



**HAL**  
open science

# Chaos quantique et transition d'Anderson avec des atomes refroidis par laser

Julien Chabé

► **To cite this version:**

Julien Chabé. Chaos quantique et transition d'Anderson avec des atomes refroidis par laser. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2007. Français. NNT: . tel-00287564

**HAL Id: tel-00287564**

**<https://theses.hal.science/tel-00287564>**

Submitted on 12 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université des Sciences et Technologies de Lille

## **Thèse**

pour l'obtention du grade

de Docteur de l'Université de Lille I

dans la spécialité : Laser, Atomes, Molécules, et Rayonnements  
Atmosphériques

présentée par

**Julien Chabé**

Sujet de la thèse :

**Chaos quantique et transition d'Anderson avec  
des atomes refroidis par laser**

Soutenue le 7 décembre 2007 devant le jury composé de :

M. Georges Wlodarczak	Président
M. Yvan Castin	Rapporteur
M. Olivier Gorceix	Rapporteur
M. Pierre Lemonde	Examineur
M. Chris Westbrook	Examineur
M. Dominique Delande	Membre invité
M. Jean-Claude Garreau	Directeur de thèse
M. Pascal Szniftgiser	Co-directeur de thèse



# Avant propos

Ce mémoire présente les travaux de recherche effectués lors de mon passage au laboratoire Phlam pendant mon D.E.A et mon doctorat (de septembre 2003 à septembre 2007). Ils concernent l'étude expérimentale du phénomène de localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser. Ce phénomène est en rapport avec le phénomène de localisation d'Anderson, décrit en physique du solide. Les notions introductives concernant le chaos quantique, la localisation dynamique et la localisation d'Anderson sont exposées au chapitre premier. Le deuxième chapitre présente la réalisation de l'expérience de chaos quantique avec des atomes refroidis par laser et l'observation de la localisation dynamique. Le résultat le plus important de ces travaux, l'observation de la transition d'Anderson avec des atomes froids est présenté dans le chapitre 3. Les autres résultats obtenus pendant ces quatre années sont présentés dans les articles publiés et placés en annexes. Le premier concerne l'observation du phénomène de réversibilité de la destruction de la localisation dynamique. Le deuxième article présente les lois d'échelle qui régissent la destruction de la localisation dynamique par l'ajout d'une fréquence supplémentaire dans le forçage. Le troisième présente une technique de polarisation de spin des atomes qui permet d'améliorer la résolution de la vélocimétrie Raman jusqu'à la limite Fourier. Le dernier article concerne le travail exposé au chapitre 3.





# Remerciements

Mes quatre années passées au sein du laboratoire Phlam m’ont été très agréables, je remercie ses directeurs successifs Jean-Michel Robbe et Georges Wlodarczak ainsi que l’ensemble de son personnel pour les excellentes conditions matérielles de travail et la très bonne ambiance qui y règne.

Je remercie les membres de mon jury, messieurs Yvan Castin et Olivier Gorceix qui ont accepté la lourde charge de rapporteur, messieurs Christoph Westbrook et Pierre Lemonde qui ont posé un regard critique sur mes travaux en acceptant la charge d’examineur. Je remercie Georges Wlodarczak d’avoir accepté de présider ce jury.

Les travaux exposés dans ce rapport ont été réalisés en équipe. Je tiens donc à remercier tous les membres de l’équipe “Chaos Quantique”. Mes directeurs de thèse Jean-Claude Garreau et Pascal Szriftgiser qui ont encadré ma thèse de la meilleure façon possible en me donnant un place à part entière dans l’équipe. Véronique Zehnlé pour m’avoir fait entrer dans l’équipe lors de mon D.E.A. Hans Lignier pour son enseignement patient lors de mon arrivée, son amitié.

Je remercie nos collaborateurs du Laboratoire Kastler Brossel, Dominique Delande, Benoit Grémaud avec des “*special thanks*” pour Gabriel Lemarié. Leur apport a été déterminant pour le travail présenté dans ce manuscrit. Je remercie aussi, Hugo Cavalcante et Guillaume Beck qui ont contribué à ces travaux.

Je remercie Stéphane Randoux qui, lorsque nous avons partagé le bureau 153, m’a éclairé de sa puissante aura intellectuelle.

Enfin, “*very special thanks*” à tous les lascars du labo et d’ailleurs, “les anciens”, comme “les jeunes”, qui sont venus fêter cette thèse le soir au “Bel ouvrage”. Vous n’imaginez pas à quel point ça m’a fait plaisir.



# Table des matières

<b>Avant propos</b>	<b>3</b>
<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Chaos quantique avec une particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé : le kicked rotor</b>	<b>15</b>
1.1 Dynamique classique du rotateur forcé . . . . .	16
1.1.1 Modèle . . . . .	16
1.1.2 Application standard . . . . .	19
1.1.3 Diffusion en impulsion . . . . .	23
1.2 Traitement quantique . . . . .	26
1.2.1 Opérateur d'évolution . . . . .	27
1.2.2 Dynamique quantique : la localisation dynamique . . . . .	28
1.2.3 Interprétation de la localisation dynamique . . . . .	33
1.3 Localisation dynamique et localisation d'Anderson . . . . .	37
1.3.1 Localisation d'Anderson . . . . .	38
1.3.2 Équivalence de la localisation d'Anderson et de la localisation dynamique . . . . .	40
Conclusion . . . . .	42
<b>2 Un kicked rotor avec des atomes refroidis par laser</b>	<b>43</b>
2.1 Atomes froids dans une onde stationnaire . . . . .	43
2.1.1 Le piégeage magnéto-optique . . . . .	44
2.1.2 L'onde stationnaire . . . . .	46
2.1.3 Gamme de paramètres expérimentaux accessibles . . . . .	53
2.2 Mesure de la distribution en impulsion . . . . .	54
2.2.1 Principe de la mesure de vitesse . . . . .	54
2.2.2 Description du montage Raman . . . . .	58
2.2.3 Performances . . . . .	62
2.3 Observation de la localisation dynamique . . . . .	62
2.3.1 Distribution en impulsion . . . . .	62
2.3.2 Évolution de l'énergie cinétique et du maximum de la distribution en impulsion . . . . .	64

2.4	Imperfections du dispositif expérimental et effets parasites . . . . .	66
2.4.1	Signal de fond, dérive et pertes d'atomes . . . . .	66
2.4.2	Inhomogénéité de $K$ . . . . .	67
2.4.3	Durée finie des pulses et effet de boîte classique. . . . .	69
2.4.4	Émission spontanée . . . . .	74
	Conclusion . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Transition d'Anderson avec un kicked rotor quasipériodique à trois fréquences</b>	<b>79</b>
3.1	La transition d'Anderson en physique du solide . . . . .	79
3.1.1	Les débuts... . . . .	80
3.1.2	L'approche Thouless et la théorie d'échelle de la localisation à un paramètre . . . . .	81
3.1.3	La transition d'Anderson avec des atomes froids? . . . . .	84
3.2	Équivalence du kicked rotor à trois fréquences du modèle d'Anderson à trois dimensions . . . . .	84
3.2.1	Le kicked rotor quasipériodique . . . . .	84
3.2.2	Correspondance des deux modèles . . . . .	86
3.3	Étude numérique du kicked rotor quasipériodique . . . . .	87
3.3.1	Mise en évidence de la transition localisé-délocalisé. . . . .	87
3.3.2	Finite Size Scaling . . . . .	91
3.4	Études expérimentales de la transition d'Anderson . . . . .	96
3.4.1	Mise en place expérimentale : la modulation d'amplitude . . . . .	96
3.4.2	Mise en évidence d'un changement de comportement. . . . .	97
3.4.3	Le Finite Time Scaling appliqué aux résultats expérimentaux . . . . .	100
	Conclusion . . . . .	105
	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Equivalence de la localisation dynamique et de la localisation d'Anderson</b>	<b>109</b>
<b>B</b>	<b>Destruction réversible de la localisation dynamique</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>Lois d'échelle quantiques pour la délocalisation dynamique</b>	<b>121</b>
<b>D</b>	<b>Polarisation de spin pour la vélocimétrie Raman</b>	<b>127</b>
<b>E</b>	<b>Observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des ondes de matière</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>

---

*“Le protocole du dialogue expérimental représente pour nous un acqui irréversible. Il garantit que la nature interrogée par l’homme sera traitée comme un être indépendant qu’on force à s’exprimer dans un langage peut-être inadéquat, mais à qui les procédures interdisent de prêter les mots qu’on désirerait entendre. Il fonde aussi le caractère communicable et reproductible des résultats scientifiques ; quel que soit le caractère partiel de ce que l’on somme à la nature de s’exprimer, une fois qu’elle a parlé dans des conditions reproductibles, chacun s’incline : puisqu’elle ne saurait nous tromper.”* ILYA PRIGOGINE



# Introduction

Le début du XXème siècle a vu naître de nouvelles disciplines en physique : la mécanique quantique et la dynamique non linéaire. La première a mis en évidence le double caractère “onde-particule” de la matière et la seconde le caractère non linéaire et souvent chaotique des systèmes dynamiques présents dans la nature.

La mécanique quantique est une mécanique des ondes, une des propriétés des ondes est leur capacité à interférer. Comme en optique ondulatoire, les effets d’interférence, par exemple la diffraction, sont visibles lorsque la longueur caractéristique du “milieu interférentiel”, par exemple la taille d’une fente, est comparable à la longueur d’onde considérée. La mécanique quantique traite donc de particules dont l’extension spatiale considérée sous la forme d’une onde d’amplitude de probabilité de présence (appelée “fonction d’onde”) est comparable à la longueur caractéristique du potentiel avec lequel elles interagissent.

Dans l’établissement des fondements de la mécanique quantique, F. Bloch (1928) en étudiant la propagation des électrons d’un milieu cristallin parfait, a posé les prémices de la théorie quantique des solides. Cette théorie permet d’expliquer l’existence de matériaux conducteurs dans lesquels les fonctions d’onde électroniques sont délocalisées dans l’ensemble du cristal. Plus tard en 1958, P.W. Anderson s’intéresse à la propagation des électrons dans un milieu désordonné, il montre que le désordre peut localiser spatialement les fonctions d’onde électroniques et rendre un matériau isolant, par le seul effet des interférences entre les fonctions d’onde. Ce résultat porte le nom de *localisation d’Anderson*. Depuis l’article fondateur d’Anderson, un nombre impressionnant d’études théoriques et numériques sur le phénomène de localisation ont vu le jour. Le modèle prédit l’existence d’une transition de phase entre un état localisé (isolant) et un état délocalisé (conducteur) pour le modèle d’Anderson à trois dimensions. Bien qu’effectivement des résultats expérimentaux confirment l’existence d’une transition de phase conducteur-isolant (Metal-Insulator Transition dans la littérature) pour ce modèle, des difficultés techniques associées aux expériences de physique du solide (échantillons de taille finie, décohérence... ) ne permettent pas d’établir de façon précise les propriétés de la transition comme la valeur de l’exposant critique.

Les travaux fondateurs de H. Poincaré au début du siècle dernier sur la dynamique non linéaire ont donné une acception bien précise à la notion de chaos classique apparue dans les années soixante dix. Cette notion concerne les systèmes possédant une grande sensibilité aux conditions initiales conduisant à une imprédictabilité aux temps longs bien qu’ils soient déterministes. Plus tard, au début des années soixante



avec l'apparition du calcul numérique, l'étude des systèmes chaotiques retrouve de l'intérêt. La possibilité de réaliser des simulations numériques complexes a considérablement accru nos connaissances sur le sujet et de nouvelles notions sont apparues comme l'espace des phases, les exposants de Lyapunov, la notion d'attracteur ou encore le théorème KAM.

L'approche quantique d'un système chaotique pose tout de suite un problème : la notion de trajectoire classique dans l'espace des phases n'a plus de sens en mécanique quantique puisque la relation d'Heisenberg empêche de définir un point unique dans cet espace. Il existe pourtant un domaine de recherche dénommé "*chaos quantique*" qui associe ces deux disciplines. Il s'agit de l'étude des systèmes quantiques qui classiquement ( $\hbar \rightarrow 0$ ) possèdent une dynamique chaotique. Les études de ces systèmes portent sur l'effet de la dynamique classique chaotique sur les propriétés quantiques, comme par exemple l'étude des états propres ou la distribution des niveaux d'énergies du système.

Les expériences présentées dans ce mémoire utilisent les propriétés quantiques d'atomes refroidis par laser pour mettre en évidence un phénomène quantique appelé "*localisation dynamique*". Ce phénomène est la conséquence des interférences quantiques qui se produisent dans un système, qui classiquement possède une dynamique chaotique : le "*kicked rotor*". La propriété classique essentielle du régime chaotique pour ce système est la diffusion en impulsion. Les interférences quantiques gèlent cette diffusion classique.

En 1982, un article publié par Fishman, Grepel et Prange, établit une correspondance mathématique entre le modèle du kicked rotor et le modèle d'Anderson unidimensionnel pour les solides désordonnés. Depuis, des études théoriques et numériques ont suggéré que ce lien pouvait être étendu à des dimensions supérieures en introduisant des fréquences supplémentaires dans le spectre d'excitation du kicked rotor.

Nous présentons dans ce mémoire la première observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des atomes refroidis par laser en utilisant la correspondance entre la propriété de localisation dynamique au sein du kicked rotor et le phénomène de localisation d'Anderson.

Le premier chapitre introduit les notions nécessaires à la compréhension du phénomène de localisation dynamique. Nous montrons, à l'aide de simulations numériques, la différence de comportement entre la dynamique classique et la dynamique quantique. L'utilisation des propriétés du théorème de Floquet montre comment les effets d'interférences quantiques gèlent la diffusion classique induite par la dynamique chaotique. Enfin, nous présentons une introduction au modèle d'Anderson unidimensionnel et sa correspondance avec le modèle du kicked rotor.

Le chapitre deux présente l'expérience de kicked rotor atomique basée sur la soumission d'un nuage d'atomes refroidis par laser à une onde stationnaire pulsée. Après une description rapide des techniques utilisées (refroidissement laser, onde stationnaire et vélocimétrie Raman), nous présentons l'observation expérimentale de la localisation dynamique et discutons les effets parasites qui peuvent entâcher l'apparition du phénomène.

Le troisième et dernier chapitre présente d'abord une rapide introduction sur la transition d'Anderson dans son contexte d'origine : la physique du solide. Puis, nous

présentons le modèle du kicked rotor quasi-périodique à trois fréquences et quelques simulations numériques qui mettent en évidence la transition localisé-délocalisé existant au sein de ce modèle de kicked rotor. Nous présentons aussi la méthode de “Finite Time Scaling” utilisée pour caractériser la transition et obtenir une valeur fiable de l’exposant critique. La dernière partie concerne l’observation expérimentale de la transition d’Anderson avec le modèle du kicked rotor à trois fréquences.

Cette étude sur la transition d’Anderson s’inscrit dans la continuité des études menées par l’équipe “Chaos Quantique” du laboratoire PHLAM depuis 1999 sur la destruction de la localisation dynamique par l’ajout de nouvelles fréquences dans le spectre d’excitation du kicked rotor. En annexe, des articles concernant la destruction de la localisation dynamique par l’ajout de fréquences supplémentaires sont présentés. Le premier montre que dans certaines conditions, la destruction de la localisation dynamique par une brisure de la périodicité du forçage peut-être réversible. Le second article montre l’existence de lois d’échelle qui caractérisent la destruction de la localisation dynamique lorsqu’on ajoute une seconde fréquence incommensurable avec la fréquence principale d’excitation.



# Chapitre 1

## Chaos quantique avec une particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé : le kicked rotor

La notion de chaos quantique se définit pour un système quantique dont la limite classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ) possède une dynamique chaotique. Cette définition concerne le chaos dit hamiltonien. Le chaos dissipatif et les phénomènes d'attracteurs associés en sont exclus. La propriété essentielle du chaos classique est la forte sensibilité aux conditions initiales. Deux trajectoires initialement proches dans l'espace des phases divergent exponentiellement l'une de l'autre, avec un argument  $\gamma > 0$  appelé "*exposant de Lyapunov*" (figure 1.1) :

$$\delta x(t) \sim \delta x(0)e^{\gamma t} \tag{1.1}$$

La conséquence directe de cette forte sensibilité aux conditions initiales est l'imprédictabilité aux "temps longs" bien que les trajectoires soient régies par des équations déterministes. Malgré cette difficulté, les outils de la dynamique non-linéaire (section de POINCARÉ, développement multi échelle, dynamique symbolique...) permettent des études approfondies des systèmes chaotiques. Par exemple, les sections de POINCARÉ vont nous permettre, dans la première partie de ce chapitre, d'étudier la dynamique à la limite classique de la particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé. Lorsque l'on va s'intéresser aux effets de la dynamique quantique du même système, les contraintes du formalisme de la mécanique quantique rendent ces outils mal adaptés. Par exemple, la relation d'indétermination de HEISENBERG ( $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ) ne permet pas directement l'utilisation de la section de POINCARÉ, puisque la notion de trajectoire (au sens classique) n'a plus de sens. De plus, le comportement de la fonction d'onde est décrit par l'équation de SCHRÖDINGER qui est parfaitement linéaire. Il faut donc s'attendre à une différence de comportement marquée entre la dynamique quantique et classique.

La littérature spécialisée présente souvent le rotateur pulsé ( *$\delta$ -kicked rotor*) pour l'étude du chaos quantique [1]. Ce modèle est devenu, après plus de deux décennies, un paradigme pour l'étude du chaos quantique grâce à sa simplicité et surtout parce qu'il se prête facilement à des études numériques [1] et expérimentales [2]. Dans ce chapitre, nous présentons un modèle formellement identique, celui de la particule

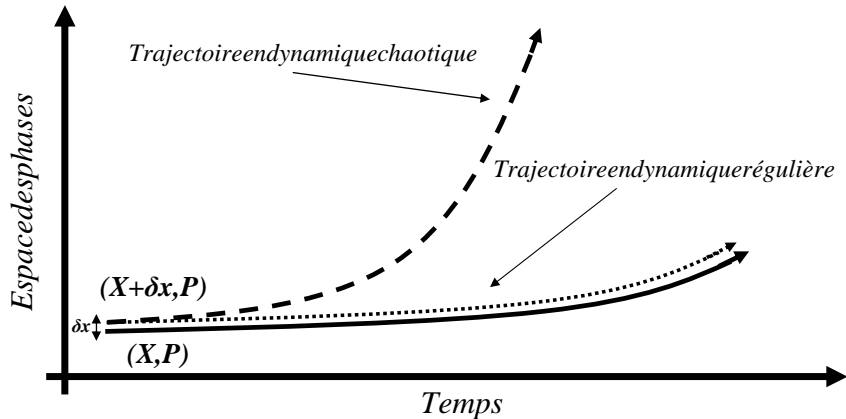


FIG. 1.1 – Trajectoires possibles correspondant à un couple de variables dynamiques dans l'espace des phases. Dans le régime régulier, deux conditions initiales proches (séparées de  $\delta x(0)$ ) suivent des évolutions proches l'une de l'autre (courbe continue et courbe fine en pointillé). Dans un régime chaotique, les deux trajectoires initialement proches s'écartent exponentiellement l'une de l'autre (courbe continue et courbe épaisse hachée).

dans un potentiel sinusoïdal pulsé. Ce modèle est très proche de la réalisation expérimentale décrite au chapitre suivant. La première partie de ce chapitre comporte une étude non exhaustive de la dynamique classique de cette particule. Les différents comportements et leurs propriétés sont passés en revue, en nous attardant sur le régime chaotique qui nous intéresse plus particulièrement. La seconde partie est le pendant quantique de la première. Nous y étudierons le comportement quantique du rotateur forcé (*quantum kicked rotor*) et nous verrons que la dynamique quantique est radicalement différente de son analogue classique. Pour finir ce chapitre, nous verrons que le modèle du *quantum kicked rotor* présente de fortes analogies formelles avec le modèle d'Anderson unidimensionnel pour les solides désordonnés.

## 1.1 Dynamique classique du rotateur forcé

Le traitement qui suit est celui du modèle du rotateur forcé introduit pour la première fois par Boris Chirikov [3]. Il a pour but de fixer les idées sur les points importants pour l'étude du pendant quantique de ce système présenté en 1.2 et développé dans ce mémoire.

### 1.1.1 Modèle

Le modèle communément étudié dans la littérature est celui d'un rotateur simple de masse  $m$  et de longueur  $l$ , évoluant dans un espace libre sans frottements, qui subit périodiquement un forçage bref (ici, des pics de DIRAC) que l'on désignera dans ce mémoire par le néologisme "pulse" (figure 1.2).

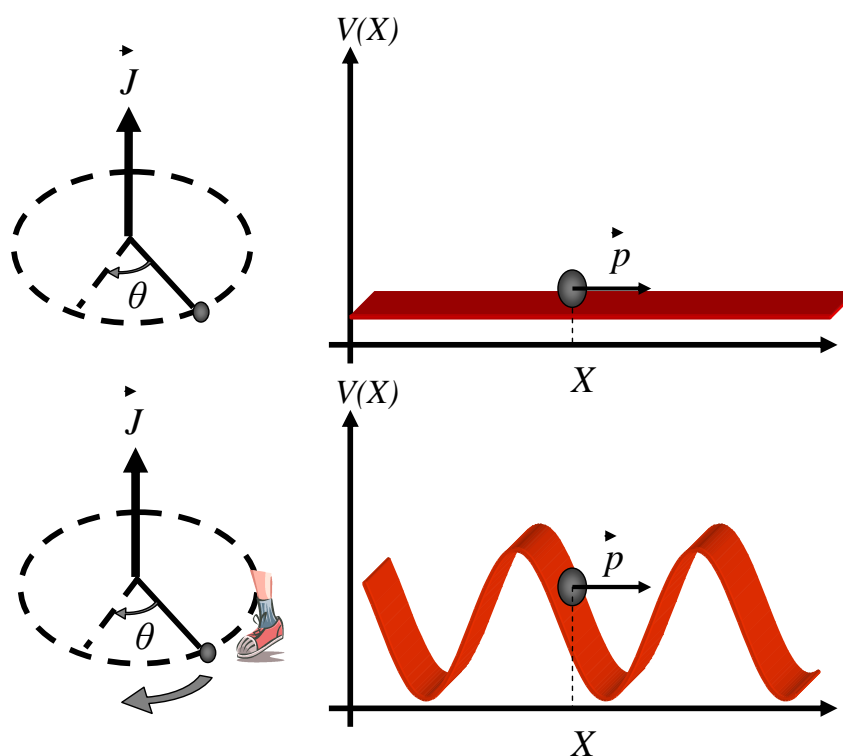


FIG. 1.2 – Le rotateur pulsé périodique ou “ $\delta$ -kicked rotor” en anglais à gauche et une particule dans le potentiel périodique pulsé à droite. En haut le rotateur et la particule évoluent librement sans frottement. En bas, les deux subissent un forçage (kick) dont l’intensité dépend de la position angulaire  $\theta$  pour le premier et spatiale  $X$  pour la seconde. Le forçage se répète périodiquement dans le temps.

Le hamiltonien  $H_1(t)$  d'un tel système s'écrit sous la forme :

$$H_1(t) = \frac{J^2}{2I} + kT \sin(\theta) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - nT) \quad (1.2)$$

où  $J$  est le moment cinétique du pendule,  $I = ml^2$  son moment d'inertie,  $k$  l'intensité du pulse et  $T$  la période de forçage. Afin d'avoir une correspondance directe et rapide avec le chapitre suivant, nous allons tout de suite passer à un modèle "linéaire" du rotateur pulsé : celui de la particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé (figure 1.2).

Pour cela, nous considérons une particule de masse  $m$  évoluant avec une impulsion  $p = mv$ . Celle-ci est soumise à une force qui dérive d'un potentiel sinusoïdal  $V(X) = V_0 \sin(\frac{2\pi X}{\Lambda})$  de période spatiale  $\Lambda$ . Ce forçage se répète périodiquement sous la forme d'un peigne de DIRAC de période  $T$ . L'hamiltonien  $H_2(t')$  s'écrit alors :

$$H_2(t') = \frac{p^2}{2m} + V_0 \sin\left(\frac{2\pi X}{\Lambda}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t' - mT) \quad (1.3)$$

Nous pouvons introduire des variables sans dimension pour le temps

$$t = \frac{t'}{T}, \quad (1.4)$$

l'espace

$$x = \frac{2\pi X}{\Lambda} \quad (1.5)$$

et l'impulsion

$$P = \frac{2\pi T p}{m\Lambda} \quad (1.6)$$

et obtenir le hamiltonien normalisé suivant :

$$H(t) = \frac{P^2}{2} + K \sin(x) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n). \quad (1.7)$$

Nous obtenons alors :

$$H(t) = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} H_2(t) \quad (1.8)$$

avec

$$K = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} V_0. \quad (1.9)$$

$K$  est appelé le "paramètre de stochasticité".

Le modèle de la particule dans le potentiel sinusoïdal pulsé est donc formellement identique à celui du rotateur pulsé : il constitue un modèle "déplié" ou "linéaire" de celui-ci. Par conséquent, dans la suite de ce mémoire nous utiliserons le terme consacré "kicked rotor" pour désigner l'un ou l'autre des modèles puisqu'ils sont caractérisés par le même hamiltonien (1.7).

### 1.1.2 Application standard

Pour étudier la dynamique de notre particule dans sa globalité, l'outil le plus pertinent de la dynamique non linéaire à notre disposition est le portrait de phase. Le portrait de phase est la représentation, ici à deux dimensions, de l'ensemble des couples de variables  $(x, P)$  accessible au système. Pour déterminer la dynamique du système (l'évolution d'un point de l'espace des phases dans le temps), nous partons des équations du mouvement de HAMILTON-JACOBI :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad (1.10)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.11)$$

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = P \quad (1.12)$$

$$\frac{dP}{dt} = -K \cos(x) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t-n) \quad (1.13)$$

Nous obtenons en intégrant les équations entre les temps  $n + \epsilon$  et  $n + 1 + \epsilon$  :

$$x_{n+1+\epsilon} - x_{n+\epsilon} = \int_{n+\epsilon}^{n+1+\epsilon} P dt \quad (1.14)$$

$$P_{n+1+\epsilon} - P_{n+\epsilon} = - \int_{n+\epsilon}^{n+1+\epsilon} K \cos(x) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t-n) dt \quad (1.15)$$

$$x_{n+1+\epsilon} - x_{n+\epsilon} = \int_{n+\epsilon}^{n+1-\epsilon} P dt + \int_{n+1-\epsilon}^{n+1} P dt + \int_{n+1}^{n+1+\epsilon} P dt \quad (1.16)$$

$$P_{n+1+\epsilon} - P_{n+\epsilon} = - \int_{n+\epsilon}^{n+1+\epsilon} K \cos(x) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t-n) dt \quad (1.17)$$

Soit :

$$x_{n+1+\epsilon} - x_{n+\epsilon} = (1 - 2\epsilon)P_n + \epsilon P_n + \epsilon P_{n+1} \quad (1.18)$$

$$P_{n+1+\epsilon} - P_{n+\epsilon} = -K \cos(x_{n+1}) \quad (1.19)$$

L'impulsion de la particule à l'instant  $n$ ,  $P_n$  est modifiée par la force appliquée à la position  $x_n$ . En prenant la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous obtenons alors deux relations de récurrence entre la position et l'impulsion (1.3) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + P_n \\ P_{n+1} = P_n - K \cos(x_{n+1}) \end{cases} \quad (1.20)$$

Ces relations de récurrence proposées par Chirikov [3], sont connues sous le nom d'*application standard* (figure 1.3). Elles permettent de déterminer l'évolution des variables  $x$  et  $P$  sur un temps discrétisé dont l'incrément est la période des pulses. Le portrait obtenu est donc une vue "stroboscopée", à la fréquence de forçage, de la dynamique de notre particule pour différentes conditions initiales.



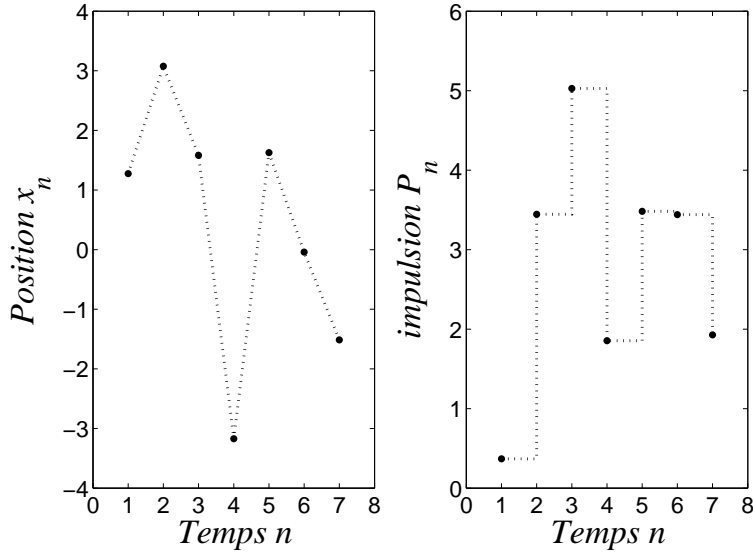


FIG. 1.3 – Application standard. Représentation de la dynamique des variables conjuguées  $x$  (modulo  $2\pi$ ) et  $P$  en fonction du temps ( $K = 5$ ).

### Analyse du portrait de phase

Selon la valeur du paramètre de stochasticité  $K$ , nous pouvons distinguer trois types de régimes dynamiques différents pour notre particule.

Le premier pour  $K = 0$  est un régime où l'énergie est conservée, le hamiltonien ne dépend pas du temps, il décrit simplement la conservation de la quantité de mouvement, la particule est libre. Le portrait de phase (figure 1.4) présente des droites à impulsion constante (le rotateur tourne infiniment à sa vitesse initiale).

Le second régime dynamique est celui pour lequel le forçage est ressenti comme une perturbation<sup>1</sup> par la particule ( $K \ll 1$ ) (figure 1.4). Les trajectoires de l'espace des phases proches de  $P = 0$  (modulo  $2\pi$ ) se sont alors refermées sur elles-mêmes (le rotateur "oscille"). Ces structures sont appelées orbites périodiques. Les autres trajectoires se sont courbées ; la particule subit sans cesse des accélérations puis des décélérations (le rotateur décrit des rotations forcées). En augmentant la valeur du paramètre de stochasticité (avec  $K < K_{cr} \simeq 0,9716$ ) de plus en plus de trajectoires se déforment et certaines disparaissent au profit de zones restreintes où la dynamique de la particule est stochastique et les corrélations temporelles des variables dynamiques deviennent nulles. Les orbites périodiques constituent alors des *îlots de stabilité* où cette corrélation temporelle est préservée. Les zones de stochasticité ne sont cependant pas assez importantes pour que la particule puisse parcourir la majorité de l'espace des phases (figure 1.5). Des barrières (flèches sur la figure 1.5) contraignent la particule à se déplacer dans des zones restreintes en impulsion. Ce n'est que lorsque  $K = K_{cr} \simeq 0,9716$ , qu'une dynamique chaotique au sens stricte

<sup>1</sup>Dans ce cas le hamiltonien dépend du temps et l'énergie n'est plus conservée. Mais une propriété essentielle du hamiltonien est toujours valable : le volume de l'espace des phases se conserve (Théorème de Liouville). Cette propriété exclut alors des phénomènes du type attracteur réservés au chaos dissipatif.

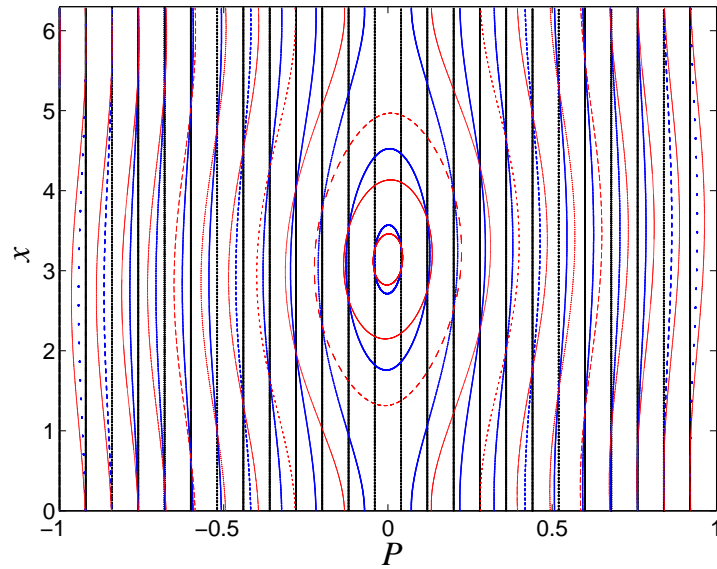


FIG. 1.4 – Portrait de phase pour  $K = 0$  (noir),  $K = 0,01$  (bleu),  $K = 0,02$  (rouge). Si la particule possède une impulsion proche de  $P = 0$  modulo  $2\pi$ , les trajectoires sont refermées sur elles-mêmes, elle visite périodiquement une zone restreinte en position. Sinon elle parcourt l'ensemble de l'espace des positions.

apparaît. Les dernières barrières en impulsion se déchirent permettant à la particule de visiter la totalité de l'espace des phases.

Pour  $K_{cr} < K < 5$ , le portrait de phase suggère plusieurs types de régimes dynamiques. L'un, composé de mouvements réguliers (par exemple, sur l'îlot de stabilité au centre de la figure 1.6), semblable à la dynamique pour  $K < K_{cr}$ . Un autre, composé de mouvements chaotiques (zone de comportement erratique autour de l'îlot central). Des zones plus discrètes du portrait de phase (voir encart de la figure 1.6), génère un comportement dynamique plus subtil appelé intermittence<sup>2</sup> [4]. La densité importante de ces zones autour des îlots de stabilité montrent que la particule explore plus souvent et de façon quasi-régulière celles-ci. Ce mouvement quasi-régulier imposé par ces régions est brutalement interrompu par une salve de mouvements stochastiques lorsque la particule se retrouve dans la partie chaotique de l'espace des phases. Avec l'augmentation de  $K$ , les trajectoires périodiques s'effacent au profit du chaos. Plus rien ne s'oppose à une *diffusion ergodique* dans l'espace des phases (figure 1.7).

<sup>2</sup>Il s'agit d'un comportement dynamique courant dans la nature. L'exemple typique est l'écoulement d'un liquide dans une conduite : un écoulement laminaire pendant un temps "long" peut brutalement basculer en un écoulement turbulent et vice versa.

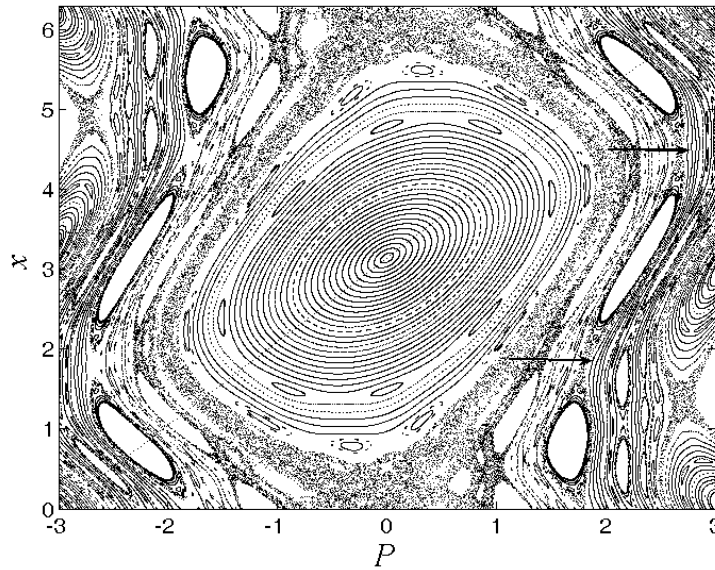


FIG. 1.5 – Portrait de phase pour  $K = 0,9$ . De faibles zones de chaos apparaissent autour des îlots de stabilité mais les barrières (flèches) empêchent la particule d'explorer tout l'espace en impulsion.

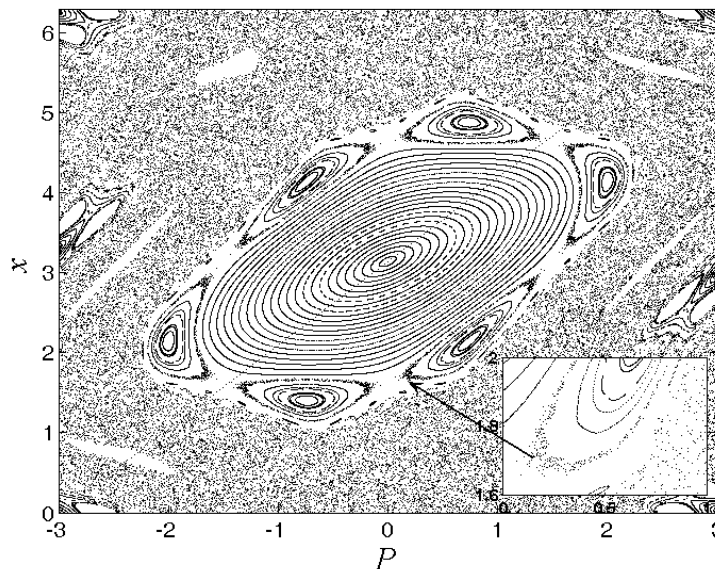


FIG. 1.6 – Portrait de phase pour  $K = 1,5$ . Des zones de chaos coexistent avec des îlots de stabilité. Les zones très denses autour des îlots de stabilité sont des zones de stabilité marginale, la particule suit une dynamique quasi régulière (elle repasse quasi périodiquement dans la même zone du portrait de phase) puis brusquement elle s'échappe dans la zone chaotique.

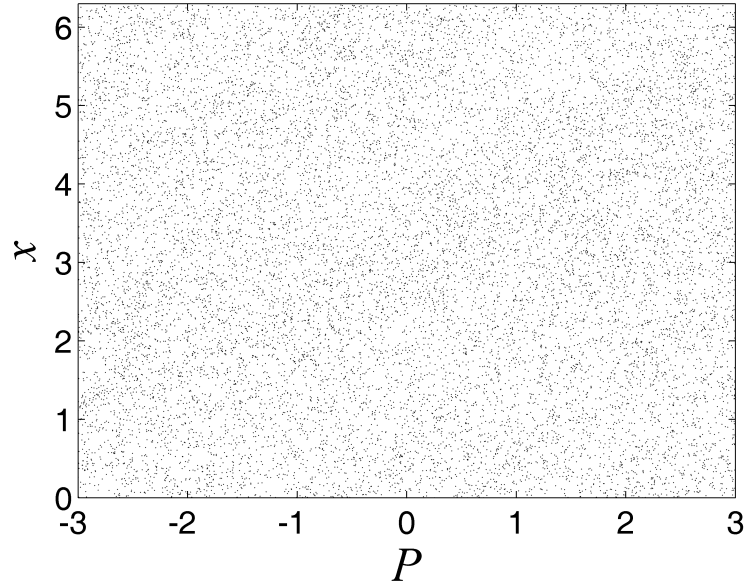


FIG. 1.7 – Portrait de phase pour  $K = 5, 8$ . Le chaos remplit entièrement l'espace des phases. C'est la situation que nous utilisons pour l'étude du chaos quantique.

### 1.1.3 Diffusion en impulsion

Le portrait de phase de la figure 1.7 suggère qu'un ensemble de particules soumis à un forçage fort ( $K = 5, 8$ ) diffuse dans l'espace des phases, et donc dans l'espace des impulsions. Un régime diffusif est caractérisé par la variation linéaire de l'écart quadratique moyen d'une variable dynamique. Grâce aux relations (1.20), nous pouvons écrire :

$$P_N - P_0 = K \sum_{i=0}^{N-1} \cos(x_i) \quad (1.21)$$

et donc :

$$\langle (P_N - P_0)^2 \rangle \equiv D_{cl}(K)N \simeq \frac{K^2}{2}N \quad (1.22)$$

L'énergie cinétique  $\sim \langle (P_N - P_0)^2 \rangle$  croît donc linéairement en fonction du temps avec un taux appelé taux de diffusion classique  $D_{cl}(K)$  qui vaut en première approximation  $\frac{K^2}{2}$ .

