



HAL
open science

Expérimentation de stratégies itératives chaotiques sur des problèmes de point fixe à grand nombre de variables

Zaher Mahjoub

► **To cite this version:**

Zaher Mahjoub. Expérimentation de stratégies itératives chaotiques sur des problèmes de point fixe à grand nombre de variables. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1977. Français. NNT: . tel-00287445

HAL Id: tel-00287445

<https://theses.hal.science/tel-00287445>

Submitted on 12 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR-INGENIEUR

par

Zaher MAHJOUB



**EXPERIMENTATION
DE STRATEGIES ITERATIVES CHAOTIQUES
SUR DES PROBLEMES DE POINT FIXE
A GRAND NOMBRE DE VARIABLES**



Thèse soutenue le 26 mai 1977 devant la Commission d'Examen

Président : N. GASTINEL
Examineurs : M. DUC-JACQUET
A. LATROBE
J.C. MIELLOU
F. ROBERT

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMPIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUPIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERTEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULLIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAEFER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président

Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrometallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique
----	---------------	-------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique
----	-------------	-------------

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

8-6-1397.H

"Et on ne vous a apporté que peu de science"

Coran

A mes parents,
A mon maître M. Salah,
A mes frères et soeurs.

Ce travail commencé en septembre 1974 fait suite à un projet de troisième année à l'Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble. Monsieur F. ROBERT, Professeur à l'ENSIMAG qui nous l'a proposé a bien voulu patronner notre recherche lui accordant un intérêt constant. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous remercions vivement, Monsieur le Professeur N. GASTINEL qui nous fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Monsieur J.C. MIELLOU, Professeur à l'Université de Besançon, a bien voulu se déplacer et accepter notre invitation. Les travaux de l'équipe qu'il dirige nous ont été très utiles. Nous lui exprimons nos sincères remerciements.

A Monsieur A. LATROBE, Ingénieur à la C.I.S.I. ainsi qu'à Monsieur M. DUC-JACQUET, Maître de Conférences à l'Université de Grenoble, nous adressons tous nos remerciements pour leur participation au jury.

A toutes celles qui ont eu la gentillesse de taper l'original de cette thèse ainsi qu'à tout le personnel du service de reproduction va notre reconnaissance.

Nous ne saurions enfin oublier tous les collègues de l'équipe d'Analyse Numérique pour leur collaboration fructueuse.

Zaher MAHJOUB

P L A N

<u>INTRODUCTION</u> -----	7
<u>PARTIE A</u> -----	11
 <u>CHAPITRE I : ETUDE THEORIQUE DES ITERATIONS CHAOTIQUES - RESULTATS RECENTS</u>	
1. Introduction - Contraction en norme vectorielle -----	13
a) <i>Définition</i>	
b) <i>Théorème de contraction - Point fixe</i>	
c) <i>Méthode de G.S. - Relaxation</i>	
d) <i>Cas linéaire</i>	
2. Itérations chaotiques -----	16
a) <i>Définition</i>	
b) <i>Convergence</i>	
c) <i>Relaxation</i>	
d) <i>Le cas particulier de la méthode de Southwell</i>	
e) <i>Convergence monotone</i>	
3. Relaxation chaotique à retards -----	22
a) <i>La norme $\ \cdot \ _{V,T}$ - Contraction</i>	
b) <i>Suites R-chaotiques</i>	
c) <i>Algorithme RCR</i>	
d) <i>Convergence des algorithmes RCR</i>	
e) <i>Illustration pratique</i>	
4. Algorithmes secondaires de contrôle -----	26
a) <i>Contrôle de la convergence</i>	
b) <i>Algorithmes explicites</i>	
5. Méthodes itératives asynchrones pour multiprocesseurs -----	28
a) <i>Définition des méthodes asynchrones</i>	
b) <i>Convergence</i>	
c) <i>Exemples</i>	
<i>Conclusion</i>	

CHAPITRE II : STRATEGIES ITERATIVES CHAOTIQUES -----	31
. Introduction : Le problème de la stratégie "optimale" -----	33
. Rappel	
I - Stratégies automatiques -----	35
1. Techniques cycliques	
a) <i>Techniques de permutation</i>	
b) <i>Techniques de répétition</i>	
2. Techniques non cycliques	
II - Stratégies interactives -----	39
Le Système SYGESIC	
1. Support informatique -----	40
2. Description de SYGESIC -----	41
2.0 Introduction	
2.1 Compatibilité des données	
2.2 Constitution d'un fichier "ENTREE"	
2.3 Introduction des fonctions	
2.4 Programme principal	
2.4.1 Etape préliminaire	
2.4.2 Etape calcul	
a) <i>Choix du mode de balayage</i>	
b) <i>Choix des stratégies de calcul</i>	
c) <i>Représentation des écarts relatifs</i>	
d) <i>Partage de D_{hk} en zones</i>	
e) <i>Représentation de la courbe des écarts</i>	
f) <i>Représentation de la fonction U</i>	
g) <i>Poursuite/arrêt</i>	
<i>Conclusion</i>	

<u>PARTIE B</u> -----	65
<u>CHAPITRE I : UNE FAMILLE DE PROBLEMES DE POINT FIXE NON LINEAIRES</u> -----	65
I - Position du problème -----	67
0. Introduction	
1. Le problème initial	
2. Première transformation	
3. Seconde formulation	
II - Expérimentations -----	71
1. Première série d'expériences -----	71
a) <i>Le problème</i>	
b) <i>Résultats</i>	
c) <i>Commentaires</i>	
2. Deuxième série d'expériences -----	74
a) <i>Le problème</i>	
b) <i>Résultats</i>	
a) <i>Etude des suites chaotiques</i>	
b) <i>Comparaisons - Conclusions</i>	
c) <i>Les techniques cycliques de permutation</i>	
d) <i>Relaxation</i>	
3. Conclusions générales -----	89
<u>CHAPITRE II : UNE FAMILLE DE PROBLEMES DE POINT FIXE LINEAIRES</u> -----	91
1. Position du problème -----	93
2. Contraction - Convergence -----	93
3. Stratégies chaotiques -----	95
4. Première série de résultats -----	98
a) <i>Résultats</i>	
b) <i>Analyse des résultats</i>	

5. Deuxième série de résultats -----	100
a) Résultats	
b) Analyse des résultats	
c) Détermination de la "meilleure suite"	
6. Conclusion -----	110
CHAPITRE III : UN ENSEMBLE DE PROBLEMES LINEAIRES AUX DERIVEES PARTIELLES -	111
I - Le problème du potentiel -----	113
1. Problème - Discrétisation - Convergence -----	113
2. 1er cas - Exemple illustratif -----	115
3. 2e cas - Le problème du point fixe partiel -----	122
a) Introduction	
b) Stratégie interactive	
c) Stratégie automatique	
II - Le problème de la torsion d'un cylindre uniforme -----	127
1. Equations -----	127
2. Discrétisation convergence -----	127
3. Cas n° 1 - Le domaine D_1 -----	130
a) Méthode de G.S	
b) Méthode automatique MDSE	
4. Cas n° 2 - Le domaine D_2 -----	136
a) Méthode de G.S	
b) Méthode automatique MDSE	
c) Les suites S	
d) Comparaisons	
5. Cas n° 3 - Le domaine D_3 -----	138
a) Méthode de G.S	
b) Méthode automatique	
c) Comparaisons	

6. Conclusions sur \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 -----	141
7. Cas n° 4 - Le domaine \mathcal{D}_4 -----	142
a) Méthode de G.S	
b) Stratégies automatiques MDSE	
c) Méthode interactive de partage en zones	
d) Comparaisons - Conclusions	
e) Influence du mode de balayage	
f) Influence de la forme du domaine - Conclusion	
<u>CONCLUSION</u> -----	167
<u>ANNEXE</u> : Déroulement d'une expérimentation avec SYGESIC -----	171
<u>BIBLIOGRAPHIE</u> -----	223

INTRODUCTION

Dans le domaine du calcul scientifique une grande part des problèmes à résoudre se ramène, après une discrétisation préalable par différences ou éléments finis, à la résolution de gros systèmes d'équations. Avec cette méthode on passe du domaine géométrique sur lequel est étudié le phénomène physique à un certain maillage comportant - dans le cas des différences finies par exemple - autant de noeuds que le système a d'équations. Une résolution numérique effective standard consistera à "balayer" systématiquement la grille du maillage noeud par noeud en y activant à chaque fois un certain opérateur (de point fixe).

Or le coût de calcul nécessaire pour atteindre la solution avec la précision désirée dépend étroitement de la stratégie de balayage du domaine en question. Les techniques itératives standards de balayages systématiques ont l'inconvénient de traiter "de la même façon" les inconnues qui "convergent rapidement" et celles qui "convergent lentement". En conséquence un nombre important d'opérations (i.e. activations de l'opérateur de point fixe en chaque noeud) est inutilement effectué pour atteindre la précision désirée.

L'idée qui vient alors à l'esprit, et ce fut là le point directeur de notre travail, consiste en la recherche de stratégies itératives moins classiques permettant de "doser" aussi finement que possible le nombre d'activations de chaque inconnue pour aboutir à la solution cherchée. Il s'agit en somme de tirer profit de l'inégale répartition des vitesses de convergence des différentes composantes pour faire le strict

nécessaire et satisfaire aussi exactement que possible le critère d'arrêt du calcul.

A la suite d'anciens travaux d'Ostrowski [25], [26], Chazan et Miranker [6] ont été les premiers à introduire le terme de "Chaotic Relaxation" qui signifie, dans le contexte linéaire qu'ils ont étudié, à la fois une "conduite libre" (Free Steering) dans le choix de la composante activée ainsi qu'un retard, résultant de l'utilisation de plusieurs processeurs en parallèle, dans l'accès aux itérés précédemment calculés.

Une large série de travaux ont suivi depuis. Nous retiendrons surtout :

- . L'article de Robert, Charnay, Musy [31] qui a été la référence de base pour la conduite de notre recherche.
- . Miellou [22] dans son article "Algorithmes de relaxation chaotique à retards" s'est intéressé à une classe d'algorithmes de relaxation qui fournissent un modèle de ce qui se passe lorsqu'on utilise des multiprocesseurs. Il a étendu par là l'étude de Chazan et Miranker à des problèmes non linéaires.
- . Récemment Baudet [2] a introduit une généralisation des schémas présentés dans [6] et [22] en présentant une série de méthodes itératives asynchrones utilisant plusieurs processeurs travaillant en parallèle avec des résultats expérimentaux intéressants conduits sur le multiprocesseur expérimental (Cmmp) de l'Université de Carnegie Mellon.

Comme l'étude théorique des stratégies chaotiques "optimales" (sinon efficaces, voir début Ch. II) se révèle actuellement assez difficile nous nous sommes alors volontairement placés dans un contexte expérimental pratique permettant de mieux étudier la question. Notre apport personnel (essentiellement pratique) a reposé sur deux supports principaux.

- . Support mathématique découlant de l'étude théorique des Itérations Chaotiques (voir Ch. I.A) et de la notion de matrice de contraction dont l'examen permet de choisir dans certains cas (voir Ch. II.B) des techniques chaotiques efficaces.
- . Support informatique que constitue le matériel assez important mis à la disposition des utilisateurs au Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble. Le système conversationnel CP/CMS ainsi que le terminal graphique IBM 2250 attachés à l'ordinateur IBM 360/67 nous ont permis d'effectuer un grand nombre d'expérimentations et surtout de mettre au point un "SYstème Graphique pour l'Expérimentation de Stratégies Itératives Chaotiques": SYGESIC, qui donne une idée assez complète de notre genre d'approche du problème.

Les résultats obtenus que nous essaierons de commenter le plus clairement possible permettent de dresser un ensemble d'indications et de conditions d'utilisation de stratégies chaotiques par lesquelles on clôturera ce travail.

PARTIE A

CHAPITRE I

ETUDE THEORIQUE DES ITERATIONS CHAOTIQUES

- RESULTATS RECENTS -



1 - INTRODUCTION - CONTRACTION EN NORME VECTORIELLE [5],[28],[29],[31]

(a) Définition

Considérons un espace vectoriel X que l'on munit d'une norme vectorielle p de taille n .

Soit F une application - non linéaire en général - de X dans X .

* On dira que F est contractant sur X (relativement à la norme vectorielle p) s'il existe une matrice nonnégative K d'ordre n , de rayon spectral $\rho(K) < 1$ telle que :

$$\forall x, y \in X \quad p(F(x) - F(y)) \leq Kp(x-y)$$

(b) Théorème de Contraction - Point fixe :

* Si F est p -contractant sur X (complet) alors F admet sur X un point fixe unique $x^* = F(x^*)$.

* Ce point fixe est obtenu comme limite, pour x^0 quelconque appartenant à X , de la suite (des approximations successives "A.S" conduites sur F) :

$$x^{r+1} = F(x^r) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

* Si K est une matrice de contraction de F on a l'estimation suivante de l'erreur au rang r

$$p(x^* - x^r) \leq K^r (I-K)^{-1} p(x^1 - x^0)$$

(I : matrice identité d'ordre n).

(c) Méthode de Gauss-Seidel, Relaxation

Puisque X s'écrit comme le produit de n espaces de Banach, X_i , que l'on munit de la norme vectorielle canonique p , l'application F (décrite plus haut) se décompose en

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (f_i \text{ applique } X \text{ dans } X_i)$$

L'opérateur de Gauss-Seidel relatif à F se trouve alors défini et s'écrit
- en le décomposant sur $X_1 \dots X_n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1 \dots x_n) = f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ g_i(x_1 \dots x_n) = f_i(g_1(x), \dots, g_{i-1}(x), x_i \dots x_n) \\ g_n(x_1 \dots x_n) = f_n(g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), x_n) \end{pmatrix}$$

G possède alors les propriétés suivantes :

- Il admet, sous l'hypothèse de contraction de F , le même point fixe unique x^* que F .

- Il est contractant sur X , de matrice de contraction K' qui s'écrit :

$$\text{si } K = L + U = \begin{pmatrix} & & U \\ & \ddots & \\ L & & \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$$K' = (I - L)^{-1} U$$

- La suite x^0, \dots, x^r, \dots (correspondant à $x^{r+1} = G(x^r)$) générée par la méthode de Gauss-Seidel conduite sur F (\equiv méthode des A.S conduites sur G) converge $\forall x^0$ vers x^* .

Relaxation :

* Soit l'opérateur F_ω s'écrivant : $x \rightarrow F_\omega(x) = \omega F(x) + (1-\omega)x$. Alors :

- F_ω est contractant sur X à condition que $0 < \omega < 2/(1+\rho(K))$, la matrice $K_\omega = \omega K + (1-\omega)I$ est une matrice de contraction de F_ω .

- La suite (des A.S sur F_ω) $x^{r+1} = \omega F(x^r) + (1-\omega)x^r \quad r = 0, 1, 2, \dots$ converge $\forall x^0$ vers x^* .

* On définit également l'opérateur de Gauss-Seidel G^ω relatif à F_ω . On a alors:

- G^ω est contractant $\forall \omega$ vérifiant $0 < \omega < 2/(1+\rho(K))$

- Il admet sur X l'unique point fixe x^* .

- $K^\omega = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + |1 - \omega| I)$ est une matrice de contraction de G^ω
- La suite (des A.S conduites sur G^ω) $x^{r+1} = G^\omega(x^r)$ converge quel que soit x^0 vers x^* . (C'est la méthode de relaxation usuelle présentée ici dans un cadre non linéaire).

(d) Cas linéaire

* On considère le système linéaire d'ordre n :

$$(1) \quad Ax = b$$

On associe à A la matrice de Jacobi pour transformer (1) en un problème de point fixe :

$$\text{On note } A = D - A_1 - A_2$$

◦ D matrice diagonale formée par les termes diagonaux de A (on suppose $a_{ii} \neq 0 \forall i$ donc D est inversible).

- $-A_1$ triangulaire inférieure stricte de A .
- $-A_2$ triangulaire supérieure de A .

$$(1) \text{ s'écrit : } (D - A_1 - A_2)x = b \quad \text{soit } (D^{-1} \text{ existe})$$

$$x = (D^{-1} A_1 + D^{-1} A_2) x + D^{-1} b.$$

En notant $D^{-1} A_1 = L$, $D^{-1} A_2 = U$ on peut écrire (1) sous la forme :

$$(2) \quad x = F(x) \quad \text{avec } F(x) = (L+U)x + D^{-1} b = Jx + D^{-1} b$$

(J matrice de Jacobi associée à A).

* Contraction :

La condition $\rho(|J|) < 1$ est alors nécessaire et suffisante pour que F soit contractant.

Les deux conditions $\left\{ \begin{array}{l} D^{-1} \text{ existe} \\ \rho(|J|) < 1 \end{array} \right.$ signifient que A est une H-matrice

ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution unique (commune à (1) et (2)) x^* . Il y a de plus convergence des méthodes des A.S, G.S, Relaxation conduites sur F pour calculer x^* .

* Méthode des A.S :

x^0 étant donné, on construit la suite $\{x^r\}$:

$$x^{r+1} = J x^r + D^{-1} b = F(x^r) \quad r = 0, 1, \dots$$

(C'est la méthode usuelle de Jacobi pas utilisée en pratique).

* Méthode de Gauss-Seidel

En écrivant $J = L + U$ on aura l'opérateur de G.S G relatif à F :

$$x \rightarrow y = G(x) \text{ avec}$$

$$y = Ly + Ux + D^{-1} b \text{ soit :}$$

$$y = (I-L)^{-1} Ux + (I-L)^{-1} D^{-1} b \quad ((I-L)^{-1} \exists \text{ car } \rho(|J|) < 1)$$

donc
$$G(x) = (I-L)^{-1} Ux + (I-L)^{-1} D^{-1} b.$$

Les A.S conduites sur G permettent de ce fait d'avoir :

$$\begin{cases} x^0 \text{ étant fixé} \\ x^{r+1} = G(x^r). \end{cases}$$

* On sait d'après le théorème de Stein-Rosenberg ([28],[31]) que si $\rho(|J|) < 1$ alors $\rho((I-L)^{-1}U) \leq \rho((I-|L|)^{-1}|U|) \leq \rho(|J|) < 1$ d'où la convergence de x^r vers x^* .

Relaxation : Comme précédemment on a la convergence lorsque

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(|J|)}$$

2 - ITERATIONS CHAOTIQUES [5], [28], [31]

(a) Définition

o Soit l'espace X produit de n espaces de Banach (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) X_i , muni de la norme vectorielle canonique $p^{(*)}$ s'écrivant :

(*) on prendra en pratique

$$X_i = \mathbb{R} \quad \forall i \quad \text{et } X = \mathbb{R}^n.$$

$$x \in X \rightarrow p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_i(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \quad p_i \text{ norme dans } X_i$$

o On considère le problème de point fixe :

$$F(x) = x \quad \text{s'écrivant} \quad \begin{cases} x_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \\ i = 1 \dots n \end{cases} \quad x_i \in X_i$$

F étant un opérateur de X dans X.

o Soit J une partie non vide de $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$

On définit l'opérateur F_J comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow F_J(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} y_i = x_i & \text{si } i \notin J \\ y_j = f_j(x_1, \dots, x_n) & \text{si } j \in J. \end{cases}$$

Etant donnée une suite $S = \{J_1, J_2, \dots, J_r, \dots\}$ de parties non vides de J_0 , on définit à partir de x^0 quelconque dans X la suite récurrente :

$$x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Cette suite sera appelée Itération Chaotique (série-parallèle) définie par S et partant de x^0 .

Remarques :

. En prenant $S = \{J_0, J_0, J_0, \dots\}$ on génère la suite des approximations successives conduites sur F (I.C. purement parallèle).

. En prenant $S = \{J_1, J_2, \dots, J_n, J_1, J_2, \dots, J_n, \dots\}$ avec $J_i = \{i\}$ on aura la suite des A.S appliquées à l'opérateur de G.S relatif à F (I.C purement série) : c'est la méthode de G.S sur F.

. Lorsque $S = \{J_1, \dots, J_n, \dots\}$ avec $1 \leq \text{Card}(J_i) \leq n$ on aura le cas général série parallèle.

Dans ce qui suit on s'intéressera souvent à des suites périodiques de la forme $J_1 \dots J_p, J_1 \dots J_p$ indéfiniment ainsi qu'à des cas non cycliques (MDSE).

(b) Convergence

Pour que la suite $\{x^r\}$ converge vers le point fixe x^* de F , les ensembles J_r doivent vérifier certaines conditions que l'on va préciser.

Soit $S = \{J_1 \dots J_r\}$ tronquée au rang r .

On définit l'opérateur produit :

$$C_r = F_{J_r} \cdot F_{J_{r-1}} \dots \cdot F_{J_1}.$$

F étant supposé p -contractant, de matrice de contraction K , on démontre alors (cf. [31]) que l'opérateur C_r est p -lipschitzien^(*), de matrice de Lipschitz :

$$K_r = K_{J_r} \dots K_{J_1}.$$

K_{J_i} ($i = 1 \dots r$) est définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ Elle a même } j^{\text{è}} \text{ ligne que } K \text{ pour } j \in J_i \\ \cdot \text{ Elle a même } j^{\text{è}} \text{ ligne que } I \text{ pour } j \notin J_i. \end{array} \right.$$

Condition de Contraction de C_r

Dans [31] Robert-Charnay-Musy ont démontré la proposition suivante :

Si les suites J_1, \dots, J_r parties de $J_0 = \{1, \dots, n\}$ vérifient $J_1 \cup J_2 \dots \cup J_r = J_0$ alors on a $\rho(K_r) \leq \rho(K) < 1$ et l'opérateur C_r est p -contractant.

Autrement dit en composant successivement les opérateurs F_{J_1}, \dots, F_{J_r} on arrive à construire, une fois que tous les indices $1, 2, \dots, n$ ont été pris au moins une fois, un opérateur C_r p -contractant.

De plus C_r admet un point fixe unique x^* qui est celui de F précisément.

(*) Autrement dit on a :

$$\begin{array}{l} p(C_r(u) - C_r(v)) \leq K_r p(u-v) \quad u, v \in X \\ K_r \geq 0 \quad \text{mais} \quad \rho(K_r) \leq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} = 1 \quad \text{si } \cup J_i \overset{c}{\text{str}} J_0 \\ < 1 \quad \text{si } \cup J_i = J_0 \end{array} \right. \end{array}$$

Condition du Résiduel maximal

Etant donnée $S = \{J_1, \dots, J_r, \dots\}$ (non tronquée cette fois-ci), on appelle résiduel $R(S)$ de cette suite la partie de J_0 définie par :

$$R(S) = \{i \in J_0 / \forall k \in \mathbb{N}, \exists r \geq k / i \in J_r\}$$

Exemple : . Pour $S = \{(1), (2), \dots, (n), (1), \dots\}$ on a $R(S) = \{1, 2, \dots, n\} = J_0$

. Pour $n = 3, S = \{(1, 2, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 2), (1, 2), (1, 2), \dots\}$

on a $R(S) = \{1, 2\} = J_0 - \{3\}$.

Nous plaçant sous les conditions précédentes de contraction de C_r , on a alors le théorème de convergence suivant : [31] .

* Si le résiduel $R(S)$ est maximal c'est-à-dire $R(S) = J_0$ alors la suite définie à partir de x^0 par $x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r)$ converge vers le point fixe x^* .

Inversement : Si le résiduel $R(S)$ n'est pas maximal donc strictement inclus dans J_0 alors la suite $\{x^r\}$ converge vers un point fixe partiel \bar{x} de F . (\bar{x} dépend de x^0). En effet, si $R(S) = \bar{J} \in J$, cela veut dire que les éléments de $J_0 - \bar{J} = \bar{I}$ ont été activés un nombre fini de fois ensuite définitivement abandonnés.

On obtient de ce fait, en réordonnant les composantes de F ,

$$x = \begin{pmatrix} x_{\bar{J}} \\ x_{\bar{I}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\bar{J}} \\ \bar{x}_{\bar{I}} \end{pmatrix}, \quad F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} F_{\bar{J}}(\bar{x}) \\ F_{\bar{I}}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad \text{avec}$$

$$F_{\bar{J}}(\bar{x}_{\bar{J}}) = \bar{x}_{\bar{J}} \quad \text{mais} \quad F_{\bar{I}}(\bar{x}_{\bar{I}}) \neq \bar{x}_{\bar{I}} \quad \text{d'où} \quad F(\bar{x}) \neq \bar{x}.$$

Ainsi \bar{x} n'est point fixe que de l'opérateur $F_{\bar{J}}$ qui est une restriction de F .

Remarque : On verra pratiquement (cf. B-ch. I) que la condition de résiduel maximal n'est pas aussi restrictive. On peut ainsi "abandonner" momentanément une série de composantes lorsqu'elles sont suffisamment proches de leur limite et itérer uniquement sur celles qui restent. A la fin, on effectuera quelques pas "correctifs" si nécessaire pour obtenir un point fixe effectif.

(c) Relaxation

Il est possible de définir une itération chaotique sur l'opérateur $F_\omega = F_\omega + (1-\omega)I$.

La suite $x^0 \dots x^r, \dots$ définie par $x^{r+1} = F_{\omega_{J_{r+1}}}(x^r)$ convergera alors, $\forall x^0$, vers x^* à condition que :

$$\begin{cases} * R(S) \text{ soit maximal} \\ * 0 < \omega < 2/(1+p(K)) \end{cases}$$

(d) Le cas particulier de la méthode de Southwell

* Avec notre formalisme on peut définir la méthode de Southwell comme une itération chaotique particulière.

En effet, la suite $S = \{J_1, J_2, \dots, J_r, \dots\}$ est définie au fur et à mesure que le calcul se poursuit, elle est en plus non cyclique (voir A. ch.II Les stratégies automatiques non cycliques).

On a donc :

$$\begin{cases} x^0 \text{ quelconque} \\ x^{r+1} = F_{S_{r+1}}(x^r). \end{cases}$$

$J_{r+1} = S_{r+1}$ est réduit à un seul élément. C'est en fait l'indice de la composante maximum de $p(x^r - F(x^r))$. (Si le maximum est atteint en plusieurs indices on choisit un quelconque parmi ceux-ci).

* On démontre (cf [31]) dans ce cas que sous la seule hypothèse de p -contraction de F , la suite $\{x^r\}$ converge vers la solution x^* .

(e) Convergence monotone ([13])

Dans [13], Jacquemard a étudié la convergence d'une itération chaotique dans un contexte différent de la contraction. Nous donnons un aperçu sur son approche (en simplifiant les notations).

* Il s'agit d'approcher la solution du problème de point fixe ; $x = G(x)$ avec les conditions suivantes :

. $G = K-H$ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

K et H sont deux applications monotones croissantes.

. \exists deux vecteurs x^0 et y^0 de \mathbb{R}^n vérifiant

$$\begin{cases} x^0 \leq y^0 & x^0 \text{ est dit sous-solution de } G \text{ et} \\ x^0 \leq Kx^0 - Hy^0 & y^0 \text{ est dit sur-solution de } G. \\ y^0 \geq Ky^0 - Hx^0 \end{cases}$$

* Considérons une suite chaotique $S^{(*)}$ de résiduel maximal,

$$S = \{J_1, \dots, J_r, \dots\}$$

On forme les deux suites récurrentes suivantes :

$$x_i^{r+1} = \begin{cases} x_i^r & \text{si } i \notin J_{r+1} \\ K_i x^r - H_i y^r & \text{si } i \in J_{r+1} \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots$$

$i = 1 \dots n$

$$y_i^{r+1} = \begin{cases} y_i^r & \text{si } i \notin J_{r+1} \\ K_i y^r - H_i x^r & \text{si } i \in J_{r+1} \end{cases}$$

$i = 1 \dots n$

On aura alors les propositions suivantes :

. $\{x^r\}$ et $\{y^r\}$ convergent de façon monotone vers x^* et y^*
autrement dit :

$$x^0 \leq x^1 \dots \leq x^r \dots \leq x^* \leq y^* \leq \dots \leq y^r \leq \dots \leq y^1 \leq y^0$$

. tout point fixe x de $G = K-H$ vérifie :
si $x^0 \leq x \leq y^0$ alors $x^* \leq x \leq y^*$

. soit z^0 vérifiant $x^0 \leq z^0 \leq y^0$ et la suite $\{z^r\}$ suivante :

$$z_i^{r+1} = \begin{cases} z_i^r & \text{si } i \notin J_{r+1} \\ (K-H)_i z^r & \text{si } i \in J_{r+1} \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots$$

$i = 1 \dots n$

alors on a $\forall r \in \mathbb{N} : x^r \leq z^r \leq y^r$

(*) Jacquemard a utilisé ici une autre définition de la suite chaotique. Nous avons préféré garder nos précédentes notations pour faciliter la compréhension. Nous verrons sa formulation en parlant des "Relaxations Chaotiques à retard" (J.C. Miellou [22]).

Remarque :

Si on a $G(x) = Ax+b$ avec $A = A_1 - A_2$

A application linéaire

A_1, A_2 matrices non négatives

alors on obtient (sous les mêmes hypothèses précédentes) les propriétés supplémentaires suivantes :

. si $\rho(A_1 + A_2) < 1$ alors $x^* = y^*$,
 x^n et y^n convergent vers l'unique point fixe de G

. En prenant $z^0 = (x^0 + y^0)/2$ on aura $z^n = (x^n + y^n)/2$. ($\forall n$).

3 - RELAXATION CHAOTIQUE A RETARDS [22]

Miellou ([22]) s'est intéressé à une classe d'algorithmes de relaxation dans le cas où on utilise des multiprocesseurs. Il étend certains aspects de l'étude de Chazan et Miranker [6] à l'approximation d'un point fixe d'une application linéaire contractante en norme vectorielle.

On verra ici une autre formulation des itérations chaotiques.

(a) La norme $\| \cdot \|_{v,T}$ - Contraction

. On se donne un espace E produit de n espaces de Banach E_i . A chaque E_i on associe la norme $\| \cdot \|_i$ et à E la norme vectorielle canonique p :

$$v \in E \rightarrow p(v) = (\|v_1\|_1 \dots \|v_n\|_n).$$

. On se donne en outre une application F de $D(F) \subset E$ dans E .

. Soit T une matrice (n,n) vérifiant $T \geq 0$ et $\rho(T) < 1$

$\forall v \in]\rho(T), 1[$ on sait [35] qu'il existe $\Gamma_v := (\dots \gamma_v^i \dots) \in \mathbb{R}^n$ strictement positif tel que :

$$- \|\Gamma_v\| = 1 \quad (n, \text{euclidienne})$$

$$- T \Gamma_v \leq v \Gamma_v$$

On introduit sur E la norme $\| \cdot \|_{v,T}$

$$v \in E \rightarrow \|v\|_{v,T} = \max_{1 \dots n} \frac{1}{\gamma_i} \|v_i\|_i$$

On démontre alors que si F est p -contractante sur $D(F)$, de matrice de contraction T alors elle est contractante sur $D(F)$ pour la norme $\| \cdot \|_{v,T}$:

$$p(F(u)-F(v)) \leq T p(u-v) \Rightarrow \|F(u)-F(v)\|_{v,T} \leq \|u-v\|_{v,T}$$

$$u, v \in D(F) \quad , \quad T \geq 0, \rho(T) < 1$$

(b) Suites R-chaotiques

Soit la suite $\{h(p); k(p)\}$ vérifiant :

- . $\forall p \in \mathbb{N} \quad h(p) \subset \{1, \dots, n\}$
- . $h(p) \neq \emptyset$
- . $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\{p \in \mathbb{N} / i \in h(p)\}$ est infini.

Cette suite est dite R-chaotique si on a

- . $\forall p \in \mathbb{N} : k(p) = \{k_1(p), \dots, k_n(p)\}$, $k_i(p) \in \mathbb{N}$
- . $\exists s$ entier positif et une fonction $s(p)$ définie sur \mathbb{N} / ;
 - $p-s(p)$ est une fonction croissante de p
 - $s(p) \leq \min(s, p)$
 - $\forall p \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $0 \leq k_i(p) < s(p)$.

(c) Algorithmes de relaxation chaotique à retards (R.C.R.)

. Soit F une application de $D(F) \subset E$ dans E

$$v \in E \rightarrow F(v) = (f_1(v) \dots f_n(v))$$

. Soit $\{h(p); k(p)\}$ une suite R-chaotique

. u^0 fixé $\in D(F)$

On définit alors la suite $\{u^p\}$ comme suit :

$u^1 \dots u^p$ étant calculés on a :

$$(1) \quad u_j^{p+1} = \begin{cases} u_j^p & \text{si } j \notin h(p) \\ f_j(\dots, u_{i_1}^{p-k_1(p)}, \dots) & \text{si } j \in h(p) \end{cases}$$

$$j = 1 \dots n$$

$$(u^{p+1} \in D(F))$$

(1) définit l'algorithme R.C.R. associé à $\{h(p), k(p)\}$ pour calculer un point fixe de F .

Remarque : On note que pour calculer u_j^{p+1} on n'a pas nécessairement besoin des itérés qui viennent juste d'être calculés : u_i^p mais on peut remonter plus loin dans la suite. $k_i(p)$ correspond à cette "remontée" ou retard.

(d) Convergence des algorithmes R.C.R.

On suppose que :

- . $D(F) \neq \emptyset$
- . F admet un point fixe $u^* \in D(F)$ (hypothèse d'existence)
- . F est p -contractante en u^* (1), T est sa matrice de contraction.
- . $B_{(u^*, r)}^{v, T}$ est la boule de centre u^* , de rayon r dans E pour la norme
norme $\| \cdot \|_{v, T}$.
- . soit $r_v = \sup_{B_{(u^*, r)}^{v, T} \subset D(F)}$

sous ces hypothèses et si $u^* \in B_{(u^*, r_v)}^{v, T} = B_v$ alors :

- . (1) définit $u^p \forall p$, $u^p \in B_v$.
- . u^p converge dans E vers u^* point fixe de F .

Remarque : Lorsque $D(F) = E$, F contractante sur $D(F)$, $\{h(p); k(p)\}$ étant une suite R -chaotique alors l'algorithme de relaxation chaotique associé converge vers u^* point fixe de F . (On a ici $B_v = E$)

* Cas particuliers :

- . En prenant $h(p) = \{1, \dots, n\} \forall p$ et $k_i(p) = 0 \forall i$
- (1) définit la suite des approximations successives conduites sur F
- . Pour $k_i(p) = 0 \forall i$ on obtient la définition d'une itération chaotique que nous avons donnée en (2). (retard nul).

(1) On a $p(F(u) - u^*) \leq T p(u-v)$ $T \geq 0$ $\rho(T) < 1$
pour u dans un voisinage de u^* .

La condition $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\{p \in \mathbb{N} / i \in k(p)\}$ est infini correspond à celle du résiduel maximal.

(e) Illustration pratique des algorithmes R,C,R,

Miellou explique comment on peut conduire ces techniques chaotiques lorsqu'on dispose de plusieurs processeurs (voir le paragraphe -5- à titre de comparaison).

- . Il s'agit donc de calculer le point fixe : $x = F(x)$
(sous les mêmes hypothèses précédentes).

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad x \in E.$$

- . m processeurs identiques ($m < n$) sont disponibles. $P_1 \dots P_m$

On suppose que deux ensembles d'hypothèses - que nous n'expliquerons pas - (H_A) et (H_B) sont vérifiés^(*).

- . On considère une suite R-chaotique $\{h(p) ; k(p)\}$ ^(**).

* Algorithme multiprocesseur :

$u^0 \in E$ est fixé

$$\begin{cases} \cdot P_1 \text{ fait le calcul suivant} \\ \cdot P_{r+1} \text{ (pour } r \leq m-1) \text{ calcule :} \end{cases} \begin{cases} \left. \begin{aligned} u_j^1 &= u_j^0 & \text{si } j \neq h(0) \\ u_j^1 &= f_j(u^0) & \text{si } j = h(0) \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} u_j^{r+1} &= u_j^r & \text{si } j \notin \bigcup_{0 \leq \ell \leq r} h(\ell) \\ u_j^{r+1} &= f_j(\dots, u_i^{p-k_i(p)}, \dots) & \text{si } j=h(p) \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

(*) (H_A) et (H_B) correspondent à des propriétés touchant les processeurs $P_1 \dots P_m$ (voir [22] pour plus de détails).

(**) $h(p)$ est réduit ici à un élément de $\{1 \dots n\}$

. P_ℓ (pour ℓ = r mod(m)+1) calcule

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^{r+1} = u_j^r \quad \text{si } j \notin \cup_{0 \leq s \leq m} \{h(r-s)\} \\ u_j^{r+1} = u_j^r = \dots = u_j^{r-m+1} \quad \text{si } j = h(r-m) \\ u_j^{r+1} = f_j(\dots, u_i^{r-k_i(p)}, \dots) \quad \text{si } j = h(r) \end{array} \right.$$

4 - ALGORITHMES SECONDAIRES DE CONTROLE [17]

Nous revenons au cas mono-processus.

Se plaçant sous les hypothèses explicitées en 2-(a) nous donnons ici un aperçu sur certains algorithmes de relaxation contrôlés par un algorithme secondaire que Luong [17] a traité dans sa thèse. Cela nous permettra d'établir une comparaison avec les techniques que l'on exposera dans le chapitre suivant.

(a) Contrôle de la convergence

On considère l'itération chaotique (en revenant au formalisme de 2).

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^0 \text{ fixé} \\ x^{r+1} = F_{J_{r+1}}(x^r) \end{array} \right. \quad \text{avec } S = \{J_1, \dots, J_r, \dots\} \text{ de résiduel maximal}$$

Supposons qu'à l'étape r_1 on puisse écrire

$$p(x^{r_1} - x^*) \leq z^{r_1} \quad (\text{connu}).$$

On construit alors la suite^(*)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z^{r_1} \text{ fixé} \\ z^{r+1} = K_{J_{r+1}}(z^r) \end{array} \right. \quad r = r_1, r_1+1, \dots$$

(*) On désigne par Algorithme principal (1) et Algorithme secondaire (2)

K matrice de contraction de F : $K = (k_{ij}) \quad i, j = 1 \dots n$

* On montre alors que

$$\cdot \rho(x^r - x^*) \leq z^r \quad r \geq r_1$$

$$\cdot z^r \rightarrow 0 \quad \text{car (2) définit une itération chaotique de résiduel}$$

$$r \rightarrow \infty$$

maximal sur la matrice de contraction K de F.

* L'algorithme (2) permet donc d'estimer à chaque étape l'erreur par rapport à x^* , il peut de ce fait être utilisé pour "conduire" (i.e. fixer les éléments de S) l'algorithme (1).

(b) Algorithmes explicites

On donne ici seulement les grandes lignes.

- α - Algorithme I et II :

Grâce à l'algorithme II de contrôle qui permet de donner, en utilisant la norme $\| \cdot \|_{v,T}$ (cf. paragraphe 4), une majoration z^r de l'erreur, on choisira alors d'itérer dans I sur l'indice qui correspond - grossomodo - à celui de la composante de z^r où $\|z^r\|_{v,T}$ est atteint.

- β - Algorithmes mixtes :

. Southwell :

L'indice à "toucher" sera pris dans l'ensemble suivant :

$$I_0 = \{i_0 \in \{1 \dots n\} / p_{i_0}^{(x_{i_0}^{r-1} - F_{i_0}(x^{r-1}))} = \text{Max}_{i=1 \dots n} p_i(x_i^{r-1} - F_i(x^{r-1}))\}^{(*)}$$

. Méthode par voisinage : (cf. Stratégies interactives A.CH. II)

Ayant déterminé par un certain procédé (analogue au précédent : maximum d'une norme sur z^r) l'indice à "toucher", on choisit en fait un voisinage l'entourant sur lequel on conduira les itérations suivantes.

Nous donnons dans le chapitre II un moyen de définir ce voisinage avec la méthode de partage en zones.

Sur cet ensemble d'algorithmes, Luong a fourni des résultats expérimentaux qui permettent d'obtenir des améliorations intéressantes par rapport à G.S.

(*) Revoir 2-(a) pour la notation p_i .

5 - METHODES ITERATIVES ASYNCHRONES POUR MULTIPROCESSEURS [2]

Baudet présente dans [2] une série de méthodes itératives asynchrones pour résoudre des problèmes de point fixe. Il introduit des schémas d'implémentation parallèle de processeurs sans aucune synchronisation entre eux.

Cela lui permet de fournir une généralisation de l'étude de Chazan-Miranker [6] et de Miellou [22]. Cette approche originale a donné des résultats qui démontrent l'intérêt de la totale asynchronisation dans le calcul.

L'élément principal de l'étude de Baudet consiste d'ailleurs en une expérimentation réelle conduite sur le multiprocesseur expérimental Cmp (Carnegie Mellon Multiprocessor) de l'Université Carnegie Mellon et qui peut comprendre de 1 à 6 processeurs connectés entre eux.

Dans ce qui suit on va essayer de rendre compte très brièvement de son étude.

(a) Définition des méthodes asynchrones :

On se propose de résoudre le problème

$$x = F(x) \quad F : \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

x^0 étant donné on définit la suite : $x^1 \dots x^j \dots$ ainsi :

$$x_i^j = \begin{cases} x_i^{j-1} & \text{si } i \notin J_j \\ \begin{matrix} s_1(j) & s_n(j) \\ f_i(x_1 \dots, x_n) \end{matrix} & \text{si } i \in J_j \end{cases}$$

avec $J = \{J_j / j = 1, 2, \dots\}$ une suite de parties non vides de $\{1, \dots, n\}$

$S = \{(s_1(j), \dots, s_n(j)) / j = 1, 2, \dots\}$ une suite d'éléments de \mathbb{N}^n .

J et S doivent vérifier $\forall i = 1 \dots n$ (cf. paragraphes 2 et 4)

$s_i(j) \leq j-1 \quad j = 1, 2, \dots$

$s_i(j)$ considérée comme fonction de j tend vers ∞ lorsque $j \rightarrow \infty$

i intervient infiniment souvent dans $J_j \quad j = 1, 2, \dots$

Remarque :

En prenant $s_i(j) = j-1$ pour $i = 1 \dots n$, $j = 1, 2 \dots$ on revient à la définition donnée au paragraphe -2-.

(b) Convergence

L'auteur donne une condition suffisante de convergence :
Si F est contractant sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et si $F(D) \subset D$ alors toute I.A. (F, x^0, J, S) converge vers le point fixe unique x de F dans D .

(c) Exemples

Nous passons directement aux résultats pour simplifier l'exposé. On dispose de k processeurs en parallèle. A chacun on associe un sous-ensemble de composantes qu'il doit évaluer. Il calcule donc cycliquement de nouvelles valeurs pour ces composantes. Le choix des valeurs utilisées dans ces nouvelles évaluations est le critère de distinction entre les différentes méthodes suivantes.

. Méthode asynchrone de Jacobi : (AJ)

Chaque processeur utilise dans ses évaluations uniquement les composantes connues au début d'un cycle, il fournit aux autres processeurs toutes les nouvelles valeurs à la fin de chaque cycle.

. Méthode asynchrone de G.S. (A.G.S.)

Ici chaque processeur utilise dans son sous-ensemble de composantes les valeurs au fur et à mesure qu'elles sont calculées dans le même cycle.

. Méthode purement asynchrone (PA)

Un processeur calcule les nouvelles valeurs de chaque composante en utilisant les plus récentes valeurs de toutes les composantes (i.e. même celles qui ne lui sont pas associées) et fournit chaque nouvelle valeur aux autres processeurs immédiatement après son évaluation.

Comme le souligne Baudet, la (PA) est la plus simple à mettre en oeuvre et est en outre, les expériences l'ont prouvé, la plus efficace.

La (AJ) paraît comme la plus mauvaise en exigeant à chaque début de cycle une lecture de toutes les composantes et leur mise à jour à la fin.

Résultats :

L'auteur s'est proposé de résoudre un système linéaire $x = Ax+b$ provenant de la discrétisation d'un problème de Laplace avec conditions de Dirichlet sur un domaine rectangulaire.

Ses deux critères de comparaison entre les méthodes sont :

- . Le nombre moyen de pas pour diviser (asymptotiquement) l'erreur par 10.
- . Le temps moyen t_c pour accomplir cette réduction.

En se basant sur ce second critère par exemple, on constate que l'efficacité augmente avec le nombre de processeurs. Ainsi,

- . Pour la méthode de Jacobi (AJ) en passant de 1 à 6 processeurs on gagne jusqu'à 69 % sur t_c .

- . Pour la méthode (AGS) on réalise près de 58 % et avec la (PA) près de 83 %.

De plus, on constate (avec 6 processeurs par exemple) que la (PA) est près de 3.6 fois plus rapide que la (AJ), pour l' (AGS) : 2.5 fois.

En conclusion, l'auteur insiste sur le gros avantage des méthodes totalement asynchrones avec multiprocesseurs, qu'il faut opposer à l'inconvénient présenté par une synchronisation dans la communication entre les différents processeurs où un temps important est perdu en attente.

Conclusion :

Nous avons essayé dans ce chapitre de faire un tour d'horizon sur les résultats qui nous ont intéressé dans notre étude.

Nous exposerons dans les chapitres suivants notre propre approche de la question.

En particulier, cette approche est assez différente de celles de Miellou et Baudet concernant la convergence de relaxations chaotiques sur multiprocesseurs. Dans notre contexte, nous nous limitons à l'utilisation d'un monoprocesseur et essayons de jouer sur la grande variété des stratégies chaotiques possibles pour rechercher celles qui sont efficaces sous le rapport du gain en temps de calcul et en opérations par rapport à des stratégies systématiques.

CHAPITRE II

STRATEGIES ITERATIVES CHAOTIQUES



INTRODUCTION : Le problème de la stratégie "optimale"

Le problème de la stratégie "optimale" est loin d'être résolu du point de vue théorique. Cependant, malgré la complexité de la question quelques travaux en cours, tel celui de A. ABTROUN [1] ont permis d'acquérir certains points positifs.

En ce qui nous concerne, nous avons préféré nous situer sur le plan pratique pour étudier ce sujet. Notre but a été non pas la recherche et la détermination explicite de stratégies chaotiques optimales, mais plutôt l'élaboration pratique et expérimentale de techniques chaotiques EFFICACES. Par efficacité, nous entendons l'économie en nombre d'opérations (réévaluations des composantes), essentiellement, et si possible en temps d'exécution par rapport à une méthode classique de résolution telle que Gauss-Seidel. Ces deux contraintes : nombre d'opérations-temps ne sont pas en général faciles à respecter simultanément. En effet, dans certains cas que nous verrons plus loin la détermination d'une stratégie efficace exige un travail supplémentaire de recherche et de vérifications. Il va sans dire que la stratégie "OPTIMALE" risque malheureusement d'être la plus coûteuse dans sa détermination.

Nous avons pu opter pour un certain compromis en préférant la première contrainte - plus intéressante - à la seconde. Nous ne prétendons absolument pas avoir suivi des démarches très rigoureuses : car la complexité du problème que nous voulions résoudre justifie pleinement l'intuition numérique qui a permis d'aboutir à des constatations assez intéressantes.

En effet - comme nous le verrons par la suite - nous sommes en mesure de répondre - quoique d'une manière empirique et non forcément exhaustive - à un certain nombre de questions telles que : Est-il possible de dresser une liste de critères pouvant guider notre choix de telle ou telle stratégie chaotique ? Dans quel cas peut-on s'attendre à une amélioration par rapport à la méthode de Gauss-Seidel ?

L'approche expérimentale de notre étude nous a amené à envisager une classification des stratégies chaotiques en deux ensembles distincts mais complémentaires :

. Les stratégies automatiques où une observation a priori des données du problème à résoudre - telle que la matrice de contraction de l'opérateur de point fixe en question - permet de décider sur la détermination de la suite chaotique S soit totalement avant le calcul soit par l'intermédiaire d'un algorithme de choix s'exécutant parallèlement au processus itératif principal.

. Les stratégies interactives où l'intuition joue un rôle prépondérant. En effet, c'est ici que l'on a été conduit à élaborer le système conversationnel graphique SYGESIC. Ce système permet à son utilisateur, grâce à l'observation sur un écran de visualisation de l'évolution de certaines données du problème qu'il est en train de résoudre, de définir d'une manière interactive les éléments successifs de la suite chaotique S . Son critère de choix pouvant varier d'une étape à une autre.

La combinaison des résultats obtenus par ces deux sortes d'approches a permis de fournir un certain nombre de renseignements sur le comportement numérique des itérations chaotiques.

Rappel

Nous supposons le problème de point fixe à résoudre mis sous la forme :

$$x = F(x) \quad \left| \begin{array}{l} x_i = f_i(x_1 \dots x_n) \\ i = 1 \dots n \end{array} \right. \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

La méthode des Approximations successives permet de générer à partir d'un x^0 de départ la suite $\{x^p\}$ $p = 1, 2, \dots$ où $x^p = F(x^{p-1})$

autrement dit :

$$\left(\begin{array}{l} x_1^p = f_1(x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}) \\ \vdots \\ x_n^p = f_n(x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}) \end{array} \right.$$

Ces itérations sont dites de type "parallèle".

Quant à la méthode de Gauss-Seidel - qu'on préférera à la précédente - elle consiste à associer à F un opérateur F_G et à générer la suite $\{x^p\}$ $p = 1, 2, \dots$ avec

$$x^p = F_G(x^{p-1}) \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} x^0 \text{ quelconque} \\ x_1^p = f_1(x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}) \\ \vdots \\ x_i^p = f_i(x_1^p \dots x_{i-1}^p, x_i^{p-1} \dots x_n^{p-1}) \\ \vdots \\ x_n^p = f_n(x_1^p \dots x_{n-1}^p, x_n^{p-1}) \end{array} \right.$$

Ces itérations sont dites de type "série".

Dans l'élaboration des stratégies chaotiques c'est essentiellement la suite S qui nous sert de critère de distinction (cf. CH. I.A). Elle comporte théoriquement une infinité d'éléments mais en pratique elle est tronquée dès l'instant où on atteint une convergence jugée acceptable. De ce fait, plus la précision est fine plus $\text{Card}(S)$ est élevé. Une stratégie chaotique de suite associée S_1 sera dite plus efficace ou meilleure qu'une stratégie de suite S_2 si pour une même précision on a $\text{Card}(S_1) < \text{Card}(S_2)$. Nous faisons a priori abstraction des coûts respectifs en temps.

A partir de ce point de vue les différentes techniques que nous allons décrire deviennent comparables.

1 - STRATEGIES AUTOMATIQUES

La suite chaotique S est déterminée de deux façons :

- . totalement avant le calcul : la stratégie est alors dite cyclique .
- . incomplète au départ, elle est définie d'une manière automatique pendant le déroulement du calcul : la stratégie est dite non cyclique ici.

1 Techniques cycliques :

- a - Techniques de permutation :

La suite $J_* = \{1, 2, \dots, n\}$ correspond à l'ordre standard dans lequel les équations du système à résoudre sont classées.

J_0 étant une permutation de J_* , a priori quelconque mais on

verra ultérieurement comment il convient de la choisir (cf. CH.II.B). La suite S s'écrira : $S = \{J_0, J_0, \dots\}$. C'est-à-dire qu'on "balaie" cycliquement les composantes ordonnées suivant J_0 le nombre de fois qu'il est nécessaire pour atteindre la précision désirée.

Si $J_0 = \{i_1, i_2 \dots i_n\}$, on déroulera le processus itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i_1}^{r+1} = f_{i_1}(x_{i_1}^r \dots x_{i_n}^r) \\ \vdots \\ x_{i_k}^{r+1} = f_{i_k}(x_{i_1}^{r+1} \dots x_{i_{k-1}}^{r+1}, x_{i_k}^r \dots x_{i_n}^r) \\ \vdots \\ x_{i_n}^{r+1} = f_{i_n}(x_{i_1}^{r+1} \dots x_{i_{n-1}}^{r+1}, x_{i_n}^r) \end{array} \right. \quad r = 0, 1, \dots, p$$

Donc $S = (J_0)^P$ (*) et $\text{Card}(S) = n.p$, le facteur p dépendant de la précision.

Notons que lorsque $J_0 = J_*$ on a bien évidemment la méthode classique de Gauss-Seidel.

- b - Techniques de répétition :

Une extension des techniques de permutation consiste à fixer une suite initiale J_0

- . contenant tous les éléments de J_* dans un ordre quelconque
- . certains éléments peuvent apparaître plusieurs fois.

Autrement dit : $J_0 = \{(i_1)^{r_1}, (i_2)^{r_2} \dots (i_n)^{r_n}\}$ avec $\{i_1 \dots i_n\} = P(J_*)$

et $r_i \geq 1 \quad i = 1 \dots n$.

De la même manière on aura $S = \{J_0 \dots J_0\} = (J_0)^P$ et $\text{Card}(S) = p \cdot \sum_{k=1}^n r_k$

(*) Dans la méthode des approximations successives S s'écrit précisément

$S = \{J_0, J_0 \dots\}$ avec $J_0 = \{i_1 \dots i_n\}$ tandis que dans celle de Gauss-Seidel il est plus correct d'écrire J_0 sous la forme $J_0 = \{(i_1), (i_2) \dots (i_n)\}$ pour indiquer que les itérations sont faites en série. Cette remarque est valable pour toute la suite.

Cette répétition de certains éléments est pleinement justifiée dans le cas où il existe un net déséquilibre entre les différentes vitesses de convergence des composantes du système. Grâce à un choix judicieux basé essentiellement sur l'étude de la matrice de contraction de F , on arrive à fixer des suites J_0 amplement efficaces et améliorant la méthode de Gauss-Seidel d'une manière conséquente. On cherche ainsi à favoriser ce qui est lent à converger aux dépens de ce qui est beaucoup plus rapide.

2 Techniques non cycliques :

Méthode de Disparitions Successives des Eléments (M.D.S.E.)

L'idée de base dans l'élaboration de ces techniques est la suivante : Les différentes composantes du système considéré "ne convergeant pas toutes avec la même vitesse" il paraît superflu - dans la méthode de Gauss-Seidel - de garder jusqu'à la fin du processus itératif des composantes qui ont satisfait depuis très longtemps au test de précision pour le seul but d'aboutir à une convergence en bloc de l'ensemble des x_i . Il semblerait judicieux d'éviter de telles itérations inutiles en abandonnant - même provisoirement - certaines composantes le temps qu'il faut à celles plus lentes à converger pour atteindre leurs valeurs limites. On tend ainsi à introduire un équilibre entr'elles. Ce processus est alors répété autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir la précision finale souhaitée. De ce fait, seule la suite initiale J_0 est fixée a priori. Les suites $J_1, J_2 \dots$ sont déterminées automatiquement pendant le déroulement du calcul par un algorithme de disparitions successives des éléments (cf. la méthode de Southwell) fixé dès le départ.

Une grande liberté existe dans le choix de tels algorithmes, nous donnons à titre d'exemple celui qui nous a semblé le plus intéressant :

. étape (0) : un "balayage" de toutes les composantes du système ordonnées suivant J_0 est effectué.

On calcule à la fin pour tous les $x_i/i \in J_0$ les quantités :

$$z_i = |(x_i^1 - x_i^0)/x_i^0|. \text{ Si } z_i \leq \epsilon_0 \text{ (fixé au départ)}$$

l'indice i est "sorti" de J_0 .

A la fin de ces tests on obtient donc une nouvelle suite J_1 . On recommence alors à partir de (0) avec J_1 à la place de J_0 .

- . Lorsque le dernier J_p est vide (tous les éléments ont disparu), on a le choix entre :
 - arrêter le calcul (moyennant une certaine correction du résultat pour avoir effectivement une précision ϵ_0)
 - choisir un nouvel $\epsilon_1 (< \epsilon_0)$ et recommencer le même processus en repartant en (0) avec J_0 .

D'une manière générale avec une suite décroissante $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \dots \epsilon_p$, on peut écrire :

$$S = \{ \underbrace{J_0 \dots J_0}_{r_0}, \underbrace{J_1^1 \dots J_{r_1}^1}_{r_1}, \underbrace{J_0 \dots J_0}_{r_2}, \underbrace{J_1^2 \dots J_{r_3}^2}_{r_3}, \underbrace{J_0 \dots J_0}_{r_4}, \underbrace{J_1^3 \dots J_{r_5}^3}_{r_5}, \underbrace{J_0 \dots J_0}_{r_6}, \dots \}.$$

correction
correction
correction

ϵ_0
 ϵ_1
 ϵ_2
 ϵ_p

arrêt
arrêt
arrêt

Les différentes suites J_i^k vérifiant : $J_{k+1}^i \subset J_k^i \quad \forall i, k$ (imbrications successives).

Remarque : Lorsque tous les éléments disparaissent la solution \bar{x} obtenue n'est pas en général acceptable car l'abandon plus ou moins lointain de certaines composantes conduit à la convergence vers un point fixe partiel.

En effet, soit x^p l'itéré précédent \bar{x} .

