solution optimale en posant :

$$\mu_i = \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i}(p^*(i)) & \text{si } \sum_{r=0}^{p(i)} y_{\sigma_i}(r) = 1 \\ \Delta_{i\sigma_i}(p(i)) & \text{si } \sum_{r=0}^{p(i)} y_{\sigma_i}(r) > 1 \end{cases}$$

$$\lambda_{i\sigma_i}(\ell) = \begin{cases} \mu_i - \Delta_{i\sigma_i}(\ell) & \text{pour } 0 \leq \ell \leq p(i) \\ 0 & \text{si } \ell > p^*(i) \text{ (ou } \ell > p(i), \text{ si } p^*(i) \text{ n'a pas été défini)} \end{cases}$$

Nous avons établi, au théorème 4, que de tels (μ, λ) sont des solutions optimales de base du problème $(DP_c(y))$. Quand elles existent, d'autres solutions optimales peuvent être construites de cette même manière, à partir de $p^{**}(i)$ ou $p^{***}(i)$, etc... _____

III-3 - Description du principe de résolution

III-3-1 - Changement de solution primale

Soit \tilde{y} un vecteur vérifiant les inégalités

$$0 \leq \tilde{y}_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad 1 \leq \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \leq n.$$

Résolvons $P_c(\tilde{y})$ et $DP_c(\tilde{y})$ et appelons $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ la solution optimale de type 1 associée à \tilde{y} . Soient $\tilde{p}(i)$ et $\tilde{p}^*(i)$ les indices que nous associons à \tilde{y} comme indiqué au III-2-1. Soit $w(\tilde{y})$ la valeur optimale de $P_c(\tilde{y})$.

Il nous faut à présent trouver une manière de construire un vecteur y tel que $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ reste encore solution optimale de $DP_c(y)$ et améliorant la fonction objective de (P_c) .

Pour la recherche d'un tel y , l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins, ainsi que sa justification au théorème 4, nous fournissent de précieuses indications sur les relations entre les $p(i)$ et les sommets de DP_c . La proposition suivante est en fait un corollaire de ce théorème 4.

Proposition 2 : Soit y une solution réalisable du problème de m -centre satisfaisant les inégalités

$$(a) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} y_{\sigma_i(r)} \leq 1$$

$$(b) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)} y_{\sigma_i(r)} \geq 1$$

$i = 1, 2, \dots, n$

et soient $p(i)$, $i = 1, \dots, n$ les indices associés à ce y comme indiqué au III-2-1.

Alors on a les inégalités

$$\tilde{p}(i)-1 \leq p(i) \leq \tilde{p}(i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Démonstration : Ce résultat devient évident aussitôt qu'on rapproche les deux conditions (a) et (b) de la définition même des indices $p(i)$. _____

Le rapport entre les solution y vérifiant (a), (b) et la duale optimalité de $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ est décrit dans la proposition suivante.

Proposition 3 : Soit y une solution réalisable du problème de m -centre qui vérifie les deux conditions (a) et (b) suivantes :

$$(a) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} y_{\sigma_i(r)} \leq 1$$

$$(b) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)} y_{\sigma_i(r)} \geq 1$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Alors $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ est solution optimale de $DP_c(y)$.

Démonstration : D'après la proposition précédente, on a :

- soit $p(i) = \tilde{p}(i)$

et dans ce cas $(\tilde{\mu}^i, \tilde{\lambda}_{ij}^i)$ reste optimale de $DP_c^i(y)$ de type 1 ;
 $j \neq i$

- soit $p(i) = \tilde{p}(i) - 1$

ce qui implique

$$1) \sum_{r=0}^{p(i)} y_{\sigma_i}(r) = 1$$

$$2) p(i) < n-1$$

L'égalité 1) provient du fait que $1 \leq \sum_{r=0}^{p(i)} y_{\sigma_i}(r) = \sum_{r=0}^{p(i)-1} y_{\sigma_i}(r) \leq 1$, et

l'inégalité 2) découle de ce que $\tilde{p}(i) \leq n-1$.

La seconde manière de construire une solution optimale de $DP_c^i(y)$, que nous indiquons au III-2-3, nous assure que $(\tilde{\mu}^i, \tilde{\lambda}_{ij}^i)_{j \neq i}$ reste optimale de $DP_c^i(y)$.

C'est donc parmi les y vérifiant les conditions (a) et (b) qu'il faut chercher celui (ou ceux) améliorant la fonction objective de (P_c) .

Le théorème de dualité appliqué au couple $P_c(y)$ et $DP_c(y)$, indique qu'a

$$\text{l'optimum } \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_{ij}(y) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_i - \sum_{i=1}^n y_i \left[\mu_i + \sum \lambda_{\ell_i} \right].$$

Mais $\sum \sum x_{ij}(y)$, fonction objective de $P_c(y)$, est aussi la fonction objective de (P_c) .

Ces considérations conduisent à poser

$$\alpha_i = - \left[\mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell_i} \right] \quad (\leq 0)$$

et à rechercher, parmi les y vérifiant (a) et (b) celui minimisant

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

Proposition 4 : Soient y_1 et y_2 deux solutions réalisables du problème de m -centre, vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1i} < \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{2i}$, alors la valeur optimale de $P_c(y_1)$ est plus petite

que la valeur optimale de $P_c(y_2)$: $w(y_1) < w(y_2)$, et donc, du point de vue du problème (P_c, y_1) est meilleure que y_2 .

Démonstration : En effet on a $\sum \sum x_{ij}(y) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$.

Le terme $\sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_i$ restant constant, si $\sum \alpha_i y_i$ diminue, c'est que $\sum \sum x_{ij}(y)$ diminue aussi. _____

Remarque :

Pour tous les éléments y vérifiant (a) et (b), les problèmes $DP_c(y)$ ont la même solution optimale, mais pas la même valeur optimale, puisque celle-ci dépend de y .

La conclusion de cette étude est résumée dans le théorème suivant.

Théorème 5 : Soit y^* la solution optimale du programme linéaire $A(\tilde{y})$ suivant :

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{ll}
 y_j & \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1) \\
 \tilde{p}(i)-1 \\
 \sum_{r=0} y_{\sigma_i(r)} & \geq -1 \quad (2) \\
 \tilde{p}(i) & i = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{r=0} y_{\sigma_i(r)} & \geq 1 \quad (3) \\
 - \sum_{j=1}^n y_j & \geq -m \quad (4) \\
 \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i & = t(\tilde{y}) \text{ (Min)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Si $t(y^*) < t(\tilde{y})$, alors y^* est une solution réalisable pour le problème de m -centre, qui est telle que

$$w(y^*) < w(\tilde{y})$$

(c'est à dire plus intéressante que \tilde{y} du point de vue du critère de (P_c)), et pour laquelle le vecteur $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ reste encore une solution optimale de base de $DP_c(y^*)$.

Démonstration : Les propositions précédentes, ainsi que les deux remarques que voici, constituent la démonstration de ce théorème.

Remarques :

1) Ce problème $A(\tilde{y})$ est toujours réalisable : \tilde{y} constitue en effet une solution réalisable de $A(\tilde{y})$. Ce problème $A(\tilde{y})$ ne dépend explicitement que des $\tilde{p}(i)$ et on pourra écrire indifféremment $A(\tilde{y})$ ou $A(\tilde{p})$.

2) Il n'est peut être pas tout à fait immédiat de voir pourquoi nous pouvons nous dispenser d'inclure les contraintes

$$y_i \leq 1$$

dans le problème $A(\tilde{y})$. En fait les contraintes (2) assurent $y_i \leq 1$ dans la plupart des cas. Soit y une solution réalisable de $A(\tilde{y})$. Si $\tilde{p}(i) > 0$,

$$\text{on a } y_i \leq \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} y_{\sigma_i(r)} \leq 1$$

Si $\tilde{p}(i) = 0$, alors,

ou bien il existe un j tel que $\beta_j(i) < \tilde{p}(j)$ (c'est à dire que i est dans le support faible de j) et alors on a $y_i \leq 1$;

ou bien y_i n'apparaît dans aucun support faible, et dans ce cas $\alpha_i = 0$, et on ne change pas la solution optimale de $A(\tilde{y})$ en posant $y_i = 1$ et en maintenant constamment la variable y_i dans la base.

La solution optimale de $A(\tilde{y})$ peut être le vecteur \tilde{y} lui-même, et dans ce cas, ou bien on est à l'optimum -et nous allons voir comment reconnaître cette circonstance, ou bien on peut construire, grâce à ce que nous avons énoncé au III-2-3, une nouvelle solution optimale $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ de $DP_c(y)$ qui soit de base, différente de $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$, et qui permette de progresser en appliquant la même procédure. _____

III-3-2 - Changement de solution duale - Théorème d'optimalité

Étudions à présent le problème (Q).

Après introduction des variables d'écart v_{ij} dans les premières contraintes $\mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij}$ de (Q), ce problème dual s'écrit* :

* On peut en fait introduire dans ce problème Q les contraintes $\mu_i \geq 0$, et ceci sans changer les solutions optimales de (Q). C'est une des conséquences de l'étude faite au V-2, du chapitre II.

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq 0 \\ v_{ij} \geq 0 \\ \mu_i - \lambda_{ij} + v_{ij} = \Delta_{ij} \\ \mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} - \tau \leq 0 \\ \sum \mu_i - m\tau = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

Soit \tilde{y} une solution réalisable du problème de m -centre ; on lui associe des indices $\tilde{p}(i)$ qui définissent une solution de base de $DP_c(\tilde{y})$:

$$\tilde{\mu}_i = \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_{i\sigma_i}(r) = \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) & \text{si } 0 \leq r < \tilde{p}(i) \\ 0 & \text{pour } r \geq \tilde{p}(i) \end{cases}$$

Toutes les variables $\tilde{\mu}_i$ sont donc de base ; il en est de même pour toutes les variables λ_{ij} où (i,j) est un arc appartenant à un support faible.

Exprimons chaque variable de base en fonction des variables hors base λ et v .

(*) La variable μ_i est de base dans la contrainte

$$\mu_i - \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) = \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) .$$

Les variables $\lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i))$ et $v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i))$ sont donc hors base ; en fonction de celles-ci la variable μ_i s'exprime donc par

$$\mu_i = \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i))$$

(*) Pour $r < \tilde{p}(i)$ la variable $\lambda_{i\sigma_i}(r)$ est de base dans la contrainte

$$\mu_i - \lambda_{i\sigma_i}(r) + v_{i\sigma_i}(r) = \Delta_{i\sigma_i}(r) ;$$

la variable $\lambda_{i\sigma_i}(r)$ s'écrit donc en fonction des variables hors base :

$$\lambda_{i\sigma_i}(r) = \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) - v_{i\sigma_i}(r)$$

(*) Pour $r > \tilde{p}(i)$, la variable d'écart $v_{i\sigma_i}(r)$ est de base ; ceci fournit :

$$v_{i\sigma_i}(r) = \Delta_{i\sigma_i}(r) + \lambda_{i\sigma_i}(r) - \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i))$$

Voyons à présent comment exprimer les contraintes

$$\mu_i + \sum_{\ell \neq i} \lambda_{\ell i} - \tau \leq 0$$

en fonction des variables hors base, c'est à dire des variables

$$v_{i\sigma_i}(r) \text{ pour } 0 \leq r < \tilde{p}(i)$$

$$v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) \text{ et } \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i))$$

$$\lambda_{i\sigma_i}(r) \text{ pour } r > \tilde{p}(i)$$

Ces contraintes deviennent :

$$\lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \sum_{\ell/\ell \neq i} \left[\lambda_{\ell\sigma_\ell}(\tilde{p}(\ell)) - v_{\ell\sigma_\ell}(\tilde{p}(\ell)) - v_{\ell i} \right] + \sum_{\substack{\ell \neq i \\ \beta_\ell(i) \geq \tilde{p}(\ell)}} \lambda_{\ell i} - \tau$$

et $\beta_\ell(i) < \tilde{p}(\ell)$

$$\leq - \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \sum_{\substack{\ell \neq i \\ \beta_\ell(i) < \tilde{p}(\ell)}} \left[\lambda_{\ell i} - \Delta_{\ell\sigma_\ell}(\tilde{p}(\ell)) \right] = \alpha_i$$

On peut donc poser le problème (Q) en fonction uniquement des variables hors base actuelles ; une telle expression du problème (Q) est le programme linéaire B(y) suivant :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 v_{i\sigma_i}(r) > 0 \quad 0 \leq r < \tilde{p}(i) \\
 v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) \geq 0 \\
 \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) \geq 0 \\
 \lambda_{i\sigma_i}(r) \geq 0 \quad r > \tilde{p}(i)
 \end{array} \right\} B(\tilde{y}) \\
 \\
 \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \sum_{\ell/\ell \neq i} \left[\lambda_{\ell\sigma_\ell}(\tilde{p}(\ell)) - v_{\ell\sigma_\ell}(\tilde{p}(\ell)) - v_{\ell i} \right] + \sum \lambda_{\ell i} - \tau < \alpha_i \\
 \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - \sum_{i=1}^n v_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - m\tau = S(\tilde{y}) - \sum_i \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) \quad (\text{Max})
 \end{array}$$

dont le dual est exactement le programme linéaire A(y) du III-2-1, programme linéaire dont nous rappelons la forme en introduisant des variables d'écart u, w et t :

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{l}
 y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1) \\
 v_i \geq 0 \quad (2) \\
 w_i \geq 0 \quad (3) \\
 \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} y_{\sigma_i(r)} + v_i = 1 \quad (4) \\
 \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)} y_{\sigma_i(r)} - w_i = 1 \quad (5) \\
 \sum_{i=1}^n y_i + t = n \quad (6) \\
 \sum \alpha_i y_i = T(\tilde{y}) \text{ (Min)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Voici une remarque qui permet de simplifier le programme B(y) :

(*) Pour $r < \tilde{p}(i)$, la variable $v_{i\sigma_i(r)}$ n'apparaît que dans la contrainte $\sigma_i(r)$ du groupe (2) des contraintes de B(y) ; elle introduit dans A(y) une contrainte $y_{\sigma_i(r)} \geq 0$, qui est redondante. On peut donc supprimer de B(y) la variable $v_{i\sigma_i(r)}$.

