



HAL
open science

De plus en plus fortes ! ... ou les avatars d'une conjecture sur les vidanges

Jean-Guy Dion

► **To cite this version:**

Jean-Guy Dion. De plus en plus fortes ! ... ou les avatars d'une conjecture sur les vidanges. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1976. Français. NNT : . tel-00287126

HAL Id: tel-00287126

<https://theses.hal.science/tel-00287126>

Submitted on 11 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'INSTITUT DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES AVANCÉES

de

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

Jean-Guy DION



**DE PLUS EN PLUS FORTES ! ...
OU LES AVATARS D'UNE CONJECTURE
SUR LES VIDANGES.**



Thèse soutenue le 16 décembre 1976 devant la Commission d'Examen :

Président : A. BERNARD

Examineurs : H. RAYNAUD
F. BRODEAU

Invité : C.M. BRUNEAU

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Maire-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONTVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie

MM.	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT A)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENDEL Philippe	Zoologie

MM.	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT A)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CLARK Gilbert	Spectrométrie physique
	CRABBE Pierre	CERMO
	ENGLMAN Robert	Spectrométrie physique
	HOLTZBERG Frédéric	Basses températures
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	MATSUSHIMA Yozo	Mathématiques pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT A)
	BUISSON René	Physique (IUT A)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT A)
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT A)
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT A)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme	MINIER Colette	Physique (IUT A)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROI Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STREGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie (IUT A)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro chirurgie
	BARJOLLE Michel	M.I.A.G.
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physiques (IUT A)

MM. GUITTON Jacques	Chimie
HICTER Pierre	Chimie
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
KOLODIE Lucien	Hématologie
LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
LEROY Philippe	IUT A
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
MARECHAL Jean	Mécanique (IUT A)
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
NEGRE Robert	Mécanique (IUT A)
NEMOZ Alain	Thermodynamique
NOUGARET Marcel	Automatique (IUT A)
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie (IUT A)
PERRET Jean	Neurologie
PERRIER Guy	Géophysique - glaciologie
PHELIP Xavier	Rhumatologie
RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM. ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
SHOM Jean-Claude	Chimie générale
STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

M. COLE Antony	Sciences nucléaires
----------------	---------------------

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, AVRIL 1976.

INTRODUCTION

Comme le montrent Raynaud (1968), Pétry (1971) et Diet et Raynaud (1977), la connaissance des conditions nécessaires pour qu'un graphe G muni de coefficients soit une vidange forte, mérite, tant par son aspect lacunaire que par son intérêt dans les applications et la théorie des processus stochastiques, un effort d'approfondissement.

Si l'utilité de la connaissance des vidanges fortes est manifeste pour les chimistes macromoléculaires [cf. Bruneau (1966)], elle ne devrait pas l'être moins pour les mathématiciens qui trouveront dans cette étude des éléments en vue d'une théorisation de certaines convergences dans des processus markoviens non-stationnaires.

Plus spécifiquement, nous nous sommes intéressés à préciser une conjecture de Pétry (1971) reliant la notion de vidange totale à celle de vidange forte (que nous savons, grâce à Diet et Raynaud (1977), être inexacte); on lira dans les pages qui suivent la démonstration de l'exactitude de la conjecture dans plusieurs cas jusqu'alors litigieux. L'essentiel de cette thèse consiste donc à mieux cerner la conjecture de Pétry.

Au cours du premier chapitre, nous exposerons quelques résultats connus sur les vidanges et vidanges fortes. De plus, nous indiquerons quelques propriétés particulières de symétrie dans les graphes, utilisées dans la suite. Nous énoncerons la caractérisation des vidanges totales obtenue par Pétry (1971) puis la conjecture en question. Nous rappellerons alors les résultats appuyant cette

conjecture et obtenus par Pétry (1971) tandis que le contre-exemple de Diet et Raynaud (1977) nous incitera à la prudence par la suite.

Notre étude personnelle ne commence qu'avec le second chapitre qui propose, pour les graphes pondérés avec ou sans boucles, un théorème général donnant des conditions suffisantes simples d'obtention de vidanges fortes. En corollaire direct de ce théorème, nous verrons que les cycles à p sommets C_p et les graphes complets symétriques sans boucle à p sommets K_p , leurs sommets étant munis de coefficients identiques, sont des vidanges fortes. Nous verrons qu'il y a aussi d'autres graphes pondérés qui, tout en ne vérifiant pas la conjecture de Pétry (1971), sont des vidanges fortes.

Au cours du troisième chapitre, nous obtenons un théorème général donnant des conditions suffisantes pour qu'un graphe pondéré avec boucles, sauf peut-être en quelques sommets, soit une vidange forte. Nous en déduisons quelques corollaires intéressants permettant à partir de certaines vidanges fortes d'obtenir d'autres vidanges fortes et ce en faisant varier les coefficients selon certaines règles bien précises.

Dans le quatrième chapitre, introduisant le concept de dilatation d'un graphe pondéré, nous verrons que les dilatations de graphes pondérés laissent invariante la propriété de vidange forte. L'étude de cette invariance nous permettra d'enrichir considérablement la classe des vidanges fortes par la définition de nouvelles structures de graphes pondérés non-orientés convenables; nous pourrons enfin proposer une limitation exacte à la conjecture de Pétry (1971).

Finally, au cours du dernier chapitre, nous examinerons la possibilité qu'une somme directe de vidanges fortes soit une vidange forte, ce qui nous conduira à l'énoncé d'une conjecture. D'autres considérations sur les vidanges fortes indiqueront pour finir au lecteur que, si l'avance apportée par notre travail à la connaissance des vidanges fortes lui a occasionné un pénible décryptage, il lui faudra sans doute faire encore de nombreux efforts pour atteindre, s'il le souhaite, des conditions nécessaires susceptibles de caractériser efficacement les vidanges fortes! Engageons-nous donc dès maintenant dans le sentier surprenant et ésotérique des vidanges fortes!

Nota bene: Le vocabulaire utilisé, s'il ne se perd pas dans les arcanes des vidanges, sera celui de Berge (1958). Les graphes que nous considérons sont orientés ou non-orientés, avec ou sans boucles, mais sans arcs, ni arêtes parallèles.

CHAPITRE I

NOTIONS PRELIMINAIRES ET POSITION DU PROBLEME

§1 Vidanges et vidanges fortes

Soit un graphe G à p sommets, orienté ou non, avec ou sans boucles; soient V_1, V_2, \dots, V_p ses sommets, $A(G)$ l'ensemble de ses arcs (ou arêtes), associons à chaque sommet V_i de G un coefficient entier positif N_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Soient $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_p)$ et $N = N_1 + N_2 + \dots + N_p$. G muni de ses coefficients sera noté (G, \vec{N}) , et appelé *graphe pondéré*.

A tout graphe pondéré (G, \vec{N}) , nous associons le couple (U, g) composé d'une urne U contenant N boules dont N_i boules de couleur i , $i = 1, 2, \dots, p$, et d'une loi de tirage ou *grammaire* g définie comme suit:

- la première boule est tirée dans U au hasard uniforme et sans remise,
- s'il reste dans l'urne U , n_k boules de couleur k , $k = 1, 2, \dots, p$ et si une boule de couleur i vient d'être tirée, la boule suivante, tirée sans remise, sera une boule de couleur j avec une probabilité nulle si $(V_i, V_j) \notin A(G)$ et avec une probabilité égale à

$$\frac{n_j}{n_{j_1} + n_{j_2} + \dots + n_{j_\ell}}$$

si $(V_i, V_j) \in A(G)$ et si $\{(V_i, V_{j_t}) : t = 1, 2, \dots, \ell\}$
décrit l'ensemble de tous les arcs issus de V_i dans G ,

- nous recommençons alors l'étape précédente jusqu'à ce que la probabilité de tirer une boule de couleur j soit nulle pour tout $j = 1, 2, \dots, p$.

Il est immédiat qu'à tout graphe pondéré (G, \vec{N}) correspond un couple (U, g) , la réciproque étant fautive d'une manière générale. Cependant, nous parlerons indifféremment de (G, \vec{N}) ou de son couple associé (U, g) .

Soit v le nombre de boules sorties de l'urne U à la fin d'un tirage selon la grammaire g . v est une variable aléatoire dont la distribution est bien définie par la donnée de (G, \vec{N}) ou du couple associé (U, g) . Nous supposons que le rapport $\frac{N_i}{N}$ tend vers une limite strictement positive λ_i , $i = 1, 2, \dots, p$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1$, quand N tend vers l'infini.

Définitions

Nous dirons que (G, \vec{N}) est une *vidange* si $v \xrightarrow{P.S.} \infty$ quand $N \rightarrow \infty$ et que (G, \vec{N}) est une *vidange forte* si $\frac{v}{N} \xrightarrow{P.} 1$ quand $N \rightarrow \infty$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha, \beta > 0, \exists N_0 \text{ tel que } N \geq N_0 \Rightarrow P\left\{\frac{v}{N} > 1 - \alpha\right\} > 1 - \beta.$$

Raynaud (1968) a défini ces notions de vidange et de vidange forte et montré que:

Proposition 1

Il faut et il suffit que G n'ait pas de sommet de demi-degré extérieur nul pour que (G, \vec{N}) soit une vidange.

De plus, Pétry (1971) a montré que:

Proposition 2

(G, \vec{N}) ne peut être une vidange forte si G n'est pas fortement connexe.

Avant d'énoncer la conjecture de Pétry (1971), nous indiquons une propriété de symétrie dans les graphes qui nous sera utile au prochain chapitre.

§2 Symétrie dans un graphe

Soit toujours un graphe G , orienté ou non, V l'ensemble de ses sommets, $A(G)$ l'ensemble de ses arcs (ou arêtes). Un graphe G est dit *symétrique* si

$$(x, y) \in A(G) \Leftrightarrow (y, x) \in A(G) .$$

Dans tout ce qui suit, nous assimilons les graphes symétriques aux graphes non-orientés correspondants. Un *automorphisme* de G est une permutation f de V telle que

$$\forall x, y \in V, (f(x), f(y)) \in A(G) \Leftrightarrow (x, y) \in A(G) .$$

Soit Γ le groupe des automorphismes de G .

G est dit *point-symétrique* si

$$\forall x, y \in V, \exists f \in \Gamma \text{ tel que } f(x) = y .$$

G est dit *régulier* si tous ses sommets ont même degré.

Tout graphe point-symétrique est évidemment régulier. Le graphe complet symétrique à p sommets, sans boucle, K_p et le cycle à p sommets C_p sont point-symétriques.

A l'aide de ces notions, nous pourrions donner au prochain chapitre des conditions suffisantes pour qu'un graphe pondéré (G, \vec{N}) soit une vidange forte.

§3 Vidanges totales et vidanges fortes

Définition

(G, \vec{N}) est une *vidange totale* si la probabilité de vider complètement l'urne associée par tout tirage suivant la grammaire g est 1.

Comme l'a montré Pétry (1971), la notion de vidange totale est étroitement liée à la notion de graphe arbitrairement parcourable. D'ailleurs, ce lien étroit entre ces deux notions lui a permis de démontrer que:

Proposition 3

(G, \vec{N}) est une vidange totale si et seulement s'il satisfait l'une des conditions suivantes:

- G est un graphe complet symétrique avec boucles sauf peut-être aux sommets de coefficient unitaire.
- G est un graphe circuit symétrique (c'est-à-dire un cycle) et $\vec{N} = (1, 1, \dots, 1)$.

● G est un graphe bipartite complet symétrique et la somme des coefficients des sommets de l'une des classes est égale à la somme des coefficients des sommets de l'autre classe; ce que nous appelons *graphe bipartite complet équilibré*.

● (G, \vec{N}) est *n-partite équilibré*, c'est-à-dire que les sommets de G peuvent être partagés en n classes:

$$\gamma_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{k_1}\}, \gamma_2 = \{v_{k_1+1}, \dots, v_{k_2}\}, \dots,$$

$$\gamma_n = \{v_{k_{n-1}+1}, \dots, v_{k_n}\}$$

avec

$$N_1 + N_2 + \dots + N_{k_1} = N_{k_1+1} + \dots + N_{k_2} = \dots$$

$$= N_{k_{n-1}+1} + \dots + N_{k_n} = K$$

et où tout arc de G est dirigé d'un sommet de γ_i vers un sommet de γ_{i+1} (somme modulo n) et à aucun autre pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Par exemple, les circuits à n sommets munis de coefficients identiques sont *n-partites équilibrés*. De plus, Pétry (1971) a démontré les résultats suivants reliant la notion de vidange totale à celle de vidange forte:

Proposition 4

Si (G, \vec{N}) est *n-partite équilibré*, \vec{N} fini et fixé, et si \vec{N}' est tel que $\frac{N'_i}{N'} \rightarrow \frac{N_i}{N}$ pour chaque i lorsque $N' \rightarrow \infty$, alors (G, \vec{N}') est une vidange forte.

Proposition 5

Soit G un graphe bipartite symétrique complet. Soient $\{v_1, v_2, \dots, v_{p_1}\}, \{v_{p_1+1}, \dots, v_p\}$ ses deux classes de sommets. Si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_1} \frac{N_i}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=p_1+1}^p \frac{N_j}{N} = \frac{1}{2},$$

alors (G, \vec{N}) est une vidange forte.

Remarquons que le graphe pondéré $(C_4, (\frac{N}{4}, \frac{N}{4}, \frac{N}{4}, \frac{N}{4}))$ vérifie l'hypothèse de la dernière proposition et donc c'est une vidange forte. Les résultats précédents incitent alors Pétry (1971) à émettre la conjecture suivante:

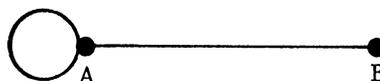
Conjecture

Si (G, \vec{N}) est une vidange totale et si \vec{N}' est tel que $\frac{N'_i}{N'} \rightarrow \frac{N_i}{N}$ quel que soit i quand $N' \rightarrow \infty$, alors, (G, \vec{N}') est une vidange forte.

Ainsi, afin de vérifier l'exactitude de cette conjecture, il suffit d'obtenir des résultats analogues aux propositions 4 et 5 dans les cas où G est un cycle et $\vec{N} = (1, 1, \dots, 1)$ et où G est un graphe complet avec boucles sauf peut-être aux sommets de coefficient unitaire.

Mais pour G complet symétrique avec boucles, on obtient trivialement le résultat. Cependant, Diet et Raynaud (1977) ont montré que si G est le

graphe connexe à deux sommets,



une arête et une boucle, alors, quel que soit \vec{N} , (G, \vec{N}) ne peut pas être une vidange forte. Il a de plus indiqué la généralisation immédiate de ce résultat à tous les graphes non-orientés à $k + \ell$ sommets dont k sommets engendrent le sous-graphe complet avec boucles, les ℓ autres un sous-graphe dégénéré sans arête, chacun des k premiers sommets étant adjacent à chacun des ℓ autres.

D'autres résultats plus précis sont à paraître dans l'article de Diet et Raynaud (1977). Ce contre-exemple valable, lorsque N_A égale $N - 1$ et N_B égale 1, infirme donc la conjecture énoncée ci-dessus. En fait, nous montrerons dans la suite qu'il en sera de même pour toutes les vidanges totales du type (G, \vec{N}) où G est le graphe non-orienté complet avec boucles sauf pour exactement un seul sommet de coefficient unitaire. C'est en cherchant à passer en revue les autres vidanges totales que nous avons pensé aux théorèmes qui font l'objet des chapitres suivants.

CHAPITRE II

UN THEOREME GENERAL

Nous supposons désormais que le graphe G est fortement connexe, puisque s'il n'en était pas ainsi, (G, \vec{N}) ne pourrait être une vidange forte. Avant de s'engager dans la démonstration d'un théorème général donnant des conditions suffisantes pour qu'un graphe pondéré (G, \vec{N}) avec ou sans boucles soit une vidange forte, nous démontrons le cas particulier suivant qui guidera le lecteur dans sa compréhension des démonstrations ultérieures, bâties selon un schéma analogue.

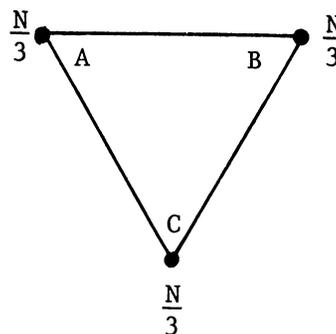
Proposition 6

Le graphe pondéré $(K_3, (\frac{N}{3}, \frac{N}{3}, \frac{N}{3}))$ est une vidange forte.

Démonstration

La grammaire g dans ce cas s'exprime très simplement:

- la première boule est tirée parmi les boules de l'urne sans remise et au hasard uniforme,
- pour tout $n \geq 2$, la n -ième boule est tirée parmi les boules de couleurs différentes de celle de la $(n-1)$ -ième boule tirée et ce, au hasard uniforme et sans remise, jusqu'à impossibilité.



Tout tirage de l'urne peut être représenté de façon unique par la suite des couleurs des boules tirées que nous appellerons *phrase*. D'après la définition de la grammaire g , cette phrase est composée de ν lettres $\in \{A, B, C\}$ où ν représente le nombre de boules tirées à la fin du tirage.

Nous dirons que "A est la n -ième lettre de la phrase" si A est la couleur de la n -ième boule tirée. Nous noterons cet événement (A, n) .

