



Contribution à l'analyse non linéaire

Raoul Robert

► To cite this version:

Raoul Robert. Contribution à l'analyse non linéaire. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1976. tel-00287212

HAL Id: tel-00287212

<https://theses.hal.science/tel-00287212>

Submitted on 11 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Raoul ROBERT

**CONTRIBUTIONS A L'ANALYSE
NON LINEAIRE**

Thèse soutenue le 26 février 1976 devant la Commission d'Examen

Président : Monsieur B. MALGRANGE

Examineurs {
Monsieur J.L. JOLY
Monsieur P.J. LAURENT
Monsieur R. TEMAM
Monsieur M. ZISMAN

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF

Présidents

M. Louis NEEL

M. Gabriel CAU

Vice-Présidents

MM. Lucien BONNETAIN

Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.
=====

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jearne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures :
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELOD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrometallurgie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
FELICI Noël	Electrostatique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
SANTON Lucien	Mécanique
SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
----------------------	------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
COHEN Joseph	Electrotechnique
DURAND François	Metallurgie
MOREAU René	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BOUVARD Maurice	Génie mécanique
CHARTIER Germain	Electronique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Chimie minérale
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
LACOME Jean Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Physique atomique
LESPINARD Georges	Mécanique
MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Doré	Automatique
---------------------	-------------

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M. ANCEAU François	Mathématiques appliquées
--------------------	--------------------------

Je remercie Monsieur P.J. LAURENT de m'avoir accueilli au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble et de m'avoir permis de travailler dans un climat de sympathie et de liberté.

Je remercie Messieurs J.L. JOLY et M. ZISMAN d'avoir accepté la tâche de relire la deuxième et troisième partie de ce travail.

Je remercie Monsieur B. MALGRANGE d'avoir bien voulu accepter de présider le jury et Monsieur R. TEMAM d'y participer.

Je remercie également Messieurs J.P. AUBIN et J.L. LIONS de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Madame MEYRIEUX a assuré la frappe de ce document avec beaucoup de gentillesse et de compétence, je lui en suis très reconnaissant.

Que soient aussi remerciés tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION

Sous un titre "fourre tout" ce travail se divise en trois parties.

La première partie est consacrée à des questions de convergence de problèmes d'optimisation convexe, elle s'inspire des travaux de JOLY et MOSCO et donne des résultats complémentaires. Certains de ces résultats ont été récemment améliorés par SALINETTI et WETS.

La deuxième partie étudie quelques propriétés génériques des opérateurs monotones, elle s'inscrit dans la ligne du travail d'ASPLUND sur la différentiabilité des fonctions convexes.

Enfin la troisième partie développe des résultats et des outils adaptés à l'étude de problèmes d'existence en analyse non linéaire et en théorie du contrôle. Elle est le fruit d'un travail en commun mené à bien dans un climat d'amitié avec J.M. LASRY.

PREMIERE PARTIE

-:-:-:-:-

PROBLEMES DE CONVERGENCE

-:-:-:-:-

Cette partie est divisée en trois chapitres.

Le premier chapitre étudie une topologie sur l'ensemble des fonctionnelles convexes pour laquelle la polarité est bicontinue en s'inspirant d'une construction employée par J.L. JOLY. La préoccupation centrale de ce chapitre est : Si f_n tend vers f pour une topologie usuelle (convergence ponctuelle par exemple), que peut-on dire de f_n^* ?

Le deuxième chapitre étudie le problème suivant :
Si $f_n \rightarrow f$ pour une topologie usuelle, que peut-on dire de $\partial f_n(0)$?

Le troisième chapitre utilise les deux premiers pour démontrer des résultats de convergence de solutions pour certains problèmes d'optimisation.

CHAPITRE I

CONVERGENCE DE FONCTIONNELLES CONVEXES

I - INTRODUCTION

Soit E un espace vectoriel topologique séparé réel ; nous noterons par $C(E)$ l'ensemble des parties convexes fermées d'intérieur non vide de E . Nous allons introduire sur $C(E)$ une topologie que nous noterons $\mathcal{C}_T$ (si T est la topologie de E) ; cette topologie est toujours plus fine que la topologie semi-finie inférieure de Vietoris. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, ces deux topologies sont égales — cette remarque nous permettra au passage de donner un résultat sur l'intersection de deux multiapplications semi-continues inférieurement.

A partir de $\mathcal{C}_T$ nous allons pouvoir définir une topologie sur un certain ensemble de fonctionnelles convexes en considérant leurs épigraphes. Nous supposerons alors que E et E' sont des espaces vectoriels réels en dualité séparante, munis de topologies compatibles avec la dualité, et que ce sont des espaces tonnelés (prendre par exemple E Banach réflexif réel et son dual topologique E').

Nous noterons $\Gamma_0(E)$ l'ensemble des applications de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ convexes semicontinues inférieurement et propres (i.e. ne prenant jamais la valeur $-\infty$ et non identiquement égales à $+\infty$), et f^* la polaire d'un élément f :

$$f^*(y) = \sup_{x \in E} (\langle x, y \rangle - f(x)) .$$

Nous noterons $\Gamma_d(E)$ l'ensemble des éléments de $\Gamma_o(E)$ tels que l'intérieur du domaine soit non vide, $\Gamma_{d^*}(E)$ ceux dont l'intérieur du domaine de la polaire est non vide, et $\Gamma_1(E) = \Gamma_d(E) \cap \Gamma_{d^*}(E)$. La polarité est une bijection de $\Gamma_1(E)$ sur $\Gamma_1(E')$.

Nous noterons $\mathcal{C}_T$ la topologie sur $\Gamma_1(E)$ établie à partir des épigraphes. Si nous notons T' la topologie de E' , nous noterons $\mathcal{C}_{T'}^*$, l'image par l'opération polaire de la topologie $\mathcal{C}_{T'}$, et nous considérons alors :

$$\mathcal{C}_{TT'} = \sup (\mathcal{C}_T, \mathcal{C}_{T'}^*) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1(E) (\mathcal{C}_{T,T'} \text{ sur } \Gamma_1(E')) .$$

Cette construction reprend celle de J.L. JOLY [1] mais avec une topologie qui n'est plus la topologie semifinie inférieure de Vietoris. On obtient ainsi deux topologies $\mathcal{C}_{TT'}$ et $\mathcal{C}_{T,T'}$ qui s'échangent par l'opération polaire.

L'intérêt des topologies ainsi construites est, d'une part de faire de l'opération de polarité un homéomorphisme, et d'autre part d'avoir des relations simples avec les modes de convergences usuels, à savoir la convergence simple et la convergence uniforme sur les parties compactes ; ce qui nous permettra d'établir certains résultats de convergence sur la suite des polaires f_n^* lorsque les f_n convergent simplement ou uniformément sur tout faiblement compact.

II - UNE TOPOLOGIE SUR $C(E)$

(E, T) désignera un espace vectoriel topologique séparé réel. Si x est un point de E nous notons $[x]$ l'ensemble $\{C \in C(E) \mid x \in \overset{\circ}{C}\}$.

PROPOSITION 2.1.

L'ensemble des parties de la forme $[x_1] \cap \dots \cap [x_k]$, $k \geq 1$, constitue une base de topologie sur $C(E)$. On note $\mathcal{C}_T$ la topologie engendrée.

On rappelle que la topologie semifinie inférieure de Vietoris (que nous noterons $\mathcal{C}_v$) sur l'ensemble des parties fermées non vides de E est définie de la façon suivante :

Une base de $\mathcal{C}_v$ est formée des parties de la forme
 $[U_1] \cap [U_2] \cap \dots \cap [U_k]$, $k \geq 1$, où U_i est un ouvert de E ,
 et où $[U_i]$ désigne l'ensemble des parties fermées non vides
 de E telles que leur intersection avec U_i soit non vide.

Nous considérerons en fait la trace de cette topologie sur $C(E)$.

PROPOSITION 2.2.

Sur $C(E)$, $\mathcal{C}_T$ est plus fine que la topologie semifinie inférieure
 de Vietoris.

PROPOSITION 2.3.

Si $E = \mathbb{R}^n$ les topologies $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_v$ sont égales.

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que tout $\mathcal{C}_T$ -voisinage W d'une partie C est
 un $\mathcal{C}_v$ -voisinage. W contient un $\mathcal{C}_T$ -ouvert de la forme $[x_1] \cap \dots \cap [x_k]$,
 où $x_i \in \overset{\circ}{C}$. Considérons un cube fermé de centre x_i , d'arête de longueur ℓ ,
 inclus dans $\overset{\circ}{C}$; soit r , $0 < r < \frac{1}{2} \ell$, tel que les boules de rayon r centrées
 aux sommets de ce cube soient encore dans $\overset{\circ}{C}$. Alors tout convexe rencontrant
 ces boules contiendra le cube de centre x_i et d'arête de longueur $\ell - 2r$,
 donc contiendra x_i dans son intérieur. On refait la même construction pour
 chaque point x_i , $1 \leq i \leq k$. On obtient ainsi des boules notées
 $B_1, \dots, B_{k \times 2^n}$ telles que $[B_1] \cap [B_2] \cap \dots \cap [B_{k \times 2^n}]$ soit contenu dans
 $[x_1] \cap \dots \cap [x_k]$ donc dans W .

REMARQUE 2.4.

On verra plus loin que si $E = \ell_R^2(N)$: $\mathcal{C}_T \neq \mathcal{C}_v$.

Application à l'Intersection de Multiapplications Semicontinues Inférieurement

RAPPELS

Etant donnés X, E deux espaces topologiques, nous appelons multi-application de X dans E toute application de X dans $P(E)$, où $P(E)$ désigne l'ensemble des parties de E . Selon la terminologie usuelle, étant donné un point x_0 dans X , nous dirons qu'une multi-application F est semi-continue inférieurement (s.c.i.) en x_0 si et seulement si pour tout ouvert O coupant $F(x_0)$, il existe un voisinage de x_0 dans X , tel que pour tout x dans ce voisinage : $F(x) \cap O \neq \emptyset$.

Si K et F sont deux multi-application s.c.i. en x_0 , la multi-application $K \cap F$ (donnée par $K \cap F(x) = K(x) \cap F(x)$ pour tout x) n'est en général pas s.c.i. en x_0 (on pourra s'en convaincre par de nombreux exemples triviaux). Dans le cas où les multi-applications sont à valeurs dans $C(E)$, on obtient le résultat suivant :

THEOREME 2.5.

Soient K et F deux multi-applications de X dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $C(\mathbb{R}^n)$, s.c.i. en un même point x_0 , et telles que $K \cap F(x_0)$ soit d'intérieur non vide.; alors : $K \cap F$ est s.c.i. en x_0 .

DEMONSTRATION

Remarquons tout d'abord que dire que K ou F est s.c.i. en x_0 , c'est dire que l'application K (ou F) est continue en x_0 lorsque $C(\mathbb{R}^n)$ est muni de la topologie $\mathcal{C}_T$ (puisque $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_V$). Soit O un ouvert coupant

$K \cap F(x_0)$, alors O coupe $\overset{o}{K \cap F(x_0)}$; soit z un point dans l'intersection, considérons un pavé fermé $P_z = \{x \mid |x_i - z_i| \leq r, r > 0\}$ inclus dans l'ouvert

$\overset{o}{O \cap K \cap F(x_0)}$. Les 2^n sommets du pavé sont des points intérieurs à $K(x_0)$ et $F(x_0)$; par conséquent, il existe un voisinage U de x_0 , tel que, pour tout x dans U , les 2^n sommets soient encore points intérieurs à $K(x)$ et $F(x)$. On en déduit que pour tout x dans U , P_z est inclus dans $K(x) \cap F(x)$; donc O coupe $K \cap F(x)$.

On peut de manière analogue montrer le résultat suivant, légèrement plus général.

THEOREME 2.6.

Soient K et F deux multiapplications de X (espace topologique) dans $\mathbb{R}^n$, semicontinues inférieurement en un point x_0 et convexes en tout point d'un voisinage U de x_0 . On suppose en outre que pour tout x dans U , $K \cap F(x)$ est non vide et que $K \cap F(x_0)$ est d'intérieur non vide. Alors : $K \cap F$ est s.c.i. en x_0 .

Nous allons maintenant donner un contre-exemple au Théorème 2.6 dans le cas où

$$E = \ell_R^2(N) = \{(x_n)_{n \in N} \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_0^\infty x_n^2 < +\infty\},$$

muni du produit scalaire usuel. Nous noterons $\hat{N} = N \cup \{+\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de N , et $e_0, \dots, e_n, \dots$, la base Hilbertienne canonique de E . Considérons les points $a_n = -(1/3^n)e_n$ et $b_n = (1/3^n)e_n$, et les multi-applications K et F données par :

$$K(n) = \{x \in E \mid (x - a_n) \cdot e_n \geq \frac{1}{3^{n+1}} \|x - a_n\|\} \quad \text{et} \quad K(+\infty) = E,$$

$$F(n) = \{x \in E \mid (x - b_n) \cdot (-e_n) \geq \frac{1}{3^{n+1}} \|x - b_n\|\} \quad \text{et} \quad F(+\infty) = E.$$

On vérifie bien que K et F sont à valeurs dans $C(E)$ et qu'elles sont s.c.i. en $+\infty$. $K \cap F(+\infty) = E$ est d'intérieur non vide. Mais $K \cap F$ n'est pas s.c.i. en $+\infty$, puisque pour tout n , $K(n) \cap F(n)$ est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. On déduit de cet exemple que sur $\ell_R^2(N)$:

$$\mathcal{C}_T \neq \mathcal{C}_v.$$

III - TOPOLOGIES SUR DES ESPACES DE FONCTIONNELLES CONVEXES.

1. L'ESPACE $\Gamma_1(E)$

Nous considèrerons deux espaces vectoriels réels E et E' en dualité séparante et munis de topologies d'espaces vectoriels topologiques localement convexes T et T' compatibles avec la dualité. Si f est une application de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, nous appellerons domaine effectif (ou domaine) de f l'ensemble

$$\text{dom } (f) = \{x \in E \mid f(x) < +\infty\}.$$

Nous avons déjà défini les espaces $\Gamma_d(E)$, $\Gamma_{d^*}(E)$ et $\Gamma_1(E)$; il est alors immédiat que l'opération polaire est une bijection de $\Gamma_1(E)$ sur $\Gamma_1(E')$.

Etude de l'Intérieur de l'Epigraphe d'un Elément de $\Gamma_1(E)$

Si f est une application de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, on appelle épigraphe de f l'ensemble

$$\text{épi } (f) = \{(x, a) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}.$$

Soit f dans $\Gamma_1(E)$; alors on a :

$$\overline{\text{épi } (f)}^c \subset \{(x, a) \mid x \in \overline{\text{dom } (f)}^c, f(x) < a\}.$$

Dans le cas où (E, T) est tonnelé, on va montrer que :

$$\overline{\text{épi } (f)}^o = \{(x, a) \mid x \in \overline{\text{dom } (f)}^o, f(x) < a\}$$

et pour cela utiliser le résultat suivant (Moreau [4]) :

PROPOSITION 3.1.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, tonnelé, et f un élément de $\Gamma(E)^1$. Alors f est continue en tout point intérieur de $\text{dom}(f)$.

On déduit immédiatement de la Proposition 3.1 :

PROPOSITION 3.2.

Soit (E, T) un espace tonnelé et f un élément de $\Gamma_0(E)$. On a l'égalité suivante :

$$\overset{\circ}{\text{épi}}(f) = \{(x, a) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f), f(x) < a\}.$$

Continuité et inf-Compacité.

Soient E et E' deux espaces vectoriels topologiques en dualité séparante, munis de topologies compatibles T et T' . Nous noterons $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E , $\tau(E, E')$ la topologie de Mackey sur E et $\sigma(E', E)$, $\tau(E', E)$ les topologies analogues sur E' .

Pour tout sous-ensemble C de E , on notera $\mathcal{C}\text{-int}(C)^2$ l'intérieur de C pour une topologie $\mathcal{C}$ sur E .

Soit f un élément de $\overline{\mathbb{R}}^E$ et y un élément de E' . Soit $\mathcal{C}$ une topologie compatible sur E . Nous dirons que f est $\mathcal{C}$ -inf-compacte pour la pente y si et seulement si :

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in E \mid f(x) - \langle x, y \rangle \leq a\}$$

est $\mathcal{C}$ -compact.

Rappelons une propriété des espaces tonnelés :

¹ $\Gamma(E)$ désigne l'ensemble des enveloppes supérieures de familles de formes affines continues sur E .

² Si C est une partie d'un espace topologique E , on notera indifféremment C ou $\text{int}(C)$ son intérieur ; lorsqu'on voudra préciser qu'il s'agit de l'intérieur pour une topologie $\mathcal{C}$, on le notera $\mathcal{C}\text{-int}(C)$.

PROPOSITION 3.3.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé localement convexe sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E' son dual. Si E est tonnelé, alors il est muni de la topologie $\tau(E, E')$.

Citons le théorème suivant (Moreau [4]) :

THEOREME 3.4.

Soient E et E' deux espaces vectoriels topologiques localement convexes en dualité séparante, et f un élément de $\Gamma_o(E)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est finie et $\tau(E, E')$ -continue au point x_o de E .
- (ii) f^* est $\sigma(E', E)$ -inf-compacte pour la pente x_o de E .

COROLLAIRE 3.5.

Les hypothèses sont celles du théorème précédent. Si f est $\sigma(E, E')$ -inf-compacte pour au moins une pente, alors : $\tau\text{-int}(\text{dom}(f^*)) \neq \emptyset$.

Pour avoir une équivalence, donnons la proposition immédiate suivante :

PROPOSITION 3.6.

Dans les hypothèses du théorème ci-dessus, si (E', T') est tonnelé, alors pour tout élément f de $\Gamma_o(E)$, l'ensemble des pentes de faible-inf-compacté de f est $\tau\text{-int}(\text{dom}(f^*)) = \text{int}(\text{dom}(f^*))$.

D'où la caractérisation suivante :

$$\Gamma_{d^*}(E) = \{f \in \Gamma_o(E) \mid f \text{ est } \sigma\text{-inf-compacte pour au moins une pente}\}.$$

Nous Allons Maintenant Examiner Quelles Fonctionnelles Indicatrices se Trouvent dans $\Gamma_d(E)$, $\Gamma_d^*(E)$, $\Gamma_1(E)$.

RAPPELS

Si C est une partie de E , nous noterons X_C la fonctionnelle indicatrice de C , c'est-à-dire l'application donnée par :

$$X_C(x) = 0 \quad \text{si } x \in C, \quad X_C(x) = +\infty \quad \text{si } x \notin C.$$

Si A est une partie de E , nous appelons polaire de A , notée A° , l'ensemble $\{y \in E' \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in A\}$. A° est alors une partie de E' convexe fermée contenant 0 .

Nous appellerons fonction d'appui de A la fonctionnelle X_A^* :

$$X_A^*(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle$$

On a alors immédiatement :

$$A^\circ = \{y \in E' \mid X_A^*(y) \leq 1\}.$$

Nous appellerons cône barrière de A (noté A_b) le domaine effectif de X_A^* ; c'est aussi le cône engendré par A° .

Il est maintenant immédiat que :

$\Gamma_d(E)$ contient les fonctionnelles indicatrices des convexes fermés d'intérieur non vide.

$\Gamma_d^*(E)$ contient les fonctionnelles indicatrices des convexes fermés non vides dont le cône barrière est d'intérieur non vide.

$\Gamma_1(E)$ contient les fonctionnelles indicatrices des convexes fermés d'intérieur non vide dont le cône barrière est d'intérieur non vide.

REMARQUE 3.7.

Supposons que (E', T') soit un espace de Baire, et soit A une partie de E ; alors A_b est d'intérieur non vide si et seulement si A° est d'intérieur non vide.

Cela découle en effet du lemme suivant :

LEMME 3.8.

Soit E un espace vectoriel topologique réel qui soit un espace de Baire, C un convexe fermé contenant O . Notons $\hat{C}$ le cône engendré par C ; alors C est d'intérieur non vide si et seulement si $\hat{C}$ est d'intérieur non vide.

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que si $\hat{C}$ est d'intérieur non vide, C est d'intérieur non vide.

On a $\hat{C} = \bigcup_{a > 0} a C$; tout élément de $\hat{C}$ est donc de la forme ax où x appartient à C et a est un réel strictement positif. Il existe alors un entier n strictement positif tel que $a/n \leq 1$; donc $ax = n(a/n)x$ appartient à nC . On a donc $C = \bigcup_{n > 0} n C$. Si C était d'intérieur vide, $\hat{C}$ serait un ensemble maigre (ou de première catégorie) ; donc le complémentaire de C dans E serait partout dense dans E ; ce qui est impossible puisque C est d'intérieur non vide.

REMARQUE 3.9.

Comme cela m'a été signalé par R.T. ROCKAFELLAR le fait que $\Gamma_1(E)$ soit non vide entraîne que E est un espace de Banach réflexif. Pour éviter les trivialités, chaque fois que nous travaillerons sur $\Gamma_1(E)$ nous supposons que E est un espace de Banach réflexif ; nous laissons au lecteur le soin de faire les transcriptions immédiates qui s'imposent. Bien entendu, ceci ne s'applique pas aux espaces $\Gamma_d(E)$ et $\Gamma_{d^*}(E)$.

2. INF-CONVOLUTION ET SOMME D'ELEMENTS DE $\Gamma_1(E)$

Dans ce paragraphe nous allons indiquer brièvement des résultats découlant directement des propriétés usuelles de l'inf-convolution³, que l'on trouvera par exemple dans Moreau [4] ou Laurent [2].

³ Si f et g sont deux applications de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ on appelle inf-convolution de f et g , notée $f \nabla g$, la fonctionnelle :

$$f \nabla g(x) = \inf_{x_1 + x_2 = x} (f(x_1) + g(x_2)) .$$

Nous supposons dorénavant que (E, T) et (E', T') sont tonnelés.
Donc $T = \tau(E, E')$ et $T' = \tau(E', E)$.

PROPOSITION 3.10.

Si f et g sont deux éléments de $\Gamma_1(E)$ et si :

$$\overset{\circ}{\text{dom } f^*} \cap \overset{\circ}{\text{dom } g^*} \neq \emptyset$$

Alors $f \vee g$ appartient à $\Gamma_1(E)$ et l'inf-convolution est exacte ⁴.

PROPOSITION 3.11.

Si f et g sont deux éléments de $\Gamma_1(E)$ et si :

$$\overset{\circ}{\text{dom } f} \cap \overset{\circ}{\text{dom } g} \neq \emptyset$$

Alors $f + g$ appartient à $\Gamma_1(E)$ et $(f+g)^* = f^* \vee g^*$.

3. LA TOPOLOGIE $\mathcal{C}_T$ SUR $\Gamma_d(E)$

DEFINITION DE $\mathcal{C}_T$

$C(E \times \mathbb{R})$ désignera l'ensemble des convexes fermés d'intérieur non vide de $E \times \mathbb{R}$, muni de la topologie que nous avons définie à la Proposition 2.1.

L'application épi : $f \mapsto \text{épi}(f)$ de $\Gamma_d(E)$ dans $C(E \times \mathbb{R})$ est une injection. Nous noterons $\mathcal{C}_T$ la topologie sur $\Gamma_d(E)$ obtenue comme image réciproque par l'application épi de la topologie de $C(E \times \mathbb{R})$.

Si nous notons X l'injection naturelle de $C(E)$ dans $\Gamma_d(E)$ qui à tout élément C fait correspondre sa fonctionnelle indicatrice X_C , on vérifie immédiatement que la topologie de $C(E)$ est l'image réciproque par X de la topologie $\mathcal{C}_T$ sur $\Gamma_d(E)$.

⁴ On dit que $f \vee g$ est exacte si et seulement si pour tout x la borne inférieure est atteinte.

$$C(E) \xrightleftharpoons{x} \Gamma_d(E) \xrightleftharpoons{\text{épi}} C(E \times \mathbb{R})$$

Description de $\mathcal{C}_T$ sur $\Gamma_d(E)$. Si (x, a) appartient à $E \times \mathbb{R}$, on note :

$$[x, a] = \{f \in \Gamma_d(E) \mid x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f) \text{ et } f(x) < a\}.$$

Les ensembles de la forme $[x_1, a_1] \cap \dots \cap [x_k, a_k], k \geq 1$, constituent une base de la topologie $\mathcal{C}_T$.

PROPRIETES DE SEPARATION

Rappelons qu'un espace topologique X est dit :

T_0 , si pour tous x, y distincts dans X , il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre ;

T_1 , si pour tous x, y distincts dans X , il existe un voisinage de x qui ne contient pas y ;

T_2 , si pour tous x, y distincts dans X , il existe un voisinage de x et un voisinage de y qui ne se coupent pas.

PROPOSITION 3.12

La topologie $\mathcal{C}_T$ sur $\Gamma_d(E)$ n'est en général ni T_2 ni même T_1 , mais est toujours T_0 .

DEMONSTRATION

Il suffit de vérifier que $\mathcal{C}_T$ est T_0 sur $C(E)$, pour un espace vectoriel topologique séparé réel quelconque E .

Prenons C_1 et C_2 distincts dans $C(E)$; si $C_1 \subset C_2$, il existe un point x dans $\overset{\circ}{C}_2$ qui n'appartient pas à C_1 , sinon l'adhérence de $\overset{\circ}{C}_2$ serait incluse dans C_1 ; comme $\overset{\circ}{C}_2$ est non vide : $\overline{\overset{\circ}{C}_2} = C_2$; on aurait donc $C_1 = C_2$. Il suffit maintenant de considérer l'ouvert $[x]$, c'est un voisinage de C_2 qui ne contient pas C_1 .

Examinons maintenant le cas où $C_1 \not\subset C_2$, c'est-à-dire

$$C_2 \cap C_1 \neq \emptyset.$$

Comme C_2 est ouvert et que $\overline{C_1} = C_1$, on a $C_2 \cap \overset{\circ}{C_1} \neq \emptyset$; soit x un point de cet ensemble; $[x]$ est un voisinage de C_1 qui ne contient pas C_2 .

Montrons que si $E \neq \{0\}$, $\mathcal{C}_T$ n'est pas T_1 : il suffit en effet de prendre C_1 et C_2 distincts, C_1 inclus dans C_2 ; alors tout voisinage de C_1 contient C_2 .

Convergence des familles filtrantes ⁵ pour $\mathcal{C}_T$

PROPOSITION 3.13.

Soit $(f_i)_{i \in I_{\mathcal{F}}}$ une famille filtrante sur $\Gamma_d(E)$ et f un élément de $\Gamma_d(E)$. Alors :

$$f_i \text{ converge vers } f \text{ pour } \mathcal{C}_T \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f) : \limsup f_i(x) \leq f(x) \\ \text{et} \\ \text{(ii)} \quad \forall x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f), \exists F \in \mathcal{F}, \forall i \in F : x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f_i) \end{array} \right.$$

DEMONSTRATION . Vérification immédiate.

Dans le cas où (E, T) est un espace de Baire et où la famille filtrante considérée est une suite, on aboutit à une simplification très intéressante de la proposition précédente.

PROPOSITION 3.14.

Soit f_n une suite de $\Gamma_d(E)$, où E est un espace de Baire; et f un élément de $\Gamma_d(E)$. Alors :

$$f_n \text{ converge vers } f \text{ pour } \mathcal{C}_T \iff \forall x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f) : \limsup f_n(x) \leq f(x).$$

⁵ Nous appelons famille filtrante sur un espace topologique X , toute application f d'un ensemble I , muni d'un filtre $\mathcal{F}$, dans X ; nous la noterons : $(f_i)_{i \in I_{\mathcal{F}}}$, ou plus brièvement f_i . Nous dirons que f_i converge vers f si et seulement si la base de filtre $f(\mathcal{F})$ converge vers f .

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.13.

Il suffit de montrer que :

$$(\forall x \in \overline{\text{dom}(f)} : \limsup f_n(x) \leq f(x))$$

$$\Rightarrow (\forall x \in \overline{\text{dom}(f)}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : x \in \overline{\text{dom}(f_n)}) .$$

Considérons $F_p = \sup_{n \geq p} f_n$; F_p est s.c.i., convexe et la suite F_p est décroissante. La suite des convexes fermés $\text{épi}(F_p)$ est croissante pour l'inclusion.

Nous allons d'abord montrer que $\bigcup_p \text{épi}(F_p)$ est d'intérieur non vide. En effet, si nous notons $f' = \inf_p F_p$, nous avons :

$$\overline{\text{épi}(f)} \subset \text{épi}'(f') \subset \bigcup_p \text{épi}(F_p) .$$

Où $\text{épi}'$ désigne l'épigraphe strict.

Or puisque (E, T) est de Baire (donc tonnelé) on a :

$$\overline{\text{épi}(f)} = \{(x, a) \mid x \in \overline{\text{dom}(f)} \text{ et } f(x) < a\} \neq \emptyset$$

Nous allons maintenant démontrer un lemme :

LEMME 3.15.

Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, de Baire, et C_n une suite croissante de convexes fermés de E telle que :

$$\bigcup_n \overline{C_n} \neq \emptyset ,$$

alors à partir d'un certain rang les C_n sont d'intérieur non vide et :

$$\bigcup_n \overline{C_n} = \bigcup_n \overline{\overset{\circ}{C_n}} .$$

DEMONSTRATION DU LEMME.

Puisque E est un espace de Baire, si tous les C_n étaient d'intérieur vide, $\bigcup C_n$ serait d'intérieur vide ; donc, comme la suite est croissante, les C_n sont tous d'intérieur non vide à partir d'un certain rang.

Montrons que :

$$\overline{\bigcup C_n}^{\circ} = \bigcup \overline{C_n}^{\circ}.$$

On a trivialement :

$$\bigcup \overline{C_n}^{\circ} \subset \overline{\bigcup C_n}^{\circ}.$$

Montrons l'inclusion inverse. Supposons qu'il existe un point x dans $\overline{\bigcup C_n}^{\circ}$ et non dans $\bigcup \overline{C_n}^{\circ}$. Comme $\bigcup \overline{C_n}^{\circ}$ est un convexe ouvert non vide, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue non nulle sur E et un réel a , tels que :

$$\ell(x) \geq a \quad \text{et} \quad \ell(y) < a \quad \text{pour tout } y \text{ dans } \bigcup \overline{C_n}^{\circ}.$$

Appelons A le demi espace ouvert ($\ell > a$) ; alors A rencontre $\overline{\bigcup C_n}^{\circ}$, puisque ℓ est ouverte. Donc A rencontre tous les C_n pour n assez grand ; comme au delà d'un certain rang les C_n sont d'intérieur non vide, A rencontrera tous les $\overline{C_n}^{\circ}$ pour n assez grand ; donc aussi leur réunion. Ce qui contredit l'hypothèse.

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration de la proposition.

Prenons x dans $\overline{\text{dom}(f)}^{\circ}$ et un réel a , $a > f(x)$; alors (x, a) appartient à $\overline{\text{épi}(f)}^{\circ}$; or comme nous l'avons vu :

$$\overline{\text{épi}(f)}^{\circ} \subset \overline{\bigcup_p \text{épi}(F_p)}^{\circ} = \bigcup_p \overline{\text{épi}(F_p)}^{\circ}.$$

Donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $p \geq n_0$, (x, a) appartienne à $\overline{\text{épi}(F_p)}^{\circ}$; donc $x_0 \in \overline{\text{dom}(F_p)}^{\circ}$.

En particulier x appartient à $\overline{\text{dom}(F_{n_0})}$, donc il existe un voisinage ouvert V de x , tel que V soit inclus dans $\overline{\text{dom}(F_{n_0})}$; or

$$F_{n_0} = \sup_{n \geq n_0} f_n, \text{ d'où :}$$

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall y \in V: f_n(y) \leq F_{n_0}(y) < +\infty,$$

d'où :

$$\forall n \geq n_0 : x \in \overline{\text{dom}(f_n)}.$$

REMARQUE 3.16.

Si $E = \mathbb{R}^n$, la Proposition 3.13 est encore vraie pour des familles filtrantes et plus seulement pour des suites, la démonstration est facile dans ce cas particulier.

4. LA TOPOLOGIE $\mathcal{C}_{TT}$, SUR $\Gamma_1(E)$

LA TOPOLOGIE $\mathcal{C}_T^*$,

On a vu que l'opération polaire était une bijection de $\Gamma_1(E)$ sur $\Gamma_1(E')$. Nous noterons $\mathcal{C}_T^*$, la topologie sur $\Gamma_1(E)$ image de $\mathcal{C}_T$, par l'opération polaire ; cette topologie est donc T_0 .

On obtient une base de la topologie $\mathcal{C}_T^*$, en considérant les parties de la forme :

$$[y_1, b_1]^* \cap \dots \cap [y_k, b_k]^*, \quad k \geq 1,$$

où y_i est un élément de E' , b_i un réel et $[y_i, b_i]^*$ désigne l'image par polarité de $[y_i, b_i]$.

Décrivons $[y, b]^*$.

On voit facilement que :

$$[y, b]^* = \left\{ f \in \Gamma_1(E) \left| \begin{array}{l} \text{f}\sigma\text{-inf-compacte pour la pente } y \text{ et} \\ \exists \varepsilon > 0 : f(x) \geq \langle x, y \rangle - b + \varepsilon (\forall x) \end{array} \right. \right\}.$$

Sur $\Gamma_1(E)$ on considèrera la topologie $\mathcal{C}_{TT'} = \sup(\mathcal{C}_T, \mathcal{C}_T^*)$.
De même sur $\Gamma_1(E')$:

$$\mathcal{C}_{T'T} = \sup(\mathcal{C}_{T'}, \mathcal{C}_{T'}^*) .$$

Par construction, la polarité est un homéomorphisme de $\Gamma_1(E)$ muni de $\mathcal{C}_{TT'}$ sur $\Gamma_1(E')$ muni de $\mathcal{C}_{T'T}$.

Séparation de la topologie $\mathcal{C}_{TT'}$,

Nous allons montrer que la topologie $\mathcal{C}_{TT'}$ sur $\Gamma_1(E)$ est séparée. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.17.

Soit f un élément de $\Gamma_{d^*}^*(E)$; on a alors :

$$f = \sup \{ \ell \mid \ell \leq f, \ell \text{ forme affine continue à pente dans } \overset{\circ}{\text{dom}}(f^*) \}.$$

DEMONSTRATION

On sait que $f = f^{**}$, donc pour tout x et pour tout $k < f(x)$, il existe $\xi \in E'$ tel que :

$$\langle \xi, x \rangle - f^*(\xi) > k ;$$

donc $\xi \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f^*)$. On sait qu'il existe ξ_0 dans $\overset{\circ}{\text{dom}}(f^*)$. Alors, $[\xi_0, \xi[$ est inclus dans $\overset{\circ}{\text{dom}}(f^*)$; et la restriction de f^* à $[\xi_0, \xi]$ étant convexe, s.c.i., partout finie, est continue. Donc lorsque $\xi' \in [\xi_0, \xi[$ tend vers ξ , $f^*(\xi')$ tend vers $f^*(\xi)$, et par suite il existe $\xi' \in [\xi_0, \xi[$ tel que :

$$\langle \xi', x \rangle - f^*(\xi') > k .$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 3.18.

Etant donné deux éléments distincts de $\Gamma_1(E)$, il existe deux voisinages de la forme $[x,a]$ et $[y,b]^*$ qui les séparent.

Citons ici une conséquence facile du Lemme 3.15 qui nous sera utile par la suite :

PROPOSITION 3.19.

Soit f_i une famille filtrante d'éléments de $\Gamma_{d^*}(E)$ et f un élément de $\Gamma_{d^*}(E)$. Alors :

f_i converge vers f pour $\mathcal{C}_{T^*}^*$, $\Rightarrow \forall x : \liminf f_i(x) \geq f(x)$.

5. COMPARAISON DE LA TOPOLOGIE $\mathcal{C}_{TT}$, AVEC LA TRACE SUR $\Gamma_1(E)$ DE LA TOPOLOGIE DE MOSCO-JOLY ⁶

On rappelle que les espaces (E,T) et (E',T') sont supposés tonnelés. On vérifie facilement que la topologie de Mosco-Joly s'obtient comme suit : on prend d'abord l'image réciproque par l'application épigraphe de la topologie semifinie inférieure de Vietoris sur l'ensemble des convexes fermés non vides de $E \times \mathbb{R}$; on a ainsi une topologie sur $\Gamma_0(E)$, donc l'analogue sur $\Gamma_0(E')$. Puis on transporte cette dernière par la bijection de polarité sur $\Gamma_0(E)$, et on prend le sup des deux topologies. La construction de la topologie $\mathcal{C}_{TT}$, est calquée sur ce procédé.

Comme la topologie $\mathcal{C}_T$ est plus fine sur $C(E \times \mathbb{R})$ que la topologie semifinie inférieure de Vietoris, on voit que :

La topologie $\mathcal{C}_{TT}$, est plus fine que la trace sur $\Gamma_1(E)$ de la topologie de Mosco-Joly.

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$, on a égalité. En effet :

⁶ Nous désignons par topologie de Mosco-Joly la topologie $\mathcal{C}_{TT}$, de Joly sur $\Gamma_0(E)$. (Voir Joly [1]). On n'a pas besoin de l'hypothèse : (E,T) et (E',T') tonnelés pour la construire.

On sait que sur $C(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}_T$ est égale à la topologie semifinie inférieure de Viétoris. Donc sur $\Gamma_d(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}_T$ est égale à la topologie image réciproque de la topologie semi-finie inférieure de Viétoris. De même pour $\mathcal{E}_{T'}$. D'où : $\mathcal{E}_{TT'}$ est égale à la topologie de Mosco-Joly sur $\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$.

IV - COMPARAISON AVEC D'AUTRES MODES DE CONVERGENCE

Dans cette partie nous supposerons que E est un espace de Banach réflexif réel et E' son dual topologique muni de la norme duale usuelle.

1. STRUCTURE UNIFORME ET TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE UNIFORME SUR LES PARTIES FAIBLEMENT COMPACTES.

Nous munirons $\overline{\mathbb{R}}$ de sa structure uniforme canonique d'espace compact, notée $\mathcal{U}$. Un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$ est donné par :

$\varepsilon > 0$, $A > 0$: $V(\varepsilon, A)$

$$= \left\{ (x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \left| \begin{array}{l} (x > A \text{ et } y > A) \text{ ou } (x < -A \text{ et } y < -A) \\ \text{ou } (-A \leq y \leq A \text{ et } |x-y| < \varepsilon) \\ \text{ou } (-A \leq x \leq A \text{ et } |x-y| < \varepsilon) \end{array} \right. \right\}$$

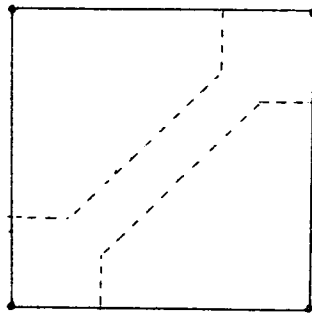


figure 1

Nous notons $\mathcal{U}_c$ la structure uniforme sur $\Gamma_1(E)$ de la convergence uniforme sur les parties faiblement compactes de E , et $\mathcal{E}_c$ la topologie associée à $\mathcal{U}_c$.

Un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}_c$ est donné par :

$V \in \mathcal{U}$, KV -compact de E :

$$\mathcal{V}(V,K) = \{(f,g) \in \Gamma_1 \times \Gamma_1 \mid (f(x),g(x)) \in V(\forall x \in K)\}.$$

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

THEOREME 4.1.

Sur $\Gamma_1(E)$ on a : $\mathcal{E}_c \geq \mathcal{E}_{TT'}$.

DEMONSTRATION

Nous allons démontrer que si une famille filtrante f_i converge uniformément sur tout σ -compact vers un élément f dans $\Gamma_1(E)$, alors f_i converge vers f pour la topologie $\mathcal{E}_{TT'}$. Or :

$$f_i \rightarrow f \text{ pour } \mathcal{E}_{TT'} \iff \left\{ \begin{array}{l} f_i \rightarrow f \text{ pour } \mathcal{E}_T \\ \text{et} \\ f_i \rightarrow f \text{ pour } \mathcal{E}_{T'}^* \end{array} \right.$$

D'où la décomposition en deux propositions :

PROPOSITION 4.2.

Si f_i converge vers f uniformément sur tout σ -compact, alors :

f_i converge vers f pour $\mathcal{E}_T$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.2.

On vérifie que pour tout x dans $\overset{\circ}{\text{dom}}(f)$, il existe F dans le filtre $\mathcal{F}$, tel que pour tout i dans F : x appartient à $\overset{\circ}{\text{dom}}(f_i)$. En effet, considérons une boule fermée de centre x et de rayon strictement positif, B , qui soit contenue dans $\overset{\circ}{\text{dom}}(f)$. Comme B est faiblement compacte, les f_i convergent uniformément vers f sur B . Comme f est continue au point x on peut aussi choisir B telle que $|f|$ soit majorée par une constante M sur B . Prenons maintenant un entourage $V(\epsilon, A)$ de $\mathcal{U}$ tel que :

$A > M + \epsilon$; il existe F tel que pour tout i dans F et pour tout y dans B on ait : $(f(y), f_i(y)) \in V(\epsilon, A)$, c'est-à-dire $|f(y) - f_i(y)| < \epsilon$. On en conclut que $x \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f_i)$ pour tout i dans F . On déduit immédiatement de la Proposition 3.12 que f_i converge vers f pour $\mathcal{C}_T$.

REMARQUE SUR LA PROPOSITION 4.2.

La proposition n'est plus vraie si l'on remplace la convergence uniforme sur les faiblement compacts par la convergence simple. Cependant le résultat demeure dans le cas où la famille filtrante considérée est une suite ; c'est une conséquence directe de la Proposition 3.13.

PROPOSITION 4.3.

Si f_i converge vers f uniformément sur tout σ -compact, alors :
 f_i converge vers f pour $\mathcal{C}_T^*$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.

Nous nous servons du lemme important suivant :

LEMME 4.4.

Si f_i converge uniformément sur tout σ -compact vers f qui est σ -inf-compacte (i.e., σ -inf-compacte pour la pente 0), alors :

- (i) $\exists F \in \mathcal{F}$, $\forall i \in F : f_i$ est σ -inf-compacte.
- (ii) Si $-b = \inf f$, $\forall \eta > 0$, $\exists F \in \mathcal{F}$, $\forall i \in F : f_i \geq -b - \eta$.

DEMONSTRATION DU LEMME

Moyennant une translation dans $E \times \mathbb{R}$, on peut toujours supposer que $f(0) = 0 = \inf f$. Considérons

$$K_1 = \{x \mid f(x) \leq 1\},$$

K_1 est un convexe faiblement compact contenant 0 ; c'est donc un borné pour la topologie de la norme. K_1 est donc inclus dans une boule fermée de centre 0 et de rayon strictement positif, soit $\bar{B}(0, r)$. Prenons une boule fermée $\bar{B}(0, \rho)$ avec $\rho > r$. Considérons un entourage de $\mathbb{R}$ de la forme $V(\varepsilon, A)$ avec :

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad A > 1 - \varepsilon.$$

Alors :

$$\exists F \in \mathcal{F}, \forall i \in F, \forall x \in \bar{B}(0, \rho) : (f_i(x), f(x)) \in V(\varepsilon, A).$$

Nous allons minorer les f_i en dehors de $\bar{B}(0, \rho)$:

Si $x \notin \bar{B}(0, \rho)$, soit $\bar{x} = (\rho / \|x\|)x$, $\bar{x} \in \bar{B}(0, \rho)$ et $\bar{x} \notin K_1$ car $\|\bar{x}\| = \rho > r$.

Considérons les f_i pour i dans F , et appliquons leur l'inégalité de convexité. On a :

$$\bar{x} = (\rho / \|x\|)x + (1 - \rho / \|x\|)0, \quad 0 < \rho / \|x\| < 1.$$

D'où :

$$f_i(\bar{x}) \leq (1 - \rho / \|x\|) f_i(0) + (\rho / \|x\|) f_i(x).$$

On en tire :

$$f_i(x) \geq (\|x\| / \rho) (f_i(\bar{x}) - f_i(0)) + f_i(0).$$

Comme $(f_i(0), 0) \in V(\varepsilon, A)$, on a : $-f_i(0) > -\varepsilon$.

D'où :

$$f_i(x) \geq (\|x\| / \rho) (f_i(\bar{x}) - \varepsilon) - \varepsilon.$$

Or $f(\bar{x}) > 1$ et $(f_i(\bar{x}), f(\bar{x})) \in V(\varepsilon, A)$, donc $f_i(\bar{x}) \geq 1 - \varepsilon$.

Par conséquent :

$$\forall i \in F, \forall x \notin \bar{B}(0, \rho) : f_i(x) \geq (\|x\| / \rho) (1 - 2\varepsilon) - \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout i dans F , f_i est σ -inf-compacte. En effet, pour tout réel a :

$$\{x | f_i(x) \leq a\} \subset \bar{B}(0, \rho) \cup \{x | (\|x\| / \rho) (1 - 2\varepsilon) - \varepsilon \leq a\}$$

qui est faiblement compact.

On a donc démontré (i).

Pour (ii), si nous prenons en outre $\varepsilon < \eta$, on a alors, comme en (i) :

$$\forall i \in F, \forall x \notin \bar{B}(0, \rho) : f_i(x) \geq (\|x\| / \rho) (1 - 2\varepsilon) - \varepsilon$$

et

$$\forall i \in F, \forall x \in \bar{B}(0, \rho) : (f_i(x), f(x)) \in V(\varepsilon, A).$$

Ce qui entraîne $f_i(x) \geq -\eta$ pour tout i dans F et pour tout x dans E .

Nous pouvons maintenant démontrer la Proposition 4.3 :

Si f est σ -inf-compacte pour la pente y , et f_i pour la pente y_i , considérons les fonctionnelles g et g_i données par :

$$g(x) = f(x) - \langle x, y \rangle, \quad g_i(x) = f_i(x) - \langle x, y \rangle.$$

Alors, g, g_i sont des éléments de $\Gamma_1(E)$ et g_i converge vers g uniformément sur tout faiblement compact de E . Pour montrer que f_i converge vers f pour la topologie $\mathcal{O}_{T'}^*$, il suffit de montrer que :

$$\forall [y, b]^* \text{ tel que } f \in [y, b]^*,$$

$$\exists F \in \mathcal{F}, \forall i \in F : f_i \in [y, b]^*.$$

Rappelons que :

$$f \in [y, b]^* \iff \left\{ \begin{array}{l} f \sigma\text{-inf-compacte pour la pente } y \\ \text{et} \\ \exists \varepsilon > 0, \forall x \in E : f(x) \geq \langle x, y \rangle - b + \varepsilon \end{array} \right.$$

En fait on va montrer :

$$\forall \varepsilon', 0 < \varepsilon' < \varepsilon, \exists F \in \mathcal{F}, \forall i \in F :$$

$$f_i \sigma\text{-inf-compacte pour la pente } y$$

et

$$\forall x \in E : f_i(x) \geq \langle x, y \rangle - b + \varepsilon'.$$

Il suffit pour cela d'appliquer le Lemme 4.4. aux fonctionnelles g, g_i .

—X—

Fin de la démonstration du Théorème 4.1.

COROLLAIRE 4.5.

Si une suite f_n converge uniformément sur tout borné vers f dans $\Gamma_1(E)$, alors pour tout x dans $\overset{o}{\text{dom}}(f^*) : f_n^*(x)$ converges vers $f^*(x)$.
Si de plus on suppose que f est σ -inf-compacte, alors :

$$\inf_{x \in E} f_n(x) \text{ converges vers } \inf_{x \in E} f(x) .$$

DEMONSTRATION

Il découle du Théorème 4.1 que f_n converge vers f pour la topologie $\mathcal{C}_{TT}$; donc f_n^* converge vers f^* pour la topologie $\mathcal{C}_{T,T}$, et d'après les Propositions 3.12 et 3.17 on a :

$$\forall x \in \overset{o}{\text{dom}}(f^*) : \liminf f_n(x) \geq f(x)$$

et

$$\limsup f_n(x) \leq f(x) .$$

D'où le résultat. Si f est σ -inf-compacte, alors 0 appartient à $\overset{o}{\text{dom}}(f^*)$, donc $f_n^*(0)$ converge vers $f^*(0)$. Or : $f_n^*(0) = - \inf f_n$ et $f^*(0) = - \inf f$.

—————X—————

REMARQUE 4.6.

Il découle d'un contre-exemple que nous donnerons plus loin que l'on a pas $\mathcal{C}_{TT} \geq \mathcal{C}_c$ sur $\Gamma_1(E)$.

2. STRUCTURE UNIFORME ET TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE SIMPLE

Nous noterons $\mathcal{U}_s$ la structure uniforme de la convergence simple sur $\Gamma_1(E)$ et $\mathcal{C}_s$ la topologie associée.

Un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}_s$ est donné par :

$V \in \mathcal{U}$, P partie finie de E :

$$\mathcal{V}(V, P) = \{(f, g) \in \Gamma_1 \times \Gamma_1 \mid (f(x), g(x)) \in V, \forall x \in P\}.$$

Nous allons maintenant comparer les topologies $\mathcal{C}_s$ et $\mathcal{C}_{TT}$.

Nous allons exhiber un exemple montrant que l'on n'a pas $\mathcal{C}_s \geq \mathcal{C}_{TT}$, sur $\Gamma_1(E)$.

EXEMPLE

Considérons $\mathcal{L}_R^2(N)$ muni de la norme usuelle ; et considérons les fonctions :

$$f(x) = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \sum_{i=0}^n (x_i)^2 + \frac{1}{n+1} \|x\|.$$

f est convexe, continue, et on vérifie facilement qu'elle est faiblement-inf-compacte pour toute pente. Les fonctions f_n sont convexes, continues, et faiblement-inf-compactes. Les fonctions f_n convergent ponctuellement vers f . Nous allons montrer que les fonctions f_n ne convergent pas vers f pour la topologie $\mathcal{C}_T^*$.

Considérons le point z donné par : $z_0 = 1$, $z_n = (1/n(n+1))^{1/2}$ pour $n \geq 1$. Alors :

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} z_p^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $f(x) \geq 2 \langle x, z \rangle - \|z\|^2 - \varepsilon + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 : f \in [2z, \|z\|^2 + \varepsilon]^*.$$

On veut montrer que :

$$\forall n_0, \exists n \geq n_0 : f_n \notin [2z, \|z\|^2 + \varepsilon]^*$$

(pour cela il nous suffira de montrer que :

$$\exists x^n \text{ tel que : } f_n(x^n) < 2 \langle x^n, z \rangle - \|z\|^2 - \varepsilon).$$

Pour tout n et tout $\lambda > 0$ considérons le point $x^{n,\lambda}$ donné par :

$$\begin{aligned} x_i^{n,\lambda} &= 0 & \text{pour} & \quad i=0, \dots, n \\ x_i^{n,\lambda} &= \lambda z_i & \text{pour} & \quad i \geq n+1. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que :

$$\forall n_0, \forall n \geq n_0, \forall \lambda > 0 : f_n(x^{n,\lambda}) < 2 \langle x^{n,\lambda}, z \rangle - \|z\|^2 - \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n+1} \|x^{n,\lambda}\| < 2 \frac{\lambda}{n+1} - \|z\|^2 - \varepsilon.$$

Soit :

$$\|z\|^2 + \varepsilon < \lambda \left[\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+1)^{1/2}} \right]$$

il suffit de prendre $n = n_0$ et $\lambda > 0$ assez grand.

Il s'ensuit que f_n ne converge pas vers f pour $\mathcal{C}_{TT'}$.

Nous verrons plus loin que sur $\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$ on n'a pas $\mathcal{C}_{TT'} \geq \mathcal{C}_s$.

Mais si nous considérons les fonctionnelles de $\Gamma_1(E)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (nous noterons cet ensemble $\Gamma_{1,R}(E)$), alors sur $\Gamma_{1,R}(E)$: $\mathcal{C}_{TT'} \geq \mathcal{C}_s$. Ce résultat est une conséquence immédiate des Propositions 3.12 et 3.17.

Récapitulons les résultats dans le cas d'un espace de Banach réflexif réel E .

$\Gamma_1(E)$	$\mathcal{C}_c \geq \mathcal{C}_{TT'}$
$\Gamma_{1,R}(E)$	$\mathcal{C}_c \geq \mathcal{C}_{TT'} \geq \mathcal{C}_s$

3. ETUDE DU CAS PARTICULIER $E = \mathbb{R}^n$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 4.7.

Soit f_n une suite d'éléments de $\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$ convergeant ponctuellement vers un élément f , alors : f_n converge vers f pour $\mathcal{C}_{TT}'$.

De ce théorème on déduit les corollaires suivants :

COROLLAIRE 4.8.

Avec les hypothèses du théorème :

$$\forall x \in \overline{\text{dom}(f^*)} : f_n^*(x) \text{ converge vers } f^*(x).$$

COROLLAIRE 4.9.

Avec les mêmes hypothèses, et si de plus f est inf-compacte, alors :

$$\inf_{x \in E} f_n(x) \text{ converge vers } \inf_{x \in E} f(x).$$

Le reste de ce paragraphe va être consacré à la démonstration du Théorème 4.7. Il suffit de vérifier que f_n converge vers f pour les topologies $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_T^*$. D'après la Proposition 3.13, il est immédiat que f_n converge vers f pour $\mathcal{C}_T$. Il reste donc à démontrer que f_n converge vers f pour $\mathcal{C}_T^*$: cette démonstration va se faire en plusieurs étapes.

Démontrons d'abord une proposition :

PROPOSITION 4.10

Si une suite f_n converge ponctuellement vers f dans $\Gamma_d(\mathbb{R}^n)$ alors :

- (i) $\forall x \in \overline{\text{dom}(f)}$, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$: $x \in \overline{\text{dom}(f_n)}$
- (ii) f_n converge vers f uniformément sur tout compact inclus dans $\overline{\text{dom}(f)}$.

DEMONSTRATION

(i) se déduit trivialement de la Proposition 3.13.

(ii) considérons un compact K inclus dans $\overset{o}{\text{dom}}(f)$. Pour tout point k de K , on considère un voisinage C_k de k qui est un pavé ouvert :

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |k_i - x_i| < r, r > 0, 1 \leq i \leq n\}$$

et tel que :

$$C_k \subset C'_k \subset \overline{C'_k} \subset \overset{o}{\text{dom}}(f),$$

où

$$C'_k = \{x \mid |k_i - x_i| < r' \quad \text{avec} \quad 0 < r < r'.$$

Les C_k constituent un recouvrement ouvert de K ; on peut donc en extraire un sous recouvrement fini : C_{k_i} , $i=1, \dots, p$. Sur les $\overline{C'_{k_i}}$ les f_n sont toutes finies au delà d'un certain rang, puisque pour n assez grand les sommets des $\overline{C'_{k_i}}$ sont dans $\overset{o}{\text{dom}}(f_n)$. Donc pour n assez grand, f_n , f sont finies et convexes sur chaque C'_{k_i} ; d'après un théorème de convergence ⁷ : les f_n convergent vers f uniformément sur tout compact de C'_{k_i} . Donc f_n converge vers f uniformément sur chaque $\overline{C'_{k_i}}$. D'où f_n converge vers f uniformément sur K .

—X—

⁷ Rockafellar [5, p. 90, Théorème 10.8] : Si C est un convexe relativement ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f_i une suite de fonctions convexes de C dans $\mathbb{R}$ qui converge ponctuellement sur une partie partout dense C' de C (i.e., pour tout x dans C' , $f_i(x)$ a une limite finie dans $\mathbb{R}$), alors pour tout x dans C , $f_i(x)$ converge dans $\mathbb{R}$, la fonction limite f est convexe et f_i converge vers f uniformément sur tout compact inclus dans C .

REMARQUE 4.11.

On peut trouver une suite f_n qui converge ponctuellement vers f dans $\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$ sans que la convergence soit uniforme sur tout compact.

EXEMPLE.

Sur $\Gamma_1(\mathbb{R})$ prenons :

$$f = X_{[-1, +1]}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq +1 \\ n(x-1) & \text{si } x \geq +1 \\ -n(x+1) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.12.

Soit f_n une suite convergeant ponctuellement vers f dans $\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$;
supposons en outre que f est inf-compacte et que $f(0) = 0 = \inf f$.
Alors :

- (i) $\exists n_0, \forall n \geq n_0 : f_n$ est inf-compacte.
- (ii) $\forall \eta > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : f_n \geq -\eta$.

DEMONSTRATION

Remarquons qu'on ne peut affirmer que 0 appartient à $\overset{o}{\text{dom}}(f)$.

Dans le cas où 0 appartient à $\overset{o}{\text{dom}}(f)$, on peut donner une démonstration plus simple que celle qui va suivre.

- (i) Prenons z dans $\overset{o}{\text{dom}}(f)$ et notons $\bar{B}(z, r)$ une boule fermée de centre z et de rayon r ($r > 0$), incluse dans $\overset{o}{\text{dom}}(f)$. Soit

$$M = \sup \{f(x) \mid x \in \bar{B}\},$$

M est réel, puisque f est continue sur $\overset{o}{\text{dom}}(f)$. D'après la Proposition 4.10 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x \in \bar{B} :$$

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon .$$

Prenons un réel A, $A > 0$ et $A > M + \varepsilon$. Comme f est inf-compacte, l'ensemble $K_1 = \{x \mid f(x) \leq A\}$ est compact, donc inclus dans une boule ouverte $B(z, \rho)$ où on peut toujours supposer $\rho > r$. Considérons la sphère $S(z, \rho')$, avec $\rho' > \rho$; prenons un point a sur la sphère $S(z, \rho)$; on a $f(a) > A$. Donc pour n assez grand ($n \geq n_a$), les f_n vérifieront : $f_n \leq M + \varepsilon$ sur $\bar{B}(z, r)$ et $f_n(x) > A$.

Soit ℓ_a la forme affine égale à A en a et à $M + \varepsilon$ sur le sous-espace orthogonal à a-z passant par z (notons le V_a); notons C_a la symétrique par rapport à a du cône fermé de sommet a s'appuyant sur $V_a \cap \bar{B}(z, r)$. Alors, d'après la convexité des f_n , pour $n \geq n_a$, nous aurons $f_n \geq \ell_a$ sur C_a . Lorsque a parcourt $S(z, \rho)$, les $C_a \cap S(z, \rho')$ constituent un recouvrement ouvert du compact $S(z, \rho')$. On en extrait un sous-recouvrement fini, pour $a=a_1, \dots, a_p$. On montre alors que pour $n \geq \sup \{n_{a_i} \mid i=1, \dots, p\}$ et pour $\|x-z\| \geq \rho'$, on a :

$$f_n(x) \geq \sup_{i=1, \dots, p} \ell_{a_i}(x) .$$

Ceci, étant donné qu'on peut toujours rajouter des points a_i , permet de conclure à l'inf-compactité des f_n pour n assez grand.

(ii) Considérons toujours le même point z dans $\overset{o}{\text{dom}}(f)$, et conservons la construction faite en (i) conduisant à un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$: $f_n \geq \sup_{i=1, \dots, p} \ell_{a_i}$ sur l'ensemble $\{x \mid \|x-z\| \geq \rho'\}$. En particulier on aura $f_n \geq A$ pour $\|x-z\| \geq \rho'$.

Nous allons maintenant chercher à minorer les fonctionnelles f_n , pour n assez grand, sur l'ensemble $\{x \mid \|x-z\| \leq \rho'\}$.

Notons $C = \overline{\text{dom}(f)} \cap \bar{B}(z, \rho')$; c'est un convexe compact d'intérieur non vide ($z \in \overset{\circ}{C}$). Notons p la jauge du convexe $C-z$, p est sous linéaire et continue et $C-z = \{x \mid p(x) \leq 1\}$. Comme $C-z$ est contenu dans $\bar{B}(0, \rho')$, on a : pour tout u tel que $\|u\| = 1$, $p(u) \geq 1/\rho' > 0$. Pour tout u tel que $\|u\| = 1$, le point $z + u/p(u)$ est le point unique de l'intersection de la frontière de C avec $D_z^+(u)$, où $D_z^+(u) = \{z + \lambda u \mid \lambda \geq 0\}$.

Prenons ξ , $1 > \xi > 0$, et considérons les ensembles :

$$E_\xi = \{x \mid p[(1-\xi)(x-z)] \leq 1\}$$

$$I_\xi = \{x \mid p[(1+\xi)(x-z)] \leq 1\}$$

$$S_\xi = \{x \mid p[(1-\xi)(x-z)] = 1\}.$$

Prenons alors ξ' , $0 < \xi' < \xi$; pour tout point a dans $S_{\xi'}$, on a $f(a) > A$ car a n'appartient pas à C . Donc il existe n_a tel que : $\forall n \geq n_a$: $f_n \geq \ell_a$ sur C_a (donc $f_n \geq A$ sur C_a). Les $\overset{\circ}{C}_a \cap S_\xi$ constituent un recouvrement ouvert du compact S_ξ ; on peut donc en extraire un sous recouvrement fini, pour $a = a_1, \dots, a_q$. On en déduit que pour

$n \geq n_1 = \sup (n_0, n_{a_i})$, $f_n(x) \geq A$ pour tout x tel que $p[(1-\xi)(x-z)] \geq 1$.

D'autre part, comme I_ξ est un compact inclus dans $\overline{\text{dom}(f)}$, f_n converge uniformément vers f sur I_ξ . D'où :

$$\exists n_2, \forall n \geq n_2, \forall x \in I_\xi :$$

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Pour $n \geq n_3 = \sup (n_1, n_2)$, on a donc : $f_n \geq A$ à l'extérieur de S_ξ ,

$$f - \varepsilon \leq f_n \leq f + \varepsilon \text{ sur } I_\xi.$$

Il reste à minorer les f_n sur l'ensemble

$$\{z + \frac{1}{\lambda} \frac{u}{p(u)} \mid \|u\| = 1, 1 - \xi < \lambda < 1 + \xi\}.$$

Si $x = z + (1/\lambda) u/p(u)$ avec $1 - \xi < \lambda < 1 + \xi$, notons $\bar{x}$ le point $z + (1/(1+\xi)) u/p(u)$, alors $\bar{x} \in I_\xi$ et on a :

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{1+\xi} x + (1 - \frac{\lambda}{1+\xi}) z, \quad 0 < \frac{\lambda}{1+\xi} < 1.$$

D'où :

$$\forall n \geq n_3 : f_n(\bar{x}) \leq \frac{\lambda}{1+\xi} f_n(x) + (1 - \frac{\lambda}{1+\xi}) f_n(z)$$

soit :

$$f_n(x) \geq \frac{1+\xi}{\lambda} f_n(\bar{x}) - (\frac{1+\xi}{\lambda} - 1) f_n(z)$$

et, comme : $f_n(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon$ et $-f_n(z) \geq -f(z) - \varepsilon$; on en déduit :

$$f_n(x) \geq (1 - \frac{1+\xi}{1-\xi}) f(z) - 2\varepsilon \frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

On veut avoir :

$$\frac{2\xi}{1-\xi} f(z) + 2\varepsilon \frac{1+\xi}{1-\xi} < \eta$$

pour cela choisissons d'abord ε tel que : $2\varepsilon(1 + \frac{1}{2})/(1 - \frac{1}{2}) < \eta / 2$, soit $\varepsilon < \eta / 12$; et prenons ensuite ξ tel que : $(2\xi/(1-\xi)) f(z) < \eta / 2$ et $\xi < \frac{1}{2}$, soit $\xi < (\eta / 2)/(2f(z) + \eta/2)$ et $\xi < \frac{1}{2}$.

—————X—————

Fin de la démonstration 4.12.

On en déduit maintenant facilement le Théorème 4.7. de cette proposition, en procédant de manière analogue à celle que nous avons utilisée pour passer du Lemme 4.4. à la Proposition 4.3.

REMARQUE 4.13.

Montrons par un exemple que nous n'avons pas $\mathcal{C}_{TT'} \geq \mathcal{C}_s$ sur $\Gamma_1(\mathbb{R})$. Considérons les fonctionnelles :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{pour } x \leq 0 \\ 0 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{pour } x \leq 0 \\ -1/(n+1)x & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

f_n converge ponctuellement vers f dans $\Gamma_1(\mathbb{R})$; donc f_n converge vers f pour $\mathcal{C}_{TT'}$. D'où f_n^* converge vers f^* pour $\mathcal{C}_{T,T}$; mais $f_n^*(0)$ ne tend pas vers $f^*(0)$, car :

$$f^*(0) = -\inf f = 0, \quad f_n^*(0) = -\inf f_n = +\infty.$$

REMARQUE 4.14.

On peut en fait montrer que : $\mathcal{C}_s \geq \mathcal{C}_{TT'}$ sur $\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$.
On peut aussi montrer que $\mathcal{C}_s = \mathcal{C}_c$ sur $\Gamma_{1,R}(\mathbb{R}^n)$.

Récapitulons les résultats obtenus :

$\Gamma_1(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{C}_c \geq \mathcal{C}_s \geq \mathcal{C}_{TT'}$
$\Gamma_{1,R}(\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_s = \mathcal{C}_{TT'}$

CHAPITRE II

SOUS-DIFFERENTIABILITE AU SENS DE FRECHET ET CONVERGENCE DE SOUS-DIFFERENTIELS

I - INTRODUCTION

Sur R^n , on a le résultat de convergence suivant : soit f_n une suite de fonctions convexes à valeurs réelles définies sur un convexe ouvert C , convergeant ponctuellement vers une fonction f . Soit x un point de C ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U(x)$ voisinage ouvert de x dans C et un entier n_0 , tels que : pour tout z dans $U(x)$ et pour tout n supérieur ou égal à n_0 , on ait :

$$\partial f_n(z) \subset \partial f(x) + \varepsilon \bar{B}(0,1) ,$$

où $\partial f(x)$ désigne le sous-différentiel de f en x et $\bar{B}(0,1)$ la boule unité fermée de R^n .

On trouvera la démonstration de ce résultat dans ROCKAFELLAR [5] .

Le but de ce chapitre est d'étudier ce que devient ce résultat si nous remplaçons R^n par un espace de Banach réel. Nous mettons en évidence le rôle essentiel joué par la sous-différentiabilité au sens de Fréchet de la fonctionnelle limite f .

II - SOUS-DIFFERENTIABILITE AU SENS DE FRECHET.

Nous montrons dans ce paragraphe que l'on peut donner trois définitions de la sous-différentiabilité au sens de Fréchet équivalentes à celle donnée par VALADIER [10]; montrant ainsi que la situation est analogue à celle décrite dans ASPLUND et ROCKAFELLAR [8] pour la Fréchet différentiabilité.

E désigne un espace de Banach réel, E^* son dual topologique, f une fonctionnelle sur E , convexe, semi-continue inférieurement, propre et telle que l'intérieur de $\text{dom}(f)$ soit non vide. x désigne un point de $\overset{\circ}{\text{dom}}(f)$.

On note : $f'(x, h) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}$.

$$\partial_{\varepsilon} f(x) = \{y \in E^* \mid f(z) \geq f(x) + \langle z - x, y \rangle - \varepsilon \ (\forall z)\} \quad , \quad \varepsilon \geq 0 .$$

THEOREME 2.1

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f(x+h) = f(x) + f'(x, h) + \varepsilon(h)\|h\|$, avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.
- (ii) $\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$ converge vers $f'(x, h)$, uniformément pour h dans $\bar{B}(0, 1)$, (lorsque $\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0$).
- (iii) $\forall \delta > 0, \exists \alpha > 0, \forall \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \alpha$:

$$\partial_{\varepsilon} f(x) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}(0, 1) .$$
- (iv) $\forall \delta > 0, \exists U(x)$ voisinage ouvert de x tel que :

$$\forall z \in U(x) : \partial f(z) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}(0, 1) .$$

DEFINITION 2.2.

On dit que f est sous-différentiable au sens de Fréchet (ou Fréchet-sous-différentiable) en x si l'une des quatre conditions ci-dessus est vérifiée.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1.

On va montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) .

(i) $\Rightarrow$ (ii) démonstration immédiate.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) pour démontrer que $\partial_\varepsilon f(x) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}$, il suffit de démontrer que $\sigma_{\partial_\varepsilon f(x)} \leq \sigma_{(\partial f(x) + \delta \bar{B})}$, où σ_C désigne la fonction

d'appui de C : $\sigma_C(u) = \sup_{y \in C} \langle u, y \rangle$.

Il est facile de vérifier que

$$\sigma_{(\partial f(x) + \delta \bar{B})}(u) = \sigma_{\partial f(x)}(u) + \delta \|u\| .$$

On veut donc démontrer que :

$\forall \delta > 0, \exists \alpha > 0, \forall \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \alpha, \forall u \in E :$

$$\sup_{y \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle u, y \rangle \leq \sup_{y \in \partial f(x)} \langle u, y \rangle + \delta \|u\| .$$

$\delta > 0$ étant donné, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que : $\forall \lambda \quad 0 < \lambda \leq \lambda_0, \forall v \in \bar{B} :$

$$\frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda} \leq f'(x, v) + 1/2 \delta \quad (\text{d'après (ii)}) .$$

Prenons $\alpha = 1/2 \delta \lambda_0$, alors $\forall \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \alpha$ on a :

$$\forall y \in \partial_\varepsilon f(x), \forall u \in E : f(x+u) \geq f(x) + \langle u, y \rangle - \varepsilon .$$

D'où $\sup_{y \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle u, y \rangle \leq f(x+u) - f(x) + \varepsilon$, appliquons ceci à $u = \lambda_0 v, v \in \bar{B}$.

