



HAL
open science

Méthodes de décomposition et croisement d'algorithmes pour des problèmes d'optimisation

Guy Pierra

► **To cite this version:**

Guy Pierra. Méthodes de décomposition et croisement d'algorithmes pour des problèmes d'optimisation. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1976. tel-00287206

HAL Id: tel-00287206

<https://theses.hal.science/tel-00287206>

Submitted on 11 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Pour obtenir le grade de Docteur es Sciences Mathématiques

Guy PIERRA

**METHODES DE DECOMPOSITION
ET CROISEMENT D'ALGORITHMES
POUR DES PROBLEMES D'OPTIMISATION**

Thèse soutenue le 21 mai 1976 devant la commission d'examen.

Président : N. GASTINEL

Examineurs [J. BARANGER
Y. HAUGAZEAU
P.J. LAURENT
F. ROBERT

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Michel SOUTIF : Président

Monsieur Gabriel CAU : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANTS DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique Approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique Chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
	BEZES Henri	Pathologie Chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique Ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique Gastro-entérologique
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie Générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique Rhumatologique et Hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie Animale et Pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine Légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie Organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de Neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie Animale
	COEUR André	Pharmacie Chimique et Chimie Analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique Gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière Médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie Minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie

MM.	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée (I.U.T. A)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse Numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie Végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie Générale
	LATURAZE Jean	Biochimie Pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique Médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences Nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique Obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MICOUD Max	Clinique Maladies Infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (Néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique (I.U.T. A)
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	TANCHE Maurice	Physiologie

MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie Galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique Nucléaire Théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CLARK Gilbert	Spectrométrie Physique
	CRABBE Pierre	CERMO
	ENGLMAN Robert	Spectrométrie Physique
	HOLTZBERG Frédéric	Basses Températures
	ROST Ernest	Sciences Nucléaires

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique Pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie Analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. A)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. A)
	CONTE René	Physique (I.U.T. A)
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences Biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie Médicale
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie Animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. A)
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. A)
	LJU DUC Cuong	Chimie Organique
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	PSISTER Jean-Claude	Physique du Solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie Animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie Générale
	RICHARD Lucien	Biologie Végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie Macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie Papetière

MM.	SARRAZIN Roger	Anatomie et Chirurgie
	SARROT-REYNAUD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie Générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique Générale
MM.	STREGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. A)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro chirurgie
	BARJOLLE Michel	MIAG
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (C.U.S.)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et Organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie Papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie Appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie Physique
	COLOMB Maurice	Biochimie Médicale
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie Végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.U.S.)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine Légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie Générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. A)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	LEROY Philippe	I.U.T. A
	MACHE Régis	Physiologie Végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine Préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. A)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.U.S.)

M.	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. A)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. A)
MM.	NEGRE Robert	Mécanique (I.U.T. A)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T.A)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. A)
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIER Guy	Géophysique - Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine Interne
	RACINET Claude	Gynécologie et Obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et Hydrologie
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

M.	COLE Antony	Sciences Nucléaires
----	-------------	---------------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRE DE CONFERENCES

M.	JUNIEN-LAVILLAVROY Paul	O.R.L.
----	-------------------------	--------

Fait à SAINT MARTIN D'HERES,
DECEMBRE 1975.

Président : M. NEEL Louis
 Vice-Présidents : M. BENOIT Jean
 M. BONNETAIN Lucien

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	FELICI Noël	Electrostatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBERT Robert	Mécanique des Fluides

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RUPPERSBERG Albert, Henner	Chimie
	ROUXEL Roland	Automatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DURAND Francis	Métallurgie
	FOULARD Claude	Automatique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	VEILLON Gérard	Informatique Fondamentale & Appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques Appliquées
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie Minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique Nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Hydraulique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique Fondamentale & Appliquée
Mme	SAUCIER Gabrièle	Informatique Fondamentale & Appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Automatique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeurs et Maîtres de Recherche)

MM. FRUCHART Robert Directeur de Recherche
ANSARA Ibrahim Maître de Recherche
CARRE René Maître de Recherche
DRIOLE Jean Maître de Recherche
MATHIEU Jean-Claude Maître de Recherche
MUNIER Jacques Maître de Recherche

Monsieur P.J. LAURENT a bien voulu m'accueillir dans son Laboratoire. Il m'est agréable de témoigner ici de tout ce que le présent travail doit à ses conseils précieux, à ses encouragements pressants, à son soutien incessant et chaleureux et de lui exprimer ma très profonde reconnaissance.

Que Monsieur N. GASTINEL trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail et pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Monsieur Y. HAUGAZEAU trouvera dans cette étude bien des prolongements tant de son enseignement d'optimisation que des conversations amicales que nous avons pu avoir depuis ; je le remercie très vivement.

Je remercie également, pour le soutien amical qu'ils ont bien voulu m'apporter Messieurs J. BARANGER et F. ROBERT.

J'adresse enfin mes remerciements à tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail, et, en particulier, à Mesdames C. et G. BOISSIER, Cl. MEYRIEUX, J. ROCHE dont j'ai pu apprécier la gentillesse et la compétence.

A la mémoire de ma Mère.

A mon Père,

A ma Femme.

TABLE DES MATIERES

	Page
<u>INTRODUCTION</u>	
I. Décomposition d'un problème d'optimisation posé dans un espace produit et croisement d'algorithmes associé	3
II. Eclatement de contraintes par décomposition d'un espace produit	9
III. Plan	10
IV. Conventions et notations	12
Références	13
 <u>CHAPITRE I : CROISEMENT DE METHODES DE DESCENTE PAR LE CALCUL DE LA DISTANCE ENTRE DEUX CONVEXES</u>	
I. Rappel sur la méthode des projections successives	I.2
II. Un lemme de convergence sur les méthodes de descente	I.5
III. Recherche de la distance inter-convexe par croisement de méthodes de descente	I.12
IV. Sur un algorithme de Meyer et Polak	I.33
Références	I.45
 <u>CHAPITRE II : METHODES DE PROJECTIONS PARALLELES EXTRAPOLEES RELATIVE A UNE INTERSECTION DE CONVEXES</u>	
I. Intersection de convexes dans un espace de Hilbert	II.3
II. Recherche d'un point appartenant à une intersection de convexes. Méthode du barycentre	II.8
III. Méthode de projections parallèles extrapolée	II.20
IV. Particularisation d'un convexe	II.31
V. Méthode de projections parallèles extrapolée avec prolongation ...	II.37
Références	II.44

CHAPITRE III - RECHERCHE D'UN POINT APPARTENANT A PLUSIEURS ENSEMBLES
CONVEXES PAR CROISEMENT D'ALGORITHME.

I. Formalisation analytique du problème : Croisement de méthodes de descente	III.2
II. Formalisation géométrique du problème : Croisement de méthodes duales	III.32
Références	III.46

CHAPITRE IV - PROJECTION SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES ET APPLICATIONS.

I. Projection sur une intersection de convexes	IV.2
II. Croisement série-parallèle de méthodes duales pour la minimisation de formes quadratiques	IV.18
III. Décomposition d'opérateurs elliptiques via un éclatement parallèle de contraintes	IV.36
Références	IV.43

CHAPITRE V - UNE NOUVELLE METHODE DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE

I. Minimisation d'une forme quadratique sur une intersection de convexes	V.3
II. Croisement de méthodes duales pour la minimisation d'une forme quadratique	V.27
Références	V.40

CHAPITRE VI - DECOMPOSITION D'OPERATEURS ET ECLATEMENT DE CONTRAINTES
PAR PENALISATION DANS UN ESPACE PRODUIT (METHODES A PAS
FRACTIONNAIRES)

I. Position du problème et hypothèses	VI.5
II. Formalisation dans un espace produit	VI.7
III. Convergence de la suite $\{u_\epsilon\}$	VI.15
IV. Approximation de u_ϵ par relaxation	VI.21
V. Croisement de méthodes de pénalisation dans la relaxation : construction d'une suite diagonale	VI.30
VI. Décomposition parallèle	VI.46
VII. Croisement de méthodes de pénalisation dans la décomposition : construction d'une suite diagonale	VI.46
Références	VI.57

CHAPITRE VII - APPLICATIONS ET ESSAIS NUMERIQUES

I. Applications.....	VII.1
I.1 Problèmes de programmation mathématique	
I.2 Equations aux dérivés partielles	
I.3 Quelques problèmes de statistiques	
II. Essais numériques	VII.19
Références.....	VII.47

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude, par décomposition, de divers problèmes d'optimisation.

L'idée de la décomposition, en analyse numérique, est de substituer à la résolution d'un "gros" problème, une suite de problèmes plus simples ou plus "petits". Un nombre très considérable de méthodes relèvent de cette idée ; citons, à titre d'exemples, les méthodes de "relaxation" ; de décomposition d'opérateur: directions alternées, pas fractionnaires ; d'éclatement de contraintes [13] ; de décomposition par dualité [1] [5] ; de décomposition d'une norme [7] ...

S'il n'existe guère, actuellement, de théorie de la décomposition intégrant naturellement l'ensemble de ces méthodes, un point commun à beaucoup d'entre elles peut néanmoins être trouvé dans le fait qu'elles débouchent sur des problèmes d'optimisation posés dans un espace produit et que ces problèmes sont décomposés, c'est-à-dire résolus à travers des sous-problèmes consistant à optimiser par rapport à une seule composante. Deux stratégies peuvent être envisagées pour procéder à cette décomposition. La première consiste à optimiser successivement par rapport à chaque composante — on parle alors habituellement de "relaxation" ou d'"algorithme de Gauss-Seidel" — ; nous utiliserons ici, pour sa simplicité, le terme de décomposition-série. Dans la deuxième l'optimisation a lieu, en parallèle, par rapport à chaque composante ; il est, dans ce cas, presque toujours nécessaire de coordonner les résultats obtenus, d'où les noms de méthodes de "coordination" [1] ou "à plusieurs niveaux" (multilevel techniques [17]) ; nous parlerons de décomposition-parallèle.

En fait, dans la formulation habituelle de certaines méthodes de "décomposition", la décomposition d'un espace produit n'apparaît pas explicitement. Cette notion semble cependant de nature à intégrer la plupart des méthodes de décomposition : ainsi que nous le montrons dans ce travail, l'introduction d'un espace produit adapté permet souvent

- de faire apparaître la méthode de décomposition étudiée comme une décomposition, série ou parallèle, d'un espace produit,
- d'établir de nouvelles propriétés, ou de nouvelles méthodes de décomposition, pour le problème considéré.

L'inconvénient d'une méthode de décomposition, qu'elle soit série ou parallèle, est que chacun des sous-problèmes intervenant dans le cadre de la décomposition doit être résolu un grand nombre de fois. De plus, il est souvent inutilement coûteux de chercher avec précision la solution d'un sous-problème alors même que le problème global est encore loin de sa solution. Ceci nous a amené à élaborer l'idée de croisement d'algorithmes.

La logique d'une méthode de croisement d'algorithmes est la suivante. Lorsque la résolution algorithmique d'un problème met en jeu, à chacune de ses étapes, la résolution algorithmique de sous-problèmes, au lieu de résoudre exactement le sous-problème — ce qui est le cas dans les méthodes de décomposition — ou même de se contenter d'une "assez bonne" approximation de cette résolution — tronquage dans ce que POLAK [19] appelle les "algorithmes conceptuels" — le croisement d'algorithmes consiste à n'effectuer qu'un pas d'un algorithme de résolution du sous-problème. Cette idée qui semblait nouvelle lorsque nous l'avons diffusée [15] a donné lieu, depuis, à certains développements [16][18][12] .

Si la notion de croisement d'algorithmes permet d'associer à un algorithme "conceptuel" un autre susceptible d'être pratiquement mis en oeuvre, les possibilités d'utilisation de cette notion sont, en fait, beaucoup plus larges. En associant systématiquement à une méthode de décomposition, la méthode obtenue en remplaçant chaque sous-problème par un pas d'un algorithme susceptible de la résoudre — même si ce sous-problème aurait pu être résolu autrement, et éventuellement de façon non-algorithmique — on définit ainsi de nouvelles méthodes de décomposition ne mettant en jeu que des sous-problèmes beaucoup plus simples. A titre d'exemple, le croisement de méthodes duales associé à une méthode de décomposition permet de définir très naturellement des versions linéarisées de cette méthode.

Notons également que si, ainsi que le souligne LASDON [10], les différents sous-problèmes rencontrés dans une méthode de décomposition sont très souvent de natures voisines, ils possèdent cependant, chacun, certaines spécificités et relèvent donc d'un traitement par des algorithmes légèrement différents. Le fait d'utiliser, dans l'étude d'un croisement d'algorithmes, non pas un algorithme particulier mais des modèles généraux d'algorithmes, recouvrant chacun toute une "famille" de méthodes voisines, permet de choisir, pour chaque sous-problème, l'algorithme spécifique le plus adapté . Deux exemples de modèles généraux d'algorithmes sont utilisés dans ce travail : les "méthodes de descentes" de J. CEA (3) qui recouvrent un grand nombre

de méthodes type "directions admissibles" et les "méthodes duales" de P.J. LAURENT et B. MARTINET [12], généralisant certains résultats de Y. HAUGAZEAU [9], pour les méthodes de type "approximation extérieure".

I . DECOMPOSITION D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION POSE DANS UN ESPACE PRODUIT ET CROISEMENT D'ALGORITHMES ASSOCIE [18]

Soient $V = \prod_{i=1}^n V_i$ un espace de Hilbert, $C = \prod_{i=1}^n C_i \subset V$ un

sous-ensemble convexe fermé et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, une fonctionnelle définie sur V . On considère le problème :

(P) "Trouver $u \in C$ tel que $f(u) = \min [f(v) ; v \in C]$ ".

I.1. DECOMPOSITION-SERIE DU PROBLEME (P)

La décomposition du problème (P) amène à introduire des n sous-problèmes (P_i) , $i=1, \dots, n$:

(P_i) " $v_j \in C_j$ étant donné, $j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$;
trouver $v_i^* \in C_i$ tel que
 $f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i^*, v_{i+1}, \dots, v_n) = \min [f(v_1, \dots, v_{i-1}, x_i, v_{i+1}, \dots, v_n) ;$
 $x_i \in C_i]$

et l'algorithme de décomposition-série consiste à activer successivement et dans un certain ordre -- fréquemment de façon cyclique -- les n problèmes (P_i) . Plus précisément, v^p étant donné, v^{p+1} est construit, pour $p=1, 2, \dots$, en calculant successivement, pour $i=1, \dots, n$, ses composantes v_i^{p+1} définies par :

(P_i^{p+1}) " $v_i^{p+1} \in C_i ; f(v_1^{p+1}, \dots, v_i^{p+1}, v_{i+1}^p, \dots, v_n^p) =$
 $\min [f(v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, x_i, v_{i+1}^p, \dots, v_n^p) ; x_i \in C_i]$ ".

Supposons maintenant que le problème (P_i^{p+1}) soit résolu par un algorithme A_i ; v_i^{p+1} est calculé en construisant une suite $\{x_i^r\}$, $r \in \mathbb{N}$, partant d'un point $x_i^0 \in V_i$ — habituellement $x_i^0 = v_i^p$ — et telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} x_i^r = v_i^{p+1}$. Nous pouvons représenter un pas de l'algorithme A_i comme

une application :

$$A_i : V_1 \times V_2 \dots V_n \rightarrow V_i$$

$$A_i(v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, x_i^r, v_{i+1}^p, \dots, v_n^p) = x_i^{r+1}.$$

Etant donné n algorithmes $A_i : V \rightarrow V_i$, $i=1, \dots, n$, nous appellerons croisement des algorithmes A_i associé à la décomposition-série du problèmes (P) l'algorithme $A : V \rightarrow V$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*) \\ v_1^* = A_1(v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ v_i^* = A_i(v_1^*, \dots, v_{i-1}^*, v_i, \dots, v_n) \\ \vdots \\ v_n^* = A_n(v_1^*, \dots, v_{n-1}^*, v_n) \end{array} \right.$$

Les n algorithmes A_i seront dits croisés et la suite $\{v^p\} \subset V$; $p \in \mathbb{N}$, générée par le croisement A sera donc définie par :

$$v^0 \in V ; \quad v^{p+1} = A(v^p) \quad , \quad p=1, 2, \dots$$

I.2. DECOMPOSITION PARALLELE DU PROBLEME (P)

Sauf dans quelques cas très exceptionnels, en particulier lorsque le problème (P) correspond, en fait, à n problèmes indépendants posés chacun dans un des espaces V_i (par exemple $f(v) = \sum_{i=1}^n f_i(v_i)$), la méthode qui consiste à calculer en parallèle les n composantes de v^{p+1} à partir des n

composantes de v^P - c'est-à-dire à définir v_i^{P+1} , $i=1, \dots, n$, par :

$$v_i^{P+1} \in C_i ; f(v_1^P, \dots, v_{i-1}^P, v_i^{P+1}, v_{i+1}^P, \dots, v_n^P) =$$

$$\min [f(v_1^P, \dots, v_{i-1}^P, x_i, v_{i+1}^P, \dots, v_n^P) ; x_i \in C_i]$$

ne converge pas vers la solution du problème (P). Ceci peut s'interpréter, dans le langage de l'analyse de systèmes [14], en considérant que le système global, caractérisé par la variable d'état $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, est composé de n sous-systèmes, caractérisés respectivement par v_1, v_2, \dots, v_n . Dans le cas général, ces n sous-systèmes sont inter-actifs et l'optimum global de (P) est différent de la composition des optima de chaque sous-système que l'on obtiendrait avec une telle décomposition.

Si les différents sous-systèmes doivent être traités en parallèle, il est donc nécessaire, à chaque pas, de coordonner les résultats ainsi obtenus. Ceci amène à introduire une variable supplémentaire, dite "de coordination", dont la valeur est déterminée, lors de chaque itération (problème dit "de coordination" ou "central" ou "de deuxième niveau") en fonction des résultats donnés par chaque sous-système (problèmes "locaux" ou "de premier niveau"). Les méthodes relevant de cette approche sont souvent appelées méthode de "coordination" [1], de "décentralisation" (par objectifs) [2][1], à "plusieurs niveaux" [14]; la variable de coordination pouvant être selon les cas soit de type primal, cf. par exemple [6],[10] chapitre 9, [1] chapitre 2, soit de type dual (par exemple des "prix duaux"), cf. [5],[10] chapitre 8, [1] chapitre 3.

Si nous notons donc b (b appartenant à un convexe K d'un espace vectoriel B) la variable de coordination, la décomposition parallèle du problème (P) amène à lui associer $n+1$ sous-problèmes du type suivant :

n problèmes "locaux" , pour $i=1, \dots, n$:

$$(P_{1,i}) \quad \text{"trouver } v_i^* = v_i^*(b) \in C_i(b) \subset V_i \text{ tel que}$$

$$f_{1,i}(v_i^*, b) = \min [f_{1,i}(x_i, b) ; x_i \in C_i(b)]$$

1 problème de coordination

(P₂) "trouver $b^* = b^*(v,b) \in K \subset B$ tel que

$$f_2(b^*, v, b) = \min [f_2(c, v, b) ; c \in K] \text{ , avec } v = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

et la suite $(v^p, b^p) \subset V \times B$ construite par l'algorithme de décomposition parallèle $\{P_{1,i}, P_2\}$ du problème (P) est définie par :

$$b^0 \in K ; \begin{cases} v^1 = v^*(b^0) \\ b^1 = b^*(v^1, b^0) \end{cases} \quad \begin{cases} v^{p+1} = v^*(b^p) \\ b^{p+1} = b^*(v^{p+1}, b^p) \end{cases} \quad p=1, 2, \dots$$

Plus précisément, le passage de (v^p, b^p) à (v^{p+1}, b^{p+1}) suppose donc la résolution des $n+1$ sous-problèmes :

(P_{1,i}^{p+1}) "trouver $v_i^{p+1} \in C_i(b^p) \subset V_i$ tel que

$$f_{1,i}(v_i^{p+1}, b^p) = \min [f_{1,i}(v_i, b^p) ; v_i \in C_i(b^p)] \quad i=1, \dots, n;$$

et

(P₂^{p+1}) "trouver $b^{p+1} \in K$ tel que

$$f_2(b^{p+1}, v^{p+1}, b^p) = \min [f_2(b, v^{p+1}, b^p) ; b \in K] \text{ .}$$

Le procédé utilisé pour associer à (P) la décomposition parallèle $\{P_{1,i}; P_2\}$ n'étant pas précisé, nous donnons deux exemples de procédés classiques permettant de réaliser cette décomposition.

Exemple 1

On considère b appartenant à un convexe fermé K d'un espace de Hilbert B et l'on suppose que le problème (P) est équivalent, dans $V \times B$, au problème

(P) "Trouver $(\hat{v}, \hat{b}) \in C \times K$ tel que

$$F(\hat{v}, \hat{b}) = \min [F(v, b) ; v \in C, b \in K] \text{ ,}$$

avec $F(.,b)$ séparément additive par rapport aux v_i , $i=1, \dots, n$:

$$F(v,b) = \sum_{i=1}^n F_i(v_i,b) .$$

La décomposition-parallèle du problème (P) résulte alors de la décomposition-série du problème (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \text{"Trouver } \hat{v} \in C \text{ tel que } F(\hat{v},b) = \min [F(v,b) ; v \in C]"$$

ce qui est équivalent aux n problèmes

$$(P_{1,i}) \quad \text{"Trouver } \hat{v}_i \in C_i \text{ tel que}$$

$$F_i(\hat{v}_i,b) = \min [F_i(v_i,b) ; v_i \in C_i]" \quad i=1, \dots, n$$

et

$$(\mathcal{P}_2) \quad \text{"Trouver } \hat{b} \in K \text{ tel que } F(v,\hat{b}) = \min [F(v,b) ; b \in K]" .$$

Cette méthode de décomposition-parallèle du problème à travers une décomposition-série dans un nouvel espace produit, très fréquente lorsque la variable de coordination est de type primal, est utilisée à plusieurs reprises dans ce travail — cf. chapitre II, §II et III ; chapitre VI, § VI.

Exemple 2 [1] [20]

On suppose maintenant que le problème (P) est équivalent dans $V \times B$ au problème de point de selle :

$$L(\hat{v},b) \leq L(\hat{v},\hat{b}) \leq L(v,\hat{b}) \quad \forall (v,b) \in C \times K ;$$

le Lagrangien $L(v,b)$ étant séparément additif par rapport aux v_i , $i=1, \dots, n$:

$$L(v,b) = \sum_{i=1}^n L_i(v_i,b)$$

La décomposition de ce problème dans le cadre d'un algorithme de type UZAWA [21] (par exemple) amène à introduire les sous-problèmes :

$$(P_1) \quad \text{"Trouver } \hat{v} \in C \text{ tel que } L(\hat{v}, b) \leq L(v, b) \quad \forall v \in C \text{"}$$

c'est-à-dire :

$$(P_{1,i}) \quad \text{"Trouver } \hat{v}_i \in C_i \text{ tel que } L_i(\hat{v}_i, b) \leq L_i(v_i, b) \quad \forall v_i \in C_i \text{"} \quad i=1, \dots, n$$

et

$$(P_2) \quad \hat{b} = \text{Proj}_K \left(b + \rho \cdot \frac{\partial L(v, b)}{\partial b} \right).$$

Croisement d'algorithmes associé à la décomposition parallèle $\{P_{1,i}; P_2\}$ de P .

Supposons maintenant que le problème (P_i^{D+1}) soit résolu par un algorithme A_i ; v_i^{D+1} est calculé en construisant une suite $\{x_i^r\}$, $r \in \mathbb{N}$, partant d'un point $x_i^0 \in V_i$ et telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} x_i^r = v_i^{D+1}$.

Dans ce cas, x_i^0 n'est pas, en général, pris égal à v_i^D : x_i^0 peut, en fait, être choisi à partir des éléments connus au moment où intervient le problème (P_i^{D+1}) , c'est-à-dire v_i^D et b^D . Nous pouvons donc représenter la règle de choix de x_i^0 comme une application :

$$\begin{aligned} a_i &: V_i \times K \rightarrow V_i \\ a_i(v_i^D, b^D) &= x_i^0 \end{aligned}$$

et un pas de l'algorithme A_i comme une application :

$$\begin{aligned} A_i &: V_i \times K \rightarrow V_i \\ A_i(x_i^r, b^D) &\rightarrow x_i^{r+1}. \end{aligned}$$

Etant donnés n algorithmes $A_i : V_i \times K \rightarrow V_i$; $i=1, \dots, n$; et n règles de choix $a_i : V_i \times K \rightarrow V_i$; $i=1, \dots, n$, nous appellerons croisement des algorithmes A_i avec les règles de choix a_i associé à la décomposition

parallèle $(P_{1,i}, P_2)$ du problème (P) l'algorithme $A : V \times K \rightarrow V \times K$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(v_1, v_2, \dots, v_n ; b) = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^* ; b^*) \\ v_i^* = A_i(a_i(v_i, b), b) \quad , \quad i=1, \dots, n \\ b^* = b^*(v^*, b) \quad (\text{i.e. } b^* \in K ; f_2(b^*, v^*, b) = \\ \min [f_2(c, v^*, b) ; c \in K]) \end{array} \right.$$

Les n algorithmes A_i seront dits croisés avec les règles a_i et la suite $\{(v^p, b^p)\} ; p \in \mathbb{N}$, générée par le croisement A sera définie par :

$$(v^0, b^0) \in V \times K ; (v^{p+1}, b^{p+1}) = A(v^p, b^p) \quad p=1, 2, \dots$$

II . ECLATEMENT DE CONTRAINTES PAR DECOMPOSITION D'UN ESPACE PRODUIT.

La plupart des problèmes étudiés ici ne seront pas, initialement, posé dans un espace produit : il s'agira de problèmes mettant en jeu n convexes dans un unique espace (de Hilbert).

Des méthodes permettant de "découpler" de telles contraintes, c'est-à-dire de considérer séparément chacun des convexes initiaux ont été proposées par différents auteurs [1] , [9][11] ... et, en particulier, par J.L. LIONS et R. TEMAM [13] avec la terminologie, que nous utiliserons, de "méthodes d'éclatement des contraintes".

La n ème puissance cartésienne de l'espace initial, que nous introduisons dans ce travail, apparait comme un cadre adapté pour l'éclatement des contraintes : en remplaçant le problème initial, dont le domaine

des contraintes est défini par $\bigcap_{i=1}^n C_i$, par un problème équivalent dans

l'espace produit, dont le domaine des contraintes est défini par $\prod_{i=1}^n C_i$,

on obtient, pour toute méthode de décomposition de celui-ci, un procédé d'éclatement des contraintes pour le problème initial.

De plus, cette formalisation du problème initial en un problème de type (P) permettra d'associer à ces méthodes de décomposition, des méthodes de croisements d'algorithmes.

III . PLAN

Afin de faciliter sa lecture ce travail a été présenté sous forme d'une suite de chapitres susceptibles d'être abordés isolément. Chaque chapitre contient les quelques rappels de propriétés ou de définitions nécessaires pour sa compréhension et a, par ailleurs, fait l'objet d'une pré-publication séparée sous forme de rapport de recherche de Mathématiques et informatique à l'Université de Grenoble [16].

Le chapitre I étudie le problème de la recherche de la distance, ou de l'intersection, de deux ensembles convexes d'un espace de Hilbert, qui a été à l'origine de la notion de croisement d'algorithmes [15]. On montre que les propriétés de convergence de la méthode classique des projections successives, appliquée à ce problème, sont conservées lorsque l'on se contente d'une approximation très grossière de la projection obtenue par une itération d'une méthode de descente. Les méthodes de démonstration élaborées - majoration de la somme des longueurs des déplacements - sont ensuite utilisées pour établir quelques nouvelles propriétés pour une méthode voisine proposée par MEYER et POLAK.

L'étude de la représentation d'une intersection de convexes dans un espace produit fait l'objet du chapitre II. Cette représentation est d'abord utilisée pour établir quelques résultats nouveaux sur la méthode du barycentre [7], puis permet d'élaborer, par décomposition, une méthode originale, à convergence accélérée, pour la recherche d'un point appartenant à une intersection de convexes : la méthode de projection parallèle extrapolée. Diverses applications et variantes de cette méthode sont ensuite étudiées.

Le chapitre III est consacré au problème de la recherche d'un point appartenant à une intersection de convexes lorsque les projections sur ces convexes sont malaisées à obtenir. A chacune des méthodes de décomposition possibles, projections séries et projections parallèles, nous associons un croisement d'algorithmes permettant d'éviter le calcul de la projection. Un croisement de méthodes de descentes, généralisant certains résultats du chapitre I, est associé à une méthode de décomposition-série et un croisement de méthodes duales est associé à la méthode de décomposition parallèle présentée au chapitre II.

La recherche de la projection sur une intersection de convexes fait l'objet du chapitre IV. L'utilisation du formalisme présenté précédemment permet d'élaborer, pour résoudre ce problème, une méthode originale dont la convergence semble assez rapide. Par croisement de méthodes duales on obtient une version linéarisée de la méthode précédente puis l'on présente, à titre d'applications, quelques méthodes de décomposition d'opérateurs elliptiques dans les problèmes aux limites.

L'utilisation conjointe de deux normes dans l'espace produit permet d'étendre, au chapitre V, l'utilisation de la méthode présentée au chapitre précédent au problème de la minimisation d'une forme quadratique avec contraintes. On obtient ainsi une nouvelle méthode de programmation quadratique dont une version linéarisée est également présentée.

Le problème étudié, au chapitre VI, est celui de la minimisation d'une somme de fonctionnelles sur une intersection de convexes. A ce problème est associé un problème équivalent dans un espace produit qui est résolu par pénalisation. Diverses méthodes de pas fractionnaires sont ainsi retrouvés ou généralisés et des résultats nouveaux sont établis.

Le chapitre VII, qui termine ce travail, regroupe diverses applications des méthodes proposées précédemment. Ces applications ont été séparées en trois familles : problèmes dits de "programmation mathématique" : programmation linéaire, quadratique..., puis équations aux dérivées partielles et inéquations variationnelles et, enfin, quelques problèmes particuliers de statistiques. Des résultats numériques sont ensuite présentés.

IV . CONVENTIONS ET NOTATIONS

Les problèmes étudiés étant toujours ramenés à un problème dans un espace produit, l'indice inférieur - i - sera utilisé pour indiquer la ième composante de la variable indicée. Le rang d'itération, pour un élément itéré, sera représenté par un indice supérieur non parenthésé. Certaines méthodes amenant à considérer des éléments de l'espace produit dont toutes les composantes sont identiques, ces éléments seront représentés par des lettres rondes et les composantes par le caractère machine correspondant non indicé inférieurement. On écrira :

$$b = (b, b, \dots, b) ; \quad u = (u, \dots, u) \dots$$

Lorsque une puissance cartésienne d'un espace de Hilbert de produit scalaire (\cdot, \cdot) sera utilisée, l'espace produit sera toujours doté de la topologie définie par le produit scalaire :

$$((\cdot, \cdot)) = \Sigma(\cdot, \cdot)$$

La signification des références est la suivante :

- (12) formule du même chapitre
- (II.12) formule du chapitre II
- II.1.3. numéro de paragraphe du même chapitre
- I-II.1.3. numéro de paragraphe du chapitre I
- [3] ou ⁽³⁾ renvoi à une référence située en fin de chapitre.

REFERENCES

- [1] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, R. TEMAM, "Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination, et applications", in "Méthodes numériques d'analyse de systèmes, t.2, . Décomposition" Cahier IRIA, N° 11, (1972), 5-190.
- [2] B. COLLOMB, "Goal interval approaches to intertemporal Analysis and Decentralisation in Management" Ph.D Thesis, The University of Texas at Austin, (1971).
- [3] J. CEA, "Les méthodes de descente en théorie de l'optimisation". RIRO, 13, R-3, (1968), 79-101.
- [4] G.B. DANTZIG, "Compact Basic Triangularization for the Simplex Method" in "Recent advances in mathematical programming" R.L. Graves and P. Wolfe, eds., McGraw-Hill, Inc., New-York (1963), 125-132.
- [5] G.B. DANTZIG, P. WOLFE, "The decomposition algorithm for linear programming" *Econometrica*, 9, 4, (1961).
- [6] W. FINDEISEN, "Parametric optimization by primal method in multi-level systems". *IEEE Trans. on S.S.C.*, 4, 2, (1968), 155-164.
- [7] N. GASTINEL, "Analyse Numérique Linéaire", Hermann, Paris, (1966).
- [8] L.G. GUBIN, B.T. POLYAK, E.V. RAIK "The méthode of projections for finding the Common point of convex sets" *Zh. Vychist. Mat. Fiz.* 7, 6, (1967), 1211-1228.
- [9] Y. HAUGAZEAU, "Sur la minimisation de formes quadratiques avec contraintes". *C.R. Acad. sci.*, Paris, 264, (1967).
- [10] L.S. LASDON, "Optimization theory for large systems". The Mac Millan Company, New-York, (1970).

- [11] P.J. LAURENT, B. MARTINET, "Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes" Symposium on Optimization, Nice, (1969), in lect. Notes Math. 132, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [12] B. MARTINET, A. AUSLENDER, "Méthodes de décomposition pour la minimisation d'une fonction sur un espace produit" SIAM J. Control, 12, 4, (1974), 635-642.
- [13] J.L. LIONS, R. TEMAM, "Eclatement et décentralisation en calcul des variations" Symposium on Optimization, Nice, (1969), in lect. Notes Math. 132, Springer-Verlag, Berlin (1970), 196-217.
- [14] M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA, "Theory of hierarchical, multilevel systems" Academic Press, New-York, (1970).
- [15] G. PIERRA, "Sur le croisement de méthodes de descente et l'intersection ou la distance de deux convexes" Colloque d'analyse numérique du C.N.R.S. (1971)(1973) and C.R. Acad. Sc. Paris, 277, (1973), 1071-1074.
- [16] G. PIERRA, Rapports de Recherche, Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble, (1975) :
- .(a) RR N° 6 : "Croisement de méthodes de descente pour le calcul de la distance entre deux convexes".
 - .(b) RR N° 7 : "Méthodes de projections parallèles extrapolées relatives à une intersection de convexes".
 - .(c) RR N° 8 : "Recherche d'un point appartenant à plusieurs ensembles convexes par croisement d'algorithmes".
 - .(d) RR N° 9 : "Projection sur une intersection de convexes et applications".
 - .(e) RR N° 10 : "Une nouvelle méthode de programmation quadratique".
 - .(f) RR N° 26 : "Décomposition d'opérateur et éclatement de contraintes par pénalisation dans un espace produit ; (Méthodes à pas fractionnaires)".

- [17] G. PIERRA, "Eclatement de contraintes en parallèle pour la minimisation d'une forme quadratique". 7th IFIP, conference on optimization techniques, NICE, (1975).

- [18] G. PIERRA, "Crossing of algorithms in decomposition methods". IFAC Symposium on large scale systems theory and applications ; Udine, (1976).

- [19] E. POLAK, "Computational methods in optimization" Academic Press, New-York, (1971).

- [20] R. TREMOLIERES, "Inéquations variationnelles; existence, approximation, résolution". Thèse, Paris, (1972).

- [21] H. UZAWA, "Studies in linear and non-linear programming" K.J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, eds., Stanford University Press, Stanford (1958).

CHAPITRE I

CHAPITRE I

CROISEMENT DE METHODE DE DESCENTE POUR LE CALCUL DE LA DISTANCE ENTRE DEUX CONVEXES

Le point de départ de cette étude a été le fait de remarquer que, si le problème de la recherche de la plus courte distance entre un point et un convexe avait été largement étudié, et servait de modèle à de nombreux problèmes concrets, la recherche de la plus courte distance entre deux convexes, prolongement assez naturel du problème précédent - et dont la simplicité conceptuelle laissait penser qu'il devait avoir également un large champ d'applications - n'avait été que très peu évoquée.

La première idée pour résoudre ce problème consiste à utiliser les projections successives d'un point sur chacun des deux convexes ⁽²⁾ ⁽⁵⁾. Si cette méthode est utilisable lorsque les deux convexes sont assez simples, elle devient impraticable dès que la recherche des projections nécessite une méthode algorithmique. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus en se limitant à n'utiliser, lors de chaque pas de l'algorithme principal, qu'un seul pas de la méthode algorithmique de recherche de la projection. Les algorithmes de projection qui seront ainsi croisés sont ceux regroupés par J. CEA ⁽²⁾ sous le nom "Méthode de descente" et qui recouvrent la plupart des algorithmes de type gradient modifié usuels : méthode de Frank-Wolfe et ses variantes ⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁵⁾, méthode de Rosen ⁽¹²⁾, etc... ⁽³⁾⁽¹¹⁾.

Après avoir rappelé, dans une première partie, les propriétés de la méthode des projections successives pour le problème de la recherche de la distance, ou de l'intersection, de deux ensembles convexes, on établit, au § II, un lemme de convergence pour les méthodes de descente ⁽²⁾. Cet outil technique nous permet alors d'étendre au croisement d'algorithmes la plupart des résultats de convergence obtenus par la méthode des projections successives. Au § IV, enfin, une méthode proposée par MEYER et POLAK ⁽¹¹⁾ est étudiée et certaines propriétés conjecturées par ces auteurs sont établies.

I. RAPPELS SUR LA METHODE DES PROJECTIONS SUCCESSIVES

Soient :

V un espace de Hilbert réel de produit scalaire et de norme noté $(.,.)$ et $||.||$.

La distance associée sera notée $d(.,.)$

$C_i \subset V$, $i = 1, 2$, des sous-ensembles convexes fermés

$\mathcal{V} = V \times V$, doté de la topologie produit par le produit scalaire $((.,.)) = \sum_{i=1}^2 (.,.)$;
la norme correspondante étant notée $|||.|||$

$$\mathcal{C} = C_1 \times C_2$$

et le problème

(P) "Trouver $(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in \mathcal{C}$ tel que $||\hat{v}_1 - \hat{v}_2|| = \min [||v_1 - v_2|| ; (v_1, v_2) \in \mathcal{C}]$ "

Décomposer notre problème revient à lui associer les deux problèmes :

(P₁) "Trouver $\hat{v}_1 \in C_1$ tel que $||\hat{v}_1 - v_2|| = \min [||v_1 - v_2|| ; v_1 \in C_1]$ "

(P₂) "Trouver $\hat{v}_2 \in C_2$ tel que $||v_1 - \hat{v}_2|| = \min [||v_1 - v_2|| ; v_2 \in C_2]$ "

La méthode des projections successives, qui est la méthode de décomposition-série du problème (P), consiste à activer alternativement chacun des deux sous-problèmes (P₁) et (P₂). L'algorithme de décomposition est donc le suivant :

I.1 - Méthode des projections successives

Partant de $v_2^0 \in V$, le passage de (v_1^p, v_2^p) à (v_1^{p+1}, v_2^{p+1})

s'effectue de la façon suivante :

1/ On définit v_1^{p+1} par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^{p+1} \in C_1 \\ ||v_1^{p+1} - v_2^p|| = \min [||v_1 - v_2^p|| ; v_1 \in C_1] \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$v_1^{p+1} = \text{Proj}_{C_1} v_2^p$$

2/ v_2^{p+1} est, de même défini par :

$$v_2^{p+1} = \text{Proj}_{C_2} v_1^{p+1}.$$

On a les propriétés suivantes :

I.2 - Théorème ⁽²⁾⁽⁵⁾

Si C_1 , ou C_2 , est borné, l'ensemble \mathcal{Y} des optima, défini par :

$$\mathcal{Y} = \left\{ (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in \mathcal{C}; \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\| = [\min \|v_1 - v_2\|; (v_1, v_2) \in \mathcal{C}] \right\},$$

est convexe, fermé, non vide.

I.3 - Remarque

Par définition de la distance inter-convexe, on a :

$$\mathcal{Y} = \left\{ (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in \mathcal{C}; d(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = d(C_1, C_2) \right\},$$

et dans le cas où $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$,

$$\mathcal{Y} = \left\{ (x, x) \in \mathcal{C}; x \in C_1 \cap C_2 \right\}.$$

I.4 - Théorème de caractérisation ⁽¹³⁾

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in \mathcal{Y}$

(ii)
$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in \mathcal{C} \\ \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\| = \min [\|v_1 - \hat{v}_2\|; v_1 \in C_1] = \min [\|\hat{v}_1 - v_2\|; v_2 \in C_2] \end{array} \right.$$

I.5 - Théorème⁽⁵⁾

Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, alors les deux suites $\{v_1^p\}$ et $\{v_2^p\}$ définies par la méthode des projections successives convergent faiblement vers $u \in C_1 \cap C_2$.

Si, de plus, l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée :

(a) $C_1 \cap \overset{\circ}{C}_2 \neq \emptyset$ (ou $\overset{\circ}{C}_1 \cap C_2 \neq \emptyset$)

(b) C_1 (ou C_2) est uniformément convexe

(c) V est de dimension finie

alors les convergences ont lieu au sens de la topologie forte de V . De plus, dans le cas (a), la vitesse de convergence est au moins linéaire

I.6 - Théorème⁽⁵⁾

Si C_1 (ou C_2) est borné, alors la suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ définie par la méthode des projections successives converge faiblement vers $(u_1, u_2) \in \mathcal{Y}$ et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_1^p - v_2^p\| = d(C_1, C_2).$$

Si de plus, l'une quelconque, des conditions suivantes est vérifiée :

(b) C_1 (ou C_2) est uniformément convexe

(c) V est de dimension finie

alors la convergence a lieu au sens de la topologie forte de \mathcal{Y} .

II. UN LEMME DE CONVERGENCE SUR LES METHODES DE DESCENTE

Soient :

- V un espace de Hilbert réel, identifié à son dual, de produit scalaire $(.,.)$ et de norme $\|.\|$
- A un opérateur linéaire sur V
- h un élément donné dans V

On fait sur A , les hypothèses suivantes :

D_1 L'opérateur A est symétrique

D_2 L'opérateur A est coercif ; il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$(Av, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V \quad (1)$$

D_3 L'opérateur A est continu ; il existe $M > 0$, tel que :

$$|(Au, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u \in V, \quad \forall v \in V \quad (2)$$

Nous savons que les hypothèses précédentes entraînent que l'opérateur A est inversible; il existe donc u unique tel que :

$$Au = h.$$

Nous nous proposons de déterminer u comme solution d'un problème de minimisation et pour cela nous posons :

$$f(v) = (A(v-u), v-u),$$

et nous cherchons à résoudre le problème :

$$(M') \text{ "Trouver } \hat{v} \in V \text{ tel que } f(\hat{v}) = \min [f(v) ; v \in V] \text{ "}$$

Remarquons qu'il revient au même de minimiser $(Av, v) - 2(h, v)$.

II. 1 - Principe des méthodes de descente ⁽³⁾

A partir d'un élément v^0 donné, on construit une suite v^1, \dots, v^p, \dots destinée à converger vers la solution u du problème.

Pour passer de v^p à v^{p+1} , on définit une direction (de "descente") p^{p+1} ; v^{p+1} est alors un point choisi sur la droite $v^p + \lambda p^{p+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons :

$$v^{p+1}(\lambda) = v^p + \lambda p^{p+1}.$$

On a :

$$f(v^{p+1}(\lambda)) = f(v^p) + 2\lambda(A(v^p - u), p^{p+1}) + \lambda^2(Ap^{p+1}, p^{p+1})$$

ou encore, en posant

$$g^p = -A(v^p - u)$$

$$f(v^{p+1}(\lambda)) = f(v^p) - 2\lambda(g^p, p^{p+1}) + \lambda^2(Ap^{p+1}, p^{p+1}) \quad (3)$$

La fonction $\lambda \rightarrow f(v^{p+1}(\lambda))$ atteint son minimum pour :

$$\lambda = \lambda_s^{p+1} = \frac{(g^p, p^{p+1})}{(Ap^{p+1}, p^{p+1})} \quad (4)$$

et prend la valeur :

$$f(v^{p+1}(\lambda_s^{p+1})) = f(v^p) - \frac{(g^p, p^{p+1})^2}{(Ap^{p+1}, p^{p+1})} \quad (5)$$

II.2 - Lemme de convergence

Supposons alors que le choix de v^{p+1} soit défini par :

$$v^{p+1} = v^p + \ell^{p+1} \cdot \lambda_s^{p+1} \cdot p^{p+1} \quad (6)$$

On a le résultat suivant :

II.2.1 - Lemme

Avec les hypothèses et notations précédentes, si l'on suppose également :

$$D_4 \left(\frac{g^p}{\|g^p\|}, \frac{p^{p+1}}{\|p^{p+1}\|} \right) \geq \gamma > 0$$

D_5 Pour tous les rangs p , on a :

$$0 \leq \ell^{p+1} \leq \mu < 2.$$

Alors

$$i) \quad \|v^{p+1} - v^p\| \leq K \left[\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})} \right]$$

avec K indépendant de v^p et de u :

$$K = \frac{1}{2}(2 - \mu) \gamma \sqrt{\alpha}$$

ii) la suite $\{v^{p+1}\}$ est fortement convergente.

II.2.2 - Exemples de choix de ℓ^{p+1}

- On peut prendre $\ell^{p+1} = \ell$, $p = 1, 2, \dots$, ce qui correspond à une méthode de descente avec sur, ou sous-relaxation

- Si on suppose donné $C \subset V$, C étant convexe fermé, nous pourrions prendre :

$$\ell^p \cdot \lambda_s^{p+1} = \min \left\{ \lambda_s^{p+1}, \max \left\{ \lambda; \text{tel que } v^{p+1}(\lambda) \in C \right\} \right\}.$$

II.2.3 - Démonstration

1er point - $f(v^p)$ est non croissante et bornée, donc convergente.

En effet, on a :

$$f(v^{p+1}) = f(v^{p+1}(\ell^{p+1} \cdot \lambda_s^{p+1})) = f(v^p) - \frac{(g^p, p^{p+1})^2}{(A p^{p+1}, p^{p+1})} (2\ell^{p+1} - (\ell^{p+1})^2)$$

d'où, pour tout ℓ^{p+1} compris entre 0 et μ :

$$f(v^{p+1}) \leq f(v^p)$$

La suite $\{f(v^p)\}$ est donc convergente ainsi que la suite $\{\sqrt{f(v^p)}\}$.

2ème point - Minoration de $\frac{\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})}}{\|v^p - v^{p+1}\|}$

On a :

$$f(v^p) - f(v^{p+1}) = \frac{(g^p, p^{p+1})^2}{(A p^{p+1}, p^{p+1})} \cdot (2\ell^{p+1} - (\ell^{p+1})^2)$$

et :

$$\|v^{p+1} - v^p\| = \ell^{p+1} \cdot \lambda_s^{p+1} \cdot \|p^{p+1}\| = \ell^{p+1} \cdot (g^p, p^{p+1}) \cdot \frac{\|p^{p+1}\|}{(A p^{p+1}, p^{p+1})}.$$

Il vient donc, compte-tenu des hypothèses D_4 et D_5 :

$$\frac{f(v^p) - f(v^{p+1})}{\|v^{p+1} - v^p\|} = (2 - \ell^{p+1}) \frac{(g^p, p^{p+1})}{\|p^{p+1}\|} \geq (2 - \ell^{p+1}) \cdot \gamma \cdot \|g^p\| > (2 - \mu) \gamma \cdot \|g^p\|$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})}}{\|v^{p+1} - v^p\|} \geq (2-\mu) \cdot \gamma \cdot \frac{\|g^p\|}{\sqrt{f(v^p)} + \sqrt{f(v^{p+1})}} ;$$

et puisque $f(v^p)$ est décroissante,

$$\frac{\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})}}{\|v^{p+1} - v^p\|} \geq \frac{1}{2} (2-\mu) \cdot \gamma \cdot \frac{\|g^p\|}{\sqrt{f(v^p)}} . \quad (7)$$

Or, on a :

$$g^p = -A(v^p - u),$$

c'est-à-dire :

$$\|g^p\|^2 = (A(v^p - u), A(v^p - u)) ;$$

et :

$$f(v^p) = (A(v^p - u), v^p - u) = (A(v^p - u), A^{-1}A(v^p - u))$$

Grace à l'hypothèse D_2 , nous avons :

$$(A^{-1}v, v) \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

et, en particulier :

$$f(v^p) \leq \frac{1}{\alpha} \|A(v^p - u)\|^2.$$

Il vient donc :

$$\sqrt{f(v^p)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|g^p\| ;$$

d'où en reportant dans l'expression minorante (7) :

$$\frac{\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})}}{\|v^{p+1} - v^p\|} \geq \frac{1}{2} (2-\mu) \gamma \sqrt{\alpha} , \quad (8)$$

ce que l'on peut également écrire :

$$\|v^{p+1} - v^p\| \leq \left[\frac{1}{2} (2-\mu) \gamma \sqrt{\alpha} \right] \left(\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})} \right) . \quad (9)$$

3ème point - Convergence de $\{v^p\}$

La série $\{\|v^{p+1} - v^p\|\}$ est donc convergente ; donc, la suite $\{v^p\}$ est une suite de Cauchy, fortement convergente sur V complet.

II.2.4 - Remarque

J. CEA⁽²⁾ utilise également l'hypothèse D_4 pour établir la convergence dans les cas $\ell^{p+1} = 1$ et $0 < \nu \leq \ell^{p+1} < 2 - \nu < 2$.

II.2.5 - Remarque

Il convient de noter que si notre lemme établit la convergence forte de la suite $\{v^p\}$, il ne préjuge pas de la nature du point de convergence : il suffit de prendre $\ell^{p+1} = 0$, $p = 1, \dots$, et le point de convergence n'est autre que le point v^0 ! Le choix effectif de ℓ^{p+1} devra donc avoir pour effet de faire converger la suite vers le point cherché.

Nous allons maintenant préciser la manière dont nous procéderons au choix de p^{p+1} et au choix de ℓ^{p+1} dans le cas particulier qui nous intéressera désormais.

II.3 - Construction effective de v^{p+1}

Dans le reste de ce travail, l'algorithme sera mis en oeuvre dans un espace V_i (nous introduisons donc, dès maintenant, l'indice i) pour résoudre le problème :

(M_i) "Trouver \hat{v}_i tel que $f(\hat{v}_i) = \min [f(v_i) ; v_i \in C_i \subset V_i]$ "

avec : $f(v_i) = (v_i - x, v_i - x) = \|v_i - x\|^2$.

On posera donc :

$$g_i^p = x - v_i^p .$$

II.3.1 - Choix de p_i^{p+1}

Supposant données deux constantes positives r_i et L_i , on définira :

$$C_i^p = \left\{ v_i \in C_i ; \|v_i - v_i^p\| < r_i \right\} . \quad (10)$$

Soit alors un élément $z_i^p \in C_i$ qui vérifie :

$$\begin{cases} (g_i^p, z_i^p) \geq (g_i^p, v_i) & \forall v_i \in C_i^p \\ \|z_i^p\| \leq L_i ; z_i^p \in C_i \end{cases} \quad (11)$$

on prendra :

$$p_i^{p+1} = z_i^p - v_i^p \quad (12)$$

II.3.2 - Choix de v_i^{p+1}

Posant :

$$v_i^{p+1}(\lambda) = v_i^p + \lambda p_i^{p+1}, \quad (13)$$

on définit :

$$\lambda_{i,C}^{p+1} = \max \{ \lambda \in \mathbb{R} ; v_i^{p+1}(\lambda) \in C_i \}, \quad (14)$$

d'autre part, on a (4) :

$$\lambda_{i,s}^{p+1} = \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})}{\|p_i^{p+1}\|^2}, \quad (15)$$

on prend donc :

$$\lambda_i^{p+1} = \min \left\{ \lambda_{i,s}^{p+1}, \lambda_{i,C}^{p+1} \right\}, \quad (16)$$

et l'on pose :

$$v_i^{p+1} = v_i^{p+1}(\lambda_i^{p+1}).$$

Remarquons que l'on a :

$$\text{- Si } \lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,s}^{p+1} :$$

$$f(v_i^{p+1}) = f(v_i^p) - \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})^2}{\|p_i^{p+1}\|^2} \quad (17)$$

et donc :

$$f(v_i^{p+1}) = f(v_i^p) - \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2 \quad (18)$$

$$\text{- Si } \lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,C}^{p+1}$$

alors :

$$1 \leq \lambda_{i,C}^{p+1} \leq \lambda_{i,s}^{p+1}$$

ce qui, compte-tenu de la définition de $\lambda_{i,s}^{p+1}$ entraîne :

$$\|p_i^{p+1}\|^2 \leq (g_i^p, p_i^{p+1}) \quad (19)$$

Or, puisque la fonction $\lambda \rightarrow f(v_i^{p+1}(\lambda))$ est, pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_{i,s}^{p+1}$, décroissante :

$$f(v_i^p) - f(v_i^{p+1}) \geq f(v_i^p) - f(v_i^{p+1}(1))$$

c'est-à-dire, compte-tenu de (19) :

$$f(v_i^p) - f(v_i^{p+1}) \geq (g_i^{p+1}, p_i^{p+1}). \quad (20)$$

Enfin, dans le cas présent, on a :

$A = I$ opérateur identité

$\mu = 1$,

et notre lemme nous donne

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| \leq \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot [\|v_i^p - u\| - \|v_i^{p+1} - u\|]. \quad (21)$$

III. RECHERCHE DE LA DISTANCE INTER-CONVEXE PAR CROISEMENT DE METHODES DE DESCENTE

III.1 - Position du problème

Soient :

- V un espace de Hilbert réel, identifié à son dual, de produit scalaire $(.,.)$, de norme $||. ||$. La distance associée sera notée $d(.,.)$.
- $C_i \subset V$, $i = 1, 2$, des sous-ensembles convexes fermés
- $\mathcal{V} = V \times V$ doté de la topologie produit : $((.,.))$ et $|||. |||$
- $\mathcal{C} = C_1 \times C_2$.

Nous ferons également l'hypothèse :

- (H₁) "Quel que soit $D > 0$, l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2 ; ||x_1 - x_2|| \leq D\}$ est borné"

Cette hypothèse est, en particulier, vérifiée si :

- (a) C_1 (ou C_2) est borné
 (b) V est de dimension finie et les cones asymptotes⁽⁹⁾ $C_{i\infty}$ de C_i , $i = 1, 2$, sont tels que :

$$C_{1\infty} \cap C_{2\infty} = \{0\}.$$

On cherche à résoudre le problème :

- (P) "Trouver $(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in \mathcal{C}$ tel que $||\hat{v}_1 - \hat{v}_2|| = \min (||v_1 - v_2||; v_1 \in C_1 ; v_2 \in C_2)$ "

Notre problème se décompose naturellement en :

(P₁) "Trouver $\hat{v}_1 \in C_1$ tel que $\| \hat{v}_1 - v_2 \| = \min (\| v_1 - v_2 \| ; v_1 \in C_1)$ ".

(P₂) "Trouver $\hat{v}_2 \in C_2$ tel que $\| v_1 - \hat{v}_2 \| = \min (\| v_1 - v_2 \| ; v_2 \in C_2)$ ".

Au lieu de résoudre, à chaque pas, alternativement un problème (P₁) et un problème (P₂), nous allons croiser une méthode de descente tendant à résoudre P₁ avec une méthode de descente, éventuellement différente, tendant à résoudre P₂.

III. 2 - Algorithme

Partant de $(v_1^0, v_2^0) \in \mathcal{C}$, on passe donc de (v_1^p, v_2^p) à (v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) de la façon suivante. On pose :

$$g_1^p = v_2^p - v_1^p.$$

Supposant donnés $r_1 > 0$ et $L_1 > 0$, on choisit p_1^{p+1} comme au I. 3. Le point v_1^{p+1} est alors le point v_1 qui minimise $\| v_2^p - v_1 \|$ sur le segment $\{ v_1^p + \lambda p_1^{p+1} ; \lambda \geq 0 \} \cap C_1$ c'est-à-dire (16) :

$$v_1^{p+1} = v_1^{p+1}(\lambda_1^{p+1}).$$

On passe alors de (v_1^{p+1}, v_2^p) à (v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) en posant :

$$g_2^p = v_1^{p+1} - v_2^p.$$

On suppose donnés $r_2 > 0$ et $L_2 > 0$, on choisit p_2^{p+1} et v_2^{p+1} comme au II. 3, c'est-à-dire :

$$v_2^{p+1} = v_2^{p+1}(\lambda_2^{p+1}).$$

Nous ferons désormais la convention

$$v_0^{p+1} = v_2^p ;$$

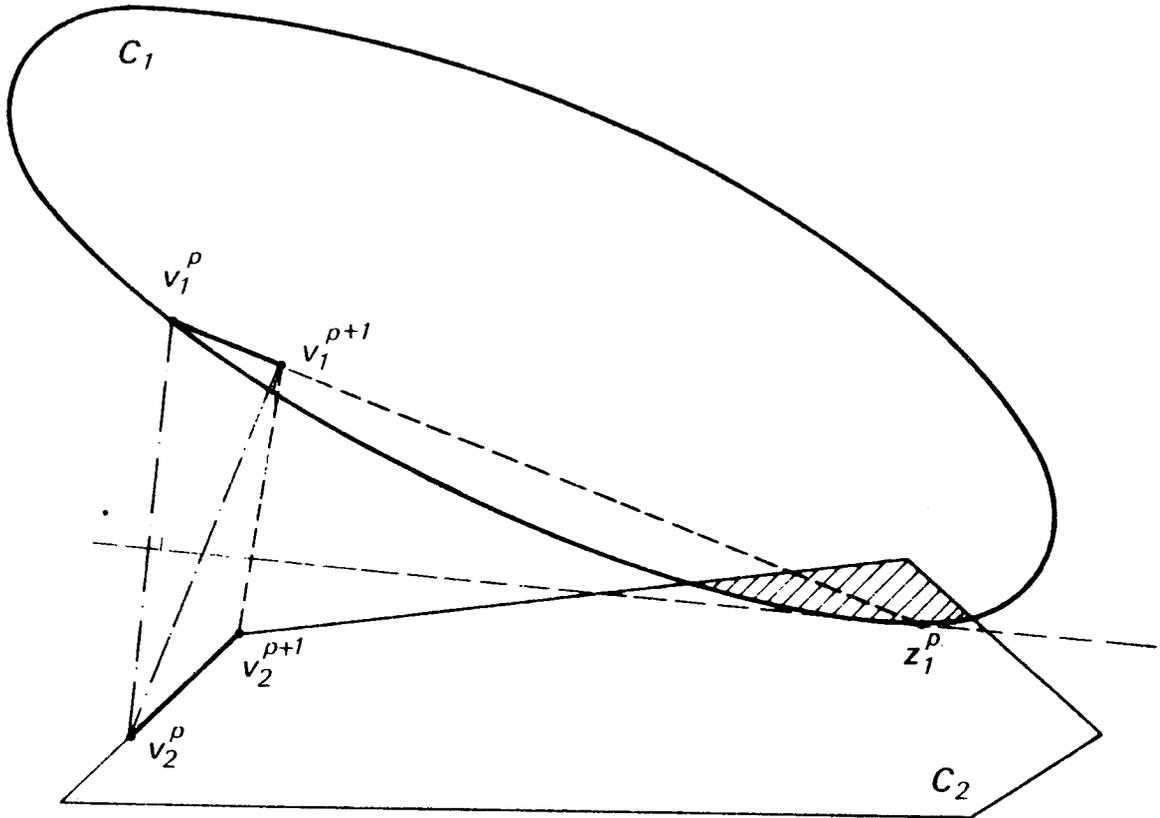


FIGURE 1 : Croisement de deux méthodes de descente : un algorithme de Frank-Wolfe pour C_1 croisé avec une méthode de gradient projeté pour C_2 .

g_i^p sera donc défini, pour $i = 1, 2$, par :

$$g_i^p = v_{i-1}^{p+1} - v_i^p. \quad (22)$$

III.2.1 - Remarque

A chaque pas de l'algorithme principal, nous cherchons à résoudre le problème :

"Trouver \hat{v}_i tel que $\|\hat{v}_i - v_j\| = \min (\|v_i - v_j\| ; v_i \in C_i)$ ".

avec $i = 1, 2 ; j = 1, 2 ; i \neq j$.

La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ étant sur \mathbb{R}^+ une fonction monotone, il est clair que le problème est équivalent à

(Q'_i) "Trouver \hat{v}_i tel que $(\hat{v}_i - v_j, \hat{v}_i - v_j) = \min [(v_i - v_j, v_i - v_j) ; v_i \in C_i]$ "

c'est-à-dire au problème modèle M_i (cf. II.3).

III.3 - Caractérisation de la solution

Si l'on note, à nouveau, \mathcal{S} l'ensemble des optima :

$$\mathcal{S} = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathcal{C} ; d(v_1, v_2) = d(C_1, C_2) \right\},$$

la fonction $(v_1, v_2) \mapsto d(v_1, v_2)$ étant convexe, faiblement s. c. i., l'hypothèse (H₁) entraîne que \mathcal{S} est convexe, fermée, non vide ; et l'on a :

$$\mathcal{S} = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathcal{C} ; d(v_1, C_2) = d(C_1, v_2) = d(v_1, v_2) \right\}.$$

Nous noterons :

$$S_1 = \left\{ v_1 \in C_1 ; d(v_1, C_2) = d(C_1, C_2) \right\} = \left\{ v_1 \in C_1 ; \exists v_2 \in C_2, (v_1, v_2) \in \mathcal{S} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ v_2 \in C_2 ; d(C_1, v_2) = d(C_1, C_2) \right\} = \left\{ v_2 \in C_2 ; \exists v_1 \in C_1 ; (v_1, v_2) \in \mathcal{S} \right\}$$

III.4 - Convergence du croisement de méthodes de descente

On a alors les résultats suivants :

III.4.1 - Théorème

Sous l'hypothèse H_1 , on a :

- i) $\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, v_2^p) = d(C_1, C_2)$
- ii) Il existe une sous-suite de la suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ qui converge faiblement vers un optimum.

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que la direction de descente p_i^{p+1} est bien définie sauf si :

$$(g_i^p, v_i^p) \geq (g_i^p, v_i), \quad \forall v_i \in C_i$$

c'est-à-dire :

$$v_i^p = \text{Proj}_{C_i} v_{i-1}^{p+1}.$$

Dans ce cas on pose :

$$v_i^{p+1} = v_i^p.$$

D'autre part, p_i^{p+1} étant défini, si l'on a :

$$v_i^{p+1} = v_i^p.$$

Alors cela signifie :

$$\lambda_{i,s}^{p+1} = 0$$

soit :

$$(g_i^p, p_i^{p+1}) = 0$$

et donc, par définition de g_i^p (22) :

$$0 \geq (v_{i-1}^{p+1} - v_i^p, v_i - v_i^p) \quad \forall v_i \in C_i$$

c'est-à-dire :

$$v_i^{p+1} = v_i^p = \text{Proj}_{C_i} v_{i-1}^{p+1}.$$

Si donc $v^{p+1} = v^p$, alors v^p est solution de (Q). Supposons donc la suite $\{v^p\}$ infinie et $\|p_i^{p+1}\| \neq 0$.

1er point - Convergence de $d(v_1^p, v_2^p)$

On a par construction :

$$d(v_1^0, v_2^0) \geq d(v_1^1, v_2^0) \geq d(v_1^1, v_2^1) \geq \dots \geq d(v_1^p, v_2^p) \geq d(v_1^{p+1}, v_2^p) \geq d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) \geq \dots \geq d(C_1, C_2).$$

La suite $d(v_1^p, v_2^p)$ non croissante et bornée, est donc convergente.

On a comme conséquence :

- Compte-tenu de l'hypothèse (H_1) , les suites $\{v_1^p\}$ et $\{v_2^p\}$ restent bornées dans V

$$- \lim_{p \rightarrow \infty} [d^2(v_1^p, v_2^p) - d^2(v_1^{p+1}, v_2^p)] = 0$$

$$- \lim_{p \rightarrow \infty} [d^2(v_1^{p+1}, v_2^p) - d^2(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})] = 0$$

2ème point -- $\lim_{p \rightarrow \infty} (g_i^p, p_i^{p+1}) = 0, \quad i = 1, 2.$

Deux cas sont à distinguer :

- Si $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,s}^{p+1}$ alors (17) :

$$\frac{(g_i^p, p_i^{p+1})^2}{(p_i^{p+1}, p_i^{p+1})} \leq d^2(v_1^p, v_2^p) - d^2(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})$$

et puisque $\|p_i^{p+1}\| \neq 0$, le résultat suit.

- Si $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,c}^{p+1}$ alors (20) :

$$(g_i^p, p_i^{p+1}) \leq d^2(v_1^p, v_2^p) - d^2(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) ;$$

et donc dans tous les cas :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (g_i^p, p_i^{p+1}) = 0 \quad (23)$$

3ème point - $\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_i^{p+1} - v_i^p\| = 0, \quad i = 1, 2.$

Distinguons à nouveau les deux cas :

- Si $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,s}^{p+1}$, alors, on a (18) - c'est le théorème de Pythagore :

$$d^2(v_i^p, v_{i-1}^{p+1}) - d^2(v_i^{p+1}, v_{i-1}^{p+1}) = \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2$$

- Si $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,c}^{p+1}$, rappelons que l'on a :

$$1 \leq \lambda_{i,c}^{p+1} \leq \lambda_{i,s}^{p+1}$$

et donc :

$$\lambda_{i,c}^{p+1} \|p_i^{p+1}\|^2 \leq (g_i^p, p_i^{p+1})$$

ainsi que :

$$d^2(v_i^p, v_{i-1}^{p+1}) - d^2(v_i^{p+1}, v_{i-1}^{p+1}) = 2\lambda_{i,c}^{p+1} (g_i^p, p_i^{p+1}) - (\lambda_{i,c}^{p+1})^2 \|p_i^{p+1}\|^2.$$

Il vient donc :

$$d^2(v_i^p, v_{i-1}^{p+1}) - d^2(v_i^{p+1}, v_{i-1}^{p+1}) \geq 2(\lambda_{i,c}^{p+1})^2 \|p_i^{p+1}\|^2 - (\lambda_{i,c}^{p+1})^2 \|p_i^{p+1}\|^2,$$

ou encore :

$$d^2(v_i^p, v_{i-1}^{p+1}) - d^2(v_i^{p+1}, v_{i-1}^{p+1}) \geq \|v_i^p - v_i^{p+1}\|^2 \quad (24)$$

On a donc finalement :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_i^{p+1} - v_i^p\| = 0. \quad (25)$$

4ème point - $\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, v_2^p) = d(C_1, C_2)$

Par définition de p_i^{p+1} (11), on a :

$$(g_i^p, p_i^{p+1}) \geq (g_i^p, v_i - v_i^p) \quad \forall v_i \in C_i^p$$

c'est-à-dire :

$$(v_2^p - v_1^p, v_1 - v_1^p) \leq (g_1^p, p_1^{p+1}) \quad \forall v_1 \in C_1^p \quad (26)$$

et :

$$(v_1^{p+1} - v_2^p, v_2 - v_2^p) \leq (g_2^p, p_2^{p+1}) \quad \forall v_2 \in C_2^p.$$

Ceci peut également s'écrire :

$$(v_1^p - v_2^p, v_2 - v_2^p) \leq (g_2^p, p_2^{p+1}) + (v_1^p - v_1^{p+1}, v_2 - v_2^p), \quad \forall v_2 \in C_2^p ;$$

ou encore :

$$(v_2^p - v_1^p, v_2^p - v_2) \leq (g_2^p, p_2^{p+1}) + (v_1^p - v_1^{p+1}, v_2 - v_2^p), \quad \forall v_2 \in C_2^p. \quad (27)$$

En ajoutant membre à membre (26) et (27), il vient :

$$(v_2^p - v_1^p, v_1 - v_2) + (v_2^p - v_1^p, v_2^p - v_1^p) \leq (g_1^p, p_1^{p+1}) + (g_2^p, p_2^{p+1}) + (v_1^p - v_1^{p+1}, v_2 - v_2^p), \quad \forall v_1 \in C_1^p, \forall v_2 \in C_2^p$$

d'où, compte-tenu de (23), (25) et puisque C_2^p est borné, en passant à la limite supérieure des deux membres :

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} (v_2^p - v_1^p, v_1 - v_2) + \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_2^p - v_1^p\|^2 \leq 0 \quad \forall v_1 \in C_1^p, \forall v_2 \in C_2^p$$

soit :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} (v_2^p - v_1^p, v_2 - v_1) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_2^p - v_1^p\|^2 \quad \forall v_1 \in C_1^p, \forall v_2 \in C_2^p$$

et donc, par Cauchy-Schwarz :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|v_2 - v_1\| \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_2^p - v_1^p\| \quad \forall v_1 \in C_1^p, \forall v_2 \in C_2^p ;$$

ceci peut également s'écrire :

$$\|v_1 - v_2\| \geq \|v_1^p - v_2^p\| - o(1/p) \quad \forall v_1 \in C_1^p, \forall v_2 \in C_2^p.$$

Or l'application $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(v_1, v_2) \rightarrow \|v_1 - v_2\|$$

est convexe. Puisque l'on peut considérer $C_1 \times C_2$ comme borné - hypothèse

(H₁) - il existe un K, $0 \leq K < 1$ tel que :

$$\forall v_1 \in C_1, \forall v_2 \in C_2, \forall v_1^p \in C_1, \forall v_2^p \in C_2, \quad \text{on ait :}$$

$$((1-K)v_1^P + Kv_1, (1-K)v_2^P + Kv_2) \in C_1^P \times C_2^P.$$

On a donc :

$$\forall v_1 \in C_1, \quad \forall v_2 \in C_2$$

$$\|v_1 - v_2\| \geq \|v_1^P - v_2^P\| + \frac{1}{K} [\|((1-K)v_1^P + Kv_1 - (1-K)v_2^P - Kv_2)\| - \|v_1^P - v_2^P\|]$$

c'est-à-dire :

$$\|v_1 - v_2\| \geq \|v_1^P - v_2^P\| - \frac{1}{K} \cdot 0 \quad (1/p) \quad \forall v_1 \in C_1, \quad \forall v_2 \in C_2$$

et donc, en passant à la limite

$$\|v_1 - v_2\| \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_1^P - v_2^P\| \quad \forall v_1 \in C_1, \quad \forall v_2 \in C_2$$

et par suite :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^P, v_2^P) = d(C_1, C_2).$$

Pour le point ii), la suite $\{(v_1^P, v_2^P)\}$ étant bornée, elle possède un point d'adhérence faible dans \mathcal{C} convexe fermé. Pour tout point d'adhérence faible (\hat{v}_1, \hat{v}_2) , par semi-continuité inférieure de la norme, il vient :

$$\|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\| \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} \|v_2^P - v_1^P\| = d(C_1, C_2)$$

et (\hat{v}_1, \hat{v}_2) est donc un optimum.

III.4.2 - Théorème

Si en plus de l'hypothèse H_1 , on suppose que C_1 - ou C_2 - est compact, alors on a également :

$$\text{iii) } \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^P, S_1) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_2^P, S_2) = 0$$

Démonstration

$$\text{1er point - } \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_2^P, S_2) = 0$$

Supposons donc qu'il existe un $\epsilon > 0$ et une sous-suite $\{v_2^q\}$ de $\{v_2^P\}$ tels que :

$$d(v_2^q, S_2) > \epsilon, \quad q \in Q \subset \mathbb{N}.$$

La sous-suite de même rang $\{v_1^q\}$ de $\{v_1^p\}$ possède sur C_1 compact un point d'adhérence fort \hat{v}_1 . Ce point est, a fortiori, point d'adhérence faible et donc appartient à S_1 . Notons :

$$\hat{v}_2 = \text{Proj}_{S_2} \hat{v}_1;$$

le couple (\hat{v}_1, \hat{v}_2) est donc un optimum ; de plus on a :

$$d(v_2^q, \hat{v}_2) \geq d(v_2^q, S_2) > \epsilon.$$

Les propriétés des projections donnent :

$$\|v_2^q - v_1^q\|^2 \geq \|\hat{v}_2 - \hat{v}_1\|^2 + \|v_2^q - \hat{v}_2\|^2 + 2(v_2^q - \hat{v}_2, \hat{v}_1 - v_1^q)$$

et en passant à la limite :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|v_2^q - v_1^q\|^2 \geq d^2(C_1, C_2) + \epsilon^2$$

ce qui est contradictoire avec le théorème II.4.1, d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_2^p, S_2) = 0$$

2ème point - $\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, S_1) = 0$

Supposons maintenant qu'il existe un $\epsilon > 0$ et une sous-suite $\{v_1^q\}$ de $\{v_1^p\}$ tels que :

$$d(v_1^q, S_1) > \epsilon$$

Cette sous-suite possède sur C_1 compact un point d'adhérence fort, et donc faible, qui appartient donc à S_1 ; et donc également :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, S_1) = 0.$$

Dans tous les autres cas (théorèmes I.5 et I.6) où la méthode des projections successives définissait des suites convergentes, toutes les propriétés sont conservées lorsque l'on passe des projections au croisement d'algorithmes et l'on a :

III.4.3 - Théorème

Si en plus de l'hypothèse H_1 , on suppose

$$H_2 - C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

alors :

1. La suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ converge fortement vers un optimum
2. La convergence est au moins linéaire.

Puisque $S_1 = S_2 = C_1 \cap C_2$, nous noterons cet ensemble S .

Nous allons décomposer la démonstration en une suite de lemmes et propositions. Rappelons tout d'abord le lemme de Gubin-Polyak-Raik⁽⁵⁾ (lemme 5a).

III.4.3.1 - Lemme (5)

Sous les hypothèses H_1 et H_2 , soient $\{u_1^p\}$ une suite d'éléments de C_1 et $\{u_2^p\}$ une suite d'éléments de C_2 , si :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u_1^p, u_2^p) = 0$$

alors :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u_1^p, C_1 \cap C_2) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(u_2^p, C_1 \cap C_2) = 0$$

III.4.3.2 - Lemme

Les hypothèses H_1 et H_2 étant supposées vérifiées et $r > 0$ étant donné, il existe alors un $\rho > 0$, tel que, pour tout $v \in V$ vérifiant $d(v, S) \leq r/4$, on ait :

$$\exists x \in S \quad \text{tel que} \quad \mathcal{B}(x, \rho) \subset C_1 \cap \mathcal{B}(v, r/2)$$

Démonstration

De par l'hypothèse H_1 , S est borné, soit M un majorant de son diamètre. D'autre part :

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists u \in C_1 \cap C_2 \quad \text{et} \quad \exists \rho_0 > 0 \quad \text{tels que :}$$

$$\mathcal{B} [u, \rho_0] \subset C_1.$$

Soit alors \hat{v} la projection de v sur S , on a :

$$d(v, \hat{v}) \leq r/4.$$

Si l'on considère alors l'homothétie de centre \hat{v} et de rapport $r/4M$, il est clair que l'homothétie de la boule $\mathcal{B}(u, \rho_0)$ constitue une boule $\mathcal{B}(x, \rho)$ cherchée.

III.4.3.3 - L_i et r_i étant respectivement définis par (10) et (11).
soit B'_i un majorant de $\{v_i^P\}$, pour $i = 1, 2$.

On pose :

$$L = \text{Max} (L_1, L_2, r_1, r_2, B'_1, B'_2, M) \quad (28)$$

$$r = \text{min} (L_1, L_2, r_1, r_2, B'_1, B'_2, M) \quad (29)$$

et on choisit P (lemme III.4.3.1) tel que pour le ρ défini par le lemme II.4.3.2 pour la valeur de r ci-dessus, on ait :

$$\forall p \geq P ; d(v_1^P, v_2^P) \leq \rho/4 \quad \text{et} \quad d(v_i^P, S) \leq r/4 ; i = 1, 2. \quad (30)$$

Si on pose alors :

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{\rho}{L}, \quad (31)$$

on a la proposition :

III.4.3.4 - Proposition

$\forall p \geq P$, si :

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma \quad (32)$$

alors :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq 2\gamma \quad (33)$$

Démonstration

Remarquons tout d'abord que l'on a :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \lambda_{1,s}^{p+1} \|p_1^{p+1}\|$$

et, compte-tenu de (32) :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| < \gamma \cdot \|g_1^p\|. \quad (34)$$

Soit alors, (lemme III 4.3.2), $x \in V$ et tel que :
 $x \in C_1 \cap C_2$ et $\mathcal{B}(x, \rho) \subset C_1 \cap \mathcal{B}(v_1^p, r/2)$.

On a donc, par définition (10) de C_i^p :

$$\mathcal{B}(x, \rho) \subset C_1^p$$

et, en particulier :

$$x + \rho \cdot \frac{g_1^p}{\|g_1^p\|} \in C_1$$

soit, par définition (12), de p_1^{p+1}

$$(g_1^p, p_1^{p+1}) \geq (g_1^p, x + \rho \frac{g_1^p}{\|g_1^p\|} - v_1^p).$$

Compte-tenu de (32), il vient :

$$\gamma \|g_1^p\| \cdot \|p_1^{p+1}\| \geq (g_1^p, x - v_1^p) + \rho \|g_1^p\| \quad (35)$$

soit :

$$-(g_1^p, x - v_1^p) \geq \rho \|g_1^p\| - \gamma \|g_1^p\| \cdot \|p_1^{p+1}\|. \quad (36)$$

D'autre part, puisque :

$$d(v_1^p, v_2^p) \leq \rho/4 \leq r/4 \quad \text{et} \quad x \in B(v_1^p, r/2)$$

on a :

$$d(v_2^p, x) \leq 3r/4 < r \quad (37)$$

et par définition (10) de C_i^p , $x \in C_2^p$ et donc :

$$(g_2^p, p_2^{p+1}) \geq (g_2^p, x - v_2^p) \quad (38)$$

Minorons cette dernière expression

$$(g_2^p, x-v_2^p) = (v_1^{p+1}-v_2^p, x-v_2^p) = (v_1^p-v_2^p + v_1^{p+1}-v_1^p, x-v_1^p+v_1^p-v_2^p),$$

ce qui nous donne :

$$(g_2^p, x-v_2^p) \geq (v_1^p-v_2^p, x-v_1^p) + (v_1^{p+1}-v_1^p, x-v_2^p) + \|v_1^p - v_2^p\|^2$$

et compte-tenu de (34) et (37) :

$$(g_2^p, p_2^{p+1}) \geq (g_2^p, x-v_2^p) \geq - (g_1^p, x-v_1^p) - \gamma \|g_1^p\| \cdot r.$$

et donc par (36) :

$$(g_2^p, p_2^{p+1}) \geq \rho \|g_1^p\| - \gamma \|g_1^p\| \cdot \|p_1^{p+1}\| - \gamma \|g_1^p\| \cdot r$$

soit :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq \frac{1}{\|p_2^{p+1}\|} \cdot \frac{\|g_1^p\|}{\|g_2^p\|} (\rho - \gamma \|p_1^{p+1}\| - \gamma \cdot r)$$

soit enfin, en remarquant que $\|g_1^p\| \geq \|g_2^p\|$ et en exprimant γ :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq \frac{1}{\|p_2^{p+1}\|} \left(\rho - \frac{1}{4} \rho \frac{\|p_1^{p+1}\|}{L} - \frac{1}{4} \rho \frac{r}{L} \right) \geq \frac{1}{\|p_2^{p+1}\|} \left(\rho - \frac{1}{4} \rho - \frac{1}{4} \rho \right)$$

c'est à dire :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq \frac{1}{\|p_2^{p+1}\|} \cdot \frac{1}{2} \rho \geq 2 \gamma \quad (39)$$

III.4.3.5 - Remarque

Si nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (39), il vient :

$$\|p_2^{p+1}\| \geq \frac{1}{2} \rho$$

et puisque $\|v_2^p - v_1^{p+1}\| \leq \frac{1}{4} \rho$, v_2^{p+1} sera donc la projection de v_1^{p+1} sur la demi-droite $v_2^p + \lambda p_2^{p+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; c'est-à-dire :

$$p \geq P \quad \text{et} \quad \left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma \Rightarrow v_2^{p+1} = v_2^p + \lambda_{2,s}^{p+1} p_2^{p+1}. \quad (40)$$

De la même façon et par une démonstration tout à fait analogue, il viendrait :

$$p \geq P \quad \text{et} \quad \left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < 2\gamma \Rightarrow v_1^{p+1} = v_1^p + \lambda_{1,s}^{p+1} \cdot (41)$$

III.4.3.6 - Proposition

Quel que soit $p > P$, si :

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma,$$

alors :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \|v_2^{p+1} - v_2^p\|.$$

Démonstration

On a (34) :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \gamma \|g_1^p\|;$$

d'autre part, par la remarque III.4.3.5, il vient :

$$\|v_2^{p+1} - v_2^p\| = \frac{(g_2^p, p_2^{p+1})}{\|p_2^{p+1}\|^2} \cdot \|p_2^{p+1}\| \geq 2\gamma \|g_2^p\|,$$

Or :

$$\|g_1^p\| = \|v_2^p - v_1^p\| \leq \|v_2^p - v_1^{p+1}\| + \|v_1^{p+1} - v_1^p\|,$$

d'où :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \gamma [\|g_2^p\| + \|v_1^{p+1} - v_1^p\|];$$

et donc, puisque $\gamma \leq 1/4$

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \|g_2^p\| \leq 2\gamma \|g_2^p\| \leq \|v_2^{p+1} - v_2^p\|.$$

III.4.3.7 - Démonstration du théorème III.4.3

1. Plaçons-nous à partir du rang P - cf. (30) ; alors, de deux choses l'une, ou bien :

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) \geq \gamma$$

et alors notre lemme de convergence sur les méthodes de descentes nous donne (21) :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \frac{1}{2} \gamma (d(v_1^p, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})) \leq \frac{1}{2} \gamma (d(v_1^p, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}))$$

ou bien

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma$$

mais dans ce cas, par la proposition III.4.3.6 et le lemme de convergence, il vient :

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \|v_2^{p+1} - v_2^p\| \leq \frac{1}{2} (2\gamma) (d(v_1^{p+1}, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})).$$

On a donc, dans tous les cas,

$$\forall p > P, \quad \|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \gamma (d(v_1^p, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})) \quad (42)$$

d'où :

$$\sum_P^{\infty} \|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \gamma \cdot d(v_1^P, v_2^P), \quad (43)$$

et la suite de $\{v_1^p\}$ est une suite de Cauchy convergeant fortement sur V complet.