(*) De même, on pourra supprimer la variable λ_{ℓ_i} pour $\beta_{\ell}(i) > \tilde{p}(\ell)$.

On garde seulement 2n variables dans B(y), qui prend alors la forme suivante :

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{l}
 \lambda_{i\sigma_i(\tilde{p}(i))} \geq 0 \\
 v_{i\sigma_i(\tilde{p}(i))} \geq 0 \\
 \lambda_{i\sigma_i(\tilde{p}(i))} - v_{i\sigma_i(\tilde{p}(i))} + \sum_{\substack{\ell \neq i \\ \beta_{\ell_i} < \tilde{p}(\ell)}} \left[\lambda_{\ell\sigma_{\ell}(\tilde{p}(\ell))} - v_{\ell\sigma_{\ell}(\tilde{p}(\ell))} \right] + \sum_{\substack{\ell \neq i \\ \beta_{\ell}(i) = \tilde{p}(\ell)}} \lambda_{\ell\sigma_{\ell}(\tilde{p}(\ell))} - \tau \leq \alpha_i \\
 \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{i\sigma_i(\tilde{p}(i))} - v_{i\sigma_i(\tilde{p}(i))} \right] - m\tau = S(\tilde{y}) \text{ (Max)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

III-4 - Description de l'algorithme

III-4-1 - Précisons à présent l'algorithme dont nous avons présenté l'ébauche au III-1

(0) Soit \tilde{y} un vecteur de \mathbb{R}^n vérifiant les inégalités

$$0 \leq \tilde{y}_i \leq 1, \quad \sum \tilde{y}_i \geq 1$$

(pour la première itération, on n'a pas besoin d'exiger $\sum y_i \leq m$).

(1) Evaluer les $\tilde{p}(i)$ associés à \tilde{y} en résolvant $P_c(\tilde{y})$ et $DP_c(\tilde{y})$.

(2) Résoudre le couple de programmes duaux $A(\tilde{y})$ et $B(\tilde{y})$.

Si \tilde{y} est solution optimale de $A(\tilde{y})$, aller en (3).

Sinon, soit y^* la solution optimale de $A(\tilde{y})$.

Poser $\tilde{y} = y^*$ et aller en (1).

(3) Soit $(\lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)), v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)), i=1, \dots, n, \tau^*)$ une solution optimale de

$B(\tilde{y})$ et soit y^* la solution optimale de $A(\tilde{y})$, qui peut être prise égale à \tilde{y} .

(3-1) Test d'optimalité

Si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(3-1-1) \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) (= \mu_i) \geq 0$$

(Voir la notice au bas de la page 73).

(3-1-2) Pour $r < \tilde{p}(i)$

$$\Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) - v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) (= \lambda_{i\sigma_i}(r)) \geq 0$$

(3-1-3) Pour $r > \tilde{p}(i)$

$$\Delta_{i\sigma_i}(r) - \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(r) - \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) (= v_{i\sigma_i}(r)) \geq 0$$

Alors la solution $(x(\tilde{y}), \tilde{y})$ est optimale de (P_c) et le problème est résolu.

(3-2) Changement de base

(3-2-1) S'il existe un i tel que

$$\Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) < 0$$

c'est que $v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) > 0$ et donc la contrainte $\sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} y_{\sigma_i}(r) \leq 1$ est serrée en y

$$\sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} y_{\sigma_i}^*(r) = 1.$$

On peut donc poser $\tilde{p}(i) = \tilde{p}(i)-1$

(3-2-2) S'il existe un i tel que

$$\Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) < 0$$

pour un r vérifiant $0 \leq r < \tilde{p}(i)$, c'est que $v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) > 0$, et on fera comme au (3-2-1) : $\tilde{p}(i) = \tilde{p}(i)-1$.

(3-2-3) S'il existe un i tel que

$$\Delta_{i\sigma_i}(r) - \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) + v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) < 0$$

pour r vérifiant $r > \tilde{p}(i)$, c'est que $\lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) > 0$ ce qui signifie que

$$\sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)} y_{\sigma_i}^*(r) = 1, \text{ et l'on peut poser}$$

$$\tilde{p}(i) = \tilde{p}(i)+1$$

Ces modifications des $\tilde{p}(i)$ (qui modifient en fait la base duale (μ, λ)) définissent un nouveau couple de problèmes $A(\tilde{y})$ et $B(\tilde{y})$. On reprendra donc les calculs en (2). _____

III-4-2 - Justification et commentaires

(*) Les problèmes $A(\tilde{y})$ et $B(\tilde{y})$ dépendent explicitement des $\tilde{p}(i)$ qui ont été associés à \tilde{y} . Les modifications indiquées au (3-2) de l'algorithme définissent donc un nouveau couple de problèmes tel que \tilde{y} soit primal (A) réalisable, ces nouveaux problèmes ne diffèrent pas du problème initial associé à \tilde{y} : les propriétés décrites dans les propositions 2, 3 et 4 sont encore assurées.

(*) Le critère d'arrêt se justifie grâce au théorème 6 :

Théorème 6 : Soient y^* une solution optimale de $A(\tilde{y})$ et $(\lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)), v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)), \tau^*)_{i=1, \dots, n}$

une solution optimale de $B(\tilde{y})$.

Si les variables μ_i , λ_{ij} et v_{ij} définies par les formules (1), (2), (3) suivantes sont positives ou nulles, alors

$(x(y^*), y^*)$ constitue une solution optimale de (P_c) , et

$(\mu^*, \lambda^*, \tau^*)$ une solution optimale de (Q) .

$$(1) \mu_i = \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i))$$

$$(2) \lambda_{i\sigma_i}(r) = \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) + \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) - \Delta_{i\sigma_i}(r) - v_{i\sigma_i}^*(r)$$

pour $r < \tilde{p}(i)$

$$(3) v_{i\sigma_i}(r) = \Delta_{i\sigma_i}(r) + \lambda_{i\sigma_i}^*(r) - \Delta_{i\sigma_i}(\tilde{p}(i)) - \lambda_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i)) + v_{i\sigma_i}^*(\tilde{p}(i))$$

pour $r < p(i)$.

Démonstration : En effet $(\mu^*, \lambda^*, \tau^*)$ et $(x^*(y^*), y^*)$ constituent un couple de solutions duale (Q) et primale (P_c) réalisables de même valeur. _____

III-4 - Finitude

Nous avons exploité diverses propriétés de notre problème de m-centre pour simplifier au maximum le mode opératoire et l'algorithme que nous venons de décrire diffère notablement de celui proposé par Rosen.

Bien que nous n'ayons jamais observé de "cyclage" lors de l'expérimentation numérique, qui a porté sur un nombre élevé de problèmes, la procédure que nous venons de décrire n'est pas finie. Mais encore une fois, nous allons mettre à contribution la structure particulièrement riche du problème de m-centre pour améliorer cet algorithme et en proposer une version qui assure la finitude.

Remarquons d'abord que les problèmes $A(\tilde{y})$ et $B(\tilde{y})$ dépendent uniquement des $\tilde{p}(i)$; nous écrirons donc indifféremment $A(\tilde{y})$ ou $A(\tilde{p})$, où $\tilde{p}(i)$, $i=1, \dots, n$ est l'ensemble d'indices associés à \tilde{y} par l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins.

Lemme 7 : Soit \tilde{y} un vecteur solution réalisable du problème de m-centre, c'est à dire vérifiant les inégalités

$$0 \leq \tilde{y}_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \geq 1$$

Soient $q(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, des indices tels que, pour tout i , on ait :

$$1) 0 \leq q(i) \leq n-1$$

$$2) \sum_{r=0}^{q(i)-1} \tilde{y}_{\sigma_i}(r) \leq 1$$

(cette somme étant considérée comme nulle si $q(i) = 0$).

$$3) \sum_{r=0}^{q(i)} \tilde{y}_{\sigma_i}(r) \geq 1$$

Alors le vecteur \tilde{x} défini par

$$\tilde{x}_{i\sigma_i}(r) = \begin{cases} \tilde{y}_{\sigma_i}(r) & 0 \leq r \leq q(i)-1 \\ 1 - \sum_{r=0}^{q(i)-1} y_{\sigma_i}(r) & r = q(i) \\ 0 & r > q(i) \end{cases}$$

est une solution optimale de $P_c(\tilde{y})$.

Le vecteur $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ défini par

$$\tilde{\mu}_i = \Delta_{i\sigma_i}(q(i))$$

$$\tilde{\lambda}_{ij} = \text{Max} \left[0, \Delta_{i\sigma_i}(q(i)) - \Delta_{ij} \right]$$

est une solution optimale de base de $DP_c(\tilde{y})$.

Démonstration : En effet x est solution de $P_c(\tilde{y})$; $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ est solution réalisable de $DP_c(\tilde{y})$ et ces deux solutions donnent la même valeur aux fonctions objectives des programmes duaux $P_c(\tilde{y})$ et $DP_c(\tilde{y})$. _____

Pour un vecteur \tilde{y} fixé, il existe donc une famille

$$P(\tilde{y}) = \left\{ p^1(i)_{i=1, \dots, n}, p^2(i)_{i=1, \dots, n}, p^k(i)_{i=1, \dots, n} \right\}$$

associée à \tilde{y} , chaque ensemble d'indices p^k vérifiant les trois conditions du lemme, à savoir :

$$1) 0 \leq p^k(i) \leq n-1$$

$$2) \sum_{r=0}^{p^k(i)-1} \tilde{y}_{\sigma_i}(r) \leq 1$$

$$3) \sum_{r=0}^{p^k(i)} \tilde{y}_{\sigma_i}(r) \geq 1$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Nous allons à présent exprimer l'optimalité d'une solution \tilde{y} en fonction de la famille $P(\tilde{y})$ qui lui est associée.

Théorème 8 : Soit \tilde{y} un vecteur vérifiant les inégalités

$$0 \leq \tilde{y}_i \leq 1, \quad i=1,2,\dots,n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \geq 1$$

et soit $\tilde{x}(\tilde{y})$ la solution optimale de $P_c(\tilde{y})$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(\tilde{x}(\tilde{y}), \tilde{y})$ soit solution optimale de (P_c) est que \tilde{y} soit solution optimale de tous les problèmes $A(p)$, où $p \in P(\tilde{y})$.

Démonstration :

a) La condition est nécessaire : S'il existe un problème $A(p)$, $p \in P(\tilde{y})$, pour lequel \tilde{y} n'est pas solution optimale, ce problème $A(p)$ admet une solution y^* qui est alors telle que

$$w(y^*) = \sum \sum x_{ij}^*(y^*) \Delta_{ij} < w(\tilde{y}) = \sum \sum \tilde{x}_{ij}(\tilde{y}) \Delta_{ij},$$

et ceci contredit l'optimalité pour (P_c) de la solution $(\tilde{x}(\tilde{y}), \tilde{y})$.

b) La condition est suffisante :

b-1 - De tout ce qui précède dans ce chapitre, on peut conclure que résoudre (P_c) équivaut à chercher un vecteur y soumis aux contraintes

$$b-1-1 - 0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1,2,\dots,$$

$$b-1-2 - \sum_{i=1}^n y_i \geq 1$$

et minimisant $w(y)$, où $w(y)$ est la valeur optimale du problème $P_c(y)$.

Nous reprendrons ce point de vue au chapitre IV, où nous établirons que $w(y)$ est une fonction convexe en y .

b-2 - Soit \tilde{y} un vecteur vérifiant b-1-1 et b-1-2 et tel que pour tout $p \in P(\tilde{y})$, \tilde{y} est solution optimale du problème $A(p)$. Pour établir que \tilde{y} définit une solution optimale de (P_c) ; il nous suffit de montrer que dans toute direction d , quand on considère les solutions de la forme

$$\bar{y} = \tilde{y} + \varepsilon d, \quad \varepsilon \geq 0$$

alors

* ou bien \tilde{y} est la seule solution réalisable dans cette direction d et $\varepsilon = 0$.

* ou bien \tilde{y} est la meilleure solution dans cette direction : $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$,

$$w(\tilde{y}) \leq w(\tilde{y} + \varepsilon d),$$

le vecteur $\tilde{y} + \varepsilon d$ vérifiant les conditions b-1-1 et b-1-2.

b-2-1 - S'il existe un i tel que $\tilde{y}_i = 0$ et $d_i < 0$, ou $\tilde{y}_i = 1$ et $d_i < 0$, alors dans la direction d , la solution \tilde{y} est la seule réalisable.

b-2-2 - Sinon, il suffit de choisir $\bar{\varepsilon} > 0$ de façon à ce que $\forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, si on pose $\bar{y} = \tilde{y} + \varepsilon d$, et si $\bar{p}(i)$, $i=1, \dots, n$ est l'ensemble d'indices associés à \bar{y} par l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins, alors $\bar{p} \in P(\bar{y})$.