En divisant par λ_0 , il vient :

$$\sup_{y \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle v, y \rangle \leq \frac{f(x+\lambda_0 v) - f(x)}{\lambda_0} + \frac{\varepsilon}{\lambda_0} .$$

On a donc : $\sup_{y \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle v, y \rangle \leq f'(x, v) + 1/2 \delta + \frac{\varepsilon}{\lambda_0} \leq f'(x, v) + \delta$,

et comme $f'(x, v) = \sup_{y \in \partial f(x)} \langle v, y \rangle$, on obtient finalement :

$$\forall u \in E : \sup_{y \in \partial_\varepsilon f(x)} \langle u, y \rangle \leq \sup_{y \in \partial f(x)} \langle u, y \rangle + \delta \|u\| .$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Nous aurons besoin d'un résultat classique sur les fonctionnelles convexes (MOREAU [4]). Citons :

LEMME 2.3.

Soient E et E' deux espaces vectoriels réels en dualité séparante, $\mathcal{C}$ une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe séparée et compatible sur E , f une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement, propre et continue (pour $\mathcal{C}$) sur $\overset{\circ}{\text{dom}}(f)$ (supposé non vide). Alors, pour tout x dans $\overset{\circ}{\text{dom}}(f)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U , voisinage ouvert de x , tel que $\bigcup_{z \in U} \partial_{\varepsilon} f(z)$ soit une partie $\mathcal{C}$ -équicontinue de E' .

Donnons nous $\delta > 0$; d'après (iii) il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout ε , $0 \leq \varepsilon < \alpha$: $\partial_{\varepsilon} f(x) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}$.

Pour démontrer (iv) il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V voisinage ouvert de x tel que : $\forall z \in V \quad \partial f(z) \subset \partial_{\varepsilon} f(x)$.

Puisque E est un espace de Banach, f est continue sur $\overset{\circ}{\text{dom}}(f)$; on peut donc trouver U , voisinage ouvert de x , tel que :

$$\forall z \in U : |f(z) - f(x)| < 1/2 \varepsilon$$

et $L = \bigcup_{z \in U} \partial f(z)$ soit équicontinue.

Puisque L est équicontinue, il existe Ω voisinage équilibré de 0 tel que :

$$\forall u \in \Omega, \forall y \in L : |\langle u, y \rangle| < 1/2 \varepsilon.$$

Considérons $V = U \cap (x + \Omega)$, soit z un point de V et y un élément de $\partial f(z)$, on a : $\langle x - z, y \rangle > -1/2 \varepsilon$; d'où :

$$\forall u \in E \quad f(u) \geq f(z) + \langle u - z, y \rangle \geq f(z) + \langle u - x, y \rangle - 1/2 \varepsilon$$

et comme $f(z) \geq f(x) - 1/2 \varepsilon$, on obtient finalement :

$$\forall u \in E \quad f(u) \geq f(x) + \langle u - x, y \rangle - \varepsilon, \text{ soit } y \in \partial_{\varepsilon} f(x).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) est un peu plus délicat à voir, nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires, qui ne sont que la formule des accroissements finis dans le cas de fonctions convexes non différentiables.

LEMME 2.4.

Soit g une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement, propre, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $[0,1] \subset \overline{\text{dom}}(g)$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que : $g(1) - g(0) \in \partial g(\theta)$.

DEMONSTRATION DU LEMME 2.4.

$$\text{On a : } g'_+(0) = \inf_{\lambda > 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} \leq g(1) - g(0)$$

$$g'_-(1) = \sup_{\lambda > 0} \frac{g(1) - g(1-\lambda)}{\lambda} \geq g(1) - g(0)$$

on peut supposer que les deux inégalités sont strictes, car s'il y avait égalité dans un des cas, g serait affine sur $[0,1]$, auquel cas le lemme est trivial. Il nous suffit de montrer que la droite $y = g(1) - g(0)$ coupe le graphe de la multi-application $x \mapsto \partial g(x)$, $x \in]0,1[$; or ce graphe est connexe (il est même connexe par arcs) et coupe les deux demi-espaces ouverts déterminés par la droite ; il coupe donc la droite.

—x—

LEMME 2.5.

Soit f une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre sur un espace de Banach E , soient x et $x+h$ deux points de $\overline{\text{dom}}(f)$, alors, il existe $\theta \in]0,1[$ et $y_h \in \partial f(x+\theta h)$ tels que :

$$f(x+h) = f(x) + \langle h, y_h \rangle .$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2.5.

Considérons la fonction $g(t) = f(x+th)$, $t \in \mathbb{R}$, elle vérifie les hypothèses du LEMME 2.4. ; on peut donc écrire :

$$f(x+h) - f(x) = m, \quad m \in \partial g(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Il s'agit maintenant de montrer que m est de la forme $\langle h, y_h \rangle$, avec $y_h \in \partial f(x+\theta h)$.

Considérons le convexe ouvert $\Omega = \overline{\text{épi}}^{\circ}(f)$; puisque E est un espace de Banach, on a :

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \overline{\text{dom}}^{\circ}(f) \text{ et } \lambda > f(x)\}.$$

Soit A le sous-espace affine de $E \times \mathbb{R}$:

$$A = \{(x+th, f(x+\theta h) + (t-\theta)m) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

on a $\Omega \cap A = \emptyset$, et d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan affine fermé H contenant A et ne rencontrant pas Ω .

Il est facile de voir que H n'est pas vertical et qu'il peut s'écrire :

$$H = \{(u, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda = a + \langle u, y \rangle\},$$

et en remarquant que H passe par le point $(x+\theta h, f(x+\theta h))$, on l'écrit :

$$H = \{(u, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda = f(x+\theta h) + \langle u - (x+\theta h), y \rangle\}.$$

D'autre part, l'épigraphe de f , qui est égal à l'adhérence de son intérieur, est contenu dans le demi-espace fermé supérieur délimité par H ; on a donc :

$$\forall z \in E : f(z) \geq f(x+\theta h) + \langle z - (x+\theta h), y \rangle$$

d'où $y \in \partial f(x+\theta h)$; écrivons $y = y_h$ et calculons $\langle h, y_h \rangle$.

On sait que H contient A , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(x+\theta h) + (t-\theta)m = f(x+\theta h) + \langle x+th - (x+\theta h), y_h \rangle$$

ceci entraîne que $m = \langle h, y_h \rangle$.

Passons maintenant à la démonstration de l'implication
(iv) $\Rightarrow$ (i).

Considérons la fonction ε définie par :

$$\varepsilon(0) = 0$$

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|} [f(x+h) - f(x) - f'(x,h)] \quad , \quad \text{si } h \neq 0$$

on a $\varepsilon(h) \geq 0$ pour tout h ; en effet :

$$f(x+h) \geq f(x) + \langle h, y \rangle \quad , \quad \forall y \in \partial f(x)$$

d'où

$$f(x+h) - f(x) \geq \sup_{y \in \partial f(x)} \langle h, y \rangle = f'(x,h) \quad .$$

Supposons $h \neq 0$, d'après le LEMME 2.5., il existe $\theta \in]0,1[$ et $y_h \in \partial f(x+\theta h)$ tels que :

$$\varepsilon(h) = \langle \frac{h}{\|h\|} , y_h \rangle - f'(x, \frac{h}{\|h\|})$$

et comme

$$\langle \frac{h}{\|h\|} , y_h \rangle \leq \sup_{y \in \partial f(x+\theta h)} \langle \frac{h}{\|h\|} , y \rangle = \sigma_{\partial f(x+\theta h)} \left(\frac{h}{\|h\|} \right)$$

on a donc :

$$\varepsilon(h) \leq \sigma_{\partial f(x+\theta h)} \left(\frac{h}{\|h\|} \right) - \sigma_{\partial f(x)} \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \quad .$$

D'après (iv), pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un voisinage équilibré de 0, U , tel que pour tout z dans $x + U$ on ait : $\partial f(z) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}$,
donc pour tout h dans U : $\partial f(x+\theta h) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}$, ce qui entraîne :

$$\sigma_{\partial f(x+\theta h)} \leq \sigma_{\partial f(x)} + \delta \| \cdot \| \quad .$$

D'où pour tout h non nul dans U on a :

$$\varepsilon(h) \leq \sigma_{\partial f(x)} \left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \delta \left\| \frac{h}{\|h\|} \right\| - \sigma_{\partial f(x)} \left(\frac{h}{\|h\|} \right)$$

soit $\varepsilon(h) \leq \delta$, et l'implication est démontrée.

EXEMPLE 2.6.

Si $E = \mathbb{R}^n$, toute fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre est Fréchet-sous-différentiable en tout point de l'intérieur de son domaine. En effet pour vérifier que

$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$ converge vers $f'(x, h)$ uniformément sur $\bar{B}$, il suffit d'appliquer le lemme de Dini.

REMARQUE 2.7.

Si le sous différentiel de f au point x est réduit à un élément, dire que f est Fréchet-sous-différentiable en x revient à dire que f est Fréchet-différentiable en x .

EXEMPLE 2.8.

Pour donner un exemple où il n'y a pas sous-différentiabilité au sens de Fréchet, il suffit d'exhiber une fonctionnelle f dont le sous-différentiel en un point intérieur au domaine soit réduit à un élément, f n'étant pas Fréchet-différentiable en ce point. On en trouvera un exemple dans VALADIER [10]; citons :

$$E = \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}),$$

$$f(x) = \sup \{ \|x\|^2, |x_n|^{1 + \frac{1}{n}}, n \geq 1 \}.$$

On vérifie facilement que f est convexe continue sur E , que son sous-différentiel en 0 est $\{0\}$, mais que f n'est pas Fréchet-dérivable en 0.

III - CONVERGENCE DE SOUS-DIFFÉRENTIELS.

1°) CONVERGENCE FAIBLE

Soit E un espace de Banach réflexif réel, on note $\Gamma_0(E)$ l'ensemble des fonctionnelles convexes, semi-continues inférieurement et propres.

Si S_n est une suite de parties de E (respectivement E^*) et $\mathcal{C}$ une topologie sur E (respectivement E^*), on note :

$$\mathcal{C}\text{-}\underline{\text{Lim}} S_n = \{v \in E \mid v = \mathcal{C}\text{-}\lim v_n, v_n \in S_n\}$$

$$\overline{\mathcal{C}\text{-}\text{Lim}} S_n = \{v \in E \mid v = \mathcal{C}\text{-}\text{Lim} v_k, v_k \in S_{n_k} \text{ (sous suite)}\}.$$

THEOREME 3.1.

Soit f_n une suite d'éléments de $\Gamma_0(E)$ convergeant ponctuellement¹ vers un élément f de $\Gamma_0(E)$ tel que $\overline{\text{dom}(f)} \neq \emptyset$, soit x un point de $\overline{\text{dom}(f)}$; alors pour n assez grand, x appartient à $\overline{\text{dom}(f_n)}$, de plus $\sigma\text{-}\overline{\lim} \partial f_n(x)$ est un ensemble non vide contenu dans $\partial f(x)$ (σ désigne la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ sur E^*).

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.1.

La démonstration du premier point figure dans le chapitre I (proposition 3.13.).

D'après le premier point, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $x \in \overline{\text{dom}(f_n)}$. Montrons que $\sigma\text{-}\overline{\lim} \partial f_n(x)$ est non vide; pour tout n supérieur ou égal à n_0 , $\partial f_n(x)$ est non vide, soit donc $y_n \in \partial f_n(x)$; on a :

$$\forall u : f_n(x+u) \geq f_n(x) + \langle u, y_n \rangle$$

soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \overline{\text{dom}(f)}$, alors, pour tout u , $\|u\| \leq \varepsilon$, $f_n(x+u) - f_n(x)$ converge vers $f(x+u) - f(x)$. On en déduit :

$$(\forall u) \quad \sup_n \langle u, y_n \rangle < +\infty$$

et d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il s'ensuit que la suite y_n est bornée en norme, on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente (les boules fermées de E^* sont faiblement séquentiellement compactes). La limite y de cette sous-suite est un élément de $\sigma\text{-}\overline{\lim} \partial f_n(x)$. Il est d'autre part très facile de vérifier en passant à la limite que $\sigma\text{-}\overline{\lim} \partial f_n(x) \subset \partial f(x)$.

¹ Il suffit que $\forall x \in \overline{\text{dom}(f)} \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$.

COROLLAIRE 3.2.

Si on suppose en outre que $\partial f(x) = \{y\}$, alors si y_n est une suite telle que $y_n \in \partial f_n(x)$, y_n converge faible étoile vers y .

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.2.

La suite y_n est bornée ; d'après le théorème, de toute sous-suite de y_n on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers y , la suite y_n converge donc faiblement vers y .

REMARQUE 3.3.

En dehors du cas où $\partial f(x)$ est réduit à un élément, généralement $\sigma\text{-}\lim \partial f_n(x)$ n'est pas égal à $\partial f(x)$.

2°) CONVERGENCE FORTE.

Commençons par considérer des exemples qui vont nous aider à préciser les hypothèses.

EXEMPLE 3.4.

Soit $E = \ell^2_{\mathbb{R}}(N)$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable, muni du produit scalaire usuel noté $(\cdot, \cdot)$. Considérons les fonctions : $f_n(x) = (x, e_n)$, où e_n désigne la base Hilbertienne canonique de E . Alors f_n converge ponctuellement vers 0, $\partial f_n(0) = e_n$, on a seulement la convergence faible des dérivées vers 0.

EXEMPLE 3.5.

Soit f une fonction convexe continue, partout finie sur un espace de Banach E ; on suppose que le sous-différentiel de f est partout réduit à un élément. Soit x_n une suite tendant vers 0 dans E , considérons les fonctions $f_n(x) = f(x+x_n)$, comme la fonction f est localement Lipschitzienne, les fonctions f_n convergent vers f uniformément sur une boule fermée $\bar{B}(0, r)$, $r > 0$. On a d'autre part :

$$\partial f_n(0) = \partial f(x_n) = \{y_n\}$$

$$\partial f(0) = \{y\}$$

une condition naturelle pour que y_n converge fortement vers y est que la fonction f soit Fréchet-différentiable en 0 (voir ASPLUND [7]) ; en effet dire que f est Fréchet-différentiable en 0 équivaut à dire que l'application $x \rightarrow \partial f(x)$ est fortement continue de E dans E^* , au point 0.

Le théorème principal que nous allons démontrer est le suivant :

THEOREME 3.6.

Soient f_n, f des éléments de $\Gamma_0(E)$ (E espace de Banach) on suppose que f est finie sur une boule fermée de centre x et de rayon r strictement positif, et que :

- (i) f_n converge vers f uniformément sur $\bar{B}(x, r)$
- (ii) f est Fréchet-sous-différentiable en x .

Alors : $\forall \delta > 0$, $\exists n_0$, $\exists U$ voisinage ouvert de x , tels que :

$$\forall n \geq n_0, \forall z \in U : \partial f_n(z) \subset \partial f(x) + \delta \bar{B}(0, 1).$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.6.

On peut supposer que $x = 0$ et que $f_n(0) = f(0) = 0$.
Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.7.

On se place dans les hypothèses du théorème (sauf (ii)) avec $x = 0$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall z \in B(0, 1/2 r) :$$

$$\partial f_n(z) \subset \partial_\varepsilon f(z) + 2 \frac{\varepsilon}{r} \bar{B}(0, 1).$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.7.

Soit n_0 un entier tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 on ait :

$$\forall u \in \bar{B}(0, r) : f(u) - 1/2 \varepsilon < f_n(u) < f(u) + 1/2 \varepsilon .$$

Soit $z \in B(0, 1/2 r)$ et $y_n \in \partial f_n(z)$, on a :

$$\forall v \in E : f_n(v) \geq f_n(z) + \langle v-z, y_n \rangle ,$$

d'où $\forall v \in \bar{B}(0, r) : f(v) > f(z) + \langle v-z, y_n \rangle - \varepsilon .$

Considérons les deux convexes de $E \times \mathbb{R}$, $A = \text{épigraphe de } f$,

$$B_z = \{(x, \lambda) \mid x \in B(z, 1/2r) \text{ et } \lambda < f(z) + \langle x-z, y_n \rangle - \varepsilon\};$$

A est un convexe fermé non vide et B_z est un convexe ouvert non vide, de plus il est facile de voir que A et B_z ne se coupent pas ; d'après le théorème de Hahn-Banach on peut les séparer par un hyperplan fermé, A étant contenu dans un demi-espace fermé et B_z contenu dans l'autre demi-espace ouvert. Il est immédiat de constater que l'hyperplan en question ne peut pas être "vertical" et qu'il peut être représenté par l'équation :

$$\lambda = f(z) + \langle x-z, e_z \rangle - r_z , \quad e_z \in E' , r_z \in \mathbb{R} .$$

$$\text{On a : } (1) \quad A \subset \{(x, \lambda) \mid f(z) + \langle x-z, e_z \rangle - r_z \leq \lambda\}$$

$$(2) \quad B_z \subset \{(x, \lambda) \mid f(z) + \langle x-z, e_z \rangle - r_z > \lambda\}$$

on déduit de (1) que $e_z \in \partial_{r_z} f(z)$ (ceci entraîne $r_z \geq 0$) ;

on déduit de (2) que $\forall x \in B(z, 1/2r) :$

$$f(z) + \langle x-z, y_n \rangle - \varepsilon \leq f(z) + \langle x-z, e_z \rangle - r_z , \text{ ce qui nous donne}$$

$$\langle x-z, y_n \rangle - \varepsilon \leq \langle x-z, e_z \rangle - r_z , \text{ ce qui entraîne } 0 \leq r_z \leq \varepsilon$$

$$\text{on obtient donc : } e_z \in \partial_{\varepsilon} f(z) \text{ et } \forall v \in \bar{B}(0, 1/2r) : \langle v, y_n - e_z \rangle \leq \varepsilon .$$

Exploitions cette dernière inégalité .

$$\text{Elle donne : } \sup_{v \in \bar{B}(0, 1/2r)} \langle v, y_n - e_z \rangle \leq \varepsilon , \text{ d'où } \|y_n - e_z\| \leq 2 \frac{\varepsilon}{r} .$$

On peut donc écrire : $y_n = e_z + (y_n - e_z)$, donc y_n appartient à $\partial_\varepsilon f(z) + 2 \frac{\varepsilon}{r} \bar{B}(0,1)$.

Nous avons besoin maintenant d'un résultat de continuité par démontré par ASPLUND et ROCKAFELLAR [8] .

Nous notons par $\bar{E}^*$ l'ensemble des parties convexes $\sigma(E^*, E)$ fermées, $\sigma(E^*, E)$ bornées et non vides de E^* ; nous munissons $\bar{E}^*$ de la topologie de Hausdorff, c'est-à-dire qu'un système fondamental de voisinages d'un élément C est donné par :

$$V(C, \varepsilon) = \{D \in \bar{E}^* \mid D \subset C + \varepsilon \bar{B} \text{ et } C \subset D + \varepsilon \bar{B}\}$$

où $\varepsilon > 0$ et $\bar{B}$ est la boule unité fermée de E^* .

Enonçons le résultat :

PROPOSITION 3.8.

Soit E un espace de Banach réel, E^* son dual topologique, f une fonctionnelle de $\Gamma_0(E)$ dont l'intérieur du domaine est non vide, alors l'application $(x, a) \mapsto \partial_a f(x)$ est continue de $\widehat{\text{dom}}(f) \times]0, +\infty[$ (muni de la topologie produit) dans $\bar{E}^*$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.8.

Voir [8] .

A l'aide de cette proposition on va améliorer le lemme 3.7.

LEMME 3.9.

On se place dans les hypothèses du lemme 3.7.

Alors : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\exists \rho > 0$, $\forall n \geq n_0$, $\forall z \in B(0, \rho)$:

$$\partial f_n(z) \subset \partial_\varepsilon f(0) + 3 \frac{\varepsilon}{r} \bar{B}(0,1) .$$

DEMONSTRATION DU LEMME 3.9.

L'application $z \mapsto \partial_\varepsilon f(z)$ est continue de $B(0,r)$ dans $\bar{E}^*$, d'après la proposition 3.8., on peut donc trouver ρ , $0 < \rho < 1/2 r$, tel que pour tout z dans $B(0,\rho)$, $\partial_\varepsilon f(z)$ appartienne à $V(\partial_\varepsilon f(0), \frac{\varepsilon}{r})$, on a alors :

$$\partial_\varepsilon f(z) \subset \partial_\varepsilon f(0) + \frac{\varepsilon}{r} \bar{B}(0,1) ,$$

et le lemme est démontré.

Achevons la démonstration du THEOREME 3.6.

D'après le théorème 2.1. (iii) :

$\forall \delta > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon < \alpha$:

$$\partial_\varepsilon f(0) \subset \partial f(0) + \frac{\delta}{2} \bar{B}(0,1) .$$

Choisissons ε tel que $0 < \varepsilon < \inf(\alpha, r \frac{\delta}{6})$, d'après le lemme 3.9. :

$\exists n_0$, $\exists \rho > 0$, $\forall n \geq n_0$, $\forall z \in B(0,\rho)$:

$$\partial f_n(z) \subset \partial f(0) + \delta \bar{B}(0,1) ;$$

et le théorème est ainsi démontré.

—X—

REMARQUE 3.10.

Si E est égal à $\mathbb{R}^n$, le théorème 3.6. redonne, bien sûr, le résultat cité dans l'introduction ; en effet d'après l'exemple 2.6. la condition (ii) est automatiquement vérifiée, et, en dimension finie, la convergence simple des fonctions convexes sur C entraîne la convergence uniforme sur tout compact contenu dans C .

CHAPITRE III

EXEMPLES D'APPLICATIONS

I - CONVERGENCE DE SOLUTIONS DE PROBLEMES D'OPTIMISATION EN DIMENSION FINIE.

Etant donnée une fonction f dans $\Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ et une suite f_n d'éléments de $\Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ convergeant vers f (dans un sens précisé plus loin), nous allons étudier le comportement des solutions des problèmes (P_n) : minimiser $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^m$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Mosco (voir [11]) a donné des résultats de convergence de solutions dans des espaces de Banach réflexifs avec des hypothèses fortes de "coercivité uniforme" des fonctionnelles. Nous montrons ici que dans le cas de la dimension finie des hypothèses faibles suffisent à assurer une bonne convergence des solutions. Nous donnerons des résultats relatifs à la convergence au sens de Mosco ainsi qu'à la convergence ponctuelle.

a) Convergence au sens de Mosco et convergence ponctuelle.

DEFINITION 1.1.

On dit qu'une suite f_n de $\Gamma_0(E)$ converge au sens de Mosco vers f , $f \in \Gamma_0(E)$ (E désigne un espace de Banach réflexif réel), si pour tout $x \in E$ on a :

- (i) il existe une suite x_n convergeant fortement vers x telle que $\limsup f_n(x_n) \leq f(x)$.

- (ii) pour toute sous-suite f_{n_k} de f_n et pour toute suite y_k convergeant faiblement vers x , on a :

$$\liminf f_{n_k}(y_k) \geq f(x).$$

Le résultat essentiel, dû à Joly et Mosco, sur cette convergence est le suivant (voir [1] et [12]) :

THEOREME 1.2.

Soit f_n une suite de $\Gamma_0(E)$, $f \in \Gamma_0(E)$. Alors f_n tend vers f (au sens de Mosco) si et seulement si f_n^* tend vers f^* .

Désormais nous supposons $E = \mathbb{R}^m$. Précisons les rapports entre la convergence au sens de Mosco et la convergence ponctuelle.

EXEMPLE 1.3.

La convergence ponctuelle n'entraîne pas la convergence au sens de Mosco. En effet, prenons $m = 1$, $f = X_{\{0\}}$ (fonctionnelle indicatrice), soit ν_n une suite de nombres < 0 tendant vers 0 et a_n une suite tendant vers $+\infty$, considérons les fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x & \text{si } x > \nu_n \\ a_n (2\nu_n - x) & \text{si } x \leq \nu_n \end{cases}$$

Il est clair que f_n tend ponctuellement vers f . Si nous supposons maintenant que $a_n \nu_n = -1$, on a $\liminf f_n(\nu_n) = -1 < f(0) = 0$. On n'a donc pas convergence au sens de Mosco.

EXEMPLE 1.4.

La convergence au sens de Mosco n'entraîne pas la convergence ponctuelle.

Soit $f = X_{[0,1]}$ et $f_n = X_{[\frac{1}{n}, 1]}$, $n=1,2,\dots$.

Il est facile de vérifier que f_n tend vers f au sens de Mosco. D'autre part, $f_n(0) = +\infty$ pour tout n et $f(0) = 0$.

PROPOSITION 1.5.

Soit $f_n, f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ partout finies, alors si f_n tend vers f ponctuellement, f_n tend vers f au sens de Mosco.

DEMONSTRATION

(i) est trivialement vérifiée en prenant $x_n = x$.

Vérifions (ii). Soit f_{n_k} une sous-suite de f_n et y_k une suite convergeant vers x . Soit r un nombre > 0 telque $\bar{B}(x, r)$ contienne la suite y_k . f_{n_k} converge vers f uniformément sur tout compact donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k \geq k_0 \quad |f_{n_k} - f| < \varepsilon \text{ sur } \bar{B}(x, r).$$

Comme d'autre part f est continue en x , on a :

$$\exists k_1, \forall k \geq k_1 : |f(y_k) - f(x)| < \varepsilon.$$

Et donc pour $k \geq \sup(k_0, k_1)$, on a :

$$|f_{n_k}(y_k) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

— ~~x~~ —

PROPOSITION 1.6.

Soit $f_n, f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, f_n tendant vers f au sens de Mosco et $\overset{o}{\text{dom}} f \neq \emptyset$. On a alors : $\forall x \in \overset{o}{\text{dom}} f : f_n(x) \rightarrow f(x)$.

DEMONSTRATION :

Soit $x \in \overset{o}{\text{dom}} f$, on a, d'après (ii), $\liminf f_n(x) \geq f(x)$; il nous suffit de montrer que $\limsup f_n(x) \leq f(x)$ c'est-à-dire que $\limsup f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Prenons $\varepsilon > 0$, il existe $\Omega_\varepsilon(x)$ voisinage ouvert de x inclus dans $\overset{o}{\text{dom}} f$, tel que pour $z \in \Omega_\varepsilon(x)$ on ait $f(z) < f(x) + \varepsilon$.

Considérons $r > 0$ tel que le cube $|z_i - x_i| \leq r$ soit contenu dans $\Omega_\varepsilon(x)$ et notons $x^1, \dots, x^{2^m}$ les sommets du cube. Pour chaque x^i , il existe une suite $x_n^i \rightarrow x^i$ telle que $f_n(x_n^i) \rightarrow f(x^i)$ (découle de (i) et (ii)) ; donc il existe n_i telque pour $n \geq n_i$ on ait :

$$f(x^i) - \varepsilon \leq f_n(x_n^i) \leq f(x^i) + \varepsilon .$$

Soit $N = \sup n_i$, alors pour $n \geq N$, on a :

$$f_n(x_n^i) \leq f(x^i) + \varepsilon \leq f(x) + 2 \varepsilon \quad (\forall i) .$$

D'autre part, pour n assez grand, x est une combinaison convexe des x_n^i

i.e. $x = \sum \alpha_n^i x_n^i$, $\alpha_n^i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{2^m} \alpha_n^i = 1$. On en déduit :

$$f_n(x) \leq \sum \alpha_n^i f_n(x_n^i) \leq f(x) + 2 \varepsilon$$

d'où $\limsup f_n(x) \leq f(x) + 2 \varepsilon$.

X

b) Résultats de convergence.

Nous allons donner deux théorèmes, l'un relatif à la convergence de Mosco, l'autre relatif à la convergence ponctuelle.

THEOREME 1.7.

Soit $f_n, f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, f_n tendant vers f au sens de Mosco et f inf-compacte. Alors si A désigne l'ensemble des points u tels que $f(u) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$ et A_n l'ensemble analogue pour f_n , on a :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^m} f_n(x) \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$$

et A_n tend vers A au sens suivant : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$:

$A_n \subset A + \varepsilon \bar{B}(0,1)$. Et de plus les A_n sont tous non vides au delà d'un certain rang.

DEMONSTRATION

D'après le théorème 1.2. : Si $f_n \rightarrow f$ au sens de Mosco, f_n^* tend vers f^* au sens de Mosco ; comme f est inf-compact on a

$0 \in \overline{\text{dom } f^*}$ et donc, d'après la proposition 1.6.

$$f_n^*(x) \rightarrow f^*(x) \quad \forall x \in \overline{\text{dom } f^*}$$

d'où $\inf f_n = -f_n^*(0) \rightarrow \inf f = -f^*(0)$.

Il existe alors un nombre $r > 0$ tel que la boule $\bar{B}(0, r)$ soit contenue

dans $\overline{\text{dom } f^*}$ et f_n^* converge vers f^* uniformément sur $\bar{B}(0, r)$. On applique alors le théorème 3.6. du chapitre II d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \partial f_n^*(0) \subset \partial f^*(0) + \varepsilon \bar{B}(0, 1)$$

ce qui donne le résultat, sachant que $A_n = \partial f_n^*(0)$ et $A = \partial f^*(0)$.

Et A_n est non vide au-delà d'un certain rang puisque $0 \in \overline{\text{dom } f_n^*}$ pour n assez grand.

—X—

COROLLAIRE 1.8.

Même conclusion que dans le théorème 1.7. en remplaçant l'hypothèse f inf-compact par f possède un minimum unique.

DEMONSTRATION

Nous allons montrer que si f a un minimum unique u dans $\mathbb{R}^m$, f est inf-compacte. En fait on va montrer que $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. On peut toujours supposer $u = 0$ et $\inf f = 0$.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre $\gamma > 0$ et une suite x_n tels que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$, et $f(x_n) \leq \gamma$.

Considérons la suite $\frac{x_n}{\|x_n\|}$, on peut en extraire une sous-suite convergente que nous noterons u_k , u_k converge vers v de norme 1. On peut toujours supposer que $\|x_n\| \geq 1$ et donc :

$$u_k = \frac{1}{\|x_{n_k}\|} x_{n_k} + (1 - \frac{1}{\|x_{n_k}\|}) 0$$

$$\text{d'où} \quad f(u_k) \leq \frac{1}{\|x_{n_k}\|} f(x_{n_k}) \leq \frac{\gamma}{\|x_{n_k}\|}$$

$$\text{d'où} \quad f(u_k) \rightarrow 0$$

Or comme f est s.c.i. : $f(v) \leq \liminf f(u_k) = 0$.

On a donc trouvé v de norme 1 qui serait également minimum, ce qui est impossible. Donc f tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ et donc f est inf-compacte.

—X—

REMARQUE 1.9.

Si on remplace dans le théorème 1.7. la convergence au sens de Mosco par la convergence simple, la conclusion n'est plus vraie. Il suffit de considérer l'exemple 1.3. pour s'en persuader.

Donnons maintenant un résultat analogue pour la convergence ponctuelle.

THEOREME 1.10.

Soit $f_n, f \in \Gamma_o(\mathbb{R}^m)$, $\overline{\text{dom } f} \neq \emptyset$, $f_n(x)$ tendant vers $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^m$. Alors, si f est inf-compacte, on a la même conclusion que dans le théorème 1.7.

DEMONSTRATION

On a $f \in \Gamma_1(\mathbb{R}^m)$ et $f_n \in \Gamma_1(\mathbb{R}^m)$ pour n assez grand.
Or $\mathcal{C}_S \geq \mathcal{C}_{TT}$, sur $\Gamma_1(\mathbb{R}^m)$ (avec les notations du chapitre I)

d'où $f_n^* \rightarrow f^*$ pour $\mathcal{C}_{TT}$ et donc : $f_n^*(x) \rightarrow f^*(x) \quad \forall x \in \overline{\text{dom } f^*}$;

la suite de la démonstration est identique à celle du théorème 1.7.

—X—

c) Exemples.

Par l'étude d'exemples, nous allons essayer de montrer qu'on ne peut généralement pas espérer obtenir beaucoup plus de renseignements sur des cas particuliers que ceux que donnent les théorèmes généraux. En effet :
Soit il y a unicité de la solution à la limite et alors les théorèmes généraux sont tout à fait satisfaisants ;
Soit il n'y a pas unicité à la limite et alors, comme nous le verrons sur un exemple très simple, il devient difficile d'obtenir des renseignements supplémentaires sur la façon dont les solutions convergent.

Commençons par donner un résultat préliminaire qui va être utile.

PROPOSITION 1.11.

Soit E un espace de Banach réflexif réel, $f_n, f \in \Gamma_0(E)$,
 g une fonction convexe continue finie partout. Alors si $f_n \rightarrow f$ au sens de Mosco, $f_n + g \rightarrow f + g$ au sens de Mosco.

DEMONSTRATION .

Montrons (i). Soit $x \in E$ et $x_n \rightarrow x$ telle que

$$\limsup f_n(x_n) \leq f(x) .$$

Considérons $\limsup (f_n(x_n) + g(x_n)) = \lim_{p} \sup_{n \geq p} (f_n(x_n) + g(x_n))$

$$\text{et ceci} \quad \leq \lim_{p} (\sup_{n \geq p} f_n(x_n) + \sup_{n \geq p} g(x_n))$$

$$\text{d'où} \quad \leq \limsup f_n(x_n) + \lim g(x_n)$$

$$\text{et donc} \quad \limsup (f_n(x_n) + g(x_n)) \leq f(x) + g(x).$$

Montrons (ii). Soit f_{n_k} une sous-suite et $x_k \rightarrow x$ pour la topologie faible.

$$\liminf (f_{n_k}(x_k) + g(x_k)) = \liminf_{p \quad k \geq p} (f_{n_k}(x_k) + g(x_k))$$

$$\text{Or} \quad \inf_{k \geq p} (f_{n_k}(x_k) + g(x_k)) \geq \inf_{k \geq p} f_{n_k}(x_k) + \inf_{k \geq p} g(x_k)$$

$$\text{d'où} \quad \liminf (f_{n_k}(x_k) + g(x_k)) \geq \liminf f_{n_k}(x_k) + \liminf g(x_k)$$

$$\text{et donc} \quad \liminf (f_{n_k}(x_k) + g(x_k)) \geq f(x) + g(x).$$

~~X~~

Rappelons la définition des fonctions "prox" (voir [5]).

Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, $z \in \mathbb{R}^m$; la fonction

$x \mapsto f(x) + \frac{1}{2} \|x-z\|^2$ est inf-compacte et possède un minimum unique sur $\mathbb{R}^m$,

ce minimum est noté $\text{prox}(z/f)$.

Voici un résultat sur la stabilité des fonctions "prox".

THEOREME 1.12.

Si f_n converge vers f au sens de Mosco, $f_n, f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}^m \quad \text{prox}(z/f_n) \rightarrow \text{prox}(z/f).$$

DEMONSTRATION.

D'après la proposition 1.11. $f_n + \frac{1}{2} \|x-z\|^2$ converge vers $f + \frac{1}{2} \|x-z\|^2$ au sens de Mosco. On applique alors le corollaire 1.8. d'où il découle que :

$$\text{prox}(z/f_n) \rightarrow \text{prox}(z/f).$$

~~X~~

Voici pour terminer un exemple où il n'y a pas nécessairement unicité de la solution à la limite.

Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_m|^p)^{1/p}, \quad p > 1, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} |x_i|.$$

Notons $\pi_{C,p}(x)$ la projection (unique) de x sur C pour la norme $\|\cdot\|_p$,
et $\pi_{C,\infty}(x)$ l'ensemble des projections de x sur C pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

$\pi_{C,p}(x)$ minimise $\|u-x\|_p + X_C(u)$ pour $u \in \mathbb{R}^m$ et

$\pi_{C,\infty}(x)$ minimise $\|u-x\|_\infty + X_C(u)$ pour $u \in \mathbb{R}^m$.

On a alors :

PROPOSITION 1.13.

Lorsque p tend vers $+\infty$, $\pi_{C,p}(x)$ tend vers $\pi_{C,\infty}(x)$ au sens suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geq p_0 : \pi_{C,p}(x) \in \pi_{C,\infty}(x) + \varepsilon \bar{B}(0,1)$$

(la boule désignant par exemple la boule euclidienne).

Et $d_p(x, C) \rightarrow d_\infty(x, C)$.

DEMONSTRATION.

Soit $f_p(u) = \|u-x\|_p + X_C(u)$

$$f_\infty(u) = \|u-x\|_\infty + X_C(u)$$

Il est facile de voir que $f_p \rightarrow f_\infty$ au sens de Mosco dans $\Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ (démonstration analogue à la proposition 1.11.) et comme f_∞ est inf-compacte le résultat se déduit immédiatement du théorème 1.7.

— ~~X~~ —

Un problème semble ici particulièrement intéressant : comment se comporte la suite $\pi_{C,p}(x)$ lorsque $\pi_{C,\infty}(x)$ n'est pas réduit à un point ?

Nous allons donner une réponse partielle à cette question.

Soit $\bar{B}_\infty(x, d_\infty(x, C)) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \|z-x\|_\infty \leq d_\infty(x, C)\}$,

Soit F_∞ la plus petite face du cube $\bar{B}_\infty(x, d_\infty(x, C))$ contenant $C \cap \bar{B}_\infty(x, d_\infty(x, C))$, notons ω le centre de F_∞ .

On a alors :

PROPOSITION 1.14.

Si F_∞ est une face de dimension $m-1$ et si la projection pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de ω sur $C \cap \bar{B}_\infty(x, d_\infty(x, C)) = \pi_{C, \infty}(x)$ est unique et notée ω' , la suite $\pi_{C, p}(x)$ converge vers ω' lorsque $p \rightarrow +\infty$.

DEMONSTRATION.

On suppose $\pi_{C, \infty}(x)$ non réduit à un point et $m \geq 2$ sinon le résultat est trivial. On a alors l'inégalité :

$$\|\omega-z\|_p \geq \|\omega-x_p\|_p$$

où x_p désigne la projection en $\|\cdot\|_p$ de x sur C et z un point quelconque de $\pi_{C, \infty}(x)$.

De la suite x_p on peut extraire une sous-suite $x_{p'}$ convergeant vers un point $x_\infty \in \pi_{C, \infty}(x)$, on obtient en passant à la limite :

$$\|\omega-z\|_\infty \geq \|\omega-x_\infty\|_\infty \quad \forall z \in \pi_{C, \infty}(x) ,$$

et donc $x_\infty = \omega'$

D'où $x_p \rightarrow \omega'$.

—X—

II - CONVERGENCE D'INTEGRANDES CONVEXES .

Nous allons donner un exemple, en dimension infinie, où les résultats des chapitres précédents peuvent être appliqués.

On va s'intéresser au problème suivant :

Minimiser $\int_S f(s, x(s)) d\sigma(s)$ pour x appartenant à un espace de fonctions mesurables X .

On suppose qu'une suite f_n converge simplement vers f et on va regarder comment les solutions des problèmes : minimiser, $\int_S f_n(s, x(s)) d\sigma(s)$, convergent vers les solutions du problème limite.

Nous allons d'abord traiter le problème dans des espaces de Banach réflexifs, nous examinerons ensuite le cas intéressant de L_m^1 et L_m^∞ .

NOTATIONS ET DEFINITIONS.

$(S, \mathcal{F}, \sigma)$ désigne un espace mesuré sigma fini muni d'une mesure positive.

X, Y désignent des espaces de fonctions mesurables de S dans $\mathbb{R}^m$ mis en dualité séparante par un produit scalaire noté $\langle x, y \rangle$. On suppose que X et Y sont des espaces de Banach réflexifs et que Y est le dual de X par la dualité $\langle x, y \rangle$ (prendre par exemple $X = L_m^p$, $Y = L_m^q$ avec $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou bien des espaces d'Orlicz convenables).

On suppose de plus que X et Y sont décomposables. Rappelons (suivant [13]) qu'un espace de fonctions mesurables X de S dans $\mathbb{R}^m$ est dit décomposable si pour tout $T \in \mathcal{F}$ tel que $\sigma(T) < +\infty$, pour tout $x \in X$ et pour tout $z : T \rightarrow \mathbb{R}^m$ mesurable essentiellement bornée, la fonction $\hat{x}$ égale à z sur T et à x ailleurs est toujours dans X .

Les espaces L_m^p où $1 \leq p \leq +\infty$ sont décomposables.

On appelle intégrande normale toute application f de $S \times \mathbb{R}^m$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que la multi-application $S \rightarrow \text{épi } f(s, \cdot)$ soit mesurable à valeurs fermées (pour les propriétés des multi-applications mesurables et des intégrandes nous renvoyons à [13]).

Si f est une intégrande normale, pour toute fonction mesurable x de S dans $\mathbb{R}^m$, la fonction $s \rightarrow f(s, x(s))$ est mesurable et on peut attribuer une valeur (éventuellement $\pm \infty$) à l'intégrale

$$I_f(x) = \int_S f(s, x(s)) d\sigma(s),$$

en posant :

$$\int_S f(s, x(s)) d\sigma(s) = \int_S \max(0, f(s, x(s))) d\sigma(s) \\ + \int_S \min(0, f(s, x(s))) d\sigma(s)$$

et en convenant que $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$.

Si f est une intégrande normale, on peut définir sa polaire f^* par la formule :

$$f^*(s, y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (x \cdot y - f(s, x)) \quad \forall s \in S, \forall y \in \mathbb{R}^m$$

f^* est encore une intégrande normale.

Si I_f n'est pas identique à $+\infty$ sur X , on a :

$$(I_f)^* = I_{f^*} \quad \text{sur } Y.$$

Nous dirons qu'une fonction $f : S \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vérifie l'hypothèse H si elle vérifie les quatre conditions suivantes :

- (i) pour tout $x \in \mathbb{R}^m$: $s \rightarrow f(s, x)$ est mesurable,
- (ii) pour tout $s \in S$: $f(s, \cdot) \in \Gamma_1(\mathbb{R}^m)$,
- (iii) I_f n'est pas identique à $+\infty$ sur l'espace X ,
- (iv) il existe un nombre $r > 0$ tel que pour tout $y \in Y$ vérifiant $\|y\| \leq r$ ($\|y\|$ désigne la norme de y dans le Banach Y) $s \rightarrow f^*(s, y(s))$ est intégrable.

On peut remarquer que les conditions (i) et (ii) impliquent que f est une intégrande normale (voir [13]).

Soit (P) le problème: minimiser $I_f(x)$ pour $x \in X$, où f est une intégrande normale. On désignera par α la valeur $\inf_{x \in X} I_f(x)$ et par A l'ensemble des

solutions de (P), c'est-à-dire l'ensemble des $x \in X$ tels que $I_f(x) = \alpha$.

Un résultat de convergence.

Commençons par énoncer un résultat d'existence de solutions.

PROPOSITION 2.1.

Si f vérifie l'hypothèse H, la valeur α du problème (P) est finie et l'ensemble A des solutions est un convexe $\sigma(X,Y)$ compact non vide.

DEMONSTRATION.

Puisque I_f n'est pas identique à $+\infty$, on a $I_f^* = (I_f)^*$. La condition (iv) implique que I_{f^*} n'est pas identique à $+\infty$ et donc

$$(I_{f^*})^* = I_{f^{**}} = I_f ; \text{ d'où } I_f \in \Gamma_0(X), I_{f^*} \in \Gamma_0(Y).$$

La condition (iv) entraîne que $0 \in \overline{\text{dom } I_{f^*}}^0$ donc $\alpha = -(I_f)^*(0) = -I_{f^*}(0)$ est fini. D'autre part, I_{f^*} est continue en 0 d'après la proposition 3.1. du chapitre I, et donc $A = \partial I_{f^*}(0)$ est un convexe $\sigma(X,Y)$ compact non vide.

—————X

Donnons maintenant le théorème de convergence.

THEOREME 2.2.

Soit f une intégrande normale vérifiant l'hypothèse H et la condition suivante :

- (v) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|y\| \leq \varepsilon$ entraîne : $y(s) \in \overline{\text{dom } f^*}^0(s, \cdot)$ pour presque tout s .

Soit f_n une suite d'intégrande normales convergeant ponctuellement vers f (i.e. $\forall (s,x) \in S \times \mathbb{R}^m : f_n(s,x) \rightarrow f(s,x)$).

On suppose que les f_n vérifient (i), (ii), (iii) et la condition suivante :

- (vi) il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in Y$ vérifiant $\|y\| \leq \eta$, la suite $|f_n^*(s, y(s))|$ est, à partir d'un certain rang, majorée par une fonction intégrable.

Alors si $\alpha_n = \inf_{x \in X} I_{f_n}(x)$ et $A_n = \{x \in X \mid I_{f_n}(x) = \alpha_n\}$

α_n tend vers α et $\sigma\text{-}\lim A_n$ est un ensemble non vide contenu dans A .

DEMONSTRATION.

D'après (vi) $I_{f_n}^*(0)$ est fini pour n assez grand, on peut donc,

au besoin en supprimant un nombre fini de termes de la suite, supposer que $I_{f_n}^* \in \Gamma_o(Y)$. Soit a un nombre > 0 tel que $a < \min(r, \varepsilon, \eta)$ et soit

$y \in Y$ tel que $\|y\| \leq a$; on a alors $y(s) \in \overset{o}{\text{dom}} f_n^*(s, \cdot)$ pour presque tout s , et donc d'après le corollaire 4.8. du chapitre I : $f_n^*(s, y(s)) \rightarrow f^*(s, y(s))$ pour presque tout s . Comme d'autre part la suite $|f_n^*(s, y(s))|$ est majorée par une fonction intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et donc :

$$\int_S f_n^*(s, y(s)) d\sigma(s) \rightarrow \int_S f^*(s, y(s)) d\sigma(s) .$$

Comme la boule de centre 0 et de rayon a est contenue dans $\overset{o}{\text{dom}} I_{f_n}^*$, on peut appliquer le théorème 3.1. du chapitre II, et donc on conclut que $\sigma\text{-}\lim \partial I_{f_n}^*(0)$ est un ensemble non vide contenu dans $\partial I_{f^*}^*(0)$.

—X—

REMARQUE 2.3.

On utilise en fait une modification évidente du théorème 3.1. du chapitre II dans la démonstration précédente, vu que l'on a convergence sur $\bar{B}(0, a)$ et pas sur tout $\overset{o}{\text{dom}} I_{f_n}^*$.

COROLLAIRE 2.4.

Si de plus I_{f^*} est Gâteaux-différentiable en 0, pour toute suite

x_n de X telle que $x_n \in A_n$ (au-delà d'un certain rang), x_n converge faiblement vers la solution unique x du problème (P).

DEMONSTRATION.

Appliquer le corollaire 3.2. du chapitre II.

REMARQUE 2.5.

Une condition naturelle pour que I_{f^*} soit Gâteaux-différentiable en 0 est que $f^*(s, \cdot)$ soit Gâteaux-différentiable en 0 pour presque tout s ; en effet :

$$\partial I_{f^*}(0) = \{x \in X \mid x(s) \in \partial f^*(s, 0) \text{ p.t.s.} \} .$$

REMARQUE 2.6.

La condition (v) est trivialement vérifiée si par exemple $\text{dom } f^*(s, \cdot) = \mathbb{R}^m$ pour presque tout s (i.e. $f(s, \cdot)$ est inf-compacte pour toute pente pour presque tout s).

Le cas $X = L_m^1$, $Y = L_m^\infty$

Ce cas ne rentre pas dans le cadre précédent ; moyennant quelques modifications, nous allons donner un résultat voisin avec des hypothèses qui, dans ce cadre, paraissent plus naturelles.

Rappelons d'abord quelques résultats utiles sur la dualité entre L_m^∞ et $(L_m^\infty)^*$.

Une forme $z \in (L_m^\infty)^*$ est dite singulière s'il existe une suite croissante S_j de parties mesurables telles que $\sigma(S_j) < +\infty$ et $S = \bigcup_j S_j$, vérifiant :

$\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall x \in L_m^\infty$ tel que $x(s) = 0$ pour presque tout s

n'appartenant pas à S_j , on a : $z(x) = 0$.

Nous noterons $(L_m^\infty)_S^*$ le sous-espace de $(L_m^\infty)^*$ formé des formes singulières.

On a alors (voir [13]) :

Tout élément de $(L_m^\infty)^*$ peut s'écrire de façon unique

$x \mapsto \int_S x(s)y(s)d\sigma(s) + z(x)$, avec $y \in L_m^1$ et $z \in (L_m^\infty)_S^*$ et de plus sa

norme est alors :

$$\|y\|_{L_m^1} + \|z\| .$$

(Ceci entraîne $(L_m^\infty)^* = L_m^1 \oplus (L_m^\infty)_S^*$).

Nous utiliserons le résultat de polarité suivant (voir [13]) :

PROPOSITION 2.7.

Soit f une intégrande normale, I_f défini sur L_m^∞ , on suppose que $\text{dom } I_f = C$ est non vide, alors $(I_f)^\star$ sur $(L_m^\infty)^\star$ est donnée par :

$$(I_f)^\star(y+z) = I_{f^\star}(y) + \sup_{x \in C} \langle z, x \rangle .$$

Nous dirons qu'une fonction $f : S \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vérifie l'hypothèse H' si elle vérifie les conditions (i), (ii), (iii) de l'hypothèse H et :

- (iv)' il existe un nombre $r > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^m, \|y\| \leq r$,
 $s \rightarrow f^\star(s, y)$ est intégrable.

Donnons maintenant un nouveau résultat d'existence.

PROPOSITION 2.8.

Si f vérifie l'hypothèse H' , la valeur α du problème (P) est finie et l'ensemble A des solutions est un convexe $\sigma(L_m^1, L_m^\infty)$ compact non vide.

DEMONSTRATION.

Nous allons montrer que la condition (iv)' entraîne qu'il existe un nombre $r' > 0$ tel que $\forall y \in L_m^\infty, \|y\|_\infty \leq r'$,
 $s \rightarrow f^\star(s, y(s))$ est intégrable.

Soient $0 < r' < \gamma < r$ tels que le cube $C_\gamma = \{x \mid |x_i| \leq \gamma\}$ soit contenu dans la boule $\overline{B}(0, r)$. Soit $y \in L_m^\infty$ telle que $\|y\|_\infty \leq r'$, alors si nous notons C_k , $k=1, 2, \dots, 2^m$, les sommets de C_γ on peut trouver 2^m fonctions mesurables $\alpha_1, \dots, \alpha_{2^m}$ de S dans $[0, 1]$ de somme 1 telles que :

$$y(s) = \sum_{k=1}^{2^m} \alpha_k(s) C_k \quad \text{pour presque tout } s .$$

(Prendre une section mesurable de la multi-application mesurable qui a tout s fait correspondre l'ensemble des $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2^m})$ de $[0, 1]^{2^m}$ de somme 1 tels que

$$y(s) = \sum \alpha_k C_k \quad) .$$

On a donc :

$$f^*(s, y(s)) \leq \sum \alpha_k(s) f^*(s, C_k) \quad \text{p.t.s.}$$

d'où $f^*(s, y(s))$ est majorée par une fonction intégrable.

Comme, d'autre part

$$f^*(s, y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (x \cdot y - f(s, x))$$

on a :

$$f^*(s, y(s)) \geq x \cdot y(s) - f(s, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall s \in S.$$

Puisque I_f n'est pas identique à $+\infty$, il existe $x \in L_m^1$ telle que :

$$\int_S \max(0, f(s, x(s))) d\sigma(s) < +\infty.$$

Ecrivons $f^*(s, y(s)) \geq x(s) \cdot y(s) - \max(0, f(s, x(s)))$;

Or $y \in L_m^\infty$ et $x \in L_m^1$,

donc le second membre est intégrable, on en déduit que $s \mapsto f^*(s, y(s))$ est intégrable.

On a donc $0 \in \overline{\text{dom } I_{f^*}}$, d'où $\alpha = -I_{f^*}(0)$ est fini.

L'ensemble des solutions est égal au sous-différentiel dans L_m^1 de I_{f^*} au point 0 que nous notons $\partial_1 I_{f^*}(0)$.

I_{f^*} est une fonction convexe $\sigma(L_m^\infty, (L_m^\infty)^*)$ semi-continue inférieurement,

elle est continue pour la topologie de L_m^∞ sur $\overline{\text{dom } I_{f^*}}$ et donc $\partial_\infty I_{f^*}(0)$ (sous-différentiel dans $(L_m^\infty)^*$) est un convexe faible-étoile compact non vide.

Montrons que : $\partial_\infty I_{f^*}(0) = \partial_1 I_{f^*}(0)$.

Ecrivons : $\partial_\infty I_{f^*}(0) = \{\xi \in (L_m^\infty)^* \mid -I_{f^*}(0) \geq (I_{f^*})^*(\xi)\}$.

Or d'après la proposition 2.7. :

$$(I_{f^*})^*(y+z) = I_f(y) + \sup_{x \in C} \langle z, x \rangle$$

et comme $0 \in \overset{\circ}{C}$

pour tout $z \neq 0$ on a $\sup_{x \in C} \langle z, x \rangle > 0$,

d'où $\partial_{\infty} I_{f^*}(0) = \{y+z \in (L_m^{\infty})^* \mid z = 0 \text{ et } -I_{f^*}(0) \geq I_f(y)\}$

et c'est bien égal à $\partial_1 I_{f^*}(0)$.

-----X-----

Enonçons un résultat de convergence voisin du théorème précédent.

THEOREME 2.9.

Soit f une intégrande normale vérifiant l'hypothèse H' et :

(v)' $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|y\|_{\infty} \leq \varepsilon$ entraîne $y(s) \in \overset{\circ}{\text{dom } f^*}(s, \cdot)$ pour presque tout s .

Soit f_n une suite d'intégrandes normales vérifiant (i), (ii), (iii) et convergeant ponctuellement vers f .

On suppose que :

(vi)' $\exists \eta > 0$, $\forall y \in L_m^{\infty}$ $\|y\|_{\infty} \leq \eta$, la suite $|f_n^*(s, y(s))|$ est, à partir d'un certain rang, majorée par une fonction intégrable fixe.

Alors α_n tend vers α et si nous notons $\text{adh}(A_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence $\sigma((L_m^{\infty})^*, L_m^{\infty})$ dans $(L_m^{\infty})^*$ de suites x_n telles que $x_n \in A_n$ pour tout n , $\text{adh}(A_n)$ est un ensemble non vide contenu dans A . (Ceci entraîne en particulier que les ensembles A_n , contenus dans L_m^1 , sont tous non vides au-delà d'un certain rang).

DEMONSTRATION.

On va utiliser un lemme qui est une variante du théorème 3.1. du chapitre II.

LEMME 2.10.

Soit E un espace de Banach réel, f un élément de $\Gamma_0(E)$ tel que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$, x un point de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$ et a un nombre > 0 tels que $\bar{B}(x, a) \subset \overset{\circ}{\text{dom}} f$. Soit f_n une suite de $\Gamma_0(E)$ telle que :

$$\forall y \in \bar{B}(x, a) \quad f_n(y) \rightarrow f(y) .$$

On a alors :

σ^* -adh $\partial f_n(x)$ est un ensemble non vide contenu dans $\partial f(x)$. De plus, si $\partial f(x) = \{x^*\}$, toute suite $x_n^* \in \partial f_n(x)$ converge vers x^* pour la topologie faible étoile.

DEMONSTRATION.

En reprenant le raisonnement de la proposition 3.13. du chapitre I avec des modifications évidentes, on voit que $\forall y \in \bar{B}(x, a) \quad y \in \overset{\circ}{\text{dom}} f_n$ au-delà d'un certain rang. On en déduit, au besoin en supprimant un nombre fini de termes de la suite, que $x \in \overset{\circ}{\text{dom}} f_n$ pour tout n , donc que f_n est continue en x pour la topologie de la norme et par suite $\partial f_n(x)$ est un convexe σ^* compact non vide.

Montrons que σ^* -adh $\partial f_n(x)$ est non vide.

Soit $x_n^* \in \partial f_n(x)$, on a :

$$\forall z \in E \quad f_n(z) \geq f_n(x) + \langle x_n^*, z-x \rangle$$

$$\text{et donc } \forall u \in \bar{B}(0, a) : \quad f_n(x+u) - f_n(x) \geq \langle x_n^*, u \rangle$$

$$\text{Or } f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{et} \quad f_n(x+u) \rightarrow f(x+u)$$

$$\text{On en déduit que } \forall u \in \bar{B}(0, a) \quad \sup_n \langle x_n^*, u \rangle < +\infty$$

et donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, la suite x_n^* est bornée en norme dans E^* , elle est donc $\sigma(E^*, E)$ relativement compacte. Soit alors $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet, x_n^* converge suivant $\mathcal{U}$ vers un certain point x^* pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ et donc σ^* -adh $f_n(x)$ est non vide.

Montrons maintenant que $\sigma^* \text{-adh } \partial f_n(x) \subset \partial f(x)$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ (plus fin que le filtre de Fréchet) et $x_n^* \in \partial f_n(x)$ telle que x_n^* converge vers x^* pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.
On a :

$$\forall z \in E : f_n(z) \geq f_n(x) + \langle x_n^*, z-x \rangle$$

d'où en passant à la limite suivant $\mathcal{U}$:

$$\forall z \in \bar{B}(x, a) \quad f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z-x \rangle$$

et donc $x^* \in \partial f(x)$.

Si de plus on a $\partial f(x) = \{x^*\}$, montrons que x_n^* tend vers x^* pour la topologie σ^* .

Raisonnons par l'absurde, si x_n^* ne tend pas vers x^* , il existe un voisinage ouvert V de x^* et une sous-suite $x_{n_k}^*$ telle que $x_{n_k}^* \notin V$. Soit alors $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre associé à cette sous-suite, on a $x_n^* \xrightarrow{\mathcal{U}} \xi^*$ et $\xi^* \notin V$ puisque V est ouvert. D'où une contradiction.

—X—

Démontrons maintenant le théorème :

Soit $a > 0$, $a < \min(r', \varepsilon, \eta)$, le même raisonnement que dans le théorème 2.2. montre que pour $\|y\|_\infty \leq a$, $I_{f_n}^*(y) \rightarrow I_f^*(y)$ et en particulier $\alpha_n \rightarrow \alpha$.

On peut donc, en supprimant au besoin un nombre fini de termes de la suite $I_{f_n}^*$ supposer que tous les α_n sont finis et donc $I_{f_n}^* \in \Gamma_o(L_m^\infty)$. D'après le lemme 2.10., on a $0 \in \overline{\text{dom } I_{f_n}^*}$ pour n assez grand et donc

$A_n = \partial_\infty I_{f_n}^*(0) = \partial_1 I_{f_n}^*(0)$; de plus $\sigma^* \text{-adh } (A_n)$ est un ensemble non vide contenu dans $A = \partial_\infty I_f^*(0)$.

COROLLAIRE 2.11.

Si on suppose de plus que $\partial I_{f^*}(0) = \{x\}$, toute suite x_n , $x_n \in A_n$, converge $\sigma(L_m^1, L_m^\infty)$ vers x .

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

- [1] J.L. JOLY, "Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes", Thèse, Grenoble, (1970).
- [2] P.J. LAURENT, "Approximation et Optimisation", Hermann, Paris, France, (1972).
- [3] E. MICHAEL, "Topologies on spaces of subsets", Trans. Amer. Math. Soc. 71, (1951), 152-182.
- [4] J.J. MOREAU, "Fonctionnelles convexes", Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, (1966-67).
- [5] R.T. ROCKAFELLAR, "Convex Analysis", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1970).
- [6] R.A. WIJSMAN, "Convergence of sequences of convex sets cones and functions. II", Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 32-45.
- [7] E. ASPLUND, "Topics in the theory of convex functions". Theory and applications of monotone operators . A. Ghizzetti ed., Oderisi (1969).
- [8] E. ASPLUND, et R.T. ROCKAFELLAR, "Gradients of convex functions". Trans. Amer. Math. Soc. 139, (1969), 443-467.
- [9] R. ROBERT, "Convergence de fonctionnelles convexes". Journal of Math. Anal. and Appl. vol 45, N° 3, (1974), 533-555.

- [10] M. VALADIER, "Contribution à l'analyse convexe".
Thèse, Paris, (1970).
- [11] U. MOSCO, "Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities".
Advances in Math. vol 3, N° 4, (1969), 510-584.
- [12] U. MOSCO, "On the continuity of the Young-Fenchel Transform".
Journal of Math. Anal. and Appl. vol 35, N° 3, (1971) 518-539.
- [13] R.T. ROCKAFELLAR, "Convex integral functionals and duality".
Contribution to non linear Functional Analysis .
Ac. Press (1971), 215-236.
- [14] J.L. JOLY et F. de THELIN, "Convergence d'intégrales convexes dans les espaces L^p ".
Séminaire d'Analyse, Université Toulouse III, (1973-74).
- [15] G. SALINETTI and R. WETS, "On the relations between two types of convergence for convex functions".
Technical report n° 75-21 Stanford University.

— : — : — : — : — : — : — : — : — :

— — — — —

- Il permet d'obtenir des résultats nouveaux,
- Les démonstrations sont généralement plus simples que celles déjà connues dans des contextes moins généraux (on comparera notamment avec les démonstrations d'ASPLUND ou de DAY des théorèmes de dérivabilité générique).

Le résultat d'univocité générique des opérateurs monotones a d'abord été obtenu indépendamment et avec des méthodes différentes par E. ZARANTONELLO et l'auteur dans des espaces séparables. Avec l'hypothèse qu'il existe une norme équivalente dont la duale est strictement convexe le résultat est dû à P.S. KENDEROV (corollaire 2.9.).

Les autres résultats présentés ici sont dus à l'auteur.

P L A N

-:-:-:-

CHAPITRE I

POINTS DE CONTINUITE DE MULTI-APPLICATIONS
SEMI-CONTINUES SUPERIEUREMENT.

CHAPITRE II

QUELQUES PROPRIETES GENERIQUES DES OPERATEURS
MONOTONES DANS LES ESPACES DE BANACH.

- § 1 Résultats préliminaires
- § 2 Propriétés génériques des opérateurs monotones
- § 3 Lien avec la dérivabilité des fonctions convexes
- § 4 Un résultat d'existence
- § 5 Renorming theorems et compléments
- § 6 Applications

CHAPITRE I

POINTS DE CONTINUITE DE MULTI-APPLICATIONS SEMI-CONTINUES SUPERIEUREMENT

Le but de ce chapitre est d'étendre un résultat classique de G. CHOQUET sur les points de continuité de multi-applications semi-continues à valeur dans un espace compact au cas de multi-applications à valeurs convexes faiblement compactes dans un espace de Fréchet. On applique ce résultat pour montrer l'unicité générique des opérateurs monotones et pour étendre aux espaces de Fréchet séparables un résultat de différentiabilité générique des fonctions convexes établi par ASPLUND pour certains espaces de Banach.

NOTATIONS :

Nous renvoyons à [8] pour toutes les propriétés usuelles des espaces de Baire et à [22] pour les définitions concernant les multi-applications. Précisons cependant qu'on appelle ensemble maigre dans un espace topologique toute réunion dénombrable de parties dont l'intérieur de l'adhérence est vide, et résiduel toute partie dont le complémentaire est maigre.

Nous désignons par $G\delta$ toute intersection dénombrable d'ouverts.

Nous utiliserons le résultat classique suivant sur les fonctions semi-continues.

PROPOSITION 1.1.

Soit E un espace de Baire et f une fonction semi-continue (inférieurement ou supérieurement) de E dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors l'ensemble des points de E où f est continue est un résiduel G_δ .

Enonçons maintenant le résultat de Choquet [8].

THEOREME 1.2.

Soit E un espace de Baire, F un espace compact métrisable et Γ une multi-application de E dans F à valeurs fermées non vides semi-continue inférieurement ou supérieurement. Alors l'ensemble des points de continuité de Γ est un résiduel G_δ .

Principe de la démonstration

(i) On traduit la semi-continuité de la multi-application par la semi-continuité d'un ensemble de fonctions numériques au moyen de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.

Soit E un espace topologique, F un espace topologique normal, Γ une multi-application de E dans F à valeurs fermées non vides. Si f est une fonction continue de F dans $\mathbb{R}$, on note $\hat{f}$ la fonction définie par :

$$\hat{f}(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} f(y)$$

on a alors :

(1°) Γ s.c.i. en $a \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}(F) \quad \hat{f}$ s.c.i. en a

(2°) Γ s.c.s. en $a \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}(F) \quad \hat{f}$ s.c.s. en a

où $\mathcal{C}(F)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur F .

Si on note G_Γ l'ensemble des points de continuité de Γ et $G_{\hat{f}}$ l'ensemble des points de continuité de $\hat{f}$, on a donc :

$$G_\Gamma = \bigcap_{f \in \mathcal{C}(F)} G_{\hat{f}}$$

(ii) Si Γ est semi-continue, toutes les $\hat{f}$ sont semi-continues, donc $G_{\hat{f}}$ est un résiduel G_{δ} de E .

Il suffit maintenant de montrer qu'on peut se restreindre à un ensemble dénombrable de fonctions f . On déduit ce dernier point du fait que si F est un compact métrisable, $\mathcal{C}(F)$ est séparable (pour la topologie de la norme).

En suivant une démarche analogue, nous allons démontrer le résultat suivant :

THEOREME 1.4.

Soit T un espace topologique métrisable et de Baire, E un espace localement convexe séparé, $\tau(E, E')$ (*) -quasi-complet et dont le dual E' est $\sigma(E', E)$ séparable.

Soit Γ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes $\sigma(E, E')$ compactes non vides de T dans E muni de la topologie $\sigma(E, E')$. Alors l'ensemble des points de T où Γ est continue est un résiduel G_{δ} de T .

DEMONSTRATION

Nous allons utiliser deux lemmes dont on trouvera la démonstration dans Valadier [29].

LEMME 1.5.

Soit T un espace topologique, E un e.v.t.l.c.s. sur $\mathbb{R}$, Γ une multi-application de T dans E à valeurs convexes $\sigma(E, E')$ compactes non vides. Alors :

Γ s.c.s. en t_0 (pour $\sigma(E, E')$) $\Leftrightarrow \forall \ell \in E' : \hat{\ell}$ s.c.s. en t_0
où

$$\hat{\ell}(t) = \sup_{x \in \Gamma(t)} \ell(x) .$$

(*) $\tau(E, E')$ désigne la topologie de Mackey sur E associée à son dual topologique E' .

LEMME 1.6.

On suppose de plus que les valeurs de Γ sont contenues dans une partie faiblement compacte fixe K . Alors :

Γ s.c.i. en t_0 (pour $\sigma(E, E')$) $\Leftrightarrow \forall \ell \in E' : \hat{\ell}$ s.c.i. en t_0 .

Démontrons maintenant le théorème :

Soit A une partie dénombrable partout dense dans E' pour $\tau(E', E)$ (si E' est $\sigma(E', E)$ séparable il est également $\tau(E', E)$ séparable). Nous allons montrer que si pour tout ℓ dans A , $\hat{\ell}$ est continue en t_0 , alors Γ est semi-continue inférieurement en t_0 .

Pour montrer que Γ est s.c.i. en t_0 , il suffit de montrer que la restriction de Γ à tout ensemble T' de la forme $T' = \{t_0\} \cup \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où t_n est une suite de T convergeant vers t_0 est s.c.i. en t_0 .

Comme Γ est semi-continue supérieurement et que T' est compact,

$K = \bigcup_{t \in T'} \Gamma(t)$ est faiblement compact.

Pour pouvoir appliquer le lemme 1.6. il suffit de montrer que pour tout ℓ dans E' , $\hat{\ell}$ est semi-continue inférieurement en t_0 . C'est vrai pour les éléments de A ; si $\ell \notin A$ on va approcher ℓ par des éléments de A , uniformément sur K , ce qui est possible puisque K étant faiblement compact et E τ -quasi-complet l'enveloppe convexe fermée de K est faiblement compacte. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell' \in A \quad \forall x \in K : |\ell(x) - \ell'(x)| < \varepsilon.$$

On va en déduire que $\hat{\ell}$ est s.c.i. en t_0 .

Soit λ un réel tel que $\lambda < \hat{\ell}(t_0)$

Considérons $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{\ell}(t_0) > \lambda + 2\varepsilon$

et prenons $\ell' \in A$ tel que :

$$\forall x \in K \quad |\ell(x) - \ell'(x)| < \varepsilon$$

On a alors :

$$\forall t \in T' \quad \sup_{x \in \Gamma(t)} \ell'(x) - \varepsilon \leq \sup_{x \in \Gamma(t)} \ell(x) \leq \sup_{x \in \Gamma(t)} \ell'(x) + \varepsilon$$

On en déduit :

$$\hat{\ell}'(t_0) + \varepsilon \geq \hat{\ell}(t_0) > \lambda + 2\varepsilon$$

$$\text{d'où} \quad \hat{\ell}'(t_0) > \lambda + \varepsilon.$$

Comme $\hat{\ell}'$ est s.c.i. en t_0 , il existe un voisinage $V(t_0)$ tel que

$$\forall t \in V(t_0) \quad \hat{\ell}'(t) > \lambda + \varepsilon$$

$$\text{d'où} \quad \forall t \in V(t_0) \quad \hat{\ell}(t) \geq \hat{\ell}'(t) - \varepsilon > \lambda$$

On a donc montré que $\hat{\ell}$ était s.c.i. en t_0 . D'où, d'après le lemme 1.5, on conclut que Γ est s.c.i. en t_0 .

Il s'ensuit que $G_\Gamma = \bigcap_{\ell \in A} G_\ell$

et donc G_Γ est un résiduel G_δ de T .

—X—

REMARQUE 1.7.

On notera que les hypothèses faites sur l'espace E sont assez peu restrictives.

Pour que E' soit $\sigma(E', E)$ séparable il suffit qu'il existe une suite e'_n dans E' séparant les points de E .

C'est le cas par exemple si E est un espace de Fréchet séparable.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

a) Multi-application de projection

Soit X un espace de Banach réel séparable et réflexif, C un convexe fermé non vide de X ; si x est un point de X on désigne par $\mathcal{P}_C(x)$ l'ensemble des projections de x sur C , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_C(x) = \{u \in C \mid \|x-u\| = \inf_{v \in C} \|x-v\|\}.$$

Il est évident que $\mathcal{P}_C(x)$ est une partie convexe faiblement compacte et non vide.

PROPOSITION 1.8.

La multi-application $x \rightarrow \mathcal{P}_C(x)$ est semi-continue supérieurement de X muni de la topologie forte dans X muni de la topologie faible.

