



HAL
open science

Enumérations eulériennes dans les multigraphes et invariants de Tutte-Grothendieck

Pierre Martin

► **To cite this version:**

Pierre Martin. Enumérations eulériennes dans les multigraphes et invariants de Tutte-Grothendieck. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1977. tel-00287330

HAL Id: tel-00287330

<https://theses.hal.science/tel-00287330>

Submitted on 11 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES
MATHÉMATIQUES

par

Pierre MARTIN



ENUMERATIONS EULERIENNES
DANS LES MULTIGRAPHES
ET INVARIANTS DE TUTTE - GROTHENDIECK



Soutenue le 19 mars 1977 devant la Commission d'Examen :

Président : J. KUNTZMANN

Rapporteur : H. RAYNAUD

Examineurs : C. BENZAKEN
M. CHEIN

M. LAS VERGNAS

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMTIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELDORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERTEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHLAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert NEMOZ Alain NOUGARET Marcel PARAMELLE Bernard PECCOUD François	Mécanique (IUT I) Thermodynamique Automatique (IUT I) Pneumologie Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René PERRIER Guy PHELIP Xavier RACHAIL Michel RACINET Claude RAMBAUD André RAMBAUD Pierre RAPHAEL Bernard	Métallurgie (IUT I) Géophysique-Glaciologie Rhumatologie Médecine interne Gynécologie et obstétrique Hygiène et hydrologie (Pharmacie) Pédiatrie Stomatologie Bactériologie (Pharmacie)
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Chimie physique
MM.	ROBERT Jean-Bernard Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René SHOM Jean-Claude STOEBNER Pierre VROUSOS Constantin	Cancérologie Chimie générale Anatomie pathologie Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick HODGES Christopher	Spectro physique Transition de phases
-----	---------------------------------------	--

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président
Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrometallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique
----	---------------	-------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique
----	-------------	-------------

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à

*Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN qui me fait l'honneur de
présider le jury de cette thèse,*

*Monsieur M. CHEIN, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie
(Paris VI),*

Monsieur M. LAS VERGNAS, Chargé de Recherche au CNRS,

*Messieurs C. BENZAKEN et H. RAYNAUD, Professeurs à l'Université
de Grenoble,*

qui ont bien voulu accepter d'être membres du jury.

*Mes remerciements vont également à Madame G. DUFFOURD, pour la
dactylographie, à Monsieur S. RASOLONJATOVO, pour la réalisation
graphique, ainsi qu'aux membres du Service Tirage pour l'édition
de cette thèse; vous pourrez juger, dans les pages qui suivent, de
l'excellente qualité de leur travail.*

Dans l'analyse des travaux de recherche sur les graphes, on constate une forte corrélation entre le type de problème étudié et le champ d'application de l'étude, défini par les particularités des graphes que l'on considère.

Le développement de la théorie des graphes explique assez bien la prolifération de nombreuses catégories de graphes ayant telle ou telle particularité : à un développement endogène rapide de cette discipline, a toujours été associée une forte croissance exogène liée à la grande facilité de modéliser une situation concrète par un graphe. Cependant, la plupart de ces applications ont nécessité, soit la définition d'une nouvelle variété de graphes, soit l'extension de la définition antérieure.

Jusqu'à présent la solution, consistant à partir d'une définition assez vaste pour contenir toutes les variétés possibles de graphes, n'a été que peu suivie (à l'exception de J. KUNTZMANN dans son livre "Théorie des Réseaux"), et il faut bien reconnaître qu'au delà du caractère universel des définitions, on ne parvient qu'artificiellement à unifier la problématique.

A problèmes particuliers, donc, graphes particuliers. Et réciproquement.

Si l'on cherche à favoriser le développement exogène de la théorie des graphes on s'intéressera aux problèmes extérieurs dont les objets sont susceptibles de se modéliser par des graphes, on définira la variété de graphes la plus adaptée au traitement d'un tel problème et on étudiera les éléments remarquables dont la détermination constitue la solution du problème posé.

Si, au contraire, on est plus attentif au développement endogène de la théorie, l'effort portera sur les résultats susceptibles de préciser les relations existant entre les divers éléments (invariants, parties remarquables, etc..) déjà définis et étudiés par ailleurs.

Nous avons eu l'occasion, lors d'études, dans les graphes sans circuits, d'invariants issus de problèmes d'informatique, de pratiquer la première approche décrite ci-dessus et de contribuer à enrichir ce que F. Harary appelle *l'alphabet grec* de la théorie des graphes.

Pour notre travail de thèse, nous avons pensé qu'une démarche contribuant au développement endogène de la théorie des graphes était plus apte à produire un ensemble cohérent de réflexions et, pour renforcer encore cette cohésion, nous avons adopté un point de vue plus radical dans la manière de

considérer les éléments d'un graphe : au lieu d'entreprendre une étude analytique des relations entre éléments, nous avons privilégié le point de vue synthétique en étudiant globalement les éléments (ici, les invariants) qui sont en relation avec un élément (invariant) donné.

Ce point de vue n'est pas nouveau. En 1947, déjà, la mise en évidence par W. Tutte d'un "anneau en théorie des graphes" permettait la définition globale d'une classe d'invariants associés aux nombres de colorations d'un graphe. La généralisation de cette construction aux matroïdes (H. Crapo) permettait à T. Brylawski d'explicitier en 1972 une théorie générale de ce type de construction.

Notre travail est conforme à cet état d'esprit. Dans un premier temps, nous montrons l'existence, dans les graphes 4-réguliers, de groupes et d'anneaux d'invariants liés au nombre de cycles eulériens et nous les interprétons dans la théorie de Brylawski. Dans une seconde étape, nous poursuivons la recherche de structures associées à des invariants énumératifs dans des graphes eulériens plus généraux et nos résultats nous conduisent à proposer une extension de la modélisation de Brylawski qui rende compte à la fois des anciennes et des nouvelles structures.

On trouvera, ci-après, un exposé des problèmes traités dans cette thèse, dans l'ordre logique dans lequel ils se font jour; la table des matières qui suit cette présentation précisant l'ordre adopté pour l'exposé de leur résolution.

-0-0-0-0-

Trois constatations sur les énumérations eulériennes dans les multigraphes constituent le point de départ des résultats établis dans cette thèse. Tout d'abord, on observe que le dénombrement des cycles eulériens dans les multigraphes peut se résoudre par la définition et la justification d'un algorithme récursif fondé sur deux opérateurs : la réduction et la décomposition. Puis on trouve que l'application de cet algorithme aux graphes 4-réguliers permet la définition d'un polynôme énumérateur en une variable : $P(G,x)$. Enfin, se référant à un travail théorique effectué par T.H. Brylawski, on établit que $P(G,x)$ est un exemple d'invariant universel canoniquement associé au processus récursif de dénombrement et appelé par cet auteur "invariant de Tutte-Grothendieck".

Ces trois éléments servent de base à l'ensemble des travaux que nous présentons. Dans un premier temps on établit que la possibilité d'identifier notre polynôme à un invariant de Tutte-Grothendieck dépend des propriétés structurelles des deux opérateurs qui définissent l'algorithme et que, parmi ces propriétés, certaines sont vérifiées sur l'ensemble des graphes eulériens (raffinabilité de la décomposition et distributivité de la décomposition par rapport à la réduction), tandis qu'une autre (la raffinabilité de la réduction) a un champ d'application plus restreint.

Puis, sans quitter les graphes 4-réguliers, on cherche à étendre les résultats précédents aux dénombrements de sous-ensembles de cycles eulériens définis par des conditions locales. Les cycles unicursaux des représentations sphériques des graphes 4-réguliers planaires et, de façon plus générale, les cycles correspondant aux circuits d'une orientation pseudo-symétrique d'un graphe 4-régulier constituent des sous-ensembles pour lesquels il est possible de définir un polynôme qui soit un invariant de Tutte-Grothendieck. Le premier cas, qui n'est qu'un cas particulier du second, présente l'intérêt d'établir une corrélation instructive entre les polynômes que nous définissons dans cette thèse et le polynôme dichromatique de W.T. Tutte. Poursuivant cette généralisation, on établit qu'il n'existe pas d'invariant de Tutte-Grothendieck dans le cas du dénombrement d'un sous-ensemble quelconque de cycles eulériens définis par des conditions locales, bien que l'extension des méthodes précédentes permette de définir un polynôme intrinsèque. Cette propriété négative provient de ce que la réduction n'est pas raffinable dans la totalité des cas considérés. On conclut alors cette étude en établissant que la propriété de raffinabilité n'est vérifiée que dans les trois cas particuliers précédemment étudiés.

D'autres problèmes surgissent avec l'étude des graphes réguliers de degré supérieur à 4. Il est possible de les résoudre et d'établir l'existence d'un polynôme invariant pour les graphes réguliers de degré 6. De plus, ce polynôme conduit à réaliser une extension de la théorie de Brylawski où l'on est amené à considérer une réduction formée de réductions partielles définies à l'aide d'opérateurs externes et prenant leurs valeurs dans un module ou une algèbre. Cette construction semble être d'une grande généralité puisqu'elle permet non seulement d'interpréter le polynôme relatif au dénombrement total des cycles eulériens dans les graphes 6-réguliers et le polynôme relatif aux dénombrements quelconques dans les graphes 4-réguliers, mais encore de poser des conditions nécessaires à l'existence d'un polynôme relatif aux graphes eulériens quelconques et d'interpréter un invariant des graphes bipartis que nous avons étudié par ailleurs.

L'ensemble de ces résultats est générateur d'un grand nombre de questions ouvertes que nous avons annexées à cette thèse. Parmi ces questions, certaines visent à prolonger les résultats obtenus dans un sens théorique, les autres à exploiter ces résultats pour une meilleure connaissance pratique des graphes eulériens.

Les références bibliographiques et les indications de l'exposé précédent ne donnent pas une idée exacte des échanges - mathématiques et personnels - dont l'auteur se sent particulièrement redevable. Qu'il lui soit permis ici de combler cette lacune.

Mon séjour - trop bref - au département de mathématiques du Mans m'a valu d'avoir pu participer, en juin 1971, au Séminaire de Mathématiques Supérieures de l'Université de Montréal, consacré cette année-là aux aspects algébriques de la Combinatoire et de la Théorie des Graphes. G-C. Rota en était l'un des conférenciers; il exposa, avec la remarquable clarté dont il est coutumier, sa vision de la Combinatoire et les grands résultats auxquels il était parvenu avec ses élèves au M.I.T. (T. Brylawski, H. Crapo, C. Greene, etc.). De ce séminaire naquirent les premiers résultats du présent travail. C'est à M. Las Vergnas, qui fut un moment mon condisciple sur les bancs de Montréal, que je dois de m'être penché plus précisément sur le travail de Brylawski publié l'année suivante. J'ai mentionné, ci-dessus, tout ce qui en avait résulté pour l'avancement de mes recherches. L'impulsion suivante fut donnée par A. Bouchet, avec lequel j'eus l'occasion de travailler quelques mois avant de quitter définitivement Le Mans; il me suggéra les idées sur les k partitions eulériennes et la définition du polynôme $\Pi(|G|, x)$.

Ensuite, l'évolution de mon travail se fit davantage en fonction d'une dynamique interne de recherche et les échanges personnels prirent le pas sur les influences plus directement scientifiques. Outre les membres des deux équipes de recherche qui m'ont jusqu'ici hébergé (celle du Mans et celle de Grenoble) et où j'ai toujours trouvé un inestimable réconfort quotidien, je voudrais principalement citer Michel Chein et Hervé Raynaud. C'est au premier que je dois d'avoir pu définir - tout au long d'une collaboration, quelques fois épisodique, commencée il y a cinq ans - le modèle de l'orientation que j'entends aujourd'hui donner à mon activité de chercheur. Quant au second, il a été, depuis le début, *le directeur* de recherche - à la fois censeur et confident - sans lequel ce travail n'aurait été ni entrepris, ni poursuivi, ni mené à terme.

Que tous, cités ou non cités, trouvent ici l'expression sincère de ma gratitude.

TABLE

CHAPITRE I : ALGORITHME D'ENUMERATION DES CYCLES EULERIENS DANS LES MULTIGRAPHERS FINIS	7
1. Définitions	9
2. Définition des cycles eulériens dans les multigraphes	11
3. Opération de réduction	14
4. Opération de décomposition	17
5. Décomposition d'un graphe normalisé d'indice de connexité 2 en composantes normalisées 4-arête-connexes	20
6. Algorithme de dénombrement	30
CHAPITRE II : INVARIANT EULERIEN DANS LES GRAPHES 4-REGULIERS	31
1. Bidécompositions distributives	32
2. Un invariant des graphes 4-réguliers	36
3. Bidécomposition eulérienne	43
4. Propriétés numériques de $P(G,x)$	47
CHAPITRE III : POLYNOMES ASSOCIES A DES DENOMBREMENTS EULERIENS PARTIELS DANS LES GRAPHES 4-REGULIERS	49
1. Polynôme $\Pi(G ,x)$	51
2. Invariance topologique de $\Pi(G ,x)$	59
3. σ -bidécompositions et σ -cycles	65
4. Dénombrement des circuits eulériens dans les graphes 4-réguliers pseudo-symétriques	68
5. Valuation remarquable des polynômes $\Pi(G,x)$	79
6. Dénombrement de sous-ensembles de cycles eulériens définis par conditions locales	82
7. Extension de la propriété de raffinement de la réduction	89

CHAPITRE IV : A PROPOS DE L'ENUMERATION DES CYCLES EULERIENS DANS LES GRAPHES 6-REGULIERS, GENERALISATION DES INVARIANTS DE TUTTE-GROTHENDIECK AUX MODULES ET AUX ALGEBRES	103
1. Dénombrement des cycles eulériens dans les graphes 6-réguliers	105
2. Modules et algèbres de Tutte-Grothendieck	116
3. \mathbb{Z} -multidécomposition dans les graphes bipartis	127
CONCLUSION	131
PROBLEMES OUVERTS	133
ANNEXE 1 : Valeurs des polynômes P et Π pour les graphes d'ordre inférieur ou égal à 6	137
ANNEXE 2 : Polynomialité des algorithmes de dénombrement mentionnés au Chapitre I	141
BIBLIOGRAPHIE	147
INDEX	151

CHAPITRE I

ALGORITHME D'ENUMÉRATION DES CYCLES EULÉRIENS DANS LES MULTIGRAPES FINIS

Le dénombrement des cheminements eulériens dans les graphes finis consiste essentiellement en l'un des deux problèmes suivants :

- dénombrement des circuits eulériens dans les graphes orientés pseudo-symétriques,
- dénombrement des cycles eulériens dans les graphes non orientés (ou orientés).

La première question a été résolue, d'une part, par le théorème suivant dû à VAN AARDENNE-EHRENFEST & N.J. DE BRUIJN [1951].

"Le nombre de circuits eulériens dans un graphe orienté pseudo-symétrique $G = (X, U)$ est égal à

$$\Delta_0 \cdot \prod_{x \in X} (d^+(x) - 1)!$$

où Δ_0 désigne le nombre d'arborescences maximales dont l'origine est un sommet x_0 donné de G et $d^+(x)$ désigne le demi-degré extérieur du sommet x ."

Ce résultat a été, par ailleurs, complété par une formule due à R. BOTT & J.P. MAYBERRY [1954], établissant que la valeur de Δ_0 est égale au déterminant d'une matrice déduite de la matrice d'adjacence de G .

De l'ensemble de ces deux résultats se déduit un algorithme polynomial⁽¹⁾ de dénombrement des circuits eulériens.

En revanche, il n'existe pas dans la littérature de solution à la seconde question. Le résultat précédent suggère néanmoins l'approche suivante :

Pour un graphe eulérien, le nombre de cycles eulériens est la somme des nombres de circuits eulériens des graphes pseudo-symétriques déduits du graphe initial par orientation convenable des arêtes. Malheureusement, cette solution impose l'énumération des orientations pseudo-symétriques d'un graphe eulérien et il s'en déduit un algorithme non polynomial⁽¹⁾.

L'algorithme que nous proposons est également non polynomial⁽¹⁾. Il présente l'avantage sur le précédent d'être à la fois un algorithme d'énumération et un algorithme de dénombrement. De plus, les opérations que cet algorithme impose de définir sur les graphes eulériens révèlent avoir des propriétés intéressantes qui sont établies à la fin de ce chapitre et seront fréquemment utilisées dans les chapitres ultérieurs.

(1) L'annexe 2 est consacrée au rappel de quelques définitions élémentaires sur la polynomialité des algorithmes et à la justification de ces affirmations.

Pour la majorité des termes utilisés dans cette thèse, nous adoptons la terminologie de C. BERGE [1970] et renvoyons à son ouvrage pour les définitions classiques de théorie des graphes. Cependant, il nous a paru préférable d'adopter le point de vue de W.T. TUTTE [1966] en ce qui concerne la connectivité dans les graphes. Les définitions tirées de ce livre sont rappelées au § 1. Le § 2 établit une définition "opérationnelle" d'un cycle eulérien dans les multigraphes finis connexes. L'algorithme de dénombrement proposé se fonde sur deux opérations définies dans les graphes eulériens : la réduction en un sommet réductible et la décomposition selon un cocycle de cardinal 2. Ces opérations sont respectivement décrites aux § 3 et 4. L'existence d'une décomposition canonique d'un graphe eulérien d'indice de connexité 2 en composantes eulériennes d'indice de connexité fait l'objet du § 5. Enfin, le § 6 énonce et justifie l'algorithme de dénombrement des cycles eulériens d'un graphe fini.

1. DEFINITIONS

Les termes de théorie des graphes employés ici sans que leur définition soit rappelée sont empruntés au livre de C. BERGE [1970]. Les rappels ci-après précisent la traduction de la terminologie de W.T. TUTTE [1966] relative à la connectivité dans les (multi)graphes.

1.1.

Soit $G = (X, E)$ un graphe fini. $n(G)$ et $m(G)$ désignent respectivement le cardinal de X et celui de E .

Un *sous-graphe partiel* $H = (Y, F)$ de G est défini par un sous-ensemble Y de X et un sous-ensemble F de E , tels que tout sommet incident à une arête de F appartienne à Y .

En particulier, le *sous-graphe* $G[Y]$ est défini par un ensemble Y de sommets et l'ensemble F des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à Y .

Si $H = (Y, F)$ est un sous-graphe partiel de $G = (X, E)$, $d_H(x)$, pour x appartenant à Y , représente le *degré partiel de x dans H* . Les *sommets d'attachement* du sous-graphe partiel H sont les éléments de Y qui ont un degré partiel dans H strictement inférieur à leur degré dans G . L'ensemble qu'ils forment est désigné par $W(G, H)$.

1.2.

Par *intersection* (resp. *union*) de deux sous-graphes partiels d'un graphe G , nous entendons le sous-graphe partiel de G défini par l'intersection (resp. l'union) des deux ensembles de sommets et l'intersection (resp. l'union) des deux ensembles d'arêtes. Par ailleurs, le *complément* \bar{H} d'un sous-graphe partiel $H = (Y, F)$ de $G = (X, E)$ est le sous-graphe partiel de G défini par l'ensemble $E - F$ d'arêtes et l'ensemble $X - (Y - (W(G, H)))$ de sommets.

On définit deux sous-graphes partiels particuliers, relatifs à un sous-ensemble F des arêtes du graphe $G(X, E)$. $G:F$ est le *graphe partiel* (X, F) et $G.F$ est la *réduction* de G à F , que l'on peut définir par $\overline{G:F}$; c'est encore le graphe obtenu à partir de $G:F$ par suppression des sommets isolés.

1.3.

Considérons un graphe $G = (X, E)$ et un sous-ensemble J de X . Par *abus d'écriture*, nous désignerons également par J le sous-graphe partiel de G sans arête et dont l'ensemble des sommets est J .

Un sous-graphe partiel H de G est dit *détaché mod. J* (ou *J-détaché*) si ses sommets d'attachement appartiennent à J . Remarquons, en particulier, que G , J et tous les sous-graphes de J sont *J-détachés*.

Soit $D(J)$ l'ensemble des sous-graphes partiels de G détachés mod. J et non inclus dans J . On définit les *composantes mod. J* (ou *J-composantes*) comme les éléments minimaux de $D(J)$ au sens de l'inclusion des sous-graphes partiels.

On démontre que les *J-composantes* d'un graphe $G = (X, E)$ donné réalisent une partition de E .

Ces définitions se généralisent au cas où J est un sous-graphe partiel quelconque de G (TUTTE [1966]). Seul le cas particulier ci-dessus nous sera utile dans la suite.

1.4.

Un graphe G est dit *k-séparé* s'il contient un sous-graphe partiel H tel que

$$(i) \text{ Min } \{m(H), m(\bar{H})\} \geq k,$$

$$(ii) |W(G, H)| = k.$$

La *connectivité* $\lambda(G)$ du graphe G est le plus petit entier, s'il existe, tel que G soit *k-séparé*. Si cet entier n'existe pas, G est de connectivité *infinie*. Pour toute valeur entière p , inférieure ou égale à $\lambda(G)$, G est dit *p-connexe*.

Remarquons que, selon ces définitions, un graphe connexe de plus de un sommet et possédant une boucle est de connectivité 1. Par ailleurs, un graphe de plus de deux sommets et comportant des arêtes multiples est 2-séparé. Ainsi un graphe 3-connexe d'ordre supérieur ou égal à 3 est nécessairement un graphe *simple*.

C. BERGE [1970 p.158] donne une définition différente de la connectivité dans les graphes. Cependant, pour les graphes simples, la définition de C. BERGE est équivalente à celle que nous avons présentée ici.

1.5. Quelques graphes particuliers

On désigne par $P_p, p \geq 1$, et on appelle *polygone* de p arêtes ("*p-gon*" dans la terminologie anglo-saxonne) le graphe connexe composé de p sommets de degré 2. En particulier, le graphe P_1 est composé d'un sommet et d'une boucle incidente à ce sommet. F_p , ou fuseau de p arêtes ("*p-bond*"), est, pour p supérieur ou égal à 1, le graphe d'ordre 2 composé de p arêtes en parallèle. Enfin, C_p , *graphe-chaîne* de p arêtes ("*p-chain*") est, pour tout indice p positif ou nul, le graphe partiel de P_{p+1} obtenu par suppression d'une arête quelconque.

Les graphes C_p sont de connectivité 1 pour $p \geq 2$; P_p et F_p sont de connectivité 2 pour p supérieur ou égal à 4. En revanche, C_0 , F_1 (ou C_1), F_2 (ou P_2), F_3 et P_3 sont de connectivité infinie.

2. DEFINITION DES CYCLES EULERIENS DANS LES MULTIGRAPHERS

2.1.

La plupart des définitions des cycles eulériens, bien que suffisantes pour en caractériser l'existence, se révèlent incapables de décider si deux cycles eulériens sont distincts ou non. Elles ne sont donc d'aucune utilité pour effectuer des dénombrements.

Il est nécessaire de préciser le contenu de la définition, ce que nous avons fait en choisissant les trois idées suivantes :

- 1) Un cycle eulérien est un cheminement simple qui utilise toutes les arêtes du graphe.
- 2) Deux cheminements déduits l'un de l'autre par une permutation circulaire sur les arêtes représentent le même cycle eulérien.
- 3) Deux cheminements déduits l'un de l'autre par inversion de l'ordre des arêtes représentent également le même cycle eulérien.

Ces choix conduisent à une définition équivalente à celle de P. ROSENTIEHL [1973]; ils n'ont cependant rien d'universel puisque W.T. TUTTE [1966 p.36] effectue des dénombrements de cycles à partir d'une définition fondée sur 1), 2) et non 3).

Le contenu de cette définition étant fixé, reste à préciser sa formulation. Nous avons opté pour une présentation "statique", c'est-à-dire une présentation qui élimine toute notion de succession d'arêtes, et qui se révèle particulièrement adaptée aux opérations récursives que nous décrivons dans la suite de ce chapitre. Cette définition s'inspire des notions introduites par A. KOTZIG [1968].

2.2.

Soit $G = (X, E)$ un multigraphe *sans boucle*. On appelle *transition* relative au sommet x de G un couple $(x, \{a, b\})$ composé du sommet x et d'un ensemble de deux de ses arêtes incidentes.

Définition : Un *cycle simple* du graphe $G = (X, E)$ est un ensemble de transitions de G vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) Chaque arête de E apparaît 0 ou 2 fois dans l'ensemble des transitions,

- (ii) Si une arête apparaît deux fois, elle apparaît dans deux transitions relatives à des sommets différents,
- (iii) La relation binaire symétrique induite sur E par ces transitions est connexe (c'est-à-dire que le graphe associé ayant E pour ensemble de sommets est un graphe connexe -Cf. infra 2.3).

Un *cycle eulérien* est un cycle simple pour lequel chaque arête apparaît de fois dans l'ensemble des transitions.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe possède un cycle eulérien est connue depuis L. EULER [1736] : le graphe doit être connexe et tous ses sommets doivent être de degré pair. Un tel graphe est appelé dans la suite *graphe eulérien*.

2.3.

Nous illustrerons ces définitions en donnant des définitions équivalentes sur le graphe adjoint associé au graphe G .

Le *graphe adjoint* ("line-graph") du graphe G sans boucle, est un 2-graphe noté $L(G)$. Ses sommets sont en bijection avec les arêtes de G ; entre deux sommets de $L(G)$ il existe autant d'arêtes qu'il y a de sommets communs entre les arêtes correspondantes de G . Les arêtes de $L(G)$ sont ainsi en bijection avec les transitions de G .

Soit G un graphe eulérien et $L(G)$ son graphe adjoint. Par la bijection précédente, l'ensemble des transitions d'un cycle simple (resp. eulérien) définit un cycle élémentaire (resp. hamiltonien) de $L(G)$.

De plus, pour un sommet quelconque x de G , désignons par E_x l'ensemble des arêtes incidentes à x . Les arêtes du cycle élémentaire (resp. hamiltonien) de $L(G)$ qui correspondent aux transitions, relatives au sommet x , d'un cycle simple (resp. eulérien) de G , déterminent un couplage (resp. un couplage parfait) dans le sous-graphe $L(G)[E_x]$.

On appellera *séparation* en x un ensemble de transitions relatives au sommet x qui réalise une partition des arêtes incidentes à x , c'est-à-dire un couplage parfait dans $L(G)[E_x]$. Se donner un *système* de G consiste à se donner une séparation en chacun des sommets de G . Un tel système est dit *transitif* s'il correspond à un cycle eulérien de G .

2.4. Graphes avec boucles

La définition d'un cycle eulérien qui vient d'être donnée ne peut s'appliquer aux graphes avec boucles. On peut y remédier de deux façons, soit en modifiant la condition (ii) de cette définition, soit en transformant les boucles. C'est ce deuxième parti que nous adoptons ici.

Soit G un graphe avec boucles; on désigne par \hat{G} le graphe sans boucles déduit de G en remplaçant tout sous-graphe partiel de G composé d'une boucle et de son sommet d'incidence par un sous-graphe isomorphe à F_2 et de même sommet d'attachement. *Par définition*, l'ensemble des cycles eulériens de G est mis en bijection avec l'ensemble des cycles eulériens de \hat{G} ; on désignera indifféremment son cardinal par $N(\hat{G})$ ou $N(G)$.

Le parti qui est adopté ici revient, en quelque sorte, à distinguer deux "sens de parcours" dans une boucle. Ce choix n'est pas original : c'est celui qui résulte également des définitions de W.T. TUTTE et P. ROSENSTIEHL mentionnées précédemment.

Remarquons que si l'on refuse une telle convention, il convient simplement de considérer que la valeur de $N(\hat{G})$ - que nous allons calculer dans la suite - est non pas égale à $N(G)$ mais à $2^b \cdot N(G)$ (où b désigne le nombre de boucles de G).

2.5. Sommets de degré 2

Un sommet de degré 2 ne permet la définition que d'une transition et donc d'une séparation unique. Si un tel sommet est adjacent à deux sommets distincts, il peut être supprimé sans inconvénient de la façon suivante. On appelle *branche* (C. BERGE [1970 p.28]) d'un graphe G un sous-graphe partiel maximal de G isomorphe à un graphe chaîne d'au moins deux arêtes et dont les seuls sommets d'attachement dans G sont les extrémités de la chaîne. Un graphe eulérien est dit *normalisé* s'il ne possède ni boucle ni branche. A partir d'un graphe eulérien sans boucle, G , on construit un graphe normalisé G_0 en remplaçant chaque branche de G par une arête de mêmes extrémités (on se convainc aisément que le graphe G_0 obtenu est indépendant de l'ordre des remplacements effectués). Dans un tel graphe, les seuls sommets de degré 2 ont un cocycle composé de deux arêtes en parallèle.

Dans un graphe eulérien normalisé $G = (X, E)$, on appelle *noeud* tout sommet de degré supérieur ou égal à 4. L'ensemble des noeuds de G est désigné par N ; son complémentaire dans X (c'est-à-dire l'ensemble des sommets de degré 2) est désigné par Z . *Par abus de langage*, nous définissons l'ordre de G comme le cardinal de N .

2.6. Définition

Soit $G = (X, E)$ un graphe eulérien normalisé et x, y deux noeuds de ce graphe; on désigne par $K(x, y)$,

- soit le graphe isomorphe à F_1 et d'extrémités x et y , si ces deux noeuds sont distincts,
- soit, dans le cas contraire, le graphe isomorphe à F_2 dont l'un des deux sommets est x et dont l'autre est un sommet z n'appartenant pas à X .

Dans chacun des deux cas, les arêtes de $K(x, y)$ sont, par définition, distinctes de celles de G .

La suite de ce chapitre est consacrée au dénombrement des systèmes transitifs d'un graphe eulérien normalisé - appelé dorénavant *graphe normalisé* - d'ordre 1

3. OPERATION DE REDUCTION

3.1.

Rappelons qu'un point d'articulation d'un graphe G quelconque est un sommet x qui détermine plusieurs $\{x\}$ -composantes. Par ailleurs, toute $\{x\}$ -composante d'un graphe eulérien est un graphe eulérien. Aussi, motivé par le fait que seuls les graphes normalisés sont l'objet de notre étude, nous désignerons par $\{x\}$ -composante d'un graphe normalisé, non pas la $\{x\}$ -composante elle-même, mais le graphe normalisé qui s'en déduit.

Soit $G = (X, E)$ un graphe normalisé d'ordre supérieur ou égal à 2 et N l'ensemble de ses noeuds. Considérons un sommet z de $X - N$ et le noeud x auquel il est adjacent. Le sous-graphe $G[\{x, z\}]$ est une $\{x\}$ -composante de G . Une telle composante, déterminée par un sommet de $X - N$, est - improprement - appelée *boucle*. Les $\{x\}$ -composantes qui ne sont pas des boucles, contiennent nécessairement un noeud différent de leur sommet d'attachement; elles sont appelées *composantes propres* de G .

Une *articulation essentielle* de G est un point d'articulation x qui définit au moins deux $\{x\}$ -composantes propres. Les autres points d'articulation sont appelés *articulations bouclées*.

Enfin, les noeuds qui ne sont pas des points d'articulation constituent les *sommets réguliers* de G .

La suite de ce paragraphe décrit une réduction récurrente des graphes normalisés; la récurrence porte sur l'ordre de G , c'est-à-dire sur le cardinal de l'ensemble des *noeuds*.

3.2. Réduction en un sommet régulier

Nous définissons tout d'abord une opération de réduction en tout sommet régulier d'un graphe normalisé d'ordre supérieur ou égal à 2. Cette définition sera ensuite étendue (Cf. 3.4.) aux articulations bouclées.

Soient x , de degré $2p$ ($p \geq 2$), un sommet régulier d'un graphe normalisé $G = (X, E)$ d'ordre n ($n \geq 2$), $\{e_1, e_2, \dots, e_{2p}\}$ l'ensemble de ses arêtes incidentes et $\{x_1, x_2, \dots, x_{2p}\}$ la famille des sommets adjacents à x ; x_j étant adjacent à x par l'arête e_j .

Considérons l'ensemble $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_h\}$ des séparations en x . Pour une séparation δ_i donnée, on associe à chacune de ses transitions, $\tau_k^i = (x, \{e_p, e_s\})$, le graphe $H_k^i = K(x_p, x_s)$

On pose :

$$G_i = G[x-x] \cup_{k=1}^p H_k^i$$

Un tel graphe est un graphe normalisé d'ordre $(n-1)$ - on vérifiera en particulier qu'il est connexe. La famille $\{G_i / 1 \leq i \leq h\}$ est la famille des graphes réduits de G en x .

3.3. Propriété

Soient G un graphe normalisé d'ordre supérieur ou égal à 2, x un sommet régulier de G et $\{G_i / 1 \leq i \leq h\}$ la famille des graphes réduits de G en x ; on vérifie

$$N(G) = \sum_{i=1}^h N(G_i)$$

où $N(H)$ désigne le nombre de cycles eulériens du graphe H .

Preuve : Un système transitif de G détermine une séparation δ_i en x et un système transitif du graphe G_i associé. Et réciproquement. /

Par ailleurs, le nombre des séparations en un sommet régulier x de degré $2p$ est, comme nous l'avons remarqué, le nombre de couplages parfaits du graphe complet K_{2p} , c'est-à-dire :

$$h = (2p)! / 2^p \cdot p! = (2p-1)!!$$

3.4. Réduction en une articulation bouclée

Considérons un graphe G et un sommet bouclé x de ce graphe. Supposons que x soit de degré $2q$ dans G et que le nombre de boucles attachées au sommet x soit égal à k ($1 \leq k \leq q-1$). Désignons par H le graphe normalisé déduit de l'unique composante propre déterminée par x .

Il est clair que tout cycle eulérien de G détermine un cycle eulérien de obtenu en "shuntant" les boucles attachées au sommet X.

Inversement, on montre par récurrence sur le nombre k de boucles au sommet X qu'un cycle eulérien de H est l'image de $2^k \cdot (q-1)!/(q-k-1)!$ cycles eulériens de G.

Si k est différent de (q-1), X est un sommet régulier de H. Par définition les graphes réduits de G en une telle articulation bouclée X, sont les graphes réduits en X de la {X}-composante propre H de G.

La propriété suivante fait la synthèse de la propriété 3.3. et des remarques ci-dessus.

3.5. Propriété

Soient G un graphe normalisé d'ordre n supérieur ou égal à 2, X, de degré 2q, une articulation bouclée de G, H le graphe normalisé déduit de la {X}-composante propre que cette articulation détermine et k le nombre de boucles de X.

Si $k = q-1$, H est d'ordre (n-1) et on vérifie

$$N(G) = 2^k \cdot k! \cdot N(H) .$$

Pour $k \leq q-2$, posons $d_H(X) = 2p$; appelons $\{G_1, G_2, \dots, G_h\}$ la famille des graphes réduits de G en X, alors

$$N(G) = 2^k \cdot [(q-1)!/(p-1)!] \cdot \sum_{i=1}^h N(G_i), \text{ avec } h = (2p-1)!! . /$$

On peut tirer des propriétés 3.3. et 3.5. un algorithme de dénombrement des cycles eulériens dans les graphes normalisés. Néanmoins, l'opération de décomposition décrite dans le paragraphe suivant permet d'améliorer cet algorithme (Cf. § 6). De plus, cette opération a un intérêt théorique important qui sera mis en évidence dans les chapitres ultérieurs.

4. OPERATION DE DECOMPOSITION

4.1.

L'opération de décomposition décrite ci-après est définie pour les graphes normalisés d'indice de connexité 2 (C. BERGE [1970 p.174]). Nous considérerons donc dans la suite un graphe normalisé $G = (X, E)$ dans lequel il existe une partition de X en deux ensembles A et B , tels que leur cocycle commun, noté ω , soit de cardinal 2. Afin d'exclure des éventualités dénuées d'intérêt, nous imposons de surcroît que A et B soient de cardinal supérieur ou égal à 2.

Désignons par $[u, v]$ et $[u', v']$ les deux arêtes du cocycle ω , avec $u, u' \in A$ et $v, v' \in B$. On définit

$$G' = G[A] \cup K(u, u')$$
$$\text{et } G'' = G[B] \cup K(v, v') \quad (\text{Cf. 2.6.})$$

Les deux graphes G' et G'' sont les *graphes décomposés de G selon ω* . Ce sont des graphes normalisés tels que l'ordre de G (au sens où nous l'avons défini en 2.5.) est la somme de leurs ordres.

4.2. Propriété

Soit G un graphe normalisé et ω un cocycle de G de cardinal 2. Si G' et G'' sont les graphes décomposés de G selon ω , la relation suivante est vérifiée :

$$N(G) = N(G') \cdot N(G'') .$$

Preuve : La réunion d'un système transitif de G' et d'un système transitif de G'' détermine un système transitif de G et réciproquement. /

4.3. Cas particulier

Considérons le cas particulier d'un graphe normalisé d'ordre supérieur ou égal à 2, qui comprend un noeud x de degré $2k$, auquel sont attachées $(k-1)$ boucles.

Le nombre de cycles eulériens de ce graphe peut s'évaluer de deux manières.

a) x est une articulation bouclée de G : en effet, ce sommet détermine k $\{x\}$ -composantes dont une seule est une composante propre. On désigne par H le graphe normalisé correspondant à cette composante. Par réduction de G en x , on obtient l'équation suivante :

$$N(G) = 2^{k-1} \cdot (k-1)! N(H) .$$

b) Les deux arêtes incidentes à x qui n'appartiennent pas à des boucles constituent un cocycle de cardinal 2 de G . Les graphes décomposés de G selon ce cocycle sont, d'une part, un graphe d'ordre 1, G' , composé de k boucles incidentes au sommet x , et d'autre part, le graphe H . Par décomposition de G , on obtient

$$N(G) = N(G') \cdot N(H)$$

De cette double évaluation de $N(G)$, on déduit le résultat suivant.

Propriété : Le graphe normalisé B^k , d'ordre 1, composé de k boucles vérifie :

$$N(B^k) = 2^{k-1} \cdot (k-1)! = (2k-2)!! \cdot /$$

4.4. Réductibilité dans un graphe décomposé

Les notations de cette section sont les mêmes que celles des sections précédentes. Nous supposons que le graphe normalisé G contient un sommet *réductible* x (c'est-à-dire un sommet régulier ou une articulation bouclée) et un cocycle ω de cardinal 2 qui n'est pas inclus dans celui de $\{x\}$ ⁽²⁾. Soit $G' = G[A] \cup K(u, u')$ celui des deux graphes décomposés de G selon ω qui contient le sommet x .

Propriété : Si x est un sommet régulier de degré $2p$ dans G , c'est également un sommet régulier de degré $2p$ dans G' ; si, dans G , x est une articulation bouclée de degré $2q$ à laquelle sont attachées k boucles ($k \leq q-1$), il en est de même dans G' .

Preuve : Nous allons montrer ce résultat en établissant une bijection entre les $\{x\}$ -composantes de G et celles de G' .

Tout d'abord constatons que toute $\{x\}$ -composante de G qui ne contient pas de sommet de $B = X-A$ est également une $\{x\}$ -composante de G' disjointe de $K(u, u')$ et réciproquement.

Soit à présent une $\{x\}$ -composante C de G qui contient un sommet y de B . Puisque $W(G, C) = \{x\}$ et que $G[B]$ est connexe, cette composante contient à la fois tous les sommets de B et les deux arêtes du cocycle ω ; C est donc unique.

Etablissons que le sous-graphe partiel $C' = (C \cap G[A]) \cup K(u, u')$, de G' est une $\{x\}$ -composante de G' . En effet, d'une part $\{x\}$ est bien le seul sommet d'attachement de C' dans G' ; supposons d'autre part, que ce sous-graphe partiel soit la réunion de deux sous-graphes partiels H et H' de G' tels que :

$$W(G', H) = W(G', H') = \{x\}$$

et $H \cap H' = \{x\}$.

(2) La situation exclue par cette hypothèse est celle analysée par la section précédente : celle où x est une articulation bouclée à laquelle est incident un cocycle de cardinal 2.

De façon évidente, le sous-graphe partiel $K(u, u')$ serait alors nécessairement contenu dans l'un des graphes précédents (H , par exemple). H' serait alors inclus dans $G[A]$ et H' contiendrait une $\{x\}$ -composante C' de G' dont l'intersection avec $K(u, u')$ est vide. D'après la première remarque de cette preuve, C' serait alors également une $\{x\}$ -composante de G , distincte (et donc disjointe) de C . L'hypothèse de l'existence de H et H' constitue donc une contradiction puisque par ailleurs G' doit être un sous-graphe partiel de H' et que nous avons supposé H' inclus dans C .

Ainsi, $(C \cap G[A]) \cup K(u, u')$ est une $\{x\}$ -composante de G' . C'est nécessairement une composante propre, sinon w serait inclus dans $w(\{x\})$. /

4.5. "Distributivité" de la décomposition par rapport à la réduction

Poursuivons l'analyse de la section précédente. Considérons le graphe réduit de G qui correspond à la séparation δ_i au sommet x (G_i). Le sous-graphe $B = X-A$ est contenu dans l'ensemble des sommets de G_i et détermine dans ce graphe un cocycle de cardinal 2. Par décomposition selon ce cocycle on obtient, ainsi qu'il est facile de le vérifier, deux graphes décomposés dont l'un est G'' et dont l'autre est le graphe réduit de G' au sommet x associé à la séparation δ_i .

Nous écrivons $G = G_1 + G_2 + \dots + G_h$ pour exprimer que $\{G_1, G_2, \dots, G_h\}$ est la famille des graphes réduits de G en un sommet réductible x . Le fait que (G', G'') soient les deux graphes décomposés de G , selon un cocycle de cardinal 2, est traduit par $G = G' . G''$.

Les remarques des deux dernières sections peuvent se résumer ainsi :

Propriété : Soit G un graphe normalisé, x un sommet réductible de G et w un cocycle de G de cardinal 2, non inclus dans $w(\{x\})$; supposons que la réduction de G en x et la décomposition de G selon w s'écrivent respectivement :

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_h$$

et $G = G' . G''$

et que x appartienne au sous-ensemble de sommets de G qui définit G' . x est alors un sommet réductible dans G' et, si l'on décrit cette réduction par $G' = G'_1 + \dots + G'_h$, on vérifie

$$G = (G'_1 + \dots + G'_h) . G'' = (G'_1 . G'') + \dots + (G'_h . G''). /$$

Le paragraphe suivant est consacré à la commutativité de l'opérateur de décomposition et à l'existence d'une décomposition ultime d'un graphe normalisé en composantes qui sont des graphes normalisés 4-arête-connexes.

5. DECOMPOSITION D'UN GRAPHE NORMALISÉ D'INDICE DE CONNEXITÉ 2 EN COMPOSANTES NORMALISÉES 4-ARÊTE-CONNEXES

5.1. Cocycles primitifs

On rappelle qu'un graphe normalisé est un graphe eulérien particulier et que, de ce fait, il est connexe. Tout cocycle, ω , de cardinal 2 d'un tel graphe est minimal et les deux composantes du graphe partiel $G.(E-\omega)$ sont les deux sous-graphes $G[A]$ et $G[X-A]$, où A est un des deux ensembles de sommets dont le cocycle est ω . De plus, l'on exclut, comme dans le paragraphe précédent, le cas dans lequel A ou $X-A$ est de cardinal 1.

Etablissons tout d'abord le résultat élémentaire contenu dans le lemme suivant. Dans l'énoncé de ce lemme, l'expression " $\{X\}$ -composante d'un graphe G normalisé" désigne la notion définie au § 1.3., et non pas la particularisation qui en a été faite au § 3.1..

Lemme : Soit G un graphe normalisé. Pour toute articulation essentielle x de G et tout cocycle ω de cardinal 2 de G , il existe une $\{X\}$ -composante de G qui contient ω

Preuve : Au sens du § 1.3., l'ensemble des $\{X\}$ -composantes de G , pour une articulation x donnée, réalise une partition des arêtes de G .

Soit H une $\{X\}$ -composante de G contenant, au moins, une arête de ω ; $E(H) \cap \omega$ est un cocycle de H . Or, H est un graphe eulérien (non nécessairement normalisé), donc tout cocycle de H est de cardinal pair : $E(H)$ contient donc ω . /

Définition : Un *cocycle primitif* d'un graphe normalisé $G = (X,E)$ est un cocycle de G , de cardinal 2, tel que l'un au moins des deux sous-graphes $G[A]$ ou $G[X-A]$ soit 2-arête-connexe.

Etablissons quelques propriétés élémentaires de ces cocycles primitifs.

Propriété : Toute arête d'un graphe normalisé appartenant à un cocycle de cardinal 2 appartient à un cocycle primitif de ce graphe.

Preuve : Soit $G = (X,E)$ un graphe normalisé et $\omega(A) = \{e,e'\}$ un cocycle de cardinal 2 de G . Considérons le sous-graphe $H = G[A]$. Si H est 2-arête-connexe, ω est un cocycle primitif. Sinon, il existe une arête a qui est un isthme de H et une partition de A en deux ensembles B et C tels que, dans H , $\bar{\omega}(B) = \bar{\omega}(C) = \{a\}$. Dans G , les cocycles de B et C sont chacun contenus dans $\{a,e,e'\}$. Or, comme ils doivent être de cardinal pair, que chacun d'eux doit contenir a et qu'ils ne peuvent contenir simultanément l'arête e (resp. e'), l'un d'eux est nécessairement égal à $\{a,e\}$ et l'autre à $\{a,e'\}$. Supposons $\omega(B) = \{a,e\}$.

Ainsi, il existe dans G un ensemble B , strictement contenu dans A , qui détermine un cocycle de cardinal 2 auquel appartient e . La discussion se poursuit selon que $G[B]$ est 2-arête-connexe ou non. On considère ainsi une suite d'ensembles strictement inclus les uns dans les autres, qui déterminent tous un cocycle de cardinal 2 auquel appartient l'arête e . Au bout d'un nombre fini d'étapes, on aboutit soit à un sous-ensemble D tel que $G[D]$ soit 2-arête-connexe, soit à un sous-ensemble de cardinal 1.

