



**HAL**  
open science

# Sur quelques problèmes d'immersion d'un graphe dans une surface

Huy Xuong Nguyen

► **To cite this version:**

Huy Xuong Nguyen. Sur quelques problèmes d'immersion d'un graphe dans une surface. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1977. tel-00287334

**HAL Id: tel-00287334**

**<https://theses.hal.science/tel-00287334>**

Submitted on 11 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**thèse**

présentée à

université scientifique et médicale  
institut national polytechnique  
de grenoble

pour obtenir le grade de  
docteur ès sciences mathématiques

**nguyen huy xuong**

**sur quelques problèmes  
d'immersion d'un graphe  
dans une surface**

soutenue le 15 avril 1977 devant la commission d'examen :

président	<b>j. kuntzmann</b>
rapporteur	<b>c. benzaken</b>
examineurs	<b>c. berge</b>
	<b>a. bouchet</b>
	<b>p. jullien</b>
	<b>j.l. koszul</b>



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE  
ET MEDICALE DE GRENOBLE

---

Monsieur Gabriel CAU : Président  
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

---

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMTIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

#### PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWLACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERTEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULLIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

*Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.*

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

---

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président

Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

---

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrometallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique
----	---------------	-------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique
----	-------------	-------------

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche



*Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à*

*Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et a guidé mes premiers pas dans la recherche. Son appui et la confiance qu'il m'a accordés ont été pour moi une aide précieuse. Je suis particulièrement sensible à l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.*

*Je remercie très vivement*

*Monsieur C. BENZAKEN, Professeur à l'Université de Grenoble, pour l'animation cordiale de l'équipe d'Algèbre, Logique et Combinatoire.*

*Monsieur C. BERGE, Directeur de Recherche au C.N.R.S.*

*Monsieur A. BOUCHET, Maître de Conférences au Centre Universitaire du Mans.*

*Monsieur P. JULLIEN, Professeur à l'Université de Grenoble.*

*Monsieur J.L. KOSZUL, Professeur à l'Université de Grenoble.*

*qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.*

*Je remercie également mes camarades de l'équipe d'Algèbre, Logique et Combinatoire, en particulier C. PAYAN, qui m'ont permis de ne pas travailler complètement isolé.*

*Je tiens à remercier Mesdames HERVET et NEUMANN qui ont effectué avec compétence et amabilité la frappe de cette thèse.*

*Je m'en voudrais enfin d'oublier les membres du Service de Tirage pour l'excellente qualité de leur travail et surtout pour leur accueil toujours chaleureux.*



## I N T R O D U C T I O N

En cherchant à résoudre le problème fondamental de la Topologie, à savoir la classification des espaces topologiques, les topologues se sont intéressés aux espaces décomposables en agrégats simples. C'est ainsi que, l'abstraction aidant, le concept de complexe simplicial fut introduit.

Un  $n$ -complexe consiste en la donnée d'un ensemble fini  $V$  de sommets et d'une collection  $K$  de sous-ensembles de  $V$ , appelés simplexes, de cardinalité  $\leq n + 1$  tel que tout sous-ensemble d'un simplexe est encore un simplexe. La structure combinatoire de  $K$  est mise en évidence par les relations d'incidence, naturellement définies, entre ses éléments.

Probablement, la notion première des graphes, tels qu'on les étudie actuellement, est celle d'un 1 - complexe. Il n'est donc pas surprenant que, depuis ses origines, la théorie des graphes a constitué le cadre d'une rencontre fructueuse entre Algèbre, Combinatoire et Topologie. D'autant plus que la célèbre conjecture des quatre couleurs (1850 ?) et la conjecture (récemment démontrée) de Heawood (1890) ont mis l'accent sur l'aspect géométrique des graphes.

En effet, le point commun de ces deux conjectures consiste en la détermination du nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration des régions délimitées par un graphe quand celui-ci est dessiné sur une surface. Par dessin, on entend une réalisation obtenue en prenant pour sommets des points distincts de la surface, pour arêtes des courbes simples, deux arêtes ne se coupant pas en dehors des sommets qu'elles peuvent avoir en commun. Ainsi, lorsqu'on peut le dessiner sur une surface, le graphe est dit immergeable dans la surface. La nature topologique du support sur lequel on réalise le dessin conduit à la notion de "graphe topologique".

Les premières caractérisations combinatoires des graphes immergeables dans la sphère sont dûes respectivement à Kuratowski, Whitney et Mac Lane, qui, avec Euler, semblent être les pionniers de la théorie des graphes topologiques. Nombre de travaux sont consacrés aux généralisations de ces résultats, d'autant plus que démontrer la conjecture de Heawood consiste à prouver l'existen-

ce d'une immersion du graphe complet  $K_n$  ( $n \geq 4$ ) dans une surface orientable de genre  $\gamma_n = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\}$  (il s'agit de la partie entière supérieure).

Indépendamment de ces préoccupations théoriques, l'apparition des circuits intégrés augmente l'intérêt porté aux graphes topologiques. En effet, dans les systèmes logiques actuels, la matérialisation des connexions entre éléments intégrés se fait par circuits imprimés sur une plaquette isolante. La possibilité de réaliser de tels "masques" est sous-jacente aux problèmes généraux exposés plus haut.

Pour ces raisons, le contenu de cette thèse reflète dans une large mesure mon intérêt pour le problème de l'immersion d'un graphe dans une surface. Plus précisément, l'objet de ce travail est d'apporter une contribution à l'étude de certains types d'immersion. L'esprit général est le suivant : pour un type donné, nous cherchons à caractériser les graphes admettant une immersion de ce type et, dans le cas où la caractérisation n'est pas classique, nous déterminerons des classes de graphes ayant des propriétés simples (le plus souvent relatives à la connectivité) et satisfaisant aux théorèmes de caractérisation.

Le chapitre I présente une formalisation combinatoire du problème de l'immersion d'un graphe dans une surface. Pensant que l'une des difficultés principales du problème réside dans la définition trop générale d'une surface - c'est-à-dire - un espace topologique séparé, compact, localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$  - nous nous limitons aux surfaces admettant une décomposition cellulaire pour nous intéresser aux polyèdres, encore que ces derniers, débarrassés de leur structure topologique nous donnent *les complexes cellulaires* combinatoires (en abrégé C.C). Dans cet esprit, il nous importe peu que les surfaces sous-jacentes aux c.c équivalents (par subdivisions et réductions combinatoires) ne soient pas, à priori, homéomorphes.

\* C'est ainsi que la première partie est consacré à une étude élémentaire et autonome des c.c. où l'accent est mis sur la construction de leur *squelette* qui est un graphe. L'algorithme de construction met en évidence l'importante notion de *rotation* d'un sommet : il s'agit d'une permutation circulaire des arêtes incidentes à ce sommet.

\* Ceci dit, dans la deuxième partie, nous posons le problème de l'immersion .

non pas au niveau des surfaces mais au niveau des c.c qui les recouvrent. Nous introduisons pour cela la définition d'une *réalisation d'un graphe dans un c.c* : un graphe est dit réalisable dans un c.c.K lorsqu'il est équivalent (par subdivision et réduction) à un sous graphe partiel du squelette de K. L'intérêt de cette notion réside dans la nature combinatoire du problème de la réalisation car il s'agit, en fait, d'un problème d'homomorphisme de graphes. Il en résulte une importante conséquence : *aucune démonstration ne fait appel aux notions topologiques*. Après avoir remarqué que tout graphe est réalisable dans 1 c.c nous démontrons le résultat suivant : Tout graphe réalisable dans 1 c.c.K est réalisable comme *graphe partiel* du squelette d'un c.c équivalent à K ; ce qui permet une optimisation très fructueuse de la taille de la réalisation. Nous dégageons ensuite le concept de *réalisation squelettique* : un graphe G admet 1 réalisation squelettique dans K lorsque G est *isomorphe* au squelette de K. Le résultat principal s'énonce : Si G est réalisable dans K mais non dans un c.c de caractéristique supérieur à celle de K alors G admet une réalisation squelettique dans 1 c.c équivalent à K.

\* Enfin, à la **troisième partie**, nous définissons une *immersion* d'un graphe G dans une surface S comme étant un triplet (G,K,S) où G est réalisable dans K recouvrant S. Comme nous le voyons, l'introduction de cette notion a seulement pour but d'énoncer de manière plus globale les résultats ayant trait à la réalisation. Signalons toutefois la notion de *graphe inf-immérgeable* dans une surface : G est dit inf-immérgeable dans S lorsque G n'est immérgeable dans aucune surface de caractéristique supérieur à celui de S. Les résultats suivant sont obtenus :

Toute immersion de G dans		G est inf-immérgeable
S orientable est squelettique	$\Leftrightarrow \gamma(G) = \gamma(S) \Rightarrow$	dans S' tel que $\chi(S') \geq \chi(S)$

Toute immersion de G dans	$\Leftrightarrow$	G est inf-immérgeable
S non-orientable est squelettique		$\Rightarrow \bar{\gamma}(G) = \bar{\gamma}(S)$

G est inf-immérgeable dans	$\Rightarrow 0 \leq \bar{\gamma}(G) - 2\gamma(S) \leq 1$
S orientable	

(où  $\gamma(G)$  (resp.  $\bar{\gamma}(G)$ ) représente le genre orientable (resp. non - orientable) de  $G$ ).

Des deux premières équivalences on déduit le théorème de caractérisation des immersions 2-cellulaires de Youngs. Le troisième résultat constitue un point de départ de la notion de *genre maximum* d'un graphe introduit au chapitre IV.

Nous terminons cette partie en énonçant l'algorithme de construction des immersions squelettiques dans une surface orientable (dû à Heffter et Edmonds). Il s'agit d'une conséquence immédiate de la notion de rotation introduite dans la première partie.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un des problèmes posés par l'implantation d'un réseau dans une plaquette.

Après une brève introduction, la première partie présente une formalisation du problème en reprenant la notion de graphe de boîtes et d'étoiles dûe à Kuntzmann. Nous sommes amenés à définir une nouvelle classe d'objets : les B-graphes : c'est un couple  $(G, (\rho_b)_{b \in B})$  où  $G$  est un graphe biparti dont l'ensemble des sommets se compose de boîtes (représentant les éléments intégrés) et d'étoiles (images des équipotentielles) ;  $(\rho_b)_{b \in B}$  est une famille de rotations (chap. I) des boîtes. Comme nous le voyons, le problème, tout en venant se ranger de lui-même dans le cadre préparé au premier chapitre, généralise celui de la réalisation.

La deuxième partie propose une première caractérisation de la famille  $(\rho_b)_{b \in B}$  pour que  $G$  soit immergeable dans la plaquette. Après avoir fait remarquer que le résultat obtenu est efficace, dans la pratique, si le nombre d'arêtes de  $G$  est proche de celui d'un graphe maximal, nous démontrons, à la troisième partie, une deuxième caractérisation de la famille  $(\rho_b)_{b \in B}$ . Il s'ensuit un algorithme applicable aux graphes ayant peu d'arêtes.

L'obtention des résultats précédents n'a pu se faire que grâce au théorème de Mac Lane caractérisant les graphes planaires. De plus, l'hypothèse de connectivité de  $G$  joue un rôle non négligeable.

Nous concluons ce chapitre par une brève discussion sur la décomposition en couches d'un B-graphe non planaire.

Le troisième chapitre est composé de deux parties : la première est consacrée à une généralisation du théorème de Mac Lane, et la deuxième, mettant à profit les résultats obtenus dans la première, présente une caractérisation des graphes de genre 1 - c. à d. immergeables dans le tore et non dans la sphère.

\* Ainsi, après une brève analyse du théorème de Mac Lane où nous tentons de discerner différentes directions de généralisation possibles, le concept d'*immersion régulière* est introduite. Un graphe  $G$  est dit régulièrement immergeable dans une surface  $S$  lorsque  $G$  admet une immersion squelettique dans  $S$  telle que le bord de chaque face est un cycle élémentaire de  $G$ . Le fait remarquable est que tout graphe planaire 2 - connexe est régulièrement immergeable dans la sphère, d'où une nouvelle démonstration très simple du théorème de Mac Lane. Dans cet esprit, une généralisation s'obtient presque immédiatement.

La notion d'immersion régulière entraîne naturellement la définition suivante : une immersion est dite *simpliciale* si elle est régulière et si les bords de deux faces distinctes ont au plus une arête en commun. Ces deux notions posent d'intéressants problèmes quand on se borne aux graphes cubiques. Ainsi, une conjecture de Grunbaum, englobant celle des quatre couleurs, peut s'énoncer de la manière suivante : "Si un graphe cubique 3 - connexe admet une immersion simpliciale dans une surface orientable alors son indice chromatique est égal à 3". Cette conjecture est à rapprochée d'un résultat de Tutte : "Tout graphe cubique 2-connexe d'indice chromatique  $\geq 3$  est régulièrement immergeable dans une surface orientable".

\* A la Deuxième partie nous cherchons des conditions suffisantes pour qu'un graphe soit régulièrement immergeable dans le tore car, le cas général semble difficile.

Après avoir défini les *singularités* d'une immersion - un sommet (ou une arête) est singulier lorsqu'il apparaît plus d'une fois dans le bord d'une face - nous établissons le résultat suivant : Toute immersion squelettique d'un graphe 3 - connexe dans le tore admet au plus une face singulière contenant au plus deux singularités non équivalentes.

Nous terminons la deuxième partie en donnant deux théorèmes de caractérisation des graphes régulièrement immergeable dans le tore, en terme de

décomposition en sous graphes planaires.

Le quatrième chapitre est une contribution aux récents travaux sur l'étude du genre (orientable) maximum d'un graphe.

\* Pour mieux situer le problème traité, nous commençons par rappeler un résultat de Duke qui s'énonce : Si un graphe  $G$  a immersion squelettique dans deux surfaces orientables de genre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ( $\gamma_1 \leq \gamma_2$ ) alors  $G$  admet une immersion squelettique dans toute surface orientable de genre  $\gamma$  tel que  $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ . Nous l'étendrons ensuite aux surfaces non orientables. Il en résulte l'existence d'un *intervalle d'immersion*  $[\gamma, \gamma_M]$  pour tout graphe  $G$  :  $G$  admet une immersion squelettique dans une surface de genre  $g$  si et seulement si  $\gamma \leq g \leq \gamma_M$ .  $\gamma_M$  est appelé *genre maximum* de  $G$ ,  $\gamma$  étant évidemment le genre de  $G$  tel qu'il a été défini au 1er chapitre.

\* La deuxième partie consiste en une étude de quelques propriétés de  $\gamma_M(G)$  relativement aux opérations sur les graphes.

\* La troisième partie est consacrée à la détermination de  $\gamma_M(G)$ , en nous intéressant aux surfaces orientables car, comme nous allons le voir plus loin, le cas non orientable se traite plus facilement.

Pour ce faire, nous avons introduit une nouvelle technique d'immersion et d'un nouvel invariant. Pour tout graphe connexe  $G$ , nous définissons la *Déficiance de Betti* de  $G$  comme :

$$\xi(G) = \min_{CCG} \{ \xi(C) \mid \xi(C) = \text{nombre de composantes connexes } \}$$

impaires d'un coarbre  $C \subset G$

(par composante connexe impaire nous entendons celle qui contient un nombre impair d'arêtes). Nous établissons la formule :

$$\gamma_M(G) = \frac{1}{2} (\beta(G) - \xi(G))$$

Par contre :  $\bar{\gamma}_M(G) = \beta(G)$  (il s'agit du genre maximum non orientable)

\* A la quatrième partie, nous mettons à profit les résultats précédents pour présenter plusieurs conséquences. Elles concernent les graphes tels que  $\xi(G) \leq 1$  et les graphes satisfaisant à la propriété d'additivité du genre maximum. En particulier, la plupart des conjectures ayant trait au sujet sont résolues.

TABLE DES MATIERES

## *Chapitre I*

### UNE FORMALISATION COMBINATOIRE DU PROBLEME DE L'IMMERSION D'UN GRAPHE DANS UNE SURFACE

#### I - OBJET DU CHAPITRE

#### II - GRAPHE

- II.1 - Définitions. Notations
- II.2 - Subdivision. Réduction. Equivalence
- II.3 - Invariants

#### III - COMPLEXE CELLULAIRE

- III.1 - Rappels
- III.2 - Définitions. Notations
- III.3 - Exemples
- III.4 - Squelette d'un complexe cellulaire
  - III.4.1 - Sommets d'un complexe cellulaire
  - III.4.2 - Algorithme de recherche des sommets
  - III.4.3 - Définition du squelette
- III.5 - Complexes cellulaires particuliers. Triangulation
- III.6 - Orientabilité des complexes cellulaires. Dualité
  - III.6.1 - Définition
  - III.6.2 - Deuxième définition des complexes cellulaires orientables
  - III.6.3 - Dual d'un complexe cellulaire orientable
- III.7 - Subdivision. Réduction. Equivalence. Classification des complexes cellulaires
  - III.7.1 - Définitions
  - III.7.2 - Equivalence. Classification
- III.8 - Caractéristique d'Euler
- III.9 - Homologie
  - III.9.1 - Complexe cellulaire orienté
  - III.9.2 - Chaîne d'un complexe cellulaire
  - III.9.3 - Les opérations  $\partial_i$
  - III.9.4 - Groupes d'homologie

## *Chapitre II*

### SUR LA PLANARITE D'UNE CLASSE DE GRAPHS BIPARTIS : LES GRAPHS DE BOITES ET D'ETOILES

- I - POSITION DU PROBLEME
- II - UNE FORMALISATION DU PROBLEME
  - II.1 - Les B-graphes
  - II.2 - Définition
  - II.3 - Immersion d'un B-graphe dans une surface orientable
- III - ETUDE DU PROBLEME DANS DEUX CAS EXTREMES
  - III.1 - Planarité d'un R-graphe
  - III.2 - Planarité d'un graphe quelconque
- IV - ETUDE DU PROBLEME DANS LE CAS GENERAL
  - IV.1 - Hypothèses simplificatrices
  - IV.2 - Première solution
    - IV.2.1 - Graphe biparti planaire maximal
    - IV.2.2 - Graphe radial
    - IV.2.3 - Première caractérisation des B-graphes planaires
  - IV.3 - Deuxième solution
    - IV.3.1. - Introduction
    - IV.3.2 - Graphe des étoiles associé à un B-graphe
    - IV.3.3 - Deuxième caractérisation des B-graphes planaires.
- V - UNE DECOMPOSITION D'UN B-GRAPHE EN COUCHES PLANAIRES

## BIBLIOGRAPHIE

## *Chapitre III*

### IMMERSIONS REGULIERES

#### *Première Partie*

#### UNE CARACTERISATION DES GRAPHES REGULIEREMENT IMMERGEABLES

##### I - COMPLEXE CELLULAIRE REGULIER

###### I.1 - Définitions

###### I.2 - Caractérisation du squelette d'un complexe cellulaire régulier

###### I.2.1 - Base des cycles d'un graphe

###### I.2.2 - Voisinage d'un sommet dans un ensemble de cycles

###### I.2.3 - Connectivité du squelette d'un complexe cellulaire régulier

###### I.2.4 - Réalisation squelettique d'un graphe dans un complexe cellulaire régulier orientable

###### I.2.5 - Réalisation squelettique d'un graphe dans un complexe cellulaire régulier non-orientable

##### II - GRAPHES REGULIEREMENT IMMERGEABLES DANS UNE SURFACE

###### II.1 - Définition. Résultat

###### II.2 - Remarques

###### II.3 - Exemples

###### II.4 - Caractérisation des graphes planaires

###### II.5 - Immersion d'un graphe dans le plan projectif

##### III - IMMERSION DES GRAPHES CUBIQUES. IMMERSIONS SIMPLICIALES

###### III.1 - Immersion régulière des graphes cubiques

###### III.2 - Indice chromatique et immersion régulière

###### III.3 - Immersion simpliciales

IV - POLYEDRE

V - SURFACE

VI - REALISATION D'UN GRAPHE DANS UN COMPLEXE CELLULAIRE

VI.1 - Définitions

VI.2 - Résultats généraux

VI.3 - Etude des réalisations squelettiques

VII - IMMERSION D'UN GRAPHE DANS UNE SURFACE

VII.1 - Définitions

VII.2 - Résultats généraux

VII.3 - Caractérisations des immersions d'un graphe inf-immérgeable

VII.4 - Genre d'un graphe

VII.5 - Obtention des immersions squelettiques dans une surface orientable

BIBLIOGRAPHIE

## *Chapitre IV*

### GENRE MAXIMUM D'UN GRAPHE GRAPHES SUP-IMMERGEABLES

- I - PRESENTATION DU PROBLEME
- II - INTERVALLES D'IMMERSION D'UN GRAPHE. GRAPHES SUP-IMMERGEABLES
- III - CIRCUIT BI-EULERIEN ORIENTABLE
- IV - CARACTERISATION DES GRAPHES SUP-IMMERGEABLES
  - IV.1 - Introduction
  - IV.2 - Générations des graphes sup-immérgeables
  - IV.3 - Théorèmes de caractérisation
- V - DETERMINATION DU GENRE MAXIMUM (ORIENTABLE)
  - V.1 - Définition
  - V.2 - Formule
- VI - DETERMINATION DU GENRE MAXIMUM (NON-ORIENTABLE)
- VII - CONSEQUENCES
  - VII.1 - Effet de la suppression et de la contraction d'une arête sur le genre maximum
    - VII.1.1 - Suppression d'une arête
    - VII.1.2 - Contraction d'une arête
  - VII.2 - Une caractérisation des graphes de genre maximum nul
  - VII.3 - Sur quelques classes de graphes sup-immérgeables
    - VII.3.1 - Graphes 4-arête-connexes.
    - VII.3.2 - Graphes cubiques
    - VII.3.3 - Somme cartésienne de deux graphes
    - VII.3.4 - Produit cartésien de deux graphes
  - VII.4 - Sur l'additivité du genre maximum
    - VII.4.1 - Graphes admettant des isthmes
    - VII.4.2 - Graphes admettant des points d'articulation
    - VII.4.3 - Validité de l'additivité du genre maximum

### BIBLIOGRAPHIE

*Deuxième Partie*

GRAPHES RÉGULIÈREMENT IMMERGEABLES DANS LE TORE

- I - POSITION DU PROBLÈME
- II - GENRE ET ÉPAISSEUR
  - II.1 - Coupe d'un complexe cellulaire orientable
    - II.1.1 - Définition
    - II.1.2 - Relation entre les squelettes de  $K$  et  $K_\mu$ . Morphisme
  - II.2 - Décomposition en graphes planaires
- III - SINGULARITÉ D'UNE IMMERSION SQUELETTIQUE
  - III.1 - Subdivision barycentrique
  - III.2 - Singularité
    - III.2.1 - Définitions et notations
    - III.2.2 - Classification des singularités
- IV - ÉTUDE DES IMMERSIONS DANS LE TORE
  - IV.1 - Singularité d'une immersion torique
  - IV.2 - Classification des immersions toriques
  - IV.3 - Graphes régulièrement immergeables dans le tore
    - IV.3.1 - Une condition suffisante
    - IV.3.2 - Connectivité et immersion régulière

BIBLIOGRAPHIE



*Chapitre I*

UNE FORMALISATION COMBINATOIRE  
DU PROBLEME DE L'IMMERSION  
D'UN GRAPHE DANS UNE SURFACE

## I - OBJET DU CHAPITRE

Intuitivement, immerger un graphe  $G$  dans une surface  $S$  c'est réaliser un dessin de  $G$  dans  $S$  de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples et que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.

Formellement, il s'agit de trouver un homéomorphisme de  $|G|$ , une représentation géométrique de  $G$  dans  $\mathbb{R}^3$ , dans un sous-ensemble de  $S$ . Posé en ces termes, le problème, par sa nature topologique, semble difficile.

D'autre part, à l'image des cartes géographiques, un dessin de  $G$  dans  $S$  divise cette dernière en plusieurs régions, lesquelles ont entre elles un certain nombre de relations. En faisant abstraction de leur structure topologique, ces régions, munies de leurs relations mutuelles, forment un objet (combinatoire) dont la connaissance permettrait de reconstituer le dessin initial.

C'est cette constatation pratique qui nous a amené à proposer une formalisation combinatoire du problème d'immersion de graphes dans les surfaces.

Nous commençons donc par définir une classe d'objets combinatoires, appelés complexes cellulaires, dont la structure porte intrinsèquement un graphe. Certes, la théorie des variétés a consacré à ces objets des études détaillées. Mais, encore une fois, il s'agissait de préoccupations topologiques. Par conséquent, nous préférons rester sur le plan combinatoire en présentant un formalisme élémentaire qui a l'avantage d'être un tout autonome. Cette partie ne contient pas de résultats nouveaux. Ainsi, en se référant aux démonstrations existantes (et directement adaptables à notre formalisme) certaines propositions ont-elles été admises. D'autres, par contre, sont données avec démonstrations complètes, dès qu'elles nous semblaient être des versions nouvelles.

La deuxième partie formalise le problème de l'immersion d'un graphe dans une surface en le présentant comme un problème classique de la Théorie des Graphes, à savoir celui de la recherche des isomorphismes de deux graphes. Dans cette optique, deux des résultats fondamentaux connus, celui de Youngs [13] concernant les immersions 2-cellulaires et celui de Heffter Edmonds [6] fournissant un algorithme d'immersion dans le cas des surfaces orientables, sont démontrés d'une manière tout à fait nouvelle. D'autres résultats plus précis que ceux présentés dans [13] sont aussi obtenus.

## II - GRAPHE

II.1 - DEFINITIONS. NOTATIONS

Un graphe est un couple  $G = (X, E)$  où  $X(G)$  est un ensemble fini non vide appelé ensemble des sommets de  $G$  et où  $E(G)$  est une famille finie de parties à deux éléments (non nécessairement distincts) de  $X(G)$ .  $E(G)$  est l'ensemble des arêtes de  $G$ . En général, nous utiliserons les lettres minuscules  $x, y, z, \dots$  pour désigner les sommets de  $G$ , tandis que les lettres majuscules  $A, B, C, \dots$  représenteront les arêtes de  $G$ . Nous poserons :

$$n_0 = \text{Card}(X(G))$$

$$n_1 = \text{Card}(E(G))$$

Pour d'autres définitions classiques concernant les graphes, se reporter à [3].

II.2 - SUBDIVISION. REDUCTION. EQUIVALENCE

Une subdivision élémentaire d'un graphe consiste à remplacer, au moyen d'un nouveau sommet  $z$ , une certaine arête  $A = \{x, y\}$  par deux nouvelles arêtes  $A_1 = \{x, z\}$  et  $A_2 = \{z, y\}$ .

L'opération inverse, qui s'effectue quand le graphe a un sommet de degré 2, s'appelle réduction élémentaire.

Deux graphes sont dits équivalents quand l'on peut passer de l'un à l'autre par l'application d'une suite finie de subdivisions et de réductions élémentaires.

II.3 - INVARIANTS

La caractéristique d'un graphe  $G$  ayant  $n_0$  sommets et  $n_1$  arêtes est définie par :

$$\chi(G) = n_0 - n_1$$

Le nombre de Betti de  $G$ , quand  $G$  est connexe, est donné par :

$$\beta(G) = n_1 - n_0 + 1$$

Evidemment :

$$\chi(G) = 1 - \beta(G)$$

On vérifie aisément que  $\chi(G)$  et  $\beta(G)$  sont des invariants de la classe d'équivalence de  $G$ .

### III - COMPLEXE CELLULAIRE

#### III.1 - RAPPELS

a) Soit  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un ensemble fini. Un mot circulaire de longueur  $k$  de  $A$  est une suite d'éléments de  $A$  indexés par  $\mathbb{Z}/k$ . Nous le notons par :

$$\sigma = a_1 a_2 \dots a_k$$

Le successeur de  $a_i$  est  $a_{i+1}$ .

L'inverse de  $\sigma$  est défini par :

$$\bar{\sigma} = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1$$

Quand  $a_i \neq a_j$  dès que  $i \neq j \pmod{k}$  nous assimilons  $\sigma$  à une permutation circulaire de  $A$ .

Enfin, nous désignerons par  $S(A)$  l'ensemble des mots circulaires de  $A$ .

b) Etant donné une permutation  $\alpha$  de  $A$ , on appelle équivalence de  $\alpha$  la relation  $R_\alpha$  définie par

$$a_i R_\alpha a_j \iff \exists \lambda \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_j = \alpha^\lambda(a_i)$$

La restriction de  $\alpha$  à une des classes définies par  $R_\alpha$  est une permutation circulaire [8]. On a l'habitude d'écrire  $\alpha$  comme un produit de ses permutations circulaires :

$$\alpha = (a_1 a_2 \dots a_k)(a_{k+1} \dots) \dots \dots (\dots \dots)$$

Par abus de langage, l'ensemble quotient  $A/R_\alpha$  s'appellera ensemble des orbites de  $\alpha$ .

III.2 - DEFINITIONS. NOTATIONS

On appelle complexe cellulaire tout triplet  $K = (\Sigma, \partial, \Phi)$  où :

-  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots\}$  est un ensemble fini non vide dont les éléments sont nommés arcs. Dans  $\Sigma$  est donnée une involution (sans point fixe) notée  $a \rightarrow a'$  (avec  $(a')' = a$ ). Les deux arcs  $a$  et  $a'$  sont dits opposés.

-  $\Phi = \{f_1, f_2, \dots\}$  est un ensemble fini non vide dont les éléments s'appellent facettes.  $\Phi$  est muni d'une involution (sans point fixe) notée  $f \rightarrow f'$  (avec  $(f')' = f$ ).  $f$  et  $f'$  sont dits opposés.

-  $\partial$  est une application de  $\Phi$  dans  $S(\Sigma)$ , l'ensemble des mots circulaires de  $\Sigma$  ( $\partial(f)$  est le bord de  $f$ ).

Ces données vérifient les 3 conditions suivantes :

C1. Si  $\partial(f) = a_1 a_2 \dots a_k$  alors  $\partial(f') = a'_k a'_{k-1} \dots a'_2 a'_1$  ( $k \geq 1$ )

C2. Chaque arc figure exactement deux fois dans la famille des bords  $\{\partial(f_i) \mid f_i \in \Phi\}$ .

C3.  $K$  ne peut pas s'exprimer comme union disjointe de deux complexes cellulaires.

Remarques : - On appelle arête de  $K$  toute paire d'arcs opposés et l'on note  $A = \{a, a'\}$ . Nous désignerons par  $E(K)$  l'ensemble des arêtes de  $K$ .

- Toute paire de facettes opposées, désignées par  $F = \{f, f'\}$ , constitue une face de  $K$ .

- La condition C3 exprime la connexité de  $K$ .

- Dans la famille des bords, on peut échanger  $a$  et  $a'$  à condition que l'échange s'effectue partout où ils figurent.

III.3 - EXEMPLES

Dans les exemples qui suivent nous ne donnerons que la moitié des bords. L'autre moitié s'en déduit par passage à l'opposé.

- Exemple 1a

$$\Sigma = \{a, a'\}$$

$$\Phi = \{f, f'\}$$

$$\partial(f) = aa'$$

- Exemple 2a

$$\Sigma = \{a, b, a', b'\}$$

$$\Phi = \{f, f'\}$$

$$\partial(f) = aabb'$$

- Exemple 3a

$$\Sigma = \{1, 1', 2, 2', \dots, 6, 6'\}$$

$$\Phi = \{f, f', g, g', h, h'\}$$

$$\partial(f) = 1234 ; \partial(g) = 1'536 ; \partial(h) = 2'6'45$$

- Exemple 4a

$$\Sigma = \{1, 1', 2, 2', \dots, 9, 9'\}$$

$$\Phi = \{f, f', g, g', h, h'\}$$

$$\partial(f) = 12'39 ; \partial(g) = 456'9' ; \partial(h) = 1'68'274'3'85'7'$$

III.4 - SQUELETTE D'UN COMPLEXE CELLULAIREIII.4.1 - Sommets d'un complexe cellulaire

Etant donné un mot circulaire  $a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_k$  ( $k \geq 1$ ), rappelons que le successeur de  $a_i$  est  $a_{i+1} \pmod{k}$ .

D'après C2 (III.2), dans la famille des bords des facettes d'un complexe cellulaire  $K$ , chaque arc admet deux successeurs qui, ensemble, constituent sa paire de successeurs.

Un mot circulaire  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_k$  appartenant à  $S(\Sigma)$  est dit admissible si, pour tout  $i$ , la paire de successeurs de  $a_i$  est  $\{a_{i-1}^!, a_{i+1}^!\}$  (il peut arriver que  $a_{i+1}^! = a_{i-1}^!$ ).

D'après C1 (III.2) si  $a_1 a_2 \dots a_k$  est admissible, alors son inverse  $a_k a_{k+1} \dots a_2 a_1$  l'est aussi.

Par définition, un sommet de  $K$  est une paire de mots circulaires admissibles dont l'un est l'inverse de l'autre. On note :

$$x = \{a_1 a_2 \dots a_k, a_k a_{k-1} \dots a_1\}$$

Un arc  $a_i$  figurant dans le second membre est dit entrant dans le sommet  $x$  tandis que son opposé  $a_i^!$  est un arc sortant de  $x$ .

Nous désignerons par  $K_0$  l'ensemble des sommets de  $K$ .

### III.4.2 - Algorithme de construction des sommets

1. Choisir un arc de  $\Sigma$ , mettons  $a_1$ . Poser  $\rho_1 = a_1$ .
2. Si les deux successeurs de  $a_i$  ont leurs opposés figurant dans  $\rho_i$  alors aller à 4.
3. Soit  $a_{i+1}^!$  un successeur de  $a_i$  dont l'opposé  $a_{i+1}$  ne figure pas dans  $\rho_i$ . Poser  $\rho_{i+1} = \rho_i a_{i+1}^!$ . Aller à 2.
4.  $x = \{\rho_i, \bar{\rho}_i\}$ .
5. Fin.

#### Justification

Considérons  $\rho_1 = a_1$ . Soit  $\{b, c\}$  sa paire de successeurs. Si  $b = a_1^!$  alors il existe une facette  $f$  dont le bord est de la forme  $\partial(f) = \dots a_1 a_1^! \dots$ . D'après C1 (III.2) le bord de la facette  $f'$ , l'opposée de  $f$ , s'écrit  $\partial(f') = \dots a_1 a_1^! \dots$ . Par conséquent, on a aussi  $c = a_1^!$ . Donc  $x = \{a_1, a_1^!\}$ .

Supposons alors  $b \neq a_1^!$  (donc  $c \neq a_1^!$  aussi, d'après ce qui précède). En posant  $a_2 = b^!$  ( $\alpha_2 = c^!$ ) on obtient  $\rho_2 = a_1 a_2^!$  ( $\psi_2 = a_1 \alpha_2^!$ ).

Considérons alors  $\rho_j = a_1 a_2^! \dots a_j^!$  ( $\psi_j = a_1 \alpha_2^! \dots \alpha_j^!$ ) ( $j \geq 2$ ). Je dis que  $a_{j-1}^!$  ( $\alpha_{j-1}^!$ ) est un successeur de  $a_j$ . En effet, par construction,  $a_j^!$  est un successeur de  $a_{j-1}$ , c'est à dire qu'il existe une facette  $f$  dont le bord est de la forme  $\partial(f) = \dots a_{j-1} a_j^! \dots$ . Le bord de la facette opposée s'écrit donc  $\partial(f') = \dots a_j a_{j-1}^! \dots$ . Autrement dit,  $a_{j-1}^!$  est un successeur de  $a_j$ . Par conséquent, dans l'algorithme précédent, le choix de  $a_{j+1}^!$  ( $\alpha_{j+1}^!$ ) est unique dès que  $j \geq 2$ .

Soit alors  $i$  le plus petit entier tel que l'opposé du successeur de  $a_i$  ( $\alpha_i$ ) figure dans  $\rho_i$  ( $\psi_i$ ). Autrement dit, dans

$$\begin{aligned} \rho_i &= a_1 a_2^! \dots a_{j-1}^! a_j a_{j+1}^! \dots a_{i-1}^! a_i \\ (\psi_i &= a_1 \alpha_2^! \dots \alpha_{j-1}^! \alpha_j \alpha_{j+1}^! \dots \alpha_{i-1}^! \alpha_i) \end{aligned}$$

toutes les lettres sont distinctes deux à deux, et il existe un indice  $j$  ( $1 \leq j < i$ ) tel que :

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_j \\ (\alpha_{i+1} &= \alpha_j) \end{aligned}$$

où  $a_{i+1}^!$  ( $\alpha_{i+1}^!$ ) est l'opposé du successeur de  $a_i$  ( $\alpha_i$ ).

Je dis que  $j = 1$ . En effet, par construction, la paire de successeurs de  $a_j$  ( $\alpha_j$ ) est  $\{a_{j-1}^!, a_{j+1}^!\}$  ( $\{\alpha_{j-1}^!, \alpha_{j+1}^!\}$ ). De même, la paire de successeurs de  $a_i$  ( $\alpha_i$ ) est  $\{a_{i-1}^!, a_{i+1}^! = a_j^!\}$  ( $\{\alpha_{i-1}^!, \alpha_{i+1}^! = \alpha_j^!\}$ ). Ce qui implique qu'il existe trois facettes  $f_1, f_2, f_3$  telles que :

$$\begin{aligned} \partial(f_1^!) &= \dots a_{j-1} a_j^! \dots && (\alpha_{j-1}^! \alpha_j^!) \\ \partial(f_2^!) &= \dots a_{j+1} a_j^! \dots && (\alpha_{j+1}^! \alpha_j^!) \\ \partial(f_3^!) &= \dots a_i a_j^! \dots && (\alpha_i^! \alpha_j^!) \end{aligned}$$

Comme chaque arc ne figure que deux fois dans la famille des bords (d'après C2, III.2), on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} a_i &= a_{j-1} && (\alpha_i = \alpha_{j-1}) \\ \text{ou} & && \\ a_i &= a_{j+1} && (\alpha_i = \alpha_{j+1}) \end{aligned}$$

Ce qui contredit la définition de  $i$  si  $j > 1$ . Donc  $j = 1$ .

Comme  $a_2 = b'$  ( $\alpha_2 = c'$ ), on a alors  $a_i = c'$  ( $\alpha_i = b'$ ).

Finalement, on vérifie sans difficulté que  $\rho_i = \bar{\Psi}_i$ .

Ce qui achève la démonstration de l'algorithme.  $\square$

De la justification de l'algorithme de recherche des sommets de  $K$ , nous pouvons tirer deux résultats, à savoir :

Proposition 1 : Tout mot circulaire admissible de  $S(\Sigma)$  est une permutation circulaire de  $\Sigma$ .

Proposition 2 : Tout arc est entrant dans un sommet unique.

Ce qui permet d'introduire la :

### III.4.3 - Définition du squelette d'un complexe cellulaire

Soit  $K = (\Sigma, \partial, \Phi)$  un complexe cellulaire. Désignons par  $K_0$  l'ensemble des sommets de  $K$ , et  $E$  l'ensemble des arêtes de  $K$ .

Par définition, le squelette de  $K$  est le graphe

$$K_1 = (K_0, E)$$

où une arête  $A = \{a, a'\}$  est incidente à un sommet  $x$  si et seulement si  $a$  ou  $a'$  est un arc entrant dans  $x$ .

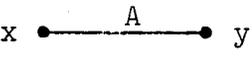
D'après la Proposition 2 (III.4.2), chaque arête est incidente à deux sommets (non nécessairement distincts) exactement.  $K_1$  est bien un graphe.

- Exemple 1b

Soit le complexe cellulaire de l'exemple 1a. On a :

$$K_0 = \{x, y\} ; E = \{A\} \text{ où :}$$

$$x = \{a\}, y = \{a'\} ; A = \{a, a'\}$$

$K_1$  est donc le graphe 

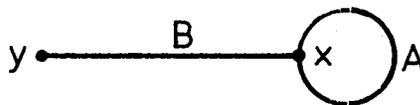
- Exemple 2b

Soit le complexe cellulaire de l'exemple 2a. On a :

$$K_0 = \{x, y\} ; E = \{A, B\} \text{ où :}$$

$$x = \{aa'b', b'a'a\}, y = \{b\} ; A = \{a, a'\}, B = \{b, b'\}$$

$K_1$  est donc le graphe

- Exemple 3b

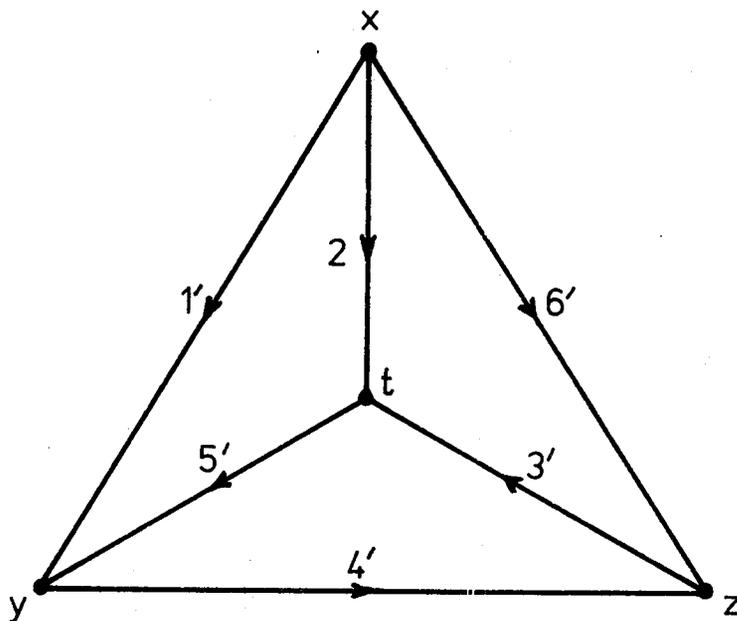
Soit le complexe cellulaire de l'exemple 3a. On a :

$$K_0 = \{x, y, z, t\} ; E = \{A, B, C, D, E, F\} \text{ où :}$$

$$x = \{12'6, 62'1\}, y = \{1'45', 5'41'\}, z = \{34'6', 6'4'3\}, t = \{23'5, 53'2\}$$

$$A = \{1, 1'\}, B = \{2, 2'\}, C = \{3, 3'\}, D = \{4, 4'\}, E = \{5, 5'\}, F = \{6, 6'\}$$

$K_1$  est donc le graphe :



- Exemple 4b

Soit le complexe cellulaire de l'exemple 4a. On a :

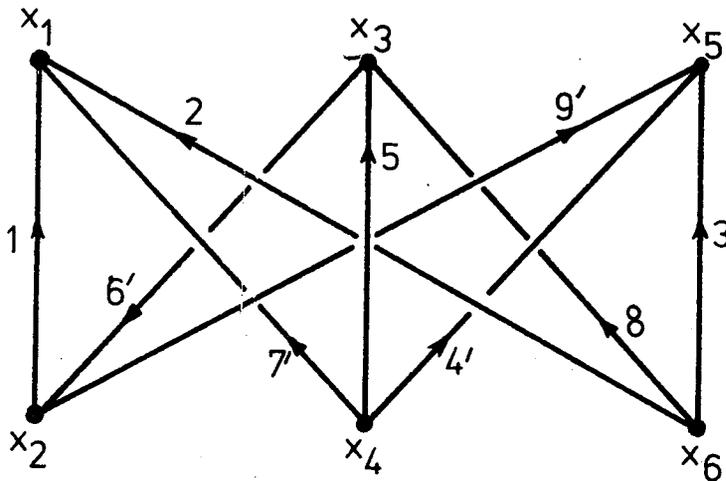
$$K_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_6\} ; E = \{A_1, A_2, \dots, A_9\} \text{ où :}$$

$$x_1 = \{127', 7'21\}, x_2 = \{1'6'9, 96'1'\}, x_3 = \{685, 586\}, x_4 = \{45'7, 75'4\},$$

$$x_5 = \{39'4', 4'9'3\}, x_6 = \{2'3'8', 8'3'2'\}$$

$$A_i = \{i, i'\} \quad (1 \leq i \leq 9)$$

$K_1$  est donc le graphe biparti :



Dans les exemples précédents, on peut remarquer que le squelette d'un complexe cellulaire est toujours un graphe connexe. Ceci est une propriété générale:

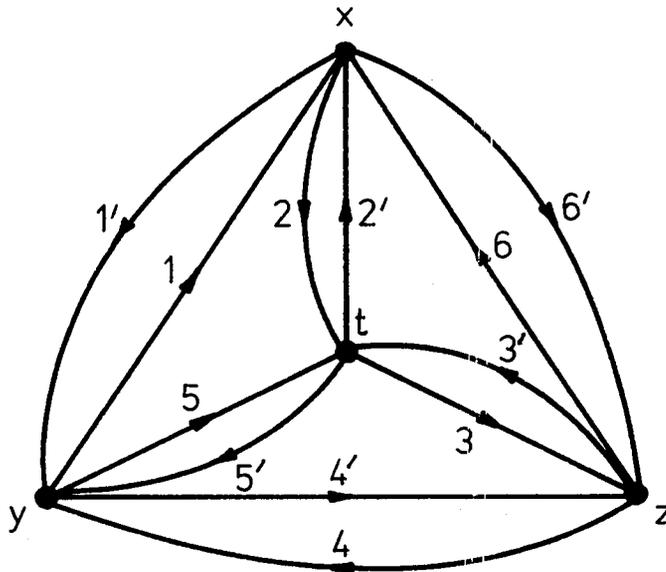
Théorème 1 [1] [5] : Un complexe cellulaire est connexe si et seulement si son squelette est connexe.

III.4.4 - Remarques

a) Soit  $K_1$  le squelette d'un complexe cellulaire  $K$ . Considérons un sommet  $x = \{a_1 a_2 \dots a_k, a_k \dots a_2 a_1\}$ . Sur chaque arête  $A_i = \{a_i, a_i'\}$  incidente à  $x$ , mettons une flèche dirigée vers  $x$  si  $a_i$  est sous forme directe, en convenant que la flèche opposée portera l'étiquette  $a_i'$ .

La proposition 2 (III.4.2) assure la cohérence de cette orientation.

Ainsi, nous obtenons un graphe orienté que nous notons par  $\vec{K}_1$ .  
Par exemple, le graphe  $\mathfrak{J}_b$  devient :



Comme dans la définition d'un complexe cellulaire où les arcs opposés sont interchangeable, on peut, dans l'orientation donnée ci-dessus, changer le sens de toutes les flèches. En particulier, inverser le sens d'une flèche revient à remplacer son étiquette par celle opposée. D'autre part, remarquons aussi que l'orientation de  $\vec{K}_1$  définie précédemment est compatible avec notre définition des arcs entrants et sortants. Ceci est une pure convention fixée par commodité comme nous allons le voir.

b) Considérons le complexe cellulaire de l'exemple 3a et son squelette orienté illustré en a). On constate que le bord de chaque face est un circuit (ou un anti-circuit) de  $\vec{K}_1$ . Ceci est une propriété générale dont la démonstration ne présente pas de difficultés.

c) La proposition 1 (II.4.2) signifie que tout mot circulaire admissible est une permutation circulaire des arcs entrant dans un sommet du graphe  $\vec{K}_1$ . Ce résultat a d'importantes conséquences (voir III.6).

d) Pour tout complexe cellulaire  $K$ , nous avons défini son squelette  $K_1$  qui est un graphe. Inversement, étant donné un graphe  $G$ , peut-on le considérer comme le squelette d'un certain complexe cellulaire ? La réponse à cette importante question sera donnée dans le paragraphe VI de ce chapitre.

### III.5 - COMPLEXES CELLULAIRES PARTICULIERS. TRIANGULATION

Un complexe cellulaire est dit simple lorsque son squelette est un graphe simple (c'est à dire, sans boucle ni arête multiple). Le complexe cellulaire donné dans l'exemple 1a est simple, tandis que celui de l'exemple 2a ne l'est pas.

Un complexe cellulaire est dit régulier lorsque le bord de chaque facette est un cycle élémentaire de son squelette (voir III.4.4b). L'étude des squelettes des complexes cellulaires réguliers fera l'objet du chapitre III.

Enfin, on appelle triangulation (ou complexe simplicial) tout complexe cellulaire simple dont le bord de chaque facette est de longueur 3.

### III.6 - ORIENTABILITE DES COMPLEXES CELLULAIRES. DUALITE

#### III.6.1 - Définition

Soit un complexe cellulaire  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$ . Une orientation de  $K$  est la donnée de la famille des couples (ordonnés) de bords opposés.

$K$  est dit orientable lorsqu'il existe une orientation telle que tout arc apparaît exactement une fois dans l'ensemble des bords figurant en première position de chaque couple. Evidemment, l'ensemble des bords opposés des précédents possède aussi la propriété. Par conséquent, quand  $K$  est orientable, il possède exactement deux orientations qui sont dites opposées.

#### - Exemple 3c

Considérons, pour le complexe cellulaire de l'exemple 3a, la liste :

$$\Omega = \{(1234, 4'3'2'1'), (1'536, 6'3'5'1), (2'6'45, 5'4'62)\}$$

On s'aperçoit que quel que soit la manière d'ordonner les couples du second membre, il existe toujours un arc qui figure deux fois. Le complexe cellulaire considéré n'est donc pas orientable.

#### - Exemple 4c

Considérons, pour le complexe cellulaire de l'exemple 4a, l'orientation :

$$\Omega = \{(12'39, 9'3'21'), (456'9', 9654), (1'68'274'3'85'7', 758'347'2'86'1)\}$$

Dans l'ensemble des bords figurant en première position de chaque couple, chaque arc apparaît exactement une fois. Le complexe cellulaire considéré est donc orientable.

### III.6.2 - Deuxième définition des complexes cellulaires orientables

Considérons un complexe cellulaire orientable  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$ . Par définition, il existe un ensemble  $\Omega_1$  de bords dans lequel chaque arc de  $K$  figure exactement une fois. Par conséquent, chaque bord appartenant à  $\Omega_1$  représente une permutation circulaire de  $\Sigma$ . D'après III.1, le produit de toutes ces permutations circulaires constitue une permutation de  $\Sigma$ . Nous désignerons cette dernière par  $\varphi$  et nous écrivons :

$$\varphi = \Pi(\varphi_i) \quad (\varphi_i \in \Omega_1)$$

Ainsi, à tout complexe cellulaire orientable, nous venons d'associer une permutation de l'ensemble de ses arcs.

Inversement, soit  $\Sigma$  un ensemble fini muni d'une involution sans point fixe  $\alpha$  (on notera  $\alpha(a) = a'$  et  $\alpha(a') = a$ ). Considérons alors une permutation  $\varphi$  de  $\Sigma$  dont la décomposition en produit de permutations circulaires s'écrit :

$$\varphi = \Pi(\varphi_i)$$

A chaque  $\varphi_i$  faisons correspondre la permutation  $\varphi_i^!$  qui s'obtient en remplaçant dans  $\overline{\varphi_i}$  (l'inverse de  $\varphi_i$ ) chaque lettre par son opposée.

Enfin, à tout couple  $(\varphi_i, \varphi_i^!)$ , associons un couple  $(f_i, f_i^!)$  dont les éléments appartiennent à un ensemble  $\phi$  muni d'une involution  $f \rightarrow f'$ . On posera :

$$\begin{aligned} \partial(f_i) &= \varphi_i \\ \partial(f_i^!) &= \varphi_i^! \end{aligned}$$

Il est apparent que le triplet  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$  vérifie tous les axiomes d'un complexe cellulaire sauf, peut-être, celui définissant la connexité. Nous anticipons (voir III.6.3) en affirmant que  $K$  est connexe si et seulement si le groupe engendré par  $\varphi$  et  $\alpha$  opère transitivement dans  $\Sigma$ . A partir de maintenant, nous supposons cette condition remplie.

Ceci étant, il est évident que le complexe cellulaire  $K$  défini ci-dessus est, par construction, orientable.

Nous avons alors le :

**Théorème 2** : La donnée d'un complexe cellulaire orientable équivaut à la donnée d'un triplet  $C = (\Sigma, \alpha, \varphi)$  où  $\alpha$  est une involution et  $\varphi$  une permutation de  $\Sigma$ .

C'est dans [8] que le triplet  $C = (\Sigma, \alpha, \varphi)$  défini plus haut a été introduit pour la première fois.

### III.6.3 - Dual d'un complexe cellulaire orientable

Considérons un complexe cellulaire (orientable ou non)  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$ . Nous savons, d'après la proposition 1 (III.4.2) que tout mot admissible définissant un sommet du squelette est une permutation circulaire. D'autre part, la proposition 2 (III.4.2) assure que tout arc est entrant dans un sommet unique.

Supposons maintenant  $K$  orientable et prenons sa deuxième définition, c'est à dire  $C = (\Sigma, \alpha, \varphi)$ . Appliquons à  $C$  l'algorithme de recherche des sommets (III.4.2). On s'apercevra que, pour tout sommet  $x$ , il existe une permutation circulaire des arcs entrant dans  $x$ , formant une orbite de la permutation  $\rho = \alpha\varphi$  de  $\Sigma$ . De plus, cette correspondance est biunivoque, ce qui implique en particulier que  $K_0$  est isomorphe à  $\Sigma/R_\rho$  (voir III.1).

Ce qui précède justifie la :

Définition : Etant donné un complexe cellulaire orientable  $C = (\Sigma, \alpha, \varphi)$ , on appelle dual de  $C$  le complexe cellulaire  $C^* = (\Sigma, \alpha, \rho = \alpha\varphi)$

Evidemment  $C^*$  est orientable et l'on a  $(C^*)^* = C$  car  $\alpha\rho = \alpha^2\varphi$  ( $\alpha$  est une involution, rappelons-le).

D'après la construction précédente, nous avons la double bijection :

face de  $C \longleftrightarrow$  sommet de  $C^*$

bord d'une face de  $C \longleftrightarrow$  permutation circulaire des arcs entrant dans un  
sommet de  $C^*$

#### - Exemple 4d

Considérons le complexe cellulaire de l'exemple 4b. Il est orientable (d'après l'exemple 4c). On a donc :

$$\varphi = (12'39)(456'9')(1'68'274'3'85'7')$$

$$\rho = \alpha\varphi = (127')(1'6'9)(685)(45'7)(39'4')(2'3'8')$$

Revenons maintenant à la connexité de  $C = (\Sigma, \alpha, \varphi)$ . Nous savons, d'après le théorème 1 (III.4.3) que  $K$  est connexe si et seulement si son squelette est connexe. Or le squelette de  $C$  est déterminé par  $\alpha$  et  $\alpha\varphi$ , d'après ce qui précède. D'autre part, un circuit du squelette est une orbite de  $\alpha^i\varphi^j$ . Par conséquent, le squelette est connexe si et seulement si le groupe engendré par  $\varphi$  et  $\alpha$  opère transitivement dans  $\Sigma$ . Ce qui justifie l'affirmation admise en III.6.2.

- Remarques : a) Etant donné un complexe cellulaire  $K = (\mathcal{L}, \partial, \phi)$ , il existe un algorithme simple pour reconnaître son orientabilité. En effet :
- Choisir un bord  $\varphi_1$  contenant l'arc  $a_1$ . Si dans  $\varphi_1$  figurent deux lettres identiques, alors  $K$  n'est pas orientable.
  - Soit  $a_2$  un arc de  $\varphi_1$  dont l'opposé  $a_2'$  n'y apparaît pas ( $a_2$  existe, sinon, ou bien  $K$  n'a qu'une face et dans ce cas il est orientable, ou bien  $K$  n'est pas connexe). Soit  $\varphi_2$  le bord ( $\neq \varphi_1$ ) contenant  $a_2'$ .
  - S'il existe une lettre commune à  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , alors  $K$  n'est pas orientable, sinon continuer.

Dans le cas où tous les bords ont été examinés quand l'algorithme s'arrête, le complexe cellulaire est orientable.

- b) Le formalisme définissant un complexe cellulaire tel que nous le présentons ici ne permet pas de définir un dual pour un complexe cellulaire non orientable. L'impossibilité est clairement montrée par la définition du squelette où un sommet est défini par une permutation circulaire tandis que le bord d'une facette ne l'est pas forcément.

Par conséquent, pour avoir une théorie générale de la dualité, on ne doit considérer que les complexes simples et réguliers (voir III.5) et cela, pour pouvoir représenter chaque bord comme une permutation circulaire des arcs. Ceci étant, une autre difficulté subsiste, à savoir la répétition des arcs identiques dans un ensemble de bord (voir III.6.1). Cette éventualité disparaît en convenant de représenter chaque bord par une permutation circulaire de ses sommets ; chaque sommet du squelette est bien entendu une permutation circulaire des sommets qui lui sont adjacents.

C'est cette présentation que la plupart des auteurs des ouvrages classiques ont adoptées [10], [11], [12].