Nous pouvons suivre l'évolution d'un ensemble de  $\mathcal{N}$  particules (uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  avec  $P_0 = 0$  pour toutes), soumises au régime chaotique ( $K = 5, 8$ ) en itérant numériquement l'application standard (1.20). La figure 1.8 représente l'évolution de la variable  $P$  au cours du temps. Cette figure 1.8 montre que les particules explorent l'espace des impulsions sur une largeur qui croît avec le temps. La probabilité  $f_N(P)$  de trouver une particule dont l'impulsion est comprise entre  $P$  et  $P + dP$  au temps  $N$  est bien décrite par une fonction gaussienne (figure 1.8 (b)) :

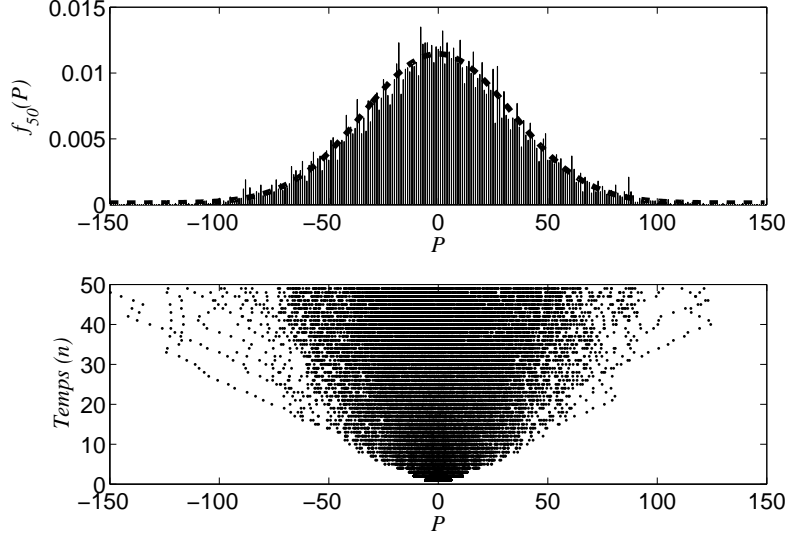


FIG. 1.8 – Évolution de la variable  $P$  en fonction du temps pour 500 conditions initiales sur  $x$  (a). Distribution de probabilité  $f(P)$ , après 50 pulses (b), la forme gaussienne (fit hachuré) de celle-ci est caractéristique d'un régime diffusif.

$$f_N(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{2\sigma_N^2}} \quad (1.23)$$

où la variance  $\sigma_N^2$  est proportionnelle  $\langle (P_N - P_0)^2 \rangle$ . On peut donc réécrire la probabilité  $f_N(P)$  de façon générale :

$$f_N(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{cl}(K)N}} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{2D_{cl}(K)N}} \quad (1.24)$$

La variance de la distribution de probabilité  $f_N(P)$  croît donc linéairement dans le temps avec un taux  $D_{cl}(K)$  (la largeur croît donc avec la racine du temps). Des calculs plus précis [3, 5] et des simulations numériques [6] (figure 1.9) révèlent que le taux de diffusion  $D_{cl}(K)$  suit en fait seulement approximativement ce comportement parabolique. Un comportement oscillant, décrit par des fonctions de BESSEL, vient se greffer sur le comportement parabolique du taux de diffusion, on aboutit alors à une expression plus complexe pour  $D_{cl}(K)$  :

$$D_{cl}(K) \approx \begin{cases} \frac{1}{2}K^2\{1 - 2J_2(K)[1 - J_2(K)]\}, & K \geq 4,5 \\ 0,30(K - K_{cr})^3, & K_{cr} < K < 4,5 \end{cases} \quad (1.25)$$

En conclusion, nous avons vu dans cette partie qu'un ensemble de particules soumis à un potentiel sinusoïdal pulsé (kicked rotor) subit, pour un forçage fort ( $K > 5$ , régime chaotique), une *diffusion ergodique* dans l'espace des phases. La distribution en impulsion de cet ensemble suit alors une loi gaussienne dont la variance

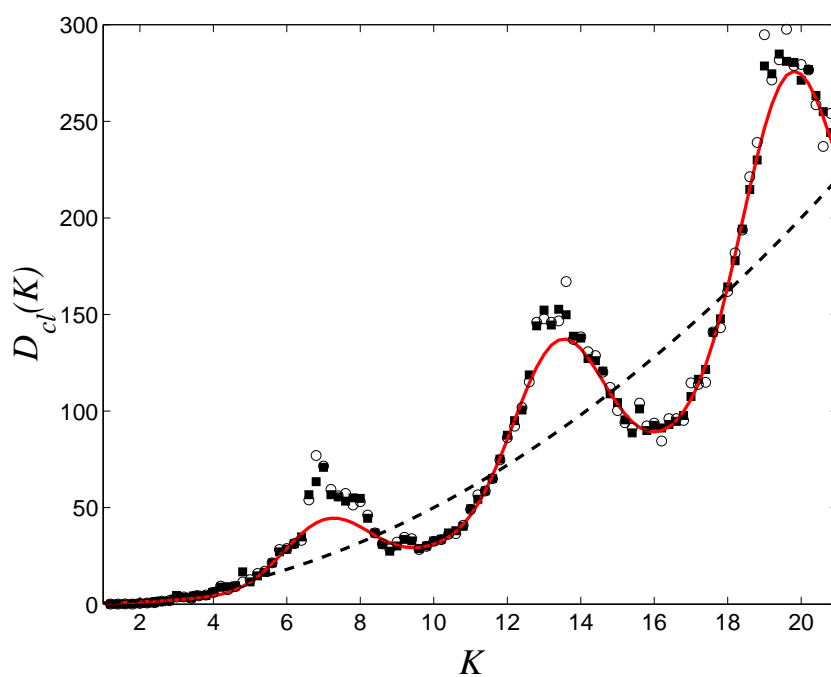


FIG. 1.9 – Évolution du taux de diffusion classique  $D_{cl}(K)$  en fonction du paramètre de stochasticité  $K$ . Les carrés et les ronds correspondent à des simulations numériques pour lesquelles l'écart quadratique en impulsion a été moyenné respectivement sur le temps et la position (en vertu de l'ergodicité du système); la courbe en trait discontinu représente l'évolution moyenne (1.22) et celle en trait plein le calcul plus précis  $D_{cl}(K)$  donné par l'équation (1.25). Figure reproduite avec l'aimable autorisation de Hans Lignier [6].

(proportionnelle de l'énergie cinétique moyenne de cet ensemble) croît linéairement avec le temps. Nous avons donc le premier ingrédient pour la réalisation du chaos quantique : un système qui classiquement comporte du chaos.

## 1.2 Traitement quantique

Dans cette partie, nous allons traiter le cas d'une particule quantique c'est à dire une particule délocalisée dont l'extension spatiale, sous la forme d'une onde de probabilité est comparable à la longueur caractéristique du potentiel ( $\Lambda$ ) dans lequel elle évolue. Cet extension spatiale est donnée par la longueur d'onde de DE BROGLIE :

$$\lambda_{de\ Broglie} \sim \Lambda. \quad (1.26)$$

Ce cas nécessite un traitement par le formalisme de la mécanique quantique. Le hamiltonien considéré ici est identique au cas classique précédent à l'exception près que le couple de variables dynamiques  $(x, P)$  est remplacé par le couple d'opérateurs  $(\hat{x}, \hat{P})$  :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + K \sin(\hat{x}) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n) \quad (1.27)$$

L'évolution de l'état  $|\psi(t)\rangle$  est alors régie par l'équation de SCHRÖDINGER :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.28)$$

où

$$\hbar = \frac{4\pi^2 \hbar T}{m\Lambda^2}, \quad (1.29)$$

est le paramètre liant les opérateurs position  $\hat{x}$  et impulsion  $\hat{P}$  par la relation de commutation  $[\hat{x}, \hat{P}] = i\hbar$ . Il s'agit d'une constante de PLANCK normalisée. Ce paramètre  $\hbar$  est proportionnel à la période  $T$  du forçage appliqué à la particule quantique, lorsque  $T \rightarrow 0$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , la dynamique classique domine. Au contraire, lorsque la période du forçage est grande, la constante de PLANCK  $\hbar \gtrsim 1$ . La dynamique quantique domine. Pour satisfaire à la définition du chaos quantique, nous avons donc deux contraintes sur les paramètres  $K$  et  $\hbar$  à respecter :

$$\begin{cases} K \gtrsim 5 \\ \hbar \gtrsim 1 \end{cases} \quad (1.30)$$

Dans cette partie, nous allons d'abord présenter la méthode utilisée pour déterminer l'évolution temporelle du *quantum kicked rotor*. Par la suite, nous appliquerons cette méthode à des simulations numériques qui nous permettront d'étudier la dynamique quantique de notre particule. Nous verrons alors que celle-ci se différencie nettement de la dynamique classique vue précédemment.

### 1.2.1 Opérateur d'évolution

Une approche équivalente à l'intégration de l'équation de SCHRÖDINGER, consiste à utiliser l'opérateur d'évolution. L'évolution de la fonction d'onde est décrite entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  selon la relation :

$$| \psi(t_2) \rangle = \hat{U}(t_2, t_1) | \psi(t_1) \rangle \quad (1.31)$$

où  $\hat{U}(t_2, t_1)$  est l'opérateur d'évolution issu de l'intégration de l'équation de SCHRÖDINGER :

$$\hat{U}(t_2, t_1) = \mathcal{T} \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}(t) dt \right\}, \quad (1.32)$$

$\mathcal{T}$  désignant l'opérateur produit d'ordination temporelle qui prend en compte les subtilités de la non-commutation du hamiltonien avec lui même pour des temps différents. En prenant l'opérateur d'évolution sur une période ("1" en unités réduites) tel que :

$$| \psi(t+1) \rangle = \hat{U}(1) | \psi(t) \rangle, \quad (1.33)$$

le calcul de celui-ci est simple et la fonction d'onde au bout  $n$  pulses s'écrit simplement :

$$| \psi(n) \rangle = \hat{U}(1)^n | \psi(0) \rangle \quad (1.34)$$

Partant d'un temps  $\varphi$  avant l'application d'un pulse, l'opérateur  $\hat{U}(1)$  sur une période s'écrit comme le produit suivant :

$$\hat{U}(1) = \hat{U}_{pr}(\varphi) \hat{U}_{pulse} \hat{U}_{pr}(1 - \varphi), \quad (1.35)$$

où pour l'évolution libre de la particule avant le pulse :

$$\hat{U}_{pr}(\varphi) = \exp \left( -i \frac{\hat{P}^2 \varphi}{2\hbar} \right) \quad (1.36)$$

et lors de l'application d'un pulse :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{pulse} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \mathcal{T} \exp \left( -i \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \left[ \frac{\hat{P}^2}{2\hbar} + \frac{K \sin(\hat{x})}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t-n) \right] dt \right) \right\} \\ &= \exp \left( -i \frac{K \sin(\hat{x})}{\hbar} \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Le terme de propagation libre pendant le pulse tend vers 0, quand la durée du pulse tend vers 0 (le pulse étant un pic de DIRAC). Le dernier opérateur d'évolution  $\hat{U}_{pr}(1 - \varphi)$  permet de compléter la période en évolution libre sur une durée  $1 - \varphi$  :

$$\hat{U}_{pr}(1 - \varphi) = \exp \left( -i \frac{\hat{P}^2 (1 - \varphi)}{2\hbar} \right). \quad (1.38)$$

Dans la suite nous prendrons  $\varphi = 0$  afin de faciliter les calculs, sans biensûr modifier la physique du problème.

Nous allons utiliser la propriété (1.35) de décomposition de l'opérateur d'évolution sur une période pour réaliser des simulations numériques et déterminer la dynamique quantique d'une particule et notamment l'évolution de l'énergie cinétique moyenne dans le temps  $\langle \psi(n) | P^2 | \psi(n) \rangle / 2$ .



### 1.2.2 Dynamique quantique : la localisation dynamique

Dans la section précédente, nous avons vu que, classiquement, dans un régime chaotique, l'énergie cinétique du kicked rotor évolue linéairement avec le temps, ce qui correspond à une dynamique diffusive où la distribution d'impulsion est une gaussienne qui s'étale linéairement avec le temps. Les premières simulations numériques concernant la dynamique quantique du kicked rotor, qui ont été réalisées par Casati, Chirikov, Ford et Izrailev [1, 7], révèlent que le comportement quantique rompt nettement avec la dynamique classique. Nous proposons dans cette section de reprendre les principaux résultats de ces travaux via le même type de simulations numériques à l'aide de la méthode exposée ci-dessous.

#### Principe du calcul numérique

Nous pouvons écrire, pour les opérateurs position  $\hat{x}$  et impulsion  $\hat{P}$ , les équations aux valeurs propres suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{x} | x \rangle &= x | x \rangle \\ \hat{P} | P, q \rangle &= (P + q) | P, q \rangle\end{aligned}\tag{1.39}$$

où  $| x \rangle$  et  $| P, q \rangle$  sont respectivement les vecteurs propres des opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{P}$ . La variable  $q$  qui apparaît dans la seconde équation est appelée *quasi-impulsion*, c'est un bon nombre quantique pour notre problème, cette variable se conserve lorsque la particule reçoit un nombre entier de quantum d'impulsion  $\hbar$  via l'opérateur  $\hat{U}_{pulse}$  qui ne couple que les états  $| P, q \rangle$  distants d'un nombre entier de fois  $\hbar$  :

$$\begin{aligned}\hat{U}_{pulse} | P, q \rangle &= e^{-i \frac{K \sin(\hat{x})}{\hbar}} | P, q \rangle \\ &= \sum_n J_n \left( \frac{K}{\hbar} \right) e^{-inx} | P, q \rangle \\ &= \sum_n J_n \left( \frac{K}{\hbar} \right) | P + n\hbar, q \rangle\end{aligned}\tag{1.40}$$

où  $J_n(x)$  est la fonction de Bessel. La quasi-impulsion  $q$  couvre l'ensemble des valeurs de l'intervalle  $[0; 1[$ , appelé "zone de Brillouin". L'existence de ce bon nombre quantique est une conséquence de la périodicité spatiale du potentiel (Théorème de Bloch [8]).

Il apparaît donc, via les équations aux valeurs propres (1.39), que les matrices des opérateurs  $\hat{U}_{pr}(1)$  et  $\hat{U}_{pulse}$  sont diagonales respectivement dans l'espace  $\{\mathcal{P}\}$  des impulsions et  $\{\mathcal{X}\}$  des positions. Cette propriété facilite le calcul de la fonction d'onde après une période d'évolution, l'application de l'opérateur se résumant à un produit simple. Une transformée de Fourier nous permet de passer d'un espace à un autre. La méthode utilisée pour le calcul numérique est donc la suivante :

- Nous décomposons la fonction d'onde  $|\psi_{0^-}(P, q)\rangle$  ( $n^-$  correspond au temps juste avant l'application du pulse  $n$ ) dans l'espace  $\{\mathcal{P}\}$  pour une quasi-impulsion  $q$  donnée :

$$|\psi_{0^-}(P, q)\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} a_{0^-}(P, q) | P, q \rangle\tag{1.41}$$

en choisissant une restriction de cette base dont la dimension, égale à  $2L + 1$ , est choisie telle que les “états du bord” ne soient pas significativement peuplés pendant la durée de la simulation afin d’éviter des effets numériques parasites.

– une transformée de Fourier discrète nous permet de passer dans l’espace  $\{\mathcal{X}\}$  :

$$|\tilde{\psi}_{0-}(x)\rangle = \sum_{x=0}^{+2\pi/(2L+1)} \tilde{a}_{0-}(x) |x\rangle \quad (1.42)$$

avec

$$\tilde{a}_{0-}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{P=-L}^{+L} e^{-iPx} a_{0-}(P, q) \quad (1.43)$$

– On applique alors l’opérateur  $\hat{U}_{pulse}$  :

$$\hat{U}_{pulse} |\tilde{\psi}_{0-}(x)\rangle = |\tilde{\psi}_{0+}(x)\rangle = \sum_{x=0}^{+2\pi/(2L+1)} \tilde{a}_{0-}(x) \hat{U}_{pulse} |x\rangle \quad (1.44)$$

$$|\tilde{\psi}_{0+}(x)\rangle = \sum_{x=0}^{+2\pi/(2L+1)} \tilde{a}_{0-}(x) e^{-i\frac{K \sin(x)}{k}} |x\rangle = \sum_{x=0}^{+2\pi/(2L+1)} e^{-i\frac{K \sin(x)}{k}} \tilde{a}_{0-}(x) |x\rangle \quad (1.45)$$

en posant  $\tilde{a}_{0+}(x) = e^{-i\frac{K \sin(x)}{k}} \tilde{a}_{0-}(x)$  ( $n^+$  représentant le temps juste après l’application du pulse  $n$ ), nous avons la fonction d’onde  $|\tilde{\psi}_{0+}(x)\rangle$  juste après l’application d’un pulse (toujours dans l’espace  $\{\mathcal{X}\}$ ) :

$$|\tilde{\psi}_{0+}(x)\rangle = \sum_{x=0}^{+2\pi/(2L+1)} \tilde{a}_{0+}(x) |x\rangle \quad (1.46)$$

– Ensuite, nous repassons dans l’espace  $\{\mathcal{P}\}$  grâce à la transformée de Fourier inverse :

$$|\psi_{0+}(P, q)\rangle = \sum_{x=0}^{+2\pi/(2L+1)} a_{0+}(P, q) |P, q\rangle. \quad (1.47)$$

avec :

$$a_{0+}(P, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{P=-L}^{+L} e^{iPx} \tilde{a}_{0+}(x) \quad (1.48)$$

– nous pouvons alors appliquer l’opérateur propagation libre  $\hat{U}_{pr}(1)$  :

$$\hat{U}_{pr}(1) |\psi_{0+}(P, q)\rangle = |\psi_{1-}(P, q)\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} a_{0+}(P, q) \hat{U}_{pr}(1) |P, q\rangle \quad (1.49)$$

$$|\psi_{1-}(P, q)\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} a_{0+}(P, q) e^{-i\frac{\hat{P}^2}{2k}} |P, q\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} e^{-i\frac{P^2}{2k}} a_{0+}(P, q) |P, q\rangle \quad (1.50)$$

et avec  $a_{1-}(P, q) = e^{-i\frac{P^2}{2\bar{k}}} a_{0+}(P, q)$  nous obtenons la fonction d'onde  $|\psi_{1-}(P, q)\rangle$  juste avant le pulse suivant (dans l'espace  $\{\mathcal{P}\}$ ) :

$$|\psi_{1-}(P, q)\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} a_{1-}(P, q) |P, q\rangle \quad (1.51)$$

Pour propager la fonction d'onde sur  $N$  périodes, il suffit donc de réitérer cette procédure  $N$  fois. Nous avons alors accès à la distribution en impulsion  $|\psi_N(P, q)|^2$ . Expérimentalement, comme nous allons le voir au chapitre suivant, les particules que nous utilisons ont des conditions initiales qui se répartissent uniformément sur la totalité de la zone de Brillouin. Cela a pour effet de moyenner la distribution d'impulsion sur la quasi-impulsion et de lisser le bruit quantique de la fonction d'onde. Numériquement, 200 conditions initiales sur la zone de Brillouin suffisent à rendre compte des observations expérimentales. En plus de cette distribution en impulsion, les observables  $\langle P^2 \rangle$  et  $|\psi_N(P=0)|^2$  vont nous permettre de caractériser la dynamique quantique du kicked rotor.

### Localisation dynamique

Les simulations numériques sur la dynamique quantique présentées dans cette section ont été réalisées pour des paramètres  $(K, \bar{k})$  accessibles expérimentalement. Comme distribution d'impulsion initiale, nous prenons une distribution en impulsion de forme gaussienne et de largeur à mi-hauteur égale 4 unités  $\bar{k}$ , celle-ci est comparable à la distribution en impulsion réelle de notre nuage d'atomes froids (voir chapitre 2).

Pour une dynamique quantique chaotique ( $K > 5$ ;  $\bar{k} > 1$ ), on s'attend à ce que l'accroissement de l'énergie cinétique correspond au modèle classique avec un coefficient de diffusion quantique  $\tilde{D}_q$  tel que, de manière asymptotique :

$$\tilde{D}_q \simeq \frac{1}{2} K^2. \quad (1.52)$$

En fait, la figure 1.10 montre que  $\langle P^2 \rangle$  suit cette tendance seulement pour un temps<sup>3</sup> fini, son évolution s'écarte ensuite radicalement de l'évolution classique. On observe alors une saturation de l'énergie cinétique vers une valeur asymptotique, il s'agit du phénomène de *gel de la diffusion classique*. On définit alors le temps de localisation  $N_{loc}$ , le temps pour lequel la valeur asymptotique de l'énergie cinétique serait atteinte si la dynamique avait conservé son taux de diffusion initial  $\tilde{D}_q$  (figure 1.10).

Si l'énergie cinétique atteint une valeur asymptotique, il est naturel de penser que la distribution en impulsion, elle-aussi, n'évolue plus après ce temps. La figure (1.11) montre l'évolution de la distribution en impulsion en fonction du temps. La distribution initiale de forme gaussienne s'élargit, dans un premier temps, comme dans le cas de la diffusion ergodique vu plus haut. Après ce temps  $N_{loc}$ , cette distribution

---

<sup>3</sup>Le temps pour lequel la dynamique quantique suit la dynamique classique, est appelé le temps d' EHRENFEST ( $t_E$ ).

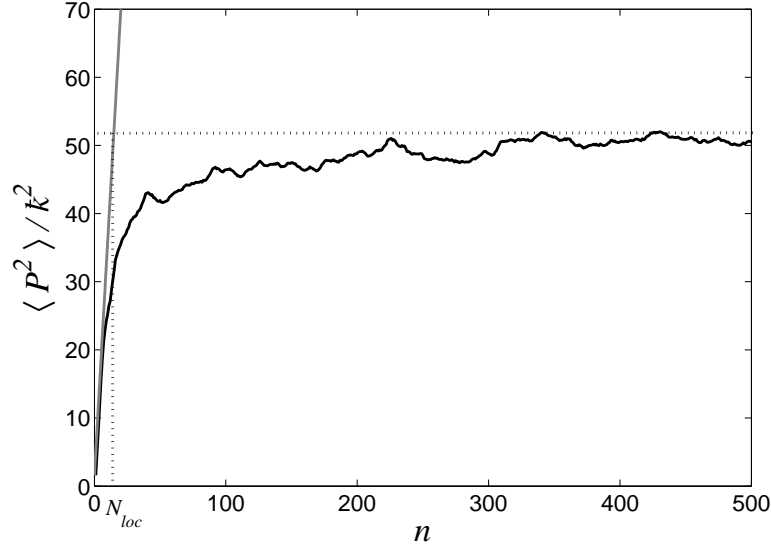


FIG. 1.10 – Évolution de l'énergie cinétique moyenne du quantum kicked rotor. Les paramètres sont  $K = 7,5$ ,  $\hbar = 2,89$ . Aux temps courts, la dynamique quantique suit un régime diffusif avec un taux de diffusion quantique  $D_q(K) \simeq 3,40$  (droite en trait plein) ( $D_{cl}(K) \simeq 44$ ,  $D_{cl}(K_q) = 2,69$ ), celle-ci s'écarte ensuite d'un comportement linéaire pour rejoindre une valeur moyenne asymptotique (trait en pointillé). Le temps de localisation (repéré par la droite verticale en pointillé) est évalué à  $N_{loc} \approx 15$ .

prend la forme d'une fonction double exponentielle :

$$|\langle P | \psi_{n > N_{loc}} \rangle|^2 \sim e^{\frac{-|P|}{2P_{loc}}} \quad (1.53)$$

avec  $P_{loc} \sim \sqrt{\langle \psi_{N_{loc}} | P^2 | \psi_{N_{loc}} \rangle}$  appelée *longueur de localisation*. A partir de cet instant, la forme de cette distribution n'évolue que très peu en fonction du temps, le centre de celle-ci est figé et seules les ailes de la distribution, loin en impulsion, contribuent à l'accroissement de l'énergie cinétique (figure (1.12)) vers sa valeur asymptotique. Le gel de la distribution en impulsion sous forme d'une fonction double exponentielle constitue le phénomène de *localisation dynamique*.

Même si la dynamique quantique est radicalement différente de la dynamique classique, des études théoriques fines [9] réalisées par D. L. Shepeliansky montrent que le coefficient de diffusion quantique, qui est le taux de diffusion initial avec lequel l'énergie cinétique croît pour un temps  $N < N_{loc}$ , s'exprime de la même manière que le coefficient classique :

$$D_q(K) = \left( \frac{K}{K_q} \right)^2 D_{cl}(K_q) \quad (1.54)$$

avec  $K_q = 2 \frac{K}{\hbar} \sin(\frac{\hbar}{2})$ .

La dynamique chaotique quantique est donc, aux "temps longs", fondamentalement différente de son analogue classique. Elle est caractérisée par un gel de la diffusion en impulsion et par une forme en double exponentielle pour sa distribution

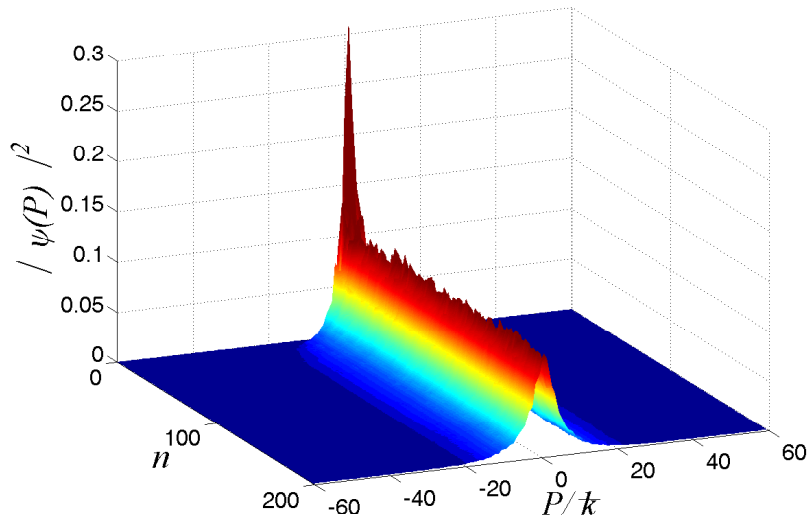


FIG. 1.11 – Évolution de la distribution en impulsion en fonction du temps. Pour  $K = 7,5$ ,  $\hbar = 2,89$ .

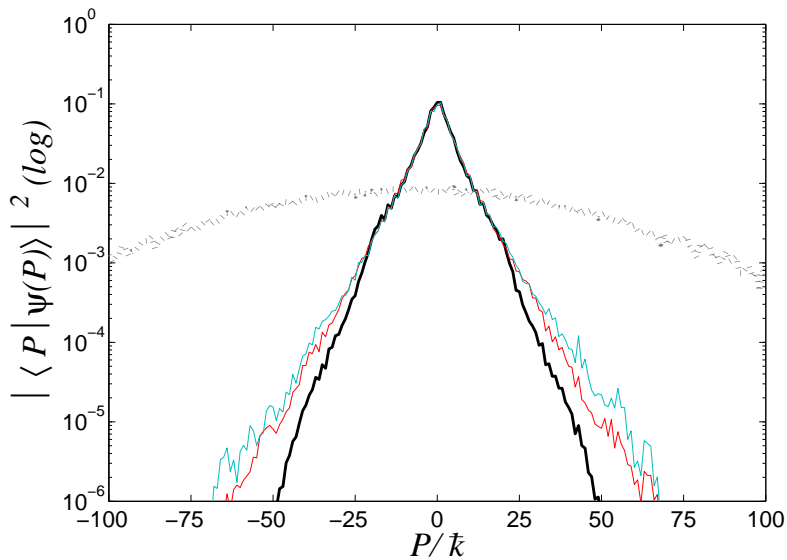


FIG. 1.12 – Distribution en impulsion pour  $K = 7,5$ ,  $\hbar = 2,89$ ,  $N = 50$  (trait plein noir),  $N = 200$  (rouge) et  $N = 500$  (bleu). La forme triangulaire en échelle logarithmique (double exponentielle en échelle linéaire) est caractéristique de la localisation dynamique. Celle-ci varie peu entre  $N = 50$ ,  $N = 200$  et  $N = 500$ . En pointillé, la distribution en impulsion dans le cas classique à titre de comparaison.

en impulsion. Nous allons voir maintenant comment nous pouvons interpréter ce résultat à l'aide du théorème de Floquet.

### 1.2.3 Interprétation de la localisation dynamique

#### Théorème de Floquet

Usuellement, dans les problèmes de mécanique quantique, la décomposition d'un état initial sur les états propres du hamiltonien indépendant du temps permet de déterminer son évolution temporelle. Dans notre système, cette décomposition n'est pas directement applicable puisque celui-ci est explicitement dépendant du temps. Heureusement, la périodicité du hamiltonien nous permet d'utiliser le théorème de Floquet [10], en définissant des valeurs et états propres de l'opérateur d'évolution sur une période :

$$\hat{U}(1) |j\rangle = e^{-i\epsilon_j} |j\rangle \quad (1.55)$$

où  $|j\rangle$  est un quasi-état propre de Floquet associé à la quasi-énergie  $\epsilon_j$  ( $2\pi$  périodique). On a donc pour une évolution sur  $N$  périodes :

$$\hat{U}^N(1) |j\rangle = e^{-iN\epsilon_j} |j\rangle. \quad (1.56)$$

Pour déterminer ces quasi-états et quasi-énergies propres, on diagonalise la matrice de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(1)$  dans la base qui nous intéresse : la base  $\{\mathcal{P}\}$ . Les éléments de cette matrice en représentation  $\{\mathcal{P}\}$  s'écrivent :

$$\langle P', q | \hat{U}(1) | P, q \rangle = (i)^{P-P'} e^{-i\frac{\mathcal{k}(P'+q)^2}{2}} J_{P-P'}\left(\frac{K}{\mathcal{k}}\right). \quad (1.57)$$

où  $J_n(x)$  est la fonction de Bessel. La figure (1.13) montre ces quasi-états propres dans la base  $\{\mathcal{P}\}$  pour différentes valeurs du paramètre  $\mathcal{k}$ . Pour décrire approximativement la forme de ces quasi-états propres, il existe une formule empirique :

$$|\langle P, q | j \rangle|^2 \propto \begin{cases} e^{-\frac{\sqrt{2}|P-P_j-q|}{\mathcal{L}_j}}, & P \geq 0 \\ e^{-\frac{\sqrt{2}|P+P_j+q|}{\mathcal{L}_j}}, & P < 0 \end{cases},$$

où  $\mathcal{L}_j$  représente l'écart quadratique moyen de l'impulsion pour  $P_j$ . Ces quasi-états sont d'autant plus larges que la valeur de  $\mathcal{k}$  est petite et celle de  $K$  grande, c'est à dire que pour une dynamique chaotique proche de la dynamique classique  $\mathcal{k} \rightarrow 0$ , les états propres occupent une grande partie de l'espace des impulsions  $\{\mathcal{P}\}$ . On retrouve la dynamique classique diffuse. *A contrario*, plus la dynamique est quantique ( $\mathcal{k} \geq 1$ ), plus les états propres sont localisés en impulsion.

La figure 1.14 représente la distribution en impulsion de l'état initial et quelques états de Floquet. Seuls les états proches de l'impulsion  $P = 0$  centrés sur un intervalle de  $\pm 4\mathcal{k}$ , dont le recouvrement avec la distribution d'origine est important, sont peuplés significativement. Les quasi-états loin en impulsion, que la distribution d'origine ne recouvre pas, ne participent pas à la localisation dynamique. La figure 1.15 montre les quasi-énergies pour les quasi-états propres significativement peuplés par la distribution d'origine (pour un recouvrement  $|\langle \psi | j \rangle|^2 > 10^{-5}$ ) en fonction du paramètre  $K$ . Plus la valeur de  $K$  est grande, plus le nombre d'états propres significativement peuplés est important.

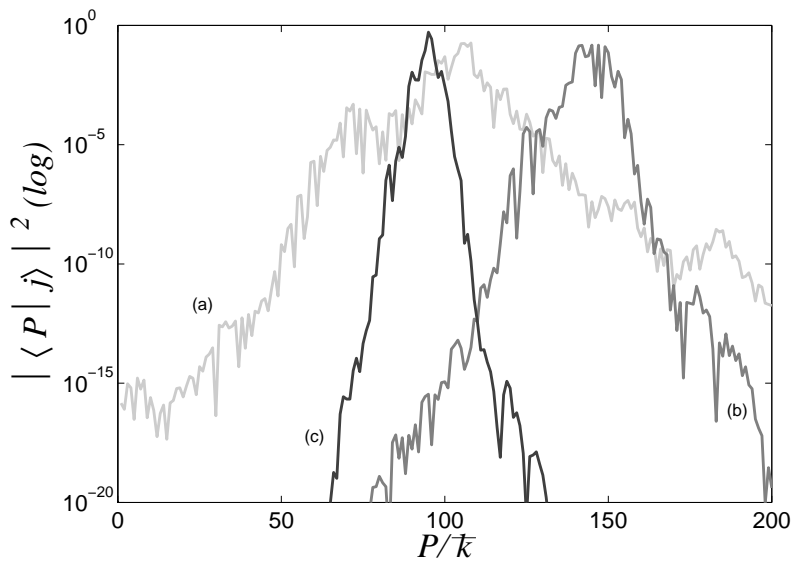


FIG. 1.13 – Module au carré de quelques états propres de Floquet pour  $\bar{k} = 2,89$  (a),  $\bar{k} = 3,46$  (b) et  $\bar{k} = 4,53$  (c) et  $K = 7,5$ . Les quasi-états sont symétriques (ou anti-symétriques) par rapport à  $P = 0$ .

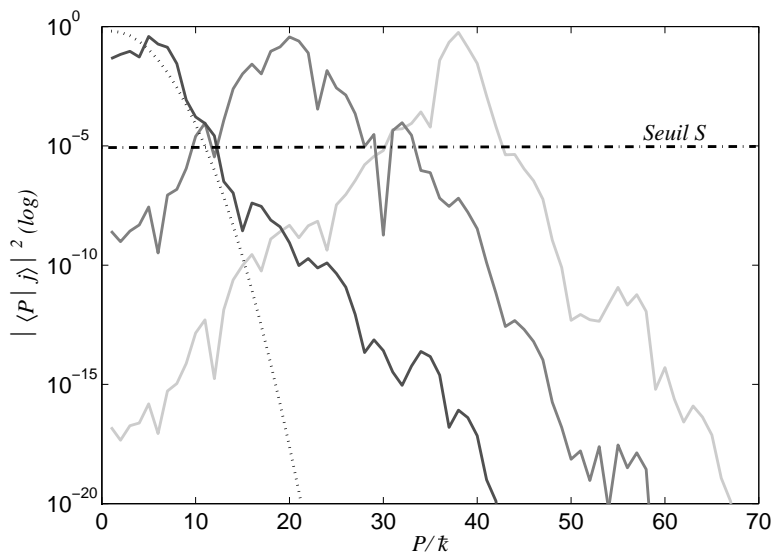


FIG. 1.14 – La distribution d'impulsion d'origine (en pointillé) et quelques états propres de Floquet (traits plein) pour  $\bar{k} = 4,53$  et  $K = 7,5$ . La distribution d'origine ne recouvre que les quelques états Floquet proches de  $P = 0$  (par exemple ici l'état de Floquet représenté en noir), les autres états de Floquet loin en impulsion (les deux états représentés en gris et gris clair) ne participent pas significativement à la localisation dynamique.

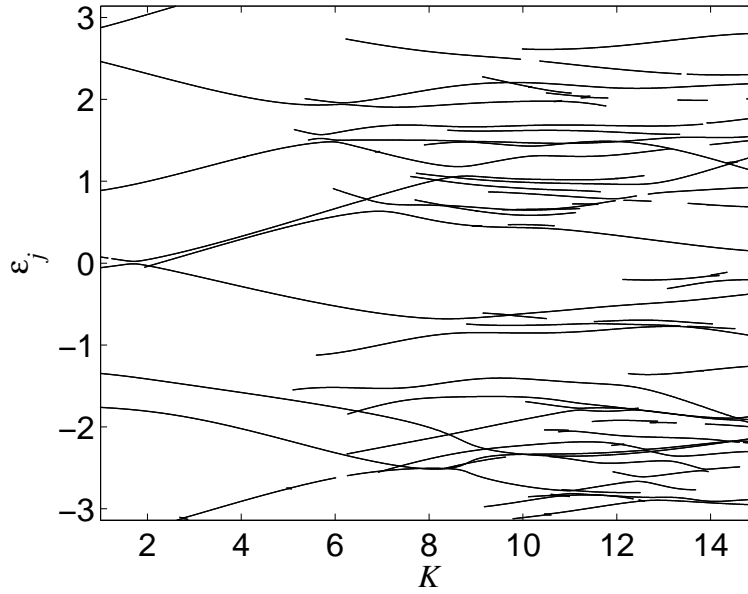


FIG. 1.15 – Évolution des quasi-énergies des états de Floquet significativement peuplés (tels que le taux de recouvrement avec l'état initial :  $|\langle \psi_0 | j \rangle|^2 > 10^{-5}$ ) en fonction de  $K$  pour  $\hbar = 2,89$ . La densité des quasi-états impliqués augmente avec le paramètre  $K$ .

### Évolution de l'énergie cinétique

De façon analytique, il est possible grâce au théorème de Floquet de montrer que l'énergie cinétique sature au bout d'un temps  $N_{loc}$ .

Pour cela, prenons un état initial  $|\psi_0\rangle$  décrit par une fonction gaussienne de largeur  $\sqrt{\langle P_0^2 \rangle}$  qui ne recouvre que quelques quasi-états propres  $|j\rangle$  :

$$|\psi_0\rangle = \sum_{j=-\alpha}^{j=\alpha} u_j |j\rangle \quad (1.58)$$

tel que  $\forall j \in [-\alpha; \alpha], |\langle j | \psi_0 \rangle|^2 > \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}$  étant un seuil prédéfini tel que  $\sqrt{\langle P_0^2 \rangle} \ll 2\alpha$ . Après  $N$  d'applications de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(1)$ , la largeur de l'état produit est définie par :

$$\langle P_N^2 \rangle \equiv \langle \psi_N | \hat{P}^2 | \psi_N \rangle = \langle \psi_0 | (\hat{U}(1)^\dagger)^N \hat{P}^2 (\hat{U}(1))^N | \psi_0 \rangle. \quad (1.59)$$

Nous pouvons alors introduire deux relations de fermeture sur les quasi-états de Floquet et obtenir :

$$\begin{aligned} \langle P_N^2 \rangle &= \sum_j \sum_k \langle \psi_0 | j \rangle \langle j | (\hat{U}(1)^\dagger)^N \hat{P}^2 (\hat{U}(1))^N | k \rangle \langle k | \psi_0 \rangle \\ \langle P_N^2 \rangle &= \sum_j \sum_k e^{-iN(\epsilon_j - \epsilon_k)} \langle \psi_0 | j \rangle \langle j | \hat{P}^2 | k \rangle \langle k | \psi_0 \rangle. \end{aligned}$$



Nous pouvons alors isoler les termes tels que  $j = k$  et utiliser la relation (1.58) :

$$\langle P_N^2 \rangle = \sum_j |u_j|^2 \langle j | \hat{P}^2 | j \rangle + \sum_{j \neq k} e^{-iN(\epsilon_j - \epsilon_k)} u_j^* u_k \langle j | \hat{P}^2 | k \rangle \quad (1.60)$$

Le second terme de l'équation (1.60) est une somme de fonctions oscillantes de différentes fréquences  $\omega_{jk} = \epsilon_j - \epsilon_k$ . Cette somme tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$ . En fait, elle devient négligeable devant le premier terme dès que  $N \gg N_{loc}$ . On a alors pour la largeur de l'état localisé :

$$\langle P_{N \gg N_{loc}}^2 \rangle \approx \sum_j |u_j|^2 \langle j | \hat{P}^2 | j \rangle. \quad (1.61)$$

En réalité, le nombre de quasi-états peuplés par la fonction d'onde initiale  $|\psi_0\rangle$  est infini mais seul un nombre fini  $N_\psi$  quasi-états dont le taux de recouvrement avec  $|\psi_0\rangle$  est supérieur à un seuil  $\mathcal{S}$  défini, joue un rôle significatif dans la localisation dynamique<sup>4</sup> (figure 1.15). Puisque les quasi-énergies sont réparties sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ , celles-ci sont séparées d'une distance moyenne en énergie  $\bar{\epsilon} = \frac{2\pi}{N_\psi}$ . Le second terme de l'équation (1.60) devient donc négligeable pour un temps égal à  $\frac{2\pi}{\bar{\epsilon}}$ . Nous avons donc une limite inférieure pour le temps de localisation  $N_{loc}$  :

$$N_{loc} \approx \frac{2\pi}{\bar{\epsilon}} = N_\psi \quad (1.62)$$

Le temps de localisation  $N_{loc}$  est le temps donné par l'inégalité de Heisenberg pour résoudre les  $N_\psi$  quasi-états impliqués dans la localisation dynamique et ainsi révéler le caractère discret du spectre des quasi-énergies. Dans la représentation  $\{\mathcal{P}\}$ , les quasi-états sont espacés de  $\bar{k}$  et les  $N_\psi$  quasi-états impliqués dans la localisation dynamique se répartissent sur la longueur de localisation :  $P_{loc} = \sqrt{\langle P_{N_{loc}}^2 \rangle}$ , nous avons donc  $N_\psi = \frac{P_{loc}}{\bar{k}} = \frac{\sqrt{\langle P_{N_{loc}}^2 \rangle}}{\bar{k}}$ , soit pour le temps de localisation :

$$N_{loc} \approx \frac{\sqrt{\langle P_{N_{loc}}^2 \rangle}}{\bar{k}} = \frac{\sqrt{D_q(K_q)N_{loc}}}{\bar{k}}. \quad (1.63)$$

Nous obtenons la dépendance en  $K$  et  $\bar{k}$  pour la limite inférieure du temps de localisation :

$$N_{loc} \approx \frac{D_q(K_q)}{\bar{k}^2} \simeq \frac{K^2}{\bar{k}^2} \quad (1.64)$$

Cette égalité (1.64) va nous être fort utile puisque les paramètres  $K$  et  $\bar{k}$  sont les seuls paramètres auxquels nous avons accès expérimentalement.

Dans cette section, nous avons vu que la dynamique quantique du kicked rotor est différente du cas classique développé plus haut. Dans un premier temps, le système suit une dynamique semblable à la dynamique classique, l'énergie cinétique croît

---

<sup>4</sup>On peut montrer que tant que la largeur de l'état initial est faible devant la longueur de localisation, la forme de la distribution en impulsion de cet état initial ne joue aucun rôle significatif sur le temps de localisation.

linéairement en fonction du temps et la fonction d'onde s'élargit en impulsion. Puis l'énergie cinétique s'écarte de l'accroissement linéaire pour tendre vers une valeur asymptotique. Le fonction d'onde se fige alors sous la forme d'une exponentielle décroissante. Le théorème de Floquet permet une interprétation de ce phénomène, appelé localisation dynamique. La fonction d'onde d'origine est projetée sur les quasi-états propres de Floquet qui sont initialement recouverts par celle-ci. Les paramètres  $K$  et  $\tilde{k}$  déterminent la largeur en impulsion de ce recouvrement (la longueur de localisation) et le temps nécessaire à ce recouvrement (le temps de localisation).