La seconde éventualité est impossible. En effet, si tel était le cas, le sommet Z constituant cet ensemble de cardinal 1 serait de degré 2 et, puisqu'il appartient à un graphe normalisé, il serait adjacent à un noeud X par une arête double (Cf. 3.1.). Le sous-graphe $G[\{X,Z\}]$ serait alors une $\{X\}$ -composante de G (aussi bien au sens du § 1.3. que du § 3.1.). L'arête e , incidente à Z n'appartiendrait alors à aucun cocycle de cardinal 2 de G en vertu, d'une part du lemme précédent qui affirme que ce cocycle devrait être inclus dans $G[\{X,Z\}]$ et, d'autre part du fait que nous ne considérons pas comme cocycle d'un graphe normalisé un cocycle composé des arêtes incidentes à un sommet de degré 2.

Cette conclusion est en contradiction avec les hypothèses faites sur e . On déduit de cette contradiction qu'il existe dans $G = (X,E)$ un sous-ensemble D de X tel que $\omega(D)$ soit un cocycle primitif de G qui contienne e . /

Cet argument prouve également le résultat suivant :

Corollaire : Si une arête d'un graphe normalisé G appartient à un cocycle de cardinal 2 non primitif, cette arête appartient à deux cocycles primitifs de G .

Preuve : L'analyse précédente peut en effet être faite à la fois pour $G[A]$ et $G[X-A]$. /

5.2. Propriété

Une arête d'un graphe normalisé $G = (X,E)$ ne peut appartenir à plus de 2 cocycles primitifs de ce graphe.

Preuve : Soient ω , ω' et ω'' trois cocycles primitifs distincts contenant l'arête e . Désignons par a , b , c respectivement la seconde arête de ces cocycles et par A , B , C respectivement les sous-ensembles de X dont les cocycles sont ω , ω' et ω'' et tels que $G[A]$, $G[B]$ et $G[C]$ soient 2-arête-connexes.

Supposons que $A \cap B$ soit non vide, alors le cocycle $\omega(A \cap B)$, inclus dans $\omega(A) \cup \omega(B)$, c'est-à-dire dans $\{e, a, b\}$, serait également non vide. Par construction, ni e , ni a n'appartiennent à $G[A]$, donc dans ce sous-graphe, le cocycle $\bar{\omega}(A \cap B)$ serait de cardinal au plus 1. On en déduirait que $G[A]$ ne peut pas être 2-arête-connexe, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Il en résulte que les trois ensembles A, B et C sont nécessairement deux à deux disjoints. Or, ils doivent chacun contenir une extrémité de l'arête e, ce qui conduit à une nouvelle contradiction de laquelle on déduit l'impossibilité de l'existence de trois cocycles primitifs contenant l'arête e. /

Corollaire : Soit $M(G)$ le graphe simple dont les sommets sont les arêtes du graphe normalisé $G = (X, E)$ et dont les arêtes joignent tout couple d'éléments de E qui constitue un cocycle primitif de G. Les composantes connexes de $M(G)$ sont isomorphe soit à K_1 , soit à K_2 , soit à $P_k (k \geq 3)$.

Preuve : D'après la propriété précédente, le degré maximum de $M(G)$ est deux. Supposons, par ailleurs, qu'il existe dans $M(G)$ une chaîne (ouverte) de longueur égale à 2: $\{a, b, c\}$. $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$ constituent des cocycles primitifs de G donc il existe, en vertu de l'argument de la propriété précédente, deux sous-ensembles disjoints, A et C, de X tels que $\omega(A) = \{a, b\}$, $\omega(C) = \{b, c\}$ et que chacun de ces sous-ensembles contienne une extrémité de l'arête b.

Il en résulte que $A \cup C$ contient les deux extrémités de b. Or,

$$\begin{aligned} \omega(A \cup C) &\subseteq \omega(A) \cup \omega(C) \\ &\subseteq \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Mais, b n'appartient pas au cocycle de $A \cup C$ (d'après ce qui précède), donc $\omega(A \cup C) = \{a, c\}$. $\{a, c\}$ est ainsi un cocycle, pas nécessairement primitif, de G. Si ce cocycle est primitif, c'est-à-dire si $G[X - (A \cup C)]$ est 2-arête-connexe la chaîne considérée appartient à une composante connexe isomorphe à P_3 . Dans le cas contraire, a appartient à un cocycle non primitif de G et donc à deux cocycles primitifs de G (corollaire 5.1.). Il en résulte que, dans $M(G)$, tout sommet adjacent à un sommet de degré 2 est lui-même de degré 2, et que les composantes connexes de plus de trois sommets sont isomorphes à des polygones. /

Enfin, on peut énoncer un dernier résultat relatif aux cocycles de cardinal 2 non primitifs.

5.3. Propriété

Dans un graphe normalisé $G = (X, E)$, tout cocycle de cardinal 2 non primitif est constitué de deux éléments de E correspondant à deux sommets non adjacents d'une même composante connexe de $M(G)$; et réciproquement.

Preuve : Considérons un cocycle $\{a, b\}$ non primitif de G et désignons par A un des deux sous-ensembles de X tels que $\omega(A) = \{a, b\}$. Nous savons, d'après la preuve de la propriété 5.1. qu'il existe un sous-ensemble B de A et une arête c de $G[A]$ tels que $\omega(B) = \{a, c\}$ et que $G[B]$ soit 2-arête-connexe.

Considérons A-B

$$\begin{aligned} \omega(A-B) &\subseteq \omega(A) \cup \omega(B) \\ &\subseteq \{a,b,c\} . \end{aligned}$$

Or, a n'est incidente à aucun sommet de A-B, donc $\omega(A-B) = \{a,c\}$.

Si $G[A-B]$ est 2-arête-connexe, $[a,c]$ et $[c,b]$ sont deux arêtes de $M(G)$ et la proposition directe est démontrée. Sinon, on a mis en évidence un sous-ensemble strict de A, dont le cocycle est non primitif et qui contient b. En répétant le procédé précédent, on obtient finalement un cocycle primitif contenant b; les constructions successives qui aboutissent à ce résultat déterminent une chaîne de $M(G)$ liant a et b.

Réciproquement, considérons une composante connexe de $M(G)$ et deux sommets a et b non adjacents de cette composante (nécessairement, cette composante doit être d'ordre supérieur ou égal à 4). Considérons une chaîne liant a et b dans $M(G)$; chaque arête de cette chaîne correspond à un cocycle primitif de G et à chacun de ces cocycles primitifs correspond un (et un seul) sous-ensemble de sommets de G, réalisant un sous-graphe 2-arête-connexe, et dont le cocycle est ce cocycle primitif. Ces sous-ensembles sont de plus deux à deux disjoints. La réunion de ces sous-ensembles a pour cocycle $\{a,b\}$, ce qui montre la proposition réciproque./

5.4. Indice de décomposabilité d'un graphe normalisé

Considérons un graphe normalisé $G = (X,E)$ et posons $[E] = m$. Dans la suite nous identifierons les sous-ensembles de E à des éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$.

Soit M le sous-module de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ engendré par les cocycles de cardinal 2 de G. Nous savons, d'après la propriété précédente, qu'il est possible de trouver une base de M exclusivement composée de cocycles primitifs.

On nomme *indice de décomposabilité* de G et on dénote par $k(G)$ le cardinal d'une base de M. C'est encore, comme nous le montrerons dans la partie C de la preuve ci-dessous, le nombre cocyclomatique de $M(G)$.

Propriété : Soient $G = (X,E)$ un graphe normalisé, B un ensemble de cocycles primitifs de G constituant une base du module des cocycles de cardinal 2, ω un élément de B et G', G'' les deux graphes décomposés de G selon ω . On vérifie :

$$k(G) = k(G') + k(G'') + 1.$$

Preuve : Nous allons construire un ensemble de cocycles primitifs de G' (resp. de G'') formant une base du module des cocycles de cardinal 2 de G' (resp. de G'') ainsi qu'une bijection entre la réunion de ces deux ensembles et $\mathcal{B}-\omega$.

La démonstration, un peu longue, s'articule en trois parties :

A - Définition de \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' (construction de cocycles primitifs de G' et G'' images de ceux de $\mathcal{B}-\omega$),

B - Bijection entre $\mathcal{B}-\omega$ et $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$,

C - Indépendance linéaire de \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' .

A - Définition de \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' : Posons $\omega = \{e_1, e_2\}$ et désignons par A l'un des deux sous-ensembles de X dont le cocycle est ω . Soit $\omega' = \omega(B)$ un cocycle de $\mathcal{B}-\omega$.

a) Supposons que ω et ω' soient disjoints, et choisissons A et B de telle sorte que $A \cap B$ soit non vide. De l'inclusion $\omega(A \cap B) \subseteq \omega \cup \omega'$ et du fait qu'un cocycle d'un graphe normalisé est de cardinal pair, on tire que $\omega'' = \omega(A \cap B)$ est de cardinal 2 ou 4.

* Si ω'' est de cardinal 4, le graphe G peut être schématisé de la façon suivante :

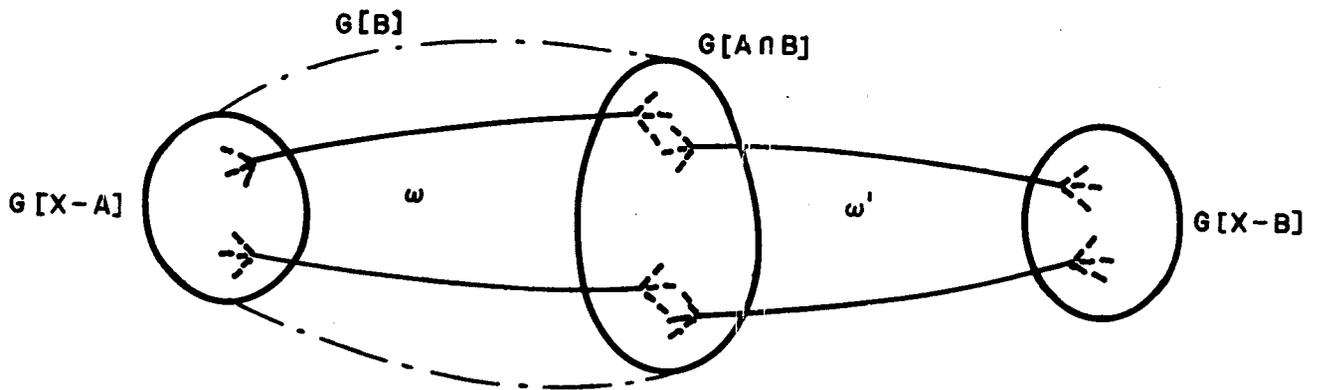


Fig. 1.

* Si ω'' est de cardinal 2, trois éventualités sont possibles a priori :

α) $\omega'' = \omega$, ce qui implique $A \cap B = A$; on aboutit à la disposition suivante

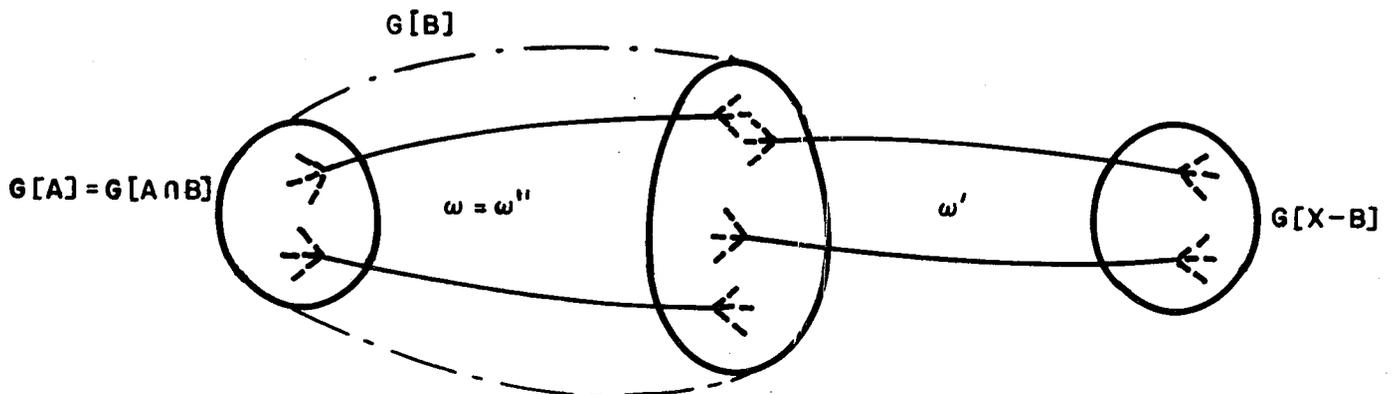


Fig. 2.

β) $\omega'' = \omega'$, qui conduit à la configuration suivante :

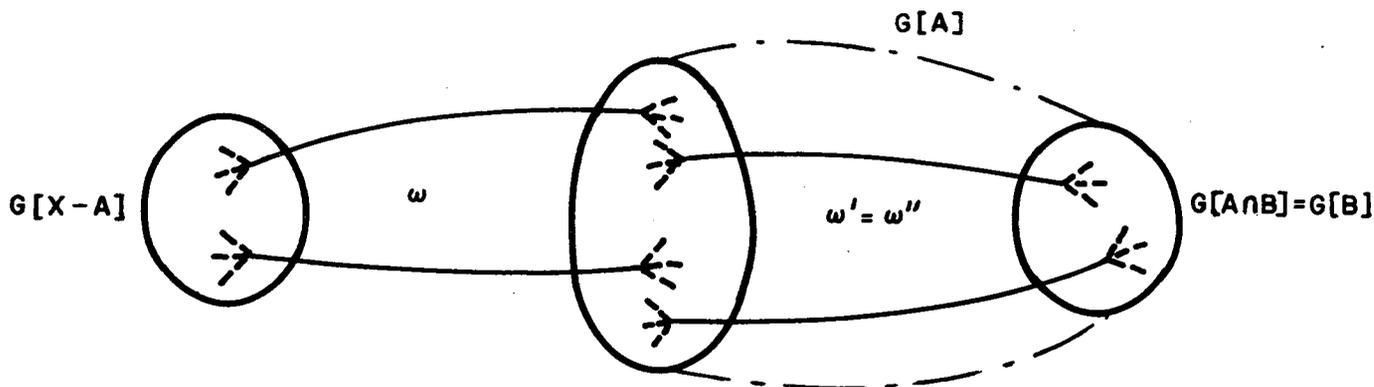


Fig. 3.

γ) $|\omega'' \cap \omega| = |\omega'' \cap \omega'| = 1$. Considérons $A \cup B$; son cocycle comprend exactement les arêtes de $\omega \cup \omega'$ qui n'appartiennent pas à ω'' . Ce cocycle n'étant pas vide, $X - (A \cup B)$ n'est pas vide. On peut alors représenter G selon le schéma de la figure 4.

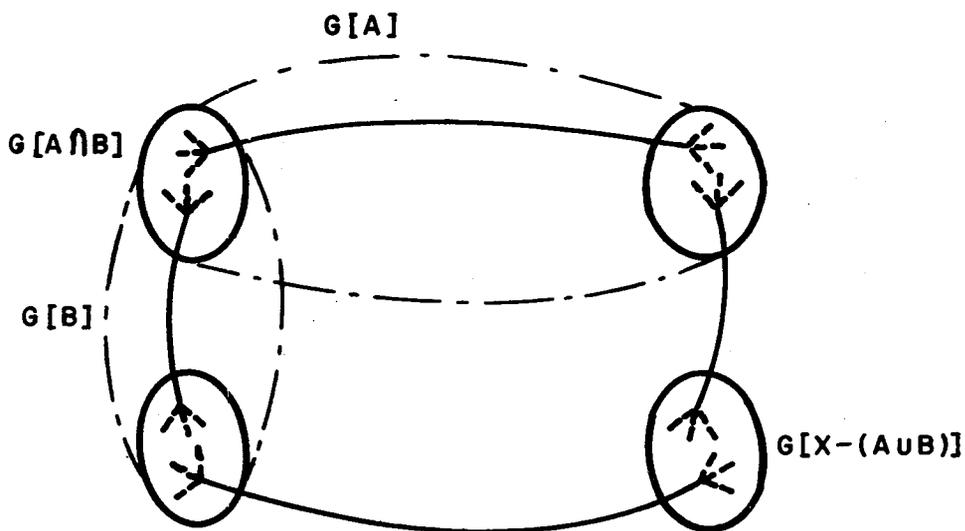


Fig. 4.

Cette dernière configuration est incompatible avec l'hypothèse selon laquelle ω et ω' sont primitifs. Il en résulte que l'éventualité γ) est impossible.

Nous ne devons donc poursuivre l'analyse que pour les trois premiers cas (Fig. 1, 2, 3). Ces trois cas ne diffèrent que par les notations; adoptons celles de la figure 1, dans laquelle ω' est inclus dans $G[A]$. Les sommets d'attachement de $G[A]$ dans G ne peuvent appartenir à $X-B$ et ainsi ω' est également un cocycle de cardinal 2 dans G' . On montre trivialement que ce cocycle, primitif dans G , est également primitif dans G' .

b) Si ω et ω' ne sont pas disjoints, leur intersection est de cardinal 1 et on peut poser $\omega' = \{e_1, a\}$, ($a \neq e_2$). Sans perte de généralité, il est loisible de supposer que a appartient à $G[A]$ et que e_2 appartient à $G[B]$. Considérons $A \cap B$. Ce sous-ensemble de X est non vide, car B contient les deux extrémités de e_2 et A contient exactement l'une d'entre elles. En vertu de ce même argument, le cocycle de $A \cap B$ contient e_2 ; on montre de façon similaire qu'il contient a . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \omega(A \cap B) &\subseteq \omega(A) \cup \omega(B) \\ &\subseteq \{a, e_1, e_2\} \end{aligned}$$

Or, tout cocycle d'un graphe normalisé est pair, donc, dans G , $\omega(A \cap B) = \{a, e_2\}$ et, dans $G[A]$, $\bar{\omega}(A \cap B) = \{a\}$.

Par ailleurs, désignons par x (resp. y) le sommet de A incident à e_1 (resp. à e_2). x ne peut appartenir à $A \cap B$. En effet, e_1 n'appartient pas au cocycle de $A \cap B$, et, si x appartenait à $A \cap B$, e_1 serait contenu dans $G[A \cap B]$ et donc dans $G[A]$; ceci serait contradictoire avec le fait que e_1 appartient au cocycle de A . Donc, x n'appartient pas à $A \cap B$; il en résulte que x et y sont distincts et que le graphe décomposé $G' = G[A] \cup K(x, y)$ est formé en ajoutant l'arête $f = [x, y]$ à $G[A]$.

Or, puisque $\{a\}$ est un cocycle de $G[A]$, $\{a, f\}$ est un cocycle de G' et, comme G' est un graphe normalisé, c'est un cocycle minimal. C'est ce cocycle $\bar{\omega}$ que nous considérons comme l'image de ω' dans $B' \cup B''$. On montre en effet, trivialement que si $\bar{\omega}$ n'était pas primitif dans G' , ω' ne serait pas non plus primitif dans G . Or, il l'est par hypothèse et $\bar{\omega}$ l'est donc aussi.

Ainsi, à partir de $B - \omega$, on a constitué un ensemble $B' \cup B''$ de cocycles primitifs de G' ou G'' .

B - Bijection entre $B - \omega$ et $B' \cup B''$: Si un cocycle de B' est obtenu par la règle A-a) précédente, c'est également un cocycle primitif de G et par construction il appartient à B .

Considérons l'autre règle de construction : soit $\bar{\omega} = \{a, f\}$, ($f = [x, y]$), un cocycle de $G' = G[A] \cup K(x, y)$ obtenu par la règle A-b) ci-dessus. De façon évidente, si e_1 et e_2 sont les deux arêtes du cocycle ω , $\{e_1, a\}$ et $\{e_2, a\}$ sont également des cocycles de G . L'un d'entre eux est sûrement primitif (Cf. A-b). Si un seul de ces cocycles est primitif, ce cocycle est l'antécédent de $\bar{\omega}$. Supposons a contrario, que $\{e_1, a\}$ et $\{e_2, a\}$ soient tous deux des cocycles primitifs. G peut alors être schématisé de la manière suivante (Fig. 5.) avec des sous-graphes $G[P]$, $G[Q]$ et $G[R]$ 2-arête-connexes.

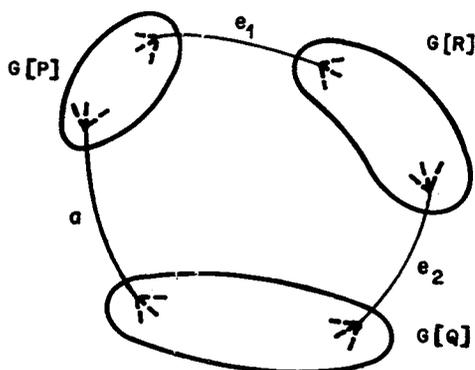


Fig. 5.

Or, nous savons que ω appartient à \mathcal{B} par hypothèse; puisque \mathcal{B} est une base, seul l'un des deux autres cocycles $\{e_1, a\}$ ou $\{e_2, a\}$ appartient à \mathcal{B} . C'est ce cocycle qui est mis en bijection avec ω .

C - Indépendance linéaire de \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' : Si on identifie les cocycles primitifs de G aux arêtes de $M(G)$, \mathcal{B} s'interprète alors comme une partie libre maximale de l'ensemble des arêtes de $M(G)$, c'est-à-dire une forêt maximale de ce graphe (ce qui justifie notre affirmation antérieure selon laquelle $k(G)$ est égal au nombre cocyclomatique de $M(G)$).

Dans la suite nous ne considérons que les composantes connexes non triviales (d'ordre supérieur ou égal à 2) de $M(G)$.

Nous avons montré dans ce qui précède que toute composante connexe de $M(G)$, hormis celle qui contient ω , a une image isomorphe dans $M(G')$ ou $M(G'')$.

Soit L la composante connexe qui contient ω .

a) Si $L \cong K_2$, L n'a d'image ni dans $M(G')$ ni dans $M(G'')$. En particulier, si ω est constitué de deux arêtes incidentes à une articulation essentielle x , celui des deux graphes décomposés qui contient x , admet une boucle en x . Les deux arêtes de cette boucle ne forment pas un cocycle, au sens où nous l'entendons dans ce paragraphe.

b) Si $L \cong P_3$, il lui correspond dans un des deux graphes $M(G')$ ou $M(G'')$ - et dans l'un seulement - une composante L' isomorphe à K_2 . On vérifie que $|\mathcal{B} \cap E(L)| = 2$ et $|\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}'' \cap E(L')| = 1$ ⁽³⁾.

(3) $E(H)$ désigne l'ensemble des arêtes du graphe H .

c) Si $L \equiv P_k$, $k \geq 4$, il lui correspond dans l'un seulement des deux graphes $M(G')$ ou $M(G'')$ une composante L' isomorphe à P_{k-1} , et on vérifie : $|B \cap E(L)| = k-1$ et $|(B' \cup B'') \cap E(L')| = k-2$.

Ainsi B' et B'' forment également des forêts maximales dans $M(G')$ et $M(G'')$ respectivement; ce sont donc des bases du module des cocycles de cardinal 2 de G' et G'' respectivement. De plus,

$$|B| = |B'| + |B''| + 1. /$$

5.5. Commutativité de l'opérateur de décomposition

Propriété: Soient G un graphe normalisé, B une base du module des cocycles de cardinal 2 de G constituée de cocycles primitifs et ω, ω' deux éléments de cette base. Désignons par ∂ (resp. ∂') l'opération de décomposition de G selon ω (resp. ω') suivie de la décomposition selon ω' (resp. ω) du graphe décomposé de G qui contient l'image de ω' (resp. ω). ∂ et ∂' donnent de G deux familles identiques de trois graphes décomposés.

Preuve : Si ω et ω' sont disjoints, le résultat est trivial et, reprenant les notations de la preuve de la propriété 5.4. (A, a) , $G[X-A]$, $G[A \cap B]$, et $G[X-B]$ sont les trois graphes décomposés obtenus.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où ω et ω' ont une arête en commun, la propriété découle de l'analyse faite dans la partie A-b) de la preuve précédente. $G[X-A]$, $G[X-B]$ et $G[A \cap B]$ sont les trois graphes décomposés obtenus. /

5.6. Décomposition totale des graphes normalisés

Théorème : Soit G un graphe normalisé d'indice de décomposabilité k et B une base du module des cocycles de cardinal 2, composée de cocycles primitifs. La décomposition de G selon les cocycles de B détermine une famille de $(k+1)$ graphes normalisés 4-arête-connexes. Cette famille est indépendante de la base B choisie.

Preuve : La propriété précédente montre que, pour une base donnée, l'ordre des décompositions n'intervient pas dans la famille obtenue. Les graphes décomposés de cette famille sont 4-arête connexes en vertu de la propriété 5.4.

Considérons, à présent, deux bases distinctes B et B' . Elles ne peuvent être distinctes que s'il existe dans $M(G)$ des composantes connexes d'ordre supérieur ou égal à 3. Soit L une telle composante, d'ordre p , dont l'intersection avec B et B' respectivement est constituée par deux sous-ensembles distincts de cardinal $p-1$.

A tout cocycle primitif ω_i , appartenant à L , est associé un et un seul sous-ensemble A_i tel que, dans G , $\omega(A_i) = \omega_i$ et que $G[A_i]$ soit 2-arête-connexe. La décomposition de G selon les cocycles de B (resp. de B') qui appartiennent à L détermine p graphes décomposés qui sont les graphes $G_i = G[A_i] \cup K(u_i, v_i)$ - selon la notation de 4.1.

Ces décompositions produisent donc des résultats identiques. Répétant ce raisonnement pour chaque composante connexe de $M(G)$ d'ordre supérieur ou égal à 3, on achève de démontrer la propriété. /

5.7.

En nous limitant à la considération de cocycles primitifs, nous sommes parvenus à définir une décomposition intrinsèque des graphes normalisés d'indice de connexité 2. Les composantes 4-arête-connexes ainsi définies peuvent bien évidemment être obtenues par décomposition selon des cocycles de cardinal 2 quelconques; la propriété suivante en apporte la preuve.

Propriété : Soit G un graphe normalisé d'indice de connexité 2 et d'indice de décomposabilité k ($k \geq 1$). Pour tout cocycle ω de cardinal 2 de G , la décomposition de G selon ω détermine deux graphes décomposés dont la somme des indices de décomposabilité est $(k-1)$; de plus, l'ensemble de ces deux graphes détermine les mêmes composantes 4-arête-connexes que G .

Preuve : Cette propriété n'est non triviale que si ω n'est pas un cocycle primitif de G . Soit L la composante connexe de $M(G)$ qui contient les deux éléments de ce cocycle (Cf. 5.3.); l'ordre p de L est nécessairement supérieur ou égal à 4.

Soit $\{\omega_j / j = 1, \dots, p\}$ l'ensemble des cocycles primitifs de G déterminé par la composante L . D'après les propriétés antérieurement établies au cours de ce paragraphe, à chacun de ces cocycles est associé un (unique) sous-ensemble X_j de X dont le cocycle est ω_j , et tel que $G[X_j]$ soit 2-arête-connexe. Dans ces conditions, $\{X_j / 1 \leq j \leq p\}$ réalise une partition de X .

Soient G' et G'' les deux graphes décomposés de G selon ω . Les composantes de $M(G)$ distinctes de L ont une image isomorphe dans $M(G')$ ou $M(G'')$. De plus, L est transformée en deux composantes (dont l'une appartient à $M(G')$ et l'autre à $M(G'')$). Ces deux composantes sont telles que la somme de leurs ordres est p ; par conséquent, la somme de leurs nombres cocyclomatiques est $(p-2)$, ce qui établit la première partie de la proposition.

La décomposition de G produit par ailleurs une partition de $\{X_j / 1 \leq j \leq p\}$ en deux classes de sous-ensembles qui forment respectivement les ensembles de sommets de G' et G'' . De plus, si X_j est contenu dans G' , $G'[X_j]$ est 2-arête-connexe et le cocycle de X_j dans G' est de cardinal 2. De la similitude de cette situation avec celle existant dans G , on dérive la seconde partie de la proposition ci-dessus./

6. ALGORITHME DE DENOMBREMENT

6.1.

L'algorithme de dénombrement des cycles eulériens dans les graphes normalisés, que nous avons mis en évidence au cours de ce chapitre, peut se formaliser de la façon suivante :

- 1) Si le graphe G , ou l'un des graphes obtenus par application de l'algorithme, a un indice de décomposabilité non nul, le décomposer en ses composantes 4-arête-connexes (en utilisant la propriété 5.7) et appliquer la formule 4.2.
- 2) Réduire chacun des graphes obtenus en un sommet réductible et appliquer la formule 3.3 ou 3.5.
- 3) Répéter l'ensemble des deux opérations précédentes jusqu'à l'obtention de graphes d'ordre 1.

Nous avons précédemment montré que l'application de l'une quelconque des deux premières opérations contribuait à faire décroître l'ordre des graphes considérés. De plus, le nombre de cycles eulériens des graphes d'ordre 1 a été calculé au § 4.3. Il ne reste plus qu'à montrer qu'au moins une de ces opérations est applicable à tout graphe normalisé d'ordre supérieur ou égal à 2.

6.2. Propriété

Tout graphe normalisé d'ordre supérieur ou égal à 2 possède au moins un sommet réductible.

Preuve : Soit G un graphe normalisé d'ordre n ($n \geq 2$). Appelons G_0 le graphe obtenu par suppression des boucles de G . Les points d'articulation de G_0 sont exactement les articulations essentielles de G . Construisons le graphe simple $(G_0)_S$ obtenu à partir de G_0 en remplaçant tout ensemble d'arêtes en parallèle par une seule arête. Tout point d'articulation de G_0 est un pont d'articulation de $(G_0)_S$, de sorte que tout sommet qui n'est pas un point d'articulation de $(G_0)_S$ correspond à un sommet réductible de G . Or, des sommets réguliers existent dans un graphe simple (H. RAYNAUD [1968]), ce qui prouve notre assertion. /

CHAPITRE II

INVARIANT EULÉRIEN DANS LES GRAPHS 4-RÉGULIERS

Dans ce deuxième chapitre, nous étudions le cas particulier des graphes 4-réguliers. Nous établissons que, sur ces graphes, l'on peut associer au processus de dénombrement du chapitre précédent un polynôme énumérateur en une variable.

Cet invariant polynomial s'interprète dans la théorie des anneaux de Tutte-Grothendieck due à T. Brylaswki [1972 a] comme l'invariant canoniquement déterminé par les opérateurs de réduction et de décomposition décrits au chapitre I. L'existence de cet invariant est liée à une propriété de raffinement vérifiée par la réduction sur les graphes 4-réguliers.

L'existence et l'interprétation de ce polynôme énumérateur constituent les deux résultats essentiels de ce chapitre.

Nous commençons par rappeler les travaux de Brylawski relatifs aux "bidécompositions distributives" et aux anneaux de Tutte-Grothendieck (§1). Le §2 de ce chapitre est consacré à la preuve de l'existence de l'invariant annoncé : le polynôme $P(G,x)$. L'interprétation de ce polynôme comme élément d'un anneau de Tutte-Grothendieck associé à une "bidécomposition eulérienne" est présentée au §3. Enfin, les résultats énumératifs essentiels relatifs au polynôme invariant sont établis au §4 et concluent ce chapitre.

1. BIDECOMPOSITIONS DISTRIBUTIVES

Les notions définies dans ce paragraphe sont extraites de T.H. Brylawski [1972a].

1.1.

On appelle "*multiset*" sur un ensemble S une application f de S dans \mathbb{N} et on définit le *support* d'un *multiset* f comme le sous-ensemble des éléments s de S tels que $f(s)$ soit strictement positif. Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux *multisets* de support *fini*; le *cardinal* d'un tel *multiset* f est défini par $|f| = \sum_{s \in S} f(s)$.

L'ensemble des *multisets* sur S est muni d'une opération interne associative et commutative, appelée *somme disjointe*, qui n'est autre que la somme des applications correspondant aux *multisets* considérés.

Ainsi, l'ensemble des *multisets* de support fini sur S , $M(S)$, est-il isomorphe au monoïde commutatif libre engendré par S . La justification de l'utilisation de la notation additive -inhabituelle- apparaîtra ultérieurement.

Par abus d'écriture, on désignera par la même lettre s , l'élément de S et le *multiset* de cardinal 1 correspondant.

1.2. Décomposition

Définition : On appelle *décomposition* sur S un couple $(M'(S), \preceq)$ où $M'(S)$ est inclus dans $M(S) - \{\emptyset\}$, où \preceq est un ordre partiel sur $M'(S)$ et qui vérifie les deux conditions suivantes (où f et g désignent des éléments quelconques de $M'(G)$).

i) $f \prec g \Rightarrow |f| < |g|$ où \prec est l'ordre strict associé à \preceq .

ii) \preceq admet une relation de couverture⁽¹⁾, notée $\overset{\wedge}{\prec}$, telle que

$$\forall k \in M(G) : f + k \in M'(G), (f \overset{\wedge}{\prec} g \Leftrightarrow g + k \in M'(G) \text{ et } f + k \overset{\wedge}{\prec} g + k).$$

Une telle décomposition sur S est notée $D(S)$.

Il résulte de l'axiome i) que les éléments de S (considérés comme *multisets* de cardinal 1) appartenant à $D(S)$ sont des éléments minimaux de la décomposition. Nous supposons dans la suite que l'ensemble des éléments minimaux de $D(S)$ est constitué -exclusivement- de tous les éléments de S . Par ailleurs, l'axiome ii) implique que la donnée des *multisets* qui couvrent chacun des éléments minimaux est suffisante pour déterminer l'ordre lui-même.

(1) La relation de couverture $\overset{\wedge}{\prec}$ d'une relation d'ordre \preceq sur un ensemble R peut se définir ainsi : $\forall a, b \in R, a \overset{\wedge}{\prec} b \Leftrightarrow a \preceq b$ et $\forall c \in R \neg(a \preceq c \preceq b)$, on dit dans ce cas que b *couvre* a .

On définit un *élément irréductible* de $D(S)$ comme un *multiset* de cardinal 1 et maximal pour l'ordre \preceq . On vérifie aisément que tout élément maximal est somme disjointe d'éléments irréductibles.

Nous supposons enfin que les décompositions qui sont considérées dans la suite vérifient en outre les deux propriétés suivantes :

- être *localement finies* (c'est-à-dire que toute chaîne de l'ordre partie est de longueur finie),
- être *raffinables*, ce qui s'exprime par :

$$\forall f, g, h \in M'(S), \left. \begin{array}{l} f \preceq g \\ f \preceq h \end{array} \right\} \Rightarrow \exists j \in M'(S) \text{ tel que } \begin{cases} g \preceq j \\ h \preceq j \end{cases}$$

Dans de telles décompositions, tout *multiset* est nécessairement majoré par un unique élément maximal. Pour cette raison, ces décompositions sont dénommées *unitaires* ("unique decomposition", dans la terminologie anglo-saxonne de T.H. Brylawski).

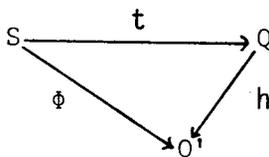
Si $\sum_{i=1}^n s_i$ est l'unique majorant maximal de s , ce *multiset* est appelé *D-décomposition totale* de s , ou décomposition de s en éléments irréductibles.

1.3. Groupe de Tutte-Grothendieck

Un invariant de la décomposition $D(S)$ -ou *D-invariant*- est une application ϕ de S dans un groupe abélien Q tel que pour toute relation $s = \sum_{i=1}^n s_i$ dans $D(S)$, on vérifie $\phi(s) = \sum_{i=1}^n \phi(s_i)$.

Remarque : D'après la définition d'une décomposition (axiome ii)), la condition précédente est vérifiée dans $D(S)$ dès qu'elle est vérifiée pour la relation de couverture qui définit l'ordre \preceq .

Théorème : (T. Brylawski 3.2) : Soit $D(S)$ une décomposition unitaire. Il existe un groupe abélien Q , appelé *groupe de Tutte-Grothendieck* de la décomposition $D(S)$, et un *D-invariant* t de S dans Q tels que pour tout groupe abélien Q' et tout *D-invariant* ϕ de S dans Q' , il existe un unique homomorphisme h de Q dans Q' tel que le diagramme suivant commute.



De plus, Q est isomorphe au groupe abélien libre dont les générateurs sont les éléments irréductibles de $D(S)$.

1.4 Bidécomposition distributive

Soient D_1 et D_2 deux décompositions unitaires sur un même ensemble S . En principe, nous devrions désigner par des symboles différents les relations d'ordre relatives à D_1 et D_2 . Cependant, il sera préférable d'adopter les notations suivantes. On écrira $f \Leftarrow \prod_{i=1}^n g_i$, si le second membre représente, en notation multiplicative, un *multiset* majorant f dans la décomposition D_1 , et on conservera la notation habituelle pour représenter une inéquation relative à D_2 : $h \Leftarrow \sum_{j=1}^p k_j$. Les éléments de S maximaux dans D_1 et D_2 seront respectivement appelés *indécomposables* et *irréductibles*.

Une *bidécomposition distributive* $B(S)$ est un ensemble de deux décompositions unitaires D_1 et D_2 sur un même ensemble S vérifiant les deux conditions suivantes

- a) si $s \Leftarrow \prod_{i=1}^n s_i$ et si chaque élément s_i est irréductible (dans D_2), s est irréductible.
- b) (axiome de distributivité) si $s \Leftarrow \prod_{i=1}^n f_i$ et s'il existe un entier k de $[1, n]$ tel que $f_k \Leftarrow \sum_{j=1}^m h_j$, dans la décomposition D_2 , il existe alors m multisets g_j ($1 \leq j \leq m$) tels que $s \Leftarrow \sum_{j=1}^m g_j$ (dans D_2) et pour chaque $j \in [1, m]$, $g_j \Leftarrow h_j \times \prod_{i \neq k} f_i$.

De l'axiome de distributivité, il résulte que si s est décomposable dans D_1 ($s \Leftarrow \prod_{i=1}^n f_i$), l'existence d'une D_2 -décomposition non triviale d'un des éléments f_i implique l'existence d'une D_2 -décomposition non triviale de s .

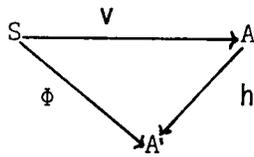
1.5. Anneau de Tutte-Grothendieck

Un invariant de la bidécomposition $B(S)$ - ou **B**-invariant - est une application ϕ de S dans un anneau commutatif A telle que pour toute relation

$$\begin{aligned} s \Leftarrow \prod_{i=1}^n s_i \text{ (dans } D_1), \phi(s) &= \prod \phi(s_i) \\ \text{et } s \Leftarrow \sum_{j=1}^m s_j \text{ (dans } D_2), \phi(s) &= \sum \phi(s_j). \end{aligned}$$

On remarquera qu'il suffit, pour obtenir un **B**-invariant, d'exiger que ϕ soit D_2 -invariant et que la première relation soit vérifiée pour D_1 -décomposition totale d'un élément D_2 -indécomposable.

Théorème : (T. Brylawski 3.4) : Soit $B(S)$ une bidécomposition distributive, il existe un anneau commutatif A , appelé anneau de Tutte-Grothendieck associé à la bidécomposition $B(S)$, et un **B**-invariant v de S dans A tels que pour tout anneau commutatif A' et tout **B**-invariant ϕ de S dans A' , il existe un unique morphisme d'anneau h tel que le diagramme suivant commute.



De plus, A est isomorphe à l'anneau commutatif libre engendré par les éléments irréductibles et indécomposables de $B(S)$.

1.6. Proposition : (T. Brylawski 3.5) : Soit $B(D_1, D_2)$ une bidécomposition distributive sur un ensemble S , la commutativité du diagramme suivant est vérifiée :

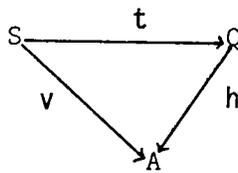


diagramme dans lequel Q désigne le groupe de Tutte-Grothendieck associé à la décomposition unitaire D_2 , A l'anneau de Tutte-Grothendieck de la bidécomposition B et h un morphisme de groupe tel que $h(s) = \prod s_i$ pour tout élément s D_2 -indécomposable dont la D_1 -décomposition totale est $\sum s_i$.

1.7. Exemple : Le polynôme dichromatique défini sur les multigraphes (W.T. Tutte [1954]) est un exemple d'invariant de Tutte-Grothendieck.

Considérons l'ensemble S des classes d'isomorphie des multigraphes finis connexes. On détermine sur S une décomposition unitaire D_1 par les inéquations $G \rightarrow \sum G_i$, pour tout graphe G de S , toute articulation x de G et tout ensemble $\{G_i\}$ de sous-graphes partiels $\{x\}$ -détachés de G , réalisant une partition des arêtes de G . Les éléments indécomposables de S sont donc les classes des graphes inarticulés.

Si G est un élément de S et e une arête régulière de G (arête qui n'est ni un isthme ni une boucle), G/e désigne le graphe contracté de G selon e (obtenu par suppression de e et identification de ses deux extrémités) et $G \setminus e$ désigne le graphe obtenu par suppression de e . Les inéquations

$$G \rightarrow G/e + G \setminus e,$$

pour tout graphe G de S et toute arête régulière e de G , engendrent une décomposition unitaire D_2 .

$B(D_1, D_2)$ est une bidécomposition distributive dont les éléments irréductibles et indécomposables sont le graphe-boucle P_1 et le graphe-isthme F_1 (Cf. I-1.5). T. Brylawski montre que l'invariant de Tutte-Grothendieck associé à cette bidécomposition est précisément le polynôme dichromatique en deux variables, $\chi(G, x, z)$ où x est la variable associée à P_1 et z la variable associée à F_1 .

Les principales propriétés de cet invariant sont énoncées dans T.H. Bryalwski [1972 b]

Nous utiliserons le polynôme dichromatique au paragraphe III-1; mentionnons dès à présent une propriété dont nous aurons besoin :

Propriété : Si G est un multigraphe planaire dont \check{G} est un graphe topologiquement dual, on vérifie $\chi(\check{G}, x, z) = \chi(G, z, x)$.

2. UN INVARIANT DES GRAPHES 4-REGULIERS

Dans la fin de ce chapitre, nous désignons par graphe 4-régulier un graphe normalisé (donc connexe) dont tous les noeuds sont de degré 4 (Cf. I-2.5). Rappelons que l'ordre d'un tel graphe est le cardinal de l'ensemble de ses noeuds.

2.1. Opération de dérivation

Soit \mathcal{Q} l'anneau commutatif libre unitaire engendré par l'ensemble \mathcal{G}_4 des graphes 4-réguliers finis dont les noeuds appartiennent à un ensemble dénombrable X : c'est l'anneau des polynômes à coefficient dans \mathbb{Z} dont les variables sont les éléments de \mathcal{G}_4 .

Soit x un élément de X et H un élément de \mathcal{G}_4 contenant le noeud x ; on définit le *graphe dérivé* H' de H par rapport à x de la manière suivante :

a) Si H est le graphe (x) composé du seul sommet x et de deux boucles incidentes,

$$H' = H = (x)$$

b) Si H est d'ordre n , supérieur ou égal à 2, et si x est un sommet régulier de H ,

$$H' = H_1 + H_2 + H_3$$

somme des trois graphes 4-réguliers d'ordre $(n-1)$ obtenus par réduction de H en x (Cf. I-3.2).

c) Si H est d'ordre n , supérieur ou égal à 2, et si x est une articulation bouclée, on désigne par H_0 la $\{x\}$ -composante non triviale de H et on pose :

$$H' = (x) \cdot H_0.$$

d) Enfin, si x est une articulation essentielle de H , désignons par I et J les deux $\{x\}$ -composantes de H ; on pose dans ce cas :

$$H' = (x) I.J.$$

A tout élément x_i de X , on associe une application partielle D_i de \mathcal{Q} dans \mathcal{Q} . D_i est définie pour tout élément q du sous-ensemble \mathcal{Q}' de \mathcal{Q} tel que chaque monôme de q contienne exactement un facteur - c'est-à-dire un graphe - auquel appartient le noeud x_i . Un tel élément q peut se noter ainsi :

$$q = \sum_s \alpha_s H_s \cdot \prod_t G_{st}$$

où H_s (resp. G_{st}) désigne un graphe contenant (resp. ne contenant pas) le noeud x_i .

Par définition on pose :

$$D_i(q) = \sum_s \alpha_s (H_s)_i' \cdot \prod_t G_{st}$$

où $(H_s)_i'$ est le graphe dérivé de H_s par rapport au noeud x_i .

2.2. Remarques

1) Notons par \emptyset le graphe vide (sans sommet ni arête). Dans la suite on écrira le graphe dérivé de H par rapport à x

$$H' = (x) \cdot I \cdot J,$$

dans tous les cas où l'expression définissant H' aura été obtenue par l'une des règles a, c ou d ci-dessus; dans le cas a ou c, I et/ou J sera identifié à \emptyset . Ce graphe \emptyset est considéré comme l'élément neutre multiplicatif de \mathcal{Q} .

2) On vérifie par ailleurs que l'expression définie en c fait intervenir un graphe résultant de la décomposition de G selon un cocycle de cardinal 2 incident à x . De même, l'expression définie en d fait intervenir deux graphes résultant des décompositions selon les deux cocycles minimaux de cardinal 2, incidents à x et disjoints.

2.3. Existence de $P(G, x)$

Considérons un graphe G de G_4 et un ordre total $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur l'ensemble de ses noeuds. L'expression

$$D_\sigma(G) = D_n \circ D_{n-1} \circ \dots \circ D_1(G)$$

est un polynôme en $(x_1), (x_2), \dots, (x_n)$.