On a $F(x^p) = \bar{x}$ et $|(\bar{x}_i - x_i^p)/x_i^p| \leq \epsilon_k \quad i = 1 \dots n.$

Rien ne prouve que $|(\bar{x}_i - f_i(\bar{x}_i))/\bar{x}_i| \leq \epsilon_k \quad i = 1, \dots, n$

C'est pour cela qu'un certain nombre r de balayages correctifs sur l'ensemble des composantes est souvent nécessaire pour avoir

$|(\bar{x}_i - f_i^r(\bar{x}_i))/\bar{x}_i| \leq \epsilon_k \quad i = 1 \dots n$ c'est-à-dire une convergence effective avec la précision ϵ_k .

Nous verrons que le facteur r peut être nul dans quelques cas particuliers (cf. CH.I.B.)

II - STRATEGIES INTERACTIVES

La contrainte à satisfaire pour pouvoir appliquer de telles stratégies est que l'ordinateur utilisé doit fonctionner en système conversationnel.

Cette possibilité nous est offerte au Centre de Calcul de Grenoble où l'on dispose d'un IBM 360/67 utilisable sous le système CP/CMS. Un second support informatique : le terminal graphique IBM 2250 relié au calculateur permet de mettre au point des techniques chaotiques encore plus originales en s'aidant d'un écran de visualisation sur lequel on peut afficher certaines données du problème à résoudre et choisir en conséquence - intuitivement - la "meilleure" démarche calculatoire.

C'est ainsi qu'on a construit le système graphique SYGESIC (Système Graphique pour l'Expérimentation de Stratégies Itératives Chaotiques) utilisant les performances et les possibilités de CP/CMS et du terminal IBM 2250, permettant de ce fait d'expérimenter des stratégies chaotiques originales.

Nous dirons grossièrement d'une façon analogue aux techniques précédentes, que seule la première suite J_0 est connue dans S a priori. Les suites $J_1, J_2, \dots, J_r, \dots$ sont déterminées par des moyens que l'utilisateur exploite en observant l'écran de visualisation. Ce qui fait que ces suites ne sont pas forcément liées par des relations d'inclusions.

Nous verrons plus en détail cette question ultérieurement (cf. CH. III.B).

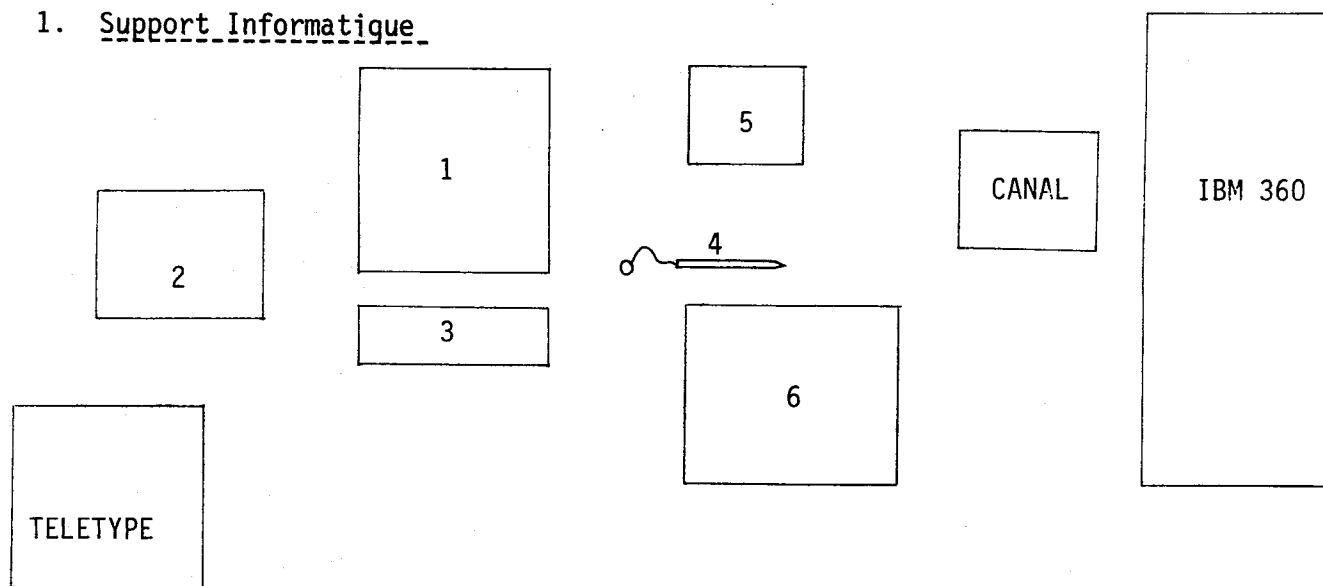
Le système SYGESIC

Le système graphique pour l'expérimentation de stratégies itératives chaotiques est basé sur l'utilisation du terminal graphique IBM 2250. Il permet, ayant à résoudre un problème linéaire aux dérivées partielles (avec conditions de Dirichlet comme modèle standard) de suivre d'une manière originale assez souple le déroulement du calcul et d'expérimenter des stratégies chaotiques interactives avec la possibilité d'arrêter le calcul au moment voulu et de l'orienter suivant la direction désirée.

Son intérêt principal est essentiellement pédagogique. Il permet de mieux voir et mieux comprendre ce qui en général est invisible pour l'utilisateur à savoir : les variations des écarts relatifs entre les itérés successifs, les zones de lente ou rapide convergence, etc... et de là, tirer les enseignements nécessaires quant à l'élaboration de techniques de calcul originales permettant de réduire le nombre d'opérations et le temps d'exécution (requis par les méthodes standards en l'occurrence celle de Gauss-Seidel). Ce système fait suite à une version très simple qui rentre dans le contexte d'un ancien projet de recherche. En se basant sur ce travail préliminaire, nous avons pu introduire un certain nombre de possibilités rendant le système assez accessible. Le jeu d'options qui sont disponibles couvre un large éventail de techniques que nous détaillerons ultérieurement. Précisons que la mise en oeuvre quoique relativement plus coûteuse que l'écriture d'un simple programme de résolution classique ne tient son intérêt que dans la mesure où elle permet de donner libre cours à l'intuition que l'on arrive à canaliser dans le sens de l'"efficacité" qui revêt ici un aspect peut être empirique mais en tout cas économique.

Nous exposons dans ce qui suit les grandes lignes de SYGESIC ce qui équivaut en quelque sorte à une notice technique d'utilisation.

1. Support Informatique



Le terminal IBM 2250 est un dispositif d'entrée/sortie connecté à l'ordinateur IBM 360/67 par l'intermédiaire d'un canal sélecteur. Il est

composé des unités suivantes :

- 1 Un écran cathodique carré de 30 cm de côté permettant d'afficher des images.
- 2 Un clavier de fonctions : il est constitué d'un ensemble de 32 touches numérotées de 0 à 31. En enfonçant une touche on provoque une interruption qui aiguille le programme sur la partie associée au numéro de cette touche.
- 3 Un clavier alphanumérique servant à entrer des textes et les faire apparaître sur l'écran.
- 4 Un photostyle (crayon optique) constitué d'une cellule photoélectrique. Il sert à désigner un objet affiché ou à récupérer les coordonnées d'un point de l'écran.
- 5 Une tablette SYLVANIA possédant un stylet et qui permet de détecter plus rapidement un objet sur l'écran.
- 6 Une mémoire d'entretien de 8K octets contenant le programme graphique correspondant à l'image visualisée.

Enfin, un télétype permet d'accéder au système CP/CMS et de se faire attacher le terminal graphique.

Précisons qu'on dispose en outre d'un moyen permettant de faire tracer les images de l'écran par le traceur de courbes BENSON.

L'utilisation du terminal graphique peut se faire grâce à :

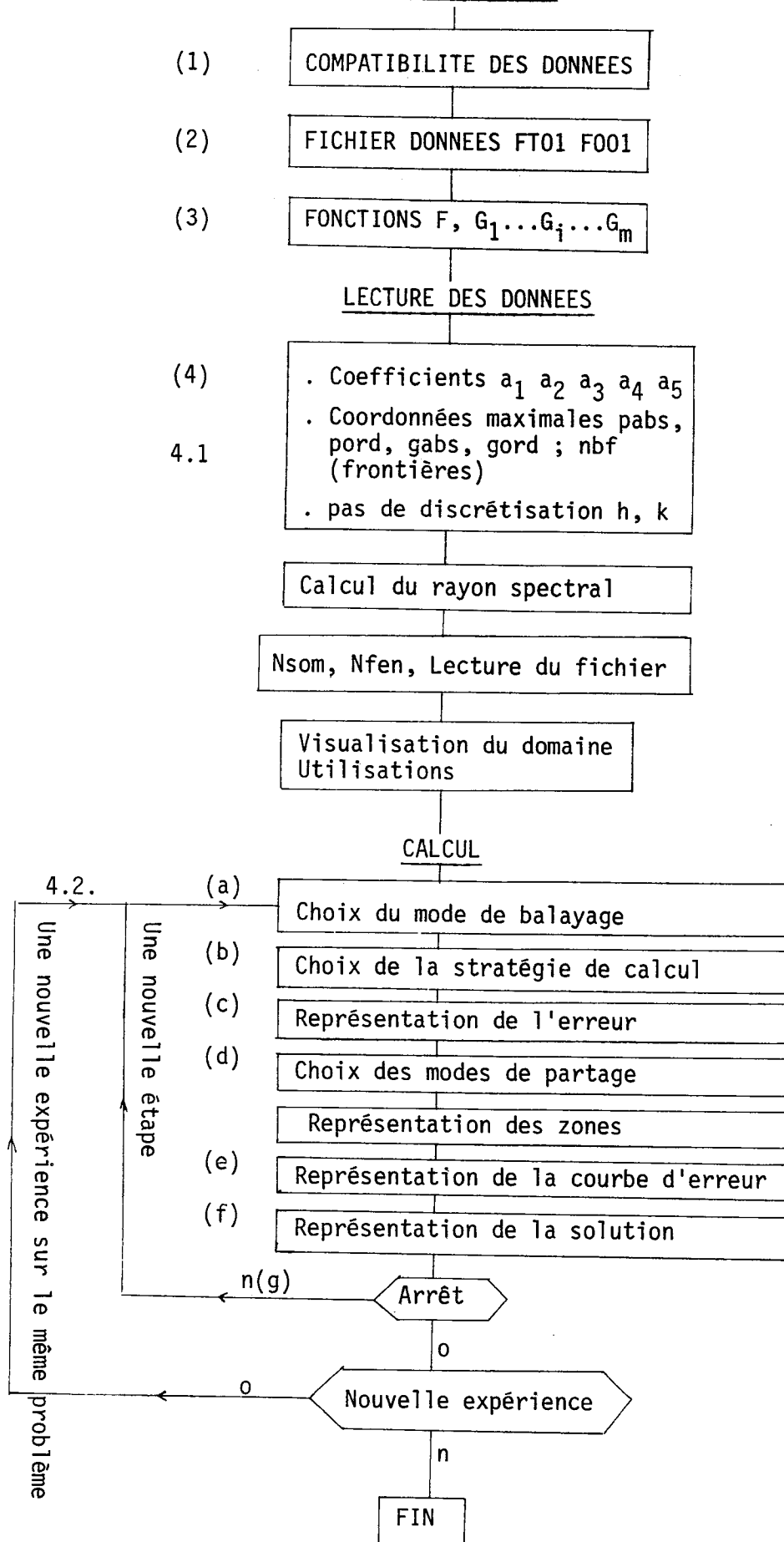
- . G.S.P. (Graphic Subroutine Package) ensemble de sous programmes de base écrits en FORTRAN.
- . GRIGRI moyen plus souple permettant un accès à partir du langage ALGOL W.

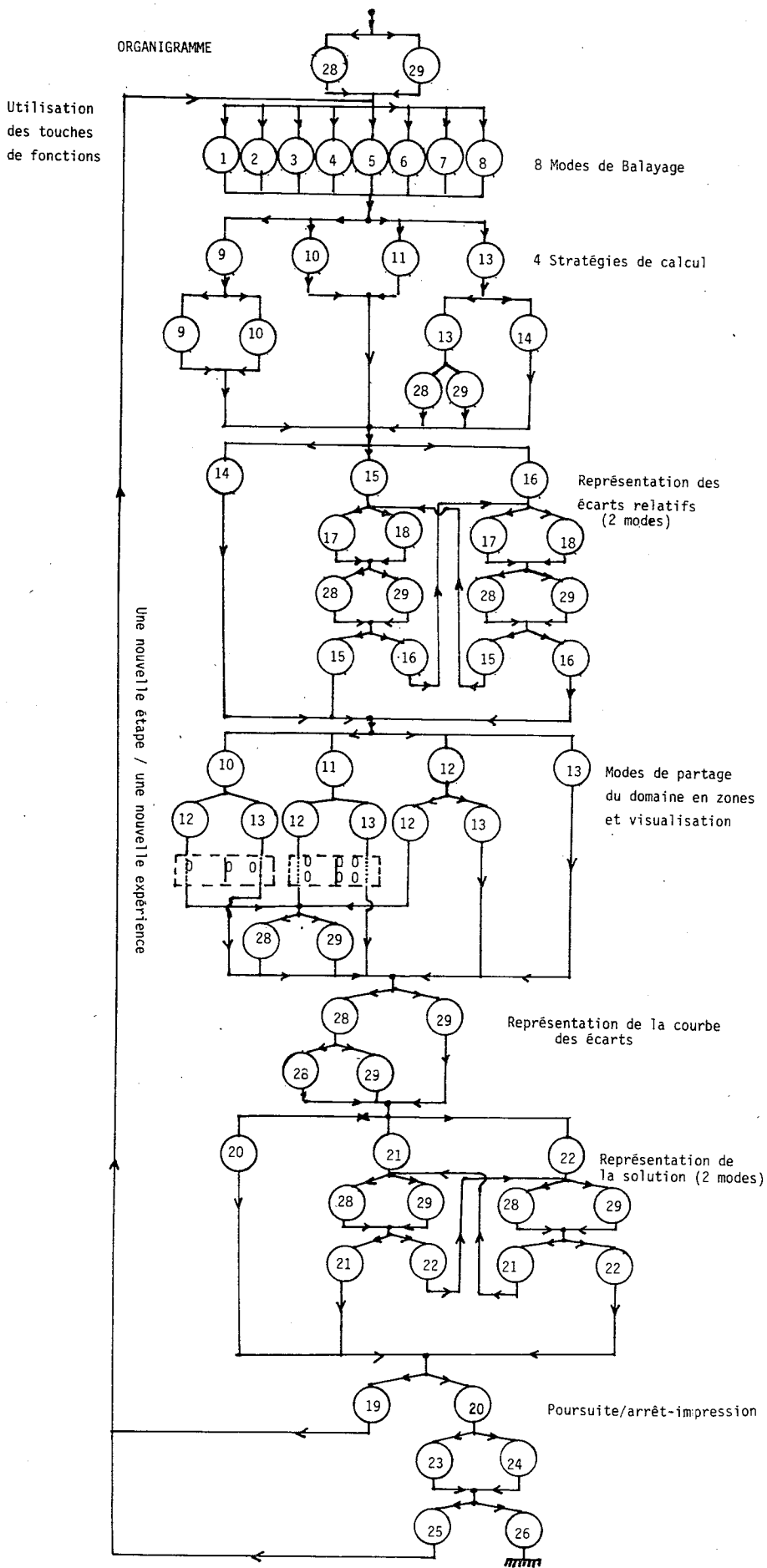
2. Description de SYGESIC

SYGESIC est constitué par un ensemble de 20 sous-programmes écrits en ALGOL W et en FORTRAN.

Nous donnons ci-après :

- . un organigramme de ses parties essentielles,
- . l'organigramme d'utilisation des touches de fonctions ce qui permet des interactions très rapides avec l'ordinateur et le terminal 2250.

Organigramme



Avant de parcourir ces différentes parties, nous donnons en introduction la démarche préparatoire conduisant à l'obtention du système de point fixe à résoudre.

2.(0) Introduction

Le problème aux dérivées partielles à résoudre se met sous la forme standard :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial u}{\partial x} + a_4 \frac{\partial u}{\partial y} + a_5 u = F/D \\ u = g_1 / \Gamma_1 \\ \vdots \\ u = g_m / \Gamma_m \end{array} \right.$$

Les coefficients a_i sont constants. D est un domaine de \mathbb{R}^2 de frontière $\Gamma = \partial D = \cup \Gamma_i$

On suppose démontrées l'existence, l'unicité et la régularité de la solution u . Seule sa recherche effective (en fait une approximation) nous intéresse ici.

Nous adopterons pour discrétiser (P) un schéma aux différences finies (supposé cohérent et stable).

Précisons que la forme très simple de (P) (linéarité avec conditions de Dirichlet) est nécessaire pour permettre l'étude que nous envisageons. Des conditions plus compliquées du type Neuman ou mêlées exigent une légère modification de certains programmes de SYGESIC.

-a- Discrétisation :

On transforme - par différences finies - (P) en un système linéaire mis sous forme de point fixe de Jacobi.

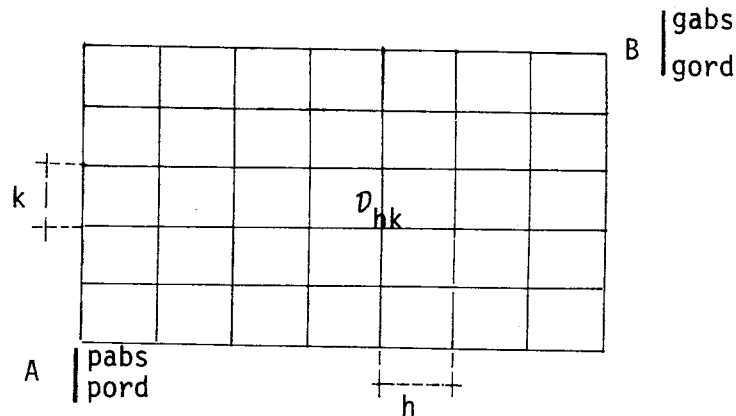
$$(S) : U = AU + b \quad \text{soit} \quad U = G(U)$$

que l'on explicitera ainsi :

$$U_i^j = \alpha U_i^{j+1} + \beta U_i^{j-1} + \gamma U_{i+1}^j + \delta U_{i-1}^j + \eta f_i^j : (i,j) \in \overset{\circ}{D}_{hk}$$

avec les conditions initiales :

$$U_i^j = g_{ij}^k \quad (i,j) \in \partial D_{hk}$$



La discrétisation avec les pas h, k fournit ainsi un domaine D_{hk} qui est une grille comportant NL lignes et NC colonnes.

Dans le système (S) les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ dépendent de h, k et des a_i .

En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{r} k^2 (a_1 + a_3 h) \cdot \beta = \frac{1}{r} a_1 k^2 \quad \cdot \quad \gamma = \frac{1}{r} h^2 (a_2 + a_4 k) \\ \delta = \frac{1}{r} a_2 h^2 \quad \text{et} \quad \eta = -\frac{1}{r} h^2 k^2 \quad \text{avec} \\ r = 2(a_1 k^2 + a_2 h^2) + hk (a_3 k + a_4 h - a_5 hk) \quad \text{supposé non nul.} \end{array} \right.$$

L'ordre du système (S) est $N = (NC-2) \cdot (NL-2)$ (NL et NC dépendent de h, k ainsi que des coordonnées des points extrêmes de D_{hk} : A et B).

-b- Contraction :

. Le système linéaire obtenu s'écrit donc (S) : $U = AU + b$ que l'on met sous la forme de point fixe $U = G(U)$.

La matrice A de (S) s'écrit (dans le cas d'un domaine D_{hk} rectangulaire plein).

$$A = \begin{bmatrix} C & S & & 0 \\ & T & & \\ 0 & & & S \\ & & & T & C \end{bmatrix}$$

Elle est donc tribloc diagonale, de dimension $(NC-2)(NL-2)$ et très creuse. Les trois matrices C, S, T d'ordre $N'=NC-2$

s'écrivent $C = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ \beta & & & 0 \\ & & & \beta \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ & \gamma \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$

. En munissant \mathbb{R}^N de la norme vectorielle type p : $x \rightarrow p(x) = |x|$ on a :

$$|G(U) - G(V)| = |AU - AV| \leq |A| \cdot |U - V| \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^N$$

Il suffit donc de prouver que $\rho(|A|) < 1$ pour avoir un opérateur G p -contractant. Le calcul de $\rho(|A|)$ étant assez difficile, on calcule en fait une majoration grâce aux normes vectorielles matricielles.

Soit $K = |A| = L_A + U_A$ $K = \begin{bmatrix} & & & U_A \\ & & & \\ & & & \\ L_A & & & \end{bmatrix}$

Le découpage en blocs de K nous permet d'adopter une norme vectorielle que l'on notera M_∞ et qui est celle engendrée par la norme vectorielle (régulière de taille $NC-2$) notée p_∞ sur \mathbb{R}^N . On a ainsi :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{NC-2} \end{bmatrix} \rightarrow p_\infty(U) = \begin{bmatrix} \phi_\infty(U_1) \\ \vdots \\ \phi_\infty(U_{NC-2}) \end{bmatrix}$$

Nous aurons alors

$$M_\infty(L_A) = \begin{bmatrix} |\beta| & & & 0 \\ & \delta & & \\ 0 & & & |\delta| & |\beta| \end{bmatrix}, \quad M_\infty(U_A) = \begin{bmatrix} |\alpha| & |\gamma| & & 0 \\ & & & |\gamma| \\ 0 & & & |\alpha| \end{bmatrix} \quad (\text{dimension } NC-2)$$

$$M_\infty(L_A) + M_\infty(U_A) = M_\infty(K) = M = \begin{bmatrix} |\alpha| + |\beta| & |\gamma| & & 0 \\ & \delta & & |\gamma| \\ 0 & & & |\delta| & |\alpha| + |\beta| \end{bmatrix}$$

La matrice tridiagonale M admet comme rayon spectral

$$\rho(M) = |\alpha| + |\beta| + 2\sqrt{|\gamma| \cdot |\delta|} \cdot \cos \frac{\pi}{NC-1} \quad \text{et l'on sait [28] que}$$

$$\rho(K) \leq \rho(M).$$

discussion sur $\rho(M)$:

. Si $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \leq 1$ on démontre assez facilement en se basant sur l'inégalité $|\gamma| + |\delta| > 2\sqrt{|\gamma| \cdot |\delta|}$ vraie $\forall \gamma \neq \delta$ que dans ce cas $\rho(M) < 1$.

. Si $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| > 1$ $\rho(M)$ est alors en général supérieur à l'unité surtout lorsque h et k sont assez petits.

-c- Cas d'un domaine D_{hk} quelconque

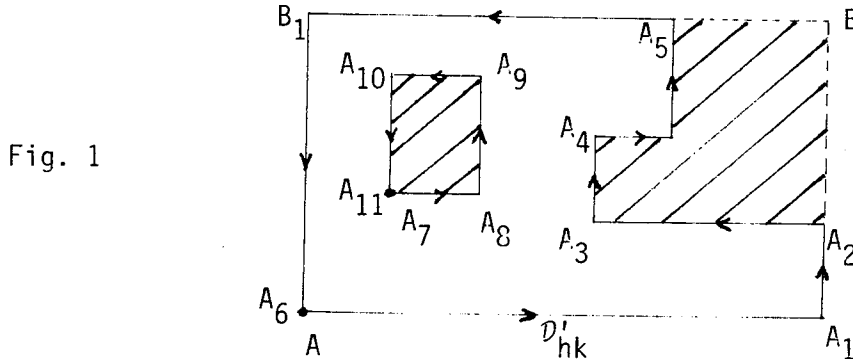


Fig. 1

Pour aboutir après discrétisation de (P) à un système de la même forme que précédemment valable pour une grille rectangulaire on complète D_{hk} afin d'avoir AA_1BB_1A (voir figure 1) ce qui revient à ajouter à (S) des équations triviales relatives aux noeuds supplémentaires de la forme :

$$U_i^j = 0 \cdot U_i^{j-1} + 0 \cdot U_{i+1}^j + 0 \cdot U_{i-1}^j + 0 \cdot U_i^{j+1} + 0 \cdot f_i^j$$

Ceci ramène la matrice à avoir une forme analogue au cas rectangulaire :

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & \dots & \dots & 0 \\ T_1 & \dots & \dots & \dots & S_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & T_{k-1} & C_k \end{bmatrix} \quad (k = NC-2)$$

Le calcul de M et $\rho(M)$ se fait alors aussi facilement. Cette modification a pour seul but d'uniformiser le traitement du système (S) pour n'importe quel domaine D_{hk} (à bords parallèles aux axes).

Nous abordons maintenant le système proprement dit qui comporte 4 parties plus ou moins indépendantes dont trois sont préliminaires.

2.1. Compatibilité des données

Deux vérifications préliminaires précédant le démarrage de la phase calculatoire sont à faire.

. Il est nécessaire que le problème (P) discrétisé puisse se mettre sous la forme de point fixe de Jacobi : c'est-à-dire que $r = (a_1 k^2 + a_2 h^2) + hk(k(a_3 - a_5 h) + a_4 h) \neq 0$ ce qui constitue une contrainte sur le choix des deux pas h et k , les coefficients a_i étant fixés.

. Pour garantir la convergence des processus itératifs chaotiques expérimentés pour résoudre (S) on doit avoir $\rho(M) < 1$ ce qui correspond à une deuxième contrainte sur h et k . Si $\rho(M) > 1$ un risque de divergence persiste, afin de l'éviter il est préférable de changer h et k .

2.2. Constitution d'un fichier "ENTREE" FILE FTOXF001

Le fichier "ENTREE" contient un certain nombre de renseignements concernant la grille discrétisée D_{hk} .

Il comporte :

. 3 vecteurs colonnes contenant respectivement :

- les abscisses entières (numéros des colonnes dans le maillage) des différents sommets de D_{hk} que l'on parcourt comme l'indique fig. 1 de gauche à droite et de bas en haut.

(fig. 1 : $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, A_6 (=A)$; $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} (=A_7)$: 14)

- les ordonnées entières des mêmes sommets (numéros des lignes dans le maillage) avec les mêmes indications.

- Pour distinguer les différentes portions de ∂D_{hk} où on change de conditions initiales on construit un vecteur d'indices répartissant les sommets précédents en m parties.

. Un tableau à quatre colonnes contenant les quatre coordonnées entières du coin bas gauche et du coin haut droit de chaque trou (intérieur) et de chaque fenêtre (extérieure) qu'il faut supprimer de la grille englobant D_{hk} (AA_1BB_1A : fig. 1) pour avoir ce dernier ($AA_1A_2A_3A_4A_5B_1A_6$: fig. 1).

Ceci exige une certaine préparation préliminaire dont on trouvera les détails dans une notice spéciale relative à SYGESIC.

2.3. Introduction des fonctions F, g_1, \dots, g_m

Les fonctions F et $g_1 \dots g_m$ associées au problème (P) sont introduites sous forme de chaînes de caractères (entre autres). Un programme automatiquement généré leur fait correspondre des tabulations discrètes conformes au maillage fait sur le domaine D .

Les trois étapes 2.1, 2.2, et 2.3 étant achevées on passe alors au programme principal.

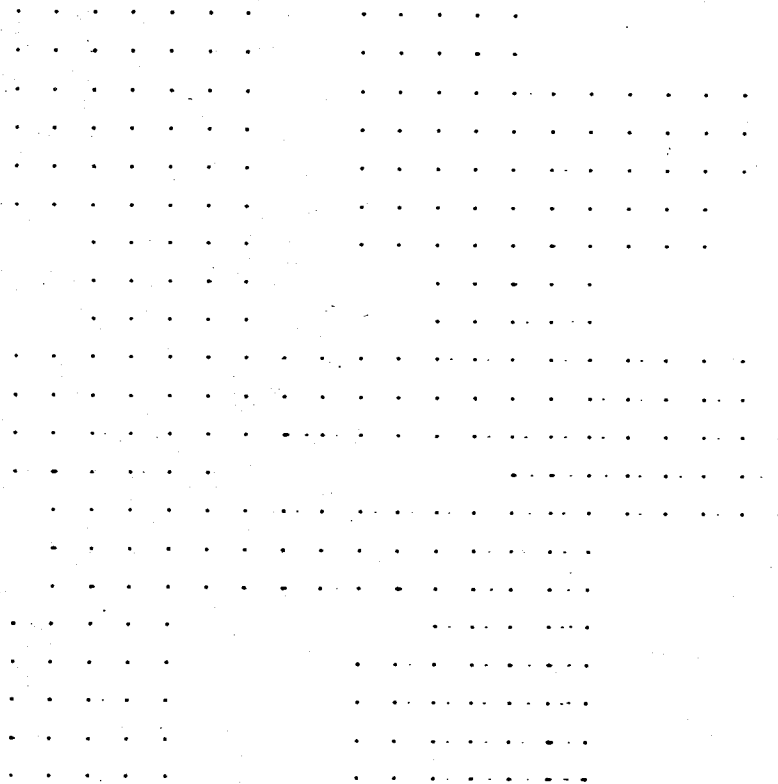
2.4. Programme Principal

2.4.1. Etape préliminaire : lecture des données suivantes :

- . les 5 coefficients $a_1 \dots a_5$
- . les coordonnées des sommets extrêmes de D_{hk} : pabs, pord, gabs, gord.
- . le nombre de conditions initiales nbfi.
- . les deux pas de discrétisation h et k
- . le nombre de sommets de D_{hk} ainsi que celui des fenêtres et des trous à supprimer.
- . le fichier "ENTREE"

Suivent alors le calcul de $\rho(M)$ ainsi que l'initialisation. A partir de ce moment on affiche sur l'écran le domaine D_{hk} . Les deux touches de fonction 28 et 29 permettent d'accepter ou de refuser que cette image soit tracée par le BENSON. Notons que ce choix est demandé à chaque affichage.

Les deux organigrammes des pages 42 et 43 permettent de mieux comprendre la suite de la description.



■ ■ GRILLE DU PROBLEME ■ ■

2.4.2. Etape calcul

On distinguera 7 parties :

(a) Choix du mode de balayage de D_{hk} (touches 1 à 8)

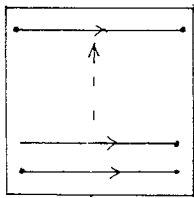
Nous poserons que J_* est la suite des éléments de D_{hk} parcouru ligne par ligne de gauche à droite et de bas en haut (LLGDBH) : ce sera le mode standard de balayage.

On peut alors caractériser 7 autres modes qui correspondent à des permutations $J_1, J_2 \dots J_7$ de la suite J_* .

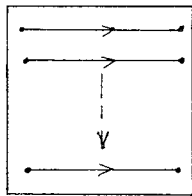
(cf. stratégies chaotiques automatiques, techniques cycliques).

- Mode -1- J_* : LLGDBH : ligne par ligne, de gauche à droite et de bas en haut
 -2- J_1 : LLGDHB : ----- haut en bas
 -3- J_2 : LLDGBH : ----- droite à gauche et de bas en haut
 -4- J_3 : LLDGHB : ----- haut en bas

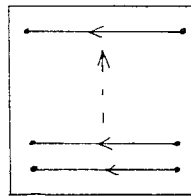
 -5- J_4 : CCBHGD : colonne par colonne, de bas en haut et de gauche à droite
 -6- J_5 : CCBHDG : ----- droite à gauche
 -7- J_6 : CCBHGD : ----- haut en bas et de gauche à droite
 -8- J_7 : CCBHDG : ----- droite à gauche



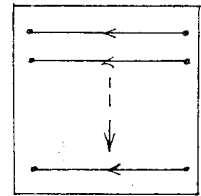
1
 J_*



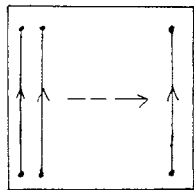
2
 J_1



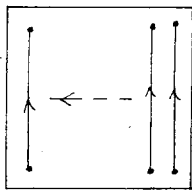
3
 J_2



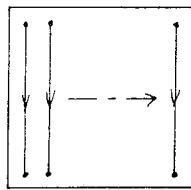
4
 J_3



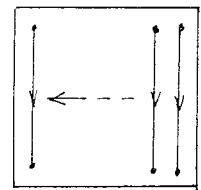
5
 J_4



6
 J_5



7
 J_6



8
 J_7

Comme on le voit :

J_* et J_3

J_1 et J_2

J_4 et J_6

J_5 et J_7

se déduisent l'une de l'autre par des permutations circulaires.

On verra par la suite dans le commentaire des résultats expérimentaux l'influence du mode de balayage sur la stratégie chaotique adoptée.

(b) - Choix des stratégies de calcul (touches 9,10 et 13)

Trois stratégies itératives sont offertes pour résoudre (S) : la méthode classique de Gauss-Seidel et deux techniques chaotiques dont une automatique et une interactive.

- α - Méthode de Gauss-Seidel (touche 9)

Elle consiste à balayer entièrement le domaine D_{hk} - suivant le mode choisi - en activant en chaque noeud l'opérateur de Gauss-Seidel qui donne U^{r+1} en fonction de U^r :

$$(U_i^j)^{r+1} = \alpha (U_i^{j+1})^r + \beta (U_i^{j-1})^{r+1} + \gamma (U_{i+1}^j)^{r+1} + \delta (U_{i-1}^j)^r + \eta f_i^j$$

pour $(i,j) \in D_{hk}^o$

Deux variantes sont possibles :

- . On fixe un entier NIT ce qui fait faire NIT balayages successifs de l'ensemble des composantes U_i^j et calcule donc $U^{r+1} \dots U^{r+NIT}$ (touche 9)
- . On fixe un réel ϵ ce qui fait faire autant de balayages qu'il faut pour avoir les écarts relatifs entre les deux derniers itérés non supérieurs à ϵ . (touche 10)

$$z_i^j = |((U_i^j)^k - (U_i^j)^{k-1}) / (U_i^j)^{k-1}| \leq \epsilon \quad (i,j) \in D_{hk}^o$$

Précisons que le passage de $(U_i^j)^r$ à $(U_i^j)^{r+1}$ équivaut à 1 opération élémentaire. Un balayage correspond donc à NI (nombre de noeuds de D_{hk}^o) opérations élémentaires.

- β - Méthode chaotique interactive de partage en zones : M.P.Z.

On distingue deux variantes de cette méthode :

β -1 Partage en deux zones (touche 10)

On suppose qu'au moins une étape de calcul a été entièrement exécutée. On a pu donc grâce aux renseignements fournis en (d) (voir la suite) partager le domaine D_{hk} en deux zones distinctes : la zone 1 et la zone 2.

La technique chaotique consiste alors à fixer deux entiers Nit_1 et Nit_2 ($Nit_1 < Nit_2$) et à effectuer des balayages (avec activation des composantes U_i^j) sur l'ensemble des deux zones de la manière suivante :

- . Nit₂ - Nit₁ balayages de la zone 2 puis
- . Nit₁ balayages de (la zone 1) ∪ (zone 2) = $\overset{O}{D}_{hk}$

Ceci revient donc à activer Nit₂ fois tous les éléments U_1^j appartenant à la zone 2 et Nit₁ fois ceux de la zone 1.

Si J_{2z} est la suite associée à la zone 2 et J_t à $\overset{O}{D}_{hk}$ nous avons donc dans S :

$$S = \{ \dots, \underbrace{J_{2z}, J_{2z}, \dots, J_{2z}}_{\text{Nit}_2 - \text{Nit}_1}, \underbrace{J_t \dots J_t, \dots}_{\text{Nit}_2} \} \text{ avec } J_{2z} \subset J_t$$

β-2 Partage en trois zones (touche 11)

Un partage analogue au cas précédent permet de subdiviser le domaine D_{hk} en trois zones : zone1, zone2 et zone3.

La technique associée consiste ici à choisir trois entiers Nit₁, Nit₂ et Nit₃ (Nit₁ < Nit₂ < Nit₃) et à effectuer des balayages sur les trois zones en respectant l'ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{Nit}_3 - \text{Nit}_2 \text{ balayages de zone 3 suivis de} \\ \cdot \text{Nit}_2 - \text{Nit}_1 \text{ balayages de (zone 2) } \cup \text{ (zone 3) ensuite} \\ \cdot \text{Nit}_1 \text{ balayages de (zone 1) } \cup \text{ (zone 2) } \cup \text{ (zone 3) } = \overset{O}{D}_{hk} \end{array} \right.$$

Cela équivaut ainsi à itérer Nit₃ fois les éléments de la zone 3, Nit₂ fois ceux de la zone 2 et enfin Nit₁ fois ceux de la zone 1. De la même manière si J_{3z} , J_{2z} et J_t sont les suites associées respectivement à zone 3, (zone 3) ∪ (zone 2) et $\overset{O}{D}_{hk}$ on aura dans S :

$$S = \{ \dots, \underbrace{J_{3z}, J_{3z} \dots J_{3z}}_{\text{Nit}_3 - \text{Nit}_2}, \underbrace{J_{2z}, J_{2z} \dots J_{2z}}_{\text{Nit}_2 - \text{Nit}_1}, \underbrace{J_t \dots J_t}_{\text{Nit}_1} \dots \}$$

avec $J_{3z} \subset J_{2z} \subset J_t$

Remarque : Dans ce dernier cas (par exemple) où après avoir fixé les trois nombres Nit₁, Nit₂, Nit₃ on désire balayer Nit₁ fois la zone 1, Nit₂ fois la zone 2 et Nit₃ fois la zone 3, on peut envisager trois autres techniques chaotiques qui sont les suivantes :

- $\left\{ \begin{array}{l} -(zone1) \cup (zone2) \cup (zone3) = \overset{\circ}{D}_{hk} : Nit_1 \text{ balayages ensuite} \\ -(zone2) \cup (zone3) \quad \quad \quad Nit_2 - Nit_1 \quad - \quad \text{puis} \\ - zone3 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad Nit_3 \quad \quad \quad - \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} -zone1 : Nit_1 \text{ balayages suivis de} \\ -zone2 : Nit_2 \quad - \quad \text{puis} \\ -zone3 : Nit_3 \quad - \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} -zone3 : Nit_3 \text{ balayages ensuite} \\ - zone2 : Nit_2 \quad - \quad - \\ - zone1 : Nit_1 \quad - \end{array} \right.$

(Des combinaisons de ces techniques entr'elles peuvent être envisagées).

Il est évident que toutes les quatre font faire le même nombre d'opérations élémentaires mais - et nous l'avons constaté expérimentalement - la première stratégie est la meilleure car les Nit_1 derniers balayages sur l'ensemble $\overset{\circ}{D}_{hk}$ (ce qui équivaut ici à Gauss-Seidel) ont pour avantage de "corriger" les derniers itérés et éviter la convergence vers un point fixe partiel. Précisons en dernier lieu que dans le cas où le système (S) n'est pas mis sous forme de point fixe de Jacobi (c'est-à-dire que tous les éléments de la diagonale principale de la matrice A sont non nuls) on peut envisager la technique suivante (dans le cas du partage en deux zones par exemple).

On parcourt le domaine $\overset{\circ}{D}_{hk}$ élément par élément :

- Si (U_i^j) e zone 1 on l'itère Nit_1 fois successives
- Si (U_i^j) e zone 2 on l'itère Nit_2 fois successives.

Pour revenir à nos deux stratégies chaotiques de partage en zones nous remarquerons que l'interaction et l'intuition jouent dans la mesure où l'utilisateur définit son partage et les entiers associés qui sont a priori arbitraires.

Nous verrons en (d) de quelle manière il est possible de faire un choix judicieux et efficace.

-γ- Méthode automatique MDSE (touche 13)

C'est la méthode que nous avons explicitée auparavant. Appliquée à notre contexte actuel, elle consiste à suivre la démarche suivante :

. Fixer un entier Nit qui sera le nombre maximal de balayages de D_{hk}^0 et de ses sous-ensembles successifs.

. Fixer un réel ε_0 correspondant au test d'arrêt. L'algorithme chaotique est alors déroulé en faisant "disparaître" à la fin de chaque balayage les éléments U_i^j vérifiant :

$$(Z_i^j)^k = |((U_i^j)^k - (U_i^j)^{k-1}) / (U_i^j)^{k-1}| \leq \varepsilon_0 \quad k \leq \text{Nit}.$$

En jouant sur Nit, on peut arrêter l'algorithme - en cours d'exécution - avant que tous les éléments disparaissent - et suivre sur l'écran de visualisation les phases successives de disparition des éléments de D_{hk}^0 (touche 13).

Dès qu'on aboutit à la fin on peut, moyennant quelques pas correctifs, recommencer le même processus.

Remarque : Comment effectuer le minimum de pas de correction ? Supposons qu'après la disparition de tous les U_i^j on ait :

$$(Z_i^j)_{\text{Max}}^k = \text{Max}_{i,j} (Z_i^j)^k = \xi (\leq \varepsilon_0)$$

Si l'on fait un seul balayage de tout D_{hk}^0 on aura forcément $(Z_i^j)_{\text{max}}^{k+1} > \varepsilon_0$

On utilisera alors la méthode de Gauss-Seidel (touche 9 ensuite la variante correspondant à la touche 10) avec le même ε_0 pour effectuer le nombre de balayage p qu'il faut pour ramener $(Z_i^j)_{\text{max}}^{k+p}$ à devenir inférieur ou égal à ε_0 .

Il reste à préciser que le nombre d'opérations élémentaire NOP est automatiquement remis à jour après chaque itération.

(c) - Représentation des Ecarts Relatifs Z (touches 15 et 16)

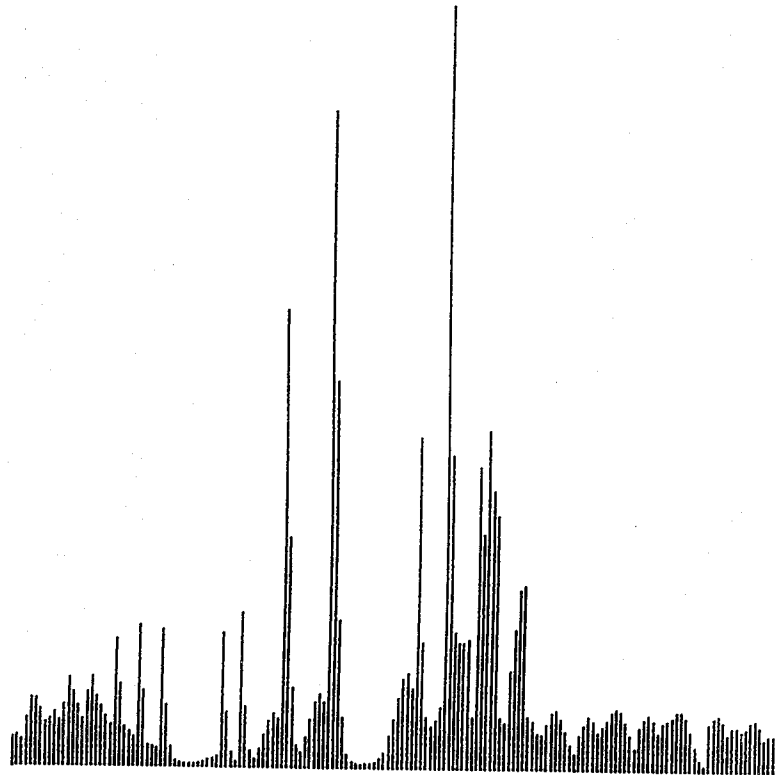
A la fin du dernier pas de calcul on évalue pour chaque élément $U_i^j \in D_{hk}^0$ l'écart relatif entre ses deux derniers itérés :

$$Z_i^j = |((U_i^j)^k - (U_i^j)^{k-1}) / (U_i^j)^{k-1}|$$

Il est alors possible de les représenter sur l'écran suivant deux modes différents :

-α- La représentation linéaire (touche 15)

Les différents Z_i^j sont représentés sous forme de vecteurs parallèles qui se suivent dans l'ordre correspondant au mode 1 (LLGDBH) de parcours du domaine D_{hk} .



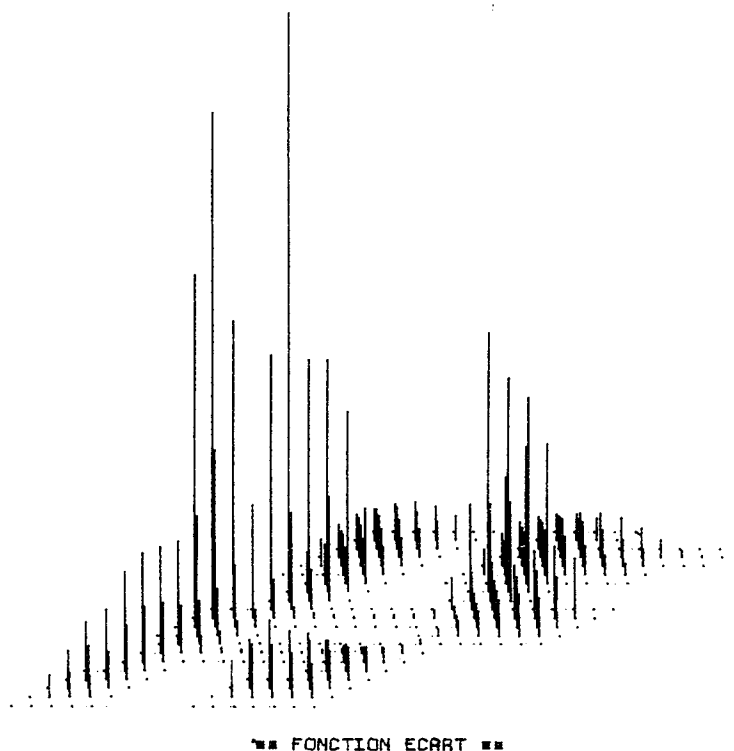
■ ■ FONCTION ECART ■ ■

L'échelle de représentation peut-être :

. soit l'actuel $Z_{\text{Max}} = \text{Max}_{i,j} Z_i^j$ (touche 17)

. soit le précédent Z_{Max} ce qui permet d'apprécier le taux de décroissance des écarts relatifs par rapport à l'étape précédente (touche 18).

-8- La représentation en perspective (touche 16)



Cette représentation permet d'avoir une assez bonne idée sur la répartition des écarts relatifs, les zones où ils sont élevés, là où ils sont assez faibles.

Notons que le passage d'une représentation à une autre avec changement d'échelle ou non est possible (touches 15 et 16).

(d) Partage de D_{hk} en zones (touches 10, 11 et 12)

C'est essentiellement à cette étape que l'intuition numérique joue un rôle très important.

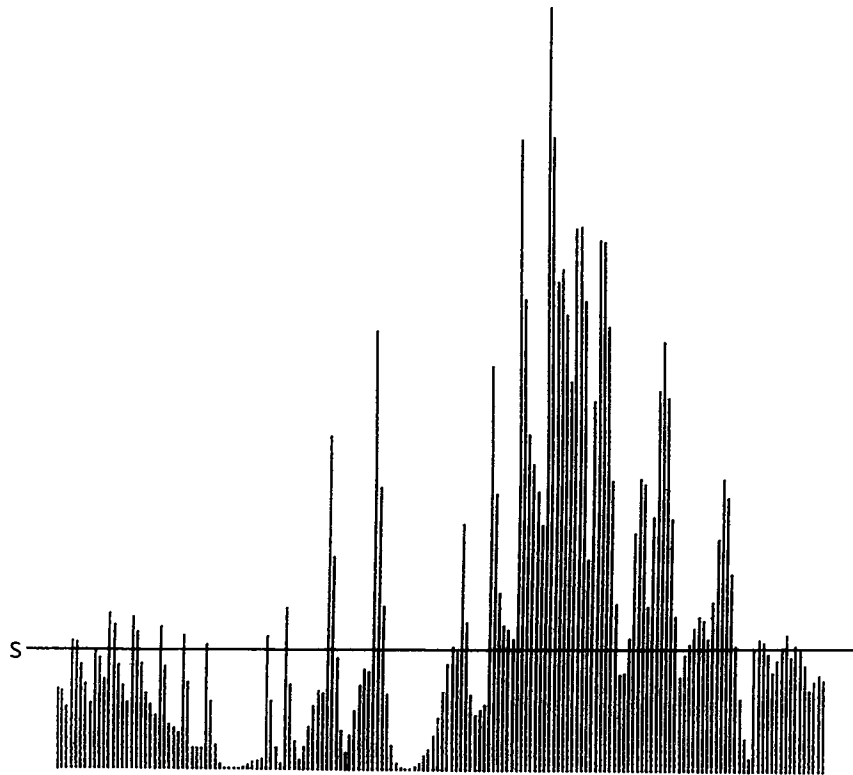
En effet, c'est à partir de l'observation de la dernière image affichée que l'on peut effectuer un partage intéressant dans l'ensemble des U_i^j . Trois possibilités sont offertes ici :

-α- partage interactif en deux zones (touche 10)

On suppose pour des raisons de simplicité de manipulation que l'on a adopté la représentation linéaire des écarts.

A l'aide du photostyle on repère puis on pointe le sommet d'un vecteur correspondant à un seuil d'écart s .

Un partage automatique du domaine en deux zones est alors fait :



■ ■ FONCTION ECART ■ ■

$$\text{Zone 1} = \{(i,j) \in D_{hk}^{\circ} / z_i^j < s\}$$

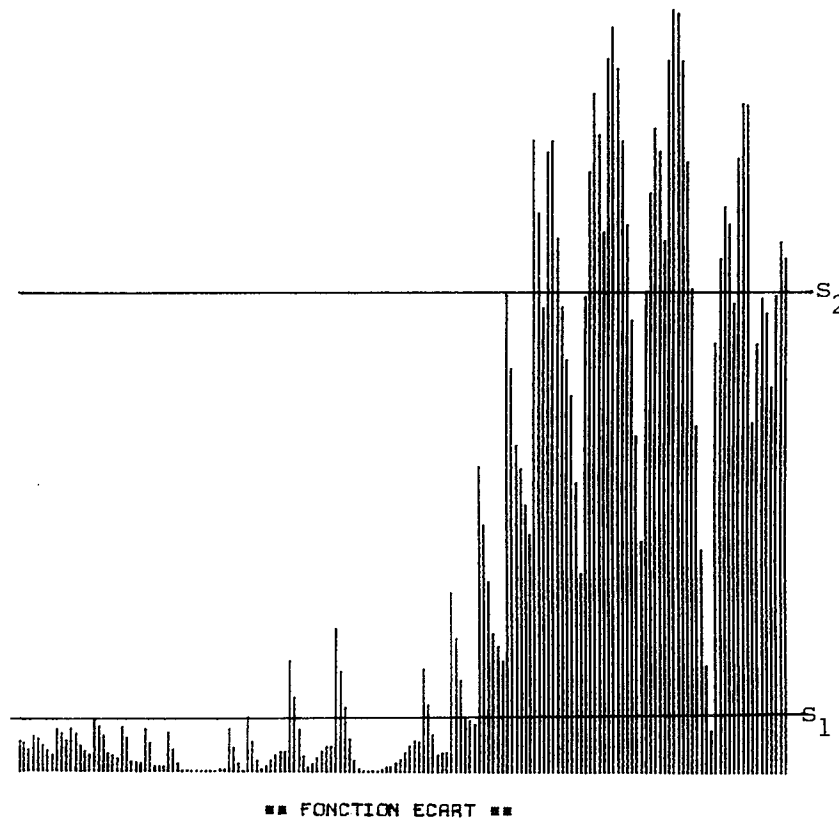
$$\text{Zone 2} = \{(i,j) \in D_{hk}^{\circ} / z_i^j \geq s\} = D_{hk}^{\circ} - \text{zone 1}$$

-β- partage en trois zones

β-1 par pointage ; (touche 11)

D'une manière analogue on pointe successivement sur l'écran les

sommets de deux vecteurs correspondant à des seuils s_1 et s_2 . On répartit alors $\overset{\circ}{D}_{hk}$ en 3 régions ($s_1 < s_2$)



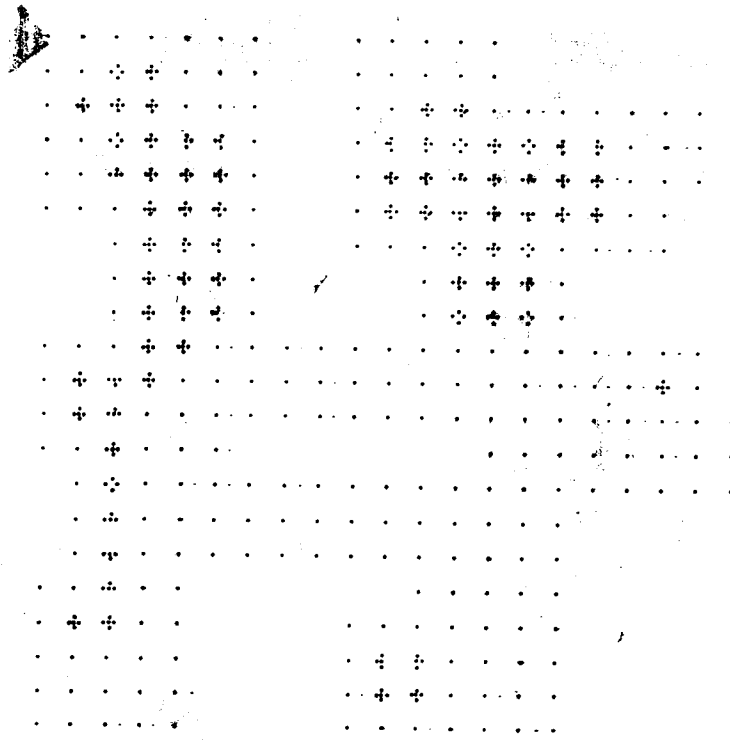
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zone 1} = \{(i,j) \in \overset{\circ}{D}_{hk} / z_i^j < s_1\} \\ \text{Zone 2} = \{(i,j) \in \overset{\circ}{D}_{hk} / s_1 \leq z_i^j < s_2\} \\ \text{Zone 3} = \{(i,j) \in \overset{\circ}{D}_{hk} / z_i^j \geq s_2\} = \overset{\circ}{D}_{hk} - (\text{zone 1}) \cup (\text{zone 2}) \end{array} \right.$$

β -2 partage automatique

Sans pointer, le programme choisit $s_1 = \frac{1}{3} z_{\text{Max}}$ et $s_2 = \frac{2}{3} z_{\text{Max}}$

-γ- Représentation des zones (touche 12)

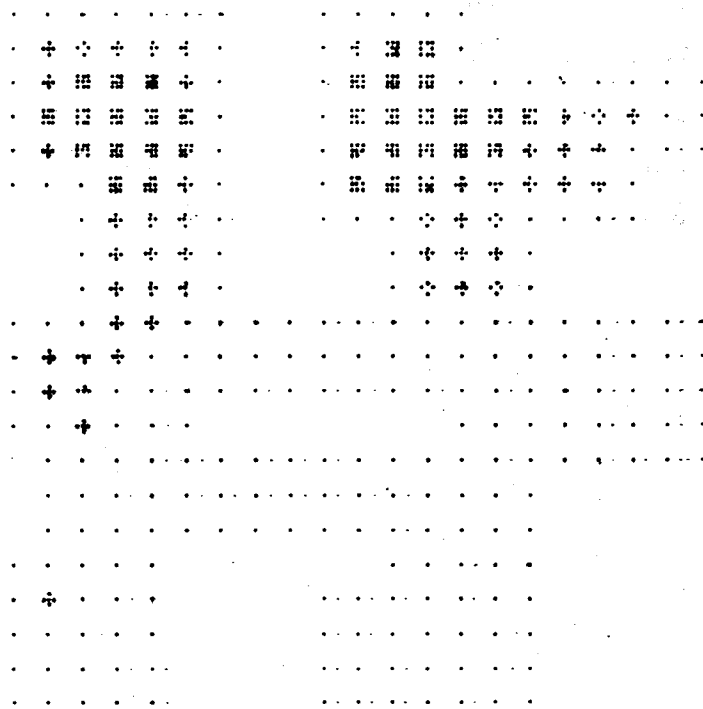
Le partage étant effectué on visualise sur l'écran le domaine $\overset{\circ}{D}_{hk}$ où les deux (ou trois) zones sont différenciées par une technique de simulation de niveaux de luminosité.



Zone 1 90

Zone 2 76

*** PARTAGE EN 2 ZONES ***



Zone 1 85

Zone 2 48

Zone 3 33

*** PARTAGE EN 3 ZONES ***

Remarque :

On peut ainsi évaluer l'intérêt de la stratégie interactive proposée et l'importance du choix du ou des seuils de partage. Comme on l'a noté en (b)- β c'est en fonction de la densité et de l'importance des zones mises en évidence que l'on fixe des entiers Nit_1 , Nit_2 (et Nit_3) appropriés par lesquels on itère plus fréquemment là où les écarts sont les plus élevés (zone 2 ou zone 3) aux dépens des éléments U_i^j où ces écarts sont faibles (à partir d'un certain moment) donc convergent plus rapidement.

Il convient de choisir les nombres qu'il faut pour ne pas trop accentuer le déséquilibre entre les écarts et obtenir un résultat contraire à celui qu'on attend ...