DEMONSTRATION

Soit Ω un ouvert faible contenant $\mathcal{P}_C(x)$ on veut montrer qu'il existe un voisinage $V(x)$ tel que pour tout $z \in V(x)$, on ait

$$\mathcal{P}_C(z) \subset \Omega .$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $z_n \rightarrow x$ et une suite $y_n \in \mathcal{P}_C(z_n)$ telle que $y_n \notin \Omega$. La suite y_n est bornée on peut donc en extraire une sous-suite y_{n_k} faiblement convergente vers un élément y , on a $y \notin \Omega$.

Or $z_{n_k} - y_{n_k}$ converge faiblement vers $x-y$ et puisque la norme est faiblement s.c.i., on a :

$$\liminf \|z_{n_k} - y_{n_k}\| \geq \|x-y\|$$

$$\text{d'où } y \in C \quad \text{et} \quad \|x-y\| \leq d(x,C)$$

$$\text{puisque } \|z_{n_k} - y_{n_k}\| = d(z_{n_k}, C) \rightarrow d(x, C)$$

et donc $y \in \mathcal{P}_C(x)$ ce qui est impossible.

—X—

Appliquons le théorème 1.4., il s'ensuit que l'ensemble des points de continuité de la multi-application de projection est un résiduel G_δ de X . Un contre exemple simple dans $\mathbb{R}^3$ montre qu'en général cette multi-application n'est pas continue en tout point.

b) Multi-applications monotones

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé, E' son dual, muni de la topologie $\sigma(E', E)$, Ω un ouvert non vide de E , Γ une multi-application monotone ^(*) s.c.s. à valeurs non vides de Ω dans E' . On a le résultat suivant qui "interprète" le fait que Γ soit s.c.i. en un point.

PROPOSITION 1.9.

Soit $u \in \Omega$, Γ est semi-continue inférieurement en u si et seulement si $\Gamma(u)$ est réduit à un point.

DEMONSTRATION

La seule implication non triviale est que si Γ est s.c.i. $\Gamma(u)$ est réduit à un point.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $\Gamma(u)$ contienne deux points distincts y_1 et y_2 ,

alors $\exists \xi \in E$

tel que $\langle y_2 - y_1, \xi \rangle > 0$

Soit ε un nombre > 0 tel que : $\langle y_2 - y_1, \xi \rangle > 2\varepsilon$

et considérons les voisinages $\sigma(E', E)$ ouverts de y_1 et y_2 :

$$\Omega_1 = \{y \in E' \mid -\varepsilon < \langle y - y_1, \xi \rangle < \varepsilon\}$$

$$\Omega_2 = \{y \in E' \mid -\varepsilon < \langle y - y_2, \xi \rangle < \varepsilon\}$$

On a bien sur $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et puisque Γ est s.c.i. il existe un voisinage $V(u)$ de u dans Ω tel que $\forall x \in V(u)$, $\Gamma(x)$ coupe Ω_1 et Ω_2 .

(*) i.e. $\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \quad \forall x^* \in \Gamma(x), \quad \forall y^* \in \Gamma(y).$

Soit alors $\lambda > 0$ assez petit pour que $u + \lambda\xi \in V(u)$.
 Pour un tel λ , il existe z_1 et z_2 dans $\Gamma(u+\lambda\xi)$ tels que :

$$-\varepsilon < \langle z_1 - y_1, \xi \rangle < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \langle z_2 - y_2, \xi \rangle < \varepsilon$$

et d'après la monotonie de Γ on a :

$$\langle z_1 - y_2, \lambda\xi \rangle \geq 0 \quad \text{d'où} \quad \langle z_1 - y_2, \xi \rangle \geq 0$$

ce qui entraîne $\langle y_2 - y_1, \xi \rangle < \varepsilon$

ce qui est impossible puisque : $\langle y_2 - y_1, \xi \rangle > 2\varepsilon$.

—X—

On déduit de cette proposition:

THEOREME 1.10

Dans le cadre précédent, si E est un espace de Fréchet séparable et si Γ est une multi-application monotone à valeurs convexes $\sigma(E', E)$ compactes non vides et s.c.s. de Ω dans E' faible-étoile. Alors l'ensemble des points de Ω où Γ est réduite à un élément est un résiduel G_δ de Ω .

DEMONSTRATION

L'ensemble des points où Γ est réduite à un élément est l'ensemble des points où Γ est continue d'après la proposition 1.9. Il suffit donc de vérifier qu'on peut appliquer le théorème 1.4. C'est-à-dire qu'on peut prendre pour E le dual faible-étoile d'un espace de Fréchet séparable.

—X—

c) Gâteaux-différentiabilité des fonctions convexes

Soit E un espace de Fréchet séparable, E' son dual muni de la topologie $\sigma(E', E)$, f une fonctionnelle convexe semi-continue inférieurement et propre sur E telle que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$.

Pour tout x dans $\overset{\circ}{\text{dom}} f$, le sous-différentiel de f en x , $\partial f(x)$, est un convexe $\sigma(E', E)$ compact non vide et la multi-application $x \rightarrow \partial f(x)$ est monotone s.c.s. sur $\overset{\circ}{\text{dom}} f$. Comme f est Gâteaux-différentiable en x si et seulement si $\partial f(x)$ est réduit à un point, en appliquant le théorème 1.10. on en déduit que l'ensemble des points où f est Gâteaux-différentiable est un résiduel G_δ de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$. On étend ainsi aux espaces de Fréchet séparables un résultat établi par Asplund pour certains espaces de Banach.

CHAPITRE II

QUELQUES PROPRIETES GENERIQUES DES OPERATEURS MONOTONES DANS LES ESPACES DE BANACH

§ 1 - PRELIMINAIRES

E désigne un espace de Banach réel, E^* son dual topologique, $\| \cdot \|$ désigne la norme de E et $\| \cdot \|_*$ la norme duale sur E^* (qu'on notera toujours $\| \cdot \|$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).

On désigne par $\mathcal{J}$ la multi-application de dualité de E dans E^* c'est-à-dire $\mathcal{J} = \partial \frac{1}{2} \| \cdot \|^2$.

On dit que E possède la propriété (H_*) si pour toute famille filtrante x_i^* de E^* telle que :

$$x_i^* \rightarrow x^* \text{ pour } \sigma(E^*, E) \quad \text{et} \quad \|x_i^*\| \rightarrow \|x^*\|$$

on a : $\|x_i^* - x^*\| \rightarrow 0$.

On vérifie facilement que tout espace de Banach E réflexif dont la norme est Fréchet dérivable possède la propriété (H_*) .

DEFINITION

On dit qu'une norme $\| \cdot \|$ sur un espace de Banach E est localement uniformément convexe si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

$$(i) \quad \forall x, \|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in]0, 2[$$

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf \{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \mid \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \} > 0$$

(ii) Pour toute famille filtrante x_i telle que :

$$\begin{aligned} \|x_i\| &\rightarrow \|x\| \\ \text{et } \|x_i + x\| &\rightarrow 2\|x\| \end{aligned} \quad \text{on a } \|x_i - x\| \rightarrow 0$$

PROPOSITION 2.1.

Tout espace de Banach dont la norme duale est localement uniformément convexe possède la propriété $(H_\star)$.

DEMONSTRATION

Considérons une famille filtrante $x_i^\star$ de $E^\star$ telle que $x_i^\star \rightarrow x^\star$ pour la topologie faible-étoile et $\|x_i^\star\| \rightarrow \|x^\star\|$ et montrons que $\|x_i^\star + x^\star\| \rightarrow 2\|x^\star\|$.

En effet, on a :

$$\|x_i^\star + x^\star\| \leq \|x_i^\star\| + \|x^\star\|$$

et comme d'autre part la norme duale sur $E^\star$ est faible-étoile semi-continue inférieurement, pour tout $\varepsilon > 0$, pour i "assez grand", on a :

$$\|x_i^\star + x^\star\| \geq 2\|x^\star\| - \varepsilon$$

On en déduit que $\|x_i^\star + x^\star\| \rightarrow 2\|x^\star\|$ et d'après (ii) la démonstration est terminée.

Rappelons maintenant quelques définitions et propriétés relatives aux opérateurs monotones.

Soit T une multi-application de E dans E^* on lui associe :

son graphe $G(T) = \{(x, x^*) \in E \times E^* \mid x^* \in Tx\}$

son domaine $D(T) = \{x \in E \mid Tx \neq \emptyset\}$

son image $R(T) = \bigcup_{x \in E} Tx$

son inverse T^{-1} , dont le graphe est le symétrique de celui de T .

On dit que l'opérateur (ou la multi-application) T est monotone si :

$$\forall (x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in G(T) : \langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

($\langle x^*, x \rangle$ désigne le produit scalaire entre E^* et E).

Par opérateur monotone nous désignerons désormais une multi-application monotone de E dans E^* .

L'ensemble des opérateurs monotones de E dans E^* est ordonné inductif pour l'inclusion des graphes, tout élément est donc contenu dans un élément maximal, un tel élément est appelé opérateur maximal monotone. Il est bien évident que T est monotone (resp. maximal monotone) si et seulement si T^{-1} est monotone (resp. maximal monotone).

Citons quelques propriétés classiques des opérateurs maximaux monotones.

PROPOSITION 2.2.

Si T est maximal monotone de E dans E^* ; si x_k tend vers x en norme dans E , si $x_k^* \in Tx_k$ et x_k^* converge faible-étoile vers x^* , alors $x^* \in Tx$ (on peut remplacer la suite x_k par une famille filtrante à condition que x_k^* soit bornée).

On va s'intéresser plus particulièrement dans la suite aux opérateurs T tels que l'intérieur du domaine ($\text{int } D(T)$) soit non vide. On a alors le résultat important suivant dû à ROCKAFELLAR [27].

THEOREME 2.3.

Soit T un opérateur maximal monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$, alors $\text{int } D(T)$ est un ouvert convexe dont l'adhérence contient $D(T)$ et T est localement borné sur $\text{int } D(T)$.

COROLLAIRE 2.4.

Pour tout x dans $\text{int } D(T)$, Tx est un convexe faible-étoile compact.

A partir de ces propriétés on montre facilement le résultat de semi-continuité suivant qui va jouer un rôle important.

THEOREME 2.5.

Dans les hypothèses du théorème 2.3. la multi-application $x \rightarrow Tx$ est semi-continue supérieurement de $\text{int } D(T)$ muni de la topologie de la norme dans E^* muni de la topologie faible-étoile.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde : Supposons qu'il existe un point x dans $\text{int } D(T)$, Ω un ouvert faible-étoile de E^* contenant Tx et une suite x_n convergeant fortement vers x telle qu'il existe x_n^* dans Tx_n n'appartenant pas à Ω . En vertu du théorème 2.3., on peut supposer que tous les Tx_n sont contenus dans une même boule fermée $\bar{B}(0, r)$, $r > 0$. Alors suivant un ultra-filtre $x_n^* \rightarrow x^*$ pour la topologie faible-étoile, d'après la proposition 2.2. x^* appartient à Tx ; or d'autre part comme $\bar{C}\Omega$ est faible-étoile fermé on a $x^* \in \bar{C}\Omega$ ce qui est impossible.

—X—

Terminons ces préliminaires par une propriété "géométrique" nouvelle des opérateurs maximaux monotones qui nous sera utile par la suite.

THEOREME 2.6.

Soit T un opérateur maximal monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$.

Soit G une partie dense dans $\text{int } D(T)$. Alors

$$\forall x \in \text{int } D(T) \quad T(x) = \overline{\text{conv } A(x)}$$

Où l'adhérence est prise pour la topologie faible-étoile et où $A(x)$ désigne l'ensemble des limites faible-étoile de filtres $y_i^* \in T(x_i)$ avec $x_i \rightarrow x$ (topologie forte) et $x_i \in G$.

DEMONSTRATION ⁽¹⁾

D'après la proposition 2.2., il est trivial que $A(x) \subset T(x)$.

Pour montrer l'inclusion inverse raisonnons par l'absurde.

Supposons $\exists z^* \in T(x) \quad z^* \notin \overline{\text{conv } A(x)}$, d'après le théorème de Hahn-Banach on peut donc trouver $\xi \in E$ tel que

$$\langle \xi, z^* - y^* \rangle > 0 \quad \forall y^* \in \overline{\text{conv } A(x)}$$

Considérons la suite $x + \frac{1}{n} \xi$, pour tout $n \geq 1$, on peut trouver $x_n \in G$ tel que :

$$\left\| x + \frac{1}{n} \xi - x_n \right\| < \frac{1}{n^2}$$

prenons $y_n^* \in T(x_n)$, la suite y_n^* est bornée, et donc suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$, $y_n^* \rightarrow y^*$ (topologie faible-étoile).

La monotonie entraîne : $\langle y_n^* - z^*, x_n - x \rangle \geq 0$

d'où $\langle y_n^* - z^*, \xi - n e_n \rangle \geq 0$

en posant $e_n = x + \frac{1}{n} \xi - x_n$ on a $\|e_n\| < \frac{1}{n^2}$

et donc en passant à la limite on obtient :

$$\langle y^* - z^*, \xi \rangle \geq 0$$

ce qui est impossible puisque $y^* \in A(x)$.

(1) Je tiens à remercier H. BREZIS d'avoir simplifié la démonstration initiale.

§ 2 - PROPRIETES GENERIQUES DES OPERATEURS MONOTONES

Dans ce paragraphe, nous allons commencer par donner des résultats généraux qui ne dépendent pas de la structure de l'espace de Banach sur lequel on se place. Pour exploiter plus profondément ces résultats nous serons amené à faire des hypothèses géométriques sur la norme de l'espace. Pour traiter le cas des espaces séparables ou réflexifs nous aurons donc besoin de "renorming theorems" plus ou moins standard. Pour terminer nous donnerons une méthode qui permet de conclure directement dans le cas séparable sans utilisation des "renorming theorem" ; cette méthode se base sur des résultats qui ont leur intérêt propre.

Notons que l'idée d'étudier la fonction distance est reprise de [17].

Soit T un opérateur maximal monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$, pour tout x dans $\text{int } D(T)$ on note :

$$d(x) = \inf \{ \|y^*\| \mid y^* \in T_x \}$$

et $\pi(x)$ l'ensemble des projections de 0 sur T_x (cet ensemble est un convexe faible-étoile compact non vide puisque T_x est faible-étoile compact).

Le théorème suivant énonce que les opérateurs maximaux monotones sont génériquement "plats".

THEOREME 2.7.

Soit T un opérateur maximal monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors l'ensemble des points x de $\text{int } D(T)$ tels que $T(x) = \pi(x)$ est un résiduel de $\text{int } D(T)$.

DEMONSTRATION

On va utiliser un lemme.

LEMME 2.8.

$d(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement de $\text{int } D(T)$ dans $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION

Soit $x \in \text{int } D(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $d(x) > \lambda$.
 Alors $T(x) \subset \bar{C} \bar{B}(0, \lambda)$ (il suffit de considérer le cas $\lambda \geq 0$).
 Or le complémentaire de $\bar{B}(0, \lambda)$ est un ouvert faible-étoile de E^* ; Comme T est s.c.s. pour la topologie faible-étoile, il existe un voisinage $V(x)$ tel que $\forall z \in V(x)$, $T(z) \subset \bar{C} \bar{B}(0, \lambda)$ et donc sur ce voisinage $d(z) > \lambda$.

— x —

On déduit de ce lemme que l'ensemble des points de continuité de $d(x)$ est un résiduel de $\text{int } D(T)$; en vertu d'un résultat classique sur les points de continuité des fonctions semi-continues (voir [8]). On peut également appliquer un résultat plus général que nous démontrerons plus loin.

Montrons maintenant qu'en tout point x où d est continue on a :

$$T(x) = \pi(x).$$

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \text{int } D(T)$ tel que :

- d soit continue en x
- $T(x) \neq \pi(x)$.

Soit alors $x^* \in T(x)$ tel que $x^* \notin \pi(x)$ d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\xi \in E$ tel que

$$\langle x^* - y^*, \xi \rangle > 0, \quad \forall y^* \in \pi(x).$$

Puisque d est continue en x , il existe une suite λ_n de nombres > 0 tendant vers 0 tels que $y_n = x + \lambda_n \xi$ vérifie $d(y_n) \leq d(x) + \frac{1}{n}$.

Prenons $y_n^* \in \pi(y_n)$ et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ (plus fin que le filtre de Fréchet), alors suivant $\mathcal{U}$: $y_n \rightarrow x$ et $y_n^* \rightarrow y^*$ pour la topologie faible étoile puisque la suite y_n^* est bornée en norme dans E^* . A la limite, on a :

$\|y^*\| \leq d(x)$. Comme d'autre part T est semi-continue supérieurement sur $\text{int } D(T)$ on a $y^* \in T(x)$

et donc $y^* \in \pi(x)$.

D'après la monotonie on a :

$$\langle y_n^* - x^*, \lambda_n \xi \rangle \geq 0$$

$$\text{d'où} \quad \langle y_n^* - x^*, \xi \rangle \geq 0$$

$$\text{et à la limite} \quad \langle y^* - x^*, \xi \rangle \geq 0$$

ce qui est impossible puisque $y^* \in \pi(x)$.

—X—

COROLLAIRE 2.8.

Soit T un opérateur monotone (non maximal) de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors l'ensemble des points x de $\text{int } D(T)$ tels que $T(x) = \pi(x)$ est un résiduel de $\text{int } D(T)$.

DEMONSTRATION

Commençons par remarquer qu'on n'est pas sûr que $\pi(x)$ ensemble des projections de 0 sur $T(x)$ soit toujours non vide $T(x)$ n'étant généralement ni convexe ni faible-étoile compact.

Considérons $\hat{T}$ opérateur maximal monotone contenant T , alors $\text{int } D(\hat{T}) \supset \text{int } D(T)$. On déduit du théorème 2.7. qu'il existe un résiduel de $\text{int } D(\hat{T})$ tel que $\hat{T}(x) = \hat{\pi}(x)$ ($\hat{\pi}$ désignant la projection de 0 sur $\hat{T}(x)$). On en déduit que sur un résiduel de $\text{int } D(T)$ on a : $T(x) \subset \hat{\pi}(x)$ et donc $T(x)$ est contenu dans la sphère de centre 0 et de rayon $d(0, T(x))$; d'où $T(x) = \pi(x)$.

—X—

COROLLAIRE 2.9. (P.S. Kenderov)

S'il existe une norme compatible sur E telle que sa duale soit strictement convexe et si T est un opérateur monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors l'ensemble des points x de $\text{int } D(T)$ tels que $T(x)$ soit réduit à un élément est un résiduel de $\text{int } D(T)$.

DEMONSTRATION

On considère un opérateur maximal monotone $\hat{T}$ contenant T , puisque la norme sur E^* est strictement convexe, en tout point x de $\text{int } D(\hat{T})$ la projection $\hat{\pi}(x)$ est réduite à un point, et donc $\hat{T}$ est réduit à un point sur un résiduel de $\text{int } D(\hat{T})$. Le résultat s'en déduit pour T .

— ~~x~~ —

REMARQUE 2.10.

Peut-on obtenir la même conclusion en supposant seulement qu'il existe une norme équivalente Gâteaux-dérivable sur E ? Comme nous le verrons plus loin, même dans le cas où T est le sous-différentiel d'une fonction convexe continue le problème est ouvert (voir Day [9]) .

Donnons maintenant un résultat de semi-continuité supérieure au sens fort.

THEOREME 2.11.

Soit T un opérateur maximal monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors si $(E, \|\cdot\|)$ possède la propriété (H^*) l'ensemble des points de $\text{int } D(T)$ où T est fortement semi-continu supérieurement ⁽¹⁾ est un résiduel.

DEMONSTRATION

Nous allons d'abord montrer que π est fortement semi-continue supérieurement en tout point x de $\text{int } D(T)$ où $d(x)$ est continue.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite x_n tendant vers x telle que :

$$\pi(x_n) \not\subset \pi(x) + \varepsilon B(0,1).$$

(1) au sens suivant : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un voisinage $V(x_0)$ tel que $\forall x \in V(x_0)$
 $T(x) \subset T(x_0) + \varepsilon \bar{B}(0,1).$

Soit $y_n^* \in \pi(x_n)$, $y_n^* \notin \pi(x) + \varepsilon B(0,1)$ la suite y_n^* est bornée dans E^* car $\|y_n^*\| = d(x_n)$ tend vers $d(x)$. Alors suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ $y_n^* \rightharpoonup y^*$ (topologie faible-étoile) et $x_n \rightarrow x$.

On a à la limite $\|y^*\| \leq d(x)$ et $y^* \in T(x)$ d'où $y^* \in \pi(x)$.

Comme $y_n^* \rightharpoonup y^*$ et $\|y_n^*\| \rightarrow \|y^*\|$ la propriété (H*) entraîne que y_n^* converge fortement vers y^* suivant $\mathcal{U}$ et donc $y^* \notin \pi(x) + \varepsilon B(0,1)$ car ce dernier est fortement ouvert, d'où une contradiction.

Il reste maintenant à montrer que si π est fortement s.c.s. en x , T est également fortement s.c.s. en x .

Notons G l'ensemble des points de $\text{int } D(T)$ où $T = \pi$ et où π est fortement s.c.s., prenons $x \in G$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \quad \|z-x\| < \eta : \pi(z) \subset \pi(x) + \varepsilon \bar{B}$$

montrons qu'alors on a nécessairement :

$$T(z) \subset T(x) + \varepsilon \bar{B}.$$

En effet, d'après le théorème 2.6., on a :

$$T(z) = \overline{\text{conv}} A(z)$$

Il nous suffit de montrer que $A(z) \subset \pi(x) + \varepsilon \bar{B}$ puisque ce dernier est un convexe faible-étoile compact.

Soit $y^* \in A(z)$, y^* est limite d'un filtre y_i^* avec $y_i^* \in \pi(x_i)$ et $x_i \rightarrow z$, $x_i \in G$. Donc pour "i assez grand", on a $\|x_i - x\| < \eta$ d'où $y_i^* \in \pi(x) + \varepsilon \bar{B}$ et donc $y^* \in \pi(x) + \varepsilon \bar{B}$.

—X—

REMARQUE 2.12.

Dans le théorème précédent on ne peut pas remplacer l'hypothèse T maximal monotone par T simplement monotone. En effet, en considérant un opérateur maximal monotone $\hat{T}$ contenant T on obtient bien que $T = \pi$ génériquement, mais il n'y a aucune raison pour que π soit s.c.s.

Nous allons voir que par contre si on fait l'hypothèse qu'il existe sur E une norme dont la duale est strictement convexe on peut conclure.

COROLLAIRE 2.13.

Soit E un espace de Banach possédant une norme compatible dont la duale est strictement convexe et possède la propriété $(H\star)$ et soit T un opérateur monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors l'ensemble des points de $\text{int } D(T)$ où T est réduit à un élément et fortement semi-continu supérieurement est un résiduel de $\text{int } D(T)$.

DEMONSTRATION

Soit $\hat{T}$ un opérateur maximal monotone contenant T , alors sur un résiduel de $\text{int } D(T)$, $\hat{T}(x) = T(x)$ est réduit à un point et si de plus $\hat{T}$ est fortement s.c.s. en ces points, T est également fortement s.c.s. en ces points.

—X—

REMARQUE 2.14.

On n'est pas obligé en fait de supposer qu'il existe une seule norme sur E possédant les deux propriétés demandées dans le corollaire 2.13. Il suffit qu'il existe deux normes compatibles chacune possédant l'une des propriétés exigées ⁽¹⁾. Il suffit en effet de considérer un opérateur maximal monotone $\hat{T}$ contenant T et de prendre l'intersection des deux résiduels correspondant respectivement à l'application des théorèmes 2.9. et 2.11., le résiduel obtenu répond à la question pour T .

Nous allons donner maintenant une démonstration directe du corollaire 2.13., dans les espaces séparables sans faire intervenir de propriétés géométriques des normes. Comme nous le verrons plus loin le résultat que nous allons donner est en fait contenu dans le corollaire 2.13 via les renorming theorems nous le donnons ici car la méthode, très différente, a son intérêt propre.

(1) Nous verrons plus loin qu'en fait c'est équivalent.

THEOREME 2.15.

Soit E un espace de Banach séparable dont le dual E^* est fortement séparable, T un opérateur monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors sur un résiduel de $\text{int } D(T)$ T est réduit à un point et fortement s.c.s.

DEMONSTRATION

On peut toujours supposer que T est maximal monotone (prendre $\hat{T}$ maximal monotone contenant T). On peut alors appliquer le théorème 1.10. Soit G_T le résiduel de $\text{int } D(T)$ sur lequel T est réduite à un élément et notons t l'application de G_T dans E^* définie par $Tx = \{tx\}$. On va chercher l'ensemble des points de G_T où t est continue à valeur dans E^* fort, nous allons pour cela démontrer deux lemmes.

LEMME 2.16.

Soit E un espace de Baire, F un espace métrique, f une application de E dans F ; on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de F par des parties $B_{n,\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$, telles que pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, le diamètre de $B_{n,\varepsilon}$ soit inférieur ou égal à ε et tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n : f^{-1}(B_{n,\varepsilon}) \text{ est de frontière maigre dans } E.$$

Alors l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel de E .

DEMONSTRATION

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout n : $f^{-1}(B_{n,\varepsilon}) = \overbrace{f^{-1}(B_{n,\varepsilon})}^o \cup A_{n,\varepsilon}$,
avec $A_{n,\varepsilon} \cap \overbrace{f^{-1}(B_{n,\varepsilon})}^o = \emptyset$ et $A_{n,\varepsilon}$ est un ensemble maigre. D'autre part :

$$E = f^{-1}(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_{n,\varepsilon}) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{f^{-1}(B_{n,\varepsilon})}^o \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,\varepsilon} \right)$$

d'où

$$E = \Omega_\varepsilon \cup M_\varepsilon$$

avec Ω_ε ouvert et M_ε maigre ; comme le complémentaire de Ω_ε est contenu dans M_ε , Ω_ε est partout dense dans E .

Considérons l'ensemble $G = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \Omega_{1/k}$,

c'est un résiduel G_δ de E .

Montrons que f est continue en tout point de G ; soit $x \in G$, alors

$x \in \Omega_{1/k}$, $\forall k \geq 1$

Or $\Omega_{1/k} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{f^{-1}(B_{n,1/k})}^{\circ}$,

donc il existe un entier p tel que :

$x \in \overbrace{f^{-1}(B_{p,1/k})}^{\circ}$;

calculons l'oscillation de f en x :

$$\omega(f, x) = \inf_{v \in \mathcal{V}(x)} \delta(f(v))^{(1)} \leq \delta(f(\overbrace{f^{-1}(B_{p,1/k})}^{\circ})) \leq \delta(B_{p,1/k}) \leq 1/k$$

d'où puisque ceci est vrai pour tout k : $\omega(f, x) = 0$ donc f est continue en x .

— ~~x~~ —

REMARQUE 2.17.

Le lemme 2.16. contient les résultats usuels concernant les fonctions semi-continues et de première classe.

Si on applique maintenant le lemme 2.16. à la situation particulière qui nous intéresse on obtient :

(1) $\mathcal{V}(x)$ désigne le filtre des voisinages de x et $\delta(f(v))$ le diamètre de $f(v)$.

LEMME 2.18.

Soit E un espace de Banach séparable dont le dual E^* est fortement séparable, Ω un espace de Baire et f une application continue de Ω dans E^* faible-étoile, alors l'ensemble des points de Ω où f est continue dans E^* fort est un résiduel de Ω .

DEMONSTRATION

Désignons par a_n une suite partout dense dans E^* ; pour tout $\varepsilon > 0$, considérons le recouvrement de E^* formé des boules fermées $\bar{B}(a_n, \varepsilon)$. $\bar{B}(a_n, \varepsilon)$ est faible-étoile compacte, son image réciproque par f est donc un fermé de Ω , donc de frontière rare ⁽¹⁾. On peut donc appliquer le lemme 2.16. et le résultat est démontré.

—————X—————

Appliquons maintenant le lemme 2.18. à l'application t c'est possible puisque G_T est un espace de Baire (résiduel d'un espace de Baire) et que t est continue de G_T dans E^* faible-étoile ; l'ensemble des points de G_T où t est fortement continue est donc un résiduel de G_T , que nous noterons G_t , il est facile de voir que G_t est encore un résiduel de $\text{int } D(T)$.

Il ne reste plus maintenant qu'à voir qu'en tout point de G_t l'opérateur T est fortement s.c.s. pour cela on procède de manière analogue à la démonstration du théorème 2.11. (c'est-à-dire en appliquant le théorème 2.6.).

—————X—————

Donnons tout de suite une application des théorèmes de semi-continuité supérieure forte générique.

(1) Un ensemble est dit rare si l'intérieur de son adhérence est vide.

COROLLAIRE 2.19.

Soit E un espace de Banach vérifiant les hypothèses du corollaire 2.13. et T un opérateur monotone de E dans E^* tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe un ouvert Ω_ε partout dense dans $\text{int } D(T)$ tel que $\forall x \in \Omega_\varepsilon$, le diamètre de Tx soit strictement inférieur à ε .

DEMONSTRATION

Notons G le résiduel sur lequel T est réduit à un point et fortement s.c.s. ; pour tout x dans G , il existe $r_{\varepsilon, x} > 0$ tel que pour $z \in B(x, r_{\varepsilon, x})$ le diamètre de Tz soit strictement inférieur à ε . On considère alors $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{x \in G} B(x, r_{\varepsilon, x})$, Ω_ε est trivialement ouvert et est partout dense car il contient G .

—x—

REMARQUE 2.20.

On a vraiment besoin de la semi-continuité supérieure forte pour démontrer le corollaire précédent car $\{x \in \text{int } D(T) \mid \delta(T(x)) < \varepsilon\}$ n'a aucune raison d'être ouvert. Si cet ensemble était ouvert l'unicité générique serait bien évidemment suffisante pour conclure.

Donnons maintenant une remarque sur les opérateurs monotones "quotient".

Soit T un opérateur monotone de E dans E^* tel que $D(T) = E$, M un sous-espace vectoriel fermé de E , x_0 un point de E ; on peut considérer l'opérateur $T_M : M \rightarrow M^* \simeq E^*/M^\circ$

défini par $T_M(x) = T(x+x_0)$

où x^* désigne la classe de x^* dans E^*/M° .

On vérifie facilement que T_M est encore un opérateur monotone. L'application des résultats précédents à l'opérateur T_M fournit des résultats nouveaux sur T . Traduisons par exemple le corollaire 2.9. on obtient :

COROLLAIRE 2.21.

Soit T un opérateur monotone de E dans E^* tel que $D(T) = E$,
 M un sous-espace fermé de E possédant une norme équivalente dont la duale
est strictement convexe, x_0 un point de E . Alors l'ensemble des points x
du sous-espace affine $x_0 + M$ pour lesquels Tx est orthogonal ⁽¹⁾ à M est un
résiduel de $x_0 + M$.

DEMONSTRATION

✓ Appliquer le corollaire 2.9. à l'opérateur T_M .

—X—

REMARQUE 2.22.

Avec l'hypothèse que M est séparable ce résultat est dû à
ZARANTONELLO [30].

§ 3 - LIEN AVEC LA DERIVABILITE DES FONCTIONS CONVEXES

Etant donné un espace de Banach E on notera $\Gamma_0(E)$ l'ensemble
des fonctions convexes semi-continues inférieurement, non identiques à $+\infty$
de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $f \in \Gamma_0(E)$, $\text{dom } f = \{x \in E \mid f(x) < +\infty\}$

et

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* \mid f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z-x \rangle \quad \forall z\}$$

on sait (résultat dû à ROCKAFELLAR) que la multi-application ∂f est maximale
monotone.

On a également les équivalences suivantes (voir ASPLUND [4]) :

pour $x \in \widehat{\text{dom } f}$:

(1) L'orthogonalité est entendue au sens suivant :

$$\forall m \in M, \forall x_1^*, x_2^* \in Tx \quad \langle x_1^* - x_2^*, m \rangle = 0$$

- (i) f est Gâteaux-dérivable en x si et seulement si $\partial f(x)$ est réduit à un élément.
- (ii) f est Fréchet-dérivable en x si et seulement si $\partial f(x)$ est réduit à un élément et la multi-application ∂f est semi-continue supérieurement de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$ dans E^* fort au point x .

On a également d'après la première partie, chapitre II, théorème 2.1. :

- (iii) f est Fréchet-sous-différentiable en x si et seulement si ∂f est semi-continue supérieurement de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$ dans E^* fort au point x .

En appliquant les théorèmes généraux obtenus pour les opérateurs monotones, il vient :

THEOREME 2.23.

Soit $f \in \Gamma_0(E)$ telle que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$ (E est un espace de Banach quelconque). Alors il existe un résiduel G de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$ tel que pour tout x dans G tous les sous-gradients de f en x ont même norme.

COROLLAIRE 2.24. (Asplund)

S'il existe sur E une norme compatible dont la duale soit strictement convexe, toute fonction f de $\Gamma_0(E)$ telle que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$ est Gâteaux-dérivable sur un résiduel de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$.

REMARQUE 2.25.

Comme nous l'avons déjà signalé dans la Remarque 2.10., le problème de savoir si la conclusion demeure lorsqu'on suppose seulement qu'il existe une norme équivalente Gâteaux-dérivable sur E est ouvert.

Traduisons maintenant les résultats de semi-continuité.

THEOREME 2.26.

S'il existe sur E une norme compatible possédant la propriété (H*), toute fonction f de $\Gamma_0(E)$ telle que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$ est Fréchet-sous-différentiable sur un résiduel de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$.

DEMONSTRATION

Appliquer le théorème 2.11.

—————X—————

COROLLAIRE 2.27.

S'il existe sur E une norme compatible possédant la propriété $(H\star)$ et dont la duale soit strictement convexe, toute fonction f de $\Gamma_0(E)$ telle que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$ est Fréchet-dérivable sur un résiduel de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$.

COROLLAIRE 2.28. (Asplund)

S'il existe sur E une norme compatible dont la duale soit localement uniformément convexe, toute fonction f de $\Gamma_0(E)$ telle que $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq \emptyset$ est Fréchet-dérivable sur un résiduel de $\overset{\circ}{\text{dom}} f$.

DEMONSTRATION

Nous avons déjà remarqué que toute norme dont la duale est localement uniformément convexe vérifie les hypothèses du corollaire 2.27.

—————X—————

REMARQUE 2.29.

Le corollaire 2.27. généralise le résultat d'Asplund car les hypothèses $(H\star)$ et stricte convexité de la norme duale sont moins fortes que la locale uniforme convexité de la norme duale. Ces hypothèses sont en fait très proche de la Fréchet-dérivabilité de la norme comme nous allons le voir.

Notons également que le théorème d'Asplund a été généralisé tout récemment par EKELAND et LEBOURG avec comme hypothèse qu'il existe sur le Banach une fonction numérique positive Fréchet-dérivable à support borné non vide.

Nous allons montrer (comme annoncé dans la Remarque 2.14.) que le fait qu'il existe une norme compatible sur E vérifiant (SC^*) ⁽¹⁾ et une autre norme vérifiant (H^*) entraîne qu'il existe une même norme sur E vérifiant ces deux propriétés.

PROPOSITION 2.30.

Soit E un espace de Banach, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes compatibles sur E respectivement (SC^*) et (H^*) .

Alors $\|\cdot\|_1^* + \|\cdot\|_2^*$ est une norme duale sur E^* qui provient d'une norme (SC^*) et (H^*) .

DEMONSTRATION

$\|\cdot\|_1^* + \|\cdot\|_2^*$ est faible-étoile semi-continue inférieurement c'est donc une norme duale, elle est strictement convexe puisque $\|\cdot\|_1^*$ est strictement convexe, montrons qu'elle est (H^*) .

Soit $x_i^* \rightarrow x^*$ dans E^*

$$\text{et } \|x_i^*\|_1^* + \|x_i^*\|_2^* \rightarrow \|x^*\|_1^* + \|x^*\|_2^*$$

d'après cette dernière condition, on peut toujours supposer que le filtre est borné et donc, suivant un ultrafiltre plus fin $\mathcal{U}$, on a :

$$x_i^* \rightarrow x^*, \quad \|x_i^*\|_1^* \rightarrow \alpha \quad \text{et} \quad \|x_i^*\|_2^* \rightarrow \beta \quad \text{avec } \alpha + \beta = \|x^*\|_1^* + \|x^*\|_2^*$$

Or d'après la semi-continuité faible-étoile des normes on a :

$$\alpha \geq \|x^*\|_1^* \quad \text{et} \quad \beta \geq \|x^*\|_2^*$$

$$\text{ce qui entraîne } \alpha = \|x^*\|_1^* \quad \text{et} \quad \beta = \|x^*\|_2^* .$$

$$\text{On a donc } x_i^* \xrightarrow{\mathcal{U}} x^* \quad \text{et} \quad \|x_i^*\|_2^* \rightarrow \|x^*\|_2^*$$

et d'après la propriété (H^*) x_i^* converge fortement vers x^* suivant $\mathcal{U}$.

(1) On dira désormais qu'une norme sur E est (SC^*) si sa duale est strictement convexe.

Et comme la limite ne dépend pas de l'ultrafiltre on en déduit que :

$x_i^* \rightarrow x^*$ fortement dans E^* et la proposition est démontrée.

~~X~~

Montrons également :

PROPOSITION 2.31.

Toute norme (SC*) et (H*) sur E est Fréchet-dérivable.

DEMONSTRATION

D'après la propriété (ii) il suffit de montrer que l'application de dualité $J = \frac{1}{2} \| \cdot \|^2$ est univoque et continue de E dans E^* fort. Puisque la norme est (SC*) il est trivial que J est univoque. Soit alors x_n tendant vers x dans E, on sait que $J(x_n) \rightharpoonup J(x)$ (continuité faible-étoile) et comme $\|J(x_n)\| = \|x_n\|$ on a $\|J(x_n)\| \rightarrow \|J(x)\|$ et la propriété (H*) entraîne que $J(x_n)$ converge fortement vers $J(x)$ et la continuité est démontrée.

~~X~~

Ces deux propositions montrent que nos hypothèses sur l'espace impliquent celles d'Ekeland et Lebourg (cette dernière étant trivialement vérifiée s'il existe sur E une norme compatible Fréchet-dérivable).

REMARQUE 2.32.

Le théorème 2.26., montre que si E vérifie la propriété (H*). Alors dans le théorème 3.6., du chapitre II de la première partie, une "bonne convergence" aura lieu génériquement.

REMARQUE 2.33.

On ne peut espérer améliorer indéfiniment les hypothèses dans les théorèmes de dérivabilité générique des fonctions convexes comme le montrent les exemples suivant :

Sur $L^\infty([0,1], dx)$ la fonction $\| \cdot \|_\infty$ est nulle part Gâteaux-dérivable (exemple dû à Mazur).

Sur $\mathcal{C}([0,1])$ espace des fonctions continues muni de la norme du maximum la fonction $\| \cdot \|$ est nulle part Fréchet-dérivable (exemple dû à Smulian).

Une question d'actualité importante est de savoir dans quelle mesure les résultats de dérivabilité générique des fonctions convexes continues s'étendent aux fonctions Lipschitziennes et localement Lipschitziennes.

Le théorème de RADEMACHER énonce que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne alors elle est Fréchet-dérivable presque partout (pour la mesure de Lebesgue). ARONSZAJN (voir [2]) a proposé une extension de ce théorème aux espaces de Banach avec $f : X \rightarrow Y$ ou X est un espace de Banach séparable et Y un dual séparable d'un Banach séparable, mais le Fréchet différentiabilité est remplacée par la Gâteaux-dérivabilité et avec une notion de presque partout "convenable" qui implique la densité. L'exemple de la projection sur le cône ≥ 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ montre qu'on ne peut espérer obtenir la Fréchet-dérivabilité dans ce cadre.

Par contre si on se limite aux fonctions numériques définies sur un espace de Banach "suffisamment bon" savoir si elles sont Fréchet-dérivables sur un ensemble partout dense semble être une question ouverte.

Les points de Fréchet-différentiabilité des fonctions convexes peuvent être interprétés comme des points où certains problèmes d'optimisation non convexes dépendant d'un paramètre ont des solutions (voir par exemple BARANGER-TEMAM [5] et BIDAUT [6]).

Ces résultats apparaissent comme une généralisation d'un résultat d'EDELSTEIN sur l'existence dans un fermé borné d'un point le plus loin d'un point donné dans un espace uniformément convexe (voir EDELSTEIN [11]).

Nous nous proposons maintenant de donner une interprétation du même type pour les points les plus près afin de montrer quel serait l'intérêt de posséder des théorèmes de Fréchet-dérivabilité générique des fonctions Lipschitziennes ou localement Lipschitziennes.

THEOREME 2.34.

Soit S une partie fermée non vide d'un espace de Hilbert E , si la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} d(x, S)^2$ est Fréchet-dérivable en un point x , alors x est projetable de façon unique sur S , si $p_S x$ désigne cette projection la dérivée est égale à $x - p_S x$ et toute suite minimisante s_n converge fortement vers $p_S x$.

DEMONSTRATION

Notons $x - \xi$ la dérivée de $\frac{1}{2} d(., S)^2$ au point x , on a alors :

$$(1) \quad \frac{1}{2} d(x+h, S)^2 = \frac{1}{2} d(x, S)^2 + \langle x-\xi, h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand h tend vers 0.

Il existe une suite s_n dans S telle que :

$$(2) \quad \frac{1}{2} d(x, S)^2 \leq \frac{1}{2} \|x-s_n\|^2 \leq \frac{1}{2} d(x, S)^2 + \frac{1}{n}$$

On a pour tout y dans E et pour tout $n \geq 1$:

$$(3) \quad \frac{1}{2} d(y, S)^2 \leq \frac{1}{2} \|y-s_n\|^2$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{2} \|y-s_n\|^2 = \frac{1}{2} \|x-s_n\|^2 + \frac{1}{2} \|y-x\|^2 + \langle y-x, x-s_n \rangle$$

De (1) et (3) on déduit :

$$\frac{1}{2} d(x, S)^2 + \langle x-\xi, h \rangle + \|h\| \varepsilon(h) \leq \frac{1}{2} \|x-s_n\|^2 + \frac{1}{2} \|h\|^2 + \langle h, x-s_n \rangle$$

ceci pour tout h et tout $n \geq 1$.

$$\text{Or} \quad \frac{1}{2} \|x-s_n\|^2 \leq \frac{1}{2} d(x, S)^2 + \frac{1}{n}$$

ce qui donne en remplaçant :

$$\langle x-\xi, h \rangle + \|h\| \varepsilon(h) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \|h\|^2 + \langle h, x-s_n \rangle$$

$$\text{d'où} \quad \langle x-\xi-(x-s_n), h \rangle \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \|h\|^2 + \|h\| \varepsilon(h).$$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$:

$$\|x-\xi-(x-s_n)\| \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $r > 0$ tel que pour tout h , $\|h\| \leq r$ entraîne
 $\left| \frac{1}{2} \|h\| + \varepsilon(h) \right| < \varepsilon/2$.

On a alors $\sup_{\|h\| \leq r} \langle x - \xi - (x - s_n), h \rangle \leq \frac{1}{n} + r \varepsilon/2$

Soit $\|x - \xi - (x - s_n)\| \leq \frac{1}{r \cdot n} + \varepsilon/2$

$r > 0$ étant fixé prenons n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{r \cdot n} < \varepsilon/2$.

Alors $\forall n \geq n_0$, on a :

$$\|x - \xi - (x - s_n)\| \leq \varepsilon$$

d'où $s_n \rightarrow \xi$ fortement et donc $\xi \in S$ puisque S est fermé.

Montrons maintenant que $\|x - \xi\| = d(x, S)$;

en effet :

$$\frac{1}{2} \|x - s_n\|^2 \rightarrow \frac{1}{2} d(x, S)^2$$

d'où :

$$\|x - s_n\| \rightarrow d(x, S) ;$$

et le résultat est démontré.

—X—

REMARQUE 2.35.

Dans le cas où S est un ensemble convexe il est connu que la fonction $\frac{1}{2} d(x, S)^2$ est Fréchet-dérivable en tout point, de dérivée $x - p_S x$. (Voir HOLMES [4]).

§ 4 - UN RESULTAT D'EXISTENCE GENERIQUE

Les opérateurs ϵ -augmentés

Etant donné un opérateur monotone T de E dans E^* et un nombre $\epsilon > 0$ nous allons introduire l'opérateur ϵ -augmenté de T que nous noterons T_ϵ ; comme nous le verrons cet opérateur contient toutes les perturbations usuelles de l'opérateur T (y compris le sous-différentiel à ϵ près lorsque T est un sous-différentiel). Cet opérateur T_ϵ possède la propriété remarquable qu'en tout point x de $\text{int } D(T)$ où T est réduit à un point et fortement s.c.s., $T_\epsilon x$ converge fortement vers Tx .

Par définition T_ϵ a pour graphe l'ensemble des couples $(x, x^*) \in E \times E^*$ tels que :

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq -\epsilon(1 + (\|x\| + \|y\|)^2) \quad \forall (y, y^*) \in G(T)$$

Quelques propriétés immédiates des opérateurs T_ϵ

- Tout opérateur monotone T' contenant T est contenu dans T_ϵ .
- $T \pm \epsilon J$ est contenu dans T_ϵ (J m.a. de dualité).
- Si $T = \partial f$ avec $f \in \Gamma_0(E)$ on a $\partial_\epsilon f^{(1)} \subset T_{2\epsilon}$.

On a le théorème essentiel suivant :

THEOREME 2.36.

Soit T un opérateur monotone de E dans E^* (E réflexif) tel que $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Alors en tout point x de $\text{int } D(T)$ où T est réduit à un élément et fortement s.c.s., $T_\epsilon x$ converge fortement vers Tx lorsque ϵ tend vers 0.

(1) $\partial_\epsilon f(x) = \{x^* \in E^* \mid f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle - \epsilon \quad \forall z\}$

DEMONSTRATION

Soit donc $x \in \text{int } D(T)$ vérifiant les hypothèses.

Donnons-nous un nombre $\eta > 0$ et soit α un nombre > 0 tel que

$\bar{B}(x, \alpha) \subset \text{int } D(T)$ et pour tout u $\|u\| \leq \alpha$ et tout $y^* \in T(x+u)$ on ait :

$$\|Tx - y^*\| \leq \eta/2 .$$

On a alors :

$$\forall x^* \in T_x \quad , \quad \forall y^* \in T(x+u) :$$

$$\langle x^* - y^*, -u \rangle \geq -\varepsilon(1 + (\|x\| + \|x+u\|)^2)$$

$$\text{et donc } \langle x^* - y^*, -u \rangle \geq -\varepsilon(1 + (2\|x\| + \alpha)^2)$$

$$\text{soit en écrivant } x^* - y^* = x^* - Tx + Tx - y^*$$

$$\langle x^* - Tx, -u \rangle \geq \langle Tx - y^*, u \rangle - \varepsilon(1 + (2\|x\| + \alpha)^2)$$

$$\text{Or } \langle Tx - y^*, u \rangle \geq -\eta/2 \alpha$$

$$\text{d'où } \langle x^* - Tx, u \rangle \leq \frac{\eta}{2} \alpha + \varepsilon(1 + (2\|x\| + \alpha)^2)$$

$$\text{et donc } \|x^* - Tx\| \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{\alpha} (1 + (2\|x\| + \alpha)^2)$$

et ceci est $\leq \eta$ en prenant ε tel que :

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} (1 + (2\|x\| + \alpha)^2) \leq \eta/2 .$$

—X—

La conséquence de ce théorème est le résultat d'existence "abstrait" suivant :

THEOREME 2.37.

Soit T un opérateur monotone de E dans E^* , on suppose que :

- (i) Pour $\varepsilon > 0$, il existe une famille εT d'opérateurs surjectifs qui vérifient :

Si $\varepsilon T^{-1}(x^*)$ converge fortement vers un point u lorsque ε tend vers 0, alors on a :

$$Tu = x^* .$$

- (ii) Il existe un opérateur maximal monotone et surjectif $\hat{T}$ contenant T tel que ${}_{\varepsilon}T^{-1} \subset (\hat{T}^{-1})_{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$.
- (iii) x^* est un point de E^* où $\hat{T}^{-1}$ (de E^* dans E) est réduit à un point et fortement semi-continu supérieurement.

Alors l'équation $Tu = x^*$ possède une solution unique.

DEMONSTRATION

${}_{\varepsilon}T^{-1}(x^*)$ est un ensemble non vide pour tout $\varepsilon > 0$ et contenu dans $(\hat{T}^{-1})_{\varepsilon}(x^*)$ et on sait d'après le théorème 2.36., que $(\hat{T}^{-1})_{\varepsilon}(x^*)$ converge fortement vers $(\hat{T}^{-1})(x^*)$, on en déduit que ${}_{\varepsilon}T^{-1}(x^*)$ converge fortement vers $\hat{T}^{-1}(x^*) = u$; on a alors d'après la propriété (i) $Tu = x^*$ et comme $T^{-1}(x^*) \subset \hat{T}^{-1}(x^*)$ la solution est unique.

—X—

COROLLAIRE 2.38.

Dans les hypothèses du théorème 2.37. il existe un résiduel de points x^* pour lesquels l'équation $Tu = x^*$ possède une solution unique.

REMARQUE 2.39.

Si on écrit le corollaire 2.38. dans le cas particulier du sous-différentiel d'une fonction numérique s.c.i. on retrouve immédiatement la formulation variationnelle du résultat d'Asplund (voir [3]). Pour une utilisation extensive de ce genre de résultat on pourra consulter BIDAUT [6] .

§ 5 - "RENORMING THEOREMS" ET COMPLEMENTS.

Les résultats tels que le corollaire 2.9., le théorème 2.11. et le corollaire 2.13. ramènent les propriétés génériques des opérateurs monotones à des problèmes de normes équivalentes. On a alors à notre disposition un certain nombre de résultats. Citons sous forme condensée les "renorming theorems" les plus forts et les plus récents.

THEOREME 2.40.

Si E est un espace de Banach engendré par un faiblement compact ⁽¹⁾, alors E possède une norme équivalente localement uniformément convexe dont la duale est strictement convexe.

THEOREME 2.41.

Si E est un espace de Banach engendré par un faiblement compact et tel que son dual E^* le soit aussi, alors E possède une norme équivalente localement uniformément convexe dont la duale est aussi localement uniformément convexe.

THEOREME 2.42.

Si E est un espace de Banach engendré par un faiblement compact et possédant une norme équivalente Fréchet-dérivable, alors E possède une norme équivalente localement uniformément convexe ainsi que sa duale.

Ces trois résultats sont la conséquence de nombreux travaux, citons entre autres : AMIR et LINDENSTRAUSS [1], TROJANSKI [28], ASPLUND [4], JOHN et ZIZLER [15], [16].

Donnons quelques exemples d'espaces E.F.C. (engendré par un faiblement compact)

- les espaces séparables.
- les espaces réflexifs.
- les espaces de fonctions continues sur un Eberlein compact (i.e. compact homéomorphe à un faiblement compact d'un espace de Banach) (Voir [1]).

(1) On dit que E est engendré par un faiblement compact s'il est égal à l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par une partie faiblement compacte.

- l'espace $C_0(\Gamma)$.

Soit Γ un ensemble ,

$C_0(\Gamma) = \{x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \{\gamma \mid |x(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ est fini}\}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|$.

Rappelons que pour $1 \leq p < +\infty$

$$\ell^p(\Gamma) = \{x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p < +\infty\}$$

muni de $\|x\|_p = (\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p)^{1/p}$

et $\ell^\infty(\Gamma)$ est l'ensemble des applications bornées de Γ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|x\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|$.

Pour voir que $C_0(\Gamma)$ est E.F.C. on considère l'inclusion continue de $\ell^p(\Gamma)$ dans $C_0(\Gamma)$ (pour $1 < p < +\infty$) elle est donc faiblement continue, comme $\ell^p(\Gamma)$ est réflexif sa boule unité est faiblement compacte, son image dans $C_0(\Gamma)$ est une partie faiblement compacte et il est immédiat qu'elle engendre $C_0(\Gamma)$.

EXEMPLES D'ESPACES NON E.F.C.

- l'espace $\ell^\infty(\Gamma)$, si Γ est infini, et plus généralement tous les espaces $L^\infty(X, \mu)$ (μ mesure positive sur X) qui ne sont pas de dimension finie ne sont pas E.F.C. (ce résultat a été démontré par LINDENSTRAUSS voir [20]).

Nous allons déduire ce résultat d'une proposition générale très simple ce qui fournit une démonstration différente de celle de Lindenstrauss pour $L^\infty(X, \mu)$.

PROPOSITION 2.43.

Soit E un espace de Banach séparable dont le dual E^* est E.F.C., alors E^* est séparable pour la topologie de la norme.

DEMONSTRATION

Soit K un faiblement compact fondamental dans E^* , alors comme la topologie $\sigma(E^*, E)$ est moins fine que $\sigma(E^*, E^{**})$, K est $\sigma(E^*, E)$ compact, comme E est séparable K est $\sigma(E^*, E)$ métrisable et donc $\sigma(E^*, E)$ séparable donc $\sigma(E^*, E^{**})$ séparable d'où il découle que E^* est $\sigma(E^*, E^{**})$ séparable et donc fortement séparable.

COROLLAIRE 2.44.

Si $L^\infty(X, \mu)$ n'est pas de dimension finie il n'est pas E.F.C..

DEMONSTRATION

Considérons $L^1(X, \mu)$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables disjointes non négligeables de X .

Considérons le sous espace F de $L^1(X, \mu)$ formé des fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \mathbb{1}_{X_n}$ avec $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| \mu(X_n) < +\infty$; il est clair que F est isomorphe à $\ell^1(\mathbb{N})$, son dual $F^* = L^\infty(X, \mu) / F^\circ$ est donc isomorphe à $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Si $L^\infty(X, \mu)$ était E.F.C. son quotient F^* le serait aussi, donc d'après la proposition 2.43., $\ell^\infty(\mathbb{N})$ serait séparable ce qui est absurde.

—X—

Donnons un autre exemple :

- l'espace $\ell^1(\Gamma)$ où Γ est infini non dénombrable n'est pas E.F.C. .

En effet, en vertu du théorème de Dunford-Pettis, dans $\ell^1(\Gamma)$ les compacts faibles sont des compacts forts et donc séparables; il s'ensuit que si $\ell^1(\Gamma)$ était E.F.C., il serait séparable, ce qui est impossible si Γ est infini non dénombrable.

REMARQUE 2.45.

Les exemples que nous venons de donner et la proposition 2.43 montrent qu'il est difficile d'exhiber des espaces E.F.C. à dual E.F.C. en dehors des espaces réflexifs et des espaces à dual séparable.

REMARQUE 2.46.

On peut dans certains cas montrer l'existence de normes équivalentes l.u.c. sans être dans les hypothèses des théorèmes 2.40., 2.41. ou 2.42. ; c'est le cas de $C_0(\Gamma)$ qu'on peut renormer avec une norme l.u.c. à duale l.u.c. (ALPLUND, RAINWATER).

§ 6 - APPLICATIONS.

D'un point de vue pratique, les résultats génériques peuvent apparaître comme un dernier recours lorsqu'on ne sait pas démontrer l'unicité de la solution d'une équation $Au \ni f$ où A est monotone. L'application du corollaire 2.13. (par exemple) à l'opérateur monotone A^{-1} entraîne qu'on peut toujours perturber légèrement f de manière à ce que la solution soit unique et dépende continûment de f localement.

Nous allons présenter deux exemples.

Comme premier exemple : Nous considérons les problèmes elliptiques non linéaires traités par F.E. BROWDER (voir [7]).

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, m un entier ≥ 1 ,

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

A désigne un opérateur différentiel non linéaire d'ordre $2m$ sous forme de divergence généralisée noté symboliquement :

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\beta u(x))$$

où les A_α sont des applications de $\Omega \times \mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}$ (s désigne le nombre de multi-entiers β tels que $|\beta| \leq m$). On dira que A vérifie les hypothèses

(H) s'il vérifie les conditions suivantes :

- (i) $\forall \xi \in \mathbb{R}^s$ les fonctions $x \rightarrow A_\alpha(x, \xi)$ sont mesurables sur Ω et pour presque tout x dans Ω
 $\xi \rightarrow A_\alpha(x, \xi)$ est continue sur $\mathbb{R}^s$.

- (ii) $\exists p \in]1, +\infty[$, $\exists g \in L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)
et $\exists c > 0$ tels que presque partout en x on ait :

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq c |\xi|^{p-1} + g(x)$$

- (iii) Pour presque tout x dans Ω on a :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')] [\xi_\alpha - \xi'_\alpha] \geq 0$$

pour tous $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^s$ avec $\xi = (\xi_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$

- (iv) $\exists c_0 > 0$, $\exists h \in L^1(\Omega)$ tels que pour presque tout x dans Ω et tout $\xi \in \mathbb{R}^s$ on ait :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq c_0 |\xi|^p - h(x)$$

On sait alors (voir BROWDER [7]) que pour toute distribution f dans $W^{-m, p'}(\Omega)$ il existe u dans $W_0^{m, p}(\Omega)$ tel que :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\beta u(x)) = f$$

Mais on ne sait rien dire d'autre a priori sur l'ensemble des solutions sinon que c'est un fermé convexe de $W_0^{m, p}(\Omega)$.

Or, résoudre le problème de Dirichlet ci-dessus revient à résoudre l'équation $Au = f$ où A est l'opérateur monotone de $W_0^{m, p}(\Omega)$ dans $W^{-m, p'}(\Omega)$ donné par :

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega A_\alpha(x, D^\beta u(x)) \cdot D^\alpha v(x) \, dx$$

et on peut appliquer tous les résultats du paragraphe 2 puisque $W_0^{m, p}(\Omega)$ est réflexif ; en particulier il existe un résiduel de points de $W^{-m, p'}(\Omega)$ pour lesquels il y a unicité de la solution et semi-continuité supérieure forte de l'opérateur A^{-1} .

Le deuxième exemple ; a trait aux inéquations variationnelles.

V désigne un espace de Banach réflexif A un opérateur monotone hémicontinu et borné de V dans V^* .

Etant donné un élément f dans V^* on cherche $u \in V$ tel que :

$$\langle Au-f, v-u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in V$$

où φ est une fonction convexe s.c.i. propre.

Si on impose une condition de coercivité du genre :

$$\exists v_0, \varphi(v_0) < +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\langle Au, u-v_0 \rangle + \varphi(u)}{\|u\|}$$

tend vers $+\infty$ lorsque $\|u\|$ tend vers $+\infty$, on sait que le problème a au moins une solution pour tout f dans V^* (voir LIONS [21] p. 251, théorème 8.5).

Or on voit facilement que le problème peut s'écrire :

Trouver $u \in V$ tel que $Au + \partial\varphi(u) \ni f$.

L'opérateur $A + \partial\varphi$ est alors monotone et surjectif et on peut lui appliquer de la même façon les résultats du paragraphe 2.

On pourrait particulariser cet exemple et prendre à titre indicatif l'inéquation variationnelle correspondant au problème de statique avec frottement loi de Coulomb et contact bilatéral (voir DUVAUT-LIONS page 143) dans ce cas le problème de l'unicité pour tout f est ouvert.

BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE

- [1] D. AMIR and J. LINDENSTRAUSS : "The structure of weakly compact sets in Banach spaces". Ann. of Math. 88 (1968), 35-46.
- [2] N. ARONSZAJN : Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces. Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université PARIS VI, N° 75011.
- [3] E. ASPLUND : Fréchet differentiability of convex functions, Acta. Math. 121 (1968), 31-47.
- [4] E. ASPLUND : Topics in the theory of convex functions, theory and applications of monotone operators. A. Ghizzetti ed. Oderisi (1969).
- [5] J. BARANGER et R. TEMAM : Non convex optimization problems depending on a parameter. SIAM J. of Control.
- [6] M.F. BIDAUT : Thèse, Paris VI, (1973).
- [7] F. BROWDER : Existence theorems for non linear partial differential equations, Global Analysis, Proc. Sym. Pure Math. Vol 16, Amer. Math. Soc. (1970), 1-60.
- [8] G. CHOQUET : Outils topologiques et métriques de l'Analyse Mathématique, C.D.U., (1969).
- [9] M. DAY : A Geometric proof of Asplund's differentiability theorem, Israël, J. of Math. 13 (1972), 277-280.
- [10] G. DUVAUT et J.L. LIONS : Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, (1972).

- [11] M. EDELSTEIN : Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces. Israël, J. of Math, vol 4 n° 3 (1966), 171-176
- [12] M. EDELSTEIN : On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces. Journal of the London Mathematical Society, vol 43, part 3 (1967).
- [13] I. Ekeland et G. Lebourg : C.R. Acad. Paris, (Juin 1975).
- [14] R.B. HOLMES : A course on optimization and best approximation. Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag.
- [15] K. JOHN and V. ZIZLER : A renorming of dual spaces. Israël, J. of Math. 12 (1972), 331-336.
- [16] K. JOHN and V. ZIZLER : A note on renorming of dual spaces. Bull-Acad. Pol. Sciences, 21, 1, (1973).
- [17] P.S. KENDEROV : The set valued monotone mappings are almost everywhere single-valued. Comptes-rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, Tome 27, N° 9, (1974).
- [18] P.S. KENDEROV et R. ROBERT : A paraître.
- [19] M. LEDUC : THèse, Orsay, (1970).
- [20] J. LINDENSTRAUSS : Symposium on infinite dimensional topology, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, N° 69, (1972).
- [21] J.L. LIONS : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod (1969).
- [22] E. MICHAEL : Trans. Amer. Math. Soc. 71, (1951), 152-182.
- [23] J. RAINWATER : Day's norm on $C_0(\Gamma)$. Proc. of functional analysis week (Aarhus 1969), 46-50. Aarhus Matem. Inst. Univ. (1969).

- [24] R. ROBERT : Points de continuité de multi-application semi-continues supérieurement. C.R. Acad. Sc. Paris t.278, (février 1974).
- [25] R. ROBERT : Une généralisation aux opérateurs monotones des théorèmes de différentiabilité d'Asplund.
C.R. Acad. Sc. Paris t.278, (avril 1974).
- [26] R. ROBERT : Une généralisation aux opérateurs monotones des théorèmes de différentiabilité d'Asplund. Analyse convexe et ses applications. Comptes-rendus (janvier 1974). Lectures notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag (n° 102).
- [27] R.T. ROCKAFELLAR : Local boundedness of non linear monotone operators. Mich. Math. J. 16 (1969), 397-407.
- [28] S.L. TROYANSKI : On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces.
Studia Math. 37 (1970-1971), 173-180.
- [29] M. VALADIER : Thèse , Paris (1970).
- [30] E. ZARANTONELLO : Dense single-valuedness of monotone operators.
Israël Journal of Math., vol 15, (1973).

TROISIEME PARTIE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

ANALYSE NON LINEAIRE MULTIVOQUE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Deux sous-parties :

- III.1. Degré pour les multi-applications à valeurs convexes.
- III.2. Degré pour des couples de fonctions, topologie de l'ensemble des solutions de certaines équations fonctionnelles, applications.

*Cette partie a été faite en collaboration avec
Jean-Michel LASRY.*

III.1.

DEGRE POUR LES MULTI-APPLICATIONS A VALEURS CONVEXES

P L A N

INTRODUCTION

A - DEFINITION DU DEGRE ET PRINCIPALES PROPRIETES

Conventions et notations.

I Définition et propriétés du degré sur $\mathbb{R}^n$

Suiveurs, définition du degré sur $\mathbb{R}^n$,

Propriétés, Théorème de Borsuk,

Lien avec le degré défini par Ma.

II Le degré en dimension infinie

Définition et propriétés, Théorème de Borsuk,

Lien avec le degré défini par Cellina et Lasota.

B - APPLICATIONS

III Théorèmes de point fixe et de surjectivité

Théorèmes de point fixe : Kakutani-Fan, Schaefer,
Petryshyn et Fitzpatrick, pour les multi-applications
inward et outward.

Théorèmes de surjectivité : pour les multi-applications
outward, Théorème du rétracte, Théorème de non séparation de Fan.

IV Quelques propriétés combinatoire dans $\mathbb{R}^n$

Théorème : de Helly, du polyèdre, de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz.
Equivalence de certains théorèmes dans $\mathbb{R}^n$.

V Applications aux équations aux dérivées partielles

Un théorème de continuité, premier exemple, deuxième exemple,
une application du théorème de Borsuk.

INTRODUCTION

L'idée de définir une notion de degré topologique pour des multi-applications est due à Eilenberg et Montgomery (voir [7]) ; ces auteurs définissent le nombre de Lefschetz pour une multi-application à valeurs acycliques sur un métrique compact ANR (absolute neighborhood retract) au moyen d'un théorème d'homologie du à Vietoris. L'extension de cette théorie au cas d'espaces non compacts et de multi-applications compactes est due essentiellement à Granas [9], Jaworowski [12],[23] et Powers [22].

D'autres approches ont été utilisées pour définir un degré topologique dans le cas de multi-applications semi-continues supérieurement à valeurs convexes compactes. Citons Hukuhara [11] pour la dimension finie, puis Cellina et Lasota [3] qui définissent le degré pour des multi-applications de la forme $I - \Gamma$, avec Γ compacte dans un espace localement convexe métrisable, au moyen d'un théorème d'approximation par des fonctions. Plus récemment Ma [13] étend ces résultats aux espaces localement convexes. Enfin, avec des conditions supplémentaires sur l'espace (qui reviennent en gros à dire que c'est un espace de Fréchet) Petryshyn et Fitzpatrick [15] définissent le degré pour $I - \Gamma$, où Γ est asymptotiquement compacte, au moyen de rétractions ; une construction analogue utilisant le théorème d'approximation de Cellina est donnée par Webb [21].

Nous présentons ici une méthode différente de celles précédemment citées pour définir le degré des multi-applications à valeurs convexes.

Cette méthode présente un triple intérêt :

- 1°/ Elle conduit à une construction particulièrement simple.
- 2°/ Elle ne suppose pas que la multi-application est à valeurs compactes dans le cas de la dimension finie, de plus, on suppose qu'elle est seulement hémicontinue supérieurement.
- 3°/ Indépendamment du degré, la méthode elle-même va nous fournir des démonstrations très simples de certains théorèmes de point fixe déjà connus et nous permettre d'énoncer des résultats nouveaux.

Nous donnons les principales propriétés du degré en dimension finie et infinie, renvoyant dans ce dernier cas à Ma [13], pour un exposé plus exhaustif, après avoir constaté que les deux notions coïncident.

Nous présentons trois types d'applications :

- Des théorèmes de points fixes et de surjectivité de multi-applications.
- Nous indiquons comment obtenir de façon systématique des résultats du genre théorème de Helly.
- Résolution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires.

CONVENTIONS ET NOTATIONS

Soit E un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$ (e.l.c.s.) ; nous désignerons par FE l'ensemble des parties fermées non vides de E , par CE l'ensemble des parties convexes fermées non vides, et par KE l'ensemble des parties convexes compactes non vides de E .

Soit X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$, et une multi-application $\Gamma : X \rightarrow FY$.

On dit que Γ est semi-continue supérieurement en x_0 si, pour tout ouvert contenant $\Gamma(x_0)$, il existe un voisinage $\mathcal{U}(x_0)$ de x_0 dans X tel que pour tout x dans $\mathcal{U}(x_0)$, $\Gamma(x)$ soit contenu dans l'ouvert.

On dit que Γ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si elle l'est en tout point de X .

On vérifie facilement que si Y est compact,

$\Gamma : X \rightarrow FY$ est s.c.s. si et seulement si son graphe

$$G(\Gamma) = \{(x, y) \mid y \in \Gamma(x)\}$$

est fermé dans $X \times Y$.

Une autre propriété utile est que si K est un compact contenu dans X , si Y est séparé et si $\Gamma : X \rightarrow FY$ est s.c.s. à valeurs compactes alors :

$$\Gamma(K) = \bigcup_{x \in K} \Gamma(x)$$

est compact.

Si Γ_1, Γ_2 sont deux multi-applications s.c.s. de X dans KE (E e.l.c.s.), alors $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est s.c.s.

On dit que $\Gamma : X \rightarrow FE$ est demi-continue supérieurement (d.c.s.) si pour tout x_0 dans X et tout demi-espace ouvert contenant $\Gamma(x_0)$, il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 dans X tel que pour tout x dans $U(x_0)$, $\Gamma(x)$ soit contenu dans le demi-espace ouvert.

Remarquons que la semi-continuité supérieure entraîne la demi-continuité supérieure, la réciproque n'étant pas vraie.

Soit $\Gamma : X \rightarrow CE$, pour $x \in X$ et $e^* \in E^*$, on note :

$$\sigma_{\Gamma}(e^*, x) = \sup_{y \in \Gamma x} \langle e^*, y \rangle .$$

On dit que Γ est h.c.s. en $x_0 \in X$,

Si pour tout $e^* \in E^*$, $x \rightarrow \sigma_{\Gamma}(e^*, x)$ est s.c.s. en x_0 .

On dit que Γ est h.c.s. si elle l'est en tout point.

Il est clair que la demi-continuité supérieure entraîne l'hemi-continuité supérieure la réciproque n'étant pas vraie.

EXEMPLE :

Prenons $X = \mathbb{R}^2$, $H = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\}$

et $\Gamma x = x + H$.

Γ est h.c.s. mais n'est pas d.c.s.

Il est utile de remarquer que si $\Gamma : X \rightarrow CE$ est à valeurs faiblement compactes, dire que Γ est h.c.s. revient à dire que Γ est s.c.s. lorsque E est muni de la topologie faible (voir Valadier [25]).

On déduit facilement de la remarque précédente que si Γ est à valeurs faiblement compactes les notions de d.c.s. et h.c.s. coïncident.