Soit \equiv la relation d'équivalence induite dans \mathcal{Q} par la relation d'isomorphisme sur les graphes. On désigne par $[D_\sigma(G)]$ l'élément de \mathcal{Q}/\equiv correspondant à $D_\sigma(G)$ et par x la classe d'équivalence des graphes 4-réguliers d'ordre 1.

Lemme : $P(G, x) = [D_0(G)]$ est un polynôme en une variable x , sans terme constant et à coefficients positifs. Ce polynôme est de plus indépendant de l'ordre σ choisi.

Preuve : Ce lemme se démontre de façon récursive. Pour un graphe de G_4 d'ordre 1, les deux éléments de la proposition se vérifient immédiatement.

Supposons donc ces propriétés vérifiées pour tous les éléments de G_4 d'ordre inférieur ou égal à $(n-1)$.

Pour tout graphe G de G_4 d'ordre n et tout ordre total σ sur l'ensemble de ses noeuds, la première partie de la proposition découle trivialement de l'hypothèse de récursivité.

Compte tenu de cette hypothèse, il suffit, pour démontrer la deuxième partie, de montrer que

$$[D_\sigma(G)] = [D_{\sigma'}(G)]$$

pour deux ordres σ et σ' déduits l'un de l'autre par transposition des deux premiers éléments. Plus précisément, nous allons comparer

$$D = D_j \circ D_i(G)$$

$$\text{et } D' = D_i \circ D_j(G),$$

pour un couple arbitraire (x_i, x_j) de noeuds de G .

Distinguons plusieurs cas selon la nature des sommets x_i et x_j dans G .

a) x_i et x_j sont des articulations de G . Dans ce cas, D et D' sont des produits de graphes obtenus par décomposition selon des cocycles particuliers de G . Or, il résulte des propriétés du § 1-3 que cet opérateur de décomposition est commutatif; ainsi dans ce cas,

$$D = D'.$$

b) L'un des deux noeuds, x_i ou x_j , est un sommet régulier de G et l'autre est une articulation. La propriété de distributivité établie en 1-4.5 prouve, dans ce cas également, que

$$D = D'.$$

c) Enfin, supposons que x_i et x_j soient des sommets réguliers de G . Désignons par G_k^i , $k = 1, 2, 3$, (resp. G_l^j , $l = 1, 2, 3$) les trois graphes réduits de G en x_i (resp. en x_j).

1) Supposons d'abord que x_j soit un sommet régulier dans chacun des trois graphes réduits de G en x_i et que x_i soit un sommet régulier dans chacun des trois graphes réduits de G en x_j . Dans ce cas,

$$D = \sum_{\substack{k = 1,2,3 \\ l = 1,2,3}} (G_k^i)_l^j$$

et

$$D' = \sum_{\substack{l = 1,2,3 \\ k = 1,2,3}} (G_l^j)_k^i.$$

En considérant les différents cas possibles, on vérifie que

$$(G_k^i)_l^j = (G_l^j)_k^i, \quad k, l \in \{1,2,3\}$$

ce qui prouve encore que $D = D'$.

2) Dans l'hypothèse où x_j est une articulation dans l'un des graphes réduits de G en x_i , chacune des $\{x_i, x_j\}$ -composantes de ce graphe réduit provient d'un sous-graphe partiel $\{x_i, x_j\}$ -détaché de G , dans lequel x_i et x_j ont un degré partiel égal à 2.

Réciproquement l'existence, dans G , d'un tel sous-graphe partiel assure à la fois que x_j est une articulation dans un des graphes réduits de G en x_i et que x_i est une articulation dans un des graphes réduits de G en x_j .

C'est donc la seule hypothèse qu'il nous reste à étudier.

Intéressons-nous aux nombres possibles de $\{x_i, x_j\}$ -composantes de G et aux degrés partiels de chacun des sommets x_i et x_j dans ces composantes. Les contraintes suivantes doivent être vérifiées :

- Puisque x_i et x_j ne sont pas des articulations de G , aucun des degrés partiels n'est égal à 0 ou n'est plus grand que 3.
- Les degrés partiels de ces sommets dans une même $\{x_i, x_j\}$ -composante doivent être de même parité.
- On doit, enfin, vérifier la propriété ci-dessus : l'existence dans G d'un sous-graphe partiel $\{x_i, x_j\}$ -détaché dans lequel x_i et x_j sont de degré partiel 2.

L'ensemble des situations possibles peut être résumé par le tableau suivant.

Cas	Nombre de composantes	Degrés partiels dans la composante...			
		C_1	C_2	C_3	C_4
α	2	$d(x_i) = 2$ $d(x_j) = 2$	$d(x_i) = 2$ $d(x_j) = 2$		
	3	$d(x_i) = 2$ $d(x_j) = 2$	$d(x_i) = 1$ $d(x_j) = 1$	$d(x_i) = 1$ $d(x_j) = 1$	
β	4	$d(x_i) = 1$ $d(x_j) = 1$	$d(x_i) = 1$ $d(x_j) = 1$	$d(x_i) = 1$ $d(x_j) = 1$	$d(x_i) = 1$ $d(x_j) = 1$

Figure 1.

Nous examinerons pour finir les deux cas que l'on peut tirer de l'analyse de ce tableau.

Cas α : les situations décrites par les deux premières lignes du tableau précédent peuvent se traiter de la même manière. Nous posons $C'_2 = C_2$ lorsqu'il n'y a que deux composantes, et $C'_2 = C_2 \cup C_3$ lorsqu'il y a trois composantes. Si C_2 et C_3 sont des composantes ne comportant qu'une seule arête, C'_2 ne comprend aucun noeud et on l'identifie à \emptyset .

Lors de la réduction de G en x_i (resp. en x_j), le sommet x_j (resp. x_i) n'est une articulation que dans un seul des trois graphes réduits. Désignons par l'indice 1 la séparation en x_i (resp. en x_j) qui définit un graphe réduit articulé en x_j (resp. en x_i).

D et D' se calculent de la façon suivante :

$$D = (x_j) \cdot C_1 \cdot C'_2 + (G_2^i)^j_1 + (G_3^i)^j_1 + \sum_{\substack{l=2,3 \\ k=2,3}} (G_k^i)^j_l$$

$$D' = (x_i) \cdot C_1 \cdot C'_2 + (G_2^j)^i_1 + (G_3^j)^i_1 + \sum_{\substack{k=2,3 \\ l=2,3}} (G_l^j)^i_k$$

Il est aisé de vérifier que

$$(G_k^i)^j_l = (G_l^j)^i_k, k, l \in \{2,3\}.$$

De plus, si $C'_2 = \emptyset$, les quatre graphes $(G_2^i)^j_1$, $(G_3^i)^j_1$, $(G_2^j)^i_1$ et $(G_3^j)^i_1$ sont identiques à C_1 . Sinon, considérons l'un d'entre eux, $(G_2^i)^j_1$ par exemple. Les arêtes ajoutées à $G[X - \{x_i\}]$ lors de la réduction de G en x_i forment dans $(G_2^i)^j_1$ un cocycle de cardinal 2; les deux graphes décomposés de ce graphe selon ce cocycle sont exactement C_1 et C'_2 .

Mais $(G_2^i)_1^j$ est d'ordre $(n-2)$ et l'hypothèse de récursivité s'applique. Choisisant un ordre total sur les sommets de ce graphe tel que tous les noeuds de C_1 précèdent ceux de C_2' , on montre que

$$(G_2^i)_1^j = C_1 \cdot C_2'.$$

Par un raisonnement semblable, on montre que

$$(G_3^i)_1^j = (G_2^j)_1^i = (G_3^j)_1^i = C_1 \cdot C_2'.$$

Ainsi, $[D] = [D']$, ce qui achève la démonstration dans le cas α .

Cas β : posons $C_{ij} = C_i \cup C_j$ pour $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $i < j$, avec la convention que $C_{ij} = \emptyset$ si et seulement si chacune des composantes C_i et C_j ne comporte qu'une seule arête. Avec ces notations, on peut écrire :

$$D = (x_j) \cdot [C_{12} \cdot C_{34} + C_{13} \cdot C_{24} + C_{14} \cdot C_{23}] \text{ et}$$

$$D' = (x_i) \cdot [C_{12} \cdot C_{34} + C_{13} \cdot C_{24} + C_{14} \cdot C_{23}];$$

Ce qui permet, encore une fois, d'affirmer que $[D] = [D']$. Ce dernier cas achève la démonstration du lemme./

2.4. Exemple de calcul de $P(G, x)$

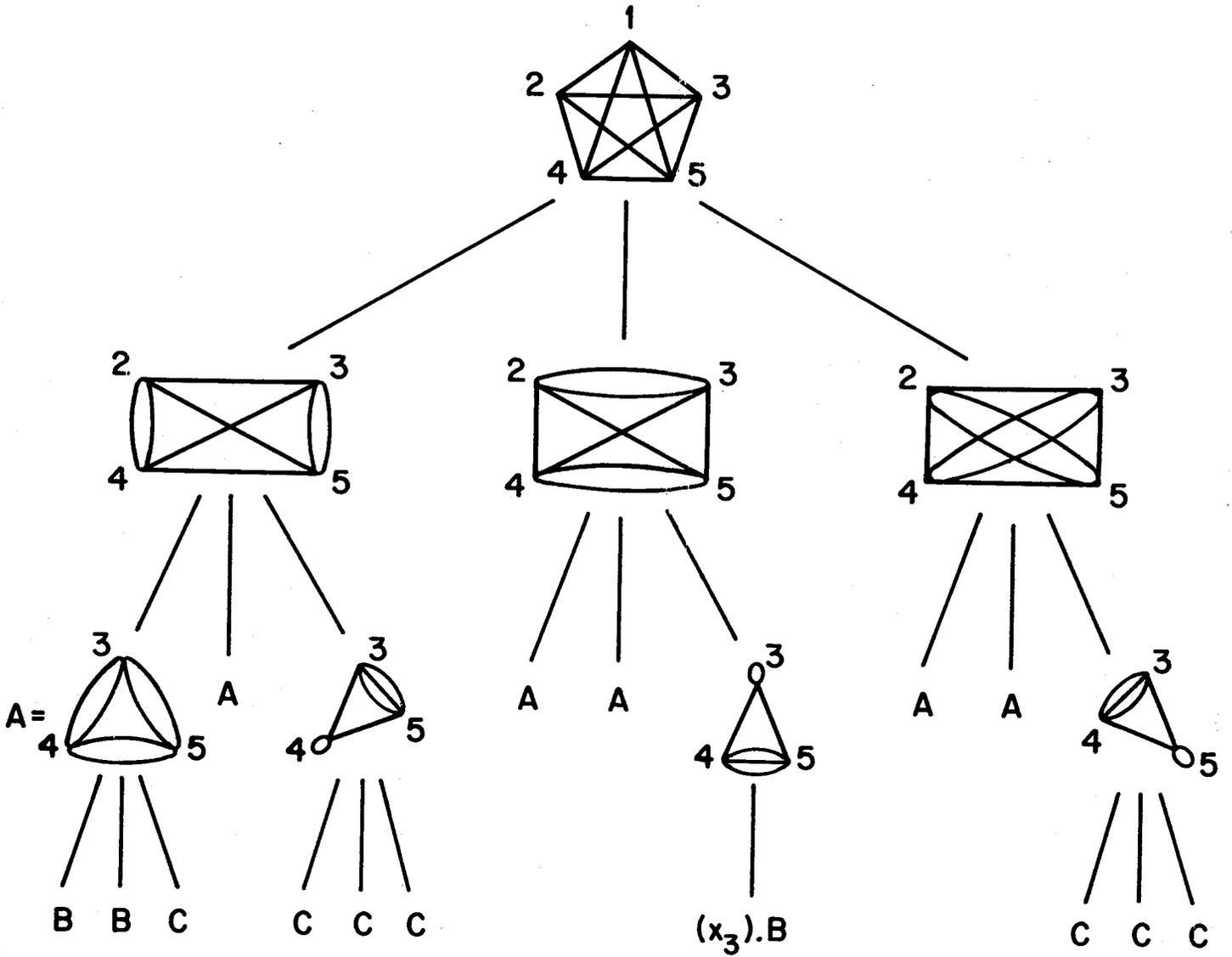
La figure 2⁽¹⁾ représente le schéma de calcul de $P(K_5, x)$. Les opérations de dérivation sont faites selon l'ordre $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ sur l'ensemble des sommets de K_5 .

On établit ainsi que $D_0(K_5) = 3(x_3) \cdot (x_5) + 12(x_4) \cdot (x_5) + 36(x_5)$; et donc $P(K_5, x) = 15x^2 + 36x$.

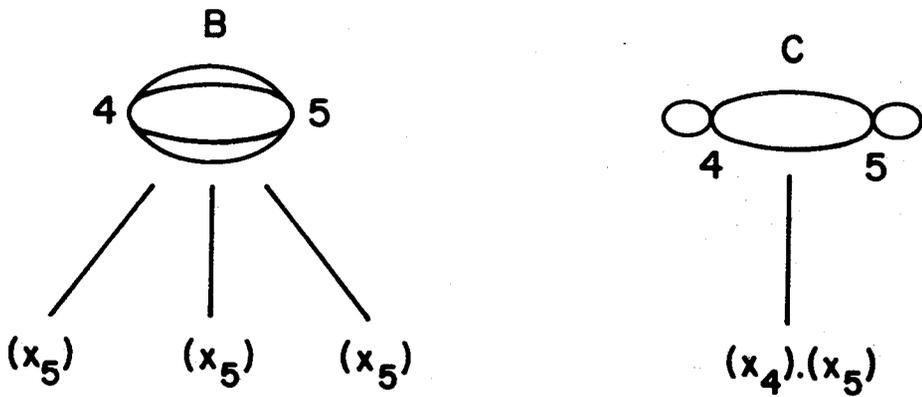
2.5. Arborescences de décomposition

Soit G un graphe de G_4 dont l'ensemble des noeuds est $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On appelle arborescence de décomposition de G une arborescence A dont les sommets sont étiquetés par des monômes de Q et dont chaque arc est étiqueté par un élément de X . Cette arborescence obéit aux conditions suivantes :

- la racine de l'arborescence est le monôme G ,
- la séquence des arcs représentant un chemin maximal de l'arborescence A constitue une permutation sur X .
- si q est l'étiquette d'un sommet de l'arborescence et $\{q_j / 1 \leq j \leq p\}$ l'ensemble des étiquettes des successeurs de ce sommet dans A , il existe un noeud x_i de X tel que tous les arcs issus du sommet étiqueté par q soient étiquetés par x_i et que $D_i(q) = \sum_{j=1}^p q_j$.



$$D_0(K_5) = D_5 \cdot D_4 [(x_3).B + 12B + 12C]$$



$$D_0(K_5) = 3(x_3).(x_5) + 12(x_4).(x_5) + 36(x_5)$$

Figure 2.

Une telle arborescence est notée $A(G)$.

En utilisant l'argument du lemme précédent, on montre que :

$$P(G, x) = \sum_{i=1}^k [L_i],$$

où $\{L_i, 1 \leq i \leq k\}$ désigne la famille des monômes qui étiquettent les puits de l'arborescence $A(G)$.

Dans la suite, on utilisera des arborescences régulières de G , arborescences dans lesquelles un sommet de demi-degré extérieur 3 n'est précédé que de sommets de demi-degré extérieur 3. En d'autres termes, de telles arborescences représentent un calcul dans lequel on effectue d'abord les réductions aux sommets réguliers.

3. BIDÉCOMPOSITION EULÉRIENNE

Nous montrons dans ce paragraphe que l'invariant polynomial dont l'existence vient d'être établie est un invariant de Tutte-Grothendieck. La bidécomposition distributive à laquelle correspond cet invariant - et que nous appelons bidécomposition eulérienne - est celle qui est constituée par la réduction et la décomposition du chapitre I.

3.1.

Appelons R l'ensemble quotient de G_4 par la relation d'isomorphie des graphes. Soit D_1 la décomposition sur R pour laquelle tout graphe 2-connexe est indécomposable et définie, en outre, par les relations $G \overset{\Delta}{\leftarrow} G' \cdot G''$ pour tout graphe articulé G de R et tout couple (G', G'') de graphes décomposés de G selon un cycle de cardinal 2 *incident à une articulation de G* .

Cette décomposition est unitaire. D'une part, en effet, tout graphe articulé se décompose de façon intrinsèque en blocs 2-connexes (W.T. Tutte [1966, p.86-96]), ce qui montre que D_1 est raffnable. Par ailleurs, les autres propriétés nécessaires pour prouver le caractère unitaire de D_1 se vérifient trivialement.

En revanche, nous devons prendre quelques précautions pour définir une décomposition additive unitaire qui forme avec D_1 une bidécomposition distributive. En effet, la décomposition D_2 définie par les relations

$$G \overset{\Delta}{\leftarrow} G_1 + G_2 + G_3,$$

où G est un élément quelconque de R possédant un sommet régulier et $\{G_1, G_2, G_3\}$ la famille des graphes réduits de G en un sommet régulier arbitraire n'est pas une décomposition raffnable. Les figures suivantes en apportent la preuve.

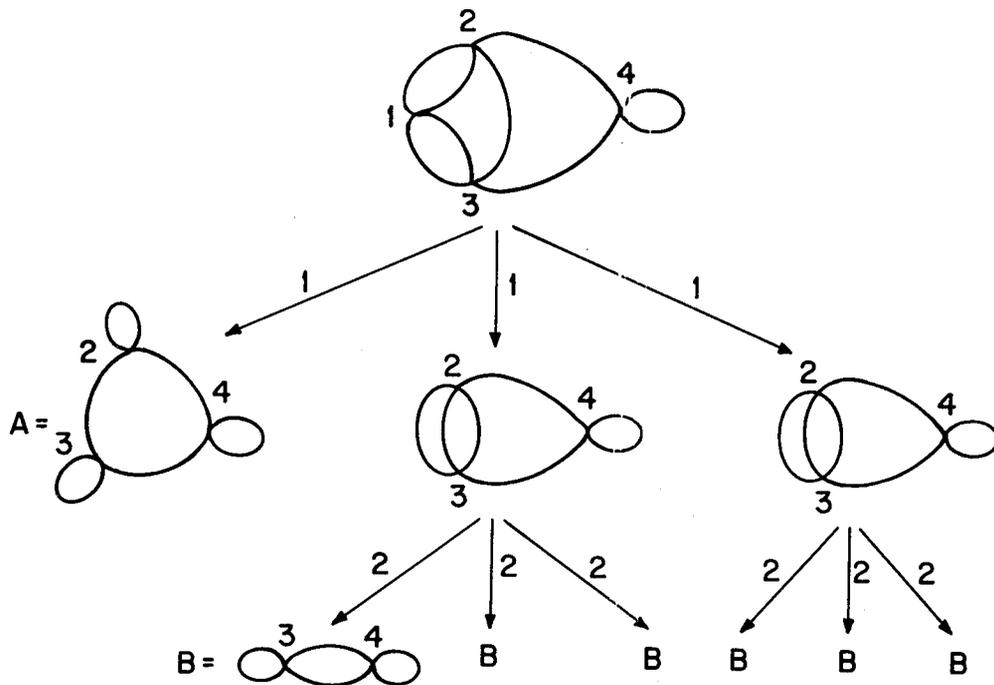


Figure 3a.

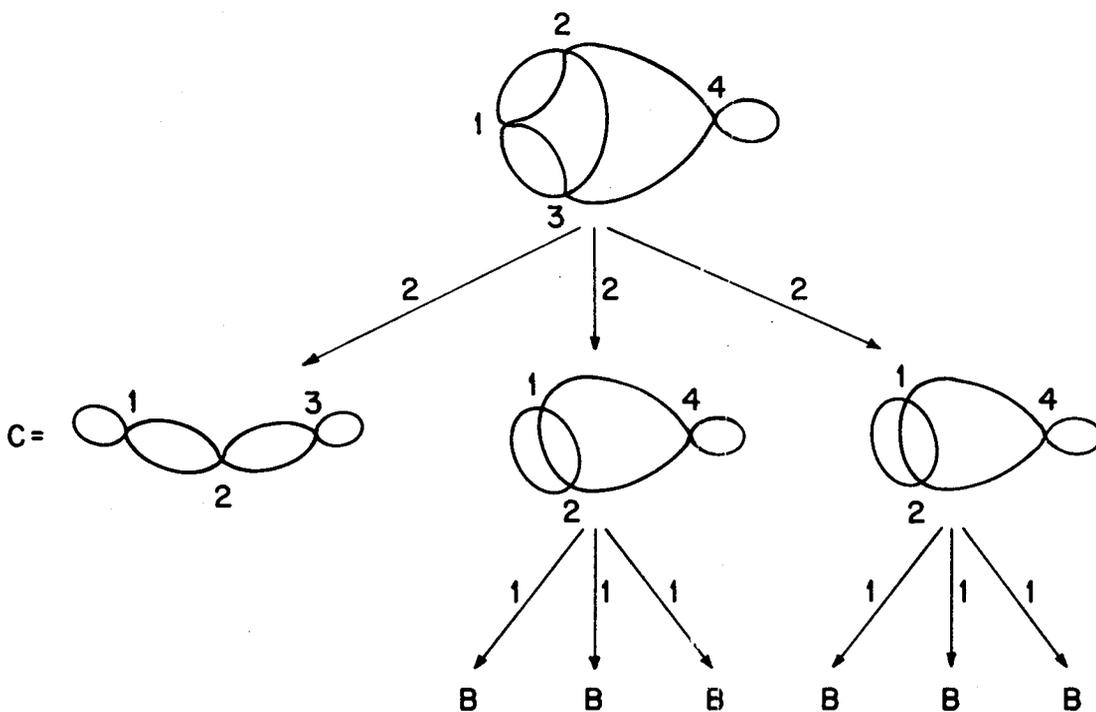


Figure 3b.

Légende : on a représenté ci-contre deux décompositions d'un même graphe G selon D_2 . On obtient deux majorants irréductibles et distincts de G : d'une part, $A + 6B$ (Fig.a) et, d'autre part, $C + 6B$ (Fig.b); ce qui prouve que D_2 n'est pas une décomposition raffnable.

3.2. Bidécomposition eulérienne

Pour pallier la difficulté soulignée dans la section précédente, nous définissons sur l'ensemble R des classes d'isomorphie de G_4 la relation d'équivalence \sim ci-après. Deux éléments de R sont équivalents si, et seulement si, ce sont des graphes *complètement articulés* (c'est-à-dire sans sommet régulier) et de même ordre. Dans l'ensemble quotient, $S = R/\sim$, la classe d'équivalence des graphes complètement articulés d'ordre p est notée A_p .

Les décompositions définies sur S et déduites de D_1 et D_2 sont également désignées par D_1 et D_2 .

Théorème : (D_1, D_2) constitue une bidécomposition distributive sur S dont le seul élément irréductible et indécomposable est le graphe A_1 .

Preuve : La deuxième partie de la proposition est évidente; de plus, l'ensemble des éléments irréductibles (selon D_2) est l'ensemble θ des classes de graphes complètement articulés.

D'après la définition 1.4, nous devons montrer que :

- a) D_1 et D_2 sont des décompositions unitaires,
- b) Dans toute D_1 décomposition d'un élément de $S - \theta$, il existe au moins un élément de $S - \theta$,
- c) Enfin, que la propriété de distributivité entre D_1 et D_2 est vérifiée.

La proposition c) est le corollaire d'un résultat plus général qui a été prouvé au premier chapitre (I-4.5).

La proposition b) se vérifie immédiatement. On vérifie, par ailleurs, que la D_1 -décomposition totale de l'élément A_p est $(A_1)^p$, et que D_1 est une décomposition raffnable sur θ .

Comme un élément de $S - \theta$ est défini à partir d'un unique élément de R , et que, comme nous l'avons souligné précédemment, D_1 est raffnable sur R , il en résulte que D_1 est raffnable sur S .

Il ne reste plus qu'à montrer que D_2 est une décomposition raffnable et donc unitaire.

Soit G un élément de S . On peut construire une arborescence régulière $A(G)$ par récurrence à partir de la racine (Cf. 2.5). Si un graphe G_0 attaché à un des sommets de l'arborescence possède un sommet régulier x , on construit trois arcs issus de G_0 étiquetés par x , et dont les extrémités terminales ont respectivement pour étiquette les trois graphes réduits de G_0 en x . Si G_0 ne possède pas de sommet régulier, il est complètement articulé et on achève l'arborescence de décomposition de manière arbitraire.

Appelons T l'ensemble des sommets de $A(G)$ qui possèdent les deux propriétés suivantes :

- ces sommets n'ont qu'un seul successeur dans l'arborescence,
- leur prédécesseur a un demi-degré extérieur égal à 3.

Désignons par T la famille des étiquettes des éléments de T . De façon évidente, tout élément H de T est constitué d'un seul facteur qui est un élément de θ ; de plus, $G = \sum_{H \in T} H$ est une D_2 -décomposition totale de G . Or, un élément de T égal à A_p apporte, dans $P(G, x)$, une contribution égale à x^p . Réciproquement, tout monôme x^p de $P(G, x)$ provient d'un élément A_p dans toute D_2 -décomposition totale de G . Puisque le polynôme $P(G, x)$ est intrinsèque, cette D_2 -décomposition totale l'est également et D_2 est raffnable. /

3.3. Théorème

L'anneau de Tutte-Grothendieck associé à la bidécomposition eulérienne (D_1, D_2) sur S est isomorphe à l'anneau des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable. Cette variable x représente le graphe irréductible et indécomposable de la bidécomposition : A_1 .

De plus, l'invariant de Tutte-Grothendieck relatif à cette bidécomposition associe à tout élément G de S le polynôme sans terme constant et à coefficients positifs ou nuls, $P(G, x)$, défini au paragraphe précédent.

Preuve : La première assertion de cet énoncé découle directement de résultats antérieurs : en vertu du théorème précédent, la bidécomposition eulérienne est une bidécomposition distributive; l'existence et la caractérisation de l'anneau de Tutte-Grothendieck associé résultent du théorème 1.5.

Soit par ailleurs J l'idéal de \mathcal{Q} engendré par les relations suivantes :

- $G - G' = 0$, si G et G' vérifient la relation \sim dans R .
- $G - (G_1 + G_2 + G_3) = 0$, si G est un élément de R possédant un sommet régulier et $\{G_1, G_2, G_3\}$ la famille des trois graphes réduits de G en un sommet régulier quelconque.

- $G - (G'.G'') = 0$, si G est un graphe articulé d'ordre supérieur ou égal à 2 et G' , G'' les deux graphes décomposés de G selon un cocycle de cardinal 2 incident à une articulation de G .

D'après le théorème 1.5, cité précédemment, l'anneau de Tutte-Grothendieck est l'anneau quotient de \mathcal{Q} par J . Or, par construction, G est congruent à $P(G,x)$ modulo cet idéal. $P(G,x)$ est donc bien l'invariant de Tutte-Grothendieck correspondant à la bidécomposition eulérienne. /

3.4. Corollaire

Le groupe de Tutte-Grothendieck associé à la décomposition unitaire $D_2(S)$ est isomorphe au groupe abélien libre engendré par les éléments $\{A_p / p \geq 1\}$. Pour un graphe G de S , l'invariant de Tutte-Grothendieck relatif à cette décomposition est obtenu à partir de $P(G,x)$ en substituant au monôme x^P la variable A_p .

Preuve : Ce corollaire est une simple application de la propriété 1.6 qui détermine le groupe de Tutte-Grothendieck associé à la seconde décomposition d'une bidécomposition distributive, en fonction de l'anneau de Tutte-Grothendieck associé à celle-ci. /

3.5. Généralisation

Soit D'_1 la décomposition sur S définie par les relations $G \sim G'.G''$ pour tout graphe G de S d'indice de connexité 2 et toute décomposition (G',G'') de G selon un quelconque de ses cocycles. Le résultat établi en I-5.7 prouve que D'_1 est une décomposition raffnable; on établit sans peine que c'est également une décomposition unitaire et qu'elle constitue, avec D_2 , une bidécomposition distributive.

On peut démontrer que cette nouvelle bidécomposition sur S définit le même élément irréductible et indécomposable et le même invariant de Tutte-Grothendieck que (D_1, D_2) .

4. PROPRIETES NUMERIQUES DE $P(G,x)$

4.1. Propriété

Si G est un graphe 4-régulier d'ordre n , $P(G,3) = 3^n$.

Preuve : Cette propriété est vraie pour un graphe complètement articulé puisque $P(A_p, x) = x^p$; en particulier elle est vraie pour le graphe d'ordre 1, A_1

Si G possède un sommet régulier, considérons la famille $\{G_1, G_2, G_3\}$ des graphes réduits de G en ce sommet,

$$P(G, 3) = \sum_{i=1}^3 P(G_i, 3)$$

Chacun des graphes réduits de G est d'ordre $(n-1)$ et la propriété en découle par récurrence sur n . /

4.2. Théorème

Si G est un graphe 4-régulier, le nombre de ses cycles eulériens est $N(G) = P(G, 2)$.

Preuve : D'après les formules de récurrence I-3.3 et I-4.2 établies au premier chapitre, il résulte que $N(G)$ est un B -invariant de l'ensemble S . Le morphisme d'anneau de $P[x]$ dans \mathbb{Z} dont le théorème 1.5 assure l'existence est entièrement déterminé par l'image de x dans cette application. Or, le graphe A_1 possède deux cycles eulériens distincts, donc $N(G) = P(G, 2)$. /

4.3. k-Partitions eulériennes

On appelle *k-partition eulérienne* d'un graphe 4-régulier un ensemble de k cycles simples qui réalisent une partition des arêtes de ce graphe.

Pour un entier k donné, supérieur ou égal à 1, on note $Z_k(G)$ l'ensemble des k -partitions eulériennes d'un graphe G 4-régulier. La réunion des ensembles $Z_k(G)$, $k \geq 1$, est désignée par $Z(G)$ et on vérifie que $Z(G)$ est en bijection avec l'ensemble des systèmes de G (I-2.4).

Théorème : *Si $H(G)$ désigne l'invariant de Tutte-Grothendieck dont l'existence a été établie au corollaire 3.4, le nombre de k -partitions eulériennes de G est égal à la valeur de $H(G)$ pour $A_p = 2^p \cdot \binom{p}{k-1}$.*

Preuve : Soit G un graphe 4-régulier, x un sommet régulier de G et $\{G_1, G_2, G_3\}$ les trois graphes réduits de G , respectivement associés aux séparations $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ en x . Un système de G associé à un élément de $Z_k(G)$ - c'est-à-dire à une k -partition eulérienne de G - et comportant la séparation δ_i en x , induit, par restriction aux sommets de G_i , un système de G_i correspondant à un élément de $Z_k(G_i)$. Réciproquement, un élément de $Z_k(G_i)$ détermine un élément de $Z_k(G)$ dont le système associé comporte la séparation δ_i en x .

Ainsi, le nombre de k -partitions eulériennes est un D_2 -invariant dans S . Le calcul de cet invariant pour les éléments irréductibles de D_2 ,

$$|Z_k(A_p)| = 2^p \cdot \binom{p}{k-1},$$

achève d'établir cette propriété. /

CHAPITRE III

POLYNÔMES ASSOCIÉS À DES DÉNOMBREMENTS EULÉRIENS PARTIELS
DANS LES GRAPHEs 4-RÉGULIERS

La méthode énumérative décrite au chapitre I peut s'appliquer non seulement au dénombrement de l'ensemble des cycles eulériens d'un graphe, mais également au dénombrement de certains de ses sous-ensembles. Cette extension peut être réalisée pour des sous-ensembles déterminés par des restrictions locales : les cycles eulériens qui appartiennent à un tel sous-ensemble sont ceux dont le système transitif associé ne contient aucune séparation "interdite".

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés de ce type de dénombrements partiels dans les graphes 4-réguliers. Comme dans le précédent chapitre, nous mettons l'accent sur la possibilité d'associer un polynôme énumératif à de tels dénombrements :

un graphe G étant donné, ainsi qu'un ensemble Δ de séparations aux sommets de G , on cherche s'il existe un polynôme $P(G, \Delta)$ canoniquement déterminé par l'ensemble des cycles eulériens de G dont les systèmes transitifs n'utilisent que des séparations appartenant à Δ .

On résoudra ce problème général dans l'avant dernier paragraphe du présent chapitre (§ 6) : on montrera qu'il existe un polynôme en une variable qui constitue l'unique solution du problème précédent. Cependant, ce polynôme ne pourra pas, en général, être identifié à un invariant de Tutte-Grothendieck.

Auparavant, nous traiterons plus en détail deux cas particuliers remarquables, où l'ensemble Δ comprend exactement 2 séparations par sommet.

Le premier cas concerne les graphes 4-réguliers planaires; les deux séparations autorisées en chaque sommet sont définies par des considérations topologiques relatives aux représentations du graphe dans le plan. La démarche adoptée pour exposer cet exemple diffère de celle précédemment utilisée : un polynôme $\Pi(|G|, x)$ est défini *a priori* sur chaque représentation sphérique $|G|$ d'un graphe G 4-régulier planaire (§ 1), puis on montre que ce polynôme ne dépend en fait que du graphe G et pas de la représentation sphérique choisie (§ 2) et ce n'est qu'ensuite que l'on établit, d'une part que Π est l'invariant de Tutte-Grothendieck associé à une " σ -bidécomposition" sur les graphes 4-réguliers planaires et, d'autre part que le nombre de σ -cycles d'une représentation sphérique $|G|$ de G est égal à $\Pi(|G|, 1)$.

Le second cas concerne le dénombrement des circuits eulériens dans les graphes 4-réguliers pseudo-symétriques. On aboutit également à un polynôme canonique en une variable qui est un invariant de Tutte-Grothendieck et on cherche à préciser jusqu'à quel point ce second polynôme est une généralisation du premier (§ 4). On établit au paragraphe 5 une valuation commune aux polynômes correspondant à ces deux cas particuliers.

Dans le paragraphe suivant, nous établissons l'existence d'un polynôme énumérateur pour tous les couples (G, Δ) - éléments que nous appelons *graphes fléchés*. Contrairement aux exemples précédents, ce polynôme ne correspond pas à une bidécomposition eulérienne intrinsèque. Pour préciser ce résultat négatif, nous caractérisons (§ 7) le sous-ensemble des graphes fléchés sur lequel la bidécomposition eulérienne est intrinsèque : à quelques exceptions près, ce sous-ensemble peut être engendré par les éléments correspondant aux cas particuliers étudiés au cours des chapitres II et III.

Dans ce chapitre nous continuons à considérer les graphes 4-réguliers sous leur forme normalisée. Ceci n'est pas absolument nécessaire lors de l'étude des deux cas particuliers mentionnés ci-dessus. En effet, le fait de représenter une boucle sur une surface - aussi bien que le fait de lui donner une orientation - suffit pour distinguer sans équivoque les deux "sens de parcours" dont nous avons requis l'existence au chapitre I (I-2.4). Cependant - et c'est ce qui explique notre choix - la considération de graphes normalisés nous permet d'utiliser les résultats acquis dans les chapitres antérieurs. En outre, cette décision s'avère de nouveau pleinement justifiée dans les deux derniers paragraphes (III-6 & 7).

1. POLYNOME $\Pi(|G|, x)$

Nous nous proposons dans ce paragraphe de définir le polynôme $\Pi(|G|, x)$ et d'établir deux relations récursives auxquelles il satisfait.

1.1. Représentations sphériques

Dans les trois premiers paragraphes de ce chapitre, on considère des multigraphes 4-réguliers normalisés planaires (Cf. II-1) - expression qui sera abrégée en "graphes 4-réguliers planaires" - et les représentations de ces graphes sur une sphère.

Ainsi que cela a été signalé dans l'introduction de ce chapitre, le fait de représenter une boucle, au sens usuel, sur une surface orientable permet de distinguer dans cette boucle deux "sens de parcours". Il est donc loisible de représenter une "boucle" - sous-graphe d'un graphe normalisé composé de deux sommets et de deux arêtes (I-3.1) - par une boucle topologique usuelle. Nous emploierons l'abréviation *R.S.* pour désigner une représentation sphérique conforme à cet usage.

1.2. Lemme : *Le graphe dual G^* d'une R.S. $|G|$ d'un graphe 4-régulier planaire G est bichromatique*

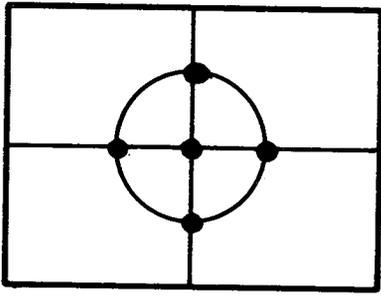
Preuve : Cette propriété est bien connue; nous en présentons une démonstration qui met en évidence le caractère nécessaire de l'hypothèse de planarité.

A la représentation $|G|$ de G est canoniquement associée sur la sphère une représentation $|G^*|$ de G^* . Cette représentation est constituée de faces qui sont toutes de longueur 4. La planarité de G^* fait que les cycles qui bordent ces faces constituent un ensemble générateur du module des cycles de G^* . Ainsi ce module n'est constitué que de cycles de longueur paire et G^* est bichromatique. /

REMARQUE : cette propriété n'est plus vraie pour des représentations sur des surfaces de genre non nul. Ainsi, parmi les 6 représentations de K_5 sur le tore, une seule admet un dual bichromatique (Fig. 1c).

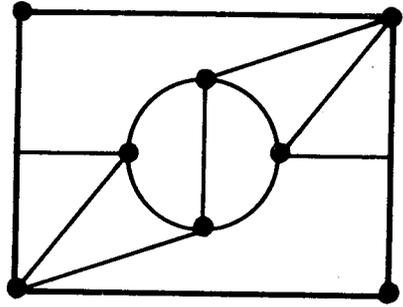
L'énumération des représentations toriques du graphe K_5 est due à I.N. Kagno [1937]. Cependant, cet auteur s'est surtout intéressé aux séquences des longueurs de faces de ces représentations, ce qui l'a conduit à considérer les représentations a) et b) de la figure 1 comme identiques et donc à trouver un total de 5 représentations de K_5 sur le tore.

a)



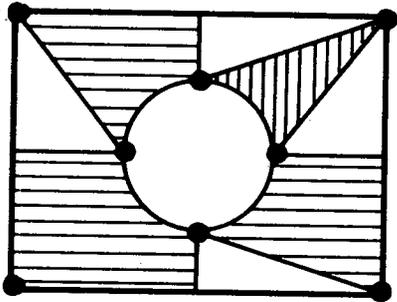
33338

b)



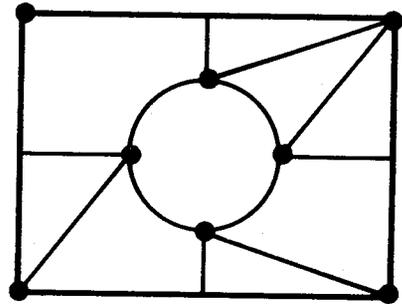
33338

c)



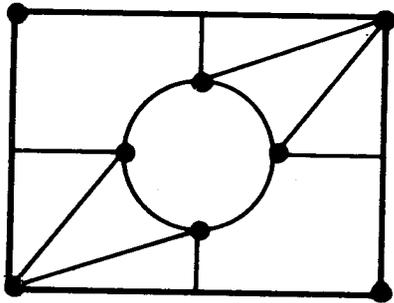
33347

d)



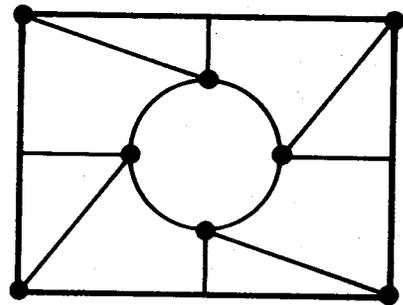
33446

e)



33455

f)

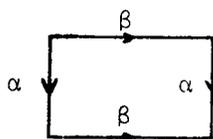


44444

Figure 1. Représentations toriques de K_5

(Les séquences numériques représentent les séquences de longueurs de faces)

Le tore a été représenté ci-contre selon un rectangle avec la convention que les 4 sommets de ce rectangle doivent être identifiés à un seul point du tore et que les vecteurs de bord, α et β , doivent être identifiés selon le schéma suivant :



Signalons par ailleurs qu'il existe des représentations bichromatiques de K_5 sur une surface de genre 2 : l'une d'entre elles sera présentée au § 4.6.

1.3. Graphes croisés

Le résultat du lemme précédent est à l'origine de la construction de deux graphes croisés (Γ_1 et Γ_2) associés à la R.S. $|G|$ de G .

Supposons que les faces de la représentation $|G|$ aient été colorées en 2 couleurs (nommées 1 et 2). Le graphe Γ_1 (resp. Γ_2) a un ensemble de sommets en bijection avec les faces de couleur 1 (resp. 2) de $|G|$ et un ensemble d'arêtes en bijection avec les sommets de degré 4 de G . L'arête de Γ_1 (resp. Γ_2) correspondant au sommet x de G est incidente aux sommets de Γ_1 (resp. Γ_2) images des faces de couleur 1 (resp. 2) à la frontière desquelles x appartient.

Cette définition abstraite de Γ_1 et Γ_2 peut être prolongée par une définition topologique. On peut obtenir une R.S. de Γ_1 de la façon suivante : placer un sommet de Γ_1 dans chacune des faces de couleur 1 de $|G|$. Pour tout couple de sommets adjacents (r, s) de Γ_1 , il existe un sommet x de G qui est sur la frontière des faces f_r et f_s correspondant à r et s ; construire un arc de Jordan (u) dont les extrémités sont r et s , qui passe par x et qui n'a aucun autre point hors des faces f_r et f_s .

On désigne par $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ les représentations topologiques de Γ_1 et Γ_2 obtenues par la construction précédente. Une vérification simple permet de se convaincre que $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ constituent deux représentations sphériques topologiquement duales (Yajima et Kinoshita [1957]).

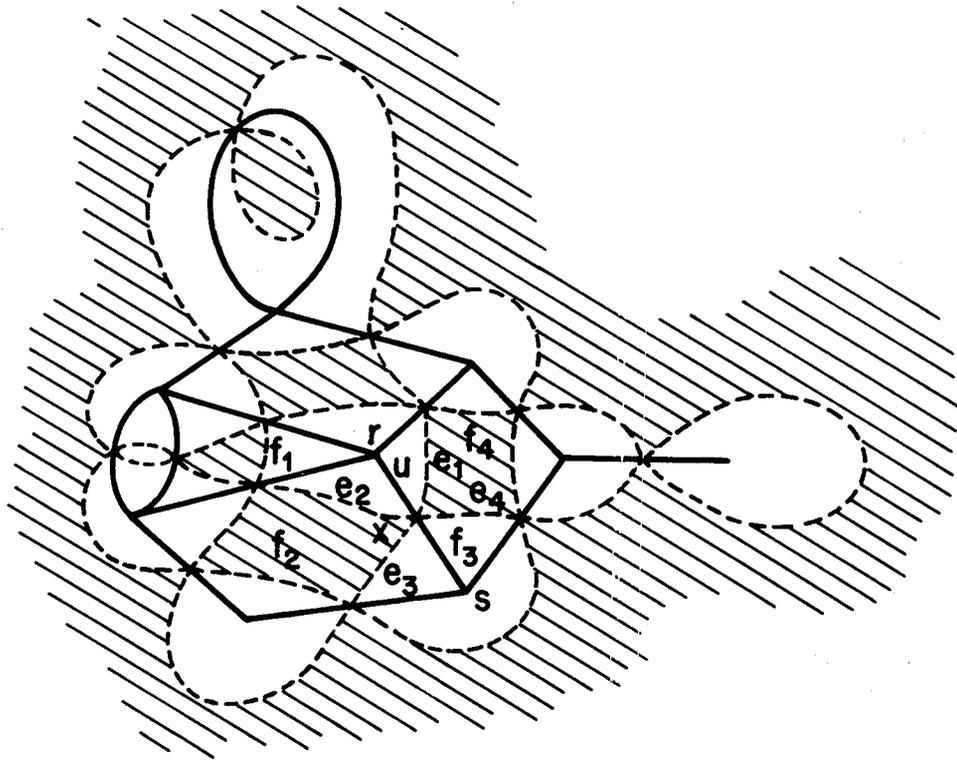


Figure 2a. Représentations sphériques compatibles d'un graphe 4-régulier et d'un de ses graphes croisés

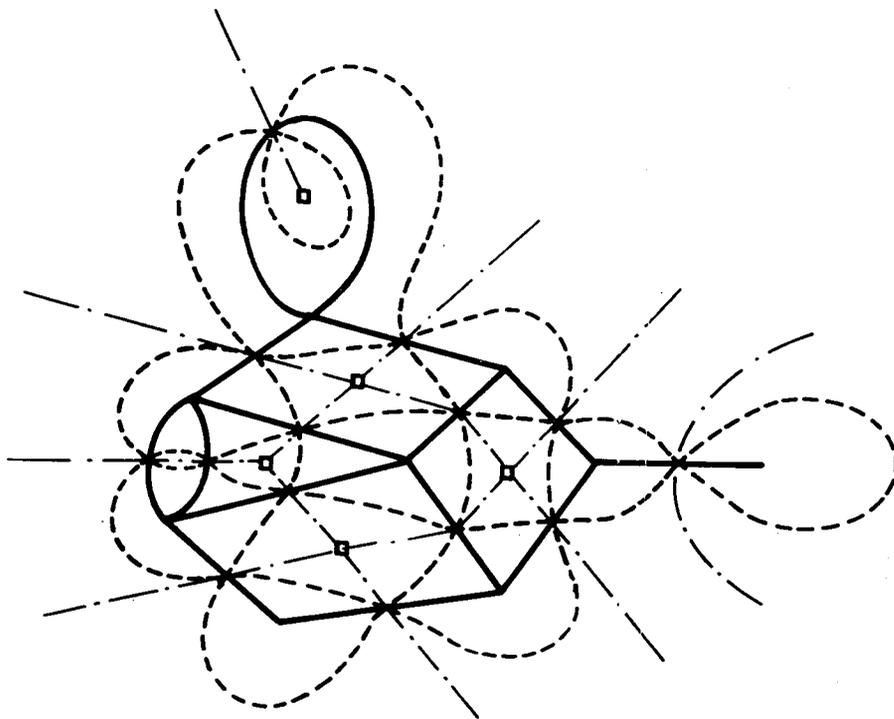


Figure 2b. Les graphes croisés de $|G|$ sont deux

1.4. Reconstruction

Etant donné un graphe planaire connexe Γ , et une de ses R.S. $|\Gamma|$, on peut reconstruire un graphe 4-régulier planaire G dont Γ est un graphe croisé. Cette construction est décrite par O. Öre [1967 p.28] qui appelle G le médial de Γ ; on peut la résumer de la façon suivante :

- 1) Placer un sommet de $|G|$ au milieu de chaque arête de $|\Gamma|$.
- 2) Pour chaque face de $|\Gamma|$, construire à l'intérieur de celle-ci un polygone joignant ceux des sommets précédents qui sont consécutifs sur la frontière de cette face.