Sa limite \hat{v} étant à fortiori un point d'adhérence faible, on a donc :

$\hat{v} \in S$; et puisque $\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, v_2^p) = 0$, $\{v_2^p\}$ converge donc également fortement vers $v \in S$.

2. Vitesse de convergence

Nous nous plaçons à partir du rang P , et nous allons distinguer trois cas :

$$(a) \quad \left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma$$

alors par la remarque III.4.3.5, il vient :

$$v_2^{p+1} = v_2^p + \lambda_{2,s}^{p+1} p_1^{p+1}$$

et par la proposition III. 4. 3. 4 :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq 2 \gamma$$

Cela nous donne :

$$d^2(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) = d^2(v_1^{p+1}, v_2^p) - \frac{(g_2^p, p_2^{p+1})}{\|p_2^{p+1}\|^2} \leq d^2(v_1^{p+1}, v_2^p) - 4\gamma^2 \cdot \|p_2^{p+1}\|^2$$

c'est-à-dire puisque $p_2^{p+1} = v_1^{p+1} - v_2^p$,

$$d^2(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) \leq (1-4\gamma^2) d^2(v_1^{p+1}, v_2^p) \leq (1-4\gamma^2) d^2(v_1^p, v_2^p)$$

et enfin

$$d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) \leq (1-4\gamma^2)^{1/2} d(v_1^p, v_2^p) \leq (1-\gamma^2)^{1/2} d(v_1^p, v_2^p).$$

$$(b) \quad \left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+2}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) < 2 \gamma$$

alors :

$$v_1^{p+1} = v_1^p + \lambda_{1,s}^{p+1} p_1^{p+1}$$

et :

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) > \gamma$$

et, par un calcul identique

$$d^2(v_1^{p+1}, v_2^p) \leq (1-\gamma^2) d^2(v_1^p, v_2^p)$$

et à nouveau

$$d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) \leq (1-\gamma^2)^{1/2} d(v_1^p, v_2^p)$$

$$(c) \quad \left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) \geq \gamma \quad \text{et} \quad \left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq 2\gamma$$

Rappelons qu'alors :

$$x - \rho \frac{g_1^p}{\|g_1^p\|} \in C_1^p$$

$$x \in C_2^p$$

d'où :

$$(g_1^p, p_1^{p+1}) \geq (g_1^p, x - v_1^p) + \rho \|g_1^p\|$$

$$(g_2^p, p_2^{p+1}) \geq -(g_1^p, x - v_1^p) + (v_1^{p+1} - v_1^p, x - v_2^p) + \|g_1^p\|^2.$$

Soit, en sommant ces deux expressions, et puisque $\|g_2^p\| \leq \|g_1^p\|$:

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, p_1^{p+1} \right) + \left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, p_2^{p+1} \right) \geq \rho - \frac{\|v_1^{p+1} - v_1^p\|}{\|g_1^p\|} \cdot \|x - v_2^p\| \quad (44)$$

et, par Cauchy-Schwarz :

$$\|p_1^{p+1}\| + \|p_2^{p+1}\| \geq \rho - \frac{\|v_1^{p+1} - v_1^p\|}{\|g_1^p\|} \cdot \|x - v_2^p\|. \quad (45)$$

Nous allons alors considerer deux cas :

ou bien

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| \geq \gamma \|g_1^p\|,$$

mais alors, puisque la fonction $\lambda \rightarrow d^2(v_2^p, v_1^p(\lambda))$ est dans sa partie décroissante, on a :

$$d^2(v_2^p, v_1^{p+1}) \leq d^2 \left(v_2^p, v_1^{p+1} \left(\gamma \cdot \frac{\|g_1^p\|}{\|p_1^{p+1}\|} \right) \right)$$

c'est-à-dire :

$$d^2(v_2^p, v_1^{p+1}) \leq d^2(v_2^p, v_1^p) - 2\gamma \cdot \frac{\|g_1^p\|}{\|p_1^{p+1}\|} (g_1^p, p_1^{p+1}) + \gamma^2 \frac{\|g_1^p\|^2}{\|p_1^{p+1}\|^2} \|p_1^{p+1}\|^2$$

soit :

$$d^2(v_1^p, v_1^{p+1}) \leq d^2(v_1^p, v_1^p) - \gamma^2 \cdot \|g_1^p\|^2$$

ou bien

$$\|v_1^{p+1} - v_1^p\| < \gamma \|g_1^p\|$$

(45) devient alors :

$$\|p_1^{p+1}\| + \|p_2^{p+1}\| \geq \rho - \gamma \|x - v_2^p\| > \rho - \frac{1}{4} \frac{\rho}{L} \cdot L$$

c'est-à-dire :

$$\|p_1^{p+1}\| + \|p_2^{p+1}\| \geq \frac{3}{4} \rho ;$$

et, puisque $p \geq P$, $d(v_1^p, v_2^p) \leq \frac{1}{4} \rho$, et donc l'un au moins des v_i^{p+1} est de la forme $v_i^{p+1}(\lambda_{i,s}^{p+1})$. On peut donc reprendre (a) (resp. (b)) et il vient :

$$d(v_1^{p+1} - v_1^p) \leq (1 - \gamma^2)^{1/2} d(v_1^p, v_2^p).$$

On a donc, au total

$$\forall p \geq P, \quad d(v_1^p, v_2^p) \leq \left((1 - \gamma^2)^{1/2} \right)^{p-P} \cdot d(v_1^P, v_2^P) \quad (46)$$

et, puisque (42) :

$$\forall p \geq P, \quad \|v_1^{p+1} - v_1^p\| \leq \gamma [d(v_1^p, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})]$$

$\forall p \geq P, \quad \forall q \geq P, \quad q > p$, on a :

$$\|v_1^q - v_1^p\| \leq \gamma d(v_1^p, v_2^p) - \gamma d(v_1^q, v_2^q) \leq \gamma [(1 - \gamma^2)^{1/2}]^{p-P} \cdot d(v_1^P, v_2^P)$$

ou, en passant à la limite sur q :

$$\forall p \geq P \quad \|\hat{v} - v_1^p\| \leq \gamma [(1 - \gamma^2)^{1/2}]^{p-P} d(v_1^P, v_2^P).$$

De même, avec (46), il vient également

$$\forall p \geq P \quad \|\hat{v} - v_2^p\| \leq (\gamma - 1) [(1 - \gamma^2)^{1/2}]^{p-P} d(v_1^P, v_2^P)$$

ce qui prouve que la convergence est au moins linéaire.

III.4.4 - Théorème

Si, en plus de l'hypothèse H_1 , on suppose :

$H_3 - C_1$ (ou C_2) est uniformément convexe

alors la suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ converge fortement vers un optimum.

Démonstration

1er point - S'il n'y a pas unicité de l'optimum alors $\overset{\circ}{C}_1 \cap C_2 \neq \emptyset$

Supposons en effet qu'il existe deux optimums ; un hyperplan d'appui à un convexe uniformément convexe ne pouvant avoir qu'un point commun avec celui-ci, il est clair que cela implique :

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset.$$

Supposons alors qu'il existe deux optimums $(u_1, u_1), (u_2, u_2)$; alors par définition de l'uniforme convexité :

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in \overset{\circ}{C}_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in C_2 \Rightarrow \overset{\circ}{C}_1 \cap C_2 \neq \emptyset.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème II.4.3 et $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ converge fortement vers un optimum.

2ème point - Supposons donc qu'il existe un optimum unique (u_1, u_2)

Toute la suite $\{v_1^p\}$ converge donc faiblement vers u_1 . Or il est clair que $u_1 \in \text{Fr}(C_1)$; on sait (⁽¹⁰⁾ théorème 3) que toute suite convergeant faiblement vers un point appartenant à la frontière d'un ensemble uniformément convexe converge fortement vers ce point. $\{v_1^p\}$ converge donc fortement vers u_1 . $\{v_2^p\}$ converge donc fortement vers u_2 .

III.5 - Croisement d'une méthode de descente et d'une projection

Il existe des cas où, si l'un des projecteurs est inconnu, l'autre est facile à obtenir : le convexe correspondant - disons C_2 - étant par exemple, un demi-espace fermé, une boule l'extension naturelle de la méthode du II.2 consiste alors à utiliser :

- Sur C_1 un pas d'un algorithme de projection
- Sur C_2 le projecteur lui-même .

En notant $P_2(\cdot)$ le projecteur sur C_2 , la méthode est donc la suivante :

III.5.1 - Algorithme

Partant de $(v_1^0, P_2(v_1^0)) \in \mathcal{C}$, on passe de (v_1^p, v_2^p) à (v_1^{p+1}, v_2^{p+1})

par :

- v_1^{p+1} est défini comme dans l'algorithme III.2
- $v_2^{p+1} = P_2(v_1^{p+1})$

III.5.2 - Convergence de cet algorithme

Comme on peut s'y attendre, les théorèmes III.4.1, III.4.2, III.4.3 et III.4.4 s'appliquent à la suite définie par cet algorithme.

Les démonstrations qui ne mettent en jeu que des modifications techniques mineures par rapport à celle du III.4 sont données dans ⁽¹⁵⁾ et ne seront pas reproduites ici.

IV. SUR UN ALGORITHME DE MEYER ET POLAK

La formalisation de certains problèmes de contrôle optimal amenant à mettre en jeu deux convexes compacts⁽¹²⁾⁽¹⁶⁾, dans un espace de Hilbert, MEYER et POLAK ont proposé dans⁽¹¹⁾, pour chercher la distance ou l'intersection de ces deux convexes, une méthode assez proche de celles du paragraphe III. Sous l'hypothèse de compacité, le caractère minimisant de la suite constituée par leur algorithme était démontré et, dans le cas particulier où $C_1 \cap C_2$ était non vide, MEYER et POLAK émettaient la conjoncture d'une convergence en un nombre fini de pas.

S'il n'y a pas, en fait, convergence en un nombre fini de pas, nous en donnons un contre-exemple très simple, l'hypothèse $C_1 \cap C_2$ non vide entraîne, par contre, la convergence forte de l'algorithme. C'est ce que l'on démontre ici, sans hypothèse de compacité et avec des procédés analogues à ceux du paragraphe III pour une (petite) généralisation de la méthode de MEYER et POLAK.

IV.1 - Une généralisation d'une méthode de Meyer et Polak

La méthode du paragraphe III consistait à décomposer le problème (p) en deux sous-problèmes (P_1) et (P_2) qui intervenaient de façon cyclique. L'idée de la méthode de Meyer et Polak consiste à procéder simultanément, c'est-à-dire à choisir une direction de descente pour chacun des deux points v_1 et v_2 , puis à choisir simultanément les valeurs optimales de \hat{v}_1 et \hat{v}_2 sur les deux "segments de descente".

IV.1.1 - Notation

Nous conserverons toutes les notations précédentes (cf. II.3 et III.1).

Lorsque nous utiliserons simultanément i et j , le sens en sera :
 $i = 1, 2$; $j = 1, 2$; $i \neq j$.

Enfin, nous noterons, pour $x_i \in V_i$ et $y_i \in V_i$

$$[x_i, y_i] = \left\{ x \in V_i ; x = \lambda x_i + (1-\lambda)y_i ; \lambda \in [0, 1] \right\}$$

IV.1.2 - Algorithme

Partant de $(v_1^0, v_2^0) \in \mathcal{C}$, le passage de (v_1^p, v_2^p) à (v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) s'effectue de la façon suivante :

On pose :

$$g_i^p = v_j^p - v_i^p, \quad (47)$$

puis, supposant données quatre constantes $r_i > 0$ et $L_i > 0$, on choisit deux directions de descentes par rapport à g_i^p par (11) et (12) - cf. II.3 -

Soient p_i^{p+1} ces deux directions. Si l'on note (14) :

$$w_i^p = v_i^p + \lambda_{i,c}^{p+1} p_i^{p+1},$$

v_1^{p+1} et v_2^{p+1} sont alors déterminés simultanément par :

$$\begin{cases} v_1^{p+1} \in [v_1^p, w_1^p] \subset C_1 \\ v_2^{p+1} \in [v_2^p, w_2^p] \subset C_2 \\ d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) = d([v_1^p, w_1^p], [v_2^p, w_2^p]). \end{cases} \quad (48)$$

$[v_1^p, w_1^p]$ et $[v_2^p, w_2^p]$ étant convexes fermés, il existe toujours au moins un tel couple.

IV.1.3 - Remarque

Si, comme le supposent Meyer et Polak, C_1 et C_2 sont bornés, et si nous choisissons r_1 et r_2 (10) assez grands pour ne pas intervenir explicitement, le choix des directions de descente est celui de Y. Haugazeau⁽⁸⁾ et cette méthode se confond avec celle de Meyer et Polak.

IV.2 - Convergence de cette méthode

Il est assez évident que les théorèmes que nous avons établis au paragraphe III s'appliquent également à la méthode de Meyer et Polak. Par contre le fait de résoudre à chaque pas un problème un peu plus complexe n'apporte aucun élément supplémentaire. On a donc :

IV.2.1 - Théorème

Les ensembles C_i , $i = 1, 2$ étant convexes fermés, si on fait l'hypothèse :

(H₁) "Quelque soit $D > 0$, l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2 ; \|x_1 - x_2\| \leq D\}$ est borné

alors :

$$i) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, v_2^p) = d(C_1, C_2)$$

ii) Il existe une sous-suite de la suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ qui converge faiblement vers un optimum.

Démonstration

1er point - La suite $d(v_1^p, v_2^p)$ est convergente.

En effet elle est non croissante et bornée.

On a comme conséquence :

- les deux suites $\{v_i^p\}$ restent bornées

$$- \lim_{p \rightarrow \infty} d^2(v_1^p, v_2^p) - d^2(v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) = 0.$$

2ème point - $\lim (g_i^p, p_i^{p+1}) = 0$

Si l'on introduit :

$$x_i^{p+1} = \text{Proj}_{[v_i^p, w_i^p]} (v_j^p) \quad (49)$$

par définition de v_i^{p+1} , il vient :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (d^2(v_i^p, v_j^p) - d^2(x_i^{p+1}, v_j^p)) = 0 \quad (50)$$

et comme au III.4.1 par (17) ou (20), il vient :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (g_i^p, p_i^{p+1}) = 0 \quad (51)$$

$$\underline{\text{3ème point}} \quad - \quad \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, v_2^p) = d(C_1, C_2)$$

Si nous nous ramenons à la définition de p_i^{p+1} , il vient :

$$(g_i^p, p_i^{p+1}) \geq (g_i^p, v_i - v_i^p) \quad \forall v_i \in C_i^p$$

et puisque

$$g_i^p = v_j^p - v_i^p = -g_j^p,$$

$$(v_2^p - v_1^p, p_1^{p+1}) \geq (v_2^p - v_1^p, v_1 - v_1^p), \quad \forall v_1 \in C_1^p$$

et :

$$(v_1^p - v_2^p, p_2^{p+1}) \geq (v_1^p - v_2^p, v_2 - v_2^p), \quad \forall v_2 \in C_2^p.$$

En ajoutant, membre à membre ces deux expressions, il vient :

$$(v_2^p - v_1^p, p_1^{p+1}) + (v_1^p - v_2^p, p_2^{p+1}) \geq (v_2^p - v_1^p, v_2 - v_1^p) + (v_2^p - v_1^p, v_1 - v_2^p), \quad \begin{array}{l} \forall v_1 \in C_1^p \\ \forall v_2 \in C_2^p \end{array}$$

et en passant à la limite supérieure :

$$0 \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_2^p - v_1^p\|^2 + \limsup_{p \rightarrow \infty} (v_2^p - v_1^p, v_1 - v_2^p), \quad \forall v_1 \in C_1^p, \quad \forall v_2 \in C_2^p$$

c'est-à-dire :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} (v_2^p - v_1^p, v_2 - v_1^p) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_2^p - v_1^p\|^2, \quad \forall v_1 \in C_1^p, \quad \forall v_2 \in C_2^p;$$

d'où enfin, par convexité de C_1 et C_2 et puisqu'on peut les considérer comme bornés, comme au III.4.1, 4ème point, il vient :

$$\|v_1 - v_2\| \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_2^p - v_1^p\|, \quad \forall v_1 \in C_1, \quad \forall v_2 \in C_2$$

et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, v_2^p) = d(C_1, C_2).$$

Pour le point ii), la suite (v_1^p, v_2^p) étant bornée, elle possède un point d'adhérence faible dans \mathcal{C} convexe; et tout point d'adhérence faible est un optimum par faible semi-continuité inférieure de la norme.

IV.2.2 - Théorème

Si, en plus de l'hypothèse H_1 , on suppose C_1 - resp. C_2 - compact, alors :

$$\text{iii) } \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_1^p, S_1) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_2^p, S_2) = 0$$

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème III.4.2.

IV.2.3 - Cas $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$

Il est facile de voir que la convergence de l'algorithme IV.1.2 n'a pas toujours lieu en un nombre fini de pas même si l'hypothèse

$$(H_2) \quad C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$$

est vérifiée : il suffit de prendre pour C_1 l'intersection d'un demi-espace fermé P_1 et d'une boule \mathcal{B} et pour C_2 l'intersection d'un autre demi-espace fermé P_2 avec \mathcal{B} , P_1 et P_2 étant définis par :

$$P_i = \left\{ v \in V, (a_i, v) \geq b_i \right\}, \quad i = 1, 2$$

tels que :

$$\begin{cases} (a_1, a_2) < 0 \\ P_1 \cap P_2 \cap \mathcal{B} \neq \emptyset \\ \mathcal{B} \cap P_1 \cup P_2. \end{cases}$$

A partir de $(v_1^0, v_2^0) \in \mathcal{C}$ et tel que :

$$\begin{cases} v_1^0 = \text{Proj}_{P_1} v_2^0, \\ v_1^0 \notin P_2, \end{cases}$$

l'algorithme IV.1.2 peut se confondre avec la méthode des projections successives.

Par contre, on a le :

IV. 2. 4 - Théorème

Sous les hypothèses H_1 et H_2 , alors :

1. la suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ converge fortement vers un optimum
2. la convergence est au moins linéaire

Démonstration

Nous noterons à nouveau :

$$S = S_1 = S_2 = C_1 \cap C_2$$

et nous définirons P par (30) et γ comme en (31). On a alors :

1er point - $\forall p \geq P$, si :

$$\left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma \quad (52)$$

alors :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq 2 \gamma . \quad (53)$$

D'après les lemmes III. 4. 3. 1 et III. 4. 3. 2, soient $x \in V$ et $\rho > 0$, tels que :

$$x + \rho \frac{g_1^p}{\|g_1^p\|} \in C_1^p$$

$$x \in C_1^p \cap C_2^p .$$

Par définition (11) de p_i^{p+1} , il vient alors :

$$(g_1^p, p_1^{p+1}) \geq (g_1^p, x + \rho \frac{g_1^p}{\|g_1^p\|} - v_1^p)$$

et :

$$(g_2^p, p_2^{p+1}) \geq (g_2^p, x - v_2^p).$$

En sommant ces deux expressions :

$$(g_1^p, p_1^{p+1}) + (g_2^p, p_2^{p+1}) \geq (g_1^p, x-v_1^p) + \rho //g_1^p// + (-g_1^p, x-v_2^p), \quad (54)$$

et donc :

$$(g_2^p, p_2^{p+1}) \geq //g_1^p//^2 + \rho //g_1^p// - (g_1^p, p_1^{p+1}).$$

Soit, compte-tenu de (47) et de (52):

$$\left(\frac{g_2^p}{//g_2^p//}, p_2^{p+1} \right) \geq //g_1^p// + \rho - \frac{1}{4} \rho \cdot \frac{//p_1^{p+1}//}{L}$$

d'où :

$$\left(\frac{g_2^p}{//g_2^p//}, p_2^{p+1} \right) \geq \frac{3}{4} \rho \quad (55)$$

et :

$$\left(\frac{g_2^p}{//g_2^p//}, \frac{p_2^{p+1}}{//p_2^{p+1}//} \right) \geq \frac{3}{4} \frac{\rho}{//p_2^{p+1}//} \geq \frac{3}{4} \frac{\rho}{L} \geq 2 \gamma. \quad (56)$$

Remarquons par ailleurs que (54) implique par Cauchy-Schwarz,

$$p_1^{p+1} + p_2^{p+1} \geq //g_1^p// + \rho \geq \rho$$

et l'on a donc toujours au moins l'une des deux propositions:

$$//p_1^{p+1}// \geq \frac{1}{4} \rho \geq //g_1^p// \quad (57)$$

ou

$$//p_2^{p+1}// \geq \frac{1}{4} \rho \geq //g_2^p// \quad (58)$$

En particulier, si on a (52) par (55), il vient (58) ; on démontrerait de même que :

$$\left(\frac{g_2^p}{//g_2^p//}, \frac{p_2^{p+1}}{//p_2^{p+1}//} \right) < 2 \gamma$$

par (54) implique (57).

2ème point : $\forall p \geq P$, on a

$$d(v_1^p, v_1^{p+1}) \leq \frac{2}{\gamma} [d(v_1^p, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})] ; \quad (59)$$

En effet, on a :

$$\|v_1^p - v_2^p\|^2 = (v_1^p - v_2^p, v_1^p - v_1^{p+1} + v_1^{p+1} - v_2^{p+1} + v_2^{p+1} - v_2^p)$$

c'est-à-dire :

$$\|v_1^p - v_2^p\|^2 - (v_1^p - v_2^p, v_1^{p+1} - v_2^{p+1}) = (v_1^p - v_2^p, v_1^p - v_1^{p+1}) + (v_1^p - v_2^p, v_2^{p+1} - v_2^p) ; \quad (60)$$

ou encore, puisque, par les propriétés des projections on a :

$$(v_1^p - v_1^{p+1}, v_1^{p+1} - v_2^{p+1}) \geq 0$$

et :

$$(v_2^{p+1} - v_2^p, v_1^{p+1} - v_2^{p+1}) \geq 0$$

(60) nous donne

$$\|v_1^p - v_2^p\|^2 - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|^2 \geq (v_1^p - v_2^p, v_1^p - v_1^{p+1}) + (v_1^p - v_2^p, v_2^{p+1} - v_2^p)$$

ou encore, puisque :

$$\|v_1^p - v_2^p\| \geq \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|,$$

$$2\|v_1^p - v_2^p\| \cdot [\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|] \geq (v_1^p - v_2^p, v_1^p - v_1^{p+1}) + (v_1^p - v_2^p, v_2^{p+1} - v_2^p)$$

c'est-à-dire :

$$\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\| \geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_1^p - v_2^p}{\|v_1^p - v_2^p\|}, v_1^p - v_1^{p+1} \right) + \left(\frac{v_1^p - v_2^p}{\|v_1^p - v_2^p\|}, v_2^{p+1} - v_2^p \right) \right]. \quad (61)$$

Distinguons alors deux cas :

$$(a) \quad \left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p_1^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) \geq \gamma,$$

puisque p_2^{p+1} est une direction de descente, (61) devient donc :

$$\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\| \geq \frac{1}{2} \gamma \|v_1^p - v_1^{p+1}\|$$

c'est-à-dire puisque $\gamma \leq 1/4$:

$$\|v_1^p - v_1^{p+1}\| \leq \frac{2}{\gamma} [\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|] \leq \frac{2}{\gamma} [\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|]$$

$$(b) \quad \left(\frac{g_1^p}{\|g_1^p\|}, \frac{p^{p+1}}{\|p_1^{p+1}\|} \right) < \gamma$$

On a alors (53) et (61) nous donne de même :

$$\|v_2^p - v_2^{p+1}\| \leq \frac{2}{2\gamma} [\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|] . \quad (62)$$

Introduisons, à nouveau x_2^{p+1} , caractérisé par :

$$(x_2^{p+1} - v_2, x_2^{p+1} - v_1^p) \leq 0 \quad \forall v_2 \in [v_2^p, w_2^p] ; \quad (63)$$

on a évidemment :

$$\|v_1^p - x_2^{p+1}\| \geq \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\| , \quad (64)$$

or, puisque l'on a (58), x_2^{p+1} est donc la projection de v_1^p sur la droite $v_1^p + \lambda p_1^{p+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on a donc (17)

$$\|v_1^p - v_2^p\|^2 - \|v_1^p - x_2^{p+1}\|^2 = \frac{(g_2^p, p_2^{p+1})}{\|p_2^{p+1}\|^2} \geq (2\gamma)^2 \|v_1^p - v_2^p\|^2$$

soit,

$$\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^p - x_2^{p+1}\| \geq \frac{(2\gamma)^2 \|v_1^p - v_2^p\|^2}{2 \|v_1^p - v_2^p\|} ;$$

d'où, compte-tenu de (64):

$$\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\| \geq 2\gamma^2 \|v_1^p - v_2^p\|. \quad (65)$$

Calculons alors $\|v_1^p - v_1^{p+1}\|$, on a :

$$\|v_1^p - v_1^{p+1}\| \leq \|v_1^p - v_2^p\| + \|v_2^p - v_2^{p+1}\| + \|v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\| \leq 2\|v_1^p - v_2^p\| + \|v_2^p - v_2^{p+1}\|.$$

et donc avec (62) et (65), il vient :

$$\|v_1^p - v_1^{p+1}\| \leq \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\right) [\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|]$$

Soit puisque $\gamma \leq 1/4$,

$$\|v_1^p - v_1^{p+1}\| \leq \frac{2}{\gamma} [\|v_1^p - v_2^p\| - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|] ;$$

et le point est établi .

On démontrerait identiquement que :

$$\forall p \geq P, \quad d(v_2^p, v_2^{p+1}) \leq \frac{2}{\gamma} [d(v_1^p, v_2^p) - d(v_1^{p+1}, v_2^{p+1})] \quad (66)$$

3ème point - Convergence de $\{(v_1^p, v_2^p)\}$

On a donc :

$$\forall p \geq P, \quad \forall m > p, \quad m > p$$

$$d(v_i^p, v_i^m) \leq \frac{2}{\gamma} d(v_1^p, v_2^p) \quad (67)$$

et $\{v_i^p\}$ est une suite de Cauchy convergant fortement sur V complet. La limite forte de $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ est, a fortiori, limite faible, et est donc un optimum.

De plus, dans le cas (b), on a par (65)

$$\|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\| \leq (1 - 2\gamma^2) \|v_1^p - v_2^p\| \leq \left(1 - \frac{1}{2} \gamma^2\right) \|v_1^p - v_2^p\| ; \quad (68)$$

dans le cas (a), si :

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|}\right) < 2\gamma$$

alors par (57) et en introduisant de même x_1^{p+1} (49) caractérisé par :

$$(x_1^{p+1} - v_1, x_1^{p+1} - v_2^p) \leq 0 \quad \forall v_1 \in \{v_1^p, w_1^p\}, \quad (69)$$

il viendrait :

$$\|v_1^p - v_2^p\|^2 - \|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\|^2 \geq \|v_1^p - v_2^p\|^2 - \|x_1^{p+1} - v_2^p\|^2 \geq \gamma^2 \|v_1^p - v_2^p\|^2$$

et donc :

$$\|v_1^{p+1} - v_2^{p+1}\| \leq (1 - \frac{1}{2} \gamma^2) \|v_1^p - v_2^p\| ; \quad (70)$$

si, au contraire,

$$\left(\frac{g_2^p}{\|g_2^p\|}, \frac{p_2^{p+1}}{\|p_2^{p+1}\|} \right) \geq 2 \gamma$$

alors la remarque faite lors du premier point de la démonstration (57), (58), nous montre que l'une au moins des deux propositions suivantes est vraie :

- ou x_2^{p+1} (63) est projection de v_1^p sur la droite $v_2^p + \lambda p_2^{p+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ auquel cas on a (68),

- ou x_1^{p+1} (69) est projection de v_2^p sur la droite $v_1^p + \lambda p_1^{p+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ auquel cas on a (70).

Au total, on a donc toujours (68), (70),

$$\forall p \geq P, \quad \|v_1^p - v_2^p\| \leq (1 - \frac{1}{2} \gamma^2)^{p-P} \|v_1^P - v_2^P\|$$

et donc, par (67), en posant :

$$\hat{v}_i = \lim_{p \rightarrow \infty} v_i^p$$

il vient en passant à la limite sur m :

$$\forall p \geq P, \quad d(v_i^p, \hat{v}_i) = \frac{2}{\gamma^2} (1 - \frac{1}{2} \gamma^2)^{p-P} \|v_1^P - v_2^P\| ; \quad (71)$$

ce qui prouve que la convergence est au moins linéaire.

IV.2.5 - Théorème

Si en plus de l'hypothèse H_1 , on suppose :

(H₃) C_1 - resp. C_2 - uniformément convexe,

alors la suite $\left\{ (v_1^p, v_2^p) \right\}$ converge fortement vers un optimum

Démonstration

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème III.4.4.

REFERENCES

- (1) A. AUSLENDER, B. MARTINET
"Méthodes de décomposition pour la minimisation d'une fonction sur un espace produit"
SIAM J. Control, 12, 4, (1974), 635-642
- (2) L. M. BERGMAN
"The method of successive projection for finding a common point of convex sets"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 162, 3, (1965), 487-490
- (3) J. CEA
"Les méthodes de descente en théorie de l'optimisation"
RIRO, 13-R3, (1968), 79-101
- (4) J. CEA
"Optimisation"
Dunod, Paris, (1971)
- (5) L. G. GUBIN, B. T. POLYAK, E. V. RAIK
"The method of projections for finding the Common point of convex sets"
Zh. Vychist. Mat. Fiz., 7, 6, (1967), 1211-1228
- (6) V. A. DEM'JANOV, A. M. RUBINOV
"The minimization of a smooth convex functional on a convex set"
SIAM Control, 5, 2, (1967), 280-294
- (7) M. FRANK, P. WOLFE
"An algorithm for quadratic programming"
Naval Res. Logist. Quart., 3, (1956), 95-110
- (8) Y. HAUGAZEAU
"Sur les inéquations variationnelles et la minimisation de fonctionnelles convexes"
Thèse, Paris, (1968)
- (9) P. J. LAURENT
"Approximation et optimisation"
Editions Hermann, Paris, (1972)
- (10) E. S. LEVITIN, B. T. POLYAK
"Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 168, 5, (1966), 764-767

- (11) G. MEYER, E. POLAK
"A decomposition algorithm for solving a class of optimal control problems"
J. Math. Anal. Appl. , 32, (1970), 118-140
- (12) L. W. NEUSTADT
"Synthetizing time optimal control systems"
J. Math. Anal. Appl. , 1, (1960), 484-493
- (13) D. V. PAI
"Characterizations of multi-optimum of a convex functional"
Séminaire d'analyse numérique, Grenoble, (1974)
- (14) G. PIERRA
"Croisement d'algorithmes pour trouver un point commun à plusieurs ensembles convexes"
Séminaire d'analyse numérique, 187, Grenoble, (1973)
- (15) G. PIERRA
"Sur le croisement de méthode de descente et l'intersection ou la distance de deux convexes"
Colloque d'analyse numérique, La Colle-sur-Loup, (1973) et
C. R. Acad. Sci. , Paris, 277, (1973), 1071-1074
- (16) E. POLAK
"Computational methods in optimization"
Academic Press, New York, (1971)
- (17) B. T. POLYAK
"Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 166, 2, (1966), 287-290
- (18) J. B. ROSEN
"The gradient projection method for non linear programming"
SIAM Control, 8, 1, (1960), 181-217

CHAPITRE II

CHAPITRE II

METHODES DE PROJECTIONS PARALLELES EXTRAPOLEES RELATIVES A UNE INTERSECTION DE CONVEXES

Les méthodes de décomposition, qui consistent à chercher la solution d'un problème d'optimisation posé dans un espace produit, et sur un produit de convexes, à travers la résolution de sous-problèmes ne mettant en jeu qu'un seul de ces convexes, sont très classiques - cf. par exemple ⁽⁶⁾ et la bibliographie correspondante -.

On appelle ⁽¹³⁾⁽⁴⁾ "éclatement de contraintes" le fait de chercher la solution d'un problème posé sur une intersection de convexes à travers la résolution de sous-problèmes ne faisant intervenir qu'un seul de ces convexes.

Le propos de ce chapitre est de montrer comment, à un problème posé sur une intersection de convexes, on peut associer un problème équivalent faisant intervenir le produit des convexes initiaux. Aux méthodes de décomposition de ce nouveau problème correspondront alors des méthodes d'éclatement de contraintes pour le problème initial ⁽²¹⁾.

La représentation d'une intersection de convexes dans un espace produit est présentée et étudiée dans la première partie de ce chapitre.

Cette représentation nous permet, dans une deuxième partie, d'étendre quelques résultats connus ⁽²⁾⁽⁸⁾ sur la méthode des barycentres puis d'élaborer dans une troisième partie, une méthode originale pour la recherche d'un point appartenant à une intersection de convexes : la méthode de projections parallèles extrapolée.

Dans les quatrième et cinquième parties, deux variantes de la méthode précédente sont présentées. La première, particularisant un des convexes initiaux, a pour objet de tirer parti de certaines spécificités pouvant intervenir dans la nature du problème. La deuxième, qui consiste à rajouter une phase de "prolongation" permet de définir une méthode convergeant en un nombre fini de pas.

L'ensemble des méthodes présentées ici repose sur la possibilité d'effectuer facilement des projections sur chacun des convexes initiaux. Le cas où ces projections sont malaisées à obtenir est étudié, par croisement d'algorithmes, dans le chapitre suivant. De plus certains problèmes de minimisation de fonctionnelles sur une intersection de convexes seront étudiés, en utilisant le formalisme présenté ici, dans les chapitres ultérieurs.

I. INTERSECTION DE CONVEXES DANS
UN ESPACE DE HILBERT

Soient :

V un espace de Hilbert, réel, identifié à son dual, de produit scalaire $(.,.)$, de norme $||. ||$

$C_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$, des sous-ensembles convexes fermés de V
 $S = \bigcap_{i=1}^n C_i$

$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V$ doté de la topologie produit par le produit scalaire
 $((.,.)) = \sum_{i=1}^n (.,.)$; la norme étant notée $|||. |||$

$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $v \in S = \bigcap_{i=1}^n C_i$
- $y \in C_1, y \in C_2, \dots, y \in C_n$
- $(y, y, \dots, y) \in C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$
 $y = (y, y, \dots, y) \in \mathcal{C}$

Ceci nous amène à introduire la définition :

I.1 - Définition

On appelle convexe diagonal \mathcal{D} le sous-espace vectoriel de \mathcal{V} défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, x, \dots, x) \in \mathcal{V} ; x \in V \right\}$$

I.2 - Notations

Il est clair que \mathcal{D} est isomorphe à V par la bijection

$$j : V \rightarrow \mathcal{D} ; x \in V \rightarrow j(x) = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{V}$$

Cette bijection n'étant pas une isométrie, nous n'identifierons pas V et \mathcal{D} et nous noterons l'image par j d'un élément de V par la lettre ronde correspondante ; nous noterons :

$$\mathcal{x} = j(x)$$

$$\mathcal{b} = j(b)$$

$$\mathcal{u} = j(u) .$$

On a donc la proposition :

I. 3 - Proposition

L'image par application j de l'intersection des n convexes C_i est l'intersection du convexe produit \mathcal{C} et du convexe diagonal \mathcal{D} :

$$j\left(\bigcap_{i=1}^n C_i\right) = \mathcal{C} \cap \mathcal{D} .$$

Donnons quelques propriétés géométriques de cette représentation :

I. 4 - Proposition

i) La projection d'un point, $\mathcal{b} = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ sur le convexe produit \mathcal{C} , a pour composantes les projections de b sur chacun des convexes C_i :

$$\text{Proj}_{\mathcal{C}} \mathcal{b} = (\text{Proj}_{C_1} b, \text{Proj}_{C_2} b, \dots, \text{Proj}_{C_n} b)$$

ii) La projection d'un point $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sur le convexe diagonal \mathcal{D} est l'image par j du barycentre des n points v_1, \dots, v_n :

$$\text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i\right)$$

Démonstration

i) Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$- v = \text{Proj}_{\mathcal{C}} b$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} v \in \mathcal{C} \\ \|v - b\|^2 = \min [\|u - b\|^2; u \in \mathcal{C}] \end{array} \right.$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} v_1 \in C_1, v_2 \in C_2, \dots, v_n \in C_n \\ \sum_{i=1}^n \|v_i - b\|^2 = \min \left[\sum_{i=1}^n \|u_i - b\|^2; u_1 \in C_1, u_2 \in C_2, \dots, u_n \in C_n \right] \end{array} \right.$$

$$- v_i \in C_i; \|v_i - b\|^2 = \min [\|u_i - b\|^2; u_i \in C_i] \quad i = 1, \dots, n$$

$$- v_i = \text{Proj}_{C_i} b; \quad i = 1, \dots, n$$

ii) Considérons la fonctionnelle $\Delta: V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Delta(b) = \sum_{i=1}^n \|v_i - b\|^2$$

Il est clair que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$b = (b, b, \dots, b) = \text{Proj}_{\mathcal{C}} (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$b \in V, \quad \Delta(b) = \min [\Delta(y); y \in V]$$

La fonctionnelle $\Delta(\cdot)$ étant convexe et différentiable, b est donc caractérisé par :

$$\text{Grad } \Delta(b) = 0$$

c'est-à-dire :

$$- 2 \sum_{i=1}^n (v_i - b) = 0$$

et donc :

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

I.5 - Proposition

On suppose donné $D_0 \subset V$, un $n+1$ -ième sous-ensemble convexe fermé, et on note $\mathcal{D}_0 = j(D_0)$ son image dans \mathcal{D} . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$i) \quad y = (y, y, \dots, y) = \text{Proj}_{\mathcal{D}_0} (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$ii) \quad y = \text{Proj}_{D_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right)$$

Démonstration

La projection y de $v = (v_1, \dots, v_n)$ est caractérisée par :

$$((x-y, y-v)) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_0$$

ceci est équivalent à :

$$\sum_{i=1}^n (x-y, y-v_i) \geq 0 \quad \forall x \in D_0$$

$$(x-y, y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i) \geq 0 \quad \forall x \in D_0$$

$$y = \text{Proj}_{D_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right)$$

I.6 - Barycentre avec poids

On suppose donnés, $i = 1, \dots, n$, des nombres α_i strictement positifs et l'on définit, sur V , n nouveaux produits scalaires par :

$$(u, v)_i = \alpha_i^2 (u, v) ; \quad \forall u \in V, \quad \forall v \in V$$

dont les normes associées seront notées $\| \cdot \|_i$. On notera V_i l'espace V doté du produit scalaire $(\dots)_i$ et on définit ici \mathcal{V} par :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V_i \quad \text{avec} \quad ((\dots)) = \sum_{i=1}^n (\dots)_i$$

les autres notations demeurant inchangées. On a alors la proposition :

I. 6. 1 - Proposition

i) La projection d'un point $\mathcal{C} = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ sur le convexe produit \mathcal{C} a pour composantes les projections de b sur chacun des convexes C_i au sens de la norme initiale de V - et donc également de l'une quelconque des normes $\| \cdot \|_i$ -

$$\text{Proj}_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = (\text{Proj}_{C_1} b, \dots, \text{Proj}_{C_n} b) .$$

ii) La projection d'un point $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sur le convexe diagonal \mathcal{D} est l'image par j du barycentre des n points v_1, \dots, v_n pondéré avec les coefficients $\alpha_i^2 / \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$:

$$\text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} v_i \right)$$

La démonstration du point i) se déduit immédiatement de celle de la proposition I. 4. i. Pour celle du point ii) on définit maintenant :

$$\Delta(b) = \sum_{i=1}^n \|v_i - b\|_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|v_i - b\|^2$$

dont le minimum est caractérisé par :

$$- 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (v_i - b) = 0$$

c'est-à-dire :

$$b = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} v_i$$

I. 6. 2 - Remarque

L'extension aux barycentres avec poids de tous les résultats présentés ici pour les barycentres équipondérés est immédiate. Nous éviterons cependant l'introduction de pondérations afin de ne pas alourdir les notations.

II. RECHERCHE D'UN POINT APPARTENANT A UNE
INTERSECTION DE CONVEXES
METHODE DU BARYCENTRE

Rappelons tout d'abord les propriétés de la méthode des projections successives pour les problèmes relatifs à la distance ou à l'intersection de deux convexes⁽⁹⁾⁽²⁰⁾.

II.1 - CAS PARTICULIER. DISTANCE OU INTERSECTION DE DEUX CONVEXES

Soient :

V un espace de Hilbert réel de produit scalaire et de norme notés (\dots) ,
 et $\|\cdot\|$. La distance associée sera notée $d(\dots)$

$C_i \subset V$, $i = 1, 2$, des sous-ensembles convexes fermés,
 $V \times V$ doté de la topologie produit

et le problème :

(Q) "Trouver $(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in C_1 \times C_2$ tel que : $\|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|^2 = \min_{(v_1, v_2) \in C_1 \times C_2} [\|v_1 - v_2\|^2]$ "

II.1.1 - Hypothèse

Par définition de la distance inter-convexe, l'ensemble des solutions de (Q) est un convexe fermé défini par :

$$\mathcal{S} = \left\{ (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in C_1 \times C_2 ; d(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = d(C_1, C_2) \right\}$$

nous ferons l'hypothèse que cet ensemble est non vide :

(H₀) "Il existe $(u_1, u_2) \in C_1 \times C_2$ tel que $d(u_1, u_2) = d(C_1, C_2)$ "

Cette hypothèse est, en particulier, vérifiée si :

- (a) $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$
- (b) C_1 (ou C_2) est borné
- (c) V est de dimension finie et les cônes asymptotes⁽¹¹⁾ $C_{i\infty}$ de C_i , $i = 1, 2$, sont tels que :

$$C_{1\infty} \cap C_{2\infty} = \{0\} .$$

II. 1. 2 - Caractérisation de la solution

Dans⁽¹⁵⁾, l'équivalence des trois propositions suivantes est démontrée :

- (i) $(u_1, u_2) \in C_1 \times C_2$; $d(u_1, u_2) = d(C_1, C_2)$
- (ii) $(u_1, u_2) \in C_1 \times C_2$; $d(u_1, u_2) = d(u_1, C_2) = d(C_1, u_2)$
- (iii) $\begin{cases} u_1 = \text{Proj}_{C_1} u_2 \\ u_2 = \text{Proj}_{C_2} u_1 \end{cases}$

II. 1. 3 - Méthode des projections successives

Partant de $v_2^0 \in V$, le passage de (v_1^p, v_2^p) à (v_1^{p+1}, v_2^{p+1}) s'effectue de la façon suivante :

- (1) On définit v_1^{p+1} par

$$\begin{cases} v_1^{p+1} \in C_1 \\ \|v_1^{p+1} - v_2^p\| = \min [\|v_1 - v_2^p\| ; v_1 \in C_1] , \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$v_1^{p+1} = \text{Proj}_{C_1} v_2^p$$

- (2) v_2^{p+1} est, de même, défini par :

$$v_2^{p+1} = \text{Proj}_{C_2} v_1^{p+1} .$$

On a les propriétés suivantes :

II. 1. 4 - Théorème⁽⁹⁾

Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, alors les deux suites $\{v_1^p\}$ et $\{v_2^p\}$ définies par la méthode des projections successives convergent faiblement vers $u \in C_1 \cap C_2$ et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_1^p - v_2^p\| = 0 .$$

Si, de plus, l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée :

$$(a) \quad C_1 \cap C_2^{\circ} \neq \emptyset \quad (\text{ou } C_1^{\circ} \cap C_2 \neq \emptyset)$$

(b) C_1 (ou C_2) est uniformément convexe

(c) V est de dimension finie

alors les convergences ont lieu au sens de la topologie forte de V . De plus, dans le cas (a), la vitesse de convergence est au moins linéaire.

II. 1. 5 - Théorème⁽⁹⁾

Si l'hypothèse (H_0) est vérifiée alors la suite $\{(v_1^p, v_2^p)\}$ définie par la méthode des projections successives converge faiblement vers $(u_1, u_2) \in \mathcal{J}$ et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_1^p - v_2^p\| = d(C_1, C_2) .$$

Si, de plus, l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée :

(b) C_1 (ou C_2) est uniformément convexe

(c) V est de dimension finie

alors la convergence a lieu au sens de la topologie forte de $V \times V$.

II. 2 - INTERSECTION DE n CONVEXES. POSITION DU PROBLEME

Soient

V un espace de Hilbert, identifié à son dual, de produit scalaire et de norme notés $(.,.)$ et $||.||$; la distance associée étant notée $d(.,.)$

$C_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$ des sous-ensembles convexes fermés

$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V$ doté de la topologie produit par le produit scalaire $((.,.)) = \sum_{i=1}^n (.,.)$, la norme associée étant notée $|||.|||$ et la distance $d((.,.))$.

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \hat{b} = (b, b, \dots, b) ; b \in V \right\}$$

et le problème :

(T) "Trouver $(\hat{v}, \hat{b}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tel que $|||\hat{v} - \hat{b}|||^2 = \min_{(v, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}} [|||v - b|||^2]$;

II. 2. 1 - Caractérisation de la solution

De II. 1. 2 et I. 4., on déduit immédiatement qu'un couple solution (\hat{v}, \hat{b}) est caractérisé par :

$$\begin{cases} \hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n) = \text{Proj}_{\mathcal{C}} \hat{b} \\ \hat{b} = (\hat{b}, \hat{b}, \dots, \hat{b}) = \text{Proj}_{\mathcal{D}} \hat{v} \end{cases}$$

ou encore en exprimant cette caractérisation dans l'espace V :

$$\begin{cases} \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \hat{b}, & i = 1, \dots, n \\ \hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \end{cases}$$

Dans le cas où

$$(H_1) \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset,$$

le minimum de $\|v - b\|$ sur $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ étant nul, cette caractérisation est équivalente à :

$$\begin{cases} \hat{v} = \hat{b} = (\hat{b}, \hat{b}, \dots, \hat{b}) \\ \hat{b} \in S \end{cases}$$

et le problème (T) est équivalent au problème :

$$(R) \quad \text{"Trouver } \hat{b} \in \bigcap_{i=1}^n C_i \text{ " .}$$

II. 2. 2 - Hypothèse

Nous supposons désormais que le problème (T) possède une solution :

$$(H_0) \quad \text{"Il existe } (\hat{v}, \hat{b}) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \text{ tel que } d((\hat{v}, \hat{b})) = d(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \text{" ;}$$

cette hypothèse s'exprime dans l'espace V par :

$$(H_0) \quad \text{"Il existe } v_i \in C_i, i = 1, \dots, n \text{ et } b \in V \text{ tels que :}$$

$$\begin{aligned} v_i &= \text{Proj}_{C_i} b, \quad i = 1, \dots, n \\ b &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad \text{" .} \end{aligned}$$

II. 2. 3 - Proposition

L'hypothèse (H_0) est, en particulier, vérifiée si :

$$(A) \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

(B) Il existe un $i' \in [1, n]$ tel que $C_{i'}$ soit borné

(C) V est de dimension finie et les cônes asymptotes $C_{i\infty}$ de C_i , $i = 1, \dots, n$ sont tels que :

$$\bigcap_{i=1}^n C_{i\infty} = \{0\} .$$

Démonstration

Le cas (A) est trivial. Démontrons (B). Considérons une suite $\{(v^p, b^p)\}$ minimisante pour $\|v - b\|^2$ sur $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. On a :

$$\|v^p - b^p\|^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^n \|v_i^p - b^p\|^2 + \|v_{i'}^p - b^p\|^2,$$

et les suites $\{b^p\}$ et $\{v_i^p\}$, $i = 1, \dots, n$ restent bornées dans V . La suite $\{(v^p, b^p)\}$ est donc bornée dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et possède sur $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ convexe fermé, un point d'adhérence faible qui est, par faible s. c. i. de la norme, un couple solution.

Démontrons (C). Il suffit de démontrer que l'hypothèse (C) implique :

$$\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{D}_\infty = \{0\},$$

ou encore, puisque \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel⁽¹¹⁾ :

$$\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{D} = \{0\}.$$

Supposons donc qu'il existe un $b \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\infty$; $b \neq 0$. Quel que soit $v \in \mathcal{C}$, on a :

$$\begin{aligned} v + \lambda b &\in \mathcal{C} & \forall \lambda \geq 0 \\ v_i + \lambda b &\in C_i & \forall \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$b \in C_{i_\infty} \quad i = 1, \dots, n;$$

le résultat suit.

II.3 - METHODE DU BARYCENTRE

Appliquons alors au problème (T) la méthode des projections successives du paragraphe II. 1. Si nous explicitons l'algorithme dans V , il vient :

Algorithme

Partant de $b^0 \in V$ quelconque, le passage de b^p à b^{p+1} s'effectue de la façon suivante :

1. On définit pour $i = 1, \dots, n$

$$v_i^{p+1} = \text{Proj}_{C_i} b^p$$

2. Puis on calcule b^{p+1} par :

$$b^{p+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^{p+1}$$

On a donc successivement une phase 1 de résolution en parallèle des problèmes locaux, puis une phase 2 de coordination. On reconnaît dans cet algorithme, la méthode du barycentre⁽²⁾.

II. 4 - CONVERGENCE DE CET ALGORITHME

La traduction sur (T) des propriétés établies au paragraphe II.1 nous donne donc :

II. 4. 1 - Théorème

Si $S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$, alors les $n + 1$ suites $\{v_1^p\}$, $\{v_2^p\} \dots \{v_n^p\}$ et $\{b^p\}$ définies par la méthode du barycentre convergent faiblement vers un élément $u \in S$, et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\| v^p - b^p \|\|^2 = 0$$

Si, de plus, l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée :

- (a) $S = \bigcap_{i=1}^n C_i$ est d'intérieur non vide
- (b) tous les convexes C_i sont uniformément convexes
- (c) V est de dimension finie.

alors les convergences ont lieu au sens de la topologie forte de V . De plus, dans le cas (a), la convergence est au moins linéaire.

II. 4. 2 - Théorème

Si l'hypothèse (H_0) est vérifiée, alors la suite $\{(v^p, b^p)\}$ définie par la méthode du barycentre converge faiblement vers un couple (\hat{v}, \hat{b}) solution de (T) et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - \hat{b}^p\|^2 = \|\hat{v} - \hat{b}\|^2 = \min \left[\sum_{i=1}^n \|v_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i\|^2 ; v_1 \in C_1 ; v_2 \in C_2, \dots, v_n \in C_n \right] "$$

Si de plus, l'une quelconque des conditions suivantes est vérifiée :

- (b) tous les $C_i, i = 1, \dots, n$ sont uniformément convexes
- (c) V est de dimension finie

alors la convergence a lieu au sens de la topologie forte de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Ces deux théorèmes résultent très simplement des théorèmes du paragraphe II. 1 à l'exception du résultat concernant les conditions (b) car le produit de convexes uniformément convexes n'est pas uniformément convexe. Remarquons d'ailleurs que le résultat de convergence faible du théorème II. 4. 1 était établi dans (2). Démontrons maintenant que les conditions (b) entraînent la convergence forte.

Nous allons distinguer deux cas :

II. 4. 2. 1 - 1er cas : $S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$

Alors d'après la première partie du théorème II. 4. 1 et la caractérisation II. 2. 1, on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_i^p - v_j^p\| = 0 \quad i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, n.$$

Si au moins $n-1$ des C_i sont uniformément convexes on sait - cf. (9) lemme 5b - que ceci implique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^p, S) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

On déduit de ces deux propositions que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((v^p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})) = 0.$$

La projection réduisant les distances, les ensembles :

$$S_q = \bigcap_{p=0}^q \mathcal{B} [\text{Proj}_{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} v^p, d((v^p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}))]$$

en notant $\mathcal{B}(x, \rho)$ la boule fermée de centre x et de rayon ρ , sont convexes, fermés, non vides - car S_q contient au moins l'élément v^q - et, de plus, $S_{q+1} \subset S_q$. Mais une telle suite d'ensembles possède nécessairement sur \mathcal{V} , complet, une intersection non vide. Soit donc $v \in \bigcap_{q=1}^{\infty} S_q$; il est clair que $v \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ et que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((v^p, v)) = 0$$

II. 4. 2. 2 - 2ème cas : $S = \bigcap_{i=1}^n C_i = \emptyset$

Soit $(\hat{v}, \hat{b}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ la limite faible (théorème (II. 4. 2)) de $\{(v^p, b^p)\}$. Pour tous les $i, i = 1, \dots, n$ tels que :

$$\hat{v}_i \neq \hat{b}_i = \hat{b}, \tag{1}$$

et, par hypothèse il en existe au moins un, on a :

$$\hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \hat{b} \neq \hat{b}.$$

\hat{v}_i appartient donc à la frontière de C_i ensemble uniformément convexe et donc ^(II) : v_i^p converge fortement vers \hat{v}_i .

Soit I l'ensemble des indices $i, i \in [1, n]$ vérifiant (1). On notera $J = [1, n] - I$ et $c = \text{Card}(I)$. On a donc :

$$\hat{b} = \frac{1}{n} \sum_I \hat{v}_i + \frac{1}{n} \sum_J \hat{v}_i = \frac{1}{n} \sum_I \hat{v}_i + \frac{1}{n} \sum_J \hat{b} = \frac{1}{c} \sum_I \hat{v}_i.$$

D'autre part :

$$d^2((v^p, b^p)) = \sum_I \|v_i^p - b^p\|^2 + \sum_J \|v_i^p - b^p\|^2 ;$$

en passant à la limite, il vient :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d^2((v^p, b^p)) \geq \liminf_{p \rightarrow \infty} \sum_I \|v_i^p - b^p\|^2 + \liminf_{p \rightarrow \infty} \sum_J \|v_i^p - b^p\|^2$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d^2((v^p, b^p)) \geq \sum_{i \in I} \|\hat{v}_i - \hat{b}\|^2 + \liminf_{p \rightarrow \infty} \sum_J \|v_i^p - b^p\|^2$$

Mais puisque d'après la première partie du théorème II. 4. 2, on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d^2((v^p, b^p)) = \sum_{i=1}^n \|\hat{v}_i - \hat{b}\|^2 = \sum_I \|\hat{v}_i - \hat{b}\|^2,$$

il vient :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \sum_J \|v_i^p - b^p\|^2 = 0$$

Il existe donc une sous-suite $\{(v^r, b^r)\}$ de $\{(v^p, b^p)\}$ telle que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|v_i^r - b^r\| = 0 \quad \forall i \in J$$

Or :

$$b^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^r = \frac{1}{n} \sum_I v_i^r + \frac{1}{n} \sum_J b^r + \frac{1}{n} \sum_J (v_i^r - b^r)$$

soit :

$$b^r = \frac{1}{c} \sum_I v_i^r + \frac{1}{c} \sum_J (v_i^r - b^r)$$

ou encore

$$\hat{b} - b^r = \frac{1}{c} \sum_I \hat{v}_i - \frac{1}{c} \sum_I v_i^r - \frac{1}{c} \sum_J (v_i^r - b^r)$$

et donc :

$$\|\hat{b} - b^r\| \leq \frac{1}{c} \sum_I \|\hat{v}_i - v_i^r\| + \frac{1}{c} \sum_J \|v_i^r - b^r\| .$$

Par passage à la limite, il vient donc :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\hat{b} - b^r\| = 0 .$$

La sous-suite $\{b^r\}$ converge donc fortement vers \hat{b} . La projection réduisant les distances, c'est donc toute la suite $\{(v^p, b^p)\}$ qui converge fortement vers (\hat{v}, \hat{b}) .

II. 5 - APPLICATIONS : SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES INCOMPATIBLES (15)

Considérons dans \mathbb{R}^q le problème linéaire :

(T') "Trouver $u \in \mathbb{R}^q$ tel que $Au = d$ "

avec :

A matrice (n, q) donnée

d donné, $d \in \mathbb{R}^q$.

On définit, $i = 1, \dots, n$, et en notant A_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de A :

$$C_i = \left\{ v \in \mathbb{R}^q ; \quad A_i \cdot v = d_i \right\}$$

- a) Si $n = q$ et A non singulière, (T') possède alors une solution unique et la méthode du barycentre n'est autre que le procédé de Cimmino⁽⁸⁾.
- b) Si $n \neq q$ et si (T') possède au moins une solution alors notre démonstration prouve que la méthode des barycentres converge vers une solution particulière de (T') .
- c) Si (T') ne possède pas de solution, supposons la matrice normalisée en ligne, - i. e. $\|A_i\|^2 = 1$. Alors on a :

II. 5. 1 - Proposition

Sous les hypothèses du c), la méthode des barycentres converge vers la solution du système "aux moindres carrés" définie par :

$$F(u) = \min \left[\sum_{i=1}^n (A_{i \cdot} u - d_i)^2 ; u \in \mathbb{R}^q \right]$$

Démonstration

1er point : Le problème (T) relatif à $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$ possède une solution.

Si $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_\infty = \{0\}$, le résultat découle du théorème II. 4. 2

Supposons donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_\infty \neq \{0\}$. \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel donc \mathcal{D}_∞ et se confond avec \mathcal{D} . On a donc :

$$b \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_\infty \iff \begin{cases} b = (b, b, \dots, b) \\ b \in \bigcap_{i=1}^n C_{i, \infty} \end{cases}$$

Soit alors $x \in V$, définissons :

$$- H_b = \left\{ v \in V ; (b, v) = (b, x) \right\}$$

$$- \hat{V} = \bigcap_b H_b, \quad \forall b \in \bigcap_{i=1}^n C_{i, \infty}$$

et :

$$- \hat{C}_i = C_i \cap \hat{V}.$$

\hat{V} est un sous-espace affine, non vide, il contient x . Les $\hat{C}_i, i = 1, \dots, n$, sont des convexes fermés, non vides ; ils contiennent $\text{Proj}_{C_i} x$, puisque les C_i sont des hyperplans. De plus :

$$\bigcap_{i=1}^n (\hat{C}_i)_\infty = 0$$

Le problème (T) relatif à $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n \hat{C}_i$ possède donc une solution. Celle-ci est caractérisée par :

$$\begin{cases} \hat{v}_i = \text{Proj}_{\hat{C}_i} \hat{b} \\ \hat{b} = \frac{1}{n} \sum \hat{v}_i \end{cases}$$

\hat{V} étant un sous-espace affine, $\hat{b} \in \hat{V}$.

Définissons alors :

$$\tilde{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \hat{b}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\forall a \in C_{i, \infty}, \quad \tilde{v}_i + a \in C_i.$$

Compte-tenu de la définition de C_i , ceci entraîne :

$$(a, \tilde{v}_i - \hat{b}) = 0,$$

c'est à dire $\tilde{v}_i \in H_a$, d'où $\tilde{v}_i \in \hat{V}$. On a donc :

$$\tilde{v}_i \in \hat{V} \cap C_i = \hat{C}_i,$$

d'où :

$$\tilde{v}_i = \hat{v}_i,$$

et le couple (\hat{v}, \hat{b}) est solution du problème (T) relatif à \mathcal{C} .

2ème point - La suite $\{(b^p)\}$ converge vers une solution du système "aux moindres carrés".

Le problème (T) relatif à \mathcal{C} possédant une solution, la suite définie par l'algorithme II.3 converge - théorème II.4.2 - dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vers un couple $(\hat{v}, \hat{b}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ solution de (T). On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\hat{v}_i - \hat{b}\|^2 &= \min \left[\sum_{i=1}^n \|\tilde{v}_i - \hat{b}\|^2 ; \tilde{v}_i \in C_i ; \hat{b} \in \hat{V} \right] \\ &= \min \left[\sum_{i=1}^n \frac{(A_i \cdot \hat{b} - d_i)^2}{\|A_i\|^2} ; \hat{b} \in \hat{V} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte-tenu de l'hypothèse faite, la solution du système "aux moindres carrés". Dans le cas où A n'est pas normalisée en ligne, la convergence a lieu vers la solution approchée du système au sens de la distance sur \mathbb{R}^q .

III. METHODE DE PROJECTIONS PARALLELES EXTRAPOLEE

Les méthodes de projection possèdent l'inconvénient, bien connu, de converger très lentement dès que les angles des hyperplans d'appui qui interviennent deviennent faibles. Dans le cas des projections successives sur deux convexes, et pour chercher un point appartenant à leur intersection supposée non vide, l'idée est alors⁽⁹⁾ d'extrapoler à partir de deux projections successives sur un même convexe, et jusqu'à un hyperplan d'appui à l'autre convexe. C'est cette idée que nous appliquons ici à la méthode des projections parallèles en utilisant le formalisme précédent.

Nous conservons ici toutes les notations du paragraphe II et faisons desormais l'hypothèse :

$$(H_1) \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

équivalente, dans \mathcal{U} , à

$$(H_1) \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset .$$

III. 1 - EXTRAPOLATION

Soient $l^p \in \mathcal{D}$, v^{p+1} la projection de l^p sur \mathcal{C} et l'^{p+1} la projection de v^{p+1} sur \mathcal{D} - cf. fig. 1, page II.22 - Si $l'^{p+1} = l^p$, il résulte de la caractérisation II. 2. 1 et de l'hypothèse (H_1) que $l^p \in S = \bigcap_{i=1}^n C_i$.

Si $l'^{p+1} \neq l^p$, on définit alors l'extrapolé l^{p+1} comme étant l'intersection de la direction $l'^{p+1} - l^p$ avec l'hyperplan d'appui en v^{p+1} au convexe \mathcal{C} .

On a donc - cf. fig. 2, page II.22 :

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\| \| l^{p+1} - l^p \| \|}{\| \| v^{p+1} - l^p \| \|} = \frac{\| \| v^{p+1} - l^p \| \|}{\| \| l'^{p+1} - l^p \| \|}$$

d'où :

$$b^{p+1} - b^p = \frac{\|v^{p+1} - b^p\|^2}{\|b'^{p+1} - b^p\|^2} (b'^{p+1} - b^p)$$

c'est-à-dire :

$$b^{p+1} = b^p + \frac{\|v^{p+1} - b^p\|^2}{\|b'^{p+1} - b^p\|^2} (b'^{p+1} - b^p) . \quad (1)$$

Ceci s'exprime, dans l'espace V , par :

$$b^{p+1} = b^p + \frac{\sum_{i=1}^n \|v_i^{p+1} - b^p\|^2}{n \|b'^{p+1} - b^p\|^2} (b'^{p+1} - b^p) . \quad (2)$$

Lemme

Etant donné un triplet $(b^p, v^{p+1}, b'^{p+1}) \in \mathcal{V}^3$

avec :

$$\begin{cases} b^p \in \mathcal{D} \\ v^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{E}} b^p \\ b'^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v^{p+1} ; \end{cases}$$

si $b'^{p+1} = b^p$, il résulte de l'hypothèse (H_1) que $b^p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$

si $b'^{p+1} \neq b^p$, on définit :

$$b^{p+1} = b^p + \frac{\|v^{p+1} - b^p\|^2}{\|b'^{p+1} - b^p\|^2} (b'^{p+1} - b^p)$$

et l'on a :

$$(i) \quad b^{p+1} = b'^{p+1} + \frac{\|v^{p+1} - b'^{p+1}\|^2}{\|b'^{p+1} - b^p\|^2} (b'^{p+1} - b^p)$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} ; \langle b^p - b'^{p+1}, b'^{p+1} - x \rangle \geq 0$$

$$(iii) \quad \forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} ; \|b^p - x\| \geq \|v^{p+1} - x\| \geq \|b'^{p+1} - x\| \\ \geq \|b'^{p+1} - x\|$$

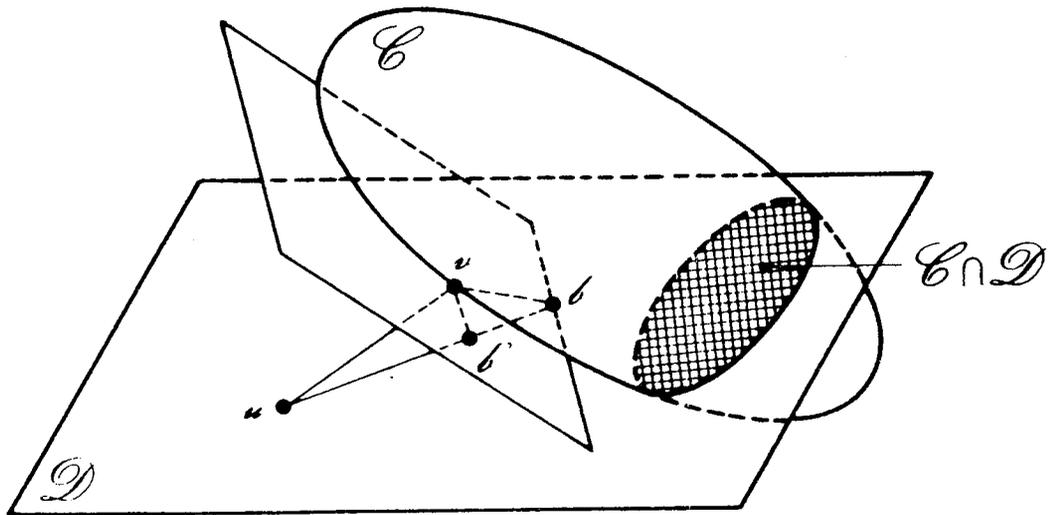


FIGURE 1 - Représentation de l'extrapolation dans \mathcal{V}
 (on a supprimé les indices : $u = u^p$; $v = v^{p+1}$; $b' = b'^{p+1}$; $b = b^{p+1}$)

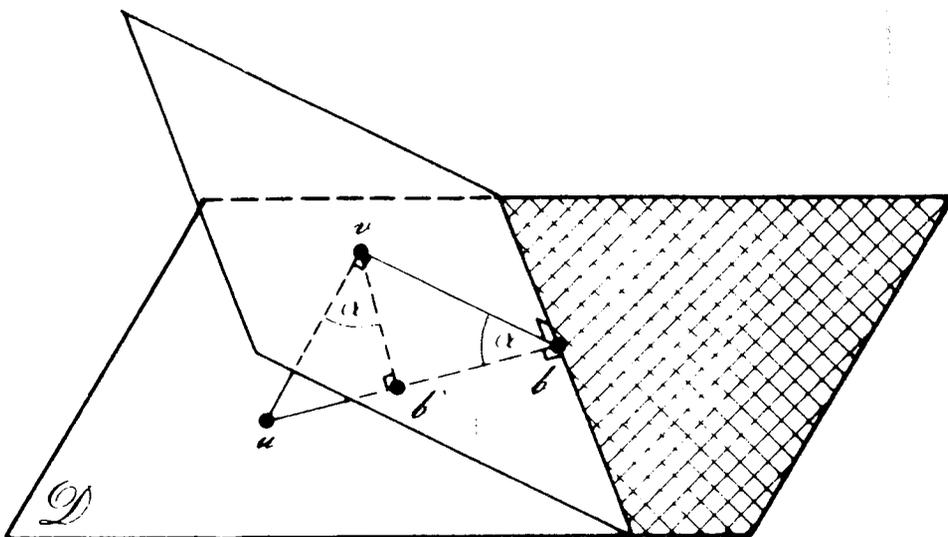


FIGURE 2 - Détermination de l'extrapolé

Démonstration

Supposons donc b^{p+1} défini par :

$$b^{p+1} = b^p + \frac{\| \| v^{p+1} - b^p \| \|^2}{\| \| b^p - b'^{p+1} \| \|^2} (b'^{p+1} - b^p).$$

Puisque b'^{p+1} est la projection de v^{p+1} sur \mathcal{D} , sous-espace vectoriel, on a :

$$\| \| v^{p+1} - b^p \| \|^2 = \| \| b^p - b'^{p+1} \| \|^2 + \| \| b'^{p+1} - v^{p+1} \| \|^2 \quad (3)$$

et donc :

$$\rho = \frac{\| \| v^{p+1} - b^p \| \|^2}{\| \| b^p - b'^{p+1} \| \|^2} \geq 1;$$

l'inégalité étant stricte sauf si b'^{p+1} est solution, et (i) :

$$b^{p+1} = b'^{p+1} + \frac{\| \| b'^{p+1} - v^{p+1} \| \|^2}{\| \| b^p - b'^{p+1} \| \|^2} (b'^{p+1} - b^p). \quad (4)$$

Remarquons ensuite que l'on a :

$$\langle \| \| b^{p+1} - v^{p+1}, b^p - v^{p+1} \rangle \| = \langle \| \| b^{p+1} - b'^{p+1} + b'^{p+1} - v^{p+1}, b^p - b'^{p+1} + b'^{p+1} - v^{p+1} \rangle \|$$

par définition de b'^{p+1} , ceci devient :

$$\langle \| \| b^{p+1} - v^{p+1}, b^p - v^{p+1} \rangle \| = \langle \| \| b^{p+1} - b'^{p+1}, b^p - b'^{p+1} \rangle \| + \| \| b'^{p+1} - v^{p+1} \| \|^2$$

et donc, compte tenu de (4) :

$$\langle \| \| b^{p+1} - v^{p+1}, b^p - v^{p+1} \rangle \| = 0. \quad (5)$$

Soit alors $x \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, on a :

$$\| \| b'^{p+1} - x \| \|^2 = \| \| b^{p+1} - x \| \|^2 + \| \| b'^{p+1} - b^{p+1} \| \|^2 + 2 \langle \| \| b'^{p+1} - b^{p+1}, b^{p+1} - x \rangle \|; \quad (6)$$

or le produit scalaire est non-négatif, en effet, compte-tenu de (4), il devient :

$$(\rho - 1) \langle \| \| b^p - b'^{p+1}, b^{p+1} - x \rangle \| = (\rho - 1) \langle \| \| b^p - v^{p+1}, b^{p+1} - x \rangle \| + 0$$

d'où, en utilisant (5) :

$$(\rho - 1) \langle \langle b^p - b'^{p+1}, b^{p+1} - x \rangle \rangle = (\rho - 1) \langle \langle b^p - v^{p+1}, v^{p+1} - x \rangle \rangle + 0 \quad (7)$$

et par définition de v^{p+1} :

$$\langle \langle b^p - b'^{p+1}, b^{p+1} - x \rangle \rangle \geq 0 \quad (8)$$

ce qui démontre le point (ii).

De (6) et (8), on déduit :

$$\langle \langle b^{p+1} - x \rangle \rangle^2 \geq \langle \langle b^{p+1} - x \rangle \rangle^2 + \langle \langle b^{p+1} - b'^{p+1} \rangle \rangle^2 \quad (9)$$

et enfin, compte-tenu des propriétés des projections (iii) :

$$\langle \langle b^p - x \rangle \rangle \geq \langle \langle v^p - x \rangle \rangle \geq \langle \langle b^{p+1} - x \rangle \rangle \geq \langle \langle b^{p+1} - x \rangle \rangle \quad (10)$$

L'algorithme, exprimé dans V , est alors le suivant :

III. 2 - ALGORITHME DE PROJECTIONS PARALLELES EXTRAPOLE

Partant de $b^0 \in V$ quelconque, le passage de b^p à b^{p+1} s'effectue de la façon suivante :

1. On définit pour $i = 1, \dots, n$

$$v_i^{p+1} = \text{Proj}_{C_i} b^p$$

2. On calcule :

$$b^{p+1} = \frac{1}{n} \sum v_i^{p+1}$$

3. On définit alors b^{p+1} par

$$b^{p+1} = b^p + \frac{\sum_i \langle \langle v_i^{p+1} - b^p \rangle \rangle^2}{n \langle \langle b^p - b'^{p+1} \rangle \rangle^2} (b'^{p+1} - b^p)$$

On a donc successivement les trois phases (voir fig. 1, p. 11, 22)

- une phase 1 de résolution en parallèle des problèmes locaux
- une phase 2 de coordination
- une phase 3 d'extrapolation pour exploiter au maximum la connaissance simultanée des solutions des n problèmes locaux

L'extrapolation obtenue étant d'autant plus efficace que b^p est "bien centré". Il semble qu'il puisse y avoir parfois intérêt à alterner des phases de "recentrage" : b^{p+1} étant défini par $b^{p+1} = b^{p+1}$; et les phases d'extrapolation : b^{p+1} défini par (2).

Cela n'a pas été confirmé par les quelques essais numériques que nous avons effectués, en particulier dans le cas linéaire.

La différence de rapidité de convergence, de l'ordre de 25 à 1 en nombre d'itérations à l'avantage de la méthode extrapolée est telle que l'utilisation de phase de "recentrage" $b^{p+1} = b^{p+1}$ ne fait que retarder les convergences.

III. 3 - CONVERGENCE DE L'ALGORITHME

On a le résultat suivant :

Théorème

Si $S = \bigcap_i C_i \neq \emptyset$ et si l'une quelconque des hypothèses suivantes est satisfaite :

1. $\exists j \in [1, n]$ tel que $C_j \cap \left(\bigcap_{i \neq j} C_i \right) \neq \emptyset$
2. Tous les C_i , sauf éventuellement un, sont uniformément convexes
3. V est de dimension finie,

alors la suite $\{b^p\}$ définie par l'algorithme de projection parallèle extrapolé III. 2 converge fortement vers $b \in \bigcap_i C_i$.

Ce théorème est encore valable si la phase 3 n'est exécutée que pour certaines valeurs de p , b^p étant défini pour les autres valeurs par b^{p+1} .

Démonstration

1er point : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - \ell^{p+1}\|\| = 0$

Du lemme III. 1 (ii), il résulte que :

$$\|\|\ell^p - x\|\|^2 \geq \|\|\ell^{p+1} - x\|\|^2 + \|\|\ell^p - \ell^{p+1}\|\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$$

La suite $\{\|\|\ell^p - x\|\|\}$ décroissante - III. 1 (iii) - est donc convergente et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|\ell^p - \ell^{p+1}\|\| = 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\|\ell^{p+1} - \ell^{p+1}\|\|.$$

En utilisant l'expression III. 1(i) de ℓ^{p+1} , et puisque $\|\|\ell^{p+1} - \ell^p\|\|$ reste bornée, il vient :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - \ell^{p+1}\|\| = 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - \ell^{p+1}\|\|.$$

2ème point : $\lim_{p \rightarrow \infty} d(b^p, \mathcal{S}) = 0$

On a donc, puisque $v_i^p \in C_i$, $i = 1, \dots, n$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(b^p, C_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad (11)$$

et nous pouvons utiliser le lemme (5) de ⁽⁹⁾ qui démontre que, sous les conditions 1, 2 ou 3, (11) est équivalent à :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(b^p, \mathcal{S}) = 0.$$

3ème point : Convergence de $\{b^p\}$

Compte-tenu de III. 1 (iii), les ensembles de la suite $\{S_q\}$:

$$S_q = \bigcap_{p=0}^q \mathcal{B}[\text{Proj}_{\mathcal{S}} b^p, d(b^p, \mathcal{S})],$$

sont convexes, fermés, non vides et tels que $S_{q+1} \subset S_q$. Soit donc $\hat{b} \in \bigcap_{q=1}^{\infty} S_q$, il est clair que $\hat{b} \in \mathcal{S}$ et que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(b^p, \hat{b}) = 0$$

III. 4 - APPLIICATIONS

III. 4. 1 - Résolution de système linéaires

Prenons $V = \mathbb{R}^q$ et considérons le problème :

(T') "Trouver $u \in \mathbb{R}^q$ tel que $Au = d$ "

avec :

- A matrice (n, q) donnée, on supposera qu'aucune de ses lignes n'est nulle
- $b \in \mathbb{R}^q$ donné

Nous supposons que le problème (T') possède au moins une solution et nous noterons $S \subset \mathbb{R}^q$ l'ensemble de ces solutions

Les vecteurs itérés successifs étant notés b_p , on introduit :

$$r_p = Ab_p - d$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|A_1\|^2} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \frac{1}{\|A_n\|^2} \end{pmatrix}$$

L'algorithme est alors le suivant :

III. 4. 1. 1 - Algorithme

Partant de $b_0 \in \mathbb{R}^q$, on définit :

le barycentre :

$$b'_{p+1} = b_p - \frac{1}{n} \cdot t_A \cdot D \cdot r_p$$

la solution extrapolée :

$$b''_{p+1} = b_p - \frac{t_{r_p} \cdot D \cdot r_p}{\|A \cdot D \cdot r_p\|^2} \cdot t_A \cdot D \cdot r_p$$

b_{p+1} pouvant être défini, au choix, selon les valeurs de p, $p=1, 2, 3, \dots$ par

i) $b_{p+1} = b'_{p+1}$

ii) $b_{p+1} = b''_{p+1}$

(on note ici b''_{p+1} ce qui était noté précédemment b^{p+1}) .

Le choix de la direction est évidemment celui de Cimmino. En ce qui concerne le choix de b_{p+1}'' sur cette direction, on a :

III. 4. 1. 2 - Proposition

L'algorithme III. 4. 1. 1 avec la définition ii) est un algorithme de projection sur un hyperplan contenant l'ensemble S des solutions de (T').

Démonstration

Reprenons l'égalité (7), pour tout $x \in S$, on a :

$$(\rho - 1) (\|l^p - l^{p+1}\|, \|l^{p+1} - x\|) = (\rho - 1) (\|l^p - v^{p+1}\|, \|v^{p+1} - x\|)$$

Or : C_i , $i = 1, \dots, n$ sont des sous-espaces affines. \mathcal{C} est donc un sous-espace affine et, par définition de v^{p+1} ,

$$(\|l^p - v^{p+1}\|, \|v^{p+1} - x\|) = 0 \quad ;$$

d'où :

$$\rho \neq 1 \implies (b^p - b^{p+1}, b^{p+1} - x) = 0 = (b^p - b^{p+1}, b^{p+1} - x), \quad \forall x \in S$$

- $\rho = 1$, par définition de v on a :

$$l^{p+1} = l'p+1 = v^{p+1} = (y, y, \dots, y) \quad ; \quad y \in S$$

et :

$$(x - y, y - b^p) = 0, \quad \forall x \in S$$

III. 4. 1. 3 - Proposition

Si le système (T') possède au moins une solution, la suite définie par l'algorithme III.3. 1. 1. converge vers une solution particulière.

III. 4. 1. 4 - Remarque

Dans le cas où la matrice A est carrée, non singulière et normée en ligne - i. e. $\|A_i\|_1^2 = 1$, $i = 1, \dots, n$, l'algorithme ii) se confond avec l'algorithme classique de décomposition de la norme ϕ_2 (8).

Dans le cas où A, carrée non singulière, n'est pas normée en ligne, l'algorithme peut également s'interpréter comme un algorithme de décomposition d'une norme pour la norme $\varphi(x) = {}^t x \cdot D \cdot x$ - (8).