### 1.3 Localisation dynamique et localisation d'Anderson

En 1928, BLOCH [8] publie un article sur la propagation des électrons dans un potentiel périodique, il s'agit de la première pierre à l'édification de la théorie quantique des solides. Celle-ci a permis d'expliquer de nombreuses propriétés électroniques des solides telles que le caractère isolant ou conducteur ou encore les matériaux transparents et réfléchissants. Dans le cas du potentiel périodique, celui généré par un réseau cristallin parfait, les fonctions d'ondes électroniques ont la propriété d'être délocalisées sous la forme d'ondes de Bloch sur la totalité du réseau cristallin (figure 1.16). Plus tard, en 1958, ANDERSON [11] s'intéresse à la propagation des électrons dans un milieu désordonné. Des défauts introduits dans la matrice cristalline (par exemple des défauts compositionnels comme l'ajout d'impuretés dans le cristal), jouent le rôle du désordre. Si l'intensité du désordre est suffisamment importante, les fonctions d'onde électroniques vont se localiser spatialement (figure 1.16). Ce résultat, qui porte le nom de *localisation d'Anderson*, est un phénomène ondulatoire tout à fait général qui affecte aussi la propagation des ondes classiques (ondes sonores [12], lumineuses [13, 14], etc). Dans cette section, nous allons introduire brièvement le modèle d'Anderson pour les solides désordonnés à une dimension et montrer qu'il est mathématiquement équivalent au modèle du kicked rotor.

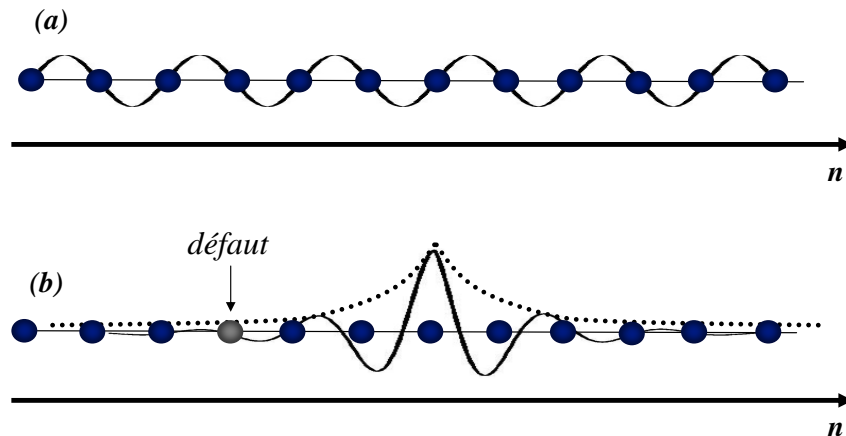


FIG. 1.16 – Ondes de Bloch (a) et localisation d'Anderson (b). Dans un réseau cristallin parfait, les fonctions d'ondes électroniques sont délocalisées en ondes de Bloch (a). L'ajout d'un défaut (l'atome de couleur claire) localise les fonctions d'ondes. C'est la localisation d'Anderson.

### 1.3.1 Localisation d'Anderson

Le *modèle d'Anderson* est un terme générique qui regroupe diverses variantes de l'équation de SCHRÖDINGER pour un potentiel aléatoire à une dimension. Son origine physique est l'étude de la propagation des électrons dans un métal qui contient des impuretés. A faible température, nous pouvons éliminer les collisions inélastiques électrons-phonons qui deviennent négligeables, seules les collisions élastiques électrons-électrons et les interactions des électrons avec le potentiel du réseau cristallin subsistent. Les électrons se trouvent alors dans un état quantique cohérent et les effets d'*interférence* sont importants.

En négligeant les interactions coulombiennes entre les électrons, nous pouvons écrire l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire (équation aux valeurs propres) à un électron et à une dimension d'espace :

$$\mathcal{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1.65)$$

où le potentiel  $V(x)$  représente l'interaction entre un électron et les atomes du réseau. Si  $V(x)$  est périodique, on retrouve le résultat des ondes de Bloch [8]. Pour le modèle d'Anderson,  $V(x)$  est une fonction *aléatoire* dont les corrélations sont à "*courte portée*".

Cette équation de SCHRÖDINGER (1.65) se prête mal à des investigations analytiques ou numériques. Une discrétisation va nous simplifier la tâche en remplaçant la variable continue  $x$ , par une variable discrète  $n$ , indice des sites du réseau. Pour cela, nous décomposons la fonction d'onde  $\Psi$  sur les états de Wannier [15] du réseau :

$$|\Psi\rangle = \sum_n \phi_n |n\rangle. \quad (1.66)$$

Les états de Wannier  $|n\rangle$  sont des états localisés sur chaque site  $n$  du réseau. En projetant l'équation (1.65) sur les états de Wannier, on obtient le hamiltonien des liaisons fortes (*tight-binding*) :

$$(\mathcal{H}\phi)_n = \sum_i t_{n,i}\phi_{n+i} + v_n\phi_n = E\phi_n \quad (1.67)$$

où les termes diagonaux  $v_n$  sont les énergies de sites, ils constituent une moyenne du potentiel  $V(x)$  pour des valeurs de  $x$  proches du site  $n$ . Les termes non diagonaux  $t_{n,i}$  sont les taux de transition (*hopping rates*) entre sites. Il s'agit de quantités complexes proportionnelles aux amplitudes de transitions quantiques d'un site  $n$  à un site  $n+i$ , ces taux de transition décroissent rapidement avec  $|n-i|$ . De plus, le caractère hermitien du hamiltonien impose  $t_{n,i} = t_{i,n}^*$ . On peut alors simplifier l'équation (1.67) par une approximation "aux premiers voisins" :

$$t_{n,1}\phi_{n+1} + t_{n,-1}\phi_{n-1} + v_n\phi_n = E\phi_n. \quad (1.68)$$

Afin d'extraire la propriété qui nous intéresse : la localisation, nous pouvons écrire cette équation (1.68) sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

avec

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{E-v_n}{t_{n,1}} & \frac{t_{n,-1}}{t_{n,1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$T_n$  est une matrice aléatoire puisque ANDERSON postula en 1958 que l'effet du désordre est de rendre le terme diagonal aléatoire, ici l'énergie de site  $v_n$ . Par itération de l'équation (1.69), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{pmatrix} = T_n T_{n-1} \dots T_1 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Le comportement asymptotique d'une fonction d'onde générique de conditions initiales  $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$  arbitraires est donc lié au comportement du produit d'un grand nombre de matrices aléatoires  $2 \times 2$ . Le comportement asymptotique d'un tel produit de matrices, aléatoires  $2 \times 2$ , indépendantes, équidistribuées, est caractérisé par l'existence de la limite suivante :

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left( \text{Tr} \prod_{n=1}^N T_n \right) \quad (1.71)$$

La limite  $\gamma$  est appelée exposant de Lyapunov par analogie avec la dynamique non linéaire. Pour le modèle d'Anderson, on montre que la valeur de l'exposant de Lyapunov est strictement positive pour toute valeur de l'énergie  $E$  et de toute distribution d'énergie de sites  $v_n$ . Une fonction d'onde générique évolue donc typiquement en valeur absolue selon :

$$|\ln |\phi_n|| \sim \gamma n, \quad (1.72)$$

c'est à dire exponentiellement avec la distance  $n$ , de même que dans un système dynamique chaotique, l'écart  $|\delta x|$  entre deux trajectoires dans l'espace des phases croît exponentiellement avec le temps :  $|\delta x| \sim e^{\gamma t}$ . Les fonctions propres du hamiltonien  $\mathcal{H}$  dans le cadre de l'approximation aux premiers voisins sont les solutions de l'équation (1.68), la seule solution physique pour la fonction d'onde  $\phi_n$  est la décroissance exponentielle pour  $n \rightarrow \pm\infty$ . Nous obtenons alors l'image d'un électron localisé dont la probabilité de présence décroît selon la loi :

$$|\phi_n|^2 \sim e^{-2\gamma|n-x_G|} \quad (1.73)$$

où  $x_G$  est la position centrale définie comme centre de gravité de la distribution de probabilité de l'électron

$$x_G = \sum_n n |\phi_n|^2. \quad (1.74)$$

L'inverse de l'exposant de Lyapunov est appelé *longueur de localisation*, il s'agit de l'extension spatiale typique d'un état localisé :

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \quad (1.75)$$

Nous venons de montrer que les fonctions d'onde des électrons dans un métal contenant des impuretés sont localisées spatialement. La diffusion spatiale, qui est la règle dans un potentiel périodique, est stoppée par les interférences des fonctions d'onde, soumises aux défauts du potentiel créés par ces impuretés. Ce résultat porte le nom de *localisation d'Anderson* ou de *localisation forte*. Il faut souligner le fait que nous traitons le cas d'un métal, c'est-à-dire que les électrons concernés remplissent partiellement la bande de conduction, la densité d'état électronique  $\rho$  est donc non nulle. Cependant, le phénomène de localisation provoque l'absence de diffusion des électrons<sup>5</sup> et donc le coefficient de diffusion  $D = 0$ . Or la conductivité  $\sigma$ , s'exprime :

$$\sigma = e^2 D \rho \quad (1.76)$$

avec  $e$  la charge de l'électron. La conductivité  $\sigma$  est donc nulle et le métal devient un isolant que l'on nomme "isolant d'Anderson". Le modèle d'Anderson décrit donc une "suppression" de la conductivité due au "désordre diagonal".

### 1.3.2 Équivalence de la localisation d'Anderson et de la localisation dynamique

L'utilisation d'un terme issue de l'étude de la dynamique non linéaire des systèmes chaotiques (l'exposant de Lyapunov) n'est pas anodine et trahit l'existence d'un lien entre la localisation d'Anderson et la localisation dynamique. La fonction d'onde du centre de masse de la particule dans le cadre du kicked rotor joue le rôle de la fonction d'onde électronique dans le modèle d'Anderson. Et la localisation spatiale du modèle d'Anderson est équivalente à la localisation en impulsion dans le kicked rotor. Ce lien a été formellement établi en 1982 par Fishman, Grempel et Prange [16, 17]. Nous proposons maintenant de voir de façon synthétique en quoi ces deux modèles sont semblables.

Pour le kicked rotor, nous avons le hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + K \sin(\hat{x}) \sum_{t=0}^{N-1} \delta(t - n)$$

que nous pouvons réécrire de cette façon :

$$\hat{H} = \mathbb{k} \{ G(\hat{P}) + V(\hat{x}) \sum_{t=0}^{N-1} \delta(t - n) \} \quad (1.77)$$

avec  $G(\hat{P}) = \frac{\hat{P}^2}{2\mathbb{k}}$  et  $V(\hat{x}) = \frac{K \sin(\hat{x})}{\mathbb{k}}$ . En utilisant les opérateurs d'évolution définis dans la partie 1.2.1 qui s'écrivent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{pr}(1) = e^{-i \frac{\hat{P}^2}{2\mathbb{k}}} = e^{-iG(\hat{P})} \\ \hat{U}_{pulse} = e^{-i \frac{K \sin(\hat{x})}{\mathbb{k}}} = e^{-iV(\hat{x})} \end{array} \right. , \quad (1.78)$$

---

<sup>5</sup>L'article fondateur d'Anderson ([11]) porte d'ailleurs le titre "Absence of diffusion in certain random lattices".

nous obtenons des relations de récurrence entre les fonctions d'ondes avant l'application d'un pulse ( $\psi_{n+1}^-$ ) et après l'application d'un pulse ( $\psi_{n+1}^+$ ) :

$$\begin{cases} \psi_{n+1}^-(p) &= e^{-iG(p)}\psi_n^+(p) \\ \psi_{n+1}^+(x) &= e^{-iV(\hat{x})}\psi_{n+1}^-(x) \end{cases}, \quad (1.79)$$

avec  $\psi_n(x) = \sum e^{ipx} \psi_n(p)$ , la fonction d'onde après une période d'évolution s'écrit alors :

$$\psi_{n+1}^+(p) = \sum_g J_{p-g} e^{-iG(g)} \psi_n^+(g) \quad (1.80)$$

avec

$$J_{p-g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx e^{i(p-g)x} e^{-V(x)}$$

Nous pouvons ensuite décomposer la fonction d'onde initiale sur les états de Floquet :

$$|\psi_0\rangle = \sum_j u_j |j\rangle, \quad (1.81)$$

et obtenir des relations semblables aux relations (1.79) pour les coefficients  $u_j$  :

$$\begin{cases} u_j^- &= e^{i\epsilon_j} e^{iG(j)} u_j^+ \\ u^+(x) &= e^{iV(\hat{x})} u^-(x) \end{cases}, \quad (1.82)$$

avec :

$$u_j^+ = e^{i\epsilon_j} \sum_k J_{j-k} e^{iG(k)} u_k^+ \quad (1.83)$$

où  $u_j^-$  et  $u_j^+$  sont respectivement les coefficients de Floquet avant et après l'application d'un pulse. Il faut ensuite utiliser une représentation alternative de l'opérateur  $V(x)$  en utilisant un opérateur  $W(x)$  hermitien défini comme :

$$e^{-iV(x)} = \frac{1 + iW(x)}{1 - iW(x)} \quad (1.84)$$

puis définir :

$$u = \frac{u^+ + u^-}{2} \quad (1.85)$$

on a alors en utilisant (1.82) :

$$\begin{cases} (1 - iW(x)) u(x) = u^-(x) \\ (1 + iW(x)) u(x) = u^+(x) \end{cases}, \quad (1.86)$$

que l'on injecte dans l'équation (A.8) pour obtenir dans l'espace des impulsions :

$$u_m + i \sum_r W_{m-r} u_r = \left\{ u_m - i \sum_r W_{m-r} u_r \right\} e^{-iE_m} \quad (1.87)$$

avec  $u_m$  la représentation de  $u$  dans l'espace des impulsions et  $W_m$  la transformée de Fourier de  $W(x)$ .  $E_m = \epsilon_m + G(m)$ . Cette équation (1.87) peut être réécrite pour

obtenir une équation semblable à l'équation du modèle d'Anderson (1.67) (un calcul détaillé est disponible en annexe A) :

$$T_m u_m + \sum_r W_r u_{m+r} = E u_m \quad (1.88)$$

avec

$$T_m = \tan\left(\frac{E_m}{2}\right) = \tan\left(\frac{\epsilon_m + G(m)}{2}\right) \quad (1.89)$$

et  $E = -W_0$ .  $T_m$  constitue l'énergie du "site d'impulsion"  $m$ ,  $T_m$  n'est pas *stricto sensu* aléatoire, mais ses propriétés statistiques sont très proches des propriétés statistiques d'une séquence de nombres aléatoires puisque  $G(m) \sim \alpha m^2$  (modulo 1) avec  $\alpha$  irrationnel [17], elle est pseudo aléatoire. Le terme  $W_r$  est le taux de transition vers le "site d'impulsion"  $r$ , c'est à dire le couplage entre les classe d'impulsion  $p$  et  $p + r$ . Cette équation établit le lien entre la dynamique quantique du kicked rotor et le modèle d'Anderson de la physique du solide. L'impulsion *quantifiée* du premier jouant le rôle du site cristallin dans le second. La localisation en impulsion du quantum kicked rotor est donc l'équivalent de la localisation spatiale du modèle d'Anderson.

## Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons vu qu'une particule classique dans un potentiel sinusoïdal pulsé est soumise, pour un forçage suffisamment fort, à un régime chaotique. Ce régime chaotique est caractérisé par une *diffusion ergodique* dans l'espace phase et par conséquent par une diffusion en impulsion. La distribution en impulsion d'un ensemble de particules soumises à un tel régime prend une forme gaussienne qui s'élargit en fonction du temps. L'ensemble voit son énergie cinétique croître linéairement en fonction du temps. Ceci constitue la première condition du chaos quantique : un comportement chaotique à la limite classique. Le traitement quantique du même système possède un comportement radicalement différent. Après un temps caractéristique, les effets *d'interférence* prennent le dessus sur la diffusion classique, la fonction d'onde de la particule prend alors une forme d'exponentielle décroissante qui n'évolue plus en fonction du temps. L'énergie cinétique sature et atteint une valeur asymptotique. Ce phénomène porte le nom de localisation dynamique. Enfin, nous avons vu que le phénomène de localisation dynamique est équivalent à un modèle décrivant la propagation des ondes dans un milieu désordonné : le modèle d'Anderson à une dimension. Ce modèle est lui aussi caractérisé par une localisation mais dans l'espace des positions. Nous allons voir au chapitre troisième que l'analogie entre les deux modèles peut être étendue à trois dimensions là où le modèle d'Anderson prédit une transition de phase entre un état localisé et délocalisé.

## Chapitre 2

# Un kicked rotor avec des atomes refroidis par laser

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié de façon théorique et numérique, le comportement du quantum kicked rotor et nous avons vu que celui-ci présentait une localisation dynamique caractérisée par un gel de la diffusion classique et par une forme exponentielle de sa distribution d'impulsion. La première proposition expérimentale pour vérifier la réalité de ce phénomène avec des atomes froids revient à Graham, Schlautmann et Zoller [18] en 1992 où les auteurs proposent de mesurer la déflexion subie par les atomes qui traversent une onde stationnaire. La réalisation d'une expérience proche de cette proposition revient à l'équipe de M. Raizen en 1994 [2] où les auteurs mesurent la distribution en impulsion d'un nuage d'atomes froids soumis à une onde stationnaire modulée en phase. L'année suivante, la même équipe mesure directement la distribution en impulsion d'un nuage d'atomes de césium refroidis soumis à une onde stationnaire pulsée [19] et observe que celle-ci localise effectivement. Cette expérience constitue véritablement la première expérience de kicked rotor. C'est la même expérience qui est reproduite par notre équipe avec néanmoins quelques différences comme dans l'acquisition des distributions en impulsion. Dans ce chapitre, nous décrivons d'abord les divers éléments de l'expérience chaos quantique comme le piège magnéto optique, l'onde stationnaire et en seconde partie, le dispositif de spectroscopie Raman pour mesurer les distributions de vitesse. Puis nous nous attardons sur l'observation expérimentale de la localisation dynamique, les conditions sur les paramètres pour l'obtenir et les effets expérimentaux qui peuvent altérer le phénomène de localisation dynamique.

### 2.1 Atomes froids dans une onde stationnaire

Pour que le caractère quantique du kicked rotor se manifeste, nous avons vu qu'il nous faut des particules dont la longueur d'onde de DE BROGLIE est comparable à la longueur caractéristique du potentiel avec lequel elles sont en interaction :

$$\lambda_{de\ Broglie} = \frac{h}{p} \sim \Lambda. \quad (2.1)$$

Les atomes froids possèdent une telle caractéristique. En effet, ils possèdent une vitesse très faible de l'ordre du cm/s et, en vertu du principe d'HEISENBERG, une



Étape	Réalisation du nuage d'atomes froids	Séquence de pulses de l'onde stationnaire	Spectroscopie Raman et détection
Durée	$\approx 55$ ms	$\approx 7$ ms	$\approx 50$ ms

TAB. 2.1 – Durées typiques des étapes d'une expérience de kicked rotor quantique (l'ordre de réalisation se lit de la gauche vers la droite).

longueur d'onde de DE BROGLIE qui est comparable à la longueur typique du potentiel optique créé par un faisceau laser (de l'ordre de la centaine de nm). Le potentiel avec lequel les atomes froids interagissent dans notre expérience est celui créé par une onde stationnaire dont la période spatiale est de l'ordre de  $3\lambda_{de\ Broglie} \approx 400$  nm. Cette onde stationnaire est pulsée dans le temps ce qui permet de créer un kicked rotor atomique à l'image du modèle des billes placées dans le potentiel sinusoïdal pulsé présenté au chapitre premier.

Nous allons décrire dans cette section le déroulement de la séquence expérimentale résumée dans le tableau 2.1. Elle commence par la production du nuage d'atomes froids via une technique de refroidissement et de piégeage magnéto optique puis continue avec l'application des pulses d'onde stationnaire et se termine par la mesure de la distribution en impulsion du nuage via une technique de vélocimétrie Raman.

### 2.1.1 Le piégeage magnéto-optique

La technique du piégeage magnéto-optique (PMO) est très bien connue [20, 21, 22]. Elle nous permet d'obtenir un nuage, de petite taille ( $\sim 1$  mm<sup>3</sup>), constitué de quelques millions d'atomes à une température d'environ  $3\ \mu$ K. Il est facile de faire interagir ce nuage avec des faisceaux lasers de diamètre ordinaire ( $\sim 1000\ \mu$ m). La distribution en impulsion d'un tel nuage est très étroite et ne couvre que quelques unités d'impulsion normalisées  $P$  et par conséquent que quelques états de Floquet du kicked rotor (voir Chapitre 1). Cette propriété est très intéressante, le phénomène de localisation dynamique apparaît plus rapidement si le nombre d'état de Floquet peuplés par l'état initial est faible (section 1.2.3 du chapitre 1). Dans cette sous section, nous ne faisons qu'une brève introduction à la technique du piégeage magnéto-optique<sup>1</sup>, puis nous donnons les caractéristiques du nuage d'atomes froids obtenu.

Le PMO est constitué d'une cellule cubique (d'arête = 10 cm) de quartz contenant une vapeur de césium à très basse pression ( $10^{-8}$  mbar), placée dans un gradient de champ magnétique créé par deux bobines et irradiée par trois paires de faisceaux lasers rétro-réfléchis (appelés laser PMO) orthogonaux entre eux et se croisant en son centre (figure 2.2). Le point d'intersection de ces faisceaux lasers coïncide avec

<sup>1</sup>Pour le lecteur avide d'informations sur le sujet, l'auteur lui recommande la référence [22].

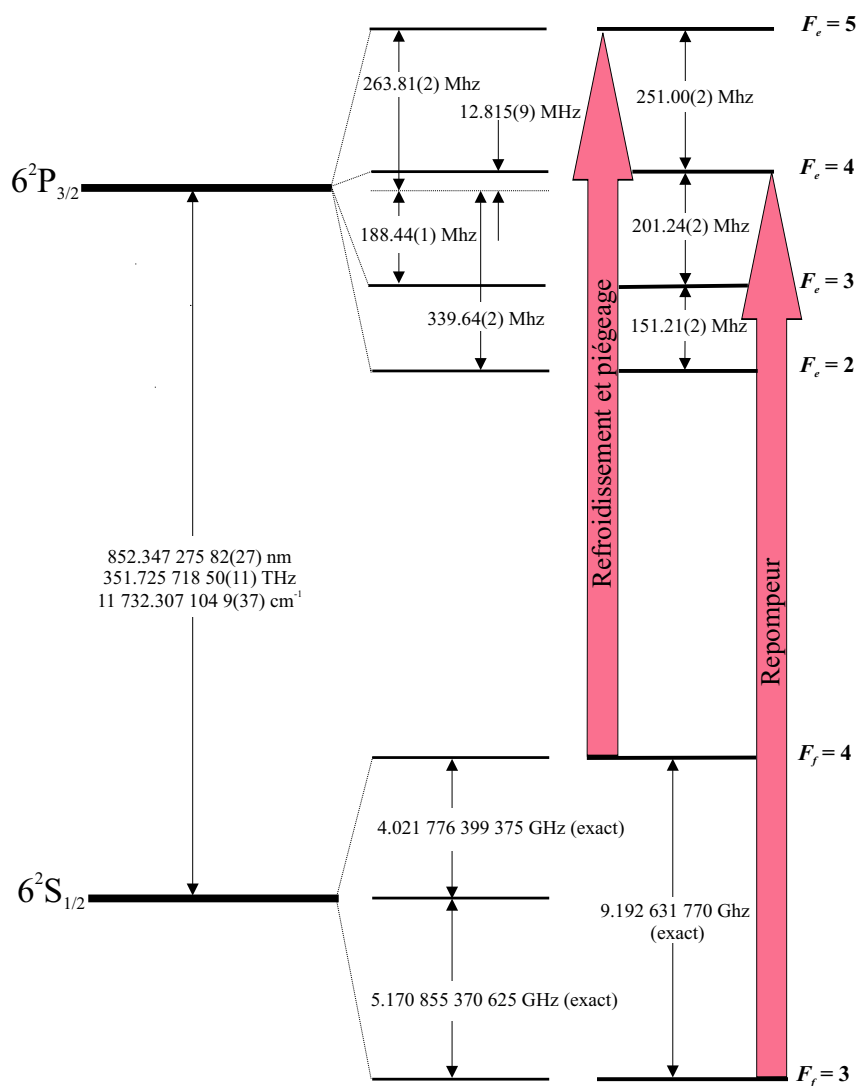


FIG. 2.1 – Niveaux d'énergie de la transition  $D_2$  du césium. Le faisceau piège est accordé à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence de transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ . Le faisceau repompeur est accordé sur la transition  $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$ . Noter que l'échelle des fréquences est différente pour les sous-niveaux fondamentaux et les sous-niveaux excités.

le zéro du champ magnétique engendré par les deux bobines en configuration anti-Helmoltz. De façon plus précise, les bras du PMO sont constitués de deux faisceaux lasers superposés accordés sur la transition  $D_2$  du césium. Le premier est accordé à une fréquence légèrement inférieure à la transition  $|6S_{1/2}; F_f = 4\rangle \rightarrow |6P_{3/2}; F_e = 5\rangle$  (figure 2.1). Sa fonction est de refroidir les atomes via l'effet Doppler et de les piéger au centre de la cellule grâce au couplage avec le champ magnétique. Les nombreux cycles de fluorescence (accompagnés d'échange d'impulsion avec les photons) les ralentissent considérablement. En choisissant judicieusement la polarisation des faisceaux PMO, la levée de dégénérescence des sous-niveaux Zeeman créée par le champ magnétique fait subir préférentiellement aux atomes, la pression des photons qui les poussent vers le centre du piège. Les atomes s'accumulent alors au zéro du champ magnétique qui constitue le centre du PMO. L'ensemble des sous-niveaux excités étant très proches les uns des autres, il existe une probabilité non négligeable que des atomes effectuent la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$  puis relaxent en partie vers l'état  $|F_f = 3\rangle$  (figure 2.1) échappant ainsi à l'interaction avec le premier laser de refroidissement. Pour recycler ces atomes "perdus", nous utilisons le second faisceau laser dit "repompeur" accordé sur la transition  $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$ . Celui-ci réintègre les atomes dans les cycles fluorescences induits par le laser PMO. Sur la figure 2.2, celui-ci est géométriquement confondu avec le laser PMO bien que son origine se trouve dans une diode laser différente du premier. Il faut bien se rendre compte de l'importance de ce second faisceau laser car sans celui-ci, les atomes finiraient par s'accumuler dans l'état  $|F_f = 3\rangle$  échappant ainsi au processus de refroidissement. La température du nuage obtenue est d'environ quelques dizaines de micro-Kelvin.

A la fin de cette séquence de refroidissement Doppler, une nouvelle phase prend le relais appelée phase "Sisyphé" [23, 24]. Cette phase permet d'abaisser encore la température du nuage jusqu'à une température de  $3,3 \mu\text{K}$ . Pendant cette phase, le champ magnétique est coupé, la puissance du laser piège est réduite à 10% de sa valeur initiale et le désaccord de celui-ci passe de façon adiabatique de  $-0,2\Gamma$  à  $-8\Gamma$ . Cette phase qui dure environ 20ms, nous fait perdre la grande majorité des atomes piégés (80%) mais le gain en température est considérable.

Une fois la séquence de refroidissement terminée, la grande majorité des atomes se trouve dans l'état  $|F_f = 4\rangle$ . La distribution en impulsion du nuage est très fine. La largeur de celle-ci qui n'est que de quelques unités d'impulsion  $P$  (figure 2.3) nous donne une température de  $3,3 \mu\text{K}$ . A la fin de la séquence, l'ensemble des faisceaux lasers sont coupés via des modulateurs acousto-optiques et des obturateurs mécaniques (minimisant d'éventuelles fuites). Sous l'action de la gravité, le nuage débute une chute libre et diffuse spatialement.

### 2.1.2 L'onde stationnaire

Une fois le nuage d'atomes froids préparé par le PMO, la phase suivante constitue l'expérience de chaos quantique. Le nuage en chute libre rentre alors en interaction avec le potentiel sinusoïdal pulsé réalisé avec une onde stationnaire (obtenue par rétro-réflexion d'un faisceau laser sur un miroir) pulsée. L'expérience de chaos quantique dure au maximum 7 ms, il s'agit du temps pour lequel l'interaction entre le nuage et l'onde stationnaire horizontale (donc perpendiculaire à la direction de chute) reste constante. Dans cette section, nous allons voir comment le laser crée le

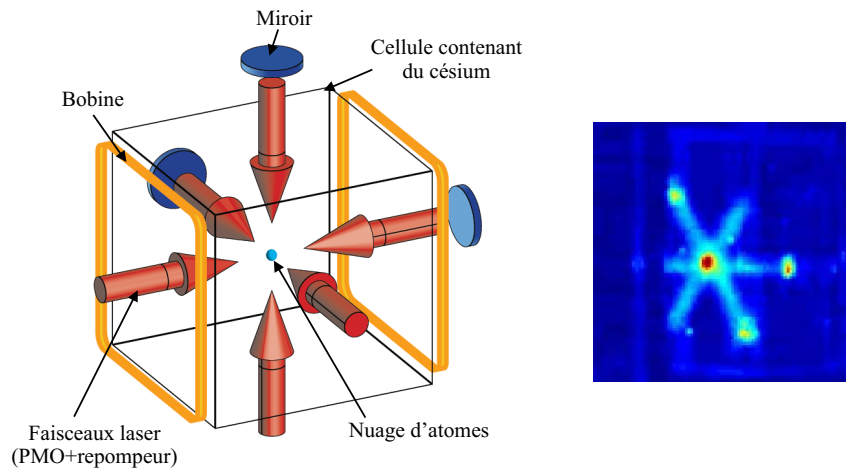


FIG. 2.2 – A gauche une vue schématique du piège magnéto-optique. Les trois faisceaux (contenant les deux radiations piège et repompeur) sont rétro-réfléchis par des miroirs. A leur intersection, qui coïncident avec le zéro du champ magnétique créé par les bobines, se forme le nuage d'atomes froids. A droite, un photographie en fausse couleur du piège prise à l'aide d'une caméra infrarouge. L'intensité (du bleu au rouge) représente l'intensité de la fluorescence, on distingue nettement les trois paires de faisceaux ainsi qu'au centre le nuage.

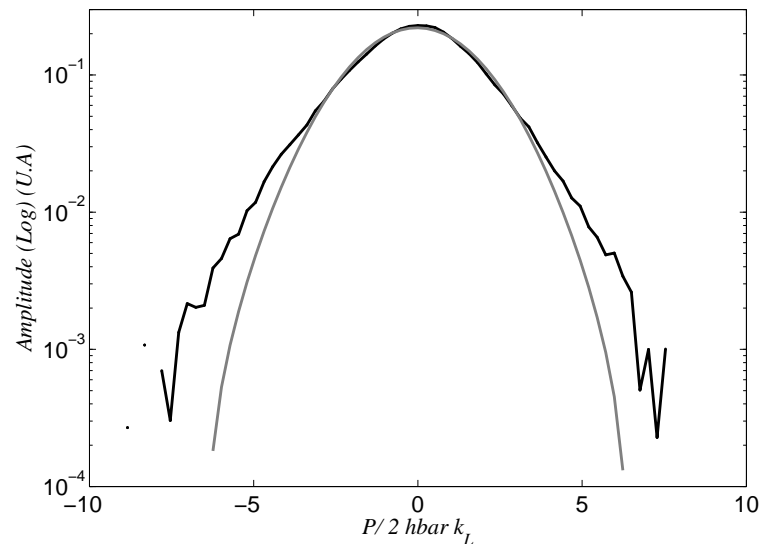


FIG. 2.3 – Distribution en impulsion du nuage issue de piège magnéto-optique (noir). Le profil de celle-ci est gaussien (fit en gris). La température du nuage déterminée à partir de la largeur de la distribution en impulsion est  $\approx 3,3 \mu K$

potentiel sinusoïdal, puis après une description du montage (celui-ci étant différent de celui présenté dans [6]), nous montrerons comment à partir des caractéristiques de notre laser, obtenir les paramètres  $K$  et  $\tilde{k}$  qui caractérisent la dynamique du kicked rotor quantique. Nous terminerons en décrivant les limitations et contraintes imposées à ces paramètres.

### Le potentiel lumineux

Cette partie rappelle rapidement comment une onde stationnaire peut agir sur un nuage d'atomes froids [25, 6] pour réaliser l'équivalent de la particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé présenté au chapitre premier.

Soit un atome à deux niveaux<sup>2</sup> (de fréquence de transition  $\omega_0/2\pi$ ) soumis à deux ondes progressives d'amplitude  $E_0$  et de fréquence  $\omega_L$  se propageant dans deux sens opposés. Le champ qui résulte de l'interférence de ces deux ondes est modulé spatialement :

$$E(z, t) = 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega_L t) \quad (2.2)$$

où  $k = \omega_L/c$ . L'atome se trouve alors dans une onde stationnaire. L'action du champ ainsi créé par les deux faisceaux lasers, pourvu qu'il soit suffisamment loin de la résonance, est de déplacer les niveaux d'énergie de l'atome. Ce déplacement est proportionnel à l'intensité du champ électromagnétique, qui dans notre situation est modulé spatialement, l'atome ressent alors un potentiel périodique :

$$V(z) = V_0 \cos^2(kz) = V_0 \frac{1 + \cos(2kz)}{2} \quad (2.3)$$

avec  $V_0 = 4 |E_0|^2$ .

On peut alors montrer [26, 6] que l'atome placé dans une séquence périodique (à la fréquence  $F$ ) de pulses d'onde stationnaire lumineuse (de fréquence optique  $\omega_L/2\pi$ ), réalise, à condition que la durée  $\tau$  des pulses soit suffisamment courte et que le désaccord  $\delta_L = \omega_L - \omega_0$  soit grand par rapport à la largeur des niveaux ( $\Gamma$ ) (de façon à ce que les effets de la pression de radiation et de l'émission spontanée soient négligeables), un kicked rotor. L'onde stationnaire agit alors comme un potentiel sinusoïdal sur le centre de masse des atomes. La force qui dérive de ce potentiel trouve son origine dans le fait que les atomes échangent des photons et donc de l'impulsion, par processus stimulé, avec l'onde stationnaire. La dynamique du centre de masse des atomes est alors soumise au hamiltonien réduit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + k \cos(\hat{\theta}) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} d(n - n_1), \quad (2.4)$$

où  $n = Ft$ ,  $\theta = 2k_L \hat{z} \{\text{modulo } 2\pi\}$  ( $k_L = 2\pi/\lambda$ , avec  $\lambda$ , la longueur d'onde dans le vide du champ électromagnétique correspondant à deux fois la distance entre deux maxima du potentiel),  $\hat{P} = \frac{2k_L}{mF} \hat{p}$ ,  $k = \frac{8\omega_r}{\hbar F^2} V_0$  ( $V_0 = \frac{\hbar \Omega_R^2}{8\delta_L} = \frac{1}{2}(\hbar\Gamma) \left(\frac{I}{I_s}\right) \left(\frac{\Gamma}{\delta_L}\right)$ ) est le

---

<sup>2</sup>Bien que le césium possède plusieurs états d'énergie, il est possible ici de le réduire, en première approximation, à un atome à deux niveaux, à condition qu'il soit préparé dans un des deux niveaux hyperfins de l'état fondamental (ici  $|F_f = 4\rangle$ ), et que les niveaux excités (répartis sur environ de 500Mhz) soient considérés comme équivalents à un seul état. Ce qui est possible si les sources lumineuses sont très désaccordées par rapport à la transition considérée (plusieurs GHz).

potentiel optique dépendant de la fréquence de Rabi  $\Omega_R$ , avec  $I$  l'intensité laser en  $\text{mW}/\text{cm}^2$ ,  $I_s$  l'intensité de saturation,  $\Gamma$  la durée du niveau excité et  $\hbar\omega_r = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2m}$  est l'énergie de recul),  $\hat{H} = \frac{8\omega_r}{\hbar F^2} \hat{H}'$  et  $d(n - n_1)$  est une fonction représentant un pulse carré (d'aire unitaire) dont la durée en unités réduites est donnée par  $\alpha = F\tau$ .

Dans cette description, le paramètre de stochasticité s'écrit

$$K = \alpha k = \frac{8\omega_r \tau}{\hbar F} V_0, \quad (2.5)$$

et la constante de Planck normalisée :

$$\bar{k} = \frac{8\omega_r}{F}. \quad (2.6)$$

### Le montage

Le montage utilisé pour générer les pulses d'onde stationnaire est représenté sur la figure 2.4. Une diode laser en cavité étendue dite "laser maître" fixe la fréquence  $\omega_L/2\pi$  de l'onde stationnaire. Le faisceau laser issu du laser maître est injecté via un modulateur acousto optique dans un amplificateur optique à semi-conducteur générant un faisceau de puissance élevée ( $\simeq 450\text{mW}$ ) (figure 2.5)<sup>3</sup>. Le spectre de celui-ci est débarrassé de ses composantes résonnantes<sup>4</sup> avec le césium lors du passage à travers deux cellules, d'une longueur d'environ 10 cm, contenant de la vapeur de césium. L'atténuation de ces composantes résonnantes est d'au moins 10 dB pour chacune des cellules. Ensuite le faisceau est injecté dans une fibre monomode qui permet d'acheminer le rayonnement laser jusqu'à la zone d'interaction avec le nuage d'atomes froids (située en réalité sur une table d'optique différente à l'autre extrémité de la salle de manipulation) et de filtrer spatialement le faisceau laser ne laissant que le mode fondamental transverse (gaussien). La sortie de fibre est connectée à un télescope qui permet d'obtenir un faisceau gaussien possédant les caractéristiques suivantes :

- Un profil gaussien en intensité d'une largeur à mi-hauteur égale à  $1490 \pm 10 \mu\text{m}$ .
- Une puissance de 160mW environ dans les conditions de fonctionnement usuelles<sup>5</sup>.

L'onde stationnaire est obtenue par rétro-réflexion sur un miroir situé de l'autre côté de la cellule. Une lentille est placée à une distance  $d \simeq \frac{l}{1+(l/z_R)^2}$  du miroir où  $l$  est la distance focale de lentille ( $l = 150\text{mm}$ ) et  $z_R$  la longueur de Rayleigh du faisceau laser incident. Ce montage assure un recouvrement optimal du faisceau "retour" sur le faisceau "aller". Pour générer les pulses d'onde stationnaire, nous utilisons le modulateur acousto-optique chargé d'injecter l'esclave. C'est donc le signal radio-fréquence qui pilote le modulateur qui est lui même pulsé via un commutateur sur lequel est appliqué un signal TTL de durée  $\tau$  à la fréquence  $F$ . La fréquence  $F$  des pulses est donnée par un générateur basse fréquence et leur durée  $\tau$  fixée par

<sup>3</sup>Ce type de montage porte le nom de "MOPA" pour Master Oscillator Power Amplifier

<sup>4</sup>La présence de lumière résonnante avec une transition du césium est à proscrire. Toute transition résonnante étant suivie de l'émission spontanée d'un photon, processus dissipatif et décohérent, qui détruit le phénomène de localisation dynamique que l'on cherche à observer (voir section 2.4.4 et [27]).

<sup>5</sup>Ces conditions sont un courant d'alimentations de 1,5A pour une puissance maître injectée d'environ 15mW.

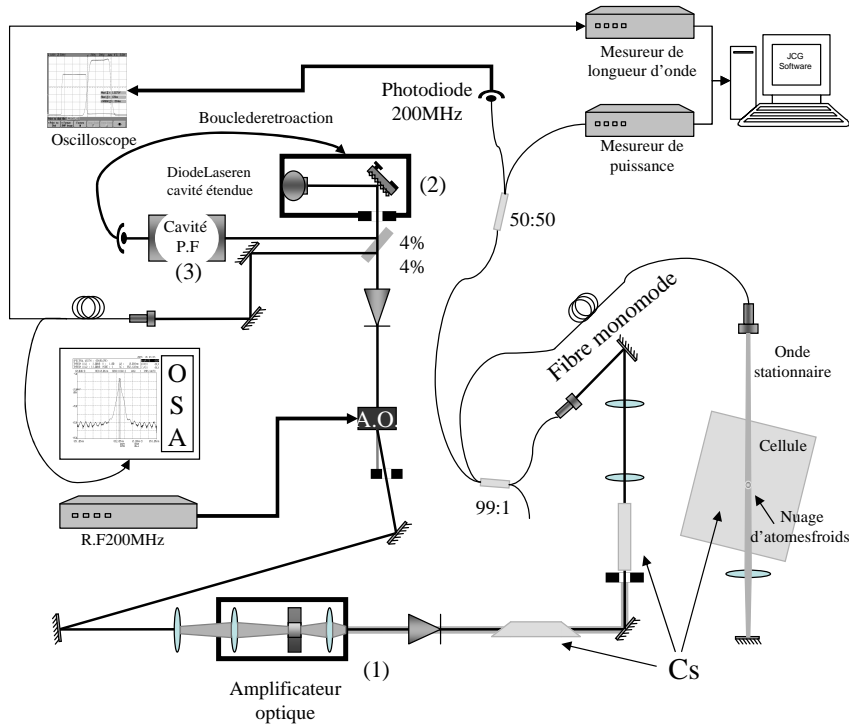


FIG. 2.4 – Schéma du dispositif laser générant l'onde stationnaire. Un amplificateur laser à semi-conducteur de GaAs (1) (de marque Eagleyard) est injecté par un laser maître (2) (diode laser montée en cavité étendue) dont la fréquence centrale est désaccordée  $\delta_L/2\pi$  par rapport à la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ . Ce désaccord est ajustable (sur plusieurs centaines de GHz) en jouant sur la température de la diode (réglage grossier) et sur la longueur de la cavité (réglage fin) via une cale piézoélectrique. La fréquence de cette diode laser est de l'ordre de 352 THz et sa largeur de l'ordre du MHz. Sa stabilité est assurée sur une plage inférieure à 75 MHz par une boucle de rétroaction utilisant le signal de transmission d'une cavité Pérot-Fabry confocale (3) d'intervalle spectral libre de 750 MHz et de finesse supérieure à 10. La fréquence absolue de cette diode est en permanence mesurée par un mesureur de fréquence (Advantest Q8326) qui permet une lecture rapide et directe sur le logiciel qui pilote l'expérience. L'injection du laser maître dans l'esclave amplificateur est assurée par un modulateur acousto-optique permettant de réaliser des pulses d'une durée minimale de 60ns. À la sortie de l'amplificateur, la puissance disponible est d'environ 450mW dans les conditions normales d'utilisations (courant d'alimentation de l'esclave compris entre 1,5 et 1,6 A). Le faisceau issu de l'amplificateur est filtré par deux cellules contenant une vapeur de césium afin d'éliminer les composantes résonnantes avec celui-ci. À la fin du montage, le faisceau est injecté dans une fibre monomode sur laquelle est prélevé 1% de la puissance pour la mesure et le contrôle de la puissance de l'onde stationnaire. À la sortie de la fibre, en direction du nuage, la puissance disponible est d'environ 160mW. Après traversée du nuage, le laser est rétro-réfléchi par un miroir après un passage à travers une lentille située à une distance  $d$  du miroir ( $d$  est très proche de la distance focale de la lentille, le faisceau étant collimaté), assurant le recouvrement du faisceau "retour" avec le faisceau "aller" et créant ainsi l'onde stationnaire dans la cellule du PMO.