L'ensemble des sommets et des arêtes précédentes constitue alors une R.S. du graphe 4-régulier connexe et planaire demandé.

1.5. Polynôme $\Pi(|G|, x)$

Rappelons que nous avons défini au paragraphe II-1.7 le polynôme dichromatique $\chi(\Gamma, x, z)$ d'un multigraphe fini Γ . Nous avons notamment énoncé le résultat suivant, relatif à tout couple (Γ, Γ^*) de graphes planaires duaux :

$$\chi(\Gamma^*, x, z) = \chi(\Gamma, z, x).$$

Définition : Désignons par $|G|$ une R.S. d'un graphe 4-régulier planaire G et par Γ l'un des deux graphes croisés définis par $|G|$. On pose :

$$\Pi(|G|, x) = \chi(\Gamma, x, x).$$

Nous avons établi précédemment que les deux graphes croisés d'une représentation sphérique de G étaient duaux l'un de l'autre (1.3). Le résultat rappelé ci-dessus assure donc que la définition précédente ne dépend pas du graphe croisé choisi.

Les deux dernières sections sont consacrées à l'énoncé et à la démonstration de deux formules récursives auxquelles satisfait le polynôme Π .

1.6. Réduction par éclatement planaire d'un sommet régulier

Soit $G = (X, E)$ un graphe 4-régulier planaire, $|G|$ l'une de ses R.S. et x un sommet régulier de G . Désignons par e_1, e_2, e_3, e_4 (resp. f_1, f_2, f_3, f_4) les 4 arêtes (resp. les 4 faces) incidentes à x dans $|G|$, de telle sorte que f_i soit adjacente à e_i et $e_{i+1} \pmod{4}$ et que (e_1, e_2, e_3, e_4) représente l'ordre de succession des arêtes autour de x dans l'ordre trigonométrique (comme le sommet x est régulier, les 4 arêtes d'une part et les 4 faces d'autre part sont 2 à 2 distinctes).

Considérons les 3 graphes réduits de G en x . Ces graphes réduits sont déterminés à partir des partitions suivantes :

$$G_1 : \{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}\}$$

$$G_2 : \{\{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}\}$$

$$G_3 : \{\{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}\} .$$

Compte tenu de la disposition des arêtes dans $|G|$, les deux graphes réduits G_1 et G_2 admettent, contrairement à G_3 , des R.S. $|G_1|$ et $|G_2|$ trivialement déduites de $|G|$ (Fig. 3).

De ce fait, G_1 et G_2 (resp. $|G_1|$ et $|G_2|$) seront appelés *graphes réduits* (resp. *représentations réduites*) de $|G|$ obtenus par éclatement planaire au sommet x .

Désignons par Γ le graphe croisé de $|G|$ dont deux des sommets sont définis par les faces f_1 et f_3 . Soit u l'arête de Γ qui correspond à x . On vérifie (Cf. Fig. 3) que $\Gamma \setminus u$ (graphe obtenu par suppression de u) est un graphe croisé de $|G_1|$ et que Γ / u (obtenu par contraction de u) est un graphe croisé de $|G_2|$.

La propriété suivante découle alors des propriétés du polynôme χ .

Propriété : Soit $|G|$ une R.S. d'un graphe 4-régulier planaire G , x un sommet régulier de G et $|G_1|$, $|G_2|$ les représentations réduites de $|G|$ obtenues par éclatement planaire au sommet x ; on vérifie :

$$\Pi(|G|, x) = \Pi(|G_1|, x) + \Pi(|G_2|, x). /$$

1.7. Décomposition

Considérons un graphe 4-régulier planaire G possédant un cocycle ω de cardinal 2. Les graphes décomposés de G selon ω (I-4.1), G' et G'' , sont 4-réguliers et planaires. De façon évidente, cette opération de décomposition (sur les graphes) peut être transposée en une opération de décomposition sur les R.S. des graphes 4-réguliers.

A une R.S. $|G|$ de G et à un cocycle de G de cardinal 2 (ω), on associe ainsi deux R.S. $|G'|$ et $|G''|$ appelées R.S. *décomposées* de $|G|$ selon ω .

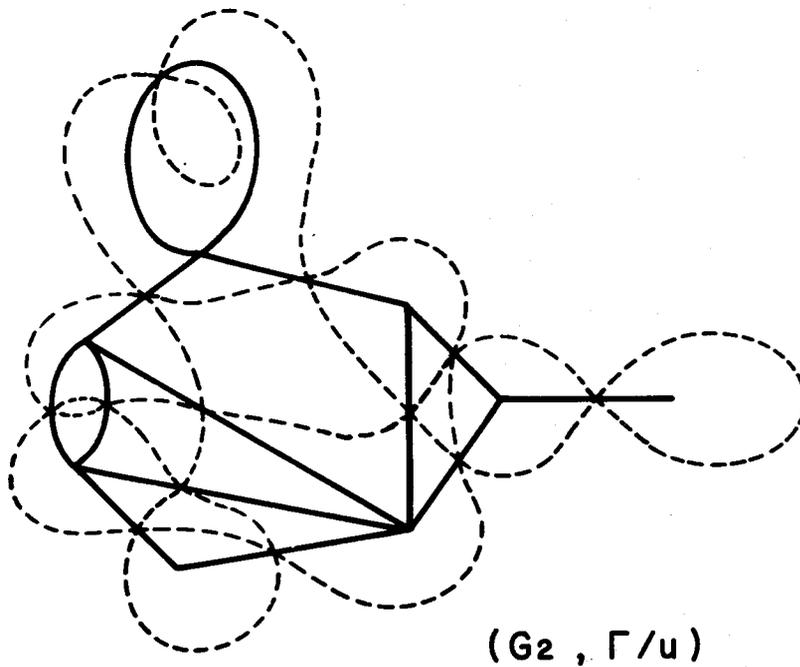
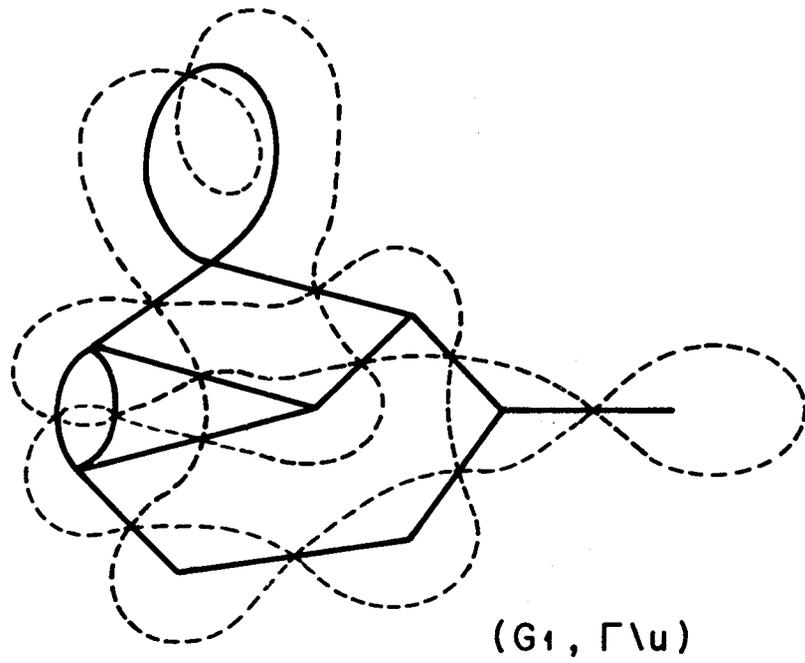


Figure 3. Graphes réduits obtenus par éclatement planaire en x de la R.S. $|G|$ de la figure 2 a.

Dans toute R.S. $|G|$ de G , les deux arêtes du cocycle ω sont adjacentes aux deux mêmes faces. Dans toute bicoloration des faces de $|G|$, ces deux faces particulières sont de couleurs distinctes. Considérons l'une d'entre elles; le sommet V qui lui est associé dans le graphe croisé correspondant est un point d'articulation de ce graphe. La figure 4 donne une bonne intuition de la façon dont on obtient les graphes croisés des R.S. décomposées de $|G|$: ce sont deux graphes complémentaires, $\{V\}$ -détachés de Γ .

Utilisant les propriétés du polynôme χ , on obtient :

Propriété : Soit $|G|$ une représentation sphérique d'un graphe G 4-régulier planaire dans lequel il existe un cocycle ω de cardinal 2. Si $|G'|$ et $|G''|$ sont les deux R.S. décomposées de $|G|$ selon ω ,

$$\Pi(|G|, x) = \Pi(|G'|, x) \cdot \Pi(|G''|, x) \cdot /$$

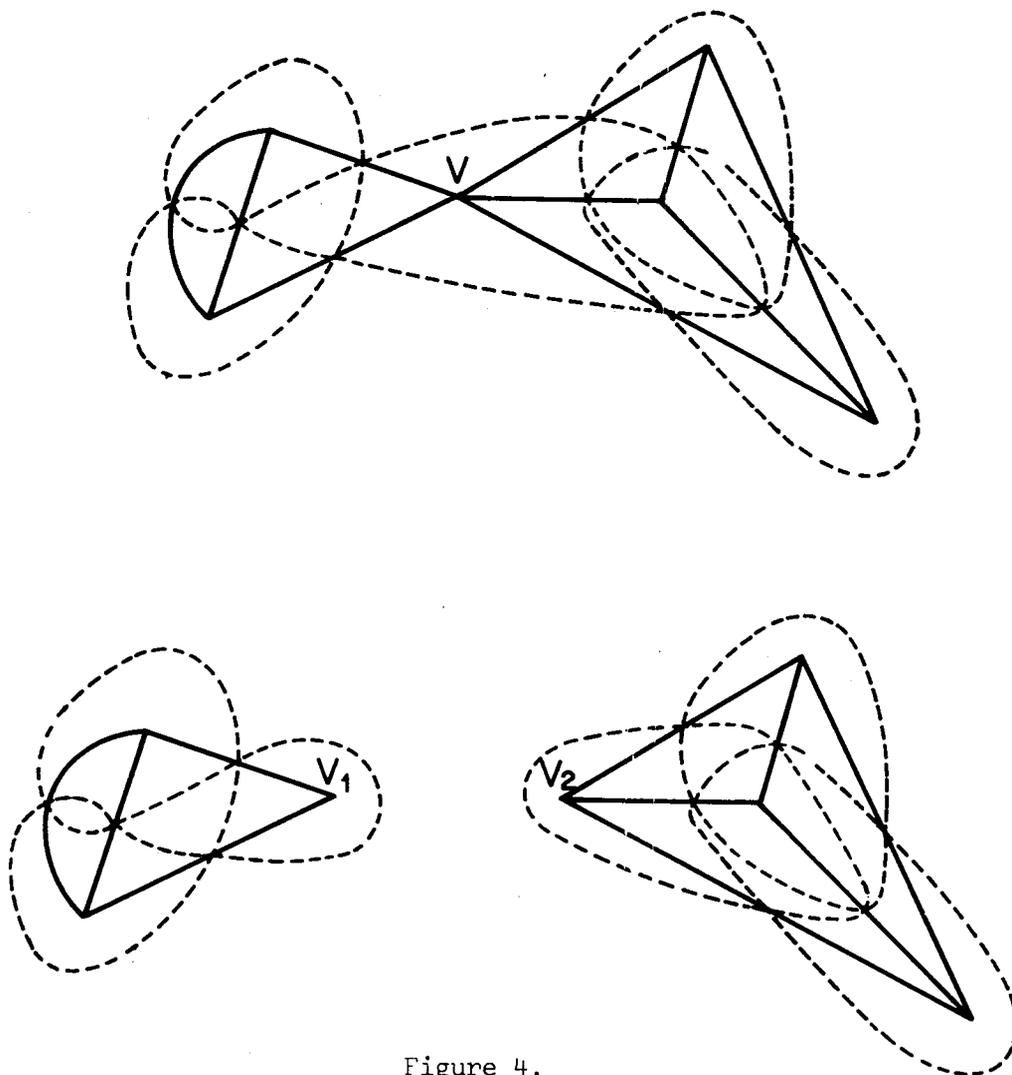


Figure 4.

2. INVARIANCE TOPOLOGIQUE DE $\Pi(|G|, x)$

2.1.

La définition du polynôme $\Pi(|G|, x)$ donnée dans le premier paragraphe de ce chapitre fait explicitement intervenir la représentation sphérique $|G|$ du graphe 4-régulier planaire G . En fait, et c'est ce que nous allons montrer dans le présent paragraphe, *le polynôme Π ne dépend que du graphe G .*

La preuve de cette invariance topologique nécessite la connaissance d'une caractérisation de l'ensemble des représentations sphériques d'un graphe planaire. Si le graphe est 3-connexe, cet ensemble est de cardinal 1. Par ailleurs, on sait construire toute R.S. d'un graphe de connectivité 1 à partir de ses composantes 2-connexes (*blocs*) - H. Whitney [1933]. Ces deux cas ne présentent donc pas de difficultés particulières. En revanche, nous croyons nécessaire d'explicitier une caractérisation de l'ensemble des R.S. d'un graphe planaire dans le cas des graphes de connectivité 2, bien que cette caractérisation ne soit pas inédite (Cf. 2.3): c'est l'objet des deux prochaines sections.

2.2. Théorème de retournement des graphes planaires de connectivité 2

On appelle *charnière*⁽¹⁾ d'un graphe G 2-connexe un sous-ensemble $\{x, y\}$ de sommets de G définissant une $\{x, y\}$ -composante C de ce graphe telle que :

- i) $\text{Min} \{m(C), m(\bar{C})\} \geq 2$, où $m(H)$ désigne le nombre d'arêtes de H et \bar{C} le complémentaire de C dans G ,
- ii) au moins l'un des deux sous-graphes partiels, C ou \bar{C} , est 2-connexe⁽²⁾.

Une *3-composante* d'un graphe G de connectivité 2 est une $\{x, y\}$ -composante de ce graphe telle que $\{x, y\}$ soit une charnière.

(1) Traduction de l'anglais "hinge" (W.T. Tutte [1966 - ch. 11]).

(2) Une charnière est donc une articulation d'ordre 2 particulière. Les charnières jouent vis-à-vis de ces articulations d'ordre 2 le même rôle que les cocycles primitifs vis-à-vis des cocycles de cardinal 2 dans un graphe eulérien (Cf. I-5).

Soit $|G|$ une R.S. particulière de G . Considérons une charnière $\{x,y\}$ de G et désignons par $C_3(x,y)$ l'ensemble des 3-composantes de G définies par $\{x,y\}$. L'ordre de succession de ces composantes autour du sommet x (resp. y) dans $|G|$ définit une permutation circulaire de $C_3(x,y)$ et ces deux permutations circulaires sont inverses l'une de l'autre. On appelle *faisceau de p composantes contigües*⁽³⁾ tout sous-graphe de G composé de l'union de p $\{x,y\}$ -composantes qui constituent dans l'une - ou l'autre - de ces deux permutations circulaires, une séquence d'éléments consécutifs.

Ces faisceaux permettent de définir des opérateurs de transformation sur l'ensemble des R.S. d'un graphe planaire G .

Considérons une charnière $\{x,y\}$ de G qui détermine q $\{x,y\}$ -composantes. Soit, par ailleurs, une R.S. $|G|$ de G et, relativement à $|G|$ et à $\{x,y\}$, un faisceau F de p composantes contigües, avec $p \leq q/2$. On désigne par \bar{F} le complémentaire de F et par $|F|$, $|\bar{F}|$ respectivement les représentations sphériques de F , \bar{F} déduites de la R.S. $|G|$. Inversement, $|G|$ est déterminé par les représentations des deux sous-graphes complémentaires F et \bar{F} et on peut noter :

$$|G| = |F| \cup |\bar{F}|$$

Si on désigne par $|F|^*$ l'image miroir de $|F|$ obtenue par symétrie plan, on définit

$$|G|' = |F|^* \cup |\bar{F}|$$

et on appelle *retournement d'ordre p* la transformation $|G| \rightarrow |G|'$.

Théorème : Pour tout graphe planaire G de connectivité 2, deux représentations sphériques de G se déduisent l'une de l'autre par application d'un produit fini de retournements d'ordre inférieur ou égal à 2. /

2.3. Remarque

La paternité exacte du théorème précédent semble difficile à établir. J.C. Fournier [1976] considère ce résultat comme une simple conséquence de la caractérisation des graphes isocycliques de H. Whitney [1933]. Cependant, l'utilisation de ce théorème de Whitney ne permet pas de limiter les retournements nécessaires à ceux d'ordre inférieur ou égal à 2.

(3) Nous nous permettons d'anticiper sur les innovations de la 9e édition du Dictionnaire de l'Académie officialisant le fait que, dans ce cas, "le tréma... se placera désormais, non plus sur le e muet avec lequel il n'a rien à faire, mais sur l' u dont il commande la prononciation". (J. Mistler, le Monde de l'Education, 13 (1976), 15).

Par ailleurs, les théorèmes 9 et 10 de S. Mac Lane [1937] permettent de retrouver le théorème de retournement de manière plus analytique : ces théorèmes établissent une caractérisation de toutes les R.S. d'un graphe planaire 2-connexe à partir des R.S. de ses *atomes* (qui sont des graphes déduits des 3-composantes que nous avons définies). Le théorème de retournement s'en déduit en montrant que cette caractérisation permet de définir un groupe de transformation sur l'ensemble des R.S. de G et en établissant que les retournements d'ordre inférieur ou égal à 2 forment un ensemble générateur de ce groupe.

Enfin, le chapitre 11 de W.T. Tutte [1966] apporte une contribution intéressante à cette question en établissant l'existence d'une décomposition intrinsèque des graphes 2-connexes en unités de clivage ("cleavage units"). Ce résultat complète et explicite les travaux de S. Mac Lane relatifs aux atomes.

L'ensemble de ces travaux résoud le problème de la détermination de l'ensemble des R.S. d'un graphe planaire dans le cas des graphes de connectivité 2 de façon aussi satisfaisante que le réalisait le résultat de H. Whitney [1933] dans le cas des graphes articulés⁽⁴⁾.

2.4. Caractérisation des retournements des graphes 4-réguliers planaires de connectivité 2

D'après la définition du § 2.2, un retournement est caractérisé par une charnière $\{x,y\}$ et par un faisceau relatif à cette charnière. Cependant, compte tenu des notations de ce paragraphe, on constate que

$$|F| \cup |\bar{F}|^* = (|G|')^*,$$

c'est-à-dire, puisque les représentations $|G|'$ et $(|G|')^*$ sont considérées comme équivalentes, qu'un retournement est plus précisément caractérisé par un couple (F, \bar{F}) de faisceaux complémentaires dans le graphe.

Par ailleurs, on convient de définir le *type* d'un retournement par les degrés partiels des sommets d'attachement dans le faisceau considéré. En vertu de la remarque précédente, on caractérisera donc le type d'un retournement, relatif à une charnière $\{x,y\}$ par les deux paires

$$\{d_F(x), d_{\bar{F}}(x)\}, \{d_F(y), d_{\bar{F}}(y)\}.$$

(4) Nous comptons relater la filiation qui lie ces différents articles dans une note intitulée " de H. Whitney et S. Mac Lane à W.T. Tutte, histoire d'une formalisation".

Dans le cas particulier des graphes 4-réguliers, les situations possibles sont en nombre très réduit. Le tableau 1 donne la liste des configurations présentées par les articulations de cardinal 2 d'un graphe 4-régulier.

Remarquons tout d'abord que la configuration décrite par la première ligne de ce tableau ne correspond pas au cas d'une charnière : en effet, les deux composantes définies par cette articulation de cardinal 2 sont l'une et l'autre de connectivité 1.

De l'observation des autres lignes du tableau, on tire la conclusion que, dans toute 3-composante d'un graphe 4-régulier, les sommets formant la charnière ont des degrés partiels égaux. Dans ce cas, l'on peut donc limiter la caractérisation du type d'un retournement à la seule donnée de $\{d_F(X), d_{\overline{F}}(X)\}$, qui n'est autre qu'une partition de l'entier 4 en deux entiers non nuls.

Ainsi, dans les graphes 4-réguliers, l'on peut définir deux types de retournements, caractérisés respectivement par les paires $\{1,3\}$ et $\{2,2\}$.

A titre d'exemple, la configuration décrite dans la dernière ligne du tableau permet de définir quatre retournements d'ordre 1 et de type $\{1,3\}$ et deux retournements non équivalents d'ordre 2 et de type $\{2,2\}$.

En résumé :

Propriété : Les retournements définis sur un graphe 4-régulier planaire de connectivité 2 sont d'ordre inférieur ou égal à 2 et appartiennent tous à l'un des deux types suivants :

Type $\{1,3\}$: retournement d'une composante dont les sommets d'attachement ont des degrés partiels égaux à 1;

Type $\{2,2\}$: retournement d'une composante (ou d'un faisceau de deux composantes contiguës) dont les sommets d'attachement ont des degrés partiels égaux à 2. /

Ligne	Nombre de Composantes	Degrés partiels des sommets d'attachement dans ...			
		C_1	C_2	C_3	C_4
1	2	$d(x) = 3$ $d(y) = 1$	$d(x) = 1$ $d(y) = 3$		
2		$d(x) = 3$ $d(y) = 3$	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$		
3		$d(x) = 2$ $d(y) = 2$	$d(x) = 2$ $d(y) = 2$		
4	3	$d(x) = 2$ $d(y) = 2$	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$	
5	4	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$	$d(x) = 1$ $d(y) = 1$

Tableau 1.

2.5. Théorème d'invariance

Théorème : Le polynôme $\Pi(|G|, x)$ est invariant sur l'ensemble des représentations sphériques d'un graphe G 4-régulier planaire.

Preuve : L'argumentation de cette preuve diffère selon la connexité du graphe G considéré.

Si G est 3-connexe, la propriété est trivialement vérifiée puisque la représentation de G est unique.

Lorsque G est de connectivité 2, le théorème de retournement (2.2) permet de restreindre la vérification de l'égalité

$$\Pi(|G|, x) = \Pi(|G|_1, x)$$

à un couple de représentations $(|G|, |G|_1)$ déduites l'une de l'autre par retournement. Le résultat de la section précédente (2.4) nous conduit à considérer les deux cas suivants.

Soit tout d'abord deux R.S. de G déduites l'une de l'autre par retournement de type $\{1,3\}$. L'objet du retournement est une composante C dont les sommets d'attachement ont des degrés partiels égaux à 1. Les deux arêtes de C incidentes à ces sommets d'attachement constituent un cocycle ω de cardinal 2 de G . Parmi les deux graphes décomposés de G selon ω , désignons par G' celui qui correspond à C et par G'' celui qui correspond à \bar{C} . Le lecteur vérifiera sur un petit dessin dont la réalisation est laissée à son initiative, que si $|G'|$ et $|G''|$ sont les R.S. décomposées de $|G|$ selon ω , $|G'|^*$ et $|G''|$ sont les R.S. décomposées de $|G|_1$ selon ω . Or, d'après 1.7,

$$\begin{aligned} \Pi(|G|, x) &= \Pi(|G'|, x) \cdot \Pi(|G''|, x) \\ \text{et } \Pi(|G|_1, x) &= \Pi(|G'|^*, x) \cdot \Pi(|G''|, x). \end{aligned}$$

Mais $|G'|$ et $|G'|^*$ sont des R.S. équivalentes et ont donc même polynôme Π . Il s'en déduit que Π est un invariant par retournement de type $\{1,3\}$.

Considérons à présent un retournement de type $\{2,2\}$ autour d'une charnière $\{x,y\}$. Ce retournement détermine une partition des $\{x,y\}$ -composantes de G en deux faisceaux F et \bar{F} tels qu'il existe dans la représentation $|G|$ deux faces de même couleur (couleur 1) bordées à la fois par des éléments de F et de \bar{F} . Le graphe croisé de $|G|$ associé à la seconde couleur (Γ_2) a la propriété de rester invariant par le retournement considéré. Il en résulte que

$$\Pi(|G|, x) = \Pi(|G|_1, x) = \chi(\Gamma_2, x, x),$$

ce qui achève l'étude des graphes de connectivité 2.

Dans le cas des graphes de connectivité 1, nous savons qu'ils peuvent être décomposés de façon intrinsèque en blocs et que cette opération correspond à des décompositions successives selon des cocycles de cardinal 2 incidents à des points d'articulation. Le polynôme Π s'obtient dans ce cas comme produit des polynômes relatifs aux blocs. Chacun de ces facteurs est intrinsèque puisque les blocs sont des graphes 2-connexes et que l'on peut par conséquent leur appliquer les arguments précédents.

Cette dernière remarque achève d'établir l'ensemble de la propriété. /

Dans la suite cet invariant sera désigné par $\Pi(G, x)$.

3. σ -BIDÉCOMPOSITIONS ET σ -CYCLES

Nous définissons dans ce paragraphe deux bidécompositions dont le polynôme Π est un invariant. Ce polynôme est ensuite utilisé pour dénombrer les σ -cycles d'une représentation sphérique d'un graphe 4-régulier planaire et résoudre quelques questions connexes.

3.1. σ -Bidécompositions sur les graphes 4-réguliers planaires

Ces σ -bidécompositions sont définies sur un sous-ensemble S' de l'ensemble S décrit en II-3.2. Rappelons que S est l'ensemble quotient de l'ensemble des graphes 4-réguliers (dont les sommets appartiennent à un ensemble dénombrable X) obtenu en considérant tous les graphes complètement articulés et de même ordre comme équivalents.

L'ensemble S' utilisé ici est la restriction de S aux graphes planaires. De même que dans II-3.2, A_p désignera "le" graphe complètement articulé d'ordre p .

Nous définissons sur cet ensemble S' deux bidécompositions $B = (D_1, D_2)$ et $B' = (D'_1, D'_2)$ construites à partir des trois décompositions suivantes.

D_1 et D'_1 sont les restrictions des décompositions analogues définies sur S : D_1 (resp. D'_1) est la décomposition dont la relation de couverture est définie par toutes les inéquations

$$G \stackrel{\Delta}{\prec} G' \cdot G''$$

pour tout graphe G articulé (resp. d'arête-connexité 2) de S' et toute décomposition (G', G'') de G selon un cocycle de cardinal 2 incident à une articulation de G (resp. selon un cocycle quelconque de G).

D_2 est la décomposition de S' dont la relation de couverture est définie par toutes les inéquations

$$G \stackrel{\Delta}{\prec} G_1 + G_2$$

pour tout triplet (G, G_1, G_2) pour lequel il existe des R.S. $|G|$, $|G_1|$, et $|G_2|$ des graphes G , G_1 , G_2 respectivement et un sommet régulier x de G tels que $|G_1|$ et $|G_2|$ soient les R.S. réduites de $|G|$ par éclatement planaire au sommet x .

3.2. Définition

On appelle bidécompositions *équivalentes* deux bidécompositions distributives sur un même ensemble S telles que pour tout multiset sur S , l'unique majorant maximal (pour l'ensemble des deux décompositions) est identique dans ces deux bidécompositions.

Théorème : (D_1, D_2) et (D'_1, D_2) sont deux bidécompositions distributives équivalentes sur S' . Leur unique élément irréductible et indécomposable est A_1 . De plus, $\Pi(G, x)$ est l'invariant de Tutte-Grothendieck correspondant à l'une ou l'autre de ces bidécompositions.

Preuve : les éléments irréductibles selon D_2 forment l'ensemble $\{A_p / p \geq 1\}$; le seul élément de S' à la fois irréductible et indécomposable pour $B = (D_1, D_2)$ - et pour $B' = (D'_1, D_2)$ - est A_1 .

Par ailleurs, par décomposition selon D_1 ou D'_1 , un élément (D_2) -irréductible donne un multiset d'éléments irréductibles. De plus, on vérifie trivialement que D_1 et D'_1 sont des décompositions unitaires, en se souvenant qu'elles sont les restrictions de décompositions elles-mêmes unitaires. En ce qui concerne D_2 , considérons un élément G de S' , et une D_2 -décomposition totale Z de G . D'après les formules de récurrence de 1.6 et 1.7, il y a bijection entre les éléments du support du multiset Z et les monômes du polynôme $\Pi(G, x)$: à l'élément A_p de Z d'ordre de multiplicité a_p , correspond dans $\Pi(G, x)$ le monôme $a_p x^p$. Or, le polynôme Π est intrinsèque : il en résulte que la D_2 -décomposition totale Z de G est unique et ainsi que D_2 est raffnable sur S' . On établit alors trivialement le caractère unitaire de cette décomposition. Enfin, s'inspirant de I-4.5, on démontre que les décompositions D_1 et D'_1 sont distributives par rapport à D_2 , ce qui achève de prouver que B et B' sont des bidécompositions distributives.

Cependant, les formules de récurrence du paragraphe précédent montrent que $\Pi(G, x)$ est un B -invariant (resp. un B' -invariant) sur S' . Or, l'invariant de Tutte-Grothendieck de la bidécomposition B (resp. B') est, d'après le théorème II-1.5, élément d'un anneau isomorphe à l'anneau (commutatif) libre engendré par A_1 . De plus, cet invariant particulier est caractérisé, parmi les B -invariants (resp. les B' -invariants), par le fait que l'image de A_1 est l'élément générateur de l'anneau de Tutte-Grothendieck de la bidécomposition. Il résulte de cette caractérisation que Π est l'invariant de Tutte-Grothendieck des bidécompositions B et B' , de ce fait, que B et B' sont équivalentes. /

Corollaire : Le groupe de Tutte-Grothendieck associé à la décomposition unitaire $D_2(S')$ est isomorphe au groupe abélien libre engendré par les éléments $\{A_p / p \geq 1\}$.

Preuve : Pour un élément G de S' , en effet, l'invariant de Tutte-Grothendieck relatif à la décomposition $D_2(S')$ est obtenu à partir de $\Pi(G, x)$ en substituant la variable A_p au monôme x^p (Cf. II-1.6). /

On désignera par $H_0(G, A_p)$ l'invariant de Tutte-Grothendieck associé à cette décomposition unitaire D_2 .

3.3. σ -cycles

Considérons une R.S. $|G|$ d'un graphe 4-régulier planaire G et un sommet x de G . La représentation topologique $|G|$ détermine sur l'ensemble des arêtes incidentes à x une permutation circulaire (e_1, e_2, e_3, e_4) qui représente l'ordre de succession des arêtes dans le sens trigonométrique.

En ce qui concerne les séparations définies en x , on peut en distinguer deux sortes suivant que les arêtes qui constituent une transition de la séparation sont consécutives ou non dans la permutation circulaire précédente : ainsi, on dira que les séparations construites à partir des partitions $\{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}\}$ et $\{\{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}\}$ sont de *type* σ tandis que celle déterminée par $\{\{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}\}$ est de *type* γ .

Définition (A. Kotzig [1968]) : un σ -cycle d'une R.S. $|G|$ d'un graphe 4-régulier planaire G est un cycle eulérien de G qui détermine un système transitif où toutes les séparations sont, dans $|G|$, de *type* σ .⁽¹⁾

3.4. Théorème

Soit G un graphe 4-régulier planaire. Le nombre de σ -cycles $v(|G|)$ d'une de ses R.S. $|G|$ est indépendant de la R.S. choisie; il est égal à $\Pi(G, 1)$.

Preuve : Il faut d'abord montrer que $v(|G|)$ est un B'-invariant. D'après la construction des représentations réduites $|G_1|$ et $|G_2|$ de $|G|$ par éclatement planaire en un sommet régulier de G , on vérifie que $v(|G|) = v(|G_1|) + v(|G_2|)$. De même, si G est un graphe possédant un cocycle de cardinal 2, et si l'on désigne par $|G'|$ et $|G''|$ les R.S. décomposées de $|G|$ selon ce cocycle, $v(|G|) = v(|G'|) \cdot v(|G''|)$.

On peut dans ces conditions appliquer le théorème II-1.5; le résultat annoncé découle alors du fait que $v(|A_1|) = 1$. /

Corollaire (A. Kotzig [1968]) : $v(|G|)$ est égal au nombre d'arbres maximaux du graphe Γ correspondant à l'une des représentations croisées de $|G|$.

Preuve : En effet, par définition $\Pi(|G|, 1) = \chi(\Gamma, 1, 1)$ et $\chi(\Gamma, 1, 1)$ est le nombre d'arbres maximaux de Γ (T.H. Brylawski [1972 b]). /

(1) Ces cycles sont appelés *unicursaux* par C. Smith et W.T. Tutte [1941].

3.5. k-partitions eulériennes de type σ

Par analogie avec le chapitre précédent, nous définissons une *k-partition eulérienne de type σ* d'une R.S. $|G|$ d'un graphe 4-régulier planaire G comme une partition des arêtes de G en k cycles déterminant un système pour lequel toutes les séparations sont, dans $|G|$, de type σ .

Propriété : Soit G un graphe 4-régulier planaire. Le nombre de *k-partitions eulériennes de type σ* , $v_k(|G|)$, d'une de ses R.S. $|G|$ est indépendant de la R.S. choisie; il est égal à la valeur de $E_o(G, A_p)$ pour $A_p = \binom{p}{k-1}$.

Preuve : Il est clair que si $|G|$ est une R.S. d'un graphe 4-régulier et $(|G_1|, |G_2|)$ sont deux représentations réduites de $|G|$ par éclatement planaire en un sommet régulier de G , on a $v_k(|G|) = v_k(|G_1|) + v_k(|G_2|)$; il en résulte que $v_k(|G|)$ est un D_2 -invariant.

Considérons A_p ; c'est un graphe irréductible selon D_2 . Parmi les 2^p systèmes de $|A_p|$ composés de séparations de type σ , $\binom{p}{k-1}$ d'entre eux correspondent à des *k-partitions eulériennes de type σ* . La propriété en résulte. /

4. DENOMBREMENT DES CIRCUITS EULERIENS DANS LES GRAPHES 4-REGULIERS PSEUDO-SYMETRIQUES

Dans tout ce paragraphe nous considérons des multigraphes - avec boucles éventuellement - orientés, finis, connexes et dont les demi-degrés intérieurs et extérieurs en chaque sommet sont égaux à 2. On désigne un tel graphe par un symbole majuscule surmonté d'une flèche (\vec{G} , par exemple). La suppression de l'orientation des arcs de \vec{G} définit un multigraphe symétrique 4-régulier normalisé qui sera noté G .

4.1. Equivalence entre σ -cycles et circuits eulériens

Considérons un graphe 4-régulier planaire G (connexe et fini) et soit $|G|$ une de ses représentations sphériques. Désignons par 1 et 2 les couleurs qui servent à colorer les faces de $|G|$. On construit un graphe \vec{G} en orientant les arêtes de G de telle sorte que, dans son sens de parcours, tout arc de \vec{G} ait, dans $|G|$, une face de couleur 1 à sa gauche. Le graphe \vec{G} ainsi obtenu est pseudo-symétrique.

D'après la construction de \vec{G} , il est clair que tout circuit eulérien de \vec{G} détermine un σ -cycle de $|G|$ et réciproquement⁽⁵⁾. Ainsi, tout ce qui a été établi dans ce chapitre pour les σ -cycles des R.S. des graphes 4-réguliers planaires est également valable pour les circuits eulériens de certaines orientations pseudo-symétriques de ces graphes.

(5) Cette équivalence est due à C. Smith et W. Tutte [1941].

Le but de ce paragraphe est de montrer que les résultats précédents s'appliquent également aux circuits eulériens de *toute* orientation pseudo-symétrique de *tout* graphe 4-régulier.

4.2. Graphes orientés réduits, graphes orientés décomposés

Nous étudions ici comment s'adaptent les opérations de réduction et de décomposition aux graphes pseudo-symétriques.

Considérons un graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} et désignons par G le graphe non-orienté correspondant. Supposons qu'il existe dans G un sommet régulier x (I-4.1) et considérons les trois graphes réduits correspondants. Parmi ces trois graphes, deux (G_1, G_2) peuvent être orientés de façon pseudo-symétrique, de telle sorte que l'orientation des arêtes communes à G et G_i ($i = 1, 2$) soit la même dans \vec{G} et \vec{G}_i . Ces deux graphes orientés \vec{G}_1 et \vec{G}_2 sont obtenus à partir des deux séparations en x qui associent dans chaque transition un arc entrant et un arc sortant incidents à x dans \vec{G} . Ces deux graphes seront nommés *graphes orientés réduits de \vec{G} au sommet x* (ou : *en x*).

Par ailleurs, tout cocycle d'un graphe orienté pseudo-symétrique est constitué d'autant d'arcs entrants que d'arcs sortants. De ce fait, si un graphe G possède un cocycle de cardinal 2, ω , il est facile de donner aux graphes décomposés G' et G'' de G selon le cocycle ω une orientation pseudo-symétrique compatible. Les deux graphes orientés correspondants, \vec{G}' et \vec{G}'' sont appelés *graphes orientés décomposés de \vec{G} selon ω* .

4.3. Dérivation

Considérons l'ensemble \vec{G}_4 des multigraphes 4-réguliers pseudo-symétriques finis dont les sommets appartiennent à un ensemble dénombrable X . Désignons par Q l'anneau commutatif libre engendré sur \mathbb{Z} par \vec{G}_4 .

Nous allons définir sur Q des opérateurs partiels D_i ($i \in \mathbb{N}$) indexés par les éléments x_i ($i \in \mathbb{N}$) de X . Considérons tout d'abord un graphe \vec{H} de \vec{G}_4 qui contient le sommet x_i . Nous définissons l'expression dérivée $\overrightarrow{H'(i)}$ de \vec{H} relativement au sommet x_i ; la formulation de cette définition dépend de la nature du sommet x_i dans H .

a) Si \vec{H} est d'ordre supérieur ou égal à 2, et si x_i est un sommet régulier de H ,

$$\overrightarrow{H'(i)} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2,$$

où \vec{H}_1, \vec{H}_2 sont les deux graphes orientés réduits de \vec{H} en x_i .

b) si \vec{H} est d'ordre supérieur ou égal à 2, et si x_i est une articulation essentielle de H,

$$\overrightarrow{H'(i)} = (x_i) \cdot \vec{H}' \cdot \vec{H}'' ,$$

où (x_i) , \vec{H}' et \vec{H}'' sont les graphes orientés obtenus en décomposant successivement \vec{H} selon chacun des deux cocycles élémentaires incidents à x_i .

c) si \vec{H} est d'ordre supérieur ou égal à 2, et si x_i est une articulation bouclée de H,

$$\overrightarrow{H'(i)} = (x_i) \cdot \vec{H}' ,$$

où (x_i) et \vec{H}' sont les graphes orientés décomposés de \vec{H} selon le cocycle incident à x_i .

d) Enfin, on pose $\overrightarrow{H'(i)} = (x_i)$ si \vec{H} est le graphe 4-régulier orienté d'ordre 1 dont l'ensemble des sommets est $\{x_i\}$.

L'opérateur D_i sur Q est défini pour tout élément q de Q dont chaque monôme contient exactement un facteur - c'est-à-dire un graphe - auquel appartient le sommet x_i . Si on note

$$q = \sum_s \alpha_s \vec{H}_s \cdot \prod_t \vec{G}_{st}$$

(où \vec{H}_s désigne un graphe contenant le sommet x_i), on pose par définition :

$$D_i(q) = \sum_s \alpha_s \overrightarrow{H'_s(i)} \cdot \prod_t \vec{G}_{st}$$

Cette présentation ressemble fort à celle qui a été faite au §II-2.1. Le théorème qui suit est l'analogue du lemme II-2.3. Dans la preuve que nous donnons ci-après, nous nous contentons de détailler les circonstances qui diffèrent d'une démonstration à l'autre.

4.4. Existence de $\Pi(\vec{G}, x)$

Pour tout graphe \vec{G} de \vec{G}_4 et tout ordre total $O = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur l'ensemble de ses sommets, l'expression

$$D_0(\vec{G}) = D_n \circ D_{n-1} \circ \dots \circ D_1(\vec{G})$$

est un polynôme en $(x_1), (x_2), \dots, (x_n)$.

Soit \equiv la relation d'équivalence induite dans Q par la relation d'isomorphisme des graphes orientés. On désigne par $[D_0(\vec{G})]$ l'élément de Q/\equiv correspondant à $D_0(\vec{G})$ et par x la classe d'équivalence des graphes 4-réguliers pseudo-symétriques d'ordre 1.

Théorème : $[D_0(\vec{G})]$ est un polynôme en une variable x , sans terme constant et à coefficients positifs. Ce polynôme est de plus indépendant de l'ordre 0 choisi.

Preuve : l'ensemble de ce théorème se montre par récurrence sur l'ordre n du graphe \vec{G} . Seule la propriété d'indépendance n'est pas triviale.

Pour établir cette indépendance, nous comparons les expressions

$$D = D_j \circ D_i(\vec{G})$$

et

$$D' = D_i \circ D_j(\vec{G}),$$

pour un couple arbitraire (x_i, x_j) de sommets de \vec{G} .

Nous sommes amenés à distinguer plusieurs cas selon la nature des sommets x_i et x_j dans G .

a) Si x_i et x_j sont des articulations de G , l'égalité $D = D'$ découle de la commutativité de la décomposition des graphes 4-réguliers (I-5.5).

b) Si l'un des sommets est une articulation et l'autre un sommet régulier, la propriété de distributivité de la décomposition par rapport à la réduction entraîne également que $D = D'$.

c) Lorsque x_i et x_j sont des sommets réguliers de G , il faut s'interroger sur la nature de x_i dans les graphes orientés réduits de \vec{G} en x_j et sur celle de x_j dans les graphes orientés réduits de \vec{G} en x_i . Si ces sommets sont dans tous les cas des sommets réguliers, D et D' sont chacun la somme de 4 graphes orientés réduits d'ordre $(n-2)$ qui peuvent être identifiés terme à terme [cas c) - 1 de la démonstration II-2.3].

A contrario, supposons que x_i soit une articulation de l'un des graphes réduits de \vec{G} en x_j . Chacune des $\{x_i\}$ -composantes de ce graphe réduit provient d'un sous-graphe partiel $\{x_i, x_j\}$ -détaché de \vec{G} , dans lequel x_i et x_j ont chacun un demi-degré intérieur partiel et un demi-degré extérieur partiel égal à 1.

Réciproquement l'existence, dans \vec{G} , d'un tel sous-graphe partiel assure à la fois que x_j est une articulation dans un des graphes orientés réduits de \vec{G} en x_i et que x_i est une articulation dans un des graphes orientés réduits de \vec{G} en x_j .

C'est donc la *seule* hypothèse qu'il nous reste à étudier.

Intéressons-nous aux nombres possibles de $\{x_i, x_j\}$ -composantes de \vec{G} et aux demi-degrés partiels de chacun des sommets x_i et x_j dans ces composantes. Les contraintes suivantes doivent être vérifiées :

- Puisque x_i et x_j ne sont pas des articulations de G , aucun des degrés partiels n'est égal à 0 ou n'est plus grand que 3.

- Le cocycle des sommets formant chaque $\{x_i, x_j\}$ -composante doit être constitué d'autant d'arcs entrants que d'arcs sortants.

- On doit, enfin, vérifier la propriété ci-dessus : l'existence dans \vec{G} d'un sous-graphe partiel $\{x_i, x_j\}$ -détaché dans lequel x_i et x_j ont un demi-degré intérieur partiel et un demi-degré extérieur partiel égaux chacun à 1.

L'ensemble des situations possibles peut être résumé par le tableau suivant.

Cas	Nombre de composantes	Degrés partiels dans la composante...			
		C_1	C_2	C_3	C_4
α	2	$d^+(x_i)=1$ $d^-(x_i)=1$ $d^+(x_j)=1$ $d^-(x_j)=1$	$d^+(x_i)=1$ $d^-(x_i)=1$ $d^+(x_j)=1$ $d^-(x_j)=1$		
	3	$d^+(x_i)=1$ $d^-(x_i)=1$ $d^+(x_j)=1$ $d^-(x_j)=1$	$d^+(x_i)=1$ $d^-(x_i)=0$ $d^+(x_j)=0$ $d^-(x_j)=1$	$d^+(x_i)=0$ $d^-(x_i)=1$ $d^+(x_j)=1$ $d^-(x_j)=0$	
β	4	$d^+(x_i)=1$ $d^-(x_i)=0$ $d^+(x_j)=0$ $d^-(x_j)=1$	$d^+(x_i)=0$ $d^-(x_i)=1$ $d^+(x_j)=1$ $d^-(x_j)=0$	$d^+(x_i)=1$ $d^-(x_i)=0$ $d^+(x_j)=0$ $d^-(x_j)=1$	$d^+(x_i)=0$ $d^-(x_i)=1$ $d^+(x_j)=1$ $d^-(x_j)=0$

Tableau 2.

