



**HAL**  
open science

# Etude de quelques invariants et problèmes d'existence en théorie des graphes

François Jaeger

► **To cite this version:**

François Jaeger. Etude de quelques invariants et problèmes d'existence en théorie des graphes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1976. tel-00287200

**HAL Id: tel-00287200**

**<https://theses.hal.science/tel-00287200>**

Submitted on 11 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée à

**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**  
**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

Pour obtenir le grade de Docteur d'Etat es Sciences Mathématiques

François JAEGER

**ETUDE DE QUELQUES INVARIANTS  
ET PROBLEMES D'EXISTENCE  
EN THEORIE DES GRAPHS**

Thèse soutenue le 8 juin 1976 devant la commission d'examen

Président : J. KUNTZMANN  
Rapporteur : C. BENZAKEN  
C. BERGE  
Examineurs : P. CAMION  
H. RAYNAUD



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Michel SOUTIF : Président

Monsieur Gabriel CAU : Vice-Président

---

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANTS DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique Approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique Chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
	BEZES Henri	Pathologie Chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique Ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique Gastro-entérologique
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie Générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique Rhumatologique et Hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie Animale et Pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine Légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie Organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de Neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie Animale
	COEUR André	Pharmacie Chimique et Chimie Analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique Gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière Médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie Minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie

MM.	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée (I.U.T. A)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse Numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVITCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie Végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie Générale
	LATURAZE Jean	Biochimie Pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique Médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences Nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique Obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MICOUD Max	Clinique Maladies Infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (Néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique (I.U.T. A)
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	TANCHE Maurice	Physiologie

MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie Galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique Nucléaire Théorique

#### PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CLARK Gilbert	Spectrométrie Physique
	CRABBE Pierre	CERMO
	ENGLMAN Robert	Spectrométrie Physique
	HOLTZBERG Frédéric	Basses Températures
	ROST Ernest	Sciences Nucléaires

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique Pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie Analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. A)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. A)
	CONTE René	Physique (I.U.T. A)
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences Biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie Médicale
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie Animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. A)
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. A)
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	PSISTER Jean-Claude	Physique du Solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie Animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie Générale
	RICHARD Lucien	Biologie Végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie Macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie Papetière

MM.	SARRAZIN Roger	Anatomie et Chirurgie
	SARROT-REYNAUD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie Générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique Générale
MM.	STREGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. A)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro chirurgie
	BARJOLLE Michel	MIAG
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (C.U.S.)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et Organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie Papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie Appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie Physique
	COLOMB Maurice	Biochimie Médicale
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie Végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.U.S.)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine Légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie Générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. A)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	LEROY Philippe	I.U.T. A
	MACHE Régis	Physiologie Végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine Préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. A)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.U.S.)

M.	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. A)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. A)
MM.	NEGRE Robert	Mécanique (I.U.T. A)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T.A)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. A)
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIER Guy	Géophysique - Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine Interne
	RACINET Claude	Gynécologie et Obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et Hydrologie
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

M.	COLE Antony	Sciences Nucléaires
----	-------------	---------------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRE DE CONFERENCES

M.	JUNIEN-LAVILLAVROY Paul	O.R.L.
----	-------------------------	--------

Fait à SAINT MARTIN D'HERES,  
DECEMBRE 1975.





Président : M. NEEL Louis  
 Vice-Présidents : M. BENOIT Jean  
 M. BONNETAIN Lucien

---

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	FELICI Noël	Electrostatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBERT Robert	Mécanique des Fluides

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RUPPERSBERG Albert, Henner	Chimie
	ROUXEL Roland	Automatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DURAND Francis	Métallurgie
	FOULARD Claude	Automatique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	VEILLON Gérard	Informatique Fondamentale & Appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques Appliquées
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie Minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique Nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Hydraulique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique Fondamentale & Appliquée
Mme	SAUCIER Gabrièle	Informatique Fondamentale & Appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Automatique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeurs et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN qui me fait l'honneur  
de présider le jury de cette thèse,

Monsieur C. BENZAKEN, Professeur à l'Université de Grenoble,

Monsieur C. BERGE, Directeur de Recherche au C.N.R.S.,

Monsieur P. CAMION, Maître de Recherche au C.N.R.S.,

Monsieur H. RAYNAUD, Professeur à l'Université de Grenoble,

qui ont bien voulu accepter de faire partie de ce jury.

Je remercie également toutes les personnes qui se sont intéressées à mon  
travail, et tout particulièrement C. PAVAN qui m'a beaucoup apporté tant  
au niveau des méthodes qu'au niveau des résultats.

Enfin je remercie Mesdames TREVISAN et BRICHET, ainsi que le personnel du  
Service Tirage pour l'excellente qualité de la présentation de cette thèse.



ETUDE DE QUELQUES INVARIANTS  
ET PROBLEMES D'EXISTENCE EN THEORIE DES GRAPHES

---



## INTRODUCTION

Depuis ses origines, la Théorie des Graphes a constitué le cadre d'une rencontre fructueuse entre Algèbre, Combinatoire et Topologie ; un graphe peut en effet être étudié à la fois comme relation binaire, comme système de parties à deux éléments d'un ensemble, et comme dessin constitué de points et de lignes sur une surface.

En particulier nombre de résultats et problèmes célèbres de la Théorie des Graphes sont relatifs aux propriétés combinatoires des graphes planaires ; pour ne retenir que les plus importants, citons : la Conjecture des Quatre Couleurs, le Théorème des Cinq Couleurs de Heawood, et les caractérisations combinatoires de la planarité obtenues respectivement par Kuratowski, Whitney et Mac-Lane.

Le contenu de cette thèse reflète pour une large part mon intérêt pour cet aspect particulier de la Théorie des Graphes.

C'est ainsi que le Chapitre I, consacré au nombre d'absorption des graphes simples, se termine sur une application de cette notion à l'étude de l'indice chromatique des graphes cubiques, et donc à une formulation nouvelle de la Conjecture des Quatre Couleurs. De même le Chapitre II présente un travail dont le point de départ a été l'étude de certains résultats de Kotzig [20] sur l'indice chromatique des graphes cubiques.

Les Chapitres III (sur le nombre de stabilité cyclique des graphes) et V (sur le nombre chromatique du carré des graphes cubiques) accordent une large place à l'étude du cas particulier planaire.

Quant au Chapitre IV, il est entièrement consacré au problème de l'existence de graphes plans satisfaisant à certaines contraintes d'ordre combinatoire relatives aux degrés des sommets et aux longueurs des faces.

Enfin le Chapitre VI présente des résultats qui peuvent être considérés comme une généralisation aux graphes quelconques de résultats de coloration connus pour les graphes planaires.



Un autre aspect de cette thèse est qu'elle étudie des concepts essentiellement non orientés de la Théorie des Graphes, mais que pourtant la notion d'orientation y joue un rôle non négligeable : le concept d'orientation sert soit à simplifier considérablement les démonstrations (aux Chapitres II et III), soit comme référence pour la définition des flots et tensions et leur étude (aux Chapitres V et VI).

Enfin la Théorie des Hypergraphes apparaît ici comme associée de plusieurs manières différentes à la Théorie des Graphes :

- Elle fournit le langage le mieux adapté à la formulation de certains problèmes de Théorie des Graphes (Chapitres I et V).
- La partie la plus difficile de la démonstration du principal résultat du Chapitre II se ramène à la construction d'une famille infinie d'hypergraphes (au sens large du terme) satisfaisant à une condition très restrictive.
- L'Annexe I présente un exemple d'application efficace de la Théorie des Graphes à un problème de Théorie des Hypergraphes.

On trouvera ci-après un résumé détaillé de cette thèse.

RESUME

---



Le premier Chapitre rassemble quelques résultats relatifs au nombre d'absorption d'un graphe simple ; il s'agit là d'un invariant assez peu étudié dans la littérature, contrairement au nombre de stabilité par exemple.

- Le paragraphe I est consacré à la présentation des principales définitions et notations utilisées ; on en retiendra en particulier que tous les "graphes" étudiés dans ce chapitre sont des graphes simples, et que le nombre d'absorption d'un graphe  $G$  est noté  $\beta(G)$ .

- Au paragraphe II nous mettons en relation l'ensemble des absorbants d'un graphe et l'ensemble de ses couvertures minimales ; nous établissons en particulier le résultat suivant :

Pour tout graphe  $G$ ,  $\beta(G) + \rho'(G) = |V(G)|$ ,

où  $\rho'(G)$  est le cardinal maximum d'une couverture minimale de  $G$ . La relation précédente est analogue à celle établie par Norman et Rabin ([1]) en ce qui concerne le nombre de couplage et le nombre de couverture d'un graphe.

- Au paragraphe III nous utilisons le concept de couverture minimale partielle et les résultats du paragraphe II pour ramener le calcul du nombre d'absorption d'un graphe  $G$  au calcul du nombre de stabilité d'un graphe associé à  $G$  de façon simple et comportant  $2|E(G)|$  sommets.

- Le paragraphe IV est consacré à la définition et à l'étude des graphes  $\beta$ -parfaits. Pour tout graphe  $G$ , désignons par  $\alpha'(G)$  le cardinal minimum d'un stable maximal de  $G$  ; il est clair que  $\beta(G) \leq \alpha'(G)$  ;  $G$  sera dit  $\beta$ -parfait si  $\forall B \subseteq V(G), B \neq \emptyset : \beta(G_B) = \alpha'(G_B)$  ( $G_B$  est le sous-graphe de  $G$  engendré par  $B$ ). Un résultat de Gupta, cité dans [5] (p. 97), peut s'énoncer comme suit : tout graphe représentatif des arêtes d'un graphe est  $\beta$ -parfait.

Nous démontrons que tout graphe  $\beta$ -imparfait critique  $G$  vérifie  $\beta(G) = 2$ , et nous en déduisons en particulier la généralisation suivante du résultat de Gupta :

tout graphe sans sous-graphe isomorphe à  $K_{1,3}$  ( $K_{1,3}$  est l'"étoile à 3 branches"  $(\{a, b, c, d\} ; \{ab, ac, ad\})$ ) est  $\beta$ -parfait.

- Le paragraphe V présente un résultat qui est le fruit d'un travail commun avec C. Payan et qui a été publié dans [12].

Etant donné un graphe  $G$  appelons hypergraphe des images de  $G$  et notons  $I(G)$  l'hypergraphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  et pour famille d'arêtes  $(F : v \in V(G))$  avec  $\forall v \in V(G) : F = \{v' \in V(G) / \{v, v'\} \in E(G)\} \cup \{v\}$ .

Nous démontrons que  $I(G)$  admet une bonne  $(\beta(\bar{G}))$ -coloration ( $\bar{G}$  est le graphe complémentaire de  $G$ ) ; autrement dit, il existe une partition de  $V(G)$  en  $\beta(\bar{G})$  absorbants de  $G$ . Nous généralisons ainsi un résultat de Ore ([11], Théorème 13.1.3), qui s'énonce :

Pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés (c'est-à-dire tel que  $\beta(\bar{G}) \geq 2$ ), il existe une partition de  $V(G)$  en deux absorbants de  $G$ .

Nous obtenons comme conséquence directe de notre résultat l'inégalité suivante, valable pour tout graphe  $G$  :

$$\beta(G) \beta(\bar{G}) \leq |V(G)|.$$

L'inégalité précédente conduit à la solution complète du problème du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption, tel qu'il a été défini par G. Chartrand et J. Mitchem dans [13].

Elle permet de vérifier dans un cas particulier une Conjecture de Vizing portant sur le nombre d'absorption de la somme cartésienne de deux graphes (Conjecture citée dans [7], p. 363).

- Enfin au paragraphe VI nous proposons une application de la notion de nombre d'absorption à l'étude de l'indice chromatique des graphes réguliers de degré impair.

Etant donné un graphe  $G$ , désignons par  $L(G)$  le graphe représentatif de ses arêtes et par  $q(G)$  son indice chromatique. Nous démontrons en particulier le résultat suivant :

Soit  $G$  un graphe régulier de degré  $2p+1$  ( $p \geq 1$ ).

$$(a) \beta(LL(G)) \geq \frac{p}{2} |V(G)|$$

(b) Si  $q(G) = 2p+1$ , il y a égalité dans (a).

Nous montrons également que pour  $p = 1$ , la réciproque de (b) est vraie ; autrement dit, un graphe cubique  $G$  a pour indice chromatique 3 si et seulement si :

$$\beta(LL(G)) = \frac{|V(G)|}{2}.$$

Ce dernier résultat nous permet d'obtenir une formulation de la célèbre Conjecture des Quatre Couleurs comme problème de couverture (en un sens que nous précisons) de l'ensemble des angles d'un graphe planaire triangulé par une partie de cet ensemble.

Le deuxième Chapitre, après une brève introduction (paragraphe I), présente successivement deux résultats relatifs à l'indice chromatique du graphe représentatif des arêtes d'un graphe régulier.

- Au paragraphe II, après avoir observé que si  $G$  est un graphe régulier de degré  $d$  ( $d \geq 2$ ),  $LL(G)$  est un graphe régulier de degré  $4d-6$ , nous démontrons que, de plus :

$$\underline{\text{si } q(G) = d, \text{ alors } q(LL(G)) = 4d - 6.}$$

La démonstration est constructive et utilise la borne supérieure obtenue par Vizing ([15]) pour l'indice chromatique des multigraphes.

- Au paragraphe III, nous étudions un problème analogue : si  $G$  est un graphe régulier de degré  $d$  ( $d \geq 2$ ),  $L(G)$  est un graphe régulier de degré  $2d-2$  ; une condition nécessaire pour que  $q(L(G)) = 2d-2$  est que chaque composante connexe de  $G$  comporte un nombre pair d'arêtes ; nous montrons que, si  $q(G) = d$ , cette condition est également suffisante. Ce travail a été publié dans [83] et [84].

Le résultat est évident pour  $d = 2$  ; il avait été démontré pour  $d = 3$  par A. Kotzig ([20]). Il implique le résultat du paragraphe II dans le cas des graphes dont toute composante connexe comporte un nombre pair d'arêtes.

Pour  $d$  pair, la démonstration est simple : on peut utiliser directement une bonne coloration des arêtes de  $G$  en  $d$  couleurs pour construire une bonne coloration des arêtes de  $L(G)$  en  $2d-2$  couleurs.

Pour  $d$  impair, la démonstration est plus délicate.

+ Dans un premier temps, en faisant appel à la notion d'orientation paire d'un graphe (introduite par A. Kotzig), on présente une méthode de résolution du problème qui s'appuie sur l'existence supposée de systèmes de parties satisfaisant à une condition très restrictive : les systèmes totalement admissibles, que nous définissons ci-dessous.

Pour tout ensemble fini  $X$  notons  $K_X$  le graphe complet ayant pour ensemble de sommets  $X$ . Le système de parties  $S = (X ; E_i, i \in I)$  est dit admissible s'il existe un système de parties  $(E(K_X) ; F_i, i \in I)$  régulier de degré 1 et tel que,  $\forall i \in I$  : si  $E_i$  est la partie vide de  $X$ ,  $F_i$  est la partie vide de  $E(K_X)$  ; si  $E_i$  est non vide,  $F_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i}$ .

Autrement dit,  $S$  est admissible si et seulement si il existe une bonne coloration des arêtes de  $K_X$  en  $|I|$  couleurs (certaines couleurs pouvant être vides) de sorte que  $\forall i \in I$ ,  $E_i$  est l'ensemble des sommets couverts par les arêtes de couleur  $i$ .

On remarquera que toutes les arêtes d'un système admissible de parties sont de cardinal pair.

Soit  $S = (X ; E_i, i \in I)$  un système de parties ;  $\forall A \subseteq X$ , notons  $S \oplus A$  le système de parties  $(X ; E_i \oplus A, i \in I)$ , où  $E_i \oplus A$  désigne la différence symétrique des deux parties  $E_i$  et  $A$  de  $X$ .  $S$  est dit totale-ment admissible si,  $\forall A \subseteq X$  avec  $|A|$  pair :  $S \oplus A$  est admissible.

On pourra vérifier par exemple que le système :

$$S = (\{1, 2, 3\} ; \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\})$$

est totalement admissible ; c'est d'ailleurs le système utilisé implicitement par Kotzig dans sa démonstration pour le cas  $d = 3$  ([20]).

+ La deuxième partie de la démonstration consiste alors à établir,  $\forall p \geq 1$ , l'existence de systèmes totalement admissibles à  $2p+1$  sommets. Pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  notons  $[n, m]$  l'ensemble :  $\{k \in \mathbb{N} / n \leq k \leq m\}$  ; nous avons pu démontrer que,  $\forall p \geq 1$ , le système de parties ayant pour ensemble de sommets  $[1, 2p+1]$  et pour ensemble d'arêtes :  $[2i-1, 2p], [1, 2i-2], [2i, 2p+1], [1, 2i-1] \cup \{2p+1\}$  ( $\forall i \in [1, p]$ ) est totalement admissible.

Ce faisant, nous avons achevé d'établir le résultat principal de ce chapitre ; mais l'étude systématique des systèmes admissibles et totalement admissibles de parties a été à peine entamée.

-----

Les résultats du troisième Chapitre portent sur le nombre de stabilité cyclique des graphes simples. Cet invariant a été étudié également par C. Payan et M. Sakarovitch ([36], [37]), et mon travail a bénéficié de nombreuses discussions avec eux.

- Au paragraphe I, nous définissons un cycliquement stable d'un multigraphe  $G$  comme une partie  $S$  de  $V(G)$  telle que le sous-multigraphe  $G_S$  soit une forêt ; le nombre de stabilité cyclique de  $G, s(G)$ , est le cardinal maximum d'un cycliquement stable de  $G$ .

- Au paragraphe II, nous mettons en relation les ensembles connectants de faces d'un multigraphe plan 2-connexe  $G$  avec les cycliquement stables de son dual géométrique  $G^*$  (un ensemble  $R$  de faces de  $G$  est dit connectant si les arêtes de  $G$  appartenant au contour d'au moins un élément de  $R$  définissent sur  $V(G)$  un multigraphe connexe) ; nous montrons en particulier que, si  $k(G)$  désigne le cardinal

Puis, dans le cas des graphes plans triangulés à  $n$  sommets, nous donnons une borne inférieure de  $k(G)$  :  $k(G) \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , et nous étudions les ensembles connectants de  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  faces. Enfin nous énonçons sans démonstration le résultat suivant : pour tout graphe plan triangulé hamiltonien  $G$  à  $n$  sommets,  $k(G) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , et nous montrons que la réciproque de ce résultat est fausse.

- Au paragraphe III, nous étendons les résultats du paragraphe II relatifs à l'invariant  $k(G)$  pour les graphes triangulés  $G$ , en étudiant le nombre de stabilité cyclique des graphes cubiques quelconques. Ce travail a été présenté à la "Vth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing" (Février 1974), et publié dans [85].

Nous commençons par montrer que pour tout graphe cubique  $G$  à  $n$  sommets :

$s(G) \leq \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$  (cette borne correspond à celle obtenue au paragraphe II pour  $k(G^*)$  dans le cas planaire).

Puis nous présentons une méthode de calcul de  $s(G)$  qui utilise la notion d'orientation d'un graphe.

Cette méthode est ensuite appliquée au cas des graphes cubiques duaux-hamiltoniens. Un multigraphe connexe  $G$  est dit dual-hamiltonien s'il admet un cocycle élémentaire comportant exactement  $|E(G)| - |V(G)| + 2$  arêtes (donc, dans le cas où  $G$  est plan :  $G$  est dual-hamiltonien si et seulement si son dual est hamiltonien) ; nous caractérisons les multigraphes  $G$  duaux-hamiltoniens par la propriété suivante :  $V(G)$  admet une partition  $\{W_1, W_2\}$  telle que  $G_{W_1}$  et  $G_{W_2}$  sont des arbres.

Nous obtenons alors le résultat suivant : pour tout graphe cubique dual-hamiltonien  $G$  à  $n$  sommets,  $s(G) = \lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$  (le cas planaire avait été présenté sans démonstration au paragraphe II).

Nous concluons ce paragraphe par la conjecture suivante :

Tout graphe cubique cycliquement 4-arête-connexe est dual-hamiltonien.

Cette conjecture vise à la fois à généraliser un résultat célèbre de H. Whitney ([38]) et à retrouver un résultat difficile de M. Sakarovitch et C. Payan ([36], [37]).



- Enfin, au paragraphe IV, nous proposons la conjecture suivante :

$$\text{Pour tout graphe planaire } G, s(G) \geq \frac{|V(G)|}{2} .$$


---

Il s'agit là d'une conjecture plus forte que la conjecture d'Erdős-Vizing, qui s'énonce : pour tout graphe planaire  $G$ ,  $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{4}$  ( $\alpha(G)$  est le nombre de stabilité de  $G$ ).

Nous ramenons notre conjecture à la suivante :

Pour tout graphe cubique planaire 3-connexe non hamiltonien  $G$  à  $f$  faces,  $k(G) \leq \frac{f}{2}$ .

Nous vérifions ensuite cette dernière conjecture dans certains cas particuliers. Pour terminer, nous démontrons le résultat suivant, plus faible que notre conjecture

$$\text{pour tout graphe planaire } G, s(G) \geq \frac{2 |V(G)|}{5} .$$


---

Le contenu du paragraphe IV a été présenté à la "Problem session" de la "Fifth British Combinatorial Conference" (Aberdeen, Juillet 1975).

---

Le quatrième Chapitre est consacré à une caractérisation combinatoire d'objets définis d'un point de vue topologique : les séquences de parité des  $q$ -angulations paires du plan ; cette étude sera publiée dans [86].

- Le paragraphe I permet de situer notre travail dans le cadre d'études récentes portant sur le problème de l'existence de multigraphes plans satisfaisant à certaines contraintes d'ordre combinatoire, relatives aux degrés des sommets et aux longueurs des faces.

- Au paragraphe II nous définissons une  $q$ -angulation (respectivement :  $\bar{q}$ -angulation) paire ( $q \geq 2$ ) comme un multigraphe plan 2-connexe  $G$  tel que :

- + la longueur de toute face finie est multiple de  $q$  (respectivement : égale à  $q$ ).
- + tout sommet intérieur (c'est-à-dire n'appartenant pas au contour de la face infinie) est de degré pair.

Puis nous associons à  $G$  le couple  $(C, s)$ , où :

+  $C$  est le cycle élémentaire ( $V(C) \subseteq V(G)$ ,  $E(C) \subseteq E(G)$ ) contour de la face infinie de  $G$ .

+  $s$  est l'application de  $V(C)$  dans  $\{-1, +1\}$  qui associe à tout sommet de degré pair le nombre  $+1$ , et à tout sommet de degré impair le nombre  $-1$ .

$(C, s)$  est appelé séquence de parité de  $G$ .

Les définitions précédentes généralisent celles données par Dalkey dans [56].

Appelons séquence tout couple  $(C, s)$ , où  $C$  est un cycle élémentaire représenté dans le plan, et où  $s$  est une application de  $V(C)$  dans  $\{-1, +1\}$  ; notre but est de caractériser de façon purement combinatoire les séquences qui peuvent s'obtenir comme séquence de parité d'une  $q$ - (ou  $\bar{q}$ -) angulation paire.

- Ce but est atteint aux paragraphes III et IV. Nous donnons, pour toute séquence  $(C, s)$ , et pour tout entier  $q \geq 2$  :

+ un test très simple permettant de savoir s'il existe une  $q$ -angulation (ou une  $\bar{q}$ -angulation) paire  $G$  dont  $(C, s)$  est la séquence de parité.

+ une méthode de construction d'une telle  $q$ -angulation (ou  $\bar{q}$ -angulation)  $G$ , s'il en existe.

Nous retrouvons en particulier le résultat suivant de Moon ([52]) : si un multigraphe plan triangulé comporte exactement deux sommets de degré impair, ces deux sommets sont non adjacents.

H. Fleishner et P. Roy ([57]) ont récemment obtenu (par une méthode différente) un résultat équivalent au nôtre pour le cas  $q = 3$ .

- Enfin au paragraphe V nous concluons ce Chapitre par l'énoncé d'un problème très général qui contient comme cas particulier celui que nous venons de traiter.

-----

Le cinquième Chapitre est consacré à l'étude des graphes cubiques de carré 4-chromatique ; plusieurs des résultats qui suivent ont été présentés aux Journées Combinatoires de Toulouse en Mai 1974.

- Le paragraphe I consiste en une brève introduction, qui renvoie au premier Chapitre pour mieux situer le problème traité ; on en retiendra qu'un graphe cubique  $G$  est de carré 4-chromatique si et seulement si on peut colorier ses sommets avec 4 couleurs de sorte que toute partie de  $V(G)$  formée d'un sommet  $v$  et des 3 sommets adjacents à  $v$  soit coloriée en quatre couleurs.
- Au paragraphe II nous mettons en relation la classe des graphes cubiques d'indice chromatique 3 et la classe des graphes cubiques de carré 4-chromatique.

Appelons extension d'un graphe cubique  $G$  tout graphe cubique qui s'obtient à partir de  $G$  en "élargissant" certains sommets de manière à les remplacer par des triangles.

Nous démontrons qu'un graphe cubique est d'indice chromatique 3 si et seulement si il admet une extension de carré 4-chromatique.

- Au paragraphe III nous introduisons les notions de flot et tension d'un graphe (orienté) à valeurs dans un groupe abélien quelconque ; nous mettons en relation les tensions non-nulles d'un graphe, à valeurs dans un groupe abélien d'ordre fini  $k \geq 2$ , et les colorations de ses sommets en  $k$  couleurs.

Les concepts précédents sont alors utilisés pour :

+ caractériser les graphes cubiques de carré 4-chromatique en termes de colorations de leurs arêtes.

+ caractériser les graphes cubiques plans de carré 4-chromatique en termes de valuations de Heawood (applications de l'ensemble des sommets dans  $\{-1, +1\}$ ) particulières.

On en déduit ensuite que :

Si  $G$  est un graphe cubique plan tel que le contour de chaque face soit de longueur multiple de  $q$  ( $q \in \{3, 4\}$ ),  $G$  est de carré 4-chromatique.

Comme corollaire, nous obtenons :

Si  $G$  est un graphe cubique plan tel que le contour de chaque face soit de longueur multiple de 3,  $G$  comporte un nombre pair de faces.

Ce dernier résultat avait été conjecturé par Eberhard [27] et démontré de quatre façons différentes par Motzkin [28], Grünbaum [29], Kotzig [30] et Gallai [31].

- Enfin au paragraphe IV nous caractérisons les graphes cubiques plans de carré 4-chromatique en termes de propriétés de leurs bicycles et de leurs diagonales (notions introduites par P. Rosenstiehl dans [32]) ; nous obtenons une caractérisation du même type pour les graphes cubiques plans tels que le contour de chaque face soit de longueur multiple de 3.

-----

Le sixième et dernier Chapitre présente plusieurs résultats et problèmes relatifs à une généralisation aux multigraphes quelconques de certaines propriétés de coloration des multigraphes plans ; il s'agit d'une généralisation en termes de flots dont l'idée a été proposée pour la première fois par W.T. Tutte dans [58].

- Le paragraphe I est consacré à un bref avant-propos et à un exposé des principales définitions et notations utilisées.
- Au paragraphe II nous montrons (en renvoyant à d'autres travaux) que pour tout multigraphe orienté  $H$  et pour tout entier  $q \geq 2$ , les conditions suivantes sont équivalentes :
  - +  $H$  admet un flot à valeurs non nulles dans le groupe des entiers modulo  $q$ .
  - +  $H$  admet un flot à valeurs non nulles dans tout groupe abélien d'ordre  $q$ .
  - +  $H$  admet un flot entier à valeurs dans  $[1-q, -1] \cup [1, q-1]$ .

Quand ces conditions sont satisfaites,  $H$  est dit être  $F_q$ .

-----  
 Un multigraphe est dit  $F_q$  si l'une de ses orientations est  $F_q$  (et dans ce cas, toutes le sont).

L'intérêt de l'étude de la propriété  $F_q$  ( $q \geq 2$ ) est justifié en particulier par les résultats suivants :

- + Un multigraphe plan 2-arête-connexe est  $F_q$  si et seulement si ses faces peuvent être bien colorées en  $q$  couleurs.
- + Un multigraphe cubique sans boucles : est  $F_3$  si et seulement si il est biparti, est  $F_4$  si et seulement si il est d'indice chromatique 3.

Nous présentons alors les conjectures suivantes de W.T. Tutte :

(C<sub>1</sub>) Tout multigraphe 2-arête-connexe est F<sub>5</sub>.

(C<sub>2</sub>) Tout multigraphe 2-arête-connexe sans cocycles de cardinal 3 est F<sub>3</sub>.

(C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) sont vérifiées dans le cas planaire : en fait (C<sub>1</sub>) vise à généraliser le Théorème des Cinq Couleurs, et (C<sub>2</sub>) vise à généraliser un Théorème de Grötzsch [69] qui s'énonce : tout graphe planaire sans triangles est 3-chromatique.

Les conjectures (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) impliquent un comportement des espaces de flots fondamentalement différent de celui des espaces de tensions (puisqu'il existe des graphes, même sans triangles, de nombre chromatique arbitrairement grand). C'est pourquoi W.T. Tutte a également posé la question suivante : existe-t-il un entier  $q \geq 5$  tel que tout multigraphe 2-arête-connexe est F<sub>q</sub> ? Nous répondons dans la suite à cette dernière question.

- Le paragraphe III présente plusieurs résultats annexes, nécessaires dans la suite ; il s'agit de résultats de réduction qui étendent des résultats analogues bien connus et faciles à démontrer dans le cas planaire.
- Le paragraphe IV rassemble les résultats les plus importants de ce Chapitre, résultats qui ont fait l'objet de communications aux Journées de Combinatoire et Informatique (Bordeaux, Juin 1975) [87] et à la "Fifth British Combinatorial Conference" (Aberdeen, Juillet 1975) [88].

Nous commençons par définir la coarboricité d'un multigraphe 2-arête-connexe G comme le cardinal minimum d'un ensemble de coarbres de G dont l'union est E(G).

Puis nous démontrons que tout multigraphe 2-arête-connexe de coarboricité c est F<sub>2<sup>c</sup></sub>.

Enfin nous établissons les résultats suivants :

- + tout multigraphe 3-arête-connexe est de coarboricité inférieure ou égale à 3.
- + tout multigraphe 4-arête-connexe est de coarboricité inférieure ou égale à 2.

Il reste alors à utiliser certains résultats du paragraphe III pour prouver que :

- + tout multigraphe 2-arête-connexe est F<sub>8</sub>.
- + tout multigraphe 2-arête-connexe sans cocycles de cardinal 3 est F<sub>4</sub>.

Les résultats de ce paragraphe étendent des résultats bien connus dans le cas planaire.

• Le paragraphe V présente des résultats qui seront publiés dans [89] ; il s'agit du rapport entre propriété  $F_q$  ( $q \geq 3$ ) et valuations équilibrées des multigraphes.

Une valuation équilibrée d'un multigraphe  $G$  est une application  $w$  de  $V(G)$  dans  $\mathbb{Q}$  telle que :  $\forall S \subseteq V(G)$ ,  $G$  comporte au moins  $|\sum_{v \in S} w(v)|$  arêtes ayant exactement une extrémité dans  $S$ .

Bondy a démontré dans [24] qu'un graphe cubique est d'indice chromatique 3 si et seulement si il admet une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-2, +2\}$ .

Nous généralisons ce résultat en formulant en termes de valuations équilibrées la propriété  $F_q$  ( $q \geq 3$ ) pour les multigraphes quelconques.

Nous présentons ensuite quelques applications du concept de valuation équilibrée au cas des graphes cubiques ; en particulier nous exposons des résultats et problèmes portant sur une propriété de bicoloration des sommets des graphes cubiques 2-arête -connexes.

Nous concluons ce paragraphe par l'énoncé de problèmes relatifs à une généralisation de la propriété  $F_q$ .

• Au paragraphe VI nous établissons le résultat suivant :

si tout multigraphe 2-arête-connexe sans cocycles de cardinal 3 est  $F_3$ , alors

-----  
 tout multigraphe 2-arête-connexe est  $F_6$ .  
 -----

Nous utilisons un résultat annexe qui s'énonce : tout multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe admet un 2-facteur qui intersecte tout cocycle de cardinal 3 en deux arêtes.

• Le paragraphe VII est consacré à une formulation de la propriété  $F_q$  ( $\forall q \geq 2$ ) en termes de parcours, qui contient comme cas particulier évident une formulation de la propriété  $F_2$  en termes de parcours eulériens.

• Enfin le paragraphe VIII présente la conjecture  $(C_1)$  comme un problème de coloration pour les graphes cubiques ; la formulation proposée s'est avérée efficace pour la vérification de  $(C_1)$  dans certains cas particuliers.

-----

Enfin cette thèse s'achève sur trois annexes :

- L'annexe I est une reproduction d'un Compte-Rendu à l'Académie des Sciences intitulé : Nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe  $\tau$ -critique de rang  $h$ , qui présente un travail effectué en collaboration avec Charles Payan. Il s'agit d'une application de la Théorie des Graphes à la Théorie des Hypergraphes (voir la deuxième remarque du paragraphe III.3.c du Chapitre I).
- L'annexe II présente une caractérisation des graphes ne comportant aucun sous-graphe isomorphe à  $K_{1,3}$  ("l'étoile à 3 branches") en termes de propriété de leurs familles de stables ; nous étendons ainsi un résultat bien connu sur les couplages d'un graphe.
- L'annexe III présente une démonstration de la validité de la Conjecture Forte du Graphe Parfait pour les graphes de degré maximum inférieur ou égal à Quatre.

# CHAPITRE I

SUR LE NOMBRE D'ABSORPTION D'UN GRAPHE SIMPLE

---





## I. INTRODUCTION ET DEFINITIONS GENERALES

### 1 - GRAPHERS SIMPLES

Un graphe simple est un couple  $G = (V(G); E(G))$  où  $V(G)$  est un ensemble fini non vide (ensemble des sommets de  $G$ ) et où  $E(G)$  est un ensemble de parties à deux éléments de  $V(G)$  ( $E(G)$  est l'ensemble des arêtes de  $G$ ).

Dans la suite de ce chapitre tous les graphes dont il sera question seront des graphes simples.

Etant donné un graphe  $G$ , un sous-graphe partiel de  $G$  est un graphe  $H$  tel que  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ ;  $\forall B \subseteq V(G)$ ,  $B \neq \emptyset$ , le sous-graphe de  $G$  engendré par  $B$  est le graphe  $G_B$  défini par :

- .  $V(G_B) = B$
- .  $E(G_B) = \{e \in E(G) \mid e \subseteq B\}$

$G_B$  est donc un sous-graphe partiel de  $G$ .

$\forall F \subseteq E(G)$ ,  $F \neq \emptyset$ , le sous-graphe partiel de  $G$  engendré par  $F$  est le graphe  $G^F$  défini par :

- .  $V(G^F) = \bigcup_{e \in F} e$
- .  $E(G^F) = F$

Le degré dans  $G$  d'un sommet  $v \in V(G)$  est l'entier :

$$d_G(v) = |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$$

Un sommet de degré nul sera dit sommet isolé.

Un sommet de degré 1 sera dit pendant.

## 2 - STABLES ET TRANSVERSAUX D'UN GRAPHE

- Un stable du graphe  $G$  est un ensemble  $S \subseteq V(G)$  tel que :

$$\forall e \in E(G), e \not\subseteq S$$

Le nombre de stabilité de  $G$ , noté  $\alpha(G)$ , est le cardinal maximum d'un stable de  $G$ .

- Un transversal de  $G$  est un ensemble  $T \subseteq V(G)$  tel que :

$$\forall e \in E(G), e \cap T \neq \emptyset$$

Le nombre de transversalité de  $G$ , noté  $\tau(G)$ , est le cardinal minimum d'un transversal de  $G$ .

- $S \subseteq V(G)$  est un stable de  $G$  si et seulement si  $V(G) - S$  est un transversal de  $G$ . On en déduit en particulier que pour tout graphe  $G$  :  
 $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$

## 3 - COUPLAGES ET COUVERTURES D'UN GRAPHE

- Un couplage du graphe  $G$  est un ensemble  $K \subseteq E(G)$  tel que :

$$\forall e \in K, \forall e' \in K - \{e\}, e \cap e' = \emptyset$$

Le nombre de couplage de  $G$ , noté  $\nu(G)$ , est le cardinal maximum d'un couplage de  $G$ .

- Une couverture du graphe  $G$  est un ensemble  $C \subseteq E(G)$  tel que :

$$\forall v \in V(G) \text{ avec } d_G(v) \neq 0 \exists e \in C : v \in e$$

Le nombre de couverture de  $G$ , noté  $\rho(G)$ , est le cardinal minimum d'une couverture de  $G$ .

Une couverture  $C$  de  $G$  sera dite minimale si pour toute couverture  $C'$  de  $G$  :  $C' \subseteq C \Rightarrow C' = C$ .

Nous désignerons par  $\rho'(G)$  le cardinal maximum d'une couverture minimale de  $G$ .

- Rappelons que pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés :

$$\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| \quad [1]$$

#### 4 - ABSORBANTS D'UN GRAPHE

Un absorbant du graphe  $G$  est un ensemble  $A \subseteq V(G)$  tel que :

$$\forall v \in V(G) - A \quad \exists a \in A : \{a, v\} \in E(G).$$

Le nombre d'absorption de  $G$ , noté  $\beta(G)$ , est le cardinal minimum d'un absorbant de  $G$ .

### II - NOMBRE D'ABSORPTION ET COUVERTURES MINIMALES D'UN GRAPHE

#### 1 - RELATION ENTRE ABSORBANTS ET COUVERTURES D'UN GRAPHE SANS SOMMETS ISOLÉS

Soient  $G$  un graphe sans sommets isolés,  $A$  l'ensemble de ses absorbants,  $C$  l'ensemble de ses couvertures,  $C_m$  l'ensemble de ses couvertures minimales.

Pour tout graphe  $H$  nous désignerons par  $T(H)$  l'ensemble des transversaux de  $H$ .

Remarquons que  $\forall C \in C$ , le graphe  $G^C$  (bien défini puisque  $C \neq \emptyset$ ) est tel que  $V(G^C) = V(G)$  (car  $G$  ne comporte pas de sommets isolés).

Proposition 1 : 
$$A = \bigcup_{C \in C_m} T(G^C)$$

En effet :

a) Soit  $A \in A$

Soit alors  $C = \{e \in E(G) \mid e \cap A \neq \emptyset\}$

$\cdot \forall v \in V(G) - A \quad \exists a \in A : \{v, a\} \in E(G)$

(puisque  $A$  est absorbant).  $v$  appartient donc à une arête  $\{v, a\}$  de  $C$ .

$\cdot \forall a \in A \quad \exists e \in E(G) : a \in e$  (puisque  $G$  ne comporte pas de sommets isolés).  $a$  appartient donc à une arête  $e$  de  $C$ .

$\cdot$  Donc  $C \in C$ . En outre par construction  $A \in T(G^C)$ .

En conclusion  $A \subseteq \bigcup_{C \in C} T(G^C)$

b) Soit  $C \in \mathcal{C}$ .

Soit alors  $A \in \tau(G^C)$ .

$\forall v \in V(G) - A \exists e \in C : v \in e$  (puisque  $C$  est une couverture).

En outre  $\exists a \in A : a \in e$  (puisque  $A$  est transversal de  $G^C$ ).

Donc  $\forall v \in V(G) - A \exists a \in A : \{v, a\} \in E(G)$ .

Donc  $A \in \mathcal{A}$ .

En conclusion  $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \tau(G^C) \subseteq \mathcal{A}$

c) Donc  $\mathcal{A} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \tau(G^C)$ .

Or si  $C \in \mathcal{C}$ ,  $C' \in \mathcal{C}$  et  $C' \subseteq C$  :

$$\tau(G^C) \subseteq \tau(G^{C'})$$

Comme toute couverture de  $G$  contient une couverture minimale de  $G$  :

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \tau(G^C) \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}_m} \tau(G^C)$$

Et donc (puisque  $\mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}$ ) :

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \tau(G^C) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_m} \tau(G^C)$$

Ceci achève la démonstration.

## 2 - APPLICATION AU NOMBRE D' ABSORPTION

Proposition 2 : Pour tout graphe  $G$ ,  $\beta(G) + \rho'(G) = |V(G)|$ .

Remarquons d'abord qu'un absorbant du graphe  $G$  contient tous les sommets isolés de  $G$ , et que l'ensemble des couvertures de  $G$  n'est pas modifié par suppression de sommets isolés. Il suffira donc de démontrer la proposition 2 pour les graphes  $G$  sans sommets isolés.

Nous conserverons les notations du paragraphe précédent.

Lemme : Si  $C \in \mathcal{C}_m$ ,  $\tau(G^C) = |V(G)| - |C|$ .

En effet si  $C \in \mathcal{C}_m$  :

$\forall e \in C \exists v \in V(G^C) = V(G)$  tel que  $v \in e$ , et, de plus :

$$e' \in C, v \in e' \Rightarrow e = e'.$$

(sinon  $C - \{e\}$  serait encore une couverture de  $G$ ).

Il est donc possible de choisir dans chaque arête de  $G^C$  un sommet pendant et un seul : on forme ainsi un stable de  $G^C$  de cardinal  $|C|$ .

D'autre part on sait que pour tout graphe  $H$  sans sommets isolés :

$$\alpha(H) \leq |E(H)|$$

$$\text{Donc } \alpha(G^C) = |C| \text{ et } \tau(G^C) = |V(G^C)| - |C|.$$

Ceci achève la démonstration.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 2.

D'après la proposition 1 :

$$\beta(G) = \min_{A \in \mathcal{A}} |A| = \min_{C \in \mathcal{C}_m} \left( \min_{T \in \mathcal{T}(G^C)} |T| \right)$$

$$= \min_{C \in \mathcal{C}_m} \tau(G^C)$$

Donc d'après le lemme :

$$\beta(G) = \min_{C \in \mathcal{C}_m} [|V(G)| - |C|] = |V(G)| - \max_{C \in \mathcal{C}_m} |C|$$

D'où le résultat.

Application :

Si  $G$  est un graphe sans sommets isolés :

$$\rho(G) \leq \rho'(G) \Rightarrow \beta(G) = |V(G)| - \rho'(G) \leq |V(G)| - \rho(G) = \nu(G)$$

Donc  $\beta(G) \leq \nu(G)$  avec l'égalité si et seulement si toutes les couvertures minimales de  $G$  ont le même cardinal.

### III - NOMBRE D'ABSORPTION D'UN GRAPHE ET NOMBRE DE STABILITE D'UN GRAPHE ASSOCIE

#### 1 - COUVERTURES MINIMALES PARTIELLES D'UN GRAPHE G

Nous appellerons couverture minimale partielle de  $G$  toute couverture minimale d'un sous-graphe partiel de  $G$ .

En particulier nous considérerons la partie vide de  $E(G)$  comme une couverture minimale partielle de  $G$ .

Nous aurons besoin de la caractérisation suivante des couvertures minimales partielles :

**Proposition 3** : Etant donné un graphe  $G$  et  $F$  une partie non vide de  $E(G)$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $F$  est une couverture minimale partielle de  $G$ .
- (b)  $F$  est une couverture minimale de  $G^F$ .
- (c) Toute arête de  $G^F$  contient un sommet pendant de  $G^F$ .

En effet :

- (a)  $\Leftrightarrow$  (b) : Par définition (b)  $\Rightarrow$  (a). Inversement, si  $F$  est couverture minimale d'un sous-graphe partiel  $H$  de  $G$  :  $F$  est une couverture de  $G^F$  ; de plus :  $\forall F' \subset F$ ,  $F'$  n'est pas couverture de  $H$ , donc  $F'$  n'est pas couverture de  $G^F$ .  $F$  vérifie donc (b).
- (b)  $\Leftrightarrow$  (c) : Nous avons déjà vu que (b)  $\Rightarrow$  (c) en démontrant le lemme du paragraphe II.2. La réciproque est immédiate.

Remarque : Toute partie d'une couverture minimale partielle de  $G$  est donc une couverture minimale partielle de  $G$ .

## 2 - COUVERTURES MINIMALES PARTIELLES ET COUVERTURES MINIMALES

Etant donné un graphe  $G$ , toute couverture minimale de  $G$  est une couverture minimale partielle de  $G$ .

Toutefois, il peut exister des couvertures minimales partielles qui ne sont contenues dans aucune couverture minimale, comme on pourra le vérifier si  $G$  est par exemple une chaîne de longueur 3. Nous désignerons par  $\rho''(G)$  le cardinal maximum d'une couverture minimale partielle du graphe  $G$ .

On a évidemment l'inégalité :  $\rho'(G) \leq \rho''(G)$ .

**Proposition 4** : Pour tout graphe  $G$ ,  $\rho'(G) = \rho''(G)$ .

En effet : Soit  $C$  une couverture minimale partielle de  $G$  de cardinal  $\rho''(G)$  et telle que, pour toute autre couverture minimale partielle  $C'$  de  $G$  de cardinal  $\rho''(G)$  :

$$|V(G^C)| \geq |V(G^{C'})|. \text{ On pourra supposer } E(G) \neq \emptyset.$$

Supposons que  $V(G^C) \neq V(G^{E(G)}) = V(G) - \{v \in V(G) \mid d_G(v) = 0\}$ .

Soit alors  $v \in V(G^{E(G)}) - V(G^C)$ ;  $\exists e \in E(G) - C$  avec  $v \in e$ .

- si  $e \subseteq V(G^{E(G)}) - V(G^C)$ ,  $C' = C \cup \{e\}$  est une couverture minimale partielle de  $G$  de cardinal  $\rho''(G)+1$  : il y a contradiction.
- sinon  $e = \{v, v'\}$  avec  $v' \in V(G^C)$ ; soit alors  $v'' \in V(G^C)$  tel que  $\{v', v''\} \in C$ .
- + si  $v''$  est de degré 1 dans  $G^C$ ,  $C' = C \cup \{e\}$  est une couverture minimale partielle de  $G$  de cardinal  $\rho''(G)+1$  : il y a contradiction.
- + sinon  $C' = (C - \{v', v''\}) \cup \{e\}$  est une couverture minimale partielle de  $G$  de cardinal  $\rho''(G)$  avec :

$$|V(G^{C'})| = |V(G^C)| + 1$$

Il y a là encore contradiction.

Donc  $V(G^C) = V(G^{E(G)})$ ; autrement dit,  $C$  est une couverture minimale de  $G$  de cardinal  $\rho''(G)$  et donc  $\rho'(G) \geq \rho''(G)$ . Ceci achève la démonstration.

Corollaire : Pour tout graphe  $G$ ,  $\beta(G) = |V(G)| - \rho''(G)$

Application :

Rappelons qu'un hypergraphe est un couple  $H = (X; E)$  où  $X$  est un ensemble fini non vide et où  $E = (E_i, i \in I)$  est une famille finie de parties non vides de  $X$  telle que :

$$X = \bigcup_{i \in I} E_i$$

Les éléments de  $X$  sont les sommets de l'hypergraphe, les éléments de  $E$  sont ses arêtes. Un graphe sans sommets isolés est donc un hypergraphe particulier.

Un stable de l'hypergraphe  $H = (X; E)$  est une partie de  $X$  qui ne contient aucune arête de  $H$ ; le nombre de stabilité de  $H$ , noté  $\alpha(H)$ , est le cardinal maximum d'un stable de  $H$ .

A tout graphe  $G$  nous associerons l'hypergraphe  $H(G)$  ayant ses sommets dans  $E(G)$  et dont la famille des arêtes est celle des chaînes de longueur 3 et des triangles de  $G$  (en tant que triplets d'arêtes de  $G$ ).

Plaçons nous pour simplifier dans le cas où toute arête de  $G$  est un sommet de  $H(G)$ .



On vérifiera que les stables de  $H(G)$  peuvent être identifiés aux couvertures minimales partielles de  $G$ .

$$\text{Donc } \alpha(H(G)) = \rho''(G) = |V(G)| - \beta(G).$$

### 3. COUVERTURES MINIMALES PARTIELLES DE $G$ ET GRAPHE ASSOCIE A $G$

#### A) DEFINITIONS

A tout graphe  $G$  nous associerons :

- Le graphe représentatif de ses arêtes (ou "line graph" de  $G$ ) noté  $L(G)$  et défini (si  $E(G) \neq \emptyset$ ) par :

$$V(L(G)) = E(G); E(L(G)) = \{\{e, e'\} \mid e \in E(G), e' \in E(G), |e \cap e'| = 1\}$$

Cette notion a été beaucoup étudiée et nous aurons à y revenir dans d'autres chapitres.

- Son carré, noté  $C(G)$ , et défini par :

$$V(C(G)) = V(G); E(C(G)) = E(G) \cup F, \text{ avec :}$$

$$F = \{\{v, v'\} \mid v \in V(G), v' \in V(G) - \{v\}, \exists v'' \in V(G) : \{v, v''\} \in E(G), \{v', v''\} \in E(G)\}.$$

Le carré d'un graphe a été étudié en particulier en ce qui concerne les problèmes d'existence de cycles hamiltoniens, de couplages, etc... Dans un autre chapitre nous étudierons les propriétés de coloration du carré des graphes cubiques.

- Sa subdivision, notée  $D(G)$ , et définie par :

$$V(D(G)) = V(G) \cup E(G)$$

$$E(D(G)) = \{\{v, e\} \mid v \in V(G), e \in E(G), v \in e\}$$

- Les applications  $L, C$  et  $D$  de la classe des graphes dans elle-même peuvent être composées.

Par exemple nous désignerons par  $CD(G)$  le carré de la subdivision de  $G$ ; ce graphe peut être identifié au graphe total de  $G$  (très étudié en particulier en ce qui concerne ses propriétés de coloration).

Dans toute la suite nous nous limiterons au cas des graphes  $G$  tels que  $E(G) \neq \emptyset$ .

## B) COUVERTURES MINIMALES PARTIELLES DE G ET STABLES DE CLD(G)

Proposition 5 : Pour tout graphe G,  $\rho''(G) = \alpha[\text{CLD}(G)]$

En effet :

- Soit C une couverture minimale partielle de G de cardinal  $\rho''(G)$ .

$C \neq \emptyset$ . D'après la proposition 3 :

$$\forall e \in C, \exists v_e \in e : e' \in C, v_e \in e' \Rightarrow e' = e.$$

Soit  $Z = \{\{v_e, e\} \mid e \in C\}$ .

Z est un ensemble d'arêtes de  $D(G)$  vérifiant les propriétés suivantes :

. Deux arêtes distinctes quelconques de Z sont disjointes.

. Aucune arête de  $D(G)$  n'est incidente à deux arêtes distinctes de Z.

Donc Z est un stable de  $\text{CLD}(G)$  de cardinal  $|C|$ .

D'où  $\alpha[\text{CLD}(G)] \geq \rho''(G)$

- Réciproquement soit Z un stable de  $\text{CLD}(G)$  de cardinal  $\alpha[\text{CLD}(G)]$ .

Soit  $C = \{e \in E(G) \mid \exists v \in V(G) : \{v, e\} \in Z\}$ .

On a donc  $|C| = |Z|$ .

$\forall e \in C$  soit  $v_e$  le sommet unique de G tel que  $\{v_e, e\} \in Z$ .

$v_e \in e$  et :  $e' \in C, v_e \in e' \Rightarrow e = e'$  (sinon Z ne serait pas un stable de  $\text{CLD}(G)$ ). D'après la proposition 3, C est une couverture minimale partielle de G de cardinal  $|Z|$ .

D'où  $\rho''(G) \geq \alpha[\text{CLD}(G)]$

- Ceci achève la démonstration.

Corollaire : Pour tout graphe G,  $\beta(G) = |V(G)| - \alpha[\text{CLD}(G)]$ .

Le calcul de  $\beta(G)$  est ramené au calcul du nombre de stabilité d'un graphe comportant  $2|E(G)|$  sommets.

Le résultat précédent permet de démontrer simplement que pour tout graphe G de degré minimum  $\delta(G)$  :

$$\beta(G) \geq |V(G)| - \frac{2|E(G)|}{\delta(G)+1}$$

## C) REMARQUES

- On peut rapprocher notre corollaire du résultat de Gupta [2] qui s'énonce :

Pour tout graphe G,  $\beta(L(G)) = |V(G)| - \alpha[\text{CD}(G)]$ .

Dans le même esprit, nous avons pu démontrer avec C. Payan les égalités suivantes, valables pour tout graphe G [3]:

$$\beta[D(G)] = |V(G)| - \alpha[CL(G)]$$

$$\beta[LD(G)] = |V(G)| - \alpha[C(G)]$$

- Les concepts de couverture minimale partielle et de subdivision peuvent s'étendre aux hypergraphes ; on obtient un résultat analogue à celui de la proposition 5. Cette démarche nous a permis avec C. Payan de résoudre le problème du calcul du nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe  $\tau$ -critique de rang h [4] en nous ramenant au calcul du nombre de stabilité d'un graphe (voir annexe I).

#### IV - NOMBRE D'ABSORPTION ET CARDINAL MINIMUM D'UN STABLE MAXIMAL

##### 1 - INTRODUCTION

- A) Soit G un graphe; un stable S de G sera dit maximal si pour tout stable S' de G :  $S \subseteq S' \Rightarrow S = S'$ .

Nous désignerons par  $\alpha'(G)$  le cardinal minimum d'un stable maximal de G.

Un stable de G est maximal si et seulement si il constitue un absorbant de G.

Donc pour tout graphe G :  $\beta(G) \leq \alpha'(G)$

Gupta a démontré le résultat suivant (cité dans [5], p. 97) :

Pour tout graphe G,  $\beta[L(G)] = \alpha'[L(G)]$

Nous allons donner une généralisation de ce résultat.

- B) Appelons R-graphe tout graphe G tel qu'il existe un graphe H pour lequel G est isomorphe à L(H).

(Pour la définition de l'isomorphisme de deux graphes, nous renverrons le lecteur à [6]).

Tout sous-graphe d'un R-graphe est un R-graphe.

Le résultat de Gupta peut donc se formuler comme suit :

Pour tout R-graphe G,  $\forall B \subseteq V(G), B \neq \emptyset : \beta(G_B) = \alpha'(G_B)$ .

Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Un graphe G sera dit  $\beta$ -parfait si  $\forall B \subseteq V(G), B \neq \emptyset : \beta(G_B) = \alpha'(G_B)$  ; dans le cas contraire il sera dit  $\beta$ -imparfait.

Remarque : Le terme " $\beta$ -parfait" a été choisi par analogie avec les termes " $\alpha$ -parfait" et " $\gamma$ -parfait", relatifs à l'étude d'autres paramètres ([7], p. 347). Toutefois, il faut noter que le paramètre  $\beta(G)$  se comporte très différemment du nombre de stabilité par exemple. En particulier, il est facile de construire un graphe  $G$  tel que :

$$\exists B' \subseteq V(G), B' \neq \emptyset : \beta(G_{B'}) > \beta(G)$$

$$\exists B'' \subseteq V(G), B'' \neq \emptyset : \beta(G_{B''}) < \beta(G).$$

C) Gupta a donc démontré que tout  $R$ -graphe est  $\beta$ -parfait. Or Beineke [8] a donné une caractérisation des  $R$ -graphes qui prend la forme suivante :

Un graphe  $G$  est un  $R$ -graphe si et seulement si il n'admet comme sous-graphe aucun graphe isomorphe à  $H_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), les 9 graphes  $H_i$  étant donnés explicitement.

En particulier le graphe  $H_1$  peut être défini par :

$$V(H_1) = \{1, 2, 3, 4\} ;$$

$$E(H_1) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}.$$

En résumé le résultat de Gupta peut se formuler comme suit :

Tout graphe  $\beta$ -imparfait contient un sous-graphe isomorphe à l'un des  $H_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ).

C' est sous cette forme que nous allons le généraliser.

## 2 - GRAPHS $\beta$ -IMPARFAITS CRITIQUES

Définition : Un graphe  $G$  sera dit  $\beta$ -imparfait critique s'il est  $\beta$ -imparfait et si tous ses sous-graphes (autres que lui-même) sont  $\beta$ -parfaits.

Les graphes  $\beta$ -parfaits peuvent donc être caractérisés comme les graphes n'admettant aucun sous-graphe  $\beta$ -imparfait critique.

Nous ne sommes pas en mesure de donner une construction explicite de la classe des graphes  $\beta$ -imparfaits critiques.

Par contre nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition 6 : Si  $G$  est un graphe  $\beta$ -imparfait critique,  $\beta(G) = 2$

En effet, soit  $G$  un graphe  $\beta$ -imparfait critique.

Soit  $A$  l'ensemble des absorbants de  $G$  de cardinal  $\beta(G)$ .

Soit  $m = \min_{A \in \mathcal{A}} (|E(G_A)|)$ .

Si l'on avait  $m = 0$ , un élément de  $A$  serait stable de  $G$ ; il s'agirait donc d'un stable maximal de  $G$  de cardinal  $\beta(G)$  : ceci est impossible puisque  $\beta(G) < \alpha'(G)$ .

Donc  $m \geq 1$ . Soit  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $|E(G_A)| = m$ .

Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux éléments de  $A$  tels que  $\{v_1, v_2\} \in E(G_A)$ .

Soit  $B = \{v \in V(G) - A \mid v' \in A, \{v, v'\} \in E(G) \Rightarrow v' \in \{v_1, v_2\}\}$ .

Soit  $B' = B \cup \{v_1, v_2\}$ .

A) - Si l'on avait  $\beta(G_{B'}) = 1$  :

Soit  $w \in B'$  tel que  $\{w\}$  est un absorbant de  $G_{B'}$ .