Nous voulons montrer que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \exists N_0 \text{ tel que } N \geq N_0 \Rightarrow P\left\{\frac{\nu}{N} > 1 - \alpha\right\} > 1 - \beta .$$

Pour ce faire, utilisant les propriétés de symétrie de K_3 , nous verrons que la proportion moyenne de lettres de chaque sorte tirée parmi les k premières sorties de l'urne sous l'hypothèse $k \leq \nu$ tend en probabilité vers la proportion des lettres de chaque sorte avant le tirage. Ensuite, il nous sera facile d'obtenir le résultat cherché. Plus précisément, K_3 étant point-symétrique et chacun de ses coefficients tendant vers la même limite, il est bien clair que chacune des trois couleurs a la même probabilité à priori d'être la n -ième lettre de la phrase. Ainsi,

$$P\{(L_1, n)\} = P\{(L_2, n)\} \text{ pour tous } L_1, L_2 \in V = \{A, B, C\} .$$

D'où

$$P\{(L_1, n) \mid \nu \geq n\} = \frac{1}{3} \text{ pour tout } L_1 \in V$$

et donc

$$P\{(L_1, n)\} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ pour tout } L_1 \in V ,$$

pour n fixé quand $N \rightarrow \infty$, $\left(K_3, \left(\frac{N}{3}, \frac{N}{3}, \frac{N}{3}\right)\right)$ étant une vidange ce qui implique que v tend aussi vers l'infini.

$$\text{Soit} \quad X_{A,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k I_{(A,i)}$$

où $I_{(A,i)}$ est la fonction indicatrice de l'événement {A est la i -ème lettre de la phrase}. Donc $X_{A,k}$ représente la proportion de lettres A parmi les k premières lettres de la phrase. $E(X)$ désignant l'espérance mathématique de X , nous avons, pour tout k fixé,

$$E(X_{A,k}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P\{(A, i)\} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

puisque $P\{(A, i)\} \rightarrow \frac{1}{3}$ pour tout i fixé quand $N \rightarrow \infty$ d'après ce qui précède. De plus,

$$\begin{aligned} E(X_{A,k}^2) &= \frac{1}{k^2} \sum_{i,j=1}^k P\{(A, i) \cap (A, j)\} \\ &= \frac{1}{k^2} \left[2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} P\{(A, i) \cap (A, j)\} + \sum_{\ell=1}^k P\{(A, \ell)\} \right] \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k P\{(A, i) \cap (A, j)\} + \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^k P\{(A, \ell)\} \end{aligned}$$

Etudions les sommes

$$\frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k P\{(A, i) \cap (A, j)\} \quad (1)$$

qu'on peut évidemment écrire sous la forme

$$\frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k P\{(A, i)\} P\{(A, j) \mid (A, i)\} . \quad (2)$$

Notons $\llbracket x \rrbracket$ la partie entière de x et Ln le logarithme népérien de n , considérons à la place de la somme (2), la somme

$$\frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1-\llbracket Lk \rrbracket} \sum_{j=i+1+\llbracket LLk \rrbracket}^k P\{(A, i)\} P\{(A, j) \mid (A, i)\} . \quad (3)$$

Nous négligeons donc dans cette somme $\llbracket Lk \rrbracket \llbracket LLk \rrbracket$ termes. Puisque ces termes sont bornés par l'unité, leur contribution à la valeur de la somme (1) tend évidemment vers zéro quand k tend vers l'infini.

Puisque, nous l'avons vu, $P\{(A, i)\}$ sera égal à $1/3$ pour tous les i qui nous intéressent, nous sommes conduits à étudier, conditionnée par $\{k \leq v\}$, la somme

$$\frac{2}{3k^2} \sum_{i=1}^{k-1-\llbracket Lk \rrbracket} \sum_{j=i+1+\llbracket LLk \rrbracket}^k P\{(A, j) \mid (A, i)\} . \quad (4)$$

Considérons particulièrement les sommes

$$\sum_{j=i+1+\llbracket LLk \rrbracket}^k P\{(A, j) \mid (A, i)\} .$$

Puisque i est au plus égal à $k - 1 - \llbracket Lk \rrbracket$, cette somme contient un nombre de termes au moins de l'ordre de $\llbracket Lk \rrbracket$ quand k tend vers l'infini. Mais de combien le fait que la i -ème lettre tirée soit A affecte-t-il les probabilités des événements ultérieurs (A, j) dès que $j - i$ devient supérieur à LLk ? Comme nous allons le voir, d'une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$. En effet, d'une part, lorsque j passe de $i + 1$ à $i + 1 + \llbracket LLk \rrbracket$, les proportions des différentes espèces de boules contenues dans l'urne varient au plus d'une quantité

de l'ordre de $\frac{Lk}{Lk}$. D'autre part, la différence entre $P\{(A, i)\}$ et $P\{(A, j)\}$ peut provenir des règles de tirage. Mais ici encore, le Markov associé, c'est-à-dire la chaîne de Markov associée à (U, g) lorsque les tirages successifs se produisent avec remise, nous assure de l'influence exponentiellement décroissante de (A, i) sur (A, j) . Plus formellement, pour $k \geq i$, considérons le vecteur des probabilités à priori:

$$\vec{V}_k = \left(P\{(A, k) | (A, i)\}, P\{(B, k) | (A, i)\}, P\{(C, k) | (A, i)\} \right) .$$

Il est clair que nous pouvons écrire $\vec{V}_{k+1} = \vec{V}_k P_k$ et

$$\vec{V}_j = \vec{V}_i P_i P_{i+1} \dots P_\ell \dots P_{j-2} P_{j-1}$$

où P_ℓ désigne la matrice de transition à priori

$$\begin{pmatrix} 0 & P\{(B, \ell+1) | (A, \ell)\} & P\{(C, \ell+1) | (A, \ell)\} \\ P\{(A, \ell+1) | (B, \ell)\} & 0 & P\{(C, \ell+1) | (B, \ell)\} \\ P\{(A, \ell+1) | (C, \ell)\} & P\{(B, \ell+1) | (C, \ell)\} & 0 \end{pmatrix}$$

qui converge vers

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

lorsque N tend vers l'infini. En effet, cela revient à ne tenir compte dans l'arborescence aléatoire décrite par l'évolution du processus que des phrases pour lesquelles la i -ème lettre est A et ceci, sans changer la nature des probabilités à priori.

Puisque les probabilités de transition ne dépendent pas d'autre chose que des proportions de boules dans l'urne, P_ℓ ne diffère de P_i que de quantités au plus de l'ordre de $\frac{LLk}{Lk}$. P_ℓ peut donc s'écrire sous la forme $P_i[I + \varepsilon_\ell]$ où ε_ℓ désigne une matrice dont les termes sont au plus de l'ordre de $\frac{LLk}{Lk}$. \vec{V}_j peut donc s'écrire:

$$\vec{V}_i P_i^{j-1} \prod_{\ell=i}^{j-1} [I + \varepsilon_\ell].$$

De plus, $\prod_{\ell=i}^{j-1} [I + \varepsilon_\ell]$ peut évidemment s'écrire $(I + \varepsilon)$ où ε désigne une matrice qui tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$ puisque

$$\prod_{\ell=0}^{[LLk]} \left(1 + \frac{LLk}{Lk}\right) \simeq (1) \quad 1 + \frac{(LLk)^2}{Lk} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1.$$

P_i étant une matrice markovienne régulière, on peut donc lui appliquer les résultats connus, comme par exemple, ceux de Kemeny et Snell (1960) et nous obtenons

$$P_i^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} R$$

où toutes les lignes de la matrice R sont égales au vecteur $\vec{\alpha}$ qui est l'unique vecteur de probabilité vérifiant l'équation $\vec{\alpha} P_i = \vec{\alpha}$. Il est facile de voir que, pour la matrice

(1) $a(k) \simeq b(k) \Leftrightarrow \frac{a(k)}{b(k)} \xrightarrow[p.s.]{} 1$ quand $k \rightarrow \infty$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

cet unique vecteur de probabilité $\vec{\alpha}$ est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Donc

$P\{(A, j) \mid (A, i)\}$ pour les j au moins égaux à $i + 1 + \llbracket LLk \rrbracket$ converge vers $\frac{1}{3}$ quand k tend vers l'infini. Et donc, à l'aide de ce qui précède, nous avons

$$\sum_{j=i+1+\llbracket LLk \rrbracket}^k P\{(A, j) \mid (A, i)\} \approx \frac{k - \llbracket LLk \rrbracket - i}{3}$$

pour tout i fixé quand k tend vers l'infini, ce qui implique pour la somme (4) que

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3k^2} \sum_{i=1}^{k-1-\llbracket Lk \rrbracket} \sum_{j=i+1+\llbracket LLk \rrbracket}^k P\{(A, j) \mid (A, i)\} \\ & \approx \frac{1}{9} \frac{k(k-1)}{k^2} \text{ quand } k \text{ tend vers l'infini.} \end{aligned}$$

D'où

$$E(X_{A,k}^2) \approx \frac{1}{9} \frac{k(k-1)}{k} + \frac{1}{3k} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9k} + \frac{1}{3k} \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

puisque $\frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^k P\{(A, \ell)\} = \frac{1}{3k}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{A,k}) &= E(X_{A,k}^2) - \left[E(X_{A,k}) \right]^2 \\ &\approx \frac{1}{3k} - \frac{1}{9k} = \frac{2}{9k} \end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand k tend vers l'infini, toujours conditionnée par $\{k \leq v\}$.

$X_{A,k}$ tend donc en probabilité vers son espérance mathématique $\frac{1}{3}$ lorsque $k \rightarrow \infty$, $k \leq v$ et il en est de même pour toute autre lettre $L \in V$. Ceci signifie que la proportion de lettres de chaque sorte tirée parmi les k premières tend en probabilité vers $\frac{1}{3}$ lorsque k tend vers l'infini, $k \leq v$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon, \eta > 0, \exists L(\varepsilon, \eta) \text{ tel que } k \geq L(\varepsilon, \eta) \\ \Rightarrow P\left\{\sup_i \left| X_{i,k} - \frac{1}{3} \right| > \varepsilon \mid k \leq v\right\} < \eta \end{aligned} \quad (5)$$

En utilisant, à la manière de F. Pétry, cette propriété pour des valeurs de k de plus en plus grandes, nous obtiendrons le résultat cherché. Il est clair que $v \geq \frac{2N}{3}$ car la phrase la plus courte possible est obtenue en tirant toujours le même couple de couleurs (sauf pour la dernière boule).

D'après (5), si l'on sait que $v \geq k_0$, pour chaque sorte de lettre, la probabilité qu'au plus $\frac{k_0}{3} + k_0\varepsilon$ lettres de cette sorte figurent parmi les k_0 premières lettres de la phrase est supérieure ou égale à $1 - \eta$. Or, si cet événement est réalisé, il est clair que l'on peut tirer encore certainement, après les k_0 premières lettres, $\frac{2N}{3} - 2\left(\frac{k_0}{3} + k_0\varepsilon\right)$ lettres pour la même raison que précédemment. Ceci signifie que

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon, \eta > 0, \forall N \text{ assez grand, } \exists L(\varepsilon, \eta) \text{ tel que } k_0 \geq L(\varepsilon, \eta) \\ \Rightarrow P\left\{v \geq k_0 + \frac{2N}{3} - 2\left(\frac{k_0}{3} + k_0\varepsilon\right) \mid v \geq k_0\right\} > 1 - \eta \end{aligned} \quad (6)$$

Cette propriété (6), utilisée par récurrence à partir de la remarque que $P\left\{v \geq \frac{2N}{3}\right\} = 1$ implique que

$$\forall \varepsilon, \eta > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists N_0 (= 4L(\varepsilon, \eta)) \text{ tel que } N \geq N_0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \geq (1 - \eta)^k$$

En effet, supposons que $\frac{2N}{3} \geq \frac{8}{3} L(\varepsilon, \eta)$. L'équation (7) est vraie pour $k = 0$ puisque $P\left\{v \geq \frac{2N}{3}\right\} = 1$. Supposons donc qu'elle soit vraie pour k et démontrons-la pour $k + 1$.

Posons dans l'équation (6), $k_0 = \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i$. On a

$$k_0 \geq \frac{8}{3} L(\varepsilon, \eta) \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i = \frac{8}{3} L(\varepsilon, \eta) \frac{1 - \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^{k+1}}{\frac{2}{3} + 2\varepsilon}$$

$$\geq 2L(\varepsilon, \eta) \left[1 - \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^{k+1}\right] \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

$$\geq 2L(\varepsilon, \eta) \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right]$$

$$\geq L(\varepsilon, \eta)$$

Nous obtenons alors

$$P\left\{v \geq \frac{2N}{3} + \left[\frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right] \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right) \mid v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \geq 1 - \eta$$

c'est-à-dire

$$P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^{k+1} \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i \mid v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \geq 1 - \eta$$

D'où

$$\begin{aligned}
 & P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^{k+1} \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\
 &= P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^{k+1} \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i \mid v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\
 &\geq (1 - \eta) P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\
 &\geq (1 - \eta)^{k+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}
 \end{aligned}$$

Remarquant que $\frac{2N}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = N$, il suffit maintenant de choisir convenablement ε , η et k pour montrer que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \exists N_1 \text{ tel que } N \geq N_1 \Rightarrow P\left\{\frac{v}{N} > 1 - \alpha\right\} > 1 - \beta.$$

Choisissons tout d'abord k et ε tels que

$$\frac{2}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i > 1 - \beta, \text{ puis } \eta \text{ tel que } (1 - \eta)^k > 1 - \beta, \text{ enfin}$$

$L(\varepsilon, \eta)$ satisfaisant aux conditions de la propriété (6). Prenant alors N_1 égal à N_0 tel qu'il est défini par la propriété (7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 P\left\{\frac{v}{N} > 1 - \alpha\right\} &\geq P\left\{\frac{v}{N} \geq \frac{2}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \text{ d'après le choix de } \varepsilon \text{ et } \eta. \\
 &= P\left\{v \geq \frac{2N}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{3} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\
 &\geq (1 - \eta)^k \text{ d'après la relation (7)} \\
 &\geq 1 - \beta \text{ d'après le choix de } \eta.
 \end{aligned}$$

Donc, $\left(K_3, \left(\frac{N}{3}, \frac{N}{3}, \frac{N}{3}\right)\right)$ est bien une vidange forte.

Au cours de la démonstration précédente, nous avons fait appel à quelques résultats sur les chaînes de Markov régulières. Avant d'énoncer et de démontrer les prochains théorèmes, nous indiquons quelques résultats reliant la notion de graphe pondéré à celle d'ergodicité et de régularité dans les chaînes de Markov associées, résultats que le lecteur pourra trouver, par exemple, dans Roberts (1976). Nous savons que si le graphe G est fortement connexe, alors, quel que soit le vecteur \vec{N} à composantes positives, le Markov associé au graphe pondéré (G, \vec{N}) est ergodique. D'autre part, s'il existe un entier positif t tel qu'en partant d'un sommet quelconque x , on rencontre tout sommet quelconque y en exactement t étapes et ce, pour tout couple (x, y) de sommets de G , alors, quel que soit le vecteur \vec{N} à composantes positives, le Markov associé au graphe pondéré (G, \vec{N}) est régulier.

Nous avons aussi la propriété suivante qui nous permettra de démontrer le prochain théorème:

Proposition 7

Les sommets de tout graphe G fortement connexe peuvent être partagés en d classes périodiques C_0, C_1, \dots, C_{d-1} de telle sorte que tout chemin de longueur t issu d'un sommet de la classe C_ℓ ne puisse admettre comme extrémité terminale qu'un sommet de la classe $C_{\ell+t \bmod d}$. De plus, pour t assez grand, il existe des chemins de longueur t reliant tout sommet de la classe C_ℓ à n'importe lequel des sommets de la classe $C_{\ell+t \bmod d}$. Soit $T_{ii} = \{t > 0: \text{il existe un chemin de longueur } t \text{ reliant } V_i \text{ à } V_i\}$, alors, pour tout i , d est égal au plus grand commun diviseur des nombres de l'ensemble T_{ii} .

En cherchant à établir un théorème général à partir des idées contenues dans la démonstration de la proposition 6, nous nous sommes

rendus compte qu'au lieu d'exiger la régularité du Markov associé, il suffisait d'exiger que le Markov associé soit ergodique.

De plus, la proposition 7 nous permettra de réaliser une partition des sommets de G qui s'avérera utile dans la démonstration du prochain théorème.

Théorème 1

Soient G un graphe fortement connexe, point-symétrique et $\{1, 2, \dots, p\}$ l'ensemble de ses sommets.

Si $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_p)$ est tel que le rapport $\frac{N_i}{N}$ converge vers $\frac{1}{p}$, pour chaque i , quand N tend vers l'infini, alors, le graphe pondéré (G, \vec{N}) est une vidange forte.

Démonstration

1) Nous noterons $x(N) \sim y(N)$ si le rapport $\frac{x(N)}{y(N)}$ converge vers l'unité lorsque N tend vers l'infini. Etant donné que le graphe G est point-symétrique et que chacun de ses coefficients tend vers la même limite, nous avons pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$, pour tout $n \in N$,

$$P\{(i, n)\} \sim P\{(j, n)\} \text{ quand } N \rightarrow \infty. \quad (1)$$

En effet, il est clair qu'effectuer un automorphisme de G et la permutation correspondante des coefficients ne change pas la grammaire g ; or, il existe un automorphisme λ de G tel que $\lambda(i) = j$ et tous les coefficients ont la même limite $\frac{N}{p}$, donc

$$P\{(i, n)\} \sim P\{(\lambda(i), n)\} = P\{(j, n)\}.$$

Comme le graphe pondéré (G, \vec{N}) est une vidange (un graphe fortement connexe n'admet pas de sommet de demi-degré extérieur nul), nous savons que, pour tout n fixé, il existe un entier $N(n)$ tel que $N \geq N(n)$ implique $v > n$. Et, $N \geq N(n)$ implique

$$\sum_{i=1}^p P\{(i, n)\} = 1 .$$

La relation (1) signifie donc

$$P\{(i, n)\} \sim \frac{1}{p} \text{ pour tout } i, n \text{ quand } N \rightarrow \infty . \quad (2)$$

2) Le graphe G étant fortement connexe, nous savons, selon la proposition 7, que les sommets de G peuvent être partagés en d classes périodiques C_0, C_1, \dots, C_{d-1} . Soit $p_0 = n_0 = 0$ et $n_{\ell+1} = \text{Card}(C_\ell)$ pour $\ell = 0, 1, \dots, d-1$, nous posons $p_{\ell+1} = n_0 + n_1 + \dots + n_{\ell+1}$, $\ell = 0, 1, \dots, d-1$. Pour des raisons qui apparaîtront comme évidentes dans la suite, nous renumérotions les sommets de G de telle sorte que les sommets notés $p_\ell + 1, p_\ell + 2, \dots, p_{\ell+1} - 1, p_{\ell+1}$ soient les seuls éléments de la classe périodique C_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, \dots, d-1$. Il est bien clair que p_d est égal à p puisqu'un sommet ne peut pas appartenir à deux classes distinctes.