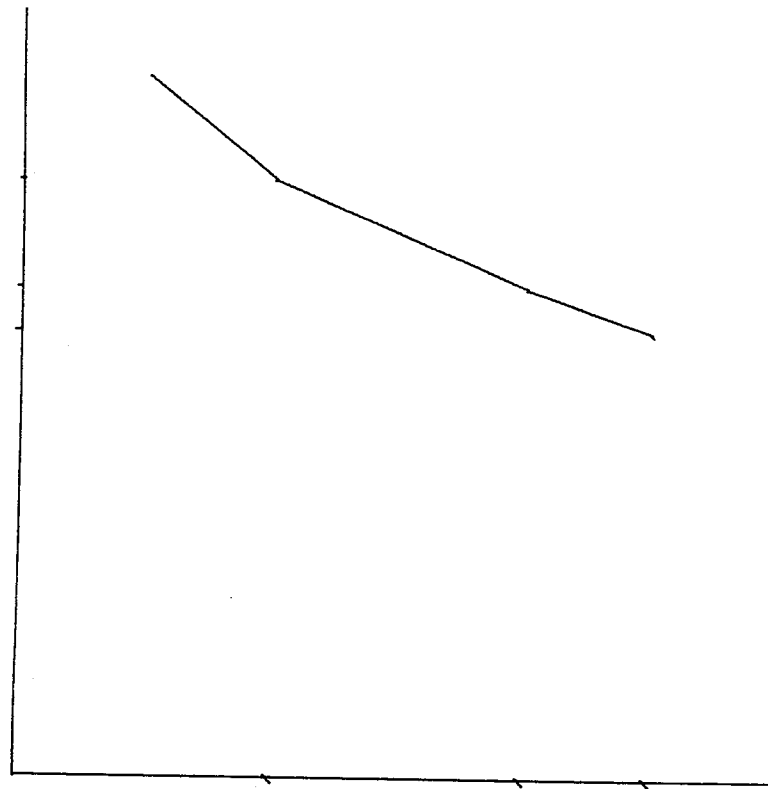
"On pourrait décrire cela avec une image pittoresque : celle du tôlier qui possède une tôle très cabossée (la surface des écarts) et qu'il désire aplatir (faire tendre vers zéro). En donnant des coups de marteau très forts sur les parties qui dépassent, il risque de recréer des bosses dans l'autre sens. A lui de donner le nombre de coups qu'il faut et avec la force qu'il faut aux endroits qu'il faut"

(e) Représentation de la courbe des écarts (touche 28)

A la fin de toute étape (c) on possède :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot Z_{\text{Max}} = \text{Max}_{i,j} Z_i^j \quad \text{écart maximal} \\ \cdot \text{NOP} \quad \text{nombre d'opérations élémentaires.} \end{array} \right.$$

Il est alors possible de représenter sur l'écran - en échelle logarithmique les variations de Z_{Max} en fonction de NOP. Cette courbe peut donner une assez bonne idée sur l'efficacité des stratégies expérimentées en observant les taux de décroissance (où même l'oscillation dans le pire des cas) de l'écart maximal. On peut alors rectifier la technique adoptée si elle s'avère non payante.



■ ■ VARIATIONS DE L'EC.MAX EN FONCTION DU N.OP ■ ■

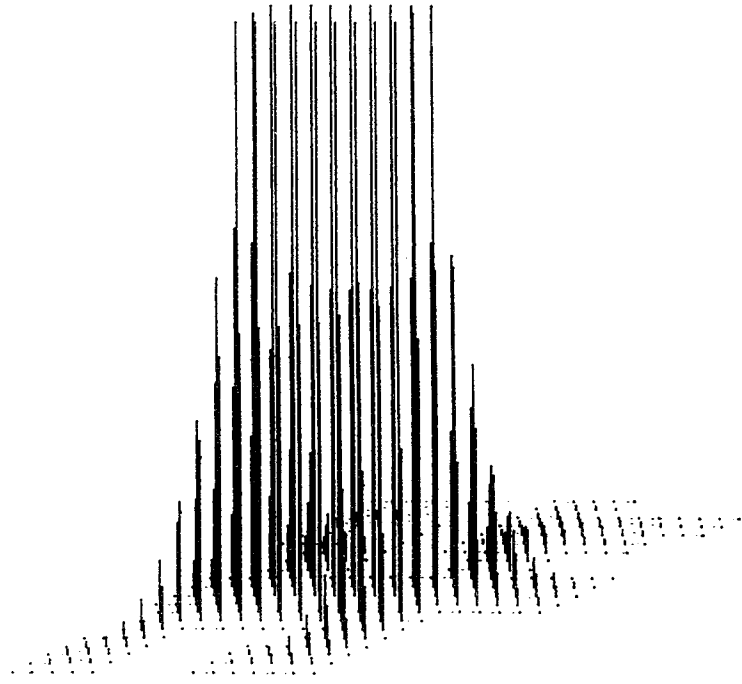
(f) Représentation de la fonction U (touches 21 et 22)

Après chaque étape de calcul, la solution (non finale) U du système peut être représentée en perspective comme ce fut le cas pour Z en (c)

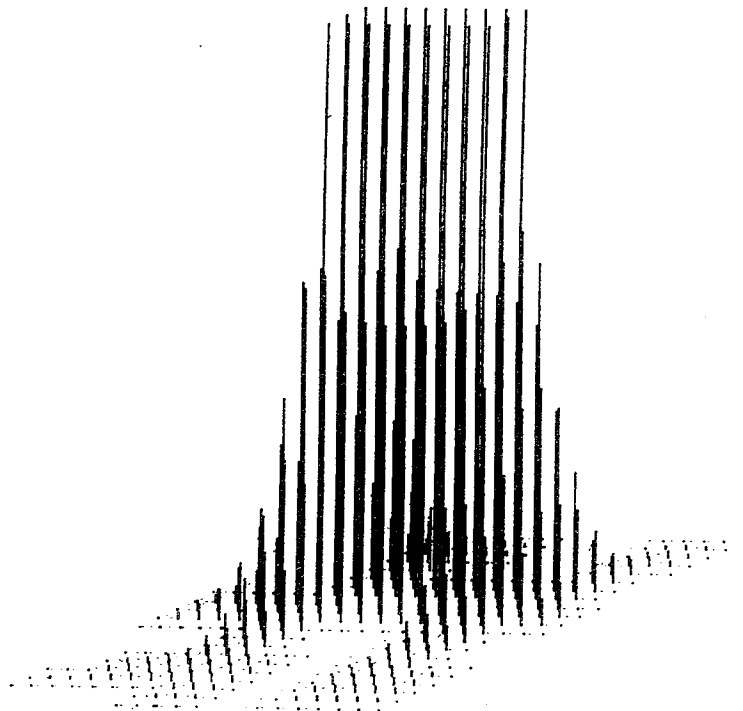
On a alors le choix entre :

. la perspective avant : le point d'observation est situé du côté du coin bas gauche de D_{hk} (touche 21).

. la perspective arrière où on observe du côté du coin haut droit de D_{hk} (touche 22).



■ ■ REPRESENTATION DE LA SOLUTION ■ ■



■ ■ REPRESENTATION DE LA SOLUTION ■ ■

(g) Poursuite/Arrêt (touche 19 et 20)

Dernière étape où l'on décide soit :

- . de continuer le calcul en reprenant à partir de (a) (touche 19)
- . de l'arrêter (10). Dans ce cas après avoir choisi si l'on désire d'imprimer la solution U (touche 23) on peut :
 - . soit recommencer en totalité une nouvelle expérimentation à partir de (a) après avoir réinitialisé à 0 toutes les données du problème (touche 25).
 - . soit on quitte définitivement SYGESIC (touche 26).

Conclusion

Telles sont les possibilités du système SYGESIC qui se caractérise selon nous par la simplicité de son utilisation et le large éventail de techniques qu'il offre.

C'est son côté expérimental et pédagogique qui nous parait le plus important puisqu'il permet d'éclairer d'un point de vue pratique de nombreuses questions sur le comportement des itérations chaotiques.

Nous avons pu grâce à SYGESIC expérimenter sur un ensemble de problèmes aux dérivées partielles une série de stratégies chaotiques que nous avons pu améliorer petit à petit en tirant profit des renseignements obtenus par l'intermédiaire de l'écran.

Nous donnons dans ce qui suit l'essentiel des résultats obtenus en essayant de les analyser au mieux.

P A R T I E B

CHAPITRE I

UNE FAMILLE DE PROBLEMES DE POINT FIXE
- NON LINEAIRES -



Le contenu de cette partie précise clairement nous semble-t-il notre approche de la question des itérations chaotiques.

Grâce à un grand nombre d'expériences nous avons essayé d'obtenir le maximum de renseignements nous permettant de répondre aux interrogations que nous nous sommes posés, d'une manière progressive au fur et à mesure que nous avançons dans notre démarche.

Nous avons voulu en outre nous placer autant que possible dans un cadre assez général ce qui explique la multitude des cas traités. Pour donner une idée sur le genre d'obstacles rencontrés nous discuterons du problème du point fixe partiel sur un exemple particulier.

I - POSITION DU PROBLEME

0. Introduction

Ghéri et Mancino dans leur article [12] se sont posés le problème de résoudre le système non linéaire :

$$A(x) = f \quad \text{où} \quad \begin{cases} A : \text{application de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{R}^m \\ f : \text{vecteur donné de } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} * \quad \|A(x) - A(y)\| \leq k \|x-y\| & x, y \in \mathbb{R}^n \\ * \quad (A(x) - A(y), x-y) \geq c \|x-y\|^2 & k, c > 0 \end{cases}$$

$\|\dots\|$ étant la norme euclidienne et (\dots) le produit scalaire associé.

Ces deux conditions leur ont permis de démontrer l'unicité de la solution ξ (vérifiant $A\xi = f$), quant à son existence ils proposent un algorithme constructif permettant de la calculer.

Nous nous sommes alors inspirés de cette étude pour construire une famille de problèmes de point fixe sur laquelle on pouvait expérimenter des stratégies itératives chaotiques.

1 - Le problème initial

* Il se présente sous la forme :

$$(1) F(x) = 0 \quad \text{qui s'explique par} \quad \begin{cases} f_i(x_1 \dots x_n) = 0 \\ i = 1 \dots n \end{cases}$$

$$f_i(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(x_k^2 + \frac{i}{k}\right)^{1/2} \left(\sin^\alpha \text{Log} \left(x_k^2 + \frac{i}{k}\right)^{1/2} + \cos^\alpha \text{Log} \left(x_k^2 + \frac{i}{k}\right)^{1/2}\right) + \beta n x_i + \left(k - \frac{n}{2}\right)^\gamma \quad i = 1 \dots n$$

avec $\beta > \alpha > 1$ $\gamma > 1$ α, β, γ entiers

* On démontre sans difficulté que l'opérateur F vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} \|F(x) - F(y)\| \leq k \|x-y\| \\ (F(x) - F(y), x-y) \geq c \|x-y\|^2 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{avec } k = \beta n + (\alpha+1)(n-1)$$

$$c = \beta n - (\alpha+1)(n-1)$$

Ce qui prouve - d'après [11] - l'existence et l'unicité de la racine x^* vérifiant $F(x^*) = 0$.

2 - Première transformation en un problème de point fixe

(a) Transformation

La démarche est extrêmement simple vue la forme particulière de F. En effet, on remarque que F s'écrit :

$$F(x) \equiv G(x) + \beta n x$$

soit $f_i(x) \equiv g_i(x) + \beta n x_i \quad i = 1 \dots n$ où g_i ne dépend pas de la variable x_i .

En posant $H(x) = \lambda G(x)$ avec $\lambda = -1/\beta n$
on se ramène au problème de point fixe

$$(2) \quad H(x) = x \quad \begin{cases} h_i(x) = x_i \\ i = 1 \dots n \end{cases}$$

où $F(x) = \beta n(x-H(x))$ c'est-à-dire $H(x) = x - \lambda F(x)$.

$$\text{et} \quad h_i(x) = -\lambda \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n u_k (\sin^\alpha \log u_k + \cos^\alpha \log u_k) - \lambda (k - \frac{n}{2})^\gamma$$

$$\text{avec } u_k = (x_k^2 + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}$$

(b) Contraction - Convergence

Pour prouver l'existence et l'unicité du point fixe ξ de H on exhibe une matrice de contraction de H .

Munissons \mathbb{R}^n de la norme vectorielle type $p : x \rightarrow p(x) = |x|$.

En utilisant le développement de Taylor on a :

$$g_i(x) - g_i(y) = \sum_{k=1}^n d_k \frac{\partial}{\partial x_k} g_i(y + \theta_i^k(x-y)) \quad \text{où } d_k = x_k - y_k \\ 0 \leq \theta_i^k < 1$$

$$\text{Or} \quad \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} = 0 \quad (g_i \text{ ne dépend pas de } x_i)$$

donc en posant $u_k = (x_k^2 + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}$ et $v_k = \log u_k$ on obtient

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} = \frac{x_k}{u_k} (\sin^{\alpha-1} v_k (\sin v_k + \alpha \cos v_k) + \cos^{\alpha-1} v_k (\cos v_k - \alpha \sin v_k))$$

puisque $|\frac{x_k}{u_k}| < 1 \quad \forall k = 1 \dots n$ alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} \right| &\leq |\sin^{\alpha-1} v_k (\sin v_k + \alpha \cos v_k) + \cos^{\alpha-1} v_k (\cos v_k - \alpha \sin v_k)| \\ &\leq |\sin^\alpha v_k \cos^\alpha v_k + \frac{\alpha}{2} \sin 2v_k (\sin^{\alpha-2} v_k - \cos^{\alpha-2} v_k)| \\ &\leq \underbrace{|\sin^\alpha v_k + \cos^\alpha v_k|}_{\leq 1} + \frac{\alpha}{2} \underbrace{|\sin 2v_k|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\sin^{\alpha-2} v_k - \cos^{\alpha-2} v_k|}_{< 2} \\ &\leq |\sin^\alpha v_k| \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} \right| \leq \alpha + 1.$$

$$\text{soit } |g_i(x) - g_i(y)| \leq U |x-y| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U = (u_1 \dots u_n) \\ u_j = \alpha + 1 & \text{si } j \neq i \\ u_j = 0 & \text{si } j = i \end{cases}$$

De la même manière puisque $h_i(x) = -\lambda g_i(x)$

$$|h_i(x) - h_i(y)| \leq |\lambda| U |x-y| \quad \text{et}$$

$$|H(x) - H(y)| \leq K |x-y| \quad \text{avec}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & |\lambda|(\alpha+1) & \dots \\ & \ddots & \ddots \\ |\lambda|(\alpha+1) & & \ddots \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \rho(K) = (n-1) |\lambda| (\alpha+1) = \frac{n-1}{n} \frac{\alpha+1}{\beta}$$

comme $\alpha < \beta$ donc $\rho(K) < 1$.

L'application H est donc p-contractante :

On retrouve ainsi (cf [25]) l'existence et l'unicité du point fixe de H solution du problème. De plus ce point fixe peut être calculé comme limite de toute itération chaotique sur H de résiduel maximal.

3 - Seconde formulation de (1)

(a) Pour des raisons que nous préciserons ultérieurement une seconde formulation de (1) a été envisagée.

Puisque $F(x) = G(x) + n\beta x$, posons $\beta = \beta_0 + \beta_1$ $\beta_0, \beta_1 > 0$. Le problème

$G(x) + n\beta x = 0$ est équivalent à $\beta_0 nx = -G(x) - \beta_1 nx$.

Soit $R(x) \equiv (-1/\beta_0) G(x) - (\beta_1/\beta_0) x$. On aura alors le problème de point fixe (équivalent à (2)) :

$$(3) \quad R(x) = x$$

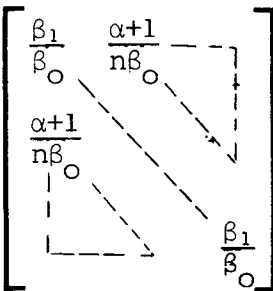
$$\begin{cases} r_i(x) = x_i \\ i = 1 \dots n \end{cases}$$

$$\text{avec } r_i(x) = \lambda_0 g_i(x) - \frac{\beta_1}{\beta_0} x \quad \text{où } \lambda_0 = -\frac{1}{\beta_0 n}$$

(b) Contraction

Il est assez facile de prouver que

$$|R(x) - R(y)| \leq K' |x-y| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$$

avec $K' =$ 

$$\text{d'où } \rho(K') = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\alpha+1}{\beta_0} + \frac{\beta_1}{\beta_0}$$

Pour avoir $\rho(K') < 1$ il faut que

$$(n-1)(\alpha+1) + n\beta_1 < n\beta_0 \quad \text{or } \beta_0 + \beta_1 = \beta \Rightarrow n\beta_0 > (n-1)(\alpha+1) + n(\beta - \beta_0)$$

$$\Rightarrow \beta_0 > \frac{\beta}{2} + \frac{n+1}{2n}(\alpha+1) = \alpha_0$$

on conclut donc la convergence pour (2) et (3) des méthodes itératives de calcul du point fixe x^* telles que les A.S., G.S ... et de toute technique d'itérations chaotiques de résiduel maximal sur \mathbb{R} .

(c) Relaxation de (3)

On peut relaxer l'opérateur R avec un paramètre ω pour obtenir une version (4) équivalente à (1).

$$(4) \quad Q(x) = x \quad \text{avec } Q(x) = \omega R(x) + (1-\omega)x.$$

Q admet comme matrice de contraction $K'' = |\omega| K' + |1-\omega| I$ si ω vérifie

$$0 < \omega < \omega_M = \frac{2}{1 + \rho(K')} . \quad \text{Dans ce cas}$$

$$\rho(K'') = \omega \rho(K') + |1-\omega| < 1.$$

II - EXPERIMENTATIONS1. Première série d'expériences : cas (1) et (2)

(a) Nous avons donc

$$\begin{cases} (1) & F(x) = 0 \\ (2) & H(x) = x \end{cases}$$

Des applications pour diverses valeurs de n ont été effectuées avec $\alpha = 5$, $\beta = 14$ et $\gamma = 3$.

Dans ce cas on a :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \frac{3}{7n} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{3}{7n} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(K) = \frac{3}{7} * \frac{n-1}{n} < 1 \quad \forall n.$$

- α - Evolution de $\rho(K)$

n	20	25	30	40	50
$\rho(K)$	0.4071	0.4114	0.4143	0.4178	0.4200

$$\rho(K) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{3}{7} \approx 0.4286.$$

Comme on le constate $\rho(K)$ étant majoré par $\frac{3}{7}$ qui est assez faible par rapport à 1, la convergence vers la solution x^* sera rapide.

(b) Résultats

A titre de comparaison nous avons résolu (1) par la méthode de Newton.

Le problème (2) a été résolu par :

- . La méthode classique de Gauss-Seidel
- . Une méthode chaotique automatique non cyclique.

Le critère d'arrêt a été $|x_i^{r+1} - x_i^r| < \epsilon \quad i = 1 \dots , (\epsilon \text{ fixé})$

N	Méthode	ϵ	Nombre de pas	Nombre d'opérations	temps (s)
10	Newton	10^{-6}	3		0.40
	GS	10^{-6}	3	30	0.12
		10^{-8}	4	40	
	MDSE	10^{-8}		38	
20	Newton	10^{-4}	3		1.8
		10^{-6}	4		
	GS	10^{-4}	3	60	0.8
		10^{-6}	3	60	0.8
		10^{-8}	4	80	1.0
	MDSE	10^{-4}		59	
50	Newton	10^{-4}	3		14.
	GS	10^{-4}	3	150	4.7
		10^{-6}	4	200	6.0
		10^{-8}	5	250	7.8

(c) Commentaires :

* Concernant la méthode de Newton et celle de Gauss-Seidel on constate qu'elles requièrent à peu près le même nombre de pas pour une précision fixée. Par pas nous entendons le passage de l'itéré x^r au suivant x^{r+1} ce qui correspond pour G.S. à n opérations élémentaires.

En temps d'exécution G.S. va de 2 à 3 fois plus vite.

* Comme nous l'avons remarqué la faible valeur de $\rho(K)$ ($< \frac{3}{7}$) conduit à une convergence extrêmement rapide (4 pas pour $\epsilon = 10^{-8}$). C'est cet inconvénient - si l'on peut dire - qui explique l'inefficacité des stratégies chaotiques. En effet ces dernières ne peuvent améliorer la méthode de Gauss-Seidel que dans la mesure où celle-ci est assez lente. Cela constitue une idée à retenir.

C'est pour cette raison que nous avons été amenés à transformer le problème (2) de manière à rendre la convergence beaucoup moins rapide (en augmentant $\rho(K)$).

* Notons en dernier lieu - nous y reviendrons - que nous n'avons pas expérimenté sur (2) des techniques automatiques cycliques car quelle que soit la permutation J de $\{1, 2, \dots, n\}$ on ne peut diminuer le rayon spectral de K qui est très particulière dans sa structure :

$$k_{ij} = k_{i'j'}, \forall i \neq j, i' \neq j'.$$

De la même manière des techniques cycliques de répétition ne peuvent rien améliorer.

Le problème (2) possède donc deux propriétés importantes :

- . Convergence très rapide
- . toutes les composantes convergent avec la même vitesse

2. Deuxième série d'expériences : cas (3) (et (4))

Ralentissement de la convergence

(a) Le problème (3) s'écrit $R(x) = x$.

Avec les mêmes valeurs de α , β et γ on obtient :

K' étant la matrice de contraction de R :

$$\rho(K') = \frac{n-1}{n} * \frac{3}{7} + \frac{14-\beta_0}{\beta_0}$$

on avait exigé que $\beta_0 > \frac{\beta}{2} + \frac{n-1}{2n} (\alpha+1)$: $\beta_0 > 7 + 3 * \frac{n-1}{n}$

On prendra donc $\beta_0 = 10$.

D'où $K' =$
$$\begin{bmatrix} 0.4 & \frac{3}{5n} \\ \frac{3}{5n} & 0.4 \end{bmatrix}$$

et $\rho(K') = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3}{5} + 0.4$ soit

$$\rho(K') = 1 - \frac{0.6}{n} < 1.$$

Evolution de $\rho(K')$

n	20	25	30	40	50
$\rho(K')$	0.9700	0.9760	0.9800	0.9850	0.9880

$$\rho(K) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Nous constatons donc que le rayon spectral a été largement augmenté (pour $n = 20$: de 0.4071 à 0.97) tout en restant majoré strictement par 1. Ceci laisse prévoir un ralentissement dans la convergence vers la solution.

(b) Résultats :

A part la méthode G.S, une technique chaotique (la MDSE) a été expérimentée. Cette méthode de disparitions successives s'explique de la manière suivante :

• étape r . J_{r-1} est l'ensemble des indices "non disparus"

soit le test $|x_i^r - x_i^{r-1}| < \varepsilon$ (fixé)

- s'il est vérifié : on "sort" l'élément x_i et on passe à x_{i+1}

- sinon on itère x_i une fois :

$$x_i^{r+1} = r_i(x_1^{r+1} \dots x_{i-1}^{r+1}, x_i^r \dots x_n^r) \quad (*)$$

ensuite on passe à x_{i+1} pour refaire le même test.

(*) Une autre variante que l'on verra dans les chapitres suivants consiste à ne pas itérer x_i dans ce cas mais à passer directement à x_{i+1} . Lorsque tous les éléments ont été testés et qu'on obtient le nouvel ensemble J_{r+1} , on effectue un balayage global sur J_{r+1} . Ensuite on refait les mêmes tests.

Ayant testé tous les éléments de J_{r-1} , on obtient J_r
On recommence alors une nouvelle étape.

Les résultats sont portés dans les tableaux p 78, 79 et les dessins p 80-82

- α - Etude des suites chaotiques S :

* la méthode de Gauss-Seidel :

Partant de $J_* = \{1, 2, \dots, n\}$ on a $S = (J_*)^P$ P dépendant de n et ϵ .

* la méthode chaotique (variante de la MDSE) (voir p. 75).

La suite initiale est $J_0 = J_* = \{1, 2, \dots, n\}$ (voir remarque en 1.(c)).

On a $S = \{ \underbrace{J_0, \dots, J_0}_{r_0}, J_1^{r_1}, J_2^{r_2}, \dots, J_k^{r_k} \mid \}$ (?) correction
arrêt

Nous pouvons alors établir les comparaisons suivantes :

<u>G.S.</u>	<u>M. chaotique</u>
. Suite initiale $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Suite initiale $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$
. Suite finale (ϵ fixé)	. Suite finale (ϵ fixé)
$S = \{J_0, \dots, J_0\} = (J_0)^{m_0}$	$S = \{J_0^{r_0}, J_1^{r_1}, \dots, J_k^{r_k} \mid \}$
	. $J_k \subset J_{k-1} \subset \dots \subset J_1 \subset J_0$
	. $r_0 > r_1 \geq r_2 \dots \geq r_k$
	Posons $S_i = J_i - J_{i+1}$ $i = 0 \dots k-1$
	On aura :
	$(\bigcup_{i=0}^{k-1} S_i) \cup J_k = J_0$

$$\sum_{i=0}^k r_i = m_0$$

L'ordre de disparition des indices sera :

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, J_k$$

Le nombre d'activations des indices $1 \dots n$ sera :

$$(J_k)^{m_0}, (S_{k-1})^{m_1}, \dots, (S_0)^{m_k} \text{ avec } m_0 > m_1 > \dots > m_k \text{ et } m_j = \sum_{i=0}^{k-j} r_i$$

$$j = 0 \dots k$$

Pour illustrer ces formules prenons l'exemple suivant :

$$n = 30 \quad \varepsilon = 10^{-5} \quad J_0 = \{1, 2, \dots, 30\}$$

$$\cdot \text{G.S} : = (J_0)^{m_0} \quad m_0 = 17$$

\cdot \text{MDSE} : k = 7 : 8 pas chaotiques (et 10 pas de G.S).

$$r_0 = 9, r_1 = 2, r_2 = r_3 = \dots = r_7 = 1 : \sum r_i = 17 = m_0$$

$$J_1 = J_0 - \{12\} \quad J_2 = J_1 - \{13, 14, 15\} \quad J_3 = J_2 - \{11, 16, 17, 18\}$$

$$J_4 = J_3 - \{10, 19, 20\} \quad J_5 = J_4 - \{8, 9, 21, 22\} \quad J_6 = J_5 - \{5, 6, 7, 23, 24\}$$

$$J_7 = J_6 - \{4, 25, 26\} ; m_7 = 9, m_6 = 11, m_5 = 12, m_4 = 13, m_3 = 14, m_2 = 15, m_1 = 16$$

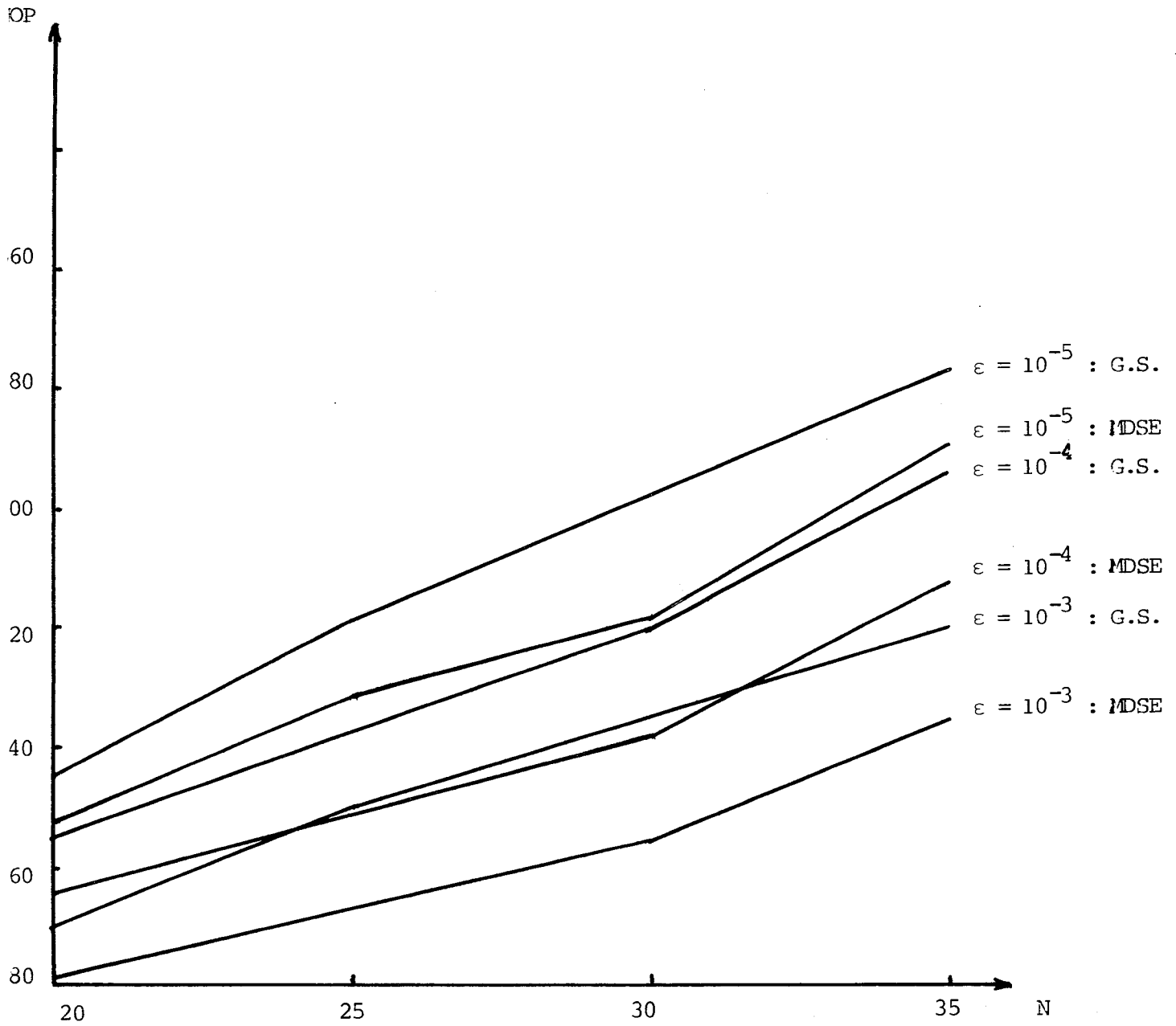
Soit $S = \{J_0^9, J_1^2, J_2, J_3 \dots J_7\}$.

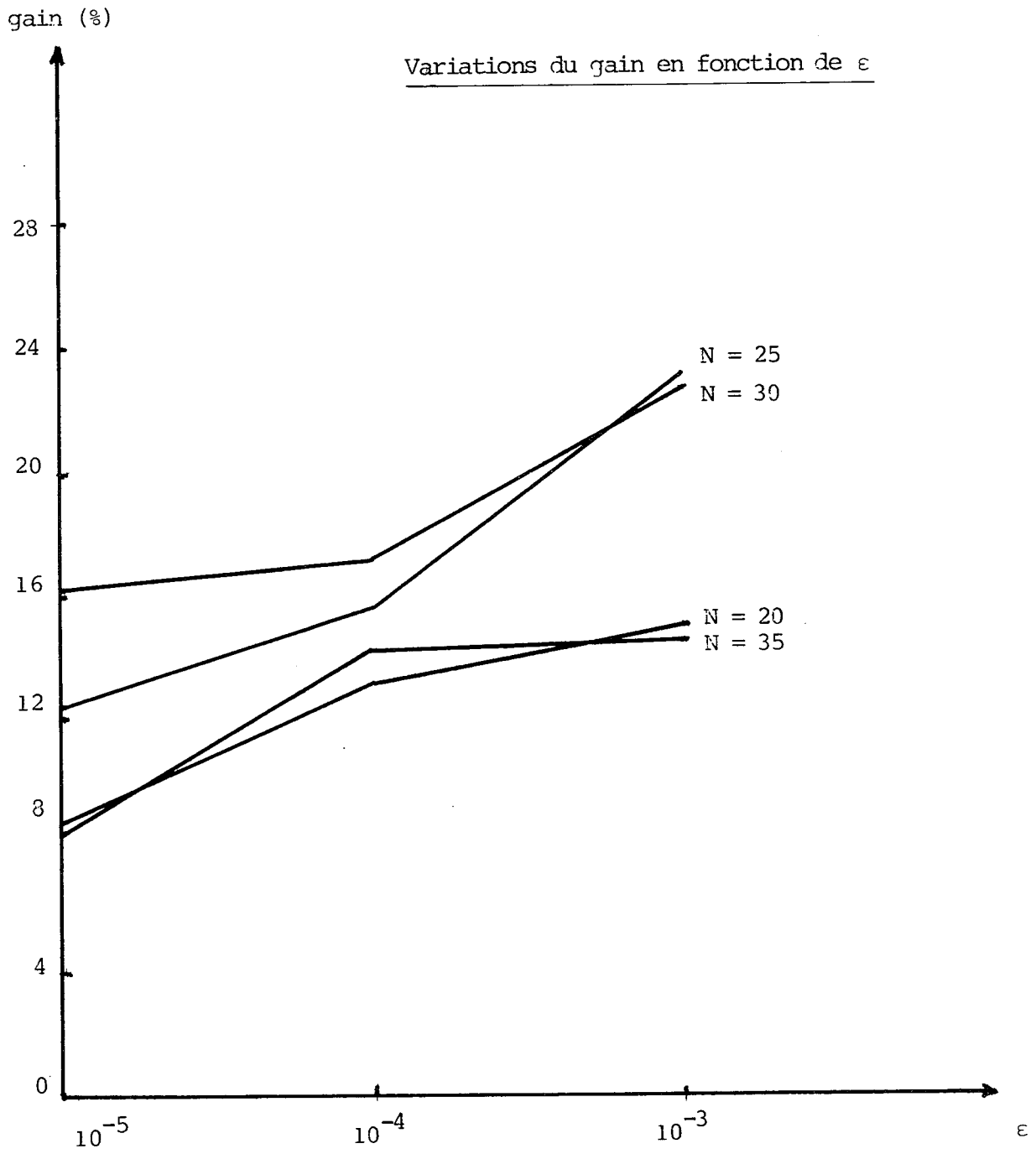
Méthode	N	ϵ	pas	NOP	gain ^(*) nop	gain % nop
G.S.	20	10^{-3}	11	220	0	
		10^{-4}	14	280		
		10^{-5}	16	320		
	25	10^{-3}	12	300		
		10^{-4}	14	350		
		10^{-5}	17	425		
	30	10^{-3}	12	360		
		10^{-4}	14	420		
		10^{-5}	17	510		
	35	10^{-3}	12	420		
		10^{-4}	15	525		
		10^{-5}	17	595		
	40	10^{-3}	12	480		
		10^{-4}	15	600		
10^{-5}		17	680			
55	10^{-3}	13	715			
65	10^{-3}	13	845			
MDSE	20	10^{-3}		187	33	15.00
		10^{-4}		243	37	13.21
		10^{-5}		292	28	8.75
	25	10^{-3}		231	69	23.00
		10^{-4}		295	55	15.71
		10^{-5}		376	49	12.50
	30	10^{-3}		278	82	22.78
		10^{-4}		348	72	17.14
		10^{-5}		427	83	16.27
	35	10^{-3}		359	61	14.52
		10^{-4}		450	75	14.28
		10^{-5}		545	50	8.40
	40	10^{-4}		542	58	9.67
	55	10^{-3}		613	102	14.26
65	10^{-3}		703	142	16.80	

(*) Le gain est toujours calculé par rapport à la méthode de Gauss-Seidel
(= gain nul)

N	ϵ	Méth	Suite initiale J_0	Suite finale S	pas	Ordre de disparition des indices	Nombre d'activation de chaque indice
10	10^{-5}	G.S.	(1,2,...,30)	(1,2,...,30)**17	17		
			"	(1→30)**9, (1→11,13→30)**2 (1→11,16→30)**1, (1→10,19→30)**1 (1→9,21→30)**1, (1→7,23→30)**1 (1→4,25→30)**1, (1→3,27→30)**1		(12), (13→15), (11,16→18) (10,19,20), (8,9,21,22) (5,6,7,23,24), (4,25,26) (1→3,27→30)	(1→3,27→30)**17, (4,25,26)**16 (5→7,23,24)**15, (8,9,21,22)**14 (10,19,20)**13, (11,16,17,18)**12 (13,14,15)**11, (12)**9
	10^{-4}	G.S.	(1→30)	(1,2,...,30)**14	14		
			(1→30)	(1→30)**6, (1→11,13→30)**3 (1→10,18→30)**1, (1→9,20→30)**1 (1→8,22→30)**1, (1→6,24→30)**1, (1→3,26→30)**1		(12), (11,13→17), (10,18,19) (9,20,21), (7,8,22,23) (4,5,6,24,25) (1→3,26→30)	(1→3,25→30)**14, (4,5,6,24,25)**13 (7,8,22,23)**12, (9,20,21)**11 (10,18,19)**10, (11,13→17)**9 (12)**6
20	10^{-3}	G.S.	(1→20)	(1→20)**11	11		
			"	(1→20)**6, (1→14,16→20)**2 (1→14,17→20)**1, (1→5,18→20)**1 (1,2,20)**1		(15), (16), (6→14,17) (3,4,5,18,19)(1,2,20)	(1,2,20)**11, (3,4,5,18,19)**10 (6→14,17)**9, (16)**8, (15)**6
	10^{-4}	G.S.	(1→20)	(1→20)**14	14		
			"	(1→20)**9, (1→15,17→20)**2 (1→14,18→20)**1 (1→4,19,20)**1, (1,20)**1		(16), (15,17) (5→14,18) (2,3,4,19) (1,20)	(1,20)**14, (2,3,4,19)**13 (5→14,18)**12, (15,17)**11 (16)**9

Variations de NOP en fonction de N

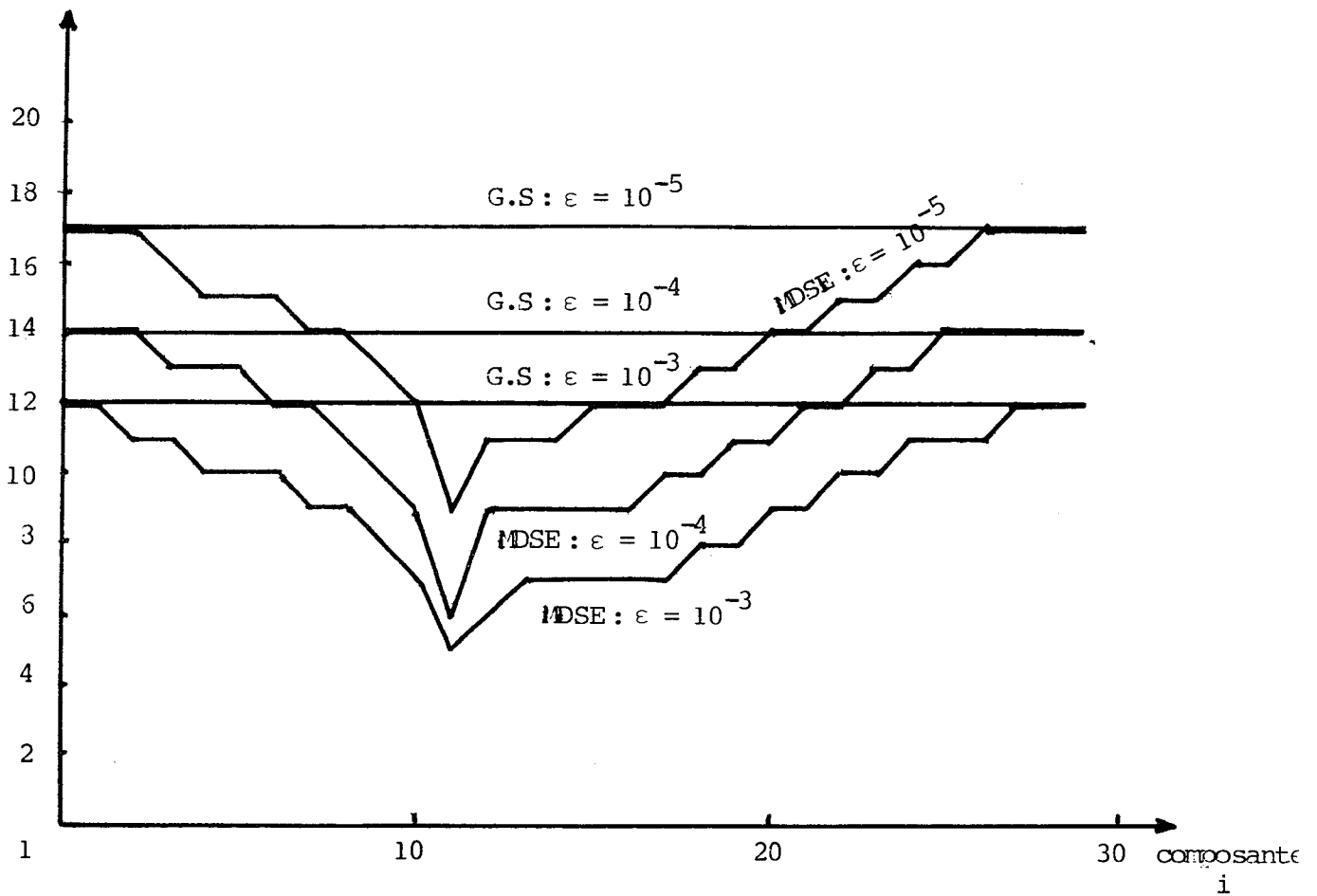




Nombre d'activations des composantes

N = 30

Nombre
d'activations



- α - Comparaisons - Conclusions.

* Vitesse de Convergence :

Comme le montre le tableau p.78, la transformation de (2) en (3) a permis de ralentir la convergence vers la solution.

Ainsi on a multiplié le nombre d'opérations (ainsi que le temps) par un facteur voisin de 5. ($N = 20$, $\epsilon = 10^{-6}$: 3 à 16 pas).

Cette augmentation a permis d'expérimenter des stratégies chaotiques efficaces.

* La méthode chaotique a réalisé des gains en nombre d'opérations, ainsi qu'en temps puisqu'elle est automatique, allant jusqu'à 24 %. Ce gain s'explique aussi par le fait que le grand nombre de tests de comparaison supplémentaires qu'exige la technique chaotique correspondent à un temps négligeable devant celui qu'ils permettent d'économiser en évitant des itérations très coûteuses à cause de la forme complexe de l'opérateur H (ou R).

* Les dernières composantes à converger sont itérées le même nombre de fois dans les deux méthodes (G.S et MDSE) : En effet $r_1 = m_0$ (voir tableau p. 79).

Ainsi pour $N = 30$, $\epsilon = 10^{-5}$ les composantes $x_1 \dots x_3$, $x_{27} \dots x_{30}$ sont activées 17 fois dans les deux cas. Ces dernières, lentes à converger font faire à G.S.

beaucoup d'opérations inutiles alors que toutes les autres composantes ($x_4 \dots x_{26}$) ont déjà vérifié le test d'arrêt. La stratégie chaotique essaie de tirer profit de ce déséquilibre en faisant juste le nombre d'opérations nécessaires pour atteindre la précision désirée.

* Il faut préciser que dans la variante de la MDSE utilisée, on n'a pas été obligé de faire des balayages correctifs sur l'ensemble des composantes après leur "disparition totale". Le danger du point fixe partiel ne s'est donc pas posé.

On pourrait interpréter cela en disant d'une part que les r_0 balayages initiaux serviraient à rapprocher x^{r_0} de la solution x^* et évitent en pratique (théoriquement ceci est faux) de converger vers un x_p partiel, d'autre part le nombre d'opérations qui n'est pas trop élevé fait obstacle à un éloignement caractérisé de x^* (nous y reviendrons ultérieurement). Ainsi pour des cas où les vitesses de convergence des éléments sont très disproportionnées, la correction s'impose comme on le verra.

* Comportement limite :

On constate que lorsque ϵ diminue, le nombre r_0 (nombre de balayages initiaux) augmente ($N = 30$: $\epsilon = 10^{-4}$: $r_0 = 6$; $\epsilon = 10^{-5}$: $r_0 = 9$) ce qui indique que la stratégie chaotique tend à se rapprocher de la méthode de G.S puisque le nombre

de pas chaotiques ne semble pas augmenter avec r_0 . C'est à cela qu'est due la diminution du gain : $N = 20$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = 10^{-3} : 15 \% \\ \epsilon = 10^{-4} : 13.2 \% \\ \epsilon = 10^{-5} : 8.8 \% \end{array} \right.$$

Nous retiendrons cette propriété des méthodes automatiques non cycliques.

(c) Les techniques Cycliques de permutation

Pour illustrer la remarque que nous avons faite à savoir que la structure particulière de K' indique que toutes les permutations sont théoriquement équivalentes (en ce sens qu'elles ne diminuent pas $\rho(K')$), nous avons effectué les expériences suivantes :

N	ϵ	méthode	suite J_0	pas	NOP	gain moy	% gain
20	10^{-3}	G.S	1... → 20	11	220		
		T.C.	20... → 1	10	200	20	9.1
		MDSE	1... → 20		187	33	15.00
		"	20 → 10, 1 → 9 1 → 9, 20 → 10 20... → 1		174 197 167	46 23 53	21.00 10.46 24.10
25	10^{-3}	G.S	1... → 25	12	300		
		TC	25... → 1	11	275	25	8.33
		MDSE	1... 25		231	69	23.00
"	25... 1		219	31	27.00		

Pour $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ on a $\rho(K') = 1 - \frac{0.6}{n}$

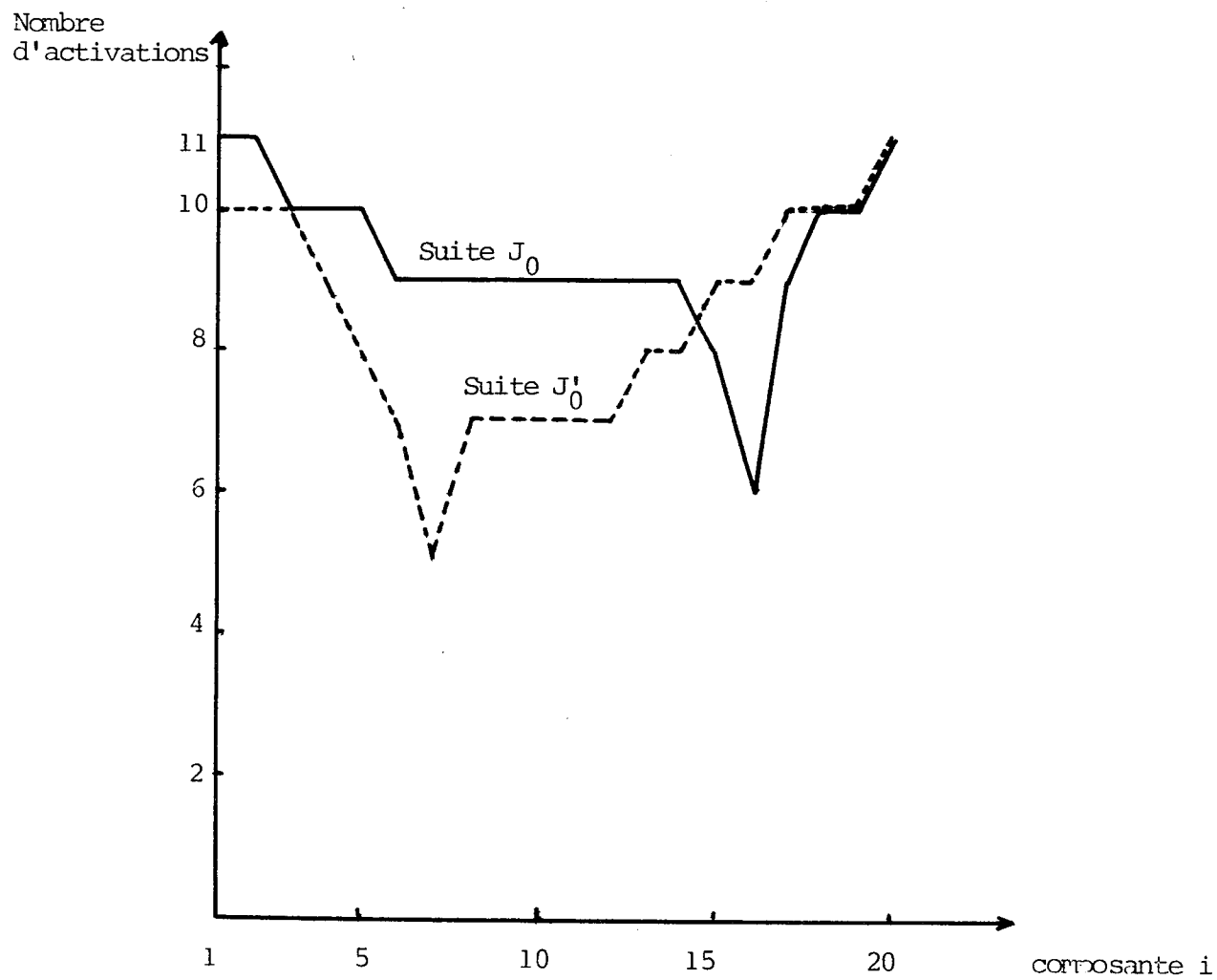
Pour $J'_0 = \{n, n-1, \dots, 2, 1\}$ on a

$$K'_C = \begin{bmatrix} 3 & \dots & 0.4 \\ 5n & & 3 \\ \vdots & & \vdots \\ 0.4 & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\rho(K'_C) = \rho(K') = 1 - \frac{0.6}{n}$$

Nombre d'activations des composantes

$$\underline{N = 20} \quad \underline{\varepsilon = 10^{-3}}$$



Expérimentalement, on trouve que $J'_0 = \{n, n-1, \dots, 1\}$ fait économiser 1 pas (n opérations) par rapport à $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ ce qui correspond à un gain de 3 à 9 %. Cette différence devrait être due au comportement numérique de la suite $\{x^k\}$ qui est légèrement modifiée en inversant l'ordre des composantes.

Mais cette différence s'accroît avec la MDSE puisqu'on passe de 15 à 24 % et de 23 à 27 %, ce qui correspond à des changements dans S .

En effet on a pour :

$$N = 20, \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

$$S_{J_0} = \{(J_0)^6, (J_1)^2, J_2, J_3, J_4, J_5\} \quad S_{J'_0} = \{(J_0)^5, (J'_1)^2, J'_2, J'_3, J'_4, J'_5\}$$

	S	Ordre de disparition	Nombre d'activation
J_0	$(1..20)^6 \cdot (1..14, 16..20)^2 \cdot (1..14, 17..20)$ $(1..5, 18 \ 20)^1 \cdot (1, 2, 20)^1$	$(5) \cdot (16) \cdot (6..14, 17)$ $(3, 4, 5, 13, 19) \cdot (1, 2, 20)$	$(1, 2, 20)^{11} \cdot (3, 4, 5, 18, 19)^{10}$ $(6..14, 17)^9 \cdot (16)^3 \cdot (15)^6$
J'_0	$(20..1)^5 \cdot (20..3, 6 \ 1)^2 \cdot (20..13, 5, 1)$ $(20..15, 4 \ 1) \cdot (20..17, 3 \ 1)^1 \cdot (20)^1$	$(7) \cdot (12, 8, 6) \cdot (14, 13, 5)$ $(16, 15, 4) \cdot (19, 17, 3 \ 1)$ (20)	$(20)^{11} \cdot (19..17, 3 \ 1)^{10}$ $(16, 15, 4)^9$ $(14, 13; 5)^8 \cdot (12..8, 6)^7$ $(7)^5$

L'amélioration apportée par $S_{J'_0}$, par rapport à S_{J_0} tiendrait au pas que fait gagner r'_0 (=5) par rapport à r_0 (=6) ce qui conduit à des différences dans l'ordre de disparition et le nombre d'activations (une légère symétrie y est quand même présente). (voir dessin p. 85)

(d) Relaxation de (3)

α - La version relaxée de (3) conduit à

$$(4) \quad Q(x) = x \quad \text{avec} \quad Q(x) = \omega R(x) + (1 - \omega)x$$

On doit avoir $0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(K')} = \omega_M$

Comme $\rho(K') = 1 - \frac{0.6}{n} \implies \omega_M \approx 1 + \frac{0.3}{n} \approx 1$ (n assez grand)

De plus $\rho(K'') = 1 - \frac{0.6}{n} \cdot \omega < \rho(K')$

β - But de la relaxation :

Nous ne cherchons pas ici le paramètre optimal de relaxation. Ce qui nous intéresse encore plus c'est de voir l'influence de ω sur la vitesse de convergence. Cette influence devrait se répercuter sur l'efficacité de la technique chaotique MDSE et par voie de conséquence sur la correction qu'il faut apporter au résultat qu'elle fournit afin d'éviter le point fixe partiel.

Nous donnons les résultats suivants :

γ - Résultats - Conclusion

ω	N	ε	Méthode	pas	Nop	correction	gain nop	% gain
1	20	10^{-3}	GS	11	220			
			MDSE		187	inutile	33	15.00
0.20			GS	23	460			
			MDSE		391	inutile	69	15.00
0.15			GS	31	620			
			MDSE		506	inutile	114	18.39
0.10			GS	45	900			
			MDSE		722	inutile	178	19.78
0.05			GS	81	1620			
			MDSE		1308	2 pas	312	19.26
0.01			GS	125	2500			
			MDSE		1962	4 pas	538	21.52
0.7			GS	80				
			MDSE		78	inutile		

* Evolution du rayon spectral :

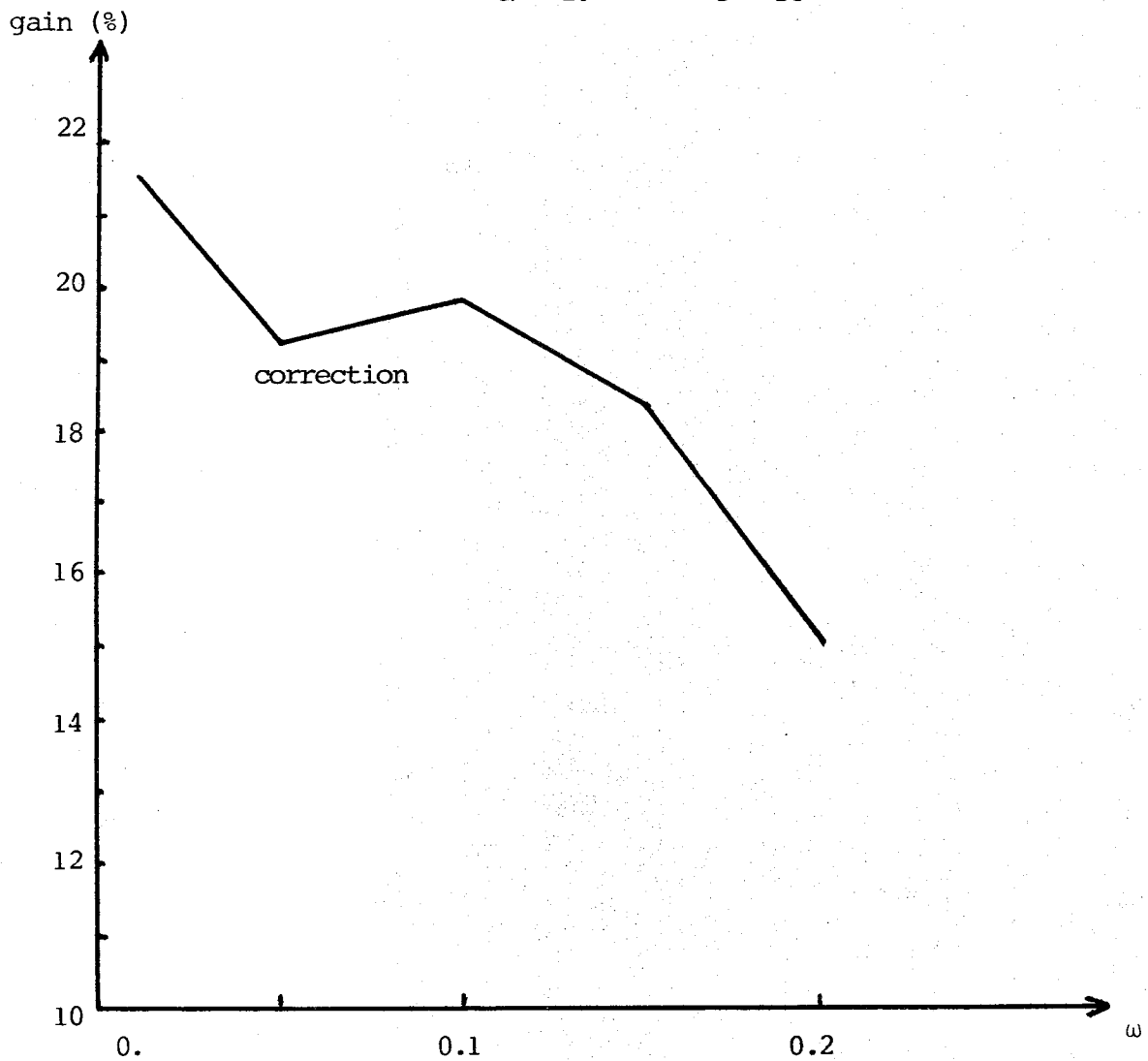
ω	1	0.2	0.5	0.1	0.05	0.01
$\rho(K'')$ (n=20)	0.9700	0.9940	0.9955	0.9970	0.9985	0.9997

Les différents paramètres ω que nous avons choisis - pour les besoins de la cause - permettent d'augmenter $\rho(K'')$ et de là de ralentir la convergence vers la solution. Ainsi en passant de 1 à 0.01 on multiplie le nombre d'opérations par un facteur 11.