La convergence est de plus, assurée, même si A est singulière, sous réserve que (T') possède des solutions.

Remarquons également que l'algorithme, sous la forme III.2, permet de traiter des systèmes linéaires à grandes matrices creuses sans être obligé de stocker cette matrice.

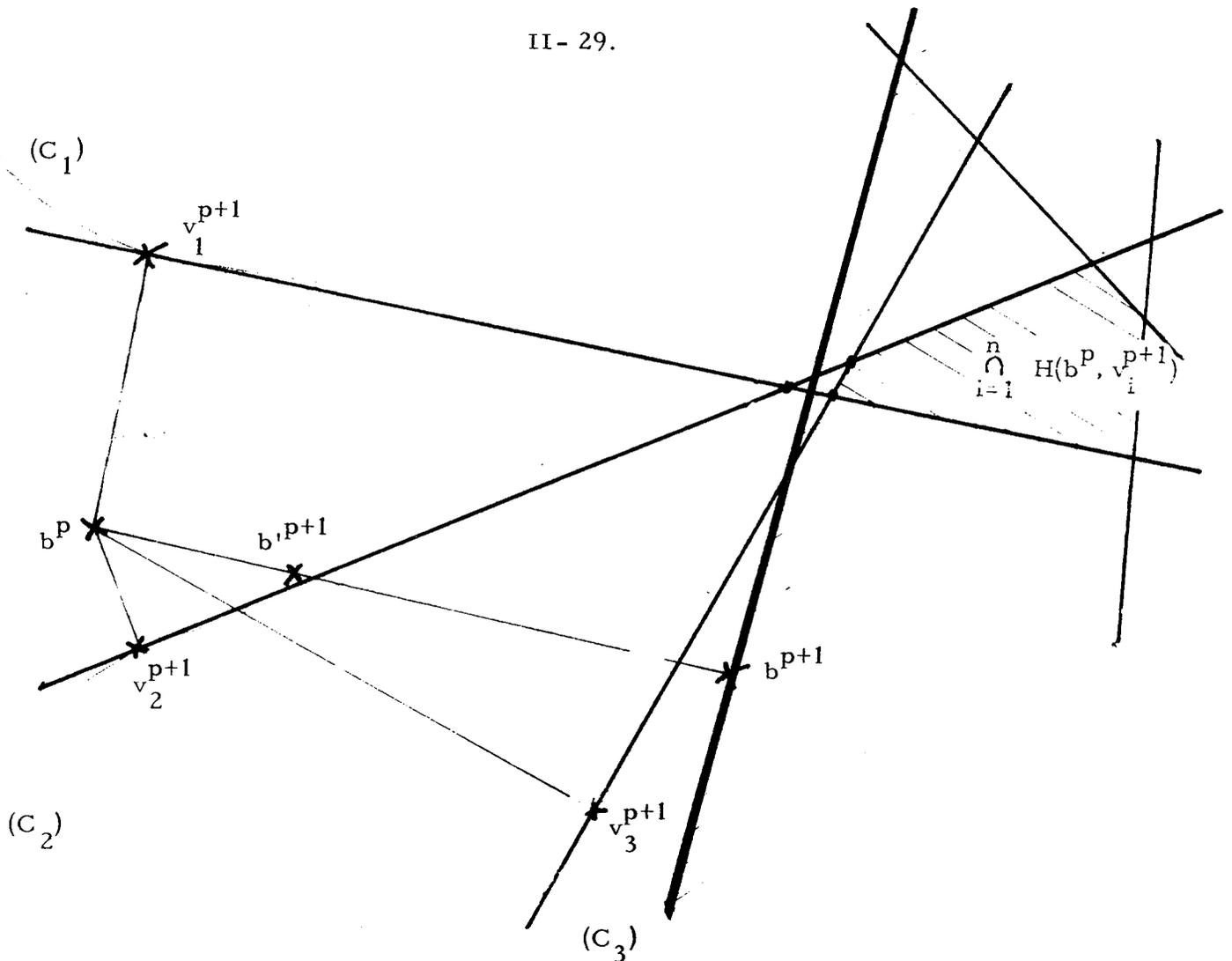


FIGURE 3 - Représentation de l'extrapolation dans V (cas général)

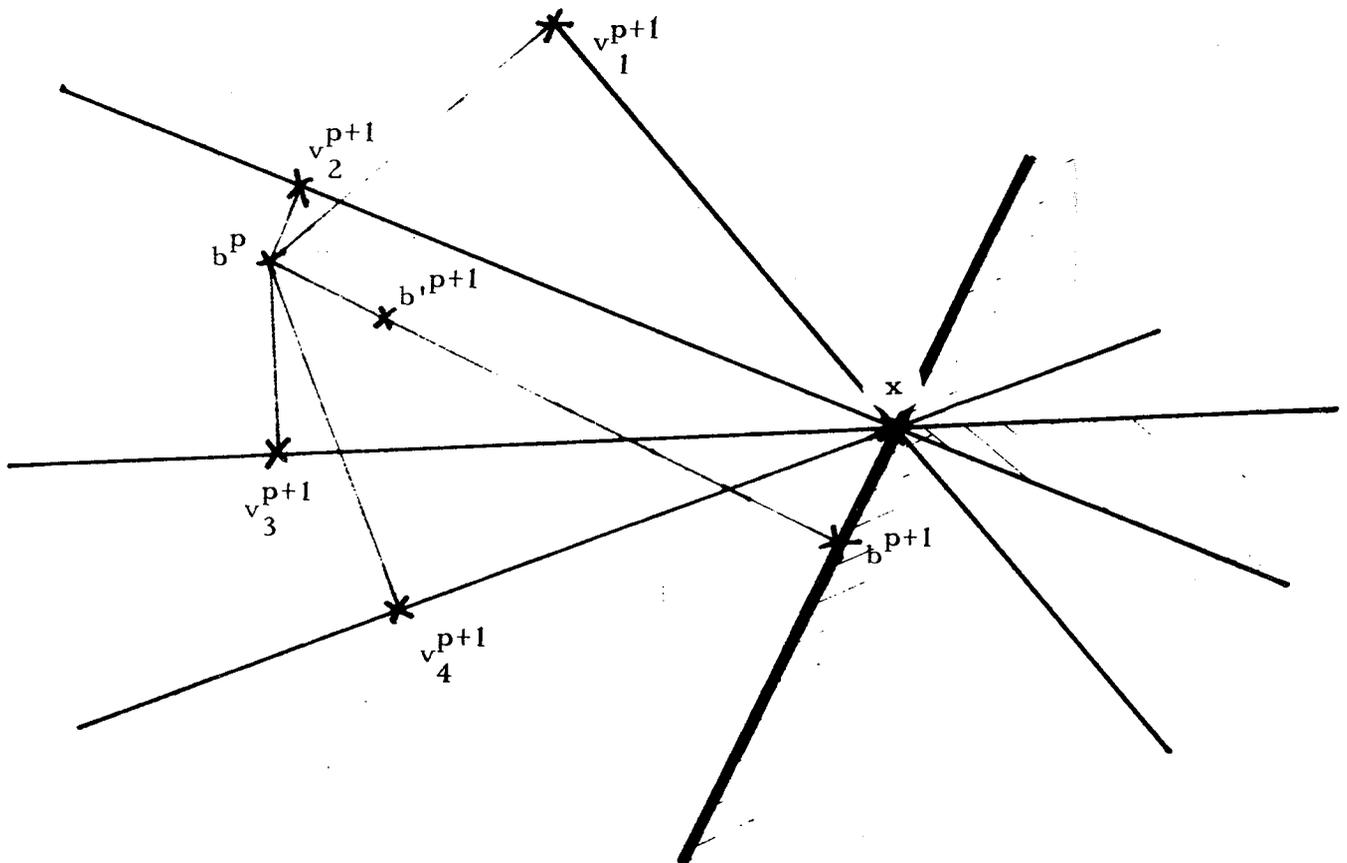


FIGURE 4 - Représentation de l'extrapolation dans V (cas particulier)

III. 4. 1. 5 - Remarque

La proposition III. 4. 1. 2 donne une interprétation géométrique simple, dans V , de l'extrapolation. Notons $H(a, b) = \{v \in V ; (v-b, b-a) \geq 0\}$ et $H'(a, b)$ sa frontière. S'il existe $x \in \bigcap_{i=1}^n H'(b^p, v_i^{p+1})$, alors l'hyperplan $H'(b^p, b^{p+1})$ est d'appui, en x , au convexe : $\bigcap_{i=1}^n H(b^p, v_i^{p+1})$. (cf. fig. 4, p. II.29)

Dans le cas où un tel x n'existe pas, $H'(b^p, b^{p+1})$ est seulement "assez proche" de l'intersection des $H(b^p, v_i^{p+1})$ car la recherche d'un hyperplan d'appui ne serait autre qu'un problème de programmation linéaire. (cf. fig. 3, p. II.29)

III.4. 2 - Système d'inéquations linéaires

Considérons dans $V = \mathbb{R}^q$ le problème :

(T'') "Trouver $u \in \mathbb{R}^q$ tel que $Au \leq d$ "

En conservant hypothèses et notations du III. 4.1 et en introduisant :

$$r_p^+ \in \mathbb{R}^q, \quad (r_p^+)_i = \max [0, (r_p)_i] \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

les itérés b'_{p+1} et b''_{p+1} sont respectivement définis par :

$$b'_{p+1} = b_p - \frac{1}{n} t_A \cdot D \cdot r_p^+ \tag{12}$$

$$b''_{p+1} = b_p - \frac{t_{r_p^+} \cdot D \cdot r_p^+}{\|t_A \cdot D \cdot r_p^+\|^2} \cdot t_A \cdot D \cdot r_p^+ \tag{13}$$

Si b_{p+1} est alors défini soit par (12), soit par (13), on a, à nouveau, la proposition III. 4. 1. 3.

Cela peut être intéressant, par exemple, pour résoudre des programmes linéaires de grande taille, mis, par dualité, sous la forme (T'') (17).

III. 5 - REMARQUE

L'algorithme IV.1 correspond à une extrapolation de deux projections successives sur \mathcal{D} ; cette extrapolation pourrait également être effectuée à partir de deux projections successives sur \mathcal{C} . Toutes les propriétés de convergence sont conservées pour cette variante : si les deux algorithmes se confondent dans le cas linéaire, il n'en est plus de même dans le cas non-linéaire où le deuxième s'avère légèrement moins commode à mettre en oeuvre (l'extrapolation n'appartient ni à \mathcal{C} ni à \mathcal{D} et doit donc être projetée sur \mathcal{D}).

IV. PARTICULARISATION D'UN CONVEXE

Dans bien des cas pratiques, un des convexes définissant l'intersection considérée a des caractéristiques spécifiques par rapport aux autres convexes mis en jeu. C'est le cas, par exemple, quand :

- une des contraintes est constituée par l'appartenance à un sous-espace affine (resp. un sous-espace vectoriel)
 - l'intersection est définie par n inégalités auxquelles s'ajoutent une (ou plusieurs) égalité
 - des problèmes de "niveaux" interviennent⁽¹⁴⁾.
- et enfin, et surtout :
- un ensemble de contraintes de non-négativités interviennent

Nous présentons, ici, une variante de l'algorithme du paragraphe III destinée à exploiter cette spécificité et qui consiste à "immerger" le convexe spécifique dans \mathcal{D} .

IV.1 - NOTATIONS

Nous conservons ici toutes les notations des paragraphes II et III, et nous supposons donné un $n+1$ ^{ième} convexe $D_0 \subset V$. Considérons alors le problème :

$$(P') \text{ "Trouver } v \in D_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) \text{ " .}$$

Nous noterons \mathcal{D}_0 l'image de D_0 dans \mathcal{D} par l'application j (cf. I) :

$$\mathcal{D}_0 = j(D_0) = \{ b \in \mathcal{D} ; b \in D_0 \} ;$$

et nous introduisons le problème :

$$(P) \text{ "Trouver } (\hat{v}, \hat{b}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}_0 \text{ tel que } \|\hat{v} - \hat{b}\|^2 = \min_{\substack{v \in \mathcal{C} ; \\ b \in \mathcal{D}_0}} \|v - b\|^2 ;$$

Il est clair que si (P') possède une (ou des) solution, les deux problèmes (P) et (P') sont équivalents.

IV.2 - CARACTERISATION DES SOLUTIONS DE (P)

D'après la caractérisation II.1.2, un couple (\hat{v}, \hat{b}) solution de (P) est caractérisé par :

$$\begin{cases} \hat{v} = \text{Proj}_{C_0} \hat{b} \\ \hat{b} = \text{Proj}_{D_0} \hat{v} \end{cases}$$

et ceci est équivalent, proposition I.5, à :

$$\begin{cases} \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \hat{b} & i = 1, \dots, n \\ \hat{b} = \text{Proj}_{D_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i \end{cases}$$

L'algorithme est alors le suivant :

IV.3 - ALGORITHME

Partant de $u^0 \in V$, le passage de u^{p-1} à u^p s'effectue de la façon suivante :

1. On calcule $i = 1, \dots, n$

$$v_i^p = \text{Proj}_{C_i} u^{p-1}$$

2. On calcule ensuite

$$b'^p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^p$$

$$b''^p = u^{p-1} + \frac{\sum_{i=1}^n \|v_i^p - u^{p-1}\|^2}{n \|b'^p - u^{p-1}\|^2} \cdot (b'^p - u^{p-1}) \quad (1)$$

3. On définit :

$$(i) \quad u'^p = \text{Proj}_{D_0} b'^p$$

$$(ii) \quad u''^p = \text{Proj}_{D_0} b''^p$$

4. u^p est alors défini selon les valeurs de p , $p = 1, 2, 3, \dots$ soit par (i) soit par (ii).

IV.4 - CONVERGENCE DE CET ALGORITHME

Remarquons tout d'abord que, compte-tenu de la proposition I. 5, si u^P est défini, à chaque pas, par (i), cet algorithme n'est autre qu'un algorithme de projections successives dans \mathcal{C} . On en déduit donc ses propriétés de convergence (théorèmes II. 1. 4 et II. 1. 5).

Dans le cas où u^P est défini par (ii) - resp. alternativement par (i) et par (ii) - si le problème (P') n'a pas de solution, l'algorithme est divergeant. Par contre si (P') possède des solutions, alors on a le théorème suivant :

Théorème

Si $C = D_0 \cap (\bigcap_i C_i) \neq \emptyset$, et si l'une quelconque des hypothèses suivantes est vérifiée :

1. $D_0 \cap \text{int} \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) \neq \emptyset$
2. Tous les C_i sont uniformément convexes
3. V est de dimension finie,

alors la suite $\{u^P\}$ définie par l'algorithme IV. 3 où u^P est défini, à chaque pas, par (ii) - resp où u^P est défini selon les valeurs de p soit par (i) soit par (ii) - converge fortement vers $u \in C$.

Démonstration

1er point : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - u^P\|\| = 0$

Si $u^{p+1} = u''^{p+1}$, du lemme III. 1 appliqué au triplet (u^P, v^{p+1}, b^{p+1}) on déduit :

$$v \ x \in \mathcal{C} \cap D_0 \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{D} : \|\|b''^{p+1} - x\|\| \leq \|\|b^{p+1} - x\|\| \leq \|\|v^{p+1} - x\|\| \leq \|\|u^P - x\|\|, \quad (2)$$

la projection réduisant les distances, on a donc :

$$\|\|u^{p+1} - x\|\| \leq \|\|b^{p+1} - x\|\| \leq \|\|b'^{p+1} - x\|\| \leq \|\|v^{p+1} - x\|\| \leq \|\|u^P - x\|\| \quad (3)$$

Si au contraire $u^{p+1} = u'^{p+1}$, il s'agit alors de projections successives et les projections réduisant les distances, on a donc :

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0 \\ \|\|u^{p+1} - x\|\| \leq \|\|b'^{p+1} - x\|\| \leq \|\|v^{p+1} - x\|\| \leq \|\|u^p - x\|\| \quad (4)$$

La suite $\|\|u^p - x\|\|$ est donc décroissante, elle est donc convergente, d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\|\|u^{p+1} - x\|\| - \|\|u^p - x\|\|] = 0 ; \forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0 \quad (5)$$

Considérons alors le cas $u^{p+1} = u''^{p+1}$, le lemme III.1(ii) nous donne :

$$((u^p - b''^{p+1}, b''^{p+1} - x)) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0$$

d'où :

$$\|\|u^p - x\|\|^2 \geq \|\|x - b''^{p+1}\|\|^2 + \|\|b''^{p+1} - u^p\|\|^2 \quad (6)$$

ou encore - cf. (3) - :

$$\|\|b''^{p+1} - u^p\|\|^2 \leq \|\|u^p - x\|\|^2 - \|\|u^{p+1} - x\|\|^2.$$

Il vient donc, compte-tenu de (5)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|b''^{p+1} - u^p\|\| = 0$$

et à fortiori :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|b'^{p+1} - u^p\|\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\|b''^{p+1} - b'^{p+1}\|\| = 0 \quad (7)$$

La suite $\|\|b'^{p+1} - u^p\|\|$ étant bornée (2), le lemme III.1(i) implique alors :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - b'^{p+1}\|\| = 0$$

et donc (7) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - u^p\|\| = 0.$$

Considérons maintenant le cas $u^{p+1} = u'^{p+1}$. Par définition de la projection

$$((x - v^{p+1}, v^{p+1} - u^p)) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0 \quad (8)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0; \quad \|\|x - u^p\|\|^2 \geq \|\|x - v^{p+1}\|\|^2 + \|\|v^{p+1} - u^p\|\|^2,$$

d'où :

$$\|\|v^{p+1} - u^p\|\|^2 \leq \|\|x - u^p\|\|^2 - \|\|x - v^{p+1}\|\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0$$

et à nouveau :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - u^p\|\| = 0 \quad (9)$$

2ème point : $\lim_{p \rightarrow \infty} d(u^p, D_0 \cap (\bigcap_{i=1}^n C_i)) = 0$

On a donc, puisque $v_i^{p+1} \in C_i, i = 1, \dots, n$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u^p, C_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

d'autre part :

$$u^p \in D_0. \quad (11)$$

Nous pouvons alors utiliser le lemme (5) de ⁽⁹⁾ qui démontre que, sous les conditions 1, 2 ou 3, (10) et (11) sont équivalents à :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u^p, D_0 \cap (\bigcap_{i=1}^n C_i)) = 0.$$

3ème point : Convergence de $\{u^p\}$

Compte-tenu de (3) et (4), la suite d'ensembles :

$$S_q = \bigcap_{p=0}^q [\text{Proj}_C u^p, d(u^p, C)]$$

est formée d'ensembles convexes, fermés, non vides (S_q contient, au moins, u^q) et tels que $S_{q+1} \subset S_q$. Il existe donc $\hat{u} \in \bigcap_{q=1}^{\infty} S_q$; il est clair que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \in C = D_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - \hat{u}\| = 0 \end{array} \right.$$

IV. 5 - APPLICATIONS

Considérons, à nouveau, dans $V = \mathbb{R}^q$ le problème :

(T'') "Trouver $u \in \mathbb{R}^q$ tel que $Au \leq d$, $u \geq 0$ "

On reprend ici, les notations du III. 4. 2. La particularisation des contraintes de non-négativité amène à introduire :

$$(b_{p+1})^+ \in \mathbb{R}^q ; \quad (b_{p+1})_i^+ = \max [0, b_{p+1}_i] \quad i = 1, \dots, q$$

L'itéré u^p est alors défini par :

$$u^p = (b_{p+1})^+ .$$

En particulier, si nous considérons le programme linéaire à n_1 variables et n_2 contraintes autres que celle de non-négativité [$A : (n_2 \times n_1)$]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } {}^t c x \\ A x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{équivalent à} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^t c x = {}^t b \pi \\ A x \leq b \\ {}^t A \pi \geq c \\ x \geq 0 ; \pi \geq 0 \end{array} \right.$$

l'algorithme IV.3 permet de traiter ce problème comme un problème (T'') avec $q = n_1 + n_2$. Cet algorithme peut être relié à la classe de méthodes considérée dans (17) et qui généralise au cas des inéquations la méthode de décomposition d'une norme de N. GASTINEL (8); les deux méthodes pouvant, dans certains cas, se confondre.

V. METHODE DE PROJECTIONS PARALLELES
EXTRAPOLEE PROLONGEE

L'idée d'utiliser, dans les méthodes de directions admissibles, une longueur de déplacement choisie, a priori, en fonction du rang d'itération a été présentée dans ⁽²²⁾ et a donné lieu, depuis, à un certain nombre de développements ⁽⁹⁾⁽³⁾⁽¹⁰⁾. S'il est possible d'établir, pour certaines de ces méthodes, des propriétés de convergence théorique très intéressantes, celles-ci reposent sur un choix effectif des longueurs de déplacement extrêmement délicat à effectuer dans la pratique. Il est toujours supposé que la suite des "pas" successifs tend vers zéro et constitue une série divergente. En pratique, si les premières valeurs de cette suite sont trop petites, la convergence peut être extrêmement lente, si ces valeurs sont trop importantes, une divergence peut apparaître jusqu'au rang N, aussi grand soit-il.

Il peut, par contre, être parfois intéressant de rajouter au déplacement optimal calculé à chaque pas, un petit déplacement d'amplitude choisie a priori. C'est cette idée que nous appliquons ici à la méthode des projections parallèles extrapolée du IV.

V.1 - NOTATIONS

Nous conservons ici les notations du paragraphe IV :

V espace de Hilbert (...); //./.; d(...).

$D_0 \subset V$ convexe fermé

$C_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$ convexes fermés

$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V - ((...)) ; ///./// ; d(...)$

$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$

\mathcal{D} le convexe diagonal

$\mathcal{D}_0 = j(D_0) = \left\{ (b, b, \dots, b) ; b \in D_0 \right\}$

et le problème :

(P) "Trouver $(\hat{v}, \hat{b}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}_0$ tel que $\|\hat{v} - \hat{b}\|^2 = \min [\|v - b\| ; v \in \mathcal{C}, b \in \mathcal{D}_0]$ "

On introduit une suite de réels $\{\lambda^p\}$ avec :

$$(\lambda) \quad \begin{cases} \lambda^p \geq 0 \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda^p = 0 \\ \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda^p = +\infty \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

et on ajoute à chaque pas de l'algorithme IV.3 un déplacement de longueur λ^p dans la direction $u^p - u^{p-1}$. L'algorithme est donc le suivant :

V.2 - ALGORITHME

Partant de $w^0 \in V$, le passage de w^{p-1} à w^p s'effectue de la façon suivante :

1. On calcule $i = 1, \dots, n$:

$$v_i^p = \text{Proj}_{C_i} w^{p-1}$$

2. On calcule ensuite :

$$b'^p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^p \tag{1}$$

si $b'^p = w^{p-1}$, on stoppe l'algorithme, sinon on définit :

$$b''^p = w^{p-1} + \frac{\sum_{i=1}^n \|v_i^p - w^{p-1}\|^2}{n \|b'^p - w^{p-1}\|^2} (b'^p - w^{p-1}) \tag{2}$$

3. On pose :

$$u'^p = \text{Proj}_{D_0} b'^p$$

$$u''^p = \text{Proj}_{D_0} b''^p$$

4. On définit :

$$(i) \quad w^{p+1} = u^{p+1} + \lambda^p \cdot \frac{u^{p+1} - w^{p+1}}{\|u^{p+1} - w^{p+1}\|} \quad (3)$$

$$(ii) \quad w^{p+1} = u''^{p+1} + \lambda^p \cdot \frac{u''^{p+1} - w^{p+1}}{\|u''^{p+1} - w^{p+1}\|} \quad (4)$$

5. w^p est alors défini, selon les valeurs de $p = 1, 2, 3, \dots$ soit par (i) soit par (ii).

V.3 - THEOREME

Si la suite $\{\lambda^p\}$ obéit à l'hypothèse (A), et si l'on a :

$$D_0 \cap \text{Int} \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) \neq \emptyset,$$

alors la suite $\{w^p\}$ définie par l'algorithme V.2 converge en un nombre fini de pas vers un élément $w \in C = D_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right)$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que si il existe un rang p tel que $w^{p+1} = w^p$, alors (cf. III.1), $w^p \in \bigcap_{i=1}^n C_i$ et donc, puisque, pour tout p , $w^p \in D_0$, on a :

$$w^p \in C = D_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right)$$

et w^p est solution de (P)

Supposons maintenant que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $w^{p+1} \neq w^p$, la suite $\{w^p\}$ définie par l'algorithme V.2 est donc infinie, et l'on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

1er point : $\forall x \in C$; si $u^{p+1} = u'^{p+1}$ - resp. si $u^{p+1} = u''^{p+1}$ - on a :

$$(x - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p) \geq 0$$

Il résulte du lemme III.1 (ii) appliqué au triplet (w^p, v^{p+1}, b'^{p+1}) que :

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad ; \quad \langle x - b''^{p+1}, b''^{p+1} - w^p \rangle \geq 0 \quad (5)$$

à fortiori :

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_0; \quad \langle x - b'^{p+1}, b'^{p+1} - w^p \rangle \geq 0 \quad (6)$$

D'autre part, par définition de la projection

$$\forall x \in \mathcal{D}_0 \quad ; \quad \langle x - u'^{p+1}, u'^{p+1} - b'^{p+1} \rangle \geq 0 \quad (7)$$

et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_0 \quad \langle x - u''^{p+1}, u''^{p+1} - b''^{p+1} \rangle \geq 0 \quad (8)$$

On a alors, en posant $u^{p+1} = u'^{p+1}$ (resp $u^{p+1} = u''^{p+1}$)
 et $b^{p+1} = b'^{p+1}$ (resp $b^{p+1} = b''^{p+1}$) :

$$\langle x - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p \rangle = \langle x - u^{p+1}, u^{p+1} - b^{p+1} \rangle + \langle x - b^{p+1}, b^{p+1} - w^p \rangle$$

$$\langle b^{p+1} - u^{p+1}, b^{p+1} - w^p \rangle :$$

le premier produit scalaire est positif d'après (7) - resp. (8) - le deuxième est positif d'après (6) - resp (5) -, le troisième est positif car $w^p \in \mathcal{D}_0$ et l'on a donc :

$$\langle x - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad (9)$$

2ème point : Convergence de $\{w^p\}$

Puisque $\mathcal{D}_0 \cap \text{Int} \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) \neq \emptyset$, il existe un $x \in \mathcal{C}$ et un nombre ρ positif tel que :

$$B(x, \rho) \subset \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (10)$$

Considérons alors le point $x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|}$ avec $u^{p+1} = u'^{p+1}$ - resp.

$u^{p+1} = u''^{p+1}$ - et $b^{p+1} = b'^{p+1}$ - resp $b^{p+1} = b''^{p+1}$ - on a :

$$\begin{aligned}
 & \left(x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p \right) = \\
 & \left(x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} - u^{p+1}, u^{p+1} - b^{p+1} \right) + \\
 & \left(x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} - b^{p+1}, b^{p+1} - w^p \right) + (b^{p+1} - u^{p+1}, b^{p+1} - w^p) ;
 \end{aligned}$$

Puisque

$$x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} \in \bigcap_{i=1}^n C_i$$

il résulte de (6) - resp. de (5) - que le deuxième produit scalaire est positif de plus, puisque $w^p \in D_o$, par définition de la projection, le troisième produit scalaire est positif. Il vient donc :

$$\begin{aligned}
 \left(x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p \right) & \geq \left(x - u^{p+1}, u^{p+1} - b^{p+1} \right) + \\
 & \frac{\rho}{\|u^{p+1} - w^p\|} (w^p - u^{p+1}, u^{p+1} - b^{p+1})
 \end{aligned}$$

puisque $x \in D_o$ et $w^p \in D_o$, les deux produits scalaires du second membre sont positifs.

Au total, on a donc :

$$\left(x - \rho \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p \right) \geq 0 \tag{11}$$

ou encore :

$$(x - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p) \geq \rho \|u^{p+1} - w^p\|^2 . \tag{12}$$

Calculons alors $\|w^{p+1} - x\|^2$:

$$\|w^{p+1} - x\|^2 = \|u^{p+1} + \lambda \frac{u^{p+1} - w^p}{\|u^{p+1} - w^p\|} - x\|^2$$

$$\|w^{p+1} - x\|^2 = \|u^{p+1} - x\|^2 - 2 \frac{\lambda^{p+1}}{\|u^{p+1} - w^p\|} (x - u^{p+1}, u^{p+1} - w^p) + (\lambda^{p+1})^2$$

d'où compte-tenu de (12)

$$\|w^{p+1} - x\|^2 \leq \|u^{p+1} - x\|^2 - \lambda^{p+1} (2\rho - \lambda^{p+1}) \quad (13)$$

et enfin, d'après le premier point de la démonstration :

$$\|w^{p+1} - x\|^2 \leq \|w^p - x\|^2 - \lambda^{p+1} (2\rho - \lambda^{p+1}) \quad (14)$$

D'après l'hypothèse (A), la suite $\{\lambda^p\}$ étant décroissante, il existe un rang N tel que, pour tout $p \geq N$, on ait :

$$\lambda^p \leq \rho$$

et donc :

$$\forall p \geq N, \quad \|w^{p+1} - x\|^2 \leq \|w^p - x\|^2 - \lambda^{p+1} \rho$$

La suite $\{w^p\}$ étant, par hypothèse, infinie, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \|w^{N+m} - x\|^2 \leq \|w^N - x\|^2 - \rho \sum_{p=N}^{N+m} \lambda^p$$

ce qui est impossible puisque la suite $\{\lambda^p\}$ est divergente. La suite $\{w^p\}$ est donc nécessairement finie et la convergence a donc lieu en un nombre fini de pas.

V. 4 - REMARQUE

Bien que la prolongation de la méthode de projection parallèle extrapolée ait pour effet de faire converger l'algorithme en un nombre fini de pas, cette prolongation n'entraîne une accélération effective de la convergence, que si, dans la p -ième itération, on est assuré que $\lambda^p < 2\rho$ - cf. (13) - si ceci n'est pas le cas, la convergence peut-être, en fait, retardée. Il convient donc de réserver l'usage de cette méthode au cas où il est possible, pour des raisons physiques par exemple, de faire une

estimation de ρ - c'est à dire d'une boule quelconque dont le centre appartient à $C = D_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right)$ et qui est toute entière contenue dans $\bigcap_{i=1}^n C_i$. Il est alors possible d'accélérer effectivement la convergence en fixant, par exemple, $\lambda^p = \rho$ à chaque pas.

REFERENCES

- (1) S. AGNON
"The relaxation method for linear inequalities"
Can. J. Math., 6, 3, (1954), 392-393
- (2) A. AUSLENDER
Thèse, Grenoble, (1969)
- (3) A. AUSLENDER
"Résolution numérique d'inégalités variationnelles"
C. R. Acad. Sci., Paris, 276, (1973), 1063-1066
- (4) A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, R. TEMAN
"Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination, et applications"
Cahier IRIA, No 11, (1972), 5-190
- (5) L. M. BREGMAN
"The method of successive projection for finding a common point of convex sets"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 162, 3, (1965), 487-490
- (6) J. CEA
"Optimisation"
Dunod, Paris, (1971)
- (7) W. CHENEY, A. A. GOLDSTEIN
"Proximity maps for convex sets"
Am. Math. Soc., 10, 3, (1959), 448-450
- (8) N. GASTINEL
"Analyse numérique linéaire"
Hermann, Paris, (1966)
- (9) L. G. GUBIN, B. T. POLYAK, E. V. RAIK
"The method of projections for finding the common point of convex sets"
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 7, 6, (1967), 1211-1228
- (10) M. HELD, P. WOLFE, H. P. CROWDER
"Validation of subgradient optimization"
Mathematical prog. 6, (1974), 62-88
- (11) P. J. LAURENT
"Approximation et optimisation"
Hermann, Paris, (1972)
- (12) E. S. LEVITIN, B. T. POLYAK
"Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 168, 5, (1966), 764-767
- (13) J. L. LIONS, R. TEMAN
"Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations"
C. R. Acad. Sci., Paris, 263, (1966)

- (14) J. L. LIONS, R. TEMAN
 "Eclatement et décentralisation en calcul des variations"
 Symposium on Optimization , Nice, (1969), in Lect. Notes Math.
132, Springer-Verlag, Berlin, (1970), p. 196-217
- (15) I. N. MOLCANOV, M. J. JAKOVLEV
 "On a class of iterative processes for solving incompatible systems of
 linear algebraic equations"
 Soviet Math. Dokl. 14, 2, (1973), 517-520
- (16) T. S. MOTZKIN, L. SHOENBERG
 "The relaxation method for linear inequalities"
 Can. J. Math., 6, 3, (1954), 393-404
- (17) W. OETTLI
 "An iterative method, having a linear rate of convergence, for solving a
 pair of dual linear programs"
 Mathematical prog. 3, (1972), 302-311
- (18) D. V. PAI
 "Characterizations of multi-optimum of a convex functional"
 Séminaire d'analyse numérique, Grenoble, (1974)
- (19) G. PIERRA
 "Croisement d'algorithmes pour trouver un point commun à plusieurs
 ensembles convexes"
 Séminaire d'analyse numérique, Grenoble, (1973)
- (20) G. PIERRA
 "Croisement de méthode de descente pour le calcul de la distance
 entre deux convexes"
 Rapport de recherche, Mathématiques Appliquées et Informatique,
 Grenoble, (1975)
- (21) G. PIERRA
 "Eclatement de contraintes en parallèle par décomposition d'un espace produit,
 Méthode de projections parallèles extrapolée"
 Colloque d'Analyse Numérique du CNRS , La Grande Motte, (1975) et Rapport de
 Recherche N° 7, Mathématiques et Informatique, Grenoble, (1975)
- (22) B. T. POLYAK
 "A general method of solving extremum problems"
 Sov. Math. Dokl. 8, 3, (1967), 593-597

CHAPITRE III

CHAPITRE III

RECHERCHE D'UN POINT APPARTENANT A PLUSIEURS ENSEMBLES CONVEXES PAR CROISEMENTS D'ALGORITHMES

Nous avons vu dans les paragraphes II et III du chapitre II diverses méthodes de décomposition pour résoudre le problème de la recherche d'un point appartenant à n ensembles convexes. Nous présentons dans ce chapitre des croisements d'algorithmes associés à ces méthodes de décomposition.

La méthode rappelée au I-I, était la méthode des projections successives. Nous avons vu que, dans le cas de deux convexes, cette méthode pouvait effectivement d'interpréter comme une méthode de décomposition - pour la fonctionnelle $\|v_1 - v_2\|$ - et nous avons étendu, dans le chapitre I, cette méthode de décomposition à un croisement d'algorithmes de descente. Dans le cas où plus de deux convexes interviennent, il n'est plus possible d'interpréter simplement la méthode des projections successives comme une décomposition ; et la convergence, d'ailleurs lente, des projections successives, n'est plus assurée si l'on se contente de "se rapprocher" de la projection. Il est par contre possible d'élaborer d'autres méthodes-séries de projections qui apparaissent comme décomposition de fonctionnelles simples. Ces méthodes sont étudiées dans la première partie de ce chapitre et étendues au croisement d'algorithmes de descente.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, le formalisme géométrique du chapitre II est repris et nous étendons la méthode des barycentres (II-II) et la méthode des projections parallèles (II-III) au croisement d'algorithmes du type duaux. Les algorithmes ainsi croisés sont ceux regroupés par P.J. LAURENT et B. MARTINET⁽⁹⁾ sous le nom de "méthodes duales" et qui recouvrent un grand nombre de méthodes du type approximations extérieures usuelles : méthode de KELLEY⁽⁷⁾, de KAPLAN⁽⁶⁾ ... (10). Ces croisements d'algorithmes permettent, en particulier, d'obtenir des méthodes simples de linéarisation des contraintes.

Je remercie Monsieur P.J. LAURENT pour d'utiles indications concernant en particulier les "pénalisations d'éclatement" élaborées dans la première partie.

I. FORMALISATION ANALYTIQUE DU PROBLEME :
CROISEMENT DE METHODES DE DESCENTE

I.1 - POSITION DU PROBLEME

Soient :

- V un espace de Hilbert réel, identifié à son dual, de produit scalaire et de norme notés $(.,.)$ et $||.||$
- C_i $i = 1, \dots, n$ des sous-ensembles convexes fermés de V

et le problème

$$(R) \quad \text{"Trouver } b \in \bigcap_{i=1}^n C_i \text{"}$$

I.1.1 - Formulation dans un espace produit

On introduit :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n \text{doté de la topologie produit par le produit scalaire } ((.,.)) = \sum_{i=1}^n (.,.);$$

la norme associée sera notée $|||.|||$

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$$

et le convexe diagonal :

$$\mathcal{D} = \left\{ b \in \mathcal{V} ; b = (b, b, \dots, b) ; b \in V \right\} .$$

I.1.2 - Propriétés

Nous rappelons ici quelques propriétés établies au chapitre II :

Le convexe diagonal, \mathcal{D} , est isomorphe à V par la bijection $j : V \rightarrow \mathcal{D}$; $x \in V \rightarrow j(x) = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{V}$. Nous n'identi-

fierons pas V et \mathcal{D} et, pour alléger les notations, nous noterons l'image par j d'un élément de V par la lettre ronde correspondante ($j(b) = \mathcal{b}$, $j(x) = \mathcal{X} \dots$).

I. 1. 2. 1 - Proposition

L'image par j de l'intersection des n convexes C_i est l'intersection du convexe produit \mathcal{C} et du convexe diagonal \mathcal{D} :

$$j \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

I. 1. 2. 2 - Proposition

i) La projection d'un point $\mathcal{b} = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ sur \mathcal{C} a pour composantes les projections de b sur chacun des convexes C_i :

$$\text{Proj}_{\mathcal{C}} \mathcal{b} = (\text{Proj}_{C_1} b, \text{Proj}_{C_2} b, \dots, \text{Proj}_{C_n} b)$$

ii) La projection d'un point $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}$ sur \mathcal{D} est l'image par j du barycentre des n points v_1, v_2, \dots, v_n :

$$\text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right)$$

De la proposition I. 1. 2. 1, il résulte que, si le problème (R) possède (au moins) une solution, il est équivalent, dans \mathcal{V} , au problème :

(S) "Trouver $\mathcal{b} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ " .

Il est clair que le problème (S), dans le cas d'existence de solutions, est lui-même équivalent au problème de la minimisation, sur \mathcal{C} , d'une quelconque semi-norme de noyau \mathcal{D} . Nous allons donc introduire une famille de semi-normes étroitement liées à la structure d'espace produit de \mathcal{V} et qui posséderont la propriété d'être régularisantes pour la décomposition de \mathcal{V} .

I. 2 - PENALISATION D'ECLATEMENT SUR \mathcal{C}

Considérons les $n-1$ opérateurs linéaires t_i , $i = 1, \dots, n-1$, de \mathcal{V} dans V définis par :

$$t_i : v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{V} \mapsto v_{i+1} - v_i \in V.$$

Ces $n-1$ opérateurs appartiennent à $\mathcal{L}(\mathcal{V}, V)$; de plus étant linéairement indépendants, la variété linéaire \mathcal{C} qu'ils engendrent est de dimension $n-1$.

Soit (s_1, \dots, s_m) un système de m éléments de \mathcal{C} . A ce système est associé un opérateur linéaire S de $\mathcal{V} = V^n$ dans V^m : $S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, V^m)$ dont les composantes sont $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, V)$. ainsi qu'une forme quadratique sur \mathcal{V} , notée f_S ou simplement f , et définie par :

$$f_S(v) = \|S(v)\|_{V^m}^2 = \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\|^2. \quad (1)$$

La forme f_T associée à (t_1, \dots, t_{n-1}) sera notée g .

I. 2. 1 - Définition

On appelle pénalisation d'éclatement toute forme quadratique f_S associée à un système fini de générateurs de \mathcal{C} .

Il est clair que $\{\sqrt{f_S}\}$ forme une famille de semi-normes sur \mathcal{V} . Donnons quelques propriétés de cette famille :

I. 2. 2 - Proposition

Toute pénalisation d'éclatement (P. E.) est convexe sur \mathcal{V} .

Cela résulte directement de la définition et de l'identité classique

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b\|^2 = \lambda \|a\|^2 + (1-\lambda)\|b\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|a-b\|^2. \quad (2)$$

I. 2. 3 - Proposition

Toute P. E. est fortement convexe⁽¹⁰⁾ séparément par rapport à chacune des variables v_i , $i = 1, \dots, n$.

DEMONSTRATION :

Notons $f_{v,j}$ l'application partielle de f_S qui, pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $j \in [1, n]$, est définie par :

$$x_j \in V \rightarrow f_{v,j}(x_j) = f(v_1, \dots, v_{j-1}, x_j, v_{j+1}, \dots, v_n),$$

(cette application étant indépendante de v_j). Nous allons transformer $f_S(v)$ pour faire apparaître l'application partielle.

Par définition, $s_i \in \mathcal{C}$, on peut donc écrire :

$$s_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j, \quad i = 1, \dots, m;$$

ceci nous donne :

$$f(v) = \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\|^2 = \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j(v) \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} (v_{j+1} - v_j) \right\|^2$$

$$f(v) = \sum_{i=1}^m \left\| (a_{i, \ell-1} - a_{i, \ell}) v_{\ell} - (a_{i, \ell-1} v_{\ell-1} - a_{i, \ell} v_{\ell+1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell, \ell-1}}^{n-1} a_{ij} (v_{j+1} - v_j) \right\|^2,$$

avec la convention :

$$a_{i0} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad a_{in} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Si l'on note :

$$C_{i\ell} = a_{i, \ell-1} - a_{i, \ell}$$

$$\bar{v}_{i\ell} = -(a_{i, \ell-1} v_{\ell-1} - a_{i, \ell} v_{\ell+1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell, \ell-1}}^{n-1} a_{ij} (v_{j+1} - v_j) \quad (3)$$

Il vient :

$$s_i(v) = C_{i\ell} v_{\ell} + \bar{v}_{i\ell}, \quad \ell = 1, \dots, n \quad (4)$$

et :

$$f(v) = \sum_{i=1}^m \|C_{i\ell} v_{\ell} + \bar{v}_{i\ell}\|^2 \quad \ell = 1, \dots, n, \quad (5)$$

avec :

$$\bar{v}_{i\ell} \in V \quad \text{indépendant de } v_{\ell} \quad \text{et} \quad C_{i\ell} \in \mathbb{R} \quad \text{indépendant de } v.$$

L'application partielle $f_{v,\ell}$ peut donc s'écrire :

$$f_{v,\ell}(x_{\ell}) = \sum_{i=1}^m \|C_{i\ell} x_{\ell} + \bar{v}_{i\ell}\|^2, \quad \ell = 1, \dots, n, \quad (6)$$

et l'on a :

$$f_{v, \ell}(\lambda x_{\ell} + (1-\lambda) y_{\ell}) = \sum_{i=1}^m // \lambda(C_{i\ell} x_{\ell} + \bar{v}_{i\ell}) + (1-\lambda)(C_{i\ell} y_{\ell} + \bar{v}_{i\ell}) //^2,$$

d'où, en appliquant l'identité (2) :

$$f_{v, \ell}(\lambda x_{\ell} + (1-\lambda) y_{\ell}) = \lambda \sum_{i=1}^m // C_{i\ell} x_{\ell} + v_{i\ell} //^2 + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m // C_{i\ell} y_{\ell} - v_{i\ell} //^2 - \lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^m // C_{i\ell} (x_{\ell} - y_{\ell}) //^2,$$

c'est-à-dire :

$$f_{v, \ell}(\lambda x_{\ell} + (1-\lambda) y_{\ell}) = \lambda f_{v, \ell}(x_{\ell}) + (1-\lambda) f_{v, \ell}(y_{\ell}) - \lambda(1-\lambda) // x_{\ell} - y_{\ell} //^2 \cdot \sum_{i=1}^m (C_{i\ell})^2. \quad (7)$$

Si tous les $C_{i\ell}$ sont nuls, cela signifie, d'après (4), que tous les opérateurs s_i sont indépendants de v_{ℓ} ; (s_1, \dots, s_m) ne forment donc pas un système de générateurs de \mathcal{C} (ils ne génèrent pas t_{ℓ}) contrairement à la définition. On a donc :

$$\sum (C_{i\ell})^2 > 0 \quad \ell = 1, \dots, n,$$

et l'application partielle $f_{v, \ell}$ est fortement convexe par rapport à v_{ℓ}

I. 2. 4 - Proposition

Soient $s_1 \in \mathcal{C}, \dots, s_m \in \mathcal{C}$ et f la forme quadratique associée. les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) (s_1, \dots, s_m) forme un système de générateurs de \mathcal{C}
- ii) $\mathcal{N}(f) = \mathcal{D}$

DEMONSTRATION :

1) i \Rightarrow ii

D'après l'hypothèse i,

$$\exists a'_{i1}, \dots, a'_{im} \text{ tel que } t_i = \sum_{j=1}^m a'_{ij} s_j, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Soit alors $v \in \mathcal{N}(f)$

$$v \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow s_i(v) = 0, \quad i = 1, \dots, m \Leftrightarrow t_i(v) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

(les égalités ci-dessus étant à prendre dans les espaces convenables),

c'est-à-dire : $v \in \mathcal{D}$.

2) $ii \Rightarrow i$

Considérons sur $\mathcal{L}(\mathcal{V}, V)$ le système d'équations linéaires :

$$s_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (8)$$

le système homogène correspondant :

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

et le système homogène d'équations linéaires scalaires associées :

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} r_j, \quad i = 1, \dots, m \quad r_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (10)$$

Supposons que le système (10) possède une solution autre que la solution triviale. Soit $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{m-1}$ une telle solution et soient $x \in V$, $x \neq 0$ et $v_1 \in V$. Considérons l'élément $v \in \mathcal{V}$ défini par :

$$v_1; v_2 = v_1 + \hat{r}_1 x; v_3 = v_2 + \hat{r}_2 x \dots; v_n = v_{n-1} + \hat{r}_{n-1} x.$$

On a :

$$s_i(v) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j(v) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} r_j x = x \cdot \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} r_j = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

d'où $v \in \mathcal{N}^p(f)$ et $v \notin \mathcal{D}$ ce qui est contraire à l'hypothèse

Le système (10) ne doit donc pas avoir de solution autre que la solution triviale. Ceci implique tout d'abord : $m \geq n-1$, et, d'autre part, l'existence d'un système de $n-1$ équations linéairement indépendantes. Supposons, en changeant éventuellement l'ordre, que ce soit les $n-1$ premières équations. Il est clair que s_1, \dots, s_{n-1} sont linéairement indépendants car sinon, il existerait $n-1$ réels, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, tels que :

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot s_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j = \sum_{j=1}^{n-1} t_j \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{ij} = 0,$$

ce qui, compte-tenu de l'indépendance linéaire des t_j entraînerait la dépendance linéaire des équations.

Les s_1, \dots, s_{n-1} sont donc linéairement indépendants, ils constituent donc une base de \mathcal{C} , a fortiori $s_1, \dots, s_{n-1}, \dots, s_m$ constituent un système de générateurs.

I. 2. 5 - Proposition

Soient f une P.E. et g la P.E. associée à $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$

- i) $(f(.))^{1/2}$ et $(g(.))^{1/2}$ sont deux semi-normes équivalentes sur \mathcal{V}
- ii) ces semi-normes induisent sur l'espace quotient \mathcal{V}/\mathcal{D} deux normes équivalentes à la norme quotient.

DEMONSTRATION :

i) Il est clair que $(f(\lambda v))^{1/2} = |\lambda| (f(v))^{1/2}$. L'inégalité du triangle résulte directement du fait que, pour tout $i = 1, \dots, m$, $(s_i(.), s_i(.))$ est une forme bilinéaire symétrique et positive et qu'on peut donc utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrons alors l'équivalence des deux semi-normes $(f(.))^{1/2}$ associé à (s_1, \dots, s_m) et $(g(.))^{1/2}$ associé à (t_1, \dots, t_{n-1}) .

Remarquons tout d'abord que deux normes quelconques étant, dans \mathbb{R}^n , équivalentes, il existe un $A > 0$ et un $B > 0$ tel que :

$$A \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \|s_i(v)\|^2 \right)^{1/2} \leq B \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\| \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Plus précisément :

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \|s_i(v)\|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\| \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

La semi-norme $(f(.))^{1/2}$ est donc équivalente à la semi-norme $\sum_{i=1}^m \|s_i(.)\|$; de même $(g(.))^{1/2}$ est équivalent à $\sum_{i=1}^{n-1} \|t_i(.)\|$. Il suffit donc de montrer l'équivalence de ces nouvelles expressions. Or :

$$\sum_{i=1}^m \|s_i(v)\| = \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} t_j(v) \right\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \|t_j(v)\| \leq K \sum_{j=1}^{n-1} \|t_j(v)\|$$

de même, puisque (s_1, \dots, s_m) constitue un système de générateurs de \mathcal{C} :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \|t_j(v)\| \leq M \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\| ;$$

et les quatre semi-normes $(f(.))^{1/2}$, $(g(.))^{1/2}$, $\sum_j //t_j(.)//$ et $\sum_i //s_i(.)//$ sont équivalentes.

ii) Soit f une P. E. quelconque :

$$(f(v-w))^{1/2} = 0 \iff v - w \in \mathcal{D}$$

Si l'on prend donc comme relation d'équivalence :

$$v \sim w \iff v - w \in \mathcal{D}$$

$(f(.))^{1/2}$ induit donc sur l'espace quotient, noté \mathcal{V}/\mathcal{D} une norme.

Il résulte de la proposition I.1.2.2. ii) que la norme quotient - en notant \dot{x} la classe d'équivalence de x - est définie par :

$$///\dot{v}/// = \left(\sum_{i=1}^n //v_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i //^2 \right)^{1/2}$$

et comme $\sum_{i=1}^n //v_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j //^2$ constitue une P. E., (proposition I. 2. 4), la proposition suit .

I. 2. 6 - Exemples

Donnons quelques exemples de P. E.

$$f_1(v) = \sum_{i=1}^n //v_i - v_{i-1} //^2 \quad \text{avec la convention } v_0 = v_n$$

$$f_2(v) = \sum_{i,j} //v_i - v_j //^2 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; i \neq j$$

$$f_3(v) = \sum_{i=1}^n //v_i - \frac{1}{n} \sum_j v_j //^2$$

$$f_4(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i //v_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j //^2 \quad \alpha_j > 0, j = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

I. 2. 7 - Proposition

Le carré de la norme du gradient d'une pénalisation d'éclatement est une pénalisation d'éclatement

DEMONSTRATION :

Reprenons l'expression de $f(v)$ sous la forme (5) :

$$f(v_1, \dots, v_l, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^m \| C_{il} v_l + \bar{v}_{il} \|^2,$$

calculons la dérivée partielle $\partial f / \partial v_l$. On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{v,l}(v_l + hx) - f_{v,l}(v_l)}{h} = 2 \sum_{i=1}^m (C_{il} x, C_{il} v_l + \bar{v}_{il}) = (x, 2 \sum_{i=1}^m C_{il} (C_{il} v_l + \bar{v}_{il}))$$

d'où, compte-tenu de (4) :

$$\text{Grad } f_{v,l}(v_l) = 2 \sum_{i=1}^m C_{il} \cdot s_i(v).$$

Les dérivés partielles étant continues, $f(v)$ est dérivable et son gradient admet pour composante :

$$f'_l(v) = 2 \sum_{i=1}^m C_{il} s_i(v). \quad (11)$$

Il est clair que $f'_l \in \mathcal{C}$, $l = 1, \dots, n$. Il suffit donc de montrer que (f'_1, \dots, f'_n) forme un système de générateurs de \mathcal{C} . La fonctionnelle f étant convexe, on a :

$$f(u) = \min (f(v) ; v \in \mathcal{V}) \iff f'(u) = 0$$

d'où :

$$f'(u) = 0 \iff u \in \mathcal{D} \iff \|f'(u)\|^2 = 0$$

Le noyau de $\|f'(\cdot)\|^2$ est donc égal à \mathcal{D} et le résultat découle de la proposition I. 2. 4

I. 2. 8 - Corollaire

La dérivée d'une pénalisation d'éclatement est Lipschitzienne.

DEMONSTRATION :

Cela résulte directement de I. 2. 7 et I. 2. 5 :

$$\|f'(v) - f'(w)\| = \|f'(v-w)\| \leq M \| \dot{v} - \dot{w} \| \leq M \|v - w\|.$$

I. 3 - FORMALISATION ANALYTIQUE DU PROBLEME

Soit f une pénalisation d'éclatement associée à s_1, \dots, s_m ;
il est clair que si le problème (R) possède des solutions, ce problème est
équivalent à :

(R') "Trouver $\hat{v} \in \mathcal{C}$ tel que $f(\hat{v}) = \min [f(v) ; v \in \mathcal{C}]$ ".

Nous ferons sur les convexes C_i , l'hypothèse suivante :

(H₁) "La pénalisation d'éclatement f est inf. -bornée sur \mathcal{C} :
pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble $\{v \in \mathcal{C} ; f(v) \leq \lambda\}$ est borné"

Deux P. E. étant équivalentes - proposition I. 2. 5. i - cette propriété est donc in-
dépendante de la P. E. f choisie et dépend seulement des convexes C_i . On vé-
rifie facilement que cette hypothèse est, en particulier, vérifiée si :

- a) il existe un $i' \in [1, n]$ tel que $C_{i'}$ soit borné
b) V est de dimension finie et les cônes asymptotes ⁽⁸⁾ $C_{i\infty}$ de C_i , $i = 1, \dots, n$
sont tels que :

$$\bigcap_{i=1}^n C_{i\infty} = \{0\}.$$

I. 3. 1 - Caractérisation de la solution

Si (R) possède des solutions - $S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ - l'ensemble
des solutions de (R') est défini par :

$$\mathcal{S} = \{b \in \mathcal{V} ; b \in S\}$$

Si (R) ne possède pas de solution, on a :

I. 3. 1. 1 - Proposition

Sous l'hypothèse H₁, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (R')
est un convexe fermé borné non vide.

DEMONSTRATION :

En effet, l'hypothèse (H_1) implique :

$$v \in \mathcal{C} \quad ; \quad \|v\| \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad f(v) \rightarrow \infty \quad (12)$$

La fonctionnelle f étant convexe, fortement continue et f. s. c. i., comme la proposition ci-dessus montre que l'on peut considérer \mathcal{C} comme borné, le résultat suit.

I. 3. 1. 2 - Proposition

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $v \in \mathcal{F}$
- ii) $v_i = \text{Proj}_{C_i} B_i(v)$

$B_i : v_1, \dots, v_n \in V^n = \mathcal{V} \mapsto B_i(v) \in V$ étant une application barycentrique dépendant seulement de s_1, \dots, s_m et définie par (13) ci-dessous.

DEMONSTRATION :

Reprenons en effet l'expression (11) du gradient, il vient, compte-tenu de (4) :

$$f'_\ell(v) = 2 \sum_{i=1}^m C_{i\ell} s_i(v) = 2 \sum_{i=1}^m C_{i\ell} (C_{i\ell} v_\ell + \bar{v}_{i\ell}) \quad ; \quad \ell = 1, \dots, n,$$

c'est-à-dire, en notant K_ℓ le terme strictement positif $\sum_{i=1}^m (C_{i\ell})^2$:

$$f'_\ell(v) = 2 \cdot K_\ell \cdot \left[v_\ell - \frac{1}{K_\ell} \cdot \sum_{i=1}^m C_{i\ell} (-\bar{v}_{i\ell}) \right]$$

On vérifie facilement, en se ramenant à la signification (3) de $\bar{v}_{i\ell}$, que le deuxième terme est un barycentre des $n-1$ éléments $v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \dots, v_n$, et l'on peut poser :

$$B_\ell(v) = \frac{1}{K_\ell} \sum_{i=1}^m C_{i\ell} (-\bar{v}_{i\ell}), \quad (13)$$

$$f'_\ell(v) = 2 \cdot K_\ell [v_\ell - B_\ell(v)] \quad (14)$$

On sait que les éléments de \mathcal{F} sont caractérisés par :

$$v \in \mathcal{F} \Leftrightarrow ((f'(v), u-v)) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{C} ;$$

ceci est équivalent, en prenant pour u des points de la forme $(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$:

$$(f'_i(v), u_i - v_i) \geq 0 \quad \forall u_i \in C_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ou encore, puisque K_i est positif

$$(v_i - B_i(v), u_i - v_i) \geq 0 \quad \forall u_i \in C_i, \quad i = 1, \dots, n$$

c'est-à-dire :

$$v_i = \text{Proj}_{C_i} B_i(v).$$

I. 3.1.3. - Remarque

L'application barycentrique $B_i(v)$ est, en réalité, indépendante de v_i . Il s'agit donc d'une application de V^{n-1} dans V , néanmoins, pour ne pas alourdir les notations, nous représenterons l'image de $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ par cette application par : $B_i(v)$.

I. 3.1.4 - Exemple

Reprenons les exemples de P. E. du I. 2. 6 et caractérisons les solutions \hat{v} du problème (R') correspondant :

$$f(v) = f_1(v) \quad \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \frac{\hat{v}_{i-1} + \hat{v}_{i+1}}{2} \quad i = 1, \dots, n, (v_0 = v_n; v_{n+1} = v_1);$$

$$f(v) = f_2(v) \quad \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \hat{v}_j;$$

$$f(v) = f_3(v) \quad \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{v}_j = \text{Proj}_{C_i} \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \hat{v}_j.$$

$$f(v) = f_4(v) \quad \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{v}_j$$

I. 4 - RESOLUTION DU PROBLEME PAR DECOMPOSITION

Au problème (R') nous associons les n problèmes :

$$(R'_i) \quad \text{"Trouver } \hat{v}_i \text{ tel que } f(v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \min [f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n; v_i \in C_i)].$$

De l'expression (14) de $f'_i(v)$, il résulte que ces problèmes sont équivalents à :

$$(R''_i) \quad \text{"Trouver } \hat{v}_i \text{ tel que } \hat{v}_i = \text{Proj}_{C_i} B_i(v) \text{"}$$

Ceci définit l'algorithme de décomposition. Pour alléger les notations, nous noterons dans la suite de ce chapitre :

$$\tilde{v}^{i,p} = (v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, v_i^p, \dots, v_n^p)$$

$$f_i^p(v_i) = f(v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, v_i, v_{i+1}^p, \dots, v_n^p)$$

I. 4. 1 - Algorithme

Partant de $\tilde{v}^{1,0} \in \mathcal{U}$ le passage de $\tilde{v}^{i,p}$ à $\tilde{v}^{i+1,p}$ s'effectue par :

$$v_i^{p+1} = \text{Proj}_{C_i} B_i(\tilde{v}^{i,p}).$$

Il s'agit donc pour chaque choix d'une pénalisation d'éclatement f , d'une méthode de projections série, variante de la méthode des projections successives. Soulignons cependant que la méthode usuelle des projections successives ne rentre pas dans ce cadre car il n'existe pas de fonctionnelle $Q(v)$ telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on ait :

$$Q(v) = \|v_i - v_{i-1}\|^2 + K_i(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) \quad \forall i \in [1, n] \text{ (avec } v_0 = v_n).$$

Ceci correspond au fait qu'un croisement de méthode de descente associé à la méthode des projections successives ne serait pas convergent.

I. 4. 2 - Propriétés de l'algorithme

Il est facile de montrer que, pour chaque choix de f , la suite définie par l'algorithme I. 4. 1 possède toutes les propriétés de convergence de la méthode des projections successives - (cf. (3)(14) (15).) . Nous ne le démontrerons pas ici, la plupart de ces résultats pouvant être déduits des résultats correspondants démontrés pour les croisements d'algorithmes.

I. 5 - RESOLUTION DU PROBLEME PAR CROISEMENT DE METHODES DE DESCENTE

I. 5. 1 - Sous-problème

Les n sous-problèmes devant être résolus lors de chacun des pas de l'algorithme de décomposition, s'écrivent :

$$(R'_i) \quad \text{"Trouver } v_i^{p+1} \in C_i \quad \text{tel que } f_i^p(v_i^p) = \min [f_i^p(v_i) ; v_i \in C_i]$$

En introduisant l'application $B_\ell(v)$ (13) dans l'expression (5) de $f(v)$, il vient :

$$f(v) = K_\ell // v_\ell - B_\ell(v) //^2 - K_\ell // B_\ell(v) //^2 + \sum // \overline{v_{i\ell}} //^2, \quad \ell = 1, \dots, n$$

ou encore :

$$f(v) = K_\ell // v_\ell - B_\ell(v) //^2 + G_{v, \ell}, \quad \ell = 1, \dots, n \tag{15}$$

avec $B_\ell(v)$ et $G_{v, \ell}$ indépendants de v_ℓ . Le problème (R'_i) est donc équivalent pour $i = 1, \dots, n$ à :

$$(R''_i) \quad \text{"Trouver } v_i^{p+1} \in C_i \quad \text{tel que } K_i // v_i^{p+1} - B_i(\tilde{v}^{i,p}) //^2 = \min [K_i // v_i - B_i(\tilde{v}^{i,p}) //^2 ; v_i \in C_i]"$$

dont la solution est évidemment :

$$(R''_i) \quad v_i^{p+1} = \text{Proj}_{C_i} B_i(\tilde{v}^{i,p})$$

Au lieu de résoudre à chaque pas le problème (R''_i) , nous allons donc seulement effectuer une itération d'une méthode de descente - cf. (14) - à partir de v_i^p et en direction de $\text{Proj}_{C_i} B_i(\tilde{v}^{i,p})$.

Remarquons par ailleurs, que, dans (15), on a :

$$G_{v, \ell} = f(v_1, \dots, v_{\ell-1}, B_{\ell}(v), v_{\ell+1}, \dots, v_n) \geq 0$$

d'où :

$$f(v) \geq K_{\ell} \cdot \|v_{\ell} - B_{\ell}(v)\|^2. \quad (15')$$

I. 5. 2 - Rappel sur les méthodes de descente (2)(14)

Pour résoudre le problème (R''_i) , on définit, à partir de v_i^p , une direction (de descente) p_i^{p+1} , réalisable et assez "proche" de la direction :

$$g_i^p = -2 K_i (v_i^p - B_i(\tilde{v}^i, p))$$

opposée au gradient de la fonctionnelle à minimiser .

a) Choix de la direction p_i^{p+1}

On suppose données des constantes $r_i > 0$ et $L_i > 0$ et l'on définit :

$$C_i^p = \left\{ v_i \in V ; v_i \in C_i, \|v_i - v_i^p\| \leq r_i \right\}; \quad (16)$$

soit alors un élément $z_i^p \in C_i$ qui vérifie :

$$\begin{cases} (g_i^p, z_i^p) \geq (g_i^p, v_i) & \forall v_i \in C_i^p \\ \|z_i^p\| \leq L_i ; z_i^p \in C_i \end{cases} \quad (17)$$

On prendra :

$$p_i^{p+1} = z_i^p - v_i^p. \quad (18)$$

b) Choix de v_i^{p+1}

Posant

$$v_i^{p+1}(\lambda) = v_i^p + \lambda p_i^{p+1} \quad (19)$$

on définit :

$$\lambda_{i,c}^{p+1} = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R} ; \lambda \text{ tel que } v_i^{p+1}(\lambda) \in C_i \right\} \quad (20)$$

D'autre part :

$$f_i^p(v_i^{p+1}(\lambda)) = f_i^p(v_i^p) - \lambda (p_i^{p+1}, g_i^p) + \lambda^2 K_i // p_i^{p+1} //^2$$

La fonction $\lambda \rightarrow f_i^p(v_i^{p+1}(\lambda))$ atteint son minimum pour :

$$\lambda_{i,s}^{p+1} = \frac{1}{2K_i} \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})}{//p_i^{p+1} //^2} . \quad (21)$$

On prend donc :

$$\lambda_i^{p+1} = \min \left\{ \lambda_{i,s}^{p+1}, \lambda_{i,c}^{p+1} \right\}, \quad (22)$$

et l'on pose :

$$v_i^{p+1} = v_i^{p+1}(\lambda_i^{p+1}) . \quad (23)$$

c) Inégalités a priori :

Si : $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,s}^{p+1}$, on a :

$$f_i^p(v_i^{p+1}) - f_i^p(v_i^p) = \frac{1}{4K_i} \cdot \frac{(p_i^{p+1}, g_i^p)^2}{//p_i^{p+1} //^2} - (p_i^{p+1} - K_i //v_i^{p+1} - v_i^p //^2) ; \quad (24)$$

Si : $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,c}^{p+1}$

alors :

$$1 \leq \lambda_{i,c}^{p+1} \leq \lambda_{i,s}^{p+1}$$

et puisque la fonction $\lambda \rightarrow f_i^p(v_i^{p+1}(\lambda))$ est, pour $\lambda \leq \lambda_{i,s}^{p+1}$, décroissante, on en déduit :

$$f_i^p(v_i^{p+1}) \leq f_i^p(v_i^p) - 1/2 (p_i^{p+1}, g_i^p) , \quad (25)$$

$$\text{et : } 2K_i //p_i^{p+1} //^2 \leq (p_i^{p+1} + g_i^p) . \quad (26)$$

Remarquons enfin que, sous la forme (15), la forte convexité par rapport à chaque variable s'exprime par :

$$f_{v,i}^p(y_i) - f_{v,i}^p(x_i) + (f'_{v,i}^p(x_i), y_i - x_i) + K_i //y_i - x_i //^2 \quad (27)$$

$\forall x_i \in V ; \forall y_i \in V,$

et, en particulier :

$$f_i^p(v_i) - f_i^p(v_i^p) + (f'_{v,i}^p(v_i^p), v_i - v_i^p) + K_i //v_i - v_i^p //^2 ; \quad \forall v_i \in V. \quad (28)$$

L'algorithme est donc le suivant :

I. 5.3 - Algorithme

Partant de $\tilde{v}^{1,0} \in \mathcal{V}$, le passage de $\tilde{v}^{i,p}$ à $\tilde{v}^{i+1,p}$ s'effectue de la façon suivante. On pose :

$$g_i^p = -f_i^{p'}(v_i^p) = 2 K_i(B_i(\tilde{v}^{i,p}) - v_i^p),$$

et, en supposant donnés les nombres $r_i > 0$ et $L_i > 0$, on choisit une direction de descente p_i^{p+1} par (18). Le point v_i^{p+1} est alors le point qui minimise $f_i^p(v_i)$ sur le segment :

$$\left\{ v_i^p + \lambda p_i^{p+1}; \lambda \geq 0 \right\} \cap C_i,$$

c'est-à-dire (23) :

$$v_i^{p+1} = v_i^{p+1}(\lambda_i^{p+1}).$$

On a les propriétés de convergence suivantes :

I. 5.4 - Théorème

Sous l'hypothèse (H_1) la suite $\{v^p\}$ générée par l'algorithme I. 5.3 est minimisante pour la fonctionnelle $f(v)$, et toute valeur d'adhérence de cette suite - il en existe au moins une - est solution du problème (R') .

Démonstration

Remarquons tout d'abord que la direction de descente est toujours définie sauf si :

$$v_i^p = \text{Proj}_{C_i} B_i(\tilde{v}^{i,p})$$

dans ce cas on pose $v_i^{p+1} = v_i^p$ et on passe au calcul de v_{i+1}^{p+1} . S'il arrive que $v^{p+1} = v^p$, alors v^p est solution du problème (R') . Supposons donc la suite $\{v^p\}$ infinie.

On a :

$$f(v^p) \geq f_i^p(v_i^{p+1}) \geq \dots \geq f_i^{p+1}(v_i^{p+1}) = f_{i+1}^p(v_{i+1}^p) \geq f_{i+1}^p(v_{i+1}^{p+1}) \geq f(v^{p+1}) > 0.$$

La suite $f(v^P)$ est donc convergente, et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (f_i^P(v_i^P) - f_i^P(v_i^{P+1})) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

De (24), puisque $\|p_i^{P+1}\|$ est borné, ou de (25), on déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (p_i^{P+1}, g_i^P) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Par définition (17) de p_i^{P+1} , ceci implique :

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} (g_i^P, v_i - v_i^P) \leq 0, \quad \forall v_i \in C_i^P,$$

soit, puisque l'on peut considérer C_i comme borné (H_1) :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} (f_i^P(v_i^P), v_i - v_i^P) \geq 0, \quad \forall v_i \in C_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (28)$$

La forte convexité (I. 2. 2) par rapport à chaque variable, exprimée par (27), nous donne :

$$f_i^P(v_i^{P+1}) - f_i^P(v_i^P) = (f_i^P(v_i^P), v_i^{P+1} - v_i^P) + K_\ell \|v_i^{P+1} - v_i^P\|^2$$

d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_i^{P+1} - v_i^P\| = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (29)$$

La dérivée de f étant lipschitzienne, (I. 2. 8), il vient, par (29) et (28) :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} ((f'(v^P), v - v^P)) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{C} \quad (30)$$

or la fonction f est convexe, ce ci entraîne :

$$f(v) \geq f(v^P) + ((f'(v^P), v - v^P)), \quad \forall v \in \mathcal{C}$$

d'où en passant à la limite dans le second membre :

$$f(v) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} f(v^P), \quad \forall v \in \mathcal{C}$$

et la suite v^P est minimisante pour f .

De plus, la suite $\{v^P\}$ étant bornée, elle possède, sur \mathcal{C} convexe fermé, au moins un point d'adhérence faible, qui est - faible s. c. i. de f - une solution du problème (\mathbb{R}').

I. 5. 5 - Théorème

Si on suppose que tous les convexes, sauf éventuellement un, sont compacts, alors :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((v^p, \mathcal{S})) = 0 \quad (31)$$

Démonstration

Nous supposons, en changeant éventuellement la numérotation des convexes sans changer leur ordre, que C_i est compact, et donc borné, pour $i = 1, \dots, n-1$. L'hypothèse H_1 - cf (a) - est donc vérifiée.

Supposons alors que la proposition (31) ne soit pas vérifiée, la proposition contradictoire s'écrit :

$$\exists Q \subset \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \exists \epsilon > 0, \quad \text{telsque} \quad \forall q \in Q, \quad d((v^q, \mathcal{S})) \geq \epsilon, \quad (32)$$

avec $\text{card}(Q) = +\infty$.

Considérons alors les suites infinies $\{v_i^q\}$, $q \in Q$, $i = 1, \dots, n-1$. La suite $\{v_1^q\}$ infinie et bornée possède une sous-suite $\{v_1^q\}$, $q \in Q_1 \subset Q$, convergeant fortement vers $\hat{v}_1 \in C_1$ compact. La sous-suite de même rang $\{v_2^q\}$, $q \in Q_1$ possède une sous-suite $\{v_2^q\}$, $q \in Q_2 \subset Q_1$ convergeant fortement vers $\hat{v}_2 \in C_2$ compact. Par récurrence sur l'indice i de $\{v_i^q\}$, $i = 1, \dots, n-1$, il existe $Q_{n-1} \subset \mathbb{N}$, $\text{card}(Q_{n-1}) = +\infty$, tel que si $q \in Q_{n-1}$ on ait :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{v_i^q\} = \hat{v}_i \in C_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Enfin, la suite de $\{v_n^q\}$, $q \in Q_{n-1}$ possède une sous-suite $\{v_n^q\}$, $q \in Q_n \subset Q_{n-1}$ convergeant faiblement vers $v_n \in C_n$.

Le point $\hat{v} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$ est donc, à fortiori, la limite faible de $\{v^q\}$, $q \in Q_n \subset \mathbb{N}$, et appartient donc à \mathcal{S} . De plus, pour les $n-1$ premières composantes de cette suite, on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^q, \hat{v}_i) = 0$$

La continuité, par rapport à (v_1, \dots, v_{n-1}) , des applications B_ℓ et $G_{v, \ell}$ (15) pour $\ell = n$, implique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_{\hat{v}, n}(u_n) - f_{v_n^q, n}(u_n)\| = 0 \quad \forall u_n \in V, \quad u_n \text{ borné} \quad (33)$$

et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|B_n(\hat{v}) - B_n(v_n^q)\| = 0.$$

La forte convexité de f par rapport à v_n (27) nous donne :

$$f_{\hat{v}, n}(v_n^q) = f_{\hat{v}, n}(\hat{v}_n) + (f'_{\hat{v}, n}(\hat{v}_n), v_n^q - \hat{v}_n) + K_n \|v_n^q - \hat{v}_n\|^2 \quad (34)$$

or, puisque $\hat{v} \in \mathcal{J}$, on a :

$$((f'(\hat{v}), (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{n-1}, v_n^q) - \hat{v})) \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$(f'_{\hat{v}, n}(\hat{v}_n), v_n^q - \hat{v}_n) \geq 0 ;$$

d'où en passant à la limite dans (34) compte-tenu de (33) et du théorème I. 5.4 il vient :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_n^q - \hat{v}_n\|^2 = 0$$

et donc :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((v_n^q, \hat{v})) = 0$$

ce qui contredit la proposition (32) et établit le théorème .

Dans tous les autres cas - cf. (4), (15) - où la méthode des projections successives générerait des suites fortement convergentes, toutes les propriétés sont conservées lorsque l'on passe de la décomposition au croisement d'algorithmes et l'on a :

I. 5.6 - Théorème

Si, en plus de l'hypothèse H_1 , on suppose que :

$$(H_2) \quad j \in [1, n] \quad \text{tel que} \quad C_j \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n C_i \right) \neq \emptyset,$$

alors la suite $\{v^p\}$ construite par l'algorithme I. 5.3 converge fortement vers une solution du problème (R') et la vitesse de convergence est au moins linéaire.

Démonstration

Pour alléger les notations, nous supposons, en changeant éventuellement la numérotation des convexes sans changer leur ordre, que l'hypothèse (H_2) s'écrit :

$$(H'_2) \quad C_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i \right) \neq \emptyset$$

Nous allons décomposer la démonstration du théorème en 6 parties :

1er point : $\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^p, S) = 0, \quad i = 1, \dots, n$

D'après le théorème I. 5.4, on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(v^p) = 0$$

par équivalence de semi-norme, on en déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^p, C_j) = 0 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

Si l'hypothèse (H'_2) est vérifiée, on sait (cf. ⁽⁴⁾ lemme 5a) que ceci entraîne :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^p, S) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

L_i et r_i étant définis respectivement par (16) et (17), soit M' un majorant de $\{v^P\}$ et soit M'' un majorant de \mathcal{S} ; on pose :

$$M = \max [L_1, \dots, L_n, r_1, \dots, r_n, M', M''] \quad (35)$$

$$r = \min [L_1, \dots, L_n, r_1, \dots, r_n, M', M''] \quad (36)$$

et soit $P \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p \geq P \Rightarrow d((v^p, \mathcal{S})) < r/4 \quad (37)$$

2ème point : $\exists \rho_0 > 0, \forall p \geq P, \exists x \in \bigcap_{i=1}^n C_i$ tel que $\mathcal{B}(x, \rho) \subset C_i \cap \mathcal{B}(v_i^p, r/2)$
 $i = 1, \dots, n-1$

D'après l'hypothèse (H'_2) , il existe $b \in S$ et il existe un $\rho_0 > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}(b, \rho_0) \subset \bigcap_{i=1}^{n-1} C_i ;$$

posons, par définition, pour $\mathcal{b} = (b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ et $r > 0$

$$\mathcal{B}((\mathcal{b}, r)) = \prod_{i=1}^n \mathcal{B}(b, r).$$

Soit u^p la projection de v^p sur \mathcal{S} , puisque $p \geq P$, on a :

$$d((v^p, u^p)) \leq r/4.$$

Considérons alors l'homothétie de centre u^p et de rapport $r/4M$ l'homothétique $\mathcal{B}((x, \rho_0 \cdot r/4M))$ de la boule $\mathcal{B}((\mathcal{b}, \rho_0))$ définit une boule $\mathcal{B}((x, \rho))$, c'est à-dire une boule $\mathcal{B}(x, \rho)$ cherchée, avec :

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{r}{4M}$$

3ème point : $\forall p \geq P$, pour l'élément $x \in S$ défini au deuxième point, on a :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (f'_i(v^P), x - \rho \frac{f'_i(v^P)}{\|f'_i(v^P)\|} - v_i^P) + (f'_n(v^P), x - v_n^P) \leq -\rho \sum_{i=1}^{n-1} \|f'_i(v^P)\| \quad (38)$$

La convexité de $f(v)$ implique :

$$((f'(v^P), z - v^P)) \leq f(z) - f(v^P) \quad \forall z \in \mathcal{U}.$$

En particulier pour $z = x \in \mathcal{J} \subset \mathcal{D}$, il vient :

$$\sum_{i=1}^n (f'_i(v^P), x - v_i^P) \leq 0 \quad (39)$$

Considérons alors $z = y \in \mathcal{C}$ défini par :

$$\begin{cases} y_i = x - \rho \frac{f'_i(v^P)}{\|f'_i(v^P)\|} & i = 1, \dots, n-1 \\ y_n = x \end{cases}$$

On a :

$$((f'(v^P), y - v^P)) = \sum_{i=1}^{n-1} (f'_i(v^P), x - \rho \frac{f'_i(v^P)}{\|f'_i(v^P)\|} - v_i^P) + (f'_n(v^P), x - v_n^P)$$

$$((f'(v^P), y - v^P)) = \sum_{i=1}^n (f'_i(v^P), x - v_i^P) - \rho \sum_{i=1}^{n-1} \|f'_i(v^P)\|$$

et compte-tenu de (39) :

$$((f'(v^P), y - v^P)) \leq -\rho \sum_{i=1}^{n-1} \|f'_i(v^P)\|. \quad (40)$$

4ème point : Equivalence de semi-normes.

Il résulte des propositions I. 2. 5 et I. 2. 7 que les semi-normes $(f(.))^{1/2}$, $|||f'(.)|||$ et $\sum_{i=1}^n ||f'_i(.)||$ sont équivalentes sur \mathcal{V} . De plus,

$$\sum_{i=1}^n f'_i(v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (41)$$

En effet, $f(v)$ étant convexe et invariante par translation, on a

$$f(v + \cdot b) \geq f(v) + ((f'(v), b)), \quad \forall b \in \mathcal{D}, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^n (f'_i(v), b) = 0 \quad \forall b \in \mathcal{V}, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

On a donc également l'équivalence des semi-normes $(f(.))^{1/2}$ et $\sum_{i=1}^{n-1} ||f'_i(.)||$.