Soit maintenant $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ fixé, posons

$$X_{i,k} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k I_{(i,n)}$$

où $I_{(i,n)}$ désigne la fonction indicatrice de l'événement (i, n) et étudions cette variable aléatoire lorsque $v \geq k$. Il est clair que $X_{i,k}$ représente la proportion de lettres i tirées parmi les k premières lettres de la phrase. Nous obtenons

$$E(X_{i,k}) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k P\{(i, n)\} \sim \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \quad (3)$$

d'après la relation (2). De plus,

$$\begin{aligned} E(X_{i,k}^2) &= \frac{1}{k^2} \sum_{m, n=1}^k P\{(i, m) \cap (i, n)\} \\ &= \frac{1}{k^2} \left[2 \sum_{1 \leq m < n \leq k} P\{(i, m) \cap (i, n)\} + \sum_{m=1}^k P\{(i, m)\} \right] \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=m+1}^k P\{(i, m) \cap (i, n)\} + \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^k P\{(i, m)\} \end{aligned}$$

Etudions la somme

$$\frac{2}{k^2} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=m+1}^k P\{(i, m) \cap (i, n)\} . \quad (4)$$

En vertu de la proposition 7, nous savons que tout chemin issu de la classe C_ℓ ne peut admettre comme extrémité terminale qu'un sommet de la classe $C_{\ell+t \bmod d}$. Ceci signifie qu'en partant d'un sommet de la classe C_ℓ , on doit nécessairement parcourir un nombre d'étapes multiples de d pour le rencontrer à nouveau. Ainsi, seules les probabilités de la forme $P\{(i, m) \cap (i, m + \ell d)\}$ peuvent ne pas être nulles. La somme (4) est donc égale à la somme

$$\frac{2}{k^2} \sum_{m=1}^{k-d-1} \sum_{n=1}^{\ell_0(m)} P\{(i, m) \cap (i, m + nd)\}$$

où $\ell_0(m)$ est le plus grand entier tel que $m + \ell_0(m)d \leq k$,

c'est-à-dire $\ell_0(m) = \left\lfloor \frac{k-m}{d} \right\rfloor$. Nous pouvons évidemment écrire cette somme sous la forme

$$\frac{2}{k^2} \sum_{m=1}^{k-d-1} \sum_{n=1}^{\ell_0(m)} P\{(i, m)\} P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\} . \quad (5)$$

Considérons, à la place de la somme (5), la somme

$$\frac{2}{k^2} \sum_{m=1}^{k-d-1-\llbracket Lk \rrbracket} \sum_{n=1+\llbracket LLk \rrbracket}^{\ell_0(m)} P\{(i, m)\} P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\} . \quad (6)$$

Nous négligeons dans la somme (5) $\llbracket Lk \rrbracket \llbracket LLk \rrbracket$ termes. Puisque ces termes sont bornés par l'unité, leur contribution à la valeur de la somme (4) tend évidemment vers zéro lorsque k tend vers l'infini, et (6) \approx (5).

Puisque, nous l'avons vu, $P\{(i, m)\} \sim \frac{1}{p}$ pour tous les m qui nous intéressent, nous sommes conduits à étudier, conditionnée par l'événement $\{k \leq v\}$, la somme

$$\frac{2}{pk^2} \sum_{m=1}^{k-d-1-\llbracket Lk \rrbracket} \sum_{n=1+\llbracket LLk \rrbracket}^{\ell_0(m)} P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\} . \quad (7)$$

Considérons particulièrement les sommes

$$\sum_{n=1+\llbracket LLk \rrbracket}^{\ell_0(m)} P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\} . \quad (8)$$

Puisque m est au plus égal à $k - d - 1 - \llbracket Lk \rrbracket$, cette somme contient un nombre de termes au moins de l'ordre de $\frac{\llbracket Lk \rrbracket}{d}$ lorsque k tend vers l'infini. Mais de combien le fait que la m -ième lettre tirée soit i affecte-t-il les probabilités des événements ultérieurs $(i, m + nd)$ dès que n devient supérieur à Lk ? Comme nous allons le voir, d'une quantité dépendant de d . En fait, nous allons voir que $P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\}$ converge vers $\frac{d}{p}$ avec $\frac{1}{k}$ lorsque k tend vers l'infini. En effet, d'une part, lorsque n passe de 1 à $1 + \llbracket Lk \rrbracket$, les proportions de boules contenues dans l'urne varient au plus d'une quantité de l'ordre de $\frac{dLLk}{Lk}$. D'autre part, la différence entre $P\{(i, m + d) \mid (i, m)\}$ et $P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\}$ peut provenir des règles de tirage. Mais ici encore, le Markov associé à la classe périodique de i nous assure de l'influence exponentiellement décroissante de $(i, m + d)$ sur $(i, m + nd)$, chacun de ces événements étant conditionné par l'événement $\{(i, m)\}$. De plus, le facteur multiplicatif d est directement relié aux relations des classes périodiques entre elles.

Plus formellement, pour $\ell \geq m$, considérons le vecteur

$$\vec{V}_\ell = \left(P\{(1, \ell) \mid (i, m)\}, P\{(2, \ell) \mid (i, m)\}, \dots, P\{(p, \ell) \mid (i, m)\} \right).$$

Nous pouvons écrire $\vec{V}_{\ell+1} = \vec{V}_\ell P_\ell$ où P_ℓ désigne la matrice des probabilités de transition à priori

$$\begin{pmatrix} P\{(1, \ell+1) \mid (1, \ell)\} & P\{(2, \ell+1) \mid (1, \ell)\} & \dots & P\{(p, \ell+1) \mid (1, \ell)\} \\ P\{(1, \ell+1) \mid (2, \ell)\} & P\{(2, \ell+1) \mid (2, \ell)\} & \dots & P\{(p, \ell+1) \mid (2, \ell)\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P\{(1, \ell+1) \mid (p, \ell)\} & P\{(2, \ell+1) \mid (p, \ell)\} & \dots & P\{(p, \ell+1) \mid (p, \ell)\} \end{pmatrix}$$

qui converge vers la matrice P du Markov associé lorsque N tend vers l'infini. En effet, cela revient à ne tenir compte dans l'arborescence aléatoire décrite par l'évolution du processus que des phrases pour lesquelles la m -ième lettre est une boule de couleur i , et ceci, sans changer la nature des probabilités à priori. Nous pouvons donc écrire pour $1 \leq n \leq 1 + \llbracket LLk \rrbracket$

$$\vec{V}_{m+nd} = \vec{V}_m P_m P_{m+1} \dots P_\ell \dots P_{m+nd-1}.$$

Puisque les probabilités de transition ne dépendent pas d'autre chose que des proportions de boules dans l'urne, P_ℓ ne diffère de P_m que de quantités au plus de l'ordre de $\frac{dLLk}{Lk}$. P_ℓ peut donc s'écrire sous la forme $P_m(I + \varepsilon_\ell)$ où ε_ℓ désigne une matrice dont les termes sont au plus de l'ordre de $\frac{dLLk}{Lk}$. Nous pouvons donc écrire

$$\vec{V}_{m+nd} = \vec{V}_m P_m^{nd} \prod_{\ell=m}^{m+nd-1} (I + \varepsilon_\ell).$$

Mais la matrice $\prod_{\ell=m}^{m+nd-1} (I + \varepsilon_\ell)$ peut s'écrire $I + \varepsilon$ où ε est une

matrice dont tous les éléments tendent vers zéro avec $\frac{1}{k}$ puisque

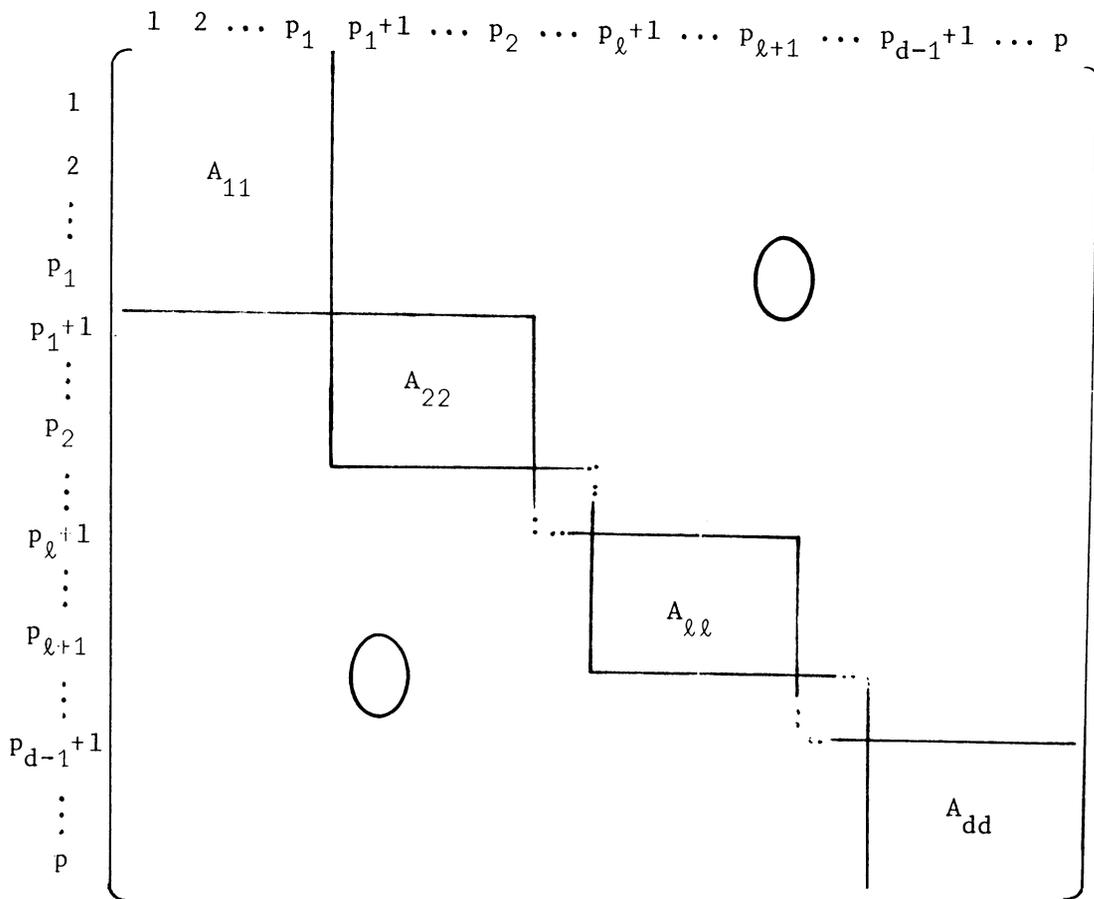
$$\prod_{\ell=0}^{d} \left(1 + \frac{d_{LLk}}{Lk} \right) \approx 1 + \frac{d^2 (LLk)^2}{Lk}$$

qui converge vers l'unité lorsque k tend vers l'infini.

P_m étant une matrice markovienne ergodique, on peut donc lui appliquer les résultats connus, comme par exemple, ceux de Kemeny et Snell (1960) et nous avons

$$\left(P_m^d \right)^n \rightarrow A_0 = ((a_{ij})) \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

où la matrice A_0 est de la forme



où pour chaque j , les lignes de la sous-matrice diagonale A_{jj} sont identiques. En fait, nous avons

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\sum_{t \in C_\ell} \alpha_t} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont dans la même classe} \\ & \text{périodique } C_\ell \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

le vecteur $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ étant l'unique vecteur de probabilité vérifiant l'équation $\vec{\alpha} P_m = \vec{\alpha}$. De plus, si la matrice A désigne la matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur $\vec{\alpha}$, nous savons aussi que

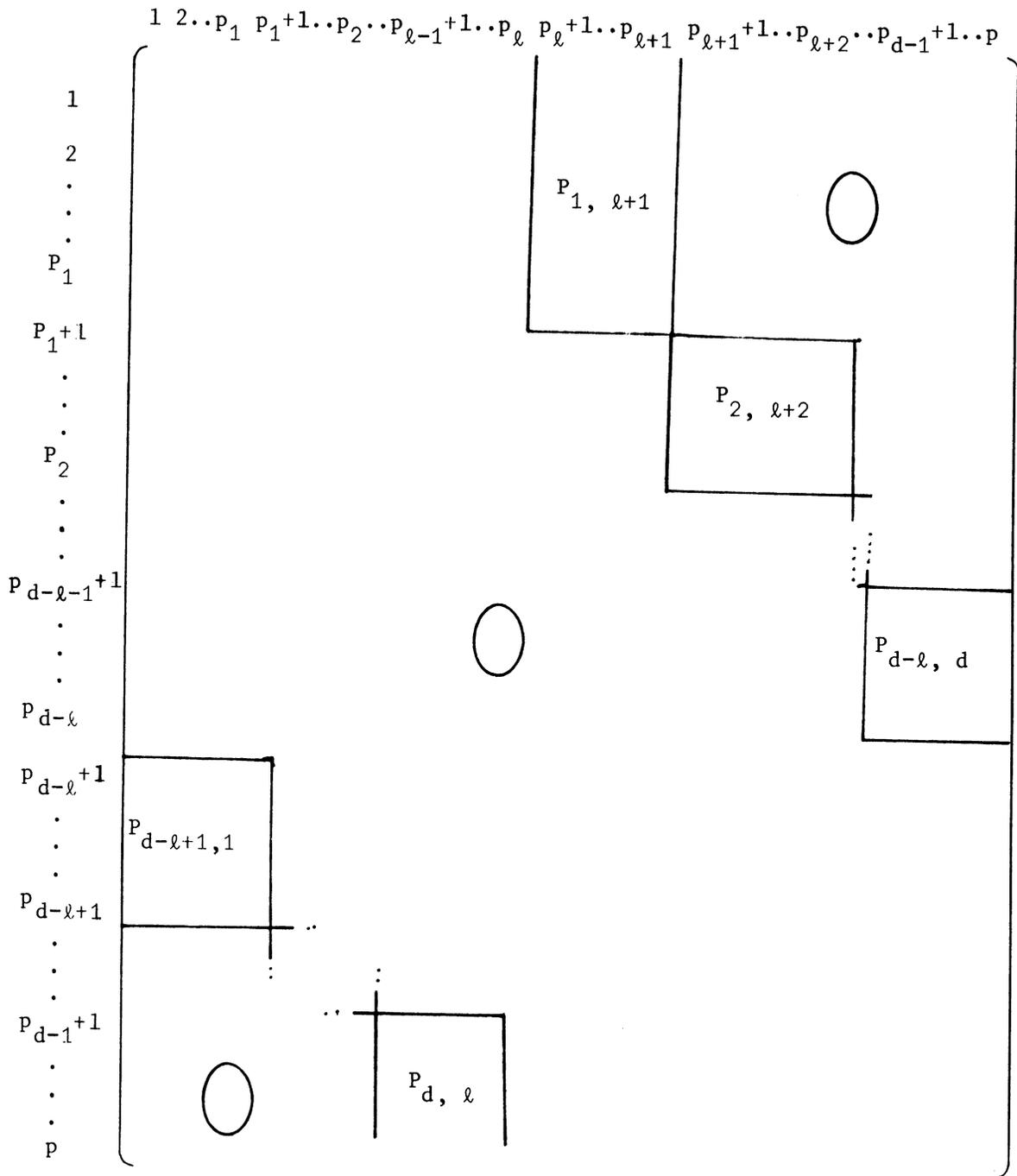
$$A = \frac{1}{d} \sum_{\ell=0}^{d-1} P_m^\ell A_0,$$

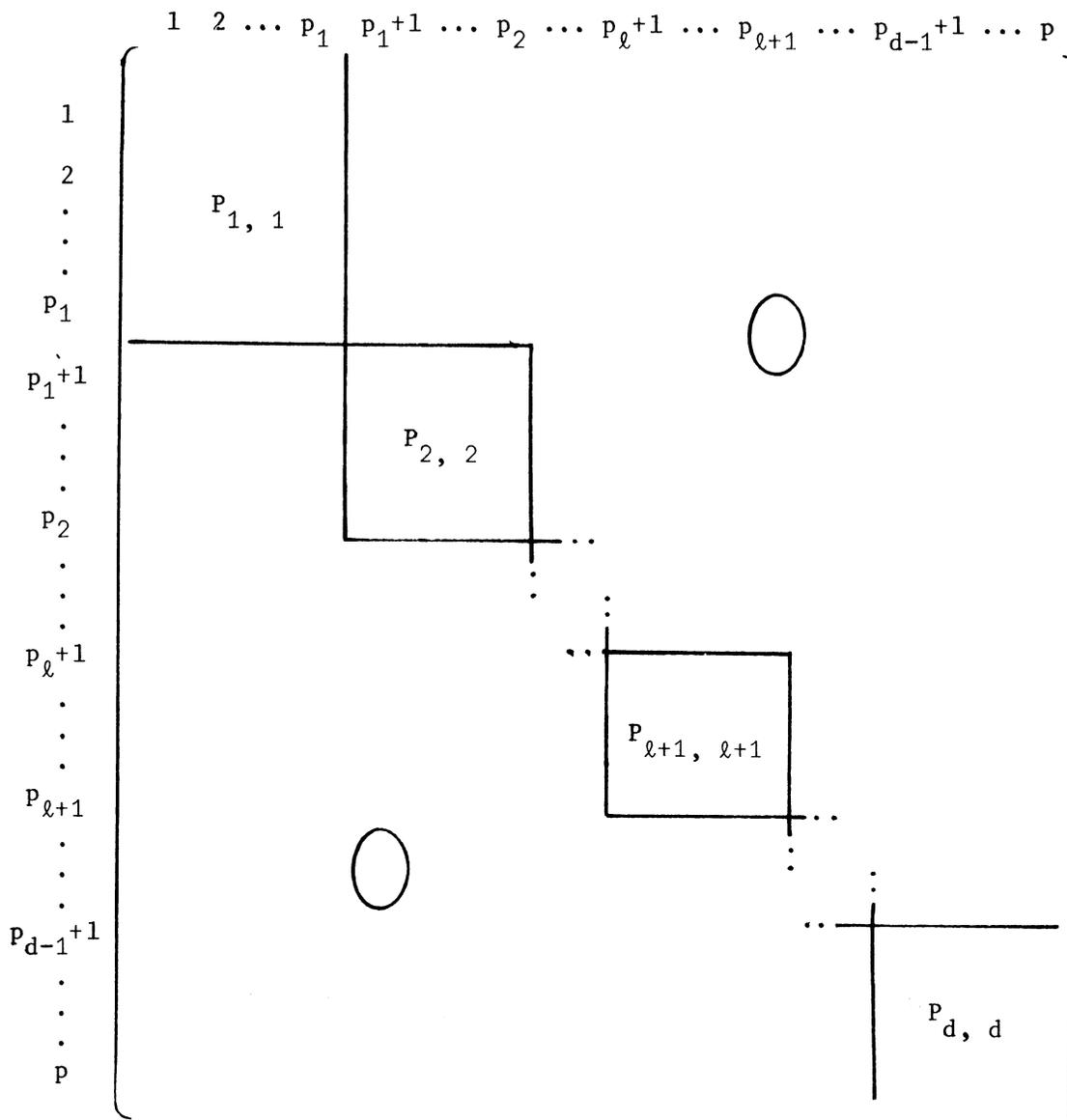
ce qui implique que $\sum_{j \in C_\ell} \alpha_j = \frac{1}{d}$ pour tout $\ell = 0, 1, 2, \dots, d-1$.