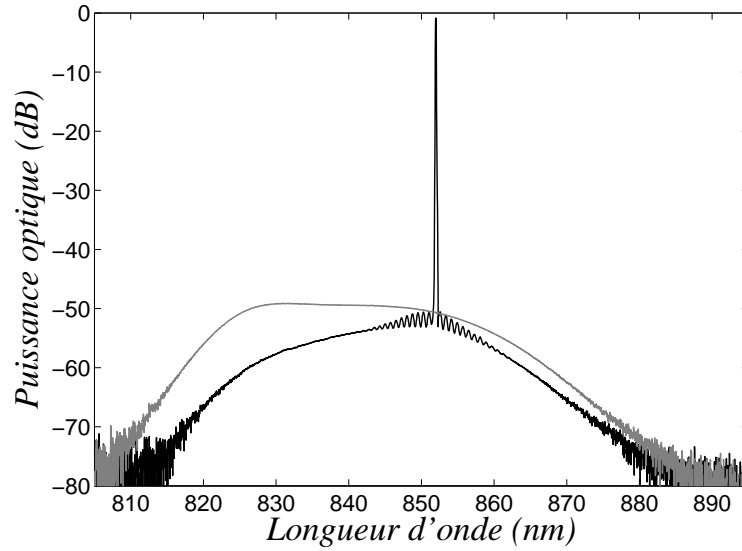


FIG. 2.5 – Spectre du laser esclave avec (noir) et sans injection (gris). Le modulateur acousto-optique qui coupe l'injection du laser esclave par le laser maître assure une coupure d'environ 50 dB entre les pulses d'onde stationnaire.

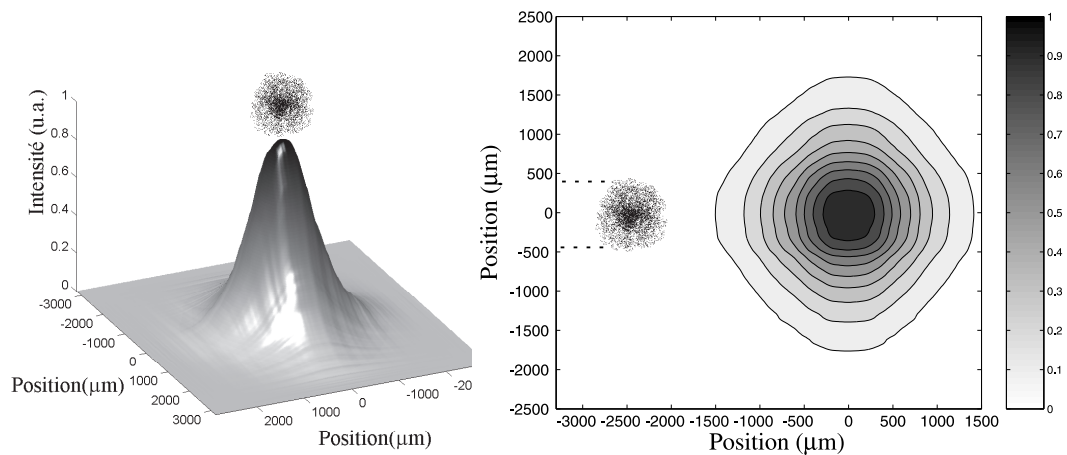


FIG. 2.6 – Profil en intensité de l'onde stationnaire comparée à la taille du nuage d'atomes froids. Les dimensions du nuage d'atomes froids ( $\sim 1$  mm) sont inférieures à celle de l'onde stationnaire (1,5 mm). Une telle géométrie implique que 75% des atomes soient soumis à au moins 75% de l'intensité lumineuse maximale.



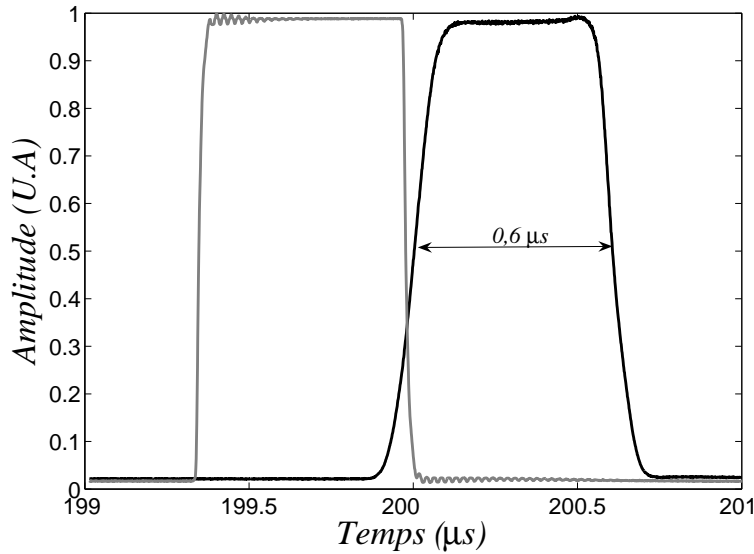


FIG. 2.7 – *Le pulse de radio fréquence appliqué au modulateur acousto-optique suivi du pulse laser en sortie de fibre qui en résulte. Leur durée est de 600 ns. Les temps de montée et de chute sur le pulse optique (25 ns) sont les temps imposés par l'esclave.*

un monostable. Les pulses optiques ainsi générés possèdent une durée généralement comprise entre 0,5 et  $1\mu\text{s}$  avec un temps de montée et de chute de l'ordre de 25 ns (figure 2.7). Lorsque le signal bloque l'injection de l'esclave, la coupure est d'environ 50 dB (figure 2.5). Bien qu'une partie du rayonnement issu de l'esclave (libre alors) soit injectée dans la fibre, celui-ci, en tant que source d'émission spontanée, n'a qu'un effet négligeable sur la dynamique du kicked rotor (la puissance du faisceau, alors inférieure au  $\mu\text{W}$ , est répartie sur une largeur spectrale d'environ 100 nm, de plus il subit le filtrage des deux cellules de césium).

### Détermination des valeurs expérimentales de $K$ et $\tilde{k}$

A l'aide des paramètres de l'onde stationnaire vus plus haut nous pouvons évaluer le paramètre de stochasticité  $K$  à partir de l'intensité lumineuse ressentie par les atomes.

La valeur de  $K$  donnée directement à partir de l'intensité  $I$  du laser par l'équation (2.5) nécessite d'être corrigée car l'intensité  $I$  ressentie par les atomes du nuage n'est pas celle que nous mesurons à la sortie de l'objectif et cela pour plusieurs raisons :

- La cellule qui contient la vapeur de césium possède des faces en verre qui sont traitées anti-reflet seulement sur l'extérieur de celle-ci. Nous avons donc une perte de  $3 \times 4\%$  (aller première face puis aller-retour seconde face).
- La largeur du faisceau au niveau de la zone d'interaction avec le nuage est légèrement supérieure à celle mesurée à la sortie de l'objectif d'environ  $10\% \pm 1\%$ .
- Le profil transverse en intensité est gaussien. Le nuage est donc illuminé de façon inhomogène par l'onde stationnaire. L'intensité ressentie est différente

Paramètres	Fréquence ( $F$ )	Durée des pulses ( $\tau$ )	Désaccord ( $\delta_L/2\pi$ )	Puissance ( $I$ )
Gamme d'utilisation	20 – 75kHz	0,4 – 1,2 $\mu$ s	9 – 21Ghz	60-200mW

TAB. 2.2 – Gamme d'utilisation courante des quatre principaux paramètres de notre expérience. Toutes les combinaisons ne sont pas souhaitables (le nombre d'émissions spontanées pouvant être trop élevé). Généralement, nous touchons peu à la puissance laser qui reste fixée aux alentours de 160mW. Nous jouons plutôt sur la durée  $\tau$  et le désaccord  $\delta_L$  pour obtenir la valeur de  $K$  souhaitée. Usuellement,  $6 < K < 15$ , et  $1,44 < \bar{k} < 4,53$ .

pour chaque atome du nuage. On peut définir alors une intensité moyenne ressentie sur l'ensemble du nuage comme :

$$I_{moy} = \int I(r, \phi) \rho(r, \phi) dr d\phi \quad (2.7)$$

où  $I(r, \phi)$  est l'intensité de l'onde stationnaire dans le plan transverse à la direction de propagation de l'onde stationnaire et  $\rho(r, \phi)$  la densité atomique normalisée du nuage dans ce même plan transverse. Cette équation se simplifie facilement et on obtient un facteur correctif de 0,8.

En définitive, l'intensité laser moyenne réellement perçue par les atomes  $I_L$  :

$$I_L = (0,6 \pm 0,05) \times I_{max} \quad (2.8)$$

Il faut donc prendre garde vis-à-vis de la mesure de l'intensité en sortie de fibre pour obtenir la valeur de  $K$ . En pratique, celle-ci est faite grâce à un prélèvement de 1% sur la fibre qui achemine le faisceau de l'onde stationnaire jusqu'au piège. La puissance ainsi prélevée est lue par un mesureur de puissance qui transmet l'information à l'ordinateur. Celui-ci détermine alors la valeur de  $K$ .

### 2.1.3 Gamme de paramètres expérimentaux accessibles

En plus des limitations imposées par le matériel (durée de l'expérience, puissance de l'onde stationnaire) l'observation de la localisation dynamique repose sur des critères, nous l'avons vu au chapitre précédent, de chaoticité et de quanticité. Ces critères imposent des restrictions supplémentaires sur la gamme des paramètres utilisables par l'expérimentateur. Les points sur lesquels il faut veiller sont donc :

1. La quanticité impose  $\bar{k} \gtrsim 1$  cependant, si  $\bar{k} = \pi n$  avec  $n$  entier un régime de résonances quantiques apparaît [9] et la localisation dynamique disparaît.
2. Une autre condition nécessaire à l'observation de la localisation dynamique est la chaoticité. Il faut donc veiller à ce que  $K > 5$ , ce qui impose des restrictions sur l'intensité de l'onde stationnaire  $I_L$ , son désaccord  $\delta_L/2\pi$  et la durée  $\tau$  des pulses.

Nous allons voir que toutes les combinaisons du tableau 2.2 ne sont pas souhaitables. De plus, des effets expérimentaux décrits dans la section suivante vont restreindre encore la gamme des paramètres.

## 2.2 Mesure de la distribution en impulsion

Une fois le cycle de l'expérience de chaos quantique terminé, nous devons mesurer la distribution en impulsion du nuage atomique. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir la distribution de vitesse d'un gaz atomique froid. La plus courante est la méthode par temps de vol. Elle consiste à laisser chuter un nuage d'atomes froids au travers d'un faisceau laser résonnant et de recueillir le signal d'absorption sur une photo-diode. Le signal obtenu donne alors la distribution en impulsion verticale du nuage après "un temps de vol" donné [28]. Cette méthode n'est pas du tout adaptée à notre expérience puisque que la distribution en impulsion qui nous intéresse est horizontale. L'équipe de Mark Raizen utilise une technique d'imagerie à l'aide d'une caméra CCD [2, 19]. Après une chute d'une vingtaine de millisecondes, une image du nuage, figé dans une mélasse Sisyphé, est enregistrée. De la distribution spatiale de celui-ci avant et après la séquence de pulses, on déduit la distribution en impulsion de celui-ci. Nous utilisons une mesure de la distribution d'impulsion à l'aide de transitions atomiques. Pour cela nous utilisons des transitions sélectives en vitesse : des transitions Raman stimulées, créées par des faisceaux lasers contre-propageants [29]. Cette méthode consiste à irradier le nuage par des pulses lasers de durée  $\tau_R$  qui transfèrent, de façon sélective en vitesse, les atomes d'un niveau atomique vers un autre de manière cohérente via un processus à deux photons de type Raman. Les avantages d'une telle méthode sont principalement sa résolution (selon le degré de perfectionnement, celle-ci varie de  $v_{recul}/2$  [30, 31] à  $v_{recul}/50$  [32] ou Annexe D). De plus, le même montage peut servir à d'autres fins comme le refroidissement sub-recul [33, 34] ou la sélection de classe de vitesse [35]. Après avoir exposé le principe de la transition Raman stimulé pour la sélection d'une classe d'impulsion, nous décrivons rapidement le montage utilisé et ses performances.

### 2.2.1 Principe de la mesure de vitesse

Une transition Raman stimulée est un processus à deux photons dans lequel un atome effectue une transition entre deux niveaux d'énergie en absorbant un photon d'un premier faisceau laser, puis en émettant un autre photon, de façon stimulée, dans un second faisceau laser. Dans le cas où les deux faisceaux lasers se propagent dans la même direction et dans le même sens, on parle alors de faisceaux co-propageants (figure 2.8), la transition est alors insensible à la vitesse de l'atome. Lorsque les deux faisceaux lasers se propagent dans des sens opposés (figure 2.9), on parle alors de faisceaux contre-propageants. Dans ce cas, la transition est sensible au décalage Doppler induit par la vitesse de l'atome. C'est cette configuration contre-propageante que nous allons utiliser pour la mesure de vitesse.

Nous pouvons écrire dans le référentiel du laboratoire la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion lors d'une transition Raman stimulée pour un atome de masse  $m$  et de vitesse initiale  $\vec{v}_i$  dans l'état  $|F_1\rangle$  :

$$E_1 + \frac{1}{2}mv_i^2 + \hbar\omega_{R1} = E_2 + \frac{1}{2}mv_f^2 + \hbar\omega_{R2} \quad (2.9)$$

$$m\vec{v}_i + \hbar\vec{k}_{R1} = m\vec{v}_f + \hbar\vec{k}_{R2} \quad (2.10)$$

où  $E_{1,2}$  les énergies des niveaux  $|F_{1,2}\rangle$ ,  $\vec{v}_f$  est la vitesse finale de l'atome,  $\omega_{R1,2}$  les

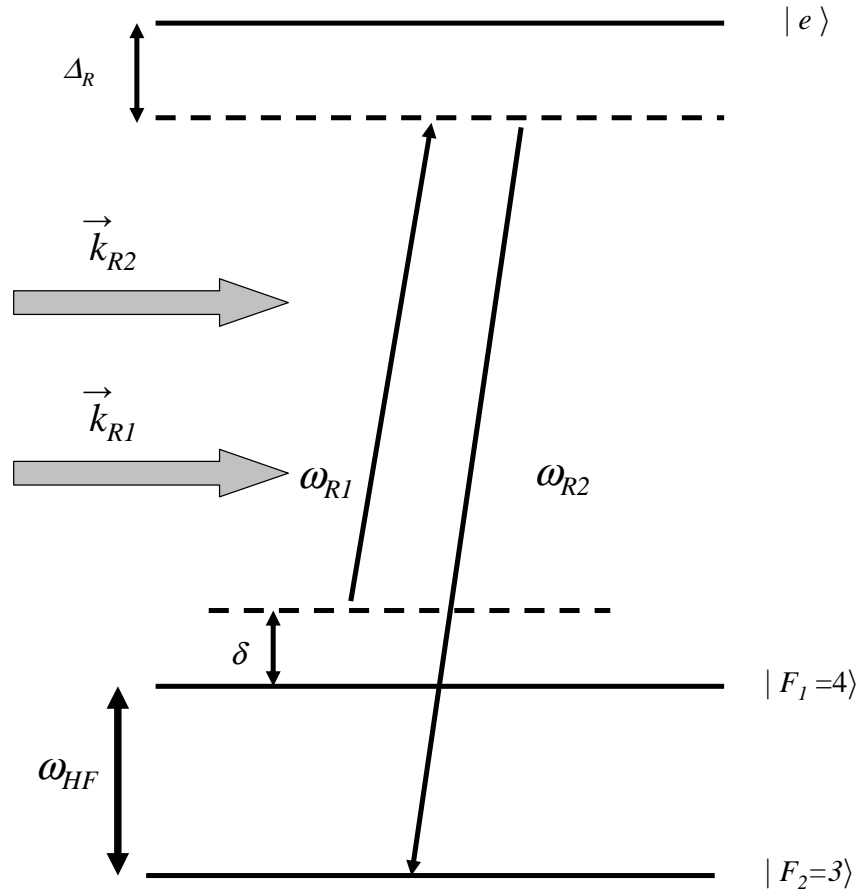


FIG. 2.8 – Principe de transition Raman en configuration co-propageante. L'atome à trois niveaux (deux sous-niveaux hyperfins :  $|F_1 = 4\rangle$ ,  $|F_2 = 3\rangle$  séparés de  $\hbar\omega_{SHF}$  et un niveau excité  $|e\rangle$ ) initialement dans l'état  $|F_1 = 4\rangle$  reçoit un premier photon de pulsation  $\omega_{R1}$  qui le place dans un état virtuel désaccordé de  $\Delta_R$  du niveau excité  $|e\rangle$ , il émet alors un second photon sous l'action stimulée d'un photon de pulsation  $\omega_{R2}$  et parvient dans le niveau  $|F_2 = 3\rangle$ . La condition de résonance est  $\delta = 0$ .

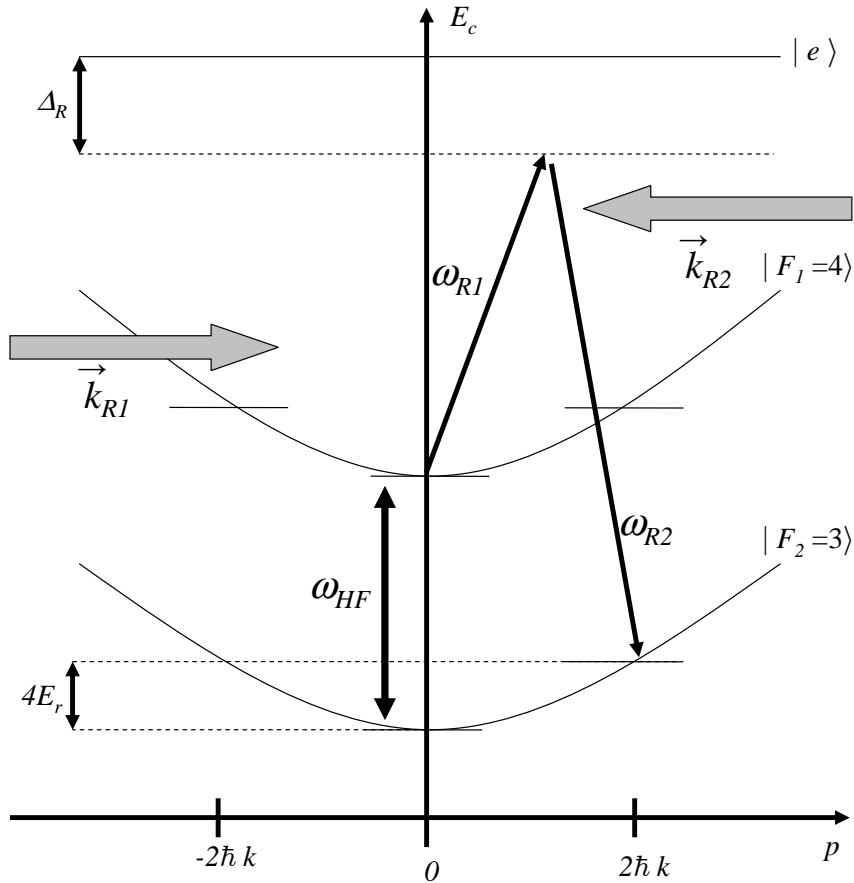


FIG. 2.9 – Principe de la vélocimétrie Raman. L'atome à trois niveaux (deux sous-niveaux hyperfins :  $|F_1 = 4\rangle$ ,  $|F_2 = 3\rangle$  séparés de  $\hbar\omega_{SHF}$  et un niveau excité  $|e\rangle$ ) est "habillé" de son énergie cinétique. Un atome à vitesse nulle se trouve dans l'état  $|F_1 = 4\rangle$ , il reçoit un photon de pulsation  $\omega_{R1}$  et un recul de  $\hbar\vec{k}_{R1}$ , puis il émet un photon de façon stimulée de pulsation  $\omega_{R2}$  accompagné d'un recul de  $\hbar\vec{k}_{R2}$ . Il se trouve alors dans  $|F_2 = 3\rangle$  avec une impulsion de  $2\hbar\vec{k}$ .

pulsations des faisceaux lasers de vecteurs d'onde  $k_{R1,2}^{\vec{}}$ . Nous appelons  $\delta$  le désaccord "Raman" qui est défini comme la différence entre les pulsations des deux faisceaux Raman  $\omega_{R1}$  et  $\omega_{R2}$  et la pulsation de la transition entre les deux niveaux hyperfins considérés  $|F_1\rangle$  et  $|F_2\rangle$  (ici, pour le césium  $|6S_{1/2}; F=4\rangle$  et  $|6S_{1/2}; F=3\rangle$ ) :  $\delta = \omega_{R1} - \omega_{R2} - \omega_{SHF}$ . Nous pouvons établir à partir de (2.9) et (2.10), la condition de résonance sur le désaccord  $\delta$  de la transition :

$$\delta = \left( k_{R1}^{\vec{}} - k_{R2}^{\vec{}} \right) \left( \vec{v}_i + \frac{\hbar}{2m} \left( k_{R1}^{\vec{}} - k_{R2}^{\vec{}} \right) \right) \quad (2.11)$$

Le premier terme de la seconde parenthèse de cette équation correspond à l'effet Doppler et le second à l'effet de recul. Lorsque les faisceaux sont en configuration co-propageante comme sur la figure 2.8, nous avons  $k = k_{R1} \approx k_{R2}$ , la condition (2.11) devient  $\delta = 0$ . Tous les atomes indépendamment de leur vitesse effectueront la transition avec la même probabilité. Lorsqu'on utilise la configuration contre-propageante comme sur la figure 2.9, seuls les atomes possédant une certaine vitesse vont effectuer une transition. Par exemple, si l'on veut sélectionner les atomes de vitesse nulle ( $\vec{v}_i = \vec{0}$ ), le faisceau 2 doit avoir un décalage par rapport à la transition hyperfine  $\omega_{SHF}$  de  $4E_{recul}/\hbar$  où  $E_{recul} = \hbar^2 k^2 / 2m$  ( $k = k_{R1} \approx k_{R2}$ ) est l'énergie de recul. L'énergie de recul correspond à la variation d'énergie reçue par l'atome lorsque celui absorbe un photon. De façon équivalente, on définit la vitesse de recul  $v_{recul}$ , la variation (en valeur absolue) de vitesse subie par l'atome lors de ce processus. Pour mesurer la distribution en impulsion de notre nuage, nous utilisons donc des pulses Raman de durée  $\tau_R$  avec des faisceaux lasers en configuration contre-propageante. Ces pulses vont transférer de façon sélective en vitesse, les atomes du niveau  $|6S_{1/2}; F_f = 4\rangle$  vers le niveau  $|6S_{1/2}; F_f = 3\rangle$ . Les deux niveaux impliqués dans cette transition ont une durée de vie importante ce qui permet de réaliser un couplage cohérent suffisamment long pour obtenir des transitions très fines en largeur. Nous pouvons donc sélectionner les atomes sur une certaine classe de vitesse de largeur  $\Delta v$  autour de la vitesse  $v_i$  choisie.

L'équation (2.11) ne fait pas apparaître directement de résolution limite  $\Delta v$  à la sélection d'une classe de vitesse. La résolution, c'est à dire la largeur de la classe de vitesse sélectionnée, est donc en principe donnée par un critère de type Fourier puisqu'aucune largeur naturelle n'intervient dans le processus à deux photons. En réalité, l'existence de sous-niveaux Zeeman complique l'affaire. La levée de dégénérescence de ces niveaux en présence d'un champ magnétique constitue une source d'élargissement inhomogène. Afin d'empêcher cette levée de dégénérescence de se produire, il faut réduire au maximum tout champ magnétique<sup>6</sup>. La technique la plus courante est le blindage magnétique "mu-métal" surtout utilisée dans les expériences d'horloge atomique [36] mais cette technique a le défaut de limiter de façon drastique l'accès optique. La méthode que nous utilisons est celle de la compensation active du champ magnétique. Des bobines placées autour de la cellule sont chargées de mesurer les fluctuations du champ magnétique au centre de celle-ci. Une boucle de rétroaction se charge alors d'appliquer un courant dans des bobines placées dans les trois directions de l'espace autour du PMO afin de compenser le champ magnétique mesuré [30, 31]. Cette méthode qui laisse un accès optique maximum (figure

<sup>6</sup>Un champ équivalent à 10% du champ magnétique terrestre suffit à dégrader la résolution jusqu'à  $10v_{recul}$  !

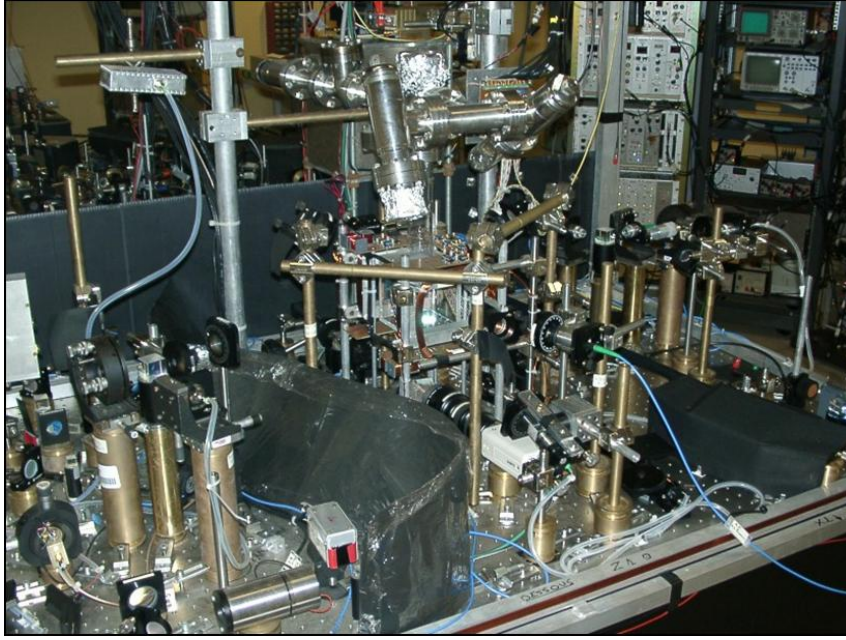


FIG. 2.10 – Vue d’ensemble de la partie piège de l’expérience. Au centre, la cellule de césium avec autour les différents éléments (optique, bobines...).

2.10) permet d’obtenir une résolution très satisfaisante de  $v_{recul}/2$ . Il est possible de pousser la résolution de la vélocimétrie Raman jusqu’à sa limite ultime (la limite Fourier) en polarisant les atomes dans un sous niveau Zeeman spécifique très peu sensible au champ magnétique<sup>7</sup> le niveau  $|F_f; m_F = 0\rangle$ . Cette technique, n’ayant pas été utilisée pour les résultats sur le chaos quantique présentés dans ce mémoire, est hors de propos ici. Néanmoins sa mise au point, accomplie pendant ce travail de thèse, est détaillée dans l’annexe D.

La durée du pulse Raman  $\tau_R$  appliqué pour la sélection de la classe de vitesse joue un rôle dans la proportion d’atome transférée par les processus à deux photons. Elle est maximale pour un pulse “ $\pi$ ” tel que :

$$\tau_R |\Omega_{eff}| = \pi \quad (2.12)$$

où

$$\Omega_{eff} = -\frac{\Omega_{R1}\Omega_{R2}^*}{2\Delta_R} \quad (2.13)$$

est la pulsation de Rabi effective des deux faisceaux Raman exprimée en fonction des pulsations de Rabi  $\Omega_{R1}$  et  $\Omega_{R2}$  de chacun des faisceaux et du désaccord  $\Delta_R$  par rapport à la transition vers le niveau excité ( ici la transition  $D_2$  du césium). Pour obtenir, la meilleure résolution et la plus grande proportion d’atomes transférés, on choisira la durée du pulse  $\tau_R$  la plus longue qui respecte la condition du pulse  $\pi$ .

La figure 2.11 décrit le principe de la mesure Raman et la figure 2.12 illustre la configuration géométrique des divers faisceaux impliqués autour du nuage dans

<sup>7</sup>Nous entendons par là que la résolution imposée par la limite Fourier est nettement supérieure à tout autre effet dans la gamme de la durée de pulse Raman envisageable (au maximum d’une dizaine de milliseconde).

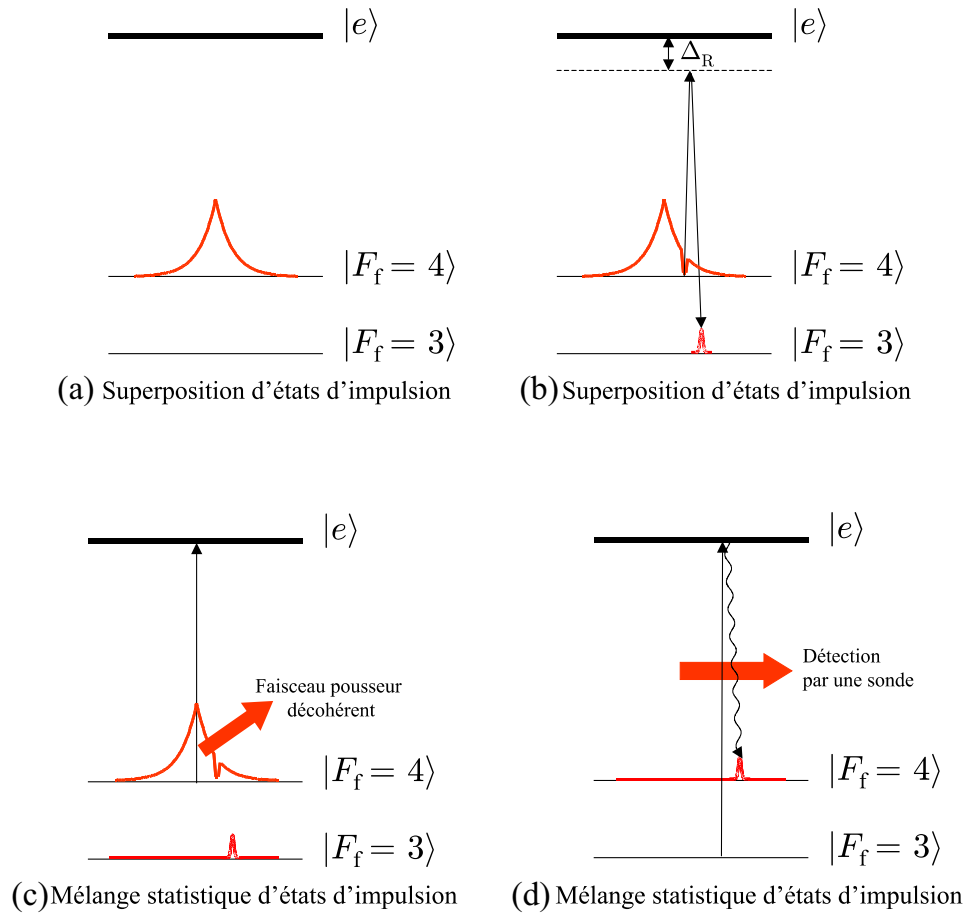


FIG. 2.11 – Principe de la mesure de vitesse. L'ensemble des atomes se trouve dans un l'état  $|F_f = 4\rangle$ , un pulse Raman sélectionne une classe d'impulsion en la transférant dans l'état  $|F_f = 3\rangle$ , l'ensemble est dans une superposition d'état cohérent entre  $|F_f = 4\rangle$  et  $|F_f = 3\rangle$ . Puis un faisceau décohérent et pousseur expulse les atomes dans l'état  $|F_f = 4\rangle$  hors de la zone de détection. Le faisceau repompeur replace les atomes de  $|F_f = 3\rangle$  dans  $|F_f = 4\rangle$  afin qu'il puissent être sondés par le faisceau sonde.



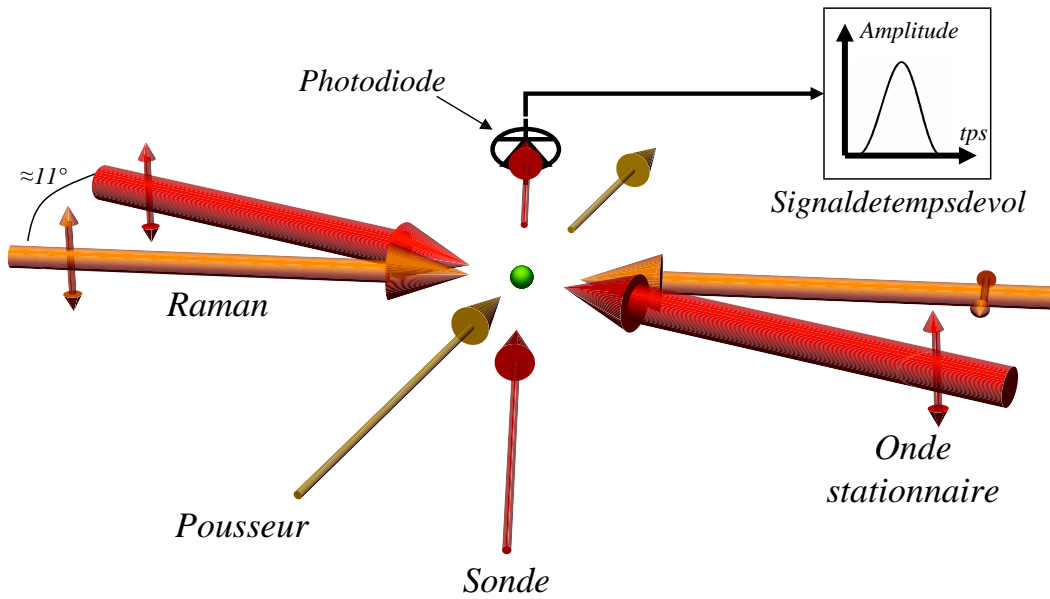


FIG. 2.12 – Configuration des faisceaux lasers impliqués dans le processus Raman. Après l’application de l’onde stationnaire (en rouge), les faisceaux Raman (en orange) sélectionnent la classe d’impulsion désirée. Puis, le faisceau Pousseur (en jaune) expulse les atomes non sélectionnés hors de la zone de détection. Enfin, les atomes restant (en chute libre) traversent le faisceau sonde (en beige). Le signal d’absorption est recueilli sur la photodiode à l’arrière plan qui fournit un signal de temps de vol.

le processus de la mesure Raman. Un pulse Raman transfère la classe de vitesse voulue du niveau  $|F_f = 4\rangle$  vers le niveau  $|F_f = 3\rangle$ , l’atome se trouve dans une superposition d’états entre les états de classe de vitesse sélectionnée sur  $|F_f = 3\rangle$  et les états d’impulsions indésirables restés sur  $|F_f = 4\rangle$ . L’étape suivante consiste à se débarrasser des atomes restés sur  $|F_f = 4\rangle$ . Un faisceau appelé “pousseur” est chargé de ce travail. Ce faisceau accordé sur la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  se propage dans une direction perpendiculaire à l’onde stationnaire et aux faisceaux Raman. Il brise alors la cohérence qui lie les états  $|F_f = 3\rangle$  et  $|F_f = 4\rangle$  (nous n’avons alors plus qu’un mélange statistique des deux états) et pousse hors du champ de détection les atomes de  $|F_f = 4\rangle$ , ne laissant que ceux de  $|F_f = 3\rangle$ . Enfin le faisceau repompeur se charge de replacer les atomes de  $|F_f = 3\rangle$  dans  $|F_f = 4\rangle$  afin qu’un faisceau appelé “sonde” accordé sur  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  les sonde par absorption. Le signal d’absorption, recueilli sur une photodiode est transféré à l’ordinateur qui l’intègre dans le temps afin d’obtenir un signal (de temps de vol) proportionnel au nombre d’atomes présents dans la classe de vitesse sélectionnée.

### 2.2.2 Description du montage Raman

Afin de réaliser des transitions Raman entre les deux niveaux hyperfins  $|F_f = 4\rangle$  et  $|F_f = 3\rangle$ , nous avons besoin de deux faisceaux lasers puissants dont la séparation en fréquence doit être contrôlable. Il existe plusieurs méthodes pour générer de tels faisceaux, par exemple en modulant un seul faisceau via un modulateur électro-

optique [37, 38], l'asservissement en phase de deux diodes laser directement séparés de la fréquences souhaitée [39] ou encore la séparation en fréquence via un modulateur électro-optique haute fréquence de deux diodes asservies en phase. La méthode utilisée sur notre expérience pour générer ces deux faisceaux Raman mise en place pendant la thèse de J. Ringot [31, 40] est originale, elle est basée sur une modulation directe du courant d'une diode laser maître à la fréquence souhaitée [40]. La puissance nécessaire, pour transférer un grand nombre d'atomes d'un niveau à un autre de façon cohérente (les faisceaux lasers sont fortement désaccordés de la transition résonante vers le niveau excité ( $\Delta_L = 300$  GHz)) en un minimum de temps, est délivré par des diodes lasers esclaves injectées par la diode maître. Nous renvoyons à la thèse de J. Ringot [31] pour un exposé détaillé du principe de fonctionnement du montage représenté sur la figure 2.13 et rapidement décrit dans cette section.

Une diode laser maître est alimentée via un T de polarisation comportant deux entrées : l'une pour le courant continu qui l'alimente, l'autre pour un signal micro-onde de pulsation  $\omega_m = \omega_{SHF}/2$  contrôlable par l'ordinateur qui pilote l'expérience. La fréquence principale  $\omega_R/2\pi$  de cette diode est désaccordée de  $\Delta_R/2\pi = 300$  GHz de la transition  $D_2$  du césium. La diode est asservie à l'aide d'une cavité Perot Fabry semblable à celle utilisée sur le montage de l'onde stationnaire. En plus de cette fréquence porteuse, deux fréquences supplémentaires (les bandes latérales) sont générées par la modulation à  $\omega_m$  :  $\omega_{R1} = \omega_R + \omega_m$  et  $\omega_{R2} = \omega_R - \omega_m$ . Ces deux fréquences sont donc distantes de  $2\omega_m = \omega_{SHF}$ .

Le faisceau issue de la diode laser maître comportant les trois fréquences ( $\omega_R, \omega_{R1}$  et  $\omega_{R2}$ ) passe deux fois par un réseau de diffraction blasé pour obtenir un rendement de diffraction maximum sur l'ordre 2. Cet élément facilite l'injection de l'une ou l'autre des bandes latérales dans des diodes lasers esclaves. Il a pour effet de séparer spatialement les trois fréquences. Cette séparation (angulaire) est suffisante pour pouvoir discriminer les trois bandes lors de l'injection des deux diodes laser esclaves. Les miroirs chargés de faire pénétrer le faisceau maître dans les esclaves permettent de faire laser ceux-ci sur l'une ou l'autre des bandes par simple rotation de quelques dizaines de secondes d'arc.

Afin de vérifier en permanence que l'injection des deux esclaves est bien réalisée et stabilisée, un prélèvement de lumière sur chacun d'eux permet de réaliser un battement sur une photodiode rapide. Le battement de fréquence  $\omega_{SHF}$  possède une largeur de 1Hz qui est la limite en résolution de l'analyseur de spectre utilisé.

Des modulateurs acousto-optiques, placés sur le trajet *in aero* des faisceaux, se chargent de leurs coupures et du passage de la configuration contre-propageante à la configuration co-propageante<sup>8</sup>. Finalement, les deux faisceaux esclaves sont acheminés via des fibres optiques jusqu'à la zone d'interaction avec le nuage d'atomes froids. En sortie de fibre, une puissance de 13,5 mW est disponible sur un faisceau gaussien de largeur à mi hauteur comparable à la taille du nuage d'atomes refroidis.

---

<sup>8</sup>La configuration Raman co-propageante permet le réglage de la partie continue de la compensation de champ magnétique. Plus d'informations à ce sujet sont disponibles dans [30] ou dans la thèse de Jean Ringot [31].

### 2.2.3 Performances

La durée du pulse Raman  $\tau_R$  nécessaire à réaliser la condition du pulse  $\pi$  est déterminée expérimentalement en balayant la valeur de  $\tau_R$  pour obtenir le signal maximum. L'équation (2.13) représentant une condition idéale ne prend pas en compte l'inhomogénéité des faisceaux Raman ni la répartition des atomes dans les différents niveaux Zeeman. De plus pour obtenir, un signal atomique plus élevé nous utilisons une technique de chirp qui consiste à balayer le désaccord  $\delta$  sur une plage déterminée *pendant* l'application du pulse Raman. Ceci a pour effet de dégrader la résolution mais nous permet de sélectionner un plus grand nombre d'atomes augmentant ainsi le signal. Cette plage de fréquence est typiquement de 80 kHz.