Variations du gain en fonction de ω

$N = 20$

$\varepsilon = 10^{-3}$



* Influence de ω :

Le dessin précédent est très significatif. En effet :

. Au fur et à mesure que la vitesse de convergence est diminuée grâce à ω , l'efficacité de la stratégie chaotique est améliorée. On passe ainsi d'un gain de 15 à 21.52 %. Cependant cette amélioration n'est pas sans failles. Ainsi : Pour $0.1 \leq \omega \leq 1$ et tant que la correction du résultat fourni par la MDSE est inutile, on constate une augmentation du gain.

. Pour $\omega < 0.1$, la méthode de G.S. devient considérablement coûteuse, la MDSE devrait théoriquement devenir encore meilleure, mais l'on ne peut éviter alors d'apporter une correction (qui correspond à 2 pas) pour éviter la convergence vers un point fixe partiel. Cela conduit à une légère diminution du gain : 19.26 au lieu de 19.78.

. Cependant, et c'est là une remarque importante, lorsque le nombre d'opérations devient très élevé, les pas de correction bien qu'obligatoires n'influencent pas beaucoup la technique non cyclique qui s'améliore normalement en réalisant un gain de 21.52 %.

Inversement : si on augmente nettement la vitesse de convergence ($\omega = 0.7$), la méthode chaotique n'a plus d'intérêt.

3. Conclusions générales :

Après ces différentes expérimentations sur une famille de problèmes non linéaires, nous sommes en mesure de dégager un certain nombre de remarques intéressantes :

* Premier point important : inefficacité des stratégies chaotiques dans le cas où la convergence est extrêmement rapide pour Gauss-Seidel.

* C'est la forme du problème qui peut donner une indication sur la stratégie chaotique efficace qu'il convient d'utiliser. Ainsi avec (2), (3) et (4), la matrice de contraction - qui malheureusement n'est pas la meilleure donc elle ne peut donner le maximum de renseignements - nous a permis d'éliminer les techniques cycliques.

* Avec une version modifiée, la MDSE a été plus ou moins efficace car la convergence était lente. Mais cette lenteur fait réapparaître le danger du point fixe partiel car on "abandonne" beaucoup trop tôt certaines composantes. La correction devient alors obligatoire et influence le gain par rapport à la méthode de G.S.

* Les techniques non cycliques sont d'autant plus performantes que la précision du calcul n'est pas élevée. En effet l'on a tendance pour des précisions fines à se rapprocher de la méthode G.S.

Nous verrons dans le chapitre suivant - dans un contexte linéaire - jusqu'à quel point on peut confirmer ces remarques.

CHAPITRE II

UNE FAMILLE DE PROBLEMES DE POINT FIXE LINEAIRES



Introduction

Nous allons dans ce chapitre approfondir et confirmer si possible les résultats expérimentaux du chapitre précédent sur une famille de problèmes linéaires de point fixe.

1 - POSITION DU PROBLEME

Considérons l'équation de point fixe

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad x = F(x) \text{ où } F \text{ est un opérateur affiné sur } \mathbb{R}^n \\ F(x) = Ax + b \quad A : \text{matrice } n \times n \\ \quad \quad \quad b : \text{vecteur donné de } \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Il s'explicité ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = f_i(x_1 \dots x_n) \\ i = 1 \dots n \end{array} \right.$$

$$\text{avec } f_i(x) = \frac{0.8}{i} x_i + \frac{1.2}{n} \left[\sum_{j>i} \frac{2i-j}{2i+j} x_j + \sum_{j<i} \frac{2j-i}{2i+j} x_j \right] + i \quad i, j = 1 \dots n$$

2 - CONTRACTION - CONVERGENCE

En munissant \mathbb{R}^n de la norme vectorielle type, nous aurons

$$|F(x) - F(y)| \leq |A| \cdot |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$K = |A|$ est donc la (meilleure) matrice de contraction de F si $\rho(K) < 1$.

$$\text{Or } K = (k_{ij}) \quad i, j = 1 \dots n \text{ avec } k_{ij} = \begin{cases} \frac{0.8}{i} & \text{si } i = j \\ \frac{1.2}{n} \cdot \frac{|2i-j|}{2i+j} & \text{si } i < j \\ \frac{1.2}{n} \cdot \frac{|2j-i|}{2i+j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

On peut affirmer a priori que $\rho(K) \geq 0.8$ (cf. [1]). Quant à savoir si $\rho(K) < 1$, nous avons dû effectuer un calcul explicite du rayon spectral en fonction de n .

En notant $K = L+U = \begin{bmatrix} & & & U \\ & & & \\ & & & \\ L & & & \end{bmatrix}$

nous savons que la matrice de contraction de l'opérateur de Gauss-Seidel G associé à F est $K' = (I-L)^{-1}U$. De plus, on a $\rho(K') \leq \rho(K)$ [28].

n	$\rho(K)$	$\rho(K')$
2	0.80000	0.80000
10	0.83134	0.82558
11	0.83151	0.82568
12	0.83145	0.82560
15	0.83067	0.82485
20	0.82850	0.82293
30	0.82417	0.81922
40	0.82074	0.81635
50	0.81811	0.81419
60	0.81605	

← maximum

(voir graphique p.102)

$\rho(K)$ est croissante jusqu'à $n = 11$ où elle admet un maximum, ensuite elle devient décroissante.

Nous plaçant dans la zone $5 \leq n \leq 60$ où $\rho(K)$ (ainsi que $\rho(K')$) < 1 , nous pouvons dire que F est contractant relativement à la norme vectorielle type d'où la convergence des techniques chaotiques appliquées sur F (G.S en particulier) pour trouver le point fixe unique x^* de F dans \mathbb{R}^n .

Remarques :

. Une différence importante avec le contexte non linéaire du chapitre précédent est la suivante :

Pour le problème non linéaire (2), nous avons pu, grâce à une succession de majorations, exhiber une matrice K vérifiant $|H(x)-H(y)| \leq K|x-y|$ et

$\rho(K) < 1$. Cette matrice n'est pas bien entendu la plus petite^(*) vérifiant la condition de contraction. Elle donne donc une indication qui n'est pas très précise sur le problème. Tandis que dans le cas linéaire, la matrice $K = |A|$ est la meilleure, c'est-à-dire la plus petite matrice vérifiant $|F(x)-F(y)| \leq K|x-y|$ et $\rho(K) < 1$. Elle est donc la plus intéressante et la plus riche en renseignements.

Cette remarque a son influence sur le choix des stratégies chaotiques efficaces (cycliques ou non cycliques selon le cas).

. L'examen de la matrice K permet de montrer que, quelle que soit la permutation $J = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ de la suite $J_* = \{1, 2, \dots, n\}$, on ne peut rendre le rayon spectral $\rho(K_J)$ inférieur à 0.8 (cf. [1]).

Comme $\rho(K)$ est très voisin de ce nombre pour tout n ($0.8 < \rho(K) < 0.832$), on conclut que toutes les techniques chaotiques cycliques de permutation sont pratiquement équivalentes (expérimentalement, on note une légère différence entr'elles). Ce sont d'autres stratégies qu'il faut donc employer.

3 - STRATEGIES CHAOTIQUES

Nous nous sommes limités aux techniques cycliques de répétition qui se sont avérées les plus efficaces.

(a) Techniques cycliques de répétition

. La suite initiale est $J_0 = \{(i_1)^{r_1}, (i_2)^{r_2} \dots (i_n)^{r_n}\}$ avec $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ une permutation de $J_* = \{1, 2, \dots, n\}$ et $r_i \geq 1 \quad i = 1 \dots n$. La suite S s'écrit donc $S = \{J_0 \dots J_0\} = (J_0)^p$

. Pour introduire des critères de comparaisons supplémentaires entre les différentes suites, on définit les données suivantes (Rappel - cf. A.CH.I.1).

A J_0 , on associe l'opérateur produit

$$Ch = (f_{i_n})^{r_n} \dots (f_{i_2})^{r_2} (f_{i_1})^{r_1} = \prod_{i=n}^1 (f_{i_j})^{r_j}, \quad (F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix})$$

(*) Si $K_1, K_2 \geq 0$, on a $K_1 \geq K_2 \iff \forall i, j \quad k_{ij}^1 \geq k_{ij}^2$.

D'une manière générale, si $S = \{J_1 \dots J_p\}$, nous savons que l'itération chaotique associée s'écrit [31]:

$$x^{k+1} = F_{J_{k+1}}(x^k) \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (\text{cf. Ch. I, 1ère partie})$$

F étant contractant, de matrice de contraction K , $F_{J_{k+1}}$ est alors lipschitzien et sa matrice de Lipschitz est $K_{J_{k+1}}$ obtenue ainsi :

- $K_{J_{k+1}}$ a même ligne que K si $j \in J_{k+1}$
- Pour $i \notin J_{k+1}$, $K_{J_{k+1}}$ a même $i^{\text{ème}}$ ligne que la matrice identité I_{nn} (on a évidemment $K_{J_{k+1}} = K$ si $J_{k+1} = J_* = \{1, 2, \dots, n\}$).

L'opérateur produit $Ch_p = F_{J_p} \cdot F_{J_{p-1}} \dots F_{J_1}$ aura comme matrice de Lipschitz le produit $K_{J_p} \cdot K_{J_{p-1}} \dots K_{J_1}$. Mais dans le cas où on a $\bigcup_{k=1}^p J_k = \{1, 2, \dots, n\}$, il sera contractant (cf. [25]). Nous nous situons justement dans ce contexte.

Pour en revenir à Ch :

on a $Ch = (F_{J_o})^p$ et sa matrice de contraction est

$$K_{Ch} = (K_{J_o})^p \text{ avec } K_{J_o} = (K_{i_n})^{r_n} \cdot (K_{i_{n-1}})^{r_{n-1}} \dots (K_{i_1})^{r_1} = \prod_{j=n}^1 (K_{i_j})^{r_j}$$

et $\rho(K_{Ch}) = \rho^p(K_{J_o})$

K_{J_o} étant le produit de $\sum_{i=1}^n r_i$ ($>n$) matrices $n \times n$ de la forme

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ } i_j^{\text{ème}} \text{ ligne de } K, \text{ on effectuera une "normalisation" de}$$

$\rho(K_{J_o})$ pour le comparer à $\rho(K)$ et $\rho(K')$.

On a en effet $K' = K_{J_*}$, avec $J_* = \{1, 2, \dots, n\}$ [28]

Si $K = L+U$, alors $K' = (I-L)^{-1}U = K_n K_{n-1} \dots K_1$, ce qui correspond à un produit de n matrices de la même forme que K_{ij} .

Il paraît ainsi adéquat de prendre comme indication sur la vitesse de convergence de l'itération chaotique de suite $S = \{J_0 \dots J_0\}$ le rayon $\rho(K_{J_0})$ "ramené à l'échelle n ", c'est-à-dire :

$\rho_{\text{nor}}(K_{J_0}) = [\rho(K_{J_0})]^{n/\sum r_i}$. Cette base commune de comparaison essaie de tenir compte des coûts respectifs des réévaluations dans un pas J_0 (correspondant à $\sum r_i$ itérations) et dans un pas J_* (correspondant à n itérations).

(b) A titre indicatif, nous avons expérimenté sur le même problème la méthode non cyclique MDSE et des techniques cycliques de permutation.

4 - PREMIERE SERIE DE RESULTATS : CHOIX DE J_0

Les techniques de répétition semblent être les plus indiquées pour le problème en question. Reste à choisir la suite J_0 la plus efficace.

Des résultats préliminaires ont pu répondre à cette question.

(a) Résultats

N	ϵ	J_O	Card(J_O)	Nop	ρ_{norm}	gain ^(*) nop	% gain	
5	10^{-3}	1 2 ... 5	5	160	0.81862	0	0	
		2 4 5 3 1	5	150	"	10	6.25	
		3 5 1 2 4	5	155	"	5	3.13	
		1..5, 5 4..1	10	160	0.81988			
		$\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$	10	130	0.74936	30	18.75	
		1 ⁵ , 1..5	10	80	0.64361	80	50.00	
	10^{-6}	1..5	5	335	0.81862	0	0	
		$\begin{matrix} 1 \\ 6 \end{matrix}$, 1..5	10	160	0.64361	175	52.24	
		1, 5, 4, 3, 2	12	180	0.68819	155	46.27	
	10	-	1...10	10	640	0.82558	0	0
			$\begin{matrix} 7 \\ 1 & 2 \dots \rightarrow 10 \\ 6 \end{matrix}$	16	320	0.58883	320	50.00
			1 2...→10	15	315	0.57648	325	50.78
20	10^{-3}	1...→20	20	580	0.82293	0	0	
	-	$\begin{matrix} 10 \\ 1 \end{matrix}$, 1→20	30	330	0.56682	250	43.10	
	-	$\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$, 1→20	25	275	0.51907	305	52.59	
5	10^{-3}	M.D.S.E. avec $J_O = \{1..5\}$		125		35	21.88	

(b) Analyse des résultats

. Les techniques de permutation. Comme nous l'avions prévu, d'une permutation à une autre on n'apporte guère d'amélioration par rapport à la méthode de Gauss-Seidel. De même le rayon spectral est pratiquement invariable.

. La méthode non cyclique. MDSE apporte un gain intéressant par rapport à G.S, mais on lui préférera ici pour la suite des expériences la stratégie cyclique de répétition plus performante.

(*) Le gain est toujours calculé par rapport à la méthode de Gauss-Seidel où on prend $J_O \equiv J_* = \{1, 2, \dots, n\}$ (gain nul).

. En examinant la matrice K

$$K = \begin{bmatrix} 0.8 & k_{ij} \\ & 0.4 \\ k_{ij} & \dots \\ & 0.8/n \end{bmatrix}$$

on constate que $k_{11} > k_{22} \dots > k_{nn}$.

Comme $\rho(K) \geq 0.8 = k_{11}$, il semble indiqué que pour réduire $\rho(K)$, il faille itérer plus fréquemment sur la première composante.

A. Abtroun [1] donne une majoration très utile du rayon spectral lorsqu'on prend $J_0 = \{(1)^{r_1} \dots (n)^{r_n}\}$, qui est :

$$\max_i (k_{ii})^{r_i} \leq \rho(K_{J_0})$$

En "insistant" plus sur les composantes dont les coefficients associés dans K sont élevés, on améliore la méthode de G.S. On constate en effet, d'après le tableau précédent, que parmi les suites testées, la suite $J_0 = \{1^6, 2 \dots n\}$ est de loin la plus efficace. Elle semble être la meilleure parmi les suites s'écrivant

$$\{(1)^{r_1}, 2 \dots n\}.$$

. L'efficacité d'une suite par rapport à une autre correspond précisément à une diminution du rayon spectral "normalisé". Ainsi, en passant pour $N=20$ de 0.82293 (G.S) à 0.56682 et à 0.51907, on gagne respectivement 43.10 et 52.59 % en nombre d'opérations.

. On constate d'autre part qu'à partir d'un certain moment cela ne sert à rien d' "insister" encore plus sur une composante donnée. Ainsi pour $N=10$ en itérant 7 fois successives sur $\{1\}$ on n'ajoute rien au résultat obtenu en itérant 6 fois. On fait en réalité des opérations inutiles qui diminuent le gain sensiblement. Il s'agit donc d' "insister" assez. Comment savoir combien exactement ? Là est la question.

Nous essaierons d'éclaircir ultérieurement ce point.

. Une chose reste à préciser : c'est que les stratégies de répétition n'auraient pu être appliquées si dans le problème initial la matrice A était à diagonale principale nulle. Dans ce cas, itérer 1 fois ou k fois successives sur une même composante x_i revient rigoureusement au même puisque les autres composantes dont dépend f_i n'ont pas varié entre temps.

. Si nous étions incapables de voir sur K que c'est sur la première composante qu'il faille insister nous nous serions contentés d'appliquer la stratégie non cyclique MDSE dont l'efficacité est appréciable ici (22 % pour $N=5$, $\epsilon=10^{-3}$).

5 - DEUXIEME SERIE DE RESULTATS

Ayant opté pour la suite $J_0 = \{1^6, 2, 3, \dots, n\}$, nous allons étudier le comportement de la stratégie qui lui est relative.

(a) Résultats

a.1. Evolution en fonction de N (ϵ fixé) (*)

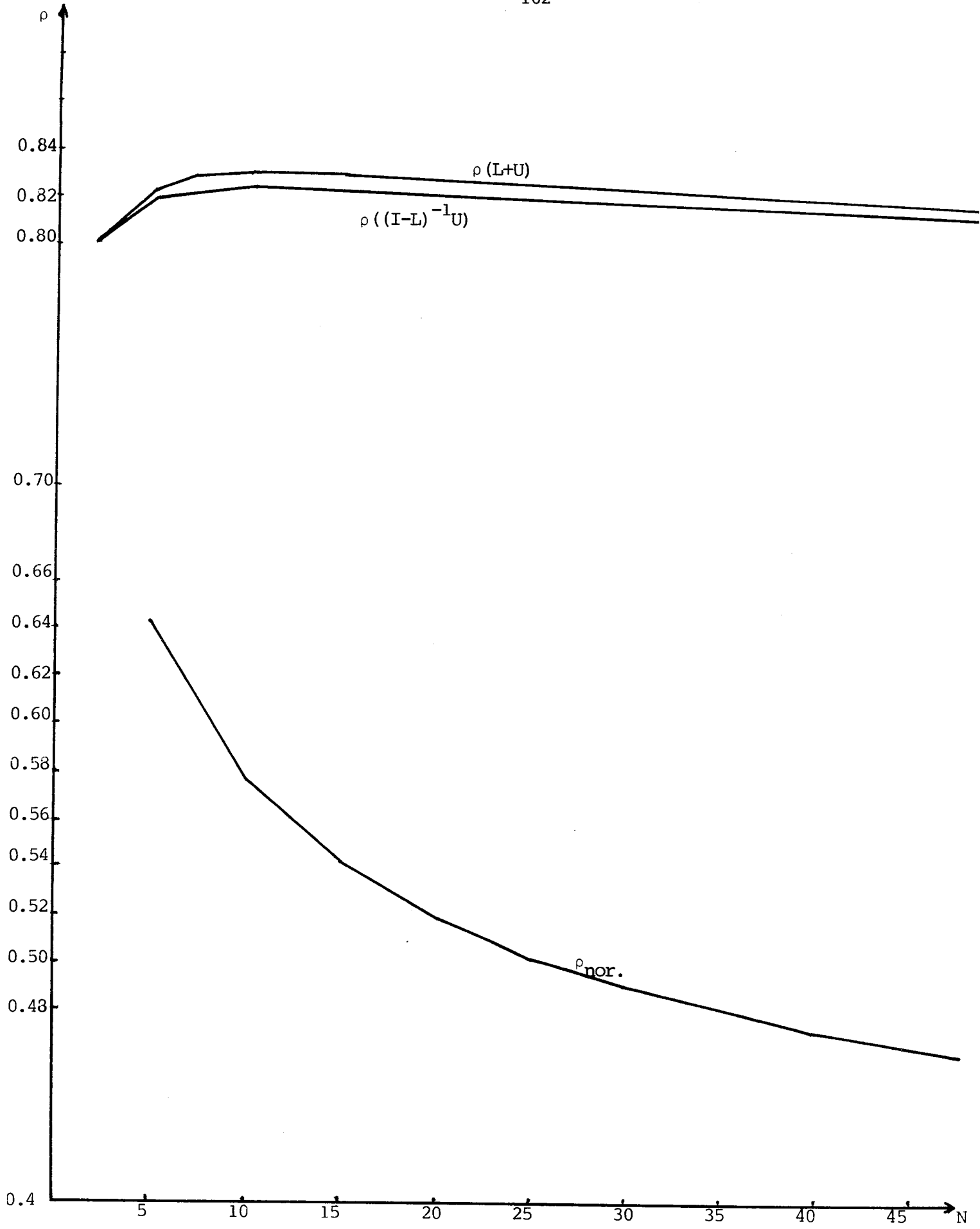
N	ϵ	J_0	Card(J_0)	NOP	ρ_{nor}	gain nop	% gain
10	10^{-6}	1 \rightarrow 10	10	640	0.82558		
		$1^6, 2 \rightarrow 10$	15	315	0.57648	325	50.78
12	"	1 \rightarrow 12	12	804	0.82560		
		$1^6, 2 \rightarrow 12$	17	340	0.56087	464	57.71
15	"	1 \rightarrow 15	15	960	0.82485		
		$1^6, 2 \rightarrow 15$	20	400	0.54220	560	58.33
18	"	1 \rightarrow 18	18	1143	0.82373		
		$1^6, 2 \rightarrow 18$	23	437	0.52738	706	61.77
20	"	1 \rightarrow 20	20	1280	0.82293		
		$1^6, 2 \rightarrow 20$	25	475	0.51907	805	62.90
25	"	1 \rightarrow 25	25	1600	0.82098		
		$1^6, 2 \rightarrow 25$	30	570	0.50227	1030	64.38
30	"	1 \rightarrow 30	30	1890	0.81922		
		$1^6, 2 \rightarrow 30$	35	665	0.48948	1225	64.81
40	"	1 \rightarrow 40	40	2600	0.81635		
		$1^6, 2 \rightarrow 40$	45	810	0.47134	1790	68.85
50	"	1 \rightarrow 50	50	3150	0.81419		
		$1^6, 2 \rightarrow 50$	55	990	0.45914	2160	68.57

(*) Notre critère d'arrêt est que

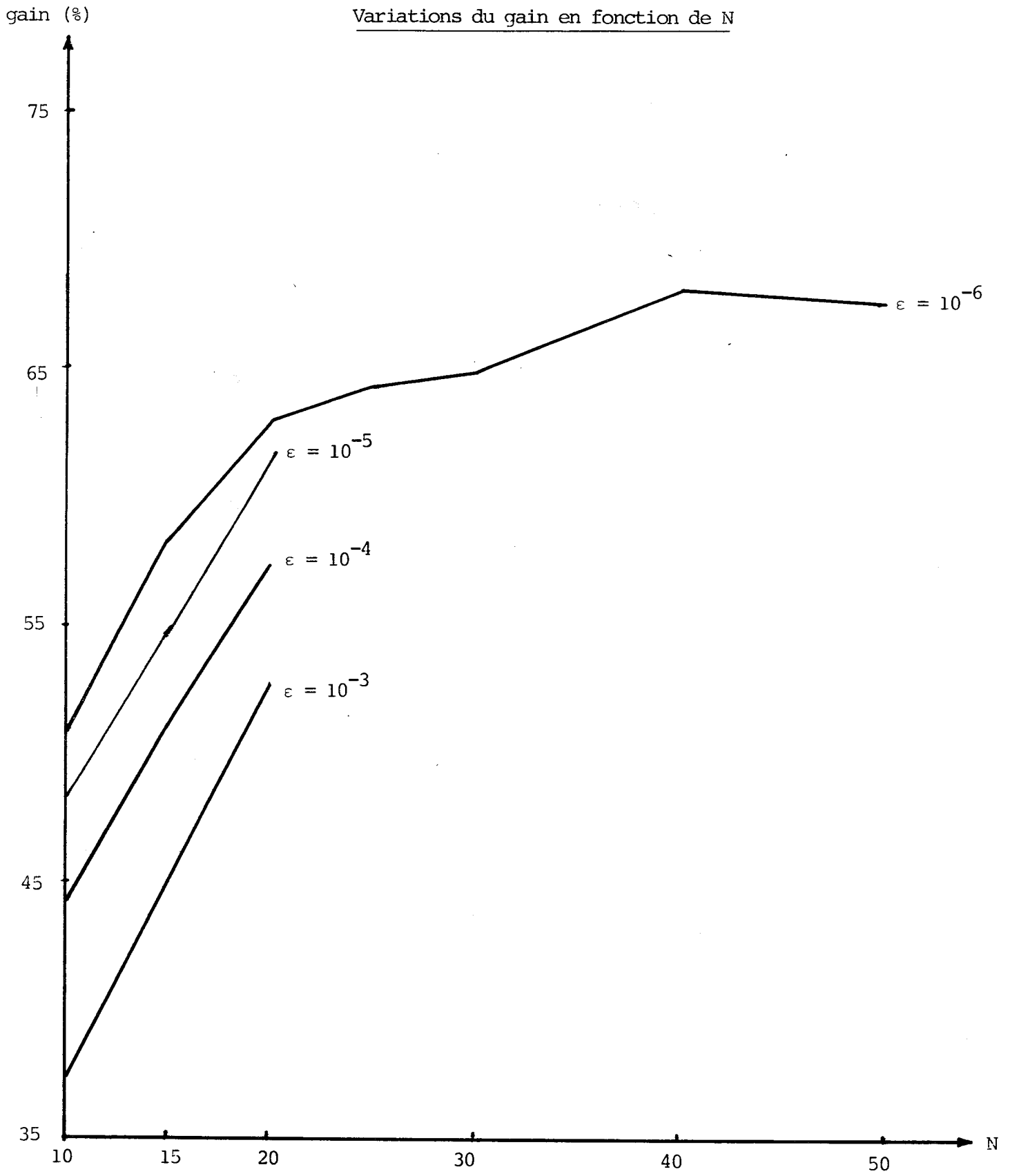
$$\forall i \left| \frac{x_i^p - x_i^{p-1}}{x_i^{p-1}} \right| < \epsilon \text{ (fixé).}$$

a.2. Evolution en fonction de ϵ

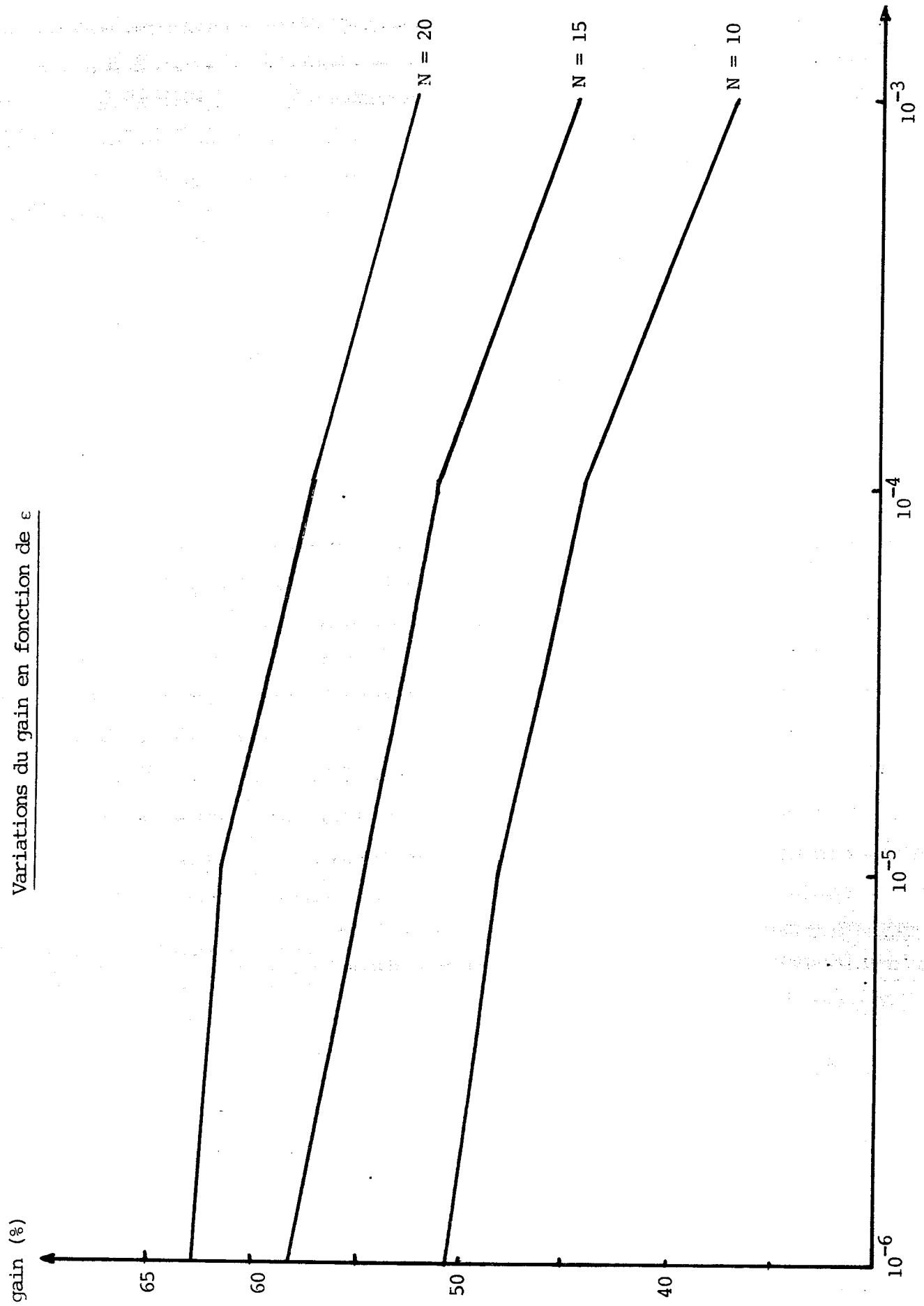
Méthode	N	ϵ	NOP	gain nop	% gain nop
G.S	10	10^{-3}	310		
		10^{-4}	430		
		10^{-5}	550		
		10^{-6}	640		
	15	10^{-3}	435		
		10^{-4}	615		
		10^{-5}	795		
		10^{-6}	960		
	20	10^{-3}	580		
		10^{-4}	820		
		10^{-5}	1040		
		10^{-6}	1280		
Technique Cyclique	10	10^{-3}	195	115	37.10
		10^{-4}	240	190	44.19
		10^{-5}	285	265	48.18
		10^{-6}	315	325	50.78
	15	10^{-3}	240	195	44.82
		10^{-4}	300	315	51.22
		10^{-5}	360	435	54.72
		10^{-6}	400	560	58.33
	20	10^{-3}	275	305	52.58
		10^{-4}	350	470	57.32
		10^{-5}	400	640	61.54
		10^{-6}	475	805	62.90



Variations des rayons spectraux en fonction de N

Variations du gain en fonction de N

Variations du gain en fonction de ϵ



(b) Analyse des résultats

En examinant les tableaux p. 100, 101 et les graphiques p. 102-104 nous pouvons dégager les remarques suivantes :

. Comme prévu et grâce à l'observation de la matrice K, les techniques de répétition se sont révélées très efficaces, présentant des gains en nombre d'opérations allant jusqu'à 70 % par rapport à G.S.

. Une caractéristique sur laquelle il faut insister est que ces stratégies, où l'on prend comme suite initiale $J_0 = \{1^6, 2..n\}$ deviennent de plus en plus performantes au fur et à mesure que le test d'arrêt est renforcé. Cela constitue une différence importante avec les stratégies non cycliques que nous avons appliquées précédemment.

D'autre part, cette efficacité augmente également avec la dimension du système. Nous avons donc un double avantage avec de telles techniques.

Ainsi pour $N = 10$ et $\epsilon = 10^{-3}$ on obtient un gain $g_{N,\epsilon}$ de 37.10 %

< >

pour $N = 40$ et $\epsilon = 10^{-6}$ on obtient un gain $g_{N,\epsilon}$ de 68.85 %

Cela nous amène à nous poser la question du gain limite :

$$\left\{ \begin{array}{l} N \text{ fixé : } \epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \text{ fixé : } N \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} g_{N,\epsilon} \rightarrow g_0 \\ ? \\ g_{N,\epsilon} \rightarrow g'_0 \end{array}$$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ? \\ g_{N,\epsilon} \rightarrow \bar{g}_0 \end{array}$$

Les graphiques des p. 103 et 104 pourraient nous fournir des réponses partielles. En effet, on remarque que le taux d'amélioration du gain $g_{N,\epsilon}$ n'est pas toujours croissant en augmentant N ou en diminuant ϵ .

Ainsi, $g_{N,\epsilon}$ semblerait se stabiliser à partir d'un certain stade ou du moins varier très faiblement comme le montre le tableau suivant :

N	ϵ	$g_{N,\epsilon}$	différence
10	10^{-6}	50.78	+ 4.85
	10^{-7}	55.63	
15	10^{-6}	58.33	+ 1.94
	10^{-7}	60.27	
20	10^{-6}	62.90	- 1.10
	10^{-7}	61.80	
50	10^{-6}	68.57	- 0.54
60	"	68.03	

. En ce qui concerne l'évolution du rayon spectral ρ_{nor} , nous constatons qu'il diminue effectivement lorsque N augmente, ce qui se traduit -comme on l'a déjà remarqué- par une amélioration de $g_{N,\epsilon}$. Cependant, on note aussi que le taux de décroissance semblerait se stabiliser ou du moins diminuer très peu à partir d'un certain rang.

$$\text{Ainsi } \frac{\rho_{\text{nor}}^{(10)}}{\rho^{(10)}} = \frac{0.57648}{0.82558} = 0.698 > \frac{\rho_{\text{nor}}^{(20)}}{\rho^{(20)}} = 0.631 > \frac{\rho_{\text{nor}}^{(30)}}{\rho^{(30)}} = 0.597 > \frac{\rho_{\text{nor}}^{(50)}}{\rho^{(50)}} = 0.564.$$

On peut se poser également la question de la limite de $\rho_{\text{nor}}^{(N)}$ lorsque N croît indéfiniment.

Nous retiendrons ici la remarque essentielle qui distingue les stratégies cycliques de permutation des stratégies non cycliques MDSE.

(c) Détermination de la "meilleure suite"

La suite $J_0 = \{1^6, 2..n\}$ expérimentée ici n'est pas forcément la "meilleure" en ce sens qu'elle ne conduit pas au plus fort gain en nombre d'opérations (et donc en temps puisque la stratégie est automatique) par rapport à G.S.

En effet, il est possible de choisir un n-uple $r_1 \dots r_n$ et lui associer la suite $J = \{1^{r_1}, 2^{r_2} \dots n^{r_n}\}$ (avec bien entendu $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \dots \geq r_n$) qui soit encore plus efficace.

Le tableau suivant nous en donne une idée

N	ε	Suite J	Nop	gain en nop/GS	% gain
20	10^{-4}	$1^6 2 3 4 \dots 20$	350	470	57.32
		$1^7 2^2 3^2 4 5 \dots 20$	308	512	62.44
		$1^8 2^2 3^2 4^2 5 \dots 20$	270	550	67.07

On peut de ce fait dire que

. $r_2 \dots r_n$ fixés, il existe un $\overline{r_1}$ optimal. Pour tout $r_1 > \overline{r_1}$ on ne peut améliorer la stratégie chaotique.
Ainsi toutes les suites où $r_1 > 6$ sont "moins bonnes" que $J_0 = \{1^6, 2 \dots n\}$ ($r_2 = \dots r_n = 1$).

. Si l'on désire augmenter $\overline{r_1}$, on doit forcément augmenter $r_2 \dots r_n$. Ainsi pour $r_1 = \overline{r_1} + 1 = 7$, on a dû prendre $r_2 = 2$ et $r_3 = 2$ pour améliorer le résultat.

Le raisonnement peut être poursuivi par récurrence.

Nous prenons l'exemple ultra simple qui suit pour éclaircir ce point.

N	ε	Suite J	Card(J)	Nop	gain nop	% gain
2	10^{-4}	1 2	2	84		
		1 2 2	3	126	-	-
		1 2 ³	4	168	-	-
		1 ² 2	3	63	21	25.00
		1 ³ 2	4	56	28	33.33
		1 ⁴ 2	5	60	24	28.57
		1 ⁵ 2	6	72	12	14.29
		1 ⁶ 2	7	84	0	0
		1 ⁴ 2 ²	6	66	18	21.43
		1 ⁵ 2 ²	7	63	21	25.00
		1 ⁶ 2 ²	8	56	28	33.33
		1 ⁷ 2 ²	9	54	30	35.71
		1 ⁸ 2 ²	10	60	24	28.57
		1 ¹⁰ 2 ³	13	65	19	22.62
		1 ¹¹ 2 ³	14	56	28	33.33
1 ¹² 2 ³	15	60	24	28.57		

*

**

*

On a donc $N = 2$ $J_* = \{1, 2\}$ $J = \{1^{r_1}, 2^{r_2}\}$

. Comme $k_{11} = 0.8$ et $k_{22} = 0.4$ on sait que l'on doit avoir $r_1 > r_2$. Effectivement pour tout $r_2 > r_1$ ($\{1^2, 2^2\}$ et $\{1^2, 2^3\}$) les résultats sont très mauvais : on perd sur la méthode de G.S.

. Pour $r_2 = 1$ on a donc $r_1 > 1$. On voit que $\bar{r}_1 = 3$. Pour tout $r_1 > \bar{r}_1 = 3$, on ne peut améliorer le gain (en fait on le divise par un facteur supérieur à 2 en itérant 2 fois supplémentaires sur x_1).

. Pour $r_2 = 2$, il faut que $r_1 > \bar{r}_1$. On constate que $\bar{r}_1 = 7$. La suite $\{1^7, 2^2\}$ est alors meilleure que $\{1^3, 2^2\}$ (35.71 % de gain au lieu de 33.33 %).

De la même manière, aucune suite s'écrivant $\{1^{7+i}, 2^2\}$ n'est plus efficace que $\{1^7, 2^2\}$.

. Pour $r_2 = 3$, on doit avoir $r_1 > \bar{r}_1$. En effet pour $\bar{r}_1 = 11$, on a le meilleur résultat. r_2 étant fixé on ne peut mieux faire avec $r_1 > 11$.

On voit qu'on peut continuer indéfiniment cette démarche. Les mêmes résultats se répètent.

Ce qu'on peut dégager c'est que la suite $\{1^{r_1}, 2^{r_2}\}$ est optimale (pour r_2 fixé) lorsque r_1 vérifie la relation $r_1 = 4 \cdot r_2 - 1$ (ce qui donne

$\frac{r_1}{r_2}$ de l'ordre de 3-4) :

$$\text{pour } r_2 = 1 : \bar{r}_1 = 3 ; r_2 = 2 : \bar{r}_1 = 7 ; r_2 = 3 : \bar{r}_1 = 11.$$

$$\underbrace{\bar{r}_1/r_2 = 3} \quad \underbrace{\bar{r}_1/r_2 = 3.5} \quad \underbrace{\bar{r}_1/r_2 = 3.67}$$

Cela se généralise apparemment pour N quelconque. En effet, des rapports constants devraient être respectés entre r_1, r_2, \dots, r_n . Si on les dépasse, on diminue le gain par rapport à G.S.

La justification théorique des relations qui doivent exister entre les r_i est, comme on l'a vu, partiellement donnée par A. Abtroun [1].

$$(1) \text{ Max}_i (k_{ii})^{r_i} \leq \rho(K_J)$$

Pour $n = 2$: $k_{11} = 0.8$ $k_{22} = 0.4$.

r_1	r_2	$(k_{11})^{r_2}$	$(k_{22})^{r_2}$	Max.	
1	1	0.8	0.4	0.8	
1	2	0.8	0.16	0.8	mauvaise
2	1	0.64	0.4	0.64	} efficace
* 3	1	0.51	0.4	0.51	
4	1	0.41	0.4	0.41	
5	1	0.33	0.4	0.4	mauvaise
4	2	0.41	0.16	0.41	} efficace
6	2	0.26	0.16	0.26	
* 7	2	0.21	0.16	0.21	
8	2	0.17	0.16	0.17	
9	2	0.13	0.16	0.16	mauvaise
10	2	0.11	0.16	0.16	mauvaise

On arrive ainsi à déterminer des zones efficaces pour r_1 (r_2 fixé) grâce uniquement à l'étude de la diagonale de K . Mais la relation (1) ne donne pas rigoureusement la suite "optimale" en pratique (la suite théorique qu'elle pourrait donner ne fournit pas pratiquement le meilleur gain).

6 - CONCLUSION

Sur cette famille de problèmes linéaires, nous avons donc pu établir un certain nombre de remarques faisant suite à celles du chapitre précédent.

La matrice de contraction nous a été un guide précieux pour le choix des stratégies chaotiques efficaces.

. Ainsi les techniques cycliques ont l'avantage -sur les non cycliques- de toujours garder leur "caractère chaotique", ce qui correspond à une amélioration du gain lorsque le test d'arrêt est renforcé (ϵ diminue).

. D'une manière analogue au cas non linéaire, ces stratégies n'ont été efficaces que dans la mesure où la méthode de Gauss-Seidel converge assez lentement et les vitesses de convergence des différentes composantes sont assez disproportionnées (ceci découle de la répartition des termes diagonaux k_{ii} de K. En effet, si les écarts entre ces termes étaient moins élevés, les gains obtenus par les techniques de répétition seraient moins bons).

. Totalelement automatiques, les stratégies cycliques (comme les non cycliques au tests de comparaison près) réalisent rigoureusement -et quelle que soit la complexité de F- le même gain en nombre d'opération et en temps d'exécution par rapport à la méthode de Gauss-Seidel (aucun temps n'est perdu en tests de détermination de la stratégie à suivre).

. Le problème de la convergence de l'itération vers un point fixé partiel ne se pose pas ici puisque la totalité des composantes est itérée jusqu'à la fin de l'algorithme.

. Enfin la linéarité du problème apporte beaucoup de simplifications à l'étude des techniques chaotiques.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons l'étude de certains problèmes linéaires aux dérivées partielles et leur résolution par le système SYGESIC. Nous verrons les constatations supplémentaires à apporter à cette étude.

C H A P I T R E I I I

UN ENSEMBLE DE PROBLEMES LINEAIRES AUX DERIVEES PARTIELLES



Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'étude et à la résolution d'un certain nombre de problèmes linéaires aux dérivées partielles grâce au système SYGESIC.

La première partie traite le cas type du problème du potentiel qui a été à la base de notre travail sur les itérations chaotiques. Il nous servira aussi pour mieux éclairer la question du point fixe partiel lorsque certaines conditions bien précises ne sont pas respectées.

En seconde partie, nous aborderons une série de problèmes sur lesquels nous avons pu expérimenter plusieurs stratégies chaotiques grâce aux possibilités de SYGESIC ce qui nous permettra de dégager un ensemble de critères à exploiter.

I. LE PROBLEME DU POTENTIEL

1 - Problème - Discrétisation - Convergence:

$$* \text{ Le problème s'écrit (P) } \left\{ \begin{array}{l} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0/D \\ u = f/\Gamma \end{array} \right.$$

à résoudre sur un domaine D de \mathbf{R}^2 de frontière Γ .

Nous avons pris exprés f fonction harmonique ($f(x,y)=\cos x \sin y$) donc vérifiant $\Delta f=0$. On sait alors que f est effectivement la solution unique de (P) sur D. Ce détail important nous servira à deux reprises pour:

- . mieux voir le comportement des stratégies chaotiques (voir.2) ;
- . mieux analyser l'éventuelle convergence vers un point fixe partiel (voir .3.).

* La discrétisation standard de (P) par différences finies conduit à un problème de point fixe que l'on met sous forme de point fixe de JACOBI.

$$(1) \quad U = JU + b \quad \text{soit} \quad U = F(U)$$

qui s'explique ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i^j = \frac{1}{4} (U_i^{j+1} + U_i^{j-1} + U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \\ (i,j) \in D \end{array} \right.$$

Le maillage régulier comportant n^2 noeuds intérieurs dans D permet d'écrire J :

$$J = \begin{array}{l} \text{(d'ordre } n^2) \end{array} \begin{bmatrix} B & C & & \\ & C & \ddots & \\ & & C & C \\ & & & C & B \end{bmatrix} \quad \text{avec } B = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{4} & \ddots & \\ & & & \frac{1}{4} & \\ & & & & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

. Contraction et convergence

On a $|F(U) - F(V)| = |JU - JV| \leq |J| \cdot |U - V| \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^{n^2}$.

Pour prouver la convergence des méthodes itératives que l'on va utiliser pour calculer le point fixe U^* de F on adopte la démarche explicitée au chapitre II.A (p.45).

La matrice que l'on a appelée $M_\infty(|J|)$ s'écrit très simplement.

$$M = M_\infty(|J|) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

d'où $\rho(M) = \frac{1}{4} (2 + 2\cos \frac{\pi}{n+1}) < 1$ ce qui répond à la question:

$$(\rho(|J|) \leq \rho(M) < 1)$$

Le problème (P) a été résolu sur trois domaines différents (voir p.116) D_1 , D_2 et D_3 (*).

Nous avons expérimenté des techniques chaotiques interactives de partage en zones et des techniques automatiques non cycliques suivant le plan suivant:

. 1er cas où la connaissance de la solution de (1) sert pour la conduite du calcul. Précisons que cette particularité qui ne peut se présenter dans la réalité nous a permis au début de notre recherche d'avoir une idée sur le comportement des stratégies chaotiques (interactives: MPZ) expérimentées.

. 2ème cas où f nous est utile pour suivre la convergence éventuelle vers un point fixe partiel.

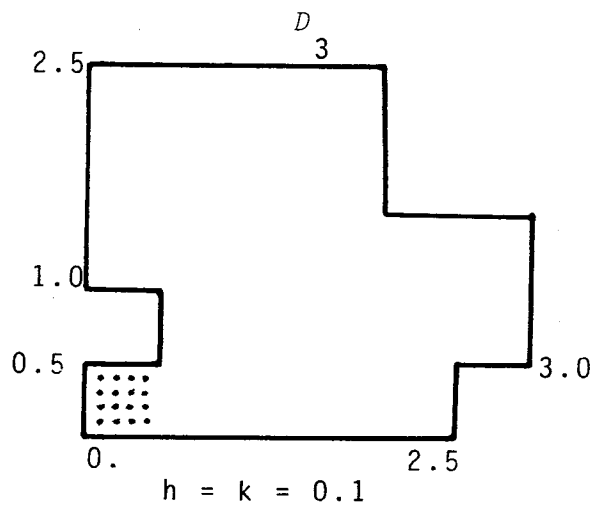
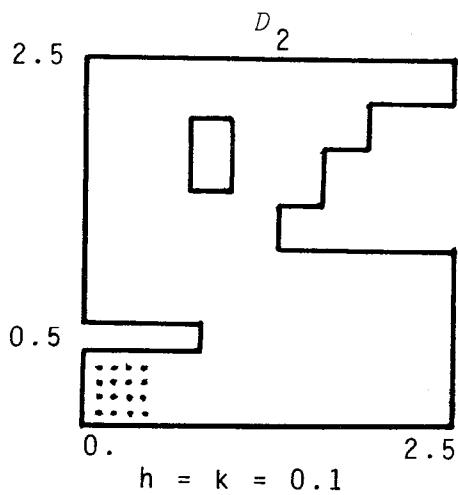
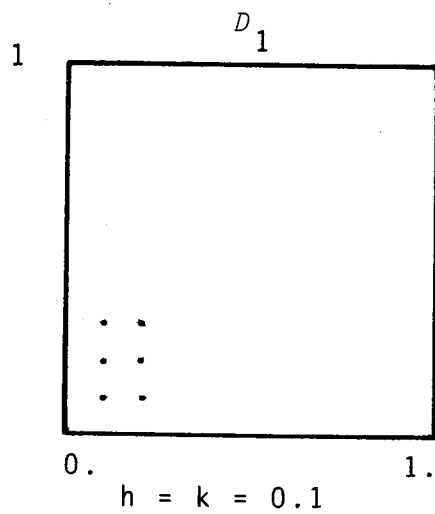
2 - 1er CAS - Exemple illustratif

(a) Pour résoudre le système linéaire (1) nous utilisons le test d'arrêt:

$$\forall i, j: \bar{z}_{ij} = |(U_i^j)^r - f_i^j| \leq \varepsilon \text{ (fixé) car on sait que } f$$

est la solution de (P).

(*) Revoir le chapitre II - partie A (page 47) pour le cas du domaine qui n'est pas rectangulaire plein.

Domaines de Résolution du Problème du Potentiel

La discrétisation de f sera pour nous la solution de (1) (*).

* Nous avons expérimenté - en plus de la méthode de G.S - la stratégie de partage en zones qui s'explique comme suit:

. étape r

On calcule $\bar{z}_i^j = |(U_i^j)^r - f_i^j| \quad \forall i, j \in D.$

L'affichage linéaire de ces quantités sur l'écran nous permet de pointer un seuil s . Cela conduit à diviser D en deux zones

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zone 1} = \{ (i, j) \in D / \bar{z}_i^j < s \} \\ \text{zone 2} = \{ (i, j) \in D / \bar{z}_i^j \geq s \} = D - \text{zone 1.} \end{array} \right.$$

La technique chaotique consiste alors à fixer un seul entier NIT et à "balayer" NIT fois successives les éléments de la zone 2 uniquement. On se ramène donc à la stratégie interactive MPZ exposée précédemment ou $NIT_1=0$ et $NIT_2=NIT$.

En n'itérant pas sur la zone inférieure on ne court pas le risque de converger vers un point fixe partiel puisqu'on se base sur un test d'arrêt relatif à la solution exacte.

. étape $r+1$ on répète le même processus jusqu'à atteindre la précision désirée.

* Suite chaotique:

On peut écrire $S = \{ \underbrace{J_* \dots J_*}_{r_0}, (J_1)^{r_1}, (J_2)^{r_2} \dots (J_p)^{r_p} \}$. J_* est

l'ensemble des noeuds (i, j) de D rangés dans l'ordre standard 1.

(*) Il va sans dire que la solution exacte du système (1) qui approche (P) est en fait une approximation de f solution exacte de (P). Comme l'on n'exige pas une précision très forte on peut prendre la discrétisation de f comme solution de (1).

$f_i^j = f(x_i, y_j)$ où x_i, y_j sont les coordonnées du noeud (i, j) de D .

On a de plus $J_i < J_*$ $\forall i$ et $r_i > 1$ ($r_i = NIT_i$).

(b) Résultats:

Nous avons expérimenté sur trois domaines D_1 , D_2 et D_3 .

- . D_1 : grille carrée de 121 noeuds dont 81 intérieurs,
- . D_2 : grille creuse de 582 noeuds dont 426 intérieurs,
- . D_3 : grille de 661 noeuds dont 541 intérieurs.

Nous avons alors comparé les résultats fournis par G.S et la stratégie chaotique.

Pour $\varepsilon = \text{Max } \bar{z}_i^j = \text{Max}(|U_i^j - f_i^j|) \approx 10^{-2}$ on a eu pour:

- . D_1 : gain en n.op par rapport à G.S \approx 8%
- . D_2 : gain en n.op par rapport à G.S \approx 10%
- . D_3 : gain en n.op par rapport à G.S \approx 38%

Ces résultats conduisent aux remarques suivantes:

* Pour D_1 qui est carré et symétrique, le gain a été le plus faible. Cela peut s'expliquer d'une part par le nombre peu élevé des noeuds (81) et d'autre part - comme on le remarque sur les dessins p.119- et surtout par l'uniformité des vitesses de convergence des différentes composantes de U.

En effet, on a $(\text{Max } \bar{z}_i^j / \text{Min } \bar{z}_i^j) \approx 10$ à 20 ce qui implique que la technique chaotique ne peut apporter guère d'amélioration (le rapport n'est divisé que par 2).

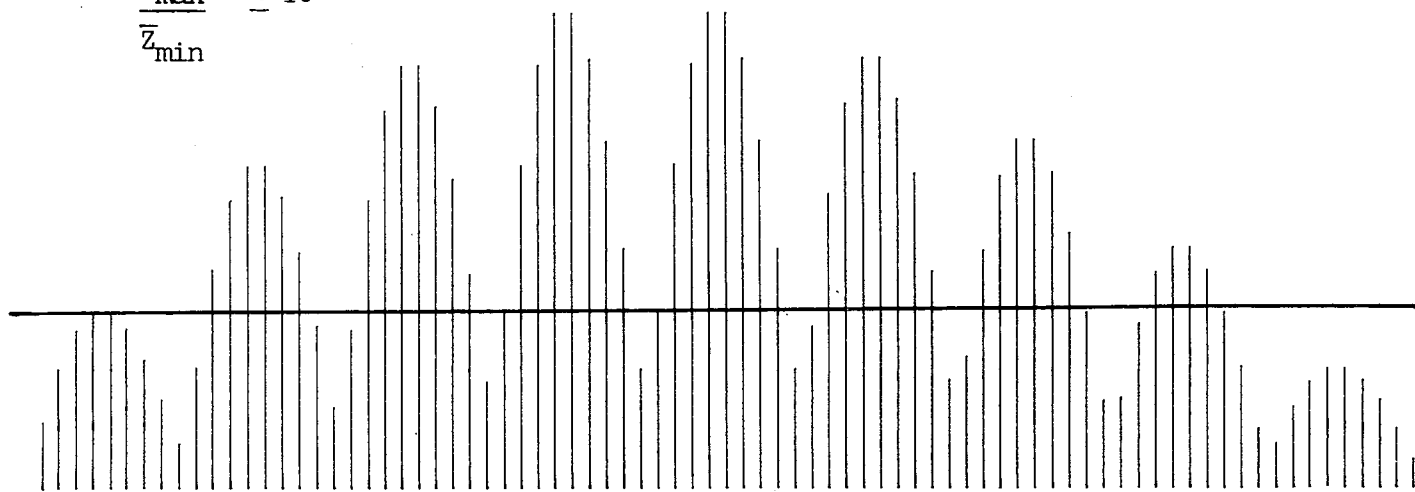
* Pour D_2 assez "tordu" et creux, le gain meilleur est dû au déséquilibre assez net entre les différents \bar{z}_i^j (voir p.120).

* Enfin pour D_3 où les écarts sont encore plus poussés

119
Répartition des erreurs (D_1)

$\frac{\bar{z}_{\max}}{\bar{z}_{\min}} \approx 16$

0.02499



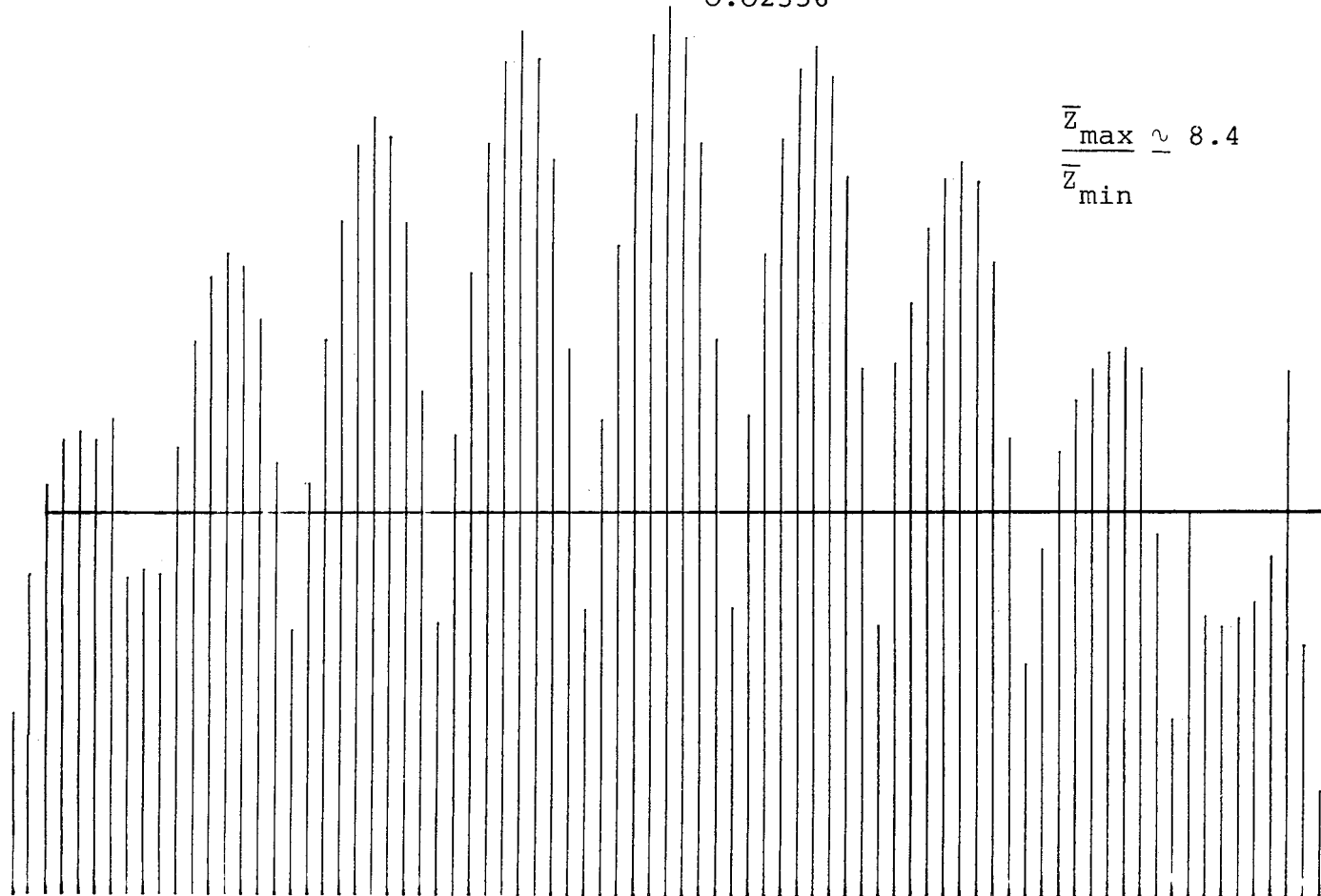
VECTEUR ERREUR

Méthode de G.S.