### III.7 - SUBDIVISION, REDUCTION, EQUIVALENCE, CLASSIFICATION DES COMPLEXES CELLULAIRES

#### III.7.1 - Définitions

Etant donné un complexe cellulaire, rappelons qu'une face est une paire de facettes opposées  $F = \{f, f'\}$ . Supposons que  $\partial(f) = a_1 a_2 \dots a_i \dots a_k$  et  $\partial(f') = a_k' \dots a_1'$ . Considérons alors les deux opérations suivantes :

S1. Remplacer dans tous les bords où ils apparaissent  $a_i$  et  $a'_i$  par  $b_i c_i$  et  $c'_i b'_i$  respectivement ( $b_i, b'_i, c_i, c'_i$  sont des nouveaux arcs).

S2. Remplacer une face  $F = \{f, f'\}$  par deux nouvelles faces  $F_1 = \{f_1, f'_1\}$  et  $F_2 = \{f_2, f'_2\}$  en introduisant 2 nouveaux arcs opposés  $b, b'$ . Si le bord de  $f$  ( $f'$ ) est de la forme donnée plus haut, on posera  $\partial(f_1) = a_1 a_2 \dots a_i b$  ( $\partial(f'_1) = b' a'_i \dots a'_2 a'_1$ ) et  $\partial(f_2) = b' a_{i+1} \dots a_{k-1} a_k$  ( $\partial(f'_2) = a'_k a'_{k-1} \dots a'_{i+1} b$ ).

Nous désignerons par  $R1$  et  $R2$  les opérations inverses (quand cela est possible) de  $S1$  et  $S2$  respectivement.

$S1$  et  $S2$  sont nommés subdivisions élémentaires.

$R1$  et  $R2$  s'appellent réductions élémentaires.

Remarques : a) Quand on applique  $S1$  ( $R1$ ) à un complexe cellulaire  $K$ , on obtient un nouveau complexe cellulaire dont le squelette est une subdivision (réduction) de celui de  $K$  (voir II.2).

b) Quand on applique  $S2$  ( $R2$ ) à un complexe cellulaire  $K$ , on obtient un nouveau complexe cellulaire dont le squelette est celui de  $K$  auquel on ajoute (enlève) une arête.

c) On dit qu'un complexe cellulaire est une subdivision d'un autre lorsque le premier s'obtient à partir du second par l'application d'une suite finie de subdivisions élémentaires. La proposition suivante est souvent fort utile :

Proposition 3 : Tout complexe cellulaire admet une subdivision qui est un complexe cellulaire simple et régulier. En particulier tout complexe cellulaire a une subdivision qui constitue une triangulation.

Pour une démonstration, voir [10].

d) L'orientabilité est conservée par les opérations de subdivisions et de réductions élémentaires.

### III.7.2 - Equivalence et classification des complexes cellulaires

Deux complexes cellulaires sont dits équivalents lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par l'application d'une suite finie de subdivisions et de réductions élémentaires.

Par invariants combinatoires, nous entendons les invariants de chaque classe d'équivalence. Leur recherche constitue un des objets de l'étude qui suit.

Avant d'énoncer le théorème de classification des complexes cellulaires, nous allons définir un ensemble de complexes cellulaires remarquables qui serviront de modèle pour chaque classe d'équivalence.

- Complexe cellulaire  $M_0$

$$\Sigma_0 = \{a, a'\}$$

$$\phi_0 = \{f, f'\}$$

$$\partial(f) = aa'$$

- Complexe cellulaire  $M_g$  ( $g \in \mathbb{N} - \{0\}$ )

$$\Sigma_g = \{a_1, a_1', \dots, a_g, a_g', b_1, b_1', \dots, b_g, b_g'\}$$

$$\phi_g = \{f, f'\}$$

$$\partial(f) = a_1 b_1 a_1' b_1' a_2 b_2 a_2' b_2' \dots a_g b_g a_g' b_g'$$

$M_g$  a donc  $4g$  arcs, une face. Manifestement  $M_g$  est orientable.

- Complexe cellulaire  $N_h$  ( $h \in \mathbb{N} - \{0\}$ )

$$\Sigma_h = \{c_1, c_1', c_2, c_2', \dots, c_h, c_h'\}$$

$$\phi_h = \{f, f'\}$$

$$\partial(f) = c_1 c_1' c_2 c_2' \dots c_h c_h'$$

$N_h$  a donc  $2h$  arcs, une face. Manifestement  $N_h$  est non-orientable.

Le théorème suivant constitue un résultat remarquable:

Théorème 3 : Tout complexe cellulaire orientable est équivalent à un  $M_g$  ( $g \geq 0$ )  
 Tout complexe cellulaire non-orientable est équivalent à un  $N_h$  ( $h > 0$ ).

Pour une démonstration, voir [4] ou [11].

### III.8 - CARACTERISTIQUE D'EULER

Etant donné un complexe cellulaire  $K$ , désignons par :

$n_0$  le nombre de ses sommets ( $n_0 = \text{card}(K_0)$ )

$n_1$  le nombre de ses arêtes ( $n_1 = \frac{1}{2} \text{Card}(\Sigma)$ )

$n_2$  le nombre de ses faces ( $n_2 = \frac{1}{2} \text{Card}(\phi)$ )

On appelle caractéristique d'Euler de  $K$  la somme

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2$$

**Proposition 4 :** La caractéristique d'Euler est un invariant combinatoire.

En effet, il suffit de vérifier que  $\chi(K)$  reste constant quand on effectue des opérations de subdivisions et de réductions élémentaires.

Or : S1 (R1) augmente (diminue)  $n_0$  de 1,  $n_1$  de 1 et laisse inchangé  $n_2$ .

S2 (R2) augmente (diminue)  $n_1$  de 1,  $n_2$  de 1 et laisse inchangé  $n_0$ .

La proposition est donc démontrée.  $\square$

On vérifie aisément que :

$$\chi(M_g) = 2-2g \quad (g \geq 0)$$

$$\chi(N_h) = 2-h \quad (h > 0)$$

Ce qui montre que les  $M_g$  ne sont pas équivalents deux à deux. Même conclusion pour les  $N_h$ . Par conséquent, on peut affirmer que le théorème 3 constitue une classification complète des complexes cellulaires.

Enfin, remarquons que si  $K$  est orientable, son dual  $K^*$  a la même caractéristique.  $K$  et  $K^*$  sont donc équivalents.

### III.9 - HOMOLOGIE

#### III.9.1 - Complexe cellulaire orienté

Jusqu'à maintenant les éléments opposés (arcs, facettes, ...) d'un complexe cellulaire jouent un rôle parfaitement symétrique de sorte qu'une lettre, a par exemple, désigne aussi bien un arc que son opposé. Nous allons briser cette symétrie en introduisant la :

Définition : Un complexe cellulaire  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$  est dit orienté lorsque dans l'ensemble des arcs (facettes)  $\Sigma(\phi)$ , la moitié de ses éléments sera choisie comme arcs (facettes) directs (l'autre moitié contiendra des éléments dits opposés).

De plus, lorsque  $K$  est orientable, le choix sera tel que dans l'ensemble des bords des facettes directes, chaque arc apparaît une fois et une seule.

### III.9.2 - Chaînes d'un complexe cellulaire

Convention : Dans la suite, il s'agit de construire un certain nombre d'espaces vectoriels attachés à un complexe cellulaire  $K$ . Lorsque  $K$  est orientable, le corps de base sera  $R$ . Si  $K$  est non orientable, on prendra le corps à deux éléments  $\{0,1\}$ . Pour raisons d'économie, nous présentons la théorie de l'homologie seulement dans le cas où  $K$  est orientable.

Etant donné un complexe cellulaire  $K$ , notons par :

$x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$  les sommets de  $K$

$a_1, a_2, \dots, a_{n_1}$  les arcs directs de  $K$

$f_1, f_2, \dots, f_{n_2}$  les facettes directes de  $K$ .

Par définition :

-  $C_0(K)$ , espace des 0-chaînes de  $K$ , est l'espace vectoriel engendré par les  $x_i$ . La dimension de  $C_0(K)$  est donc  $n_0$ . Une 0-chaîne s'écrit formellement :

$$C_0 = \sum \lambda_i x_i$$

-  $C_1(K)$ , espace des 1-chaînes de  $K$ , est l'espace vectoriel engendré par les  $a_i$ . La dimension de  $C_1(K)$  est donc  $n_1$ . On a :

$$C_1 = \sum \mu_i a_i$$

-  $C_2(K)$ , espace des 2-chaînes de  $K$ , est l'espace vectoriel engendré par les  $f_i$ . La dimension de  $C_2(K)$  est donc  $n_2$ . On a :

$$C_2 = \sum \nu_i f_i$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, nous cessons de faire référence à  $K$  en parlant de l'espace des  $i$ -chaînes.

### III.9.3 - Les opérations $\partial_i$ ( $i = 0, 1, 2, 3$ )

-  $\partial_0$  : c'est l'homomorphisme trivial de  $C_0$  dans 0.

-  $\partial_1$  : c'est un homomorphisme de  $C_1$  dans  $C_0$  défini de la manière suivante :

Soit  $a_i$  un arc (direct par Définition) entrant dans un sommet  $x_j$ . Désignons par  $x_k$  le sommet dans lequel entre  $a_i^!$  (l'opposé de  $a_i$ ). Nous poserons :

$$\partial_1(a_i) = x_j - x_k$$

$\partial_1$  s'obtiendra par linéarité.

-  $\partial_2$  : c'est un homomorphisme de  $C_2$  dans  $C_1$  défini de la manière suivante :

Soit  $f_j$  une facette (directe donc). Désignons par  $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_k$  son bord (avec  $\tilde{a}_i = a_i$  ou  $a_i^!$ ). Posons :

$$\partial_2(f_j) = \sum_1^k \epsilon_i a_i$$

où :  $\epsilon_i = 1$  si  $\tilde{a}_i = a_i$

$\epsilon_i = -1$  si  $\tilde{a}_i = a_i^!$

$\partial_2$  s'étendra par linéarité.

-  $\partial_3$  : c'est l'homomorphisme trivial de 0 dans  $C_2$ .

Souvent on appelle  $\partial_i$  opération de bord.

### III.9.4 - Groupe d'homologie

Les données précédentes peuvent se résumer dans le diagramme :

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

On nomme :

$Z_i = \text{Ker } \partial_i$  = espace des  $i$ -cycles

$B_i = \text{Im } \partial_{i+1}$  = espace des  $i$ -bords

Les relations entre les  $C_i$ ,  $Z_i$ ,  $B_i$  seront données par les lemmes suivants :

Lemme 1 :  $\partial_i \partial_{i+1} = 0$

Pour  $i = 0$  et  $i = 2$ , c'est vérifié. Pour  $i = 1$ , il suffit de vérifier que, pour toute facette  $f$ , on a :

$$\partial_1 \partial_2(f) = 0$$

Ce qui est vrai car  $\partial_2(f)$  est une 1-chaîne dont les arcs constituent un circuit (ou un anticircuit) de  $K_1$  (voir III.4.4).  $\square$

Par conséquent, on a :

$$B_i \subseteq Z_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

On peut donc définir l'espace quotient :

$$H_i = Z_i / B_i$$

Evidemment  $H_i$  est un espace vectoriel mais, dans la pratique, on ne retient que sa structure de groupe. Nous nous conformons à l'usage en appelant  $H_i$  le ième groupe d'homologie de  $K$ .

On dira que deux  $i$ -cycles sont homologues lorsque leur différence est un  $i$ -bord. En particulier, un  $i$ -bord est homologue à zéro.

Lemme 2 :  $\dim(Z_2) = 1$

En effet, considérons la 2-chaîne

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^{n_2} f_i$$

C'est un 2-cycle (c'est à dire  $\partial_2(\gamma_2) = 0$ ) car, d'après la construction, dans l'ensemble  $\{\partial(f_i) \mid i = 1, 2, \dots, n_2\}$  chaque arc figure exactement une fois (autrement dit une lettre  $y$  figure une fois sous forme directe une fois sous forme opposée) (voir III.9.1).

Soit alors un 2-cycle quelconque :

$$C_2 = \sum \lambda_i f_i$$

Démontrons que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$ , ce qui entraînera que  $C_2 = \lambda \gamma_2$ .

En effet, si  $n_2 = 1$ , la propriété est démontrée. Donc pour  $n_2 > 1$ , il existe un arc  $\tilde{a}_1$  figurant dans  $\partial_2(f_1)$  dont l'opposé ( $\tilde{a}_1$ )' n'y apparaît pas (sinon  $K$  ne serait pas connexe). Désignons par  $f_2$  l'unique facette dont le bord contient ( $\tilde{a}_1$ )'. Comme  $\partial_2(C_2) = 0$  on a bien  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Le processus se poursuit pour donner  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$ .

En conclusion tout 2-cycle est un multiple de  $\gamma_2$ . Donc  $\dim(Z_2) = 1$ .  $\square$

D'autre part, on a :

$$B_2 = \text{Im } \partial_3 = 0$$

Donc :

$$H_2 = Z_2/B_2 \simeq Z_2$$

Autrement dit :

$$\boxed{R_2 = \dim(H_2) = 1}$$

Ceci étant, étudions  $H_0 = Z_0/B_0 = C_0/B_0$

Je dis que toute 0-chaîne est homologue à un multiple de la 0-chaîne  $\gamma_0 = x_1$ . En effet, soit

$$C_0 = \sum \lambda_i x_i$$

une 0-chaîne avec  $\sum \lambda_i = n$ . Considérons :

$$(1) \quad C_0 - n\gamma_0 = \sum \lambda_i (x_i - x_1)$$

Or  $K$  est connexe, donc  $\vec{K}_1$  connexe. Par conséquent, pour tout couple  $(x_i, x_1)$  il existe une 1-chaîne  $C_1^i$  commençant en  $x_1$  et terminant en  $x_i$ . Par suite :

$$x_i - x_1 = \partial_1(C_1^i)$$

(1) devient alors :

$$C_0 - n\gamma_0 = \sum \lambda_i \partial_1(C_1^i) = \partial_1(\sum \lambda_i C_1^i) \in B_0$$

Autrement dit  $C_0$  est homologue à  $n\gamma_0$ .

Ce qui montre que :

$$\boxed{R_0 = \dim(H_0) = 1}$$

### Détermination de $R_1 = \dim(H_1)$

Par définition  $Z_i$  est un sous-espace vectoriel de  $C_i$  ; il existe donc un espace  $D_i$  tel que [9] :

$$C_i = D_i \oplus Z_i$$

Comme  $Z_i$  est isomorphe à  $B_i \oplus H_i$  on peut donc écrire

$$C_i \simeq D_i \oplus B_i \oplus H_i$$

Comme

$$B_i = \text{Im } \partial_{i+1}$$

$D_{i+1}$  est donc isomorphe à  $B_i$ . Ce qui permet d'écrire :

$$C_i \simeq B_{i-1} \oplus B_i \oplus H_i$$

En désignant par  $r_i$  la dimension de l'espace  $B_i$  nous avons

$$n_i = r_{i-1} + r_i + R_i$$

D'où, en sommant pour  $i = 0, 1, 2$  :

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2 - R_1$$

car :

$$R_0 = R_2 = 1$$

$$r_{-1} = \dim(\text{Im } \partial_0) = 0$$

$$r_2 = \dim(\text{Im } \partial_3) = 0$$

En résumé, en rapprochant de III.8 :

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2 = 2 - \dim(H_1)$$

En rappelant que la caractéristique d'Euler d'un complexe cellulaire est un invariant combinatoire, nous avons la :

**Proposition 5** : Les groupes d'homologie d'un complexe cellulaire sont des invariants combinatoires.

### III.9.5 - Remarques

a) Dans la démonstration du lemme 2, nous avons utilisé l'orientabilité du complexe cellulaire pour affirmer que la 2-chaîne  $\gamma_2 = \sum_1^{n_2} f_i$ , est, en fait, un 2-cycle. Cette propriété n'existe pas pour les complexes cellulaires non orientables si les coefficients de  $\gamma_2$  sont considérés comme des réels (car il existe toujours un arc qui apparaît deux fois dans le bord de  $\gamma_2$ ). Ce qui permet de dire que pour un complexe cellulaire non orientable :

$$R_2(\text{mod } 2) = 1 \quad \text{et} \quad R_2(\text{réel}) = 0$$

Ce résultat implique deux conséquences :

- Premièrement : la dimension (sur R) du 2ème groupe d'homologie caractérise l'orientabilité.
- Deuxièmement : l'étude des groupes d'homologie d'un complexe cellulaire dépend de la nature du corps de base.

b) Nous avons vu que la caractéristique d'Euler d'un complexe cellulaire peut s'écrire sous deux formes. Par exemple, quand  $K$  est orientable :

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2 = 2 - 2g = 2 - R_1 \quad (g \geq 0)$$

(ou  $\chi(K) = 2 - h = 2 - R_1$  ( $h > 1$ ) quand  $K$  n'est pas orientable).

Ce qui montre que  $R_1 = 0$  si et seulement si  $g = 0$ , autrement dit  $K$  doit être orientable et équivalent à  $M_0$ . Or  $R_1 = 0$  signifie que tout 1-cycle de  $K$ , donc tout cycle de son squelette, est homologue à zéro. Nous venons de retrouver le célèbre :

Théorème de Jordan : Tout cycle du squelette d'un complexe cellulaire  $K$  est homologue à zéro si et seulement si  $K$  est équivalent à  $M_0$ .

#### IV - POLYEDRE

Etant donné un complexe cellulaire  $K$ , rappelons qu'une face de  $K$  est une paire de facettes opposées à laquelle est associée une paire de bords opposés  $a_1 a_2 \dots a_k, a'_k a'_{k-1} \dots a'_1$  où  $k$  est la longueur de la face. A chaque face de  $K$  associons, dans le plan orienté, un polygone convexe de  $k$  côtés. Choisissons un bord,  $a_1 a_2 \dots a_k$  par exemple. Parcourons le polygone dans un sens quelconque en étiquetant, dans l'ordre, ses côtés par les arcs  $a_1, a_2, \dots, a_k$  en convenant que, quand le polygone est orienté dans le sens opposé, les mêmes côtés porteront respectivement les étiquettes  $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$ .

Nous obtenons ainsi un ensemble de  $n_2$  polygones orientés, deux à deux disjoints. Dans cet ensemble, identifions, au sens de la topologie analytique, les côtés portant les mêmes étiquettes de manière à ce que leurs sommets initiaux et terminaux se correspondent.

L'objet ainsi construit, noté par  $|K|$ , est nommé polyèdre. On dit que  $K$  est sous-jacent au complexe cellulaire  $K$ , lequel recouvre  $|K|$ .

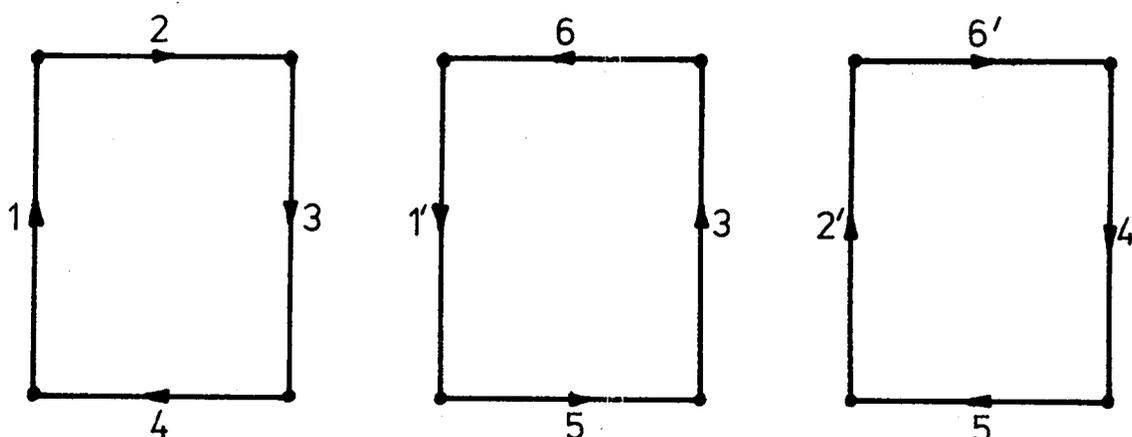
Dans  $K$ , l'image du squelette  $K_1$  de  $K$ , notée  $K_1$ , constitue le squelette de  $|K|$ .

#### - Exemple 3d

Considérons le complexe cellulaire donné dans l'exemple 3a. On a :

$$\partial(f) = 1234, \partial(g) = 1'536, \partial(h) = 2'6'45$$

Les polygones correspondants sont :



En identifiant les arcs portant l'étiquette 1 et aussi ceux portant l'étiquette 2, nous obtenons le polygone :

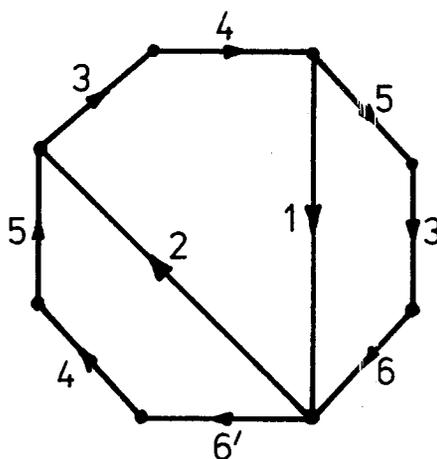


fig.1

Dans le complexe cellulaire, considérons les opérations de réduction élémentaire qui consistent à supprimer les arcs 1 et 2 (et leur opposé). Nous obtenons alors un nouveau complexe cellulaire ayant une seule face. La réduction est parfaitement illustrée par le polygone de la figure 1 auquel on a enlevé les arcs 1 et 2. Le bord du nouveau polygone  $345366'45$  représente évidemment le bord de la face unique du complexe cellulaire réduit.

Au point de vue topologique, les polygones sous-jacents respectivement au complexe cellulaire et son réduit sont, en tant qu'ensemble de points, homéomorphes. Il est donc naturel d'introduire la :

Définition : Deux polyèdres sont dits équivalents lorsque les complexes cellulaires qui les recouvrent sont équivalents (voir III.7).

## V - SURFACE

### V.1 - DEFINITION

On appelle surface toute classe de polyèdres équivalents.

Considérons un polyèdre  $K$  dans une classe d'équivalence notée  $S$ . Par abus de langage, nous dirons que la surface  $S$  est sous-jacente au complexe cellulaire  $K$ , lequel recouvre  $S$ .

D'après le théorème de classification des complexes cellulaires (III.7.2) et la définition des polyèdres équivalents, une surface est parfaitement déterminée par son orientabilité et sa caractéristique d'Euler (ou, pour abrégé, caractéristique). On posera :

$$\begin{aligned} \chi(S) &= 2 - 2g && \text{lorsque } S \text{ est orientable} \\ \chi(S) &= 2 - h && \text{lorsque } S \text{ n'est pas orientable} \end{aligned}$$

Par définition le genre orientable (non orientable) de  $S$  est l'entier  $g(h)$ . On remarquera que, pour toute surface, sa caractéristique est un entier relatif inférieur ou égal à 2.

### V.2 - REMARQUE

Nous venons de définir une classe d'objets appelés surfaces. Apparemment, ces objets font partie des variétés compactes de dimension 2 (c'est à dire des espaces topologiques compacts et localement homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$ ). En réalité, la Topologie Algébrique établit l'identité de ces deux classes. La démonstration se fait au moyen de deux théorèmes clés :

- Le premier, appelé théorème de l'approximation simpliciale, montre que toute application continue d'un polyèdre dans un autre peut être approchée par des applications "linéaires par morceaux" (intuitivement) définies sur des subdivisions assez fines des polyèdres donnés (voir [7], [11]).

- Le deuxième affirme que toute variété compacte de dimension 2 est sous-jacente à une triangulation (voir [2]).

Les résultats précédents impliquent donc que les invariants combinatoires définis maintenant sont aussi des invariants topologiques.

## VI - REALISATION D'UN GRAPHE DANS UN COMPLEXE CELLULAIRE

Dans le paragraphe III.4.3 de ce chapitre, nous avons construit à partir d'un complexe cellulaire donné, un graphe appelé squelette du complexe cellulaire. Il se pose alors la question de savoir si un graphe peut être considéré comme le squelette d'un certain complexe cellulaire. Le but de ce paragraphe est de donner une réponse à cette question.

Dans toute la suite, par graphe nous entendrons toujours graphe connexe.

VI.1 - DEFINITIONS

Un graphe  $G$  est dit réalisable dans un complexe cellulaire  $K$  si  $G$  est équivalent à un sous-graphe partiel du squelette  $K_1$  de  $K$ .

L'image de  $K$  dans  $K_1$  constitue une réalisation de  $G$  dans  $K$ . Souvent on confond  $G$  avec sa réalisation.

Une réalisation est dite squelettique lorsque  $G$  est isomorphe à  $K_1$ .

VI.2 - RESULTATS GENERAUX

Les propositions que nous allons établir permettent de répondre formellement à la question posée au début du paragraphe. Elles constituent une introduction aux paragraphes suivants.

Théorème 4 : Pour tout graphe  $G$ , il existe un complexe cellulaire orientable et un complexe cellulaire non orientable dans lesquels  $G$  est réalisable.

Démonstration

Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes  $n_1(G)$ .

La proposition est triviale si  $G$  est un sommet ( $n_1(G) = 0$ ).

Supposons donc la propriété vraie pour  $n$ . Considérons alors un graphe ayant  $n+1$  arêtes. Deux cas peuvent se présenter :

a)  $G$  a un sommet pendant  $y$  adjacent à un sommet  $x$ . Par hypothèse de récurrence, le graphe  $G_1 = G - \{x,y\}$ , qui est connexe, est réalisable dans

un complexe cellulaire. Soit  $\partial(f) = a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_k$  le bord d'une facette  $f_j$  où  $a_i$  est un arc entrant dans  $x$ . Posons :

$$\partial_1(f_p) = \partial(f_p) \quad (\text{pour tout } p \neq j)$$

$$\partial_1(f_j) = a_1 a_2 \dots a_i b b' a_{i+1} \dots a_k$$

On vérifie facilement que le squelette du nouveau complexe cellulaire  $(\Sigma, \partial_1, \phi)$  contient  $G$ .

b)  $G$  possède une arête  $B$  qui n'est pas un isthme. Par hypothèse de récurrence le graphe  $G_1 = G - \{B\}$ , qui est connexe, est réalisable dans un complexe cellulaire. Désignons par  $x$  et  $y$  les extrémités de  $B$ . (Dans la suite, nous dirons qu'un sommet est dans un bord s'il existe un arc du bord entrant dans le sommet considéré).

Si  $x$  et  $y$  sont dans un même bord alors on peut subdiviser la facette en deux facettes nouvelles en ajoutant  $B = \{b, b'\}$  (voir figure 2).

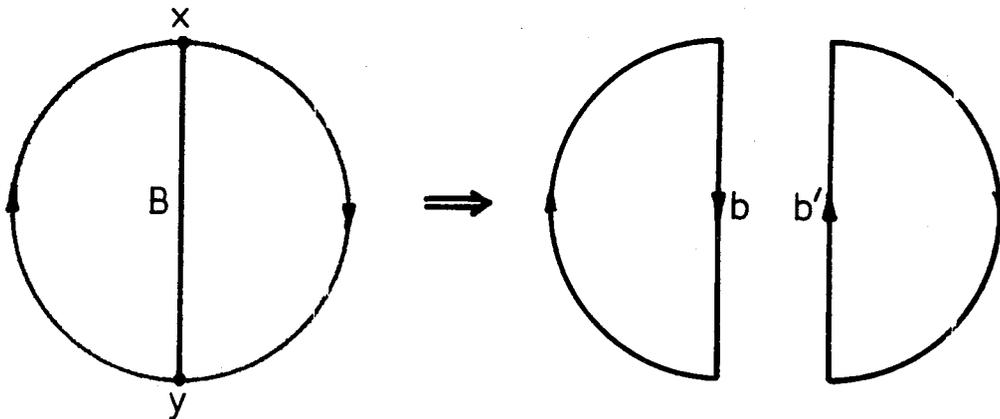
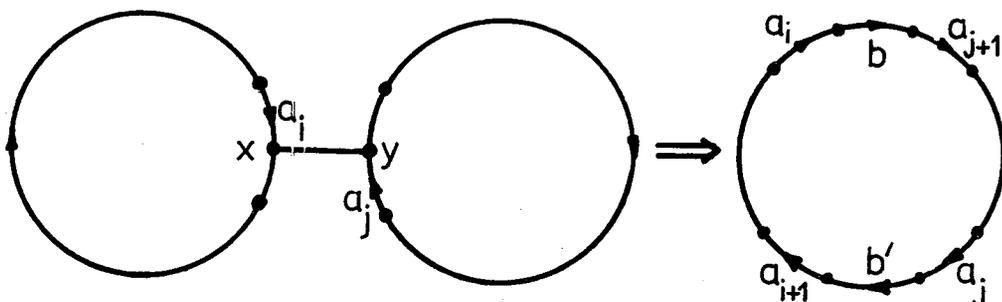


fig. 2

Sinon, soient  $f$  et  $g$  ( $f \neq g$  et  $f' \neq g'$ ) deux facettes dont les bords  $\partial(f) = a_1 a_2 \dots a_i \dots a_k$  et  $\partial(g) = a_p a_{p+1} \dots a_j \dots a_q$  contiennent les arcs  $a_i$  et  $a_j$  entrant respectivement dans  $x$  et  $y$ . Remplaçons les deux facettes  $f$  et  $g$  par la facette  $h$  dont le bord est (voir fig. 3) :

$$\partial(h) = a_1 a_2 \dots a_i b a_{j+1} \dots a_q a_p \dots a_j b' a_{i+1} \dots a_k$$



Dans les deux cas, on peut vérifier que le nouveau complexe cellulaire dont le squelette contient le graphe  $G$  donné, est orientable si et seulement si le complexe cellulaire dans lequel on réalise  $G_1$  est orientable.

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

Remarques :

a) Dans la dernière partie de la démonstration du théorème 4, nous avons défini une nouvelle opération qui est différente des subdivisions et réductions élémentaires. Elle consiste à remplacer deux facettes différentes (et non opposées l'une à l'autre) par une nouvelle facette en ajoutant un nouvel arc. Géométriquement, cette opération signifie l'adjonction d'une "anse" au complexe cellulaire.

b) La démonstration montre aussi que : si la réalisation de  $G_1$  est squelettique, alors celle de  $G$  l'est aussi. Par conséquent, il suffit de modifier légèrement les hypothèses pour avoir un résultat plus précis que le théorème 4.

En effet :

- si  $G$  est réduit à une arête, alors il est isomorphe au squelette de  $M_0$  ;
- si  $G$  est une boucle, alors il est isomorphe au squelette de  $N_1$ . Il constitue aussi le squelette du complexe cellulaire orientable défini par :

$$\Sigma = \{a, a'\}$$

$$\phi = \{f, f', g, g'\}$$

$$\partial(f) = a \text{ et } \partial(g) = a'$$

Un raisonnement par récurrence identique à celui donné dans la démonstration du théorème 4 permet d'énoncer le :

Théorème 5 : Tout graphe dont le nombre d'arêtes est  $\geq 1$  admet une réalisation squelettique dans un complexe cellulaire orientable.

Tout graphe dont le nombre de Betti est  $\geq 1$  admet une réalisation squelettique dans un complexe cellulaire non orientable.

VI.3 - ETUDE DES REALISATIONS SQUELETTIQUES

Les réalisations squelettiques jouent un rôle fondamental dans la recherche des réalisations d'un graphe dans un complexe cellulaire. Nous leur consacrons une étude détaillée.

Lemme 3 : Si un graphe  $G$  est réalisable dans un complexe cellulaire  $K$  de caractéristique  $\chi$ , alors il existe un complexe cellulaire  $K^1$  de caractéristique  $\chi-1$  et un complexe cellulaire  $K^2$  de caractéristique  $\chi-2$  dans lesquels  $G$  est réalisable. De plus, on peut toujours choisir  $K^1$  et  $K^2$  pour que :

$$K_0^1 = K_0^2 = K_0.$$

Démonstration

Considérons dans  $K$  une facette  $f$  dont le bord s'écrit :

$$\partial(f) = a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_k$$

Le complexe  $K^1$  s'obtient à partir de  $K$  en remplaçant la facette  $f$  par une facette  $f^1$  dont le bord s'écrit :

$$\partial(f^1) = a_1 a_2 \dots a_i b a_{i+1} \dots a_k$$

où  $b$  est un nouvel arc.

De même, on construit  $K^2$  en remplaçant  $f$  par  $f^2$  dont le bord est défini par :

$$\partial(f^2) = a_1 a_2 \dots a_i c d c' d' a_{i+1} \dots a_k$$

où  $c$  et  $d$  sont deux nouveaux arcs.

On vérifie facilement que :

$$\chi(K^1) = \chi(K) - 1$$

$$\chi(K^2) = \chi(K) - 2$$

D'autre part, la construction de  $K^1$  et de  $K^2$  ne fait pas apparaître de nouveau sommet. Par conséquent, on a bien :

$$K_0^1 = K_0^2 = K_0$$

Finalement, on peut remarquer que  $K^1$  est non orientable. Par contre :  $K^2$  est orientable si et seulement si  $K$  l'est.

Géométriquement,  $K^1$  ( $K^2$ ) s'obtient à partir de  $K$  en ajoutant un trou projectif (une anse).  $\square$

Lemme 4 : Si un graphe  $G$  est réalisable dans un complexe cellulaire  $K$ , alors il existe un complexe cellulaire  $H$  équivalent à  $K$  dans lequel  $G$  est réalisable comme graphe partiel du squelette de  $H$ .

Démonstration

Nous raisonnons par récurrence sur la caractéristique en supposant que  $G$  a au moins deux sommets car le lemme est trivialement vérifié si  $G$  n'en possède qu'un.

a) Soit  $H$  un complexe cellulaire ayant un nombre minimum de sommets, équivalent à  $K$  et irréductible (au sens des opérations de réduction définies dans III.7.1) dans lequel  $G$  est réalisable. Désignons par  $H_0$  l'ensemble des sommets de  $H$ . Supposons que  $X(G) \neq H_0$  (sachant que  $X(G) \subseteq H_0$ ).

Il existe alors un sommet  $y_0 \in H_0 - X(G)$  adjacent à un sommet  $x_0 \in X(G)$ .

Désignons par  $a_0$  un arc sortant de  $y_0$  et entrant dans  $x_0$ . Soit  $f_0$  une facette de  $H$  dont le bord  $\partial(f_0)$  contient  $a_0$  :

$$\partial(f_0) = a_0 a_1 a_2 \dots a_k$$

Je dis que  $a'_0$  ne peut pas figurer dans le bord d'une facette  $f_1$  telle que  $f_1 \neq f_0$  et  $f_1 \neq f'_0$ . En effet, l'existence de  $f_1$  permettrait à l'opération  $R_2$  de réduire  $H$  en remplaçant  $f_0$  et  $f_1$  par la nouvelle facette dont la construction est illustrée par la fig. 4 ; ce qui est impossible car  $H$  est irréductible.

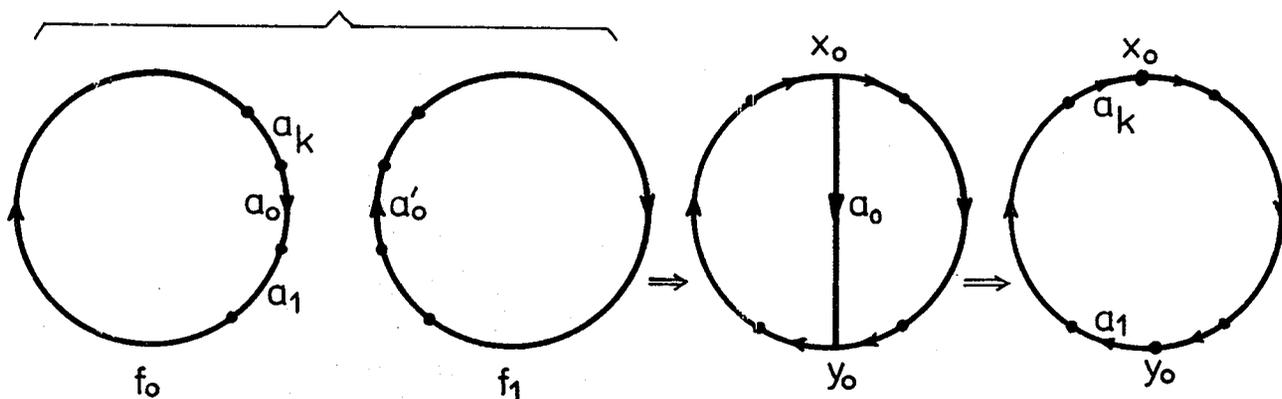


fig.4

En conclusion, le bord de  $f_0$  s'écrit :

$$\partial(f_0) = a_0 a_1 a_2 \dots \tilde{a}_0 \dots a_k \quad (\tilde{a}_0 = a_0 \text{ ou } \tilde{a}_0 = a'_0)$$

Supposons maintenant  $y_0$  adjacent à un sommet  $y_1$ , lui non plus n'appartenant pas  $X(G)$ . Le même raisonnement que précédemment montre que si un arc  $a_1$  sortant de  $y_0$  et entrant dans  $y_1$  figure dans  $\partial(f_0)$  alors  $\tilde{a}_1$  ( $\tilde{a}_1 = a_1$  ou  $\tilde{a}_1 = a'_1$ ) y apparaît aussi.

Désignons par  $C(y_0)$  la composante connexe du graphe  $H_1 - E(G)$  contenant  $y_0$ . D'après ce qui précède, tout arc de  $C(y_0)$  figure deux fois dans  $\partial(f_0)$  (soit sous la même forme, soit sous les formes opposées).

b) Envisageons le cas où le bord de  $f_0$  est de la forme :

$$\partial(f_0) = a_0 a_1 a_2 \dots a_i a_0 a_{i+1} \dots a_k$$

Je dis que :

- $a_1 \neq a_0$  car le contraire signifierait que  $x_0 = y_0$  (c'est à dire  $A = \{a_0, a'_0\}$  est une boucle).
- $a_{i+1} \neq a_1$  car  $a_{i+1} = a_1$  signifierait que  $\deg(y_0) = 2$  (donc réductible).

Remplaçons la facette  $f_0$  par deux nouvelles facettes  $f_0^1$  et  $f_0^2$  dont les bords s'écrivent respectivement :

$$\partial(f_0^1) = a_0 a_1 \dots a_i$$

$$\partial(f_0^2) = a_0 a_{i+1} \dots a_k$$

On obtient ainsi un nouveau complexe cellulaire  $\tilde{H}$  (connexe d'après la construction) ayant une face de plus que  $H$ . On peut vérifier que :

- le squelette de  $\tilde{H}$  est isomorphe à celui de  $H$  (par conséquent,  $G$  est réalisable dans  $\tilde{H}$ ).
- $\chi(\tilde{H}) = \chi(H) + 1$  (par conséquent  $\chi(H) < \chi(\tilde{H})$ ).

Enfin, on peut remarquer que  $\tilde{H}$  peut être orientable (voir la remarque du théorème 6 plus loin), tandis que  $H$  est non-orientable.

c) Supposons maintenant  $\partial(f_0)$  de la forme :

$$\partial(f_0) = a_0 a_1 \dots a'_0 \dots a_k$$

Je dis que :

- $a_1 \neq a'_0$  car le contraire signifierait que  $\deg(y_0) = 1$  (donc réductible).
- $a_k \neq a'_0$  car  $a_k = a'_0$  signifierait que  $\deg(x_0) = 1$  dans  $H_1$  (donc isolé dans  $G$ ).

Par conséquent, la facette  $f_0$  est de longueur  $\geq 4$ .

Nous pouvons alors remplacer  $f_0$  par  $g_0$  et  $h_0$  dont la construction est illustrée par la fig. 5 :

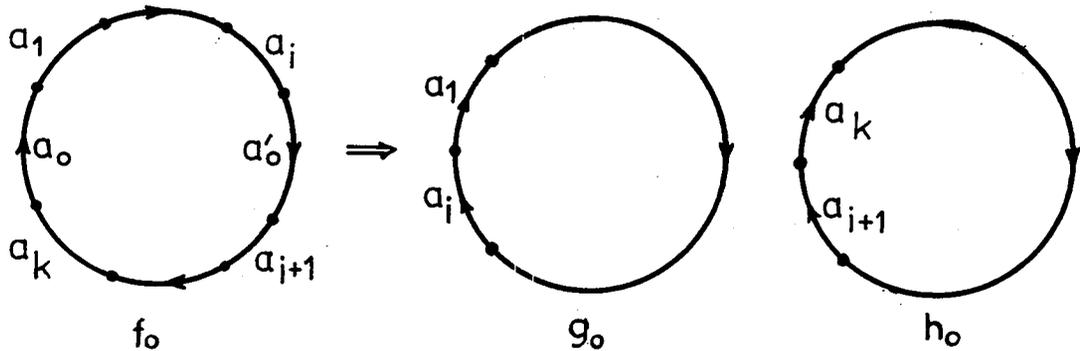


fig. 5

Autrement dit, on vient de scinder  $f_0$  en deux en supprimant l'arête  $A_0 = \{a_0, a'_0\}$ . On vérifie facilement qu'on obtient ainsi un nouveau complexe cellulaire, noté  $H^1$ , dont la connexité n'est pas assurée.

Envisageons donc deux cas :

1er cas :  $H^1$  est connexe. Alors :

$$\chi(H^1) = n_0(H^1) - n_1(H^1) + n_2(H^1) = n_0(H) - (n_1(H)-1) + (n_2(H)+1)$$

$$\chi(H^1) = \chi(H) + 2$$

Autrement dit :  $\chi(H) < \chi(H^1)$

2ème cas :  $H^1$  n'est pas connexe. En particulier  $\partial(g_0)$  ne contient aucun sommet de  $G$ . D'après ce qui précède, tous les arcs de  $C(y_0)$  sont dans  $\partial(g_0)$ . Autrement dit  $g_0$  est l'unique face d'un complexe cellulaire  $G^0$  dont  $y_0$  est un sommet. Désignons par  $H^0$  le complexe cellulaire dont  $h_0$  est une face. On peut vérifier que :

$$H^1 = H^0 \cup G^0$$

$$\chi(H^0) = (n_0(H) - n_0(G^0)) - (n_1(H) - n_1(G^0) - 1) + n_2(H)$$

$$\chi(H^0) = [n_0(H) - n_1(H) + n_2(H)] - [(n_0(G^0) - n_1(G^0) + 1)] + 2$$

$$\chi(H^0) = \chi(H) - \chi(G^0) + 2$$

Autrement dit  $\chi(H) \leq \chi(H^0)$  car la caractéristique est toujours  $\leq 2$ . L'égalité aura lieu si et seulement si  $\chi(G^0) = 2$  (c'est à dire,  $G^0$  équivalent à  $M_0$ ).

D'autre part, il est apparent que, dans le premier cas, le graphe  $G$  est réalisable dans  $H^1$  et que, dans le deuxième cas,  $G$  est réalisable dans  $H^0$ .

Par conséquent, dans le deuxième cas, l'égalité  $\chi(H^0) = \chi(H)$  ne pourrait pas avoir lieu, sinon  $H^0$  serait un complexe cellulaire équivalent à  $H$  (donc à  $K$ ), ayant moins de sommets que  $H$  et dans lequel  $G$  serait réalisable. Ce qui contredit la définition de  $H$ .

Enfin, on peut remarquer que  $H^1$  (resp.  $H^0$ ) est orientable si et seulement si  $H$  l'est. Dans la suite, nous désignons  $H^1$  (resp.  $H^0$ ) par  $\tilde{H}$ .

d) En résumé, l'hypothèse  $\chi(G) \neq H_0$  implique l'existence d'un complexe cellulaire  $\tilde{H}$  (avec  $n_0(\tilde{H}) \leq n_0(H)$ ) dans lequel  $G$  est réalisable et dont la caractéristique est strictement supérieure à celle de  $H$ . De plus, on a :

$$H \text{ orientable} \Rightarrow \tilde{H} \text{ orientable.}$$

e) Démontrons que le lemme est vrai si la caractéristique de  $K$  est égale à 2. Sinon, d'après ce qui précède, on aurait trouvé un complexe cellulaire  $H$  tel que :

$$\chi(\tilde{H}) > \chi(H) = \chi(K) = 2.$$

Ce qui est absurde.

f) Le lemme sera démontré dans le cas général en raisonnant par récurrence sur la caractéristique de  $K$  et en utilisant le lemme 3. En effet, d'après e, la propriété est vraie quand  $\chi(K) = 2$ . Supposons donc  $\chi(K) < 2$ . Définissons  $H$  comme précédemment. Je dis que :

$$\chi(G) = H_0$$

Sinon, d'après d, on trouverait un  $H$  avec les propriétés suivantes :

- 1 -  $G$  est réalisable dans  $\tilde{H}$ .
- 2 -  $\chi(H) < \chi(\tilde{H})$
- 3 -  $H$  orientable  $\Rightarrow \tilde{H}$  orientable.

L'hypothèse de récurrence, jointe aux propriétés 1 et 2, montre que  $G$  est réalisable dans un complexe cellulaire ayant  $n_0(G)$  sommets et équivalent à  $\tilde{H}$ . Evidemment :

$$n_0(G) \leq n_0(\tilde{H}) \leq n_0(H)$$

Si  $n_0(G) < n_0(H)$  alors, d'après le lemme 3, on peut construire un complexe cellulaire :

- dans lequel  $G$  est réalisable ;
- avec un nombre de sommets égal à  $n_0(G) < n_0(H)$
- équivalent à  $K$  (car il suffit d'ajouter des anses (des trous projectifs) quand  $K$  est orientable (non orientable)).

Ce qui est absurde car  $H$  est, par définition, le complexe cellulaire ayant le minimum de sommets et satisfaisant aux conditions précédentes.  $\square$

Théorème 6 : Soit  $G$  un graphe réalisable dans un complexe cellulaire  $K$  de caractéristique  $\chi$ . Si  $G$  n'est réalisable dans aucun complexe cellulaire de caractéristique  $> \chi$  alors  $G$  est le squelette d'un complexe cellulaire équivalent à  $K$ .

Démonstration

Evitons le cas trivial en supposant que  $G$  a au moins une arête.

D'après le lemme 4, il existe un complexe cellulaire équivalent à  $K$  dans lequel  $G$  est réalisable comme graphe partiel du squelette.

Désignons alors par  $H$  un tel complexe cellulaire et dont le nombre d'arêtes est minimum. Je dis que :

$$E(G) = E(H) \quad (E \text{ désigne l'ensemble des arêtes})$$

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une arête  $A_0 = \{a_0, a'_0\}$  du squelette de  $H$  n'appartenant pas à  $E(G)$ .

Alors les mêmes arguments que ceux de la partie a) du lemme 4 montrent que  $H$  possède une facette  $f_0$  dont le bord est de l'une des deux formes illustrées dans la fig. 6.

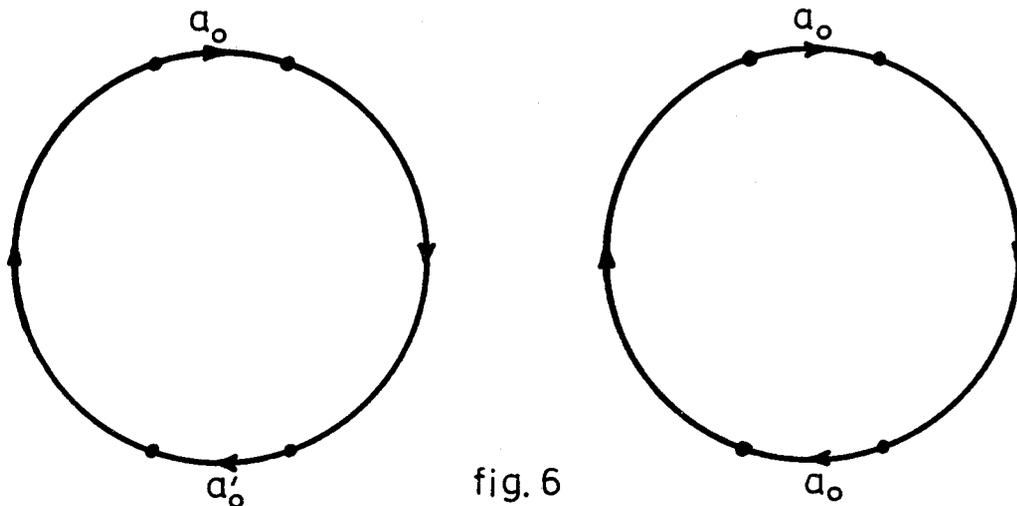


fig. 6

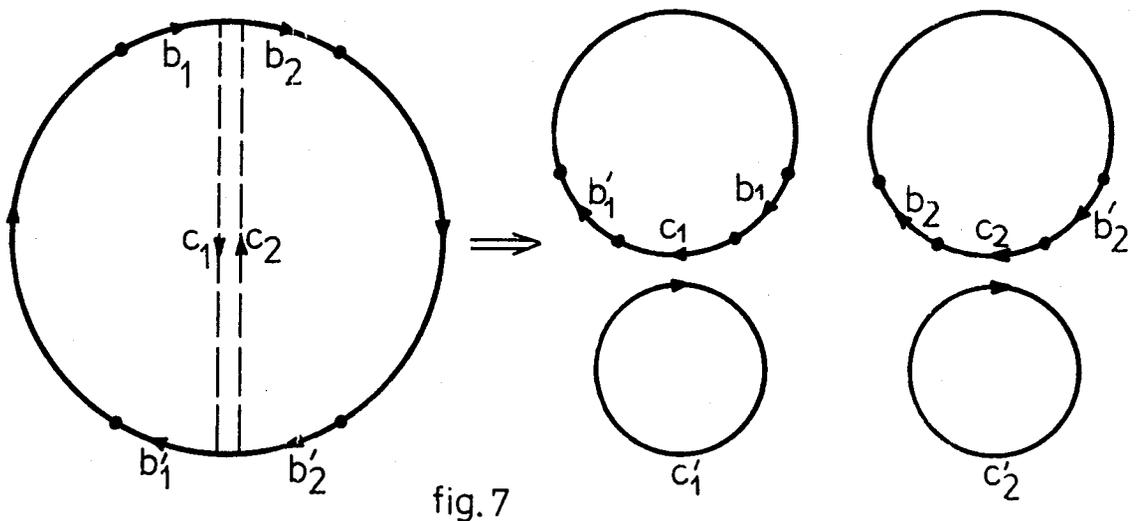
Remarquons que, dans les deux cas, les deux arcs considérés ne sont pas consécutifs sur le bord de  $f_0$ . Sinon :

- dans le premier cas :  $G$  posséderait un sommet isolé ;
- dans le deuxième cas :  $G$  serait réalisable dans un complexe cellulaire de caractéristique  $\chi+1 > \chi$  obtenu à partir de  $H$  en supprimant le trou projectif  $a_0 a_0$ .

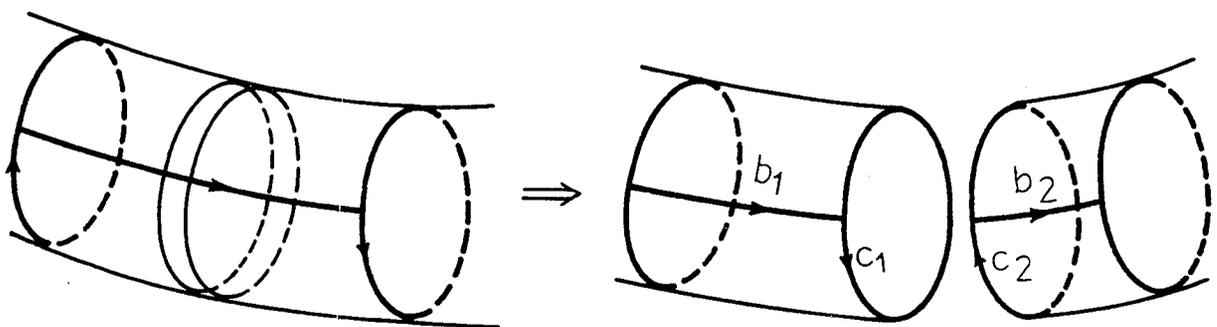
Ceci étant, considérons deux cas :

1er cas :  $\partial(f_0)$  est de la première forme

Remplaçons  $f_0$  par 4 nouvelles facettes dont la construction est illustrée par la fig. 7.



Géométriquement cela consiste à "séparer" une anse en deux :



Le nouveau complexe cellulaire, noté par  $H^2$ , est connexe car son squelette admet un graphe partiel connexe,  $G$  précisément. On a :

$$n_0(H^2) = n_0(H) + 2$$

$$n_1(H^2) = n_1(H) + 3$$

$$n_2(H^2) = n_2(H) + 3$$

D'où :

$$\chi(H^2) = n_0(H^2) - n_1(H^2) + n_2(H^2) = \chi(H) + 2 > \chi(H)$$

2ème cas :  $\partial(f_0)$  est de la deuxième forme

Remplaçons  $f_0$  par 4 nouvelles facettes dont la construction est illustrée par la fig. 8.

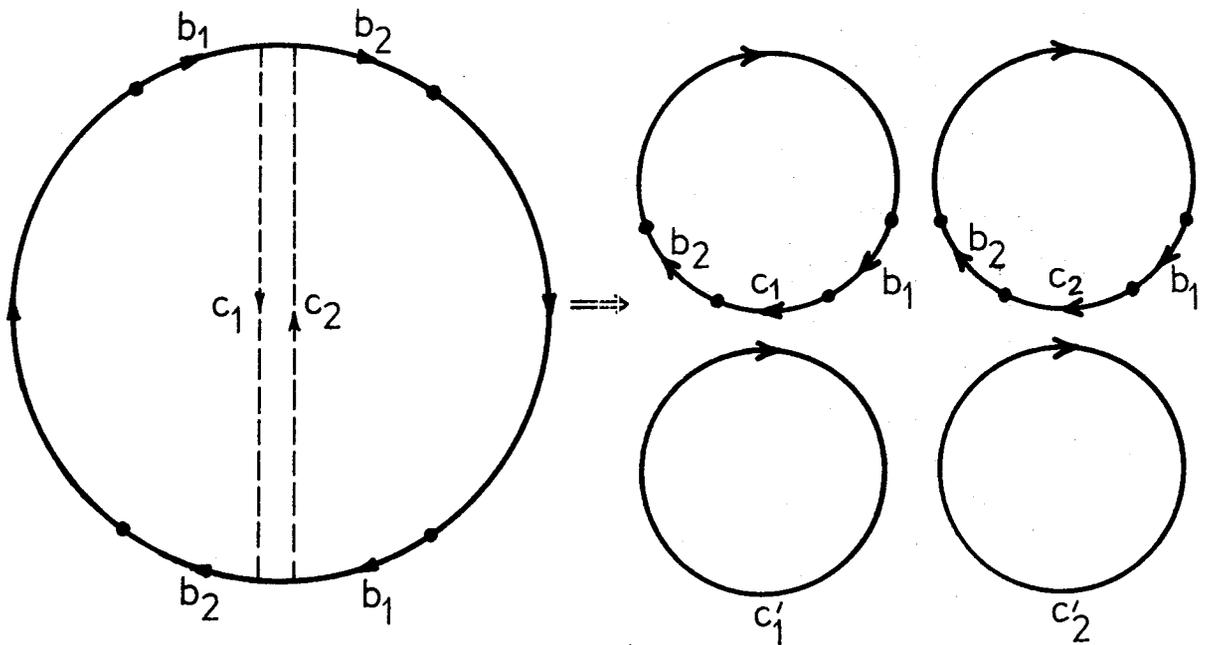


fig. 8

Le nouveau complexe cellulaire, désigné par  $H^1$ , est évidemment connexe (les 4 nouvelles faces ont un sommet, nouveau, en commun). On a :

$$n_0(H^1) = n_0(H) + 1$$

$$n_1(H^1) = n_1(H) + 3$$

$$n_2(H^1) = n_2(H) + 3$$

D'où :

$$\chi(H^1) = \chi(H) + 1 > \chi(H)$$

En résumé, dans les deux cas, on a trouvé un complexe cellulaire  $\tilde{H}$  dans lequel  $G$  est réalisable et dont la caractéristique est strictement supérieure à celle de  $K$ . C'est donc contraire à l'hypothèse exprimée dans l'énoncé du théorème.

Par conséquent l'hypothèse  $E(G) \neq E(H)$  est absurde.

Ce qui achève la preuve.  $\square$

Remarque :

Au cours de la démonstration du théorème 6, nous avons introduit une opération qui transforme un complexe cellulaire en un autre de caractéristique strictement plus grand.

Plus précisément, lorsque le bord de la facette  $f_0$  est de la première forme (en particulier lorsque le complexe cellulaire initial est orientable), le nouveau complexe cellulaire a pour caractéristique  $\chi+2$ . La transformation considérée montre que l'ancien et le nouveau complexe cellulaire sont de même type, c'est à dire orientable ou non-orientable en même temps.