$(A - \{v_1, v_2\}) \cup \{w\}$  est un absorbant de  $G$  de cardinal  $|A| - 1$  ; il y a contradiction.

Donc  $\beta(G_{B'}) \geq 2$ .

-  $\{v_1, v_2\}$  est un absorbant de  $G_{B'}$ .

- en conclusion :  $\beta(G_{B'}) = 2$ .

B) - On a donc  $\alpha'(G_{B'}) \geq 2$ .

Si l'on avait  $\alpha'(G_{B'}) = 2$  :

Soit  $\{w_1, w_2\}$  un stable maximal de  $G_{B'}$  de cardinal 2.

$A' = (A - \{v_1, v_2\}) \cup \{w_1, w_2\}$  est un absorbant de  $G$  de cardinal  $|A|$ . On vérifie en outre que  $|E(G_{A'})| < |E(G_A)| = m$ ; il y a contradiction.

En conclusion :  $\alpha'(G_{B'}) \geq 3$ .

C) -  $G_{B'}$  est donc un sous-graphe  $\beta$ -imparfait de  $G$ .

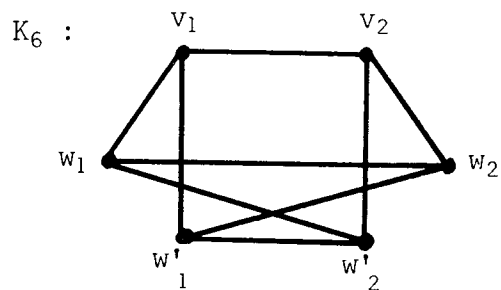
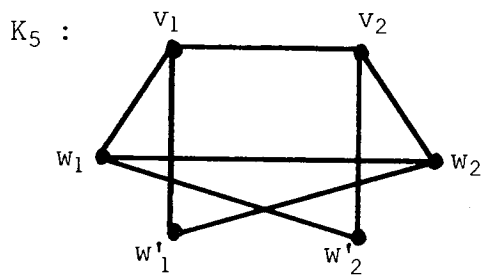
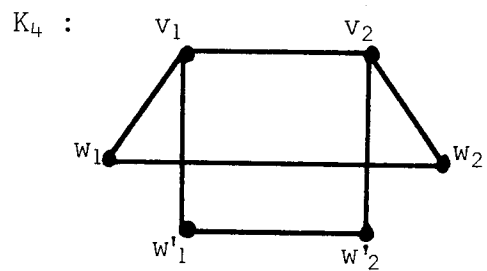
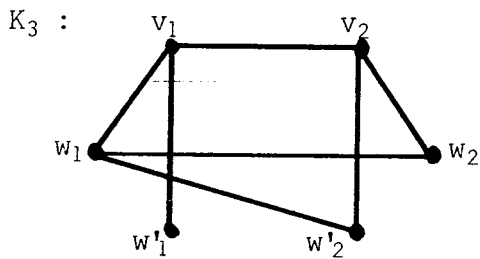
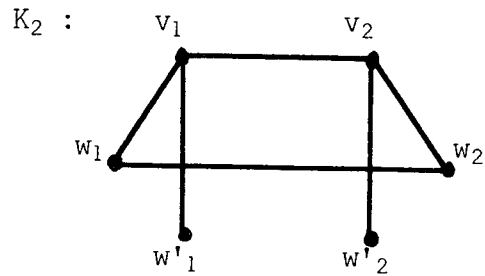
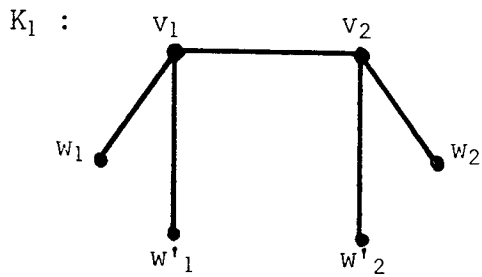
Comme  $G$  est  $\beta$ -imparfait critique,  $B' = V(G)$ .

Donc  $\beta(G) = \beta(G_{B'}) = 2$ .

Ceci achève la démonstration.

3 - UNE FAMILLE DE GRAPHES  $\beta$ -PARFAITS

Proposition 7 : Tout graphe  $\beta$ -imparfait admet un sous-graphe isomorphe à l'un des graphes  $K_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) représentés ci-dessous :



Il suffit de démontrer la proposition 7 pour les graphes  $\beta$ -imparfaits critiques.

Soit donc  $G$  un tel graphe; d'après la proposition 6,  $G$  admet un absorbant de cardinal 2, soit  $\{v_1, v_2\}$ ; en outre  $\alpha(G) \geq 3$  et donc  $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ .

- A) -  $\{v_2\}$  n'est pas absorbant. Donc  $\exists w_1 \in V(G) - \{v_1, v_2\}$  tel que  $\{w_1, v_2\} \notin E(G)$ ;  
 on a alors  $\{w_1, v_1\} \in E(G)$ .  
 De même  $\exists w_2 \in V(G) - \{v_1, v_2\}$  tel que :  
 $\{w_2, v_1\} \notin E(G)$ ;  $\{w_2, v_2\} \in E(G)$ .
- B) -  $\{v_2, w_1\}$  étant stable, n'est pas absorbant.  
 Donc  $\exists w'_1 \in V(G) - \{v_2, w_1\}$  tel que :  
 $\{w'_1, w_1\} \notin E(G)$  et  $\{w'_1, v_2\} \notin E(G)$ ; on a alors  $\{w'_1, v_1\} \in E(G)$ .  
 De même  $\exists w'_2 \in V(G) - \{v_1, w_2\}$  tel que :  
 $\{w'_2, w_2\} \notin E(G)$ ,  $\{w'_2, v_1\} \notin E(G)$ ,  $\{w'_2, v_2\} \in E(G)$ .
- C) - Les sommets  $v_1, v_2, w_1, w_2, w'_1, w'_2$  sont nécessairement distincts entre eux.  
 On vérifie alors que l'ensemble de ces 6 sommets engendre l'un des sous-graphes  $K_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) (à un isomorphisme près).  
 Ceci achève la démonstration.

Remarque :  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_6$  sont  $\beta$ -imparfaits (et donc  $\beta$ -imparfaits critiques) mais  $K_4$  et  $K_5$  sont  $\beta$ -parfaits. La proposition 7 n'admet donc pas de réciproque : nous ne savons pas caractériser les graphes  $\beta$ -parfaits en termes de "sous-graphes exclus". La proposition 7 permet seulement de définir une classe particulière de graphes  $\beta$ -parfaits (ceux qui ne contiennent aucun sous-graphe isomorphe à l'un des  $K_i, i = 1, \dots, 6$ ).

#### 4 - APPLICATIONS ; GENERALISATION DU RÉSULTAT DE GUPTA

Proposition 8 : Tout graphe  $\beta$ -imparfait contient un sous-graphe isomorphe à  $H_1$ .

En effet, tout graphe  $K_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) contient un sous-graphe isomorphe à  $H_1$ ; il suffit donc d'appliquer la proposition 7.

Remarques :- La proposition 8 est bien une généralisation du résultat de Gupta.  
 - M. Las Vergnas a étudié la classe des graphes ne comportant aucun sous-graphe isomorphe à  $H_1$  (qui sont donc  $\beta$ -parfaits) en ce qui concerne leur nombre de couplage [9].

On trouvera une caractérisation de cette classe de graphes dans l'annexe II.

Proposition 9 : Pour tout graphe  $G$ ,  $D(G)$  est  $\beta$ -parfait.

En effet, étant donné un graphe  $G$ , toute arête de  $D(G)$  contient un sommet de degré 2 de  $D(G)$ ; donc  $D(G)$  ne comporte aucun sous-graphe isomorphe à l'un des  $K_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ).

La proposition 9 est utilisée dans la démonstration du résultat suivant : Pour tout graphe  $G$ ,  $\beta[D(G)] = |V(G)| - \alpha[CL(G)]$  ([3] ; se reporter au paragraphe III.3.C).

## V - PARTITION DES SOMMETS D'UN GRAPHE EN ABSORBANTS DU GRAPHE

### 1 - INTRODUCTION

#### A) Rappels sur les bonnes colorations d'un hypergraphe [7]

Un ensemble transversal d'un hypergraphe  $H = (X; E_i, i \in I)$  est une partie  $T$  de  $X$  avec :  $\forall i \in I, T \cap E_i \neq \emptyset$ .

Le nombre de transversalité de  $H$ , noté  $\tau(H)$ , est le cardinal minimum d'un transversal de  $H$ .

Une bonne  $k$ -coloration ( $k \geq 1$ ) de  $H$  est une partition  $\{S_1, \dots, S_k\}$  de  $X$  en  $k$  classes telle que :

$$\forall i \in I, |\{j \in \{1, \dots, k\} \mid E_i \cap S_j \neq \emptyset\}| = \min \{|E_i|, k\}$$

En particulier pour  $k \leq \min_{i \in I} (|E_i|)$ ,  $H$  admet une bonne  $k$ -coloration si et seulement si  $X$  admet une partition en  $k$  transversaux de  $H$ .

Le nombre chromatique de l'hypergraphe  $H$ , noté  $\gamma(H)$ , est le plus petit entier  $k$ ,  $k \geq \max_{i \in I} (|E_i|)$ , tel que  $H$  admette une bonne  $k$ -coloration.

Dans le cas des graphes cette définition coïncide avec la définition classique du nombre chromatique.



B) Hypergraphe des images d'un graphe

A tout graphe  $G$  nous associerons son hypergraphe des images, noté  $I(G)$ , ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  et pour famille d'arêtes :  $(F_v, v \in V(G))$ , avec  $\forall v \in V(G)$  :

$$F_v = \{v' \in V(G) \mid \{v, v'\} \in E(G)\} \cup \{v\}.$$

On vérifie immédiatement que l'ensemble des absorbants d'un graphe  $G$  est identique à l'ensemble des transversaux de  $I(G)$ .

Donc pour tout graphe  $G$  :  $\beta(G) = \tau(I(G))$ .

Remarque : Pour tout graphe  $G$ ,  $I(G)$  est isomorphe à son hypergraphe dual (pour les définitions de l'isomorphisme et de la dualité, se reporter à [6]).

Le lien entre  $I(G)$  et l'ensemble des absorbants de  $G$  nous amène à nous intéresser dans ce chapitre au problème général suivant :

Etant donné un graphe  $G$ , pour quelles valeurs de  $k$  l'hypergraphe  $I(G)$  admet-il une bonne  $k$ -coloration ?

Ce problème contient deux cas particuliers importants :

- On se limite aux valeurs de  $k$  supérieures ou égales à

$$\max_{v \in V(G)} (|F_v|) = \Delta(G)+1 \quad (\Delta(G) \text{ désigne le degré maximum d'un}$$

sommet de  $G$ ).

$I(G)$  admettra une bonne  $k$ -coloration  $\forall k \geq \gamma(I(G)) \geq \Delta(G)+1$ ,  $k \leq |V(G)|$ .

Nous sommes donc ramenés à l'étude de  $\gamma(I(G))$ .

Remarquons que pour  $k \geq \Delta(G)+1$ , toute bonne  $k$ -coloration de  $I(G)$  est une bonne  $k$ -coloration du graphe  $C(G)$ , et réciproquement. Donc  $\gamma(I(G)) = \gamma[C(G)]$ .

On peut rattacher à l'étude du paramètre  $\gamma[C(G)]$  la conjecture de la coloration totale, qui s'énonce :

$$\text{Pour tout graphe } G, \gamma[CD(G)] \leq \Delta(G)+2. \quad [10]$$

Dans un autre chapitre, nous étudierons  $\gamma[C(G)]$  pour les graphes cubiques.

- On se limite aux valeurs de  $k$  inférieures ou égales à

$$\min_{v \in V(G)} (|F_v|) = \delta(G)+1 \quad (\delta(G) \text{ désigne le degré minimum d'un}$$

sommet de  $G$ ).

Pour ces valeurs de  $k$ , toute bonne  $k$ -coloration de  $I(G)$  est une partition de  $V(G)$  en  $k$  absorbants de  $G$ , et réciproquement.

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

Pour tout graphe  $G$ ,  $\Pi(G)$  désigne le nombre maximum de classes d'une partition de  $V(G)$  en absorbants de  $G$ .

Remarques : . Pour tout graphe  $G$ ,  $\Pi(G) \leq \delta(G)+1$ ; en particulier si  $G$  comporte au moins un sommet isolé,  $\Pi(G) = 1$ .

. Pour tout graphe  $G$ ,  $\forall k$ ,  $1 \leq k \leq \Pi(G)$ ,  $I(G)$  admet une bonne  $k$ -coloration.

Nous allons nous consacrer dans ce paragraphe à l'étude du paramètre  $\Pi(G)$ .

### C) Un résultat de Ore

On pourra trouver dans Ore ([11], page 206) la démonstration du résultat suivant : Pour tout graphe  $G$  sans sommets isolés,  $\Pi(G) \geq 2$ .

Autrement dit,  $\Pi(G) = 1$  si et seulement si  $\delta(G) = 0$ .

## 2 - UNE GENERALISATION DU RÉSULTAT DE ORE

Définition : Le graphe complémentaire d'un graphe  $G$ , noté  $\bar{G}$ , est tel que :

$$V(\bar{G}) = V(G).$$

$$E(\bar{G}) = \{\{v, v'\} \mid v \in V(G), v' \in V(G) - \{v\}, \{v, v'\} \notin E(G)\}$$

On vérifie immédiatement que  $\beta(\bar{G}) = 1$  si et seulement si  $G$  admet au moins un sommet isolé.

Le résultat de Ore peut donc se formuler ainsi :

Pour tout graphe  $G$  tel que  $\beta(\bar{G}) \geq 2$ ,  $\Pi(G) \geq 2$ .

Nous allons en donner la généralisation suivante :

Proposition 10 : Pour tout graphe  $G$ ,  $\Pi(G) \geq \beta(\bar{G})$ . [12]

En effet, étant donné un graphe  $G, \forall B \subseteq V(G)$ , posons :

$$\cdot D_e(B) = \{v \in V(G) - B \mid \forall b \in B, \{v, b\} \in E(G)\}$$

(ensemble des "dominants extérieurs" de  $B$ )

$$\cdot D_i(B) = \{b \in B \mid b \in D_e(B - \{b\})\}$$

(ensemble des "dominants intérieurs" de  $B$ )

On vérifie immédiatement que  $B$  est un absorbant de  $\bar{G}$  si et seulement si  $D_e(B) = \emptyset$ .

Une partition  $\{B_1, \dots, B_m\}$  de  $V(G)$  sera dite absorbante si  $\forall j \in \{1, \dots, m\} D_i(B_j) \neq \emptyset$ .

Il est facile de vérifier qu'à toute partition absorbante de  $V(G)$  en  $k$  classes ( $k \geq 1$ ) correspond au moins un absorbant de  $G$  de cardinal  $k$ , et réciproquement.

Le nombre minimum de classes d'une partition absorbante de  $G$ , noté  $m$ , sera donc égal à  $\beta(G)$ .

Soit  $P = \{B_1, \dots, B_m\}$  une partition absorbante de  $V(G)$  en  $m$  classes telle que pour toute autre partition absorbante de  $V(G)$  en  $m$  classes, soit  $P' = \{B'_1, \dots, B'_m\}$ , on ait l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^m |D_i(B'_j)| \leq \sum_{j=1}^m |D_i(B_j)| \quad (1)$$

Supposons que :  $\exists B_j \in P$  avec  $D_e(B_j) \neq \emptyset$ .

Soit alors  $v \in D_e(B_j)$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $v \in B_k$  (donc  $k \neq j$ ).

Remarquons que  $v \notin D_i(B_k)$ ; en effet sinon  $(P - \{B_j, B_k\}) \cup \{B_j \cup B_k\}$  serait une partition absorbante de  $V(G)$  en  $m-1$  classes.

En particulier  $B_k - \{v\} \neq \emptyset$  et il est possible de définir une partition  $P' = \{B'_1, \dots, B'_m\}$  de  $V(G)$  en posant :

$$B'_k = B_k - \{v\} ; B'_j = B_j \cup \{v\}$$

et  $\forall \ell \in \{1, \dots, m\} - \{j, k\} : B'_\ell = B_\ell$ .

On vérifie alors que :

- .  $D_i(B'_k) \supseteq D_i(B_k)$  (puisque  $v \notin D_i(B_k)$ )
- .  $D_i(B'_j) = D_i(B_j) \cup \{v\}$
- .  $D_i(B'_\ell) = D_i(B_\ell) \quad \forall \ell \in \{1, \dots, m\} - \{j, k\}$ .

$P'$  est une partition absorbante de  $V(G)$  en  $m$  classes et l'on peut mettre en évidence une contradiction avec l'inégalité (1).

$$\text{Donc } \forall B_j \in P, \quad D_e(B_j) = \emptyset.$$

Autrement dit  $P$  est une partition de  $V(G)$  en  $m = \beta(G)$  absorbants de  $\bar{G}$ . D'où  $\pi(\bar{G}) \geq \beta(G)$ .

En remplaçant  $G$  par  $\bar{G}$  nous obtenons l'énoncé de la proposition 10.

### 3 - REMARQUES

A) La proposition 10 a pour corollaire immédiat l'inégalité suivante (valable pour tout graphe  $G$ ) :  $\beta(G) \beta(\bar{G}) \leq |V(G)|$ .

Cette inégalité est la meilleure possible en ce sens que si  $E(G) = \emptyset$ , l'égalité est atteinte (quelle que soit la valeur de  $|V(G)|$ ).

Elle conduit à la solution complète du problème du type "Nordhaus-Gaddum" pour le nombre d'absorption, tel qu'il a été défini par G. Chartrand et J. Mitchem [13]; cette solution se présente comme suit :

$$\text{Pour tout graphe } G : \min \{3, |V(G)| + 1\} \leq \beta(G) + \beta(\bar{G}) \leq |V(G)| + 1$$

$$\min \{2, |V(G)|\} \leq \beta(G) \beta(\bar{G}) \leq |V(G)|$$

et ces inégalités sont les meilleures possibles.

Signalons aussi que C. Payan, avec qui nous avons démontré la proposition 10, a amélioré l'inégalité  $\beta(G) \beta(\bar{G}) \leq |V(G)|$  dans le cas où  $G$  est soumis à certaines restrictions (relatives au degré des sommets par exemple) [14].

B) V.G. Vizing a conjecturé (cité dans [7], page 365) :

Etant donnés deux graphes  $G$  et  $H$  :  $\beta(G+H) \geq \beta(G) \beta(H)$  ;  
 $G+H$  désigne la somme cartésienne des graphes  $G$  et  $H$  (définie dans [7], page 363).

Il est facile de vérifier que pour tout graphe  $G$  :

$$\beta(G + \bar{G}) = |V(G)|$$

La proposition 10 répond donc affirmativement à la conjecture de Vizing dans un cas particulier.

## VI - APPLICATION DE LA NOTION DE NOMBRE D'ABSORPTION A L'ETUDE DE CERTAINS PROBLEMES DE COLORATION.

### 1 - INTRODUCTION

Etant donné un graphe  $G$ , son indice chromatique, noté  $q(G)$ , est le cardinal minimum d'une partition de  $E(G)$  en couplages de  $G$  (on supposera toujours  $E(G) \neq \emptyset$ ).  $q(G)$  est donc égal au nombre chromatique de  $L(G)$ . Pour tout graphe  $G$  on a évidemment :  $q(G) \geq \Delta(G)$ . ( $\Delta(G)$  est le degré maximum de  $G$ ).

V.G. Vizing a montré en outre que pour tout graphe  $G$  :

$$q(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad [15]$$

L'étude de l'indice chromatique des graphes fait l'objet de nombreux travaux récents; le cas particulier des graphes cubiques (graphes dont tous les sommets sont de degré 3) suscite un grand intérêt (c'est le cas non trivial le plus simple ; le problème est lié en outre à la célèbre Conjecture des Quatre Couleurs).

Dans ce qui suit nous montrerons l'existence d'un lien entre l'indice chromatique (pour les graphes cubiques en particulier) et d'autres paramètres relatifs à la notion d'absorbants d'un graphe. Ces paramètres sont les suivants (définis pour tous les graphes  $G$  avec  $E(G) \neq \emptyset$ ) :

- $\beta(L(G))$ , nombre d'absorption de  $L(G)$ ; comme nous l'avons déjà vu,  $\beta(L(G))$  est égal à  $\alpha'(L(G))$ , c'est-à-dire au cardinal minimum d'un couplage maximal (par inclusion) de  $G$ . Ce paramètre a été étudié récemment par Grünbaum [16], qui le note  $\underline{m}(G)$ .
- $\bar{\pi}(G)$ , défini par Grünbaum [16] comme le cardinal maximum d'un ensemble de couplages maximaux de  $G$  deux à deux disjoints.
- $\pi(L(G))$ , nombre maximum de classes d'une partition de  $E(G)$  en absorbants de  $L(G)$  (voir le paragraphe V du présent chapitre).

## 2 - RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES PARAMÈTRES $\beta(L(G))$ , $\bar{\pi}(G)$ ET $\pi(L(G))$ .

Proposition 11 : Pour tout graphe  $G$  avec  $E(G) \neq \emptyset$  les inégalités suivantes sont vérifiées :

- (1)  $\bar{\pi}(G) \leq \pi(L(G))$
- (2)  $\beta(L(G)) \geq \frac{1}{2} [ |V(G)| - \alpha(G) ]$
- (3)  $\pi(L(G)) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)| - \alpha(G)}$

En effet :

- a) Tout couplage maximal de  $G$  est un absorbant de  $L(G)$ ; il existe donc une partition de  $V(L(G))$  en  $\bar{\pi}(G)$  absorbants de  $L(G)$ , ce qui démontre l'inégalité (1).
- b) Si  $K$  est un couplage maximal de  $G$  de cardinal  $\beta(L(G))$ ,  $V(G) - V(G^K)$  est un stable de  $G$  de cardinal  $|V(G)| - 2\beta(L(G))$ , d'où l'inégalité (2).
- c) Chaque classe d'une partition de  $V(L(G)) = E(G)$  en  $\pi(L(G))$  absorbants de  $L(G)$  comporte au moins  $\beta(L(G))$  éléments; donc  $|E(G)| \geq \pi(L(G)) \beta(L(G))$ .

On peut alors appliquer l'inégalité (2) :

$$\pi(L(G)) \leq \frac{|E(G)|}{\beta(L(G))} \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)| - \alpha(G)}$$

d'où l'inégalité (3).

On remarquera que s'il y a égalité dans (3), il y a égalité dans (2).

Rappelons qu'un graphe  $G$  est dit  $d$ -régulier si :

$$\forall v \in V(G) \quad d_G(v) = d$$

Proposition 12 : Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ). Les inégalités suivantes sont vérifiées :

- (1)  $\bar{\Pi}(L(G)) \leq 2d$
- (2)  $\Pi(LL(G)) \leq 2d$
- (3)  $\beta(LL(G)) \geq \frac{|V(G)|(d-1)}{4}$

En outre, s'il y a égalité dans (1), il y a égalité dans (2) et (3).

En effet :

a) L'inégalité (2) de la proposition 11 donne, en remplaçant  $G$  par  $L(G)$  :

$$\beta(LL(G)) \geq \frac{1}{2} [ |E(G)| - \alpha(L(G)) ]$$

$$\text{Or } |E(G)| = |V(G)| \times \frac{d}{2} \quad \text{et } \alpha(L(G)) = v(G) \leq \frac{|V(G)|}{2}$$

D'où l'inégalité (3).

b) Comme dans la démonstration de l'inégalité (3) de la proposition 11, on peut écrire :

$$\Pi(LL(G)) \leq \frac{|E(L(G))|}{\beta(LL(G))}$$

$$\text{Or } |E(L(G))| = |V(G)| \times \frac{d(d-1)}{2}$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité (3) pour obtenir l'inégalité (2). On constate en outre que s'il y a égalité dans (2) il y a égalité dans (3).

c) D'après l'inégalité (1) de la proposition 11 :

$$\bar{\Pi}(L(G)) \leq \Pi(LL(G))$$

L'inégalité (2) implique donc l'inégalité (1); en outre s'il y a égalité dans (1) il y a égalité dans (2).

Ceci achève la démonstration.

### 3 - LIEN AVEC L'INDICE CHROMATIQUE POUR LES GRAPHES RÉGULIERS DE DEGRÉ IMPAIR.

Proposition 13 : Soit  $G$  un graphe  $(2p+1)$ -régulier ( $p \geq 1$ ).

- (1)  $q(G) \geq 2p + 1$
- (2)  $\bar{\Pi}(L(G)) \leq 4p + 2$
- (3)  $\Pi(LL(G)) \leq 4p + 2$
- (4)  $\beta(LL(G)) \geq \frac{|V(G)| p}{2}$

En outre s'il y a égalité dans (1), il y a égalité dans (2),(3),(4).

En effet : D'après la proposition 12 il nous suffit de démontrer que  $q(G) = 2p + 1 \Rightarrow \bar{\Pi}(L(G)) = 4p + 2$ .

Pour tout ensemble fini non vide  $X$  nous désignerons par  $K_X$  le graphe complet ayant pour ensemble de sommets  $X$ , défini par :

$$V(K_X) = X$$

$$E(K_X) = \{\{x, x'\} \mid x \in X, x' \in X, x' \neq x\}$$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$  nous désignerons par  $K_n$  le graphe  $K_{\{1, \dots, n\}}$ .

Supposons donc que  $q(G) = 2p + 1$ .

Cela signifie qu'il existe une application  $\phi$  de  $E(G)$  sur  $V(K_{2p+1})$  telle que :

$$e \in E(G), e' \in E(G), |e \cap e'| = 1 \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(e')$$

Autrement dit  $\forall \{e, e'\} \in E(L(G)) :$

$$\phi(\{e, e'\}) = \{\phi(e), \phi(e')\} \in E(K_{2p+1}).$$

Or on sait que  $q(K_{2p+1}) = 2p + 1$  ([7] p. 237)

Ce qui revient à dire que  $E(K_{2p+1})$  admet une partition en  $2p+1$  couplages maximaux de  $K_{2p+1}$  (de cardinal  $p$ ); ces couplages seront notés  $F_1, \dots, F_{2p+1}$  de sorte que :

$\forall i, j \in \{1, \dots, 2p+1\}$ ,  $i$  appartient à une arête de  $F_j$  si et seulement si  $i \neq j$ .

$\forall i \in \{1, \dots, 2p+1\}$ , posons :

$$E_i = \{\{e, e'\} \in E(L(G)) \mid \phi(\{e, e'\}) \in F_i\} = \phi^{-1}(F_i)$$



$(E_1, \dots, E_{2p+1})$  est évidemment une partition de  $E(L(G))$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, 2p+1\}$ ; étudions le graphe  $(E(G); E_i)$  qui est un sous-graphe partiel de  $L(G)$ .

Soit  $e \in E(G)$  telle que  $\phi(e) = i$ ;  $\forall j \in \{1, \dots, 2p+1\} - \{i\}$ ,  $\{i, j\} \notin F_i$ . Donc  $\forall e' \in E(G)$  telle que  $\{e, e'\} \in E(L(G))$ ,  $\{e, e'\} \notin E_i$ ;  $e$  est un sommet isolé de  $(E(G); E_i)$ .

Soit  $e \in E(G)$  telle que  $\phi(e) = j \neq i$ . Il existe un élément  $k$  unique de  $\{1, \dots, 2p+1\} - \{i, j\}$  tel que  $\{j, k\} \in F_i$ .

Donc si  $e' \in E(G)$  et  $\{e, e'\} \in E_i$ ,  $\phi(e') = k$ . Dans  $(E(G); E_i)$ , le sommet  $e$  est adjacent à exactement deux sommets  $e'$  et  $e''$  avec  $\phi(e') = \phi(e'') = k$ .

On en déduit que  $(E(G); E_i)$  possède la structure suivante :

- les sommets  $e \in E(G)$  tels que  $\phi(e) = i$  sont isolés.
- les autres sommets engendrent un sous-graphe 2-régulier de nombre chromatique 2, et donc d'indice chromatique 2.

$E_i$  admet donc une partition en deux couplages maximaux de  $L(G)$  (puisque  $\{e \in E(G) \mid \phi(e) = i\}$  est un stable de  $L(G)$ ).

Ceci étant vrai  $\forall i \in \{1, \dots, 2p+1\}$ ,  $E(L(G))$  admet une partition en  $2(2p+1) = 4p+2$  couplages maximaux de  $L(G)$ . D'où  $\bar{\Pi}(L(G)) \geq 4p+2$  et donc  $\bar{\Pi}(L(G)) = 4p+2$ .

Ceci achève la démonstration.

Remarques :

- La démonstration peut être faite de manière beaucoup plus simple pour  $p=1$ .
- On peut se demander si le résultat :

$$q(G) = d \Rightarrow \bar{\Pi}(L(G)) = 2d$$

n'est pas également valable pour les graphes  $d$ -réguliers où  $d$  est pair.

Une condition nécessaire à réaliser est que  $|V(G)|$  soit multiple de 4 (pour obtenir l'égalité dans l'inégalité (3) de la proposition 12); cette condition n'est pas suffisante pour  $d = 2$  comme le montre l'exemple du cycle de longueur 4. Nous n'avons pas de contre-exemple pour  $d \geq 4$ .

En tout état de cause une démonstration serait nécessairement très différente de celle que nous avons donnée pour  $d$  impair.

- L'étude précédente permet en fait de montrer que si  $G$  est  $2p+1$ -régulier ( $p \geq 1$ ) avec  $q(G) = 2p+1$ ,  $L(G)$  vérifie la Conjecture de la Coloration Totale.

#### 4 - CARACTÉRISATION DES GRAPHES CUBIQUES D'INDICE CHROMATIQUE 3

Proposition 14 : Soit  $G$  un graphe cubique.

Les inégalités suivantes sont vérifiées :

- (1)  $q(G) \geq 3$
- (2)  $\bar{\Pi}(L(G)) \leq 6$
- (3)  $\Pi(LL(G)) \leq 6$
- (4)  $\beta(LL(G)) \geq \frac{|V(G)|}{2}$

En outre s'il y a égalité dans l'une, il y a égalité dans les autres.

En effet :

Les inégalités (1),(2),(3),(4) sont vérifiées d'après la proposition 13 où l'on fait  $p = 1$ .

Nous avons vu également que :

égalité dans (1)  $\Rightarrow$  égalité dans (2)  $\Rightarrow$  égalité dans (3)  $\Rightarrow$  égalité dans (4).

Nous allons maintenant montrer que :

égalité dans (4)  $\Rightarrow$  égalité dans (1).

Supposons donc que  $\beta(LL(G)) = \frac{|V(G)|}{2}$ .

Autrement dit  $\alpha'(LL(G)) = \frac{|V(G)|}{2}$ . Il existe un couplage maximal  $K$  de  $L(G)$  avec  $|K| = \frac{|V(G)|}{2}$ .

Soit  $E_1 = E(G) - (\cup_{e_i \in K} e_i)$ .

Comme  $K$  est un couplage maximal de  $L(G)$ ,  $E_1$  est un stable de  $L(G)$ ; c'est donc un couplage de  $G$ , de cardinal :

$$|E_1| = \frac{3|V(G)|}{2} - 2|K| = \frac{|V(G)|}{2}.$$

Soit alors  $F = E(G) - E_1$  et  $H = (V(G); F)$ .

Puisque  $|E_1| = \frac{|V(G)|}{2}$ , H est régulier de degré 2.

Donc H est isomorphe à  $L(H)$ .

Or d'après la définition de  $E_1$ , K est un couplage de  $L(H)$  qui est en même temps une couverture de  $L(H)$ .

Donc  $q(L(H)) = 2$  et par suite  $q(H) = 2$ .

F admet donc une partition en deux couplages  $E_2$  et  $E_3$  de H (qui sont aussi des couplages de G).

En conclusion  $\{E_1, E_2, E_3\}$  constitue une partition de  $E(G)$  en couplages de G; ceci achève la démonstration.

## 5 - REMARQUES

A) Un graphe cubique G a donc pour indice chromatique 3 si et seulement si  $\beta(L(G)) = \frac{|V(G)|}{2}$

B) Etant donné un graphe cubique G, posons  $H = L(G)$ .

$$|V(H)| = \frac{3|V(G)|}{2}$$

Donc  $\alpha'(L(H)) = \beta(L(H)) \geq \frac{|V(H)|}{3}$ , soit  $\frac{\alpha'(L(H))}{|V(H)|} \geq \frac{1}{3}$  avec l'égalité si et seulement si  $q(G) = 3$ .

On peut rapprocher ce résultat de celui de R. Forcade [17], qui s'énonce :

Soit  $I_d$  le graphe du cube à d dimensions.

$\frac{\alpha'(L(I_d))}{|V(I_d)|}$  est une fonction non croissante de d, et en outre :

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\alpha'(L(I_d))}{|V(I_d)|} = \frac{1}{3}$$

On pourra aussi vérifier qu'un résultat de B. Sands [18] se ramène à démontrer que si G appartient à une certaine famille de graphes :

$$\frac{\alpha'(L(G))}{|V(G)|} \geq \frac{1}{3}$$

Il semble donc que le rapport  $\frac{1}{3}$  doive jouer un rôle particulier dans l'étude du paramètre  $\frac{\alpha'(L(G))}{|V(G)|}$ .

On pourra remarquer que  $\frac{1}{3}$  est une valeur frontière en ce sens que (pour tout graphe  $G$ ) :

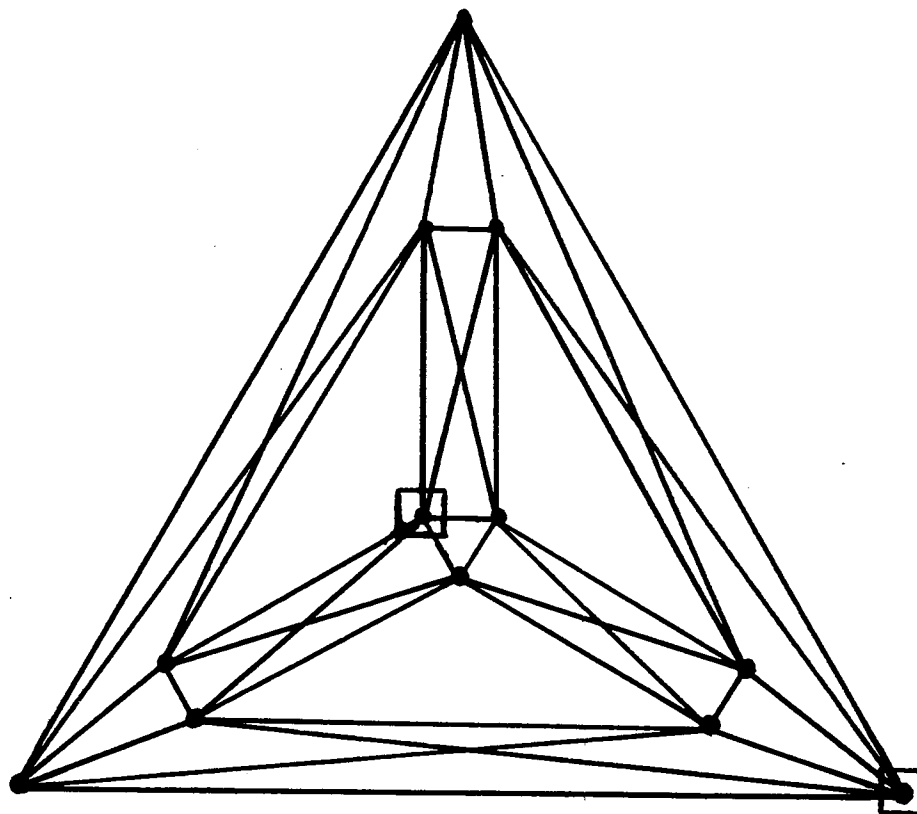
$\frac{\alpha'(L(G))}{|V(G)|} \geq \frac{1}{3} \iff G$  admet un couplage maximal  $K$  qui comporte au plus  $|K|$  sommets insaturés (n'appartenant à aucune arête du couplage).

C) Nous avons déjà signalé le résultat de Gupta [2] qui s'énonce : Pour tout graphe  $G$ ,  $\beta(L(G)) = |V(G)| - \alpha[CDL(G)]$ . Donc, si  $G$  est un graphe cubique :

$$\beta(LL(G)) = |V(L(G))| - \alpha[CDL(G)] = \frac{3|V(G)|}{2} - \alpha[CDL(G)].$$

Donc  $\alpha[CDL(G)] \leq |V(G)|$  avec l'égalité si et seulement si  $q(G) = 3$ . L'étude de  $q(G)$  est donc ainsi ramenée à celle du nombre de stabilité d'un graphe associé à  $G$ .

D) Nous avons représenté ci-dessous le graphe  $LL(G)$  en choisissant pour  $G$  le plus simple des graphes cubiques, c'est-à-dire le graphe complet à quatre sommets; nous avons entouré d'un carré les sommets d'un absorbant de cardinal  $\frac{|V(G)|}{2} = 2$ . Le dessin rend évident la relation de structure qui associe  $LL(G)$  à  $G$  : nous pourrions imaginer que nous avons représenté le graphe  $G$  par des bâtonnets disposés sur une table; chaque "bâtonnet" correspond à un graphe complet à quatre sommets.



### 6 - APPLICATION À UNE FORMULATION DE LA CONJECTURE DES QUATRE COULEURS

A) Nous renvoyons le lecteur à [7], [19] pour toutes les définitions usuelles concernant les graphes planaires et la connectivité d'un graphe.

On sait qu'étant donné un graphe planaire triangulé  $G$ , son graphe dual est un graphe cubique planaire 3-connexe  $G^*$ .

En outre  $\gamma(G) \leq 4 \Leftrightarrow q(G^*) = 3$ .

La Conjecture des Quatre Couleurs admet les deux formulations équivalentes suivantes :

- pour tout graphe planaire triangulé  $G$ ,  $\gamma(G) \leq 4$
- pour tout graphe cubique planaire 3-connexe  $H$ ,  $q(H) = 3$ .

B) On peut montrer qu'un graphe  $G$  est le graphe représentatif des arêtes d'un graphe cubique planaire 3-connexe si et seulement si :

- $G$  est régulier de degré 4 et 3-connexe.
- $G$  admet une représentation planaire dans laquelle  $E(G)$  peut être partitionné en triangles de  $G$  qui sont les contours de faces de  $G$ .

D'après la proposition 14, la Conjecture des Quatre Couleurs se ramène donc à l'étude du paramètre  $\alpha'(L(G))$  pour une famille particulière de graphes  $G$  planaires 3-connexes (c'est-à-dire de graphes  $G$  3-polytopaux). Ceci est à rapprocher de l'étude de B. Grünbaum sur les couplages dans les graphes polytopaux [16].

C) Couverture des angles par des angles dans un graphe planaire triangulé

Soit  $G$  un graphe planaire triangulé ( $|V(G)| \geq 4$ ).

Un angle de  $G$  est un couple d'arêtes de  $G$  appartenant au contour d'une même face de  $G$  (une représentation planaire de  $G$  étant donnée). Deux angles de  $G$  seront dits adjacents s'ils ont au moins une arête commune. Nous dirons qu'un ensemble  $A$  d'angles de  $G$  est une couverture des angles de  $G$  si tout angle de  $G$  est adjacent à au moins un angle appartenant à  $A$ . Nous désignerons par  $r(G)$  le cardinal minimum d'une couverture des angles de  $G$ .

Proposition 15 : Pour tout graphe planaire triangulé  $G$ ,  $r(G) \geq |V(G)| - 2$  avec l'égalité si et seulement si  $\gamma(G) \leq 4$ .

En effet : Soit  $G^*$  le graphe planaire dual de  $G$ . C'est un graphe cubique avec  $|V(G^*)| = 2|V(G)| - 4$ .

On pourra identifier les arêtes de  $G$  aux arêtes de  $G^*$  et les angles de  $G$  aux arêtes de  $L(G^*)$ ; les couvertures des angles de  $G$  par des angles de  $G$  seront ainsi identifiées aux absorbants de  $LL(G^*)$ .

On en déduit que  $r(G) = \beta(LL(G^*))$ .

D'après la proposition 14,  $r(G) \geq \frac{|V(G^*)|}{2} = |V(G)| - 2$  avec l'égalité si et seulement si  $q(G^*) = 3$ , soit  $\gamma(G) \leq 4$ .

Ceci achève la démonstration.

Corollaire : La Conjecture des Quatre Couleurs est équivalente à la proposition suivante : Pour tout graphe planaire triangulé  $G$ ,  
 $r(G) \leq |V(G)| - 2$ .

D) Remarques

- le calcul de  $r(G)$  peut apparaître comme plus simple que celui de  $\gamma(G)$  sur le plan pratique.
- Posons  $r_n = \max \{r(G) \mid G \text{ est un graphe planaire triangulé avec } |V(G)| = n\}$  ( $\forall n \geq 4$ ).

Si la Conjecture des Quatre Couleurs est vraie,  $r_n = n-2 \quad \forall n \geq 4$  ;

La suite  $(\frac{r_n}{n})$  ( $n \geq 4$ ) est donc croissante et a pour limite 1.

Il est donc logique de poser les questions suivantes :

La suite  $(\frac{r_n}{n})$  ( $n \geq 4$ ) est-elle croissante ?

Admet-elle une limite ?

On peut montrer que cette suite est bornée par  $\frac{3}{2}$ .

En effet, si  $G$  est un graphe planaire triangulé et si  $G^*$  est son graphe dual :

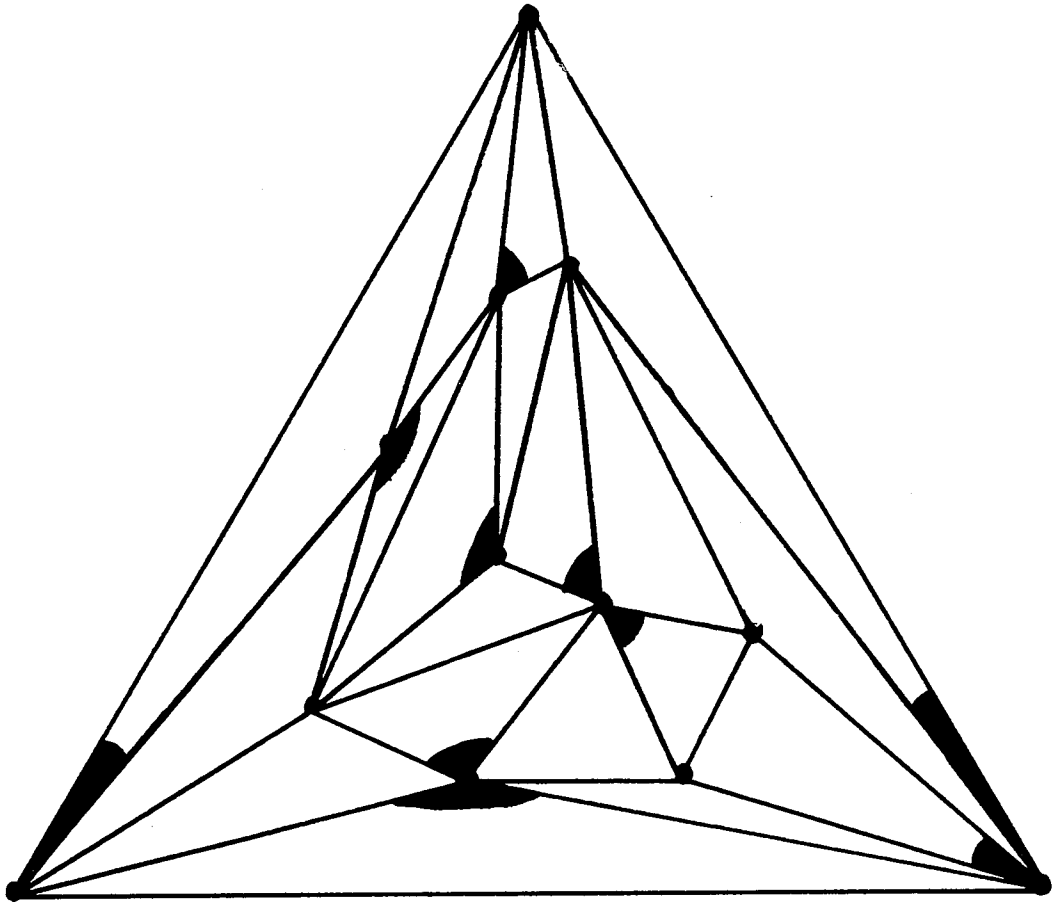
$$r(G) = \beta(LL(G^*)) = \alpha'(LL(G^*)) \leq v(L(G^*))$$

$$\text{Donc } r(G) \leq \frac{|V(L(G^*))|}{2} = \frac{3|V(G^*)|}{4} = \frac{3(2|V(G)| - 4)}{4}$$

$$\text{D'où } r_n \leq \frac{6n - 12}{4} = \frac{3n}{2} - 3 \text{ et } \frac{r_n}{n} \leq \frac{3}{2} - \frac{3}{n} < \frac{3}{2}$$

- A titre d'exemple, nous avons représenté ci-après un graphe planaire triangulé  $G$  à 12 sommets; nous avons marqué en outre un ensemble de 10 angles qui constitue une couverture des angles de  $G$ .

I.31







## CHAPITRE II

SUR L'INDICE CHROMATIQUE DU GRAPHE

REPRESENTATIF DES ARETES D'UN GRAPHE REGULIER



## I - INTRODUCTION

Nous venons d'établir par des procédés constructifs certaines relations entre l'indice chromatique d'un graphe régulier  $G$  de degré impair et d'autres invariants attachés à  $L(G)$  et  $LL(G)$ .

Dans le même esprit, nous allons maintenant étudier les relations pouvant exister entre  $q(G)$ ,  $q(L(G))$  et  $q(LL(G))$  pour les graphes réguliers  $G$  de degré quelconque ( $q(G)$  désigne l'indice chromatique de  $G$ ). Rappelons que si  $G$  est un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ),  $L(G)$  est un graphe  $(2d-2)$ -régulier.

## II - SUR L'INDICE CHROMATIQUE DE $LL(G)$ POUR UN GRAPHE $d$ -RÉGULIER $G$ AVEC

$$\underline{q(G) = d.}$$

### 1 - INTRODUCTION, NOTATIONS

Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier avec  $q(G) = d$ . ( $d \geq 2$ )  
 $G$  comporte nécessairement un nombre pair de sommets; posons  $|V(G)| = 2r$ .  
 Alors  $|E(G)| = |V(L(G))| = r \times d$ .  
 Or  $L(G)$  est  $(2d-2)$ -régulier.  
 Donc  $|E(L(G))| = r \times d(d-1) = |V(LL(G))|$ .  
 $LL(G)$  est un graphe  $(4d-6)$ -régulier qui comporte un nombre pair de sommets.

Nous allons démontrer qu'en fait  $q(LL(G)) = 4d-6$ .

Pour cela nous aurons besoin du concept de multigraphe.

Un multigraphe  $H$  est un couple  $H = (V(H); E(H))$  où  $V(H)$  est un ensemble fini non vide (ensemble des sommets de  $H$ ) et où  $E(H)$  est une famille de parties à deux éléments de  $V(H)$  ( $E(H)$  est l'ensemble des arêtes de  $H$ ). Il peut donc exister plusieurs arêtes distinctes de  $H$  d'extrémités  $v$  et  $v'$  ( $v, v' \in V(H)$ ); deux arêtes comportant les mêmes extrémités seront dites parallèles; la multiplicité de  $H$ , notée  $m(H)$ , est la cardinalité maximum d'un ensemble d'arêtes parallèles de  $H$ . Un graphe est donc un multigraphe de multiplicité 1.

Comme pour les graphes, le degré d'un sommet  $v$  d'un multigraphe  $H$  sera l'entier :  $d_H(v) = |\{e \in E(H) \mid v \in e\}|$ .

Nous poserons  $\Delta(H) = \max_{v \in V(H)} d_H(v)$ .

Le théorème de Vizing, déjà cité [15], s'énonce, sous sa forme la plus générale :

Pour tout multigraphe  $H$ ,  $q(H) \leq \Delta(H) + m(H)$ .

(l'indice chromatique  $q(H)$  se définit de la même manière que pour les graphes).

Pour tout ensemble fini non vide  $X$ , nous noterons  $K_X$  le graphe complet sur  $X$  défini par :

$$V(K_X) = X ; E(K_X) = \{\{x, x'\} \mid x \in X, x' \in X - \{x\}\}.$$

Etant donnés deux entiers relatifs  $p$  et  $q$  nous noterons  $[p, q]$  l'ensemble  $\{z \in \mathbb{Z} \mid p \leq z \leq q\}$ .

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$  nous noterons  $K_n$  le graphe  $K_{[1, n]}$ .

## 2 - LE RÉSULTAT PRINCIPAL

**Proposition 1 :** Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ) avec  $q(G) = d$ .

$$\text{Alors } q(LL(G)) = \Delta(LL(G)) = 4d - 6.$$

En effet :

Pour  $d=2$ , le résultat est évident car  $LL(G)$  est isomorphe à  $G$ .  
Supposons donc  $d \geq 3$ . Puisque  $q(G) = d$ , il existe une application  $\phi$  de  $E(G)$  sur  $[1, d]$  telle que :  $\forall e, e' \in E(G), |e \cap e'| = 1 \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(e')$ .

Pour toute arête  $\{e, e'\}$  de  $L(G)$  nous poserons alors :

$$\theta(e, e') = \{\phi(e), \phi(e')\} \in E(K_d)$$

et nous noterons  $I(e, e')$  le sommet  $v$  de  $G$  tel que  $e \cap e' = \{v\}$ ,

Soit  $\alpha = \{\{e, e'\}, \{e', e''\}\}$  une arête de  $LL(G)$  ( $e, e', e''$  sont trois arêtes distinctes de  $G$  avec  $|e \cap e'| = |e' \cap e''| = 1$ ) ; nous lui associerons l'un des triplets ordonnés  $(e, e', e''), (e'', e', e)$  ; nous noterons :  $\alpha = (e, e', e'') = (e'', e', e)$ .

## II.3

Etant donnée une arête  $\alpha = (e, e', e'')$  de  $LL(G)$  nous lui associerons :

- l'ensemble  $t_1(\alpha) = \{\theta(e, e'), \theta(e', e'')\} \subseteq E(K_d)$  ; la cardinalité de  $t_1(\alpha)$  pourra être égale à 1 ou 2.
- le nombre  $t_2(\alpha)$  égal à 0 si  $I(e, e') = I(e', e'')$  et égal à  $\phi(e')$  sinon.

Le type de  $\alpha$ , noté  $t(\alpha)$ , sera défini comme étant le couple ordonné  $(t_1(\alpha), t_2(\alpha))$ .

Soit maintenant  $\beta$  une arête de  $LL(G)$  incidente à  $\alpha$ , dont l'intersection avec  $\alpha$  est  $\{e, e'\}$ . Remarquons que  $\theta(e, e') \in t_1(\alpha)$  et  $\theta(e, e') \in t_1(\beta)$ ; donc  $t_1(\alpha) \cap t_1(\beta) \neq \emptyset$ .

Nous allons montrer que  $t(\alpha) \neq t(\beta)$ , en envisageant tous les cas possibles.

1<sup>er</sup> cas :  $\beta = (e, e', e''')$ . Les quatre arêtes  $e, e', e'', e'''$  sont distinctes.

Donc  $t_1(\alpha) = \{\theta(e, e'), \theta(e', e'')\}$  et  $t_1(\beta) = \{\theta(e, e'), \theta(e', e''')\}$ .

Supposons que  $t(\beta) = t(\alpha)$ .

En particulier  $t_2(\beta) = t_2(\alpha)$ . Deux possibilités se présentent :

a)  $t_2(\alpha) = t_2(\beta) = 0$ . Donc  $I(e, e') = I(e', e'') = I(e', e''')$ .

Alors  $e'' \cap e''' = \{I(e, e')\}$  et  $\phi(e'') \neq \phi(e''')$ .

D'où  $\theta(e', e'') \neq \theta(e', e''')$  et  $t_1(\alpha) \neq t_1(\beta)$ . Il y a contradiction.

b)  $t_2(\alpha) = t_2(\beta) = \phi(e')$ . Donc  $I(e, e') \neq I(e', e'')$  et  $I(e, e') \neq I(e', e''')$ .

On en déduit que  $I(e', e'') = e' - \{I(e, e')\} = I(e', e''')$ .

Donc  $e'' \cap e''' = \{I(e', e'')\}$  et  $\phi(e'') \neq \phi(e''')$ .

Comme précédemment  $t_1(\alpha) \neq t_1(\beta)$  et il y a contradiction.

2<sup>ième</sup> cas :  $\beta = (e', e, e''')$ .  $e, e', e''$  sont distinctes,  $e'''$  est distincte de  $e$  et  $e'$  mais peut être identique à  $e''$ .

$t_1(\alpha) = \{\theta(e, e'), \theta(e', e'')\}$  et  $t_1(\beta) = \{\theta(e, e'), \theta(e, e''')\}$ .

Supposons comme précédemment que  $t(\beta) = t(\alpha)$ ; en particulier  $t_2(\beta) = t_2(\alpha)$ . Deux possibilités se présentent :

a')  $t_2(\alpha) = t_2(\beta) = 0$ . Donc  $I(e, e') = I(e', e'') = I(e, e''')$ .

Alors  $e \cap e' \cap e'' \cap e''' = \{I(e, e')\}$  et  $\phi(e), \phi(e'), \phi(e''), \phi(e''')$  sont distincts. D'où  $\theta(e', e'') \neq \theta(e, e''')$  et  $t_1(\alpha) \neq t_1(\beta)$ .

Il y a contradiction.

b')  $t_2(\alpha) = \phi(e') = t_2(\beta) = \phi(e)$ . Il y a contradiction car  $|e \cap e'| = 1$  et  $\phi(e') \neq \phi(e)$ .

Nous venons de montrer qu'étant données deux arêtes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $LL(G)$  distinctes et incidentes,  $t_1(\alpha) \cap t_1(\beta) \neq \emptyset$  et  $t(\alpha) \neq t(\beta)$ .

Soit alors  $H_d$  le multigraphe défini par :

-  $V(H_d)$  comporte  $d(d-1)$  éléments; c'est l'union de deux ensembles disjoints  $X$  et  $Y$  avec :

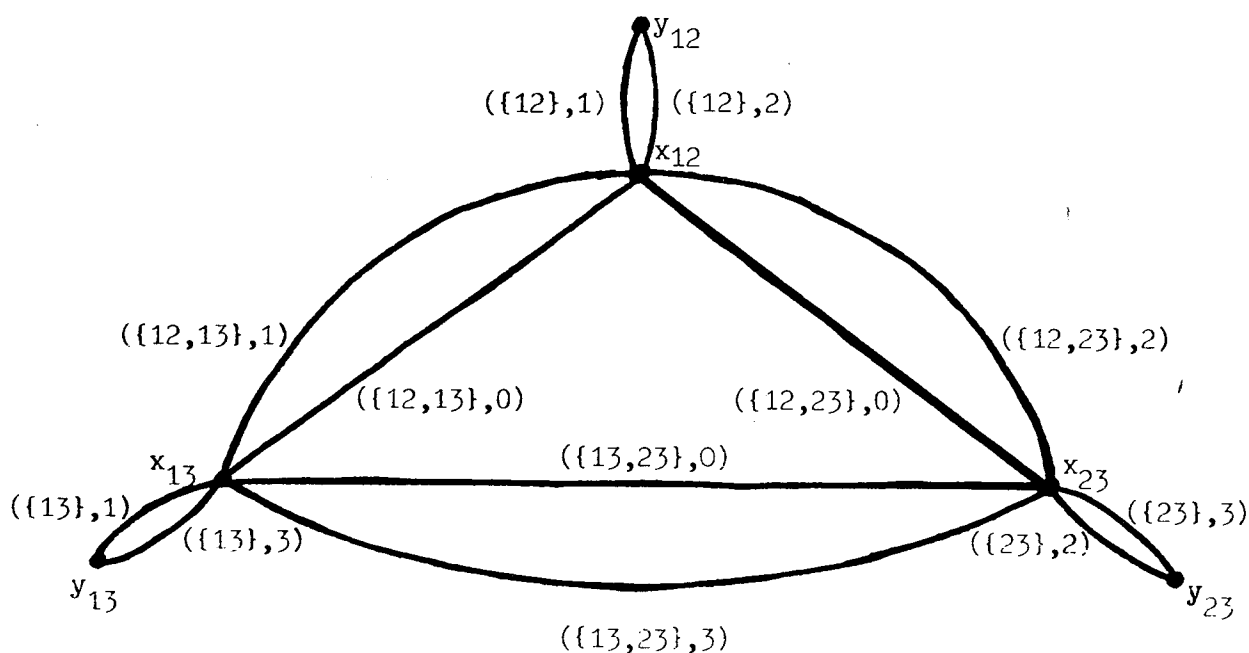
$$X = \{x_u \mid u \in E(K_d)\} ; Y = \{y_u \mid u \in E(K_d)\}$$

-  $H_d$  comporte les arêtes suivantes :

.  $\forall u, u' \in E(K_d)$  avec  $u \cap u' = \{k\}$  ( $k \in [1, d]$ ) deux arêtes d'extrémités  $x_u$  et  $x_{u'}$ , notées  $(\{u, u'\}, 0)$  et  $(\{u, u'\}, k)$ .

.  $\forall u \in E(K_d)$  avec  $u = \{k, k'\}$  deux arêtes d'extrémités  $x_u$  et  $y_u$  notées  $(\{u\}, k)$  et  $(\{u\}, k')$ .

A titre d'exemple nous avons représenté ci-dessous le multigraphe  $H_3$  ; chaque arête  $u$  de  $K_3$  est représentée par celui des couples 12, 13 ou 23 qui comporte ses deux extrémités.