En effet, pour tout $\ell = 1, 2, \dots, d-1$, la matrice P_m^ℓ est de la forme indiquée à la page 30, où seules les matrices de la forme $P_{i, i+\ell \bmod d}$ peuvent ne pas être nulles puisque d'après la proposition 7, tout chemin de longueur ℓ issu de la classe C_t admet comme extrémité terminale un sommet de la classe $C_{t+\ell \bmod d}$. Il est bien clair que pour tout $\ell = 1, 2, \dots, d-1$, les sous-matrices diagonales P_{jj}^ℓ sont toutes nulles ce qui implique, pour la matrice

$$\frac{1}{d} \sum_{\ell=0}^{d-1} P_m^\ell,$$

qu'elle sera de la forme indiquée à la page 31.





où chaque matrice $P_{i,i}$ est une matrice diagonale dont les éléments non-nuls sont tous égaux à $\frac{1}{d}$, $i = 1, 2, \dots, d$; les autres éléments de cette matrice étant nuls. Mais, il est immédiat qu'alors la matrice

$$\frac{1}{d} \sum_{\ell=0}^{d-1} P^{\ell} A_0$$

est égale à la matrice $B = (b_{ij})$ où

$$b_{ij} = \frac{1}{d} \frac{\alpha_i}{\sum_{t \in C_\ell} \alpha_t}$$

pour tout i, j, ℓ . Mais la matrice B est égale à la matrice A et donc $\sum_{t \in C_\ell} \alpha_t = \frac{1}{d}$ pour tout $\ell = 0, 1, 2, \dots, d-1$ et nous

avons aussi

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} d\alpha_j & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont dans la même classe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, le graphe G étant point-symétrique donc régulier, soit r son degré. Il est facile de voir que la matrice P du Markov associé est une matrice bistochastique admettant exactement r éléments non-nuls égaux dans chacune de ses lignes et de ses colonnes. Pour cette matrice, nous trouvons facilement que le vecteur $\vec{\alpha}$ invariant est $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p})$. Mais puisque $P_m \sim P$ quand N tend vers l'infini, nous obtenons

$$\vec{V}_m P_m^{nd} \approx \vec{\beta}$$

lorsque n tend vers l'infini, puisque le vecteur \vec{V}_m est le vecteur dont la composante en position i est l'unité, les autres étant toutes nulles, et où le vecteur $\vec{\beta}$ est défini par

$$\beta_j = \begin{cases} d\alpha_j & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont dans la même classe périodique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $j = 1, 2, \dots, p$.

Donc, $P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\}$, pour les n au moins égaux à $1 + \llbracket LLk \rrbracket$, converge vers $\frac{d}{p}$ lorsque k tend vers l'infini. A l'aide de ce qui précède, il est clair que

$$\sum_{n=1+\llbracket LLk \rrbracket}^{\ell_0(m)} P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\} \approx \frac{d}{p} (\ell_0(m) - \llbracket LLk \rrbracket)$$

pour tout m fixé, quand k tend vers l'infini; ceci implique pour la somme (7), étant donné que $\ell_0(m) = \left\lfloor \frac{k-m}{d} \right\rfloor$,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{pk^2} \sum_{m=1}^{k-d-1-\llbracket Lk \rrbracket} \sum_{n=1+\llbracket LLk \rrbracket}^{\ell_0(m)} P\{(i, m + nd) \mid (i, m)\} \\ & \approx \frac{2d}{p^2 k^2} \sum_{m=1}^{k-d-1-\llbracket Lk \rrbracket} \left(\left\lfloor \frac{k-m}{d} \right\rfloor - \llbracket LLk \rrbracket \right) \\ & \approx \frac{2d}{p^2 k^2} \frac{k(k-1)}{2d} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 k} \end{aligned}$$

Donc

$$E(X_{i,k}^2) \approx \frac{1}{p^2} + \frac{p-1}{p^2 k}$$

puisque

$$\frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^k P\{(i, m)\} \sim \frac{1}{pk},$$

quand N tend vers l'infini. Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{i,k}) &= E(X_{i,k}^2) - (E(X_{i,k}))^2 \\ &\approx \frac{p-1}{p^2 k} \end{aligned}$$

qui converge vers zéro lorsque k tend vers l'infini, toujours conditionné par l'événement $\{k \leq v\}$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, $X_{i,k}$ tend donc en probabilité vers son espérance mathématique $\frac{1}{p}$ lorsque k tend vers l'infini, $k \leq v$. Ceci signifie que la proportion de lettres de chaque sorte tirées parmi les k premières tend en probabilité vers $\frac{1}{p}$ lorsque k tend vers l'infini, $k \leq v$. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon, \eta > 0, \exists L(\varepsilon, \eta) \text{ tel que } k \geq L(\varepsilon, \eta) \\ \Rightarrow P\left\{\sup_i \left| X_{i,k} - \frac{1}{p} \right| > \varepsilon \mid k \leq v\right\} < \eta \end{aligned} \quad (9)$$

3) Nous pouvons maintenant, à la manière de F. Pétry, démontrer que (G, \vec{N}) est une vidange forte en utilisant la propriété (9) par récurrence. Soit $N_0 = \inf_i N_i$, il est clair que $v \geq 2N_0$ car la phrase la plus courte possible est obtenue en tirant toujours le même couple de lettres dans le cas non-orienté (le même ensemble de lettres formant un circuit minimal dans le cas orienté).

D'après la relation (9), si l'on sait que $k_0 \leq v$, pour chaque sorte de lettre, la probabilité qu'au plus $\frac{k_0}{p} + k_0\varepsilon$ lettres de cette sorte figurent parmi les k_0 premières lettres de la phrase est supérieure ou égale à $1 - \eta$ et donc la probabilité qu'au plus $\frac{k_0}{p} + k_0\varepsilon$ boules de chaque couleur aient été tirées parmi les k_0 premières lettres est supérieure ou égale à $1 - \eta$. Or, si cet événement est réalisé, il est clair que nous pouvons certainement encore tirer, après les k_0 premières boules, $2N_0 - 2\left(\frac{k_0}{p} + k_0\varepsilon\right)$ boules, pour la même raison que précédemment, parmi les boules restantes. Ceci signifie que

$$\forall \varepsilon, \eta > 0, \exists L(\varepsilon, \eta) \text{ tel que } k_0 \geq L(\varepsilon, \eta)$$

$$\Rightarrow P\left\{v \geq k_0 + 2N_0 - 2\left(\frac{k_0}{p} + k_0\varepsilon\right) \mid v \geq k_0\right\} \geq 1 - \eta$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon, \eta > 0, \forall N \text{ assez grand, } \exists L(\varepsilon, \eta) \text{ tel que } k_0 \geq L(\varepsilon, \eta)$$

$$\Rightarrow P\left\{v \geq 2N_0 + k_0\left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right) \mid v \geq k_0\right\} \geq 1 - \eta. \quad (10)$$

Utilisons la relation (10) par récurrence pour montrer que

$$P\left\{v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \geq (1 - \eta)^k \quad (11)$$

sous les mêmes hypothèses et pour tout k si $N_0 \geq L(\varepsilon, \eta)$. La relation (11) est vraie pour $k = 0$, dès que N est assez grand pour que $N_0 \geq L(\varepsilon, \eta)$ puisque $P\left\{v \geq 2N_0\right\} = 1$. Supposons donc qu'elle est vraie pour k et démontrons qu'elle le demeure pour $k + 1$. En posant dans la relation (10)

$$k_0 = 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i,$$

nous obtenons

$$P\left\{v \geq 2N_0 + 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right) \mid$$

$$v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \geq 1 - \eta$$

c'est-à-dire

$$P\left\{v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^{k+1} \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i \mid v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \geq 1 - \eta .$$

d'où

$$\begin{aligned} & P\left\{v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^{k+1} \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\ &= P\left\{v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^{k+1} \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i \mid v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \cdot \\ & \quad P\left\{v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\ & \geq (1 - \eta) P\left\{v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i\right\} \\ & \geq (1 - \eta)^{k+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence,} \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (11). Pour montrer que (G, \vec{N}) est une vidange forte, il suffit de montrer que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \exists N \text{ tel que } N \geq N \Rightarrow P\left\{\frac{v}{N} \geq 1 - \alpha\right\} \geq 1 - \beta,$$

ce que nous ferons par des choix convenables des valeurs de k, ε, η et N dans la relation (11).

$$\text{Puisque } \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^i = \frac{p}{2}, \text{ choisissons } k \text{ et } \varepsilon \text{ de telle}$$

sorte que

$$\frac{2}{p} \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon\right)^i \geq 1 - \frac{\alpha}{2},$$

puis η tel que $(1 - \eta)^k \geq 1 - \beta$. Choisissons $L(\varepsilon, \eta)$ selon la

relation (10), N_1 tel que $N_0 \geq L(\varepsilon, \eta)$ pour tout $N \geq N_1$ et N_2 tel que, pour $N \geq N_2$, nous avons

$$\left| 2 \frac{N_0}{N} - \frac{2}{p} \right| \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon \right)^i \leq \frac{\alpha}{2}$$

ce qui est toujours possible puisque $\frac{N_0}{N}$ converge vers $\frac{1}{p}$ lorsque N tend vers l'infini et puisque

$$\sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon \right)^i$$

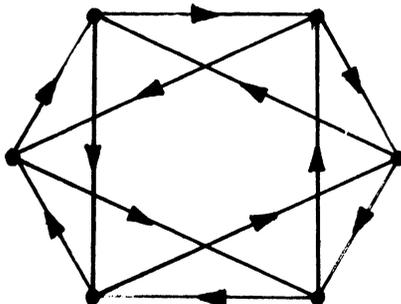
est désormais fixé. Finalement, posons $N = \sup(N_1, N_2)$. Alors pour $N \geq N$, nous avons

$$\begin{aligned} P\left\{ \frac{v}{N} \geq 1 - \alpha \right\} &= P\left\{ v \geq N \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \\ &\geq P\left\{ v \geq N \left[\frac{2}{p} \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon \right)^i + 2 \left(\frac{N_0}{N} - \frac{2}{p} \right) \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon \right)^i \right] \right\} \\ &= P\left\{ v \geq 2N_0 \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{2}{p} - 2\varepsilon \right)^i \right\} \\ &\geq (1 - \eta)^k \\ &\geq 1 - \beta \end{aligned}$$

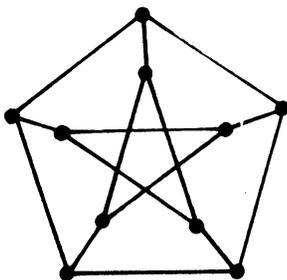
ce qui démontre que (G, \vec{N}) est une vidange forte.

Plusieurs types de graphes pondérés vérifient les hypothèses de ce théorème. Nous savons, par exemple, que les graphes complets sans boucle à p sommets et que les cycles à p sommets sont point-symétriques. Donc, dès que l'on munit les sommets de ces graphes de coefficients à la limite tous de l'ordre de $\frac{N}{p}$, on obtient des vidanges fortes. Ainsi, le théorème précédent nous permet de progresser dans la

vérification de l'exactitude de la conjecture de Pétry. Mais, il nous permet aussi d'affirmer que des graphes pondérés, autres que ceux associés aux vidanges totales, sont des vidanges fortes. Comme l'a montré Pétry (1971), le graphe



est point-symétrique. Donc, en munissant ses sommets de coefficients de l'ordre de $\frac{N}{6}$, nous obtenons une vidange forte. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il en est de même pour le graphe de Peterson



si à chacun de ses sommets, on associe un coefficient de l'ordre de $\frac{N}{10}$.

CHAPITRE III

DE PLUS EN PLUS DE VIDANGES FORTES

Nous allons voir maintenant qu'il n'est pas nécessaire que chacun des coefficients du graphe pondéré converge vers la même limite, ni que le graphe G soit point-symétrique pour que (G, \vec{N}) soit une vidange forte.

Théorème 2

Soit un graphe G fortement convexe à p sommets notés $\{1, 2, \dots, p\}$. Si $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_p)$ est tel que $N_i = \alpha_i N$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ où $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ est l'unique vecteur de probabilité vérifiant l'équation $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$, P étant la matrice des probabilités de transition du Markov associé, alors, (G, \vec{N}) est une vidange forte.

Démonstration

Nous montrerons en premier lieu que

$$P\{(i, n)\} = \alpha_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (1)$$

et pour tout n compris entre 1 et N , toujours sous l'hypothèse que $v \geq n$, v étant le nombre de boules sorties de l'urne lors d'un tirage selon la grammaire g . A partir de la relation (1), le résultat s'en suivra d'une manière tout-à-fait analogue à celle de la démonstration du théorème 1.

Plus précisément, soit \vec{V}_ℓ le vecteur des probabilités à priori

$$(P\{(1, \ell)\}, P\{(2, \ell)\}, \dots, P\{(p, \ell)\})$$

et soit P_ℓ la matrice des probabilités de transition à priori

$$\begin{pmatrix} P\{(1, \ell+1) \mid (1, \ell)\} & P\{(2, \ell+1) \mid (1, \ell)\} & \dots & P\{(p, \ell+1) \mid (1, \ell)\} \\ P\{(1, \ell+1) \mid (2, \ell)\} & P\{(2, \ell+1) \mid (2, \ell)\} & \dots & P\{(p, \ell+1) \mid (2, \ell)\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P\{(1, \ell+1) \mid (p, \ell)\} & P\{(2, \ell+1) \mid (p, \ell)\} & \dots & P\{(p, \ell+1) \mid (p, \ell)\} \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire $\vec{V}_{\ell+1} = \vec{V}_\ell P_\ell$. Il est clair que $V_1 = \vec{\alpha}$. Nous allons montrer maintenant que la matrice P_1 est égale à la matrice P du Markov associé, ce qui impliquera que $\vec{V}_2 = \vec{\alpha}P_1 = \vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$. Un raisonnement par récurrence nous permettra alors d'obtenir facilement la relation (1).

En effet, si la première boule tirée est de couleur i , la matrice $P_1(i) = ((p_{jk}^1(i)))_{j,k=1,2,\dots,p}$ des probabilités de transition est telle que, selon la grammaire g ,

$$P_{jk}^1(i) = \begin{cases} \frac{N_k^1(i)}{\sum_{\{\ell: (j, \ell) \in A(G)\}} N_\ell^1(i)} & \text{si l'arc } (j, k) \in A(G), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $N_\ell^1(i)$ désigne le nombre de boules de couleur ℓ restant dans l'urne après le tirage de la boule de couleur $i, \ell = 1, 2, \dots, p$.

D'cù,

$$\begin{aligned} N_i^1(i) &= N_i - 1 = \alpha_i N - 1 \\ N_\ell^1(i) &= N_\ell = \alpha_\ell N \text{ pour } \ell \neq i. \end{aligned} \tag{2}$$

Mais la matrice P_1 des probabilités de transition à priori est égale à l'espérance mathématique

$$\sum_{i=1}^p P\{(i,1)\} P_1(i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i P_1(i)$$

puisque la probabilité de tirer une boule de couleur i comme première boule est α_i . Soient $j, k \in \{1, 2, \dots, p\}$ fixés. S'il n'y a pas d'arc $(j, k) \in A(G)$, nous savons que $p_{jk}^1(i)$ est nulle pour tout $i = 1, 2, \dots, p$. D'où,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i p_{jk}^1(i) = 0.$$

Mais, dans la matrice P du Markov associé, nous avons aussi que p_{jk} est nulle et donc

$$p_{jk} = \sum_{i=1}^p \alpha_i p_{jk}^1(i).$$

Maintenant, si l'arc (j,k) appartient à $A(G)$, nous savons que

$$p_{jk}^1(i) = \frac{N_k^1(i)}{\sum_{\{\ell: (j,\ell) \in A(G)\}} N_\ell^1(i)} \text{ pour tout } i.$$

Calculons la valeur de la probabilité de transition à priori $P\{(k,2) \mid (j,1)\}$. Nous avons

$$P\{(k,2) \mid (j,1)\} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{N_k^1(i)}{\sum_{\{\ell: (j,\ell) \in A(G)\}} N_\ell^1(i)}$$

Afin d'alléger la notation, nous posons

$$L = \{\ell: (j,\ell) \in A(G)\},$$

$$I_1 = \{i: (j,i) \in A(G) \text{ et } k \neq i\},$$

$$I_2 = \{i: (j,i) \notin A(G)\}.$$

Puisque par hypothèse j et k sont fixés et que l'arc (j,k) est un arc du graphe G , il est clair que les sous-ensembles I_1 , I_2 et $\{k\}$ forment une partition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$ des sommets de G et que L est égal à la réunion des sous-ensembles I_1 et $\{k\}$.

Nous obtenons alors

$$P\{(k,2) \mid (j,1)\} = \sum_{i \in I_1} \frac{\alpha_i N_k^1(i)}{\sum_{\ell \in L} N_\ell^1(i)} + \frac{\alpha_k N_k^1(k)}{\sum_{\ell \in L} N_\ell^1(i)} + \sum_{i \in I_2} \frac{\alpha_i N_k^1(i)}{\sum_{\ell \in L} N_\ell^1(i)}. \quad (3)$$

Mais pour $i \in I_1$, nous savons que, selon la relation (2)

$$N_k^1(i) = \alpha_k N$$

puisque $i \neq k$ et étant donné que $i \in L$, nous savons que

$$\sum_{\ell \in L} N_\ell^1(i) = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N - 1.$$

De plus, pour $i = k$, il est clair que

$$N_k^1(k) = \alpha_k N - 1$$

et

$$\sum_{\ell \in L} N_\ell^1(k) = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N - 1.$$

Et toujours selon la relation (2), pour $i \in I_2$ - ce qui implique, d'après une remarque précédente, $i \notin L$, - nous obtenons

$$N_k^1(i) = \alpha_k N$$

et

$$\sum_{\ell \in L} N_\ell^1(i) = \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N.$$

Regroupant tous ces résultats dans la relation (3), nous obtenons

la probabilité de transition à priori $P\{(k,2) \mid (j,1)\}$

$$\begin{aligned} & \sim \sum_{i \in I_1} \frac{\alpha_i \alpha_k N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} + \frac{\alpha_k (\alpha_k N-1)}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} + \sum_{i \in I_2} \frac{\alpha_i \alpha_k N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N} \\ & = \alpha_k \sum_{i \in L} \frac{\alpha_i N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} - \frac{\alpha_k}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} + \alpha_k \sum_{i \notin L} \frac{\alpha_i N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N} \end{aligned}$$

puisque $L = I_1 \cup \{k\} = \{1, 2, \dots, p\} \setminus I_2$

$$\begin{aligned} & = \alpha_k \frac{\sum_{i \in L} \alpha_i N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} - \alpha_k \frac{1}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} + \alpha_k \frac{\sum_{i \in L} \alpha_i N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N} \\ & = \alpha_k \frac{\sum_{i \in L} \alpha_i N-1}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N-1} + \alpha_k \frac{N - \sum_{i \in L} \alpha_i N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N} \end{aligned} \tag{4}$$

puisque

$$\sum_{i \in L} \alpha_i N + \sum_{i \notin L} \alpha_i N = N.$$

La relation (4) est donc égale à

$$\alpha_k + \frac{\alpha_k N}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell N} - \alpha_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell}.$$

Cette dernière valeur correspond exactement à la probabilité P_{jk} d'aller du sommet j au sommet k dans le Markov associé et donc

$$P\{(k,2) \mid (j,1)\} = P_{jk} .$$

D'où, finalement,

$$P\{(k,2) \mid (j,1)\} = P_{jk} \text{ pour tout } j,k$$

c'est-à-dire $P_1 = P$. Sachant que $\vec{V}_2 = \vec{\alpha} P_1$, il est clair que $\vec{V}_2 = \vec{\alpha}$, c'est-à-dire

$$P\{(i,\ell)\} = \alpha_i \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, p.$$

Par récurrence, il est maintenant facile d'obtenir la relation (1). En effet, supposons que

$$P\{(i,\ell)\} = \alpha_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p$$

c'est-à-dire

$$\vec{V}_\ell = \vec{\alpha}, \text{ pour } \ell = 1, 2, \dots, n$$

Etant donné que

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n P_n = \vec{\alpha} P_n$$

il nous suffit de montrer que

$$P_n = P$$

pour obtenir

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{\alpha}$$

puisque $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$ d'après les hypothèses du théorème.