5ème point : Minoration de $\frac{\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})}}{\sqrt{f(v^p)}}$

Reprenons (40), cette expression peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^n (f'_i(v^p) - f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) + \sum_{i=1}^n (f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) \leq -\rho \sum_{i=1}^{n-1} ||f'_i(v^p)||.$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^n ||y_i - v_i^p|| \cdot ||f'_i(v^p) - f_i^{p'}(v_i^p)|| - \sum_{i=1}^n (f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) \geq \rho \sum_{i=1}^{n-1} ||f'_i(v^p)||.$$

ou encore, compte-tenu de la définition (14) du gradient :

$$\sum_{i=1}^n 2||y_i - v_i^p|| \cdot K_i ||B_i(\tilde{v}^{i,p} - v_i^p)|| - \sum_{i=1}^n (f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) \geq \rho \sum_{i=1}^{n-1} ||f'_i(v^p)||.$$

Les n opérateurs B_i étant linéaires continus, on a la majoration :

$$2 \cdot M \cdot k_1 \cdot \sum_{i=1}^n ||v_i^{p+1} - v_i^p|| - \sum_{i=1}^n (f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) \geq \rho \sum_{i=1}^{n-1} ||f'_i(v^p)||;$$

ou encore, par équivalence de semi-normes:

$$2 \cdot M \cdot k_1 \cdot \sum_{i=1}^n ||v_i^{p+1} - v_i^p|| - \sum_{i=1}^n (f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) \geq \rho \cdot k_2 (f(v^p))^{1/2}. \quad (42)$$

On a donc nécessairement au moins une des deux propositions :

$$\exists i \in [1, n] \text{ tel que } 2. M. k_1 \cdot \|v_i^{p+1} - v_i^p\| \geq \frac{1}{2n} \cdot \rho \cdot k_2 (f(v^p))^{1/2} \quad (43)$$

$$\exists i \in [1, n] \text{ tel que } -(f_i^{p'}(v_i^p), y_i - v_i^p) \geq \frac{1}{2n} \cdot \rho \cdot k_2 (f(v^p))^{1/2} . \quad (44)$$

De (44), puisque $y_i \in C_i$ et par définition de p_i^{p+1} , on déduit :

$$(g_i^p, p_i^{p+1}) \geq \frac{1}{2n} \rho k_2 (f(v^p))^{1/2} \quad (45)$$

Si $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,s}^{p+1}$ alors (21), on a :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| = \lambda_{i,s}^{p+1} \|p_i^{p+1}\| = \frac{1}{2K_i} \cdot \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})}{\|p_i^{p+1}\|} \geq \frac{1}{2.M.K_i} (g_i^p, p_i^{p+1}),$$

d'où (45) implique :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| \geq \frac{\rho \cdot k_2}{4. n. M. K_i} (f(v^p))^{1/2} . \quad (46)$$

Si, au contraire, $\lambda_i^{p+1} = \lambda_{i,c}^{p+1}$, alors :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| \geq \|p_i^{p+1}\| \geq \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})}{\|g_i^p\|} \geq \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})}{M}$$

d'où avec (45), il vient :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| \geq \frac{1}{2 n M} \cdot \rho \cdot k_2 \cdot (f(v^p))^{1/2} . \quad (47)$$

Au total, si l'on pose :

$$k_3 = \min \left[\frac{\rho \cdot k_2}{4. n. M. k_1}, \frac{\rho \cdot k_2}{4. n. M. K_i}, i = 1, \dots, n; \frac{\rho \cdot k_2}{2. n. M} \right],$$

alors par (43), (46), (47), il vient :

$$\forall p \geq P, \exists i \in [1, n] \text{ tel que } \|v_i^{p+1} - v_i^p\| \geq k_3 \cdot (f(v^p))^{1/2} . \quad (48)$$

Or, puisque v_i^{p+1} est projection de $B_i(\tilde{v}^i, p)$ sur le segment $[v_i^p, v_i^{p+1}]$ on a :

$$\|v_i^{p+1} - B(\tilde{v}^i, p)\|^2 \leq \|v_i^p - B(\tilde{v}^i, p)\|^2 - \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2,$$

c'est-à-dire, compte-tenu de (15) et de la décroissance de f :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2 \leq \frac{1}{K_i} [f_i^p(v_i^p) - f_i(v_i^{p+1})] \leq \frac{1}{K_i} [f(v^p) - f(v^{p+1})].$$

Rapprochant alors (48) de l'expression précédente, il vient :

$$k_3^2 \cdot f(v^p) \leq \frac{1}{K_i} [f(v^p) - f(v^{p+1})] \leq \frac{1}{K_i} [\sqrt{f(v^p)} - \sqrt{f(v^{p+1})}] \cdot 2 \sqrt{f(v^p)}$$

et enfin, en posant :

$$k_4 = \min [1/2 \cdot k_3^2 \cdot K_i; i = 1, \dots, n] > 0,$$

il vient :

$$\forall p \geq P, \quad (f(v^p))^{1/2} - (f(v^{p+1}))^{1/2} \geq k_4 (f(v^p))^{1/2} \quad (49)$$

6ème point : Convergence de $\{v_i^p\}$

Par définition (22), (23) de v_i^{p+1} , $i = 1, \dots, n$, on a :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| = \lambda_i^{p+1} \cdot \|p_i^{p+1}\| \leq \lambda_{i,s}^{p+1} \cdot \|p_i^{p+1}\| \leq \frac{1}{2 \cdot K_i} \cdot \frac{(g_i^p, p_i^{p+1})}{\|p_i^{p+1}\|} \leq \frac{1}{2 \cdot K_i} \|g_i^p\|.$$

or, de (15') et de l'expression (14) du gradient, on déduit :

$$f_i^p(v_i^p) \geq \frac{1}{4 \cdot K_i} \cdot \|f_i^p(v_i^p)\|^2 = \frac{1}{4 \cdot K_i} \cdot \|g_i^p\|^2,$$

et donc :

$$\|v_i^{p+1} - v_i^p\| \leq \frac{1}{\sqrt{K_i}} (f_i^p(v_i^p))^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{K_i}} (f(v^p))^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

d'où, en posant :

$$k_5 = \max \left(\frac{1}{k_4 \sqrt{K_i}}, i = 1, \dots, n \right),$$

il vient avec (49) :

$$\forall p \geq P, \quad \|v_i^{p+1} - v_i^p\| \leq k_5 [(f(v^p))^{1/2} - (f(v^{p+1}))^{1/2}], \quad i = 1, \dots, n. \quad (50)$$

Les séries $\{\|v_i^{p+1} - v_i^p\|\}$, $i = 1, \dots, n$, sont donc convergentes, les n suites $\{v_i^p\}$ sont donc des suites de Cauchy, convergeant fortement sur V , complet, vers \hat{v}_i , $i = 1, \dots, n$, avec $\hat{v} \in \mathcal{S}$.

De plus :

$\forall i \in [1, n], \forall m > p, \forall p \geq P, m \geq p,$ on a :

$$\|v_i^m - v_i^p\| \leq \sum_{q=p}^m \|v_i^{q+1} - v_i^q\| \leq k_5 [(f(v^p))^{1/2} - (f(v^m))^{1/2}],$$

d'où, en passant à la limite sur m , il vient :

$$\|\hat{v}_i - v_i^p\| \leq k_5 \cdot (f(v^p))^{1/2}$$

ou encore, en tenant compte de (49) :

$$\forall p \geq P, \|\hat{v}_i - v_i^p\| \leq k_5 \cdot (1 - k_4)^{p-P} \cdot f(v^p), \quad i = 1, \dots, n$$

et la convergence est, au moins, linéaire.

I. 5.7 - Théorème

Si l'on suppose que tous les convexes, à l'exception possible d'un seul, sont uniformément convexes, alors la suite $\{v^p\}$ engendrée par l'algorithme I. 5. 3, converge fortement vers $v \in \mathcal{S}$.

Démonstration

Pour simplifier les notations, nous supposons que les $n-1$ premiers convexes C_1, \dots, C_{n-1} sont uniformément convexes.

Remarquons d'autre part, que l'hypothèse (H_1) est, ici, inutile. En effet, tout convexe uniformément convexe et différent de V étant borné ⁽¹⁰⁾ l'hypothèse du théorème I. 5.7 implique (H_1) - sauf dans le cas dégénéré : $C_1 = \dots = C_{n-1} = V$, dans ce cas tout point de départ v_n^0 est solution.

Le théorème I. 5.4 s'applique donc à la suite $\{v^p\}$ considérée.

On sait qu'un élément $u \in \mathcal{S}$ est caractérisé par :

$$((f'(u), v-u)) \geq 0 ; \quad v \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (f'_i(u), v_i - u_i) \geq 0, \quad \forall v_i \in C_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Soient alors u et v deux éléments de \mathcal{S} , la convexité de f implique :

$$f(v) \geq f(u) + \sum_{i=1}^n (f'_i(u), v_i - u_i)$$

et donc :

$$(f'_i(u), v_i - u_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (51)$$

Distinguons alors deux cas :

$$\underline{1)} \quad f'_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

On sait que (41), que ceci implique :

$$f'_n(u) = 0,$$

et donc, puisque $///f'(u)///^2$ est une pénalisation d'éclatement,

$$u \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset.$$

S'il existe alors u et v , distincts, appartenant à \mathcal{S} , il est clair que $1/2(u+v) \in C_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i\right)$ et le théorème est une conséquence du théorème I. 5. 3.

Si au contraire, S se réduit à un point x , alors, si $C_n \neq x$, x appartient à la frontière d'un au moins, des convexes C_1, \dots, C_{n-1} . Cet ensemble C_j étant uniformément convexe, la suite v_j^p correspondante qui convergerait faiblement vers x convergera fortement (II), théorème 3). La suite $\{v^p\}$ étant minimisante pour f , ce sont donc toutes les suites $\{v_i^p\}$, $i = 1, \dots, n$, qui convergeront fortement vers x et le théorème est également établi pour ce cas.

$$\underline{2)} \quad \exists j \in [1, n-1], \quad \text{tel que} \quad f'_j(u) \neq 0.$$

Montrons que, dans ce cas, \mathcal{S} ne contient qu'un élément.

L'hyperplan :

$$H = \left\{ x \in V ; (f'_j(u), x - u_j) = 0 \right\}$$

est hyperplan d'appui, en u_j , au convexe C_j . C_j étant uniformément convexe,

$H \cap C_j = u_j$, et (51) implique donc :

$$v_j = u_j.$$

Or, on a, quel que soit $v \in \mathcal{V}$:

$$f(v) = \sum_{i=1}^m \|s_i(u+v-u)\|^2 = f(u) + 2 \cdot \sum_{i=1}^m (s_i(u), s_i(v-u)) + \sum_{i=1}^m \|s_i(v-u)\|^2$$

ceci peut encore s'écrire, en faisant apparaître le gradient :

$$\forall v \in \mathcal{V}, f(v) = f(u) + \langle f'(u), v-u \rangle + f(v-u) \quad , \quad (53)$$

et donc, puisque $u \in \mathcal{S}$:

$$\forall v \in \mathcal{V}, f(v) \geq f(u) + f(v-u) \quad (54)$$

d'où :

$$v \in \mathcal{S} \Rightarrow f(v-u) = 0 \Rightarrow v - u \in \mathcal{N}(f) = \mathcal{D}$$

et compte-tenu de (52) :

$$v = u \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \{u\}.$$

Etablissons alors la convergence de $\{v^p\}$. De (54), on déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(v^p - u) = 0,$$

et donc, par équivalence de semi-normes (proposition I. 2. 5) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \|(v_{i+1}^p - u_{i+1} - (v_i^p - u_i))\| = 0 \quad (55)$$

Or u_j appartient à la frontière de l'ensemble uniformément convexe C_j , la suite $\{v_i^p\}$ qui converge faiblement vers u_j converge donc fortement et l'on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_j^p - u_j\| = 0$$

On déduit donc de (55), par récurrence sur l'indice i :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_i^p - u_i\| = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

I. 6 - CROISEMENT PARALLELE DE METHODES DE DESCENTE

Si l'on choisit comme pénalisation d'éclatement :

$$f_3(v) = \sum_{i=1}^n \|v_i\| - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|v_j\|^2,$$

ou $f_4(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|v_i\| - \sum_{j=1}^n \alpha_j \|v_j\|^2 \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1 \dots n; \quad \sum \alpha_j = 1,$

Il est possible de définir des croisements parallèles de méthodes de descente associés aux méthodes parallèles de décomposition . Celles-ci ne sont autres que la méthode du barycentre^{(1), (15)} pour $f_3(v)$ et qu'une variante de la méthode du barycentre donnée dans⁽¹⁶⁾ . Les propriétés de ce croisement d'algorithmes sont identiques à celles des croisements séries étudiés ci-dessus et se démontrent de façon analogue. Néanmoins dans le cas du calcul en parallèle, il est intéressant de préserver la possibilité d'accélérer la convergence par extrapolation⁽¹⁵⁾ ; tel est le cas du croisement parallèle de méthodes duales.

II. FORMALISATION GEOMETRIQUE DU PROBLEME:
CROISEMENT DE METHODES DUALES

II.1 - PRINCIPE DES METHODES DUALES POUR LA MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES (9)

Considérons dans un espace de Hilbert V_i , de produit scalaire et de norme, notés (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$, (l'indice inférieur i est destiné à coordonner les notations de ce paragraphe avec celles utilisées dans la suite du chapitre), le problème :

$$(N_i) \text{ "Trouver } \hat{v}_i \in C_i \text{ tel que } f_i(\hat{v}_i) = \min [f(v_i) ; v_i \in C_i]"$$

f_i étant une fonction convexe sur V_i , et le convexe C_i étant défini par :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i, \ell}.$$

Les $C_{i, \ell}$ sont des convexes fermés de V_i :

$$C_{i, \ell} = \left\{ v_i \in V_i ; g_{i, \ell}(v_i) \leq 0 \right\}$$

ou les fonctions $g_{i, \ell}$ sont convexes s. c. i., et L_i un ensemble d'indices quelconque. Nous ferons la convention suivante : L_i comporte toujours un indice, noté ℓ_i^0 , tel que : $g_{i, \ell_i^0}(v) = 0, \forall v \in V_i$ (on a donc $C_{i, \ell_i^0} = V_i$ et cette convention revient seulement à adjoindre l'espace entier aux convexes définissant l'intersection).

On se propose de construire une suite $\{v_i^p\}$ destinée à converger vers \hat{v}_i , en minimisant la fonction f_i sur une suite de convexes C_i^p incluant C_i . Plus précisément :

II.1.1 - Calcul de v_i^{p+1}

Supposons qu'à la p ième itération, nous ayons un couple (v_i^p, K_i^p) , $v_i^p \in V_i$ et K_i^p étant un convexe fermé, tels que :

$$\begin{cases} K_i^p \supset C_i \\ v_i^p \in K_i^p \\ f_i(v_i^p) = \min [f_i(v_i) ; v_i \in K_i^p] \end{cases} \quad (56)$$

Si $v_i^p \notin C_i$, il existe alors $\ell_i^p \in L_i$ et tel que $v_i^p \notin C_{i, \ell}$.

Si $v_i^p \in C_i$, il est clair que v_i^p est solution de (N_i) . On pose alors conventionnellement : $\ell_i^p = \ell_i^0$. (57)

On définit alors la nouvelle approximation externe C_i^p de C_i

par :

$$C_i^p = K_i^p \cap C_{i, \ell_i^p} \quad (58)$$

et on calcule le nouvel itéré v_i^{p+1} :

$$\begin{cases} v_i^{p+1} \in C_i^p \\ f_i(v_i^{p+1}) = \min [f_i(v_i) ; v_i \in C_i^p] \end{cases} \quad (59)$$

II. 1. 2 - Choix de ℓ_i^p si $v_i^p \notin C_i$

On se donne une suite de nombres $\{r_i^p\}$ avec :

$$r_i^p > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} r_i^p = 0$$

ainsi qu'un nombre θ_i vérifiant $0 < \theta_i \leq 1$.

Puisque $v_i^p \notin C_i$, on choisit l'indice ℓ_i^p de telle sorte que :

$$\begin{cases} v_i^p \notin C_{i, \ell_i^p} \\ g_{i, \ell_i^p}(v_i^p) \geq \theta_i \cdot \text{Sup} [g_{i, \ell}(v_i^p) ; \ell \in L_i] - r_i^p \end{cases} \quad (60)$$

II. 1. 3 - Définition de K_i^{p+1}

On choisit alors un convexe fermé K_i^{p+1} tel que l'on ait encore

$$\begin{cases} K_i^{p+1} \supset C_i \\ v_i^{p+1} \in K_i^{p+1} \\ f_i(v_i^{p+1}) = \min [f_i(v_i) ; v_i \in K_i^{p+1}] \end{cases} \quad (61)$$

II. 2 - POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES

Nous conservons ici, les notations du paragraphe I. 1 et nous supposons que chacun des convexes C_i , $i = 1, \dots, n$, est défini par :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i, \ell}$$

où les $C_{i, \ell}$ sont des convexes fermés de V ,

$$C_{i, \ell} = \{x \in V ; g_{i, \ell}(x) \leq 0\}$$

les fonctions $g_{i, \ell}$ étant convexes et s.c.i., et L_i , $i = 1, \dots, n$ étant des ensembles quelconques d'indices avec la convention $\ell_i^0 \in L_i$ et $g_{i, \ell_i^0}(v) = 0$, $\forall v \in V_i$, $i = 1, \dots, n$.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(H_0) \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

(H₁) Pour $i = 1, \dots, n$ et pour tout borné B de V , il existe $K_i > 0$ tel que pour tout $\ell \in L_i$ et pour tout $x \in B$:

$$g_{i, \ell}(x) \leq K_i \cdot d(x, C_{i, \ell}).$$

Considérons le problème (R) sous sa forme géométrique dans \mathcal{V} :

(S) "Trouver $\hat{b} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$,"

et la décomposition effectuée dans (15) en :

$$\begin{cases} (S_1) & \text{"Trouver } \hat{v} \in \mathcal{C} \text{ tel que } \hat{v} = \text{Proj}_{\mathcal{C}} b \text{"} \\ (S_2) & \text{"Trouver } \hat{b} \in \mathcal{D} \text{ tel que } \hat{b} = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v \text{"} \end{cases}$$

ou encore, ce qui est équivalent en :

$$\begin{cases} (S_{1,i}) & \text{"Trouver } \hat{v}_i \in C_i \text{ tel que } \|\hat{v}_i - b\|^2 = \min [\|v_i - b\|^2 ; v_i \in C_i] \text{"} \\ (S_2) & \end{cases}$$

II. 3 - CROISEMENT DE METHODES DUALES

Les problèmes $(S_{1,i})$ étant de même forme que le problème - modèle (N_i) - avec $f_i(.) = //.-b//^2$ et $V_i = V$ - le croisement d'algorithmes consistera à remplacer la résolution de $(S_{1,i})$, chaque fois que ce problème intervient dans le cadre de la méthode de décomposition (méthode du barycentre ou méthode de projection parallèle extrapolée⁽¹⁵⁾) par une itération de la méthode duale décrite au II. 1.

Supposons qu'à la $p^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme de résolution de (S), nous ayons un itéré $b^p \in \mathcal{D}$, nous allons effectuer à partir du couple (b^p, V) - qui constitue un couple (v_i^p, K_i^p) (56) - l'itération définie en II. 1. 1, et II. 1. 2. La nouvelle approximation externe de C_i , $i = 1, \dots, n$, est définie par :

$$C_i^p = V \cap C_{i, l^p} = C_{i, l_i^p}, \quad i = 1, \dots, n$$
 et on calcule v_i^p , $i = 1, \dots, n$, par :

$$\begin{cases} v_i^{p+1} \in C_i^p \\ //v_i^{p+1} - b^p//^2 = \min [//v_i - b^p//^2 ; v_i \in C_i^p] \end{cases}$$

Si on pose :

$$\mathcal{C}^p = \prod_{i=1}^n C_i^p \supset \mathcal{C},$$

on voit que, dans \mathcal{C} , v^{p+1} est défini par :

$$v^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{C}^p} b^p.$$

On calcule ensuite, comme dans la méthode de décomposition correspondante, le barycentre :

$$b^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v^{p+1}.$$

Nous allons montrer que l'on peut encore effectuer l'extrapolation définie dans⁽¹⁵⁾. Introduisant la notation :

$$H(a, b) = \left\{ x \in X ; (x - b, b - a)_X \geq 0 \right\},$$

on a le résultat suivant :

II. 3. 1 - Lemme

Sous les hypothèses (H_0) (H_1) ,

1. Si $v^{p+1} = b^p$, alors b^p est solution du problème (S)
2. Si $v^{p+1} \neq b^p$, alors :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset H(b^p, b'^{p+1}) + \frac{\| \| b'^{p+1} - v^{p+1} \| \|^2}{\| \| b^p - b'^{p+1} \| \|^2} (b'^{p+1} - b^p)$$

Démonstration

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse (H_1) implique que $g_{i, \ell}(b^p)$ est borné supérieurement pour $\ell \in L_i$ et $i = 1, \dots, n$. C_i^p est donc toujours défini.

- 1/ Si $v^{p+1} = b^p$, alors $v_i^{p+1} = b^p$, $i = 1, \dots, n$ et $b^p \in C_i^p$, $i = 1, \dots, n$.

Il résulte alors de la définition de ℓ_i^p (57), (60), que $b^p \in C_i$, $i = 1, \dots, n$, et donc b^p est solution de (S).

- 2/ Si $v^{p+1} \neq b^p$, nous pouvons appliquer à (b^p, v^{p+1}) le lemme III.1⁽¹⁵⁾; compte tenu de l'hypothèse (H_0) et de l'inclusion $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^p$, le résultat suit.

Il résulte du lemme II. 3. 1 que nous pouvons à nouveau extrapoler b'^{p+1} . L'algorithme, exprimé dans V, est donc le suivant :

II. 3. 2 - Algorithme

Partant de b^l quelconque, le passage de b^p à b^{p+1} s'effectue de la façon suivante :

- 1/ On choisit pour $i = 1, \dots, n$, ℓ_i^p de telle sorte que :

Si $b^p \in C_i$,	$\ell_i^p = \ell_i^0$	
Si $b^p \notin C_i$,	$\left\{ \begin{array}{l} b^p \notin C_i, \ell_i^p \\ g_{i, \ell_i^p}(b^p) \gg \theta_i \text{ Sup } [g_{i, \ell}(b^p); \ell \in L_i] - r_i^p \end{array} \right.$	

et on pose : $C_i^p = C_{i, \ell_i^p}$, $i = 1, \dots, n$.

2/ On définit, pour $i = 1, \dots, n$

$$v_i^{p+1} = \text{Proj}_{C_i^p} b^p$$

3/ On calcule b^{p+1} par :

$$b^{p+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^{p+1}$$

$$b^{p+1} = b^p + \frac{\sum_{i=1}^n \|v_i^{p+1} - b^p\|^2}{n \cdot \|b^{p+1} - b^p\|^2} (b^{p+1} - b^p) .$$

L'interprétation géométrique de l'algorithme est la suivante : à partir de l'itéré b^p ,

- On définit une approximation externe \mathcal{C}^p - ce sera, en général un polyèdre - de \mathcal{C} ;
- On calcule la projection, v^{p+1} , de b^p sur \mathcal{C}^p , puis celle, b'^{p+1} , de v^{p+1} sur \mathcal{D} ;
- On extrapole cette projection jusqu'en b^{p+1} .

On pourra évidemment n'effectuer l'extrapolation que pour certaines valeurs de p , b^{p+1} étant défini, pour les autres valeurs, par $b^{p+1} = b'^{p+1}$.

On a les résultats suivants :

II. 3. 3 - Théorème

Sous les hypothèses (H_0) et (H_1) , la suite $\{b^p\}$ générée par l'algorithme II. 3. 2 converge faiblement vers un élément $\hat{b} \in V$, tel que

$$\hat{b} \in S = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

Démonstration

D'après l'hypothèse H_0 , $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, soit $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$

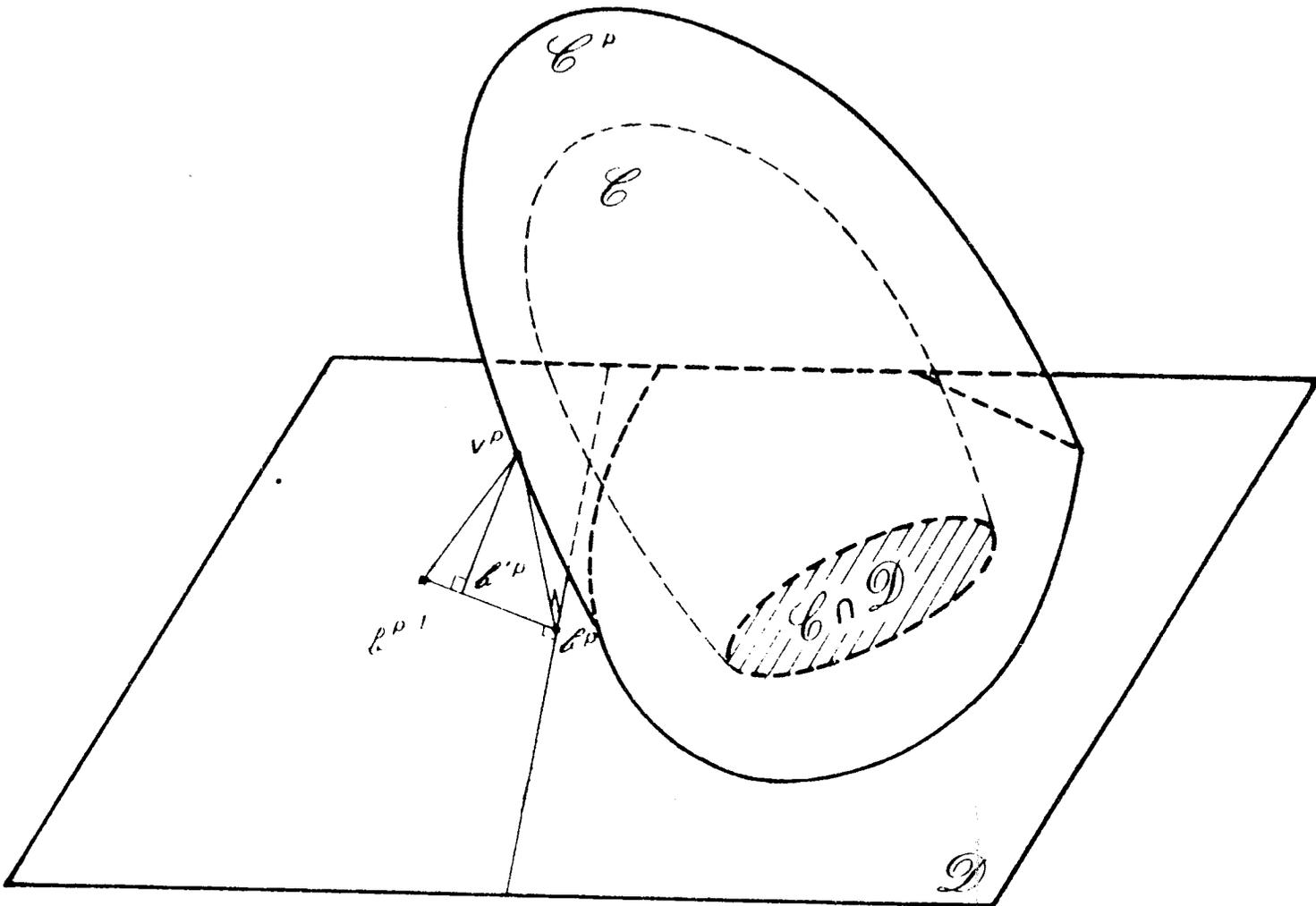


FIGURE 1 : Croisement de méthodes duales pour trouver un point appartenant à une intersection de convexes : représentation dans l'espace \mathcal{V}

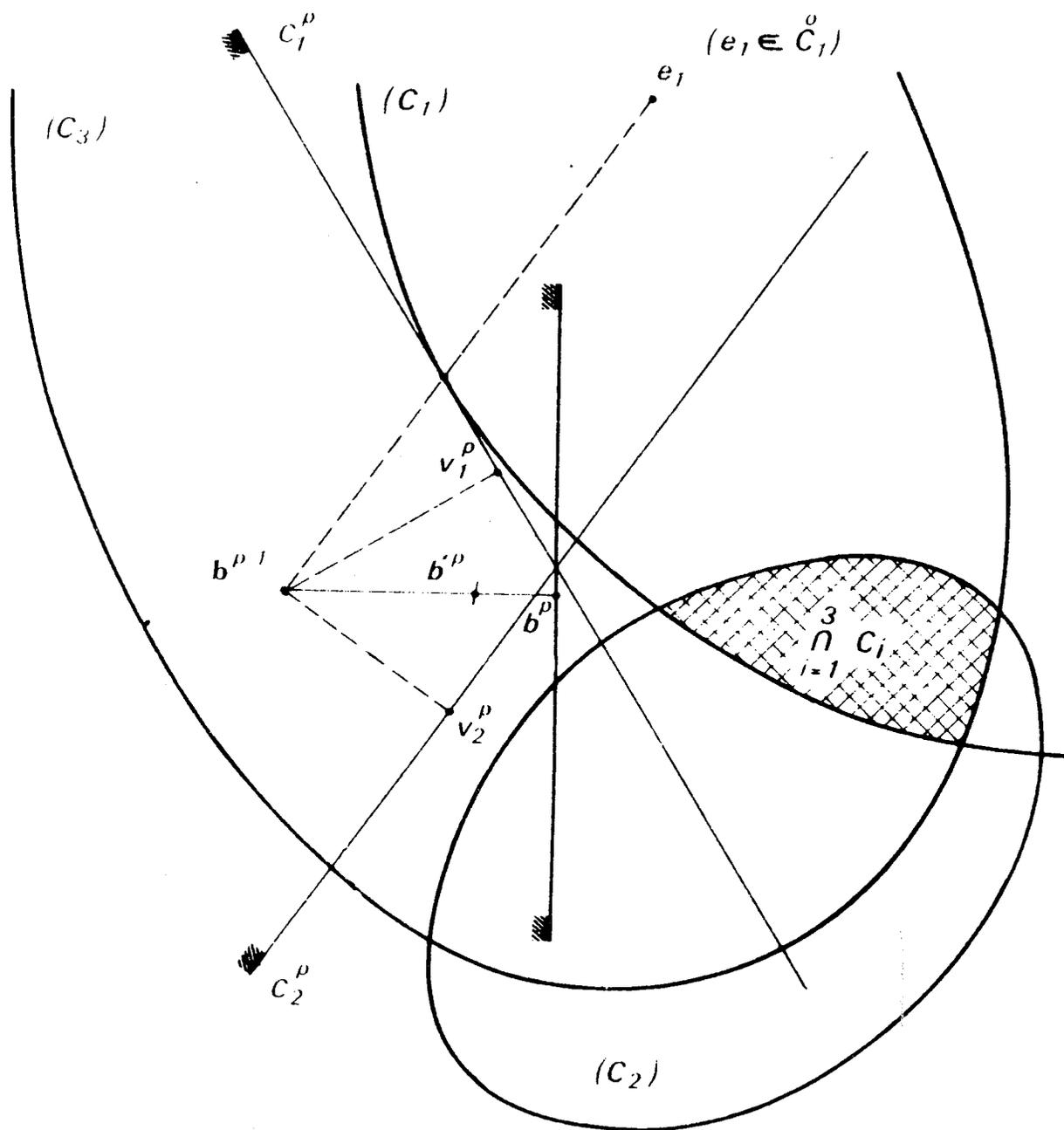


FIGURE 2 : Croisement de trois méthodes pour trouver un point appartenant à $C_1 \cap C_2 \cap C_3$: méthode de KAPLAN pour C_1 , méthode de KELLEY pour C_2 , $b^{p-1} \notin C_3$ donc C_3 n'est pas pris en compte. Représentation dans l'espace V .

1er point - La suite $\{ \|\| \ell^p - x \|\| \}$ est convergente

Puisque $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{C}^p \cap \mathcal{D}$, il résulte des propriétés des projections que :

$$\|\| \ell^p - x \|\| \geq \|\| v^{p+1} - x \|\| \geq \|\| \ell^{p+1} - x \|\|,$$

compte-tenu du lemme II. 3. 1 :

$$\|\| \ell^p - x \|\| \geq \|\| \ell'^{p+1} - x \|\| \geq \|\| \ell^{p+1} - x \|\|. \quad (62)$$

La suite $\{ \|\| \ell^p - x \|\| \}$, décroissante et bornée, est donc convergente.

Or on a :

$$\|\| \ell^p - x \|\|^2 = \|\| \ell^{p+1} - x \|\|^2 + \|\| \ell^{p+1} - \ell^p \|\|^2 + 2(x - \ell^{p+1}, \ell^{p+1} - \ell^p)$$

d'après le lemme II. 3. 1, le produit scalaire est positif, d'où on déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\| \ell^{p+1} - \ell^p \|\| = 0,$$

et, par définition de ℓ^{p+1} , $\|\| \ell'^{p+1} - \ell^p \|\|$ étant borné :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\| v^{p+1} - \ell^p \|\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{p \rightarrow \infty} d(b^p, C_i^p) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Compte-tenu de l'hypothèse (H_1) , il vient :

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} g_{i, \ell_i^p}(b^p) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

et, par définition de ℓ_i^p :

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} (\text{Sup } [g_{i, \ell}(b^p); \ell \in L_i]) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (63)$$

2ème point - Convergence de la suite $\{b^p\}$

La suite $\{b^p\}$ étant bornée, elle possède une sous-suite convergeant faiblement vers $\hat{b} \in V$.

Chacune des fonctionnelles $g_{i, \ell}$, $\ell \in L_i$, $i = 1, \dots, n$ étant faiblement s. c. i., il vient :

$$g_{i, \ell}(\hat{b}) \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} g_{i, \ell}(b^p) \leq 0, \quad \forall \ell \in L_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

et donc $\hat{b} \in S$.

Montrons que toute la suite $\{b^p\}$ converge faiblement vers \hat{b} . Supposons qu'il existe deux sous-suites de $\{b^p\}$ convergeant faiblement, respectivement vers $x' \in S$ et $x'' \in S$. Les suites $\{\|b^p - x\|\}$ étant conver-

gentes pour tout $x \in S$, on a :

$$a = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \|b^p - x'\|^2 - \|b^p - x''\|^2 \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \|x'\|^2 - \|x''\|^2 + 2(b^p, x'' - x') \right\}$$

En passant à la limite, dans le second membre, pour la première sous-suite - respectivement pour la deuxième sous-suite - il vient :

$$a = \|x'\|^2 - \|x''\|^2 + 2(x', x'' - x') = \|x'\|^2 - \|x''\|^2 + 2(x'', x'' - x'),$$

d'où :

$$(x'' - x', x'' - x') = 0$$

et toute la suite $\{b^p\}$ converge faiblement vers $\hat{b} \in S$.

Comme pour la méthode des projections successives, la convergence forte ne peut être assurée que si l'on renforce les hypothèses et l'on a :

II. 3. 4 - Théorème

Si, en plus des hypothèses (H_0) et (H_1) , on suppose que l'une quelconque des hypothèses suivantes est vérifiée :

(H_3) V est de dimension finie

(H_4) Pour toute suite bornée $\{x^p\} \subset V$, on a :

$$a) \limsup_{p \rightarrow \infty} \left(\sup_{l \in L_i} g_{i,l}(x^p) \right) < 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} d(x^p, C_i) = 0$$

$$b) \lim_{p \rightarrow \infty} d(x^p, C_i) = 0, i = 1, \dots, n \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} d(x^p, S) = 0$$

alors la suite $\{b^p\}$ générée par l'algorithme II. 3. 2, converge fortement vers $\hat{b} \in S$.

Démonstration

La convergence sous l'hypothèse (H_3) est une convergence directe du théorème II. 3. 3 car les topologies faibles et fortes sont alors confondues.

Faisons alors l'hypothèse (H_4) . D'après (63), la suite $\{b^p\}$ est telle que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{\ell \in L_i} (g_{i,\ell}(b^p)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

De (H_4) (a) et (b), on déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(b^p, S) = 0 \tag{64}$$

Considérons alors la suite d'ensembles R^q définis par :

$$R^q = \bigcap_{p=1}^q \mathcal{B} [\text{Proj}_S b^p, //b^p - \text{Proj}_S b^p//],$$

ces ensembles R^q sont convexes, fermés, non vides - $b^p \in R^q$ (62) - et de plus $R^{q+1} \subset R^q$. Une telle suite d'ensembles possède une intersection non vide, soit $\hat{b}' \in \bigcap_{q=1}^{\infty} R^q$. Il résulte de (64) que b' est unique, appartient à S , et que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} b^p = \hat{b}' = \hat{b}.$$

II. 3. 5 - Remarque

L'hypothèse (H_4) est en particulier vérifiée si ⁽⁴⁾ :

- tous les C_i sauf éventuellement un, sont uniformément convexes,
- $\exists j \in [1, n]$ tel que $C_j \cap \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n C_i \neq \emptyset$.

et les conditions de convergence forte sont identiques à celles des méthodes de décomposition correspondantes.

Ainsi que le montrent P. J. LAURENT et B. MARTINET⁽⁹⁾, le formalisme utilisé au II. 1 recouvre un grand nombre de méthodes classiques d'approximation extérieure⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾.

Donnons, en particulier, un exemple de croisement de méthodes de Kelley :

II. 4 - APPLICATION : LINEARISATION DES CONTRAINTES
PAR CROISEMENT DE METHODES DE KELLEY (7)

V est un espace de Hilbert (\dots) , $\|.\|$, et on considère le problème :

$$(R) \quad \text{"Trouver } v \in \bigcap_{i=1}^n C_i \text{"}$$

avec :

$$C_i = \left\{ v \in V ; g_i(v) \leq 0 \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

les fonctions g_i , $i = 1, \dots, n$ étant convexes et continues sur V .

Si l'on introduit, pour $i = 1, \dots, n$:

$$L_i = \left\{ (v, d) \in V \times V ; v \in V - \overset{\circ}{C}_i, d \in \partial g_i(v) \right\} \cup \ell_i^{\circ},$$

$$g_{i, \ell}(x) = g_i(v) + (d, x-v) ; \forall \ell = (v, d) \in L_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_{i, \ell_i^{\circ}}(x) = 0$$

$$C_{i, \ell} = \left\{ v \in V ; g_{i, \ell}(v) \leq 0 \right\},$$

il est clair que l'on peut définir C_i par :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i, \ell}$$

et le problème (R) est de la forme du II. 2.

Toute fonction convexe étant l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues, pour tout $x \notin \overset{\circ}{C}_i$ on a :

$$g_i(x) = \max [g_{i, \ell}(x) ; \ell \in L_i]$$

or, pour tout $d \in \partial g_i(x)$:

$$g_i(x) = g_{i(x, d)}(x)$$

Une simplification intervient donc pour le choix (60) de ℓ_i° , on choisira :

$$\begin{aligned}
 \text{si } b^P \notin C_i^o, & \quad \ell_i^P = (b^P, d) \in L_i \\
 \text{si } b^P \in C_i^o, & \quad \ell_i^P = \ell_i^o.
 \end{aligned} \tag{65}$$

L'algorithme II. 3. 2 est alors un algorithme de linéarisation des contraintes C_i , \mathcal{C}^P étant défini par :

$$\mathcal{C}^P = \prod_{i=1}^n C_i^P ;$$

avec :

$$\begin{aligned}
 C_i^P &= V & \text{si } b^P \in C_i^o \\
 C_i^P &= C_{i(b^P, d)} & \text{si } b^P \notin C_i^o.
 \end{aligned}$$

Si nous introduisons les hypothèses

(H'₁) Pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout borné B de V , il existe une constante $K_i > 0$ telle que, pour tout $v \in B$ et pour tout $d \in \partial g_i(v)$, on ait : $\|d\| \leq K_i$.

(H'₄(a)) La fonction g_i - resp. $i = 1, \dots, n$ - définit correctement⁽¹¹⁾ le convexe C_i - resp. $i = 1, \dots, n$ - : pour toute suite $\{x^P\} \subset V$ on a pour $i = 1, \dots, n$:

$$\limsup_{P \rightarrow \infty} g_i(x^P) \leq 0 \Rightarrow \lim_{P \rightarrow \infty} d(x^P, C_i) = 0.$$

On a alors la proposition :

II. 4. 1 - Proposition

Si les hypothèses (H_0) (H'_1) sont vérifiées, la suite $\{b^P\}$ générée par l'algorithme II. 3. 2, avec ℓ_i^P défini par (65) converge faiblement vers $\hat{b} \in S$. Si les hypothèses $(H'_4(a))$ et $(H_4(b))$ sont vérifiées, la convergence a lieu au sens de la topologie forte de V .

II. 4. 2 - Remarque

Il est clair que l'hypothèse (H'_1) implique l'hypothèse (H_1) .
 Il suffit d'ailleurs, en fait, que l'hypothèse (H'_1) soit vérifiée sur un borné \hat{B} "assez grand", c'est-à-dire tel que :

$$\hat{B} \supset \mathcal{B} [\text{Proj}_S b^0, //b^0 - \text{Proj}_S b^0//]$$

II. 4. 3 - Remarque

Le croisement de méthodes de Kelley n'est qu'un exemple de croisement de méthodes duales. Si on connaît un point intérieur pour certains des convexes C_i , $i \in J \subset [1, n]$, on pourra croiser, pour $i \in J$, des algorithmes de Kaplan⁽⁶⁾ avec, pour $i \notin J$ d'autres méthodes type Kelley. les théorèmes II. 3. 3 et II. 3. 4 établissant la convergence de ces procédés - cf. fig. 2 page III.39.

REFERENCES

- (1) A. AUSLENDER
Thèse, Grenoble, (1969)
- (2) J. CEA
"Les méthodes de descente en théorie de l'optimisation"
RIRO, 13-R-3, (1968), 79-101
- (3) W. CHENEY, A. A. GOLDSTEIN
"Proximity maps for convex sets"
Am. Math. Soc., 10, 3, (1959), 448-450
- (4) L. G. GUBIN, B. T. POLYAK, E. V. RAIK
"The method of projections for finding the Common point of convex sets"
Zh. Vychist. Mat. Mat. Fiz., 7, 6, (1967), 1211-1228
- (5) Y. HAUGAZEAU
Thèse, Paris, (1968)
- (6) A. A. KAPLAN
"Determination of the extremum of linear fonction on a convex set"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 178, 6, (1968), 269-271
- (7) J. E. KELLEY
"The cutting plane method for solving convex programs"
J. SIAM, 6, (1958), 15-22
- (8) P. J. LAURENT
"Approximation et optimisation"
Hermann, Paris, (1972)
- (9) P. J. LAURENT, B. MARTINET
"Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes"
Symposium on Optimisation, Nice, (1969) in Lect. Notes Math., 132, Springer-Verlag, Berlin, (1970), 159-180
- (10) E. S. LEVITIN, B. T. POLYAK
"Constrained minimization methods"
Zh. Vychist. Mat. Mat. Fiz., 6, 5, (1966), 787-823
- (11) E. S. LEVITIN, B. T. POLYAK
"Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 168, 5, (1966), 764-767
- (12) G. PIERRA
"Sur le croisement de méthode de descente et l'intersection ou la distance de deux convexes"
Colloque d'analyse numérique, La Colle-sur-Loup, (1973); et
C.R. Acad. Sci., Paris, 277, (1973), 1071-1074

- (13) G. PIERRA
"Croisement d'algorithmes pour trouver un point commun à plusieurs ensembles convexes"
Séminaire d'analyse numérique, Grenoble, (1973)
- (14) G. PIERRA
"Crossing of algorithms in decomposition methods"
IFAC Symposium on large scale systems theory and applications,
Udine, (1976).
- (15) G. PIERRA
"Méthodes de projections parallèles extrapolées relatives à une intersection de convexes"
Rapport de recherche, Mathématiques Appliquées et Informatique,
Grenoble, (1975)
- (16) P. SAINT-PIERRE
"Recherche de solutions réalisables par une méthode d'éclatement des contraintes"
Cahier de mathématiques de la décision, No 7404, Paris, (1974).

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV

PROJECTION SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES ET APPLICATIONS

On étudie ici le problème de la construction du projecteur sur une intersection de convexes d'un espace de Hilbert, c'est à dire, en changeant éventuellement de produit scalaire, celui de la minimisation de fonctionnelles quadratiques coercives.

Dans le cas où les convexes initiaux sont suffisamment simples, il peut être intéressant de décomposer le problème en sous-problèmes ne mettant chacun en jeu qu'un seul de ces convexes. De telles méthodes, consistant à "éclater les contraintes"⁽¹⁾, ont été proposées dans ⁽⁴⁾ et ⁽⁹⁾. Une formalisation équivalente du problème dans un espace produit permet ici d'élaborer, par décomposition, une méthode parallèle d'éclatement des contraintes à convergence accélérée ⁽¹³⁾.

La méthode proposée, de même que celle présentée dans ⁽⁴⁾, nécessitant que les projections sur chacun des convexes initiaux soient aisées à obtenir, on étudie ensuite, dans une deuxième partie, le cas où cette condition n'est pas réalisée. En associant à la méthode de décomposition précédente un croisement de méthodes duales ⁽⁹⁾, on définit ainsi une méthode ayant un champ d'application beaucoup plus large ⁽¹⁴⁾.

A titre d'applications, on présente, dans une troisième partie, et en utilisant un formalisme dû à ⁽⁵⁾, quelques méthodes de décomposition d'opérateurs dans des problèmes elliptiques ⁽¹³⁾.

I - PROJECTION SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES :I.1 - POSITION DU PROBLEME :

Soient

V un espace de Hilbert réel, identifié à son dual, de produit scalaire, norme et distance respectivement notés (\cdot, \cdot) , $\|\cdot\|$, $d(\cdot, \cdot)$

$C_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$, des ensembles convexes fermés.

$$C = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

$g \in V$ un élément donné

et le problème :

(U) "Trouver $u \in V$ tel que $\|u - g\| = \min [\|v - g\| ; v \in C]$ " .

Nous supposons que le problème n'est pas dégénéré et ferons les hypothèses :

$$(H_1) \quad C = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

$$(H_2) \quad g \notin C$$

Le problème (U) consiste à chercher la projection de g sur une intersection de convexes et nous nous proposons d'obtenir cette projection en utilisant des projections sur chacun des convexes C_i , $i = 1, \dots, n$.

I.2 - CAS PARTICULIER D'INTERSECTION DE CONVEXES ET NOTATIONS :I.2.1 - Définition

Etant donné un couple ordonné a, b de points d'un espace de Hilbert X , on convient de noter :

$$H(a, b) = \left\{ v \in X ; (v-b, b-a)_X \geq 0 \right\}$$

I.2.2 - Remarque

$H(a, a) = X$; Si $a \neq b$, $H(a, b)$ est un demi-espace fermé sur lequel b est la projection de a .

I. 2. 3 - Définition

Etant donné un triplet ordonné de point a, b, c , d'un espace de Hilbert X , on note $Q(a, b, c)$ la projection de a sur $H(a, b) \cap H(b, c)$

I. 2. 4 - Notations

Trois points a, b, c , étant donnés, on note :

$$\begin{aligned} \lambda &= (b - a, c - b)_X \\ \mu &= \|c - b\|_X^2 \\ \nu &= \|a - b\|_X^2 \\ \eta &= \mu\nu - \lambda^2 \end{aligned}$$

I. 2. 5 - Théorème ⁽⁴⁾

Trois points a, b, c , d'un espace de Hilbert X étant donnés, quatre éventualités constituent une partition des cas possibles :

- | | | |
|----|---|--|
| 1. | $\eta = 0, \lambda < 0$ | Alors $H(a, b) \cap H(b, c) = \emptyset$ |
| 2. | $\eta = 0, \lambda \geq 0$ | Alors $Q(a, b, c) = c$ |
| 3. | $\eta \neq 0, \lambda\mu - \eta \geq 0$ | Alors $Q(a, b, c) = a + (1 + \frac{\lambda}{\mu})(c - b)$ |
| 4. | $\eta \neq 0, \lambda\mu - \eta < 0$ | Alors $Q(a, b, c) = b + \frac{\mu}{\nu} (\nu(c - b) - \lambda(b - a))$ |

Ce théorème est démontré dans ⁽⁴⁾ dont on a conservé les notations.

I. 2. 6 - Projection sur un convexe :

L'idée de la méthode pour chercher la projection d'un point $x \in X$ sur un convexe $K \subset X$ est alors la suivante :

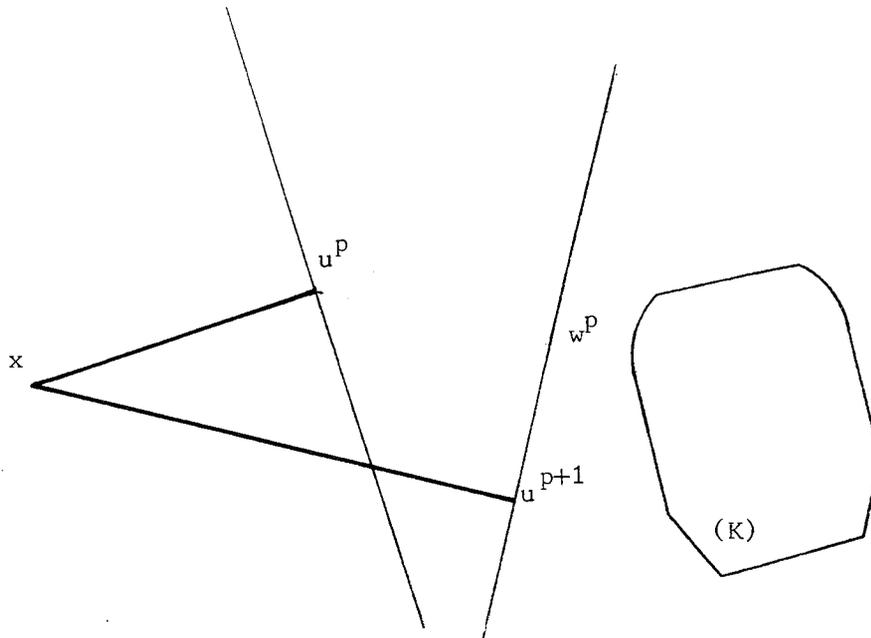
Supposons qu'à l'étape p de l'algorithme, nous connaissions :

$$u^p \in X \quad \text{tel que} \quad H(x, u^p) \supset K ;$$

on construit alors un nouveau demi-espace $H(u^p, w^p)$ contenant K et l'on définit u^{p+1} par :

$$u^{p+1} = Q(x, u^p, w^p) ;$$

cette projection étant calculée à l'aide du théorème I.2.5. Sous réserve que les approximations successives de K par $H(u^p, w^p)$ soient "bien choisies", on définit ainsi, et à partir de $u^0 = x$, une suite u^p convergeant vers $\text{Proj}_K x$.



I.3 - NOUVELLE FORMULATION DU PROBLEME :

On introduit maintenant :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V \text{ doté de la topologie produit par le produit scalaire } ((\dots)) = \sum_{i=1}^n (\dots)$$

sa norme et sa distance sont notées $\| \cdot \|$ et $d((\dots))$

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i \subset \mathcal{V}$$

et le convexe diagonal :

$$\mathcal{D} = \{ \mathfrak{b} = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{V} ; b \in V \} .$$

Rappelons ici quelques propriétés établies au chapitre II.

Le convexe diagonal, \mathcal{D} , est isomorphe à V par bijection $j : V \rightarrow \mathcal{D}$;
 $x \in V \mapsto j(x) = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{V}$. Nous n'identifierons pas V et \mathcal{D} et, pour alléger les notations, nous noterons l'image par j d'un élément de V par la lettre ronde correspondante ($j(b) = \mathfrak{b}$; $j(x) = \mathfrak{x}$...).

I.3.1 - Proposition :

L'image par j de l'intersection des n convexes C_i est l'intersection du convexe produit \mathcal{E} et du convexe diagonal \mathcal{D} :

$$j \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right) = \mathcal{E} \cap \mathcal{D}.$$

I.3.2 - Proposition :

i) La projection d'un point $b = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ sur \mathcal{E} a pour composantes les projections de b sur chacun des convexes C_i :

$$\text{Proj}_{\mathcal{E}} b = (\text{Proj}_{C_1} b, \text{Proj}_{C_2} b, \dots, \text{Proj}_{C_n} b)$$

ii) La projection d'un point $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}$ sur \mathcal{D} est l'image par j du barycentre des n points v_1, v_2, \dots, v_n :

$$\text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right)$$

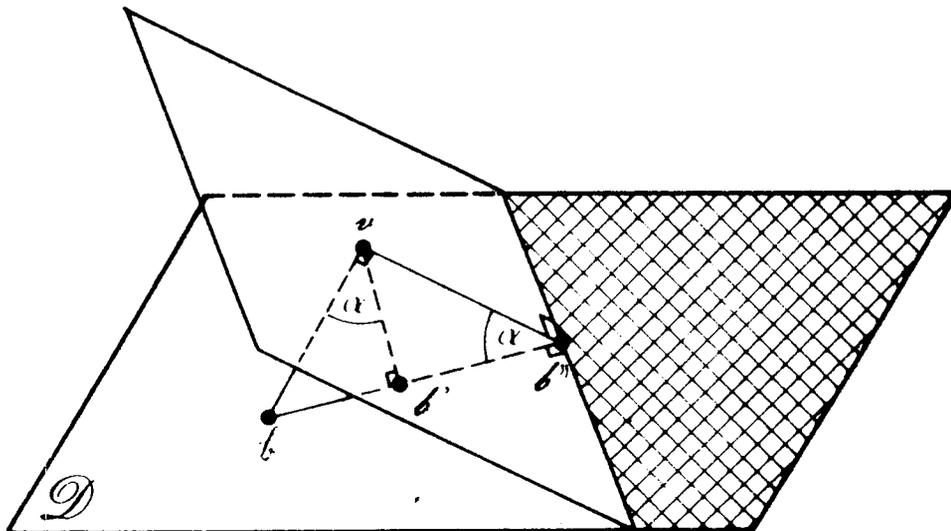
I.3.3 - Problème (U') :

Si l'on note donc $g = j(g) = (g, g, \dots, g)$, il résulte de la définition de la norme de \mathcal{V} que le problème (U) est équivalent, dans \mathcal{V} , au problème:

(U') "Trouver $u \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$ tel que $\|u - g\|^2 = \min [\|v - g\|^2 ; v \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}]$ ".

Nous nous proposons d'utiliser, pour résoudre le problème (U'), l'idée de l'algorithme I.2.6 et définissons donc une méthode de constructions successives de demi-espace contenant $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$.

I.4 - APPROXIMATION EXTERIEURE D'UNE INTERSECTION DE CONVEXES : THEOREME D'EXTRAPOLATION :



I.4.1 - Lemme :

Etant donné un couple $(b, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{V}$ et en notant b' la projection de v sur \mathcal{D} ,

1. Si $b = b' = v$, alors $\mathcal{D} \cap H(b, v) = \mathcal{D}$
2. Si $b = b' \neq v$, alors $\mathcal{D} \cap H(b, v) = \emptyset$
3. Si $b \neq b'$, on définit alors (15) l'extrapolé b'' par :

$$b'' = b' + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b' - b\|^2} (b' - b) = b + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b' - b\|^2} (b' - b) \quad (1)$$

et les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $x \in \mathcal{L} \cap H(b, v)$
- ii) $x \in \mathcal{L} \cap H(b, b'')$

Démonstration

Remarquons tout d'abord que, \mathcal{D} étant un sous-espace vectoriel

$$\forall x \in \mathcal{D}, ((x, v - b')) = 0 \quad (2)$$

1. Si $b = b' = v$ alors $H(b, v) = H(v, v) = \mathcal{V}$

2. Si $b = b' \neq v$, on a donc $\forall x \in \mathcal{D} ((x, v - b)) = 0$

et donc :

$$\forall x \in \mathcal{D} ((x - v, v - b)) = - \|v - b\|^2 < 0$$

d'où :

$$\mathcal{D} \cap H(b, v) = \emptyset$$

3.

ii \Rightarrow i. Soit $x \in \mathcal{D} \cap H(b, b' + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b - b'\|^2} (b' - b))$

On a donc :

$$((x - b' - \frac{\|b' - v\|^2}{\|b - b'\|^2} (b' - b), b' + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b - b'\|^2} (b' - b) - b) \geq 0$$

ou en développant :

$$\left[1 + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b - b'\|^2} \right] \cdot \left[((x - b', b' - b) - \frac{\|b' - v\|^2}{\|b - b'\|^2} \cdot \langle b - b', b' - b \rangle) \right] \geq 0$$

ou encore :

$$((x - b', b' - b) - \|b' - v\|^2) \geq 0$$

et compte-tenu de (2) :

$$((x - v, v - b)) \geq 0$$

i \Rightarrow ii Soit $x \in \mathcal{D} \cap H(b, v)$

On a donc :

$$((x - v, v - b)) \geq 0,$$

$$((x - b' + b' - v, v - b' + b' - b)) \geq 0$$

Compte-tenu de (2), il vient :

$$\langle x - b', b' - b \rangle - \|b' - v\|^2 \geq 0$$

et par le calcul précédent :

$$x \in \mathcal{D} \cap H \left(b, b' + \frac{\|b' - v\|^2}{\|b - b'\|^2} (b' - b) \right).$$

On en déduit le théorème (cf. Fig. 1 page IV-9)

I.4.2 - Théorème d'extrapolation dans \mathcal{V} :

On suppose maintenant que l'hypothèse (H_1) est vérifiée, et on considère un élément $b \in \mathcal{D}$. Si $b \notin \mathcal{E}$, on définit :

$$\begin{aligned} v &= \text{Proj}_{\mathcal{E}} b \\ b' &= \text{Proj}_{\mathcal{D}} v \\ b'' &= b + \frac{\|b - v\|^2}{\|b' - b\|^2} (b' - b), \end{aligned}$$

et l'on a :

- i) $b' \neq b$
- ii) $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{L} \cap H(b, b'')$

Démonstration :

Remarquons d'abord que l'hypothèse (H_1) : $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ implique, dans \mathcal{V} , $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. D'autre part, par définition de la projection sur un convexe, si $b \notin \mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} \subset H(b, v).$$

On en déduit donc que $\mathcal{D} \cap H(b, v) \neq \emptyset$.

Il suffit alors d'appliquer au couple (b, v) le lemme I.4.1 qui montre que $b' \neq b$ et établit le théorème.

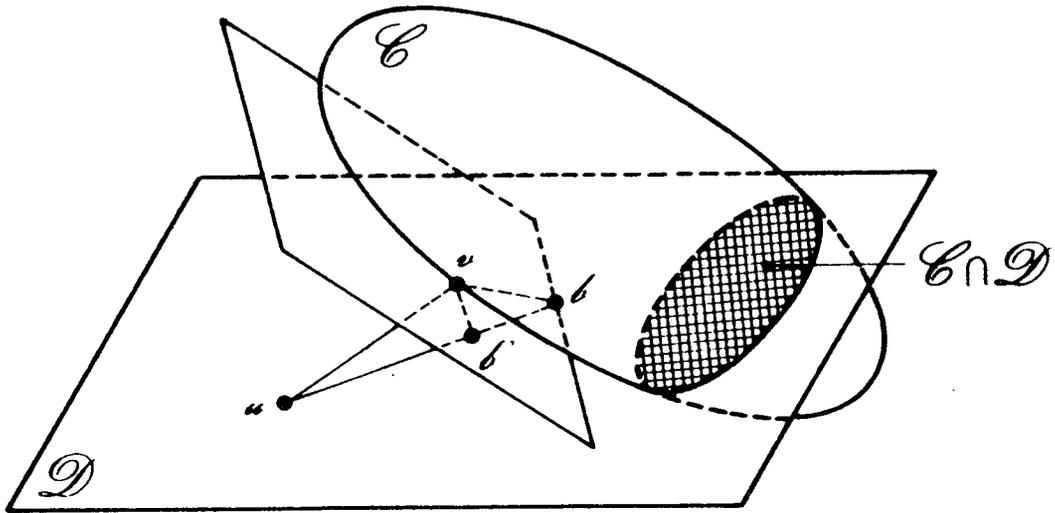


FIGURE 1 - Représentation de l'extrapolation dans V

Si nous exprimons dans l'espace V le théorème d'extrapolation, il vient, compte tenu de la proposition I.3.2 :

I.4.3 - Théorème d'extrapolation dans V :

L'hypothèse (H_1) étant vérifiée, on considère un élément $b \in V$; $b \notin \bigcap_{i=1}^n C_i$.

On définit :

$$v_i = \text{Proj}_{C_i} b$$

$$b' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

$$b'' = b + \frac{\sum_{i=1}^n \|b - v_i\|^2}{n \|b' - b\|^2} \cdot (b' - b)$$

et l'on a :

i) $b' \neq b$

ii) $C = \bigcap_{i=1}^n C_i \subset H(b, b'')$.

I.4.4 - Remarque :

Comme dans ⁽¹⁵⁾ (cf II - I.6) l'on peut, en modifiant la norme de \mathcal{U} , faire intervenir des pondérations dans le calcul du barycentre des v_i , $i = 1, \dots, n$.

I.5 - DESCRIPTION DE LA METHODE :

Le théorème d'extrapolation I.4.2 donne une méthode de constructions successives de demi-espaces contenant $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. Supposons donc qu'à l'étape $p - 1$ de l'algorithme, nous connaissions :

$$u^{p-1} \in \mathcal{U} \text{ tel que } H(u^{p-1}, u^{p-1}) \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D},$$

on construit alors, si $u^{p-1} \notin \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$, une nouvelle approximation extérieure $H(u^{p-1}, u^p) \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$ par :

$$v^p = \text{Proj}_{\mathbb{C}} u^{p-1}$$

$$b'^p = \text{Proj}_{\mathbb{D}} v^p$$

$$b^p = u^{p-1} + \frac{\|v^p - u^{p-1}\|^2}{\|b'^p - u^{p-1}\|^2} (b'^p - u^{p-1})$$

et l'on définit u^p :

$$u^p = Q(g, u^{p-1}, b^p).$$

Nous pouvons maintenant décrire, dans l'espace V, l'algorithme proposé :

I.5.1 - Algorithme :

Partant de $u^0 = g$, le passage de u^{p-1} à u^p s'effectue de la façon suivante :

1. On calcule pour $i = 1, \dots, n$

$$v_i^p = \text{Proj}_{C_i} u^{p-1}$$

si $v_i^p = u^{p-1}$, $i = 1, \dots, n$, on pose $\hat{u} = u^{p-1}$ et on stoppe l'algorithme
sinon :

2. On définit :

$$b'^p = \frac{1}{n} \sum v_i^p$$

et l'extrapolé :

$$b^p = u^{p-1} + \frac{\sum_i \|v_i^p - u^{p-1}\|^2}{n \|b'^p - u^{p-1}\|^2} (b'^p - u^{p-1})$$

3. On calcule alors :

$$u^p = Q(g, u^{p-1}, b^p)$$

Les définitions 2 et 3 ne sont justifiées que si $b'^p \neq u^{p-1}$ et si le cas 1 du théorème I.2.5 ne se produit pas dans le déroulement de l'algorithme. Si

$u^{p-1} = v_i^p$, $i = 1, \dots, n$, l'algorithme stoppe. Seul donc nous intéresse le cas

$$u^{p-1} \neq v^p.$$

I.5.2 - Lemme

Sous les hypothèses H_1 et H_2 , si $u^{p-1} \neq v^p$, et si $H(g, u^{p-1})$ contient C , alors :

- i) $\|b^{p-1} - u^{p-1}\| \neq 0$
- ii) $H(u^{p-1}, b^p)$ contient C
- iii) $H(g, u^p)$ contient C .

Les points i) et ii) résultent directement du théorème d'extrapolation puisque $u^{p-1} \notin C$.

De plus, puisque $H(g, u^{p-1}) \cap H(u^{p-1}, b^p)$ contient C , la projection $Q(g, u^{p-1}, b^p)$ est bien définie et, par définition de la projection sur un convexe :

$$H(g, u^p) \supset H(u^{p-1}, b^p) \cap H(g, u^{p-1}) \supset C.$$

I.5.3 - Remarque.

L'algorithme I.5.1 comporte donc trois phases :

- la première étape résout en parallèle les problèmes locaux de projection.
- la deuxième phase coordonne - b^{p-1} - et extrapole - b^p - ces solutions locales
- la troisième phase effectue la coordination générale des deux phases précédentes

I.5.4 - Remarque

Comme dans les algorithmes de chapitre II il est possible, pour "recentrer" les itérés successifs, de ne pas effectuer à chaque pas l'extrapolation, c'est-à-dire de prendre $b^p = b^{p-1}$ pour certaines valeurs de p .

I.6. - CONVERGENCE DE LA METHODE :

On a le résultat suivant.

I.6.1 - Théorème

Sous les hypothèses H_1 et H_2 , si la suite $\{u^p\}$ définie par l'algorithme I.5.1 est finie, son dernier élément est solution de (U); si la suite est infinie, elle converge fortement vers la solution de (U).

Démonstration

Remarquons tout d'abord que, puisque $C \neq \emptyset$, $H(g, b^1)$ contient C , donc $H(g, u^1) = H(g, b^1)$ contient C , et donc, par récurrence sur p , $H(g, u^p)$ contient C .

Si la suite est finie, cela signifie :

$$v_i^p = u^{p-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

c'est-à-dire :

$$u^{p-1} \in C,$$

et puisque

$$C \subset H(g, u^{p-1}),$$

$$u^{p-1} = \text{Proj}_C g$$

et u^{p-1} est solution de (U).

Supposons donc la suite u^p infinie.

1er point

La suite $\|u^p - g\|$ est croissante, bornée, donc convergente.

En effet, par définition de u^p , u^p appartient au convexe $H(g, u^{p-1})$ sur lequel u^{p-1} est projection de g . La suite $\{\|u^p - g\|\}$ est donc non décroissante. D'autre part, d'après le lemme 1.5.2 :

$$C \subset H(g, u^p)$$

d'où :

$$\|u^p - g\| \leq \|x - g\|, \quad \forall x \in C,$$

et, puisque C est non vide, la suite $\{\|u^p - g\|\}$ est bornée. Elle est donc convergente. Il en est de même des suites

$$\{\|u^p - g\|^2\} \quad \text{et} \quad \{\|u^p - g\|^2\}.$$

On en tire en particulier :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\|u^{p-1} - g\|^2 - \|u^p - g\|^2] = 0$$

et, puisque

$$u^p \in H(g, u^{p-1}),$$

$$(u^p - u^{p-1}, u^{p-1} - g) \geq 0$$

ceci entraîne :

$$\|u^{p-1} - g\|^2 - \|u^p - g\|^2 \geq \|u^p - u^{p-1}\|^2$$

et on a donc :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - u^{p-1}\|^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - u^{p-1}\|^2 = 0$$

De plus, puisque $u^p \in H(u^{p-1}, b^p)$:

$$\|u^{p-1} - b^p\|^2 \leq \|u^{p-1} - b^p\|^2 \leq \|u^{p-1} - u^{p-1}\|^2$$

d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - b^p\|^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - b^p\|^2 = 0. \quad (3)$$

2ème point

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p-1} - v^p\|^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - b^p\|^2 = 0$$

Exprimons $\|b^p - u^{p-1}\|^2$, il vient :

$$\|b^p - u^{p-1}\|^2 = \|b^p - v^p\|^2 + \|v^p - u^{p-1}\|^2 + 2\langle b^p - v^p, v^p - u^{p-1} \rangle \quad (4)$$

Si nous appliquons alors le lemme I.4.1 au couple (u^{p-1}, v^p) , puisque

$$b^p \in \mathcal{D} \cap H(u^{p-1}, b^p)$$

on en déduit :

$$b^p \in \mathcal{D} \cap H(u^{p-1}, v^p)$$

et donc :

$$\langle b^p - v^p, v^p - u^{p-1} \rangle \geq 0.$$

En reportant cette inégalité dans (4), il vient :

$$\|b^p - u^{p-1}\|^2 \geq \|b^p - v^p\|^2 + \|v^p - u^{p-1}\|^2,$$

et donc, par (3) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|b^p - v^p\|^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - u^{p-1}\|^2 = 0.$$

3ème point

Il existe une sous-suite $\{u^q\}$ de $\{u^p\}$ convergeant faiblement vers un élément $\hat{u} \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$

La suite $\{u^p\}$ étant bornée, il existe une sous-suite $\{u^q\}$ convergeant faiblement vers \hat{u} . \mathcal{D} étant convexe fermé, $\hat{u} \in \mathcal{D}$. Considérons alors l'application $u \mapsto d(u, \mathcal{C})$. Cette application est continue convexe, donc faiblement s. c. i. On a donc :

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} d(u^q, \mathcal{C}) \geq d(\hat{u}, \mathcal{C}),$$

et, puisque

$$d(u^q, \mathcal{C}) \leq d(u^q, v^{q+1})$$

il vient :

$$d(\hat{u}, \mathcal{C}) = 0, \quad \hat{u} \in \mathcal{C}.$$

4ème point

$\{u^p\}$ converge fortement vers $\text{Proj}_{\mathcal{C}} g$

La f. s. c. i. de la norme entraîne pour $\{u^q\}$:

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \|g - u^q\| \geq \|g - \hat{u}\|$$

Or,

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}, \quad \|g - u^q\| \leq \|g - x\|$$

d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|g - u^q\| = \|g - \hat{u}\|$$

et :

$$\hat{u} = \text{Proj}_{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} g.$$

Enfin, puisque

$$\hat{u} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset H(g, u^q),$$

$$\|g - \hat{u}\|^2 \geq \|g - u^q\|^2 + \|u^q - \hat{u}\|^2$$

et donc :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^q - \hat{u}\|^2 = 0$$

La sous-suite $\{u^q\}$ converge donc fortement vers \hat{u} , c'est donc toute la suite $\{u^p\}$ qui converge vers $\text{Proj}_{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} g$, ce que l'on peut aussi écrire :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - \text{Proj}_{\mathcal{C}} g\| = 0$$

I.7 - APPLICATIONS :I.7.1 - Inéquations variationnelles

Nous conservons les notations précédentes et soient :

- f un élément de V
 - a(u, v) une forme bilinéaire continue sur V x V, symétrique et coercive
- $$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

Considérons le problème variationnel :

$$(U^2) \text{ "Trouver } u \in C = \bigcap_{i=1}^n C_i, \text{ tel que } a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in C \text{ "}$$

On sait que, sous les hypothèses faites, ce problème est équivalent au problème d'optimisation.

$$(U^3) \text{ "Trouver } u \in C, \text{ tel que } a(u, u) - 2(f, u) = \min [a(v, v) - 2(f, v); v \in C] \text{ "}$$

Nous savons, par le théorème de Lax-Milgram, qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V)$ admettant un inverse tel que :

$$a(u, v) = (Au, v) \quad \forall v \in V, \quad \forall u \in V.$$

En posant alors :

$$g = A^{-1} f$$

et en ajoutant le terme constant $a(g, g)$ le problème (U^3) est équivalent à :

$$(U^4) \text{ "Trouver } u \in C, \text{ tel que } a(u-g, u-g) = \min [a(v-g, v-g); v \in C] \text{ "},$$

c'est-à-dire à la recherche de la projection de g sur C , pour le produit scalaire $a(., .)$.

L'algorithme est alors le suivant :

On calcule v_i^0 par :

$$a(v_i^0, v_i^0) - 2(f, v_i^0) = \min [a(v, v) - 2(f, v); v \in C_i] \quad i = 1, \dots, n$$

et u^0 par :

$$u^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^0$$

Le passage de u^{p-1} à u^p s'effectue de la façon suivante :

1. On calcule en parallèle, pour $i = 1, \dots, n$, v_i^p défini par :

$$a(v_i^p, v_i^p) - 2a(v_i^p, u^{p-1}) = \min [a(v, v) - 2a(v, u^{p-1}) ; v \in C_i]$$

2. On coordonne en calculant :

$$b^{p'} = \frac{1}{n} \sum_i v_i^p$$

$$b^p = b^{p'} + \frac{\sum a(v_i^p - b^{p'}, v_i^p - b^{p'})}{n \cdot a(b^{p'} - u^{p-1}, b^{p'} - u^{p-1})} (b^{p'} - u^{p-1})$$

3. Enfin, en notant :

$$H^{p-1} = \left\{ v \in V ; a(v - u^{p-1}, u^{p-1}) - (f, v - u^{p-1}) \geq 0 \right\}$$

$$D^p = \left\{ v \in V ; a(v - b^p, b^p - u^{p-1}) \geq 0 \right\} ;$$

u^p est défini par :

$$a(u^p, u^p) - 2(f, u^p) = \min [a(v, v) - 2(f, v) ; v \in D^p \cap H^{p-1}] .$$

V. 5. 2 - Programmation quadratique

On prend $V = \mathbb{R}^q$ et on cherche à minimiser une forme quadratique définie positive $\phi(\cdot)$ sur un convexe limité par un nombre fini n d'hyperplans. L'algorithme, très simple à expliciter dans ce cas, demande la recherche préalable des directions ϕ -orthogonales aux n contraintes. Dans ce cas également la méthode semble nouvelle.

II - CROISEMENT SERIE-PARALLELE DE METHODES DUALES POUR LA

MINIMISATION DE FORMES QUADRATIQUES :

La méthode de décomposition présentée au § 1, de même que la méthode proposée par Y. HAUGAZEAU dans ⁽⁴⁾ permet d'obtenir la projection d'un point sur une intersection de convexes à partir de projections sur chacun de ces convexes. Ces méthodes ne sont donc utilisables que dans les cas, particuliers, où ces projections sont faciles à calculer numériquement. L'utilisation de croisement d'algorithmes ⁽¹³⁾ ⁽¹⁴⁾ permet d'étendre l'utilisation de ces méthodes au cas où les convexes donnés sont quelconques. Les algorithmes ainsi croisés seront ceux regroupés par P.J. LAURENT et B. MARTINET ⁽⁹⁾ sous le nom de "méthodes duales" et qui recouvrent un grand nombre de méthodes de type approximation extérieure usuelles : méthodes de KELLEY ⁽⁷⁾, de KAPLAN ⁽⁶⁾ ... ⁽¹⁰⁾. Ces croisements d'algorithmes permettent, en particulier, d'obtenir des méthodes simples de linéarisation des contraintes.

Nous présentons dans cette partie un croisement de méthodes duales associé à une méthode de décomposition série-parallèle qui constitue une (petite) généralisation de la méthode du paragraphe précédent et qui admet également l'algorithme d'Haugazeau comme cas particulier.

II.1 - PRINCIPE DES METHODES DUALES POUR LA MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES ⁽⁹⁾ :

Considérons dans un espace de Hilbert V_i , de produit scalaire et de norme, notés $(.,.)$ et $||.||$, (l'indice inférieur i est destiné à coordonner les notations de ce paragraphe avec celles utilisées dans la suite de ce travail), le problème :

$$(N_i) \text{ "Trouver } \hat{v}_i \in C_i \text{ tel que } f_i(\hat{v}_i) = \min [f(v_i) ; v_i \in C_i] "$$

f_i étant une fonction convexe sur V_i , et le convexe C_i étant défini par :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i, \ell} .$$

Les $C_{i, \ell}$ sont des convexes fermés de V_i :

$$C_{i, \ell} = \left\{ v_i \in V_i ; h_{i, \ell}(v_i) \leq 0 \right\}$$

où les fonctions $h_{i, \ell}$ sont convexes s.c.i., et L_i un ensemble d'indices quelconque. Nous ferons la convention suivante : L_i comporte toujours un indice, noté ℓ_i^0 , tel que : $h_{i, \ell_i^0}(v) \equiv 0$.

On se propose de construire une suite $\{v_i^p\}$ destinée à converger vers \hat{v}_i , en minimisant la fonction f_i sur une suite de convexes C_i^p incluant C_i . Plus précisément :

II. 1. 1 - Calcul de v_i^{p+1}

Supposons qu'à la p ième itération, nous ayons un couple (v_i^p, K_i^p) , $v_i^p \in V_i$ et K_i^p étant un convexe fermé, tels que :

$$\begin{cases} K_i^p \supset C_i \\ v_i^p \in K_i^p \\ f_i(v_i^p) = \min [f_i(v_i) ; v_i \in K_i^p] \end{cases} \quad (1)$$

Si $v_i^p \notin C_i$, il existe alors $l_i^p \in L_i$ tel que $v_i^p \notin C_{i, l_i^p}$

Si $v_i^p \in C_i$, il est clair que v_i^p est solution de (N_i) . On pose alors conventionnellement : $l_i^p = l_i^0$. (2)

On définit alors la nouvelle approximation externe C_i^p de C_i

par :

$$C_i^p = K_i^p \cap C_{i, l_i^p} \quad (3)$$

et on calcule le nouvel itéré v_i^{p+1} :

$$\begin{cases} v_i^{p+1} \in C_i^p \\ f_i(v_i^{p+1}) = \min [f_i(v_i) ; v_i \in C_i^p] \end{cases} \quad (4)$$

II. 1. 2 - Choix de l_i^p si $v_i^p \notin C_i$

On se donne une suite de nombres $\{r_i^p\}$ avec :

$$r_i^p > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} r_i^p = 0$$

ainsi qu'un nombre θ_i vérifiant $0 < \theta_i \leq 1$.

Puisque $v_i^P \notin C_i$, on choisit l'indice ℓ_i^P de telle sorte que :

$$\begin{cases} v_i^P \notin C_i, \ell_i^P \\ h_{i, \ell_i^P}(v_i^P) \geq \theta_i \cdot \text{Sup} [h_{i, \ell}(v_i^P); \ell \in L_i] - r_i^P \end{cases} \quad (5)$$

II. 1. 3 - Définition de K_i^{p+1}

On choisit alors un convexe fermé K_i^{p+1} tel que l'on ait encore

$$\begin{cases} K_i^{p+1} \supset C_i \\ v_i^{p+1} \in K_i^{p+1} \\ f_i(v_i^{p+1}) = \min [f_i(v_i); v_i \in K_i^{p+1}] \end{cases} \quad (6)$$

II.2-POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES

Nous reprenons ici les notations et hypothèses du I . Soient donc :

V espace de Hilbert réel, identifié à son dual $(...), //...//, d(...)$;

$C_i \subset V, i = 1, \dots, n$ des ensembles convexes fermés ;

$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V$, avec les notations $\langle \langle \dots \rangle \rangle, \langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle, d(\langle \dots \rangle)$;

$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$;

$\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$ le convexe diagonal ;

$g = (g, \dots, g) \in \mathcal{D}$;

et le problème :

(U) "Trouver $u \in C = \bigcap_{i=1}^n C_i$ tel que $//u-g// = \min [//v-g//; v \in C]$ "

équivalent, dans \mathcal{V} , au problème :

(U') "Trouver $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ tel que $\\\langle \langle \langle u-g \rangle \rangle \rangle^2 = \min [\\\langle \langle \langle v-g \rangle \rangle \rangle^2; v \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}]$ "

Nous supposons que chacun des convexes C_i , $i = 1, \dots, n$, est défini par :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i, \ell}$$

ou les $C_{i, \ell}$ sont des convexes fermés de V ,

$$C_{i, \ell} = \{x \in V ; h_{i, \ell}(x) \leq 0\}$$

les fonctions $h_{i, \ell}$ étant convexes et s.c.i., et L_i , $i = 1, \dots, n$ étant des ensembles quelconques d'indices avec la convention $\ell_i^0 \in L_i$ et $h_{i, \ell_i^0}(v) = 0 \forall v \in V_i$, $i = 1, \dots, n$.

II.2.1 - Hypothèses :

Nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \quad C = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

$$(H_2) \quad g \notin C$$

$$(H_3) \quad \text{Pour } i = 1, \dots, n \text{ et pour tout borné } B \text{ de } V, \text{ il existe } K_i > 0 \text{ tel que pour tout } \ell \in L_i \text{ et pour tout } x \in B :$$

$$h_{i, \ell}(x) \leq K_i \cdot d(x, C_{i, \ell}).$$

II.2.2 - Caractérisation de la solution :

Il résulte du théorème des projections que, sous l'hypothèse (H_1) le problème (U), et donc également le problème (U'), possèdent chacun une solution unique \hat{u} - resp \hat{u} - caractérisée par :

$$\begin{aligned} \langle w - \hat{u}, \hat{u} - g \rangle &\geq 0 & \forall w \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \\ \langle w - \hat{u}, \hat{u} - g \rangle &\geq 0 & \forall w \in C = \bigcap_{i=1}^n C_i \end{aligned}$$

et que l'on a :

$$\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n).$$

II.2.3 - Notations :

Etant donnés deux points, a et b , d'un espace de Hilbert X , nous conviendrons, à nouveau, de noter :

$$H(a, b) = \left\{ v \in X ; (v-b, b-a)_X \geq 0 \right\};$$

c étant un troisième élément de X , nous noterons $Q(a, b, c)$ la projection de a sur $H(a, b) \cap H(b, c)$.

II.3 - APPROXIMATION EXTERIEURE DE \mathcal{C} :

Nous supposons, ici, qu'à chaque pas de l'algorithme, nous nous donnons une approximation extérieure $\mathcal{C}^p \supset \mathcal{C}$

II.3.1 - Description de la méthode :

Supposons qu'à la $p^{\text{ième}}$ itération nous ayons un élément $u^p \in \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset H(g, u^p)$. Soit alors $\mathcal{C}^p \supset \mathcal{C}$ (cf. fig. 2 p. IV-23 et cf. fig. 3 p. IV-32)

Si $u^p \in \mathcal{C}^p$, on pose $v^{p+1} = b'^{p+1} = b^{p+1} = u^{p+1} = u^p$

Si $u^p \notin \mathcal{C}^p$, on définit :

1) $v^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{C}^p} u^p$

2) $b'^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v^{p+1}$

et l'extrapolé :

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\|v^{p+1} - u^p\|^2}{\|b'^{p+1} - u^p\|^2} \cdot (b'^{p+1} - u^p)$$

3) $u^{p+1} = Q(g, u^p, b^{p+1})$

Comme en I.5.2, on vérifie que ces définitions sont bien justifiées si les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées.