On pourra vérifier sans peine que  $\forall \alpha \in E(LL(G)), t(\alpha)$  est une arête de  $H_d$ . Pour  $\alpha, \beta \in E(LL(G)), t(\alpha) \cap t(\beta) \neq \emptyset$  se traduit par le fait que  $t(\alpha)$  et  $t(\beta)$  sont deux arêtes incidentes de  $H_d$ .

Colorions les arêtes de  $H_d$  en  $c$  couleurs.

Puis colorions chaque arête  $\alpha$  de  $LL(G)$  avec la couleur de  $t(\alpha)$  dans  $H_d$ .

Puisqu'à deux arêtes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $LL(G)$  distinctes et incidentes correspondent deux arêtes  $t(\alpha)$  et  $t(\beta)$  de  $H_d$  distinctes et incidentes, nous avons obtenu une bonne coloration des arêtes de  $LL(G)$  en  $c$  couleurs.

Il nous reste à montrer que  $q(H_d) = 4d-6$ .

Le sous-multigraphe de  $H_d$  engendré par  $X$  est régulier de degré :

$$2(2(d-1)-2) = 4d-8. \quad \text{Sa multiplicité est } 2.$$

D'après le théorème de Vizing, ses arêtes peuvent être bien colorées en  $4d-6$  couleurs.

En chaque sommet  $x_u \in X$ , deux couleurs seront inutilisées et pourront être affectées aux deux arêtes d'extrémités  $x_u$  et  $y_u$ .

$$\text{Donc } q(H_d) = 4d-6.$$

Ceci achève la démonstration.

### 3 - REMARQUES

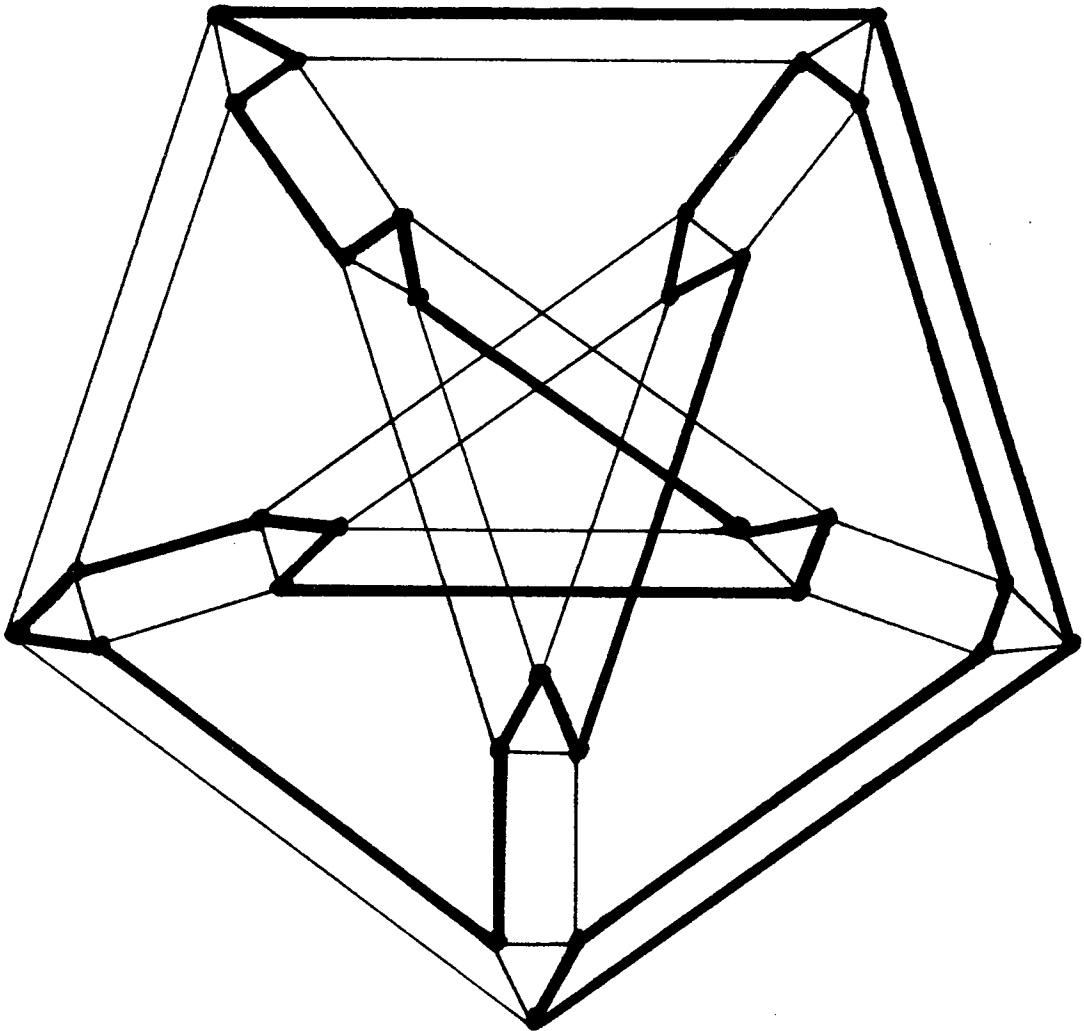
A) La réciproque de la proposition 2 est fausse (elle est toutefois vraie pour  $d = 2$ ).

Nous avons construit un contre-exemple pour  $d = 3$ .

Soit  $G$  le graphe de Petersen; c'est un graphe cubique d'indice chromatique 4.

Nous avons représenté ci-dessous  $LL(G)$  (qui est un graphe 6-régulier) privé de ses arêtes constituant les diagonales des quadrilatères associés aux arêtes de  $G$ ; ces arêtes manquantes constituent un cycle hamiltonien de  $LL(G)$ . Les arêtes restantes dessinées en traits forts constituent également un cycle hamiltonien, et les arêtes dessinées en traits fins aussi. Les arêtes de  $LL(G)$  sont donc partitionnées en 3 cycles hamiltoniens, chacun d'indice chromatique 2 (puisque  $|V(LL(G))|$  est pair). Donc  $q(LL(G))=6$ .





B) La conjecture suivante est plus faible que la Conjecture des Quatre Couleurs : conjecture : Pour tout graphe cubique planaire 2-arête connexe,  $q(LL(G)) = 6$ .

### III - SUR L'INDICE CHROMATIQUE DE $L(G)$ POUR UN GRAPHE $d$ -RÉGULIER $G$ AVEC

$$\underline{q(G) = d.}$$

#### 1 - INTRODUCTION

Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ) avec  $q(G) = d$ .

$L(G)$  est  $(2d-2)$ -régulier.

Une condition nécessaire pour que  $q(L(G)) = 2d-2$  est que chaque composante connexe de  $G$  comporte un nombre pair d'arêtes.

Cette condition est évidemment suffisante pour  $d = 2$ ; Kotzig [20] a démontré qu'elle était également suffisante pour  $d = 3$ . Nous allons démontrer ce résultat dans le cas général. Nous nous limiterons bien entendu au cas des graphes  $G$  connexes.

Remarquons que puisque  $q(G) = d$ ,  $|V(G)|$  est pair. Posons  $|V(G)| = 2r$ .

Alors  $|E(G)| = |V(L(G))| = r \times d$ .

$|E(G)|$  ne peut être impair que si  $r$  et  $d$  sont impairs.

#### 2 - LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Proposition 2 : Soit  $G$  un graphe connexe  $d$ -régulier avec  $|E(G)|$  pair et  $q(G) = d$ . Alors  $q(L(G)) = \Delta(L(G)) = 2d-2$ .

Nous allons traiter séparément les cas  $d$  pair et  $d$  impair.

#### 3 - DÉMONSTRATION POUR LES GRAPHES DE DEGRÉ PAIR

Soit donc  $G$  un graphe connexe,  $2p$ -régulier ( $p \geq 1$ ) avec  $q(G) = 2p$ . Nous savons que  $|E(G)|$  est pair.

Soit à montrer que  $q(L(G)) = 4p-2$ .

Si  $p = 1$ ,  $L(G)$  et  $G$  sont isomorphes;  $q(G) = q(L(G)) = 2$ .

Supposons donc  $p \geq 2$ .

$q(G) = 2p$ . Donc il existe une application  $\phi$  de  $E(G)$  sur  $[1, 2p]$  telle que :

$$\forall e, e' \in E(G) \quad |e \cap e'| = 1 \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(e')$$

$\forall \alpha \in E(L(G))$ ,  $\alpha = \{e, e'\}$  ( $e, e' \in E(G)$ ,  $|e \cap e'| = 1$ ) nous poserons :

$$\theta(\alpha) = \{\phi(e), \phi(e')\} \in E(K_{2p}).$$

$\forall u \in E(K_{2p})$  nous poserons :

$$E_u = \{e \in E(G) \mid \phi(e) \in u\}$$

$$F_u = \{\alpha \in E(L(G)) \mid \theta(\alpha) = u\}$$

Le graphe  $H_u$  tel que  $V(H_u) = E_u$  et  $E(H_u) = F_u$  est le sous-graphe de  $L(G)$  engendré par  $E_u$  ( $\forall u \in E(K_{2p})$ ).

Si  $u = \{k, k'\}$  ( $k, k' \in [1, 2p]$ ) :

- toute arête  $e$  de  $G$  telle que  $\phi(e) = k$  est adjacente à exactement deux arêtes  $e'$  et  $e''$  de  $G$  avec  $\phi(e') = \phi(e'') = k'$  (une arête  $e'$  ou  $e''$  pour chaque extrémité de  $e$ )
- la même propriété est vraie en échangeant  $k$  et  $k'$ .

Donc  $\forall u \in E(K_{2p})$   $H_u$  est 2-régulier biparti (chaque composante connexe de  $H_u$  est un cycle de longueur paire). D'où  $q(H_u) = 2$ .

On sait d'autre part que  $q(K_{2p}) = 2p-1$  (voir [7]).

Il existe donc une application  $\psi$  de  $E(K_{2p})$  sur  $[1, 2p-1]$  telle que :

$$\forall u, u' \in E(K_{2p}) \quad |u \cap u'| = 1 \Rightarrow \psi(u) \neq \psi(u').$$

$$\forall k \in [1, 2p-1] \text{ soit alors } C_k = \{\alpha \in E(L(G)) \mid \psi(\theta(\alpha)) = k\};$$

- $\forall e \in E(G)$  il existe une arête  $u$  de  $K_{2p}$  et une seule telle que  $\phi(e) \in u$  et  $\psi(u) = k$  (la coloration  $\psi$  des arêtes de  $K_{2p}$  est une partition de  $E(K_{2p})$  en couplages parfaits).

Donc  $\{E_u \mid \psi(u) = k\}$  est une partition de  $E(G)$ .

- $\forall \alpha \in C_k$  il existe une arête  $u$  de  $K_{2p}$  et une seule telle que  $\alpha \in F_u$  : c'est  $u = \theta(\alpha)$ . En outre  $\psi(u) = k$ .

Donc  $\{F_u \mid \psi(u) = k\}$  est une partition de  $C_k$ .

En conclusion le graphe  $B_k$  tel que  $V(B_k) = E(G)$  et  $E(B_k) = C_k$  est 2-régulier biparti comme chacun des graphes  $H_u$  qui le composent (pour  $\Psi(u) = k$ ). D'où  $q(B_k) = 2$ , et ceci  $\forall k \in [1, 2p-1]$ .

En outre  $\{C_k \mid k \in [1, 2p-1]\}$  est une partition de  $E(L(G))$ .  
D'où  $q(L(G)) \leq (2p-1) q(B_k) = 2(2p-1) = 4p-2$ .

Ceci achève la démonstration.

Remarque : - Si  $G$  est  $d$ -régulier,  $L(G)$  est  $2(d-1)$ -régulier. Donc si  
 $q(L(G)) = 2d-2$ ,  $q(LL(G)) = 4d-6$ ,  $q(LLL(G)) = 8d-14$ , etc...  
 - Nous avons précisé la proposition 1 pour les graphes  $d$ -réguliers de degré pair.

#### 4 - MÉTHODE DE DÉMONSTRATION POUR LES GRAPHES DE DEGRÉ IMPAIR

##### A) Introduction, définitions

Le type de démonstration précédent ne peut plus être utilisé car  $\forall p \geq 1$   $q(K_{2p+1}) = 2p+1$ .

La démonstration, plus difficile, s'appuiera sur les idées utilisées par Kotzig [20] dans le cas des graphes cubiques.

Nous définirons une orientation d'un graphe  $G$  comme une application  $O$  de  $E(G)$  dans  $V(G)$  telle que  $\forall e \in E(G)$ ,  $O(e) \in e$ .

Remarque : Pour rejoindre la notion habituelle d'orientation d'un graphe, nous pourrions appeler graphe  $G$  orienté par  $O$  le graphe orienté obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête  $e \in E(G)$  par le couple orienté  $(O(e), e-O(e))$  ;  $O(e)$  sera l'origine de l'arête  $e$  dans l'orientation  $O$ .

$\forall v \in V(G)$  nous noterons  $S_O(v)$  l'ensemble  $\{e \in E(G) \mid O(e) = v\}$  (ensemble des arêtes sortant de  $v$  dans l'orientation  $O$ ).

L'orientation  $O$  sera dite paire si  $\forall v \in V(G)$ ,  $|S_O(v)|$  est pair. Kotzig a démontré le résultat suivant [20] :

Lemme 1 : Si  $G$  est un graphe connexe avec  $|E(G)|$  pair,  $G$  admet une orientation paire.

Nous aurons également besoin du concept de "système de parties" (qui étend légèrement celui d'hypergraphe).

Un système de parties est un couple  $S = (X; E_i, i \in I)$  où  $X$  est un ensemble fini non vide (ensemble des sommets de  $S$ ) et où  $(E_i, i \in I)$  est une famille finie de parties de  $X$  (famille des arêtes de  $S$ ) ; une arête peut être vide; l'union des arêtes n'est pas nécessairement égale à l'ensemble des sommets.

Le degré d'un sommet  $x$  de  $S$  est l'entier  $d_S(x) = |\{i \in I \mid x \in E_i\}|$ .  $S$  sera dit  $k$ -régulier ( $k \in \mathbb{N}$ ) si  $\forall x \in X, d_S(x) = k$ .

### B) Systèmes admissibles de parties

Le système de parties  $S = (X; E_i, i \in I)$  sera dit admissible s'il existe un système de parties  $(E(K_X); F_i, i \in I)$  1-régulier tel que  $\forall i \in I$  :

- si  $E_i = \emptyset$ ,  $F_i$  est la partie vide de  $E(K_X)$ .
- si  $E_i \neq \emptyset$ ,  $F_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i}$ .

Remarque : Si  $|X| = 1$   $S = (X; E_i, i \in I)$  ne peut être admissible car  $E(K_X) = \emptyset$ ; en outre si  $S$  est admissible,  $|E_i|$  est pair  $\forall i \in I$ .

Exemple : Soit  $S = ([1,4]; E_i, i \in [1,6])$

avec  $E_1 = \{1,2\}$ ,  $E_2 = \{3,4\}$ ,  $E_3 = \{1,2,3,4\}$ ,  $E_4 = \{1,3\}$ ,  $E_5 = \{2,4\}$ ,  
 $E_6 = \emptyset$ .

Avec des notations évidentes,  $E(K_{[1,4]})$  comporte les 6 éléments :

12, 13, 14, 23, 24, 34.

Posons :  $F_1 = \{12\}$ ,  $F_2 = \{34\}$ ,  $F_3 = \{14,23\}$ ,  $F_4 = \{13\}$ ,  $F_5 = \{24\}$ ,  $F_6 = \emptyset$ .

Le système  $(E(K_{[1,4]}); F_i, i \in [1,6])$  est 1-régulier et l'on voit que  $S$  est admissible.

Nous allons maintenant revenir au problème initial.

C) Elargissement du problème

Soit  $S$  un système de parties,  $S = (X ; E_i, i \in I)$ .  $\forall A \subseteq X$ , nous noterons  $S \oplus A$  le système de parties  $(X ; E_i \oplus A, i \in I)$ , où  $E_i \oplus A$  désigne la différence symétrique des deux parties  $A$  et  $E_i$  de  $X$  ( $E_i \oplus A = [E_i \cap (X-A)] \cup [(X-E_i) \cap A]$ ).

Lemme 2 : Soit  $G$  un graphe connexe  $(2p+1)$ -régulier ( $p \geq 1$ ) avec  $|E(G)|$  pair et  $q(G) = 2p+1$ . S'il existe un système de parties  $S = ([1, 2p+1]; E_i, i \in [1, 4p])$  tel que  $\forall A \subseteq [1, 2p+1]$ ,  $|A|$  pair,  $S \oplus A$  est admissible, alors  $q(L(G)) = \Delta(L(G)) = 4p$ .

En effet :

D'après le lemme 1,  $G$  admet une orientation paire  $O$ .

D'autre part,  $q(G) = 2p+1$ , donc il existe une application  $\phi$  de  $E(G)$  sur  $[1, 2p+1]$  telle que  $\forall e, e' \in E(G)$ ,  $|e \cap e'| = 1 \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(e')$ .  
 $\forall F \subseteq E(G)$  nous noterons  $\phi(F)$  l'ensemble :  $\{\phi(e) \mid e \in F\}$ .

Enfin nous disposons d'un système de parties  $S = ([1, 2p+1]; E_i, i \in [1, 4p])$  tel que  $\forall A \subseteq [1, 2p+1]$ ,  $|A|$  pair,  $S \oplus A$  est admissible.

$\forall k \in [1, 4p]$  soit  $O_k$  l'application de  $E(G)$  dans  $V(G)$  définie par :

- si  $\phi(e) \in E_k$ ,  $O_k(e) = e - O(e)$
- si  $\phi(e) \notin E_k$ ,  $O_k(e) = O(e)$

$O_k$  est une orientation de  $G$  ;  $\forall v \in V(G)$  :

$$\phi[S_{O_k}(v)] = \phi[S_O(v)] \oplus E_k$$

(Intuitivement  $O_k$  s'obtient à partir de  $O$  en inversant toutes les arêtes dont la couleur appartient à  $E_k$ ; l'ensemble des couleurs des arêtes sortant de  $v$  dans  $O_k$  comporte d'une part les couleurs d'arêtes sortantes dans  $O$  n'appartenant pas à  $E_k$ , et les couleurs d'arêtes entrantes dans  $O$  appartenant à  $E_k$ ).

$O_k$  est donc une orientation paire de  $G$ .

$\forall v \in V(G)$ , soit  $S_v = ([1, 2p+1] ; \phi[S_{O_k}(v)], k \in [1, 4p])$ .

Nous pouvons écrire :  $S_v = S \oplus \phi[S_O(v)]$ .

$|\phi(S_O(v))|$  étant pair,  $S_v$  est admissible.

Soit alors  $\forall v \in V(G)$   $T_v = (E(K_{2p+1}^k) ; T_v^k, k \in [1, 4p])$  un système de parties 1-régulier tel que :

$\forall k \in [1, 4p]$  : - si  $\phi[S_{O_k}(v)] = \emptyset$ ,  $T_v^k = \emptyset$

- sinon,  $T_v^k$  est un couplage parfait de  $K_{\phi[S_{O_k}(v)]}$ .

Soit alors  $\forall v \in V(G)$  et  $\forall k \in [1, 4p]$  :

$$W_v^k = \{ \{e, e'\} \mid e, e' \in S_{O_k}(v), \{\phi(e), \phi(e')\} \in T_v^k \}$$

Cette définition est correcte puisque  $e, e' \in S_{O_k}(v) \Rightarrow |e \cap e'| = 1 \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(e')$ .

Si  $\phi[S_{O_k}(v)] = \emptyset$ , c'est-à-dire si  $S_{O_k}(v) = \emptyset$ ,  $W_v^k = \emptyset$ .

Si  $S_{O_k}(v) \neq \emptyset$ ,  $W_v^k$  est un couplage parfait de  $K_{S_{O_k}(v)}$ .

D'autre part  $\forall v \in V(G)$   $E(K_{S_{O_k}(v)}) \subseteq E(L(G))$ ; en outre le système  $(E(G)$  ;

$S_{O_k}(v)$ ,  $v \in V(G))$  est 1-régulier (toute arête de  $G$  a exactement une origine dans  $O_k$ ).

Donc  $\forall k \in [1, 4p]$ ,  $W_k = \bigcup_{v \in V(G)} W_v^k$  est un couplage parfait de  $L(G)$ .

Soient  $k$  et  $k'$  deux éléments de  $[1, 4p]$ .

$$W_k \cap W_{k'} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists v \in V(G) : W_v^k \cap W_v^{k'} \neq \emptyset) \Rightarrow T_v^k \cap T_v^{k'} \neq \emptyset.$$

Comme  $T_v$  est 1-régulier,  $k = k'$ .

$L(G)$  étant  $4p$ -régulier,  $\{W_k \mid k \in [1, 4p]\}$  est une partition de  $E(L(G))$  en couplages parfaits de  $L(G)$ . D'où  $q(L(G)) = 4p$ .

Ceci achève la démonstration du lemme 2.

Il reste à construire  $\forall p \geq 1$  un système de parties répondant aux conditions de l'énoncé du lemme 2; un tel système de parties sera dit totalement admissible.

## 5 - CONSTRUCTION DE SYSTÈMES DE PARTIES TOTALEMENT ADMISSIBLES

### A) Introduction

Nous ne connaissons pas de caractérisation intrinsèque des systèmes de parties admissibles.

Toutefois, ils possèdent trois propriétés simples qui nous ont guidé dans la recherche de systèmes totalement admissibles.

Soit donc  $S = (X; E_i, i \in I)$  un système de parties admissible ( $|X| \geq 3$ ).  $S$  possède les trois propriétés suivantes :

- P1 :  $S$  est  $(|X| - 1)$ -régulier.

En effet, soit  $S' = (E(K_X); F_i, i \in I)$  un système 1-régulier associé à  $S$  tel que  $\forall i \in I : E_i = \emptyset \Rightarrow F_i = \emptyset$

$E_i \neq \emptyset \Rightarrow F_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i}$

Soit  $x \in X$ ; posons  $d = d_S(x)$  et soient  $E_{r_1}, E_{r_2}, \dots, E_{r_d}$  les  $d$  arêtes de  $S$  contenant  $x$ .

Soit  $T_x = \{u \in E(K_X) \mid x \in u\}$ .

$|F_i \cap T_x| = 1 \quad \forall i \in \{r_1, r_2, \dots, r_d\}$

et  $|F_i \cap T_x| = 0 \quad \forall i \in I - \{r_1, r_2, \dots, r_d\}$ .

Toute arête de  $T_x$  appartenant à exactement une arête de  $S'$ ,  $|T_x| = d$ ; donc  $d = |X| - 1$ .  $S$  est bien  $(|X| - 1)$ -régulier.

- P2 :  $\forall u \in E(K_X) \exists i \in I$  tel que  $u \subseteq E_i$  (évident)

- P3 :  $i, j \in I, i \neq j, E_i = E_j \Rightarrow |E_i| \neq 2$  (évident)

Rappelons enfin que toute arête d'un système admissible est de cardinal pair.

Les propriétés précédentes ne constituent pas une caractérisation des systèmes admissibles; en effet soit  $Z$  le système ayant pour ensemble de sommets  $[1,7]$  et pour arêtes (avec des notations évidentes) :

12, 1234, 1235, 1236, 1237, 1456, 4567, 3467, 45, 57, 67, 234567.

$Z$  est 6-régulier (propriété P1) et vérifie également les propriétés P2 et P3. Pourtant  $Z$  n'est pas admissible comme on le verra en considérant seulement ses quatre premières arêtes 12, 1234, 1235, 1236.



Remarquons maintenant que si  $S = (X; E_i, i \in I)$  est totalement admissible, ( $|X| \geq 3$ )  $\forall A \subseteq X$  avec  $|A|$  pair,  $S \oplus A$  vérifie les propriétés P1, P2 et P3.

$S$  vérifie donc les trois propriétés suivantes :

- P'1 :  $S$  est  $(|X| - 1)$ -régulier et comporte  $2(|X| - 1)$  arêtes.

En effet :

D'après (P1),  $S$  est  $(|X| - 1)$ -régulier. Soit  $A \subseteq X$  avec  $|A|$  pair,  $A \neq \emptyset$ .

$$\forall x \in A, d_{S \oplus A}(x) = |\{i \in I \mid x \in E_i \oplus A\}|$$

$$\text{donc } d_{S \oplus A}(x) = |\{i \in I \mid x \notin E_i\}| = |I| - d_S(x) = |I| - (|X| - 1)$$

$S \oplus A$  est  $(|X| - 1)$ -régulier, et donc :  $|I| = 2(|X| - 1)$ .

- P'2 :  $\forall x, x' \in X$  avec  $x \neq x'$ ,  $\exists i, j, k, \ell \in I$  tels que :

$$E_i \cap \{x, x'\} = \{x, x'\}, E_j \cap \{x, x'\} = \{x\}, E_k \cap \{x, x'\} = \{x'\},$$

$$E_\ell \cap \{x, x'\} = \emptyset$$

En effet : soit  $z \in X - \{x, x'\}$  (nous avons supposé  $|X| \geq 3$ ).

Il suffit d'écrire la propriété P2 pour les systèmes :

$S, S \oplus \{x', z\}, S \oplus \{x, z\}, S \oplus \{x, x'\}$  et pour l'arête  $u = \{x, x'\}$ .

- P'3 :  $\forall i, j \in I$  avec  $i \neq j$  :  $E_i \neq E_j$

En effet : soient  $i, j \in I$  avec  $i \neq j$  et  $E_i = E_j$ .

Soit  $u \in E(K_X)$  et  $A = E_i \oplus u = E_j \oplus u$

Les arêtes de  $S \oplus A$  d'indices  $i$  et  $j$  sont toutes deux égales à  $u$  : il y a contradiction avec la propriété P3.

### Remarques :

- On pourra vérifier que le système non admissible  $Z$  défini précédemment satisfait aux propriétés P'1, P'2, P'3.

- D'après la propriété P'1 tout système de parties de  $[1, 2p+1]$  ( $p \geq 1$ ) totalement admissible comporte  $4p$  arêtes : nous avons vu que c'est précisément ce nombre d'arêtes qui nous intéresse pour l'étude de  $q(L(G))$  si  $G$  est  $2p+1$ -régulier.

- La propriété P'2 implique que  $S$  est un système complètement séparateur; ces systèmes ont été étudiés dans [21], [22], [23].

### B) Une classe de systèmes admissibles

Nous avons pu construire "à la main" des systèmes totalement admissibles à 5 et 7 sommets et vérifier qu'ils appartiennent à une classe particulière de systèmes que nous allons maintenant définir.

Soit  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Dans toute la suite nous poserons  $X = [1, 2p]$  et  $X' = [1, 2p+1]$ .

Pour simplifier les notations, deux systèmes seront considérés comme égaux s'ils sont identiques à la numérotation près des arêtes.

Soient  $f$  une application de  $[1, p]$  dans  $X$  et  $g$  une application de  $[1, p]$  dans  $[0, p]$ .

Pour tout entier relatif  $z$ ,  $u(z)$  désigne l'unique élément de  $X$  tel que  $u(z) \equiv z \pmod{2p}$ .

Nous désignerons par  $S_{fg}$  le système ayant pour ensemble de sommets  $X'$  et qui comporte les arêtes :

$$-\forall i \in [1, p], E_i = \{u(f(i)+\ell-1) \mid \ell \in [1, 2g(i)]\}$$

$$(\text{si } g(i) = 0 \quad E_i = \emptyset)$$

$$-\forall i \in [1, p] : E_i \oplus X, E_i \oplus \{2p+1, f(i)\}, E_i \oplus X \oplus \{2p+1, f(i)\}$$

$S_{fg}$  comporte donc  $4p$  arêtes et on vérifie facilement qu'il est  $2p$ -régulier.

Nous allons voir que si  $f$  et  $g$  vérifient une condition simple,  $S_{fg}$  est admissible.

Lemme 3 : Si  $\forall i, j \in [1, p]$  avec  $i \neq j$ ,  $f(i) + g(i) \not\equiv f(j) + g(j) \pmod{p}$  alors  $S_{fg}$  est admissible.

En effet :

$$\forall i \in [1, p] \text{ posons } c_i = u(f(i) + g(i) - 1) \in X.$$

$$\text{Donc } f(i) \equiv c_i - g(i) + 1 \pmod{2p}$$

et  $\forall \ell \in [1, 2g(i)]$ :

$$u(f(i) + \ell - 1) = u(c_i - g(i) + \ell).$$

Donc  $E_i = \{u(c_i - g(i) + \ell) \mid \ell \in [1, 2g(i)]\}$

soit  $E_i = \{u(c_i + \ell) \mid \ell \in [-g(i) + 1, g(i)]\}$

- Posons  $Q_i = \{\{u(c_i - \ell + 1), u(c_i + \ell)\} \mid \ell \in [1, g(i)]\} \subseteq E(K_X)$ .

On vérifie que  $E_i = \emptyset \Rightarrow g(i) = 0 \Rightarrow Q_i = \emptyset$  et que si  $E_i \neq \emptyset$ ,  $Q_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i}$ .

-  $E_i \oplus X = \{u(c_i + \ell) \mid \ell \in [1 - p, -g(i)] \cup [g(i) + 1, p]\}$ .

Posons  $Q'_i = \{\{u(c_i - \ell + 1), u(c_i + \ell)\} \mid \ell \in [g(i) + 1, p]\} \subseteq E(K_X)$ .

On vérifie que  $E_i \oplus X = \emptyset \Rightarrow g(i) = p \Rightarrow Q'_i = \emptyset$  et que si  $E_i \oplus X \neq \emptyset$ ,

$Q'_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i \oplus X}$ .

-  $E_i \oplus \{2p + 1, f(i)\} = E_i \oplus \{f(i), u(c_i + 1)\} \oplus \{2p + 1, u(c_i + 1)\}$ .

Or  $E_i \oplus \{f(i), u(c_i + 1)\} = \{u(c_i + \ell) \mid \ell \in [-g(i) + 2, 0] \cup [2, g(i)]\}$ .

Posons  $R_i = \{\{u(c_i + 1 - \ell), u(c_i + 1 + \ell)\} \mid \ell \in [1, g(i) - 1]\} \subseteq E(K_X)$  et

$P_i = R_i \cup \{\{2p + 1, u(c_i + 1)\}\} \subseteq E(K_X)$

On vérifie que  $E_i \oplus \{2p + 1, f(i)\} \neq \emptyset$  et que  $P_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i \oplus \{f(i), 2p + 1\}}$ .

-  $E_i \oplus X \oplus \{2p + 1, f(i)\} = E_i \oplus X \oplus \{f(i), u(c_i - p + 1)\} \oplus \{2p + 1, u(c_i - p + 1)\}$ .

Or  $E_i \oplus X \oplus \{f(i), u(c_i - p + 1)\} = \{u(c_i + \ell) \mid \ell \in [2 - p, 1 - g(i)] \cup [g(i) + 1, p]\}$ .

Posons  $R'_i = \{\{u(c_i + 1 - \ell), u(c_i + 1 + \ell)\} \mid \ell \in [g(i), p - 1]\} \subseteq E(K_X)$

et  $P'_i = R'_i \cup \{\{2p + 1, u(c_i - p + 1)\}\} \subseteq E(K_X)$

On vérifie que  $E_i \oplus X \oplus \{2p + 1, f(i)\} \neq \emptyset$  et que  $P'_i$  est un couplage parfait de  $K_{E_i \oplus X \oplus \{2p + 1, f(i)\}}$ .

Soit alors  $T$  le système de parties de  $E(K_X)$  comportant les arêtes :

$$Q_i, Q'_i, P_i, P'_i \quad \forall i \in [1, p].$$

Pour montrer que  $S_{fg}$  est admissible il reste à montrer que  $T$  est 1-régulier.

Remarquons d'abord que la somme des cardinalités des arêtes de  $T$  est égale par construction à la demi-somme des cardinalités des arêtes de  $S_{fg}$ , soit  $\frac{1}{2} \times (2p \times |X'|) = |E(K_{X'})|$  puisque  $S_{fg}$  est  $2p$ -régulier.

Il suffit donc de montrer que deux arêtes distinctes quelconques de  $T$  sont disjointes.

Rappelons que  $\forall i, j \in [1, p]$ :

$$i \neq j \Rightarrow f(i) + g(i) \not\equiv f(j) + g(j) \pmod{p}.$$

Donc  $u(f(i)+g(i)-1) \not\equiv u(f(j)+g(j)-1) \pmod{p}$  soit  $c_i \not\equiv c_j \pmod{p}$ .

On en déduit que  $\forall i, j \in [1, p]$  avec  $i \neq j$  :

$$u(c_i+1) \neq u(c_j+1), u(c_i-p+1) \neq u(c_j-p+1), u(c_i+1) \neq u(c_j-p+1)$$

$$\text{Donc } P_i \cap P_j = R_i \cap R_j, P_i' \cap P_j' = R_i' \cap R_j', P_i \cap P_j' = R_i \cap R_j'.$$

$$\text{D'autre part } \forall i \in [1, p] : Q_i \cap Q_i' = \emptyset \text{ et } R_i \cap R_i' = \emptyset.$$

Soit alors  $T'$  le système de parties de  $E(K_X)$  comportant les arêtes :

$$Q_i \cup Q_i' \text{ et } R_i \cup R_i' \quad \forall i \in [1, p]$$

Il suffit de vérifier que deux arêtes distinctes quelconques de  $T'$  sont disjointes.

$\forall e \in K_X, e = \{x, x'\}$ , soit  $s(e) = x + x'$ .

$$e \in Q_i \cup Q_i' \Rightarrow s(e) \equiv 2c_i + 1 \pmod{2p}$$

$$e \in R_i \cup R_i' \Rightarrow s(e) \equiv 2c_i + 2 \pmod{2p}$$

d'après les définitions de  $Q_i, Q_i', R_i, R_i'$ .

Donc :

$$\begin{aligned} - (Q_i \cup Q_i') \cap (Q_j \cup Q_j') \neq \emptyset &\Rightarrow 2c_i + 1 \equiv 2c_j + 1 \pmod{2p} \Rightarrow c_i \equiv c_j \pmod{p} \\ &\text{d'où } i = j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (R_i \cup R_i') \cap (R_j \cup R_j') \neq \emptyset &\Rightarrow 2c_i + 2 \equiv 2c_j + 2 \pmod{2p} \Rightarrow c_i \equiv c_j \pmod{p}. \\ &\text{d'où } i = j \end{aligned}$$

$$- (Q_i \cup Q_i') \cap (R_j \cup R_j') \neq \emptyset \Rightarrow 2c_i + 1 \equiv 2c_j + 2 \pmod{2p} : \text{ il y a contradiction.}$$

$T$  est bien 1-régulier et donc  $S_{fg}$  est admissible.

Ceci achève la démonstration.

C) Une classe de systèmes totalement admissibles

Un système  $Z = (X'; E_i, i \in [1, 4p])$  ( $p \geq 1$ ) sera dit circulaire si et seulement si il existe une permutation  $\sigma$  de  $X'$  et deux applications :  $f$  de  $[1, p]$  dans  $X$  et  $g$  de  $[1, p]$  dans  $[0, p]$  telles que :

$$\forall i, j \in [1, p] \text{ avec } i \neq j : f(i) + g(i) \neq f(j) + g(j) \pmod{p}$$

et  $\sigma Z = (X' ; \sigma(E_i), i \in [1, 4p]) = S_{fg}$  (à la numérotation près des arêtes).

D'après le lemme 3, tout système circulaire est admissible.

Nous allons construire  $\forall p \in \mathbb{N} - \{0\}$  un système

$Z_p = (X'; E_i, i \in [1, 4p])$  tel que  $\forall A \subseteq X'$  avec  $|A|$  pair,  $Z_p \oplus A$  est circulaire;  $Z_p$  sera donc totalement admissible.

Soit donc  $f$  l'application de  $[1, p]$  dans  $X$  définie par :

$$\forall i \in [1, p] \quad f(i) = 2i-1$$

Soit  $g$  l'application de  $[1, p]$  dans  $[0, p]$  définie par :

$$\forall i \in [1, p] \quad g(i) = p-i+1$$

Nous poserons  $Z_p = S_{fg}$ . Nous poserons  $\forall i \in X$  :

$$A_i = \{j \in X \mid j \geq i\} = [i, 2p]$$

$Z_p$  comporte les arêtes suivantes :

$$\forall i \in [1, p] : E_i, E_i \oplus X, E_i \oplus \{2p+1, f(i)\}, E_i \oplus X \oplus \{2p+1, f(i)\}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } E_i &= \{u(f(i) + \ell - 1) \mid \ell \in [1, 2g(i)]\} \\ &= \{u(2i - 2 + \ell) \mid \ell \in [1, 2p - 2i + 2]\} \\ &= [2i - 1, 2p] = A_{2i-1}. \end{aligned}$$

Lemme 4 :  $\forall A \subseteq X'$  avec  $|A|$  pair,  $Z_p \oplus A$  est circulaire.

Démonstration :

( $\alpha$ ) Il existe une permutation  $\sigma$  de  $X'$  telle que  $\sigma(Z_p \oplus \{2p+1, 1\}) = Z_p$

En effet  $Z_p \oplus \{2p+1, 1\}$  comporte les arêtes suivantes :

- pour  $i = 1$  ( $f(i)=1$ ) :  $E_1 \oplus \{2p+1, 1\}, E_1 \oplus X \oplus \{2p+1, 1\}, E_1, E_1 \oplus X$ .

-  $\forall i \in [2, p]$  ( $f(i) \neq 1$ ) :  $E_i \oplus \{2p+1, 1\}, E_i \oplus X \oplus \{2p+1, 1\}, E_i \oplus \{1, f(i)\},$   
 $E_i \oplus X \oplus \{1, f(i)\}.$

Posons :  $E_1^! = E_1$ ;  $\forall i \in [2,p], E_i^! = E_i \otimes X \otimes \{1, f(i)\}$ .

$Z_p \otimes \{2p+1, 1\}$  comporte les arêtes suivantes :

$\forall i \in [1,p] : E_1^!, E_1^! \otimes X, E_1^! \otimes \{2p+1, f(i)\}, E_1^! \otimes X \otimes \{2p+1, f(i)\}$ .

En outre :  $E_1^! = E_1 = A_1 = X$  ;

et  $\forall i \in [2,p] E_i^! = A_{2i-1} \otimes X \otimes \{1, 2i-1\} = [1, 2i-2] \otimes \{1, 2i-1\} = [2, 2i-1]$

Soit alors  $\sigma$  la permutation de  $X'$  définie par :

$\sigma(1) = 1$  ;  $\sigma(2p+1) = 2p+1$  ;  $\forall i \in [2, 2p], \sigma(i) = 2p+2-i$ .

Soit  $\phi$  la permutation de  $[1, p]$  définie par :

$\phi(1) = 1$  ;  $\forall j \in [2, p], \phi(j) = p-j + 2$ .

Il vient :

-  $\sigma(E_1^!) = \sigma(E_1) = \sigma(X) = X = E_1 = E_{\phi(1)}$ .

-  $\forall i \in [2, p] :$

$$\begin{aligned} \sigma(E_i^!) &= \sigma([2, 2i-1]) = \{2p+2-j / 2 \leq j \leq 2i-1\} \\ &= \{j' \in X / (2p+2) - (2i-1) \leq j' \leq 2p\} \\ &= [2(p-i+2)-1, 2p] = [f(\phi(i)), 2p] = E_{\phi(i)} \end{aligned}$$

Donc  $\forall i \in [1, p] \sigma(E_i^!) = E_{\phi(i)}$ .

En outre :

-  $\sigma(f(1)) = \sigma(1) = 1 = f(1) = f(\phi(1))$

-  $\forall i \in [2, p] :$

$$\sigma(f(i)) = \sigma(2i-1) = 2p+2 - (2i-1) = 2(p-i+2)-1 = 2\phi(i) - 1$$

Donc  $\sigma(f(i)) = f(\phi(i)) \forall i \in [1, p]$ .

En conclusion  $\sigma(Z_p \otimes \{2p+1, 1\})$  comporte les arêtes suivantes :

$\forall i \in [1, p] : \sigma(E_1^!) = E_{\phi(i)} ; \sigma(E_i^! \otimes X) = E_{\phi(i)} \otimes X ;$

$\sigma(E_1^! \otimes \{2p+1, f(i)\}) = E_{\phi(i)} \otimes \{2p+1, f(\phi(i))\};$

$\sigma(E_i^! \otimes X \otimes \{2p+1, f(i)\}) = E_{\phi(i)} \otimes X \otimes \{2p+1, f(\phi(i))\}$ .

Donc  $\sigma(Z_p \otimes \{2p+1, 1\}) = Z_p$  (à la numérotation près des arêtes).

Soit alors  $A \subseteq X'$  avec  $|A|$  pair.

$$\begin{aligned} \sigma(Z_p \otimes A) &= \sigma[(Z_p \otimes \{2p+1, 1\}) \otimes (A \otimes \{2p+1, 1\})] \\ &= \sigma(Z_p \otimes \{2p+1, 1\}) \otimes \sigma(A \otimes \{2p+1, 1\}) \\ &= Z_p \otimes \sigma(A \otimes \{2p+1, 1\}) \end{aligned}$$

Or  $Z_p \oplus A$  est circulaire si et seulement si  $\sigma(Z_p \oplus A)$  l'est.

En outre  $2p+1 \in A \Rightarrow A \oplus \{2p+1, 1\} \subseteq X \Rightarrow \sigma(A \oplus \{2p+1, 1\}) \subseteq X$ .

Donc pour démontrer le lemme 4, il reste à démontrer que :

( $\beta$ )  $\forall B \subseteq X$  avec  $|B|$  pair,  $Z_p \oplus B$  est circulaire

Soit donc  $B \subseteq X$  avec  $|B|$  pair.

$\forall Y \subseteq X$  nous noterons  $\bar{Y}$  l'ensemble  $Y \oplus X$ .

$Z_p \oplus B$  comporte les arêtes suivantes :

$\forall i \in [1, p] : A_{2i-1} \oplus B, A_{2i-1} \oplus B \oplus X, A_{2i-1} \oplus \{2p+1, 2i-1\} \oplus B,$

$A_{2i-1} \oplus \{2p+1, 2i-1\} \oplus B \oplus X.$

Soit  $\sigma$  la permutation de  $X'$  définie par :

$\sigma(2p+1) = 2p+1 ; \forall j \in B, \sigma(j) = |\bar{A}_j \cap B| + 1 ;$

$\forall j \in \bar{B}, \sigma(j) = |B| + |\bar{A}_j \cap \bar{B}| + 1.$

( $\sigma$  range les éléments de  $[1, 2p]$  de la façon suivante : d'abord tous les éléments de  $B$  dans l'ordre naturel, puis tous les éléments de  $\bar{B}$  également dans l'ordre naturel).

Etudions  $\sigma(Z_p \oplus B)$ .

Nous poserons  $\forall i \in [1, p] :$

- si  $2i - 1 \in \bar{B} : E'_i = \sigma(A_{2i-1} \oplus B)$

- si  $2i - 1 \in B : E'_i = \sigma(A_{2i-1} \oplus B \oplus X)$

$\sigma(Z_p \oplus B)$  comporte donc les arêtes suivantes :

$\forall i \in [1, p] : E'_i, E'_i \oplus X, E'_i \oplus \{2p+1, \sigma(2i-1)\},$

$E'_i \oplus X \oplus \{2p+1, \sigma(2i-1)\}.$

Nous allons maintenant décrire de façon plus précise les ensembles  $E'_i$ ,  $\forall i \in [1, p]$ .

On vérifiera aisément que,  $\forall i \in [1, p] :$

$\sigma(\bar{A}_{2i-1} \cap B) = [1, |\bar{A}_{2i-1} \cap B|]$

et  $\sigma(A_{2i-1} \cap \bar{B}) = [2p+1 - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|, 2p].$

Il vient :

$$- \text{ si } 2i-1 \in \bar{B} : E'_i = \sigma(\bar{A}_{2i-1} \cap B) \cup \sigma(A_{2i-1} \cap \bar{B}) ;$$

$$\text{ donc } : E'_i = [1, |\bar{A}_{2i-1} \cap B|] \cup [2p+1 - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|, 2p]$$

$$\text{ or } \sigma(2i-1) = |B| + |\bar{A}_{2i-1} \cap \bar{B}| + 1 = 2p+1 - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|.$$

$$\text{ D'où } E'_i = \{u(\sigma(2i-1) + \ell - 1) / \ell \in [1, |E'_i|]\}.$$

Nous poserons donc :  $f'(i) = \sigma(2i-1) = |B| + |\bar{A}_{2i-1} \cap \bar{B}| + 1$  et

$$g'(i) = \frac{1}{2} |E'_i| = \frac{1}{2} |A_{2i-1} \oplus B|, \text{ de sorte que :}$$

$$E'_i = \{u(f'(i) + \ell - 1) / \ell \in [1, 2 g'(i)]\}.$$

- si  $2i-1 \in B$  :  $E'_i = (\sigma(A_{2i-1} \oplus B)) \oplus X$  ; donc :

$$E'_i = ([1, |\bar{A}_{2i-1} \cap B|] \cup [2p+1 - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|, 2p]) \oplus X$$

$$\text{ soit } : E'_i = [|\bar{A}_{2i-1} \cap B| + 1, 2p - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|].$$

$$\text{ or } \sigma(2i-1) = |\bar{A}_{2i-1} \cap B| + 1.$$

$$\text{ D'où } E'_i = \{u(\sigma(2i-1) + \ell - 1) / \ell \in [1, |E'_i|]\}.$$

Nous poserons alors :  $f'(i) = \sigma(2i-1) = |\bar{A}_{2i-1} \cap B| + 1$

$$\text{ et } g'(i) = \frac{1}{2} |E'_i| = \frac{1}{2} |A_{2i-1} \oplus B \oplus X|, \text{ de sorte que :}$$

$$E'_i = \{u(f'(i) + \ell - 1) / \ell \in [1, 2 g'(i)]\}.$$

Nous venons de montrer que :  $\sigma(Z_p \oplus B) = S_{f', g'}$ .

Pour montrer que  $Z_p \oplus B$  est circulaire, il reste donc à vérifier que :

$$\forall i, j \in [1, p], i \neq j \Rightarrow f'(i) + g'(i) \not\equiv f'(j) + g'(j) \pmod{p},$$

Calculons  $\forall i \in [1, p]$  le terme  $r_i = f'(i) + g'(i)$ .

$$+ \text{ si } 2i-1 \in \bar{B} : f'(i) = |B| + |\bar{A}_{2i-1} \cap \bar{B}| + 1.$$

$$g'(i) = \frac{1}{2} |A_{2i-1} \oplus B| = \frac{1}{2} (|A_{2i-1} \cap \bar{B}| + |\bar{A}_{2i-1} \cap B|)$$



$$\begin{aligned}
\text{D'où } r_i &= 1 + |B| + |\bar{A}_{2i-1} \cap \bar{B}| + \frac{1}{2} |A_{2i-1} \cap \bar{B}| + \frac{1}{2} |\bar{A}_{2i-1} \cap B| \\
&= 1 + |B| + [|\bar{A}_{2i-1} \cap \bar{B}| + |A_{2i-1} \cap \bar{B}|] + \frac{1}{2} [|\bar{A}_{2i-1} \cap B| - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|] \\
&= 1 + |B| + |\bar{B}| + \frac{1}{2} [|\bar{A}_{2i-1} \cap B| - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|] \\
&= 2p + 1 + \frac{1}{2} [|\bar{A}_{2i-1} \cap B| - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|]
\end{aligned}$$

$$+ \text{ si } 2i-1 \in B : f'(i) = |\bar{A}_{2i-1} \cap B| + 1$$

$$\text{et } g'(i) = \frac{1}{2} |A_{2i-1} \oplus B \oplus X| = \frac{1}{2} [2p - (|A_{2i-1} \cap \bar{B}| + |\bar{A}_{2i-1} \cap B|)]$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } r_i &= 1+p + |\bar{A}_{2i-1} \cap B| - \frac{1}{2} |A_{2i-1} \cap \bar{B}| - \frac{1}{2} |\bar{A}_{2i-1} \cap B| \\
&= 1+p + \frac{1}{2} [|\bar{A}_{2i-1} \cap B| - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|]
\end{aligned}$$

$$+ \text{ Dans les deux cas : } r_i - 1 \equiv \frac{1}{2} [|\bar{A}_{2i-1} \cap B| - |A_{2i-1} \cap \bar{B}|] \pmod{p}$$

Soient alors  $i, j \in [1, p]$  tels que  $r_i \equiv r_j \pmod{p}$ .

Il vient :  $r_i - 1 \equiv r_j - 1 \pmod{p}$ , d'où  $2(r_i - 1) \equiv 2(r_j - 1) \pmod{2p}$ ,

$$\text{soit : } |\bar{A}_{2i-1} \cap B| - |A_{2i-1} \cap \bar{B}| \equiv |\bar{A}_{2j-1} \cap B| - |A_{2j-1} \cap \bar{B}| \pmod{2p};$$

ou encore :

$$|\bar{A}_{2i-1} \cap B| + |A_{2j-1} \cap \bar{B}| \equiv |\bar{A}_{2j-1} \cap B| + |A_{2i-1} \cap \bar{B}| \pmod{2p}$$

Chacun des deux membres appartient à  $[0, 2p]$  ; s'ils sont numériquement inégaux, l'un est nul et l'autre est égal à  $2p$  ; nous avons par exemple :

$$|A_{2j-1} \cap \bar{B}| = 0 \text{ (d'où } 2j-1 \notin \bar{B}) \text{ et } |\bar{A}_{2j-1} \cap B| = |B| \text{ (d'où } B \subseteq \bar{A}_{2j-1}) ;$$

Il y a contradiction.

$$\text{Donc : } |\bar{A}_{2i-1} \cap B| + |A_{2j-1} \cap \bar{B}| = |\bar{A}_{2j-1} \cap B| + |A_{2i-1} \cap \bar{B}| \quad (\epsilon)$$

Supposons par exemple que  $i \leq j$ .

$$\text{Alors : } A_{2j-1} \subseteq A_{2i-1}, \text{ donc } A_{2j-1} \cap \bar{B} \subseteq A_{2i-1} \cap \bar{B}$$

$$\bar{A}_{2i-1} \subseteq \bar{A}_{2j-1}, \text{ donc } \bar{A}_{2i-1} \cap B \subseteq \bar{A}_{2j-1} \cap B$$

L'égalité ( $\epsilon$ ) implique :

$$A_{2j-1} \cap \bar{B} = A_{2i-1} \cap \bar{B}$$

$$\bar{A}_{2j-1} \cap B = \bar{A}_{2i-1} \cap B$$

d'où  $A_{2j-1} \oplus B = A_{2i-1} \oplus B$  et  $A_{2i-1} = A_{2j-1}$ . Donc  $i = j$ .

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.

En conclusion,  $\forall p \in \mathbb{N} - \{0\}$ , le système  $Z_p$  ayant pour ensemble de sommets  $[1, 2p + 1]$  et pour ensemble d'arêtes :

$$\forall i \in [1, p] : [2i-1, 2p], [1, 2i-2], [2i, 2p+1], [1, 2i-1] \cup \{2p+1\}$$

est totalement admissible.

Ceci nous permet, grâce au Lemme 2, de démontrer la Proposition 2 pour les graphes de degré impair.

#### D) Remarques

- Pour  $p = 1$ ,  $Z_p = ([1, 3] ; [1, 2], \emptyset, [2, 3], \{1, 3\})$  ;  
 $Z_1$  est le système de parties utilisé par Kotzig de façon implicite dans [20].
- Nous ne savons pas si  $\{Z_p \oplus A, |A| \text{ pair}, A \subseteq [1, 2p+1]\}$  contient tous les systèmes totalement admissibles comportant  $2p + 1$  sommets (à l'isomorphisme près). L'étude de la classe des systèmes admissibles (ou totalement admissibles) reste à faire.

6 - CONCLUSION

- Notre démonstration de la Proposition 2 est constructive : étant donné un graphe connexe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ )  $G$  tel que  $|E(G)|$  est pair, et une bonne coloration des arêtes de  $G$  en  $d$  couleurs, nous pouvons obtenir explicitement une coloration des arêtes de  $L(G)$  en  $2d-2$  couleurs.
- La proposition 2 peut s'interpréter de la manière suivante : la classe des graphes connexes, comportant un nombre pair d'arêtes, réguliers, d'indice chromatique égal au degré, est fermée pour l'opération  $L$ .
- On pourra étudier  $q(L(G))$  pour des graphes  $d$ -réguliers ( $d \geq 3$ ) connexes  $G$  avec  $|E(G)|$  pair mais  $q(G) = d + 1$  ; nous ne connaissons pas de méthode générale.

Si  $d = 3$ , Kotzig a démontré [20] :

$$q(G) = d + 1 = 4 \Rightarrow q(L(G)) = 2d - 1 = 5$$

Autrement dit, la réciproque de la Proposition 2 est vraie pour les graphes cubiques ; elle est évidemment vraie pour les graphes 2-réguliers.

Nous n'essaierons pas de démontrer ici que la réciproque de la Proposition 2 est fautive  $\forall d \geq 4$ .

Signalons simplement le résultat suivant :

$\forall n \geq 3$  : (a)  $q(L(K_n)) = \Delta(L(K_n))$  si  $|E(K_n)|$  est pair.

(b)  $q(L(K_n)) = \Delta(L(K_n)) + 1$  si  $|E(K_n)|$  est impair.

(b) est évident. (a) découle de la Proposition (2) si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ; si  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , la démonstration est spécifique et s'appuie sur une décomposition de  $K_n$  en cycles hamiltoniens.

- On pourra essayer de généraliser l'étude précédente aux multigraphes (réguliers ou non), ou à certaines familles d'hypergraphes. Le paramètre  $q(L(H))$ , où  $H$  est un hypergraphe et  $L(H)$  est le "graphe d'intersection" de ses arêtes, a été très peu étudié en ce qui concerne ses rapports avec d'autres paramètres associés à  $H$ .

# CHAPITRE III

SUR LE NOMBRE DE STABILITÉ CYCLIQUE D'UN

GRAPHE SIMPLE



## I - INTRODUCTION ET DÉFINITIONS GÉNÉRALES

Nous reprendrons les notations et définitions des chapitres I et II. En particulier un multigraphe ne comporte pas de boucles, et un graphe est un multigraphe de multiplicité 1.

Nous renvoyons le lecteur à [7] pour les définitions classiques des cycles, arbres, forêts, etc... d'un multigraphe.

Soit  $G$  un multigraphe. Un cycliquement stable de  $G$  est une partie  $S$  de  $V(G)$  telle que  $G_S$  est une forêt. Le nombre de stabilité cyclique de  $G$ ,  $s(G)$ , est le cardinal maximum d'un cycliquement stable de  $G$ .

La point-arboricité de  $G$  (étudiée pour la première fois dans [35]) est le nombre minimum de classes d'une partition de  $V(G)$  en cycliquement stables de  $G$ .

Alors que la point-arboricité des graphes a fait l'objet de nombreux travaux, il n'en a pas été de même pour le nombre de stabilité cyclique.

L'étude qui va suivre a été entreprise dans le cadre d'un travail collectif et a bénéficié de nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec C. PAYAN et M. SAKAROVIT'CH. Comme ces derniers ([36], [37]) je me suis intéressé plus particulièrement au cas des graphes cubiques, mais en donnant une large place à des motivations d'ordre topologique relatives à la structure des graphes planaires.

## II - SUR LES ENSEMBLES CONNECTANTS DE FACES D'UN GRAPHE PLAN

### 1 - INTRODUCTION, RAPPELS

Soit  $G$  un multigraphe 2-connexe plan, c'est-à-dire représenté dans le plan ([19],p.1); nous noterons  $F(G)$  l'ensemble des faces de  $G$ . Le contour de toute face  $f$  de  $G$  est un cycle élémentaire de  $G$  qui sera noté  $\bar{f}$  ( $\bar{f} \subseteq E(G)$ ). De même l'ensemble des arêtes incidentes à un sommet  $v$  de  $G$  est un cocycle élémentaire de  $G$  qui sera noté  $\bar{v}$  ( $\bar{v} \subseteq E(G)$ ).

Le dual géométrique de  $G$  est défini dans [19], chapitre 3 ; c'est un multigraphe 2-connexe plan noté  $G^*$ , qui vérifie les propriétés suivantes :

- il existe une bijection de  $F(G)$  sur  $V(G^*)$  qui associe à toute face  $f$  de  $G$  un sommet noté  $f^*$  de  $G^*$ ;  $\forall R \subseteq F(G)$  nous poserons :  $R^* = \{f^* \mid f \in R\}$ .
- il existe une bijection de  $E(G)$  sur  $E(G^*)$  qui associe à toute arête  $e$  de  $G$  une arête notée  $e^*$  de  $G^*$ ;  $\forall K \subseteq E(G)$  nous poserons :  $K^* = \{e^* \mid e \in K\}$ .
- pour tout cycle élémentaire  $K$  de  $G$  ( $K \subseteq E(G)$ ),  $K^*$  est un cocycle élémentaire de  $G^*$  ( $K^* \subseteq E(G^*)$ ); en outre :  $\forall f \in F(G)$ ,  $(\bar{f})^* = \overline{(f^*)}$ .

### 2 - ENSEMBLES CONNECTANTS ET CYCLIQUEMENT STABLES

Soit  $G$  un multigraphe plan 2-connexe. Un ensemble de faces de  $G$ , soit  $R \subseteq F(G)$ , sera dit connectant si et seulement si le multigraphe  $(V(G) ; \bigcup_{f \in R} \bar{f})$  est connexe.