L'analyse de ce tableau se poursuit alors en distinguant les cas α et β ; elle est tout à fait semblable à celle effectuée à la fin de la démonstration II-2.3 et nous l'omettons.

Il résulte de cette analyse que l'on peut conclure dans tout les cas à l'invariance de l'expression $[\mathcal{D}_0(\vec{G})]$.

Cette expression sera dorénavant notée $\Pi(\vec{G}, x)$.

4.5. Exemples

On sait que toutes les orientations pseudo-symétriques de K_5 sont isomorphes. Pour une quelconque de ces orientations, on obtient :

$$\Pi(\vec{K}_5, x) = 5x^2 + 6x .$$

Soit K_6^* le graphe 4-régulier obtenu à partir de K_6 en supprimant un couplage parfait. Ce graphe est planaire; il ne possède qu'une seule représentation sphérique (dont toutes les faces sont de longueur 3) : $|K_6^*|$.

On peut dénombrer 4 orientations pseudo-symétriques non isomorphes de K_6^* . Chacune de ces orientations peut être caractérisée par sa configuration topologique sur $|K_6^*|$: si on désigne par s le nombre de sommets de K_6^* qui, pour une orientation pseudo-symétrique donnée, présentent sur $|K_6^*|$ une alternance d'arcs entrants et sortants, on vérifie que seules les valeurs $s = 0, 2, 3, 6$ sont possibles et qu'à chacune de ces valeurs ne correspond qu'un seul graphe pseudo-symétrique (Fig. 5).

On obtient les quatre polynômes suivants :

$$s = 0, \quad 11x^2 + 10x$$

$$s = 2, \quad x^3 + 9x^2 + 10x$$

$$s = 3, \quad x^3 + 10x^2 + 8x$$

$$s = 6, \quad 2x^3 + 10x^2 + 4x .$$

On remarque que ce dernier polynôme est $\Pi(|K_6^*|, x)$, puisque l'orientation pseudo-symétrique considérée est celle qui est canoniquement associée à la R.S. de K_6^* par la méthode de § 4.1.

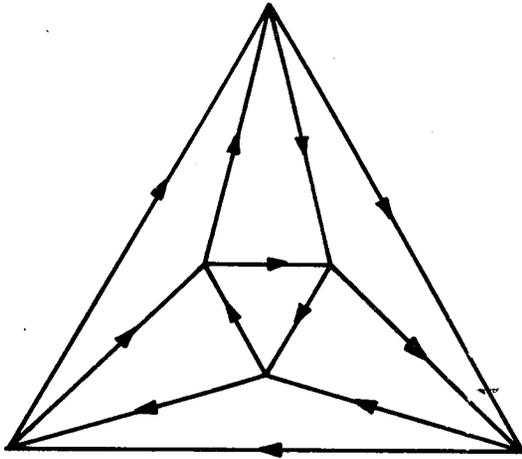
4.6. Bidécomposition orientée

Il n'apparaît pas nécessaire de développer complètement les conséquences théoriques de l'existence de $\Pi(\vec{G}, x)$. Nous nous contenterons d'énoncer les principaux résultats.

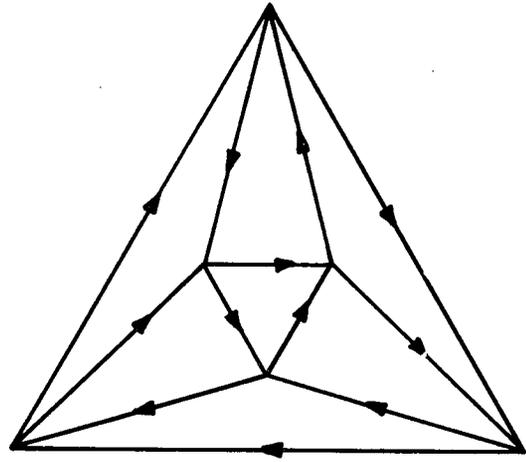
Soit \vec{S} l'ensemble des classes d'isomorphie des multigraphes finis connexes 4-réguliers pseudo-symétriques⁽⁶⁾. On appelle *bidécomposition orientée* la bidécomposition sur \vec{S} constituée par la décomposition orientée \vec{D}_1 et la réduction orientée \vec{D}_2 définies par les opérations décrites en 4.2.

Théorème : La bidécomposition orientée $\vec{B} = (\vec{D}_1, \vec{D}_2)$ sur \vec{S} est une bidécomposition distributive dont le seul élément irréductible et indécomposable est le graphe d'ordre 1 composé de deux boucles orientées. Pour un élément \vec{G} de \vec{S} , l'invariant de Tutte-Grothendieck de cette bidécomposition est le polynôme $\Pi(\vec{G}, x)$ défini dans la section précédente.

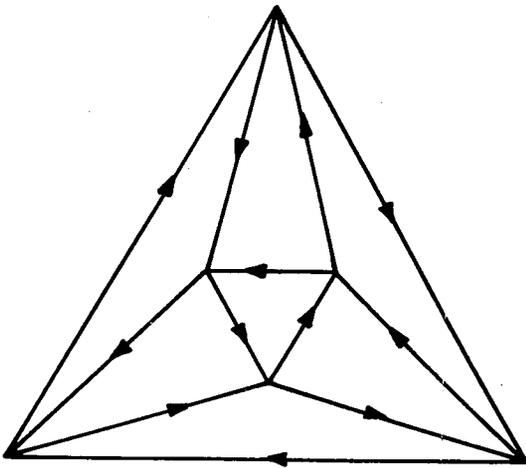
(6) On considère encore une fois les graphes complètement articulés et de même ordre comme équivalents.



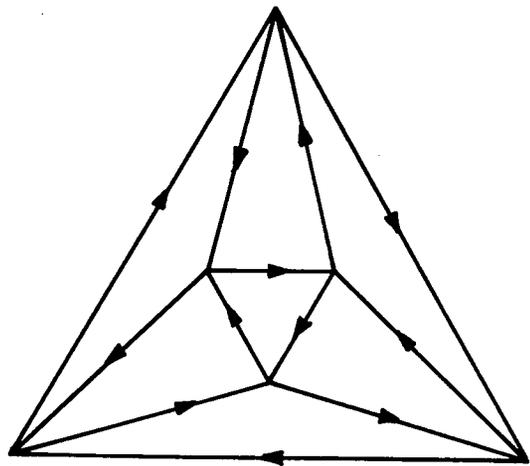
$S = 0$



$S = 2$



$S = 3$



$S = 6$

Figure 5.

Corollaire 1 : Pour tout graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} , le nombre de ses circuits eulériens est $\Pi(\vec{G}, 1)$. /

Soit $H(\vec{G}, A_p)$ le polynôme obtenu en remplaçant x^p par A_p dans $\Pi(\vec{G}, x)$.

Corollaire 2 : Le nombre de partitions des arcs d'un graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} en k circuits est égal à la valeur de $H(\vec{G}, A_p)$ pour $A_p = \binom{p}{k-1}$. /

Au début de ce chapitre, nous avons défini le polynôme $\Pi(G, x)$ des graphes planaires par référence au polynôme dichromatique de graphes croisés. Le polynôme $\Pi(\vec{G}, x)$ a été défini de manière toute différente, mais il apparaît néanmoins comme une généralisation du précédent. Dans ces conditions, est-il possible d'établir dans le cas de $\Pi(\vec{G}, x)$ une correspondance semblable à celle qui a servi de définition pour $\Pi(G, x)$. Nous esquissons dans la suite deux tentatives de solution de cette question. La première tentative (§ 4.7), de nature combinatoire, se solde par une réponse négative; quant à la seconde (§ 4.8), de nature topologique, elle pose un problème que nous avons dû laisser ouvert.

4.7. Généralisation combinatoire

Nous avons rappelé au § 3.4 un résultat dû à A. Kotzig et qui s'énonce ainsi : le nombre de σ -cycles d'un graphe 4-régulier planaire est égal au nombre d'arbres maximaux d'un graphe croisé Γ d'une R.S. de G . Cette égalité résulte, dans la présentation que nous avons adoptée, de la définition et des propriétés de Π et de χ . Cependant, la preuve initiale de A. Kotzig est plus précise : elle établit une bijection "naturelle" entre l'ensemble des σ -cycles de $|G|$ et l'ensemble des arbres maximaux de Γ .

C'est cette bijection que nous cherchons à généraliser.

Plus précisément, un graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} étant donné, existe-t-il un matroïde M construit sur l'ensemble des sommets de G tel que

$$\Pi(\vec{G}, x) = \chi(M, x, x),$$

où $\chi(M, x, z)$ est le polynôme de Tutte du matroïde M et tel qu'il existe une bijection "naturelle" entre les circuits eulériens de \vec{G} et les bases de M ?

Il est possible de trouver une solution de ce problème dans certains cas particuliers. Considérons, par exemple, le graphe orienté suivant.

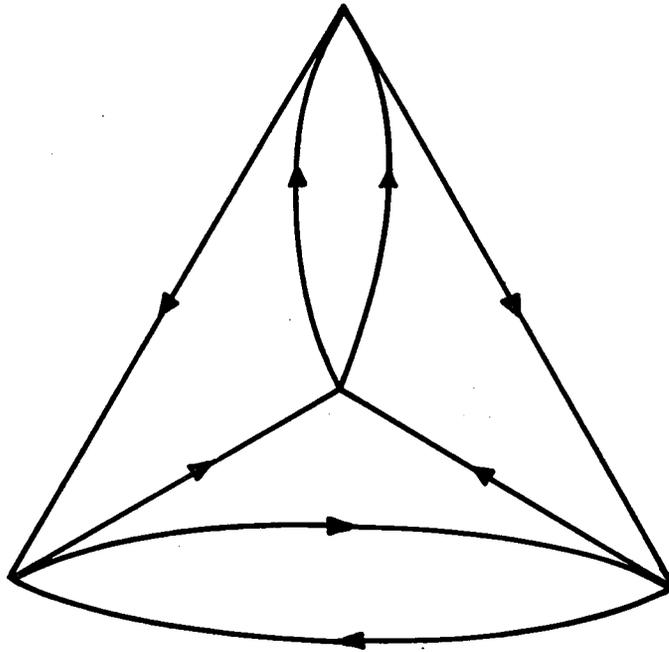


Figure 6.

Ce graphe \vec{G} a pour polynôme $\Pi(\vec{G}, x) = 2x^2 + 4x$ et il est possible de trouver un matroïde répondant à l'interrogation posée ci-dessus : le matroïde M est le matroïde sur un ensemble E de 4 éléments dont les bases sont toutes les parties de E de cardinal 2. Le polynôme de Tutte de M est

$$\chi(M, x, z) = x^2 + z^2 + 2x + 2z$$

Cependant, les bijections qui existent entre les circuits eulériens de \vec{G} et les bases de M sont des plus arbitraires.

Dans le cas général, on est cependant obligé de convenir que le problème posé n'a pas de solution. Considérons en effet une orientation pseudo-symétrique quelconque de K_5 . Le matroïde que l'on devrait lui associer serait un matroïde sur 5 éléments qui devrait avoir 11 bases ($\Pi(\vec{K}_5, 1) = 11$). Or il n'est pas possible de trouver plus de $\binom{5}{2} = 10$ bases dans un matroïde sur 5 éléments.

La réponse à la question posée est donc négative en général. Une autre possibilité de généralisation est offerte par des considérations topologiques.

4.8. Généralisation topologique

Cette généralisation s'appuie d'une part sur la constatation faite au § 4.1 et d'autre part sur les remarques du § 1.2.

Certaines orientations pseudo-symétriques de graphes 4-réguliers sont représentables sur la sphère, de telle sorte que deux arcs successifs de même sens appartiennent au pourtour d'une même face (c'est-à-dire, de façon équivalente, que chaque face de la représentation $|G|$ constitue un circuit de \vec{G}).

Une voie de généralisation possible consiste à s'affranchir de la contrainte portant sur le genre de la surface où l'on représente G : quel que soit le graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} , existe-t-il une surface *orientable* telle que l'on puisse représenter G (selon $|G|$) de telle sorte que chaque face de $|G|$ soit bordée par un circuit de \vec{G} ?

La réponse est positive et, d'ailleurs, la solution n'est pas nécessairement unique. Considérons un sommet x de \vec{G} et soit a, b (resp. c, d) les deux arcs entrants (resp. sortants) en x . Pour que $|G|$ réponde à la condition précédente, il est nécessaire et suffisant que la permutation des arcs autour de x soit, dans $|G|$, (a, c, b, d) ou (a, d, b, c) . Si l'on choisit pour chaque sommet de G l'une des deux permutations autorisées, on se trouve en présence d'un ensemble de conditions qui, d'après le fameux résultat de J. Edmonds [1960], détermine de façon unique la représentation $|G|$. Une telle représentation $|G|$ est dite *associée* à \vec{G} .

Exemple : Considérons une orientation pseudo-symétrique de K_5 et dénommons les arcs et les sommets de ce graphe de telle sorte que la séquence d'arcs $(1, 2, 3, 4, 5)$ représente le circuit (a, b, c, d, e, a) et que la séquence $(6, 7, 8, 9, 10)$ représente (a, c, e, b, d, a) .

Si nous choisissons les permutations circulaires suivantes :

a : (1, 5, 6, 10)

b : (2, 1, 9, 8)

c : (2, 7, 6, 3)

d : (9, 4, 3, 10)

e : (4, 8, 7, 5)

on obtient une représentation de K_5 sur la surface orientée de genre 2 ("Bretzel") : Fig. 7 (page suivante).

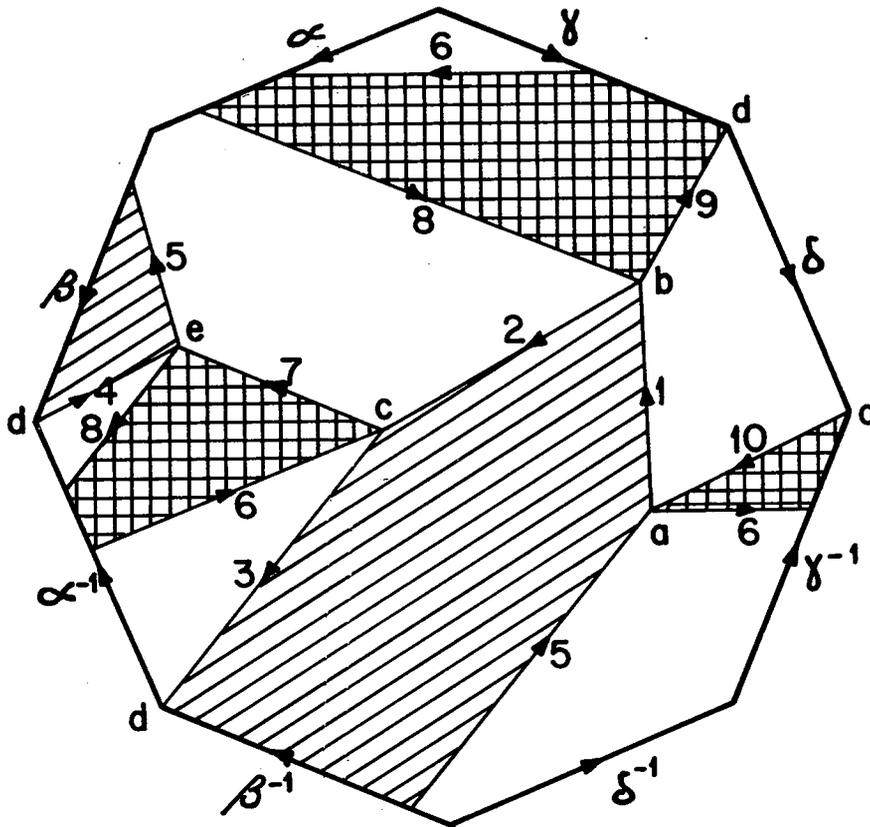


Figure 7.

Le surface orientée de genre 2 peut être représentée sur le plan par un octogone dont les huit sommets sont identifiés à un point de la surface; les bords de ce polygone doivent être identifiés selon les indications portées sur la figure.

Cette représentation comprend 3 faces, l'une de longueur 10, les deux autres de longueur 5.

Remarquons enfin qu'un autre choix de permutations circulaires parmi les permutations autorisées aurait conduit, par exemple, à la représentation c) de la figure 1.

Lorsque l'on a construit une telle représentation $|G|$ associée à un graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} , on peut définir deux représentations croisées de $|G|$. En effet, les faces de $|G|$ peuvent être coloriées en 2 couleurs de la façon suivante : chaque face de $|G|$ détermine un circuit de \vec{G} et on colorie de la même couleur toutes les faces dont les circuits "tournent" dans le même sens (direct ou inverse) sur la surface orientée.

Chacun des graphes croisés est construit sur l'ensemble des faces de $|G|$ d'une couleur donnée, selon la méthode décrite en 1.3.

Le problème se pose alors en ces termes : étant donné un graphe 4-régulier pseudo-symétrique \vec{G} et une représentation associée $|G|$ sur une surface de genre g , quelles relations peut-on établir entre les polynômes bichromatiques des graphes croisés Γ_1 et Γ_2 de $|G|$, le genre g et le polynôme $\Pi(\vec{G}, x)$; en particulier, $\Pi(\vec{G}, x)$ peut-il être déterminé à partir des autres éléments ?

Malheureusement, nous n'avons pas pu trouver de réponse à cette question. A titre d'exemple, voici les termes du problème pour les deux cas évoqués ci-dessus. ⁽¹⁾

1) Représentation de K_5 sur le tore :

$$\chi(\Gamma_1, x, z) = x^4 + x^3 + x^2z$$

$$\chi(\Gamma_2, x, z) = x^3 + 2x^2 + 2xz + z^2 + x + z$$

$$g = 1$$

$$\Pi(K_5, x) = 5x^2 + 6x$$

2) Représentation de K_5 sur le double tore :

$$\chi(\Gamma_1, x, z) = x^5$$

$$\chi(\Gamma_2, x, z) = x^4 + x^3 + x^2 + x + z$$

$$g = 2$$

$$\Pi(K_5, x) = 5x^2 + 6x$$

5. VALUATION REMARQUABLE DES POLYNOMES $\Pi(G, x)$

5.1. Anticircuits dans les graphes orientés

Depuis quelques années, ont été publiées plusieurs études sur des cheminements particuliers des graphes orientés : les *antichemins* (terme tiré de l'expression "antidirected paths" inventée par B. Grunbaum [1971]). Ce qui va nous intéresser dans la suite sont des cheminements dérivés des antichemins, les anticircuits. Un *anticircuit* est un cycle d'un graphe orienté tel que deux arcs empruntés successivement par le cycle aient même extrémité ou même origine.

(1) Utilisant la notion de *Polynôme de Tutte* d'un morphisme, introduite par M. Las Vergnas, nous avons conjointement pu poser une conjecture qui résoudrait cette question lorsque la représentation associée peut se faire sur une surface de genre 1.

Dans le cas particulier des graphes 4-réguliers pseudo-symétriques, il passe exactement un anticircuit par tout arc donné et les anticircuits d'un tel graphe réalisent une partition de l'ensemble de ses arcs.

Nous allons montrer que le nombre des anticircuits d'un graphe \vec{G} 4-régulier pseudo-symétrique s'obtient très facilement à partir de $\Pi(\vec{G}, x)$.

5.2. Théorème

Soit $h(\vec{G})$ le nombre d'anticircuits d'un graphe G 4-régulier pseudo-symétrique d'ordre $n(\vec{G})$, on vérifie :

$$\Pi(\vec{G}, -1) = (-1)^{n(\vec{G})} \cdot (-2)^{h(\vec{G})-1} .$$

Preuve : D'après les théorèmes généraux sur les invariants de Tutte-Grothendieck (II-1,5); il suffit de démontrer que l'expression $q(\vec{G}) = (-1)^{n(\vec{G})} \cdot (-2)^{h(\vec{G})-1}$ est un \vec{B} -invariant de la bidécomposition orientée \vec{B} définie en 4.6 et que la valeur de cette expression pour le graphe \vec{G}_0 d'ordre 1 composé de 2 boucles est (-1) .

Cette seconde propriété est triviale car le graphe \vec{G}_0 admet une décomposition en un unique anticircuit de longueur 2, d'où :

$$q(\vec{G}_0) = (-1) \cdot (-2)^0 = -1 .$$

Quant à la première propriété, elle s'établit en prouvant que $q(\vec{G})$ est à la fois un \vec{D}_1 -invariant et un \vec{D}_2 -invariant (avec $\vec{B} = (\vec{D}_1, \vec{D}_2)$). Pour prouver la première assertion, on remarque que la décomposition d'un graphe \vec{G} selon un cocycle de cardinal 2 détermine deux graphes orientés décomposés, \vec{G}_1 et \vec{G}_2 , tels que

$$h(\vec{G}) = h(\vec{G}_1) + h(\vec{G}_2) - 1 .$$

Cette égalité, jointe au fait que $n(\vec{G}) = n(\vec{G}_1) + n(\vec{G}_2)$, implique que $q(\vec{G})$ est un \vec{D}_1 -invariant.

La preuve de l'invariance de $q(\vec{G})$ par réduction nécessite de distinguer deux cas selon que le sommet régulier en lequel se fait la réduction est traversé par un seul anticircuit ou par deux anticircuits distincts. Dans le premier cas, l'anticircuit qui passe par x est conservé dans l'un des deux graphes orientés réduits de \vec{G} en x (soit \vec{G}_1) tandis que dans l'autre (\vec{G}_2), cet anticircuit se décompose en deux.

D'où : $h(\vec{G}) = h(\vec{G}_1) = h(\vec{G}_2) - 1$. Il s'en déduit que :

$$\begin{aligned} q(G_1) + q(G_2) &= (-1)^{n(\vec{G})-1} \cdot [(-2)^{h(\vec{G}_1)-1} + (-2)^{h(\vec{G}_2)-1}] \\ &= - (-1)^{n(\vec{G})-1} \cdot (-2)^{h(\vec{G}_1)-1} \\ &= q(\vec{G}) . \end{aligned}$$

Ce qui achève l'étude du premier cas. Dans le second cas, celui où deux anticircuits distincts passent par x , ces deux anticircuits se trouvent réunis en un seul dans chacun des graphes réduits \vec{G}_1 et \vec{G}_2 ; et on vérifie également $q(\vec{G}_1) + q(\vec{G}_2) = q(\vec{G})$. Cette dernière affirmation achève la démonstration de ce théorème. /

5.3. Application aux graphes 4-réguliers planaires

Considérons un graphe \vec{G} 4-régulier pseudo-symétrique auquel correspond une représentation sphérique $|G|$ telle que les circuits eulériens du premier soient en bijection avec les σ -cycles de la seconde selon le procédé du § 4.1.

Aux anticircuits de \vec{G} correspondent des cycles particuliers de $|G|$ appelés *ficelles* (ou *diagonales* par P. Rosenstiehl [1975]) : une *ficelle* de $|G|$ est un cycle du graphe G tel que les arêtes de ce cycle aient à leur gauche, dans un sens de parcours donné, alternativement des faces de couleur 1 et 2 de $|G|$.

Propriété : Soit G un graphe 4-régulier planaire. Il existe un invariant $\phi(G)$ du graphe G qui représente le nombre de ficelles d'une quelconque représentation sphérique de ce graphe. De plus; si l'ordre de G est noté $n(G)$, on a :

$$\Pi(G, -1) = (-1)^{n(G)} \cdot (-2)^{\phi(G)-1} .$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate du théorème d'invariance 2.5 et du théorème précédent. /

5.4. Valuation remarquable du polynôme dichromatique

Comme la définition du polynôme $\Pi(|G|, x)$ fait appel au polynôme dichromatique d'un des graphes croisés de $|G|$, on peut déduire de la propriété précédente le résultat ci-dessous :

Propriété : Pour tout multigraphe planaire Γ de m arêtes,

$$\chi(\Gamma; -1, -1) = (-1)^m \cdot (-2)^k ,$$

où $0 \leq k \leq m/2$. De plus, si Γ est connexe, $\phi = k+1$ représente le nombre de ficelles du graphe médial correspondant à une quelconque représentation sphérique de Γ . /

Nous avons publié ce résultat dans P. Martin [1976].

Par ailleurs, P. Rosenstiehl & R.C. Read [1976] ont trouvé une interprétation non topologique de l'invariant k , ce qui leur a permis d'étendre le résultat précédent au cas des graphes non planaires.

6. DENOMBREMENT DE SOUS-ENSEMBLES DE CYCLES EULERIENS DEFINIS PAR CONDITIONS LOCALES

Nous prouvons, dans ce paragraphe, l'existence d'un polynôme énumérateur pour tous les sous-ensembles de cycles eulériens définis, dans les graphes 4-réguliers, par des conditions locales. Cependant, au contraire des polynômes que nous avons rencontrés, celui-ci ne correspond pas à un invariant de Tutte-Grothendieck car la bidécomposition eulérienne dont on s'inspire pour construire ce polynôme ne possède pas, dans ce cas général, les propriétés requises.

Les graphes considérés dans ce paragraphes sont des graphes 4-réguliers normalisés.

6.1. Cycles eulériens définis par un sous-ensemble quelconque de séparations

Un graphe $G = (X, E)$ 4-régulier d'ordre n étant donné, on définit un ensemble Δ comme une réunion d'ensembles non vides de séparations en chaque sommet de G : $\Delta = \bigcup_{x \in X} \Delta_x$. On appelle *graphe fléché* le couple (G, Δ) ainsi obtenu, le *support* et le *fléchage* de ce graphe fléché étant respectivement G et Δ .

On se pose le problème suivant : peut-on définir un polynôme intrinsèque (c'est-à-dire dépendant uniquement de G et de Δ) relatif au dénombrement des cycles eulériens de G n'utilisant que des séparations appartenant à Δ ?

Des opérateurs de réduction et de décomposition peuvent être associés à ce dénombrement; ces opérateurs agissent sur l'ensemble, noté Σ , des graphes fléchés (G, Δ) . Une opération de décomposition associe à un graphe fléché (G, Δ) dont le support est d'indice de connexité 2 et à un cocycle de cardinal 2 de G , un ensemble de deux graphes fléchés (G', Δ') et (G'', Δ'') où G' , G'' sont les deux graphes décomposés de G selon ce cocycle et où Δ' et Δ'' sont respectivement les restrictions de Δ à l'ensemble des sommets de G' et G'' . Une opération de réduction est définie pour un graphe fléché (G, Δ) et pour un sommet régulier X de G par $|\Delta_x|$ couples $(G_i, \tilde{\Delta})$, où les graphes G_i sont les graphes réduits de G définis par les séparations appartenant à Δ_x , et $\tilde{\Delta}$ est la restriction de Δ à $X - \{x\}$.

Dans l'ensemble Σ , les opérateurs de réduction et de décomposition définissent cinq éléments *primitifs* (c'est-à-dire irréductibles et indécomposables). Ces éléments sont des graphes fléchés (H_0, Δ) dont le support est le graphe 4-régulier d'ordre 1, H_0 , et dont le fléchage est un ensemble de

séparations définies au sommet x de H_0 . Ces séparations appartiennent à un ensemble de cardinal 3. L'un des éléments de cet ensemble joue un rôle particulier : celui qui réalise la partition des quatre branches incidentes à x selon les boucles qu'elles forment dans H_0 . On désigne cette séparation par δ_1 ; les deux autres sont désignées par δ_2 et δ_3 . Compte tenu de ces notations, les cinq éléments primitifs sont les suivants :

$$P_1 : (H_0, \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}),$$

$$P_2 : (H_0, \{\delta_1, \delta_2\}) \text{ ou } (H_0, \{\delta_1, \delta_3\}),$$

$$P_3 : (H_0, \{\delta_2, \delta_3\}),$$

$$P_4 : (H_0, \{\delta_1\}),$$

$$P_5 : (H_0, \{\delta_2\}) \text{ ou } (H_0, \{\delta_3\}).$$

A ces cinq éléments primitifs; on associe cinq variables distinctes (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) et on cherche à former un polynôme $P(G, \Delta; x_i)$ sur ces cinq variables qui soit un invariant de la bidécomposition formée par la réduction et la décomposition précédentes.

L'analyse de l'existence de ce polynôme invariant comprend notamment l'étude du cas qui s'est révélé crucial dans les théorèmes d'existence antérieurs : celui d'un graphe 4-régulier de connexité 2 possédant une charnière $\{x, x'\}$ et tel que par réduction en l'un ou l'autre de ces deux sommets, on obtienne un graphe articulé.

Précisons les notations par le schéma de la page suivante.

Soit $G = (X, E)$ le graphe représenté ci-après. Dans cette figure Y_1 et Y_2 désignent des sous-ensembles de X tels que $X = Y_1 + Y_2 + \{x, x'\}$. u désignant une des huit arêtes représentées sur la figure, $x(u)$ dénotera l'extrémité de l'arête u qui appartient à Y_1 ou Y_2 . On pose :

$$C_i = G [Y_i] \cup K[x(a_i), x(b_i)] \cup K[x(a'_i), x(b'_i)] \quad (i = 1, 2)$$

(Cf. définition I.2.6).

Ces deux graphes sont 4-réguliers et normalisés. Les trois séparations ($\delta_1, \delta_2, \delta_3$) en x sont dénommées de telle sorte qu'elles correspondent respectivement aux partitions suivantes : $\{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}\}$, $\{\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}\}$ et $\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_1\}\}$. Une dénomination analogue

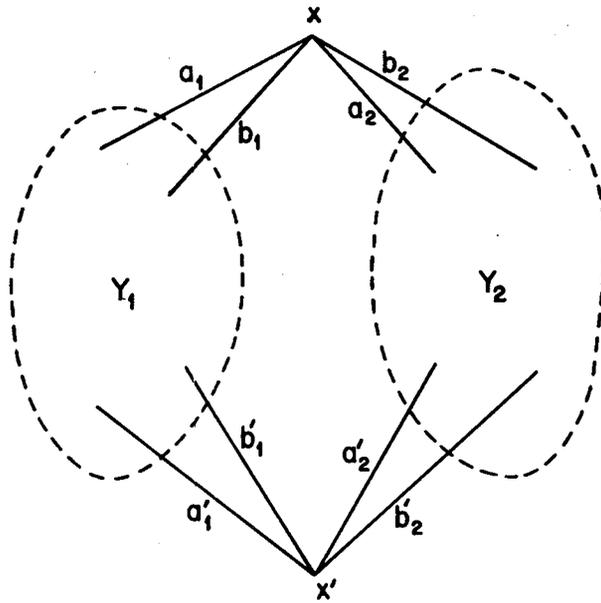


Figure 8.

est utilisée pour les séparations δ'_1 , δ'_2 et δ'_3 en x' .

Dans l'étude de ce cas on doit distinguer plusieurs situations selon la composition du fléchage en x et en x' . Pour certains fléchages on constate que l'invariance du polynôme implique l'existence de relations entre les variables x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 . En effet, considérons le cas particulier où $\Delta_x = \{\delta_1, \delta_2\}$ et $\Delta_{x'} = \{\delta'_2\}$. La comparaison des expressions obtenues pour le polynôme $P(G, \Delta; x_i)$ en considérant le couple (x, x') dans cet ordre ou dans l'ordre inverse impose l'égalité suivante (où $P(G, \Delta; x_i)$ est abrégé en $P(G)$) :

$$x_5 \cdot P(C_1) \cdot P(C_2) + P[G_2^{x, x'}] = P[(G_2^{x'})^x_1] + P[(G_2^{x'})^x_2]. \quad (1)$$

Or le premier terme du membre de droite correspond à un graphe d'indice de connexité 2; son polynôme est égal à $P(C_1) \cdot P(C_2)$. De plus, les seconds termes de chaque membre sont égaux. Il en résulte que x_5 doit être pris égal à 1.

De la même façon, en considérant $\Delta_x = \{\delta_1, \delta_2\}$ et $\Delta_{x'} = \{\delta'_2, \delta'_3\}$, on obtient la relation $x_3 = 2$.

Par ailleurs, le même raisonnement mené pour $\Delta_x = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ et $\Delta_{x'} = \{\delta'_1, \delta'_2\}$ donne $x_1 = x_2 + 1$ et pour $\Delta_x = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, $\Delta_{x'} = \{\delta'_1\}$ donne $x_1 = x_4 + 2$.

(1) La notation employée pour les graphes réduits de G est semblable à celle déjà utilisée au cours du lemme II-2.3.

Cette analyse conduit à énoncer le théorème suivant.

6.2.

Théorème : Soit $G = (X, E)$ un graphe 4-régulier et Δ un ensemble de séparations formant ensemble un graphe fléché (G, Δ) . Il existe un polynôme $P(G, \Delta; x)$ en une variable tel que pour toute réduction $(G, \Delta) \rightarrow \{(G_i, \Delta_i)\}$ en un sommet régulier x de G ,

$$P(G, \Delta; x) = \sum_i P(G_i, \Delta_i; x),$$

et pour toute décomposition $(G, \Delta) \rightarrow (G', \Delta'), (G'', \Delta'')$ de G selon un de ses cocycles de cardinal 2,

$$P(G, \Delta; x) = P(G', \Delta'; x) \cdot P(G'', \Delta''; x).$$

Ce polynôme prend les valeurs suivantes pour les éléments primitifs :

$$P(P_1; x) = x, \quad P(P_2; x) = x-1, \quad P(P_3; x) = 2, \quad P(P_4; x) = x-2, \text{ et}$$

$$P(P_5; x) = 1$$

Preuve : Nous ne donnons que des indications sommaires sur cette preuve qui est tout à fait semblable à celles des §II-2.3 et III-4.4. On commence par établir l'équivalence entre les règles récursives précédentes et des règles récursives portant sur *tous* les sommets du graphe (sommets réguliers et articulations). L'existence d'un polynôme lié à ce second processus se démontre par récurrence sur l'ordre du support de (G, Δ) et on est conduit à comparer les expressions polynomiales obtenues en appliquant, dans l'un et l'autre ordre déterminé par les sommets x et x' , le processus au graphe fléché (G, Δ) .

La discussion se subdivise alors en fonction de la nature des sommets x et x' dans G . Le point délicat de cette discussion est précisément celui qui correspond à la situation que nous avons étudiée dans la section précédente. On vérifiera facilement que cette étude couvre l'ensemble des cas que nous avons à envisager pour établir notre théorème./

REMARQUE : Les polynômes dont l'existence a été établie aux § II-2 et III-4 sont bien évidemment des cas particuliers de celui-ci. Dans le second cas, il convient, pour retrouver les notations du présent paragraphe, d'effectuer le changement de variable $x \rightarrow x-1$.

Corollaire : Pour tout graphe G 4-régulier et tout ensemble $\Delta = \bigcup_x \Delta_x$ de séparations définies sur G , on a

$$P(G, \Delta; 3) = \prod_x |\Delta_x| \quad \text{et}$$

$$P(G, \Delta; 2) = N(G, \Delta),$$

où $N(G, \Delta)$ désigne le nombre de cycles eulériens de G dont les systèmes n'utilisent que des séparations appartenant à Δ .

Preuve : Par récurrence./

6.3. Propriétés de la réduction et de la décomposition sur Σ

La possibilité de considérer un couple de deux décompositions sur un même ensemble comme une bidécomposition distributive sur cet ensemble repose sur la vérification de trois propriétés essentielles : la raffinement de chacune des décompositions et la distributivité de l'une par rapport à l'autre.

Dans le cas de la bidécomposition eulérienne sur les graphes fléchés à support 4-régulier, deux de ces propriétés découlent de résultats analogues à ceux établis au premier chapitre. Le lecteur vérifiera en effet que la propriété de raffinement de la décomposition des graphes fléchés et que la propriété de distributivité de la décomposition par rapport à la réduction se déduisent trivialement des propriétés analogues établies pour les graphes, respectivement en I-5.7 et I-4.5.

En revanche, la réduction aux sommets réguliers ne constitue pas, sur Σ , une décomposition raffinement.

L'exemple suivant en apporte la preuve : on a représenté ci-contre trois réductions d'un même graphe fléché (G, Δ) . Le graphe G est celui représenté sur la figure; quant à l'ensemble Δ , il est défini sur G de la façon suivante : Δ_x est l'ensemble des trois séparations possibles en x , Δ_y et Δ_z sont composées, chacune, des deux séparations de type σ relatives à cette représentation planaire de G (Cf. III-2.3).

Les trois arborescences de réduction présentées sur la figure déterminent trois réductions complètes de (G, Δ) en trois *multisets* distincts :

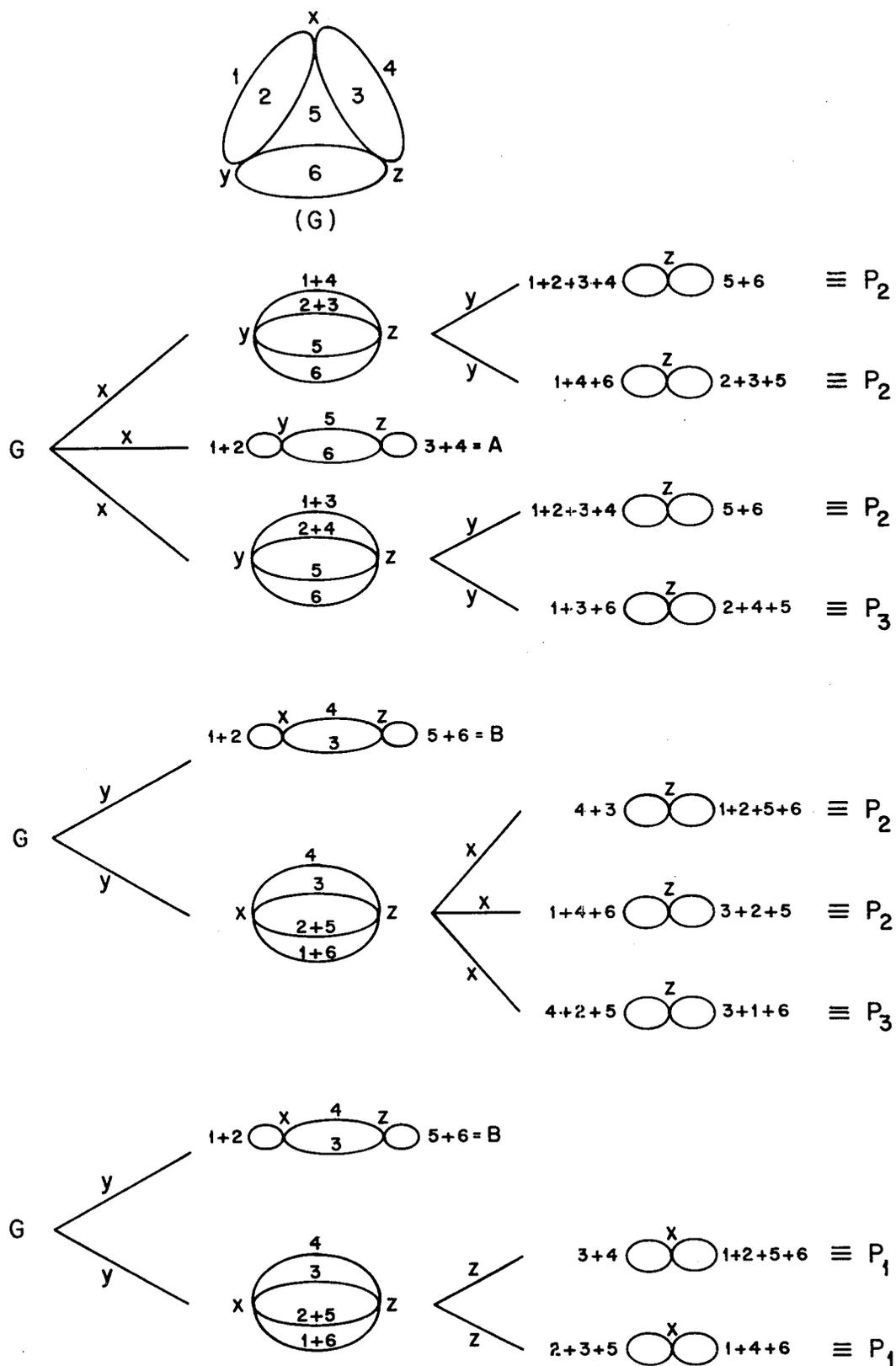


Figure 9.

$$A + 3P_2 + P_3,$$

$$B + 2P_2 + P_3,$$

$$B + 2P_1.$$

Ces trois multisetts correspondent évidemment au même polynôme :
 $P(G, \Delta; x) = x^2 + x.$

Nous avons déjà rencontré des situations où la réduction n'était pas raffnable (II-3, III-3 et III-4). Cependant, dans chacun de ces cas, la bidécomposition totale de tout élément était intrinsèque et il était possible de rendre cette réduction raffnable par passage à un ensemble quotient de l'ensemble de définition.

Cette possibilité est d'ailleurs très générale, comme l'atteste la propriété triviale suivante.

Propriété : Pour tout sous-ensemble Σ_0 de Σ sur lequel la bidécomposition eulérienne totale de tout élément est intrinsèque, on peut définir un ensemble quotient de Σ_0 sur lequel la bidécomposition eulérienne soit une bidécomposition distributive; de plus, la relation d'équivalence qui définit cet ensemble quotient ne rend équivalents que des éléments irréductibles de Σ dont les décompositions totales sont identiques./

A l'inverse, si le caractère de la bidécomposition totale n'est pas assuré, il est évidemment impossible de lui associer un invariant canonique.

L'exemple présent correspond à cette dernière situation. En effet, on vérifie que les graphes fléchés A et B de la figure précédente ont respectivement pour décomposition totale P_2^2 et $P_1 P_2$ et que $P_2^2 + 3 P_2 + P_3$, $P_1 P_2 + 2 P_2 + P_3$ et $P_1 P_2 + 2 P_1$ sont trois bidécompositions totales distinctes de (G, Δ) .

Il en résulte que le polynôme $P(G, \Delta; x)$ ne peut en aucun cas être interprété comme un invariant de Tutte-Grothendieck, au sens restreint de la théorie de T. Brylawski. Nous verrons au cours du chapitre IV quels aménagements il faut apporter à cette théorie pour pouvoir interpréter ce polynôme invariant.

7. GRAPHES FLECHES AYANT UNE BIDÉCOMPOSITION EULERIENNE TOTALE INTRINSEQUE

Nous considérons dans ce paragraphe l'ensemble Σ des graphes fléchés à support 4-régulier sur lequel nous avons défini deux décompositions : la réduction en un sommet régulier du support et la décomposition selon un cocycle de cardinal 2; l'ensemble de ces deux décompositions est -rappelons-le- appelé bidécomposition eulérienne. Nous cherchons à déterminer le sous-ensemble Σ' des graphes fléchés de Σ possédant la propriété P suivante : avoir une bidécomposition eulérienne totale intrinsèque.

L'importance de cette question provient des considérations développées dans le paragraphe précédent : la vérification de la propriété P conditionne la possibilité de définir un invariant de Tutte-Grothendieck.

Nous savons d'ores et déjà que P n'est pas vérifié sur tout Σ , mais qu'elle est vérifiée dans les cas particuliers de graphes fléchés étudiés au chapitre II et au § 4. Nous allons établir qu'à quelques exceptions mineures près, ces deux cas particuliers permettent d'engendrer Σ' (Cf. 7.5).

7.1. Remarques préliminaires

Définissons sur Σ les deux relations d'ordre suivantes : \leq (resp. \preceq) est la relation engendrée par les inéquations $(G, \Delta) < (G_1, \tilde{\Delta})$ (resp. $(G, \Delta) \preceq (G', \Delta')$) pour tout couple de graphes fléchés tels que $(G_1, \tilde{\Delta})$ soit un graphe fléché réduit de (G, Δ) (resp. (G', Δ') soit un graphe fléché décomposé de (G, Δ)).

Il est clair que la propriété P est une propriété héréditaire supérieurement dans (Σ, \leq) et dans (Σ, \preceq) .

Dans le cas de la décomposition, on peut établir un résultat plus précis.

Propriété : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe fléché possède la propriété P est que chacune de ses composantes de support 4-arête-connexe possède cette propriété.

Preuve : Ceci résulte de la propriété de distributivité de la décomposition./

On peut ainsi ramener la détermination de Σ' à celle de sa restriction aux graphes 4-arête-connexes (notée Σ'').

Au sujet des graphes 4-arête-connexes, on peut établir le lemme suivant.

Lemme : Soit G un graphe 4-régulier 4-arête-connexe. Pour tout sommet x de G , il existe au plus un graphe réduit de G en x qui ne soit pas 4-arête-connexe.

Preuve : Considérons un graphe $G = (X, E)$ 4-régulier 4-arête-connexe et un sommet x de G dont les quatre arêtes incidentes sont e_1, e_2, e_3, e_4 et les quatre sommets adjacents respectivement x_1, x_2, x_3, x_4 . Nous allons raisonner par l'absurde et supposer l'existence de deux séparations en x , $\delta_1 = \{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}\}$ et $\delta_2 = \{\{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}\}$, dont les graphes réduits associés G_1 et G_2 possèdent chacun un cocycle de cardinal 2. Ces cocycles sont respectivement notés $\omega_1(A) = \{c_1, d_1\}$ et $\omega_2(B) = \{c_2, d_2\}$ - on vérifiera qu'aucune de ces arêtes ne peut être incidente à x .

Considérons le graphe G et essayons de déterminer les cocycles de certains sous-ensembles de X .

Tout d'abord, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\omega(A)$ (resp. $\omega(B)$) est de cardinal 4, qu'il contient c_1 et d_1 (resp. c_2 et d_2) ainsi que deux arêtes appartenant à $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et formant une transition de la séparation δ_1 (resp. δ_2). Il est alors possible d'effectuer une renumérotation des arêtes incidentes à x , compatible avec la définition de δ_1 et δ_2 et telle que

$$\omega(A) = \{c_1, d_1, e_1, e_2\} \quad \text{et}$$

$$\omega(B) = \{c_2, d_2, e_1, e_3\}.$$

Il résulte de ces égalités que, parmi les quatre sommets adjacents à x , A contient exclusivement x_1 et x_2 , tandis que B contient exclusivement x_1 et x_3 . Par conséquent, $A \cap B$ n'est pas vide.