Si on suppose de plus que $\Gamma(X)$ est relativement compact dans E , les trois notions h.c.s. , d.c.s. , s.c.s. coïncident.

(Il suffit de remarquer que sur $\overline{\Gamma(X)}$ la topologie de E coïncide avec la topologie faible).

Nous renvoyons à [18] pour les définitions et propriétés usuelles relatives à la théorie du degré pour les fonctions.

- III.7 bis -

A

DEFINITION DU DEGRE ET PRINCIPALES PROPRIETES

I - DEFINITION DU DEGRE SUR $\mathbb{R}^n$ ET PROPRIETES

SUIVEURS

Nous nous intéressons aux multi-applications $\Gamma : K \rightarrow F \mathbb{R}^n$, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION 1.1.

Etant donnée une telle multi-application Γ , on appelle suiveur de Γ sur K , ou suiveur de Γ , toute application continue $p : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall x \in K : p(x) \cdot \Gamma(x) \geq 1 \quad (\text{i.e. } p(x) \cdot y \geq 1 \quad \forall y \in \Gamma(x)).$$

Donnons maintenant un lemme sur l'existence de suiveurs ; nous l'énonçons dans un contexte plus général car il interviendra dans la suite.

LEMME 1.2.

Soit E un e.l.c.s., X un espace topologique paracompact, $\Gamma : X \rightarrow CE$ hemi-continue supérieurement telle que $\forall x \in X : 0 \notin \Gamma(x)$. Alors il existe $p : X \rightarrow E^*$ (dual topologique de E), continue pour toute topologie d'e.v.t. séparée sur E^* , telle que $\langle p(x), \Gamma(x) \rangle \geq 1 \quad \forall x \in X$.

De plus p est localement de dimension finie et localement compacte (i.e. : $\forall x$, il existe $U(x)$ voisinage de x tel que $p(U(x))$ soit contenu dans un espace de dimension finie et soit relativement compact).

Si en outre X est compact, p est de dimension finie.

DEMONSTRATION

D'après le théorème de Hahn-Banach, pour tout x dans X , il existe q_x dans E^* telle que : $\langle q_x, \Gamma(x) \rangle > 2$. Comme Γ est h.c.s., il existe U_x voisinage ouvert de x dans X tel que : $\forall z \in U_x, \langle q_x, \Gamma(z) \rangle > 1$.

Les U_x constituent un recouvrement ouvert de X ; X étant paracompact, il existe un recouvrement plus fin localement fini $(\Omega_i)_{i \in I}$ et une partition

continue de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ subordonnée à ce recouvrement; on a donc :

$$(1) \quad \forall i \in I, \exists x_i \in X : \Omega_i \subset \bigcup_{x_i} \varphi_i$$

$$(2) \quad \varphi_i \geq 0, \text{ supp } \varphi_i \subset \Omega_i$$

$$(3) \quad \forall x \in X \quad \sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1.$$

Utilisant (1) et l'axiome du choix, on définit une application de I dans E^* :
 $i \rightarrow q_{x_i}$.

Si $x \in X$, soit $I_x = \{i \in I \mid x \in \Omega_i\}$, I_x est non vide et fini.

Considérons l'application $p : X \rightarrow E^*$ définie par :

$$p(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) q_{x_i} = \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) q_{x_i}.$$

Vérifions que p est bien un suiveur de Γ ; en effet :

$$\langle p(x), \Gamma(x) \rangle = \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) \langle q_{x_i}, \Gamma(x) \rangle.$$

Comme $x \in \Omega_i \subset \bigcup_{x_i} \varphi_i$, on a $\langle q_{x_i}, \Gamma(x) \rangle > 1 \quad \forall i \in I_x$;

$$\text{d'où} \quad \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) \langle q_{x_i}, \Gamma(x) \rangle \geq \sum_{i \in I_x} \varphi_i(x) = 1.$$

Vérifions que p est continue, localement de dimension finie et localement compacte.

Soit V un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de Ω_i ; notons $I_V = \{i \in I \mid V \text{ rencontre } \Omega_i\}$, alors :

$$p(y) = \sum_{i \in I_V} \varphi_i(y) q_{x_i}$$

pour tout y dans V ; on en déduit immédiatement les propriétés énoncées.

Si X est compact on est tout de suite ramené à I fini.

REMARQUE 1.3.

Si p est un suiveur de Γ sur K , on a $p(x) \neq 0$, $\forall x$.

LEMME ET DEFINITION 1.4.

Soit D un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $\bar{D}$ son adhérence, ∂D sa frontière ; soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $p : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ suiveur de Γ sur ∂D . Alors on peut définir $d(0, p, \partial D)$ (degré de p par rapport à 0 et ∂D , au sens des fonctions) ; ce degré ne dépend pas du suiveur choisi ; par définition nous dirons que c'est le degré de Γ par rapport à 0 et D , nous le noterons $d(0, \Gamma, D)$.

DEMONSTRATION

p est continue de ∂D dans $\mathbb{R}^n$ et $\forall x \quad p(x) \neq 0$; on rappelle que $d(0, p, \partial D)$ est défini comme étant le degré par rapport à 0 et D de n'importe quelle extension continue $\hat{p}$ de p à $\bar{D}$.

Soient p_1 et p_2 deux suiveurs de Γ sur ∂D .

Considérons l'homotopie $(t, x) \rightarrow t p_1(x) + (1-t)p_2(x)$ définie sur $[0, 1] \times \partial D$. On a bien : $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \in \partial D : t p_1(x) + (1-t)p_2(x) \neq 0$. En effet, prenons y dans $\Gamma(x)$, on a :

$$t p_1(x) \cdot y + (1-t) p_2(x) \cdot y \geq 1$$

(Ceci montre au passage que $t p_1 + (1-t) p_2$ est encore un suiveur de Γ sur ∂D).

Donc d'après les propriétés du degré pour les fonctions, on a bien :

$$d(0, p_1, \partial D) = d(0, p_2, \partial D).$$

—X—

On vient de définir $d(0, \Gamma, D)$ pour les multi-applications de $\bar{D}$ dans $F \mathbb{R}^n$ possédant un suiveur sur ∂D ; ce degré est ainsi défini dans un cadre très général. En particulier, en utilisant le lemme 1.2., on voit que $d(0, \Gamma, D)$ est défini pour toute multi-application $\Gamma : \bar{D} \rightarrow C \mathbb{R}^n$ hemi-continue supérieurement et telle que $0 \notin \Gamma(\partial D)$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\Gamma - a$ possède un suiveur sur ∂D on définit $d(a, \Gamma, D) = d(0, \Gamma - a, D)$.

Notons $S\Gamma = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \Gamma - a \text{ possède un suiveur sur } \partial D\}$.

PROPOSITION 1.5.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$; alors $S\Gamma$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma(\partial D)$. De plus si Γ est hémicontinue supérieurement à valeurs convexes fermées on a :

$$S\Gamma = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma(\partial D).$$

DEMONSTRATION

Soit $a \in S\Gamma$ et p un suiveur de $\Gamma - a$ sur ∂D .

(i.e. $\forall x \in \partial D : p(x) \cdot [\Gamma(x) - a] \geq 1$).

Considérons $2p(x) \cdot [\Gamma(x) - a - u] = 2p(x) [\Gamma(x) - a] - 2p(x) \cdot u$.

Ceci est supérieur ou égal à $2 - 2p(x) \cdot u$.

Comme p est continue et que ∂D est compact, pour u suffisamment petit, cette quantité est supérieure ou égale à 1. D'où $a + u \in S\Gamma$ et $S\Gamma$ est ouvert.

Il est d'autre part évident que $S\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma(\partial D)$.

La dernière égalité découle immédiatement du lemme 1.2.

— ~~X~~ —

REMARQUE 1.6.

Le fait que $S\Gamma = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma(\partial D)$ n'entraîne pas que la multi-application Γ soit à valeurs convexes fermées, ni qu'elle soit h.c.s. ; on pourra s'en persuader par des contre-exemples simples.

PROPRIÉTÉS DU DEGRÉ SUR $\mathbb{R}^n$

Donnons tout d'abord une notion d'homotopie adaptée aux multi-applications que nous considérons.

DEFINITION 1.7.

On appelle homotopie relative à 0 toute multi-application $\Gamma : [0,1] \times \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$ possédant un suiveur sur $[0,1] \times \partial D$, c'est-à-dire telle qu'il existe $p : [0,1] \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue vérifiant :

$$p(t,x) \cdot \Gamma(t,x) \geq 1 \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \partial D.$$

On dira que Γ est une homotopie relative à a si $\Gamma - a$ est une homotopie relative à 0.

EXEMPLE

Si $\Gamma : [0,1] \times \bar{D} \rightarrow C \mathbb{R}^n$ est h.c.s., et si $0 \notin \Gamma([0,1] \times \partial D)$, Γ est une homotopie relative à 0 ; cela se déduit aisément du lemme 1.2., en prenant $X = [0,1] \times \partial D$.

Enonçons maintenant en un théorème les principales propriétés du degré que nous venons de définir.

THEOREME 1.8.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$ et $a \in S\Gamma$, alors $d(a, \Gamma, D)$ est défini et on a :

- (1) S'il existe une section continue f de Γ (i.e. $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue telle que $f(x) \in \Gamma(x)$, $\forall x$), $d(a, f, D)$ est défini et égal à $d(a, \Gamma, D)$.

- (2) Continuité par rapport à a.

Il existe un voisinage U de a dans $S\Gamma$ tel que :

$$\forall b \in U : d(b, \Gamma, D) = d(a, \Gamma, D).$$

- (3) Continuité par rapport à Γ .

Il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\forall \Gamma', \Gamma' : \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$, vérifiant

$\Gamma'(x) \subset \Gamma(x) + B(0, \varepsilon)$ pour tout x, on ait

$$a \in S\Gamma' \text{ et } d(a, \Gamma', D) = d(a, \Gamma, D).$$

- (4) $d(a, \Gamma, D)$ ne dépend que des valeurs de Γ sur ∂D .

i.e. si $\Gamma' : \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$, coïncide avec Γ sur ∂D , alors $a' \in S\Gamma'$ et $d(a, \Gamma', D) = d(a, \Gamma, D)$.

- (5) S'il existe un suiveur de $\Gamma - a$ sur $\bar{D}$, on a $d(a, \Gamma, D) = 0$ (c'est le cas si $\Gamma : \bar{D} \rightarrow C \mathbb{R}^n$ est h.c.s. et $a \notin \Gamma(\bar{D})$).

- (6) Invariance par homotopie.

Soit $\Gamma : [0,1] \times \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$ une homotopie relative à a.

Notons $\Gamma_0(x) = \Gamma(0, x)$, $\Gamma_1(x) = \Gamma(1, x)$.

Alors : $a \in S\Gamma_0$, $a \in S\Gamma_1$,

et $d(a, \Gamma_0, D) = d(a, \Gamma_1, D)$.

(7) Décomposition du domaine.

Soit $a \in S\Gamma$ et $D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 étant deux ouverts disjoints (alors $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$).

On a :

$$d(a, \Gamma, D) = d(a, \Gamma, D_1) + d(a, \Gamma, D_2)$$

(on convient que le degré par rapport à l'ouvert vide est nul).

(8) Propriété d'excision.

Soit K un compact contenu dans $\bar{D}$; s'il existe un suiveur de $\Gamma - a$ sur $K \cup \partial D$ (c'est le cas si par exemple $\Gamma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C} \mathbb{R}^n$ est h.e.s. et $a \notin \Gamma(K \cup \partial D)$).

On a :

$$d(a, \Gamma, D) = d(a, \Gamma, D \setminus K).$$

(9) Produits cartésiens.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $D' \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C} \mathbb{R}^n$ h.e.s.,

$\Gamma' : \bar{D}' \rightarrow \mathbb{C} \mathbb{R}^m$ h.e.s., $a \notin \Gamma(\partial D)$, $a' \notin \Gamma'(\partial D')$, alors :

$$a \times a' \in S(\Gamma \times \Gamma')$$

et

$$d(a \times a', \Gamma \times \Gamma', D \times D') = d(a, \Gamma, D) \cdot d(a', \Gamma', D').$$

En définissant $\Gamma \times \Gamma'(x \times x') = \Gamma(x) \times \Gamma'(x')$

pour $x \times x' \in \bar{D} \times \bar{D}'$.

DEMONSTRATION

Pour démontrer ce théorème, on se ramène, à l'aide de suiveurs, aux propriétés du degré pour les fonctions qui sont supposées connues (voir [18]).

(1) Supposons $a = 0$ et soit $p = \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un suiveur de Γ ; on a alors $p(x) \cdot f(x) \geq 1$ pour tout x de ∂D .

Montrons que p et f sont homotopes sur ∂D relativement à 0.

Considérons $tp(x) + (1-t)f(x)$ pour $(t, x) \in [0, 1] \times \partial D$, effectuons le produit scalaire par $f(x)$, on obtient :

$$t p(x) \cdot f(x) + (1-t)f(x)^2 \geq t + (1-t)f(x)^2$$

et le deuxième membre est toujours strictement positif puisque $0 \notin f(\partial D)$.

On a donc :

$$d(0, p, \partial D) = d(0, f, \partial D) = d(0, f, D).$$

(2) On a vu, dans la démonstration de la proposition 1.5., que $S\Gamma$ était ouvert et que si p est un suiveur de $\Gamma - a$ sur ∂D , $2p$ est un suiveur de $\Gamma - (a+u)$, lorsque u est dans un certain voisinage de 0 ; Or $2p$ est encore un suiveur de Γ ; donc :

$$d(a, \Gamma, D) = d(0, p, \partial D) = d(0, 2p, \partial D) = d(a+u, \Gamma, D).$$

(3) Il suffit de montrer que si $a \in S\Gamma$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a \in S(\Gamma + B(0, \varepsilon))$ et $d(a, \Gamma, D) = d(a, \Gamma + B(0, \varepsilon), D)$.

Soit p un suiveur de $\Gamma - a$ sur ∂D , notons $M = \sup_{x \in \partial D} \|p(x)\|$ et prenons

$0 < \varepsilon < 1/M$. Montrons que $\frac{1}{1-\varepsilon M} p$ est un suiveur de $\Gamma + B(0, \varepsilon) - a$ sur ∂D ;

en effet : $\frac{1}{1-\varepsilon M} p(x) \cdot [\Gamma(x) + B(0, \varepsilon) - a] \geq \frac{1}{1-\varepsilon M} [1 - \varepsilon \|p(x)\|] \geq 1$;

d'autre part $\frac{1}{1-\varepsilon M} p$ est encore un suiveur de $\Gamma - a$ sur ∂D , d'où :

$$d(a, \Gamma, D) = d(0, p, \partial D) = d(0, \frac{1}{1-\varepsilon M} p, \partial D) = d(a, \Gamma + B(0, \varepsilon), D).$$

(4) Immédiat.

(5) Notons $\hat{p}$ un suiveur de $\Gamma - a$ sur $\bar{D}$, alors

$$d(a, \Gamma, D) = d(0, \hat{p}, \partial D) = d(0, \hat{p}, D)$$

Or $\hat{p}(x) [\Gamma(x) - a] \geq 1 \quad \forall x \in \bar{D}$, donc $\hat{p}(x) \neq 0$

sur $\bar{D}$, donc d'après les propriétés classiques du degré des fonctions :

$$d(0, \hat{p}, D) = 0.$$

(6) Soit $\Gamma : [0, 1] \times \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$ l'homotopie relative à a , $p(t, x)$ un suiveur associé.

On a :

$$p(t, x) \cdot [\Gamma(t, x) - a] \geq 1 \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial D.$$

On en déduit immédiatement que $p_0(x) = p(0, x)$ est un suiveur de $\Gamma_0(x)$ sur ∂D et que $p_1(x) = p(1, x)$ est un suiveur de $\Gamma_1(x)$ sur ∂D ; on a :

$$d(a, \Gamma_0, D) = d(0, p_0, \partial D) \quad \text{et} \quad d(a, \Gamma_1, D) = d(0, p_1, \partial D).$$

Or $p(t, x)$ est une homotopie relative à 0, d'où l'égalité.

(7) Soit $D = D_1 \cup D_2$, $a \in S\Gamma$; soit p un suiveur de $\Gamma - a$ sur ∂D , alors $p|_{\partial D_1}$ est un suiveur de $\Gamma|_{\bar{D}_1}$ sur ∂D_1 , idem pour $p|_{\partial D_2}$. On a alors :

$$d(a, \Gamma, D) = d(0, p, \partial D) = d(0, p|_{\partial D_1}, \partial D_1) + d(0, p|_{\partial D_2}, \partial D_2)$$

en utilisant la propriété correspondante du degré pour les fonctions. D'où :

$$d(a, \Gamma, D) = d(a, \Gamma, D_1) + d(a, \Gamma, D_2).$$

(8) Soit p un suiveur de $\Gamma - a$ sur $K \cup \partial D$; notons $\hat{p}$ une extension continue de p à $\bar{D}$; alors :

$d(a, \Gamma, D) = d(0, \hat{p}, D) = d(0, \hat{p}, D \setminus K)$, d'après la propriété d'excision pour les fonctions, puisque $0 \notin \hat{p}(K \cup \partial D)$; or $\hat{p}|_{\partial(D \setminus K)}$ est un suiveur de $\Gamma - a$ sur $\partial(D \setminus K)$.

Remarquons que $\partial(D \setminus K) \subset \partial D \cup K$, on a donc :

$$d(a, \Gamma, D \setminus K) = d(0, \hat{p}|_{\partial(D \setminus K)}, \partial(D \setminus K)) = d(0, \hat{p}|_{D \setminus K}, D \setminus K).$$

(9) Montrons d'abord qu'on peut trouver $p : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que p soit un suiveur de $\Gamma - a$ sur ∂D et $\langle p(x), \Gamma(x) - a \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \bar{D}$. Supposons $a = 0$ pour simplifier, reprenons la construction du suiveur.

$\forall x \in \partial D$, $\exists q_x \in E^*$ tel que $\langle q_x, \Gamma(x) \rangle > 2$
(Hahn-Banach) puisque Γ est h.c.s. sur $\bar{D}$.

Il existe U_x voisinage ouvert de x dans $\bar{D}$ tel que $\forall z \in U_x$
 $\langle q_x, \Gamma(z) \rangle > 1$.

Soit $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ un sous recouvrement du compact ∂D .

Notons $K = \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, K ne coupe pas ∂D , il existe donc un voisinage

ouvert, V , de K ne rencontrant pas ∂D ; $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}, V$, forment un

recouvrement ouvert de $\bar{D}$, notons $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$ une partition de l'unité subordonnée.

Considérons $p(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_{x_i}$, il est clair que p répond aux conditions

énoncées.

Considérons alors p vérifiant les conditions précédentes associé à $\Gamma - a$ et p' associé à $\Gamma' - a'$; alors $p \times p'$ est un suiveur de $\Gamma \times \Gamma' - a \times a'$ sur $\partial(D \times D')$.

En effet, si $y \in \Gamma(x) - a$, $y' \in \Gamma'(x') - a'$, pour $x \times x' \in \partial(D \times D')$ on a :

$$(p(x) \times p'(x')) \cdot (y \times y') = p(x) \cdot y + p'(x') \cdot y'$$

et ceci est ≥ 1 , puisque $\partial(D \times D') = \bar{D} \times \partial D' \cup \partial D \times \bar{D}'$, un des deux termes est ≥ 1 l'autre étant ≥ 0 .

On a donc :

$$d(a \times a', \Gamma \times \Gamma', D \times D') = d(0, p \times p', D \times D')$$

et d'après la propriété du produit cartésien pour les fonctions (Voir [18]), on a :

$$d(0, p \times p', D \times D') = d(0, p, D) \cdot d(0, p', D').$$

Le résultat suit.

—X—

UN THEOREME DE BORSUK SUR $\mathbb{R}^n$

THEOREME 1.9. (Borsuk, version multivoque)

Soit D un ouvert borné contenant 0 et symétrique dans $\mathbb{R}^n$, $\Gamma : \bar{D} \rightarrow F \mathbb{R}^n$ possédant un suiveur sur ∂D et impaire sur ∂D (i.e. $\Gamma(x) = -\Gamma(-x)$ pour tout x dans ∂D). Alors $d(0, \Gamma, D)$ est impair.

DEMONSTRATION

Soit p un suiveur de Γ sur ∂D , considérons une extension continue $\hat{p}$ de p à $\bar{D}$ et formons ensuite : $q(x) = \frac{1}{2} [p(x) - p(-x)]$; q est impaire sur $\bar{D}$, montrons que q est encore un suiveur de Γ sur ∂D :
en effet, pour tout y dans $\Gamma(x)$, on a :

$$q(x) \cdot y = \frac{1}{2} p(x) \cdot y + \frac{1}{2} p(-x) \cdot (-y) \quad \text{et comme } -y \in \Gamma(-x),$$

$$q(x) \cdot y \geq 1.$$

On a donc :

$$d(0, \Gamma, D) = d(0, q, D) .$$

Et d'après le théorème de Borsuk pour les fonctions (Voir [18] page 78), le deuxième membre est impair.

~~X~~

THEOREME 1.10. (Borsuk-Ulam, version multivoque)

Supposons D comme en 1.9., et soit $\Gamma : \partial D \rightarrow K \mathbb{R}^n$ hémicontinue supérieurement ; on suppose de plus que $\Gamma(\partial D)$ est contenu dans un sous-espace $E \neq \mathbb{R}^n$. Alors, il existe x dans ∂D tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(-x) \neq \emptyset$.

DEMONSTRATION

Considérons $G(x) = \Gamma(x) - \Gamma(-x)$, il est clair que G est définie sur ∂D , hémicontinue supérieurement à valeurs convexes compactes et impaire.

Supposons que la conclusion soit fausse ; alors pour tout x dans ∂D , $0 \notin G(x)$; en vertu du lemme 1.2., on peut construire un suiveur de G sur ∂D , et en procédant comme précédemment, on construit une application continue de ∂D dans un sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$, impaire et qui ne s'annule pas, ce qui est impossible (voir [18] page 82).

~~X~~

COROLLAIRE 1.11.

Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$), $\Gamma : S^n \rightarrow K \mathbb{R}^n$ h.c.s. Alors il existe x dans S^n tel que :

$$\Gamma(x) \cap \Gamma(-x) \neq \emptyset .$$

REMARQUE 1.12.

Pour les multi-applications à valeurs dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, l'hemi-continuité supérieure est équivalente à la semi-continuité supérieure.

En effet : Soit $\Gamma : X$ (espace topologique) $\rightarrow K \mathbb{R}^n$;

Soit $x_0 \in X$,

montrons que si Γ est h.c.s. en x_0 , alors Γ est s.c.s. en x_0 . Soit Ω un ouvert contenant Γx_0 .

Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des demi-espaces fermés qui contiennent Γx_0 dans leur intérieur (demi-espace ouvert). $\mathcal{F}$ désigne une partie finie de $\mathcal{H}$ et $\Gamma_{\mathcal{F}}$ l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach on a : $\Gamma x_0 = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{H}} \Gamma_{\mathcal{F}}$.

Il nous suffit de montrer que pour $\mathcal{F}$ assez grand, $\Gamma_{\mathcal{F}} \subset \Omega$.

Supposons que $\forall \mathcal{F}$, $\Gamma_{\mathcal{F}}$ rencontre $\complement \Omega$; soit $y_{\mathcal{F}} \in \Gamma_{\mathcal{F}} \cap \complement \Omega$.

Il existe $\mathcal{F}_0$ tel que $\Gamma_{\mathcal{F}_0}$ soit compact, considérons l'ensemble des $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{F}_0$, ordonné par inclusion (il est filtrant croissant). La famille filtrante $y_{\mathcal{F}}$ est dans $\Gamma_{\mathcal{F}_0} \cap \complement \Omega$ qui est compact, elle possède donc au moins un point adhérent, soit $y \in \Gamma_{\mathcal{F}_0} \cap \complement \Omega$, donc $y \notin \Gamma x_0$.

En utilisant Hahn-Banach, on peut séparer y et Γx_0 strictement par un hyperplan fermé, ce qui est contradictoire avec le fait que y est point adhérent à $y_{\mathcal{F}}$.

REMARQUE 1.13.

A propos du théorème 1.10., on peut se demander si la multi-application $\Gamma : \partial D \rightarrow K \mathbb{R}^n$, h.c.s., se prolonge en $\hat{\Gamma} : \bar{D} \rightarrow K \mathbb{R}^n$ h.c.s.

La réponse est oui : puisque Γ est en fait s.c.s., on peut appliquer une généralisation aux multi-applications s.c.s. d'un théorème d'extension de Dugundji due à Ma (voir [13] page 7).

LIEN AVEC LE DEGRE DEFINI PAR D'AUTRES AUTEURS.

Nous allons vérifier que dans le cas des multi-applications s.c.s. à valeurs convexes compactes notre degré coïncide avec celui défini par Ma [13]. D désigne toujours un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow K \mathbb{R}^n$ s.c.s. et $a \notin \Gamma(\partial D)$.

THEOREME (Ma)

Il existe $\gamma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction continue, et B ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, tels que :

- (1) $a \notin \gamma(\partial D)$
- (2) $a \in B$
- (3) $\gamma(y) = y \quad \forall y \in \bar{D} \setminus B$
- (4) Γ est homotope à γ relativement à B .

L'homotopie est entendue ici au sens suivant :

Il existe $H : [0,1] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, s.c.s. telle que :

$$a \notin H([0,1] \times \partial D) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} H(0,x) &= \Gamma(x) \\ H(1,x) &= \gamma(x) \end{aligned}$$

DEFINITION (Ma)

On pose $d(a, \Gamma, D) = d(a, \gamma, D)$.

Il est alors facile de voir que cette définition donne le même résultat, puisque l'homotopie entre Γ et γ en est encore une à notre sens ; le résultat découle de l'invariance par homotopie.

Nous verrons plus loin, dans un cadre général, que notre définition coïncide également avec celle de Cellina et Lasota.

II - DEFINITION DU DEGRE EN DIMENSION INFINIE

Notre but est maintenant de définir $d(a, I-\Gamma, D)$, où D est un ouvert non vide d'un e.l.c.s. E , avec $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte (i.e. $\Gamma(\bar{D})$ relativement compact) et $a \notin (I-\Gamma)(\partial D)$.

Pour cela nous allons établir plusieurs résultats préliminaires.

LEMME ET DEFINITION 2.1.

Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma : \bar{D} \rightarrow K \mathbb{R}^n$ h.c.s. et compacte, telle que $0 \notin (I-\Gamma)(\partial D)$. Alors $d(0, I-\Gamma, \Omega)$ ne dépend pas de l'ouvert borné Ω choisi tel que $D \cap \Gamma(\bar{D}) \subset \Omega \subset D$; par définition, nous écrirons ce nombre $d(0, I-\Gamma, D)$.

DEMONSTRATION

Vérifions tout d'abord que $d(0, I-\Gamma, \Omega)$ est bien défini, c'est-à-dire $0 \notin (I-\Gamma)(\partial \Omega)$. Comme $D \cap \Gamma(\bar{D}) \subset \Omega$, si $x \in \partial \Omega$, alors $x \notin D \cap \Gamma(\bar{D})$. Or soit x un point de D tel que $0 \in x-\Gamma(x)$, on a alors $x \in \Gamma(\bar{D})$ donc $x \in D \cap \Gamma(\bar{D})$.

Considérons maintenant deux ouverts bornés Ω_1 et Ω_2 vérifiant

$$D \cap \Gamma(\bar{D}) \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset D,$$

et montrons que :

$$d(0, I-\Gamma, \Omega_1) = d(0, I-\Gamma, \Omega_2).$$

Si Ω_2 est vide, c'est trivial, sinon nous allons procéder par excision ; soit $K = \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$, alors $0 \notin (I-\Gamma)(K)$ puisque K ne rencontre pas $D \cap \Gamma(\bar{D})$ et donc d'après le théorème 1.8 (3) :

$$d(0, I-\Gamma, \Omega_2) = d(0, I-\Gamma, \Omega_2 \setminus K) = d(0, I-\Gamma, \Omega_1).$$

Si on n'a pas l'inclusion $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ou $\Omega_2 \subset \Omega_1$, il suffit de considérer l'ouvert borné $\Omega_1 \cup \Omega_2$ pour se ramener au cas précédent.

REMARQUE 2.2.

En remplaçant 0 par a dans le lemme 2.1., la même démonstration montre que $d(a, I-\Gamma, \Omega)$ ne dépend pas de l'ouvert borné Ω tel que :

$$D \cap (\Gamma + a)(\bar{D}) \subset \Omega \subset D .$$

On note ce nombre $d(a, I-\Gamma, D)$.

Nous allons maintenant donner une définition du degré sur n'importe quel espace de dimension finie.

LEMME 2.3.

Soit A une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, Γ_0 une multi-application h.c.s. à valeurs convexes fermées non vides, définie sur un ouvert borné D_0 de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \notin \Gamma_0(\partial D_0)$. Considérons la multi-application Γ_1 , définie sur $D_1 = A^{-1} D_0$ par $\Gamma_1(x) = A^{-1} \Gamma_0(Ax)$.

Alors Γ_1 est h.c.s., $A^{-1} a \notin \Gamma_1(\partial D_1)$ et on a :

$$d(a, \Gamma_0, D_0) = d(A^{-1}a, \Gamma_1, D_1) .$$

DEMONSTRATION

Soit p_0 un suiveur de Γ_0 -a sur ∂D_0 ; on a

$$d(a, \Gamma_0, D_0) = d(0, p_0, \partial D_0) .$$

Montrons que $p = A^* p_0 A$ est un suiveur de Γ_1 - $A^{-1}(a)$ sur ∂D_1 .

Soit $y \in \partial D_1$, on a :

$$p(y) \cdot [\Gamma_1(y) - A^{-1}(a)] = A^* p_0(Ay) \cdot [\Gamma_1(y) - A^{-1}(a)] = p_0(Ay) [A\Gamma_1(y) - a] .$$

Posons $y = A^{-1}x$, $x \in \partial D_0$; ceci est encore égal à :

$$p_0(x) \cdot [A\Gamma_1(A^{-1}x) - a] = p_0(x) \cdot [\Gamma_0(x) - a] \geq 1 .$$

Il ne reste plus à vérifier que $d(0, p, \partial D_1) = d(0, p_0, \partial D_0)$.

Il existe une fonction continue $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $p(x)\varphi(x) \geq 1$

pour tout x (prendre $\varphi(x) = \frac{p(x)}{\|p(x)\|^2}$). Alors $d(0, p, \partial D_1) = d(0, \varphi, \partial D_1)$.

Or $p(x) = A^* p_0(Ax)$, d'où : $A^* p_0(Ax) \cdot \varphi(x) \geq 1$ pour tout x , soit $p_0(Ax) \cdot A\varphi(x) \geq 1$ et en posant $y = Ax$, on obtient :

$$p_0(y) \cdot A\varphi(A^{-1}y) \geq 1 \quad \forall y \in \partial D_0 ;$$

donc

$$d(0, p_0, \partial D_0) = d(0, A\varphi A^{-1}, \partial D_0) .$$

Or d'après les propriétés usuelles du degré des fonctions :

$$d(0, A\varphi A^{-1}, \partial D_0) = d(0, \varphi, \partial D_1) .$$

—X—

LEMME 2.4.

Soit F un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, D un ouvert borné non vide de F , une multi-application $\Gamma : \bar{D} \rightarrow CF$ h.c.s., et $a \notin \Gamma(\partial D)$. Soient φ_1 et φ_2 deux bijections linéaires de F sur $\mathbb{R}^n$, $D_i = \varphi_i(D)$ ($i=1,2$), $\Gamma_i : \bar{D}_i \rightarrow C\mathbb{R}^n$ définie par : $\Gamma_i(x) = \varphi_i(\Gamma(\varphi_i^{-1}(x)))$;
On a alors :

$$d(\varphi_1(a), \Gamma_1, D_1) = d(\varphi_2(a), \Gamma_2, D_2) .$$

DEMONSTRATION

Posons $A = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, on a $D_2 = A^{-1} D_1$ et $\Gamma_2 = A^{-1} \Gamma_1 A$, on est donc dans la situation du lemme précédent.

—X—

DEFINITION 2.5.

Dans les conditions du lemme 2.4., soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow CF$ h.c.s. et soit $a \in F$, $a \notin \Gamma(\partial D)$.

On pose $d(a, \Gamma, D) = d(\varphi(a), \Gamma_\varphi, D_\varphi)$

avec $D_\varphi = \varphi(D)$ et $\Gamma_\varphi(x) = \varphi(\Gamma(\varphi^{-1}(x)))$

où φ est n'importe quelle bijection linéaire de F sur $\mathbb{R}^n$.

Donnons maintenant deux résultats qui vont permettre de passer à la dimension infinie.

LEMME 2.6.

Soient F_1 et F_2 deux espaces de dimension ≥ 1 finie sur $\mathbb{R}$ et $F = F_1 \times F_2$, D un ouvert borné non vide de F ,

$\Gamma : \bar{D} \rightarrow CF_1$, h.c.s. et compacte. Soit $a \in F_1$, $a \notin (I-\Gamma)(\partial D)$, on a alors :

$$d(a, I-\Gamma, D) = d(a, (I-\Gamma) \big|_{\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1) .$$

DEMONSTRATION

Le premier terme est bien défini, pour le second, il suffit de remarquer que $\partial(D \cap F_1) \subset \partial D \cap F_1$. D'autre part, on peut toujours supposer que $F_1 = \mathbb{R}^n$, $F_2 = \mathbb{R}^m$.

Soit p un suiveur de $I-\Gamma$ -a sur ∂D , $p : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, écrivons $p(x) = (p_1(x), p_2(x))$ et $x = (x_1, x_2)$.

On a :

$$p_1(x) \cdot [x_1 - \Gamma(x) - a] + p_2(x) \cdot x_2 \geq 1 \quad \forall x \in \partial D \quad (1)$$

$$\text{et} \quad d(a, I-\Gamma, D) = d(0, p, \partial D) .$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$, telle que :

$$d(0, p, \partial D) = d(0, I + \lambda p_1, \partial D) .$$

En fait on va chercher $\lambda > 0$ telle que $[x + \lambda p_1(x)] \cdot p(x) > 0$ pour tout x dans ∂D , soit :

$$x_1 p_1(x) + \lambda p_1(x)^2 + x_2 p_2(x) > 0 \quad \forall x \in \partial D \quad (2)$$

Prenons $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|p_1(x)\| \leq \varepsilon$ on ait :

$$|p_1(x) \cdot [\Gamma(x) + a]| \leq \|p_1(x)\| \cdot \|\Gamma(x) + a\| \leq 1/2 ,$$

ce qui est possible puisque Γ est compacte.

Notons $A_\varepsilon = \{x \in \partial D \mid \|p_1(x)\| \geq \varepsilon\}$; A_ε est compact.

Considérons $\lambda_0 = \sup(1, \sup_{x \in A_\varepsilon} (\frac{-p_2(x) \cdot x_2 - p_1(x) x_1}{\|p_1(x)\|^2}))$.

Alors pour $\lambda > \lambda_0$ (2) est bien vérifié ; en effet , soit $x \in \partial D$:

$$\text{Si } \|p_1(x)\| \geq \varepsilon \text{ on a } \lambda > \frac{-p_2(x)x_2 - p_1(x)x_1}{\|p_1(x)\|^2} \text{ d'où (2)}$$

et si $\|p_1(x)\| \leq \varepsilon$ (1) donne :

$$p_1(x)x_1 + p_2(x)x_2 \geq 1 + p_1(x)[\Gamma(x) + a]$$

d'où $p_1(x)x_1 + p_2(x)x_2 \geq 1/2$; on en déduit :

$$x_1 p_1(x) + x_2 p_2(x) + \lambda p_1(x)^2 \geq 1/2 + \lambda p_1(x)^2 > 0 .$$

D'après les propriétés usuelles du degré des fonctions (voir [18]), si nous notons $\hat{p}_1$ un prolongement continu de p_1 à $\bar{D}$ (toujours à valeur dans F_1) on a :

$$d(0, I + \lambda p_1, \partial D) = d(0, I + \lambda \hat{p}_1, D) = d(0, (I + \lambda \hat{p}_1)|_{\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1) .$$

Il ne nous reste plus à vérifier que :

$$d(0, (I + \lambda \hat{p}_1)|_{\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1) = d(a, (I - \Gamma)|_{\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1) .$$

Si $D \cap F_1$ est vide, ceci est trivial, si c'est non vide, montrons d'abord que

$$d(0, (I + \lambda \hat{p}_1)|_{\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1) = d(0, \hat{p}_1|_{\overline{D \cap F_1}}, D \cap F_1) ;$$

pour cela il suffit de vérifier que $(x + \lambda p_1(x)) \cdot p_1(x) > 0$ pour $x \in \partial(D \cap F_1) \subset \partial D \cap F_1$; cela se déduit de (2) en faisant $x_2 = 0$. Ensuite on vérifie que $p_1|_{\partial(D \cap F_1)}$ est un suiveur de $I - \Gamma - a$ sur $\partial(D \cap F_1)$ ce qui est

immédiat d'après (1).

— x —

LEMME 2.7.

Mêmes hypothèses que dans le lemme 2.6., sauf pour D qui n'est plus supposé borné ; même conclusion.

DEMONSTRATION

$$d(a, I-\Gamma, D) = d(a, I-\Gamma, \Omega) \quad , \quad \text{où } \Omega \text{ est un ouvert borné tel que} \\ D \cap (\Gamma+a)(\bar{D}) \subset \Omega \subset D \quad .$$

Or d'après le lemme 2.5.,

$$d(a, I-\Gamma, \Omega) = d(a, (I-\Gamma) \big|_{\Omega \cap F_1}, \Omega \cap F_1)$$

$$\text{et} \quad d(a, (I-\Gamma) \big|_{\Omega \cap F_1}, \Omega \cap F_1) = d(a, (I-\Gamma) \big|_{D \cap F_1}, D \cap F_1) \quad .$$

—X—

Désormais E désignera un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie, D un ouvert non vide de E et Γ une multi-application de $\bar{D}$ dans KE, h.c.s. et compacte (1) et compacte.

DEFINITION 2.8.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte telle que $\Gamma(\bar{D})$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie, et soit $a \notin (I-\Gamma)(\partial D)$. Alors on peut définir

$$d(a, I-\Gamma, D) = d(a, (I-\Gamma) \big|_{D \cap F}, D \cap F)$$

pour n'importe quel sous-espace F de dimension finie ≥ 1 , contenant a et $\Gamma(\bar{D})$.

En effet, soient F_1 et F_2 deux tels sous-espaces, il suffit d'appliquer le lemme 2.7., en considérant F_1 , F_1+F_2 et F_2 , F_1+F_2 .

Passons au cas général, nous avons besoin de plusieurs lemmes avant de donner la définition du degré.

(1) Désormais, nous utiliserons indifféremment d.c.s. ou h.c.s. sachant que les deux notions coïncident dans ce cadre; l'emploi de l'une ou l'autre sera simplement motivé par la commodité.

LEMME 2.9.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte, alors $(I-\Gamma)(\partial D)$ est fermé dans E .

DEMONSTRATION

Soit b un point adhérent à $(I-\Gamma)(\partial D)$, alors il existe une famille filtrante $(x_i)_{i \in \frac{I}{\mathcal{F}}}$ ($\mathcal{F}$ filtre sur I) , $x_i \in \partial D$ et $y_i \in x_i - \Gamma x_i$

telle que $y_i \rightarrow b$.

Alors, $y_i - x_i \in -\Gamma(\partial D)$ qui est relativement compact ; donc , au besoin en remplaçant $\mathcal{F}$ par un filtre plus fin, on peut supposer que $y_i - x_i$ converge dans E vers un certain point z . On en déduit, ∂D étant fermé, que x_i converge vers un point x de ∂D ($x=b-z$). Il ne nous reste plus qu'à montrer que $b \in x - \Gamma x$. Supposons $b \notin x - \Gamma x$, alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme affine continue e^* sur E telle que :

$$e^*(x-b) < 0 < e^*(\Gamma(x)) ;$$

alors, comme Γ est d.c.s., pour i "assez grand", on aura :

$$e^*(\Gamma(x_i)) > 0 \quad \text{et} \quad e^*(x_i - y_i) < 0$$

ce qui est impossible puisque $y_i \in x_i - \Gamma x_i$. D'où $b \in x - \Gamma x$ et $(I-\Gamma)(\partial D)$ est fermé dans E .

—X—

LEMME 2.10.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte, alors Γ est semi-continue supérieurement.

DEMONSTRATION

Soit K un compact de E contenant $\Gamma(\bar{D})$; nous allons vérifier que le graphe de Γ est fermé dans $\bar{D} \times K$.

Soit (x,y) un point adhérent à $G(\Gamma)$ dans $\bar{D} \times K$, il existe alors des familles filtrantes x_i, y_i telles que $x_i \rightarrow x$, $y_i \rightarrow y$ et $y_i \in \Gamma x_i$. Si on suppose que $y \notin \Gamma x$, par Hahn-Banach, on peut séparer y et

Γx strictement par un hyperplan fermé ; alors pour i "assez grand" Γx_i est dans le même demi-espace ouvert que Γx et y_i dans le même demi-espace ouvert que y , ce qui est impossible puisque $y_i \in \Gamma x_i$.

Donc $y \in \Gamma x$ et $G(\Gamma)$ est fermé.

~~X~~

LEMME 2.11.

Soit a un point de E n'appartenant pas à $(I-\Gamma)(\partial D)$ et V un voisinage ouvert convexe et équilibré de 0 dans E tel que

$$(a+V) \cap (I-\Gamma)(\partial D) = \emptyset.$$

Alors il existe une multi-application Γ_1 de $\bar{D}$ dans KE h.c.s. et compacte telle que :

- (i) $a \notin (I-\Gamma_1)(\partial D)$
- (ii) $\forall x \in \bar{D} \quad \Gamma_1 x \subset \Gamma x + V \quad \text{et} \quad \Gamma x \subset \Gamma_1 x + V$
- (iii) $\Gamma_1(\bar{D})$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie.

DEMONSTRATION

$\overline{\Gamma(\bar{D})}$ est compact, considérons un recouvrement ouvert de la forme $y+V$, $y \in \Gamma(\bar{D})$, extrayons un sous recouvrement fini y_i+V ($i=1, \dots, n$). Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une partition continue de l'unité sur $\overline{\Gamma(\bar{D})}$, subordonnée au recouvrement ouvert $\overline{\Gamma(\bar{D})} \cap (y_i+V)$ ($i=1, \dots, n$).

Considérons la fonction continue α définie sur $\overline{\Gamma(\bar{D})}$ par

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) y_i. \quad \text{Pour } x \in \overline{\Gamma(\bar{D})} \text{ on a :}$$

$$\alpha(x) - x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) (y_i - x)$$

et comme $\text{supp } \varphi_i \subset y_i+V$, seuls comptent les i tels que $y_i - x \in V$; V étant convexe on a donc :

$$\alpha(x) - x \in V \quad \forall x \in \overline{\Gamma(\bar{D})}.$$

Considérons $\Gamma_1(x) = \text{conv } \alpha(\Gamma(x))$ pour $x \in \bar{D}$.

Alors (iii) est immédiat : $\Gamma_1(\bar{D}) \subset \overline{\text{conv } \alpha(\Gamma(\bar{D}))}$ qui est de dimension finie.

(ii) on a

$$\alpha(y) \in y+V \quad \forall y \in \overline{\Gamma(\bar{D})}$$

d'où

$$\alpha(\Gamma(x)) \subset \Gamma(x) + V \quad \forall x \in \bar{D}$$

donc

$$\Gamma_1(x) = \text{conv } \alpha(\Gamma(x)) \subset \Gamma(x) + V.$$

D'autre part, on a immédiatement $\Gamma(x) \subset \alpha(\Gamma(x)) + V$,

d'où

$$\Gamma(x) \subset \Gamma_1(x) + V \quad \forall x \in \bar{D}.$$

Vérifions (i). On a $(a+V) \cap (I-\Gamma)(\partial D) = \emptyset$,

donc $\forall x \in \partial D$, $a \notin x-\Gamma x+V$ et à fortiori $a \notin x-\Gamma_1 x$.

Il nous reste à vérifier que $\Gamma_1 : \bar{D} \rightarrow KE$ est d.c.s. et compacte.

Soit Δ un demi-espace ouvert contenant $\Gamma_1 x$, alors Δ contient $\alpha(\Gamma(x))$; donc $\alpha^{-1}(\Delta)$ est un ouvert de $\overline{\Gamma(\bar{D})}$ qui contient Γx . Comme Γ est s.c.s. (lemme 2.10.) de $\bar{D}$ dans $\overline{\Gamma(\bar{D})}$, il existe un voisinage $\mathcal{U} x$ de x tel que pour tout z dans $\mathcal{U} x$, on ait : $\Gamma z \subset \alpha^{-1}(\Delta)$, d'où $\alpha(\Gamma z) \subset \Delta$ et donc

$$\text{conv } \alpha(\Gamma z) \subset \Delta, \text{ soit } \Gamma_1 z \subset \Delta.$$

D'où Γ_1 d.c.s. . Montrons maintenant que $\Gamma_1(\bar{D})$ est relativement compact.

On a $\Gamma_1(\bar{D}) \subset \overline{\text{conv } \alpha(\Gamma(\bar{D}))}$ qui est compact.

LEMME 2.12.

Soient Γ_1 et Γ_2 deux multi-applications de $\bar{D}$ dans KE , h.c.s. et compactes, vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 2.11., alors :

$$d(a, I-\Gamma_1, D) = d(a, I-\Gamma_2, D).$$

DEMONSTRATION

Les deux degrés écrits ont un sens d'après la définition 2.8.

Soit F un sous-espace de dimension finie contenant a , $\Gamma_1(\bar{D})$ et $\Gamma_2(\bar{D})$.

$$\text{Alors } d(a, I-\Gamma_1, D) = d(a, (I-\Gamma_1) \big|_{\overline{D \cap F}}, D \cap F)$$

$$\text{et } d(a, I-\Gamma_2, D) = d(a, (I-\Gamma_2) \big|_{\overline{D \cap F}}, D \cap F).$$

Si $D \cap F$ est vide, l'égalité est triviale. Sinon considérons un ouvert borné Ω de F contenant $D \cap C$, avec

$C = \text{conv} ((\Gamma_1 + a)(\overline{D \cap F}), (\Gamma_2 + a)(\overline{D \cap F}))$, convexe borné de F , et tel que Ω soit contenu dans $D \cap F$.

Il nous reste à montrer que :

$$d(a, (I - \Gamma_1)|_{\overline{\Omega}}, \Omega) = d(a, (I - \Gamma_2)|_{\overline{\Omega}}, \Omega).$$

Considérons la multi-application $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \rightarrow KF$, définie par $H(t,x) = x - t\Gamma_1(x) - (1-t)\Gamma_2(x)$; il est facile de voir que H est s.c.s. et compacte. Vérifions que H est une homotopie relative à a , et pour cela que $a \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$. Supposons qu'il existe un point $x \in \partial\Omega$ et $t \in [0,1]$ tels que $a \in x - t\Gamma_1(x) - (1-t)\Gamma_2(x)$, alors $x \in t(\Gamma_1(x) + a) + (1-t)(\Gamma_2(x) + a)$, donc $x \in C$; montrons que nécessairement $x \in \partial(D \cap F)$; en effet, puisque $x \in \partial\Omega$, $x \notin (D \cap F) \cap C$, d'où $x \notin D \cap F$; or d'autre part $x \in \overline{D \cap F}$ et donc $x \in \partial(D \cap F)$. Montrons alors qu'il ne peut y avoir de point x de $\partial(D \cap F)$ tel que $a \in x - t\Gamma_1(x) - (1-t)\Gamma_2(x)$; on aurait en effet, puisque $\Gamma_1(x) \subset \Gamma(x) + V$ et $\Gamma_2(x) \subset \Gamma(x) + V$, $a \in x - \Gamma(x) - V$ ce qui est impossible puisque $\partial(D \cap F) \subset \partial D \cap F$ et que $(a+V) \cap (I - \Gamma)(\partial D) = \emptyset$. On a donc, d'après la propriété d'invariance du degré par homotopie, sachant que

$$H_0 = (I - \Gamma_2)|_{\overline{\Omega}} \quad \text{et} \quad H_1 = (I - \Gamma_1)|_{\overline{\Omega}} :$$

$$d(a, (I - \Gamma_1)|_{\overline{\Omega}}, \Omega) = d(a, (I - \Gamma_2)|_{\overline{\Omega}}, \Omega).$$

—X—

DEFINITION 2.13.

Soit $\Gamma : \overline{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte, soit $a \notin (I - \Gamma)(\partial D)$. On définit $d(a, I - \Gamma, D)$ comme étant $d(a, I - \Gamma_1, D)$ où Γ_1 est n'importe quelle multi-application vérifiant les conditions du lemme 2.11., correspondant à n'importe quel voisinage V de 0 dans E , ouvert, convexe, équilibré, tel que $(a+V) \cap (I - \Gamma)(\partial D) = \emptyset$.

On peut maintenant vérifier les propriétés habituelles du degré ; nous nous limiterons à énoncer en un théorème les trois propriétés essentielles.

THEOREME 2.14.

Soit $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte, soit $a \notin (I-\Gamma)(\partial D)$. Alors :

(1) Si $f : \bar{D} \rightarrow E$ est une section continue de Γ on a :
 $d(a, I-\Gamma, D) = d(a, I-f, D)$, ce dernier désignant le degré de Leray-Schauder.

(2) Si $a \notin (I-\Gamma)(D)$ on a : $d(a, I-\Gamma, D) = 0$.

(3) Invariance par homotopie :

Si $H = [0,1] \times \bar{D} \rightarrow KE$ est h.c.s. et compacte, telle que
 $a \notin (I-H_t)(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$.

Alors $d(a, I-H_0, D) = d(a, I-H_1, D)$.

DEMONSTRATION

(1) sera une conséquence de (3) en considérant l'homotopie :

$$(t, x) \rightarrow t\Gamma x + (1-t)f(x) .$$

Il faut alors vérifier que $d(a, I-f, D)$ coïncide avec le degré de Leray-Schauder ; ceci se déduit de la construction que nous avons adoptée, laquelle redonne, dans le cas des fonctions, le degré de Leray-Schauder (Voir [18]).

(2) Si $a \notin (I-\Gamma)(D)$, alors $a \notin (I-\Gamma)(\bar{D})$ et ce dernier est fermé (même démonstration que pour le lemme 2.9.) ; considérons V , voisinage ouvert convexe équilibré de 0 dans E tel que : $(a+V) \cap (I-\Gamma)(\bar{D}) = \emptyset$. Prenons alors une multi-application Γ_1 vérifiant les conditions du lemme 2.11., avec V .

Soit F un sous-espace de dimension finie contenant a et $\Gamma_1(\bar{D})$, on a :

$$d(a, I-\Gamma, D) = d(a, (I-\Gamma_1)|_{D \cap F}, D \cap F) ,$$

et pour vérifier que ce dernier est nul, il suffit de vérifier que $a \notin (I-\Gamma_1)(D)$. Supposons $a \in x - \Gamma_1 x$ pour $x \in D$, alors $a \in x - \Gamma x - V$, ce qui entraîne $(a+V) \cap (I-\Gamma)(D) \neq \emptyset$, ce qui est impossible.

(3) $(I-H)([0,1] \times \partial D)$ est fermé dans E (même démonstration que pour le lemme 2.9.); on peut donc trouver V , voisinage ouvert convexe équilibré de 0 dans E tel que :

$$(a+V) \cap (I-H)([0,1] \times \partial D) = \emptyset .$$

En utilisant la même technique que dans le lemme 2.11., on peut construire une approximation de dimension finie de H .

Il existe $\hat{H} : [0,1] \times \bar{D} \rightarrow KE$ d.c.s. compacte de dimension finie telle que :

$$(i) \quad a \notin (I-\hat{H})([0,1] \times \partial D)$$

$$(ii) \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \bar{D}$$

$$\hat{H}(t,x) \subset H(t,x) + V \quad \text{et} \quad H(t,x) \subset \hat{H}(t,x) + V .$$

On a alors :

$$d(a, I-H_0, D) = d(a, I-\hat{H}_0, D)$$

$$\text{et} \quad d(a, I-H_1, D) = d(a, I-\hat{H}_1, D) .$$

Montrons l'égalité des seconds membres. Soit F un sous-espace de dimension finie contenant a et $\hat{H}([0,1] \times \bar{D})$, alors :

$$d(a, I-\hat{H}_0, D) = d(a, (I-\hat{H}_0)|_{\overline{D \cap F}}, D \cap F) , \text{ idem pour } \hat{H}_1 .$$

Notons $K = \hat{H}([0,1] \times \bar{D}) + a$, et soit Ω un ouvert borné de F tel que

$$K \cap D \cap F \subset \Omega \subset D \cap F .$$

Alors $d(a, I-\hat{H}_0, D) = d(a, (I-\hat{H}_0)|_{\bar{\Omega}}, \Omega)$ et $d(a, I-\hat{H}_1, D) = d(a, (I-\hat{H}_1)|_{\bar{\Omega}}, \Omega)$, et ces deux degrés sont égaux puisque la restriction de $\hat{H}$ à $[0,1] \times \bar{\Omega}$ est encore une homotopie relative à a et on peut utiliser cette fois le résultat d'invariance en dimension finie.

—X—

THEOREME DE BORSUK EN DIMENSION INFINIE

E désigne toujours un espace localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie .

THEOREME 2.15. (Borsuk)

Soit D un ouvert symétrique contenant 0 , Γ une multi-application de $\bar{D}$ dans KE h.c.s. et compacte. On suppose que $0 \notin (I-\Gamma)(\partial D)$ et que Γ est impaire sur ∂D (i.e. $\Gamma(-x) = -\Gamma(x) \quad \forall x \in \partial D$), alors $d(0, I-\Gamma, D)$ est impair.

DEMONSTRATION

Montrons d'abord qu'on peut supposer Γ impaire sur $\bar{D}$; en effet, considérons $G(x) = \frac{1}{2} [\Gamma(x) - \Gamma(-x)]$; alors G est h.c.s. et compacte de $\bar{D}$ dans KE , et G impaire sur $\bar{D}$.

Montrons que $d(0, I-\Gamma, D) = d(0, I-G, D)$; pour cela, il suffit de montrer que Γ et G sont homotopes relativement à 0 (théorème 2.14.). Considérons l'homotopie :

$$(t, x) \rightarrow tGx + (1-t)\Gamma x \text{ de } [0, 1] \times \bar{D} \text{ dans } KE .$$

Il est facile de voir que cette multi-application est h.c.s. et compacte ; vérifions que $0 \notin x - tGx - (1-t)\Gamma x \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial D$, en effet si $x \in \partial D$, $Gx = \Gamma x$ et on est ramené à :

$$0 \notin x - \Gamma x$$

ce qui est vrai par hypothèse.

Supposons donc Γ impaire sur tout $\bar{D}$.

Soit V un voisinage de 0 ouvert convexe et équilibré tel que :

$$V \cap (I-\Gamma)(\partial D) = \emptyset ,$$

alors d'après le lemme 2.11., il existe $\Gamma_1 : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte telle que :

- (i) $0 \notin (I-\Gamma_1)(\partial D)$
- (ii) $\forall x \in \bar{D} \quad \Gamma_1 x \subset \Gamma x + V \quad \text{et} \quad \Gamma x \subset \Gamma_1 x + V$
- (iii) $\Gamma_1(\bar{D})$ contenu dans un sous-espace de dimension finie.

Alors : $d(0, I-\Gamma, D) = d(0, I-\Gamma_1, D)$.

Remarquons qu'on peut supposer Γ_1 impaire sur $\bar{D}$; il suffit de considérer $\hat{\Gamma}_1 x = \frac{1}{2} [\Gamma_1(x) - \Gamma_1(-x)]$ et on constate facilement que $\hat{\Gamma}_1$ vérifie encore (i), (ii), (iii). Supposons donc Γ_1 impaire sur $\bar{D}$. Soit alors F un sous-espace de dimension finie contenant $\Gamma_1(\bar{D})$ on a :

$$d(0, I-\Gamma_1, D) = d(0, I-\Gamma_1|_{\overline{D \cap F}}, D \cap F) = d(0, I-\Gamma_1|_{\bar{\Omega}}, \Omega)$$

où Ω est un ouvert symétrique borné contenant 0 de F tel que :

$$D \cap F \cap \overline{\Gamma_1(D \cap F)} \subset \Omega \subset D \cap F .$$

Et d'après le théorème de Borsuk en dimension finie, $d(0, I-\Gamma_1|_{\bar{\Omega}}, \Omega)$ est impair.

COROLLAIRE 2.16.

Soit D un ouvert symétrique contenant 0 , Γ une multi-application de $\bar{D}$ dans KE h.c.s. et compacte vérifiant $0 \notin (I-\Gamma)(\partial D)$.

Supposons que :

$$\forall \lambda \in [0,1] , \quad \forall x \in \partial D :$$

$$(I-\Gamma)(x) \cap \lambda(I-\Gamma)(-x) = \emptyset .$$

Alors $d(0, I-\Gamma, D)$ est impair.

DEMONSTRATION

Considérons $Gx = \frac{1}{2} [\Gamma(x) - \Gamma(-x)]$, G est hémicontinue supérieurement, compacte et impaire de $\bar{D}$ dans KE . De plus $0 \notin (I-G)(\partial D)$; en effet, s'il existait $x \in \partial D$ tel que $0 \in x - Gx$, alors $0 \in (I-\Gamma)(x) - (I-\Gamma)(-x)$ d'où $(I-\Gamma)(x) \cap (I-\Gamma)(-x) \neq \emptyset$ ce qui est impossible.

On va montrer que $d(0, I-\Gamma, D) = d(0, I-G, D)$.

Pour cela, il nous suffit de montrer que Γ et G sont homotopes relativement à 0 (théorème 2.14.). Considérons l'homotopie :

$(t, x) \rightarrow t\Gamma x + (1-t)Gx$, $(t, x) \in [0,1] \times \bar{D}$, et vérifions que $0 \notin x - t\Gamma x - (1-t)Gx \quad \forall (t, x) \in [0,1] \times \partial D$.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $t \in [0,1]$ et $x \in \partial D$ tels que $0 \in x - t\Gamma x - (1-t)Gx$, alors :

$$0 \in x - t\Gamma x - (1-t)\left(\frac{\Gamma x - \Gamma(-x)}{2}\right) ,$$

$$\text{d'où} \quad 0 \in 2x - (1+t)\Gamma x + (1-t)\Gamma(-x) ,$$

$$\text{soit} \quad 0 \in (1+t)(x - \Gamma x) + (1-t)(x + \Gamma(-x))$$

donc $(I-\Gamma)(x) \cap \frac{1-t}{1+t} (I-\Gamma)(-x) \neq \emptyset$ pour certain $x \in \partial D$, ce qui est impossible puisque $\frac{1-t}{1+t} \in [0,1]$. On a donc : $d(0, I-\Gamma, D) = d(0, I-G, D)$ et d'après le théorème 2.15., ce degré est impair.

COROLLAIRE 2.17. (Borsuk-Ulam).

Soit D un ouvert symétrique contenant 0 , $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte ; on suppose qu'il existe M , sous-espace propre de E tel que : $(I-\Gamma)(\bar{D}) \subset M$. Alors, il existe x dans ∂D tel que $(I-\Gamma)(x) \cap (I-\Gamma)(-x) \neq \emptyset$.

DÉMONSTRATION

Considérons $F(x) = \frac{1}{2} [\Gamma(x) - \Gamma(-x)]$, F est h.c.s. compacte et impaire sur $\bar{D}$, de plus $(I-\Gamma)(x) \cap (I-\Gamma)(-x) = \emptyset$ pour tout x de ∂D implique $0 \notin (I-F)(\partial D)$.

Raisonnons par l'absurde, puisque F est impaire $d(0, I-F, D)$ est impair (théorème 2.15.).

Prenons V , voisinage ouvert convexe équilibre de 0 , tel que $V \cap (I-F)(\partial D) = \emptyset$; alors pour tout a dans V on a :

$$d(a, I-F, D) = d(0, I-F, D).$$

En effet,

$$d(a, I-F, D) = d(0, I-F-a, D) \quad (\text{vérification immédiate})$$

et $d(0, I-F-a, D) = d(0, I-F, D)$ puisque F et $F-a$ sont homotopes relativement à 0 (considérer l'homotopie $(t, x) \rightarrow Fx - ta$). Donc $d(a, I-F, D)$ est non nul pour tout a dans V , d'où $a \in (I-F)(D)$ (théorème 2.14.) d'où $V \subset (I-F)(D) \subset M$ ce qui est impossible puisque M est un sous-espace propre de E . On en déduit donc qu'il existe x dans ∂D tel que

$$(I-\Gamma)(x) \cap (I-\Gamma)(-x) \neq \emptyset.$$

—X—

REMARQUE 2.18.

L'extension de Borsuk-Ulam donnée par Ma [13] suppose D convexe et $(I-\Gamma)(\partial D) \subset M$. En fait la démonstration de Ma ne marche que si $\partial D \setminus M$ est non vide, on trouve en effet facilement un contre exemple au théorème de Ma en prenant $D = E$.

REMARQUE 2.19.

Soit $\Gamma : E \rightarrow KE$ h.c.s. et compacte. Alors $d(0, I-\Gamma, E) = +1$, et $I-\Gamma$ est surjective (i.e. $(I-\Gamma)(E) = E$).

En effet, puisque $\partial E = \emptyset$, $d(0, I-\Gamma, E)$ est bien défini; on considère l'homotopie $(t, x) \rightarrow t\Gamma(x)$, on a donc

$$d(0, I-\Gamma, E) = d(0, I, E) = +1.$$

On a de même pour tout point a

$$d(a, I-\Gamma, E) = +1.$$

Donc $a \in (I-\Gamma)(E)$.

LIEN AVEC LE DEGRE DEFINI PAR CELLINA ET LASOTA

La définition du degré par Cellina et Lasota est basée sur le théorème d'approximation suivant :

THEOREME

X est un espace métrique non vide, Y un e.l.c.s. réel métrisable et muni d'une distance invariante par translation. On considère $\Gamma : X \rightarrow KY$ compacte et s.c.s. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon : X \rightarrow \overline{\text{conv}} \Gamma(X)$ continue, à valeur dans un sous-espace de dimension finie et telle que $d^*(Gf_\varepsilon, G\Gamma) < \varepsilon$ (1)
(où $Gf_\varepsilon, G\Gamma$ désignent les graphes de f_ε, Γ).

Maintenant X désigne un e.l.c.s. réel de $\dim \geq 1$, métrisable et muni d'une distance invariante par translation. Soit D un ouvert borné (pour la distance) non vide de X , soit $\Phi : \bar{D} \rightarrow KX$ s.c.s. compacte et $p \notin (I-\Phi)(\partial D)$. Considérons une suite φ_n de fonctions continues de $\bar{D}$ dans $\overline{\text{conv}} \Phi(\bar{D})$ vérifiant les conditions du théorème avec $\varepsilon = 1/n$.

DEFINITION

On définit $d(p, I-\Phi, D) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(p, I-\varphi_n, D)$.

(1) Si X métrique et A, B parties de X , on note $d^*(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$.
Sur $X \times Y$, on met la distance $\max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2))$.

Pour justifier cette définition on vérifie que pour n assez grand $p \notin (I-\varphi_n)(\partial D)$ et que la limite ne dépend pas de la suite φ_n choisie (ceci est fait dans [3]).

En fait, le degré étant un entier, pour n assez grand, on a :

$$d(p, I-\Phi, D) = d(p, I-\varphi_n, D).$$

Pour montrer que ce degré coïncide avec celui que nous avons défini, nous allons montrer que Φ et φ_n sont homotopes relativement à p pour n assez grand.

Considérons l'homotopie $t\Phi(x) + (1-t)\varphi_n(x)$; il nous suffit de vérifier que $p \notin x-t\Phi(x)-(1-t)\varphi_n(x)$ pour $t \in [0,1]$ et $x \in \partial D$, lorsque n est assez grand.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $\forall n, \exists t_n \in [0,1], \exists x_n \in \partial D, \exists y_n \in \Phi(x_n)$ tels que :

$$p = x_n - t_n y_n - (1-t_n)\varphi_n(x_n).$$

On peut toujours supposer (en extrayant des sous suites) que t_n converge vers t et que y_n converge vers y ($y_n \in \overline{\Phi(D)}$ qui est compact). Etudions $\varphi_n(x_n)$, on a $d^*(G\varphi_n, G\Phi) < 1/n$ d'où :

$$d((x_n, \varphi_n(x_n)), G\Phi) < 1/n$$

donc il existe $(\eta_n, \xi_n) \in G(\Phi)$ tel que $d(x_n, \eta_n) < 1/n$ et $d(\varphi_n(x_n), \xi_n) < 1/n$ et comme $\xi_n \in \overline{\Phi(D)}$, on peut en extraire une sous-suite convergente vers un point ξ ; on peut donc supposer que $\varphi_n(x_n)$ tend vers ξ .

Il s'ensuit que x_n converge vers $x = p+ty+(1-t)\xi$ d'où η_n converge vers x . Comme d'autre part le graphe de Φ est fermé, on a $\xi \in \Phi(x)$ et $y \in \Phi(x)$.

Donc $p = x-ty-(1-t)\xi$ avec $x \in \partial D$.

D'où $p \in x-\Phi(x)$, $x \in \partial D$, ce qui est impossible.

III - THEOREMES DE POINT FIXE ET DE SURJECTIVITE

Dans ce chapitre nous donnons une première application du degré à la démonstration du théorème du point fixe de Kakutani-Fan dans un espace localement convexe métrisable réel ; l'hypothèse de métrisabilité est à priori indispensable pour pouvoir utiliser une rétraction. Nous montrerons par un argument simple comment on peut se débarrasser de cette hypothèse pour avoir le résultat dans toute sa généralité. Nous démontrons également un théorème de Schaefer multivoque utile pour les E.D.P. Nous donnons ensuite une démonstration d'un théorème de point fixe de Petryshyn et Fitzpatrick sur les multi-applications asymptotiquement compactes sans utiliser de rétraction, ce qui donne un contexte plus général. Enfin, nous donnons une démonstration du théorème de non séparation de Fan par une méthode rapide utilisant les suiveurs ; nous énonçons un résultat nouveau sur la surjectivité des multi-applications "outward" qui améliore certains résultats de Rogalski.

THEOREME 3.1. (Kakutani-Fan)

Soit E un e.l.c.s. métrisable réel, C un convexe compact non vide de E , Γ une multi-application hémicontinue supérieurement de C dans KE (convexes compacts non vides de E). Alors $\exists x \in C$ tel que : $x \in \Gamma x$.

DEMONSTRATION

Puisque C est convexe fermé non vide dans E métrisable, toute fonction continue de C dans C s'étend en une fonction continue de E dans C (voir Dugundji [5]) ; en particulier il existe une rétraction de C dans E , c'est à dire $\beta : E \rightarrow C$ continue telle que $\beta|_C = \text{identité}$.

Considérons $\hat{\Gamma} : E \rightarrow KE$ définie par $\hat{\Gamma}(x) = \Gamma(\beta x)$. On voit facilement que $\hat{\Gamma}$ est h.c.s. et compacte ($\hat{\Gamma}(E) \subset C$). On sait alors (remarque 2.19.) que $I - \hat{\Gamma}$ est surjective ; il existe donc $x \in E$ tel que $0 \in x - \hat{\Gamma}(x)$, d'où $x \in \hat{\Gamma}(x)$, est donc $x \in C$ et $x \in \Gamma(x)$.

—X—

Passons maintenant à un résultat plus général.

THEOREME 3.2.

Soit E un e.l.c.s., C un convexe non vide de E , Γ une multi-application h.c.s. et compacte de C dans KC . On suppose que $\overline{\Gamma(C)}$ est un compact contenu dans C . Alors il existe $x \in C$ tel que $x \in \Gamma x$.

DEMONSTRATION

Démontrons d'abord un lemme :

LEMME 3.3.

Soit K un compact non vide de C , alors pour tout V , voisinage de 0 équilibré convexe dans E , il existe une application continue $\pi_V : K \rightarrow C$ telle que :

- (i) $\forall x \in K \quad \pi_V(x) - x \in V$
- (ii) $\pi_V(K) \subset P_V \subset C$, où P_V est un polyèdre convexe

(i.e. enveloppe convexe d'un nombre fini de points).

DEMONSTRATION DU LEMME.

Considérons le recouvrement ouvert de K formé des $x + \overset{\circ}{V}$, $x \in K$; on en extrait un sous recouvrement fini $x_i + \overset{\circ}{V}$, $i=1,2,\dots,n$. On considère ensuite une partition de l'unité subordonnée à ce revouvrement, soit φ_i , $i=1,\dots,n$; $\varphi_i : K \rightarrow [0,1]$ continue, $\text{supp } \varphi_i \subset x_i + \overset{\circ}{V}$,

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in K .$$

On prend : $\pi_V(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)x_i$; π_V est continue de K dans C ,

$$\pi_V(x) - x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) (x_i - x) \in V \text{ car seuls interviennent les } i \text{ tels que}$$

$$x_i - x \in V , \text{ et } \pi_V(K) \subset \text{conv } \{x_i \mid i=1,\dots,n\} .$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème; notons K un compact tel que $\Gamma(C) \subset K \subset C$, prenons V voisinage de 0 équilibré convexe et fermé, π_V et P_V étant définis par le lemme 3.3., définissons une multi-application Γ_V de P_V dans KP_V par : $\Gamma_V(x) = (\Gamma(x)+V) \cap P_V$. Vérifions que Γ_V est s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides. Il est immédiat que $(\Gamma(x)+V) \cap P_V$ est convexe compact ($\Gamma(x)+V$ est un convexe fermé). Soit $y \in \Gamma(x)$, alors $\pi_V(y) \in y + V$, donc $(\Gamma(x)+V) \cap \pi_V(K)$ est non vide et donc $\Gamma_V(x)$ est non vide. Pour vérifier que Γ_V est s.c.s., nous allons vérifier que son graphe est fermé dans $P_V \times P_V$. Soit (x, y) un point de $P_V \times P_V$ adhérent au graphe, il existe $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ avec $y_n \in \Gamma_V(x_n) = (\Gamma(x_n) + V) \cap P_V$.