**Proposition 1** :  $R \subseteq F(G)$  est connectant si et seulement si  $V(G^*) - R^*$  est un cycliquement stable de  $G^*$ .

En effet :

R est connectant

$$\Leftrightarrow (V(G) ; \bigcup_{f \in R} \bar{f}) \text{ est connexe.}$$

$$\Leftrightarrow E(G) - \bigcup_{f \in R} \bar{f} \text{ ne contient aucun cocycle élémentaire de } G.$$

$$\Leftrightarrow [E(G) - \bigcup_{f \in R} \bar{f}]^* \text{ ne contient aucun cycle élémentaire de } G^*.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } [E(G) - \bigcup_{f \in R} \bar{f}]^* &= E(G^*) - \bigcup_{f \in R} (\bar{f})^* = E(G^*) - \bigcup_{f \in R} \overline{(f^*)} \\ &= E(G^*) - \bigcup_{v \in R^*} \bar{v} = E(G^*_{V(G^*)-R^*}) \end{aligned}$$

et, par définition,  $E(G^*_{V(G^*)-R^*})$  est une forêt si et seulement si  $V(G^*)-R^*$  est un cycliquement stable de  $G^*$ .

La Proposition 1 nous amène à poser la définition suivante :

l'indice de face-connexion d'un multigraphe plan 2-connexe G, qui sera noté  $k(G)$ , est le cardinal minimum d'un ensemble connectant de faces de G.

D'après le résultat précédent :

Proposition 2 : Pour tout multigraphe plan 2-connexe G :

$$k(G) = |V(G^*)| - s(G^*).$$

### 3 - BORNE INFÉRIEURE DE K(G) POUR LES GRAPHES PLANS TRIANGULÉS.

Soit G un graphe plan triangulé : le contour de toute face de G est un triangle. Nous poserons  $n = |V(G)|$ .

Soit  $R \subseteq F(G)$  un ensemble connectant de faces de G ; nous poserons  $K = \bigcup_{f \in R} \bar{f}$ .



$(V(G); K)$  est connexe, donc  $K$  contient au moins un arbre  $T$  de  $G$ .

$$\forall f \in R, |\bar{f} \cap T| \leq 2$$

$$\text{Donc } n-1 = |T| \leq \sum_{f \in R} |\bar{f} \cap T| \leq 2 |R|$$

On en déduit la

**Proposition 3 :** Pour tout graphe plan triangulé  $G$  à  $n$  sommets :

$$k(G) \geq \left\{ \frac{n-1}{2} \right\} \text{ (partie entière supérieure de } \frac{n-1}{2} \text{)}.$$

Un ensemble connectant du graphe plan triangulé  $G$  à  $n$  sommet sera dit minimum s'il est de cardinal  $\left\{ \frac{n-1}{2} \right\}$  ;  $G$  sera dit k-minimum s'il admet un ensemble connectant minimum.

#### 4 - UNE CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES CONNECTANTS MINIMUM POUR LES GRAPHES

##### PLANS TRIANGULÉS.

Soit  $G$  un graphe plan triangulé à  $n$  sommets. A toute partie  $R$  de  $F(G)$  nous associerons le système de parties  $H_R$  défini comme suit :

- les sommets de  $H_R$  sont les sommets de  $G$ .
- les arêtes de  $H_R$  sont tous les triplets  $\{v_1, v_2, v_3\}$  de sommets de  $G$  de la forme  $\bigcup_{e \in \bar{f}} e$  ( $f \in R$ ), c'est-à-dire tous les triplets de sommets définissant un triangle qui est une face de  $G$  appartenant à  $R$ .

Le lecteur trouvera dans [7], chapitre 17, paragraphe 2, les définitions relatives à la connexité et aux cycles des hypergraphes. Remarquons tout de suite que  $R$  est un ensemble connectant de faces de  $G$  si et seulement si  $H_R$  est un hypergraphe (tout sommet de  $G$  appartient à au moins une arête de  $H_R$ ) connexe.

De plus :

Proposition 4 : Soit  $G$  un graphe plan triangulé et  $R \subseteq F(G)$ .  $R$  est un ensemble connectant minimum de faces de  $G$  si et seulement si  $H_R$  est un hypergraphe connexe sans cycles (si  $n$  est impair) ou comportant exactement un cycle (si  $n$  est pair).

En effet : Nous avons vu que  $R$  est connectant si et seulement si  $H_R$  est un hypergraphe connexe. Notons  $H_R = (V(G) ; E_i, i = 1, \dots, |R|)$  et  $n = |V(G)|$ . D'après les Propositions 4 et 6 du chapitre 17 de [7] :

- l'hypergraphe connexe  $H_R$  est sans cycles si et seulement si :

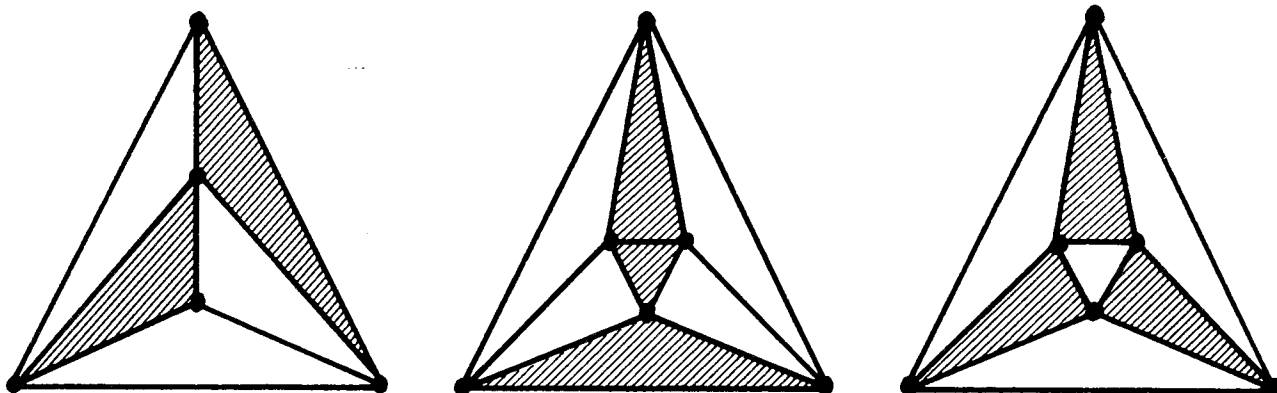
$$\sum_{i=1}^{|R|} (|E_i| - 1) = n - 1, \text{ soit } 2|R| = n - 1.$$

- l'hypergraphe connexe  $H_R$  comporte exactement un cycle si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{|R|} (|E_i| - 1) = n, \text{ soit } 2|R| = n.$$

D'où le résultat.

Remarque : Dans le cas où  $n$  est pair, le cycle de  $H_R$  pourra être de longueur 2 (deux faces de  $R$  sont adjacentes). Nous illustrons ci-dessous la Proposition 4 par trois exemples simples; dans chaque cas, les triangles hachurés constituent un ensemble connectant minimum.



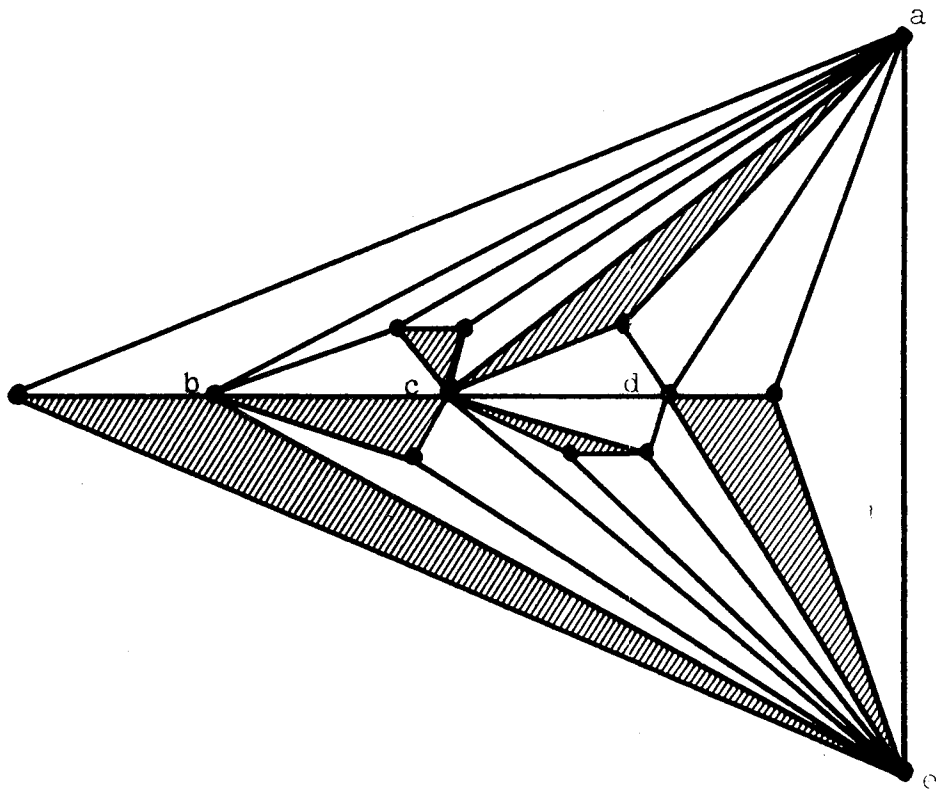
## 5 - CYCLES HAMILTONIENS ET ENSEMBLES CONNECTANTS

Rappelons qu'un cycle hamiltonien d'un graphe  $G$  est un cycle élémentaire de  $G$  de cardinal  $|V(G)|$ , et qu'un graphe  $G$  est dit hamiltonien s'il admet au moins un cycle hamiltonien.

Proposition 5 : Tout graphe plan triangulé hamiltonien est  $k$ -minimum.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration directe originale de ce résultat. En effet, nous avons pu généraliser la Proposition 5 sous une forme qui fera l'objet du paragraphe suivant. Nous nous contenterons ici de remarquer que la réciproque de la Proposition 5 est fausse.

En effet, soit  $G$  le graphe plan triangulé représenté ci-dessous



### III.7

- G est k-minimum : les triangles hachurés sur la figure précédente constituent un ensemble connectant minimum de G.

- G n'est pas hamiltonien :

Soit K l'ensemble des arêtes de G contenant exactement un des sommets a,b,c,d,e.

Soit G' le sous-graphe  $G_{\{a,b,c,d,e\}}$  de G.

Supposons qu'il existe un cycle hamiltonien C de G.

On a évidemment  $|C \cap K| \leq 2 |\{a,b,c,d,e\}| = 10$ .

D'autre part, toute face de G' contient au moins un sommet de G, et donc au moins 2 arêtes de  $|C \cap K|$ .

D'où  $|C \cap K| \geq 2 |F(G')| = 12$ .

Il y a contradiction.

## III - SUR LE NOMBRE DE STABILITE CYCLIQUE DES GRAPHES CUBIQUES

### 1 - INTRODUCTION

Rappelons qu'un graphe planaire maximal (c'est-à-dire représentable comme graphe plan triangulé) peut se définir comme le dual (combinatoire) d'un graphe cubique planaire 3-connexe (ce dual est unique à l'isomorphisme près).

La Proposition 2 nous permet alors d'envisager une généralisation des Propositions 3 et 5 sous la forme de résultats relatifs au nombre de stabilité cyclique des graphes cubiques.

### 2 - UNE BORNE SUPERIEURE DE $s(G)$ POUR LES GRAPHES CUBIQUES

Proposition 6 : Pour tout graphe cubique G à n sommets :  $s(G) \leq \lceil \frac{3n-2}{4} \rceil$  (partie entière de  $\frac{3n-2}{4}$ ).

En effet : Soit S un cycliquement stable de G de cardinal  $s(G)$ .

Tout sommet de  $S' = V(G) - S$  est adjacent à au moins deux sommets de S (sinon il formerait avec S un cycliquement stable de cardinal  $s(G) + 1$ ).

Nous noterons  $r_2$  le nombre de sommets de  $S'$  adjacents à exactement deux sommets de  $S$ , et  $p$  le nombre de composantes connexes de  $G_S$ . Il vient  $|E(G_{S'})| = \frac{r_2}{2}$ , d'où  $|E(G) - E(G_S)| = 3|S'| - \frac{r_2}{2}$  et  $|E(G_S)| = |S| - p$ .

D'où :

$$|E(G)| = 3|S'| - \frac{r_2}{2} + |S| - p = \frac{3n}{2}$$

$$\text{Soit : } \frac{3n}{2} = 3(n - |S|) + |S| - (p + \frac{r_2}{2})$$

ou encore :

$$s(G) = |S| = \frac{3n - (2p + r_2)}{4}$$

Il reste à remarquer que  $p \geq 1$  et  $r_2 \geq 0$ .

Définition : Un cycliquement stable du graphe cubique  $G$  à  $n$  sommets sera dit maximum s'il est de cardinal  $\lfloor \frac{3n-2}{4} \rfloor$  ;  $G$  sera dit s-maximum s'il admet un cycliquement stable maximum.

Remarques : a) D'après la démonstration de la Proposition 6,  $S \subseteq V(G)$  est un cycliquement stable maximum si et seulement si :

- dans le cas où  $|V(G)| = n \equiv 2 \pmod{4}$  :  $G_S$  est un arbre, et  $S'$  est un stable de  $G$  ( $p=1, r_2=0$ ).
- dans le cas où  $|V(G)| = n \equiv 0 \pmod{4}$  :
  - + soit  $G_S$  est un arbre, et  $G_{S'}$  comporte exactement une arête ( $p=1, r_2=2$ )
  - + soit  $G_S$  est une forêt de deux arbres, et  $S'$  est un stable de  $G$  ( $p=2, r_2=0$ )

b) La Proposition 6 a été généralisée par M. SAKAROVITCH ([36]).

Proposition 7 : Soit  $G$  un graphe cubique planaire 3-connexe et  $G^*$  le graphe planaire maximal dual de  $G$ . Alors  $G^*$  est  $k$ -minimum si et seulement si  $G$  est s-maximum.

En effet : Notons tout d'abord que  $k(G^*)$  est bien défini,  $G^*$  admettant essentiellement une seule représentation plane ([19], Théorème 2.4.2).

Nous poserons  $n = |V(G)|$ ,  $n^* = |V(G^*)|$  ; on sait que :

$$n = |F(G^*)| = 2n^* - 4.$$

D'après la Proposition 2 :

$$k(G^*) = n - s(G)$$

$$\text{Donc : } s(G) = \left\lfloor \frac{3n-2}{4} \right\rfloor \iff k(G^*) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^*-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^*-1}{2} \right\rfloor.$$

D'où le résultat.

*Remarque :* A la lumière du calcul précédent, la Proposition 6 est une généralisation de la Proposition 3.

Nous allons maintenant nous donner une méthode de calcul de  $s(G)$  qui s'avèrera utile dans la suite.

### 3 - CYCLIQUEMENT STABLES ET ORIENTATIONS D'UN GRAPHE CUBIQUE

Nous reprendrons la définition de l'orientation d'un graphe donnée au chapitre II, paragraphe III.4.a.

En particulier si  $0$  est une orientation du graphe  $G$ ,  $\forall v \in V(G)$  nous noterons  $S_0(v)$  l'ensemble des arêtes de  $G$  sortant de  $v$  dans  $0$ .

Un circuit de  $0$  dans  $G$  est un cycle élémentaire  $C$  de  $G$  ( $C \subseteq E(G)$ ) tel que :

$$\forall v \in \bigcup_{e \in C} e, \quad |S_0(v) \cap C| = 1.$$

Le degré extérieur du sommet  $v$  de  $G$  dans  $0$  est l'entier :

$$d_{G/0}^+(v) = |S_0(v)|$$

Si  $d_G(v)$  désigne le degré de  $v \in V(G)$  dans  $G$ , le degré intérieur de  $v$  dans  $0$  est l'entier :

$$d_{G/0}^-(v) = d_G(v) - d_{G/0}^+(v).$$

Si le graphe cubique  $G$  a été affecté d'une orientation  $0$  et si aucune confusion n'est à craindre, nous noterons :

$$\forall i \in \{0,1,2,3\} \quad V_i = \{v \in V(G) \mid d_{G/0}^+(v) = i\}$$

et  $n_i = |V_i|$ .

Pour tout graphe cubique  $G$ , nous poserons :

$$\sigma(G) = \min(\{n_1+n_3/0 \text{ est une orientation sans circuits de } G\}).$$

**Proposition 8 :** Pour tout graphe cubique  $G$  à  $n$  sommets :

$$s(G) = \frac{3n-2\sigma(G)}{4}$$

En effet :

a) Si 0 est une orientation sans circuits de  $G$ ,  $V_2 \cup V_3$  est un cycliquement stable de  $G$ .

En effet soit  $C$  un cycle élémentaire de  $G$ ; soit

$$X = \bigcup_{e \in C} e.$$

$$|C| = \sum_{v \in X} |S_0(v) \cap C|, \text{ soit (puisque } |X| = |C| \text{) :}$$

$$\sum_{v \in X} (|S_0(v) \cap C| - 1) = 0.$$

L'un des termes de cette somme est strictement négatif (sinon  $C$  serait un circuit de 0 dans  $G$ ); donc :

$$\exists v_0 \in X : |S_0(v_0) \cap C| = 0.$$

On voit alors que  $d_{G/0}^+(v_0) \leq 1$ , soit  $v_0 \notin V_2 \cup V_3$ .

$G_{V_2 \cup V_3}$  est bien une forêt.

b) Tout cycliquement stable maximal de  $G$  est de la forme  $V_2 \cup V_3$  pour une orientation sans circuits 0 de  $G$ .

En effet soit  $Z$  un cycliquement stable de  $G$ ; maximal par inclusion pour cette propriété; nous poserons  $Z' = V(G) - Z$ .

-  $G_Z$  est une forêt et donc il existe une orientation  $0_1$  de  $G_Z$  telle que :

$$\forall v \in Z \quad d_{G_Z/0_1}^-(v) \leq 1.$$

- Soit  $G_{Z,Z'}$  le graphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  et pour ensemble d'arêtes  $E(G) - (E(G_Z) \cup E(G_{Z'}))$ ; nous désignerons par  $0_2$  l'orientation de  $G_{Z,Z'}$  qui à chaque arête de ce graphe associe celle de ses extrémités qui appartient à  $Z$ .

- Enfin soit  $0_3$  une orientation quelconque de  $G_{Z'}$ .

Le triplet  $(0_1, 0_2, 0_3)$  définit une orientation  $0$  de  $G$ .

-  $\forall v \in Z \quad d_{G/0}^-(v) = d_{G_Z/0_1}^-(v) \leq 1$

et donc  $Z \subseteq V_2 \cup V_3$ .

- tout sommet de  $Z'$  est adjacent à au moins deux sommets de  $Z$  (sinon  $Z$  ne serait pas maximal) et donc :

$\forall v \in Z' \quad d_{G/0}^-(v) \geq d_{G_{Z,Z'}/0_2}^-(v) \geq 2$

soit  $Z' \subseteq V_0 \cup V_1$ .

- On en déduit que  $Z = V_2 \cup V_3$ .

Par ailleurs, de même que  $G_Z$ , le sous-graphe  $G_{Z'}$  est une forêt (le degré de tout sommet est inférieur ou égal à 1) ; donc tout cycle élémentaire de  $G$  contient au moins deux arêtes de  $G_{Z,Z'}$  ; on en déduira aisément que  $0$  est une orientation sans circuits de  $G$ . D'où le résultat.

c) On déduit alors de (a) et (b) que :

$s(G) = \max \{ (n_2 + n_3 / 0 \text{ est une orientation sans circuits de } G) \}$ .

Or la somme des degrés extérieurs des sommets de  $G$  dans l'orientation  $0$  est égale à  $|E(G)|$ , ce qui s'écrit :

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = \frac{3n}{2}$$

ou encore :  $(n_1 + n_3) + 2(n_2 + n_3) = \frac{3n}{2}$ .

$$\text{D'où : } n_2 + n_3 = \frac{3n - 2(n_1 + n_3)}{4}.$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 8.

*Remarque* : Si une orientation  $0$  d'un graphe cubique  $G$  est sans circuits,  $n_3 \neq 0$  ( $G$  orienté par  $0$  admet une "source"). Donc pour tout graphe cubique  $G$ ,  $\sigma(G) \geq 1$ ; on retrouve ainsi la Proposition 6.



Définition : Soit  $G$  un graphe cubique à  $n$  sommets. Une orientation  $0$  de  $G$  sera dite pseudo-paire si et seulement si :

- dans le cas où  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$  :  $n_1 + n_3 = 1$

- dans le cas où  $n \equiv 0 \pmod{4}$  :  $n_1 + n_3 = 2$

(on notera que  $n_1 + n_3$  a la même parité que  $|E(G)| = \frac{3n}{2}$ ).

D'après la Proposition 8 :

Proposition 9 : Un graphe cubique est  $s$ -maximum si et seulement si il admet une orientation pseudo-paire sans circuits.

#### 4 - MULTIGRAPHES DUAUX-HAMILTONIENS

Nous dirons d'un multigraphe connexe  $G$  qu'il est dual-hamiltonien s'il admet un cocycle élémentaire comportant  $|E(G)| - |V(G)| + 2$  arêtes.

On vérifie immédiatement qu'un multigraphe planaire 2-connexe  $G$  est dual-hamiltonien si et seulement si tout dual de  $G$  est hamiltonien.

Nous sommes alors en droit de formuler la Proposition 5 de la façon suivante :

Proposition 5' : Tout graphe cubique planaire 3-connexe dual-hamiltonien est  $s$ -maximum.

Les Propositions 5 et 5' sont équivalentes d'après la Proposition 7.

Remarque : A l'inverse de la propriété hamiltonienne, la propriété "dual-hamiltonienne" n'a fait l'objet d'aucune étude systématique à notre connaissance.

#### 5 - UNE CARACTÉRISATION DES MULTIGRAPHES DUAUX-HAMILTONIENS

Proposition 10 : Un multigraphe connexe  $G$  est dual-hamiltonien si et seulement si il existe une partition  $\{W_1, W_2\}$  de  $V(G)$  telle que  $G_{W_1}$  et  $G_{W_2}$  sont des arbres.

En effet :

a) Soit  $K$  un cocycle élémentaire de  $G$  ( $K \subseteq E(G)$ ) avec  $|K| = |E(G)| - |V(G)| + 2$

Par définition  $K$  est de la forme  $E(G) - (E(G_{W_1}) \cup E(G_{W_2}))$ , où  $\{W_1, W_2\}$  est une partition de  $V(G)$  telle que  $G_{W_1}$  et  $G_{W_2}$  sont connexes.

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } |E(G_{W_1})| + |E(G_{W_2})| &= |E(G)| - |K| = |V(G)| - 2 \\ &= |W_1| + |W_2| - 2 \end{aligned}$$

Or  $|E(G_{W_i})| \geq |W_i| - 1$  ( $i = 1, 2$ ) avec l'égalité si et seulement si  $G_{W_i}$  est un arbre. Donc  $\{W_1, W_2\}$  satisfait aux conditions de l'énoncé.

b) Réciproquement, si  $\{W_1, W_2\}$  est une partition de  $V(G)$  telle que  $G_{W_1}$  et  $G_{W_2}$

sont des arbres : soit

$$K = E(G) - (E(G_{W_1}) \cup E(G_{W_2})).$$

On vérifiera sans peine que  $K$  est un cocycle élémentaire de  $G$  de cardinal  $|E(G)| - |V(G)| + 2$ .

## 6 - LE NOMBRE DE STABILITÉ CYCLIQUE DES GRAPHES CUBIQUES DUAUX-HAMILTONIENS

Proposition 11 : Tout graphe cubique dual-hamiltonien est  $s$ -maximum.

En effet :

Soit  $G$  un graphe cubique dual-hamiltonien à  $n$  sommets. D'après la Proposition 10, il existe une partition  $\{W_1, W_2\}$  de  $V(G)$  telle que  $G_{W_1}$  et  $G_{W_2}$  sont des arbres; le cocycle élémentaire  $K$  de  $G$  associé à  $\{W_1, W_2\}$  comme dans la démonstration de la Proposition 10 vérifie :

$$|K| = 3|W_1| - 2(|W_1| - 1) = 3|W_2| - 2(|W_2| - 1),$$

et donc :  $|W_1| = |W_2| = \frac{n}{2}$  ;  $|E(G_{W_1})| = |E(G_{W_2})| = \frac{n}{2} - 1$ .

Kotzig [20] a démontré que tout graphe connexe  $G$  admet une orientation  $0$  telle que :

- si  $|E(G)|$  est pair, tout sommet de  $G$  est de degré extérieur pair dans  $0$ .
- si  $|E(G)|$  est impair,  $G$  comporte exactement un sommet de degré extérieur impair dans  $0$ .

(ce résultat est utilisé au Chapitre II, paragraphe III.4).

Soit alors  $0_1$  une orientation de  $G_{W_1}$  telle que :

- si  $|E(G_{W_1})|$  est pair (c'est-à-dire si  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ ) :

tout sommet de  $G_{W_1}$  est de degré extérieur pair dans  $0_1$ .

- si  $|E(G_{W_1})|$  est impair (c'est-à-dire si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ) :

il y a exactement un sommet de  $G_{W_1}$  de degré extérieur impair dans  $0_1$ .

Soit  $0_2$  une orientation de  $G_{W_2}$  telle que tout sommet de  $G_{W_2}$  est de degré intérieur 1 dans  $0_2$  à l'exception d'un seul sommet qui est de degré intérieur 0 dans  $0_2$ .

Soit  $G_{W_1, W_2}$  le graphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  et pour ensemble d'arêtes  $K = E(G) - (E(G_{W_1}) \cup E(G_{W_2}))$  ; soit  $0_3$  l'orientation de  $G_{W_1, W_2}$  qui à chaque arête de ce graphe associe celle de ses extrémités qui appartient à  $W_2$ .

Le triplet  $(0_1, 0_2, 0_3)$  définit une orientation  $0$  de  $G$ . On vérifiera aisément que  $0$  est pseudo-paire.

En outre tout cycle élémentaire de  $G$  contient au moins deux arêtes de  $G_{W_1, W_2}$  et donc  $0$  est une orientation sans circuits de  $G$ .

D'après la Proposition 9,  $G$  est  $s$ -maximum.

7 - REMARQUES

- a) La Proposition 11 est bien une généralisation de la Proposition 5 (sous sa forme 5'); notre démonstration initiale de la Proposition 5 était beaucoup plus lourde que celle donnée ici pour la Proposition 11.
- b) Si  $0$  est l'orientation de  $G$  définie dans la démonstration précédente, on vérifie que  $V_0 \cup V_1$  est l'ensemble des sommets de  $G_{W_1}$  de degré extérieur 0 ou 1 dans  $0_1$ .
- c) Comme celle de la Proposition 5, la réciproque de la Proposition 11 est fausse (paragraphe II.5 de ce chapitre).
- d) M. SAKAROVITCH et C. PAYAN ont montré ([36],[37]) que tout graphe cubique cycliquement 4-arête-connexe est s-maximum ; d'autre part H. WHITNEY [38] a démontré le résultat suivant :

Tout graphe planaire maximal 4-connexe est hamiltonien.

ou, sous forme duale :

Tout graphe planaire cubique cycliquement 4-arête-connexe est dual-hamiltonien.

Le résultat de M. SAKAROVITCH et C. PAYAN est donc dans le cas planaire, une conséquence de la Proposition 11. En est-il de même dans le cas général ?

Cette question nous amène à proposer la conjecture suivante :

Conjecture III.1 : Tout graphe cubique cycliquement 4-arête-connexe est dual-hamiltonien.

Cette conjecture est vérifiée dans le cas planaire d'après le résultat de WHITNEY.

## IV - SUR LE NOMBRE DE STABILITE CYCLIQUE DES GRAPHE PLANAIRES

### 1 - INTRODUCTION

Pour tout graphe  $G$  nous noterons  $\rho_1(G)$  sa point-arboricité (cardinal minimum d'une couverture de  $V(G)$  par des cycliquement stables de  $G$ ) et  $\alpha(G)$  son nombre de stabilité (défini au chapitre I, paragraphe I.2).

Pour tout graphe  $G$ , les inégalités suivantes sont vérifiées :

- (i)  $s(G) \geq \frac{|V(G)|}{\rho_1(G)}$  (évident)
- (ii)  $\alpha(G) \geq \frac{s(G)}{2}$  (toute forêt est un graphe biparti)

### 2 - UN PROBLÈME DU TYPE ERDÖS-VIZING

Le problème célèbre connu sous le nom de "problème d'ERDÖS-VIZING" ([7], chapitre 13; [39]) peut se formuler comme suit :

Conjecture : Pour tout graphe planaire  $G$ ,  $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{4}$

On sait que si la Conjecture des Quatre Couleurs est vraie, la conjecture d'Erdős-Vizing est vraie ([7], chapitre 13) ; on sait également que pour tout graphe planaire  $G$ ,  $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{5}$ .

Ceci nous amène à proposer la

Conjecture III.2 : Pour tout graphe planaire  $G$ ,  $s(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ .

D'après l'inégalité (ii) de l'introduction, cette conjecture est plus forte que la conjecture d'Erdős-Vizing. En outre d'après l'inégalité (i), la conjecture est vérifiée pour les graphes planaires  $G$  tels que  $\rho_1(G) \leq 2$ .

Nous donnons ci-dessous trois classes de graphes planaires de point-arboricité inférieure ou égale à 2 :

- Les graphes "extérieur-planaires" ("outerplanar graphs"), définis dans [5], page 106 comme les graphes admettant une représentation plane telle que tout sommet appartienne au contour de la face extérieure. Référence : [40].
- Les graphes planaires sans triangles. Référence : [41].
- Les graphes planaires duaux-hamiltoniens. Référence : la Proposition 10 de ce chapitre.

Ces trois classes de graphes vérifient donc notre Conjecture III.2.

### 3 - FORMULATIONS ÉQUIVALENTES DE LA CONJECTURE III.2

- a) Il suffit évidemment de démontrer la Conjecture III.2 pour les graphes planaires maximaux.

D'après le paragraphe précédent, nous pourrions nous limiter au cas des graphes non duaux-hamiltoniens.

La Conjecture suivante est donc équivalente à la Conjecture III.2 :

Conjecture III.2' : Pour tout graphe planaire maximal  $G$  de dual non hamiltonien,  $s(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ .

- b) D'après la Proposition 2, si  $G^*$  est le graphe dual du graphe planaire maximal  $G$  :

$$s(G) \geq \frac{|V(G)|}{2} \iff k(G^*) \leq \frac{|V(G)|}{2} = \frac{|F(G^*)|}{2}$$

La Conjecture suivante est donc équivalente aux Conjectures III.2 et III.2' :

Conjecture III.2'' : Pour tout graphe cubique planaire 3-connexe non hamiltonien  $G$ ,  $k(G) \leq \frac{|F(G)|}{2}$ .

De nombreux auteurs se sont consacrés à la recherche de graphes cubiques planaires 3-connexes non hamiltoniens (Tait conjecturait en 1884 qu'il n'en existe aucun, et montrait que sa conjecture était plus forte que celle des Quatre Couleurs). Pour un compte-rendu de ces travaux, nous renvoyons le lecteur à : [7], chapitre 10 ; [42], chapitre 17; [43].

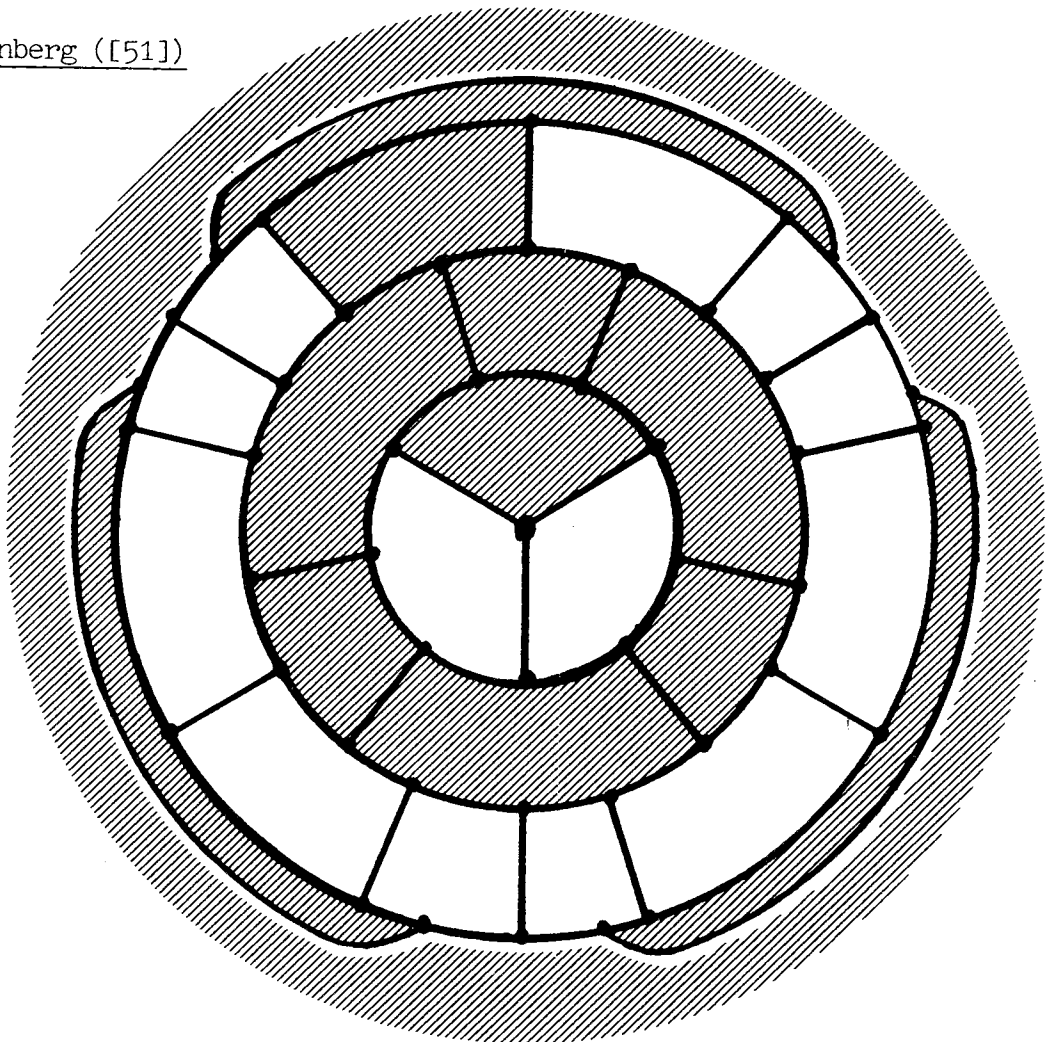
Nous ne nous intéresserons ici qu'à certains exemples classiques de graphes cubiques planaires 3-connexes non hamiltoniens, pour lesquels nous vérifierons la Conjecture III.2".

#### 4 - VÉRIFICATION DE LA CONJECTURE III.2" DANS CERTAINS CAS PARTICULIERS

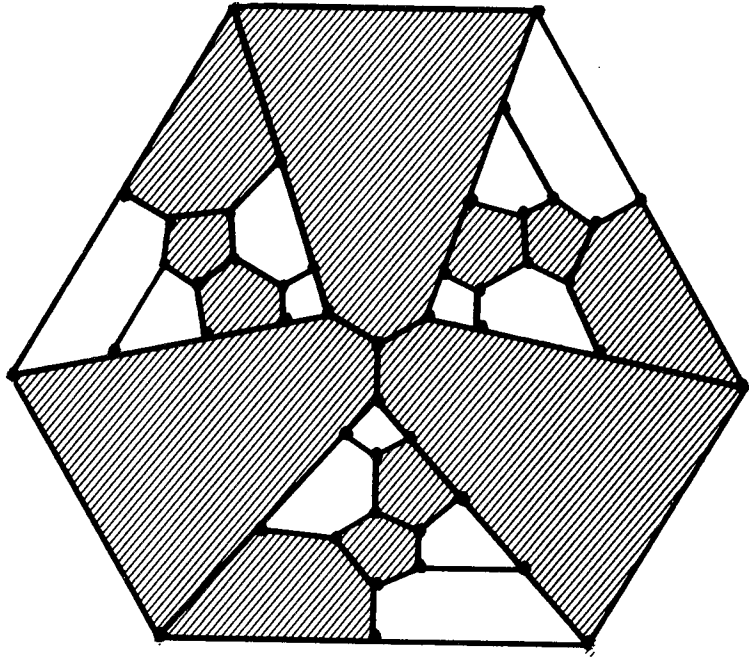
Nous donnons ci-dessous une liste de figures ; chacune d'entre elles représente un graphe cubique planaire 3-connexe non hamiltonien  $G$  ; les faces hachurées constituent un ensemble connectant de cardinal inférieur ou égal à  $\frac{|F(G)|}{2}$ . Chaque graphe est accompagné d'une ou plusieurs références relatives à sa découverte, et d'une référence relative au dessin utilisé.

Kozyrev et Grinberg ([51])

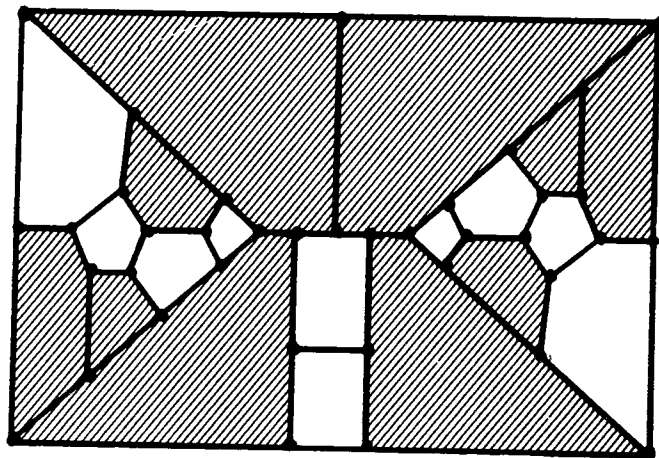
[7], p. 214.



Tutte ([46])  
[42], p. 360.



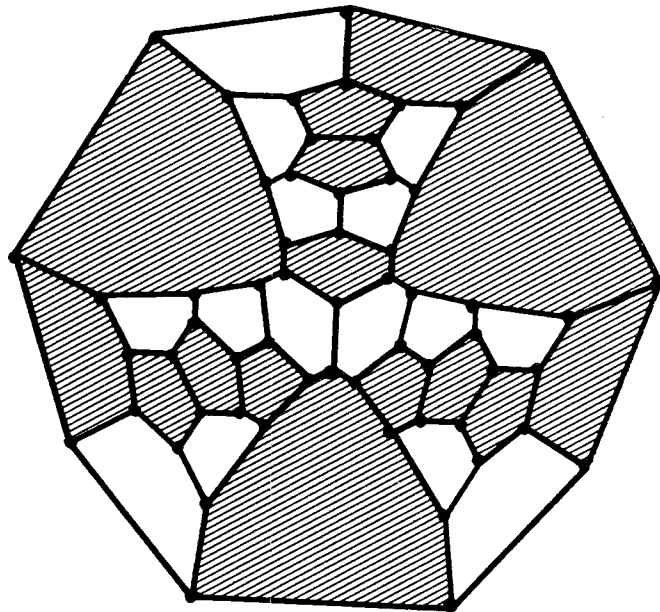
Bosak ([48]), Lederberg ([49]), Barnette  
[42], p. 361.





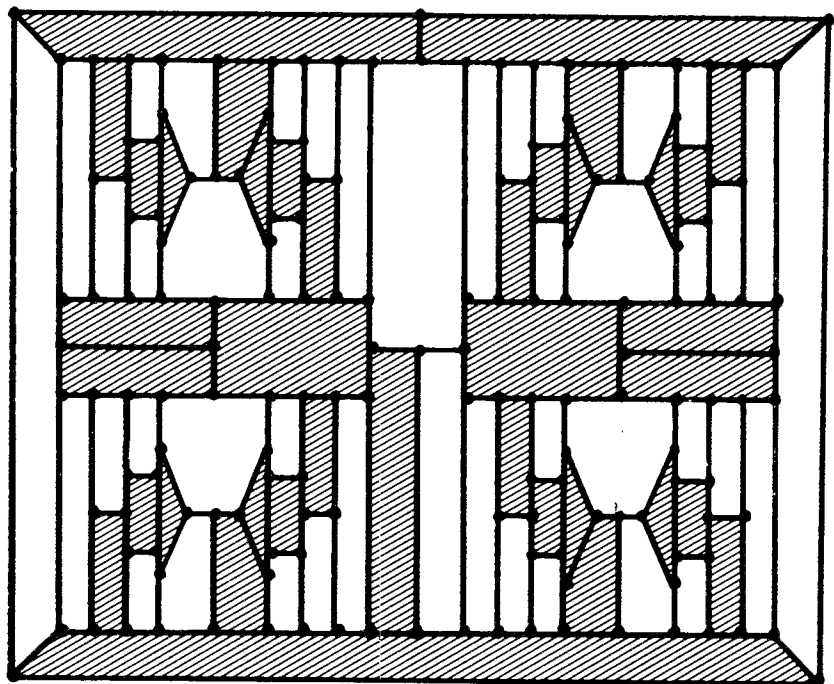
Hunter ([47])

[42], p. 365.



Walther ([50])

[42], p. 366.



## 5 - UNE BORNE INFÉRIEURE DE $s(G)$ POUR LES GRAPHE PLANAIRES

On trouvera dans [40] une démonstration du résultat suivant : pour tout graphe planaire  $G$ ,  $\rho_1(G) \leq 3$ . Donc, d'après l'inégalité (i) de l'introduction : pour tout graphe planaire  $G$ ,  $s(G) \geq \frac{|V(G)|}{3}$ .

Nous allons améliorer ce résultat.

Proposition 12 : Pour tout graphe planaire  $G$ ,  $s(G) \geq \frac{2|V(G)|}{5}$ .

En effet :

Soit  $G$  un graphe planaire.

Dans [44], B. GRÜNBAUM démontre un résultat (Théorème 2) qui peut s'interpréter comme suit :

Il existe une partition  $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$  de  $V(G)$  en stables  $S_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) de  $G$  telle que :

$S_i \cup S_j$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ ) et  $S_4 \cup S_5$  sont des cycliquement stables de  $G$ .

Supposons alors que  $s(G) < \frac{2|V(G)|}{5}$ .

Il vient :  $|S_1 \cup S_2| + |S_1 \cup S_3| + |S_2 \cup S_3| + 2|S_4 \cup S_5| < 2|V(G)|$  et il y a donc contradiction.

Remarque : M.O. ALBERTSON a été l'initiateur d'une approche nouvelle de la Conjecture d'Erdős-Vizing en démontrant que :

Pour tout graphe planaire  $G$ ,  $s(G) \geq \frac{2}{9} |V(G)|$  ([45])

Peut-être des méthodes analogues aux siennes permettraient-elles, sinon de démontrer la Conjecture III.2, du moins d'améliorer le résultat de la Proposition 12.



## CHAPITRE IV

SUR LES SÉQUENCES DE PARITÉ DES Q-ANGULATIONS  
PAIRES DU PLAN



## I - INTRODUCTION

En 1965, Moon démontrait de façon très simple le résultat suivant ([52]) : si un multigraphe plan triangulé comporte exactement deux sommets de degré impair, ces deux sommets sont non-adjacents (Moon résolvait ainsi un problème posé par Minty dans [53]).

Depuis lors, de nombreux résultats analogues ont été établis par B. Grünbaum ([42], chapitre 13), J. Malkevitch ([34]), D.W. Crowe ([54]), et d'autres auteurs ; T. Gallai ([55]) a pu retrouver ces résultats dans le cadre d'un travail d'ensemble sur les "signatures" dans les multigraphes plans.

Les études que nous venons de citer portent sur le problème de l'existence de multigraphes plans satisfaisant à certaines contraintes d'ordre combinatoire (relatives le plus souvent aux degrés des sommets et aux longueurs des faces).

Dans ce chapitre, nous allons nous consacrer à un problème du même type, qui contient comme cas particulier le problème de Minty résolu par Moon.

## II - DÉFINITIONS GÉNÉRALES

### 1 - Q-ANGULATIONS ET $\bar{Q}$ -ANGULATIONS PAIRES

Sauf mention contraire, les notations et définitions utilisées sont celles des chapitres précédents.

Soit  $G$  un multigraphe 2-connexe plan. Le contour de toute face  $f$  de  $G$  est un cycle élémentaire  $C$  de  $G$  qui sera considéré dans ce chapitre comme un sous-multigraphe partiel de  $G$  ( $V(C) \subseteq V(G)$  ;  $E(C) \subseteq E(G)$ ).

La longueur de  $f$  sera par définition le nombre  $|f| = |V(C)| = |E(C)|$ . Un sommet de  $G$  sera dit extérieur s'il appartient au contour de la face infinie de  $G$ , et intérieur sinon.

Une q-angulation (respectivement :  $\bar{q}$ -angulation) paire d'ordre  $n$  ( $q \geq 2, n \geq 2$ ) est un multigraphe 2-connexe plan  $G$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- la longueur de toute face finie de  $G$  est multiple de  $q$  (respectivement : égale à  $q$ ).
- la longueur de la face infinie de  $G$  est  $n$ .
- tout sommet intérieur de  $G$  est de degré pair dans  $G$ .

Exemples :

- Un multigraphe plan triangulé est nécessairement 2-connexe; donc tout multigraphe plan triangulé eulérien est une  $\bar{3}$ -angulation paire d'ordre 3.
- Plus généralement les "Even triangulated polygons" de Dalkey ([56]) sont des  $\bar{3}$ -angulations paires d'ordre quelconque supérieur ou égal à 3.

## 2 - SÉQUENCES

Nous appellerons séquence d'ordre  $n$  ou  $n$ -séquence ( $n \geq 2$ ) tout couple  $(C, s)$  où :

- $C$  est un cycle élémentaire (c'est-à-dire un multigraphe 2-régulier connexe) avec  $|V(C)| = n$ .
- $s$  est une application de  $V(C)$  dans  $\{-1, +1\}$ .

Remarques :

- Le choix de  $\{-1, +1\}$  comme ensemble de valeurs de  $s$  a pour but de simplifier les notations, comme on le verra dans la suite.
- Tout cycle élémentaire sera supposé représenté dans le plan.

Deux séquences  $(C, s)$  et  $(C', s')$  seront dites isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme de graphes  $\phi$  de  $C$  sur  $C'$  tel que  $s' \circ \phi = s$ .

### IV.3

Une  $n$ -séquence  $(C,s)$  ( $n \geq 2$ ) sera dite de type  $(x_1, \dots, x_n)$  ( $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in \{-1, +1\}$ ) si et seulement si il existe une bijection  $\theta$  de  $\{1, \dots, n\}$  sur  $V(C)$  telle que :

- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \{\theta(i), \theta(i+1)\} \in E(C)$  (et donc :  
 $\{\theta(n), \theta(1)\} \in E(C)$ )
- $\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i = s(\theta(i))$ .

Remarques :

- A une séquence correspondront généralement plusieurs types distincts.
- Deux séquences d'un même type sont nécessairement isomorphes.

### 3 - SÉQUENCES DE PARITÉ

Soit  $G$  une  $q$ -angulation paire d'ordre  $n$  ( $q \geq 2, n \geq 2$ ) et soit  $C$  le contour de la face infinie de  $G$ .

Soit  $p$  l'application de  $V(C)$  dans  $\{-1, +1\}$  définie par :  $\forall v \in V(C), p(v) = +1$  si et seulement si le degré de  $v$  dans  $G$  est pair.

La  $n$ -séquence  $(C,p)$  sera dite séquence de parité de  $G$ .

Remarque :

*Cette définition est équivalente à celle donnée par Dalkey ([56]) dans le cas des  $\bar{3}$ -angulations paires. Nous citons Dalkey non pour son résultat (qui répond à des préoccupations différentes des nôtres) mais parce que nous lui devons le concept de séquence de parité.*

Une  $n$ -séquence  $(C,s)$  ( $n \geq 2$ ) sera dite  $q$ -paire (respectivement :  $\bar{q}$ -paire) ( $q \geq 2$ ) si elle est la séquence de parité d'une  $q$ -angulation (respectivement :  $\bar{q}$ -angulation) paire  $G$  (dans ce cas  $C$  est le contour de la face infinie de  $G$ ).

Tout cycle élémentaire étant supposé représenté dans le plan, il est clair que toute séquence isomorphe à une séquence  $q$ -paire (respectivement :  $\bar{q}$ -paire) est  $q$ -paire (respectivement :  $\bar{q}$ -paire) ( $\forall q \geq 2$ ).



Le résultat de Moon ([52]) dont nous avons parlé dans l'introduction peut donc se formuler comme suit :

Une 3-séquence de type  $(-1, -1, 1)$  ne peut être  $\bar{3}$ -paire.

Nous étendrons le résultat de Moon en obtenant une caractérisation combinatoire des  $n$ -séquences  $q$ -paires et  $\bar{q}$ -paires ( $\forall n \geq 2, \forall q \geq 2$ ).

Pour cela quelques définitions supplémentaires sont nécessaires.

#### 4 - SÉQUENCES DÉRIVÉES

Soit  $C$  un cycle élémentaire avec  $|V(C)| = n \geq 2$ .

Le multigraphe représentatif des arêtes de  $C$ ,  $L(C)$ , peut être défini comme le cycle élémentaire ayant pour ensemble de sommets  $E(C)$ , et pour famille d'arêtes  $(a_v \mid v \in V(C))$  où  $a_v$  est le couple formé par les deux arêtes de  $C$  contenant  $v$ . Soit  $r$  une application de  $E(C)$  dans  $\{-1, +1\}$ ;  $(L(C), r)$  est une  $n$ -séquence

Par définition, la séquence dérivée de la  $n$ -séquence  $(L(C), r)$  est la  $n$ -séquence  $(C, s)$ , où  $s$  est l'application de  $V(C)$  dans  $\{-1, +1\}$  définie par :  $\forall v \in V(C)$ , si  $a_v = \{e, e'\}$  :  $s(v) = r(e) \times r(e')$ .

Dans ce cas, nous dirons aussi que  $(C, s)$  dérive de  $(L(C), r)$ . Etant donnée une séquence  $(C, s)$ , nous appellerons primitive de  $(C, s)$  toute séquence  $(L(C), r)$  dont  $(C, s)$  est la séquence dérivée.

Une séquence sera dite dérivée si et seulement si elle admet au moins une primitive.

#### Proposition 1 :

Soit  $(C, s)$  une  $n$ -séquence ( $n \geq 2$ ) ;  $(C, s)$  est une séquence dérivée si et seulement si :

II  $s(v) = 1$ . En outre dans ce cas  $(C, s)$  admet exactement deux primitives qui se déduisent l'une de l'autre par changement de signe.

En effet :

Soit  $(C,s)$  une  $n$ -séquence ( $n \geq 2$ ).

Nous noterons  $V(C) = \{v_1, \dots, v_n\}$  et  $E(C) = \{e_1, \dots, e_n\}$  avec :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad e_i = \{v_i, v_{i+1}\}; \quad e_n = \{v_n, v_1\}.$$

Une  $n$ -séquence  $(L(C),r)$  est une primitive de  $(C,s)$  si et seulement si :

- (a)  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad r(e_{i+1}) = s(v_{i+1}) \times r(e_i)$   
 (b)  $r(e_n) r(e_1) = s(v_1)$ .

La condition (a) s'écrit encore :

$$(a') \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad r(e_{i+1}) = \left( \prod_{j=2}^{i+1} s(v_j) \right) \times r(e_1).$$

La condition (a) est donc vérifiée par deux séquences  $(L(C),r_1)$  et  $(L(C),r_2)$  telles que :  $r_1(e_1) = 1$  ;  $r_2(e_1) = -1$ .

On constate que  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : r_1(e_i) = -r_2(e_i)$ .

Soit  $k \in \{1,2\}$  ;  $r_k$  vérifie la condition (b) si et seulement si :

$$r_k(e_n) r_k(e_1) s(v_1) = 1$$

soit, d'après (a') :  $\prod_{j=1}^n s(v_j) = 1$ .

Ceci achève la démonstration.

Remarque : Dans la démonstration précédente  $s$  joue le rôle d'une "tension" de  $L(C)$  à valeurs dans le groupe multiplicatif  $\{-1, +1\}$  (isomorphe à  $Z_2$ ) ;  $r$  joue le rôle d'un "potentiel" dont dérive  $s$  ; nous reviendrons sur ces notions dans un autre chapitre.

## 5 - SÉQUENCES Q-ÉQUITABLES

Une  $n$ -séquence  $(C,s)$  ( $n \geq 2$ ) sera dite q-équitable ( $q \geq 2$ ) si et seulement si :

$$\sum_{v \in V(C)} s(v) \equiv 0 \pmod{q}$$

### III - SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SÉQUENCES Q-PAIRES

#### I - UNE CONDITION NÉCESSAIRE DE Q-PARITÉ

Proposition 2 :  $\forall q \geq 2$  : toute séquence q-paire dérive d'une séquence q-équitable

En effet :

Soit  $G$  une  $q$ -angulation paire d'ordre  $n$  ( $n \geq 2$ ,  $q \geq 2$ ) et soit  $(C, p)$  la séquence de parité de  $G$  ( $C$  est donc le contour de la face infinie de  $G$ ).

Soit  $I = \{v \in V(C) \mid p(v) = -1\}$ .

$G$  comporte un nombre pair de sommets de degré impair, et donc  $|I|$  est pair.

Construisons alors à partir de  $G$  un multigraphe plan  $G'$  de la façon suivante :

- Si  $I = \emptyset$ , choisissons  $G'$  identique à  $G$ .
- Sinon, plaçons un nouveau sommet  $u$  à l'intérieur de la face infinie de  $G$ , et relient  $u$  (sans croisements) par une arête à chaque sommet de  $I$ .

$G'$  est un multigraphe plan 2-connexe dont chaque sommet est de degré pair. On en déduit ([19], Théorème 6.2.3) que les faces de  $G'$  admettent une bonne coloration en deux couleurs. Autrement dit, il existe une partition  $\{F_1, F_2\}$  de l'ensemble des faces de  $G'$  telle que toute arête de  $G'$  appartienne au contour d'une face de  $F_1$  et au contour d'une face de  $F_2$ . Nous désignerons par  $F_0$  l'ensemble des faces de  $G'$  **situées** à l'intérieur de  $C$  ( $F_0$  peut être identifié à l'ensemble des faces finies de  $G$ ).

Soit alors  $r$  l'application de  $E(C)$  dans  $\{-1, +1\}$  définie par :

- $\forall e \in E(C)$  :
- si  $e$  appartient au contour d'une face de  $F_1 - F_0$ ,  $r(e) = +1$ .
  - si  $e$  appartient au contour d'une face de  $F_2 - F_0$ ,  $r(e) = -1$ .

Il sera facile de vérifier que la séquence dérivée de la  $n$ -séquence  $(L(C), r)$  n'est autre que  $(C, p)$ .

Nous allons montrer maintenant que  $(L(C), r)$  est  $q$ -équitable.  
 En comptant de deux manières les arêtes de  $G'$ , nous obtenons :

$$\sum_{f \in F_1} |f| = \sum_{f \in F_2} |f|$$

Les longueurs des faces appartenant à  $F_0$  sont multiples de  $q$ .

Donc :

$$\sum_{f \in F_1 - F_0} |f| \equiv \sum_{f \in F_2 - F_0} |f| \pmod{q} \quad (a)$$

Or :

- si  $I = \emptyset$  :

$$\sum_{e \in E(C)} r(e) = \sum_{f \in F_1 - F_0} |f| - \sum_{f \in F_2 - F_0} |f| \quad (b)$$

(l'un des ensembles  $F_1 - F_0$ ,  $F_2 - F_0$  est vide et l'autre contient une seule face, de contour  $C$ )

- si  $I \neq \emptyset$  :

$$\sum_{e \in E(C)} r(e) = \left( \sum_{f \in F_1 - F_0} (|f| - 2) \right) - \left( \sum_{f \in F_2 - F_0} (|f| - 2) \right)$$

et, puisque  $|F_1 - F_0| = |F_2 - F_0|$ , l'égalité (b) est également vérifiée dans ce cas.

(a) et (b) impliquent que  $(L(C), r)$  est  $q$ -équitable.

Ceci achève la démonstration.

## 2 - APPLICATIONS

Proposition 3 : Soit  $(C, s)$  une  $n$ -séquence ( $n \geq 2$ ) de type  $(x_1, \dots, x_n)$   
 $(\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in \{-1, +1\})$ .

Si  $(C, s)$  est  $q$ -paire ( $q \geq 2$ ), alors :

(a)  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$

(b)  $1 + \sum_{j=2}^n \left( \prod_{i=2}^j x_i \right) \equiv 0 \pmod{q}$

En effet :

En se reportant à la Proposition 1 et à sa démonstration, il sera facile de vérifier que :

- (a) signifie que  $(C,s)$  est une séquence dérivée.
- (b) signifie que toute primitive de  $(C,s)$  (s'il en existe) est  $q$ -équitable.

La Proposition 3 est donc équivalente à la Proposition 2.

A titre d'exemple nous allons déduire de la Proposition 3 un résultat qui généralise celui de Moon ([52]).

Proposition 4 : Soit  $G$  un multigraphe plan 2-connexe dont toutes les faces sont des triangles (sauf éventuellement la face infinie  $f_0$ ) et dont tous les sommets sont de degré pair sauf deux  $v_1$  et  $v_2$  qui appartiennent au contour de  $f_0$ . Soit  $d(v_1, v_2)$  la distance de  $v_1$  à  $v_2$  sur le contour de  $f_0$ . Alors  $d(v_1, v_2) \equiv 2|f_0| \pmod{3}$

En effet :

Posons  $n = |f_0|$ ,  $d = d(v_1, v_2) + 1$ ,

$x_1 = -1$ ,  $x_d = -1$  et  $x_i = 1$  ( $i \in \{2, \dots, n\} - \{d\}$ ).