Pour obtenir la totalité de la distribution en impulsion du nuage, il suffit de répéter le processus de sélection en vitesse décrit plus haut autant de fois que nécessaire en changeant le désaccord  $\delta$ . De façon générale, pour obtenir celle-ci, moins d'une minute est nécessaire (environ 100 points avec moins d'une demie seconde pour obtenir un point). Toutefois, dans des conditions particulières d'expériences, nous avons recours au moyennage sur plusieurs points ou courbes et la durée pour obtenir la distribution en impulsion du nuage peut augmenter de façon importante. De plus, des fluctuations sur la population du nuage, les pertes en atomes dûes à l'onde stationnaire par émission spontanée ou par effet pousseur nécessitent des mesures correctives. Nous sommes parfois amenés en plus de la mesure Raman à mesurer le signal de fond d'émission spontanée (voir section 2.4) et la population du nuage pour chaque mesure afin de s'affranchir de ce type de fluctuations. Cependant, un rapport signal (au signal maximum) sur bruit de 50 au minimum est facile à obtenir.

## 2.3 Observation de la localisation dynamique

### 2.3.1 Distribution en impulsion

La forme de la distribution en double exponentielle est, nous l'avons vu au chapitre précédent, une signature caractéristique de la localisation dynamique. Il s'agit d'une caractéristique fiable, la forme exponentielle ne pouvant être attribuée qu'à des effets quantiques (par exemple un piégeage trivial dans un îlot de stabilité de l'espace des phases ne donne pas une telle forme de distribution). Nous avons choisi des paramètres expérimentaux qui nous assurent de façon théorique l'observation de la localisation au bout d'une dizaine de pulses d'onde stationnaire :

- $K \approx 7$  assure que la dynamique à la limite classique est chaotique ( $K > 5$ ).
- $\tilde{k} = 3.46$  assure un comportement quantique dominant ( $1 < \tilde{k} < 2\pi$ ).

Les paramètres choisis qui donnent ces valeurs de  $K$  et  $\tilde{k}$  sont  $F = 30$  kHz,  $\tau = 0,6 \mu\text{s}$ ,  $\delta_L/2\pi = 19$  GHz et  $I = 120$  mW.

Avec de tels paramètres, nous avons  $N_{loc} \approx 5$  et nous nous proposons d'observer la distribution en impulsion du nuage à  $N = 100$  sur la figure 2.14. L'échelle en ordonnée est logarithmique, la distribution apparaît alors sous une forme triangulaire, le fit exponentiel (en gris) épouse très bien la forme de la distribution.

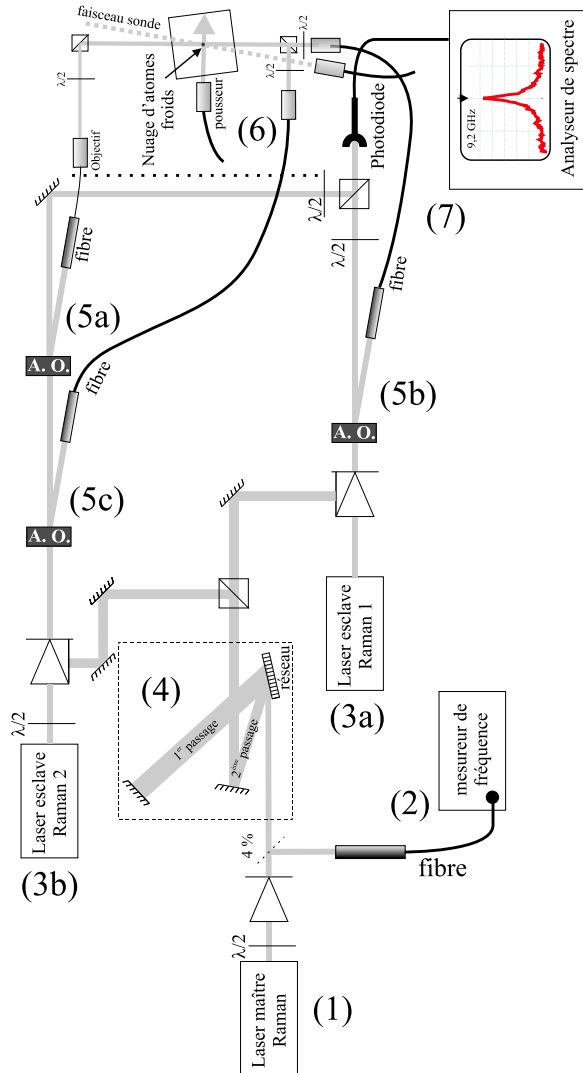


FIG. 2.13 – Schéma du dispositif générant les faisceaux Raman. Une diode laser maître (1) dont le courant est modulé par un signal micro-onde possède trois raies séparées de 4,6 GHz. Sa fréquence, désaccordée d'environ 300 GHz de la transition  $D_2$  du césium, est contrôlée par un lambdamètre (2). Le faisceau laser issu de cette diode laser passe deux fois sur un réseau de diffraction (4) (réseau blasé de 1800 traits/mm et de longueur 5 cm) afin de discriminer angulairement les bandes latérales. Cette séparation facilite l'injection des diodes lasers esclaves (3a et 3b) sur l'une et l'autre des bandes latérales. Les deux faisceaux des diodes esclaves sont transportés vers le piège magnéto-optique via des fibres monomodes (deux à maintien de polarisation et une équipée d'un contrôleur de polarisation) pour interagir avec le nuage (6). Des modulateurs acousto-optiques (5a, 5b et 5c) permettent, en plus de la coupure des faisceaux, de passer de la configuration co-propageante à la configuration contrepropageante. En réalisant un battement des deux faisceaux esclaves (7), on s'assure en permanence que ceux-ci sont bien injectés sur les deux bandes latérales (le battement est donc à 9,2 GHz).

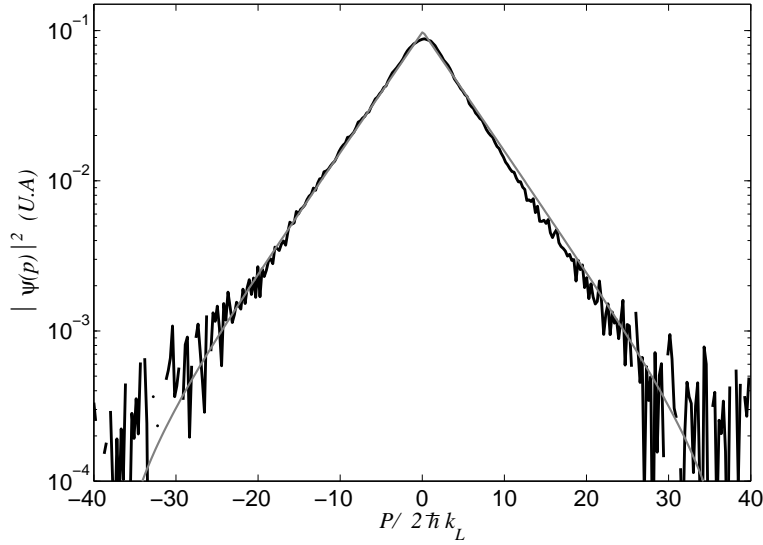


FIG. 2.14 – *Distribution en impulsion après 100 pulses d'onde stationnaire, avec  $K = 7,0$  et  $\hbar k = 3,46$  (noir). Le fit en exponentielle (gris) épouse très bien la forme de la distribution en impulsion. La longueur de localisation est  $P_{loc} \approx 5,4$ .*

### 2.3.2 Évolution de l'énergie cinétique et du maximum de la distribution en impulsion

Dans le chapitre précédent (section 2), nous avons vu que le phénomène de localisation dynamique peut-être évalué sur l'énergie cinétique ( $\langle P^2 \rangle$ ) correspondant à la distribution en impulsion. En principe, la mesure de l'énergie cinétique nécessite l'acquisition de la totalité d'une distribution en impulsion pour plusieurs valeurs du nombre de pulses puis le calcul des écarts quadratiques moyens de chacune des distributions obtenues. Ce moyen de calculer l'énergie cinétique moyenne présente un inconvénient majeur : le calcul est très sensible aux valeurs élevées d'impulsion, là où la mesure Raman est dominée par le bruit. De plus la mesure de la totalité de la distribution en impulsion, moyennée un grand nombre de fois afin de limiter l'effet de bruit dans les ailes, est longue et fastidieuse. Un moyen plus simple, fiable et rapide est la mesure du maximum de la distribution en impulsion.

Le maximum de la distribution  $|\psi(p=0)|^2$  est la mesure qui présente le plus grand nombre d'avantage pour nous. D'abord elle mesure directement le degré de localisation de la fonction d'onde. Lorsque la localisation dynamique est atteinte, la distribution en impulsion épouse une forme d'exponentielle décroissante qui s'écrit de façon normalisée :  $|\psi(p)|^2 = \frac{1}{2P_{loc}} \exp(-\frac{|p|}{P_{loc}})$ . Le maximum de la distribution  $|\psi(p=0)|^2$  est donc, dans l'état localisé, inversement proportionnel à la longueur de localisation  $P_{loc}$ . Ensuite, il s'agit du point de la distribution en impulsion où le rapport signal sur bruit est le meilleur. Enfin, il suffit de mesurer une seule classe d'impulsion pour mesurer le degré de localisation. La figure (2.15) représente l'évolution de la classe de vitesse nulle  $|\psi(p=0)|^2$  en fonction du temps pour les paramètres  $K \approx 8$  et  $\hbar k = 2,89$ . On observe qu'après une diffusion importante, la variation de

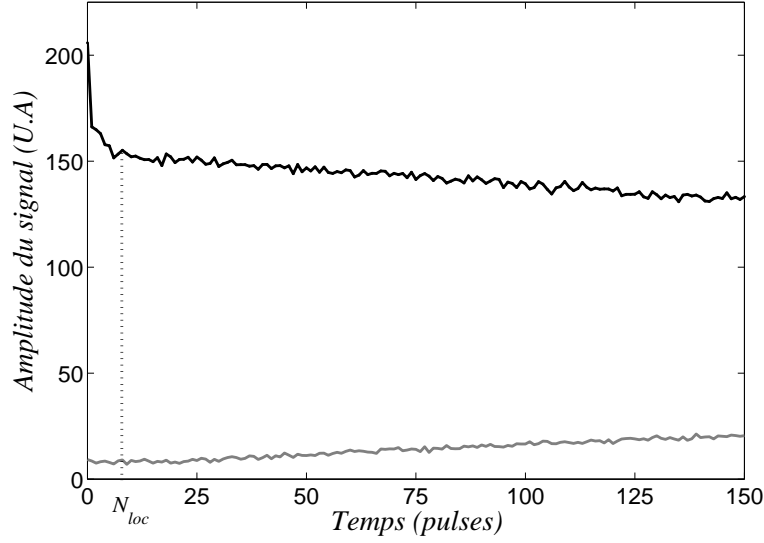


FIG. 2.15 – Évolution du sommet de la distribution de vitesse en fonction du temps. En haut, la courbe en noir représente le sommet de la distribution en impulsion pour un désaccord Raman  $\delta = -8,0\text{kHz}$  (correspondant à la classe de vitesse nulle voir section 2.2.1) corrigée du signal de fond (courbe du bas). En bas la courbe en gris représente l'évolution du fond (section 2.4.1) pour un désaccord Raman  $\delta = -1,0\text{MHz}$  ( $P/2\hbar k_L = -63$ ). Après une diffusion forte avant le temps de localisation  $N_{loc} = 11$ , la population de la classe de vitesse nulle devient presque constante ; seule une légère diffusion persiste (ici  $K \approx 8$ ,  $\bar{k} = 2,89$ ).

$|\psi(p=0)|^2$  devient beaucoup plus lente sans toutefois tendre vers une constante comme dans les simulations présentées au chapitre premier. Nous allons voir dans la section 2.4.4 que cet effet, qui correspond à la persistance d'un léger régime diffusif, trouve son origine principalement dans l'émission spontanée.

La figure 2.16 représente l'évolution de la distribution en impulsion en fonction du nombre de pulses d'onde stationnaire appliqué. Nous pouvons voir de façon claire qu'après une diffusion durant une dizaine de pulses (le sommet de la distribution s'affaisse et celle-ci s'élargit), la distribution en impulsion épouse la forme exponentielle et n'évolue plus malgré la succession des pulses. Il s'agit de la localisation dynamique.

Nous avons vu dans cette section des preuves expérimentales claires de la présence de localisation dynamique avec toutefois quelques défauts comme, par exemple, le fait que  $|\psi(p=0)|^2$  ne tend pas vers une constante du temps. La section suivante est dédiée à ces imperfections expérimentales.

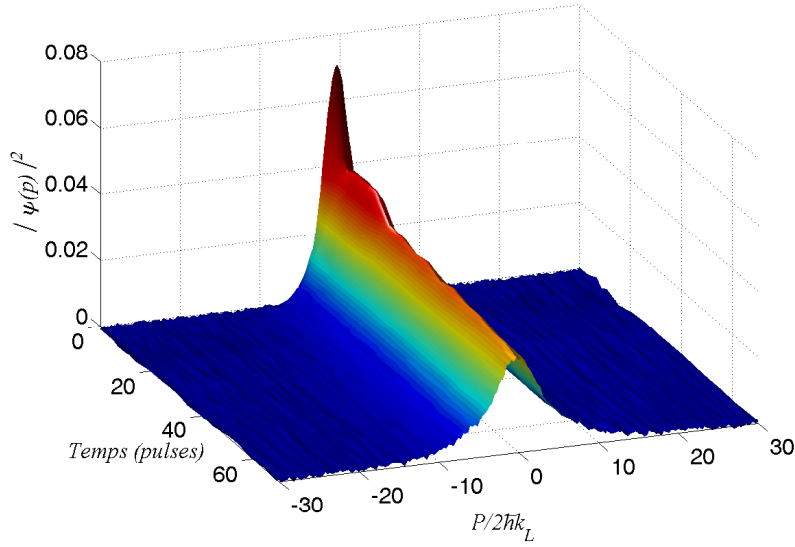


FIG. 2.16 – Vue de l'évolution de la distribution en impulsion en fonction du temps pour les paramètres :  $K \approx 7$  et  $\bar{k} = 3,46$ .

## 2.4 Imperfections du dispositif expérimental et effets parasites

Dans cette section, nous discutons les différents effets parasites affectant notre montage et qui rendent compte de l'observation imparfaite du gel de la diffusion. Certains correspondent à des imperfections (signal de fond et dérive du nombre d'atomes) pour lesquelles nous discutons des moyens de les corriger. D'autres correspondant à des effets physiques intrinsèques au système (durée finie des pulses, émission spontanée) dont nous allons devoir tenir compte dans les simulations numériques.

### 2.4.1 Signal de fond, dérive et pertes d'atomes

#### Signal de fond

Lorsque que l'on réalise une mesure sur la distribution d'impulsion du nuage, on s'aperçoit que dans la limite des impulsions élevées, celle-ci ne tend pas vers zéro. Il existe un décalage dont la valeur dépend du nombre de pulses qui ont été appliqués (figure 2.15). Ce "décalage" est constitué d'atomes "perdus" par émission spontanée principalement lors de l'application de l'onde stationnaire. Lorsque le nuage subit les pulses d'onde stationnaire, il existe une probabilité non nulle qu'un atome situé sur le niveau  $|F_f = 4\rangle$  effectue une transition vers un des niveaux excités ( $|e\rangle = \{|F_e = 3\rangle, |F_e = 4\rangle, |F_e = 5\rangle\}$ ) suite à l'absorption résonante d'un photon. Il existe alors une probabilité  $\frac{1}{6}$  pour que l'atome se désexcite vers le niveau  $|F_f = 3\rangle$  avec très peu de chance de pouvoir réintégrer le niveau  $|F_f = 4\rangle$ . A la fin de la séquence des pulses, un certain nombre d'atomes s'est accumulé dans le niveau  $|F_f = 3\rangle$ . Or, la mesure Raman consiste précisément à placer une classe de vitesse sélectionnée

dans ce niveau. Le niveau  $|F_f = 3\rangle$  est donc constitué des atomes effectivement sélectionnés par le Raman mais aussi des atomes qui ont subi un pompage parasite via un processus résonant. Le faisceau sonde qui mesure la population du niveau  $|F_f = 3\rangle$  (après un processus de repompage vers le niveau  $|F_f = 4\rangle$ ) ne fait pas la distinction entre ces deux types de population. La mesure contient donc une composante indésirable qui dépend du temps d'application de l'onde stationnaire.

Afin de soustraire la population parasite qui constitue le fond mentionné ci-dessus à la population totale mesurée, nous avons mis en place une procédure de correction du fond. Elle consiste à réaliser une expérience en tout point identique à celle que l'on veut réaliser mais en mesurant à la place de la classe de vitesse désirée, une classe de vitesse située très loin en impulsion (le désaccord Raman est alors réglé à 1MHz soit  $63\ 2\hbar k_L$ .) là où la "vraie" distribution en impulsion tend vers zéro. Nous avons alors une mesure directe du signal de fond que nous pouvons soustraire de la mesure de la grandeur recherchée (par exemple celle du maximum de la distribution).

### Dérive

La population totale du nuage est soumise à une dérive dont l'origine se trouve au niveau des faisceaux laser qui réalisent le piégeage magnéto optique. Les faisceaux laser du piège sont coupés lors la séquence expérimentale à l'aide de modulateurs acousto-optiques. Ce type d'appareil est soumis à des effets thermiques qui peuvent avoir de nombreuses conséquences (déplacement angulaire, fluctuation d'intensité et de polarisation) [41] sur le faisceau qui est modulé. Nous avons mesuré une dérive de la population de notre nuage d'atomes froids d'environ 15% sur une échelle de temps d'une vingtaine de minutes. Pour éliminer ce type de dérive sur les mesures, nous réalisons une mesure de la population totale du nuage dans des conditions identiques à la mesure souhaitée. Nous pouvons donc ramener n'importe quelle mesure à la population du nuage pendant<sup>9</sup> cette mesure.

### Pertes d'atomes

Nous avons pu déterminer qu'une certaine quantité d'atomes était perdue pendant l'application de l'onde stationnaire. La source de pertes a été identifiée : il s'agit d'un effet "pousseur" de l'onde stationnaire qui a tendance à pousser une fraction d'atomes hors de la zone de détection. Les deux bras de l'onde stationnaire n'étant pas parfaitement équilibrés en puissance, il existe une composante non stationnaire qui exerce une pression de radiation sur les atomes. La procédure de correction des fluctuations présentée au paragraphe précédent permet de corriger les mesures de cette perte en renormalisant la mesure par rapport au nombre d'atomes effectivement présents pendant la mesure.

#### 2.4.2 Inhomogénéité de $K$

Le profil gaussien de faisceau de l'onde stationnaire implique que l'intensité réellement ressentie par les atomes n'est pas constante sur l'ensemble du nuage. La figure

---

<sup>9</sup>Nous considérons que le délai entre les deux mesures est négligeable comparé à l'échelle de temps des variations de la population du nuage.



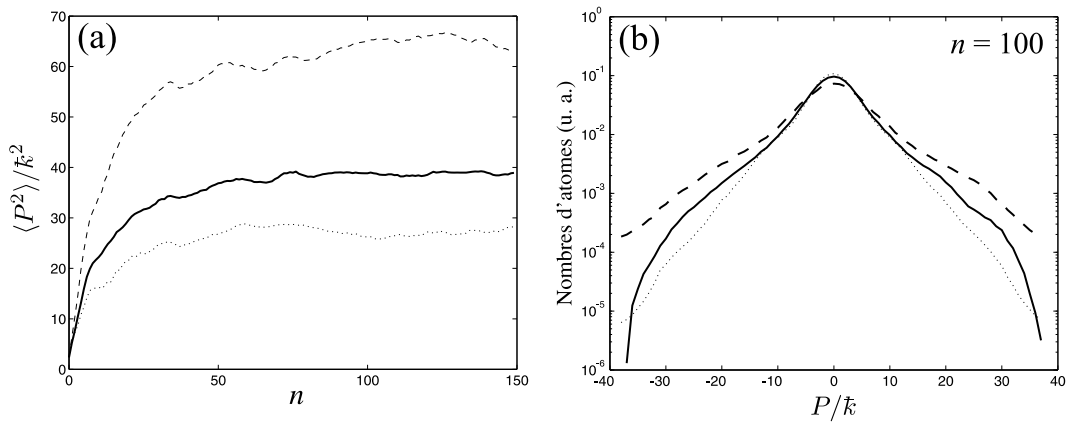


FIG. 2.17 – Évolution de l'énergie cinétique (a) et distribution en impulsion à  $N = 100$  (b) obtenues pour trois types de simulations numériques dans le cas d'une distribution gaussienne du nuage d'atomes froids soumis à une onde stationnaire de profil transverse gaussien (le rapport de largeur à mi hauteur est de 0,6) avec  $\hbar k = 3,46$  et  $K_{max} = 9,5$  (tirets),  $K_{moyen} = 8,14$  (pointillés) et avec  $K$  moyenné sur plusieurs positions transverses avec pondération de la densité atomique (trait continu). Les deux dernières distributions sont confondues sauf dans les ailes (d'où l'écart sur l'énergie cinétique) où la dernière s'écarte de la forme exponentielle. La localisation dynamique n'est détruite par l'inhomogénéité de  $K$  mais ses caractéristiques sont altérées (Les longueurs de localisations sont respectivement  $P_{loc} = 8,1, 5,1$  et  $5,9$ ).

2.6 montre qu'environ 75 % des atomes sont soumis à au moins 75 % de l'intensité lumineuse. Cette inhomogénéité du paramètre  $K$  n'empêche pas le phénomène de localisation dynamique de se produire, mais elle altère ses caractéristiques. La longueur de localisation et le temps de localisation sont plus faibles [6]. Ils correspondent davantage à ceux obtenus en prenant la valeur moyenne du paramètre  $K$ . La figure 2.17 présente des simulations réalisées en prenant une valeur de  $K$  égale à celle du maximum du profil transverse du faisceau de l'onde stationnaire, une valeur de  $K$  moyennée sur l'ensemble du profil et une valeur de  $K$  calculée pour plusieurs positions transverses pondérées par la densité atomique. Nous pouvons voir que la simulation avec la valeur moyenne de  $K$  (trait continu) donne un résultat très comparable à la simulation où l'on moyenne sur plusieurs valeurs transverses du paramètres  $K$  (pointillés) sur la distribution d'impulsion (b) (et donc aussi sur le sommet de celle-ci). La seule différence réside dans les ailes, ce qui se fait ressentir sur l'énergie cinétique (a).

### 2.4.3 Durée finie des pulses et effet de boîte classique.

Parmi les effets expérimentaux, la durée finie des pulses d'onde stationnaire peut avoir des effets particulièrement gênants. C'est à partir d'une analyse classique que l'on peut comprendre les effets que des pulses "trop longs" peuvent avoir sur la dynamique du kicked rotor. Lors de l'application du potentiel sinusoïdal, l'atome - considéré ici comme un objet ponctuel - possède une impulsion  $P$ . Celui-ci parcourt donc un chemin  $\frac{P}{m} \times \tau$  pendant le pulse de durée  $\tau$ <sup>10</sup>. Si le chemin parcouru est égal à une période spatiale du potentiel sinusoïdal, l'énergie reçue par l'atome est nulle, il n'a donc finalement subi aucun forçage. On peut donc écrire une condition sur l'impulsion :

$$p < p_{lim} = \frac{\lambda m}{2\tau}, \quad (2.14)$$

ou en unités normalisées :

$$P < P_{lim} = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (2.15)$$

où  $\alpha = F\tau$ . La zone en impulsion constituée par les limites  $[-P_{lim}; P_{lim}]$  constitue la *boîte classique*<sup>11</sup>. Un atome subit une diffusion de plus en plus faible au fur et à mesure que son impulsion s'approche de l'un des bords de la boîte classique. La figure 2.18 représente la dépendance du taux de diffusion classique en impulsion. Nous pouvons voir sur cette simulation que la chute de coefficient de diffusion classique est très brutale (il s'agit d'une échelle logarithmique!) et intervient bien avant le bord de la boîte classique.

Pour se placer dans l'approximation d'un pulse de Dirac pour  $d(n - n_1)$ , la condition adéquate est que l'opérateur d'évolution sur une période pour le pulse

<sup>10</sup>Il s'agit là d'un calcul approché dans la limite où la variation d'impulsion de la particule pendant le pulse est faible devant son impulsion initiale :  $\Delta P \ll P$ .

<sup>11</sup>La boîte classique correspondant à une évolution complète de la particule sur une période spatiale du potentiel, cet effet se traduit sur les sections de Poincaré par l'apparition de barrière à  $P_{lim}$  d'aspect comparable à celle dans un régime où  $K < K_{critique}$  (voir section correspondante du chapitre 1). Ces barrières représentent une rotation complète du rotateur pendant le forçage. Des illustrations sont visibles dans [42, 25]

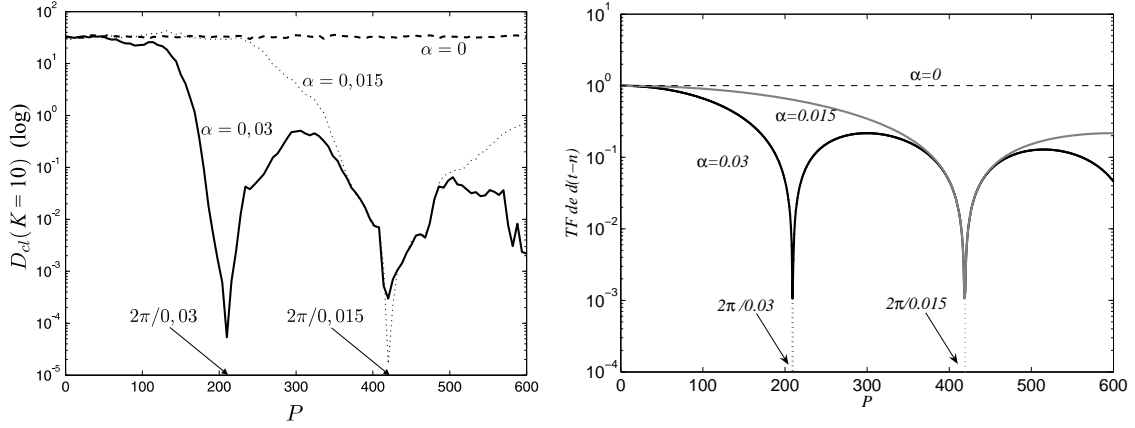


FIG. 2.18 – A gauche, dépendance en impulsion du coefficient de diffusion classique pour trois valeurs du paramètre  $\alpha = F\tau = 0,015$  et  $0.03$  pour  $K = 10$  (simulation numérique). Ce coefficient tend brutalement vers zéro lorsque  $P = \frac{2\pi}{\alpha}$  limite de la boîte classique. Nous pouvons remarquer aussi que dans le cas  $\alpha = 0,015$ , dans la zone d'impulsion  $[100; 200]$ , le coefficient diffusion devient supérieur au cas  $\alpha = 0$ . A droite, transformée de Fourier du pulse  $d(n - n_1)$ .

$d(n - n_1)$  soit comparable à celui pour un pulse de Dirac :

$$\hat{U}_{pulse\ fini}(1) \approx \hat{U}(1) \quad (2.16)$$

Nous pouvons développer l'opérateur d'évolution  $\hat{U}_{pulse\ fini}(1)$  de cette façon :

$$\hat{U}_{pulse\ fini} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \left[\frac{\hat{P}^2}{2} + K \sin(\hat{\theta})d(n - n_1)\right] dt\right) \quad (2.17)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^{1-\alpha} \left[\frac{\hat{P}^2}{2} + K \sin(\hat{\theta})d(n - n_1)\right] dt\right) \quad (2.18)$$

$$\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{1-\alpha}^1 \left[\frac{\hat{P}^2}{2} + K \sin(\hat{\theta})d(n - n_1)\right] dt\right) \quad (2.19)$$

$$= \hat{U}_{prop}(1 - \alpha) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hat{P}^2}{2}\alpha + K \sin(\hat{\theta})\right)\right). \quad (2.20)$$

Nous pouvons développer le second terme à droite à l'aide de la formule de Baker-

Hausdorff à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 &= \hat{U}_{prop}(1 - \alpha) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{P}^2}{2} \alpha\right) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} K \sin(\hat{\theta})\right) \\
 &\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hat{P}^2}{2} \alpha; K \sin(\hat{\theta})\right]\right) \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

$$= \hat{U}_{prop}(1) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} K \sin(\hat{\theta})\right) \times \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} \left[\frac{\hat{P}^2}{2} \alpha; K \sin(\hat{\theta})\right]\right) \tag{2.22}$$

$$= \hat{U}(1) \times \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} \left[\frac{\hat{P}^2}{2} \alpha; K \sin(\hat{\theta})\right]\right) \tag{2.23}$$

Pour respecter la condition (2.16) il faut donc que :

$$\left\langle \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} \left[\frac{\hat{P}^2}{2} \alpha; K \sin(\hat{\theta})\right]\right) \right\rangle \approx 1 \tag{2.24}$$

qui équivaut à :

$$\left\langle \left| \frac{i}{2\hbar} \left[\frac{\hat{P}^2}{2} \alpha; K \sin(\hat{\theta})\right] \right| \right\rangle \ll \hbar. \tag{2.25}$$

En développant le commutateur, on parvient à la condition :

$$\frac{\alpha K}{4} (2 \langle |\hat{P}| \rangle \langle |\cos(\hat{\theta})| \rangle) \ll \hbar \tag{2.26}$$

avec  $\langle |\hat{P}| \rangle = P_{loc}$  la longueur de localisation et en prenant  $\langle |\cos(\hat{\theta})| \rangle = 1/2$  :

$$P_{loc} \ll \frac{4\hbar}{\alpha K} = \frac{4\hbar}{2\pi K} \frac{2\pi}{\alpha} \ll \frac{2\pi}{\alpha} \tag{2.27}$$

Une telle condition montre que les effets quantiques se manifestent bien avant que les atomes les plus rapides atteignent les bords de la boîte classique (la longueur de localisation est bien inférieure à la taille de la boîte classique). En utilisant  $P_{loc} \approx K^2/\hbar$  (équation du chapitre 1) :

$$4 \frac{K^3}{\hbar^2} \alpha \ll 1 \tag{2.28}$$

Il s'agit là d'un critère très stricte. Dans la grande majorité de nos expériences, ce critère n'est jamais respecté. Par exemple pour l'expérience de localisation présentée précédemment sur la figure 2.14, nous avons  $4 \frac{K^3}{\hbar^2} \alpha \approx 2,52$  alors que nous observons la localisation dynamique !

Nous allons voir maintenant à l'aide de quelques expériences et simulations que nous pouvons apporter un peu de souplesse à ce critère. La figure 2.19 représente quatre distributions en impulsion obtenues expérimentalement pour quatre durées de pulses différentes. La forme exponentielle des distributions qui apparaît pour un régime de localisation dynamique pure est nettement altérée lorsque les pulses sont

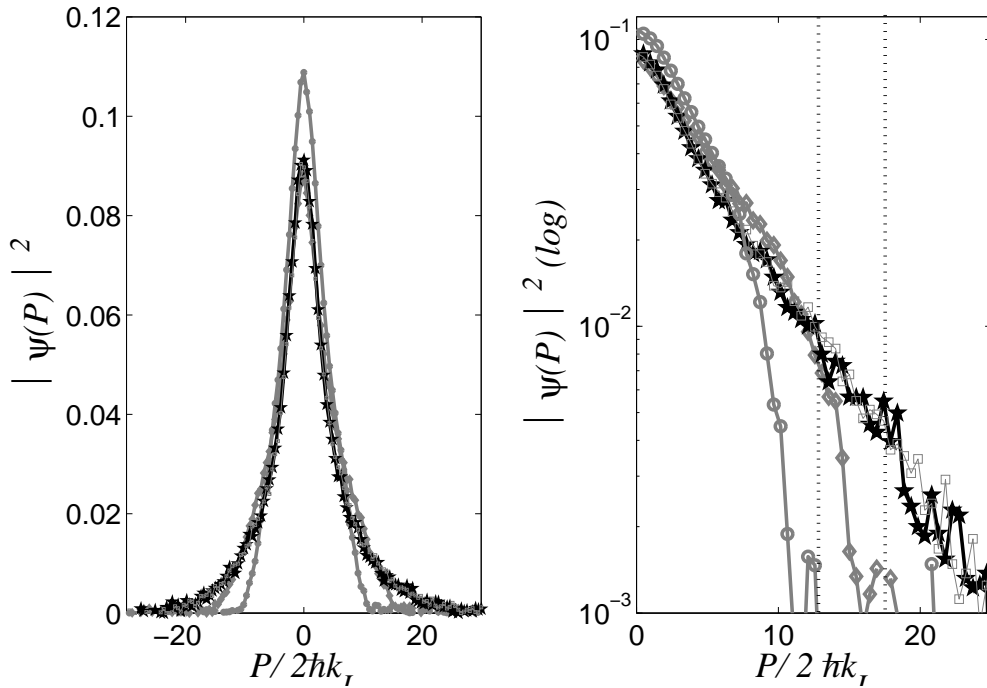


FIG. 2.19 – Effets de la durée finie des pulses d’onde stationnaire sur les distributions en impulsion (expérience). A gauche, quatre distributions en impulsion obtenues expérimentalement ( $K \simeq 7$ ,  $\hbar = 3,46$ ) après 100 pulses d’onde stationnaire pour trois valeurs différentes de la durée des pulses ( $\tau = 0,5, 1,0, 2,0$  et  $5,0 \mu s$ ) correspondant à  $\alpha = 0,015$ ,  $\alpha = 0,03$ ,  $\alpha = 0,06$  et  $0,15$ . Les deux premières, pour  $\alpha = 0,015$  et  $\alpha = 0,03$ , sont confondues, la réduction de la taille de la boîte classique par un facteur deux n’a aucun effet sur la forme de la distribution. La troisième pour  $\alpha = 0,06$  voit sa forme altérée et ses ailes chuter plus brutalement vers zéro. La quatrième pour  $\alpha = 0,15$ , épouse une forme triangulaire caractéristique d’une localisation classique. A droite, l’aile des distributions en échelle logarithmique, pour  $\alpha = 0,06$  et  $0,15$ , on voit nettement l’aile plonger brutalement (traits verticaux) vers zéro tandis que les deux autres distributions restent superposées.

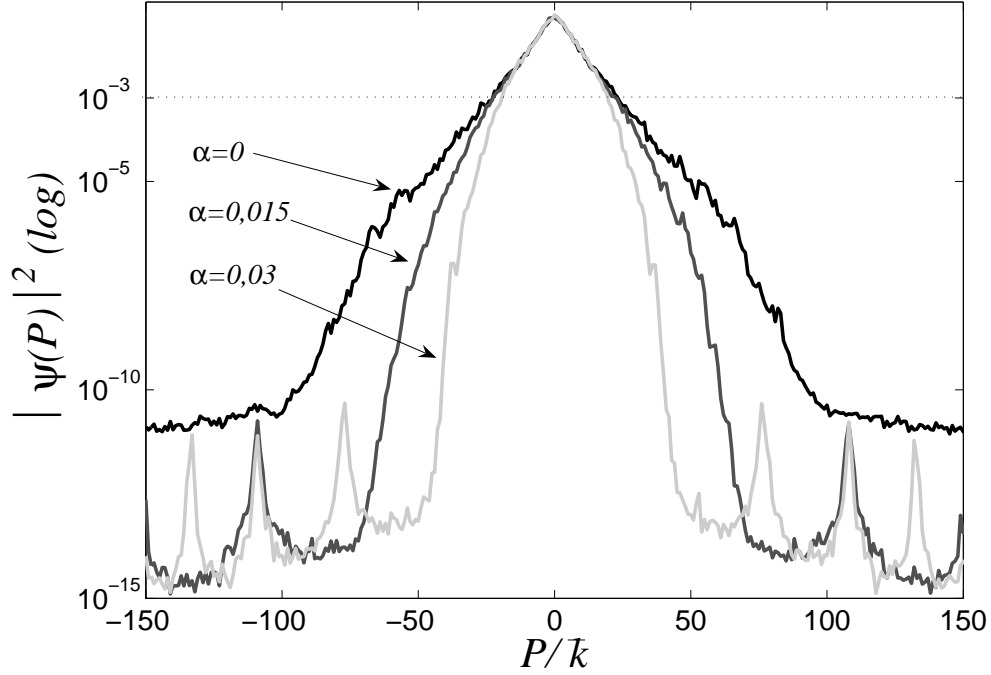


FIG. 2.20 – Effets de la durée finie des pulses d’onde stationnaire sur les distributions en impulsion (simulation). Trois distributions en impulsion obtenues numériquement ( $K = 7$ ,  $k = 3,46$ ) après 100 pulses pour trois valeurs différentes de  $\alpha$  : 0, 0,015 et 0,03 (pulses de Dirac,  $\tau = 0,5$ , et  $1,0\mu\text{s}$ ). Ce n’est qu’en dessous d’un seuil de  $10^{-3}$  que la modification de la forme de la distribution en impulsion, due à l’effet de boîte classique, est visible.

trop longs. Par exemple pour  $\alpha = 0,15$ , la distribution d’impulsions épouse une forme d’avantage triangulaire et plus étroite, ce qui nous donne un critère visuel commode pour identifier un tel effet. Le sommet de la distribution est, conservation de l’aire oblige, aussi modifié en une valeur plus élevée. Le danger est donc, dans un tel cas, de prendre la saturation de l’énergie cinétique (ou l’apparition d’un état stationnaire pour le sommet  $|\psi(p=0)|^2$  de la distribution) pour de la localisation dynamique alors qu’il s’agit d’un effet de la durée finie des pulses. Les distributions en impulsion obtenues pour  $\alpha = 0,015$  ( $4K^3\alpha/k^2 \approx 1,72$ ) et  $\alpha = 0,03$  ( $4K^3\alpha/k^2 \approx 3,44$ ) sont confondues jusqu’au seuil de  $10^{-3}$  bien que dans les deux cas le critère (2.28) ne soit pas respecté. Dans ce cas, pour voir apparaître l’effet de la durée finie des pulses, il faut descendre à un seuil plus bas à l’aide d’une simulation numérique. La figure 2.20 représente les distributions en impulsion obtenues pour ces deux valeurs de  $\alpha$ . Nous voyons qu’au-dessus du seuil  $10^{-3}$  (seuil de détection expérimental), les trois distributions sont confondues bien que l’on puisse observer les effets de la durée des pulses en dessous de ce seuil.

On peut donc en conclure que le critère (2.28) est beaucoup trop stricte, le fait qu’il ne soit pas respecté n’empêche pas l’observation de la localisation dynamique. Les effets quantiques dus à la durée finie des pulses ne se manifestent pas sur la

localisation dynamique et l'altération de la forme de la distribution d'impulsions observée sur les figures 2.19 et 2.20 est essentiellement due à l'effet de boîte classique. En effet, le terme additionnel d'énergie cinétique dans l'opérateur d'évolution pour un pulse de durée finie agit comme une perturbation du potentiel pendant le pulse. La structure de l'espace des phases n'est pas modifiée<sup>12</sup> par cette perturbation, ni le coefficient de diffusion. Les états propres de l'opérateur d'évolution (les états de Floquet) sont modifiés par cette perturbation mais la longueur de localisation de chacun de ces états n'est pas modifiée. La longueur de localisation  $P_{loc}$  reste donc inchangée.

En pratique, toutes les simulations numériques que nous réalisons tiennent compte de la durée finie des pulses afin de s'assurer que l'effet de la boîte classique reste faible devant le phénomène de localisation dynamique.

#### 2.4.4 Émission spontanée

Dans cette sous-section, nous présentons les effets de l'émission spontanée et de la décohérence associée au phénomène de localisation dynamique. Les effets de l'émission spontanée sur la localisation dynamique ont été étudiés expérimentalement par Ammann et al. dans [27, 43], par Vant et al. dans [44] et Klappauf et al. dans [43] et de façon théorique par Graham et Miyazaki dans [45, 46].

#### Un processus décohérent

Lorsqu'un atome absorbe un photon résonnant avec une de ses transitions atomiques, il finit par relaxer dans un niveau d'énergie inférieur en émettant spontanément un photon dont la direction est une variable stochastique. Lors de l'application de l'onde stationnaire, si un atome émet un photon spontanément suite à une transition résonante (figure 2.21), il est improbable que ce photon appartienne à l'un des deux modes du champ de l'onde stationnaire. L'impulsion reçue par l'atome selon la direction de l'onde stationnaire n'est plus un multiple entier de  $\hbar k_L$ . Il en résulte une destruction des cohérences créées par l'onde stationnaire entre les états d'impulsion  $|P\rangle$  par mélange des classes de quasi-impulsion.