Un tel choix assure donc $w(\tilde{y}) \leq w(\bar{y})$.

b-3 - Voici comment choisir $\bar{\varepsilon}$.

Soit $\tilde{p}(i)$, $i=1, \dots, n$, les indices associées à \tilde{y} par l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins. Nous avons vu, au chapitre II (théorème 4), que ces $\tilde{p}(i)$ vérifient :

$$(1) \tilde{y}_{\sigma_i(\tilde{p}(i))} > 0$$

$$(2) \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} \tilde{y}_{\sigma_i(r)} < 1$$

Introduisons un nouvel ensemble d'indices, $\tilde{q}(i)$, associé à \tilde{y} et défini de la manière suivante :

$$\tilde{q}(i) = \begin{cases} \tilde{p}(i) & \text{si } \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)} \tilde{y}_{\sigma_i(r)} > 1 \text{ ou si } \tilde{p}(i) = n-1 \\ \text{le plus petit } k \text{ tel que } \sum_{r=0}^{k+1} \tilde{y}_{\sigma_i(r)} > 1, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Posons aussi $\hat{d}_i = \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} d_{\sigma_i(r)}$, cette somme étant considérée comme nulle si

$\tilde{p}(i) = 0$.

Pour que la solution $\bar{y} + \varepsilon d$ soit telle que $\bar{p} \in P(\bar{y})$, les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$b-3-1) \quad \hat{d}_i > 0 \Rightarrow \varepsilon \hat{d}_i \leq 1 - \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} \tilde{y}_{\sigma_i(r)}$$

$$b-3-2) \quad \hat{d}_i < 0 \Rightarrow \varepsilon (-\hat{d}_i - \sum_{r=\tilde{p}(i)}^{\tilde{q}(i)} d_{\sigma_i(r)}) \leq \sum_{r=\tilde{p}(i)}^{\tilde{q}(i)} \tilde{y}_{\sigma_i(r)}$$

d'où le choix de $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \text{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

avec

$$\varepsilon_1 = \text{Min}_{i/\hat{d}_i > 0} \left[\frac{1 - \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i)-1} \tilde{y}_{\sigma_i(r)}}{\hat{d}_i} \right]$$

$$\varepsilon_2 = \text{Min}_{i/\hat{d}_i < 0 \text{ et } (-\hat{d}_i - \sum_{r=\tilde{p}(i)}^{\tilde{q}(i)} d_{\sigma_i(r)}) > 0} \left[\sum_{r=\tilde{p}(i)}^{\tilde{q}(i)} \tilde{y}_{\sigma_i(r)} / -\hat{d}_i - \sum_{r=\tilde{p}(i)}^{\tilde{q}(i)} d_{\sigma_i(r)} \right]$$

$$\varepsilon_3 = \text{Min}_{i/\hat{d}_i > 0} \left[\frac{1 - \tilde{y}_i}{\hat{d}_i} \right]$$

$$\varepsilon_4 = \text{Min}_{i/\hat{d}_i < 0} \left[\frac{-\tilde{y}_i}{\hat{d}_i} \right]$$

Un tel $\bar{\varepsilon}$ est > 0 . Ce choix assure que si on pose $\bar{y} = \tilde{y} + \varepsilon d$, pour $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, alors \tilde{y} est solution optimale de $A(\bar{y})$, car ce $A(\bar{y})$ est un des $A(p)$, $p \in P(\tilde{y})$. Donc on a $w(\tilde{y}) \leq w(y)$: le vecteur \tilde{y} est donc optimum local de la fonction convexe $w(y)$ et donc optimum global.

Ce théorème fournit donc le principe d'un algorithme fini : lors de la résolution du problème $A(\tilde{y})$, si l'on retrouve \tilde{y} comme solution optimale, dans ce cas on résout, l'un après l'autre, les problèmes $A(p)$, $p \in P(\tilde{y})$. Ceci conduit soit à une solution réalisable y^* meilleure que \tilde{y} ; soit, quand on a épuisé cette famille de problèmes, à la confirmation de l'optimalité de la solution \tilde{y} .

De manière générale, les observations que nous avons faites lors de l'expérimentation numérique indiquent que la cardinalité de ces ensembles $P(y)$ reste inférieure à 4 ou 5, ceci quelle que soit la taille n du problème envisagé. Par ailleurs, il est aisé de formuler quelques règles très simples

d'énumération, qui permettent de trouver les uns après les autres (et sans "cycles") les éléments de $P(\tilde{y})$. De telles règles d'énumération, adjointes à la procédure que nous avons décrite, en font un algorithme fini.

III-5 - Procédé de résolution des programmes successifs $A(p)$ et $B(p)$

La structure particulière du programme linéaire du problème de m -centre permet de construire très aisément, à partir d'une base de $A(\tilde{p})$, une base du problème $A(p^*)$ suivant. Les modifications des problèmes successifs sont très simples et l'algorithme du simplexe est fort bien adapté à la résolution de cette séquence de problèmes $A(p)$.

Le premier problème $A(p)$ est à résoudre par l'algorithme du simplexe en prenant pour base initiale la base des variables d'écart.

III-5-1 - D'un problème $A(\tilde{p})$ au problème suivant $A(p^*)$

Le mode opératoire du III-4 nous indique comment p^* est construit à partir de \tilde{p} : $p^*(i) = \tilde{p}(i)$, sauf pour quelques indices i_0 , pour lesquels on a, soit $p^*(i_0) = \tilde{p}(i_0)+1$, soit $p^*(i_0) = \tilde{p}(i_0)-1$.

Examinons chacun de ces deux cas :

$$\text{III-5-1-1 - } \underline{p^*(i_0) = \tilde{p}(i_0)-1}$$

De $A(\tilde{p})$ à $A(p^*)$ seules deux contraintes vont changer :

Anciennes contraintes

$$\text{(a)} \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-1} y_{\sigma_{i_0}}(r) \leq 1$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)} y_{\sigma_{i_0}}(r) \geq 1$$

Nouvelles contraintes

$$\text{(a}^*) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-1} y_{\sigma_{i_0}}(r) \geq 1$$

$$\text{(b}^*) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-2} y_{\sigma_{i_0}}(r) \leq 1$$

Soit y^* une solution optimale de base de $A(\tilde{p})$. Cette base est telle que :

$$\text{(c}_1) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-1} y_{\sigma_{i_0}}^*(r) = 1$$

$$(c_2) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)} y_{\sigma_{i_0}}^*(r) \geq 1$$

$$(c_3) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-2} y_{\sigma_{i_0}}^*(r) \leq 1$$

Grâce à c_1 , on peut affirmer que la variable d'écart u_i^* associée à (\tilde{a}) est nulle.

Pour changer (\tilde{a}) en (a^*) , il suffira de changer le signe de la variable u_i , c'est à dire de changer les signes de la colonne u_i correspondante. Ceci n'affecte pas la réalisabilité de la base actuelle y^* . La variable u_i est devenue de type w_i .

Comme (a^*) implique (\tilde{b}) , nous pourrons laisser dans $A(p^*)$ la contrainte (\tilde{b}) sans rien changer au problème (elle est redondante et n'aura plus à être examinée au cours des diverses étapes de la résolution par le simplexe).

Nous introduisons alors une nouvelle contrainte, à savoir (b^*) . Grâce à c_3 , nous savons que cette contrainte est vérifiée par la base actuelle y^* ; la variable d'écart attachée à (b^*) est considérée comme de base; il suffit d'éliminer de (b^*) les autres variables qui sont de base pour obtenir une solution de base de $A(p^*)$.

Le coefficient α_{i_0} de la fonction objective est lui aussi redéfini à partir de (p^*) .

$$\text{III-5-1-2} - \underline{p^*(i_0)} = \tilde{p}(i_0) + 1$$

L'étude est analogue à celle faite au III-5-1-1.

Anciennes contraintes

$$(\tilde{a}) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-1} y_{\sigma_{i_0}}(r) \leq 1$$

$$(b) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)} y_{\sigma_{i_0}}(r) \geq 1$$

Nouvelles contraintes

$$(a^*) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)} y_{\sigma_{i_0}}(r) \leq 1$$

$$(b^*) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)+1} y_{\sigma_{i_0}}(r) \geq 1$$

La base optimale de $A(\tilde{p})$ vérifie les relations :

$$(c_1) \quad \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)-1} y_{\sigma_{i_0}}^*(r) \leq 1$$

$$(c_2) \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)} y_{\sigma_{i_0}}^*(r) = 1$$

$$(c_3) \sum_{r=0}^{\tilde{p}(i_0)+1} y_{\sigma_{i_0}}^*(r) \geq 1$$

La variable d'écart w_i^* associée à (\tilde{b}) est nulle. Pour changer (\tilde{b}) en (a^*) , il suffira de changer le signe de la colonne w_i . Puisque (a^*) implique (\tilde{a}) , la contrainte (\tilde{a}) peut figurer de manière redondante dans $A(p^*)$. On introduit la contrainte (b^*) et dans la base on introduit la variable de base associée à (b^*) .

III-5-2 - Remarque

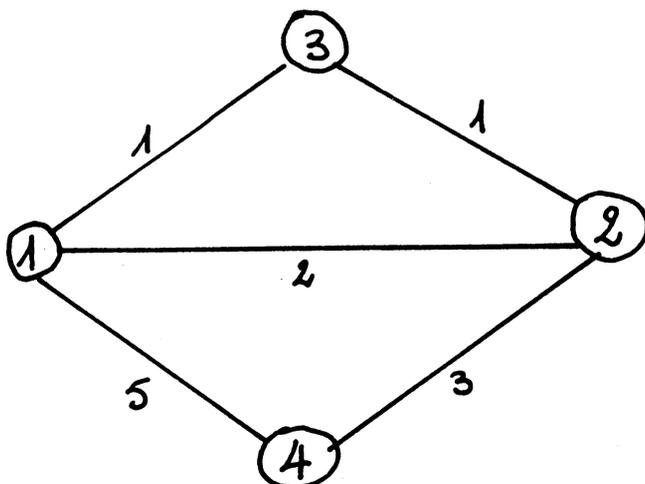
Cette manière de procéder présente l'avantage que l'on peut partir de la solution optimale de base précédente y^* ; il est alors plausible de penser que la solution optimale du nouveau problème $A(p^*)$ n'est pas trop éloignée de l'ancienne et qu'il faudra peu d'itérations du procédé du simplexe pour construire celle-ci.

Ce fait sera confirmé par les expériences numériques.

Un autre avantage de cet algorithme est que les problèmes $A(p)$ et $B(p)$ ne changent pas de forme lors des phases "branch and bound", dans lesquelles on fixe à zéro ou à un certaines variables y_i .

III-6 - Un exemple illustratif

Soit à construire $m = 2$ centres dans le réseau



(0) Prenons pour solution initiale $y_i = 1$, $i=1,2,3,4$

(1) Pour cette solution \tilde{y} , on a $\tilde{p}(i) = 1$, $i=1,2,3,4$

Le problème $B(\tilde{p})$ est alors :

$$B(\tilde{p}) \begin{cases} \lambda_{13} + \lambda_{21} + \lambda_{31} - v_{13} & - \tau \leq -1 \\ \lambda_{21} + \lambda_{42} - v_{21} & - \tau \leq -2 \\ \lambda_{13} + \lambda_{31} - v_{31} & - \tau \leq -1 \\ \lambda_{42} - v_{42} & - \tau \leq -3 \\ \lambda_{13} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{42} - v_{13} - v_{21} - v_{31} - v_{42} - 2\tau = z(\text{Max}) \end{cases}$$

dont le dual est $A(\tilde{p})$:

$$A(\tilde{p}) \begin{cases} y_1 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_2 + y_4 \geq 1 \\ -y_1 \geq -1 \\ -y_2 \geq -1 \\ -y_3 \geq -1 \\ -y_4 \geq -1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 - 3y_4 = w(\text{Min}) \end{cases}$$

La solution optimale de $A(\tilde{p})$ est $\hat{y}_1 = \hat{y}_4 = 1$, $\hat{y}_2 = \hat{y}_3 = 0$, celle de $B(\tilde{p})$ étant $\hat{\lambda}_{13} = \hat{\lambda}_{31} = 1$, $\hat{\tau} = 3$, $\hat{\lambda}_{21} = \hat{\lambda}_{42} = 0 = \hat{v}_{13} = \hat{v}_{21} = \hat{v}_{31} = \hat{v}_{42}$.

La valeur optimale de ce couple de problèmes est -4.

(2) Grâce à ces \hat{y} , on recalcule des \hat{p} , et on constate qu'on peut reprendre les \tilde{p} : $\hat{p}(i) = \tilde{p}(i) = 1$; dans ce cas, les problèmes $A(\hat{p})$ et $B(\hat{p})$ ne changent pas. On vérifie que toutes les conditions du pas 3-1 de l'algorithme sont vérifiées : \hat{y} est donc la solution optimale.

IV - PRINCIPE DE DECOMPOSITION DE BENDERS

IV-1 - Dans un article dont nous n'avons pas connaissance lorsque nous avons élaboré la procédure que nous allons décrire, Benders, réf. |2|, propose un principe de décomposition basé sur une exploitation astucieuse du théorème de dualité en programmation linéaire.