$G$  est une  $\bar{3}$ -angulation paire d'ordre  $n$  ; sa séquence de parité est de type  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Donc d'après la Proposition 3 :

$$1 + \sum_{j=2}^n \left( \prod_{i=2}^j x_i \right) \equiv 0 \pmod{3}$$

Soit :  $1 + (d-2) - (n-d+1) = 2d-2-n \equiv 0 \pmod{3}$

D'où  $2(d-1) \equiv n \pmod{3}$ , ou encore  $d-1 \equiv 2n \pmod{3}$

D'où le résultat.

Remarques : - si  $n = 3$ , nous obtenons  $d(v_1, v_2) \equiv 0 \pmod{3}$  :  
il y a bien contradiction.

- si  $n = 5$ , nous obtenons  $d(v_1, v_2) = 1$  :  $v_1$  et  $v_2$  sont nécessairement adjacents.

Nous allons maintenant passer à l'étude d'une réciproque de la Proposition 2.

## IV - CARACTÉRISATION COMBINATOIRE DES SÉQUENCES $q$ -PAIRES ET $\bar{q}$ -PAIRES

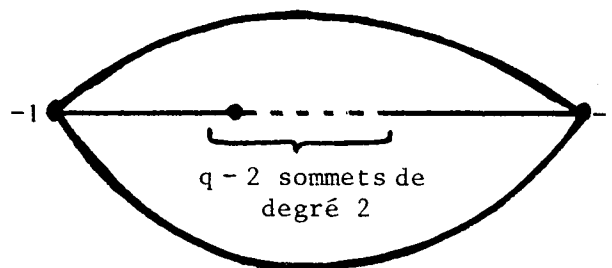
Nous traiterons à part le cas  $q = 2$ .

### 1 - UNE CONDITION SUFFISANTE DE $\bar{q}$ -PARITÉ ( $q \geq 3$ )

Traitons d'abord le cas des 2-séquences. Soit  $q \geq 3$ .

Une 2-séquence de type  $(1,-1)$  ou  $(-1,1)$  ne saurait être  $q$ -paire d'après la Proposition 3(a) ; une 2-séquence de type  $(1,1)$  ne peut être  $q$ -paire d'après la Proposition 3(b).

Par contre une 2-séquence de type  $(-1,-1)$  est  $q$ -paire et même  $\bar{q}$ -paire, comme le montre le multigraphe plan représenté ci-dessous :



Donc :

Proposition 5 : Toute 2-séquence qui dérive d'une séquence  $q$ -équitable ( $q \geq 3$ ) est  $\bar{q}$ -paire.

Nous allons obtenir un résultat plus précis pour les  $n$ -séquences ( $n \geq 3$ ).

Proposition 6 : Soient  $n \geq 3$ ,  $q \geq 3$  et  $(C,s)$  une  $n$ -séquence qui dérive d'une séquence  $q$ -équitable. Il existe une  $\bar{q}$ -angulation paire  $G$  qui est un graphe et dont  $(C,s)$  est la séquence de parité.

En effet :

Nous procéderons par récurrence sur  $n$ .

a) - La Proposition 6 est vraie pour  $n = 3$ .

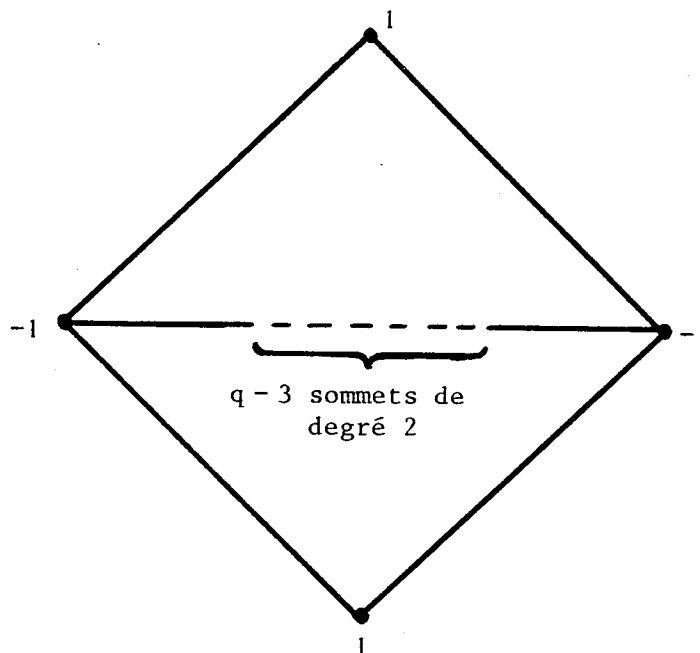
En effet si  $(C,s)$  est une 3-séquence qui dérive d'une séquence  $q$ -équitable ( $q \geq 3$ ), il est facile de vérifier (par exemple à partir de la Proposition 3) que  $q = 3$  et que  $(C,s)$  est de type  $(1,1,1)$ . La proposition 6 est donc satisfaite pour  $G$  identique à  $C$ .

- La Proposition 6 est vraie pour  $n = 4$ .

En effet, si  $(C,s)$  est une 4-séquence qui dérive d'une séquence  $q$ -équitable ( $q \geq 3$ ), on pourra vérifier que l'un des cas suivants se présente :

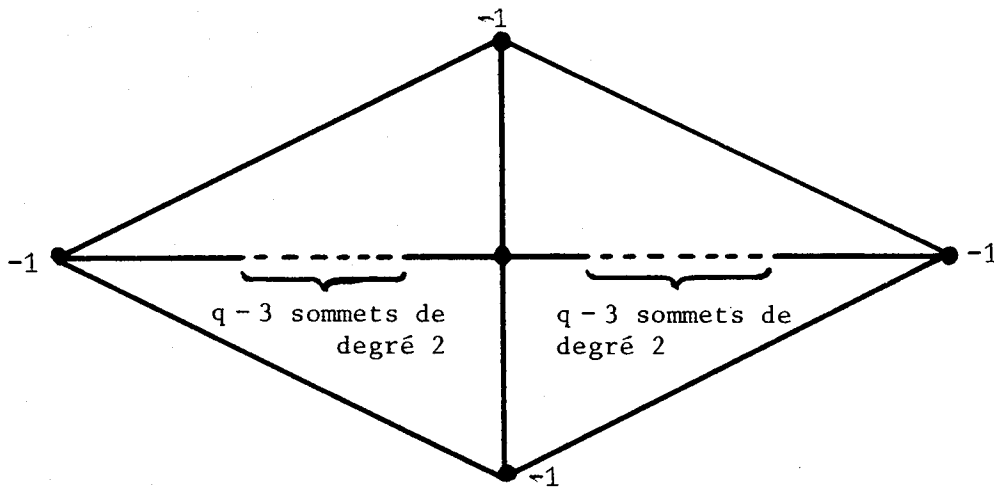
- +  $q = 4$  et  $(C,s)$  est de type  $(1,1,1,1)$ . La Proposition 6 est alors satisfaite pour  $G$  identique à  $C$ .
- +  $(C,s)$  est de type  $(-1,1,-1,1)$  ;  $(C,s)$  dérive d'une séquence qui est  $q$ -équitable  $\forall q \geq 3$ .

Le schéma suivant permet de définir un graphe  $G$  qui répond aux conditions de l'énoncé de la Proposition 6 :



- +  $(C,s)$  est de type  $(-1,-1,-1,-1)$  ; là encore  $(C,s)$  dérive d'une séquence qui est  $q$ -équitable  $\forall q \geq 3$ .

Le schéma suivant permet de définir un graphe  $G$  qui répond aux conditions de l'énoncé de la Proposition 6 :



- b) - Supposons que la Proposition 6 est vérifiée pour tout  $n < n_0$  ( $n_0 \geq 5$ ), et démontrons qu'elle est vérifiée pour  $n_0$ .

Soient donc  $q$  un entier ( $q \geq 3$ ) et  $(C,s)$  une  $n_0$ -séquence qui dérive d'une  $n_0$ -séquence  $q$ -équitable  $(L(C),r)$ . Rappelons que  $C$  doit être considéré comme représenté dans le plan.

- Si  $r$  prend une seule des valeurs  $-1, +1$  (c'est-à-dire si  $(C,s)$  est de type  $(x_1, \dots, x_{n_0})$  avec  $x_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, n_0\}$ ), et si  $n_0 = q$ , la Proposition 6 est satisfaite pour  $G$  identique à  $C$ .
- Sinon, montrons qu'il existe une chaîne  $K$  de  $C$  telle que :
  - ( $\alpha$ )  $|E(K)| \geq 2, |E(C) - E(K)| \geq 2$
  - ( $\beta$ )  $\sum_{e \in E(K)} r(e) \equiv +1 \pmod{q}$

En effet deux cas peuvent se produire :

- +  $r$  prend une seule des valeurs  $-1, +1$  ; on peut alors écrire  $n_0 = kq$  ( $k \geq 2$ ). Soit  $K$  une chaîne de  $C$  de longueur :



$\left\{ \begin{array}{l} q + 1 \text{ (si } r \text{ prend la valeur } 1) \\ \text{ou } (k-1) q - 1 \text{ (si } r \text{ prend la valeur } -1) \end{array} \right.$   
 $K$  vérifie évidemment  $(\beta)$ .  $(\alpha)$  s'écrit :  
 $q+1 \geq 2, (k-1) q-1 \geq 2$

Ces deux inégalités sont vérifiées puisque  $q \geq 3$  et  $k \geq 2$ .

+  $r$  prend les deux valeurs  $-1, +1$ . On peut alors trouver deux arêtes adjacentes  $e$  et  $e'$  telles que  $r(e) = +1, r(e') = -1$ . Soit  $e''$  l'arête de  $C$  distincte de  $e$  et adjacente à  $e'$ . La chaîne  $K$  de  $C$  sera définie de la façon suivante :

si  $r(e'') = +1, E(K) = \{e, e', e''\}$   
 si  $r(e'') = -1, E(K) = E(C) - \{e, e', e''\}$

$(\beta)$  est évidemment vérifié ;  $(\alpha)$  est vérifié puisque  $|E(C)| = n_0 \geq 5$ .

Dans la suite  $K$  désigne une chaîne de  $C$  vérifiant  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ . Soient  $v$  et  $v'$  les deux sommets de  $C$  extrémités de  $K$ . D'après  $(\alpha)$ ,  $v$  et  $v'$  sont non adjacents dans  $C$ . Joignons  $v$  et  $v'$  par une arête  $e_0$  située à l'intérieur de  $C$ . Nous obtenons un graphe plan 2-connexe dont la face infinie a pour contour  $C$  et qui comporte deux faces finies de contours  $C_1$  et  $C_2$  tels que :

$$+ V(C_1) = V(K) ; E(C_1) = E(K) \cup \{e_0\}.$$

$$+ V(C_2) = (V(C) - V(K)) \cup \{v, v'\} ; E(C_2) = (E(C) - E(K)) \cup \{e_0\}.$$

Définissons les séquences  $(L(C_1), r_1)$  et  $(L(C_2), r_2)$  de la façon suivante :

$$+ \forall e \in E(K), r_1(e) = r(e) ; r_1(e_0) = -1.$$

$$+ \forall e \in E(C) - E(K), r_2(e) = r(e) ; r_2(e_0) = +1.$$

Il vient :

$$\sum_{e \in E(C_1)} r_1(e) = \sum_{e \in E(K)} r(e) + r_1(e_0) = \sum_{e \in E(K)} r(e) - 1$$

$$\sum_{e \in E(C_2)} r_2(e) = \sum_{e \in E(C) - E(K)} r(e) + r_2(e_0) = \sum_{e \in E(C)} r(e) - \sum_{e \in E(K)} r(e) + 1$$

Donc  $(L(C_1), r_1)$  est  $q$ -équitable d'après  $(\beta)$ ;  $(L(C_2), r_2)$  est  $q$ -équitable d'après  $(\beta)$  et notre hypothèse selon laquelle  $(L(C), r)$  est  $q$ -équitable. En outre

IV.13

$(L(C_1), r_1)$  et  $(L(C_2), r_2)$  sont d'ordre strictement inférieur à  $n_0$  d'après (a).

Nous pouvons alors utiliser notre hypothèse de récurrence : il existe deux  $\bar{q}$ -angulations paires  $G_1$  et  $G_2$  qui sont des graphes et telles que :  
 $\forall i \in \{1,2\}$   $C_i$  est le contour de la face infinie de  $G_i$ , et la séquence de parité de  $G_i$ , soit  $(C_i, p_i)$ , est la dérivée de  $(L(C_i), r_i)$ . Il est clair que l'union de  $G_1$  et  $G_2$  est une  $\bar{q}$ -angulation paire  $G$  qui est un graphe et dont la face infinie a pour contour  $C$ .

Soit  $(C, p)$  la séquence de parité de  $G$ .

Pour  $i \in \{1,2\}$  :

$$\forall v_i \in V(C_i) - \{v, v'\}, p(v_i) = p_i(v_i).$$

Or  $(C_i, p_i)$  est la dérivée de  $(L(C_i), r_i)$  et de plus  $r_i$  et  $r$  prennent la même valeur sur les deux arêtes de  $C$  incidentes à  $v_i$  ; on en déduit que  $p(v_i) = s(v_i)$  (rappelons que  $(C, s)$  est la dérivée de  $(L(C), r)$ ).

Examinons maintenant la situation en  $v$  et  $v'$ .

Pour  $i \in \{1,2\}$ , soit  $e_i$  l'arête de  $E(C_i) - \{e_0\}$  incidente à  $v$ .  
 Remarquons que :  $d_G(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v) - 1$  ( $e_0$  est comptée deux fois).

$$\text{On en déduit que } p(v) = -p_1(v) p_2(v).$$

Or pour  $i \in \{1,2\}$ ,  $(C_i, p_i)$  dérive de  $(L(C_i), r_i)$ .

$$\text{Donc : } p_1(v) = r_1(e_1) r_1(e_0) = -r(e_1)$$

$$p_2(v) = r_2(e_2) r_2(e_0) = r(e_2)$$

$$\text{D'où : } p(v) = r(e_1) r(e_2) = s(v).$$

On démontrerait de même que  $p(v') = s(v')$ .

Par conséquent  $(C, p)$  et  $(C, s)$  sont identiques.

$G$  vérifie donc les conditions de l'énoncé de la Proposition 6.

c) Ceci achève la démonstration de la Proposition 6.

*Remarque :* La démonstration précédente donne en fait un algorithme de construction du graphe  $G$  satisfaisant aux conditions de l'énoncé de la Proposition 6, et ceci pour toute  $n$ -séquence  $(C, s)$  dérivant d'une séquence  $q$ -équitable ( $\forall n \geq 3, \forall q \geq 3$ ).

## 2 - CARACTÉRISATION DES SÉQUENCES Q-PAIRES ET $\bar{Q}$ -PAIRES ( $Q \geq 3$ )

D'après les Propositions 2, 5, 6, et la démonstration de la Proposition 3, il vient :

Proposition 7 :  $\forall q \geq 3, \forall n \geq 2$ , si  $(C, s)$  est une  $n$ -séquence de type  $(x_1, \dots, x_n)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux :

- $(C, s)$  est  $q$ -paire.
- $(C, s)$  est  $\bar{q}$ -paire.
- $(C, s)$  dérive d'une séquence  $q$ -équitable.
- $\prod_{i=1}^n x_i = 1$  et  $1 + \sum_{j=2}^n \left( \prod_{i=2}^j x_i \right) \equiv 0 \pmod{q}$ .

## 3 - SÉQUENCES 2-PAIRES ET $\bar{2}$ -PAIRES

a) Soit  $G$  une  $\bar{2}$ -angulation paire d'ordre  $n \geq 2$  ; nous noterons  $F(G)$  l'ensemble des faces de  $G$ .

La formule d'Euler s'écrit :

$$|F(G)| = |E(G)| - |V(G)| + 2$$

$$\text{Or } 2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} |f| = 2(|F(G)| - 1) + n$$

$$\text{D'où : } 2|E(G)| = 2(|E(G)| - |V(G)| + 1) + n$$

$$\text{ou encore : } 2|V(G)| = n + 2$$

On en déduit que  $|V(G)| = n + 2$ .

Donc toute  $\bar{2}$ -angulation paire est d'ordre 2 et n'admet aucun sommet intérieur. Par conséquent :

Les  $\bar{2}$ -angulations paires sont les multigraphes 2-connexes plans à deux sommets.

b) Remarquons que si  $n$  est pair toute  $n$ -séquence est 2-équitable, et que si  $n$  est impair aucune  $n$ -séquence n'est 2-équitable.

La Proposition 2 pour  $q = 2$  se formule donc comme suit :  
Toute séquence 2-paire est une séquence dérivée d'ordre pair.

Nous allons démontrer la réciproque.

Soit  $(C,s)$  une  $2n$ -séquence ( $n \geq 1$ ) qui dérive d'une  $2n$ -séquence  $(L(C),r)$ .

On vérifiera immédiatement que : si  $n = 1$ ,  $(C,s)$  est  $\bar{2}$ -paire.

Supposons  $n \geq 2$ .

- Si  $\sum_{e \in E(C)} r(e) \equiv 0 \pmod{4}$ , d'après la Proposition 7,  $(C,s)$  est  $\bar{4}$ -paire et donc 2-paire.

- Sinon,  $\sum_{e \in E(C)} r(e) \equiv 2 \pmod{4}$

Soit  $e_0$  une arête quelconque de  $C$  d'extrémités  $v_1$  et  $v_2$ .

Joignons les deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  par une arête  $e'_0$  distincte de  $e_0$  et située à l'intérieur de  $C$ .

Soit  $C'$  le cycle élémentaire défini par :

$$V(C') = V(C) ; E(C') = (E(C) - \{e_0\}) \cup \{e'_0\}$$

Soit  $r'$  l'application de  $E(C')$  dans  $\{-1, +1\}$  définie par :

$$\forall e \in E(C) - \{e_0\}, r'(e) = r(e) ; r'(e'_0) = -r(e_0)$$

$$\text{Il vient : } \sum_{e \in E(C')} r'(e) = \sum_{e \in E(C)} r(e) - 2r(e_0) \equiv 0 \pmod{4}$$

$(L(C'),r')$  est donc 4-équitable. D'après la Proposition 7, sa dérivée est  $\bar{4}$ -paire.

Soit alors  $G'$  une  $\bar{4}$ -angulation paire dont la face infinie a pour contour  $C'$  et dont la séquence de parité  $(C',p')$  dérive de  $(L(C'), r')$ .

L'union de  $G'$  et de l'arête  $e_0$  est une 2-angulation<sup>1</sup> paire  $G$  dont la face infinie a pour contour  $C$ .

Soit  $(C,p)$  la séquence de parité de  $G$ . Il vient :

+  $\forall v \in V(C) - \{v_1, v_2\} : p(v) = p'(v) ; \text{or}(C',p')$  dérive de  $(L(C'),r')$  et de plus  $r$  et  $r'$  prennent la même valeur sur les deux arêtes incidentes à  $v$  ; on en déduit que  $p(v) = s(v)$ .

+ Pour  $i \in \{1,2\}$  soit  $e_i$  l'arête de  $C$  incidente à  $v_i$  et distincte de  $e_0$ . Il vient ( $\forall i \in \{1,2\}$ ) :

$$p(v_i) = -p'(v_i) = -(r'(e_i) \times r'(e_0)) = r(e_i) \times r(e_0) \text{ et donc } p(v_i) = s(v_i).$$

Nous venons de montrer que  $(C,s)$  est la séquence de parité de  $G$ , et donc que  $(C,s)$  est 2-paire.

c) En conclusion :

Proposition 8 : Une séquence est 2-paire (respectivement :  $\bar{2}$ -paire) si et seulement si elle dérive d'une séquence d'ordre pair (respectivement : d'une séquence d'ordre 2).

#### 4 - REMARQUES

- Les Propositions 7 et 8 constituent une caractérisation combinatoire des séquences  $q$ -paires et des séquences  $\bar{q}$ -paires ( $\forall q \geq 2$ ).
- H. FLEISHNER et P. ROY ([571]) ont récemment obtenu (par une méthode différente de la nôtre) un résultat équivalent à celui de la Proposition 7 pour  $q = 3$ .

#### 5 - PROBLÈMES OUVERTS

Appelons  $(p(\text{respectivement : } \bar{p}), q(\text{respectivement : } \bar{q}))$ -angulation d'ordre  $n$  ( $p \geq 2, q \geq 2, n \geq 2$ ) tout multigraphe 2-connexe plan  $G$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- Le degré dans  $G$  de tout sommet intérieur de  $G$  est multiple de  $p$  (respectivement : égal à  $p$ ).
- La longueur de toute face finie de  $G$  est multiple de  $q$  (respectivement : égale à  $q$ ).
- La longueur de la face infinie de  $G$  est  $n$ .

#### IV.17

En particulier toute  $q$ -angulation (respectivement :  $\bar{q}$ -angulation) paire est une  $(2,q)$ -angulation (respectivement :  $(2,\bar{q})$ -angulation).

A toute  $(p,q)$ -angulation  $G$  dont la face infinie a pour contour  $C$  nous associerons le couple  $(C,d)$ , où  $d$  est l'application de  $V(C)$  dans  $\mathbf{N}$  qui à chaque sommet de  $C$  fait correspondre son degré dans  $G$ ;  $(C,d)$  sera appelée la séquence des degrés de  $G$ .

Soit  $\phi$  une application de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$ . La  $\phi$ -réduction de  $(C,d)$  est le couple  $(C, \phi \circ d)$ .

Problème : Etant donnés  $p \geq 2$ ,  $q \geq 2$ ,  $n \geq 2$  et une application  $\phi$  de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$ , obtenir une caractérisation combinatoire des  $\phi$ -réductions des séquences des degrés des  $(p$  (ou  $\bar{p}$ ),  $q$  (ou  $\bar{q}$ ))-angulations d'ordre  $n$ .

Nous venons de résoudre un cas particulier très simple de ce problème ( $p = 2$  et  $\phi$  est une application "parité").

L'étude des séquences des degrés ( $\phi$  est l'application identique) des  $(\bar{p},\bar{q})$ -angulations ( $p \geq 3$ ,  $q \geq 3$ ) semble très difficile ; j'ai été informé de l'existence de travaux en cours pour le cas  $p = 3$ ,  $q = 6$  (le problème a son origine en chimie dans l'étude de modes de classification des composés hexacycliques).



## CHAPITRE V

SUR LE NOMBRE CHROMATIQUE DU  
CARRÉ DES GRAPHES CUBIQUES





## I . INTRODUCTION

Tous les graphes dont il sera question dans ce Chapitre seront (sauf mention contraire) des graphes simples.

Nous avons posé au Chapitre I (paragraphe V.1.b) le problème très général suivant :

Etant donné un graphe  $G$ , pour quelles valeurs de  $k$  ( $1 \leq k \leq |V(G)|$ ) l'hypergraphe  $I(G)$  des images de  $G$  admet-il une bonne  $k$ -coloration ?

Nous nous proposons ici d'étudier ce problème pour les graphes cubiques en ce qui concerne la valeur  $k = 4$ .

Nous sommes donc ramenés à l'étude du nombre chromatique du carré des graphes cubiques (qui est toujours supérieur ou égal à 4).

Remarquons que si  $G$  est un graphe cubique,  $\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si  $\Pi(G) = 4$ , c'est-à-dire si  $V(G)$  admet une partition en 4 absorbants de  $G$ .

## II . NOMBRE CHROMATIQUE DU CARRÉ ET INDICE CHROMATIQUE

### 1 . L'INDICE CHROMATIQUE DES GRAPHES CUBIQUES DE CARRE 4-CHROMATIQUE

Proposition 1 : Soit  $G$  un graphe cubique tel que  $\gamma(C(G)) = 4$ . Alors  $q(G) = 3$ .

En effet :

Soit  $G$  un graphe cubique tel que  $\gamma(C(G)) = 4$ .

Il existe une application  $\phi$  de  $V(G)$  dans  $Z_2 \times Z_2 = \{00, 01, 10, 11\}$  telle que :

$$\{v, v'\} \in E(C(G)) \Rightarrow \phi(v) \neq \phi(v') \quad (1)$$

Soit  $\theta$  l'application de  $E(G)$  dans  $Z_2 \times Z_2$  définie par :

$$\forall e \in E(G), e = \{v, v'\} : \theta(e) = \phi(v) + \phi(v')$$

D'après la Propriété (1),  $\forall e \in E(G) : \theta(e) \neq 00$ .

Soient  $e' = \{v, v'\}$  et  $e'' = \{v, v''\}$  ( $v' \neq v''$ ) deux arêtes distinctes incidentes au sommet  $v$  de  $G$ .

$$\{v', v''\} \in E(C(G)) \Rightarrow \phi(v') \neq \phi(v'').$$

$$\text{Donc } \theta(e') + \theta(e'') = (\phi(v) + \phi(v')) + (\phi(v) + \phi(v'')) = \phi(v') + \phi(v'') \neq 00.$$

Soit :  $\theta(e') \neq \theta(e'')$ .

En résumé,  $\theta$  définit une bonne coloration des arêtes de  $G$  en trois couleurs 01, 10 et 11. Ceci achève la démonstration.

Il paraît logique de rechercher une réciproque à la Proposition 1 ; toutefois, il est facile de construire des graphes cubiques  $G$  avec  $\gamma(C(G)) > 4$  et  $q(G) = 3$ . Nous aurons besoin de la notion d'extension d'un graphe cubique relativement à un ensemble de sommets.

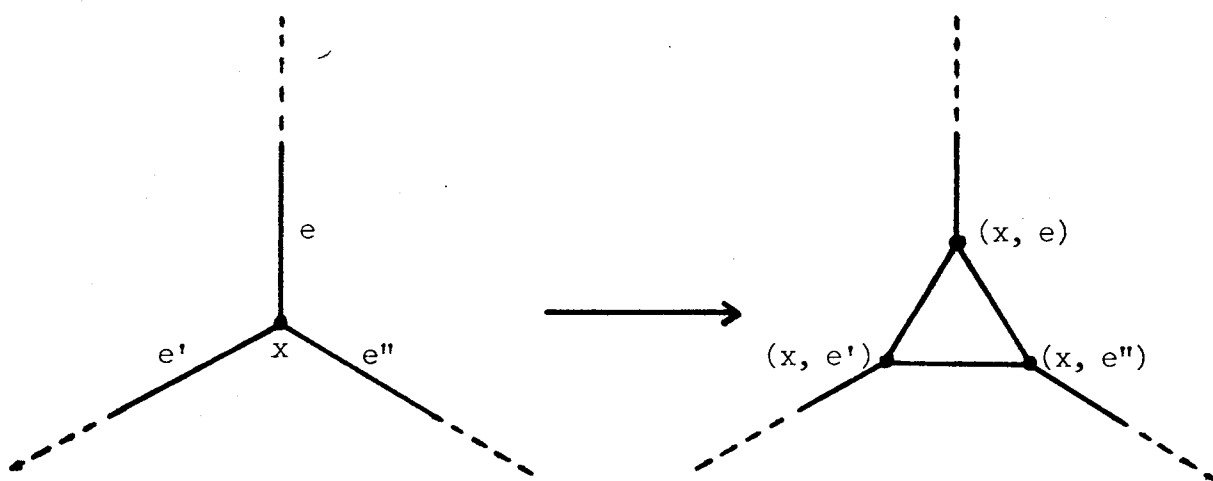
## 2 . EXTENSION D'UN GRAPHE CUBIQUE RELATIVEMENT A UN ENSEMBLE DE SOMMETS.

Soit  $G$  un graphe cubique et  $X \subseteq V(G)$ .

Nous appellerons extension de  $G$  relativement à  $X$  le graphe, noté  $\epsilon_X(G)$ , défini comme suit :

- nous poserons  $X^* = \{(x, e) / x \in X, e \in E(G), x \in e\}$  ;  
 $\epsilon_X(G)$  aura pour ensemble de sommets :  
 $V(\epsilon_X(G)) = (V(G) - X) \cup X^*$ .
- $E(\epsilon_X(G))$  sera l'union des ensembles suivants :
  - +  $\{\{v, v'\} / v \in V(G) - X, v' \in V(G) - X, \{v, v'\} \in E(G)\}$
  - +  $\{\{(x, e), (x', e')\} / (x, e) \in X^*, (x', e') \in X^* - \{(x, e)\}, x = x' \text{ ou } e = e'\}$
  - +  $\{\{v, (x, e)\} / v \in V(G) - X, (x, e) \in X^*, v \in e\}$ .

Intuitivement,  $\epsilon_X(G)$  s'obtient à partir de  $G$  en remplaçant les sommets de  $X$  par des triangles, suivant le schéma :



Remarque :

On a évidemment  $\epsilon_\emptyset(G) = G$  ; on pourra vérifier que  $\epsilon_{V(G)}(G) = LD(G)$  (graphe représentatif des arêtes de la subdivision de  $G$  ; voir Chapitre I, paragraphe III.1.a).

Nous appellerons extension de  $G$  tout graphe de la forme  $\epsilon_X(G)$  ( $X \subseteq V(G)$ ). On vérifiera que toute extension du graphe cubique  $G$  est un graphe cubique de même indice chromatique.

D'après la Proposition 1, tout graphe cubique admettant au moins une extension de carré 4-chromatique est d'indice chromatique 3. Nous allons maintenant démontrer la réciproque.

### 3 . UNE CARACTERISATION DES GRAPHES CUBIQUES D'INDICE CHROMATIQUE 3.

Proposition 2 : Soit  $G$  un graphe cubique. Alors  $q(G) = 3$  si et seulement si  $\exists X \subseteq V(G)$  tel que  $\gamma(C(\epsilon_X(G))) = 4$ .

En effet :

D'après le paragraphe 2, il reste à montrer que si  $q(G) = 3$ ,  $\exists X \subseteq V(G)$  tel que  $\gamma(C(\epsilon_X(G))) = 4$ .

Supposons donc que  $E(G)$  admet une partition en 3 couplages  $C_1, C_2, C_3$  de  $G$ .

$$K_1 = (V(G) ; C_2 \cup C_3), \quad K_2 = (V(G) ; C_1 \cup C_3), \quad K_3 = (V(G) ; C_1 \cup C_2)$$

sont des sous-graphes partiels 2-réguliers bipartis de  $G$ .

Il existe donc trois applications  $\phi_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) de  $V(G)$  dans  $Z_2 = \{0, 1\}$  telles que :

$$\{v, v'\} \in E(K_i) \Rightarrow \phi_i(v) \neq \phi_i(v') \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\}).$$

$$\text{Soit } X = \{v \in V(G) / \phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_3(v) = 1\}.$$

Nous allons montrer que  $\gamma(C(\varepsilon_X(G))) = 4$ .

Pour cela, définissons une partition de  $E(\varepsilon_X(G))$  en trois couplages  $C'_1, C'_2, C'_3$  de  $\varepsilon_X(G)$  de la façon suivante :

- Pour toute arête  $u$  de  $\varepsilon_X(G)$  de la forme  $\{v, v'\}$  avec

$$v \in V(G) - X, v' \in V(G) - X, \{v, v'\} \in E(G) :$$

$$u \in C'_i \iff \{v, v'\} \in C_i \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$$

- Pour toute arête  $u$  de  $\varepsilon_X(G)$  de la forme  $\{v, (x, e)\}$  avec

$$v \in V(G) - X, (x, e) \in X^*, v \in e :$$

$$u \in C'_i \iff e \in C_i \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$$

- Pour toute arête  $u$  de  $\varepsilon_X(G)$  de la forme  $\{(x, e), (x', e')\}$  avec

$$(x, e) \in X^*, (x', e') \in X^* - \{(x, e)\}, e = e' :$$

$$u \in C'_i \iff e = e' \in C_i \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$$

- Pour toute arête  $u$  de  $\varepsilon_X(G)$  de la forme  $\{(x, e), (x', e')\}$  avec

$$(x, e) \in X^*, (x', e') \in X^* - \{(x, e)\}, x = x' :$$

$$u \in C'_i \iff e \notin C_i \text{ et } e' \notin C_i \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$$

(cette définition est correcte car  $|e \cap e'| = 1$  et donc un et un seul  $C_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) ne contient ni  $e$  ni  $e'$ ).

Définissons ensuite trois applications  $\phi'_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) de  $V(\epsilon_X(G))$  dans  $Z_2 = \{0, 1\}$  de la façon suivante :

$$- \forall v \in V(G) - X, \phi'_i(v) = \phi_i(v) \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$$

$$- \forall (x, e) \in X^* :$$

$$\phi'_i((x, e)) = \phi_i(x) \quad \text{si } e \notin C_i$$

$$\phi'_i((x, e)) = \phi_i(x) + 1 \quad \text{si } e \in C_i$$

Remarquons d'abord que  $\forall s \in V(\epsilon_X(G)) :$

$$\phi'_1(s) + \phi'_2(s) + \phi'_3(s) = 0$$

Posons :  $K'_1 = (V(\epsilon_X(G)) ; C'_2 \cup C'_3)$  ;  $K'_2 = (V(\epsilon_X(G)) ; C'_1 \cup C'_3)$  ;  
 $K'_3 = (V(\epsilon_X(G)) ; C'_1 \cup C'_2)$ .

$K'_1, K'_2, K'_3$  sont des sous-graphes partiels 2-réguliers bipartis de  $\epsilon_X(G)$ .

On pourra vérifier que, étant donnés 2 sommets  $s$  et  $s'$  de  $\epsilon_X(G)$  avec  $\{s, s'\} \in E(K'_i) : \phi'_i(s) \neq \phi'_i(s') \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$ .

Soient alors  $s, s'$  deux sommets de  $\epsilon_X(G)$  avec  $\{s, s'\} \in C'_i \quad (i \in \{1, 2, 3\})$ .

Soient  $j$  et  $k$  les deux éléments de  $\{1, 2, 3\} - \{i\}$  ;

$\{s, s'\} \in E(K'_j) \cap E(K'_k)$ . Donc :

$$\phi'_j(s) \neq \phi'_j(s') \quad ; \quad \phi'_k(s) \neq \phi'_k(s').$$

$$\text{Or } \phi'_1(s) + \phi'_2(s) + \phi'_3(s) = \phi'_1(s') + \phi'_2(s') + \phi'_3(s') = 0.$$

$$\text{Donc } \phi'_i(s) = \phi'_i(s').$$

Soit alors  $\phi'$  l'application de  $V(\epsilon_X(G))$  dans  $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$  définie par :

$$\forall s \in V(\epsilon_X(G)) : \phi'(s) = (\phi'_1(s), \phi'_2(s), \phi'_3(s)).$$

Nous avons vu que  $\phi'$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{000, 011, 101, 110\}$ .

En outre, pour tout couple de sommets  $s, s'$  de  $\epsilon_X(G)$  :

$$- \text{ si } \{s, s'\} \in C'_1, \quad \phi'(s) + \phi'(s') = 011.$$

$$- \text{ si } \{s, s'\} \in C'_2, \quad \phi'(s) + \phi'(s') = 101.$$

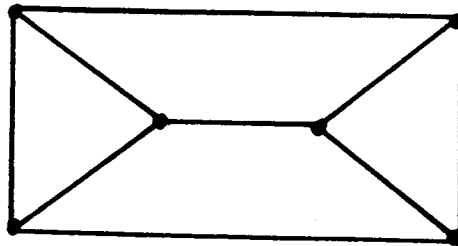
$$- \text{ si } \{s, s'\} \in C'_3, \quad \phi'(s) + \phi'(s') = 110.$$

Ceci permet d'affirmer que  $\Phi'$  définit une bonne coloration de  $C(\varepsilon_X(G))$  en quatre couleurs  $\{000, 011, 101, 110\}$ , ce qui achève la démonstration.

Remarques :

- La même démonstration (en échangeant les 0 et les 1 dans la construction des  $\Phi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) permet de prouver que  $\gamma(C(\varepsilon_{V(G)-X}(G))) = 4$  ; on pourra donc toujours choisir  $X$  tel que  $|X| \leq \frac{|V(G)|}{2}$ .

On pourra vérifier que pour le graphe  $G$  suivant :



$$X \subseteq V(G), \gamma(C(\varepsilon_X(G))) = 4 \Rightarrow |X| \geq \frac{|V(G)|}{2} = 3.$$

- On peut montrer en fait que pour un graphe cubique  $G$  et  $X \subseteq V(G)$  :

$$\gamma(C(\varepsilon_X(G))) = 4 \Leftrightarrow \gamma(C(\varepsilon_{V(G)-X}(G))) = 4.$$

$$\text{En particulier : } \gamma(C(G)) = 4 \Leftrightarrow \gamma(\text{CLD}(G)) = 4.$$

- On pourra démontrer (en choisissant judicieusement les  $\Phi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) que si  $G$  est un graphe cubique biparti et si  $\{S_1, S_2\}$  est une partition de  $V(G)$  en deux stables de  $G$  :  $\gamma(C(\varepsilon_{S_1}(G))) = 4$ .

#### 4 . GRAPHES CUBIQUES EQUITABLES.

Définition :

Une bicoloration équitable d'un graphe cubique  $G$  est une bicoloration équitable de son hypergraphe des images  $I(G)$  (la définition d'une bicoloration équitable d'un hypergraphe est donnée dans [7], p. 438).

Une bicoloration équitable d'un graphe cubique  $G$  est donc une coloration de ses sommets en 2 couleurs, telle que chaque sommet est adjacent à exactement un sommet de la même couleur.

Un graphe cubique sera dit équitable si et seulement si il admet une bicoloration équitable.

Proposition 3 : Soit  $G$  un graphe cubique. Alors  $q(G) = 3$  si et seulement si  $\exists X \subseteq V(G)$  tel que  $\varepsilon_X(G)$  est équitable.

En effet :

- a) Si  $G$  cubique est équitable : donnons-nous une bicoloration équitable de  $G$  ; les arêtes bicolores de  $G$  (comportant deux sommets de couleurs différentes) forment un sous-graphe partiel 2-régulier biparti de  $G$  ; d'où  $q(G) = 3$ .

Donc si  $\exists X \subseteq V(G)$  tel que  $\varepsilon_X(G)$  est équitable,  $q(G) = 3$ .

- b) Réciproquement, si  $q(G) = 3$ , d'après la Proposition 2,  $\exists X \subseteq V(G)$  tel que  $\gamma(C(\varepsilon_X(G))) = 4$ .

Donnons-nous une bonne coloration de  $C(\varepsilon_X(G))$  en quatre couleurs  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ; la partition de  $V(\varepsilon_X(G))$  associée trivialement à toute partition de  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  en deux ensembles de cardinal 2 est une bicoloration équitable de  $\varepsilon_X(G)$ .

On pourrait également donner une démonstration directe simple de cette réciproque.

Remarque :

*On pourra vérifier que toute bicoloration équitable d'un graphe cubique  $G$  est une "coloration équilibrée" de  $G$  au sens de Bondy [24].*



### III . GRAPHES CUBIQUES PLANAIRE DE CARRÉ 4-CHROMATIQUE ET VALUATIONS DE HEAWOOD.

#### 1 . INTRODUCTION

##### a) Orientation d'un graphe

Nous renvoyons le lecteur à [7], Chapitre 1, pour la définition d'un 1-graphe anti-symétrique (sans boucles). Etant donné un graphe (simple)  $G$ , nous appellerons orientation de  $G$  tout 1-graphe anti-symétrique  $H$  qui s'obtient à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête  $e$  de  $G$  ( $e = \{v, v'\}$ ,  $v, v' \in V(G)$ ) par l'un des arcs  $(v, v')$  ou  $(v', v)$ .

Tout 1-graphe anti-symétrique peut s'obtenir comme orientation d'un graphe ; nous appellerons donc graphe orienté tout 1-graphe anti-symétrique.

Remarque :

*La définition précédente de l'orientation d'un graphe diffère dans sa forme de la définition donnée au Chapitre II.*

##### b) Flots, tensions et potentiels d'un graphe.

Nous renvoyons le lecteur à [7], Chapitre 1, pour toutes les définitions et notations relatives aux cycles et cocycles d'un graphe (orienté ou non).

Soit  $S$  un groupe abélien noté additivement,  $G$  un graphe et  $H$  une orientation de  $G$ , dont nous noterons l'ensemble des arcs  $A(H)$  ; on supposera  $A(H) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire  $E(G) \neq \emptyset$ .

- Un  $S$ -flot de  $H$  est une application  $\phi$  de  $A(H)$  dans  $S$  telle que :

$$\forall W \subseteq V(H) = V(G) \quad \sum_{a \in \omega^+(W)} \phi(a) - \sum_{a \in \omega^-(W)} \phi(a) = 0 \quad (P_1)$$

On démontre que si la Propriété  $P_1$  est vraie pour tous les ensembles  $W$  de la forme  $\{v\}$  ( $v \in V(H)$ ),  $\phi$  est un  $S$ -flot.

- Une S-tension de H est une application  $\theta$  de  $A(H)$  dans  $S$  telle que :  
Pour tout cycle élémentaire  $\mu$  de  $H$  ( $\mu^+$  désigne l'ensemble de ses arcs orientés dans le sens de parcours, et  $\mu^- = \mu - \mu^+$ ) :

$$\sum_{a \in \mu^+} \theta(a) - \sum_{a \in \mu^-} \theta(a) = 0 \quad (P_2)$$

On démontre que si  $H$  est planaire 2-connexe, et si la Propriété  $P_2$  est vraie pour tous les cycles  $\mu$  de  $H$  contours des faces de  $H$  dans une représentation plane donnée,  $\theta$  est une S-tension.

- Un S-potentiel de H (ou de  $G$ ) est une application  $\Pi$  de  $V(H)$  dans  $S$ .  
L'application  $\theta$  ("différence de potentiel") de  $A(H)$  dans  $S$  définie par :  
 $\forall a = (v, v') \in A(H), \quad \theta(a) = \Pi(v') - \Pi(v)$   
est une S-tension de  $H$  qui sera dite dérivée de  $\Pi$ .

On démontre que toute S-tension de  $H$  dérive d'un S-potentiel de  $H$  défini à une constante près (si  $H$  est connexe).

- Un S-flot (ou S-tension) de  $H$  sera dit non-nul s'il prend ses valeurs dans  $S - \{0\}$ .

Une S-coloration de  $H$  (ou de  $G$ ) est un S-potentiel de  $H$  dont la tension dérivée est non-nulle. Toute S-coloration de  $H$  (ou de  $G$ ) définit donc une bonne coloration des sommets de  $H$  (ou de  $G$ ) en  $|S|$  couleurs au plus. Par ailleurs toute S-tension non-nulle de  $H$  dérive d'une S-coloration de  $H$ . Donc :

**Proposition 4** : Soit  $G$  un graphe,  $k$  un entier ( $k \geq 2$ ),  $H$  une orientation de  $G$  et  $S$  un groupe abélien avec  $|S| = k$ .  
Alors  $\gamma(G) \leq k$  si et seulement si il existe une S-tension non-nulle de  $H$ .

On pourra trouver, sous une formulation un peu différente, un résultat analogue à la Proposition 4 dans [19], Chapitre 7.

- Soit  $G$  un graphe et  $S$  un groupe abélien. Soit  $C$  l'ensemble des couples de la forme  $(H, \sigma)$ , où  $H$  est une orientation de  $G$  et  $\sigma$  est une application de  $A(H)$  dans  $S$ .

Soit  $R$  la relation binaire sur  $C$  définie par :

$(H, \sigma) R(H', \sigma')$  si et seulement si

$$+ (v, v') \in A(H) \text{ et } (v, v') \in A(H') \Rightarrow \sigma((v, v')) = \sigma'((v, v'))$$

$$+ (v, v') \in A(H) \text{ et } (v', v) \in A(H') \Rightarrow \sigma((v, v')) = -\sigma'((v', v))$$

$R$  est une relation d'équivalence sur  $C$ .

En outre si  $(H, \sigma) R(H', \sigma')$  :

+ si  $\sigma$  est non-nulle,  $\sigma'$  est non-nulle.

+ si  $\sigma$  est un  $S$ -flot de  $H$ ,  $\sigma'$  est un  $S$ -flot de  $H'$ .

+ si  $\sigma$  est une  $S$ -tension de  $H$ ,  $\sigma'$  est une  $S$ -tension de  $H'$ .

Nous appellerons  $S$ -flot de  $G$  (respectivement :  $S$ -tension de  $G$ ) toute classe d'équivalence d'un couple  $(H, \sigma) \in C$  pour la relation  $R$  tel que  $\sigma$  est un  $S$ -flot de  $H$  (respectivement : une  $S$ -tension de  $H$ ). Un  $S$ -flot (ou  $S$ -tension) de  $G$  sera dit non-nul si chacun de ses éléments  $(H, \sigma)$  est tel que  $\sigma$  est non-nul.

Dans le cas où tous les éléments de  $S$  sont d'ordre 2 tout  $S$ -flot de  $G$  pourra être identifié à une application  $\phi$  de  $E(G)$  dans  $S$  telle que :

$$\forall W \subseteq V(G) \quad \sum_{e \in \omega(W)} \phi(e) = 0$$

; toute  $S$ -tension de  $G$  pourra être identifiée à une application  $\theta$  de  $E(G)$  dans  $S$  telle que, pour tout cycle élémentaire  $\mu$  de  $G$  :

$$\sum_{e \in \mu} \theta(e) = 0.$$

- Enfin un  $S$ -flot-tension de  $G$  est un  $S$ -flot de  $G$  qui est aussi une  $S$ -tension de  $G$ .

## 2 . UNE CARACTERISATION DES GRAPHES CUBIQUES DE CARRE 4 - CHROMATIQUE.

**Proposition 5** : Soit  $G$  un graphe cubique.  $\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si  $G$  admet un  $(Z_2 \times Z_2)$ -flot-tension non-nul.

En effet :

Nous avons vu dans la démonstration de la Proposition 1 que si  $\Pi$  est une  $(Z_2 \times Z_2)$ -coloration de  $C(G)$ , et donc de  $G$ , la  $(Z_2 \times Z_2)$ -tension  $\theta$  dérivée de  $\Pi$  dans  $G$  vérifie la propriété suivante : si  $e, e', e''$  sont trois arêtes distinctes incidentes à un même sommet de  $G$ ,  $\theta(e), \theta(e'), \theta(e'')$  sont trois éléments distincts non nuls de  $Z_2 \times Z_2$ . Or la somme des éléments de  $\{01, 10, 11\}$  est nulle ; donc  $\theta$  est un  $(Z_2 \times Z_2)$ -flot de  $G$ .

Inversement, il sera facile de vérifier que si  $\theta$  est un  $(Z_2 \times Z_2)$ -flot-tension non-nul de  $G$ , et si  $\theta$  dérive d'un  $(Z_2 \times Z_2)$ -potentiel  $\Pi$  de  $G$ ,  $\Pi$  est une  $(Z_2 \times Z_2)$ -coloration de  $C(G)$ . Ceci achève la démonstration.

Etant donnés une bonne coloration des arêtes d'un graphe cubique  $G$  en trois couleurs 1, 2, 3 et un cycle élémentaire  $\mu$  de  $G$ , posons :  $n_i(\mu)$  = nombre d'arêtes de  $\mu$  de couleur  $i$  ( $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ). Le cycle élémentaire  $\mu$  sera dit régulièrement coloré si :

$$n_1(\mu) \equiv n_2(\mu) \equiv n_3(\mu) \pmod{2}.$$

**Proposition 6** : Soit  $G$  un graphe cubique.

$\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si les arêtes de  $G$  peuvent être bien colorées en trois couleurs de sorte que tout cycle élémentaire est régulièrement coloré. En outre, si  $G$  est planaire 2-connexe et si les arêtes de  $G$  peuvent être bien colorées en trois couleurs de sorte que les contours des faces d'une représentation plane de  $G$  soient régulièrement colorés,  $\gamma(C(G)) = 4$ .

En effet :

Soit  $\phi$  une application de  $E(G)$  dans  $(Z_2 \times Z_2) - \{00\}$ .  $\phi$  définit une bonne coloration des arêtes de  $G$  en trois couleurs 01, 10, 11, si et seulement si  $\phi$  est un  $(Z_2 \times Z_2)$ -flot (non-nul).

Soit  $\mu$  un cycle élémentaire de  $G$  et posons :

$\forall x \in (Z_2 \times Z_2) - \{00\}$   $n_x(\mu)$  = nombre d'arêtes  $e$  de  $\mu$  telles que  $\phi(e) = x$ .

Alors  $\sum_{e \in \mu} \phi(e) = 0$  si et seulement si  $n_{01}(\mu) + n_{11}(\mu) \equiv 0 \pmod{2}$

et  $n_{10}(\mu) + n_{11}(\mu) \equiv 0 \pmod{2}$ , soit :

$$n_{01}(\mu) \equiv n_{10}(\mu) \equiv n_{11}(\mu) \pmod{2}.$$

Donc  $\sum_{e \in \mu} \phi(e) = 0$  si et seulement si  $\mu$  est régulièrement coloré par  $\phi$ .

Il suffit alors d'utiliser la Proposition 5 pour achever la démonstration.

### 3 . VALUATIONS DE HEAWOOD D'UN GRAPHE CUBIQUE PLAN

Par graphe plan nous entendrons un graphe planaire 2-connexe représenté dans le plan.

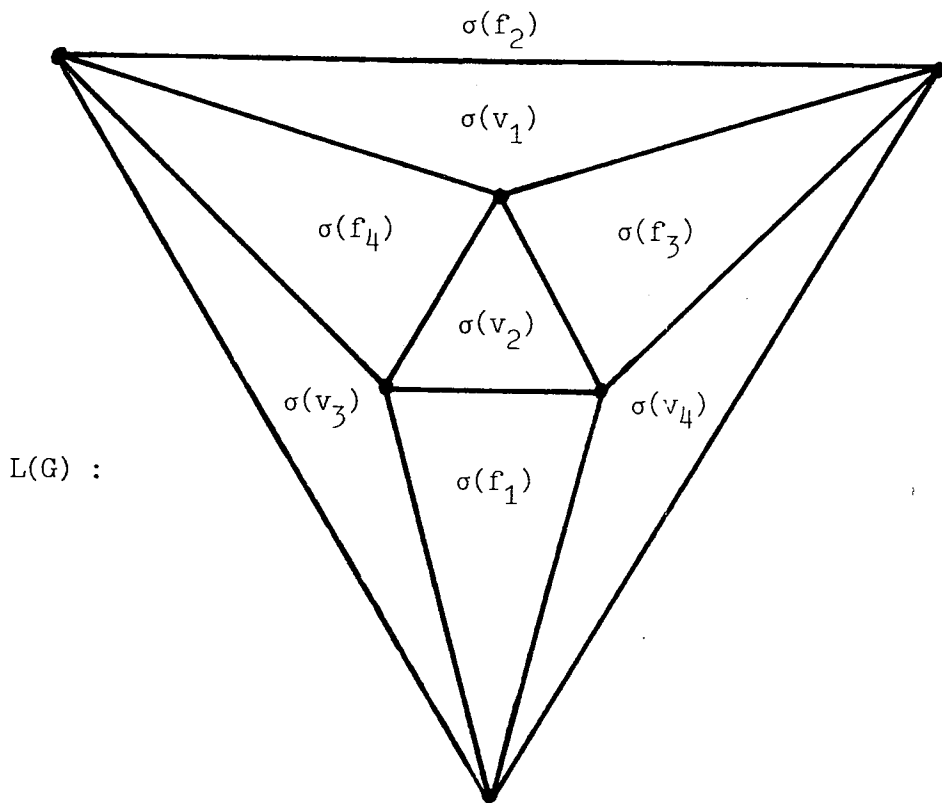
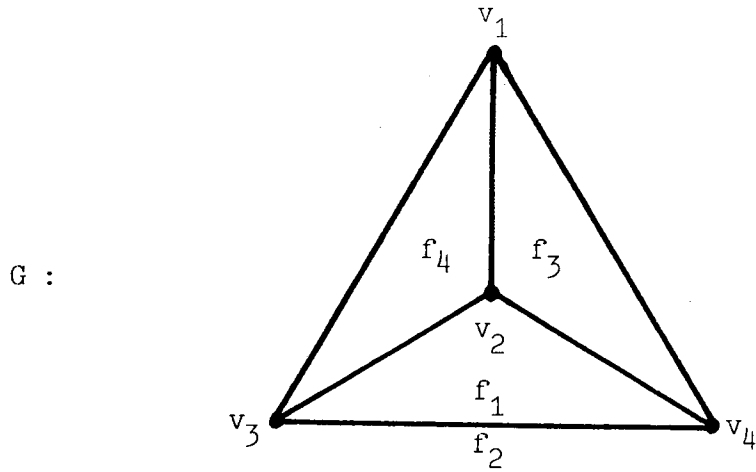
Si  $G$  est un graphe plan l'ensemble de ses faces est bien défini et sera noté  $F(G)$  ; rappelons que le contour de toute face d'un graphe plan  $G$  est un cycle élémentaire de  $G$ , qui sera considéré à la fois comme un ensemble d'arêtes de  $G$ , et comme un sous-graphe partiel de  $G$ .

Soit alors  $G$  un graphe cubique plan, et soit  $L(G)$  le graphe représentatif de ses arêtes. On vérifiera que  $L(G)$  est un graphe planaire 4-régulier 2-connexe ;  $L(G)$  admet une représentation plane (graphe plan qui sera également noté  $L(G)$ ) qui possède les propriétés suivantes :

Il existe une bijection  $\sigma$  de  $V(G) \cup F(G)$  sur  $F(L(G))$  telle que :

- $\forall v \in V(G)$ , le contour de la face  $\sigma(v)$  de  $L(G)$  est un triangle dont les sommets sont les trois arêtes de  $G$  incidentes à  $v$ .
- $\forall f \in F(G)$ , le contour de la face  $\sigma(f)$  de  $L(G)$  est un cycle élémentaire dont les sommets sont les arêtes de  $G$  appartenant au contour de  $f$ .
- Toute arête de  $L(G)$  appartient au contour de deux faces de  $L(G)$ , l'une appartenant à  $\sigma(V(G))$  et l'autre à  $\sigma(F(G))$ .

Nous avons représenté ci-dessous le graphe cubique plan  $G$  le plus simple ( $G = K_4$ ), le graphe plan associé  $L(G)$ , et la bijection  $\sigma$  définie plus haut :



Les bonnes colorations des arêtes d'un graphe cubique  $G$  en 3 couleurs peuvent être considérées comme de bonnes colorations des sommets de  $L(G)$  en 3 couleurs, et réciproquement.

Ceci nous amène à nous intéresser aux  $Z_3$ -colorations de  $L(G)$  et aux  $Z_3$ -tensions non-nulles de  $L(G)$  qui en dérivent.

Nous noterons  $Z_3 = \{0, 1, -1\}$ .

Soit donc  $G$  un graphe cubique plan,  $L(G)$  le graphe plan représentatif de ses arêtes et  $\sigma$  la bijection de  $V(G) \cup F(G)$  sur  $F(L(G))$  définie comme précédemment.

Soit  $H$  le graphe orienté obtenu en orientant  $L(G)$  de sorte que le contour de chaque face de  $L(G)$  appartenant à  $\sigma(V(G))$  soit orienté en un circuit dont le sens de parcours est le sens trigonométrique (le contour de chaque face de  $L(G)$  appartenant à  $\sigma(F(G))$  est alors orienté en un circuit dont le sens de parcours est le sens inverse du sens trigonométrique).

Soit  $\theta$  une  $Z_3$ -tension non-nulle de  $H$ . Remarquons que  $\forall v \in V(G)$ , les trois arcs du contour de  $\sigma(v)$  ont la même valeur dans  $\theta$ , que nous noterons  $h(v)$  ( $h(v) \in \{1, -1\}$ ).

On constate alors que pour toute face de  $G$  de contour  $\mu$  :

$$(P_3) \quad \sum_{v \in V(\mu)} h(v) = 0 \quad (\text{cette expression est définie dans } Z_3).$$

Nous appellerons valuation de Heawood de  $G$  toute application  $h$  de  $V(G)$  dans  $Z_3 - \{0\}$  qui vérifie la Propriété  $P_3$  précédente (pour toute face de  $G$ ).

Inversement, soit  $h$  une valuation de Heawood de  $G$ . Pour tout arc  $a$  de  $H$ , soit  $v_a$  le sommet unique de  $G$  tel que  $a$  appartienne au contour de la face  $\sigma(v_a)$  de  $H$  ; nous poserons  $\theta(a) = h(v_a)$ .

Il est alors facile de vérifier que l'application  $\theta$  de l'ensemble des arcs de  $H$  dans  $Z_3$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle de  $H$ .

Nous retrouvons ainsi (avec l'aide de la Proposition 4) un résultat bien connu de Heawood [25], que nous formulerons comme suit :

Un graphe cubique plan est d'indice chromatique 3 si et seulement si il admet une valuation de Heawood.

Nous nous proposons maintenant de caractériser les graphes cubiques plans de carré 4-chromatique en termes d'existence de valuations de Heawood particulières (en utilisant la Proposition 6).

#### 4 . VALUATIONS DE HEAWOOD DES GRAPHES CUBIQUES PLANS DE CARRE 4-CHROMATIQUE.

##### a) Introduction

Soit  $C$  un circuit élémentaire ( $|V(C)| = |A(C)| \geq 3$ ) et soit  $\pi$  une  $Z_3$ -coloration de  $C$ .