Ecrivons $y_n = z_n + v_n$, $z_n \in \Gamma(x_n)$ et $v_n \in V$,

donc $z_n \in K$; soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$; z_n converge vers un point z de K suivant $\mathcal{U}$, ce que nous notons $z_n \xrightarrow{\mathcal{U}} z$, et comme $y_n \xrightarrow{\mathcal{U}} y$,

on a $v_n \xrightarrow{\mathcal{U}} v$ avec $v \in V$ (V est fermé) et $y = z + v$.

Comme Γ est d.c.s. à valeurs dans un compact K , elle est s.c.s. et son graphe est fermé dans $C \times K$; donc puisque $x_n \xrightarrow{\mathcal{U}} x$ et $z_n \xrightarrow{\mathcal{U}} z$

avec $z_n \in \Gamma x_n$ on a : $z \in \Gamma x$. On a bien $y \in (\Gamma(x) + V) \cap P_V$.

On est donc maintenant en mesure d'appliquer le théorème de Kakutani à Γ_V : il existe $x_V \in P_V$ tel que $x_V \in \Gamma_V(x_V)$. On a donc $x_V \in \Gamma(x_V) + V \subset K + V$, écrivons $x_V \in k_V + V$ avec $k_V \in K$. Sur l'ensemble des voisinages de 0 fermés équilibrés et convexes, considérons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre naturellement associé à la relation d'ordre inclusion.

Alors $k_V \xrightarrow{\mathcal{U}} k$, $k \in K$; et comme $x_V - k_V \in V$, x_V converge également vers k suivant $\mathcal{U}$.

Montrons que k est un point fixe de Γ . Raisonnons par l'absurde, si $k \notin \Gamma_k$ séparons-les strictement par un hyperplan fermé, en notant Δ_1, Δ_2 les deux demi-espaces ouverts. Supposons que $\Gamma_k \subset \Delta_1$ et $k \in \Delta_2$. Soit V_0 un voisinage convexe de 0 tel que $\Gamma_k + 2V_0 \subset \Delta_1$; alors pour V "assez petit" on a :

$x_V \in \Delta_2$, $\Gamma(x_V) \subset \Gamma(k) + V_0$, $V \subset V_0$. D'où $x_V \in \Delta_2$ et
 $\Gamma(x_V) + V \subset \Gamma(k) + 2V_0 \subset \Delta_1$, ce qui est impossible puisque
 $x_V \in \Gamma(x_V) + V$.

—X—

Donnons maintenant une version multivoque du théorème de Schaefer qui interviendra dans les équations aux dérivées partielles.

THEOREME 3.4.

Soit D un ouvert, contenant 0 , de E e.l.c.s. et $\Gamma : \bar{D} \rightarrow KE$ h.c.s. compacte.

On suppose que $\forall \lambda \in [0,1]$ et $\forall x \in \partial D : x \notin \lambda \Gamma x$.
 Alors $\exists x \in D$ tel que $x \in \Gamma x$.

DEMONSTRATION

On considère l'homotopie $(\lambda, x) \rightarrow \lambda \Gamma x$, on a $0 \notin x - \lambda \Gamma x$,
 $\forall x \in \partial D$, $\forall \lambda \in [0,1]$.

Donc $d(0, I - \Gamma, D) = d(0, I, D) = +1$ puisque $0 \in D$.

Il s'ensuit d'après 2.14. que: $\exists x \in D$ tel que $x \in \Gamma x$.

—X—

COROLLAIRE 3.5.

E est un espace de Banach.

Soit $\Gamma : E \rightarrow KE$ h.c.s. et telle que l'image de tout borné soit relativement compacte dans E .

Si $\{x \in E \mid x \in \lambda \Gamma x, \lambda \in]0,1[\}$ est borné dans E , alors $\exists x \in E$ tel que $x \in \Gamma x$.

DEMONSTRATION

Soit B une boule ouverte de rayon > 0 contenant

$\{x \in E \mid x \in \lambda \Gamma x, \lambda \in]0,1[\}$.

On a bien $\forall \lambda \in [0,1]$ et $\forall x \in \partial B$ $x \notin \lambda \Gamma x$.

Si on a $x \in \Gamma x$ pour un certain $x \in \partial B$ c'est terminé, sinon les hypothèses de 3.4. sont bien vérifiées donc $\exists x \in B$ tel que $x \in \Gamma x$.

~~X~~

Donnons, suivant Petryshyn et Fitzpatrick [15], la définition des multi-applications asymptotiquement compactes.

E désigne toujours un espace localement convexe séparé réel ;

Soit D un fermé non vide de E et $\Gamma : D \rightarrow CE$ h.c.s.

On définit :

$$K_0 = \overline{\text{conv}} \Gamma(D)$$

$$K_1 = \overline{\text{conv}} \Gamma(D \cap K_0)$$

Si α est un ordinal de première espèce, $\alpha > 0$:

$$K_\alpha = \overline{\text{conv}} \Gamma(D \cap K_{\alpha-1})$$

Et si α est un ordinal de deuxième espèce :

$$K_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} K_\beta$$

On a alors :

- (i) $\forall \alpha$ K_α est convexe et fermé
- (ii) $K_\alpha \subset K_\beta$ pour $\alpha \geq \beta$
- (iii) $\forall \alpha$ $\Gamma(D \cap K_\alpha) \subset K_\alpha$
- (iv) Il existe un ordinal γ tel que $K_\gamma = K_{\gamma+1}$; alors $\forall \beta \geq \gamma$ on a $K_\beta = K_\gamma$ et on définit $K = K(\Gamma, D) = K_\gamma$;
on a bien sur :
$$K = \overline{\text{conv}} \Gamma(D \cap K)$$

DEFINITION 3.6.

On dit que Γ est asymptotiquement compacte si $\Gamma(D \cap K)$ est relativement compact.

THEOREME 3.7. (Pettryshyn, Fitzpatrick [15])

Soit D un convexe fermé non vide de E , $\Gamma : D \rightarrow CE$ h.c.s. asymptotiquement compacte et telle que $\Gamma(D) \subset D$. Alors si $K(\Gamma, D)$ est non vide, il existe $x \in D$ tel que $x \in \Gamma x$.

DEMONSTRATION

Remarquons tout d'abord que $K \subset D$, puisque D est convexe fermé et $\Gamma(D) \subset D$. De plus $\Gamma(K) \subset K$.

$\Gamma|_K$ est h.c.s. et compacte puisque $\overline{\Gamma(K)}$ est compact et contenu dans K . On peut donc appliquer le théorème 3.2. à $\Gamma|_K$; d'où il existe $x \in K$ tel que $x \in \Gamma x$.

—————~~x~~—————

REMARQUE 3.8.

On ne peut pas appliquer le théorème de Kakutani-Fan dans la démonstration précédente car on n'est pas assuré que K soit compact (c'est vrai si par exemple E est quasi-complet).

Nous allons maintenant démontrer le théorème de non séparation de Fan et en donner quelques conséquences.

THEOREME 3.9. (Fan [8])

Soit E un e.l.c.s. réel, X un compact convexe non vide de E , F, G deux multi-applications d.c.s. à valeurs non vides de X dans E telles que :

$$\forall (x, x^*) \in X \times E^* \text{ vérifiant } x^*(x) = \min_{y \in X} x^*(y),$$

il existe $(u, v) \in F(x) \times G(x)$ tel que $x^*(u) \leq x^*(v)$.

Alors il existe $\hat{x} \in X$ pour lequel $F(\hat{x})$ et $G(\hat{x})$ ne peuvent pas être séparés strictement par un hyperplan fermé.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde, supposons que pour tout x dans X il existe $x^* \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F(x) \subset \{y \in E \mid x^*(y) > \alpha\} \quad ,$$

$$G(x) \subset \{y \in E \mid x^*(y) < \alpha\} \quad .$$

Et comme F et G sont d.c.s., il existe U_x voisinage ouvert de x dans X tel que :

$$\forall z \in U_x :$$

$$F(z) \subset \{x^* > \alpha\} \quad \text{et} \quad G(z) \subset \{x^* < \alpha\} \quad .$$

Considérons $\Gamma(z) = F(z) - G(z)$, ceci peut encore s'écrire :

$$x^*(\Gamma(z)) > 0 \quad \forall z \in U_x .$$

Prenons alors un sous recouvrement fini du recouvrement ouvert U_x , soit $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$; considérons $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une partition continue de l'unité subordonnée à ce revouvrement et considérons

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) x_i^* \quad ; \quad p \text{ est une application continue de } X \text{ dans } E^* \text{ (muni}$$

de n'importe quelle topologie d'e.v.t. séparé). On a en outre :

$$\langle p(x), \Gamma(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) x_i^*(\Gamma(x)) > 0 \quad ,$$

ce qui montre au passage que $\forall x \in X \quad p(x) \neq 0$.

Considérons alors la multi-application $\hat{\Gamma}: X \rightarrow KX$ définie par :

$$\hat{\Gamma}x = \{y \in X \mid \langle p(x), y \rangle = \min_{z \in X} \langle p(x), z \rangle\} \quad .$$

$\hat{\Gamma}$ est s.c.s. (ceci est la conséquence d'un lemme que nous allons donner), on peut donc lui appliquer le théorème de Kakutani-Fan, d'où il existe x dans X tel que $x \in \hat{\Gamma}x$ et donc $\langle p(x), x \rangle = \min_{z \in X} \langle p(x), z \rangle$. D'après l'hypo-

thèse, il existe $u \in F(x)$ et $v \in G(x)$ tels que $\langle p(x), u-v \rangle \leq 0$. Ce qui

est impossible puisque $u-v \in \Gamma(x)$ et que $\langle p(x), \Gamma(x) \rangle > 0$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que $\hat{\Gamma}$ est s.c.s.

—X—

LEMME 3.10.

Soit E un e.l.c.s. réel, X un convexe compact non vide de E ,
 $p : X \rightarrow E^*$ continue pour la topologie de Mackey $\tau(E^*, E)$ sur E^* . Alors
la multi-application $\Gamma : X \rightarrow KX$ définie par :

$$\Gamma x = \{y \in X \mid \langle p(x), y \rangle = \max_{z \in X} \langle p(x), z \rangle\}$$

est semi-continue supérieurement.

DEMONSTRATION

Montrons que $G(\Gamma)$ est fermé dans $X \times X$. Soit donc (x, y) adhérent
à $G(\Gamma)$, il existe une famille filtrante (x_i, y_i) vérifiant $x_i \rightarrow x$, $y_i \rightarrow y$ et
 $y_i \in \Gamma x_i$; montrons que $y \in \Gamma x$, c'est-à-dire que :

$$\langle p(x), y \rangle \geq \langle p(x), z \rangle \quad \forall z \in X.$$

Or on a :

$$\langle p(x_i), y_i \rangle \geq \langle p(x_i), z \rangle \quad \forall z \in X$$

et

$$\langle p(x_i), z \rangle \rightarrow \langle p(x), z \rangle$$

Il nous suffit donc de montrer que $\langle p(x_i), y_i \rangle \rightarrow \langle p(x), y \rangle$.

Ecrivons :

$$\langle p(x_i), y_i \rangle - \langle p(x), y \rangle = \langle p(x_i) - p(x), y_i \rangle + \langle p(x), y_i - y \rangle.$$

$\langle p(x), y_i - y \rangle$ tend vers 0 et d'autre part :

$$|\langle p(x_i) - p(x), y_i \rangle| \leq \sup_{z \in X} |\langle p(x_i) - p(x), z \rangle|,$$

et le deuxième membre tend vers 0 puisque $p(x_i) \rightarrow p(x)$ pour $\tau(E^*, E)$,
c'est-à-dire uniformément sur tout convexe compact de E .

—X—

Précisons quelques définitions et notations utiles pour ce qui suit.

E désigne toujours un e.l.c.s. réel, 2^E l'ensemble des parties non vides de E , X un compact convexe non vide de E .

Une multi-application $F : X \rightarrow 2^E$ est dite inward si $\forall (x, x^*) \in X \times E^*$ tel que :

$$\langle x^*, x \rangle = \min_{y \in X} \langle x^*, y \rangle ,$$

il existe $u \in F(x)$ tel que : $\langle x^*, u \rangle \geq \langle x^*, x \rangle$.

De même, F est dite outward si il existe $u \in F(x)$ tel que

$$\langle x^*, u \rangle \leq \langle x^*, x \rangle .$$

Pour $x^* \in E^*$, on note $Ax^* = \{x \in X \mid \langle x^*, x \rangle = \min_{y \in X} \langle x^*, y \rangle\}$

Ces ensembles seront appelés des zônes d'appui de X .

Donnons maintenant un théorème de point fixe important.

THEOREME 3.11.

Si $F : X \rightarrow CE$ et $G : X \rightarrow KE$ sont h.c.s. et telles que :

$\forall (x, x^*) \in X \times E^*$ vérifiant $x^*(x) = \min_{y \in X} x^*(y)$, il existe

$(u, v) \in F(x) \times G(x)$ tel que $x^*(u) \leq x^*(v)$. Alors il existe $\hat{x} \in X$ tel que $F(\hat{x}) \cap G(\hat{x}) \neq \emptyset$.

REMARQUE 3.12.

Si on suppose F d.c.s. ce résultat est un corollaire immédiat du théorème 3.9. ; en effet, il existe $\hat{x}$ pour lequel $F(\hat{x})$ et $G(\hat{x})$ ne peuvent être séparés strictement par un hyperplan fermé, on en déduit que $F(\hat{x}) \cap G(\hat{x}) \neq \emptyset$ sinon on pourrait appliquer le théorème de Hahn-Banach. Dans le cas h.c.s., il faut reprendre une démonstration analogue à celle du théorème 3.9.

DEMONSTRATION

Considérons $x \rightarrow F(x)-G(x)$, c'est une multi-application à valeurs convexes fermées non vides qui est de plus h.c.s. sur X ; en effet :
pour $\varphi \in E^*$,

$$x \rightarrow \varphi^\#(x) = \sup_{\substack{y \in F(x) \\ z \in G(x)}} \langle \varphi, y-z \rangle = \sup_{y \in F(x)} \langle \varphi, y \rangle + \sup_{z \in G(x)} \langle -\varphi, z \rangle$$

est bien s.c.s. de X dans $]-\infty, +\infty]$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que, pour tout $x, 0 \notin F(x)-G(x)$. Alors d'après le lemme 1.2., il existe $p : X \rightarrow E^*$ suiveur de $F-G$ sur X .

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème 3.9.

—————X—————

COROLLAIRE 3.13.

Si $F : X \rightarrow CE$ est h.c.s. et inward ou outward, alors il existe $\hat{x} \in X$ tel que $\hat{x} \in F\hat{x}$.

DEMONSTRATION

Appliquer le théorème 3.11. en prenant $Gx = x$.

Donnons maintenant le théorème de surjectivité des multi-applications outward.

THEOREME 3.14.

Soit X convexe compact de E , e.l.c.s., $F : X \rightarrow CE$ h.c.s. et outward ; alors $X \subset F(X)$.

DEMONSTRATION

On peut toujours supposer que $0 \in X$ et il nous suffit de montrer que $0 \in F(X)$. Considérons $Sx = 2x - Fx$ (Sx est le symétrique de Fx par rapport à x). On voit facilement que S est encore h.c.s. de X dans CE , de plus S est

inward (puisque F est outward) et comme $0 \in X$, $1/2 S$ est encore inward et d'après le corollaire 3.13, il existe $\hat{x} \in X$ tel que $\hat{x} \in 1/2 S \hat{x}$, c'est-à-dire $\hat{x} \in \hat{x} - 1/2 F \hat{x}$ soit $0 \in F \hat{x}$.

—X—

REMARQUE 3.15.

Le théorème 3.14. est plus général que le lemme 10 de Rogalski [17] dans lequel F est supposé s.c.s. et l'hypothèse outward est remplacée par la condition $Fx \cap Qx$ non vide pour tout x où $Qx = 2x - Px$, Px désignant le cône convexe fermé de sommet x engendré par X dans E (cette condition a été introduite par Brézis, voir la proposition 9 de [17]). Il est immédiat que cette condition entraîne outward, la réciproque étant probablement fausse. Notons encore que la démonstration de 3.14. reprend celle de Rogalski qui est erronée puisque $Sx = 2x - Fx$ n'a aucune raison d'être s.c.s. si F est s.c.s. à valeurs non compactes (on trouvera facilement un contre-exemple).

COROLLAIRE 3.16.

Si $F : X \rightarrow KX$ est s.c.s. et si pour toute zône d'appui A de X on a : $\forall x \in A, Fx \cap A \neq \emptyset$. Alors F est surjective.

DEMONSTRATION

Il suffit de remarquer que F est outward.

—X—

COROLLAIRE 3.17. (Théorème du rétracte)

Soit $f : X \rightarrow X$ continue telle que pour toute zône d'appui A de X $f(A) \subset A$; alors f est surjective.

DEMONSTRATION

Immédiate, appliquer 3.16.

—X—

REMARQUE 3.18.

Les deux corollaires précédents sont donnés dans [17] en remplaçant zône d'appui par face fermée; comme il est immédiat que toute zône d'appui est une face fermée la réciproque étant fausse (prendre un point extrémal non exposé), les résultats que nous donnons sont plus généraux.

Le résultat suivant, cité par Rogalski dans $\mathbb{R}^n$, nous a été signalé par B. CORNET.

COROLLAIRE 3.19.

Si X est métrisable, E complet et $\Gamma : X \rightarrow KX$ semi-continue inférieurement (pour la définition voir [24]), et si pour toute zône d'appui A de X , $\Gamma(A) \subset A$. Alors Γ est surjective.

DEMONSTRATION

Nous allons utiliser un théorème de section continue de Michael [14].

LEMME 3.20. (Michael)

Soit X un espace topologique paracompact, E un e.l.c.s. réel complet, $M \subset E$, M partie non vide admettant une métrique complète compatible avec sa topologie. Soit $F : X \rightarrow 2^M$ s.c.i.
Alors, $x \rightarrow \overline{\text{conv } Fx}$ admet une section continue.

Soit donc f une section continue de Γ , pour tout x dans A , zône d'appui, on a bien $f(x) \in A$. Par conséquent, d'après 3.17, f est surjective, donc Γ est surjective.

IV - QUELQUES PROPRIETES COMBINATOIRES DANS $\mathbb{R}^n$

Le but de ce chapitre est de montrer comment utiliser la théorie que nous avons développée pour obtenir certains résultats combinatoires dans $\mathbb{R}^n$ tels que le théorème de Helly sur l'intersection de convexes ou le théorème de Kuratowski-Knaster-Mazurkiewicz. Nous montrons comment ces résultats se ramènent à des propriétés de multi-applications s.c.s. définies sur des simplexes ; et comment on peut obtenir une grande variété de résultats en choisissant judicieusement la multi-application et le simplexe. Nous mettons l'accent sur l'esprit de la méthode plus que sur les résultats eux-mêmes.

Un peu de géométrie du simplexe de dimension n.

Dans $\mathbb{R}^n$, nous désignons par S_n , simplexe de dimension n, l'enveloppe convexe des points $a_0 = (0,0,\dots,0)$, $a_1 = (1,0,\dots,0)$, $a_2 = (0,1,\dots,0) \dots a_n = (0,\dots,0,1)$.

∂S_n désigne le bord de S_n . Pour tout $x \in \partial S_n$, il existe un sous-ensemble $I \subset \{0,1,\dots,n\}$ et un seul tel que $x \in \text{int. rel.} [\text{conv} \{a_i \mid i \in I\}]$ (int. rel. désigne l'intérieur relatif). Soit p un point quelconque à l'intérieur de S_n ; désignons par φ l'application continue de ∂S_n dans lui-même qui à $x \in \partial S_n$ associe le point $\varphi(x)$ où la droite (p,x) recoupe le bord du simplexe.

Si $x \in \text{int. rel.} [\text{conv} \{a_i \mid i \in I\}]$ et

si $\varphi(x) \in \text{int. rel.} [\text{conv} \{a_j \mid j \in J\}]$,

on a $I \cup J = \{0,\dots,n\}$.

En effet $p \in \text{conv} \{x, \varphi(x)\} \subset \text{conv} \{a_m \mid m \in I \cup J\}$.

PROPOSITION 4.1.

Soit Γ une multi-application s.c.s. de ∂S_{n+1} dans $K' \mathbb{R}^n$, il existe $x \in \partial S_{n+1}$ tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(\varphi(x)) \neq \emptyset$.

DEMONSTRATION

∂S_{n+1} est homéomorphe à la sphère de dimension n par l'homéomorphisme $\alpha(x) = \frac{x-p}{\|x-p\|}$, et comme par cet homéomorphisme l'application φ devient $x \rightarrow -x$, le résultat se déduit immédiatement du théorème de Borsuk (Corollaire 1.11.).

— ~~x~~ —

THEOREME 4.2. (Helly)

Soit dans $\mathbb{R}^n$ m convexes $C_1, \dots, C_m$ avec $m \geq n+1$; si l'intersection de $n+1$ quelconques d'entre eux n'est pas vide, alors l'intersection de tous les C_i est non vide.

DEMONSTRATION

On commence par se ramener au cas où les C_i sont compacts. Pour tout ensemble I de $n+1$ éléments dans $\{1, \dots, m\}$ prenons un point dans $\bigcap_{i \in I} C_i$, notons A l'ensemble fini ainsi obtenu et considérons $\hat{C}_i = \text{conv } A \cap C_i$. Il est clair que les $\hat{C}_i$ sont convexes compacts et vérifient encore l'hypothèse d'intersection. Et comme $\hat{C}_i \subset C_i$, il suffit de montrer le théorème pour les $\hat{C}_i$.

Montrons alors le résultat par récurrence. C'est trivial pour $m = n+1$; supposons donc $m > n+1$ et le résultat vrai pour $m-1$, montrons qu'il est vrai pour m . D'après l'hypothèse de récurrence, toute intersection de $m-1$ $\hat{C}_i$ est non vide. Soit Γ la multi-application s.c.s. de ∂S_{m-1} dans $K \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Gamma(a_i) = \hat{C}_i, \quad \Gamma(x) = \hat{C}_i \cap \hat{C}_j \quad \text{pour } x \in]a_i, a_j[$$

et d'une façon générale :

$$\Gamma(x) = \bigcap_{i \in I} \hat{C}_i \quad \text{pour } x \in \text{int. rel } [\text{conv } \{a_i \mid i \in I\}]$$

Soit φ l'application définie à la proposition 4.1. ; il existe alors $x \in \partial S_{m-1}$ tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(\varphi(x)) \neq \emptyset$.

D'où
$$\left[\bigcap_{i \in I} \hat{C}_i \right] \cap \left[\bigcap_{j \in J} \hat{C}_j \right] \neq \emptyset$$
 et d'après ce qui a été dit

au début du paragraphe $I \cup J = \{1, \dots, m\}$.

—X—

REMARQUE 4.3.

Le lecteur intéressé par le théorème de Helly et ses à côtés pourra consulter [10]; on trouve d'autres démonstrations dans Rockafellar [16] ou dans Eggleston [6].

Pour illustrer la méthode, nous allons donner un autre exemple relatif aux intersections de convexes.

THEOREME 4.4.

Soient C_i , $i=1,2,\dots,6$ six convexes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$C_i \cap C_{i+1} \cap C_k \neq \emptyset \quad \text{pour } i=1,2,3 \text{ et } k=5,6$$

$$\text{et} \quad C_4 \cap C_1 \cap C_k \neq \emptyset \quad \text{pour } k=5,6$$

Alors il en existe au moins quatre qui ont une intersection non vide.

DEMONSTRATION

On se ramène au cas où les C_i sont compacts par le même argument qu'en 4.2.

Considérons un octaèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$ et numérotions ses sommets de la façon suivante :

Notons Δ cet octaèdre et définissons

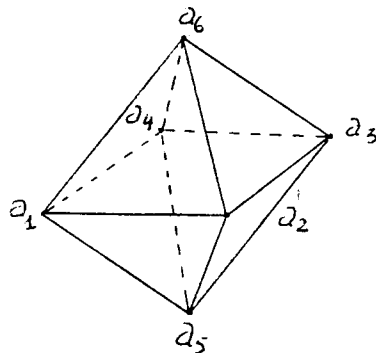
une multi-application s.c.s. Γ de

$\partial \Delta$ dans $K \mathbb{R}^2$ par :

$$\Gamma(a_i) = C_i$$

$$\Gamma(x) = C_i \cap C_j \quad \text{si } x \in]a_i, a_j[\quad i, j \text{ distincts}$$

$$\Gamma(x) = C_i \cap C_j \cap C_k \quad \text{si } x \in \text{int. rel } [\text{conv } \{a_i, a_j, a_k\}] \quad \text{pour } i, j, k \text{ distincts.}$$



Prenons un point p à l'intérieur de l'octaèdre ne se situant sur aucun des plans $a_i a_j a_k$ i, j, k distincts. Considérons l'application φ construite comme précédemment. Par un raisonnement identique, on conclut qu'il existe $x \in \partial \Delta$ tel que $\Gamma(x) \cap \Gamma(\varphi(x)) \neq \emptyset$.

On a $\Gamma(x) = \bigcap_{i \in I} C_i$ avec $x \in \text{conv} \{a_i \mid i \in I\}$, $1 \leq \text{card } I \leq 3$,

de même $\Gamma(\varphi(x)) = \bigcap_{j \in J} C_j$ avec $\varphi(x) \in \text{conv} \{a_j \mid j \in J\}$

donc $\bigcap_{i \in I \cup J} C_i \neq \emptyset$ et on a $p \in \text{conv} \{a_i \mid i \in I \cup J\}$ et comme p n'est

situé sur aucun plan passant par trois sommets, on a $\text{card } I \cup J \geq 4$.

— x —

REMARQUE 4.5.

Ici on suppose seulement 8 conditions d'intersection, correspondant aux huit faces de l'octaèdre. Pour pouvoir appliquer le théorème de Helly et conclure que l'intersection des six convexes est non vide, il faudrait que l'intersection de trois quelconques d'entre eux soit non vide soit 20 conditions.

Nous allons maintenant montrer comment les résultats du paragraphe III permettent de donner des démonstrations rapides des théorèmes combinatoires de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz.

THEOREME 4.6. ("Grand K.K.M.")

Soit S_n le simplexe de dimension n , de sommets $a_1, \dots, a_{n+1}$.

Soit $E_1, \dots, E_{n+1}$ $n+1$ fermés. Si pour tout $I \subset \{1, \dots, n+1\}$ on a $\text{conv} \{a_i \mid i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} E_i$ alors $\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i \neq \emptyset$.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde : on suppose $\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i = \emptyset$.

Soit $\sigma_i = \text{conv} \{a_j \mid j \neq i\}$ la face opposée au sommet a_i . Pour tout x dans S_n posons $I(x) = \{i \mid x \notin E_i\}$, comme $\bigcap E_i = \emptyset$, on a $I(x) \neq \emptyset$.

On pose $\Gamma(x) = \bigcap_{i \in I(x)} \sigma_i$. Comme $S_n = \bigcup E_i$, on a $I(x) \neq \{1, \dots, n+1\}$

donc $\Gamma(x) \neq \emptyset$ et c'est un convexe compact. Comme les E_i sont fermés,

$V(x) = \bigcap_{i \in I(x)} E_i$ est un voisinage ouvert de x ; pour tout y dans $V(x)$, on a

$I(y) \supset I(x)$ donc $\Gamma(y) \subset \Gamma(x)$, ce qui prouve que Γ est s.c.s.

Montrons que Γ est outward, soit $x \in \partial S_n$ et J tel que $x \in \text{conv} \{a_j \mid j \in J\}$.

D'après l'hypothèse, il existe $j_0 \in J$ tel que $x \in E_{j_0}$; comme $a_{j_0} \in \sigma_k$

pour tout $k \neq j_0$, on a $a_{j_0} \in \Gamma(x)$ donc Γ est outward. Il s'ensuit, d'après

le théorème 3.9., que $S_n \subset \Gamma(S_n)$, ce qui est absurde puisque $\Gamma(S_n) \subset \partial S_n$.

—X—

THEOREME 4.7. ("petit K.K.M.")

Soit toujours S_n le simplexe de sommets, $a_1, \dots, a_{n+1}$;

$F_1, \dots, F_{n+1}$ des fermés tels que

$S_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ et tels que pour tout i , $\sigma_i \subset F_i$, où σ_i est la face opposée

au sommet a_i . Alors $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$.

DEMONSTRATION

On raisonne par l'absurde : on suppose $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$.

Pour $x \in S_n$ on pose comme précédemment $I(x) = \{i \mid x \notin F_i\}$, $I(x)$ est non

vide et différent de $\{1, \dots, n+1\}$ puisque $S_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$. Posons encore

$\Gamma(x) = \bigcap_{i \in I(x)} \sigma_i$ convexe compact non vide, $V(x) = \bigcap_{i \in I(x)} F_i$ est un voisinage

ouvert de x et pour $y \in V(x)$, on a $I(y) \supset I(x)$ donc $\Gamma(y) \subset \Gamma(x)$ d'où Γ est s.c.s.

D'après le théorème de Kakutani $\exists x \in S_n$ tel que $x \in \Gamma(x)$, d'où

$$x \in \bigcap_{i \in I(x)} \sigma_i \subset \bigcap_{i \in I(x)} F_i$$

ce qui est absurde d'après la définition de $I(x)$.

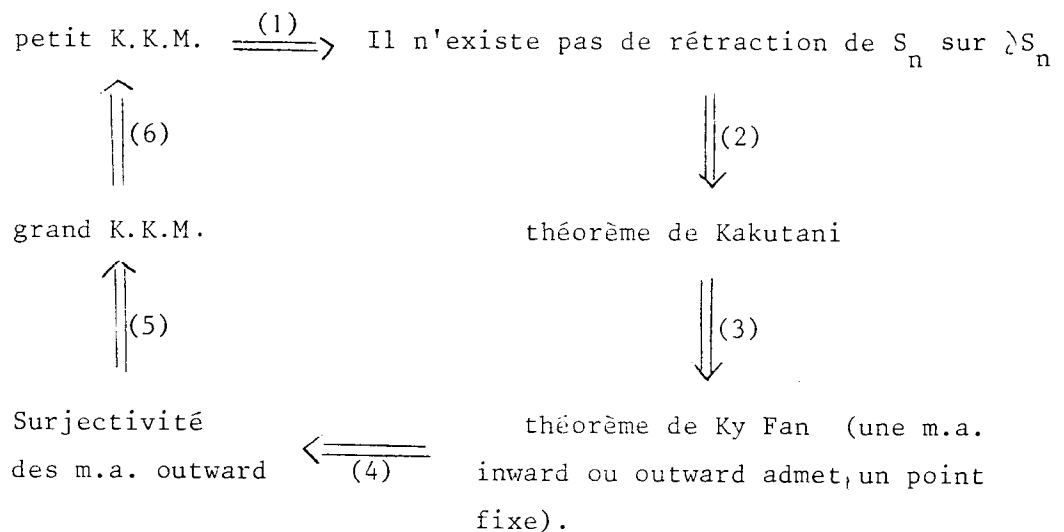
~~X~~

REMARQUE 4.8.

Démontrer ces propriétés combinatoires à partir du théorème de Kakutani peut apparaître comme la dernière étape d'un cercle vicieux, vu que, généralement, on démontre le théorème de Kakutani à partir de ces résultats. En fait la démonstration que nous donnons du théorème de Kakutani est basée sur un exposé de la théorie du degré qui ne fait apparaître à aucun moment ce type de propriété combinatoire ; il n'y a donc pas de cercle vicieux.

REMARQUE 4.9.

Dans $\mathbb{R}^n$, on a le circuit suivant, où chaque implication est de démonstration simple :



Nous avons donné les démonstrations de (3), (4), et (5), pour (6) nous renvoyons à Berge [1].

Donnons les démonstrations de (1) et (2).

DEMONSTRATION DE (1)

(Cette démonstration nous a été communiquée par B. Cornet).

On raisonne par l'absurde : soit $f : S_n \rightarrow \partial S_n$ une rétraction du simplexe sur son bord, soit $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ les faces de S_n , soit $F_i = f^{-1}(\sigma_i)$; on a

$$\sigma_i \subset F_i \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i = S_n. \text{ Donc d'après le "petit KKM" on a } \bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset.$$

Prenons $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} F_i$, on a $f(x) \in \bigcap_{i=1}^{n+1} \sigma_i$, ce qui est absurde puisque l'intersection de toutes les faces est l'ensemble vide.

DEMONSTRATION DE (2)

Il suffit de le démontrer pour une multi-application de $\bar{B}$ dans $1/4 \bar{B}$, où $\bar{B}$ désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ (on passe immédiatement au cas général au moyen d'une rétraction d'une boule suffisamment grande sur le convexe compact ; puisqu'on est dans $\mathbb{R}^n$ on peut prendre la projection comme rétraction). On raisonne par l'absurde : si Γ n'a pas de point fixe, il existe un suiveur q_1 de $x - \Gamma(x)$ sur $\bar{B}$, soit $q_1 : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que $q_1(x) \cdot [x - \Gamma(x)] \geq 1$, posons $q_2(x) = x$. Considérons le recouvrement ouvert de $\bar{B}$ formé de $3/5 \bar{B}$, $\bar{B} \setminus 1/2 \bar{B}$ et soit φ_1, φ_2 une partition continue de l'unité subordonnée, prenons $q(x) = \varphi_1(x)q_1(x) + \varphi_2(x)q_2(x)$, on a :

$$q(x)[x - \Gamma(x)] \geq \varphi_1(x) + \varphi_2(x)q_2(x) \cdot [x - \Gamma(x)].$$

Si $x \in \bar{B} \setminus 3/5 \bar{B}$, on a $x[x - \Gamma(x)] \geq (3/5)^2 - 1/4 \geq 1/10$

et si $x \in 3/5 \bar{B} \setminus 1/2 \bar{B}$ on a $x[x - \Gamma(x)] \geq 1/4 - 3/5 \cdot 1/4 = 1/10$.

Donc on a toujours $q(x)[x - \Gamma(x)] \geq 1/10$ et par conséquent $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{B}$.

Il s'ensuit que $x \rightarrow \frac{q(x)}{\|q(x)\|}$ est une rétraction de B sur ∂B . Le résultat

pour le simplexe S_n s'en déduit immédiatement par homéomorphisme.

V - APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Une des principales applications des théorèmes de point fixe et de la théorie du degré de Leray-Schauder est la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

De la même façon la théorie du degré pour les multi-applications permet de traiter des E.D.P. non linéaires "multivoques". Nous donnons dans ce chapitre quelques exemples inspirés du cas "univoque".

1. UN THEOREME DE SEMI-CONTINUITE

Soit X un espace compact séparable non vide, μ une mesure de Radon positive sur X . On note Mes_n l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^n$; on note $L_n^p = L^p(X, \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Soit f une multi-application de $X \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, telle que :

- (1) f est borélienne à valeurs fermées
- (2) pour presque tout x (p.t.x.) et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$,
 $f(x, \alpha)$ est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^m$
- (3) pour presque tout x , la multi-application $\alpha \rightarrow f(x, \alpha)$ est s.c.s.

Il résulte de (1) que si $u \in Mes_n$ la multi-application $f_u :$
 $x \rightarrow f(x, u(x))$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}^m$.

On note $F(u)$ l'ensemble convexe non vide ⁽¹⁾ des sections mesurables de f_u , c'est-à-dire :

$$F(u) = \{z \in Mes_m \mid z(x) \in f(x, u(x)) \quad \text{p.t.x.}\}$$

(1) Sur les théorèmes de section mesurable on pourra consulter ROCKAFELLAR [24].

THEOREME 5.1.

Soit p, r dans $[1, +\infty[$. Supposons que :

$$(4) \quad u \in L^p(X, \mathbb{R}^n) \Rightarrow F(u) \subset L^r(X, \mathbb{R}^m).$$

Alors :

(i) $F(u)$ est un convexe fermé borné de $L^r(X, \mathbb{R}^m)$

(ii) Si $\|u_k - u\|_p \rightarrow 0$ et si $z_k \in F(u_k)$ on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\text{dist}_r(z_k, F(u))] = 0 \quad \text{avec}$$

$$\text{dist}_r(z, F(u)) = \inf \{ \|z - y\|_r \mid y \in F(u) \}$$

(iii) Si la mesure dx est diffuse, F est bornée (c'est-à-dire : B borné $\Rightarrow F(B)$ borné).

COROLLAIRE 5.2.

Supposons qu'il existe $A \in L^r(X, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |y| \leq A(x) + b|\alpha|^{p/r} \quad \text{pour presque tout } x, \text{ tout } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ et} \\ \text{tout } y \in f(x, \alpha). \end{array} \right.$$

On a alors (i) et (ii), et la multi-application F est bornée.

REMARQUE 5.3.

Lorsque f est univoque le point (ii) implique que la fonction F est continue de L_n^p dans L_m^r pour les topologies fortes. On retrouve le théorème 2.1. de Krasnoselskii [26] sans l'hypothèse que dx est diffuse (cf. p. 22 de [26]).

DEMONSTRATION DU THEOREME 5.1.

(i) Par les théorèmes classiques de sections mesurables on montre qu'il existe $z_0 \in F(u)$ tel que $\|z_0(x)\| = \sup \{ \|\beta\| \mid \beta \in f(x, u(x)) \}$ pour presque tout x . Comme $z_0 \in F(u)$ on a $z_0 \in L_m^r$, et pour tout $z \in F(u)$ on a $\|z\|_r \leq \|z_0\|_r$ ce qui prouve que $F(u)$ est borné.

Soit $z_j \in F(u)$ telle que $\|z_j - z\|_r \rightarrow 0$. On peut extraire une sous-suite, encore notée z_j , telle que $z_j(x) \rightarrow z(x)$ pour presque tout x . Comme $f(x, u(x))$ est un fermé et que $z_j(x) \in f(x, u(x))$ pour presque tout x , on en déduit que $z(x) \in f(x, u(x))$ pour p.t.x., c'est-à-dire $z \in F(u)$. Donc $F(u)$ est fermé.

(ii) Soit (u_i) une suite telle que $\|u_i - u\|_p \rightarrow 0$ et soit $z_i \in F(u_i)$. On extrait une sous-suite encore notée (u_i) telle que $\sum_0^\infty \|u_i - u\|_p < +\infty$ et $u_i(x) \rightarrow u(x)$ pour presque tout x . D'après l'hypothèse (3), on a donc :

$$(6) \quad d(z_i(x), f(x, u(x))) \rightarrow 0$$

pour presque tout x . Posons :

$$(7) \quad h(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d(z_i(x), f(x, u(x))) .$$

Pour presque tout x , il existe au moins un entier i_x tel que :

$$h(x) = d(z_{i_x}(x), f(x, u(x)))$$

En outre, en utilisant les théorèmes de section mesurable usuels, on peut choisir i_x de telle sorte que l'application $x \rightarrow i_x$ soit mesurable. Soit a et w les fonctions mesurables définies par $w(x) = u_{i_x}(x)$ et

$$a(x) = z_{i_x}(x). \text{ On a } \|w - u\|_p \leq \sum_0^\infty \|u_i - u\|_p < +\infty . \text{ Donc } w \in L_n^p . \text{ On a}$$

$a \in F(w)$ donc $a \in L_m^r$ d'après l'hypothèse (4). Donc $h \in L^r(X, \mathbb{R})$. On en déduit d'après (6), (7) et le théorème de Lebesgue que $\text{dist}_r(z_i, F(u)) \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$.

(iii) Supposons pour simplifier les écritures que $0 \in F(0)$. D'après (i) il existe $k_0 > 0$ tel que $F(0) \subset k_0 \bar{B}$ où $\bar{B}$ est la boule unité de L_m^r . D'après (ii) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|u\|_p^p \leq \varepsilon$ implique $F(u) \subset 2k_0 \bar{B}$.

Soit $v \in L_n^p$ et k entier ≥ 1 tels que $\|v\|_p^p \leq k\varepsilon$. D'après le théorème de convexité de Liapounov appliqué à la mesure diffuse $\|v\|_p^p dx$, il existe une partition de X en parties mesurables $A_1, \dots, A_k$ telles que :

$$\int_{A_i} \|v\|_p^p dx = \frac{1}{k} \int_X \|v\|_p^p dx.$$

Il en résulte que si $u_i = X_{A_i} v$ on a $\|u_i\|_p^p \leq \varepsilon$ et donc $F(u_i) \subset 2k_o \bar{B}$.

D'autre part, si $y \in F(v)$ on a : $\|y\|_r \leq \sum_{i=1}^k \|X_{A_i} y\|_r \leq 2k k_o$ car $X_{A_i} y \in F(u_i)$,

ce qui prouve que F est bornée.

—X—

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE

L'hypothèse (5) implique (4) d'où (i) et (ii).

L'hypothèse (5) implique aussi que F est bornée.

—X—

COROLLAIRE 5.4.

Supposons que f vérifie (1,2,3,4) avec p et $r > 1$, et que la mesure dx soit diffuse. Soit K un opérateur linéaire compact de $L^r(X, \mathbb{R}^m)$ dans $L^p(X, \mathbb{R}^n)$. Alors $K \circ F$ est s.c.s. de $L^p(X, \mathbb{R}^n)$ dans lui-même et $\overline{K(F(B))}$ est compact pour tout borné B .

DEMONSTRATION

Soit B un borné de L_n^p . D'après le point (iii) du théorème 5.1., $F(B)$ est borné dans L_m^r , donc $K(F(B))$ est relativement compact dans L_n^p .

Il suffit donc de montrer que le graphe de $K \circ F$ est fermé. Supposons que $\|u_i - u\|_p \rightarrow 0$, que $\|z_i - z\|_p \rightarrow 0$ et que $z_i \in K(F(u_i))$. Soit y_i tels que $z_i = K(y_i)$ et $y_i \in F(u_i)$. D'après le point (ii) du théorème 5.1.

$\text{dist}_r(y_i, F(u)) \rightarrow 0$. Comme K est continu, on en déduit que

$\text{dist}_p(z_i, K(F(u))) \rightarrow 0$. Donc $z \in \overline{K(F(u))} = K(F(u))$ puisque $F(u)$ est un convexe fermé borné et que les espaces L_n^p et L_m^r sont réflexifs.

—X—

REMARQUE 5.5.

Ce corollaire montre que l'on peut appliquer les résultats des chapitres II et III pour étudier l'existence d'un point fixe $u \in K(F(u))$.

2. UN EXEMPLE

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit $X = \bar{\Omega}$ et soit dx la mesure de Lebesgue sur $\bar{\Omega}$.

Soit f une multi-application de $X \times \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie (1), (2), (3), et (4) avec $p = r = 2$. C'est le cas par exemple si

$$|f(x, \alpha, \beta)| \leq A(x) + b(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \text{ pour presque tout } x \in \bar{\Omega}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^n, \\ A \in L^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $K : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ l'application linéaire compacte définie par $u = Kv$ où u est la solution de l'équation suivante :

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta u = v.$$

D'après le corollaire 5.4., la multi-application $u \rightarrow K(F(u, \text{grad } u))$ est s.c.s. compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On a $u \in K(F(u, \text{grad } u))$ si et seulement si u vérifie l'équation :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta u \in L^2(\Omega) \\ \text{et } \Delta u(x) \in f(x, u(x), \text{grad } u(x)) \text{ p.t.x.} \end{array} \right.$$

PROPOSITION 5.6.

S'il existe α et β positifs tels que :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), y \in L^2(\Omega) \\ \text{et } y(x) \in f(x, u(x), \nabla u(x)) \text{ p.t.x.} \\ \text{entraîne } - \int_{\Omega} y(x) \cdot u(x) dx \leq \alpha + \beta \|u\|_{H_0^1} \end{array} \right.$$

l'équation (8) a au moins une solution.

DEMONSTRATION

On a vu que l'équation (8) est équivalente à $u \in K(F(u, \nabla u))$.
On va montrer que $K \circ F$ vérifie les hypothèses du théorème de Schaefer multivoque (cf. corollaire 3.5.). La seule hypothèse qui reste à vérifier est "l'estimation à priori".

On veut montrer que $u \in \lambda K \circ F(u, \nabla u)$, $\lambda \in]0, 1[$ entraîne $\|u\|_{H^1_0} \leq C$. Pour cela, d'après l'inégalité de Poincaré, il suffit de montrer que $\int_{\Omega} \nabla u^2 dx$ est borné. Or on a : $\int_{\Omega} \nabla u^2 dx = -\int_{\Omega} \Delta u u dx$ puisque $\Delta u \in L^2(\Omega)$.
 $u \in \lambda K \circ F(u, \nabla u)$ entraîne $\frac{1}{\lambda} \Delta u(x) \in f(x, u(x), \nabla u(x))$ p.t.x. et donc d'après (9) $-\int_{\Omega} \Delta u \cdot u dx \leq \alpha + \beta \|u\|_{H^1_0}$. D'autre part, toujours d'après l'inégalité de Poincaré on a $\|u\|_{H^1_0} \leq \gamma [\int_{\Omega} \nabla u^2 dx]^{1/2}$, γ constante ≥ 0 et donc $\int_{\Omega} \nabla u^2 dx \leq \alpha + \beta \gamma [\int_{\Omega} \nabla u^2 dx]^{1/2}$ ce qui entraîne que $\int_{\Omega} \nabla u^2 dx$ est borné.

—X—

REMARQUE 5.7.

On peut remplacer Δ par n'importe quel autre opérateur linéaire continu $A : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tel que $-\int_{\Omega} A u \cdot u dx \geq k \|u\|_{H^1_0}^2$, $k > 0$.

Plus généralement, si l'on revient au corollaire 5.4., on voit que l'exemple choisi est très particulier, nous avons surtout cherché à montrer la méthode. Nous avons appliqué le théorème de Schaefer, théorème que l'on peut démontrer directement à partir du théorème de Kakutani-Fan sans utiliser la théorie du degré.

3. UN EXEMPLE VOISIN

En changeant un peu les hypothèses sur f , on peut travailler dans des espaces de fonctions continues.

Soit f une multi-application de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- (i) $f(x, \alpha)$ est un intervalle compact non vide de $\mathbb{R}$
- (ii) $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ est s.c.s.
- (iii) f est borélienne
- (iv) Pour tout $r > 0$ il existe $R > 0$ tel que
 $y \in f(x, \alpha)$ et $|\alpha| \leq r$ impliquent $|y| \leq R$.

PROPOSITION 5.8.

Supposons qu'il existe $C_0 \geq 0$ tel que :

- (10) $|\alpha| \geq C_0$ et $y \in f(x, \alpha)$ impliquent $\alpha y \geq 0$.

Alors l'équation :

$$(11) \quad \begin{cases} u \in W^{2,p}(\Omega) & \forall p \geq 1 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \Delta u(x) \in f(x, u(x)) & (\text{p.t.x.}) \end{cases}$$

a au moins une solution.

DEMONSTRATION

Soit $+\infty > p > \sup(1, n/2)$; nous désignons par i l'inclusion continue compacte de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$ et par K l'application linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ ⁽¹⁾ définie par :

$$u = K v \text{ si et seulement si } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } \Delta u = v.$$

Soit F la multi-application associée à f , on vérifie facilement que F est d.c.s. de $C(\bar{\Omega})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ et que $F(B)$ est borné si B est borné. La multi-application composée $i \circ K \circ F$ est donc s.c.s. compacte de $C(\bar{\Omega})$ dans lui-même. Montrons par le théorème de Schaefer

(1) Cf. [30].

multivoque que $i \circ K \circ F$ admet un point fixe.

Soit $\lambda \in]0,1[$ et soit u tel que $u \in \lambda i \circ K \circ F(u)$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(\Omega) & , \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \Delta u(x) \in \lambda f(x, u(x)) & \quad (\text{p.t.x.}) \end{cases}$$

Comme $u \in L^\infty(\Omega)$, on en déduit que $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ donc que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $\forall p \geq 1$. Donc que $v = (u - C_0)_+$ est dans $H_0^1(\Omega)$. On a :

$$\int_{\Omega} \nabla v^2 dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} v \Delta u dx \quad \text{or} \quad v(x) \Delta u(x) \in \lambda v(x) \cdot f(x, u(x)) \quad \text{p.t.x.}$$

et donc $v(x) \Delta u(x) \geq 0$ p.t.x. Soit $\int_{\Omega} \nabla v^2 dx \leq 0$ d'où $v = 0$ sur $\bar{\Omega}$,

soit $u \leq C_0$, on montre de même que $u \geq -C_0$ d'où $\|u\|_{\infty} \leq C_0$.

On a montré que $0 < \lambda < 1$ et $u \in \lambda i \circ K \circ F(u)$ impliquent $\|u\|_{\infty} \leq C_0$.

Donc d'après le théorème de Schaefer, il existe u tel que $u \in i \circ K \circ F(u)$; donc u est une solution de (11).

4. UNE APPLICATION DU THEOREME DE BORSUK

Voici un exemple d'utilisation de degré pour les multi-applications qui ne peut être traité par un théorème de point fixe "simple" (Kakutani, "inward", Schaefer,...).

PROPOSITION 5.9.

Soit f comme dans le premier exemple (§ 2) vérifiant en outre :

$$f(x, -\alpha, -\beta) = -f(x, \alpha, \beta) \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, si l'équation :

$$(12) \quad u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et } \Delta u(x) \in f(x, u(x), \nabla u(x)) \text{ p.t.x.}$$

n'admet que la solution $u = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $h \in H^{-1}(\Omega)$

vérifiant $\|h\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon$, l'équation perturbée

$$u \in H_0^1(\Omega), \Delta u + h \in L^2(\Omega) \text{ et } (\Delta u + h)(x) \in f(x, u(x), \nabla u(x)) \text{ p.t.x.}$$

admet au moins une solution u .

DEMONSTRATION

Soit D la boule ouverte de centre O et de rayon 1 dans $H_0^1(\Omega)$.
Soit K et F comme précédemment. (cf. § 2, ci-dessus).

La multi-application $K \circ F : D \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est s.c.s., compacte et impaire. De plus si $u \in K \circ F(u)$, u est une solution de (12) donc $u = 0$.
Donc $0 \notin (I - K \circ F)(\partial D)$. D'après le théorème de Borsuk, $d(O, I - K \circ F, D)$ est impair. D'après la continuité du degré, il existe une boule $\bar{B}(O, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in \bar{B}(O, \varepsilon)$ on ait :

$$d(v, I - K \circ F, D) = d(O, I - K \circ F, D) \neq 0.$$

Donc $v \in (I - K \circ F)(D)$. Autrement dit, il existe

$u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|u\|_{H_0^1} < 1$ et $u - v \in K \circ F(u)$ ce qui s'écrit :

$$\Delta u - \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } (\Delta u - \Delta v)(x) \in f(x, u(x), \nabla u(x)) \text{ p.t.x.}$$

Comme Δ est une isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ la proposition est démontrée.

—X—

BIBLIOGRAPHIE DE LA PARTIE III.1

- [1] C. BERGE : Espaces topologiques, fonctions multivoques.
Paris, Dunod (1966).
- [2] M. & M. BERGER : Perspectives in non linearity.
New-York, W.A. Benjamin, INC. (1968).
- [3] A. CELLINA & A. LASOTA : A new approach to the definition of
topological degree for multivalued mappings.
Accad. Naz. Lincei. 47 (1969), pp 434-440.
- [4] J. CRONIN : Fixed points and topological degree in non linear
analysis. Mathematical surveys Number 11, American Mathematical
Society, Providence, Rhode Island (1964).
- [5] J. DUGUNDJI : An extension of Tietze's theorem.
Pacific Journal of Math. 1 (1951), pp 353-367.
- [6] H.G. EGGLESTON : Convexity.
Cambridge University Press (1963).
- [7] S. EILENBERG & D. MONTGOMERY : Fixed point theorems for
multi-valued transformations.
Amer. Journ. of Math. 58 (1946) pp 214-222.
- [8] K. FAN : A minimax inequality and Applications. Inequalities III
Oved Shisha ed. (1972).
- [9] A. GRANAS : Sur la notion de degré topologique pour une certaine
classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach.
Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1959), pp 191-194.

- [10] L. DANZER ; B. GRUNBAUM ; V. KLEE :
Helly's theorem and its relatives, Proceedings of Symposia in
Pure Mathematics Volume VII, A.M.S. Providence Rhode Island (1963).
- [11] M. HUKUHARA : Sur l'application semi-continue dont la valeur est
un compact convexe, Funkcialaj Ekvacioj, 10 (1967), pp 43-66.
- [12] J.W. JAWOROWSKI : Theorems on antipodes for multi-valued mappings
and a fixed point theorem, Bull. Acad. Polon. Sci. 4 (1959)pp 187-192.
- [13] T.W. MA : Topological degrees for set-valued compact vector
fields in locally convex spaces, Dissertationes Math. 92 (1972), 1-43.
- [14] E. MICHAEL : A survey of continuous selections.
Lectures notes in Math. 171, Springer-Verlag (1970).
- [15] W.V. PETRYSHYN & P.M. FITZPATRICK :
Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), 1-25.
- [16] R.T. ROCKAFELLAR : Convex Analysis.
Princeton University Press (1970).
- [17] M. ROGALSKI : Bull. Sc. Math de France, 2ème série, 96 (1972)
83-87.
- [18] J.T. SCHWARTZ : Non linear Functional Analysis.
Gordon and Breach (1969).
- [19] F. TERKELSEN : A short proof of Fan's fixed point theorem,
Proc. Amer. Math. Soc. 42, (1974), 643-644.
- [20] T. VAN DER WALT : Fixed and almost fixed points. Mathematical
Centre Tracts Amsterdam (1967).
- [21] J.R.L. WEBB : On degree theory for multi-valued mappings and
applications. Boll. U.M.I. (4) 9, (1974), 137-158.

- [22] M.J. POWERS : Thesis. Indiana University (1968).
- [23] JAWOROWSKI : Lectures notes in Mathematics 171, Springer-Verlag (1970).
- [24] R.T. ROCKAFELLAR : Contributions to non linear Functional Analysis E. Zarantonello ed. Academic Press (1971).
- [25] M. VALADIER : Thèse, Paris (1970).
- [26] M.A. KRASNOSELSKII : Topological methods in the theory of non linear integral equations. MacMillan, New-York (1964).
- [27] J.M. LASRY & R. ROBERT : C.R. Acad. Sc., (avril 1975).
- [28] J.M. LASRY & R. ROBERT : Degré et théorèmes de points fixes pour les fonctions multivoques ; applications. Séminaire Goulaouic - Lions-Schwartz, (mars 1975).
- [29] M. SCHATZMAN : Problèmes aux limites non linéaires non coercifs Ann. del. Sc. Norm. Sup. di Pisa, Vol XXVII, Fasc IV (1973).
- [30] S. AGMON , A. DOUGLIS, L. NIRENBERG : Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727.

III - 2

DEGRE POUR DES COUPLES D'APPLICATIONS,
TOPOLOGIE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE CERTAINES EQUATIONS FONCTIONNELLES,
APPLICATIONS

Cette partie chemine lentement vers des résultats d'accessibilité en théorie du contrôle qui étaient notre but initial. Cependant les détours nécessaires nous ont amenés à développer des résultats qui ont leur propre intérêt : d'une part une théorie du degré pour certains couples d'applications qui est une variante de la théorie d'Eilenberg-Montgomery du nombre de Lefschetz, d'autre part un résultat d'acyclicité pour l'ensemble des solutions d'équations différentielles multivoques. A leur tour ces résultats ont suscité des développements connexes : théorèmes de points fixes pour les multi-applications pseudo-acycliques, extension du théorème de Krasnoselskii-Perov, degré en dimension infinie, résolution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires,...

Ce contenu est réparti suivant le plan de la page suivante .

Il est apparu après coup que des développements analogues aux paragraphes 1 et 2 du chapitre I et au paragraphe 1 du chapitre IV avaient déjà été faits par Calvert (voir la bibliographie) qui définit un indice de coïncidence des couples avec des méthodes voisines.

La présence de ces paragraphes dans le texte reste justifiée d'une part par souci de présenter un exposé complet, d'autre part, la méthode adoptée pour construire le degré nous paraît plus accessible au non topologue et la présentation est adaptée aux applications que nous donnons.

P L A N

CHAPITRE I Variations à partir de la méthode d'Eilenberg
et Montgomery

- § 1 Théorie du degré pour certains couples d'applications.
- § 2 Degré pour les multi-applications à valeurs acycliques.
- § 3 Théorèmes de point fixe et de surjectivité des multi-applications acycliques et pseudo-acycliques.
- § 4 Homomorphisme de cohomologie associé à une multi-application acyclique.

CHAPITRE II Sur la topologie de l'ensemble des solutions de
certaines équations fonctionnelles.

- § 1 Quelques résultats généraux, une version améliorée du théorème de KRASNOSELSKII-PEROV.
- § 2 Equations différentielles multivoques avec retards.
- § 3 Equations différentielles multivoques sur une variété.

CHAPITRE III Applications

- § 1 Résultats d'existence pour des équations différentielles multivoques.
- § 2 Lien avec la théorie du contrôle

CHAPITRE IV Degré pour les couples en dimension infinie.

§ 1 Construction et propriétés du degré en dimension infinie.

§ 2 Applications.

CHAPITRE V Compléments

§ 1 Extension de multi-applications.

§ 2 Un théorème de Birkhoff-Kellog multivoque.

CHAPITRE I

VARIATIONS A PARTIR DE LA METHODE D'EILENBERG ET MONTGOMERY

La méthode d'Eilenberg et Montgomery consiste à utiliser le théorème de Vietoris pour l'homologie de Čech à coefficients dans $\mathbb{Q}$ pour définir le nombre de Lefschetz d'un couple d'applications (φ, ψ) ou d'une multi-application à valeurs acycliques. En nous inspirant de cette méthode, nous utilisons une version du théorème de Vietoris-Begle pour la cohomologie relative à coefficients dans $\mathbb{Z}$ pour définir un degré topologique pour des couples d'applications. Si le nombre de Lefschetz est bien adapté pour démontrer des résultats de coïncidence et de point fixe dans un cadre très général, le degré, en supprimant la contrainte que φ et ψ soient à valeurs dans un même espace, ouvre la porte à des théorèmes de surjectivité variés, et s'avère bien adapté à l'étude des résultats d'existence pour les équations différentielles multivoques (voir chapitre III).

Le § 1 donne la définition du degré pour les couples ; c'est le plus important, on y donne toutes les propriétés usuelles du degré qui serviront par la suite, et notamment l'invariance par homotopie.

Dans le § 2 , on montre qu'en particularisant les couples on obtient une théorie du degré pour les multi-applications acycliques.

Le § 3 est entièrement consacré à des résultats de point fixe et de surjectivité des multi-applications acycliques et pseudo-acycliques; ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus dans la partie III.1. pour les multi-applications à valeurs convexes.

Enfin, le § 4 étudie l'homomorphisme de cohomologie que l'on peut associer à une multi-application acyclique pour montrer des résultats de surjectivité d'un genre un peu différent; on y résoud notamment une conjecture de Rogalski [12].

§ 1 - THEORIE DU DEGRE POUR CERTAINS COUPLES D'APPLICATIONS

PRELIMINAIRES

Nous désignerons par $H^* = (H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ le foncteur cohomologie de Čech à coefficients dans $\mathbb{Z}$, défini sur la catégorie des paires topologiques (X, A) . Nous renvoyons à [7] ou [11] pour les propriétés usuelles de la cohomologie. Nous désignons par $\tilde{H}^n$ la cohomologie réduite. Nous utiliserons deux propriétés importantes de cette cohomologie : la possibilité de passer à la limite et le théorème d'isomorphisme de Vietoris-Begle. Rappelons les résultats que nous utiliserons :

THEOREME A (voir Godement [7])

Soit X un espace topologique, A une partie non vide de X .

On suppose que :

- Soit X est métrisable
- Soit X est paracompact et A est fermé dans X

On a alors :

$$\forall n \geq 0 \quad H^n(A) = \lim_{U \supset A} \text{ind} \quad H^n(U).$$

Le second membre désignant la limite inductive sur l'ensemble de tous les voisinages U de A ordonnés par inclusion.

Il est clair qu'on peut remplacer l'ensemble des voisinages par n'importe quel système fondamental.

THEOREME B (voir Spanier [11])

Soit K_n une suite décroissante de compacts non vides dans un espace topologique X et $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Alors :

$$\forall q \geq 0 \quad H^q(K) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \text{ind} \quad H^q(K_n).$$

Enfin, donnons une version du théorème de Vietoris-Begle pour la cohomologie.

THEOREME C (Voir Spanier [11])

Soient X et X' deux espaces topologiques paracompacts, f une application de X' dans X continue surjective et fermée. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que pour tout $q < n$ et pour tout x dans X on ait :

$$\tilde{H}^q(f^{-1}(x)) = \{0\}.$$

Alors l'homomorphisme induit $f^* : H^q(X) \rightarrow H^q(X')$ est un isomorphisme pour tout $q < n$ et est injectif pour $q = n$.

On dira qu'un espace topologique X est acyclique si pour tout $q \geq 0$:

$$\tilde{H}^q(X) = \{0\}.$$

On dira qu'une application continue et surjective $\varphi : X' \rightarrow X$ est topologiquement monotone si pour tout x dans X , $\varphi^{-1}(x)$ est acyclique.

Ω désigne un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $\bar{\Omega}$ son adhérence et $\partial\Omega$ sa frontière.

S_n désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$; nous identifierons S_n au compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

DEFINITION DE $d(a, [\varphi, \psi], \Omega)$.

Avant de donner la définition du degré, donnons une version du théorème de Vietoris-Begle pour la cohomologie relative qui va jouer un rôle essentiel dans ce qui suit.

THEOREME 1.1.

Soient X et X' deux espaces topologiques métrisables et f une application de X' dans X topologiquement monotone et fermée. Soit A une partie de X et $A' = f^{-1}(A)$. Alors, pour tout $q \geq 0$, l'homomorphisme induit $f^* : H^q(X, A) \rightarrow H^q(X', A')$ est un isomorphisme.

DEMONSTRATION

Désignons par i l'inclusion de A dans X et par j l'inclusion de X dans (X,A) .

Ecrivons le diagramme commutatif suivant dont les lignes constituent les suites exactes de cohomologie.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & H^{q-1}(X) & \xrightarrow{i^*} & H^{q-1}(A) & \xrightarrow{\partial^*} & H^q(X,A) & \xrightarrow{j^*} & H^q(X) & \xrightarrow{i^*} & H^q(A) & \dots \\
 & \downarrow f_1^* & & \downarrow f_2^* & & \downarrow f_3^* & & \downarrow f_4^* & & \downarrow f_5^* & \\
 \dots & H^{q-1}(X') & \xrightarrow{i'^*} & H^{q-1}(A') & \xrightarrow{\partial^*} & H^q(X',A') & \xrightarrow{j'^*} & H^q(X') & \xrightarrow{i'^*} & H^q(A') & \dots
 \end{array}$$

où f_i^* désigne l'homomorphisme de cohomologie naturellement associé à f . Alors d'après le théorème C des préliminaires, f_1^* et f_4^* sont des isomorphismes de $\mathbb{Z}$ -modules.

D'autre part, considérons $f : A' \rightarrow A$, f est continue, surjective et il est facile de voir que f est fermée ; comme X et X' sont métrisables, A et A' sont métrisables et donc paracompacts.

On voit donc que les hypothèses du théorème C sont encore vérifiées pour $f : A' \rightarrow A$ et donc f_2^* et f_5^* sont des isomorphismes. En appliquant le lemme des cinq, on conclut que f_3^* est un isomorphisme.

Lorsque $q = 0$ on convient de prendre $H^{-1}(X) = H^{-1}(A) = \{0\}$, la même démonstration s'applique encore.

—X—

Dans la suite de ce paragraphe, X désigne un espace métrique compact non vide, φ une application topologiquement monotone de X dans $\bar{\Omega}$ et ψ une application continue de X dans $\mathbb{R}^n$. Soit a un point de $\mathbb{R}^n$, on va supposer que $\psi(x) \neq a$ pour tout x tel que $\varphi(x) \in \partial\Omega$.

On va montrer qu'on peut alors définir un entier relatif, appelé le degré de a par rapport au couple $[\varphi, \psi]$ et par rapport à Ω que l'on notera $d(a, [\varphi, \psi], \Omega)$.

Soit $K = \varphi[\psi^{-1}(a)]$, K est un compact contenu dans $\bar{\Omega}$ et notons $\tilde{X} = \varphi^{-1}(K)$.

On a alors :

$$\begin{array}{ccc} (X, X \setminus \tilde{X}) & \xrightarrow{\varphi} & (\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\ \downarrow \psi & & \\ (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & & \end{array}$$

d'où en passant à la cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, X \setminus \tilde{X}) & \xleftarrow{\varphi^*} & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\ \uparrow \psi^* & & \\ H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & & \end{array}$$

et comme $X \setminus \tilde{X} = \varphi^{-1}(\bar{\Omega} \setminus K)$, d'après le théorème 1.1. φ^* est un isomorphisme.

On définit donc un homomorphisme $(\varphi^*)^{-1}\psi^*$ de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\})$ dans $H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K)$.

D'autre part, on a, en notant par i et j les inclusion naturelles :

$$S_n \xrightarrow{i} (S_n, S_n \setminus K) \xleftarrow{j} (\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K)$$

et donc :

$$H^n(S_n) \xleftarrow{i^*} H^n(S_n, S_n \setminus K) \xrightarrow{j^*} H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K)$$

Or d'après la propriété d'excision j^* est un isomorphisme.

Alors, puisque $\mathbb{R}^n$ et S_n sont naturellement orientés, on a :

$$Z \approx H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) \xrightarrow{(\varphi^*)^{-1}\psi^*} H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \xrightarrow{(j^*)^{-1}} H^n(S_n, S_n \setminus K) \xrightarrow{i^*} H^n(S_n) \approx Z$$

et on pose : $d(a, [\varphi, \psi], \Omega) = i^*(j^*)^{-1}(\varphi^*)^{-1}\psi^*(1)$.

REMARQUE 1.2.

Prenons $X = \bar{\Omega}$ et $\varphi =$ identité avec $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors si $a \notin \psi(\partial\Omega)$:

$$d(a, [\varphi, \psi], \Omega)$$

est défini et on vérifie qu'il est égal à $d(a, \psi, \Omega)$ au sens usuel des fonctions.

REMARQUE 1.3.

En général, pour définir un degré topologique on utilise l'homologie plutôt que la cohomologie (voir par exemple Dold [4]). Ici le choix de la cohomologie répond à une nécessité, à savoir l'utilisation du théorème de Vietoris-Begle à coefficients dans Z (ce théorème n'est pas valable pour l'homologie avec Z comme module de coefficients).

Nous allons maintenant énoncer et démontrer quelques propriétés de ce degré (cf. les théorèmes 1.4. et 1.5. ci-dessous).

THEOREME 1.4.

Soit $X, \bar{\Omega}, \varphi, \psi, a$ tels que $d(a, [\varphi, \psi], \Omega)$ soit défini. On a alors :

- (i) Si $d(a, [\varphi, \psi], \Omega) \neq 0$ alors $a \in \psi(X)$
- (ii) $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = 1$ si $a \in \Omega$, 0 sinon.
- (iii) Décomposition du domaine.
Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 étant deux ouverts disjoints, on a : $d(a, [\varphi, \psi], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \psi_1], \Omega_1) + d(a, [\varphi_2, \psi_2], \Omega_2)$ où φ_1 (resp. ψ_1) est la restriction de φ (resp. ψ) au compact $X_1 = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_1)$. (On convient que le degré par rapport à l'ouvert vide est nul).
- (iv) Propriété d'excision.
Soit F un compact contenu dans $\bar{\Omega}$. Si $d(a, [\varphi, \psi], \Omega)$ est défini et si de plus $\psi(x) \neq a$ pour tout x tel que $\varphi(x) \in F$, on a : $d(a, [\varphi, \psi], \Omega) = d(a, [\varphi', \psi'], \Omega \setminus F)$, où φ', ψ' désignent les restrictions de φ, ψ à $\varphi^{-1}(\overline{\Omega \setminus F})$.

DEMONSTRATION

(i) Raisonnons par l'absurde, supposons que $a \notin \psi(X)$ on peut alors écrire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) & \xleftarrow{\varphi} & (X, X \setminus \tilde{X}) \\
 & & \searrow \psi \\
 & j \downarrow & \\
 (X, X) & & \nearrow \psi' \\
 & & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\})
 \end{array}$$

où φ, ψ, ψ' désignent les applications induites par φ, ψ et où j est l'inclusion naturelle. D'où en passant à la cohomologie on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^n(X, X \setminus \tilde{X}) \\
 & & \nwarrow \psi^* \\
 & j^* \uparrow & \\
 H^n(X, X) & & \nearrow \psi'^* \\
 & & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\})
 \end{array}$$

d'où $(\varphi^*)^{-1} \psi^* = (\varphi^*)^{-1} j^* \psi'^*$.

Or ce dernier terme est nul puisque $H^n(X, X) = \{0\}$

et donc $(\varphi^*)^{-1} \psi^* = 0$ ce qui est impossible puisque $d(a, [\varphi, \psi], \Omega) \neq 0$.

(ii) Si $a \notin \partial\Omega$, $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega)$ est défini.

Supposons d'abord que $a \notin \Omega$, alors $\varphi^{-1}(a)$ est vide et donc K et $\tilde{X}$ sont vides. On a :

$$\begin{array}{ccc}
 (X, X) & \xrightarrow{\varphi} & (\bar{\Omega}, \bar{\Omega}) \\
 \downarrow \varphi' & & \\
 (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & &
 \end{array}$$

donc $(\varphi^*)^{-1} \varphi'^* = 0$ et le degré est nul.