Dans un couple de programmes linéaires duaux

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \geq 0 & v \geq 0 \\ Au \leq b & vA \geq c \\ cu = z(\text{Max}) & vb = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

un couple (u,v) de solutions réalisables vérifie l'inégalité

$$cu \leq vb.$$

On peut exprimer un nouveau problème en les variables u et v, qui aurait le forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } cu \\ \text{sous les contraintes } cu - vb \leq 0 \\ \text{pour chaque } v \in V = \{v/v \geq 0, vA \geq c\} \end{array} \right.$$

En invoquant le théorème de la dualité, ainsi que le lemme de Farkas, on établit facilement l'équivalence de ces deux formes. La seconde forme, celle en u et v, comporte une infinité de contraintes (une pour chaque $v \in V$), mais des théorèmes classiques permettent de ne tenir compte que d'un nombre fini de celles-ci. On aboutit ainsi à un nouveau programme linéaire, qui peut être plus facile à résoudre.

IV-2 - Pour ce qui concerne le problème de m-centre, on peut élaborer une procédure de résolution de (P_c) en partant des considérations suivantes :

Soit y un vecteur vérifiant les inégalités

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad i=1,2,\dots,n$$

$$1 \leq \sum y_i \leq n$$

et soit C l'ensemble des solutions réalisables du problème $DP_c(y)$:

$$C = \{(\mu, \lambda), \lambda \geq 0, \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \quad \forall i,j, j \neq i\}$$

Cet ensemble C ne dépend pas de y.

et soit (β^v, y^v) la solution optimale de ce problème. Construire x^v solution optimale de $(P_c(y^v))$ et (μ^v, λ^v) solution optimale de base de $DP_c(y^v)$.

(2) Si $\beta^v \geq w(y^v)$, terminer, (x^v, y^v) est solution optimale de (P_c)

Sinon poser

$$H^{v+1} = H^v \cup \{(\mu^v, \lambda^v)\}$$

$$v = v+1$$

et aller en (1).

IV-4 - Que cet algorithme construit bien la solution optimale de (P_c) est démontré au théorème ci-après, mais faisons dès à présent une remarque importante sur la résolution du problème K^v .

Au pas (1) de chaque étape v , on résout un programme linéaire K^v qui est celui de l'étape précédente, K^{v-1} , auquel on adjoint une contrainte supplémentaire. L'algorithme dual du simplexe est le mieux adapté à la résolution d'une telle séquence de problèmes K^v , et son efficacité s'est confirmée lors de l'expérimentation numérique (-ceci du moins, pour les problèmes où n , le nombre de sommets, reste inférieur à 40).

Chaque programme linéaire K^v est borné (par zéro) et réalisable (β n'est pas borné supérieurement). Il admet donc toujours une solution optimale (β^v, y^v) .

Théorème 9 : En un nombre fini d'étapes, l'algorithme précédent conduit à une solution optimale du problème (P_c) .

Démonstration :

(*) Justifions d'abord le critère d'arrêt :

Si (\bar{x}, \bar{y}) est la solution optimale de (P_c) , on a, pour tout v , les inégalités

$$\beta^v \leq w(\bar{y}) \leq w(y^v),$$

la première de ces inégalités provenant du fait que $H^v \in C$, la seconde, du caractère optimal de \bar{y} .

Dès qu'on a $\beta^v \geq w(y^v)$, c'est que

$$\beta^v = w(\bar{y}) = w(y^v).$$

(*) Toute solution réalisable de K^{v+1} est réalisable de K^v ; de ceci on déduit la monotonie de la suite β^v :

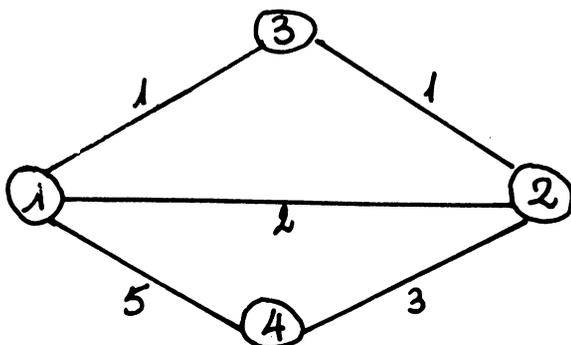
$$\beta^v \leq \beta^{v+1} ;$$

cette inégalité est en fait stricte car la solution optimale de K^v ne peut être réalisable de K^{v+1} .

(*) La finitude est assurée par le fait qu'à chaque étape, on prend en compte un nouveau point (μ, λ) de C qui est en fait un sommet de C ; le nombre de sommets de C étant fini, l'algorithme est fini. _____

IV-5 - Un exemple illustratif

Soit à résoudre le programme (P_c) associé au graphe symétrique de la figure ci-dessous, dans lequel il s'agit de construire $m = 2$ centres.



(0) Prenons pour solution initiale $y_i^0 = 1/2 \quad i=1,2,\dots,n$.

Résolvant $P_c(y^0)$ et $DP_c(y^0)$, on obtient x^0 solution optimale de $P_c(y^0)$:

$x_{13}^0 = x_{21}^0 = x_{31}^0 = x_{42}^0 = 1/2$, les autres composantes nulles ;

et (μ^0, λ^0) une solution optimale de base de $DP_c(y^0)$

$$\mu_1^0 = 1, \quad \mu_2^0 = 2, \quad \mu_3^0 = 1, \quad \mu_4^0 = 3 \quad \lambda_{ij}^0 = 0$$

(1) Le problème $K^{(1)}$ est donc

$$K^{(1)} \left(\begin{array}{l} 0 \leq y_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^4 y_i = 2 \\ \beta \geq 0 \\ -\beta - y_1 - 2y_2 - y_3 - 3y_4 \leq -7 \\ -\beta = z(\text{Max}) \end{array} \right. \quad i=1,\dots,4$$

C'est un problème de "knapsack" dont la solution est :

$$y_2^1 = y_4^1 = 1, \quad y_1^1 = y_3^1 = 0, \quad \beta^1 = 2.$$

On évalue $w(y^1) = 5$

$$x_{12}^1 = x_{32}^1 = 1, \quad x_{ij}^1 = 0 \text{ ailleurs}$$

$$\mu_1^1 = 2, \mu_2^1 = 0, \mu_3^1 = 3, \mu_4^1 = 0 \quad \lambda_{13}^1 = 1, \lambda_{31}^1 = 2, \lambda_{ij}^1 = 0 \text{ ailleurs}$$

$2 = \beta^{(1)}$ étant $< w(y^1) = 5$, cette solution est non optimale.

(2) On résoud alors le nouveau problème $K^{(2)}$

$$K^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^4 y_i = 2 \\ \beta \geq 0 \\ -\beta - y_1 - 2y_2 - y_3 - 3y_4 \leq -7 \\ -\beta - 4y_1 - 4y_3 \leq -5 \\ -\beta = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

dont la solution optimale est $y_1^2 = 3/5, y_2^2 = 2/5, y_3^2 = 0, y_4^2 = 1$

$$\beta^{(2)} = 13/5$$

$$w(y^2) = 19/5$$

$$\mu_1^2 = 2, \mu_2^2 = 2, \mu_3^2 = 3, \mu_4^2 = 0 \quad \lambda_{13}^2 = 1, \lambda_{31}^2 = 2$$

Nous ne sommes pas encore à l'optimum.

(3) On forme alors et on résoud le problème $K^{(3)}$

$$K^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y_i \leq 1 \quad i=1, \dots, 4 \quad (u_i) \\ \sum_{i=1}^4 y_i = 2 \quad (\tau) \\ \beta \geq 0 \\ -\beta - y_1 - 2y_2 - y_3 - 3y_4 \leq -7 \quad (v_1) \\ -\beta - 4y_1 - 4y_3 \leq -5 \quad (v_2) \\ -\beta - 4y_1 - 2y_2 - 4y_3 \leq -7 \quad (v_3) \\ -\beta = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

La solution optimale* de $K^{(3)}$ est :

$$\beta^{(3)} = 3$$

$$y^1 = 1, \quad y^2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 1$$

$$w(y^{(3)}) = 3$$

Comme $\beta^{(3)} = w(y^{(3)})$, cette solution est la solution optimale de (P_c) .



* Une solution duale optimale est $\tau = 2$, $v_1 = 2/3$, $v_3 = 1/3$, $v_2 = v_4 = 0$,
 $u_i = 0$.

CHAPITRE IV

METHODE DU SOUS-GRADIENT ET METHODE BRANCH AND BOUND

I - LA MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DU SOUS-GRADIENT

I-1 - Introduction

Soit S une partie de \mathbb{R}^n , convexe et non vide, et soit $w(\pi)$ une fonction convexe

$$w : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous appellerons "méthode du sous-gradient" appliquée à la résolution du problème (\tilde{P})

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \text{Min } w(\pi) \\ \pi \in S \end{cases}$$

le schéma itératif suivant :

(*) Soit $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés :

$$1) \lim_{j \rightarrow \infty} t_j = 0$$

$$2) \sum_{j=1}^{\infty} t_j \text{ est une série divergente.}$$

(*) Soit π_0 un point initial quelconque dans S .

A l'étape j ème de la résolution du problème (\tilde{P}) , on dispose d'une "solution approchée" $\pi_j \in S$, telle que

$$w(\pi_j) \neq \pm\infty$$

A partir de π_j on détermine un vecteur $v_j \in \partial w(\pi_j)$, c'est à dire un élément quelconque du sous-différentiel de w en π_j .

On définit alors une nouvelle solution approchée π_{j+1} en posant

$$\pi_{j+1} = P_S(\pi_j - t_j v_j)$$

où P_S désigne l'opérateur projection (euclidienne par exemple) sur le convexe S .

Cette méthode, d'aspect élémentaire, converge quelle que soit la suite (t_j) choisie, et à partir de n'importe quel point initial π_0 dans S . Une validation claire et simple en est présentée dans |10|.

Pour une mise en oeuvre efficace, il s'agit de pouvoir résoudre "simplement" le problème de recherche d'un élément du sous-différentiel de w en un point quelconque de S , ainsi que celui de la projection sur l'ensemble

Dans la pratique, on considère que le schéma itératif décrit ci-haut a convergé, dès que

$$\|\pi_{j+1} - \pi_j\| \leq \varepsilon$$

où ε est un nombre "petit" dépendant de la nature du problème.

Cette règle d'arrêt se justifie grâce au théorème suivant, démontré dans | | :

Théorème : Si, dans le schéma itératif de la méthode du sous-gradient, on a

$$\pi_{j+1} = \pi_j$$

alors π_j est solution optimale de (\tilde{P}) .

La vitesse de convergence dépend surtout de la nature de w , et nous verrons qu'en ce qui concerne le problème de m -centre, cette convergence est d'une rapidité exceptionnelle.

I-2 - Mise du problème de m -centre sous la forme (\tilde{P})

Afin de mettre le problème de m -centre sous la forme (P) du I-1, nous nous souviendrons qu'une des conséquences de l'étude du polyèdre dual Q a été l'expression du problème de m -centre sous la forme du programme linéaire (G) suivant :

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \pi_i \geq 0 \\ -\pi_i \geq -1 \\ \sum_{i=1}^n \pi_i \geq 1 \\ \rho_i + \sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i(r)} \left[\Delta_{i\sigma_i(k)} - \Delta_{i\sigma_i(r)} \right] \geq \Delta_{i\sigma_i(k)} \\ \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{i=1}^n \pi_i a_i = w(\text{Min}) \end{array} \right.$$

Cette forme du programme linéaire du problème de m-centre peut se retrouver directement, à partir des deux observations suivantes :

Soit π un vecteur de \mathbb{R}^n vérifiant

$$0 \leq \pi_i \leq 1 \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \geq 1$$

(*) La valeur de π est $\sum_{i=1}^n (\pi_i a_i + \rho_i)$, où $\pi_i a_i$ est le coût de construction en i .

ρ_i est la distance parcourue par i , c'est à dire

$$\rho_i = \sum_{r=1}^{p(i)-1} \pi_{\sigma_i(r)} \Delta_{i \sigma_i(r)} + \left[1 - \pi_i - \sum_{r=1}^{p(i)-1} \pi_{\sigma_i(r)} \right] \Delta_{i \sigma_i(p(i))},$$

les $p(i)$ étant ceux construits, à partir de π , par l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins.

Cette quantité ρ_i s'écrit aussi

$$\rho_i = \sum_{r=0}^{p(i)} \pi_{\sigma_i(r)} \left[-\Delta_{i \sigma_i(p(i))} + \Delta_{i \sigma_i(r)} \right] + \Delta_{i \sigma_i(p(i))}$$

(*) Etudions les variations de la quantité

$$\sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i(r)} \left[-\Delta_{i \sigma_i(k)} + \Delta_{i \sigma_i(r)} \right] + \Delta_{i \sigma_i(k)}$$

quand k varie de 0 à $n-1$.

Cette quantité augmente, atteint son maximum pour $k = p(i)$, puis diminue.

La démonstration de ce fait s'effectue en 2 étapes :

(**) Pour $k < p(i)$ on a l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i(r)} \left[-\Delta_{i \sigma_i(k)} + \Delta_{i \sigma_i(r)} \right] + \Delta_{i \sigma_i(k)} \\ & \leq \sum_{r=0}^{k+1} \pi_{\sigma_i(r)} \left[-\Delta_{i \sigma_i(k+1)} + \Delta_{i \sigma_i(r)} \right] + \Delta_{i \sigma_i(k+1)} \end{aligned}$$

En effet, la différence

$$\sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \left[-\Delta_{i\sigma_i}(k) + \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] + \Delta_{i\sigma_i}(k) - \sum_{r=0}^{k+1} \pi_{\sigma_i}(r) \left[-\Delta_{i\sigma_i}(k+1) + \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] - \Delta_{i\sigma_i}(k+1)$$

est égale à

$$\left[\Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(k+1) \right] \left[1 - \sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \right]$$

Mais $k < p(i)$ implique $\sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \leq 1$.