Considérons $\omega(A \cap B)$. Il est assurément contenu dans la réunion de $\omega(A)$ et $\omega(B)$, c'est-à-dire dans $\{c_1, d_1, c_2, d_2, e_1, e_2, e_3\}$. Or, comme un seul des quatre sommets adjacents à x , x_1 , appartient à $A \cap B$ et que, par ailleurs, x n'est pas un élément de $A \cap B$, les deux arêtes e_2 et e_3 ne peuvent appartenir à $\omega(A \cap B)$.

Compte tenu de son appartenance à un graphe eulérien 4-arête-connexe, ce cocycle est alors nécessairement de cardinal 4. En d'autres termes, parmi les quatre éléments (c_1, d_1, c_2, d_2) exactement trois appartiennent à $\omega(A \cap B)$. Les rôles joués par c_1 et d_1 (resp. c_2 et d_2) étant symétriques, il suffit de considérer les deux hypothèses exclusives suivantes.

a) $c_1 \notin \omega(A \cap B)$. Considérons dans ce cas $\omega(B - (A \cap B))$: ce cocycle est nécessairement inclus dans $\omega(B) \cup \omega(A \cap B)$, c'est-à-dire dans $\{d_1, c_2, d_2, e_1, e_3\}$. Or, puisque c_2 appartient à $\omega(A \cap B)$, l'un des sommets incidents à c_2 est un élément de $A \cap B$, et donc un élément de A . Comme c_2 n'appartient pas à $\omega(A)$, c'est que ses deux extrémités appartiennent à A . Ces deux extrémités ne peuvent donc appartenir à $B - (A \cap B)$ et ainsi c_2 n'est pas un élément de $\omega(B - (A \cap B))$. Le même raisonnement s'applique à d_2 et on en déduit que

$$\omega(B - (A \cap B)) \subseteq \{d_1, e_1, e_3\},$$

ce qui est impossible dans un graphe 4-arête-connexe.

b) $c_2 \notin \omega(A \cap B)$. En procédant comme ci-dessus, on met en évidence l'absurdité des hypothèses posées au départ en montrant qu'elles impliquent que $\omega(A - (A \cap B)) \subseteq \{d_2, e_1, e_2\}$.

Ainsi montre-t-on l'absurdité de l'existence de deux graphes réduits de G possédant chacun un cocycle de cardinal 2 et la propriété s'en déduit./

Observons qu'il découle de ce lemme un résultat important concernant les polynômes P et Π .

Corollaire : Une condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $P(G, x)$ et $\Pi(\vec{G}, x)$ aient un degré minimum égal à 1 est que G soit un graphe 4-arête-connexe.

Preuve : Par récurrence sur l'ordre du graphe G ./

REMARQUE : Il est à noter que l'application du lemme précédent aux graphes croisés des graphes 4-réguliers planaires conduit au résultat suivant :

Pour tout graphe planaire inarticulé Γ et toute arête e de ce graphe, les deux graphes $\Gamma \setminus e$ et Γ / e ne peuvent pas être simultanément articulés.

Ce résultat est l'application aux graphes planaires d'une propriété établie dans W.T. Tutte [1974 b] pour les multigraphes quelconques.

7.2. Condition nécessaire d'appartenance à Σ

La condition nécessaire que nous allons établir se démontre par récurrence sur l'ordre du graphe considéré. Pour initialiser cette récurrence, nous allons étudier en détail les diverses situations possibles concernant l'unique graphe 4-régulier 4-arête-connexe d'ordre 2 : celui qui est constitué de quatre arêtes en parallèle (F_4 dans la terminologie du § I-1.5).

Les notations sont les suivantes : x et y désignent les deux sommets de ce graphe; (a,b,c,d) les quatre arêtes. Les séparations δ_1 (en x) et δ'_1 (en y) sont construites sur la partition suivante : $\{\{a,b\}, \{c,d\}\}$, de même δ_2 et δ'_2 sur $\{\{a,c\}, \{b,d\}\}$ et δ_3, δ'_3 sur $\{\{a,d\}, \{b,c\}\}$. Les différentes configurations possibles pour Δ_x et Δ_y conduisent aux résultats mentionnés dans le tableau 10, page ci-contre.

Exemple d'interprétation de ce tableau : lorsque $\Delta_x = \{\delta_3\}$ et $\Delta_y = \{\delta'_1, \delta'_2\}$ la réduction en x donne le *multiset* P_3 , tandis que la réduction en y donne $2P_5(P_1, P_2, P_3, P_4$ et P_5 désignant les éléments primitifs définis en 6.1).

Il résulte de l'examen de ce tableau que, dans ce cas, la bidécomposition eulérienne n'est pas intrinsèque dès que $|\Delta_x| \neq |\Delta_y|$. C'est cette propriété que nous allons généraliser.

Propriété : Tout graphe fléché (G, Δ) de Σ dont le support est d'ordre supérieur à 2, possède un fléchage régulier (i.e. son fléchage comprend le même nombre de séparations en chaque sommet).

Preuve : Observons qu'un critère simple pour établir le caractère non intrinsèque de la bidécomposition eulérienne d'un graphe fléché donné est l'existence, pour ce graphe fléché, de deux réductions totales constituées de *multisets* de cardinaux distincts. En effet, l'existence de ces deux réductions totales est en contradiction avec la propriété nécessaire vérifiée sur les sous-ensembles de Σ où la bidécomposition eulérienne est intrinsèque (6.3).

Fort de ce critère, nous allons montrer, par récurrence sur l'ordre du support $G = (X, E)$ du graphe fléché (G, Δ) , que si Δ n'est pas régulier, la réduction totale de (G, Δ) conduit à au moins deux *multisets* de cardinaux distincts.

$\{\delta'_1\}$	P_4						
$\{\delta'_2\}$		P_4					
$\{\delta'_3\}$	P_5		P_4				
$\{\delta'_1, \delta'_2\}$	P_4+P_5 P_2	P_4+P_5 P_2	$2 P_5$ P_3	$2 P_2$			
$\{\delta'_1, \delta'_3\}$	P_4+P_5 P_2	$2 P_5$ P_3	P_4+P_5 P_2		$2 P_2$		
$\{\delta'_2, \delta'_3\}$	$2 P_5$ P_3	P_4+P_5 P_2	P_4+P_5 P_2	$2 P_3$		$2 P_2$	
$\{\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3\}$	$P_4 + 2 P_5$ P_1			$2 P_2 + P_5$	$2 P_1$		$3 P_1$
Δ_y Δ_x	$\{\delta_1\}$	$\{\delta_2\}$	$\{\delta_3\}$	$\{\delta_1, \delta_2\}$	$\{\delta_1, \delta_3\}$	$\{\delta_2, \delta_3\}$	$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

Tableau 10

Supposons tout d'abord qu'il existe dans G un sommet x tel que $|\Delta_x| > 1$ et que $|\Delta_y|$ ne soit pas constant sur $X - \{x\}$. Dans ce cas, parmi les graphes fléchés réduits de (G, Δ) en x , il en existe un dont le support est 4-arête-connexe (en vertu du lemme précédent) et dont le fléchage n'est pas régulier. L'hypothèse de récurrence s'applique à ce graphe fléché; à cause du caractère héréditaire de la propriété P dans (Σ, \leq) , il en résulte que (G, Δ) donne par réduction au moins deux *multisets* de cardinaux distincts.

Pour examiner la totalité des éventualités, il nous faut maintenant considérer l'hypothèse opposée à celle que nous avons faite précédemment : dans G il existe un seul sommet x tel que $|\Delta_x|$ soit plus grand que 1. Si l'on procède à la réduction totale de (G, Δ) en commençant par le sommet x , on obtient un *multiset* de cardinal $|\Delta_x|$. Au contraire, si l'on réduit (G, Δ) en n'utilisant que des sommets y tels que $|\Delta_y| = 1$, ce qui est possible, on obtient un *multiset* de cardinal 1.

La propriété s'en déduit par induction à partir de l'étude de F_4 que nous avons présenté ci-dessus. /

Notre analyse se poursuit en envisageant les divers cas qui se dégagent de cette condition nécessaire. Le premier cas, le fléchage 3-régulier, est celui que nous avons traité en détail au chapitre II. Les fléchages 2-réguliers et 1-réguliers font respectivement l'objet des deux sections suivantes.

7.3. Etude du fléchage 2-régulier

Nous allons montrer qu'un graphe fléché dont le support est 4-arête-connexe et dont le fléchage est 2-régulier appartient à Σ si, et seulement si, il appartient à l'un des deux sous-ensembles S ou T décrits ci-après.

Le sous-ensemble S de Σ est l'ensemble des graphes fléchés (G, Δ) tels qu'il existe une orientation pseudo-symétrique \vec{G} du support G dont les circuits eulériens soient en bijection avec les cycles eulériens de (G, Δ) .

Le sous-ensemble T de Σ est constitué des graphes fléchés que nous appelons *torsades* et que nous définissons comme suit : il existe une seule torsade d'ordre n et son support est le bipolygone $2P_n$ (c'est-à-dire le polygone P_n dont chaque arête a été doublée); le fléchage de cette torsade d'ordre n peut être partitionné en deux sous-ensembles de n séparations, les n premières séparations réalisent en chaque sommet le couplage des arêtes en parallèle; quant aux $2n$ transitions qui déterminent les n autres séparations, elles constituent sur l'ensemble des arêtes de $2P_n$ une relation binaire génératrice d'une seule classe d'équivalence.

Exemple de la torsade d'ordre 4 : Si l'on adopte les notations du schéma ci-contre, le fléchage de la torsade d'ordre 4 peut se décrire ainsi :

x : $\{\{1,2\},\{7,8\}\}$ et $\{\{1,8\},\{2,7\}\}$
y : $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$
z : $\{\{3,4\},\{5,6\}\}$ et $\{\{3,5\},\{4,6\}\}$
t : $\{\{5,6\},\{7,8\}\}$ et $\{\{5,7\},\{6,8\}\}$.

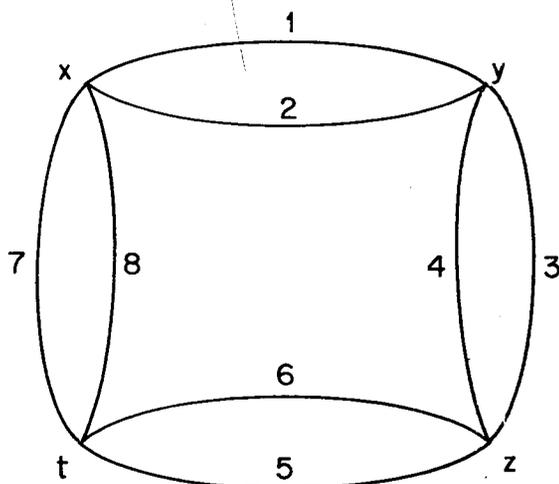


Figure 11

Considérons un des éléments (G, Δ) de T . Il n'est pas possible de trouver une orientation pseudo-symétrique \vec{G} de G qui mette en correspondance bijective les circuits de \vec{G} et les cycles de (G, Δ) . En effet, à cause des n premières séparations de Δ , les deux arêtes qui forment un couple d'arêtes parallèles devraient être de sens opposés. Cette condition induit alors une partition des arêtes en deux circuits hamiltoniens, ce qui est incompatible avec la définition des n autres séparations de Δ . Ainsi T est-il disjoint de S .

Cependant, T est inclus dans Σ'' . En effet, la bidécomposition totale de la torsade d'ordre n est égale à

$$P_3 + \sum_{i=1}^{n-1} (P_2)^i .$$

Ainsi, les éléments de T , à cause de la remarque précédente, et ceux des éléments de S qui ont un support 4-arête-connexe, grâce au résultat du § 4., appartiennent à Σ'' . Pour démontrer la propriété corrélatrice - c'est-à-dire que Σ'' est inclus dans l'union de S et de T -, nous avons besoin d'établir les deux lemmes suivants.

Lemme [a] : Soit (G, Δ) un élément de Σ dont le fléchage est 2-régulier. Si (G, Δ) n'appartient pas à S , l'un au moins de ses graphes fléchés réduits en x n'appartient pas à S , pour tout sommet régulier x de G .

Preuve : Ce lemme se démontre par l'absurde. Nous considérons un élément (G, Δ) dont le fléchage est 2-régulier et qui possède un sommet régulier x . On désigne par $(G_1, \hat{\Delta})$ et $(G_2, \hat{\Delta})$ les graphes fléchés réduits de (G, Δ) en x et on suppose l'existence d'une orientation pseudo-symétrique \vec{G}_1 (resp. \vec{G}_2) mettant en bijection les cycles de $(G_1, \hat{\Delta})$ (resp. $(G_2, \hat{\Delta})$) avec les circuits de \vec{G}_1 (resp. \vec{G}_2).

On se souvient que G_1 et G_2 ont pour graphe partiel commun $G[X-\{x\}]$ et possèdent en plus deux arêtes formant un couplage des sommets x_1, x_2, x_3, x_4 adjacents à x dans G . Par ailleurs, on observe qu'en inversant l'orientation des arcs de \vec{G}_1 on obtient également une orientation pseudo-symétrique dont les circuits sont évidemment en bijection avec ceux de \vec{G}_1 . Il est donc loisible de supposer que dans \vec{G}_1 et dans \vec{G}_2 l'unique arc incident à x_1 et ne correspondant pas à une arête de $G[X-\{x\}]$ ait son origine en x_1 . En procédant de proche en proche sur les arêtes de $G[X-\{x\}]$ - qui est connexe -, on établit que toutes les arêtes de ce graphe ont même orientation dans \vec{G}_1 et dans \vec{G}_2 , et ce fait permet d'induire sans ambiguïté une orientation pseudo-symétrique \vec{G} sur G . Or, les circuits de cette orientation seraient de façon évidente en bijection avec les cycles de (G, Δ) , ce qui est contradictoire avec nos hypothèses. De cette contradiction découle le lemme que nous voulions prouver./

Des arguments analogues permettent également de prouver le résultat suivant.

Lemme (b) : Soit (G, Δ) un élément de Σ dont le fléchage est 2-régulier. Si (G, Δ) n'appartient pas à S , l'une au moins de ses composantes fléchées 4-arête-connexes n'appartient pas à S ./

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la propriété annoncée, c'est-à-dire de montrer que Σ'' est inclus dans $S \cup T$. Pour cela, nous allons considérer un graphe fléché dont le fléchage est 2-régulier, dont le support est 4-arête-connexe et qui n'appartient ni à S ni à T , et établir qu'un tel élément possède au moins deux bidécompositions totales distinctes.

Cette propriété s'établit par récurrence sur l'ordre du support du graphe fléché considéré. Nous initialisons cette récurrence pour les ordres inférieurs ou égaux à trois. Cette vérification est longue mais sans difficultés particulières; nous en présentons seulement les résultats.

Il existe deux (resp. cinq) graphes fléchés de fléchage 2-régulier, de support 4-arête-connexe et d'ordre 2 (resp. d'ordre 3). Parmi les deux premiers éléments, l'un appartient à S, l'autre à T. Parmi les cinq derniers éléments, deux appartiennent à S et un appartient à T; les deux autres peuvent être définis à l'aide des notations du schéma suivant.

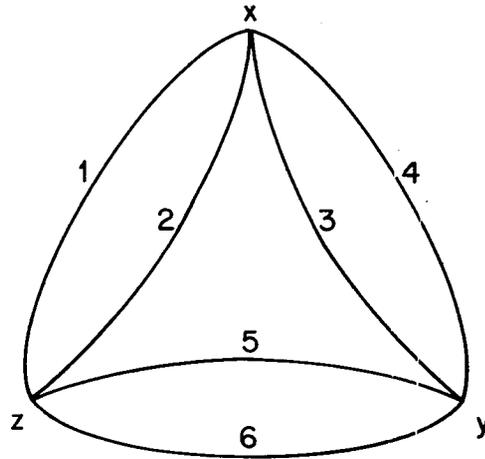


Figure 12

Si l'on désigne par Δ_1 l'ensemble de séparations suivant :

$x : \{\{1,3\},\{2,4\}\}$ et $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$; $y : \{\{3,4\},\{5,6\}\}$ et $\{\{3,5\},\{4,6\}\}$; $z : \{\{1,2\},\{5,6\}\}$ et $\{\{1,5\},\{2,6\}\}$, le graphe fléché $(2P_3, \Delta_1)$ admet aussi bien pour bidécomposition totale $3P_2 + P_3$ que $P_2 P_3 + P_2 + P_3$. Par ailleurs, le graphe fléché $(2P_3, \Delta_2)$ construit sur les séparations suivantes : $x : \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$; $y : \{\{3,5\},\{4,6\}\}$ et $\{\{3,6\},\{4,5\}\}$; $z : \{\{1,5\},\{2,6\}\}$ et $\{\{1,6\},\{2,5\}\}$, se décompose totalement en $2(P_2 + P_3)$ ou en $P_3^2 + 2P_2$.

L'étude du cas général où (G, Δ) a un support de cardinal n ($n \geq 4$) se subdivise en plusieurs cas et sous-cas, auxquels correspond, pour chacun, une argumentation particulière. La première subdivision concerne la connexité des graphes fléchés réduits de (G, Δ) et leur appartenance à S ou T. Compte tenu des lemmes 7.1 et 7.3.a, on peut, dans un premier temps, effectuer une segmentation en trois classes.

a) Il existe un graphe fléché réduit de (G, Δ) dont le support est 4-arête-connexe et qui n'appartient ni à S ni à T.

b) Tous les graphes fléchés réduits de support 4-arête-connexe de (G, Δ) appartiennent à S ou à T, et l'un d'entre eux au moins appartient à T.

c) Pour tout sommet x de G , l'un des deux graphes fléchés réduits de (G, Δ) est de support 4-arête-connexe et appartient à S tandis que l'autre n'appartient pas à S et a un support d'indice de connexité 2.

Les subdivisions ultérieures seront indiquées au cours de l'analyse de ces trois cas.

Cas a) : Désignons par $(G_1, \tilde{\Delta})$ le graphe fléché réduit de support 4-arête-connexe et qui n'appartient ni à S ni à T. L'hypothèse de récurrence s'applique à $(G_1, \tilde{\Delta})$ et le caractère héréditaire de P sur (Σ, ζ) implique la non-appartenance de (G, Δ) à Σ' .

Cas b) : Nous allons considérer le graphe fléché réduit $(G_1, \tilde{\Delta})$ de (G, Δ) qui appartient à T et mettre en évidence une contradiction au sein de l'ensemble des hypothèses que nous faisons. Distinguons deux cas suivant la nature des arêtes ajoutées à $G[X-\{x\}]$ pour construire G_1 .

1) Si ces deux arêtes ajoutées sont deux arêtes parallèles de G_1 , le graphe G est isomorphe au support de la torsade d'ordre n . Mais, comme par hypothèse (G, Δ) n'appartient pas à T, c'est que la seconde séparation de Δ_x (celle qui détermine $(G_2, \tilde{\Delta})$) n'est pas celle qui réalise la partition des arêtes incidentes à x selon les couples d'arêtes parallèles. G_2 est donc isomorphe à G_1 et on vérifie que $(G_2, \tilde{\Delta})$ appartient à S. Mais, en effectuant la réduction de (G, Δ) en tout sommet distinct de x , on obtient d'une part un graphe fléché dont le support est complètement articulé et d'autre part un graphe fléché dont le support est isomorphe à G_1 (donc 4-arête-connexe) mais qui n'appartient ni à S ni à T, ce qui est en contradiction avec l'une des hypothèses du cas b).

2) Lorsque les deux arêtes qui ont créé G_1 à partir de $G[X-\{x\}]$, ne sont pas deux arêtes en parallèle, le graphe G a alors l'allure suivante (Fig. 13), où nous avons représenté le cas dans lequel les deux arêtes ne sont pas incidentes).

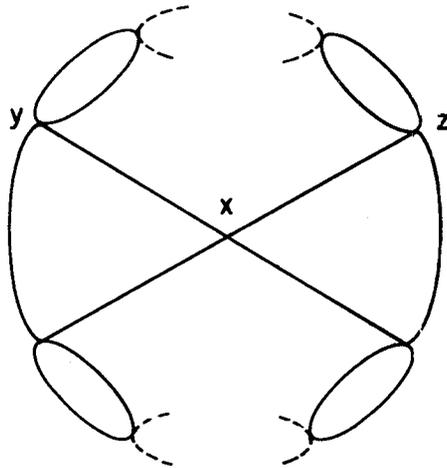


Figure 13

Il est clair que par réduction en y , on obtient deux graphes fléchés réduits correspondant à des supports dont l'un possède un cocycle de cardinal 2 (incident à z) et dont l'autre est 4-arête-connexe. Cependant, ce second graphe fléché n'appartient ni à S ni à T , ce qui est encore une fois en contradiction avec les hypothèses du cas b).

Cas c) : Il correspond à la situation où pour chaque sommet x de G , les graphes fléchés réduits de (G, Δ) en x sont l'un de support 4-arête-connexe et appartenant à S , l'autre n'appartenant pas à S et ayant un support d'indice de connexité 2. Pour un sommet x donné de G , désignons respectivement par $(G_1, \tilde{\Delta})$ et $(G_2, \tilde{\Delta})$ les deux graphes fléchés réduits de (G, Δ) en x . Intéressons-nous aux composantes fléchées 4-arête-connexes de $(G_2, \tilde{\Delta})$. En vertu du lemme (b) précédent, nous sommes assurés que l'ensemble Y formé par celles de ces composantes qui n'appartiennent pas à S est non vide. Nous allons distinguer alors trois cas selon la nature des éléments de Y .

- 1) L'une des composantes de Y n'appartient pas à T (et, donc, à un support d'ordre supérieur ou égal à 3).
- 2) Toutes les composantes de Y dont le support est d'ordre supérieur ou égal à 2 appartiennent à T .
- 3) Toutes les composantes de Y ont un support d'ordre 1.

Lorsque la condition 1 est vérifiée, on applique l'hypothèse de récurrence à une des composantes de Y qui n'appartient pas à T . Le caractère héréditaire de \mathcal{P} dans (Σ, \leq) - puis dans (Σ, \leq) - assure alors que $(G_2, \tilde{\Delta})$ - puis (G, Δ) - n'appartient pas à Σ' .

Par ailleurs, l'hypothèse 2 est impossible. En effet, l'existence dans $(G_2, \tilde{\Delta})$ d'une composante 4-arête-connexe appartenant à T est incompatible avec le fait que $(G_1, \tilde{\Delta})$ possède un fléchage correspondant à une orientation pseudo-symétrique; on peut aisément s'en rendre compte constructivement.

Dans l'hypothèse 3 on aboutit également à une contradiction. Le fait qu'une composante 4-arête-connexe de $(G_2, \tilde{\Delta})$ soit d'ordre 1 et n'appartienne pas à S permet de déterminer les deux séparations autorisées en l'unique sommet y de cette composante. On en déduit les deux graphes fléchés réduits de (G, Δ) en y et on vérifie alors trivialement qu'ils sont tous deux de support 4-arête-connexe, ce qui est en contradiction avec les hypothèses du cas c).

Ainsi s'achève l'étude des fléchages 2-réguliers.

Propriété : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe fléché dont le support est 4-arête-connexe et dont le fléchage est 2-régulier appartienne à Σ'' est qu'il appartienne, soit à l'ensemble des torsades, soit à l'ensemble S des graphes fléchés déterminant une orientation pseudo-symétrique de leur support./

7.4. Etude du fléchage 1-régulier

Dans le cas du fléchage 1-régulier, l'ensemble Δ des séparations d'un graphe fléché (G, Δ) détermine sur son support une partition des arêtes en cycles. Nous allons distinguer deux cas selon que cette partition comprend une ou plusieurs classes.

Dans la première hypothèse, nous construisons le *graphe d'enchevêtrement* $\Gamma = (X, E)$ associé au couple (G, Δ) . Ce graphe d'enchevêtrement est un graphe simple construit sur l'ensemble de sommets de G ; deux sommets x et y sont adjacents dans Γ si, et seulement si, chacun des deux sous-cycles du cycle eulérien déterminé par Δ et dont les extrémités sont confondues en x passe par y (on vérifiera que cette définition constitue bien une relation

symétrique en x et y). Dans ce graphe d'enchevêtrement, toute composante connexe correspond biunivoquement à une composante 4-arête-connexe de G et par conséquent les sommets isolés de Γ sont les articulations de G .

Par ailleurs, l'opération de réduction en un sommet régulier x , correspond, pour les graphes d'enchevêtrement, à l'opération $\Gamma \rightarrow \Gamma | X - \{x\} |$.

Par réduction totale de (G, Δ) on obtient un graphe complètement articulé (c'est-à-dire dont le graphe d'enchevêtrement est constitué de sommets isolés). Le nombre de sommets de ce graphe est assurément compris entre 1 et $n - \tau_a(\Gamma)$ où $\tau_a(\Gamma)$ est le cardinal minimum d'un transversal des arêtes de Γ .

On vérifie que ces deux valeurs extrêmes (1 et $n - \tau_a(\Gamma)$) peuvent être atteintes et il en résulte que, sur les graphes fléchés que nous étudions, la réduction n'est une opération raffinable que si $\tau_a(\Gamma)$ est égal à $n-1$, c'est-à-dire lorsque Γ est un graphe complet. Ce cas correspond à l'hypothèse où le support G est isomorphe au support d'une trosade et à un choix de Δ tel que le cycle eulérien déterminé soit composé de deux cycles hamiltoniens semblables. Nous appellerons *cordelière* un tel graphe fléché.

Dans l'hypothèse où (G, Δ) détermine une partition des arêtes de G en k cycles ($k > 1$), on vérifie que

$$P(G, \Delta; x) = (x-2)^{k-1} .$$

On peut classer les sommets de G en deux classes : la classe X_1 des sommets par lesquels ne passe qu'un seul cycle de la partition précédente et la classe X_2 des sommets par lesquels passent deux cycles distincts.

Si l'on cherche à réduire (G, Δ) selon les sommets de X_2 , on obtient, quel que soit le mode de réduction, un graphe fléché (G_o, Δ_o) dont le support possède $k-1$ sommets d'articulation correspondant à des éléments primitifs P_4 et tel qu'en tous les autres sommets ne passe qu'un seul des cycles déterminés par Δ . La discussion devient alors semblable à celle du cas précédent. Il ne reste plus qu'à vérifier que lorsque X_1 est vide et lorsque chaque composante 4-arête-connexe du graphe (G_o, Δ_o) est une cordelière, on obtient bien une seule réduction totale de (G, Δ) , ce dont nous laissons au soin du lecteur. Dans ces deux derniers cas, on dira que (G, Δ) est un *enchevêtrement de cordelières*.

7.5.

Théorème : L'ensemble Σ' sur lequel la bidécomposition conduit à un résultat intrinsèque est l'ensemble des graphes fléchés dont chacune des composantes fléchées 4-arête-connexes (G, Δ) possède l'une des propriétés suivantes :

- Δ est l'ensemble de toutes les séparations de G ,
- Δ comprend deux séparations en chaque sommet et l'ensemble des cycles de (G, Δ) peut être mis en bijection avec les circuits d'une orientation pseudo-symétrique de G (ensemble S),
- (G, Δ) est une torsade,
- (G, Δ) est une cordelière ou un enchevêtrement de cordelières,
- G est d'ordre 1./

Il résulte de ce théorème et de la propriété 6.3 qu'en considérant comme équivalents les graphes fléchés de support complètement articulé et de même décomposition totale, la bidécomposition eulérienne est une bidécomposition distributive sur Σ' dont les éléments irréductibles et indécomposables sont les cinq éléments primitifs P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 définis en 6.1.

CHAPITRE IV

A PROPOS DE L'ÉNUMÉRATION DES CYCLES EULÉRIENS DANS
LES GRAPHES 6-RÉGULIERS

GÉNÉRALISATION DES INVARIANTS DE TUTTE-GROTHENDIECK AUX MODULES ET AUX ALGÈBRES

La bidécomposition eulérienne, appliquée aux graphes 6-réguliers, n'est pas une bidécomposition distributive. Cependant, l'introduction d'un nouvel opérateur et de relations scalaires entre cet opérateur et l'opérateur classique de réduction permet de parvenir à la définition d'un invariant. Ces aménagements incitent à induire une extension de la théorie des invariants de Tutte-Grothendieck dans laquelle ce dernier invariant s'interprète.

Cette extension, qui procède à la construction de l'algèbre de Tutte-Grothendieck, permet d'interpréter non seulement les polynômes $P(G,x)$, $\Pi(\vec{G},x)$ et le présent invariant, mais encore le polynôme $P(G,\Delta;x)$ défini sur les graphes fléchés et un invariant des graphes orientés bipartis. On l'utilise également pour poser une conjecture concernant l'existence d'un polynôme énumératif des cycles eulériens dans tous les graphes eulériens.

1. DENOMBREMENT DES CYCLES EULERIENS DANS LES GRAPHES 6-REGULIERS

La construction d'un polynôme qui rende compte de l'énumération des cycles eulériens dans les graphes réguliers d'ordre supérieur à 4 se heurte à une difficulté qui n'existait pas pour les graphes 4-réguliers.

D'où provient cette difficulté ?

Principalement de ce que les sommets bouclés de degré supérieur ou égal à 6 présentent une configuration inconnue dans les graphes 4-réguliers. En effet, lorsque l'on considère, dans un tel graphe, un sommet bouclé x , ce sommet est nécessairement incident à un cycle ω de cardinal 2. Il est possible, dans ces conditions d'esquiver les difficultés propres aux sommets bouclés puisque l'on peut éliminer le sommet x en décomposant le graphe selon ω .

On ne dispose plus d'une telle latitude pour les graphes d'ordre supérieur à 4. On s'aperçoit alors de la nécessité d'introduire, en plus des deux opérateurs fondamentaux - la réduction aux sommets réguliers et la décomposition - de nouveaux opérateurs concernant la suppression des boucles.

Rappelons que dans le cas d'un sommet bouclé de degré $2q$ portant k boucles, la formule de récurrence qui donne le nombre de cycles eulériens est

$$N(G) = 2^k \cdot [(q-1)! / (q-k-1)!] \cdot \sum N(G_i),$$

où $\{G_i\}$ est la famille des graphes réduits de G en ce sommet bouclé (I-3.4). Ces opérateurs de suppression de boucles ont ainsi un caractère hybride : d'une part, comme pour la réduction en un sommet régulier, il s'agit de décompositions de type additif, mais de plus on est en présence, pour chacune des décompositions, d'un scalaire intervenant multiplicativement.

C'est de ce double caractère que tiendra compte la construction des algèbres de Tutte-Grothendieck, d'une part en considérant une multidécomposition additive faite de plusieurs décompositions partielles et, d'autre part, en utilisant un opérateur externe (Cf. § 2).

Pour l'heure, nous allons nous contenter de constater l'insuffisance des opérateurs classiques (11) avant d'énoncer la forme sous laquelle nous allons rechercher le polynôme énumérateur (12). Puis, nous établirons

une relation nécessaire à l'existence du polynôme (13) et vérifierons que cette condition est suffisante (14). Enfin, nous énoncerons quelques propriétés numériques de cet invariant (15).

1.1. Insuffisance de la bidécomposition eulérienne

L'extension naturelle des techniques utilisées dans le chapitre II conduit à définir sur l'ensemble des graphes 6-réguliers une bidécomposition formée de la réduction aux sommets réguliers et de la décomposition selon les cocycles de cardinal 2. Nous allons constater que cette bidécomposition est insuffisante en établissant sur un exemple que l'unicité de la réduction-décomposition totale n'est pas assurée.

On constate tout d'abord que les éléments irréductibles et indécomposables de la bidécomposition précédente sont les graphes 6-réguliers obtenus à partir d'un graphe 4-régulier 4-arête-connexe en ajoutant une boucle en chaque sommet (il en résulte d'ailleurs que l'ensemble des éléments irréductibles et indécomposables est de cardinal infini).

Considérons le graphe G de la figure 1., qui ne possède que deux sommets réguliers : x et y . Par réduction en x , on obtient 12 graphes pour lesquels y est un sommet régulier; les trois autres graphes réduits (représentés sur la figure 2.) ne possèdent aucun sommet régulier et sont donc irréductibles. Par réduction de G en y , on obtient également trois graphes irréductibles (Figure 3.), et on vérifie aisément que ces graphes forment une famille différente de la précédente.

Cette première constatation implique que la réduction aux sommets réguliers n'est pas une décomposition unitaire sur l'ensemble des graphes 6-réguliers.

De plus, on vérifie que, parmi les graphes précédents, A , B , D et E sont également indécomposables. Les trois derniers de ces quatre graphes sont isomorphes, cependant que A n'est isomorphe à aucun d'eux. Or, A appartient à toute bidécomposition totale qui commence par une réduction en x et à aucune bidécomposition totale qui commence par une réduction en y ; la bidécomposition n'est pas intrinsèque.

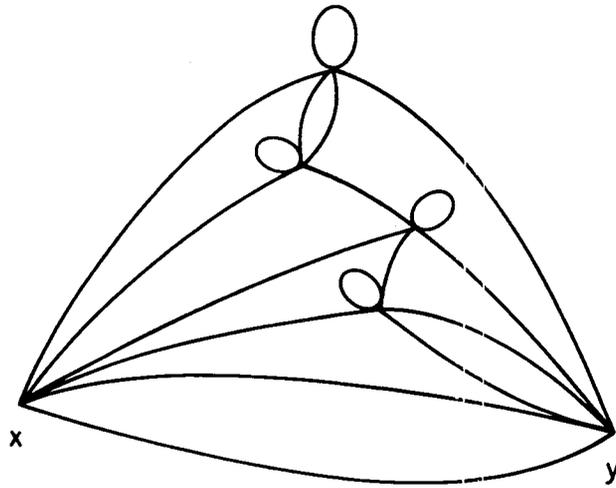


Figure 1.

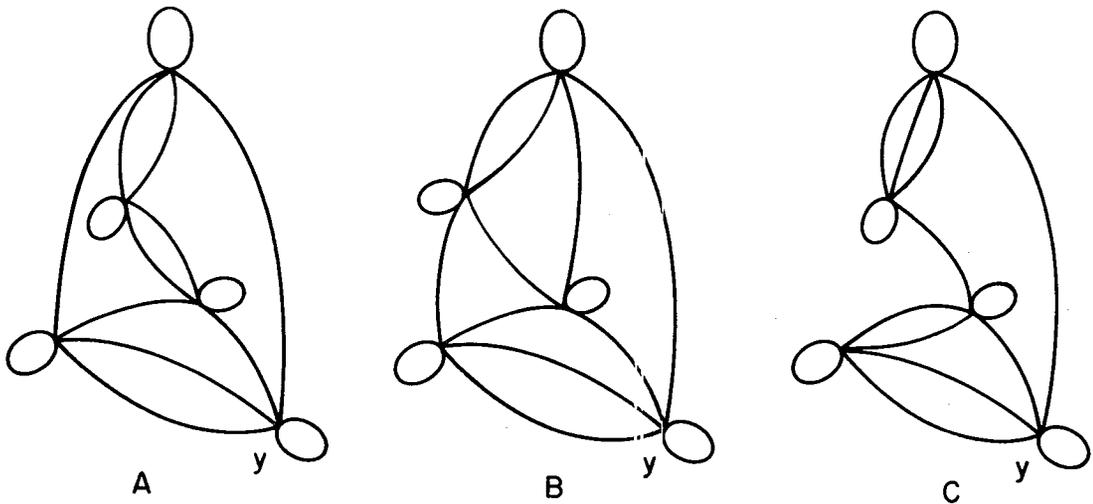


Figure 2.

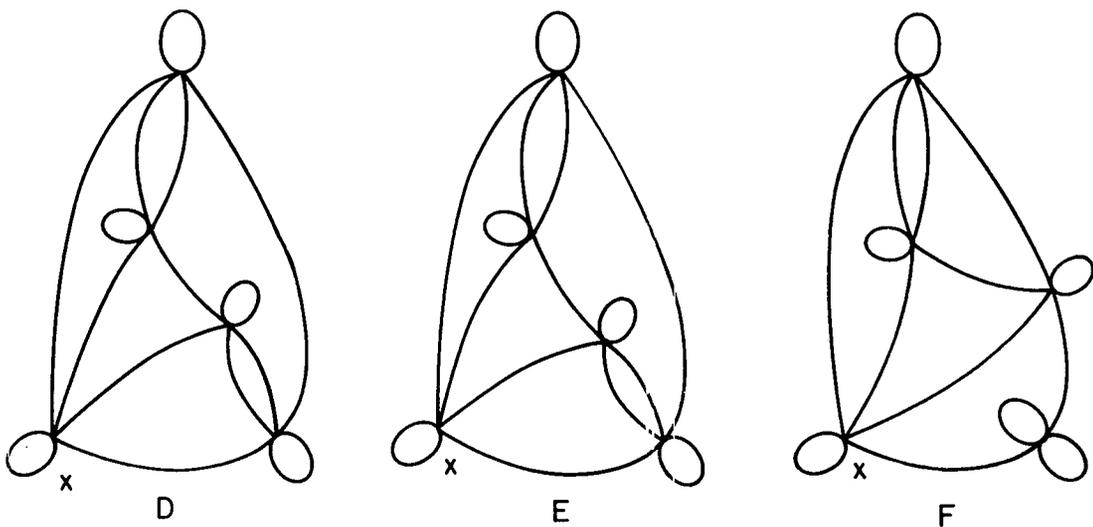


Figure 3.

Dans ce cas, donc, le caractère non unitaire de la réduction entraîne irrévocablement la non-unicité de la bidécomposition eulérienne sur les graphes 6-réguliers.

1.2. Définition d'un procédé récursif de détermination d'un polynôme énumérateur

En réponse à l'insuffisance constatée dans la section précédente, on fait appel à une opération décrite dans le premier chapitre et inutilisée depuis : la réduction en un sommet bouclé.

Soit $P(G, z, t)$ un polynôme défini sur les graphes 6-réguliers de la manière récursive suivante.

a) Si x est un sommet régulier de G ,

$$P(G, z, t) = \sum_{i=1}^{15} P(G_i, z, t)$$

où $\{G_i / 1 \leq i \leq 15\}$ est la famille des graphes réduits de G en x .

b) Si x est une articulation de G définissant 2 $\{x\}$ -composantes, on vérifie que les degrés partiels de x dans ces composantes sont nécessairement 4 et 2. Respectivement, ces composantes sont désignées par H_1 et H_2 . Si H_2 est une composante propre, les deux arêtes de H_2 incidentes à x constituent un cocycle de cardinal 2 de G ; on désigne par G' et G'' les deux graphes décomposés de G selon ce cocycle (avec la convention que x appartient à G'). Si, au contraire, H_2 est une boucle, on pose $G' = G$ et $G'' = \emptyset$.

Soit $\{G'_i / 1 \leq i \leq 3\}$ la famille des graphes réduits de G' en x (x étant dans ce graphe une articulation bouclée portant une seule boucle); on pose

$$P(G, z, t) = t \cdot P(G'', z, t) \cdot \sum_{i=1}^3 P(G'_i, z, t).$$

c) Si x est une articulation définissant 3 $\{x\}$ -composantes dans G , x a dans chacune de ces composantes un degré partiel égal à 2 et, par trois décompositions successives, on obtient d'une part le graphe B^3 , d'ordre 1 et composé de 3 boucles (I-4.3), et d'autre part trois autres graphes décomposés G^1 , G^2 et G^3 (éventuellement égaux à \emptyset s'ils correspondent à une boucle de G en x); on pose :

$$P(G, z, t) = z \cdot \prod_{j=1}^3 P(G^j, z, t).$$

Ce cas comprend, en particulier, le cas où $G = B^3$.

d) Enfin, on pose $P(\emptyset, z, t) = 1$.

1.3. Condition nécessaire préliminaire

Le polynôme défini à l'aide des 4 relations récurrentes ci-dessus n'est pas intrinsèque. En effet, considérons un graphe 6-régulier G qui possède un sous-graphe isomorphe à celui dessiné en traits continus sur la figure suivante.

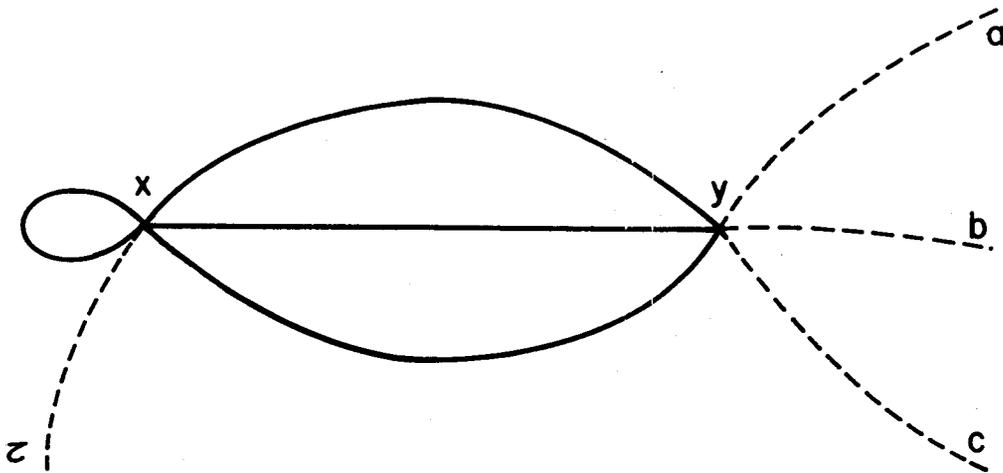


Figure 4.

Dans le graphe G , les sommets adjacents à x ou y (a, b, c, τ) ne sont pas forcément tous distincts. On remarquera que ni x ni y ne peuvent être des articulations essentielles de G .

Trois graphes réduits du graphe G , G_1, G_2, G_3 , vont nous intéresser dans la suite : ils sont formés à partir du sous-graphe $G[X - \{x, y\}]$ en ajoutant respectivement les arêtes $[\tau, a]$ et $[b, c]$, $[\tau, b]$ et $[a, c]$, $[\tau, c]$ et $[a, b]$.

Nous allons calculer $P(G) = P(G, z, t)$ de deux manières différentes.

α) D'après les formules de récurrence ci-dessus, l'application successive de la règle b) au sommet x puis au sommet y , conduit à :

$$P(G) = 3 t^2 \cdot \sum_{i=1}^3 P(G_i).$$

β) Appliquant la règle a) au sommet y de G , on est conduit à considérer 15 graphes réduits. Dans six d'entre eux (H_1, H_2, \dots, H_6), le sommet x est lié par une arête simple aux 4 sommets τ, a, b et c . Les neuf graphes réduits restants sont 3 à 3 identiques : dans chacun d'eux x porte deux boucles et est respectivement adjacent à τ et a , τ et b , τ et c .

A l'un quelconque des six premiers graphes, on peut appliquer la règle b) en x . Chacune de ces réductions conduit à l'expression suivante :

$$P(H_j) = t \cdot \sum_{i=1}^3 P(G_i) \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Appliquant la règle c) aux neuf graphes restants, on obtient les polynômes $z \cdot P(G_1)$, $z \cdot P(G_2)$, $z \cdot P(G_3)$.

Ainsi, $P(G) = (6t + 3z) \cdot \sum_{i=1}^3 P(G_i)$.

Pour que $P(G)$ soit un invariant il est nécessaire que les deux formules donnant $P(G)$ soient égales. C'est-à-dire $3t^2 = 6t + 3z$;
ou encore :

$$z = t(t - 2).$$

1.4. Théorème d'existence

Théorème : Le polynôme $Q(G, t)$ défini sur l'ensemble des graphes 6-réguliers et obtenu à partir du polynôme $P(G, z, t)$ précédent en spécialisant z par $t(t - 2)$ est un polynôme en une variable à coefficients entiers sans terme constant. De plus, ce polynôme est indépendant de l'ordre dans lequel on a déterminé $P(G, z, t)$.

Preuve : On procède par récurrence sur l'ordre du graphe G considéré. La première partie de ce théorème est triviale et on s'attache uniquement à démontrer la seconde. Utilisant un argument déjà présenté pour de semblables preuves d'invariance, on constate qu'il suffit de comparer les expressions donnant $Q(G, t)$ après application du processus récursif aux couples de sommets (x_i, x_j) et (x_j, x_i) , pour toute paire $\{x_i, x_j\}$ de sommets de G . La discussion se subdivise en plusieurs cas selon la nature des sommets x_i et x_j dans G . Utilisant la classification des sommets définie dans la section précédente (1.3), on peut dresser le tableau ci-contre.

	a	b	c
a	6	5	1
b		4	2
c			3

Subdivisions de la discussion du théorème 1.4.

Les entrées gauches du tableau (lignes) font référence à la nature du sommet x_i ; les entrées supérieures (colonnes) à la nature de x_j . La symétrie des rôles joués par x_i et x_j permet de limiter le nombre des cas à 6. La numérotation indiquée ci-dessus est reprise dans la discussion qui suit; elle a été choisie pour rendre cette discussion la plus claire possible.

Figure 5.

Nous étudions successivement les 6 cas qui viennent d'être mis en évidence.

Cas 1 : Si x_j est une articulation déterminant 3 composantes (*3-articulation*), tandis que x_i est un sommet régulier, le processus de détermination récursive du polynôme P fait appel, dans le premier cas (x_j), à la décomposition de G selon des cocycles de cardinal 2 et, dans le second cas (x_i), à une réduction de G en 15 graphes réduits. L'invariance du polynôme P résulte de la propriété de distributivité établie en I-4.5 et entraîne celle du polynôme Q.