Déterminons comment varient, à priori, les nombres N_i de boules de couleur i après le tirage de n boules de l'urne. Puisque

le vecteur des probabilités à priori \vec{V}_ℓ est égal au vecteur $\vec{\alpha}$ selon l'hypothèse de récurrence, l'espérance mathématique du nombre de boules de couleur i tirées est $\alpha_i \ell$ et donc l'espérance du nombre de boules de couleur i restant dans l'urne est $\alpha_i N - \alpha_i \ell$, c'est-à-dire $\alpha_i(N - \ell)$, pour $\ell = 1, 2, \dots, n$. En particulier, l'espérance mathématique du nombre de boules de couleur i restant dans l'urne après le tirage de $n-1$ boules est $\alpha_i(N - n+1)$.

Mais, si la n -ième boule tirée est de couleur i , la matrice $P_n(i) = ((p_{jk}^n(i)))_{j,k=1,2,\dots,p}$ des probabilités de transition est telle que, selon la grammaire g ,

$$P_{jk}^n(i) = \begin{cases} \frac{N_k^n(i)}{\sum_{\{\ell: (j,\ell) \in A(G)\}} N_\ell^n(i)} & \text{si } (j,k) \in A(G) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $N_\ell^n(i)$ désigne le nombre moyen de boules de couleur ℓ dans l'urne si la n -ième boule tirée est de couleur $i, \ell = 1, 2, \dots, p$.

D'où

$$\begin{aligned} N_i^n(i) &= N_i^{n-1}(i) - 1 = \alpha_i(N - n+1) - 1 \\ N_\ell^n(i) &= N_\ell^{n-1}(i) = \alpha_\ell(N - n+1) \text{ pour } \ell \neq i. \end{aligned} \tag{5}$$

Mais la matrice des probabilités de transition à priori est égale à l'espérance mathématique

$$\sum_{i=1}^p P\{(i,n)\} P_n(i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i P_n(i)$$

puisque

$$P\{(i,n)\} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Soient $j, k \in \{1, 2, \dots, p\}$ fixés. Si l'arc (j, k) n'est pas un arc du graphe G , il est clair que $p_{jk}^n(i)$ est nulle pour tout $i = 1, 2, \dots, p$. D'où

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i p_{jk}^n(i) = 0$$

et puisque dans le Markov associé, la probabilité p_{jk} est aussi nulle, nous obtenons l'égalité cherchée.

Si maintenant l'arc (j, k) est un arc du graphe G , nous savons que

$$P_{jk}^n(i) = \frac{N_k^n(i)}{\sum_{\{\ell: (j, \ell) \in A(G)\}} N_\ell^n(i)} \quad \text{pour tout } i.$$

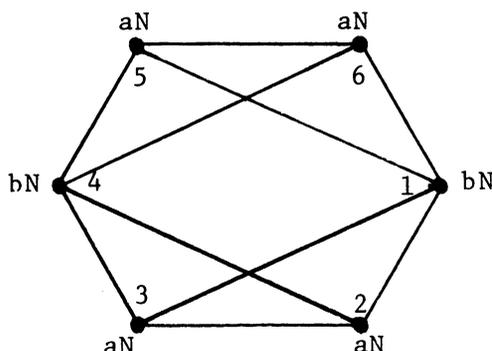
Et, d'une manière tout-à-fait identique à celle utilisée pour le calcul de $P\{(k, 2) \mid (j, 1)\}$, il est facile de vérifier, à l'aide de la relation (5), que

$$P\{(k, n+1) \mid (j, n)\} = \frac{\alpha_k (N - n+1)}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell (N - n+1)} = \frac{\alpha_k}{\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell} = P_{jk}.$$

Il suffit, en effet, de remplacer les $N_\ell^1(i)$ par les $N_\ell^n(i)$ et N par $N_\ell - n+1$. Nous avons donc montré que $P_n = P$, d'où $\vec{V}_{n+1} = \vec{\alpha}$, ce qui termine la récurrence. La relation (1) est donc démontrée.

La suite de la démonstration est tout-à-fait identique à celle du théorème 1. En effet, il suffit à la partie 2 de la démonstration de remplacer la valeur $\frac{1}{p}$ par α_1 et à la partie 3 de remplacer $\frac{1}{p}$ par $\alpha_0 = \min_i \alpha_i$. Donc, le graphe pondéré (G, \vec{N}) est une vidange forte, ce que nous voulions obtenir.

Développons maintenant en détail un exemple d'application du dernier théorème. Considérons le graphe pondéré suivant



où $a > 0$, $b > 0$, $2a + b = \frac{1}{2}$. Ce graphe est évidemment fortement connexe. Il nous faut maintenant trouver le vecteur de probabilité $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ invariant par la matrice P du Markov associé. Celle-ci dépend, bien sûr, des poids associés à chaque sommet. Dans l'attribution de ces poids, nous tenons compte de certaines propriétés partielles de symétrie. Ainsi, par exemple, en considérant qu'il est possible de permuter entre eux les sommets 2, 3, 5 et 6, nous avons associé à chacun de ces sommets un poids identique. La matrice P est égale à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{b}{a+2b} & 0 & \frac{a}{a+2b} & \frac{b}{a+2b} & 0 & 0 \\ \frac{b}{a+2b} & \frac{a}{a+2b} & 0 & \frac{b}{a+2b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{b}{a+2b} & 0 & 0 & \frac{b}{a+2b} & 0 & \frac{a}{a+2b} \\ \frac{b}{a+2b} & 0 & 0 & \frac{b}{a+2b} & \frac{a}{a+2b} & 0 \end{pmatrix}$$

et en résolvant le système d'équations linéaires $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$, sous la contrainte $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 1$ et $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 6$, nous obtenons

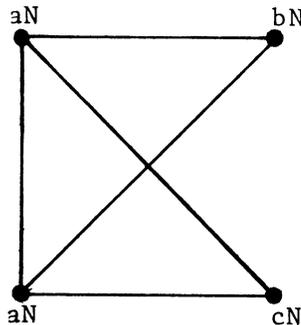
$$\alpha_1 = \alpha_4 = \frac{b}{a + 4b} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = \frac{a + 2b}{4(a + 4b)}.$$

Mais, afin que l'hypothèse du théorème 2 soit vérifiée, il faut aussi que $\alpha_1 = b$ et $\alpha_2 = a$ ce qui est vrai si et seulement si

$$a = \frac{1}{7}, \quad b = \frac{3}{14}.$$

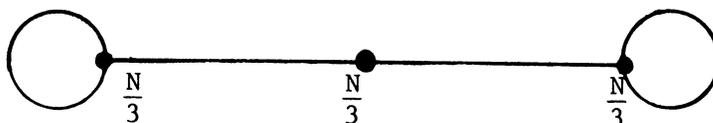
Donc, pour $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{3}{14}$, le graphe pondéré ci-dessus est effectivement une vidange forte.

De plus, il n'est pas vrai que, pour un graphe fortement connexe donné, il ne puisse exister qu'un seul vecteur de proportions donné pour que le graphe pondéré associé soit une vidange forte. En effet, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le graphe pondéré ci-dessous



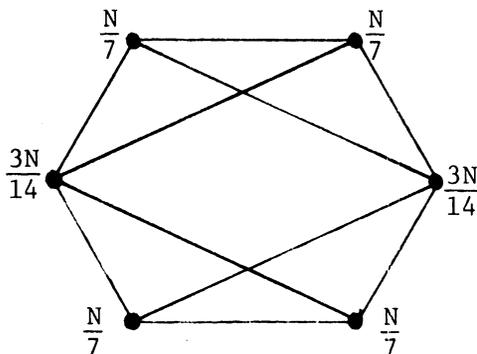
est une vidange forte dès que $a = \frac{1}{3}$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ et $b + c = \frac{1}{3}$.

Le lecteur pourra aussi vérifier que le graphe pondéré

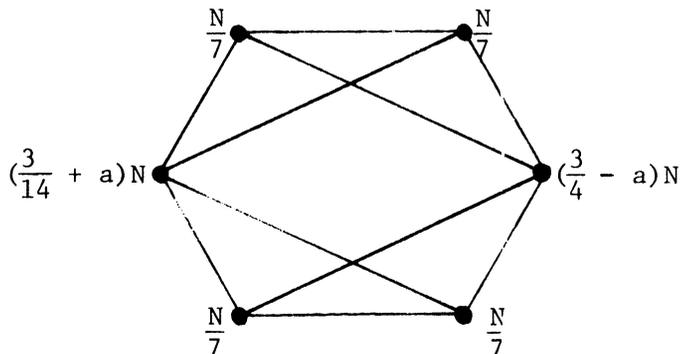


vérifie l'hypothèse du théorème 2 et donc qu'il est une vidange forte.

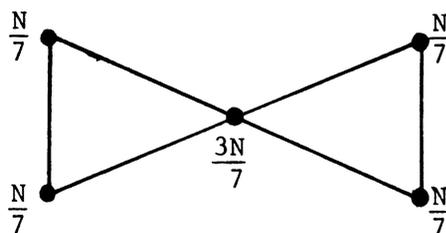
En conséquence, le théorème 2 demeure assez restrictif puisqu'il impose que N_i soit égal à $\alpha_i N$ pour tout i . C'est en cherchant à trouver des conditions plus faibles (par exemple $\frac{N_i}{N} \rightarrow \alpha_i$) que nous avons pensé au prochain corollaire. Avant de l'énoncer et de le démontrer, nous en expliquons l'objet. Nous venons de voir que le graphe pondéré ci-dessous est une vidange forte.



Dans quelle mesure peut-on faire varier les coefficients de cette vidange forte de telle sorte que le graphe pondéré résultant demeure une vidange forte? Le prochain corollaire répond partiellement à cette question. A l'aide de celui-ci nous pourrions, par exemple, affirmer que le graphe pondéré



est une vidange forte pour tout a tel que $0 \leq a \leq \frac{3}{14}$, ce qui, pour a égal à $\frac{3}{14}$, nous donne la vidange forte



Corollaire 1

Soit G un graphe fortement connexe à p sommets, notés $\{1, 2, \dots, p\}$; soit $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ où $\alpha_i > 0$ pour tout i , l'unique vecteur de probabilité vérifiant l'équation $\vec{\alpha} P_{\alpha} = \vec{\alpha}$, P_{α} étant la matrice des probabilités de transition du Markov associé au graphe pondéré $(G, (\alpha_1 N, \alpha_2 N, \dots, \alpha_p N))$, et tel que

$$\sum_{\{l: (j,l) \in A(G)\}} \alpha_l$$

prend une valeur identique pour tous les j de l'ensemble $\{j: (j,k) \in A(G)\}$ et ce, pour tout $k = 1, 2, \dots, p$.

Soit le vecteur $\vec{M} = (M_1, M_2, \dots, M_p)$ tel que

$$\frac{M_i}{M} = \alpha_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

le vecteur $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_p)$ étant tel que:

- a) $\epsilon_i \geq -\alpha_i$ pour tout $i = \{1, 2, \dots, p\}$,

$$b) \sum_{\{l: (j,l) \in A(G)\}} \varepsilon_l = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, 2, \dots, p\},$$

et

$$c) \sum_{\{j: (j,l) \in A(G)\}} \varepsilon_l = 0 \text{ pour tout } l \in \{1, 2, \dots, p\},$$

alors, le graphe pondéré (G, \vec{M}) est une vidange forte.

Démonstration

Il nous suffit de montrer que la matrice P^ε des probabilités de transition du Markov associé au graphe pondéré (G, \vec{M}) vérifie l'équation $(\vec{\alpha} + \vec{\varepsilon})P^\varepsilon = \vec{\alpha} + \vec{\varepsilon}$ puisqu'alors, selon le théorème 2, le graphe pondéré (G, \vec{M}) sera une vidange forte.

En premier lieu, nous savons que le vecteur $\vec{\alpha}$ est tel que $\vec{\alpha}P_\alpha = \vec{\alpha}$; d'où

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i P_{ik} = \alpha_k \text{ pour tout } k$$

c'est-à-dire, selon la grammaire g ,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{\delta_{ik} \alpha_k}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} = \alpha_k \text{ pour tout } k$$

où

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,k) \in A(G) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\alpha_k > 0$ pour tout k , et d'après la définition de δ_{ik} , nous pouvons écrire

$$\sum_{\{i: (i,k) \in A(G)\}} \frac{\alpha_i}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} = 1 \text{ pour tout } k. \quad (1)$$

Calculons maintenant la k -ième composante du vecteur

$(\vec{\alpha} + \vec{\varepsilon})P^\varepsilon$ c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i + \varepsilon_i) p_{ik}^\varepsilon = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \varepsilon_i) \frac{\delta_{ik} (\alpha_k + \varepsilon_k)}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} (\alpha_l + \varepsilon_l)}$$

selon la grammaire g ,

$$= (\alpha_k + \varepsilon_k) \sum_{\{i: (i,k) \in A(G)\}} \left[\frac{\alpha_i}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} + \frac{\varepsilon_i}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} \right] \quad (2)$$

puisque, par hypothèse

$$\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \varepsilon_l = 0 \text{ pour tout } i.$$

Mais, la relation (2) s'écrit

$$(\alpha_k + \varepsilon_k) \left[1 + \sum_{\{i: (i,k) \in A(G)\}} \frac{\varepsilon_i}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} \right] \quad (3)$$

puisque, selon la relation (1), nous avons

$$\sum_{\{i: (i,k) \in A(G)\}} \frac{\alpha_i}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} = 1.$$

Mais, selon les hypothèses du corollaire,

$$\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l$$

est constante pour tous les i de l'ensemble $\{i: (i,k) \in A(G)\}$, d'où

C_k étant cette constante, nous avons

$$\sum_{\{i: (i,k) \in A(G)\}} \frac{\varepsilon_i}{\sum_{\{l: (i,l) \in A(G)\}} \alpha_l} = C_k \sum_{\{i: (i,k) \in A(G)\}} \varepsilon_i = 0$$

puisque

$$\sum_{\{i:(i,k) \in A(G)\}} \epsilon_i = 0$$

par hypothèse. A partir de la relation (3), nous obtenons donc

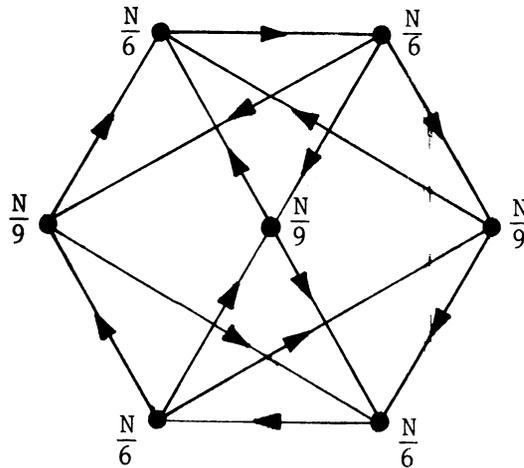
$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i + \epsilon_i) p_{ik} = \alpha_k + \epsilon_k$$

et ce calcul est valable pour tout k . Donc

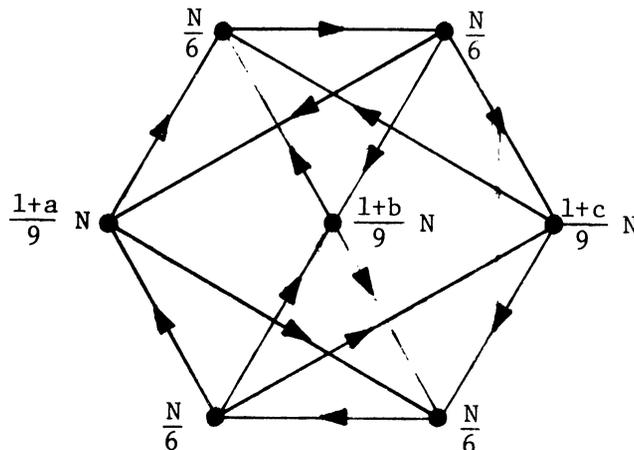
$$(\vec{\alpha} + \vec{\epsilon})P = \vec{\alpha} + \vec{\epsilon}.$$

M étant égal à $M_1 + M_2 + \dots + M_p$ par définition, il est clair que $\vec{\alpha} + \vec{\epsilon}$ est un vecteur de probabilité. Donc, nous obtenons bien que (G, \vec{M}) est une vidange forte en appliquant le théorème 2.

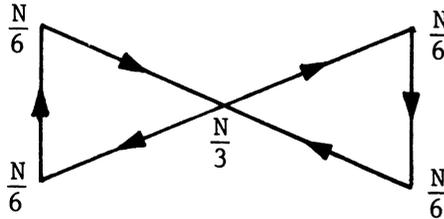
Il est facile de voir que le graphe pondéré



est une vidange forte selon le théorème 2 et que le graphe pondéré



est une vidange forte pour tout a, b, c tels que $-\frac{1}{9} \leq a, b, c$ et $a + b + c = 0$, ce qui nous permet d'affirmer pour $a = -\frac{1}{9}$, $b = -\frac{1}{9}$ et $c = \frac{2}{9}$ que le graphe pondéré



est une vidange forte. Il est bien clair que nous n'ajoutons rien à la connaissance de nouvelles vidanges fortes au moyen du corollaire 1, mais dans le théorème 2, pour déterminer le vecteur $\vec{\alpha}$, il est plus commode, pour fins de calculs, de placer des poids égaux sur chaque sous-ensemble de sommets X_1 tel que pour tout $x, y \in X_1$, il existe un automorphisme f de G tel que $f(x) = y$. Le corollaire 1 se veut donc une méthode de construction de vidanges fortes.