NOP. = 2835 (35 pas)

0.02356

$\frac{\bar{z}_{\max}}{\bar{z}_{\min}} \approx 8.4$



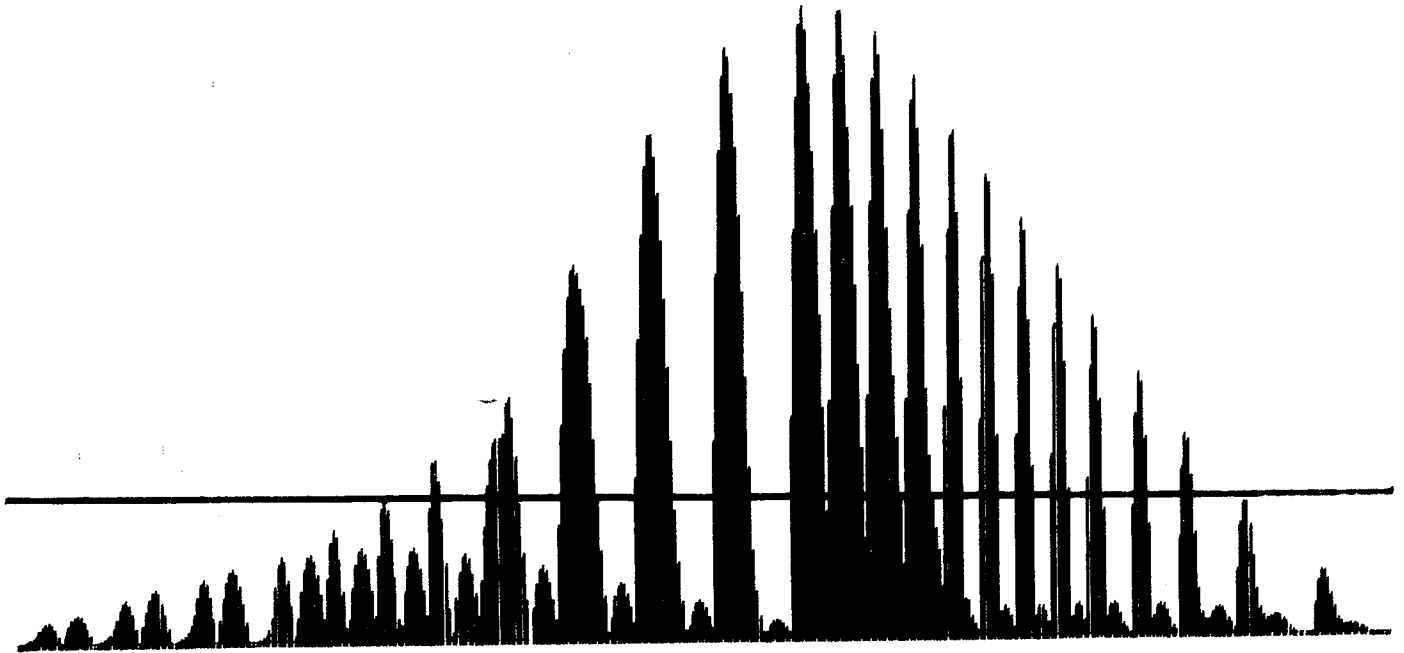
VECTEUR ERREUR

Méthode chaotique M.P.Z.

NOP. = 2676

120
Répartition des erreurs (μ_2)

0.26762

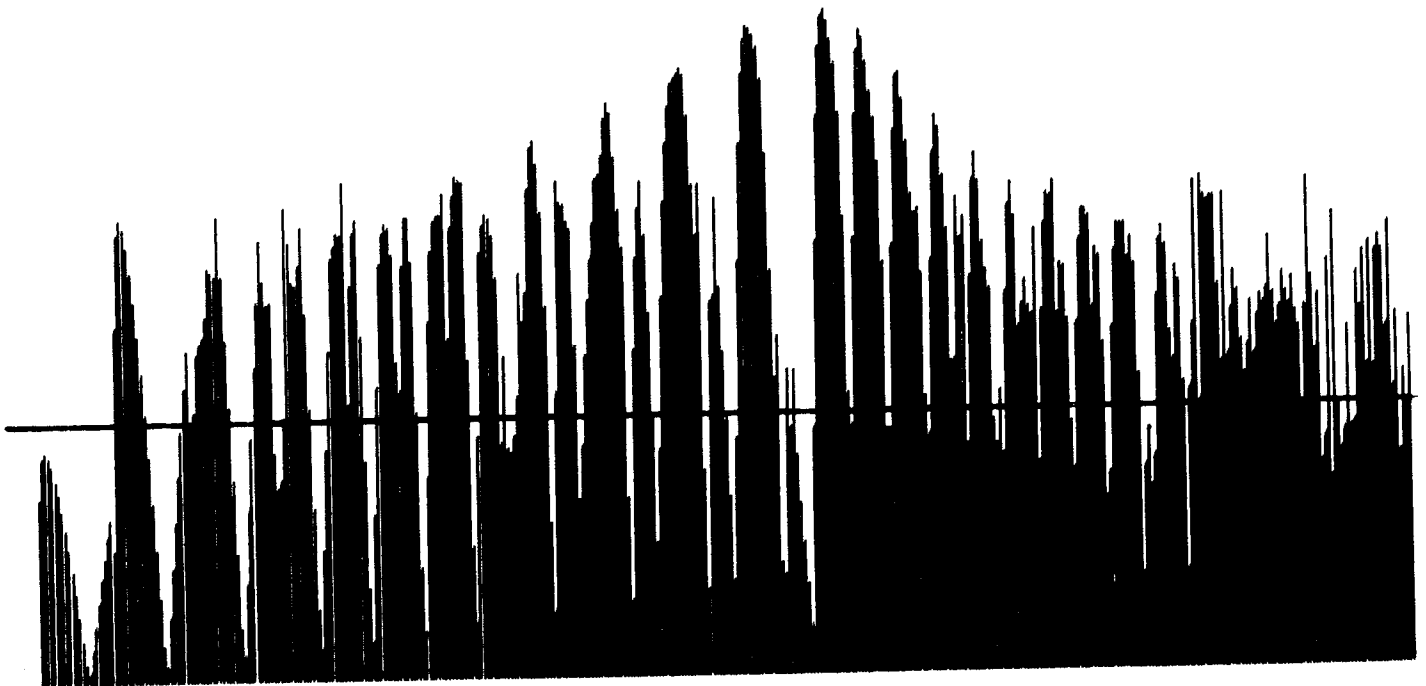


VECTEUR ERREUR

Méthode de G.B

NOP = 12780 (30 pas)

0.26911



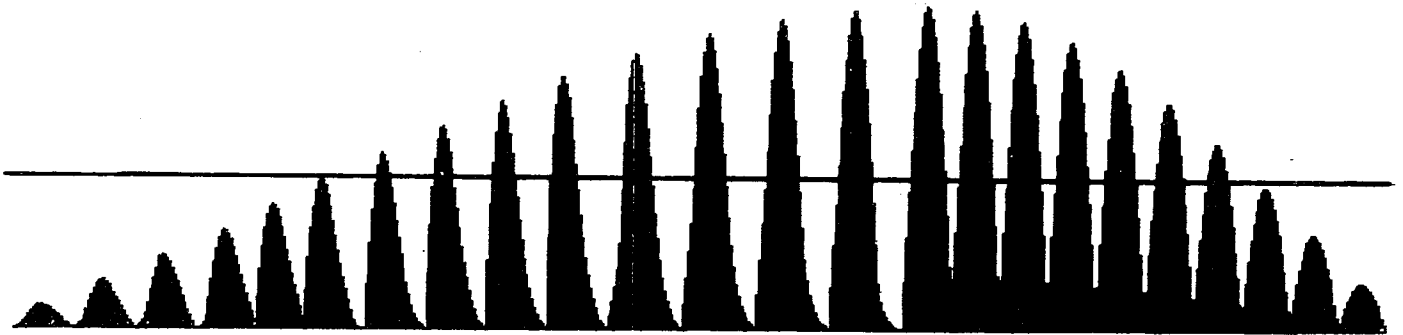
VECTEUR ERREUR

Méthode chaotique

NOP = 6756

Répartition des erreurs (D_3)

0.121236

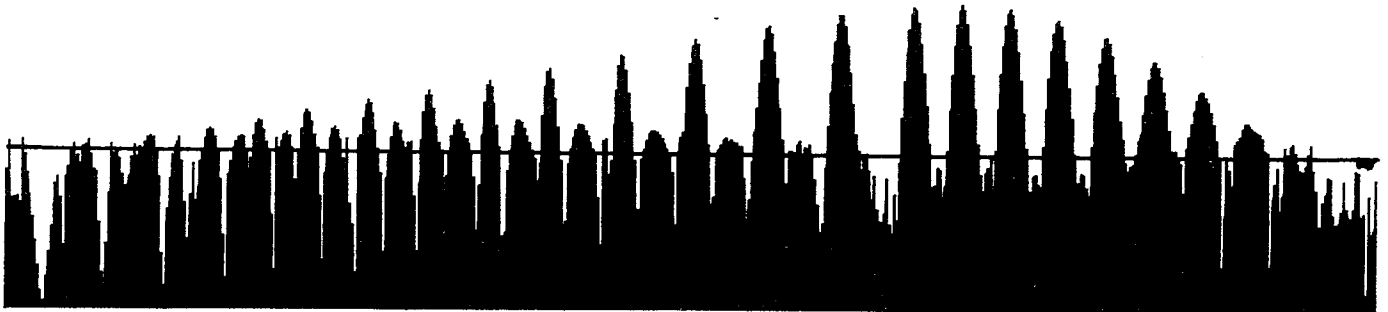


VECTEUR ERREUR

Méthode de G.S.

NOP = 54100 (100 pas)

0.118977



VECTEUR ERREUR

Méthode chaotique

NOP = 32855

(Max \bar{z}_i^j / Min $z_i^j > 2.10^3$) On réalise un gain conséquent. On remarquera pour D_2 et D_3 l'originalité de la stratégie chaotique (p.120 et 121) qui rétablit un équilibre entre les différents \bar{z}_i^j .

L'efficacité de cette technique semble dépendre en grande partie - nous aurons l'occasion d'en reparler (voir p.164) - de la forme du domaine.

3 - 2ème cas - le problème du point fixe partiel

(a) Nous reprenons le système (1). Pour le résoudre, notre nouveau critère d'arrêt est

$$z_i^j = |(U_i^j)^k - (U_i^j)^{k-1}| \leq \varepsilon \text{ (fixé)} \quad \forall i, j \in D.$$

On comparera z_i^j avec \bar{z}_i^j pour apprécier la qualité de la solution.

On se limite ici aux domaines D_1 et D_2 .

(b) Stratégie interactive de partage en zones.

Nous avons expérimenté sur D_1 la technique MPZ pour la comparer à G.S. Les seuils pointés correspondent ici à $z_i^j = s$.

α/ Méthode de G.S

$$\cdot \text{Max } z_i^j = \text{Max}_{i,j} \left| (U_i^j)^k - (U_i^j)^{k-1} \right|$$

· k = nombre de pas

$$\cdot \text{Max } \bar{z}_i^j = \text{Max}_{i,j} \left| (U_i^j)^k - f_i^j \right|$$

· NOP = nombre total d'opérations élémentaires

pas	NOP	Max z_i^j	Max \bar{z}_i^j
5	405	0.07285	0.49074
2	567	0.05122	0.41214
5	972	0.02775	0.2492
5	1377	0.01597	0.1522
10	2187	0.00589	0.05583
10	2997	0.00216	0.02043
10	3807	0.00079	0.00746
10	4617	0.00029	0.00271

β/ Méthode MPZ

(On donne à chaque étape le seuil pointé et le cardinal de la zone où on a $z_i^j > S$).

étape	pas	NOP	Max z_i^j	Max \bar{z}_i^j	Seuil S	Card(zone 2)
1	5 _{GS}	405	0.07285	0.4907	0.02808	32
2	5	565	0.02761	0.42689	0.010215	45
3	4	745	0.01847	0.3408	0.006893	33
4	6	943	0.00678	"	0.002236	42
5	5	1153	0.002143	0.266199	0.0004095	37
6	5	1338	0.004661	0.228151	0.0007324	24
7	7	1506	0.0006428	"	0.0000792	39
8	5	1701	0.0017210	0.195865	0.000235	27
9	6	1863	0.0001503	"	-	-
10	3 _{GS}	2106	0.015907	0.146113	-	-

γ/ Commentaire des résultats

Le tableau β et le graphique p.125 sont très significatifs.

Ainsi la technique chaotique - mal utilisée - conduit à un point fixe partiel. L'oscillation de $\text{Max } Z_i^j$ d'une part et les très faibles décroissances (stabilité même) de $\text{Max } \bar{Z}_i^j$ prouvent que notre méthode de partage est néfaste.

On "insiste" de cette manière beaucoup trop sur certaines composantes en vain, d'autres au contraire sont prématurément abandonnées. L'oscillation de $\text{Max } Z_i^j$ qui en résulte pourrait s'expliquer ainsi: les zones que nous choisissons par notre pointage ne sont pas en réalité celles qu'il faut prendre car l'abandon prématuré de certains éléments enlève toute signification au critère $Z_i^j \geq s$. On voit bien que $\text{Max } \bar{Z}_i^j$ arrive à ne plus bouger dans certains cas parce qu'on n'a pas "touché" à l'étape précédente l'élément où il est atteint.

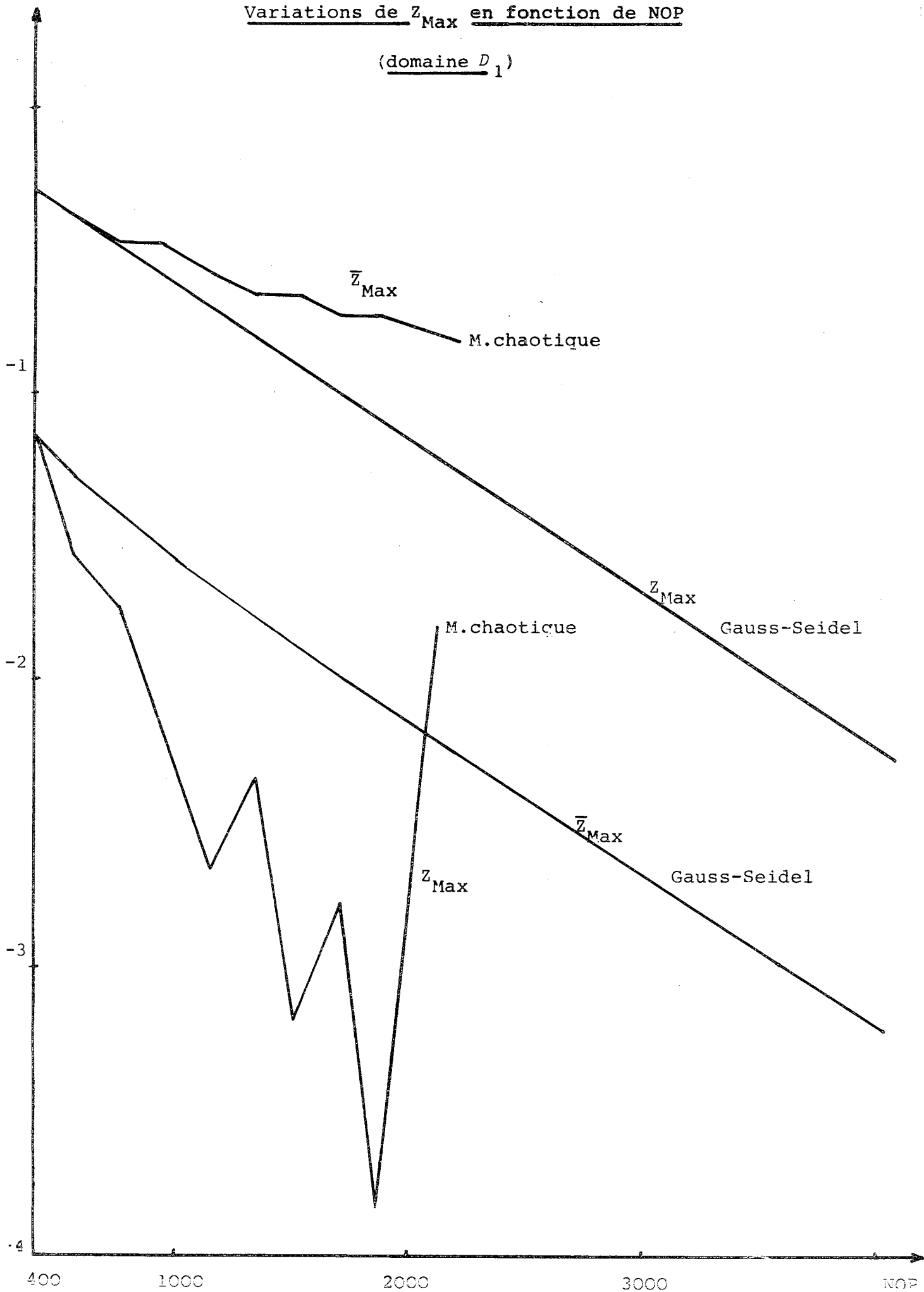
Au fur et à mesure que nous poursuivions cette stratégie, le fait d'itérer sur la zone 2 n'a plus de sens car aucun lien n'existe alors entre $\text{Max } Z_i^j$ et $\text{Max } \bar{Z}_i^j$ (il faut préciser que dans la méthode G.S les zones où les Z_i^j sont élevés se confondent pratiquement avec celles où les \bar{Z}_i^j le sont, alors qu'ici ce n'est plus vrai).

A la fin de l'étape 9 on serait tenté de dire que la solution a été atteinte avec une précision de $1.5 \cdot 10^{-4}$ alors qu'il suffit d'effectuer quelques "balayages" de G.S sur tout D pour constater - avec étonnement - que $\text{Max } Z_i^j$ est multiplié par un facteur 100, d'où la prudence à avoir.

(c) Stratégie non cyclique MDSE

Sur D_2 nous avons expérimenté des variantes de la technique chaotique MDSE.

Les résultats sont significatifs.

Variations de Z_{Max} en fonction de NOP(domaine D_1)

Précisons qu'ici on a $z_i^j = |(U_i^j)^P - (U_i^j)^{P-1}| / (U_i^j)^{P-1}$

ϵ	Méthode	NOP sans correc- tion	NOP avec correc- tion	différence (pas G.S.)	% gain fictif
10^{-4}	GS	51120			
	MDSE-V ₁	26531	50388	56	48.10
	MDSE-V ₂	21708	60474	81	57.54
	MDSE-V ₃	30380	58922	67	40.57

* On voit ainsi qu'une mauvaise utilisation de la MDSE conduit à des résultats aberrants: sans prendre la précaution de corriger la solution, on obtient un gain fictif appréciable alors qu'en réalité on a convergé vers un point fixe partiel. La correction faite, on constate que G.S est meilleure dans certains cas.

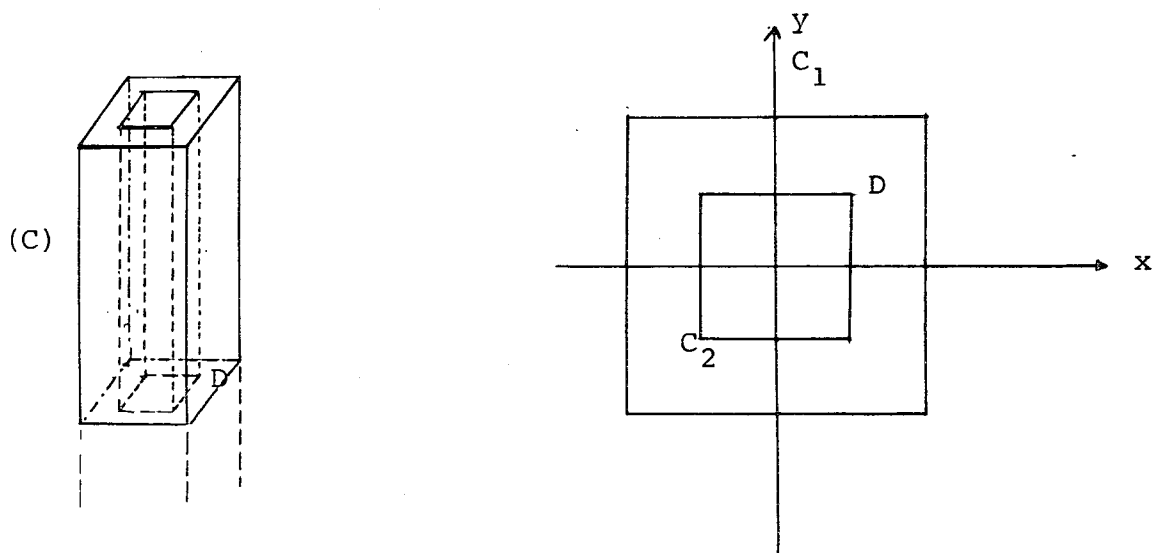
Pour conclure ce paragraphe, nous pouvons dire que la condition (abstraite) d'une itération de résiduel maximal a une grande incidence pratique lorsqu'on ne fait qu'un nombre fini d'itérations.

En effet, à trop insister sur des composantes mal choisies, on oriente effectivement l'itération vers un point fixe partiel, ce qui est numériquement catastrophique.

Nous verrons dans la partie suivante comme on peut choisir pratiquement des stratégies chaotiques permettant d'éviter le convergence vers un point fixe partiel (voir p.127- § II).

II. LE PROBLEME DE LA TORSION D'UN CYLINDRE UNIFORME

1 - Equations [19], [20]

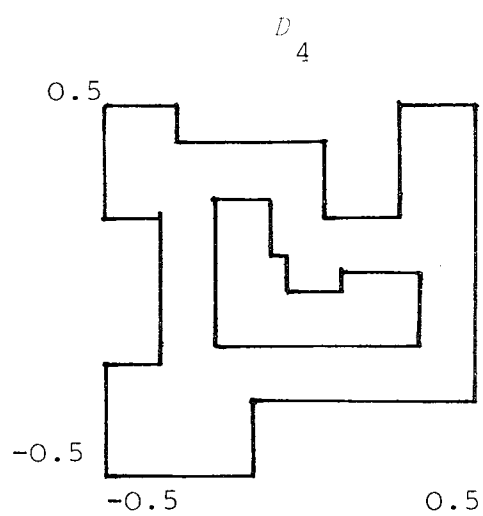
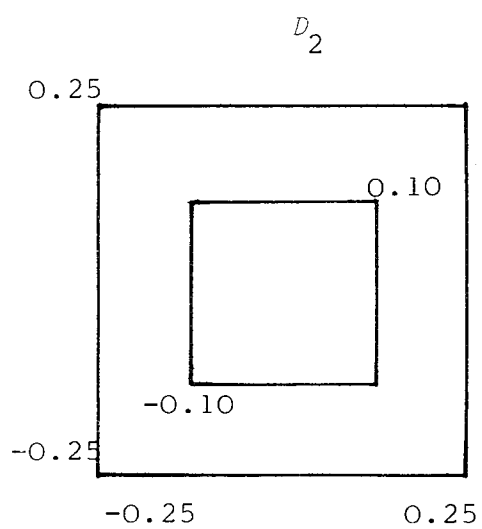
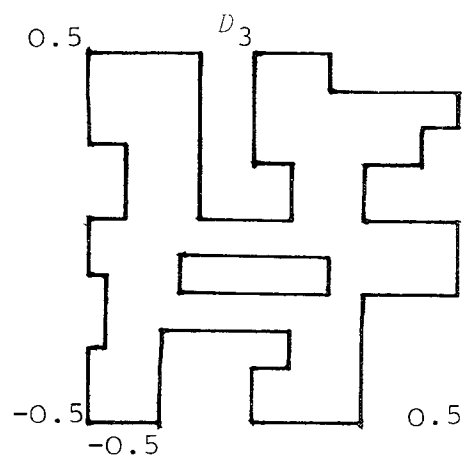
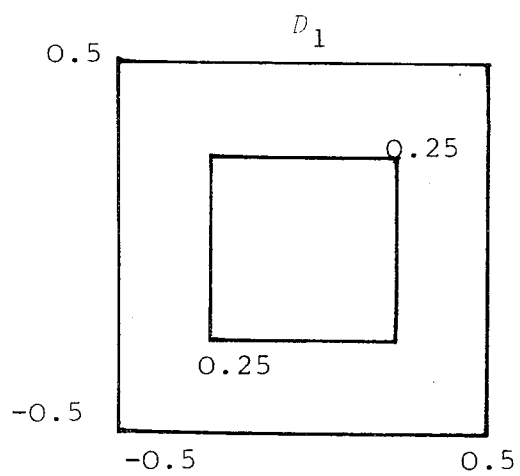


Les efforts de cisaillement et les déplacements aux points intérieurs d'un long cylindre uniforme (C) en torsion peuvent être calculés à partir d'une fonction champ U constante sur la périphérie d'une section droite D du cylindre (D n'est pas forcément rectangulaire). Pour les cas qui nous intéressent ici, le cylindre est creux et la fonction U satisfait aux conditions suivantes:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 = 0/D \\ U = 0/C_1 : \text{frontière extérieure} \\ U = 1/C_2 : \text{frontière intérieure} \end{array} \right.$$

2 - Discrétisation - Convergence

* On se ramène, en discrétisant (P), à un système linéaire mis sous forme de point fixe de JACOBI.

Domaines de résolution du problème (P)

Les stratégies chaotiques sont de deux sortes:

- . la technique automatique MDSE,
- . la technique interactive MPZ ainsi que de possibles combinaisons des deux.

3 - Cas N°1 - le domaine D_1

D_1 est une grille carrée creuse dont les sommets extrêmes sont $(-0.5, -0.5)$ et $(0.5, 0.5)$. Elle comporte 21 lignes et 21 colonnes soit 360 noeuds dont 240 intérieurs. Les pas de discrétisation sont $h = k = 5.10^{-2}$.

(a) Méthode de GAUSS-SEIDEL:

Le mode de balayage choisi (cf. organigramme de SYGESIC) sera toujours le n°1 sauf si c'est précisé.

$$\text{On désigne par } \left\{ \begin{array}{l} z_i^j = |((u_i^j)^k - (u_i^j)^{k-1}) / (u_i^j)^{k-1}| \\ z_{\text{Max}} = \text{Max } z_i^j \quad (i,j) \in D_1 \\ z_{\text{Min}} = \text{Min } z_i^j \\ \alpha = z_{\text{Max}} / z_{\text{Min}} \end{array} \right.$$

Pas	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	α
5	1200	1.5668	0.0534	29.33
10	3600	0.10507	0.0049	21.41
5	4800	0.0367	0.00181	20.28
5	6000	0.0144	0.00068	21.14
10	8400	0.002401	0.0001037	23.92
5	9600	$9.816 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	25.51
5	10800	$4.007 \cdot 10^{-4}$	$1.484 \cdot 10^{-5}$	26.97
10	13200	$6.567 \cdot 10^{-5}$	$2.299 \cdot 10^{-6}$	28.56

En désignant par J_0 la suite des éléments de D_1^0 ordonnés suivant le mode 1 on aura $S = (J_0)^r$ avec $r = 28$ pour $Z_{Max} = 10^{-2}$, 40 pour 10^{-3} et 54 pour 10^{-4} .

(b) Méthode automatique MDSE:

α - cas où $\varepsilon = 10^{-2}$

	pas	NOP	Z_{max}	Z_{Min}	α	indices disparus	reste
	5 (G.S)	1200	1.566893	0.053444	29.33		
	5 (G.S)	2400	0.376903	0.0140936	26.74		
chaotique démarrage au pas n°3	5	3475	0.1050736	0.0101237	10.38	99	141
	2	3715	0.067427	0.011576	5.83	70	71
	8	3908	0.009964	0.00124	8.03	71	0
CORRECTION	4 (G.S)	4868	10^{-2}				

β - cas où $\varepsilon = 10^{-3}$

chaotique
démarrage
au pas n°5

pas	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	α	indices disparus	reste
20 (G.S)	4800	0.036715	0.0018105	20.28		
5	5972	0.014417	0.0010313	13.98	36	204
9	6790	0.0028714	0.001001	2.87	196	8
2	6804	0.0017948	0.001232	1.46	5	3
1	6808	0.000996	0.0002193	4.54	3	0
4 (G.S)	7768	10^{-3}				

CORRECTION

γ - cas où $\varepsilon = 10^{-4}$

chaotique
démarrage
au pas N°2

pas	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	α	indices disparus	reste
35 (G.S)	8400	0.0024011	$1.004 \cdot 10^{-4}$	23.92		
6	9493	0.0008197	$1.019 \cdot 10^{-4}$	8.06	154	86
5	9745	0.000334	$1.46 \cdot 10^{-4}$	2.28	230	10
5	9771	$9.999 \cdot 10^{-5}$	$1.9149 \cdot 10^{-5}$	5.23	10	0
4 (G.S)	10731	10^{-4}				

CORRECTION

ε - étude des suites chaotiques

Nous avons déjà expliqué le processus de disparition des éléments. Après r_0 balayages initiaux de G.S qui permettent d'atteindre un Z_{Min} très voisin de ε (fixé) se déclenche l'algorithme chaotique. Au bout de r_1 pas lorsque tous les éléments disparaissent r_2 balayages de G.S sont nécessaires pour corriger la solution.

Précisons que - les tableaux précédents le montrent - calculant à la fin de chaque étape "chaotique" les Z_{Max} et Z_{Min} sur l'ensemble des éléments non disparus, la suite des Z_{Min} n'est pas forcément décroissante. Au cours des pas correctifs, on reprend la totalité des u_i^j pour calculer ces deux grandeurs.

On a donc $S = \{(J_0)^{r_0}, J_1, J_2 \dots J_{r_1}, (J_0)^{r_2}\}$ avec

ε	r_0	r_1	r_2
10^{-2}	12	13	4
10^{-3}	24	14	4
10^{-4}	36	15	4

A remarquer:

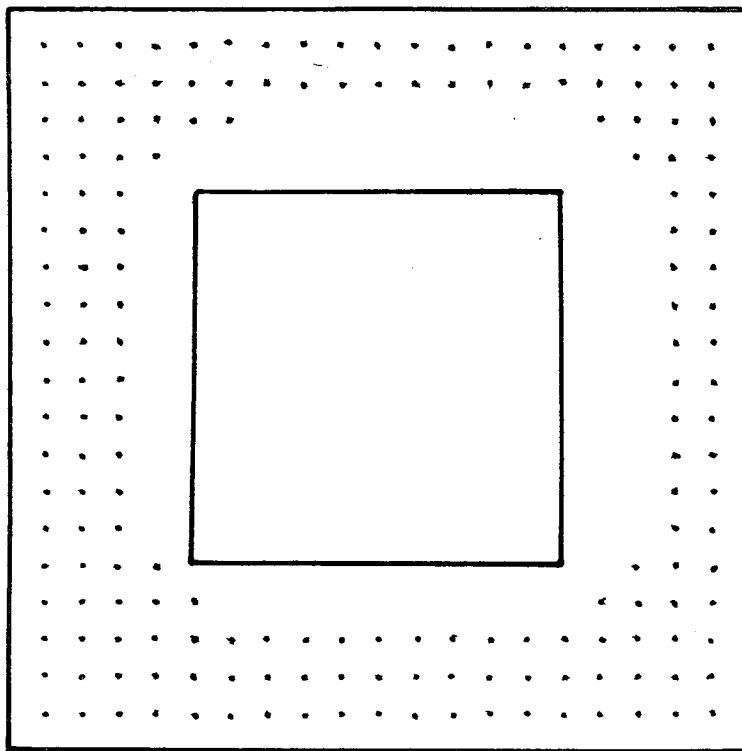
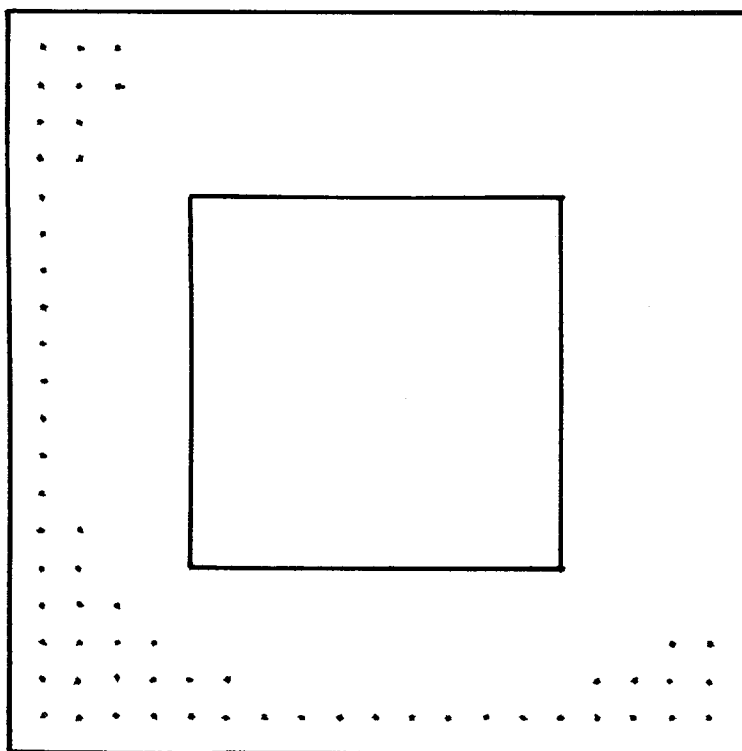
- . l'augmentation de r_0 et r_1 lorsque ε diminue,
- . les suites s'imbriquent $J_i \subset J_{i-1}$ $i = 1 \dots r_1$.

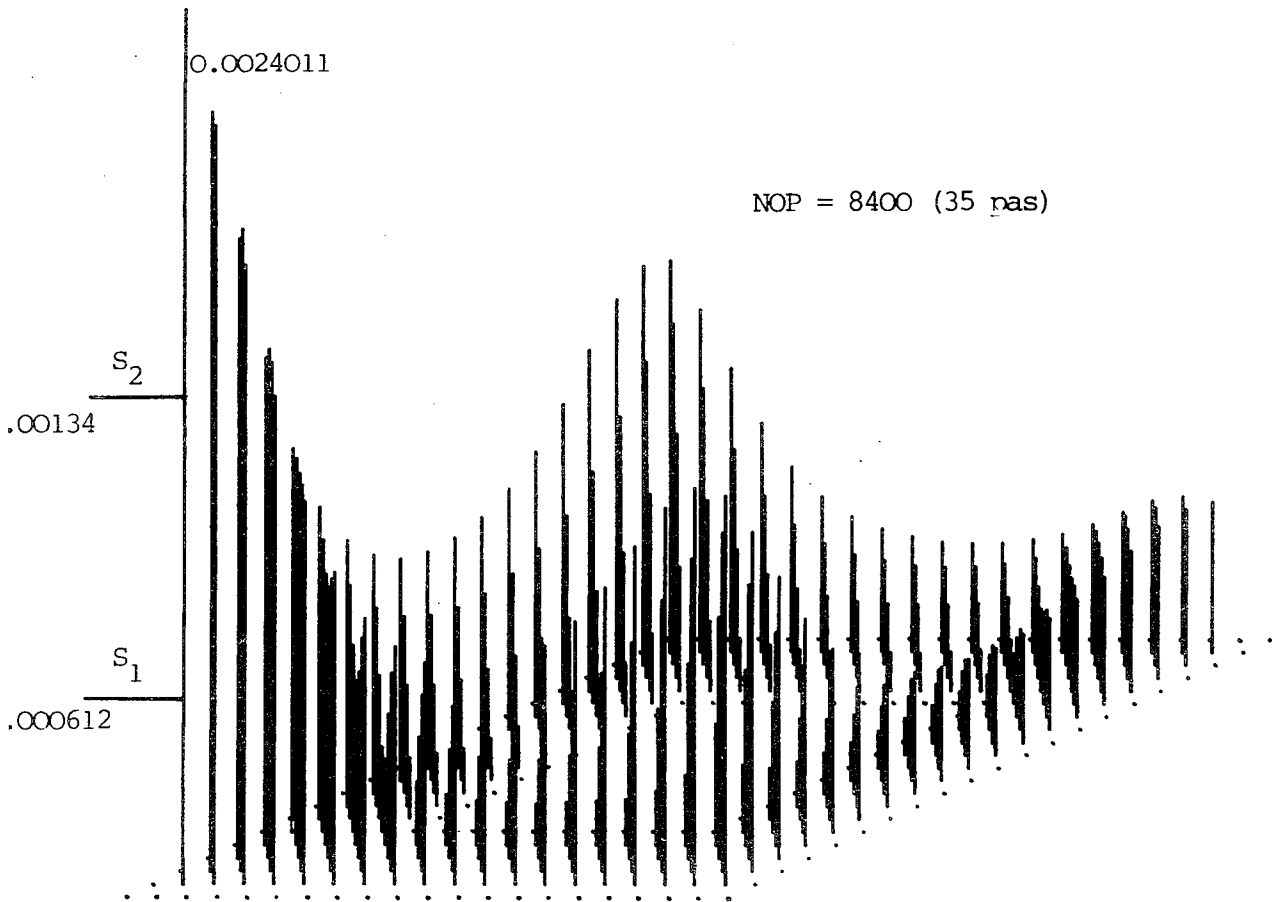
η - comparaison avec G.S

méthode	ε	NOP	gain OP	pourcentage
GS	10^{-2}	6720		
	10^{-3}	9600		
	10^{-4}	12600		
MDSE	10^{-2}	4868	1852	27.56
	10^{-3}	7768	1832	19.08
	10^{-4}	10731	1869	14.83

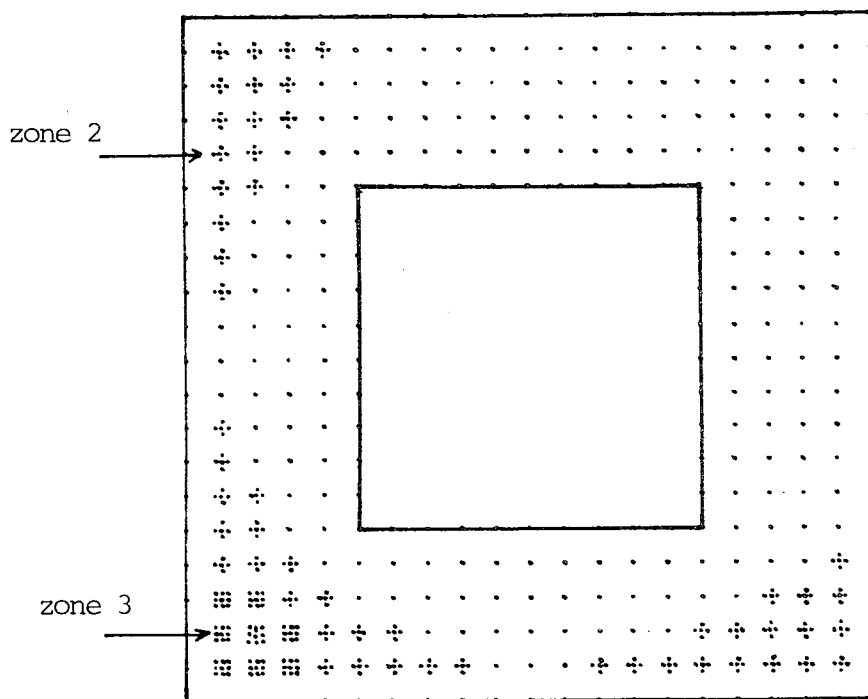
Disparition des éléments

$$\text{MSE.}\varepsilon = 10^{-3} \cdot \underline{D_1}$$

Suite J_3 ($\text{Card}(J_3) = 179$)Suite J_7 ($\text{Card}(J_7) = 61$)

Répartition des écarts dans D_1 

Méthode de GAUSS-SEIDEL



En page 134 on a représenté sur D_1 les ensembles J_3 ($\text{card}(J_3) = 179$) et J_7 ($\text{card}(J_7) = 61$) dans le cas $\varepsilon = 10^{-3}$ pour illustrer les phases de disparition. A comparer avec les dessins p.135 où on donne la répartition des écarts et un partage du domaine en trois zones pour la méthode de GAUSS-SEIDEL. (remarquer la similitude entre J_7 et (zone 2) \cup (zone 3)).

4 - Cas n°2 - le domaine D_2 :

D_2 est semblable à D_1 . Situé dans le carré $(-0.25, -0.25) \times (0.25, 0.25)$ il comporte, avec un pas de discrétisation de $5 \cdot 10^{-2}$, 11 lignes et 11 colonnes soit 112 noeuds dont 56 intérieurs.

(a) Méthode de GAUSS-SEIDEL: (mode standard)

pas	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	α
5	280	0.8416	0.03367	25.00
10	840	0.002429	0.0001135	21.4
5	1120	0.0002032	$6.474 \cdot 10^{-6}$	31.4
5	1400	$1.639 \cdot 10^{-5}$	$< 10^{-7}$	
3	1568	$3.784 \cdot 10^{-6}$	"	
3	1736	$6.391 \cdot 10^{-7}$		

On a ainsi $S = (J_0)^{r_0}$ avec $r_0 = 17$ pour $Z_{\text{Max}} = 10^{-3}$
 $r_0 = 22$ - 10^{-4}
 $r_0 = 26$ - 10^{-5}

(b) Méthode automatique MDSE:

	pas	ϵ	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	α	
correction	7(GS)	-	392	0.168452	0.01033	16.30	$\epsilon = 10^{-3}$
	10	10^{-3}	752	0.0009809	0.000238	4.12	
	2(GS)		864	0.0006114	$7.0501 \cdot 10^{-5}$	8.64	
correction	5(GS)		280	0.8416	0.03367	25.00	$\epsilon = 10^{-4}$
	17	10^{-4}	993	$9.9837 \cdot 10^{-5}$	$1.261 \cdot 10^{-5}$	7.92	
	2(GS)		1105	$5.699 \cdot 10^{-5}$	$5.676 \cdot 10^{-6}$	10.04	
correction	10		560	0.03147	0.00187	16.81	$\epsilon = 10^{-5}$
	17	10^{-5}	1246	$9.906 \cdot 10^{-6}$	$6.306 \cdot 10^{-7}$	15.7	
	2(GS)		1358	$4.501 \cdot 10^{-6}$	$6.306 \cdot 10^{-7}$	7.14	

(c) Les suites s :

$$s = \{(J_0)^{r_0}, J_1 \dots J_{r_1}, (J_0)^{r_2}\} \text{ avec}$$

ϵ	r_0	r_1	r_2
10^{-3}	12	5	2
10^{-4}	16	6	2
10^{-5}	20	7	2

- à noter que r_0 et r_1 augmentent lorsque ϵ diminue,
- les suites J_i $i = 1 \dots r_1$.

ϵ	card(J_1)	card(J_2)	card(J_3)	card(J_4)	card(J_5)	card(J_6)	card(J_7)
10^{-3}	40	22	14	3	1		
10^{-4}	43	26	18	6	3	1	
10^{-5}	49	34	24	13	3	2	1

Pour i fixé, on notera que $\text{card}(J_i)$ augmente lorsque ϵ diminue ce qui est normal car en renforçant la précision les éléments sont moins rapides à disparaître.

(d) Comparaisons avec G.S:

méthode	ϵ	NOP	gain NOP	pourcentage
GS	10^{-3}	952		
	10^{-4}	1232		
	10^{-5}	1456		
MDSE	10^{-3}	864	88	9.03
	10^{-4}	1105	127	10.31
	10^{-5}	1358	98	6.73

En page 139 On a représenté les variations de Z_{Max} et Z_{Min} (pour GS) et de Z_{Max} (pour la MDSE) en fonction de NOP. On remarquera comment se fait le démarrage de la disparition.

Si pour $\epsilon = 10^{-3}$ il faut n_1 opérations pour que $Z_{\text{Min}} \sim \epsilon$ et n_2 pour que $Z_{\text{Max}} \sim \epsilon$ on sait que le gain en opérations que la MDSE ne peut absolument pas dépasser est $n_2 - n_1$ ($\sim 30\%$ pour $\epsilon = 10^{-3}$). Ceci donne donc une majoration a priori du gain qu'on espère réaliser.

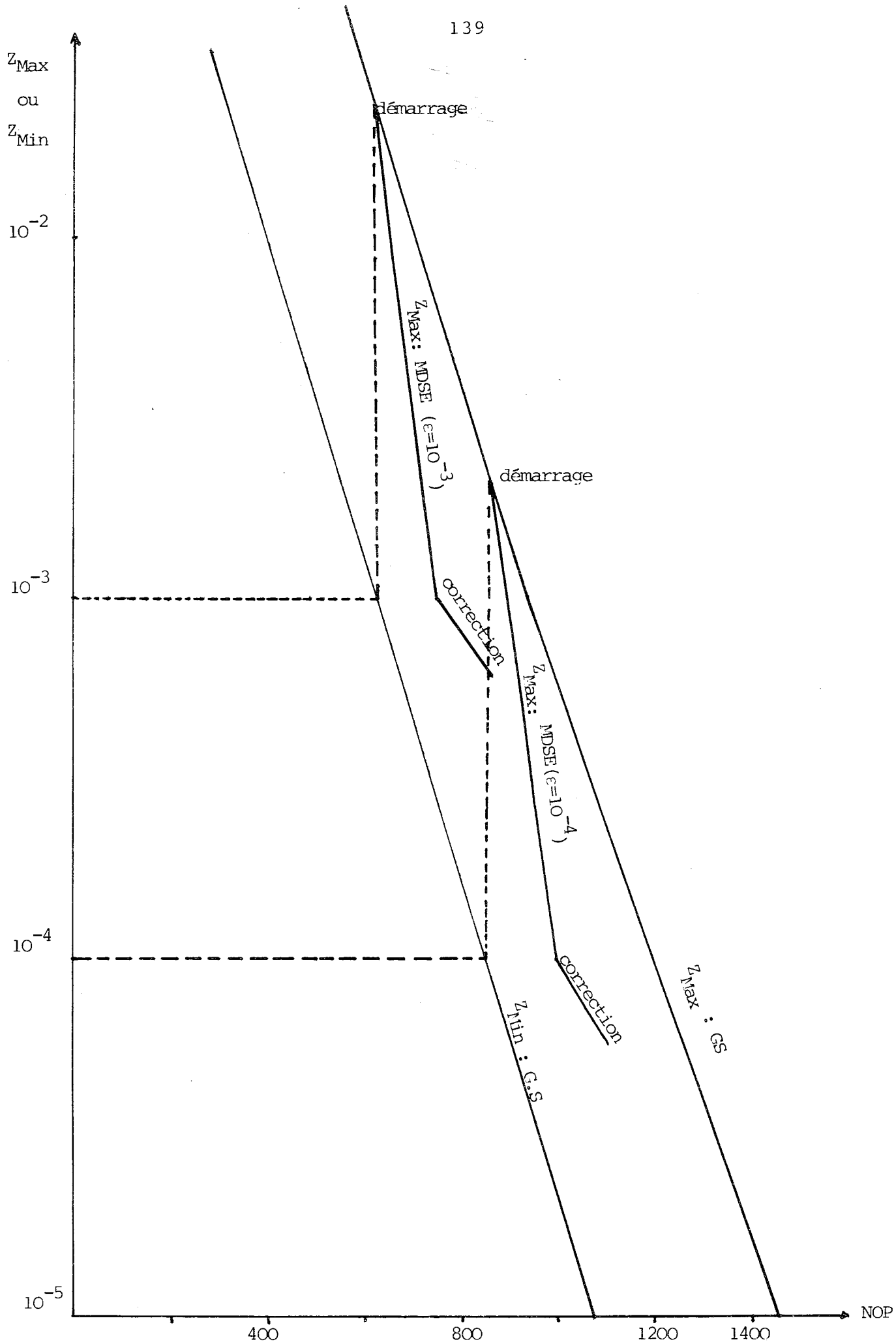
5 - Cas n°3 - le domaine D_3 :

De sommets $(-0.5, -0.5)$ et $(0.5, 0.5)$ D_3 comporte 21 lignes et 21 colonnes soit 318 noeuds dont 166 intérieurs.

(a) méthode de G.S

pas	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	α
5	830	1.62426	0.008448	192
10	2490	0.0283087	$1.556 \cdot 10^{-5}$	1819.5
10	4150	0.0116249	$< 10^{-7}$	$> 10^{+4}$
10	5810	$8.373 \cdot 10^{-5}$	"	"
5	6640	$2.228 \cdot 10^{-5}$	"	"
5	7470	$6.1603 \cdot 10^{-6}$	"	"

On a $S = (J_0)^{r_0}$ avec $r_0 = 26$ pour $\epsilon = 10^{-3}$
 $r_0 = 34$ — 10^{-4}
 $r_0 = 43$ — 10^{-5}



Variations des écarts (max et min) en fonction de NOP: domaine D_2

(b) Méthode automatique

	pas	ϵ	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	Z_{Max}/Z_{Min}	
démarrage au pas 4 →	5	10^{-3}	830	1.624265	0.008448	193	$\epsilon = 10^{-3}$ $r_0=8 \ r_1=17 \ r_2=$
	20		3193	0.0009996	0.0002853	3.5	
	4		3857				
correction	5	10^{-4}	830	1.624265	0.008448	192	$\epsilon = 10^{-4}$
	29		4372	$9.99196 \cdot 10^{-5}$	$2.476 \cdot 10^{-5}$	4.04	
	5		5202	$8.5128 \cdot 10^{-5}$	$2.13028 \cdot 10^{-6}$	40.	

(c) Comparaison avec G.S

ϵ	méthode	NOP	gain	pourcentage
10^{-3}	GS	4316		
10^{-4}	-	5644		
10^{-3}	MDSE	3857	459	10.64
10^{-4}	-	5202	442	7.83

En page 141 nous donnons pour la méthode GS la répartition des écarts après 25 pas. Le rapport Z_{Max}/Z_{Min} est alors de l'ordre de 10^4 .

6 - Conclusions sur D_1, D_2, D_3 :

Avant de passer au 4ème exemple D_4 les résultats qu'on vient d'exposer pour les trois domaines précédents appellent quelques commentaires sur lesquels nous reviendrons ultérieurement (voir page 157 et suivantes).

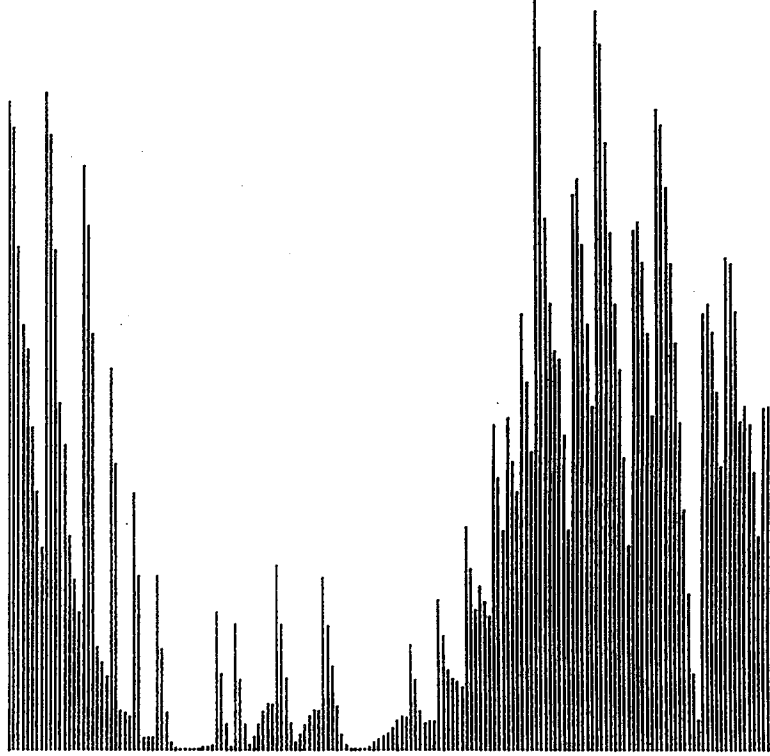
Pour D_1 et D_2 qui sont pourtant semblables on obtient dans le premier cas avec la MDSE des gains en nombre d'opérations deux fois meilleurs et bien qu'on ait pour les deux des rapports Z_{Max}/Z_{Min} du même ordre (20 à 30). La cause de cette différence

Répartition des écarts relatifs : D_3

Méthode de G.S

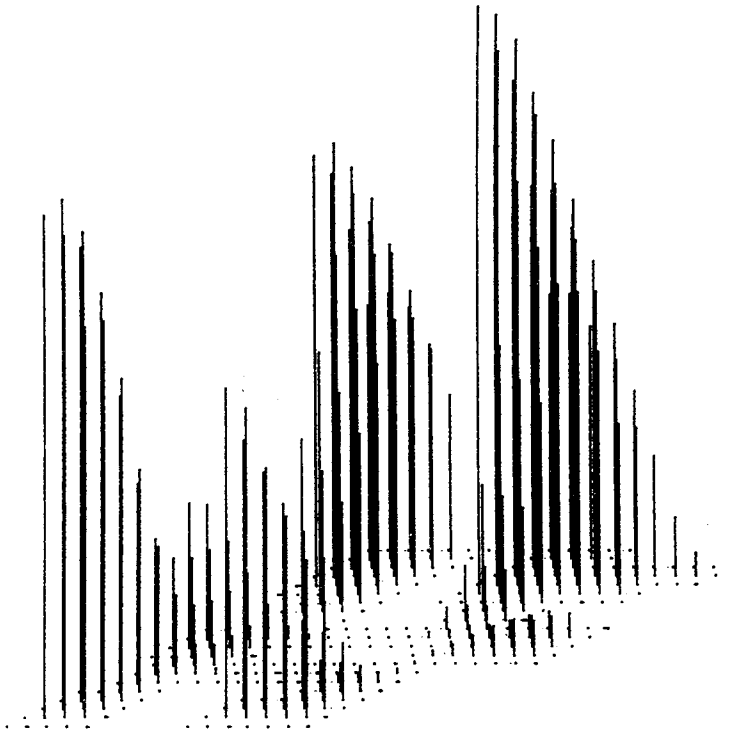
0.0011625

$$\frac{z_{\text{Max}}}{z_{\text{Min}}} > 10^4$$



■ ■ FONCTION ECART ■ ■

NOP = 4150 (25 pas)



■ ■ FONCTION ECART ■ ■

imprévisible a priori devrait être d'une part la différence dans le nombre des éléments (D_1 est près de 4 fois plus dense) et d'autre part la convergence relativement rapide de la méthode de GAUSS-SEIDEL pour D_2 (pour atteindre $Z_{\text{Max}} \sim 10^{-4}$ il faut 22 pas pour D_2 et 54 pour D_1). Cette rapidité est comme nous l'avons remarqué une sorte de pénalisation pour l'efficacité de la stratégie chaotique. Il lui correspond en outre une correction finale plus faible (4 pas pour D_1 et 2 pour D_2).

Précisons que puisque D_1 et D_2 sont symétriques les 8 modes de balayage donnent les mêmes résultats (aux erreurs machine près).

Pour D_3 intermédiaire par sa densité en noeuds entre D_1 et D_2 et en outre non symétrique les gains sont très moyens (8-11%). Pourtant comme le montrent les dessins page 141 les écarts Z_i^j sont assez inégalement répartis, de plus, le rapport $Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}}$ croît très vite et dépasse 10^4 au bout du 25ème pas dans GS. La convergence relativement rapide (deux fois plus que pour D_1) expliquerait l'inefficacité de la MDSE. Nous verrons alors ultérieurement comment le mode de balayage peut avoir une influence sur la stratégie chaotique puisque D_3 n'est pas symétrique (voir page 159).

Nous poursuivrons ces remarques après l'exposé des résultats obtenus avec D_4 .