Cas 2 : Lorsque le sommet x_i est une articulation déterminant 2-composantes (*2-articulation*), le processus de calcul de P conduit à considérer d'abord, éventuellement, une décomposition de G puis en tout état de cause, une réduction en un sommet bouclé. Par ailleurs, puisque x_j est toujours une 3-articulation, il faut également considérer les décompositions correspondantes. La permutation entre les premières opérations et les secondes est possible en vertu, d'une part de la propriété de distributivité rappelée ci-dessus et, d'autre part, de la propriété de commutativité de l'opérateur de décomposition.

C'est également cette propriété de commutativité qui assure l'invariance des polynômes P et Q dans le *cas 3*, puisque, dans ce cas, les sommets x_i et x_j sont tous deux des 3-articulations.

L'étude du *cas 4* est exactement semblable à celle qui a été menée lors du § c) du lemme II-2.3. Le résultat est donc acquis dans cette éventualité.

Le *cas 5* présente une petite particularité lorsque le sommet x_j est une articulation essentielle. On doit dans ce cas considérer en premier lieu une décomposition selon le cocycle de cardinal 2 incident à x_j . L'existence de cette décomposition ne crée pas de difficulté, car celle-ci est distributive par rapport aux réductions que l'on doit considérer par ailleurs. On peut donc ramener l'étude des *cas 5* & *6*, aux seules circonstances où x_i et x_j sont des sommets réductibles.

La discussion se subdivise alors en deux alinéas suivant que les réductions en l'un de ces deux sommets fait apparaître, ou non, une articulation en l'autre sommet.

1) Tout d'abord, si x_j est un sommet réductible de même type - a) ou b) - dans G et dans chacun des graphes réduits de G en x_i et si x_i est un sommet régulier dans les graphes réduits de G en x_j , la situation est simple : quel que soit l'ordre dans lequel s'opèrent les réductions aux sommets x_i et x_j on est amené à considérer deux familles *identiques* de 45 graphes (dans le *cas 5*) et de 225 graphes (dans le *cas 6*). L'invariance de $Q(G,t)$ est donc assurée.

2) Lorsque la condition précédente n'est pas remplie, on est assuré qu'il existe dans le graphe G un sous-graphe partiel $\{x_i, x_j\}$ -détaché pour lequel les degrés partiels de x_i et x_j sont pairs. L'analyse des différents cas possibles est ici bien plus complexe que lors des discussions des §§ II-2.3 & III-4.4. Cette analyse peut se résumer par un tableau. Pour plus de clarté, les deux hypothèses, *cas 5* et *cas 6*, ont fait l'objet de tableaux séparés.

La résolution complète de toutes les possibilités recensées dans ces deux tableaux serait fastidieuse. Nous nous contentons d'exposer l'étude détaillée des situations de type α désignées dans le tableau 7 ci-après.

On peut, en effet, réunir en une seule étude les situations décrites par les trois premières lignes du tableau 7 : ces situations présentent des particularités communes qui se trouvent renforcées par l'adoption des notations suivantes :

	Valeur des degrés partiels						Cas
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
$d(x_i)$	4	2					γ
$d(x_j)$	4	2					
$d(x_i)$	4	1	1				γ
$d(x_j)$	4	1	1				
$d(x_i)$	4	2					δ
$d(x_j)$	2	4					
$d(x_i)$	4	1	1				δ
$d(x_j)$	2	3	1				
$d(x_i)$	3	2	1				γ
$d(x_j)$	3	2	1				
$d(x_i)$	3	1	1	1			ϵ
$d(x_j)$	3	1	1	1			
$d(x_i)$	3	2	1				γ
$d(x_j)$	1	2	3				
$d(x_i)$	3	1	1	1			ζ
$d(x_j)$	1	3	1	1			
$d(x_i)$	2	2	2				η
$d(x_j)$	2	2	2				
$d(x_i)$	2	2	1	1			η
$d(x_j)$	2	2	1	1			
$d(x_i)$	2	1	1	1	1		θ
$d(x_j)$	2	1	1	1	1		
$d(x_i)$	1	1	1	1	1	1	κ
$d(x_j)$	1	1	1	1	1	1	

Degrés partiels des $\{x_i, x_j\}$ -composantes lorsque x_i et x_j sont de type a) : cas 6.

	Valeur des degrés partiels				Cas
	C_1	C_2	C_3	C_4	
$d(x_i)$	4	2			α
$d(x_j)$	2	2			
$d(x_i)$	4	1	1		
$d(x_j)$	2	1	1		
$d(x_i)$	2	3	1		
$d(x_j)$	2	1	1		
$d(x_i)$	3	1	1	1	β
$d(x_j)$	1	1	1	1	

Degrés partiels des $\{x_i, x_j\}$ -composantes lorsque x_i est de type a) et x_j de type b): cas 5.

Figure 7.

- Pour la ligne 1, $D = C_1$; $D' = C_2$,
- Pour la ligne 2, $D = C_1$; $D' = C_2 \cup C_3$;
- Pour la ligne 3, $D = C_2 \cup C_3$; $D' = C_1$.

Les degrés partiels de x_i et x_j dans D et D' sont ainsi respectivement (4,2) et (2,2). On désigne par H_1, H_2 et H_3 les trois graphes normalisés réduits de D en x_i et par K' le graphe normalisé correspondant à D' .

Parmi les 15 séparations définies par G en x_i , il en existe 3 pour lesquelles les deux arêtes de D' appartiennent à une même transition; désignons par 1, 2 et 3 les indices de ces séparations.

Après suppression de la boucle portée par x_j , il existe 3 séparations de G en x_j . Pour l'une d'entre elles, les 2 arêtes de D' appartiennent à la même transition; cette séparation sera désignée par l'indice 1.

Dans ces conditions, les réductions en x_i puis en x_j conduisent à la formule suivante :

$$Q(G,t) = t(t-2) Q(K',t) \cdot \sum_{k=1}^3 Q(H_k,t) + t \sum_{k=4}^{15} Q[(G_k^i)^j_1, t] + t \sum_{k=4}^{15} \sum_{l=2}^3 Q[(G_k^i)^j_l, t].$$

Les réductions effectuées dans l'ordre inverse conduisent à :

$$Q(G,t) = t \left[t \cdot Q(K',t) \cdot \sum_{k=1}^3 Q(K_k,t) + \sum_{l=2}^3 \sum_{k=1}^3 Q[(G_l^j)^i_k,t] + \sum_{l=2}^3 \sum_{k=4}^{15} Q[(G_l^j)^i_k,t] \right].$$

Ces deux expressions sont égales. Il suffit, pour s'en rendre compte, de constater d'une part que

$$(G_k^i)^j_l = (G_l^j)^i_k \text{ pour } 2 \leq l \leq 3 \text{ et } 4 \leq k \leq 15,$$

et d'autre part que les graphes $(G_k^i)^j_l$, $4 \leq k \leq 15$ et $(G_l^j)^i_k$, $2 \leq l \leq 3$, $1 \leq k \leq 3$, sont d'indice de connexité 2 et que, par conséquent, le second terme de la première expression s'écrit :

$$4 t Q(K',t) \cdot \sum_{k=1}^3 Q(H_k,t),$$

tandis que le second terme de la seconde expression est égal à

$$2 Q(K',t) \cdot \sum_{k=1}^3 Q(H_k,t).$$

Ainsi se présente l'étude des situations de type α . Nous aurons été tout à fait complet dans cette étude si nous mentionnons que le graphe K' soit être pris égal à 0 lorsque la situation est celle décrite dans la deuxième ligne du tableau 7., et que seule la composante C_1 est une composante propre (c'est-à-dire que C_2 et C_3 sont des boucles). Cette convention permet de faire coïncider l'étude de ce cas particulier avec l'étude générale./

1.5. Propriétés numériques

Propriété : Pour tout graphe G 6-régulier,

$$Q(G,0) = Q(G,2) = 0,$$

$$Q(G,5) = 15^n, \text{ où } n \text{ est l'ordre de } G,$$

et $Q(G,4) = N(G)$, nombre de cycles eulériens de G .

Preuve : Ces quatre égalités s'établissent par récurrence sur l'ordre n de G ./

2. MODULES ET ALGÈBRES DE TUTTE-GROTHENDIECK

T. Brylawski [1972a] a établi les conditions d'existence d'invariants de Tutte-Grothendieck appartenant à un groupe ou à un anneau. Le polynôme établi au paragraphe précédent suggère d'étendre la théorie dans deux directions. Tout d'abord, il apparaît nécessaire de considérer qu'une décomposition (en l'occurrence, la décomposition additive) puisse être la réunion de deux ou plusieurs décompositions partielles. De plus, ces décompositions partielles font intervenir une opération multiplicative externe qui impose de définir les invariants, non plus dans un groupe ou dans un anneau, mais dans un module ou une algèbre.

La modélisation que nous présentons dans ce paragraphe explicite la généralisation effectuée dans chacune de ces directions.

2.1. A-multidécompositions unitaires

Nous définissons tout d'abord les A-décompositions sur un ensemble S puis nous indiquons les conditions qui font de la réunion de plusieurs A-décompositions sur un même ensemble S une A-multidécomposition unitaire.

Les objets que nous allons considérer sont des applications à support fini de S dans A, anneau commutatif unitaire, dont l'ensemble est noté $A^{(S)}$. Nous observons que, à cause du caractère unitaire de A, l'ensemble des *multisets* à support fini sur S peut être identifié à un sous-ensemble de $A^{(S)}$ - en particulier, S lui-même peut être considéré comme inclus dans cet ensemble.

Définition [a] : On appelle *A-décomposition sur S* un couple (N, \preceq) formé d'un sous-ensemble N de $A^{(S)}$ et d'un ordre partiel \preceq sur N vérifiant les quatre conditions suivantes (où f et g désignent deux éléments quelconques de N) :

- i) L'ordre \preceq admet une relation de couverture, notée $\overset{\wedge}{\prec}$.
- ii) Il existe un scalaire λ de A et un entier $k \geq 1$ tels que les relations de couverture de tout élément s de S soient de la forme :

$$s \overset{\wedge}{\prec} \lambda \sum_{j=1}^k s_j \quad (1)$$

- iii) $\forall h \in A^{(S)} : f + h \in N (f \overset{\wedge}{\prec} g \iff g + h \in N \text{ et } f + h \overset{\wedge}{\prec} g + h)$.
- iv) $\forall \mu \in A : \mu f \in N (f \overset{\wedge}{\prec} g \iff \mu f \in N \text{ et } \mu f \overset{\wedge}{\prec} g)$.

(1) Note page suivante.

Une telle décomposition est notée $D_A(S)$; λ et k constituent ses paramètres.

Les éléments *irréductibles* de $D_A(S)$ sont les éléments de S maximaux dans (N, \preceq) . Si l'on note I le sous-ensemble de S composé de ces éléments irréductibles, il est clair que tous les éléments maximaux de (N, \preceq) appartiennent à $A^{(I)}$.

Définition (b) : Considérons un ensemble fini $\{D_A^i(S) / 1 \leq i \leq p\}$ de p A -décompositions sur un même ensemble S , on note λ_i et $k(i)$ les paramètres de la décomposition $D_A^i(S) = (N_i, \preceq_i)$. $\{D_A^i(S) / 1 \leq i \leq p\}$ constitue une A -multidécomposition sur S si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$i) N_i = N_j \quad 1 \leq i < j \leq p,$$

ii) Il existe une fonction entière ϕ de S dans \mathbb{N} telle que

$$\phi(S) > \phi(S_j), \quad 1 \leq j \leq k(i),$$

pour toute relation de couverture $S \prec_i \lambda_i \sum_{j=1}^{k(i)} S_j$ entrant dans la définition d'une quelconque des A -décompositions $D_A^i(S)$ (2).

iii) Les éléments $\{\lambda_i / 1 \leq i \leq p\}$ forment un ensemble générateur de l'anneau A .

Une telle A -multidécomposition est notée $Dm_A(S)$.

(1) Outre les différences nécessitées par l'introduction de l'anneau A , cette définition diffère de celle relative aux décompositions (II-1.2) par l'absence ici d'un équivalent de la condition (i) de II-1.2. Il aurait été possible de trouver un équivalent en imposant des conditions sur λ et k (par exemple $[\lambda \neq 1 \text{ (dans } A) \text{ ou } k > 1]$) mais ceci conduirait à exclure certains types de A -décompositions dont nous nous servons dans la suite. L'absence d'une telle condition ne risque pas d'engendrer de difficultés. En effet, l'appartenance d'une A -décomposition à une A -multidécomposition - plus précisément l'existence de la fonction ϕ de la définition ci-après - permet d'éviter les décompositions de type "stationnaire".

(2) Cette condition est équivalente à la condition de stricte finitude imposée par T. Brylawski [1972 a, 2.4].

REMARQUES :

1) Soit $\theta = \overline{\cup \theta_i}$, la fermeture transitive de l'union des ordres associés aux A-décompositions $D_A^i(S)$. La condition (ii) précédente implique que θ est une relation antisymétrique; c'est donc un ordre partiel.

2) L'intersection de la famille des ensembles d'éléments irréductibles pour chacun des ordres θ_i , est non vide (en effet, cette intersection contient les éléments qui réalisent le minimum de la fonction ϕ sur S); les éléments de cette intersection sont dits *irréductibles* pour la A-multidécomposition.

Définition (c) : Une A-multidécomposition est (globalement) *raffinable* si, et seulement si,

$$\forall f, g, h \in N, [f \preccurlyeq g \text{ et } f \preccurlyeq h \Rightarrow \exists j \in N : g \preccurlyeq j \text{ et } h \preccurlyeq j].$$

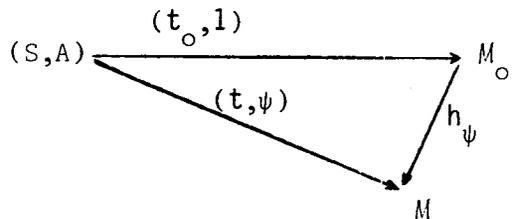
On constate que, d'après la définition (b), toute multidécomposition est localement finie; de ce fait, une A-multidécomposition raffinable sera également nommée *unitaire*.

2.2. Module de Tutte-Grothendieck

Un invariant de la A-multidécomposition $Dm_A(S)$ - ou $Dm_A(S)$ -invariant- est un couple (t, ψ) composé d'une application t de S dans un B-module M et d'un morphisme surjectif ψ de A sur B tels que pour toute relation de couverture d'une quelconque des A-décompositions qui forment $Dm_A(S)$, on ait

$$s \stackrel{A}{\leftarrow} \lambda_i \sum_{j=1}^{k(i)} s_j \Rightarrow t(s) = \psi(\lambda_i) \cdot \sum_{j=1}^{k(i)} t(s_j)$$

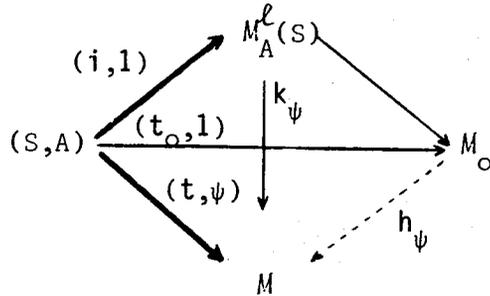
Théorème : Si $Dm_A(S)$ est une A-multidécomposition sur S , il existe un unique A-module M_0 , appelé module de Tutte-Grothendieck de la multidécomposition $Dm_A(S)$ et un unique $Dm_A(S)$ -invariant $(t_0, 1)$ de (S, A) dans M_0 tel que pour tout B-module M et tout $Dm_A(S)$ -invariant (t, ψ) de (S, A) dans M , il existe un unique morphisme h du A-module M_0 dans le B-module M , sous-tendu par le morphisme ψ de A sur B et tel que le diagramme suivante commute :



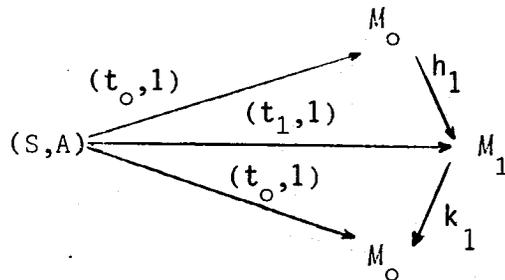
De plus, ce module de Tutte-Grothendieck est isomorphe au module commutatif sur A librement engendré par les éléments irréductibles de $Dm_A(S)$.

Preuve : Considérons le A-module commutatif libre engendré par S : $M_A^l(S)$. Désignons par N le sous-module engendré par tous les éléments $s - \lambda_i \sum s_j$ correspondant à toutes les relations de couverture $s \stackrel{A}{\leftarrow} \lambda_i \sum s_j$ qui définissent la multidécomposition $Dm_A(S)$. Le module quotient $M_A^l(S)/N$ est noté M_0 . L'injection canonique de S dans $M_A^l(S)$ se prolonge en une injection t_0 dans le module quotient M_0 et le couple $(t_0, 1)$ constitue ainsi un Dm_A -invariant puisque toutes les relations qu'il est nécessaire de vérifier pour cela sont imposées par construction de M_0 . Considérons à présent un B-module M , et un couple (t, ψ) composé d'une application de S dans M et d'un morphisme surjectif de A sur B tels que (t, ψ) soit un $Dm_A(S)$ -invariant.

Comme $M_A^\ell(S)$ est un module libre, il est possible d'étendre l'application t de S dans M en un morphisme k_ψ de $M_A^\ell(S)$ dans M , sous-tendu par le morphisme surjectif ψ de A sur B . Le noyau de k_ψ est un sous-module de $M_A^\ell(S)$ qui contient N , par construction de N . Il en résulte que k_ψ détermine un morphisme h_ψ de M_0 dans M et que la commutativité du diagramme suivant est assurée.



De plus, l'existence de deux $Dm_A(S)$ -invariants universels, c'est-à-dire d'invariants qui permettent de factoriser tout autre invariant, est impossible. En effet, cette hypothèse implique la commutativité du diagramme suivant



Le morphisme composé $k_1 \circ h_1$ est alors nécessairement le morphisme identité sur M_0 , ce qui établit que chacun des morphismes k_1 et h_1 est un isomorphisme et, par conséquent, l'unicité de l'invariant universel.

Enfin, il reste à établir la dernière partie de la proposition : l'isomorphisme entre M_0 et $M_A^\ell(I)$. A tout élément s de S , on peut faire correspondre un unique majorant maximal $\sum_j \alpha_j u_j$ appartenant à $A^{(S)}$. Comme cet élément maximal a son support inclus dans I , il correspond à un élément de $M_A^\ell(I)$ qui est également noté $\sum_j \alpha_j u_j$. On désigne par t' la fonction de S dans $M_A^\ell(I)$ résultant de la composition des deux correspondances précédentes. Or, $(t',1)$ est un $Dm_A(S)$ -invariant, en effet, pour toute relation de couverture

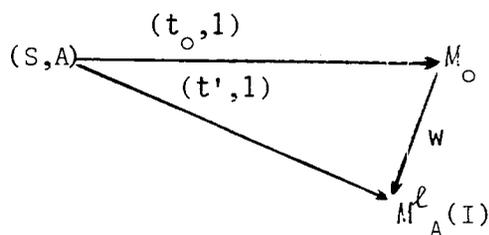
$$s \xrightarrow{\wedge} \sum_{k=1}^{k(i)} \lambda_i s_k$$

on peut désigner par $\sum_j \alpha_{jk} u_{jk}$ l'unique majorant maximal de s_k ($1 \leq k \leq k(i)$), l'unicité du majorant maximal de s assure alors que

$$\sum_j \alpha_j u_j = \lambda_i \sum_{k=1}^{k(i)} \sum_j \alpha_{jk} u_{jk} ,$$

c'est-à-dire $t'(s) = \lambda_i \sum_{k=1}^{k(i)} t'(s_k)$.

L'existence des éléments du diagramme suivant est ainsi assurée :



Dans ce diagramme, w est un morphisme de A -modules. Comme l'image réciproque dans cette application d'un élément quelconque u de I est réduit à un seul élément et que $M_A^l(I)$ est un module libre engendré par I , le morphisme w est donc un isomorphisme. Ceci achève d'établir la propriété annoncée./

2.3. A-bimultidécomposition

Une *A-bimultidécomposition* sur un ensemble S est constituée par un ensemble de A -décompositions formant une multidécomposition, cet ensemble étant partitionné en deux A -multidécompositions $Dm_A^1(S)$ et $Dm_A^2(S)$. Pour la commodité des notations, tout élément de $A^{(S)}$ intervenant dans une inéquation relative à la première multidécomposition sera noté multiplicativement (ex : $s \stackrel{\wedge}{j} \mu_j \times_1 s_1$) tandis que l'on conservera les notations antérieures pour $Dm_A^2(S)$. Par ailleurs, les éléments irréductibles de $Dm_A^1(S)$ seront appelés *indécomposables*. Une telle multidécomposition sera noté $Bm_A(S) = (Dm^1, Dm^2)$.

Définition : Une *A-bimultidécomposition distributive* est une A -bimultidécomposition $Bm_A(S) = (Dm^1, Dm^2)$ dont les deux A -multidécompositions Dm^1 et Dm^2 sont unitaires et qui vérifie les deux axiomes corrélatifs suivants :

a) Si $\times_{1=1}^n \beta_1 s_1$ est un majorant de s dans Dm^1 et si chacun des éléments s_1 est irréductible selon Dm^2 , s est irréductible.

b) *Axiome de distributivité* : Si s est majoré (dans Dm^1) par $\times_{1=1}^n \beta_1 f_1$ et si l'un des éléments du support de ce majorant, disons f_p , est majoré dans Dm^2 par $\sum_{k=1}^m \alpha_k h_k$, alors s admet dans Dm^2 un majorant de la forme suivante :

$$s \prec \sum_{k=1}^m v_k g_k, \text{ avec, pour chaque } k (1 \leq k \leq m), v_k g_k \prec \alpha_k h_k \times (\times_{1 \neq p} \beta_1 f_1).$$

2.4. A-algèbre de Tutte-Grothendieck

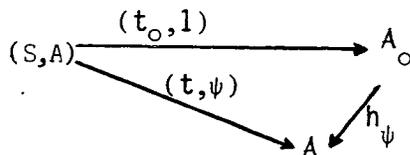
Etant donné une A-bimultidécomposition sur S, $Bm_A(S) = (Dm^1, Dm^2)$, distributive, une algèbre A sur un anneau B et un morphisme surjectif ψ de A sur B, on appelle $Bm_A(S)$ -invariant une application t de S dans A vérifiant :

i) Pour toute relation de couverture de Dm^1 $s \xrightarrow{\mu_j} \prod_{l=1}^m s_l$,
 $t(s) = \psi(\mu_j) \prod_{l=1}^m t(s_l)$.

ii) Pour toute relation de couverture de Dm^2 $s \xrightarrow{\lambda_i} \sum_{k=1}^n s_k$,
 $t(s) = \psi(\lambda_i) \sum_{k=1}^n t(s_k)$.

On notera, comme précédemment, que des égalités analogues sont alors vérifiées pour toutes les relations de Dm^1 et Dm^2 .

Théorème : Si $Bm_A(S)$ est une A-bimultidécomposition distributive sur S, il existe une unique A-algèbre A_0 , appelée algèbre de Tutte-Grothendieck de la bimultidécomposition $Bm_A(S)$ et un $Bm_A(S)$ -invariant $(t_0, 1)$ de (S, A) dans A_0 tel que pour toute B-algèbre A et tout $Bm_A(S)$ -invariant (t, ψ) de (S, A) dans A, il existe un unique morphisme de la A-algèbre A_0 dans la B-algèbre A, sous-tendu par le morphisme ψ de A dans B et tel que le diagramme suivant commute :



De plus, cette algèbre de Tutte-Grothendieck est isomorphe à l'algèbre des polynômes sur A dont les variables indépendantes sont les éléments irréductibles et indécomposables de $Bm_A(S)$.

La démonstration de cette propriété ne contient aucune originalité par rapport à celles concernant les groupes, les anneaux et les modules de Tutte-Grothendieck. Aussi n'apparaît-il pas nécessaire de la transcrire ici./

2.5. Application au polynôme invariant des graphes 6-réguliers

Soit S l'ensemble constitué des graphes 6-réguliers (dont les sommets appartiennent à un ensemble dénombrable donné) et du graphe vide \emptyset (sans sommet ni arête). L'anneau A est l'anneau des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable : $P[t]$. Dans toute la suite, on considèrera que \emptyset est l'élément neutre multiplicatif de $A_A^{\ell}(S)$, algèbre commutative sur A librement engendrée par S . En conséquence, l'image de cet élément dans tout $Bm_A(S)$ -invariant devra être l'élément neutre multiplicatif de l'algèbre considérée.

On munit $A^{(S)}$ des quatre décompositions suivantes.

Δ , dont la relation de couverture est composée des inégalités $G \stackrel{\Delta}{\prec} G' \cdot G''$, où G est un graphe 6-régulier d'indice de connexité 2 et (G', G'') les deux graphes décomposés de G selon un de ses cocycles de cardinal 2.

D_0 correspond à l'opérateur de réduction en un sommet régulier : sa relation de couverture est constituée par les inégalités $G \stackrel{\Delta}{\prec} \sum_{i=1}^{15} G_i$ où $\{G_i / 1 \leq i \leq 15\}$ est la famille des graphes réduits de G en un sommet régulier.

D_1 correspond à l'opérateur de réduction en un sommet portant une boucle : sa relation de couverture est constituée par les relations de la forme $G \stackrel{\Delta}{\prec} t \cdot \sum_{j=1}^3 G_j$.

Enfin, D_2 correspond à des réductions en des sommets portant deux boucles. Les relations correspondantes sont de la forme $G \stackrel{\Delta}{\prec} t(t-2) \cdot G'$, où G' est un graphe décomposé de G selon un cocycle incident à une articulation portant deux boucles. La relation $B^3 \stackrel{\Delta}{\prec} t(t-2) \cdot \emptyset$, où B^3 désigne le graphe 6-régulier d'ordre 1, appartient également à D_2 .

En considérant comme fonction ϕ la fonction "ordre du graphe", on vérifie aisément que ces quatre décompositions forment une A -multidécomposition. Il est clair, par ailleurs, que Δ prise isolément constitue, à elle-seule, une multidécomposition unitaire (le caractère unitaire étant assuré par la propriété I-5.7). Cependant, si l'on considère la multidécomposition (D_0, D_1, D_2) , elle définit un unique élément irréductible : le graphe \emptyset . Par décomposition totale d'un élément de S selon (D_0, D_1, D_2) , on obtient précisément le polynôme $Q(G, t)$ et, grâce au théorème 1.4, on établit que cette

multidécomposition est unitaire. Enfin, en utilisant la propriété de distributivité I-4.5, on achève d'établir qu'il s'agit bien d'une bimultidécomposition distributive.

L'algèbre de Tutte-Grothendieck engendrée par cette bimultidécomposition est isomorphe à l'algèbre commutative engendrée sur A par \emptyset . \emptyset étant l'élément neutre multiplicatif de $A_A^{\ell}(S)$, cette algèbre est isomorphe à A . Ainsi, l'invariant de Tutte-Grothendieck associé à cette bimultidécomposition est-il précisément le polynôme $Q(G,t)$.

REMARQUE : Ce polynôme peut en fait s'interpréter de plusieurs manières comme un polynôme de Tutte-Grothendieck. Voici deux autres possibilités.

a) Si l'on considère $B' = (\Delta, \Delta'; D_0, D_1)$, où Δ' est la décomposition formée de la seule relation $B^3 \triangleleft t(t-2) \cdot \emptyset$, on obtient également une bimultidécomposition distributive sur un ensemble dérivé de S en considérant comme équivalents tous les graphes de même ordre dont tous les sommets sont des articulations définissant trois $\{x\}$ -composantes.

b) Si l'on considère $D_m = (D_0, D_1, D_2')$ sur l'ensemble $S - \{\emptyset\}$ (où D_2' diffère de D_2 en supprimant la relation concernant B^3), on obtient une multidécomposition dont le module de Tutte-Grothendieck est le module commutatif sur A librement engendré par $\{B^3\}$; l'invariant correspondant étant obtenu à partir de $Q(G,t)$ en remplaçant un facteur $t(t-2)$ par B^3 .

2.6. Interprétation du polynôme $P(G,\Delta,x)$

On peut réaliser cette interprétation à l'aide d'un opérateur externe prenant un de ses opérands dans l'anneau des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable : $A = P[x]$. L'ensemble de base de la bimultidécomposition dont $P(G,\Delta;x)$ est l'invariant est l'ensemble $\Sigma' = \Sigma \cup \{\emptyset\}$: Σ est l'ensemble des graphes fléchés (G,Δ) pour tous les graphes 4-réguliers G et tous les ensembles Δ de séparations contenant au moins une séparation en chaque sommet de G ; \emptyset est l'élément vide correspondant au graphe vide. Comme dans l'interprétation précédente, cet élément vide doit être considéré comme l'élément neutre multiplicatif de $A_A^{\ell}(\Sigma')$, l'algèbre commutative sur A librement engendrée par Σ' .

Sur cet ensemble Σ' , on ne définit pas moins de neuf décompositions. Selon l'habitude, chacune d'elles sera simplement définie par l'opérateur qui permet de déterminer la restriction de la relation de couverture aux éléments de Σ' . D_0 correspond à l'opérateur de décomposition selon un cocycle de cardinal 2 (Cf. III-6.1).

Les décompositions Dr_1 , Dr_2 et Dr_3 correspondent à la réduction en un sommet régulier. Ces trois décompositions se distinguent selon le nombre de séparations autorisées au sommet considéré : une réduction au sommet x tel que $|\Delta_x| = i$ donne naissance à une relation de Dr_i .

Les cinq dernières décompositions, Db_1 , Db_2 , Db_3 , Db_4 et Db_5 , correspondant à des réductions en un sommet bouclé. Considérant un graphe G qui possède un sommet bouclé x , la décomposition de (G, Δ) selon le cocycle de cardinal 2 incident à x détermine d'une part l'un des cinq graphes fléchés primitifs, P_j , et d'autre part un graphe fléché (G', Δ') d'ordre $n-1$. A cette décomposition correspond une inéquation de la relation de la couverture de Db_j qui s'écrit

$$(G, \Delta) \stackrel{A}{\prec} P(P_j; x) \cdot (G', \Delta'),$$

où $P(P_j, x)$ est la valeur du polynôme P pour l'élément primitif P_j , telle que définie par l'énoncé du théorème III-6.2. La décomposition Db_j ($1 \leq j \leq 5$) contient en outre l'inégalité $P_j \stackrel{A}{\prec} P(P_j; x)$.

Les propriétés que l'on peut vérifier trivialement sur ces décompositions sont les suivantes : l'ensemble de ces décompositions constitue une A -multidécomposition; $\{D_0\}$ est une A -multidécomposition raffinable, la multidécomposition constituée par les huit autres décompositions ($Dr_1, Dr_2, Dr_3, Db_1, \dots, Db_5$) admet pour seul élément irréductible \emptyset . Il s'en déduit que l'image de l'élément (G, Δ) par multidécomposition additive totale est précisément $P(G, \Delta; x)$, et ainsi cette multidécomposition est-elle raffinable. Il ne reste plus alors qu'à vérifier que la propriété de distributivité établie en I-4.5 s'étend aux graphes fléchés pour achever de se convaincre que $(D_0; Dr_1, Dr_2, \dots, Db_5)$ est une A -bimultidécomposition distributive sur Σ' .

L'algèbre de Tutte-Grothendieck de cette décomposition est celle engendrée sur A par $\{\emptyset\}$ - c'est-à-dire une algèbre isomorphe à A ; l'invariant canonique correspondant étant le polynôme $P(G, \Delta; x)$.

2.7. Application aux dénombrements dans les graphes eulériens quelconques

Le cadre théorique que nous avons établi permet d'entreprendre la construction d'un polynôme énumératif pour tous les graphes eulériens. La méthode est la suivante : on définit un ensemble de décompositions indicées par deux paramètres q et k ; la décomposition D_{qk} opère sur les graphes possédant un sommet réductible de degré $2q$ auquel sont attachées k boucles et admet comme élément couvrant d'un graphe G répondant à cette condition, l'expression

$$z_{qk}^h \cdot \sum_{i=1}^h G_i,$$

où $\{G_i / 1 \leq i \leq h = [2(q-k)-1]!!\}$ est la famille des graphes réduits de G au sommet considéré (Cf. I-3.5). Pour obtenir une multidécomposition unitaire, et donc un polynôme invariant, il est nécessaire d'assurer la raffabilité de l'ensemble des décompositions D_{qk} . En étudiant les conséquences de cette exigence sur des cas particuliers inspirés de celui du § 1.3 - c'est-à-dire des graphes dont deux sommets sont liés par plus de deux arêtes et portent des boucles en nombres différents - on obtient un ensemble de relations liant nécessairement les variables z_{qk} ; nous conjecturons dans l'énoncé ci-dessous que cet ensemble constitue une condition suffisante d'existence d'un polynôme intrinsèque.

Conjecture : Dans l'ensemble des graphes eulériens, désignons par D_{qk} ($q \geq 1$; $0 \leq k \leq q$) la décomposition pour laquelle l'expression

$$\prod_{j=0}^{k-1} [x + 2(q-j)] \cdot \sum_{i=1}^h G_i \quad (3)$$

est un élément couvrant de G lorsque G possède un sommet réductible de degré $2q$ portant k boucles et tel que $\{G_i / 1 \leq i \leq h = [2(q-k)-1]!!\}$ soit la famille des graphes réduits de G en ce sommet. L'ensemble de ces décompositions forme une $P[x]$ -multidécomposition raffable dont l'invariant est un polynôme en une variable $P(G,x)$.

Ce polynôme donne, pour $x = 2$, le nombre de cycles eulériens du graphe G .

Si notre conjecture est exacte, le polynôme $P(G,x)$ du chapitre II serait un cas particulier de celui dont nous supposons l'existence. On vérifierait également $P(G,x) = Q(G,x+2)$, où Q est le polynôme du § 1.

(3) Lorsque $k = q$, cette somme doit être remplacée par \emptyset .

3. ZZ-MULTIDÉCOMPOSITION DANS LES GRAPHES BIPARTIS

3.1. Définition de la multidécomposition

On considère l'ensemble S des graphes bipartis sans sommets isolés et on définit sur cet ensemble les deux décompositions suivantes.

a) D_1 dont les éléments irréductibles sont d'une part le graphe C_2 (graphe-chaîne d'ordre 3 - Cf. I-1.5) et d'autre part les graphes de S sans sommets de degré 1. Pour un graphe biparti différent de C_2 et possédant un sommet x_0 de degré 1, on désigne par x le sommet adjacent x_0 et par $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ les sommets de degré 1 adjacents à x et distincts de x_0 . On pose

$$G \triangleleft (p+1) C_2 + G[x - \{x, x_0, x_1, \dots, x_p\}]$$

(on vérifiera que le membre de droite de cette inégalité est bien un multiset à support dans S). L'ensemble de ces inégalités pour tout élément G de S et tout sommet x de G adjacent à un sommet de degré 1 constitue la relation de couverture de D_1 dans S.

b) D_2 est définie par les inéquations

$$G \triangleleft C_2 + G[x - \{x\}],$$

où G est un graphe de S distinct de C_2 et possédant un couple de sommets (x, x') ayant même ensemble de sommets adjacents (ces sommets sont appelés *jumeaux*).

Ces deux décompositions constituent une multidécomposition $Dm_{\mathbb{Z}}(S)$. Nous indiquerons à la fin de la section suivante comment, à partir du résultat démontré dans G. Chaty *et al.* [1976], on établit que cette multidécomposition est unitaire.

3.2. Nombre de sauts dans les graphes bipartis

Pour un graphe orienté sans circuit, $G = (X, U)$, on désigne par $\Omega(G)$ l'ensemble des ordres totaux sur X compatibles avec la structure d'ordre partiel déterminée par G. A tout élément τ de $\Omega(G)$, on associe la valeur $s(G, \tau)$ qui désigne le nombre de couples (x, x') d'éléments de X tels que x et x' soient consécutifs dans l'ordre τ alors qu'ils sont incomparables dans l'ordre partiel engendré par G. On pose

$$s(G) = \min_{\tau \in \Omega(G)} s(G, \tau)$$

et on appelle cette valeur *nombre de sauts* de G. On trouvera l'essentiel des propriétés de cet invariant dans M. Chein & P. Martin [1972] et G. Chaty *et al.* [1974]. En particulier, on établit que ce nombre de sauts est indépendant des *arcs de transitivité* de G (c'est-à-dire des arcs $[x, y]$ tels qu'il existe un chemin de longueur supérieure ou égale à 2 dont x et y sont les extrémités). Par ailleurs, si l'on désigne par \overleftarrow{G} le graphe obtenu à partir de G en inversant le sens de chacun des arcs, on vérifie $s(\overleftarrow{G}) = s(G)$.

Nous avons complètement résolu le problème de la détermination de $s(G)$ pour les graphes sans cycles (M. Chein & P. Martin [1972]) et cherchons une solution aussi satisfaisante pour les graphes orientés bipartis (graphes dont tout sommet est source ou puits).

Compte tenu de la remarque précédente sur l'orientation des arêtes, on peut assimiler pour ce problème précis les graphes orientés bipartis aux graphes bipartis non orientés, c'est-à-dire aux éléments de l'ensemble S de la section précédente.

Nous avons établi les trois résultats suivants (G. Chaty *et al.* [1976]) :

a) Si G et G' sont deux graphes de S tels que $G \triangleleft k C_2 + G'$ soit une relation de couverture de la décomposition D_1 , on vérifie $s(G) = k + s(G')$.

b) Si un graphe G distinct de C_2 possède deux sommets jumeaux x et x', on vérifie

$$s(G) = 1 + s(G[X - \{x\}]).$$

c) Par applications successives des décompositions D_1 et D_2 , toute décomposition totale d'un graphe G de S est de la forme

$$(1) G \triangleleft k C_2$$

ou

$$(2) G \triangleleft k C_2 + G' \quad (G' \neq C_2).$$

Nous avons établi que s'il existait une décomposition totale de G de la seconde forme, toute décomposition totale de G était de cette forme et que le graphe G' était caractéristique de G.

Des deux premiers résultats on tire que $s(G)$ est un invariant de la multidécomposition $Dm_{\mathbb{Z}}(S)$. Ceci permet d'évaluer k dans les formules (1) et (2) :

$$(1) \Rightarrow k = s(G),$$

$$(2) \Rightarrow k = s(G) - s(G')$$

et de prouver le caractère intrinsèque de toute décomposition totale d'un élément G de S . Il s'en déduit que $Dm_{\mathbb{Z}}(S)$ est une multidécomposition unitaire. Les formules (1) et (2) déterminent la valeur de l'invariant associé à cette multidécomposition. Dans le cas où G est majoré par une expression telle que (2), G' est appelé graphe irréductible associé à G .

Ce résultat constitue une première approche de la détermination de $s(G)$ dans les graphes bipartis. En effet, et ceci est tout à fait différent de la situation rencontrée pour les autres invariants, la détermination de $s(G)$ sur les graphes irréductibles de $Dm_{\mathbb{Z}}(S)$ n'est nullement triviale. D'autres formules récursives sont nécessaires pour achever cette détermination. Il est possible que ces formules donnent lieu à de nouvelles décompositions permettant de définir, avec celles que nous connaissons déjà, une multidécomposition plus opérationnelle dont $s(G)$ serait un invariant.

CONCLUSION

Résoudre des problèmes de dénombrement, associer à chacune de ces résolutions un polynôme énumérateur, interpréter ces polynômes comme solutions de problèmes universels, telles sont les trois démarches de cette thèse.

Précisons quelques-unes des connexions qui existent entre ces trois attitudes.

A chaque dénombrement a été associée la construction d'un polynôme énumérateur, dont l'une des conséquences est évidemment la solution du dénombrement. Il est erroné, cependant, de présenter le polynôme énumérateur comme constituant cette solution puisque sa construction nécessite l'existence préliminaire d'un algorithme récursif de dénombrement. Il est donc plus exact de considérer le cardinal de l'ensemble à énumérer et le polynôme invariant associé comme deux conséquences, l'une immédiate, l'autre plus élaborée, d'un même processus algorithmique de résolution. L'intérêt des polynômes invariants construits dans cette thèse ne réside pas dans leur capacité à dénombrer des cycles eulériens, mais plutôt dans le fait qu'ils sont une traduction - non seulement élaborée mais fidèle - des processus algorithmiques : leur interprétation comme solution d'un problème universel en apporte la preuve.

Ainsi, peut-on substituer l'étude du polynôme à celle du processus et porter au crédit de celui-ci les résultats obtenus sur celui-là. Les propriétés du polynôme $\Pi(\vec{G}, x)$, par exemple, attestent de l'intérêt des opérateurs de réduction et de décomposition dans les graphes 4-réguliers pseudo-symétriques. En effet, ces deux opérateurs permettent à la fois de rendre compte, du nombre de circuits eulériens, du nombre de partitions des arcs en k circuits, du nombre d'anticircuits et même, en vertu du corollaire III.7.1., de l'indice de connexité d'un graphe 4-régulier pseudo-symétrique.

Ceci constitue, bien évidemment, une impérieuse motivation pour entreprendre l'étude approfondie des polynômes construits dans cette thèse et mettre en évidence leurs propriétés et leurs limites. On trouvera ci-après (sous le titre "problèmes ouverts") un exposé de quelques voies de recherche sur ce sujet.

On peut considérer que les résultats présentés dans cette thèse apportent une solution parfaitement satisfaisante des problèmes soulevés pour les graphes 4-réguliers : la détermination de l'extension maximale de la propriété de raffinement de la réduction et l'interprétation du polynôme $P(G, \Delta; x)$ dans une conception élargie de la théorie des invariants de Tutte-Grothendieck sont les deux résultats principaux qui justifient cette affirmation. En ce qui concerne l'ensemble des graphes eulériens - ou même l'ensemble des graphes 2 p -réguliers - les résultats demanderaient à être complétés.

Enfin, du point de vue des invariants de Tutte-Grothendieck, notre extension du champ d'application de la théorie aux modules et aux algèbres ne doit être considérée que comme la première étape d'une généralisation plus radicale au sujet de laquelle nous proposons quelques suggestions dans les pages suivantes.

PROBLEMES OUVERTS

Le bilan présenté dans la conclusion précédente nous conduit à diviser cette rubrique en deux parties : problèmes concernant les polynômes construits dans cette thèse et problèmes concernant les invariants de Tutte-Grothendieck.

1. PROBLEMES CONCERNANT LES POLYNOMES $P(G,x)$, $\Pi(G,x)$ et $Q(G,t)$

On peut résumer en une seule question l'ensemble des résultats que l'on cherche à établir sur ces invariants polynomiaux : un polynôme R en une variable étant donné, peut-on caractériser le ou les graphes G tels que $P(G,x) = R(x)$, $\Pi(\vec{G},x) = R(x)$ ou $Q(G,t) = R(t)$?

C'est précisément parce que la réponse à cette question semble pour l'instant inaccessible que nous sommes amenés à fractionner cette question en plusieurs problèmes que nous espérons plus abordables.

a) L'interrogation générale comprend en particulier le problème de l'existence de graphes correspondant à un polynôme donné - c'est-à-dire le problème de la caractérisation des polynômes P , Π et Q .

Nous avons de bonnes raisons de suspecter que ce problème soit également très difficile. Pour prendre l'exemple du polynôme $\Pi(G,x)$ des graphes 4-réguliers planaires, le problème de la caractérisation de ce polynôme est logiquement contenu dans celui de la caractérisation du polynôme dichromatique des graphes planaires et, croyons-nous, est en fait du même ordre de difficulté. Or, cette dernière caractérisation permettrait de savoir si pour tout polynôme dichromatique $\chi(G,x,z)$ d'un graphe planaire, $\chi(G,-3,0)$ est non nul, ce qui constituerait la preuve de la conjecture des quatre couleurs⁽¹⁾.

Il semble donc qu'il faille s'intéresser dans un premier temps à des problèmes plus limités que la caractérisation. Observons que nous connaissons déjà quelques conditions nécessairement vérifiées par les polynômes P , Π et Q . Dans le cas du polynôme Π dont les résultats sont les plus complets, nous savons que $\Pi(\vec{G},x)$ est à coefficients entiers non négatifs, sans terme constant et qu'il existe deux entiers n et $k \leq n/2$ tels que

$$\Pi(\vec{G},2) = 2^n \quad \text{et} \quad \Pi(\vec{G},-1) = (-1)^n (-2)^k.$$

(1) L'existence récente d'une solution au problème des 4-couleurs ne permet malheureusement pas d'atténuer le caractère pessimiste de notre pronostic.

Dans le domaine des conjectures, on pourrait s'inspirer des nombreux travaux relatifs aux coefficients du polynôme chromatique simple (Cf. R.C. Read [1968] et B. Eisenberg [1971], G. Meredith [1972], H. Wilf [1973] etc.), pour établir des relations concernant les coefficients de nos polynômes.

Précisons deux conjectures de ce type. Si l'on désigne par *fonction caractéristique* d'un polynôme en une variable $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, la fonction de \mathbf{N} dans \mathbf{Z} qui de i donne a_i , nous conjecturons que les fonctions caractéristiques des polynômes P , Π et Q n'ont qu'un seul maximum et que, pour un même graphe 4-régulier planaire G , les fonctions caractéristiques de $P(G,x)$ et $\Pi(G,x)$ ont même support (l'inclusion du second dans le premier étant d'ailleurs évidente).

b) Au problème de l'existence d'un graphe ayant un polynôme donné, est associé le problème de l'unicité d'un tel graphe (Cf. les travaux de R. Bari [1974] à propos du polynôme chromatique et de W.T. Tutte [1974] à propos du polynôme dichromatique). Les résultats de l'article de Tutte sont transposables au polynôme Π : de cette transposition on déduit l'existence d'une famille infinie de couples de graphes 4-réguliers 4-arête-connexes planaires non isomorphes ayant même polynôme Π . Le problème analogue pour P et Q est un problème ouvert, ainsi naturellement que toute interrogation plus précise à ce sujet.

c) Enfin, on peut s'interroger sur les rapports qu'entretiennent nos polynômes invariants avec les autres invariants des graphes eulériens. Le corollaire III.7.1 nous donne un exemple de rapport particulièrement étroit de ce type : il établit, en effet, que l'indice de connexité d'un graphe 4-régulier peut être déterminé à partir du degré minimum du polynôme $P(G,x)$.