Nous poserons :

$$\forall x \in Z_3 \quad n_x(\pi, C) = |\{v \in V(C) / \pi(v) = x\}|$$

et la  $Z_3$ -coloration  $\pi$  de  $C$  sera dite régulière si :

$$n_0(\pi, C) \equiv n_1(\pi, C) \equiv n_{-1}(\pi, C) \pmod{2}.$$

Remarquons que si  $\pi$  est régulière,  $\forall x \in Z_3$  l'application  $\pi + x$  de  $V(C)$  dans  $Z_3$  est encore une  $Z_3$ -coloration régulière de  $C$ .

Soit  $\theta$  une  $Z_3$ -tension non-nulle de  $C$ .  $\theta$  sera dite régulière si elle dérive d'une  $Z_3$ -coloration régulière de  $C$  ; toute  $Z_3$ -coloration dont dérive une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière est donc régulière.

D'après la Proposition 6 et le paragraphe (3) précédent, nous pouvons alors affirmer :



Proposition 7 : Soit  $G$  un graphe cubique plan. Alors  $\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si  $G$  admet une valuation de Heawood qui définit une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière sur le contour de toute face de  $G$ .

Il nous reste à donner une caractérisation simple des  $Z_3$ -tensions non-nulles régulières d'un circuit élémentaire  $C$ .

b) Valuations d'un circuit dans le groupe alterné de degré 4.

Rappelons que le groupe alterné de degré 4,  $A_4$ , peut être défini comme le groupe engendré par 2 générateurs  $\sigma$  et  $\zeta$  sujets aux relations suivantes :  $\sigma^3 = \zeta^3 = (\sigma\zeta)^2 = I$  [26] ( $I$  est l'identité de  $A_4$ ) ; on aura aussi :  $(\zeta\sigma)^2 = I$ .

Soit  $C$  un circuit élémentaire ( $|V(C)| = |A(C)| \geq 3$ ) ; nous noterons  $m = |A(C)|$  et  $A(C) = \{a_1, \dots, a_m\}$ , avec :

$\forall i \in [1, m-1]$  : l'extrémité terminale de  $a_i$  coïncide avec l'extrémité initiale de  $a_{i+1}$  ; en outre l'extrémité terminale de  $a_m$  coïncide avec l'extrémité initiale de  $a_1$ .

Nous appellerons  $A_4$ -valuation de  $C$  toute application  $f$  de  $A(C)$  dans  $\{\sigma, \zeta\} \subseteq A_4$ . La  $A_4$ -valuation  $f$  de  $C$  sera dite régulière si et seulement si :

$$f(a_1) f(a_2) \dots f(a_m) = I.$$

Soit  $\rho$  la bijection de  $Z_3 - \{0\}$  sur  $\{\sigma, \zeta\} \subseteq A_4$  définie par :

$$\rho(+1) = \sigma \quad ; \quad \rho(-1) = \zeta.$$

Proposition 8 : La  $A_4$ -valuation  $f$  de  $C$  est régulière si et seulement si  $\rho^{-1} \circ f$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C$ .

En effet :

On peut démontrer que  $\forall x \in A_4$ ,  $x$  peut être identifié à l'une des expressions suivantes (représentation canonique de  $x$  qui sera notée  $r(x)$ ) :

$I, \sigma, \zeta, \sigma\sigma, \sigma\zeta, \zeta\sigma, \zeta\zeta, \sigma\sigma\zeta, \sigma\zeta\zeta, \zeta\sigma\sigma, \zeta\zeta\sigma, \sigma\zeta\zeta\sigma.$

Nous noterons  $|r(x)|$  le nombre de termes  $\sigma$  ou  $\zeta$  de l'expression  $r(x)$  (en particulier  $|r(x)| = 0 \Leftrightarrow r(x) = I$ ).

On pourra vérifier que si  $x_i \in \{\sigma, \zeta\} \subseteq A_4$  ( $\forall i \in [1, 5]$ ) :

- $x_1 x_2 x_3 = I \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$
- $x_1 x_2 x_3 x_4 = I \Rightarrow x_1 = x_3, x_2 = x_4, x_1 \neq x_2$
- $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \neq I$  (ceci sera en fait démontré en détail dans la suite).

Les remarques précédentes permettent de vérifier que la Proposition 8 est vraie pour  $3 \leq |A(C)| \leq 5$ .

Supposons donc que la Proposition 8 est vérifiée pour  $3 \leq |A(C)| < m$  ( $m \geq 6$ ) et soit  $C$  un circuit élémentaire avec  $|A(C)| = m$ .

Nous noterons  $A(C) = \{a_1, \dots, a_m\}$  et  $V(C) = \{v_1, \dots, v_m\}$  avec :

$\forall i \in [1, m-1], a_i = (v_i, v_{i+1})$  ;  $a_m = (v_m, v_1)$ .

Soit  $f$  une  $A_4$ -évaluation de  $C$  ; soit  $\theta = \rho^{-1} \circ f$  ( $\theta$  est donc une application de  $A(C)$  dans  $Z_3 - \{0\}$ ).

Posons  $x = f(a_1) f(a_2) f(a_3) f(a_4) f(a_5)$  (bien défini puisque  $m \geq 6$ ) et  $|r(x)| = k$  ( $1 \leq k \leq 4$  puisque  $x \neq I$ ).

Soit  $C'$  le circuit élémentaire défini comme suit :

-  $V(C') = \{v'_1, \dots, v'_{m+k-5}\}$  avec :

$$v'_1 = v_1 ; v'_i = v_{i+5-k} \quad (\forall i \in [k+1, m+k-5])$$

-  $A(C') = \{a'_1, \dots, a'_{m+k-5}\}$  avec :

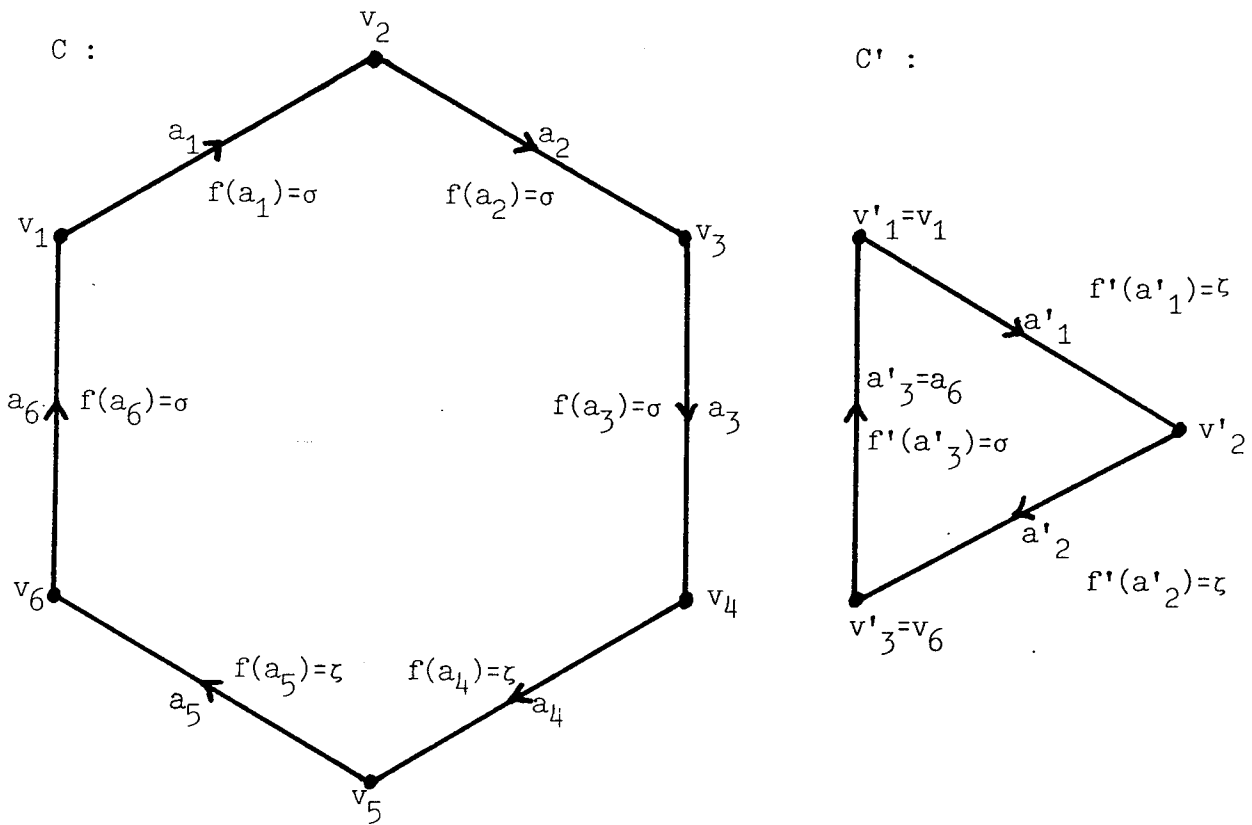
$$\forall i \in [1, m+k-6] \quad a'_i = (v'_i, v'_{i+1}) \text{ et } a'_{m+k-5} = (v'_{m+k-5}, v'_1).$$

On peut donc écrire :  $a'_i = a_{i+5-k} \quad \forall i \in [k+1, m+k-5]$ .

Soit  $f'$  la  $A_4$ -valuation de  $C'$  définie par :

- $\forall i \in [k+1, m+k-5] \quad f'(a'_i) = f(a_{i+5-k})$
- l'expression  $f'(a'_1) \dots f'(a'_k)$  est identique à  $r(x)$ .

Nous avons représenté ci-dessous un exemple simple :



ici  $r(x) = r(\sigma\sigma\sigma\zeta\zeta) = \zeta\zeta$  et  $k = 2$ .

Remarque :

Le circuit  $C'$  peut ne comporter que deux arcs ;  $|A(C')| < |A(C)|$ .

La construction même de  $C'$  et  $f'$  implique :

- (a)  $f$  est une  $A_4$ -valuation régulière de  $C$  si et seulement si  $f'$  est une  $A_4$ -valuation régulière de  $C'$ .

Soit alors  $\theta' = \rho^{-1} \circ f'$  ( $\theta'$  est une application de  $A(C')$  dans  $\mathbb{Z}_3 - \{0\}$ ).

Démontrons que :

- (b)  $\theta$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C$  si et seulement si  $\theta'$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C'$ .

Pour cela, nous aurons à étudier les séquences :

$$s = \theta(a_1), \theta(a_2), \theta(a_3), \theta(a_4), \theta(a_5)$$

$$\text{et } s' = \theta'(a'_1), \dots, \theta'(a'_k).$$

Soit  $\Pi$  l'application de  $\{v_i, i \in [1, 6]\}$  dans  $Z_3$  définie par :

$$\Pi(v_1) = 0$$

$$\Pi(v_{i+1}) = \Pi(v_i) + \theta(a_i) \quad \forall i \in [1, 5]$$

Nous noterons :  $\Pi = \Pi(v_1), \Pi(v_2), \dots, \Pi(v_6)$

Soit  $\Pi'$  l'application de  $\{v'_i, i \in [1, k+1]\}$  dans  $Z_3$  définie par :

$$\Pi'(v'_1) = 0$$

$$\Pi'(v'_{i+1}) = \Pi'(v'_i) + \theta'(a'_i) \quad \forall i \in [1, k]$$

Nous noterons :  $\Pi' = \Pi'(v'_1), \dots, \Pi'(v'_{k+1})$ .

$\forall x \in Z_3$  nous poserons :

$$n_x(\Pi) = |\{i / i \in [1, 6], \Pi(v_i) = x\}|$$

$$n_x(\Pi') = |\{i / i \in [1, k+1], \Pi'(v'_i) = x\}|$$

Pour démontrer (b) il nous reste à vérifier que :

- $\Pi(v_6) = \Pi'(v'_{k+1})$
- $n_0(\Pi) - n_0(\Pi'), n_1(\Pi) - n_1(\Pi'), n_{-1}(\Pi) - n_{-1}(\Pi')$

ont tous trois même parité,

et cela quelle que soit la séquence  $s$  de 5 éléments de  $Z_3 - \{0\}$ , avec  $s = \theta(a_1), \theta(a_2), \theta(a_3), \theta(a_4), \theta(a_5)$ .

Une vérification pourra être faite dans le tableau suivant, où  $Z_3$  a été noté  $\{0, +, -\}$ . Nous avons tiré parti de la remarque suivante : si nous remplaçons la séquence  $s$  par son opposée (+ et - s'échangent),  $s'$  est également remplacée par son opposée (car  $\sigma$  et  $\tau$  jouent le même rôle dans les relations de définition de  $A_4$ ) ;  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont alors remplacées par leurs opposées. Nous nous sommes donc limité aux séquences  $s$  comportant strictement plus d'éléments "+" que d'éléments "-". Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le calcul (dans  $A_4$ ) des séquences  $s'$

S	$\Pi$	S'	$\Pi'$
+++++	0+-0+-	++	0+-
++++-	0+-0+0	+-	0+0
+++-+	0+-0-0	-+	0-0
++-++	0+-+-0	+- - +	0+0-0
+ - + + +	0+0+-0	+-	0+0
- + + + +	0-0+-0	-+	0-0
+++--	0+-0-+	--	0-+
++--+	0+-+0+	-++	0-0+
+--++	0+0-0+	++-	0+-+
--+++	0-+-0+	--	0-+
-+++-	0-0+-+	--	0-+
+-+--	0+-+--+	+	0+
+ - + - +	0+0+0+	+	0+
- + - + +	0-0-0+	+	0+
+ - + + -	0+0+-+	-++	0-0+
- + + - +	0-0+0+	++-	0+-+

(b) est ainsi démontré.

Revenons maintenant à la démonstration par récurrence de la Proposition 8.

- Si  $f$  est une  $A_4$ -valuation régulière de  $C$ , d'après (a)  $f'$  est une  $A_4$ -valuation régulière de  $C'$  ; d'après notre hypothèse de récurrence,  $\theta'$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C'$  ; donc d'après (b)  $\theta$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C$ .

- Si  $\theta$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C$ , soit  $f = \rho \circ \theta$  ;  $f'$  et  $\theta'$  seront définis comme précédemment ; d'après (b)  $\theta'$  est une  $Z_3$ -tension non-nulle régulière de  $C'$  ; d'après notre hypothèse de récurrence,  $f'$  est une  $A_4$ -valuation régulière de  $C'$  ; donc d'après (a),  $f$  est une  $A_4$ -valuation régulière de  $C$ .

- La Proposition 8 est donc vérifiée pour tout circuit élémentaire  $C$  avec  $|A(C)| = m$ .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 8.

Remarque :

Soient  $x_i$  ( $i \in [1, m]$ ) des éléments de  $\{\sigma, \zeta\} \subseteq A_4$ .

Si  $x_1 x_2 \dots x_n = I$ , on a immédiatement :

$$x_2 x_3 \dots x_n x_1 = I.$$

On peut montrer en outre (en utilisant le tableau précédent) que :

$$x_n \dots x_2 x_1 = I.$$

Ces résultats auraient pu être obtenus à partir de la Proposition 8.

c) Valuations de Heawood dans  $A_4$

Soit  $G$  un graphe cubique plan. Nous appellerons  $A_4$ -valuation de Heawood de  $G$  toute application  $h$  de  $V(G)$  dans  $\{\sigma, \zeta\} \subseteq A_4$  telle que, pour toute face de  $G$  comportant les sommets  $v_1, \dots, v_k$  avec  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$   $\forall i \in [1, k-1]$ , l'égalité suivante soit vérifiée :

$$h(v_1) h(v_2) \dots h(v_k) = I.$$

D'après les Propositions 7 et 8, et la remarque finale du paragraphe III.4.(b) :

Proposition 9 : Soit  $G$  un graphe cubique plan. Alors  $\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si  $G$  admet une  $A_4$ -valuation de Heawood.

Remarque :

Soit  $G$  un graphe cubique plan et  $h$  une  $A_4$ -valuation de Heawood de  $G$ . On pourra vérifier (à partir des différentes constructions utilisées dans ce paragraphe III) qu'il existe une bonne coloration des sommets de  $C(G)$  en quatre couleurs 1, 2, 3, 4 telle que :

si  $v \in V(G)$  est de couleur 1, les couleurs des 3 sommets adjacents à  $v$  dans  $G$  se présentent dans l'ordre 2, 3, 4 (pour le sens trigonométrique autour de  $v$ ) si et seulement si  $h(v) = \sigma$  (ce que nous noterons :  $(\sigma, 1) \rightarrow (2, 3, 4)$ ), et de même :  $(\sigma, 2) \rightarrow (1, 4, 3)$  ;  $(\sigma, 3) \rightarrow (4, 1, 2)$  ;  $(\sigma, 4) \rightarrow (3, 2, 1)$ .

5 . APPLICATIONS

Proposition 10 : Soit  $G$  un graphe cubique plan tel que le contour de chaque face soit de longueur multiple de 4 ; alors  $\gamma(C(G)) = 4$ .

En effet :

On sait que  $G$  est biparti (le contour de chaque face de  $G$  est de longueur paire).

Soit  $h$  une application de  $V(G)$  dans  $\{\sigma, \tau\} \subseteq A_4$  telle que :

$$\forall e \in E(G), e = \{v, v'\} : h(v) \neq h(v').$$

On vérifiera sans peine que  $h$  est une  $A_4$ -valuation de Heawood de  $G$ .

Proposition 11 : Soit  $G$  un graphe cubique plan tel que le contour de chaque face soit de longueur multiple de 3 ; alors  $\gamma(C(G)) = 4$ .

En effet :

Soit  $h$  l'application de  $V(G)$  dans  $\{\sigma, \tau\} \subseteq A_4$  définie par :

$$\forall v \in V(G), h(v) = \sigma.$$

On vérifiera sans peine que  $h$  est une  $A_4$ -valuation de Heawood de  $G$ .

Remarques :

- Heawood a démontré [25] qu'un graphe cubique plan est d'indice chromatique 3 si et seulement si il admet une extension telle que le contour de chacune de ses faces soit de longueur multiple de 3 ; ce résultat est donc plus fort (dans le cas planaire) que la Proposition 2.
- On peut démontrer directement la Proposition 11 à partir d'une propriété de coloration des faces de  $G$  démontrée par Heawood [25].

Proposition 12 : Si  $G$  est un graphe cubique plan tel que le contour de chaque face soit de longueur multiple de 3,  $G$  comporte un nombre pair de faces.

En effet :

$G$  comporte  $\frac{|V(G)|}{2} + 2$  faces ; il nous suffit donc de montrer que  $|V(G)| \equiv 0 \pmod{4}$ .

Or il s'agit là d'une propriété générale des graphes cubiques  $G$  de carré 4-chromatique, et même des graphes cubiques  $G$  équitables, comme il sera facile de le vérifier (une bicoloration équitable de  $G$  est une partition de  $V(G)$  en deux ensembles de même cardinal pair).

Le résultat de la Proposition 12 avait été conjecturé par Eberhard [27] ; quatre démonstrations différentes en ont été données par Motzkin [28], Grünbaum [29], Kotzig [30] et Gallai [31].

Remarque :

*On pourra appliquer aux graphes cubiques plans  $G$  dont le contour de chaque face est de longueur multiple de 3 (ou 4) le résultat suivant :*

*Si  $G$  est un graphe cubique avec  $\gamma(C(G)) = 4$ , alors  $|V(G)| = 4 \beta(G)$*

*(on sait que  $\beta(G) \geq \frac{|V(G)|}{4}$  ; or  $V(G)$  admet une partition en 4 absorbants de  $G$ ).*

#### IV . SUR LES DIAGONALES DES GRAPHES CUBIQUES PLANS DE CARRÉ 4-CHROMATIQUE

##### 1 . INTRODUCTION

###### a) Bicycles d'un graphe

Soit  $G$  un graphe. On peut définir un cycle (non nécessairement élémentaire) de  $G$  comme l'ensemble des arêtes de  $G$  de valeur 1 dans un  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $G$  ; de même on peut définir un cocycle de  $G$  (non nécessairement élémentaire) comme l'ensemble des arêtes de  $G$  de valeur 1 dans une  $\mathbb{Z}_2$ -tension de  $G$ .

Un bicycle de  $G$  (définition donnée par P. Rosenstiehl dans [32]) est un ensemble d'arêtes de  $G$  qui constitue à la fois un cycle et un cocycle de  $G$ .



On pourra donc définir un bicycle de  $G$  comme l'ensemble des arêtes de  $G$  de valeur 1 dans un  $\mathbb{Z}_2$ -flot-tension de  $G$ . La proposition 5 permet alors d'affirmer :

**Proposition 13** : Soit  $G$  un graphe cubique. Alors  $\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si  $E(G)$  est l'union de deux bicycles de  $G$ .

Nous noterons  $S(G)$  l'espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{Z}_2$  des parties de  $E(G)$  (l'addition des parties est la différence symétrique) ;  $Z(G)$  (ensemble des cycles de  $G$ ),  $K(G)$  (ensemble des cocycles de  $G$ ) et  $B(G) = Z(G) \cap K(G)$  (ensemble des bicycles de  $G$ ) constituent des sous-espaces vectoriels de  $S(G)$ .

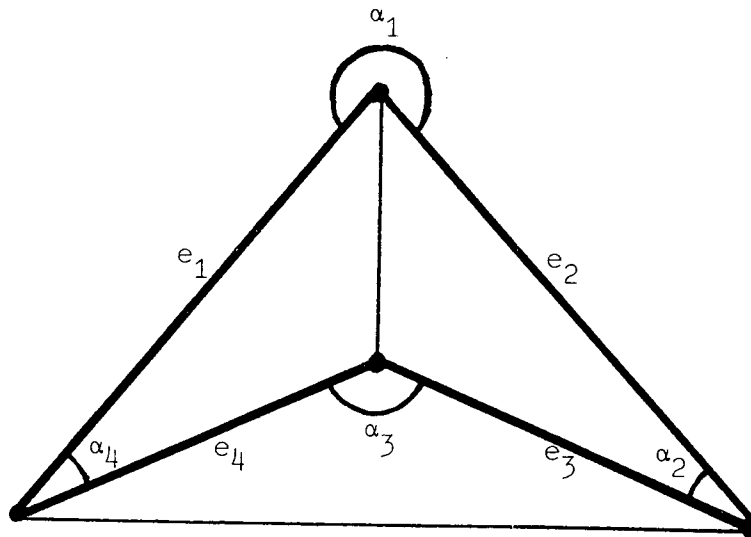
b) Diagonales d'un graphe plan

Nous ne donnerons pas ici une définition rigoureuse des diagonales d'un graphe plan ; on pourra la trouver dans [32].

Pour nous une diagonale d'un graphe plan  $G$  sera une séquence d'arêtes de  $G$ , soit  $d = e_1 e_2 \dots e_k$  (nous poserons  $e_{k+1} = e_1$ ), telle que :

- $\forall i \in [1, k]$ ,  $\{e_i, e_{i+1}\}$  est un angle de  $G$  (c'est-à-dire un couple d'arêtes distinctes incidentes à un même sommet de  $G$  et appartenant au contour d'une même face de  $G$ ) ; nous noterons  $\alpha_i$  l'angle  $\{e_i, e_{i+1}\}$  ( $\forall i \in [1, k]$ ), et nous poserons  $\alpha_{k+1} = \alpha_1$ .
- $\forall i \in [1, k]$  les angles  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$  n'appartiennent ni à la même face, ni au même sommet de  $G$ .
- Les angles  $\alpha_i$  ( $i \in [1, k]$ ) sont distincts entre eux (en tant que couples d'arêtes) et seront appelés angles de  $d$ .

Nous avons représenté ci-dessous une diagonale du graphe cubique plan isomorphe à  $K_4$  :



Remarque :

Les diagonales de  $G$  peuvent être identifiées aux "composantes" du "graphe médial" de  $G$  ([33], [19]).

On constate facilement qu'une arête de  $G$  est représentée au plus deux fois dans une diagonale de  $G$  donnée.

Deux diagonales de  $G$  seront considérées comme identiques si elles ont un angle en commun (auquel cas leurs ensembles d'angles sont identiques) ; tout angle de  $G$  appartient donc à une diagonale de  $G$  et une seule.

Nous noterons  $D(G)$  l'ensemble des diagonales de  $G$ .

$\forall d \in D(G)$  et  $\forall e \in E(G)$  nous noterons :

$\delta(d, e) = i$  ( $i \in \{0, 1, 2\}$ ) si et seulement si  $e$  apparaît  $i$  fois dans toute séquence d'arêtes associée à  $d$ .

Nous avons alors :  $\forall e \in E(G) \quad \sum_{d \in D(G)} \delta(d, e) = 2.$

Une diagonale  $d$  de  $G$  sera dite simple si :

$\forall e \in E(G) \quad \delta(d, e) \leq 1.$

c) Diagonales et bicycles d'un graphe plan

Soit  $G$  un graphe plan.

$\forall d \in D(G)$  soit  $U(d) = \{e \in E(G) / \delta(d, e) = 1\}$ .

$\forall v \in V(G) : \sum_{e: v \in e} \delta(d, e) = 2 |\{\alpha / \alpha \text{ est un angle de } d \text{ appartenant à } v\}|$ .

de même, pour toute face de  $G$  de contour  $C$  :

$\sum_{e \in C} \delta(d, e) = 2 |\{\alpha / \alpha \text{ est un angle de } d \text{ appartenant à } C\}|$ .

On en déduit que  $U(d)$  comporte un nombre pair d'arêtes incidentes à  $v$  et un nombre pair d'arêtes appartenant à  $C$ , et ceci  $\forall v \in V(G)$  et pour tout cycle élémentaire  $C$  contour d'une face de  $G$ .

$U(d)$  est donc un bicycle de  $G$  ( $\forall d \in D(G)$ ).

On démontre ([32], [33]) que  $\forall d_0 \in D(G)$  :

$\{U(d) / d \in D(G) - \{d_0\}\}$  constitue une base de l'espace vectoriel  $B(G)$  des bicycles de  $G$ .

En particulier toute arête  $e$  de  $G$  appartenant à au moins un bicycle de  $G$  apparaît dans deux diagonales distinctes de  $G$  ; nous noterons  $E'(G)$  l'ensemble des arêtes de  $G$  vérifiant cette propriété.

Soit alors  $\Gamma(G)$  le multigraphe sans boucles défini comme suit :

- les sommets de  $\Gamma(G)$  sont les ensembles  $U(d)$  ( $d \in D(G)$ )
- A toute arête  $e$  de  $G$  appartenant à au moins un bicycle de  $G$  on associera une arête de  $\Gamma(G)$ , notée  $u(e)$ , dont les deux extrémités sont les deux ensembles  $U(d_1)$  et  $U(d_2)$  ( $d_1, d_2 \in D(G)$ ,  $d_1 \neq d_2$ ) tels que  $e \in U(d_1) \cap U(d_2)$  ;  $u$  est une bijection de  $E'(G)$  sur  $E(\Gamma(G))$ .

$\Gamma(G)$  sera appelé multigraphe des diagonales de  $G$ .

Remarquons que  $\forall d \in D(G) : \{u(e) / e \in U(d)\}$  est l'ensemble des arêtes de  $\Gamma(G)$  dont une extrémité appartient au sommet  $U(d)$  de  $\Gamma(G)$ .

L'application  $u$ , en tant que bijection de  $P(E'(G))$  sur  $P(E(\Gamma(G)))$ , définit donc un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $B(G)$  sur  $K(\Gamma(G))$  (espace des cocycles de  $\Gamma(G)$ ) :  $u$  transforme une base de  $B(G)$  en une base de  $K(\Gamma(G))$ .

Remarque :

*Le matroïde des bicycles d'un graphe planaire est donc cographique ;  
la réciproque est fausse en ce sens qu'il existe des graphes non  
planaires dont le matroïde des bicycles est cographique ( $K_5$  par exemple).*

## 2 . UNE CARACTERISATION DES GRAPHES CUBIQUES PLANS DE CARRE 4 - CHROMATIQUE

Proposition 14 : Soit  $G$  un graphe cubique plan ; alors  $\gamma(C(G)) \leq 4$  si et seulement si :

- toutes les diagonales de  $G$  sont simples.
- $\gamma(\Gamma(G)) \leq 4$  (autrement dit : les diagonales de  $G$  peuvent être coloriées en 4 couleurs de sorte que toute arête de  $G$  apparaisse dans deux diagonales de couleurs distinctes).

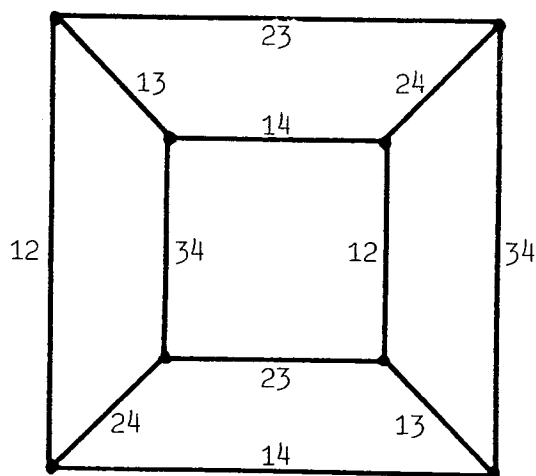
En effet :

D'après la Proposition 13,  $\gamma(C(G)) = 4$  si et seulement si  $E(G)$  est l'union de deux bicycles de  $G$  ; donc si et seulement si :

- toutes les diagonales de  $G$  sont simples (sinon il existerait une arête de  $G$  n'appartenant à aucun bicycle de  $G$ ).
- $E(\Gamma(G))$  est l'union de deux cocycles de  $\Gamma(G)$  (en utilisant l'isomorphisme  $u$  entre  $B(G)$  et  $K(\Gamma(G))$  , ce qui équivaut à dire que  $\Gamma(G)$  admet une  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -tension non-nulle, ou que  $\gamma(\Gamma(G)) \leq 4$ .

Ceci achève la démonstration.

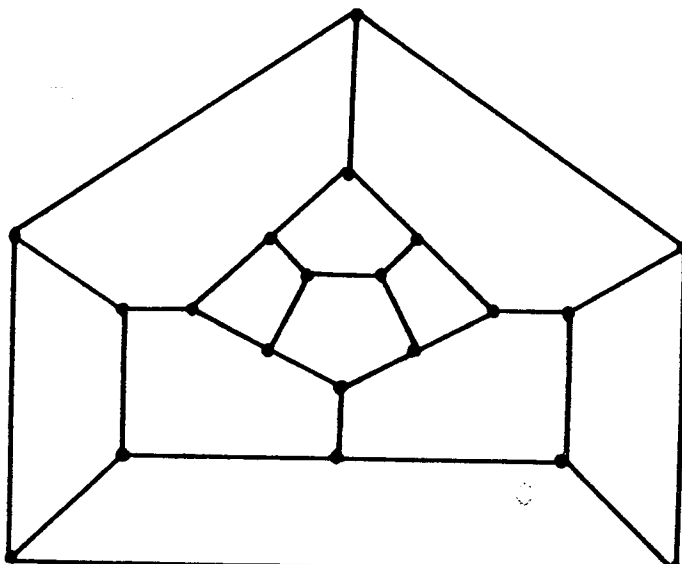
Nous avons représenté ci-dessous le graphe du cube ; c'est un graphe cubique plan  $G$  avec  $\gamma(C(G)) = 4$  (d'après la Proposition 10) ; on pourra vérifier qu'il admet 4 diagonales simples ; chaque arête  $e$  a été marquée d'un couple  $ij$  ( $1 \leq i < j \leq 4$ ) qui s'interprète comme suit :  $e$  apparaît dans la  $i^{\text{ème}}$  et la  $j^{\text{ème}}$  diagonale.



Les arêtes marquées 12 ou 34 forment un couplage parfait, de même que les arêtes marquées 13 ou 24, et les arêtes marquées 14 ou 23.

Remarque :

Nous avons représenté ci-dessous un graphe cubique plan  $G$  avec  $\gamma(C(G)) > 4$  ( $G$  comporte un cycle de longueur 5) ; on pourra vérifier que toutes les diagonales de  $G$  sont simples et que  $\gamma(\Gamma(G)) = 5$ .



On peut déduire des Propositions 11 et 14 que si  $G$  est un graphe cubique plan dont le contour de chaque face est de longueur multiple de 3, toutes les diagonales de  $G$  sont simples et  $\gamma(\Gamma(G)) \leq 4$ .

Nous allons maintenant préciser ce résultat.

### 3 . UNE CARACTERISATION DES GRAPHE CUBIQUES PLANS DONT LE CONTOUR DE CHAQUE FACE EST DE LONGUEUR MULTIPLE DE 3.

Proposition 15 : Soit  $G$  un graphe cubique plan. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Le contour de chaque face de  $G$  est de longueur multiple de 3.
- (b) Toutes les diagonales de  $G$  sont simples et  $\gamma(\Gamma(G)) = 3$ .

En effet :

(a)  $\Rightarrow$  (b) : Si  $G$  vérifie la condition (a), soit  $h$  l'application de  $V(G)$  dans  $Z_3 - \{0\}$  définie par :

$$\forall v \in V(G), h(v) = +1.$$

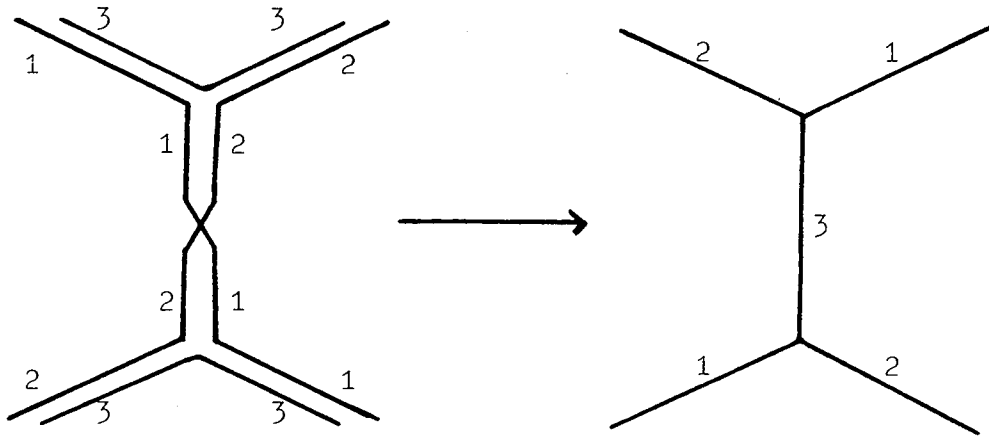
$h$  est une valuation de Heawood de  $G$  ; on pourra lui associer (comme on le montre au paragraphe III) une bonne coloration des arêtes de  $G$  en 3 couleurs 1, 2, 3 telle que pour chaque sommet  $v$  de  $G$  les couleurs des trois arêtes incidentes à  $v$  se présentent dans l'ordre 1, 2, 3 (pour le sens trigonométrique).

On constate alors que  $\forall d \in D(G), d = e_1 e_2 \dots e_k : \exists i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\forall j \in [1, k], e_j$  n'est pas de couleur  $i$ .

On en déduit aisément que  $G$  vérifie la condition (b).

(b)  $\Rightarrow$  (a) : Si  $G$  vérifie la condition (b), donnons nous une bonne coloration des sommets de  $\Gamma(G)$  en trois couleurs 1, 2, 3 ; colorions les arêtes de  $\Gamma(G)$  en trois couleurs 1, 2, 3 de sorte que chaque arête porte la couleur qui n'apparaît pas sur ses deux extrémités ;  $\forall e \in E(G)$  affectons à  $e$  la même couleur que  $u(e) \in E(\Gamma(G))$ .

On pourra vérifier sur le schéma suivant que l'on définit ainsi une bonne coloration des arêtes de  $G$  en trois couleurs dont la valuation de Heawood associée prend la même valeur sur tous les sommets de  $G$ .



Ceci achève la démonstration.

#### 4 . REMARQUE

Dans [34], J. Malkevitch démontre un résultat (Théorème 3.4) qui peut se formuler comme suit :

Si  $G$  est un graphe cubique plan tel que le contour de chaque face est de longueur multiple de  $k$  ( $k = 3, 4, 5$ ), alors toutes les diagonales de  $G$  sont simples.

Notre Proposition 15 précise donc ce résultat pour  $k = 3$ .

D'après les Propositions 10 et 14, pour  $k = 4$  nous pouvons également préciser ce résultat en notant que dans ce cas  $\gamma(\Gamma(G)) = 4$ .

Enfin nous remarquerons que pour  $k = 5$ ,  $\gamma(\Gamma(G)) \geq 5$  (car si  $G$  comporte un cycle de longueur 5,  $\gamma(C(G)) \geq 5$ ).

## CHAPITRE VI

SUR LES FLOTS NON-NULS DANS LES MULTIGRAPHES

---





## I . INTRODUCTION

### 1 - AVANT PROPOS

La théorie des flots et tensions s'avère très utile à la formalisation et à l'étude de nombreux problèmes de coloration ; notre chapitre V en est un exemple. Dans le cas des multigraphes planaires, les problèmes ou les résultats de coloration peuvent se formuler (par dualité) aussi bien en termes de flots qu'en termes de tensions.

Cette remarque a conduit W.T. TUTTE à poser dans [58] le problème suivant : Peut-on, par l'intermédiaire d'une formulation en termes de flots, généraliser aux multigraphes quelconques le fameux Théorème des Cinq Couleurs ?

Nous présentons ci-dessous quelques résultats obtenus dans cette direction, et, plus généralement, relatifs à l'existence de certains types de flots dans un multigraphe.

Chaque fois que cela sera possible, nous ferons le lien entre notre travail et les résultats connus qui s'y rapportent (résultats de coloration en particulier).

### 2 - DEFINITIONS, NOTATIONS

Nous sommes amenés à revenir ici sur certaines définitions et notations, introduites précédemment, pour les étendre et les préciser.

#### a) Multigraphes et multigraphes orientés

- Le terme "multigraphe" conservera le même sens que précédemment, à ceci près que nous admettrons la possibilité de boucles (c'est-à-dire d'arêtes dont les deux extrémités sont confondues). Un graphe est donc un multigraphe sans boucles et de multiplicité 1.

- Un multigraphe orienté est un couple  $(V(H) ; A(H))$  où  $V(H)$  est un ensemble fini non vide (ensemble des sommets de  $H$ ) et où  $A(H)$  est une famille finie d'éléments du produit cartésien  $V(H) \times V(H)$  appelés arcs.

- Etant donné un multigraphe  $G$  nous appellerons orientation de  $G$  tout multigraphe orienté  $H$  tel que  $V(H) = V(G)$  et qui peut s'obtenir à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête  $e$  de  $G$  ( $e = \{v, v'\}$ ,  $v, v' \in V(G)$ ) par un arc égal à  $(v, v')$  ou  $(v', v)$ . Tout multigraphe orienté peut être considéré comme une orientation d'un multigraphe.
- Soient  $G$  un multigraphe et  $H$  une orientation de  $G$ .
  - +  $\forall S \subseteq V(G) = V(H)$ ,  $S \neq \emptyset$ , nous noterons  $G_S$  (respectivement :  $H_S$ ) le multigraphe (respectivement : le multigraphe orienté) ayant pour ensemble de sommets  $S$  et pour ensemble d'arêtes (respectivement : d'arcs) l'ensemble des arêtes de  $G$  (respectivement : des arcs de  $H$ ) ayant leurs deux extrémités dans  $S$ .
  - +  $\forall S \subseteq V(H)$ , nous noterons  $\omega_H^+(S)$  l'ensemble des arcs de  $H$  sortant de  $S$ ,  $\omega_H^-(S)$  l'ensemble des arcs entrant dans  $S$ , et  $\omega_H(S)$  l'ensemble  $\omega_H^+(S) \cup \omega_H^-(S)$ .  
 $\forall v \in V(H)$  :
    - le degré extérieur de  $v$  dans  $H$  est l'entier  $d_H^+(v) = |\omega_H^+(\{v\})|$
    - le degré intérieur de  $v$  dans  $H$  est l'entier  $d_H^-(v) = |\omega_H^-(\{v\})|$
    - le degré de  $v$  dans  $H$  est l'entier :  

$$d_H(v) = |\omega_H(\{v\})| = d_H^+(v) + d_H^-(v).$$
  - +  $\forall S \subseteq V(G)$ , nous noterons  $\omega_G(S)$  l'ensemble des arêtes de  $G$  ayant exactement une extrémité dans  $S$ .  
 $\forall v \in V(G)$ , le degré de  $v$  dans  $G$  est l'entier :  

$$d_G(v) = |\omega_G(\{v\})|.$$
  - + Une  $k$ -coupe de  $G$  est une partie de  $E(G)$  de la forme  $\omega_G(S)$  ( $\emptyset \subset S \subset V(G)$ ) avec  $|\omega_G(S)| = k$ .  
 $G$  sera dit  $k$ -arête-connexe ( $k > 1$ ) si et seulement si il n'admet aucune  $\ell$ -coupe pour  $0 < \ell < k$ .  
 Notre définition de la 1-arête-connexité coïncide donc avec la définition classique de la connexité.

b) Cycles et flots d'un multigraphe orienté

- Soit  $M$  un groupe abélien (noté additivement) et soit  $H$  un multigraphe orienté dont l'ensemble des arcs  $A(H)$  sera supposé non vide.

Un  $M$ -flot de  $H$  est une application  $\phi$  de  $A(H)$  dans  $M$  telle que :

$$\forall S \subset V(H), S \neq \emptyset : \sum_{u \in \omega_H^+(S)} \phi(u) - \sum_{u \in \omega_H^-(S)} \phi(u) = 0.$$

Il est facile de démontrer que si  $\phi$  vérifie la condition précédente pour tous les ensembles  $S$  de la forme  $\{v\}$  ( $v \in V(H)$ ),  $\phi$  est bien un  $M$ -flot ; notre définition coïncide donc avec celle donnée par A. Ghouila-Houri dans [59] .

Le support de  $\phi$  est l'ensemble :  $\{u \in A(H) \mid \phi(u) \neq 0\}$  .

$\phi$  sera dit non-nul s'il a pour support  $A(H)$  tout entier.

- Tout groupe abélien  $M$  sera considéré comme un  $\mathbb{Z}$ -module :  $\forall z \in \mathbb{Z}, \forall m \in M$ , nous noterons  $z \cdot m$  le produit de la multiplication externe de  $m$  par le scalaire  $z$  (voir par exemple [60], p. 222).

Soient alors  $A$  un ensemble fini, et  $(z_i), (m_i), (f_i), (\phi_i)$  quatre familles de  $n \geq 1$  éléments appartenant respectivement à  $\mathbb{Z}, M, \mathbb{Z}^A, M^A$  ; la notation précédente donne un sens évident aux expressions :

$$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \phi_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n f_i \cdot m_i$$

qui désignent deux éléments de  $M^A$  ; si  $A = A(H)$  pour un multigraphe orienté  $H$ , si les  $\phi_i$  sont des  $M$ -flots et les  $f_i$  des  $\mathbb{Z}$ -flots de  $H$ , ces deux éléments sont des  $M$ -flots de  $H$ .

- Pour tout cycle élémentaire  $\mu$  du multigraphe orienté  $H$  (considéré comme séquence d'arcs de  $H$ ), nous désignerons par  $\mu^+$  (respectivement :  $\mu^-$ ) l'ensemble des arcs de  $\mu$  orientés dans le sens de parcours (respectivement : dans le sens inverse) ; nous identifierons  $\mu$  à l'application de  $A(H)$  dans  $\mathbb{Z}$  qui prend la valeur  $+1$  sur  $\mu^+$ , la valeur  $-1$  sur  $\mu^-$  et la valeur  $0$  partout ailleurs. En ce sens, tout cycle élémentaire de  $H$  est un  $\mathbb{Z}$ -flot de  $H$ .

On pourra démontrer qu'étant donné un multigraphe orienté  $H$  et un groupe abélien  $M$ , une application  $\phi$  de  $A(H)$  dans  $M$  est un  $M$ -flot de  $H$  si et seulement si elle est de la forme :

$$\phi = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot m_i$$

où  $\mu_1, \dots, \mu_n$  sont des cycles élémentaires de  $H$  et  $m_1, \dots, m_n$  sont des éléments de  $M$ . (La démonstration pourra être identique à celle donnée dans [7], p. 85 pour le cas  $M = \mathbb{Z}$ ).

La propriété précédente est parfois utilisée pour la définition des  $M$ -flots ; c'est le cas par exemple dans [61] et [62] (qui se placent dans le cadre plus général des matroïdes unimodulaires).

c) Autres notations utilisées

$\forall k \geq 2$  nous noterons  $Z_k$  le groupe des entiers modulo  $k$ .

Etant donné  $k_1, \dots, k_n$  ( $k_i \geq 2 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ), nous noterons

$Z_{k_1} \times \dots \times Z_{k_n}$  le groupe produit cartésien des  $n$  groupes  $Z_{k_i}$ .

Enfin  $\forall p, q \in \mathbb{Z}$  nous noterons  $[p, q]$  l'ensemble :  $\{z \in \mathbb{Z} / p \leq z \leq q\}$ .

## II . RESULTATS DE BASE ET PRINCIPAUX PROBLEMES DE LA THEORIE DES FLOTS NON-NULS

### 1 - FLOTS NON - NULS ET COLORATION DES FACES D'UN MULTIGRAPHE PLAN.

Proposition 1 : Soient  $G$  un multigraphe plan 2 - arête - connexe,  $q$  un entier ( $q \geq 2$ ),  $H$  une orientation de  $G$  et  $M$  un groupe abélien d'ordre  $q$ . Alors les faces de  $G$  peuvent être bien colorées en  $q$  couleurs si et seulement si  $H$  admet un  $M$ -flot non - nul.

En effet : Soit  $G^*$  le multigraphe plan dual géométrique de  $G$  ( $G$  étant 2-arête-connexe,  $G^*$  est connexe et sans boucles). Les faces de  $G$  peuvent être bien colorées en  $q$  couleurs si et seulement si  $\gamma(G^*) \leq q$ .

Or d'après la Proposition 4 du Chapitre V (qui s'étend trivialement aux multigraphes sans boucles),  $\gamma(G^*) \leq q$  si et seulement si toute orientation de  $G^*$  admet une  $M$ -tension non-nulle.

Il reste à définir comme dans [19], p. 93, une orientation  $H^*$  de  $G^*$  "orthogonale" à l'orientation  $H$  de  $G$  : à toute  $Z$ -tension de  $H^*$  correspond par dualité un  $Z$ -flot de  $H$ , et réciproquement. On en déduit qu'à toute  $M$ -tension non-nulle de  $H^*$  correspond par dualité un  $M$ -flot non-nul de  $H$ , et réciproquement.

Ceci achève la démonstration.

Remarques :

- Ore démontre la Proposition 1 sous une forme un peu différente dans [19], à la section 7.2.
- Dans [58], W.T. Tutte formule des résultats plus précis que les Propositions 4 du Chapitre V et 1 du présent Chapitre (il s'agit de résultats de dénombrement, alors que nous ne nous intéressons ici qu'à des résultats d'existence).
- La Proposition 1 est le résultat de base qui justifie l'intérêt que nous portons à l'étude des flots non-nuls.

2 - FLOTS NON-NULS DANS LES MULTIGRAPHES QUELCONQUES

Proposition 2 : Soit  $H$  un multigraphe orienté ;  $\forall q \geq 2$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $H$  admet un  $Z_q$ -flot non-nul.
- (b) Pour tout groupe abélien  $M$  d'ordre  $q$ ,  $H$  admet un  $M$ -flot non-nul.
- (c)  $H$  admet un  $Z$ -flot tel que la valeur de tout arc appartienne à l'ensemble  $[1-q, -1] \cup [1, q-1]$ .

En effet :

- L'équivalence de (a) et (b) est une conséquence très simple de la théorie des polynômes dichromatiques, théorie introduite par W.T. Tutte dans [58] et présentée en détail dans [63] ; les travaux de Tutte permettent en fait de montrer que si  $M$  et  $M'$  sont deux groupes abéliens de même ordre fini, le nombre de  $M$ -flots non-nuls de  $H$  est égal au nombre de  $M'$ -flots non-nuls de  $H$ . Ce résultat a été étendu aux matroïdes unimodulaires par H. Crapo ([61], Théorème III ; redémontré par T.H. Brylawski dans [62] au Théorème 12.4) ; dans le cas planaire, il s'agit d'une conséquence de la Proposition 1.
- L'équivalence de (a) et (c) a été établie par W.T. Tutte dans [64] au Théorème IV (repris dans [58] , p. 83-84 pour l'étendre au cas des multigraphes).  
Ce résultat peut également être considéré comme une conséquence d'une propriété générale des matroïdes unimodulaires établie par W.T. Tutte dans [65] (Proposition 6.3) et reprise dans [66] (Proposition 5.44).

Définitions :

Un multigraphe orienté  $H$  qui satisfait aux conditions (a), (b), (c) de la Proposition 2 pour un entier donné  $q \geq 2$  sera dit avoir la propriété  $F_q$  ou, plus brièvement, être  $F_q$ .

Un multigraphe sera dit avoir la propriété  $F_q$ , ou être  $F_q$ , si l'une de ses orientations est  $F_q$  (et dans ce cas, chacune de ses orientations est  $F_q$ ).

Remarques :

- Un multigraphe  $F_q$  ( $q \geq 2$ ) ne comporte aucune arête acyclique ; c'est la raison pour laquelle nous limiterons en général notre étude de la propriété  $F_q$  aux multigraphes 2-arête - connexes.
- La propriété  $F_q$  ( $q \geq 2$ ) est stable pour l'adjonction ou la suppression de boucles.
- Comme W.T. Tutte le remarque dans [58] , la condition (c) de la Proposition 2 montre que :  
Si un multigraphe  $H$  est  $F_q$  ( $q \geq 2$ ), alors :  $\forall q' \geq q, H$  est  $F_{q'}$ .

Nous allons maintenant examiner quelques conséquences de nos définitions.

La Proposition 1 peut se formuler comme suit :

**Proposition 3** : Soit  $G$  un multigraphe plan 2 - arête - connexe ; les faces de  $G$  peuvent être bien colorées en  $q$  couleurs ( $q \geq 2$ ) si et seulement si  $G$  est  $F_q$ .

*Remarque* : Dans le cas  $q = 2$  on retrouve le résultat bien connu suivant : les faces de  $G$  peuvent être bien colorées en deux couleurs si et seulement si le degré de chacun de ses sommets est pair ([19] , Théorème 6.2.3.).

La propriété  $F_q$  peut être reliée à des concepts classiques de la Théorie des graphes même dans le cas non planaire, comme on le verra ci-dessous :

**Proposition 4** : Un multigraphe cubique sans boucles :

- (a) est  $F_3$  si et seulement si il est biparti.
- (b) est  $F_4$  si et seulement si il est d'indice chromatique 3.

En effet :

Soit  $G$  un multigraphe cubique sans boucles.

(a) : - Si  $G$  est biparti,  $G$  admet une orientation  $H$  telle que :

$$\forall v \in V(H) = V(G), |d_H^+(v) - d_H^-(v)| = 3.$$

L'application de  $A(H)$  dans  $Z_3$  qui associe à tout arc de  $H$  l'élément 1 de  $Z_3$  est un  $Z_3$ -flot non-nul de  $H$ .

Donc  $G$  est  $F_3$ .

- Inversement, si  $G$  est  $F_3$ , il est possible de construire une orientation  $H$  de  $G$  qui admette un  $Z$ -flot tel que la valeur de tout arc soit 1 ou -2. On vérifie alors que :

$$\forall v \in V(G), |d_H^+(v) - d_H^-(v)| = 3.$$

Donc  $G$  est biparti.

(b) : - Soit  $H$  une orientation de  $G$ . Tout  $(Z_2 \times Z_2)$ -flot non-nul de  $H$  définit de façon évidente une bonne coloration des arêtes de  $G$  en 3 couleurs  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ , et inversement.



Remarques :

- La Proposition 4 ne fait que rassembler et présenter de façon plus simple des résultats déjà connus (voir en particulier [64] et [67]).

- D'après la Proposition 3, la Proposition 4 est une généralisation aux multigraphes quelconques des deux résultats bien connus suivants, dus respectivement à Heawood et Tait :

(a') Les faces d'un multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe plan peuvent être bien colorées en 3 couleurs si et seulement si il est biparti ([19], Théorème 7.4.3, sous forme duale).

(b') Les faces d'un multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe plan peuvent être bien colorées en 4 couleurs si et seulement si il est d'indice chromatique 3 ([19], Théorème 9.3.1).

Il semble donc naturel d'essayer de généraliser aux multigraphes quelconques d'autres résultats connus pour les multigraphes planaires.

### 3 . PRINCIPAUX PROBLEMES DE LA THEORIE DES FLOTS NON-NULS

D'après la Proposition 3, la Conjecture des Quatre Couleurs peut se formuler comme suit :

(C 4 C) Tout multigraphe planaire 2 - arête - connexe est  $F_4$ .

La Proposition 4 (b) montre que cette conjecture ne peut être étendue aux multigraphes quelconques (le graphe de Petersen fournirait un contre-exemple, comme le remarque W.T. Tutte dans [58]).

Par contre on ne connaît aucun contre-exemple à la conjecture suivante :

(C<sub>1</sub>) Tout multigraphe 2 - arête - connexe est  $F_5$

Cette conjecture est vérifiée pour les multigraphes planaires d'après la Proposition 3 et le Théorème des Cinq Couleurs de Heawood [68] ; elle a été proposée par W.T. Tutte dans [58].

De même il paraît intéressant de chercher à généraliser le résultat suivant de Grötzsch ([69] ; [19], Chapitre 13) :

Tout multigraphe planaire sans boucles ni triangles est 3 - chromatique.

Ce résultat peut, par dualité, être reformulé comme suit :

Tout multigraphe planaire 2 - arête - connexe sans 3 - coupes est  $F_3$ .

D'où la conjecture :

(C<sub>2</sub>) Tout multigraphe 2-arête-connexe sans 3 coupes est F<sub>3</sub>.

Cette conjecture a également été proposée par W.T. Tutte (communication privée).

Les conjectures (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) surprennent et fascinent à la fois par leur simplicité de formulation et par leur portée très générale ; c'est ainsi que G.C. Rota a pu écrire dans [70] que la conjecture (C<sub>1</sub>) est bien plus intéressante que la Conjecture des Quatre Couleurs ; dans ce même article G.C.Rota présente la conjecture (C<sub>1</sub>) comme un cas particulier du "problème critique" pour les matroïdes (problème introduit dans [71] , Chapitre 16).

L'un des aspects les plus étonnants des conjectures (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) est qu'elles impliquent un comportement des espaces de flots fondamentalement différent du comportement des espaces de tensions (on sait par exemple qu'il existe des graphes sans triangles de nombre chromatique arbitrairement grand ([72])).

C'est ainsi que W.T. Tutte a proposé dans [58] , en même temps que (C<sub>1</sub>), la conjecture plus faible suivante : il existe un entier  $q \geq 5$  tel que tout multigraphe 2-arête-connexe est F<sub>q</sub>.

C'est ce dernier problème que nous allons résoudre en démontrant en particulier que tout multigraphe 2-arête-connexe est F<sub>8</sub>.

Nous utiliserons plusieurs résultats annexes que nous présenterons ci-dessous ; il s'agit de résultats de réduction qui étendent des résultats analogues bien connus et faciles à démontrer dans le cas planaire (voir par exemple [19] , Théorèmes 6.3.3 et 9.1.1).

### III . THÉORÈMES DE REDUCTION

#### 1 . REDUCTION AUX GRAPHS CUBIQUES

Proposition 5 : Soient  $k \in \{2, 3\}$ ,  $q \geq 2$ .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Tout multigraphe  $k$ -arête-connexe est  $F_q$ .
- (b) Tout graphe cubique  $k$ -arête-connexe est  $F_q$ .

En effet :

Il est clair que (a)  $\Rightarrow$  (b).

Supposons maintenant (b) vrai.

Soit  $G$  un multigraphe  $k$ -arête-connexe sans boucles qui n'est pas  $F_q$  et qui comporte un nombre minimum de sommets pour cette propriété : montrons que nous aboutissons à une contradiction. On remarque d'abord que  $|V(G)| \geq 3$  et que :

-  $G$  ne comporte pas de sommets de degré 2 :

Sinon soit  $v$  un tel sommet de  $G$ , incident aux deux arêtes  $e' = \{v, v'\}$  et  $e'' = \{v, v''\}$  ; soit  $G_0$  le multigraphe ayant pour ensemble de sommets

$V(G) - \{v\}$  et pour ensemble d'arêtes :  $E(G_0) = (E(G) - \{e', e''\}) \cup \{e\}$   
où  $e$  est une arête d'extrémités  $v'$  et  $v''$  n'appartenant pas à  $E(G)$ .

$G_0$  est un multigraphe  $k$ -arête-connexe, et  $|V(G_0)| < |V(G)|$ . Donc  $G_0$  est  $F_q$ .

Il est alors facile d'en déduire que  $G$  est  $F_q$  : il y a contradiction.

-  $G$  ne comporte pas de sommets d'articulation :

sinon soit  $v$  un tel sommet de  $G$  ; soient  $C_1, \dots, C_p$  ( $p \geq 2$ ) les parties de  $V(G) - \{v\}$  correspondant aux  $p$  composantes connexes de  $G_{V(G) - \{v\}}$ .

$\forall i \in [1, p]$ , soit  $G_i = G_{C_i} \cup \{v\}$  ;  $G_i$  est un multigraphe  $k$ -arête-connexe et  $|V(G_i)| < |V(G)|$ .

Donc  $G_i$  est  $F_q$ , et ceci  $\forall i \in [1, p]$ .

Il est alors facile d'en déduire que  $G$  est  $F_q$  : il y a contradiction.