7 - Cas n°4 - le domaine D_4 :

Ayant $(-0.5, -0.5)$ et $(0.5, 0.5)$ comme sommets, D_4 comporte 303 noeuds dont 165 intérieurs ($NL=NC=21$) soit presque le même nombre que D_3 . D_4 nous a servi pour effectuer le plus grand nombre d'expérimentations dont les résultats ont été les plus intéressants. Nous en donnerons les plus significatifs.

(a) Méthode de GS (mode 1)

pas	NOP	Z _{Max}	Z _{Min}	α
5	825	1.397851	0.0267083	48.9
5	1650	0.269282	0.002036	132.1
10	3300	0.049516	$1.429 \cdot 10^{-5}$	3465.
10	4950	0.007347	$< 10^{-7}$	$> 7 \cdot 10^{+4}$
10	6600	0.0010532	"	
10	8250	0.00015197	"	
3	8745	$8.457 \cdot 10^{-5}$	"	

On a ici $S = (J_0)^{r_0}$ avec

ϵ	r_0
10^{-2}	29
10^{-3}	41
10^{-4}	53
10^{-5}	65
10^{-6}	77

(comparer avec D_3)

(b) Stratégies automatiques MDSE

Nous donnons les résultats relatifs aux deux variantes de la MDSE:

- . cas où un seul ϵ est fixé,
- . cas où une suite $\epsilon_0 \dots \epsilon_k$ est fixée.

α - un seul ϵ est fixé:

	pas	ϵ	NOP	Z _{Max}	Z _{Min}	Z _{Max} / Z _{Min}
émarrage u 3° pas → correction →	10 (GS)	10^{-3}	1650	0.269282	0.0020357	132.1
	28		3161	0.00098994	0.00023527	4.21
	2 (GS)		3491	0.0018398	$9.832 \cdot 10^{-5}$	18.71
	9 (GS)		4976	0.00091568	$1.6317 \cdot 10^{-6}$	561.4
émarrage u 7° pas → correction →	10 (GS)	10^{-4}	1650	0.269282	0.0020357	132.1
	40		4344	$9.95978 \cdot 10^{-5}$	$1.24526 \cdot 10^{-5}$	7.99
	7 (GS)		5499	0.000136152	$1.66883 \cdot 10^{-6}$	84.67
	7 (GS)		6654	$8.6578 \cdot 10^{-5}$	$< 10^{-7}$	

cas:
 $\epsilon = 10^{-3}$

cas:
 $\epsilon = 10^{-4}$

Nombre d'activations des éléments

domaine D_4

MDSE - cas 1 - $\epsilon = 10^{-3}$

11	11	10							8	7	7							
12	11	9							8	8	7							
12	10	9	6	5	3	2	1	1	1	1	8	7	7					
12	10	8	6	4	2	1	0	0	1	1	7	7	7					
12	10	8	5	3			0	1			6	6	6					
			4	2			0	1			5	5	5					
			4	2			0	1	2	2	2	2	3	3	4	4		
			3	1			1	1	1	1	1	2	2	3	3			
			3	1			0	0			1	2						
			3	1							1	1						
			3	1							0	1						
			5	3							0	1						
			7	5							1	2						
			11	9	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	1	1	2	2
22	20	18	15	13	11	9	8	4	3	2	2	2	2	2	2	2	3	3
23	22	20	18	16	14	13												
24	23	22	20	18	17	16												
25	24	23	22	20	19	18												
26	25	24	23	22	21	20												

- ajouter aux nombres d'activations

.12 pour les balayages initiaux

.11 pour les balayages de correction

} 23 pas en tout

β - une suite $\epsilon_0 \dots \epsilon_4$ est fixée:

	pas	ϵ	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	Z_{Max}/Z_{Min}
3° pas → correction	5 (GS)	10^{-2}	825	1.307851	0.0267083	48.96
	22		2081	0.00999561	0.00136807	7.31
	3 (GS)		2576	0.00966433	0.00104703	9.23
correction	20	10^{-3}	3506	0.00099955	0.00023087	4.33
	3 (GS)		4001	0.00097799	$9.2607 \cdot 10^{-5}$	10.56
correction	20	10^{-4}	4937	$9.91772 \cdot 10^{-5}$	$1.01156 \cdot 10^{-5}$	7.08
	3 (GS)		5432	$9.90632 \cdot 10^{-5}$	$1.01027 \cdot 10^{-5}$	8.98
correction	20	10^{-5}	6371	$9.998101 \cdot 10^{-6}$	$2.42999 \cdot 10^{-6}$	4.11
	3 (GS)		6866	$9.82649 \cdot 10^{-6}$	$5.70591 \cdot 10^{-7}$	17.22
correction	19	10^{-6}	7747	$9.74086 \cdot 10^{-7}$	$< 10^{-7}$	$> 10.$
	11		9562	$8.69968 \cdot 10^{-7}$	"	

γ - étude des suites chaotiques :

1° cas: $S = \{(J_0)^{r_0}, J_1 \dots J_{r_1}, (J_0)^{r_0}\}$ avec

$$\epsilon = 10^{-3} : r_0 = 12, r_1 = 26, r_2 = 11$$

$$\epsilon = 10^{-4} : r_0 = 16, r_1 = 34, r_2 = 14$$

Donnons une idée sur les différents J_i en appelant $C_i = \text{Card}(J_i)$

ϵ	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}
10^{-3}	152	123	101	86	80	72	66	56	50	46	42	37	33	31	30	29	27	26	22	21
10^{-4}	164	148	128	119	101	90	86	77	72	63	57	52	49	44	38	37	35	35	33	33

ϵ	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	C_{27}	C_{28}	C_{29}	C_{30}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}
10^{-3}	16	15	10	6	3	1								
10^{-4}	31	31	29	28	27	23	22	18	15	10	9	6	3	1

On notera que C_i augmente lorsque ε diminue, ce qui est accompagné par une augmentation de r_0 et r_1 .

En outre, on voit que pour $\varepsilon = 10^{-4}$: $J_{18}=J_{17}$, $J_{19}=J_{20}$ et $J_{21}=J_{22}$.

En page 144 on a représenté, pour $\varepsilon = 10^{-3}$, sur D_4 le nombre d'activations pour chaque élément (auquel il faut ajouter les (r_0+r_2) balayages de G.S). Cela illustre la perte que fait faire G.S en itérant exactement le même nombre de fois sur toutes les composantes d'où l'originalité de la technique chaotique.

2° cas: On a la suite $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$,

$$S = \{ (J_0)^{r_0}, J_1^1 \dots J_{r_1}^1, (J_0)^{r_2}, J_1^2 \dots J_{r_3}^2, (J_0)^{r_4}, J_1^3 \dots J_{r_5}^3, (J_0)^{r_6}, J_1^4 \dots J_{r_7}^4, (J_0)^{r_8}, J_1^5 \dots J_{r_9}^5, (J_0)^{r_{10}} | \dots \}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & \varepsilon_0 = 10^{-2} & & \varepsilon_1 = 10^{-3} & & \varepsilon_2 = 10^{-4} & & \varepsilon_3 = 10^{-5} & & \varepsilon_4 = 10^{-6} \end{array}$$

avec $r_0=7$ $r_1=20$ $r_2=3$ $r_3=20$ $r_4=3$ $r_5=20$

$r_6=3$ $r_7=20$ $r_8=3$ $r_9=19$ $r_{10}=11$.

On remarquera que jusqu'à ε_3 le même nombre de balayages de correction est requis. Le nombre de "pas chaotiques" semble au moins ne pas augmenter.

De plus, il faut préciser que $\text{Card}(J_1^i) < \text{Card}(J_1^{i+1})$ $i = 1 \dots 4$ et qu'on n'a pas d'imbrication entre les suites J_k^i et J_k^j . Seules les suites J_k^i et J_r^i la vérifient.

(c) Méthode interactive de partage en zones: α - résultats

pas	NOP	Z _{Max}	Z _{Min}	Z _{Max} / Z _{Min}	seuil S ₁	seuil S ₂	Zone1	Zone2	Zone3	
<u>cas1</u>	5	825	1.307851	0.0267083	48.97	0.17275	122	43		
	5-10	1865	0.211326	0.002036	103.81	0.01305	91	74		
	6-12	3299	0.019839	9.672 10 ⁻⁵	205.11	0.00169	114	51		
	4-8	4163	0.0048675	1.4189 10 ⁻⁵	343.04	automatique	143	10	10	
	2-6-8	4601	0.0014094	4.9268 10 ⁻⁶	286.07	8.704 10 ⁻⁵	88	77		
	5-15	6196	0.00022967	< 10 ⁻⁷						
<u>cas2</u>	15	2475	0.1159531	0.00015907	729.4	0.002404	89	76		
	5-18	4288	0.0039205	1.4289 10 ⁻⁵	274.42	0.000242	96	69		
	5-20	6148	0.00013154	1.0858 10 ⁻⁶	121.15	5.04 10 ⁻⁶	40	125		
	2-8	7228	4.3643 10 ⁻⁵	< 10 ⁻⁷		1.93 10 ⁻⁶	87	78		
	3-10	8269	1.1803 10 ⁻⁵	-	-	automatique	145	10	10	
	3-10-25	9054	2.8232 10 ⁻⁶	-	-	-				
<u>cas3</u>	5	825	1.307851	0.0267083	48.97	0.119096	83	82		
	5-10	2060	0.125483	0.0020357	61.73	0.01363	100	65		
	5-10	3210	0.022054	0.00015914	138.89	0.00260	112	53		
	5-15	4565	0.001587	1.2996 10 ⁻⁵	122.10	0.000135	84	81		
	5-20	6605	8.8414 10 ⁻⁵	1.084 10 ⁻⁶	81.57	5.98 10 ⁻⁶	2.62 10 ⁻⁵	60	64	41
	10-15-20	8985	6.699 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁷						
<u>cas4</u>	5	825	1.307851	0.02670834	48.97	0.18042	127	38		
	<u>Z+</u> 5-10	1840	0.22557	0.0020358	110.80	automatique	145	11	9	
	<u>XSE</u> 5-10-15	2810	0.039479	0.00015907	248.20	0.00244	93	72		
	5-20	4715	0.0015747	1.41894 10 ⁻⁵	110.91					
	<u>XSE</u> 19	5378	9.877 10 ⁻⁵	"	6.96					
	<u>R.</u> 4(GS)	6038	9.693 10 ⁻⁵	1.8722 10 ⁻⁶	51.79					

β - étude des suites chaotiques:

*cas 1:

$$S = \{ (J_0)^5, (J_1)^5, (J_0)^5, (J_2)^6, (J_0)^6, (J_3)^4, (J_0)^4, (J_4)^2, (J_5)^4, (J_0)^2, (J_6)^{10}, (J_0)^5 \}$$

avec

$$|J_1| = 43, |J_2| = 74, |J_3| = 51, |J_4| = 10, |J_5| = 20, |J_6| = 77$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{J_4 \subset J_5}$$

*cas 2:

$$S = \{ (J_0)^{15}, (J_1)^{13}, (J_0)^5, (J_2)^{15}, (J_0)^5, (J_3)^6, (J_0)^2, (J_4)^7, (J_0)^3, (J_5)^{15}, (J_6)^7, (J_0)^3 \}$$

avec

$$|J_1| = 76, |J_2| = 69, |J_3| = 125, |J_4| = 78, |J_5| = 10, |J_6| = 20$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{J_5 \subset J_6}$$

*cas 3:

$$S = \{ (J_0)^5, (J_1)^5, (J_0)^5, (J_2)^5, (J_0)^5, (J_3)^{10}, (J_0)^5, (J_4)^5, (J_0)^5, (J_5)^5, (J_6)^5, (J_0)^{10} \}$$

avec

$$|J_1| = 82, |J_2| = 65, |J_3| = 53, |J_4| = 81, |J_5| = 64, |J_6| = 105$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{J_5 \subset J_6}$$

*cas 4:

$$S = \{ (J_0)^5, (J_1)^5, (J_0)^5, (J_2)^5, (J_3)^5, (J_0)^5, (J_4)^{15}, (J_0)^5, J_1' \dots J_{19}', (J_0)^4 \}$$

\longleftarrow MPZ | MDSE \longrightarrow

avec

$$|J_1| = 38, |J_2| = 11, |J_3| = 20, |J_4| = 72 ; J_i' \subset J_{i-1}' \quad (i = 2 \dots 18)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{J_2 \subset J_3}$$

Nous noterons l'alternance des suites J_i avec J_0 ($J_i \subset J_0 \quad \forall i$).
La suite S peut alors s'écrire d'une façon générale:

$S = \{J_0, \dots, J_0(T)^r\}$ T étant une succession de suites de la forme $\{J_1, \dots, J_1, J_0 \dots J_0\}$ dans le cas du partage en deux zones et $\{J_k, \dots, J_k, J_{k+1}, \dots, J_{k+1}, J_0 \dots J_0\}$ dans le cas du partage en trois zones.

En combinant les deux stratégies automatique et interactive on aura $S = \{S_1, S_2\}$, S_1 étant de la forme $\{J_0 \dots J_0, (T)^r\}$ et S_2 de la forme $\{J'_1 \dots J'_p, J_0 \dots J_0\}$.

(d) Comparaison - Conclusions

α - évolution du gain en nombre d'opérations

méthode	ε	NOP	gain NOP	pourcentage
GS	10^{-2}	4785		
	10^{-3}	6765		
	10^{-4}	8745		
	10^{-5}	10725		
	10^{-6}	12725		
MDSE.1	10^{-3}	4861	1904	28.14
	10^{-4}	6489	2256	25.80
MDSE.2	10^{-2}	2576	2209	46.17
	10^{-3}	4001	2764	40.86
	10^{-4}	5432	3313	37.88
	10^{-5}	6866	3859	35.98
	10^{-6}	9562	3163	24.85
MPZ.1	10^{-2}	~ 3800		20.59
	10^{-3}	~ 4933		27.08
	$2.3 \cdot 10^{-4}$	6196		23.19
MPZ.2	10^{-2}	~ 3800		20.59
	10^{-3}	~ 5066		25.15
	10^{-4}	~ 6400		26.82
	10^{-5}	~ 8533		20.44
	$2.82 \cdot 10^{-6}$	9054		23.70
MPZ.3	10^{-2}	~ 3650		23.72
	10^{-3}	~ 4800		29.04
	10^{-4}	~ 6500		25.67
	10^{-5}	~ 8530		20.44

β - évolution de Z_{Max} par rapport à Z'_{Max} (G.S) :

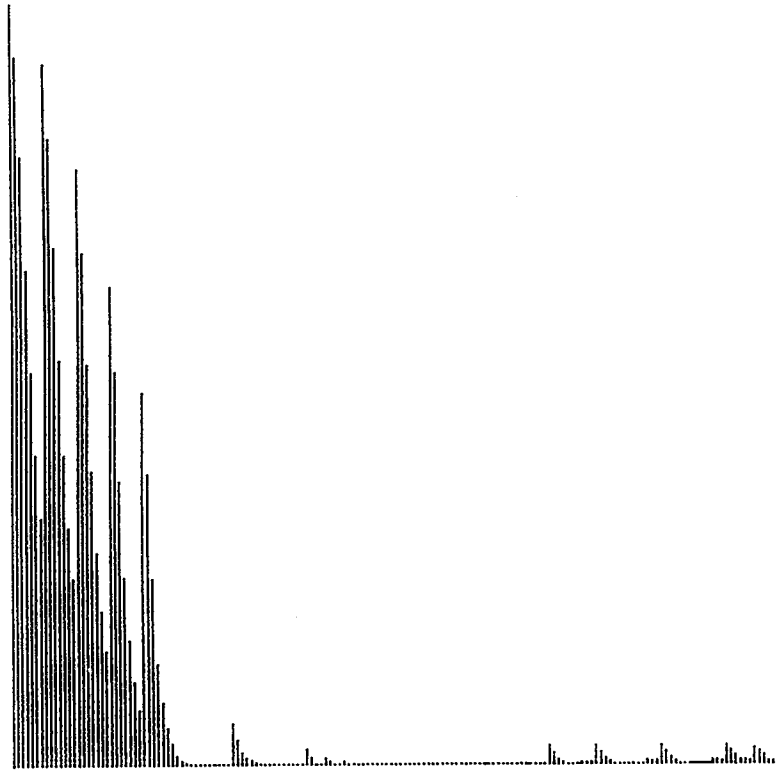
méthode	NOP	Z_{Max}	Z'_{Max} (GS)	Z'_{Max}/Z_{Max}
MDSE.2	2576	10^{-2}	$\approx 10^{-1}$	10.
	4001	10^{-3}	$\approx 2.2 \cdot 10^{-2}$	22.
	5432	10^{-4}	$\approx 4.3 \cdot 10^{-3}$	43.
	6866	10^{-5}	$\approx 8.5 \cdot 10^{-4}$	85.
	9562	10^{-6}	$\approx 3.4 \cdot 10^{-5}$	34.
MPZ.2	3800	10^{-2}	$\approx 2.8 \cdot 10^{-2}$	2.8
	5066	10^{-3}	$\approx 7.5 \cdot 10^{-3}$	7.5
	6400	10^{-4}	$\approx 1.6 \cdot 10^{-3}$	16.
	8533	10^{-5}	$\approx 1.3 \cdot 10^{-4}$	13.
	9054	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$\approx 7.2 \cdot 10^{-5}$	25.7

γ - évolution de Z_{Max}/Z_{Min}

méthode	NOP	Z_{Max}/Z_{Min}
GS	825	48.96
	1650	132.3
	2310	527.46
	2475	729.4
	2640	1030.18
	3300	3465
	4950	>73470
MDSE.2	825	48.96
	2576	9.23
	4001	10.56
	5432	8.98
	6866	17.22
MPZ.3	825	48.96
	2060	61.73
	3210	138.89
	4565	122.10
	6605	81.57

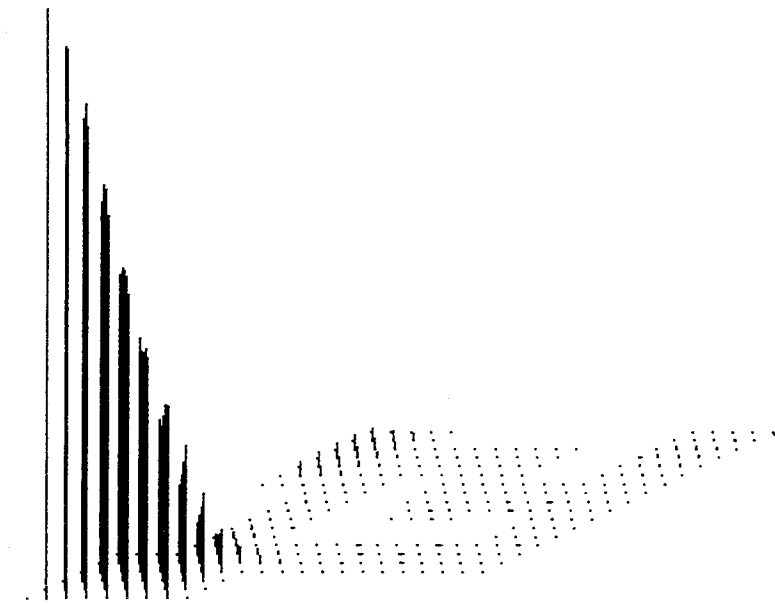
Répartition des écarts
Méthode de GAUSS-SEIDEL - $Z_{\text{Max}} \approx 10^{-2}$

$Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}} > 8.9 \cdot 10^4$



■ ■ FONCTION ECART ■ ■

NOP = 4785 (29 pas)



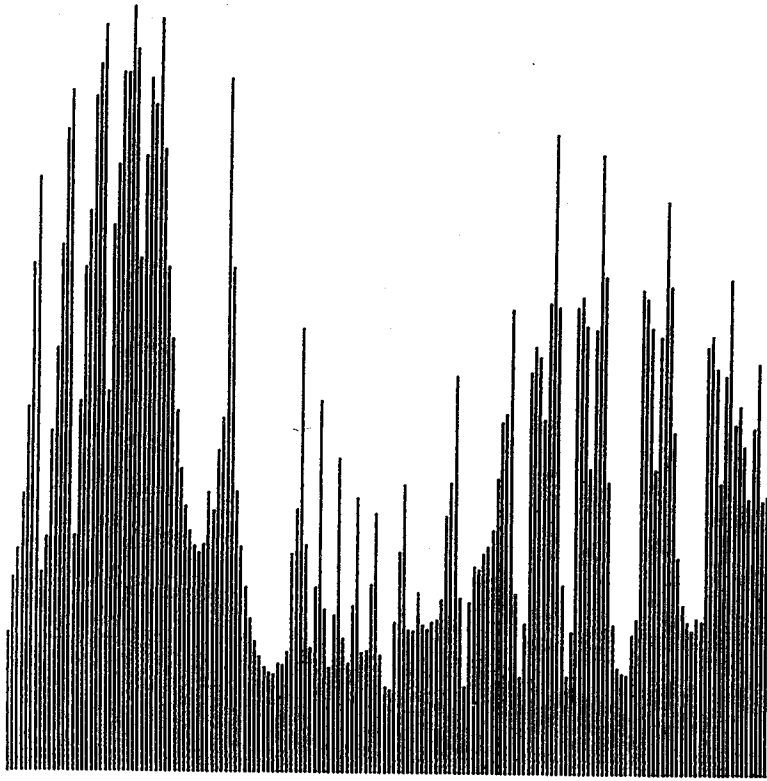
■ ■ FONCTION ECART ■ ■

Répartition des écarts

Stratégie chaotique MDSE

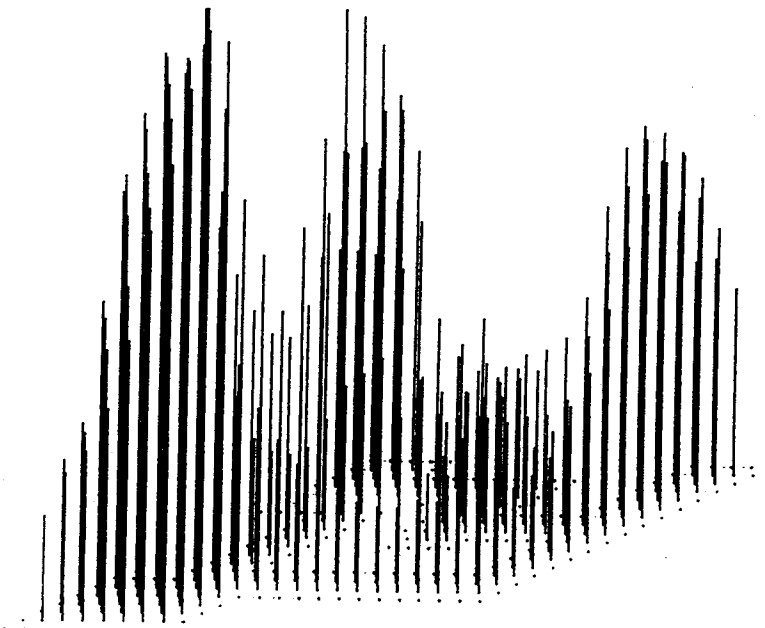
$$z_{\text{Max}} \approx 10^{-2}$$

$$z_{\text{Max}}/z_{\text{Min}} \approx 9.23$$

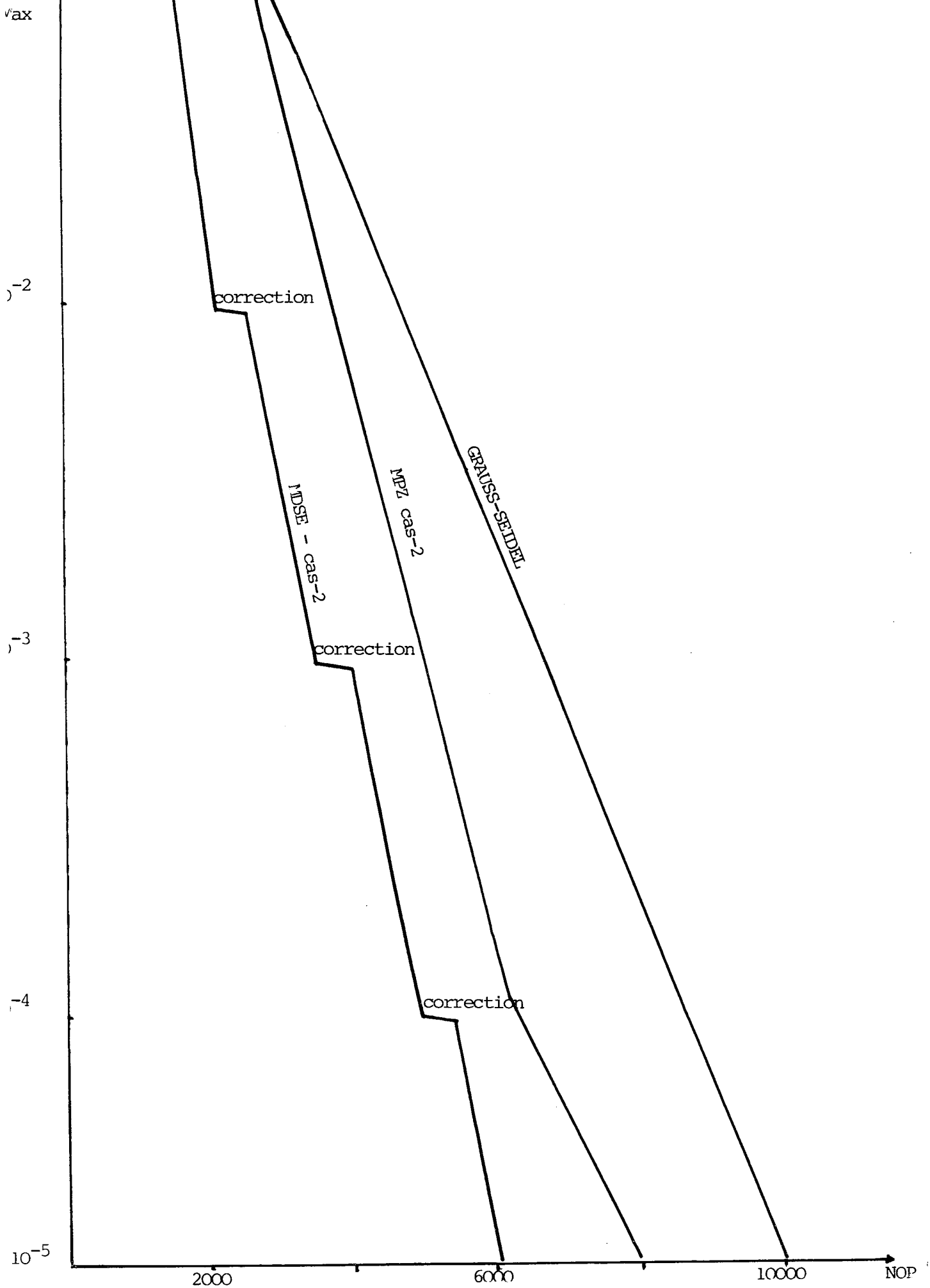


■ ■ FONCTION ECART ■ ■

NOP = 2576

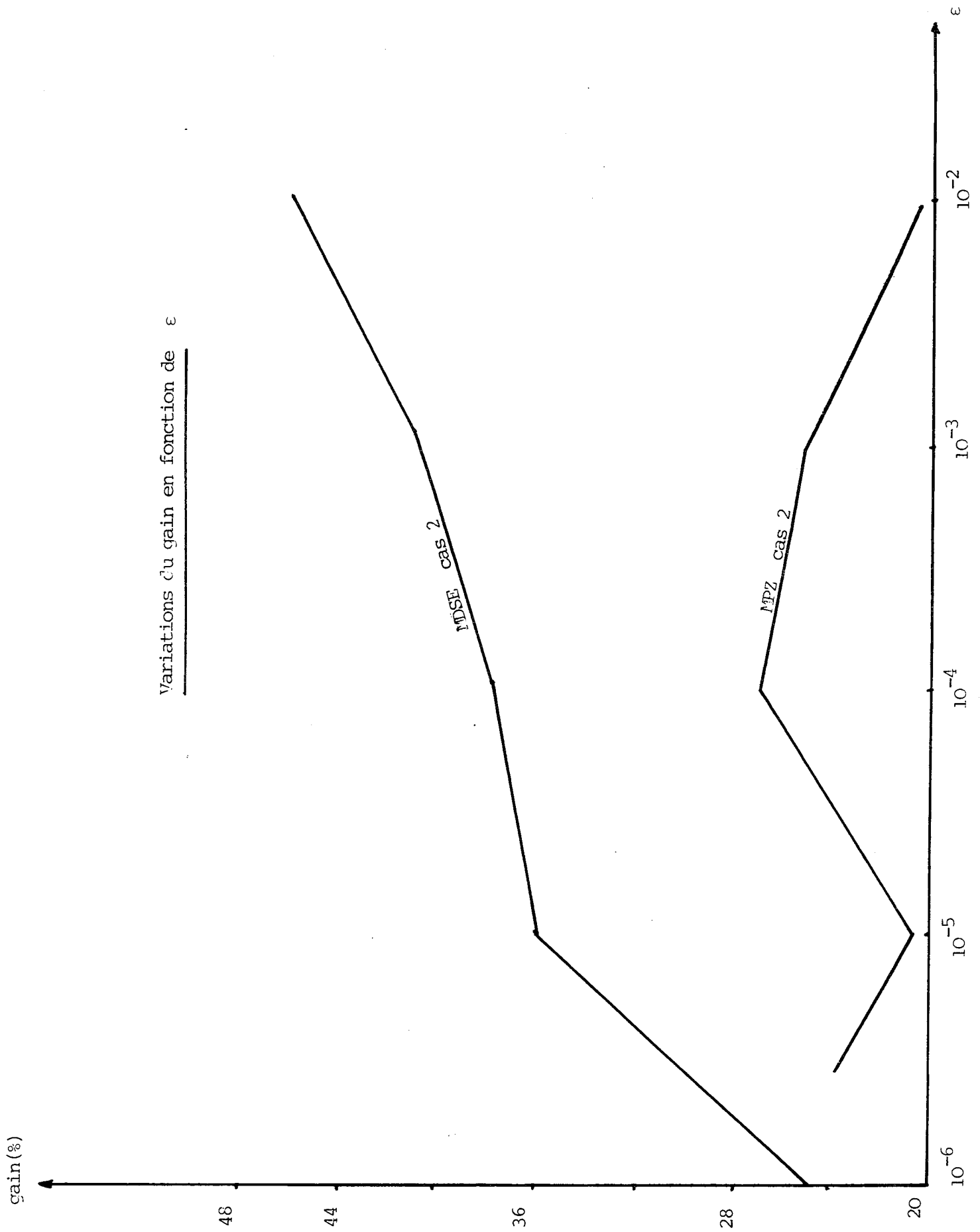


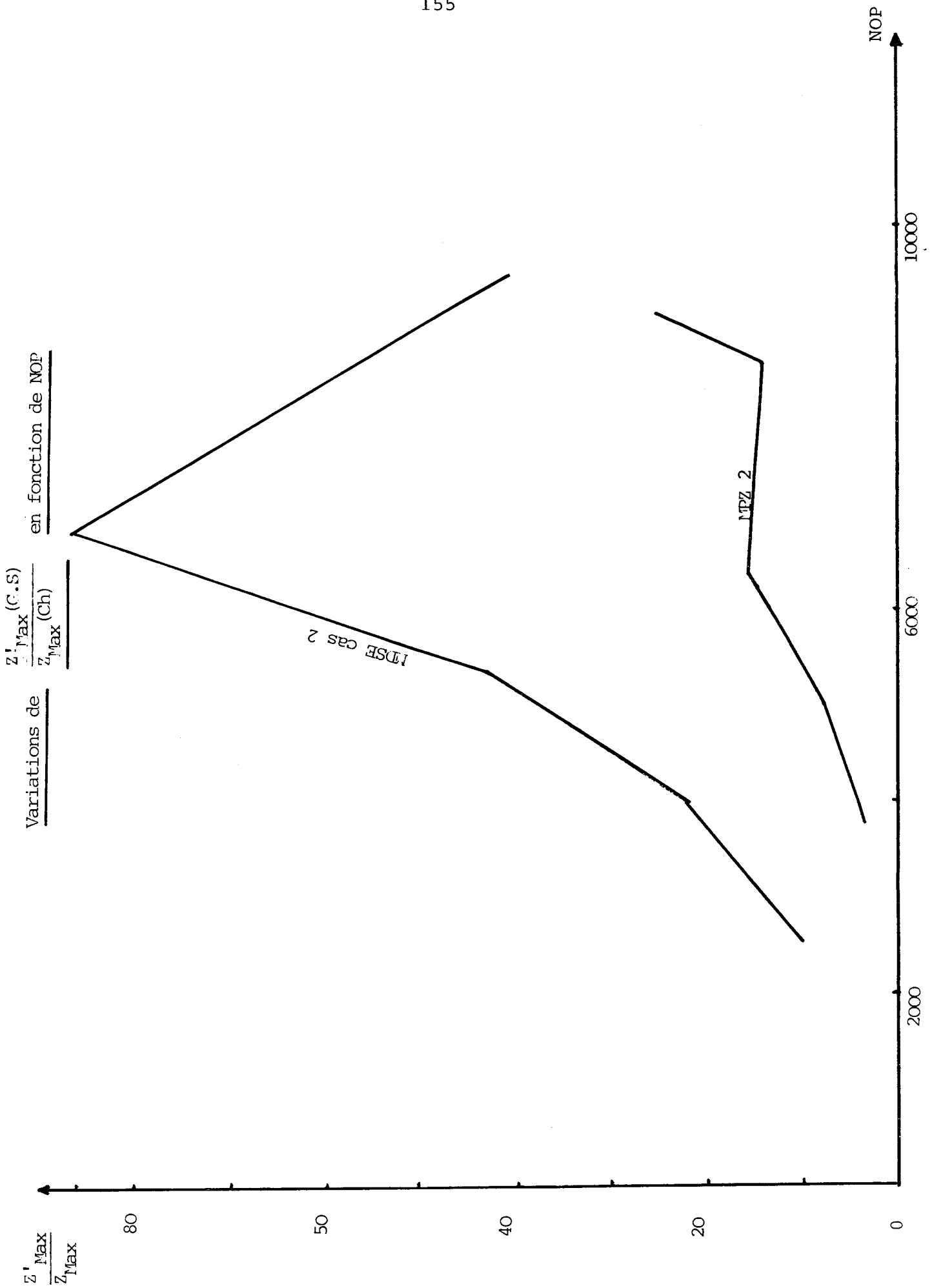
■ ■ FONCTION ECART ■ ■

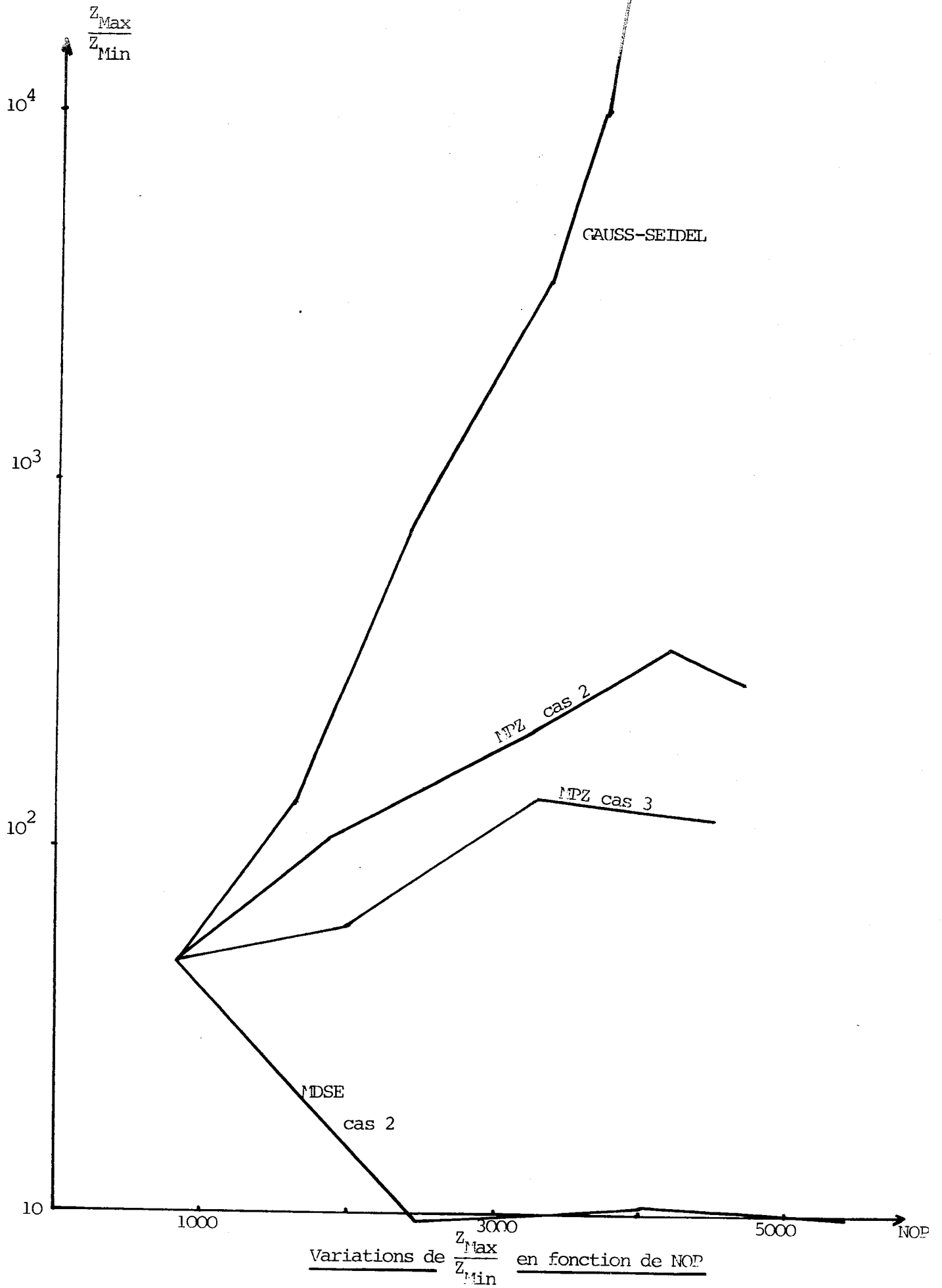


Variations de Z_{max} en fonction de NOP

Variations du gain en fonction de ϵ







δ - conclusions

L'étude des tableaux et dessins précédents nous conduit à souligner les points suivants:

*Il est évident ici que la méthode de G.S fait beaucoup d'opérations inutiles. En effet, certains éléments U_j^i convergent très vite (cf. pages 144,151) tandis que d'autres, beaucoup plus lents, introduisent une pénalisation obligeant les premiers à les "suivre" pour rien. Ces itérations superflues font croître extrêmement vite le rapport Z_{Max}/Z_{Min} ($>7.10^{+4}$ au bout du 30^e pas) et introduisent une répartition très inégale des écarts.

*L'objectif des techniques chaotiques est alors de remédier à cette lacune de G.S en faisant, si possible, juste le nombre d'opérations qu'il faut. En conséquence on note une réduction importante des inégalités entre les écarts. Leur répartition est très équilibrée (voir page 152), de même le rapport Z_{Max}/Z_{Min} est ramené à des valeurs acceptables: de 60 à 140 pour la stratégie interactive (cas 3) et de 9 à 18 pour la stratégie automatique (cas 2).

Le résultat est alors un gain appréciable en nombre d'opérations: jusqu'à 46% pour la MDSE et 30% pour la MPZ. Une combinaison de ces deux techniques a fourni un gain intermédiaire. On peut également observer ce gain par le biais de l'écart maximal. En effet pour un nombre d'opérations fixé, les stratégies chaotiques permettent d'atteindre des Z_{Max} nettement plus petits qu'avec la méthode de G.S: 10 à 85 fois avec la MDSE et 3 à 26 fois pour la MPZ.

Autre détail à noter: en exigeant une précision ϵ de 10^{-5} la MDSE s'arrête lorsque $Z_{Max} = 9.9981 \cdot 10^{-6}$, pour G.S avec une précision de 10^{-4} on s'arrête à $Z_{Max} = 8.688 \cdot 10^{-4}$.

La stratégie chaotique MDSE contrôle donc plus finement la décroissance de Z_{Max} et s'arrête exactement au seuil fixé, ce que ne peut faire G.S.

*En page 153 nous avons représenté les variations de Z_{Max} en fonction de NOP. On observe alors que:

- . pour G.S la courbe (en échelle logarithmique) est pratiquement une droite.

- . pour la technique interactive MPZ où l'utilisateur conduit intuitivement le calcul, donc ne suit pas rigoureusement toujours la même démarche (variations du rapport entre le seuil pointé et Z_{Max}) les variations de Z_{Max} sont moins uniformes.

Une diminution de la pente de la courbe correspond à une amélioration de la stratégie, donc du gain par rapport à G.S, son augmentation signifie le contraire.

- . pour la technique automatique MDSE, la courbe de variations comporte périodiquement des paliers qui correspondent aux balayages correctifs à la fin de chaque étape de précision ϵ_k .

Il est à noter ici que leur nombre est 4 à 5 fois plus petit dans le cas 2 que dans le cas 1 (3 contre 11 à 14). Cela se traduit par une plus grande efficacité de la seconde variante où une suite $\epsilon_0 \dots \epsilon_k$ est fixée a priori. Ainsi pour $\epsilon = 10^{-3}$, on réalise 40.86% de gain au lieu de 28.14%, pour 10^{-4} 37.88 au lieu de 25.80%. En laissant donc agir trop longtemps la méthode de disparition, sans effectuer des pas périodiques de correction, on se trouve obligé à la fin de faire une correction très forte pour rectifier le résultat.

* Comparaison de la MPZ avec la MDSE

- . Pour la méthode automatique MDSE - nous l'avons déjà précisé - son efficacité, traduite par le gain en nombre d'opérations, par rapport à G.S, diminue avec ϵ (46.17% pour 10^{-2} contre 35.98% pour 10^{-5}). Ainsi, plus la précision est renforcée, plus la MDSE tend à ressembler à la méthode de G.S (à la limite elle lui est identique)

- . Pour la méthode interactive MPZ l'efficacité varie en fonction de "l'intuition de l'utilisateur" si l'on peut dire. Ce dernier peut, par un choix adéquat, du ou des seuils pointés augmenter toujours le gain même si ϵ diminue (voir page 154). Ceci constitue donc une différence avec la MDSE.

On est amené à dire d'après les résultats exhibés, que la MDSE est plus efficace pour des précisions pas très grandes tandis que la MPZ devient meilleure lorsque la première commence à se rapprocher de G.S pour des ϵ très petits. La MPZ reste toujours différente de G.S.

En ce qui concerne le temps d'exécution il est clair qu'avec la technique automatique le gain en opérations et celui en temps sont pratiquement identiques. Quant à la technique interactive ce n'est plus le cas puisqu'on utilise l'écran de visualisation. Son emploi est de ce fait tourné vers les problèmes assez complexes où une conduite interactive de leur résolution est efficace.

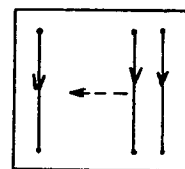
(e) Influence du mode de balayage

Sur les deux domaines D_3 et D_4 non symétriques on a voulu étudier l'influence du choix du mode de balayage sur l'efficacité des stratégies chaotiques (automatiques).

Nous donnons à ce titre les principaux résultats:

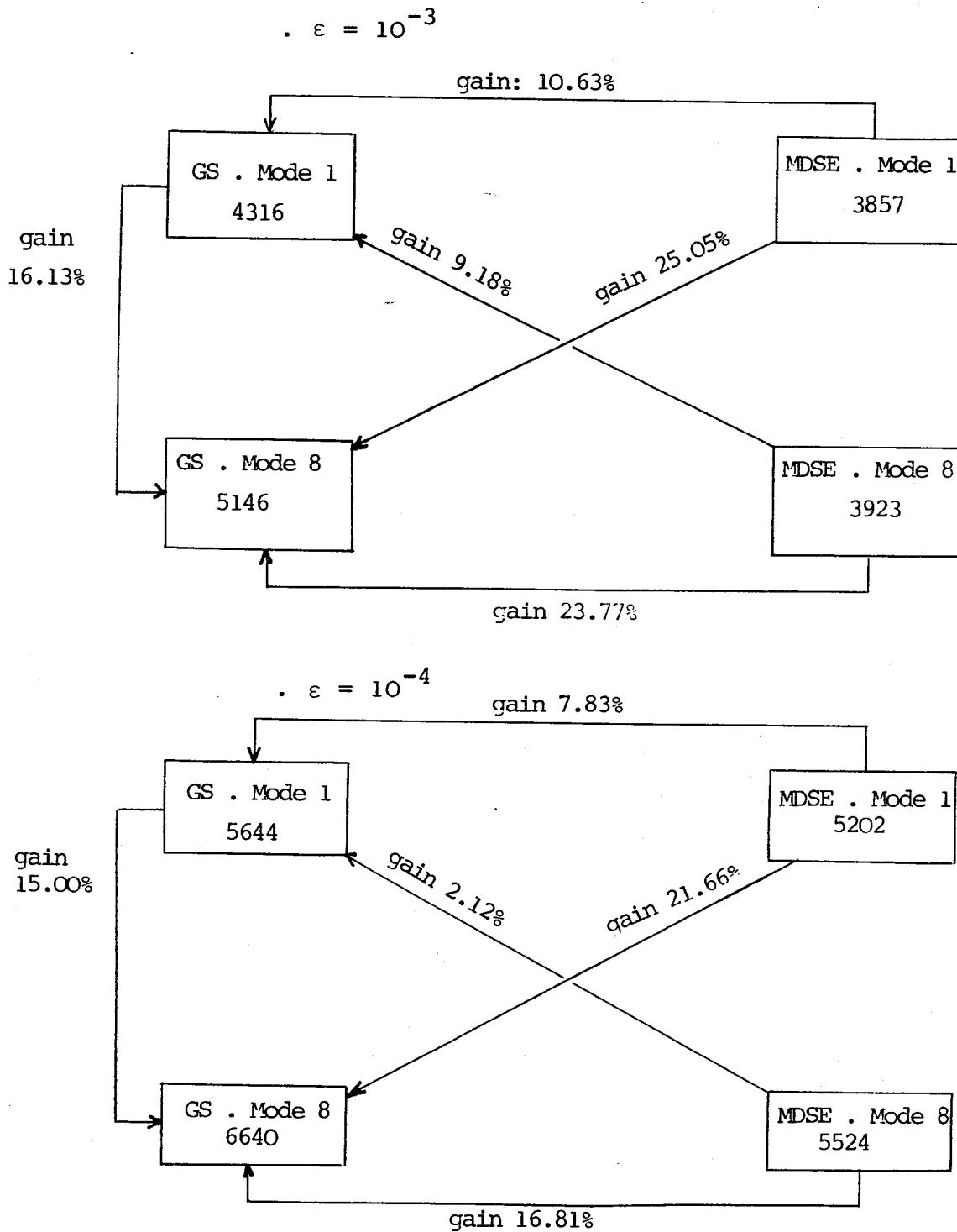
α - le domaine D_3

MODE	ϵ	METHODE	NOP	gain/GS
1	10^{-3}	GS	4316	
	10^{-4}	GS	5644	
	10^{-5}	GS	7138	
	10^{-6}	GS	8798	
	10^{-3}	MDSE	3857	10.64
	10^{-4}	MDSE	5202	7.83
8	10^{-3}	GS	5146	
	10^{-4}	GS	6640	
	10^{-5}	GS	7868	
	10^{-6}	GS	9794	
	10^{-3}	MDSE	3923	23.77
	10^{-4}	MDSE	5524	16.81
	10^{-5}	MDSE	7046	10.45



mode n°8

Nous illustrons ces résultats avec les deux schémas suivants:



On constate ainsi que la méthode G.S converge moins vite avec le mode 8 qu'avec le mode 1, en conséquence la MDSE 8 est

plus efficace (par rapport à G.S 8) que la MDSE.1 (par rapport à G.S.1). Le gain correspondant se trouve ainsi doublé (on passe de 10.63% (mode 1) à 23.77% (mode 8) pour $\epsilon = 10^{-3}$, pour $\epsilon = 10^{-4}$ on passe de 7.83 à 16.18%). Précisons toutefois que c'est la MDSE.1 qui fait le moins d'opérations. En prenant G.S Mode 8 comme base, on voit ainsi qu'on passe d'un gain de 23.77% (pour $\epsilon = 10^{-3}$ et 16.81% pour 10^{-4}) avec la MDSE.8 à un gain de 25.05% (pour $\epsilon = 10^{-3}$ et 21.66% pour 10^{-4}) avec la MDSE.1.

β - le domaine D_4 :

* Méthode de G.S $\epsilon = 10^{-2}$ (écart relatif maximal entre les deux derniers itérés)

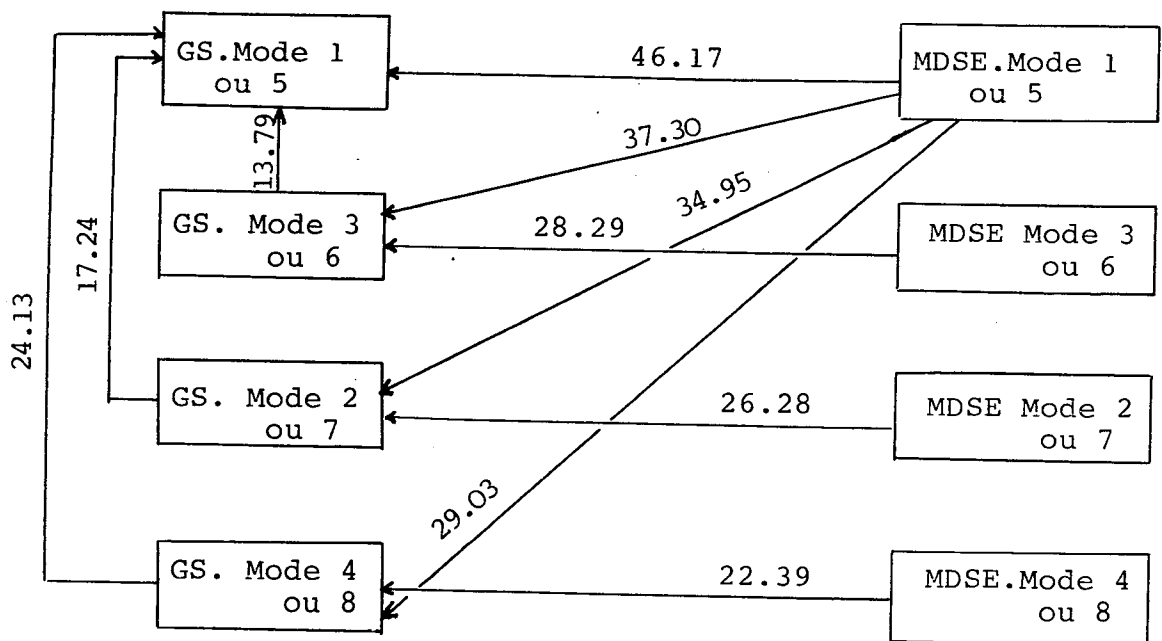
mode	nombre de pas	NOP	Z_{Max}	Z_{Min}	Z_{Max}/Z_{Min}
1 et 5	29	4785	0.0089221	$<10^{-7}$	>89220
3 et 6	25	4125	0.0082324	$8.291 \cdot 10^{-7}$	9929.65
2 et 7	24	3960	0.0098204	$5.429 \cdot 10^{-7}$	18088.55
4 et 8	22	3630	0.0077183	$1.148 \cdot 10^{-6}$	6723.53

(voir A. § II - Le système SYGESIC - pour la définition des modes de balayages).

*MDSE : $= 10^{-2}$

mode	NOP	pas de correction	Z_{Max}	Z_{Min}	$\frac{Z_{Max}}{Z_{Min}}$	gain/GS même mode
1 et 5	2576	3	0.00966433	0.00104703	9.23	46.17
3 et 6	2958	6	0.0091594	0.00018420	49.72	28.29
2 et 7	2919	5	0.00983938	0.00023953	41.08	26.28
4 et 8	2817	5	0.0096510	0.00013161	73.33	22.39

*schéma comparatif (les nombres correspondent aux gains en %)

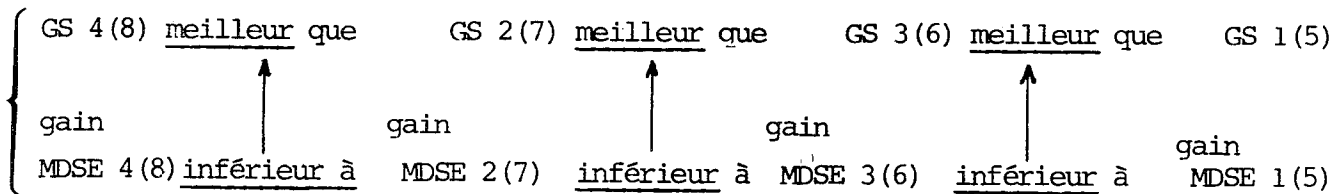


*Commentaires:

. Convergence: on note d'une part l'équivalence entre les modes 1 et 5, 3 et 6, 2 et 7, 4 et 8. (Les deux modes de chaque couple ont pour point commun le premier et le dernier élément du domaine activé au cours d'un balayage entier).

D'autre part, en ce qui concerne la méthode de G.S le mode 1 (ou 5) correspond à la convergence la plus lente, le mode 4 (ou 8) donne la plus rapide.

De ce fait, en comparant la MDSE à G.S du même mode on remarque que l'efficacité de MDSE 1 est meilleure que celle de MDSE 4 (46.17% de gain et 22.39%). Donc plus G.S converge lentement meilleure est l'efficacité de la MDSE. Les modes 3(ou 6) et 2(ou 7) intermédiaires pour G.S donnent de la même manière des gains intermédiaires.



En prenant MDSE 1(ou 5) comme base (puisque'elle fait le minimum d'opérations) on constate qu'elle réalise des gains de:

- 29.03% par rapport à G.S 4(8) au lieu de 22.39% avec MDSE 4(8),
- 34.95% par rapport à G.S 2(7) au lieu de 26.28% avec MDSE 2(7),
- 37.30% par rapport à G.S 3(6) au lieu de 28.29% avec MDSE 3(6).

Les taux d'amélioration se classent ainsi dans le même ordre que les anciens gains obtenus par les MDSE avec le même mode que G.S.

. Rapport $Z_{\text{Max}}/Z_{\text{min}}$: En prenant les deux résultats extrêmes (mode 1(5) et mode 4(8)) on constate qu'à la convergence (de GS) la plus lente correspond le rapport le plus élevé: pour GS 1, il est plus de 13 fois supérieur qu'avec GS 4 (~ 90000 et ~ 6724). Ainsi au rapport le plus élevé correspond la meilleure efficacité de la MDSE associée (ainsi que le minimum de pas de "correction").

Pour les modes 3(6) et 2(7) intermédiaires cette remarque ne semble pas être vérifiée.

De toutes les manières, deux points essentiels sont à retenir ici:

- . le lien entre la rapidité de GS et l'efficacité de la MDSE,
- . le lien entre le rapport $Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}}$ et l'efficacité de la MDSE.

Curieusement, on constate en définitive que le mode de balayage donnant la plus mauvaise GS nous permet d'obtenir la MDSE la plus performante. Cela donc confirme les remarques analogues faites aux chapitres précédents.

(f) Influence de la forme du domaine

Il est possible d'établir pour D_1 , D_2 , D_3 et D_4 le tableau comparatif suivant:

domaine	card(D)	symétrie	mode	convergence(GS)	$Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}}$	efficacité MDSE	gain(%)
D_1	240	oui	1	lente	20-30	assez bonne	15-28
D_2	56	oui	1	rapide	20-30	très moyenne	7-11
D_3	166	non + très creux	1 8	rapide lente	élevé plus élevé	très moyenne assez bonne	8-11 11-24
D_4	165	non+ creux, tordu	1 8	lente assez rapide	très élevé moins élevé	bonne assez bonne	jusqu'à 47 jusqu'à 23

On est ainsi amené à accorder à la forme du domaine (symétrique ou non, très creux ou non, tordu ou non) une grande importance quant au comportement de GS et des techniques chaotiques.