Par contre, lorsque le bord de la facette  $f_0$  est de la deuxième forme (en particulier : le complexe cellulaire initial est non-orientable), le nouveau complexe cellulaire, de caractéristique  $\chi+1$ , peut être orientable comme le montre l'exemple suivant :

Soit  $G$  le graphe

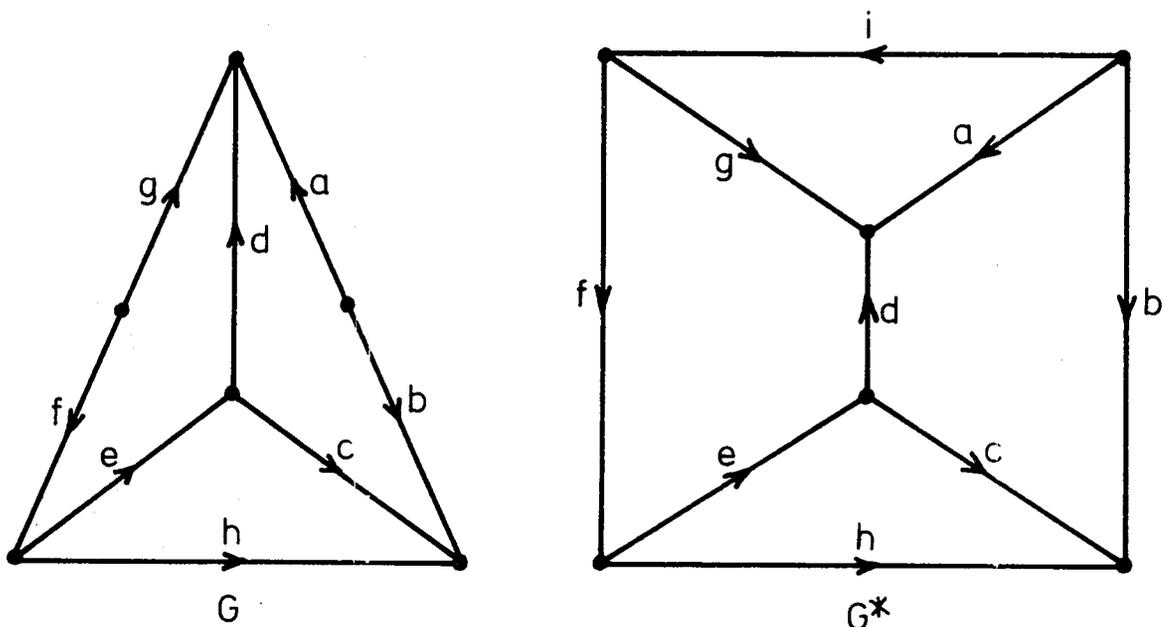


fig.9

$G$  admet une réalisation (non squelettique) dans un complexe cellulaire non orientable de caractéristique 1 dont les facettes ont pour bords :  
 $a'b'c'd$ ,  $gd'e'f'$ ,  $ch'e$ ,  $ifhb'iga'$   
 et leurs opposés respectifs.

On vérifie immédiatement que le squelette de ce complexe cellulaire est isomorphe au graphe  $G^*$  (fig. 9).

Effectuons la transformation définie dans le 2ème cas où la facette choisie a pour bord  $ifhb'iga'$  et l'arête considérée est  $i$ . Nous obtenons un complexe cellulaire de caractéristique  $\chi+1 = 2$ , donc orientable, dont le squelette est isomorphe au graphe (fig. 10).

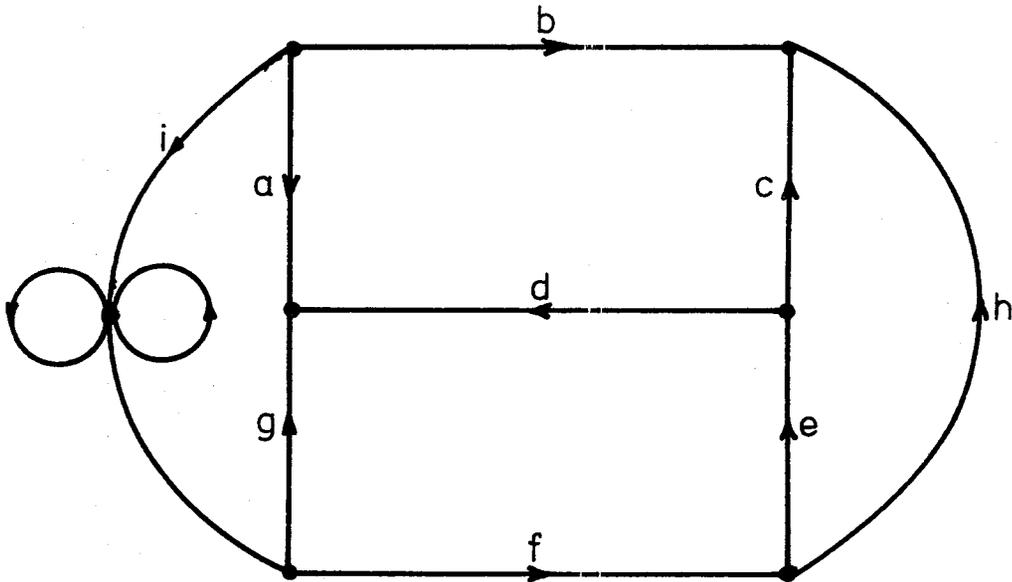


fig.10

Dans la suite, cette éventualité complique quelque peu l'étude des immersions d'un graphe dans une surface non orientable.

Corollaire 1 : Si un graphe  $G$  est réalisable dans un complexe cellulaire de caractéristique 2, alors  $G$  est le squelette d'un complexe cellulaire de même caractéristique.

En effet, voir Lemme 4, partie b.

## VII - IMMERSION D'UN GRAPHE DANS UNE SURFACE

VII.1 - DEFINITIONS

- Un graphe  $G$  est dit immergeable dans une surface  $S$  si  $G$  est réalisable dans un complexe cellulaire recouvrant  $S$ .
- $G$  est dit inf-immergeable dans  $S$  lorsque  $G$  est immergeable dans  $S$  mais non dans toute surface de caractéristique strictement supérieure à celle de  $S$ .
- Une immersion de  $G$  dans  $S$  est la donnée du triplet  $(G,K,S)$  où  $G$  est réalisable dans le complexe cellulaire  $K$  qui recouvre  $S$ . Elle est dite squelettique lorsque  $G$  est isomorphe au squelette de  $K$ .

D'après le lemme 4 (IV.2), si  $G$  est réalisable dans  $K$  alors  $G$  est réalisable dans un complexe cellulaire équivalent à  $K$  et ayant le même nombre de sommets que  $G$ . Par conséquent, pour toute immersion  $(G,K,S)$ , il est loisible de supposer que  $K$  est irréductible pour la propriété considérée, autrement dit,  $K$  possède un nombre minimum d'arêtes et satisfaisant aux deux propriétés suivantes : primo,  $K$  recouvre  $S$ , secundo,  $G$  est réalisable dans  $K$ .

VII.2 - RESULTATS GENERAUX

Les propositions suivantes sont des conséquences directes des théorèmes 4, 5 et du lemme 3 du paragraphe VI.

Proposition 6 : Pour tout graphe  $G$ , il existe une surface orientable et une surface non orientable dans lesquelles  $G$  est immergeable.

Proposition 7 : Tout graphe  $G$  dont le nombre d'arêtes est  $\geq 1$  admet une immersion squelettique dans une surface orientable.  
 Tout graphe  $G$  dont le nombre de Betti est  $\geq 1$  admet une immersion squelettique dans une surface non orientable.

Proposition 8 : Si un graphe  $G$  est immergeable dans une surface de caractéristique  $\chi$  alors  $G$  est immergeable dans toute surface de caractéristique  $\leq \chi$ .

La dernière proposition montre que dans la recherche des immersions d'un graphe dans une surface, il suffit de s'intéresser à celles dans une surface de caractéristique maximum.

VII.3 - CARACTERISATION DES IMMERSIONS D'UN GRAPHE INF-IMMERGEABLE

Théorème 7 : Un graphe  $G$  est inf-immérgeable dans une surface  $S$  de caractéristique  $\chi$  si et seulement si :

- (1) il existe une immersion squelettique de  $G$  dans  $S$ ,
- (2) il n'existe pas d'immersion squelettique de  $G$  dans une surface de caractéristique  $\chi' > \chi$ .

Démonstrationa) La condition est nécessaire

La condition (1) résulte du théorème 6. La condition (2) provient de la définition de  $G$ .

b) La condition est suffisante

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $G$  n'est pas inf-immérgeable dans  $S$ . D'après la proposition 8 et la condition (1), il existe une surface  $S'$  de caractéristique  $\chi' > \chi$  dans laquelle  $G$  est inf-immérgeable. Alors, la condition nécessaire prouve l'existence d'une immersion squelettique de  $G$  dans  $S'$ . Ce qui contredit la condition (2).

Le théorème est démontré.  $\square$

Proposition 9 : Si un graphe  $G$  est inf-immérgeable dans une surface  $S$ , alors toute immersion de  $G$  dans  $S$  est squelettique.

Démonstration

Soit  $\chi$  la caractéristique de  $S$ . Supposons que  $G$  admette une immersion non squelettique dans  $S$ . D'après la démonstration du théorème 6,  $G$  serait immérgeable dans une surface de caractéristique  $\chi + \varepsilon$  ( $\varepsilon = 1$  ou  $2$ ). Ce qui est impossible.  $\square$

Du théorème 7 et de la proposition 9 nous déduisons le :

Corollaire 2 (théorème de Youngs [13]) :

Un graphe  $G$  est inf-immérgeable dans une surface  $S$  de caractéristique  $\chi$  si et seulement si :

- (1) Toute immersion de  $G$  dans  $S$  est squelettique.
- (2)  $G$  n'admet pas d'immersion squelettique dans une surface de caractéristique  $\chi' > \chi$ .

Remarques :

- a) Le théorème 7 et le corollaire 2 justifient l'intérêt que nous portons aux immersions squelettiques.
- b) La condition exprimée dans la proposition 9 n'est pas suffisante comme nous allons le voir dans la suite.
- c) Géométriquement, quand un graphe a une immersion squelettique dans une surface, il divise cette dernière en plusieurs régions, lesquelles sont homéomorphes à un disque ouvert. Par conséquent, dans la littérature classique, on parle de "immersion 2-cellulaire". Youngs, dans [13], a été le premier à s'intéresser aux immersions 2-cellulaires minimales (c'est l'équivalent topologique de la notion de graphe inf-immérgeable que nous avons introduite en VII.1). Le théorème 7 et la proposition 9 constituent des versions nouvelles des principaux résultats énoncés dans [13]. Il est vrai que notre démarche (combinatoire) est entièrement différente de celle (topologique) de Youngs.
- d) Quand  $G$  est inf-immérgeable dans une surface de caractéristique maximum, le nombre de faces de l'immersion est aussi maximum d'après la formule d'Euler. L'inverse est évidemment vraie, d'après le corollaire 2.

VII.4 - GENRE D'UN GRAPHE

Jusqu'à maintenant nous avons étudié les immersions d'un graphe dans une surface indépendamment de l'orientabilité de cette dernière. Mais, déjà la démonstration du théorème 6 laisse entrevoir une différence de comportement de ces immersions lorsqu'on tient compte de l'orientabilité de la surface. De plus, la non-suffisance de la condition exprimée par la proposition 9, exige une étude plus poussée des immersions squelettiques. C'est ce que nous allons faire en introduisant la :

Définition : On appelle genre du graphe  $G$ , noté  $\gamma(G)$ , le plus petit entier  $\geq 0$  pour lequel  $G$  est immergeable dans une surface orientable de genre  $\gamma(G)$ .

De même, on définit le genre non-orientable de  $G$ , noté  $\bar{\gamma}(G)$ , lorsque les surfaces considérées sont non-orientables.

Théorème 8 : Un graphe  $G$  est de genre  $\gamma$  si et seulement si toute immersion de  $G$  dans une surface orientable de genre  $\gamma$  est squelettique.

Démonstrationa) La condition est nécessaire

Nous raisonnons par l'absurde. S'il existait une immersion  $(G, K, S)$  qui n'est pas squelettique, alors le même raisonnement que celui du théorème 6 montre que  $K$  devrait avoir une face  $f_0$  dont le bord  $\partial(f_0)$  est de la première forme de la fig. 6 (VI.3). Dans ce cas, la transformation définie dans le théorème 6 permet d'immerger  $G$  dans une surface orientable de genre  $\gamma-1$ . Ce qui est impossible, vue la définition de  $\gamma$ .

b) La condition est suffisante

Nous raisonnons encore par l'absurde en supposant que  $G$  est de genre  $\gamma' < \gamma$ . Alors, d'après la condition nécessaire, il existe un complexe cellulaire  $K'$ , orientable et de genre  $\gamma'$ , dans lequel  $G$  admet une réalisation squelettique. Considérons un complexe cellulaire  $K$ , orientable et de genre  $\gamma$ , obtenu à partir de  $K'$  en lui adjoignant successivement des anses (voir Lemme 3 - VI.3). Il est apparent que l'immersion  $(G, K, S)$  n'est pas squelettique.

Le théorème est démontré.  $\square$

Cela étant, remarquons que, dans la justification de la condition suffisante du théorème 8, si nous remplaçons orientable par non-orientable et si nous adjoignons à  $K'$  des plans projectifs (voir Lemme 3 - VI.3) au lieu des anses, le résultat est encore valable. Par conséquent, nous avons la :

Proposition 10 : Une condition suffisante pour qu'un graphe  $G$  soit de genre non orientable  $\bar{\gamma}$  est que toute immersion de  $G$  dans une surface non orientable de genre  $\bar{\gamma}$  soit squelettique.

Cette proposition complète utilement la proposition 9.

D'autre part, concernant le genre non-orientable, la condition donnée plus haut n'est pas nécessaire et cela, pour plusieurs raisons :

- Premièrement : il se peut qu'un graphe de genre non orientable  $\bar{\gamma}$  n'admette aucune immersion squelettique dans une surface de genre  $\bar{\gamma}$ . Exemple : un arbre, de genre non-orientable 1, n'admet aucune immersion squelettique dans une surface non orientable de caractéristique 1 (voir Théorème 5).

- Deuxièmement : il se peut que certaines immersions d'un graphe de genre non orientable  $\bar{\gamma}$  dans une surface non orientable de genre  $\bar{\gamma}$  soient squelettique tandis que d'autres ne le soient pas.

Exemple : Tout graphe planaire (c'est à dire immergeable dans une surface de genre 0) admet une immersion non squelettique dans un complexe cellulaire de caractéristique 1.

Ceci dit, nous allons néanmoins déterminer la classe des graphes pour lesquels un théorème de caractérisation du genre non orientable, comparable au théorème 8, peut être obtenu. Pour cela, nous avons besoin du :

Lemme 5 : Si un graphe G admet une immersion squelettique avec au moins deux faces dans une surface (orientable ou non) de caractéristique  $\chi$  alors G a une immersion squelettique dans une surface non-orientable de caractéristique  $\chi-1$ .

#### Démonstration

Par hypothèse, G est réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire K dont le nombre de faces est  $\geq 2$ . Par conséquent, il existe dans K deux facette  $f_1$  et  $f_2$  ( $f_1 \neq f_2$  et  $f_1 \neq f_2'$ ) et un arc  $a_1$  tels que :

$$\partial(f_1) = a_2 a_3 \dots a_p a_1$$

$$\partial(f_2) = a_1' b_1 b_2 \dots b_q$$

En effet, si  $a_1$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  n'existaient pas, K serait non connexe ou bien K ne posséderait qu'une seule face.

Considérons alors le complexe cellulaire H obtenu à partir de K en remplaçant  $f_1$  et  $f_2$  par la nouvelle facette f dont le bord s'écrit :

$$\partial(f) = a_2 a_3 \dots a_p a_1 b_1' \dots b_2' b_1' a_1$$

(il n'est pas exclu que p ou q soit égal à 1).

On vérifie sans difficulté que :

- Le squelette de H est isomorphe à G.
- H est non orientable (à cause de  $\partial(f)$  où l'arc  $a_1$  figure deux fois sous la même forme).
- $\chi(H) = \chi(K) - 1$  (car H a une face de moins que K).

Ce qui montre que  $G$  a une immersion squelettique dans une surface non orientable de caractéristique  $\chi-1$ .  $\square$

Corollaire 3 : Si un graphe  $G$  est inf-immérgeable dans une surface orientable de genre  $\gamma$ , alors

$$0 \leq \bar{\gamma}(G) - 2\gamma(G) \leq 1$$

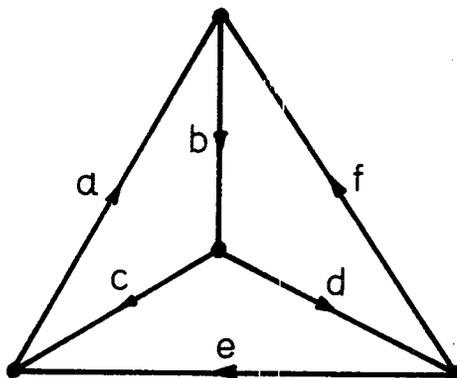
(Voir la démonstration du théorème 9 donnée plus loin).

Remarques :

a) Nous avons introduit la notion de graphe inf-immérgeable dans une surface (voir VII.1). Le lemme 5 constituera le point de départ d'une importante notion, celle de graphe sup-immérgeable dans une surface, qui fera l'objet du chapitre IV.

b) En raison de l'importance du lemme 5, nous allons illustrer sa démonstration par un exemple :

Soit  $G$  le graphe complet à 4 sommets :



Considérons une immersion squelettique de  $G$  dans une surface orientable de caractéristique 2 dont les faces ont pour bords :

$$abc, c'de, b'f'd', e'fa'$$

Désignons par  $f_1$  et  $f_2$  les faces dont les bords respectifs sont  $abc, c'de$ . Remplaçons  $f_1$  et  $f_2$  par la face  $f$  en faisant jouer à l'arc  $c$  le rôle de  $a_1$  dans la démonstration du lemme 5. Nous obtenons un nouveau complexe cellulaire dont le système des bords contient :

$$abce'd'c, b'f'd', e'fa'$$

Dans ce nouveau complexe cellulaire (non orientable, de caractéristique 1) effectuons encore la même transformation en choisissant l'arc  $f$  et les deux faces dont les bords le contiennent. On obtient alors :

$$abce'd'c, d'b'f'eaf'$$

Il s'agit d'un complexe cellulaire non orientable de caractéristique 0.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le :

Théorème 9 : Un graphe  $G$  de nombre de Betti  $\geq 1$  est de genre non orientable  $\bar{\gamma}$  si et seulement si  $\bar{\gamma}$  est le plus petit entier  $\geq 1$  pour lequel  $G$  admette une immersion squelettique dans une surface non orientable de genre  $\bar{\gamma}$ .

Démonstration

Si  $G$  est inf-immérgeable dans une surface non orientable de genre  $\bar{\gamma}$  alors le théorème n'est rien d'autre qu'une version particulière du théorème 7.

Sinon, c'est que  $G$  est inf-immérgeable dans une surface  $S$  orientable, de caractéristique  $\chi > 2 - \bar{\gamma}$ . Or nous démontrerons au chapitre IV que l'hypothèse  $\beta(G) \geq 1$  implique l'existence d'une immersion squelettique avec au moins deux faces de  $G$  dans  $S$ . Par conséquent, nous pouvons appliquer le lemme 5 pour montrer que :

$$- \chi = 3 - \bar{\gamma}$$

-  $G$  a une immersion squelettique dans une surface non orientable de caractéristique  $\chi - 1 = 2 - \bar{\gamma}$ , donc de genre non orientable  $\bar{\gamma}$ .

Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

Remarques :

a) Le théorème 9 est plus faible que le théorème 8, mais on ne peut pas espérer de l'améliorer. En effet :

- un arbre (donc de nombre de Betti nul) n'a aucune immersion squelettique dans une surface non orientable.
- un graphe planaire de nombre de Betti  $\geq 1$  admet des immersions non squelettiques dans toute surface non orientable.

b) Le théorème 8 qui donne la caractéristique maximum (orientable) d'une surface orientable dans laquelle un graphe est immergeable ne permet pas de savoir si ce maximum est aussi celui dans le cas général. Parfois, c'est même faux : par exemple, les graphes de Kuratowski ( $K_5$  et  $K_{3,3}$ ) qui sont de genre 1

(donc immergeable dans 1 surface orientable de caractéristique 0) sont en réalité inf-immergeable dans une surface non orientable de caractéristique 1.

La dernière remarque nous amène à démontrer le :

Théorème 10 : Un graphe G est inf-immergeable dans une surface non-orientable S si et seulement si toute immersion de G dans S est squelettique

Démonstration

a) La condition nécessaire résulte du corollaire 2.

b) La condition est suffisante:

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que G est inf-immergeable dans une surface S' (orientable ou non) de caractéristique strictement supérieure à celle de S. D'après le théorème 7, G admet une immersion squelettique dans S'. Autrement dit G est réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire K' qui recouvre S'. En adjoignant à K' des plans projectifs (voir Lemme 3) nous obtenons un complexe cellulaire K qui recouvre S. Il est apparent que l'immersion (G,K,S) n'est pas squelettique. Ce qui constitue une contradiction.  $\square$

Conclusion

Les résultats précédents peuvent se résumer comme suit :

Toute immersion de G dans S  $\iff \gamma(G) = \gamma(S) \implies$  G est inf-immergeable dans S' orientable est squelettique tel que  $\chi(S') \geq \chi(S)$

Toute immersion de G dans S  $\iff$  G est inf-immergeable dans S non-orientable  $\implies \bar{\gamma}(G) = \bar{\gamma}(S)$  non-orientable est squelettique

VII.5 - OBTENTION DES IMMERSIONS SQUELETTIQUES DANS UNE SURFACE ORIENTABLE

Définition : Soit G un graphe. Construisons un graphe orienté  $\vec{G}$  en mettant une flèche sur chaque arête de G. A chaque arc  $A_i$  de  $\vec{G}$  faisons correspondre une paire d'étiquettes  $\{a_i, a_i^!\}$  avec les conventions suivantes :

- la correspondance est biunivoque ;
- si  $a_i$  est l'étiquette de l'arc parcouru dans le sens de la flèche, alors  $a_i^!$  sera celle du même arc parcouru dans le sens opposé.

Dans la suite, nous désignerons par :

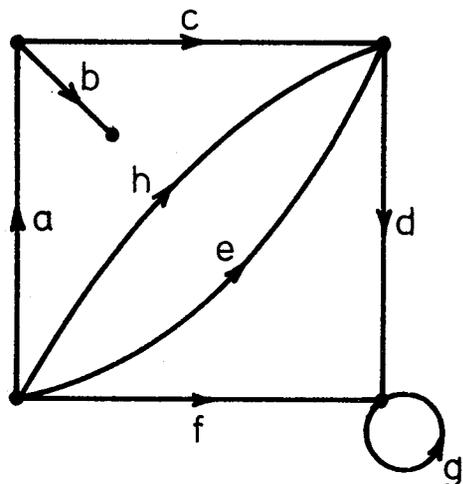
-  $\Sigma$  : l'ensemble des  $a_i, a_i'$ . Par abus de langage  $\Sigma$  sera appelé ensemble des arcs.

-  $\alpha$  : l'application  $a_i \longleftrightarrow a_i'$ .  $\alpha$  est une involution dans  $\Sigma$ .

Par définition, une rotation de  $G$  est une permutation  $\rho$  de  $\Sigma$  telle que chaque orbite de  $\rho$  est une permutation circulaire des arcs entrant dans un sommet de  $G$  (voir [12]).

### Exemple

$$\rho = (ab'c')(b)(cd'eh)(dfg'g)(a'f'e'h')$$



Nous poserons :

- $\varphi = \alpha\rho$  (donc  $\rho = \alpha\varphi$  car  $\alpha^2 = \text{Id}$ )
- $\|\varphi\|$  = nombre d'orbites de  $\varphi$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

Théorème 11 (Heffter-Edmonds [6] [12]) :

Un graphe  $G$  a une immersion squelettique dans une surface orientable de genre  $\gamma$  si et seulement si  $G$  admet une rotation  $\rho$  telle que

$$n_0 - n_1 + \|\alpha\rho\| = 2 - 2\gamma$$

### Démonstration

#### a) La condition est nécessaire

Supposons que  $G$  ait une immersion squelettique dans une surface orientable de genre  $\gamma$ . Donc  $G$  est réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire orientable  $K$  qui recouvre la surface. D'après le théorème 2 (III.6.2),  $K$  est représentable par le triplet  $(\Sigma, \alpha, \phi)$ . L'algorithme de construction des

sommets du squelette de  $K$  (III.4.2) montre que  $\rho = \alpha \psi$  est la rotation cherchée. L'égalité figurée dans le théorème n'est rien d'autre que la définition de la caractéristique de  $K$ .

b) La condition est suffisante

Ceci résulte directement de la définition du dual d'un complexe cellulaire orientable (III.6.3).  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE DU PREMIER CHAPITRE

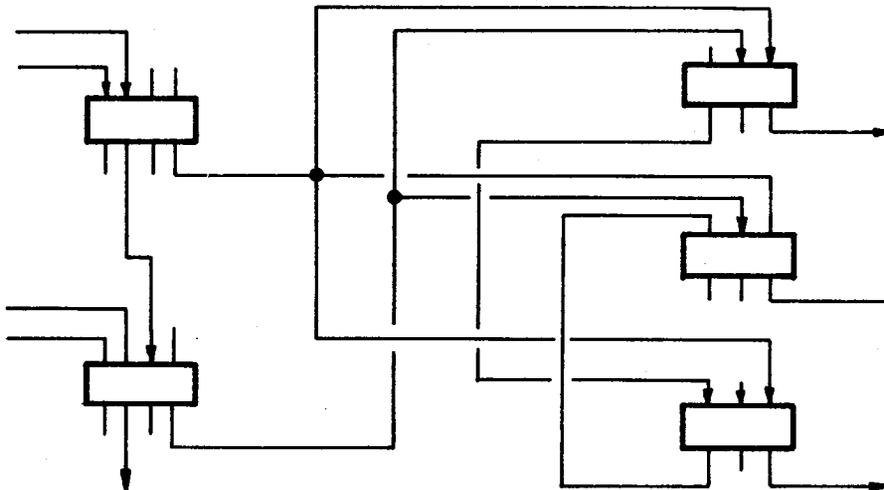
- [1] ALEKSANDROV  
Combinatorial Topology. Graylock press. 1956.
- [2] AHLFORS - SARIO  
Riemann surfaces. Princeton University press. 1960.
- [3] BERGE  
Graphes et hypergraphes. Dunod. 1973.
- [4] BRAHANA  
Systems of circuits on two-dimensional manifolds.  
Ann. Math. 23, 97-115, 1921.
- [5] COOKE - FINNEY  
Homology of cell complexes. Princeton University press. 1967.
- [6] EDMONDS  
A combinatorial representation for polyhedral surfaces.  
Notices A.M.S. 7, 646. 1960.
- [7] HILTON - WYLIE  
Homology theory. Cambridge University press. 1967.
- [8] JACQUES  
Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques.  
Thèse. Université de Paris. 1969.
- [9] LANG  
Algebra. Addison-Wesley. 1969.
- [10] LEFSCHETZ  
Topology. Chelsea. 1956.
- [11] MAUNDER  
Algebraic Topology. Van Nostrand Reinhold. 1970.
- [12] RINGEL  
Map Color theorem. Springer-Verlag. 1974.
- [13] YOUNGS  
Minimal embeddings and the genus of a graph.  
J. Math. Mec. 12. (303-316). 1963.
- [14] NGUYEN HUY XUONG  
Genre d'un graphe. Applications.  
Séminaire d'Algèbre Appliquée et de Conception. Grenoble. 1971.

*Chapitre II*

SUR LA PLANARITE D'UNE CLASSE DE GRAPHS BIPARTIS :  
LES GRAPHS DE BOITES ET D'ETOILES

## I - POSITION DU PROBLEME.

Dans les systèmes logiques actuels, construits avec des technologies intégrées, on utilise des composants (il s'agit de circuits intégrés réalisant un certain nombre de fonctions logiques) qui se présentent sous formes de boîtiers munis de pattes de sortie réparties sur la périphérie. Ces boîtiers seront disposés sur des plaquettes et on réunira leurs pattes de sortie par des équipotentiels réalisées par circuits imprimés (dépot d'une mince couche de métal). Cette technologie entraîne que deux équipotentiels ne peuvent pas se couper sur un même plan



A cette étape particulière de l'implantation du réseau logique on voit donc se poser deux problèmes :

1) Peut-on réaliser un tracé des connexions entre boîtiers sur une même plaquette ?

2) Dans l'affirmative, comment disposer les boîtiers sur la plaquette de manière à satisfaire aux contraintes électroniques et techniques (par exemple : emplacement des connexions convoyant les signaux rapides, disposition relative des éléments intégrés suivant leur nature, longueur du câblage ... etc) ?

Si le deuxième problème est trop complexe pour pouvoir se formuler d'une manière simple (voir [1] et [7]), le premier problème n'est autre que celui de l'immergeabilité du réseau logique dans le plan (donc dans la sphère).

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier un tel problème en tenant compte des données particulières exposées plus haut.

## II - UNE FORMALISATION DU PROBLEME.

### II.1. LES GRAPHES DE BOITES ET D'ETOILES (OU B-GRAPHES)

Considérons un réseau logique formé de boîtiers (considérés comme plats) et d'équipotentiels réunissant les pattes de sortie. On peut représenter ce réseau par un graphe biparti en associant à chaque boîtier un sommet appelé boîte, et à chaque équipotentielle un sommet nommé étoile. Il existera une arête entre une boîte et une étoile lorsque l'équipotentielle considérée par une patte de sortie du boîtier. D'autre part, en supposant qu'on ne puisse pas retourner ce dernier, la disposition des pattes de sortie sur sa périphérie exige que les arêtes incidentes à une boîte soient rangées dans un certain ordre.

Les considérations précédentes justifient donc l'introduction de la

Définition : On appelle graphe de boîtes et d'étoiles (ou, pour abrégé, B-graphe) tout couple  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  où :

- G est un graphe biparti dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux sous ensembles : celui, noté B, des boîtes et celui, noté E, des étoiles.

- Chaque  $\rho_b$  est une permutation circulaire des arêtes incidentes à la boîte  $b \in B$ .

On peut remarquer que la notion de B-graphe est très générale puisqu'elle pourrait englober celles d'hypergraphe, graphe et graphe à rotation (voir VII.5 du chapitre I et aussi [3]).

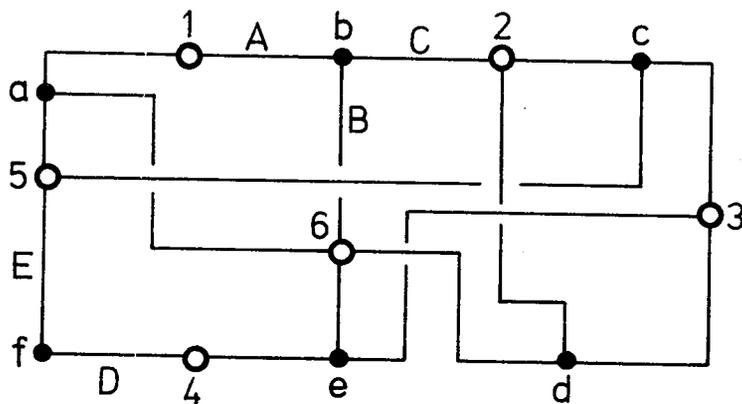
Dans la suite, nous utiliserons :

- les lettres minuscules a, b, c ... pour désigner les boîtes

- les chiffres 1, 2, 3 ... pour désigner les étoiles
- les lettres majuscules A, B, C ... pour désigner les arêtes.

Exemple

Dans l'exemple ci-dessous, nous représentons une boîte par un rond noir et une étoile par un rond blanc.



$$\varphi_b = ABC ; \varphi_f = DE ; \text{etc ...}$$

11.2. Soit  $\rho = (123\dots n)$  une permutation circulaire de  $n$  objets. Nous dirons que  $\rho$  est inscrit dans une permutation circulaire  $\tilde{\rho}$  de  $m$  objets ( $m \geq n$ ) lorsque

$$\tilde{\rho} = (1a_1b_1 \dots 2a_2b_2 \dots 3a_3b_3 \dots na_n b_n \dots)$$

Par exemple,  $(1234)$  est inscrit dans  $(15267384)$

11.3. IMMERSION D'UN B-GRAPHE DANS UNE SURFACE ORIENTABLE

Considérons un B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  et une surface orientable  $S$ . Supposons qu'il existe une immersion  $(G, K, S)$  de  $G$  dans  $S$  (voir VII.1 du chapitre I). Alors, d'après l'algorithme de recherche des sommets de  $K$  (voir III.4.2 chapitre I), on peut associer à chaque sommet  $s$  du squelette une permutation circulaire, notée  $\tilde{\rho}_s$ , des arêtes incidentes à  $s$ .

Nous dirons que le B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  est immergeable dans  $S$  lorsqu'il existe une immersion  $(G, K, S)$  de  $G$  dans  $S$  telle que,

pour tout  $b \in B$ ,  $\rho_b$  est inscrit dans  $\hat{\rho}_b$  où  $b$  est considéré comme un sommet du squelette de  $K$ .

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux conditions que doit satisfaire la famille  $(\rho_b)_{b \in B}$  pour que  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  soit immergeable dans la sphère.

### III - ETUDE DU PROBLEME DANS DEUX CAS EXTREMES

#### III.1. PLANARITE D'UN R-GRAPHE

Rappelons qu'un graphe est dit planaire lorsqu'il est immergeable dans la sphère (donc dans le plan).

Soit  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  un B-graphe. Supposons que toutes les étoiles soient de degré 2. Dans ce cas, il est inutile de considérer  $G$  comme un graphe biparti. Alors la famille  $(\rho_b)_{b \in B}$  détermine une rotation  $\rho = \prod_{b \in B} (\rho_b)$  de  $G$  (voir VII.5 du chapitre I). Couramment, le couple  $H = (G, \rho)$  est appelé R-graphe (ou graphe de boîtes et de fils dans [3]).

L'étude des immersions squelettiques d'un R-graphe est donnée par le théorème de Heffter-Edmonds ([2] ; pour une démonstration voir VII.5 du chapitre I).

Sachant que toute immersion d'un graphe dans la sphère est squelettique (Corollaire 1, chapitre I) nous avons donc :

Théorème I : Pour qu'un R-graphe  $H = (G, \rho)$  soit planaire il faut et il suffit que  $\|\alpha\rho\| = 1 + \beta(G)$ .

#### III.2. PLANARITE D'UN GRAPHE QUELCONQUE

Soit  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  un B-graphe. Supposons que toutes les boîtes soient de degré 2. Dans ce cas, il est inutile de considérer  $G$  comme un graphe biparti. D'autre part, la donnée de la famille  $(\rho_b)_{b \in B}$  est superflue, en ce sens qu'elle ne fournit aucune information supplémentaire sur  $G$ . Autrement dit, l'étude de la planarité de  $H$  n'est soumise à aucune

contrainte, c.à.d,  $H$  est planaire si et seulement si  $G$  l'est.

Il existe de nombreuses caractérisations des graphes planaires. Dans le cas qui nous intéresse, la forme appropriée semble être le

#### Théorème de Mac Lane ([4])

Pour qu'un graphe non séparable  $G$  soit planaire, il faut et il suffit que  $G$  contienne un ensemble de  $1 + \beta(G)$  cycles élémentaires, minimal pour la propriété : toute arête de  $G$  y figure exactement deux fois.

Dans la suite, un ensemble de cycles possédant les propriétés énoncées plus haut est appelé système complet.

Nous rappelons aussi que :

- un graphe est dit non-séparable s'il ne peut être disconnecté par l'élimination d'un sommet.

- un cycle est dit élémentaire quand on ne rencontre qu'une fois le même sommet en parcourant le cycle.

Enfin, d'après la définition d'un polyèdre (voir IV, chapitre I) et grâce au théorème de Mac Lane, quand un graphe est planaire, on peut le tracer dans le plan. Un tel tracé s'appellera une carte planaire du graphe.

#### IV - ETUDE DU PROBLEME DANS LE CAS GENERAL

Une solution du problème dans le cas général peut s'obtenir en appliquant le théorème 1.

En effet, connaissant la famille  $(\rho_b)_{b \in B}$  il suffit de trouver une famille  $(\rho_e)_{e \in E}$  telle que la rotation  $\rho = \prod_{b \in B} (\rho_b) \prod_{e \in E} (\rho_e)$  vérifie la condition exprimée dans le théorème 1.

Inversement, si le graphe  $G$  admet une rotation dont une décomposition en orbites a la forme précédente, alors le  $B$ -graphe sera planaire.

Mais, cette solution est pratiquement inapplicable car nous aurons à étudier  $\prod_{e \in E} (d_e - 1)!$  permutations circulaires ( $d_e =$  degré de l'étoile  $e$ ).

Nous allons donc chercher des conditions plus simples.

IV.1. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que le graphe  $G$  est simple et non-séparable. La simplicité de  $G$  entraîne une importante conséquence : on peut remplacer chaque  $\rho_b$  par une permutation circulaire des étoiles adjacentes à la boîte  $b$ . C'est ce que nous faisons dorénavant, mais en gardant toujours la même notation. Il est intéressant de noter que  $\rho_b$  s'apparente à la représentation d'un cycle élémentaire d'un graphe simple.

IV.2. PREMIERE SOLUTIONIV.2.1. Graphe biparti planaire maximal

Un graphe biparti simple et planaire est dit maximal lorsque toutes ses cartes planaires ont des faces de longueur 4 (voir [6]). Autrement dit, c'est un graphe qui a un nombre maximum d'arêtes. On a, pour un tel graphe :

$$n_1 = 2n_0 - 4$$

IV.2.2. Graphe radial

Considérons une carte planaire d'un graphe planaire non-séparable  $U = (X(U), E(U))$ . Désignons par  $F$  l'ensemble des faces de la carte. Un graphe  $V = (X(V), E(V))$  est dit graphe radial associé à  $U$  lorsque :

$$X(V) = X(U) \cup F$$

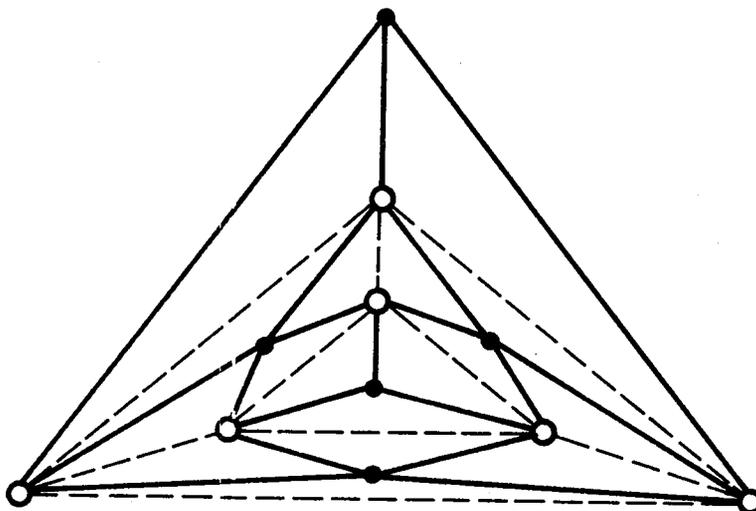
$$E(V) = \{ \{x, f\} \mid x \in X(U), f \in F, x \in \partial(f) \}$$

Du fait de la non-séparabilité de  $U$ , on peut remarquer que  $V$  est simple.

Dans [6] il a été démontrée la propriété suivante :

Proposition 1 : Tout graphe radial associé à un graphe planaire est biparti planaire maximal et inversement, tout graphe biparti planaire maximal peut être considéré comme graphe radial associé à un graphe planaire.

Dans l'exemple suivant, U est tracé en trait pointillé, et V en trait plein.



D'après la construction précédente, on voit que la correspondance graphe  $\rightarrow$  graphe radial n'est pas biunivoque. Ce qui nous amène à démontrer quelques propriétés supplémentaires avant de donner une solution au problème posé.

Propriété 1 : Tout graphe biparti simple et planaire est graphe partiel d'un graphe biparti, simple, planaire et maximal.

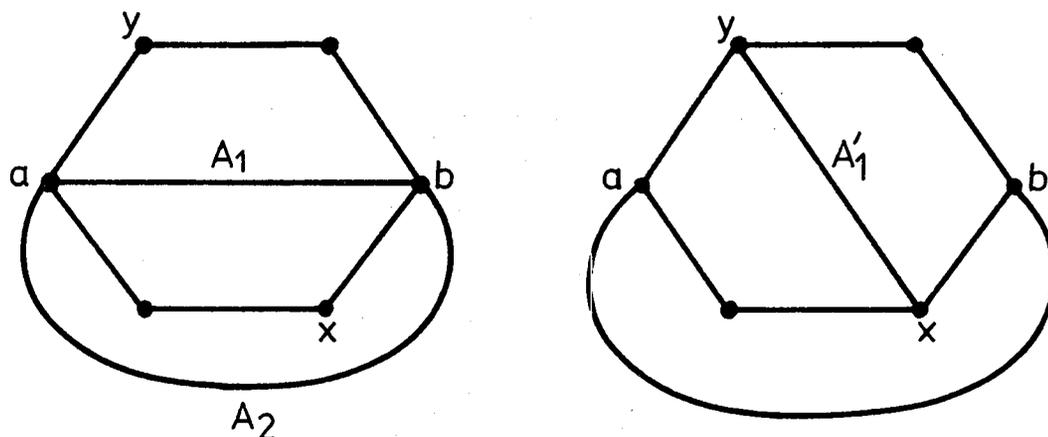
Démonstration

Soit V un graphe biparti, simple, planaire. Il existe au moins un graphe biparti planaire maximal qui admet U comme graphe partiel. Désignons par  $\tilde{V}$  un tel graphe dont le nombre d'arêtes multiples est minimum. Je dis que ce nombre est égal à zéro, ce qui entraînera que  $\tilde{V}$  est simple.

En effet, supposons le contraire et considérons une carte de  $\tilde{V}$ .

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux arêtes de  $\tilde{V}$  qui ont mêmes extrémités. Comme toutes les faces de la carte sont de longueur 4 nous avons donc la

figure suivante :



En remplaçant  $A_1$  par  $A'_1$  comme indique la figure ci-dessus, nous obtenons un graphe possédant les mêmes propriétés que  $\tilde{V}$  mais dont le nombre d'arêtes multiples est plus petit que celui de  $\tilde{V}$ . Ce qui contredit la définition de ce dernier.  $\square$

Remarque :

*La propriété 1 n'est pas vérifiée par les graphes de genre  $> 0$ .  
La démonstration en donne clairement la raison.*

D'après la proposition 1, il existe un graphe  $U$  qui admet  $\tilde{V}$  comme graphe radial associé. En général,  $U$  n'est pas simple (on dit que  $U$  est un multigraphe). C'est pourquoi nous introduisons la :

Définition : Soit  $V$  un graphe biparti. On appelle 2-fracture de  $V$  (voir [3]) un ensemble de deux sommets appartenant à une même classe et tel que l'élimination disconnecte  $V$ .

Avec les mêmes notations que précédemment nous avons la :

Propriété 2 :  $U$  est un multigraphe  $\Rightarrow \tilde{V}$  a une 2-fracture .

Démonstration

Soient  $a$  et  $b$  deux sommets de  $U$  qui sont reliés par deux arêtes distinctes  $A_1$  et  $A_2$ . Dans une carte plane de  $U$ , le cycle

$aA_1bA_2$  partage le plan en deux composantes connexes. Chaque partie de  $\tilde{V}$  située dans chacune de ces composantes ne communique avec "l'extérieur" que par a et b. Ce qui fallait démontrer  $\square$ .

#### IV.2.3. Première caractérisation des B-graphes planaires

Notation : Soit  $S = (C_i)_{i \in I}$  une famille de cycles. On appelle longueur de S la somme  $\sum_{i \in I} l(C_i)$  où  $l(C_i)$  est la longueur de  $C_i$ .

Théorème 2 : Pour qu'un B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  (où G est simple et sans 2-fracture formée de deux étoiles) Soit planaire il faut et il suffit qu'il existe un système complet  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$  de longueur  $2 n_0(G) - 4$  tel que, pour tout  $b \in B, \rho_b$  est inscrit dans  $\tilde{\rho}_b$ .

#### Démonstration

##### a) La condition est nécessaire

Supposons que H soit planaire, donc G l'est aussi. Comme G est simple, il est graphe partiel d'un graphe  $\tilde{G}$  biparti, simple, planaire et maximal, d'après la propriété 1. Par conséquent :

$$n_1(\tilde{G}) = 2n_0(\tilde{G}) - 4 = 2n_0(G) - 4$$

Par hypothèse, G est sans 2-fracture formée de deux étoiles, donc  $\tilde{G}$  possède aussi la même propriété. Par conséquent, d'après la propriété 2,  $\tilde{G}$  peut être considéré comme un graphe radial associé à un graphe simple et planaire U. De plus G, est non-séparable du fait que  $\tilde{G}$  est simple. On pourra remarquer, d'autre part, que l'ensemble des sommets de U est celui des étoiles de G.

D'après le théorème de Mac Lane, U admet un système complet de cycles élémentaires. Chaque cycle peut être représenté par une permutation circulaire des étoiles y appartenant. La construction d'un graphe radial montre qu'il y a autant de boîtes de G que de cycles du système complet. On peut donc représenter ce dernier par  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$ . Nous avons :

$$n_0(U) = \text{nombre d'étoiles de G}$$

$$n_2(U) = \text{nombre de faces d'une carte planaire de U} \\ = \text{nombre de boîtes de G}$$

La formule d'Euler nous donne alors :

$$n_1(U) = n_0(G) - 2$$

Ce qui confirme que la longueur du système  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$  est égal à  $2n_1(U) = 2n_0(G) - 4$  car toute arête de  $U$  y figure exactement deux fois.

Enfin, comme  $G$  est graphe partiel de  $\tilde{G}$ , nous avons bien, pour tout  $b \in B$  ;  $\rho_b$  est inscrit dans  $\tilde{\rho}_b$ .

Ce qui achève la démonstration de la condition nécessaire.

b. La condition est suffisante

Supposons qu'il existe un système complet  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$  satisfaisant aux propriétés énoncées dans la partie précédente. D'après le théorème de Mac Lane, chaque  $\tilde{\rho}_b$  est le bord d'une face d'une carte planaire d'un certain graphe planaire  $U$  dont l'ensemble de sommets est celui des étoiles de  $G$ . Désignons par  $\tilde{G}$  un graphe radial associé à  $U$ . Comme, pour tout  $b \in B$ ,  $\rho_b$  est inscrit dans  $\tilde{\rho}_b$ ,  $G$  est un graphe partiel de  $\tilde{G}$ . Ce qui équivaut à dire que le  $B$ -graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  est planaire.  $\square$

Corollaire 1 : Soit  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  un  $B$ -graphe tel que  $n_1(G) = 2n_0(G) - 4$ .

Alors  $H$  est planaire si et seulement si  $(\rho_b)_{b \in B}$  est un système complet.

Remarque

*Dans la pratique, la recherche du système  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$  peut se faire de la manière suivante :*

*Considérons le système  $(\rho_b)_{b \in B}$ . La longueur de ce système n'est autre que la somme des degrés des boîtes dans le graphe  $G$ . Comme  $G$  est biparti, on a donc :*

$$n_1(G) = \sum_{b \in B} d(b) = \sum_{b \in B} l(\rho_b)$$

*Si  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$  existe, il doit être de longueur  $2n_0(G) - 4$ , c à d,  $2(\text{nombre de boîtes} + \text{nombre d'étoiles}) - 4$ . Etant donné que, pour tout  $b$ ,  $\rho_b$  est inscrit dans  $\tilde{\rho}_b$ , on doit donc "intercaler" dans le système  $(\rho_b)_{b \in B}$  un nombre d'éléments égal à  $2n_0(G) - n_1(G) - 4$ , pour atteindre la longueur voulue. D'après la démonstration du théorème, les sommets du graphe engendré*

par  $(\tilde{\rho}_b)_{b \in B}$  sont des étoiles de  $G$ . Par conséquent, les éléments à être "intercalés" dans  $(\rho_b)_{b \in B}$  figurent dans l'ensemble des étoiles de  $G$ . Evidemment, en effectuant cette opération, on doit se rappeler que toute arête apparaît exactement deux fois dans le système final.

Exemple 1

Soit  $G$  le graphe biparti dont l'ensemble des sommets est :

$$X(G) = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

On se donne :

$$\rho_a = 123 ; \rho_b = 142 ; \rho_c = 1524 ; \rho_d = 253$$

Les données précédentes définissent un B-graphe planaire.

En effet, on a :

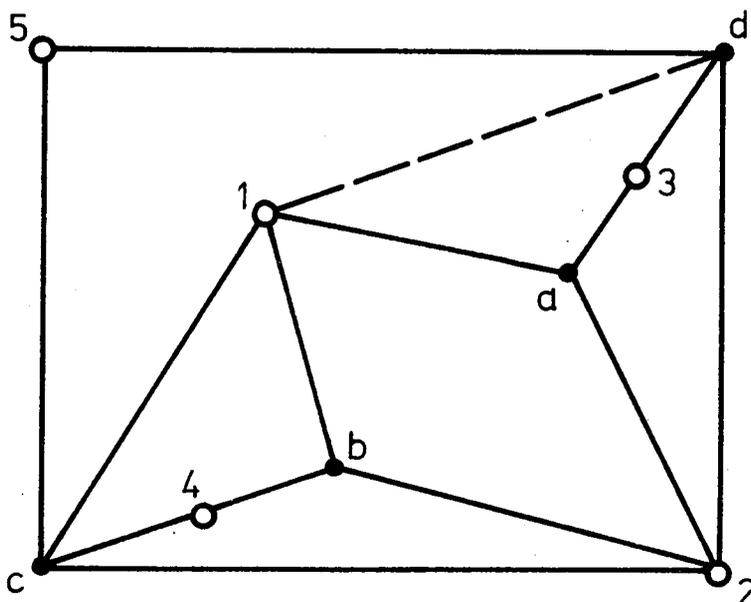
$$n_1(G) = d(a) + d(b) + d(c) + d(d) = 13$$

$$2n_0(G) - 4 = 2(4+5) - 4 = 14$$

Par conséquent, on doit intercaler une étoile (car  $2n_0(G) - 4 - n_1(G) = 1$ ) dans l'un des  $\rho$ . Sachant d'autre part que l'arête  $\{1,5\}$  ne figure qu'une fois dans l'ensemble des  $\rho$ , on peut donc essayer d'intercaler l'étoile 1 dans  $\rho_d = 253$ . Ce qui donne :

$$\tilde{\rho}_a = 123 ; \tilde{\rho}_b = 142 ; \tilde{\rho}_c = 1524 ; \tilde{\rho}_d = 2513.$$

Il s'agit bien d'un système complet : d'où la planarité.



Exemple 2

Avec les mêmes notations que précédemment, on se donne :

$$X(G) = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\rho_a = 1235 ; \rho_b = 1524 ; \rho_c = 5362 ; \rho_d = 2463.$$

Le B-graphe correspondant n'est pas planaire. En effet :

$$n_1(G) = 16 = 2r_0(G) - 4$$

Or le système des  $\rho$  données n'est pas complet car les arêtes  $\{4,5\}$ ,  $\{2,6\}$ ,  $\{4,6\}$ ,  $\{2,5\}$  n'y figurent qu'une seule fois.

IV. 3. DEUXIEME SOLUTIONIV.3.1. Introduction

Les conditions fixées par le théorème 2 (IV.2.3.) limitent le champ d'application d'un algorithme basé sur ce résultat.

En effet, comme le montrent les exemples 1 et 2 ci-dessus, la détermination du système  $(\rho_b)_{b \in B}$  n'est rapide que si le nombre d'arêtes du graphe est assez grand et même, si possible, assez proche de celui d'un graphe maximal. Remarquons néanmoins qu'il s'agit d'une bonne condition dans la mesure où plus un graphe a d'arêtes plus l'étude de sa planarité est complexe.

Ceci étant, nous allons proposer une deuxième solution qui peut s'appliquer aux cas où le nombre d'arêtes du graphe n'est pas trop grand.

IV.3.2. Graphe des étoiles associé à un B-graphe

Soit un B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$ . Comme dans la première solution,  $G$  est supposé simple, non-séparable et sans 2-fracture formée de deux étoiles.

Par graphe des étoiles associé à  $H$  nous entendons le graphe simple et orienté  $G^*$  tel que :

- les sommets de  $G^*$  sont les étoiles de  $G$ .
- On relie  $e_i$  à  $e_j$  par un arc si et seulement si  $e_i$  et  $e_j$  sont consécutifs dans un  $\rho_b$  unique. L'arc sera dirigé de  $e_j$  vers  $e_i$

si  $\rho_b(e_i) = e_j$ , de  $e_i$  vers  $e_j$  sinon

Exemple 3

$$\rho_a = 431$$

$$\rho_b = 124$$

$$\rho_c = 685$$

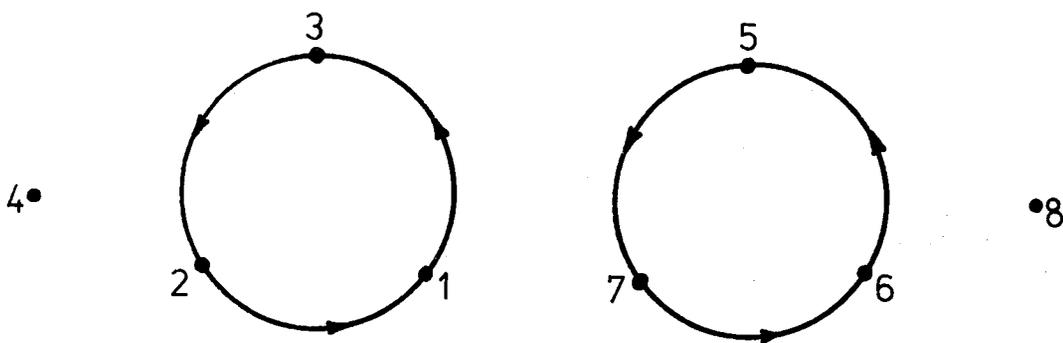
$$\rho_d = 758$$

$$\rho_e = 3486$$

$$\rho_f = 4278$$

$$\rho_g = 3672$$

Le graphe des étoiles associé est de la forme



IV.3.3. Deuxième caractérisation des B-graphes planaires

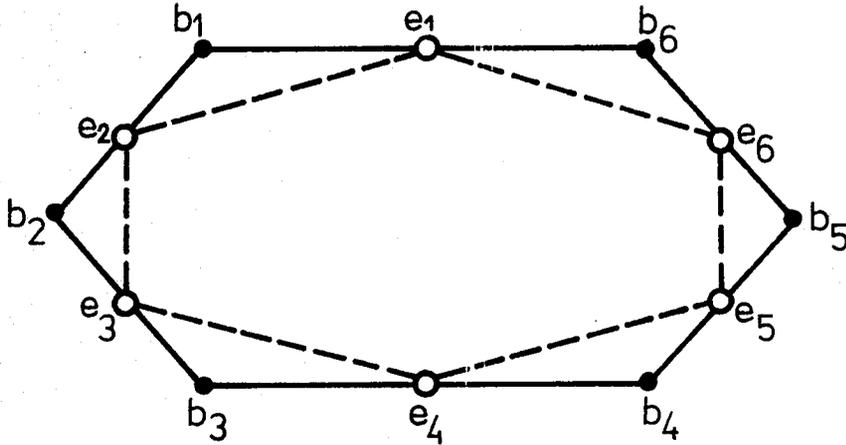
Théorème 3 : Pour qu'un B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  (où  $G$  est simple, non-séparable et sans 2-fracture formée de deux étoiles) soit planaire il faut et il suffit que le graphe des étoiles associé admette une partition en  $1 + \beta(G) - \frac{1}{2} (n_1(G) - n_1(G^*))$  circuits élémentaires dont l'union avec  $(\rho_b)_{b \in B}$  forme un système complet.