Supposons maintenant que $a \in \Omega$, alors $K = \{a\}$ et $\tilde{X} = \varphi^{-1}(a)$.
Notons j l'inclusion $(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus \{a\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\})$. Alors, d'après la propriété d'excision :

$$j^* : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) \rightarrow H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus \{a\})$$

et un isomorphisme. Or on a

$$\varphi' = j \circ \varphi \quad \text{d'où} \quad \varphi'^* = \varphi^* \circ j^*$$

et donc $(\varphi^*)^{-1} \varphi'^* = j^*$ d'où $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = +1$.

(iii) Commençons par remarquer qu'on peut procéder de façon légèrement différente pour définir le degré. Soit toujours $K = \varphi[\psi^{-1}(a)]$, compact contenu dans Ω , notons $Y = \varphi^{-1}(\Omega)$; on a alors :

$$\begin{array}{ccc} (Y, Y \setminus \tilde{X}) & \xrightarrow{\varphi} & (\Omega, \Omega \setminus K) \\ \downarrow \psi & & \\ (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & & \end{array}$$

Puisque Y est métrisable et que φ est fermée de Y dans Ω (vérification immédiate), on peut appliquer le théorème 1.1. et donc :

$$\varphi^* : H^n(\Omega, \Omega \setminus K) \rightarrow H^n(Y, Y \setminus \tilde{X})$$

est un isomorphisme ; on peut donc considérer l'homomorphisme $(\varphi^*)^{-1} \psi^*$.

Comme d'autre part, d'après la propriété d'excision, l'inclusion $k :$

$$(\Omega, \Omega \setminus K) \rightarrow (S_n, S_n \setminus K) \text{ induit un isomorphisme } k^* :$$

$H^n(S_n, S_n \setminus K) \rightarrow H^n(\Omega, \Omega \setminus K)$, on peut considérer :

$$Z \approx H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) \xrightarrow{(\varphi^*)^{-1} \psi^*} H^n(\Omega, \Omega \setminus K) \xrightarrow{(k^*)^{-1}} H^n(S_n, S_n \setminus K) \xrightarrow{i^*} H^n(S_n) \approx Z$$

Il est clair qu'on obtient ainsi le même degré.

Soit donc $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, notons $K_i : K \cap \Omega_i$, comme Ω_1, Ω_2 sont disjoints et ouverts, on en déduit que K_i est compact. On note $X_i = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_i)$, $Y_i = \varphi^{-1}(\Omega_i)$, $\tilde{X}_i = \varphi^{-1}(K_i)$. On a les isomorphismes naturels :

$$H^n(\Omega, \Omega \setminus K) \approx H^n(\Omega_1, \Omega_1 \setminus K_1) \oplus H^n(\Omega_2, \Omega_2 \setminus K_2)$$

$$H^n(Y, Y \setminus \tilde{X}) \approx H^n(Y_1, Y_1 \setminus \tilde{X}_1) \oplus H^n(Y_2, Y_2 \setminus \tilde{X}_2)$$

$$H^n(S_n, S_n \setminus K) \approx H^n(S_n, S_n \setminus K_1) \oplus H^n(S_n, S_n \setminus K_2)$$

Soit j (respectivement j_1, j_2) l'inclusion de $(\Omega, \Omega \setminus K)$ dans $(S_n, S_n \setminus K)$ (respectivement de $(\Omega_1, \Omega_1 \setminus K_1)$ dans $(S_n, S_n \setminus K_1)$ et de $(\Omega_2, \Omega_2 \setminus K_2)$ dans $(S_n, S_n \setminus K_2)$).

On a alors : $j^\star = j_1^\star \oplus j_2^\star$.

Notons φ_1 (respectivement φ_2) l'application induite par φ de $(Y_1, Y_1 \setminus \tilde{X}_1)$ dans $(\Omega_1, \Omega_1 \setminus K_1)$ (respectivement de $(Y_2, Y_2 \setminus \tilde{X}_2)$ dans $(\Omega_2, \Omega_2 \setminus K_2)$).

On a alors : $\varphi^\star = \varphi_1^\star \oplus \varphi_2^\star$, $\varphi_1^\star, \varphi_2^\star$ étant des isomorphismes.

De même, on a :

$$\psi^\star = \psi_1^\star \oplus \psi_2^\star : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) \rightarrow H^n(Y_1, Y_1 \setminus \tilde{X}_1) \oplus H^n(Y_2, Y_2 \setminus \tilde{X}_2)$$

et donc :

$$(j^\star)^{-1}(\varphi^\star)^{-1} \psi^\star = (j_1^\star)^{-1}(\varphi_1^\star)^{-1} \psi_1^\star \oplus (j_2^\star)^{-1}(\varphi_2^\star)^{-1} \psi_2^\star$$

ce qui implique, d'après la définition :

$$d(a, [\varphi, \psi], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \psi_1], \Omega_1) + d(a, [\varphi_2, \psi_2], \Omega_2).$$

(iv) Si $\Omega \setminus F$ est vide le résultat est trivial, supposons donc $\Omega \setminus F$ non vide. Posons alors $U = \Omega \setminus F$, $Y = \varphi^{-1}(\Omega)$, $Z = \varphi^{-1}(U)$. Par hypothèse, le compact K est contenu dans U et donc $\tilde{X}$ est contenu dans Z .

Ecrivons le diagramme commutatif suivant où $j^\star, j_1^\star, k^\star, \xi^\star$ désignent les homomorphismes associés aux inclusions naturelles et où φ' et ψ' désignent les applications induites par φ et ψ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(Y, Y \setminus \tilde{X}) & \xleftarrow{\varphi^*} & H^n(\Omega, \Omega \setminus K) \\
 \psi^* \nearrow & & \downarrow k^* & & \downarrow \xi^* \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & & & & H^n(S_n, S_n \setminus K) \\
 \psi_* \searrow & & \downarrow \varphi'_* & & \downarrow j'_* \\
 & & H^n(Z, Z \setminus \tilde{X}) & \xleftarrow{\varphi'_*} & H^n(U, U \setminus K)
 \end{array}$$

Comme d'après la propriété d'excision j^*, j'_*, k^*, ξ^* sont des isomorphismes, on a :

$$\begin{aligned}
 (j'_*)^{-1} (\varphi'_*)^{-1} \psi_* &= (\xi^* j^*)^{-1} (k^* \varphi^* \xi^{*-1})^{-1} k^* \psi_* \\
 &= (j^*)^{-1} (\varphi^*)^{-1} \psi_*
 \end{aligned}$$

et le résultat est démontré.

— X —

Nous allons maintenant étudier la question de l'invariance par homotopie.

Nous allons commencer par énoncer et démontrer un résultat d'invariance très général, nous particulariserons ensuite les hypothèses pour obtenir un résultat plus parlant. L'intérêt du résultat général est qu'il nous fournira également un théorème d'invariance pour les multi-applications acycliques comme nous le verrons un peu plus loin.

THEOREME 1.5.

Soit M un espace métrique compact non vide, α une application topologiquement monotone de M dans $\bar{\Omega} \times [0,1]$, β une application continue de M dans $\mathbb{R}^n$, a un point de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\beta(x) \neq a$ pour tout x tel que $\alpha(x) \in \partial\Omega \times [0,1]$. Alors, si on note $M_0 = \alpha^{-1}(\bar{\Omega} \times \{0\})$, $M_1 = \alpha^{-1}(\bar{\Omega} \times \{1\})$ et α_0 (respectivement α_1) l'application de M_0 dans $\bar{\Omega}$ (respectivement de M_1 dans $\bar{\Omega}$) induite par α ainsi que β_0, β_1 les restrictions de β à M_0 et M_1 , on a :

$$d(a, [\alpha_0, \beta_0], \Omega) = d(a, [\alpha_1, \beta_1], \Omega) .$$

DEMONSTRATION

Tout d'abord il est immédiat que ces deux degrés sont définis.

Notons $Q = \alpha(\beta^{-1}(a))$, Q est un compact de $\bar{\Omega} \times I$ qui ne rencontre pas $\partial\Omega \times I$; Soit K la projection de Q sur $\bar{\Omega}$, K est un compact contenu dans Ω . Soit $\tilde{M} = \alpha^{-1}(Q)$, $\tilde{M}_0 = \alpha_0^{-1}(K)$, $\tilde{M}_1 = \alpha_1^{-1}(K)$.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant où k_0, k_1 désignent les inclusions naturelles, i_0 l'application induite par $\omega \rightarrow (\omega, 0)$ et i_1 l'application induite par $\omega \rightarrow (\omega, 1)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \alpha_0^* & \\
 & & & \longleftarrow & \\
 & & H^n(M_0, M_0 \setminus \tilde{M}_0) & \longleftarrow & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\
 & \nearrow \beta_0^* & \uparrow k_0^* & & \uparrow i_0^* \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & \xrightarrow{\beta^*} & H^n(M, M \setminus \tilde{M}) & \xleftarrow{\alpha^*} & H^n(\bar{\Omega} \times I, \bar{\Omega} \times I \setminus Q) \\
 & \searrow \beta_1^* & \downarrow k_1^* & & \downarrow i_1^* \\
 & & H^n(M_1, M_1 \setminus \tilde{M}_1) & \xleftarrow{\alpha_1^*} & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K)
 \end{array}$$

On a donc :

$$(\alpha_0^*)^{-1} \beta_0^* = (\alpha_0^*)^{-1} k_0^* \beta^* \quad \text{Or} \quad (\alpha_0^*)^{-1} k_0^* = i_0^* (\alpha^*)^{-1}$$

$$\text{d'où} \quad (\alpha_0^*)^{-1} \beta_0^* = i_0^* (\alpha^*)^{-1} \beta^*$$

$$\text{et de même} \quad (\alpha_1^*)^{-1} \beta_1^* = i_1^* (\alpha^*)^{-1} \beta^*$$

d'autre part, $i_0^* = i_1^*$ puisque i_0 et i_1 sont homotopes de $(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K)$ dans $(\bar{\Omega} \times I, \bar{\Omega} \times I \setminus Q)$.

$$\text{Et donc} \quad (\alpha_0^*)^{-1} \beta_0^* = (\alpha_1^*)^{-1} \beta_1^* .$$

Il s'ensuit que les degrés sont égaux.

REMARQUE 1.6.

Nous avons utilisé dans cette démonstration le fait que pour définir le degré on peut toujours prendre un compact F plus grand que K contenu dans Ω , comme le montre le diagramme commutatif suivant où les notations sont évidentes.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(X, X \setminus \tilde{X}_F) & \xleftarrow{\psi^*} & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus F) & \xleftarrow{j_F^*} & H^n(S_n, S_n \setminus F) \\
 & \nearrow \psi^* & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow i_F^* \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & & & & & & H^n(S_n) \\
 & \searrow \psi_* & \uparrow & & \uparrow & & \nearrow i_K^* \\
 & & H^n(X, X \setminus \tilde{X}_K) & \xleftarrow{\varphi_*} & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) & \xleftarrow{j_K^*} & H^n(S_n, S_n \setminus K)
 \end{array}$$

Voici maintenant le résultat d'invariance adapté aux applications.

COROLLAIRE 1.7.

Soit $\varphi_t : X \rightarrow \bar{\Omega}$ une homotopie de φ_0 sur φ_1 telle que pour tout $t \in [0, 1]$, φ_t soit topologiquement monotone et $\psi_t : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une homotopie de ψ_0 sur ψ_1 . On suppose que pour tout t , $\psi_t(x) \neq a$ pour tout x tel que $\varphi_t(x) \in \partial\Omega$. On a alors :

$$d(a, [\varphi_0, \psi_0], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \psi_1], \Omega).$$

DEMONSTRATION

Considérons l'application $\alpha : X \times I \rightarrow \bar{\Omega} \times I$ définie par $\alpha(x, t) = (\varphi_t(x), t)$.

Il est clair que α est topologiquement monotone.

Et soit $\beta : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\beta(x, t) = \psi_t(x)$.

On a bien $\beta(x, t) \neq a$ pour tout (x, t) tel que $\alpha(x, t) \in \partial\Omega \times I$ le théorème 1.5. donne donc immédiatement :

$$d(a, [\varphi_0, \psi_0], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \psi_1], \Omega).$$

§ 2 - DEGRE POUR LES MULTI-APPLICATIONS A VALEURS ACYCLIQUES

Nous allons montrer, en particularisant φ et ψ , que la théorie précédente contient une théorie du degré pour les multi-applications à valeurs acycliques.

DEFINITION DE $d(a, \Gamma, \Omega)$

Ω désigne toujours un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, soit Γ une multi-application de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ (qu'on note $\Gamma : \bar{\Omega} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$) semi-continue supérieurement et telle que pour tout $\omega \in \bar{\Omega}$, $\Gamma(\omega)$ soit un compact non vide acyclique (on dira, en abrégé, qu'une telle multi-application est acyclique).

Nous désignons par $G(\Gamma)$ le graphe de Γ dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ et par p (respectivement q) la projection de $G(\Gamma)$ sur $\bar{\Omega}$ (respectivement $\mathbb{R}^n$).

Soit a un point de $\mathbb{R}^n$ tel que $a \notin \Gamma(\partial\Omega)$, on va définir $d(a, \Gamma, \Omega)$.
Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G(\Gamma) & \xrightarrow{p} & \bar{\Omega} \\ \downarrow q & & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Puisque Γ est s.c.s., $G(\Gamma)$ est compact; puisque Γ est acyclique, p est topologiquement monotone. La condition $a \notin \Gamma(\partial\Omega)$ entraîne que $q(x, y) \neq a$ pour tout $(x, y) \in G(\Gamma)$ tel que $p(x, y) \in \partial\Omega$. Alors $d(a, [p, q], \Omega)$ est défini et on pose :

$$d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, [p, q], \Omega) .$$

Des théorèmes 1.4. et 1.5. on va déduire les propriétés essentielles de ce degré.

THEOREME 1.8.

Soit $\Gamma : \bar{\Omega} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ acyclique, $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(a, \Gamma, \Omega)$ soit défini. On a alors :

- (i) $d(a, \Gamma, \Omega) \neq 0$ entraîne $a \in \Gamma(\Omega)$.
- (ii) Si $\Gamma(\omega) = \{f(\omega)\}$, où f est une fonction continue de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :
 $d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, f, \Omega)$ au sens des fonctions.
- (iii) Si $\Gamma' : \bar{\Omega} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est acyclique et $\Gamma'(\omega) \subset \Gamma(\omega) \quad \forall \omega \in \bar{\Omega}$, on a :
 $d(a, \Gamma', \Omega) = d(a, \Gamma, \Omega)$.
- (iv) Décomposition du domaine.
 Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 étant deux ouverts disjoints, on a :
 $d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, \Gamma, \Omega_1) + d(a, \Gamma, \Omega_2)$.
- (v) Propriété d'excision.
 Soit F un compact contenu dans $\bar{\Omega}$ tel que $a \notin \Gamma(F)$, alors on a :
 $d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, \Gamma, \Omega \setminus F)$.

DEMONSTRATION

- (i) $d(a, [p, q], \Omega) \neq 0$ entraîne $a \in q(G(\Gamma))$ (théorème 1.4.) et donc $\exists x \in \Omega$ tel que $a \in \Gamma(x)$.
- (ii) Dans le cas d'une fonction continue f , p est un homéomorphisme de $\bar{\Omega}$ sur $G(f)$ et on a $f = q \circ p^{-1}$, d'où le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(G(f), G(f) \setminus \widetilde{G(f)}) & \xleftarrow{p^*} & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\
 \uparrow q^* & & \nearrow f^* \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & &
 \end{array}$$

Et donc on obtient bien le degré au sens usuel des fonctions.

(iii) Notons $X = G(\Gamma)$, $X' = G(\Gamma')$, $K = \Gamma^{-1}(a) \supset \Gamma'^{-1}(a)$
 (on désigne par $\Gamma^{-1}(a)$ l'ensemble $\{x \in \bar{\Omega} \mid a \in \Gamma(x)\}$).
 Soit $\tilde{X} = p^{-1}(K)$ et $\tilde{X}' = p'^{-1}(K)$, où p' désigne la restriction de p à X' .
 On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(X, X \setminus \tilde{X}) & & \\
 & \nearrow q^* & \downarrow i^* & \nwarrow p^* & \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \{a\}) & & & & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\
 & \searrow q'^* & \downarrow & \swarrow p'^* & \\
 & & H^n(X', X' \setminus \tilde{X}') & &
 \end{array}$$

où i désigne l'inclusion de $(X', X' \setminus \tilde{X}')$ dans $(X, X \setminus \tilde{X})$.

On a donc $(p^*)^{-1} q^* = (p'^*)^{-1} q'^*$

et par suite: $d(a, [p, q], \Omega) = d(a, [p', q'], \Omega)$

d'où $d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, \Gamma', \Omega)$.

(iv) Désignons par Γ_1 (respectivement Γ_2) la restriction de Γ à $\bar{\Omega}_1$ (respectivement $\bar{\Omega}_2$) et par p_1, q_1, p_2, q_2 les restrictions de p, q à $G(\Gamma_1)$ et $G(\Gamma_2)$.

D'après la propriété (iii) du théorème 1.4. on a :

$$d(a, [p, q], \Omega) = d(a, [p_1, q_1], \Omega_1) + d(a, [p_2, q_2], \Omega_2)$$

d'où $d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, \Gamma_1, \Omega_1) + d(a, \Gamma_2, \Omega_2)$.

(v) La propriété se déduit immédiatement de la propriété correspondante pour les couples (théorème 1.4. (iv)).

—X—

Nous allons examiner maintenant la question de l'invariance du degré par homotopie.

DEFINITION

On appelle homotopie relativement à a toute multi-application acyclique Γ de $\bar{\Omega} \times I$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $a \notin \Gamma(\partial\Omega \times I)$.

Nous désignerons par Γ_t la multi-application acyclique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par: $\Gamma_t(x) = \Gamma(x, t)$.

On dit que deux multi-applications acycliques de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, Γ_0 et Γ_1 sont homotopes relativement à un point a de $\mathbb{R}^n$ s'il existe une homotopie relativement à a , Γ , telle que $\Gamma_0(x) = \Gamma(x, 0)$ et $\Gamma_1(x) = \Gamma(x, 1)$ pour tout x dans $\bar{\Omega}$.

THEOREME 1.9.

Soit Γ_0 , Γ_1 deux multi-applications acycliques de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ homotopes relativement à a , alors :

$$d(a, \Gamma_0, \Omega) = d(a, \Gamma_1, \Omega).$$

DEMONSTRATION

On applique le théorème 1.5. Si Γ est l'homotopie relativement à a entre Γ_0 et Γ_1 ; prenons $M = G(\Gamma)$, α la projection de $G(\Gamma)$ sur $\bar{\Omega} \times I$ et β la projection de $G(\Gamma)$ sur $\mathbb{R}^n$. Les hypothèses du théorème 1.5. sont bien vérifiées et donc $d(a, [\alpha_0, \beta_0], \Omega) = d(a, [\alpha_1, \beta_1], \Omega)$

d'où $d(a, \Gamma_0, \Omega) = d(a, \Gamma_1, \Omega)$.

—X—

REMARQUE IMPORTANTE 1.10.

Le théorème 1.9. a un intérêt théorique. Dans la pratique, il est intéressant de pouvoir sortir de la classe des multi-applications acycliques pour passer de Γ_0 à Γ_1 . Pour cela, on revient au théorème 1.5., et au corollaire 1.7., comme nous allons le voir sur l'exemple donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 1.11.

Soient Γ_0, Γ_1 deux multi-applications acycliques de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$,
a un point de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall t \in [0,1] , \forall x \in \partial\Omega \quad a \notin t\Gamma_1(x) + (1-t)\Gamma_0(x).$$

Alors : $d(a, \Gamma_0, \Omega) = d(a, \Gamma_1, \Omega)$.

DEMONSTRATION

Considérons le compact X :

$$X = \{(x,y,z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid y \in \Gamma_0(x) \text{ et } z \in \Gamma_1(x)\} .$$

Soit φ la projection de X sur $\bar{\Omega}$ et soit $\psi_t : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

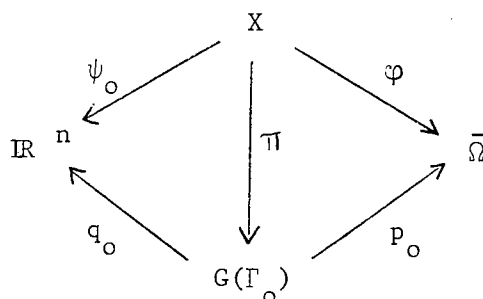
$\psi_t(x,y,z) = tz + (1-t)y$. Alors les hypothèses du corollaire 1.7. sont satisfaites (φ est topologiquement monotone car le produit de deux compacts acycliques est un compact acyclique).

On a donc : $d(a, [\varphi, \psi_0], \Omega) = d(a, [\varphi, \psi_1], \Omega)$.

Il reste à vérifier que $d(a, [\varphi, \psi_0], \Omega) = d(a, \Gamma_0, \Omega)$ et que

$$d(a, [\varphi, \psi_1], \Omega) = d(a, \Gamma_1, \Omega).$$

Désignons par p_0 et q_0 les projections de $G(\Gamma_0)$ sur $\bar{\Omega}$ et $\mathbb{R}^n$ et par π la projection de X sur $G(\Gamma_0)$ définie par : $\pi(x,y,z) = (x,y)$. On a alors le diagramme commutatif :



Soit $K = \Gamma_0^{-1}(a)$, $\tilde{X} = \varphi^{-1}(K)$, $\widetilde{G(\Gamma_0)} = p_0^{-1}(K)$.

En passant à la cohomologie, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(X, X \setminus \tilde{X}) & & \\
 & \nearrow \psi_o^* & \uparrow \pi^* & \nwarrow \varphi^* & \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & & & & H^n(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\
 & \searrow q_o^* & & \swarrow p_o^* & \\
 & & H^n(G(\Gamma_o), G(\Gamma_o) \setminus G(\tilde{\Gamma}_o)) & &
 \end{array}$$

D'après le théorème 1.1., π^* est un isomorphisme (π est topologiquement monotone).

On a donc : $\varphi^* = \pi^* p_o^*$ d'où $(\varphi^*)^{-1} = (p_o^*)^{-1} (\pi^*)^{-1}$

d'où $(\varphi^*)^{-1} \psi_o^* = (p_o^*)^{-1} (\pi^*)^{-1} \psi_o^* = (p_o^*)^{-1} q_o^*$.

On en conclut l'égalité des degrés.

—X—

REMARQUE 1.12.

La multi-application $t\Gamma_1 + (1-t)\Gamma_o$ n'a aucune raison d'être acyclique. En effet, le fait que deux parties A et B de $\mathbb{R}^n$ soient acycliques n'entraîne pas que A + B le soit.

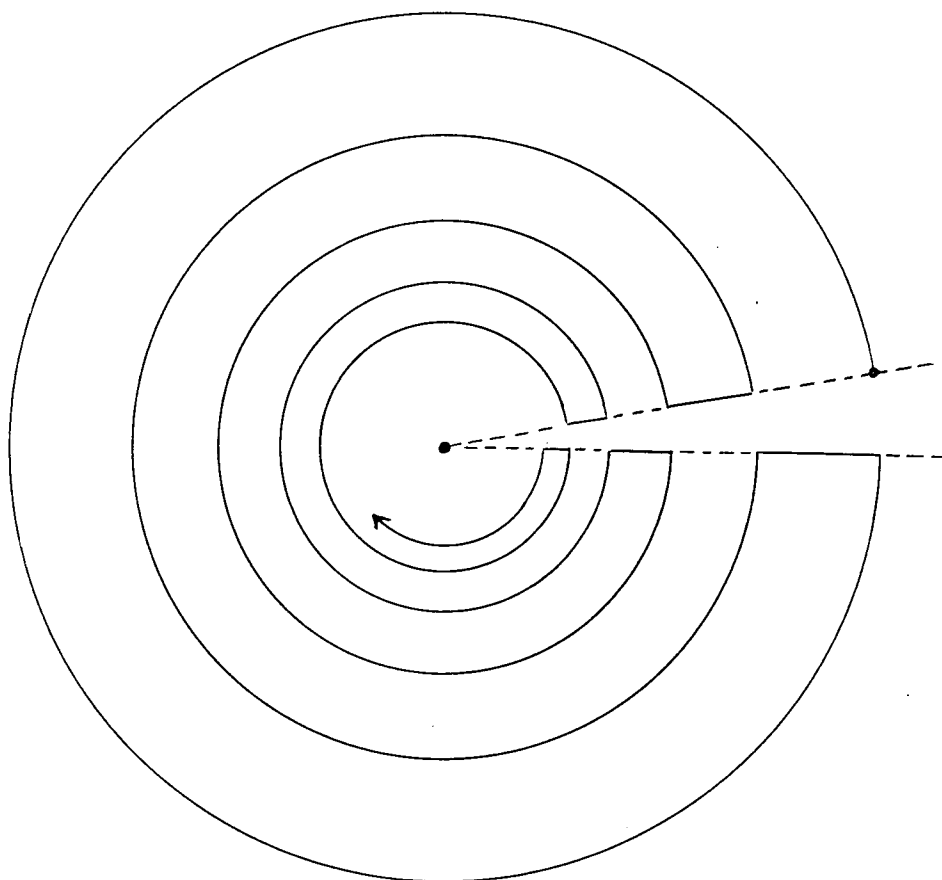
REMARQUE 1.13.

Dans le cas de multi-applications possédant une propriété d'acyclicité plus forte, il est possible d'énoncer un résultat de continuité de $d(a, \Gamma, \Omega)$ par rapport à Γ . Pour cela, on dira que Γ est régulièrement acyclique si pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\Gamma + \varepsilon \bar{B}$ est acyclique (Γ étant toujours supposée acyclique).

Prenons alors $\alpha > 0$ assez petit pour que $a \notin (\Gamma + \alpha\bar{B})(\partial\Omega)$ (α existe puisque $\Gamma(\partial\Omega)$ est compact) et pour que $\Gamma + \varepsilon\bar{B}$ soit acyclique lorsque $0 \leq \varepsilon \leq \alpha$. Alors, si Γ' est contenu dans $\Gamma + \alpha\bar{B}$, on a, d'après l'invariance du degré par inclusion :

$$d(a, \Gamma', \Omega) = d(a, \Gamma, \Omega) = d(a, \Gamma + \alpha\bar{B}, \Omega).$$

Notons qu'il existe des multi-applications acycliques et non régulièrement acycliques et même des compacts acycliques de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels il n'existe pas de système fondamental de voisinages acycliques, comme le montre la figure ci-dessous :



§ 3 - THEOREMES DE POINT FIXE ET DE SURJECTIVITE DES MULTI-APPLICATIONS
ACYCLIQUES ET PSEUDO-ACYCLIQUES

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à une classe de multi-applications plus générale que celle des multi-applications acycliques ; ce sont les multi-applications de la forme $r \circ \Gamma$ où Γ est une multi-application acyclique de $\bar{\Omega}$ dans un espace métrique compact X et r une application continue de X dans $\mathbb{R}^n$. Nous appellerons pseudo-acycliques de telles multi-applications. Ce type de multi-application se présente de manière très naturelle dans l'étude des équations différentielles multivoques. En effet, considérons l'équation différentielle $\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t))$, soit X l'ensemble des solutions de cette équation sur l'intervalle $[0, T]$, la multi-application qui à la valeur initiale x_0 fait correspondre l'ensemble des $x(T)$ pour x solution telle que $x(0) = x_0$ est pseudo-acyclique ; c'est en effet la composée de la multi-application qui à x_0 fait correspondre l'ensemble $S(x_0)$ des solutions qui valent x_0 en 0 et de l'application $x \rightarrow x(T)$ de X dans $\mathbb{R}^n$ (nous verrons au chapitre II que la multi-application $x_0 \rightarrow S(x_0)$ est acyclique).

Les considérations ci-dessus constituent l'essence du chapitre III où les résultats de ce paragraphe seront appliqués.

A une multi-application pseudo-acyclique $r \circ \Gamma$, on associe naturellement le couple $(p, r \circ q)$ où p et q désignent les projections de $G(\Gamma)$ sur $\bar{\Omega}$ et X . Si a est un point de $\mathbb{R}^n$ tel que $a \notin r \circ \Gamma(\partial\Omega)$, on posera $d(a, r \circ \Gamma, \Omega) = d(a, [p, r \circ q], \Omega)$.

Nous allons commencer par donner une proposition qui établit un lien avec la partie III.1.

PROPOSITION 1.14.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, $r \circ \Gamma$ une multi-application pseudo-acyclique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$; supposons qu'il existe un suiveur s de $r \circ \Gamma - a$ sur $\partial\Omega$ (voir partie III.1. définition 1.1.).

On a alors : $d(a, r \circ \Gamma, \Omega) = d(0, s, \partial\Omega)$.

DEMONSTRATION

Désignons encore par s une extension continue de s à $\bar{\Omega}$.

On va montrer que $d(a, r \circ \Gamma, \Omega) = d(a, s+a, \Omega)$.

Remarquons d'abord que $d(a, s+a, \Omega) = d(a, [p, (s+a) \circ p], \Omega)$ où p désigne la projection de $G(\Gamma)$ sur $\bar{\Omega}$; on se ramène donc à montrer que $d(a, [p, r \circ q], \Omega) = d(a, [p, (s+a) \circ p], \Omega)$.

Considérons l'homotopie :

$$(x, y, t) \rightarrow tr(y) + (1-t)(s(x)+a) .$$

Vérifions que: $\forall t \in [0,1] , \forall x \in \partial\Omega , \forall y \in \Gamma(x) :$

$$t(r(y)-a) + (1-t)s(x) \neq 0 .$$

Multiplions scalairement par $s(x)$ le premier membre de cette expression, on obtient :

$$t(r(y)-a).s(x) + (1-t) \|s(x)\|^2$$

et puisque s est un suiveur de $r \circ \Gamma - a$ sur $\partial\Omega$ cette quantité est $\geq$ à $t + (1-t)\|s(x)\|^2$ et ceci est toujours strictement positif.

D'après le corollaire 1.7. (invariance par homotopie), on a :

$$d(a, [p, r \circ q], \Omega) = d(a, [p, (s+a) \circ p], \Omega)$$

$$\text{Soit } d(a, r \circ \Gamma, \Omega) = d(0, s, \Omega) = d(0, s, \partial\Omega).$$

~~X~~

Les résultats de point fixe et de surjectivité qui vont suivre montrent que les multi-applications pseudo-acycliques ont un comportement assez voisin de celui des multi-applications à valeurs convexes.

Le théorème ci-dessous, que nous démontrons à l'aide du degré, est un cas particulier du théorème de point fixe d'Eilenberg et Montgomery [6].

THEOREME 1.15.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{\Omega}$ soit un rétracte absolu et soit $r \circ \Gamma$ une multi-application pseudo-acyclique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $r \circ \Gamma(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$. Alors $r \circ \Gamma$ possède un point fixe dans $\bar{\Omega}$ (i.e. il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $x \in r(\Gamma(x))$).

DEMONSTRATION

Considérons une boule $\bar{B}(0, \eta)$, $\eta > 0$, contenant $\bar{\Omega}$ et soit ρ une rétraction de $\bar{B}(0, \eta)$ sur $\bar{\Omega}$. Il nous suffit de montrer que $r \circ \Gamma \circ \rho$ possède un point fixe dans $\bar{B}(0, \eta)$, car si x est un point fixe, on a $x \in \bar{\Omega}$ et donc $\rho(x) = x$. Supposons donc que Ω est une boule $B(0, \eta)$. Soient toujours p et q les projections de $G(\Gamma)$ sur $\bar{\Omega}$ et X ; on va montrer que :

$$d(0, [p, p - r \circ q], \Omega) = d(0, [p, p], \Omega).$$

Considérons l'homotopie :

$$((x, y), t) \rightarrow x - tr(y)$$

Si il existe $x \in \partial\Omega$ et $y \in \Gamma(x)$ tel que $x = r(y)$, x est alors un point fixe et la démonstration est terminée, sinon on a :

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in \partial\Omega, \forall y \in \Gamma(x) : x - tr(y) \neq 0$$

(puisque $\Omega = B(0, \eta)$).

L'invariance par homotopie donne donc l'égalité des degrés. Or, d'après le théorème 1.4., $d(0, [p, p], \Omega) = +1$ et donc il existe $(x, y) \in G(\Gamma)$ tel que $x = r(y)$ d'où il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $x \in r \circ \Gamma(x)$.

—X—

Nous allons passer maintenant à un théorème de point fixe assez représentatif des possibilités qu'offre la théorie du degré que nous avons développée.

Soit Ω un ouvert convexe borné et non vide de $\mathbb{R}^n$, nous dirons qu'une multi-application Γ de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ est fortement rentrante si pour tout $x \in \partial\Omega$ et toute forme linéaire x^* telle que :

$$\langle x^*, x \rangle = \min_{u \in \bar{\Omega}} \langle x^*, u \rangle$$

On a : $\langle x^*, y \rangle \geq \langle x^*, x \rangle \quad \forall y \in \Gamma(x)$.

On dit que Γ est fortement sortante si on a de manière analogue :

$$\langle x^*, y \rangle \leq \langle x^*, x \rangle \quad \forall y \in \Gamma(x).$$

THEOREME 1.16.

Soit Ω un ouvert convexe borné et non vide de $\mathbb{R}^n$, $r \circ \Gamma$ une multi-application pseudo-acyclique et fortement rentrante de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $r \circ \Gamma$ a un point fixe (i.e. il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $x \in r \circ \Gamma(x)$).

DEMONSTRATION

On peut toujours supposer que $0 \in \Omega$. Notons $\mathcal{J}$ la multi-application de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mathcal{J}(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x \rangle = -1 = \min_{u \in \bar{\Omega}} \langle x^*, u \rangle\}.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{J}$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes non vides de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ ($\mathcal{J}(x)$ est non vide d'après le théorème de Hahn-Banach et borné parce que Ω est ouvert et $0 \in \Omega$). Nous notons $\hat{\mathcal{J}}$ une extension s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides de $\mathcal{J}$ à $\bar{\Omega}$ (une telle extension existe, voir partie III.1. ou chapitre V). Donnons-nous un nombre $\alpha > 0$ et considérons la multi-application $x \rightarrow r \circ \Gamma(x) - (1+\alpha)x$; on va montrer que :

$$d(0, r \circ \Gamma(x) - (1+\alpha)x, \Omega) = d(0, \hat{\mathcal{J}}, \Omega).$$

On a : $\forall x \in \partial\Omega, \forall y \in \Gamma(x), \forall x^* \in \mathcal{J}(x) :$

$$\langle x^*, r(y) \rangle \geq \langle x^*, x \rangle$$

d'où : $\langle x^*, r(y) - (1+\alpha)x \rangle \geq -\alpha.$

Soit $\mathcal{O}$ une boule fermée contenant $\hat{\mathcal{J}}(\bar{\Omega})$, notons :

$$Z = \{(x, y, z^*) \in \bar{\Omega} \times X \times \mathcal{O} \mid y \in \Gamma(x), z^* \in \hat{\mathcal{J}}(x)\}.$$

Soit p la projection de Z sur $\bar{\Omega}$, q_1 la projection sur X , q_2 la projection sur $\mathcal{O}$. Considérons les couples $[p, r \circ q_1 - (1+\alpha)p]$, $[p, q_2]$ et l'homotopie :

$$((x, y, z^*), t) \rightarrow tz^* + (1-t)[r(y) - (1+\alpha)x].$$

Vérifions que pour $x \in \partial\Omega$, $y \in \Gamma(x)$, $z^* \in \hat{\mathcal{J}}(x)$ et $t \in [0, 1]$ cette dernière quantité est non nulle. En effet, en multipliant scalairement par z^* on trouve :

$$t\|z^*\|^2 + (1-t) \langle z^*, r(y) - (1+\alpha)x \rangle$$

et ceci est supérieur ou égal à $t\|z^*\|^2 + (1-t)\alpha$, ce qui est toujours strictement positif puisque $z^* \neq 0$. On a donc, d'après l'invariance par homotopie :

$$d(0, [p, r \circ q_1 - (1+\alpha)p], \Omega) = d(0, [p, q_2], \Omega)$$

$$\text{Or } d(0, [p, q_2], \Omega) = d(0, \hat{\mathcal{J}}, \Omega)$$

par un raisonnement identique à celui de la proposition 1.11.

D'autre part, $\forall x \in \partial\Omega$ et $\forall x^* \in \mathcal{J}(x)$ on a :

$\langle x^*, -x \rangle = 1$ donc $-x$ est un suiveur de $\hat{\mathcal{J}}$ sur $\partial\Omega$ et on a :

$$d(0, \hat{\mathcal{J}}, \Omega) = d(0, -x, \Omega) = (-1)^n \neq 0.$$

On en déduit que $d(0, [p, r \circ q_1 - (1+\alpha)p], \Omega) \neq 0$ et d'après le théorème 1.4., il existe $x \in \bar{\Omega}$ et $y \in \Gamma(x)$ tels que $0 = r(y) - (1+\alpha)x$, donc il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $(1+\alpha)x \in r \circ \Gamma(x)$.

Prenons maintenant $\alpha = 1/n$, $n \geq 1$; on obtient pour tout n l'existence de $x_n \in \bar{\Omega}$ tel que $(1 + \frac{1}{n})x_n \in r \circ \Gamma(x_n)$. Soit x_{n_k} une sous-suite conver-

geant vers un élément x de $\bar{\Omega}$ et soit $y_{n_k} = (1 + \frac{1}{n_k})x_{n_k}$; y_{n_k} converge vers x ,

on a $y_{n_k} \in r \circ \Gamma(x_{n_k})$ et comme $r \circ \Gamma$ est s.c.s., on obtient à la limite $x \in r \circ \Gamma(x)$. On a donc trouvé un point fixe dans $\bar{\Omega}$.

—X—

Voici comme corollaire un résultat de surjectivité des multi-applications fortement sortantes.

COROLLAIRE 1.17.

Soit Ω un ouvert convexe borné et non vide de $\mathbb{R}^n$, $r \circ \Gamma$ une multi-application pseudo-acyclique et fortement sortante de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $r \circ \Gamma$ est surjective (i.e. $\bar{\Omega} \subset r \circ \Gamma(\bar{\Omega})$).

DEMONSTRATION

On peut toujours supposer que $0 \in \bar{\Omega}$ et il suffit de montrer qu'il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $0 \in r \circ \Gamma(x)$.

Considérons la multi-application $x \mapsto 2x - r \circ \Gamma(x)$ (symétrique de $r \circ \Gamma(x)$ par rapport à x). Il est clair que cette multi-application est fortement rentrante et pseudo-acyclique, il en est de même de la multi-application $x - \frac{1}{2} r \circ \Gamma(x)$ puisque $0 \in \bar{\Omega}$; on peut donc appliquer le théorème 1.16. à cette multi-application, d'où il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $x \in x - \frac{1}{2} r \circ \Gamma(x)$. Soit $0 \in r \circ \Gamma(x)$.

—X—

Soit $r \circ \Gamma$ une multi-application pseudo-acyclique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\gamma(x) = \inf_{y \in r \circ \Gamma(x)} \langle y, x \rangle .$$

On dit que $r \circ \Gamma$ est coercive si $\frac{\gamma(x)}{\|x\|}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

On a alors le résultat de surjectivité suivant qui étend directement le résultat analogue pour les fonctions.

COROLLAIRE 1.18.

Soit $r \circ \Gamma$ une multi-application pseudo-acyclique et coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $r \circ \Gamma$ est surjective.

DEMONSTRATION

Puisque pour tout point a de $\mathbb{R}^n$, $r \circ \Gamma - a$ est encore coercive, il suffit de montrer que $0 \in r \circ \Gamma(x)$ pour un certain x de $\mathbb{R}^n$. Soit $R > 0$ tel que $\frac{\gamma(x)}{\|x\|} \geq 1$ pour $\|x\| \geq R$. Considérons la multi-application $R \cdot r \circ \Gamma$ définie sur $\bar{B}(0, R)$, elle est fortement sortante car pour tout $y \in r \circ \Gamma(x)$ avec $\|x\| = R$, on a :

$$\langle Ry, x \rangle \geq R^2 = \langle x, x \rangle.$$

D'après le corollaire 1.17. il existe $x \in \bar{B}(0, R)$ tel que $0 \in R \cdot r \circ \Gamma(x)$ est donc $0 \in r \circ \Gamma(x)$.

—X—

REMARQUE 1.19.

On peut utiliser les multi-applications acycliques et pseudo-acycliques pour étudier les fonctions bornées sur $\bar{\Omega}$.

Soit f une fonction bornée (pas supposée continue) de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, on lui associe naturellement une multi-application s.c.s. de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$, Γ_f , obtenue en prenant la fermeture du graphe de f dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$.

Nous notons $\text{conv } \Gamma_f$ la multi-application définie par $\text{conv } \Gamma_f(x) = \text{conv } (\Gamma_f(x))$ pour tout x de $\bar{\Omega}$.

Si $0 \notin \text{conv } \Gamma_f(\partial\Omega)$ on peut, comme nous l'avons fait dans la partie III.1., définir $d(0, \text{conv } \Gamma_f, \Omega)$; on a ainsi un moyen de définir un degré pour des fonctions qui ne sont pas continues en posant :

$$d(0, f, \Omega) = d(0, \text{conv } \Gamma_f, \Omega).$$

Malheureusement, une des propriétés essentielles du degré (si $d(0, f, \Omega) \neq 0$ il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$) n'est plus vérifiée ; la propriété qui subsiste est :

Si $d(0, f, \Omega) \neq 0 \exists x \in \Omega$ tel que $0 \in \text{conv } \Gamma_f(x)$.

Mais si nous supposons que f est continue sur Ω , on a pour tout x dans Ω $\text{conv } \Gamma_f(x) = \{f(x)\}$, et donc :

si $d(0, f, \Omega) \neq 0$ il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$.

Il se peut que pour une telle application f , on ait $0 \in \text{conv } \Gamma_f(\partial\Omega)$ mais qu'on puisse trouver une multi-application acyclique Γ définie sur $\partial\Omega$ telle que $\Gamma(x) \supset \Gamma_f(x)$ et $0 \notin \Gamma(\partial\Omega)$; on considère alors la multi-application acyclique $\hat{\Gamma}$ définie sur $\bar{\Omega}$ par :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(x) &= \{f(x)\} & \text{si } x \in \Omega \\ \text{et: } \hat{\Gamma}(x) &= \Gamma(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

$d(0, \hat{\Gamma}, \Omega)$ est alors défini et si ce degré est non nul on conclut qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$.

§ 4 - HOMOMORPHISME DE COHOMOLOGIE ASSOCIE A UNE MULTI-APPLICATION ACYCLIQUE

A cause du fait qu'il n'existe pas de théorème d'extension à $\bar{\Omega}$ tout entier de multi-applications acycliques définies seulement sur $\partial\Omega$, il peut être utile, pour certains problèmes où des conditions sont données sur $\partial\Omega$ uniquement, de revenir aux homomorphismes de cohomologie qui interviennent dans la définition du degré. Suivant Powers [10] et Granas [8] nous définissons l'homomorphisme de cohomologie Γ^* associé à une multi-application acyclique Γ (la différence avec [8] et [10] étant que nous travaillons ici avec la cohomologie relative au lieu de l'homologie).

DEFINITION

Soit X, Y deux espaces métrisables compacts et non vides, $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ une multi-application acyclique.

Soit A une partie de X et B une partie de Y telle que $\Gamma(A) \subset B$.
On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (G(\Gamma), p^{-1}(A)) & \xrightarrow{P} & (X, A) \\ q \swarrow & & \\ (Y, B) & & \end{array}$$

et donc en passant à la cohomologie, le diagramme suivant où p^* est un isomorphisme d'après le théorème 1.1., et où n est un entier ≥ 0 quelconque.

$$\begin{array}{ccc} H^n(G(\Gamma), p^{-1}(A)) & \xleftarrow{p^*} & H^n(X, A) \\ q^* \nearrow & & \\ H^n(Y, B) & & \end{array}$$

et on pose $\Gamma^* = (p^*)^{-1} q^*$.

Nous dirons que deux multi-applications acycliques Γ_0 et Γ_1 de (X,A) dans (Y,B) sont homotopes s'il existe une multi-application acyclique Γ de $X \times [0,1]$ dans Y telle que $\Gamma(x,0) = \Gamma_0(x)$, $\Gamma(x,1) = \Gamma_1(x)$ et $\Gamma(x,t) \subset B$ pour tout x dans A et pour tout t .

Résumons en un théorème les propriétés essentielles de Γ^* .

THEOREME 1.16.

Soit Γ une multi-application acyclique de (X,A) dans (Y,B) , alors :

- (i) Si X' est métrisable compact et si f est une application continue de (X',A') dans (X,A) , alors $\Gamma \circ f$ est une multi-application acyclique de (X',A') dans (Y,B) et :

$$(\Gamma \circ f)^* = f^* \Gamma^*$$

- (ii) Si Y' est métrisable compact et si f est une application continue de (Y,B) dans (Y',B') telle que $f \circ \Gamma$ soit encore acyclique, alors :

$$(f \circ \Gamma)^* = \Gamma^* f^*$$

- (iii) Si Γ_0 est une multi-application acyclique de (X,A) dans (Y,B) homotope à Γ_1 , on a :

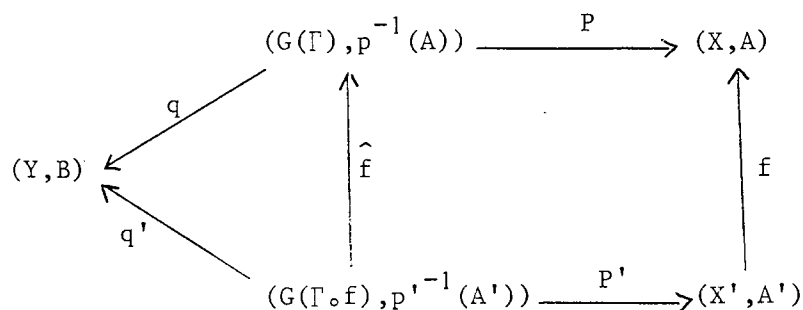
$$\Gamma_0^* = \Gamma_1^*$$

- (iv) Si Γ' est une multi-application acyclique de (X,A) dans (Y,B) telle que $\Gamma'(x) \subset \Gamma(x)$ pour tout x , on a :

$$\Gamma'^* = \Gamma^*$$

DEMONSTRATION

- (i) Ecrivons le diagramme commutatif suivant, où $\hat{f}$ est définie par $\hat{f}(x',y) = (f(x'),y)$.



et donc en passant à la cohomologie :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(G(\Gamma), p^{-1}(A)) & \xleftarrow{p^*} & H^n(X, A) \\
 & \nearrow q^* & \downarrow \hat{f}^* & & \downarrow f^* \\
 H^n(Y, B) & & & & \\
 & \searrow q'^* & \downarrow & \xleftarrow{p'^*} & H^n(X', A') \\
 & & H^n(G(\Gamma \circ f), p'^{-1}(A')) & &
 \end{array}$$

d'où $(\Gamma \circ f)^* = f^* (p^*)^{-1} q^* = f^* \Gamma^*$.

(ii) On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 (Y, B) & \xleftarrow{q} & (G(\Gamma), p^{-1}(A)) & & \\
 \downarrow f & & \downarrow \hat{f} & \searrow p & \\
 (Y', B') & \xleftarrow{q'} & (G(f \circ \Gamma), p'^{-1}(A)) & \nearrow p' & (X, A)
 \end{array}$$

où $\hat{f}$ est définie par $\hat{f}(x, y) = (x, f(y))$;

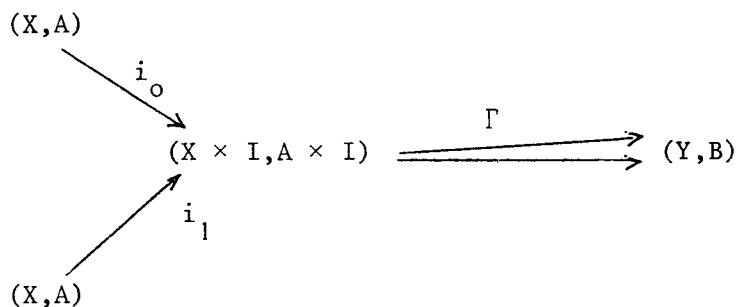
et donc :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n(Y, B) & \xrightarrow{q^*} & H^n(G(\Gamma), p^{-1}(A)) & & \\
 \uparrow f^* & & \uparrow \hat{f}^* & \nwarrow p^* & \\
 H^n(Y', B') & \xrightarrow{q'^*} & H^n(G(f \circ \Gamma), p'^{-1}(A)) & \nwarrow p'^* & H^n(X, A)
 \end{array}$$

d'où $(p'^*)^{-1} = (p^*)^{-1} \hat{f}^* q'^* = (p^*)^{-1} q^* f^*$.

Soit $(f \circ \Gamma)^* = \Gamma^* f^*$.

(iii) Ecrivons le diagramme :



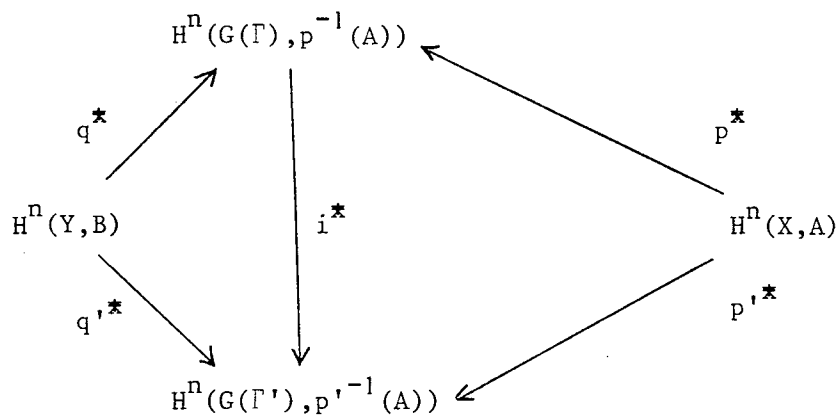
où $i_0(x) = (x,0)$ et $i_1(x) = (x,1)$.

On a $\Gamma_0 = \Gamma \circ i_0$, $\Gamma_1 = \Gamma \circ i_1$ et donc, d'après (i)

$$\Gamma_0^* = i_0^* \Gamma^*, \quad \Gamma_1^* = i_1^* \Gamma^*.$$

Or $i_0^* = i_1^*$ puisque i_0 et i_1 sont homotopes, donc $\Gamma_0^* = \Gamma_1^*$.

(iv) On a le diagramme commutatif suivant, où i désigne l'inclusion canonique :



et donc $(p^*)^{-1} q^* = (p'^*)^{-1} i^* q^* = (p'^*)^{-1} q'^*$

d'où $\Gamma'^* = \Gamma^*$.

Nous allons montrer comment on peut utiliser le théorème 1.16 pour démontrer des résultats de surjectivité où la condition d'homotopie est seulement donnée sur le bord.

On va s'intéresser à des ouverts dont le bord possède un minimum de régularité exprimé par la propriété (H) suivante :

DEFINITION

On dira qu'un ouvert borné non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ possède la propriété (H) si pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une rétraction r_ε de $V_\varepsilon = \{x / d(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$ sur $\partial\Omega$ telle que l'application $i_\varepsilon \circ r_\varepsilon$ de V_ε dans V_ε (i_ε désigne l'inclusion de $\partial\Omega$ dans V_ε) soit homotope à l'identité de V_ε .

EXEMPLES

- Si Ω est un ouvert à bord de classe C^2 , Ω possède la propriété (H).
- Si Ω est convexe, Ω possède la propriété (H).

On a alors le résultat suivant :

THEOREME 1.17.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) tel que $H^{n-1}(\bar{\Omega}) = \{0\}$ et possédant la propriété (H). Soit Γ une multi-application acyclique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ et a un point de Ω tel que $a \notin \Gamma(\partial\Omega)$. On suppose que la restriction de Γ à $\partial\Omega$ est homotope à l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. Alors $a \in \Gamma(\Omega)$.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde, supposons que $a \notin \Gamma(\bar{\Omega})$; désignons par i l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\bar{\Omega}$ et par j l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

On a :

$$\partial\Omega \xrightarrow{i} \bar{\Omega} \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$$

$\Gamma \circ i$ est homotope à j et donc :

$$(\Gamma \circ i)^* = j^*$$

Or $(\Gamma \circ i)^* = i^* \Gamma^*$ est nul puisque $H^{n-1}(\bar{\Omega}) = \{0\}$

$$H^{n-1}(\partial\Omega) \xleftarrow{i^*} H^{n-1}(\bar{\Omega}) \xleftarrow{\Gamma^*} H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{a\})$$

Il nous reste à voir que j^* est non nul pour avoir une contradiction.

Désignons par j_ε l'inclusion de V_ε dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ (pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit); on a $j = j_\varepsilon \circ i_\varepsilon$

$$\text{d'où } j^* = i_\varepsilon^* j_\varepsilon^* \quad \text{or} \quad j_\varepsilon = j_\varepsilon \circ \text{id}_{V_\varepsilon}$$

$$\text{et donc } j_\varepsilon^* = \text{id}_{V_\varepsilon}^* j_\varepsilon^* \quad \text{or par hypothèse } \text{id}_{V_\varepsilon}^* = r_\varepsilon^* i_\varepsilon^*$$

$$\text{d'où } j_\varepsilon^* = r_\varepsilon^* i_\varepsilon^* j_\varepsilon^* = r_\varepsilon^* j^*$$

et donc pour montrer que j^* n'est pas nul, il suffit de montrer que j_ε^* n'est pas nul.

Ecrivons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont les suites exactes de cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} \cdots & H^{n-1}(V_\varepsilon) & \longrightarrow & H^n(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon) & \cdots \\ & \uparrow j_\varepsilon^* & & \uparrow j_\varepsilon'^* & \\ \cdots & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & \xrightarrow{\partial^*} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}) & \cdots \end{array}$$

Pour montrer que j_ε^* n'est pas nul, il suffit de montrer que $j_\varepsilon'^*$ n'est pas nul car ∂^* est un isomorphisme.

Notons K_ε le compact $\Omega \setminus V_\varepsilon$. Décomposons j_ε' :

$$(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon) \xrightarrow{\theta} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\})$$

$$\text{d'où } H^n(\Omega \cup V_\varepsilon, V_\varepsilon) \xleftarrow{\theta^*} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon) \xleftarrow{\xi^*} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{a\}).$$

Par excision, on voit que θ^* est un isomorphisme et comme ξ^* n'est pas nul, j_ε' n'est pas nul. Il y a contradiction et donc $a \in \Gamma(\Omega)$.

REMARQUE 1.18.

Le théorème 1.17. est en particulier applicable aux ouverts Ω tels que $\bar{\Omega}$ est acyclique ; mais il contient d'autres cas intéressants où $\bar{\Omega}$ n'est pas acyclique.

Prenons par exemple pour Ω l'intérieur d'un tore de $\mathbb{R}^3$. Il est clair que Ω possède la propriété (H) (c'est un ouvert à bord de classe $\mathcal{C}^2$) et que $H^2(\bar{\Omega}) = \{0\}$ (le tore plein est homotopiquement équivalent à S_1).

COROLLAIRE 1.19.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) tel que $H^{n-1}(\bar{\Omega}) = \{0\}$ et possédant la propriété (H).

Soit Γ une multi-application acyclique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\Gamma(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On suppose que la restriction de Γ à $\partial\Omega$ est homotope à l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Alors Γ est surjective, c'est-à-dire $\bar{\Omega} \subset \Gamma(\bar{\Omega})$.

DEMONSTRATION

Soit a un point de Ω , alors $a \notin \Gamma(\partial\Omega)$ puisque $\Gamma(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Comme la restriction de Γ à $\partial\Omega$ est homotope à l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, elle est à fortiori homotope dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ à l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. Le théorème 1.17. entraîne donc que $a \in \Gamma(\Omega)$. D'où $\Omega \subset \Gamma(\Omega)$ et, puisque $\Gamma(\bar{\Omega})$ est compact, on a bien $\bar{\Omega} \subset \Gamma(\bar{\Omega})$.

—X—

REMARQUE 1.20.

On peut bien sur appliquer le corollaire 1.19. au cas où $\Gamma(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$ et où Γ restreinte à $\partial\Omega$ est homotope à l'identité de $\partial\Omega$.

En écrivant la remarque 1.20. dans le cas où Ω est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et où Γ est à valeurs fermées contractiles de la boule fermée dans la boule fermée, on résoud par l'affirmative une conjecture de Rogalski [12].

COROLLAIRE 1.21.

Soit Γ une multi-application s.c.s. à valeurs fermées contractiles non vides de $\bar{B}$ dans $\bar{B}$ ($\bar{B}$ désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) telle que :

- (i) $\Gamma(S_{n-1}) \subset S_{n-1}$
- (ii) Γ restreinte à S_{n-1} est homotope à l'identité sur S_{n-1} (l'homotopie étant supposée à valeurs fermées contractiles non vides).

Alors Γ est surjective.

DEMONSTRATION

Appliquer le corollaire 1.19. en remarquant qu'un espace contractile non vide est acyclique.

~~X~~

Nous terminons ce chapitre avec un théorème de surjectivité d'un genre un peu différent du corollaire 1.19. et qui est une forme multivoque naturelle du théorème de non rétraction.

THEOREME 122.

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) tel que $H^{n-1}(\bar{\Omega}) = \{0\}$ et possédant la propriété (H). Soit Γ une multi-application acyclique de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout x dans $\partial\Omega$, $x \in \Gamma(x)$. Alors $\bar{\Omega} \subset \Gamma(\bar{\Omega})$.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $\bar{\Omega} \not\subset \Gamma(\bar{\Omega})$. Puisque $\Gamma(\bar{\Omega})$ est fermé, on peut trouver un point $a \in \Omega$ tel que $a \notin \Gamma(\bar{\Omega})$.

Désignons par i l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\bar{\Omega}$ et par j l'inclusion de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

On a, pour tout x de $\partial\Omega$: $j(x) \in \Gamma \circ i(x)$ et donc, d'après le théorème 1.16. (iv) : $j^* = (\Gamma \circ i)^*$ (les homomorphismes étant pris de $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{a\})$ dans $H^{n-1}(\partial\Omega)$).

D'autre part, $(\Gamma \circ i)^* = i^* \Gamma^*$ est nul puisque $H^{n-1}(\bar{\Omega}) = \{0\}$ et j^* n'est pas nul (voir la démonstration du théorème 1.17.).

Il y a donc une contradiction.

~~X~~

REMARQUE 1.23.

Le théorème précédent n'est pas vrai pour les multi-applications pseudo-acycliques, comme le montre l'exemple où Ω est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$ et où $r \circ \Gamma$ est la multi-application constante égale à S_1 .

CHAPITRE II

SUR LA TOPOLOGIE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE CERTAINES EQUATIONS FONCTIONNELLES

INTRODUCTION

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'ensemble $P = \{u = Tu\}$ des points fixes d'un opérateur T lorsque les conditions d'unicité dégènèrent. Prenons un exemple. Si T est une contraction stricte ($\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|$ avec $k < 1$) l'ensemble P est réduit à un point : il y a unicité. Lorsque cette condition dégènère, c'est-à-dire lorsque $k = 1$, l'ensemble P est convexe (à condition toutefois que la norme $\| \cdot \|$ soit strictement convexe). Un autre exemple est celui des équations différentielles ordinaires. Lorsque f est lipschitzien, il y a unicité de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$. Lorsque f est continu, l'ensemble des solutions de cette équation est acyclique (ARONSZAJN [1]).

D'une façon générale, on constate dans beaucoup de cas que, lorsque les conditions d'unicité dégènèrent, l'ensemble P des points fixes reste acyclique. Dans la première partie de ce chapitre, nous allons donner un énoncé rigoureux de l'affirmation précédente, et l'appliquer aux équations intégrales.

Ce type de résultat a été étudié pour la première fois par ARONSZAJN [1].

Dans la deuxième partie de ce chapitre on montre que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle multivoque avec retards est acyclique. Ces deux parties contiennent un même cas particulier : celui des équations différentielles ordinaires.

Les résultats de ce chapitre montrent que certaines multi-applications sont acycliques, ce qui permettra de leur appliquer les constructions du chapitre I (voir chapitre III).

PRELIMINAIRES

Par rétracte absolu nous désignons, selon la terminologie usuelle (voir Borsuk [2]), un espace topologique métrisable non vide qui est un rétract de tout espace métrisable qui le contient comme sous-ensemble fermé.

DEFINITION

Soit (M, d) un espace métrique, on dit qu'un ensemble non vide R contenu dans M est un $R\delta$ si R est compact et s'il existe une suite R_n de fermés de M contenant R qui sont des rétractes absolus et qui convergent vers R pour la distance de Hausdorff.

H^* désigne toujours le foncteur cohomologie de Čech. Nous rappellerons qu'un espace acyclique pour la cohomologie de Čech est connexe. La proposition suivante précise la topologie des $R\delta$.

PROPOSITION 2.1.

Tout $R\delta$ est acyclique.

DEMONSTRATION

Soit R_n la suite de rétractes absolus convergeant vers R et soit Ω_n un système fondamental décroissant de voisinages ouverts de R tels que $R_n \subset \Omega_n$ (on peut toujours commencer par choisir une telle suite Ω_n puis remplacer au besoin R_n par une sous-suite).

Désignons par r_{n+1} la restriction à R_{n+1} d'une rétraction de M sur R_n (une telle rétraction existe puisque R_n est un rétracte absolu et est fermé dans M).

Pour $m \geq n$, définissons $r_n^m : R_m \rightarrow R_n$ par :

$$r_n^n = \text{id}$$

$$r_n^m = r_{n+1} \circ r_{n+2} \circ \dots \circ r_m \quad \text{si} \quad m > n.$$

Désignons par i_n l'inclusion naturelle de R dans R_n .

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_m & \xleftarrow{i_m} & R \\ \downarrow r_n^m & \searrow i_n & \\ R_n & & \end{array} \quad \text{pour } m \geq n$$

D'où en passant à la cohomologie, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^q(R_m) & \xrightarrow{i_m^*} & H^q(R) \\ \uparrow r_n^{m*} & \searrow i_n^* & \\ H^q(R_n) & & \end{array}$$

Désignons par E la limite inductive du système $(H^q(R_n), r_n^{m*})$; on a un homomorphisme unique $h : E \rightarrow H^q(R)$ vérifiant $h \circ h_n = i_n^*$, en désignant par h_n les applications canoniques des $H^q(R_n)$ dans E .

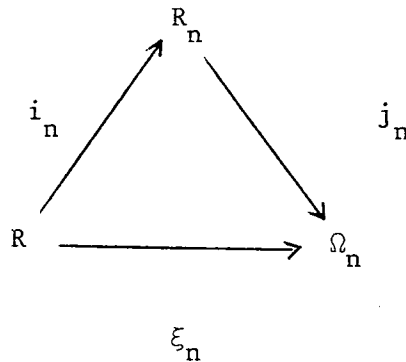
Nous allons montrer que l'homomorphisme h est surjectif.

Notons π l'homomorphisme de $\lim \text{ind } H^q(\Omega_n)$ dans $H^q(R)$,
 π est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ -modules d'après le théorème A des préliminaires
 du chapitre I.

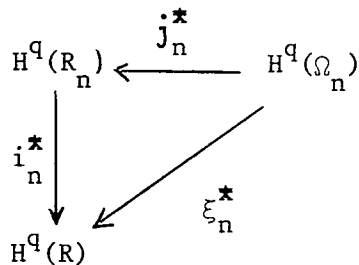
Soit alors $u \in H^q(R)$, u s'écrit πv avec $v \in \lim \text{ind } H^q(\Omega_n)$, prenons un
 représentant de v dans $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^q(\Omega_n)$, que nous écrirons $\sum v_n$, $v_n \in H^q(\Omega_n)$,

la somme étant finie.

Notons i_n, j_n, ξ_n les inclusions naturelles



D'où le diagramme commutatif :



Désignons par θ l'application quotient de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^q(R_n)$ dans E .

Montrons que $h [\theta(\sum j_n^* v_n)] = u$.

En effet :

$$h\theta(\sum j_n^* v_n) = \sum h\theta(j_n^* v_n) = \sum h \circ h_n(j_n^* v_n)$$

$$\text{d'où ceci} = \sum i_n^* j_n^* v_n = \sum \xi_n^* v_n = u,$$

d'où h est surjective et on en conclut que R est acyclique.

REMARQUE 2.2.

Il est facile de montrer directement que R est connexe.

REMARQUE 2.3.

Si dans la proposition précédente on suppose la suite R_n décroissante, la démonstration se simplifie. Nous verrons au paragraphe suivant, qu'on est amené à considérer des suites R_n non décroissantes. Dans le cas où les R_n sont compacts, ARONSZAJN, utilisant des résultats sur les rétractes absolus, a montré qu'on pouvait toujours se ramener à une suite décroissante. Malheureusement, les R_n que nous aurons à considérer ne seront pas compacts.

§ 1 - QUELQUES RESULTATS GENERAUX, UNE VERSION AMELIOREE DU THEOREME DE KRASNOSELSKII-PEROV.

a) Enoncé des résultats :

Nous allons donner d'abord un théorème général (théorème 2.4.). Nous donnons ensuite deux théorèmes qui sont des corollaires du théorème 2.4. Le premier (théorème 2.5.) est adapté aux applications : les hypothèses (C) et (D) de ce théorème sont faciles à vérifier, comme nous le verrons plus loin. Le deuxième (théorème 2.7.) est destiné à montrer que les hypothèses de compacité ne sont pas nécessaires. Le théorème de Krasnoselskii-Perov est un corollaire (corollaire 2.6.) du théorème 2.5.

THEOREME 2.4.

Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert non vide de E , $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ un opérateur continu qui vérifie la condition de Palais-Smale et une condition d'approximation :

- (P-S) Pour toute suite u_n dans $\bar{\Omega}$ telle que $u_n - Tu_n$ tend vers 0, il existe une sous-suite convergente.
- (A) Il existe une suite de réels $\varepsilon_k > 0$ qui tend vers 0, une suite T_k d'opérateurs continus de $\bar{\Omega}$ dans E tels que $I - T_k$ soit un homéomorphisme

de l'ensemble $R_k = \{u \in \bar{\Omega} \mid \|u - T_k u\| \leq \varepsilon_k\}$ sur la boule $\bar{B}(0, \varepsilon_k) = \{u \in E \mid \|u\| \leq \varepsilon_k\}$, et $\|T_k u - Tu\| \leq \varepsilon_k \quad \forall u \in \bar{\Omega}$.

Supposons que l'ensemble R des points fixes de T soit non vide. Alors R est un R_δ .

REMARQUE

Ω n'est pas supposé borné.

THEOREME 2.5.

Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert non vide de E , T un opérateur de $\bar{\Omega}$ dans E non linéaire continu et compact (i.e. : $T(\bar{\Omega})$ est relativement compact). On suppose que T vérifie les conditions suivantes :

- (C) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que : pour tout } \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \text{ il existe} \\ \text{un opérateur } T_\varepsilon \text{ continu et compact de } \bar{\Omega} \text{ dans } E \text{ vérifiant :} \\ \|Tu - T_\varepsilon u\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } u \in \bar{\Omega} \text{ et tel que l'équation : } u \in \bar{\Omega}, \\ u - T_\varepsilon u = b, \text{ a au plus une solution dès que } \|b\| \leq \varepsilon. \end{array} \right.$
- (D) $\left\{ \begin{array}{l} 0 \notin (I - T)(\partial\Omega) \text{ et } d(0, I - T, \Omega) \neq 0 \text{ où } d(0, I - T, \Omega) \text{ est le degré de} \\ \text{Leray-Schauder tel qu'il a été défini dans la première partie.} \end{array} \right.$

Alors l'ensemble R des points fixes de T est un R_δ . En particulier c'est un compact non vide acyclique.

Comme tout R_δ est connexe on a :

COROLLAIRE 2.6. (KRASNOSELSKII-PEROV) ⁽¹⁾

Sous les hypothèses du théorème 2.5., R est connexe.

(1) Sur le théorème de KRASNOSELSKII-PEROV on pourra consulter RABINOWITZ [14].

THEOREME 2.7.

Soit E un espace de Banach, T une contraction de E ($\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ pour tous x, y dans E). On suppose que T vérifie la condition de Palais-Smale:

$$(P.S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u_n \text{ est une suite de } E \text{ telle que } u_n - Tu_n \rightarrow 0, \text{ il existe une} \\ \text{sous-suite } u_{n_k} \text{ qui converge.} \end{array} \right.$$

Si l'ensemble R des points fixes de T est non vide, R est un R_δ .

b) Démonstrations

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.4.

Soit R un $\{u \in \bar{\Omega} \mid u = Tu\}$ l'ensemble des points fixes de T . Comme T est continu, R est fermé. Par hypothèse R est non vide. Soit u_n une suite dans R ; on a $u_n - Tu_n = 0$ donc $u_n - Tu_n \rightarrow 0$; donc, d'après (P-S) il existe une sous-suite convergente. Ceci montre que R est compact.

Comme R_k est homéomorphe à la boule $\bar{B}(0, \varepsilon_k)$, c'est un rétracte absolu. Il ne reste plus qu'à montrer que $d(R_k, R) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $c > 0$ et une suite $u_{k_p} \in R_{k_p}$ telle que $d(u_{k_p}, R) \geq c$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $k_p \rightarrow \infty$ quand $p \rightarrow \infty$. Pour simplifier on écrit p au lieu de k_p . On a $u_p - Tu_p \in \bar{B}(0, 2\varepsilon_p)$. Donc $u_p - Tu_p \rightarrow 0$. Donc il existe une sous-suite qui converge vers u dans E . Par continuité, on a $u - Tu = 0$ et $d(u, R) \geq c > 0$, ce qui est absurde.