Et comme $\Delta_{i\sigma_i}(k) \leq \Delta_{i\sigma_i}(k+1)$, cette différence est négative, et on a bien l'inégalité proposée.

(**) Pour $k \geq p(i)$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \left[-\Delta_{i\sigma_i}(k) + \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] + \Delta_{i\sigma_i}(k) \\ & \leq \sum_{r=0}^{k+1} \pi_{\sigma_i}(r) \left[-\Delta_{i\sigma_i}(k+1) + \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] + \Delta_{i\sigma_i}(k+1) \end{aligned}$$

car la différence du premier et du second terme est égale à

$$\left[\Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(k+1) \right] \left[1 - \sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \right]$$

Comme $k \geq p(i)$ implique $\sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \geq 1$, on a bien l'inégalité proposée.

De ce qui précède découle que

$$\rho_i = \max_{k=0, \dots, n-1} \left[\Delta_{i\sigma_i}(k) - \sum_{r=0}^k \pi_{\sigma_i}(r) \left[\Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(r) \right] \right]$$

ce qui permet d'écrire le programme linéaire du m -centre sous la forme G.

Ce programme linéaire (G) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad w(\pi) &= \langle \pi, a \rangle + \sum_{i=1}^n \rho_i(\pi) \\ \pi \in S &= \{ \pi \in \mathbb{R}^n / 0 \leq \pi_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \pi_i \geq 1 \} \end{aligned}$$

où

$$\rho_i(\pi) = \max_{k=0, \dots, n-1} \left[\Delta_{i\sigma_i}(k) - \langle \pi, V_{i,k} \rangle \right]$$

Le vecteur $V_{i,k}$ étant défini à partir de la matrice Δ :

$$V_{i,k} = \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i}(k) - \Delta_{i\sigma_i}(r) & 0 \leq r \leq k \\ 0 & r > k \end{cases}$$

$r=0, \dots, n-1$

Remarque sur les variables π

A l'optimum la solution optimale π^* du programme linéaire (G) fournit les taux optimaux de construction des centres et les variables π retrouvent la signification des variables de construction y que nous utilisons dans les chapitres précédents. (Voir à ce sujet les paragraphes I-3 et suivants au chapitre III).

Nous allons à présent étudier la convexité de $w(\pi)$, le sous différentiel $\partial w(\pi)$, ainsi que l'opérateur P_S projection sur $S = \{ \pi \in \mathbb{R}^n / 0 \leq \pi_i \leq 1, \sum \pi_i \geq 1 \}$.

Proposition : La fonction $w(\pi)$ est convexe.

Démonstration : La somme de fonctions convexes est convexe, et l'enveloppe supérieure de fonctions convexes est convexe -voir, à ce sujet, la référence [12]

La fonction $\langle \pi, a \rangle$, qui est linéaire, est convexe. Les fonctions $\rho_i(\pi)$ sont convexes, comme enveloppes supérieures de fonctions affines (et donc convexes), qui sont

$$\Delta_{i\sigma_i}(k) - \langle \pi, V_{i,k} \rangle$$

I-3 - Sous-différentiel de la fonction $w(\pi)$

I-3-1 - Définitions et rappels (Voir la référence | |)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe quelconque, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point tel que $f(x_0) \neq \pm\infty$.

Un vecteur $y_0 \in \mathbb{R}^n$ sera dit appartenir au sous-différentiel $f(x_0)$ de la fonction f au point x_0 si la fonction $x \rightarrow f(x) - \langle x, y_0 \rangle$ atteint son minimum en x_0 .

Un des résultats les plus importants établis dans | | sur la sous-différentiabilité concerne le sous-différentiel d'une somme de fonctions convexes :

Soit $f = \sum_{i=1}^r f_i$, où $(f_i)_{i=1, \dots, r}$ est une famille de fonctions convexes.

Si les f_i sont continues et s'il existe un point x_0 de \mathbb{R}^n en lequel elles sont toutes finies, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \partial f_i(x)$$

en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, cette écriture signifiant

$y \in \partial f(x) \iff$ il existe des $y_i, i=1, \dots, r$, tels que

$$y_i \in \partial f_i(x)$$

et

$$y = \sum_{i=1}^r y_i$$

I-3-2 - Pour la fonction $w(\pi)$

$$w(\pi) = \langle \pi, a \rangle + \sum_{i=1}^n \rho_i(\pi)$$

le résultat que nous venons de citer indique que

$$\partial w(\pi) = \partial(\langle \pi, a \rangle)(\pi) + \sum_{i=1}^n \partial \rho_i(\pi)$$

$$= a + \sum_{i=1}^n \partial \rho_i(\pi)$$

La détermination du sous-différentiel $\partial \rho_i(\pi)$ se fera grâce au lemme suivant.

Lemme : Soit ρ une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par

$$\rho(\pi) = \max_{k=0, \dots, n-1} [c_k - \langle \pi, v_k \rangle],$$

où les v_k sont des vecteurs donnés de \mathbb{R}^n .

Soit π_0 un point quelconque de \mathbb{R}^n .

Alors

$$v \in \partial\rho(\pi_0) \iff v \in \text{co} \left[\{-v_k / \rho(\pi_0) = c_k - \langle \pi_0, v_k \rangle\} \right]$$

(co désigne l'enveloppe convexe).

Démonstration :

. Si $v \in \partial\rho(\pi_0)$, c'est que, par la définition rappelée au I-3-1, la fonction

$$\pi \rightarrow \rho(\pi) - \langle \pi, v \rangle$$

atteint son minimum en π_0 ; ceci s'exprime aussi en disant que π_0 est une solution optimale du programme linéaire.

$$\begin{cases} \rho + \langle \pi, v_k \rangle \geq c_k & k=0, \dots, n-1 \\ \rho - \langle \pi, v \rangle = z(\text{Min}) \end{cases}$$

dont le dual est

$$\begin{cases} \gamma_k \geq 0 & k=0, \dots, n-1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k = 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k v_{jk} = -v_j \\ \sum c_k \gamma_k = z(\text{Max}) \end{cases}$$

Puisque π_0 est une solution optimale du primal, le dual admet une solution optimale $\bar{\gamma}$, et le théorème des écarts complémentaires indique que si

$$\rho(\pi_0) > c_k - \langle \pi_0, v \rangle$$

alors $\bar{\gamma}^k = 0$.

Ceci s'exprime aussi en disant qu'il existe des $\bar{\gamma}^k$, pour $k \in \{k' / \rho(\pi_0) = c_{k'} - \langle \pi_0, v_{k'} \rangle\}$, tels que $\bar{\gamma}^k \geq 0$, $\sum \bar{\gamma}^k = 1$ et $-v = \sum_{k \in \{k' / \rho(\pi_0) = c_{k'} - \langle \pi_0, v_{k'} \rangle\}} \bar{\gamma}^k v_k$

C'est précisément ce qu'affirme le lemme.

. Inversement, si $v \in \text{co} \left[\{-v_k / \rho(\pi_0) = c_k - \langle \pi_0, v_k \rangle\} \right]$, alors on peut mettre en évidence un γ , réalisable pour le dual et tel que (π_0, γ) réalisent les conditions du théorème des écarts complémentaires : π_0 réalise donc le minimum de $\rho(\pi) - \langle \pi, v \rangle$.

Ce lemme permet aussi d'affirmer que pour $\pi \in S$, $\partial \rho_i(\pi)$ est égal à l'enveloppe convexe de l'ensemble des solutions optimales du programme linéaire $Q(\pi)$.

$$Q(\pi) \begin{cases} \lambda_{ij} \geq 0 \\ \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \mu_i + \sum_{i=1}^n \left[\mu_i + \sum_{l \neq i} \lambda_{li} \right] \pi_i = z(\text{Max}) \end{cases}$$

Quand cet ensemble de solutions optimales n'est pas réduit à un singleton, un "bon" choix d'un élément $v \in \partial \rho_i(\pi)$ est la meilleure approximation de zéro sur $\partial \rho_i(\pi) = \text{co} \left[\text{l'ensemble des solutions optimales de } Q(\pi) \right]$.

Mais dans la pratique, il suffira de choisir un $v = -V_{i,p(i)}$, où les $p(i)$ sont ceux construits, à partir de π , par l'algorithme d'affectation aux plus proches voisins.

I-4 - Projection sur l'ensemble S

Le problème de la projection sur l'ensemble S

$$S = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^n / 0 \leq \pi_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \pi_i \geq 1 \right\}$$

peut se formuler comme le programme convexe suivant :

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|$$

sous les contraintes

$$1) x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$2) x_j \geq 1 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$3) \sum_{j=1}^n x_j \geq c$$

où c est une constante donnée vérifiant $0 \leq c \leq n$ et \bar{x} un vecteur fixe de \mathbb{R}^n .

Nous allons décrire une caractérisation simple de la solution optimale de ce problème, ainsi que la méthode de résolution suggérée par cette caractérisation.

I-4-1 - Caractérisation

Nous utiliserons, sans les redéfinir ni les réénoncer, les notations et résultats du cours de Laurent (réf. ~~111~~, chapitre VII, § 1 et 2).

Nous écrirons donc qu'il s'agit de minimiser

$$f_0(x) = \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|^2$$

soumis aux $2n+1$ contraintes

$$f_1(x) = -\sum_{j=1}^n x_j + c \leq 0$$

$$f_{i+1}(x) = -x_i \leq 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

$$f_{n+i+1}(x) = x_i - 1 \leq 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

Le problème perturbé est

$$\begin{aligned} \text{Min } f_0(x) \\ x / f_j(x) \leq u_j \quad j=1,\dots,2n+1 \end{aligned}$$

où u est le vecteur perturbation.

La fonction ϕ associée est

$$\phi(x,u) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } f_j(x) \leq u_j \quad j=1,\dots,2n+1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

dont le polaire Ψ est

$$\Psi(y,\lambda,v,w) = \langle x',y \rangle + \lambda f_1(x') + \sum_{i=1}^n v_i f_{i+1}(x') + \sum_{i=1}^n w_i f_{i+n+1}(x') - f_0(x')$$

pour

1) $\lambda \leq 0$

2) $v \leq 0$

3) $w \leq 0$

4) x' vérifiant $y_j - \lambda - v_j + w_j - (x'_j - \bar{x}_j) = 0$

soit encore $y_j - \lambda - v_j + w_j = x'_j - \bar{x}_j$.

Pour des y, λ, v, w ne vérifiant pas ces conditions, Ψ vaut $+\infty$.

La condition nécessaire et suffisante d'optimalité d'un x est

$$\phi(x,0) + \Psi(0,\lambda,v,w) = 0$$

ce qui s'exprime en disant qu'il existe λ, v, w vérifiant

- 1) $x \geq 0$
- 2) $\lambda \leq 0$
- 3) $w \leq 0$
- 4) $v \leq 0$
- 5) $-\lambda - v_j + w_j = x_j' - \bar{x}_j$
- 6) $\lambda \left[- \sum_{j=1}^n x_j + c \right] = 0$
- 7) $x_j v_j = 0$
- 8) $x_j w_j = 0$
- 9) $\sum_{j=1}^n x_j \geq c$
- 10) $x_j \leq 1 \quad \forall j \in \{1,2,\dots,n\}$

Il est commode de changer les signes des variables λ, v et w ; les conditions (1), (6), (7), (8), (9), (10) restent inchangées, les autres devenant

- 2) $\lambda \geq 0$
- 3) $w \geq 0$
- 4) $v \geq 0$
- 5) $\lambda + v_j - w_j = x_j - \bar{x}_j \quad j=1,2,\dots,n$

I-4-2 - Algorithme de projection

Soit $\lambda \geq 0$, quelconque et posons :

$$x_j(\lambda) = \text{Min} \left[1, \text{Max} \left[0, \bar{x}_j + \lambda \right] \right]$$

$$v_j(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j(\lambda) = 1 \\ -\lambda - \bar{x}_j & \text{si } x_j(\lambda) = 0 \\ 0 & \text{si } x_j(\lambda) = \bar{x}_j + \lambda \end{cases} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$w_j(\lambda) = \begin{cases} \lambda - 1 + \bar{x}_j & \text{si } x_j(\lambda) = 1 \\ 0 & \text{si } x_j(\lambda) = 0 \\ 0 & \text{si } x_j(\lambda) = \bar{x}_j + \lambda \end{cases}$$

Les vecteurs $x(\lambda)$, $v(\lambda)$ et $w(\lambda)$ satisfont les conditions (1), (2), (3), (4), (5), (7), (8), (10).

Il s'agit donc de choisir un $\lambda \geq 0$ de telle sorte que les conditions (6) et (9) soient aussi vérifiées.

Voici comment choisir un tel λ .

$$I-4-2-1 - \text{Si } \sum_{j=1}^n \text{Min} \left[1, \text{Max} [0, \bar{x}_j] \right] \geq c$$

on peut prendre $\lambda = 0$.

$$I-4-2-2 - \text{Supposons que } \sum_{j=1}^n \text{Min} \left[1, \text{Max} [0, \bar{x}_j] \right] < c$$

Nous allons chercher un $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^n x_j(\lambda) = c$$

La fonction $f(\lambda) = \sum_{j=1}^n x_j(\lambda)$ est :

- linéaire par morceaux,
- monotone non décroissante.