Démonstration

a - La condition est nécessaire

Supposons que  $H$  soit planaire. Considérons alors une carte planaire de  $G$ . Dans toute face de la carte, joignons  $e_i$  à  $e_j$  s'il existe une

boîte  $b \in B$  telle que les arêtes  $\{e_i, b\}$  et  $\{b, e_j\}$  sont consécutives sur le bord de la face (voir figure)

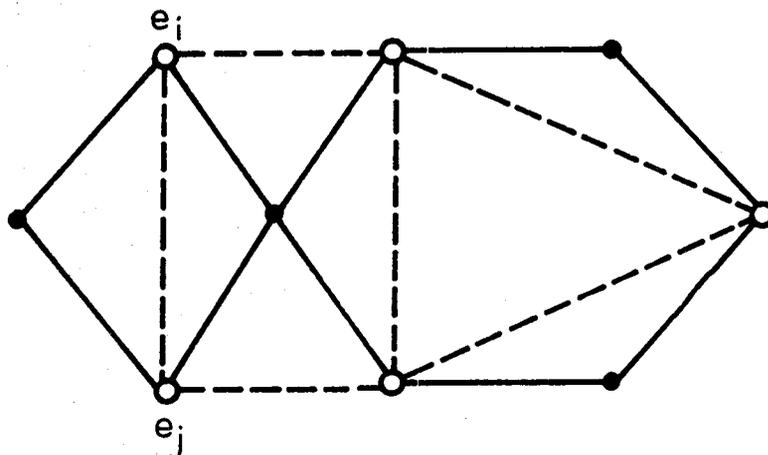


Nous obtenons ainsi un graphe  $U$  dont l'ensemble des sommets est celui des étoiles de  $G$ . Comme ce dernier est connexe et non-séparable,  $U$  possède donc les mêmes propriétés. Sachant, d'autre part, que  $G$  est sans 2-fracture formée de deux étoiles, les mêmes arguments que ceux de la démonstration de la propriété 2, montrent que  $U$  est simple. On a :

$$n_0(U) = \text{nombre d'étoiles de } G = |E|$$

$$n_1(U) = \frac{1}{2} (n_1(G) + n_1(G^*))$$

En effet, le dénombrement des arêtes de  $U$  peut se faire de la manière suivante : si deux étoiles  $e_i$  et  $e_j$  sont tels que  $e_i e_j$  et  $e_j e_i$  figurent dans le système  $(\rho_b)_{b \in B}$  alors l'arête  $\{e_i, e_j\}$  est comptée deux fois dans  $U$ . Sinon, c'est que  $\{e_i, e_j\}$  est une arête de  $G^*$  par définition. D'où le résultat .



U étant planaire, la formule d'Euler donne donc :

$$(1) \quad n_0(U) - n_1(U) + n_2(U) = 2$$

Considérons alors un graphe radial associé à U : c'est un graphe biparti. Il est apparent que le bord d'une face du graphe radial est soit un élément de  $(\rho_b)_{b \in B}$  soit un circuit élémentaire (car le graphe considéré est non-séparable) de  $G^*$ .

On en déduit que  $G^*$  admet une partition en circuits élémentaires. Désignons par  $p(G^*)$  le nombre d'éléments d'une telle partition. On a, d'après ce qui précède :

$$n_2(U) = |B| + p(G^*)$$

En remplaçant  $n_0(U)$ ,  $n_1(U)$ ,  $n_2(U)$  respectivement par leur valeur, (1) devient :

$$|E| - \frac{1}{2} (n_1(G) + n_1(G^*)) + |B| + p(G^*) = 2$$

Sachant que :

$$|E| + |B| = n_0(G)$$

$$n_1(G) - n_0(G) + 1 = \beta(G)$$

Nous avons donc :

$$p(G^*) = 1 + \beta(G) - \frac{1}{2} (n_1(G) - n_1(G^*))$$

Comme le système  $(\rho_b)_{b \in B}$ , joint aux  $p(G^*)$  circuits élémentaires de  $G^*$ , constitue les bords des faces du graphe radial, leur union donne bien un système complet.

La démonstration est achevée.

b - La condition est suffisante

En effet, le système donné étant complet, il engendre donc un graphe planaire U dont l'ensemble des sommets est celui des étoiles

de G. Sachant, d'autre part, que tout  $\rho_b$  est le bord d'une face de U, G est donc un sous graphe d'un graphe radial associé à U.

Ce qui achève la démonstration du théorème  $\square$

Corollaire 2 : Si le graphe des étoiles associé n'est pas eulérien alors le B-graphe n'est pas planaire.

En effet :

Si le B-graphe est planaire alors, d'après le théorème 2, le graphe des étoiles associé admet une partition en circuits élémentaires. Ce qui équivaut à dire qu'il est eulérien.  $\square$

Exemple 3'

Le B-graphe défini dans l'exemple 3 est planaire. En effet :

$$\beta(G) = n_1(G) - (|B| + |E|) + 1 = 24 - (7+8) + 1 = 10$$

$$n_1(G) - n_1(G^*) = 24 - 6 = 18$$

Par conséquent :

$$p(G^*) = 2$$

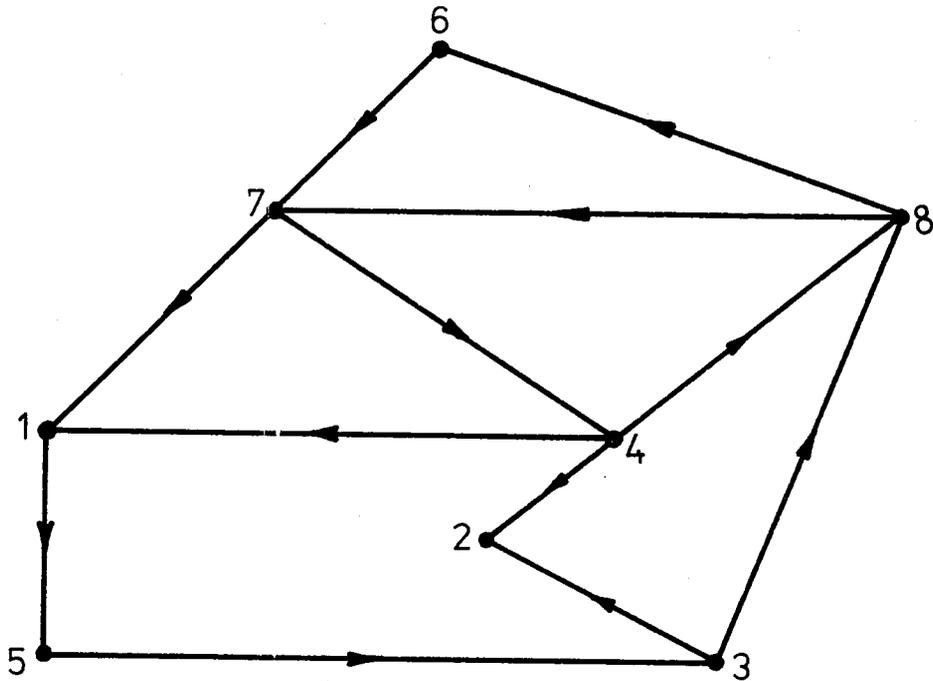
Les deux circuits 132 et 657 répondent à la question.

Exemple 4

Le B-graphe défini par

$$\rho_a = 1234 ; \rho_b = 4356 ; \rho_c = 6517 ; \rho_d = 7824 ; \rho_e = 846$$

n'est pas planaire. En effet, construisons le graphe des étoiles :



Ce n'est pas un graphe eulérien.

#### V - UNE DECOMPOSITION D'UN B-GRAPHE EN COUCHES PLANAIRES

Comme nous l'avons fait remarquer dans l'introduction de ce chapitre, les équipotentielles d'un réseau logique ne peuvent se réaliser que sur un même plan (celui de la plaquette dans laquelle les éléments intégrés sont rangés). D'autre part, la complexité des réseaux à utiliser entraîne le plus souvent la non planarité du B-graphe correspondant à ces réseaux. On est donc conduit à répartir les équipotentielles en couches de sorte que les graphes engendrés soient planaires (car les seules possibilités de contacts électriques entre couches sont constituées par les boîtiers).

Ainsi, se pose le problème de la décomposition d'un B-graphe en un nombre minimum de B-graphes planaires. Dans la pratique, même si une telle décomposition existait, le problème n'est pas résolu pour autant car, en général, le tracé des connexions est encore soumis aux différentes contraintes (voir [1], [3], [7]).

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une décomposition d'un B-graphe en couches planaires, sans tenir compte ni de la minimalité du nombre de couches, ni de la réalisation effective des connexions.

### Définition

Etant donné un B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$ , on appelle sous graphe partiel de  $H$ , tout B-graphe  $H' = (G', (\rho'_{b'})_{b' \in B'})$  tel que :

- $G'$  est un sous graphe partiel de  $G$  (donc  $B' \subset B$ )
- pour tout  $b' \in B'$ ,  $\rho'_{b'}$  est inscrit dans  $\rho_b$ ,

### Un algorithme heuristique

Soit à décomposer un B-graphe  $H = (G, (\rho_b)_{b \in B})$  en sous graphes partiels planaires.

Enlevons, si c'est nécessaire, des arêtes à  $G$  de manière que les étoiles du graphe partiel, noté  $H' = (G', (\rho'_{b'})_{b' \in B'})$ , soient de degré 2.  $H'$  est un R-graphe (voir III.1). D'après le théorème de Heffter et Edmonds (voir théorème 11, chapitre I), il existe une surface orientable de genre  $g$  dans laquelle  $H'$  admet une immersion squelettique unique. Au chapitre III, nous proposerons un algorithme de décomposition de  $H'$  en  $t$  sous graphes partiels planaires, avec  $t \leq g + 1$ . Posons :

$$H' = \bigcup_{1 \leq i \leq t} H_i$$

Considérons une arête  $\{b_j, e_k\}$  qui a été enlevée. S'il existe un  $H_i$  tel que l'on peut joindre planairement  $b_j$  à  $e_k$  tout en respectant  $\rho_{b_j}$ , alors le nombre de couches nécessaires est égal à celui de  $H'$ . Sinon, on ajoute une nouvelle couche pour tracer  $\{b_j, e_k\}$

## BIBLIOGRAPHIE DU DEUXIEME CHAPITRE

- [1] CHEIN  
Sur des problèmes de décomposition d'un graphe, liés à l'implantation.  
Thèse. Grenoble 1970
- [2] EDMONS  
A combinatorial representation for polyhedral surfaces.  
AMS Notices 7, p. 646. 1960
- [3] KUNTZMANN  
Théorie des réseaux, graphes.  
Dunod 1972.
- [4] MAC LANE  
A combinatorial condition for planar graph  
Fund. Math pp 22-32. 1936
- [5] NGUYEN HUY XUONG  
Sur la planarité d'une classe de graphes bipartis  
Séminaire d'Algèbre Appliquée et de Conception  
Grenoble 1972
- [6] ORE  
The four-color problem  
Academic Press 1967
- [7] SAILLARD ET SARRET  
Dessin automatique des masques : le programme DESMAG  
Onde Electrique, 49, pp-97. 1969

*Chapitre III*

IMMERSIONS REGULIERES

## INTRODUCTION

Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre II, Mac Lane, après Kuratowski [10] et Whitney [19], proposa, dans [12], une nouvelle caractérisation des graphes planaires. Cette caractérisation repose sur l'existence d'un ensemble de cycles du graphe satisfaisant à certaines conditions. Naturellement, on est tenté de généraliser ce résultat aux graphes immergeables dans une surface autre que la sphère. A ce propos, différentes directions sont offertes, suivant la nature des conditions imposées à l'ensemble des cycles du graphe. Par exemple, Boland dans [4], [5], usant de l'homologie et de l'homotopie, présenta une condition purement algébrique.

En ce qui nous concerne, s'agissant de graphes 2-connexes, nous voyons dans le résultat de Mac Lane deux particularités : premièrement, la propriété d'être élémentaire des cycles considérés, deuxièmement, la nature combinatoire des conditions auxquelles satisfont ces cycles. Nous sommes alors amenés à introduire, dans la Première Partie de ce chapitre, le concept d'immersion régulière dont l'étude constituerait un cadre approprié à une généralisation du théorème de Mac Lane. Dans cet optique, la Deuxième Partie est consacrée à la recherche, où seule intervient la connexité, de graphes régulièrement immergeables. Les résultats concernant les graphes de genre 1 sont à rapprochés du théorème de Steinitz (pour une démonstration voir [7]) qui donne une caractérisation du squelette d'un 3-polytope (ou polyèdre convexe).

## UNE CARACTERISATION DES GRAPHES REGULIEREMENT IMMERGEABLES

## I - COMPLEXE CELLULAIRE REGULIER

1.1. DEFINITIONS

a - Etant donné un complexe cellulaire  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$ , désignons par  $K_1$  son squelette. Comme nous l'avons fait lors de sa définition, une arête de  $K_1$  est une paire d'arcs apposés, soit  $A = \{a, a'\}$ . En particulier, par cycle de  $K_1$ , nous entendons une séquence circulaire d'arcs dans laquelle le sommet terminal d'un arc coïncide avec le sommet initial de son successeur. Lorsqu'en parcourant la séquence on ne rencontre qu'une fois le même sommet, le cycle est dit élémentaire [3].

D'autre part, il a été remarqué que le bord de toute facette de  $K$  est un cycle de  $K_1$  (chapitre I, III.4.4).

Par définition,  $K$  est dit régulier lorsque chacune de ses facettes a pour bord un cycle élémentaire de  $K_1$ .

Remarque

*En théorie des graphes, l'adjectif "régulier" a une autre signification que celle donnée plus haut. Ici, notre choix est dicté par la terminologie couramment utilisée en Topologie Algébrique.*

b - Soit une facette  $f \in \phi$  dont le bord est noté  $\partial(f)$ . Nous dirons que l'arête  $A = \{a, a'\}$  figure dans  $\partial(f)$  lorsque  $a$  ou  $a'$  y apparaît. Dans ce cas, si  $x$  est un sommet de  $A$ , alors la facette  $f$  est dite incidente à  $x$ . Evidemment la facette  $f'$ , opposée à  $f$ , le sera aussi.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 1 : Etant donné un complexe cellulaire  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$ , il existe un sous ensemble  $\Omega \subset \phi$  tel que toute arête du squelette de  $K$  figure exactement deux fois dans l'ensemble  $\partial(\Omega)$  des bords correspondants.

Démonstration :

a - Remarquons d'abord que, si  $\Omega$  existe, on peut toujours en choisir un tel que dans  $\partial(\Omega)$  tous les bords sont différents. En effet, désignons par  $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$  ( $p \geq 2$ ) un ensemble possédant la propriété annoncée et tel que dans  $\partial(\Omega)$  le nombre d'égalité  $\partial(f_i) = \partial(f_j)$  soit minimum. Je dis que, nécessairement, ce nombre est égal à 0. Sinon, supposons que  $\partial(f_1) = \partial(f_2)$ , donc  $\partial(f_1) \neq \partial(f'_2)$ . Comme chaque arête figure exactement deux fois dans  $\partial(\Omega)$ , on a  $\partial(f'_2) \notin \partial(\Omega)$ . Considérons alors :

$$\Omega' = \{f_1, f'_2, \dots, f_p\}$$

C'est un ensemble qui vérifie encore la propriété exigée. Dans  $\partial(\Omega')$  le nombre d'égalité  $\partial(f_i) = \partial(f_j)$  est celui de  $\partial(\Omega)$  diminué de 1. C'est donc absurde, vu la définition de  $\Omega$ .

b - Démontrons maintenant l'existence de  $\Omega$  qui, en plus de la propriété exigée, vérifie la condition suivante : si  $f \in \Omega$  alors  $f' \notin \Omega$ . Nous raisonnons par récurrence sur le nombre de faces de  $K$ .

Si  $n_2(K) = 1$  alors les propriétés précédentes sont vérifiées.

Supposons  $n_2(K) > 1$ . Comme le squelette est connexe, il existe donc un arc  $a$  et deux facettes distinctes  $f$  et  $g$  (avec  $f \neq g'$ ) tels que :

$$\partial(f) = a \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p$$

$$\partial(g) = a' \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_1$$

En enlevant l'arête  $A = \{a, a'\}$ , nous obtenons un nouveau complexe cellulaire, noté  $K'$ , dont le nombre de faces est  $n_2(K) - 1$  (c'est l'opération de réduction définie au chapitre I). Dans  $K'$ , soit  $h$  la facette dont le bord s'écrit :

$$\partial(h) = b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_1$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe dans  $K'$  un ensemble  $\Omega'$  possédant les propriétés annoncées et contenant  $h$  ou  $h'$ . Supposons que ce soit  $h$ . On prendra alors :

$$\Omega = \Omega' \cup \{f\} \cup \{g\}$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

Lorsque  $K$  est orientable nous avons de plus la proposition suivante :

Proposition 2 :  $K$  est orientable si et seulement s'il existe un ensemble  $\Omega$  tel que toute arête du squelette de  $K$  figure exactement deux fois dans  $\partial(\Omega)$ , une fois dans chaque sens.

#### Démonstration

Cela résulte directement de la définition de l'orientabilité d'un complexe cellulaire. En effet, dire que  $K$  est orientable équivaut à dire qu'il existe un ensemble de bords dans lequel chaque arc de  $\Sigma$  apparaît exactement une fois. Ce qui signifie que toute arête  $A = \{a, a'\}$  y figure une fois sous la forme  $a$  et une fois sous la forme  $a'$ .  $\square$

Dans la suite, un ensemble  $\Omega$  vérifiant la propriété énoncée dans la proposition 1 (respectivement dans la proposition 2 quand le complexe cellulaire est orientable) sera nommé système complet de faces.

L'ensemble des bords correspondants s'appellera système complet de bords. D'après la démonstration de la proposition 1, il est loisible de confondre un système complet de faces avec celui des bords. Par conséquent, nous utilisons souvent la même notation pour les désigner.

### 1.2. CARACTERISATION DU SQUELETTE D'UN COMPLEXE CELLULAIRE REGULIER

Dans ce paragraphe, nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire régulier.

#### 1.2.1. Base des cycles d'un graphe [3]

Soit  $G$  un graphe connexe ayant  $n_1(G)$  arêtes. Donnons une orientation à  $G$  en mettant une flèche sur chaque arête. A tout cycle  $\mu$  de  $G$  on peut faire correspondre un vecteur de  $\mathbb{R}^{n_1}$  tel que :

$$\mu = (r_1, r_2, \dots, r_{n_1})$$

avec :

$$r_i = 0 \text{ si } \mu \text{ ne passe pas par l'Arête } A_i$$

$$r_i = 1 \text{ si } A_i \text{ est orienté dans le sens du parcours}$$

$$r_i = -1 \text{ sinon}$$

On remarquera que la correspondance précédente est compatible avec la définition d'un cycle du squelette d'un complexe cellulaire.

Ainsi définis, les vecteurs  $\mu$  engendrent un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n_1}$ . La dimension de cet espace est précisément le nombre de Betti de  $G$ , défini par :

$$\beta(G) = n_1(G) = n_0(G) + 1$$

Dans la suite, par relations entre cycles de  $G$ , nous entendons les relations vectorielles dans  $\mathbb{R}^\beta$  entre les vecteurs correspondants.

Ceci étant, considérons le squelette  $K_1$  d'un complexe cellulaire  $K$ . Au chapitre I (III.9), à propos de l'homologie de  $K$ , nous avons défini l'espace  $Z_1$  des 1-cycles de  $K$ . Il est connu que  $Z_1$  est isomorphe à l'espace des cycles de  $K_1$  précédemment défini [1]. Par conséquent, nous confondons les 1-cycles d'un complexe cellulaire et avec les cycles de son squelette.

### 1.2.2. Voisinage d'un sommet dans un ensemble de cycles

Soit, dans un graphe  $G$ , un ensemble de cycles noté  $\Omega = \{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p\}$ . On appelle voisinage du sommet  $x$  dans  $\Omega$ , l'ensemble des arêtes du graphe et des cycles de  $\Omega$  passant par  $x$ . Nous désignons par  $V(x)$  le voisinage de  $x$ .

Deux cycles de  $\Omega$  sont dits adjacents s'ils ont en commun une arête incidente à  $x$ .

$V(x)$  est dit connexe si, pour toute paire de cycles  $y$  appartenant, on peut passer de l'un à l'autre par une suite de cycles adjacents.

Considérons maintenant le squelette  $K_1$  du complexe cellulaire  $K$ , dans lequel on a choisi un système complet de bords. Nous avons alors le résultat suivant :

Propriété 1 : Dans un système complet de bords d'un complexe cellulaire régulier, tout sommet du squelette a un voisinage connexe.

Démonstration

a - Rotation en un sommet : Considérons un sommet  $x$ . D'après l'algorithme de recherche des sommets de  $K$  (chap. I, III.4.2.), on peut définir en  $x$  deux permutations circulaires, inverse l'une de l'autre, des arcs entrant dans  $x$ . Soit :

$$\rho(x) = a_1 a_2 \dots a_{q-1} a_q$$

$$\bar{\rho}(x) = a_q a_{q-1} \dots a_2 a_1$$

Souvent, on appelle  $\rho(x)$  (resp.  $\bar{\rho}(x)$ ) rotation en  $x$

b - Permutation circulaire des arêtes et des cycles passant par un sommet

Soit  $\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  un système complet de bords du complexe cellulaire  $K$ , supposé régulier. Par conséquent, quel que soit  $i$ ,  $\mu_i$  est un cycle élémentaire.

Considérons l'arc  $a_1$  entrant dans le sommet  $x$ . On peut toujours supposer qu'il existe un cycle de  $\Omega$  passant par  $a_1$ , soit  $\mu_1$ . Par définition de  $\Omega$ ,  $\mu_1$  doit avoir l'une des deux formes :

$$\mu_1 = a_1 a'_2 \dots$$

$$\text{ou : } \mu_1 = a_1 a'_q \dots$$

Supposons que  $\mu_1$  soit de la première forme et dans ce cas, choisissons la rotation  $\rho(x)$ . D'après la propriété de  $\Omega$ , il existe un cycle, mettons  $\mu_2$ , de la forme :

$$\mu_2 = a_2 a'_3 \dots$$

$$\text{ou : } \mu_2 = a_3 a'_2 \dots$$

Puisque  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont élémentaires, on a donc :

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

En poursuivant le même raisonnement, on met donc en évidence une permutation circulaire où alternent les arcs et les cycles passant par  $x$ . Autrement dit, le voisinage de  $x$  dans  $\Omega$  s'écrit :

$$V(x) = (a_1, \mu_1, a_2, \mu_2 \dots a_r, \mu_r)$$

D'autre part, d'après l'algorithme de construction de  $x$ , on doit avoir  $r = q$ . Ce qui établit la connexité de  $V(x)$ , car dans  $V(x)$ ,  $\mu_i$  et  $\mu_{i+1}$  sont adjacents.  $\square$

Remarques :

- 1 - Lorsque  $K$  n'est pas régulier,  $V(x)$  n'est pas une permutation circulaire car il peut arriver que  $\mu_i$  soit égal à  $\mu_j$  pour  $i \neq j$ .
- 2 - Soit, dans un graphe  $G$ , un système de cycles dans lequel toute arête apparaît exactement deux fois. Alors, d'après la démonstration précédente, le voisinage de tout sommet dans ce système est formé de plusieurs composantes connexes. Chaque composante est de la forme  $V(x)$ .

I.2.3. Connectivité du squelette d'un complexe cellulaire régulier

Rappelons qu'un graphe est dit  $k$ -connexe s'il ne peut être disconnecté par la suppression de  $k - 1$  sommets [3]. On a le résultat suivant :

Propriété 2 : Le squelette d'un complexe cellulaire régulier est 2-connexe

Démonstration :

On sait qu'un graphe est 2-connexe si et seulement si par deux arêtes adjacentes il passe toujours un cycle élémentaire [3].

Soient donc  $A_1 = \{a_1, a'_1\}$  et  $A_i = \{a_i, a'_i\}$  deux arêtes de  $K_1$  adjacentes à  $x$ . Si  $a_1$  et  $a_i$  sont deux arcs successifs dans une rotation de  $x$ , alors, d'après la propriété 1, il existe un cycle élémentaire appartenant à un système complet de bords et passant par  $a_1$  et  $a'_2$ . Sinon, la connexité de  $V(x)$  montre qu'on peut passer de  $a_1$  et  $a_i$  par une

suite  $a_1, \mu_1, a_2, \mu_2, \dots, \mu_{i-1}, a_i$  où tous les  $\mu_i$  sont élémentaires et différents. On peut donc construire un cycle élémentaire passant par  $a_1$  et  $a_i$ . Ce qu'il faut démontrer.  $\square$

#### I.2.4. Réalisation squelettique d'un graphe dans un complexe cellulaire régulier orientable.

Soit  $K$  un complexe cellulaire orientable, de caractéristique  $\chi$ .

On a :

$$\chi(K) = n_0(K) - n_1(K) + n_2(K) = 2 - 2g \quad (g \geq 0)$$

En désignant par  $K_1$  le squelette de  $K$ , on sait que :

$$n_0(K_1) = n_0(K)$$

$$n_1(K_1) = n_1(K)$$

De plus, lorsque  $K$  est régulier,  $K_1$  est 2-connexe d'après la propriété 2. On a alors le théorème de caractérisation suivant :

Théorème 1 Pour qu'un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$  soit réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire régulier, orientable et de caractéristique  $2 - 2g$ , il est nécessaire et suffisant que ce graphe contienne un ensemble  $\Omega = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{\beta-2g}\}$  de  $1 + \beta - 2g$  cycles élémentaires, tel que :

- (1) Toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$ .
- (2) Tout sommet du graphe admet dans  $\Omega$  un voisinage connexe
- (3)  $\Omega$  est un système dépendant minimal, en ce sens que :

$$\sum_{\mu_i \in \Omega} \mu_i = 0$$

#### Démonstration

##### a - Conditions nécessaires

Supposons que  $G$  soit isomorphe au squelette  $K_1$  d'un complexe cellulaire régulier, orientable et de caractéristique  $2 - 2g$ . D'après la proposition 1,  $K$  contient un système complet de bords, noté  $\Omega$ .

C'est aussi un ensemble de cycles de  $K_1$ . D'après sa construction,  $\Omega$  vérifie les conditions (1) et (2). D'autre part, le nombre de cycles de  $\Omega$  est égal au nombre de faces de  $K$ , c'est à dire  $n_2(K)$ .

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Omega) &= \chi(K) + (n_1(K) - n_0(K)) = 2-2g + (n_1(K_1) - n_0(K_1)) \\ &= 1 + \beta(K_1) - 2g \\ &= 1 + \beta(G) - 2g \end{aligned}$$

Enfin, la condition (3) résulte de la proposition 2 et de la connexité du squelette.

b - Conditions suffisantes.

Soit  $G$  un graphe contenant un ensemble  $\Omega = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{\beta-2g}\}$  de cycles élémentaires satisfaisant aux conditions (1) (2) et (3).

A chaque arête  $A$  de  $G$ , associons une paire d'arcs  $\{a, a'\}$ .

Les conditions (1) et (3) expriment que tout arc de  $G$  figure exactement une fois dans  $\Omega$ .

Considérons en un sommet  $x$  l'ensemble  $\{a_1, a_2 \dots a_p\}$  des arcs qui y entrent. Il existe alors dans  $\Omega$  un cycle unique,  $\mu_1$  par exemple, qui passe par  $a_1$ . Comme  $\mu_1$  est élémentaire, il est donc de la forme :

$$\mu_1 = a_1 a'_2 \dots$$

En poursuivant le raisonnement et en utilisant la connexité du voisinage de  $x$  dans  $\Omega$  (condition (2)) on obtient donc une permutation circulaire unique qui s'écrit :

$$V(x) = (a_1, \mu_1, a_2, \mu_2, \dots, a_p, \mu_p)$$

avec :

$$\mu_i = a_i a'_{i+1} \dots \pmod{p}$$

Ceci étant, désignons par  $\Sigma$  l'ensemble des arcs de  $G$ . Posons :

$$\phi = \{f_0, f'_0, f_1, f'_1 \dots f_{\beta-2g}, f'_{\beta-2g}\}$$

En définissant :

$$\partial(f_i) = \mu_i$$

$$\partial(f'_i) = \mu'_i$$

on obtient un triplet  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$ . C'est un complexe cellulaire orientable d'après les conditions (1) et (3). La connexité de  $K$  résulte de la minimalité de  $\Omega$ .

Démontrons que  $G$  est isomorphe au squelette de  $K$ . Considérons donc l'arc  $a_1$  et cherchons les arcs qui ont même sommet terminal que  $a_1$  en appliquant l'algorithme de recherche des sommets de  $K$ . On s'apercevra que ce sommet est déterminé par les deux permutations circulaires :

$$\rho = a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p$$

$$\bar{\rho} = a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1$$

Alors, l'application

$$x \rightarrow V(x) \rightarrow \{\rho, \bar{\rho}\}$$

constitue un isomorphisme entre  $G$  et le squelette de  $K$ .

Calculons la caractéristique de  $K$ . On a :

$$\begin{aligned} \chi(K) &= n_0(K) - n_1(K) + n_2(K) \\ &= n_0(K_1) - n_1(K_1) + \text{Card}(\Omega) \\ &= n_0(G) - n_1(G) + \beta - 2g + 1 \\ &= 2 - 2g \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème  $\square$ .

### I.2.5. Réalisation squelettique d'un graphe dans un complexe cellulaire régulier non-orientable

Soit  $K$  un complexe cellulaire non-orientable. Au chapitre I, nous avons déterminé la dimension des espaces  $H_0, H_1, H_2$  en prenant  $\{0,1\}$  comme corps de base. Comme nous avons construit l'espace des cycles du squelette en prenant  $\mathbb{R}$  comme corps de base, nous allons donner une nouvelle détermination de  $\dim(H_1)$ . Nous savons que :

$$\dim(H_0, \text{mod } 2) = \dim(H_0, \mathbb{R})$$

$$\dim(H_2, \text{mod } 2) = 1$$

$$\dim(H_2, \mathbb{R}) = 0$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\chi(K) &= n_0(K) - n_1(K) + n_2(K) \\ &= \dim(H_0) - \dim(H_1) + \dim(H_2) \\ &= 1 - \dim(H_1, \mathbb{R}) \\ &= 2 - h \quad (h \geq 1)\end{aligned}$$

d'où :

$$\dim(H_1, \mathbb{R}) = h - 1$$

Ceci étant, considérons un système complet  $\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  de bords de  $K$ . Comme  $K$  est non-orientable, il existe donc au moins un arc qui figure dans deux cycles différents. Par conséquent :

$$\sum \lambda_i \mu_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i$$

Autrement dit,  $\Omega$  est un système de cycles indépendants.

Les considérations précédentes, jointes à une démonstration semblable à celle du théorème 1, nous donnent alors le :

Théorème 2 : Pour qu'un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$  soit réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire régulier, non-orientable et de caractéristique  $2-h$ , il est nécessaire et suffisant que ce graphe contienne un ensemble  $\Omega = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{\beta-h}\}$  de  $1 + \beta - h$  cycles élémentaires, tel que :

- (1) Toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$
- (2) Tout sommet du graphe admet dans  $\Omega$  un voisinage connexe
- (3')  $\Omega$  est un système indépendant.

## II - GRAPHERS REGULIEREMENT IMMERGEABLES DANS UNE SURFACE

### II.1. DEFINITION

Etant donné un graphe  $G$  et une surface  $S$ , nous dirons que  $G$  est régulièrement immergeable dans  $S$  s'il existe une immersion squelettique  $(G, K, S)$  telle que  $K$  soit un complexe cellulaire régulier.

Il résulte immédiatement des théorèmes 1 et 2 précédents le résultat suivant :

Théorème de Mac Lane généralisé

Pour qu'un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$  soit régulièrement immergeable dans une surface orientable (resp. non-orientable) de caractéristique  $2-2g$  (resp.  $2-h$ ), il est nécessaire et suffisant que ce graphe contienne un ensemble  $\Omega$  de  $1 + \beta - 2g$  (resp.  $1 + \beta - h$ ) cycles élémentaires tels que :

- (1) Toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$ .
- (2) Tout sommet du graphe admet dans  $\Omega$  un voisinage connexe.
- (3)  $\Omega$  est un système dépendant minimal.
- (3') (resp.  $\Omega$  est un système indépendant)

11.2. REMARQUES

a - Dans l'étude des immersions régulières, on ne considère que les graphes 2-connexes. Cette condition n'est pas trop restrictive, dans la mesure où Battle, Harary, Kodama et Youngs ont démontré, dans [2], que le genre d'un graphe est égal à la somme des genres de ses blocs. Par conséquent, dans la pratique, on n'étudie que les immersions d'un graphe 2-connexe.

b - Dans l'énoncé du théorème de Mac Lane, la condition (2) est la plus difficile à satisfaire. En effet, à tout graphe  $G$ , associons un graphe noté  $2\vec{G}$ , qui s'obtient à partir de  $G$  en dédoublant chaque arête de  $G$ . Si on veut étudier les immersions de  $G$  dans une surface orientable, les arêtes dédoublées seront transformées en arcs opposés. Sinon, certaines arêtes dédoublées seront orientées dans le même sens. Supposons que  $G$  soit régulièrement immergeable dans une surface  $S$ , alors l'ensemble  $\Omega$  n'est rien d'autre qu'un circuit eulerien de  $2\vec{G}$  (nous dirons, au chapitre IV, que  $\Omega$  est un circuit bi-eulerien de  $G$ ). Si la recherche des circuits euriens d'un graphe orienté symétrique ne présente pas trop de difficultés, on ne connaît pas, par contre, d'algorithmes qui déterminent ceux répondant à la condition (2). L'exemple suivant constitue une illustration de cette difficulté :

Soit  $G$  le squelette du "pseudo-polyèdre" de la fig. 1a.

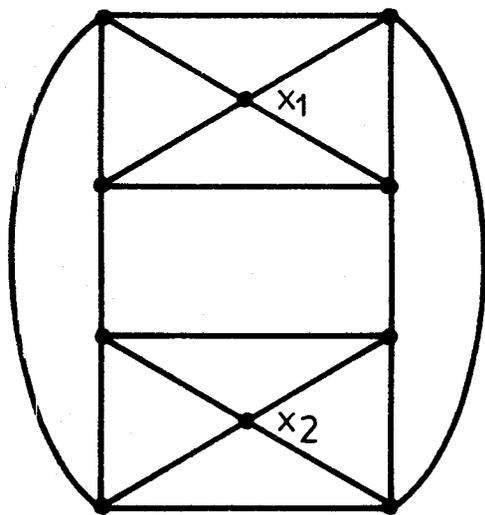
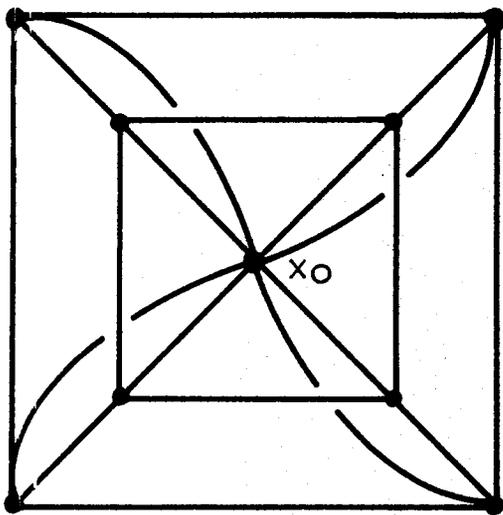
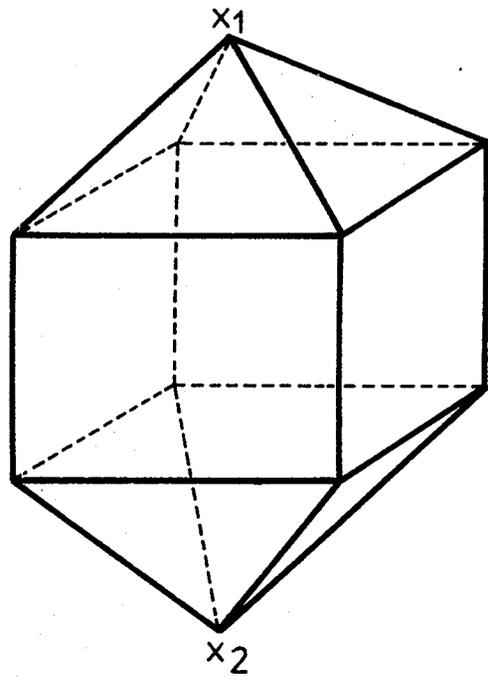
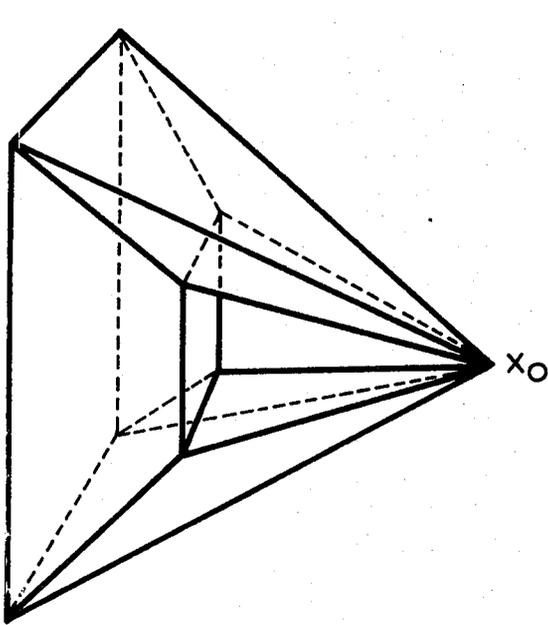


Fig.1a

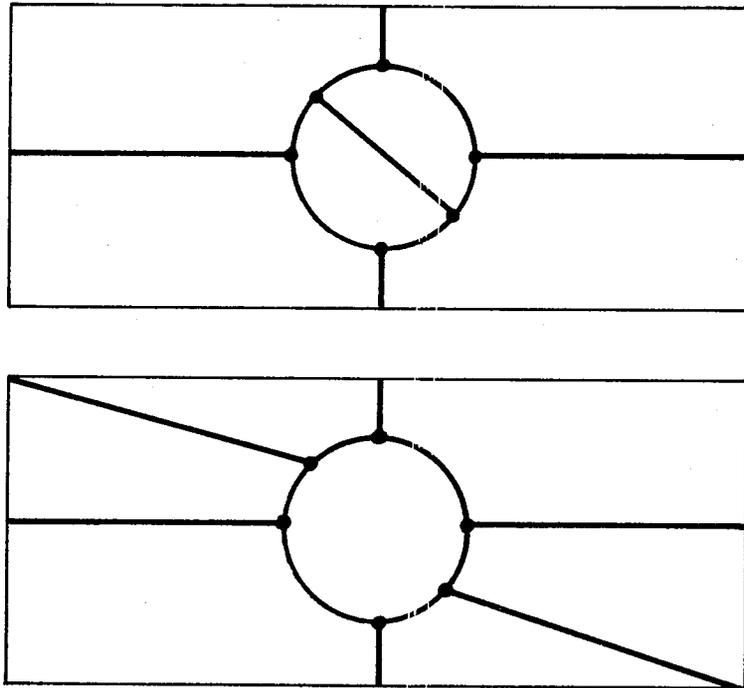
Fig.1b

L'ensemble des cycles bordant les faces du pseudo-polyèdre possède bien les propriétés (1) et (3). Il détermine alors un complexe cellulaire dont le polyèdre sous-jacent est représenté par la Fig. 1b.  $G$  n'est pas isomorphe au squelette de ce polyèdre, précisément parce que la condition (2) n'est pas satisfaite au sommet  $x_0$ .

11.3. EXEMPLES

a - Le graphe complet à 4 sommets  $K_4$  ne possède aucune immersion régulière dans le tore (surface orientable de genre 1). En effet, d'après la formule d'Euler, toute immersion squelettique de  $K_4$  dans le tore possède 2 faces. Si le bord de chaque face était un cycle élémentaire, alors sa longueur serait inférieure ou égale à 4. Comme chaque arête de  $K_4$  doit apparaître exactement deux fois dans l'ensemble des deux cycles, le nombre d'arêtes de  $K_4$  serait au maximum 4. Ce qui est absurde.

b - Le graphe biparti, complet, à 6 sommets  $K_{3,3}$  possède une immersion régulière dans le tore (et aussi une qui ne l'est pas).

11.4. CARACTERISATION DES GRAPHES PLANAIRES

A proprement parler, la démonstration du théorème de caractérisation proposée par Mac Lane dans [12] ne s'applique qu'aux graphes immergeables dans le plan. Lefschetz, dans [11], a été le premier à faire remarquer que la démonstration du théorème de Mac Lane gagnerait à être faite pour les immersions dans la sphère. Nous lui devons l'idée principale de la preuve du résultat suivant:

Lemme 1 : Soit  $\Omega = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\beta\}$  un ensemble de  $\beta + 1$  cycles élémentaires d'un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$ . Si  $\Omega$  vérifie les conditions (1) et (3) du théorème 1, alors il possède aussi la propriété (2).

Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde. Soit  $G$  un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$  et contenant l'ensemble  $\Omega$  défini ci-dessus.

a - Puisque  $\Omega$  vérifie la condition (3), il forme donc un ensemble de dépendance minimale. Autrement dit, tout sous-ensemble propre de  $\Omega$  est un système de cycles indépendants.

b - Puisque  $\Omega$  vérifie la condition (1), d'après la démonstration de la propriété 1 (I.2.2), le voisinage dans  $\Omega$  d'un sommet  $x$  de  $G$  est de la forme :

$$V(x) = V_1(x) \cup V_2(x) \dots \cup V_p(x) \quad (p \geq 1)$$

où chaque  $V_i(x)$  est une permutation circulaire dans laquelle alternent les arcs entrant dans  $x$  et les cycles de  $\Omega$  passant par  $x$ .

c - Supposons que  $G$  possède un sommet unique  $x_0$  où la condition (2) n'est pas vérifiée. D'après la démonstration du théorème 1 (partie b) l'ensemble  $\Omega$  engendre un complexe cellulaire orientable  $K$ . Le squelette  $K_1$  de  $K$  est connexe car, d'après l'algorithme de construction des sommets,  $K_1$  s'obtient à partir de  $G$  (2-connexe) en "éclatant"  $x_0$  en  $p$  sommets où  $p > 1$  est le nombre de composantes connexes de  $V(x_0)$ . Par conséquent,  $K$  est connexe. Calculons sa caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi(K) &= n_0(K) - n_1(K) + n_2(K) \\ &= n_0(G) + (p-1) - n_1(G) + \text{Card}(\Omega) \\ &= -\beta + p + 1 + \beta \\ &= p + 1 > 2 \end{aligned}$$

C'est donc absurde.

d - Supposons que  $G$  possède plusieurs sommets où la condition (2) n'est pas vérifiée. Le même raisonnement fait dans c - s'applique encore pour mettre en évidence un complexe cellulaire orientable  $K$ . Si  $K_1$  était

connexe alors, comme dans c -,  $\chi(K)$  serait  $> 2$ . Donc,  $K_1$  n'est pas connexe et l'on a :

$$K = K^1 \cup K^2 \dots \cup K^p \quad (p > 1)$$

où chaque  $K^i$  possède un système complet de bords  $\Omega^i$  vérifiant les trois conditions (1), (2) et (3), d'après les propositions 1, 2 et la propriété 1.

Evidemment :

$$\Omega^i \subsetneq \Omega$$

$$\sum_{\mu_j \in \Omega^i} \mu_j = 0$$

Ce qui contredit la minimalité de  $\Omega$ , d'après a.

La proposition est démontrée.  $\square$

D'autre part, nous savons que :

- (i) Si un graphe est immergeable dans la sphère alors toutes ses immersions sont squelettiques (corollaire 1, chapitre I)
- (ii) Si un graphe 2-connexe est immergeable dans la sphère alors toutes ses immersions sont régulières (voir [16]).

Il en résulte alors le théorème suivant :

Théorème de Mac Lane ([11], [12])

Un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$  est immergeable dans la sphère si et seulement s'il contient un ensemble

$\Omega = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\beta\}$  de  $1 + \beta$  cycles élémentaires tel que :

- (1) Toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$
- (3)  $\Omega$  est un système dépendant minimal, c'est à dire :

$$\sum_{\mu_i \in \Omega} \mu_i = 0$$

11.5. IMMERSION D'UN GRAPHE DANS LE PLAN PROJECTIF

Boland, dans [4], a présenté une caractérisation des graphes immergeables dans le plan projectif (= surface non orientable de caractéristique 1). Sa démonstration, assez longue et difficile, s'appuie sur des

considérations purement topologiques qui ne se prêtent pas aux généralisations. Nous allons voir que son résultat principal est une conséquence directe du théorème de Mac Lane généralisé. En effet :

Lemme 2 : Soit  $\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\beta\}$  un ensemble de  $\beta$  cycles élémentaires d'un graphe 2-connexe de nombre de Betti  $\beta$ . Si  $\Omega$  vérifie les conditions (1) et (3') du théorème 2, alors il possède aussi la propriété (2).

Démonstration

Le raisonnement utilisé dans le lemme 1 s'applique encore ici, avec quelques modifications. En effet :

Désignons par  $K$  le complexe cellulaire engendré par  $\Omega$  (condition (1)).  $K$  est non orientable car  $\Omega$  vérifie la condition (3'). Supposons que  $\Omega$  ne vérifie pas la condition (2). Il existe donc, dans  $G$ ,  $p$  sommets  $x_1, x_2, \dots, x_p$  ( $p \geq 1$ ) dont le voisinage n'est pas connexe. Pour les raisons exposées dans la démonstration du lemme 1, le squelette  $K_1$  de  $K$  s'obtient à partir de  $G$  en éclatant chaque sommet  $x_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) en  $p_i$  sommets où  $p_i$  est le nombre de composantes connexes de  $V(x_i)$ .

Si  $K$  est connexe, alors :

$$\begin{aligned} \chi(K) &= n_0(K_1) - n_1(K_1) + \text{Card}(\Omega) \\ &> n_0(G) - n_1(G) + \beta = 1 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible car la caractéristique d'un complexe cellulaire non-orientable est toujours  $\leq 1$ .

On doit donc avoir :

$$K = K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^q \quad (q \geq 2)$$

Chaque complexe cellulaire  $K^i$  possède un système complet de bords  $\Omega^i$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad \Omega &= \Omega^1 \cup \Omega^2 \dots \cup \Omega^q \\ \Omega^i \cap \Omega^j &= \emptyset \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

Comme  $\Omega$  forme un système indépendant, il en est donc de même pour chaque  $\Omega^i$  ( $1 \leq i \leq q$ ). Par conséquent, pour tout  $i$ ,  $\Omega^i$  vérifie les trois conditions (1), (2) et (3') du théorème 2. D'où :

$$(I) \quad \chi(K^i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq q)$$

D'après l'égalité (E), on a :

$$\begin{aligned} \text{Card } (\Omega) &= \sum_1^q \text{Card } (\Omega^i) = \sum_1^q [\chi(K^i) + n_1(K^i) - n_0(K^i)] \\ &= \sum_1^q \chi(K^i) + \sum_1^q n_1(K^i) - \sum_1^q n_0(K^i) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\sum_1^q \chi(K^i) \leq q \quad (\text{d'après (I)})$$

$$\sum_1^q n_1(K^i) = n_1(G)$$

$$\sum_1^q n_0(K^i) \geq n_0(G) + q \quad (\text{car } G \text{ est 2-connexe})$$

On a donc :

$$\beta = \text{Card } (\Omega) \leq q + n_1(G) - n_0(G) - q = n_1(G) - n_0(G) < \beta$$

On aboutit encore à une contradiction.

Le lemme est donc démontré  $\square$

D'autre part, dans [4], Boland a prouvé que : si un graphe 2-connexe, non planaire, est immergeable dans le plan projectif alors toutes ses immersions y sont régulières. D'où :

Théorème 3 : Pour qu'un graphe non planaire, 2-connexe et de nombre de Betti  $\beta$  soit immergeable dans le plan projectif, il est nécessaire et suffisant que ce graphe contienne un ensemble  $\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\beta\}$  de  $\beta$  cycles élémentaires tel que :

(1) Toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$ .

(3')  $\Omega$  est une base des cycles du graphe.

Remarques

- 1 - Dans son article [4], Boland a aussi démontré le résultat suivant : Si un graphe est immergeable dans le plan projectif, alors il possède au plus un bloc (c.à.d un sous graphe maximal pour la propriété d'être 2-connexe) non planaire. Combiné au théorème de Mac Lane pour les graphes planaires, ce résultat permet à Boland de donner une caractérisation des graphes immergeables dans le plan projectif.
- 2 - Les démonstrations du lemme 1 et du lemme 2 montrent que les trois conditions (1), (2) et (3) (resp. (3')) sont indépendantes dès que la caractéristique de la surface est  $\leq 0$ , ou, de manière équivalente, dès que la cardinalité du système complet est  $\leq \beta - 1$ . D'ailleurs, l'exemple donné dans la remarque II.2 constitue une illustration concrète de cette affirmation.

III - IMMERSION DES GRAPHES CUBIQUES. IMMERSIONS SIMPLICIALES

Les graphes cubiques font l'objet de nombreux travaux, tant au point de vue combinatoire qu'au point de vue topologique, en raison du rôle important qu'ils jouent dans l'étude de la conjecture des quatre couleurs.

Dans cette section, nous examinons les immersions régulières des graphes cubiques. Nous verrons, en général, qu'on peut exprimer de manière purement combinatoire les théorèmes d'existence.

III.1 - IMMERSION REGULIERE DES GRAPHES CUBIQUES

Comme nous l'avons fait remarquer dans la section précédente, parmi les conditions imposées par le théorème de Mac Lane généralisé, la plus difficile à satisfaire est celle concernant la connexité du voisinage de chaque sommet. En ne considérant que des graphes cubiques (c.à.d des graphes dont le degré de tout sommet est égal à 3), cette condition est trivialement vérifiée comme nous allons voir. En effet :

Lemme 3 : Soit  $\Omega$  un ensemble de cycles élémentaires d'un graphe cubique 2-connexe. Si toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$  alors tout sommet du graphe admet dans  $\Omega$  un voisinage connexe.

Démonstration

Puisque le graphe est 2-connexe, il est sans boucle. Désignons par  $a_1, a_2, a_3$  les trois arcs (distincts) entrant dans un sommet  $x$ . On peut toujours supposer qu'il existe un cycle  $\mu_1$  de  $\Omega$  passant par  $a_1$  tel que

$$\mu_1 = a_1 a'_2 \dots$$

Comme  $\mu_1$  est élémentaire,  $a_1$  et  $a'_2$  n'y figurent qu'une fois. Pour la même raison,  $a_3$  n'apparaît pas dans  $\mu_1$ . Par hypothèse, il existe dans  $\Omega$  un cycle (unique)  $\mu_2$  contenant l'arête  $A_2$ . On doit donc avoir :

$$\mu_2 = a_2 a'_3 \dots \text{ ou } \mu_2 = a'_2 a_3 \dots$$

car, si le successeur de  $a_2$  (resp.  $a'_2$ ) dans  $\mu_2$  était  $a'_1$  (resp.  $a_1$ ) alors  $\Omega$  contiendrait un cycle non élémentaire passant par l'arête  $A_3$ . En supposant que  $\mu_2$  soit de la première forme, le cycle  $\mu_3$  passant par l'arête  $A_3$  est obligatoirement de l'une des deux formes :

$$\mu_3 = a_3 a'_1 \dots \text{ ou } \mu_3 = a'_3 a_1 \dots$$

Ce qui montre bien que

$$V(x) = (a_1, \mu_1, a_2, \mu_2, a_3, \mu_3)$$

est connexe  $\square$

On en déduit alors le :

Théorème 4 : Pour qu'un graphe cubique, 2-connexe, de nombre de Betti  $\beta$  soit régulièrement immergeable dans une surface orientable (resp. non-orientable) de caractéristique  $2-2g$  (resp.  $2-h$ ), il est nécessaire et suffisant que ce graphe contienne un ensemble  $\Omega$  de  $1+\beta-2g$  (resp.  $1+\beta-h$ ) cycles élémentaires tel que :

- (1) Toute arête du graphe figure exactement dans deux cycles de  $\Omega$
- (3)  $\Omega$  est un système dépendant minimal  
(resp. (3')  $\Omega$  est un système indépendant).

### III.2. INDICE CHROMATIQUE ET IMMERSION REGULIERE

Dans la suite, nous ne considérons que des graphes cubiques simples et sans boucles.

On appelle indice chromatique  $q(G)$  d'un graphe  $G$  le plus petit entier  $q$  qui a la propriété suivante : il est possible avec  $q$  couleurs de colorier les arêtes de  $G$  de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient pas de la même couleur. Si  $G$  est cubique alors, d'après le théorème de Vizing [3], on a :

$$3 \leq q(G) \leq 4$$

En relation avec la conjecture des quatre couleurs, Tutte, dans [15], a été amené à étudier le problème de la coloration des faces d'une immersion d'un graphe cubique dans une surface orientable, et cela à l'aide de la théorie des flots. Quoique Tutte n'utilise pas le concept d'immersion régulière, une des conséquences des résultats contenus dans [15] peut s'exprimer de la manière suivante :

Théorème 5 (Tutte, [15]) Tout graphe cubique 2-connexe d'indice chromatique 3 admet une immersion régulière dans une surface orientable.

Dans le même but, Szekeres, dans [14], a introduit le concept de décomposition polyédrale d'un graphe cubique, assez voisine de la notion d'immersion régulière : un ensemble  $\Omega$  de cycles d'un graphe cubique est une décomposition polyédrale lorsque  $\Omega$  satisfait à la première condition du théorème 4. A ce propos, Szekeres a fait remarquer que le graphe de Petersen,

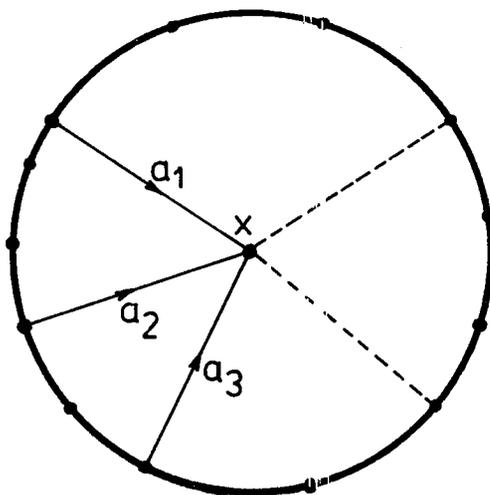
d'indice chromatique 4, est régulièrement immergeable dans le tore. Ce qui montre que la condition exprimée dans le théorème 5 est suffisante mais non nécessaire pour assurer l'existence d'une immersion régulière.

### III.3. IMMERSION SIMPLICIALE

Soit, dans un graphe 2-connexe, un système complet  $\Omega$  de cycles élémentaires (c.à.d  $\Omega$  vérifie les deux premières conditions du théorème de Mac Lane (généralisé). Considérons le voisinage dans  $\Omega$  d'un sommet  $x$  :

$$V(x) = (a_1, \mu_1, a_2, \mu_2, \dots, a_p, \mu_p)$$

$V(x)$  est dit simplicial lorsque, pour tout  $i, j$  ( $1 \leq i < j \leq p$ )  $\mu_i$  et  $\mu_j$  ont au plus une arête en commun. Dans ce cas, l'ensemble des arêtes du graphe appartenant à  $V(x)$  et ne passant pas par  $x$ , définit un cycle élémentaire unique (à l'orientation près). Nous désignons ce dernier par  $A(x)$  et nous le nommons anneau de  $x$  (sous entendu dans  $\Omega$ ). Localement, le graphe se présente sous la forme :



Ceci étant, considérons un graphe régulièrement immergeable dans une surface. L'immersion est dite simpliciale lorsqu'il existe un

système complet de bords dans lequel tout sommet a un voisinage simplicial. De manière équivalente, une immersion régulière est simpliciale si et seulement si les bords de deux faces distinctes ont au plus une arête en commun.

L'introduction de la notion d'immersion simpliciale est motivée par une conjecture formulée par Grünbaum. En effet, dans [8], Grünbaum propose la :

Conjecture C1 : On peut colorer les arêtes du squelette d'une triangulation d'une surface orientable avec trois couleurs de sorte que les trois arêtes constituant le bord d'une face soient de couleur différente.

Sous cette forme, on voit que la conjecture C1 est plus forte que la conjecture des quatre couleurs car elle la généralise.

Considérons maintenant le squelette du complexe cellulaire dual d'une triangulation d'une surface orientable. C'est un graphe cubique qui admet trivialement une immersion simpliciale dans la même surface. Si C1 est vrai alors l'indice chromatique du graphe cubique défini plus haut sera égal à 3.

D'autre part, il est apparent que la connectivité d'un graphe cubique simplicialement immergeable dans une surface est  $\geq 3$ . La conjecture C1 peut donc se formuler de manière équivalente sous la forme suivante :

Conjecture C2 : Si un graphe cubique, 3-connexe, admet une immersion simpliciale dans une surface orientable alors son indice chromatique est 3.

Szekerés a prouvé, dans [14], que le graphe de Petersen d'indice chromatique 4, est simplicialement immergeable dans le plan projectif. Ce qui montre que l'hypothèse de l'orientabilité de la surface est nécessaire dans la formulation des conjectures C1 et C2.

## Deuxième partie

## GRAPHES REGULIEREMENT IMMERGEABLES DANS LE TORE

## I - POSITION DU PROBLEME

Nous avons vu, dans la première partie de ce chapitre, que tout graphe 2-connexe inf-immérgeable dans la sphère ou dans le plan projectif y admet une immersion régulière. Ce qui ramène le problème de l'immersion au problème, théoriquement résolu par le théorème de Mac Lane généralisé, de l'existence d'une immersion régulière

Naturellement, la même question peut se poser aux graphes immergeables dans d'autres surfaces, en particulier aux graphes de genre  $> 0$ . Dans cette deuxième partie, nous cherchons une condition suffisante simple, c.à.d faisant intervenir seulement la connectivité, pour qu'un graphe soit régulièrement immergeable dans le tore.