Sans que les polynômes permettent dans tous les cas une caractérisation, il est vraisemblable que l'on puisse obtenir un grand nombre de propriétés associant un des polynômes énumérateurs et d'autres invariants structurels des graphes eulériens. A titre d'exemple, on pourrait essayer de relier le degré maximum de $P(G;x)$ la connectivité et la longueur du plus court cycle d'un graphe 4-régulier G .

2. PROBLEMES CONCERNANT LES INVARIANTS DE TUTTE-GROTHENDIECK

Dans ce domaine, les résultats que ce travail nous a permis d'établir sont tous susceptibles d'extension.

Mentionnons, tout d'abord, la conjecture que nous avons énoncée sur l'existence d'un polynôme invariant pour l'ensemble des graphes eulériens (IV.2.7). Dans une généralisation ultérieure, il apparaîtrait intéressant d'effectuer la synthèse des chapitres III & IV, c'est-à-dire d'énoncer et de démontrer un théorème relatif à l'existence d'un polynôme associé aux dénombrements partiels quelconques de graphes eulériens quelconques.

Par ailleurs, le résultat établi à propos des modules et des algèbres de Tutte-Grothendieck peut également être étendu à d'autres structures algébriques; l'extension aux semi-anneaux et aux semi-algèbres semble particulièrement intéressante et susceptible d'applications immédiates.

Ces extensions soulèvent d'autre part un problème quant à la nature des invariants qu'elles permettent d'interpréter. Il est clair que nous avons construit les modules et les algèbres de Tutte-Grothendieck pour pouvoir rendre compte de la construction d'invariants pour lesquels un groupe ou un anneau était insuffisant. Cependant, nous ne savons pas si cette constatation autorise à effectuer une classification entre les divers invariants polynomiaux dont nous avons rendu compte, soit avec la théorie de Brylawski, soit avec notre extension. Il est clair que, si cette classification est fondée, elle doit nécessairement regrouper, dans une catégorie à part, tous les invariants qui ne peuvent être interprétés sans l'aide d'un opérateur externe, c'est-à-dire ceux dont les variables représentent des paramètres et non des graphes. Cette constatation et les autres éléments dont nous disposons sont, en tout état de cause, insuffisants pour trancher ce débat.



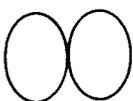
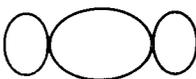
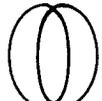
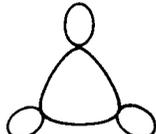
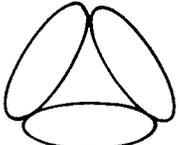
ANNEXE I

VALEURS DES POLYNOMES P ET Π POUR LES GRAPHES D'ORDRE INFÉRIEUR

OU ÉGAL À 6

Les valeurs prises par ces polynômes sont indiquées dans la liste suivante. A partir de l'ordre 4, nous n'avons représenté que les graphes 4-arête-connexes; dans les autres cas, nous avons fait figurer les expressions des polynômes P et Π sans leur faire correspondre les multiples graphes auxquels ils sont attachés.

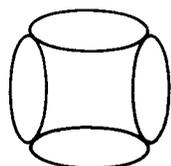
On remarquera, pour $n = 6$, l'existence de deux graphes 4-arête-connexes distincts dont les polynômes Π (resp.P) sont identiques.

$n = 1$		Π	P
		x	x
$n = 2$		x^2	x^2
		$2x$	$3x$
$n = 3$	   	x^3	x^3
		$2x^2$	$3x^2$
		$x^2 + 2x$	$x^2 + 6x$

n = 4

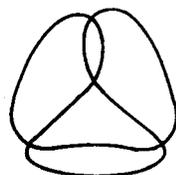
$$\begin{aligned} &x^4 \\ &2x^3 \\ &x^3+2x^2 \\ &4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^4 \\ &3x^3 \\ &x^3+6x^2 \\ &9x^2 \end{aligned}$$



$$x^3 + x^2 + 2x$$

$$x^3 + 2x^2 + 12x$$



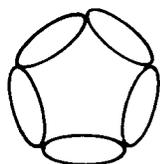
$$3x^2 + 2x$$

$$5x^2 + 12x$$

n = 5

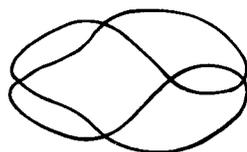
$$\begin{aligned} &x^5 \\ &2x^4 \\ &x^4+2x^3 \\ &x^4+x^3+2x^2 \\ &4x^3 \\ &3x^3+2x^2 \\ &2x^3+4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^5 \\ &3x^4 \\ &x^4+6x^3 \\ &x^4+2x^3+12x^2 \\ &9x^3 \\ &5x^3+12x^2 \\ &3x^3+18x^2 \end{aligned}$$



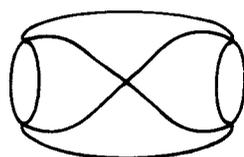
$$x^4 + x^3 + x^2 + 2x$$

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 24x$$



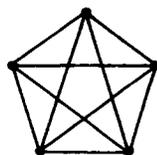
$$2x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$3x^3 + 10x^2 + 24x$$



$$x^3 + 5x^2 + 2x$$

$$x^3 + 16x^2 + 24x$$



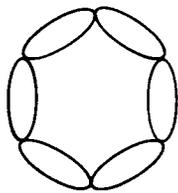
—

$$12x^2 + 36x$$

n=6

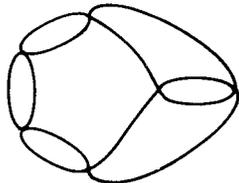
$$\begin{aligned}
 &x^6 \\
 &2x^5 \\
 &x^5+2x^4 \\
 &x^5+x^4+2x^3 \\
 &x^5+x^4+x^3+2x^2 \\
 &4x^4 \\
 &3x^4+2x^3 \\
 &2x^4+4x^3 \\
 &2x^4+3x^3+2x^2 \\
 &2x^4+2x^3+4x^2 \\
 &x^4+5x^3+2x^2 \\
 &x^4+4x^3+4x^2 \\
 &8x^3 \\
 &6x^3+4x^2 \\
 &- \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x^6 \\ 2x^5 \\ x^5+2x^4 \\ x^5+x^4+2x^3 \\ x^5+x^4+x^3+2x^2 \\ 4x^4 \\ 3x^4+2x^3 \\ 2x^4+4x^3 \\ 2x^4+3x^3+2x^2 \\ 2x^4+2x^3+4x^2 \\ x^4+5x^3+2x^2 \\ x^4+4x^3+4x^2 \\ 8x^3 \\ 6x^3+4x^2 \\ - \end{matrix}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x^6 \\
 &2x^5 \\
 &x^5+6x^4 \\
 &x^5+2x^4+12x^3 \\
 &x^5+2x^4+4x^3+24x^2 \\
 &9x^4 \\
 &5x^4+12x^3 \\
 &3x^4+18x^3 \\
 &3x^4+10x^3+24x^2 \\
 &3x^4+6x^3+36x^2 \\
 &x^4+16x^3+24x^2 \\
 &x^4+12x^3+36x^2 \\
 &27x^3 \\
 &15x^3+36x^2
 \end{aligned}$$



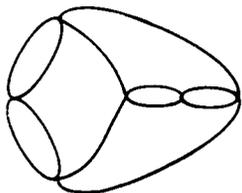
$$x^5+x^4+x^3+x^2+2x$$

$$x^5+2x^4+4x^3+8x^2+48x$$



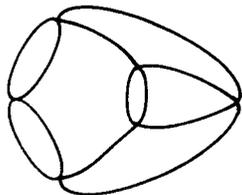
$$2x^4+2x^3+3x^2+2x$$

$$3x^4+6x^3+20x^2+48x$$



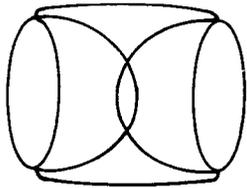
$$x^4+4x^3+3x^2+2x$$

$$x^4+12x^3+20x^2+48x$$



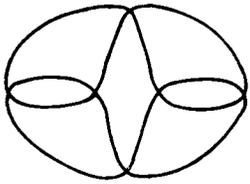
$$x^4+3x^3+5x^2+2x$$

$$x^4+8x^3+32x^2+48x$$



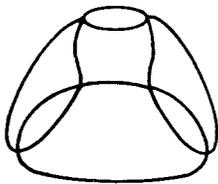
$$x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x$$

$$x^4 + 4x^3 + 44x^2 + 48x$$



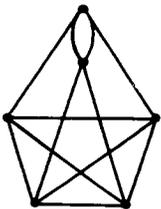
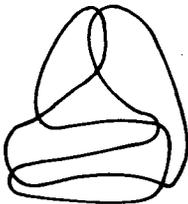
$$5x^3 + 5x^2 + 2x$$

$$11x^3 + 32x^2 + 48x$$



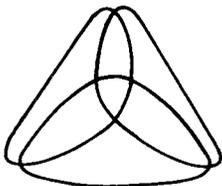
$$4x^3 + 7x^2 + 2x$$

$$7x^3 + 44x^2 + 48x$$



—

$$5x^3 + 42x^2 + 72x$$



$$2x^3 + 10x^2 + 4x$$

$$2x^3 + 47x^2 + 84x$$

ANNEXE II

POLYNOMIALITE DES ALGORITHMES DE DENOMBREMENT MENTIONNES AU CHAPITRE I

Nous allons justifier, dans cette annexe, les affirmations contenues dans l'introduction du premier chapitre.

Un algorithme de détermination d'un invariant sur une classe C de graphes est dit *polynomial* s'il existe un polynôme ϕ tel que pour tout graphe d'ordre n de C la détermination de l'invariant par cet algorithme puisse s'effectuer en un nombre d'opérations majoré par $\phi(n)^{(1)}$.

C'est ainsi que les résultats rappelés au premier chapitre permettent d'établir un algorithme polynomial de détermination du nombre de circuits eulériens d'un graphe pseudo-symétrique \vec{G} . Ce nombre est en effet égal, d'après le théorème de Van Aardenne-Ehrenfest et de Bruijn à $\Delta_{\circ} \prod_{x \in X} (d^+(x) - 1)!$ et Δ_{\circ} , nombre d'arborescences maximales de \vec{G} ayant une origine donnée, peut être calculé comme le déterminant d'une matrice d'ordre $n-1$ (si \vec{G} est d'ordre n). Or, nous savons que le déterminant d'une matrice d'ordre n s'obtient, avec les algorithmes donnant les meilleurs résultats asymptotiques, en un nombre d'opérations proportionnel à $n^{\log_2 7}$. Le reste des calculs peut s'effectuer en un nombre d'opérations sûrement majoré par un polynôme du second degré en n . Et, ainsi, l'utilisation d'un "bon" algorithme de calcul de déterminant rend polynomial la détermination du nombre de circuits eulériens d'un graphe pseudo-symétrique.

Il n'en va pas de même pour les autres algorithmes mentionnés au chapitre I. Ceci tient au fait que ces algorithmes sont non seulement des algorithmes de dénombrement, mais aussi des algorithmes d'énumération et que, corrélativement, les objets énumérés sont en nombre non polynomial. C'est ce second point que nous allons établir dans chaque cas.

1) Cette définition, tout à fait adaptée au but que nous poursuivons ici, se révèle insuffisante pour développer des considérations plus profondes sur la complexité des algorithmes. On s'en rendra compte en consultant à ce sujet l'article de J.C. Arditti [1976].

Propriété : Les algorithmes de détermination des polynômes P et Π par le procédé récursif du paragraphe I-6.1 sont non polynomiaux.

Nous commençons par établir un lemme dû à T. Walsh (R. Cori [1974]).

Lemme : Le nombre d'arbres maximaux des graphes planaires d'ordre n n'est majoré, lorsque n n'est par borné, par aucune fonction polynomiale en n .

Preuve : Soit G_n le graphe planaire d'ordre n suivant :

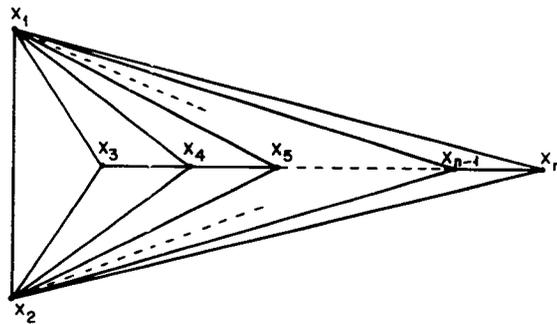


Figure 1.

Considérons les arbres maximaux de G_n dans lesquels le sommet x_n est de degré 1. Les sous-graphes correspondants, obtenus par suppression du sommet x_n , sont des arbres maximaux de G_{n-1} ; inversement tout arbre maximal de G_{n-1} donne naissance à trois arbres maximaux de G_n dans lesquels x_n est de degré 1. Ainsi, si T_n désigne le nombre d'arbres maximaux de G_n ,

$$T_3 = 3$$

$$\text{et } T_n \geq 3 \cdot T_{n-1}.$$

On en déduit que $T_n \geq 3^{n-2}$, ce qui rend impossible la majoration par une fonction polynomiale.

Ce lemme nous permet d'établir à présent la propriété ci-dessus. En effet, l'algorithme de détermination du polynôme Π par la méthode récursive du I-6.1 consiste en la construction d'une arborescence de décomposition, ce qui nécessite un nombre d'opérations au moins égal au nombre de puits de cette arborescence. Pour un graphe G donné, cette dernière valeur est égale à $\Pi(G,1)$, ce qui est le nombre d'arbres maximaux de tout graphe croisé de G (III-3.4).

Or tout graphe planaire peut être considéré comme le graphe croisé d'un graphe 4-régulier planaire; il résulte alors du lemme précédent que $\Pi(G,1)$ ne peut être majoré par une fonction polynomiale du nombre de sommets du graphe. Et, ainsi, l'algorithme "naturel" de détermination de Π est-il non polynomial.

Il en est de même pour l'algorithme de détermination de P car, pour un même graphe planaire, la détermination récursive de $P(G,x)$ nécessite la considération d'une famille de graphes totalement réduits qui contient celle nécessaire pour déterminer $\Pi(G,x)$.

Ces résultats ne préjugent en rien de la polynomialité de la détermination de P et Π . En effet, puisque nous savons possible la détermination de $\Pi(G,1)$ par un algorithme polynomial (c'est ce que nous avons établi au début de cette annexe), rien n'empêche l'existence d'un algorithme polynomial de détermination des coefficients de $\Pi(G,x)$ (ainsi, d'ailleurs, que la détermination de ceux de $P(G,x)$).

La dernière affirmation que nous entendons établir concerne l'énumération des orientations pseudo-symétriques d'un graphe eulérien. Nous allons montrer que, dans le cas des graphes 4-réguliers (et ceci s'étend naturellement à tous les graphes eulériens), cette énumération est non polynomiale.

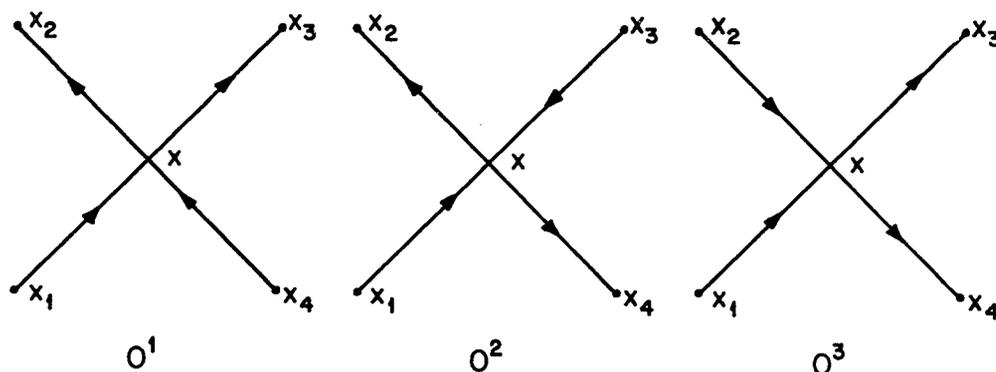
On ne considère, dans ce qui suit, que des orientations pseudo-symétriques non équivalentes : c'est-à-dire des orientations qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par inversion du sens de chaque arc. Pour un graphe G 4-régulier, on désigne par $O(G)$ l'ensemble de ses orientations non équivalentes; nous allons établir, par récurrence sur l'ordre n du graphe G que $|O(G)| \geq (3/2)^n$.

La propriété est vérifiée pour tout les graphes 4-réguliers complètement articulés, puisque dans ce cas

$$|O(G)| = N(G) = 2^n, \text{ pour } G \text{ d'ordre } n.$$

En particulier, ceci est vrai pour le graphe 4-régulier d'ordre 1, ce qui constitue l'initialisation de la récurrence.

Considérons à présent un graphe d'ordre n possédant un sommet régulier x . La dénomination des sommets adjacents à x est fixée par la figure suivante dans laquelle on a, par ailleurs, décrit une partition de $O(G)$ en 3 sous-ensembles déterminés, selon l'orientation prise par les arêtes incidentes à x (pour ne considérer que des orientations non équivalentes, on a choisi dans tous les cas l'arête $[x, x_1]$ orientée de x_1 vers x).



Désignons par G_1, G_2, G_3 les graphes réduits de G en x (avec

$$G_1 = G [X - \{x\}] \cup K(x_1, x_2) \cup K(x_3, x_4),$$

$$G_2 = G [X - \{x\}] \cup K(x_1, x_4) \cup K(x_2, x_3) \text{ et}$$

$$G_3 = G [X - \{x\}] \cup K(x_1, x_3) \cup K(x_2, x_4))$$

On choisit, pour assurer la compatibilité avec l'hypothèse posée pour G , de considérer comme ensemble d'orientations non équivalentes de G_1 (resp. G_2 , resp. G_3) l'ensemble des orientations qui contiennent l'arc (x_1, x_2) (resp. (x_1, x_4) , resp. (x_1, x_3)) et on partitionne $O(G_i) - i = 1, 2, 3$ - selon l'orientation de la seconde arête de G_i construite sur les sommets adjacents à x (figure ci-contre).

Il est clair, compte-tenu de ces notations, que O^1 (resp. O^2 , resp. O^3) peut être mis en bijection avec O_1^2 et O_3^2 (resp. O_1^1 et O_2^2 , resp. O_2^1 et O_3^1). On peut donc écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} |O(G)| &= |O^1| + |O^2| + |O^3| \\ &= 1/2(|O_1^2| + |O_3^2|) + 1/2(|O_1^1| + |O_2^2|) + 1/2(|O_2^1| + |O_3^1|) \\ &= 1/2(|O(G_1)| + |O(G_2)| + |O(G_3)|); \end{aligned}$$

Le résultat annoncé s'ensuit par récurrence./

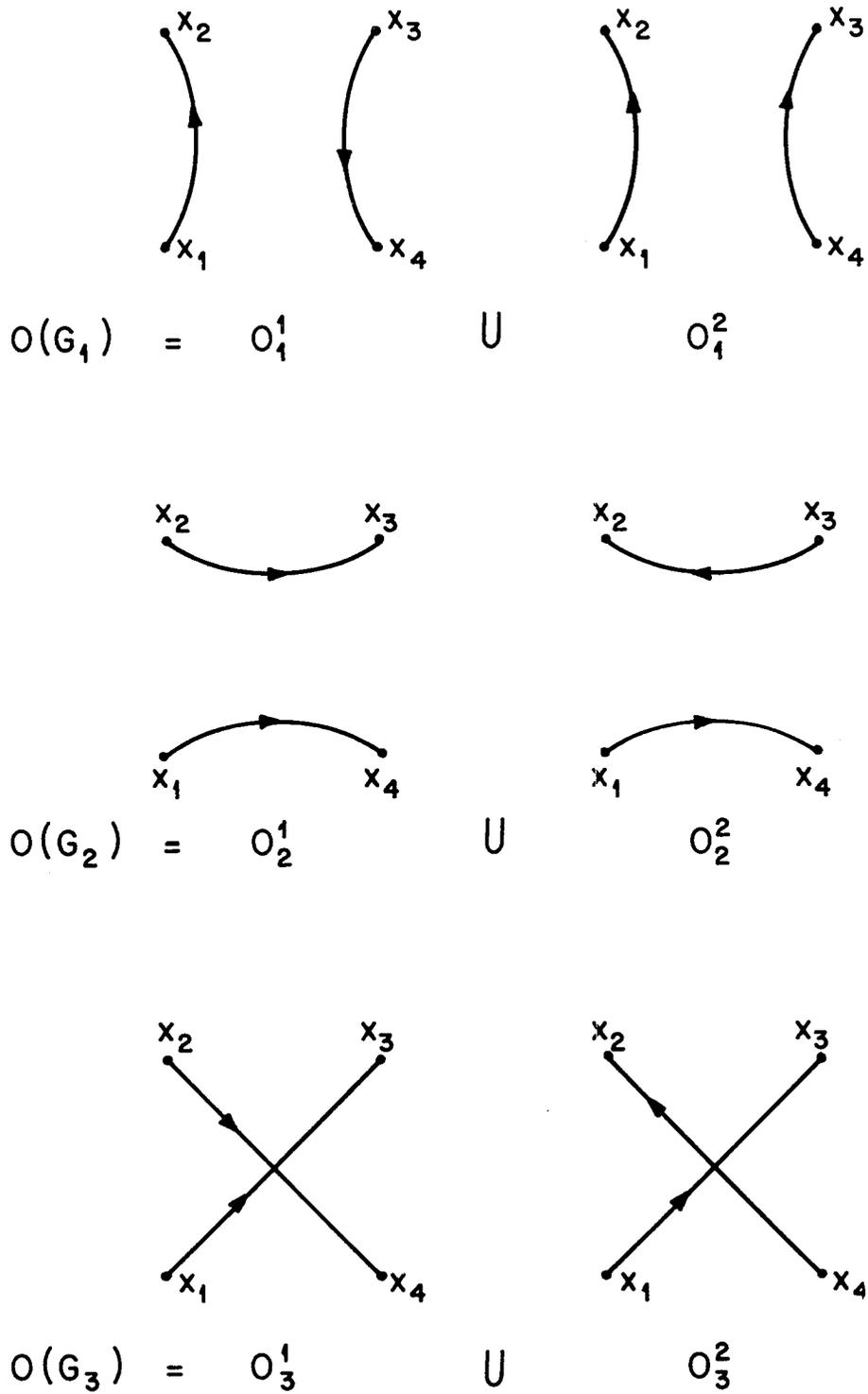


Figure 3.



BIBLIOGRAPHIE

- 1) Van AARDENNE-EHRENFEST, T. & de BRUIJN, N.G. 1951
Circuits and trees in oriented linear graphs. *Simon Stevin*, 28 (1951), 203-217.
- 2) ARDITTI, J.C. 1976
Les problèmes de graphe et la complexité des algorithmes. Journées de combinatoire et informatique - Bordeaux, juin 1975 (J.C. Bermond & R. Cori eds.), Université Bordeaux I, UER de Math. et Informatique, 1976.
- 3) BARI, R.A. 1974
Chromatically equivalent graphs. *Graphs and Combinatorics - Capital Conference - George Washington University - 1973* (R.A. Bari & F. Harary eds.), Springer, Berlin, lecture notes in Math. n° 406, 1974, 187-200.
- 4) BERGE, C. 1970
Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970.
- 5) BOTT, R. & MAYBERRY, J.P. 1954
Matrices and trees. Economic activity analysis, Wiley, New-York, 1954, 391-400.
- 6) BRYLAWSKI, T.H. 1972 a
The Tutte-Grothendieck ring. *Algebra Univ.*, 2 (1972), 3, 375-388.
- 7) BRYLAWSKI, T.H. 1972 b
A decomposition for combinatorial geometries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 171 (1972), 235-282.
- 8) CHATY, G.; CHEIN, M.; MARTIN, P. & PETOLLA, G. 1974
Some results about the number of jumps in acircuit digraphs. *Proceedings of the fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing - Boca Raton (Florida) - Feb. 1974* (F. Hoffman, R.A. Kingsley et al. eds.), *Utilitas Mahtematica*, Winnipeg, *Congressus numerantium X*, 1974, 267-279.

- 9) CHATY, G.; CHEIN, M.; MARTIN, P. & PETOLLA, G. 1976
Number of jumps in bipartite digraphs. En préparation.
- 10) CHEIN, M. & MARTIN, P. 1972
Sur le nombre de sauts d'une forêt. C.R. Acad. Sci. Paris ser. A,
275 (1972), 159-161.
- 11) CORI, R. 1974
Communication privée.
- 12) EDMONDS, J.R. 1960
A combinatorial representation for polyhedral surfaces. Notices Amer.
Math. Soc., 7 (1960), 646.
- 13) EISENBERG, B. 1971
Generalized lower bounds for the absolute values of the coefficients
of chromatic polynomials. Recent trends in Graph Theory - Proceedings
of the first New-York city Graph Theory Conference - june 1970
(M. Capobianco, J.B. Frechen & M. Krolik eds.), Springer, Berlin,
Lecture Notes in Math. n° 186, 1971, 85-94.
- 14) EULER, L. 1736
Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Acad.
Sci. I. Petropolitanae, 8 (1736), 128-140.
- 15) FOURNIER, J.C. 1974
Matroïdes graphiques et graphes topologiques, thèse de doctorat d'Etat,
Université Paris VI, 1974.
- 16) FOURNIER, J.C. 1976
Propriétés combinatoires et algébriques des graphes planaires. Journées
de Combinatoire et d'Informatique, Bordeaux - juin 1975 (J.C. Bermond &
R. Cori eds.), Université Bordeaux I, UER de Math. et Informatique, 1976.
- 17) GRUNBAUM, B. 1971
Antidirected hamiltonian paths in tournaments. J. Combinatorial Theory
ser. B, 11 (1971), 3, 249-257.
- 18) HARARY, F. 1969
The Greek alphabet of "graph theory". Recent Progress in Combinatorics
- Proceedings of the third Waterloo Conference on Combinatorics -
May 1968 (W. Tutte Ed.), Academic Press. London, 1969, 13-20.

- 19) KAGNO, I.N. 1937
The mapping of graphs on surfaces. J. Math. Phys., MIT, 16 (1937), 46-75.
- 20) KOTZIG, A. 1968
Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations.
Theory of graphs - Proceedings of the Colloquium held at Tihany (Hungary)
Sept. 1966 (P. Erdős, G. Katona et al. eds.), Hungarian Academy of
Science, Budapest, North Holland, Amsterdam, 1968, 219-230.
- 21) Mac LANE, S. 1937
A structural characterization of planar combinatorial graphs. Duke
Math. J., 3 (1937), 3, 460-472.
- 22) MARTIN, P. 1976
Remarkable valuation of the dichromatic polynomial of planar multigraphs.
J. Combinatorial Theory, à paraître.
- 23) MEREDITH, G.H.J. 1972
Coefficients of chromatic polynomials. J. Combinatorial Theory ser. B,
13 (1972), 1, 14-17.
- 24) ÖRE, O. 1967
The four color problem, Academic Press, New-York, 1967.
- 25) RAYNAUD, H. 1968
Sur les graphes aléatoires. Ann. Inst. Henri Poincaré sect. B, IV (1968),
4, 255-329.
- 26) READ, R.C. 1968
An introduction to chromatic polynomial. J. Combinatorial Theory,
4 (1968), 1, 52-71.
- 27) READ, R.C. & ROSENSTIEHL, P. 1976
On the principal tripartition of a graph or binary matroïd. En préparation.
- 28) ROSENSTIEHL, P. 1973
Les mots de labyrinthe. Colloque sur la théorie des graphes - Bruxelles -
Avril 1973, Cahier Centre Etu. Rech. Oper., Bruxelles, 15 (1973), 3,
245-252.

- 29) ROSENSTIEHL, P. 1975
Bicycles et diagonales planaires. Rencontre Franco-Belge de théorie des graphes - Paris - mai 1974, Cahier Centre Etu. Rech. Oper., Bruxelles, 17 (1975).
- 30) SMITH, C.A.B. & TUTTE, W.T. 1941
On unicursal paths in a network of degree 4. Amer. Math. Monthly, 48 (1941), 4, 233-237.
- 31) TUTTE, W.T. 1954
A contribution to the theory of chromatic polynomials. Can. J. Math., 6 (1954), 1, 80-91.
- 32) TUTTE, W.T. 1966
Connectivity in graphs, University of Toronto Press, 1966.
- 33) TUTTE, W.T. 1974 a
Codichromatic graphs. J. Combinatorial Theory ser. B, 16 (1974), 2, 168-174.
- 34) TUTTE, W.T. 1974 b
Chromials. Hypergraph Seminar - Ohio State University - summer 1972 (C. Berge & D. Ray-Chaudury eds.), Springer, Berlin, Lecture notes in Math. n° 411, 1974, 243-266.
- 35) TUTTE, W.T. 1976
The dychromatic polynomial. Proceedings of the fifth British Combinatorial Conference - Aberdeen - july 1975 (C. Nash-Williams & J. Sheehan eds.), Utilitas Mathematica, Winnipeg, Congressus numerantium XV, 1976, 605-635.
- 36) WHITNEY, H. 1933
2-isomorphic graphs. Amer. J. Math., 55 (1933), 245-254.
- 37) WILF, H.S. 1973
Which polynomials are chromatic ? Atti del Colloquio Internazionale sulle teorie Combinatorie - Rome - sett. 1973, à paraître.
- 38) YAJIMA, T & KINOSHITA, S. 1957
On the graphs of knots. Osaka Math. J., 9 (1957), 2, 155-163.

INDEX

$A(G)$: arborescence de décomposition du graphe G	II-2.5
$A_A^L(S)$: algèbre commutative sur A librement engendrée par S	IV-2.4
Adjoint (graphe -)	I-2.3
Algèbre de Tutte-Grothendieck d'une bimultidécomposition distributive	IV-2.4
Algorithme de dénombrement des cycles eulériens dans les multigraphes	I-6.1
Anneau de Tutte-Grothendieck d'une bidécomposition distributive	II-1.5
Anticircuit d'un graphe orienté	III-5.1
Arborescence de décomposition	II-2.5
Arborescence régulière de décomposition	II-2.5
Arête-connexe (graphe k -)	I-5.1
Arête régulière d'un multigraphe	II-1.7
Articulation bouclée d'un graphe normalisé	I-3.1
Articulation essentielle d'un graphe normalisé	I-3.1
Articulé (graphe complètement-)	II-3.2
B^k : graphe normalisé d'ordre 1 composé de k boucles	I-4.3
$Bm_A(S)$: A -bimultidécomposition sur S	IV-2.3
$B(S)$: bidécomposition sur S	II-1.4
Bidécomposition	II-1.4
σ -bidécomposition	III-3.1
Bidécomposition distributive	II-1.4
Bidécomposition eulérienne sur les graphes 4-réguliers	II-3.2
Bidécomposition eulérienne sur les graphes fléchés	III-6.3
Bidécomposition orientée	III-4.6
A -bimultidécomposition	IV-2.3
A -bimultidécomposition distributive	IV-2.3
boucle d'un graphe normalisé	I-3.1
bouclée (articulation-)	I-3.1
boucles (graphes avec -)	I-2.4
branche	I-2.5

C_p : graphe-chaîne de p arêtes	I-1.5
$C_3(x,y)$: ensemble des 3-composantes définies par la charnière $\{x,y\}$	III-2.2
<i>Charnière</i>	III-2.2
<i>Cocycle primitif</i> d'un graphe normalisé	I-5.1
<i>Commutativité</i> de l'opérateur de décomposition	I-5.5
<i>Complément</i> d'un sous-graphe partiel	I-1.2
<i>3-composante</i> (ou <i>composante</i>)	III-2.2
<i>Composante mod. J</i>	I-1.3
<i>Composante propre</i> d'un graphe normalisé	I-3.1
<i>Connectivité</i>	I-1.4
<i>p-connexé</i> (graphe -)	I-1.4
<i>Connexité (indice de -)</i>	I-4.1
<i>Cordelière</i>	III-7.4
<i>Cordelières (enchevêtrement de -)</i>	III-7.4
<i>σ-cycle</i> d'une R.S	III-3.3
<i>Cycle eulérien</i>	I-2.2
<i>Cycle simple</i>	I-2.2
$D_A(S)$: A-décomposition sur S	IV-2.1
$d_H(x)$: degré partiel de x dans le sous-graphe partiel H	I-1.1
$Dm_A(S)$: A-multidécomposition sur S	IV-2.1
(Dm^1, Dm^2) : bimultidécomposition formée des multidécompositions Dm^1 et Dm^2	IV-2.3
$D(S)$: décomposition sur S	II-1.2
(D_1, D_2) : bidécomposition formée des décompositions D_1 et D_2	II-1.4
<i>Décomposabilité (indice de -)</i>	I-5.4
<i>Décomposées</i> (R.S.-)	III-1.7
<i>Décomposés</i> (graphes -)	I-4.1
<i>Décomposés</i> (graphes fléchés -)	III-6.3
<i>Décomposés</i> (graphes orientés -)	III-4.2
<i>Décomposition (opérateur de -)</i>	I-5.5
<i>Décomposition (opération de -)</i>	I-4.
<i>Décomposition</i> sur S	II-1.2
<i>Décomposition localement finie</i>	II-1.2
<i>Décomposition raffnable</i>	II-1.2
<i>Décomposition totale</i> d'un graphe normalisé	I-5.6

<i>D-décomposition totale</i>	II-1.2
<i>Détaché mod. J (sous-graphe partiel -)</i>	I-1.3
<i>Distributive (bidécomposition -)</i>	II-1.4
<i>Distributivité de la décomposition par rapport à la réduction</i>	I-4.5
E : ensemble des arêtes du graphe $G = (X,E)$	
E_x : ensemble des arêtes incidentes au sommet x	I-2.3
<i>Enchevêtrement (graphe d' -)</i>	III-7.4
<i>Enchevêtrement de cordelières</i>	III-7.4
<i>Essentielle (articulation -)</i>	I-3.1
<i>Eulérien (cycle -)</i>	I-2.2
<i>Eulérien (graphe -)</i>	I-2.2
F_p : fuseau de p arêtes	
	I-1.5
<i>Faisceau de p composantes contigües</i>	III-2.2
<i>Fléchage d'un graphe fléché</i>	III-6.1
<i>Fléchage régulier</i>	III-7.2
<i>Fléché (graphe -)</i>	III-6.1
<i>Ficelle d'une R.S.</i>	III-5.3
<i>Fuseau</i>	I-1.5
G^* : dual topologique de G	
	III-1.2
$ G $: représentation sphérique (R.S.) du graphe planaire G	III-1.1
G_4 : ensemble des graphes 4-réguliers finis dont les noeuds appartiennent à un ensemble dénombrable X	II-2.1
\vec{G}_4 : ensemble des graphes 4-réguliers pseudo-symétriques finis dont les sommets appartiennent à un ensemble dénombrable X	III-4.3
G/e : graphe contracté de G selon e	II-1.7
$G \setminus e$: graphe obtenu par suppression de e dans G	II-1.7
$G.F$: réduction de G à F	I-1.2
$G:F$: graphe partiel de G déterminé par les arêtes de F	I-1.2
$G[Y]$: sous-graphe déterminé par Y	I-1.1
<i>Graphe adjoint d'un graphe sans boucle</i>	I-2.3
<i>Graphe-chaîne</i>	I-1.5
<i>Graphe complètement articulé</i>	II-3.2
<i>Graphe d'enchevêtrement associé à (G,Δ)</i>	III-7.4

<i>Graphe eulérien</i>	I-2.2
<i>Graphe fléché</i>	III-6.1
<i>Graphe normalisé</i>	I-2.5
<i>Graphe partiel</i>	I-1.2
<i>Graphe 4-régulier</i>	II-2
<i>Graphes croisés associés à une R.S. d'un graphe 4-régulier planaire</i>	III-1.3
<i>Graphes décomposés de G selon un cocycle de cardinal 2</i>	I-4.1
<i>Graphes fléchés décomposés de (G, Δ) selon</i>	III-6.3
<i>Graphe(s) fléché(s) réduit(s) de (G, Δ) en</i>	III-6.3
<i>Graphes orientés décomposés de \vec{G} selon</i>	III-4.2
<i>Graphes orientés réduits de \vec{G} en</i>	III-4.2
<i>Graphes réduits de G en</i>	I-3.2
<i>Graphes réduits obtenus par éclatement planaire en</i>	III-1.6
<i>Groupe de Tutte-Grothendieck d'une décomposition unitaire</i>	II-1.3
$H(G, A_p)$: invariant de Tutte-Grothendieck de la réduction sur les graphes 4-réguliers	II-4.3
$H_0(G, A_p)$: invariant de Tutte-Grothendieck de la réduction par éclatement planaire dans les graphes 4-réguliers	III-3.5
$H(\vec{G}, A_p)$: invariant de Tutte-Grothendieck de la réduction sur les graphes 4-réguliers pseudo-symétriques	III-4.6
<i>Indécomposable (élément - d'une A-multidécomposition notée multiplicativement)</i>	IV-2.3
<i>Indécomposable (élément - d'une décomposition notée multiplicativement)</i>	II-1.4
<i>Indice de connexité</i>	I-4.1
<i>Indice de décomposabilité d'un graphe normalisé</i>	I-5.4
<i>Intersection de deux sous-graphes partiels</i>	I-1.2
<i>B-invariant</i>	II-1.5
Bm_A -invariant	IV-2.4
<i>D-invariant</i>	II-1.3
Dm_A -invariant	IV-2.2
<i>Invariant de Tutte-Grothendieck d'une A-bimultidécomposition distributive</i>	IV-2.4
<i>Invariant de Tutte-Grothendieck d'une A-multidécomposition unitaire</i>	IV-2.2

<i>Invariant de Tutte-Grothendieck</i> d'une bidécomposition distributive	II-1.5
<i>Invariant de Tutte-Grothendieck</i> d'une décomposition unitaire	II-1.3
<i>Invariant</i> d'une A-bimultidécomposition	IV-2.4
<i>Invariant</i> d'une A-multidécomposition	IV-2.2
<i>Invariant</i> d'une bidécomposition	II-1.5
<i>Invariant</i> d'une décomposition	II-1.3
<i>Irréductible (élément - d'une A-décomposition)</i>	IV-2.1
<i>Irréductible (élément - d'une A-multidécomposition)</i>	IV-2.1
<i>Irréductible (élément - d'une décomposition)</i>	II-1.2
<i>Jumeaux (sommets - d'un graphe biparti)</i>	IV-3.1
$k(G)$: indice de décomposabilité d'un graphe normalisé G	I-5.4
K_n : graphe complet d'ordre n	II-2.4
$K(x,y)$	I-2.6
$L(G)$: graphe adjoint d'un graphe sans boucle	I-2.3
<i>Localement finie</i> (Décomposition -)	II-1.2
$m(G)$: cardinal de l'ensemble des arêtes de G	I-1.1
$M(G)$: graphe des cocycles primitifs du graphe normalisé G	I-5.2
M : module des cocycles de cardinal 2 d'un graphe normalisé	I-5.4
$M_A^{\ell}(S)$: module commutatif sur A librement engendré par S	IV-2.2
<i>Module de Tutte-Grothendieck</i> d'une A-multidécomposition unitaire	IV-2.2
<i>A-multidécomposition</i>	IV-2.1
<i>A-multidécomposition raffnable</i>	IV-2.1
<i>A-multidécomposition unitaire</i>	IV-2.1
<i>multiset</i> sur un ensemble S	II-1.1
\mathbb{N} : ensemble des entiers naturels	
$n(G)$: ordre de G	I-1.1
$N(G)$: nombre de cycles eulériens de G	I-2.4
$N(G,\Delta)$: nombre de cycles eulériens du graphe fléché (G,Δ)	III-6.2
<i>Noeud</i> d'un graphe normalisé	I-2.5
<i>Normalisé</i> (graphe -)	I-2.7
<i>Normalisé</i> (graphe eulérien -)	I-2.5
<i>Ordre</i> d'un graphe normalisé	I-2.5

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 : éléments primitifs de Σ	III-6.1
P_p : polygone de p arêtes	I-1.5
$P(G, x)$: polynôme invariant des graphes 4-réguliers et invariant de Tutte-Grothendieck de la bidécomposition eulérienne sur les graphes 4-réguliers	II-2.3 II-3.3
$P(G, z, t)$: polynôme défini sur les graphes 6-réguliers	IV-1.2
$P(G, \Delta; x)$: polynôme invariant des graphes fléchés à support 4-régulier et invariant de Tutte-Grothendieck de la $P[x]$ -multidécomposition définie sur les graphes fléchés	III-6.2 IV-2.6
$P[x]$: anneau des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable x	
Paramètres d'une A-décomposition	IV-2.1
k -partition eulérienne d'un graphe 4-régulier	II-4.3
k -partition eulérienne de type σ d'une R.S. polygone	III-3.5 I-1.5
polynôme dichromatique	II-1.7
primitif (cocycle -)	I-5.1
propre (composante -)	I-3.1
$Q(G, t)$: polynôme invariant des graphes 6-réguliers et invariant de Tutte-Grothendieck de la $P[t]$ -bimultidécom- position définie sur les graphes 6-réguliers	IV-1.4 IV-2.5
Raffinable (décomposition -)	II-1.2
Raffinable (A-multidécomposition -)	IV-2.1
Réductible (sommet -)	I-4.4
Réduction de G à F	I-1.2
Réduction (opération de - en un sommet régulier)	I-3.2
Réduction (opération de - en une articulation bouclée)	I-3.4
Réduction (opération de - par éclatement planaire en un sommet régulier)	III-1.6
Réduits (graphes - de G en ...)	I-3.2 & I-3.5
Réduits (graphes - obtenus par éclatement planaire en ...)	III-1.6
Réduits (graphes fléchés - de (G, Δ) en ...)	III-6.3
Réduits (graphes orientés - de G en ...)	III-4.2
Réduites (représentation - obtenues par éclatement planaire de G en ...)	III-1.6

<i>Régulier</i> (sommet -)	I-3.1
<i>Régulière</i> (arête - d'un multigraphe)	II-1.7
<i>4-régulier</i> (graphe -)	II-2.
<i>Représentation sphérique</i> d'un graphe planaire	III-1.1
<i>R.S.</i> d'un graphe 4-régulier planaire	III-1.1
<i>R.S. décomposées de G selon ...</i>	III-1.7
<i>R.S. réduites de G obtenues par éclatement planaire en ...</i>	III-1.6
<i>Retournement d'ordre p</i> d'une R.S. d'un graphe 4-régulier	III-2.2
$s(G)$: nombre de sauts d'un graphe orienté sans circuit	IV-3.2
<i>Sauts</i> (nombre de -)	IV-3.2
<i>Séparation</i> en un sommet	I-2.3
<i>Somme disjointe</i> de multiset	II-1.1
<i>Sommets d'attachement</i> d'un sous-graphe partiel	I-1.1
<i>Sommets jumeaux</i> dans un graphe biparti	IV-3.1
<i>Sommet réductible</i> d'un graphe normalisé	I-4.4
<i>Sommet régulier</i> d'un graphe normalisé	I-3.1
<i>Sous-graphe</i> d'un graphe	I-1.1
<i>Sous-graphe partiel</i> d'un graphe	I-1.1
<i>Support</i> d'un graphe fléché	III-6.1
<i>Système</i> d'un graphe eulérien	I-2.3
<i>Système transitif</i> d'un graphe eulérien	I-2.3
<i>Torsade</i>	III-7.3
<i>Transitif</i> (système - d'un graphe eulérien)	I-2.3
<i>Transition</i> d'un multigraphe sans boucle	I-2.2
<i>Type</i> d'un retournement	III-2.4
<i>Union</i> de sous-graphes partiels	I-1.2
<i>Unitaire</i> (décomposition -)	II-1.2
<i>Unitaire</i> (A-multidécomposition -)	IV-2.1
$W(G,H)$: sommets d'attachement de H dans G	I-1.1
Z : ensemble des entiers relatifs	
$Z(G) : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k(G)$	II-4.3
$Z_k(G)$: ensemble des k -partitions eulériennes de G	II-4.3

δ : séparation en un sommet	I-2.3
Δ : ensemble de séparations sur un graphe	III-6.
Δ_x : ensemble de séparations en x	I-3.2
Θ : sous-ensemble des graphes 4-réguliers complètement articulés	II-3.2
$\lambda(G)$: connectivité de G	I-1.4
$\nu(G)$: nombre de cycles de la R.S. $ G $	III-3.4
$\Pi(G,x)$: invariant des graphes 4-réguliers planaires <i>et</i> invariant de Tutte-Grothendieck de la σ -bidécomposition	III-2.5 III-3.2
$\Pi(G ,x)$: invariant des R.S. 4-régulières	III-1.5
$\Pi(\vec{G},x)$: invariant des graphes 4-réguliers pseudo-symétriques <i>et</i> invariant de Tutte-Grothendieck de la bidécomposition orientée	III-4.4 III-4.6
Σ : ensemble des graphes fléchés à support 4-régulier	III-6.1
Σ' : ensemble des graphes fléchés ayant une bidécomposition totale intrinsèque	III-7.
Σ'' : restriction de Σ' aux graphes 4-arête-connexes	III-7.1
$\tau = (x, \{a,b\})$: transition relative au sommet x	I-2.2
$\chi(G,x,z)$: polynôme dichromatique du graphe G	II-1.7
$\omega(A)$: cocycle de A	I-4.
\emptyset : graphe vide (sans sommet ni arête)	II-2.2