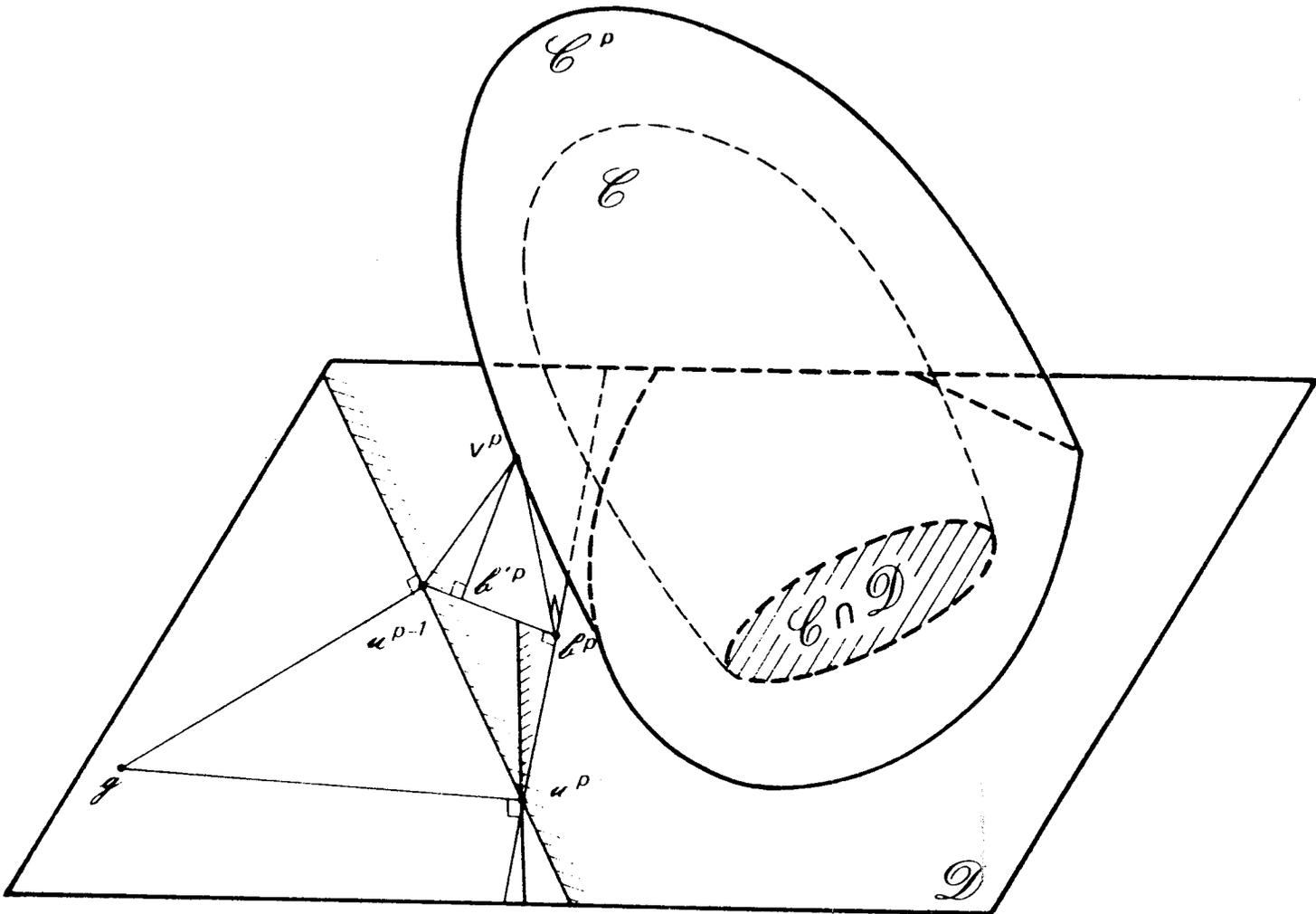


FIGURE 2 - Croisement d'algorithmes duaux pour la recherche de la projection sur une intersection de convexes. Représentation dans \mathcal{V}

II.3.2 - Propriétés de la suite $\{u^p\}$:

Si $u^{p+1} = u^p$, alors, par hypothèse $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \subset H(g, u^{p+1})$

Si $u^{p+1} \neq u^p$, comme en I.5.2, on vérifie que :

$$\mathcal{E}^p \cap \mathcal{D} \subset H(g, u^{p+1}),$$

et par définition de \mathcal{E}^p :

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \subset H(g, u^{p+1}). \quad (7)$$

Il résulte des propriétés des projections que la suite $\|u^p - g\|$ est croissante et bornée, donc convergente, et que :

$$\|u^{p+1} - g\|^2 \geq \|u^p - g\|^2 + \|u^{p+1} - u^p\|^2.$$

On en déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p+1} - u^p\| = 0 \quad (8)$$

et puisque $u^{p+1} \in H(u^p, b^{p+1})$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - b^{p+1}\| = 0 \quad (9)$$

d'où par définition de b^{p+1} :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v^{p+1} - u^p\| = 0 \quad (10)$$

II.3.3 - Définition de \mathcal{E}^p :

Pour chaque valeur de p , $p = 1, 2, \dots$, on se donne un ensemble $I^p \subset [1, n]$; ces ensembles obéissent à la propriété :

(TT) " Il existe un entier N tel que pour tout $i \in [1, n]$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \{p, p+1, \dots, p+N\}$ tel que :

$$i \in I^q. "$$

On définit alors \mathcal{E}^p par :

$$\mathcal{E}^p = \prod_{i=1}^n K_i^p :$$

- Si $i \notin I^P$, on pose $K_i^P = V$
 - Si $i \in I^P$, on définit $\ell_i^P \in L_i$ comme en II.1.1 pour le couple $(\mathbf{1})$, (u^P, V) , c'est-à-dire :

- si $u^P \in C_i$, on pose $\ell_i^P = \ell_i^0$ (11)

- si $u^P \notin C_i$, on choisit ℓ_i^P de telle sorte que :

$$\begin{cases} u^P \notin C_i, \ell_i^P \\ h_{i, \ell_i^P}(u^P) \geq \theta_i \cdot \sup_{\ell \in L_i} (h_{i, \ell}(u^P)) - r_i^P. \end{cases} \quad (12)$$

et l'on pose :

$$K_i^P = C_i, \ell_i^P.$$

II.3.4 - Notations :

- 1) On convient de noter $|A|$ le cardinal de l'ensemble A .
- 2) On note :

$$I_o^P = \{i \in I^P ; u_i^P \notin C_i\},$$

si $I_o^P = \emptyset$, alors $\mu^P \in \mathcal{B}^P$ et $\mu^{P+1} = \mu^P$.

II.3.5 - Lemme :

Si $I_o^P \neq \emptyset$, alors les trois définitions suivantes de l'extrapolé \mathcal{B}^{P+1} sont équivalentes :

i)
$$b^{P+1} = u^P + \frac{\|v^{P+1} - u^P\|^2}{\|b^{P+1} - u^P\|^2} (b^{P+1} - u^P)$$

ii)
$$b^{P+1} = u^P + \frac{\sum_{i \in I^P} \|v_i^{P+1} - u^P\|^2}{|I^P| \cdot \frac{1}{|I^P|} \sum_{i \in I^P} \|v_i^{P+1} - u^P\|^2} \cdot \left(\frac{1}{|I^P|} \cdot \sum_{i \in I^P} v_i^{P+1} - u^P \right)$$

iii)
$$b^{P+1} = u^P + \frac{\sum_{i \in I_o^P} \|v_i^{P+1} - u^P\|^2}{|I_o^P| \cdot \frac{1}{|I_o^P|} \sum_{i \in I_o^P} \|v_i^{P+1} - u^P\|^2} \cdot \left(\frac{1}{|I_o^P|} \sum_{i \in I_o^P} v_i^{P+1} - u^P \right)$$

Démonstration

Si $u^p \in K_i^p$, alors $v_i^{p+1} = u^p$. Les expressions suivantes sont donc, deux à deux, équivalentes :

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{\|b^{p+1} - u^p\|^2} (b^{p+1} - u^p)$$

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\sum_{I^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{n \frac{1}{n} \left(\sum_{I^p} v_i^{p+1} + (n - |I^p|) u^p \right) - u^p} \cdot \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{I^p} v_i^{p+1} + (n - |I^p|) u^p \right) - u^p \right)$$

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\sum_{I^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{\frac{1}{n} \sum_{I^p} v_i^{p+1} - |I^p| \cdot u^p} \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{I^p} v_i^{p+1} - |I^p| \cdot u^p \right)$$

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\sum_{I^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{|I^p| \cdot \frac{1}{|I^p|} \sum_{I^p} v_i^{p+1} - u^p} \left(\frac{1}{|I^p|} \sum_{I^p} v_i^{p+1} - u^p \right)$$

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\sum_{I_o^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{|I_o^p| \cdot \frac{1}{|I_o^p|} \sum_{I_o^p} v_i^{p+1} - u^p} \left(\frac{1}{|I_o^p|} \sum_{I_o^p} v_i^{p+1} - u^p \right)$$

II.3.6 - Remarque :

Le lemme II.3.5 montre qu'il est équivalent, pour définir b^{p+1} et u^{p+1} , de mettre en oeuvre la méthode II.3.1 :

- ou dans l'espace \mathcal{V} et pour une approximation de \mathcal{C}
- ou dans l'espace $V_{|I_o^p|}$ - resp $V_{|I^p|}$ - et pour une approximation extérieure de

$$\prod_{i \in I_o^p} C_i \quad \text{- resp -} \quad \prod_{i \in I^p} C_i$$

En particulier, si l'on prend à chaque pas I^P tel que $|I^P| = 1$, alors $V|I^P| \equiv V$ et :

$$b^{p+1} = \text{Proj}_{C_i^P} u^P, \quad i \text{ tel que } \{i\} = I^P.$$

Il s'agit donc, dans ce cas, de croisement d'algorithmes "série" ; en particulier si on prend :

$$I^P = \{p\} \text{ mod } n$$

la méthode II.3.1 constitue un croisement d'algorithmes duaux associé à la méthode de décomposition série de HAUGAZEAU⁽⁴⁾.

II.4 - CROISEMENT SERIE-PARALLELE DE METHODES DUALES

II.4.1 - Exemple de choix de I^P :

Donnons quelques exemples de choix de I^P , vérifiant la propriété (TT) :

$$1) \quad I^P = \{p\} \text{ mod } n ;$$

(croisement d'algorithmes associé à la méthode série de Y.Haugazeau)

$$2) \quad I^P = [1, n]$$

(croisement d'algorithmes associé à la méthode parallèle du paragraphe I)

3) On peut définir de nombreuses méthodes intermédiaires, séries-parallèles, où à chaque pas, un certain nombre de convexes C_i , seulement, sont retenus, et sont traités en parallèle. L'étude des stratégies optimales de choix de I^P , eu égard à la vitesse de convergence de l'algorithme, reste à faire.

Décrivons maintenant l'algorithme dans V

II.4.2 - Algorithme :

On pose $u^1 = g$; le passage de u^p à u^{p+1} s'effectue de la façon suivante : on se donne $I^p \subset [1, n]$ et on définit, pour $i \in I^p$, K_i^p comme en II.3.3 et :

$$I_o^p = \left\{ i \in I^p ; u^p \notin K_i^p \right\}.$$

Si $I_o^p = \emptyset$, alors on pose $u^{p+1} = u^p$

Si $I_o^p \neq \emptyset$, on calcule alors :

$$1) \quad v_i^{p+1} = \text{Proj}_{K_i^p} u^p, \quad i \in I_o^p$$

$$2) \quad b_o^{p+1} = u^p + \frac{\sum_{I_o^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{\left| I_o^p \right| \cdot \left\| \frac{1}{\left| I_o^p \right|} \sum_{I_o^p} v_i^{p+1} - u^p \right\|^2} \left(\frac{1}{\left| I_o^p \right|} \sum_{I_o^p} v_i^{p+1} - u^p \right)$$

$$3) \quad u^{p+1} = Q(g, u^p, b_o^{p+1})$$

II.4.3 - Convergence de l'algorithme :

Théorème

Si les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées, et pour toute suite $\{I^p\}$ obeissant à la propriété (TT), la suite $\{u^p\}$ définie par l'algorithme II.4.2 converge vers \hat{u} au sens de la topologie forte de V.

Démonstration

1er point - Convergence d'une sous-suite :

Soit $Q'_1 \subset \mathbb{N}$ définie par :

$$Q'_1 = \left\{ p \in \mathbb{N} ; I \in I^p \right\} ;$$

La suite $\{u^p\}$, $p \in Q'_1$ possède une sous-suite $\{u^q\}$, $q \in Q_1 \subset Q'_1$ faiblement convergente vers un élément $\hat{u}_1 \in V$. Des propriétés - cf. II.3.2 - de la suite $\{u^p\}$, on déduit pour $q \in Q'_1$:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|\|v^{q+1} - u^q\|\| = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|\|v_1^{q+1} - u^q\|\| = 0,$$

et donc :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d(u^q, K_1^q) = 0$$

La suite $\{u^q\}$ étant bornée, on déduit de l'hypothèse (H₃) :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sup_{h_{1, \ell}^q(u^q)} \leq 0,$$

et par définition de ℓ_1^q (11), (12) - cf II.3.3 - :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sup_{\ell \in L_1} (\text{Sup } [h_{1, \ell}(u^q)]) \leq 0$$

Chacune des fonctionnelles $h_{1, \ell}$, $\ell \in L_1$, étant faiblement s.c.i., il vient :

$$h_{1, \ell}(\hat{u}_1) \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} h_{1, \ell}(u^q) \leq 0, \quad \forall \ell \in L_1$$

et donc $\hat{u}_1 \in C_1$.

La suite $\{I^p\}$ possédant la propriété (TT), nous considérons alors l'ensemble $Q'_2 \subset \mathbb{N}$ et défini par :

$$Q'_2 = \{p+r; p \in Q_1, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq N, z \in I^{p+r}\}.$$

La suite $\{u^q\}$, $q \in Q'_2$ possède une sous-suite $\{u^q\}$, $q \in Q_2 \subset Q'_2$ qui converge faiblement vers un élément $\hat{u}_2 \in V$. Il est clair que :

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in Q_2}} \sup_{\ell \in L_2} (\text{Sup } [h_{2, \ell}(u^q)]) \leq 0$$

d'ou l'on déduit :

$$\hat{u}_2 \in C_2$$

Mais d'autre part, les propriétés de la suite $\{u^p\}$ - cf II.3.2 - entraînent :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - u^{p+r}\| = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r \leq M,$$

la suite $\{u^q\}$, $q \in Q_2$ converge donc faiblement vers \hat{u}_1 d'ou :

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_2$$

et :

$$\hat{u}_1 \in C_1 \cap C_2.$$

En introduisant alors, pour $i = 3, \dots, n$, l'ensemble $Q'_i \subset \mathbb{N}$:

$$Q'_i = \left\{ p+r; p \in Q_1, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq M, i \in I^{p+r} \right\},$$

et en reprenant le raisonnement précédent, on obtient :

$$\hat{u}_1 \in \bigcap_{i=1}^n C_i$$

2ème point - Convergence de la suite $\{u^p\}$

La sous-suite $\{u^q\}$, $q \in Q_1$, convergeant faiblement vers \hat{u}_1 , la s. c. i. de la norme implique :

$$\| \hat{u}_1 - g \| \leq \liminf_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in Q_1}} \|u^q - g\| = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ p \in \mathbb{N}}} \|u^p - g\|. \quad (13)$$

Mais, d'autre part, puisque (7) - cf II.3.2 - :

$$C = \bigcap_{i=1}^n C_i \subset H(g, u^p), \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (14)$$

on a :

$$\|w - g\| \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - g\|, \quad \forall w \in C. \quad (15)$$

De (13) et (15), on déduit :

$$\|\hat{u}_1 - g\| = \inf [\|w - g\| ; w \in C] = \|\hat{u} - g\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - g\| \quad (16)$$

et puisque la solution - cf II.2.2- \hat{u} de (U) est unique :

$$\hat{u}_1 = \hat{u}.$$

Enfin, (14) implique :

$$(\hat{u} - u^p, u^p - g) \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

et donc :

$$\|\hat{u} - g\|^2 > \|u^p - g\|^2 + \|\hat{u} - u^p\|^2,$$

ce qui, compte-tenu de (16) nous donne :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\hat{u} - u^p\| = 0$$

et établit le théorème.

II.5 - APPLICATIONS

Les applications de l'algorithme III. 2 sont les mêmes que celles des méthodes de décomposition correspondantes - cf I et (4) - mais l'utilisation de croisement d'algorithmes duaux - par exemple méthode de KELLEY⁽⁷⁾, méthode de KAPLAN⁽⁶⁾ - permet de linéariser, à chaque pas, les contraintes, (cf. fig. 3)

Les sous-problèmes qui interviendront dans le déroulement de l'algorithme mettront simplement en jeu, comme contrainte, un - ou deux dans la phase de coordination - demi-espace fermé.

Détaillons, à titre d'exemple, un croisement parallèle d'algorithmes de Kelley⁽⁷⁾ ⁽⁹⁾, pour la recherche de la projection sur un convexe défini par des contraintes non linéaires.

II.5.1 - Le Problème :

V est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R} - (.,.)$, $\|.\|$ - identifié à son dual, et on considère le problème :

(P) "Trouver $u \in C$ tel que $\|u - g\|^2 = \min [\|v - g\|^2 ; v \in C]$ "

g étant un point donné de V et le convexe C étant défini par :

$$C = \{v \in V ; h_i(v) \leq 0, i = 1, \dots, n\}$$

les fonctions h_i , $i = 1, \dots, n$, étant convexes et continues sur V .

Introduisons alors :

$$C_i = \{v \in V ; h_i(v) \leq 0\}, i = 1, \dots, n$$

$$L_i = \{(v, d) \in V \times V ; v \in V - \overset{\circ}{C}_i, d \in \partial h_i(v)\} \cup \overset{\circ}{L}_i, i = 1, \dots, n$$

en notant $\partial h_i(v)$ le sous différentiel de h_i au point v ,

$$h_{i,\ell}(x) = \left. \begin{cases} h_i(v) + (d, x - v) & \text{si } \ell \neq \overset{\circ}{L}_i, \ell = (v, d) \in L_i \\ 0 & \text{si } \ell = \overset{\circ}{L}_i \end{cases} \right\} i = 1, \dots, n$$

$$C_{i,\ell} = \{x \in V ; h_{i,\ell}(x) \leq 0\}.$$

Il est clair que l'on peut définir C par :

$$C = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

avec :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i,\ell},$$

et le problème (P) est de la forme du problème (U) du II.2.

Toute fonction convexe étant l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues, on a donc, pour tout $x \in C_i^0$:

$$h_i(x) = \max \left[h_{i,\ell}(x) ; \ell \in L_i \right],$$

or, pour tout $d \in \partial h_i(x)$:

$$h_i(x) = h_{i,(x,d)}(x) .$$

Une simplification intervient donc pour le choix (12) - cf. II.3.3 - de ℓ_i^p , on choisira :

$$\text{si } u^p \notin C_i^0 \quad \ell_i^p = (u^p, d) , \quad d \in \partial h_i(u^p)$$

$$\text{si } u^p \in C_i^0 \quad \ell_i^p = \ell_i^0 .$$

L'algorithme II.4.2 en parallèle - i.e. $I^p = [1, n] \quad \forall p \in \mathbb{N}$ - est alors le suivant :

II.5.2 - Algorithme :

On pose $u^1 = g$; à partir de u^p , $p = 1, 2, \dots$, on définit :

$$I_o^p = \left\{ i \in [1, n] ; u^p \notin C_i \right\}$$

Si $I_o^p = \emptyset$, alors $\hat{u} = u^p$ est solution du problème (P)

Si $I_o^p \neq \emptyset$, on calcule alors :

$$1. \quad d_i^{p+1} \in \partial h_i(u^p) \quad ; \quad i \in I_o^p$$

$$v_i^{p+1} = u^p - \frac{h_i(u^p)}{\|d_i^{p+1}\|^2} d_i^{p+1} \quad ; \quad i \in I_o^p$$

$$2. \quad b^{p+1} = u^p - \frac{\sum_{i \in I_o^p} \left[\frac{h_i^2(u^p)}{\|d_i^{p+1}\|^2} \right]}{\left\| \sum_{i \in I_o^p} \frac{h_i(u^p)}{\|d_i^{p+1}\|^2} d_i^{p+1} \right\|^2} \cdot \left(\sum_{i \in I_o^p} \frac{h_i(u^p)}{\|d_i^{p+1}\|^2} d_i^{p+1} \right)$$

$$3. \quad u^{p+1} = Q(g, u^p, b^{p+1})$$

Si l'on introduit alors les hypothèses ⁽⁹⁾ :

$$(H_1) \quad C \neq \emptyset$$

$$(H_2) \quad g \notin C$$

(H₃) "Pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout borné B de V , il existe une constante $K_i > 0$ telle que, pour tout $v \in B$ et pour tout $d \in \mathcal{D} g_i(v)$, on ait :
 $\|d\| \leq K_i$ ",

on a la proposition :

II.5.3 - Proposition :

Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 , la suite définie par l'algorithme II.5.2 converge fortement vers la solution du problème (P).

II.5.4 - Remarque :

Il suffit, en fait, que l'hypothèse (H_3) soit vérifiée sur un borné \hat{B} "assez grand", c'est-à-dire tel que :

$$\hat{B} \supset \mathcal{B}[\text{Proj}_C g, \|g - \text{Proj}_C g\|].$$

III - DECOMPOSITION D'OPERATEURS ELLIPTIQUES VIA

 UN ECLATEMENT PARALLELE DE CONTRAINTES :

La traduction de certains problèmes elliptiques sous la forme de problème (U) - cf. I - est effectuée ici en utilisant un formalisme de Y. HAUGAZEAU⁽⁸⁾. Le problème posé, par exemple, sur $H^1(\Omega)$, est transformé en un problème dans un espace V qui est une puissance de $L^2(\Omega)$, et dans lequel $H^1(\Omega)$ est plongé. L'approximation est effectuée à partir d'éléments de $[L^2(\Omega)]^r$, il s'agit donc d'une approximation externe, et l'appartenance de la solution à $H^1(\Omega)$ se traduit, dans le nouveau problème, par une introduction de contraintes. L'utilisation de l'algorithme précédent, avec traitement parallèle des contraintes, correspond, au niveau du problème initial, à une décomposition en parallèle de l'opérateur elliptique. Cette décomposition est de même type que celle utilisée dans la méthode des directions alternées⁽¹⁷⁾ ou dans la méthode de décomposition de⁽¹⁾ et entraîne une convergence assez rapide.

Je remercie M. Y. HAUGAZEAU pour d'utiles conversations concernant cette partie et M. R. CHIFFLET pour sa participation aux essais numériques.

Nous présentons ici deux exemples d'application de la méthode, portant l'un sur un problème linéaire, l'autre sur un problème non linéaire.

III.1 - PROBLEME DE NEUMANN :

Soit Ω un ouvert borné régulier de R^n , de frontière Γ . On cherche à minimiser, sur $H^1(\Omega)$, la fonctionnelle :

$$J(v) = \lambda \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \lambda > 0$$

avec f donnée dans $L^2(\Omega)$.

Il s'agit - cf. (5) (16) - du classique problème de Neumann :

$$(N) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{pp dans } \Omega \\ \gamma_1 u = 0 & \text{pp dans } \Gamma. \end{cases}$$

Nous noterons (\cdot, \cdot) et $\| \cdot \|$ le produit scalaire et la norme de $L^2(\Omega)$.

La fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$J(v) = \lambda \|v\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 - 2 (f, v) .$$

Introduisons $V = [L^2(\Omega)]^{n+1} = \left\{ (v_0, v_1, \dots, v_n) ; v_i \in L^2(\Omega), i = 0, \dots, n \right\}$

doté de la topologie produit, et, pour $i = 1, \dots, n$, les ensembles convexes fermés de V :

$$C_i = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V ; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right\} .$$

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $V : y \in H^1(\Omega) \mapsto (y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n})$ est une isométrie de $H^1(\Omega)$ et de $\bigcap_{i=1}^n C_i$, dans V doté du produit scalaire $(\cdot, \cdot) / = \sum_{i=0}^n (\cdot, \cdot)$.

Considérons sur V la forme bilinéaire :

$$a(u, v) = \lambda (u_0, v_0) + \sum_{i=1}^n (u_i, v_i) ,$$

on vérifie facilement ⁽¹⁶⁾ que cette forme, avec λ strictement positif, est continue et coercive sur V doté de la métrique précédente, et qu'elle définit donc un nouveau produit scalaire, noté $((\cdot, \cdot))$. La norme associée sera notée $\| \cdot \|$.

Le problème initial devient :

$$\text{"Trouver } \hat{v} \in C = \bigcap_{i=1}^n C_i \text{ tel que } F(\hat{v}) = \min [F(v) ; v \in C]\text{"}$$

avec :

$$F(v) = \lambda \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 - 2 (f, v_0)$$

ou encore, en notant :

$$g = \left(\frac{1}{\lambda} f, 0, \dots, 0 \right) \in V ,$$

$$F(v) = \|v\|^2 - 2 ((g, v))$$

et le problème est équivalent, après addition de la constante $\|g\|^2$, à :

$$\text{"Trouver } \hat{v} \in C \text{ tel que } \|\hat{v} - g\|^2 = \min \|v - g\|^2 ; v \in C \text{"}$$

c'est-à-dire à la recherche de la projection de g sur l'intersection des convexes C_i , $i = 1, \dots, n$.

III.1.1 - Projection sur C_i :

En introduisant les opérateurs linéaires A_1, \dots, A_n , les convexes $C_i, i=1, \dots, n$ peuvent s'écrire :

$$C_i = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V ; v_i = A_i v_0 \right\}$$

$C_i, i = 1, \dots, n$, étant un sous-espace vectoriel, la projection $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ de $v = (v_0, \dots, v_n)$ est caractérisée par :

$$((t - z, z - v)) = 0 \quad \forall t \in C_i$$

ou encore :

$$((t, z - v)) = 0 \quad \forall t \in C_i$$

c'est-à-dire :

$$\lambda(t_0, z_0 - v_0) + (t_i, z_i - v_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (t_j, z_j - v_j) = 0 \quad \forall t \in C_i$$

en prenant $t_0 = t_i = 0$, il vient :

$$z_j = v_j \quad j = 1, \dots, n ; j \neq i$$

d'autre part $z \in C_i$ et on a donc :

$$z_i = A_i z_0 .$$

Il vient donc :

$$\lambda(t_0, z_0 - v_0) + (A_i t_0, A_i z_0 - v_i) = 0 \quad \forall t_0 \in L^2 (\Omega)$$

d'où

$$(\lambda I + A_i^* A_i) z_0 = \lambda v_0 + A_i^* v_i .$$

L'algorithme est alors le suivant, en prenant, pour fixer les idées $n = 2$:

III.1.2 - Algorithme :

Partant de $v^0 = g$, le passage de v^{p-1} à v^p se fait de la façon suivante :

1. On calcule $x^p = \text{Proj}_{C_1} v^{p-1}$ c'est-à-dire :

$$x_0^p = (\lambda I + A_1^* A_1)^{-1} (\lambda v_0^{p-1} + A_1^* v_1^{p-1})$$

$$x_1^p = A_1 x_0^p$$

$$x_2^p = v_2^{p-1}$$

et $y^p = \text{Proj}_{C_2} v^{p-1}$:

$$y_0^p = (\lambda I + A_2^* A_2)^{-1} (\lambda v_0^{p-1} + A_2^* v_2^{p-1})$$

$$y_1^p = v_1^{p-1}$$

$$y_2^p = A_2 y_0^p .$$

2. On coordonne en calculant :

$$b'^p = \frac{1}{2} (x^p + y^p)$$

et l'on extrapole :

$$b^p = v^{p-1} + \rho (b'^p - v^{p-1})$$

$$\text{avec } \rho = \frac{\lambda \|x_0^p - v_0^{p-1}\|^2 + \|x_1^p - v_1^{p-1}\|^2 + \lambda \|y_0^p - v_0^{p-1}\|^2 + \|y_2^p - v_2^{p-1}\|^2}{2 \left(\lambda \|b_0'^p - v_0^{p-1}\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|b_i'^p - v_i^{p-1}\|^2 \right)}$$

3. Enfin on calcule v^p par :

$$v^p = Q(g, v^{p-1}, b^p) .$$

Du théorème I.6.1 on déduit :

III.1.3 - Proposition :

$$v_0^p \rightarrow u \quad \text{solution de (N)} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ Fort}$$

$$v_i^p \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ Fort}$$

III.1.4 - Remarques :

Les essais numériques effectués semblent donner des résultats satisfaisants (cf chapitre VII).

La discrétisation est effectuée par différence finie en utilisant les mêmes méthodes d'approximation que (16) (17) .

Le projection $Q(g, v^{p-1}, b^p)$ effectuée selon le théorème I.2.5. demande seulement le calcul d'un produit scalaire, les autres paramètres résultant de calculs précédents.

III.2 - UN PROBLEME NON LINEAIRE (5) :

On donnera seulement les grandes lignes - cf (5) .

Il s'agit du problème aux limites :

$$(M) \quad \begin{cases} -\Delta u + u + 2u^3 = f & \text{pp dans } \Omega \\ \gamma_1 u = 0 & \text{pp sur } \Gamma \end{cases}$$

qui se traduit, sur l'espace $W = L^4(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, par le problème d'optimisation :

$$(Q) \quad \text{"Trouver } \hat{v} \in W \text{ tel que } J(\hat{v}) = \min [J(v) ; v \in W] \text{"}$$

$$\text{avec } J(v) = \|v\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 + \|v^2\|^2 - 2(f, v)$$

en notant, à nouveau, $\| \cdot \|$ et (\cdot, \cdot) la norme et le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et avec f donné dans $L^2(\Omega)$.

En introduisant $V = [L^2(\Omega)]^{n+2}$ et l'injection de W dans V :

$$v \in W \mapsto (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, v^2) .$$

On démontre ⁽⁵⁾ que le problème (Q) est équivalent, en notant $\| \cdot \|$,

$\| \cdot \| ^2 = \sum_{i=0}^{n+1} \| \cdot \| ^2$, la norme de V et $g = (f, 0, \dots, 0)$, au problème :

(Q') "Trouver $\hat{v} \in C = \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$ tel que $\| \hat{v} - g \|^2 = \min [\| v - g \|^2 ; v \in C]$ ",

avec :

$$C_i = \left\{ (v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in V ; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$C_{n+1} = \left\{ (v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in V ; v_{n+1}(x) \gg v_0(x)^2 \text{ pp dans } \Omega \right\};$$

c'est-à-dire à un problème de projection sur une intersection de convexes auquel la méthode du § I s'applique; ainsi que la méthode du § II en linéarisant C_{n+1} par une méthode de KELLEY.

REFERENCES

- (1) A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, R. TEMAN
"Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination, et applications".
Cahier IRIA, N° 11, (1972), 5 - 190.
- (2) J. GEA
"Optimisation"
Dunod, Paris, (1971)
- (3) L.G. GUBIN, B.T. POLYAK, E.V. RAIK
"The method of projections for finding the common point of convex sets".
Zh. Vychisl. Mat. mat Fiz, 7, 6, (1967) 1211 - 1228
- (4) Y. HAUGAZEAU
Thèse, Paris, (1968)
- (5) Y. HAUGAZEAU
Communication au Colloque d'Anglet, Anglet, Juin 1971
- (6) A.A. KAPLAN
"Détermination of the extremum of linear fonction on a convex set".
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 178, 6, (1968), 269 - 271
- (7) J.E. KELLEY
"The cutting plane method for solving convex programs"
J. SIAM, 6, (1958), 15-22.
- (8) P.J. LAURENT
"Approximation et optimisation"
Hermann, Paris (1972)
- (9) P.J. LAURENT, B. MARTINET
"Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes".
Symposium on Optimisation, Nice, (1969) in Lect. Notes Math. 132, Springer-Verlag, Berlin, (1970), 159 - 180.
- (10) E.S. LEVITIN, B.T. POLYAK
"Constrained minimization methods".
Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz., 6, 5 (1966), 787 - 823.

- (11) J.L. LIONS, R. TEMAM
"Eclatement et decentralisation en calcul des variations"
Symposium on Optimization, Nice, (1969) in lect. Notes Math. 132, Springer-Verlag, Berlin, (1970) 196 - 217.
- (12) T.S. MOTZKIN, I. SHOENBERG
"The relaxation method for linear inequalities".
Can. J. Math, 6, 3, (1954) 393 - 404 .
- (13) G. PIERRA
"Eclatement de contraintes en parallèle pour la minimisation d'une forme quadratique"
7-th IFIP Conference on optimization techniques, Nice, (1975)
- (14) G. PIERRA
"Crossing of algorithms in decomposition methods"
IFAC Symposium on large scale systems theory and applications, Udine, (1976)
- (15) G. PIERRA
"Méthodes de projections parallèles extrapolées relatives à une intersection de convexes".
Rapport de Recherche, Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble (1975).
- (16) R. TEMAM
"Analyse numérique"
P.U.F. Paris (1970)
- (17) R.S. VARGA
"Matrix iterative analysis"
Prentice Hall (1962)

CHAPITRE V

CHAPITRE V

UNE NOUVELLE METHODE DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE

Le problème de la minimisation d'une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique définie positive sur une intersection de convexes peut se ramener, à un changement de produit scalaire près, à la recherche d'une projection sur cette intersection ; c'est-à-dire au problème étudié au chapitre précédent. Ceci permet — cf. Chapitre IV, V.5.2 — de définir un algorithme de résolution des programmes quadratiques basé sur des projections en parallèle sur le domaine des contraintes ; ces projections étant calculées au sens du produit scalaire défini par la forme bilinéaire et demandant donc, en général, et pour chacune des projections, la résolution d'un système linéaire.

L'objet de ce chapitre est de montrer comment le calcul en parallèle permet, en fait, d'utiliser des projections au sens du produit scalaire initial, et donc beaucoup plus rapide à calculer. On définit ainsi une nouvelle méthode de programmation quadratique dont chaque pas ne prend en compte que les contraintes non satisfaites et demande la résolution d'un seul système linéaire.

La méthode présentée ici pouvant également s'appliquer à la résolution de certains problèmes aux limites via leur formulation variationnelle, le cadre utilisé sera un peu plus général que celui qui est habituel dans les problèmes de programmation quadratique ; ce cas particulier sera traité à la fin de chaque partie.

Dans la première partie de ce travail on suppose que chacun des convexes définissant le domaine des contraintes est suffisamment simple

pour que les projections soient faciles à calculer numériquement. Pour la programmation quadratique c'est, en particulier, le cas lorsque ce domaine est un polyèdre convexe de \mathbb{R}^m .

En associant à l'algorithme précédent un croisement de méthode duales on présente, dans une deuxième partie, une méthode de linéarisation des contraintes.

Ce chapitre constitue une suite du chapitre précédent et en utilise certains résultats.

I - MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES.

I.1. POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES.

Soient :

V un espace de Hilbert sur \mathbb{R} , identifié à son dual, de produit scalaire et de norme notés $(.,.)$ et $\|.\|$

$C_i \subset V$, $i=1, \dots, n$ des sous-ensembles convexes fermés

$$S = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

$a(.,.)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$

f un élément donné de V ;

et le problème :

(P) "Trouver $u \in S$ tel que $J(u) = \min [J(v) ; v \in S]$ "

avec

$$J(v) = a(v,v) - 2(f,v) .$$

I.1.1. Hypothèses :

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H1) La forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique.

(H2) La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive, il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad , \quad \forall v \in V .$$

Nous savons, par le théorème de Lax-Milgram, qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(V,V)$ admettant un inverse A^{-1} tel que :

$$a(v,w) = (Av,w) \quad , \quad \forall v \in V \quad , \quad \forall w \in V .$$

Nous ferons également les deux hypothèses suivantes :

$$(H3) \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset .$$

$$(H4) \quad A^{-1} f \notin S .$$

I.1.2. Notations :

Il est clair que la forme bilinéaire $a(.,.)$ définit sur V un nouveau produit scalaire. Celui-ci sera noté $\langle ., . \rangle$, la norme associée étant notée $[[.]]$. Nous noterons d'autre part :

$$g = A^{-1} f .$$

En ajoutant à la fonctionnelle $J(v)$ le terme constant :

$$[[g]]^2 = a(A^{-1}f, A^{-1}f) = (f, A^{-1}f) ,$$

le problème (P) est équivalent à :

$$(P1) \quad \text{" Trouver } u \in S \text{ tel que } [[u-g]]^2 = \min\{[[v-g]]^2 ; v \in S\} \text{ " ,}$$

c'est-à-dire au problème de la projection de g sur $S = \bigcap_{i=1}^n C_i$, au sens de la norme $[[.]]$.

I.1.3. Remarques :

. Il résulte de l'hypothèse (H2) que les deux normes $\|.\|$ et $[[.]]$ sont équivalentes sur V .

. L'hypothèse (H4) consiste à supposer que le minimum absolu de $J(.)$ n'appartient pas à S .

Si tel n'est pas le cas, le problème (P) sera résolu lors du premier pas de l'algorithme proposé.

I.1.4. Formulation dans un espace produit :

On introduit :

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V \text{ doté de la topologie produit}$$

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$$

$\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$ le convexe diagonal défini par :

$$\mathcal{D} = \{b = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{V} ; b \in V\} .$$

Les deux produits scalaires (\dots) et $\langle \dots \rangle$ induisent sur l'espace \mathcal{V} les produits scalaires :

$$((\dots)) = \sum_{i=1}^n (\dots)$$

$$\langle\langle \dots \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \dots \rangle$$

dont les normes associées, équivalentes, seront respectivement notées $||| \cdot |||$ et $[[[\cdot]]]$.

Nous noterons j la bijection canonique $V \rightarrow \mathcal{D}$:

$$b \in V \rightarrow j(b) = (b, \dots, b) \in \mathcal{D} ,$$

et noterons l'image par j d'un élément de V par la lettre ronde correspondante :

$$j(b) = \mathcal{b} , \quad j(x) = \mathcal{x} \dots$$

On vérifie facilement — cf [10] — que les problèmes (P1), et donc (P), sont équivalents dans l'espace \mathcal{V} , au problème :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \text{" Trouver } u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \text{ tel que } [[[u - g]]]^2 = \\ & = \min \{ [[[v - g]]] ; v \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \} " . \end{aligned}$$

I.2. CAS PARTICULIER D'INTERSECTIONS DE CONVEXES ET NOTATIONS :

I.2.1. Définition :

Etant donné un couple ordonné a, b de points d'un espace de Hilbert X . On convient de noter :

$$H|a,b| = \{v \in X ; (v-b, b-a)_X \geq 0\}$$

I.2.2. Remarque :

$H|a,a| = X$; si $a \neq b$, $H|a,b|$ est un demi-espace fermé sur lequel b est la projection de a .

I.2.3. Définition :

Etant donné un triplet ordonné de points a, b, c d'un espace de Hilbert X , on note $Q|a,b,c|$ la projection de a sur $H|a,b| \cap H|b,c|$.

I.2.4. Notations :

Plusieurs espaces et produits scalaires étant utilisés, et lorsque les notations génériques $H|a,b|$; $Q|a,b,c|$ pourraient entraîner des confusions, nous préciserons quel est le produit scalaire considéré en notant :

$$H(a,b) , H((a,b)) , H \langle a,b \rangle , H \ll a,b \gg$$

et, de même :

$$Q(a,b,c) , Q((a,b,c)) , Q \langle a,b,c \rangle , Q \ll a,b,c \gg .$$

I.2.5. Notations :

Trois points a, b, c d'un espace de Hilbert X étant donnés, on convient de noter :

$$\lambda = (b-a, c-b)_X$$

$$\mu = \|c-b\|_X^2$$

$$\nu = \|a-b\|_X^2$$

$$\eta = \mu\nu - \lambda^2, \quad ,$$

et on a le théorème :

Théorème [3]

Les quatre éventualités suivantes constituent une partitions des cas possibles :

- 1 . $\eta = 0, \lambda < 0$ Alors $H|a,b| \cap H|b,c| = \emptyset$
- 2 . $\eta = 0, \lambda \geq 0$ Alors $Q|a,b,c| = c$
- 3 . $\eta \neq 0, \lambda\mu - \eta \geq 0$ Alors $Q|a,b,c| = a + (1 + \frac{\lambda}{\mu})(c-b)$
- 4 . $\eta \neq 0, \lambda\mu - \eta < 0$ Alors $Q|a,b,c| = b + \frac{\mu}{\eta} (\nu(c-b) - \lambda(b-a))$.

Ce théorème est démontré dans [3] dont on a conservé les notations.

I.3. DESCRIPTION DE LA METHODE :

Tout convexe fermé étant l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, l'idée de la méthode est de chercher la solution du problème initial en minimisant $J(\cdot)$ sur une suite de demi-espaces fermés contenant S et s'en rapprochant ; ou, ce qui est équivalent, en minimisant $[[[-g]]]$ sur une suite de demi-espace contenant $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$.

Les demi-espaces successifs seront définis en utilisant des projections sur le domaine des contraintes — cf [9] — . Rappelons ici deux résultats de [9] [10] .

I.3.1. Proposition [9] :

- i) La projection d'un point $b = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{D}$ sur \mathcal{E} au sens de la norme $\| \cdot \|$ — resp. $[[[\cdot]]]$ — a pour composantes les projections de b sur chacun des convexes C_i au sens de la norme $\| \cdot \|$ — resp. $[[[\cdot]]]$:

$$\text{Proj}_{\mathcal{E}} b = (\text{Proj}_{C_1} b, \text{Proj}_{C_2} b, \dots, \text{Proj}_{C_n} b)$$

- ii) La projection d'un point $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{V}$ sur \mathcal{D} au sens de la norme $\| \cdot \|$ — resp. $[[[\cdot]]]$ — est l'image par j du barycentre des n points v_1, v_2, \dots, v_n :

$$\text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i\right) .$$

I.3.2. Théorème d'extrapolation dans \mathcal{V} [10] :

On suppose que l'hypothèse (H3) : $S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$, est vérifiée,

et l'on considère un élément $b^0 \in \mathcal{D}$. Si $b^0 \notin \mathcal{E}$, on définit (les projections s'entendant au sens des normes initiales $\| \cdot \|$ et $[[[\cdot]]]$) :

$$v = \text{Proj}_{\mathcal{E}} b^0 = (\text{Proj}_{C_1} b^0, \text{Proj}_{C_2} b^0, \dots, \text{Proj}_{C_n} b^0)$$

$$b' = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v = j\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i\right) = j\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Proj}_{C_i} b^0\right)$$

$$b = b^0 + \frac{\| \| b^0 - v \| \|^2}{\| \| b' - b^0 \| \|^2} \cdot (b' - b^0)$$

et l'on a :

- i) $b' \neq b^0$
 ii) $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{D} \cap H((b^0, b))$.

I.3.3. Description de la méthode :

Le théorème I.3.2. donne un procédé de construction successive de demi-espaces contenant $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. La méthode est donc la suivante :

Supposons qu'à la p-ième étape de l'algorithme, nous ayons un itéré $u^p \in \mathcal{D}$ et un demi-espace $H \ll g, u^p \gg$ contenant $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. u^p - cf remarque I.2.2. - réalise le minimum de $[[[. - g]]]^2$ sur $H \ll g, u^p \gg$. Si donc $u^p \in \mathcal{E}$, on en déduit que u^p est solution de (\mathcal{P}) .

Si $u^p \notin \mathcal{E}$, l'application du théorème I.3.2. au point u^p nous amène à définir :

$$v^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{E}} u^p \quad - \text{ au sens de } ||| \cdot ||| -$$

$$b'^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v^{p+1}$$

$$b^{p+1} = u^p + \frac{|||u^p - v^{p+1}|||^2}{|||b'^{p+1} - u^p|||^2} (b'^{p+1} - u^p)$$

et l'on a :

$$H((u^p, b^{p+1})) \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D}.$$

On définit alors u^{p+1} comme étant la projection de g sur $\mathcal{D} \cap H \ll g, u^p \gg \cap H((u^p, b^{p+1}))$ au sens de la norme $[[[.]]]$.

Le calcul de cette projection se fait en deux temps :

- 1 - On calcule la projection x^{p+1} de u^p sur $\mathcal{D} \cap H((u^p, b^{p+1}))$ au sens de la norme $[[[.]]]$:

$$\mathcal{D} \cap H((u^p, b^{p+1})) = H \ll u^p, x^{p+1} \gg \cap \mathcal{D}.$$

- 2 - On calcule u^{p+1} à l'aide du théorème I.2.5. :

$$u^{p+1} = Q \ll g, u^p, x^{p+1} \gg.$$

I.3.3.1. Calcul de x^{p+1} :

x^{p+1} est défini par :

$$x^{p+1} \in \mathcal{D} ; [[x^{p+1} - u^p]]^2 = \min \{ [[v - u^p]]^2 ; v \in \mathcal{D} \cap H(u^p, b^{p+1}) \} ,$$

ce qui est équivalent, dans l'espace V , à :

$$x^{p+1} \in V ; [[x^{p+1} - u^p]]^2 = \min \{ [[v - u^p]]^2 ; v \in H(u^p, b^{p+1}) \} .$$

Calculons x^{p+1} , par définition de la projection, et puisque $u^p \notin H(u^p, b^{p+1})$, on a :

$$a(x^{p+1} - u^p, v) = 0 \quad \forall v \in V \text{ tel que } (b^{p+1} - u^p, v) = 0$$

et, par unicité, il existe un nombre $\rho \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x^{p+1} - u^p = \rho \cdot A^{-1}(b^{p+1} - u^p) .$$

On calcule ρ en exprimant que $x^{p+1} \in \text{Frontière de } H(u^p, b^{p+1})$;
il vient :

$$x^{p+1} = u^p + \frac{\|b^{p+1} - u^p\|^2}{(A^{-1}(b^{p+1} - u^p), b^{p+1} - u^p)} A^{-1}(b^{p+1} - u^p) ,$$

et le calcul de x^{p+1} nécessite, à chaque pas de l'algorithme, la résolution d'un problème linéaire.

I.3.3.2. Calcul de u^{p+1} :

On part de :

$$u^0 = g$$

et l'on a bien $H \ll g, u^0 \gg = \mathcal{V} \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. Montrons par récurrence sur p , que $H \ll g, u^q \gg \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D} ; \forall q \in \mathbb{N}$.

Supposons donc que $H \ll g, u^P \gg \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$,
 si $u^P \in \mathcal{E}$, u^P est donc solution de (\mathcal{P})
 si $u^P \notin \mathcal{E}$, compte tenu de l'hypothèse (H3) :

$$H \ll g, u^P \gg \cap H \ll u^P, x^{P+1} \gg \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset ; \quad (1)$$

la première éventualité du théorème I.2.4. ne peut donc pas se produire, u^{P+1} est bien défini par :

$$u^{P+1} = Q \ll g, u^P, x^{P+1} \gg ,$$

et, par définition de la projection sur un convexe on a, à nouveau :

$$H \ll g, u^{P+1} \gg \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D} .$$

I.3.4. Propriété de la suite $\{u^P\}$:

De l'inclusion (1), il résulte :

$$[[[u^P - g]]] \leq [[[-u^{P+1} - g]]] \leq [[[s - g]]] \quad \forall s \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D} . \quad (2)$$

La suite $\{[[[u^P - g]]]\}$, non décroissante et bornée, est donc convergente.

Puisque $u^{P+1} \in H \ll g, u^P \gg$, on en déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [[[u^{P+1} - u^P]]] = 0 ,$$

ou, par équivalence de normes :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} ||| u^{P+1} - u^P ||| = 0 ;$$

comme $u^{P+1} \in H((u^P, b^{P+1}))$, ceci entraîne :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} ||| b^{P+1} - u^P ||| = 0 ,$$

et a fortiori :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} ||| b^{P+1} - u^P ||| = 0 ;$$

enfin, par définition de h^{p+1} :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \| \| v^{p+1} - u^p \| \| = 0$$

et l'on a, en notant $d(.,.)$ la distance associée à la norme initiale $\| \cdot \|$ de V :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u^p, C_i) = 0 \quad . \quad i=1, \dots, n \quad . \quad (3)$$

I.4. MISE EN OEUVRE DE LA METHODE :

I.4.1. Notations :

Nous désignerons par $|A|$ le cardinal de l'ensemble A et nous noterons :

$$I^p = \{i \in [1, n] \ ; \ u^p \in C_i\} \quad .$$

Si $I^p = \emptyset$ alors $u^p \in S = \bigcap_{i=1}^n C_i$, et, puisque $H \langle g, u^p \rangle \supset S$, il en résulte que u^p est solution de (P_1) et donc de (P) .

Si $I^p \neq \emptyset$ et donc $u^p \in \mathcal{C}$, on a le résultat suivant — cf. chap. IV —.

I.4.2. Lemme [10] :

Si $I^p \neq \emptyset$, alors les trois définitions suivantes de l'extrapolé h^{p+1} sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad b^{P+1} &= u^P + \frac{\|v^{P+1} - u^P\|^2}{\|b^{P+1} - u^P\|^2} \cdot (b^{P+1} - u^P) \\
 \text{ii)} \quad b^{P+1} &= u^P + \frac{\sum_{i=1}^n \|v_i^{P+1} - u^P\|^2}{n \cdot \|b^{P+1} - u^P\|^2} \cdot (b^{P+1} - u^P) \\
 \text{iii)} \quad b^{P+1} &= u^P + \frac{\sum_{i \in IP} \|v_i^{P+1} - u^P\|^2}{|IP| \cdot \left\| \frac{1}{|IP|} \cdot \sum_{i \in IP} v_i^P - u^P \right\|^2} \cdot \left(\frac{1}{|IP|} \cdot \sum_{i \in IP} v_i^P - u^P \right) .
 \end{aligned}$$

I.4.3. Remarque :

Le lemme précédent montre qu'il est équivalent, pour définir b^{P+1} et u^{P+1} , de mettre en oeuvre la méthode

- dans l'espace \mathcal{Q}^c pour le convexe $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$
- dans l'espace $V^{|IP|}$ pour le convexe $\prod_{i \in IP} C_i$, c'est-à-dire en considérant seulement les contraintes non satisfaites au point u^P .

Exprimé dans l'espace V , l'algorithme est donc le suivant :

I.5. ALGORITHME :

On pose $u^0 = g$; le passage de u^P à u^{P+1} se fait de la façon suivante :

1. On définit :

$$I^P = \{i \in [1, n] ; u^P \notin C_i\} ;$$

si $I^P = \emptyset$, on stoppe l'algorithme

si $I^P \neq \emptyset$, on calcule au sens de la norme initiale de V :

$$v_i^P = \text{Proj}_{C_i} u^P, \quad i \in I^P$$

2. On calcule :

$$b^{P+1} = u^P + \frac{\sum_{i \in I^P} \|v_i^{P+1} - u^P\|^2}{|I^P| \cdot \left\| \frac{1}{|I^P|} \cdot \sum_{i \in I^P} v_i^{P+1} - u^P \right\|^2} \left(\frac{1}{|I^P|} \cdot \sum_{i \in I^P} v_i^{P+1} - u^P \right)$$

3. On calcule :

$$x^{P+1} = u^P + \frac{\|b^{P+1} - u^P\|^2}{(A^{-1}(b^{P+1} - u^P), b^{P+1} - u^P)} A^{-1}(b^{P+1} - u^P) .$$

4. L'itération suivante :

$$u^{P+1} = Q \langle g, u^P, x^{P+1} \rangle$$

est calculé par application du théorème I.2.5. avec :

$$\lambda = a(u^P - g, x^{P+1} - u^P)$$

$$\mu = \frac{\|b^{P+1} - u^P\|^4}{(A^{-1}(b^{P+1} - u^P), b^{P+1} - u^P)}$$

$$\nu = a(u^P - g, u^P - g)$$

$$\eta = \mu\nu - \lambda^2 .$$

I.5.1. Calcul de v :

Le calcul de $a(u^{p+1-g}, u^{p+1-g})$ se déduit directement des coefficients précédents selon les formules :

$$\textcircled{1} . \eta = 0 , \lambda \geq 0 \quad a(u^{p+1-g}, u^{p+1-g}) = (\mu^{1/2} + v^{1/2})^2$$

$$\textcircled{2} . \eta \neq 0 , \lambda\mu - \eta \geq 0 \quad a(u^{p+1-g}, u^{p+1-g}) = (1 + \frac{\lambda}{\mu})^2 \mu$$

$$\textcircled{3} . \eta \neq 0 , \lambda\mu - \eta < 0 \quad a(u^{p+1-g}, u^{p+1-g}) = v(1 + \frac{\mu^2}{\eta}) .$$

I.5.2. Remarque :

Le cas $\textcircled{1}$: $\eta = 0 , \lambda \geq 0$ est en fait un cas particulier du cas $\textcircled{2}'$: $\lambda\mu - \eta \geq 0$. On vérifie facilement que toutes les formules du cas $\textcircled{2}$ s'appliquent au $\textcircled{1}$ qui sera donc, désormais, supprimé.

I.5.3. Remarques :

- 1 - Comme dans [9] - cf. chapitre II, I.6 - il est possible, en modifiant la norme de \mathcal{V} , de faire intervenir des barycentres pondérés.
- 2 - Les v_i^p n'intervenant que de façon cumulative, il est inutile de conserver simultanément en mémoire v_i^p pour $i=1, \dots, n$; $i \in I^p$.
- 3 - On peut généraliser quelque peu et définir une procédure série-parallèle où seul un sous-ensemble des n convexes C_i , $i=1, \dots, n$, est considéré lors de chaque pas de l'algorithme - cf [10] - .
- 4 - Comme dans [9] il est également possible de ne pas effectuer a chaque pas l'extrapolation et de définir, pour certaines valeurs de p , b^{p+1} comme étant un barycentre.

I.6. CONVERGENCE DE L'ALGORITHME :

I.6.1. Théorème :

Les hypothèses (H1) à (H4) étant supposées vérifiées, si la suite u^p définie par l'algorithme I.5. est finie, son dernier élément est solution de (P) ; si la suite est infinie, elle converge vers la solution de (P) dans V fort.

DEMONSTRATION :

Si la suite est finie cela signifie que $u^p \in C_i$, $i=1, \dots, n$, c'est-à-dire $u^p \in S$. Puisque $S \subset H \langle g, u^p \rangle$, il en résulte que u^p est solution de (P_1) et donc de (P).

Supposons alors la suite infinie. La suite $\{u^p\}$ étant bornée — cf I.3.4. — il existe une sous-suite $\{u^q\}$ de $\{u^p\}$ convergeant faiblement vers $\hat{u} \in V$. Pour tout convexe $K \subset V$, l'application $V \rightarrow \mathbb{R} : d(\cdot, K)$ est continue et convexe ; elle est faiblement s.c.i. ; d'où, par (3) — cf I.3.4. —

$$0 = \liminf_{q \rightarrow \infty} d(u^q, C_i) \geq d(\hat{u}, C_i) \quad , \quad i=1, \dots, n$$

et donc $\hat{u} \in S$.

D'autre part, par faible s.c.i. de la norme :

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \|[u^q - g]\| \geq \|\hat{u} - g\|$$

et puisque — cf I.3.4. (2) — on a :

$$\|[u^p - g]\| \leq \|[s - g]\| \quad \forall s \in S, \forall p \in \mathbb{N},$$

on en déduit que \hat{u} est solution de (P_1) et donc de (P). De plus, puisque $S \subset H \langle g, u^q \rangle$, on a :

$$\|[\hat{u} - u^q]\|^2 \leq \|[\hat{u} - g]\|^2 - \|[u^q - g]\|^2$$

d'où :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} [\|\hat{u} - u^q\|] = \lim_{q \rightarrow \infty} \|\hat{u} - u^q\| = 0$$

et la sous-suite $\{u^q\}$ converge fortement vers \hat{u} . Enfin, la solution de (P) étant unique c'est toute la suite $\{u^p\}$ qui converge fortement vers \hat{u} .

I.7. GENERALISATION : MINIMISATION D'UNE FONCTION UNIFORMEMENT CONVEXE.

Il est possible de généraliser quelque peu la méthode précédente afin de pouvoir l'appliquer à la minimisation d'une fonctionnelle $J(v)$ uniformément convexe quelconque. En minimisant cette fonctionnelle sur une suite de demi-espaces construit comme précédemment, on peut approcher le minimum de $J(v)$ sur une intersection de convexes donné.

I.7.1. Enoncé du problème :

V est un espace de Hilbert (\cdot, \cdot) ; $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R} , identifié à son dual, et l'on cherche à minimiser sur $S = \bigcap_{i=1}^n C_i$ une fonctionnelle $J(v)$ convexe, s.c.i., propre [7].

On fait sur la fonctionnelle J les hypothèses suivantes :

(H'₀) Il existe $a \in S$ en lequel J est finie et continue.

(H'₁) Il existe $b \in S$ tel que le domaine convexe fermé :

$$G = \{v \in V ; J(v) \leq J(b)\} \text{ soit borné.}$$

(H'₂) La fonctionnelle J est uniformément convexe sur G : il existe une application non décroissante δ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , avec $\delta(r) = 0 \Rightarrow r = 0$, telle que, pour tout couple $(x_1, x_2) \in G \times G$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on ait :

$$J(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda J(x_1) + (1-\lambda)J(x_2) - \lambda(1-\lambda)\delta(\|x_1 - x_2\|) .$$

Nous supposons, enfin, que le domaine des contraintes est non vide :

$$(H_3) \quad S = \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset .$$

Les hypothèses (H_1') et (H_2') entraînent qu'il existe $\hat{u} \in S$ unique — cf [7][8] — tel que :

$$J(\hat{u}) = \min[J(v); v \in S] .$$

C'est cet élément que nous proposons d'approcher par la méthode décrite ci-dessus. L'algorithme est le suivant :

I.7.2. Description de l'algorithme :

Supposons qu'à la p -ième étape de l'algorithme nous ayons un demi-espace fermé D^p et un élément u^p tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^p \supset S \quad ; \quad u^p \in D^p \\ J(u^p) = \min [J(u) ; u \in D^p] \end{array} \right. .$$

Si $u^p \in S$, alors $u^p = \hat{u}$.

Si $u^p \notin S$, on construit alors, par projection parallèle extrapolée sur les contraintes non satisfaites, un nouveau demi-espace fermé $H(u^p, b^{p+1})$, b^{p+1} étant défini comme en I.4.2. iii). Il résulte alors du lemme I.4.2. et du théorème d'extrapolation I.3.2. que :

$$H(u^p, b^{p+1}) \supset S .$$

On définit alors le nouveau couple u^{p+1}, D^{p+1} par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot u^{p+1} \in D^p \cap H(u^p, b^{p+1}) \quad (1) \\ \cdot J(u^{p+1}) = \min [J(u) ; u \in D^p \cap H(u^p, b^{p+1})] \quad (2) \\ \cdot d^{p+1} \in \partial J(u^{p+1}) \quad (3) \\ \cdot D^{p+1} = \{u \in V ; (u - u^{p+1}, d^{p+1}) \geq 0\} \quad (4) \end{array} \right.$$

I.7.3. Remarques :

- 1 - Comme $S \subset D^P \cap H(u^P, b^{P+1})$, en particulier $b \in D^P \cap H(u^P, b^{P+1})$, le minimum de J sur $D^P \cap H(u^P, b^{P+1})$ appartient donc à G qui est, hypothèse H'_1 , convexe fermé borné. u^{P+1} défini par (1) et (2) existe donc unique.
- 2 - u^{P+1} réalisant le minimum de J sur $D^P \cap H(u^P, b^{P+1})$, on déduit de l'hypothèse H'_0 que $\partial J(u^{P+1}) \neq \emptyset$ et que, pour tout $d^{P+1} \in \partial J(u^{P+1})$, on a :

$$(d^{P+1}, u - u^{P+1}) \geq 0 \quad \forall u \in D^P \cap H(u^P, b^{P+1}) .$$

- 3 - Il est clair que :

$$J(u^{P+1}) = \min [J(u) ; u \in D^{P+1}] .$$

I.7.4. Remarque :

On pourra prendre, par exemple, pour premier couple (u^0, D^0) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 \in V ; J(u^0) = \min [J(u) ; u \in V] \\ D^0 = V \end{array} \right.$$

Ou pour un i quelconque, $i \in [1, n]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 \in C_i ; J(u^0) = \min [J(u) ; u \in C_i] \\ d^0 \in \partial J(u^0) \\ D^0 = \{u \in V ; (u - u^0, d^0) \geq 0\} \end{array} \right. .$$

I.7.5. Théorème :

La suite $\{u^p\}$ définie par l'algorithme I.7.2. converge fortement vers $\hat{u} \in S$ tel que :

$$J(\hat{u}) = \min [J(u) ; u \in S] .$$

DEMONSTRATION :

1 - Puisque $S \subset D^p \cap H(u^p, b^{p+1}) \subset D^p$, on a :

$$J(s) \geq J(\hat{u}) \geq J(u^{p+1}) \geq J(u^p) . \quad \forall s \in S \quad (5)$$

La suite $\{J(u^p)\}$, non décroissante et bornée est donc convergente et l'on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (J(u^{p+1}) - J(u^p)) = 0 ;$$

de l'uniforme convexité de J , en considérant le point $\frac{1}{2}(u^p + u^{p+1}) \in D^p$, on déduit :

$$J(u^p) \leq J\left(\frac{1}{2}u^p + \frac{1}{2}u^{p+1}\right) \leq \frac{1}{2}J(u^p) + \frac{1}{2}J(u^{p+1}) - \frac{1}{4}\delta(\|u^{p+1} - u^p\|)$$

$$\delta(\|u^{p+1} - u^p\|) \leq 2[J(u^{p+1}) - J(u^p)]$$

d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta(\|u^{p+1} - u^p\|) = 0$$

et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p+1} - u^p\| = 0 .$$

Puisque $u^{p+1} \in H(u^p, b^{p+1})$ sur lequel b^{p+1} est la projection de u^p , il est clair que

$$\|u^{p+1} - u^p\| \geq \|b^{p+1} - u^p\|$$

d'où :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|b^{p+1} - u^p\| = 0 ;$$

compte tenu du lemme I.4.2., ceci implique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|\text{Proj}_{C_i} u^p - u^p\|^2 = 0 \quad , \quad i=1, \dots, n \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u^p, C_i) = 0 \quad , \quad i=1, \dots, n \quad .$$

2 - La suite $\{u^p\}$ étant bornée, hypothèse H_1' , il existe une sous-suite, notée $\{u^q\}$, convergeant faiblement vers un élément $\hat{v} \in G$. De la s.c.i. de la distance à un convexe, on déduit $\hat{v} \in S$ et de la s.c.i. de J :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} J(u^q) \geq J(\hat{v})$$

ce qui, compte tenu de (5) implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v} = \hat{u} \\ \lim_{p \rightarrow \infty} J(u^p) = J(\hat{u}) \end{array} \right. .$$

En considérant alors le point $\frac{1}{2} u^p + \frac{1}{2} \hat{u}$, il vient :

$$J(u^p) \leq J\left(\frac{1}{2} u^p + \frac{1}{2} \hat{u}\right) \leq \frac{1}{2} J(u^p) + \frac{1}{2} J(\hat{u}) - \frac{1}{4} \delta(\|u^p - \hat{u}\|)$$

ce qui montre que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u^p - \hat{u}\| = 0$$

et achève la démonstration du théorème.

I.7.6. Remarque :

Cet algorithme peut, en particulier, être utilisé pour résoudre le problème (P) du paragraphe I.1. avec $a(.,.)$ non symétrique.

I.8. CAS PARTICULIER : PROGRAMMATION QUADRATIQUE :

Nous reprenons ici le cadre habituel de la programmation quadratique [1] et donnons une description détaillée de l'algorithme. Les notations utilisées sont des notations matricielles, les vecteurs étant considérés comme vecteur-colonne.

I.8.1. Position du problème et hypothèses :

On considère dans $V = \mathbb{R}^m$ le problème :

(R) " Trouver $\hat{u} \in S \subset \mathbb{R}^m$ tel que $J(\hat{u}) = \min [J(u) ; u \in S]$ "

avec :

$$J(u) = {}^t u A u - 2 {}^t f . v$$

$f \in \mathbb{R}^m$ et A étant une matrice $m \times m$ donnés; et un convexe de contraintes S défini par :

$$C v \leq b \tag{1}$$

$$E v = d \tag{2}$$

C et E étant des matrices respectivement $n_1 \times m$ et $n_2 \times m$ et $b \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $d \in \mathbb{R}^{n_2}$. Nous poserons $n_1 + n_2 = n$.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(h₁) La matrice A est symétrique.

(h₂) La forme quadratique associée à la matrice A est définie positive :
 $v \neq 0 \Rightarrow {}^t v A v > 0$

(h₃) Le minimum absolu de J n'appartient pas au domaine des contraintes
 - cf [1] - :

$$g = A^{-1} . f \notin S .$$

(h₄) $S \neq \emptyset$.

I.8.2. Remarques :

- 1 - Dans le cas où la matrice A n'est pas symétrique, on peut se ramener au cas symétrique avec la matrice $\hat{A} = \frac{1}{2} ({}^t A + A)$.
- 2 - Si l'hypothèse (h_3) n'est pas vérifiée cela signifie simplement que $A^{-1} f$ étant solution de (R) , celui-ci sera résolu dès le premier pas de l'algorithme proposé.

I.8.3. Notations :

Etant donnée une matrice M , de dimension $k \times \ell$, on note $M_{i.}$ la i -ième ligne de M et Δ_M la matrice diagonale de dimension $k \times k$ définie par :

$$(\Delta_M)_{ii} = \frac{1}{\|M_{i.}\|^2}, \quad i=1, \dots, k,$$

$\|\cdot\|$ désignant la norme euclidienne de \mathbb{R}^k .

I.8.4. Algorithme :

On calcule tout d'abord :

$$g = A^{-1} f;$$

puis, posant $u^0 = g$ et $v^0 = 0$, on passe de $(u^p, v^p) \in V \times \mathbb{R}$ à (u^{p+1}, v^{p+1}) de la façon suivante :

- 1 - On calcule :

$$\Omega_i = C_i \cdot u^p - b_i, \quad i=1, \dots, n_1$$

$$\Omega_i = E_{(i-n_1)} \cdot u^p - d_{(i-n_1)}, \quad i = n_1+1, \dots, n = n_1+n_2$$

et l'on pose :

$$I = \{i \in [1, n_1] ; \Omega_i > 0\}$$

$$J = \{i \in [n_1+1, n] ; \Omega_i \neq 0\}.$$

Si $I \cup J = \emptyset$, on stoppe l'algorithme

Si $I \cup J \neq \emptyset$, nous l'écrivons sous la forme :

$$I \cup J = \{\alpha, \beta, \dots, \delta, \epsilon, \dots, \xi\}$$

avec $\alpha < \beta < \dots < \delta \leq n_1 < \epsilon < \dots < \xi \leq n$.

On définit alors les matrices Γ — $\text{card}(I \cup J) \times m$ — et R

— $\text{card}(I \cup J) \times 1$ — par :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{\alpha} \\ \dots \\ C_{\delta} \\ E_{(\epsilon-n_1)} \\ \dots \\ E_{(\xi-n_1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} \Omega_{\alpha} \\ \vdots \\ \Omega_{\delta} \\ \Omega_{\epsilon} \\ \vdots \\ \Omega_{\xi} \end{pmatrix}$$

2 - On calcule $z^{p+1} \in \mathbb{R}^m$ par :

$$z^{p+1} = - \frac{{}^t R \cdot \Delta_{\Gamma} \cdot R}{{}^t R \cdot \Delta_{\Gamma} \cdot \Gamma \cdot {}^t \Gamma \cdot \Delta_{\Gamma} \cdot R} \cdot {}^t \Gamma \cdot \Delta_{\Gamma} \cdot R$$

3 - On résoud le système linéaire :

$$A y^{p+1} = z^{p+1}$$

4 - On définit le couple (u^{p+1}, v^{p+1}) en calculant :

$$\tau = {}^t z^{p+1} \cdot z^{p+1}$$

$$\pi = {}^t y^{p+1} \cdot z^{p+1}$$

$$\lambda = \frac{\tau}{\pi} \cdot {}^t (u^{p-g}) \cdot z^{p+1}$$

$$\mu = \frac{\tau^2}{\pi}$$

$$v = v^p$$

$$\eta = \mu v - \lambda^2$$

$$\theta = \lambda \mu - \eta .$$

Si $\theta \geq 0$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{p+1} = g + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot y^{p+1} \\ v^{p+1} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \mu \end{array} \right.$$

Si $\theta < 0$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\eta} \left(v \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot y^{p+1} - \lambda(u^p - g) \right) \\ v^{p+1} = v \left(1 + \frac{\mu^2}{\eta} \right) . \end{array} \right.$$

I.8.5. Remarque :

L'algorithme (I.8.4.) est identique à l'algorithme I.5. appliqué au cas particulier considéré, avec :

$$z^{p+1} = b^{p+1} - u^p$$

et $x^{p+1} = u^p + \frac{\tau}{\pi} y^{p+1} .$

On en déduit donc ses propriétés de convergence.

I.8.6. Remarque :

Dans le cas particulier actuellement considéré, on peut supposer que les matrices C et E ont été "normalisées en ligne" en début de calcul. Dans ce cas, et si le nombre de contraintes non satisfaites par u^p est égal à ℓ ($\ell \leq n$), la p+1-ième itération demandera :

. $(n+5)m + (\ell + 1)\ell \approx n.m + \ell^2$ multiplications et autant d'additions

. la résolution d'un système linéaire m.m de matrice A ;

ou encore, si la résolution du système linéaire est effectué, par exemple par la méthode de Cholewski, on aura - cf [2] :

	en début de programme :	au p+1-ième pas :
Multiplications	} $\frac{m^3}{6}$	$m^2 + n.m + \ell^2$
Additions		
Divisions	$\frac{m^2}{2}$	2 m
Racines carrées	m	

II - CROISEMENT DE METHODES DUALES POUR LA MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE.

Dans la première partie de ce travail, la décomposition du problème de la minimisation d'une forme quadratique sur une intersection de convexes nous a amené à introduire, à chaque pas de l'algorithme, des sous-problèmes consistant à chercher une projection sur un convexe.

Lorsque ces projections ne peuvent pas être directement calculées, l'idée est alors de remplacer la résolution de ces sous problèmes, chaque fois qu'ils interviennent dans le cadre de l'algorithme de décomposition, par un pas d'un algorithme tendant à les résoudre. Les algorithmes de projections qui seront ainsi croisés seront, comme au chapitre IV, des "méthodes duales" de [8].

Ce croisement d'algorithmes permet de remplacer à chaque pas, le convexe produit \mathcal{C} par un convexe beaucoup plus simple \mathcal{C}^P généralement obtenu par linéarisation.

II.1. POSITION DU PROBLEME :

Nous reprenons ici toutes les notations et hypothèses définies au I.1. et I.2., et nous supposons, de plus, que chacun des convexes C_i , $i=1, \dots, n$ est défini par :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i,\ell}$$

où les $C_{i,\ell}$ sont des convexes fermés de V :

$$C_{i,\ell} = \{x \in V ; h_{i,\ell}(x) \leq 0\} \quad ,$$

les fonctions $h_{i,\ell}$ étant convexes et s.c.i. et L_i , $i=1, \dots, n$ étant des

ensembles quelconques d'indices. Nous ferons la convention suivante :

" Il existe dans L_i , $i=1, \dots, n$, un indice note ℓ_i' tel que

$$h_{i, \ell_i'}(v) = 0 \quad ; \quad \forall v \in V \quad , \quad i=1, \dots, n . "$$

et nous ferons l'hypothèse supplémentaire — cf [8] :

(H5) " Pour $i=1, \dots, n$ et pour tout borné $B \subset V$, il existe $K_i > 0$ tel que, pour tout $\ell \in L_i$ et pour tout $x \in B$:

$$h_{i, \ell}(x) \leq d(x, C_{i, \ell}) \cdot K_i$$

II.1.1. Remarque :

Tout convexe fermé étant l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, il est possible, et c'est ce que nous feront en général, de prendre pour $C_{i, \ell}$ des demi-espaces fermés.

II.2. APPROXIMATION EXTERIEURE DE \mathcal{C} :

Nous supposons, ici, qu'à chaque pas de l'algorithme nous nous donnons une approximation extérieure $\mathcal{C}^P \supset \mathcal{C}$.

II.2.1. Description de la méthode :

Supposons qu'à la p -ième itération, nous ayons un itéré u^P tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subset H \ll g, u^P \gg$ et un convexe $\mathcal{C}^P \supset \mathcal{C}$.

Si $u^P \in \mathcal{C}^P$ on pose $u^{P+1} = a^{P+1} = b^{P+1} = v^{P+1} = u^P$

Si $u^P \in \mathcal{C}^P$ on calcule (les projections s'entendant au sens des normes initiales : $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|$. $\|\cdot\|$) :

$$v^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{E}^p} u^p$$

$$b^{p+1} = \text{Proj}_{\mathcal{D}} v^{p+1}$$

$$b^{p+1} = u^p + \frac{\|u^p - v^{p+1}\|^2}{\|b^{p+1} - u^p\|^2} \cdot (b^{p+1} - u^p)$$

Puis $x^{p+1} \in \mathcal{D}$ par :

$$\mathcal{D} \cap H \ll u^p, x^{p+1} \gg = \mathcal{D} \cap H((u^p, b^{p+1})) .$$

Enfin, on définit u^{p+1} par :

$$u^{p+1} = Q \ll g, u^p, x^{p+1} \gg .$$

Il résulte des propriétés des projections que l'on a :

$$H \ll g, u^{p+1} \gg \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D} .$$

II.2.2. Propriétés de la suite u^p :

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{E}^p \cap \mathcal{D} \subset H((u^p, b^{p+1})) \cap \mathcal{D} = H \ll u^p, x^{p+1} \gg \cap \mathcal{D}$$

d'où :

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \subset H \ll g, u^p \gg \cap H \ll u^p, x^{p+1} \gg$$

et donc, comme au I.3.4. :

$$[[[s-g]]] \geq [[[u^{p+1}-g]]] \geq [[[u^p-g]]] \quad , \forall s \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D} .$$

La suite $\{[[[u^p-g]]]\}$, non décroissante et bornée est donc convergente. Puisque $u^{p+1} \in H \ll g, u^p \gg$, on en déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [[[u^{p+1}-u^p]]] = 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u^{p+1} - u^p\| \quad ;$$

et puisque $u^{P+1} \in H((u^P, b^{P+1}))$:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \| \| b^{P+1} - u^P \| \| = 0$$

d'où, par définition de b^{P+1} :

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \| \| v^{P+1} - u^P \| \| = 0 ,$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} d((u^P, \mathcal{E}^P)) = 0 .$$

II.2.3. Définition de \mathcal{E}^P :

Nous allons définir pour chacun des convexes C_i , $i=1, \dots, n$, et pour chaque pas p , $p \in \mathbb{N}$, une approximation extérieure de C_i comme dans la méthode duale de minimisation de [8]. On se donne donc — cf [8] — pour $i=1, \dots, n$, des suites de nombres $\{\Omega_i^P\}$ avec :

$$\Omega_i^P > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{P \rightarrow \infty} \Omega_i^P = 0 , \quad i=1, \dots, n$$

et des nombres θ_i vérifiant :

$$0 < \theta_i \leq 1 , \quad i=1, \dots, n .$$

On choisit alors à chaque pas et compte tenu de l'élément u^P , un indice $l_i^P \in L_i$, $i=1, \dots, n$ de la façon suivante [8] :

Si $u^P \in C_i$, on pose $l_i^P = l_i^1$; on a donc $C_{i, l_i^P} = V$

Si $u^P \notin C_i$, on choisit l_i^P de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^P \notin C_{i, l_i^P} \\ h_{i, l_i^P}(u^P) \geq \theta_i \cdot \sup_{l_i \in L_i} [h_{i, l_i}(u^P)] - \Omega_i^P ; \end{array} \right.$$

et l'on pose

$$\mathcal{E}^P = \prod_{i=1}^n C_{i, l_i^P} \supset \mathcal{E} .$$

II.3. MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME :

Compte tenu du lemme I.4.2., l'algorithme, dans l'espace V est donc le suivant :

II.3.1. Algorithme :

On pose $u^0 = g$; le passage de u^p à u^{p+1} se fait de la façon suivante :

1 - On définit :

$$I^p = \{i \in [1, n] ; u^p \notin C_i\}$$

Si $I^p = \emptyset$, on stoppe l'algorithme

Si $I^p \neq \emptyset$, on choisit, pour tout $i \in I^p$, un élément $\ell_i^p \in L_i$ définit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^p \notin C_{i, \ell_i^p} \\ h_{i, \ell_i^p}(u^p) \geq \theta_i \cdot \sup_{\ell_i \in L_i} [h_{i, \ell_i}(u^p)] - \Omega_i^p \end{array} \right.$$

et l'on calcule, au sens de la norme initiale de V :

$$v_i^{p+1} = \text{Projection de } u^p \text{ sur } C_{i, \ell_i^p}, \quad i \in I^p.$$

On calcule alors :

$$2 - b^{p+1} = u^p + \frac{\sum_{i \in I^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2}{|I^p| \cdot \left| \frac{1}{|I^p|} \cdot \sum_{i \in I^p} \|v_i^{p+1} - u^p\|^2 \right|} \cdot \left(\frac{1}{|I^p|} \cdot \sum_{i \in I^p} v_i^{p+1} - u^p \right)$$

$$3 - x^{p+1} = u^p + \frac{\|b^{p+1} - u^p\|^2}{(A^{-1}(b^{p+1} - u^p), b^{p+1} - u^p)} \cdot A^{-1}(b^{p+1} - u^p)$$

$$4 - u^{p+1} = Q < g, u^p, x^{p+1} >$$

calculé par application du théorème I.2.4. avec :

$$\lambda = a(u^p - g, x^{p+1} - u^p)$$

$$\mu = \|b^{p+1} - u^p\|^4 / (A^{-1}(b^{p+1} - u^p), b^{p+1} - u^p)$$

$$v = a(u^p - g, u^p - g)$$

$$\eta = \mu v - \lambda^2 .$$

II.3.2. Théorème :

Les hypothèses (H1) à (H5) étant supposées vérifiées, si la suite $\{u^p\}$ définie par l'algorithme II.3.1. est finie, son dernier élément est solution de (P) ; si la suite est infinie elle converge fortement vers la solution de (P).

DEMONSTRATION :

Puisque $u^0 = g$, $H \ll g, u^0 \gg = \mathcal{V} \supset \mathcal{E}$. On en déduit donc, par récurrence sur p , que $H \ll g, u^p \gg \supset \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$, et donc que $H \langle g, u^p \rangle \supset S$.

Si la suite est finie cela signifie que $u^p \in S$; u^p est donc solution de (P).

Si la suite est infinie, on a — cf II.2.2. — :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((u^p, \mathcal{E}^p)) = 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(u^p, C_{i, \ell_i^p}) = 0 \quad , \quad i=1, \dots, n$$

et donc, compte tenu de l'hypothèse (H5) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup h_{i, \ell_i^p}(u^p) \leq 0 \quad , \quad i=1, \dots, n ,$$

ou encore, par définition de ℓ_i^P :

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \{ \text{Sup}_{\ell \in L_i} [h_{i, \ell_i}(u^P)] \} \leq 0 \quad , \quad i=1, \dots, n \quad .$$

La suite $\{u^P\}$ étant bornée — cf II.2.2. — il existe donc une sous-suite, notée $\{u^q\}$, convergeant faiblement vers un élément $u \in V$.

De la s.c.i. de h_{i, ℓ_i} , $\ell_i \in L_i$, $i=1, \dots, n$, on déduit :

$$0 \geq \liminf_{q \rightarrow \infty} h_{i, \ell_i}(u^q) \geq h_{i, \ell_i}(u) \quad , \quad \ell_i \in L_i \quad , \quad i=1, \dots, n$$

et donc $u \in S$. De même de la s.c.i. de la norme $[[\cdot]]$ on déduit :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} [[u^q - g]] = \lim_{p \rightarrow \infty} [[u^q - g]] \geq [[u - g]]$$

or, puisque $H < g, u^P > \supset S$, $\forall p \in \mathbb{N}$, on a :

$$[[s - g]] \geq [[u^P - g]] \quad , \quad \forall s \in S$$

il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in S ; [[u - g]] = \inf \{ [[s - g]] ; s \in S \} \\ \lim_{q \rightarrow \infty} [[u^q - g]] = \lim_{p \rightarrow \infty} [[u^P - g]] = [[u - g]] \end{array} \right.$$

et enfin, puisque :

$$[[u - u^P]]^2 \leq [[u - g]]^2 - [[u^P - g]]^2 \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad ,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [[u - u^P]] = 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u - u^P\|$$

et c'est toute la suite $\{u^P\}$ qui converge fortement vers la solution u du problème (P) .