—X—

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.5.

Le théorème 2.5. se déduit du théorème 2.4.

Vérifions tout d'abord la condition (P-S). Soit u_n une suite telle que $u_n - Tu_n \rightarrow 0$. Comme $T(\bar{\Omega})$ est relativement compact, il existe une sous-suite u_{n_k} telle que $Tu_{n_k} \rightarrow z$ dans E . Donc $u_{n_k} \rightarrow z$.

Montrons que $(I-T_\varepsilon)(\Omega) \supset \bar{B}(0, \varepsilon)$ pour ε assez petit.

Comme $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$ et comme $(I-T)(\partial\Omega)$ est fermé (voir partie III.1), il existe $\alpha > 0$ tel que $\bar{B}(0, \alpha) \cap (I-T)(\partial\Omega) = \emptyset$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2}$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Soit b tel que $\|b\| \leq \varepsilon$. Considérons l'homotopie compacte :

$(t, x) \rightarrow t T_\varepsilon x + tb + (1-t)Tx$. Il faut vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega$ on a :

$$x - t T_\varepsilon x - tb - (1-t)Tx \neq 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$x - Tx - t[b + T_\varepsilon x - Tx] \neq 0 ,$$

ce qui est vérifié puisque :

$$t\|b + T_\varepsilon x - Tx\| \leq \|b\| + \|T_\varepsilon x - Tx\| \leq 2\varepsilon \leq \alpha .$$

On a donc, pour tout b tel que $\|b\| \leq \varepsilon$, $0 \notin (I-T_\varepsilon - b)(\partial\Omega)$ et $d(0, I-T_\varepsilon - b, \Omega) = d(0, I-T, \Omega) \neq 0$. Donc $b \in (I-T_\varepsilon)(\Omega)$.

De $(I-T_\varepsilon)(\Omega) \supset \bar{B}(0, \varepsilon)$ et de l'hypothèse (C) on déduit que $I-T_\varepsilon$ est une bijection de $R_\varepsilon = \{x \in \bar{\Omega} \mid \|x - Tx\| \leq \varepsilon\}$ sur $\bar{B}(0, \varepsilon)$. Montrons que c'est un homéomorphisme.

Comme $I-T_\varepsilon$ est continu, il suffit de vérifier que $(I-T_\varepsilon)^{-1}$ est continu.

Soit b_n une suite telle que $\|b_n\| \leq \varepsilon$ et $b_n \rightarrow b$.

Soit u_n la solution unique de $u_n - T_\varepsilon u_n = b_n$.

Comme $T(\bar{\Omega})$ est compact, il existe une sous-suite, encore notée u_n , telle que $Tu_n \rightarrow z$ dans E . Donc $u_n - T_\varepsilon u_n + b_n$ converge vers $u = z + b$. Par continuité $u - T_\varepsilon u = b$, ce qui prouve que $(I-T_\varepsilon)^{-1}$ est continu sur $\bar{B}(0, \varepsilon)$.

Si on considère maintenant une suite ε_k qui tend vers 0, les opérateurs T_{ε_k} vérifient les hypothèses (A) du théorème 2.4. et comme d'après l'hypothèse (D) l'ensemble R des points fixes de T est non vide, il s'ensuit (théorème 2.4.) que c'est un R_δ .

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.7. (à partir du théorème 2.4)

Par translation on se ramène au cas où $0 \in R$. On a $0 = T0$, donc pour tout $x \in E$: $\|Tx\| = \|Tx - T0\| \leq \|x - 0\| = \|x\|$. On a vu au début de la démonstration du théorème 2.4. que la condition (P-S) implique que R est compact. En particulier R est borné. Soit $\alpha > \sup \{\|x\| \mid x \in R\}$. On prend $\Omega = B(0, \alpha)$. Pour $0 < \varepsilon < \alpha$, on pose $T_\varepsilon = (1 - \frac{\varepsilon}{\alpha})T$. On a pour tout $x \in \bar{\Omega}$:

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| = \|\frac{\varepsilon}{\alpha} Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \|x\| \leq \varepsilon. \text{ Comme } T_\varepsilon \text{ est une contraction stricte,}$$

$I - T_\varepsilon$ est un homéomorphisme de E sur E . Soit b tel que $\|b\| \leq \varepsilon$ et soit

$$u = (I - T_\varepsilon)^{-1} b. \text{ On a } u - (1 - \frac{\varepsilon}{\alpha})Tu = b, \text{ donc :}$$

$$\|u\| \leq (1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}) \|Tu\| + \|b\| \leq (1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}) \|u\| + \varepsilon. \text{ D'où } \|u\| \leq \alpha, \text{ c'est-à-dire}$$

$$u \in \bar{\Omega}.$$

Il en résulte que $(I - T_\varepsilon)^{-1}$ est un homéomorphisme de $\bar{B}(0, \varepsilon)$ sur

$$R_\varepsilon = \{u \in \bar{\Omega} \mid \|u - T_\varepsilon u\| \leq \varepsilon\}.$$

—————X

c) Exemples

EQUATIONS INTEGRALES

THEOREME 2.8.

Soit $T > 0$ et soit K une fonction continue de $[0, T]^2 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe a, b réels > 0 tels que :

$$\|K(t, \tau, \alpha)\| \leq a + b\|\alpha\| \text{ pour tous } t, \tau \in [0, T], \quad \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

L'ensemble S des solutions x de l'équation intégrale :

$$\begin{cases} x \in C(0, T; \mathbb{R}^n) \text{ et pour tout } t \in [0, T] \\ x(t) = \int_0^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau \end{cases}$$

est un R_δ . En particulier, S est un compact acyclique non vide, et l'ensemble $X = \{x(T) \mid x \in S\}$ est connexe et compact.

(Si K est lipschitzien par rapport à α , on sait que S est réduit à un point).

DEMONSTRATION

Tout R_δ est un compact acyclique non vide. Donc si S est un R_δ il est compact acyclique, donc connexe ; et X est compact connexe comme image continue de S . Montrons maintenant que S est un R_δ à l'aide du théorème 2.5.

Soit $x \in S$. On a $\|x(t)\| \leq at + b \int_0^t \|x(\tau)\| d\tau$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui implique $\|x\|_\infty \leq A = \frac{a}{b} (e^{bT} - 1)$ (1) (avec $\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|$).

Soit K_0 la fonction continue de $[0, T]^2 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$K_0(t, \tau, \alpha) = \begin{cases} K(t, \tau, \alpha) & \text{si } \|\alpha\| \leq A \\ K(t, \tau, \alpha \frac{A}{\|\alpha\|}) & \text{si } \|\alpha\| \geq A \end{cases}$$

Soit S_0 l'ensemble des solutions x de l'équation intégrale $x(t) = \int_0^t K_0(t, \tau, x(\tau)) d\tau$, $0 \leq t \leq T$. Comme $\|K_0(t, \tau, \alpha)\| \leq a + b\|\alpha\|$, on a (comme pour S) : $\|x\|_\infty \leq A$ pour tout $x \in S_0$. Comme $K(t, \tau, \alpha) = K_0(t, \tau, \alpha)$ pour $\|\alpha\| \leq A$, on en déduit que $S = S_0$.

Donc, quitte à remplacer K par K_0 , on peut supposer pour la suite de la démonstration que K est borné.

Soit T' l'opérateur de $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ dans lui-même défini par $y = T'x$ si

$$y(t) = \int_0^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Soit $\bar{\Omega}$ la boule de centre 0 et de rayon $2T\|K\|_\infty$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$. Si $y = T'x$ on a $\|y\|_\infty \leq T\|K\|_\infty$ donc $y \in \frac{1}{2}\bar{\Omega}$. En particulier si $x = T'x$ on a $x \in \bar{\Omega}$. Donc l'ensemble S des solutions de l'équation intégrale coïncide avec l'ensemble des points fixes de T' sur $\bar{\Omega}$:

$$S = \{x \in C(0, T; \mathbb{R}^n) \mid T'x = x\} = \{x \in \bar{\Omega} \mid T'x = x\}.$$

(1) Lemme classique de calcul différentiel.

Nous allons déduire la proposition du théorème 2.5. appliqué à T' sur $\bar{\Omega}$, avec $E = C(0,T;\mathbb{R}^n)$.

On vérifie immédiatement que $T'(\bar{\Omega})$ est équicontinu et borné, et donc relativement compact d'après le théorème d'Ascoli.

Montrons que T' est continu : si $x_n \rightarrow x$, $y_n = T'x_n$, $y = T'x$, alors $y_n(t) \rightarrow y(t)$ d'après le théorème de Lebesgue, et $y_n \rightarrow y$ uniformément d'après le théorème d'Ascoli.

Si $y = T'x$, on a vu que $y \in \frac{1}{2} \bar{\Omega}$. Il en résulte que $0 \notin (I-T')(\partial\Omega)$, que $I - \lambda T'$, $0 \leq \lambda \leq 1$, est une homotopie de $I - T'$ sur I ; d'où $d(0, I-T', \Omega) = +1$.

Vérifions maintenant la condition (C) du théorème 2.5.

Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε une fonction de $[0,T]^2 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, lipschitzienne, telle que $\|K_\varepsilon\|_\infty \leq \|K\|_\infty$ et :

$$\frac{\varepsilon}{T} \geq \sup \{ \|K(t,\tau,\alpha) - K_\varepsilon(t,\tau,\alpha)\| \mid 0 \leq t, \tau \leq T \text{ et } \|\alpha\| \leq 2T \|K\|_\infty \}.$$

Soit $T'_\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow C(0,T;\mathbb{R}^n)$ l'opérateur défini par $y = T'_\varepsilon x$ si

$$y(t) = \int_0^t K_\varepsilon(t,\tau,x(\tau)) d\tau \text{ pour tout } t \in [0,T]. \text{ Si } x \in \bar{\Omega}, \text{ si } y = T'_\varepsilon x \text{ et}$$

$z = T'x$, on a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\|z(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \|K(t,\tau,x(\tau)) - K_\varepsilon(t,\tau,x(\tau))\| d\tau \leq \int_0^t \frac{\varepsilon}{T} d\tau \leq \varepsilon.$$

Donc $\|T'_\varepsilon x - T'x\|_\infty \leq \varepsilon$. L'opérateur T'_ε est continu et compact pour les mêmes raisons que T' . Enfin vérifions que l'équation $x - T'_\varepsilon x = b$ a au plus une solution. Soit x et y tels que $x - T'_\varepsilon x = b = y - T'_\varepsilon y$. On a pour tout $t \in [0,T]$:

$$x(t) - y(t) = \int_0^t [K_\varepsilon(t,\tau,x(\tau)) - K_\varepsilon(t,\tau,y(\tau))] d\tau.$$

Soit k_ε le rapport de Lipschitz de K_ε et soit $\Delta(t) = \|x(t) - y(t)\|$.

On a $\Delta(t) \leq \int_0^t k_\varepsilon \Delta(\tau) d\tau$ pour tout $t \in [0,T]$, ce qui implique $\Delta \equiv 0$, donc $x = y$.

REMARQUE 2.9.

Lorsque $K(t,\tau,\alpha)$ ne dépend pas de t l'équation intégrale considérée est équivalente à l'équation différentielle $\dot{x}(t) = K(t,x(t))$, $x(0) = 0$. Le théorème 2.8. est dû, dans le cas des équations différentielles, à ARONSZAJN.

Un exemple pour illustrer dans $\mathbb{R}^n$ la condition (C)

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit f et h deux fonctions continues de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous dirons que f est h -monotone si :

$f + \varepsilon h$ est injective pour tout $\varepsilon > 0$.

C'est le cas par exemple si h est injective et si :

$$[f(x)-f(y)] \cdot [h(x)-h(y)] \geq 0 \text{ pour tous } x, y \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

En effet, $f(x)+\varepsilon h(x) = f(y)+\varepsilon h(y)$ implique :

$$[f(x)-f(y)] \cdot [h(x)-h(y)] = -\varepsilon [h(x)-h(y)]^2$$

ce qui n'est possible que pour $x = y$.

PROPOSITION 2.10.

Si f est h -monotone, si $0 \notin f(\partial\Omega)$ et si $d(0, f, \Omega) \neq 0$, l'ensemble $f^{-1}(0)$ est un R_δ .

DEMONSTRATION

Posons $Tx = x - f(x)$ et $T_\varepsilon x = Tx - \varepsilon h(x)$.

On a $f^{-1}(0) = \{x \in \bar{\Omega} \mid x = Tx\}$. On peut appliquer le théorème 2.5.

En effet, on a :

$$(I-T)(\partial\Omega) = f(\partial\Omega) \not\ni 0 ; d(0, I-T, \Omega) = d(0, f, \Omega) \neq 0 ;$$

$$I-T_\varepsilon = f + \varepsilon h \text{ est injectif ; } \|T_\varepsilon x - Tx\| \leq \varepsilon \|h\|_\infty \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

REMARQUE.

Si Ω est convexe et f monotone au sens habituel, on vérifie facilement que $f^{-1}(0)$ est convexe.

§ 2 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES MULTIVOQUES AVEC RETARDS

a) Enoncé des résultats

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème 2.12. qui énonce essentiellement que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle multivoque avec retards est acyclique. En particulier, on retrouve la propriété que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle ordinaire est acyclique.

Dans toute la suite, on note $\tau_1, \dots, \tau_m$, $m \geq 1$, des réels positifs ou nuls ; on pose $\tau = \sup (\tau_1, \dots, \tau_m)$.
On note T un réel strictement positif.

NOTATION 2.11.

La notation suivante simplifiera les écritures :
Etant donné une fonction $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ et une fonction $x \in C(0, T; \mathbb{R}^n)$ telle que $x(0) = y(0)$,
On notera yx la fonction définie par :

$$\begin{aligned} yx(t) &= y(t) && \text{pour} && -\tau \leq t \leq 0 ; \\ yx(t) &= x(t) && \text{pour} && 0 \leq t \leq T . \end{aligned}$$

THEOREME 2.12.

Soit Γ une multi-application s.c.s. de $\mathbb{R}^{nm}$ dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs convexes compactes non vides. On suppose que Γ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $r \geq 0$ tel que $\|b\| \leq r$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{nm}$ et tout $b \in \Gamma(a)$. Pour toute fonction $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ on note $S(y)$ l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle multivoque avec retards :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ est absolument continue de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^n, x(0) = y(0) \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \end{array} \right.$$

La multi-application $y \rightarrow S(y)$ de $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ est s.c.s. à valeurs compactes acycliques non vides. Si B est borné dans $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$, $S(\overline{B})$ est compact dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$.

COROLLAIRE 2.13.

Soit $A(y) = \{ x(T) \mid x \in S(y) \}$. Pour tout y , $A(y)$ est un compact connexe non vide. La multi-application A est s.c.s. .

Si $\mathcal{B}$ est borné, $\overline{A(\mathcal{B})}$ est compact.

Dans le théorème 2.12. nous avons fait l'hypothèse que Γ est définie sur tout l'espace et que Γ est bornée. Ces hypothèses ne sont restrictives qu'en apparence : les hypothèses qui assurent l'existence de solutions d'une équation différentielle permettent en général de se ramener au cas où Γ est bornée et partout définie. Pour préciser cette idée on examinera le corollaire 2.14. ci-dessous et sa démonstration (voir à la fin du paragraphe).

COROLLAIRE 2.14.

Soit Γ une multi-application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$, s.c.s., à valeurs convexes compactes non vides. Soit $T > 0$. On suppose qu'il existe deux réels α et $\beta > 0$ tels que :

$a \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ et $b \in \Gamma(t, a)$ impliquent $\|b\| \leq \alpha + \beta \|a\|$.

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, soit $S(x_0)$ l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle multivoque :

$$\left\{ \begin{array}{l} x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ absolument continue, } x(0) = x_0 \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \end{array} \right.$$

La multi-application $x_0 \rightarrow S(x_0)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ est s.c.s. à valeurs compactes acycliques non vides. La multi-application

$x_0 \rightarrow A(x_0) = \{x(T) \mid x \in S(x_0)\}$ est s.c.s. à valeurs compactes connexes non vides.

En prenant Γ "univoque" dans le théorème 2.12. et en ajoutant le temps grâce à l'artifice classique " $\dot{t} = 1$ ", on obtient :

THEOREME 2.15.

Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^{1+nm}$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ soit $S(y)$ l'ensemble des solutions $x \in C^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ de l'équation différentielle avec retards :

$$\begin{cases} x(0) = y(0), & \text{et pour tout } t \in [0, T] \\ \dot{x}(t) = f(t, yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \end{cases}$$

La multi-application $y \rightarrow S(y)$ est s.c.s. à valeurs compactes acycliques non vides de $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$.

Pour tout borné B , $\overline{S(B)}$ est un compact.

L'ensemble $A(y) = \{x(T) \mid x \in S(y)\}$ est un compact connexe et la multi-application A est s.c.s.

REMARQUE 2.16.

Si f est lipschitzienne, $S(y)$ est réduit à un point.

REMARQUE 2.17.

Lorsque $m = 1$ et $\tau_1 = 0$ on obtient une équation différentielle ordinaire. On a déjà vu (cf. remarque 2.9.) que dans ce cas $S(y)$ est un R_δ , donc en particulier un compact acyclique non vide.

b) Démonstrations

ORIENTATION 2.18.

Exception faite de la démonstration des corollaires 2.13. et 2.14. que l'on trouvera à la fin du paragraphe, le reste du paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 2.12.

La démonstration du théorème 2.12. se décompose en trois étapes :

- On construit une suite Γ_n de multi-applications d'un type particulier qui converge vers Γ (proposition 2.19.)
- On démontre le théorème 2.12. pour les multi-applications Γ_n (proposition 2.23.)
- On passe à la limite.

PROPOSITION 2.19.

Soit X un espace métrique compact, $G : X \rightarrow K \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement. Il existe une suite G_n de multi-applications semi-continues supérieurement de X dans $K \mathbb{R}^n$ telle que :

- (1) $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N} : G(x) \subset G_n(x)$
- (2) $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N} : G_{n+1}(x) \subset G_n(x)$
- (3) $\forall x \in X$, la suite $G_n(x)$ converge vers $G(x)$ pour la distance de Hausdorff
- (4) Les $G_n(x)$ sont de la forme $\sum_{i=1}^p \varphi_i(x) C_i$ où $C_1, \dots, C_p$ désignent p éléments de $K \mathbb{R}^n$ et φ_i une partition continue de l'unité sur X .

DEMONSTRATION

Prenons $\rho > 0$ et soit $B(x_i, \rho)$, $i=1, \dots, m$, un recouvrement ouvert de X par des boules de rayon ρ .

Soit $C_i = \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{x \in B(x_i, 2\rho)} G(x) \right\}$

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ une partition continue de l'unité associée au recouvrement $B(x_i, \rho)$, $i=1, \dots, m$.

Enfin soit $G_o(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) C_i$.

Posons maintenant $\sigma = \frac{1}{3} \rho$, soit $B(y_j, \sigma)$, $j=1, \dots, k$.

Un recouvrement ouvert fini de X par des boules de rayon σ .

Notons $D_j = \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{x \in B(y_j, 2\sigma)} G(x) \right\}$

et soit $\psi_1, \dots, \psi_k$ une partition de l'unité associée au recouvrement $B(y_j, \sigma)$, $j=1, \dots, k$.

Soit $G_1(x) = \sum_{j=1}^k \psi_j(x) D_j$.

On construit ainsi par récurrence une suite G_n ; on va montrer que G_n vérifie les conditions (1), (2), (3), (4).

En effet : fixons-nous pour la suite un point x_0 dans X .

Notons :

$$I = \{i \mid x_0 \in B(x_i, \rho)\}$$

$$J = \{j \mid x_0 \in B(y_j, \sigma)\}$$

Montrons d'abord que $G_1(x_0) \subset G_0(x_0)$; pour cela utilisons un lemme auxiliaire.

LEMME 2.20.

$i \in I$ et $j \in J$ entraîne $B(y_j, 2\sigma) \subset B(x_i, 2\rho)$

DEMONSTRATION

Soit $z \in B(y_j, 2\sigma)$, on a $d(z, y_j) < 2\sigma$

comme $i \in I$, on a $d(x_0, x_i) < \rho$

et comme $j \in J$, on a $d(x_0, y_j) < \sigma$

d'où

$$d(z, x_i) \leq d(z, y_j) + d(y_j, x_0) + d(x_0, x_i)$$

d'où

$$d(z, x_i) < 2\sigma + \sigma + \rho = 2\rho .$$

~~X~~

Donc si $i \in I$ et $j \in J$ on a $D_j \subset C_i$

d'où

$$D_j \subset \sum_{i \in I} \varphi_i(x_0) C_i \quad \text{pour tout } j \text{ dans } J$$

$$\text{et donc } \sum_{j \in J} \psi_j(x_0) D_j \subset \sum_{i \in I} \varphi_i(x_0) C_i .$$

Soit $G_1(x_0) \subset G_0(x_0)$.

Montrons maintenant que $G(x_0) \subset G_1(x_0)$.

On a : $G(x_0) \subset D_j \quad \forall j \in J$

d'où : $G(x_0) \subset \sum_{j \in J} \psi_j(x_0) D_j$.

(4) étant trivialement vérifié, il ne nous reste plus qu'à vérifier (3).

Considérons la multi-application G_n construite à partir de

$$\rho_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rho.$$

Soit $x_0 \in X$ fixé et $\varepsilon > 0$; puisque G est s.c.s., il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{d(x_0, y) < \eta} G(y) \right\} \subset G(x_0) + \varepsilon B(0, 1).$$

Prenons n assez grand pour que $\rho_n \leq \eta/3$.

Notons $I_n = \{i \mid x_0 \in B(x_i, \rho_n)\}$

alors : $G_n(x_0) = \sum_{i \in I_n} \alpha_i(x) A_i$

avec : $A_i = \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{y \in B(x_i, 2\rho_n)} G(y) \right\}$.

Or si $i \in I_n$: $B(x_i, 2\rho_n) \subset B(x_0, 3\rho_n) \subset B(x_0, \eta)$

d'où : $A_i \subset G(x_0) + \varepsilon B(0, 1)$

et donc $G_n(x_0) \subset G(x_0) + \varepsilon B(0, 1)$.

~~X~~

REMARQUE 2.21.

On peut remplacer la condition (3) par la condition équivalente

$$(3)' \quad \forall x \in X \quad G(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n(x).$$

REMARQUE 2.22.

Ultérieurement, nous appliquerons la proposition 2.9. avec $X = \bar{B}(0, r)$ dans $\mathbb{R}^{nm}$. On peut alors utiliser des partitions Lipschitziennes de l'unité définies sur $\mathbb{R}^{mn}$ tout entier.

La deuxième étape consiste maintenant à démontrer le résultat pour le type particulier de multi-applications intervenant dans la proposition 2.19.

PROPOSITION 2.23.

Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 2.12. En outre, on suppose que Γ est de la forme :

$$\Gamma(a) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(a) C_i \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}^{nm}$$

où les C_i sont des convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, et où $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une partition de l'unité composée de fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}^{nm}$.

Même conclusion que le théorème 2.12.

La DEMONSTRATION de cette proposition est décomposée en quatre lemmes. Plus précisément la proposition résulte des lemmes 2.27. et 2.28. ci-dessous.

Notons B_C l'ensemble des fonctions mesurables de $[0, T]$ dans $C_1 \times \dots \times C_p$. C'est un convexe compact pour la topologie $\sigma(L_1(0, T; \mathbb{R}^{np}), L_\infty(0, T; \mathbb{R}^{np}))$.

En effet, c'est un convexe fermé pour la topologie forte dans L_1 , donc un convexe fermé pour la topologie faible $\sigma(L_1, L_\infty)$. En outre B_C est borné dans $L_\infty(\dots)$ donc relativement compact dans L_1 pour la topologie faible $\sigma(L_1, L_\infty)$.

Pour tout $u = (u_1, \dots, u_p)$ appartenant à B_C , la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(t, a) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(a) u_i(t) \quad \text{est lipschitzienne par rapport à } a, \text{ mesurable par}$$

rapport à t . L'équation différentielle avec retards suivante :

$$\begin{cases} x(0) = y(0) & \text{et pour presque tout } t \in [0, T] \\ \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) u_i(t) \end{cases}$$

admet donc une solution et une seule d'après les résultats classiques sur les équations différentielles avec retards.

NOTATION 2.24.

On note $x = \Psi(u, y)$ cette solution.

LEMME 2.25.

L'application Ψ est continue de $B_C \times C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$, où B_C est muni de la topologie faible $\sigma(L_1(0, T; \mathbb{R}^{np}), L_\infty(0, T; \mathbb{R}^{np}))$ et où $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ et $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ sont munis de la topologie forte de la convergence uniforme.

DEMONSTRATION

Comme B_C est un compact métrisable, on peut raisonner avec des suites. Soit $u_k = (u_{k,1}, \dots, u_{k,p}) \in B_C$ et soit $y_k \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ tels que $u_k \rightarrow u$ et $y_k \rightarrow y$.

Soit $x_k = \Psi(u_k, y_k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|\dot{x}_k\|_\infty \leq \delta \text{ où } \delta = \sup\{\|a\| \mid a \in C_i, 1 \leq i \leq p\}$$

$$\text{et } \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k(0)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|y_k(0)\| < +\infty.$$

Donc, d'après le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite, encore notée x_k , qui converge vers une fonction x dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$. Il suffit de démontrer que $x = \Psi(u, y)$.

Comme $y_k \rightarrow y$ et $x_k \rightarrow x$, la fonction $y_k x_k$ (voir définition 2.11.) converge vers la fonction yx .

Il en résulte que, quand $k \rightarrow \infty$, la suite de fonctions $\alpha_{k,i}$ définies par :

$$\alpha_{k,i}(t) = \varphi_i(y_k x_k(t-\tau_1), \dots, y_k x_k(t-\tau_m)) \quad 1 \leq i \leq p$$

converge uniformément vers la fonction α_i définie par :

$$\alpha_i(t) = \varphi_i(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \quad 1 \leq i \leq p.$$

Comme $u_{k,i}$ converge faiblement ($\sigma(L_1, L_\infty)$) vers u_i et comme, par définition de Ψ ,

$$\dot{x}_k(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_{k,i}(t) u_{k,i}(t)$$

On en déduit que $\dot{x}_k$ converge faiblement $(\sigma(L_1, L_\infty))$ vers la fonction z

définie par $z(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(t) u_i(t)$. Comme $x_k \rightarrow x$ on a à la limite :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^p \alpha_i(\theta) u_i(\theta) d\theta \quad \text{pour tout } t \text{ et donc } x = \Psi(u, y), \text{ ce}$$

qu'il fallait démontrer.

— ~~x~~ —

LEMME 2.26.

Pour tout $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$, on a $S(y) = \Psi(B_C, y)$.

DEMONSTRATION

Soit $u \in B_C$ et soit $x = \Psi(u, y)$. On a, d'après la définition de B_C et de Γ :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) u_i(t)$$

donc

$$\dot{x}(t) \in \sum_{i=1}^p \varphi_i(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) C_i = \Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m))$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. En outre $x(0) = y(0)$. Donc $x \in S(y)$.

Ceci montre l'inclusion $\Psi(B_C, y) \subset S(y)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in S(y)$. Comme x est absolument continue, il existe une fonction borélienne $b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $b(t) = \dot{x}(t)$ pour presque tout $t \in [0, T]$. Soit $\alpha_i : [0, T] \times \mathbb{R}^{np} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction borélienne définie par :

$$\alpha_i(t, a_1, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) a_i - b(t) .$$

Soit Δ la multi-application de $[0, T]$ dans $C_1 \times \dots \times C_p$ définie par

$$\Delta(t) = \{a = (a_1, \dots, a_p) \in C_1 \times \dots \times C_p \mid \alpha(t, a_1, \dots, a_p) = 0\} .$$

Comme $x \in S(y)$ on a pour presque tout $t \in [0, T]$

$$b(t) = \dot{x}(t) \in \Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) .$$

D'après la définition de Γ , ceci implique que $\Delta(t)$ est non vide. D'autre part, le graphe de Δ est $\alpha^{-1}(0)$ qui est borélien. Donc, d'après le théorème de sélection de Von Neumann, il existe une fonction mesurable $u : [0, T] \rightarrow C_1 \times \dots \times C_p$ telle que $u(t) \in \Delta(t)$ pour presque tout $t \in [0, T]$. D'où, (avec $u(t) = (u_1(t), \dots, u_p(t))$) :

$$b(t) = \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \varphi_i(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) u_i(t)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. C'est-à-dire $x = \Psi(u, y)$.

—X—

LEMME. 2.27.

Pour tout $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$, $S(y)$ est un compact non vide acyclique.

DEMONSTRATION

Fixons y . Soit Λ l'application de B_C dans $S(y)$ définie par $\Lambda(u) = \Psi(u, y)$. D'après le lemme 2.25., Λ est continue. D'après le lemme 2.26., Λ est surjective. Comme B_C est compact non vide, il en résulte que $S(y)$ est un compact non vide.

Pour tout $x \in S(y)$, l'image réciproque $\Lambda^{-1}(x)$ est un convexe (cf. définition 2.24. de Ψ).

En particulier $\Lambda^{-1}(x)$ est acyclique. Donc d'après le théorème de Vietoris-Begle, l'homomorphisme $\Lambda^* : H^q(B_C) \rightarrow H^q(S(y))$ est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$.

Comme B_C est convexe, B_C est acyclique. Donc $S(y)$ est acyclique.

—X—

LEMME 2.28.

La multi-application $y \rightarrow S(y)$ de $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ est s.c.s.. Si $\mathcal{B}$ est un borné de $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$, $\overline{S(\mathcal{B})}$ est un compact de $C(0, T; \mathbb{R}^n)$.

DEMONSTRATION

Soit $k_1 = \sup \{ \|y\|_\infty \mid y \in \mathcal{O} \}$

et soit $k_2 = \sup \{ \|a\| \mid a \in C_i \quad i=1, \dots, p \}$.

On a pour tout $y \in \mathcal{O}$ et tout $x \in S(y)$:

$$\|x(0)\| = \|y(0)\| \leq k_1 \quad \text{et} \quad \|\dot{x}\|_\infty \leq k_2.$$

Il en résulte, d'après le théorème d'Ascoli, que $S(\mathcal{O})$ est relativement compact dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$.

Pour montrer que S est s.c.s., il suffit maintenant de montrer que le graphe de S est fermé. Soit $x_k \in S(y_k)$ tels que $y_k \rightarrow y$ et $x_k \rightarrow x$. D'après le lemme 2.26., il existe une suite $u_k \in B_C$ telle que $x_k = \Psi(u_k, y_k)$. Comme B_C est séquentiellement compact, il existe une sous-suite, encore notée u_k , qui converge vers u dans B_C . Par continuité de Ψ (lemme 2.25.) on a $x = \Psi(u, y)$, donc $x \in S(y)$.

— ~~x~~ —

Passons maintenant à la troisième et dernière étape de la démonstration du théorème 2.12.

Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 2.12. Soit r_0 un réel positif. Soit D la boule

$$D = \{ y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n) \mid \|y\| \leq r_0 \}.$$

Il suffit de montrer les propriétés énoncées dans le théorème 2.12. pour la restriction de S à D . Donc r_0 et D sont fixés pour la suite de la démonstration.

Soit $y \in D$ et $x \in S(y)$. On a $\|\dot{x}\|_\infty \leq r$ où r est le réel défini dans l'énoncé du théorème 2.12.

On a $\|x(0)\| = \|y(0)\| \leq r_0$. On en déduit, d'après le théorème d'Ascoli, que $S(D)$ est relativement compact. On en déduit aussi que

$$\|x(t)\| \leq r_0 + rT \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T].$$

On applique la proposition 2.19. avec

$$X = \{ a = (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}^n)^m \mid \|a_i\| \leq r_0 + rT \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m \}$$

et avec G = restriction de Γ à X . On trouve ainsi une suite G_n de multi-applications qui vérifient les conditions (1,2,3,4) de la proposition 2.19.

En outre, on peut supposer que les fonctions φ_i qui interviennent dans la propriété (4) sont lipschitziennes, définies sur $\mathbb{R}^{nm}$ (et non pas seulement sur $X \subset \mathbb{R}^{nm}$) et constituent une partition de l'unité sur $\mathbb{R}^{nm}$ (cf. remarque 2.22.) De telle sorte que Γ_n définie par :

$$\Gamma_n(a) = \sum_{i=1}^p \varphi_{i,n}(a) C_{i,n}$$

coïncide avec G_n sur X . En outre, d'après la construction de C_i (cf. démonstration de la proposition 2.19.) et d'après l'hypothèse " $\Gamma(a) \subset \bar{B}(0, R)$, $\forall a \in \mathbb{R}^{nm}$ " on a $C_i \subset \bar{B}(0, r)$ pour tout $i=1, \dots, p$. Donc $\Gamma_n(a) \subset \bar{B}(0, r)$ pour tout a et tout n .

Il en résulte que les éventuelles solutions de

$$(E_n) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in \Gamma_n(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \\ x(0) = y(0) \end{cases}$$

vérifient $\|\dot{x}\|_\infty \leq r$ donc $\|x\|_\infty \leq r_0 + rT$.

Comme Γ_n et G_n coïncident sur X , les solutions de (E_n) vérifient donc :

$$(F_n) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in G_n(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \\ x(0) = y(0). \end{cases}$$

D'après 2.23. l'équation (E_n) admet un ensemble de solutions $S_n(y)$ qui est un compact acyclique, non vide, et la multi-application $y \rightarrow S_n(y)$ de D dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ a un graphe fermé (cf. Démonstration du lemme 2.28.).

Comme G_{n+1} est inclus dans G_n les solutions de (E_{n+1}) sont des solutions de (E_n) .

Autrement dit, on a $S_{n+1}(y) \subset S_n(y)$. Il en résulte que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n(y)$ est un compact non vide qui est acyclique d'après le théorème B des préliminaires du chapitre I. De plus le graphe de la multi-application $y \rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n(y)$ est fermé comme intersection des graphes des multi-applications $y \rightarrow S_n(y)$. Nous allons montrer que $S(y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n(y)$, ce qui achèvera la démonstration du théorème 2.12.

Soit $x \in S(y)$. On a $\|x\|_{\infty} \leq r_0 + rT$.

Donc $[yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)] \in X$ pour tout $t \in [0, T]$.

Comme $\Gamma(a) \subset G_n(a) = \Gamma_n(a)$ pour tout $a \in X$, on en déduit que x vérifie l'équation (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Inversement, soit $x \in \bigcap S_n(y)$. Pour presque tout t et tout n on a :

$$\dot{x}(t) \in G_n(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)).$$

Donc

$$\dot{x}(t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)).$$

D'après les propriétés (2) et (3) de la proposition 2.19., on en déduit $\dot{x}(t) \in \Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m))$.

Donc $x \in S(y)$.

—————X

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.13.

Soit π l'application de $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\pi(x) = x(T)$. On a $A(y) = \pi(S(y))$; comme $S(y)$ est un compact acyclique non vide, c'est un compact connexe non vide ; donc l'image $A(y) = \pi(S(y))$ est un compact connexe non vide.

La multi-application $\pi \circ S = A$ est s.c.s. comme composée d'une multi-application s.c.s. et d'une fonction continue.

—————X

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.14.

Les solutions de l'équation :

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \quad 0 \leq t \leq T$$

vérifient $\|\dot{x}(t)\| \leq \alpha + \beta\|x(t)\|$ pour presque tout t d'où

$$\|x(t) - x_0\| \leq (\alpha + \beta\|x_0\|)t + \beta \int_0^t \|x(s) - x_0\| ds$$

et donc $\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \frac{\alpha + \beta\|x_0\|}{\beta} (e^{\beta T} - 1) = k$ pour $t \in [0, T]$.

Il en résulte qu'en modifiant $\Gamma(t,a)$ en dehors de l'ensemble $[0,T] \times \bar{B}(0,k)$ on ne change pas l'ensemble des solutions. On peut donc supposer que Γ reste bornée sur $\mathbb{R}^{n+1}$. En posant $\xi = (t,x)$ et $\hat{\Gamma}(\xi) = \{1\} \times \Gamma(\xi)$, on se ramène à l'étude de l'équation $\dot{\xi}(t) \in \hat{\Gamma}(\xi(t))$, $\xi(0) = (0, x_0)$ à laquelle on applique le théorème 2.12.

~~—X—~~

REMARQUE 2.29.

Dans le cas d'une équation différentielle multivoque ordinaire, la connexité de l'ensemble des états accessibles a été établie par KIKUCHI [15]. La connexité de l'ensemble des trajectoires dans le cas de la dimension infinie a été démontrée par VALADIER [16].

§ 3 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES MULTIVOQUES SUR LES VARIETES.

Soit V une variété compacte de dimension n et de classe $\mathcal{C}^2$. Comme d'habitude, on note $T_v V$ l'espace tangent à V au point $v \in V$, et on note TV le fibré tangent à V .

Comme V est compacte, il existe une structure uniforme et une seule sur V . Pour tout $t_0 > 0$, on peut considérer l'espace $C(0, t_0; V)$ des fonctions continues de $[0, t_0]$ dans V , muni de la topologie de la convergence uniforme.

Il existe au moins un plongement $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k > n$) ([13], théorème 3.1.1.). Notons $\text{Lip}_\phi(0, t_0; V)$ le sous-ensemble de $C(0, t_0; V)$ formé des fonctions x telles que $\phi \circ x$ soit lipschitzienne de $[0, t_0]$ dans $\mathbb{R}^k$. On vérifie facilement, grâce à la compacité de V , que si $\phi' : V \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ est un autre plongement, on a : $\text{Lip}_{\phi'}(0, t_0; V) = \text{Lip}_\phi(0, t_0; V)$. On peut donc parler de l'ensemble $\text{Lip}(0, t_0; V)$ des fonctions lipschitziennes de $[0, t_0]$ dans V sans préciser le plongement. Si $x \in \text{Lip}(0, t_0; V)$ et si $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ est un plongement, il existe un ensemble de mesure nulle $N \subset [0, t_0]$ tel que $\phi \circ x$ soit dérivable sur $[0, t_0] \setminus N$. On vérifie facilement que si $t \in [0, t_0] \setminus N$ et si $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte locale au voisinage du point $x(t)$, alors $\alpha \circ x$ est dérivable au point t . Donc si $x \in \text{Lip}(0, t_0; V)$ la dérivée $\dot{x}(t)$ est définie pour presque tout $t \in [0, t_0]$.

Pour tout $v \in V$ et tout $t \in [0, t_0]$, on se donne un convexe compact non vide, $\Gamma(t, v)$, dans l'espace tangent $T_v V$ au point v . On suppose que :

$$G = \{(t, (v, \xi)) \in [0, t_0] \times TV \mid \xi \in \Gamma(t, v)\}$$

est un compact de $[0, t_0] \times TV$.

THEOREME 2.30.

Pour tout $v \in V$, l'ensemble $\mathcal{C}(v)$ des solutions de l'équation différentielle multivoque :

$$(1) \quad \begin{cases} x \in \text{Lip}(0, t_0; V) & , \quad x(0) = v, \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) & \text{pour presque tout } t \in [0, t_0] \end{cases}$$

est un compact acyclique non vide de $C(0, t_0; V)$.

En outre, $v \rightarrow \mathcal{C}(v)$ est une multi-application s.c.s. de V dans $C(0, t_0; V)$.

DEMONSTRATION

On peut supposer que la variété V est plongée dans $\mathbb{R}^k$; on identifie V et son plongement.

Il existe un voisinage ouvert Ω de V dans $\mathbb{R}^k$ tel que la projection orthogonale $r : \Omega \rightarrow V$ soit définie et de classe $\mathcal{C}^1$ (prendre pour Ω un voisinage tubulaire de V suffisamment petit, cf. BERGER-GOSTIAUX [13], théorème 2.7.12).

Soit $C = \sup \{ \|\xi\| \mid \xi \in \Gamma(t,v), (t,v) \in [0,t_0] \times V \}$.

Soit Γ_1 la multi-application de $[0,t_0] \times \mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ définie par :

$$\Gamma_1(t,a) = \Gamma(t,r(a)) \quad \text{si} \quad a \in \Omega$$

$$\Gamma_1(t,a) = \bar{B}(0,C) \quad \text{si} \quad a \notin \Omega$$

$\Gamma_1(t,a)$ est un convexe compact non vide inclus dans $\bar{B}(0,C)$ pour tout $t \in [0,t_0]$ et tout $a \in \mathbb{R}^k$ et il est immédiat que Γ_1 est s.c.s. .

On peut donc appliquer à Γ_1 le théorème 2.12.

Pour $a \in \mathbb{R}^k$ soit $\mathcal{C}_1(a)$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle multivoque :

$$(2) \quad \begin{cases} x : [0,t_0] \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ absolument continue, } x(0) = a \\ \dot{x}(t) \in \Gamma_1(t,x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0,t_0] \end{cases}$$

D'après le théorème 2.12., on sait que pour tout $a \in \mathbb{R}^k$, $\mathcal{C}_1(a)$ est un compact acyclique non vide et que $\mathcal{C}_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{C}(0,t_0;\mathbb{R}^k)$ est s.c.s. .

Pour démontrer le théorème 2.30., il suffit donc de vérifier que pour tout $v \in V$, $\mathcal{C}_1(v)$ est contenu dans $\mathcal{C}(0,t_0;V)$.

Soit x une solution de (2). Soit

$$\tau_0 = \sup \{ \tau \in [0,t_0] \mid x(t) \in \Omega \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau \} ,$$

comme x est continu, comme $x(0) \in \Omega$, comme Ω est ouvert, on a $\tau_0 > 0$. Soit :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} d(x(t),V)^2 .$$

Pour $0 \leq t < \tau_0$ on a :

$$\varphi(t) = (x(t) - y(t))^2 \quad \text{avec} \quad y(t) = r(x(t))$$

Sur $[0, \tau_0[$ la fonction φ est presque partout différentiable, et presque partout :

$$\dot{\varphi}(t) = \langle \dot{x}(t) - \dot{y}(t), x(t) - y(t) \rangle .$$

Comme $y(t) \in V$ pour tout $0 \leq t < \tau_0$, on a $\dot{y}(t) \in T_{y(t)}V$. D'après la définition de Γ_1 et d'après (2), on a :

$$\dot{x}(t) \in \Gamma_1(t, x(t)) = \Gamma(t, y(t)) \subset T_{y(t)}V .$$

Donc $\dot{x}(t) - \dot{y}(t) \in T_{y(t)}V$. Comme $y(t)$ est la projection orthogonale de $x(t)$ on a :

$$\dot{\varphi} = \langle \dot{x} - \dot{y}, x - y \rangle = 0 .$$

Donc, $\varphi(t) = \varphi(0) = 0$ pour tout $t \in [0, \tau_0[$.

Donc, $x(t) \in V$ pour tout $t \in [0, \tau_0]$.

Pour achever la démonstration du théorème 2.30. il suffit donc de montrer que $\tau_0 = t_0$. Supposons $\tau_0 < t_0$. Comme x est continu, comme Ω est ouvert, comme $x(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, \tau_0]$, il existe $\tau_1 > \tau_0$ tel que $x(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, \tau_1]$; ce qui contredit la définition de τ_0 .

—X—

CHAPITRE III

APPLICATIONS

En utilisant les outils construits au chapitre I, et les résultats d'acyclicité démontrés au chapitre II, on développe dans ce chapitre quelques applications qui nous paraissent typiques.

§ 1 - RESULTATS D'EXISTENCE POUR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES
MULTIVOQUES

On reprend les notations du théorème 2.12.

On note $\tau_1, \dots, \tau_m$ des réels positifs et on pose $\tau = \sup (\tau_1, \dots, \tau_m)$.
 T désigne un nombre > 0 .

On note Γ une multi-application s.c.s. de $\mathbb{R}^{nm}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ est s.c.s. à valeurs convexes compactes non vides.} \\ \text{Il existe } c_0 > 0 \text{ tel que } \|b\| \leq c_0 \text{ pour tout} \\ a \in \mathbb{R}^{nm} \text{ et tout } b \in \Gamma(a). \end{array} \right.$$

Pour tout $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$, on note $S(y)$ l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle multivoque avec retards suivante (pour yx voir notation 2.11) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in C(0, T; \mathbb{R}^n) \text{ , } x \text{ absolument continue, } x(0) = y(0) \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

On peut bien sur considérer des équations sans retards, ou des équations "univoques" avec retards, ou des équations univoques sans retards. Par exemple, pour obtenir des équations sans retards, il suffit de faire $m = 1$ et $\tau_1 = 0$. On a alors $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et l'équation (2) s'écrit :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in C(0, T; \mathbb{R}^n) \text{ , } x \text{ absolument continue, } x(0) = y \in \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] . \end{array} \right.$$

Le théorème 2.12. affirme que la multi-application $y \rightarrow S(y)$ de $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ dans $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ est s.c.s. à valeurs compactes acycliques non vides, et que si $\mathcal{B}$ est borné, $S(\mathcal{B})$ est relativement compact. Soit k un entier ≥ 1 et r une application continue de $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^k$. Par exemple on peut prendre $k = n$ et

$$(4) \quad r(x) = r_T(x) = x(T).$$

La multi-application $r \circ S$ n'est pas, en général, à valeurs acycliques ; même si r est linéaire, il y a des contre exemples simples.

Cependant, nous avons vu au chapitre I que les multi-applications du type $r \circ S$ avec r univoque continue et S multivoque acyclique ont dans une large mesure les mêmes propriétés de surjectivité, de points fixes, de degré que les multi-applications à valeurs convexes ou à valeurs acycliques. Par exemple, on a :

PROPOSITION 3.2.

Soit F un rétracte absolu compact contenu dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $m = 1$, $\tau_1 = 0$ et que :

$$(5) \quad y \in F \text{ et } x \text{ solution de (3) impliquent } x(T) \in F.$$

Alors l'équation $\dot{x} \in \Gamma(x)$ a une solution périodique de période T .

DEMONSTRATION

Soit, comme ci-dessus, $S(y)$ l'ensemble des solutions de (3), et r_T la fonction définie par $r_T(x) = x(T)$. La multi-application composée $r_T \circ S$ vérifie $r_T(S(F)) \subset F$ et donc il existe $y \in F$ tel que $y \in r_T(S(y))$ (utiliser une rétraction ρ d'une boule $\bar{B}(0, r)$, $r > 0$, sur F et appliquer le théorème 1.15. à la multi-application $r_T \circ S \circ \rho$). Donc il existe une solution x de (3) vérifiant $x(0) = y$ et $x(T) = y$.

On obtient une solution périodique de $\dot{x} \in \Gamma(x)$ en prolongeant x par périodicité sur tout $\mathbb{R}$.

— x —

Le théorème suivant est écrit en termes de surjectivité, on pourrait aussi l'écrire en termes de théorie du contrôle comme un problème d'accessibilité (voir § 2). On revient aux notations et hypothèses de l'équation (2), énoncées au début du paragraphe.

THEOREME 3.3.

Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^{nm}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x = \sigma(y)$ la solution de l'équation :

$$(6) \quad x(0) = y(0) \quad , \quad \dot{x}(t) = L(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \quad .$$

Soit $\Sigma(y)$ l'ensemble des solutions x de l'équation :

$$(7) \quad \begin{cases} x(0) = y(0) \quad , \quad x \text{ absolument continue et pour presque tout } t \in [0, T] \\ \dot{x}(t) \in L(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) + \Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \end{cases}$$

Si F est un sous-espace vectoriel de $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ tel que $r(\sigma(F)) = \mathbb{R}^k$, alors $r(\Sigma(F)) = \mathbb{R}^k$. (r désigne ici une application linéaire continue de $C(0, T; \mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^k$).

DEMONSTRATION

Comme r et σ sont linéaires, $r \circ \sigma$ est linéaire.

Donc il existe un sous-espace F_1 de F tel que $\dim F_1 = k$ et $r(\sigma(F_1)) = \mathbb{R}^k$.

Si nous montrons que $r(\Sigma(F_1)) = \mathbb{R}^k$ alors, a fortiori, $r(\Sigma(F)) = \mathbb{R}^k$.

Il suffit donc de démontrer le théorème avec l'hypothèse supplémentaire $\dim F = k$.

Admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME 3.4.

Pour tout $y \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \Sigma(y)$, et pour tout $z = \sigma(y)$ on a :

$$(8) \quad \|x-z\|_{\infty} \leq k_0 \quad \text{avec} \quad k_0 = C_0/b (e^{bT}-1)$$

où C_0 est la constante introduite dans (1) et b une constante > 0 .

Soit $i : \mathbb{R}^k \rightarrow F$ une bijection linéaire. Comme $r \circ \sigma \circ i$ est surjectif, c'est une bijection linéaire.

$$(9) \quad \text{Soit } k_1 \text{ un réel strictement positif .}$$

Soit $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^k$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $(k_1 + k_0 \|r\|) \|r \circ \sigma \circ i\|^{-1}$. Soit :

$$K = \{(\lambda, x) \in \bar{\Omega}_0 \times C(0, T; \mathbb{R}^n) \mid x \in \Sigma(i(\lambda))\} . \text{ Soit } \Omega = r(\sigma(i(\Omega_0))) .$$

Comme $r \circ \sigma \circ i$ est une bijection linéaire, c'est un homéomorphisme. Donc $\bar{\Omega} = r \circ \sigma \circ i(\bar{\Omega}_0)$. Soit $\varphi : K \rightarrow \bar{\Omega}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda, x) = r \circ \sigma \circ i(\lambda)$ et soit $\Psi : K \rightarrow \mathbb{R}^k$ la fonction définie par $\Psi(\lambda, x) = r(x)$.

Pour tout $\mu \in \bar{\Omega}$, on a $\varphi^{-1}(\mu) = \{\lambda\} \times \Sigma(i(\lambda))$ pour $\lambda = (r \circ \sigma \circ i)^{-1}(\mu)$. Donc $\varphi^{-1}(\mu)$ est acyclique pour tout $\mu \in \bar{\Omega}$. Nous allons appliquer au couple (φ, Ψ) la théorie du degré développé au chapitre I.

Pour tout $(\lambda, x) \in K$, on a $x \in \Sigma(i(\lambda))$, donc $\|x - \sigma(i(\lambda))\|_\infty \leq k_0$ d'après le lemme 3.4., donc $\|r(x) - r(\sigma(i(\lambda)))\| \leq \|r\| k_0$, c'est-à-dire :

$$(10) \quad \|\Psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x)\| \leq \|r\| k_0 \text{ pour tout } (\lambda, x) \in K .$$

D'autre part, pour tout $(\lambda, x) \in K$ on a :

$$(11) \quad \|\varphi(\lambda, x)\| = \|r \circ \sigma \circ i(\lambda)\| \geq \|(r \circ \sigma \circ i)^{-1}\|^{-1} \|\lambda\| .$$

Soit $(\lambda, x) \in K$ tel que $\varphi(\lambda, x) \in \partial\Omega$. On a $r \circ \sigma \circ i(\lambda) \in \partial\Omega$. Comme $r \circ \sigma \circ i$ est un homéomorphisme, on a $\lambda \in \partial\Omega_0$, c'est-à-dire :

$$(12) \quad \|\lambda\| = (k_1 + \|r\| k_0) \|r \circ \sigma \circ i\|^{-1} .$$

Donc, pour tout $\beta \in [0, 1]$ et tout $(\lambda, x) \in K$, on a d'après (10), (11) et (12) :

$$(13) \quad \varphi(\lambda, x) \in \partial\Omega \text{ implique } \|\beta\varphi(\lambda, x) + (1-\beta)\Psi(\lambda, x)\| \geq k_1 .$$

Cette relation prouve que le couple (φ, Ψ) est homotope au couple (φ, φ) par rapport à n'importe quel point $a \in \mathbb{R}^k$ tel que $\|a\| < k_1$. D'où, si $\|a\| < k_1$, $d(a, (\varphi, \Psi), \Omega) = d(a, (\varphi, \varphi), \Omega) = +1$. (Cf. chapitre I).

Donc $a \in \Psi(K)$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \bar{\Omega}$, $y = i(\lambda)$ et $x \in \Sigma(y)$ tels que $r(x) = a$. Donc $a \in r(\Sigma(F))$ puisque $i(\lambda) \in F$. En faisant varier a et la constante k_1 introduite plus haut (cf. (9)) on obtient $\mathbb{R}^k = r(\Sigma(F))$.

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme 3.4.

DEMONSTRATION DU LEMME 3.4.

Avec les notations du lemme 3.4., on a :

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) - \dot{x}(t) \in L[(yz-yx)(t-\tau_1), \dots, (yz-yx)(t-\tau_m)] \\ \quad -\Gamma(yx(t-\tau_1), \dots, yx(t-\tau_m)) \end{cases}$$

Posons $u(t) = x(t) - z(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, et $u(t) = 0$ pour $-\tau \leq t \leq 0$. On a, d'après la définition 2.11. (chapitre II), $u(t) = yx(t) - yz(t)$ pour tout $t \in [-\tau, T]$. D'après (1) et (14), on a, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$(15) \quad \|\dot{u}(t)\| = \|\dot{z}(t) - \dot{x}(t)\| \leq \|L\| [\|u(t-\tau_1)\| + \dots + \|u(t-\tau_m)\|] + C_0$$

Si $\|L\| = 0$ on en déduit que $\|u(t)\| \leq C_0 t$ puisque $u(0) = 0$.

Si $\|L\| > 0$, le lemme 3.4. résulte de (15) et du lemme suivant :

LEMME 3.5.

Soit v une fonction absolument continue de $[-\tau, T]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Posons $\alpha(t_0) = \sup \{\|v(t)\| \mid -\tau \leq t \leq t_0\}$.

Supposons qu'il existe $a \geq 0$ et $b > 0$ tels que :

$$(16) \quad \|\dot{v}(t)\| \leq a + b\alpha(t)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. Alors, on a :

$$(17) \quad \|v(t)\| \leq \frac{a}{b} (e^{bt} - 1) + \alpha(0)e^{bt} \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

DEMONSTRATION

D'après (16) la fonction v est lipschitzienne de rapport $a + b \alpha(T)$. Donc la fonction α est lipschitzienne de même rapport sur $[0, T]$. Donc α est presque partout dérivable. Comme α est croissante, on a $\dot{\alpha} \geq 0$. Soit t_0 un point de $[0, T[$ où α et v sont dérivables.

On a $v(t_0+h) = v(t_0) + \dot{v}(t_0)h + |h|\varepsilon(h)$ avec $\|\varepsilon(h)\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Or, on a pour $h \geq 0$:

$$\alpha(t_0+h) = \sup[\alpha(t_0), \sup\{\|v(t)\| \mid t_0 \leq t \leq t_0+h\}].$$

Donc $\alpha(t_0+h) \leq \sup[\alpha(t_0), \|v(t_0)\| + \|\dot{v}(t_0)\|h + h\eta(h)]$

avec $\eta(h) = \sup\{\|\varepsilon(u)\| \mid 0 \leq u \leq h\}$. Comme $\eta(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$,

comme $\|v(t_0)\| \leq \alpha(t_0)$, on en déduit (pour $h > 0$) :

$$\frac{\alpha(t_0+h) - \alpha(t_0)}{h} \leq \|\dot{v}(t_0)\| + \eta(h)$$

d'où $\dot{\alpha}(t_0) \leq \|\dot{v}(t_0)\|$.

On remarque aussi que $\|v(t_0)\| < \alpha(t_0)$ implique $\dot{\alpha}(t_0) = 0$.

On a donc pour presque tout $t \in [0, T]$, d'après (16) :

$$0 \leq \dot{\alpha}(t) \leq \|\dot{v}(t)\| \leq a + b \alpha(t).$$

Donc, d'après un résultat classique que nous avons déjà utilisé

$$\alpha(t) \leq \frac{a}{b} (e^{bt} - 1) + \alpha(0)e^{bt}.$$

D'où, l'inégalité (17), puisque $\|v(t)\| \leq \alpha(t)$.

— x —

Donnons maintenant quelques cas particuliers intéressants du théorème 3.3.

THEOREME 3.6.

Soit Γ une multi-application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie (1).
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit r une application linéaire continue de $C(0,T;\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^k$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, soit $\Sigma(y)$ l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle multivoque :

$$x(0) = y, \dot{x}(t) - Lx(t) \in \Gamma(x(t)) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Soit σ l'application linéaire $\sigma : y \rightarrow e^{tL}y$. Si $r(\sigma(F)) = \mathbb{R}^k$, alors $r(\Sigma(F)) = \mathbb{R}^k$.

REMARQUE 3.7.

Pour $F = \mathbb{R}^n$, on retrouve les résultats de Cellina [3], Lasota et Opial [9].

DEMONSTRATION

On applique le théorème 3.3. avec $m = 1$ et $\tau_1 = 0$, on remarque que $\tau = \sup(\tau_i) = 0$ et que $C(-\tau, 0; \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
L'équation (6) devient l'équation :

$$x(0) = y \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{x}(t) = Lx(t)$$

dont la solution est donnée par $x(t) = e^{tL}y$. D'où le théorème 3.6.

THEOREME 3.8.

Soit A et B deux applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même.
Soit $T > 0$ tel que : pour tout $z \in \mathbb{R}^p$, l'équation différentielle linéaire :

$$(19) \quad \begin{cases} x(0) = 0, & x(T) = z \\ \ddot{x}(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) & \text{pour tout } t \in [0, T] \end{cases}$$

admette une solution. Alors pour tout $z \in \mathbb{R}^p$, l'équation

$$(20) \quad \begin{cases} x(0) = 0, & x(T) = z \\ \ddot{x}(t) - Ax(t) - B\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t), \dot{x}(t)) & \text{pour presque tout } t \in [0, T] \end{cases}$$

(où Γ est une multi-application de $\mathbb{R}^{2p}$ dans $\mathbb{R}^p$ qui vérifie (1)) admet une solution.

DEMONSTRATION

On va appliquer le théorème 3.6. Considérons les systèmes :

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = Au + Bv \end{cases} \quad \begin{matrix} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{matrix}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} - Au - Bv \in \Gamma(u, v) \end{cases} \quad \begin{matrix} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{matrix}$$

On applique à ces systèmes le théorème 3.6. avec $n = 2p$ et en prenant pour sous-espace $F \subset \mathbb{R}^n$:

$$F = \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \mid u_0 = 0\} .$$

On prend comme application $r : C(0, T; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p$ l'application définie par :

$$\text{si } w \in C(0, T; \mathbb{R}^n) , w(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$$

$$r(w) = u(T) .$$

Donc, d'après le théorème 3.6., si

$$\mathbb{R}^p = \{ u(T) \mid (u, v) \text{ vérifie (21) avec } u_0 = 0 \text{ et } v_0 \text{ quelconque} \}$$

alors :

$$\mathbb{R}^p = \{ u(T) \mid (u, v) \text{ vérifie (22) avec } u_0 = 0 \text{ et } v_0 \text{ quelconque} \} .$$

Etant donné l'équivalence de (19) (resp. 20) et de (21) (resp. 22) modulo $u_0 = 0$, on a donc le théorème 3.8.

— X —

REMARQUE 3.9.

On pourrait aussi donner une démonstration du théorème 3.8. dans le style habituel des problèmes aux limites. Voir à ce sujet la partie III.1. .

EXEMPLE 3.10.

Si $T \neq k\pi$ pour tout entier k , l'équation

$$(23) \quad \begin{cases} x(0) = a & , & x(T) = b \\ \ddot{x} + x \in \Gamma(x) \end{cases}$$

a une solution.

Dans les théorèmes précédents, on peut prendre comme application linéaire $r : C(0, T; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^k$ l'application $r_T : x \rightarrow x(T)$ (avec $k = n$). Cette application a des propriétés particulières.

La famille $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ permet de fabriquer une homotopie. Plus précisément :

THEOREME 3.11.

Soit Γ une multi-application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie (1). Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \Omega$. On suppose que :

$$(24) \quad \begin{cases} x(0) \in \partial\Omega \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \end{cases}$$

implique $x(t) \neq a$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors l'équation

$$(25) \quad \begin{cases} x(0) \in \Omega & , & x(T) = a \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \end{cases}$$

admet une solution.

DEMONSTRATION

Soit X l'ensemble des solutions x de l'équation

$$(26) \quad \begin{cases} x(0) \in \bar{\Omega} \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \end{cases}$$

Soit $\varphi : X \rightarrow \bar{\Omega}$ l'application définie par $\varphi(x) = x(0)$.

D'après les résultats du chapitre II, l'espace X est un compact non vide de $C(0,T;\mathbb{R}^n)$ et l'application φ vérifie :

pour tout $\omega \in \bar{\Omega}$, $\varphi^{-1}(\omega)$ est acyclique.

Pour tout $t \in [0,T]$, soit Ψ_t l'application de X dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\Psi_t(x) = x(t)$. D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a :

$\varphi(x) \in \partial\Omega$ implique $\Psi_t(x) \neq a$ pour tout $t \in [0,T]$.

Donc, d'après les résultats du chapitre I, puisque $a \in \Omega$, et $\Psi_0 = \varphi$, on a :

$$d(a, [\varphi, \Psi_T], \Omega) = d(a, [\varphi, \Psi_0], \Omega) = d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = +1.$$

D'où $a \in \Psi_T(X)$, c'est-à-dire : il existe x solution de (26) telle que $x(0) \in \Omega$ et $x(T) = a$.

—X—

DEFINITION 3.12.

Soit Γ une multi-application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert borné non vide à bord orienté de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$. On dira que Γ dilate Ω si pour tout $a \in \partial\Omega$, $\Gamma(a)$ est contenu dans le demi-espace ouvert défini par le plan tangent à Ω au point a qui contient la normale extérieure.

THEOREME 3.13.

Soit Γ et Ω comme dans la définition 3.12.

On suppose que Γ vérifie (1). Soit X l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x(0) \in \bar{\Omega} \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0,T] \end{cases}$$

Alors on a : $\bar{\Omega} \subset \{x(t) \mid x \in X\}$ pour tout $t \in [0,T]$.

DEMONSTRATION

D'après les résultats du chapitre II, X est un compact dans $C(0,T;\mathbb{R}^n)$. Donc l'ensemble $A_t = \{x(t) \mid x \in X\}$ est un compact. Il suffit donc de démontrer l'inclusion $\Omega \subset A_t$.

Soit $a \in \Omega$. Montrons que $a \in A_t$. Cela résulte du théorème 3.11 et du lemme suivant :

LEMME 3.14.

Sous les hypothèses du théorème 3.13. l'équation :

$$(27) \quad x(0) \in \partial\Omega, \quad \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0,T]$$

implique $x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ pour tout $t \in [0,T]$.

DEMONSTRATION

Soit x une solution de (27).

Soit t_0 la borne supérieure de l'ensemble :

$$J = \{t \in [0,T] \mid x(\tau) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ pour tout } \tau \in [0,t]\}.$$

D'après (27), $0 \in J$. D'après la continuité de x , J est fermé donc $t_0 \in J$. Le lemme est équivalent à : $t_0 = T$. Raisonnons par l'absurde. Supposons $t_0 < T$.

Si $x(t_0) \notin \bar{\Omega}$, on a $x(t_0+h) \notin \bar{\Omega}$ pour h suffisamment petit, d'après la continuité de x . Ce qui contredit la définition de t_0 comme borne supérieure de J .

Supposons maintenant que $x(t_0) \in \partial\Omega$. Il existe une carte locale φ d'un voisinage W de $x(t_0)$ sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(W \cap \Omega) = U \cap H_-$ avec $H_- = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < 0\}$. En transposant (27) par φ , on constate que la fonction $y(t) = \varphi(x(t_0+t))$ vérifie pour t suffisamment petit une équation différentielle :

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(t) \in G(y(t))$$

avec $G(0) \subset H_+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 > 0\}$.

Comme G est s.c.s. et y continu, on a $\dot{y}_1(t) > 0$ pour t suffisamment petit. En transportant ce résultat par φ^{-1} , on obtient que $x(t_0+t) \notin \bar{\Omega}$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Même contradiction. Le lemme est démontré.

Soit Γ une multi-application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie (1).
 Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{C}(a)$ l'ensemble des solutions x de l'équation différentielle :

$$x(0) = a \quad , \quad \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ pour presque tout } t \geq 0 \quad .$$

Notons $\phi_t(a) = \{x(t) \mid x \in \mathcal{C}(a)\}$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$(28) \quad \text{on pose } \phi_t(A) = \bigcup_{a \in A} \phi_t(a) \quad .$$

La famille $(\phi_t)_{t \geq 0}$ constitue un semi-groupe dans $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$:

$$(29) \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R}^n, \text{ tous } t, s \geq 0, \text{ on a : } \phi_{t+s}(A) = \phi_t(\phi_s(A)) \quad .$$

C'est un semi-groupe lipschitzien en ce sens que :

$$(30) \quad d(\phi_{t+s}(A), \phi_t(A)) \leq s c_0$$

pour tous $t, s \geq 0$, et tout $A \subset \mathbb{R}^n$ (et où c_0 est la constante qui figure dans l'hypothèse (1)). C'est un problème ouvert (à notre connaissance) de savoir si les propriétés (28, 29, 30) et le fait que $a \mapsto \phi_t(a)$ soit semi-continue supérieurement à valeurs compactes non vides suffisent à caractériser de tels semi-groupes.

On peut à l'aide du semi-groupe (ϕ_t) réexprimer les théorèmes 3.11 et 3.13., ce que nous laissons au lecteur. Pour varier, c'est un résultat voisin du théorème 3.13. que nous allons écrire à l'aide de (ϕ_t) :

THEOREME 3.15.

Soit $\alpha \geq 0$ tel que

$$a.b \geq -\alpha \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^n \text{ et tout } b \in \Gamma(a).$$

Alors pour tout $t_0 \geq 0$ et tout $\rho > \sqrt{2\alpha t_0}$, on a :

$$\phi_{t_0}(\bar{B}(0, \rho)) \supset \bar{B}(0, \sqrt{\rho^2 - 2\alpha t_0})$$

(avec $\bar{B}(0, \rho) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\| \leq \rho\}$).

DEMONSTRATION

Supposons $t_0 > 0$.

Soit x une solution de $\dot{x} \in \Gamma(x)$. On a $x \cdot \dot{x} \geq -\alpha$, donc $x^2(t) \geq x^2(0) - 2\alpha t$. Donc si $x^2(0) = \rho^2$, c'est-à-dire si $x(0) \in \partial B(0, \rho)$, on a $x(t) \neq a$ pour tout $0 \leq t \leq t_0$ et tout $a \in B(0, \sqrt{\rho^2 - 2\alpha t_0})$. D'où, d'après le théorème 3.11. :

$\phi_{t_0}(B(0, \rho)) \supset B(0, \sqrt{\rho^2 - 2\alpha t_0})$. Comme ϕ_{t_0} est s.c.s. on en déduit 3.15. ~~X~~

Dans ce paragraphe, nous avons mis l'accent sur les équations différentielles multivoques. On peut obtenir des résultats du même type pour les équations intégrales puisque la propriété utile dans les démonstrations est l'acyclicité de l'ensemble des solutions. Par exemple, on peut remplacer dans le théorème 3.11. l'équation (24) par l'équation intégrale :

$$(31) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau \quad \text{avec} \quad x_0 \in \partial\Omega$$

et (25) bien sur par :

$$(32) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau \quad \text{avec} \quad x_0 \in \Omega.$$

Cette propriété d'acyclicité qui nous a permis d'appliquer les résultats du chapitre I, permet aussi d'appliquer les résultats de Granas et ceux d'Eilenberg et Montgomery.

Par exemple, soit K une fonction continue bornée de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in C(0, T; \mathbb{R}^n)$, soit $\Delta(u)$ l'ensemble des solutions x de l'équation intégrale :

$$(33) \quad x(t) = \int_0^t K(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

D'après les résultats du chapitre II, $\Delta(u)$ est un compact acyclique non vide. En outre $\Delta(u)$ est contenu dans le convexe C :

$$C = \{x \in C(0, T; \mathbb{R}^n) \mid x \text{ lipschitzien de rapport } \|K\|_\infty \text{ et } x(0) = 0\}$$

qui est un compact d'après le théorème d'Ascoli. On en déduit que Δ est s.c.s. car son graphe est fermé.

THEOREME 3.16.

Soit F un opérateur (linéaire ou non) continu de $C(0,T;R^n)$ dans lui-même. Il existe une fonction x qui vérifie (33) avec $u = F(x)$.

DEMONSTRATION

La multi-application $x \rightarrow \Delta(F(x))$ envoie C dans lui-même, et vérifie sur C les hypothèses du théorème 2 d'Eilenberg-Montgomery [6] ; donc elle admet un point fixe (C.Q.F.D.).

REMARQUE 3.17.

Dans le théorème 2 d'Eilenberg et Montgomery il faut prendre $C = M$, $T = \Delta \circ F$ et $r = Id$.

Pour terminer ce paragraphe, donnons maintenant, comme application du théorème 2.30 du chapitre II, un résultat d'existence de solutions périodiques d'équations différentielles multivoques sur une variété.

Les notations sont celles du paragraphe 3 du chapitre II ; la cohomologie de Čech sera prise ici à coefficients dans Q .

THEOREME 3.18.

Si la caractéristique d'Euler-Poincaré de V , $\chi(V)$, est non nulle, il existe, pour tout τ , $0 < \tau \leq t_0$, une solution x de l'équation :

$$\begin{cases} x \in \text{Lip} (0, t_0; V) & , \quad x(0) = x(\tau) \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) & \text{pour presque tout } t \in [0, t_0] \end{cases}$$

DEMONSTRATION

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\begin{cases} x \in \text{Lip} (0, t_0; V) \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) & \text{pour presque tout } t \in [0, t_0] \end{cases}$$

on a $\mathcal{X} = \bigcup_{v \in V} \mathcal{C}(v)$ et donc $\mathcal{X}$ est un compact de $C(0, t_0; V)$.