#### Effet sur la localisation dynamique

Toutes les études citées plus haut montrent que la destruction des cohérences en impulsion, restaure un régime diffusif au sein du kicked rotor. La figure 2.22 illustre ce phénomène de redémarrage de la diffusion suite à une décohérence. Nous avons réalisé une simulation numérique dans laquelle nous forçons le système à subir une décohérence avec une probabilité  $\Pi = 1$  à un temps  $N = 50$  ( $\Pi = 0 \vee N \neq 50$ ). Nous avons tracé l'évolution de l'énergie cinétique en fonction du temps avec et sans décohérence à  $N = 50$ . Dans le premier cas, l'énergie cinétique sature, signature d'une localisation dynamique, après 100 pulses la distribution en impulsion épouse bien une forme exponentielle (encart de la figure 2.22). Dans l'autre cas, à partir du temps  $N = 50$  où le système a été décohéré entièrement (la probabilité  $\Pi = 1$ ), celui-ci reprend un comportement diffusif identique au comportement diffusif avant le

---

<sup>12</sup>Bien que chaque trajectoire individuelle dans l'espace des phases soit modifiée

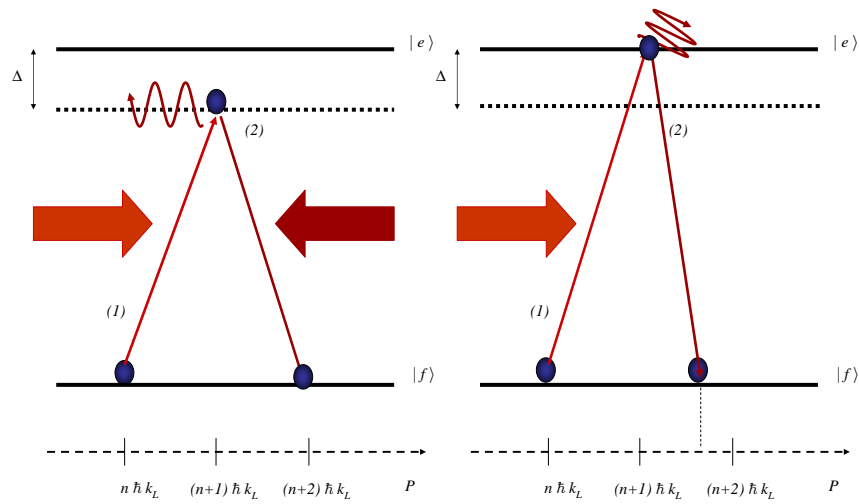


FIG. 2.21 – Sur la figure de gauche, le processus cohérent associé à l'onde stationnaire. L'atome absorbe un photon non résonnant issu d'un des bras de l'onde stationnaire (celui de gauche) pour atteindre un niveau virtuel (1), puis émet de façon stimulée, un photon dans le mode de l'autre bras de l'onde stationnaire (celui de droite)(2). Au cours de ce processus, l'atome a reçu deux quanta d'impulsion  $\hbar k_L$ . Il s'agit d'un processus cohérent. Sur la figure de droite, l'atome absorbe un photon résonnant (1), il émet ensuite un photon de manière spontanée (2) dans un des modes vides du rayonnement. L'atome a reçu en définitif  $(1 + \zeta)\hbar k_L$  où  $\zeta \in ]-1; 1[$ . Il s'agit d'un processus incohérent car le choix du mode d'émission est aléatoire.



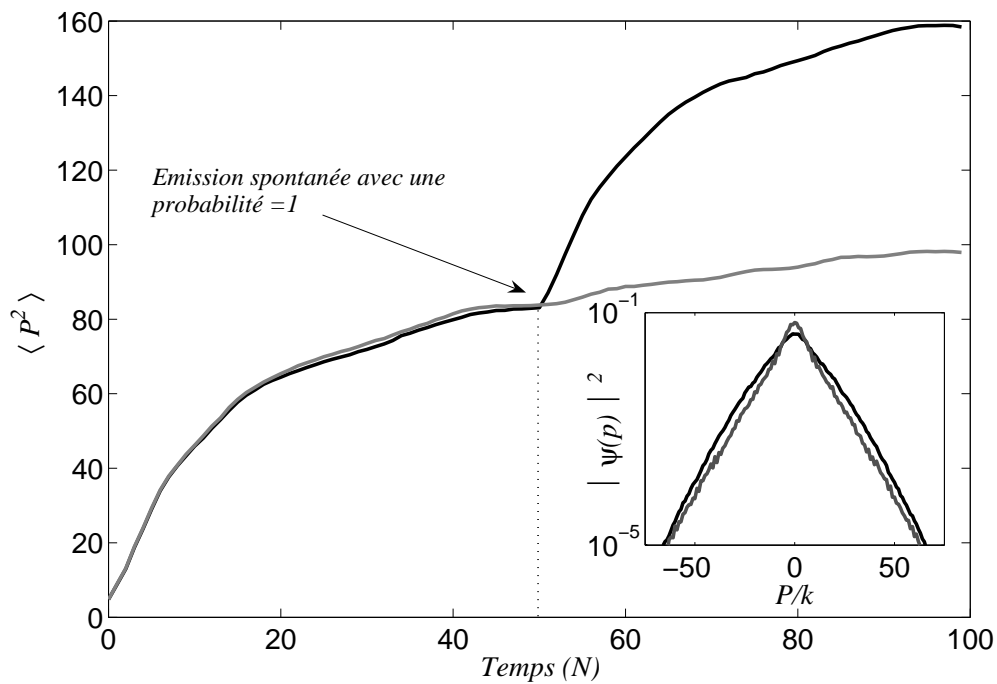


FIG. 2.22 – Évolution de l'énergie cinétique du kicked rotor (simulation numérique) pour  $K = 10$  et  $\hbar k = 3,46$ . Au temps  $N = 50$  la probabilité  $\Pi$  d'émission spontanée est forcée à 1 (elle est nulle pour tout autre temps) pour la courbe en noir. La décohérence engendrée restaure le régime diffusif initial pour atteindre plus loin une nouvelle localisation dynamique. En encart, les distributions en impulsion au temps  $N = 100$  dans les cas avec (noir) et sans émission spontanée (gris). La distribution qui a subi l'émission spontanée est plus large et possède une forme un peu plus parabolique que celle qui n'a pas subi l'émission spontanée.

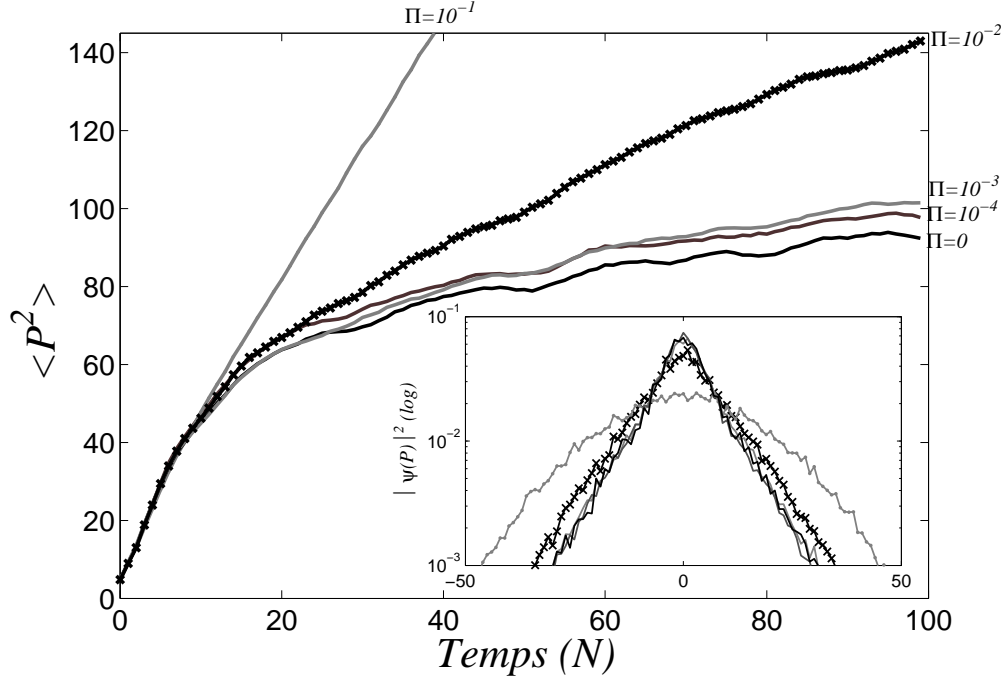


FIG. 2.23 – Évolution de l'énergie cinétique du kicked rotor (simulation numérique) pour  $K = 10$ ,  $\hbar k = 3, 46$  et pour des probabilités d'émission spontanée par pulse ( $\Pi$ ) de  $0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  et  $10^{-1}$ . En encart, les distributions en impulsion correspondantes après 100 pulses. Tant que  $\Pi \lesssim 10^{-3}$ , la décohérence n'est pas suffisante pour altérer significativement le phénomène de localisation dynamique, la forme exponentielle est préservée et l'énergie cinétique tend à saturer. Si la probabilité d'émission spontanée par pulse est trop élevée ( $\Pi > 10^{-3}$ ), la distribution en impulsion tend vers une forme gaussienne et un régime diffusif persiste.

temps de localisation. Tout se passe comme si la “mémoire” de l'évolution antérieure avait été effacée lors de la décohérence. En pratique, la décohérence est simulée en déplaçant la quasi impulsion non plus d'une quantité  $\hbar k_L$ , mais d'une quantité  $\varsigma \hbar k_L$  (où  $\varsigma \in ]-1; 1[$ ) dans l'espace des impulsions. C'est une procédure de type Monte Carlo qui détermine, avec une probabilité  $\Pi$ , s'il y a décohérence ou pas. Cette même procédure détermine aussi la variable  $\varsigma$  qui correspond à la projection de l'impulsion, reçue par l'atome lors de l'émission spontanée du photon, sur “l'axe de quantification” que constitue l'onde stationnaire. Dans les simulations standards, la probabilité  $\Pi$ , qui n'est autre que la probabilité d'émettre un photon spontané par pulse, est déterminée à l'aide des paramètres  $K, \hbar k$  et du désaccord  $\Delta$ . Bien entendu cette simulation représente un cas extrême ( $\Pi = 1$ ), pour des paramètres standards, la probabilité d'émission spontanée par pulse est plutôt comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$ . La figure 2.23 illustre le comportement de l'énergie cinétique du kicked rotor pour un ensemble de probabilités d'émission spontanée par pulse comprises entre  $10^{-4}$  et  $10^{-1}$ . Pour  $\Pi = 0, 10^{-4}$  et  $10^{-3}$  les évolutions sont comparables et l'allure des distributions en impulsions sont semblables. En revanche, pour  $\Pi = 10^{-2}$  et  $10^{-1}$ , un

régime diffusif net apparaît, l'énergie cinétique ne sature pas et les distributions en impulsion prennent une forme gaussienne. Dans les expériences, nous veillerons donc à avoir le plus faible taux d'émission spontanée possible en choisissant les paramètres  $K$ ,  $\bar{k}$ ,  $\tau$  et  $\Delta$  adéquats.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'un nuage d'atomes de césium refroidis à quelques micro-kelvins, soumis à une onde stationnaire lumineuse pulsée et désaccordée par rapport à une transition atomique, réalise un *kicked rotor atomique* semblable au modèle de la particule quantique dans le potentiel sinusoïdal pulsé présenté dans le chapitre premier. Nous avons passé en revue les différentes phases de l'expérience, réalisation du nuage, application de l'onde stationnaire et mesure de la distribution en impulsion. L'utilisation de la spectroscopie Raman stimulée pour mesurer les distributions en impulsion du nuage, nous a permis d'observer le gel de la distribution en impulsion. Celle-ci est caractérisée par une saturation de la population d'atomes à vitesse nulle et par l'apparition d'une forme exponentielle pour l'ensemble de la distribution en impulsion, après l'application de quelques dizaines de pulses d'onde stationnaire. Nous avons pu aussi extraire les grandeurs caractéristiques de la localisation dynamique (longueur de la localisation, temps de localisation). Enfin, nous avons listé, décrit et quantifié les différents effets parasites qui rendent compte de l'observation imparfaite du gel de la diffusion comme l'inhomogénéité du paramètre de stochasticité  $K$  ou la présence d'émission spontanée. Nous avons montré que ces effets indésirables peuvent être limités suffisamment pour permettre l'observation expérimentale de la localisation dynamique.

Dans le chapitre qui va suivre, nous allons nous intéresser à la destruction de la localisation dynamique et aux lois qui régissent cette destruction lorsqu'on ajoute des degrés de liberté supplémentaires au système notamment lorsque l'on se place dans des conditions équivalentes au modèle d'Anderson à trois dimensions.

## Chapitre 3

# Transition d'Anderson avec un kicked rotor quasipériodique à trois fréquences

Nous avons vu au chapitre premier que le modèle du kicked rotor présente une correspondance avec le modèle d'Anderson unidimensionnel pour les solides désordonnés. A trois dimensions, le modèle d'Anderson possède une propriété particulièrement intéressante : il existe une transition de phase métal-isolant entre un état où les fonctions d'onde électronique sont localisées (isolant d'Anderson) et un état où elles sont délocalisées (état métallique). Nous proposons dans ce chapitre d'étudier une variante du kicked rotor, le kicked rotor quasipériodique à trois fréquences modulé en amplitude qui correspond au modèle d'Anderson à trois dimensions.

La première partie présente le modèle d'Anderson à trois dimensions dans son domaine d'origine : la physique du solide. La seconde partie introduit le kicked rotor quasipériodique à trois fréquences et sa correspondance avec le modèle d'Anderson. La troisième partie présente quelques études numériques avant de passer aux résultats expérimentaux dans la dernière partie.

### 3.1 La transition d'Anderson en physique du solide

Nous avons vu au chapitre premier que la localisation d'Anderson est le résultat d'effets d'interférence quantique. Cette localisation forte génère un comportement d'isolant. Dans le modèle d'Anderson à une dimension, il n'existe pas d'état métallique, la localisation existe toujours quel que soit le degré de désordre. En dimension deux, la localisation existe toujours mais la longueur de localisation décroît exponentiellement avec le désordre [47]. En dimension trois, il existe une transition de phase entre état localisé et délocalisé. Cette transition d'Anderson fait partie d'une classe de transitions de phase continues dites *transitions de phase quantiques* car leur comportement critique est gouverné non pas par des fluctuations d'origine thermique mais par des fluctuations quantiques [48]. Dans cette classe de transitions de phase, il existe une catégorie qui regroupe les transitions d'origine purement électronique : *les transitions de Mott* induites par les *corrélations électroniques* et les *transitions d'Anderson* induites par le *désordre*.

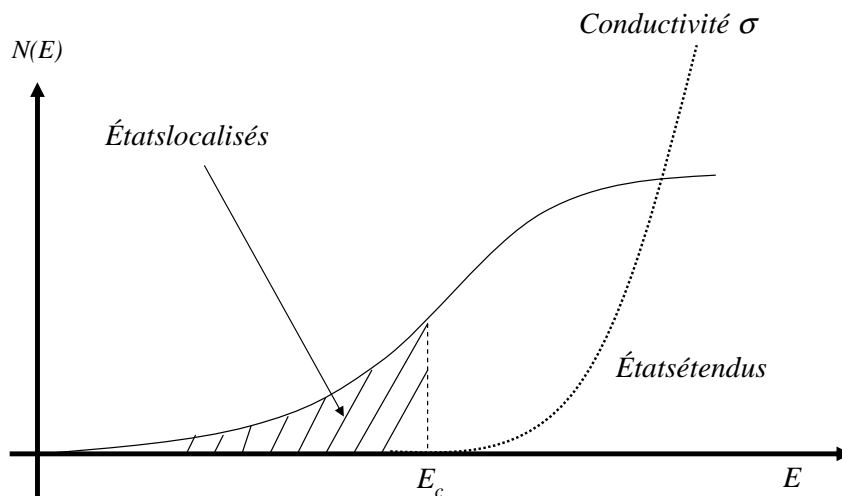


FIG. 3.1 – Le concept de “mobility edge”. La densité d’état  $N(E)$  est représentée de façon schématique en fonction de l’énergie de Fermi. À gauche de  $E_c$ , tous les états sont localisés tandis qu’à droite de  $E_c$ , tous les états sont étendus et la conductivité  $\sigma$  devient non nulle.

La transition d’Anderson est une transition dite continue ou de second ordre<sup>1</sup> comme la transition superfluide ou la condensation de Bose Einstein [49]. Ce type de transition est caractérisée par la divergence d’une longueur caractéristique à la manière de :

$$\xi \sim \Lambda |g - g_c|^{-\nu} \quad (3.1)$$

où  $\xi$  est la longueur de corrélation,  $\nu$  est l’exposant critique,  $\Lambda$  la longueur caractéristique du système (par exemple le pas du réseau) et  $g_c$  le paramètre critique de la transition (par exemple le degré de désordre). Nous présentons ici de façon succincte la transition d’Anderson en physique du solide.

### 3.1.1 Les débuts...

De façon théorique, Anderson est donc le premier à formuler le problème de la localisation en 1958 [11] (voir chapitre 1). Plus tard, en 1968, Mott introduit le concept de “mobility edge”  $E_c$ , il s’agit de la frontière énergétique qui sépare l’état isolant où tous les états propres sont localisés de l’état conducteur où tous les états propres sont étendus (figure 3.1). Du point de vue expérimental, il faut attendre le début années 80 pour que les premières expérimentations mettent en évidence une transition métal-isolant. En effet, dans un cristal réel, il est très difficile d’obtenir des conditions favorables à l’observation de la transition d’Anderson, par exemple l’existence d’interaction avec des phonons casse les effets de localisation. De plus, il est impossible de mesurer directement le degré de localisation de la fonction d’onde électronique. Les expérimentations sur les métaux pour observer la transition d’Anderson consistent à mesurer une grandeur physique macroscopique comme la conductivité ou la susceptibilité diélectrique. Parmi les expériences les plus

<sup>1</sup>Pour ce type de transition, il n’y a pas de chaleur latente de transition.

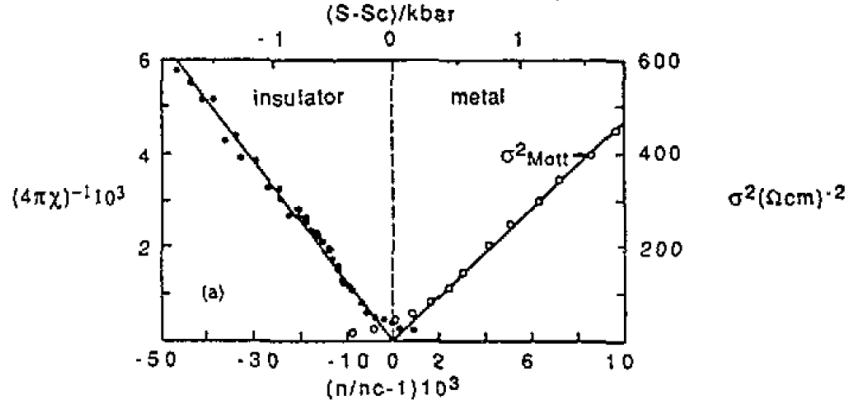


FIG. 3.2 – La transition Métal Isolant dans  $Si : P$ . L'inverse de la susceptibilité diélectrique  $\chi^{-1}$  (à droite) et le carré de la conductivité  $\sigma^2$  sont tracés en fonction de la concentration normalisée  $n/n_c - 1$  de dopant ( $P$ ) en bas [50]. Il ne s'agit pas ici de la transition d'Anderson comme présenté dans l'article [51] mais d'une transition métal isolant.  $Si : P$  est un semi conducteur à large bande qui, lorsqu'il est suffisamment dopé, devient métallique.

citées, il existe celle sur la silice dopée phosphore ( $Si : P$ ) [50, 51] où le paramètre de contrôle est la concentration de dopant (figure 3.2). D'autres expérimentations, par exemple sur  $Al_xGa_{1-x}As$ , où l'on fait varier la concentration des porteurs de charge par excitation optique [52, 53], permettent d'extraire les caractéristiques de la transition. Dans l'expérience sur  $Si : P$ , l'exposant critique est le même pour la phase isolante et pour la phase conductrice, il est proche de  $\frac{1}{2}$ . Pour  $Al_xGa_{1-x}As$ , la mesure de la conductivité donne un exposant critique égal à 1 [52] et la mesure de la constante diélectrique donne une valeur proche de 2 [53]. Nous pouvons ajouter aussi une expérience sur l'étain ( $Sn$ ) [54], où la transition semble observée de façon non ambiguë mais rien n'est donné sur l'exposant critique.

### 3.1.2 L'approche Thouless et la théorie d'échelle de la localisation à un paramètre

Le premier à avoir établi une description théorique des transitions métal-isolant à l'aide d'une loi d'échelle est Thouless [55, 56]. Il construit un échantillon de taille  $(2L)^d$  en dimension  $d$  à partir de cubes de taille  $L^d$  (figure 3.3). Avec ceci, il introduit la conductance adimensionnée  $g$  (appelée aussi "nombre de Thouless" dans la littérature) :

$$g = \hbar \frac{G}{e^2} \quad (3.2)$$

où  $e$  est la charge de l'électron et  $G$  est la conductance du système réel, grandeur mesurable expérimentalement. Thouless postule que  $g$  est le *seul* paramètre qui contrôle l'état (isolant ou conducteur) du système lorsqu'on double la taille de celui-ci.

Thouless part donc d'un échantillon microscopique dont la taille est comparable au libre parcours moyen de l'électron dans le réseau. A cette échelle, la fonction  $g$

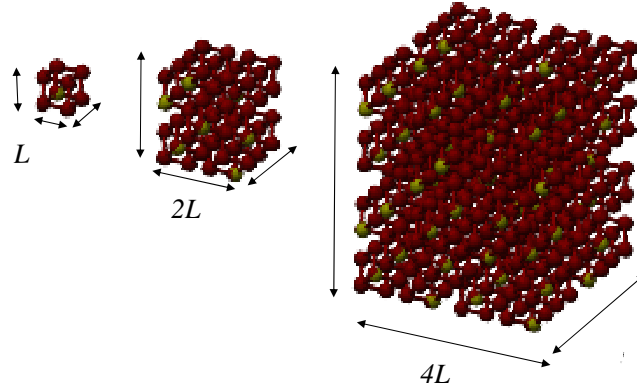


FIG. 3.3 – L'idée de Thouless. Il construit un échantillon de taille macroscopique à partir d'un échantillon microscopique en doublant la taille de celui-ci de manière itérative. Par exemple, il passe d'un échantillon cubique de taille  $(L)^d$  en dimension  $d$  à un échantillon de taille  $(2L)^d$  puis  $(4L)^d$  et ainsi de suite.

est une mesure microscopique du désordre, grande si le désordre est faible et vice et versa. Puis il double la taille de cette échantillon jusqu'à obtenir un échantillon de taille macroscopique dont il veut obtenir le comportement. Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramskrishnam ont développé, de façon théorique, la renormalisation associée à cette idée [47]. Pour cela, les auteurs introduisent la fonction  $\beta(g)$  supposée continue et monotone :

$$\beta(g) = \frac{d(\ln(g))}{d(\ln(L))} \quad (3.3)$$

en postulant que celle-ci ne dépend que de la conductance  $g$ . A partir de considérations physiques sur le comportement asymptotique de la fonction  $\beta$  dans les cas limites de faible et de fort désordre, les auteurs parviennent à une représentation de la fonction  $\beta$ . La figure 3.4 représente l'évolution de la fonction  $\beta(g)$  en fonction de  $\ln(g)$  pour les dimensions  $d = 1, 2$  et  $3$ . Nous voyons sur cette figure qu'il y a deux cas à distinguer :

- le cas où  $\beta(g) < 0$ , les états sont localisés ( $g \sim \exp\left(-\frac{L}{\xi}\right)$  avec  $\xi$  la longueur de corrélation). Lorsque  $L$  augmente, la conductance  $g$  diminue.
- le cas où  $\beta(g) > 0$ , les états sont délocalisés (on peut montrer que  $g \sim L^{d-2}$  [47]). Lorsque  $L$  augmente, la conductance  $g$  augmente.

Ce second cas ne se présente qu'en dimension  $d = 3$  où la fonction  $\beta(g)$  change de signe lorsque  $g = g_c$  paramètre critique de l'équation (3.1). Il s'agit donc d'une *transition métal-isolant*. Autour du point critique  $g_c$ , il n'y a pas de différence d'un point de vue microscopique, entre un métal et un isolant. De plus, les auteurs montrent que de chaque côté de la transition, les grandeurs caractéristiques divergent avec le même exposant critique  $\nu$ . Par contre, en dimension  $d = 1$  et  $d = 2$ , il n'y a théoriquement pas de transition métal-isolant. En dimension 1, il y a toujours localisation et donc l'échantillon est toujours isolant quelque soit sa taille ou son degré de désordre. En dimension 2, on observe un comportement asymptotique où la longueur de localisation diverge infiniment ( $\beta(g) \rightarrow 0^-$  lorsque  $\ln(g) \rightarrow +\infty$ ).

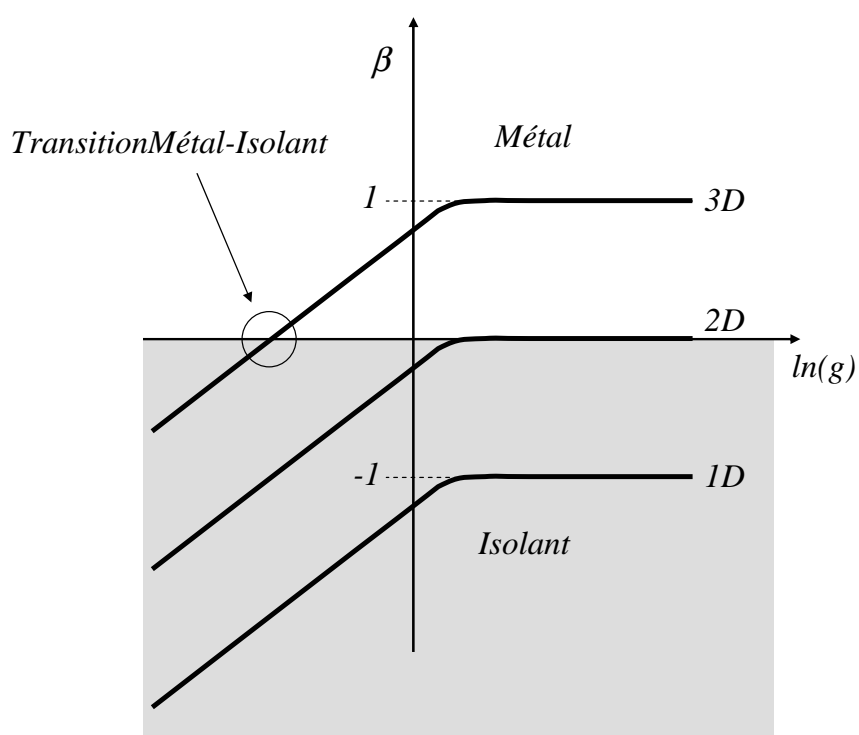


FIG. 3.4 – Fonction  $\beta$  de Thouless. En dimension 1 quelle que soit la valeur de  $\ln(g)$ , l'état est isolant (il y a toujours localisation), en dimension 2, la longueur de localisation diverge avec  $\ln(g)$  sans pour autant que le système devienne conducteur. En dimension 3, il existe une transition entre un état isolant et un état conducteur. C'est la transition d'Anderson. Pour chaque dimension, la fonction  $\beta$  tend vers une valeur asymptotique lorsque  $L \leq \xi$ .



### 3.1.3 La transition d'Anderson avec des atomes froids ?

Lorsqu'on effectue une recherche bibliographique, on s'aperçoit que le problème de la localisation d'Anderson dépasse les frontières de la physique du solide. Il s'est progressivement étendu à d'autres champs de la physique comme celui des systèmes dynamiques [57], du rayonnement électromagnétique [58, 59, 13, 60, 61], des ondes acoustiques [12] et de façon encore plus surprenante en biologie [62, 63] et en cosmologie [64]. La communauté des gaz froids et ultra froids n'est pas épargnée par la "fièvre" Anderson. En effet, les progrès réalisés ces deux dernières décennies pour piéger des gaz de bosons et de fermions dans les réseaux optiques permettent d'envisager le traitement de nombreux problèmes de physique du solide [65] et en particulier celui de la localisation d'Anderson. Ces systèmes possèdent les propriétés d'un cristal parfait et les conditions idéales pour observer de nombreux phénomènes de la physique du solide. De nombreuses propositions d'expériences ont été faites ces dernières années pour observer la localisation et la transition d'Anderson avec des atomes froids dans les potentiels optiques [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Mais les difficultés techniques associées à ses propositions ne semblent pas encore surmontées. Le modèle que nous allons présenter dans la section suivante, possède toutes les caractéristiques nécessaires à l'observation de la transition d'Anderson, avec pour avantage principal son extrême simplicité et la facilité de sa mise en place expérimentale.

## 3.2 Équivalence du kicked rotor à trois fréquences du modèle d'Anderson à trois dimensions

### 3.2.1 Le kicked rotor quasipériodique

Le modèle du kicked rotor quasipériodique à modulation d'amplitude a été introduit par D. Shepeliansky pour un modèle à deux fréquences dans [9] et par G. Casati, I. Guarneri et D. Shepeliansky pour un modèle à trois fréquences dans [75]. Il permet, par l'adjonction de ces fréquences supplémentaires dans le forçage, d'augmenter la dimensionalité effective du système d'autant de fréquences supplémentaires. Pour le modèle du kicked rotor simple introduit au chapitre premier, nous avons le hamiltonien :

$$H = \frac{P^2}{2} + V(\theta) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(\theta_0 - n) \quad (3.4)$$

avec  $V(\theta) = K \sin(\theta)$  et  $\theta_0 = \omega_0 t$ . Pour le modèle à trois fréquences, nous remplaçons le potentiel  $V(\theta)$  par un potentiel dépendant du temps  $V(\theta, \theta_0, \theta_1 = \varphi_1 + \omega_1 t, \theta_2 = \varphi_2 + \omega_2 t)$ . L'amplitude des pulses se trouve donc modulée dans le temps par les deux fréquences supplémentaires  $\nu_1 = \omega_1/2\pi$  et  $\nu_2 = \omega_2/2\pi$  avec des phases arbitraires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Pour être dans un cas quasipériodique, les fréquences  $\nu_1, \nu_2$  et la fréquence de forçage  $\nu_0$  doivent être incommensurables.

Pour expliciter le lien avec le modèle d'Anderson à trois dimensions, il faut considérer les phases  $\theta_1$  et  $\theta_2$  comme de nouvelles variables dynamiques avec leurs variables conjuguées respectives  $P_1$  et  $P_2$ . L'espace des phases  $(\theta, P)$  fait donc parti

### 3.2. Équivalence du kicked rotor à trois fréquences du modèle d'Anderson à trois dimensions

d'un espace des phases étendu  $(\theta, P; \theta_1, P_1; \theta_2, P_2)$  avec  $P_{1,2} = -i\frac{\partial}{\partial\theta_{1,2}}$  [76]. Nous pouvons alors définir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial\theta_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\theta_0} + \frac{\partial\theta_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\theta_2}$$

et l'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$i\omega_0 \frac{\partial}{\partial\theta_0} \psi = \left[ \frac{P^2}{2} - i\omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} - i\omega_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} + V(\theta, \theta_1, \theta_2) \sum_{n=0}^N \delta(t-n) \right] \psi$$

avec le hamiltonien suivant :

$$H_{3D} = \frac{P^2}{2} + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + V(\theta, \theta_1, \theta_2) \sum_{n=0}^N \delta(\theta_0 - n) \quad (3.5)$$

qui représente un quantum kicked rotor avec trois degrés de liberté  $(\theta, \theta_1, \theta_2)$  soumis périodiquement à un forçage où le potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$  n'est pas explicitement dépendant du temps. L'opérateur d'évolution sur une période s'écrit (dans l'approximation des pulses de Dirac) :

$$\hat{U}_{3D} = e^{-i\frac{V(\theta, \theta_1, \theta_2)}{\hbar}} e^{-i\frac{1}{\hbar}(\frac{P^2}{2} + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2)}. \quad (3.6)$$

Nous pouvons nous placer dans une représentation où les deux degrés de liberté nouvellement introduits représentent une phase globale pour la fonction d'onde avec :

$$\psi(\theta, \theta_1, \theta_2, t) = e^{-i\frac{(\omega_1 P_1 + \omega_2 P_2)t}{\hbar}} \tilde{\psi}(\theta, \theta_1, \theta_2, t) \quad (3.7)$$

et écrire l'équation de Schrödinger pour le modèle du kicked rotor quasipériodique :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\psi} = \left[ \frac{P^2}{2} + V(\theta, \theta_1, \theta_2) \sum_{n=0}^N \delta(t-n) \right] \tilde{\psi} \quad (3.8)$$

Maintenant que nous avons cette représentation, nous pouvons effectuer la transformation présentée dans la dernière section du chapitre premier et en annexe A pour retrouver le modèle du *tight-binding* mais cette fois-ci à trois dimensions :

$$T_n u_n + \sum_r W_r u_{n+r} = E u_n \quad (3.9)$$

avec  $n \equiv (n, n_1, n_2)$  et  $r \equiv (r, r_1, r_2)$  les sites à trois dimensions,

$$T_n = \tan \left[ \frac{1}{2} (E_n + n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \epsilon_n) \right], \quad (3.10)$$

$E_n = \frac{P^2}{2\hbar}$  et  $\epsilon_n$  la quasi-énergie.  $W_r$  une triple transformée de Fourier de  $\tan[\frac{1}{2}V(\theta, \theta_1, \theta_2)]$ . Le principal avantage d'une écriture sous la forme d'un kicked rotor quasipériodique du modèle du tight binding à trois dimensions est son efficacité numérique. Au lieu d'avoir à calculer un système réellement à trois dimensions, le calcul ici n'est pas beaucoup plus coûteux que le modèle du kicked rotor simple présenté au chapitre premier.

### 3.2.2 Correspondance des deux modèles

Nous avons donc montré dans la section précédente que le kicked rotor quasipériodique (à trois fréquences) est équivalent au modèle d'Anderson à trois dimensions. Il est difficile d'expliciter le lien entre les variables des deux modèles tant celles de l'un sont en réalité des combinaisons de celles de l'autre. Cependant, le paramètre d'ordre qui gouverne la transition, le désordre dans le modèle d'Anderson, est explicite pour le kicked rotor quasipériodique : il s'agit du paramètre  $K$  (figure 3.5). De même, la variable temporelle dans le kicked rotor quasipériodique (le nombre de pulses appliqués) représente la taille de l'échantillon dans le modèle d'Anderson. La dynamique spatiale du modèle d'Anderson devient une dynamique en impulsion pour le kicked rotor quasipériodique en particulier pour la localisation et la longueur de corrélation, grandeur caractéristique dans le modèle d'Anderson devient la longueur de localisation pour le kicked rotor quasipériodique.

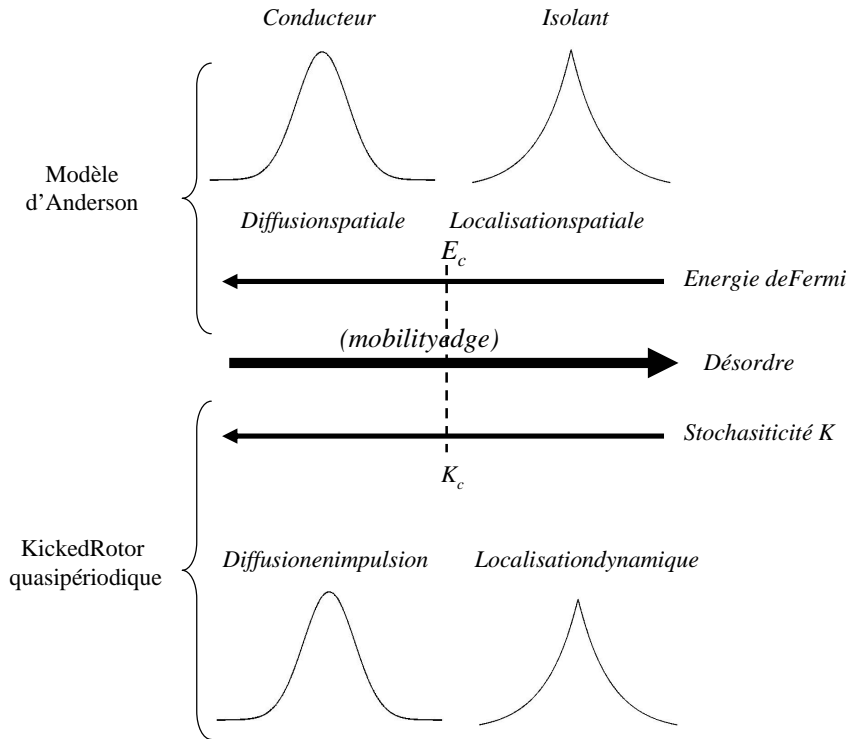


FIG. 3.5 – Représentation schématique de l'équivalence du modèle d'Anderson à trois dimension et du kicked rotor quasipériodique à trois fréquences. Le concept de *mobility edge* attribué dans le modèle d'Anderson à l'énergie de Fermi est ici étendu au paramètre de stochasticité  $K$  du kicked rotor quasipériodique. En dessous du paramètre critique  $K_c$ , tous les états de Floquet du kicked rotor sont localisés, il y a localisation dynamique. Ils deviennent étendus lorsque  $K > K_c$ . Le régime est alors diffusif.

### 3.3 Étude numérique du kicked rotor quasipériodique

#### 3.3.1 Mise en évidence de la transition localisé-délocalisé.

Cette partie présente quelques simulations numériques qui permettent de mettre en évidence un changement de comportement sur la dynamique du kicked rotor entre un régime localisé et un régime diffusif en fonction de notre paramètre d'ordre  $K$ .

Le principal potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$  utilisé ici est celui introduit dans [77] et il s'écrit :

$$V(\theta, \theta_1, \theta_2) = K [1 + \epsilon \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)] \cos(\theta). \quad (3.11)$$

La série de pulses pour le kicked rotor quasipériodique avec le potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$  est représentée sur la figure 3.6.

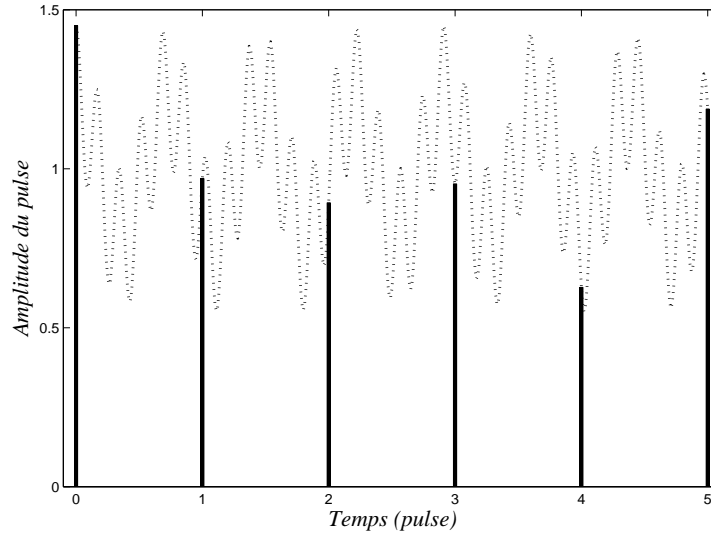


FIG. 3.6 – Représentation de l'évolution de l'amplitude des pulses lorsque ceux-ci sont modulés par la fonction  $f(t) = (1 + \epsilon \cos(\theta_1) \cos(\theta_2))$  avec  $\epsilon = 0,45$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}\nu_0$  et  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}\nu_0$  ( $\nu_0 = 1$  ici).

Avant de nous lancer dans l'étude de la dynamique quantique du kicked rotor quasipériodique, nous devons vérifier que les propriétés classiques (chaoticité et diffusion en impulsion) ne sont pas modifiées par le nouveau potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$  considéré ici. Nous avons tracé sur la figure 3.7, l'évolution de l'énergie cinétique du kicked rotor quasipériodique pour des valeurs croissantes du paramètre  $K$ . Pour  $K < 1$ , l'énergie cinétique n'évolue qu'autour d'une valeur moyenne constante au cours du temps. Le kicked rotor n'évolue que dans une portion limitée de l'espace des phases. Pour  $K > 1$ , nous constatons que l'énergie cinétique croît linéairement en fonction du temps. La dynamique est diffusif. Pour le kicked rotor quasipériodique, la diffusion apparaît donc pour des valeurs du paramètre  $K$  beaucoup plus faibles (pour  $K \approx 1$ ). La propriété essentielle du chaos classique, la diffusion en impulsion, est donc préservée par l'ajout des nouvelles fréquences. Nous pouvons donc nous lancer dans l'étude de la dynamique quantique du kicked rotor quasipériodique.

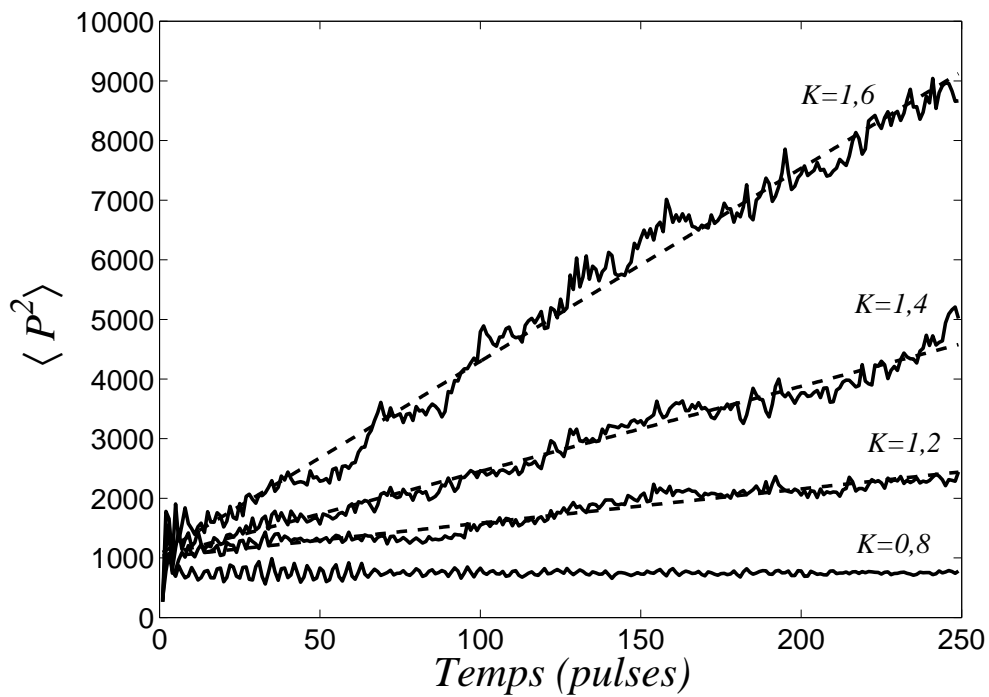


FIG. 3.7 – Énergie cinétique du kicked rotor quasipériodique classique (3.11) pour 4 valeurs du paramètre  $K$ . Pour  $K = 0,8$  l'énergie cinétique moyenne oscille autour d'une valeur moyenne constante au cours du temps. Pour  $K > 1$ , l'évolution de l'énergie cinétique tend vers une fonction affine croissante. La dynamique est diffusives.