II.3.3. Remarque :

Comme le montre P.J. LAURENT et B. MARTINET dans [8], le formalisme utilisé au II.2.3. recouvre un grand nombre de méthode de type approximation extérieure, en particulier : méthode de KELLEY [6], KAPLAN [5]... etc...

Si l'on linéarise à chaque pas chacun des convexes C_i , $i=1, \dots, n$, par l'une, quelconque, de ces méthodes, les suites définies seront donc toujours convergentes.

La généralisation du résultat précédent au cadre I.7. est immédiate. Nous détaillons ici, à titre d'application, une méthode de linéarisation des contraintes en programmation quadratique par croisement de méthode de KELLEY [6] .

II.4. APPLICATION : LINEARISATION DE CONTRAINTES PAR CROISEMENT DE METHODES DE KELLEY [6] EN PROGRAMMATION QUADRATIQUE :

II.4.1. Le problème :

On considère, sur $V = \mathbb{R}^m$, le problème

(R') " Trouver $\hat{u} \in S \subset \mathbb{R}^m$, tel que $[J(\hat{u}) = \min_{u \in S} J(u)]$ "

avec :

$$J(u) = {}^t u A u - 2 {}^t f . v ,$$

la matrice $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ étant symétrique définie positive et $f \in \mathbb{R}^m$ étant un élément donné.

On suppose maintenant que le domaine des contraintes $S \neq \emptyset$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} C \cdot v \leq b \\ E \cdot v = d \\ h_i(v) \leq 0 \quad , \quad i=1, \dots, n_1 \end{array} \right. \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

$C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n_2})$; $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n_3})$; $b \in \mathbb{R}^{n_2}$; $d \in \mathbb{R}^{n_3}$, et les fonctions h_i , $i=1, \dots, n_1$ étant convexes et continues sur V . On pose $n = n_1 + n_2 + n_3$.

On introduit [8] :

$$C_i = \{v \in V ; h_i(v) \leq 0\} \quad , \quad i=1, \dots, n_1$$

$$L_i = \{(v, d) \in V \times V ; v \in V - C_i , d \in \partial h_i(v)\} \cup \ell_i' ; i=1, \dots, n_1$$

en notant $\partial h_i(v)$ le sous-différentiel de h_i au point v ;

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{i,(v,d)}(x) = h_i(v) + (d, x-v) \quad , \quad (v, d) \in L_i , i=1, \dots, n_1 \\ h_{i,\ell_i'}(x) = 0 \end{array} \right.$$

$$C_{i,\ell} = \{v \in V ; h_{i,\ell}(v) \leq 0\}$$

et l'hypothèse :

(H'5) " Pour tout $i=1, \dots, n_1$, et pour tout borné $B \subset V$, il existe une constante $K_i > 0$ telle que, pour tout $v \in B$ et pour tout $d \in \partial h_i(v)$ on ait $\|d\| \leq K_i$ " .

Il est clair que l'on peut poser :

$$C_i = \bigcap_{\ell \in L_i} C_{i,\ell} \quad , \quad i=1, \dots, n_1$$

et

$$S = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

Les convexes C_i , $i=n_1+1, \dots, n_1+n_2$, - resp. $i=n_1+n_2+1, \dots, n$ - étant les demi-espaces fermés - resp. les hyperplans - définis par (1) - resp. par (2) - .

Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme II.3.1. en utilisant des approximations extérieures des C_i , $i=1, \dots, n_1$.

Une simplification intervient dans le choix — cf. II.2.3. — de ℓ_i^P ; toute fonction convexe étant l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines, on a donc, pour tout $x \in C_i$:

$$h_i(x) = \max [h_{i,\ell}(x) ; \ell \in L_i] \quad ;$$

or, pour tout $d \in \partial h_i(x_i)$:

$$h_i(x) = h_{i,(x,d)}(x) \quad ,$$

on choisira donc :

$$\begin{cases} \text{Si } u^P \notin C_i, \ell_i^P = (u^P, d), d \in \partial h_i(u^P) \\ \text{Si } u^P \in C_i, \ell_i^P = \ell_i^! \end{cases}$$

Détaillons alors l'application de l'algorithme II.3.1.

II.4.2. Algorithme :

On calcule tout d'abord :

$$g = A^{-1} f ;$$

puis, posant $u^0 = g$, $v^0 = 0$, on passe de $(u^P, v^P) \in V \times \mathbb{R}$ à (u^{P+1}, v^{P+1}) de la façon suivante :

1 - On calcule :

$$\Omega_i = h_i(u^P) \quad i=1, \dots, n_1$$

$$\Omega_i = C_{(i-n_1)} \cdot u^P - b_{(i-n_1)} \quad i=n_1+1, \dots, n_1+n_2$$

$$\Omega_i = E_{(i-n_1-n_2)} \cdot u^P - d_{(i-n_1-n_2)} \quad i=n_1+n_2+1, \dots, n$$

et l'on pose :

$$I = \{i \in [1, n_1] ; \Omega_i > 0\}$$

$$J = \{i \in [n_1+1, n_1+n_2] ; \Omega_i > 0\}$$

$$K = \{i \in [n_1+n_2+1, n] ; \Omega_i \neq 0\} .$$

Si $I \cup J \cup K = \emptyset$, on stoppe l'algorithme.

Si $k = \text{card}(I \cup J \cup K) \neq 0$, nous écrivons $I \cup J \cup K$ sous la forme :

$$I \cup J \cup K = \{ \alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \dots, \epsilon, \zeta, \dots, \xi \},$$

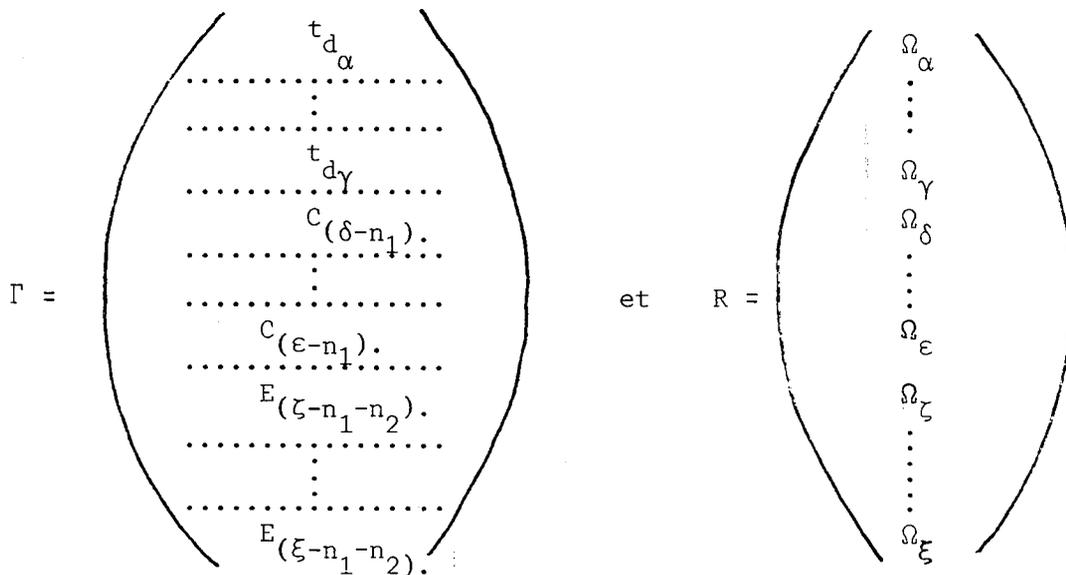
avec :

$$\alpha < \beta < \dots < \gamma \leq n_1 < \delta < \dots < \epsilon \leq n_2 < \zeta < \dots < \xi \leq n .$$

Pour $i \in I$, on choisit :

$$d_i \in \partial h_i(u^P)$$

et l'on définit les matrices $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ et $R \in \mathbb{R}^k$ par :



2 - On calcule $z^{p+1} \in \mathbb{R}^m$ par :

$$z^{p+1} = - \frac{t_{R, \Delta_{\Gamma} \cdot R}}{t_{R, \Delta_{\Gamma} \cdot \Gamma} \cdot t_{\Gamma, \Delta_{\Gamma} \cdot R}} \cdot t_{\Gamma, \Delta_{\Gamma} \cdot R}$$

3 - On résoud le système linéaire :

$$A y^{p+1} = z^{p+1}$$

4 - On définit le couple (u^{p+1}, v^{p+1}) :

$$\tau = t_{z^{p+1}, z^{p+1}}$$

$$\pi = t_{y^{p+1}, z^{p+1}}$$

$$\lambda = \frac{\tau}{\pi} \cdot t(u^p - g) \cdot z^{p+1}$$

$$\mu = \frac{\tau^2}{\pi}$$

$$v = v^p$$

$$\eta = \mu v - \lambda^2$$

$$\theta = \lambda \mu - \eta$$

Si $\theta \geq 0$, on pose :

$$\begin{cases} u^{p+1} = g + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\tau}{\pi} y^{p+1} \\ v^{p+1} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \mu \end{cases}$$

Si $\theta < 0$, on pose :

$$\begin{cases} u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\eta} \left(v \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot y^{p+1} - \lambda(u^p - g) \right) \\ v^{p+1} = v \left(1 + \frac{\mu^2}{\eta} \right) \end{cases}$$

II.4.3. Remarques :

L'algorithme II.4.2. n'est qu'une particularisation de l'algorithme II.3.1. . Le théorème II.3.2. s'applique donc à la suite $\{u^p\}$ ainsi générée.

Le croisement de méthode de KELLEY [6] n'est qu'un exemple de croisement de méthodes duales. Si l'on connaît pour certains des convexes définissant l'intersection, un point intérieur, on peut également croiser des algorithmes de KAPLAN [5] pour ces convexes avec des algorithmes de KELLEY pour les autres. Le théorème II.3.2. établit la convergence de ces procédés.

REFERENCES :

- [1] J.C.G. BOOT :
"Programming quadratique ; algorithmes, anomalies, applications".
Dunod, Paris (1968).
- [2] N. GASTINEL :
"Analyse Numérique Linéaire". Hermann, Paris (1966).
- [3] Y. HAUGAZEAU :
Thèse, Paris, (1968).
- [4] H.S. HOUTHAKKER :
"The Capacity Method of Quadratic Programming".
Econometrica, 28, (1960), 62-87.
- [5] A.A. KAPLAN :
"Determination of the extremum of linear fonction on a convex set"
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 178, 6, (1968), 269-271.
- [6] J.E. KELLEY :
"The cutting plane method for solving convex programs".
J. SIAM, 6, (1958), 15-22.
- [7] P.J. LAURENT :
"Approximation et Optimisation". Hermann, Paris (1972).
- [8] P.J. LAURENT, B. MARTINET :
"Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction
convexe sur une intersection de convexes".
Symposium on Optimisation, Nice, (1969) in Lect. Notes Math. 132,
Springer-Verlag, Berlin, (1970), 159-180.

- [9] G. PIERRA :
"Méthodes de projections parallèles extrapolées relatives à une intersection de convexes".
Rapport de Recherche N° 7, Mathématiques Appliquées et Informatique de Grenoble, (1975).
- [10] G. PIERRA :
"Projection sur une intersection de convexes et applications".
Rapport de recherche N° 9, Mathématiques Appliquées et Informatique de Grenoble, (1975).
- [11] G. PIERRA :
"A new algorithm for Quadratic Programming"
(à paraître).
- [12] H. THEIL, C. VAN DE PANNE :
"Quadratic programming as an extension of conventional quadratic maximization".
Management Science, 7, (1960), 1-20.

CHAPITRE VI

CHAPITRE VI

DECOMPOSITION D'OPERATEUR ET ECLATEMENT DE CONTRAINTE PAR PENALISATION DANS UN ESPACE PRODUIT (METHODES A PAS FRACTIONNAIRES)

INTRODUCTION

1 - Dans beaucoup de problèmes d'optimisation la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser peut être considérée comme la somme de plusieurs fonctionnelles beaucoup plus "simples", c'est-à-dire dont la minimisation est beaucoup plus facile. Citons, par exemple, les problèmes provenant de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques lorsque l'on cherche à séparer les termes provenant de chacune des dérivations.

Il est alors intéressant de ramener la résolution du problème posé à une suite de résolution de problème d'optimisation portant chacun sur une seule des fonctionnelles de cette somme. Un grand nombre de travaux ont été consacrés au développement de telles méthodes : méthode de décomposition (d'opérateur ou de fonctionnelle) et dont les plus classiques sont les méthodes de directions alternées et celles de pas fractionnaires. cf. [17] et sa bibliographie .

2 - Dans certains autres problèmes, il s'agit de minimiser une unique fonctionnelle sur un convexe susceptible d'être considéré comme une intersection de convexes chacun beaucoup plus simple.

On cherche alors à résoudre le problème initial à travers la résolution de sous-problèmes ne mettant en jeu qu'un seul de ces convexes. Il s'agit, dans ce cas, de méthodes d'éclatement de contraintes cf. [11], [5] [8] [13] [15] [16].

Il est d'ailleurs possible, à travers un éclatement de contraintes, de procéder, en réalité, à une décomposition de l'opérateur. Cf chapitre IV.

3 - Les méthodes auxquelles on s'intéresse, dans ce chapitre, procèdent de cette double démarche : au problème de la minimisation d'une somme de fonctionnelles sur une intersection de convexes on associe une suite de problèmes consistant à minimiser une de ces fonctionnelles sur l'un de ces convexes. Ces méthodes seront donc, a fortiori, applicables aux deux cas précédents.

4 - Enoncé du problème

On considère le problème d'optimisation convexe :

$$(P) \text{ "Trouver } u \in \bigcap_{i=1}^n C_i \subset V ; \sum_{i=1}^n j_i(u) = \text{Min} \left[\sum_{i=1}^n j_i(v) ; v \in \bigcap_{i=1}^n C_i \right].$$

J.L. LIONS et R. TEMAM ont proposé, cf. [9] [10] [11] [2], pour résoudre ce problème, l'algorithme suivant, généralisant des méthodes de pas fractionnaires :

On part de u^0 quelconque. Lorsque $u^0 \dots u^{p+i/n}$ sont connus, on calcule $u^{p+(i+1)/n}$ défini par :

$$\frac{1}{2\varepsilon} \|u^{p+(i+1)/n} - u^{p+i/n}\|_2 + j_i(u^{p+(i+1)/n}) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|u - u^{p+i/n}\|_2 + j_i(u) ; \forall u \in C_i.$$

Moyennant certaines hypothèses, des propriétés de convergence étaient établies, non pour les $\{u^p\}$ mais pour des barycentres de tous les itérés successifs. De plus, l'approximation de la solution u du problème (P) se passait en deux temps :

- pour ε fixe (ou $\varepsilon(n)$ de loi fixée) on calcule une approximation de la solution du problème à ε près : $W(N(\varepsilon))$.
- Faisant varier ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) on obtient des propriétés de convergence pour les $W(N(\varepsilon))$.

5 - Interprétation dans un espace produit

Si l'on introduit $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V$ et $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$, l'algorithme précédent apparaît alors comme une méthode de relaxation pour minimiser la fonctionnelle

$$J(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n j_i(v_i) \text{ sur le convexe } \mathcal{C}; \text{ le terme } \frac{1}{2\varepsilon} \|u^{p+(i+1)/n} - u^{p+i/n}\|_2$$

apparaissant comme une pénalisation destinée, à la limite, à obtenir un élément de la forme $(u^{N+1/n} = u, u^{N+2/n} = u, \dots, u^{N+(n-1)/n} = u)$ et donc, appartenant à l'intersection des convexes C_i .

En réalité, et si l'on appelle $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^1$ l'ensemble des éléments de la forme $\{(u, u, \dots, u) ; u \in V\}$, il n'est pas possible, sauf dans le cas où $n = 2$, de définir sur \mathcal{V} une fonctionnelle faisant apparaître dans la relaxation, un terme analogue à celui apparaissant comme "pénalisation" dans l'algorithme précédent. Parallèlement, certains résultats qu'il est possible d'obtenir pour $n = 2$ ne tiennent plus pour $n > 2$.

6 - Décomposition par pénalisation

Le propos de ce chapitre est d'élaborer une (famille de) méthode de décomposition apparaissant effectivement comme méthode de pénalisation dans l'espace produit. Ceci nous amène à introduire des fonctionnelles, appelées "pénalisation d'éclatement", qui, définie sur \mathcal{V}^0 et de noyau \mathcal{Q} , n'introduisent au niveau du problème décomposé que des modifications très légères par rapport à l'algorithme précédent. Pour prendre un exemple particulier, $u^0 \dots u^{p+i/n}$ étant connus, on calculera $u^{p+(i+1)/n}$ par :

$$\frac{1}{2\varepsilon} \left\| u^{p+(i+1)/n} - \frac{u^{p-1+\frac{i+2}{n}} + u^{p+\frac{i}{n}}}{2} \right\|_{j_i}^{2+} (u^{p+(i+2)/n})$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left\| u - \frac{u^{p-1+\frac{i+2}{n}} + u^{p+\frac{i}{n}}}{2} \right\|_{j_i}^{2+} (u) ; \forall u \in C_i$$

Cette légère modification, applicable également aux méthodes de pas fractionnaires, semble entraîner un certain nombre de conséquences au niveau des résultats de l'algorithme, car cela nous permet :

- d'affaiblir certaines hypothèses : les hypothèses de coercivité, de convexité stricte ou de convexité uniforme, par exemple, et lorsqu'il y a lieu de les introduire, ne seront plus nécessaires, ici, que pour une seule des fonctionnelles $j_i(v)$ alors qu'elles sont habituellement faites pour toutes les fonctionnelles $j_i(v)$ dans la méthode précédente.
- d'obtenir des résultats de convergence pour les $\{u^p\}$ eux-mêmes.
- de définir, en faisant varier $\varepsilon = \varepsilon(p)$, une approximation en un seul temps de la solution du problème initial.

7 - Plan

Après avoir défini plus précisément le problème étudié, on lui associe, dans une deuxième partie, un problème pénalisé (\mathcal{P}_ϵ) dans un espace produit.

L'étude de la convergence de la solution u_ϵ de (\mathcal{P}_ϵ) vers la solution du problème initial fait l'objet du III et l'étude de l'approximation de u_ϵ par relaxation celui du IV.

Dans la cinquième partie, enfin, on étudie la possibilité, en faisant à chaque pas de la relaxation varier le coefficient de pénalisation ϵ , d'obtenir directement une approximation de la solution du problème initial. Un premier résultat de convergence partielle est présentée ici dont les prolongements seront étudiés par ailleurs.

Les sixième et septième partie sont consacrées à la décomposition parallèle du problème (\mathcal{P}_ϵ) . On définit ainsi un algorithme parallèle qui n'est autre que celui proposé dans [2] (ou une variante de celui-ci) et l'on établit, en particulier, au § VII, et sous des hypothèses semblant assez peu restrictives, la convergence d'un procédé d'approximation en un seul temps de la solution du problème (\mathcal{P}) .

Nous n'insisterons pas ici sur les applications de la méthode proposée, et pour lesquelles nous renvoyons à [9], [2], [19], cf également chapitre VII.

I - POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES

Soient :

V un espace de Hilbert réel, identifié à son dual, de produit scalaire et de norme notés (\dots) et $\|\cdot\|$; la distance associée sera notée $d(\dots)$.

$C_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$ des sous-ensembles convexes fermés.

$$S = \bigcap_{i=1}^n C_i . \quad (1)$$

On considère le problème :

(P) "Trouver $u \in S$; $j(u) = \min[j(v) ; v \in S]$ "

avec $j : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie sur $S \subset V$.

On suppose qu'il existe une décomposition :

$$j(v) = \sum_{i=1}^n j_i(v) \quad \forall v \in S \quad (2)$$

avec $j_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}$; $i = 1, \dots, n$, des fonctionnelles définies sur $C_i \subset V$.

I.1 - HYPOTHESES

Dans toute la suite de ce travail on fait les hypothèses suivantes :

H1 j est convexe sur S

H2 j est s.c.i sur S

H3 $\left\{ \begin{array}{l} \text{ou } S \text{ est borné} \\ \text{ou } \lim_{\substack{\|v\| \rightarrow \infty \\ v \in S}} j(v) = +\infty. \end{array} \right.$

H4 j_i est convexe sur C_i , $i = 1, \dots, n$

H5 j_i est s.c.i sur C_i , $i = 1, \dots, n$

H6 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un } i' \in [1, n] \text{ tel que } \underline{\text{ou}} C_{i'} \text{ soit borné } \underline{\text{ou}} \text{ bien} \\ \lim_{\substack{x \in C_{i'} \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} j_{i'}(x) = +\infty ; \\ \underline{\text{et}} \text{ pour tout } i \in [1, n], i \neq i', j_i(x) \text{ est borné inférieurement sur } C_i. \end{array} \right.$

Les hypothèses H1 à H6 seront désignées par (H).

On sera amené, dans certains cas, à renforcer ces hypothèses en supposant également :

H1_S j est strictement convexe sur S

H4_S $\exists i \in [1, n]$ tel que j_i soit strictement convexe sur C_i .

Cet ensemble d'hypothèses : (H) et H1_S, H4_S étant désigné par (H_S) ; ou encore :

H1_U j est uniformément convexe sur S

H4_U $\exists i \in [1, n]$ tel que j_i soit uniformément convexe sur C_i ,

l'ensemble d'hypothèses (H), H1_U et H4_U sera désigné par (H_U).

Rappelons [6] qu'une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est dite uniformément convexe sur $K \subset V$ si il existe une fonction $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, monotone, avec $\tau > 0 \Rightarrow \delta(\tau) > 0$; $\delta(0) = 0$, et telle que :

$$f((x+y)/2) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - \delta(\|x-y\|).$$

I.2 - EXISTENCE DE SOLUTION POUR (P)

On sait que sous les hypothèses H1, H2 et H3 le problème (P) possède au moins une solution et que, sous l'hypothèse supplémentaire H1_S, celle-ci est unique.

On se propose de calculer une (ou la) solution de (P) en utilisant la décomposition (2) et l'éclatement de contraintes (1).

II - FORMALISATION DANS UN ESPACE PRODUIT

On introduit :

$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^n V$ doté de la topologie produit par le produit scalaire $((...)) = \sum_{i=1}^n (...)$;
la norme associée est notée $\| \cdot \|$ et la distance $d((...))$.

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n C_i$$

\mathcal{D} le convexe diagonal : $\mathcal{D} = \{b = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{V} ; b \in V\}$ et dont les éléments seront notés par une lettre ronde $x = (x, x, \dots, x)$; $b = (b, b, \dots, b) \dots$

$$J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} ; v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{C} \rightarrow J(u) = \sum_{i=1}^n j_i(v_i).$$

et le problème :

(S) "Trouver $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ tel que $J(u) = \min[J(b) ; b \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}]$ ".

On a :

$$b \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow b = (b, b, \dots, b) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow b \in C_i, i=1, \dots, n \Leftrightarrow b \in S ;$$

et le problème (S) est donc équivalent au problème (P). On en déduit, en particulier les conditions d'existence et d'unicité de solution.

On se propose d'approcher la solution u du problème (S) à partir d'une méthode de pénalisation partielle. : tous les éléments itérés $v^p = (v_1^p, v_2^p, \dots, v_n^p)$ devront appartenir à \mathcal{C} - ceci nous permettra d'éclater les contraintes, - et la contrainte \mathcal{D} sera pénalisée.

Orientation :

Il faut donc que nous définissions une fonction de pénalisation relative à \mathcal{D} c'est-à-dire une application $P : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $P(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = \dots = v_n$.
Une pénalisation naturelle est :

$$P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \|v_2 - v_1\|^2 + \|v_3 - v_2\|^2 + \dots + \|v_n - v_{n-1}\|^2 + \|v_1 - v_n\|^2.$$

Le problème pénalisé consisterait alors à minimiser :

$$J_{\epsilon}(v) = \sum_{i=1}^n \|v_{i+1} - v_i\|^{2+\epsilon} + \sum_{i=1}^n j_i(v_i). \quad - \text{ avec } v_{n+1} = v_1$$

et la résolution de ce problème par relaxation amènerait, pour passer de $(v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, v_i^p, \dots, v_n^p)$ à $(v_1^{p+1}, \dots, v_i^{p+1}, v_{i+1}^p, \dots, v_n^p)$, à résoudre le problème (on a supprimé les termes constants) :

$$\min \left[2 \left\| v_i - \frac{v_{i+1}^p + v_{i-1}^{p+1}}{2} \right\|^2 + \epsilon j_i(v_i) ; v_i \in C_i \right]. \quad (1)$$

En réalité, la fonction $P(v)$ que nous venons d'introduire n'est qu'un exemple particulier et nous introduisons donc ci-dessous une classe de fonctions pouvant jouer le même rôle.

II-1 - PENALISATION D'ECLATEMENT SUR \mathcal{C}

Nous rappelons ici la définition et les propriétés des "pénalisations d'éclatement" élaborées dans [14], cf chapitre III.I.

Considérons les $n-1$ opérateurs linéaires t_i , $i = 1, \dots, n-1$, de \mathcal{V} dans V définis par :

$$t_i : v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{V} \rightarrow v_{i+1} - v_i \in V.$$

Ces $n-1$ opérateurs appartiennent à $\mathcal{L}(\mathcal{V}, V)$; de plus étant linéairement indépendants, la variété linéaire \mathcal{C} qu'ils engendrent est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, V)$ de dimension $n-1$.

Soit (s_1, \dots, s_m) un système de m éléments de \mathcal{C} . A ce système est associé un opérateur linéaire S de $\mathcal{V} = V^n$ dans V^m : $S \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, V^m)$, dont les composantes sont $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, V)$, ainsi qu'une forme quadratique sur \mathcal{V} , notée P_S ou simplement P et définie par :

$$P_S(v) = \|S(v)\|_{V^m}^2 = \sum_{i=1}^m \|s_i(v)\|^2. \quad (2)$$

La forme P_T est associée à (t_1, \dots, t_{n-1}) sera notée g .

II.1.1 - Définition

On appelle pénalisation d'éclatement toute forme quadratique P_S associée à un système fini de générateurs de \mathcal{C} .

Il est clair que $\{\sqrt{P_S}\}$ forme une famille de semi-normes sur \mathcal{V} . Rappelons quelques propriétés de cette famille établies dans [14].

II.1.2 - Propriétés

- 1) Toute pénalisation d'éclatement (P.E.) est convexe sur \mathcal{V} .
- 2) Toute P.E. est fortement convexe [6] séparément par rapport à chacune des variables v_i , $i = 1, \dots, n$.
- 3) Soient $s_1 \in \mathcal{C}, \dots, s_m \in \mathcal{C}$ et P la forme quadratique associée, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 - i) $\{s_1, \dots, s_m\}$ forme un système de générateurs de \mathcal{C} .
 - ii) $\mathcal{V}(P) = \mathcal{D}$
- 4) Soient P une P.E. et g la P.E. associée à $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$
 - i) $\{P(\cdot)\}^{1/2}$ et $\{g(\cdot)\}^{1/2}$ sont deux semi-normes équivalentes sur \mathcal{V} .
 - ii) Ces semi-normes induisent sur l'espace quotient \mathcal{V}/\mathcal{D} deux normes équivalentes à la norme quotient.
- 5) Toute P.E. est Frechet-différentiable. Le carré de la norme du gradient d'une P.E. est une P.E.
Le gradient d'une P.E. $P(\cdot)$, s'écrit :

$$P'_\ell(v) = 2M_\ell [v_\ell - B_\ell(v)], \quad \ell = 1, \dots, n \quad (3)$$

$B_\ell(v)$ étant un barycentre pondéré des $n-1$ éléments $v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \dots, v_n$;
Les pondérations, indépendantes de v , dépendant seulement de la P.E., et
 M_ℓ étant un nombre positif.

- 6) La dérivée d'une P.E. est lipschitzienne.

7) Avec l'application $B_\ell(\cdot)$ définie ci-dessus, une P.E. $P(\cdot)$ s'écrit :

$$P(v) = \sum_{\ell} M_{\ell} \|v_{\ell} - B_{\ell}(v)\|^2 + G_{\ell}(v) \quad \ell = 1, \dots, n \quad (4)$$

avec $G_{\ell}(v) \geq 0$, $G_{\ell}(v)$ indépendant de v_{ℓ} . (Les notations $B_{\ell}(v)$ et $G_{\ell}(v)$ sont donc des abus de notation : il faudrait noter : $B_{\ell}(v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \dots, v_n)$ et $G_{\ell}(v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \dots, v_n)$).

Ajoutons une propriété précisant la convexité d'une P.E.

8) Pour toute P.E. et pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, on a

$$P(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda P(x) + (1-\lambda)P(y) - \lambda(1-\lambda) P(x-y) \quad (5)$$

Démonstration :

Par définition

$$P(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sum_{i=1}^m \|s_i(\lambda x + (1-\lambda)y)\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\lambda s_i(x) + (1-\lambda)s_i(y)\|^2.$$

En utilisant l'identité :

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b\|^2 = \lambda \|a\|^2 + (1-\lambda) \|b\|^2 - \lambda(1-\lambda) \|a-b\|^2,$$

il vient :

$$P(\lambda x + (1-\lambda)y) = \sum_{i=1}^m [\lambda \|s_i(x)\|^2 + (1-\lambda) \|s_i(y)\|^2 - \lambda(1-\lambda) \|s_i(x-y)\|^2],$$

l'expression (5) en résulte.

II.1.3 - Exemples

Donnons quelques exemples de P.E.

$$P_1(v) = \sum_{i=1}^n \|v_i - v_{i-1}\|^2 \quad \text{avec la convention } v_0 = v_n$$

$$P_2(v) = \sum_{i,j} \|v_i - v_j\|^2 \quad i=1, \dots, n ; j=1, \dots, n ; i \neq j$$

$$P_3(v) = \sum_{i=1}^n \left\| v_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j \right\|^2$$

$$P_4(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| v_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\|^2 \quad \alpha_j > 0, j=1, \dots, n; \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

II.1.4 - Cas particulier

Précisons sur $P(v) = P_1(v)$ les propriétés ci-dessus :

$$P(v) = \sum_{i=1}^n \left\| v_i - v_{i-1} \right\|^2$$

d'où, par le théorème de la médiane (d'où l'énoncé (1) ci-dessus) :

$$P(v) = 2 \left\| v_i - \frac{v_{i-2} + v_{i+1}}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| v_{i-1} - v_{i+1} \right\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n \left\| v_j - v_{j-1} \right\|^2$$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} B_i(v) = \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2} \\ M_i = 2 \\ G_i(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \frac{1}{2} \left\| v_{i-1} - v_{i+1} \right\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n \left\| v_j - v_{j-1} \right\|^2. \end{array} \right.$$

De même pour le gradient de $P_1(v)$:

$$P'_i(v) = 2 \times 2 \left(v_i - \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2} \right) = 2 \cdot M_i \cdot (v_i - B_i(v)) ; \quad i = 1, \dots, n$$

et l'on vérifie facilement

$$\|P'(v) - P'(w)\| \leq 8 \|v - w\| .$$

II.2 - PROBLEME PENALISE

Soit P une pénalisation d'éclatement sur \mathcal{V} . On considère le problème pénalisé :

\mathcal{P}_ε) "Trouver $u_\varepsilon \in \mathcal{C}$ tel que $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min[J_\varepsilon(v) ; v \in \mathcal{C}]$ ".

avec :

$$J_\varepsilon(v) = P(v) + \varepsilon J(v) \quad \forall v \in \mathcal{C}.$$

Etudions l'existence et l'unicité des solutions de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$:

II.2.1 - Lemme

L'hypothèse H6 implique, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\lim_{\substack{v \in \mathcal{C} \\ \|v\| \rightarrow \infty}} J_\varepsilon(v) = +\infty$$

Démonstration :

1°) Supposons d'abord que $\|v_{i'}\| \rightarrow \infty$, i' étant défini par H6.

On a :

$$J_\varepsilon(v) = P_\varepsilon(v) + \varepsilon \cdot \sum_{i \neq i'} j_i(v_i) + \varepsilon j_{i'}(v_{i'}). \quad (6)$$

Dans le second membre de cette égalité, le premier terme est non-négatif; le deuxième est, par hypothèse, borné inférieurement et donc :

$$\lim_{\substack{v \in \mathcal{C} \\ \|v_{i'}\| \rightarrow \infty}} J_\varepsilon(v) = +\infty.$$

2°) Supposons alors que $\|v\| \rightarrow \infty$, $v_{i'}$ restant borné. Il existe donc un indice $\ell \in [1, n]$, $\ell \neq i'$, tel que $\|v_\ell - v_{i'}\| \rightarrow +\infty$.

Par définition d'une P.E. :

$$P(x) = \sum_{k=1}^m \|s_k(x)\|^2$$

et il existe des $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, tel que pour tout $x \in \mathcal{U}$:

$$x_l - x_i = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot s_k(x).$$

Si donc $\|v_l - v_i\| \rightarrow \infty$, ceci implique qu'il existe un indice $k \in [1, m]$ tel que $\|s_k(v)\| \rightarrow \infty$ et donc $P(v) \rightarrow +\infty$.

Reprenant alors l'expression (6) de $J_\epsilon(v)$, les deuxième et troisième termes du second membre sont bornés inf^t. le premier terme tendant vers $+\infty$, on en déduit que $J_\epsilon(v)$ tend vers $+\infty$; ce qui établit le lemme.

Remarquons que la deuxième partie de cette démonstration établit, plus généralement, la proposition suivante :

II.2.2 - Proposition

On suppose qu'il existe un indice $i \in [1, n]$ tel que x_i reste borné alors, pour toute P.E. $P(x)$:

$$P(x) \leq B \Rightarrow \|x\| \leq M.$$

II.2.3 - Existence de solution pour le problème (\mathcal{P}_ϵ)

Il est clair que $J(v)$ est faiblement s.c.i. sur \mathcal{E} ; $P(v)$ étant convexe et continue sur \mathcal{V} , est donc également faiblement s.c.i., de même, pour tout $\epsilon > 0$, que $J_\epsilon(v)$.

Il résulte donc du lemme II.2.1. que, l'hypothèse (H) étant vérifiée, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, au moins un u_ϵ solution de (\mathcal{P}_ϵ) .

II.2.4 - Proposition

Sous l'hypothèse (H_S) , la solution u_ϵ de (\mathcal{P}_ϵ) est unique.

Démonstration

Soient u_ϵ et v_ϵ deux solutions de (\mathcal{P}_ϵ) . $P(\cdot)$ et $J(\cdot)$ étant convexe sur l'ensemble convexe \mathcal{E} , on sait que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $x_\epsilon = \lambda u_\epsilon + (1-\lambda)v_\epsilon$ est également solution de (\mathcal{P}_ϵ) ; et, en particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$J_{\epsilon}(u_{\epsilon}) = J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) = J_{\epsilon}(v_{\epsilon}).$$

1°) Montrons d'abord que $u_{i,\epsilon} = v_{i,\epsilon}$; i étant défini par l'hypothèse $H4_s$.
Si cela n'était pas le cas, on aurait :

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) = P\left(\frac{u+v}{2}\right) + \epsilon \sum_{i \neq i} j_i\left(\frac{u_{i\epsilon}+v_{i\epsilon}}{2}\right) + \epsilon j_i\left(\frac{u_{i\epsilon}+v_{i\epsilon}}{2}\right)$$

$P(\cdot)$ et $j_i(\cdot)$ étant convexe :

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[P(u_{\epsilon})+P(v_{\epsilon})] + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i \neq i} (j_i(u_{i\epsilon})+j_i(v_{i\epsilon})) + \epsilon j_i\left(\frac{u_{i\epsilon}+v_{i\epsilon}}{2}\right)$$

j_i étant strictement convexe, si $u_{i\epsilon} \neq v_{i\epsilon}$, il vient :

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}[J_{\epsilon}(u_{\epsilon})+J_{\epsilon}(v_{\epsilon})] = J_{\epsilon}(u_{\epsilon})$$

et u_{ϵ} ne serait pas solution, contrairement à l'hypothèse. On a donc
 $u_{i\epsilon} = v_{i\epsilon}$.

2°) Montrons alors que $u_{\epsilon} = v_{\epsilon}$. On a :

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) = P\left(\frac{u+v}{2}\right) + \epsilon J\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq P\left(\frac{u+v}{2}\right) + \epsilon \left[\frac{1}{2} J(u_{\epsilon}) + \frac{1}{2} J(v_{\epsilon}) \right] ;$$

d'après (5) il vient :

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2} P(u_{\epsilon}) + \frac{1}{2} P(v_{\epsilon}) - \frac{1}{4} P(u_{\epsilon}-v_{\epsilon}) + \epsilon \left[\frac{1}{2} J(u_{\epsilon}) + \frac{1}{2} J(v_{\epsilon}) \right]$$

ou encore :

$$J_{\epsilon}\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq J_{\epsilon}(u_{\epsilon}) - \frac{1}{4} P(u_{\epsilon}-v_{\epsilon}).$$

On a donc, puisque P est une P.E. cf. II.1.2 Propriété 3 :

$$P(u_{\epsilon}-v_{\epsilon}) = 0 \Rightarrow u_{\epsilon}-v_{\epsilon} \in \mathcal{D}$$

c'est-à-dire :

$$u_{i\varepsilon} - v_{i\varepsilon} = u_{i\varepsilon} - v_{i\varepsilon} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$u_{\varepsilon} = v_{\varepsilon} .$$

III - CONVERGENCE DE LA SUITE $\{u_{\varepsilon}\}$

u_{ε} désignant l'une, quelconque, des solutions du problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon})$, on étudie ici le comportement de la suite $\{u_{\varepsilon}\}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

III-1 - THEOREME

On suppose l'hypothèse (H) vérifiée et l'on fait tendre ε vers zéro ; alors :

i) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(u_{\varepsilon}) = 0$

ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(u_{\varepsilon}) = \text{Min} [j(v) ; v \in S]$.

iii) Tout point d'adhérence faible, $\tilde{u} = (\tilde{u}, \tilde{u}, \dots, \tilde{u})$, de $\{u_{\varepsilon}\}$, et il en existe au moins un, est solution de (\mathcal{P}) ; c'est-à-dire \tilde{u} est solution de (P).

Démonstration

1°) J étant une fonctionnelle convexe et s.c.i. sur \mathcal{C} , l'hypothèse H6 entraîne qu'elle possède, sur \mathcal{C} , une borne inférieure atteinte :

$$\exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que } J(v) \geq -B \quad \forall v \in \mathcal{C} .$$

Posons :

$$K_{\varepsilon}(v) = J_{\varepsilon}(v) + \varepsilon B$$

alors

$$K_{\varepsilon}(v) \geq J_{\varepsilon}(v) - \varepsilon J(v) = P(v) .$$

D'autre part, u_ε réalisant le minimum de $J_\varepsilon(v)$ sur \mathcal{C} réalise également le minimum de $K_\varepsilon(v)$. Considérons alors une suite $\{w^p\} \subset \mathcal{C}$, $p \in \mathbb{N}$, minimisante pour $P(v)$. Pour tout $\delta > 0$, il existe un rang $m(\delta)$ tel que :

$$P(w^{m(\delta)}) \leq \frac{\delta}{2}.$$

On a donc :

$$K_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq K_\varepsilon(w^{m(\delta)}) \leq \frac{\delta}{2} + \varepsilon [J(w^{m(\delta)}) + B] ;$$

d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$:

$$\varepsilon(\delta) = \frac{\delta}{2[J(w^{m(\delta)}) + B]}$$

on a

$$P(u_\varepsilon) \leq K_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \delta ,$$

ce qui montre bien que $P(u_\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et établit le point i).

2°) $\{u_\varepsilon\}$ est bornée.

Soit \tilde{u} une solution de (\mathcal{P}) ; on a :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\tilde{u})$$

et puisque $\tilde{u} \in \mathcal{D}$, $P(\tilde{u}) = 0$ d'où

$$\varepsilon \cdot J(u_\varepsilon) \leq \varepsilon \cdot J(u_\varepsilon) + P(u_\varepsilon) \leq \varepsilon \cdot J(\tilde{u}).$$

Il en résulte que $J(u_\varepsilon) \leq J(\tilde{u})$ et, d'après l'hypothèse H6, $\{u_{\frac{1}{\varepsilon}}\}$ reste bornée. D'autre part :

$$P(u_\varepsilon) \leq \varepsilon [J(\tilde{u}) - J(u_\varepsilon)]$$

D'après l'hypothèse H6, $J(v)$ est borné inf^t sur \mathcal{C} : il existe un $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J(v) \geq -B, \quad \forall v \in \mathcal{C}.$$

On a donc :

$$P(u_\varepsilon) \leq \varepsilon [J(\tilde{u}) + B]$$

et, pour tout ε_0 positif, $\varepsilon < \varepsilon_0$ entraîne qu'il existe $K_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P(u_\varepsilon) \leq K_0.$$

On déduit alors de la proposition II.2.2. que $\{u_\varepsilon\}$ est bornée.

3°) Convergence

$\{u_\varepsilon\}$ étant borné on peut en extraire une sous-suite $\{u_{\varepsilon'}\}$ convergeant faiblement vers un élément $x \in \mathcal{C}$.

$P(v)$ étant s.c.i., il vient :

$$\liminf_{\varepsilon' \rightarrow 0} P(u_{\varepsilon'}) \geq P(x)$$

d'où $P(x) = 0$ et $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$. On pose : $x = \tilde{u} = (\tilde{u}, \tilde{u}, \dots, \tilde{u})$, et $\tilde{u} \in S$.
Quelque soit $u \in S$, on a $u = (u, u, \dots, u)$:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u)$$

$$P(u_\varepsilon) + \varepsilon J(u_\varepsilon) \leq \varepsilon J(u)$$

et donc

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u), \quad \forall u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D};$$

d'où

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J(u_\varepsilon) \leq J(u), \quad \forall u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}.$$

Or $\{u_\varepsilon\}$ converge faiblement vers $\tilde{u} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $J(v)$ étant s.c.i., il vient :

$$\liminf_{\varepsilon' \rightarrow 0} J(u_{\varepsilon'}) \geq J(\tilde{u}),$$

d'où

$$J(\tilde{u}) \leq J(u), \quad \forall u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

c'est-à-dire

$$j(\tilde{u}) = \min [j(u) ; u \in S],$$

ce qui prouve iii). Enfin, tout point d'adhérence faible appartenant à $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, il en résulte que, pour toute la suite $\{u_\varepsilon\}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(u_\varepsilon) = J(\tilde{u}) = \min [j(u) ; u \in S].$$

Dans le cas où la solution de (P) est unique, on a immédiatement :

III.2 - COROLLAIRE

Si on suppose que la solution \tilde{u} de (P) est unique, alors toutes les suites $\{u_\epsilon\}$ convergent faiblement vers \tilde{u} . En particulier si l'on suppose l'hypothèse (H_S) vérifiée, toute la suite $\{u_\epsilon\}$ converge faiblement vers \tilde{u} .

III.3 - CONDITIONS SUFFISANTES DE CONVERGENCE FORTE

Donnons quelques cas de convergence forte.

1er cas

III.3.1. - Proposition

Si l'hypothèse (H_U) est vérifiée, alors $\{u_\epsilon\}$ converge fortement vers la solution unique \tilde{u} de (P).

Démonstration :

D'après l'hypothèse H_U , pour tout $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, on a :

$$J\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \hat{i}}}^n j_i\left(\frac{x_i+y_i}{2}\right) + j_{\hat{i}}\left(\frac{x_{\hat{i}}+y_{\hat{i}}}{2}\right) \leq \frac{1}{2} J(x) + \frac{1}{2} J(y) - \delta(\|x_{\hat{i}}-y_{\hat{i}}\|).$$

En prenant $x = u_\epsilon$ et $y = \tilde{u}$, il vient donc :

$$\delta(\|u_{\hat{i}\epsilon} - \tilde{u}\|) \leq \frac{1}{2} J(u_\epsilon) + \frac{1}{2} J(\tilde{u}) - J\left(\frac{u_\epsilon + \tilde{u}}{2}\right).$$

ou encore

$$\delta(\|u_{\hat{i}\epsilon} - \tilde{u}\|) \leq \frac{1}{2} [J(u_\epsilon) - J(\tilde{u})] + J(\tilde{u}) - J\left(\frac{u_\epsilon + \tilde{u}}{2}\right).$$

Montrons que $J\left(\frac{u_\epsilon + \tilde{u}}{2}\right) \rightarrow J(\tilde{u})$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Puisque $J(u_\epsilon) \leq J(\tilde{u})$, on déduit de la convexité de $J(\cdot)$:

$$J\left(\frac{u_\epsilon + \tilde{u}}{2}\right) \leq J(\tilde{u}).$$

D'autre part, u_ϵ convergeant faiblement vers \tilde{u} , il en est de même de $(u_\epsilon + \tilde{u})/2$ et donc

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} J\left(\frac{u + \tilde{u}}{2}\right) \geq J(\tilde{u}).$$

On a donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J\left(\frac{u + \tilde{u}}{2}\right) = J(\tilde{u}),$$

ce qui implique :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\|u_{i\epsilon} - \tilde{u}\|) = 0,$$

et par définition de $\delta(\cdot)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_{i\epsilon} - \tilde{u}\| = 0.$$

Enfin, d'après le théorème III.1 :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(u_\epsilon) = 0,$$

d'où par définition d'une P.E. cf. II.1.2. propriété 4

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_{i\epsilon} - u_{i\epsilon}\| = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon - \tilde{u}\| = 0.$$

2ème cas

III.3.2 - Proposition

On suppose maintenant, en plus de l'hypothèse (H) que :

(G1) $j_i(v_i)$ est uniformément continue sur C_i , $i = 1, \dots, n$

(G2) Il existe un indice $\ell \in [1, n]$ tel que, en notant $\text{Int}(C)$ l'intérieur de l'ensemble C :

$$C_\ell \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n C_i \right) \neq \emptyset$$

$H1_u$ $j(v)$ est uniformément convexe sur S .

Alors toute suite $\{u_\epsilon\}$ de solutions de (\mathcal{P}_ϵ) converge fortement, quand $\epsilon \rightarrow 0$, vers la solution unique \tilde{u} de \mathcal{P} .

Démonstration :

1er point Sous l'hypothèse (G2), toute pénalisation d'éclatement $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ définit "correctement", cf. [6], le convexe $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$:

$$\forall \{v^P\} \subset \mathcal{C}, \lim_{p \rightarrow \infty} P(v^P) = 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} d((v^P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})) = 0.$$

En effet, de $\lim_{p \rightarrow \infty} P(v^P) = 0$, on déduit, par équivalence de semi-normes - cf. II.1.2. (Propriété 4) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^P, v_k^P) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^P, C_k) = 0, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n.$$

Si l'hypothèse (G2) est vérifiée, il est démontré en [4] (lemme 5a) que ceci implique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(v_i^P, S) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Or, puisque :

$$d(v_i^P, \text{Proj}_S v_k^P) \leq d(v_i^P, v_k^P) + d(v_k^P, S) \quad i=1, \dots, n, \forall k \in [1, n];$$

si l'on pose : $w^P(k) = (\text{Proj}_S v_k^P, \text{Proj}_S v_k^P, \dots, \text{Proj}_S v_k^P)$, on a donc :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((v^P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} d((v^P, w^P(k))) = 0.$$

2ème point : Convergence.

Soit $r_\epsilon = (r_{\epsilon_1}, r_{\epsilon_2}, \dots, r_{\epsilon_n})$ la projection de u_ϵ sur $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Il résulte du 1er point que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d((u_\epsilon, r_\epsilon)) = 0$$

D'après l'hypothèse (G1), chacune des fonctionnelles $j_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$ étant uniformément continue sur C_i , il en est de même de $J(\cdot)$ sur \mathcal{C} :

$$\forall \theta > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{C}, \forall y \in \mathcal{C}, d((x,y)) < \eta \Rightarrow |J(x) - J(y)| < \theta$$

On en déduit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |J(u_\varepsilon) - J(r_\varepsilon)| = 0$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j(r_\varepsilon) = \min [j(u) ; u \in S].$$

De l'uniforme convexité de $j(\cdot)$ sur S (H^1_U) on déduit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\tilde{u}, r_\varepsilon) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d((\tilde{u}, r_\varepsilon)) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d((u_\varepsilon, \tilde{u})) = 0.$$

IV - APPROXIMATION DE u_ε PAR RELAXATION

Dans la troisième partie de ce chapitre, nous avons étudié le comportement de la suite $\{u_\varepsilon\}$ des solutions du problème pénalisé $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. On se propose maintenant de calculer, pour ε fixé, la solution u_ε de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ par décomposition.

Dans le cas particulier où $n = 2$ et où la pénalisation d'éclatement utilisée est $P_1(v) = 2\|v_1 - v_2\|^2$, l'algorithme de relaxation utilisé pour calculer u_ε n'est autre que la classique méthode des pas fractionnaires si $S = V$ ou la méthode proposée par J.L. LIONS et R. TEMAM [9] [10] [11] pour décomposer les problèmes de calcul des variations si $S \neq V$.

Pour $n > 2$, par contre, la méthode des pas fractionnaires et la généralisation de J.L. LIONS et R. TEMAM ne rentre plus dans le formalisme présenté ici et certaines propriétés, valables pour cette méthode dans le cas $n = 2$ qui semblent perdues pour $n > 2$ restent valables quel que soit n en utilisant les pénalisations d'éclatement.

(c'est, en particulier, le cas des propriétés de convergence des suites $\{v^{p+i/q}\}$).

IV-1 - DECOMPOSITION DU PROBLEME (\mathcal{P}_ε)

Au problème (\mathcal{P}_ε) on associe les n sous-problèmes :

($\mathcal{P}_{i\varepsilon}$) "Trouver \hat{v}_i tel que

$$J_\varepsilon(v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \min [J_\varepsilon(v_1, \dots, v_{i-1}, x_i, v_{i+1}, \dots, v_n); x_i \in C_i]$$

L'algorithme de décomposition consiste à activer successivement et dans un certain ordre, chacun des problèmes ($\mathcal{P}_{i\varepsilon}$). Nous étudions ici la méthode de décomposition série, l'étude de la méthode de décomposition parallèle sera effectuée aux § VI et § VII.

IV.1.1 - Notations

Pour alléger les notations, nous poserons

$$\begin{cases} \tilde{v}^{i,p} = (v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, v_i^p, \dots, v_n^p) \\ \tilde{v}^{n+1,p} = \tilde{v}^{1,p+1} \end{cases}$$

et

$$K_i^p = \{v \in \mathcal{E} ; v = (v_1^{p+1}, \dots, v_{i-1}^{p+1}, v_i^p, v_{i+1}^p, \dots, v_n^p) ; v_i \in C_i\}.$$

IV.1.2 - Décomposition-série du problème ($\mathcal{P}_{i\varepsilon}$).

Avec les notations précédentes, la méthode de décomposition-série, fréquemment appelée, [3], méthode de relaxation, est la suivante :

v^p étant connu, v^{p+1} est déterminé en calculant progressivement ses composantes successives $v_1^{p+1}, v_2^{p+1}, \dots, v_n^{p+1}$ par résolution, pour $i = 1, \dots, n$, des sous-problèmes :

$$(\mathcal{Q}_{i,\epsilon}^P) \begin{cases} \tilde{v}^{i+1,p} \in K_i^P \\ J_\epsilon(\tilde{v}^{i+1,p}) \leq J_\epsilon(v) ; \quad \forall v \in K_i^P ; \end{cases}$$

c'est-à-dire, puisque :

$$J_\epsilon(v) = P(v) + \epsilon \sum_{i=1}^n j_i(v_i)$$

$$(\mathcal{R}_{i\epsilon}^P) \begin{cases} \tilde{v}^{i+1,p} \in K_i^P \\ P(\tilde{v}^{i+1,p}) + \epsilon j_i(v_i^{p+1}) \leq P(v) + \epsilon j_i(v_i) ; \quad \forall v \in K_i^P \end{cases}$$

ou encore, en introduisant l'expression II(4) de $P(v)$ -cf II.1.2. Propriété 7-

$$(\mathcal{R}_{i,\epsilon}^P) \begin{cases} v_i^{p+1} \in C_i \\ M_i \|v_i^{p+1} - B(\tilde{v}^{i,p})\|^2 + \epsilon j_i(v_i^{p+1}) \leq M_i \|v_i - B(\tilde{v}^{i,p})\|^2 + \epsilon j_i(v_i) ; \quad \forall v_i \in C_i. \end{cases}$$

IV.1.3. - Remarque

Les sous-problèmes $(\mathcal{R}_{i,\epsilon}^P)$ rencontrés dans le déroulement de l'algorithme ont une expression très proche de celle des sous-problèmes rencontrés dans la méthode de LIONS et TEMAM -cf [2] ; à ceci près que, dans le terme de "pénalisation", $\|v_i - B(\tilde{v}^{i,p})\|^2$ est remplacé par $\|v_i - v_{i-1}^{p+1}\|^2$. Cette très légère modification semble cependant avoir d'importantes conséquences au niveau du comportement de l'algorithme.

IV.2 - ALGORITHME

L'algorithme de relaxation est alors le suivant :

Partant de $\tilde{v}^{1,0} \in \mathcal{V}$, le passage de $\tilde{v}^{i,p}$ à $\tilde{v}^{i+1,p}$ s'effectue en calculant v_i^{p+1} solution unique du problème :

$$(R_{i,\epsilon}^P) \quad \begin{cases} v_i^{P+1} \in C_i \\ M_i \|v_i^{P+1} - B(\tilde{v}^{i,P})\|^2 + \epsilon j_i(v_i^{P+1}) \leq M_i \|v_i - B(\tilde{v}^{i,P})\|^2 + \epsilon j_i(v_i) ; \forall v_i \in C_i . \end{cases}$$

IV.2.1 - Remarque

Notons, ainsi que cela était noté dans [14], que les pénalisations d'éclatement jouent également un rôle de régularisation au niveau du problème décomposé $(\mathcal{P}_{i\epsilon})$ ou $(R_{i\epsilon}^P)$. Il suffit que $j_i(\cdot)$ soit convexe et borné inf.^t pour que la fonctionnelle à minimiser lors de chaque sous-problème $(\mathcal{P}_{i\epsilon})$ ou $(R_{i\epsilon}^P)$ soit fortement convexe et coercive, et que le problème possède ainsi une solution unique.

IV.2.2 - Remarque

Si l'on choisit comme pénalisation d'éclatement $P_3(v)$ ou $P_4(v)$ -cf. II.1.3, il est également possible de définir un algorithme de décomposition parallèle du problème (\mathcal{P}_ϵ) consistant à résoudre en parallèle les n problèmes $(\mathcal{P}_{i\epsilon})$ $i = 1, \dots, n$. Avec le choix $P_3(v)$, on retrouve l'algorithme parallèle de J.L. LIONS et R. TEMAM - cf [10] [2]. Les propriétés de cet algorithme sont étudiées aux § VI et VII. Avec le choix $P_4(v)$ on obtient une variante de l'algorithme précédent et dont un cas particulier, sans décomposition de l'opérateur, est étudié dans [16].

IV-3 - CONVERGENCE DE L'ALGORITHME DE RELAXATION

Nous étudions maintenant, pour $\epsilon > 0$ fixé, le comportement de l'algorithme de "relaxation" IV.2. On donne d'abord un résultat général de convergence faible, puis l'on précise les conséquences d'une restriction d'hypothèse. Les notations introduites jusqu'ici, en particulier au II et au IV.1.1., sont conservées et l'hypothèse (H) est toujours supposée vérifiée.

Etablissons tout d'abord un lemme préliminaire.

IV.3.1 - Lemme

Soient $x^P \in \mathcal{C}$ et e un nombre donné positif.

A partir de x^P , on définit $x^{P+1} \in \mathcal{C}$ en calculant successivement, pour $i = 1, 2, \dots, n$, ses composantes x_i^{P+1} par résolution du problème $\Pi_i(x^P, e)$:

$$\Pi_i(x^P, e) \begin{cases} x_i^{P+1} \in C_i \\ M_i \cdot \|x_i^{P+1} - B(\tilde{x}^{i,P})\|^2 + e j_i(x_i^{P+1}) \leq M_i \|x_i - B(\tilde{x}^{i,P})\|^2 + e j_i(x_i) \\ \forall x_i \in C_i. \end{cases}$$

Il existe alors une constante $N > 0$, indépendante de x^P et de e , telle que, pour tout $x \in \mathcal{C}$, on ait :

$$i) \quad ((P'(x^{P+1}), x - x^{P+1}) + e(J(x) - J(x^{P+1}))) \geq -N \cdot \|x^{P+1} - x^P\| \cdot \|x - x^{P+1}\|$$

$$ii) \quad P(x) + eJ(x) - P(x^{P+1}) - eJ(x^{P+1}) \geq -N \cdot \|x^{P+1} - x^P\| \cdot \|x - x^{P+1}\|.$$

Démonstration

1°) Le gradient d'une P.E. étant lipschitzienne il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|P'(u) - P'(t)\| \leq M \cdot \|u - t\| \quad ; \quad \forall u \in \mathcal{U} ; \forall t \in \mathcal{U}$$

2°) La solution x_i^{P+1} du problème $\Pi(x^P, e)$ est caractérisée par :

$$2(x_i^{P+1} - B(\tilde{x}^{i,P}), x_i - x_i^{P+1}) + e[j_i(x_i) - j_i(x_i^{P+1})] \geq 0 \quad \begin{cases} \forall x_i \in C_i \\ i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(P'_i(\tilde{x}^{i+1,P}), x_i - x_i^{P+1}) + e[j_i(x_i) - j_i(x_i^{P+1})] \geq 0 \quad \begin{cases} \forall x_i \in C_i \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$(P'_i(x^{P+1}) + (P'_i(\tilde{x}^{i+1,P}) - P'_i(x^{P+1})), x_i - x_i^{P+1}) + e(j_i(x_i) - j_i(x_i^{P+1})) \geq 0 \quad \begin{cases} \forall x_i \in C_i \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

d'où, par Cauchy-Schwarz :

$$(P'_i(x^{p+1}), x_i - x_i^{p+1}) + e(j_i(x_i) - j_i(x_i^{p+1})) \geq -\|P'_i(\tilde{x}^{i+1, p}) - P'_i(x^{p+1})\| \cdot \|x_i - x_i^{p+1}\|.$$

Or puisque :

$$\|P'_i(\tilde{x}^{i+1, p}) - P'_i(x^{p+1})\| \leq \|P'_i(\tilde{x}^{i+1, p}) - P'_i(x^{p+1})\| \leq M \cdot \|\tilde{x}^{i+1, p} - x^{p+1}\| \leq M \cdot \|x^p - x^{p+1}\|$$

cela entraîne :

$$(P'_i(x^{p+1}), x_i - x_i^{p+1}) + e(j_i(x_i) - j_i(x_i^{p+1})) \geq -M \cdot \|x^p - x^{p+1}\| \cdot \|x_i - x_i^{p+1}\| \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x_i \in C_i \\ i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

En sommant l'expression précédente pour $i = 1, \dots, n$, et compte tenu de l'équivalence, sur \mathbb{R}^r des normes ℓ^1 et ℓ^2 , il existe donc une constante positive N , ($N < n \times M$), telle que, pour tout x appartenant à \mathcal{C} on ait (i) :

$$((P'(x^{p+1}), x - x^{p+1})) + e J(x) - e J(x^{p+1}) \geq -N \cdot \|x^{p+1} - x^p\| \cdot \|x - x^{p+1}\|.$$

$P(v)$ étant convexe :

$$P(x) - P(x^{p+1}) \geq ((P'(x^{p+1}), x - x^{p+1})) \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

et l'on a donc (ii) :

$$P(x) - P(x^{p+1}) + e J(x) - e J(x^{p+1}) \geq -N \cdot \|x^{p+1} - x^p\| \cdot \|x - x^{p+1}\| ; \forall x \in \mathcal{C}.$$

Donnons maintenant un théorème de convergence :

IV.3.2 - Théorème

On suppose l'hypothèse (H) vérifiée ; alors, si l'on note comme précédemment u_ϵ une solution quelconque de (\mathcal{P}_ϵ) et U_ϵ l'ensemble de ces solutions, on a, pour la suite $\{v^p\}$ définie par l'algorithme IV.2 :

i) $\lim_{p \rightarrow \infty} J_\epsilon(v^p) = J_\epsilon(u_\epsilon)$

ii) Tout point d'adhérence faible de $\{v^p\}$, et il en existe au moins un, appartient à U_ϵ .

Démonstration

1er point : La suite $J_\epsilon(v^p)$ est convergente.

Notons d'abord que, quelque soit $v^0 \in \mathcal{V}$, $v^1 \in \mathcal{C}$ ainsi que tous les éléments itérés $\tilde{v}^{i,p}$, $i = 1, \dots, n$, $p = 1, 2, \dots$

il résulte donc de la formulation $(\mathcal{R}_{i,\epsilon}^p)$ que :

$$J_\epsilon(v^1) \geq \dots \geq J_\epsilon(v^p) \geq \dots \geq J_\epsilon(v^{i,p}) \geq J_\epsilon(\tilde{v}^{i+1,p}) \geq \dots \geq J_\epsilon(v^{p+1}) \geq \dots \geq J_\epsilon(u_\epsilon)$$

la suite $\{J_\epsilon(\tilde{v}^{i,p})\}$ pour i croissant de 1 à n et p croissant est donc non-croissante, étant également bornée elle est convergente.

On en tire en particulier :

$$1^\circ) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (J_\epsilon(\tilde{v}^{i,p}) - J_\epsilon(\tilde{v}^{i+1,p})) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

2°) La suite $\{\tilde{v}^{i,p}\}$ reste bornée. En effet la suite $\{J_\epsilon(\tilde{v}^{i,p})\}$ étant bornée supérieurement par $J_\epsilon(v^1)$, on déduit de l'hypothèse H6 que, pour i défini par H6, $\{v_i^p\}$ reste borné et de la proposition II.2.2. que toute la suite $\{v^p\}$ reste bornée.

$$\underline{2\text{ème point}} : \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - v^{p+1}\| = 0.$$

La fonctionnelle $P(\cdot)$ étant différentiable, on sait -cf. par exemple [3] - que la solution $\tilde{v}^{i+1,p}$ du problème $(\mathcal{R}_{i,\epsilon}^p)$ est caractérisée par :

$$(P'_i(\tilde{v}^{i+1,p}), v_i - v_i^{p+1}) + \epsilon (j_i(v_i) - j_i(v_i^{p+1})) \geq 0 \quad \forall v_i \in C_i$$

ou encore sous la forme $(\mathcal{R}_{i,\epsilon}^p)$:

$$2.M_i(v_i^{p+1} - B(\tilde{v}^{i,p}), v_i - v_i^{p+1}) + \epsilon (j_i(v_i) - j_i(v_i^{p+1})) \geq 0,$$

et, en particulier :

$$2.M_i(v_i^{p+1} - B(\tilde{v}^{i,p}), v_i^p - v_i^{p+1}) + \epsilon (j_i(v_i^p) - j_i(v_i^{p+1})) \geq 0$$

Or, la fonctionnelle $P(v)$ est fortement convexe par rapport à v_i ;

reprenant l'expression II(4) -cf. II.1.2. Propriété 7- de $P(v)$, on a :

$$P(\tilde{v}^{i,p}) = P(\tilde{v}^{i+1,p}, P_+(\tilde{v}^{i,p}, \tilde{v}^{i+1,p})) = M_i \cdot \|v_i^{p+1} + (v_i^p - v_i^{p+1}) - B_i(\tilde{v}^{i,p})\| + G_i(\tilde{v}^{i,p})$$

$$P(\tilde{v}^{i,p}) = P(\tilde{v}^{i+1,p}) + 2 \cdot M_i \cdot (v_i^{p+1} - B_i(\tilde{v}^{i,p}), v_i^p - v_i^{p+1}) + M_i \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2$$

On en déduit donc :

$$P(\tilde{v}^{i,p}) - P(\tilde{v}^{i+1,p}) - M_i \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2 + \epsilon (j_i(v_i^p) - j_i(v_i^{p+1})) \geq 0 ;$$

c'est-à-dire :

$$J_\epsilon(\tilde{v}^{i,p}) - J_\epsilon(\tilde{v}^{i+1,p}) \geq M_i \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2$$

et le deuxième point découle du premier.

$$\underline{\text{3ème point}} : \lim_{p \rightarrow \infty} J_\epsilon(v^p) = J_\epsilon(u_\epsilon)$$

Du lemme IV.3.1. avec $x^p = v^p$ et $e = \epsilon$, on déduit :

$$P(x) + \epsilon J(x) - P(v^{p+1}) - \epsilon J(v^{p+1}) \geq -N \cdot \|v^{p+1} - v^p\| \cdot \|x - v^{p+1}\| ; \forall x \in \mathcal{C}$$

$$J_\epsilon(x) - J_\epsilon(v^{p+1}) \geq -N \cdot \|v^{p+1} - v^p\| \cdot \|x - v^{p+1}\| ; \forall x \in \mathcal{C}$$

Considérons alors une solution u_ϵ de (\mathcal{P}_ϵ) . La suite $\{v^p\}$ restant bornée, $\|v^p - u_\epsilon\|$ reste bornée quelque soit p . Il existe donc une constante positive N' tel que :

$$0 \geq J_\epsilon(u_\epsilon) - J_\epsilon(v^{p+1}) \geq -N' \cdot \|v^{p+1} - v^p\|$$

et le troisième point découle du second.

4ème point : Convergence

La suite $\{v^p\}$ étant bornée, il existe une sous-suite $\{v^{p'}\}$ convergeant faiblement vers un élément $\tilde{u} \in \mathcal{C}$.

$j_\epsilon(v)$ étant s.c.i. :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J_\epsilon(v^{p'}) = \lim_{p \rightarrow \infty} J_\epsilon(v^p) = J_\epsilon(u_\epsilon) \geq J_\epsilon(\tilde{u}),$$

ce qui prouve que tout point d'adhérence faible est solution de (\mathcal{P}_ϵ) .

IV.3.3 - Corollaire

Si, en plus de l'hypothèse (H) on suppose que la solution u_ϵ de (\mathcal{P}_ϵ) est unique, alors toute la suite $\{v^p\}$ converge faiblement vers u_ϵ . Ceci est en particulier vérifié si l'on fait l'hypothèse (H_S) .

IV.3.4 - Proposition

Si on suppose que l'hypothèse (H_U) est vérifiée, alors la suite $\{v^p\}$ converge fortement vers la solution, unique, de (\mathcal{P}_ϵ) .

Démonstration

Par convexité de $J_\epsilon(v)$ d'une part, et parce que u_ϵ réalise le minimum de $J_\epsilon(v)$ sur \mathcal{C} d'autre part, on a :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J_\epsilon\left(\frac{u + v^p}{2}\right) \leq J_\epsilon(v^p).$$

et, en passant à la limite :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J_\epsilon\left(\frac{u + v^p}{2}\right) = J_\epsilon(u_\epsilon).$$

Or, compte tenu de l'hypothèse $(H4_U)$ et de II.1.2. (8ème propriété) :

$$J_\epsilon\left(\frac{u + v^p}{2}\right) \leq \frac{1}{2} J_\epsilon(u_\epsilon) + \frac{1}{2} J_\epsilon(v^p) - \frac{1}{4} P(u_\epsilon - v^p) - \delta(\|v^p - u_{\hat{1}, \epsilon}\|)$$

ceci entraîne, par passage à la limite :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} P(u_\epsilon - v^p) + \delta(\|v^p - u_{\hat{1}, \epsilon}\|) \right] = 0.$$

On en déduit tout d'abord :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_{i,\epsilon}^p - u_{i,\epsilon}\| = 0,$$

puis, par équivalence de semi-normes :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|(v_{i,\epsilon}^p - u_{i,\epsilon}) - (v_{i,\epsilon}^p - u_{i,\epsilon})\| = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

et donc, par l'inégalité du triangle :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_{i,\epsilon}^p - u_{i,\epsilon}\| = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \| \|v^p - u_\epsilon\| \| = 0.$$

V - CROISEMENT DE METHODES DE PENALISATION DANS LA RELAXATION : CONSTRUCTION D'UNE SUITE DIAGONALE

Dans l'algorithme présenté juscu'ici, comme dans la méthode classique des pas fractionnaires ou dans l'algorithme de J.L. LIONS et R. TEMAM, l'approximation de la solution u du problème (P) ou, ce qui est équivalent, l'approximation de la solution u du problème (\mathcal{P}), est effectuée en deux temps : on considère une suite décroissante de valeur de $\epsilon > 0$, soit $\{\epsilon_q\}$ cette suite, et, pour chacune de ces valeurs, on approxime la solution du problème (\mathcal{P}_ϵ) par relaxation :

$$\begin{array}{rcl}
 (\mathcal{P}_{\epsilon_1}) & v_{\epsilon_1}^1, v_{\epsilon_1}^2, \dots, v_{\epsilon_1}^p, \dots & u_{\epsilon_1} \\
 (\mathcal{P}_{\epsilon_2}) & v_{\epsilon_2}^1, v_{\epsilon_2}^2, \dots, v_{\epsilon_2}^p, \dots & u_{\epsilon_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 (\mathcal{P}_{\epsilon_q}) & v_{\epsilon_q}^1, v_{\epsilon_q}^2, \dots, v_{\epsilon_q}^p, \dots & u_{\epsilon_q} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & & u
 \end{array}$$

L'introduction de pénalisation d'éclatement nous a seulement permis :

- 1°) d'affaiblir certaines hypothèses utilisées pour les pas fractionnaires (il suffit, par exemple, dans notre cas que l'une des fonctionnelles j_i soit uniformément convexe pour obtenir des résultats de convergence forte).
- 2°) d'établir des propriétés de convergence pour les éléments $\{v_{\epsilon^q}^p\}$ eux-mêmes et non pour des barycentres -cf. [2] [8] [9] [10]- de ces éléments.

L'idée que nous nous proposons de mettre en oeuvre est alors la suivante. Puisque, pour approximer u à partir de u_{ϵ^q} , il faut, à chaque pas de l'algorithme, i.e. pour passer de u_{ϵ^q} à $u_{\epsilon^{q+1}}$ - utiliser une infinité de pas d'un algorithme de relaxation, il semble alors naturel [5] de chercher à remplacer cet algorithme infini par un unique pas de relaxation effectué à partir de l'itéré précédemment obtenu.

L'algorithme en conservant les notations du IV.1, est le suivant :

V-1 - ALGORITHME

On se donne une suite de réels positifs $\{\epsilon^p\}$ décroissante et tendant vers zéro.

Partant de $\tilde{v}^{1,0} \in \mathcal{V}$, le passage de $\tilde{v}^{i,p}$ à $\tilde{v}^{i+1,p}$, pour $i = 1, \dots, n$ et $p = 1, 2, \dots$ s'effectue en calculant, v_i^{p+1} solution unique du problème :

$$(T_i^{p+1}) \left\{ \begin{array}{l} v_i^{p+1} \in C_i \\ M_i \|v_i^{p+1} - B(\tilde{v}^{i,p})\|^2 + \epsilon^{p+1} \cdot j_i(v_i^{p+1}) \leq M_i \|v_i - B(\tilde{v}^{i,p})\|^2 + \epsilon^{p+1} \cdot j_i(v_i) \\ \forall v_i \in C_i. \end{array} \right.$$

V-2 - NOTATIONS

Nous noterons :

$$J^p(v) = P(v) + \epsilon^p J(v)$$

et conservons les notations introduites au IV.1.1. Le problème (T_i^{p+1}) peut encore s'écrire :

$$(e_i^{p+1}) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}^{i+1,p} \in K_i^p \\ P(\tilde{v}^{i+1,p}) + \epsilon^{p+1} j_i(v_i^{p+1}) \leq P(v) + \epsilon^{p+1} j_i(v_i) ; \forall v \in K_i^p \end{array} \right.$$

dont la solution est caractérisée par :

$$(P_i'(\tilde{v}^{i+1,p}), v_i - v_i^{p+1}) + \epsilon^{p+1} [j_i(v_i) - j_i(v_i^{p+1})] \geq 0 \quad \forall v_i \in C_i \quad (1)$$

V-3 - CONVERGENCE

Si l'on fait les hypothèses suivantes :

1°) La suite $\{\epsilon^p\}$ vérifie

$$\sum_{p=1}^{\infty} (\epsilon^p)^2 = +\infty.$$

2°) l'un des convexes C_i est borné

3°) l'hypothèse (H_u) est vérifiée ;

V.3.1 - Théorème

La suite $\{v^p\}$ construite par l'algorithme V.1 est minimisante pour $P(v)$ et il existe une sous-suite convergeant fortement vers la solution, unique, du problème (\mathcal{P}) .

Nous décomposons la démonstration de ce théorème en deux lemmes.

V.3.2 - Lemme

Si l'on suppose l'hypothèse (H) vérifiée et l'un des C_i borné, alors, pour toute suite de réels positifs $\{\epsilon^p\}$ décroissante et tendant vers zéro, la suite $\{v^p\}$ définie par l'algorithme V.1 est minimisante pour $P(v)$ et tout point d'adhérence faible, il en existe au moins 1, appartient à $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. De plus :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \|v^{p+1} - v^p\|^2 < +\infty.$$

Démonstration

1er point $\lim_{p \rightarrow \infty} \|v^{p+1} - v^p\| = 0$

De la forte convexité de $P(v)$ par rapport à chaque variable -cf. II.1.2.7- on déduit :

$$P(\tilde{v}^{i,p}) = P(\tilde{v}^{i+1,p}) + (P'_i(\tilde{v}^{i+1,p}), v^p - v_i^{p+1}) + M_i \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2.$$

et, compte tenu de la caractérisation (1) de $\tilde{v}^{i+1,p}$:

$$P(\tilde{v}^{i,p}) - P(\tilde{v}^{i+1,p}) - M_i \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2 + \epsilon^{p+1} [j_i(v_i^p) - j_i(v_i^{p+1})] \geq 0$$

d'où

$$J^{p+1}(\tilde{v}^{i,p}) \geq J^{p+1}(\tilde{v}^{i+1,p}) + M_i \|v_i^{p+1} - v_i^p\|^2.$$

On a donc, en notant $M = \min[M_i ; i = 1, \dots, n]$

$$J^{p+1}(v^p) \geq J^{p+1}(v^{p+1}) + M \|v^{p+1} - v^p\|^2. \quad (2)$$

D'autre part, l'hypothèse H6 implique que $J(v)$ est bornée inférieurement sur \mathcal{C} . Posons $J(v) \geq -B ; \forall v \in \mathcal{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(v^p) + \epsilon^p J(v^p) &= P(v^p) + \epsilon^{p+1} J(v^p) + (\epsilon^p - \epsilon^{p+1}) J(v^p) \\ J^p(v^p) &\geq J^{p+1}(v^p) - (\epsilon^p - \epsilon^{p+1}) B \end{aligned} \quad (3)$$

Regroupant (2) et (3), il vient pour tout rang p :

$$J^p(v^p) + (\epsilon^p - \epsilon^{p+1})B \geq J^{p+1}(v^{p+1}) + M \cdot \|v^{p+1} - v^p\|^2 \quad (4)$$

et, en sommant (4) à partir de $p = 1$:

$$J^1(v^1) + \epsilon^1 B \geq M \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \|v^{p+1} - v^p\|^2$$

ce qui prouve le premier point.

2ème point : $\lim_{p \rightarrow \infty} P(v^p) = 0$

Appliquant le lemme IV.3.1. avec $x^p = v^p$ et $e = \epsilon^{p+1}$, on obtient :

$$P(x) + \epsilon^{p+1} J(x) - P(v^{p+1}) - \epsilon^{p+1} J(v^{p+1}) \geq -N \cdot \|v^{p+1} - v^p\| \cdot \|x - v^{p+1}\| \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

En particulier, en prenant $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$:

$$P(v^{p+1}) - \epsilon^{p+1} J(x) + \epsilon^{p+1} J(v^{p+1}) \leq N \cdot \|v^{p+1} - v^p\| \cdot \|x - v^{p+1}\|$$

Un des convexes C_i étant, par hypothèse, borné, il résulte de la proposition II.2.2. que la suite $\{v^p\}$ est bornée. $J(v^{p+1})$ étant borné inférieurement, il vient donc :

$$P(v^{p+1}) \leq L \cdot \|v^{p+1} - v^p\| + \epsilon^{p+1} \cdot J(x) + \epsilon^{p+1} \cdot B,$$

avec L constante positive et $B \in \mathbb{R}$; et le deuxième point résulte du premier.

V.2.2 - Lemme

Si l'on suppose l'hypothèse (H_u) vérifiée, l'un des C_i borné, et $\lim_{p \rightarrow \infty} (\epsilon^p)^2 = +\infty$, alors il existe une sous-suite de la suite $\{v^p\}$ convergeant fortement vers la solution u de (\mathcal{G}) .

Démonstration

Nous noterons désormais u_{ϵ}^{p+1} l'unique solution de $(\mathcal{G}_{\epsilon}^{p+1})$.

Appliquant le lemme IV.3.1 avec $x^p = v^p$ et $e = \epsilon^{p+1}$, il vient

$$P(v^{p+1}) + \epsilon^{p+1} J(v^{p+1}) - P(x) - \epsilon^{p+1} J(x) \leq N \cdot \|v^{p+1} - v^p\| \cdot \|x - v^{p+1}\|.$$

En particulier pour $x = \frac{u_{\epsilon}^{p+1} + v^{p+1}}{2}$ l'hypothèse C_i bornée impliquant, proposition II.2.2., que la suite $\{v^p\}$ est bornée, il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$P(v^{p+1}) + \epsilon^{p+1} J(v^{p+1}) - P\left(\frac{u_{\epsilon}^{p+1} + v^{p+1}}{2}\right) - \epsilon^{p+1} J\left(\frac{u_{\epsilon}^{p+1} + v^{p+1}}{2}\right) \leq L \cdot \|v^{p+1} - v^p\|.$$

Or

$$J\left(\frac{u_{\epsilon}^{p+1} + v^{p+1}}{2}\right) \leq \frac{1}{2} J(u_{\epsilon}^{p+1}) + \frac{1}{2} J(v^{p+1}) - \delta(\|u_{\epsilon}^{p+1} - v_{\epsilon}^{p+1}\|)$$

et

$$P\left(\frac{u_{\epsilon}^{p+1} + v^{p+1}}{2}\right) \leq \frac{1}{2} P(u_{\epsilon}^{p+1}) + \frac{1}{2} P(v^{p+1});$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} P(v^{p+1}) + \frac{1}{2} \epsilon^{p+1} J(v^{p+1}) - \frac{1}{2} \epsilon^{p+1} J(u_{\epsilon}^{p+1}) - \frac{1}{2} P(u_{\epsilon}^{p+1}) + \epsilon^{p+1} \cdot \delta(\|u_{\epsilon}^{p+1} - v_{\epsilon}^{p+1}\|) \\ & \leq L \cdot \|v^{p+1} - v^p\|. \end{aligned}$$

u_{ϵ}^{p+1} réalisant le minimum de $J^{p+1}(v)$, l'expression précédente implique :

$$\epsilon^{p+1} \cdot \delta(\|u_{\epsilon}^{p+1} - v_{\epsilon}^{p+1}\|) \leq L \cdot \|v^{p+1} - v^p\|.$$

d'où résulte, compte tenu du lemme V.2.1 :

$$\sum_{p=1}^{\infty} (\epsilon^{p+1})^2 \times \left[\delta(\|u_{\epsilon}^{p+1} - v_{\epsilon}^{p+1}\|) \right]^2 \leq L^2 \sum \|v^{p+1} - v^p\|^2 < +\infty.$$

Montrons que ceci implique, au moins pour une sous-suite $\{v^q\}$, $q \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{N}$, que :

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathcal{Q}}} \|u_{\epsilon}^q - v_{\epsilon}^q\| = 0 \quad (5)$$

Supposons, en effet, qu'une telle sous-suite n'existe pas. Cela signifierait qu'il existerait un rang P_0 et un réel $\eta_0 > 0$ tels que, pour tout $p \geq P_0$ on ait $\delta(\|u_{1,\varepsilon}^p - v_1^p\|) \geq \eta_0$. Mais ceci est impossible car la série :

$$\sum_{p=P_0}^{\infty} (\varepsilon^p)^2 \cdot [\delta(\|u_{1,\varepsilon}^p - v_1^p\|)]^2 \geq \eta_0^2 \times \sum_{p=P_0}^{\infty} (\varepsilon^p)^2$$

serait alors divergente. L'existence de la sous-suite $\{v^q\}$ étant établie, on déduit de (5) et de la convergence de $\{u_\varepsilon\}$, Proposition III.3.1 :

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{Q}}} \|v_1^q - \tilde{u}\| = 0 ;$$

et puisque d'après le lemme V.2.1 $P(v^p)$ tend vers zéro, par équivalence de semi-normes :

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{Q}}} \|v_j^q - \tilde{u}\| = 0 \quad , \quad \forall j = 1, \dots, n$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{Q}}} \|v^q - \tilde{u}\| = 0.$$

VI - DECOMPOSITION PARALLELE.