Sur $\mathcal{X}$ on définit, pour $t \in [0, t_0]$, la fonction

$$\varphi_t : \mathcal{X} \longrightarrow V \quad \text{par} \quad \varphi_t(x) = x(t).$$

D'après le théorème 2.30., la fonction φ_0 est topologiquement monotone, et donc, suivant Eilenberg et Montgomery ([6]) on peut définir le nombre de Lefschetz du couple (φ_0, φ_t) :

$$\Lambda(\varphi_0, \varphi_t) = \sum (-1)^i \text{trace} ((\varphi_0^*)^{-1} (\varphi_t^*))_i$$

ceci est bien défini puisque les $H^i(V)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur Q , nuls pour $i > n$.

Comme, d'autre part, il est immédiat que φ_τ et φ_0 sont homotopes, on a :

$$\Lambda(\varphi_0, \varphi_\tau) = \Lambda(\varphi_0, \varphi_0) = \sum (-1)^i \text{trace} (\text{id}_{H^i(V)}) = \chi(V).$$

Donc si $\chi(V) \neq 0$, φ_0 et φ_τ ont une coïncidence ; c'est-à-dire il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $x(0) = x(\tau)$.

—X—

§ 2 - LIEN AVEC LA THEORIE DU CONTROLE

En théorie du contrôle on étudie la situation suivante :

On se donne une fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ où K est un compact métrisable. On appelle contrôle une fonction mesurable $u : [0, T] \rightarrow K$. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles.

On appelle trajectoire associée au contrôle $u \in \mathcal{U}$ et au point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la solution x de l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ absolument continue de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \text{ et} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Naturellement, il faut faire suffisamment d'hypothèses de régularité sur f pour que l'équation différentielle (1) admette une solution x et une seule pour chaque $u \in \mathcal{U}$.

On note $\mathcal{C}(x_0)$ l'ensemble des trajectoires issues de x_0 , c'est-à-dire l'ensemble des solutions x de (1) lorsque u décrit $\mathcal{U}$. On appelle point accessible à partir de x_0 tout point de la forme $x(T)$ où x est une trajectoire issue de x_0 .

On note :

$$A(x_0) = \{x(T) \mid u \in \mathcal{U} \text{ et } x \text{ solution de (1)}\}$$

l'ensemble des points accessibles à partir de x_0 .

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. On note $A(X) = \bigcup_{x_0 \in X} A(x_0)$ l'ensemble des points accessibles à partir de X .

Un des objets de la théorie du contrôle est l'étude des ensembles accessibles $A(x_0)$, $A(X)$ pour x_0 ou X donné.

Or, on constate que pour décrire $\mathcal{C}(x_0)$ la connaissance de la multi-application suivante :

$$(2) \quad \Gamma : (t, a) \rightarrow \Gamma(t, a) = f(t, a, K) = \{f(t, a, k) \mid k \in K\}$$

est suffisante. Plus précisément on a :

PROPOSITION 3.19. (Filippov [18])

Si la fonction f est borélienne, l'ensemble $\mathcal{C}(x_0)$ des trajectoires issues de x_0 coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation différentielle multivoque suivante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ absolument continue de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0 \text{ et} \\ \dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] . \end{array} \right.$$

DEMONSTRATION

Si x est une solution de (1), il est évident d'après la définition (2) de Γ que x est une solution de (3). Soit x une solution de (3). Soit y une fonction borélienne qui coïncide avec $\dot{x}$ presque partout. Soit ϕ la multi-application de $[0, T]$ dans K définie par :

$$\phi(t) = \{k \in K \mid y(t) = f(t, x(t), k)\} .$$

Comme x est une solution de (3), $\Phi(t)$ est non vide pour presque tout $t \in [0, T]$. Comme x est continue, comme y et f sont boréliennes, le graphe de Φ est borélien. Il existe donc (lemme de Von Neumann ⁽¹⁾) une fonction mesurable $u : [0, T] \rightarrow K$ telle que : $u(t) \in \Phi(t)$ pour presque tout $t \in [0, T]$.
Donc :

$$x(0) = x_0, \text{ et } \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T].$$

— ~~x~~ —

Il résulte de la proposition que l'étude de $\mathcal{C}(x_0)$, $A(x_0)$, $A(X)$, se ramène à l'étude des solutions de certaines équations différentielles multivoques (3). Le paragraphe 1 constitue donc une contribution à l'étude des problèmes d'accessibilité en théorie du contrôle.

Dans le chapitre II et le paragraphe 1 de ce chapitre, nous avons fait constamment l'hypothèse que la multi-application Γ qui intervient dans l'équation différentielle multivoque (3) est à valeurs convexes fermées. Cette hypothèse est fréquente et naturelle en théorie du contrôle. Elle est destinée à écarter un phénomène nommé "relaxation" qui est bien représenté par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.20. (MacShane, Warga)

Supposons que la fonction f soit continue et que $f(.,., k)$ soit lipschitzienne de rapport c indépendant de $k \in K$. Alors l'ensemble $\mathcal{C}(x_0)$ des solutions de (1) (ou de (3) ⁽²⁾) est dense pour la topologie de la convergence uniforme dans l'ensemble des solutions de l'équation différentielle multivoque suivante :

$$(4) \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \text{ } x \text{ absolument continue de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^n \text{ et} \\ \dot{x}(t) \in \overline{\text{conv}} \Gamma(t, x(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0, T]. \end{cases}$$

où $\overline{\text{conv}} \Gamma(t, a)$ est l'enveloppe convexe fermée de $\Gamma(t, a)$.

(1) Voir [17] .

(2) qui est alors non vide car pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe une solution unique de (1) d'après les hypothèses sur f .

Si l'on ne suppose pas $\Gamma(t,a)$ convexe fermé pour tout $(t,a) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble $A(x_0)$ n'est pas en général fermé. La proposition 3.20 exprime une tendance à la "convexification" de Γ puisque, en particulier :

$$\overline{A(x_0)} = \{x(T) \mid x \text{ solution de (4)}\}.$$

D'autre part, l'hypothèse que $\Gamma(t,a)$ est convexe fermé pour tous t et a , n'implique pas que $A(x_0)$ soit convexe, ni même acyclique. Cette hypothèse de convexité ne rend donc pas triviale l'étude de $A(x_0)$.

Enfin, pour terminer ces remarques, énonçons une conséquence des résultats du chapitre II et de la proposition 3.19.

THEOREME 3.21.

Si la fonction f est continue et bornée et si pour tout $(t,a) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble $f(t,a,K)$ est convexe, alors l'ensemble $\mathcal{C}(x_0)$ des solutions de (1) est un compact acyclique non vide de $C(0,T;\mathbb{R}^n)$.

DEMONSTRATION

Pour appliquer le théorème 2.12. du chapitre II, il suffit de vérifier que la multi-application $\Gamma(t,a) = f(t,a,K)$ est s.c.s. . Comme Γ est bornée, il suffit de vérifier que son graphe est fermé.

Soit (t_i, a_i, y_i) une suite tendant vers (t,a,y) avec $y_i \in \Gamma(t_i, a_i)$.

Il existe une suite $k_i \in K$ telle que : $y_i = f(t_i, a_i, k_i)$. Suivant un ultrafiltre $k_i \rightarrow k$ et donc $y = f(t,a,k)$, soit $y \in \Gamma(t,a)$.

—————X—————

CHAPITRE IV

DEGRE POUR LES COUPLES EN DIMENSION INFINIE

§ 1 - CONSTRUCTION ET PROPRIETES DU DEGRE EN DIMENSION INFINIE

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Pour alléger les écritures, posons la définition suivante :

DEFINITION 4.1.

Nous appellerons d-quintuple la donnée de $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ où :

- (i) X est un espace topologique métrisable non vide.
- (ii) E est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$, métrisable, de dimension ≥ 1 .
- (iii) Ω est un ouvert non vide de E .
- (iv) φ est une application topologiquement monotone de X sur $\bar{\Omega}$ et de plus φ est propre (i.e. l'image réciproque de tout compact est compacte).
- (v) Ψ est une application continue de X dans E et $\Psi(X)$ est relativement compact.

Le chapitre qui suit est consacré à la construction du degré $d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega)$ pour tout d-quintuple $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ et tout point a de E tel que :

- (vi) $\varphi(x) \in \partial\Omega \Rightarrow \varphi(x) - \Psi(x) \neq a$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et Ω est borné, ce degré coïncidera avec celui qui a été défini au chapitre I.

Nous montrerons que le degré construit en dimension infinie possède les mêmes propriétés que le degré de Leray-Schauder pour les fonctions.

La construction se fait par approximation et passage à la limite à partir de la dimension finie comme dans le cas du degré pour les fonctions.

Pour tout d-quintuple et tout point a vérifiant (vi) on note

$$K = \varphi[(\varphi - \Psi)^{-1}(a)] \quad \text{et} \quad \tilde{X} = \varphi^{-1}(K) .$$

Comme φ est fermée, K est fermé et donc $\tilde{X}$ est fermé.

RESTRICTION A UN SOUS-ESPACE

Nous allons commencer par nous débarrasser de l'hypothèse Ω borné dans le cas $E = \mathbb{R}^n$.

LEMME 4.2.

Soit $(X, \mathbb{R}^n, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple et a un point de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (vi). Alors $d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], U)$ ne dépend pas de l'ouvert borné U tel que :

$$\Omega \cap (\Psi(X) + a) \subset U \subset \Omega .$$

Par définition, nous noterons ce nombre $d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega)$.

DEMONSTRATION

On vérifie immédiatement que $d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], U)$ est défini puisque $\varphi(x) - \Psi(x) = a$ entraîne $\varphi(x) \in \Omega \cap (\Psi(X) + a)$.

Soient alors U_1, U_2 deux ouverts vérifiant l'hypothèse du lemme, on peut toujours supposer que $U_1 \subset U_2$ et que U_2 est non vide (si U_2 est vide le résultat est trivial). Posons alors $F = \bar{U}_2 \setminus U_1$, on a $\varphi(x) - \Psi(x) \neq a$ pour tout x tel que $\varphi(x) \in F$ et donc d'après la propriété d'excision (théorème 1.4.) on a :

$$d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], U_2) = d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], U_1) .$$

Les trois lemmes qui suivent vont jouer un rôle fondamental pour la définition du degré en dimension infinie.

LEMME 4.3.

On identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$; soit Ω_0 un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $\alpha > 0$ et soit $\Omega = \Omega_0 \times]-\alpha, +\alpha[\subset \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $(X, \mathbb{R}^{n+1}, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi) et $\Psi(X) \subset \mathbb{R}^n$. Soit $X_0 = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_0)$ et φ_0, Ψ_0 les restrictions de φ, Ψ à X_0 . Alors $(X_0, \mathbb{R}^n, \Omega_0, \varphi_0, \Psi_0)$ est un d-quintuple pour lequel 0 vérifie (vi) et $d(0, [\varphi_0, \varphi_0 - \Psi_0], \Omega_0) = d(0, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega)$.

DEMONSTRATION

On vérifie facilement que $(X_0, \mathbb{R}^n, \Omega_0, \varphi_0, \Psi_0)$ est un d-quintuple. Pour le point (vi) il suffit de remarquer que $\partial\Omega_0$ est inclus dans $\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$. La suite de la démonstration est basée sur la suite exacte de Mayer-Vietoris.

Etablissons quelques notations et propriétés préliminaires.

Posons :

$$\Omega_+ = \Omega_0 \times]0, \alpha[\quad , \quad \Omega_- = \Omega_0 \times]-\alpha, 0[$$

$$\text{On a : } \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_+ \cup \bar{\Omega}_- \quad \text{et} \quad \bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}_+ \cap \bar{\Omega}_-$$

$$\text{Posons : } X_+ = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_+) \quad \text{et} \quad X_- = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_-)$$

$$\text{On a : } X = X_+ \cup X_- \quad \text{et} \quad X_0 = X_+ \cap X_- .$$

On note φ_+ et Ψ_+ les restrictions de φ et Ψ à X_+ , φ_- et Ψ_- les restrictions de φ et Ψ à X_- .

D'autre part, $\Psi(X) \subset \mathbb{R}^n$, on a immédiatement :

$$K = \varphi[(\varphi - \Psi)^{-1}(0)] \subset \Omega_0 .$$

$$\text{D'où} \quad \tilde{X} = \varphi^{-1}(K) \subset X_0 .$$

Montrons que $H^P(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K) = \{0\}$ pour tout $p \geq 0$.

Soit $r : [0, \alpha] \times \bar{\Omega}_+ \rightarrow \bar{\Omega}_+$ la fonction continue définie par :

$$\begin{aligned} r(t, \omega) &= (x, \sup(t, \tau)) \quad \text{pour } t \in [0, \alpha] \text{ et} \\ \omega &= (x, \tau) \in \bar{\Omega}_+ = \bar{\Omega}_0 \times [0, \alpha] . \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} r(0, \omega) &= \omega \text{ pour tout } \omega \in \bar{\Omega}_+ \\ r(\alpha, \bar{\Omega}_+) &= r(\alpha, \bar{\Omega}_+ \setminus K) = \bar{\Omega}_0 \times \{\alpha\} \\ r(t, \bar{\Omega}_+ \setminus K) &\subset \bar{\Omega}_+ \setminus K \quad \text{pour tout } t \in [0, \alpha] \end{aligned}$$

r est donc une homotopie de $r(0, .)$ sur $r(\alpha, .)$ de $(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K)$ dans $(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K)$.

On a donc pour les homomorphismes de cohomologie :

$$r(0, .)^* = \text{Id} = r(\alpha, .)^*$$

or $r(\alpha, .)^* = h^* i^*$

où :

$$H^P(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K) \xrightarrow{i^*} H^P(\bar{\Omega}_0 \times \{\alpha\}, \bar{\Omega}_0 \times \{\alpha\}) \xrightarrow{h^*} H^P(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K)$$

i désigne l'inclusion naturelle et h l'application induite par $r(\alpha, .)$.

Comme $H^P(\bar{\Omega}_0 \times \{\alpha\}, \bar{\Omega}_0 \times \{\alpha\}) = \{0\}$ on en déduit que $H^P(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K) = \{0\}$.

De même $H^P(\bar{\Omega}_-, \bar{\Omega}_- \setminus K) = \{0\}$.

Comme, d'autre part, $\varphi_+ : X_+ \rightarrow \bar{\Omega}_+$ est topologiquement monotone et

$X_+ \setminus \tilde{X} = \varphi_+^{-1}(\bar{\Omega}_+ \setminus K)$, d'après le théorème 11. (du chapitre I) :

$$\varphi_+^* : H^P(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_+ \setminus K) \rightarrow H^P(X_+, X_+ \setminus \tilde{X})$$

est un isomorphisme et donc $H^P(X_+, X_+ \setminus \tilde{X}) = \{0\}$ et de même $H^P(X_-, X_- \setminus \tilde{X}) = \{0\}$.

Posons : $S^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$

$$S_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

$$S_-^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_- \cup \{\infty\}$$

$$S_o^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \{0\} \cup \{\infty\}$$

On a $S_+^{n+1} \cup S_-^{n+1} = S^{n+1}$, $S_+^{n+1} \cap S_-^{n+1} = S_o^{n+1}$

et on remarque que S_o^{n+1} n'est autre que S^n par la même identification que $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

K est inclus dans Ω_o et donc dans S_o^{n+1} , on a comme pour Ω_+ et Ω_- :

$$H^p(S_+^{n+1} , S_+^{n+1} \setminus K) = \{0\}$$

$$H^p(S_-^{n+1} , S_-^{n+1} \setminus K) = \{0\}$$

D'autre part, les triades $(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_-)$ et $(\bar{\Omega} \setminus K, \bar{\Omega}_+ \setminus K, \bar{\Omega}_- \setminus K)$ sont excisives pour la cohomologie de Čech (voir par exemple Dold [22] page 286).

Par isomorphisme, on déduit que les triades (X, X_+, X_-) et $(X \setminus \hat{X}, X_+ \setminus \hat{X}, X_- \setminus \hat{X})$ sont également excisives.

On peut donc écrire la suite exacte de Mayer-Vietoris relative :

$$0 \longrightarrow H^n(X_o, X_o \setminus \hat{X}) \xrightarrow{\Delta} H^{n+1}(X, X \setminus \hat{X}) \longrightarrow 0$$

et donc l'homomorphisme Δ est un isomorphisme. On a les suites exactes analogues avec $\bar{\Omega}$, S^{n+1} , $\mathbb{R}^{n+1}$. Comme la suite exacte de Mayer-Vietoris est fonctorielle on peut écrire le diagramme suivant où chaque carré est commutatif et où i, j désignent les inclusions naturelles.

$$\begin{array}{ccc}
 Z \simeq H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow[\text{isom.}]{\Delta} & H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \simeq Z \\
 \downarrow (\varphi_0 - \psi_0)^* & & \downarrow (\varphi - \psi)^* \\
 H^n(X_0, X_0 \setminus \hat{X}) & \xrightarrow[\text{isom.}]{\Delta} & H^{n+1}(X, X \setminus \hat{X}) \\
 \uparrow \varphi_0^* & & \uparrow \varphi^* \\
 H^n(\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_0 \setminus K) & \xrightarrow[\text{isom.}]{\Delta} & H^{n+1}(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} \setminus K) \\
 \uparrow j^* & & \uparrow j^* \\
 H^n(S^n, S^n \setminus K) & \xrightarrow[\text{isom.}]{\Delta} & H^{n+1}(S^{n+1}, S^{n+1} \setminus K) \\
 \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\
 Z \simeq H^n(S^n) & \xrightarrow[\text{isom.}]{\Delta} & H^{n+1}(S^{n+1}) \simeq Z
 \end{array}$$

Pour calculer $d(0, [\varphi, \varphi - \psi], \Omega)$ (respectivement $d(0, [\varphi_0, \varphi_0 - \psi_0], \Omega_0)$) il faut suivre 1 en descendant la colonne de droite (respectivement la colonne de gauche). D'après les isomorphismes on trouve le même résultat à gauche et à droite, d'où le lemme 4.3.

— X —

LEMME 4.4.

Soit $m \geq 1$ et $(X, \mathbb{R}^{n+m}, \Omega, \varphi, \psi)$ un d-quintuple, avec Ω borné, tel que 0 vérifie (vi) et $\psi(X) \subset \mathbb{R}^n$ identifié à $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Soit $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^n$, $X_0 = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_0)$ et soit φ_0 et ψ_0 les restrictions de φ et ψ à X_0 . Alors $(X_0, \mathbb{R}^n, \Omega_0, \varphi_0, \psi_0)$ est un d-quintuple pour lequel 0 vérifie (vi) et :

$$d(0, [\varphi_0, \varphi_0 - \psi_0], \Omega_0) = d(0, [\varphi, \varphi - \psi], \Omega).$$

DEMONSTRATION

Si Ω_0 est vide le lemme est trivial; supposons donc Ω_0 non vide, il est alors immédiat que $(X_0, \mathbb{R}^n, \Omega_0, \varphi_0, \psi_0)$ est un d-quintuple et 0 vérifie (vi) puisque $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$.

Comme $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \dots \subset \mathbb{R}^{n+m}$ avec les identifications $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \times \{0\}$, $0 \leq k < m$, on se ramène par récurrence au cas où $m = 1$. Nous supposons donc maintenant que $m = 1$.

$K = \varphi[(\varphi - \psi)^{-1}(0)]$ est un compact (Ω est borné et φ est propre) contenu dans Ω_0 .

Pour tout $k \in K$, il existe un voisinage ouvert de k dans Ω de la forme $V_k \times]-\varepsilon_k, +\varepsilon_k[$ où V_k est un voisinage ouvert de k dans Ω_0 , $\varepsilon_k > 0$.

Comme $(V_k)_{k \in K}$ est un recouvrement ouvert du compact K , il existe un sous recouvrement fini $(V_{k_1}, \dots, V_{k_p})$. Soit $V = V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_p}$ et soit

$\xi = \inf(\varepsilon_{k_1}, \dots, \varepsilon_{k_p})$. On a :

$$K \subset V \times]-\xi, +\xi[\subset \Omega.$$

Soit $X' = \varphi^{-1}(\bar{V} \times [-\xi, +\xi])$ et $X'_0 = \varphi^{-1}(\bar{V})$.

Soit φ', ψ' les restrictions de φ et ψ à X' et φ'_0, ψ'_0 les restrictions de φ_0 et ψ_0 à X'_0 . On vérifie facilement que $(X', \mathbb{R}^{n+1}, V \times]-\xi, +\xi[, \varphi', \psi')$ et $(X'_0, \mathbb{R}^n, V, \varphi'_0, \psi'_0)$ sont des d-quintuples et que 0 vérifie (vi).

D'après la propriété d'excision (théorème 1.4.) on a :

$$d(0, [\varphi, \varphi - \psi], \Omega) = d(0, [\varphi', \varphi' - \psi'], V \times]-\xi, +\xi[)$$

$$\text{et } d(0, [\varphi_0, \varphi_0 - \psi_0], \Omega_0) = d(0, [\varphi'_0, \varphi'_0 - \psi'_0], V).$$

Or d'après le lemme 4.3., on a :

$$d(0, [\varphi', \varphi' - \psi'], V \times]-\xi, +\xi[) = d(0, [\varphi'_0, \varphi'_0 - \psi'_0], V);$$

$$\text{et donc } d(0, [\varphi_0, \varphi_0 - \psi_0], \Omega_0) = d(0, [\varphi, \varphi - \psi], \Omega).$$

LEMME 4.5.

Mêmes hypothèses que dans le lemme 4.4. sauf que maintenant Ω n'est plus supposé borné.

Même conclusion.

DEMONSTRATION

Si Ω_o est vide c'est trivial, sinon :

$$d(O, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = d(O, [\varphi, \varphi - \Psi], U)$$

où U est n'importe quel ouvert borné non vide tel que

$$\Omega \cap \Psi(X) \subset U \subset \Omega$$

et d'autre part le lemme 4.4. appliqué à U donne :

$$d(O, [\varphi, \varphi - \Psi], U) = d(O, [\varphi_o, \varphi_o - \Psi_o], U_o) \quad \text{où} \quad U_o = U \cap \mathbb{R}^n.$$

Or : $\Omega_o \cap \Psi(X) \subset U_o \subset \Omega_o$ et donc :

$$d(O, [\varphi_o, \varphi_o - \Psi_o], U_o) = d(O, [\varphi_o, \varphi_o - \Psi_o], \Omega_o).$$

—X—

CAS OU E EST UN ESPACE DE DIMENSION FINIE QUELCONQUE

LEMME 4.6.

Soit $(X, \mathbb{R}^n, \Omega_1, \varphi_1, \Psi_1)$ un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi),
A une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\Omega_2 = A(\Omega_1)$, $\varphi_2 = A \circ \varphi_1$,
 $\Psi_2 = A \circ \Psi_1$. Alors $(X, \mathbb{R}^n, \Omega_2, \varphi_2, \Psi_2)$ est un d-quintuple tel que 0 vérifie
(vi) et $d(O, [\varphi_1, \varphi_1 - \Psi_1], \Omega_1) = d(O, [\varphi_2, \varphi_2 - \Psi_2], \Omega_2)$.

DEMONSTRATION

On se ramène immédiatement au cas où Ω_1 est borné.

Soit $\hat{A}$ le prolongement continu de A à $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ défini par $\hat{A}(\infty) = \infty$.

Selon que A conserve ou change l'orientation de $\mathbb{R}^n$, $\hat{A}$ conserve ou change l'orientation de S^n . Autrement dit :

$$A^* = \alpha \text{Id} : Z = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

$$\hat{A}^* = \beta \text{Id} : Z = H^n(S^n) \longrightarrow H^n(S^n)$$

avec $\alpha = \beta \in \{-1, +1\}$.

Soit $K_1 = \varphi_1[(\varphi_1^{-1}\psi_1)^{-1}(0)]$, $\tilde{X} = \varphi_1^{-1}(K_1)$, $K_2 = A(K_1)$

on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xleftarrow{\varphi_1^{-1}\psi_1} & (X, X \setminus \tilde{X}) & \xrightarrow{\varphi_1} & (\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_1 \setminus K_1) & \longrightarrow & (S^n, S^n \setminus K_1) \xleftarrow{\quad} S^n \\ \downarrow A & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow A & & \downarrow \hat{A} \quad \downarrow \hat{A} \\ (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xleftarrow{\varphi_2^{-1}\psi_2} & (X, X \setminus \tilde{X}) & \xrightarrow{\varphi_2} & (\bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_2 \setminus K_2) & \longrightarrow & (S^n, S^n \setminus K_2) \xleftarrow{\quad} S^n \end{array}$$

En passant à la cohomologie, on a d'après la définition du degré et d'après $A^* = \alpha \text{Id}$, $\hat{A}^* = \beta \text{Id}$:

$$d(0, [\varphi_2, \varphi_2^{-1}\psi_2], \Omega_2) = \alpha\beta d(0, [\varphi_1, \varphi_1^{-1}\psi_1], \Omega_1) .$$

Comme $\alpha = \beta \in \{-1, +1\}$, on a $\alpha\beta = 1$ et le lemme est démontré.

—X—

LEMME ET DEFINITION 4.7.

Soit E un espace de dimension finie ≥ 1 et soit $(X, E, \Omega, \varphi, \psi)$ un d -quintuple tel que 0 vérifie (vi). Soit L une bijection linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $\varphi_L = L \circ \varphi$, $\psi_L = L \circ \psi$, $\Omega_L = L(\Omega)$.

Alors $(X, \mathbb{R}^n, \Omega_L, \varphi_L, \psi_L)$ est un d -quintuple tel que 0 vérifie (vi) ; le nombre $d(0, [\varphi_L, \varphi_L^{-1}\psi_L], \Omega_L)$ ne dépend pas de la bijection L choisie. On le note $d(0, [\varphi, \varphi^{-1}\psi], \Omega)$.

DEMONSTRATION

Soit L et M deux bijections linéaires de E dans $\mathbb{R}^n$.
 L'application $A = M \circ L^{-1}$ est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ et on a :
 $\varphi_M = M \circ \varphi = A \circ L \circ \varphi = A \circ \varphi_L$ et de même
 $\Psi_M = A \circ \Psi_L$, $\Omega_M = A(\Omega_L)$. Donc, d'après le lemme 4.6. on a :

$$d(0, [\varphi_L, \varphi_L - \Psi_L], \Omega_L) = d(0, [\varphi_M, \varphi_M - \Psi_M], \Omega_M) .$$

—X—

Le degré qui vient d'être défini à les mêmes propriétés que celui construit dans $\mathbb{R}^n$ au chapitre I. Nous ne les développons pas ici puisqu'elles seront établies plus loin dans un cadre plus général. Nous nous contentons de donner une invariance par homotopie qui va nous servir dans la suite de la construction .

LEMME 4.8.

Soit E un espace de dimension finie et pour tout $t \in [0,1]$ un d -quintuple $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_t)$ tel que 0 vérifie (vi) et tel que $(t, x) \rightarrow \Psi_t(x)$ soit une application continue de $[0,1] \times X$ dans E d'image relativement compacte.

Alors: $d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_0], \Omega) = d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_1], \Omega)$.

DEMONSTRATION

A l'aide d'une bijection linéaire on se ramène au cas $E = \mathbb{R}^n$.
 Considérons alors un ouvert borné U tel que :

$$\Omega \cap \{\Psi_t(x) \mid (t, x) \in [0,1] \times X\} \subset U \subset \Omega .$$

Soit $X' = \varphi^{-1}(\bar{U})$, φ' la restriction de φ à X' , Ψ'_t la restriction de Ψ_t à X' . On a alors, d'après le corollaire 1.7. du chapitre I (X' est compact) :

$$d(0, [\varphi', \varphi' - \Psi'_0], U) = d(0, [\varphi', \varphi' - \Psi'_1], U)$$

et donc : $d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_0], \Omega) = d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_1], \Omega)$.

—X—

REMARQUE 4.9.

Dans le cadre de la définition 4.7., nous conviendrons que si Ω est vide on a :

$$d(0, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = 0.$$

CAS OU $\Psi(X)$ EST CONTENU DANS UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE.

LEMME ET DEFINITION 4.10.

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi) et tel que $\Psi(X)$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie de E . Soit F un sous-espace de dimension finie ≥ 1 contenant $\Psi(X)$, soit $\Omega_F = \Omega \cap F$, $X_F = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_F)$, φ_F et Ψ_F les restrictions de φ et Ψ à X_F . Alors $(X_F, F, \Omega_F, \varphi_F, \Psi_F)$ est un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi) et le nombre $d(0, [\varphi_F, \varphi_F - \Psi_F], \Omega_F)$ ne dépend pas du sous-espace F choisi, on le note :

$$d(0, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega).$$

DEMONSTRATION

Soit F et H deux sous-espaces répondant aux conditions du lemme, on peut toujours se ramener au cas où $F \subset H$ et $\dim H > \dim F$ (considérer $F+H$). Par bijection linéaire on se ramène au cas où $F = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m} = H$ et on applique alors le lemme 4.5.

—X—

DEFINITION DU DEGRE DANS LE CAS GENERAL.

LEMME 4.11.

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple. Alors $\varphi - \Psi$ est une application fermée. En particulier l'ensemble $(\varphi - \Psi)[\varphi^{-1}(\partial\Omega)]$ est fermé.

DEMONSTRATION

Soit B une partie fermée de X , montrons que $(\varphi - \Psi)(B)$ est fermée; soit y un point adhérent à $(\varphi - \Psi)(B)$, il existe une suite x_n dans B telle que $\varphi(x_n) - \Psi(x_n) \rightarrow y$.

Comme $\overline{\Psi(X)}$ est compact, il existe une sous-suite, encore notée x_n et un $z \in E$ tels que $\Psi(x_n) \rightarrow z$. Donc $\varphi(x_n)$ converge vers $y+z$. Comme φ est propre la suite x_n est relativement compacte et donc il existe une sous-suite, toujours notée x_n , et un $x \in B$ tels que $x_n \rightarrow x$. Comme φ et Ψ sont continues, on a $\varphi(x) - \Psi(x) = y$ et donc $y \in (\varphi - \Psi)(B)$.

—X—

LEMME 4.12.

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi). Alors il existe une application continue $\Psi_0 : X \rightarrow E$ telle que :

- (1) $\Psi_0(X)$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie
- (2) Pour tout $x \in X$, on a :

$$\text{dist}(\Psi(x), \Psi_0(x)) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(0, [\varphi - \Psi](\varphi^{-1}(\partial\Omega)))$$

Alors, $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_0)$ est un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi) ; un tel d-quintuple sera appelé une bonne approximation de $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$.

DEMONSTRATION

$(\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega))$ est en ensemble fermé d'après le lemme 4.11. et cet ensemble ne contient pas 0 par hypothèse.

Soit ε un nombre vérifiant : $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega)))$.

D'après le lemme 3.3. de la partie III.1., puisque $\overline{\Psi(X)}$ est compact il existe une application continue $\pi_\varepsilon : \overline{\Psi(X)} \rightarrow E$ telle que $\text{dist}(\pi_\varepsilon(y), y) \leq \varepsilon$ pour tout $y \in \overline{\Psi(X)}$ et $\pi_\varepsilon(\overline{\Psi(X)})$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie. On considère alors $\Psi_0 = \pi_\varepsilon \circ \Psi$, il est clair que Ψ_0 vérifie (1) et (2). Il est évident que $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_0)$ est un d-quintuple car $\Psi_0(X) \subset \pi_\varepsilon(\overline{\Psi(X)})$, qui est compact.

0 vérifie (vi) car : Soit $x \in X$ tel que $\varphi(x) \in \partial\Omega$, alors

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi(x), \Psi_0(x)) &\geq \text{dist}(\varphi(x), \Psi(x)) - \text{dist}(\Psi_0(x), \Psi(x)) \\ &\geq \text{dist}(0, \varphi(x) - \Psi(x)) - \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega))) \end{aligned}$$

d'où $\text{dist}(\varphi(x), \Psi_0(x)) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega))) > 0$.

—X—

LEMME ET DEFINITION 4.13.

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple tel que 0 vérifie (vi).

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_0)$ une bonne approximation de ce d-quintuple.

Le nombre $d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_0], \Omega)$ ne dépend pas de la bonne approximation choisie et on le note :

$$d(0, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega).$$

DEMONSTRATION

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_0)$ et $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_1)$ deux bonnes approximations de $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$. Soit F un sous-espace de dimension finie ≥ 1 contenant $\Psi_0(X)$ et $\Psi_1(X)$.

Soit $\Omega' = \Omega \cap F$, $X' = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}')$ et φ' , Ψ'_0 , Ψ'_1 les restrictions de φ , Ψ_0 , Ψ_1 à X' . Alors, d'après le lemme 4.10. on a :

$$d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_0], \Omega) = d(0, [\varphi', \varphi' - \Psi'_0], \Omega')$$

et $d(0, [\varphi, \varphi - \Psi_1], \Omega) = d(0, [\varphi', \varphi' - \Psi'_1], \Omega')$.

Posons $\Psi'_t(x) = t \Psi'_1(x) + (1-t)\Psi'_0(x)$. Soit $x \in X'$, on a :

$$\text{dist}(\Psi'_t(x), \Psi(x)) \leq t \text{dist}(\Psi'_1(x), \Psi(x)) + (1-t) \text{dist}(\Psi'_0(x), \Psi(x))$$

(ceci en prenant pour dist une distance convenable, voir par exemple Horvath [21] page 114),

d'où $\text{dist}(\Psi'_t(x), \Psi(x)) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(0, [\varphi - \Psi](\varphi^{-1}(\partial\Omega)))$.

D'où si $\varphi(x) \in \partial\Omega'$ on a :

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi(x), \Psi'_t(x)) &\geq \text{dist}(\varphi(x), \Psi(x)) - \text{dist}(\Psi(x), \Psi'_t(x)) \\ &\geq \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega))) - \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega))) \end{aligned}$$

Soit $\text{dist}(\varphi(x), \Psi'_t(x)) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega))) > 0$.

Il en résulte que $\varphi' - \Psi'_t$ est une homotopie de $\varphi' - \Psi'_0$ sur $\varphi' - \Psi'_1$ et d'après le lemme 4.8., on a :

$$d(0, [\varphi', \varphi' - \Psi'_0], \Omega') = d(0, [\varphi', \varphi' - \Psi'_1], \Omega')$$

et le lemme est démontré.

—X—

REMARQUE 4.14.

Dans le cadre de la définition 4.13., nous conviendrons que si $\Omega = \emptyset$:

$$d(0, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = 0.$$

DEFINITION 4.15.

Si $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ est un d-quintuple tel que a vérifie (vi) on pose :

$$d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = d(0, [\varphi, \varphi - \Psi - a], \Omega).$$

PROPRIETES DU DEGRE

Donnons sous forme d'un théorème les principales propriétés du degré en dimension infinie.

THEOREME 4.16.

Soit $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ un d-quintuple et a vérifiant (vi).

Alors $d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega)$ est défini et on a :

- (i) existence.
Si $d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) \neq 0$, alors $a \in (\varphi - \Psi)(X)$.
- (ii) normalité
Si $a \in \Omega$, $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = +1$
Si $a \notin \Omega$, $d(a, [\varphi, \varphi], \Omega) = 0$
- (iii) décomposition du domaine
Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 étant deux ouverts disjoints ;
Soit $X_i = \varphi^{-1}(\bar{\Omega}_i)$, φ_i , Ψ_i les restrictions de φ et Ψ à X_i
($i=1,2$) ; alors :
$$d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \varphi_1 - \Psi_1], \Omega_1) + d(a, [\varphi_2, \varphi_2 - \Psi_2], \Omega_2) .$$
- (iv) excision
Soit F un compact contenu dans $\bar{\Omega}$, tel que :
 $a \notin (\varphi - \Psi)(\varphi^{-1}(F))$; on a :
$$d(a, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = d(a, [\varphi', \varphi' - \Psi'], \Omega \setminus F)$$

où φ' et Ψ' désignent les restrictions de φ et Ψ à $\varphi^{-1}(\bar{\Omega} \setminus F)$.
- (v) invariance par homotopie
Soit $(X, E, \Omega, \varphi_t, \Psi_t)$ une famille de d-quintuples pour $t \in [0,1]$,
tels que a vérifie (vi) pour tout $t \in [0,1]$ et
 $(t, x) \rightarrow \varphi_t(x)$, $(t, x) \rightarrow \Psi_t(x)$ soient des applications continues,
la première étant propre et $\{\Psi_t(x)\}$ étant relativement compact
dans E . On a alors :
$$d(a, [\varphi_0, \varphi_0 - \Psi_0], \Omega) = d(a, [\varphi_1, \varphi_1 - \Psi_1], \Omega) .$$

DEMONSTRATION

(i) On se ramène immédiatement au cas où $a = 0$.

Supposons que $0 \notin (\varphi - \Psi)(X)$ et montrons que $d(0, [\varphi, \varphi - \Psi], \Omega) = 0$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)(X))$; ε est > 0 puisque $(\varphi - \Psi)(X)$ est fermé (lemme 4.11.).

Il existe alors une application continue $\pi_\varepsilon : \overline{\Psi(X)} \rightarrow E$ à valeur dans un sous-espace de dimension finie telle que $\text{dist}(\pi_\varepsilon(y), y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in \overline{\Psi(X)}$.

Il en résulte que $(X, E, \Omega, \varphi, \pi_\varepsilon \circ \Psi)$ est une bonne approximation de $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi)$ (lemme 4.12.) qui vérifie $0 \notin (\varphi - \pi_\varepsilon \circ \Psi)(X)$.

Il suffit donc de montrer que $d(0, [\varphi, \varphi - \pi_\varepsilon \circ \Psi], \Omega) = 0$.

Soit F un sous-espace de dimension finie ≥ 1 contenant $\pi_\varepsilon \circ \Psi(X)$, on a :

$$d(0, [\varphi, \varphi - \pi_\varepsilon \circ \Psi], \Omega) = d(0, [\varphi_F, \varphi_F - \pi_\varepsilon \circ \Psi_F], \Omega_F)$$

(avec les notations du lemme 4.10.). Soit alors U un ouvert borné de F tel que $\Omega_F \cap \pi_\varepsilon \circ \Psi_F(X_F) \subset U \subset \Omega_F$, on a :

$$\begin{aligned} d(0, [\varphi_F, \varphi_F - \pi_\varepsilon \circ \Psi_F], \Omega_F) \\ = d(0, [\varphi_F, \varphi_F - \pi_\varepsilon \circ \Psi_F], U) = 0 \end{aligned}$$

d'après le théorème 1.4. du chapitre I.

Pour (ii) et (iii) on se ramène immédiatement aux propriétés correspondantes en dimension finie.

Idem pour (iv) en faisant attention à prendre une bonne approximation $(X, E, \Omega, \varphi, \Psi_0)$ avec

$$\text{dist}(\Psi(x), \Psi_0(x)) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(0, (\varphi - \Psi)[\varphi^{-1}(\partial\Omega \cup F)]) \quad (\text{prendre } a=0).$$

(v) va se déduire du lemme suivant un peu plus général :

LEMME 4.17.

Soit X, E, Ω vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de la définition 4.1.; α une application continue de X sur $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ topologiquement monotone et propre et β une application continue de X dans E d'image relativement compacte. Soit a un point de E tel que $h \circ \alpha(x) - \beta(x) \neq a$ pour tout x tel que $\alpha(x) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, où h désigne la projection de $E \times \mathbb{R}$ sur E . On a alors, en désignant par α_0 (respectivement α_1) la restriction de α à $X_0 = \alpha^{-1}(\bar{\Omega} \times \{0\})$ (respectivement la restriction de α à $X_1 = \alpha^{-1}(\bar{\Omega} \times \{1\})$) :

$$d(a, [h \circ \alpha_0, h \circ \alpha_0 - \beta_0], \Omega) = d(a, [h \circ \alpha_1, h \circ \alpha_1 - \beta_1], \Omega).$$

DEMONSTRATION

Il est immédiat de voir que les degrés en question sont bien définis. On se ramène au cas $a = 0$ et on considère une bonne approximation

de la forme $\beta = \pi_\varepsilon \circ \beta$ où $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \text{dist} (0, (h_0 \alpha - \beta)(\alpha^{-1}(\partial\Omega \times [0,1])))$; on se

ramène ainsi à démontrer la même propriété en dimension finie.

On se ramène au cas où l'ouvert est borné par le procédé habituel, et on applique alors le théorème 1.5. du chapitre I.

—————X

A partir de ce lemme la démonstration de (v) est immédiate.

—————X

Degré pour des multi-applications de la forme $I-\Delta$ où Δ est pseudo-acyclique compacte

De la même manière qu'au chapitre I, on peut déduire de ce qui précède une théorie du degré pour des multi-applications de la forme $I-\Delta$ où Δ est pseudo-acyclique compacte.

X, E, Ω sont comme en (i), (ii), (iii). Γ désigne une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes acycliques non vides de $\bar{\Omega}$ dans X , r une application continue de X dans E telle que $r(\Gamma(\bar{\Omega}))$ soit relativement compact. Une telle multi-application $\Delta = r \circ \Gamma$ sera appelée pseudo-acyclique compacte (on considère en fait le couple (r, Γ)).

A une telle multi-application $I - r \circ \Gamma$, on associe de façon naturelle le couple de fonctions $[p, p - r \circ q]$ où p et q désignent les projections naturelles, suivant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & r & & q & & P & \\ & \longleftarrow & X & \longleftarrow & G(\Gamma) & \longrightarrow & \bar{\Omega} \\ & & & & & & \end{array}$$

Il est facile de voir que $(G(\Gamma), E, \Omega, p, r, q)$ est un d-quintuple.

Soit a un point de E tel que $a \notin (I - r \circ \Gamma)(\partial\Omega)$, il est alors immédiat que a vérifie (vi) et donc que $d(a, [p, p-r \circ q], \Omega)$ est défini; on posera :

$$d(a, I-r \circ \Gamma, \Omega) = d(a, [p, p-r \circ q], \Omega) .$$

On transcrit sans peine dans ce contexte les propriétés usuelles du degré pour les couples.

On peut également, comme nous l'avons fait au chapitre I, utiliser ce degré pour donner des théorèmes de point fixe et de surjectivité variés en dimension infinie. Nous en donnerons un seul exemple, l'analogue du théorème de Shaefer.

THEOREME 4.18.

Soit Ω un ouvert, contenant 0, de E e.l.c.s. métrisable, Δ une multi-application pseudo-acyclique compacte de $\bar{\Omega}$ dans E . On suppose que :

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall x \in \partial\Omega : x \notin \lambda\Delta(x) .$$

Alors, il existe $x \in \Omega$ tel que $x \in \Delta(x)$.

DEMONSTRATION

D'après la propriété d'invariance par homotopie on a :

$$d(0, I-\Delta, \Omega) = d(0, I, \Omega) = +1$$

d'où $\exists x \in \Omega$ tel que $x \in \Delta(x)$.

—X—

§ 2 - APPLICATIONS

Le degré en dimension infinie, ainsi que les résultats du chapitre II laissent présager de nombreuses applications.

On peut par exemple réécrire certains résultats du chapitre III pour des équations multivoques avec retards et entre autre montrer l'existence de solutions périodiques. Nous donnerons un autre exemple, relatif aux équations aux dérivées partielles, dans l'esprit du chapitre V de la partie III.1. mais où l'opérateur $-\Delta$ est remplacé par un opérateur non linéaire monotone.

Commençons par donner un résultat "abstrait".

V et E désignent deux espaces de Banach réflexifs réels tels qu'il existe $i : V \rightarrow E$ injection linéaire continue compacte d'image dense ;
 $i^* : E^* \rightarrow V^*$ désigne la transposée de i .

- Soit A un opérateur monotone de V dans V^* hémicontinu ⁽¹⁾ et coercif (i.e. $\langle Au, u \rangle = \gamma(u)\|u\|$ où $\gamma(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|u\|$ tend vers $+\infty$).
 Soit F une multi-application de E dans E^* à valeurs convexes fermées bornées non vides et telle que pour tout borné $\mathcal{B}$, $F(\mathcal{B})$ soit borné. On suppose en outre que $i^* \circ F$ est s.c.s.. On se propose de résoudre l'équation suivante :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ Au \in i^* \circ F \circ i(u) \end{array} \right.$$

THEOREME 4.19.

S'il existe α et β positifs tels que :

$$u \in V \text{ et } y \in i^* \circ F \circ i(u) \text{ entraine } \langle y, u \rangle \leq \alpha + \beta\|u\|$$

l'équation (1) a au moins une solution.

(1) Pour ce qui concerne les opérateurs monotones voir [23].

DEMONSTRATION

D'après les hypothèses faites sur A , A est surjectif et maximal monotone, et donc A^{-1} est aussi maximal monotone. On en déduit que A^{-1} est à valeurs convexes faiblement compactes non vides et s.c.s. de V^* muni de la topologie forte dans V faible. En outre A^{-1} est bornée, c'est-à-dire, pour tout borné $\mathcal{O}$, $A^{-1}(\mathcal{O})$ est borné (c'est une conséquence immédiate de la coercivité de A). Si nous considérons maintenant la multi-application $i \circ A^{-1}$, il est facile de vérifier qu'elle est à valeurs convexes compactes non vides, qu'elle est s.c.s. de V^* fort dans E fort et qu'elle transforme les bornés de V^* en parties relativement compactes de E .

Résoudre (1) revient à trouver $u \in V$ tel que $u \in A^{-1} \circ i^* \circ F \circ i(u)$ et pour cela il suffit de trouver $v \in E$ tel que $v \in i \circ A^{-1} \circ i^* \circ F(v)$ (prendre alors u tel que $v = i(u)$).

Montrons alors un lemme de point fixe :

LEMME 4.20.

Soit Γ_1 une multi-application s.c.s. à valeurs acycliques compactes non vides de E dans V transformant les bornés en relativement compacts, idem pour Γ_2 de V dans E .

Soit $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$.

Alors si $\Lambda = \{x \in E \mid x \in \lambda \Gamma(x), \lambda \in]0,1[\}$ est borné dans E , il existe $x \in E$ tel que $x \in \Gamma(x)$.

DEMONSTRATION

Désignons par $\mathcal{O}$ une boule ouverte de centre 0 et de rayon > 0 dans E contenant Λ .

Considérons $X = \{(x,y,z) \in \bar{\mathcal{O}} \times V \times E \mid y \in \Gamma_1(x) \text{ et } z \in \Gamma_2(y)\}$

et les applications : $\varphi(x,y,z) = x$; $\psi(x,y,z) = z$.

Alors $(X, E, \mathcal{O}, \varphi, \psi)$ est un d-quintuple. Le seul point pas tout à fait trivial à vérifier est que φ est topologiquement monotone (cela découle du théorème de Vietoris-Begle).

S'il existe $(x,y,z) \in X$ tel que $x \in \partial \mathcal{O}$ et $x-z = 0$, la démonstration est terminée car on a trouvé $x \in \Gamma_2 \circ \Gamma_1(x)$.

Sinon, 0 vérifie (vi) et d'après l'invariance par homotopie on a :
 $d(0, [\varphi, \varphi - \psi], B) = d(0, [\varphi, \varphi], B) = +1$ et donc il existe $(x, y, z) \in X$
 tel que $x = z$.

~~X~~

On va appliquer le lemme aux multi-applications :

$$\Gamma_1 = i^* \circ F \quad , \quad \Gamma_2 = i \circ A^{-1} \quad .$$

Pour cela vérifions que $\{v \in E \mid v \in \lambda i \circ A^{-1} \circ i^* \circ F(v), \lambda \in]0, 1[\}$
 est borné dans E.

Soit donc $v \in E$ tel que $\frac{1}{\lambda} v \in i \circ A^{-1} \circ i^* \circ F(v)$, $\lambda \in]0, 1[$.

Ecrivons $v = i(u)$ avec $\frac{1}{\lambda} u \in A^{-1} \circ i^* \circ F \circ i(u)$

soit $A(\frac{1}{\lambda} u) \in i^* \circ F \circ i(u)$.

D'après les hypothèses du théorème on a :

$$\langle A(\frac{1}{\lambda} u), u \rangle \leq \alpha + \beta \|u\| \quad .$$

$$\text{Or} \quad \langle A(\frac{1}{\lambda} u), u \rangle = \gamma(\frac{1}{\lambda} u) \|u\|$$

$$\text{et donc} \quad \gamma(\frac{1}{\lambda} u) \|u\| \leq \alpha + \beta \|u\|$$

ce qui entraîne que $\|u\|$ est borné et donc que $\|v\|$ reste borné.

~~X~~

PREMIER EXEMPLE

Soit $1 < p < +\infty$, $m \geq 1$, Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$,
 A l'opérateur de $W_0^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{-m,p'}(\Omega)$ donné par

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\beta u(x))$$

les notations et les hypothèses sur A étant celles de la partie II,
 chapitre II, paragraphe 6.

Soit F une multi-application de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, définie suivant la partie III.1., chapitre V, paragraphe 1. Comme ensemble des sections mesurables de $f(x, u(x))$, où f est une multi-application de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses (1), (2), (3) du chapitre V de III.1. et vérifiant en outre :

$$(5)' \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } g \in L^{p'}(\Omega) \text{ et } b \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que :} \\ |y| \leq g(x) + b|\alpha|^{p-1} \text{ pour presque tout } x, \text{ tout } \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{et tout } y \in f(x, \alpha). \end{array} \right.$$

On sait alors que la multi-application F vérifie les conditions demandées pour pouvoir appliquer le théorème 4.19.

Dans ce cas, l'équation (1) devient :

$$(1)' \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in W_0^{m,p}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} A_\alpha(x, D^\beta u(x)) \in L^{p'}(\Omega) \\ \text{et} \\ \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} A_\alpha(x, D^\beta u(x)) \in f(x, u(x)) \text{ pour presque tout } x. \end{array} \right.$$

DEUXIEME EXEMPLE

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, désignons par $\text{sgn } \alpha$ la multi-application définie par :

$\text{sgn } \alpha = \{+1\}$ si $\alpha > 0$
 $\text{sgn } \alpha = \{-1\}$ si $\alpha < 0$
 $\text{sgn } 0 = [-1, +1]$

Alors, pour tout $h \in L^2(\Omega)$ (Ω désigne toujours un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$) l'équation (2) suivante a au moins une solution.

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u + u^3 \in L^2(\Omega) \text{ et} \\ -\Delta u + u^3 \in \text{sgn } u + h \text{ pour presque tout } x \end{array} \right.$$

CHAPITRE V

COMPLEMENTS

§ 1 - EXTENSION DE MULTI-APPLICATIONS SEMI-CONTINUES SUPERIEUREMENT ET CONTINUES.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème suivant : étant donnés deux espaces topologiques X et Y et une multi-application Γ s.c.s. ou continue d'une partie fermée A de X dans Y , existe-t-il une extension $\hat{\Gamma}$ s.c.s. ou continue de Γ à X tout entier ? Comme nous l'avons vu dans la partie III.1. et dans le chapitre I de cette partie, il est intéressant de posséder de tels théorèmes d'extension. Il semble que le premier résultat de ce genre pour les multi-applications à valeurs convexes ait été obtenu par Ma [24]. Nous présentons ici deux résultats nouveaux.

Le premier a trait à l'extension des multi-applications s.c.s., le second à l'extension des multi-applications continues. Pour la suite, X, Y désignent des espaces topologiques, X métrisable, A une partie fermée non vide de X , 2^Y l'ensemble des parties fermées non vides de Y .

THEOREME 5.1.

Soit Γ une multi-application semi-continue supérieurement de A dans 2^Y . Alors Γ a une extension semi-continue supérieurement $\hat{\Gamma} : X \rightarrow 2^Y$ qui vérifie $\hat{\Gamma}(X) \subset \Gamma(A)$. De plus, si Y est séparé et $\Gamma(a)$ compact pour tout a , on a $\hat{\Gamma}(x)$ compact pour tout x .

DEMONSTRATION

La démonstration que nous donnons ici est inspirée de Dugundji [5]. Soit d une distance compatible avec la topologie de X , si $y \in X \setminus A$, notons $V(y)$ une boule ouverte de centre y et de rayon r vérifiant :

$$0 < r < \frac{1}{2} d(y, A).$$

La famille $V(y)$, $y \in X \setminus A$, constitue un recouvrement ouvert de l'espace paracompact $X \setminus A$; soit $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in \mathcal{J}}$ un recouvrement ouvert plus fin et localement fini. Si $x \in X \setminus A$, soit $\mathcal{J}_x = \{j \in \mathcal{J} \mid x \in \bar{V}_j\}$. Prenons, pour chaque $j \in \mathcal{J}$, un point $x_j \in V_j$ et un point $a_j \in A$ tel que $d(x_j, a_j) < 2d(x_j, A)$ et définissons la multi-application :

$$\hat{\Gamma}(x) = \begin{cases} \Gamma(x) & \text{si } x \in A \\ \bigcup_{j \in \mathcal{J}_x} \Gamma(a_j) & \text{si } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Il est clair que $\hat{\Gamma}$ est une extension de Γ ; vérifions que $\hat{\Gamma}$ est s.c.s.. Montrons le d'abord pour $x \in X \setminus A$; soit Ω_x un voisinage ouvert de x dans $X \setminus A$ coupant les V_j pour $j \in \mathcal{J}_x$ uniquement. Si $y \in \Omega_x$, il est clair que $\mathcal{J}_y \subset \mathcal{J}_x$ d'où :

$$\hat{\Gamma}(y) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_y} \Gamma(a_j) \subset \hat{\Gamma}(x)$$

et $\hat{\Gamma}$ est s.c.s. en x .

Il reste maintenant à examiner le cas où x appartient à la frontière topologique de A . Soit Ω un voisinage ouvert de $\Gamma(x)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Gamma(B(x, \varepsilon) \cap A) \subset \Omega$ puisque Γ est s.c.s. sur A . On va montrer que : $\hat{\Gamma}(B(x, \frac{\varepsilon}{9})) \subset \Omega$. Soit $z \in B(x, \frac{\varepsilon}{9})$, si $z \in A$ il est clair que $\hat{\Gamma}(z) = \Gamma(z) \subset \Omega$, si $z \notin A$ on a :

$$\hat{\Gamma}(z) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_z} \Gamma(a_j).$$

Il suffit donc de montrer que $\forall j \in \mathcal{J}_z : \Gamma(a_j) \subset \Omega$; et pour cela nous allons montrer que $\forall j \in \mathcal{J}_z, a_j \in B(x, \varepsilon)$.
Ecrivons :

$$d(a_j, x) \leq d(a_j, x_j) + d(x_j, x)$$

et $d(x_j, a_j) < 2d(x_j, x)$

d'où $d(a_j, x) \leq 3d(x_j, x)$

or $d(x_j, x) \leq d(x_j, z) + d(z, x)$.

D'autre part, on a $j \in \bigcap z$ et donc $z \in \bar{V}_j$ où $V_j \subset B(y, r)$ avec

$0 < r < \frac{1}{2} d(y, A)$, on en déduit $d(x_j, z) \leq 2r$. On a également :

$$\frac{\varepsilon}{9} > d(z, x) \geq d(y, x) - d(y, z) \geq r$$

puisque $d(y, x) > 2r$ et $d(y, z) \leq r$.

On en déduit donc :

$$d(a_j, x) \leq 3 \left(2 \cdot \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} \right) = \varepsilon .$$

D'après la construction de $\hat{\Gamma}$, il est évident que $\hat{\Gamma}(X) \subset \Gamma(A)$ et que si Y est séparé et $\Gamma(a)$ compact pour tout a , $\hat{\Gamma}(x)$ est compact pour tout x .

—X—

REMARQUE 5.2.

Si on prend comme cas particulier, dans le théorème précédent, une fonction continue f comme multi-application s.c.s. de A dans 2^Y , l'extension de f est une multi-application s.c.s. et pas une fonction continue (il faut des hypothèses fortes sur Y pour avoir une extension qui soit une fonction continue, comme nous allons le voir dans ce qui suit).

Nous allons maintenant étudier le problème de l'extension des multi-applications continues.

La méthode que nous employons consiste à ramener le cas des multi-applications continues à celui des fonctions moyennant quelques faits élémentaires de la théorie des rétracts et le théorème d'extension de Dugundji.

THEOREME 5.3. (Dugundji [5]).

Soit A un fermé d'un espace topologique métrisable X , f une application continue de A dans un convexe non vide C d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

Alors il existe une extension continue de f à tout X à valeur dans C .

COROLLAIRE 5.4.

Même résultat en remplaçant C par un espace topologique R rétracte absolu dans la classe des espaces métrisables.

DEMONSTRATION

D'après un résultat classique sur les rétracts (voir Borsuk [2]), on peut considérer R comme un sous-espace fermé d'un convexe d'un espace normé de telle sorte qu'il existe une rétraction ρ du convexe C sur R. Alors si f est une application continue de A dans R, elle possède une extension continue de X dans C d'après le théorème 4.3. ; notons $\hat{f}$ cette extension. Alors $\rho \circ \hat{f}$ est une extension continue de f , de X dans R.

—X—

Soit F une multi-application à valeurs fermées non vides de X dans Y, dire que F est continue (i.e. s.c.s. et s.c.i.) équivaut à dire qu'elle est continue en tant qu'application de X dans 2^Y lorsque 2^Y est muni de la topologie de Vietoris (voir [27]).

Rappelons qu'une base de cette topologie est donnée par les ensembles de la forme :

$$\langle O_1, \dots, O_k \rangle = \{P \in 2^Y \mid P \subset \bigcup_{i=1}^k O_i \text{ et } P \cap O_i \neq \emptyset \forall i\}$$

où $O_1, \dots, O_k$ désignent k ouverts de Y.

THEOREME 5.5.

Soit A un sous-espace fermé d'un espace métrisable X, Y un espace compact métrique convexe au sens de Menger ⁽¹⁾. Alors toute multi-application continue Γ à valeurs fermées non vides de A dans Y a une extension continue à tout X.

(1) On dit qu'un espace métrique (Y, d) est convexe au sens de Menger si pour tout $y_1, y_2 \in Y$, il existe $y \in Y$ tel que :

$$d(y_1, y) = d(y_2, y) = \frac{1}{2} d(y_1, y_2).$$

DEMONSTRATION

Γ est une application continue de A dans 2^Y . Or d'après les hypothèses faites sur Y , il découle d'un résultat de WOJDYSLAWSKI (voir [25]) que 2^Y est un rétracte absolu dans la classe des espaces métrisables ; et d'après le corollaire 5.4., Γ a une extension continue de X dans 2^Y .

—X—

REMARQUE 5.6.

Peut-on prendre pour Y , dans le théorème précédent, n'importe quel rétracte absolu compact ? En d'autres termes, 2^Y est-t-il un rétracte absolu pour tout Y rétracte absolu compact ? Ce résultat a été annoncé par FOULIS [26] malheureusement la démonstration de FOULIS est fausse. Le problème semble donc ouvert.

§ 2 - UN THEOREME DE BIRKHOFF-KELLOG MULTIVOQUE

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'on peut utiliser la théorie du degré pour les couples (et les considérations du chapitre I sur les multi-applications pseudo-acycliques) pour démontrer des théorèmes de point fixe et de valeur propre en dimension infinie pour des multi-applications acycliques compactes par un passage à la limite direct. Notons que les résultats que nous donnons ici ne peuvent pas être obtenus par les méthodes de Granas [8]. Nous donnons deux résultats dans un cadre très simple. Commençons par un théorème de point fixe qui généralise le théorème 3.1. de la partie III.1.

THEOREME 5.7.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et métrisable sur $\mathbb{R}$, C un convexe non vide de E et Γ une multi-application acyclique et compacte de C dans C (on suppose que $\overline{\Gamma(C)}$ est un compact contenu dans C). Alors, il existe $x \in C$ tel que $x \in \Gamma(x)$.

DEMONSTRATION

Commençons par démontrer un lemme auxiliaire.

LEMME 5.8.

Supposons E de dimension finie, C un convexe non vide de E , Γ une multi-application acyclique compacte de C dans un espace compact métrisable X et r une application continue de X dans C .

Alors il existe $x \in C$ tel que : $x \in r \circ \Gamma(x)$.

DEMONSTRATION

Soit $K = \text{conv } r(X)$, K est un compact convexe non vide, soit Γ_K la restriction de Γ à K . Identifions E à $\mathbb{R}^n$ et désignons par r un nombre > 0 tel que $\bar{B}(0, r)$ contienne K , soit ρ la projection de $\bar{B}(0, r)$ sur K . Considérons la multi-application $r \circ \Gamma_K \circ \rho$, elle vérifie les hypothèses du théorème 1.15., on en déduit qu'il existe $x \in \bar{\Omega} = \bar{B}(0, r)$ tel que $x \in r(\Gamma(\rho(x)))$, alors nécessairement $x \in K$ d'où $\rho(x) = x$ et donc :

$$x \in r \circ \Gamma(x).$$

—————~~X~~—————

Montrons maintenant le théorème.

Notons $K = \overline{\Gamma(C)}$; d'après le lemme 3.3. de la partie III.1., pour tout V , voisinage de 0 équilibré convexe dans E , il existe une application continue $\pi_V : K \rightarrow C$ telle que $\pi_V(x) - x \in V$, $\forall x \in K$ et $\pi_V(K)$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie E_V . Notons Γ_V la restriction de Γ à $C \cap E_V$ à valeur dans K . La multi-application $\pi_V \circ \Gamma_V$ à valeur dans $C \cap E_V$ vérifie les hypothèses du lemme 5.8. et donc, il existe $x_V \in C \cap E_V$ tel que $x_V \in \pi_V \circ \Gamma_V(x_V)$.

Soit $x_V = \pi_V(y_V)$ avec $y_V \in \Gamma(x_V)$.

Sur l'ensemble des voisinages de 0 équilibrés et convexes dans E considérons un ultra filtre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre naturellement associé à la relation d'ordre inclusion. Alors $y_V \xrightarrow{\mathcal{U}} y$ puisque $y_V \in K$ qui est compact et

comme $x_v = \pi_v(y_v)$ on a $x_v - y_v \in V$ et donc $x_v \xrightarrow{\mathcal{U}} y$. On a donc à la limite, puisque Γ est s.c.s. $y \in \Gamma(y)$ et le théorème est démontré.

~~— X —~~

Voici maintenant une version multivoque du théorème de Birkhoff-Kellog (voir [8]).

THEOREME 5.9.

Soit E un espace normé de dimension infinie, S sa sphère unité, Γ une multi-application acyclique compacte de S dans E telle que $0 \notin \overline{\Gamma(S)}$. Alors, il existe $x \in S$ et $\lambda \neq 0$ tels que :

$$\lambda x \in \Gamma(x).$$

DEMONSTRATION

Commençons par étendre la multi-application Γ en une multi-application acyclique compacte $\hat{\Gamma}$ définie sur la boule unité fermée $\bar{B}$ de E .

$$\text{Soit } \hat{\Gamma}(x) = \|x\| \cdot \Gamma\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{si } x \neq 0$$

$$\text{et } \hat{\Gamma}(0) = \{0\}.$$

Montrons alors le résultat en dimension finie impaire dans le cadre des multi-applications $r \circ \Gamma$.

LEMME 5.10.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie impaire, $\bar{B}$ sa boule unité fermée, Γ une multi-application acyclique compacte de $\bar{B}$ dans un espace compact métrisable X , r une application continue de X dans E . On suppose que $0 \notin r \circ \Gamma(S)$. Alors il existe un réel $\lambda \neq 0$ et un point $x \in S$ tels que : $\lambda x \in r \circ \Gamma(x)$.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde . Identifions E à $\mathbb{R}^n$.
Ecrivons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & G(\Gamma) & \xrightarrow{P} \bar{B} \\ & \swarrow q & \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{r} & X \end{array}$$

Considérons les couples $[p, r \circ q]$, $[p, p]$, et l'application :

$$((x,y),t) \rightarrow tp(x,y) + (1-t)r \circ q(x,y) = tx + (1-t)r(y)$$

pour $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in G(\Gamma)$.

Si $x \in S$ on a $tx + (1-t)r(y) \neq 0$ par hypothèse ; on a donc une homotopie et :

$$d(0, [p, r \circ q], B) = d(0, [p, p], B) = +1$$

En raisonnant de manière analogue avec les couples $[p, r \circ q]$ et $[p, -p]$ on trouve que :

$$d(0, [p, r \circ q], B) = d(0, [p, -p], B) = (-1)^n = -1 ,$$

ce qui est contradictoire.

—————X—————

Achevons maintenant la démonstration du théorème.

Soit $K = \widehat{\Gamma(\bar{B})}$, alors d'après le lemme 3.3. de la partie III.1., pour tout $n \geq 1$, il existe une application continue $\pi_n : K \rightarrow E$ telle que :

$\forall x \in K$, $\pi_n(x) - x \in B(0, \frac{1}{n})$ et $\pi_n(K)$ soit contenu dans un sous-espace de dimension finie impaire E_n (rajouter au besoin un vecteur).

On prendra $n \geq n_0$ où n_0 est défini tel que $B(0, \frac{1}{n_0}) \cap \overline{\Gamma(S)} = \emptyset$.

Notons $\hat{\Gamma}_n$ la restriction de $\hat{\Gamma}$ à $\bar{B} \cap E_n$ à valeur dans K et considérons la multi-application $\pi_n \circ \hat{\Gamma}_n$; pour $n \geq n_0$, $\pi_n \circ \hat{\Gamma}_n$ vérifie les hypothèses du lemme et donc il existe $\lambda_n \neq 0$ et $x_n \in S \cap E_n$ tels que :

$$\lambda_n x_n \in \pi_n \circ \hat{\Gamma}_n(x_n).$$

Soit $\lambda_n x_n = \pi_n(y_n)$ avec $y_n \in \Gamma(x_n)$.

Comme $\pi_n(K) \subset K + B(0,1)$, la suite $\lambda_n x_n$ est bornée et donc λ_n est bornée dans $\mathbb{R}$. On peut donc trouver une sous-suite λ_{nk} et une sous-suite y_{nk}

telles que $y_{nk} \rightarrow y$ et $\lambda_{nk} \rightarrow \lambda$;

alors $\lambda_{nk} x_{nk} \rightarrow y$ d'où $x_{nk} \rightarrow \frac{1}{\lambda} y = x$ (Puisque $0 \notin \overline{\Gamma(S)}$ on a $\lambda \neq 0$).

Or on a $y_{nk} \in \Gamma(x_{nk})$ et donc à la limite $y \in \Gamma(x)$, soit $\lambda x \in \Gamma(x)$ ($x \in S$ puisque S est fermée et $x_n \in S$).

BIBLIOGRAPHIE DE LA PARTIE III.2.

- [1] N. ARONSZAJN : Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles.
Annals of Math. Vol.43, N° 4, (oct. 1942).
- [2] K. BORSUK : Theory of retracts.
Monografie Matematyczne , Warszawa (1967).
- [3] A. CELLINA : Multi-valued differential equations.
University of Maryland , Technical note BN 574, (sept. 1968).
- [4] A. DOLD : Fixed point index and fixed point theorem for euclidean neighbourhood retracts, Topology, 4 (1965) 1-8.
- [5] J. DUGUNDJI : An extension of Tietze's theorem.
Pacific Journal of Math. 1 (1951) 353-367.
- [6] S. EILENBERG and D. MONTGOMERY : Fixed point theorems for multi-valued transformations.
Amer. Journ. of Math. 58 (1964) 214-222.
- [7] R. GODEMENT : Topologie algébrique et théorie des faisceaux.
Hermann, Paris (1964).
- [8] A. GRANAS : Topics in infinite dimensional topology.
Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, (1969-1970).
- [9] A. LASOTA and Z. OPIAL : Fixed point theorems for multi-valued mappings and optimal control problems.
Bull. Acad. Pol. Sci. 16 (1968) 645-649.

- [10] M.J. POWERS : Thesis, Indiana University (1968).
- [11] E. SPANIER : Algebraic Topology.
Mac Graw-Hill Inc. (1966).
- [12] M. ROGALSKI : Bull. Sc. Math. de France, deuxième série,
96, (1972), 83-87.
- [13] M. BERGER, B. GOSTIAUX : Géométrie différentielle.
Armand Collin, Paris (1972).
- [14] P. RABINOWITZ : Théorie du degré topologique et applications à
des problèmes aux limites non linéaires.
Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université
Paris VI , N° 75010.
- [15] N. KIKUCHI : On some fundamental theorems of contingent equations
in connection with the control problems.
Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. ser. A 3 (1967) 177-201.
- [16] M. VALADIER : Communication personnelle non publiée.
- [17] J. VON NEUMANN : On rings of operators, Reduction Theory.
Annals of Math. 50, (1949), 401-485.
- [18] A.F. FILIPPOV : Differential equations with many valued disconti-
nuous right hand side.
Dok. Akad. Nauk SSR t.151, (1963), 65-68.
- [19] E. McSHANE : Generalized curves, Duke Math. J. 6 (1940), 513-536.
- [20] J. WARGA : Relaxed variational problems.
J. Math. Anal. Appl. 4 (1962), 111-128.
- [21] J. HORVATH : Topological vector spaces and distributions.
Addison-Wesley (1966).

- [22] A. DOLD : Algebraic Topology, Springer-Verlag (1972).
- [23] J.L. LIONS : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris (1969).
- [24] T.W. MA : Topological degree for set-valued compact vector fields in locally convex spaces,
Dissertationes Math. 92 (1972), 1-43.
- [25] M. WOJDYSLAWSKI : Retracts absolus et hyperespaces des continus,
Fund. Math. Vol.32, (1939), 184-192.
- [26] L.F. FOULIS : Subsets of an absolute retract.
Proc. Amer. Math. Soc. 8, (1957), 365-366.
- [27] E. MICHAEL : Topologies on spaces of subsets.
- [28] J.M. LASRY, R. ROBERT : à paraître.
- [29] B.D. CALVERT : The local fixed point index for multivalued transformation in a Banach space.
Math. Ann. 190, (1970), 119-128.