Introduisons les abscisses :

$$\alpha_j = 1 - \bar{x}_j$$

$$\beta_j = -\bar{x}_j$$

Ces abscisses sont justement celles des points anguleux de $f(\lambda)$, celles où la dérivée de $f(\lambda)$ varie.

On suppose avoir ordonné les \bar{x}_j de telle sorte que

$$\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_n$$

On a alors les relations

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-1} \leq \dots \leq \alpha_1$$

$$\beta_n \leq \beta_{n-1} \leq \dots \leq \beta_1$$

$$\beta_j \leq \alpha_j$$

Pour construire un $\lambda \geq 0$ vérifiant $f(\lambda) = c$, on examine une succession d'intervalles

$$\left[\lambda_{\min}, \lambda_{\max} \right]$$

choisis en sorte que

(*) $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ne contienne aucune abscisse α_j ou β_j .

(*) λ_{\min} et λ_{\max} soient, soit zéro, soit une abscisse α_j ou β_j .

Ce choix assure que $f(\lambda)$ est une fonction linéaire dans l'intervalle $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Ces considérations aboutissent au mode opératoire suivant :

(0) Poser $\lambda_{\min} = 0$

(1) On a toujours $f(\lambda_{\min}) < c$

Poser $\lambda_{\max} = \text{Min} \left[\begin{array}{cc} \text{Min } \alpha_j, & \text{Min } \beta_j \\ \alpha_{j > \lambda_{\min}} & \alpha_{j > \lambda_{\min}} \end{array} \right]$

(2) (2.a) Si $f(\lambda_{\max}) \geq c$, alors il existe dans $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ un λ tel que $f(\lambda) = c$

Dans l'intervalle $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$

$$f(\lambda) = a\lambda + b$$

avec

$$a = \text{Card} [\{j / \beta_j \leq \lambda_{\min} < \lambda_{\max} \leq \alpha_j\}]$$

$$b = \sum_{\substack{j / \beta_j \\ \beta_j < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < \alpha_j}} \bar{x}_j + \text{Card} [\{j / \alpha_j \leq \lambda_{\min}\}]$$

On fera donc $\lambda = \frac{c-b}{a}$ et le problème est résolu.

(2.b) Si $f(\lambda_{\max}) < c$, poser $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$ et aller en (1).

Ce procédé est certainement fini : en effet, puisque

$$f(0) < c \text{ et } f(\alpha_1) = n \geq c$$

et que $f(\lambda)$ est monotone non décroissante, l'intervalle $[0, \alpha_1]$ contient certainement un λ tel que $f(\lambda) = c$.

Pour $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, et pour j quelconque dans $\{1, 2, \dots, n\}$, il se produit l'une seulement des 3 situations suivantes :

$$(*) \beta_j \leq \alpha_j \leq \lambda_{\min} \text{ et dans ce cas } x_j(\lambda) = 1$$

$$(*) \beta_j \leq \lambda_{\min} < \lambda_{\max} \leq \alpha_j \text{ et alors } x_j(\lambda) = \bar{x}_j + \lambda$$

$$(*) \lambda_{\min} < \beta_j, \text{ c'est à dire}$$

$$\lambda_{\min} < \lambda_{\max} \leq \beta_j \leq \alpha_j$$

et alors

$$x_j(\lambda) = 0.$$

Cette observation suffit à justifier les formules de l'étape (2.a).

I-5 - Choix de la suite (t_j)

Il est manifeste que le schéma itératif, décrit au I-1, convergera plus ou moins rapidement selon la nature de la suite t_j utilisée. L'influence de cette suite (t_j) sur la convergence étant très difficile à analyser formellement, nous avons choisi de l'étudier de manière expérimentale sur la famille des séries divergentes décrites par le très important théorème de Gauss, que nous rappelons ici.

Théorème : Soit u_n une suite à termes positifs.

Supposons qu'il existe :

un réel A

une suite ω_n telle que $|\omega_n| \leq |A|$

un réel μ

un réel $p > 1$

tels que $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ssi $\mu > 1$.

La démonstration de ce théorème, que l'on trouvera dans [15], se fait à partir des critères habituels de convergence de séries ainsi que du théorème de Kummer.

Les réels μ, p, A, u_0 , ainsi que la suite ω_n , apparaissent donc comme des paramètres nous permettant d'explorer toute une famille de suites (t_j) .

Pour la résolution, par cette méthode du sous-gradient, de l'ensemble des problèmes tests, nous avons déterminé de manière expérimentale les μ , A , p , t_0 et (ω_n) tels que la suite

$$t_{j+1} = t_j \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu}{j} + \frac{\omega_j}{j^p}} \right), \quad \text{avec } \mu \leq 1$$

donne la convergence la plus rapide. Malheureusement cette expérimentation limitée ne nous a suggéré aucune conclusion généralisable sur la suite t_j .

II - LA METHODE BRANCH AND BOUND

II-1 - Introduction

Il ne nous a pas été possible de développer des moyens théoriques pour juger de la proximité des solutions optimales continue et entière du programme (P), c'est à dire, en définitive, juger la qualité de la formulation linéaire du problème de m-centre que nous avons proposé.

A défaut de tels moyens théoriques, un critère que l'on peut adopter est "l'efficacité" d'une méthode branch and bound utilisant la valeur du programme continu pour évaluer (ou borner) la valeur des programmes en variables mixtes générés par les étapes successives de l'exploration par "séparation et évaluation".

L'efficacité d'une méthode branch and bound n'a pas non plus de définition théorique. Dans ce travail, nous jugerons l'efficacité du branch and bound d'après la taille moyenne des arborescences d'exploration engendrées lors de la résolution d'une famille-témoin des problèmes de m-centre.

La famille-témoin que nous avons utilisée comporte des problèmes dont le graphe, ses arcs et sa matrice Δ_{ij} sont générés aléatoirement. Lors de l'expérimentation numérique, nous avons distingué la sous-famille des problèmes dans lesquels la matrice Δ_{ij} vérifie l'inégalité du triangle, de celle où cette propriété n'est pas vérifiée.

Au paragraphe II-2, nous détaillons le principe de la séparation et de l'évolution dans la méthode b-and-b associée à cette méthode du gradient.

Les résultats et commentaires des tests font l'objet du § II-3. C'est dans ce paragraphe que sont aussi rassemblés les résultats numériques et les performances des divers algorithmes présentés dans ce travail.

II-2 - Description de la méthode branch and bound

II-2-1 - La séparation la plus naturelle est celle qui consiste à fixer tantôt à zéro, tantôt à un, certaines variables de construction qui, dans la solution continue, sont comprises entre 0 et 1.

Un sommet de l'arborescence d'exploration correspond à un problème $G(I_0, I_1)$, où I_0 désigne l'ensemble des variables π_i fixées à zéro (centres interdits) et I_1 l'ensemble des variables fixées à un (centres obligatoires).

Le problème $G(I_0, I_1)$ est de minimiser.

$$w_{I_0, I_1}(\pi) = \langle \pi, a_{I_0, I_1} \rangle + \sum_{i=1}^n \rho_{I_0, I_1}^i(\pi) + \sum_{j \in I_1} a_j$$

$$\text{où } a_{I_0, I_1}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in I_0 \cup I_1 \\ a_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour définir $\rho_{I_0, I_1}^i(\pi)$, on introduit quelques notations :

$$k_{I_0, I_1}^i = \text{Max } k \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{et} \quad S(i, k-1) \cap I_1 = \emptyset$$

où l'ensemble $S(i, k) = \{j / \exists \ell \in \{0, \dots, k\} \text{ avec } \sigma_i(\ell) = j\}$

On définit alors les vecteurs $\tilde{v}_{i, k}$ pour $k=0, \dots, k_{I_0, I_1}^i$, ces vecteurs dépendent de I_0, I_1 :

$$\tilde{v}_{i, k}^{\sigma_i(r)} = \begin{cases} \Delta_{i\sigma_i(k)} - \Delta_{i\sigma_i(r)} & \text{si } r \leq k \text{ et } \sigma_i(r) \notin I_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction $\rho_{I_0, I_1}^i(\pi)$ est alors définie par la formule

$$\rho_{I_0, I_1}^i(\pi) = \text{Max}_{k=0, \dots, k_{I_0, I_1}^i} \left[\Delta_{i\sigma_i(k)} - \langle \pi, \tilde{v}_{i, k} \rangle \right]$$

Le premier sommet de l'arborescence correspond au problème G , c'est à dire $G(\emptyset, \emptyset)$.

A chaque sommet $G(I_0, I_1)$, la solution optimale de $G(I_0, I_1)$ fournit une borne inférieure de la valeur optimale du problème de m -centre à variables entières. La résolution du problème $G(I_0, I_1)$ se fait par la méthode du sous-gradient.

II-2-2 - On pourrait songer à une méthode b-and-b qui utiliserait des solutions approchées des duaux des problèmes $G(I_0, I_1)$ pour évaluer une borne supérieure de la valeur optimale du problème à variables continues.

Le dual de G , ainsi que les duaux des problèmes $G(I_0, I_1)$, sont de la forme

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{l}
 \tau \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\
 \mu_i \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\
 \gamma^{i,k} \qquad \qquad \geq 0 \\
 \sum_k \gamma^{i,k} \qquad = 1 \\
 \tau - \mu_i + \langle \gamma, f_i \rangle \leq a_i \\
 \tau - \sum \mu_i + \langle \gamma, \Delta \rangle = z(\text{Max})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Pour appliquer la méthode du sous-gradient, on considère le vecteur γ comme fixé et on étudie le programme linéaire

$$\left(\begin{array}{l}
 \tau \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\
 \mu_i \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\
 \tau - \mu_i \leq a'_i = a_i - \langle \gamma, f_i \rangle \\
 \tau - \sum \mu_i = z(\gamma) \text{ (Max)}
 \end{array} \right.$$

dont le dual est

$$\left(\begin{array}{l}
 r_j \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^n r_j \qquad \geq 1 \\
 r_j \qquad \qquad \qquad \leq 1 \\
 \sum a'_j r_j = w(\gamma) \text{ (Min)}
 \end{array} \right.$$

Ce dual, dont la solution est immédiate, permet d'écrire

$$z(\gamma) = \min_{j=1, \dots, n} a'_j = \min_{j=1, \dots, n} [a_j - \langle \gamma, f_j \rangle]$$

Ces considérations permettent d'écrire D_G sous la forme

$$(DG) : \text{Max } z(\gamma)$$

$$\gamma \in D_S = \{ \gamma \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} / \gamma \geq 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{i,k} = 1 \}$$

Sous cette forme, (DG) est lui aussi passible de la méthode du sous-gradient. Toutefois, on aboutit à un procédé un peu moins efficace, car les vecteurs γ comptent un nombre élevé de variables et la projection sur D_S est moins facile que la projection sur S . _____

Il est tout de même utile d'indiquer comment il est possible d'entreprendre la même démarche sur le problème (Q)

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \mu_i - \lambda_{ij} \leq \Delta_{ij} \\ \lambda_{ij} \geq 0 \\ \mu_i + \sum \lambda_{\ell_i} - \tau \leq 0 \\ \sum \mu_i - m\tau = z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

et de considérer les variables μ comme fixées : $Q(\mu)$ est alors le problème

$$Q(\mu) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij} \geq \mu_i - \Delta_{ij} \\ \lambda_{ij} \geq 0 \\ \sum \lambda_{\ell_i} - \tau \leq -\mu_i \\ \sum \mu_i - m\tau = z(\eta) \text{ (Max)} \end{array} \right.$$

La fonction $z(\eta)$ admet alors comme 'sous-gradient' en μ le vecteur g dont les composantes g_i sont :

$$g_i = 1 - \bar{y}_i - \sum_{j \neq i} \bar{x}_{ij}$$

où (\bar{x}, \bar{y}) est une solution optimale de $DQ(\mu)$:

$$DQ(\mu) \begin{cases} x_{ij} & \geq 0 \\ -x_{ij} + y_j & \geq 0 \\ \sum y_j & = m \end{cases}$$

$$\sum \mu_i + \sum \sum x_{ij} [\Delta_{ij} - \mu_i] - \sum y_i \mu_i = \sum \sum x_{ij} \Delta_{ij} + \sum_i (1 - \bar{y}_i - \sum_{j \neq i} \bar{x}_{ij}) \mu_i = w(\mu) \text{ (Min)}$$

Ce fait est l'illustration d'un théorème utile, que l'on prend rarement la peine d'énoncer (du moins sous cette forme) et que nous mentionnons ici sans démonstration.