Dans la quatrième partie de ce chapitre nous avons présenté une (famille de) méthode de décomposition-série pour le problème (P) : à ce problème était associé un problème pénalisé (\mathcal{S}_ϵ) dans l'espace \mathcal{V} qui était résolu par décomposition-série, c'est-à-dire par relaxation.

Nous nous proposons maintenant d'étudier des méthodes de décomposition parallèle pour le problème (\mathcal{S}_ϵ). Ceci nous amène à particulariser le choix de la pénalisation d'éclatement utilisée. Pour le choix $P(v) = P_3(v)$ - cf. II.1.3 - l'algorithme de décomposition parallèle étudié se confond avec l'algorithme parallèle proposé par J.L. LIONS et R. TEMAM dans [10] [2]. Pour le choix $P(v) = P_4(v)$ - cf. II.1.3. - on obtient une (petite) généralisation de cet algorithme consistant à utiliser des barycentres pondérés et dont une variante, sans décomposition de l'opérateur, est étudiée dans [16]. Nous éviterons d'ailleurs d'introduire ces pondérations afin de ne pas trop alourdir le formalisme.

Comme cela avait été effectué dans [15], la décomposition parallèle dans l'espace \mathcal{V} va être obtenue à travers une décomposition-série dans l'espace \mathcal{V} qui amènera à particulariser le choix de la pénalisation d'éclatement. Notons d'ailleurs que cette interprétation permettrait de déduire certaines propriétés de l'algorithme parallèle de celles établies pour l'algorithme-série.

S'agissant d'une particularisation des résultats obtenus dans la première partie, il est clair que tous ceux-ci resteront encore valables ; c'est en particulier le cas des propriétés de convergence de la suite $\{u_\epsilon\}$. Nous étudierons donc seulement ici l'approximation de u_ϵ par une décomposition parallèle, ainsi que la possibilité de "croiser" cet algorithme de pénalisation ; sous des hypothèses semblant assez peu restrictives, un théorème de forte convergence est obtenu pour cette méthode.

VI.1 FORMULATION DANS UN ESPACE PRODUIT :

Reprenons le problème (P) exprimé dans l'espace \mathcal{V} :

(\mathcal{S}) "Trouver $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ tel que $J(u) = \min\{J(w) ; w \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}\}$ "

avec

$$J(v) = \sum_{i=1}^n j_i(v_i) ; \forall v \in \mathcal{C}$$

Ce problème se posant sur l'intersection des deux convexes \mathcal{C} et \mathcal{D} , nous allons, avec des méthodes identiques à celles du II, "éclater" ces deux contraintes. Associons au problème (\mathcal{P}) le problème pénalisé :

$$(\mathcal{P}'_\epsilon) \text{ "Trouver } u_\epsilon \in \mathcal{C} \text{ tel que } d((u_\epsilon, \mathcal{D}))^2 + \epsilon J(u_\epsilon) = \min[d((v, \mathcal{D}))^2 + \epsilon J(v); v \in \mathcal{E}]."$$

Par définition de la distance à un convexe, ce problème s'écrit :

$$\text{"Trouver } u_\epsilon \in \mathcal{E} \text{ tel que } \min_{b \in \mathcal{D}} \|u_\epsilon - b\|^2 + \epsilon J(u_\epsilon) = \min_{v \in \mathcal{E}} \min_{b \in \mathcal{D}} [\|v - b\|^2 + \epsilon J(v)]"$$

ou encore, en introduisant la fonctionnelle $\mathcal{J}_\epsilon : \mathcal{E} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{J}_\epsilon(v, b) = \|v - b\|^2 + \epsilon J(v),$$

en notant b_ϵ la projection de u_ϵ sur \mathcal{D} , et puisque tout $v \in \mathcal{E}$, on a :

$$\mathcal{J}_\epsilon(v, \text{proj}_{\mathcal{D}} v) \leq \mathcal{J}_\epsilon(v, b); \forall b \in \mathcal{D}$$

$$(\mathcal{L}'_\epsilon) \text{ "Trouver } (u_\epsilon, b_\epsilon) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D} \text{ tel que } \mathcal{J}_\epsilon(u_\epsilon, b_\epsilon) = \min[\mathcal{J}_\epsilon(v, b); (v, b) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}]"$$

VI.1.1. Remarque :

La démarche suivie implicitement pour associer au problème (\mathcal{P}) le problème (\mathcal{L}'_ϵ) est identique à celle utilisée au § II pour associer au problème (P) le problème (\mathcal{P}'_ϵ) :

- à $J(v) = J(v) + 0$ a été associé, dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, la fonctionnelle $\mathcal{J}(v, b) = J(v)$
- les deux contraintes \mathcal{C} et \mathcal{D} ont été "éclatées" ce qui a amené à introduire la P.E., très simple puisqu'il n'y a que deux convexes, $\|v - b\|^2$

VI.1.2. Décomposition-série du problème (\mathcal{L}'_ϵ) :

Le problème (\mathcal{L}'_ϵ) se décompose naturellement en :

$$(\mathcal{L}_{1, \epsilon}(b)) \text{ "Trouver } u \in \mathcal{E} \text{ tel que } \mathcal{J}_\epsilon(u, b) = \min[\mathcal{J}_\epsilon(v, b); v \in \mathcal{E}; b \text{ donné, } b \in \mathcal{D}]"$$

$$(\mathcal{L}_{2, \epsilon}(u)) \text{ "Trouver } b \in \mathcal{D} \text{ tel que } \mathcal{J}_\epsilon(u, b) = \min[\mathcal{J}_\epsilon(u, d); d \in \mathcal{D}; u \text{ donné, } u \in \mathcal{E}]"$$

L'algorithme de décomposition-série (relaxation) associé à cette décomposition et destiné à résoudre (\mathcal{L}'_ϵ) est donc défini par :

Partant de $b^0 \in \mathcal{D}$, le passage de b^p à v^{p+1} puis de v^{p+1} à b^{p+1} s'effectue de la manière suivante :

- 1 - v^{p+1} est solution de $\mathcal{L}_{1,\epsilon}(b^p)$
- 2 - b^{p+1} est solution de $\mathcal{L}_{2,\epsilon}(v^{p+1})$

VI.1.3. Expression "géométrique" de la décomposition-série de (\mathcal{L}_ϵ) :

Rappelons la définition de l'application PROX introduite par J.J. MOREAU [22]. Etant donné un espace de Hilbert H, et une fonctionnelle $\varphi \in \Gamma_0(H)$, on note, pour tout $z \in H$, $\text{PROX}_\varphi(z)$ l'élément, unique, de H réalisant le minimum de la fonctionnelle :

$$v \in H \quad \left[\frac{1}{2} \|v-z\|_H^2 + \varphi(v) ; \forall v \in H \right].$$

En notant alors ψ_K la fonction caractéristique d'un ensemble K définie par :

$$\psi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

les problèmes $(\mathcal{L}_{1,\epsilon}(b))$ et $(\mathcal{L}_{2,\epsilon}(u))$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{1,\epsilon}(b)) \quad & u = \text{PROX}_{\psi_{\mathcal{D}} + \epsilon/2.J}(b) \\ (\mathcal{L}_{2,\epsilon}(u)) \quad & b = \text{PROX}_{\psi_{\mathcal{D}}}(u) = \text{PROJ}_{\mathcal{D}}(u) \end{aligned}$$

et l'algorithme de décomposition-série de (\mathcal{L}_ϵ) s'exprime par :

$$\begin{aligned} 1 - v^{p+1} &= \text{PROX}_{\psi_{\mathcal{D}} + \epsilon/2.J}(b^p) \\ 2 - b^{p+1} &= \text{PROJ}_{\mathcal{D}}(v^{p+1}) \end{aligned}$$

VI.2 DECOMPOSITION PARALLELE DU PROBLEME (P) :

VI.2.1 Proposition :

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) (u_ϵ, b_ϵ) est solution de (\mathcal{L}_ϵ)
- ii) 1. $b_\epsilon = \text{PROJ}_{\mathcal{D}} u_\epsilon = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i\epsilon}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i\epsilon} \right)$
- 2. u_ϵ est solution du problème (\mathcal{P}'_ϵ) :

(\mathcal{P}'_ϵ) "Trouver $u_\epsilon \in \mathcal{C}$ tel que $J_\epsilon(u_\epsilon) = \min[J_\epsilon(v) ; v \in \mathcal{C}]$ "

avec :

$$J_\epsilon(v) = \sum_{i=1}^n \left\| v_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j \right\|^2 + \epsilon \sum_{i=1}^n j_i(v_i)$$

DEMONSTRATION :

i \Rightarrow ii (u_ϵ, b_ϵ) réalisant le minimum de $\mathcal{J}_\epsilon(v, b)$ SUR $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, il réalise, en particulier le minimum de $\mathcal{J}_\epsilon(u_\epsilon, d)$ sur \mathcal{D} , c'est-à-dire :

$$\|u_\epsilon - b_\epsilon\|^2 \leq \|u_\epsilon - d\|^2 ; \forall d \in \mathcal{D}$$

d'où

$$b_\epsilon = \text{proj}_{\mathcal{D}} u_\epsilon ;$$

On sait - cf[13] - que ceci est équivalent à :

$$b_\epsilon = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i\epsilon}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{i\epsilon} \right) ;$$

de plus :

$$\mathcal{J}_\epsilon(u_\epsilon, b_\epsilon) = J_\epsilon(u_\epsilon) \leq \mathcal{J}_\epsilon(v, d) ; \forall v \in \mathcal{C} ; \forall d \in \mathcal{D}$$

et a fortiori :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) \leq \mathcal{J}_\epsilon(v, \text{proj}_{\mathcal{D}} v) = J_\epsilon(v) ; \forall v \in \mathcal{C}$$

ii \Rightarrow i, on a :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(v) ; \forall v \in \mathcal{C}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}_\epsilon(u_\epsilon, b_\epsilon) = \min_{d \in \mathcal{D}} \mathcal{J}_\epsilon(u_\epsilon, d) \leq \min_{d \in \mathcal{D}} \mathcal{J}_\epsilon(v, d) \leq \mathcal{J}_\epsilon(v, b) ; \forall b \in \mathcal{D}$$

VI.2.2. Convergence de u .

Le problème (\mathcal{P}'_ϵ) n'étant autre que le problème général (\mathcal{P}_ϵ) - cf. II - avec le choix particulier de pénalisation d'éclatement :

$$P(v) = P_3(v) = \sum_{i=1}^n \left\| v_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j \right\|^2$$

Les propriétés générales établies au III pour les solutions u_ϵ de (\mathcal{S}_ϵ) s'appliqueront donc, a fortiori, aux solutions de (\mathcal{S}'_ϵ) et donc, d'après la proposition précédente, aux u_ϵ tels que $(u_\epsilon, \text{proj}_{\mathcal{D}} u_\epsilon)$ soient solutions de (\mathcal{L}_ϵ) .

VI.2.3. Algorithme de décomposition parallèle :

Explicitons maintenant, dans l'espace V , l'algorithme VI.1 (cf. VI.1.2. et VI.1.3.); il vient :

Partant de $b^0 \in V$, le passage de b^p à b^{p+1} s'effectue de la façon suivante :

1 - on calcule, pour $i = 1, \dots, n$, en parallèle v_i^{p+1} :

$$v_i^{p+1} = \text{PROX}_{\psi_{C_i} + \epsilon/2 \cdot j_i} (b^p)$$

c'est-à-dire :

$$v_i^{p+1} \in C_i ; \quad \|v_i^{p+1} - b^p\|^2 + \epsilon j_i(v_i^{p+1}) \leq \|v_i - b^p\|^2 + \epsilon j_i(v_i) ; \quad \forall v_i \in C_i$$

2 - On définit b^{p+1} par :

$$b^{p+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^{p+1}.$$

VI.2.4. Quelques remarques :

1 - Si, au lieu de définir le produit scalaire de \mathcal{V} par $((\dots)) = \sum_{i=1}^n (\dots)$, on le définit par $((\dots)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\dots)$ avec $\alpha_i > 0$, on obtient en VI.2 une variante de l'algorithme précédant consistant à utiliser des barycentres pondérés :

$$1. \quad v_i^{p+1} \in C_i ; \quad \alpha_i \|v_i^{p+1} - b^p\|^2 + \epsilon j_i(v_i^{p+1}) \leq \alpha_i \|v_i - b^p\|^2 + \epsilon j_i(v_i) ; \quad \forall v_i \in C_i$$

$$2. \quad b^{p+1} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} - \text{cf '13] § I.6.}$$

Toutes les propriétés établies pour l'algorithme I.4 sont également valables pour cette variante. Nous éviterons, cependant, l'introduction de "poids" pour ne pas trop alourdir l'écriture.

2 - Le formalisme utilisé dans tout ce travail est celui de l'optimisation. Les résultats établis ici restent cependant valables pour la résolution d'inéquations variationnelles même ne provenant pas de problèmes d'optimisations. En particulier cette méthode de décomposition parallèle peut être utilisée pour la décomposition d'inéquations variationnelles monotones et hémis-continues en remplaçant seulement l'application "PROX" de MOREAU par l'application "PROXI" de MARTINET - cf [21] chap V.

3 - Il est également possible, et utile pour les applications, de considérer, plutôt qu'un seul espace V , le cadre suivant [2][9] :

Soit V (resp. V_i , $i = 1, \dots, n$; resp. H) un espace de Hilbert de norme $[\cdot]$ (resp. $[\cdot]_i$, $i = 1, \dots, n$; resp $\|\cdot\|$) avec :

$$V \subset V_i \subset H$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant et

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

On suppose que :

$$C = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

où C_i est un ensemble convexe fermé de V_i , $i = 1, \dots, n$.

On cherche à minimiser, sur C , la fonctionnelle :

$$j(v) = \sum_{i=1}^n j_i(v) \quad \forall v \in C.$$

où j_i , $i = 1, \dots, n$, sont des fonctionnelles définies sur C_i .

On introduit alors l'espace $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^n H$ et son convexe diagonal qui jouent ici le rôle joué par \mathcal{V} et \mathcal{D} dans notre cas.

4 - L'algorithme VI.2.3. n'est autre que l'algorithme parallèle de J.L. LIONS et R. TEMAM. Nous avons seulement évité d'introduire - cf. [2] - la fonctionnelle j_0 de "coordination". Si l'on suppose maintenant que :

$$j(v) = j_0(v) + \sum_{i=1}^n j_i(v)$$

$$S = C_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right)$$

Il suffit, en notant $\mathcal{D}_0 = \{b \in \mathcal{D}; b \in C_0\}$ et $J_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}; J_0(b) = j_0(b)$, de définir le passage de b^p à b^{p+1} par :

$$b^{p+1} = \text{PROX}_{\psi_{\mathcal{D}_0} + \varepsilon/2 \cdot J_0} \circ \text{PROJ}_{\mathcal{D}_0} \circ \text{PROX}_{\psi_{\mathcal{C}} + \varepsilon/2 \cdot J}(b^p).$$

VI.3. CONVERGENCE :

On étudie la convergence de $\{v^p\}$ et $\{b^p\}$ définis par l'algorithme VI.1.3. (ou VI.2.5.) respectivement vers u_ε solution de $(\mathcal{S}'_\varepsilon)$ et vers $\text{PROJ}_{\mathcal{D}_0} u_\varepsilon$.

VI.3.1. Théorème :

On suppose l'hypothèse (H) vérifiée ; alors :

- i) Toute la suite $\{v^p\}$ converge faiblement vers une solution particulière u_ε de $(\mathcal{S}'_\varepsilon)$
- ii) Toute la suite $\{b^p\}$ converge faiblement vers $\text{PROJ}_{\mathcal{D}_0} u_\varepsilon$
- iii) $\lim_{p \rightarrow \infty} J_\varepsilon(v^p) = J_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

DEMONSTRATION :

Nous allons la décomposer en une suite de lemmes. Rappelons tout d'abord deux définitions.

1 - Définition : - cf. [20]

Soit H un espace de Hilbert, K_1 et K_2 deux sous-ensembles convexes de H et un opérateur $T : K_1 \rightarrow K_2$. L'opérateur T est dit :

. faiblement contractant sur K_1 si :

$$\|T(x) - T(y)\|_H \leq \|x - y\|_H ; \forall x \in K_1, \forall y \in K_1$$

. pseudo-contractant sur K_1 si :

$$\|T(x) - T(y)\|_H^2 \leq \|x - y\|_H^2 - \|(T(x) - x) - (T(y) - y)\|_H^2 ; \forall x \in K_1, \forall y \in K_1.$$

2 - Lemme [21] :

L'application PROX et l'application Projection sur un convexe sont des applications pseudo-contractantes.

Ce lemme est démontré dans [21].

3 - Supposons alors l'hypothèse (H) vérifiée, on sait - cf. II.2.3. - qu'il existe au moins une solution u_ε au problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$; il en résulte - cf. VI.2.1. - que $(u_\varepsilon, \text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\varepsilon)$ est solution de $(\mathcal{L}_\varepsilon)$ et donc, si l'on définit :

$$T_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} ; T_1 = \text{Prox}_{\psi_{\mathcal{C}} + \varepsilon/2.J} \circ \text{Proj}_{\mathcal{D}}$$

et

$$T_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} ; T_2 = \text{Proj}_{\mathcal{D}} \circ \text{Prox}_{\psi_{\mathcal{C}} + \varepsilon/2.J}$$

u_ε est point fixe de T_1 et $\text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\varepsilon$ est point fixe de T_2 .

Du lemme précédent on déduit que les opérateurs T_1 et T_2 sont faiblement contractant, et en particulier :

$$\|u_\varepsilon - T_1(v)\| \leq \|u_\varepsilon - v\| ; \forall v \in \mathcal{C}$$

$$\|\text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\varepsilon - T_2(b)\| \leq \|\text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\varepsilon - b\| ; \forall b \in \mathcal{D}$$

d'où, en notant $\mathcal{B}(x, \rho)$ la boule de \mathcal{V} de centre x et de rayon ρ :

$$T_1(\mathcal{C} \cap \mathcal{B}(u_\varepsilon, \rho)) \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{B}(u_\varepsilon, \rho) \quad \forall \rho > 0$$

$$T_2(\mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\varepsilon, \rho)) \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{B}(\text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\varepsilon, \rho) \quad \forall \rho > 0$$

Rappelons alors un résultat de B. MARTINET - cf. [21] chap. V -

4 - Lemme [21].

Soient m applications pseudo-contractantes U_ℓ ($\ell = 1, \dots, m$) vérifiant :

$$U_1 : C \rightarrow H ; U_\ell : H \rightarrow H ; U_m : H \rightarrow C ; \ell = 2, \dots, m-1 .$$

On définit l'application :

$$A = U_m \circ U_{m-1} \circ \dots \circ U_1 ;$$

si C est un ensemble convexe fermé borné d'un espace de Hilbert, alors toute suite $\{x^p\}$ construite à partir de $x^1 \in C$ par les itérations $x^p = Ax^{p-1}$ converge faiblement vers un point fixe de A et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x^p - x^{p-1}\| = 0$$

5 - Appliquant alors le lemme 4 aux applications T_1 et T_2 , on en déduit (i) : toute la suite $\{v^p\}$ converge faiblement vers une solution particulière u_ϵ de (\mathcal{P}'_ϵ) : et la suite $\{b^p\}$ converge faiblement vers $b'_\epsilon = \text{Proj}_{\mathcal{D}} u'_\epsilon$, avec u'_ϵ solution particulière de (\mathcal{P}'_ϵ) . Enfin, en notant $b_\epsilon = \text{Proj}_{\mathcal{D}} u_\epsilon$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} ((b'_\epsilon - b_\epsilon, b^p)) &= \lim_{p \rightarrow \infty} ((b'_\epsilon - b_\epsilon, v^p) + ((b'_\epsilon - b_\epsilon, b^p - v^p))) = ((b'_\epsilon - b_\epsilon, u_\epsilon)) \\ &= ((b'_\epsilon - b_\epsilon, b_\epsilon)) \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} ((b'_\epsilon - b_\epsilon, b^p)) = ((b'_\epsilon - b_\epsilon, b'_\epsilon))$$

d'où (ii) : la suite $\{b^p\}$ converge faiblement vers $\text{Proj}_{\mathcal{D}} u'_\epsilon$.

6 - Convergence de $J_\epsilon(v^p)$:

v^{p+1} est caractérisé par :

$$2((v^{p+1} - b^p, v - v^{p+1})) + \epsilon [J(v) - J(v^{p+1})] \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}$$

$$2((v^{p+1} - b^{p+1}, v - v^{p+1})) + \epsilon [J(v) - J(v^{p+1})] \geq -2((b^{p+1} - b^p, v - v^{p+1})) ; \forall v \in \mathcal{C} .$$

b^{p+1} est caractérisé par :

$$2((v^{p+1} - b^{p+1}, b^{p+1} - b)) = 0 ; \forall b \in \mathcal{D}$$

En sommant ces deux expressions, il vient, pour tout couple $(v, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$:

$$2((v^{p+1} - b^{p+1}, (v - b) - (v^{p+1} - b^{p+1}))) + \varepsilon[J(v) - J(v^{p+1})] \geq -2((b^{p+1} - b^p, v - v^{p+1})) \quad (1)$$

D'autre part, pour tout couple $(v, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\|v - b\|\|^2 &= \|\|v - v^{p+1} + v^{p+1} - b^{p+1} + b^{p+1} - b\|\|^2 \\ \|\|v - b\|\|^2 &= \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\|^2 + 2((v^{p+1} - b^{p+1}, (v - b) - (v^{p+1} - b^{p+1}))) \\ &\quad + \|\|(v - v^{p+1}) - (b - b^{p+1})\|\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit, en prenant $(v, b) = (u_\varepsilon, b_\varepsilon)$:

$$\|\|u_\varepsilon - b_\varepsilon\|\|^2 + \varepsilon J(u_\varepsilon) - \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\|^2 - \varepsilon J(v^{p+1}) \geq -2((b^{p+1} - b^p, u_\varepsilon - v^{p+1}))$$

d'où, en passant à la limite, puisque v^{p+1} est borné et $b^{p+1} - b^p$ tend vers zéro (cf. lemme 4) :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} [J(u_\varepsilon) - J(v^{p+1})] \geq 0$$

d'où, par définition de u_ε (iii) :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J(v^p) = J(u_\varepsilon).$$

VI.3.2. Corollaire :

Si on suppose l'hypothèse (H_u) vérifiée, alors la suite $\{v^p\}$ converge fortement vers la solution, unique, de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

La démonstration, très simple, de ce corollaire est en tout point analogue à la proposition correspondante dans le cas de la décomposition-série - cf. Prop. IV.3.4. -

VII - CROISEMENT DE METHODES DE PENALISATION DANS LA DECOMPOSITION :

CONSTRUCTION D'UNE SUITE DIAGONALE.

Nous nous proposons, ici comme au § V, d'effectuer l'approximation de la solution u du problème (P) en un seul temps. Nous faisons varier, à chaque pas de l'algorithme parallèle, le coefficient de pénalisation.

VII.1 ALGORITHME :

On se donne une suite de réels positifs $\{\epsilon^p\}$ tendant vers zéro.

Partant de $b^0 \in V$, le passage de b^p à v_i^{p+1} , $i = 1, \dots, n$, puis de v_i^{p+1} , $i = 1, \dots, n$, à b^{p+1} s'effectue de la façon suivante :

1 - On calcule en parallèle, pour $i = 1, \dots, n$, v_i^{p+1} :

$$v_i^{p+1} = \text{Prox}_{\psi_{C_i} + \epsilon^{p+1}/2 \cdot j_i} (b^p)$$

c'est-à-dire :

$$v_i^{p+1} \in C_i ; \quad \|v_i^{p+1} - b^p\|^2 + \epsilon^{p+1} j_i(v_i^{p+1}) \leq \|v_i - b^p\|^2 + \epsilon^{p+1} j_i(v_i); \quad \forall v_i \in C_i$$

2 - On définit b^{p+1} par :

$$b^{p+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^{p+1}$$

VII.2 CONVERGENCE :

VII.2.1. Théorème :

On fait, en plus de (H), les hypothèses suivantes :

$$(E_1) \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\epsilon^{p+1} - \epsilon^p| < +\infty$$

$$(E_2) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p = +\infty$$

et l'on suppose également que l'une, quelconque, des deux hypothèses

(H_u) ou (H_u^*) est vérifiée :

- (H_u^*) :
- H_{1u} : $j(v)$ est uniformément convexe sur S
 - $j_i(v_i)$ est uniformément continue sur C_i , $i = 1, \dots, n$.
 - Il existe un indice $\ell \in [1, n]$ tel que :

$$C_\ell \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n C_i \right) \neq \emptyset$$

alors les suites $\{v_i^p\}$, $i = 1, \dots, n$ et $\{b^p\}$ convergent fortement vers la solution unique u du problème (P).

VII.2.2. Remarque :

La première hypothèse sur la suite $\{\epsilon^p\}$ est, en particulier, vérifiée si l'on suppose celle-ci décroissante.

VII.2.3. Notations :

Nous noterons, pour tout couple $(v, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$,

$$J_{\epsilon}^p(v, b) = \|\|v - b\|\|^2 + \epsilon^p J(v);$$

et

$$J_{\epsilon}^p(v) = \|\|v - \text{Proj}_{\mathcal{D}} v\|\|^2 + \epsilon^p J(v).$$

Démonstration :

Nous décomposons la démonstration du théorème en une suite de lemmes, ceci afin de préciser où interviennent les hypothèses.

1 - Estimations à priori :

v^{p+1} est caractérisé par :

$$2((v^{p+1} - b^p, v - v^{p+1})) + \epsilon^{p+1}[J(v) - J(v^{p+1})] \geq 0; \forall v \in \mathcal{G}$$

$$2(v^{p+1} - b^{p+1}, v - v^{p+1}) + \epsilon^{p+1}[J(v) - J(v^{p+1})] \geq 2((b^p - b^{p+1}, v - v^{p+1}));$$

$$\forall v \in \mathcal{G}$$

b^{p+1} est caractérisé par :

$$2((v^{p+1} - b^{p+1}, b^{p+1} - b)) = 0; \forall b \in \mathcal{D}$$

Par sommation, on obtient pour tout $(v, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$

$$2((v^{p+1} - b^{p+1}, v - b - (v^{p+1} - b^{p+1}))) + \epsilon^{p+1}[J(v) - J(v^{p+1})] \geq 2((b^p - b^{p+1}, v - v^{p+1}))$$

ou encore, puisque pour tout $(v, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$, on a :

$$\|\|v - b\|\|^2 = \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\|^2 + \|\|(v - v^{p+1}) - (b - b^{p+1})\|\|^2 + 2((v^{p+1} - b^{p+1}, (v - v^{p+1}) - (b - b^{p+1}))),$$

il vient :

$$\|\|v - b\|\|^2 - \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\|^2 - \|\|(v - v^{p+1}) - (b - b^{p+1})\|\|^2 + \epsilon^{p+1}[J(v) - J(v^{p+1})] \quad (1) \geq 2((b^p - b^{p+1}, v - v^{p+1})); \forall (v, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{D}$$

Cette expression peut encore s'écrire, puisque pour tout $v \in \mathcal{U}$, on a l'identité :

$$2((b^p - v - (b^{p+1} - v), v - b^{p+1})) = |||b^{p+1} - v|||^2 - |||b^p - v|||^2 + |||b^p - b^{p+1}|||^2$$

et que, par définition de la projection :

$$((b^p - b^{p+1}, v - b^{p+1})) = ((b^p - b^{p+1}, v - v^{p+1} + v^{p+1} - b^{p+1})) = ((b^p - b^{p+1}, v - v^{p+1}))$$

il vient :

$$\begin{aligned} & |||v - b|||^2 - |||v^{p+1} - b^{p+1}|||^2 - |||(v - v^{p+1}) - (b - b^{p+1})|||^2 + \varepsilon^{p+1} [J(v) - J(v^{p+1})] \\ & \geq |||b^{p+1} - v|||^2 - |||b^p - v|||^2 + |||b^p - b^{p+1}|||^2 \quad \forall (v, b) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D} \end{aligned} \quad (2)$$

En particulier, si l'on prend $v = b = x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$, l'expression précédente nous donne, pour tout $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{p+1} [J(x) - J(v^{p+1})] & \geq 2 |||v^{p+1} - b^{p+1}|||^2 + |||b^{p+1} - x|||^2 - |||b^p - x|||^2 \\ & + |||b^p - b^{p+1}|||^2 \end{aligned} \quad (3)$$

2 - Lemme :

On suppose vérifiées les hypothèses (H) et (E₁) ; alors il existe un $B \geq 0$ tel que pour $p = 1, 2, \dots$:

$$J_{\varepsilon}^{p+1}(v^{p+1}, b^{p+1}) + |||v^p - v^{p+1}|||^2 + |||b^p - b^{p+1}|||^2 \leq J_{\varepsilon}^p(v^p, b^p) + B |\varepsilon^p - \varepsilon^{p+1}| \quad (4)$$

Démonstration :

Prenons, en effet, l'expression (1) pour $(v, b) = (v^p, b^p)$;

il vient :

$$J_{\varepsilon}^{p+1}(v^p, b^p) \geq J_{\varepsilon}^{p+1}(v^{p+1}, b^{p+1}) + |||v^p - v^{p+1}|||^2 + |||b^p - b^{p+1}|||^2$$

par définition de \mathcal{J}_ϵ^p :

$$\mathcal{J}_\epsilon^p(v^p, b^p) = \mathcal{J}_\epsilon^{p+1}(v^p, b^p) + (\epsilon^p - \epsilon^{p+1})J(v^p).$$

D'après l'hypothèse H6, $J(\cdot)$ est borné inférieurement sur \mathcal{G} , il existe donc $B \geq 0$ tel que :

$$J(v) \geq -B ; \forall v \in \mathcal{G}$$

d'où :

$$\mathcal{J}_\epsilon^p(v^p, b^p) \geq \mathcal{J}_\epsilon^{p+1}(v^p, b^p) - B |\epsilon^p - \epsilon^{p+1}|$$

et le lemme suit. On en tire en particulier :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \|\|v^p - v^{p+1}\|\|^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \|\|b^p - b^{p+1}\|\|^2 < +\infty \quad (5)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^p - v^{p+1}\|\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\|b^p - b^{p+1}\|\| = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\| &= \mathcal{J}_\epsilon^{p+1}(v^{p+1}, b^{p+1}) - \epsilon^{p+1} J(v^{p+1}) \\ &\leq \mathcal{J}_\epsilon^1(v^1, b^1) + B \sum_{p=1}^p |\epsilon^p - \epsilon^{p+1}| + B |\epsilon^{p+1}| \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$, tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$

$$\|\|v^p - b^p\|\| \leq K. \quad (7)$$

3 - Lemme

On suppose vérifiées les hypothèses (H) et (E_1) ; alors les suites $\{v^p\}$ et $\{b^p\}$ sont bornées.

Démonstration

Soit $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. Remarquons tout d'abord qu'il existe $L > 0$ tel que :
 $J(v^p) \leq J(x) \Rightarrow \|x - v^p\| \leq L$

En effet, l'hypothèse (H_6) implique que, pour le i défini par cette hypothèse, $\{v_i^p\}$ est borné, d'où, par la proposition II.2.2. et compte tenu de (7), le caractère borné de $\{v^p\}$.

Supposons alors

$$J(v^{p+1}) \geq J(x) ;$$

l'expression (3) implique :

$$\|b^p - x\|^2 \geq \|b^{p+1} - x\|^2 + 2 \|v^{p+1} - b^{p+1}\|^2 + \|b^p - b^{p+1}\|^2$$

et, a fortiori, d'après les propriétés des projections :

$$\|v^p - x\|^2 \geq \|v^{p+1} - x\|^2 + \|v^{p+1} - b^{p+1}\|^2 + \|b^p - b^{p+1}\|^2.$$

On a donc, dans tous les cas :

$$\|v^{p+1} - x\| \leq \text{Max} [\|v^p - x\|, L] ; \forall p \in \mathbb{N}$$

d'où

$$\|v^p - x\| \leq \text{Max} [\|v^1 - x\|, L] ; \forall p \in \mathbb{N}.$$

4 - Lemme

On suppose vérifiées les hypothèses (H) et (E_1) , alors :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d((v^p, \mathcal{D})) = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - b^p\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^{p+1} - b^p\| = 0$$

Démonstration

Reprenons, en effet, l'expression (1) pour $v = b = x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$; il vient :

$$e^{p+1} [J(x) - J(v^{p+1})] - 2((b^p - b^{p+1}, x - v^{p+1})) \geq 2 \|v^{p+1} - b^{p+1}\|^2.$$

VI.52

D'après l'hypothèse H_6 , $J(v)$ est borné inférieurement. En passant à la limite, il vient alors et compte tenu de (6) et du lemme 3 :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\| = \lim_{p \rightarrow \infty} d((v^{p+1}, \mathcal{D})) = 0$$

et, par l'inégalité du triangle

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^{p+1} - b^p\|\| = 0.$$

5 - Lemme

On suppose vérifiées les hypothèses (H), (E_1) , (E_2) ainsi que l'une, quelconque, des deux hypothèses (H_U) ou (H_U^*) alors les suites $\{v^p\}$ et $\{b^p\}$ convergent fortement vers la solution unique u du problème (\mathcal{P}) .

Démonstration

Nous noterons

$$G = \{p \in \mathbb{N} ; J(v^p) > J(u)\}$$

$$P = \{p \in \mathbb{N} ; J(v^p) \leq J(u)\}.$$

Nous allons, pour démontrer le lemme, considérer trois cas.

1er cas : le cardinal de G est fini

Il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq p_0 ; J(v^p) \leq J(u).$$

La suite $\{v^p\}$ bornée possède sur \mathcal{E} fermé un point d'adhérence faible \tilde{u} .

De la s.c.i de la distance à un convexe, on déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \inf d((v^p, \mathcal{D})) = \lim_{p \rightarrow \infty} \inf \|\|v^p - b^p\|\| \geq d((\tilde{u}, \mathcal{D}))$$

et donc

$\tilde{u} \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. De la s.c.i de $J(v)$, on déduit pour la sous-suite $\{v^{p'}\}$ convergeant faiblement vers \tilde{u} :

$$J(u) \geq \liminf_{p' \rightarrow \infty} J(v^{p'}) \geq J(\tilde{u})$$

et donc par unicité (Hypothèse H_{1u}) $\tilde{u} = u$; toute la suite converge faiblement vers u , et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J(v^p) = J(u).$$

a - Si l'on suppose l'hypothèse (H_u) vérifiée, alors :

$$J\left(\frac{v^p + u}{2}\right) \leq \frac{1}{2} J(v^p) + \frac{1}{2} J(u) - \delta(\|v^p - u\|)$$

$\hat{i} \in [1, n]$ étant défini par l'hypothèse (H_{4u}) , v^p convergeant faiblement vers u , il en est de même de $(v^p + u)/2$; d'où l'on déduit :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta(\|v^p - u\|) = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - u\| = 0$$

et enfin puisque $d((v^p, \mathcal{D}))$ tend vers zéro, par équivalence de semi-normes :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^p - u\|\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\|b^p - u\|\| = 0$$

b - Si l'on suppose maintenant l'hypothèse (H_u^*) vérifiée, alors en notant r^p la projection de v^p sur $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$, on déduit du lemme 4 puisque $\|\|v^p - b^p\|\|$ définit "correctement" le convexe $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$ - cf. III.3.2., 1er point - que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^p - r^p\|\| = 0$$

et donc par uniforme continuité de J :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J(r^p) = J(u).$$

De l'uniforme convexité de $j : (H_{1u})$ résulte :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|r^p - u\|\| = 0$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^p - u\|\| = 0 \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|\|b^p - u\|\|.$$

2ème cas : le cardinal de P est fini

Il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq p_0 : J(v^p) > J(u). \quad (8)$$

Prenons l'expression (3) pour $x = u$; il vient pour tout p , $p > p_0$:

$$\varepsilon^{p+1} [J(u) - J(v^{p+1})] + \|\|b^p - u\|\|^2 \geq 2 \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\|^2 + \|\|b^{p+1} - u\|\|^2 + \|\|b^p - b^{p+1}\|\|^2 \quad (9)$$

Sommant alors l'expression précédente de $p = p_0$ à $p = N$:

$$\sum_{p=p_0}^N \varepsilon^{p+1} [J(u) - J(v^{p+1})] + \|\|b^{p_0-u}\|\|^2 \geq \|\|b^N-u\|\|^2$$

$$+ \sum_{p=p_0}^N (2 \|\|v^{p+1} - b^{p+1}\|\|^2 + \|\|b^p - b^{p+1}\|\|^2)$$

De l'hypothèse (E_2) , il résulte l'existence d'une sous-suite $\{v^{p'}\}$ de $\{v^p\}$ telle que :

$$\lim_{p' \rightarrow \infty} (J(u) - J(v^{p'})) = 0,$$

car, si ce n'était pas le cas, le premier membre de l'inégalité tendrait vers $-\infty$, quand N tend vers l'infini.

De la s.c.i de $d(\cdot, \mathcal{E})$ et de celle de $J(\cdot)$, on déduit comme précédemment et par unicité de u que la suite $\{v^{p'}\}$ converge faiblement vers u .

a - Prenant alors l'hypothèse (H_u) , il vient :

$$J\left(\frac{v^{p'}+u}{2}\right) \leq \frac{1}{2} J(v^{p'}) + \frac{1}{2} J(u) - \delta(\|v_{\mathcal{I}}^{p'} - u\|)$$

et, par passage à la limite faible :

$$\lim_{p' \rightarrow \infty} \delta(\|v_{\mathcal{I}}^{p'} - u\|) = 0$$

d'où :

$$\lim_{p' \rightarrow \infty} \|v_{\mathcal{I}}^{p'} - u\| = \lim_{p' \rightarrow \infty} \|\|v^{p'} - u\|\| = \lim_{p' \rightarrow \infty} \|\|b^{p'} - u\|\| = 0$$

b - Prenant l'hypothèse (H_u^*) , on a, de même en notant r^p , la projection de v^p sur $\mathcal{E}_n \mathcal{D}$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\|v^p - r^p\|\| = 0$$

par uniforme continuité de J :

$$\lim_{p' \rightarrow \infty} (J(r^{p'}) - J(u)) = 0$$

d'où par H_{1u}

$$\lim_{p' \rightarrow \infty} \| \|x^{p'} - u\| \| = 0 = \lim_{p' \rightarrow \infty} \| \|v^{p'} - u\| \| = \lim_{p' \rightarrow \infty} \| \|b^{p'} - u\| \|.$$

c - Montrons la convergence de toute la suite. Reprenons l'expression (9).

Il vient, compte tenu de (8) :

$$\| \|b^p - u\| \|^2 \geq \| \|b^{p+1} - u\| \|^2 \quad \forall p \geq p_0.$$

De la convergence de la sous-suite $\{b^{p'}\}$, on déduit donc puisque $\| \|v^{p+1} - b^{p+1}\| \|$ tend vers zéro :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \| \|b^p - u\| \| = \lim_{p \rightarrow \infty} \| \|v^p - u\| \| = 0.$$

3ème cas : le cardinal de P et le cardinal de G sont infinis.

Considérons la sous-suite $\{v^q\}$, $q \in P$. On a

$$J(v^q) \leq J(u) ; \forall q \in P$$

On en déduit, comme lors du 1er cas, l'existence d'une sous-suite convergeant faiblement vers u , puis, par unicité, la faible convergence de toute la suite $\{v^q\}$ et enfin, avec l'hypothèse (H_U) ou l'hypothèse (H_U^*) , la forte convergence :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \| \|v^q - u\| \| = \lim_{q \rightarrow \infty} \| \|b^q - u\| \| = 0 ; q \in P$$

Considérons maintenant la sous-suite $\{v^m\}$, $m \in G$. Par hypothèse, il existe un $p_0 \in P$. Notons alors :

$$G' = \{p \in G ; p > p_0\}$$

$$k : G' \rightarrow G' ; k(p) = \max \{m \in G' ; m \leq p ; m-1 \in P\}.$$

Si $m \in G'$, on a

$$J(v^m) > J(u)$$

prenant alors l'expression (3) pour $x = u$ et $m = p+1$, ceci implique :

$$\begin{aligned} \| \|b^{m-1} - u\| \|^2 &> \epsilon^{p+1} (J(u) - J(v^m)) + \| \|b^{m-1} - u\| \|^2 \\ &\geq \epsilon \| \|v^m - b^m\| \|^2 + \| \|b^m - b^{m-1}\| \|^2 + \| \|b^m - u\| \|^2 \end{aligned}$$

d'où $\|b^m - u\| < \|b^{m-1} - u\|$; $\forall m \in G'$

et, par récurrence :

$$\|b^m - u\| \leq \|b^{k(m)-1} - u\| ; \forall m \in G',$$

d'où, puisque $k(m)-1$ appartient à P :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \in G'}} \|b^m - u\| = 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v^p - u\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|b^p - u\|,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

REFERENCES

- (1) A. BENSOUSSAN, P. KENNETH
" Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation"
R.I.R.O. 13-R3 (1968), p. 13-25
- (2) A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, R. TEMAM.
"Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination
et applications".
IRIA , Cahier n°11 (1972), 5-189.
- (3) J. CEA, R. GLOWINSKI
"Sur des méthodes d'optimisation par relaxation".
R.A.I.R.O. R-3 (1973), 5-31
- (4) L.G. GUBIN , B.T. POLYAK, E.V. RAIK
"The method of projections for finding the common point of convex sets"
Zh. Vychist. Mat. Mat. Fiz., 7,6,(1967), 1211-1228
- (5) Y. HAUGAZEAU
Thèse, Paris, (1968)
- (6) L.S. LEVITIN, B.T. POLYAK
"Constrained minimization methods"
Zh. Vychist. Mat. Mat. Fiz., 6,5, (1966), 787-823
- (7) P.J.LAURENT
"Approximation et optimisation"
Hermann, Paris, (1972)

- (8) P.J. LAURENT , B.MARTINET.
"Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes".
Symposium on Optimization, Nice, (1969) in Lect. Notes Math., 132, Springer-Verlag, Berlin, (1970), 159-180
- (9) J.L. LIONS, R. TEMAN
"Approximation de la solution d'inéquations variationnelles par décomposition des opérateurs et éclatement des contraintes - Applications"
Pub. Inst. B. Pascal (1967).
- (10) J.L. LIONS, R. TEMAN.
"Eclatement et décentralisation en calcul des variations"
Symposium on Optimization , Nice, (1969) in Lect. Notes Math. 132, Springer-Verlag, Berlin, (1970) 196-217.
- (11) J.L. LIONS , R. TEMAN.
"Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations".
C.R. Acad. Sci., Paris, 263, (1966).
- (12) P. LORIDAN
"Sur la minimisation de fonctionnelles convexes par pénalisation ".
R.I.R.O., R-1 (1971), 117-133.
- (13) G.PIERRA.
"Méthodes de projections parallèles extrapolées relatives à une intersection de convexes".
Rapport de recherche n°7, Mathématiques Appliquées et Informatique de Grenoble, (1975).
- (14) G.PIERRA.
"Recherche d'un point appartenant à plusieurs ensembles convexes par croisement d'algorithmes".
Rapport de recherche n°8, Mathématiques Appliquées et Informatique de Grenoble, (1975).

- (15) G. PIERRA.
"Eclatement de contraintes en parallèle pour la minimisation d'une forme quadratique".
- 7th IFIP Conference on optimization techniques, Modeling and optimization in the service of Man - Nice (1975)
- (16) P. SAINT-PIERRE.
"Approximation d'une solution optimale par une suite de solutions réalisables et par éclatement des contraintes".
(A paraître).
- (17) R. TEMAN
"Quelques méthodes de décomposition en Analyse Numérique"
Actes, Congrès International des Mathématiciens, Nice, (1970)
tome 3, 311-319
- (18) R. TEMAN
" Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires".
Annali di matematica pura et applicata (iv) Vol. LXXIX (1968) 191-380
- (19) N.N. YANENKO
"Méthode à pas fractionnaires".
Armand Colin Paris (1968)
- (20) F.E. BROWDER, W.V. PETRYSHIN
"Construction of non linear mappings in Hilbert space".
Journal of Math. Anal. Appli., 20, (1967), 197-228.
- (21) B. MARTINET
Thèse, Grenoble, (1972).
- (22) J.J. MOREAU
"Proximité et dualité dans un espace hilbertien"
Bull. Soc. Math. Fr., 93, (1965), 273-299.

CHAPITRE VII

CHAPITRE VII

APPLICATIONS ET ESSAIS NUMERIQUES

Dans les chapitres précédents de ce travail, nous avons présenté et étudié un certain nombre de méthodes et d'algorithmes pour résoudre divers problèmes d'optimisation.

Nous nous proposons dans ce chapitre, d'une part de rassembler les applications des méthodes jusqu'à là étudiées, d'autre part de présenter quelques résultats numériques obtenus en utilisant ces méthodes.

Les applications ont été regroupées, d'une manière un peu arbitraire mais usuelle, en trois familles :

- . Problèmes de programmation mathématique
- . Problèmes aux limites et inéquations variationnelles
- . Problèmes spécifiques de statistiques ou de traitement de données.

L'ensemble des algorithmes proposés, ainsi, si possible, que leurs diverses variantes, ont été mis en oeuvre sur certains problèmes choisis parmi les applications présentées précédemment. Sans prétendre nullement à l'exhaustivité, l'objet de ces essais est seulement d'apporter quelques éclaircissements sur l'efficacité que l'on peut attendre d'une méthode lorsqu'elle est appliquée à tel ou tel problème bien spécifique.

I - APPLICATIONS

I.1. PROBLEMES DE PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

I.1.1. Résolution d'un système d'équations linéaires

On considère le problème :

" Trouver $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $Au = f$ " avec $A : n \times p$ et $f : n \times 1$

On a vu au chapitre II, cf. chapitre II, paragraphe III.4.1, comment la méthode des projections parallèles extrapolée, généralisant l'algorithme de décomposition de la norme ϕ_2 , permettrait, s'il existait au moins une solution, de trouver une solution particulière (et, en particulier, la solution de norme minimale si le point de départ de l'algorithme était choisi à l'origine).

Il s'agit d'une méthode itérative dont l'utilisation peut être envisagée, même dans le cas où $n = p$, lorsque A est très mal conditionnée, ou lorsque l'algorithme de relaxation n'est pas convergent.

Une technique de "recentrage", analogue à celle présentée ci-dessous, cf. paragraphe II.1.3., semble très souhaitable pour accélérer la convergence.

I.1.2. Solution généralisée d'un système d'équations linéaires incompatibles

Il arrive souvent que les systèmes d'équations linéaires que l'on cherche à résoudre, du fait des erreurs sur les coefficients ou sur les seconds membres, deviennent singuliers [20]. Ainsi que cela a été montré au II, paragraphe II, la méthode du barycentre permet de définir une suite convergente vers une solution généralisée de ce système ; c'est-à-dire une solution du système "aux moindres carrés" associé. Ainsi, que le montre les essais numériques effectués, cette convergence est, par contre, extrêmement lente.

I.1.3. Résolution d'un système d'inéquations linéaires

On considère le problème :

"Trouver $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $Au \leq f$ " $A : n \times p$ et $f : n \times 1$.

Les diverses variantes de la méthode de projections parallèles extrapolée semblent très considérablement plus rapide, pour résoudre ce problème, que les méthodes classiques de relaxation [1] réflexion [21] ou barycentre [2]. Signalons également la méthode [19] qui est à rapprocher de la méthode de projections parallèles extrapolée avec pondération des projections - cf. chapitre II, paragraphe I.6; les pondérations à choisir n'étant, d'ailleurs, pas définies.

Si l'on sait que le convexe $\{u \in \mathbb{R}^p ; Au \leq f\}$ est d'intérieur non vide il convient de prolonger l'extrapolation - cf. II, paragraphe V - et, en particulier, si l'on connaît le rayon ρ d'une boule incluse dans ce convexe, on prolonge chaque itération d'une longueur ρ . Cette prolongation, d'une part accélère la convergence à chaque pas, d'autre part assure la convergence en un nombre fini de pas - cf. II, paragraphe V.4.

. Si l'on désire que tous les itérés obéissent à un sous-ensemble de contraintes, il est possible de particulariser ces contraintes - cf. II paragraphe IV - c'est-à-dire de ne pas les introduire dans l'extrapolation mais de projeter, à chaque pas, l'itéré sur ces contraintes. Ceci est utilisable, en particulier, pour les contraintes de non-négativité et les contraintes de borne sur lesquelles la projection se calcule de façon élémentaire (structure de produit). Ceci permet de travailler sur des ensembles de contraintes de dimensions réduites.

Deux exemples de tels problèmes :

a) Recherche d'un point intérieur à un tronçon [5].

Ce problème se rencontre, en particulier, dans la méthode des centres linéarisés [5] et [14] ainsi que pour chercher un point de départ pour des algorithmes intérieurs. L'intérieur du tronçon étant supposé non vide, la méthode de projections parallèles extrapolée avec prolongation converge en un nombre fini de pas, soit vers un point intérieur, soit vers un point frontière permettant d'obtenir un point intérieur.

b) Minimisation de l'enveloppe supérieure d'une famille finie de formes linéaires affines, un majorant de ce minimum étant connu [12].

Il s'agit du problème ; cf. [12] :

$$\text{"Minimiser } w(\pi) ; \pi \in \mathbb{R}^n \text{ avec } w(\pi) = \max \{c_k + \pi \cdot v_k ; k=1, \dots, K\}\text{"}$$

où l'on suppose connu \hat{w} , majorant de la valeur minimale w^* de $w(\pi)$. La recherche de $\pi \in \mathbb{R}^n$ tel que $w(\pi) \leq \hat{w}$ se ramène à la résolution du système d'inéquations linéaires :

$$c_k + \pi \cdot v_k \leq \hat{w} ; k=1, \dots, K ;$$

et si l'on suppose, comme [24], $\hat{w} = w^*$, alors la solution du système précédent est solution du problème initial.

I.1.4. Méthode primale -duale de programmation linéaire

On sait, cf. par exemple [7]- que le problème linéaire dans \mathbb{R}^p :

$$\text{"Min } c'x ; Ax \geq b ; x \geq 0 \text{"}$$

avec A : matrice $n \times p$; est équivalent au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} c'x = b'u \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ A'u \leq c \\ u \leq 0 ; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire la résolution d'un système d'inéquations linéaires qui peut être résolu par projections parallèles extrapolée.

En particularisant le rôle des contraintes de non-négativité, le nombre de contraintes à considérer est égal à $n+p+1$. Cette méthode peut être intéressante, en particulier, pour résoudre des programmes linéaires de grande taille car il n'est pas nécessaire, alors, de stocker entièrement la matrice.

D'autre part, et à la différence des méthodes de type simplicial, il est possible d'utiliser toutes les informations que l'on peut avoir, a priori, sur la zone où doit se situer l'optimum.

Cette méthode est à rapprocher de la classe de méthodes considérées par W. OETTLI dans [22] .

I.1.5. Programmation quadratique.

On considère le problème dans \mathbb{R}^p :

$$\text{"Minimiser } u'Au - 2f'u \text{ avec } Cu \leq b \text{ et } Eu = d \text{" ,}$$

la matrice A étant symétrique et définie positive.

Deux méthodes sont utilisables pour résoudre ce problème :

- . La méthode de programmation quadratique du chapitre V - cf. paragraphe I.8 - dont chaque pas amène à résoudre un système linéaire de matrice A .
- . La méthode de projection sur une intersection de convexe du chapitre IV, - cf. paragraphe V.5.2- qui demande la recherche préalable des directions A -orthogonales à chaque contraintes (ou, tout au moins, à chaque contrainte non satisfaite par l'itéré initial).

Le choix dépend donc du nombre de contraintes du problème et de la nature de la matrice A , ces méthodes étant toutes deux très peu coûteuses lorsque A est aisément inversible.

Notons qu'il est également possible - cf. paragraphe III, ci-dessous - de particulariser le rôle de certaines contraintes.

Les essais numériques effectués montrent que, pour les problèmes traités tout au moins, la localisation des contraintes liées à l'optimum est extrêmement rapide. Par contre, lorsque ces contraintes sont localisées, des oscillations peuvent se produire; les contraintes non vérifiées par les itérés successifs étant des sous-ensembles des contraintes liées à l'optimum. Ces oscillations peuvent ralentir la convergence.

Ceci nous a amené à introduire la variante suivante : à chaque pas de l'algorithme, l'ensemble des contraintes non vérifiées par l'élément itéré est confronté à la liste des contraintes non vérifiées par les p itérés précédents (avec $p = 2$ ou 3). Lorsque toutes ces contraintes sont incluses dans la liste, on résout le problème de Lagrange : optimisation avec les contraintes des p itérés suivants, à condition qu'elles appartiennent également à la liste, comme contraintes d'égalités - il s'agit donc de la résolution d'un système linéaire. Trois cas peuvent se présenter :

1. Tous les multiplicateurs de Lagrange sont non-négatifs et la solution du problème de Lagrange, u_λ , vérifie toutes les contraintes du problème initial. On sait alors, et c'est un résultat classique de dualité [6][28], que u_λ est solution du problème initial.

2. Tous les multiplicateurs de Lagrange sont non-négatifs mais u_λ ne vérifie pas certaines autres contraintes du problème initial. On sait alors que u_λ est la A-projection du minimum g sur l'intersection des convexes correspondants aux contraintes prises en compte dans le problème de Lagrange. u_λ définit donc un demi-espace, contenant le domaine des contraintes du problème initial, et sur lequel u_λ est la A-projection de g . L'itéré suivant est alors défini comme étant la A-projection de g sur l'intersection de ce demi-espace et du demi-espace associé à l'itéré précédent.

3. Certains multiplicateurs de Lagrange sont négatifs, on reprend alors les itérations à partir de l'itéré précédent.

Cette variante accélère très considérablement la convergence de la méthode et nous a permis, sur tous les problèmes testés, d'obtenir la solution exacte au bout d'un nombre fini, et très faible, d'itérations.

I.1.6. Programmation quadratique à contraintes non linéaires

On minimise la même forme quadratique qu'au paragraphe précédent mais avec un convexe de contraintes S défini par :

$$S = \{u \in \mathbb{R}^P ; h_i(u) \leq 0, i=1, \dots, n\}$$

les fonctions h_i étant convexes et continues. Sauf lorsque A est particulièrement simple, par exemple : diagonale, il est, en général, plus simple d'effectuer les projections au sens de la norme de \mathbb{R}^n .

Selon la nature des fonctions h_i définissant les contraintes, il est possible :

- . soit de projeter effectivement sur $C_i = \{u; h_i(u) \leq 0\}$ $i=1, \dots, n$, et d'utiliser l'algorithme V. paragraphe I.5.
- . soit de linéariser à chaque pas les contraintes, par croisement de méthodes duales, et utiliser l'algorithme V, paragraphe II.3, ou, plus spécialement, V, paragraphe II.4.2.

Il est clair que si les projections sont simples à exécuter la linéarisation n'a pas de raison d'être. Comme au paragraphe précédent, dès que les contraintes liantes sont localisées, on peut rechercher la solution du problème par résolution d'un problème (non linéaire) de Lagrange.

I.1.7. Résolution d'un système d'inéquations non linéaires :

On considère le problème :

$$\text{" Trouver } u \in \mathbb{R}^P ; h_i(u) \leq 0, i=1, \dots, n \text{"}$$

avec h_i , $i=1, \dots, n$, convexe et continue sur \mathbb{R}^P .

Ce problème se rencontre fréquemment pour chercher un point de départ pour des algorithmes intérieurs et, en particulier, dans la méthode des centres [5] [14].

Deux algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre ce problème selon que l'on sait, ou non, projeter sur chacun des convexes C_i :

$$C_i = \{u \in \mathbb{R}^P ; h_i(u) \leq 0\} ; i=1, \dots, n.$$

. La méthode de projections parallèles extrapolée avec ses variantes et, en particulier, dans la méthode des centres où le convexe est supposé d'intérieur non vide, méthode avec prolongation.

. Le croisement de méthodes duales exposé au chapitre III, paragraphe II, qui est une linéarisation de l'algorithme précédent.

I.2. PROBLEMES AUX LIMITES ET INEQUATIONS VARIATIONNELLES

I.2.1. Problème de Neumann

Il s'agit du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ \gamma_1 u = 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma \end{array} \right.$$

dont la méthode de résolution par projection sur une intersection de convexes a été exposée au chapitre IV, paragraphe III.1.

I.2.2. Un problème à contraintes unilatérales

Soit Ω ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n , de frontière Γ . On définit sur $H^1(\Omega)$, la fonctionnelle :

$$j(v) = \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) \cdot dx$$

avec $f \in L^2(\Omega)$; le convexe :

$$K = \{v \in H_1(\Omega) ; v|_{\Gamma} \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}$$

et le problème :

$$(P) \quad \text{" Trouver } u \in K \subset L^2(\Omega) ; j(u) = \min \{j(v); v \in K\} \text{ " .}$$

La solution de ce problème s'interprète [11][18] comme solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \text{ et } u \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Nous donnons ici, à titre d'exemple, trois méthodes possibles pour décomposer le problème (P).

Considérons une partition de la frontière $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ avec :

$$\cos(\bar{n}, \bar{x}_i) \neq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_i, \quad i=1, \dots, n,$$

et les espaces :

$$V_i = \{v \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)\}.$$

Il résulte des théorèmes de trace sur les espaces V_i , cf. [17],[27], que l'on peut définir, pour $v \in V_i$, la trace $\gamma^i(v)$ (ou " $v|_{\Gamma_i}$ ") de v sur Γ_i . On introduit les convexes :

$$K_i = \{v \in V_i ; \gamma^i(v) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_i\} \subset V_i ; \quad i=1, \dots, n$$

et le problème (P) est équivalent à :

$$(P') \quad \text{"Trouver } u \in \bigcap_{i=1}^n K_i \subset L^2(\Omega) \text{ tel que } j(u) = \min [j(v) ; v \in \bigcap_{i=1}^n K_i]$$

a) Décomposition par pénalisation [18]

On introduit les fonctionnelles : $j_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$,

$$j_i(v) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx, \quad i=1, \dots, n,$$

et l'on note :

$$\mathcal{V} = [L^2(\Omega)]^n$$

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^n K_i$$

$$\mathcal{D} = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{V} ; v_1 = v_2 = \dots = v_n\}$$

$$J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} ; J(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n j_i(v_i).$$

le problème (P'), et donc (P), est équivalent, dans \mathcal{V} , au problème :

(P) "Trouver $u \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}$ tel que $J(u) = \min [J(b) ; b \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}]$ "

auquel la méthode de décomposition par pénalisation du chapitre VI s'applique.

Dans la décomposition parallèle, par exemple, les problèmes à résoudre à chaque pas sont de la forme :

$$\min [\|v_i - b\|^2 + \epsilon^p [\frac{1}{n} \|v_i\|^2 + \|\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\|^2] ; v_i \in K_i \subset V_i]$$

et se ramènent donc à la résolution d'une famille de problèmes unidimensionnels semblables au suivant [18] :

"Trouver une fonction réelle $\varphi(\xi)$ définie sur un intervalle $]\xi_0, \xi_1[$ et vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (1 + \frac{\epsilon^p}{n}) \varphi = \beta(\xi) \quad (\text{avec } \beta \text{ connue}) \\ \varphi(\xi_0) \cdot \varphi'(\xi_0) = \varphi(\xi_1) \cdot \varphi'(\xi_1) = 0 \\ \varphi(\xi_0) \geq 0 ; \varphi(\xi_1) \geq 0 ; \varphi'(\xi_0) \geq 0 ; \varphi'(\xi_1) \geq 0 \end{array} \right. ;$$

suivis d'une coordination qui, aux diverses fonctions $v_i \in V_i \subset L^2(\Omega)$, $i=1, \dots, n$, ainsi obtenues, associe leur barycentre :

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i .$$

b) Décomposition par projection

On adopte maintenant une définition différente de l'espace produit.

On pose :

. $V = [L^2(\Omega)]^{n+1}$ doté de la topologie produit par le produit scalaire $((\dots)) = \Sigma(\dots)$; la norme étant notée $||| \cdot |||$.

. $C'_i = \{v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V ; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i} ; v_0 \in K_i\}$, $i=1, \dots, n$

. $g = (f, 0, \dots, 0) \in V$.

Le problème (P') est équivalent à :

$$(\mathcal{P}') \quad \text{"Trouver } u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in \bigcap_{i=1}^n C'_i ;$$

$$\| \| u \| \|^2 - 2((g, u)) = \min [\| \| v \| \|^2 - 2((g, v)); v \in \bigcap_{i=1}^n C'_i] "$$

ou encore, en ajoutant la constante $\| \| g \| \|^2$:

$$" u = \text{Projection de } g \text{ sur } \bigcap_{i=1}^n C'_i " ,$$

auquel la méthode de projection sur une intersection de convexes; cf. chapitre IV, s'applique. La méthode est tout à fait analogue au IV, paragraphe III.1, avec seulement une légère différence dans les convexes C'_i utilisés. La projection (z_0, z_1, \dots, z_n) d'un point (v_0, v_1, \dots, v_n) sur C'_i est calculée de la façon suivante :

z_0 est défini en résolvant une famille de problèmes unidimensionnels semblables au suivant :

"Trouver une fonction réelle $\varphi(\xi)$ définie sur un intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ et qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \varphi = \alpha(\xi) \quad \text{p.p. sur } [\xi_0, \xi_1] \\ \frac{d\varphi}{d\xi}(\xi_0) \geq \alpha_0 \quad ; \quad \frac{d\varphi}{d\xi}(\xi_1) \geq \alpha_1 \\ \varphi(\xi_0) \geq 0 \quad ; \quad \varphi(\xi_1) \geq 0 \quad ; \\ \varphi(\xi_0) \cdot \left[\frac{d\varphi}{d\xi}(\xi_0) - \alpha_0 \right] = \varphi(\xi_1) \cdot \left[\frac{d\varphi}{d\xi}(\xi_1) - \alpha_1 \right] = 0 " \end{array} \right.$$

avec $\alpha(\xi)$ fonction connue - $[v_0 - \frac{\partial}{\partial x_i} v_i] (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$ - et $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ connus.

Puis on définit z_j , $j=1, \dots, n$, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i = \frac{\partial}{\partial x_i} z_0 \\ z_j = v_j \quad , \quad j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n . \end{array} \right.$$

c) Décomposition par discrétisation et projections.

Considérons, à nouveau, le problème sous la forme (\mathcal{P}') dans $[L^2(\Omega)]^{n+1}$:

(\mathcal{P}') "Trouver $(u_0, u_1, \dots, u_n) \in C$ tel que $\|u-g\|^2 = \min [\|v-g\|^2; v \in C]$ "

avec :

$$C = \bigcap_{i=1}^n C'_i = \{v=(v_0, v_1, \dots, v_n) ; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i}, i=1, \dots, n ; v|_{\Gamma} \geq 0\}.$$

Après discrétisation de $[L^2(\Omega)]^{n+1}$ par une méthode de différences finies, par exemple la méthode à cinq points, on introduit les convexes :

$$C_{i,h} = \{(v_{0,h}, v_{1,h}, \dots, v_{n,h}) \in V_h ; v_{i,h} = \nabla_{i,h} v_{0,h}\} ; i=1, \dots, n,$$

ainsi que le convexe $C_{0,h}$, ensemble des fonctions de V_h (et non de l'intersection des $C_{i,h}$ seulement) telles que toutes les coordonnées de $v_{0,h}$ représentant la fonction v_0 "au bord", c'est-à-dire dans la méthode à cinq points les valeurs de $v_{0,h}$ sur les pavés rencontrant la frontière, soient positives ou nulles.

Si l'on note I l'ensemble des indices des pavés rencontrant la frontière, $C_{0,h}$ est donc défini par :

$$C_{0,h} = \{(v_{0,h,1}, \dots, v_{0,h,q}; v_{1,h,1}, \dots, v_{1,h,r}; \dots; v_{n,h,1}, \dots, v_{n,h,s})$$

tel que $v_{0,h,i} \geq 0, \forall i \in I\}$;

et la projection d'un élément de V_h sur $C_{0,h}$, pour la norme $\| \cdot \|_h$ qui n'est autre que la norme produit, est particulièrement simple à obtenir (structure de produit).

Le problème (\mathcal{P}') est ainsi ramené, après discrétisation, à un problème de projection sur l'intersection de $n+1$ convexes : les convexes $C_{i,h}$, $i=1, \dots, n$, sur lesquels la projection s'obtient comme pour le problème de Neumann I.2.1, c'est-à-dire comme au chapitre IV, paragraphe III.1, et le convexe $C_{0,h}$ sur lequel la projection s'obtient de façon élémentaire.

I.2.3. Quelques inéquations variationnelles classiques

Il est à noter que la méthode de décomposition précédente I.2.2.c, possède un champ d'applications assez large : beaucoup des convexes classiquement rencontrés dans les problèmes d'inéquations variationnelles, ont, par l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $[L^2(\Omega)]^{n+1}$, une image qui donne lieu, après discrétisation, à des convexes $C_{0,h}$ sur lesquels la projection peut être très simplement obtenue. C'est, en particulier, le cas de tous les exemples de convexes dont la discrétisation est étudiée dans [31], cf. [31], I.2.5..

Considérons, à titre d'exemple, le convexe :

$$K = \{v \in H^1_0(\Omega) ; |\text{grad } v| \leq 1\}$$

dont l'image dans $V = [L^2(\Omega)]^{n+1}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \bigcap_{i=0}^n C_i \\ C_i = \{(v_0, v_1, \dots, v_n) \in V ; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i}, v_0|_{\Gamma_i} = 0\}, i=1, \dots, n \\ C_0 = \{(v_0, v_1, \dots, v_n) \in V ; \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 1\} \end{array} \right.$$

On vérifie facilement [10] que la projection z_h de v_h sur $C_{0,h}$ est définie, pavé par pavé, par :

$$\left. \begin{array}{l} z_{0,h}(M) = v_{0,h}(M) \quad \forall M \in \Omega_h \\ z_{i,h}(M) = v_{i,h}(M) \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^n [v_{i,h}(M)]^2 \leq 1 \\ z_{i,h}(M) = \frac{v_{i,h}(M)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [v_{i,h}(M)]^2}} \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^n [v_{i,h}(M)]^2 > 1 \end{array} \right\} \quad i=1, \dots, n .$$

I.2.4. Un problème non linéaire

Il s'agit du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u + 2u^3 = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma \end{array} \right.$$

pour lequel nous avons vu, au chapitre VI, paragraphe III.2, deux méthodes :

- une méthode de projection sur une intersection de convexes dans $[L^2(\Omega)]^{n+2}$
- un croisement d'algorithmes associé à la méthode précédente et qui consiste à linéariser, à chaque pas, le convexe :

$$C_{n+1} = \{(v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in [L^2(\Omega)]^{n+2}; v_{n+1}(x) \geq v_0(x)^2 \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

par une méthode de Kelley permettant d'éviter le calcul, pavé par pavé, d'une projection sur la parabole $y = x^2$. La méthode de décomposition par pénalisation est également applicable, cf. [26].

Remarquons d'ailleurs que les deux premières méthodes peuvent également s'appliquer lorsque les conditions aux limites sont différentes, par exemple de type unilatéral, en introduisant, comme au paragraphe I.2.3., un $n+2$ ème convexe représentant ces conditions.

I.3. QUELQUES PROBLEMES DE STATISTIQUES

Beaucoup de problèmes de statistiques se ramènent, en particulier, à la recherche de la projection d'un point sur une intersection de convexes, la projection étant calculée soit au sens de \mathbb{R}^n , soit au sens d'une forme quadratique particulièrement simple, et les contraintes, d'égalité ou d'inégalité, étant linéaires et, souvent, de matrice creuse. La difficulté de ce genre de problèmes réside dans leur taille importante qui s'oppose à l'utilisation de méthodes de type simplicial. Les méthodes de projections semblent, au contraire, bien adaptées pour ce genre de problèmes : d'autant plus que la forme très spécifique des contraintes facilite le calcul des projections. Nous donnons ici deux exemples.

I.3.1. Le problème des mauvais échantillons [29][30]

Résumons ici ce problème - cf. [29], paragraphe 3.

Par mauvais échantillon, on entend un échantillon non représentatif mais sur lequel on possède des données numériques de bonne qualité. Pour chacun des individus, $i=1, \dots, n$, de l'échantillon, sont connues les valeurs (exactes): x_i, y_i, \dots, t_i , des h caractères étudiés: X, Y, \dots, T . Par contre, les individus de l'échantillon ne sont pas représentatifs de la population considérée.

On se propose d'attribuer à chaque individu de l'échantillon un poids, $w_i \in [1, +\infty[$, qui serait, en quelque sorte, le nombre d'unités de la population "représentées" par cet individu-échantillon.

Les contraintes portant sur ces poids sont de trois sortes :

- Certains sous-ensembles de l'échantillon représentent des sous-ensembles de la population dont l'effectif est connu :

$$\sum_{j \in J} w_j = c_j \text{ (constante connue)}$$

et ceci pour des ensembles J constituant une partition de $[1, \dots, n]$.

Nous supposons l'échantillon ordonné en fonction de ces m sous-ensembles : le premier sous-ensemble, E_1 , comportant les éléments 1 à n_1 et le m -ième, les éléments numérotés de $n_1 + \dots + n_{m-1} + 1$ à $n_1 + \dots + n_m = n$.

- La somme des valeurs de chaque caractère sur la population est connue :

$$\sum_{j=1}^n y_j \cdot w_j = c_Y \text{ (connue) ;}$$

et ceci pour chaque caractère: X, Y, \dots, T .

- Enfin, seules contraintes d'inégalité, les contraintes de non-négativité :

$$w_i \geq 0 \quad i=1, \dots, n.$$

(certains poids nuls pouvant éventuellement être acceptés).

Dans l'espace, dit sub-dual [29], \mathbb{R}^n , chaque élément de l'échantillon est représenté par un point. Une contrainte de la première sorte signifie qu'une masse c_j est répartie sur les points du sous-ensemble E_j .

L'ensemble de ces contraintes définissent donc une enveloppe convexe qui résulte de la combinaison, pondérée par les c_j , de celles des sous-ensembles E_j .

Les contraintes de la deuxième sorte déterminent la place du barycentre pondéré des points du nuage global. Dans le cas où le barycentre n'appartient pas à l'enveloppe convexe précédente, le statisticien est amené à reconsidérer et à modifier les contraintes introduites. Nous supposons donc que le barycentre appartient à l'enveloppe convexe ce qui entraîne l'existence de systèmes de pondération : $w = (w_1, \dots, w_n)$, respectant les contraintes. Le critère d'optimalité adopté est alors une certaine variance

linéaire C_2 sont définies par :

$$w_i = g_i - \frac{\sum_{i \in E_p} g_i}{n_p} + \frac{c_i}{n_p} \quad \forall i \in E_p = [n_1 + \dots + n_{p-1} + 1, n_1 + \dots + n_p];$$

$p=1, \dots, m$.

b - Une variante avec extrapolation dans une variété linéaire.

La méthode précédente possède l'inconvénient de converger seulement de façon itérative, même lorsque seules les contraintes d'égalité sont liantes à l'optimum. Ceci nous a amené à définir une méthode plus spécifiquement adaptée à ce genre de problèmes.

Il convient, tout d'abord, de remarquer que le nombre h de caractères: X, Y, \dots, T , étudiés est toujours faible par rapport à la taille de l'échantillon ; ainsi, la résolution d'un système linéaire de dimension h est-il un problème relativement simple.

Nous noterons :

$$C_1 = \{w \in \mathbb{R}^n ; w \geq 0\}$$

$$V = \{w \in \mathbb{R}^n ; t_{w.M} = t_c\}$$

$$C_1 = C \cap V.$$

Nous nous proposons d'appliquer la méthode de projection sur une intersection de convexes, mais en astreignant les itérés successifs à appartenir à la variété linéaire V .

On vérifie, au prix d'un calcul un peu technique mais simple, et en introduisant les moyennes de caractères pour chacun des sous-groupes de l'échantillon :

$$\bar{\theta}_p = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in E_p} \theta_j, \quad p=1, \dots, m,$$

que les coordonnées de la projection, $w \in \mathbb{R}^n$, d'un élément $g \in \mathbb{R}^n$ sur la variété V sont définies, sous-groupe par sous-groupe, par :

$$w_j = \frac{c_p}{n_p} + g_j - \bar{g}_p + \lambda_X (x_j - \bar{x}_p) + \lambda_Y (y_j - \bar{y}_p) + \dots + \lambda_T (t_j - \bar{t}_p);$$

$\forall j \in E_p ; p=1, \dots, m ;$

les coefficients $\lambda_X, \dots, \lambda_T$ étant calculé en résolvant un système linéaire $h \times h$ dont la matrice B représente les variances-covariances par sous-groupe :

$$\begin{bmatrix} m_x^2 & -m_x^2 & m_{xy} & -m_{xy} & \dots & m_{xt} & -m_{xt} \\ m_{xy} & -m_{xy} & m_y^2 & -m_y^2 & \dots & m_{yt} & -m_{yt} \\ \vdots & & & & & & \\ & & & & & m_t^2 & -m_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_X \\ \lambda_Y \\ \vdots \\ \lambda_T \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} c_X - \sum_{p=1}^m c_p \bar{x}_p - m_{gx} + m_{gx} \\ c_Y - \sum_{p=1}^m c_p \bar{y}_p - m_{gy} + m_{gy} \\ \vdots \\ c_T - \sum_{p=1}^m c_p \bar{t}_p - m_{gt} + m_{gt} \end{bmatrix}$$

avec $m_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$; $m_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^m n_p \bar{x}_p^2$; $m_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$; $m_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^m n_p \bar{x}_p \bar{y}_p$.

La méthode est alors la suivante. On note u^0 la projection de l'origine O sur V. Du théorème des trois perpendiculaires il résulte que la projection de O sur $V \cap C_1$ se confond avec celle de u^0 que nous allons donc chercher.

Supposons que, lors de la pième itération, nous connaissions un itéré, $u^p \in V$, tel que :

$$V \cap C_1 \subset H(u^0, u^p) = \{w \in \mathbb{R}^n ; (w - u^p, u^p - u^0) \geq 0\}.$$

Nous définissons :

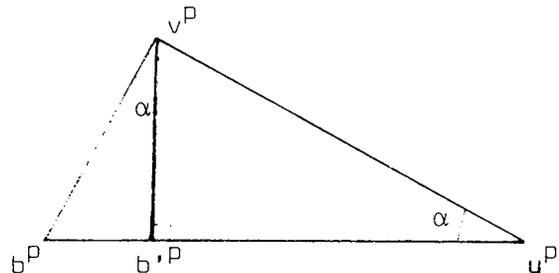
$$v^p = \text{Proj}_{C_1} u^p ,$$

$$b^{p,p} = \text{Proj}_V v^p ,$$

puis, par analogie avec la méthode de projections parallèles extrapolée, l'élément extrapolé :

$$b^p = u^p + \frac{\|v^p - u^p\|^2}{\|b^{p,p} - u^p\|^2} \cdot (b^{p,p} - u^p)$$

et enfin l'itère suivant u^{p+1} :



$$u^{p+1} = \text{Projection de } u \text{ sur } H(u^0, u^p) \cap H(u^p, b^p) .$$

(On vérifie très simplement que $u^{p+1} \in V$ et $V \cap C_1 \subset H(u^0, u^{p+1})$ ce qui entraîne la convergence de l'algorithme).

I.3.2. Le problème des tableaux de Fréchet :

Cette application fait l'objet d'un travail commun Dumont-Fages-Pierra [8] et nous en donnerons seulement les grandes lignes [9][29]. Etant donné une matrice A , $m \times n$, on cherche une matrice non-négative X , $m \times n$, la "plus proche" possible de A et ayant des marges fixées :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= p_i \quad (\text{donné}) ; \quad i=1, \dots, m , \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= q_j \quad ; \quad j=1, \dots, n . \end{aligned}$$

Si la proximité est définie par la distance euclidienne :

$\sum_{i,j} (x_{ij} - a_{ij})^2$, il s'agit d'un problème de projection tout à fait analogue

au problème étudié précédemment. Cette distance est cependant peu usitée car elle a l'inconvénient statistique de ne pas "conserver les zéros" c'est-à-dire :

$$a_{ij} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad x_{ij} = 0 .$$

Dans [8] d'autres distances sont proposées qui ont la propriété de "conserver les zéros" et ramènent cependant le problème à la recherche d'une projection sur une intersection de convexes pour lequel les méthodes étudiées précédemment sont particulièrement adaptées.

II - ESSAIS NUMERIQUES

Nous présentons ici quelques résultats, les plus significatifs des essais numériques effectués sur diverses méthodes présentées dans ce travail. Nous avons particulièrement développé la présentation des essais portant sur la résolution d'équations aux dérivées partielles car ces problèmes permettent de construire aisément toute une variété de problèmes-test dans des espaces de dimensions assez conséquentes, de l'ordre de 400 à 1600; et donc d'obtenir des résultats assez généraux sur les caractéristiques des méthodes avec projections parallèles et extrapolation.

Les résultats obtenus pour les problèmes de Neumann et Dirichlet, présentés, assez en détail, en premier lieu, nous ont amené à introduire des techniques de "recentrage" qui semblent avoir une influence notable sur la performance de la méthode.

Dans le problème non linéaire étudié ensuite, le recentrage des itérés successifs s'avère presque indispensable pour rendre la méthode efficace. L'influence de la linéarisation d'un convexe est également étudiée puis les résultats sont comparés avec ceux obtenus par des méthodes type "décomposition par pénalisation" et "pas fractionnaires".

Quelques résultats sont enfin présentés relatifs à des problèmes de dimension plus modeste.

L'ensemble des résultats présentés, ont été obtenu, sauf indications contraires, sur l'ordinateur IRIS 80 du C.C.I.L.S., et les temps de calcul donnés correspondent à ce matériel. Je remercie pour leur participation à la réalisation de ces essais, Messieurs R. CHIFFLET et T. DUMONT, du service d'analyse numérique et de traitement de l'information de l'Université de Lyon 1 ; je remercie également, pour son aide amicale, Monsieur J. BARANGER, responsable de ce service.

II.1. PROBLEMES DE NEUMANN ET DIRICHLET :

METHODE DE PROJECTION SUR UNE INTERSECTION DE CONVEXES.

Nous avons considéré les deux problèmes types suivants, avec des conditions aux limites de type Neumann ou de Dirichlet :

$$(N) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u \Big|_{\Gamma} = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma \end{array} \right.$$

avec

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2, \text{ de frontière } \Gamma .$$

Sept jeux d'essai ont été étudiés, dont les solutions étaient respectivement :

$$(N1) \quad u = \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$(N2) \quad u = (2x^3 - 3x^2 + 3)(2y^3 - 3y^2 - 2)$$

$$(N3) \quad u = (9x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 6)(2y^3 - 3y^2)$$

$$(D1) \quad u = \sin \pi x \cdot \sin \pi y^2$$

$$(D2) \quad u = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$(D3) \quad u = x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2$$

$$(D4) \quad u = x(x-1)y(y-1) .$$

La méthode de comparaison choisie a été la méthode des directions alternées, en regroupant, à chaque demi-pas, les termes diagonaux du côté de l'inconnue. Cette méthode présente l'avantage d'être assez largement utilisée et de ne pas demander le calcul préalable d'un paramètre. Le problème (N1) ayant déjà été étudié numériquement, dans [16], à l'aide des

méthodes de Cholewski, Relaxation par blocs, Décomposition du domaine et coordination [4], certaines comparaisons sont également possibles avec ces méthodes.