## II - GENRE ET EPAISSEUR

Cette section est consacrée à l'étude d'une technique permettant de ramener l'étude d'un graphe réalisable dans un complexe cellulaire de genre  $g$  à celle d'un graphe réalisable dans un complexe cellulaire de genre  $\leq g - 1$ .

II.1 - COUPE D'UN COMPLEXE CELLULAIRE ORIENTABLEII.1. 1- Définition

Soit, dans un complexe cellulaire orientable  $K$ , un cycle élémentaire  $\mu = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ . A tout arc  $a_i \in \mu$  faisons correspondre un couple d'arcs nouveaux  $(a'_{i1}, a'_{i2})$ . Le couple  $(a'_{i1}, a'_{i2})$  sera associé à  $a'_i$ .

Dans la famille des bords de  $K$ , remplaçons partout où ils figurent  $a_i$  et  $a'_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) par  $a_{i1}$  et  $a'_{i2}$  respectivement. Au cycle  $\mu$  on fera correspondre deux nouveaux cycles :

$$\mu_1 = a_{11} a_{21} a_{31} \dots a_{p1} \quad (\text{avec } \mu'_1 = a'_{p1} \dots a'_{21} a'_{11})$$

$$\mu_2 = a_{12} a_{22} \dots a_{p2} \quad (\text{avec } \mu'_2 = a'_{p2} \dots a'_{22} a'_{12})$$

On peut vérifier (voir [1] par exemple) que cette nouvelle famille constitue les bords d'un complexe cellulaire orientable, mais non nécessairement connexe, que nous désignons par  $K_\mu$ . Dans la suite  $K_\mu$  sera appelé coupe de  $K$  suivant  $\mu$

Exemple

Soit le complexe cellulaire orientable dont les bords sont :

$$2356 ; 4875' ; 16'7'92'1'4'3'9'8'$$

Considérons la coupe  $\mu = (1,2,3,4)$ . Remplaçons  $1,1',2,2',3,3',4,4'$ , respectivement par  $a_1, a'_2, b_1, b'_2, c_1, c'_2, d_1, d'_2$ . Les bords de  $K_\mu$  s'écrivent alors :

$$b_1 c_1 56 ; d_1 875' ; a_1 6' 7' 9 b'_2 a'_2 d'_2 c'_2 9' 8' ; d'_1 c'_1 b'_1 a'_1 ; a_2 b_2 c_2 d_2$$

Les deux derniers bords proviennent de  $\mu$ .

II.1. 2- Relation entre les squelettes de  $K$  et  $K_\mu$ . Morphisme d'identification

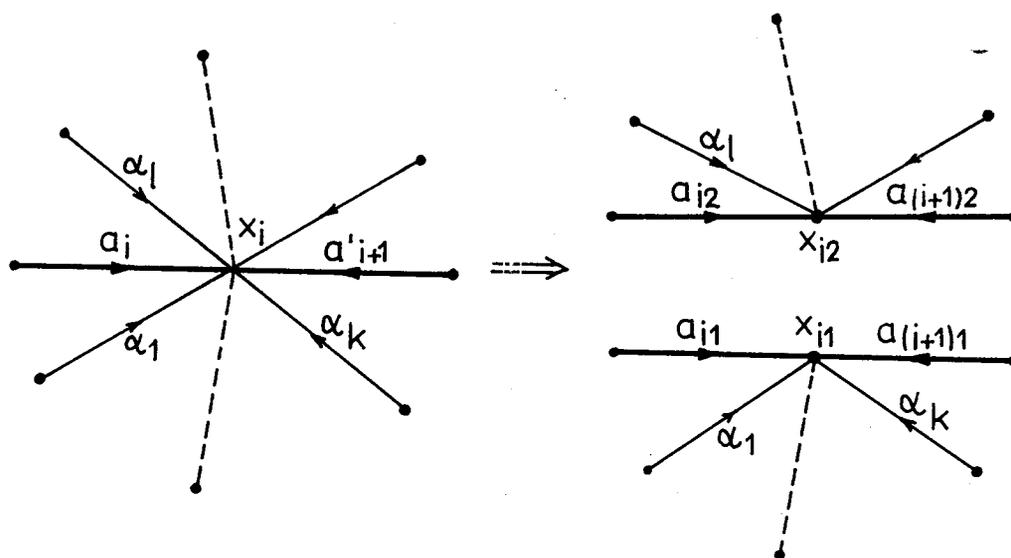
Comme  $K$  est supposé orientable, il existe donc une orientation qui induit une rotation unique en chaque sommet du squelette. Dans le cycle  $\mu = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ , désignons par  $x_i$  le sommet dans lequel entrent  $a_i$  et  $a'_{i+1}$ . Considérons la rotation en  $x_i$  :

$$\rho(x_i) = a_i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} a'_{i+1} \alpha_k \dots \alpha_1$$

Le cycle  $\mu$  étant élémentaire, les arcs  $\alpha$  sont donc différents des arcs de  $\mu$ . En coupant  $K$  suivant  $\mu$  et en appliquant l'algorithme de recherche des sommets de  $K_\mu$ , on obtient deux rotations :

$$\rho(x_{i1}) = a_{i1} \alpha_1 \alpha_2 \dots a'_{(i+1)1}$$

$$\rho(x_{i2}) = a'_{(i+1)2} \alpha_k \dots \alpha_1 a_{i2}$$

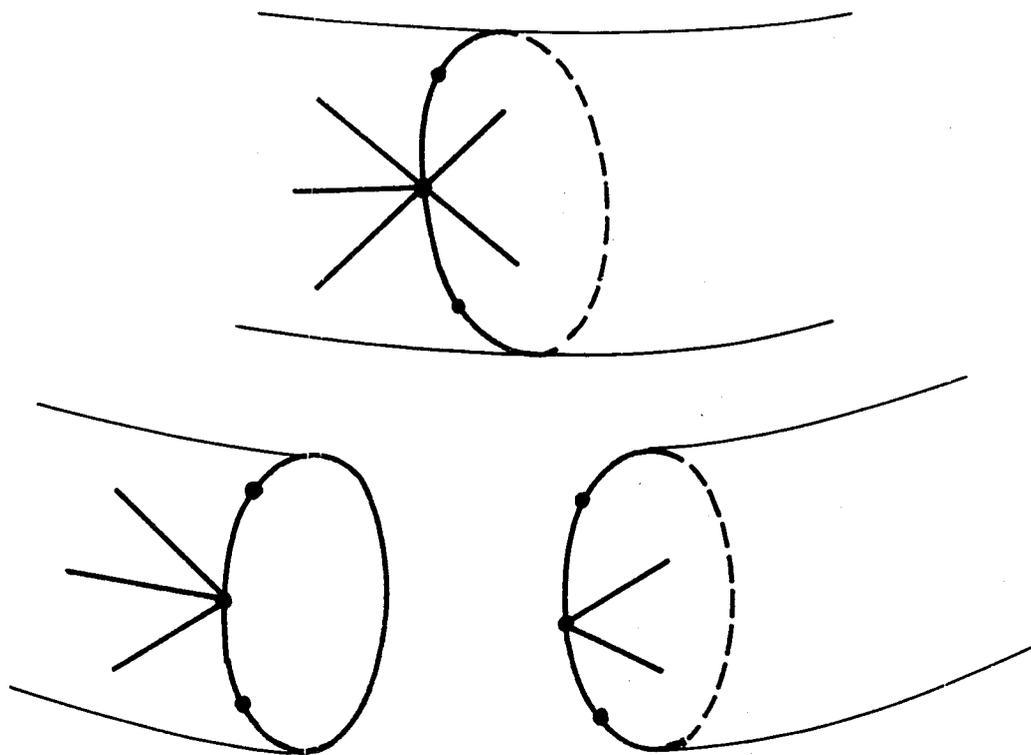


Tout se passe comme si on avait fait une partition des arcs entrant dans  $x_i$ , après avoir dédoublé  $a_j$  et  $a'_{i+1}$ . Le résultat de l'opération consiste donc en un éclatement du sommet  $x_i$  en deux sommets  $x_{i1}$  et  $x_{i2}$ .

Dans [18], Tutte utilise cette technique pour étudier la connectivité des graphes.

Pour les sommets ne situant pas sur  $\mu$ , leur rotation dans  $K$  et dans  $K_\mu$  sont identiques.

En supposant que  $K_\mu$  soit connexe, on peut donc affirmer qu'il existe un morphisme du squelette de  $K_\mu$  sur le squelette de  $K$ . Ce morphisme identifie les deux bords  $\mu'_1 = a'_{p1} \dots a'_{21} a'_{11}$  et  $\mu_2 = a_{12} a_{22} \dots a_{p2}$ . Géométriquement, lorsque  $\mu$  n'est pas homologue à zéro, une coupe suivant  $\mu$  sépare une anse de  $K$  comme le montre la figure :



Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

(1)  $K_\mu$  est connexe si et seulement si  $\mu$  n'est pas homologue à zéro dans  $K$  et l'on a :

$$\chi(K) = \chi(K_\mu) - 2$$

(2) Si  $\mu$  est homologue à zéro alors  $K_\mu$  est union de deux complexes cellulaires connexes :

$$K_\mu = K_\mu^1 \cup K_\mu^2$$

avec :

$$\chi(K) = \chi(K_\mu^1) + \chi(K_\mu^2) - 2$$

Lorsque la caractéristique de  $K_\mu^1$  ou de  $K_\mu^2$  est égal à 2 on dit que  $\mu$  est homotope à zéro.

11.2 - DECOMPOSITION EN GRAPHES PLANAIRES

La notion d'épaisseur d'un graphe, défini comme étant le nombre minimum de graphes partiels planaires dont l'union est égale au graphe, a été introduite pour Tutte dans [17]. Dans ce paragraphe, nous démontrons l'existence d'une décomposition d'un graphe de genre  $g > 0$  en graphes partiels de genre  $\leq g - 1$ . Il s'ensuivra une relation entre  $\theta(G)$ , l'épaisseur de  $G$ , et  $\gamma(G)$ , le genre de  $G$ .

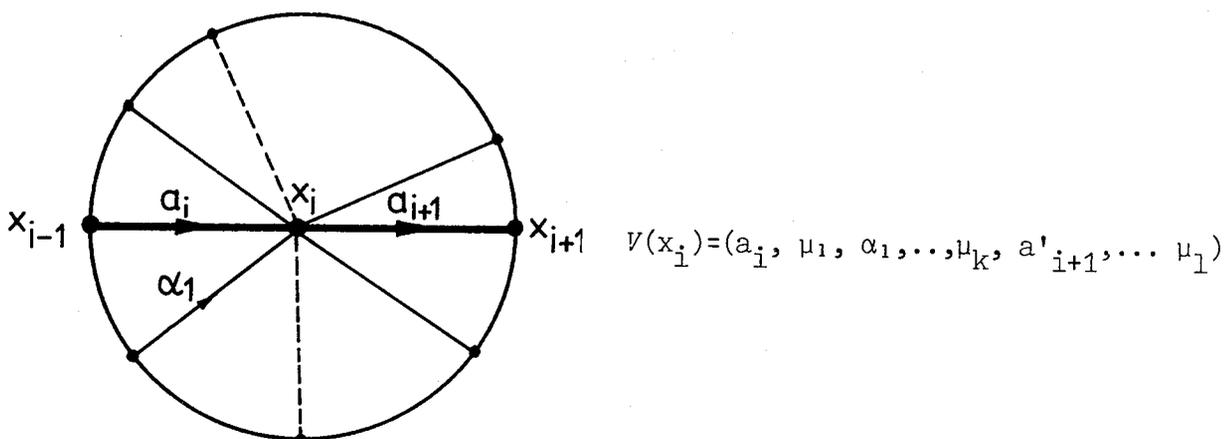
Lemme 1 : Toute triangulation d'une surface orientable de genre  $g > 0$  contient deux cycles élémentaires  $\mu$  et  $\nu$  tels que :

- (1)  $\mu$  et  $\nu$  ne sont pas homologues à zéro.
- (2)  $\mu$  et  $\nu$  sont homotopes
- (3)  $\mu$  et  $\nu$  ont au plus un sommet commun.

Démonstration

a - Soit  $T$  un complexe cellulaire triangulant une surface orientable de genre  $g > 0$ . Comme la dimension de l'espace  $H_1(T)$  (voir chap. I) est égal à  $2g > 0$ ,  $T$  contient donc un cycle non homologue à zéro. D'autre part, une somme de cycles homologues à zéro est, elle aussi, homologue à zéro, on peut donc affirmer que  $T$  contient un cycle élémentaire  $\mu$  de longueur minimale non homologue à zéro.

b - Désignons par  $x_1, x_2, \dots, x_p$  les sommets de  $\mu$ . Considérons le voisinage  $V(x_i)$  dans  $T$  ( $V(x_i)$  est simplicial car  $T$  est une triangulation)



Posons :

$$V^+(x_i) = (a_i, \mu_1, \alpha_1, \dots, \mu_k, a'_{i+1})$$

et nous appelons  $V^+(x_i)$  demi voisinage de  $x_i$ . Il existe alors un demi-voisinage unique  $V^+(x_{i+1})$  tel que :

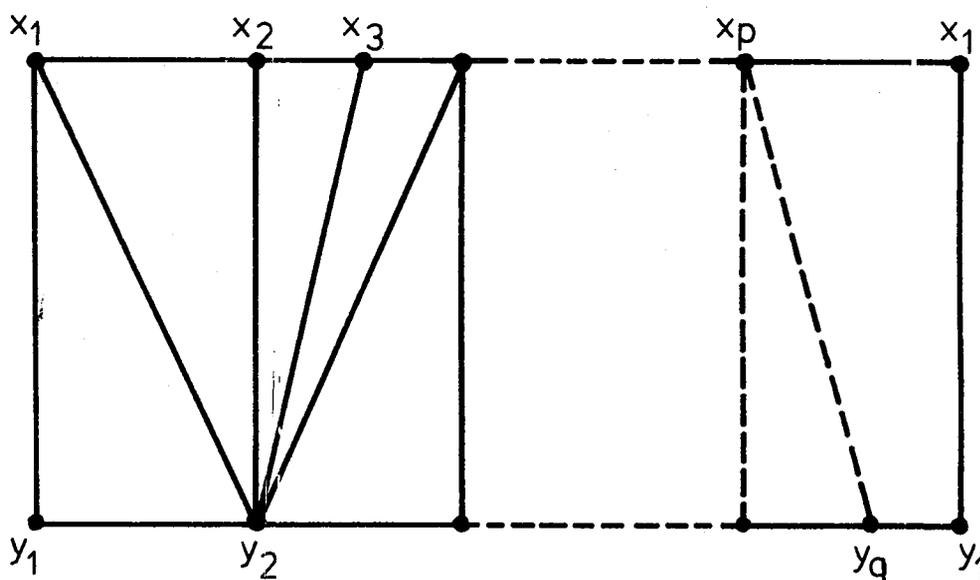
$$V^+(x_{i+1}) = (a_i, \mu'_k, \dots)$$

A l'orientation des cycles près, on a :

$$V^+(x_i) \cap V^+(x_{i+1}) = \mu_k$$

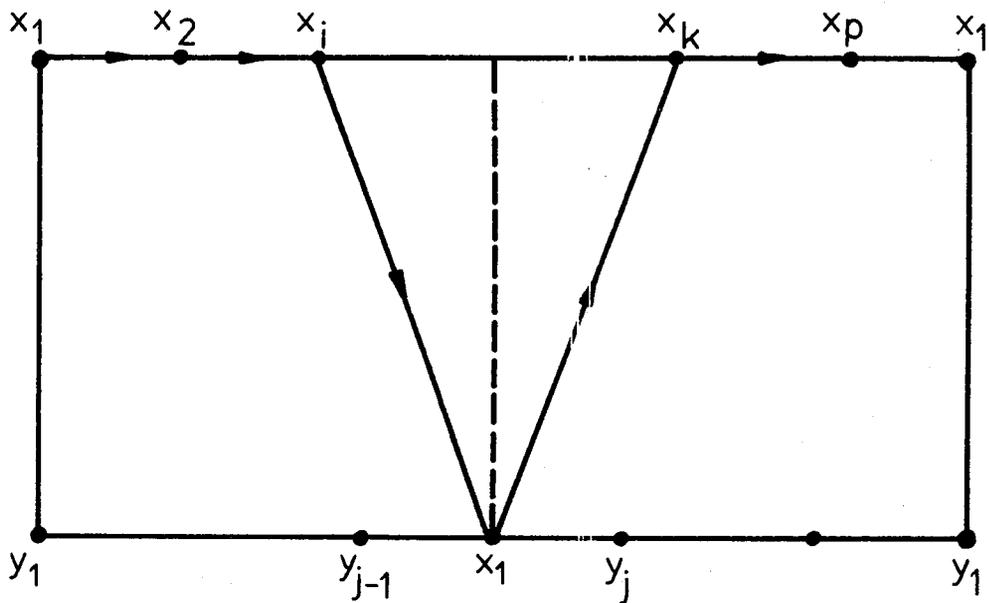
car, d'après la définition d'un complexe cellulaire orientable, chaque arc se trouve exactement sur deux cycles.

En poursuivant le raisonnement, on obtient un ensemble de cycles distincts deux à deux de la forme :



Dans la suite nous désignerons par  $V^+(\mu)$  cet ensemble de cycles. Nous noterons par  $v$  le cycle dont les sommets sont  $y_1, y_2, \dots, y_q$ .

c - Démontrons que, pour tout  $i$ ,  $x_i \notin v$ . Comme la numérotation est cyclique, il suffit donc de vérifier que  $x_1 \notin v$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $x_1 = y_j$

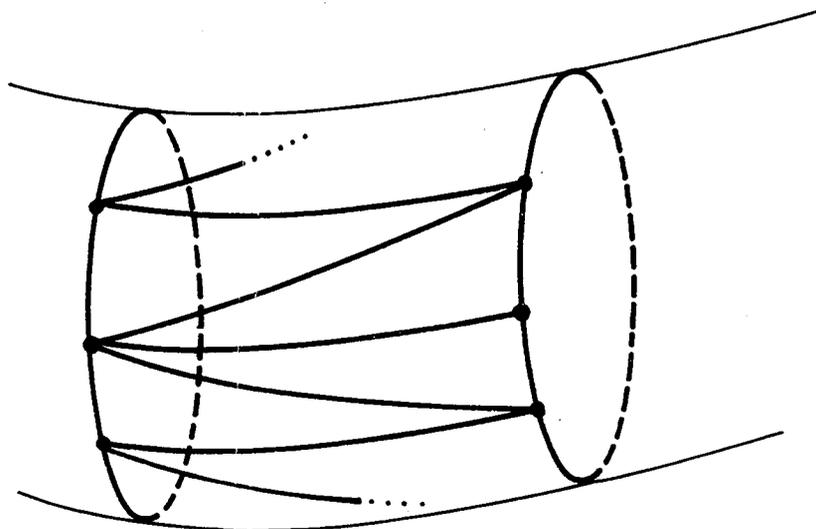


Désignons par  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  les cycles élémentaires dont les ensembles de sommets sont respectivement  $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ ,  $\{x_1, x_k, \dots, x_p\}$ ,  $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, x_1\}$ . Par construction,  $\mu_3$  est homotope à zéro. Il en résulte que  $\mu$  est homologue à  $\mu_1 + \mu_2$ . Comme  $\mu$  n'est pas homologue à zéro, l'un au moins des deux cycles  $\mu_1$  et  $\mu_2$  est non homologue à zéro. Ce qui est absurde car, par hypothèse,  $\mu$  est de longueur minimale.

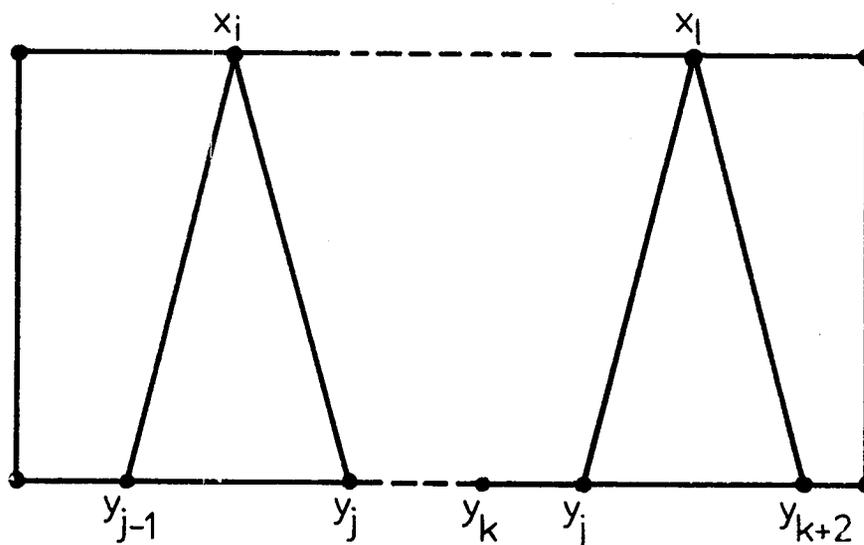
d - Supposons que  $v$  soit un cycle élémentaire. D'après ce qui précède :  $\mu$  et  $v$  n'ont aucun sommet en commun. Posons :

$$\Omega = V^+(\mu) \cup \{\mu'\} \cup \{v\}$$

On vérifie facilement que  $\Omega$  est un ensemble de cycles élémentaires satisfaisant au théorème de Mac Lane dans le cas planaire. Autrement dit,  $\mu$  et  $v$  sont homotopes dans  $T$ . Géométriquement, on a la figure suivante :



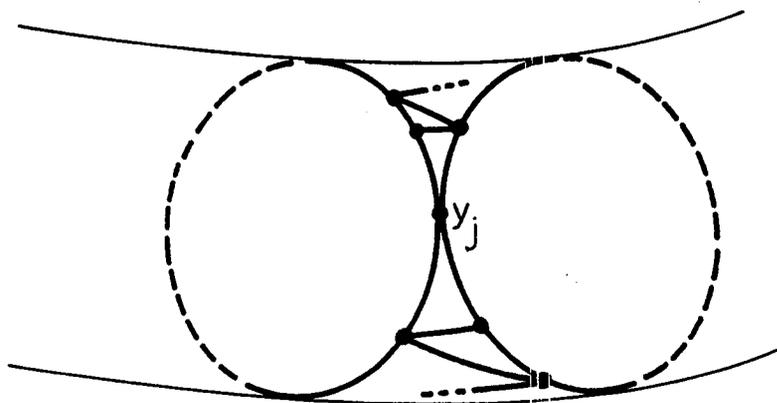
e - Supposons que  $v$  ne soit pas élémentaire. Il s'exprime donc comme une somme de cycles élémentaires. Comme  $v$  n'est pas homologue à zéro (car  $v$  et  $\mu$  sont homologues), il existe donc un cycle élémentaire non homologue à zéro dont l'ensemble des sommets est de la forme  $\{y_j, y_{j+1}, \dots, y_k\}$ .



Le raisonnement fait dans d. montre que les cycles  $\mu_1$  et  $\nu_1$ , dont les ensembles de sommets sont respectivement  $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_l, y_j\}$

et  $\{y_j, y_{j+1}, \dots, y_k\}$ , possèdent les propriétés annoncées.

Géométriquement, on a la figure :



On en déduit alors le résultat suivant :

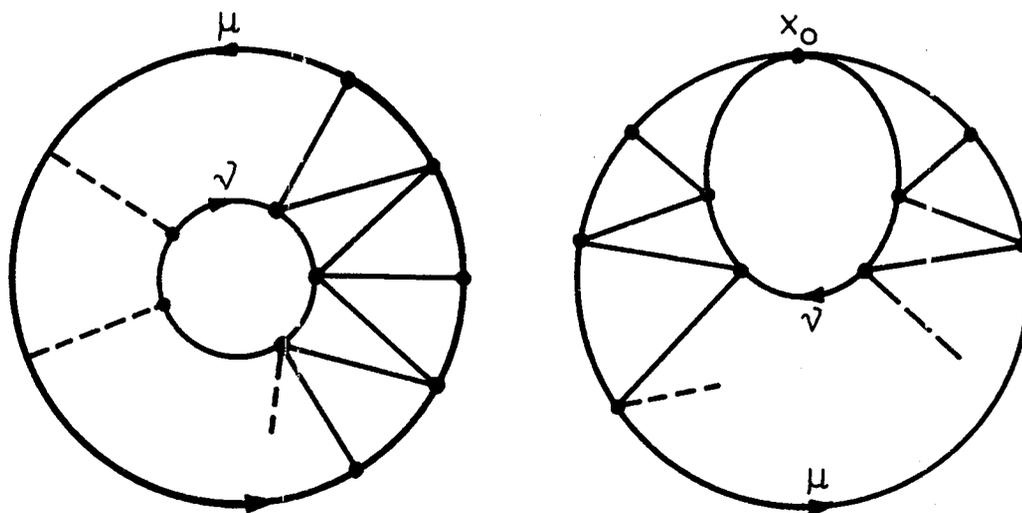
Théorème 1 : Tout graphe  $G$  de genre  $\gamma(G)$  contient un sous graphe partiel planaire  $H$  tel que :

$$\gamma(G-H) \leq \gamma(G) - 1$$

Démonstration

Tout graphe de genre  $\gamma$  peut être considéré comme un sous graphe partiel du squelette d'un complexe cellulaire triangulant une surface de genre  $\gamma$ . Il suffit donc de démontrer le théorème pour le squelette d'une triangulation  $T$ .

D'après le lemme 1,  $T_1$  contient deux cycles élémentaires  $\mu$  et  $\nu$  ayant au plus un sommet en commun. Nous avons aussi démontré que  $\Omega = V^+(\mu) \cup \{\mu'\} \cup \{\nu\}$  constitue un système complet de bords d'un graphe planaire.



Désignons par  $H$  le graphe constitué par l'ensemble des arêtes ayant un sommet dans  $\mu$  et l'autre sommet dans  $\nu$ . C'est un arbre. D'autre part, notons par  $T_{\mu\nu}$  la complexe cellulaire obtenu à partir de  $T$  en coupant suivant  $\mu$  puis suivant  $\nu$ . Comme  $\mu$  et  $\nu$  sont homotopes, on a donc

$$\gamma(T_{\mu\nu}) = \gamma(T) - 1$$

On vérifie facilement que :

- si  $\mu \cap \nu = \emptyset$  alors le graphe  $G-H$  est immergeable dans  $T_{\mu\nu}$
- si  $\mu \cap \nu = \{x_0\}$  alors le graphe  $G - H'$  où :

$$H' = H \cup \Gamma(x_0)$$

( $\Gamma(x_0)$  désigne l'ensemble des arêtes adjacentes à  $x_0$ ) est immergeable dans  $T_{\mu\nu}$ . Comme  $H$  et  $H'$  sont des graphes planaires par construction, le théorème est donc démontré.  $\square$

Corollaire 1 : Pour tout graphe  $G$ , on a :

$$\theta(G) \leq \gamma(G) + 1$$

En effet, il suffit de raisonner par récurrence sur  $\gamma(G)$ , en sachant que l'épaisseur d'un graphe planaire est 1.  $\square$

Corollaire 2 : Tout graphe de genre 1 est d'épaisseur 2.

En effet, l'épaisseur d'un graphe non planaire est  $\geq 2$ . Si le genre est 1, alors l'égalité doit avoir lieu, d'après le corollaire 1.  $\square$

Remarque

Malgré le corollaire 2, nous pensons que l'inégalité  $\theta(G) \leq \gamma(G) + 1$  n'est pas très bonne. L'étude du genre et de l'épaisseur des graphes complets renforce l'idée suivante : pour  $\gamma$  suffisamment grand,  $\theta(G) \leq C \sqrt{\gamma(G)}$  où  $C$  est une constante.

III - SINGULARITE D'UNE IMMERSION SQUELETTIQUE

Dans cette section, nous étudions les immersions non régulières en introduisant le concept de singularité.

III.1 - SUBDIVISION BARYCENTRIQUE

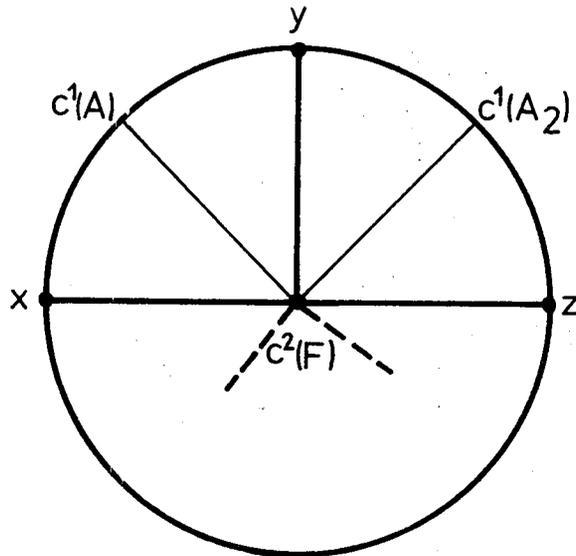
Soit  $K = (\Sigma, \partial, \phi)$  un complexe cellulaire (supposé orientable pour simplifier). Une fois l'orientation de  $K$  fixée, on peut confondre de manière unique une face avec une facette. Bien entendu, le bord d'une face est celui de la facette correspondante.

Considérons alors une face  $F$  de bord :

$$\partial(F) = a_1 a_2 \dots a_p$$

A  $F$  associons un nouveau sommet, appelé centre de  $F$  et noté  $C^2(F)$ . De même, subdivisons toute arête  $A_i = \{a_i, a'_i\}$  par un nouveau sommet  $C^1(A_i)$  souvent nommé milieu de  $A_i$ .

On appelle subdivision barycentrique de la face  $F$ , le remplacement de  $F$  par les faces dont la construction est illustrée par la figure :



En appliquant l'opération précédente à toutes les faces de  $K$ , on obtient un nouveau complexe cellulaire (équivalent à  $K$ , par définition) appelé subdivision barycentrique de  $K$  et nous notons  $S_b(K)$ . Dans [16], Tutte utilise une opération semblable, pour les graphes planaires.

### III.2 - SINGULARITE

#### III.2.1- Définitions et notations

Soit  $(G, K, S)$  une immersion squelettique de  $G$  dans  $S$  orientable. Lorsque l'immersion n'est pas régulière, il existe une face dont le bord n'est pas un cycle élémentaire de  $G$ . Deux éventualités peuvent donc se produire :

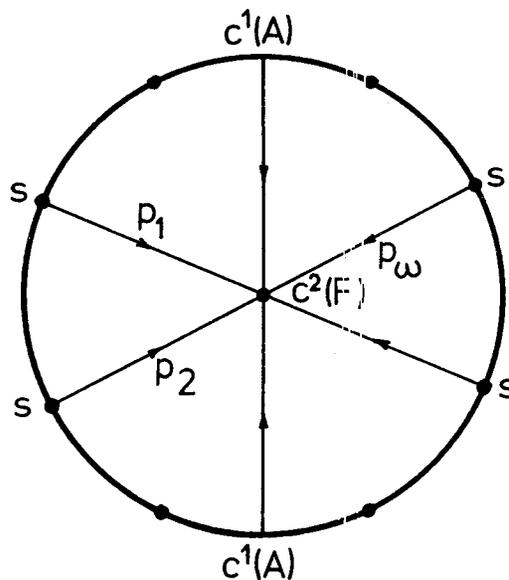
- le cycle traverse deux fois (et deux exactement) une arête  $A_i = (a_i, a'_i)$
- le cycle passe plusieurs fois par un même sommet  $x_j$ .

Dans le premier cas, nous disons que  $A_i$  est une arête double (ou

aussi arête singulière). Dans le deuxième cas,  $x_j$  sera nommé sommet singulier. D'une manière générale, par singularité d'une immersion squelettique, nous entendons soit une arête double, soit un sommet singulier. Enfin, une face est dite singulière lorsque son bord contient une singularité.

### III.2.2 - Classification des singularités

Soit  $F$  une face singulière et considérons sa subdivision barycentrique.



Supposons que  $s$  soit un sommet singulier de  $F$ . Par définition, l'ordre de  $s$  dans  $F$ , noté  $\omega_F(s)$ , est le nombre d'arcs partant de  $s$  pour aboutir à  $C^2(F)$ . Dans la suite, nous associons à  $s$  la permutation circulaire  $p_1 p_2 \dots p_\omega$  des arcs précédents.

Lorsque  $A$  est une arête double, son centre  $C^1(A)$  est un sommet singulier d'ordre 2 dans  $F$ .

Dans une immersion, l'ordre d'une singularité  $s$  est défini par :

$$\omega(s) = \max_F (\omega_{F_i}(s))$$

Considérons les deux permutations circulaires  $p_1 p_2 \dots p_\omega$  et  $q_1 q_2 \dots q_\lambda$  associées respectivement aux deux singularités  $s$  et  $t$ . Nous dirons que  $s$  et  $t$  sont équivalentes lorsqu'il existe un couple  $(p_i, p_j)$  et un couple  $(q_k, q_l)$  tels que les deux cycles  $(p_i, p'_j)$  et  $(q_k, q'_l)$  soient homologues.

Ceci étant, nous savons que tout point d'articulation constitue une singularité dans toute immersion squelettique. Evidemment, l'inverse n'est pas vraie. Le résultat suivant s'avèrera utile dans la suite :

Proposition 1 : Une condition suffisante pour qu'une singularité  $s$  soit un point d'articulation est qu'il existe deux arcs  $p_i$  et  $p_j$  tels que le cycle  $(p_i, p'_j)$  soit homologue à zéro.

#### Démonstration

Soit  $(G, K, S)$  une immersion squelettique non régulière. Supposons que  $s$  soit une singularité dont la permutation circulaire contient deux arcs  $p_i$  et  $p_j$  tels que le cycle  $\mu = (p_i, p'_j)$  soit homologue à zéro. Coupons  $K$  suivant  $\mu$ , nous obtenons (d'après II. 1.2) :

$$K_\mu = K_\mu^1 \cup K_\mu^2$$

L'immersion étant squelettique,  $G$  se décompose donc en deux composantes correspondantes aux squelettes de  $K_\mu^1$  et  $K_\mu^2$ . Par construction, elles ont juste  $s$  en commun. Ce qui achève la démonstration.  $\square$

#### Remarque

*La condition précédente n'est pas nécessaire, comme nous allons voir dans plusieurs exemples donnés plus loin.*

### IV - ETUDE DES IMMERSIONS DANS LE TORE

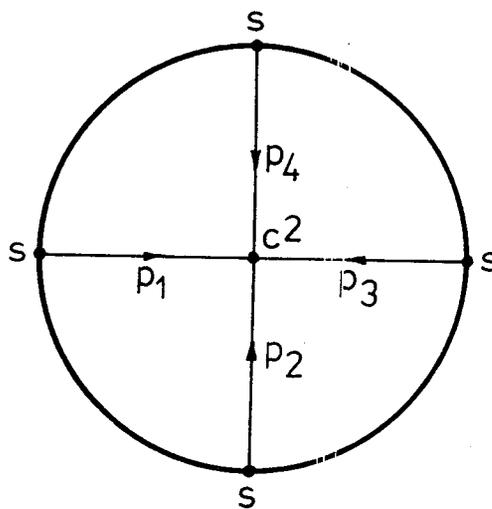
Cette section a pour but de montrer que tout graphe de genre 1 suffisamment connexe admet une immersion régulière dans le tore (dans la suite, nous parlerons d'immersion torique).

IV.1 - SINGULARITE D'UNE IMMERSION TORIQUE

Lemme 2 : Si un graphe  $G$  a une immersion torique avec une singularité  $s$  d'ordre  $\geq 4$  alors  $s$  est un point d'articulation de  $G$ .

Démonstration

Par hypothèse, il existe une face singulière contenant  $s$  dont l'ordre est  $\geq 4$ .



S'il existe  $i$  et  $j$  tels que le cycle  $(p_i, p'_j)$  soit homologue à zéro alors  $s$  est un point d'articulation de  $G$ , d'après la proposition 1. On peut donc supposer que, pour tout  $i \neq j$ ,  $(p_i, p'_j)$  soit non homologue à zéro. En coupant suivant le cycle  $\mu = (p_1, p'_3)$  on obtient un complexe cellulaire connexe de genre 0 (d'après II.1.2) : autrement dit on a une sphère. Par conséquent le squelette de  $K_\mu$  est un graphe planaire. Nous le désignons par  $G_\mu$ .

D'après la construction (voir II.1.2),  $G_\mu$  s'obtient à partir de  $G$  en dédoublant le cycle  $\mu = (p_1, p'_3)$ . Dans cette opération,  $c^2$  et  $s$  sont éclatés respectivement en  $c^2_1, c^2_2, s_1, s_2$ .

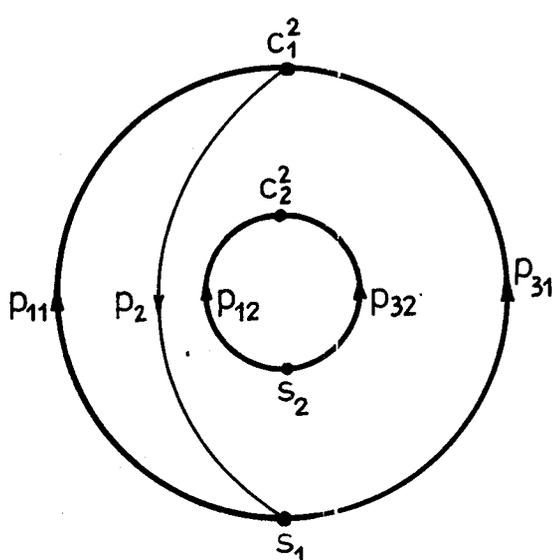
Étudions les rotations de ces sommets, en remarquant que  $\mu$  donne naissance à deux cycles faciaux (c.à.d bordant deux faces) pour le graphe  $G_\mu$ . Soient  $\mu'_1 = (p_{31}, p'_{11})$  et  $\mu_2 = (p_{12}, p'_{32})$ . On a :

$$\rho (C^2_1) = p_{11} p_2 p'_{31}$$

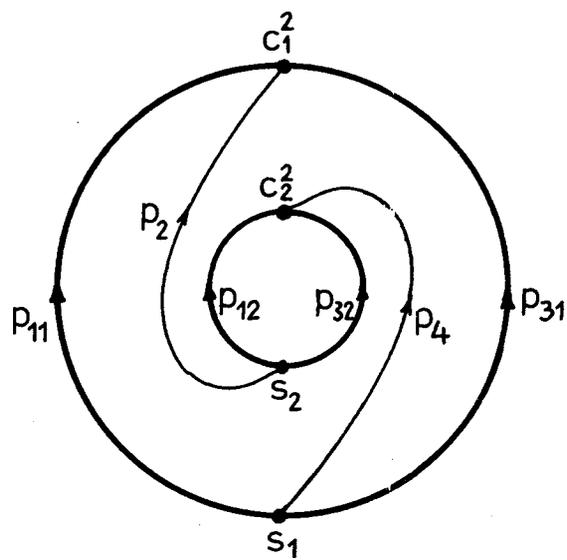
$$\rho (C^2_2) = p_{12} p_{32} \dots p_4 \dots$$

$$\rho (s_1) = p'_{11} p_{31} \dots$$

$$\rho (s_2) = p'_{32} p'_{12} \dots$$



Cas 1



Cas 2

Considérons la rotation en  $C^2_1$ . Deux cas peuvent se produire :

1<sup>er</sup> cas :  $p_2$  est un arc sortant de  $s_1$  (voir figure : Cas 1)

2<sup>em</sup> cas :  $p_2$  est un arc sortant de  $s_2$  (voir figure : Cas 2)

(On fera aussi le même raisonnement pour l'arc  $p_4$  entrant dans  $C^2_2$ ).

Le premier cas ne peut pas se produire, sinon l'un des deux cycles  $(p_{11}, p'_2)$  et  $(p_2, p'_{31})$  serait homologue à zéro (d'après le théorème de Jordan). Par conséquent, les arcs  $p_2$  et  $p_4$  sortent respectivement de  $s_2$  et  $s_1$ .

En considérant le cycle  $(p_{11}, p'_2, p_{32}, p'_4)$  on obtient alors :

$$G_\mu = G^1_\mu \cup G^2_\mu$$

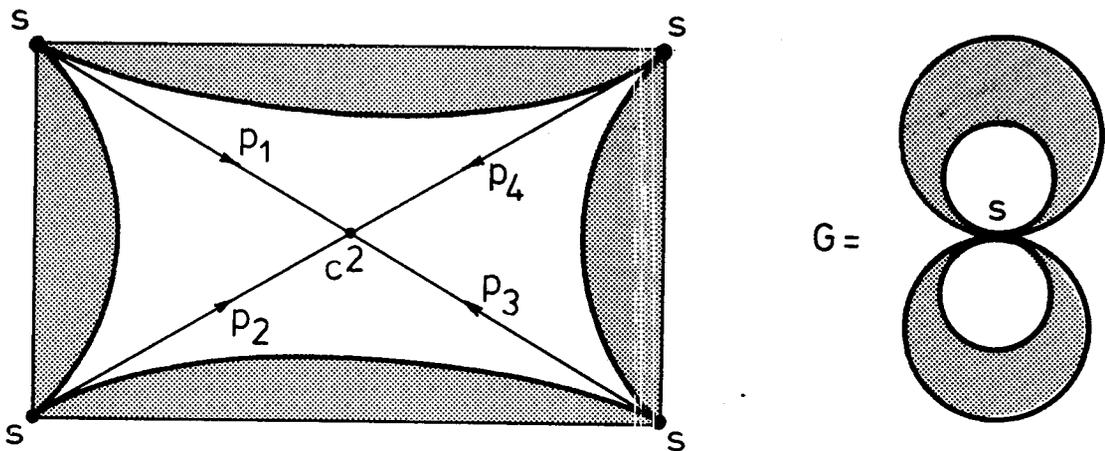
avec :

$$G^1_\mu \cap G^2_\mu = \{s_1, s_2\}$$

Comme  $G$  s'obtient à partir de  $G_\mu$  par un morphisme identifiant  $s_1$  et  $s_2$ , le lemme est démontré  $\square$ .

Remarques

1 - Géométriquement, on a la figure :



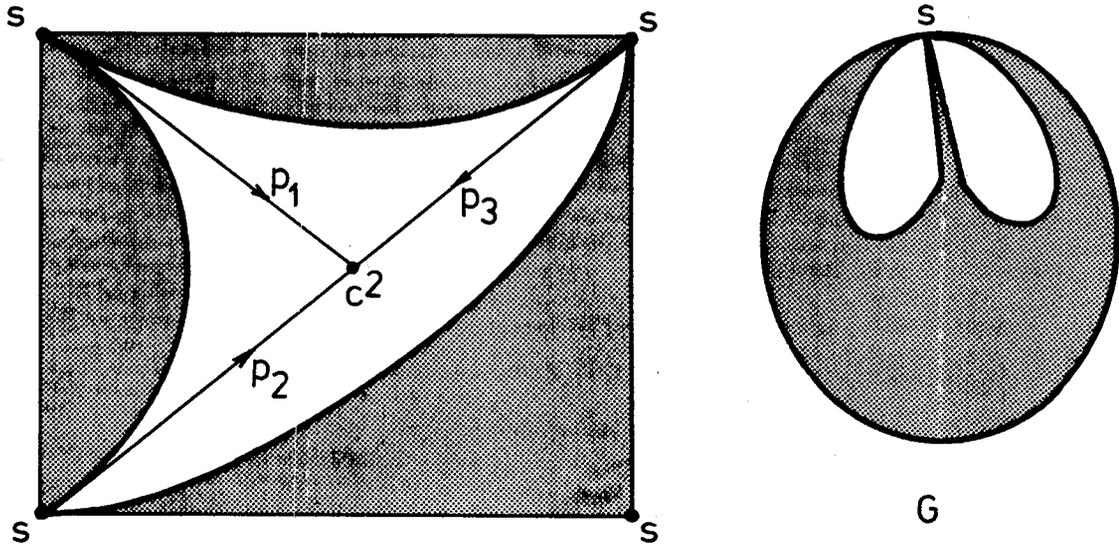
2 - L'exemple précédent montre que la condition exprimée dans la proposition 1 n'est pas nécessaire.

Lemme 3 : Si un graphe 2-connexe admet une immersion torique ayant une singularité d'ordre 3 alors ce graphe est planaire.

Démonstration

Soit  $s$  un sommet singulier d'ordre 3. Considérons la permutation circulaire des arcs entrant dans  $s$  :  $p_1 p_2 p_3$ . Comme le graphe est 2-connexe, pour tout  $i \neq j$ , le cycle  $(p_i, p'_j)$  n'est pas homologue à zéro, d'après la proposition 1. En coupant le complexe cellulaire suivant le cycle  $\mu = (p_1, p'_2)$  on obtient  $K_\mu$  de genre 0. En utilisant les arguments du lemme 2, on arrive au résultat annoncé.  $\square$

Géométriquement, on a la figure suivante :



Lemme 4 : Soient  $s$  et  $t$  deux singularités distinctes d'une immersion torique d'un graphe  $G$ . Si  $s$  et  $t$  appartiennent à deux faces distinctes alors  $G$  possède un ensemble d'articulations de cardinalité  $\leq 2$ .

Démonstration

Comme dans les lemmes précédents, on considèrera une subdivision barycentrique des faces  $F_1$  et  $F_2$  auxquelles appartiennent  $s$  et  $t$ . Soient les deux cycles  $\mu = (p_1, p'_2)$  et  $\nu = (q_1, q'_2)$ , respectivement associés à  $s$  et  $t$ . Par hypothèse  $\mu \cap \nu = \emptyset$ .

Si  $\mu$  ou  $\nu$  est homologue à zéro alors  $G$  possède un point d'articulation, d'après la proposition 1.

Supposons donc  $\mu$  et  $\nu$  soient tous deux non homologues à zéro. Dans ce cas, il est connu que  $\mu$  et  $\nu$  sont homotopes (voir par exemple [6]). Il suffit alors de répéter le raisonnement fait dans la démonstration du théorème 1 (II.2) pour prouver que l'ensemble  $\{s, t\}$  déconnecte  $G$ .  $\square$

Lemme 5 : Soit  $s$  une singularité d'ordre 2 d'une immersion torique d'un graphe  $G$ . Si  $s$  appartient à deux faces singulières distinctes alors l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (1)  $s$  est un point d'articulation de  $G$ .
- (2)  $G$  est planaire.

Démonstration

a - Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux faces singulières auxquelles appartient  $s$ . Leur subdivision barycentrique associe les cycles  $\mu = (p_1, p'_2)$  et  $\nu = (q_1, q'_2)$  à  $s$ .

b - Si  $\mu$  ou  $\nu$  est homologue à zéro alors  $s$  est un point d'articulation de  $G$ , d'après la proposition 1.

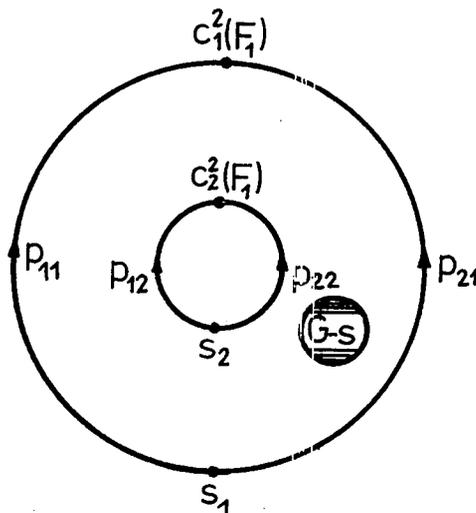
c - Dans la suite, supposons donc  $\mu$  et  $\nu$  ne sont pas homologues à zéro. Alors si  $\mu$  et  $\nu$  sont homologues, ils seront homotopes (voir [6]). On appliquera le raisonnement du théorème 1 pour montrer que  $s$  est un point d'articulation de  $G$ .

d - Il reste donc à envisager le cas où  $\mu$  et  $\nu$  ne sont pas homologues. Par hypothèse l'immersion de  $G$  dans le tore est squelettique, par conséquent il existe des cycles de  $G$  non homologues à zéro. Démontrons que tous ces cycles doivent passer par  $s$ .

En effet,  $\mu$  et  $\nu$  forment une base pour l'espace  $H_1$  du tore (car  $\dim(H_1) = 2$ ). D'autre part, il est connu que tout cycle disjoint de  $\mu$  et de  $\nu$  est homologue à zéro (voir [6]). Comme le seul sommet de  $G$  appartenant à  $\mu$  et  $\nu$  est  $s$ , tout cycle de  $G$  non homologue à zéro passe donc par  $s$ .

Considérons alors le graphe  $G-s$ . Il admet une immersion torique telle qu'aucun de ses cycles n'est homologue à zéro. Il en résulte alors deux conséquences :

- (i)  $G-s$  est planaire (d'après le théorème 8, VII.4. Chapitre I)
- (ii) En coupant suivant  $\mu$ , on obtient un complexe cellulaire dont le squelette est un graphe planaire (II.1.2) de la forme :



Par conséquent, tous les sommets adjacents à  $s$  se trouvent sur un cycle facial de  $G-s$ . D'où la planarité de  $G$ .  $\square$

Lemme 6 : Soit  $F$  une face singulière d'une immersion torique d'un graphe  $G$ .  
Si  $F$  contient trois singularités distinctes non équivalentes alors  $G$  est planaire.

Démonstration

On raisonnera comme dans la preuve du lemme 5.  $\square$

Des lemmes 2,3,4,5 et 6 on déduit le résultat suivant :

Théorème 2 : Toute immersion torique d'un graphe 3-connexe de genre 1 admet au plus une face singulière contenant au plus deux singularités non équivalentes.

IV.2 - CLASSIFICATION DES IMMERSIONS TORIQUES

Soit  $G$  un graphe 3-connexe de genre 1. D'après le théorème précédent  $G$  se trouve dans une des classes suivantes :

- Classe  $S_0$  : composée de graphes dont toutes les immersions toriques sont régulières.
- Classe  $S_1$  : celle des graphes admettant une immersion torique avec exactement une singularité. Celle-ci peut être, soit une arête double, soit un sommet singulier d'ordre 2.
- Classe  $S_2$  : C'est l'ensemble des graphes admettant une immersion torique avec exactement deux singularités non équivalentes se trouvant sur une même face. Les deux singularités peuvent être, soit deux arêtes doubles, soit une arête double et un sommet singulier, soit deux sommets singuliers.

Il est facile de vérifier que  $S_1$  et  $S_2$  ne sont pas disjoints (exemple :  $K_5$ ). D'autre part,  $S_0$  est disjoint de  $S_1$  et de  $S_2$ . Par conséquent, l'étude des graphes 3-connexes de genre 1 régulièrement immergeables dans le tore se ramène à l'étude de  $S_1$  et de  $S_2$ . A ce propos, nous avons les résultats suivants :

Théorème 3 : Un graphe  $G$  est de la classe  $S1$  (où la singularité est une arête double) si et seulement s'il existe un graphe  $H$  planaire 2-connexe tel que :

$$G = H \cup \{A\}$$

où  $A$  est une arête joignant deux sommets appartenant à deux cycles faciaux disjoints d'une immersion planaire de  $H$ .

Démonstration

a - Condition nécessaire.

Considérons une immersion torique de  $G$ . On a, d'après la formule d'Euler :

$$n_0(G) - n_1(G) + n_2 = 2 - 2g = 0$$

Par conséquent, le nombre de faces de l'immersion s'écrit :

$$n_2 = \beta(G) - 1$$

Par hypothèse, il existe une seule face singulière  $F$  telle que :

$$\partial(F) = a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_p a'$$

Notons  $A = \{a, a'\}$  et considérons le graphe

$$H = G - \{A\}$$

Soit  $\Omega$  l'ensemble formé de  $\mu = a_1 a_2 \dots a_i$ ,  $\nu = a_{i+1} \dots a_p$  et de bords différents de  $\partial(F)$ . On a :

$$\text{Card}(\Omega) = (n_2 - 1) + 2 = \beta(G) = 1 + \beta(H)$$

D'autre part, tous les cycles de  $\Omega$  sont élémentaires (car  $F$  est l'unique face singulière). Par conséquent, d'après le théorème de Mac Lane,  $\Omega$  constitue un système complet de bords d'une immersion planaire régulière de  $H$ . Autrement dit  $H$  est un graphe planaire 2-connexe. Par construction,  $\mu$  et  $\nu$  sont deux cycles faciaux disjoints (car  $F$  ne possède qu'une seule singularité), contenant chacun une extrémité de  $A$ . D'où la condition nécessaire.

b - Condition suffisante

Supposons la condition précédente remplie. Comme  $H$  est 2-connexe, toutes les faces d'immersion planaire de  $H$  sont régulières. Désignons par

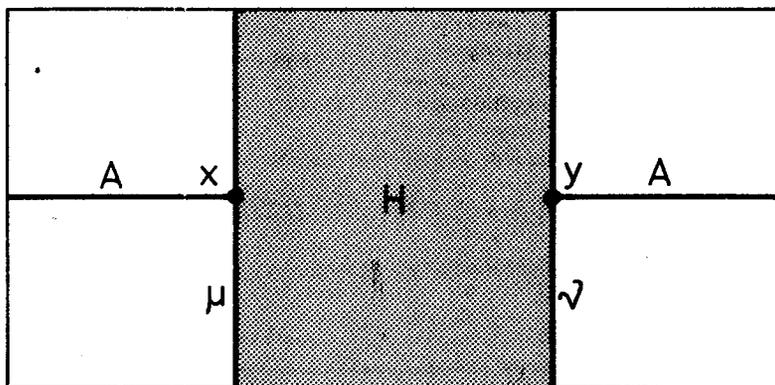
$\mu = a_1 a_2 \dots a_i$  et  $\nu = a_{i+1} \dots a_p$  les deux cycles faciaux auxquels appartiennent les extrémités de  $A = \{a, a'\}$ . Remplaçons  $\mu$  et  $\nu$  par  $a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_p a'$ .

On vérifie immédiatement que  $G$  a une immersion torique dont les faces régulières sont celles de  $H$  ( $\neq \mu$  et  $\nu$ ) et dont l'unique face singulière a précisément pour bord le cycle remplaçant  $\mu$  et  $\nu$ .

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

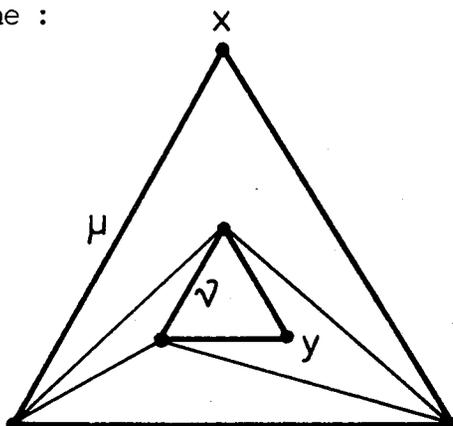
Remarque

*Géométriquement, une immersion torique de  $G$  est de la forme :*



Corollaire Un graphe  $G$  est de la classe  $S_1$  (où la singularité est un sommet) si et seulement s'il existe un graphe planaire 2-connexe  $H$  tel que  $G$  s'obtient à partir de  $H$  en identifiant deux sommets appartenant à deux cycles faciaux disjoints d'une immersion planaire de  $H$ .

Exemple Soit  $H$  le graphe :



En identifiant  $x$  et  $y$  on obtient  $K_5$ .

Ceci étant, l'étude des graphes de  $S_2$  est grandement facilitée par le théorème de caractérisation suivante :

Théorème 4 Un graphe  $G$  est de la classe  $S_2$  (où il existe deux arêtes doubles non équivalentes) si et seulement s'il est de la forme :

$$G = H \cup \{A\} \cup \{B\}$$

avec :

- $H$  est un graphe planaire 2-connexe
- $A$  et  $B$  sont deux arêtes non adjacentes dont les extrémités appartiennent à un même cycle facial d'une immersion planaire de  $H$ .

Démonstration

a - Condition nécessaire

Soit  $G$  un graphe admettant une immersion torique avec une seule face singulière  $F$  où les deux singularités sont deux arêtes doubles non équivalentes. Désignons par  $A = \{a, a'\}$  et  $B = \{b, b'\}$  ces deux arêtes. On a :

$$\partial(F) = \mu_1 a \mu_2 b \mu_3 a' \mu_4 b'$$

Nécessairement,  $A$  et  $B$  sont disjoints car il n'existe pas de singularité d'ordre 3. De plus les  $\mu_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) sont des cycles élémentaires deux à deux disjoints car  $F$  ne contient que deux singularités non équivalentes.