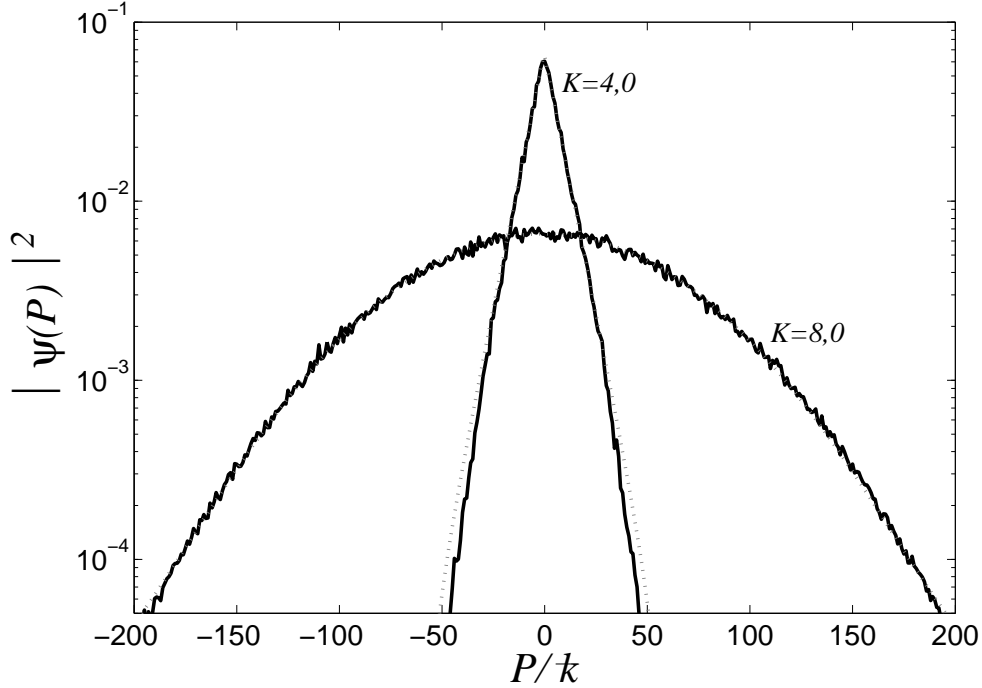


FIG. 3.8 – Distribution en impulsion pour le kicked rotor quasipériodique (simulation numérique). Les paramètres sont  $\bar{k} = 2,89$ ,  $\epsilon = 0,75$  et  $N = 1000$ . La distribution localisée qui épouse la forme exponentielle (fit en pointillé) a été réalisée pour  $K = 4,0$  et celle de forme gaussienne pour  $K = 8,0$ .

### Distributions en impulsion

Le figure (3.8) représente deux distributions en impulsion pour deux valeurs du paramètre  $K$  avec  $\bar{k} = 2,89$ ,  $\epsilon = 0,75$  et  $N = 1000$ .

- Pour  $K = 4$ , la distribution en impulsion est localisée et épouse la forme exponentielle, caractéristique de la localisation dynamique.
- Pour  $K = 8$ , la distribution est délocalisée et épouse une forme gaussienne qui, elle, caractérise une dynamique diffusive.

Nous avons donc un changement dans la dynamique *quantique* (la dynamique *classique* est bien chaotique et diffusive dans les deux cas) du kicked rotor quasipériodique en fonction du paramètre de stochasticité  $K$ .

Les travaux de Casati, Guarneri, Borgonovi et Shepeliansky [75, 77] montrent qu'il existe une transition entre un état localisé et un état délocalisé en fonction du paramètre de stochasticité  $K$ . Pour mettre en évidence la transition entre ces deux états, les auteurs étudient la dépendance de la longueur de localisation (lorsque l'état est localisé) et du coefficient de diffusion (lorsque l'état est délocalisé) en fonction du paramètre de contrôle  $K$ . La figure 3.9 présente cette dépendance pour des valeurs croissantes du paramètre  $K$  ( $\bar{k} = 2,89$ ,  $\epsilon = 0,75$ ) pour  $N = 150$  et  $N = 15000$ . Nous avons représenté sur le même graphe à gauche l'inverse de la longueur de localisation  $\frac{1}{P_{loc}} = 2|\psi(p=0)|^2$  caractérisant un régime localisé et à

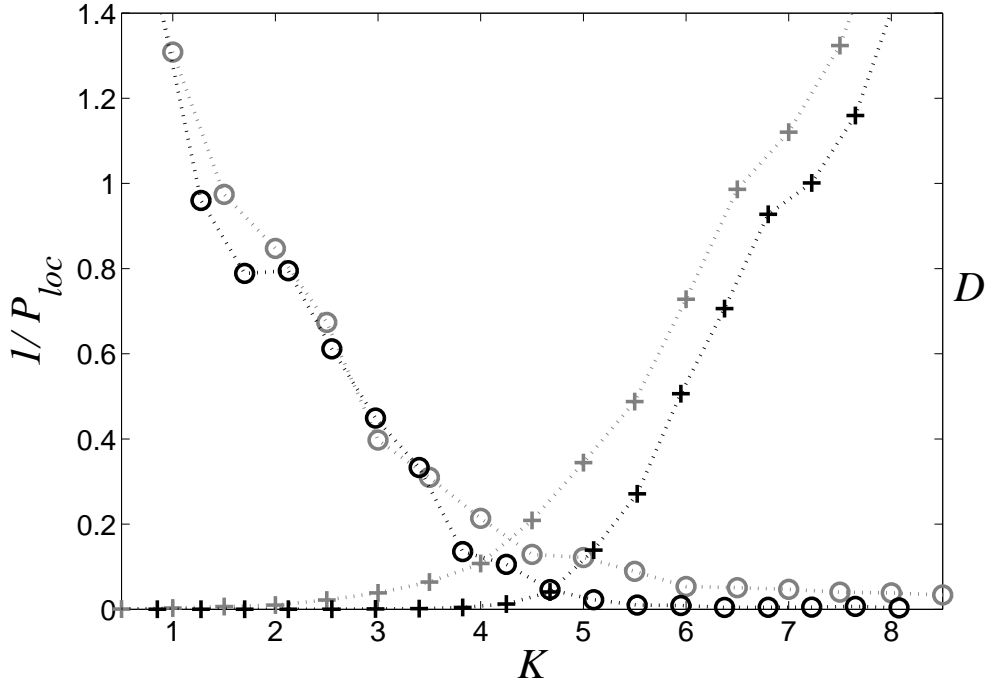


FIG. 3.9 – Évolution de l'inverse de la longueur de localisation (cercles) (calculé à partir de  $\frac{1}{P_{loc}} = 2|\psi(p=0)|^2$ ) et du coefficient de diffusion (croix) (calculé à partir de  $D = \langle P^2 \rangle / 2N$ ) en fonction du paramètre  $K$  pour le kicked rotor quasipériodique (simulation numérique). Les autres paramètres sont  $\hbar = 2,89$ ,  $\epsilon = 0,75$ ,  $N = 150$  (en gris),  $N = 15000$  (en noir). Lorsque l'on passe de  $N = 150$  à  $N = 15000$ , l'intersection des deux courbes (point supposé de la transition) se déplace vers une valeur de  $K$  plus élevée.

droite le coefficient de diffusion  $D = \langle P^2 \rangle / 2N$  qui caractérise un régime diffusif.

La figure 3.9 montre clairement une transition d'un état localisé vers un état délocalisé. Lorsque le paramètre  $K$ , la longueur de localisation augmente (son inverse tend donc vers 0) alors que le coefficient de diffusion augmente. Entre  $N = 150$  et  $N = 15000$ , le point d'intersection, point supposé de la transition, entre les deux courbes s'est déplacé pour une valeur de  $K$  plus élevée. La transition semble plus "raide" pour  $N = 15000$ , mais il n'y a pas de discontinuité, ce qui serait une signature claire de la transition de phase.

Dans la référence [75], les auteurs affirment que les dépendances de  $1/P_{loc}$  et  $D$  en  $K$  sont constantes avec les lois de puissance :

$$\frac{1}{P_{loc}} \sim (K - K_{cr})^\nu \quad (3.12)$$

et

$$D \sim (K - K_{cr})^s \quad (3.13)$$

avec  $K_{cr} \simeq 0,469 \times \hbar$  et pour exposant critique  $\nu \simeq 1,5$  et  $s \simeq 1,25$ . Dans la référence [77] (où le potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$  correspond à notre modèle), le  $K_{cr} \simeq 1,88 \times \hbar$  mais rien n'est précisé pour la valeur de l'exposant critique.

Les travaux présentés jusqu'ici suggèrent l'existence d'une transition localisé-délocalisé pour le kicked rotor quasipériodique. Cependant, pour obtenir des résultats satisfaisants, les simulations numériques sont réalisées avec un grand nombre de pulses ( $N \approx 15000$ ) et sans décohérence. Il s'agit là de situations idéales malheureusement inaccessibles expérimentalement. Enfin les grandeurs mesurées, la longueur de localisation et surtout le coefficient de diffusion ne sont pas, nous l'avons vu au chapitre précédent les grandeurs les plus facilement accessibles dans notre expérience. Nous allons voir dans la suite que nous pouvons adopter une autre stratégie bien plus puissante appelée Finite Size Scaling où seule la mesure  $|\psi(p=0)|^2$ , mesure la plus fiable de notre expérience, est nécessaire. Cette stratégie va nous permettre de montrer clairement l'existence d'une transition de phase et obtenir des résultats quantitatifs sur l'exposant critique.

#### 3.3.2 Finite Size Scaling

Nous venons de voir, qu'il est très difficile d'obtenir des résultats quantitatifs sur la transition observée entre l'état localisé et délocalisé pour le kicked rotor quasipériodique malgré des simulations réalisées avec un grand nombre de pulses. Le même problème se pose pour la transition d'Anderson en physique du solide. L'une des caractéristiques des transitions de phase est un comportement singulier autour d'une valeur critique du paramètre d'ordre. Nous avons vu, que pour la transition d'Anderson (section 3.1.2), la longueur de corrélation diverge (du côté isolant) à l'approche de cette valeur critique de même lorsqu'on approche ce point critique du côté conducteur, le coefficient de diffusion tend vers zéro. Ce comportement singulier ne peut-être observé que dans des échantillons de taille macroscopique. Dans les expériences présentées au 3.1.1 ou dans les études numériques la divergence de la longueur de corrélation autour du point critique est "ramollie" (la longueur de corrélation devient comparable à la taille de l'échantillon) et ne permet pas d'extraire les quantités qui caractérisent la transition comme l'exposant critique  $\gamma$ . Pour surmonter cette difficulté, les physiciens de la matière condensée ont mis au point une approche appelée "*Finite Size Scaling*" [51]. Cette méthode permet d'extrapoler correctement le comportement de la longueur de corrélation autour du point critique pour un échantillon de taille infinie à partir d'un échantillon de taille finie. Dans le problème du kicked rotor quasipériodique, nous avons vu que le temps correspond à l'espace dans le problème d'Anderson, le Finite Size Scaling est donc devenu un *Finite Time Scaling* (FTS) pour notre problème. Nos collaborateurs du laboratoire Kastler Brossel Gabriel Lemarié, Benoît Grémaud et Dominique Delande ont mis en place cette méthode de "*Finite Time Scaling*" inspirée des méthodes utilisées par les physiciens de l'état solide pour étudier les transitions de phase et notamment la transition d'Anderson. Nous présentons dans cette sous section, de façon simple et non exhaustive le principe du Finite Time Scaling<sup>2</sup> ainsi que les simulations réalisées par nos collaborateurs.

---

<sup>2</sup>Voir pour une description complète du Finite Time Scaling la thèse de G. Lemarié, à venir.



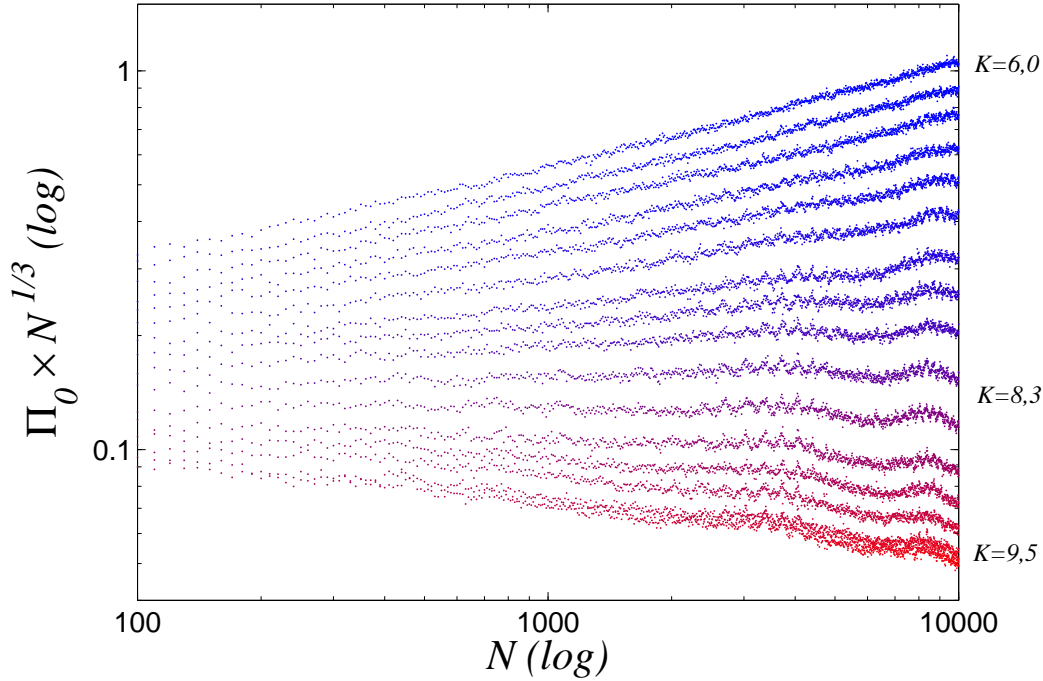


FIG. 3.10 – Données numériques brutes de  $\Pi_0 \times N^{1/3}$  en fonction de  $N$  ( $100 < N < 10000$ ) en échelle logarithmique. Pour plusieurs valeurs de  $K$  (de haut en bas) de 6,0 à 9,5 ( $k = 2,89$  et  $\epsilon = 0,3$ ). On distingue nettement les deux régimes : en haut (bleu) la pente positive caractérise un régime localisé et en bas (rouge) la pente négative un régime diffusif. Au centre, la pente nulle correspond au régime critique de diffusion anormale pour  $K \approx 8,3$ .

Pour pouvoir appliquer le principe du Finite Time Scaling aux résultats numériques (et plus loin voir 3.4.3, aux résultats expérimentaux), nous revenons d'abord sur une manière de mettre en évidence la transition par une renormalisation de la quantité  $|\psi(p=0)|^2$  que nous notons dans la suite  $\Pi_0$ . Sur la figure 3.10 nous avons représenté le logarithme de  $\Pi_0 \times N^{1/3}$  en fonction du logarithme de  $N$  pour différentes valeurs du paramètre  $K$ . Lorsque nous sommes dans un régime de localisation dynamique,  $\Pi_0$  tend asymptotiquement vers une constante du temps, nous obtenons donc sur la figure 3.10 une droite de pente positive (pour  $K \approx 6$  à  $K \approx 7,5$ ). Par contre, lorsque le régime est diffusif,  $\Pi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$  et la courbe correspondante représente une droite de pente négative (pour  $K \approx 8,5$  et  $K \approx 9,5$ ). Lorsque la pente est nulle ( $K \approx 8,3$ ), il s'agit d'une diffusion anormale, qui caractérise la transition de phase.

### Principe du Finite Time Scaling

Les concepts associés aux phénomènes critiques comme les transitions de phases, que sont les classes d'universalité (les propriétés macroscopiques de la transition ne dépendent pas des propriétés microscopiques) et la renormalisation (la description

### 3.3. Étude numérique du kicked rotor quasipériodique

des lois d'échelle autour du point critique), sont à l'origine de Finite Time Scaling.

L'hypothèse que nous faisons est que le comportement de la longueur de localisation :  $P_{loc}^2 = \langle P^2 \rangle \sim \left( \frac{1}{|\psi(p=0)|^2} \right)^2$  que nous notons par commodité  $\frac{1}{\Pi_0^2(N)}$ , est régi autour du point critique par une loi d'échelle du type :

$$\frac{1}{\Pi_0^2(N)} = N^{k_1} F[(K - K_c)N^{k_2}] \quad (3.14)$$

Aucune hypothèse n'est faite sur la fonction  $F$  et les deux exposants  $k_1$  et  $k_2$  sont à déterminer à partir du comportement asymptotique de la fonction  $F^3$ . Notons que le point critique sépare deux régimes différents : diffusif, du côté des  $K$  élevés et localisé, pour les  $K$  de faibles valeurs. Nous allons maintenant essayer de déterminer, en utilisant des arguments physiques, le comportement de la fonction  $F$  pour  $K \rightarrow K_c^+$  et  $K \rightarrow K_c^-$ .

- Dans un régime diffusif, le coefficient de diffusion tend vers zéro à mesure que  $K$  tend vers  $K_c$  par la droite et on a :

$$D \sim (K - K_c)^s. \quad (3.15)$$

Or pour  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $F(x) \simeq x^s$  et donc pour  $x = (K - K_c)N^{k_2} \rightarrow +\infty$  on doit avoir :

$$\frac{1}{\Pi_0^2(N)} = DN = N^{k_1} F[(K - K_c)N^{k_2}] \simeq N^{k_1} \left( (K - K_c)N^{k_2} \right)^s. \quad (3.16)$$

Ce qui impose :

$$k_1 + sk_2 = 1 \quad (3.17)$$

- Dans le régime localisé, la longueur de localisation diverge lorsque  $K$  tend vers  $K_c$  par la gauche et on obtient :

$$P_{loc} \sim (K - K_c)^{-\nu}. \quad (3.18)$$

Pour  $x \rightarrow -\infty$  on a  $F(x) \simeq x^{-2\nu}$  et donc pour  $x = (K - K_c)N^{k_2} \rightarrow -\infty$  on doit avoir :

$$\frac{1}{\Pi_0^2(N)} = P_{loc}^2 = N^{k_1} F[(K - K_c)N^{k_2}] \simeq N^{k_1} \left( (K - K_c)N^{k_2} \right)^{-2\nu}. \quad (3.19)$$

Ce qui implique :

$$k_1 - 2\nu k_2 = 0. \quad (3.20)$$

Les relations (3.17) et (3.20), ainsi que la loi de Wegner :  $s = (d - 2)\nu$  [80, 81] où la dimension  $d = 3$ , suggère donc la loi d'échelle :

$$\frac{1}{\Pi_0^2(N)} = N^{2/3} F[(K - K_c)N^{-1/3}] \quad (3.21)$$

---

<sup>3</sup>Ce type de loi d'échelle est utilisée avec succès, par exemple dans les problèmes de percolation [78, 79].

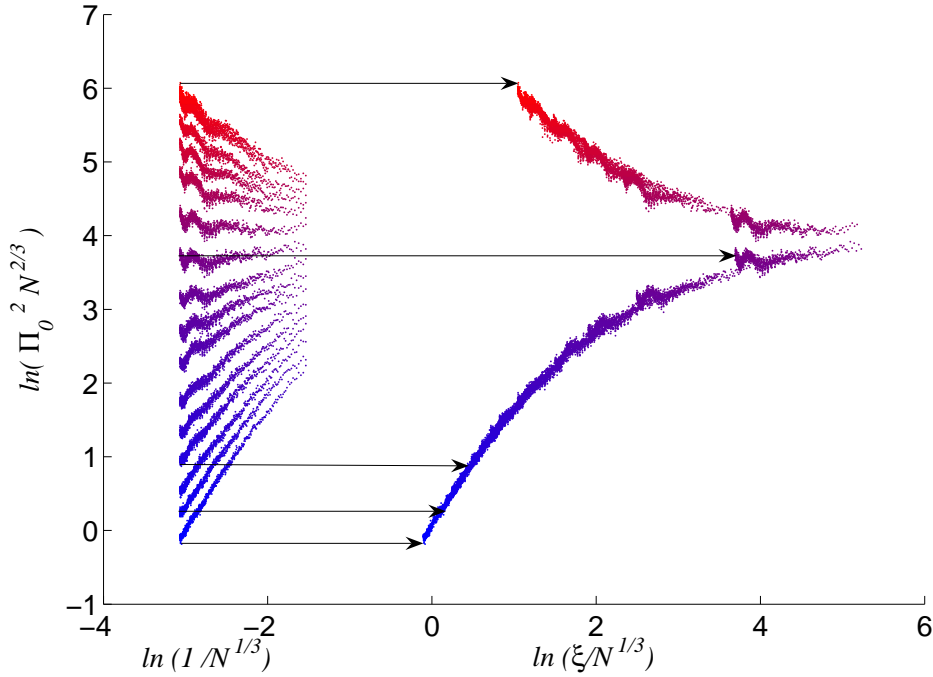


FIG. 3.11 – Principe de la procédure de Finite Time Scaling. A gauche les données brutes de  $\ln(1/\Pi_0^2 N^{2/3})$  en fonction de  $\ln(N^{-1/3})$ . A droite, la fonction d'échelle  $f$  obtenue en appliquant la procédure de Finite Time Scaling aux données brutes de la figure de gauche. La procédure de FTS détermine par une méthode de "moindres carrés" la quantité  $\xi$  qui translate chaque courbe de gauche sur la fonction d'échelle  $f$  (seulement quelques courbes ont été tracées pour la visibilité).

soit :

$$\Lambda(N) = \frac{1}{\Pi_0^2(N)N^{2/3}} = f(\xi N^{-1/3}) \quad (3.22)$$

où  $\xi$  est le paramètre d'échelle qui ne dépend que du paramètre  $K$ . Aucune hypothèse n'est faite pour la fonction  $f$ . La fonction d'échelle  $f$  est obtenue numériquement. C'est une procédure de type "moindre carré" qui place les courbes de  $\ln(\Lambda(N))$  en fonction de  $\ln(N^{-1/3})$  sur la fonction  $f$  (aucune forme n'est définie pour  $f$ , elle est entièrement déterminée par la procédure) en les translatant d'une quantité  $\xi$  (voir figure 3.11). Cette fonction  $f$  est représentée sur la figure 3.12 pour une simulation numérique. On distingue nettement deux branches correspondant aux deux régimes. La branche supérieure en rouge correspond au régime diffusif et la branche inférieure en bleu au régime de localisation dynamique. Au centre, la pointe représente le régime critique de diffusion anormale.

De cette procédure, on extrait pour chaque valeur de  $K$  une valeur correspondante de  $\xi$ . C'est en traçant le paramètre d'échelle  $\xi$  qui représente la quantité nécessaire pour translater chaque courbe de la figure 3.11 (correspondant à une valeur  $K$  donnée) pour obtenir la fonction d'échelle  $f$  (figure 3.12), que l'on peut obtenir l'exposant critique et observer la divergence de  $\xi = \xi_\infty$  la longueur de localisation à

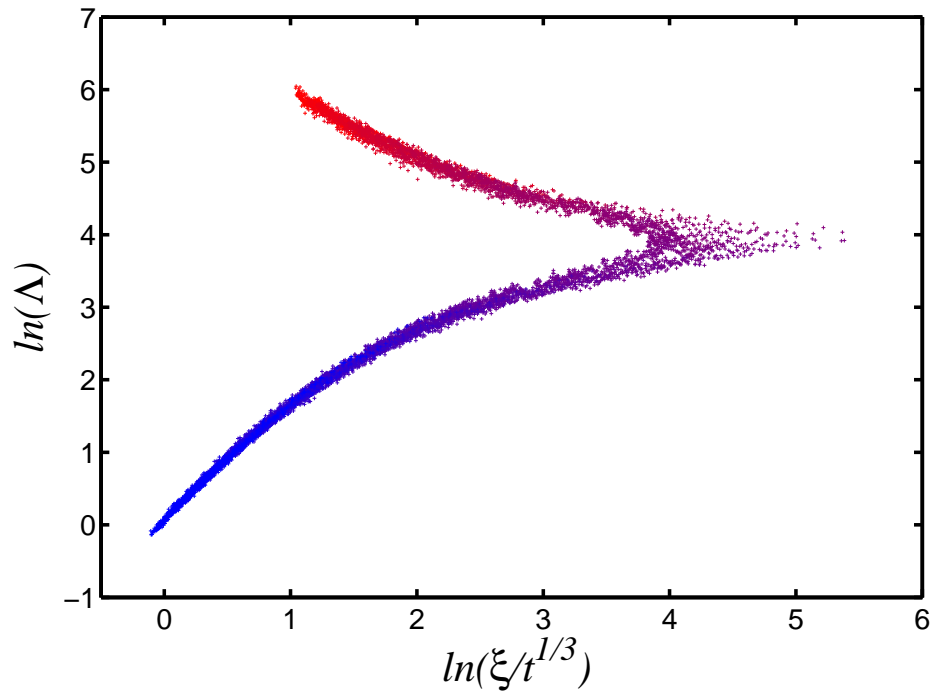


FIG. 3.12 – La procédure de FTS appliquée à l'ensemble des données numériques de  $\ln(1/\Pi_0^2 \times N^{2/3})$  en fonction de  $\ln(1/N^{1/3})$  en échelle logarithmique pour 80 valeurs de  $K$  de 6,0 à 9,5. On distingue nettement les deux branches : en haut (rouge) la pente négative caractérise un régime diffusif et en bas (bleu) la pente négative un régime de localisation. Au centre, la pointe correspond au régime critique de diffusion anormale.

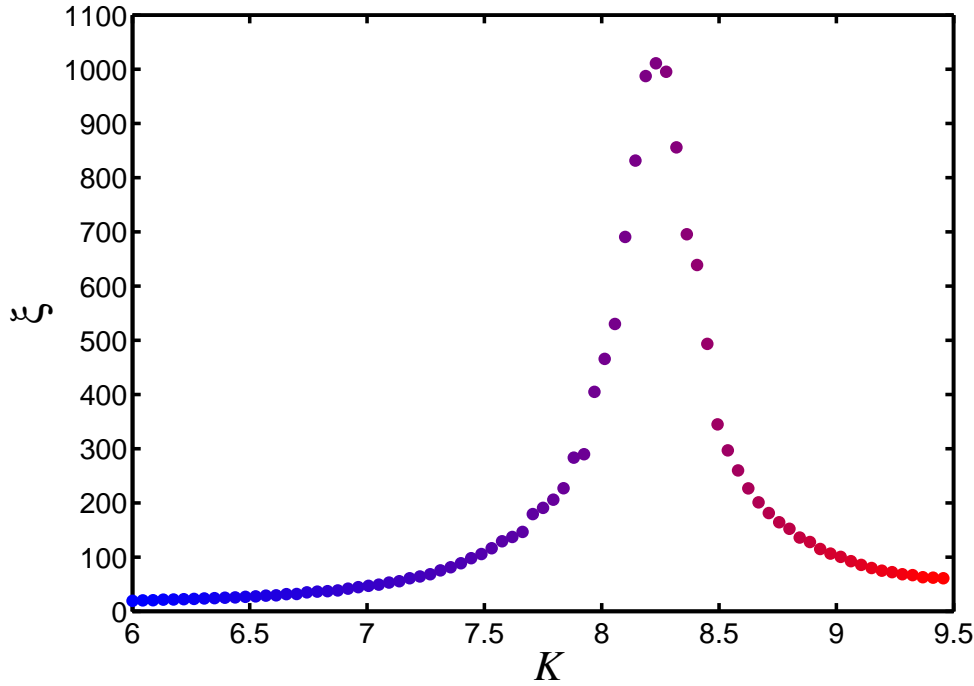


FIG. 3.13 – Le paramètre d'échelle  $\xi$  issu de la procédure de FTS appliqués à l'ensemble des données numériques en fonction de  $K$ . A l'approche de  $K_c$ , le paramètre d'échelle qui représente la longueur de localisation pour  $K < K_c$  diverge. Pour  $K > K_c$ ,  $\xi$  représente l'inverse du coefficient de diffusion.

temps infini. La fonction  $\xi(K)$  épouse une forme du type  $(K - K_c)^{-\nu}$  avec  $K_c = 8,23$  et  $\nu = 1,6 \pm 0,2$  (l'erreur provient de la procédure de fit).

Il est possible d'obtenir une valeur plus précise de l'exposant critique en linéarisant la fonction  $\Lambda(t)$  autour du point critique et en fittant par une fonction du type :

$$\Lambda(N) = A + B(K - K_c)N^{\frac{1}{3\nu}}. \quad (3.23)$$

La valeur de l'exposant critique ainsi obtenue est  $\nu_{num} = 1,58 \pm 0,1$ .

Le Finite Time Scaling est donc une méthode puissante qui nous permet d'obtenir, en plus d'un critère visuel pour apprécier la transition de phase (figures 3.12 et 3.13), une valeur de l'exposant critique  $\nu$ . Nous allons voir dans la suite que, bien que les simulations présentées ici aient été réalisées avec un très grand nombre de pulses, la méthode de Finite Time Scaling donne de très bons résultats avec les données expérimentales obtenues avec moins de deux cents pulses.

### 3.4 Études expérimentales de la transition d'Anderson

#### 3.4.1 Mise en place expérimentale : la modulation d'amplitude

Pour pouvoir observer la transition d'Anderson, nous devons réaliser le potentiel donné par l'équation 3.11. Pour cela, nous avons mis en place une modulation de

l'amplitude des pulses de l'onde stationnaire en nous servant d'une méthode déjà utilisée pour des expériences précédentes [82, 6, 83] avec cependant quelques améliorations. Le montage radiofréquence est représenté sur la figure (3.14). Pour moduler l'amplitude des pulses optiques, nous modulons directement l'amplitude des pulses radiofréquence qui alimentent le modulateur acousto-optique chargé de les générer.

Afin d'obtenir la modulation d'amplitude la plus proche possible du potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$  souhaité, nous avons mis en place une procédure de calibration de l'amplitude des pulses d'onde stationnaire, qui consiste à mesurer la fonction de transfert du modulateur acousto-optique qui n'est pas linéaire. Pour cela, nous enregistrons la puissance optique injectée dans la fibre optique (figure MOPA chapitre 2) via un prélèvement de 1% sur celle-ci en fonction de la la puissance de la radiofréquence transmise au modulateur acousto-optique. La fonction de transfert obtenue est représentée sur la figure 3.15. Pour obtenir la modulation optique souhaitée (figure 3.15) qui réalise le potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$ , l'ordinateur se charge de calculer l'intensité de la radiofréquence à appliquer.

### 3.4.2 Mise en évidence d'un changement de comportement.

Les premières expériences que nous avons réalisées visaient à mettre en évidence un changement de comportement entre un régime de localisation dynamique et un régime diffusif au sein du modèle d'Anderson à trois dimensions. L'approche est la suivante : dans un régime de localisation dynamique, la distribution est gelée dans le temps sous une forme exponentielle et notre mesure favorite, la population d'atomes à impulsion nulle  $\Pi_0 \sim \frac{1}{P_{loc}}$  est une constante du temps. Dans un régime diffusif,  $\Pi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ , n'est plus une constante du temps.

La figure 3.16 présente à gauche l'évolution de  $\Pi_0$  en fonction de la variable  $\epsilon$  pour trois durées différentes d'expériences (50, 75 et 100 pulses) et à droite  $\Pi_0 \times \sqrt{N}$ . Sur la figure de droite, pour des valeurs  $\epsilon > 0,5$ , les trois courbes coïncident,  $\Pi_0$  évolue donc proportionnellement à la racine carrée du temps. Nous sommes donc en présence d'un régime diffusif. Le lecteur attentif aura remarqué que dans ce cas pour  $\epsilon < 0,5$  nous devrions avoir sur la figure de gauche les trois courbes qui coïncident pour un régime de localisation. Ce n'est pas le cas car encore une fois la décohérence crée une légère diffusion qui entrave l'état stationnaire de  $\Pi_0$  en fonction du temps.

Nous pouvons faire la même étude sur  $\Pi_0$  en fonction du paramètre  $K$  et obtenir la figure 3.17. Les conclusions sont les mêmes. Pour les différentes valeurs de  $N$ , les courbes représentant  $\Pi_0 \times \sqrt{N}$  en fonction de  $K$  se superposent pour  $K > 4.2$ , signe d'un régime diffusif.

Ces premiers résultats expérimentaux constituent la première indication que nous avons obtenu d'une possible transition de phase avec le passage d'un régime de localisation dynamique vers un régime diffusif. Cependant, ils ne sont pas supports à conclure à une transition de phase. Il nous manque la divergence d'une grandeur caractéristique (la longueur de localisation). Pour cela, nous allons appliquer le Finite Time Scaling décrit auparavant à nos résultats expérimentaux.

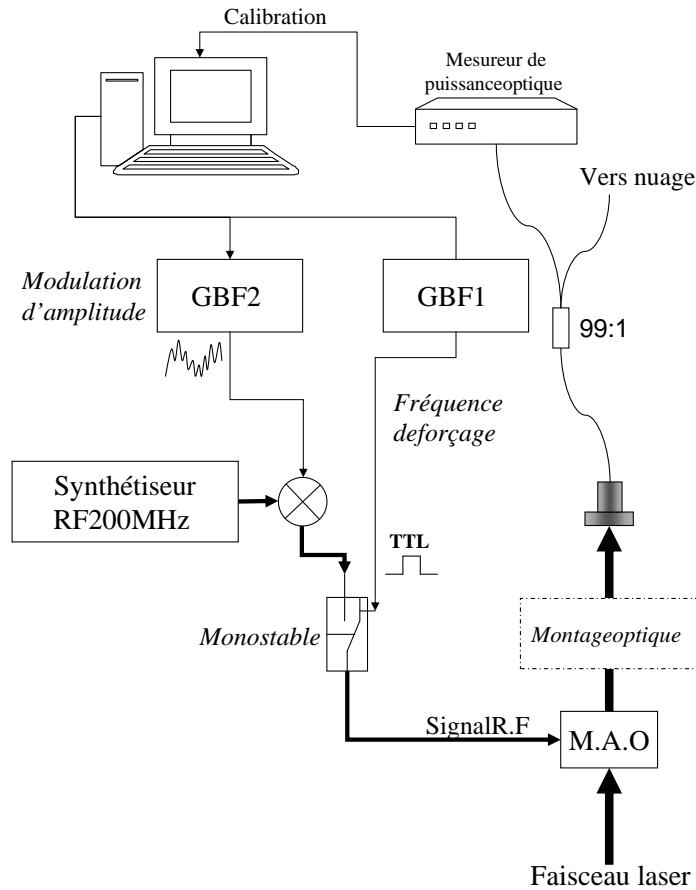


FIG. 3.14 – Schéma simplifié du dispositif radiofréquence chargé générant les pulses d'onde stationnaire modulés en amplitude. Le signal de modulation du générateur basse fréquence GBF2 module l'amplitude du signal radiofréquence issu du synthétiseur. Une fois celui-ci modulé en amplitude, le GBF 1, impose la fréquence des pulses via le monostable. Le signal radiofréquence modulé et pulsé alimente le modulateur acousto-optique qui génère les pulses laser. Une partie de faisceau laser est prélevée via un coupleur fibré (1%) pour mesurer la puissance des pulses optiques générés. Cette mesure de puissance permet à l'ordinateur de calculer la puissance de la radiofréquence à appliquer au modulateur acousto-optique (en réalité l'amplitude de la modulation sur le GBF 2) pour obtenir la puissance optique correspondant au potentiel  $V(\theta, \theta_1, \theta_2)$ .

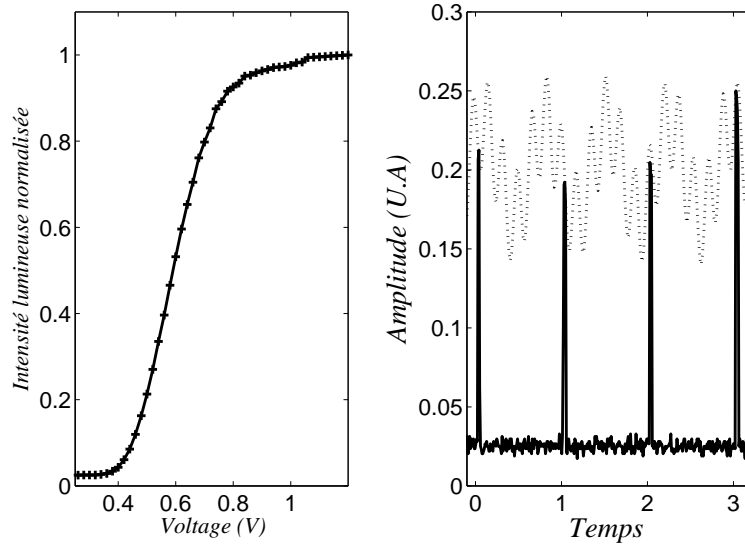


FIG. 3.15 – A gauche, la fonction de transfert du modulateur acousto-optique. Intensité lumineuse recueillie par le mesureur de puissance en fonction de la tension appliquée par le générateur basse fréquence. A droite, les pulses optiques modulés en amplitude.

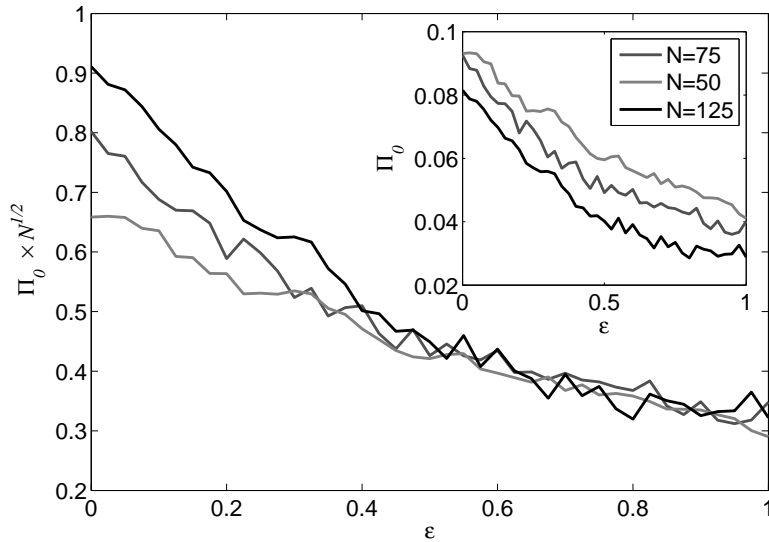


FIG. 3.16 – En encart, l'évolution du sommet de la distribution en impulsion  $\Pi_0$  en fonction du paramètre  $\epsilon$  pour trois durées ( $N = 50, 75$  et  $100$ ) avec  $\bar{k} = 3,46$ . En figure principale,  $\Pi_0 \times \sqrt{N}$  en fonction de  $\epsilon$ . Les trois courbes se superposent aux alentours de  $\epsilon \approx 0,5$ . Pour  $\epsilon > 0,5$ , le régime est donc diffusif.



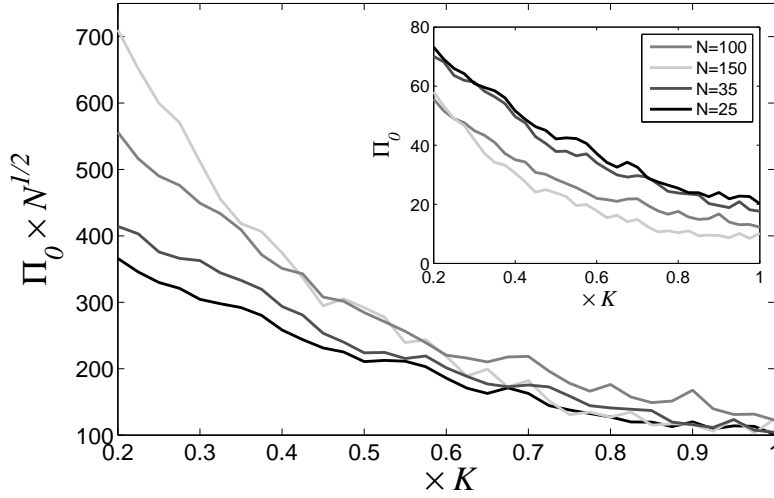


FIG. 3.17 – En encart, l' évolution du sommet de la distribution en impulsion  $\Pi_0$  en fonction du paramètre  $K \approx 7$  pour trois durées ( $N = 50, 75$  et  $100$ ) avec  $k = 3, 46$  et  $\epsilon = 1$ . La figure principale représente,  $\Pi_0 \times \sqrt{N}$  en fonction de  $K$ . Sur la figure de droite les trois courbes se superposent aux alentours de  $K \approx 0,6 \times 7$ . Pour  $K > 4,2$ , le régime est donc diffusif.