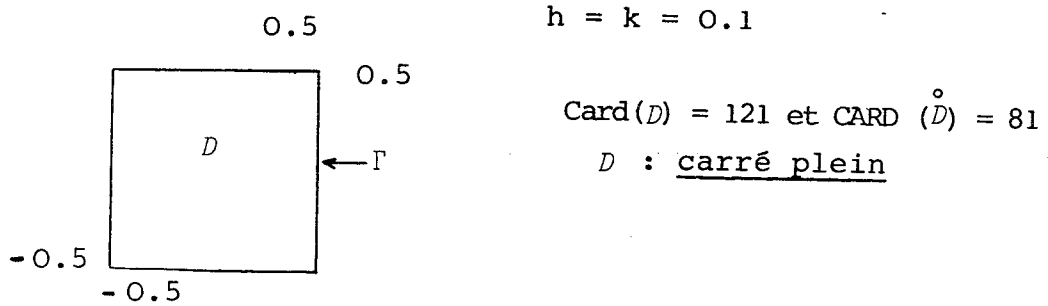
Les domaines non symétriques paraissent, de ce fait comme les plus "intéressants" pour la mise en oeuvre des stratégies chaotiques puisque la dissymétrie conduit à une répartition disproportionnée des écarts relatifs, donc à des rapports $Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}}$ élevés.

Cependant, à ce critère doit s'ajouter une convergence lente de G.S pour espérer une amélioration par la stratégie chaotique (*).

(*) d'ailleurs si GS converge vite, il est inutile de mettre en oeuvre des techniques plus sophistiquées.

Pour illustrer encore ce lien nous prenons le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + 2 = 0/D \\ u = 1/\Gamma \end{cases}$$



On obtient les résultats suivants:

ε	méthode	NOP	$Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}}$	pas
10^{-2}	GS	2187	≈ 3	27
10^{-3}	"	3969	"	49
10^{-4}	"	5832	"	72
10^{-2}	MDSE	2190		
10^{-3}	"	3967		
10^{-4}	"	5822		

gain nul

Avec un rapport $Z_{\text{Max}}/Z_{\text{Min}}$ très faible, un domaine symétrique, plein et malgré une convergence très lente (**) (inférieure à celle de D_4) on n'a pu absolument rien améliorer avec la technique automatique (et à fortiori avec la technique interactive). D'où l'importance de la simultanéité de toutes les conditions "intéressantes" qui doivent être réalisées.

(**) On dit que la convergence est plus lente si pour ε fixé, la méthode de G.S exige un nombre de balayages (pas) plus élevé. Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, GS exige 53 pas et GS_D en exige 72 alors que Card(D_4) > Card(D).

CONCLUSION

Nous avons donc essayé tout au long de ce chapitre de dégager les principaux points éclairant le plus possible le comportement numérique de certaines stratégies chaotiques surtout, il faut le souligner, grâce au système graphique SYGESIC.

Un certain nombre de critères sont à retenir pour pouvoir décider sur l'opportunité de résoudre tel ou tel problème de point fixe par des techniques chaotiques.

Ce chapitre qui clôture nos résultats expérimentaux sera suivi par le déroulement complet d'une expérimentation faite avec SYGESIC avec "listing" et dessins à l'appui.

CONCLUSION

Au fil des divers résultats expérimentaux que nous venons d'exposer, il a été possible de dégager une série de constatations pratiques sur le comportement numérique de certaines stratégies chaotiques. Il convient donc d'établir une récapitulation contribuant à fournir des réponses aux questions que nous nous sommes posés au début de ce travail.

Il faut donc d'abord, devant un problème de point fixe à grand nombre de variables, chercher à décider si cela vaut la peine de mettre en oeuvre des techniques chaotiques assez sophistiquées au lieu de le résoudre avec une méthode classique de "balayage" systématique (G.S, relaxation..). Il est ainsi tout à fait improbable d'obtenir une amélioration lorsque les méthodes classiques convergent rapidement ou bien lorsque toutes les composantes du système à résoudre convergent pratiquement avec la même vitesse. En effet, les stratégies chaotiques exigent surtout, pour être efficaces, une inégaie répartition de ces vitesses (qu'on pourrait représenter par les cologarithmes des écarts relatifs entre deux itérés successifs) alliée à une convergence assez lente des méthodes usuelles.

Dans le cadre des équations aux dérivées partielles, la forme du domaine de résolution a aussi une interférence sur l'efficacité de ces techniques comme l'illustre le tableau suivant :

	Domaine plein Symétrique ou non	Domaine symétrique creux	Domaine quelconque (non symé- trique) creux, tordu
Convergence rapide de G.S	S. Chaotiques inutiles	S.C inutilés	S.C inutilés → amélioration par changement du mode de balayage
Convergence lente de G.S	Répartition équi- librée des écarts → S.C inutilés	Répartition assez inégaie des écarts → S.C utiles	Répartition très inégaie des écarts → S.C nettement efficaces

Il arrive en outre dans certains cas qu'entre plusieurs variantes de G.S, la plus mauvaise soit celle qui permet d'obtenir les meilleurs résultats avec la technique chaotique correspondante (fin Ch.III).

Lorsqu'il est possible d'exhiber une matrice de contraction K de l'opérateur de point fixe étudié, l'observation de ses coefficients - surtout ceux de la diagonale principale - pourrait nous guider vers le choix des techniques chaotiques qui peuvent améliorer la méthode de G.S. Elle peut également nous permettre d'éliminer celles qui ne sont pas efficaces.

Malheureusement, cela n'est possible que pour des problèmes linéaires où l'on a la meilleure matrice \bar{K} (la plus petite, élément par élément), dans le cas non linéaire il n'y a pas de meilleure matrice de contraction. On ne peut donc en tirer les renseignements qu'elle peut fournir dans le premier cas.

Les stratégies chaotiques, une fois qu'on s'est assuré a priori de leur utilité, se répartissent en deux ensembles distincts qui ont des comportements assez différents vis à vis de G.S.

Les techniques cycliques lorsqu'elles peuvent être utilisées (ce n'est évidemment pas toujours le cas surtout si on ne possède pas d'informations sur \bar{K}) sont celles qui se comportent le mieux. En effet, leur efficacité par rapport à G.S augmente en général au fur et à mesure que la précision du calcul est renforcée. (Cf. résultats B. Ch.II). Cette efficacité s'entend sans distinction en terme de temps d'exécution ou en terme de nombre d'opérations puisque l'unique différence entre cette technique et G.S est la suite initiale J_0 . On arrive ainsi à réaliser des gains allant jusqu'à 68 % .

Autre avantage : la question de la convergence vers un point fixe partiel ne se pose pas.

L'inconvénient majeur, si l'on peut dire, de ces techniques est la nette difficulté de leur détermination (Cf. [1]). C'est pour cela que d'autres techniques beaucoup plus faciles à élaborer ont été proposées :

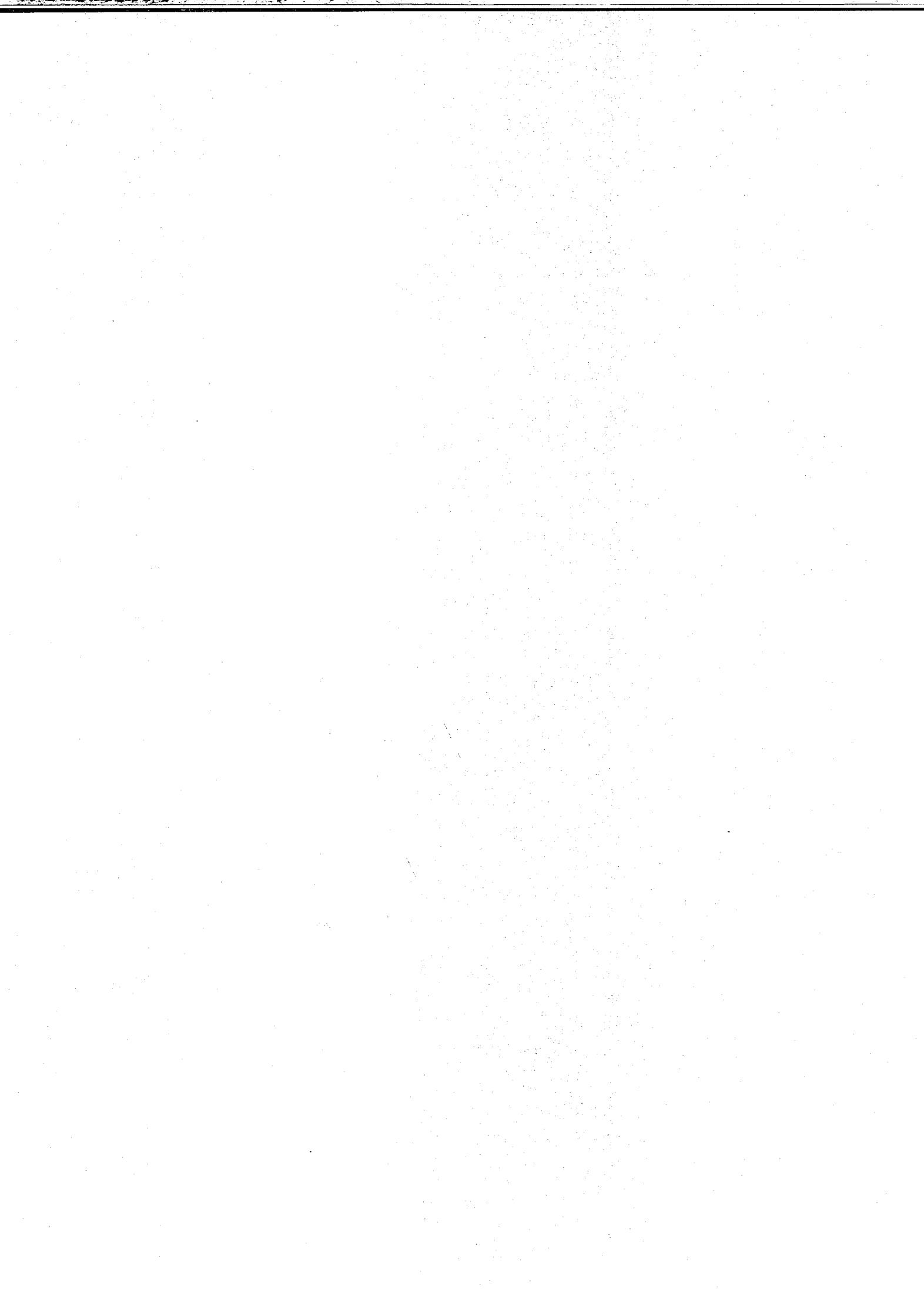
. Les techniques automatiques non cycliques : Ces stratégies se sont révélées assez efficaces. Leur avantage c'est de faire pratiquement juste le nombre d'opérations qu'il faut pour atteindre la précision désirée. Elles tirent profit du grand inconvénient - dans certains cas - de G.S qui réactive, "aveuglement" et systématiquement, toutes les composantes sans tenir compte des vitesses de convergence très différentes de ces mêmes composantes.

En favorisant les composantes convergeant lentement grâce à leur activation plus fréquente on équilibre la répartition des écarts relatifs. Cette stratégie ne prouve son intérêt que lorsque la précision du calcul n'est pas

très forte. En effet, elle se rapproche de plus en plus de G.S au fur et à mesure qu'on renforce le test de la précision. De ce fait, son efficacité diminue alors.

Entièrement automatiques, ces techniques font cependant un certain nombre de tests supplémentaires par rapport à G.S. Mais cela n'a qu'une faible influence sur le temps d'exécution surtout lorsque l'opérateur de point fixe est assez complexe (contexte non linéaire, Cf. B Ch.I). On peut donc dire qu'elles permettent de réaliser pratiquement le même gain en temps et en nombre d'opérations (par rapport à G.S) que les méthodes cycliques. Un inconvénient subsiste : la convergence vers un point fixe partiel suite à un "abandon" prématuré de certaines composantes. Mais on a vu par quel moyen on peut éviter cela et ne rien perdre en efficacité : la périodicité des pas "correctifs". Les expériences ont permis ici d'atteindre des gains de 45%.

. Les techniques interactives sont de loin les plus originales puisqu'on à l'entière liberté d'orienter le calcul vers la direction désirée en utilisant les possibilités offertes par le système SYGESIC. Leur efficacité n'est pas, si l'on peut dire, limitée car elle dépend de l'"intuition" de l'utilisateur. Là où les techniques automatiques ne peuvent rien apporter, les stratégies interactives peuvent conduire à une amélioration assez intéressante par rapport à G.S d'autant plus qu'elles permettent de suivre de très près le déroulement du calcul et par conséquent de "voir" comment réagit le problème étudié aux itérations qu'on pilote ainsi "à vue" (ce qui n'est pas du tout le cas des stratégies automatiques). Et l'on a pu voir qu'elles permettent d'obtenir des gains de l'ordre de 30 % .



A N N E X E

DEROULEMENT D'UNE EXPERIMENTATION AVEC SYGESIC



Nous exposons ici le déroulement détaillé de trois expérimentations effectuées pour résoudre le problème aux dérivées partielles étudié à la fin du chapitre précédent (domaine D_4) :

- I . La méthode de Gauss-Seidel
- II . La stratégie chaotique automatique (MDSE)
- III . La stratégie chaotique interactive (MPZ).

Il est facile alors, en passant en revue les différents dessins suivants et en s'aidant du "listing" qui donne la trace des différentes étapes des expérimentations, de remarquer les caractéristiques propres de chaque méthode.

A comparer à titre indicatif les dessins suivants :

- . I.6 et I.7 avec II.14 et II.15
- . I.8 et I.9 avec II.16 et II.17
- . I.10 avec II.18
- . II.12 avec II.14
- . I.6 avec III.9
- . I.8 avec III.18 (I.9 avec III.19)
- . I.10 avec III.20

Remarques :

. Représentation des écarts Z_i^j : en ce qui concerne la MDSE, on ne représente que les Z_i^j correspondant aux éléments "non disparus", pour les autres on affiche un point seulement. On les reprend en totalité après la fin de l'algorithme de disparitions successives. En outre Z_{max} et Z_{min} sont calculés aussi pour les éléments "non disparus".

. Partage en zones : lorsque le domaine est partagé en 2 ou 3 zones, on a choisi de représenter sur D_{hk} :

- par un point les éléments de la zone inférieure
- par 5 points disposés en forme de "+" ceux de la zone médiane
- par 9 points disposés en carré "■" ceux de la zone supérieure.

Cette disposition permet de distinguer sur l'écran les trois zones.

. Les calculs étant faits en simple précision, il faut retenir que $Z_{MIN} = 0$ signifie en fait $Z_{min} < 10^{-7}$, le rapport Z_{max}/Z_{min} n'est pas alors calculé ($\equiv 0$).

A(I):I=1...5
1 1 0 0 0

DEBUT

CORD.GRILLE
-0.5 -0.5 0.5 0.5

NBRE DE COND.INIT.
02

PH,PK
0.05 0.05

RO= 0.9938439

DELIMITATION DE LA FRONTIERE
NBRE DE SOMMETS,NBRE DE FENETRES
28 8

* ** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE dessin I-1
04

TOTAL DES POINTS 303 FRONTIERE 138 INTERIEUR 165
MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 9

NOMBRE DE PAS
10

TOUTE LA GRILLE

* 1650 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z
Z.MAX 0.2692823 Z.MIN 0.002035773 RAP. 132.2752
** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY dessin I-2
04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

1 ** TOUCHE CHOISIE ** 17

* ** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY
04

dessin I-3

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 9

NOMBRE DE PAS
05

TOUTE LA GRILLE

2475 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.1159531 Z.MIN 0.0001590715 RAP. 728.9370

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 18

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-4

ECHELLE DISPLAY

04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 18

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-5

1 ECHELLE DISPLAY

04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?
** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 10

EPSILONE
0.01

TOUTE LA GRILLE

**

14 PAS

4785 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z
Z.MAX 0.008922093 Z.MIN 0 RAP. 0
** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-6

ECHELLE DISPLAY
04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-7

ECHELLE DISPLAY
04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

1

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?
** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 10

EPSILONE
0.0001

TOUTE LA GRILLE

24 PAS

8745 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 8.457161⁻⁰⁵ Z.MIN 0 RAP. 0

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

04

dessin I-8

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-9

ECHELLE DISPLAY

04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

1

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 28

MAX. N.OP
10000

VARIATIONS DE L'EC.MAX EN FONCTION DU N.OP

EC.MAX: 0.2692823 . N.OP: 1650
 EC.MAX: 0.1159531 . N.OP: 2475
 EC.MAX: 0.008922093 . N.OP: 4785
 EC.MAX: 8.457161⁻⁰⁵ . N.OP: 8745

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-10

ECHELLE
04

** TOUCHE CHOISIE ** 21

REPRESENTATION DE U(X,Y)

VUE D'AVANT

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY
04

dessin I-11

** TOUCHE CHOISIE ** 22

VUE DE DERRIERE

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin I-12

ECHELLE DISPLAY
4

** TOUCHE CHOISIE ** 22

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 20

IMPRESSION/NON DE LA SOLUTION

** TOUCHE CHOISIE ** 24

NOUVELLE ETAPE/FIN

** TOUCHE CHOISIE ** 25

fin I

*

*****UNE AUTRE EXPER.(MEME GRILLE)*****

TOTAL DES POINTS	303	FRONTIERE	138	INTERIEUR	165
MODE DE BALAYAGE					

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 9

NOMBRE DE PAS
7

TOUTE LA GRILLE

*

(M.D.S.E.)

CALCUL DE Z
 Z.MAX 0.5302501 Z.MIN 0.009490516 RAP. 55.87157
 ** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17
 ** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin 11-1

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

1

** TOUCHE CHOISIE ** 17

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin 11-2

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 13

NOMBRE DE PAS, EPSILONE

5 0.01

METHODE D.S.E

NO. PAS	1	IND. DISP.	34
NO. PAS	2	IND. DISP.	62
NO. PAS	3	IND. DISP.	86
NO. PAS	4	IND. DISP.	95
NO. PAS	5	IND. DISP.	105

105 INDICE(S) DISPARU(S)

60 INDICE(S) RESTANT(S)

1702 OPERATIONS ELEMENTAIRES

** TOUCHE CHOISIE ** 13

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-3

ECHELLE DISPLAY

4

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.1903002 Z.MIN 0.01010446 RAP. 18.83327

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-4

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-5

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 13

NOMBRE DE PAS, EPSILONE

5 0.01

METHODE D.S.E

182

NO. PAS	1	IND. DISP.	11
NO. PAS	2	IND. DISP.	15
NO. PAS	3	IND. DISP.	20
NO. PAS	4	IND. DISP.	25
NO. PAS	5	IND. DISP.	32
1	32	INDICE(S) DISPARU(S)	
	28	INDICE(S) RESTANT(S)	

1931 OPERATIONS ELEMENTAIRES

** TOUCHE CHOISIE ** 13

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin II-6

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.08437228 Z.MIN 0.01043987 RAP. 8.081740
 ** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 18

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin II-7

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 18

* ** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin II-8

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUIITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 13

1 NOMBRE DE PAS, EPSILONE

5 0.01

METHODE D.S.E

NO. PAS 1 IND. DISP. 2

NO. PAS 2 IND. DISP. 5

NO. PAS 3 IND. DISP. 7

NO. PAS 4 IND. DISP. 11

NO. PAS 5 IND. DISP. 13

13 INDICE(S) DISPARU(S)

15 INDICE(S) RESTANT(S)

2046 OPERATIONS ELEMENTAIRES

** TOUCHE CHOISIE ** 13

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin II-9

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.03403720 Z.MIN 0.01096319 RAP. 3.104681

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin II-10

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

*

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

1 ** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 13

NOMBRE DE PAS, EPSILONE

10 0.01

METHODE D.S.E

NO. PAS 1 IND. DISP. 5

NO. PAS 2 IND. DISP. 9

NO. PAS 3 IND. DISP. 12

NO. PAS 4 IND. DISP. 14

15 INDICE(S) DISPARU(S)

0 INDICE(S) RESTANT(S)

2081 OPERATIONS ELEMENTAIRES

** TOUCHE CHOISIE ** 14

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.009995613 Z.MIN 0.001368070 RAP. 7.306361

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY
04

dessin II-12

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-13

ECHELLE DISPLAY
4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

1 ** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 10

EPSILONE
0.01

Pas de correction

TOUTE LA GRILLE

3 PAS

2576 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.009664334 Z.MIN 0.001047029 RAP. 9.230244
** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-14

ECHELLE DISPLAY
4

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

* ** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY
4

dessin II-15

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE
** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?
1 ** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

1 ** TOUCHE CHOISIE ** 13

NOMBRE DE PAS, EPSILONE
25 0.001

METHODE D.S.E

NO. PAS	1	IND. DISP.	23
NO. PAS	2	IND. DISP.	58
NO. PAS	3	IND. DISP.	82
NO. PAS	4	IND. DISP.	95
NO. PAS	5	IND. DISP.	106
NO. PAS	6	IND. DISP.	116
NO. PAS	7	IND. DISP.	122
NO. PAS	8	IND. DISP.	127
NO. PAS	9	IND. DISP.	132
NO. PAS	10	IND. DISP.	138
NO. PAS	11	IND. DISP.	139
NO. PAS	12	IND. DISP.	143
NO. PAS	13	IND. DISP.	144
NO. PAS	14	IND. DISP.	150

NO. PAS	15	IND. DISP.	155
NO. PAS	16	IND. DISP.	155
NO. PAS	17	IND. DISP.	159
NO. PAS	18	IND. DISP.	162
NO. PAS	19	IND. DISP.	164

165 INDICE(S) DISPARU(S) fin au pas 20
 0 INDICE(S) RESTANT(S)

3506 OPERATIONS ELEMENTAIRES

** TOUCHE CHOISIE ** 14

CALCUL DE Z
 Z.MAX 0.0009995452 Z.MIN 0.0002308695 RAP. 4.329481
 ** TOUCHE CHOISIE ** 14

CHOIX DU MODE DE PARTAGE
 ** TOUCHE CHOISIE ** 13

1 COURBE DES ECARTS ?
 ** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP
 ** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

MODE DE BALAYAGE
 ** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL
 ** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 10

EPSILONE
 0.001

TOUTE LA GRILLE

Pas de correction

3 PAS

4001 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z
 Z.MAX 0.0009779995 Z.MIN 9.260651⁻⁰⁵ RAP. 10.56081
 ** TOUCHE CHOISIE ** 14

CHOIX DU MODE DE PARTAGE
 ** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?
 ** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 13

NOMBRE DE PAS, EPSILONE
25 0.0001

1 METHODE D.S.E

NO. PAS	1	IND. DISP.	23
NO. PAS	2	IND. DISP.	57
NO. PAS	3	IND. DISP.	81
NO. PAS	4	IND. DISP.	95
NO. PAS	5	IND. DISP.	104
NO. PAS	6	IND. DISP.	117
NO. PAS	7	IND. DISP.	122
NO. PAS	8	IND. DISP.	129
NO. PAS	9	IND. DISP.	135
NO. PAS	10	IND. DISP.	137
NO. PAS	11	IND. DISP.	139
NO. PAS	12	IND. DISP.	142
NO. PAS	13	IND. DISP.	144
NO. PAS	14	IND. DISP.	148
NO. PAS	15	IND. DISP.	150
NO. PAS	16	IND. DISP.	155
NO. PAS	17	IND. DISP.	159
NO. PAS	18	IND. DISP.	162
NO. PAS	19	IND. DISP.	164

165 INDICE(S) DISPARU(S)

fin au pas 20

0 INDICE(S) RESTANT(S)

** TOUCHE CHOISIE ** 14

CALCUL DE Z

Z.MAX 9.917718⁻⁰⁵ Z.MIN 1.401156⁻⁰⁵ RAP. 7.078238

** TOUCHE CHOISIE ** 14

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

1

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 10

EPSILONE

0.0001

TOUTE LA GRILLE

3 PAS

Pas de correction

5432 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 9.906317⁻⁰⁵ Z.MIN 1.102695⁻⁰⁵ RAP. 8.983730

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-16

ECHELLE DISPLAY

04

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY
04

dessin II-17

** TOUCHE CHOISIE ** 16

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 28

MAX. N.OP
6000

VARIATIONS DE L'EC.MAX EN FONCTION DU N.OP

1 EC.MAX: 0.5302501 . N.OP: 1155

EC.MAX: 0.009995613 . N.OP: 2081

EC.MAX: 0.009664334 . N.OP: 2576

EC.MAX: 0.0009995452 . N.OP: 3506

EC.MAX: 0.0009779995 . N.OP: 4001

EC.MAX: 9.917718⁻⁰⁵ . N.OP: 4937

EC.MAX: 9.906317⁻⁰⁵ . N.OP: 5432

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE
04

dessin II-18

** TOUCHE CHOISIE ** 21

REPRESENTATION DE U(X,Y)

VUE D'AVANT

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin II-19

ECHELLE DISPLAY
04

** TOUCHE CHOISIE ** 21

POURSUIITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 20

IMPRESSION/NON DE LA SOLUTION

** TOUCHE CHOISIE ** 24

NOUVELLE ETAPE/FIN

** TOUCHE CHOISIE **

25

fin II

191

*****UNE AUTRE EXPER.(MEME GRILLE)*****

TOTAL DES POINTS 303 FRONTIERE 138 INTERIEUR 165
MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 9

** TOUCHE CHOISIE ** 9

NOMBRE DE PAS
5

TOUTE LA GRILLE

825 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 1.307851 Z.MIN 0.02670834 RAP. 48.96788

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin III-1

** TOUCHE CHOISIE ** 15

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 10

** TOUCHE CHOISIE **

POINTER LE/LES 2 SEUIL(S)

*

PARTAGE EN 2 ZONES

ZONE1 (INF): 122 POINTS.SEUIL: 0.1727512
ZONE2 (SUP): 43 POINTS.SEUIL: 1.307851

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE

5

dessin III-2

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

1

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

III - METHODE INTERACTIVE (M.P.Z.)

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 10

NOMBRES DE PAS (2)

6 12

2 SOUS-GRILLES(1 SEUIL)

*

2073 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.1565762 Z.MIN 0.001215265 RAP. 128.8412

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin III-3

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE DISPLAY

4

dessin III-4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 10

** TOUCHE CHOISIE **

POINTER LE/LES 2 SEUIL(S)

**

PARTAGE EN 2 ZONES

ZONE1(INF): 110 POINTS.SEUIL: 0.01792883

ZONE2(SUP): 55 POINTS.SEUIL: 0.1565762

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE

4

dessin III-5

1

COURBE DES ECARTS ?

** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 10

NOMBRES DE PAS (2)

3 6

2 SOUS-GRILLES(1 SEUIL)

2733 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.04117952 Z.MIN 0.0002624027 RAP. 156.9325

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 18

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-6

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-7

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 11

** TOUCHE CHOISIE **

POINTER LE/LES 2 SEUIL(S)

**

ZONE1(INF): 93 POINTS. SEUIL 0.003508553

ZONE2(MOY): 53 POINTS. SEUIL 0.01895464

1 ZONE3(SUP): 19 POINTS. SEUIL 0.04117952

** TOUCHE CHOISIE ** 28

ECHELLE

dessin III-8

5


```

194  COURBE DES ECARTS ?
    ** TOUCHE CHOISIE **                29

    ** TOUCHE CHOISIE **                20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

    ** TOUCHE CHOISIE **                19

*****ON CONTINUE*****
.....

MODE DE BALAYAGE

    ** TOUCHE CHOISIE **                1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

    ** TOUCHE CHOISIE **                11

NOMBRES DE PAS (3)
4 8 12

3 ZONES
*
    3757  OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z
Z.MAX  0.007514458  Z.MIN  3.667214-05  RAP.  204.9092
** TOUCHE CHOISIE **                16

Z EN PERSPECTIVE

    ** TOUCHE CHOISIE **                17
*
    ** TOUCHE CHOISIE **                28

ECHELLE DISPLAY

4
                                                    dessin III-9

    ** TOUCHE CHOISIE **                15

Z LINEAIRE

    ** TOUCHE CHOISIE **                17
*
    ** TOUCHE CHOISIE **                28
                                                    dessin III-10

ECHELLE DISPLAY

4

    ** TOUCHE CHOISIE **                15

CHOIX DU MODE DE PARTAGE
** TOUCHE CHOISIE **                10

    ** TOUCHE CHOISIE **

1
POINTER LE/LES 2 SEUIL(S)
**
PARTAGE EN 2 ZONES
ZONE1(INF):          131  POINTS.SEUIL:  0.001344894
ZONE2(SUP):          34  POINTS.SEUIL:  0.007514458

    ** TOUCHE CHOISIE **                28

```

COURBE DES ECARTS ?
** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUIITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 10

NOMBRES DE PAS (2)

3 10

2 SOUS-GRILLES(1 SEUIL)

*

4490 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX 0.001824866 Z.MIN 8.421500'-06 RAP. 216.6913

** TOUCHE CHOISIE ** 16

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 18

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-12

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-13

ECHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

1

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 11

** TOUCHE CHOISIE **

POINTER LE/LES 2 SEUIL(S)

ZONE1(INF): 83 POINTS. SEUIL 0.0001127001

ZONE2(MOY): 44 POINTS. SEUIL 0.0005405075

ZONE3(SUP): 38 POINTS. SEUIL 0.001824866

```

196  ** TOUCHE CHOISIE **          28                               dessin III-14
     ECHELLE
     5

     COURBE DES ECARTS ?
** TOUCHE CHOISIE **          29

     ** TOUCHE CHOISIE **          20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

     ** TOUCHE CHOISIE **          19

*****ON CONTINUE*****
.....

MODE DE BALAYAGE

     ** TOUCHE CHOISIE **          1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

     ** TOUCHE CHOISIE **          11

NOMBRES DE PAS (3)
     3  8  14

3 ZONES
*
     5623  OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z
Z.MAX 0.0003586798  Z.MIN 1.872157-06  RAP. 191.5864
** TOUCHE CHOISIE **          16

Z EN PERSPECTIVE

     ** TOUCHE CHOISIE **          17
     ** TOUCHE CHOISIE **          28

ECHELLE DISPLAY                               dessin III-15
     4

     ** TOUCHE CHOISIE **          15

Z LINEAIRE

     ** TOUCHE CHOISIE **          17
* 1 ** TOUCHE CHOISIE **          28

ECHELLE DISPLAY                               dessin III-16
     4

     ** TOUCHE CHOISIE **          15

CHOIX DU MODE DE PARTAGE
** TOUCHE CHOISIE **          10

     ** TOUCHE CHOISIE **

POINTER LE/LES 2 SEUIL(S)

```

**

PARTAGE EN 2 ZONES

ZONE1(INF):	118	POINTS.SEUIL:	3.896859 ¹ -05
ZONE2(SUP):	47	POINTS.SEUIL:	0.0003586798

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-17

ECHELLE
5

COURBE DES ECARTS ?
** TOUCHE CHOISIE ** 29

** TOUCHE CHOISIE ** 20

POURSUITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 19

*****ON CONTINUE*****

.....

MODE DE BALAYAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 1

CHOIX DE LA STRATEGIE DE CALCUL

** TOUCHE CHOISIE ** 10

NOMBRES DE PAS (2)
2 8

2 SOUS-GRILLES(1 SEUIL)

6235 OPERATIONS ELEMENTAIRES

CALCUL DE Z

Z.MAX	0.0001360020	Z.MIN	5.003412 ¹ -07	RAP.	271.8184
** TOUCHE CHOISIE **			16		

Z EN PERSPECTIVE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-18

ECHELLE DISPLAY
4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

1

Z LINEAIRE

** TOUCHE CHOISIE ** 17

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-19

ECHELLE DISPLAY
4

** TOUCHE CHOISIE ** 15

CHOIX DU MODE DE PARTAGE

** TOUCHE CHOISIE ** 13

COURBE DES ECARTS ?
** TOUCHE CHOISIE ** 28

MAX. N.OP
7000

VARIATIONS DE L'EC.MAX EN FONCTION DU N.OP

EC.MAX:	1.307851	. N.OP:	825
EC.MAX:	0.1565762	. N.OP:	2073
EC.MAX:	0.04117952	. N.OP:	2733
EC.MAX:	0.007514458	. N.OP:	3757
EC.MAX:	0.001824866	. N.OP:	4490
EC.MAX:	0.0003586798	. N.OP:	5623
EC.MAX:	0.0001360020	. N.OP:	6235

** TOUCHE CHOISIE ** 28

EHELLE

dessin III-20

4

*

** TOUCHE CHOISIE ** 21

REPRESENTATION DE U(X,Y)

VUE D'AVANT

*

** TOUCHE CHOISIE ** 28

dessin III-21

EHELLE DISPLAY

4

** TOUCHE CHOISIE ** 21

POURSUIITE/ARRET DE LA MANIP

** TOUCHE CHOISIE ** 20

IMPRESSION/NON DE LA SOLUTION

** TOUCHE CHOISIE ** 24

NOUVELLE ETAPE/FIN

** TOUCHE CHOISIE ** 26

fin III

MERCI DE VOTRE ATTENTION.AU REVOIR

SORTIE SYGESIC

METHODE DE GAUSS-SEIDEL

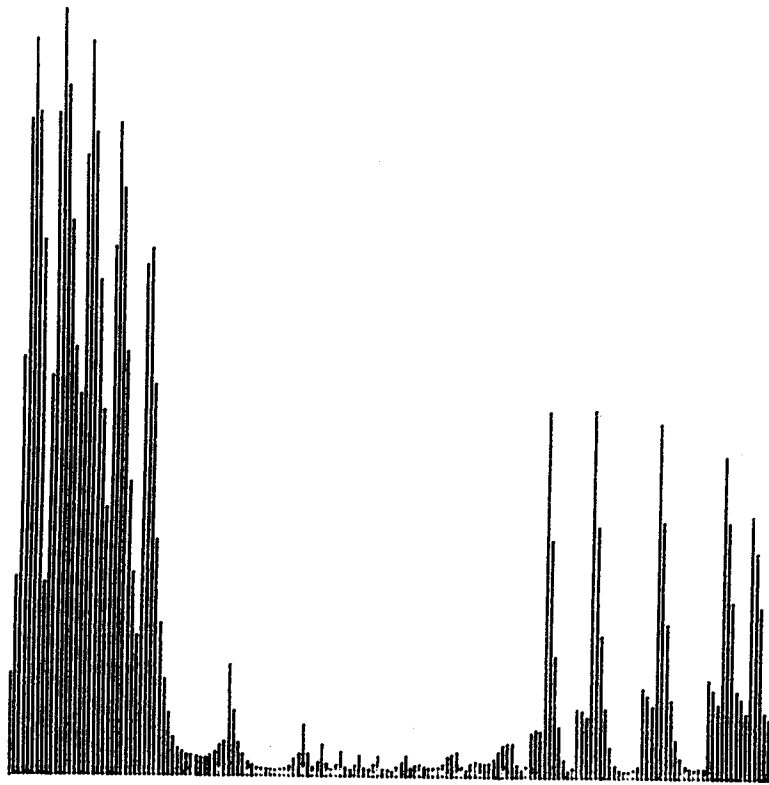
I.1



■ ■ GRILLE DU PROBLEME ■ ■

200

I.2

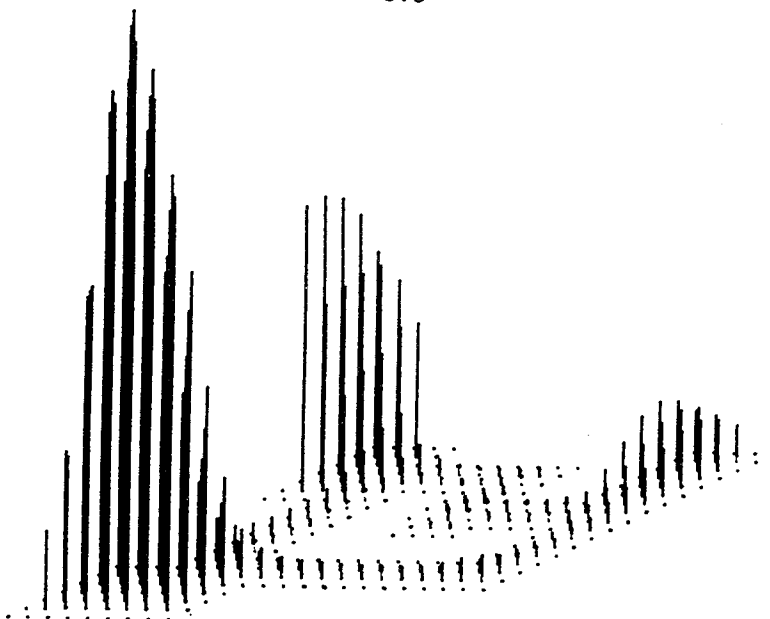


FUNCTION ECART

NOP = 1650 (10 pas)

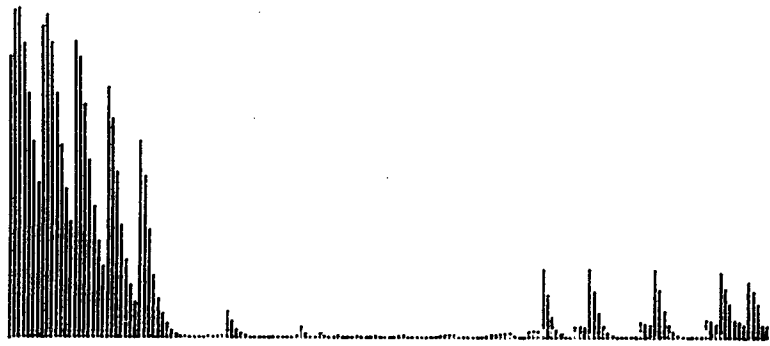
$Z_{\max} = 0.26928$

I.3



FUNCTION ECART

I.4

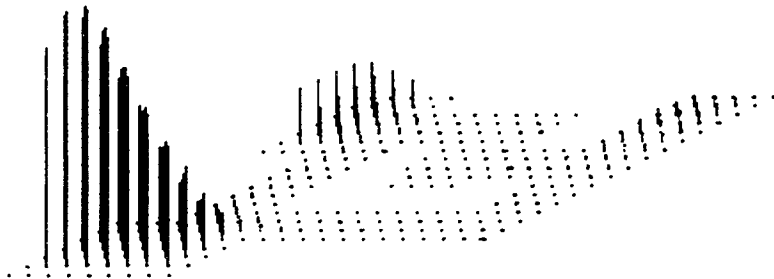


■ ■ FONCTION ECART ■ ■

NOP = 2475 (15 pas)

$Z_{\max} = 0.1159531$

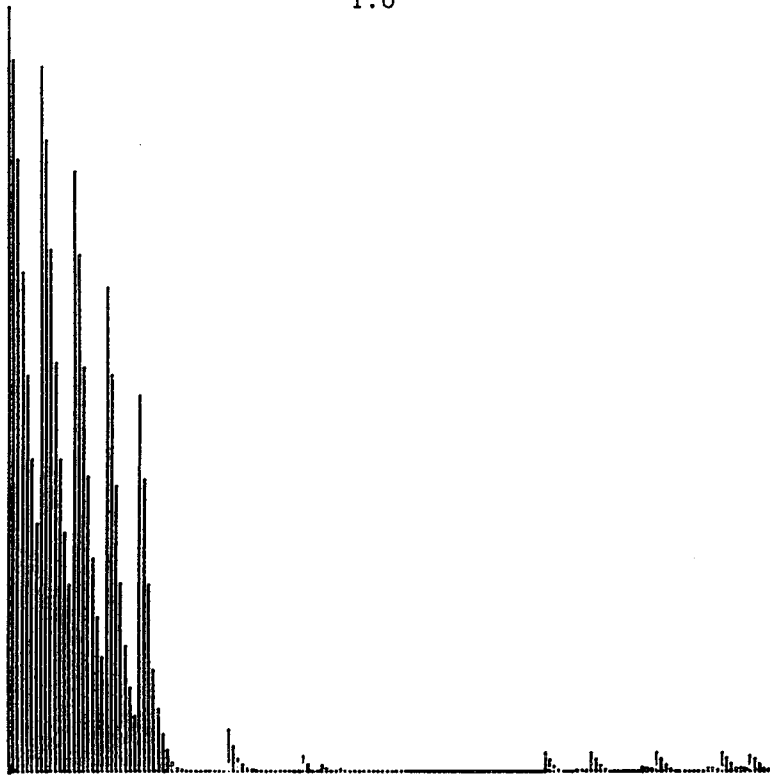
I.5



■ ■ FONCTION ECART ■ ■

202
changement d'échelle

I.6

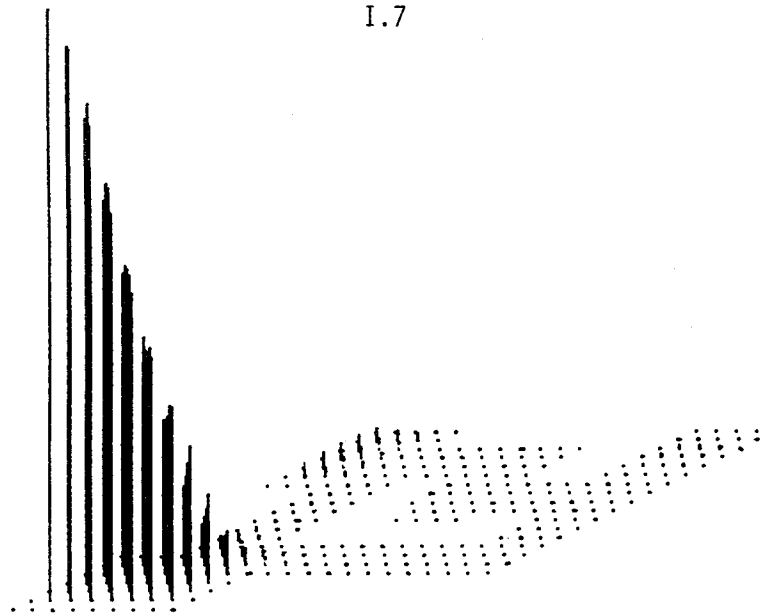


== FONCTION ECART ==

NOP = 4785 (29 pas)

$Z_{\max} = 0.008922$

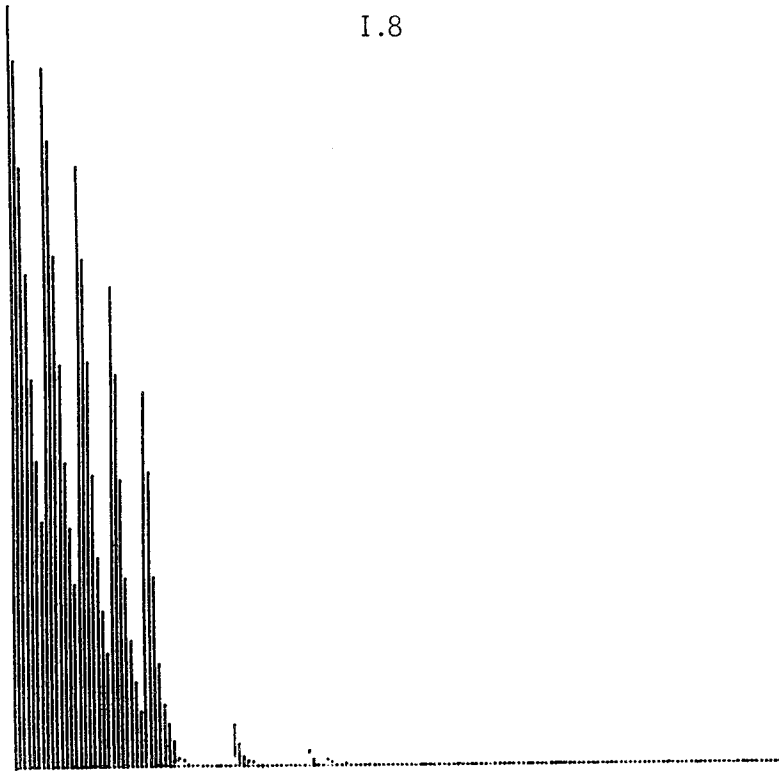
I.7



== FONCTION ECART ==

Changement d'échelle

I.8

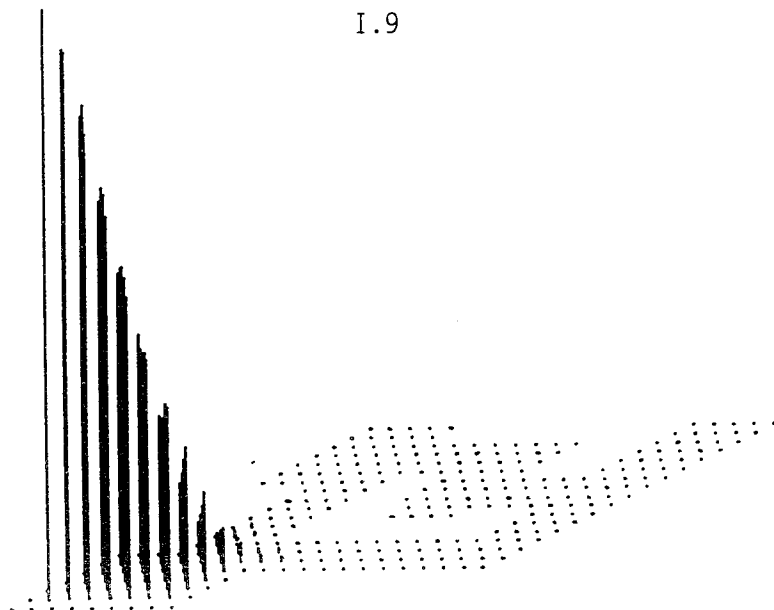


== FONCTION ECART ==

NOP = 8745 (43 pas)

Z_{max} = 8457 10⁻⁵

I.9

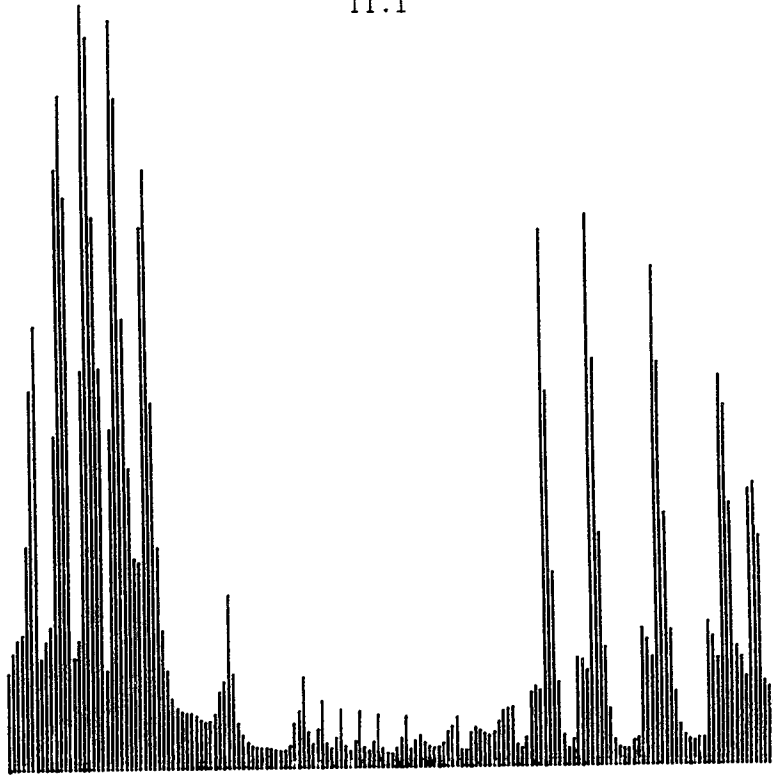


== FONCTION ECART ==



METHODE AUTOMATIQUE (MDSE)

II.1

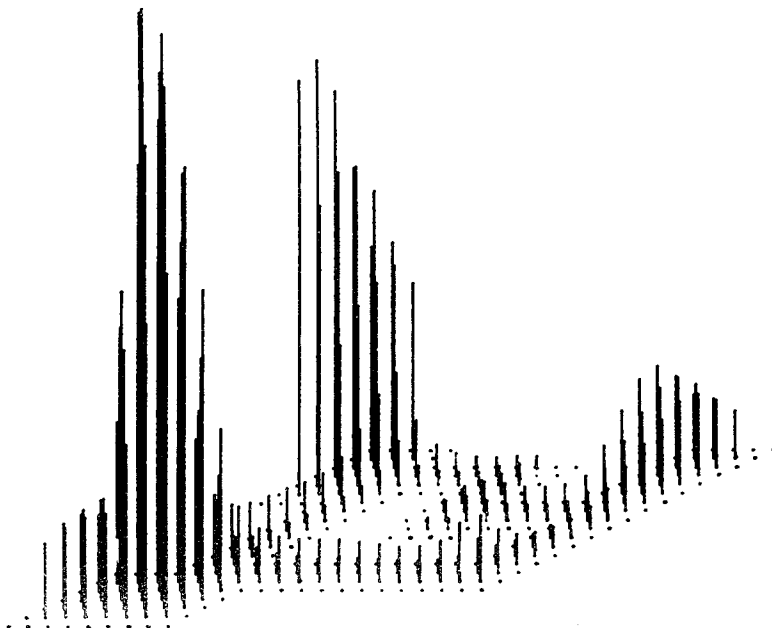


■ ■ FONCTION ECART ■ ■

NOP = 1155 (7 pas)

$Z_{\max} = 0.53025$

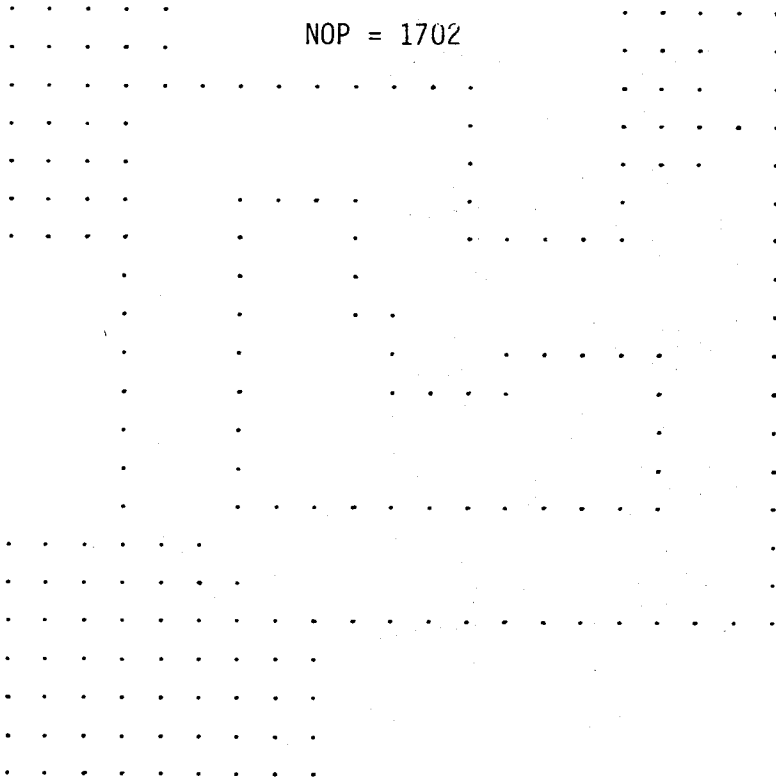
II.2



■ ■ FONCTION ECART ■ ■

II.3

NOP = 1702



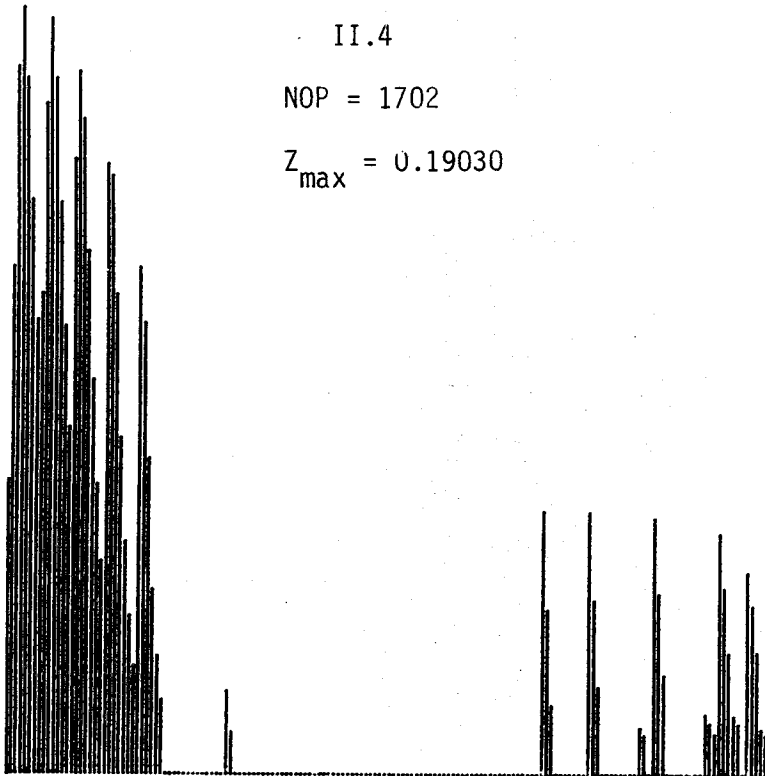
105 "disparus"

60 "restants"

II.4

NOP = 1702

$Z_{max} = 0.19030$

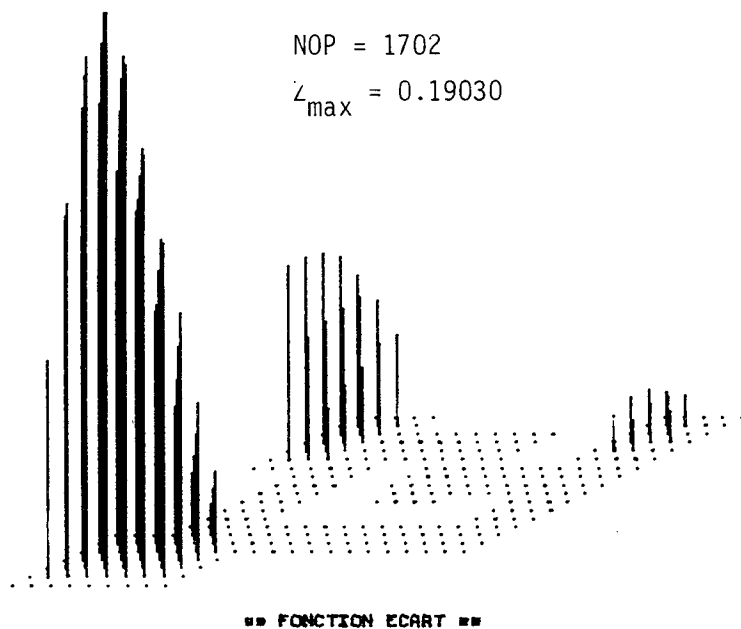


== FONCTION ECART ==

II.5

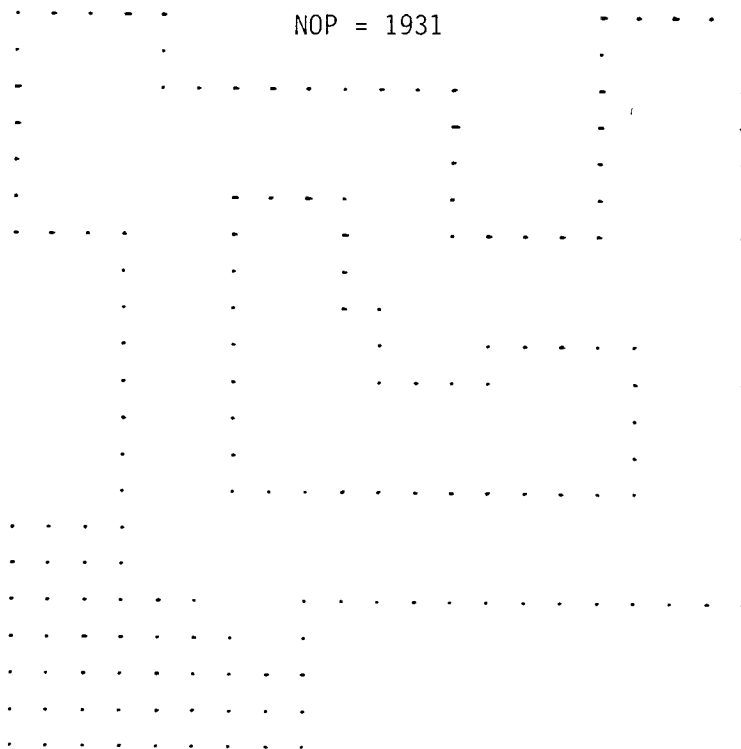
NOP = 1702

$Z_{\max} = 0.19030$



II.6

NOP = 1931



137 "disparus"

28 "restants"