Mais le corollaire 1 nous permet aussi de généraliser le théorème 2 sous certaines conditions. En effet, nous obtenons le résultat suivant intitulé théorème plutôt que corollaire étant donné son importance.

Théorème 3

Soit G un graphe fortement connexe à p sommets, notés $\{1, 2, \dots, p\}$; soit $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ où $\alpha_i > 0$ pour tout i , l'unique vecteur de probabilité vérifiant l'équation $\vec{\alpha} P_\alpha = \vec{\alpha}$, P_α étant la matrice des probabilités de transition du Markov associé au graphe pondéré $(G, (\alpha_1 K, \alpha_2 K, \dots, \alpha_p K))$ et tel que

$$\sum_{\{\ell: (j, \ell) \in A(G)\}} \alpha_\ell$$

prend une valeur identique pour tous les éléments de l'ensemble $\{j: (j, k) \in A(G)\}$ et ce, pour tout $k = 1, 2, \dots, p$.

Soit le vecteur $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_p)$ tel que

- a) $\frac{N_i}{N} \rightarrow \alpha_i$ pour tout i quand N tend vers l'infini,
- b) $\sum_{\{\ell: (j, \ell) \in A(G)\}} \frac{N_\ell}{N} = \sum_{\{\ell: (j, \ell) \in A(G)\}} \alpha_\ell$ pour tout ℓ et N ,
- c) $\sum_{\{j: (j, \ell) \in A(G)\}} \frac{N_j}{N} = \sum_{\{j: (j, \ell) \in A(G)\}} \alpha_j$ pour tout j et N ,

alors, il existe un entier positif N_0 tel que, pour $N \geq N_0$, le graphe pondéré (G, \vec{N}) est une vidange forte.

Démonstration

La démonstration est triviale; en effet, puisque $\frac{N_i}{N}$ converge vers α_i quand N tend vers l'infini, il existe N_0 tel que $N \geq N_0$ implique

$$\frac{N_i}{N} = \alpha_i + \varepsilon_i(N)$$

avec $\alpha_i + \varepsilon_i(N) > 0$ et ce pour tout i . Mais d'après les hypothèses, il est immédiat que le vecteur $\vec{\varepsilon}(N) = (\varepsilon_1(N), \varepsilon_2(N), \dots, \varepsilon_p(N))$ vérifie les hypothèses du corollaire et donc, pour $N \geq N_0$, le graphe pondéré (G, \vec{N}) est une vidange forte.

Nous allons nous intéresser maintenant à quelques opérations sur les graphes qui laissent invariante la propriété de vidange forte ce qui nous permettra d'infirmier partiellement la conjecture de Pétry (1971).

CHAPITRE IV

DILATATION DE VIDANGES FORTES

A partir des cycles à p sommets C_p et des graphes complets sans boucle K_p , nous montrons qu'une dilatation de ces graphes munis des coefficients habituels est aussi une vidange forte. En fait, nous montrerons plus généralement que toute dilatation de graphes pondérés laisse invariante la propriété de vidange forte. Ceci nous permettra d'infirmer la conjecture de Pétry et d'inclure deux nouvelles classes de graphes pondérés dans la classe des vidanges fortes. Voyons tout d'abord en quoi, pour nous, consiste une dilatation.

Définition

Nous dirons que nous avons effectué une *dilatation élémentaire* d'un graphe pondéré (G, \vec{N}) si nous lui faisons correspondre un graphe (G', \vec{N}') à $p + k$ sommets (où p est le nombre de sommets du graphe G) de la manière suivante:

Soient V_1, V_2, \dots, V_p les sommets de G .

G' a pour sommets $V'_1, V'_2, \dots, V'_p, \dots, V'_{p+k}$.

$\vec{N}' = (N'_1, N'_2, \dots, N'_{p-1}, N'_p, N'_{p+1}, \dots, N'_{p+k})$

où

$$N'_{p+i} \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

et

$$N'_p + N'_{p+1} + \dots + N'_{p+k} = N_p .$$

Pour tout $i \leq p, j \leq p, (V'_i, V'_j) \in A(G') \Leftrightarrow (V_i, V_j) \in A(G),$

pour tout $i < p, j = p, p + 1, \dots, p + k,$

$$(V'_i, V'_j) \in A(G') \Leftrightarrow (V_i, V_p) \in A(G)$$

et

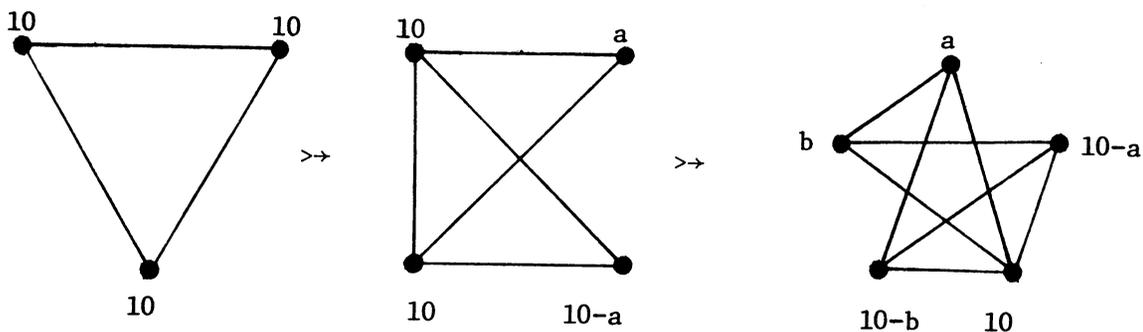
$$(V'_j, V'_i) \in A(G') \Leftrightarrow (V_p, V_i) \in A(G) .$$

Si V_p a une boucle, le sous-graphe engendré par V'_p, \dots, V'_{p+k} dans G' est le sous-graphe complet avec boucles; et si V_p n'a pas de boucle, le sous-graphe engendré par V'_p, \dots, V'_{p+k} dans G' est le graphe dégénéré (sans arc, respectivement sans arête).

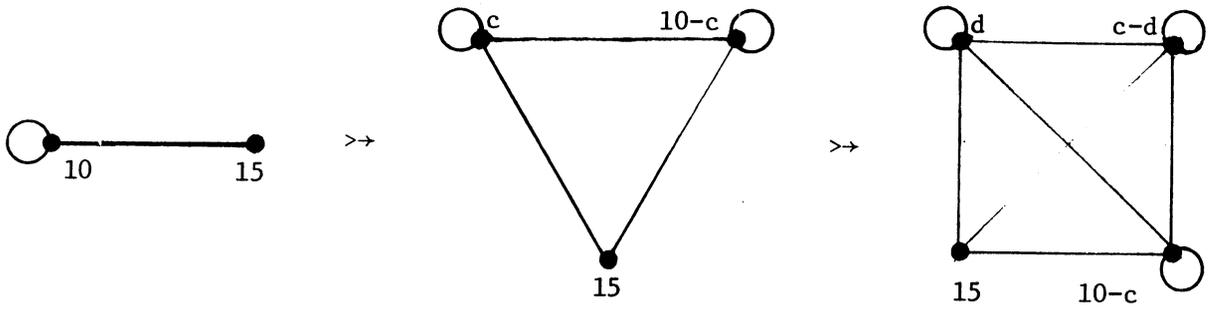
Définition

Une *dilatation* sera un ensemble (ou une suite) de dilatations élémentaires.

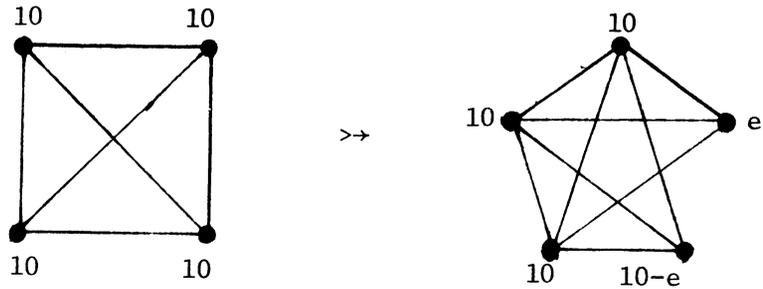
Nous indiquons quelques exemples de dilatations. Le symbole " \gg " indique l'opération dilatation élémentaire.



où a et b sont des entiers tels que $0 \leq a, b \leq 10;$



où c et d sont des entiers tels que $0 \leq d \leq c \leq 10$;



où e est un entier tel que $0 \leq e \leq 10$.

Nous pouvons maintenant démontrer l'invariance de la propriété de vidange forte par rapport à l'opération de dilatation.

Théorème 4

Soit un graphe G à p sommets, notés V_1, V_2, \dots, V_p ,
soit $\vec{N}' = (N'_1, N'_2, \dots, N'_p)$ un vecteur entier positif fini et fixé.

Soit (G', \vec{M}') un graphe pondéré à $p + k$ sommets résultant d'une dilatation de (G, \vec{N}') .

Si, pour tout $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_p)$, le rapport $\frac{N_i}{N}$ converge vers $\frac{N'_i}{N'}$ pour chaque i lorsque N tend vers l'infini, et pour tout $\vec{M} = (M_1, M_2, \dots, M_{p+k})$, le rapport $\frac{M_i}{M}$ converge vers $\frac{M'_i}{M'}$ pour chaque i lorsque M (égal à N par construction) tend vers l'infini, alors, le graphe pondéré (G, \vec{N}) est une vidange forte si et seulement si le graphe pondéré (G', \vec{M}) est une vidange forte.

Remarque

Afin de démontrer le théorème, il suffit de le faire pour le cas d'une dilatation élémentaire puisqu'une dilatation n'est qu'une suite de dilatations élémentaires. Mais si le graphe pondéré (G', \vec{M}') résulte d'une dilatation élémentaire de (G, \vec{N}') comme nous l'avons définie, il est clair que

$$\frac{M_i}{M} \rightarrow \frac{M'_i}{M'} = \frac{N'_i}{N'}, \quad i = 1, 2, \dots, p - 1$$

et

$$\frac{M_p + M_{p+1} + \dots + M_{p+k}}{M} \rightarrow \frac{M'_p + M'_{p+1} + \dots + M'_{p+k}}{M'} = \frac{N'_p}{N'}$$

quand N tend vers l'infini, puisque M est égal à N .

Réciproquement, il est clair que

$$\frac{M_i}{M} \rightarrow \frac{M'_i}{M'}, \quad i = 1, 2, \dots, p + k, \quad \text{quand } M \uparrow \infty$$

implique

$$\frac{N_i}{N} \rightarrow \frac{N'_i}{N'}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{quand } N \uparrow \infty .$$

Démonstration du théorème

L'intuition de ce qu'est une dilatation semble très variable. Si, pour certains de nos collègues, le théorème précédent est si intuitif qu'il ne requiert aucune démonstration, d'autres en souhaitaient une preuve formelle assez détaillée. Celle que nous avons élaborée est sans surprise; aussi conseillons-nous au lecteur qui estimerait avoir de cette propriété une bonne intuition, de reprendre sa lecture à la

page 69. Nous considérons que (G', \vec{M}') résulte de la dilatation élémentaire, décrite lors de sa définition, de (G, \vec{N}) .

Soit v (respectivement v') le nombre total de boules sorties de l'urne U (respectivement U') associée au graphe pondéré (G, \vec{N}) (respectivement (G', \vec{M}')) à la fin d'un tirage suivant la grammaire g . Une phrase de longueur n est une suite permise (x_1, x_2, \dots, x_n) de couleurs correspondant à des boules sorties de l'urne et où x_n représente la couleur de la dernière boule qu'il nous ait été possible de tirer suivant la grammaire g . Nous voulons montrer que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \exists N(\alpha, \beta) \text{ tel que } N \geq N(\alpha, \beta) \Rightarrow P\left\{\frac{v}{N} > 1 - \alpha\right\} > 1 - \beta$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=\lfloor N-\alpha N \rfloor + 1}^N P\{v = k\} > 1 - \beta$$

si et seulement si

$$\forall \delta, \epsilon > 0, \exists M(\delta, \epsilon) \text{ tel que } M \geq M(\delta, \epsilon) \Rightarrow P\left\{\frac{v'}{M} > 1 - \delta\right\} > 1 - \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=\lfloor M-\delta M \rfloor + 1}^M P\{v' = k\} > 1 - \epsilon .$$

Puisque M est égal à N , il suffira de montrer que l'ensemble des phrases de longueur n issues de l'urne U a même probabilité que celui issu de l'urne U' et ce toujours suivant la grammaire g . Soit $n_j^{(t)}$ le nombre de boules de couleur j restant dans l'urne U après le tirage de t boules, $j = 1, 2, \dots, p$. Soit $m_j^{(t)}$ le nombre de

boules de couleur j restant dans l'urne U' après le tirage de t boules, $j = 1, 2, \dots, p+k$. Nous avons

$$n_j^{(0)} = N_j \quad \text{et} \quad m_j^{(0)} = M_j$$

pour chaque j correspondant et donc

$$n_j^{(0)} = m_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1$$

et

$$n_p^{(0)} = m_p^{(0)} + m_{p+1}^{(0)} + \dots + m_{p+k}^{(0)}.$$

Soit $F = (x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ une phrase de longueur ν issue de l'urne U , nous définissons une multiapplication ϕ qui, à cette phrase F associe le sous-ensemble $F(F)$ de phrases $F' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_\nu)$ de longueur ν issue de l'urne U' , ceci de la manière suivante:

- si $x_i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, nous posons $x'_i = x_i$;
- sinon, c'est-à-dire $x_i = p$, nous prenons $x'_i \in \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$ où $m_{i_1}^{(i-1)}, m_{i_2}^{(i-1)}, \dots, m_{i_\ell}^{(i-1)}$ sont les seuls éléments non-nuls de l'ensemble $\left\{ m_p^{(i-1)}, m_{p+1}^{(i-1)}, \dots, m_{p+k}^{(i-1)} \right\}$.

En examinant tous les cas possibles, il est clair que la multiapplication ϕ est bien définie, c'est-à-dire que dans $\phi(F) = F(F)$, les phrases ont même longueur que la phrase F et plus précisément que la fin du tirage dans l'urne U implique nécessairement la fin du tirage (par la multiapplication ϕ) dans l'urne U' , la réciproque étant vraie. De plus, il est clair qu'alors

$$\begin{aligned} n_j^{(t)} &= m_j^{(t)}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1 \\ n_p^{(t)} &= m_p^{(t)} + m_{p+1}^{(t)} + \dots + m_{p+k}^{(t)} \end{aligned} \quad (1)$$

pour tout $t \leq v$.

Montrons que la multiapplication ϕ est bijective. Il est clair qu'elle est surjective car, à toute phrase F' issue de l'urne U' correspond une phrase F issue de l'urne U de la manière suivante:

$$x_i = x'_i \quad \text{si } x'_i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$$

et

$$x_i = p \quad \text{si } x'_i \in \{p, p+1, \dots, p+k\}.$$

Il est clair qu'alors $F' \in F(F)$ et donc $F' \in \phi(F)$. Pour montrer que ϕ est injective, il suffit de constater que $F(F_1) \cap F(F_2) \neq \emptyset$ implique $F_1 = F_2$. En effet, soit $F' \in F(F_1) \cap F(F_2)$. En posant

$$F' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_v),$$

$$F_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_v^{(1)})$$

et

$$F_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_v^{(2)}),$$

nous avons, pour les indices i tels que $x'_i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $x'_i = x_i^{(1)}$ et $x'_i = x_i^{(2)}$ tandis que pour les autres $x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = p$ et donc $F_1 = F_2$ ce que nous voulions montrer.

Il nous reste maintenant à vérifier que ϕ est une multi-application qui conserve les probabilités, c'est-à-dire

$$P\{F\} = P\{F(F)\}. \quad (2)$$

Pour toute phrase $F' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de longueur n issue de l'urne U' , et pour toute phrase $F = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de longueur n issue de l'urne U , nous avons

$$P(F') = P\left\{x'_1\right\} \prod_{t=2}^n P\left\{x'_t \mid \vec{m}^{t-1}\right\}$$

et

$$P(F) = P\left\{x_1\right\} \prod_{t=2}^n P\left\{x_t \mid \vec{n}^{t-1}\right\}$$

en posant

$$\begin{aligned} \vec{m}^{t-1} &= \left(m_1^{(t-1)}, \dots, m_{p+k}^{(t-1)}\right) \\ \vec{n}^{t-1} &= \left(n_1^{(t-1)}, \dots, n_p^{(t-1)}\right). \end{aligned}$$

Pour vérifier la relation (2), il suffit de montrer que, si O_t désigne l'événement

$$\left. \begin{aligned} &\bullet x'_t \in \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\} - m_{i_1}^{(t-1)}, m_{i_2}^{(t-1)}, \dots, m_{i_\ell}^{(t-1)} \\ &\text{désignant les seules composantes non-nulles du vecteur} \\ &\vec{m}^{t-1} - \text{si } x_t = p, \\ &\bullet x'_t = x_t \text{ sinon.} \end{aligned} \right\}$$

nous avons les égalités suivantes:

$$P\{x_1\} = \sum_{O_1} P\{x'_1\}$$

et pour $t = 2, 3, \dots, n$,

$$P\left\{x_t \mid \vec{n}_{t-1}\right\} = \sum_{O_t} P\left\{x'_t \mid \vec{m}_{t-1}\right\}.$$

Pour t égal à 1, des calculs très simples indiquent aussitôt le résultat. Soit donc $t \in \{2, 3, \dots, n\}$, t fixé. Nous savons qu'il

y a dans l'urne U, $n_i^{(t-1)}$ boules de couleur i , $i = 1, 2, \dots, p$ et dans l'urne U', $m_j^{(t-1)}$ boules de couleur j , $j = 1, 2, \dots, p + k$. De plus, nous supposons qu'une boule de couleur $i_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ a été tirée de l'urne U au $(t - 1)$ -ième tirage. Nous obtenons

$$P\left\{x_t \mid \vec{n}^{t-1}\right\} = \frac{n_{i_0}^{(t-1)}}{n_{i_1}^{(t-1)} + n_{i_2}^{(t-1)} + \dots + n_{i_\ell}^{(t-1)}}$$

si $x_t = j$ et $(V_{i_0}, V_{i_1}), (V_{i_0}, V_{i_2}), \dots, (V_{i_0}, V_{i_\ell})$ sont les seuls arcs (ou arêtes) issus de V_{i_0} dans G avec évidemment $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$

Examinons tous les cas possibles:

1° cas. $j, i_0, i_1, \dots, i_\ell \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$. Etant donné que $x_t = i_0 \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$, nous savons que par la multiapplication ϕ , $x'_{t-1} = i_0$. De plus, (G', \vec{M}') résultant d'une dilatation élémentaire, nous savons que

$$(V_{i_0}, V_{i_k}) \in A(G) \Leftrightarrow (V'_{i_0}, V'_{i_k}) \in A(G')$$

pour tout k , et par la relation (1), nous obtenons

$$P\left\{x_t \mid \vec{n}^{t-1}\right\} = \frac{m_{i_0}^{(t-1)}}{m_{i_1}^{(t-1)} + m_{i_2}^{(t-1)} + \dots + m_{i_\ell}^{(t-1)}}$$

si $x'_t = j$ et si $(V'_{i_0}, V'_{i_1}), \dots, (V'_{i_0}, V'_{i_\ell})$ sont les seuls arcs (ou arêtes) issus de V'_{i_0}

dans G'

$$= P\left\{x'_t \mid \vec{m}^{t-1}\right\}.$$

2° cas. $j, i_0, i_2, \dots, i_\ell \in \{1, 2, \dots, p-1\}, i_1 = p$. Nous savons que $x'_{t-1} = i_0$ et que

$$\begin{aligned} (V_{i_0}, V_{i_k}) \in A(G) &\Leftrightarrow (V'_{i_0}, V'_{i_k}) \in A(G'), k = 2, 3, \dots, \ell, \\ (V_{i_0}, V_{i_1}) \in A(G) &\Leftrightarrow \left\{ (V'_{i_0}, V'_p), (V'_{i_0}, V'_{p+1}), \dots, (V'_{i_0}, V'_{p+k}) \right\} \subset A(G'). \end{aligned}$$

Par la relation (1), nous obtenons

$$P\left\{x_t \mid \vec{n}^{t-1}\right\} = P\left\{x'_t \mid \vec{m}^{t-1}\right\} \text{ où } x'_t = x_t.$$

3° cas. $i_0, i_2, \dots, i_\ell \in \{1, 2, \dots, p-1\}, j = i_1 = p$. Nous savons que $x'_{t-1} = i_0$ et que

$$\begin{aligned} (V_{i_0}, V_{i_k}) \in A(G) &\Leftrightarrow (V'_{i_0}, V'_{i_k}) \in A(G'), k = 2, 3, \dots, \ell \\ (V_{i_0}, V_j) \in A(G) &\Leftrightarrow \left\{ (V'_{i_0}, V'_p), (V'_{i_0}, V'_{p+1}), \dots, (V'_{i_0}, V'_{p+k}) \right\} \subset A(G'). \end{aligned}$$

De plus, nous savons que

$$n_p^{(t-1)} = m_p^{(t-1)} + \dots + m_{p+k}^{(t-1)}$$

et donc

$$P\left\{x_t \mid \vec{n}^{t-1}\right\} = \frac{m_p^{(t-1)} + m_{p+1}^{(t-1)} + \dots + m_{p+k}^{(t-1)}}{m_p^{(t-1)} + \dots + m_{p+k}^{(t-1)} + m_{i_2}^{(t-1)} + \dots + m_{i_\ell}^{(t-1)}}$$

si $x_t = p$ et si $(V'_{i_0}, V'_p), \dots, (V'_{i_0}, V'_{p+k}), (V'_{i_0}, V'_{i_2}), \dots, (V'_{i_0}, V'_{i_\ell})$ sont les seuls arcs (ou arêtes) issus de V'_{i_0} dans G' ,

d'où,

$$\begin{aligned}
 P\left\{x_t \mid \vec{n}^{t-1}\right\} &= \sum_{j=p}^{p+k} \frac{m_j^{(t-1)}}{m_p^{(t-1)} + \dots + m_{p+k}^{(t-1)} + m_{i_2}^{(t-1)} + \dots + m_{i_\ell}^{(t-1)}} \\
 &= \sum_0^t P\left\{x'_t \mid \vec{m}^{t-1}\right\} \text{ où } x'_{t-1} = x_{t-1} \text{ ,}
 \end{aligned}$$

4° cas. Si $i_0 = p$ et V_{i_0} n'a pas de boucle dans G , nous avons nécessairement

$$\{i_1, i_2, \dots, i_\ell, j\} \subset \{1, 2, \dots, p-1\}$$

et par la multiapplication ϕ , nous savons qu'il existe $s \in \{p, p+1, \dots, p+k\}$ tel que $m_s^{(t-1)} \neq 0$, et nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x'_{t-1} = s$ puisque nous savons que

$$(V_p, V_j) \in A(G) \Leftrightarrow \{(V'_p, V'_j), \dots, (V'_{p+k}, V'_j)\} \subset A(G') \text{ .}$$

Nous sommes ainsi ramenés au premier cas en prenant $x'_{t-1} = s$ au lieu de $x'_{t-1} = x_{t-1}$.

5° cas. Si $i_2, i_3, \dots, i_\ell \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $i_0 = i_1 = j = p$, c'est-à-dire que V_p a une boucle dans G , nous savons que, par la multiapplication ϕ , il existe $s \in \{p, p+1, \dots, p+k\}$ tel que $m_s^{(t-1)} \neq 0$, et nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x'_{t-1} = s$ puisque le sous-graphe engendré par les sommets $V'_p, V'_{p+1}, \dots, V'_{p+k}$ est le graphe complet avec boucles. Nous sommes ainsi ramenés au 3° cas en prenant $x'_{t-1} = s$ au lieu de $x'_{t-1} = x_{t-1}$.

La relation (2) est alors vérifiée. D'où,

$$\begin{aligned}
 P\{v = n\} &= \sum_{\substack{F \text{ phrase de} \\ \text{longueur } n \\ \text{issue de } U}} P\{F\} = \sum_{\substack{F \text{ phrase de} \\ \text{longueur } n \\ \text{issue de } U}} P\{F(F)\} \\
 &= \sum_{\substack{F' \text{ phrase de} \\ \text{longueur } n \\ \text{issue de } U'}} P\{F'\} = P\{v' = n\} .
 \end{aligned}$$

Si (G, \vec{N}) est une vidange forte, nous savons que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \exists N(\alpha, \beta) \text{ tel que } N \geq N(\alpha, \beta) \Rightarrow P\left\{\frac{v}{N} > 1 - \alpha\right\} > 1 - \beta.$$

Mais, puisque $M = N$, nous avons

$$P\{v > N - N\alpha\} = P\{v' > M - M\alpha\} = P\left\{\frac{v'}{N} > 1 - \alpha\right\} > 1 - \beta$$

si $M \geq N(\alpha, \beta)$ et ceci étant valable pour tout α, β strictement positifs, (G', \vec{M}) est une vidange forte.

Par contre, si (G, \vec{N}) n'est pas une vidange forte, c'est-à-dire

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tels que pour tout } N_0, \exists N \geq N_0 \text{ tel que}$$

$$P\left\{\frac{v}{N} > 1 - \alpha\right\} \leq 1 - \beta$$

il est facile de voir que

$$P\left\{\frac{v'}{M} > 1 - \alpha\right\} \leq 1 - \beta$$

et donc (G', \vec{M}) n'est pas une vidange forte si (G, \vec{N}) n'en est pas une. Le théorème est donc démontré.

Ce théorème nous permet de caractériser certaines classes de graphes pondérés sans avoir à résoudre (ce qui est souvent assez fastidieux!) le système d'équations $\vec{\alpha} P_{\alpha} = \vec{\alpha}$. De même, il va nous permettre de donner de nouveaux exemples de vidanges fortes et de nouveaux contre-exemples. Avant d'énoncer quelques corollaires, nous posons les définitions suivantes.

Définition

Un graphe pondéré (G, \vec{N}) non-orienté est dit *n-partite cyclique* si les sommets de G peuvent être partagés en n classes:

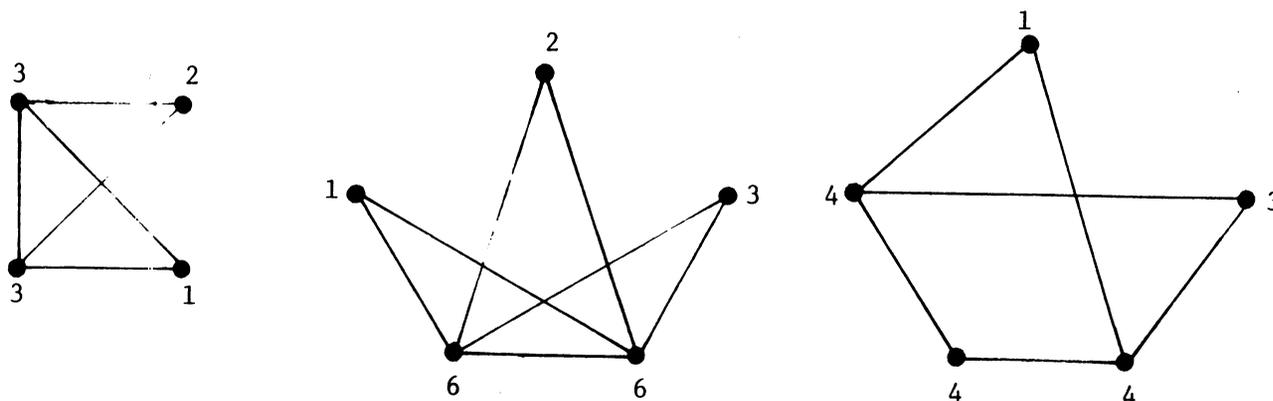
$$\gamma_1 = \{v_1, \dots, v_{k_1}\}, \gamma_2 = \{v_{k_1+1}, \dots, v_{k_2}\}, \dots, \gamma_n = \{v_{k_{n-1}+1}, \dots, v_{k_n}\}$$

avec

$$N_1 + \dots + N_{k_1} = N_{k_1+1} + \dots + N_{k_2} = \dots = N_{k_{n-1}+1} + \dots + N_{k_n} = K,$$

et où tout sommet de γ_i est adjacent à tout sommet de γ_{i+1} (somme modulo n) et à aucun autre, $i = 1, 2, \dots, n$.

Voici quelques exemples de graphes non-orientés n -partites cycliques:



Définition

Un graphe pondéré (G, \vec{N}) non-orienté est dit *n-partite complet* si les sommets de G peuvent être partagés en n classes:

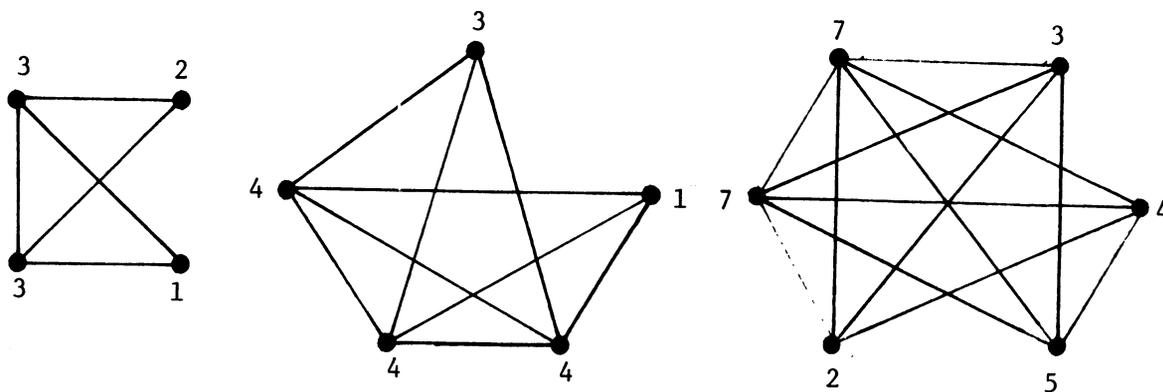
$$\gamma_1 = \{v_1, \dots, v_{k_1}\}, \gamma_2 = \{v_{k_1+1}, \dots, v_{k_2}\}, \dots, \gamma_n = \{v_{k_{n-1}+1}, \dots, v_{k_n}\}$$

avec

$$N_1 + \dots + N_{k_1} = N_{k_1+1} + \dots + N_{k_2} = \dots = N_{k_{n-1}+1} + \dots + N_{k_n} = K,$$

et où tout sommet de γ_i est adjacent à tous les autres sommets sauf ceux de sa propre classe, $i = 1, 2, \dots, n$.

Voici quelques exemples de graphes non-orientés *n-partites* complets:



Nous pouvons maintenant démontrer les deux corollaires suivants qui nous permettent d'affirmer que les graphes ainsi définis sont des vidanges fortes.

Corollaire 1

Soit (G, \vec{N}) un graphe non-orienté *n-partite cyclique* tel que défini. Alors, pour tout vecteur \vec{N}' tel que

$$\frac{N'_1 + \dots + N'_{k_1}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n}, \frac{N'_{k_1+1} + \dots + N'_{k_2}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n}, \dots, \frac{N'_{k_{n-1}+1} + \dots + N'_{k_n}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n}$$

lorsque $N' = N'_1 + \dots + N'_{k_n} \uparrow \infty$, (G, \vec{N}') est une vidange forte.

Démonstration

1) Supposons en premier lieu que G n'admette qu'une classe possédant plus qu'un sommet, et soit donc

$$\gamma_1 = \{V_1\}; \gamma_2 = \{V_2\}; \dots; \gamma_{n-1} = \{V_{n-1}\}; \gamma_n = \{V_n, V_{n+1}, \dots, V_{n+k}\}.$$

Nous avons

$$N'_i = N_1, i = 1, 2, \dots, n-1$$

et

$$N'_n + N'_{n+1} + \dots + N'_{n+k} = N_1.$$

Il est facile de voir qu'alors, le graphe pondéré (G, \vec{N}') résulte d'une dilatation élémentaire du graphe pondéré (C_n, \vec{M}) où C_n est le cycle à n sommets et $\vec{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ où $M_i = N_1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Par le théorème précédent, nous savons que, si $\vec{M}' = (M'_1, \dots, M'_n)$ est tel que $\frac{M'_i}{M'} \rightarrow \frac{M_i}{M} = \frac{1}{n}$ pour chaque i , lorsque $M' \rightarrow \infty$, (C_n, \vec{M}') étant une vidange forte par le théorème 1 du chapitre II, et si $\vec{N}' = (N'_1, N'_2, \dots, N'_{n+k})$ est tel que $N'_i = M'_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ et $N'_n + N'_{n+1} + \dots + N'_{n+k} = M'_n$, alors (G, \vec{N}') est une vidange forte.

Mais pour tout $\vec{N}' = (N'_1, N'_2, \dots, N'_{n+k})$ tel que $\frac{N'_i}{N'} \rightarrow \frac{N_i}{N}$ pour chaque i , lorsque $N' \rightarrow \infty$, nous avons

$$\frac{N'_i}{N'} \rightarrow \frac{1}{n} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n - 1$$

et

$$\frac{N'_n + \dots + N'_{n+k}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n} \text{ lorsque } N' \rightarrow \infty .$$

En posant $M'_i = N'_i$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ et $M'_n = N'_n + \dots + N'_{n+k}$,

nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 4 et nous en

déduisons que (G, \vec{N}') est une vidange forte.

- 2) Supposons maintenant que G n'admette que deux classes possédant plus qu'un sommet et soit donc

$$\gamma_1 = \{v_1\}, \dots, \gamma_{n-2} = \{v_{n-2}\}, \gamma_{n-1} = \{v_{n-1}, \dots, v_{n+k-1}\},$$

$$\gamma_n = \{v_{n+k}, \dots, v_{n+k+t}\} .$$

Nous avons

$$N_i = N_1, i = 1, 2, \dots, n - 2$$

et

$$N_{n-1} + N_n + \dots + N_{n+k-1} = N_{n+k} + N_{n+k+1} + \dots + N_{n+k+t} = N_1 .$$

Il est clair que (G, \vec{N}) résulte d'une dilatation élémentaire du

graphe n -partite cyclique (G^1, \vec{M}^1) défini par

$$\gamma_1 = \{v_1^1\}, \gamma_2 = \{v_2^1\}, \dots, \gamma_{n-2} = \{v_{n-2}^1\}, \gamma_{n-1} = \{v_{n-1}^1, \dots, v_{n+k-1}^1\},$$

$$\gamma_n = \{v_{n+k}^1\} \text{ avec } M_i^1 = N_i, i = 1, 2, \dots, n + k - 1 \text{ et } M_{n+k}^1 = N_1 .$$

Nous savons que (G^1, \vec{M}^1) vérifie le présent corollaire et

en appliquant le théorème 4 à (G^1, \vec{M}^1) au lieu de (C_n, \vec{M}) comme

dans la première partie, nous obtenons le résultat.

3) Si G admet exactement k classes ($k = 3, 4, \dots, n$) contenant plus qu'un sommet, un raisonnement par récurrence s'applique aisément dans ce qui précède. Ainsi le corollaire est démontré.

Corollaire 2

Soit (G, \vec{N}) un graphe non-orienté n -partite complet tel que défini. Alors, pour tout vecteur \vec{N}' tel que

$$\frac{N'_1 + \dots + N'_{k_1}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n}, \quad \frac{N'_{k_1+1} + \dots + N'_{k_2}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad \frac{N'_{k_{n-1}+1} + \dots + N'_{k_n}}{N'} \rightarrow \frac{1}{n},$$

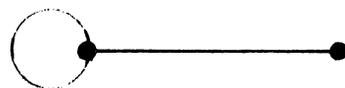
lorsque $N' \rightarrow \infty$, (G, \vec{N}') est une vidange forte.

Démonstration

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle du corollaire précédent. Il suffit d'y remplacer C_n par K_n le graphe complet sans boucle à n sommets et d'y remplacer le concept de graphe non-orienté n -partite cyclique par celui de graphe non-orienté n -partite complet.

Remarquons aussi que les résultats obtenus par Pétry (1971) et cités dans les propositions 4 et 5 du premier chapitre sont triviaux à partir du théorème 4. En effet, un graphe bipartite complet équilibré au sens de Pétry n'est pas autre chose qu'un graphe pondéré non-orienté 2-partite cyclique. De même, les graphes pondérés orientés n -partites équilibrés au sens de Pétry ne sont pas autre chose qu'une dilatation du circuit à n sommets.

Nous avons vu aussi que le graphe pondéré (G, \vec{N}) ci-contre,



comme l'ont montré Diet et Raynaud (1977) n'est jamais une vidange forte quel que soit \vec{N} .

Mais, il est immédiat qu'alors tout graphe complet avec boucles sauf en exactement un sommet n'est jamais une vidange forte et ce quels que soient les coefficients associés à chacun des sommets puisque ce graphe n'est pas autre chose qu'une dilatation à partir du sommet avec boucle de l'exemple de Diet et Raynaud (1977), auquel il suffit d'appliquer le théorème 4. Nous avons donc obtenu:

Corollaire 3

Soit G un graphe complet avec boucles sauf en exactement un sommet; soit un vecteur \vec{N} entier strictement positif quelconque, alors, le graphe pondéré (G, \vec{N}) n'est pas une vidange forte.