Désignons par  $\Omega$  l'ensemble des bords ( $\neq \partial(F)$ ), auquel on adjoint  $\mu = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$  (qui est encore un cycle élémentaire). Le même calcul que celui fait dans la démonstration du théorème 3 montre que la cardinalité de  $\Omega$  est  $\beta(G) - 1$ . D'après le théorème de Mac Lane,  $\Omega$  constitue un système complet de bords d'un graphe  $H$  planaire, 2-connexe. Par construction :

$$G = H \cup \{A\} \cup \{B\}$$

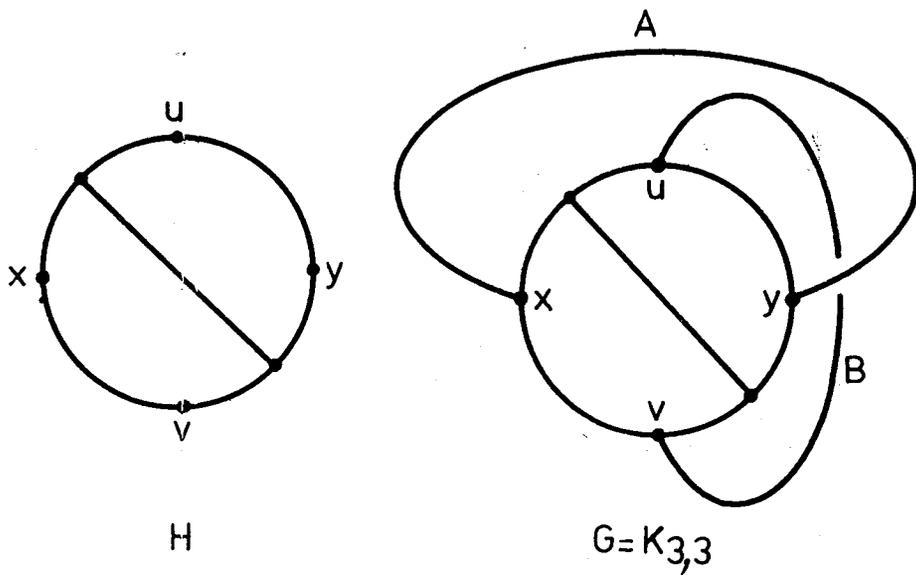
où les extrémités de  $A$  et de  $B$  appartiennent au cycle facial  $\mu$ .

b - Condition suffisante

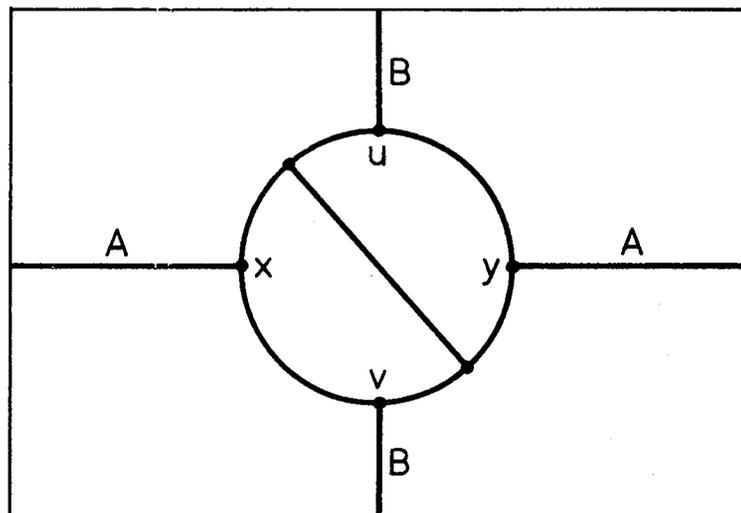
On applique la même technique de construction d'une immersion torique de  $G$  que celle exposée dans le théorème 3.  $\square$

Exemple

Soit  $H$  le graphe :



$K_{3,3}$  admet une immersion torique de la forme :



Les corollaires du théorème 4

Comme précédemment, soit  $G$  un graphe de la classe  $S_2$ . Pour avoir une immersion torique avec une arête double et un sommet singulier d'ordre 2, on identifiera les sommets  $x$  et  $y$  de  $H$  (ce qui revient à contracter suivant l'arête  $A$  graphe  $\tilde{G} = H \cup \{A\} \cup \{B\}$  défini dans le théorème 4). De même, une immersion avec deux sommets singuliers s'obtient en contractant suivant les arêtes  $A$  et  $B$  (ou, ce qui revient au même, en identifiant  $x$  à  $y$  et  $u$  à  $v$ ).

IV.3 - GRAPHES REGULIEREMENT IMMERGEABLES DANS LE TORE

Ce paragraphe a pour objet l'étude des conditions pour qu'un graphe 3-connexe de genre 1 admette une immersion torique régulière. D'après ce qui précède, il suffit de s'intéresser aux deux classes  $S_1$  et  $S_2$ .

IV.3. 1- Une condition suffisante

Proposition 2 Une condition suffisante pour qu'un graphe  $G$  soit régulièrement immergeable dans le tore est qu'il existe deux graphes planaires 2-connexes,  $H_1$  et  $H_2$  tels que :

$$G = H_1 \cup H_2$$

avec

$$H_1 \cap H_2 = \{\mu\} \cup \{v\}$$

où  $\mu$  et  $v$  sont deux cycles faciaux disjoints des immersions planaires de  $H_1$  et de  $H_2$ .

Démonstration

On a : 
$$\beta(G) = \beta(H_1) + \beta(H_2) - 1$$

$H_1$  et  $H_2$  étant planaires, 2-connexes, leurs immersions planaires sont donc régulières. Pour  $H_1$ , désignons par  $\Omega_1$  l'ensemble des bords différents de  $\mu$  et de  $v$ . D'autre part, en raison de l'orientabilité de la sphère, il existe une orientation pour laquelle  $\mu'$  et  $v'$  sont des cycles faciaux d'une immersion plane de  $H_2$ . Notons par  $\Omega_2$  l'ensemble des bords différents

de  $\mu'$  et de  $\nu'$ . Posons :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

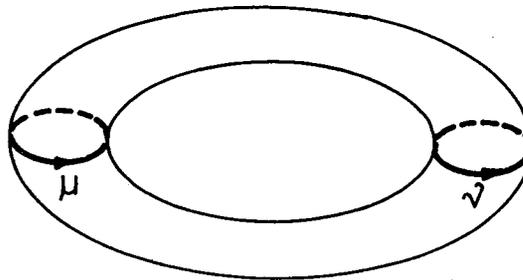
On a :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Omega) &= \text{Card}(\Omega_1) + \text{Card}(\Omega_2) - 4 \\ &= 1 + \beta(H_1) + 1 + \beta(H_2) - 4 \\ &= \beta(G) - 1 \end{aligned}$$

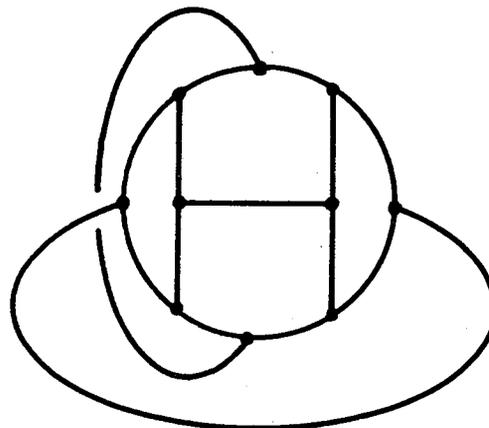
D'après le théorème de Mac Lane généralisé,  $\Omega$  constitue un système complet de bords d'une immersion régulière de  $G$  dans le tore. Ce qui termine la démonstration  $\square$

Remarques

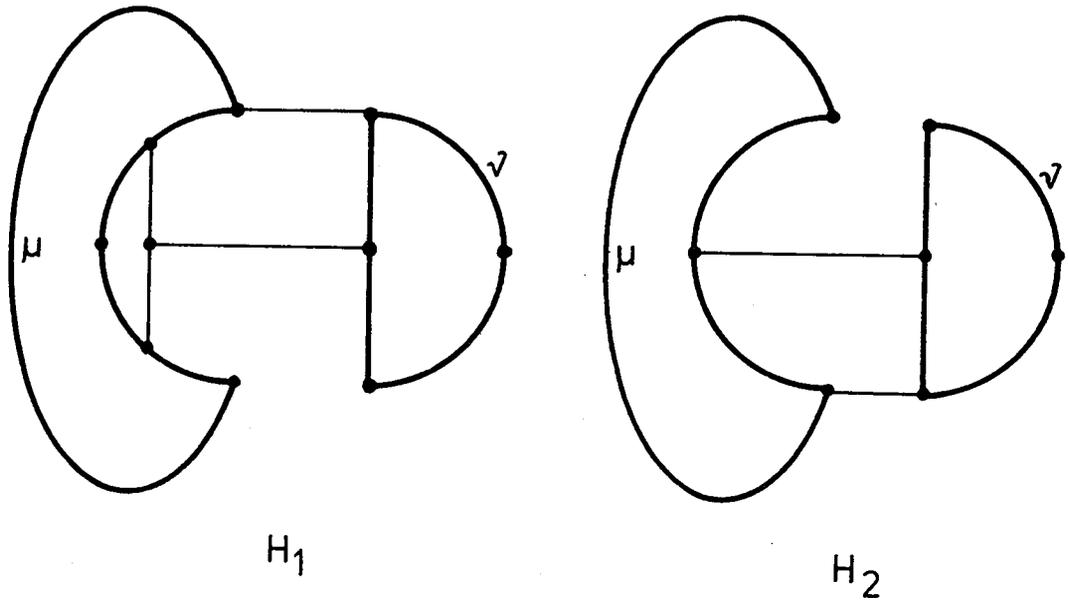
1 - Géométriquement, les deux cycles  $\mu$  et  $\nu$  partagent le tore en deux sphères :



2 - A titre d'exemple, considérons le graphe suivant, de classe  $S_2$  :



*Il est régulièrement immergeable dans le tore car on la dé-  
composition :*



3 - *En général, la condition précédente n'est pas nécessaire. En effet, considérons les deux graphes de Kuratowski  $K_5$  et  $K_{3,3}$ . Ils sont tous deux régulièrement immergeables dans le tore (voir II.3 Première Partie et aussi [9]). D'autre part, ils n'admettent pas de cycles disjoints (car  $K_5$  n'a que 5 sommets et  $K_{3,3}$ , étant biparti, n'admet que des cycles paires de longueur  $\geq 4$ ). A fortiori, aucune immersion torique de  $K_5$  et  $K_{3,3}$  ne contient deux cycles  $\mu$  et  $\nu$  répondant à la condition suffisante donnée plus haut.*

#### IV.3. 2 - Connectivité et immersion régulière

En nous restreignant à la classe des graphes 3-connexes, nous avons pu caractériser les graphes admettant une immersion non régulière dans le tore. Il reste donc à étudier les graphes possédant un ensemble d'articulation de cardinalité 2. Malheureusement, comme nous allons le voir, la si-

tuation est loin d'être simple. En effet, on aurait pu, en s'inspirant de l'étude des graphes planaires 2-connexes (voir [19] et [20]), tenter de décomposer un graphe non planaire en composantes 3-connexes pour pouvoir appliquer les résultats obtenus précédemment. Or une telle décomposition peut aboutir à plusieurs solutions. En effet, soit  $G$  un graphe de genre 1 admettant un ensemble d'articulation de cardinalité 2. Posons :

$$G = G_1 \cup G_2$$

avec

$$G_1 \cap G_2 = \{x_1, x_2\}$$

Il peut arriver que :

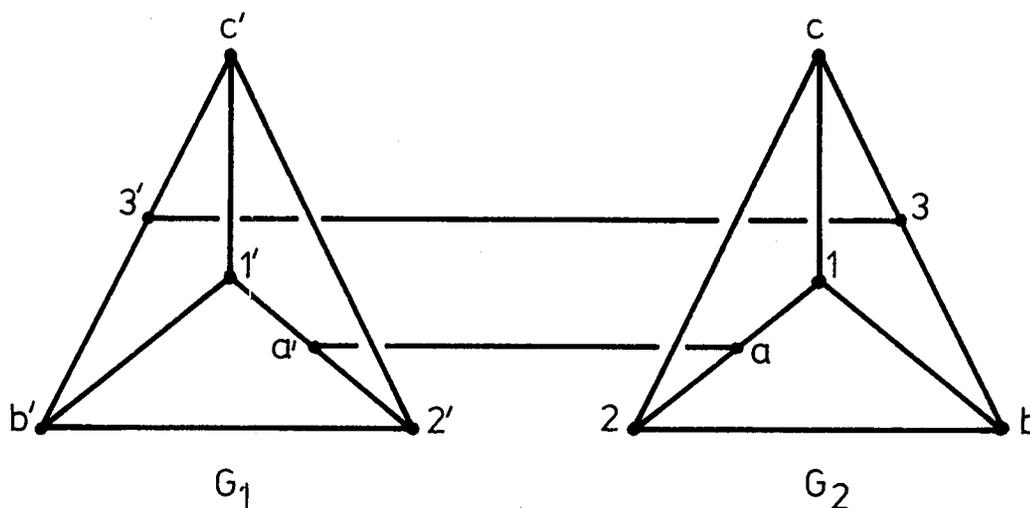
- $G_1$  et  $G_2$  soient tous deux planaires.
- $G_1$  non planaire et  $G_2$  planaire.
- $G_1$  et  $G_2$  soient tous deux de genre 1 (ce qui est assez étonnant !)

Par suite, n'ayant pas à notre disposition un théorème comparable au théorème d'unicité de l'immersion des graphes planaires (voir [20]), l'étude des immersions de  $G$  (en particulier celles qui sont régulières) à partir de celles de  $G_1$  et de  $G_2$  risque d'aboutir à l'examen d'un nombre de cas prohibitif.

Dans la suite, nous allons donner deux exemples, l'un correspond au cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont tous les deux planaires, l'autre correspond au cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont non planaires tous les deux.

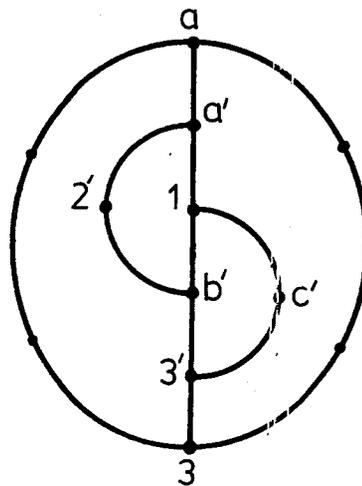
#### Exemple 1

Soit  $G$  le graphe :

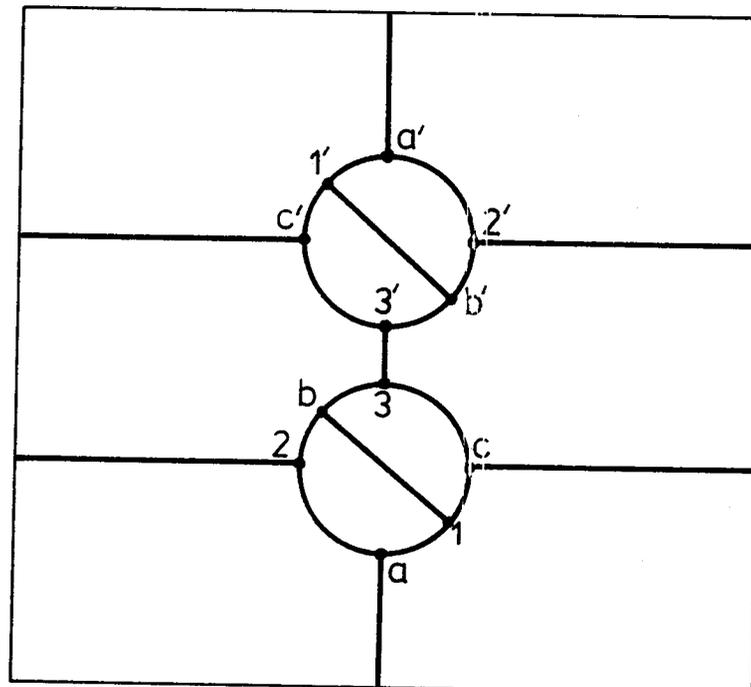


Nous voyons que  $G$  s'obtient en connectant deux graphes planaires. D'autre part, considérons  $G_1$  auquel on ajoute la chaîne  $a a' 1' b' 3' 3$  : c'est un graphe équivalent à  $K_{3,3}$  que nous notons  $\tilde{G}_1$ .

$\tilde{G}_1$  a exactement deux immersions toriques (voir [9]) : l'une régulière, l'autre non. Démontrons que, pour toute immersion torique de  $G$ ,  $\tilde{G}_1$  doit avoir une immersion non régulière. Sinon, la chaîne  $a a' 1' b' 3' 3$  serait une arête régulière et, par conséquent, on ne pourrait pas joindre  $c'$  à  $2'$  :



Il en résulte que toute immersion torique de  $G$  est non régulière.



Par contre, nous pouvons montrer que  $G$  admet une immersion régulière dans une surface orientable de genre 2 (le double tore). Il suffit pour cela de considérer le système complet de bords formé de 3 cycles élémentaires suivants :

$$(3b \ 1a \ 2c)$$

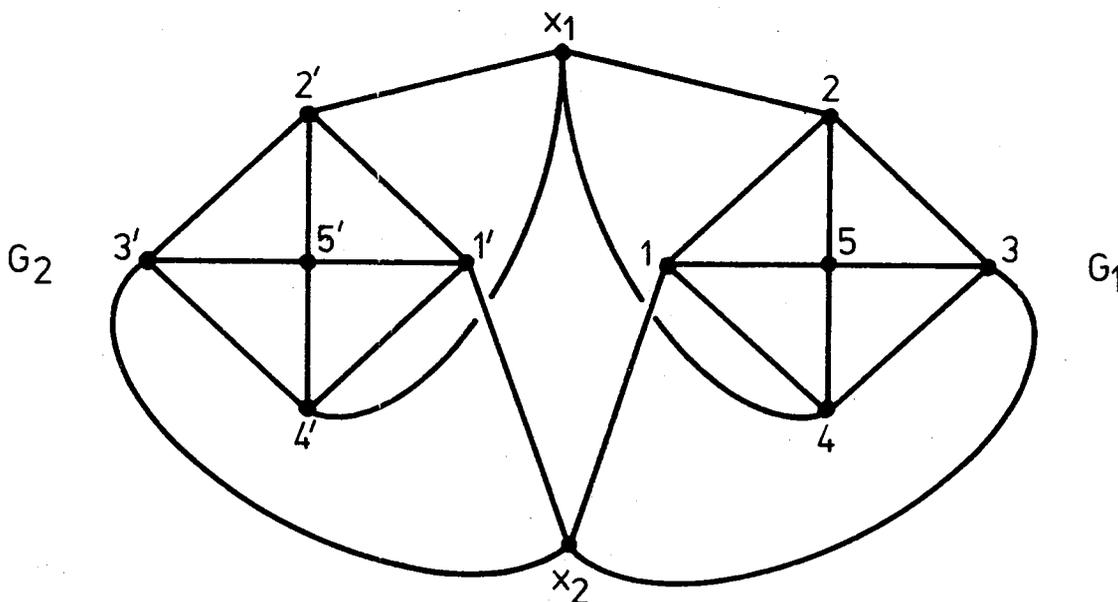
$$(c1b2aa'2'b'1'c'3'3)$$

$$(1c2b33'b'2'c'1'a'a)$$

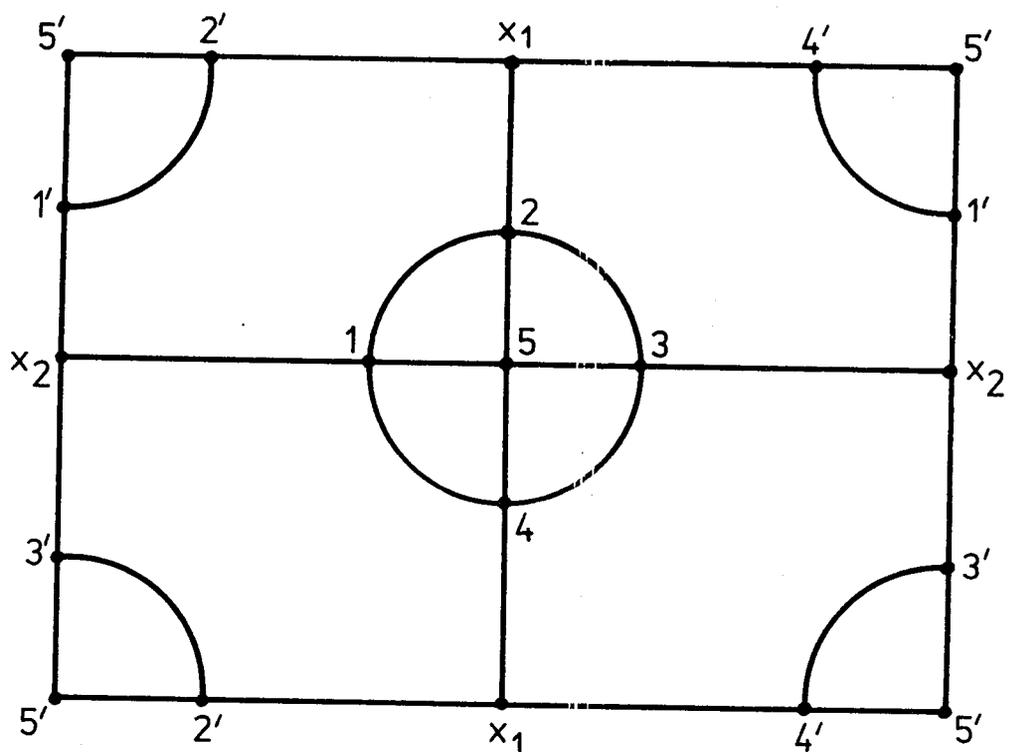
— L'étude des immersions de  $K_4$  (régulièrement immergeable dans la sphère mais n'admet aucune immersion régulière dans une surface de genre  $> 0$ ) et l'exemple précédent montrent que le problème de l'existence des immersions régulières ne dépend pas du genre du graphe.

Exemple 2

Soit  $G$  le graphe :



Il s'agit de deux graphes équivalents à  $K_5$  accolés aux sommets  $x_1$  et  $x_2$ .  $G$  admet une immersion régulière dans le tore :



Démontrons que cette immersion est, en fait, unique. En effet, on sait [9] que  $K_5$  possède 5 immersions toriques. D'autre part,  $G_2$  étant non plane, dans toute immersion torique de  $G$ ,  $G_1$  doit avoir une immersion telle que les deux chaînes  $2x_1 4$  et  $1x_2 3$  soient sur une même face singulière. Par conséquent, l'unique immersion de  $G_1$  qui convient est celle correspondante aux 4 faces de longueur 3 et une face de longueur 12.  $G_1$  et  $G_2$  jouent le même rôle, d'où l'unicité.

## BIBLIOGRAPHIE DU TROISIEME CHAPITRE

- [1] ALEKSANDROV  
Combinatorial Topology  
Graylock Press. 1956
  
- [2] BATTLE, HARARY, KODAMA, YOUNGS  
Additivity of the genus of a graph  
Bull. A.M.S 68, pp. 565-568. 1962
  
- [3] BERGE  
Graphes et hypergraphes. Dunod 1973
  
- [4] BOLAND  
Embedding of graphs in the projective plane  
Fund. Math. pp 195-203. 1965
  
- [5] BOLAND  
Embedding of graphs into orientable surfaces  
Indg. Math. 29, pp. 33-44. 1967
  
- [6] HOCKING et YOUNG  
Topology. Addison-Wesley 196
  
- [7] GRUNBAUM  
Convex polytopes. John wiley & Sons. 1967
  
- [8] GRUNBAUM  
Conjecture 6 in "Recent progress in Combinatorics"  
p. 343. Academic Press. 1969
  
- [9] KAGNO  
The mappings of graphs on surfaces  
J. Math and Phys. 16, pp 46-75, 1937

- [10] KURATOWSKI  
Sur le problème des courbes gauches en topologie  
Fund. Math. 15, pp 271-283. 1930
- [11] LEFSCHETZ  
Planar graphs and related topics  
Proc. Nat. Acad. Sc. 54, pp 1763-1765. 1965
- [12] MAC LANE  
A combinatorial condition for planar graphs  
Fund. Math pp 22-32. 1936
- [13] NGUYEN HUY XUONG  
Graphes régulièrement représentables sur le tore  
C.R. Acad. Sc. Paris, t.281, pp 683-685. 1975
- [14] SZEKERES  
Polyhedral decomposition of cubic graphs  
Bull. Austral. Math. Soc. 8 pp 367-387. 1973
- [15] TUTTE  
On the imbedding of linear graphs in surfaces  
Procs. London Math. Soc, 51, pp 474-483. 1950
- [16] TUTTE  
A census of planar maps  
Canad. j. Math. 15, pp 249-271. 1963
- [17] TUTTE  
The thickness of a graph  
Indg. Math. 25, pp. 567-577. 1963
- [18] TUTTE  
Connectivity in graphs  
University of Toronto Press. 1966

[19] WHITNEY

Non-separable and planar graphs

Trans. A.M.S. 34, pp 339-362. 1932

[20] WHITNEY

Congruent graphs and the connectivity of graphs

Amer. J. Math 54, pp 150-168. 1932

*Chapitre IV*

GENRE MAXIMUM D'UN GRAPHE  
GRAPHES SUP-IMMERGEABLES

## I - PRESENTATION DU PROBLEME

Etant donné un graphe connexe  $G$ , on appelle genre maximum orientable de  $G$ ,  $\gamma_M(G)$ , le maximum du genre des surfaces orientables dans lesquelles  $G$  admet une immersion squelettique (chapitre I). De la même manière, on peut définir  $\bar{\gamma}_M(G)$ , le genre maximum non-orientable, lorsque les surfaces considérées sont non-orientables.

Il semblerait que l'étude de  $\gamma_M(G)$  a été abordée pour la première fois par Nordhauss et al. dans [11]. Dans le même esprit, Ringel, dans [17], a soulevé le problème de la recherche des graphes admettant une immersion squelettique dont le nombre de faces est  $\leq 2$ .

Ce chapitre a pour but la détermination de  $\gamma_M(G)$  (resp.  $\bar{\gamma}_M(G)$ ) pour tout graphe  $G$ . Pour cela, nous définirons un nouvel invariant combinatoire que nous nommerons déficienne de Betti. Nous tirerons ensuite de ce résultat de nombreuses conséquences. Entre autres, nous répondrons au problème posé plus haut et aux différentes conjectures formulées dans [14] et [16].

## II - INTERVALLES D'IMMERSION D'UN GRAPHE. GRAPHES SUP-IMMERGEABLES.

Soient  $G$  un graphe (supposé connexe dans toute la suite) et  $S$  une surface (orientable ou non) de caractéristique  $\chi(S)$ . Si  $G$  admet une immersion squelettique dans  $S$  alors on a, d'après la formule d'Euler :

$$n_0(G) - n_1(G) + n_2 = \chi(S)$$

Comme le nombre de faces  $n_2$  est  $\geq 1$  on a donc :

$$\beta(G) + \chi(S) = n_1(G) - n_0(G) + 1 + \chi(S) = n_2 + 1 \geq 2$$

Par conséquent, lorsque  $S$  est orientable :

$$\chi(S) = 2 - 2\gamma(S) \geq 2 - \beta(G)$$

Autrement dit :

$$\gamma_M(G) \leq \left[ \frac{\beta(G)}{2} \right]$$

où  $[r]$  désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel  $r$ .

De la même manière, on a :

$$\bar{\gamma}_M(G) \leq \beta(G)$$

Un graphe  $G$  sera dit sup-immmergeable (orientable) lorsque :

$$\gamma_M(G) = \left[ \frac{\beta(G)}{2} \right]$$

Ce concept est dû à Nordhauss et al. [11, 1971]. Dans le même ordre d'idée, nous étudierons les graphes pour lesquels  $\bar{\gamma}_M(G) = \beta(G)$ .

Cela étant, l'introduction du paramètre  $\gamma_M$  permet, grâce à un résultat de Duke [3], d'associer à tout graphe  $G$  un intervalle  $I(G)$  de  $\mathbb{N}$  possédant la propriété suivante :  $G$  admet une immersion squelettique dans une surface orientable de genre  $\gamma$  si et seulement si  $\gamma \in I(G)$ .

En effet, dans [3], en utilisant la technique d'immersion dans les surfaces orientables due à Heffter et Edmonds (voir chapitre I, théorème 11), Duke a démontré que si un graphe  $G$  admet des immersions squelettiques dans les surfaces orientables de genre  $m$  et  $n$  alors, pour tout entier  $g$  tel que  $m \leq g \leq n$ , il existe une immersion squelettique de  $G$  dans une surface orientable de genre  $g$ . Compte tenu de la caractérisation du genre de  $G$ ,  $\gamma(G)$  (chapitre I, théorème 8) et de la définition du genre maximum de  $G$ ,  $\gamma_M(G)$ , on a :

$$I(G) = [\gamma(G), \gamma_M(G)]$$

$I(G)$  sera appelé intervalle d'immersion orientable de  $G$

De même, grâce au lemme 5, corollaire 3, et le théorème 9 du premier chapitre, nous démontrerons, à la section VI de ce chapitre, que le résultat de Duke est encore valable pour les immersions non-orientables d'un graphe de nombre de Betti  $\geq 1$ . Ce qui nous permettra de définir :

$$J(G) = [\bar{\gamma}(G), \bar{\gamma}_M(G)]$$

appelé intervalle d'immersion non-orientable de  $G$ . Comme précédemment, la propriété caractéristique de  $J(G)$  est la suivante : il existe une immersion squelettique de  $G$  dans une surface non-orientable de genre  $\bar{\gamma}$  si et seulement si  $\bar{\gamma} \in J(G)$ .

### III - CIRCUIT BI-EULERIEN ORIENTABLE

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini muni d'une involution sans point fixe  $\pi$ . On appelle circuit bi-eulerien orientable tout triplet  $C = (\Sigma, \pi, \varphi)$  où  $\varphi$  est une permutation circulaire de  $\Sigma$ . En rapprochant cette définition de celle d'un complexe cellulaire orientable (voir théorème 2, chapitre I) on voit qu'un circuit bi-eulerien orientable (en abrégé C.B.E.O) n'est rien d'autre qu'un complexe cellulaire orientable (connexe) dont le nombre de face est égal à 1.

Pour cette raison, les éléments de  $\Sigma$  seront appelés arcs et nous utiliserons les minuscules  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  pour les désigner. De même, l'image de  $\alpha$  par  $\pi$  sera notée  $\alpha'$ . Comme dans le cas d'un complexe cellulaire orientable, nous associons à tout C.B.E.O  $C$  son squelette, noté  $G_C$ . L'ensemble des sommets de  $G_C$  est isomorphe à l'ensemble des orbites de la permutation  $\rho = \varphi \pi$ . L'ensemble des arêtes de  $G_C$  est isomorphe à l'ensemble des orbites de  $\pi$  (une arête sera donc notée  $A = \{\alpha, \alpha'\}$ ). Remarquons aussi que  $G_C$  est un R-graphe (chapitre II) : pour tout sommet  $x$  de  $G_C$ , la rotation en  $x$ ,  $\rho_x$ , est précisément l'orbite de  $\rho$  correspondant à  $x$ . Enfin, nous désignerons par  $S_C$  la surface orientable sous-jacente à  $C$ .

#### Exemple

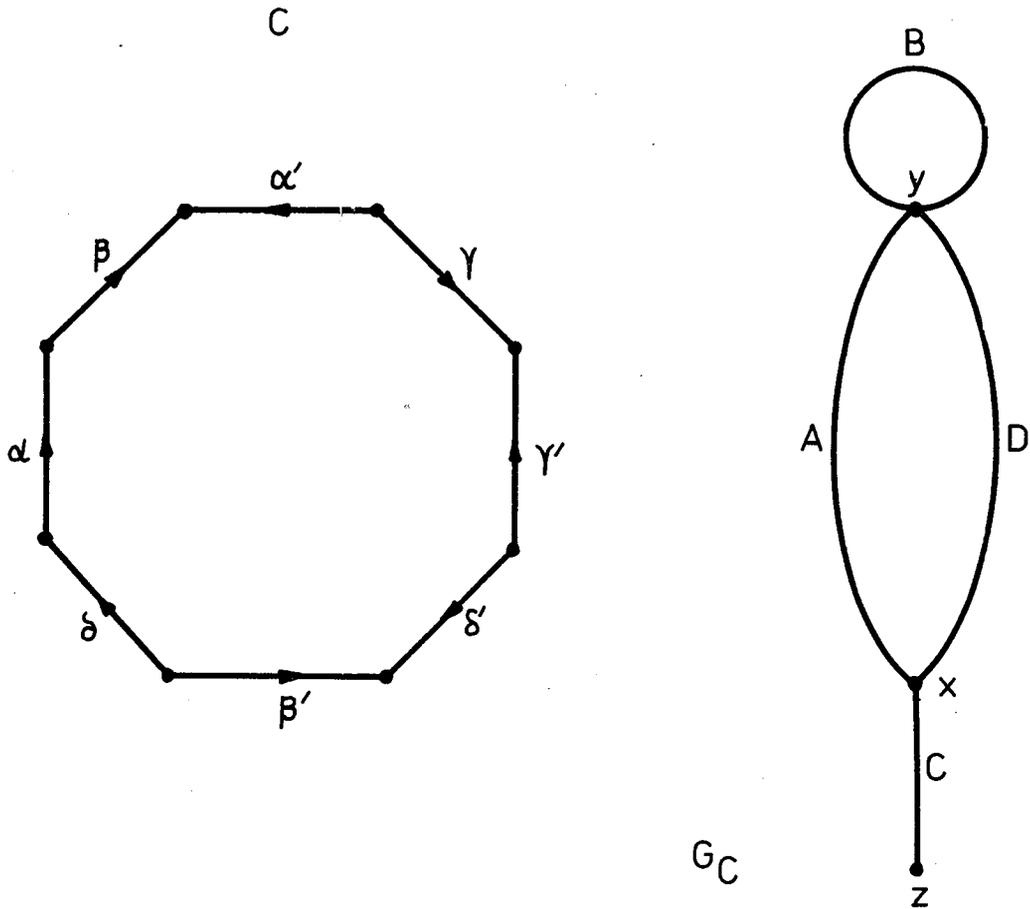
$$\Sigma = \{\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'\}$$

$$\pi = (\alpha\alpha') (\beta\beta') (\gamma\gamma') (\delta\delta')$$

$$\varphi = (\alpha\beta\alpha'\gamma\gamma'\delta'\beta'\delta)$$

$$\rho = \varphi \pi = (\alpha\gamma\delta') (\alpha'\beta\delta\beta') (\gamma')$$

Dans la suite, nous représenterons souvent  $C = (\Sigma, \pi, \varphi)$  par un polygone convexe de  $2p$  côtés et nous le parcourons dans le sens des aiguilles d'une montre. La rotation en chaque sommet de  $G_C$  sera une permutation circulaire des arcs entrant dans ce sommet :



On a :

$$\rho_x = (\alpha\gamma\delta')$$

$$\rho_y = (\alpha'\beta\delta\beta')$$

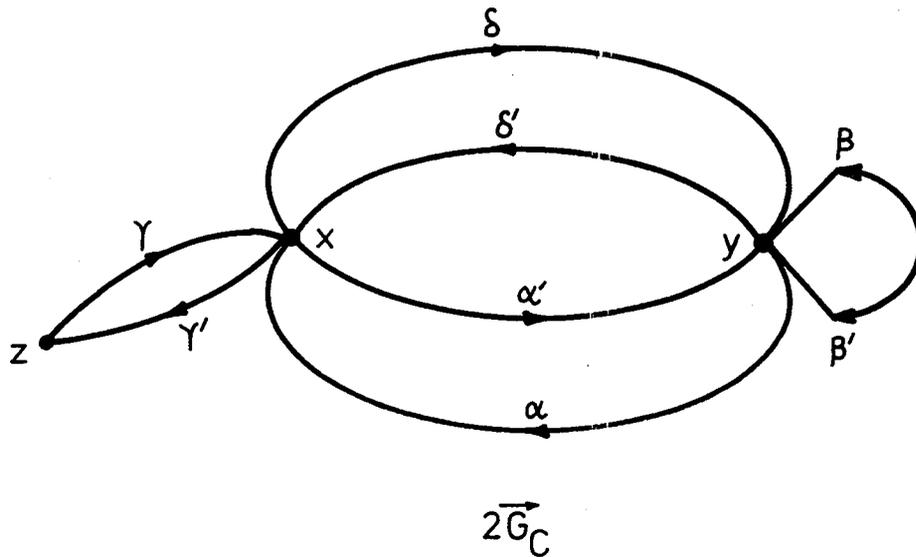
$$\rho_z = (\gamma')$$

Calculons la caractéristique de la surface  $S_C$  :

$$\chi(S_C) = n_0(G_C) - n_1(G_C) + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$$

Autrement dit,  $S_C$  est un tore (surface orientable de genre 1)

Ceci étant, considérons le graphe orienté symétrique, noté  $2\vec{G}_C$ , construit à partir de  $G_C$  en remplaçant chaque arête par un couple d'arcs opposés.



On voit que  $C$  n'est rien d'autre qu'un circuit eulerien de  $2\vec{G}_C$  (d'où la justification de la terminologie choisie).

#### IV - CARACTERISATIONS DES GRAPHES SUP-IMMERGEABLES.

Cette section est consacrée à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe soit sup-immmergeable (en abrégé s. i) dans une surface orientable.

##### IV. 1 - INTRODUCTION

Considérons une immersion squelettique d'un graphe  $G$  dans une surface orientable de genre  $\gamma$ . On a :

$$n_0(G) - n_1(G) + n_2 = 2 - 2\gamma$$

D'où :

$$2\gamma = n_1(G) - n_0(G) + 1 - (n_2 - 1) = \beta(G) - (n_2 - 1)$$

Par conséquent :

- Quand  $\beta(G)$  est pair :  $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G)}{2} \iff n_2 = 1$

- Quand  $\beta(G)$  est impair :  $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - 1}{2} \iff n_2 = 2$

Autrement dit, un graphe de nombre de Betti pair (resp. impair) est s. i si et seulement s'il admet une immersion squelettique orientable avec une (resp. deux) face (s).

D'une manière plus précise, nous avons la :

Proposition 1 : Pour qu'un graphe  $G = (X, E)$  soit sup-immérgeable il faut et il suffit qu'il existe un C.B.E.O  $C$  tel que le squelette  $G_C$  soit isomorphe à  $G$  (si  $\beta(G)$  est pair) ou à  $G - \{A\}$  ( $A \in E$  ; si  $\beta(G)$  est impair).

### Démonstration

a - La condition est nécessaire

Soit  $G$  un graphe s.i. Lorsque  $\beta(G)$  est pair,  $G$  est réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire orientable ayant une seule face. C'est donc un C.B.E.O dont le squelette est isomorphe à  $G$ . Supposons maintenant  $\beta(G)$  impair. Par hypothèse,  $G$  est réalisable comme le squelette d'un complexe cellulaire orientable ayant deux faces, désignées par  $f_1$  et  $f_2$ . Comme  $G$  est connexe, il existe donc une arête  $A = \{\alpha, \alpha'\}$  telle que :

$$\partial (f_1) = \alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$$

$$\partial (f_2) = \alpha' \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q$$

Alors le C.B.E.O défini par  $\varphi = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \beta_1 \beta_2 \dots \beta_q)$  possède un squelette isomorphe à  $G - \{A\}$ .

b - La condition suffisante

provient de la définition d'un graphe s.i  $\square$

## IV. 2 - GENERATIONS DES GRAPHES SUP-IMMERGEABLES

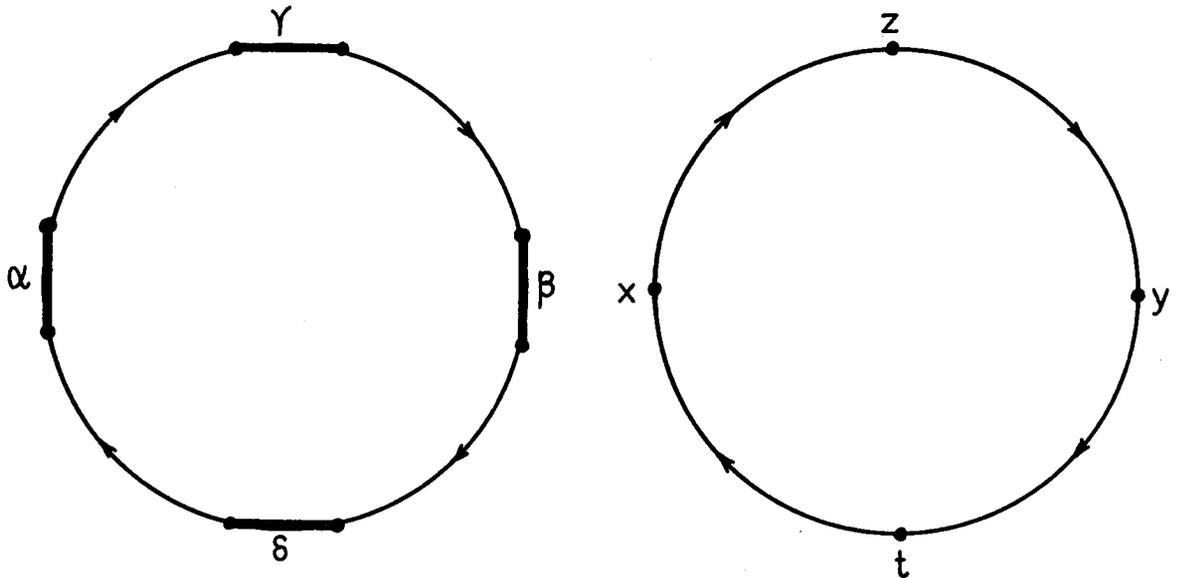
Dans tout ce paragraphe, nous désignons par  $G$  un graphe s.i

dont le nombre de Betti  $\beta(G)$  est pair. D'après la proposition 1, il existe donc un C.B.E.O  $C$  tel que le squelette  $G_C$  soit isomorphe à  $G$ . Dans la suite, nous dirons que  $C$  est associé à  $G$ . De plus, nous représenterons  $C$  comme un circuit de  $2\vec{G}$ , c'est à dire, par une séquence circulaire d'arcs et de sommets de  $G$ . De cette manière, le C.B.E.O donné dans la section III se note  $C = (x\alpha y\beta\alpha'x\gamma z\gamma'x\delta'y\beta'y\delta)$ .

Notre but, dans ce paragraphe, est de construire, à partir de  $G$ , d'autres graphes s. i. Nous avons besoin pour cela d'une nouvelle définition :

Définition :

Soit  $C$  un C.B.E.O associé à  $G$ . Nous dirons que les paires (non ordonnées) d'arcs (de  $G$ )  $\{\alpha, \beta\}$  et  $\{\gamma, \delta\}$  se séparent sur  $C$  lorsqu'en parcourant  $C$  on trouve ...  $\alpha$  ...  $\gamma$  ...  $\beta$  ...  $\delta$  ... (évidemment, il s'agit d'un "ordre" cyclique). Nous définissons de la même manière les paires de sommets (non nécessairement distincts) qui se séparent sur  $C$  :

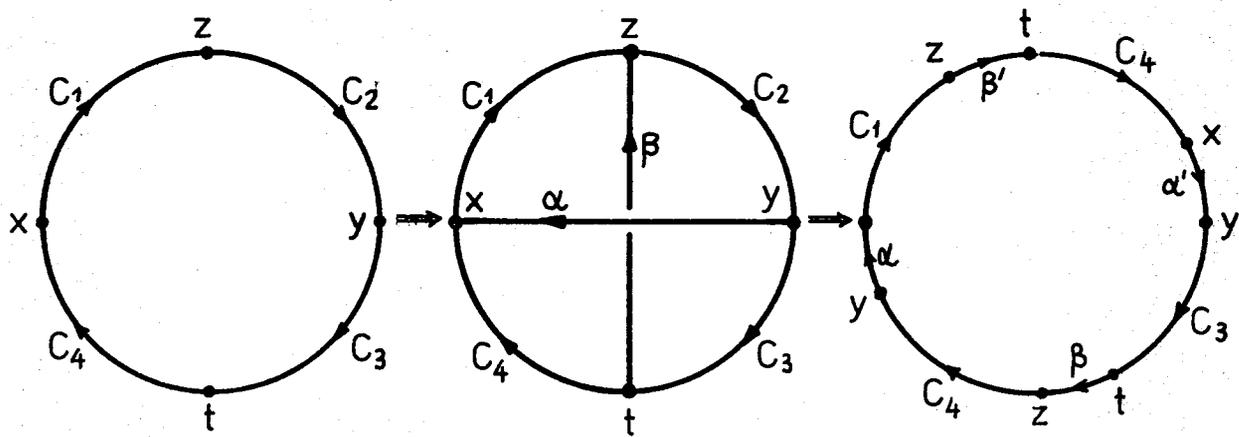


Nous avons alors les résultats suivants :

Lemme 1 : Soient  $\{x, y\}$  et  $\{z, t\}$  deux paires de sommets qui se séparent sur un C.B.E.O associé à  $G$ . Alors le graphe  $H = GU \{A, B\}$  où  $A$  et  $B$  sont deux nouvelles arêtes ayant pour extrémités  $\{x, y\}$  et  $\{z, t\}$  respectivement est aussi s.i.

Démonstration

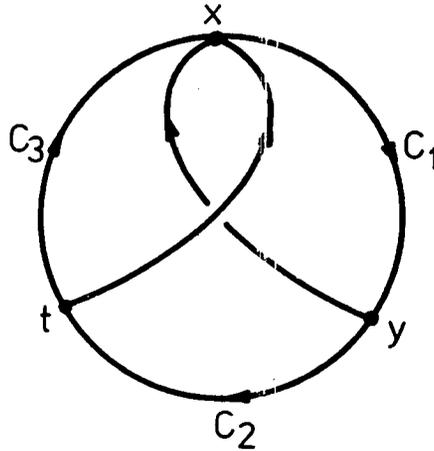
Soit  $C = (x C_1 z C_2 y C_3 t C_4)$  un C. B. E. O associé à  $G$  (les  $C_i$  sont des suites d'arcs et de sommets de  $G$ ). On peut vérifier que le circuit  $D = (x C_1 z \beta' t C_4 x \alpha' y C_3 t \beta z C_2 y \alpha)$  est un C. B. E. O associé à  $H$ . D'après la proposition 1,  $H$  est donc un graphe s.i



On remarquera que  $A = \{\alpha, \alpha'\}$  et  $B = \{\beta, \beta'\}$   $\square$

Remarque : Dans les applications du lemme précédent, il peut arriver que  $x, y, z, t$  ne soient pas différents deux à deux. De plus, il n'est pas exclu que  $x$  coïncide avec  $z$  sur  $C$ . Dans ce cas, on

a la figure :



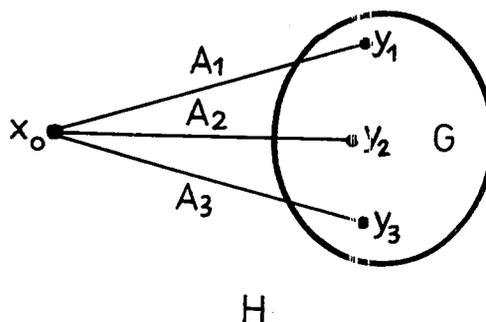
Le circuit D s'écrit alors :

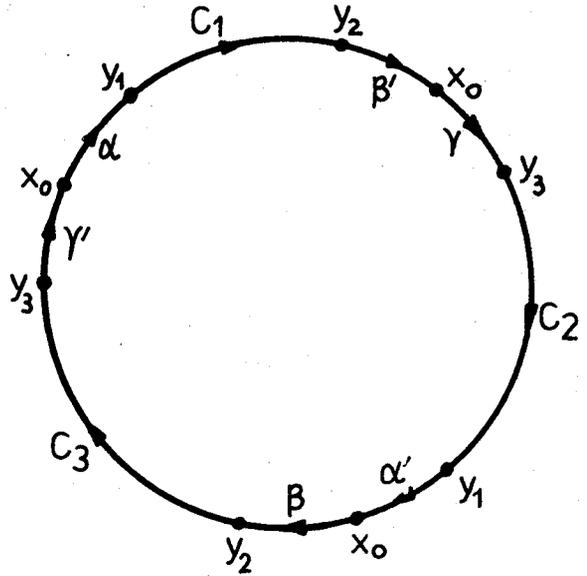
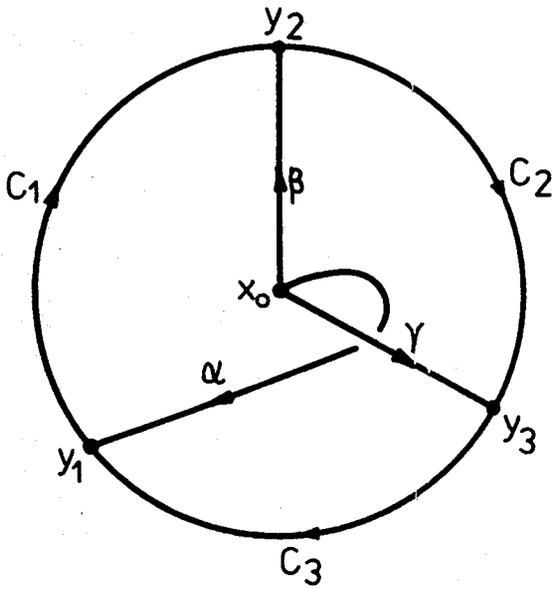
$$D = (x \ C_1 \ y \ \alpha \ x \ \beta' \ t \ C_3 \ x \ \alpha' \ y \ C_2 \ t \ \beta)$$

Lemme 2 : Si le graphe G est s. i alors le graphe  $H = G \cup_{1 \leq i \leq 3} \{x_0, y_i\}$  (où  $x_0$  est un nouveau sommet de degré 3 et  $A_i = \{x_0, y_i\}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) est une nouvelle arête ayant pour extrémités  $x_0$  et  $y_i$ ) est aussi s. i

Démonstration

D'après la proposition 1, il existe un C.B.E.O C associé à G. Supposons que  $y_1, y_2, y_3$  figurent dans cet ordre sur C. Autrement dit, C est de la forme  $C = (y_1 \ C_1 \ y_2 \ C_2 \ y_3 \ C_3)$ . En posant  $A_1 = \{\alpha, \alpha'\}$ ,  $A_2 = \{\beta, \beta'\}$ ,  $A_3 = \{\gamma, \gamma'\}$ , on peut vérifier que  $D = \{x_0 \ \alpha \ y_1 \ C_1 \ y_2 \ \beta' \ x_0 \ \gamma \ y_3 \ C_3 \ y_1 \ \alpha' \ x_0 \ \beta \ y_2 \ C_2 \ y_3 \ \gamma'\}$  est un C. B. E. O associé à H.

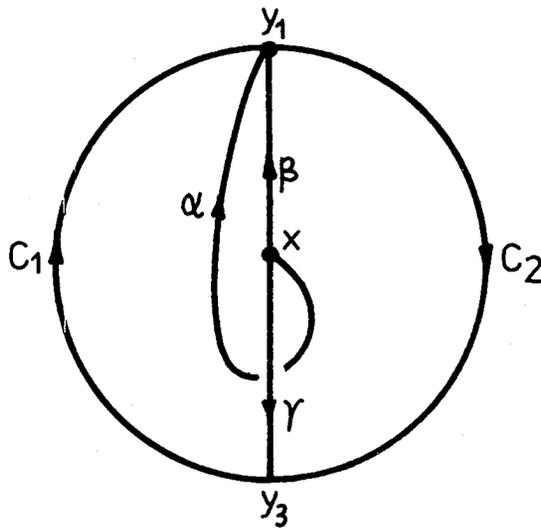




On remarquera que la rotation en  $x_0$  s'écrit :  $(\alpha' \beta' \gamma')$ .  $\square$

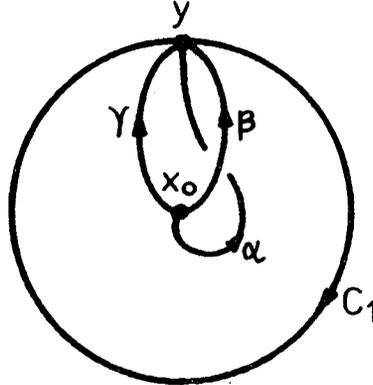
Remarques :

1 - Lorsque  $y_1$  coïncide avec  $y_2$  sur  $C$  on a :



$$D = (x_0 \alpha y_1 \beta' x_0 \gamma y_3 C_2 y_1 \alpha' x_0 \beta y_1 C_1 y_3 \gamma')$$

2 - Lorsque les trois sommets  $y_1, y_2, y_3$  sont confondus sur  $C$  alors :



$$D = (x_0 \alpha y \beta' x_0 \gamma y \alpha' x_0 \beta y C_1 y \gamma')$$

3 - Du lemme 1 et du lemme 2 on peut déduire le résultat suivant : si le graphe  $G$  est s.i alors le graphe

$$H = G \cup_{1 \leq i \leq 2d+1} \{x_0, y_i\}$$

(où  $x_0$  est un nouveau sommet de degré  $2d + 1$ ) est aussi s.i.

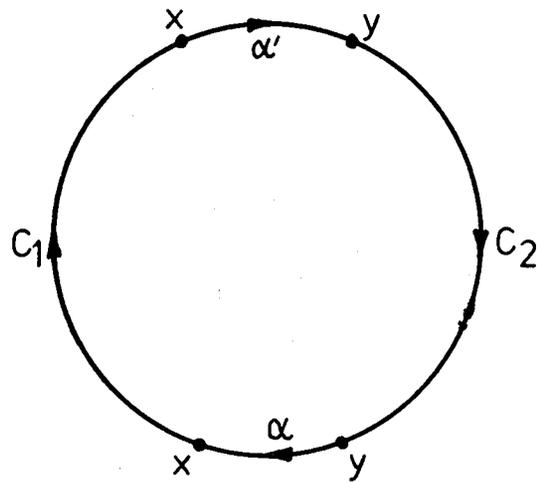
Lemme 3 : Soit  $G$  un graphe s.i de nombre de Betti  $\beta(G) = 2k > 0$ . Alors, il existe dans  $G$  deux arêtes  $A$  et  $B$  adjacentes telles que le graphe  $H = G - \{A, B\}$  soit encore s.i.

Démonstration

Nous allons démontrer un résultat légèrement plus fort. En effet :

a - Sans perdre la généralité, on peut toujours supposer que  $G$  ne contient pas de sommets pendants. Car, en supprimant ces sommets, s'ils existent, on obtient encore un graphe s.i (non vide car son nombre de Betti est  $> 0$ ).

b - Désignons par  $C$  un C. B. E. O associé à  $G$ . Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux arcs opposés tels que, sur  $C$ , la longueur de l'une des chaînes  $\alpha C_1 \alpha'$  ou  $\alpha' C_2 \alpha$  soit minimale. Mettons que ce soit  $\alpha C_1 \alpha'$ .

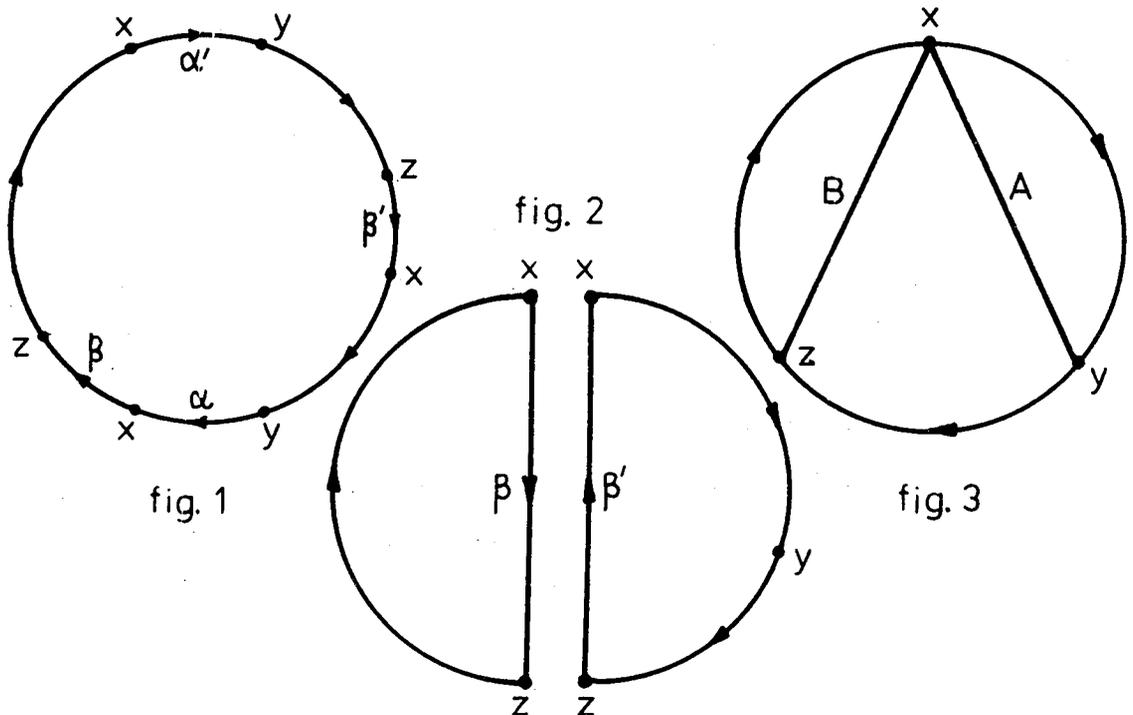


Je dis que  $C_1 \neq \emptyset$ . En effet, si  $C_1$  était vide,  $\alpha$  et  $\alpha'$  seraient consécutifs sur  $C$ . Ils détermineraient alors un sommet de degré 1, ce qui est impossible d'après a.