Théorème : Soit le programme linéaire

$$A\lambda + b\mu = b$$

$$c\lambda + d\mu = z(\text{Max})$$

et soit $z(\mu)$ la fonction ainsi définie

$$z(\mu) = d\mu + \text{Max } c\lambda$$

$$\lambda/A\lambda = b - B\mu$$

Si $z(\mu) \neq \pm\infty$, le sous-différentiel de $z(\mu)$ en μ est donné par

$$\partial z(\mu) = d - u_0 B$$

où u_0 est une solution optimale quelconque du programme linéaire

$$\begin{cases} uA = c \\ u(b - B\mu) = w(\text{Min}) \end{cases}$$

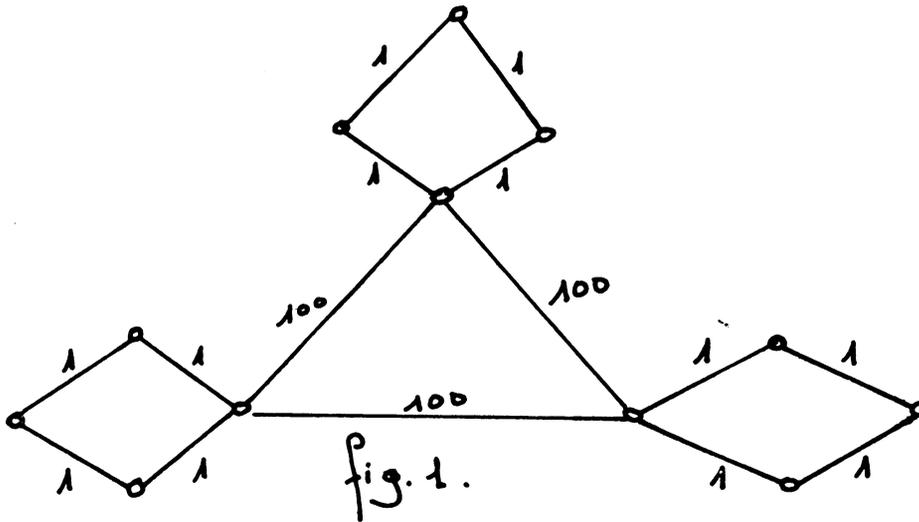
II-3 - Expérimentation numérique - Conclusions

Nous avons choisi 8 problèmes témoins pour éprouver l'efficacité de la méthode branch and bound, ainsi que pour comparer entre elles les diverses méthodes proposées.

Voici une description sommaire de ces 8 problèmes -mais il va sans dire que les observations ont porté sur un nombre beaucoup plus grand de problèmes.

N°	Description	Nombre de		La matrice Δ vérifie l'inégalité du triangle										
		sommets	centres Coûts a_i	B	E	DW	R	SG	BAB					
1	Voir fig. 1	12	4 centres	3	5	23	7	6	0.1					
2	29 villes d'Europe	29	De 3 à 14 centres	18	14	70	20	12	3					
3	Généré au hasard dans le carré (20,20) de R^2	40	Coûts générés au hasard	70	63	103	35	16	8					
4	Constitué à partir du problème 3 (voir fig. 2)	120	Entre 4 et 40 centres	∞	132	∞	∞	30	14					
5	Généré au hasard	70	Entre 4 et 35 centres	∞	65	103		27	13					
6	" " "	80	Coûts uniformes générés au hasard	∞	89	∞	∞	31	29					
7	" " "	80	Coûts générés au hasard	∞	83	∞	∞	37	51					
8	" " "	100	Coûts générés au hasard	∞	151	∞	∞	54	218					

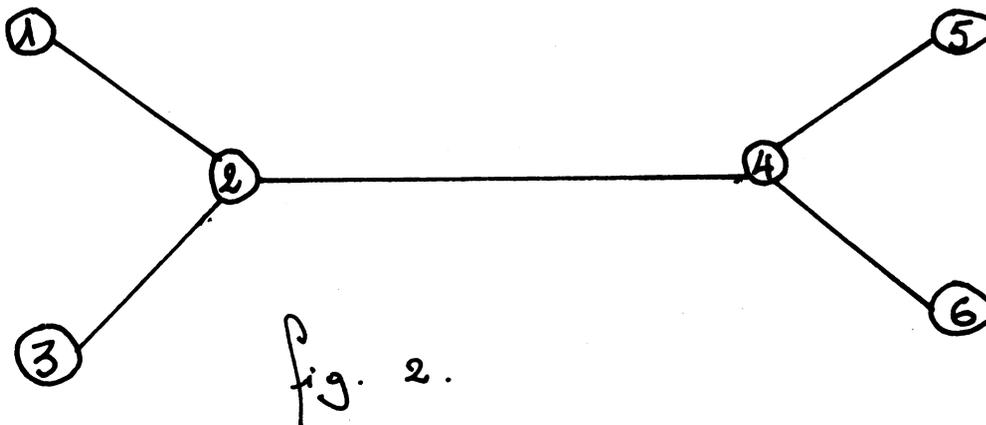
Le problème 1 est posé sur le graphe de la figure 1 ci-dessous, où les arcs non indiqués portent un coût infini.



Le problème 2 est construit sur un graphe constitué par l'ensemble des 29 plus importantes ville d'Europe. Les distances sont les distances "réelles" (celles de l'Almanach). En faisant varier le nombre de centres à construire de 3 à $14 = \lfloor \frac{29}{2} \rfloor$, on obtient, sur le même graphe, une famille de problèmes de plus en plus combinatoires.

Les problèmes générés au hasard sont obtenus à partir d'un générateur de nombres aléatoires, grâce auquel on "tire au hasard" les abscisses et les ordonnées des sites dans le plan. (Quelques problèmes dans R^3 ont aussi été considérés). La distance entre 2 sites est alors soit la distance euclidienne, soit un nombre lui aussi généré au hasard.

Le problème 4 est obtenu en plaçant le graphe du problème 3 aux sommets 1, 3, 5 et 6 du graphe de la figure 2.



Les temps indiqués sont des temps moyens, mesurés (et arrondis) en secondes CDC 6600. Les programmes sont écrits en Fortran. Un temps infini (∞) signifie que le programme a pris plus de 100 secondes en moyenne. Les temps du branch and bound ne prennent pas en compte les temps de résolution du premier problème continu G.

Les tests ont très nettement mis en évidence ce fait, que nous n'avons pas pu justifier théoriquement : quand la matrice (Δ_{ij}) vérifie l'inégalité du triangle, on obtient très fréquemment des solutions entières par les méthodes de programmation linéaire qui construisent des solutions de base et le branch and bound construit une arborescence de taille très modeste.

La nature nettement plus combinatoire du problème à distance maximum réapparaît à ce niveau : en effet, en prenant pour critère à minimiser la distance maximum parcourue par le plus défavorisé des usagers, le temps des b-and-b passe du simple au double et le nombre des solutions entières équivalentes devient astronomique.

Le mode opératoire issu de la formulation par les étoiles s'est révélé le plus efficace et aussi le plus souple puisqu'il prend en compte, sans modification notable, des contraintes de capacités maximales qu'on ne peut introduire aisément dans aucune autre procédure. Il est curieux de constater que la méthode révisée du simplexe, si rapide dans ce mode opératoire de la formulation par les étoiles, est d'une lenteur désespérante dans l'algorithme issu de l'application du principe de décomposition de Dantzig et Wolfe. L'opinion, assez répandue, de l'inefficacité de ce principe de décomposition de D.W., ne semble donc pas entièrement gratuite et sans fondement.

La méthode du sous-gradient est elle aussi très efficace. Les solutions optimales qu'elle propose ne sont pas nécessairement de base -ainsi elle peut converger vers une solution fractionnelle même s'il existe une solution optimale entière. Dans la pratique, nous arrêtons les calculs quand $\|\pi_{j+1} - \pi_j\| \leq 10^{-3}$ ou 10^{-4} , la norme étant le maximum des valeurs absolues. Quand la taille n du problème augmente, la dégradation des performances de cette méthode de sous-gradient est la meilleure -la moins brusque, la moins irrégulière et aussi la moins "dramatique" de toutes les autres

méthodes. Pour les problèmes de grande taille (100 sommets et plus) c'est à elle qu'il faut recourir en premier. Elle ne présente pas l'écueil de la précision numérique, toujours présent dans les autres méthodes.

La méthode issue du principe de décomposition de Rosen est sensible au point initial et au premier problème résolu -il est souvent avantageux de la faire fonctionner en "tandem" avec une autre méthode -celle du sous-gradient par exemple- qui construit rapidement un "bon" point initial. Cette méthode est venue à bout de problèmes assez importants (60 - 100 villes). Elle est particulièrement à recommander quand il s'agit de mettre à jour la solution actuelle d'un problème, après de légères modifications dans la matrice Δ .

CHAPITRE V

RELATIONS AVEC QUELQUES PROBLEMES COMBINATOIRES

ETUDE SUR LES CONTRAINTES D'INTEGRITE

I - RELATIONS AVEC QUELQUES PROBLEMES COMBINATOIRES

Nous montrons ici comment certains problèmes combinatoires "classiques", bien résolus ou non, de la théorie des graphes et hypergraphes, peuvent se formuler comme des problèmes de m-centre.

L'intérêt d'une telle démarche est multiple. Formuler un problème combinatoire comme un problème de m-centre fournit une formulation par programmation linéaire qui en général est différente des autres formulations connues -s'il y en a- de ce problème. Par ailleurs, résoudre un problème combinatoire grâce au formalisme élaboré pour résoudre un autre problème permet de les situer l'un par rapport à l'autre, dans l'ordre de leur difficulté. Cela peut aussi constituer une source précieuse d'indications, notamment lors de l'étude des polyèdres des programmes linéaires considérés.

D'un point de vue pratique, il faut toutefois remarquer que dans la plupart des cas, la famille des problèmes de m-centre ainsi obtenue peut être d'une résolution laborieuse, puisque la matrice Δ qui définit ces problèmes ne vérifie pas nécessairement l'inégalité triangulaire :

$$\Delta_{ij} \leq \Delta_{ik} + \Delta_{kj} \quad \forall i, j, k$$

Les définitions et les résultats essentiels concernant les problèmes combinatoires mentionnés ici sont étudiés en détail dans l'ouvrage de Berge [1].

I-1 - Le recouvrement minimum d'un hypergraphe

Soit un hypergraphe $H = (X, E)$, où X désigne l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

On appelle recouvrement de l'hypergraphe H une famille $J \subseteq E$ d'arêtes de H dont la réunion est X .

Un recouvrement est dit minimum s'il est de cardinalité minimum. Le problème de la recherche d'un recouvrement minimum dans un hypergraphe est un des problèmes combinatoires les plus généraux qu'on puisse étudier. A ce niveau de généralité, où rien n'est spécifié sur la nature des arêtes de l'hypergraphe, il semble douteux que l'on puisse élaborer des résultats précis -et il n'est pas question de songer à une méthode spécifique de résolution.

Une multitude d'autres problèmes combinatoires ne sont que des cas particuliers de ce problème de recouvrement minimum d'un hypergraphe - nous en donnerons deux exemple plus loin.

Le problème de m -centre est lui-même un problème de recouvrement d'un type un peu plus général, puisqu'il s'agit de rechercher un recouvrement de poids minimum de l'hypergraphe $H' = (X', E')$ où on prend pour X' l'ensemble des sommets du graphe sur lequel on pose le problème de m -centre et pour E' l'ensemble des étoiles de ce graphe.

Pour formuler le problème du recouvrement minimum d'un hypergraphe $H = (X, E)$ comme un problème de m -centre, on considère le graphe $G_1 = (X_1, U_1, \Delta^1)$ où

$X_1 = X \cup E$: un sommet de G_1 correspond soit à un sommet de H , soit à une arête de H .

U_1 est constitué par les arcs (i, j) d'un des types suivants :

- 1) i et j sont deux arêtes quelconque de H ;
- 2) i est un sommet de H et j une arête de H contenant le sommet i .

La matrice Δ^1 est définie en prenant $\Delta_{ij}^1 = 0$ sur les couples (i, j) correspondant à des arêtes de U_1 et à $+$ ailleurs. Les coûts d'investissement a_i sont de 1 sur les sommets de G_1 correspondant à des arêtes de G_1 et de $+$ ailleurs.

Proposition : Toute solution optimale du problème de m -centre dans G_1 définit une solution optimale du problème de recouvrement minimum dans H .

Démonstration : Evidente.

I-2 - Le problème de couplage

I-2-1 - Le couplage maximum

Définitions

Dans un graphe non orienté $G = (X, U)$ un couplage est un ensemble E_0 d'arêtes tel que deux quelconques des arêtes de E_0 soient non adjacentes.

Un couplage E_0 est dit maximal ssi $\forall u \in U, E_0 \cup \{u\}$ n'est pas un couplage. Un couplage E_0 est dit maximum ssi c'est un couplage de cardinalité maximum.

Un ensemble d'arêtes F constitue un recouvrement ssi tout sommet x est extrémité d'au moins une arête de F.

Un recouvrement est dit minimum s'il est de cardinalité minimum ; à partir d'un recouvrement minimum il est aisé de construire un couplage maximum (voir Berge [1]).

Le problème de la construction d'un couplage maximum apparaît donc comme un cas particulier du problème général du recouvrement minimum d'un hypergraphe et on peut donc le ramener à la recherche d'un m-centre dans un graphe.

I-2-2 - Le couplage maximal de cardinalité minimum

Plutôt que de rechercher un couplage maximal comportant le plus d'arêtes possible, on peut s'intéresser au couplage maximal qui en contient le moins possible, c'est à dire le couplage maximal de cardinalité minimale.

Aucune étude n'a encore été consacrée à ce problème combinatoire, qui semble assez difficile. Voici comment on peut en construire une solution grâce au formalisme du m-centre.

On considère le graphe $G_2 = (X_2, U_2, \Delta^2)$ où

$X_2 = U$: les sommets de G_2 correspondent aux arcs de G.

$U_2 = \{(i,j) \mid i \in X_2, j \in X_2\}$: le graphe G_2 est donc complet.