La conjecture de Pétry (1971) est donc infirmée pour une classe assez grande de vidanges totales. Nous verrons au prochain chapitre que pour les graphes complets avec boucles sauf en au moins deux sommets de coefficient unitaire, la conjecture émise par Pétry (1971) peut être remplacée par une conjecture plus générale.

Ainsi, les dilatations de graphes nous permettent à la fois de caractériser certaines classes de vidanges fortes et certaines classes de graphes pondérés qui ne sont pas des vidanges fortes. Il est relativement facile de voir que le corollaire 1 du théorème 2 nous permet de "contracter" (dans le sens où une contraction est l'opération inverse de la dilatation) une vidange forte. Ceci implique que la contraction de graphes pondérés est invariante pour la propriété de vidange forte.

CHAPITRE V

LE DEVENIR DES VIDANGES FORTES

Quant au dernier cas litigieux de la conjecture de Pétry (1971), son exactitude n'a pu encore être démontrée. Cependant, nous allons voir qu'il est possible de considérer tout graphe complet avec boucles sauf en au moins deux sommets de coefficient unitaire comme la somme directe de deux vidanges fortes. Nous définissons la notion de somme directe de graphes pondérés ce qui nous conduira à l'énoncé d'une conjecture. En second lieu, plusieurs considérations guideront le lecteur désireux d'entreprendre la recherche de conditions nécessaires d'obtention des vidanges fortes.

Définition

Soient (G_1, \vec{N}_1) et (G_2, \vec{N}_2) deux graphes pondérés, $\{1, 2, \dots, p\}$ l'ensemble des sommets de G_1 et $\{p+1, p+2, \dots, p+k\}$ l'ensemble des sommets de G_2 . On définit la somme directe des graphes pondérés (G_1, \vec{N}_1) et (G_2, \vec{N}_2) , notée $(G_1, \vec{N}_1) \oplus (G_2, \vec{N}_2)$, comme étant le graphe pondéré (G, \vec{N}) défini comme suit:

- G est la somme directe de G_1 et G_2 , c'est-à-dire:
 - le graphe G a $p + k$ sommets, notés $\{1, 2, \dots, p + k\}$,
 - le sous-graphe engendré par les sommets $1, 2, \dots, p$ de G est le graphe G_1 ,
 - le sous-graphe engendré par les sommets $p+1, p+2, \dots, p+k$ de G est le graphe G_2 .

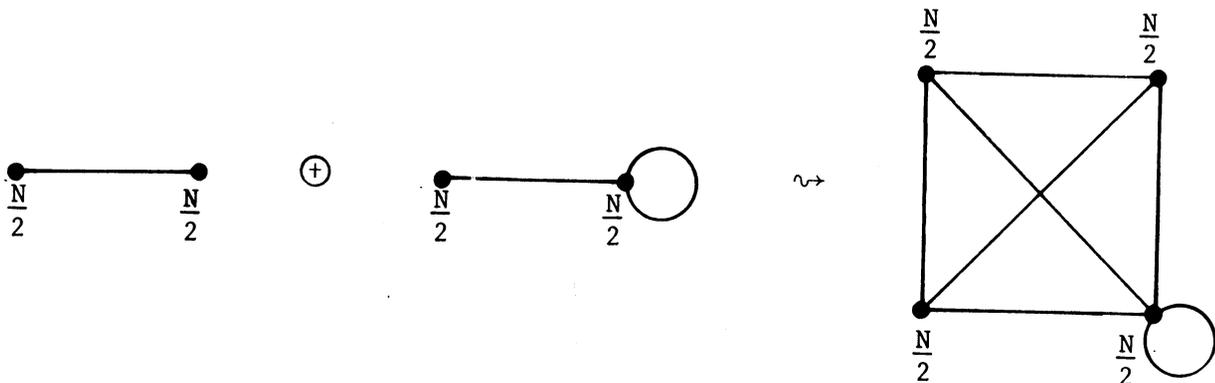
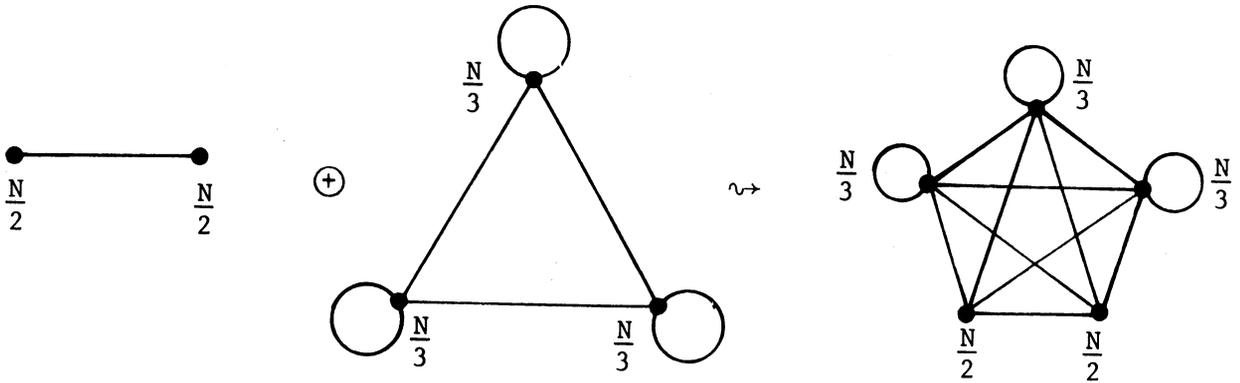
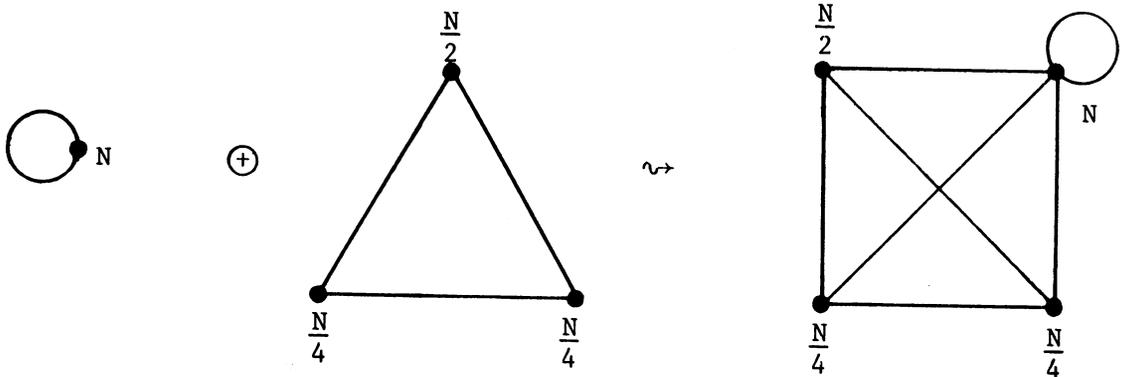
- $(i, j) \in A(G)$ et $(j, i) \in A(G)$ pour tout

$i = 1, 2, \dots, p, j = p + 1, p + 2, \dots, p + k.$

- $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_p, N_{p+1}, \dots, N_{p+k})$ c'est-à-dire
 $\vec{N} = (\vec{N}_1, \vec{N}_2).$

Voici quelques exemples de sommes directes de graphes pondérés.

Le symbole " \oplus " représente l'opérateur somme directe.



Intuitivement, l'on voit bien que la somme directe de deux graphes pondérés consiste à relier au moyen d'arêtes tout sommet du premier graphe à tout sommet du second. De même, au point de vue de la grammaire g , nous pouvons voir qu'il n'y a, par définition même de la somme directe, aucun blocage entre les sommets de G_1 et ceux de G_2 .

Remarquons que les graphes complets avec boucles sauf peut-être en certains sommets de coefficients identiques à la limite (quand N tend vers l'infini) s'expriment comme somme directe d'un graphe complet avec boucles, le vecteur \vec{N} étant à composantes entières non-négatives quelconques, et d'un graphe complet sans boucle muni de coefficients à la limite identiques.

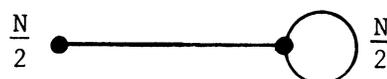
Il est immédiat que la somme directe de deux vidanges est une vidange puisque la somme directe de deux graphes sans sommet de demi-degré extérieur nul est un graphe sans sommet de demi-degré extérieur nul. Par définition même, il semble naturel d'espérer que la somme directe de deux vidanges fortes soit une vidange forte. Mais l'absence jusqu'à ce jour de conditions nécessaires d'obtention de vidanges fortes ajoute à la complexité du problème.

Compte tenu des remarques précédentes, nous émettons la conjecture suivante:

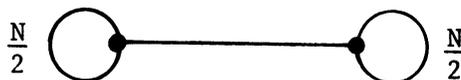
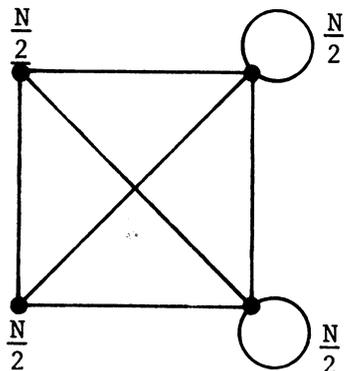
Conjecture 1

Toute somme directe de vidanges fortes est une vidange forte.

Au chapitre précédent, nous avons vu que l'opération de dilatation laissait invariante la propriété de vidange forte. Sous l'hypothèse de l'exactitude de cette conjecture, nous n'avons pas un tel résultat pour la somme directe. En effet, si (G, \vec{N}) est le graphe pondéré



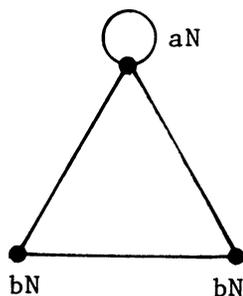
la somme directe $(G, \vec{N}) \oplus (G, \vec{N})$ est le graphe complet à quatre sommets et deux boucles, les sommets étant munis de coefficients identiques. Mais cette somme directe peut aussi s'écrire comme la somme directe des deux graphes pondérés suivants



que nous savons être des vidanges fortes. Donc, sous l'hypothèse de la conjecture 1, $(G, \vec{N}) \oplus (G, \vec{N})$ serait une vidange forte. Il en découlerait naturellement que la somme directe de deux graphes pondérés ne possédant pas la propriété de vidange forte puisse être une vidange forte.

Le lecteur pourrait être tenté de croire que la conjecture 1 si elle était démontrée, ne décrirait qu'une méthode constructive de vidanges fortes déjà caractérisées par des théorèmes antérieurs. Il n'en est rien! Et, l'exemple suivant nous permettra de le vérifier et de poser des repères utiles pour toute recherche ultérieure.

Etudions le Markov associé du graphe pondéré ci-contre où $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $a + 2b = 1$. La matrice P du Markov associé est

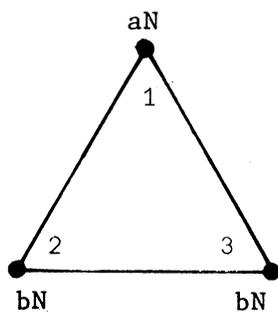


$$\begin{pmatrix}
 a & b & b \\
 \frac{a}{a+b} & 0 & \frac{b}{a+b} \\
 \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & 0
 \end{pmatrix}$$

L'unique vecteur de probabilité $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vérifiant $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$ est

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{a}{a + 2ab + 2b^2}, \frac{b(a + b)}{a + 2ab + 2b^2}, \frac{b(a + b)}{a + 2ab + 2b^2} \right)$$

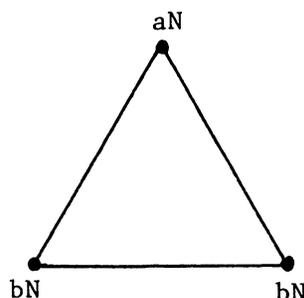
et les seules valeurs de a et b pour lesquelles $\vec{\alpha} = (a, b, b)$ sont $a = 1$ et $b = 0$. Si on suppose que $0 < a < 1$, $0 < b < \frac{1}{2}$, il n'y a donc pas de valeurs de a et b pour lesquelles $\vec{\alpha} = (a, b, b)$ et ainsi les théorèmes 1 et 2 ne s'appliquent pas dans ce cas. Mais, à partir du Markov associé, nous pouvons faire les constatations suivantes. Si on admet que $0 < a < 1$ et $0 < b < \frac{1}{2}$, il est facile de voir que $\alpha_1 > a$ et $\alpha_2 = \alpha_3 < b$. Ceci signifie que, dans le Markov associé, parmi les k premières boules tirées, la proportion des boules de couleur 1 (respectivement de couleur 2 ou 3) est plus grande (respectivement plus petite) que la proportion initiale. Et, intuitivement, il semble naturel de penser que les boules de couleur 1 vont être tirées plus rapidement que les autres, ce qui signifie qu'à une certaine étape du tirage, il ne resterait que des boules de couleur 2 ou 3 à tirer. Le lecteur pourra vérifier que, dans le Markov associé, l'unique vecteur de probabilité $\vec{\alpha}$ invariant par la matrice P des probabilités de transition associée au graphe pondéré



où $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + 2b = 1$, est tel que $\alpha_1 > a$, $\alpha_2 = \alpha_3 b$ dès que $0 < a < \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$. Et un procédé en cascade devrait apparaître lors du tirage des boules de l'urne. Aussi nous émettons la conjecture suivante qui, si elle était vraie, permettrait d'obtenir une nouvelle classe de vidanges fortes "en cascade".

Conjecture 2

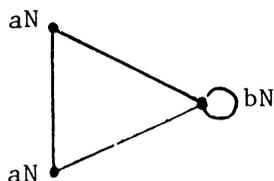
Le graphe pondéré ci-contre où $0 < a < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$, $a + 2b = 1$ est une vidange forte.



La conjecture 2 se démontrerait facilement si nous pouvions obtenir un théorème plus général que le théorème 2, dans le sens indiqué à la page 49. L'exactitude de cette conjecture, si elle était démontrée, nous permettrait de définir et de caractériser la classe des vidanges fortes "en cascade".

On a enfin le

Théorème



est une vidange forte.

Disons que l'urne associée contient aN boules A, aN boules B et bN boules C.

Soit un tirage des boules hors de l'urne associée. On considère la partie S de ce tirage formée des seules suites de boules A ou B. Deux telles suites sont séparées dans le tirage par

une ou plusieurs boules C consécutives. De S on extrait encore les seules suites comptant un nombre impair de boules. Soient donc $s_1 \dots s_i \dots s_n$ les suites ainsi observées.

1°) Supposons que n ne soit pas un infiniment grand de l'ordre de N : c'est qu'à la fin du tirage le nombre de boules A tirées serait du même ordre de grandeur par rapport à N que le nombre de boules B tirées et la vidange serait forte.

2°) Supposons donc que n est un infiniment grand de l'ordre de N. Considérons la variable X_i égale à +1 si la suite s_i commence par une boule A, égale à -1 dans le cas contraire.

Comme dans les théorèmes antérieurs, il est clair que :

$$P\{X_i=1\} = \{X_i = -1\} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad E \frac{\sum X_i}{n} = E \frac{\sum X_i}{N} = 0.$$

$$\text{Il reste à considérer } E \left(\frac{\sum X_i}{n} - E \frac{\sum X_i}{n} \right)^2 = E \left(\frac{\sum X_i}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} X_i X_j$$

Si la suite X_i est excédentaire en boules A et si l'on ne possède aucune autre information sur le tirage, ceci entraînera pour X_j une probabilité d'être excédentaire en boules B supérieure à $\frac{1}{2}$.

D'où

$$E X_i X_j = P\{\{X_i=1\}\{X_j=1\}\} + P\{\{X_i=-1\}\{X_j=-1\}\} - P\{\{X_i=1\}\{X_j=-1\}\} - P\{\{X_i=-1\}\{X_j=1\}\}$$

qui est strictement négatif en vertu de la remarque précédente.

La quantité $\text{Var} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right)$ est donc inférieure à $\frac{1}{n}$ et l'écart type de $\sum_{i=1}^n X_i$ est inférieure à \sqrt{n} . A la fin du tirage, la différence entre

la proportion de boules A et la proportion de boules B tirées hors de l'urne converge donc en probabilité vers zéro et il est trivial de se convaincre que la vidange en question est forte.

Ceci suggère évidemment une méthode de démonstration de la conjecture 1.

CONCLUSION

L'un des principaux intérêts de ces résultats vient de leur utilisation en chimie macromoléculaire comme l'a montré Bruneau (1966). Un autre non moins négligeable vient de l'application possible de ces résultats à une théorie des processus de Markov non stationnaires munis de propriétés stabilisatrices nous assurant, comme dans les Markov stationnaires, de propriétés d'ergodicité.

Les vidanges fortes pourraient être l'un des exemples de ces processus "à force de rappel". De nombreuses questions demeurent ouvertes sur le sujet que nous avons considéré: nous avons obtenu des conditions suffisantes pour qu'un graphe pondéré soit une vidange forte, les conditions nécessaires et suffisantes restent à trouver. Mais avant d'y parvenir, le lecteur, désireux d'entreprendre sa quête du Graal à notre suite, devra chercher à établir l'exactitude des conjectures que nous avons émises.

Cette contribution à l'étude des vidanges fortes semble ainsi ouvrir toujours plus largement la voie à une meilleure connaissance des processus markoviens non-stationnaires.

BIBLIOGRAPHIE

- BERGE, C., Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1958.
- BRUNEAU, C.M., Théorie des graphes stochastiques appliquée à la synthèse et à la dégradation aléatoire des composés moléculaires multifonctionnels, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Ann. de chimie, 1966.
- DIET, J.P. et RAYNAUD, H., Strong draining associated to graphs with two vertices, Journal of Discrete Math., 1977 (à paraître).
- DION, J.G., Sur une caractérisation des vidanges fortes, Advances in Applied Prob., Vol. 8, No 1, pp 105-126, 1976.
- KEMENY, J.G. et SNELL, J.L., Finite Markov Chains, D. Van Nostrand Co., New-York, 1960.
- PETRY, F., Résolution d'une conjecture issue de la théorie des graphes aléatoires, Thèse de Doctorat 3e cycle, Faculté des Sciences de Paris, 1971.
- RAYNAUD, H., Sur les graphes aléatoires, Thèse de Doctorat ès Sciences Mathématiques, Ann. Inst. H. Poincaré, Vol IV, no 4, 1968.
- ROBERTS, F.S., Discrete Mathematical Models, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

VU

Grenoble, le 30 novembre 1976.

Le président de la thèse

 (A. BERNARD)

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