Par conséquent,  $C_1$  ne contient aucune paire d'arcs opposés. Désignons par  $\beta$  le successeur de  $\alpha$  sur  $C$  ( $\beta \in C_1$ ). D'après ce qui précède,  $\beta'$  figure dans  $C_2$ . Autrement dit les deux paires  $\{\alpha, \alpha'\}$  et  $\{\beta, \beta'\}$  se séparent sur  $C$ .

Posons  $A = \{\alpha, \alpha'\}$  et  $B = \{\beta, \beta'\}$ . Désignons par  $x, y$  et  $x, z$  les extrémités de  $A$  et de  $B$  respectivement. On remarquera que  $A$  et  $B$  sont adjacentes.

c - Considérons la transformation suivante :



La fig. 1 représente  $C$  ou, de manière équivalente, un complexe cellulaire orientable ayant une face et dont le squelette est  $G$ . La figure 2 correspond à une immersion squelettique du graphe  $G - \{A\}$  dans un complexe cellulaire orientable ayant deux faces. Enfin, la figure 3 représente les trois faces d'une immersion de  $G$  où :

- $A$  et  $B$  sont deux arêtes adjacentes, chacune appartient aux bords de deux faces différentes (autrement dit,  $A$  et  $B$  sont régulières (chap. III)).
- Le sommet  $x$  appartient aux bords des trois faces.

d - Puisque  $G$  admet une immersion ayant 3 faces, le graphe  $H = G - \{A, B\}$  admet une immersion avec exactement une face, car les arêtes  $A$  et  $B$  sont régulières (c'est l'opération de réduction définie au chap. I).

Ce qui termine la démonstration  $\square$

#### IV. 3 - THEOREMES DE CARACTERISATION

De ce qui précède nous allons déduire trois caractérisations des graphes s.i.

Théorème 1 : Pour qu'un graphe  $G$  de nombre de Betti  $\beta(G) = 2(k+1) > 0$  soit s.i, il est nécessaire et suffisant que ce graphe admette une immersion squelettique, dans une surface de genre  $k$ , telle qu'au moins un sommet appartienne aux bords de trois faces distinctes.

#### Démonstration

Pour les raisons exposées dans a. du lemme 3, on peut toujours supposer que  $G$  ne possède pas de sommets pendants.

#### a - Condition nécessaire

Par hypothèse,  $G$  est s.i, donc :

$$\gamma_M(G) = \frac{\beta(G)}{2} = k + 1$$

D'après le lemme 3,  $G$  admet une immersion squelettique avec exactement trois faces dans une surface orientable  $S$ . Alors, la formule d'Euler s'écrit :

$$\chi(S) = n_0(G) - n_1(G) + 3 = -\beta(G) + 4 = 2 - 2\gamma(S)$$

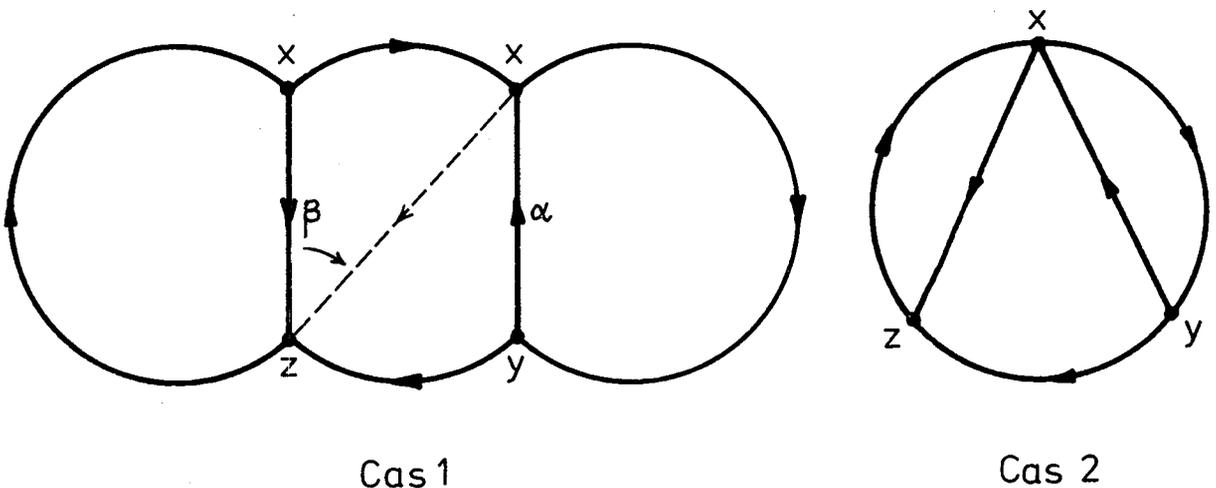
D'où :

$$\gamma(S) = \frac{1}{2} (\beta(G) - 2) = k$$

D'autre part, d'après c. de la démonstration du lemme 3, il existe une immersion de  $G$  dans  $S$  telle qu'un sommet  $x$  appartienne aux bords des trois faces de  $S$ .

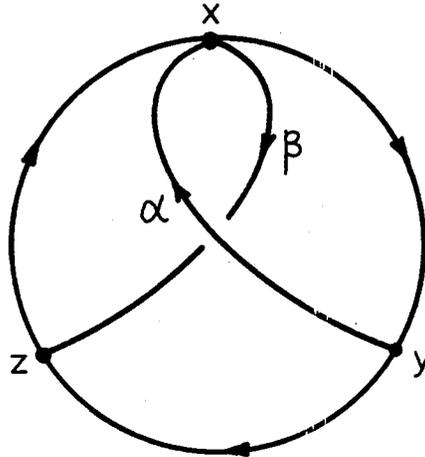
#### b - Condition suffisante

Si  $G$  est immergeable dans  $S$  de genre  $k$  alors cette immersion possède trois faces, d'après la formule d'Euler. Désignons par  $x$  un sommet appartenant aux bords de ces trois faces. Par conséquent, il existe deux arêtes  $A = \{\alpha, \alpha'\}$  et  $B = \{\beta, \beta'\}$  incidentes à  $x$  et régulières. Deux cas peuvent se présenter :



D'ailleurs, le premier cas peut se ramener au deuxième cas en changeant la rotation en  $x$  pour que  $\alpha$  devienne le successeur de  $\beta'$ . Il nous reste donc à transformer l'immersion correspondant au deuxième

cas pour obtenir un C. B. E. O. Ce qui est immédiat en permutant, dans la rotation en  $x$ , les deux arcs  $\alpha$  et  $\beta'$  (voir aussi la remarque du lemme 1) :



Remarque :

*La démonstration de la condition suffisante du théorème 1 permet de retrouver les résultats (d'ailleurs liés) suivants :*

- *Si un graphe admet une immersion, dans une surface orientable de genre  $\gamma$ , telle qu'un sommet apparait dans les bords de trois faces distinctes, alors ce graphe est immergeable dans une surface orientable de genre  $\gamma - 1$  (Théorème 1, Duke [3]).*
- *Soit  $G$  un graphe vérifiant la condition précédente. Alors  $\gamma(G) < \gamma_M(G)$  (Théorème 3, Nordhauss et al. [12]).*

Comme nous voyons, le théorème 1 ne fournit pratiquement aucune information d'ordre combinatoire sur les graphes s.i. Par conséquent, nous allons chercher des conditions faisant intervenir la structure même de ces graphes.

Soit alors  $G = (X(G), E(G))$  un graphe quelconque. Dans ce qui suit, par sous graphe partiel de  $G$  nous entendons la donnée d'un sous ensemble d'arêtes de  $G$ . Considérons alors  $H = (Y, F)$  avec  $F \subseteq E$ . Notons par  $P_i = (X_i, E_i)$  les composantes connexes du graphe  $G - F$ . A chaque  $P_i$ , nous associons l'entier :

$$\omega(P_i) = \text{Card}(E_i) + \text{Card}(X_i - Y)$$

Nous dirons que  $P_i$  est pair si et seulement si  $\omega(P_i)$  est pair.

Un cas particulièrement important est celui où  $H$  est un arbre maximal de  $G$ . On a l'habitude d'appeler co-arbre de  $G$  le complémentaire (au sens des arêtes bien entendu) d'un arbre maximal. Dans ce cas, si  $P_i$  est une composante connexe d'un co-arbre alors  $\omega(P_i)$  n'est rien d'autre que le nombre d'arêtes de  $P_i$ .

Avant de démontrer le principal théorème de caractérisation des graphes s.i (dans le cas orientable) nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme : Dans tout graphe connexe  $G$  ayant au moins deux arêtes, il existe deux arêtes adjacentes  $A$  et  $B$  tel que  $G - \{A, B\}$  soit encore connexe (aux sommets isolés près).

#### Démonstration

Le résultat est évident si  $G$  ne possède que deux arêtes. On peut donc raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $G$ .

En effet, soit  $C$  une arête telle que

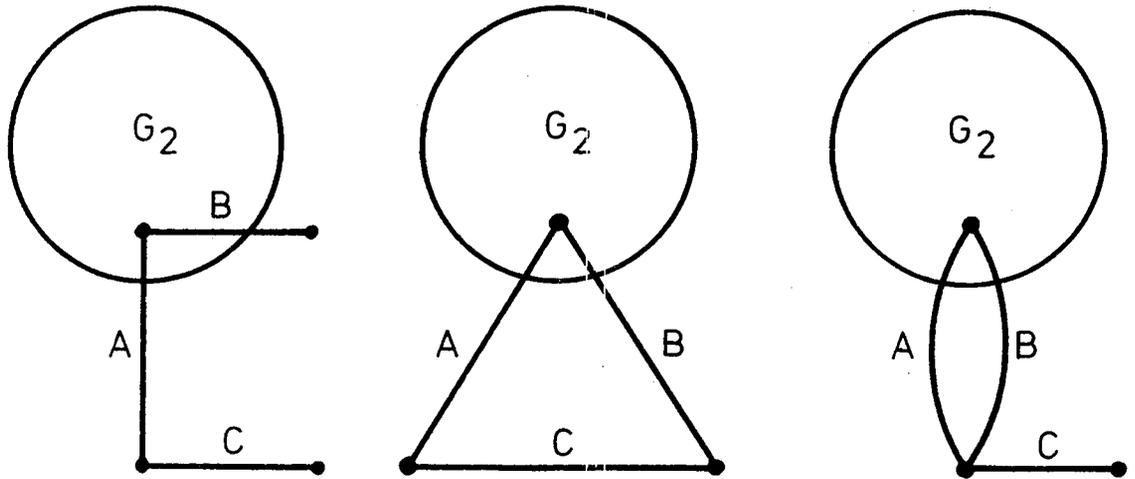
$$G_1 = G - \{C\}$$

reste connexe (à un sommet isolé près) (si  $G$  n'est pas un arbre une telle arête existe sûrement ; si  $G$  est un arbre on prendra pour  $C$  une arête pendante).

Par hypothèse de récurrence,  $G_1$  contient deux arêtes adjacentes  $A$  et  $B$  telles que  $G_2 = G_1 - \{A, B\}$  soit connexe (aux sommets isolés près). Considérons :

$$G' = G_2 \cup \{C\}$$

Si  $G'$  est connexe (aux sommets isolés près) alors le lemme est démontré. Sinon, c'est que  $G$  est de la forme



Dans ce cas, on enlèvera les arêtes A et C (par exemple) .  
Ce qu'il fallait démontrer  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

Théorème 2 : Pour qu'un graphe connexe soit s.i, il faut et il suffit qu'il contienne un co-arbre dont toutes les composantes connexes, sauf une au plus, sont paires.

Démonstration

Le nombre d'arêtes d'un arbre maximal d'un graphe G connexe est  $n_0(G) - 1$ . Par conséquent, le nombre d'arêtes d'un co-arbre de G est égal à  $n_1(G) - (n_0(G) - 1) = \beta(G)$ . Autrement dit, la parité du nombre de composantes **impaires** de tout co-arbre est celle de  $\beta(G)$ .

Nous allons démontrer le théorème en deux étapes, suivant la parité de  $\beta(G)$ .

1er cas :  $\beta(G)$  est pair

a - Condition nécessaire

Il s'agit de démontrer que si G est s.i alors il contient

un co-arbre dont toutes les composantes connexes sont paires. Posons  $\beta(G) = 2k$ . Nous allons procéder par récurrence sur  $k$ .

Si  $k = 0$ , alors  $G$  est un arbre et le résultat est immédiat.

Supposons alors  $\beta(G) = 2k > 0$ . D'après le lemme 3,  $G$  contient deux arêtes adjacentes  $A$  et  $B$  telles que  $H = G - \{A, B\}$  soit encore s.i. Comme  $\beta(H) = \beta(G) - 2 = 2(k - 1) \geq 0$  (car  $H$  est connexe),  $H$  contient donc, par hypothèse de récurrence, un co-arbre  $D$  dont toutes les composantes sont paires. Par construction,  $H - D$  est aussi un arbre de  $G$ . Il en résulte que  $C = D \cup A \cup B$  est un co-arbre de  $G$ . L'adjacence de  $A$  et  $B$  assure que la composante connexe à laquelle elles appartiennent reste paire. D'où la conclusion.

#### b - Condition suffisante

Supposons que  $G$  contienne un co-arbre  $C = G - T$  tel que, pour tout  $i$ ,  $\omega(P_i) = 2p_i \geq 0$ .

Si  $C = \emptyset$  alors  $G$  est un arbre qui est évidemment s.i (rappelez que tout arbre admet une immersion squelettique dans la sphère).

Supposons alors  $C \neq \emptyset$ , c'est à dire,  $\omega(P_i) > 0$  ( $1 \leq i \leq q$ ). Il suffit alors de démontrer que  $G_1 = T \cup P_1$  est s.i car le résultat général s'obtiendra par récurrence sur le nombre de composantes connexes de  $C$ , en posant  $G_{i+1} = G_i \cup P_{i+1}$ .

Pour prouver que  $G_1 = T \cup P_1$  est s.i, on raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $P_1$ . En effet, si  $\omega(P_1) = 2$  alors, d'après le lemme 1,  $G_1$  est s.i. Supposons que  $\omega(P_1) = 2p_1 > 2$ . Comme  $P_1$  est connexe, il contient donc deux arêtes adjacentes  $A$  et  $B$  telles que  $P' = P_1 - \{A, B\}$  soit encore connexe (donc  $\omega(P')$  est pair). D'après le lemme 1, le graphe  $T' = T \cup A \cup B$  est s.i. Comme  $G_1 = T \cup P_1 = T' \cup P'$  avec  $\omega(P') = 2p_1 - 2$ , le résultat est donc démontré.

#### 2ème cas : $\beta(G)$ est impair

Il s'agit de vérifier que  $G$  est s.i si et seulement s'il contient un co-arbre ayant exactement une composante connexe impaire.

Pour justifier la condition nécessaire, on remarquera que

$G$  contient une arête  $A$  telle que le graphe  $G' = G - A$  soit s.i, d'après la proposition 1. Comme  $\beta(G') = \beta(G) - 1 = 2k$ , on est donc ramené au cas précédent. En ajoutant l'arête  $A$  au co-arbre  $C'$  de  $G'$ , on obtient alors un co-arbre de  $G$  avec exactement une composante connexe impaire (il s'agit de celle qui contient  $A$ ).

La condition suffisante est immédiate. En effet, désignons par  $P$  la composante connexe impaire. Puisque  $P$  est connexe, il contient donc une arête  $A$  telle que  $P - A$  reste connexe (ou vide). Comme précédemment, on est ramené au 1er cas en considérant le graphe  $G' = G - A$ . Le résultat final résultera de la proposition 1.

Nous avons examiné tous les cas, le théorème est donc démontré  $\square$

Au cours de la démonstration de la condition suffisante, nous nous sommes servis du fait que  $T$  est un graphe partiel s.i et non pas du fait que  $T$  est un arbre. Par conséquent, nous avons en réalité démontré une version légèrement différente du théorème 2 :

Théorème 3 : Pour qu'un graphe connexe  $G$  soit s.i, il faut et il suffit qu'il contienne un graphe partiel connexe  $H$  tel que :

- (1)  $H$  est s.i avec une seule face
- (2) Les composantes connexes de  $G-H$ , sauf une au plus, sont paires.

Remarque :

*Dans la pratique, les arbres maximaux mis à part, il est difficile de trouver un graphe partiel s.i. On a donc intérêt à se servir du lemme 2 pour construire de proche en proche des sous graphes partiels s.i. En effet, désignons par  $H$  un sous-graphe partiel s.i. Soit  $P$  une composante connexe de  $G-H$ . On peut générer, à partir de  $H$ , d'autres graphes s.i contenant plus de sommets que  $H$ , lorsque :*

- $P$  est une "étoile" de degré impair, ou
- il existe dans  $P$  un sommet  $x$  ( $x \notin H$ ) d'où partent trois chaînes disjointes  $C_1, C_2, C_3$  (allant de  $x$  à  $H$ ) telles que

les composantes connexes de  $P - \{C_1 \cup C_2 \cup C_3\}$  soient toutes paires.

## V - DETERMINATION DU GENRE MAXIMUM (ORIENTABLE)

Grâce aux théorèmes de caractérisation démontrés dans la section précédente, nous sommes en mesure d'établir une formule permettant de calculer le genre maximum (orientable) d'un graphe quelconque. Pour cela, nous avons besoin d'une nouvelle définition :

### V. 1 - DEFINITION

A tout co-arbre  $C$  d'un graphe  $G$  nous associons le nombre :

$$\xi(C) = \text{nombre de composantes connexes impaires de } C.$$

Nous appellerons déficiance de Betti de  $G$  l'entier défini par :

$$\xi(G) = \min_{C \subseteq G} \xi(C)$$

### V. 2 - FORMULE

Soit  $G$  un graphe connexe de nombre de Betti  $\beta(G)$ . Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4 :

$$\gamma_M(G) = \frac{1}{2} (\beta(G) - \xi(G))$$

### Démonstration

Notons d'abord, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 2, que  $\beta(G)$  et  $\xi(G)$  sont toujours de même parité. Le second membre a donc un sens. Ceci étant, nous allons procéder en plusieurs étapes :

a) Désignons par  $n_2$  le nombre de faces d'une immersion squelettique de  $G$  dans une surface orientable de genre  $\gamma_M(G)$ . D'après la for-

mule d'Euler, il suffit de vérifier que :

$$n_2 = 1 + \xi(G)$$

D'autre part, sachant que  $\gamma_M(G)$  est le genre maximum de  $G$ ,  $n_2$  représente le nombre minimum de faces dans la classe des immersions squelettiques de  $G$ .

b) Désignons par  $H$  un graphe partiel s.i avec une seule face (de tels graphes existent, par exemple : les arbres maximaux). Soit  $\omega(G-H)$  le nombre d'arêtes de  $G-H$ . En adjoignant successivement à  $H$  les arêtes de  $G-H$ , on obtient une immersion squelettique de  $G$  dont le nombre de faces est au plus  $1 + \omega(G-H)$  car, à chaque opération, le nombre de faces augmente au plus d'une unité. Compte tenue de la remarque faite en a) on a donc :

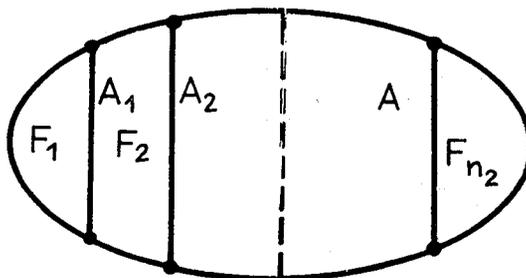
$$n_2 \leq 1 + \omega(G-H)$$

c) Dans  $G$ , choisissons un arbre  $T$  tel que le co-arbre  $C = G - T$  admette  $P_1, P_2, \dots, P_{\xi(G)}$  composantes impaires. A chaque  $P_i$ , enlevons une arête  $A_i$  de manière que  $P_i - \{A_i\}$  soit connexe ou vide. Posons  $H = G - \{A_1, A_2, \dots, A_{\xi(G)}\}$ . D'après le théorème 2,  $H$  est s.i avec une seule face. De b) il résulte que :

$$n_2 \leq 1 + \omega(G-H) = 1 + \xi(G)$$

d) Considérons une immersion squelettique de  $G$  dans une surface orientable de genre  $\gamma_M(G)$ . Désignons par  $F_1, F_2, \dots, F_{n_2}$  les faces de l'immersion. Il existe alors  $n_2 - 1$  arêtes régulières  $A_1, A_2, \dots, A_{n_2-1}$  telles que :

$$\partial(F_i) \cap \partial(F_{i+1}) = \{A_i\} \quad (1 \leq i \leq n_2 - 1)$$



On remarquera que l'ensemble  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n_2-1}\}$  est un couplage (d'après le lemme 1). D'autre part, il résulte de la proposition 1 que le graphe  $H = G - \{A_1, A_2, \dots, A_{n_2-1}\}$  est s.i avec une seule face. Par conséquent, du théorème 2 on déduit que  $H$  contient un co-arbre  $D$  dont toutes les composantes sont paires. Comme  $C = D \cup \{A_1, A_2, \dots, A_{n_2-1}\}$  est un co-arbre de  $G$ , on a donc :

$$\xi(C) \leq n_2 - 1$$

d'où :

$$\xi(G) \leq \xi(C) \leq n_2 - 1$$

c'est à dire :

$$\xi(G) + 1 \leq n_2$$

e) La formule est démontrée  $\square$

## VI - DETERMINATION DU GENRE MAXIMUM (NON-ORIENTABLE)

Dans cette section, nous abordons l'étude des immersions squelettiques d'un graphe dans des surfaces non-orientables. En particulier, nous établissons, comme dans le cas des immersions orientables, l'existence d'un intervalle d'immersion que nous avons désigné par  $J(G)$  dans la section II ce chapitre. Nous déterminerons ensuite le genre maximum non-orientable pour un graphe quelconque.

Au chapitre I (paragraphe VII.4) nous avons obtenu le résultat suivant :

**Lemme 4** : Si un graphe  $G$  admet une immersion squelettique ayant au moins deux faces dans une surface (orientable ou non) de caractéristique  $\chi$  alors  $G$  a une immersion squelettique dans une surface non-orientable de caractéristique  $\chi - 1$ .

Rappelons qu'au cours de la démonstration de ce lemme, nous avons construit effectivement, à partir de l'immersion donnée, une nou-

velle immersion dans une surface non orientable de caractéristique immédiatement inférieure.

D'autre part, sachant que le nombre de faces d'une immersion squelettique varie dans le sens inverse du genre de la surface, nous pouvons déduire du lemme 4 la :

Proposition 2 : Si un graphe  $G$  admet des immersions squelettiques dans les surfaces non-orientables de genre  $m$  et  $n$  alors, pour tout entier  $g$  tel que  $m \leq g \leq n$ ,  $G$  admet une immersion squelettique dans une surface non-orientable de genre  $g$ .

Ceci étant, le lemme 4 n'est applicable qu'aux graphes admettant une immersion squelettique avec au moins deux faces. Or de tels graphes ont été caractérisés par Duke (du moins dans le cas orientable, voir [3]). En effet :

Lemme 5 [Duke]

Le nombre maximum de faces d'une immersion squelettique orientable est égal à 1 si et seulement si le graphe est un arbre.

En réalité, le résultat précédent est une conséquence immédiate d'une propriété plus générale découverte par Nordhauss et al [12], propriété dont nous donnons une nouvelle démonstration très simple au paragraphe VII.2 de ce chapitre. D'autre part, le lemme 5 est à rapprocher de la démonstration (chapitre I, paragraphe VII.4) de l'existence d'une immersion squelettique pour tout graphe de nombre de Betti  $\geq 1$ .

De la proposition 2 et du lemme 5 on peut déduire la :

Proposition 3 : A tout graphe  $G$  de nombre de Betti  $\geq 1$  on peut faire correspondre un intervalle  $J(G) = [\bar{\gamma}(G), \bar{\gamma}_M(G)]$  tel que  $G$  admet une immersion squelettique dans une surface non-orientable de genre  $\bar{\gamma}$  si et seulement si  $\bar{\gamma} \in J(G)$ .

Enfin, du lemme 4 et du lemme 5, il résulte le :

Théorème 5 : Pour tout graphe  $G$  connexe, de nombre de Betti  $\beta(G) \geq 1$  on a :

$$\overline{\gamma}_M(G) = \beta(G)$$

Autrement dit, dans le cas non-orientable, tout graphe différent d'un arbre est sup-immérgeable.

## VII - CONSEQUENCES

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de  $\gamma_M$ , aux graphes s.i et aux questions annexes ([3], [11], [12], [14], [15], [16]). Dans cette section, nous utilisons les théorèmes 1, 2, 3 et 4 pour, d'une part, retrouver, de manière simple et nouvelle, la plupart des résultats intéressants connus, d'autre part, en donner de nouveaux et, enfin, résoudre certains problèmes encore ouverts ayant trait au sujet.

### VII - 1. EFFET DE LA SUPPRESSION ET DE LA CONTRACTION D'UNE ARÊTE SUR LE GENRE MAXIMUM.

L'utilisation, en théorie des graphes, des opérations de suppression et de contraction d'une arête, est devenue courante pour diverses raisons. Dans ce paragraphe, nous allons utiliser la formule

$$\gamma_M(G) = \frac{1}{2} (\beta(G) - \xi(G))$$

pour déterminer le genre maximum des graphes  $G - \{A\}$  et  $G/A$  définis ci-dessous.

#### VII - 1.1. Suppression d'une arête

Considérons, dans un graphe connexe  $G$ , une arête  $A$  qui n'est pas un isthme. On désigne par  $G - \{A\}$  le graphe obtenu en supprimant l'arête  $A$ . Pour calculer le genre maximum de  $G - \{A\}$ , il suf-

fit de déterminer sa déficience de Betti car  $\beta(G - \{A\}) = \beta(G) - 1$ .

Soit alors, dans  $G$ , un arbre  $T$  et désignons par  $C$  le co-arbre associé. Supposons que  $A \notin T$ . Dans ce cas,  $T$  est encore un arbre de  $G - \{A\}$  dont  $C - \{A\}$  est le co-arbre associé. En choisissant  $T$  tel que  $\xi(C) = \xi(G)$ , on a :

$$\xi(G - \{A\}) \leq \xi(C - \{A\}) \leq \xi(G) + 1$$

Supposons maintenant  $A \in T$ . Comme  $A$  n'est pas un isthme, il existe donc une arête  $B \in C$  telle que  $U = T \cup \{B\} - \{A\}$  soit un arbre de  $G - \{A\}$ . Evidemment,  $D = C - \{B\}$  est un co-arbre. Le résultat précédent reste encore valable.

Inversement, soit  $D$  un co-arbre de  $G - \{A\}$  tel que  $\xi(D) = \xi(D - \{A\})$ . En adjoignant  $A$  à  $D$  on obtient un co-arbre de  $G$ . D'où :

$$\xi(G) \leq \xi(D \cup \{A\}) \leq \xi(G - \{A\}) + 1$$

Par conséquent :

$$\xi(G) - 1 \leq \xi(G - \{A\}) \leq \xi(G) + 1$$

Du théorème 4 on peut donc déduire la :

**Proposition 4** : Pour tout graphe connexe  $G$ , on a :

$$0 \leq \gamma_M(G) - \gamma_M(G - \{A\}) \leq 1$$

Ce résultat est à rapprocher de la double inégalité  $0 \leq \gamma(G) - \gamma(G - \{A\}) \leq 1$  déjà remarquée par Fournier dans [4].

### VII - 1.2. Contraction d'une arête

Soit  $A$  une arête dont les extrémités sont notées  $x$  et  $y$ . On désigne par  $G/A$  le graphe obtenu en contractant  $A$ , c'est-à-dire, on remplace  $x$  et  $y$  par un nouveau sommet auquel sont incidentes les arêtes passant par  $x$  et par  $y$  (sauf l'arête  $A$ ). En général,  $G/A$  possède des arêtes multiples, d'après cette construction. On remarquera que  $\beta(G/A) = \beta(G)$ .

L'opération inverse de la contraction est l'éclatement d'un sommet en deux nouveaux sommets adjacents (et on opérera une parti-

tion de l'ensemble des arêtes incidentes au sommet initial).

Comme précédemment, nous allons étudier  $\xi (G/A)$ .

En contractant  $A$ , on ne peut que diminuer le nombre de composantes connexes impaires. D'où :

$$\xi (G/A) \leq \xi (G)$$

Par contre, en éclatant un sommet, on peut créer 2 composantes impaires à partir d'une composante paire. Par conséquent :

$$\xi (G) \leq \xi (G/A) + 2$$

On déduit du théorème 4 la :

Proposition 5 : Pour tout graphe connexe  $G$ , on a :

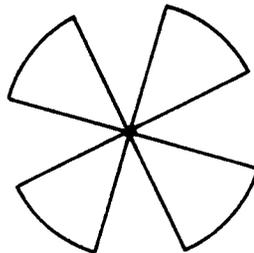
$$0 \leq \gamma_M (G/A) - \gamma_M (G) \leq 1$$

Remarques :

- 1 - Concernant l'effet de la contraction d'une arête sur le genre d'un graphe  $G$ , Fournier, dans [4], a démontré que, si l'on a encore  $0 \leq \gamma (G) - \gamma(G/A)$ , pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe un graphe  $G$  avec une arête  $A$  telle que :

$$\gamma (G) - \gamma (G/A) = p$$

- 2 - L'opération de contraction d'une arête est bien connue en Topologie Algébrique (voir par exemple Artin et Braun : *Introduction To Algebraic Topology*). Elle permet de démontrer que tout graphe connexe est homotope à une "rose à  $\beta(G)$  pétales" (c. à. d. : à  $\beta(G)$  cercles ayant 1 seul point en commun).



On remarquera que cette "rose" s'obtient à partir de  $G$  en contractant toutes les arêtes de  $G$ . Elle constitue aussi le squelette d'un complexe cellulaire orientable de genre  $g = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$  (autrement dit, en con-

tractant suffisamment d'arêtes, on peut obtenir un graphe s.i.).

## VII - 2. UNE CARACTERISATION DES GRAPHES DE GENRE MAXIMUM NUL

Nordhauss, Ringeisen, Stewart et White ont caractérisé, dans [12], les graphes dont le genre maximum est nul. Leur démonstration, basée essentiellement sur la technique des rotations, est assez longue. Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les théorèmes de caractérisation des graphes s.i pour retrouver, d'une manière nouvelle, ce résultat.

### Théorème 6 (Nordhauss et al, [12])

Soit  $G$  un graphe connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \gamma_M(G) = 0$$

(2)  $G$  est un cactus dont les cycles sont deux à deux disjoints

$$(3) \gamma(G) = \gamma_M(G)$$

### Démonstration

#### (1) $\Rightarrow$ (2)

Rappelons qu'un cactus est un graphe connexe dont toute arête appartient à un cycle élémentaire au plus.

Dire que  $\gamma_M(G) = 0$  équivaut à dire que  $\xi(G) = \beta(G)$ . Autrement dit  $G$  contient un arbre dont le co-arbre associé possède  $\beta(G) = n_1(G) - n_0(G) + 1$  composantes connexes impaires. Nécessairement, chaque composante est une arête. Désignons par  $\mu_A$  et  $\mu_B$  ( $A \neq B$ ,  $A$  et  $B$  appartiennent au co-arbre) deux cycles élémentaires obtenus en ajoutant les arêtes  $A$  et  $B$  à l'arbre. On doit avoir  $\mu_A \cap \mu_B = \emptyset$ , sinon il existerait un co-arbre avec une composante connexe de cardinalité  $\geq 2$ . Ce qui entraînerait  $\xi(G) < \beta(G)$ , donc absurde.

#### (2) $\Rightarrow$ (3)

Si  $G$  est un cactus alors  $\xi(G) = \beta(G)$ . Donc  $\gamma_M(G) = 0$ . D'autre part,  $G$  est planaire car il ne contient aucun  $\theta$ -graphe (donc, a fortiori, ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$ ). Par conséquent, d'après le théorème de Kuratowski, on a :

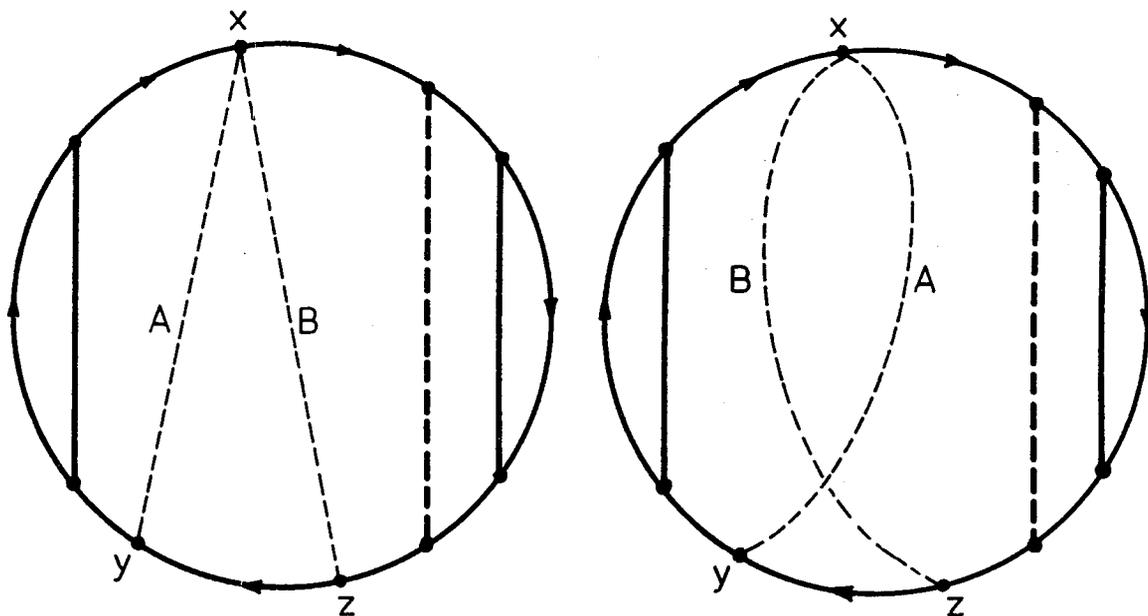
$$\gamma(G) = \gamma_M(G) = 0$$

(3)  $\Rightarrow$  (1)

Il s'agit de démontrer que si l'on a  $\gamma(G) = \gamma_M(G)$  alors  $\gamma_M(G) = 0$  ou, ce qui revient au même,  $\xi(G) = \beta(G)$ .

En effet, supposons que  $\xi(G) < \beta(G)$  (car on a toujours  $\xi(G) \leq \beta(G)$ ). D'après le théorème 2, il existe  $\xi(G)$  arêtes  $A_1, A_2, \dots, A_{\xi(G)}$  telles que le graphe  $H_1 = G - \{A_1, A_2, \dots, A_{\xi(G)}\}$  soit s.i avec une seule face. Comme  $\beta(H_1) = \beta(G) - \xi(G) > 0$ ,  $H_1$  contient donc deux arêtes adjacentes  $A$  et  $B$  telles que le graphe  $H_2 = H_1 - \{A, B\}$  admette un C.B.E.O noté  $C$ . Posons  $H = H_2 \cup \{A_1, A_2, \dots, A_{\xi(G)}\}$ .

Considérons une immersion squelettique de  $H$  telle que  $C$  soit le bord d'une face. Par construction, les extrémités de  $A$  et de  $B$  figurent dans  $C$ .

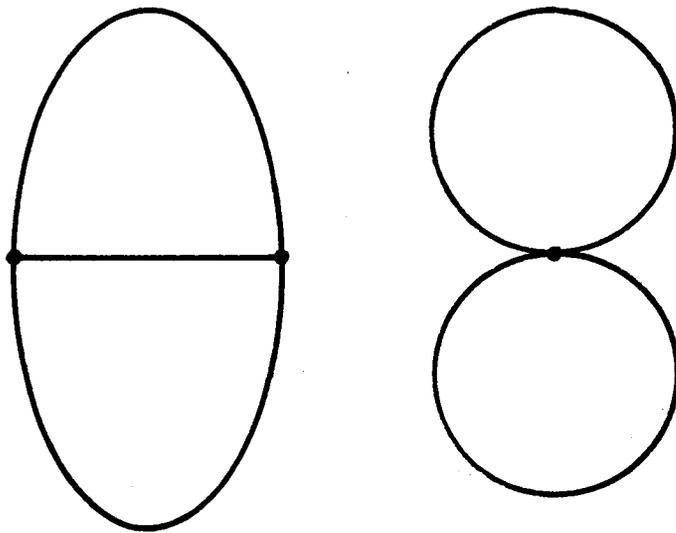


Désignons par  $n_2(H)$  le nombre de faces de l'immersion définie ci-dessus. Alors le graphe  $G = H \cup \{A, B\}$  admet deux immersions squelettiques, l'une avec  $n_2(H) + 2$  faces (cas 1), l'autre avec  $n_2(H)$  faces. Autrement dit, il existe un entier  $\gamma$  tel que  $G$  est immergeable dans deux surfaces orientables de genre  $\gamma$  et  $\gamma+1$  respectivement. En résumé :

$$\gamma_M(G) > 0 \iff \xi(G) < \beta(G) \implies \gamma(G) < \gamma_M(G)$$

Ce qui achève la démonstration  $\square$

Remarque : On peut vérifier qu'un graphe connexe est un cactus si et seulement s'il ne contient pas de sous graphe équivalent à l'un des deux graphes suivants :



### VII - 3. SUR QUELQUES CLASSES DE GRAPHERS SUP-IMMERGEABLES

Dans ce paragraphe, notre but est de chercher des classes de graphes, aussi larges que possible, qui ont une structure assez simple et qui satisfont, en outre, à la condition suffisante du théorème 2.

#### VII - 3.1. Graphes 4 - arête-connexes

Rappelons qu'un graphe connexe est dit  $k$ -arête-connexe s'il ne peut être disconnecté par l'élimination de moins de  $k$  arêtes.

A propos des graphes 4-arête-connexes, Jaeger [5] et Kundu [6] ont, indépendamment, démontré la propriété suivante :

Proposition 6 [Jaeger, Kundu]

Tout graphe 4-arête-connexe comporte deux arbres maximaux disjoints.

On en déduit immédiatement : Tout graphe 4-arête-connexe contient un co-arbre connexe. Autrement dit, si  $G$  est un tel graphe, alors  $\xi(G) = 0$  quand  $\beta(G)$  est pair et  $\xi(G) = 1$  quand  $\beta(G)$  est impair. D'où, d'après le théorème 2 :

Théorème 7 : Tout graphe 4-arête-connexe est sup-immérgeable

VII - 3.2. Graphes cubiques

Concernant les graphes cubiques, on peut obtenir un résultat plus précis que précédemment.

En effet, Jaeger [5], Payan et Sakarovitch [13], ont conjointement étudié les ensembles cycliquement stables dans un graphe. Soit  $G = (X, E)$  un graphe connexe. Un sous-ensemble  $S \subseteq X$  est dit cycliquement stable lorsqu'il engendre un graphe sans cycles (c.à.d une forêt). On appellera nombre de stabilité cyclique  $s(G)$  le cardinal maximum d'un ensemble cycliquement stable.

En désignant respectivement par  $n_0$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$  le nombre de sommets, le degré maximum, le degré minimum du graphe  $G$ , on a ([5], [13]) :

$$s(G) \leq \left[ \frac{(2\Delta - \delta) n_0 - 2}{2(\Delta - 1)} \right]$$

D'où, si  $G$  est un graphe cubique ( $\Delta = \delta = 3$ ) :

$$s(G) \leq \left[ \frac{3n_0 - 2}{4} \right]$$

$G$  sera dit  $s$ -maximum s'il contient un ensemble cycliquement stable de cardinal  $\left[ \frac{3n_0 - 2}{4} \right]$ .

Jaeger, dans [5], a donné une caractérisation de tels graphes :

Proposition 7 [Jaeger]

Un graphe cubique  $G = (X, E)$  est s-maximum si et seulement s'il contient un sous ensemble  $S \subseteq X$  tel que :

- (i) dans le cas où  $n_0 \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $S$  engendre un arbre et  $X - S$  est un stable de  $G$ ,
- (ii) dans le cas où  $n_0 \equiv 0 \pmod{4}$  :
  - Soit  $S$  engendre un arbre et  $X - S$  contient exactement une arête.
  - Soit  $S$  engendre une forêt de deux arbres et  $X - S$  est un stable de  $G$ .

Grâce à ce résultat, nous obtenons une deuxième classe de graphes s.i sous la forme du théorème suivant :

Théorème 8 : Tout graphe cubique s-maximum est sup-immérgeable

Démonstration

Soit  $G$  un graphe cubique comportant  $n_0(G)$  sommets. On a :

$$\beta(G) = n_1(G) - n_0(G) + 1 = \frac{3n_0(G)}{2} - n_0(G) + 1 = \frac{n_0(G)}{2} + 1$$

1er cas :  $n_0(G) = 4p + 2$

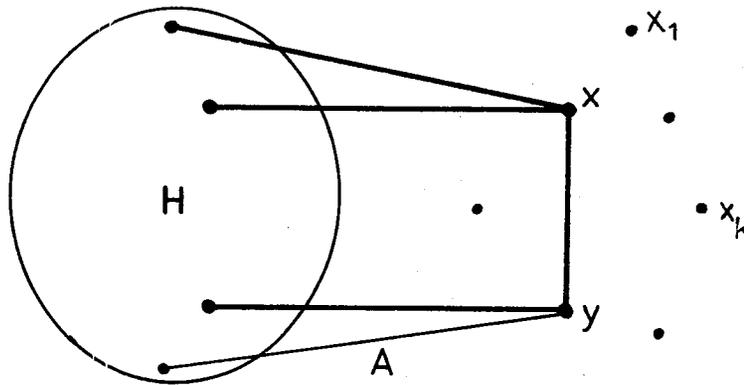
Dans ce cas  $\beta(G) = 2(p+1)$ , Démontrons que  $G$  est s.i avec une seule face. En effet, le graphe engendré par  $S$ ,  $G(S)$ , est un arbre, donc s.i. D'après la proposition 7,  $X-S$  est un stable. Autrement dit, pour tout  $x \in X-S$ , il existe 3 arêtes joignant  $x$  à  $G(S)$ . On est dans les conditions d'application du lemme 2 : d'où le résultat.

2ème cas :  $n_0(G) = 4p$

Dans ce cas  $\beta(G) = 2p + 1$ . Démontrons que  $G$  est s.i avec exactement deux faces.

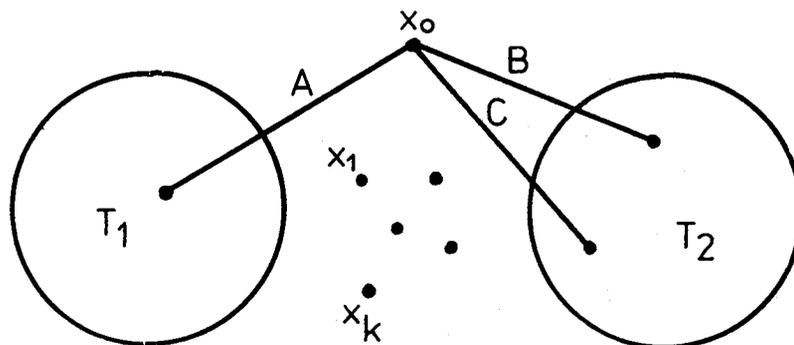
Supposons que  $G(S)$  soit un arbre. Posons

$X - S = \{x, y, x_1, x_2, \dots, x_k\}$  où  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête et  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  est un stable. D'après la démonstration du 1er cas, le graphe  $H = G - \{x, y\}$  est s.i.



Désignons par  $A$  une arête joignant  $y$  à  $H$ . Alors, d'après le lemme 2, le graphe  $G - \{A\}$  est s.i, car il s'obtient à partir de  $H$ , s.i, en lui adjoignant le sommet  $x$  de degré 3. Par conséquent,  $G$  est s.i avec deux faces.

Il reste donc à examiner le cas où  $G(S)$  est composé de deux arbres et  $X - S$  est un stable



Posons  $G(S) = T_1 \cup T_2$  et  $X - S = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ . Comme  $G$  est connexe, il existe donc un sommet de  $X - S$ ,  $x_0$  par exemple, d'où partent vers  $T_1 \cup T_2$  trois arêtes  $A, B,$  et  $C$ . Le graphe  $H = T_1 \cup T_2 \cup \{A, B\}$  est un arbre, donc s.i. Par conséquent, d'après le 1er cas, le graphe  $G - \{C\} = H \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  est s.i avec une seule face. Autrement dit,  $G$  est s.i avec deux faces.

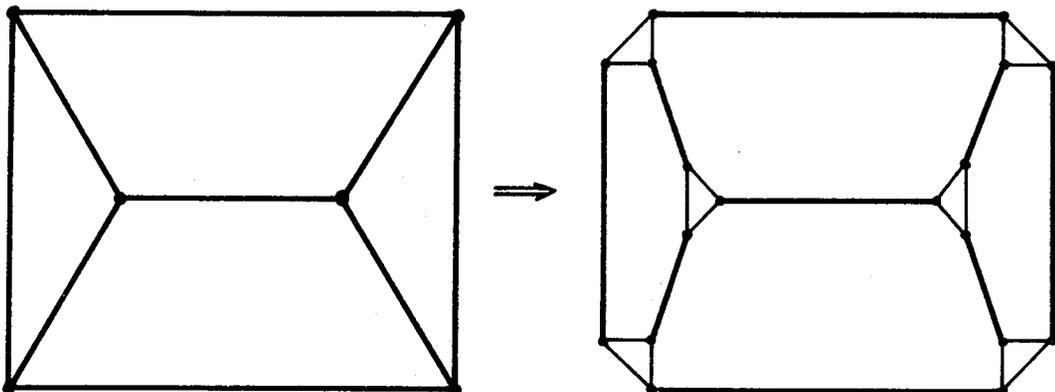
Ce qui achève la démonstration du théorème  $\square$

D'autre part, dans [13], Payan et Sakarovitch ont prouvé que tout graphe cubique cycliquement 4-arête-connexe est s-maximum. D'où :

Corollaire 1 : Tout graphe cubique cycliquement 4-arête-connexe est s.i.

Rappelons qu'un graphe est dit cycliquement  $k$ -arête-connexe lorsque le cardinal de tout cocycle séparant le graphe en composantes comportant des cycles est  $\geq k$ .

Remarque : Les conditions suffisantes données plus haut ne sont pas nécessaires comme nous pourrions voir dans les exemples qui suivront. D'autre part, dans [14], Ringeisen conjecturerait que tout graphe 3-arête-connexe est s.i. On peut montrer que cette conjecture est fausse, soit en utilisant le théorème de caractérisation, soit en utilisant une construction due à Bouchet [ 2]. En effet, appelons  $\Delta$  - graphe, tout graphe cubique obtenu en remplaçant tout sommet d'un graphe cubique par un triangle :



Bouchet a démontré, dans [2], que si  $G$  est un  $\Delta$  - graphe alors :

$$\gamma_M(G) = 1 + \frac{n_0(G)}{6}$$

Il est facile de voir qu'en construisant un  $\Delta$  - graphe à partir d'un graphe cubique 3-arête-connexe, on obtient un graphe cubique cycliquement 3-arête-connexe. Ce résultat prouve que, premièrement, la conjecture de Ringelsen [14] est fautive et que, deuxièmement, la condition suffisante donnée par le corollaire 1 est la meilleure possible concernant l'arête connectivité.

### VII - 3.3. Somme cartésienne de deux graphes.

Etant donnés deux graphes connexes  $G_1 = (X_1, E_1)$  et  $G_2 = (X_2, E_2)$  (pour simplifier l'écriture, nous supposons  $G_1$  et  $G_2$  simples), on appelle somme cartésienne de ces graphes le graphe  $G = G_1 + G_2 = (X, E)$  défini par :

$$X = X_1 \times X_2$$

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E \iff \begin{cases} (x_1 = x_2 \text{ et } \{y_1, y_2\} \in E_2) \\ \text{ou} \\ (y_1 = y_2 \text{ et } \{x_1, x_2\} \in E_1) \end{cases}$$

Ce paragraphe a pour but de démontrer que la somme cartésienne de deux graphes est un graphe sup-immérgeable. Nous avons besoin pour cela du résultat suivant :

Proposition 8 : La somme cartésienne de deux graphes admet un co-arbre connexe.

#### Démonstration

Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes connexes dont la somme cartésienne

ne est notée  $G$ . Désignons par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) et  $y_1, y_2, \dots, y_p$  ( $p \geq 2$ ) les sommets de  $G_1$  et de  $G_2$  respectivement.

Choisissons dans  $G_1$  un arbre maximal  $A$  dont  $\{x_1, x_2\}$  est une arête pendante (on supposera que, dans  $A$ , le degré de  $x_1$  est 1).

De même, dans  $G_2$ , considérons un arbre maximal  $B$  où  $\{y_1, y_2\}$  est une arête pendante (on supposera que, dans  $B$ ,  $y_1$  a pour degré 1)

a - Construction d'un arbre maximal de  $G = G_1 + G_2$

Posons :

$$I = \{1, 2, \dots, p\}$$

$$J = \{1, 2, \dots, n\}$$

Comme  $\{x_1, x_2\}$  (resp.  $\{y_1, y_2\}$ ) est une arête pendante de  $A$  (resp. de  $B$ ),  $A' = A - \{x_1, x_2\}$  (resp.  $B' = B - \{y_1, y_2\}$ ) est un arbre de  $G_1$  (resp. de  $G_2$ ).

Posons :

$$A_i = A + (y_i) \quad (i \in I)$$

$$A'_i = A' + (y_i) \quad (i \in I)$$

où la notation  $(y_i)$  désigne le graphe sans arête ayant pour  $y_i$  l'unique sommet. On remarquera que  $A_i$  est un arbre de  $G$  couvrant les sommets  $(x_j, y_i)$  ( $j \in J$ ).

De même, soient :

$$B_j = (x_j) + B \quad (j \in J)$$

$$B'_j = (x_j) + B' \quad (j \in J)$$

avec les mêmes significations que précédemment.

Dans  $G_1$ , considérons le co-arbre associé à  $A$ . Choisissons, dans chacune de ses composantes connexes, un sommet. Il est loisible de supposer que  $x_1$  ne sera pas choisi. De plus si  $x_2$  a été pris, on l'exclura de l'ensemble des sommets choisis. Dans la suite, nous désignerons par  $J'$  l'ensemble des indices de ces sommets. On remarquera que  $J' \subsetneq J$ ,  $1 \notin J'$  et  $2 \notin J'$ .

Dans  $G_2$ , considérons le co-arbre associé à B. Prenons dans chacune de ses composantes connexes un sommet. Nous noterons par  $I'$  l'ensemble de leur indice. On peut toujours supposer que  $1 \notin I'$ .

Ceci étant, posons :

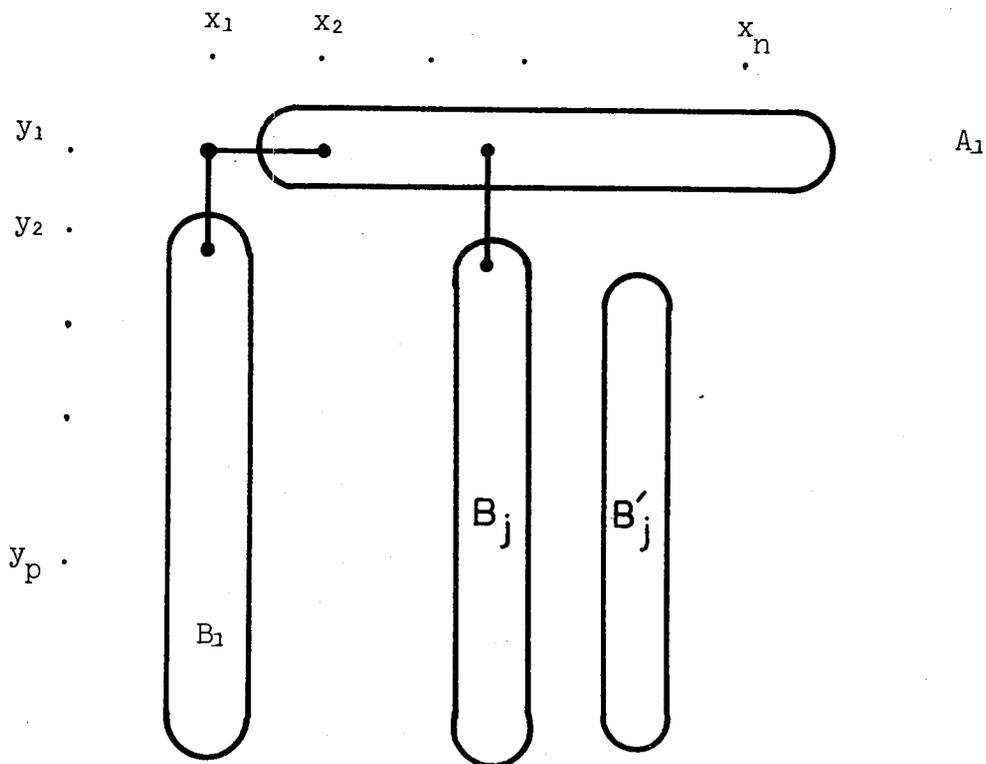
$$F = \bigcup_{\substack{j \in J - J' \\ j > 2}} B_j$$

$$F' = \bigcup_{j \in J'} B'_j$$

Soit alors :

$$F^* = A_1 \cup B_1 \cup F \cup F'$$

On remarquera que  $F^*$  est une forêt de G.

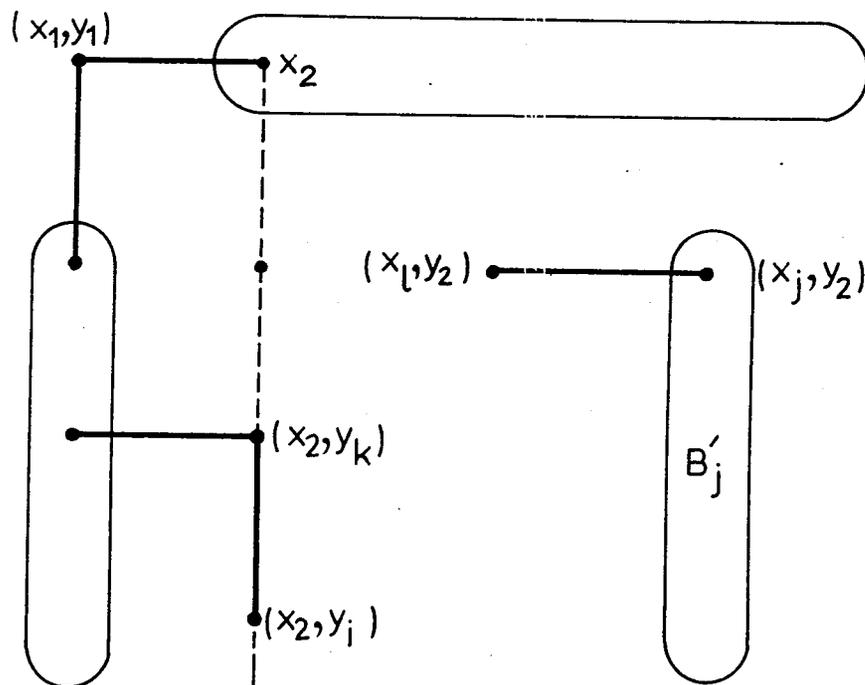


D'autre part,  $F^*$  couvre tous les sommets de  $G$ , sauf ceux de la forme  $(x_2, y_i)$  ( $i \in I$ ). Considérons donc un sommet  $(x_2, y_i)$ . Si  $i > 1$  et  $i \in I - I'$  alors ajoutons à  $F^*$  l'arête  $\{(x_1, y_i), (x_2, y_i)\}$

Si  $i \in I'$  alors il existe un indice  $k \in I - I'$  tel que  $\{y_i, y_k\} \in E_2$ .

Dans ce cas, on peut couvrir le point  $(x_2, y_i)$  ( $i \in I'$ ) en ajoutant à  $F^*$  l'arête  $\{(x_2, y_i), (x_2, y_k)\}$ .