- Soit alors  $G'$  un multigraphe construit à partir de  $G$  de la manière suivante (une construction analogue est utilisée dans [73]) :

$$V(G') = \{(v, e) / v \in V(G), e \in E(G), v \in e\}.$$

$E(G')$  comporte les arêtes suivantes :

( $\alpha$ )  $\forall e_0 \in E(G), e_0 = \{v, v'\}$ , une arête d'extrémités  $(v, e_0)$  et  $(v', e_0)$ .

( $\beta$ )  $\forall v_0 \in V(G), d_G(v_0)$  arêtes constituant un cycle élémentaire ayant pour ensemble de sommets  $\{(v_0, e) / e \in E(G), v_0 \in e\}$ .

On remarque alors que :

$G'$  est un graphe cubique ( $G'$  n'a pas de boucles car  $G$  n'a ni boucles ni sommets de degré 1 ;  $G'$  n'a pas d'arêtes multiples car  $G$  n'a pas de sommets de degré 2 ; tout sommet est incident à une arête de type ( $\alpha$ ) et deux arêtes de type ( $\beta$ )).

$G'$  est 2-arête-connexe ; en outre si  $G$  est 3-arête-connexe ( $k = 3$ ),  $G'$  est également 3-arête-connexe (sinon  $G$  comporterait un sommet d'articulation).

Donc, d'après (b),  $G'$  est  $F_q$ .

Il est alors facile d'en déduire que  $G$  est  $F_q$  : il y a contradiction.

- Ceci achève la démonstration de la Proposition 5.

## 2 . REDUCTION AUX MULTIGRAPES SANS 2 - COUPES

### a) Un résultat général

- Soit  $M$  un groupe abélien d'ordre  $q \geq 2$ . Un multigraphe orienté  $H$  sera dit arbitrairement  $F_q$  pour  $M$  si :

Pour tout arc  $u$  de  $H$ , pour tout élément non nul  $x$  de  $M$ , il existe un  $M$ -flot non-nul  $\phi$  de  $H$  tel que  $\phi(u) = x$ .

Un multigraphe  $G$  sera dit arbitrairement  $F_q$  pour  $M$  si l'une de ses orientations l'est (et dans ce cas toutes le sont).

- Définissons la suppression d'une 2-coupe d'un multigraphe 2-arête-connexé de la manière suivante :

Soit  $G$  un multigraphe 2-arête-connexé qui comporte une 2-coupe  $\{e_1, e_2\} = \omega_G(S)$  ( $\emptyset \subset S \subset V(G)$ ).

Pour  $i = 1, 2$  soit  $v'_i$  le sommet de  $e_i$  appartenant à  $S$ , et soit  $v''_i$  l'autre sommet de  $e_i$ .

Définissons deux arêtes nouvelles  $e'$  (d'extrémités  $v'_1, v'_2$ ) et  $e''$  (d'extrémités  $v''_1, v''_2$ ) ; soit  $G'$  le multigraphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  et pour ensemble d'arêtes  $E(G) \cup \{e', e''\}$ .

Nous appellerons résultat de la suppression dans  $G$  de sa 2-coupe

$\{e_1, e_2\}$  le couple de multigraphes  $\{G'_S, G'_{V(G)-S}\}$  ; on vérifiera aisément que ces deux multigraphes sont 2-arête-connexés.

Une classe  $C$  de multigraphes 2-arête-connexés sera dite fermée pour la suppression des 2-coupes si :

Pour tout multigraphe  $G$  de la classe  $C$  et pour toute 2-coupe de  $G$ , le résultat de la suppression dans  $G$  de cette 2-coupe est un couple d'éléments de  $C$ .

- Nous sommes maintenant en mesure de formuler le résultat suivant :

**Proposition 6** : Soient  $q \geq 2$ ,  $M$  un groupe abélien d'ordre  $q$ , et  $C$  une classe de multigraphes 2-arête-connexés fermée pour la suppression des 2-coupes. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Tout élément de  $C$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M$ .
- (b) Tout élément sans 2-coupes de  $C$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M$ .

En effet :

Il est clair que (a)  $\Rightarrow$  (b).

Supposons maintenant que (b) est vrai, et démontrons (a) par récurrence sur le nombre de sommets.

- (a) est vérifié par les éléments de  $C$  comportant le nombre minimum  $s$  de sommets (ces éléments ne peuvent admettre de 2-coupe ; on utilise (b)).

- supposons que (a) est vérifié par tous les éléments de  $C$  comportant au plus  $r$  sommets ( $r \geq s$ ).

Soit  $G$  un élément de  $C$  comportant  $r + 1$  sommets.

Si  $G$  n'admet pas de 2-coupe,  $G$  vérifie (a) (d'après (b)).

Sinon, soit  $\{e_1, e_2\} = \omega_G(S)$  ( $\emptyset \subset S \subset V(G)$ ) une 2-coupe de  $G$ .

Nous conserverons les notations introduites plus haut.

Le résultat de la suppression dans  $G$  de sa 2-coupe  $\{e_1, e_2\}$  est le couple de multigraphes  $\{G'_S, G'_{V(G)-S}\}$ ;  $C$  étant fermée pour la suppression des 2-coupes,  $G'_S$  et  $G'_{V(G)-S}$  sont des éléments de  $C$ ; d'autre part  $|S| < |V(G)|$  et  $|V(G)-S| < |V(G)|$ ; donc d'après notre hypothèse de récurrence  $G'_S$  et  $G'_{V(G)-S}$  sont tous deux arbitrairement  $F_q$  pour  $M$ .

Montrons qu'il en est de même pour  $G$ .

Soient  $H'$  une orientation de  $G'$  et  $H$  l'orientation de  $G$  définie par  $H'$ .

Nous noterons  $u_1, u_2, u', u''$  les arcs de  $H'$  qui remplacent respectivement les arêtes  $e_1, e_2, e', e''$  de  $G'$ .

Il existe un  $Z$ -flot  $\mu$  de  $H'$  qui prend les valeurs  $+1$  ou  $-1$  pour les quatre arcs  $u_1, u_2, u', u''$  et la valeur  $0$  pour les autres arcs de  $H'$  ( $\mu$  correspond à un cycle non nécessairement élémentaire).

Soient alors  $u$  un arc de  $H$  et  $x$  un élément non nul de  $M$ . Nous sommes en droit de supposer que  $u$  n'est pas un arc de  $H_{V(G)-S}$ .

Puisque  $G'_S$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M$ , il existe un  $M$ -flot non-nul  $\phi'$  de  $H'_S$  tel que :

$$+ \text{ si } u \notin \{u_1, u_2\} : \phi'(u) = x \text{ (} u \text{ est un arc de } H'_S \text{)}$$

$$+ \text{ si } u \in \{u_1, u_2\} : \phi'(u') = (-\mu(u') \mu(u)) \cdot x$$

Puisque  $G'_{V(G)-S}$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M$ , il existe un  $M$ -flot non nul  $\phi''$  de  $H'_{V(G)-S}$  tel que :

$$\phi''(u'') = (\mu(u') \mu(u'')) \cdot \phi'(u')$$

$\phi'$  et  $\phi''$  seront considérés ci-dessous comme des  $M$ -flots de  $H'$ .

$$\text{Soit } \phi = \phi' + \phi'' - (\mu(u') \mu) \cdot \phi'(u')$$

$\phi$  est un  $M$ -flot de  $H'$  qui vérifie les propriétés suivantes :

+ tout arc de valeur nulle dans  $\mu$  est de valeur non nulle dans  $\phi$ .

$$+ \phi(u') = \phi'(u') - (\mu(u') \mu(u')) \cdot \phi'(u') = 0$$

$$\phi(u'') = \phi''(u'') - (\mu(u') \mu(u'')) \cdot \phi'(u') = 0$$

$$\text{Pour } i \in \{1, 2\} : \phi(u_i) = -(\mu(u') \mu(u_i)) \cdot \phi'(u') \neq 0$$

$\phi$  peut donc être considéré comme un  $M$ -flot non-nul de  $H$ .

En outre :

$$+ \text{ si } u \notin \{u_1, u_2\} : \phi(u) = \phi'(u) = x.$$

$$+ \text{ si } u \in \{u_1, u_2\} : \phi(u) = -(\mu(u') \mu(u)) \cdot \phi'(u') = x.$$

Ceci achève de montrer que  $G$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M$ .

- (a) est donc vérifié par tous les éléments de  $C$ .

Ceci achève la démonstration de la Proposition 6.

## b) Applications

Dans le cas où  $q$  est de la forme  $p^n$  ( $n \geq 1$ ,  $p \geq 2$ ,  $p$  premier), la Proposition 6 comporte un cas particulier intéressant : celui où  $M$  est le groupe  $M_q$  défini comme le produit cartésien de  $n$  groupes  $Z_p$ .

En effet :

Proposition 7 : Soit  $q = p^n$  ( $n \geq 1$ ,  $p \geq 2$ ,  $p$  premier).

Tout multigraphe  $F_q$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M_q$ .

Démonstration :

Soit  $H$  un multigraphe orienté qui possède la propriété  $F_q$  ; soient  $u$  un arc de  $H$  et  $x$  un élément non nul de  $M_q$ .

Il existe un  $M_q$ -flot non-nul  $\phi$  de  $H$ .

Le groupe des automorphismes de  $M_q$ , considéré comme groupe de transformations de  $M_q - \{0\}$ , est transitif (en fait il s'agit là d'une propriété caractéristique des groupes du type  $M_q$  ; voir par exemple [74], p. 26).

Il existe donc un automorphisme  $a$  de  $M_q$  tel que :

$$a(\phi(u)) = x.$$

Or  $a \circ \phi$  est évidemment un  $M_q$ -flot non-nul de  $H$ . Nous avons bien montré que  $H$  est arbitrairement  $F_q$  pour  $M_q$ .

Nous obtenons alors les résultats suivants :

Proposition 8 : Soit  $q$  une puissance d'un entier premier.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Tout multigraphe 2 - arête - connexe est  $F_q$ .
- (b) Tout multigraphe 3 - arête - connexe est  $F_q$ .

Proposition 9 : Soit  $q$  une puissance d'un entier premier.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Tout multigraphe 2 - arête - connexe sans 3 - coupes est  $F_q$ .
- (b) Tout multigraphe 4 - arête - connexe est  $F_q$ .

En effet :

La Proposition 8 (respectivement : 9) est (d'après la Proposition 7) équivalente au cas particulier suivant de la Proposition 6 :

- $q$  est une puissance d'un entier premier et  $M$  est le groupe  $M_q$ .
- $C$  est la classe  $C_1$  des multigraphes 2 - arête - connexes (respectivement :  $C$  est la classe  $C_2$  des multigraphes 2 - arête - connexes sans 3 - coupes).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que  $C_1$  et  $C_2$  sont effectivement fermées pour la suppression des 2 - coupes.

## IV . COARBORICITE ET FLOTS NON-NULS

### 1 . INTRODUCTION

Les définitions non données ici pourront être trouvées dans [5] et [7] .

Dans ce qui suit les cycles élémentaires, arbres et coarbres d'un multigraphe connexe  $G$  seront considérés comme des parties de  $E(G)$ .

Les conséquences suivantes de la formule de Nash-Williams [75] pour l'arboricité d'un graphe sont bien connues :

- (a) Tout graphe planaire connexe est d'arboricité inférieure ou égale à 3.
- (b) Tout graphe planaire connexe sans triangles est d'arboricité inférieure ou égale à 2.



On sait d'autre part que :

- (c) Tout graphe connexe d'arboricité  $a \geq 1$  est de nombre chromatique inférieur ou égal à  $2^a$ .

On constate alors que :

- (a) et (c) donnent un "Théorème des huit couleurs" pour tous les graphes planaires, et donc pour tous les multigraphes planaires sans boucles.
- (b) et (c) donnent un "Théorème des quatre couleurs" pour tous les graphes planaires sans triangles, et donc pour tous les multigraphes planaires sans boucles ni triangles.

C'est cette démarche très simple que nous allons étendre par dualité à l'aide du concept de coarboricité d'un multigraphe.

## 2 . COARBORICITE ET PROPRIETE $F_q$

Soit  $G$  un multigraphe 2 - arête - connexe.

Aucune arête de  $G$  ne peut appartenir à tous les arbres de  $G$  (une telle arête constituerait une 1 - coupe).

Autrement dit,  $E(G)$  est l'union des coarbres de  $G$ .

Nous définissons alors la coarboricité de  $G$ ,  $c(G)$ , comme la cardinalité minimum d'un ensemble de coarbres de  $G$  dont l'union est  $E(G)$ .

Remarque :

*Si  $G$  est planaire, soit  $G^*$  un dual combinatoire de  $G$  ;  $G^*$  est un multigraphe connexe sans boucles d'arboricité  $c(G)$ .*

Le résultat suivant est dual de la proposition (c) du paragraphe 1 :

**Proposition 10 :**

Tout multigraphe 2 - arête - connexe  $G$  est  $F_{2^{c(G)}}$ .

En effet :

- Soit  $K$  un coarbre de  $G$  et  $H$  une orientation de  $G$ ;

$\forall e \in K$  il existe un cycle élémentaire unique  $C_e$  de  $G$  tel que  $e \in C_e \subseteq (E(G) - K) \cup \{e\}$ ; nous associerons à  $C_e$  le  $Z_2$ -flot  $\phi_e$  de  $H$  qui prend la valeur 1 sur les arcs correspondant aux arêtes de  $C_e$  et la valeur 0 partout ailleurs.

On constate alors que le  $Z_2$ -flot de  $H$  :

$$\phi_K = \sum_{e \in K} \phi_e$$

prend la valeur 1 sur tous les arcs de  $H$  correspondant aux arêtes de  $K$ .

- Supposons alors que  $E(G)$  est l'union de  $c$  coarbres  $K_1, \dots, K_c$ ; désignons (comme au paragraphe III.2.b) par  $M_{2^c}$  le groupe produit cartésien de  $c$  groupes  $Z_2$ .

L'expression  $(\phi_{K_1}, \dots, \phi_{K_c})$  définit alors un  $M_{2^c}$ -flot de  $H$  qui est évidemment non-nul.

- Ceci achève la démonstration de la Proposition 10.

### 3 - SUR LA COARBORICITE DES MULTIGRAPHES 3-ET 4-ARETE-CONNEXES

Le résultat suivant généralise par dualité les propositions (a) et (b) du paragraphe 1 :

Proposition 11 :

- (a) Tout multigraphe 3-arête-connexe est de coarboricité inférieure ou égale à 3.
- (b) Tout multigraphe 4-arête-connexe est de coarboricité inférieure ou égale à 2.

En effet :

Soit  $G$  un multigraphe  $k$ -arête-connexe ( $k \in \{3, 4\}$ ).

Nous désignerons par  $M$  le matroïde des cocycles de  $G$ : les bases de  $M$  sont les coarbres de  $G$ . Le matroïde  $M^*$  dual de  $M$  est le matroïde des cycles de  $G$ .

Nous noterons  $r$  et  $r^*$  respectivement les fonctions-rang des matroïdes  $M$  et  $M^*$  (définies sur l'ensemble des parties de  $E(G)$ ).

Nous utiliserons un Théorème de J.R. Edmonds [76] qui s'énonce (dans son application à  $M$ ) :

Il existe  $c$  bases de  $M$  dont l'union est  $E(G)$  si et seulement si :  
 $\forall A \subseteq E(G), c r(A) \geq |A|$ .

Nous démontrerons que :

$$\forall A \subseteq E(G) : \frac{k}{k-2} r(A) \geq |A| \quad (i)$$

L'inégalité (i) donnera, grâce au Théorème d'Edmonds, le résultat (a) pour  $k = 3$  et le résultat (b) pour  $k = 4$ .

Nous commencerons par donner une expression simple de  $r(A)$  ( $\forall A \subseteq E(G)$ ).

On trouvera dans [71] , p. 11.3, le résultat suivant :

$$\forall A \subseteq E(G) : r(A) = |A| + r^*(E(G) - A) - r^*(E(G)).$$

Pour toute partie  $A$  de  $E(G)$ , soit  $p(A)$  le nombre de composantes connexes du multigraphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  et pour ensemble d'arêtes  $A$ . On sait que :

$$\forall A \subseteq E(G) : r^*(A) = |V(G)| - p(A).$$

Donc,  $\forall A \subseteq E(G)$  :

$$r(A) = |A| + [|V(G)| - p(E(G) - A)] - [|V(G)| - p(E(G))].$$

$$\text{soit : } r(A) = |A| - p(E(G) - A) + 1. \quad (ii)$$

Soit alors  $A$  une partie quelconque de  $E(G)$ .

- si  $p(E(G) - A) = 1$ ,  $r(A) = |A|$  et  $A$  vérifie (i).
- si  $p(E(G) - A) = \Pi \geq 2$ , soient  $C_1, \dots, C_\Pi$  les parties de  $V(G)$  correspondant aux  $\Pi$  composantes connexes du multigraphe  $(V(G) ; E(G) - A)$ .

$$\text{Soit } B = \bigcup_{i=1}^{\Pi} \omega_G(C_i).$$

Il est clair que  $B \subseteq A$  et que chaque arête de  $B$  appartient à exactement deux des  $\omega_G(C_i)$  ( $i \in [1, \Pi]$ ).

$$\text{Donc : } \sum_{i=1}^{\Pi} |\omega_G(C_i)| = 2 |B| \leq 2 |A|.$$

Puisque  $G$  est  $k$ -arête - connexe :

$$\forall i \in [1, \Pi], |\omega_G(C_i)| \geq k.$$

$$\text{Donc : } 2 |A| \geq k \Pi, \text{ soit : } p(E(G) - A) \leq \frac{2}{k} |A|.$$

D'après (ii) :  $r(A) \geq |A| - p(E(G) - A) \geq (1 - \frac{2}{k}) |A|$   
et donc  $A$  vérifie (i) également dans ce cas.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 11.

Remarque :

*La Proposition 11 (b) a été récemment démontrée par S. Kundu ([77]) sous la forme suivante :*

*Tout multigraphe 4 - arête - connexe comporte deux arbres disjoints.*

#### 4 . DEUX THEOREMES DE COLORATION GENERALISES

Proposition 12 : Tout multigraphe 2 - arête - connexe est  $F_8$ .

Il s'agit d'une conséquence directe des Propositions 11 (a), 10 et 8.

Proposition 13 : Tout multigraphe 2 - arête - connexe sans 3 - coupes est  $F_4$ .

Il s'agit d'une conséquence directe des Propositions 11 (b), 10 et 9.

#### 5 . REMARQUES

- Les conjectures  $(C_1)$  et  $(C_2)$  s'intègrent donc dans les problèmes suivants :

+ Quel est l'entier  $q$  minimum tel que tout multigraphe 2 - arête - connexe est  $F_q$  ?

D'après la Proposition 12 cet entier existe et appartient à l'intervalle  $[5, 8]$ .

+ Quel est l'entier  $q$  minimum tel que tout multigraphe 2 - arête - connexe sans 3 - coupes est  $F_q$  ?

D'après la Proposition 13 cet entier existe et est égal à 3 ou 4.

- Les démonstrations des Propositions 10, 8 et 9, ainsi que l'algorithme proposé par Edmonds dans [76], définissent une méthode de construction effective :

+ d'un  $M_8$ -flot non-nul de H pour tout multigraphe 2-arête-connexe orienté H.

+ d'un  $M_4$ -flot non-nul de H pour tout multigraphe 2-arête-connexe sans 3-coupes orienté H.

On pourra en déduire une construction de tout autre type de flot de H dont l'existence découle de la Proposition 2.

A titre d'exemple, construisons à partir d'un  $M_8$ -flot non-nul  $\phi$  de H un flot entier à valeurs dans  $[-7, -1] \cup [1, 7]$ .

$\phi$  peut s'écrire :  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , où les  $\phi_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) sont des  $Z_2$ -flots de H dont l'union des supports est  $A(H)$ .

$\forall i \in \{1, 2, 3\}$  on pourra associer à  $\phi_i$  un  $Z$ -flot  $\phi'_i$  de même support qui prend les valeurs  $+1, -1$  et  $0$ .

Il est alors facile de vérifier que  $\phi'_1 + 2\phi'_2 + 4\phi'_3$  est un  $Z$ -flot de H à valeurs dans  $[-7, -1] \cup [1, 7]$ .

- Pour les multigraphes cubiques sans boucles la Proposition 12 prend la forme suivante :

Proposition 14 : Soit G un multigraphe 2-arête-connexe cubique sans boucles. Les arêtes de G peuvent être bien colorées en 7 couleurs a, b, c, d, e, f, g, de sorte qu'en chaque sommet les trois couleurs des arêtes incidentes forment l'un des ensembles :

a e f, a d g, a b c, f d b, f g c, c e d, b e g.

En effet :

Il suffit d'identifier les 7 couleurs a, b, c, d, e, f, g aux 7 éléments de  $M_8 - \{0\}$ , et les 7 triplets de couleurs donnés dans l'énoncé aux 7 triplets de somme nulle (la même identification est faite à la figure 19.1 de [7] pour représenter le plan projectif à 7 points).

Remarque :

*Il s'agit d'un résultat analogue au théorème de Vizing (pour lequel on considère les quatre triplets que l'on peut former avec quatre couleurs), mais les deux résultats sont apparemment sans lien entre eux.*

## V . VALUATIONS EQUILIBREES D'UN MULTIGRAPHE

### 1 . INTRODUCTION

Dans ce paragraphe les multigraphes seront supposés sans boucles.

Soit  $G$  un multigraphe. Nous appellerons valuation équilibrée de  $G$  toute application  $w$  de  $V(G)$  dans  $\mathbb{Q}$  telle que :

$$\forall S \subseteq V(G), \left| \sum_{v \in S} w(v) \right| \leq |w_G(S)|$$

(remarque : il s'agit à gauche de la valeur absolue d'un nombre, et à droite du cardinal d'un ensemble).

Bondy a démontré dans [24] qu'un graphe cubique est d'indice chromatique 3 si et seulement si il admet une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-2, +2\}$ .

Nous allons généraliser ce résultat en formulant en termes de valuations équilibrées la propriété  $F_k$  ( $k \geq 3$ ) pour les multigraphes quelconques.

### 2 . MULTIGRAPHES $[p, q]$ - ORIENTABLES

D'après la Proposition 2 (c), un multigraphe  $G$  est  $F_k$  ( $k \geq 2$ ) si et seulement si il existe une orientation  $H$  de  $G$  qui admet un  $Z$ -flot à valeurs dans  $[1, k-1]$ .

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes :

Soient  $G$  un multigraphe et  $p, q$  deux entiers ( $1 \leq p \leq q$ ) ; une  $[p, q]$  - orientation de  $G$  est une orientation  $H$  de  $G$  qui admet un  $Z$ -flot à valeurs dans l'intervalle  $[p, q]$  ; si une telle orientation  $H$  de  $G$  existe,  $G$  sera dit  $[p, q]$  - orientable.

Un multigraphe est donc  $F_k$  ( $k \geq 2$ ) si et seulement si il est  $[1, k-1]$  - orientable.

Les  $[p, q]$  - orientations d'un multigraphe peuvent être caractérisées à l'aide du Théorème du Flot Compatible ([7], p. 83). Il vient immédiatement :

Proposition 15 :

Soit  $G$  un multigraphe ; une orientation  $H$  de  $G$  est une  $[p, q]$  - orientation ( $1 \leq p \leq q$ ) si et seulement si :

$$\forall S \subseteq V(H) : q |\omega_H^+(S)| \geq p |\omega_H^-(S)|.$$

On en déduit aussitôt le résultat suivant :

Proposition 16 :

Un multigraphe  $G$  est  $F_k$  ( $k \geq 2$ ) si et seulement si il admet une orientation  $H$  telle que :

$$\forall S \subseteq V(H) : k |\omega_H^+(S)| \geq |\omega_H^-(S)|.$$

Remarque :

*Le résultat précédent est donné par Minty dans [67], pour le cas particulier où  $k = 4$  et où  $G$  est cubique ; il peut être considéré comme dual d'un autre résultat de Minty sur le nombre chromatique d'un graphe ([78]).*

3 . REALISATION D'UNE SEQUENCE DE DEGRES EXTERIEURS PAR UNE ORIENTATION D'UN MULTIGRAPHE.

Proposition 17 :

Soit  $G$  un multigraphe avec  $|V(G)| = n$  et  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  ; soient  $k_1, \dots, k_n$   $n$  éléments de  $Z$ . Il existe une orientation  $H$  de  $G$  telle que :

$$\forall i \in [1, n], d_H^+(v_i) = k_i$$

si et seulement si la valuation  $w$  de  $G$  définie par :

$$\forall i \in [1, n], w(v_i) = 2 k_i - d_G(v_i)$$

est équilibrée.

En effet :

La valuation  $w$  est équilibrée si et seulement si :

$$\forall S \subseteq V(G) : - |\omega_G(S)| \leq 2 \sum_{v_i \in S} k_i - \sum_{v_i \in S} d_G(v_i) \leq |\omega_G(S)|.$$

Remarquons que,  $\forall S \subseteq V(G)$  :

$$\sum_{v_i \in S} d_G(v_i) = 2 |E(G_S)| + |\omega_G(S)|$$

Donc  $w$  est équilibrée si et seulement si :

$$(i) \quad \forall S \subseteq V(G) : |E(G_S)| \leq \sum_{v_i \in S} k_i \leq |E(G_S)| + |\omega_G(S)|$$

La condition (i) implique les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (ii) \quad \forall S \subseteq V(G) : \sum_{v_i \in S} k_i \geq |E(G_S)| \\ (iii) \quad \sum_{i \in [1, n]} k_i = |E(G)| \end{array} \right.$$

En effet (ii) est contenue dans (i), et (iii) est équivalente à (i) pour  $S = V(G)$ .

Inversement montrons que si (ii) et (iii) sont vérifiées, (i) est vérifiée ; il suffit de prouver que :

$$\forall S \subseteq V(G), \sum_{v_i \in S} k_i \leq |E(G_S)| + |\omega_G(S)|$$

Or d'après (iii), cette inégalité peut s'écrire :

$$|E(G)| - \sum_{v_i \in V(G) - S} k_i \leq |E(G)| - |E(G_{V(G) - S})|$$

qui est vérifiée d'après (ii).

En résumé  $w$  est équilibrée si et seulement si les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées.

Or les deux conditions (ii) et (iii) sont nécessaires et suffisantes pour que  $G$  admette une orientation  $H$  telle que :  $\forall i \in [1, n], d_H^+(v_i) = k_i$ . Ce dernier résultat est démontré par Hakimi dans [79] ; il s'agit d'une conséquence simple du théorème de Gale ([80] ; [7], p. 80).

Ceci achève la démonstration.



Remarque :

Le résultat précédent peut s'interpréter comme suit :

pour une application  $w$  de  $V(G)$  dans  $Z$  les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\forall v \in V(G)$ ,  $w(v) \equiv d_G(v) \pmod{2}$  et  $w$  est une valuation équilibrée de  $G$ .
- Il existe une orientation  $H$  de  $G$  telle que :  $\forall v \in V(G)$ ,  
 $w(v) = d_H^+(v) - d_H^-(v)$ .

#### 4 . VALUATIONS EQUILIBREES DES MULTIGRAPHES $[p, q]$ - ORIENTABLES

Proposition 18 :

Soit  $G$  un multigraphe ; une orientation  $H$  de  $G$  est une  $[p, q]$  - orientation ( $1 \leq p < q$ ) si et seulement si la valuation  $w$  de  $G$  définie par :

$$\forall v \in V(G), w(v) = \frac{q+p}{q-p} (d_H^+(v) - d_H^-(v))$$

est équilibrée.

En effet :

Soit  $H$  une orientation de  $G$ . D'après la Proposition 15,  $H$  est une  $[p, q]$  - orientation de  $G$  si et seulement si :

$$\forall S \subseteq V(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} q |\omega_H^+(S)| \geq p |\omega_H^-(S)| \\ q |\omega_H^-(S)| \geq p |\omega_H^+(S)| \end{array} \right.$$

(la deuxième condition s'obtient à partir de la première en remplaçant  $S$  par  $V(H) - S$ ).

Ce qui équivaut à :

$$\forall S \subseteq V(H) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (q+p) (|\omega_H^-(S)| - |\omega_H^+(S)|) \leq (q-p) (|\omega_H^-(S)| + |\omega_H^+(S)|) \\ (q+p) (|\omega_H^+(S)| - |\omega_H^-(S)|) \leq (q-p) (|\omega_H^+(S)| + |\omega_H^-(S)|) \end{array} \right.$$

Ou encore :

$$\forall S \subseteq V(H) : \frac{q+p}{q-p} \left| |\omega_H^+(S)| - |\omega_H^-(S)| \right| \leq |\omega_H(S)|$$

Or,  $\forall S \subseteq V(H)$  :

$$|\omega_H^+(S)| - |\omega_H^-(S)| = \sum_{v \in S} d_H^+(v) - \sum_{v \in S} d_H^-(v)$$

Ceci achève la démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les multigraphes  $[p, q]$  - orientables ( $1 \leq p < q$ ) en termes de valuations équilibrées :

Proposition 19 :

Un multigraphe  $G$  est  $[p, q]$  - orientable ( $1 \leq p < q$ ) si et seulement si il admet une valuation équilibrée  $w$  du type suivant :

$$\forall v \in V(G), w(v) = \frac{q+p}{q-p} \ell_v \text{ avec } \ell_v \in \mathbb{Z} \text{ et } \ell_v \equiv d_G(v) \pmod{2}.$$

En effet :

- (a) Si  $G$  est  $[p, q]$  - orientable, soit  $H$  une  $[p, q]$  - orientation de  $G$ .  
 $\forall v \in V(G)$  nous poserons  $\ell_v = d_H^+(v) - d_H^-(v)$  (donc  $\ell_v \in \mathbb{Z}$  et  $\ell_v \equiv d_G(v) \pmod{2}$ ) et  $w(v) = \frac{q+p}{q-p} \ell_v$ .

$w$  est une valuation équilibrée de  $G$  d'après la Proposition 18.

- (b) Inversement, soit  $w$  une valuation équilibrée de  $G$  telle que :

$$\forall v \in V(G), w(v) = \frac{q+p}{q-p} \ell_v \text{ avec } \ell_v \in \mathbb{Z} \text{ et } \ell_v \equiv d_G(v) \pmod{2}.$$

Puisque  $\frac{q+p}{q-p} > 1$ , la valuation de  $G$  qui associe à tout sommet  $v$  de  $G$  le nombre  $\ell_v$  est également équilibrée.

D'après la Remarque consécutive à la Proposition 17, il existe une orientation  $H$  de  $G$  telle que :

$$\forall v \in V(G), d_H^+(v) - d_H^-(v) = \ell_v$$

et donc  $w(v) = \frac{q+p}{q-p} (d_H^+(v) - d_H^-(v))$ .

Comme  $w$  est équilibrée,  $H$  est une  $[p, q]$  - orientation de  $G$  d'après la Proposition 18. Donc  $G$  est  $[p, q]$  - orientable.

- (c) Ceci achève la démonstration.

5 . APPLICATION AU CAS DES GRAPHEs CUBIQUESa) Introduction

Nous allons présenter ci-dessous quelques exemples d'application des résultats précédents. Par souci de simplicité, nous nous limiterons au cas des graphes cubiques ; la plupart des résultats qui suivent pourront être généralisés sans difficulté.

Soit  $G$  un multigraphe ; nous appellerons  $k$ -multiple de  $G$  ( $k \geq 1$ ) et nous noterons  $k \times G$  le multigraphe ayant pour ensemble de sommets  $V(G)$  obtenu en remplaçant chaque arête  $e$  de  $G$  par  $k$  arêtes  $e_1, \dots, e_k$  de mêmes extrémités que  $e$ .

Soit  $H$  une orientation de  $G$ . Nous appellerons circulation de  $H$  toute application de  $A(H)$  dans  $Z$ . Le bord d'une circulation  $f$  de  $H$  est l'application notée  $\partial f$  de  $V(H)$  dans  $Z$  définie par :

$$\forall v \in V(H), \quad \partial f(v) = \sum_{u \in \omega_H^+(\{v\})} f(u) - \sum_{u \in \omega_H^-(\{v\})} f(u)$$

b) Graphes cubiques  $[p, q]$  - orientables.Proposition 20 :

Soient  $G$  un graphe cubique et  $p, q$  deux entiers ( $1 \leq p < q$ ). Les conditions suivantes sont équivalentes :

( $\alpha$ )  $G$  est  $[p, q]$  - orientable.

( $\beta$ )  $G$  admet une valuation équilibrée à valeurs dans :

$$\left\{ -\frac{q+p}{q-p}, +\frac{q+p}{q-p} \right\} .$$

( $\gamma$ )  $(q-p) \times G$  admet une orientation  $H_{q-p}$  telle que :

$$\forall v \in V(G), \quad |d_{H_{q-p}}^+(v) - d_{H_{q-p}}^-(v)| = q+p.$$

( $\delta$ ) Il existe une orientation de  $G$  qui admet une circulation à valeurs :

- paires dans  $[0, q-p]$  si  $q-p$  est pair

- impaires dans  $[1, q-p]$  si  $q-p$  est impair

et dont le bord prend ses valeurs dans  $\{ -(q+p), q+p \}$  .

En effet :

( $\alpha$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\beta$ )

Soit  $w$  une valuation équilibrée de  $G$  qui prend la forme suivante :

$$\forall v \in V(G), w(v) = \frac{q+p}{q-p} \ell_v,$$

$$\text{avec } \ell_v \in \mathbb{Z} \text{ et } \ell_v \equiv d_G(v) \pmod{2}.$$

Puisque  $d_G(v) = 3$ ,  $\ell_v$  est un entier impair.

$w$  étant équilibrée :

$$\forall v \in V(G), |w(v)| \leq |\omega_G(\{v\})| = d_G(v) = 3$$

$$\text{et donc } |\ell_v| \leq \frac{q-p}{q+p} \times 3 < 3. \text{ D'où : } |\ell_v| = 1.$$

Il suffit alors d'utiliser la Proposition 19.

( $\beta$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\gamma$ )

$(q-p) \times G$  est un multigraphe régulier de degré  $3(q-p)$ , et  $q+p$  a même parité que ce degré. D'après la Remarque consécutive à la Proposition 17, ( $\gamma$ ) est donc vérifiée si et seulement si  $(q-p) \times G$  admet une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-(q+p), q+p\}$ .

Il suffit alors d'observer qu'une application  $w$  de  $V(G)$  dans  $\mathbb{Q}$  est une valuation équilibrée de  $(q-p) \times G$  si et seulement si l'application  $\frac{w}{q-p}$  est une valuation équilibrée de  $G$ .

( $\gamma$ )  $\Leftrightarrow$  ( $\delta$ ) :

Soit  $H$  une orientation de  $G$  ; nous noterons  $(q-p) \times H$  l'orientation de  $(q-p) \times G$  obtenue en remplaçant chaque arc  $u$  de  $H$  par  $(q-p)$  arcs ayant même extrémité initiale et même extrémité terminale que  $u$ , qui seront notés  $u_1, \dots, u_{q-p}$ .

Soit  $f$  une circulation de  $(q-p) \times H$ . Appelons résultante de  $f$  la circulation  $g$  de  $H$  définie par :

$$\forall u \in A(H), g(u) = \sum_{i=1}^{q-p} f(u_i).$$

$g$  et  $f$  ont évidemment même bord.

Si  $f$  prend ses valeurs dans  $\{-1, +1\}$ ,  $g$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $D_{q-p} = \{z \in [-1, q-p] / z \equiv q-p \pmod{2}\}$ .

Inversement, si  $g$  est une circulation de  $H$  qui prend ses valeurs dans  $D_{q-p}$ , on pourra construire une circulation  $f$  de  $(q-p) \times H$  qui prend ses valeurs dans  $\{-1, +1\}$  et dont  $g$  est la résultante.

Il suffit alors de remarquer que toute orientation  $H_{q-p}$  de  $(q-p) \times G$  telle que :

$$\forall v \in V(G), |d_{H_{q-p}}^+(v) - d_{H_{q-p}}^-(v)| = q + p$$

peut être identifiée à une circulation  $f$  de  $(q-p) \times H$ , à valeurs dans  $\{-1, +1\}$ , et dont le bord prend ses valeurs dans  $\{-(q+p), q+p\}$ .

Ceci achève la démonstration.

### c) Quelques exemples

#### . Graphes cubiques $F_3$ :

pour  $p = 1$ ,  $q = 2$  la Proposition 20 permet de retrouver simplement la Proposition 4(a) ; une valuation équilibrée du graphe cubique  $G$  à valeurs dans  $\{-3, +3\}$  définit une bicoloration de  $G$  au sens usuel du terme.

#### . Graphes cubiques $F_4$ :

la Proposition 4(b) et la Proposition 20 pour  $p = 1$ ,  $q = 3$  nous permettent de retrouver le résultat suivant de Bondy [24] : Un graphe cubique est d'indice chromatique 3 si et seulement si il admet une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-2, +2\}$ .

#### . Graphes cubiques $F_5$ :

Nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 21** : Soit  $G$  un graphe cubique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

( $\alpha$ )  $G$  est  $F_5$

( $\beta$ )  $G$  admet une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-\frac{5}{3}, +\frac{5}{3}\}$ .

( $\gamma$ ) Il existe une orientation de  $G$  qui admet une circulation à valeurs 1 ou 3 dont le bord prend la valeur +5 ou -5.

En effet :

Il s'agit là d'une conséquence directe de la Proposition 20 pour  $p = 1$  et  $q = 4$ .

Remarques :

- + La Proposition 21 pourra servir à une formulation de la conjecture ( $C_1$ ) (grâce à la Proposition 5).
- + Les trois conditions de la Proposition 21 sont vérifiées pour les graphes cubiques planaires 2-arête-connexes.

. Graphes cubiques  $F_8$  :

Proposition 22 : Tout graphe cubique 2-arête-connexe  $G$  possède les deux propriétés suivantes :

- ( $\alpha$ )  $G$  admet une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-\frac{4}{3}, +\frac{4}{3}\}$ .
- ( $\beta$ ) Il existe une orientation de  $G$  qui admet une circulation à valeurs 0, 1, 2 ou 3 dont le bord prend les valeurs +4 ou -4.

En effet :

Il s'agit là d'une conséquence de la Proposition 12 et de la Proposition 20 pour  $p = 1$  et  $q = 7$ .

d) Une propriété de bicoloration des graphes cubiques 2-arête-connexes.

Soit  $G$  un graphe cubique.

Nous appellerons bicoloration de  $G$  toute partition de  $V(G)$  en deux classes.

Une bicoloration de  $G$  sera dite égalitaire si elle comporte deux classes de même cardinalité.

Une bicoloration de  $G$  sera dite acyclique si chacune de ses deux classes est un cycliquement stable de  $G$  (définition donnée au Chapitre III).

La taille d'une bicoloration de  $G$  est la cardinalité maximum d'un ensemble unicolore de sommets de  $G$  qui engendre un sous-graphe connexe de  $G$ .

Proposition 23 : Soit  $G$  un graphe cubique qui admet une valuation équilibrée

$w$  à valeurs dans  $\{-\frac{q+p}{q-p}, \frac{q+p}{q-p}\}$  ( $1 \leq p < q$ ). Posons :

$$W^+ = \{v \in V(G) / w(v) > 0\} \quad \text{et} \quad W^- = V(G) - W^+.$$

Alors  $\{W^+, W^-\}$  est une bicoloration de  $G$  égalitaire, acyclique, de taille inférieure ou égale à  $\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor - 1$ .

En effet :

$w$  est équilibrée si et seulement si :

$$\forall S \subseteq V(G) \quad ||S \cap W^+| - |S \cap W^-|| \leq \frac{q-p}{q+p} |\omega_G(S)|$$

- pour  $S = V(G)$ , nous obtenons :  $|W^+| = |W^-|$ .

- si  $S$  est l'ensemble des sommets d'un cycle élémentaire sans cordes de  $G$ , nous obtenons :

$$||S \cap W^+| - |S \cap W^-|| \leq \frac{q-p}{q+p} |S| < |S|$$

et donc  $S$  est bicolore.

- si  $S$  est unicolore et si  $G_S$  est un arbre, nous obtenons :

$$|S| = ||S \cap W^+| - |S \cap W^-|| \leq \frac{q-p}{q+p} |\omega_G(S)|$$

avec  $|\omega_G(S)| = 3|S| - 2|E(G_S)| = 3|S| - 2(|S| - 1)$ .

$$\text{Donc} : |S| \leq \frac{q-p}{q+p} (|S| + 2)$$

ou encore :  $2p|S| \leq 2(q-p)$ , soit  $|S| \leq \frac{q}{p} - 1$ .

Ceci achève la démonstration.

A titre d'exemple donnons deux conséquences de la Proposition 23 :

( $\alpha$ ) Tout graphe cubique 2-arête-connexe admet une bicoloration égalitaire acyclique de taille inférieure ou égale à  $t = 6$ .

( $\beta$ ) Tout graphe cubique 2-arête-connexe planaire admet une bicoloration égalitaire acyclique de taille inférieure ou égale à  $t' = 3$ .

Bondy conjecture dans [24] que ( $\beta$ ) peut être amélioré en faisant  $t' = 2$  (cette conjecture est plus faible que la Conjecture des Quatre Couleurs).

De même nous conjecturons que ( $\alpha$ ) peut être amélioré en faisant  $t = 3$  (cette conjecture est plus faible que la conjecture ( $C_1$ )).

Remarques :

- La Proposition 23 s'avère utile en pratique à l'étude de la propriété  $F_k$  pour les graphes cubiques. C'est ainsi par exemple que le moyen le plus simple de prouver que le graphe de Petersen n'est pas  $F_4$  consiste à vérifier qu'il n'admet aucune bicoloration égalitaire acyclique de taille inférieure ou égale à 2 ; d'autre part la construction d'une bicoloration égalitaire acyclique de taille 3 pourra guider la recherche d'une  $[1,4]$ -orientation.

- On peut montrer que tout graphe cubique admet une bicoloration acyclique de taille inférieure ou égale à 2, non nécessairement égalitaire ([7], Corollaire du Théorème 4 du Chapitre 19 ; [81]).

## 6 . QUELQUES PROBLEMES OUVERTS

Jusqu'ici nous nous sommes surtout intéressés à la propriété de  $[p, q]$  - orientabilité pour  $p = 1$  (c'est-à-dire à la propriété  $F_{q+1}$ ). De nouveaux problèmes surgissent si l'on admet d'autres valeurs de  $p$  ; nous en proposons quelques uns ci-dessous.

Appelons valeur d'équilibre d'un graphe cubique 2-arête-connexe  $G$  et notons  $e(G)$  le plus grand rationnel  $e$  tel que  $G$  admette une valuation équilibrée à valeurs dans  $\{-e, +e\}$  ;  $e(G)$  pourra être défini comme le maximum pour toutes les bicolorations égalitaires  $\{W^+, W^-\}$  de  $G$  du nombre :

$$\min_{\emptyset \subset S \subset V(G)} \frac{|\omega_G(S)|}{||S \cap W^+| - |S \cap W^-||}.$$

D'après la Proposition 22, pour tout graphe cubique 2-arête-connexe  $G$ ,  $e(G) \geq \frac{4}{3}$  ; il est clair d'autre part que  $e(G) \leq 3$ , avec l'égalité si et seulement si  $G$  est biparti.

Problème 1 :

pour quelles valeurs rationnelles de  $e$ ,  $\frac{4}{3} \leq e \leq 3$ , existe-t-il un graphe cubique 2-arête-connexe  $G$  tel que  $e(G) = e$  ?

Problème 2 :

Pour quelles valeurs rationnelles de  $e$ ,  $\frac{5}{3} \leq e \leq 3$ , existe-t-il un graphe cubique 2-arête-connexe planaire  $G$  tel que  $e(G) = e$  ?

Remarques :

- La conjecture  $(C_1)$  concerne la partie  $e < \frac{5}{3}$  du Problème 1 ; la Conjecture des Quatre Couleurs concerne la partie  $e < 2$  du Problème 2.

- Il n'existe pas de graphe cubique  $G$  tel que  $2 < e(G) < 3$ .



En effet si  $e(G) > 2$ ,  $G$  admet une valuation équilibrée à valeurs dans un ensemble  $\{\frac{q+p}{q-p}, \frac{q+p}{q-p}\}$  ( $1 \leq p < q$ ) tel que  $\frac{q+p}{q-p} > 2$ , soit :  $3p > q$  ; on en déduit, d'après la Proposition 23, que  $G$  admet une bicoloration équilibrée acyclique de taille 1, et donc que  $G$  est biparti.

- La remarque précédente nous amène à nous poser les questions suivantes :

+  $e(G)$  peut-il prendre une infinité de valeurs ?

+ existe-t-il un graphe cubique  $G$  tel que  $\frac{5}{3} < e(G) < 2$  ?

- Les deux directions de recherche proposées ci-dessous nous paraissent intéressantes :

+ essayer d'améliorer le Théorème des Cinq Couleurs par un résultat du type  $e(G) \geq e (e > \frac{5}{3})$  ou du type  $e(G) > e (e \geq \frac{5}{3})$  pour les graphes cubiques  $G$  planaires 2-arête-connexes.

+ essayer de montrer que tout résultat du type précédent est équivalent à la Conjecture des Quatre Couleurs.

## VI . UN LIEN ENTRE LES CONJECTURES (C<sub>1</sub>) ET (C<sub>2</sub>).

### 1 . INTRODUCTION

Nous nous proposons ici de montrer que si la Conjecture (C<sub>2</sub>) est vraie, la conjecture suivante :

(C<sub>3</sub>) Tout multigraphe 2-arête-connexe est  $F_6$ .

(plus faible que la Conjecture (C<sub>1</sub>)) est également vraie.

Par conséquent, si nous savions améliorer la Proposition 13, nous saurions également améliorer la Proposition 12.

Nous utiliserons un résultat annexe présenté à la page suivante.

2 . UNE PROPRIETE DES MULTIGRAPHES CUBIQUES SANS BOUCLES 2-ARETE-CONNEXESa) Introduction

Soit  $G$  un multigraphe cubique sans boucles.

Rappelons qu'un 2-facteur de  $G$  est une partie  $K$  de  $E(G)$  telle que tout sommet de  $G$  est incident à exactement deux arêtes de  $K$  ;  $K$  est donc un 2-facteur de  $G$  si et seulement si  $E(G) - K$  est un couplage parfait de  $G$ . On pourra déduire d'un résultat de C. Berge ([7], Chapitre 8, Théorème 13) le Lemme suivant :

Lemme :

Pour tout multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe  $G$  et pour toute arête  $e$  de  $G$ , il existe un 2-facteur  $K$  de  $G$  tel que  $e \notin K$ .

Nous allons préciser ce résultat, en utilisant les définitions et remarques suivantes, valables pour tout multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe  $G$  :

- Une 3-coupe de  $G$ , soit  $\omega_G(S)$  ( $\emptyset \subset S \subset V(G)$ ), sera dite triviale si  $|S| = 1$  ou  $|V(G) - S| = 1$ , et non-triviale dans le cas contraire.
- Nous appellerons pièce de  $G$  tout ensemble  $S$  ( $\emptyset \subset S \subset V(G)$ ) tel que  $\omega_G(S)$  est une 3-coupe non-triviale de  $G$  ; dans ce cas  $V(G) - S$  est évidemment aussi une pièce de  $G$ .
- Pour toute pièce  $S$  de  $G$  :  

$$3|S| = |\omega_G(S)| + 2 |E(G_S)| = 3 + 2 |E(G_S)|$$
, et donc  $|S|$  est un nombre impair appartenant à l'intervalle  $[3, |V(G)| - 3]$ .
- Pour toute pièce  $S$  de  $G$ ,  $G_S$  est connexe (sinon  $G$  admettrait une 0-coupe ou une 1-coupe).
- Un 2-facteur de  $G$  intersecte toute  $k$ -coupe de  $G$  ( $k \geq 2$ ) en un nombre pair d'arêtes ; en particulier un 2-facteur de  $G$  intersecte toute 3-coupe de  $G$  en 0 ou 2 arêtes, et toute 3-coupe triviale de  $G$  en 2 arêtes.

b) Renforcement du Lemme.

Proposition 24 : Pour tout multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe  $G$  et pour toute arête  $e$  de  $G$ , il existe un 2-facteur  $K$  de  $G$  tel que :

- a)  $e \notin K$
- b)  $K$  intersecte toute 3-coupe de  $G$  en deux arêtes.

En effet :

Nous procéderons par récurrence sur le nombre (pair) de sommets de  $G$ .

- Le résultat est vérifié pour  $|V(G)| = 2$ .
- Supposons que le résultat est vérifié pour  $|V(G)| \leq 2n$  ( $n \geq 1$ ), et soit maintenant  $G$  un multigraphe cubique sans boucles 2-arête-connexe avec  $|V(G)| = 2n + 2$  ; soit  $e \in E(G)$ .

Si toutes les 3-coupes de  $G$  sont triviales,  $G$  vérifie la Proposition 24 d'après le Lemme.

Sinon soit  $S'$  une pièce de  $G$  ; nous poserons  $S'' = V(G) - S'$  et  $\omega_G(S') = \omega_G(S'') = \{e_1, e_2, e_3\}$ .  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  nous désignerons par  $v'_i$  (respectivement :  $v''_i$ ) l'extrémité de  $e_i$  appartenant à  $S'$  (respectivement :  $S''$ ).

Définissons :

- + deux sommets nouveaux  $v'_0$  et  $v''_0$  (n'appartenant pas à  $V(G)$ ).
- + six arêtes nouvelles :  $e'_i$  (d'extrémités  $v'_0, v'_i$ ) et  $e''_i$  (d'extrémités  $v''_0, v''_i$ ) ( $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ).

Soit  $G'$  (respectivement :  $G''$ ) le multigraphe ayant pour ensemble de sommets  $S' \cup \{v'_0\}$  (respectivement :  $S'' \cup \{v''_0\}$ ) et pour ensemble d'arêtes  $E(G_{S'}) \cup \{e'_1, e'_2, e'_3\}$  (respectivement :  $E(G_{S''}) \cup \{e''_1, e''_2, e''_3\}$ ).

Il est clair que  $G'$  et  $G''$  sont des multigraphes cubiques sans boucles 2-arête-connexes. De plus :

$$|V(G')| = |S'| + 1 \leq 2n \text{ et } |V(G'')| = |S''| + 1 \leq 2n.$$

Donc d'après notre hypothèse de récurrence  $G'$  et  $G''$  vérifient la Proposition 24.

Supposons par exemple que  $e \notin E(G_{S''})$ .

+ Il existe un 2-facteur  $K'$  de  $G'$  tel que :

- (a') • Si  $e \in E(G_{S'})$  (donc  $e \in E(G')$ ) :  $e \notin K'$   
 • Si  $e \in \omega_G(S')$ , c'est-à-dire si  $e = e_i$   
 ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) :  $e'_i \notin K'$

(b')  $K'$  intersecte toute 3-coupe de  $G'$  en deux arêtes.

+ Nous supposons dans la suite que  $e'_3 \notin K'$ , ce qui est vrai à la rénumérotation près des arêtes  $e_1, e_2, e_3$  ; (a') s'interprète alors comme suit :  $e \notin (K' - \{e'_1, e'_2\}) \cup \{e_1, e_2\}$ .

+ Il existe un 2-facteur  $K''$  de  $G''$  tel que :

- (a'')  $e''_3 \notin K''$   
 (b'')  $K''$  intersecte toute 3-coupe de  $G''$  en deux arêtes.

+ Posons :  $K = (K' - \{e'_1, e'_2\}) \cup (K'' - \{e''_1, e''_2\}) \cup \{e_1, e_2\}$ .

$K$  est un 2-facteur de  $G$ . De plus d'après (a'),  $e \notin K$ .

Il reste à démontrer que  $K$  intersecte toute 3-coupe de  $G$  en deux arêtes ; il suffira de le vérifier pour les 3-coupes non-triviales ne contenant ni  $e_1$  ni  $e_2$ .

Soit donc  $T'$  une pièce de  $G$  telle que  $\omega_G(T') \cap \{e_1, e_2\} = \emptyset$  ; nous poserons  $T'' = V(G) - T'$ . Montrons que  $\omega_G(T') \cap K \neq \emptyset$ .

Nous utiliserons le fait que  $S'$  et  $S''$  d'une part,  $T'$  et  $T''$  de l'autre, jouent le même rôle, pour limiter le nombre de cas à étudier.

Premier cas :

Chacun des quatre ensembles  $S' \cap T'$ ,  $S' \cap T''$ ,  $S'' \cap T'$ ,  $S'' \cap T''$  est non-vide.

La connexité de  $G_{S'}$ ,  $G_{S''}$ ,  $G_{T'}$ ,  $G_{T''}$  implique alors que chacun des quatre ensembles :

$$E_1 = E(G_{S'}) \cap \omega_G(T'), E_2 = E(G_{S''}) \cap \omega_G(T'),$$

$$E_3 = E(G_{T'}) \cap \omega_G(S'), E_4 = E(G_{T''}) \cap \omega_G(S')$$

est non-vide.

Deux possibilités se présentent :

- $\omega_G(S') \cap \omega_G(T') = \{e_3\}$  . Dans ce cas :

$$\begin{cases} |\omega_G(S') \cup \omega_G(T')| = 5 \\ \omega_G(S') \cup \omega_G(T') = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \{e_3\} \end{cases}$$

et donc :  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, |E_i| = 1$ .

Supposons par exemple que  $v'_3 \in T'$  . On constate que :

$$\omega_G(S' \cap T') = E_1 \cup E_3 \cup \{e_3\}$$

est une 3-coupe de  $G$  .  $K$  intersecte cette 3-coupe en au moins une arête (puisque  $E_3 \subseteq \{e_1, e_2\}$ ) ; donc  $K$  intersecte cette 3-coupe en 2 arêtes ; comme  $e_3 \notin K$ ,  $E_1 \subseteq K$ .

Or  $E_1 \subseteq \omega_G(T')$  . D'où :  $\omega_G(T') \cap K \neq \emptyset$ .

- $\omega_G(S') \cap \omega_G(T') = \emptyset$  . Dans ce cas :

$$\omega_G(S') = E_3 \cup E_4 \text{ et } \omega_G(T') = E_1 \cup E_2.$$

Supposons par exemple que  $|E_1| = |E_3| = 2$  et  $|E_2| = |E_4| = 1$ .

On constate que :

$$\omega_G(S' \cap T'') = E_1 \cup E_4$$

est une 3-coupe de  $G$ .

Soit  $k$  l'unique élément de  $\{1, 2, 3\}$  tel que  $E_4 = \{e_k\}$ .

$E_1 \cup \{e'_k\}$  est une 3-coupe de  $G'$ .

D'après (b') :  $|K' \cap (E_1 \cup \{e'_k\})| = 2$ .

Donc  $K' \cap E_1 \neq \emptyset$ .

Or  $E_1 \subseteq \omega_G(T')$  . D'où :  $\omega_G(T') \cap K \neq \emptyset$ .

Deuxième cas :

L'un au moins des quatre ensembles  $S' \cap T'$ ,  $S' \cap T''$ ,  $S'' \cap T'$ ,  $S'' \cap T''$  est vide.

Supposons par exemple que  $S' \cap T' = \emptyset$ , soit :  $T' \subseteq S''$ .

Deux possibilités se présentent :

- $\omega_G(S') \cap \omega_G(T') = \{e_3\}$ . Dans ce cas,  $(\omega_G(T') - \{e_3\}) \cup \{e_3\}$  peut être identifié à la 3-coupe  $\omega_{G''}(T')$  de  $G''$ .

D'après (b'') :  $|K'' \cap \omega_{G''}(T')| = 2$ .

Puisque  $e_3 \notin K''$ , il vient :  $|K'' \cap \omega_G(T')| = 2$ .

D'où :  $\omega_G(T') \cap K \neq \emptyset$ .

- $\omega_G(S') \cap \omega_G(T') = \emptyset$ . Dans ce cas,  $\omega_G(T')$  peut être identifié à la 3-coupe  $\omega_{G''}(T')$  de  $G''$ .

D'après (b'') :  $|K'' \cap \omega_{G''}(T')| = 2$ .

D'où :  $\omega_G(T') \cap K \neq \emptyset$ .

En examinant tous les cas possibles nous venons de démontrer que  $K$  intersecte toutes les 3-coupes de  $G$  en deux arêtes.

$G$  vérifie donc la Proposition 24.

- Ceci achève la démonstration.

### 5 . APPLICATION AUX FLOTS NON-NULS

Proposition 25 : Considérons les deux assertions suivantes :

(C<sub>2</sub>) Tout multigraphe 2-arête-connexe sans 3-coupes est  $F_3$ .

(C<sub>3</sub>) Tout multigraphe 2-arête-connexe est  $F_6$ .

Alors (C<sub>2</sub>)  $\rightarrow$  (C<sub>3</sub>).

En effet :

Supposons que (C<sub>2</sub>) est vrai. D'après la Proposition 5, il nous suffit de démontrer (C<sub>3</sub>) pour les graphes cubiques 2-arête-connexes. Soit  $G$  un tel graphe. D'après la Proposition 24, il existe un 2-facteur  $K$  de  $G$  qui intersecte toutes les 3-coupes de  $G$  en deux arêtes. Soit  $G'$  le multigraphe obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête de  $K$  par deux arêtes de mêmes extrémités.  $G'$  est un multigraphe 5-régulier 2-arête-connexe. De plus :

$$\forall S (\emptyset \neq S \subset V(G)) : |\omega_{G'}(S)| = |\omega_G(S)| + |K \cap \omega_G(S)|$$

On en déduit immédiatement que  $G'$  ne comporte pas de 3-coups. Donc, d'après  $(C_2)$ ,  $G'$  est  $F_3$ , c'est-à-dire  $[1,2]$ -orientable. D'après la Proposition 19,  $G'$  admet une valuation équilibrée  $w$  du type suivant :

$$\forall v \in V(G'), w(v) = \frac{2+1}{2-1} \ell_v \text{ avec } \ell_v \in \mathbb{Z} \text{ et } \ell_v \equiv d_{G'}(v) \pmod{2}.$$

Puisque  $d_{G'}(v) = 5$ ,  $\ell_v$  est un entier impair. De plus :

$$|w(v)| \leq d_{G'}(v) = 5 \Rightarrow 3|\ell_v| \leq 5, \text{ et donc } |\ell_v| = 1.$$

En conclusion  $w$  est une valuation équilibrée de  $G'$  à valeurs dans  $\{-3, +3\}$ .