La matrice Δ^2_{ij} des "distances" est ainsi définie :

$$\Delta^2_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si l'arête } i \text{ et l'arête } j \text{ sont adjacentes dans } G \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coûts de constructions a_i sont pris uniformément égaux à 1 :

$$a_i = 1 \quad \forall i \in X_2.$$

Proposition

a) Tout couplage maximal E_0 de G définit dans G_2 une solution réalisable, entière et de valeur finie, du problème de m-centre.

b) A partir de la solution optimale du problème de m-centre, on peut construire un couplage maximal de cardinalité minimale. Cette cardinalité est d'ailleurs le nombre de centres construits dans une solution optimale du problème de m-centre dans G_2 .

Démonstration : Le a) de la proposition est évident. On montre aussi que tout couplage non maximal de G définit dans G_2 une solution réalisable entière du problème de m -centre, de valeur infinie.

Soit donc $C = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ la solution optimale du problème de m -centre dans G_2 . Les éléments de C sont des arêtes de G .

Si C définit un couplage dans G , alors C est alors le couplage maximal de cardinalité minimum.

Sinon il existe deux arêtes $i \in C$ et $j \in C$ qui sont adjacentes dans G . Les arêtes de C ne forment aucune chaîne de longueur ≥ 3 , sinon C ne définit pas une solution optimale du problème de m -centre dans G_2 . On peut donc choisir dans C deux arêtes i et j telles que j ne soit adjacent qu'à une seule arête de C .

Dans G , les sommets a et c ont un degré d'au moins deux, sinon C n'est solution optimale. Voici alors comment on peut définir une autre solution optimale du problème de m -centre :

ôter de C l'arête j et introduire à sa place une arête k , adjacente à j au sommet c , non adjacente à i et ne figurant pas encore dans C . (Comme C est une solution optimale du problème de m -centre, si deux arêtes de C sont adjacentes, alors il existe dans C deux arêtes i et j adjacentes et telles qu'une telle arête k puisse être trouvée).

Ce processus est alors répété sur le nouvel ensemble C ainsi obtenu, tant que C ne constitue pas un couplage. A chaque fois le nombre d'arêtes adjacentes de C diminue, tandis que la cardinalité de C reste constante.

I-3 - Le problème de la recherche d'un ensemble stable maximum

Dans un graphe simple $G = (X, U)$ on appelle ensemble stable un ensemble S de sommets tel que deux sommets distincts de S ne soient jamais adjacents.

Un ensemble stable S sera dit maximum s'il est de cardinalité maximum.

Un ensemble T de sommets est dit transversal ssi toute arête de U possède au moins une extrémité dans T .

On voit donc qu'un ensemble S est un stable ssi l'ensemble $X-S$ constitue un transversal. Rechercher un ensemble stable de cardinalité maximum équivaut donc à rechercher un ensemble transversal de cardinalité minimum. On reconnaît dans ce dernier problème un cas particulier de celui du recouvrement minimum d'un hypergraphe.

I-4 - Remarques

Plusieurs autres problèmes combinatoires peuvent se ramener à la réalisation d'une ou plusieurs recherches successives de m -centres dans des graphes associés. Les quelques problèmes que nous venons d'énumérer ne constituent donc qu'une liste non exhaustive, indicatrice de la souplesse de la formulation proposée et décrite dans les chapitres précédents.

Rappelons encore l'importance de l'inégalité triangulaire lors de la recherche d'une solution optimale du problème de m -centre. Il ne faut donc pas considérer un problème combinatoire quelconque comme résolu aussitôt qu'il a été ramené à notre formulation.

II - CONTRAINTES D'INTEGRITE

En passant du programme (P) au programme (P_c) , nous avons simplifié momentanément le problème, en le rendant convexe (en fait linéaire) par omission des contraintes exigeant l'intégrité des variables y . Cette façon de procéder équivaut à une convexification d'un programme linéaire en nombres entiers et constitue une des méthodes les plus efficaces en optimisation combinatoire.

Puisqu'on retire des contraintes de (P) pour le linéariser, il semble raisonnable d'adopter pour critère de "complexité" d'un problème en nombre entiers, le nombre de contraintes linéaires qu'il faut rajouter à (P_c) pour assurer l'intégrité de sa solution optimale.

De telles contraintes sont appelées contraintes d'intégrité.

Il existe peu de problèmes combinatoires pour lesquels un ensemble de contraintes d'intégrité est connu ; on peut citer le problème du couplage, celui de la recherche d'une base optimale dans un matroïde et celui de l'intersection optimale de 2 matroïdes.

Notre effort pour la recherche des contraintes linéaires d'intégrité de (P_c) est demeuré infructueux. C'est une question difficile, comme en témoigne la diversité et la complexité des problèmes combinatoires que les problèmes (P) et (P_1) recouvrent.

Il est une autre manière d'apprécier la difficulté de cette question, et c'est de considérer la nature de certaines familles de contraintes qui, ajoutées à (P_c) , n'assurent pas l'intégrité de la solution optimale de celui-ci, mais qui doivent obligatoirement être exprimées et contenues dans la famille des contraintes d'intégrité.

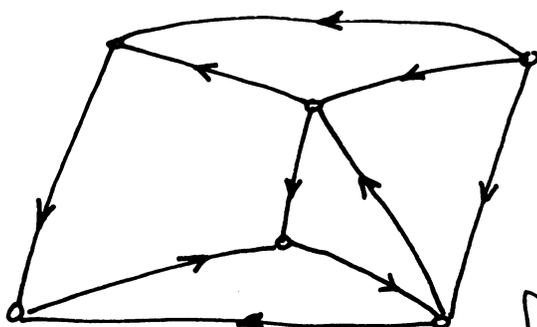
Nous indiquons ici deux familles de contraintes qui semblent très fortes, et qui pourtant sont encore moins fortes que les contraintes d'intégrité de (P_c) .

Pour décrire la première famille, associons à chaque ensemble d'arcs A un entier $r(A)$ que nous appelons pseudo-rang de X, ainsi défini :

$$r(A) = \text{Max} |A \cap e|$$

e {e/e est une forêt dont chaque composante connexe est une étoile}

Par exemple, pour un ensemble A dont les arcs constituent le graphe partiel de la figure suivante :



le rang est 3

fig V.1.

Il est clair que toute solution (x,y) réalisable entière de (P_c) vérifie les contraintes

$$(*) \quad \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \leq r(A) \quad \forall \text{ ensemble d'arcs } A$$

Il est donc légitime d'exiger que toute solution réalisable de (P_c) la vérifie également. Pour un arc, $|A| = 1$ et la contrainte $(*)$ est $x_{ij} \leq 1$, déjà exprimé dans (P_c) .

Pour un ensemble quelconque d'arcs, A est un problème ardu, que nous n'avons pas été à même de résoudre. Le problème (P_c) , complété de ces contraintes $(*)$ qui sont nombreuses et difficiles à calculer, peut encore avoir des solutions optimales non entières, comme le montre l'exemple suivant :

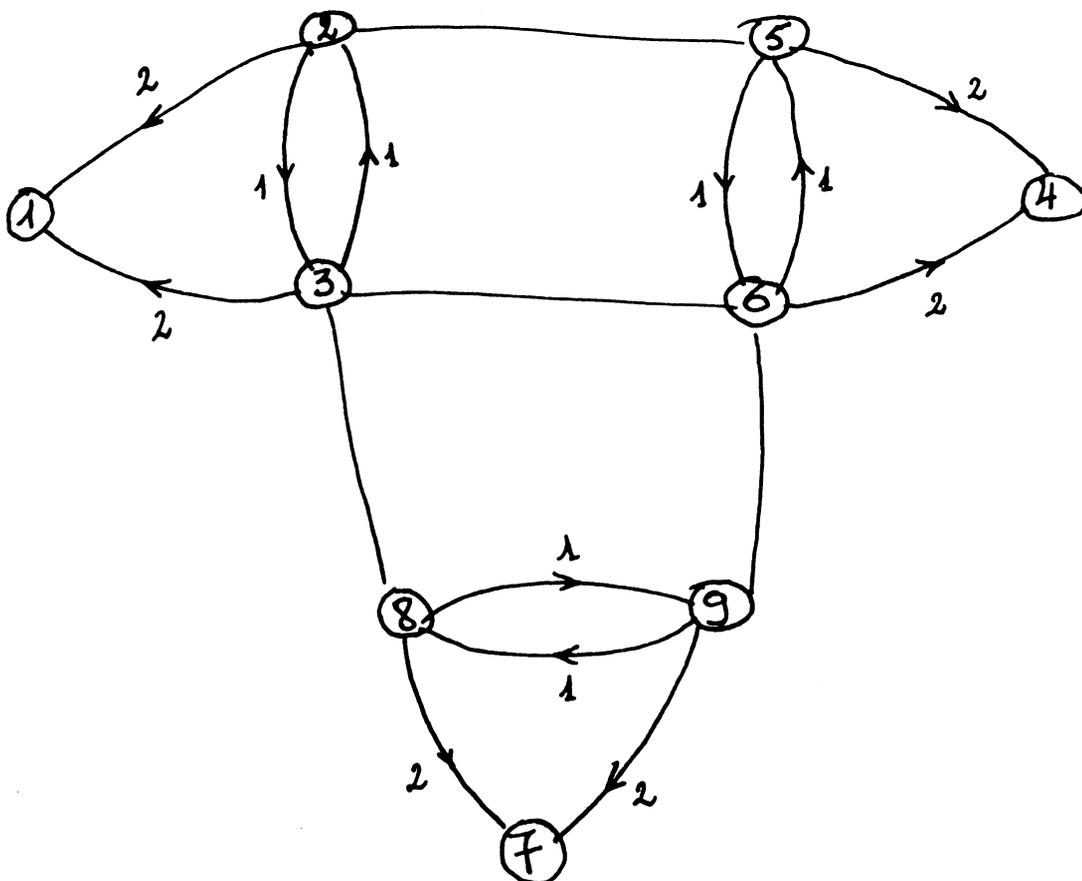


fig v. 2.

où il s'agit de construire $m = 4$ centres. Sur ce graphe les distances non indiquées sont prises égales à $+$. La solution optimale est

$$\begin{aligned} y_1 &= y_4 = y_7 = 1 \\ y_2 &= y_5 = y_8 = 1/3 \\ y_3 &= y_6 = y_9 = 0 \end{aligned}$$

Aucune contrainte $(*)$ n'est violée.

Considérons à présent une autre famille des contraintes.

Soit un ensemble S de sommets de X , et soit (x,y) une solution réalisable entière du problème de m -centre.

S'il sort de S moins de $|S|$ arcs, c'est à dire si

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \in S}} x_{ij} < |S|$$

c'est qu'il y a au moins un centre construit dans S : la contrainte

$$(**) \sum_{\substack{i \in S \\ j \in S}} x_{ij} + |S| \max_{i \in S} (y_i) \geq |S| \quad \forall S \subset X$$

est donc vérifiée par toute solution réalisable entière de (P_c) ; nous l'exigerons donc pour les autres solutions réalisables de (P_c) .

Pour $|S| = 1$, la contrainte $(**)$ devient

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} + y_i \geq 1,$$

contrainte déjà exprimée dans (P_c) .

La contrainte $(**)$ n'est pas linéaire, mais pourrait être aisément linéarisé, en modifiant légèrement la fonction objective.

Le problème (P_c) , complété des contraintes $(**)$ et $(*)$, n'est toujours pas assuré de l'intégrité de toutes ses solutions optimales de base : la solution optimale du problème décrit figure 2 est toujours non entière.

Les contraintes d'intégrité de (P_c) sont donc plus fortes que l'ensemble des contraintes $(*)$ et $(**)$.

BIBLIOGRAPHIE

- | 1| C. BERGE
Graphes et hypergraphes. Dunod 1970.

- | 2| BENDERS
Partitionning procedures for solving mixed variables programming problems. Num. Math., vol. 4 (62), pp. 238-252.

- | 3| DANTZIG - VAN SLYKE
Generalized linear programming in optimization methods for large scale programming.

- | 4| FARGIER
Travaux sur des problèmes d'implantation d'infrastructures dans un réseau de transport. Non parus.

- | 5| GARFINKEL, NEEBE, RAO
An algorithm for the m-median plant location problem. Transp. Sci. (74) August, pp. 217-235.

- | 6| GEOFFRION (ed)
Perspectives on optimization. Addison-Wesley, 1972.

- | 7| FRANCIS, GOLDSTEIN
Location theory : a selective bibliography. Opns. Res. 22 (74), pp. 400-410.

- | 8| S.L. HAKIMI
Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. Opns. Res. 12 (64), pp. 450-459.

- | 9| HELD, KARP
The traveling sales man problem and minimum spanning trees. Part II, Math. Programming 1 (71), pp. 6-25.

- | 10| HELD, WOLFE, CROWDER
Validation of subgradient optimization. Math. Programming, 6 (74), pp. 62-88.

- | 11| T.C. HU
Some problems in discrete optimization. Math. Programming 1 (71), pp. 102-113.

- |12| P.J. LAURENT
Approximation et optimisation. Hermann, 1971.

- |13| ROSEN
Primal partition programming for block diagonal matrices.
Num. Math., vol. 6 (64), pp. 250-260.

- |14| M. SAKAROVITCH
Programmation linéaire. Cours polycopie, IRMA, 1973.

- |15| SMIRNOV
A course of higher mathematics. Vol. 1, Pergamon Press, 1964.