En opérant ainsi, on obtient une forêt couvrant tous les sommets de  $G$ . Par construction, cette forêt deviendra un arbre maximal. Si on peut connecter les  $B'_j$  ( $j \in J'$ ) à la composante connexe formée



de  $A_1, B_1, F$  et les arêtes couvrant les sommets  $(x_2, y_i)$  ( $i \in I$ ). Considérons donc un arbre  $B'_j$  ( $j \in J'$ ).  $B'_j$  contient le sommet  $(x_j, y_2)$ . Comme  $x_j$  appartient à une composante connexe du co-arbre associé à  $A$ , il existe donc un sommet  $x_1$  ( $1 \in J - J'$ ) tel que  $\{x_j, x_1\} \in E_1$ . Sachant que le sommet  $(x_1, y_2)$  appartient à la composante connexe définie plus haut, l'adjonction de l'arête  $\{(x_j, y_2), (x_1, y_2)\}$  permet donc de connecter  $B'_j$  à la com-

posante considérée.

Ce qui achève la construction d'un arbre maximal de  $G$ .

b -  $G$  admet un co-arbre connexe

Nous allons démontrer que le co-arbre associé à l'arbre précédemment construit est connexe. En effet, posons :

$$D = \bigcup_{\substack{i \in I \\ i > 1}} A'_i$$

Evidemment,  $D$  est une forêt de  $G$ .

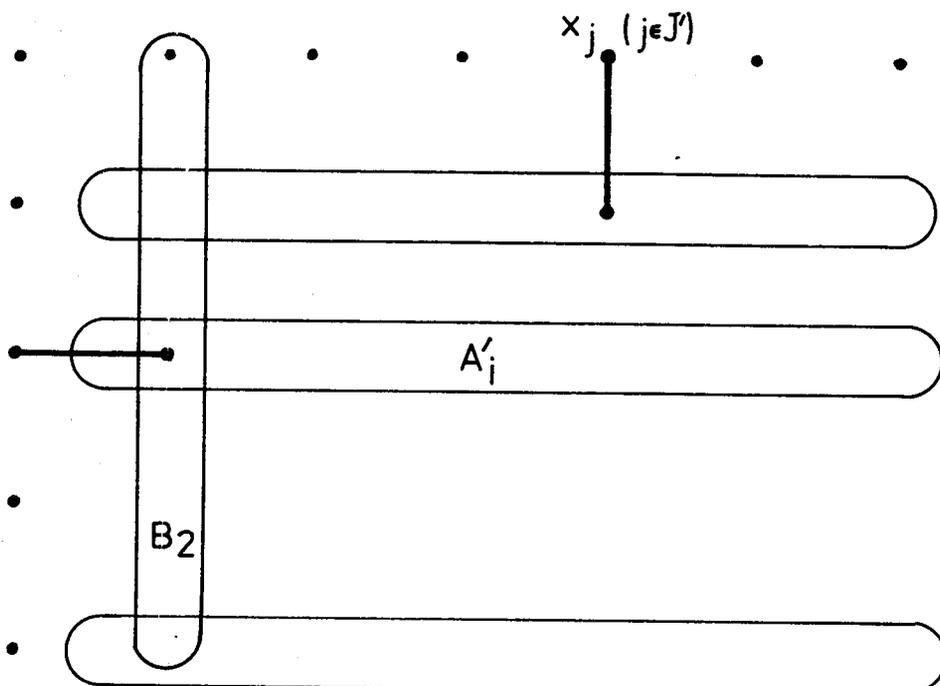
Considérons alors :

$$C^* = B_2 \cup D$$

Il est apparent que :

- $C^*$  est un arbre
- $C^*$  est disjoint (au sens des arêtes) de l'arbre maximal considéré.

D'autre part,  $C^*$  couvre tous les sommets de  $G$ , sauf ceux de la forme  $(x_j, y_1)$  ( $j \in J$ ) et  $(x_1, y_1)$  ( $i \in I$ ).



Considérons donc un sommet  $(x_j, y_1)$  où  $j \in J'$ . Par construction, l'arête  $\{(x_j, y_1), (x_j, y_2)\}$  n'appartient pas à l'arbre maximal. Par conséquent, on peut adjoindre à  $C^*$  les arêtes de la forme  $\{(x_j, y_1), (x_j, y_2)\}$  où  $j \in J'$ . De la même manière, on peut ajouter à  $C^*$  les arêtes de la forme  $\{(x_1, y_i), (x_2, y_i)\}$  où  $i \in I'$ . Nous désignerons par  $C$  le nouvel arbre ainsi construit.

Prenons un sommet de la forme  $(x_1, y_1)$  où  $1 \neq 2$  et  $1 \notin J'$ . Si  $x_1$  appartient à une composante connexe du co-arbre associé à  $A$ , alors il existe une chaîne  $\gamma$  joignant  $x_1$  à  $x_j$  où  $j \in J'$ . Par suite, la chaîne  $\Gamma = \gamma + (y_1)$  (somme de la chaîne  $\gamma$  et du graphe se réduisant au sommet  $y_1$ ) reliera le sommet  $(x_1, y_1)$  au sommet  $(x_j, y_1)$  qui, lui, appartient à l'arbre  $C$ , d'après ce qui précède.

Le même raisonnement montre que tout sommet de la forme  $(x_1, y_i)$  où  $y_i$  appartient à une composante connexe du co-arbre associé à  $B$  peut être connecté à  $C$ .

Il nous reste enfin à examiner les sommets de la forme  $(x_j, y_1)$  où le degré de  $x_j$  est déjà saturé dans l'arbre maximal  $A$  mais celui de  $y_1$  ne l'est pas encore dans  $B$ . Dans ce cas, on peut affirmer qu'il existe un sommet  $y_i$  tel que l'arête  $\{y_1, y_i\}$  appartienne au co-arbre associé à  $B$ . Par conséquent, on peut couvrir  $(x_j, y_1)$  en ajoutant à  $C$  l'arête  $\{(x_j, y_1), (x_j, y_i)\}$  car, d'après la construction de  $C$ , le sommet  $(x_j, y_i)$  appartient.

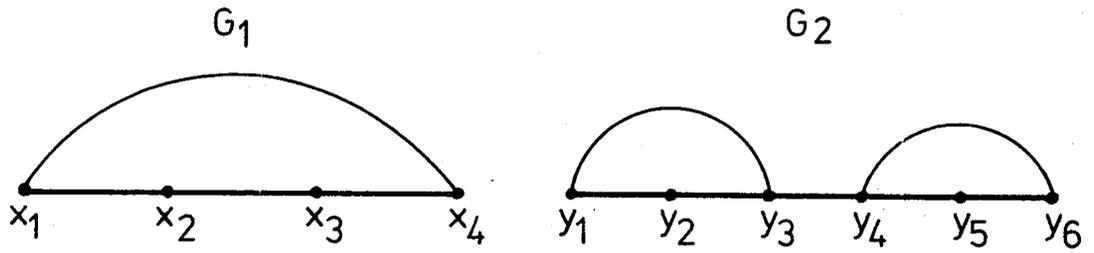
Bien entendu, le même raisonnement peut s'appliquer aux sommets de la forme  $(x_1, y_i)$  avec  $\deg_B(y_i) = \deg_{G_2}(y_i)$  et

$$\deg_A(x_1) < \deg_{G_1}(x_1)$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition  $\square$

Remarque : Dans la construction précédente, il n'est pas interdit que  $I'$  ou  $J'$  soit vide (c. à. d. il peut arriver que  $G_1$  ou  $G_2$  soit un arbre).

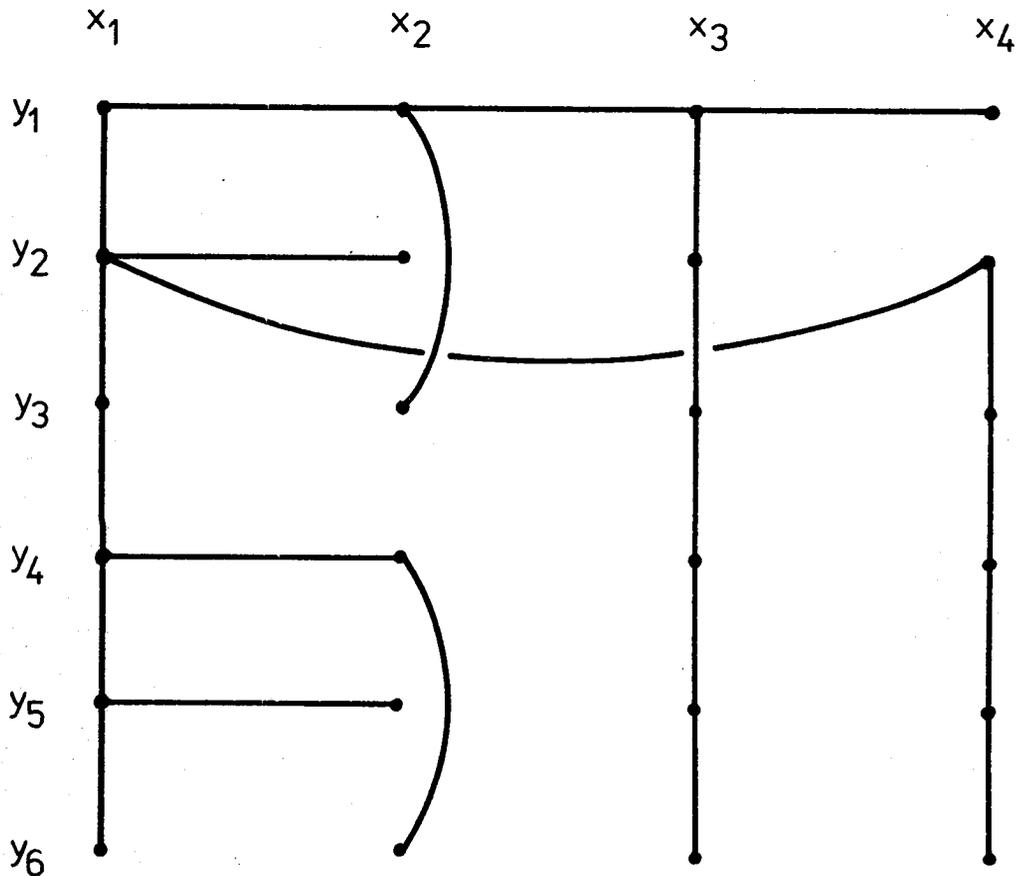
Exemple



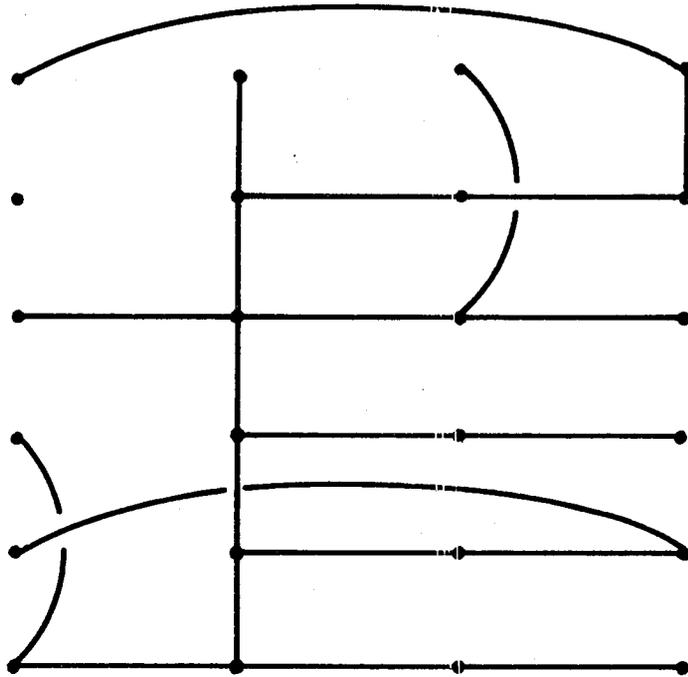
Pour  $G_1$ , l'arbre A est dessiné en trait épais. On prendra  $J' = \{4\}$

Pour  $G_2$ , l'arbre B est dessiné en trait épais. On prendra  $I' = \{3,6\}$

La construction exposée précédemment donne l'arbre maximal suivant pour  $G = G_1 + G_2$



Le co-arbre associé contient un arbre de la forme



La proposition précédente, jointe au théorème 2, permet d'énoncer le :

Corollaire 2 : La somme cartésienne de deux graphes est s.i.

VII - 3.4. Produit cartésien de deux graphes

Etant donnés deux graphes connexes  $G_1 = (X_1, E_1)$  et  $G_2 = (X_2, E_2)$  on appelle produit cartésien de ces graphes le graphe  $G = G_1 \times G_2 = (X, E)$  défini par :

$$X = X_1 \times X_2$$

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E \Leftrightarrow (\{x_1, x_2\} \in E_1 \text{ et } \{y_1, y_2\} \in E_2)$$

On remarquera, d'après cette définition, que :

$$\text{deg}_G((x, y)) = \text{deg}_{G_1}(x) \times \text{deg}_{G_2}(y)$$

D'autre part, on a aussi :

$$- \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E \iff \{(x_1, y_2), (x_2, y_1)\} \in E$$

Dans la suite, nous dirons que ces deux arêtes sont symétriques.

$$- \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E \text{ et } \{x_2, x_3\} \in E_1 \implies \{(x_2, y_1), (x_3, y_2)\} \in E$$

Dans la suite, nous dirons que ces deux arêtes sont translatées l'une de l'autre.

Ceci étant, nous allons étudier le genre maximum de  $G = G_1 \times G_2$ . Nous avons besoin pour cela du résultat suivant :

Proposition 9 : Soit  $G_1$  un graphe connexe sans sommet pendant. Si  $G_2$  est un graphe connexe admettant un cycle impair alors le produit cartésien  $G = G_1 \times G_2$  possède un co-arbre connexe.

Démonstration

a - On peut vérifier facilement que  $G = G_1 \times G_2$  est connexe si et seulement si l'un des facteurs admet un cycle impair. Par conséquent, l'hypothèse portant sur  $G_2$  est nécessaire pour assurer la connexité de  $G$ .

b - Construction d'un arbre maximal de  $G$

Désignons par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) et  $y_1, y_2, \dots, y_p$  ( $p \geq 2$ ) les sommets de  $G_1$  et de  $G_2$  respectivement.

Dans  $G_1$ , prenons un arbre maximal  $A$  tel que  $x_1$  soit un sommet pendant. Nous transformerons  $A$  en arborescence en choisissant  $x_1$  comme racine.

Dans  $G_2$ , considérons une arborescence maximale  $B$  ayant  $y_1$  comme racine. Si  $I = \{1, 2, \dots, p\}$  alors  $I'$  désignera l'ensemble des indices des sommets à distance impaire de  $y_1$  dans  $B$ . Il est loisible de supposer que  $p \notin I'$  et que  $\{y_1, y_p\} \in E_2 - B$  (autrement dit l'arête  $\{y_1, y_p\}$  se trouve sur un cycle impair de  $G_2$ ).

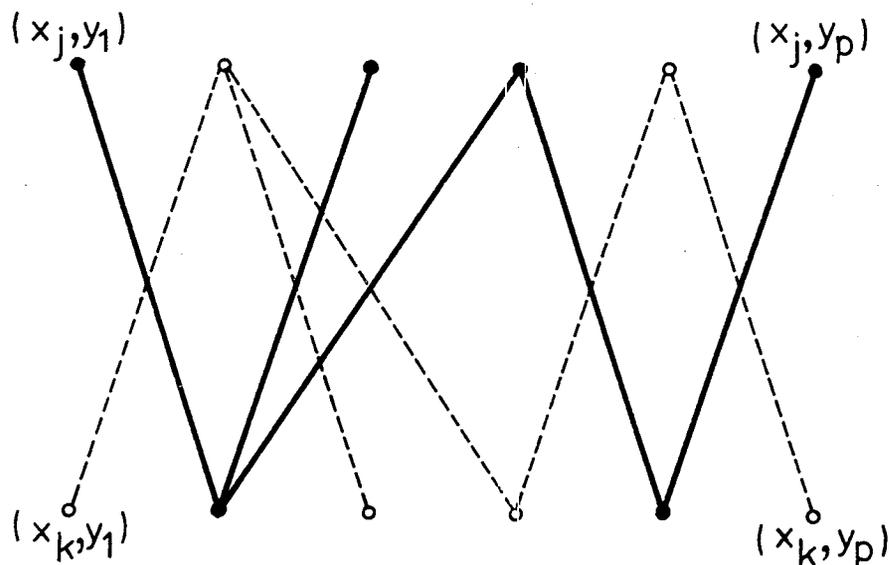
Enfin, si  $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  est l'ensemble des indices

des sommets de  $G_1$ , nous noterons par  $I' \subset J$  l'ensemble des indices des sommets pendants de A.

Soit  $\{x_j, x_k\}$  une arête de A. La notation :

$$T_{jk} = \{x_j, x_k\} \times B$$

désigne le produit cartésien de l'arête  $\{x_j, x_k\}$  par l'arbre B. Il est apparent que  $T_{jk}$  est une forêt composée de deux arbres symétriques  $B_{jk}$  et  $C_{jk}$ . On peut supposer que  $B_{jk}$  couvre tous les sommets de la forme  $(x_j, y_i)$  ( $i \in I-I'$ ) ou  $(x_k, y_1)$  ( $1 \in I'$ ). Dans ce cas  $C_{jk}$  couvre tous les sommets de la forme  $(x_k, y_i)$  ( $i \in I-I'$ ) ou  $(x_j, y_1)$  ( $1 \in I'$ )



On remarquera que :

$$(x_j, y_i) \in B_{jk} \iff (x_k, y_i) \in C_{jk}$$

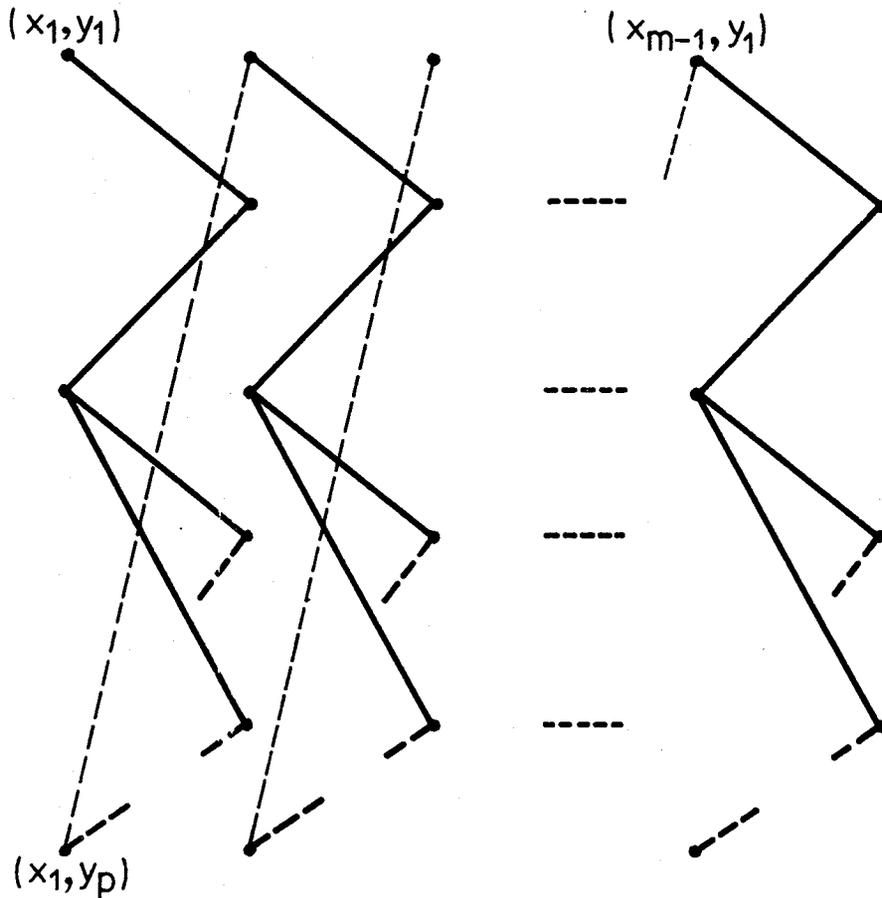
D'autre part, si besoin est, on peut connecter  $C_{jk}$  à  $B_{jk}$  en ajoutant l'arête  $\{(x_j, y_p), (x_k, y_1)\}$  ou l'arête symétrique.

Ceci étant, considérons une chaîne (orientée) de l'arborescence A :  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  (on peut prendre par exemple une chaîne diamè-

trale). A cette chaîne, faisons correspondre la forêt :

$$F_1 = B_{1,2} \cup B_{2,3} \cup \dots \cup B_{j,j+1} \dots \cup B_{m-1,m}$$

On peut vérifier sans difficulté que  $B_{j,j+1}$  s'obtient à partir de  $B_{j-1,j}$  par translation. De plus, sachant que  $\{y_1, y_p\} \in E_2$  on transformera  $F_1$  en un arbre  $T_1$  en ajoutant les arêtes  $\{(x_j, y_p), (x_{j+1}, y_1)\}$  ( $j = 1, 2, \dots, m-2$ )



Par construction,  $T_1$  couvre les sommets suivants :

- $(x_j, y_i)$  ( $2 \leq j \leq m-1 ; i \in I$ )
- $(x_1, y_i)$  ( $i \in I-I'$ )
- $(x_m, y_i)$  ( $i \in I'$ )

Supposons qu'il existe une chaîne  $(x_j, x_k, \dots)$  commençant en  $x_j$  ( $1 \leq j < m$ ). Comme précédemment, on lui associera l'arbre  $T_j$ . Comme  $T_1 \cup T_j$  est connexe, il contient donc un arbre (lequel peut s'obtenir en enlevant, si besoin est, des arêtes appartenant à  $B_{jk}$ ).

En poursuivant cette construction, on obtient un arbre  $T^*$  de  $G$  couvrant tous les sommets sauf ceux de la forme :

$$(x_1, y_i) \quad (i \in I')$$

$$(x_j, y_i) \quad (j \neq 1, j \in J', i \in I - I')$$

En utilisant le fait que  $G_1$  ne possède pas de sommets pendants nous pouvons couvrir les sommets précédents en ajoutant des arêtes à l'arbre  $T^*$ .

En effet, considérons un sommet de la forme  $(x_1, y_i)$  ( $i \in I'$ ). Comme  $\deg_{G_1}(x_1) \geq 2$ , il existe un sommet  $x_j$  tel que  $\{x_1, x_j\} \in E_1 - A$ .

Deux cas sont à examiner :

1er cas :  $x_j$  n'est pas un sommet pendent de  $A$  (c.a.d.  $j \notin J'$ ) : on ajoutera à  $T^*$  des arêtes de  $C_{1j}$

2ème cas :  $x_j$  est un sommet pendent de  $A$  (c.à.d.  $j \in J'$ ) : on ajoutera à  $T^*$  des arêtes de  $C_{1j} \cup \{(x_1, y_1), (x_j, y_p)\}$  (on sait que  $(x_1, y_1) \in T^*$ ).

Finalement, il nous reste à couvrir les sommets de la forme  $(x_j, y_i)$  ( $j \neq 1, j \in J' ; i \in I - I'$ ). Comme précédemment, deux éventualités peuvent se produire suivant que  $x_j$  est relié (dans  $G_1 - A$ ) à un sommet  $x_k$  pendent ou non (dans  $A$ ) :

-  $k \notin J'$  : on ajoutera à  $T^*$  des arêtes de  $C_{kj}$

-  $k \in J'$  ( $k \neq 1$ ) : on ajoutera à  $T^*$  des arêtes de  $T_{jk}$

Ainsi, nous venons de construire un arbre maximal  $T$  de  $G = G_1 \times G_2$ .

c - Le co-arbre associé à T est connexe

Désignons par  $C^*$  le symétrique de  $T^*$  défini précédemment. Bien entendu,  $C^*$  appartient au co-arbre associé à T. De plus,  $C^*$  couvre tous les sommets de G sauf ceux de la forme :

$$\begin{aligned} (x_1, y_i) & \quad (i \in I-I') \\ (x_j, y_i) & \quad (j \neq 1, j \in J', i \in I') \end{aligned}$$

Nous allons démontrer qu'on peut étendre  $C^*$  de manière à couvrir ceux des sommets précédents qui ne sont pas encore saturés par l'arbre maximal T.

Il suffit, en effet, d'appliquer le même procédé exposé dans la dernière partie de b - permettant d'étendre  $T^*$  à T (en remplaçant  $C_{1j}$  et  $C_{kj}$  respectivement par  $B_{1j}$  et  $B_{kj}$ ). On s'apercevra que seuls les sommets de la forme  $(x_j, y_i)$  ( $j \neq 1, j \in J', i \in I'$ ) où  $\{x_j, x_k\} \in E_1 - A$  (avec  $1 \neq k \in J'$ ) risquent de ne pas être couverts (car pour passer de  $T^*$  à T on a utilisé  $T_{jk}$ ). Considérons donc un tel sommet non encore saturé par T. Deux cas peuvent avoir lieu :

- $\deg_{G_1}(x_j) \geq 3$  ( $j \in J'$ ) : dans ce cas, il existe un sommet  $x_{k'}$ ,  $k' \neq k$  tel que  $\{x_j, x_{k'}\} \in E_1 - A$ . On ajoutera à  $C^*$  des arêtes de  $B_{k',j}$
- $\deg_{G_1}(x_j) = 2$  ( $j \in J'$ ) : dans ce cas, il existe un sommet  $y_1$  ( $1 \in I$ ) tel que  $\{y_i, y_1\} \in E_2 - B$  car le sommet  $(x_j, y_i)$  n'est pas encore saturé par T. Il suffit alors d'ajouter à  $C^*$  l'arête  $\{(x_j, y_i), (x_j, y_1)\}$  où  $x_j$ , désigne le sommet précédant  $x_j$  dans l'arborescence A ( $j' \neq 1$  sinon  $(x_j, y_i)$  serait déjà couvert par  $B_{1j}$ )

d - La proposition est démontrée  $\square$

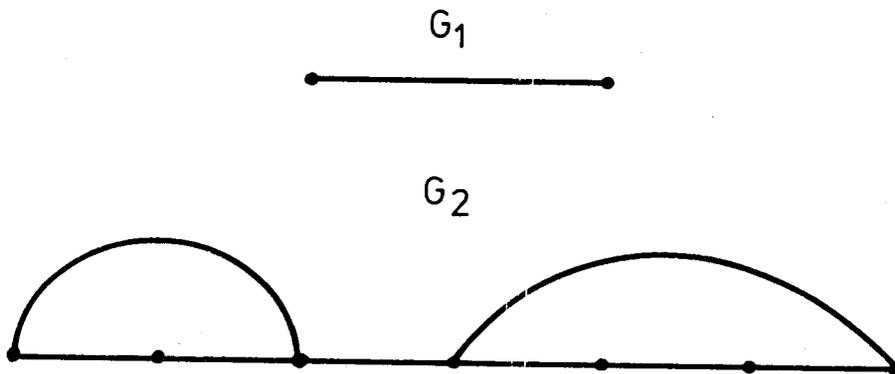
Nous venons, dans la dernière partie de la démonstration de la proposition 9, de justifier le résultat suivant :

Proposition 9 bis : Soit  $G_1$  un graphe connexe de degré minimum  $\geq 3$ . Si  $G_2$  est un graphe connexe admettant un cycle impair alors le produit cartésien  $G = G_1 \times G_2$  possède deux arbres maximaux disjoints.

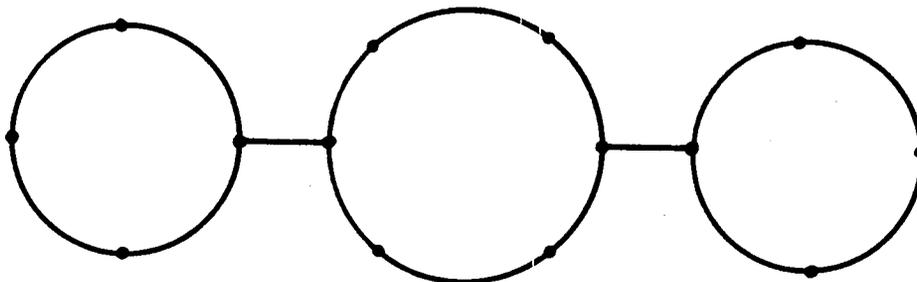
D'autre part, comme conséquence du théorème 2 et de la proposition 9 nous avons le :

Corollaire 3 : Soit  $G_1$  un graphe connexe sans sommet pendant. Si  $G_2$  est un graphe connexe possédant un cycle impair alors le produit cartésien  $G = G_1 \times G_2$  est sup-immérgeable.

Remarque : La proposition 9 et le corollaire 3 sont faux lorsque le graphe  $G_1$  possède des sommets pendants. En effet, soient :



On peut vérifier que  $G = G_1 \times G_2$  est de la forme :



*D'autre part, il est apparent que :*

$$\xi(G) = 3$$

#### VII - 4. SUR L'ADDITIVITE DU GENRE MAXIMUM

Rappelons que, dans un graphe connexe, un bloc est un sous-graphe maximal pour la propriété d'être sans point d'articulation (en particulier, un graphe 2-connexe est aussi appelé un bloc)

Dans l'étude du genre d'un graphe, Battle, Harary, Kodama et Youngs ont, dans [1], démontré que le genre d'un graphe connexe est égal à la somme des genres de ses blocs. Depuis, ce résultat constitue ce qu'on appelle l'additivité du genre.

Concernant le genre maximum, une telle propriété n'existe pas en général ([11], [14]). L'effort a donc été orienté vers la recherche des classes de graphes vérifiant l'additivité. A ce sujet, de nombreux problèmes restaient encore ouverts. Dans ce paragraphe, nous allons, en nous servant des théorèmes de caractérisation des graphes s.i, apporter des réponses à ces problèmes.

##### VII - 4.1. Graphes admettant des isthmes

Soit  $G$  un graphe possédant un isthme  $A$ . Symboliquement, nous notons :

$$G = G_1 + \{A\} + G_2$$

On a :

$$\beta(G) = \beta(G_1) + \beta(G_2)$$

D'autre part, un isthme appartient à tout arbre maximal. Par conséquent, tout co-arbre de  $G$  est union disjointe d'un co-arbre de  $G_1$  et d'un co-arbre de  $G_2$ . D'où :

$$\xi(G) = \xi(G_1) + \xi(G_2)$$

Sachant que  $\gamma_M = \frac{1}{2} (\beta - \xi)$ , on peut donc écrire :

$$\gamma_M(G) = \gamma_M(G_1) + \gamma_M(G_2)$$

Autrement dit :

Proposition 10 : Tout graphe comportant un isthme vérifie la propriété d'additivité du genre maximum.

Ce résultat a été annoncé dans [12].

#### VII - 4.2. Graphes admettant des points d'articulation

Dans tout ce paragraphe, nous considérons un graphe  $G$  2-arête connexe (c.à.d. sans isthme). Supposons que  $G$  admette un point d'articulation  $x_0$ . Symboliquement, nous posons :

$$G = G_1 + \{x_0\} + G_2$$

Quand on étudie le genre maximum de  $G$ , deux problèmes se posent :

- Dans quelles conditions,  $\gamma_M(G)$  possède la propriété d'additivité ?
- Dans quelles conditions  $G$  est s.i. ?

Pour répondre à ces deux questions, nous allons établir un résultat préliminaire.

Proposition 11 : Soit  $G$  un graphe 2-arête connexe possédant un point d'articulation  $x_0$ . En posant  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$ , on a :

$$\gamma_M(G_1) + \gamma_M(G_2) \leq \gamma_M(G) \leq \gamma_M(G_1) + \gamma_M(G_2) + 1$$

#### Démonstration

Notons que :

$$\beta(G) = \beta(G_1) + \beta(G_2)$$

Tout arbre de  $G$  s'obtient en accolant en  $x_0$  un arbre de  $G_1$  à un arbre de  $G_2$ . Par conséquent :

$$0 \leq \xi(G_1) + \xi(G_2) - \xi(G) \leq 2$$

Le résultat s'en déduit en utilisant la formule du genre maximum  $\square$  .

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle définition :

Définition : Soient  $G$  un graphe et  $S$  une surface orientable de genre  $\gamma$ . On dit qu'une arête  $A$  de  $G$  est  $\gamma$ -régulière s'il existe une immersion squelettique de  $G$  dans  $S$  telle que  $A$  appartienne aux bords de deux faces distinctes de l'immersion. De même, un sommet est dit  $\gamma$ -régulier s'il est incident à une arête  $\gamma$ -régulière. Dans le cas contraire, on dira qu'ils sont  $\gamma$ -singuliers.

Le résultat suivant s'avèrera utile dans la suite :

Proposition 12 : Soit  $G$  un graphe de genre maximum  $\gamma_M(G)$ . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une arête  $A$  de  $G$  soit  $\gamma_M(G)$ -régulière est que :

$$\gamma_M(G - \{A\}) = \gamma_M(G)$$

Démonstration

a - Condition nécessaire

Considérons, dans une surface orientable de genre  $\gamma_M(G)$ , une immersion squelettique de  $G$  telle que  $A$  soit régulière. Si  $n_2$  est le nombre de faces de cette immersion alors, dans la même surface, le graphe  $G - \{A\}$  admet une immersion squelettique avec  $n_2 - 1$  faces. Par conséquent :

$$\gamma_M(G - \{A\}) \geq \gamma_M(G)$$

Démontrons qu'en réalité l'égalité doit avoir lieu. Sinon  $G - \{A\}$  posséderait une immersion squelettique avec au plus  $n_2 - 3$  faces

(la parité du nombre de faces est inchangée). Ce qui prouverait qu'il existe une immersion squelettique de  $G$  ayant un nombre de faces  $\leq n_2 - 2 < n_2$ . C'est absurde car  $n_2$  est le nombre minimum de faces des immersions squelettiques de  $G$ .

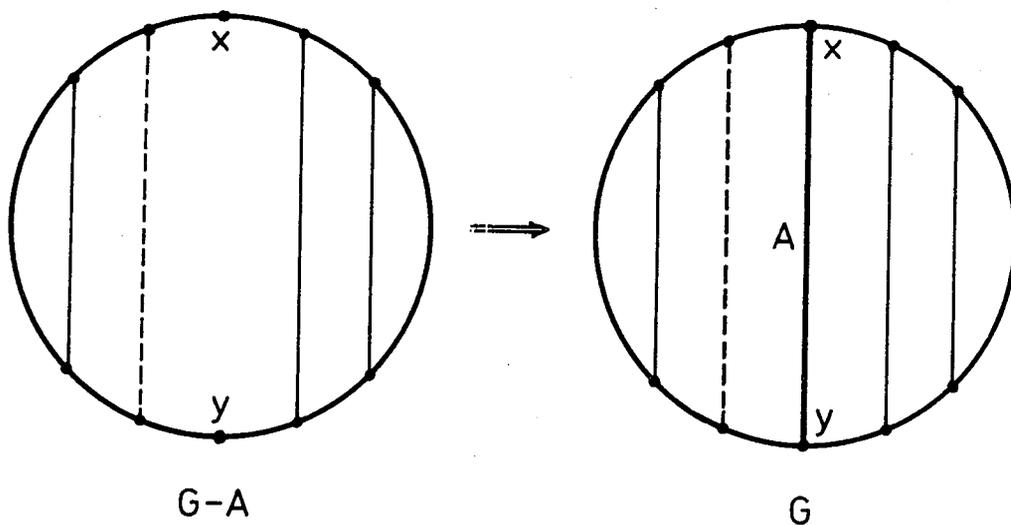
b - Condition suffisante

Supposons qu'on ait :

$$\gamma_M(G - \{A\}) = \gamma_M(G)$$

Le graphe  $G - \{A\}$  admet donc une immersion squelettique dans une surface de genre  $\gamma_M(G)$ . Je dis que, dans toutes ces immersions, les extrémités de  $A$  doivent se trouver sur le bord d'une même face. Car, sinon,  $G$  admettrait une immersion squelettique dans une surface orientable de genre  $\gamma_M(G) + 1 > \gamma_M(G)$  (voir le lemme 1). Ce qui contredit la définition de  $\gamma_M(G)$ .

On a donc une immersion de la forme :



La proposition est démontrée  $\square$

Dans la pratique, il est préférable d'avoir une autre version du résultat précédent. C'est ce que nous allons faire en démontrant

le :

Corollaire 4 : Soit  $G$  un graphe de genre maximum  $\gamma_M$ . Une arête  $A$  de  $G$  est  $\gamma_M$ -régulière si et seulement si elle appartient à une composante impaire  $P$  d'un co-arbre  $C$  tel que :

- 1)  $\xi(C) = \xi(G)$
- 2)  $P - \{A\}$  ne comporte pas de composantes impaires.

Démonstration

Nous allons démontrer que :

$$(1) \text{ et } (2) \iff \gamma_M(G - \{A\}) = \gamma_M(G)$$

Et le résultat se déduira de la proposition 12.

$$a - \underline{\gamma_M(G - \{A\}) = \gamma_M(G) \implies (1) \text{ et } (2)}$$

Sachant que  $\beta(G - \{A\}) = \beta(G) - 1$ , on peut écrire, d'après la formule du genre maximum :

$$\xi(G - \{A\}) = \xi(G) - 1$$

Soit  $D$  un co-arbre de  $G - \{A\}$  tel que  $\xi(D) = \xi(G - \{A\})$ . En posant  $C = D \cup \{A\}$  on obtient un co-arbre de  $G$ . Si  $A$  reliait deux composantes impaires de  $D$  alors on aurait :

$$\xi(C) = \xi(D) - 1 = \xi(G) - 2 < \xi(G)$$

Ce qui est impossible. D'où la conclusion.

$$b - \underline{(1) \text{ et } (2) \implies \gamma_M(G - \{A\}) = \gamma_M(G)}$$

Remarquons d'abord que le graphe  $G - \{A\}$  est connexe car  $A$  appartient à un co-arbre  $C$  de  $G$ . Evidemment  $C - \{A\}$  est un co-arbre de  $G - \{A\}$  et l'on a :

$$\xi(C - \{A\}) = \xi(C) - 1 = \xi(G) - 1$$

D'où :

$$\xi(G - \{A\}) \leq \xi(G) - 1$$

Vérifions que l'égalité doit avoir lieu. Sinon, il existerait un co-arbre D de  $G - \{A\}$  tel que :

$$\xi(D) \leq \xi(G) - 3$$

car la parité de  $\xi$  est inchangée. Comme  $C = D \cup \{A\}$  est un co-arbre de G, on aurait :

$$\xi(G) \leq \xi(C) \leq \xi(D) + 1 \leq \xi(G) - 2 < \xi(G)$$

C'est donc absurde. Par conséquent :

$$\gamma_M(G - \{A\}) = \frac{(\beta(G) - 1) - (\xi(G) - 1)}{2} = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2} = \gamma_M(G)$$

Ce qu'il fallait démontrer  $\square$

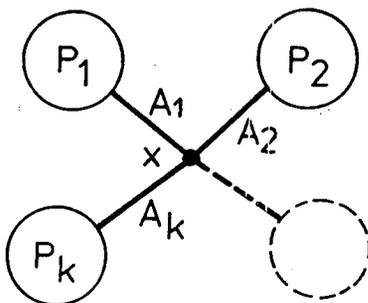
Le résultat précédent permet de caractériser très simplement les sommets réguliers. En effet :

Corollaire 5 : Soit G un graphe de genre maximum  $\gamma_M$ . Un sommet x de G est  $\gamma_M$ -régulier si et seulement s'il appartient à une composante impaire d'un co-arbre C de G tel que  $\xi(C) = \xi(G)$ .

Démonstration

Dire que x est  $\gamma_M$ -régulier équivaut à dire qu'il est incident à une arête  $\gamma_M$ -régulière. Par conséquent, la condition nécessaire résulte immédiatement du corollaire 4.

Il nous reste donc à vérifier que la condition est suffisante en raisonnant par l'absurde. En effet, désignons par P la composante impaire à laquelle appartient x. Si, pour toute arête  $A_i$  passant par x,  $P - \{A_i\}$  comportait une composante impaire, alors P serait de la forme :



avec :  $\text{Card}(P_i) = 2p_i + 1$  ( $1 \leq i \leq k$ ) où  $k$  désigne le degré de  $x$  dans  $P$ .

D'où :

$$\text{Card}(P) = \sum_1^k \text{Card}(P_i) + k = \sum_1^k 2p_i + 2k = \text{pair}$$

Ce qui contredit la parité de  $\text{Card}(P)$ . Il existe donc une arête  $A$  passant par  $x$  tel que  $P - \{A\}$  ne comporte pas de composantes impaires. D'après le corollaire 2,  $A$  est  $\gamma_M$ -régulière. D'où la régularité de  $x$ .  $\square$

Lorsque  $G$  est s.i, on a la propriété suivante :

Proposition 13 : Si  $G$  est un graphe 4-arête-connexe de nombre de Betti  $\beta(G)$  impair alors tout sommet de  $G$  est  $\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$  - régulier.

Démonstration

En effet,  $G$  est s.i car il est 4-arête-connexe (théorème 7). Autrement dit  $G$  admet une immersion squelettique avec deux faces (car  $\beta(G)$  est impair) dans une surface orientable de genre  $\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$ .

D'autre part, d'après la proposition 6,  $G$  comporte deux arbres maximaux disjoints. Par conséquent,  $G$  admet un co-arbre connexe passant par tous les sommets de  $G$ . Evidemment, vu la parité de  $\beta(G)$ , ce co-arbre contient un nombre impair d'arêtes. Il résulte alors du corollaire précédent que tout sommet de  $G$  est  $\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$  - régulier.  $\square$

Concernant la régularité des arêtes, on peut énoncer le résultat suivant :

Proposition 14 : Si  $G$  est un graphe 5 - arête - connexe de nombre de Betti  $\beta(G)$  impair alors toute arête de  $G$  (donc tout sommet de  $G$ ) est  $\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$  - régulière.

Démonstration

Soit A une arête quelconque de G. Puisque G est 5-arête-connexe, le graphe  $G - \{A\}$  est 4-arête-connexe. D'après le théorème 7,  $G - \{A\}$  est s.i et l'on a :

$$\gamma_M(G - \{A\}) = \gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - 1}{2} = \left[ \frac{\beta(G)}{2} \right]$$

Ce qui prouve qu'il existe une immersion squelettique de G dans une surface orientable de genre  $\left[ \frac{\beta(G)}{2} \right]$  où A est régulière  $\square$

Grâce à ces résultats, nous pouvons maintenant étudier le genre maximum de  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$ . Pour simplifier l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned} \gamma_M(G) &= \gamma \\ \gamma_M(G_i) &= \gamma_i \quad (i = 1, 2) \\ \xi(G) &= \xi \\ \xi(G_i) &= \xi_i \quad (i = 1, 2) \\ \beta(G) &= \beta \\ \beta(G_i) &= \beta_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Lenne 5 : Lorsque  $\beta, \beta_1, \beta_2$  sont pairs alors

$$\xi = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2 = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Démonstration

On sait que (voir proposition 9) :

$$\xi_1 + \xi_2 - \xi = 0 \text{ ou } 2$$

Par conséquent :

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \Rightarrow \xi = 0$$

Supposons maintenant  $\xi = 0$ . Comme  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont pairs, il en est donc de même pour  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . En séparant en  $x_0$  un co-arbre C de G tel

que  $\xi(C) = \xi = 0$ , on obtient deux co-arbres, chacun ayant au plus une composante connexe impaire. Vu la parité de  $\xi_1$  et de  $\xi_2$ , nécessairement  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ .

Si cette condition est remplie alors :

$$\gamma = \frac{\beta}{2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2} = \gamma_1 + \gamma_2$$

Ce qu'il fallait démontrer  $\square$

Lemme 6 : Lorsque  $\beta$  est pair et  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont impairs, alors  $\xi = 0$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- (1)  $\xi_1 = \xi_2 = 1$
- (2)  $x_0$  est  $\gamma_i$ -régulier pour  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ).

#### Démonstration

##### a - Conditions nécessaires

On a :

$$\xi_1 + \xi_2 - \xi = 0 \text{ ou } 2$$

Puisque  $\xi = 0$  alors  $\xi_1 + \xi_2 = 2$  car ils sont impairs. D'où :

$$\xi_1 = \xi_2 = 1$$

Par conséquent, en séparant en  $x_0$  un co-arbre sans composantes impaires, on obtient deux co-arbres, chacun ayant exactement une composante impaire passant par  $x_0$ . D'après le corollaire 3,  $x_0$  est  $\gamma_i$ -régulier pour  $G_i$  ( $i = 1, 2$ )

##### b - Conditions suffisantes

Supposons les conditions (1) et (2) remplies. Il existe alors dans chaque  $G_i$  un co-arbre  $C_i$  avec exactement une composante impaire contenant  $x_0$ . Bien entendu,  $C = C_1 \cup C_2$  constitue un co-arbre (de  $G$ ) sans composante impaire. D'où :  $\xi = 0$ .

c - Non-additivité du genre maximum

Si  $\xi = 0$  et  $\xi_1 = \xi_2 = 1$  alors, d'après la formule du genre maximum :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + 1$$

Autrement dit, on n'a pas la propriété d'additivité.  $\square$

Lemme 7 : Lorsque  $\beta$  et  $\beta_1$  sont impairs et  $\beta_2$  est pair, soient les 5 propositions suivantes :

$$(1) \xi = 0$$

$$(2) \xi_1 = 1$$

$$(3) \xi_2 = 0$$

$$(4) \xi_2 = 2$$

$$(5) x_0 \text{ est } \gamma_i\text{-régulier pour } G_i \text{ (} i = 1, 2 \text{)}$$

On a les équivalences suivantes :

$$(1) \Leftrightarrow (2) \text{ et } (3) \Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\text{ou } (1) \Leftrightarrow (2), (4) \text{ et } (5) \Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + 1$$

Démonstration :

On sait que :

$$\xi_1 + \xi_2 - \xi = 0 \text{ ou } 2$$

D'autre part,  $\xi$  et  $\xi_1$  sont impairs et  $\xi_2$  est pair, d'après les hypothèses portant sur les nombres de Betti. Par conséquent, lorsque  $\xi = 0$  nécessairement  $\xi_2 = \xi_1 - 1$  ou  $\xi_2 = \xi_1 + 1$ . Moyennant ces remarques, on peut vérifier que :

$$(1) \Leftrightarrow (2) \text{ et } (3) \Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \text{ se démontre comme le lemme 5}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2), (4) \text{ et } (5) \Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + 1 \text{ se démontre comme le lemme 6 } \square$$

Quand on s'intéresse uniquement aux conditions pour que  $G$  soit s.i, l'ensemble des trois lemmes 5, 6 et 7 donne le résultat suivant :

Proposition 15 : Le graphe  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$  est s.i. si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

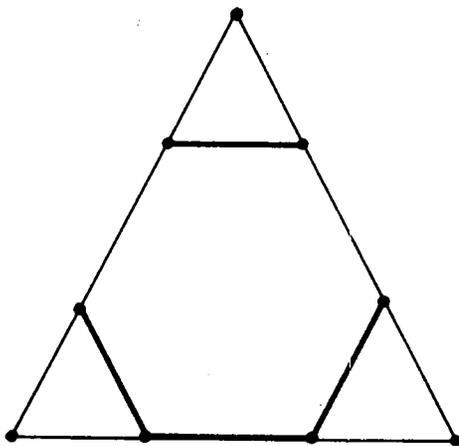
- (1)  $G_1$  est s.i. (c.à.d.  $\xi_1 \leq 1$ )
- (2)  $0 \leq \xi_2 \leq 2$
- (3) si  $\xi_1 \xi_2 \geq 1$  alors  $x_0$  est  $\gamma_i$ -régulier pour  $G_i$  ( $i = 1, 2$ )

Si l'on veut étudier la propriété d'additivité du genre maximum, on utilisera le résultat ci-dessous qui résulte directement des lemmes 5,6 et 7 :

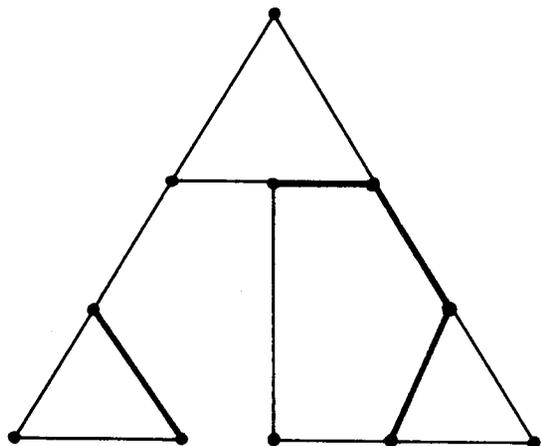
Proposition 16 : Soit  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$  un graphe s.i. Alors  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  si et seulement si  $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1$ .

Remarque : Dans [14], Ringelsen a conjecturé qu'un graphe sans isthme formé de deux blocs s.i. est s.i. La proposition 15 fournit toutes les indications nécessaires pour montrer que cette conjecture est fausse.

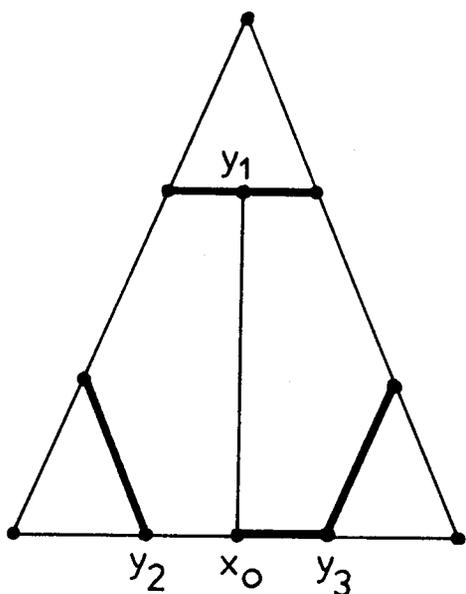
En effet, considérons les graphes suivants :



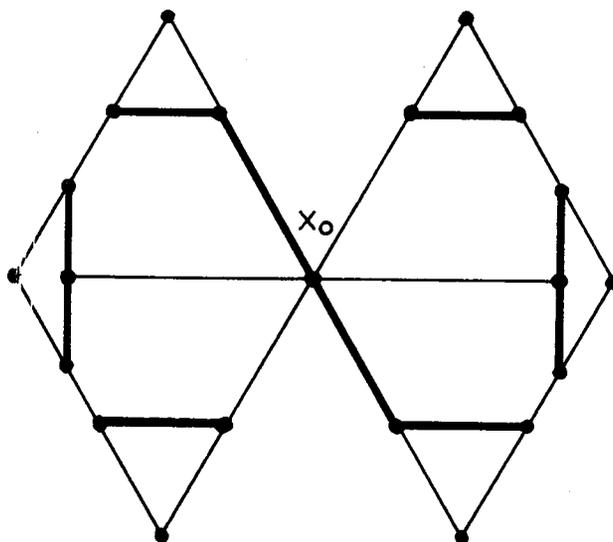
$H_1$



$H_2$



$$G_1 = G_2$$



$$G = G_1 + \{x_0\} + G_2$$

Les traits épais représentent des co-arbres.

On peut vérifier que  $H_1$  n'est pas s.i, grâce à sa structure très simple et bien symétrique. De même  $H_2$  n'est pas s.i car il admet un isthme dont l'élimination donne deux blocs de nombre de Betti impair (autrement dit,  $\xi(H_2) = 1 + 1 = 2$  d'après la proposition 8).

Par contre, le graphe  $G_1$  est s.i avec 2 faces. On peut vérifier que  $\gamma_M(G_1) = 2$ . Démontrons que le sommet  $x_0$  est 2-singulier. En effet, si  $x_0$  était 2-régulier alors l'une au moins des deux arêtes  $(x_0, y_1)$  ou  $(x_0, y_2)$  devrait être 2-régulière. Or c'est impossible, car :

$$G_1 - \{(x_0, y_1)\} \simeq H_1 \text{ non s.i.}$$

$$G_1 - \{(x_0, y_2)\} \simeq H_2 \text{ non s.i.}$$

Par conséquent, d'après la proposition 15, le graphe  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$  n'est pas s.i.

VII - 4.3. Validité de l'additivité du genre maximum.

Dans ce qui précède, la recherche des conditions pour que le graphe  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$  soit s.i constituait notre objectif principal. Dans ce paragraphe nous nous intéressons surtout à l'étude de la propriété d'additivité du genre maximum. A ce propos, nous disposons des résultats suivants :

Proposition 17 : Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes tels que  $\xi_1 \xi_2 > 0$ . Alors le graphe  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$  vérifie la propriété d'additivité du genre maximum si et seulement si  $x_0$  est  $\gamma_i$ -singulier pour au moins une valeur de  $i$ .

Démonstration

Rappelons que  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . Par conséquent, d'après le théorème 4,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  si et seulement si  $\xi = \xi_1 + \xi_2$ .

a - Condition nécessaire

Supposons que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . On a, d'après la formule du genre maximum :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

Puisque  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont  $\geq 1$ ,  $G_1$  et  $G_2$  admettent des co-arbres comportant des composantes impaires. Si  $x_0$  était  $\gamma_i$ -régulier pour  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) alors  $G$  posséderait un co-arbre avec  $\xi_1 + \xi_2 - 2 = \xi - 2 < \xi$  composantes impaires. Ce qui est absurde.

b - Condition suffisante

On sait que :

$$\xi_1 + \xi_2 - \xi = 0 \text{ ou } 2$$

Si  $\xi_1 + \xi_2 - \xi = 2$  alors il existerait dans chaque  $G_i$  un co-arbre ayant  $\xi_i$  composantes impaires et passant par  $x_0$ . Ce qui contredit l'hypothèse de singularité portant sur  $x_0$ . On doit donc avoir  $\xi_1 + \xi_2 = \xi$ . Autrement dit  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ .  $\square$

Proposition 18 : Soit  $G = G_1 + \{x_0\} + G_2$ . Si  $G_1$  est s.i avec une face alors  $G$  vérifie la propriété d'additivité du genre maximum.

Démonstration

En effet :

$G_1$  s.i avec une face  $\Leftrightarrow \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi = \xi_1 + \xi_2 \Leftrightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$   $\square$

Remarque : Dans [16], Ringeisen a formulé la conjecture suivante : Si  $G_1$  et  $G_2$  sont s.i. alors  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  si et seulement si  $x_0$  est  $\gamma_i$ -singulier pour au moins une valeur de  $i$ . Etant un cas très particulier des propositions 17 et 18, cette conjecture est donc exacte.

BIBLIOGRAPHIE DU QUATRIEME CHAPITRE

- [1] BATTLE, HARARY, KODAMA, YOUNGS  
Additivity of the genus of a graph  
Bull. A.M.S, 68, pp 565-568. 1962
- [2] BOUCHET  
Genre maximum d'un  $\Delta$ -graphe  
Colloque international CNRS-Arsay. 1976
- [3] DUKE  
The genus, regional number, and Betti number of a graph  
Cand. J. Math. 18. pp 817-822. 1966
- [4] FOURNIER  
Effet de la contraction d'une arête sur le genre d'un graphe  
C.R. Acad. Sc. Paris t.270, pp 743-745. 1970
- [5] JAEGER  
Thèse. Université de Grenoble. Juin 1976
- [6] KUNDU  
Bounds on the number of disjoint spanning trees  
J. C.T. (B) pp. 199-203. 1974
- [7] NGUYEN HUY XUONG  
Sur les immersions d'un graphe dans les surfaces orientables.  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283, pp 745-747. 1976
- [8] NGUYEN HUY XUONG  
Sur quelques classes de graphes possédant des propriétés topologiques remarquables.  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283, pp. 813-816. 1976

- [9] NGUYEN HUY XUONG  
 How to determine the maximum genus of a graph.  
 A paraître dans The Journal of Combinatorial Theory.
- [10] NGUYEN HUY XUONG  
 Upper-embeddable graphs and related topics.  
 A paraître dans The Journal of Combinatorial Theory
- [11] NORDHAUSS, STEWART, WHITE  
 On the maximum genus of a graph.  
 J.C.T. (B). 11. pp 258-267.1971.
- [12] NORDHAUSS, RINGEISEN, STEWART, WHITE  
 A Kuratowski-type theorem for the maximum genus of a graph.  
 J.C.T. (B). 12. pp. 260-267.1972
- [13] PAYAN, SAKAROVITCH.  
 Ensembles cycliquement stables et graphes cubiques.  
 Actes des journées franco-belge sur la théorie des graphes 1974.
- [14] RINGEISEN  
 Upper and lower imbeddable graphs.  
 Graph Theory and Applications. Springer-Verlay. pp 1972.
- [15] RINGEISEN  
 Determining all compact orientable 2-manifolds upon which  $K_{m,n}$   
 has 2-cell imbeddings.  
 J.C.T. (B) 12, pp 101-104, 1972
- [16] RINGEISEN  
 On additivity on maximum genus  
 Colloque international CNRS. Orsay. 1976
- [17] RINGEL  
 Map color theorem  
 Springer-Verlay. 1974