II.7

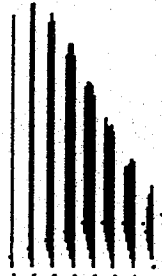
NOP = 1931

Z_{max} = 0.084372



■■ FONCTION ECART ■■

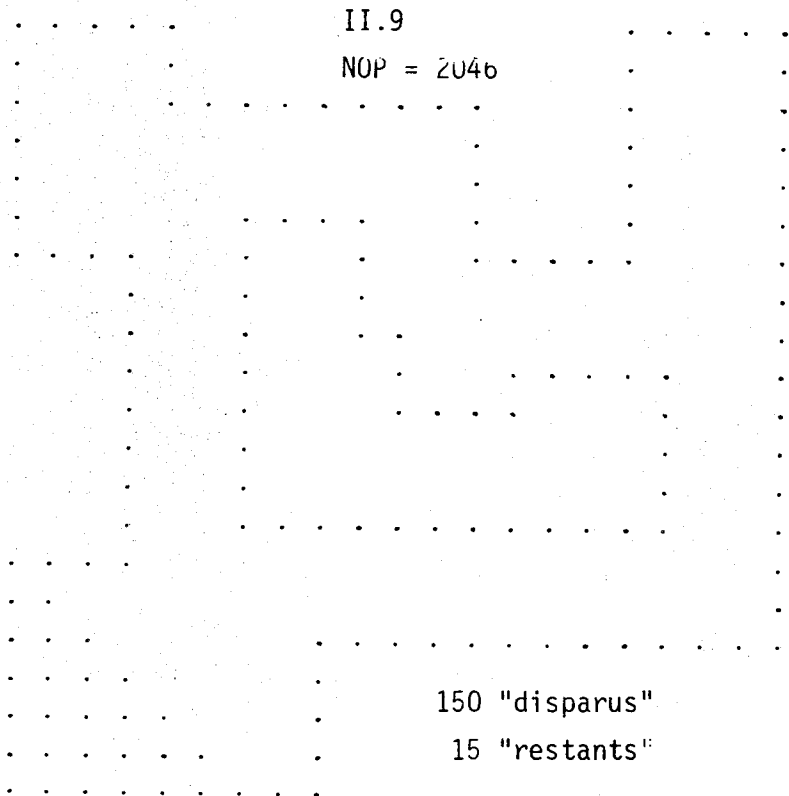
II.8



■■ FONCTION ECART ■■

II.9

NOP = 2046



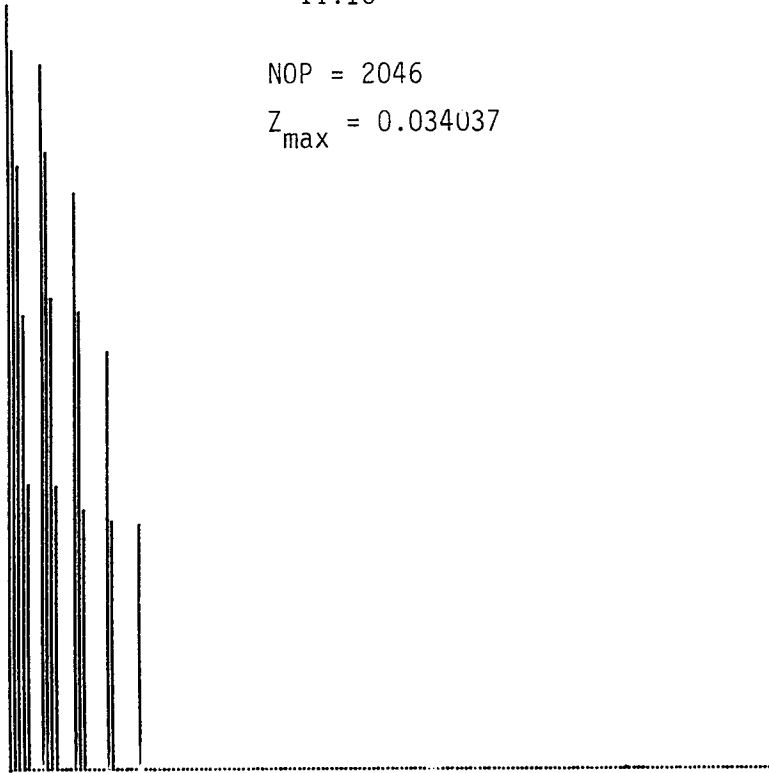
150 "disparus"

15 "restants"

II.10

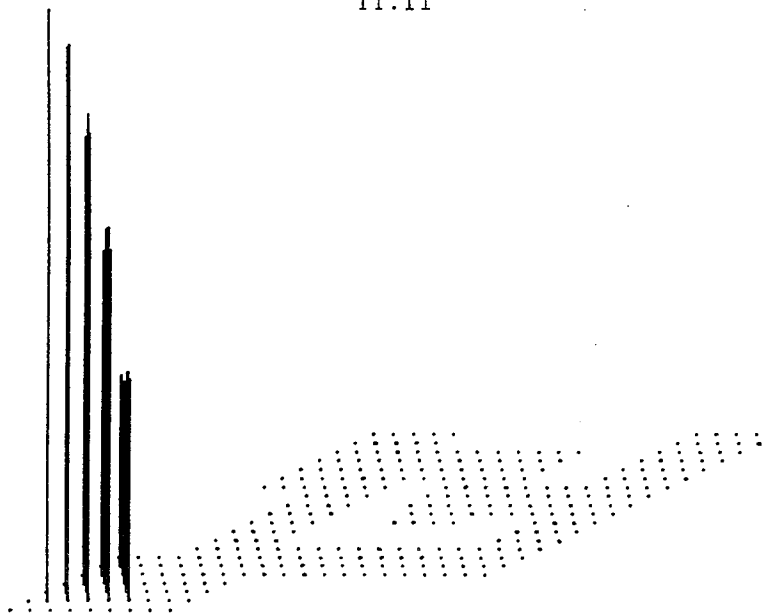
NOP = 2046

Z_{max} = 0.034037



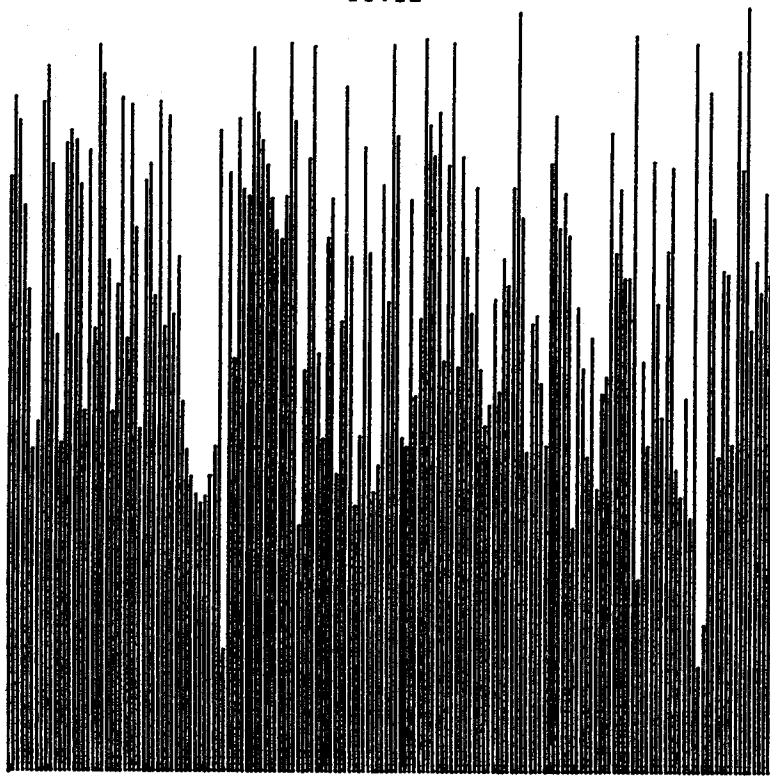
== FONCTION ECART ==

II.11



== FONCTION ECART ==

II.12

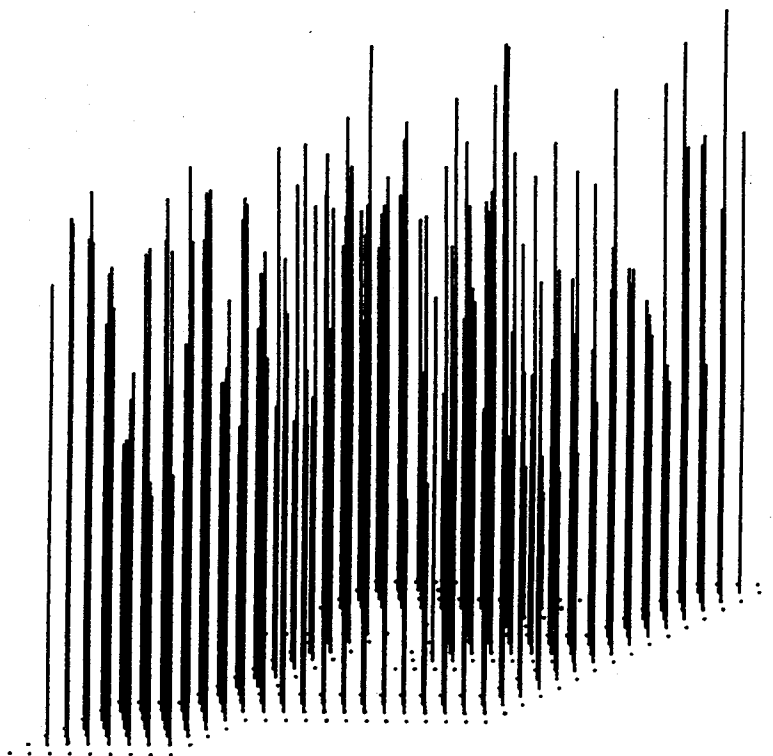


== FONCTION ECART ==

NOP = 2081

Z_{max} = 0.009996

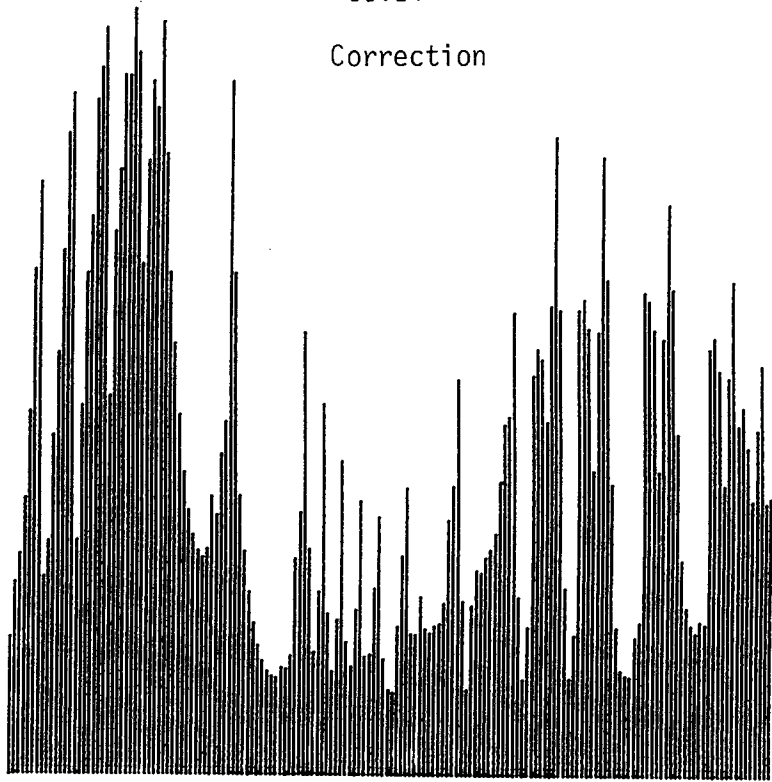
II.13



== FONCTION ECART ==

II.14

Correction

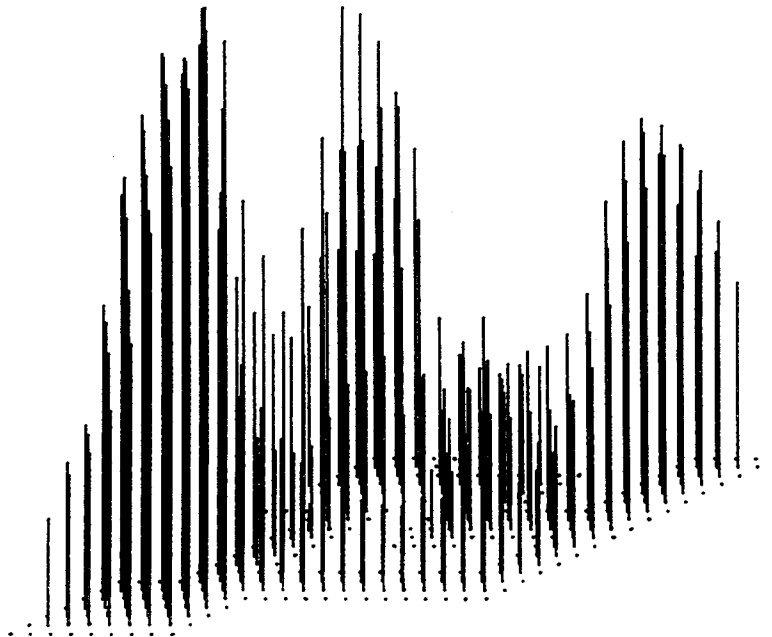


FONCTION ECART

NOP = 2576

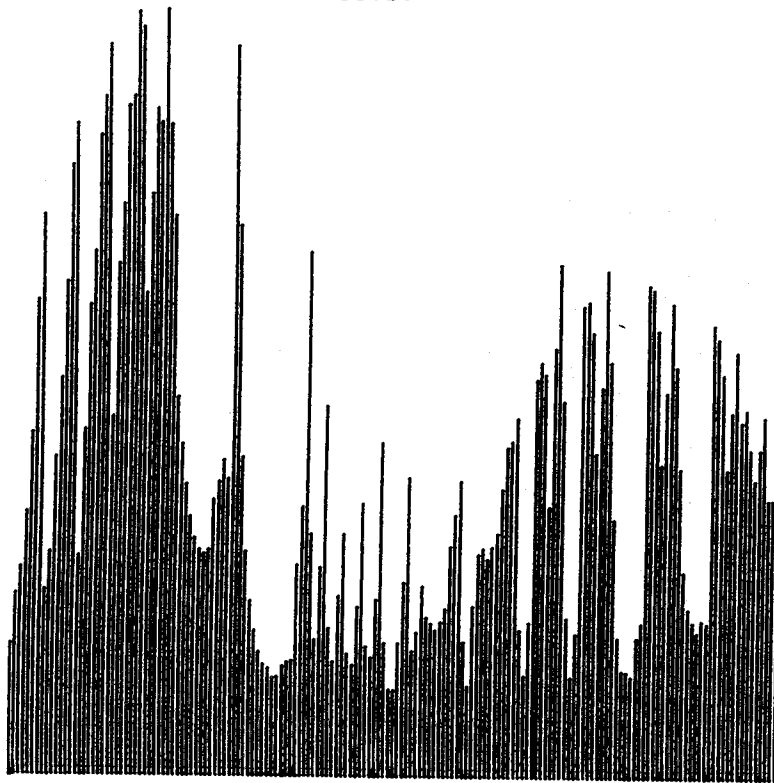
$Z_{\max} = 0.009664$

II.15



FONCTION ECART

II.16

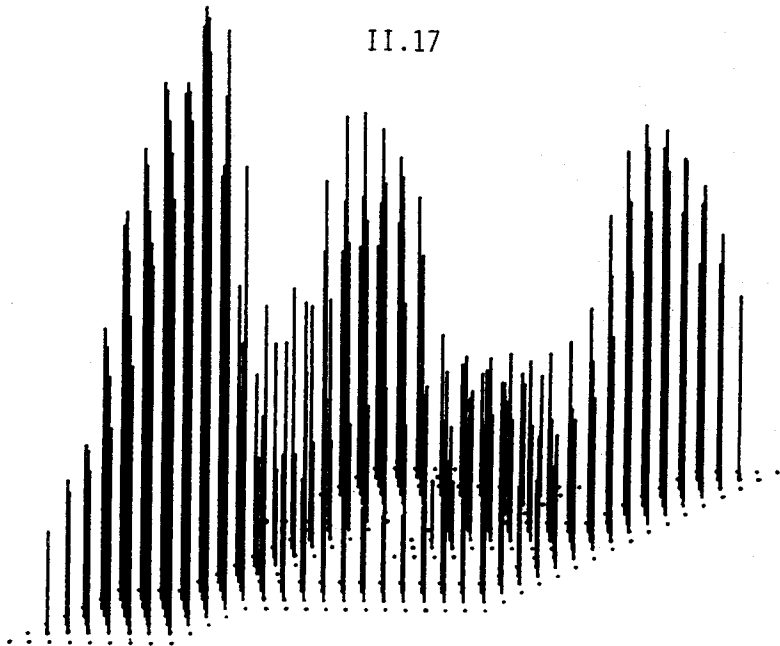


== FONCTION ECART ==

NOP = 5432

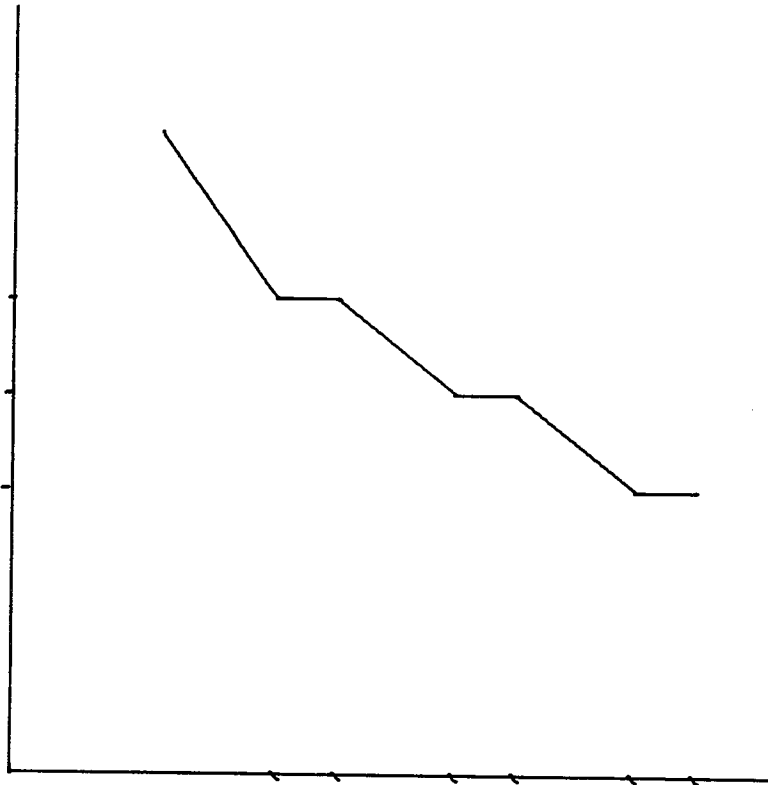
$Z_{\max} = 9906 \cdot 10^{-5}$

II.17



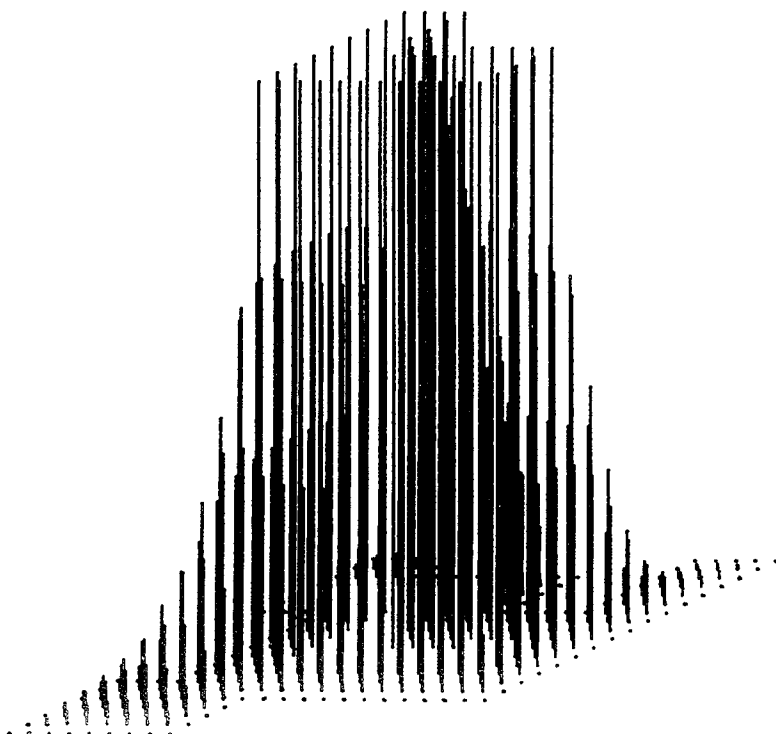
== FONCTION ECART ==

II.18



■■ VARIATIONS DE L'EC. MAX EN FONCTION DU N.OP ■■

II.19



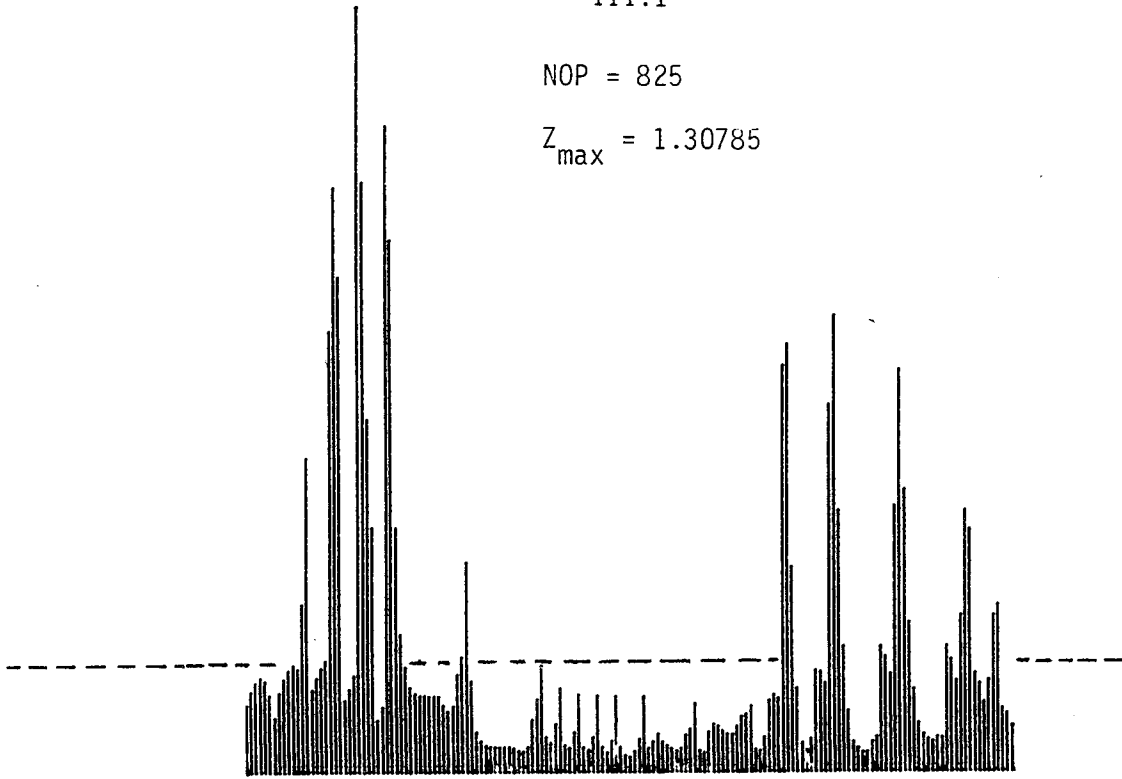
■■ REPRESENTATION DE LA SOLUTION ■■

METHODE INTERACTIVE (MPZ)

III.1

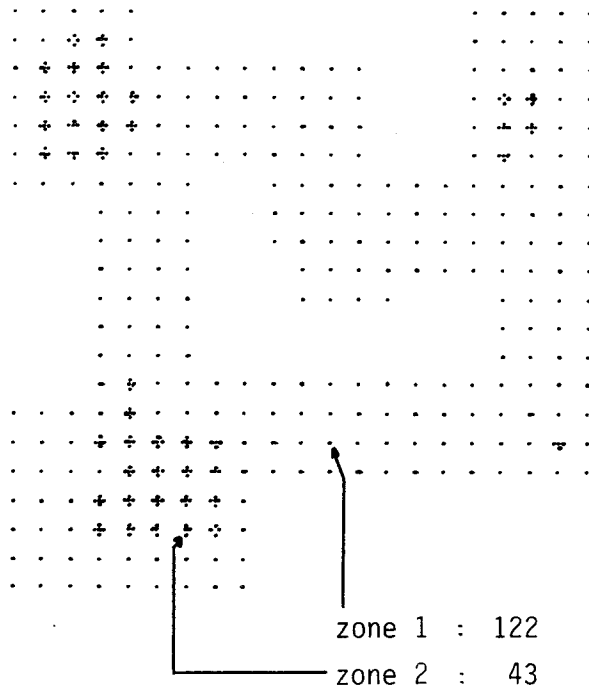
NOP = 825

$Z_{max} = 1.30785$



FONCTION ECART

III.2



zone 1 : 122

zone 2 : 43

PARTAGE EN 2 ZONES

III.3

NOP = 2073

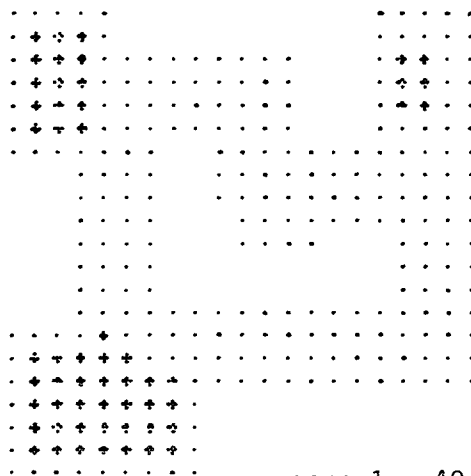
Z_{max} = 0.15657

III.4

== FONCTION ECART ==

== FONCTION ECART ==

III.5



zone 1 : 40

zone 2 : 55

== PARTAGE EN 2 ZONES ==

III.6

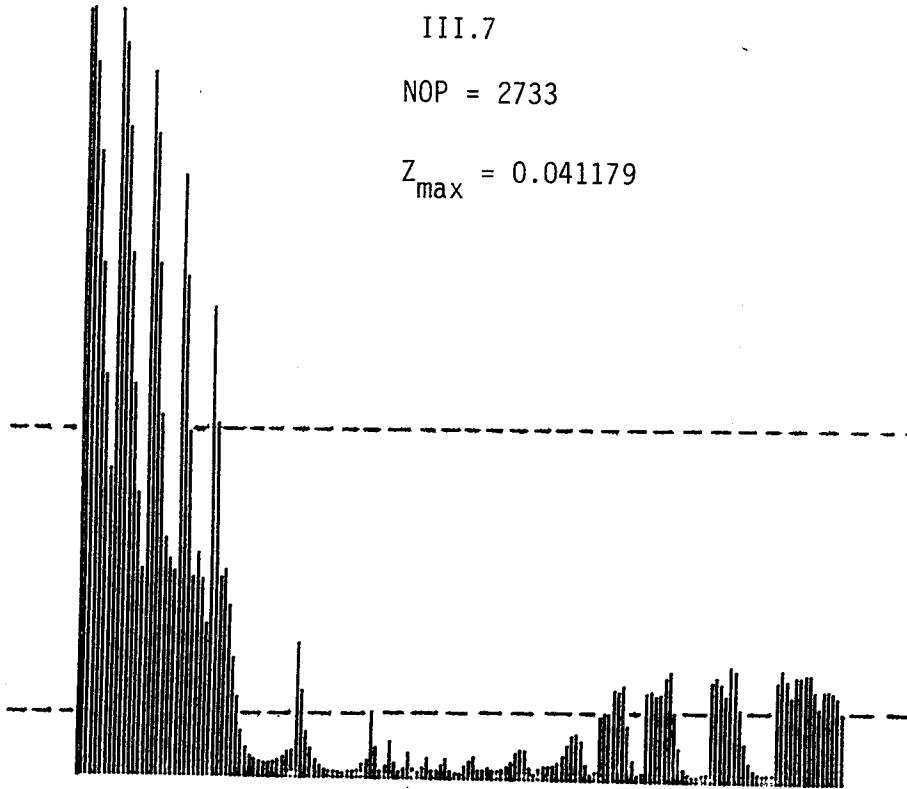


== FONCTION ECART ==

III.7

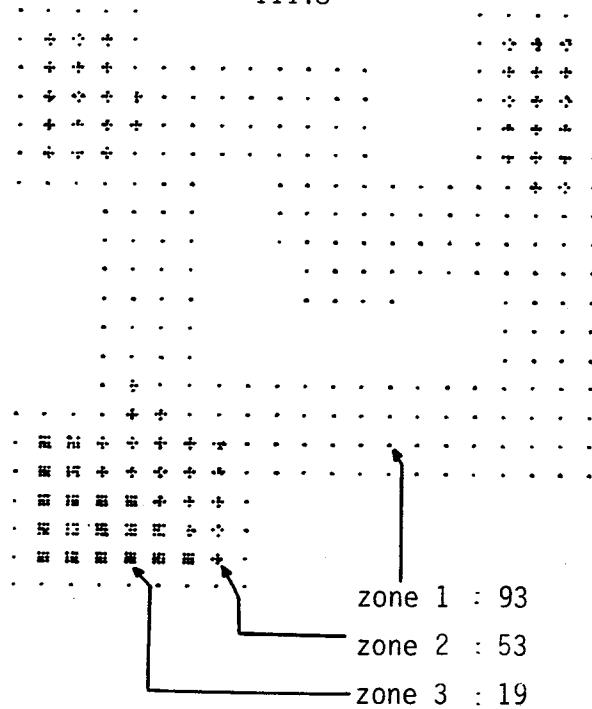
NOP = 2733

$Z_{max} = 0.041179$



== FONCTION ECART ==

III.8

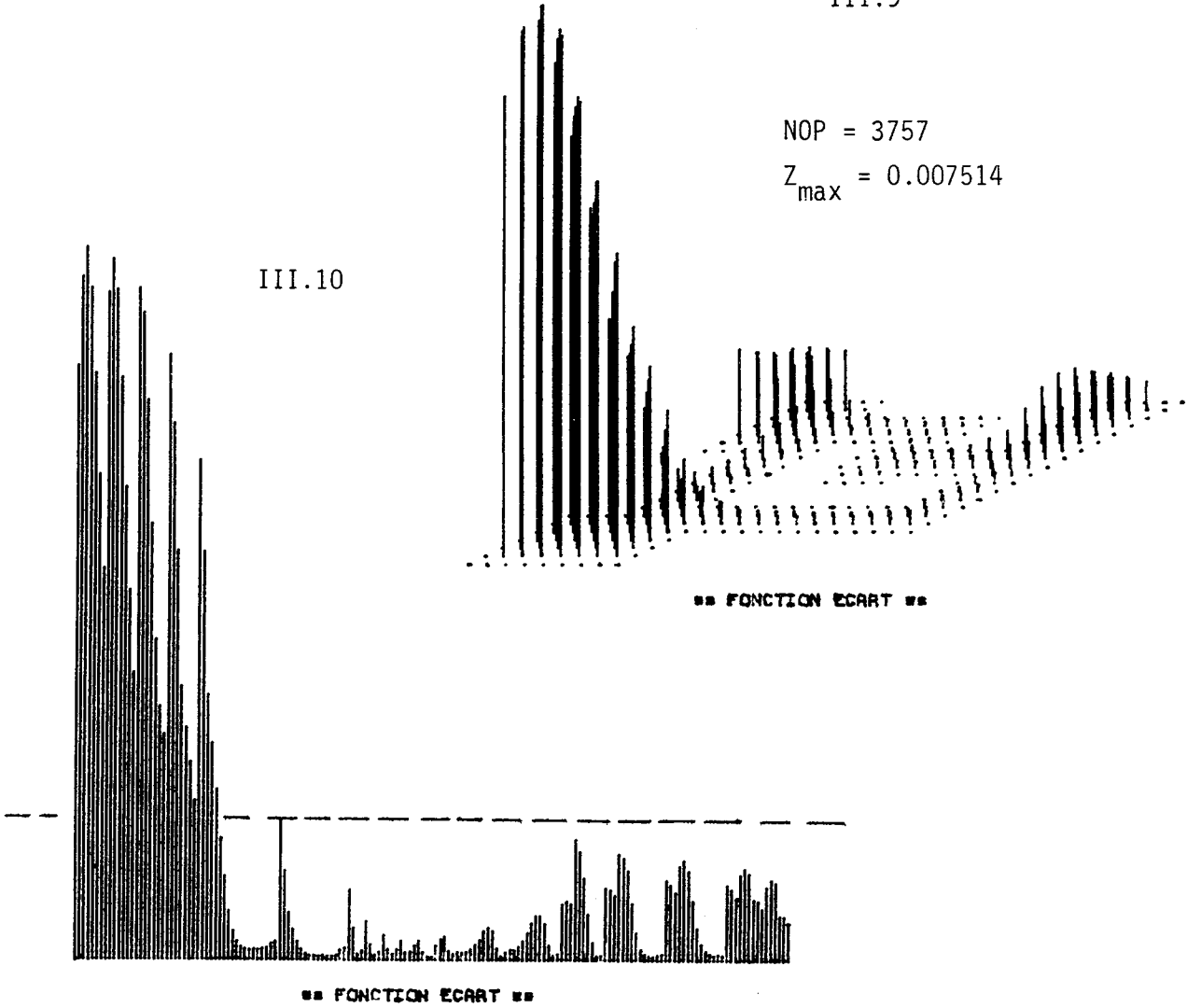


== PARTAGE EN 3 ZONES ==

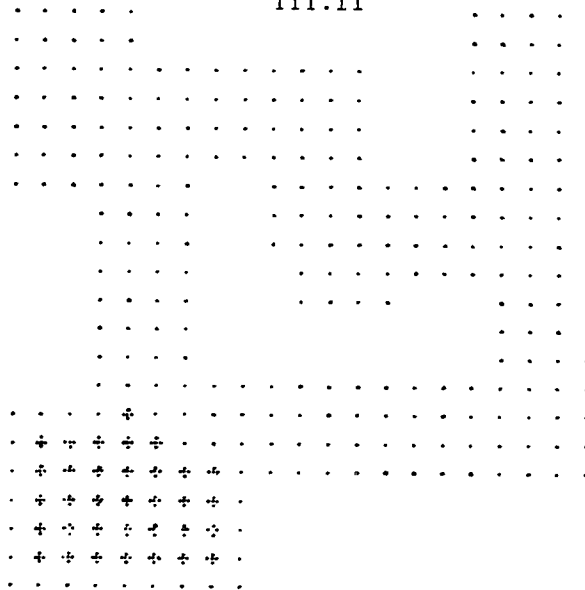
III.9

NOP = 3757
Z_{max} = 0.007514

III.10



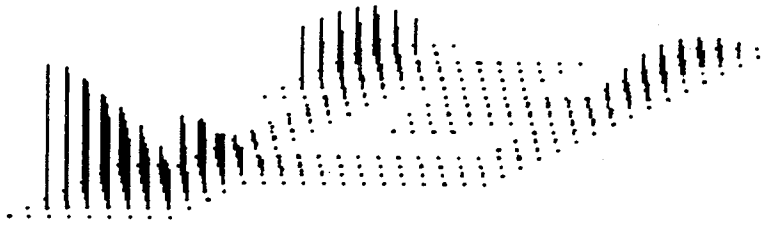
III.11



zone 1 : 131
zone 2 : 34

== PARTAGE EN 2 ZONES ==

III.12

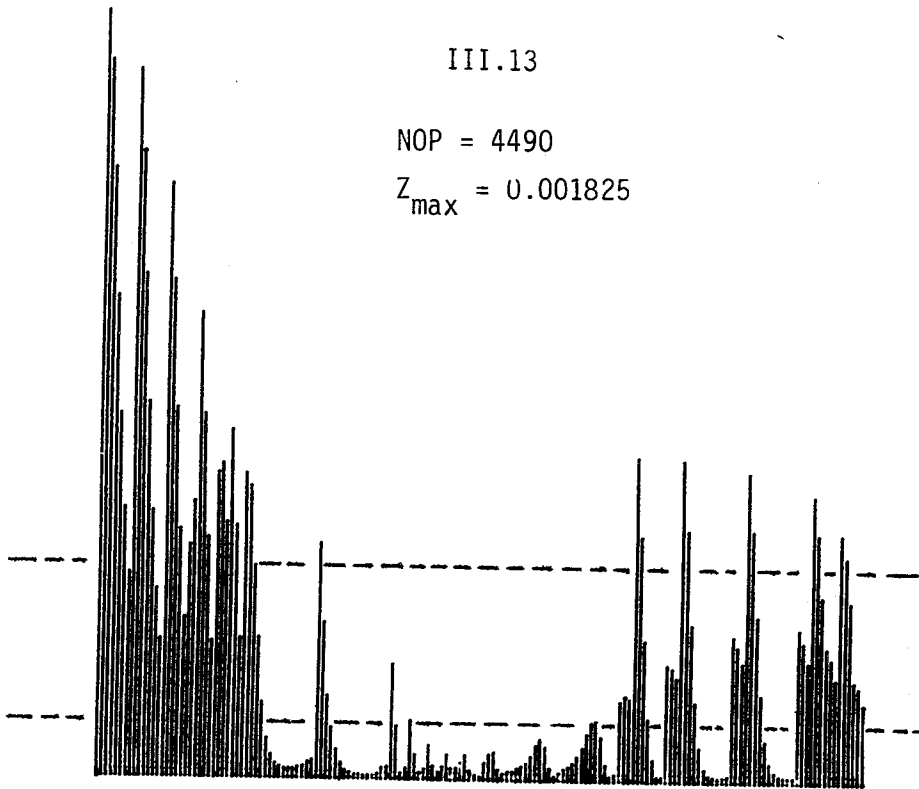


== FONCTION ECART ==

III.13

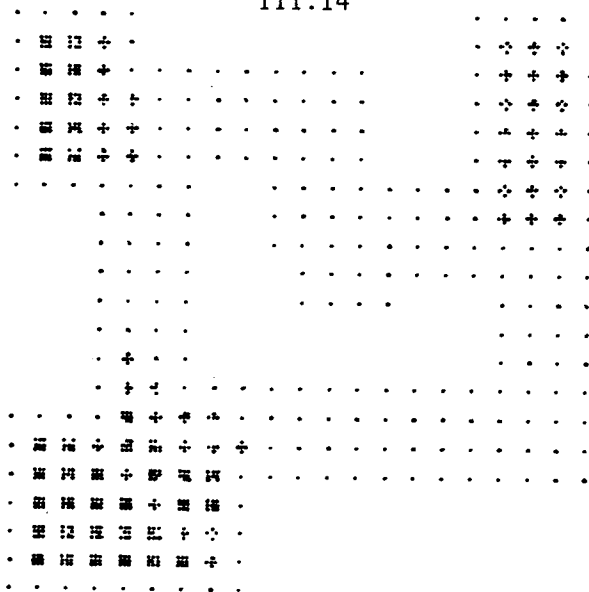
NOP = 4490

Z_{max} = 0.001825



== FONCTION ECART ==

III.14



zone 1 : 83

zone 2 : 44

zone 3 : 38

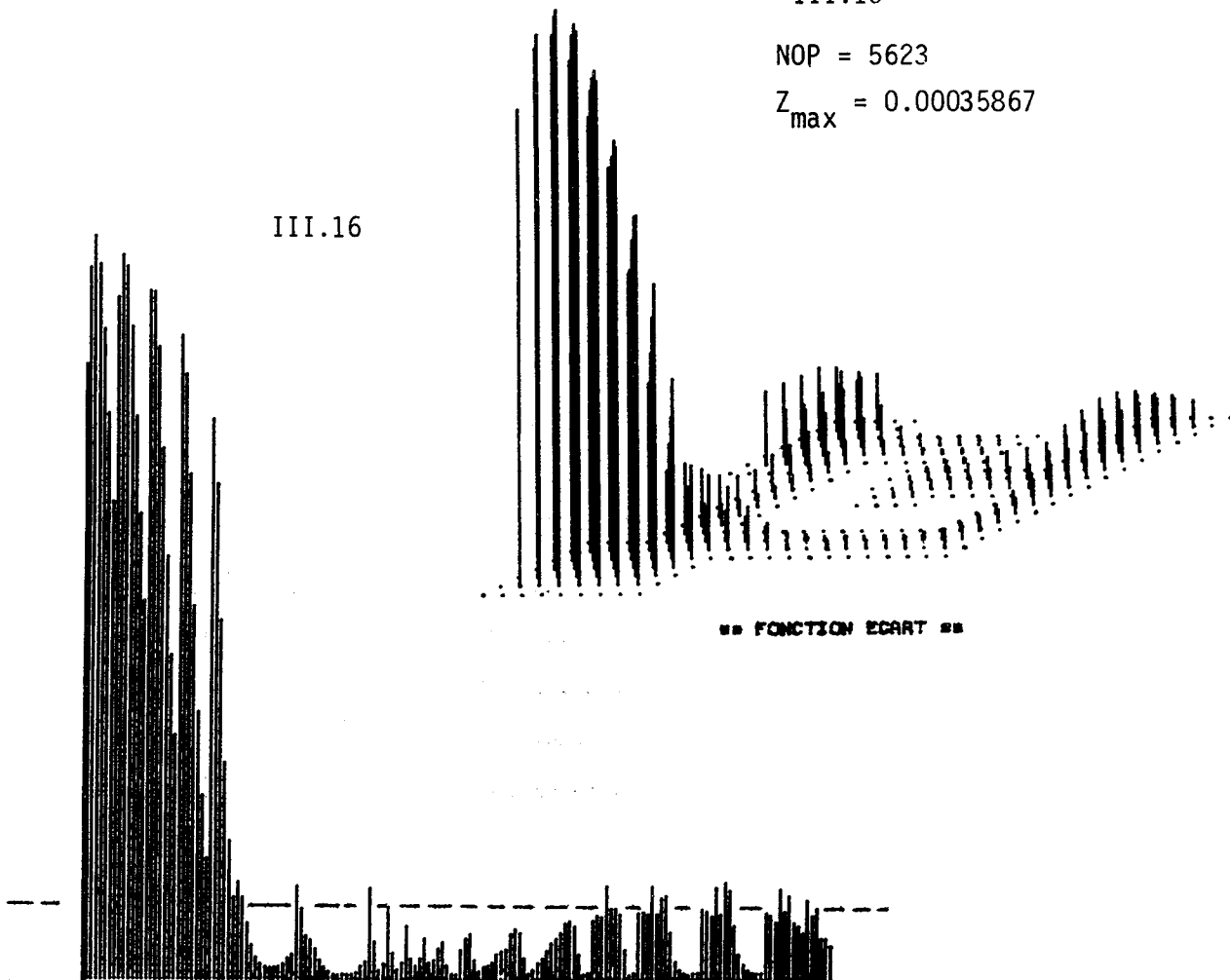
== PARTAGE EN 3 ZONES ==

III.15

NOP = 5623

Z_{max} = 0.00035867

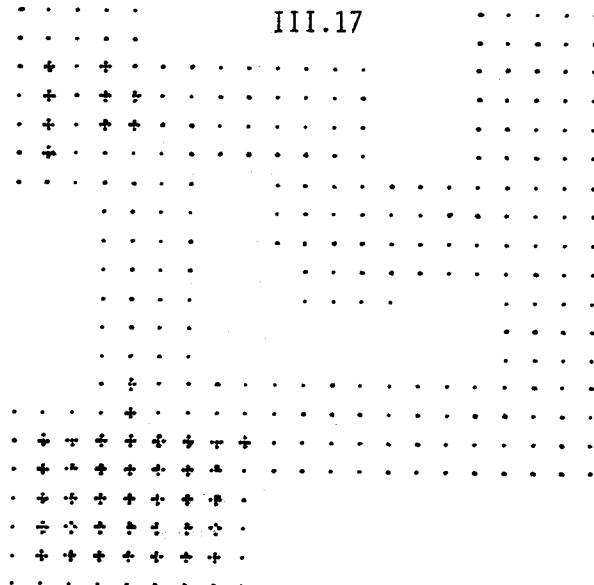
III.16



== FONCTION ECART ==

== FONCTION ECART ==

III.17



zone 1 : 118

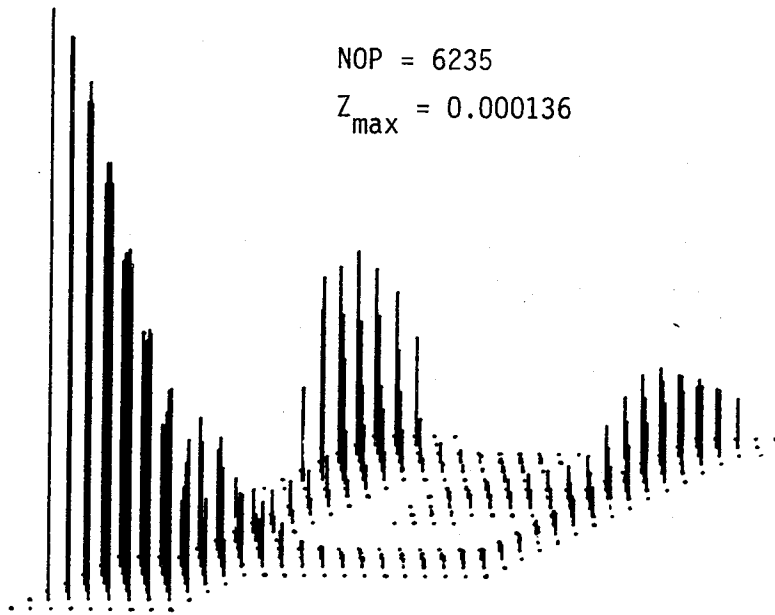
zone 2 : 47

== PARTAGE EN 2 ZONES ==

III.18

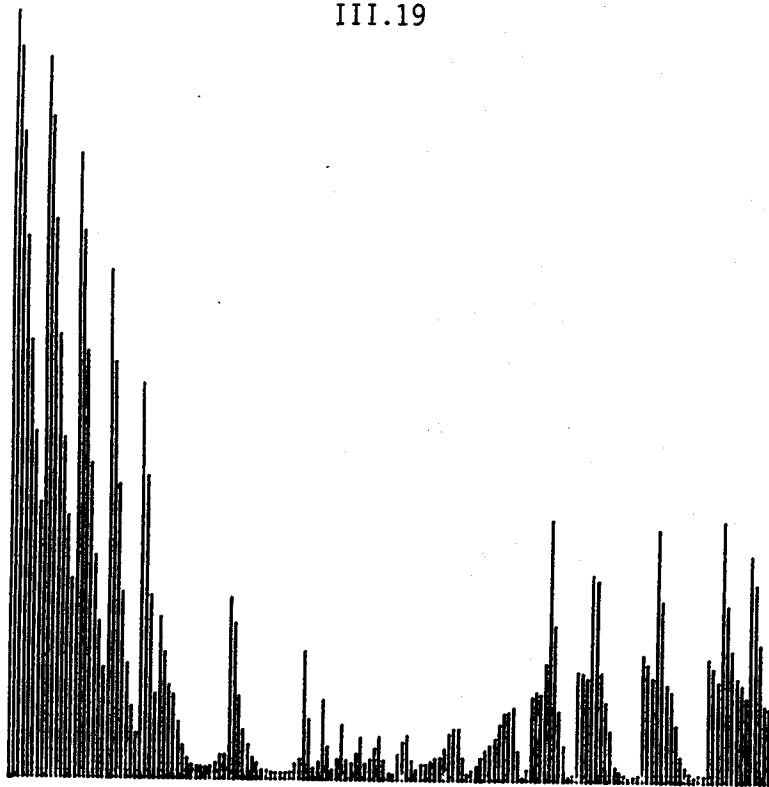
NOP = 6235

$Z_{\max} = 0.000136$



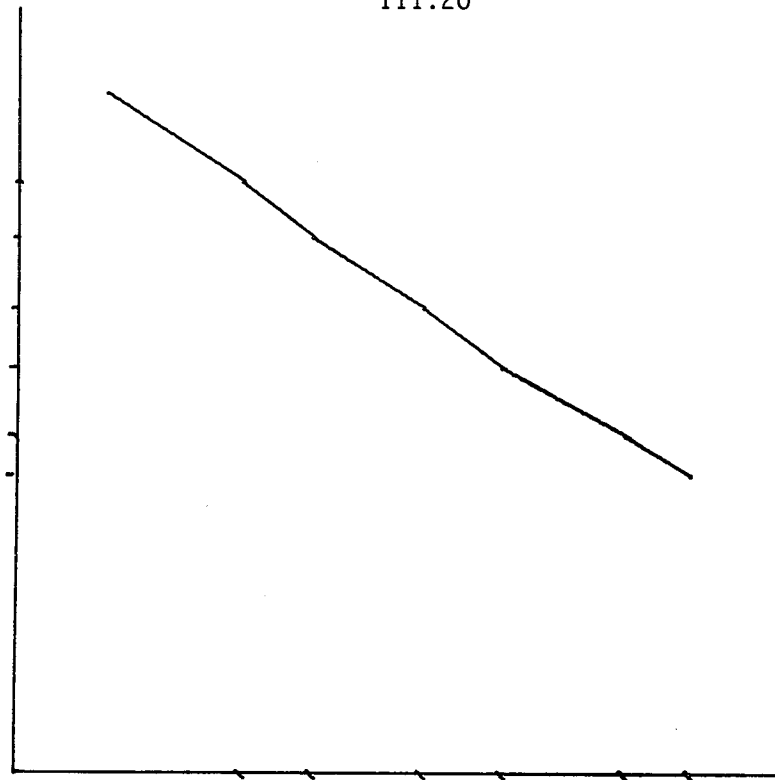
== FONCTION ECART ==

III.19



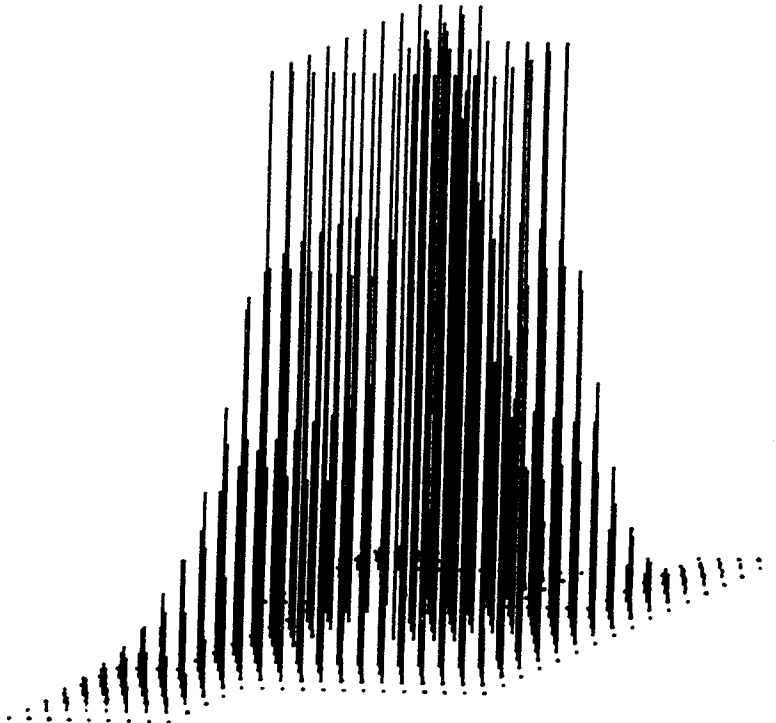
== FONCTION ECART ==

III.20



■ ■ VARIATIONS DE L'EC.MAX EN FONCTION DU N.OP ■ ■

III.21



■ ■ REPRESENTATION DE LA SOLUTION ■ ■



BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ABTROUN : "Recherche d'une permutation optimale des variables dans la méthode itérative de Gauss-Seidel" Thèse de 3ème cycle, Grenoble Mai 1977.
- [2] G.M. BAUDET : "Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors, Dept of C.S Carnegie-Mellon University, Nov. 1976.
- [3] Ph. BERNA : "Principe de la méthode des bords". Note interne CEA-Cadarache, mars 1975.
- [4] M. CHAMBAT, M. CHARNAY : "Résolutions d'équations non linéaires de point fixe dans R^n ". RAIRO Dec. 1972-R3, pp.105-109.
- [5] M. CHARNAY : "Itérations chaotiques sur un produit d'espaces métriques", Thèse de 3e cycle, Lyon, 1975.
- [6] D. CHAZAN, W. MIRANKER : "Chaotic Relaxation", Linear algebra and its application 2(1969) pp.199-222.
- [7] P. COMTE : "Algorithmes de relaxation - décentralisation". Thèse de 3e cycle Besançon Oct. 1976.
- [8] J.D.P. DONNELLY : "Periodic chaotic relaxation", Linear algebra and its application 4(1971) pp.117-128.
- [9] M.N. EL TARAZI : "Une formulation d'algorithmes mixtes du type Newton relaxation". Thèse de 3e cycle, Besançon, Oct. 1976.
- [10] N. GASTINEL : "Mathématiques pour l'informatique, 2 équations différentielles", A. Colin 1970.

- [11] N. GASTINEL : "Itérations - Méthodes discrètes", Cours 2e année ENSIMAG-Grenoble, 1971-1972.
- [12] G. GHERI, O.G. MANCINO : "A significant example to test methods for solving systems of non linear equations". Instituto di Elaborazione dell'Informazione del CNR, Pisa - Italie.
- [13] C. JACQUEMARD : "Sur les algorithmes de relaxation", Communication aux Journées de formation AFCET, GAMMI-CAMI 22-24 Nov. 1976.
- [13]bis " " : "Thèse de 3e cycle", Besançon, 1977
- [14] C. LAUGIER, F. MARTINEZ : "Utilisation du 2250 à partir d'Algol W", Note technique C-I-C Grenoble n° 14, mai 1974.
- [15] C. LAUGIER, A. LEDUC-LEBALLEUR, M. LUCAS, F. MARTINEZ : "GRIGRI Logiciel de base pour l'utilisation des consoles de visualisation du C-I-C Grenoble", note technique n° T-29, nov. 1975.
- [16] O. LECARME, J.C. SAILLARD : "GSP sous-programmes Fortran pour l'utilisation du terminal graphique IBM 2250" Univ. de Grenoble, Service Mathématiques Appliquées, oct. 1970.
- [17] N.X. LUONG : "Algorithmes de relaxation conduits par l'algorithme secondaire", Thèse de 3e cycle, Univ. de Besançon (1975).
- [18] Z. MAHJOUB : "Itérations chaotiques sur une famille de problèmes de point fixe non linéaires", Séminaire A.N. Grenoble, mai 1975.
- [19] Z. MAHJOUB : Rapport de recherche CNRS, Grenoble, mars 1976.
- [20] Z. MAHJOUB : "Expérimentations graphiques de stratégies itératives chaotiques", Séminaire A.N. Grenoble, janvier 1977.
- [21] G. MENARD : "Interface Display 2250-Benson", Note technique CIC Grenoble, n° T27, oct. 1974.
- [22] J.C. MIELLOU : "Algorithmes de relaxation chaotique à retards", RAIRO R1 55-82 (1975).
- [23] J.C. MIELLOU : CRAS, 273, série A, pp.1257-1260 (1971)
 CRAS, 275, " , pp.1107-1110 (1972)
 CRAS, 278, " , pp. 957-960 (1974)
 CRAS, 280, " , pp. 233-236 (1975)
- [24] J.M. ORTEGA & W.C. RHEINOLDT : "Iterative solution of non linear equations in several variables", Academic Press, New York (1970).

- [25] A. OSTROWSKI : "Determinanten mit uberwiegender haupt diagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterations prozessen". Comm. Math. Helv. 30, pp.175-210 (1955).
- [26] A. OSTROWSKI : "Iterative solution of linear systems of functional equations", Journal Math. Anal. and Appl.2, pp-351-369 (1961).
- [27] M. PETIT : "Quelques programmes graphiques d'analyse numérique", Thèse de 3e cycle, Grenoble, sept. 1971.
- [28] F. ROBERT : "Matrices non négatives et normes vectorielles", Cours de DEA Grenoble 1973.
- [29] F. ROBERT : "Contraction en norme vectorielle. Convergence d'itérations chaotiques pour des équations de point fixe à plusieurs variables". Gatlinburg VI Symposium on Num. Alg. Dec. 1974. Linear Algebra & its Appl. 13, 19-35 (1976).
- [30] F. ROBERT : "Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires", Rapport de recherche n°58, Math.Appl. & Informatique, Grenoble Déc. 1976.
- [31] F. ROBERT, M. CHARNAY, F. MUSY : "Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe". Aplikace Matematiky - Vol.20, pp. 1-38, 1975.
- [32] S. SCHECHTER : "Iteration methods for non linear problems". Trans Am. Math. Society, vol.104, pp.179-189 (1961).
- [33] S. SCHECHTER : "Relaxation methods for linear equations Comm. Pure & Appl. Math, 12, pp.313-335 (1959).
- [34] A. VAISSIERE, Z. MAHJOUR : "Itérations chaotiques", Projet de 3e année ENSIMAG - Grenoble juin 1974
- [35] R.S. VARGA : "Matrix Iterative Analysis", Prentice Hall (1962):

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 13/77

Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