II.1.1. Premiers résultats

Nous représentons, pour chacun des sept problèmes-test, la décroissance de l'erreur relative E définie par :

$$E = \frac{\sum_{i,j} |\text{itéré } (i,j) - \text{solution } (i,j)|}{\sum_{i,j} |\text{solution } (i,j)|}$$

(i,j) représentant le noeud du maillage situé sur la i-ième ligne et j-ième colonne ; itéré (i,j) représentant la valeur de l'élément itéré à ce noeud (et donc sur le pavé centré en ce point) et solution (i,j) la valeur de la solution du problème non discrétisé en ce point.

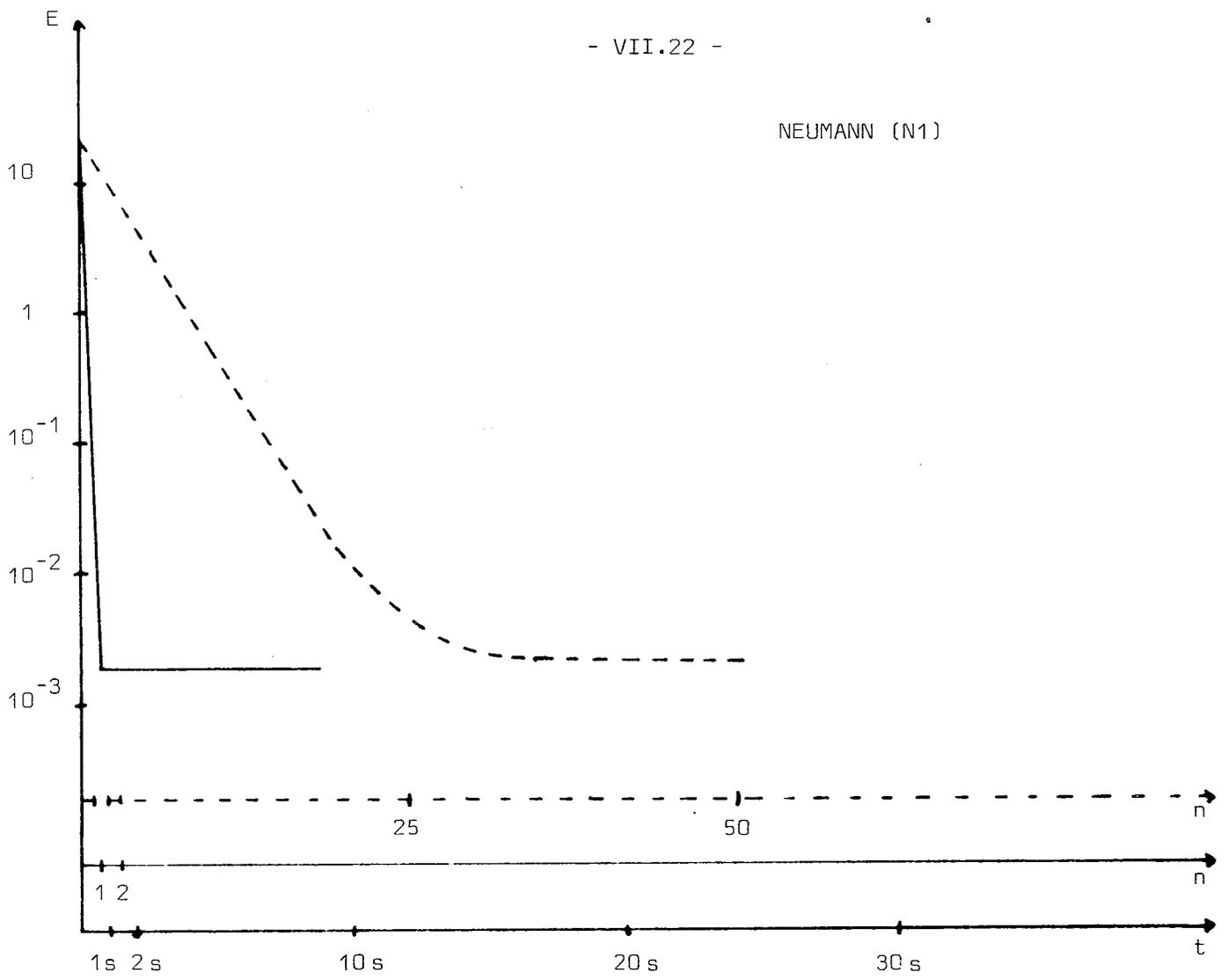
La décroissance de E est représentée d'une part en fonction du nombre d'itérations n et d'autre part en fonction du temps t. L'erreur correspondant à la méthode de projection sur une intersection de convexes, telle qu'elle est présentée au chapitre IV, paragraphe III.1., est tracée en trait plein et celle correspondant à la méthode des directions alternées en pointillés. Pour toutes ces courbes le pas de discrétisation est h = 1/20.

En ce qui concerne les problèmes avec conditions de type Neumann, une légère différence entre les deux méthodes au niveau de la discrétisation du problème, rend non significative la différence d'erreur limite que l'on constate et qui correspond, dans les deux cas, à l'erreur due à la discrétisation. La décroissance de l'erreur est, par contre, significative.

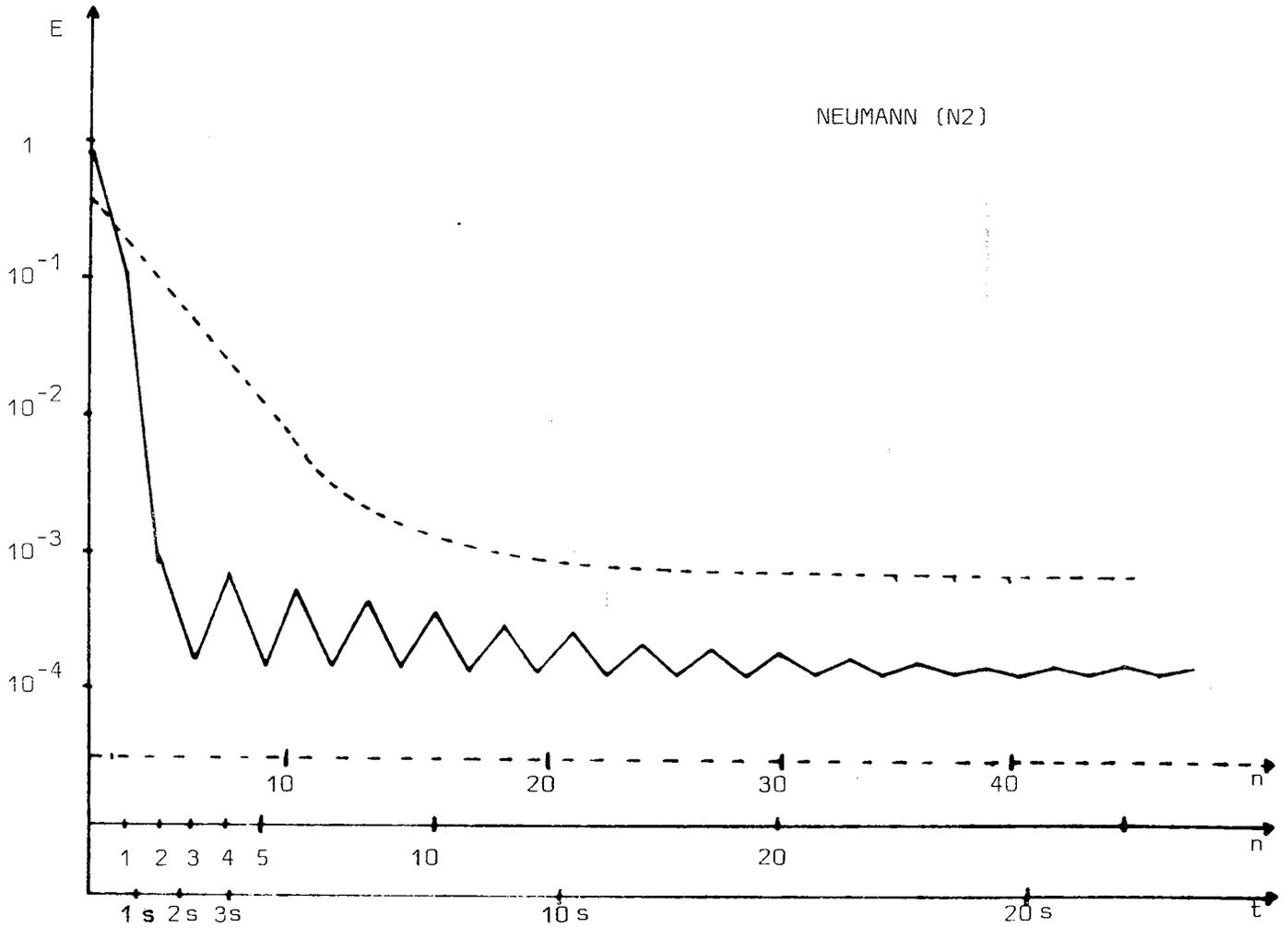
Pour les problèmes (D1) à (D4), l'erreur de discrétisation est identique pour les deux méthodes.

Pour certains problèmes - (D1)(D3)(D4) - des oscillations très régulières se produisent pour la méthode de projections pendant la convergence ; les erreurs successives se situant alternativement sur deux courbes distinctes. Nous avons représenté en trait gras la courbe inférieure et la première oscillation et en trait fin la courbe supérieure.

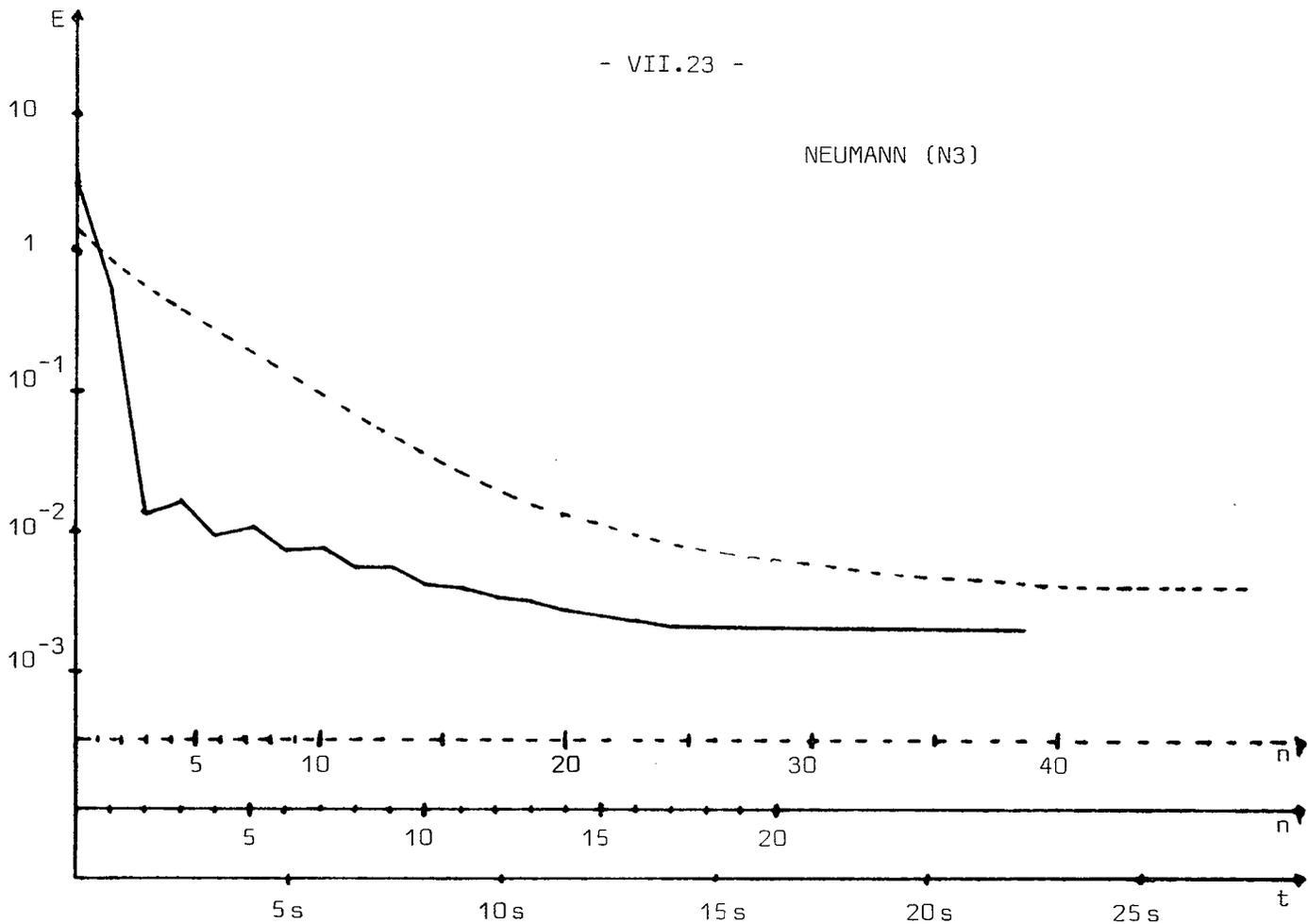
NEUMANN (N1)



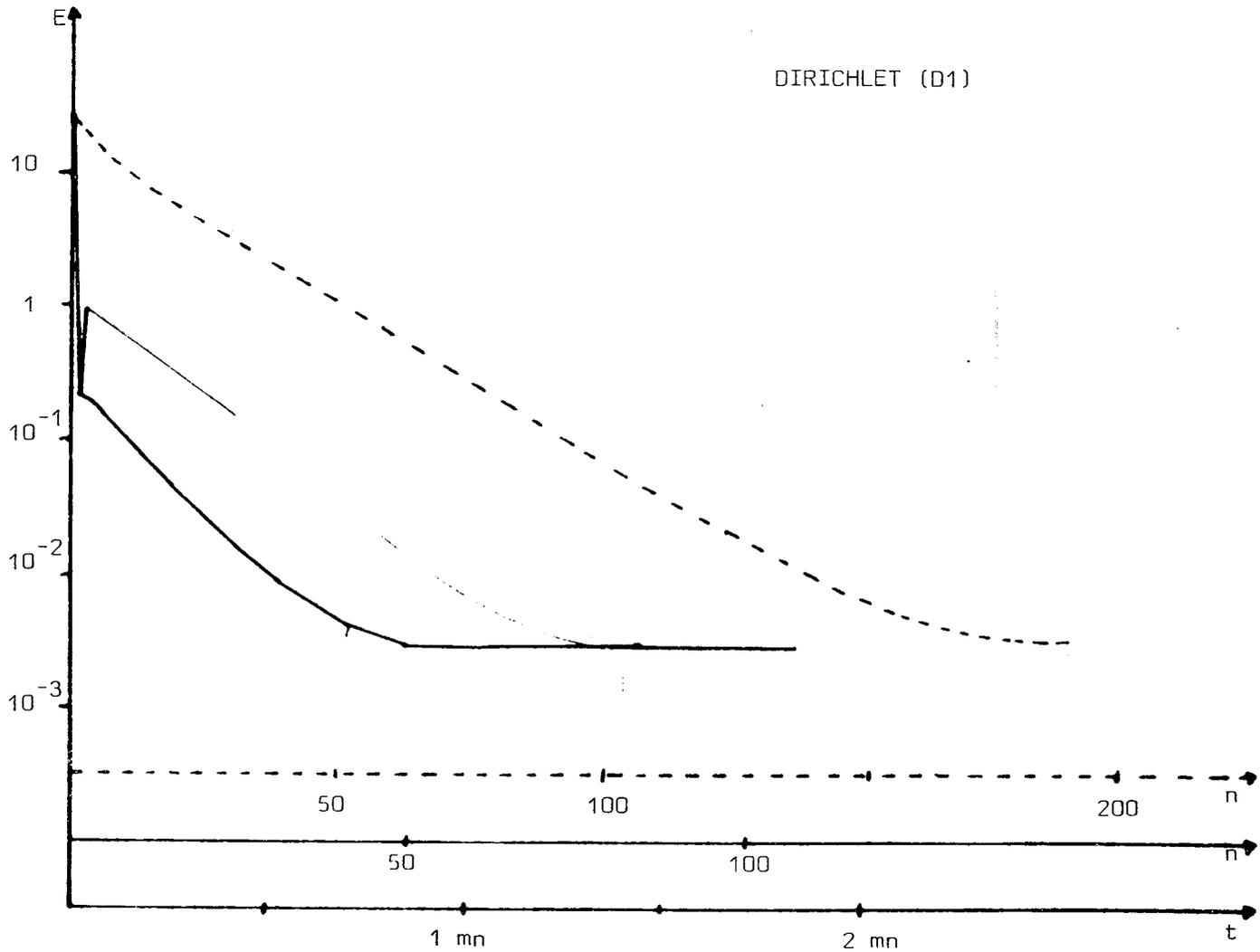
NEUMANN (N2)



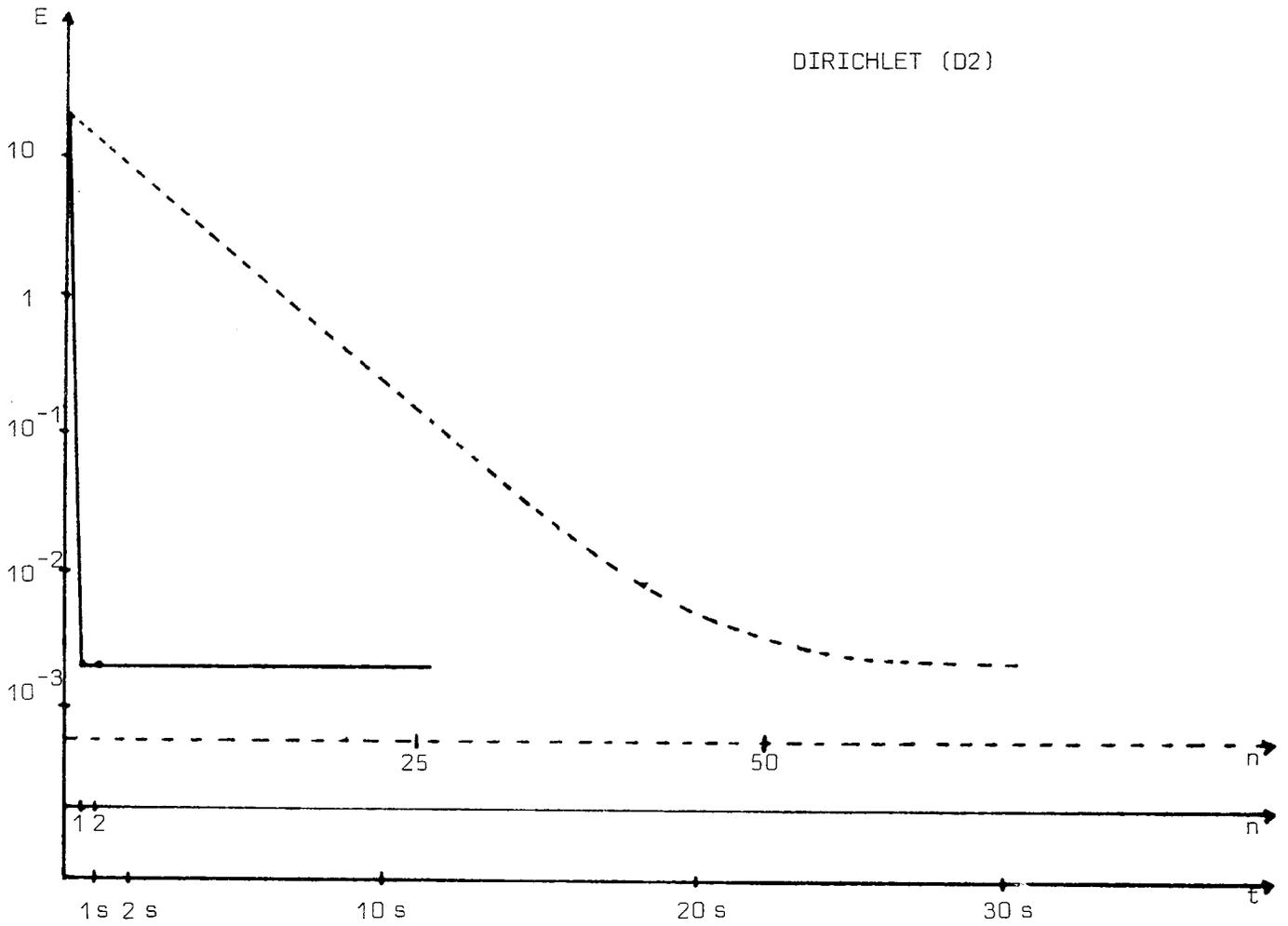
NEUMANN (N3)



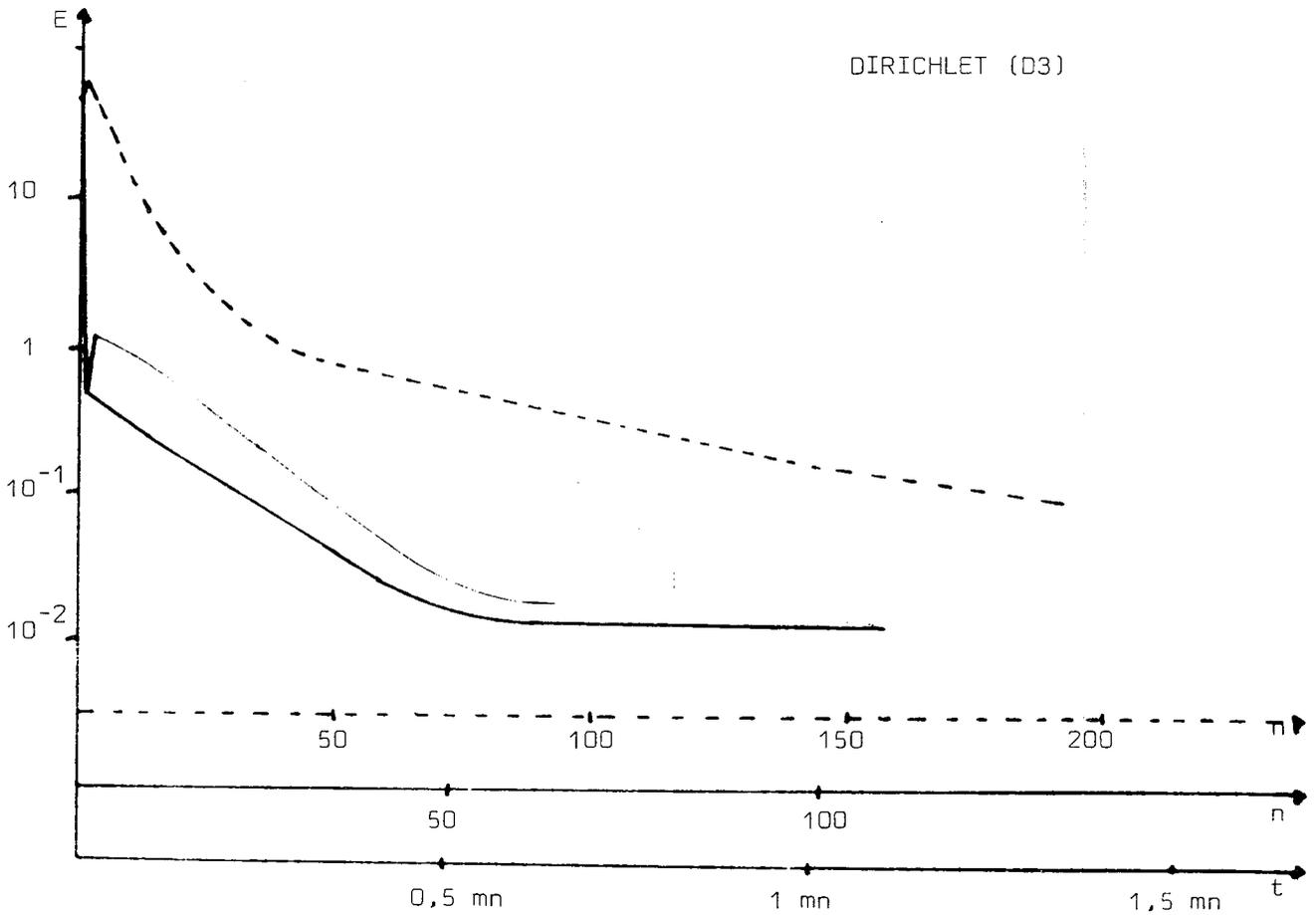
DIRICHLET (D1)



DIRICHLET (D2)



DIRICHLET (D3)



DIRICHLET (D4)



Donnons également les résultats, pour le problème (N1), des différentes méthodes considérées dans [16] comparées à ceux obtenus par la méthode de décomposition parallèle par projection sur une intersection de convexes (D.P.P.I.C.)

Méthode	Coordination (α) (éléments finis)	Cholewski (α)	Relax-bloc (α)	D.P.P.I.C. (β)
Erreur	$4,9 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-4}$	$4,6 \times 10^{-4}$
temps de calcul	3 sec.	3,22 sec.	5 sec.	3,1 sec.
place mémoire	180 K	660 K	180 K	35 K

(α) données dans [16], calculs effectués sur IBM 360-91.

(β) calculs effectués en D.P. sur IRIS 80 (plusieurs fois moins rapide).

II.1.2. Quelques caractéristiques de la méthode de projections et de l'extrapolation.

Nous présentons ici les remarques que suggèrent les essais effectués pour ces problèmes.

1. La méthode est extrêmement rapide dans ses premières itérations :

Pour deux problèmes, la convergence exacte est obtenue lors de la première itération. Plus généralement, et sur l'ensemble des sept problèmes, les trois premières itérations de la méthode de projection sont 21 fois plus rapides, en nombre d'itérations, et 15 fois plus rapides, en temps, que la méthode de directions alternées. L'efficacité relative de la première itération est encore plus grande.

Nombre d'itérations et temps nécessaire aux D.A. pour obtenir une erreur identique (ou supérieure de 10 %) à celle obtenue dans les trois premiers pas de D.P.P.I.C.

Problème	D.P.P.I.C.		D.A.	
	nombre itérations	temps (1)	nombre itérations	temps
D1	3	5,1	81	109,7
D2	1 (3)	1,07	58	42,9
D3	3	3,05	86	60,63
D4	3	2,6	64	32,64
N1 (2)	1 (3)	1,25	32	25,6
N2 (2)	3	3,72	23	18,74
N3 (2)	3	4,12	15	14,175

(1) en centième de minutes.

(2) après correction de l'erreur due à la discrétisation

(3) solution atteinte.

2 . Des oscillations se produisent lorsque l'on s'approche de la solution et ralentissent la convergence.

L'erreur calculée étant relative à la solution non discrétisée, nous dirons qu'il y a convergence lorsque cette erreur devient inférieure à 110 % de l'erreur de discrétisation. Pour atteindre la convergence, la méthode D.P.P.I.C. est environ 6 fois plus rapide en nombre d'itérations et 4 fois plus rapide en temps que la méthode des directions alternées.

Convergence

Problème	D.P.P.I.C.		D.A.	
	nombre itérations	temps	nombre itérations	temps
N1	1	1,25	32	25,6
N2	7	8,7	25	20,37
N3	20	27,5	46	43,47
D1	46	78,2	180	243,9
D2	1	1,07	58	42,9
D3	54	54,9	> 350	> 246

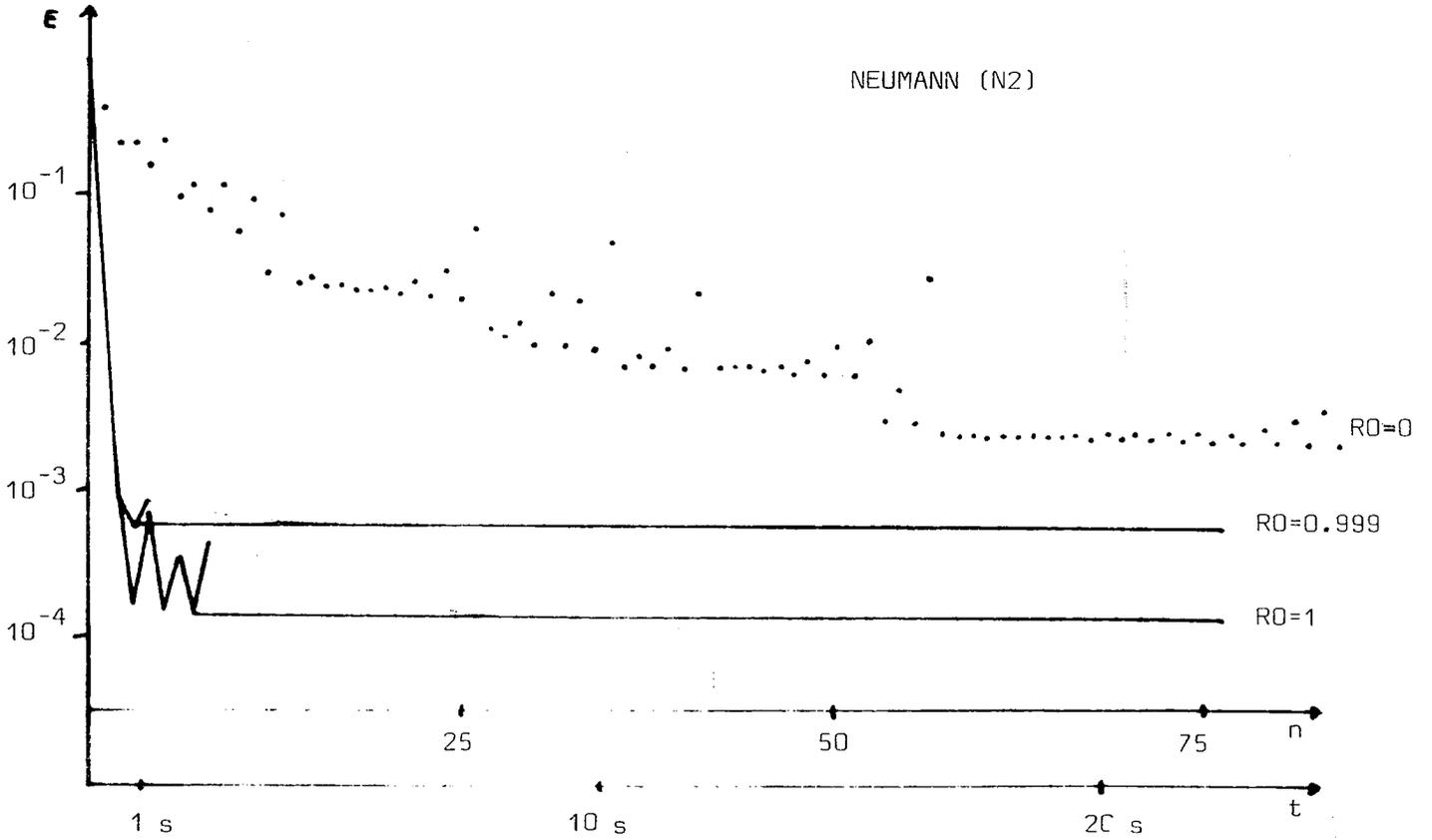
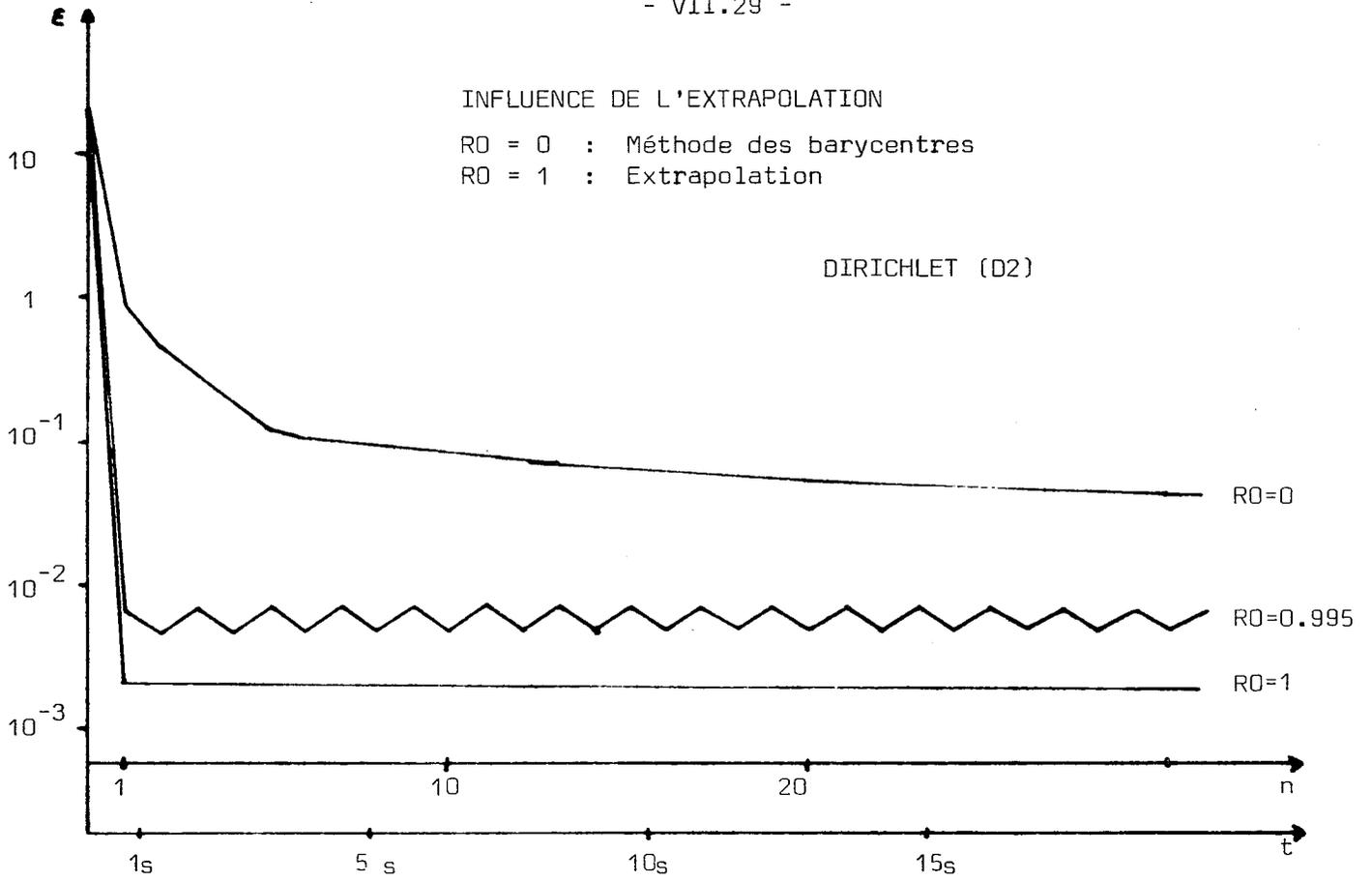
3 . C'est l'extrapolation qui fait l'efficacité de la méthode.

Non seulement le fait de n'effectuer que partiellement — $0 < R_0 < 1$ — ou pas du tout — $R_0 = 0$; méthode des barycentres — l'extrapolation ralentit très considérablement la convergence, mais, de plus, cela ne diminue pas du tout les oscillations.

Il semble que lorsque l'extrapolation n'est effectuée que partiellement, une stabilisation de l'erreur se produise à une certaine distance de la solution; la convergence se poursuivant extrêmement lentement.

INFLUENCE DE L'EXTRAPOLATION

RO = 0 : Méthode des barycentres
RO = 1 : Extrapolation



4 . Utilisation d'une pondération dans l'espace produit.

La résolution du problème (N) – ou (D) – avec $\lambda \neq 1$ amène à introduire, dans la définition du produit scalaire de $[L^2(\Omega)]^{n+1}$, des coefficients, cf. chapitre IV, paragraphe III.1., et à utiliser des barycentres pondérés. Cette technique semble efficace puisque, pour les valeurs très faibles de λ qui entraînent une diminution de la diagonale dominante de la matrice et un grand ralentissement des D.A. il semble au contraire y avoir accélération de D.P.P.I.C.

Influence de λ

Problème	Méthode	Nombre d'itérations jusqu'à convergence		
		$\lambda = 10^2$	$\lambda = 2$	$\lambda = 10^{-2}$
N2	D.P.P.I.C.	3	7	3
	D.A.	3	25	>> 100
N3	D.P.P.I.C.	3	20	2
	D.A.	4	46	>> 100

II.1.3. "Recentrage" des itérés successifs

La notable différence d'efficacité entre les trois premières itérations de la méthode de D.P.P.I.C. et les itérations ultérieures s'expliquent par le fait suivant : lorsque la distance entre l'itéré et les contraintes devient faible par rapport à la distance entre l'itéré et le point de départ de l'algorithme, les itérés successifs tendent à satisfaire alternativement deux contraintes (ou deux sous-ensembles de contraintes) faisant ainsi perdre à l'extrapolation toute son efficacité. Il est donc nécessaire de "recentrer" – périodiquement ou a chaque pas – les itérés successifs.

Ainsi que le montre le paragraphe II.1.2. ci-dessus, le recentrage doit porter non pas sur l'extrapolation, c'est-à-dire, en reprenant les notations habituelles, (cf. chapitre IV, paragraphe III.1.1.), sur $\|b^P - b^P\|$, mais sur la totalité du déplacement, $\|v^{P-1} - b^P\|$. D'autre part, l'intérêt du recentrage étant de rendre l'extrapolation efficace, cette extrapolation doit être effectuée intégralement périodiquement.

Les considérations précédentes nous ont amené à la technique suivante :

Toutes les trois itérations, le déplacement dans la direction de projections parallèles extrapolée est réduit de moitié.

$$b^{3q} := v^{3q-1} + \frac{1}{2} (b^{3q} - v^{3q-1}) , \quad q=1,2,\dots$$

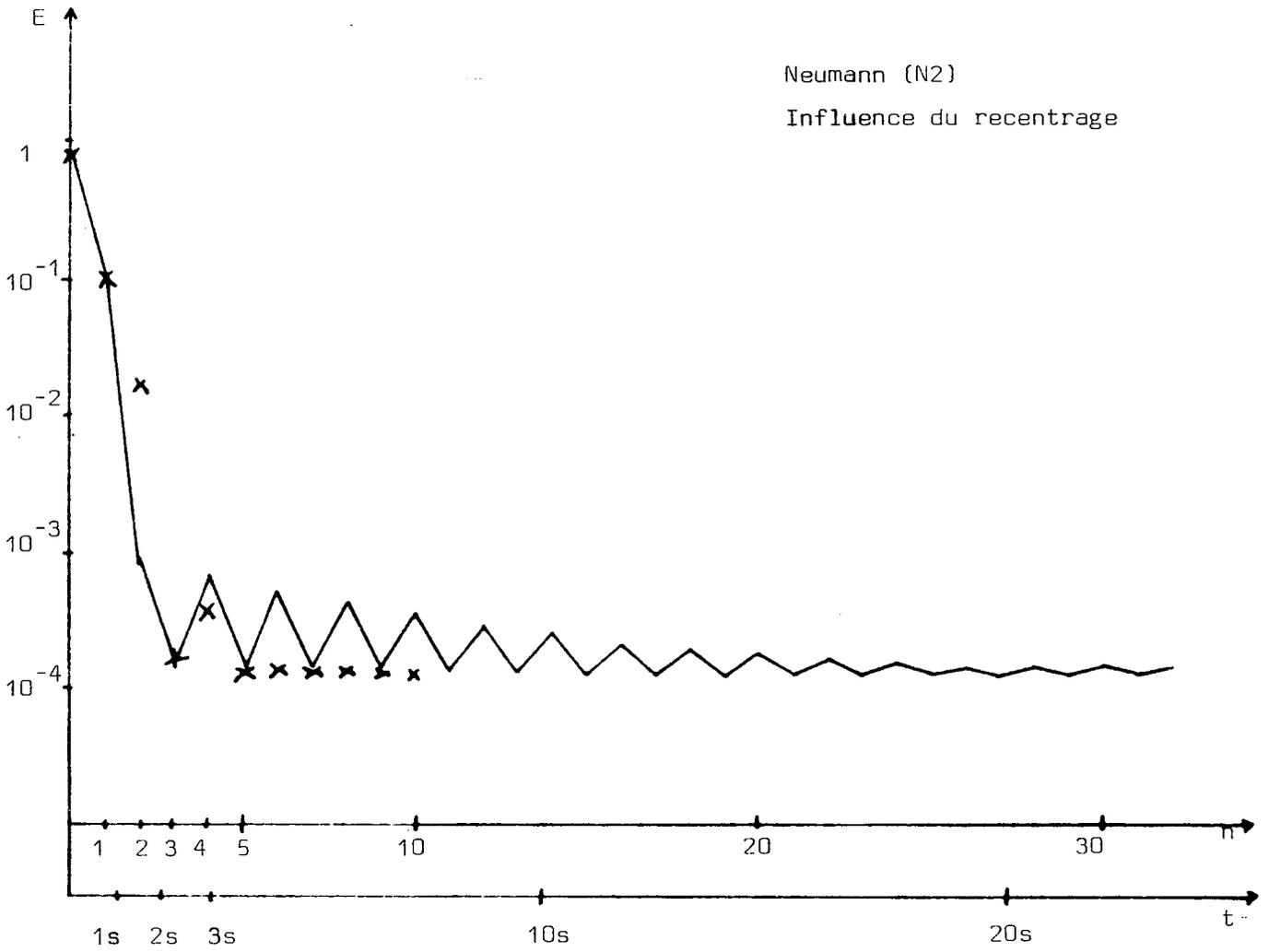
L'introduction de ce "recentrage" entraîne deux conséquences :

- 1 - L'élément extrapolé — i.e. la suite $\{b^P\}$ — donne une meilleure approximation de la solution que la suite après coordination — i.e. $\{v^P\}$ —
- 2 - La convergence de la méthode est très notablement accélérée .

Nous représentons ici deux courbes , tout à fait caractéristiques du comportement de la suite $\{b^P\}$, pour les problèmes (N2) et (D3). L'erreur relative sans recentrage étant représentée comme précédemment en traits pleins et les valeurs successives de l'erreur relative avec recentrage par des x.

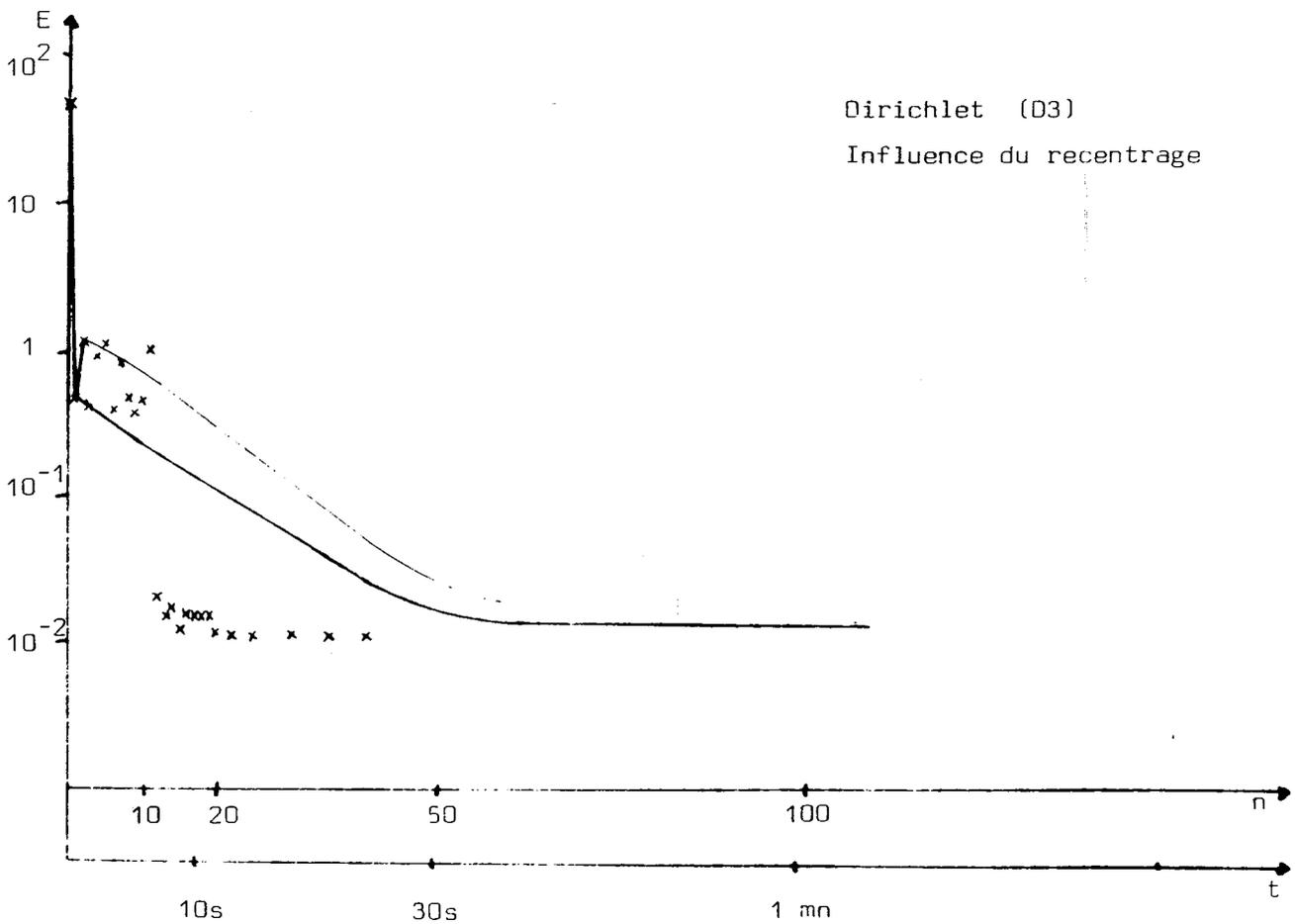
Neumann (N2)

Influence du recentrage



Dirichlet (D3)

Influence du recentrage



Au total, et pour les six problèmes considérés dans le tableau de la page VII.28, la comparaison avec la méthode des directions alternées donne les résultats suivants :

Convergence

Problème	D.P.P.I.C. recentrée		D.A.	
	nombre d'itérations	temps	nombre d'itérations	temps
N1	1	1,25	32	25,6
N2	5	6,2	25	20,37
N3	11	15,1	46	43,47
D1	21	35,7	180	243,9
D2	1	1,07	58	42,9
D3	12	12,1	350	246

La méthode avec recentrage étant alors environ 11 fois plus rapide, en nombre d'itérations, et 8 fois plus rapide, en temps, que la méthode D.A., résultat déjà beaucoup plus proche de l'efficacité des trois premières itérations.

II.1.4. Remarques

1. Nous avons utilisé, pour discrétiser les problèmes (N) et (D), les schémas très classiques — cf. par exemple [26] — de discrétisation externe de $H^1(\Omega)$ pour (N) et de $H_0^1(\Omega)$ pour (D) ; ceux-ci deviennent, dans l'espace $[L^2(\Omega)]^{n+1}$ des schémas de discrétisation interne et définissent tous deux, dans les espaces V_h respectifs, des problèmes de minimisation sans contraintes.

Il semble, en fait, que le mode de discrétisation adopté puisse avoir un retentissement important sur l'efficacité de la méthode. Ainsi, nous avons traité le problème (D3), qui vérifie au bord :

$$u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 ,$$

en le considérant maintenant comme un problème avec condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 ;$$

alors que 54 itérations avaient été nécessaires pour résoudre (D3), le nouveau problème obtenu avec la condition de Neumann mais possédant le même^{2^e} membre — i.e. même f — et la même solution, a été résolu par la méthode en deux itérations.

Ceci nous amène à penser qu'il doit être préférable de considérer le problème de Dirichlet comme un problème de minimisation avec contraintes dans $H^1(\Omega)$; c'est-à-dire à introduire une partition de la frontière,

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i , \text{ avec :}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{x}_i) \neq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_i , \quad i=1, \dots, n$$

et à définir les convexes C_i — cf. chapitre IV, paragraphe III.1. — par :

$$C_i = \{v=(v_0, v_1, \dots, v_n) \in [L^2(\Omega)]^{n+1}; v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i}, v|_{\Gamma_i} = 0\} \quad i=1, \dots, n ;$$

la condition $v_i = \frac{\partial v_0}{\partial x_i}$ permettant d'utiliser les théorèmes de trace [17][27] pour définir $v|_{\Gamma_i}$.

2. Il semble que l'avantage de la méthode D.P.P.I.C. soit d'autant plus marqué que la taille du problème est plus grande, le rapport du nombre d'itérations nécessaires pour les deux méthodes étant souvent environ doublé lorsque l'on passe de $h = 1/10$ à $h = 1/40$.

3. Au point de vue place mémoire et temps de calcul par itération, les résultats moyens, sur les sept problèmes étudiés, sont les suivants :

Méthode	h = 1/20		h = 1/40	
	Place mémoire	temps par itération	place mémoire	temps par itération
D.P.P.I.C.	17,5 K	1,22	35 K	5,25
D.A.	13,5 K	0,84	21 K	3,50

4. Lorsque un recentrage n'est pas utilisée, les coefficients d'extrapolation varient, en général, et pour les problèmes étudiés, entre 1 et 5. Lorsque le recentrage est utilisé, on voit fréquemment, dans le déroulement de l'algorithme, apparaître des coefficients d'extrapolation de l'ordre de 20 à 30, voire supérieurs à 100. Ceci explique la différence d'incidence d'une sous-extrapolation $- 0 < R_0 < 1 -$ et d'un recentrage : Lorsqu'il y a recentrage, le déplacement dans la direction d'extrapolation est encore plus faible que lorsqu'il y a sous-extrapolation (on peut, dans le premier cas, ne même pas aller jusqu'au barycentre) mais ceci est largement compensé par l'efficacité des extrapolations ultérieures. Au contraire, lorsqu'il y a sous-extrapolation, l'efficacité de l'itération en cours n'est utilisée que partiellement mais cela n'améliore pas l'efficacité des itérations suivantes, d'où le ralentissement de convergence constatée au paragraphe II.1.2.3.

II.2. UNE E.D.P. NON LINEAIRE : METHODE DE PROJECTION AVEC LINEARISATION
PAR CROISEMENT DE METHODES DUALES ET METHODES DE DECOMPOSITION PAR
PENALISATION.

Nous avons considéré le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u + 2u^3 = f \text{ p.p. dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

que nous avons résolu par trois méthodes :

- méthode de projection sur une intersection de convexes (D.P.P.I.C.)
- méthode de projection avec linéarisation par méthode de Kelley (D.P.L.) (cf. paragraphe I.2.4.)
- méthode de décomposition par pénalisation :

le problème étant équivalent à la minimisation sur :

$$H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \text{ de :}$$

$$j(v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^2\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(f, v) ,$$

nous avons décomposé $j(v)$ (cf. chapitre VI) :

$$j(v) = \sum_{i=1}^{n+1} j_i(v)$$

avec :

$$j_i(v) = \frac{1}{n} \|v\|^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2 - 2(f_i, v) \quad i=1, \dots, n,$$

$$j_{n+1}(v) = \|v^2\|^2 ;$$

la décomposition f_i , $i=1, \dots, n$, de f , étant choisie telle que :

$$f = \sum_{i=1}^n f_i .$$

Trois jeux d'essai , ont été étudiés dont les solutions respectives étaient :

$$(U1) \quad u = 100 x(x-1)y(y-1)$$

$$(U2) \quad u = x(x-1)y(y-1)$$

$$(U3) \quad u = x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2$$

II.2.1. Méthodes de projections

Faisons d'abord quelques remarques.

1. Extrapolation et coordination :

Rappelons, cf. chapitre VII, paragraphe III, que les méthodes de projections consistent à effectuer des projections parallèles avec extrapolation sur les trois convexes, définissant ainsi l'élément extrapolé b^p , puis à coordonner en projetant g sur l'intersection de deux hyperplans, définissant ainsi l'élément itéré v^p .

Comme dans le problème précédent lorsqu'était utilisé un recentrage, on constate, numériquement, que l'élément extrapolé réalise plus rapidement une bonne approximation de la solution et que les oscillations, peut-être dues au mode de traitement des conditions de Dirichlet, cf. remarque II.1.4.1, sont plutôt atténuées sur l'extrapolé.

2. Projection ou linéarisation :

La difficulté de calcul de la projection sur la parabole $y = x^2$ dépend de la position du point à projeter, et donc de la nature du second membre f de l'équation. Ainsi le gain en temps de calcul par itérations dû à une linéarisation est-il négligeable dans le cas (U3) alors qu'il ne l'est pas pour le problème (U1) :

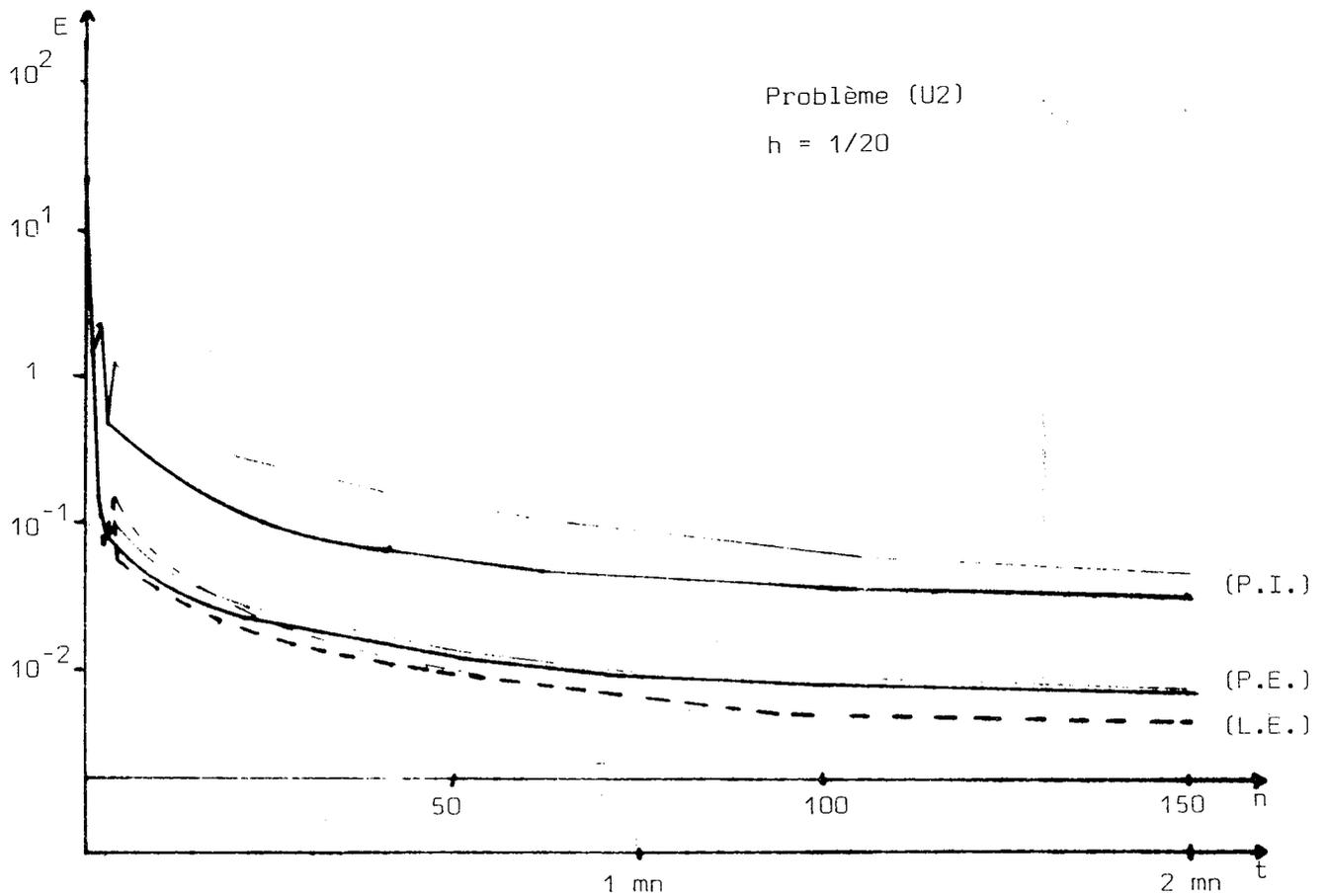
Temps de calcul pour 100 itérations (centièmes de minute)

Méthode	(U1)	(U3)
Projection	147,5	158
Linéarisation	133	157

Dans le cas (U1) la convergence du croisement d'algorithmes est beaucoup plus oscillante que celle de la méthode de projection ; l'inverse se produit dans le cas (U2) où les oscillations sont plus rapidement amorties ; dans le cas (U3) projection et croisement d'algorithmes sont pratiquement confondus.

Nous donnons, à titre d'exemple, la courbe de décroissance de l'erreur relative E de (U2) pour :

- l'élément itéré de la méthode de projection (P.I.) - trait plein -
- l'élément extrapolé, avant coordination, de cette méthode (P.E.)-trait plein-
- l'élément extrapolé avec linéarisation (L.E.) - pointillés -



3. Influence du recentrage

Nous avons utilisé, pour les trois problèmes (U), la méthode de recentrage indiquée au paragraphe II.1.3.

Alors que la méthode sans recentrage ne convergeait que très lentement une fois les premières itérations passées, on obtient, avec recentrage, une accélération très considérable et une précision très supérieure. Donnons les erreurs relatives, après 200 itérations, pour l'algorithme linéarisé avec et sans recentrage :

Problème	Algorithme sans recentrage		Algorithme avec recentrage	
	nombre d'itérations	erreur relative	nombre d'itérations	erreur relative
U1	38 ⁽¹⁾	$2,2 \times 10^{-2}$	31 ⁽¹⁾	$2,7 \times 10^{-2}$
U2	200	$4,3 \times 10^{-3}$	200	$7,8 \times 10^{-6}$
U3	200 ⁽³⁾	$1,5 \times 10^{-2}$	50 ⁽²⁾	$1,4 \times 10^{-2}$

(1) valeur minimale de l'erreur, courbe très oscillante, pas de convergence.

(2) convergence obtenue (erreur de discrétisation)

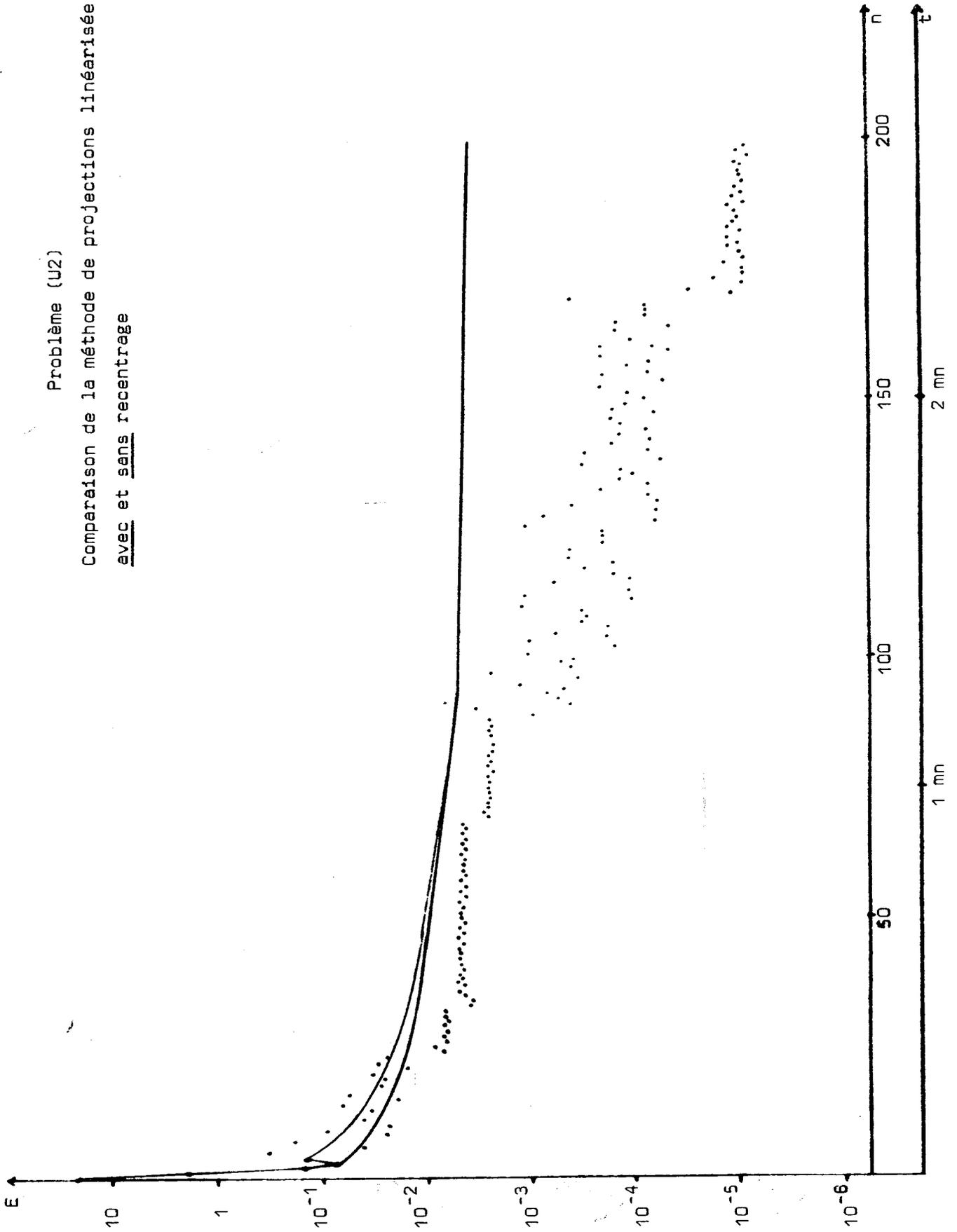
(3) convergence non encore obtenue (oscillations).

Pour le problème (U3), la convergence de l'élément extrapolé (ainsi que celle de l'élément itéré) est obtenue à la 50-ième itération avec recentrage alors qu'elle n'est toujours pas obtenue à la 200-ième itération sans recentrage.

Pour le problème (U2) la décroissance de l'erreur se poursuit régulièrement jusqu'à $7,8 \times 10^{-6}$ à la 200-ième itération alors qu'elle est extrêmement lente pour la méthode sans recentrage. Nous donnons ci-dessous, pour ce problème, la courbe de décroissance de l'erreur relative E pour l'élément extrapolée de la méthode de projection linéarisée

- sans recentrage (courbe en trait plein)
- avec recentrage (sous forme de nuage de points).

Problème (U2)
Comparaison de la méthode de projections linéarisée
avec et sans recentrage



Pour le problème (U1), malgré le recentrage, les résultats ne sont pas très satisfaisants. Cela est probablement dû au caractère assez "raide" du second membre de l'équation qui varie entre -50 et $+10^5$ sur $]0,1[\times]0,1[$. Pour ce problème particulier il semble préférable de ne pas linéariser le convexe non linéaire. L'erreur de l'élément extrapolé décroît alors très régulièrement mais assez lentement atteignant 10^{-2} au bout de 200 itérations.

II.2.2. Décomposition par pénalisation ; Pas fractionnaires :

Le problème essentiel de la méthode des pas fractionnaires ; ainsi que celui de la décomposition par pénalisation, consiste dans le choix du paramètre de pénalisation, noté habituellement τ dans les pas fractionnaires et que nous notons ϵ dans la décomposition par pénalisation.

Si l'on procède à τ — resp. ϵ — constant, quelle valeur de ce paramètre permet-elle d'obtenir rapidement une approximation de la solution ?

Si l'on procède à $\epsilon = \epsilon(p)$, par exemple $\epsilon = \epsilon(0)/p$ dont nous avons démontré, dans certains cas, la convergence, quelle valeur choisir pour $\epsilon(0)$?

Les valeurs à choisir ne peuvent l'être qu'à la suite d'essais successifs qui doivent être répétés pour chaque problème et sont donc très coûteux.

Les essais effectués ont portés sur les trois variantes :

- pas fractionnaires :

$$\text{i.e. } \frac{v_i^{p+1} - v_{i-1}^{p+1}}{\tau} + j_i(v_i^{p+1}) \leq \frac{v_i - v_{i-1}}{\tau} + j_i(v_i) \quad , \forall v_i \in C_i ; i=1,2,3$$

(avec la convention $v_0^{p+1} = v_3^p$)

- décomposition-série par pénalisation :

$$\text{i.e. } v_i^{p+1} - \frac{v_{i-1}^{p+1} + v_{i-2}^{p+1}}{2} + \epsilon j_i(v_i^{p+1}) \leq v_i - \frac{v_{i-1}^{p+1} + v_{i-2}^{p+1}}{2} + \epsilon j_i(v_i) \quad ,$$

$$\forall v_i \in C_i ; i=1,2,3$$

(avec les conventions $v_0^{p+1} = v_3^p$ et $v_{-1}^{p+1} = v_2^p$)

- décomposition-parallèle par pénalisation :

$$\text{i.e. } v_i^{p+1} - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 v_j^p + \epsilon j_i(v_i^{p+1}) \leq v_i - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 v_j^p + \epsilon j_i(v_i)$$

$$\forall v_i \in C_i ; i=1,2,3.$$

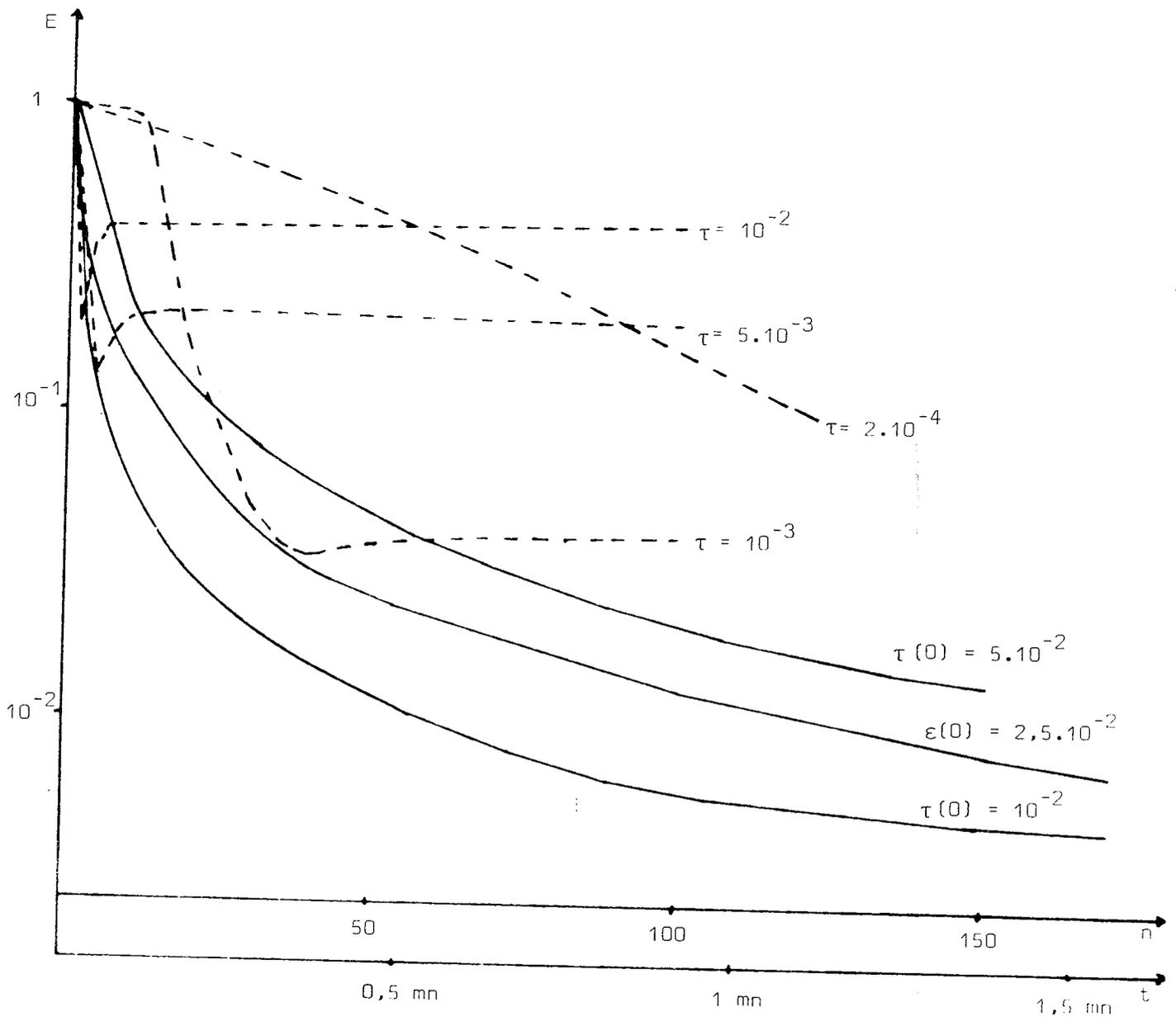
A τ (ou ϵ) constant, le comportement des trois méthodes est tout à fait analogue : selon le problème, et la décomposition du second membre adoptée, un léger avantage pouvant revenir à l'une, quelconque, d'entre elles.

Par contre, le fait de prendre $\tau = \tau_0/p$, ou $\varepsilon = \varepsilon_0/p$, donne lieu à une décroissance beaucoup plus rapide de l'erreur, y compris pour la méthode habituelle des pas fractionnaires à laquelle les résultats du chapitre VI ne s'appliquent pas. Ce fait avait déjà été constaté dans [25] et n'a pas, à notre connaissance, été démontré.

Nous représentons ici, en pointillé, la courbe de décroissance de l'erreur relative pour quelques valeurs, constantes, de τ (pas fractionnaires) ainsi que, en traits pleins, les courbes correspondant à

$\tau = \tau(0)/p$ et $\varepsilon = \varepsilon(0)/p$, pour :

$\tau(0) = 5 \cdot 10^{-2}$	pas fractionnaires
$\varepsilon(0) = 2,5 \cdot 10^{-2}$	décomposition parallèle
$\tau(0) = 1 \cdot 10^{-2}$	pas fractionnaires



II.2.3. Comparaison des deux familles de méthodes :

Les méthodes de type pas fractionnaires dépendent toujours du choix d'un paramètre, les comparaisons que l'on peut effectuer sont donc seulement très approximatives. Donnons les meilleurs essais, à τ constant, effectués pour les deux problèmes (U1) et (U3) par pas fractionnaires et les temps correspondant de la méthode de projection avec linéarisation et recentrage :

Problème	Méthode	τ	Erreur relative	nombre d'itérations	temps
(U1)	P.F.	10^{-3}	$.34 \times 10^{-1}$	37	33,8
	Projection	-	$.32 \times 10^{-1}$	26	35,6
(U3)	P.F.	10^{-2}	$.19 \times 10^{-1}$	32	42,24
	Projection	-	$.19 \times 10^{-1}$	39	62,54

et précisons que lors de nos essais, ni la valeur $E = 1,4 \times 10^{-2}$ pour le problème (U3), ni la valeur $E = 7,8 \times 10^{-6}$ pour le problème (U2) n'ont pu être obtenues par les méthodes de pas fractionnaires.

Il semble donc que la méthode de projections avec recentrage, qui possède l'avantage de ne pas demander le calcul préalable d'un paramètre optimum, soit nettement préférable aux méthodes de type pas fractionnaires.

III.3. PROGRAMMATION QUADRATIQUE

Afin de ne pas trop allonger l'exposé des essais numériques effectués, nous donnons seulement, pour terminer, quelques commentaires et résultats des essais portant sur l'application de la méthode de programmation quadratique ; d'autres résultats sont donnés dans [23].

1. La localisation des contraintes liantes à l'optimum semble toujours très rapide.

Lorsque les contraintes sont linéaires, la résolution du problème se ramène donc, après un petit nombre d'itérations de la méthode de programmation quadratique, à la résolution d'un système linéaire (problème de Lagrange). Cette façon de procéder est d'autant plus intéressante que chaque pas de l'algorithme demande lui-même la résolution d'un système linéaire.

Donnons, à titre d'exemple caractéristique, la liste des contraintes non satisfaites par les itérés successifs dans la résolution du problème de Houthakker, cf. [6] p. 106 :

"Trouver le maximum de

$$18x_1 + 16x_2 + 22x_3 + 20x_4 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 8x_1x_3 - 5x_2^2 - x_2x_3 - 4x_2x_4 - 8,5x_3^2 - 3x_3x_4 - 5,5x_4^2$$

sous les contraintes

- (1) $-x_1 \leq 0$
 (2) $-x_2 \leq 0$
 (3) $-x_3 \leq 0$
 (4) $-x_4 \leq 0$
 (5) $5x_1 + 10x_3 \leq 2$
 (6) $4x_2 + 5x_4 \leq 3$
 (7) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5/3$ " .

Les contraintes liantes à l'optimum sont les contraintes (3)(5) et (6).

itérations	contraintes non satisfaites
0 (point de départ)	(3) (5) (6) (7)
1	(5) (7)
2	(3) (5) (6)
3	(5) (6)
4	(3) (6)
5	(5) (6)
6	(3) (6)
⋮	⋮

Dès la deuxième itération, les contraintes liantes à l'optimum sont localisées. La règle utilisée, décrite au paragraphe I.1.5., permet donc d'obtenir la solution, après cinq itérations, en résolvant un système linéaire de dimension sept.

2. Dans les problèmes de plus grande taille, l'utilisation d'un recentrage des itérés successifs est indispensable pour accélérer la convergence de la méthode.

3. Lorsqu'il existe des contraintes d'égalité linéaires, il semble nettement préférable d'astreindre les itérés successifs à appartenir à la variété affine correspondante.

Ceci correspond à une particularisation de ces contraintes, cf. chapitre II, paragraphe IV ; la projection sur cette variété linéaire étant avantageusement faite en utilisant la nouvelle extrapolation définie au paragraphe I.3.1.b.

4. La technique de linéarisation par croisement de méthodes duales semble performante :

Elle permet, en effet, de poser à chaque pas des problèmes de projection particulièrement simples, alors que la projection sur des contraintes non linéaires est, en général, très coûteuse. Sur les problèmes étudiés, l'augmentation du nombre d'itération dues à la linéarisation a été très faible, la convergence pouvant encore être obtenue très rapidement.

Pour illustrer les deux points précédents, donnons les résultats obtenus sur le problème-test n° 1 considéré par Himmelblau [13] :

$$\text{"Minimiser } f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

avec les contraintes :

$$(1) \quad h_1(x) \equiv x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

$$(2) \quad h_2(x) \equiv 0,25 \cdot x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \quad \text{" .}$$

Ce problème a été résolu en particularisant la contrainte (1); le retour sur cette contrainte étant effectué soit avec l'extrapolation évoquée au point 2 (A.E.), soit par simple projection (A.P.), et en linéarisant la contrainte (2). De plus, la technique la plus rapide, (A.E.), a été essayée en effectuant la projection sur la contrainte (2) non linéarisée (équation du quatrième degré). Le test d'arrêt était de 10^{-4} sur l'erreur et sur la valeur des contraintes.

Méthode	Nombre d'itérations
Linéarisation (A.E.)	3
Linéarisation (A.P.)	16
Sans linéarisation (A.E.)	3

A titre de comparaison les résultats donnés dans [13] pour le problème ci-dessus, sont les suivants :

Méthode	Temps de calcul
G.R.G.	1.06 (α)
Flexible tolérance	0.43 (α)
N.L.P.	0.07 (α)
SUMT	0.51 (α)
Rosenbrock	4,52 (α)
G.C.S.	5.18 (α)
Linéarisation (A.E.)	0.07 (β)

(α) en secondes sur C.D.C. 6600 ([13] p.386).

(β) en secondes sur IRIS 80.

REFERENCES

- [1] S. AGNON
"The relaxation method for linear inequalities"
Can. J. Math.; 6, 3, (1954), 392-393.

- [2] A. AUSLENDER
Thèse, Grenoble, (1969)

- [3] E.M.L. BEALE
"Numerical methods" in "Nonlinear Programming". J. Abadie Ed.,
North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1967), 133-205.

- [4] A. BENSOUSSAN, J.L.LIONS, R. TEMAM
"Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de
coordination, et applications", in "Methodes Numériques d'Analyse
de Systèmes, t.2, Décomposition" Cahier IRIA, n° 11, (1972), 5-190.

- [5] J. BEUNEU
Thèse troisième cycle, Lille, (1973).

- [6] J.C.G. BOOT
"Programmation quadratique ; algorithmes, anomalies, applications"
Dunod, Paris (1968).

- [7] G.B. DANTZIG
"Applications et prolongements de la programmation linéaire".
Dunod, Paris (1966).

- [8] T. DUMONT, R. FAGES, G. PIERRA
(à paraître).

- [9] R. FAGES
"Tableaux à marges fixées. Transformations RAS et DSM"
Publications Econométriques, 4, 1 (1971) 240-253.

- [10] Y. HAUGAZEAU
Communication au Colloque d'Analyse Numérique du C.N.R.S.,
Anglet, (1972).

- [11] Y. HAUGAZEAU
Thèse, Paris, (1968).
- [12] M. HELD, P. WOLFE, H.P. CROWDER
"Validation of subgradient optimization" *Mathematical Programming*,
6, (1974) 62-68.
- [13] D.M. HIMMELBLAU
"Applied Nonlinear Programming", McGraw-Hill, New-York (1972)
- [14] P. HUARD
"Résolution of mathematical programming with nonlinear constraints
by the method of centres" in "Nonlinear Programming", J. Abadie Ed.,
North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1967) 206-219.
- [15] H.P. KÜNZI, W. KRELLE, W. OETTLI
"La programmation non linéaire", Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [16] P. LEMONNIER
"Résolution numérique d'équations aux dérivées partielles par
décomposition et coordination" in "Méthodes numériques d'analyse
de systèmes, t.2, Décomposition" *Cahier IRIA*, n° 11, (1972) 191-239.
- [17] J.L. LIONS, E. MAGENES
"Problèmes aux limites non homogènes et applications", vol. 1,
Dunod, Paris, (1968).
- [18] J.L. LIONS, R. TEMAM
"Approximation de la solution d'inéquations variationnelles par
décomposition des opérateurs et éclatement des contraintes. Appli-
cations". *Pub. Inst. B. Pascal*, (1967).
- [19] Y.I. MERZLYAKOV
"On a relaxation method of solving systems of linear inequalities"
Zh. vych. mat., 2, 3, (1962), 482-487.

- [20] I.N. MOLCANOV, M.F. JAKOVLEV
"On a class of iterative processes for solving incompatible systems of linear algebraic equations". Soviet Math. Dokl., 14, (1973), 517-520.
- [21] T.S. MOTZKIN, I. SHOENBERG
"The relaxation method for linear inequalities". Can. J. Math., 6, 3, (1954) 393-404.
- [22] W. OETTLI
"An iterative method, having a linear rate of convergence, for solving a pair of dual linear programs", Mathematical Programming 3, (1972) 302-311.
- [23] G. PIERRA
"A new algorithm for quadratic programming". (à paraître).
- [24] B.T. POLJAK
"Minimization of unsmooth functionals". Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz., 9, (1969) 509-521.
- [25] P. SAINT-PIERRE
Thèse troisième cycle, Orsay, (1971).
- [26] R. TEMAM
"Analyse Numérique". P.U.F., Paris (1970).
- [27] R. TEMAM
"Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires". Annali di Mat. Pura Ed. Appli., vol. LXXIX, (1968) 191-380.
- [28] H. THEIL, C. VAN DE PANNE
"Quadratic Programming as an extension of conventional quadratic maximization" Management Science, 7, (1960), 1-20.

[29] P. THIONET

"Sur quelques programmes linéaires et non linéaires rencontrés en Statistiques". Colloque d'Econométrie, Lyon, (1969).

[30] P. THIONET

"L'ajustement des résultats des sondages sur ceux des dénombrements". Rev. de l'Inst. Int. Stat., 27, (1959), 8-25.

[31] R. TREMOLIERES

Thèse, Paris VI, (1972).