$\forall S \subseteq V(G)$  :

$$|\omega_G(S)| \geq \frac{1}{2} |\omega_{G'}(S)| \geq \frac{1}{2} \left| \sum_{v \in S} w(v) \right|.$$

Donc  $\frac{w}{2}$  est une valuation équilibrée de  $G$  à valeurs dans

$$\left\{ -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\} = \left\{ -\frac{5+1}{5-1}, \frac{5+1}{5-1} \right\}.$$

D'après la Proposition 20,  $G$  est  $[1,5]$ -orientable, c'est-à-dire  $F_6$ . Donc  $G$  vérifie  $(C_3)$ .

Ceci achève la démonstration.

Remarque :

- On pourrait également démontrer le résultat précédent en construisant à partir d'un  $\mathbb{Z}_3$ -flot non-nul d'une orientation de  $G'$  un  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ -flot non-nul d'une orientation de  $G$ .
- De même en construisant à partir d'un  $\mathbb{Z}_4$ -flot non-nul d'une orientation de  $G'$  un  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ -flot non-nul d'une orientation de  $G$ , on pourrait déduire la Proposition 12 de la Proposition 13.

### VII . PARCOURS PRÉ-EULÉRIENS ET FLOTS NON-NULS.

Soit  $G$  un multigraphe sans boucles.

Nous appellerons parcours de  $G$  toute séquence :

$$P = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_r, e_r, v_{r+1} \quad (r \geq 1)$$

telle que :

$$- \forall i \in [1, r+1], v_i \in V(G).$$

$$- \forall i \in [1, r], e_i \in E(G) \text{ et } e_i = \{v_i, v_{i+1}\}.$$

$$- v_{r+1} = v_1.$$

$\forall e \in E(G), e = \{v, v'\}$ , nous poserons :

$$I_P(v, e, v') = \{i \in [1, r] / v_i = v, e_i = e, v_{i+1} = v'\}$$

$$\text{et } I_P(e) = I_P(v, e, v') \cup I_P(v', e, v).$$

Le parcours  $P$  sera dit cohérent si :

$$\forall e \in E(G), e = \{v, v'\} : |I_P(v, e, v')| \times |I_P(v', e, v)| = 0.$$

Le parcours  $P$  sera dit pré-eulérien si :

$$\forall e \in E(G), |I_P(e)| \geq 1.$$

La redondance de  $P$  est le nombre :

$$\max_{e \in E(G)} |I_P(e)|$$

**Proposition 26** : Soit  $G$  un multigraphe connexe sans boucles.

$G$  est  $F_q$  ( $q \geq 2$ ) si et seulement si il admet un parcours cohérent pré-eulérien de redondance inférieure ou égale à  $q - 1$ .

En effet :

(a) Soit  $P$  un parcours cohérent pré-eulérien de redondance  $r$  ( $1 \leq r \leq q - 1$ ) de  $G$ .



Remplaçons toute arête  $e = \{v, v'\}$  de  $G$  par l'arc :

-  $(v, v')$  si  $|I_P(v, e, v')| \neq 0$

-  $(v', v)$  si  $|I_P(v', e, v)| \neq 0$

(une et une seulement de ces situations se réalise puisque  $P$  est cohérent et pré-eulérien).

Nous obtenons ainsi une orientation  $H$  de  $G$ .

Pour tout arc  $u$  de  $H$ , correspondant à l'arête  $e$  de  $G$ , nous poserons :

$$\phi(u) = |I_P(e)|.$$

Il sera facile de vérifier que  $\phi$  est un  $\mathbb{Z}$ -flot de  $H$  à valeurs dans  $[1, r]$ . Donc  $G$  est  $F_{r+1}$ , et aussi  $F_q$ .

- (b) Inversement si  $G$  est  $F_q$ , soient  $H$  une  $[1, q-1]$ -orientation de  $G$  et  $\phi$  un  $\mathbb{Z}$ -flot de  $H$  à valeurs dans  $[1, q-1]$ . Remplaçons chaque arc  $u$  de  $H$  par  $\phi(u)$  arcs ayant même extrémité initiale et même extrémité terminale que  $u$  ; nous obtenons ainsi un multigraphe orienté noté  $\phi \times H$ . On vérifiera immédiatement que  $\phi \times H$  est connexe et pseudo-symétrique (pour la définition d'un multigraphe orienté pseudo-symétrique se reporter à [7], p. 229). D'après le Théorème 6 du Chapitre 11 de [7],  $\phi \times H$  admet un circuit eulérien.

Il sera alors facile d'identifier un tel circuit à un parcours cohérent  $P$  de  $G$  ;  $\phi$  prenant ses valeurs dans  $[1, q-1]$ ,  $P$  sera pré-eulérien et de redondance inférieure ou égale à  $q-1$ .

- (c) Ceci achève la démonstration de la Proposition 26.

Remarque :

*Les principaux résultats et problèmes présentés dans ce chapitre pourront donc être formulés en termes de parcours.*

## VIII . LA CONJECTURE (C<sub>1</sub>) COMME PROBLÈME DE COLORATION

### 1 . INTRODUCTION

D'après les Propositions 8 et 5, la Conjecture (C<sub>1</sub>) peut se formuler comme suit :

(C'<sub>1</sub>) Tout graphe cubique G 3-arête-connexe est F<sub>5</sub>.

(C'<sub>1</sub>) est vraie pour les graphes G planaires (Proposition 3 et Théorème des Cinq Couleurs) et pour les graphes G d'indice chromatique 3 (Proposition 4).

(C'<sub>1</sub>) pourra être vérifiée dans d'autres cas : c'est ainsi que nous avons pu démontrer la validité de (C'<sub>1</sub>) pour une famille infinie de graphes cubiques 3-arête-connexes non planaires d'indice chromatique 4 définis comme "les graphes J<sub>k</sub>" dans [82].

Nous ne donnerons pas ici de démonstration pour ce dernier résultat, mais nous présenterons la formulation en termes de colorations de la propriété F<sub>5</sub> qui nous a permis d'aboutir.

### 2 . UN PROBLÈME DE COLORATION POUR LES GRAPHES CUBIQUES

Proposition 27 : Soit G un graphe cubique.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) G est F<sub>5</sub>.
- (b) G admet une coloration de ses sommets en deux couleurs x et y et une coloration de ses arêtes en deux couleurs α et β telles que :
  - il n'y a pas de sommet unicolore (c'est-à-dire incident à trois arêtes d'une même couleur α ou β) ;
  - une arête est unicolore (c'est-à-dire incidente à deux sommets d'une même couleur x ou y) si et seulement si elle est de couleur α et intersecte une et une seule autre arête de couleur α.

En effet :

D'après la Proposition 21, (a) équivaut à :

(a') Il existe une orientation de G qui admet une circulation à valeurs 1 ou 3 dont le bord prend les valeurs +5 ou -5.

(a')  $\Rightarrow$  (b) :

Soit  $H$  une orientation de  $G$  et  $f$  une circulation de  $H$  à valeurs 1 ou 3 dont le bord prend les valeurs +5 ou -5.

A chaque sommet  $v \in V(G)$  nous associerons son type  $t(v) = (z_1, z_2, z_3)$  défini comme suit :

-  $z_1, z_2, z_3$  sont les 3 nombres de la forme  $\varepsilon(u) f(u)$  pour  $u \in \omega_H(\{v\})$ ,

$$\text{où : } \begin{cases} \varepsilon(u) = +1 \text{ si } u \in \omega_H^+(\{v\}) \\ \varepsilon(u) = -1 \text{ si } u \in \omega_H^-(\{v\}) \end{cases}$$

-  $z_1 \geq z_2 \geq z_3$ .

On pourra vérifier que tout sommet appartient à l'un des types suivants :

$$t_1 = (3, 1, 1) ; t_2 = (3, 3, -1) ; t_3 = (1, -3, -3) ; t_4 = (-1, -1, -3).$$

A chaque arc  $u$  de  $H$ ,  $u = (v, v')$ , nous associerons également son type  $t(u)$  égal par définition au couple ordonné  $(t(v), t(v'))$ .

Colorions en  $x$  les sommets de type  $t_1$  ou  $t_2$ , et en  $y$  les sommets de type  $t_3$  ou  $t_4$ .

Colorions en  $\alpha$  les arêtes de  $G$  dont l'arc correspondant  $u$  de  $H$  vérifie  $f(u) = 1$ , et en  $\beta$  les arêtes dont l'arc correspondant  $u$  vérifie  $f(u) = 3$ .

Il est clair que  $G$  ne comporte pas de sommets unicolores.

Soit  $e$  une arête de  $G$  et  $u$  l'arc correspondant de  $H$ .

Il sera facile de vérifier l'équivalence des trois conditions suivantes :

- $e$  est unicolore
- $f(u) = 1$  et  $t(u) \in \{(t_1, t_2), (t_3, t_4)\}$ .
- $e$  est de couleur  $\alpha$  et intersecte une et une seule autre arête de couleur  $\alpha$ .

$G$  vérifie donc (b).

(b)  $\Rightarrow$  (a') :

Supposons que les sommets de  $G$  sont coloriés en deux couleurs  $x$  et  $y$ , et que les arêtes de  $G$  sont coloriées en deux couleurs  $\alpha$  et  $\beta$ , de manière à satisfaire à la condition (b).

Recolorions en  $\alpha_1$  les arêtes unicolores de couleur  $\alpha$  et en  $\alpha_2$  les arêtes bicolorées de couleur  $\alpha$ .

A tout sommet  $v$  de  $G$  nous associerons son type  $t(v) = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ , où  $C_1$  est la couleur de  $v$  et où  $C_2, C_3, C_4$  sont les couleurs des trois arêtes incidentes à  $v$ , rangées selon l'ordre  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ .

Tout sommet, étant bicoloré, appartient à l'un des 10 types suivants :

$$- t_1 = (x, \alpha_1, \alpha_1, \beta) ; t_2 = (x, \alpha_1, \alpha_2, \beta) ; t_3 = (x, \alpha_2, \alpha_2, \beta) ; \\ t_4 = (x, \alpha_1, \beta, \beta) ; t_5 = (x, \alpha_2, \beta, \beta).$$

-  $t'_i (i \in [1, 5])$  où  $t'_i$  s'obtient à partir de  $t_i$  en remplaçant la première composante  $x$  par  $y$ .

A toute arête  $e$  de  $G$ ,  $e = \{v, v'\}$ , nous associerons également son type  $t(e)$  égal par définition à l'ensemble  $\{t(v), t(v')\}$ .

On pourra vérifier que :

- Toute arête  $e$  de couleur  $\alpha_1$  appartient à l'un des types suivants :  
 $\{t_1, t_4\}, \{t_2, t_4\}, \{t'_1, t'_4\}, \{t'_2, t'_4\}$

(en effet  $e$  joint deux sommets de même couleur, l'un incident à une arête de couleur  $\beta$ , et l'autre incident à deux arêtes de couleur  $\beta$ ).

- Toute arête de couleur  $\alpha_2$  incidente à un sommet de type  $t_5$  (ou  $t'_5$ ) est nécessairement de type  $\{t_5, t'_5\}$  (sinon  $e$  serait incidente à exactement une autre arête de couleur  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ , ce qui est impossible).

Soit alors  $H$  l'orientation de  $G$  définie de la manière suivante :

- Toute arête bicolorée de  $G$  sera orientée du sommet colorié  $x$  vers le sommet colorié  $y$ , à l'exception des arêtes de couleur  $\alpha_2$  et de type  $\{t_5, t'_5\}$  qui seront orientées en sens inverse.

- Les arêtes unicolores (de couleur  $\alpha_1$ ) seront orientées comme suit :
  - + les arêtes de type  $\{t_i, t_4\}$  ( $i = 1, 2$ ) du sommet de type  $t_i$  au sommet de type  $t_4$ .
  - + les arêtes de type  $\{t'_i, t'_4\}$  ( $i = 1, 2$ ) du sommet de type  $t'_4$  au sommet de type  $t'_i$ .

Soit  $f$  la circulation de  $H$  qui associe à un arc de  $H$  la valeur 1 (respectivement : 3) si l'arête correspondante de  $G$  est de couleur  $\alpha$  (respectivement :  $\beta$ ).

Calculons le bord de  $f$ , soit  $\partial f$ .

Soit  $v$  un sommet de  $G$ , de type  $t(v) = (C_1, C_2, C_3, C_4)$  ; notons  $e_2, e_3, e_4$  les trois arêtes incidentes à  $v$ , de sorte que  $\forall i \in \{2, 3, 4\}, C_i$  soit la couleur de  $e_i$  ;  $\forall i \in \{2, 3, 4\}$  soit  $u_i$  l'arc de  $H$  correspondant à  $e_i$ .

Nous associerons à  $v$  le triplet :

$$z(v) = (\varepsilon(u_2) f(u_2), \varepsilon(u_3) f(u_3), \varepsilon(u_4) f(u_4))$$

$$\text{où, } \forall i \in \{2, 3, 4\} : \begin{cases} \varepsilon(u_i) = +1 \text{ si } u_i \in \omega_H^+(\{v\}) \\ \varepsilon(u_i) = -1 \text{ si } u_i \in \omega_H^-(\{v\}). \end{cases}$$

On vérifie alors que :

$$- t(v) = t_1 = (x, \alpha_1, \alpha_1, \beta) \Rightarrow z(v) = (1, 1, 3)$$

$$- t(v) = t_2 = (x, \alpha_1, \alpha_2, \beta) \Rightarrow z(v) = (1, 1, 3)$$

$$- t(v) = t_3 = (x, \alpha_2, \alpha_2, \beta) \Rightarrow z(v) = (1, 1, 3)$$

$$- t(v) = t_4 = (x, \alpha_1, \beta, \beta) \Rightarrow z(v) = (-1, 3, 3)$$

$$- t(v) = t_5 = (x, \alpha_2, \beta, \beta) \Rightarrow z(v) = (-1, 3, 3)$$

On en déduit que si  $v$  est de type  $t_i$  ( $i \in [1, 5]$ ),  $\partial f(v) = +5$ .

On remarque en outre que si  $v$  est de type  $t_i$  et si  $v'$  est de type  $t'_i$  ( $i \in [1, 5]$ ),  $z(v')$  se déduit de  $z(v)$  par changement de signes, et donc  $\partial f(v') = -\partial f(v)$ .

Par conséquent  $\partial f$  prend ses valeurs dans  $\{-5, +5\}$ .

$G$  vérifie donc (a').

Ceci achève la démonstration.

Remarques :

- La coloration en deux couleurs  $x$  et  $y$  des sommets de  $G$  introduite à la page précédente définit une valuation équilibrée de  $G$  à valeurs dans  $\{-\frac{5}{3}, +\frac{5}{3}\}$ .
- La proposition 27 permet de formuler la Conjecture  $(C_1)$  comme problème de coloration ; elle s'avère utile à l'étude de la propriété  $F_5$  pour un graphe cubique donné.



ANNEXE I

---

NOMBRE MAXIMAL D'ARETES D'UN  
HYPERGRAPHE  $\tau$ -CRITIQUE DE RANG  $h$ .





THÉORIE DES GRAPHEs. — *Nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe  $\tau$ -critique de rang  $h$ .* Note (\*) de MM. FRANÇOIS JAEGER et CHARLES PAYAN, présentée par M. André Lichnerowicz.

Nous démontrons un résultat de nature combinatoire en utilisant la Théorie des graphes. Ce résultat permet d'établir une propriété des hypergraphes  $\tau$ -critiques conjecturée par P. Erdős et T. Gallai [(1), (2)].

Les notations utilisées sont celles de C. Berge (3). Le détail des démonstrations n'est pas donné et fera l'objet d'une autre publication.

Dans toute la suite  $h$  et  $k$  désignent des entiers strictement positifs.

Nous appellerons  $(h, k)$ -couple tout couple  $(H, K)$  où :

- $H = (X; \mathcal{G})$  est un hypergraphe de rang  $h$ .
- $K = (Y; \mathcal{F})$  est un hypergraphe de rang  $k$ .
- Une arête quelconque de l'un des hypergraphes est disjointe d'une arête de l'autre hypergraphe et d'une seule.

Cette dernière condition impose que  $H$  et  $K$  aient le même nombre  $m$  d'arêtes; cet entier non nul  $m$  sera appelé le *cardinal* du  $(h, k)$ -couple. Nous appellerons support de  $(H, K)$  l'ensemble  $X \cup Y$ . Enfin  $(H, K)$  sera dit *uniforme* si et seulement si  $H$  et  $K$  sont tous deux uniformes.

Nous démontrons le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — *Le cardinal maximal d'un  $(h, k)$ -couple est  $\binom{h+k}{h}$ .*

**LEMME 1.** — *Le cardinal maximal d'un  $(h, k)$ -couple est égal au cardinal maximal d'un  $(h, k)$ -couple uniforme.*

En effet, étant donné un  $(h, k)$ -couple quelconque, on peut construire un  $(h, k)$ -couple uniforme de même cardinal en adjoignant à certaines arêtes des sommets extérieurs au support initial.

Soit alors  $X$  un ensemble fini avec  $|X| \geq h+k$ , et soit  $C$  l'ensemble des  $(h, k)$ -couples uniformes de support inclus dans  $X$ . Il nous suffit de montrer que le cardinal maximal d'un élément de  $C$  est  $\binom{h+k}{h}$ .

Soit  $E$  l'ensemble des éléments de  $C$  de cardinal 1 :

$$E = \{ (A, B) : A \subseteq X, |A| = h; B \subseteq X, |B| = k; A \cap B = \emptyset \}.$$

Soit  $R$  la relation binaire sur  $E$  définie par

$$(A, B) R (A', B') \Leftrightarrow (A, B) \neq (A', B') \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{soit } (A, B') \in E, \\ \text{soit } (A', B) \in E \text{ (ou les deux)}. \end{cases}$$

Soit  $G = (E; R)$  le graphe simple associé à cette relation symétrique et antiréflexive.

**LEMME 2.** — *Le cardinal maximal d'un élément de  $C$  est égal au nombre de stabilité  $\alpha(G)$ .*

En effet, à tout stable de G on peut associer un élément de C de même cardinal, et réciproquement.

Soit donc à montrer :

$$\alpha(G) = \binom{h+k}{h}.$$

*Une partition de E en stables de G :*

Soit  $Y \subseteq X$  avec  $|Y| = h+k$ .

Soit  $E_Y = \{(A, B) \in E : A \cup B = Y\}$ .

$E_Y$  est un stable de G de cardinal  $\binom{h+k}{h}$  [donc  $\alpha(G) \geq \binom{h+k}{h}$ ].

L'ensemble des  $E_Y$  constitue une partition de E.

*Une famille de cliques de G :*

Soit O un ordre total sur X.

Soit  $C(O) = \{(A, B) \in E : \forall a \in A, \forall b \in B, a O b\}$ .

$C(O)$  est une clique de G qui intersecte  $E_Y$ ,  $\forall Y \subseteq X$  avec  $|Y| = h+k$ .

Soit  $\Gamma = \{C(O) : O \text{ est un ordre total sur } X\}$ .

$\forall (A, B) \in E$  soit  $\Gamma_{(A, B)} = \{\Gamma_i \in \Gamma : (A, B) \in \Gamma_i\}$ .

$|\Gamma_{(A, B)}|$  est indépendant de  $(A, B)$ ; c'est un entier non nul  $d$ .

*Détermination de  $\alpha(G)$ .* — Soit S un stable de G. Posons

$$\Gamma_S = \bigcup_{(A, B) \in S} \Gamma_{(A, B)}.$$

Pour  $(A, B)$  et  $(A', B')$  distincts dans S :  $\Gamma_{(A, B)} \cap \Gamma_{(A', B')} = \emptyset$  [sinon  $(A, B) R (A', B')$ ].

Donc

$$|\Gamma_S| = \sum_{(A, B) \in S} |\Gamma_{(A, B)}| = d \times |S|.$$

En particulier pour  $Y \subseteq X$ ,  $|Y| = h+k$  :

$$|\Gamma_{E_Y}| = d \times |E_Y| = d \times \binom{h+k}{h}.$$

En outre  $\Gamma_{E_Y} = \Gamma$ .

Donc pour tout stable S de G :

$$\Gamma_S \subseteq \Gamma \Rightarrow |\Gamma_S| \leq |\Gamma| = |\Gamma_{E_Y}|,$$

soit

$$d \times |S| \leq d \times \binom{h+k}{h} \quad \text{et} \quad |S| \leq \binom{h+k}{h}.$$

D'où

$$\boxed{\alpha(G) = \binom{h+k}{h}}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Application du résultat aux hypergraphes  $\tau$ -critiques. —  $H = (X; E_i, i = 1, \dots, m)$  sera dit  $\tau$ -critique si et seulement si

$$\forall i, \tau(H - E_i) < \tau(H) \quad [\text{donc } \tau(H - E_i) = \tau(H) - 1].$$

$\forall i \in [1, m]$  soit  $F_i$  un transversal d'ordre  $\tau(H) - 1$  de  $H - E_i$  :  $F_i \cap E_j = \emptyset \Leftrightarrow i = j$ .

Soit donc  $K = \left( \bigcup_{i=1}^m F_i; F_i, i = 1, \dots, m \right)$ . Si  $h$  est le rang de  $H$ ,  $(H, K)$  est un  $(h, \tau(H) - 1)$ -couple.

On en déduit que le nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe  $H$   $\tau$ -critique et de rang  $h$  est

$$\binom{h + \tau(H) - 1}{h}.$$

Ce résultat, évident pour  $h = 1$  ( $\forall \tau$ ) et pour  $\tau = 1$  ( $\forall h$ ), avait été démontré pour  $\tau = 2$  ( $\forall h$ ) par Erdős et Gallai <sup>(1)</sup>, et pour  $h = 2$  ( $\forall \tau$ ) par Erdős, Hajnal et Moon <sup>(2)</sup>; il faisait l'objet d'une conjecture d'Erdős et Gallai <sup>(1)</sup>.

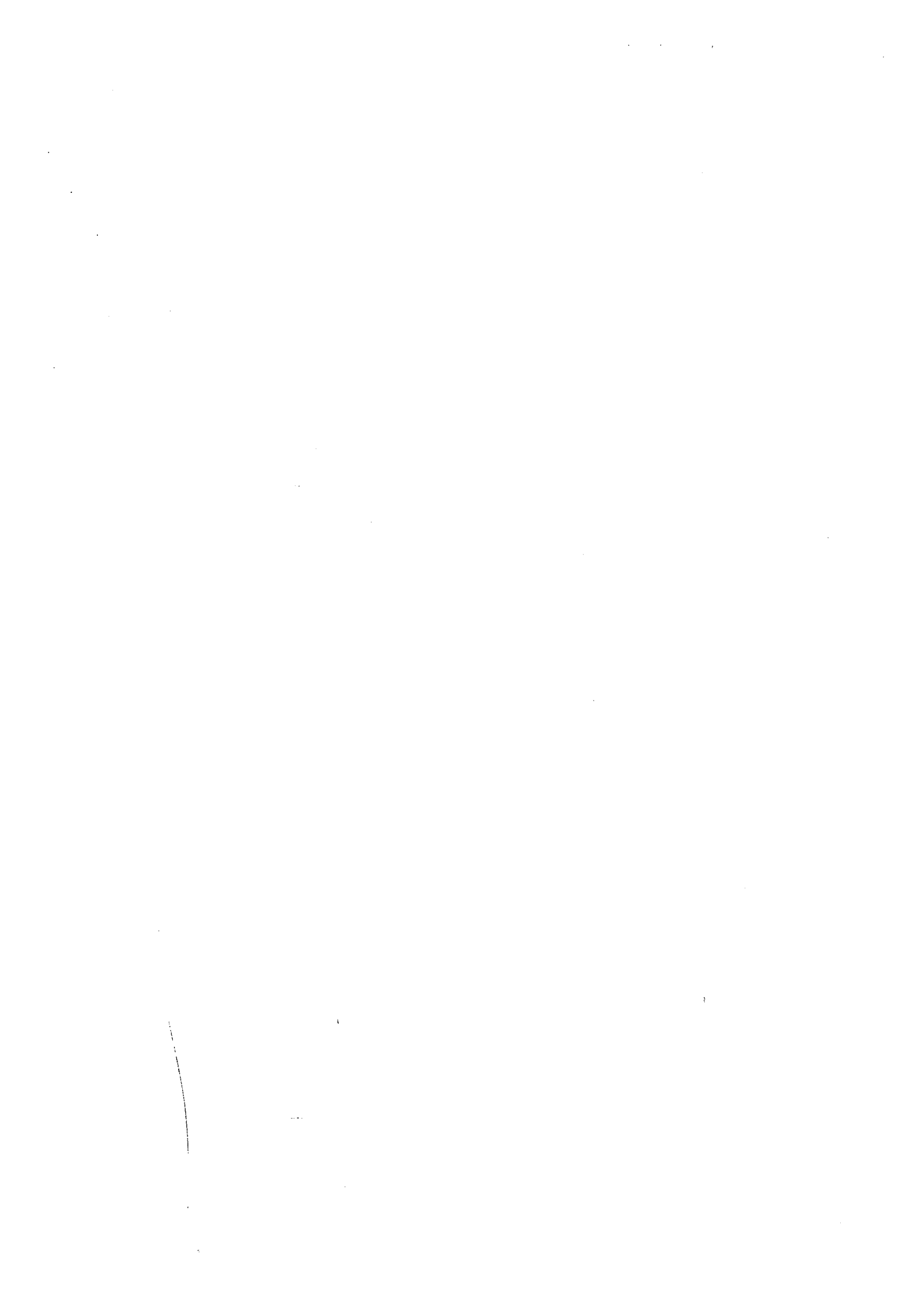
(\*) Séance du 19 juillet 1971.

<sup>(1)</sup> P. ERDÖS et T. GALLAI, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sc. (Mag. Tud. Akad.)*, 6, 1961, p. 181-203.

<sup>(2)</sup> C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

<sup>(3)</sup> P. ERDÖS, A. HAJNAL et J. MOON, *Amer. Math. Monthly*, 71, 1964, p. 1107-1110.

I. M. A. G., Cedex 53,  
38-Grenoble-Gare, Isère.



ANNEXE II

---

GRAPHES PARFAITEMENT  
STABLES - CONTINUS



Les notations utilisées sont celles du Chapitre I.

En particulier le graphe  $H_1$  est défini par :

$$V(H_1) = \{1, 2, 3, 4\} ; E(H_1) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}.$$

Dans [16], B. Grünbaum remarque qu'étant donné un graphe  $G$ , pour tout entier  $k$  appartenant à l'intervalle  $[\alpha'(L(G)), \alpha(L(G))]$ ,  $G$  admet un couplage maximal de cardinal  $k$ .

Posons alors les définitions suivantes :

Un graphe  $G$  sera dit stable-continu si pour tout entier  $k$  appartenant à l'intervalle  $[\alpha'(G), \alpha(G)]$ ,  $G$  admet un stable maximal de cardinal  $k$  ;  $G$  sera dit parfaitement stable-continu si :  $\forall A \subseteq V(G), A \neq \emptyset$ , le sous-graphe  $G_A$  est stable-continu.

La remarque de B. Grünbaum peut donc se formuler comme suit : tout R-graphe (pour la définition des R-graphes, se reporter au Chapitre I, paragraphe IV.1.b) est parfaitement stable-continu.

Nous étendrons cette remarque par le résultat suivant :

**Proposition** : Un graphe est parfaitement stable-continu si et seulement si il n'admet comme sous-graphe aucun graphe isomorphe à  $H_1$ .

En effet :

- a)  $H_1$  n'est pas stable-continu ; un graphe parfaitement stable-continu n'admet donc comme sous-graphe aucun graphe isomorphe à  $H_1$ .
- b) Réciproquement, soit  $G$  un graphe ne comportant aucun sous-graphe isomorphe à  $H_1$ . Soit  $S$  un stable maximal de  $G$  avec  $|S| < \alpha(G)$  ; montrons qu'il existe un stable maximal de  $G$  de cardinal  $|S| + 1$ .

Soit  $Z$  un stable maximal de  $G$  de cardinal  $\alpha(G)$ . Nous poserons :

$$A = S \cap Z ; B = S - Z ; C = Z - S ; D = V(G) - (S \cup Z).$$

- Tout sommet de  $B$  est adjacent à au moins un sommet de  $C$  (sinon  $Z$  ne serait pas un stable maximal).

- Tout sommet de  $B$  est adjacent à au plus deux sommets de  $C$  (sinon  $G$  comporterait un sous-graphe isomorphe à  $H_1$ ).



- Les mêmes propriétés restent valables en échangeant B et C.

Donc  $G_{B \cup C}$  ne comporte que des sommets de degré 1 ou 2.

Soient  $X_1, \dots, X_p$  les composantes connexes de  $G_{B \cup C}$  (considérées comme parties de  $B \cup C$ ) : les sous-graphes  $G_{X_1}, \dots, G_{X_p}$  sont soit des cycles élémentaires, soit des chaînes élémentaires ; donc,  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$  :

$$|X_i \cap C| - |X_i \cap B| \leq 1.$$

Or  $|S| < \alpha(G) = |Z|$  et donc  $|B| < |C|$ .

On en déduit qu'il existe un indice  $j \in \{1, \dots, p\}$  tel que :

$$|X_j \cap C| - |X_j \cap B| = 1.$$

Posons alors  $S' = [S - (X_j \cap B)] \cup (X_j \cap C)$ .

Il est clair que  $S'$  est un stable de  $G$  de cardinal  $|S| + 1$ .

Soit alors  $v \in V(G) - S'$ .

- si  $v \in S$  :  $v \in X_j \cap B$  et donc  $v$  est adjacent à deux sommets de  $X_j \cap C \subseteq S'$ .
- si  $v \in Z - S$  :  $v \in C - (X_j \cap C)$  et donc  $v$  est adjacent à au moins un sommet de  $B - (X_j \cap B) \subseteq S'$ .
- si  $v \in D$  : supposons que  $v$  n'est adjacent à aucun sommet de  $S'$ .  
 $S$  étant un stable maximal,  $v$  est adjacent à un sommet  $v_1$  de  $S - S' = X_j \cap B$  ;  $v_1$  est adjacent à deux sommets  $v_2$  et  $v_3$  de  $X_j \cap C \subseteq S'$ .

On vérifie immédiatement que  $G_{\{v, v_1, v_2, v_3\}}$  est isomorphe à  $H_1$  : il y a contradiction.

En conclusion  $S'$  est un stable maximal de  $G$  de cardinal  $|S| + 1$ .

On en déduit que  $G$  est stable-continu.

c) Ceci achève la démonstration.

Remarque :

D'après la Proposition 8 du Chapitre I et le résultat précédent, si  $G$  ne comporte aucun sous-graphe isomorphe à  $H_1$ ,  $G$  vérifie la propriété suivante : pour tout entier  $k$  appartenant à l'intervalle  $[B(G), \alpha(G)]$ ,  $G$  admet un stable maximal de cardinal  $k$ .

ANNEXE III

---

VALIDITE DE LA CONJECTURE FORTE DU  
GRAPHE PARFAIT POUR LES GRAPHS DE  
DEGRE MAXIMUM INFÉRIEUR OU ÉGAL A 4



## I . INTRODUCTION

### 1 . NOTATIONS

Tous les "graphes" dont il est question ici sont des graphes simples. Etant donné un graphe  $G$  nous noterons  $\gamma(G)$  son nombre chromatique,  $\omega(G)$  le cardinal maximum d'une clique de  $G$ , et  $\Delta(G)$  le degré maximum d'un sommet de  $G$ .

$\forall A \subseteq V(G)$  ( $A \neq \emptyset$ ),  $G_A$  désigne le sous-graphe de  $G$  engendré par  $A$ .

$\forall v \in V(G)$  nous noterons :

+  $G - v$  le sous-graphe  $G_{V(G)-\{v\}}$  de  $G$ .

+  $N(v)$  le sous-graphe de  $G$  engendré par l'ensemble des sommets adjacents à  $v$ .

Nous désignerons par  $\bar{G}$  le graphe complémentaire de  $G$ .

Deux graphes seront considérés comme identiques s'ils sont isomorphes.

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$  nous noterons  $K_n$  la clique à  $n$  sommets,  $C_n$  le cycle élémentaire à  $n$  sommets et  $L_n$  la chaîne élémentaire à  $n$  sommets.

### 2 . RAPPELS SUR LA CONJECTURE FORTE DU GRAPHE PARFAIT

Un graphe  $G$  est dit  $\gamma$ -parfait ([7], Chapitre 16) si :

$\forall A \subseteq V(G)$  ( $A \neq \emptyset$ ),  $\gamma(G_A) = \omega(G_A)$ .

Un graphe  $G$  est dit parfait si  $G$  et  $\bar{G}$  sont tous deux  $\gamma$ -parfaits.

Récemment L. Lovasz a démontré le résultat suivant ("Conjecture Faible du Graphe Parfait") : Tout graphe  $\gamma$ -parfait est parfait. ([7], Appendice ; [90]).

D'autres travaux ont porté sur la "Conjecture Forte du Graphe Parfait", qui s'énonce :

Le graphe  $G$  est parfait si et seulement si il n'admet aucun sous-graphe de la forme  $C_{2p+1}$  ou  $\bar{C}_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ).

La validité de cette conjecture a été démontrée par K.R. Parthasarathy et G. Ravindra pour les graphes  $G$  ne comportant aucun sous-graphe de la forme  $K_{1,3}$  ("l'étoile à trois branches") [91] et pour les graphes  $G$  ne comportant aucun sous-graphe de la forme  $K_4 - x$  ( $K_4$  privé d'une arête) [92].

Nous allons démontrer ici un résultat du même type, à savoir : la Conjecture Forte du Graphe Parfait est vérifiée pour les graphes dont tous les sommets sont de degré inférieur ou égal à 4.

## II . GRAPHES IMPARFAITS - CRITIQUES G TELS QUE $\Delta(G) \leq 4$

Un graphe sera dit imparfait - critique s'il est imparfait (c'est-à-dire non-parfait) et si chacun de ses sous-graphes (autres que lui-même) est parfait.

Proposition 1 : Soit G un graphe imparfait - critique avec  $\Delta(G) \leq 4$ . Alors :

- Soit il existe un entier  $p \geq 2$  tel que  $G = C_{2p+1}$ .
- Soit  $G = \bar{C}_7$ .

En effet :

Soit donc G un graphe imparfait - critique avec  $\Delta(G) \leq 4$  qui n'est pas de la forme  $C_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ) ; montrons que  $G = \bar{C}_7$ .

- 1) G est connexe et n'est ni une clique, ni un cycle élémentaire de longueur impaire ; donc, d'après le Théorème de Brooks ([7] , Chapitre 15, Théorème 6) :  $\chi(G) \leq \Delta(G) \leq 4$ .

Le cas  $\chi(G) \leq 3$  est exclu puisque les graphes imparfaits - critiques de nombre chromatique 3 sont précisément les  $C_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ).

Donc  $\chi(G) = \Delta(G) = 4$ ,  $\omega(G) = 3$  et,  $\forall v \in V(G)$  :

$$\chi(G-v) = 3, \omega(G-v) = 3.$$

- 2) Soit v un sommet de G. Donnons nous une coloration des sommets de  $G-v$  en 3 couleurs 1, 2 et 3.  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  soit  $S_i$  l'ensemble des sommets de  $G-v$  de couleur i ; si l'on avait  $S_i \cap V(N(v)) = \emptyset$ , en affectant à v la couleur i on obtiendrait une 3-coloration des sommets de G.

Nous pourrions donc supposer que :

$$(a) \quad |S_1 \cap V(N(v))| \geq |S_2 \cap V(N(v))| \geq |S_3 \cap V(N(v))| \geq 1.$$

On remarquera que  $v$  est nécessairement de degré 3 ou 4.

Deux sommets distincts  $w$  et  $w'$  de  $N(v)$  seront dits connectés s'ils sont de couleurs différentes  $i$  et  $j$  et s'ils appartiennent à la même composante connexe de  $G_{S_i \cup S_j}$ .

Lemme 1 : Pour tout couple de couleurs distinctes  $i$  et  $j$  : il existe un sommet de couleur  $i$  et un sommet de couleur  $j$  de  $N(v)$  qui sont connectés.

En effet sinon en échangeant les couleurs  $i$  et  $j$  sur toutes les composantes connexes de  $G_{S_i \cup S_j}$  contenant au moins un sommet de  $S_i \cap V(N(v))$  et en affectant à  $v$  la couleur  $i$  on obtiendrait une 3-coloration des sommets de  $G$ .

Lemme 2 : Pour tout couple de couleurs distinctes  $i$  et  $j$  : il existe un sommet de couleur  $i$  et un sommet de couleur  $j$  de  $N(v)$  qui sont adjacents.

En effet soit  $T_{ij}$  l'ensemble des chaînes élémentaires de  $G_{S_i \cup S_j}$  comportant une extrémité dans  $S_i \cap V(N(v))$  et l'autre dans  $S_j \cap V(N(v))$ .  $T_{ij}$  est non vide d'après le Lemme 1.

Soit  $H$  un élément de  $T_{ij}$  de longueur minimum  $\ell \geq 1$ .  $H$  n'admet pas de cordes ; de plus  $v$  n'est adjacent à aucun sommet de  $H$  en dehors de ses extrémités  $w$  et  $w'$ . Donc  $H \cup \{\{v, w\}, \{v, w'\}\}$  constitue un cycle élémentaire sans cordes de  $G$  de longueur impaire  $\ell + 2$ . Comme  $G$  ne comporte aucun sous-graphe de la forme  $C_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ), nécessairement  $\ell = 1$  et le Lemme 2 est démontré.

Lemme 3 : Le sommet  $v$  est de degré 4 et de plus  $N(v) = L_4$ .

En effet :

- si  $v$  est de degré 3 : d'après (a),  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,  
 $|S_i \cap V(N(v))| = 1$ . Donc d'après le Lemme 2,  $N(v) = K_3$  : ceci est incompatible avec  $\omega(G) = 3$  et il y a donc contradiction.
- $v$  est donc de degré 4 ; d'après (a),  $|S_1 \cap V(N(v))| = 2$  et  
 $|S_2 \cap V(N(v))| = |S_3 \cap V(N(v))| = 1$ . Nous poserons :  
 $S_1 \cap V(N(v)) = \{w_1, w'_1\}$  et  $S_i \cap V(N(v)) = \{w_i\}$   
 $(\forall i \in \{2, 3\})$ .

D'après le Lemme 2 :  $w_2$  et  $w_3$  sont adjacents ; de plus,  $w_2$  est adjacent à au moins un sommet de  $S_1 \cap V(N(v))$ , soit par exemple  $w_1$  ;  $w_3$  ne peut alors être adjacent à  $w_1$  ( $w_1, w_2, w_3, v$  engendreraient  $K_4$  dans  $G$ ) ; donc  $w_3$  est adjacent à  $w'_1$ . On vérifie alors que  $w_2$  n'est pas adjacent à  $w'_1$  ( $w'_1, w_2, w_3, v$  engendreraient  $K_4$  dans  $G$ ).

D'autre part  $w_1$  et  $w'_1$ , étant de même couleur, sont non adjacents.  $N(v)$  est donc une chaîne de longueur 3 d'extrémités  $w_1$  et  $w'_1$ . Ceci achève la démonstration du Lemme 3.

- 3)  $G$  est donc un graphe connexe, 4-régulier, n'admettant aucun sous-graphe de la forme  $C_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ), et tel que :  $\forall v \in V(G), N(v) = L_4$ . Nous allons vérifier que ces propriétés suffisent à caractériser le graphe  $\bar{C}_7$ .

Soit  $R$  la relation binaire sur  $V(G)$  définie comme suit :  $\forall v, w \in V(G) : v R w \Leftrightarrow w$  est un sommet de degré 2 de  $N(v)$ . On vérifie immédiatement que  $R$  est une relation antiréflexive et symétrique.

Nous noterons également  $R$  le graphe associé à la relation  $R$  ( $V(R) = V(G) ; \{v, w\} \in E(R) \Leftrightarrow v R w$ ).

- Soit  $e$  une arête de  $G$ ,  $e = \{v, w\}$ .
  - + si  $w$  est un sommet de degré 2 de  $N(v) : e \in E(R)$ .
  - + sinon, soit  $w'$  le sommet de degré 2 de  $N(v)$  adjacent à  $w$  ;  $v$  est un sommet de degré 1 de  $N(w)$  et donc  $w'$  est un sommet de degré 2 de  $N(w)$ . On en déduit que l'on a à la fois  $w' R v$  et  $w' R w$ .  $e$  est donc une arête du graphe carré de  $R$ , soit  $C(R)$  (défini au Chapitre I, paragraphe III.3.a).

- Inversement, si  $e$  est une arête de  $C(R) :$ 
  - + si  $e \in E(R)$ ,  $e \in E(G)$ .
  - + sinon  $e = \{w, w'\}$  et il existe un sommet  $v$  tel que :  $v R w, v R w'$  ; les deux sommets de degré 2 de  $N(v)$ ,  $w$  et  $w'$ , sont adjacents.

Donc dans les deux cas  $e \in E(G)$ .

- On en déduit que  $G \equiv C(R)$ .

$G$  étant connexe,  $R$  est connexe. D'autre part tout sommet de  $R$  est de degré 2. Donc, en posant  $n = |V(G)| :$

$$R = C_n \text{ et } G = C(C_n).$$

Il est clair que  $n \geq 5$  ; pour  $n = 5$  et  $n = 6$ , on vérifiera sans peine que  $G = C(C_n)$  est impossible (il existerait un sommet  $v \in V(G)$  tel que  $N(v) \neq L_4$ ).

Pour  $n = 7$ ,  $C(C_n) = \bar{C}_7$ .

Il reste à montrer que  $G = C(C_n)$  est impossible pour  $n \geq 8$ .

Nous allons mettre en évidence la présence de sous-graphes du type  $C_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ) dans  $C(C_n)$  ( $\forall n \geq 8$ ).

Tout cycle élémentaire sera représenté par une suite de sommets (chaque sommet apparaît une fois et une seule) ordonnée de sorte que deux sommets consécutifs soient adjacents, ainsi que le premier et le dernier sommet de la suite.

En particulier nous noterons,  $\forall n \geq 8$  :

$$C_n = v_1 v_2 \dots v_n = (v_i)_{i \in [1, n]}$$

Quatre cas se présentent :

- si  $n = 4r$  ( $r \geq 2$ ) :

$$\text{soit } \sigma = v_1 v_2 v_4 (v_{2i+3})_{i \in [1, 2r-2]}$$

- si  $n = 4r+1$  ( $r \geq 2$ ) :

$$\text{soit } \sigma = v_1 (v_{2i})_{i \in [1, 2r]}$$

- si  $n = 4r+2$  ( $r \geq 2$ ) :

$$\text{soit } \sigma = (v_{2i-1})_{i \in [1, 2r+1]}$$

- si  $n = 4r+3$  ( $r \geq 2$ ) :

$$\text{soit } \sigma = v_1 v_2 v_4 v_5 v_7 (v_{2i+6})_{i \in [1, 2r-2]}$$

On vérifiera aisément que dans chaque cas  $\sigma$  est un cycle élémentaire sans cordes de  $C(C_n)$  de longueur impaire supérieure ou égale à 5.

4) Ceci achève la démonstration de la Proposition 1.

### III . CONCLUSION

Le résultat suivant découle immédiatement de la Proposition 1 :

**Proposition 2** : Soit  $G$  un graphe tel que  $\Delta(G) \leq 4$ , et n'admettant comme sous-graphe ni  $\bar{C}_7$ , ni aucun  $C_{2p+1}$  ( $p \geq 2$ ). Alors  $G$  est parfait.

Autrement dit, les graphes  $G$  tels que  $\Delta(G) \leq 4$  vérifient la Conjecture Forte du Graphe Parfait. Il en est de même (par complémentarité) pour tous les graphes  $G$  dont chaque sommet est de degré supérieur ou égal à  $|V(G)| - 5$ .





BIBLIOGRAPHIE

---



- [1] R.Z. NORMAN et M.O. RABIN  
An algorithm for a minimum cover of a graph, Proc. Amer. Math. Soc. 10, 1959, 315-319.
- [2] R.P. GUPTA  
Independence and covering numbers of line graphs and total graphs, in : Proof Techniques in Graph Theory (F. Harary, ed.) Academic Press, New-York, 1969.
- [3] F. JAEGER et C. PAYAN  
Relations entre certains nombres de couverture et nombres de couplage dans l'étude des absorbants d'un graphe simple, Séminaire d'Algèbre Appliquée et Conception de Grenoble, 8 mai 1972.
- [4] F. JAEGER et C. PAYAN  
Nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe  $\tau$ -critique de rang  $h$ . C.R. Acad. Sc. Paris. 273, 1971, 221-223.
- [5] F. HARARY  
Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [6] C. BERGE  
Introduction à la Théorie des Hypergraphes, Presses de l'Université de Montréal, 1973.
- [7] C. BERGE  
Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1974.
- [8] L.W. BEINEKE  
On derived graphs and digraphs, in : Beiträge zur Graphentheorie (H. Sachs, H.J. Voss, H. Walther, ed.) Teubner, 1968, 17-23.
- [9] M. LAS VERGNAS  
A note on matchings in graphs, Cahiers du C.E.R.O. n° 17 (1975) (à paraître).
- [10] M. BEHZAD  
The total chromatic number of a graph : a survey, in : Combinatorial Mathematics and its Applications (D.J.A. Welsh, ed.) Academic Press, London and New-York, 1971, 1-8.
- [11] O. ORE  
Theory of graphs, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol XXXVIII, Providence, Rhode Island, 1962.

- [12] F. JAEGER et C. PAYAN  
Relations du Type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple, C.R. Acad. Sc. Paris, 274, 728-730 (28 février 1972) Série A.
- [13] G. CHARTRAND et J. MITCHEM  
Graphical Theorems of the Nordhaus-Gaddum Class, in : Recent Trends in Graph Theory, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1970.
- [14] C. PAYAN  
Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple, Cahiers du C.E.R.O. n° 17 (1975) (à paraître).
- [15] V.G. VIZING  
On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph, Diskret. Analiz. 3, 1964, 25-30.
- [16] B. GRÜNBAUM  
Matchings in Polytopal Graphs, Networks 4, 1974, 175-190.
- [17] R. FORCADE  
Smallest maximal matchings in the graph of the  $d$ -dimensional Cube, J. of Comb. Th. (B) 14, 1973, 153-157.
- [18] B. SANDS  
The Gunport Problem, Mathematics Magazine, 44 (1971) n° 4, 193-196.
- [19] O. ORE  
The four-colour Problem, Academic Press, New-York, London, 1967.
- [20] A. KOTZIG  
From the theory of finite regular graphs of degree three and four, Casopis. Pest. Mat. 82(1) (1957), 76-92.
- [21] M. MASCHLER and B. PELEG  
A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game, Pacific J. Math. 18 (1966), 289-328.
- [22] B. PELEG  
On minimal separating collections, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 26-30.

- [23] J. SHALHEVET  
A characterization of separating distinguished collections containing the maximum number of sets, *Journal of Comb. Theory (A)* 13 (1972), 105-115.
- [24] J.A. BONDY  
Balanced colourings and the Four Color Conjecture, *Proc. of the Am. Math. Soc.*, 33(2), 1972, 241-244.
- [25] P.J. HEAWOOD  
On the Four - Colour Map Theorem, *Quarterly J. of Math.*, 29 ( 1898), 270-285.
- [26] R.D. CARMICHAEL  
Introduction to the theory of groups of finite order (p 34-36), Dover Publications, New-York, 1956.
- [27] V. EBERHARD  
Zur morphologie der Polyeder (Leipzig, 1891).
- [28] T.S. MOTZKIN  
The evenness of the number of edges of a convex polyhedron, *Proc. Nat. Acad. Sci. US*, 52 (1964), 44-45.
- [29] B. GRÜNBAUM  
A simple proof of a theorem of Motzkin, *Proc. Ned. Akad. Wetenschap. Ser. A*, 67 (1964), 382-384.
- [30] A. KOTZIG  
Colouring of trivalent polyhedra, *Can. J. Math.* 17 (1965), 659-664.
- [31] T. GALLAI  
Signierte Zellenzerlegungen I, *Acta Math. Acad. Scien. Hung.* 22 (1971), 51-63.
- [32] P. ROSENSTIEHL  
Bicycles et diagonales des graphes planaires, *Cahiers du C.E.R.O.* n° 17 (1975) (à paraître).
- [33] H. SHANK  
The theory of left-right paths, *Combinatorial Mathematics III*, Springer-Verlag, Berlin (1975), 42-54.

- [34] J. MALKEVITCH  
Properties of planar graphs with uniform vertex and face structure,  
Memoirs of the Am. Math. Soc. 99.
- [35] G. CHARTRAND, H.V. KRONK, C.E. WALL  
The point-arboricity of a graph, Israel J. Math. 6 (1968),  
169-175.
- [36] M. SAKAROVITCH  
Sur quelques problèmes d'optimisation combinatoire, Thèse,  
Université Scientifique et Médicale de Grenoble (14 mars 1975).
- [37] M. SAKAROVITCH et C. PAYAN  
Ensembles cycliquement stables et graphes cubiques, à paraître.
- [38] H. WHITNEY  
A theorem on graphs, Ann. Math. 32 (1931), 378-390.
- [39] M.O. ALBERTSON  
Forbidden and unavoidable subgraphs in the Erdős-Vizing problem,  
Proceedings of the 5th Southeastern Conference on Combinatorics,  
Graph Theory, and Computing, 179-186.
- [40] G. CHARTRAND et H.V. KRONK  
The point-arboricity of planar graphs, J. London Math. Soc. 44  
(1969), 612-616.
- [41] R.J. COOK  
Point-arboricity and girth, J. London Math. Soc. (2) 8 (1974) n° 2,  
322-324.
- [42] B. GRÜNBAUM  
Convex Polytopes, John Wiley and Sons, New-York, 1967.
- [43] B. GRÜNBAUM  
Polytopes, Graphs and Complexes, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970),  
1131-1201.
- [44] B. GRÜNBAUM  
Acyclic colorings of planar graphs, Israel J. of Math 14 (1973)  
n° 4, 390-408.
- [45] M.O. ALBERTSON  
A lower bound for the independence number of a planar graph,  
J. of Comb. Th. (B) (à paraître).

- [46] W.T. TUTTE  
On hamiltonian circuits, J. London Math. Soc. 21 (1946), 98-101.
- [47] H.F. HUNTER  
On non-Hamiltonian maps and their duals, Ph. D. Thesis, Rensselaer Polytech. Inst., 1962.
- [48] J. BOSAK  
Hamiltonian lines in cubic graphs, Proceedings of the Int. Seminar on Graph Theory and its applications, Rome (1966), Dunod, Paris, 1967, 35-46.
- [49] J. LEDERBERG  
Hamilton circuits of convex trivalent polyhedra (up to 18 vertices), Amer. Math. Monthly 74 (1967), 522-527.
- [50] H. WALTHER  
Ein kubischer, planarer, zyklisch fünffach zusammenhängender Graph, der keinen Hamilton kreis besitzt, Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau 11 (1965), 163-166.
- [51] H. SACHS  
Ein von Kozyrev und Grinberg angegebener nicht hamiltonischer kubischer planarer Graph, in : Beiträge zur Graphentheorie, B.G. Teubner, Leipzig, 1968, 127-130.
- [52] J.W. MOON  
Am. Math. Monthly 72 (1965), 81-82.
- [53] G.J. MINTY  
Problem E 1667, Am. Math. Monthly 71 (1964), 205.
- [54] D.W. CROWE  
Nearly regular polyhedra with two exceptional faces, Thesis, University of Wisconsin, 1968.
- [55] T. GALLAI  
Signierte Zellenzerlegungen I, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 22 (1-2) (1971), 51-63.
- [56] N.C. DALKEY  
Parity Patterns on Even Triangulated Polygons, Journal of Comb. Th. 2 (1967), 100-102.



- [57] H. FLEISHNER et P. ROY  
Distribution of Points of Odd Degree on Certain Triangulations in the Plane, *Monatsh. für Math.* 78 (1974), 385-390.
- [58] W.T. TUTTE  
A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad. J. Math.* 6 (1954), 80-91.
- [59] A. GHOUILA-HOURI  
Sur l'existence d'un flot ou d'une tension prenant ses valeurs dans un groupe abélien. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 250, 1960, 3931-3932.
- [60] S. MAC-LANE et G. BIRKHOFF  
*Algèbre (Tome 1)* Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [61] H. CRAPO  
The Tutte Polynomial, *Aequationes Math.* 3 (1969), 211-229.
- [62] T.H. BRYLAWSKI  
A decomposition for combinatorial geometries, *Trans. Am. Math. Soc.* 171 (1972), 235-282.
- [63] W.T. TUTTE  
The dichromatic polynomial, Research Report CORR 74-26 (December 1974), Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- [64] W.T. TUTTE  
On the imbedding of linear graphs in surfaces, *Proc. London Math. Soc.* (2), 51 (1950), 474-483.
- [65] W.T. TUTTE  
A class of Abelian Groups, *Canad. J. Math.* 8 (1956), 13-28.
- [66] W.T. TUTTE  
Lectures on Matroids, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B69B* (1965), 1-47.
- [67] G.J. MINTY  
A theorem on three-coloring the edges of a trivalent graph, *J. of Comb. Th.* 2 (1967), 164-167.
- [68] P.J. HEAWOOD  
Map-colour theorems, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 24, 322-338 (1890).

- [69] H. GRÖTZSCH  
 Zur Theorie der diskreten Gebilde, VII.  
 Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel,  
 Wiss. Z. Martin-Luther Univ., Halle-Wittenberg. Math. Nat. Reihe  
 8 (1958/59), 109-120.
- [70] G.C. ROTA  
 Combinatorial Theory, Old and New, Communication présentée au  
 Congrès International des Mathématiciens, Nice, Septembre 1970.
- [71] H. CRAPO et G.C. ROTA  
 Combinatorial Geometries, M.I.T. Press, Cambridge (Massachusetts),  
 1970 (édition préliminaire).
- [72] BLANCHE DESCARTES  
 Solution to Advanced Problem n° 4526, Am. Math. Monthly 61 (1954),  
 352.
- [73] P.C. KAINEN  
 Embeddings and orientations of graphs, in : Combinatorial structures  
 and their applications, Gordon and Breach, New-York, London, Paris,  
 1970, 193-196.
- [74] H. WIELANDT  
 Finite Permutation Groups, Academic Press, New-York, London, 1964.
- [75] C. St. J.A. NASH-WILLIAMS  
 Decomposition of finite graphs into forests, J. London Math. Soc.  
 39 (1964), 12.
- [76] J.R. EDMONDS  
 Minimum partition of a matroid into independent sets, J. Res. Nat.  
 Bur. Standards Sect. B69B (1965), 67-72.
- [77] S. KUNDU  
 Bounds on the number of disjoint spanning trees, J. of Comb. Th.(B)  
 17 (1974), 199-203.
- [78] G.J. MINTY  
 A Theorem on n-coloring the points of a linear graph, Am. Math.  
 Monthly 69 (7), 1962, p. 623-624.
- [79] S.L. HAKIMI  
 On the degrees of the vertices of a directed graph, Journal of the  
 Franklin Inst. 279(4), 1965, p. 290-308.

- [80] D. GALE  
A theorem on flows in networks, Pacific. J. Math. 7 (1957), 1073.
- [81] L. GERENCSEK  
Szinezesi Problémakrol, Mat. Lapok, 16, 1965, 274-277.
- [82] R. ISAACS  
Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable, Am. Math. Monthly 82 (1975) n° 3, 221-239.
- [83] F. JAEGER  
Sur l'indice chromatique du graphe représentatif des arêtes d'un graphe régulier, C.R. Acad. Sci. Paris, t.277, 237-239 (30.07.1973).
- [84] F. JAEGER  
Sur l'indice chromatique du graphe représentatif des arêtes d'un graphe régulier, Discrete Math. 9 (1974), 161-172.
- [85] F. JAEGER  
On vertex-induced forests in cubic graphs, Proceedings of the V<sup>th</sup> Southeastern Conference On Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Utilitas Mathematica Publishing Inc. Winnipeg, 1974, 501-512.
- [86] J. JAEGER  
On parity patterns of even  $q$ -angulations, à paraître dans le "Journal of Combinatorial Theory".
- [87] F. JAEGER  
Sur les flots non-nuls dans les graphes, Communication aux Journées de Combinatoire et Informatique, Bordeaux, Juin 1975 (à paraître).
- [88] F. JAEGER  
On nowhere-zero flows in multigraphs, Communication à la "Fifth British Combinatorial Conference", Aberdeen, Juillet 1975 (à paraître).
- [89] F. JAEGER  
Balanced valuations and flows in multigraphs, accepté pour publication par les "Proceedings of the American Mathematical Society".
- [90] L. LOVASZ  
Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discrete Math. 2, 1972, 253-267.

- [91] K.R. PARTHASARATHY et G. RAVINDRA  
The Strong Perfect-Graph Conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs,  
Journal of Combinatorial Theory (to appear).
- [92] K.R. PARTHASARATHY et G. RAVINDRA  
The validity of the strong Perfect-Graph Conjecture for  $(K_4 - x)$ -free  
graphs (to appear).