### 3.4.3 Le Finite Time Scaling appliqué aux résultats expérimentaux

Nous avons donc appliqué la procédure de Finite Time Scaling décrite plus haut (voir section 3.3.2) à nos résultats expérimentaux. Sur la figure 3.18, nous avons représenté le logarithme de  $\Pi_0 \times N^{1/3}$  en fonction du logarithme de  $N$  pour quelques valeurs croissantes du paramètre  $K$  (5 sur un ensemble 44 utilisées par la suite sur la figure 3.19). Lorsque nous sommes dans un régime de localisation dynamique,  $\Pi_0 \times N^{1/3}$  représente une droite de pente positive (pour  $K \approx 0,9$  et  $2,1$ ) en fonction de  $N$  (en échelle log). Par contre, lorsque le régime est diffusif,  $\Pi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ , nous obtenons une droite de pente négative (pour  $K \approx 6,3$  et  $9,0$ ). Lorsque la pente est nulle ( $K \approx 3,8$ ), il s'agit alors de la diffusion anormale. Lorsqu'on applique la procédure FTS à la totalité des données expérimentales recueillies (pour 44 valeurs de  $K$  entre  $0,9$  et  $9$ ), nous obtenons la fonction d'échelle  $f$  (figure 3.22).

Cette fonction  $f$  est représentée sur la figure 3.19 pour les données expérimentales. On distingue à nouveau de façon nette deux branches correspondant aux deux régimes. La branche supérieure en rouge correspond au régime diffusif et la branche inférieure en bleu au régime de localisation dynamique. Au centre, la pointe représente le régime critique de diffusion anormale.

Pour obtenir les paramètres  $K_c$  et  $\nu$  qui régissent la transition autour du point critique, nous avons tracé le paramètre d'échelle en fonction de  $K$  sur la figure 3.21. En fittant la fonction  $\xi(K)$ , nous parvenons à une valeur de  $K = 3,83$ . A partir, de ces deux courbes, nous pouvons bien conclure à l'observation de la transition de phase. Cependant nombre d'effets parasites comme l'émission spontanée perturbent

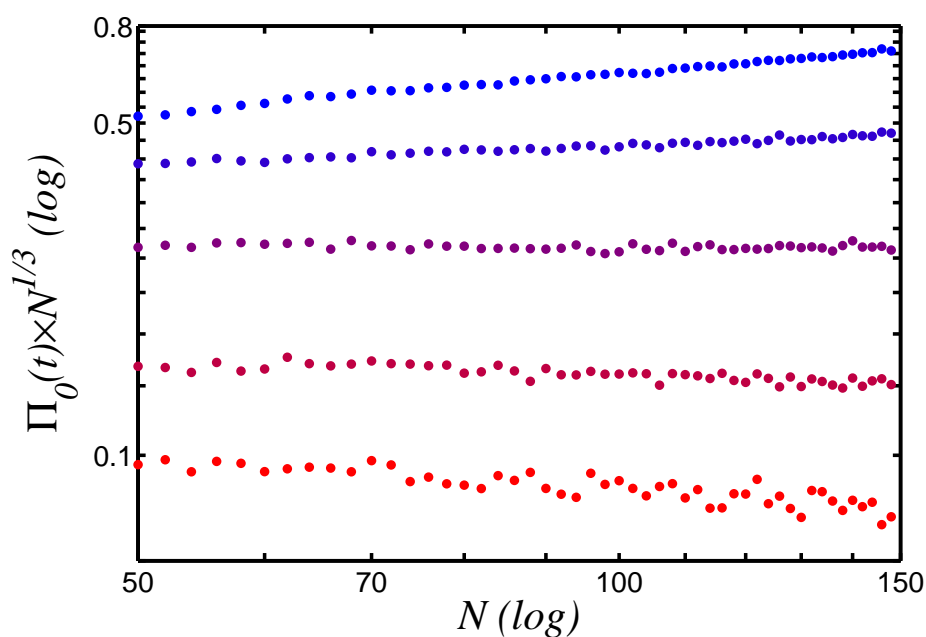


FIG. 3.18 – Quelques données expérimentales brutes de  $\Pi_0 \times N^{1/3}$  en fonction de  $N$  en échelle logarithmique pour cinq valeurs de  $K$  (de haut en bas) 0,9 ; 2,1 ; 3,8 ; 6,3 et 9,0 ( $\bar{k} = 2,89, \epsilon = 0,3$ ). On distingue nettement les deux régimes : en haut (bleu) la pente positive caractérise un régime localisé et en bas (rouge) la pente négative un régime diffusif. Au centre  $K \approx 3,8$ , la pente nulle correspond au régime critique de diffusion anormale.

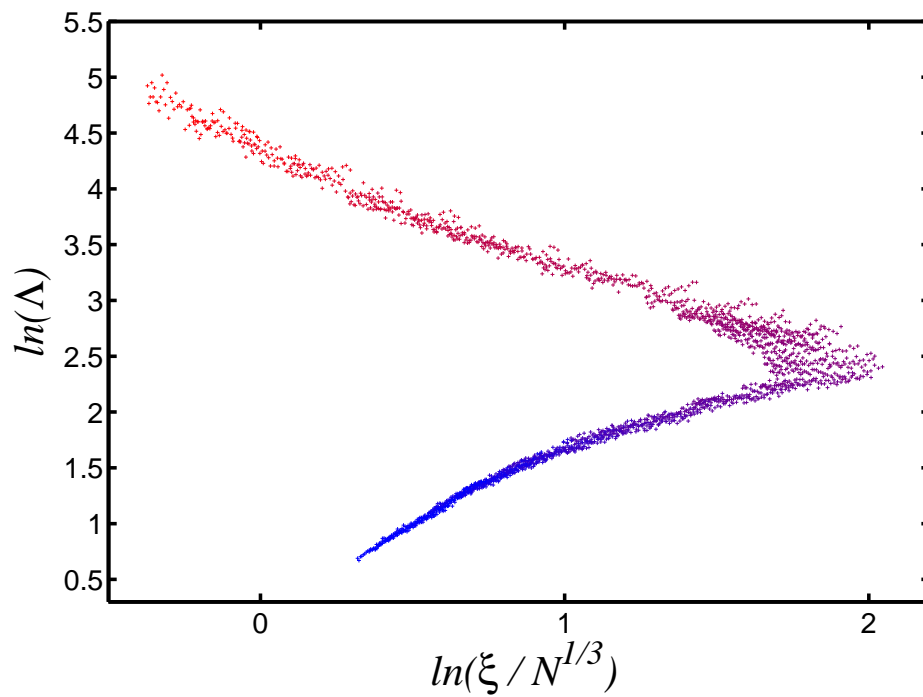


FIG. 3.19 – La procédure de FTS appliqués à l'ensemble des données expérimentales (pour 44 valeurs de  $K$  entre 0,9 et 9) : fonction d'échelle  $\ln(\Lambda)$  en fonction de  $\ln(\xi/N^{1/3})$ . On distingue nettement les deux branches : en haut (rouge) la pente négative caractérise un régime diffusif et en bas (bleu) la pente négative un régime de localisation. Au centre, la pointe correspond au régime critique de diffusion anormale.

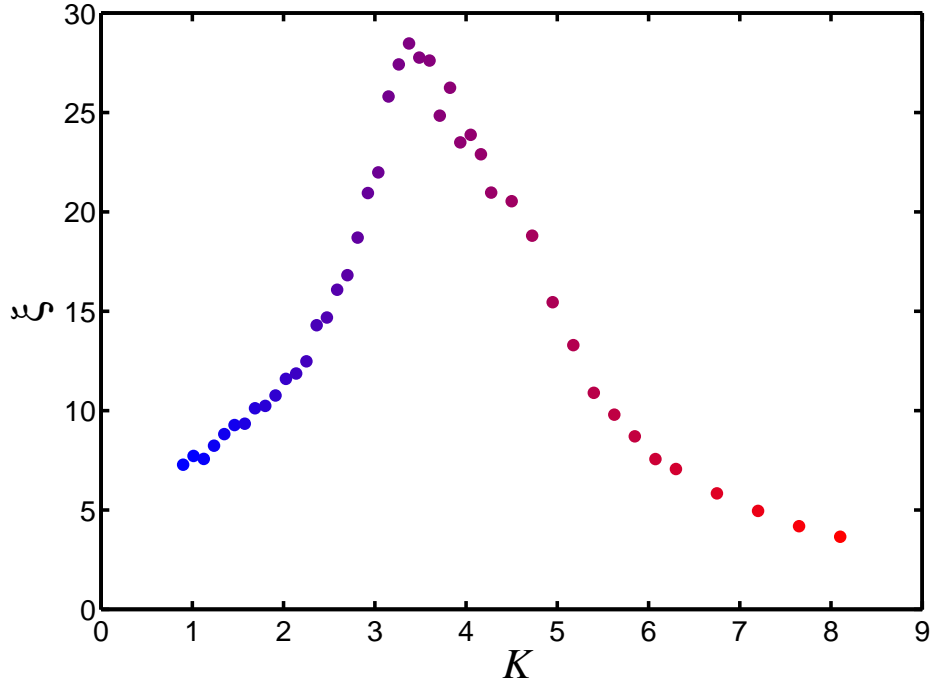


FIG. 3.20 – Le paramètre d'échelle  $\xi$  issu de la procédure de FTS appliquée à l'ensemble des données expérimentales brutes de  $\Pi_0 \times N^{1/3}$  en fonction de  $K$ . A l'approche de  $K_c$ , le paramètre d'échelle qui représente la longueur de localisation pour  $K < K_c$  diverge. Pour  $K > K_c$ ,  $\xi$  représente l'inverse du coefficient de diffusion.

les résultats expérimentaux et rendent ceux-ci peu comparables avec les résultats des simulations. Le paramètre  $K_c$  est plus petit que celui déterminé à l'aide des simulations. De plus la divergence de  $\xi(K)$  est moins marquée sur les données expérimentales (3.21) comparée à celle obtenue numériquement. Deux effets expliquent ces différences. Tout d'abord, les simulations ont été réalisées avec un très grand nombre de pulses ( $N = 10000$ ) par rapport à l'expérience ( $N = 150$ ), bien que la procédure FTS soit puissante, elle ne permet pas d'obtenir avec 150 pulses une courbe expérimentale  $f_{exp}$  comparable à celle obtenue numériquement (figure 3.12) surtout dans le régime diffusif (branche supérieure de  $f_{exp}$  sur la figure 3.19). En effet, un si faible nombre de pulses ne permet pas d'apprécier le caractère diffusif aussi bien que le caractère localisé. Ensuite, les simulations présentées ont été réalisées sans décohérence. Or nous savons que la décohérence, est un effet parasite qui restaure un régime diffusif au sein du kicked rotor. Lorsque le système approche du point critique de la transition (pour  $K$  croissant par exemple), les effets d'interférence qui ont tendance à maintenir la localisation dynamique, rentrent en compétition avec l'effet du désordre dynamique (le chaos) qui lui, a tendance à engendrer un comportement diffusif. La décohérence, comme effet diffusif, vient rompre l'équilibre fragile entre les deux effets d'origine (interférences et chaos) et déplace le point de transition pour une valeur de  $K$  plus faible (restaure un régime diffusif pour une valeur de  $K$  plus faible). Nous avons vu au chapitre 2 que nous pouvons tenir compte de

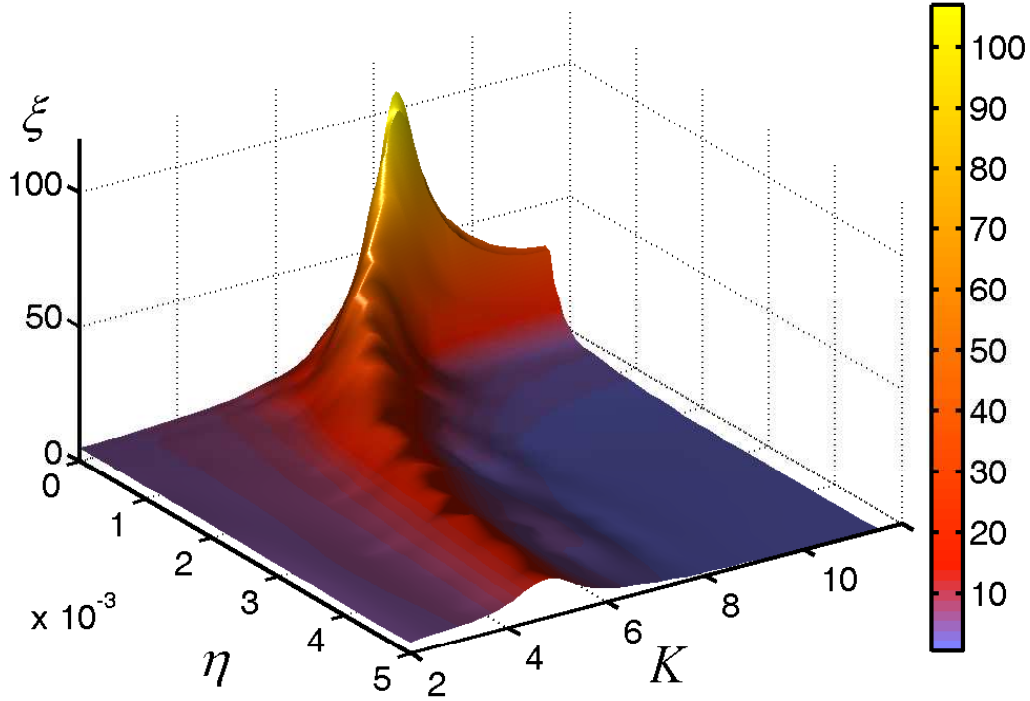


FIG. 3.21 – Le paramètre d'échelle  $\xi$  issu de la procédure de FTS appliquée à l'ensemble des données numériques en fonction de  $K$  pour des valeurs croissantes du taux de décohérence. A l'approche de  $K_c$ , le paramètre d'échelle qui représente la longueur de localisation pour  $K < K_c$  diverge. Pour  $K > K_c$ ,  $\xi$  représente l'inverse du coefficient de diffusion.

la décohérence, qui trouve son origine principale dans l'émission spontanée, dans les simulations numériques. La figure 3.21 représente la paramètre d'échelle  $\xi$  issu de simulations numériques en présence de décohérence en fonction de  $K$  et du taux de décohérence  $\eta$ . On observe clairement que le point critique de transition se déplace pour des valeurs plus faibles du paramètre  $K$  lorsque que  $\eta$  croît. La divergence de  $\xi$  au point critique  $K_c$  est aussi fortement atténuée lorsque  $\eta$  croît. Nous obtenons alors un résultat comparable aux données expérimentales. De façon plus précise, les données expérimentales pour la fonction  $\xi(K)$  épouse une forme donnée par :

$$\frac{1}{\xi(K)} = \mathcal{A} |K - K_c(\eta)|^\nu + \mathcal{B} \quad (3.24)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont les paramètres supplémentaires du fit et où  $K_c$  devient une fonction de  $\eta$ . La procédure de fit nous permet d'obtenir une valeur de  $\nu$  expérimentale :  $\nu_{exp} = 1,55 \pm 0,2$ . Cette valeur de l'exposant critique  $\nu_{exp}$  est tout à fait en accord avec l'exposant critique obtenue numériquement en absence de décohérence  $\nu_{num} = 1,58 \pm 0,1$  et l'ensemble des valeurs obtenues numériquement dans la littérature pour le modèle d'Anderson [84, 85].

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu qu'un kicked rotor modulé en amplitude par deux fréquences supplémentaires était l'équivalent d'un modèle d'Anderson à trois dimensions pour les solides désordonnés. La particularité du modèle d'Anderson à trois dimensions est l'existence d'une transition de phase entre état isolant, où tous les états propres du système sont localisés, et un état conducteur, où ils sont délocalisés, en fonction du degré de désordre. Les travaux théoriques effectués par D. Shepeliansky vers la fin des années 80 sur le kicked rotor modulé en amplitude, montraient de façon équivalente le passage d'un régime de localisation dynamique (où les états de Floquet du kicked rotor sont localisés) à un régime diffusif (états de Floquet délocalisés) en fonction du paramètre de stochasticité. Nous avons réalisé l'expérience correspondante avec un nuage d'atomes froids soumis à une onde stationnaire pulsée et modulée en amplitude et mis en évidence cette transition localisé-délocalisé. Malgré le faible nombre de pulses utilisé, l'usage d'une méthode issue de la théorie de la renormalisation, le Finite Time Scaling, nous a permis d'extraire les quantités caractérisant la transition de phase comme l'exposant critique avec une bonne précision. Cependant, le lecteur attentif a remarqué que nous n'avons pas assimilé dans ce chapitre la décohérence à l'émission spontanée pourtant présentée dans le chapitre 2 comme source principale de décohérence. En effet, l'étude expérimentale de la transition d'Anderson révèle que l'émission spontanée n'est pas la source majeure de décohérence dans notre expérience. Cette source n'a pas, au moment de l'écriture de ce mémoire, encore été clairement identifiée bien que des pistes de recherche ont été envisagées comme des vibrations acoustiques ou une perte de cohérence du laser onde stationnaire.



# Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats expérimentaux concernant le chaos quantique et la transition d'Anderson. Nous avons vu au chapitre premier que le modèle du quantum kicked rotor, utilisé pour l'étude du chaos quantique, est équivalent à un modèle d'Anderson unidimensionnel pour les solides désordonnés. Le quantum kicked rotor possède une propriété particulière appelée localisation dynamique. Le phénomène de localisation dynamique est un gel de la diffusion classique généré par une dynamique classique chaotique. Ce gel de la diffusion en impulsion est causé par des interférences quantiques. La localisation dynamique observée en chaos quantique est analogue au phénomène de localisation d'Anderson en physique du solide où le désordre introduit dans un solide, localise les fonctions d'onde électronique dans l'espace. Au chapitre second, nous avons décrit un dispositif expérimental composé d'atomes froids placés dans une onde stationnaire qui réalise une expérience de quantum kicked rotor. Nous avons vu qu'en utilisant des transitions Raman stimulées pour mesurer la vitesse des atomes soumis à l'onde stationnaire, nous pouvions observer le phénomène de localisation dynamique. Enfin dans le chapitre trois, nous avons présenté une variante du kicked rotor : le kicked rotor quasipériodique modulé en amplitude. Ce modèle est équivalent au modèle d'Anderson à trois dimensions pour la physique solide. Le modèle d'Anderson à trois dimensions prédit l'existence d'une transition de phase entre un état localisé et un état délocalisé en fonction du désordre introduit. En réalisant l'expérience correspondante avec le kicked rotor modulé en amplitude, nous avons pu observer la transition d'Anderson. Nos collaborateurs théoriciens du Laboratoire Kastler Brossel ont mis au point une méthode de "*Finite Time Scaling*" dérivée des méthodes utilisées par les physiciens du solide qui nous a permis d'extraire un exposant critique pour la transition d'Anderson comparable avec les résultats numériques obtenus en physique du solide. Les autres résultats obtenus pendant cette thèse et présentés dans les articles s'inscrivent dans le même objectif : l'étude de phénomène de localisation dynamique lorsque l'on augmente la dimensionalité effective du système. Le premier article présente une expérience de réversibilité de la destruction de la localisation. Nous avons montré que dans certaines conditions, il est possible de détruire la localisation dynamique, puis de la reconstruire partiellement. Le second article présente des résultats sur un modèle de kicked rotor *a priori* équivalent au modèle d'Anderson en dimension 2. Nous avons montré, que dans ce cas la destruction de la localisation dynamique obéit à des lois d'échelle quantiques et qu'il ne possède pas les propriétés du modèle d'Anderson à deux dimensions. Le troisième article présente une méthode de polarisation de spin qui permet d'améliorer la résolution de la vélocimétrie Raman.

Les perspectives dans la continuité de ces travaux sont vastes, le lecteur attentif



---

aura remarqué que le modèle du kicked rotor quasipériodique peut facilement être étendu à des dimensions supérieures, ce qui laisse entrevoir une étude fascinante de la dépendance de l'exposant critique avec la dimensionalité. Cependant, les études portant sur la transition d'Anderson pour les dimensions supérieures à 3 promettent quelques difficultés supplémentaires. En effet, si l'on veut pouvoir insérer de nouvelles fréquences dans la modulation d'amplitude, il faut un nombre de pulses plus important afin que le système puisse balayer de façon complète le spectre du forçage. Il faut donc trouver un moyen d'augmenter le temps d'interaction entre les atomes et l'onde stationnaire. Le passage à une onde stationnaire verticale est une solution simple qui permettrait de gagner au moins un facteur 5 sur le nombre de pulses applicables. Mais avec un nombre de pulses plus important, apparaît une autre difficulté : la décohérence se trouve aussi augmentée. Il est donc nécessaire de comprendre avant tout l'origine de la décohérence supplémentaire (autre que celle associée à l'émission spontanée) observée dans notre expérience.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que ces résultats expérimentaux apportent une contribution à l'étude de chaos quantique et de la transition d'Anderson. Ils mettent en exergue l'universalité du modèle d'Anderson en établissant la première mesure expérimentale de l'exposant critique de la transition dans un domaine, le chaos quantique avec des ondes de matière, loin du domaine pour lequel le modèle a été formulé en 1958 par P.W. Anderson.

## Annexe A

# Equivalence de la localisation dynamique et de la localisation d'Anderson

Dans cette annexe, nous reprenons en détail le calcul effectué par Fishman, Grempe et Prange dans [17] et cité dans le chapitre premier qui permet de rendre compte de l'équivalence du kicked rotor avec le modèle d'Anderson à une dimension. Nous avons, pour le kicked rotor, le hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + K \sin(\hat{x}) \sum_{t=0}^{N-1} \delta(t - n) \quad (\text{A.1})$$

que nous pouvons réécrire de cette façon :

$$\hat{H} = k \left\{ G(\hat{P}) + V(\hat{x}) \sum_{t=0}^{N-1} \delta(t - n) \right\} \quad (\text{A.2})$$

avec  $G(\hat{P}) = \frac{\hat{P}^2}{2k}$  et  $V(\hat{x}) = \frac{K \sin(\hat{x})}{k}$ . En utilisant les opérateurs d'évolution définis dans la partie 1.2.1 qui s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} \hat{U}_{pr}(1) = e^{-i \frac{\hat{P}^2}{2k}} & = e^{-iG(p)} \\ \hat{U}_{pulse} = e^{-i \frac{K \sin(\hat{x})}{k}} & = e^{-iV(\hat{x})} \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

nous obtenons des relations de récurrence entre les fonctions d'ondes avant l'application d'un pulse ( $\psi_{n+1}^-$ ) et après l'application d'un pulse ( $\psi_{n+1}^+$ ) :

$$\begin{cases} \psi_{n+1}^-(p) & = e^{-iK(p)} \psi_n^+(p) \\ \psi_{n+1}^+(x) & = e^{-iV(\hat{x})} \psi_{n+1}^-(x) \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

avec  $\psi_n(x) = \sum e^{ipx} \psi_n(p)$ , la fonction d'onde après une période d'évolution s'écrit alors :

$$\psi_{n+1}^+(p) = \sum_g J_{p-g} e^{-iK(g)} \psi_n^+(g) \quad (\text{A.5})$$

avec

$$J_{p-g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx e^{i(p-g)x} e^{-V(x)}$$

Nous pouvons ensuite décomposer la fonction d'onde initiale sur les états de Floquet :

$$|\psi_0\rangle = \sum_j u_j |j\rangle, \quad (\text{A.6})$$

et obtenir des relations semblables aux relations (A.4) pour les coefficients  $u_j$  :

$$\begin{cases} u_j^- &= e^{i\epsilon_j} e^{iG(j)} u_j^+ \\ u^+(x) &= e^{iV(\hat{x})} u^-(x) \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$u_j^+ = e^{i\epsilon_j} \sum_k J_{j-k} e^{iG(k)} u_k^+ \quad (\text{A.8})$$

Il faut ensuite utiliser une représentation alternative de l'opérateur  $V(x)$  en utilisant un opérateur  $W(x)$  hermitien défini comme :

$$e^{-iV(x)} = \frac{1 + iW(x)}{1 - iW(x)} \quad (\text{A.9})$$

puis définir :

$$u = \frac{u^+ + u^-}{2} \quad (\text{A.10})$$

l'état de Floquet moyen sur une période. On a alors en utilisant (A.7) :

$$\begin{cases} (1 - iW(x)) u(x) = u^-(x) \\ (1 + iW(x)) u(x) = u^+(x) \end{cases}, \quad (\text{A.11})$$

En prenant les représentations dans l'espace des impulsions de  $u(x)$ ,  $u^+(x)$  et  $W(x)$  :

$$u^+(x) = \sum_m u_m^+ e^{imx} \quad (\text{A.12})$$

$$u(x) = \sum_m u_m e^{imx} \quad (\text{A.13})$$

$$W(x) = \sum_m W_m e^{imx} \quad (\text{A.14})$$

Puis on utilise la relation (A.11) :

$$\begin{aligned} u^+(x) &= u(x)(1 + iW(x)) \\ \sum_m u_m^+ e^{imx} &= \sum_m u_m e^{imx} (1 + i \sum_r W_r e^{irx}) \\ &= \sum_m u_m e^{imx} + i \sum_{r,m} u_r W_m e^{i(r+m)x} \\ &= \sum_m u_m e^{imx} + i \sum_{r,m} u_r W_{m-r} e^{irmx} \\ &= \sum_m (u_m + i \sum_r u_r W_{m-r}) e^{irmx} \end{aligned}$$

et donc

$$u_m^+ = u_m + i \sum_r u_r W_{m-r} \quad (\text{A.15})$$

de même on obtient une équation semblable pour  $u_m^-$  :

$$u_m^- = u_m - i \sum_r u_r W_{m-r} \quad (\text{A.16})$$

puis en utilisant

$$\begin{aligned} u_m^+ &= e^{-i\omega} e^{-iG(m)} u_m^- \\ u_m + i \sum_r u_r W_{m-r} &= e^{-i\omega} e^{-iG(m)} (u_m - i \sum_r u_r W_{m-r}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$= (u_m - i \sum_r u_r W_{m-r}) e^{-iE_m} \quad (\text{A.18})$$

avec  $E_m = \omega + G(m)$ . On effectue alors un glissement d'indice :

$$u_m + i \sum_r u_{r+m} W_r = (u_m - i \sum_r u_{r+m} W_r) e^{-iE_m} \quad (\text{A.19})$$

et isolant les termes en  $r = 0$  :

$$\begin{aligned} u_m(1 + iW_0) + i \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r &= \left( u_m(1 - iW_0) - i \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r \right) e^{-iE_m} \\ u_m(1 - e^{-iE_m}) + i \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r(1 + e^{-iE_m}) &= -iW_0 u_m(1 + e^{-iE_m}) \end{aligned}$$

$$u_m(e^{iE_m/2} - e^{-iE_m/2}) + i \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r(e^{iE_m/2} + e^{-iE_m/2}) = -iW_0 u_m(e^{iE_m/2} + e^{-iE_m/2})$$

$$u_m(2i \sin(E_m/2) + i \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r(2 \cos(E_m/2)) = W_0 u_m(-2i \cos(E_m/2))$$

et donc :

$$\tan(E_m/2) u_m + \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r = -W_0 u_m \quad (\text{A.20})$$

,qui donne l'équation du modèle du *tight binding* :

$$T_m u_m + \sum_{r \neq 0} u_{r+m} W_r = E u_m \quad (\text{A.21})$$

avec  $T_m = \tan(\omega + G(m))$  et  $E = -W_0$ .



## Annexe B

# Destruction réversible de la localisation dynamique

Reversible Destruction of Dynamical Localization

Phys. Rev. Lett. 95, 234101 (2005)

Lors de mon D.E.A, nous avons étudié la possibilité de reconstruire la localisation dynamique détruite suite à un brisure de périodicité. L'intérêt d'une telle étude était de voir si les effets qui gouvernent la destruction de la localisation dynamique lorsque l'on brise la périodicité temporelle du forçage appliqué étaient cohérents ou non. Notre expérience a montré que lorsqu'on brise la périodicité par une perturbation déterministe (l'ajout progressif d'une deuxième série de pulses), on peut reconstruire la localisation dynamique en inversant cette perturbation. Nous avons vu aussi que la décohérence par émission spontanée, processus non déterministe, empêchait la réversibilité d'avoir lieu. Ces résultats sont présentés dans l'article ci-après.



## Reversible Destruction of Dynamical Localization

Hans Lignier,<sup>1</sup> Julien Chabé,<sup>1</sup> Dominique Delande,<sup>2</sup> Jean Claude Garreau,<sup>1</sup> and Pascal Szriftgiser<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Centre d'Études et de Recherches Laser et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

<sup>2</sup>*Laboratoire Kastler-Brossel, Case 74, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*

(Received 28 July 2005; published 29 November 2005)

Dynamical localization is a localization phenomenon taking place, for example, in the quantum periodically driven kicked rotor. It is due to subtle quantum destructive interferences and is thus of intrinsic quantum origin. It has been shown that deviation from strict periodicity in the driving rapidly destroys dynamical localization. We report experimental results showing that this destruction is partially reversible when the deterministic perturbation that destroyed it is slowly reversed. We also provide an explanation for the partial character of the reversibility.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.234101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.234101)

PACS numbers: 05.45.Mt, 03.65.Yz, 05.60.-k, 32.80.Lg

Dynamical localization (DL) is one of the most dramatic manifestations of how the quantum behavior of a complex system may differ from that of its classical counterpart [1]. It takes place in one-dimensional time-periodic Hamiltonian systems where the deterministic motion is classically chaotic and, on the average, equivalent to a diffusive expansion in momentum space (the so-called chaotic diffusion behavior). Because of subtle destructive interference effects, the quantum dynamics is substantially different: while this dynamics is similar to the classical one for short times, the diffusive behavior stops after some break time and the quantum momentum distribution gets frozen to a steady state at long times. Interest in the DL also comes from the fact that it can be easily observed experimentally, e.g., by placing laser-cooled atoms in a periodically kicked laser standing wave, the so-called “kicked rotor” [2]. The quantum inhibition of classical transport is a rather generic behavior in one-dimensional time-periodic Hamiltonian systems. It relies on the existence of a class of states which are stationary under the one-cycle evolution operator, the so-called Floquet states, forming a basis of the Hilbert space. DL is thus a rather robust feature, which can be observed for a large class of initial states, either pure states or statistical mixtures.

Another fascinating feature of DL is its sensitivity to external nonperiodic perturbations or deviations from the temporal periodicity of the system [3]. Various ways of breaking DL have been studied experimentally and theoretically. One way is to add amplitude noise to the kicks [4]. In such cases, it has been observed that DL is destroyed, i.e., that the quantum motion remains diffusive at long times, as the classical motion. This destruction has also been observed by adding a second series of kicks at an incommensurate frequency [5], an experiment that has also evidenced a very high sensitivity to frequency differences, allowing observation of sub-Fourier resonances [6]. Another qualitatively different way of destroying DL is to introduce a small amount of spontaneous emission in the system, thus breaking its quantum coherences [4,7]. While

the first two examples correspond to a purely Hamiltonian evolution, the latter one introduces an irreversible dissipative evolution.

In the case of a purely Hamiltonian dynamics, a fundamental question remains, concerning the nature of the DL destruction: is this destruction complete and irreversible or is it possible to stop the diffusive behavior? Even better, is it possible to reverse the evolution and reconstruct a more localized state? The purpose of this Letter is to report experimental results showing that such a relocalization is possible (at least partially) when the nonperiodic perturbation that destroys DL is slowly reversed in time.

Let us first consider the standard kicked rotor Hamiltonian of a single atom in a pulsed standing wave (SW):

$$H_0 = \frac{P^2}{2} + K \sin\theta \sum_{n=0}^{N-1} \delta_\tau(t - n), \quad (1)$$

where  $P$  is the reduced momentum along the SW axis in units of  $M/(2k_L T_1)$  ( $k_L$  is the laser wave number and  $M$  the mass of the atom),  $\theta = 2k_L z$  the reduced position of the atom along the SW axis, and  $K = \Omega^2 T_1 \tau \hbar k_L^2 / (2M \Delta_L)$  the kick strength ( $\Omega$  is the resonant Rabi frequency of the SW,  $\Delta_L$  its detuning from the atomic resonance). The time  $t$  is measured in units of the period  $T_1$  of the kicks.  $N$  is the number of kicks, and  $\delta_\tau$  is a Dirac-like function;  $\tau$  is the finite duration of the kicks. In the limit  $\tau \rightarrow 0$ , the dynamics of this Hamiltonian system is well known and relies upon only two parameters:  $K$  and the effective Planck constant  $\hbar = 4\hbar k_L^2 T_1 / M$ . For  $K \gg 1$ , the classical dynamics is a chaotic diffusion; a localized set of initial conditions will spread in momentum space like a Gaussian of width  $\propto t^{1/2}$ . Below the break time, the classical and the quantum dynamics of an initially localized state are identical. After the localization time, the quantum dynamics is frozen, the average kinetic energy ceases to grow; at the same time, the momentum distribution evolves from a characteristic Gaussian shape in the diffusive regime to



an exponential shape  $\sim \exp(-|P|/L)$  (with  $L$  being the localization length) characteristic of the localized regime [8,9].

Consider now an experiment in which a slowly increasing and then decreasing perturbation is added. This perturbation is added to Hamiltonian (1) as a second series of kicks with the same frequency but with a time dependent amplitude (see upper frame in Fig. 2):

$$H = H_0 + \frac{K}{2} \sin\theta \left[ 1 - \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi t}{\Theta}\right) \right] \sum_{n=0}^{N-1} \delta_\tau\left(t - n - \frac{\phi}{2\pi}\right) \quad (2)$$

where  $\Theta \gg 1$  is the period of the perturbation,  $\phi$  the relative phase between the two kick series, and  $\varepsilon$  the modulation amplitude, with  $\varepsilon \sim 1$ . Experimental values are  $\Theta = 35$ ,  $\phi/2\pi = 1/6$ , and  $\varepsilon = 0.94$ . At time  $t = N$ , the system has been exposed to  $N$  kicks of the primary sequence (with fixed strength  $K$ ) and  $N$  kicks of the secondary sequence (with time-varying strength), i.e., to a total of  $2N$  pulses.

In order to experimentally realize the Hamiltonian equation (2), a sample of cold cesium atoms is produced in a standard magneto-optical trap and released in the  $F_g = 4$  hyperfine ground-state sublevel. A double sequence of  $N$  pulses built according to Eq. (2) is applied. The SW is detuned by  $\Delta_L/2\pi = 20$  GHz ( $\sim 3800$   $\Gamma$ , where  $\Gamma$  is the natural width of the atomic transition) with respect to the  $6S_{1/2}$ ,  $F_g = 4 \rightarrow 6P_{3/2}$ ,  $F_e = 5$  hyperfine transition of the Cesium  $D2$  line ( $\lambda_L = 852$  nm). Such largely detuned radiation essentially induces *stimulated* transitions responsible for conservative momentum exchanges with the atoms, so that the dynamics is Hamiltonian. However, the SW laser line presents a very broad low-level background (several hundreds of GHz) responsible for a significant rate of dissipative spontaneous transitions. To get rid of this problem, the SW passes through a 10 cm cesium cell before interacting with the cold atoms. This filtering reduces the background by more than 1 order of magnitude in a bandwidth of about 500 MHz around the cesium transitions. Finally, after being transported by a polarization-maintaining fiber, 92 mW of laser light, collimated to a 1.5 mm waist, is available for the experiment, and retro-reflected to build the SW. The frequency of each kick series is set to 30 kHz, and the duration of each kick to  $\tau = 0.6$   $\mu$ s. The parameter  $K$  is  $\sim 9$ ,  $\tilde{k} \sim 3.46$ , and the localization time  $\sim 10$  periods. The localization time measured in units of the pulse period and the localization length  $L$  measured in units of  $2\hbar k_L$  coincide, and both scale roughly as  $(K/\tilde{k})^2 \approx 7$ . These parameters have been chosen in order to optimize the experimentally detected signal. (The setup allows variations of  $K$  from  $\sim 0$  to 15, and  $\tilde{k}$  from  $\sim 1.5$  to 6). The spontaneous emission rate is estimated to 0.06 per atom for the maximum duration of the experiment. Once the SW sequence is over, the atomic momentum distribution is

probed with a *velocity selective* Raman pulse. Thanks to the Doppler effect, and a well-chosen detuning, this pulse transfers the atoms in a well-defined velocity class from the hyperfine sublevel  $F_g = 4$  to the  $F_g = 3$  sublevel [10,11]. The atoms remaining in the  $F_g = 4$  sublevel are pushed away by a resonant laser beam. A resonant pulse brings the selected atoms back in the  $F_g = 4$  level where their number is measured by a resonant probe. The whole cycle starts again to measure the population in another velocity class, allowing us to reconstruct the full atomic momentum distribution. Such a measurement is then performed for increasing pulse numbers  $N$ .

A last precaution must, however, be taken. As discussed above, the SW is intense enough to induce—for a few atoms—a real transition from the level  $F_g = 4$  to the excited state, followed by spontaneous emission leading possibly to the hyperfine level  $F_g = 3$ , whatever their momentum. Those atoms would be optically repumped to the  $F_g = 4$  sublevel and detected, generating an incoherent,  $N$  dependant, background. For each experiment, the Raman detuning is set very far away (at 10 MHz, more than 1000 recoil velocities), where the probability of finding a Raman resonant atom is very low. Except for this modification, the experiment is launched in exactly the same conditions. The stray background is corrected by subtracting the resulting signal from the resonant one.

Figure 1 shows the velocity distribution as a function of  $N$ . As expected, the early dynamics is diffusive. DL is expected around  $t = 10$ . Since the perturbation starts increasing from  $t = 0$ , DL is not visible and one could assume it is destroyed before it could be seen. However,

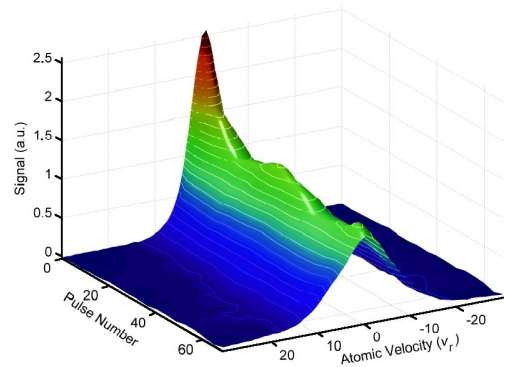


FIG. 1 (color online). Experimentally measured velocity distributions as a function of time. The atomic velocity is measured in units of the recoil velocity  $v_r = \hbar k_L/M \approx 3.5$  mm/s. At short times, the diffusive broadening (or the reduction of the zero-velocity population) of the velocity distribution is observed. When the slowly changing perturbation is reversed (around  $t = 17$ ), the velocity distribution *starts to shrink*. This is highly nontrivial behavior, showing that the destruction of dynamical localization by a slowly time-varying kick sequence is reversible. After a second cycle of the perturbation a second relocalization of the velocity distribution is observed (around  $t = 70$ ).

when the perturbation is reversed, the distribution *shrinks* and takes an exponential shape (see Fig. 2), signing a partial “revival” of the localization. This is clearly visible in Fig. 2 which displays the zero-velocity population  $\Pi_0$  as a function of  $N$  (red crossed solid line), which is inversely proportional to the width of the distribution and therefore directly proportional to the degree of localization. Figures 2(a) and 2(b) display, respectively, the velocity distribution at  $t = 17 \sim \Theta/2$ , where the perturbation reaches its maximum amplitude, and at  $t = \Theta = 35$ , where it is back to its minimum initial value. In 2(a), the distribution is very well fitted by a Gaussian, whereas the distribution in 2(b) is better fitted by an exponential. The exponential shape at  $t = \Theta$  is not the only remarkable fact. The fact that the momentum distribution gets narrower ( $\Pi_0$  increases) is highly significative. Indeed, the classical dynamics is diffusive and irreversible, forbidding, in the general case [12], a return to a narrower distribution. Furthermore, DL leads to the suppression of the classical diffusion, i.e., a freezing of the velocity distribution; but it cannot lead to a narrowing of the distribution, which is precisely what is experimentally observed in Fig. 2. This is a key point of the present experiment: it proves that the exponential shape observed at  $t = \Theta$ , where the perturbation is zero, does not simply results from the DL that would be observed in the periodic case, with no perturbation.

It is even possible to go further by proving the coherent nature of the reversibility process. We have performed an

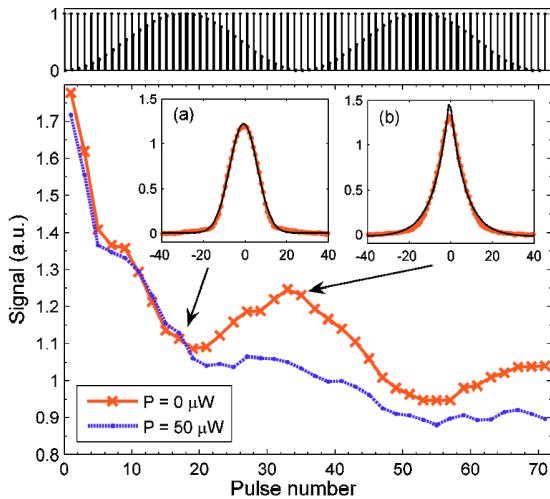


FIG. 2 (color online). Upper frame: kick sequence. Main frame: Population in the zero-velocity class as a function of the duration  $N$  of the pulse sequence with no resonant light (crossed solid line) and with a  $50 \mu\text{W}$  pulse of resonant light applied at  $t = 17$  (dashed line). The absence of revival in the presence of resonant light (decoherence) is a clear-cut proof of the importance of quantum interference for the reversibility of the DL destruction. The inset (a) shows the Gaussian velocity distribution at  $t = 17$ , near the maximum of the perturbation, in the absence of resonant light; inset (b) shows an exponential shape near the minimum of the perturbation,  $t = 35$ .

additional experiment where a resonant laser pulse irradiates the atomic cloud at  $t = 17$ . The intensity and detuning of this pulse are set such that, on average, only one or two spontaneous photons are emitted per atom. Its purpose is to destroy the quantum coherences, with minimal heating and mechanical effects. The two curves in Fig. 2 (with and without the resonant pulse) are practically identical before  $t = 17$ , which indicates that heating resulting from the resonant pulse is negligible [13]. In the presence of resonant light, the revival at  $t = 35$  disappears almost completely (dashed line curve in Fig. 2). Moreover, the velocity distribution (not shown in Fig. 2) is Gaussian around  $t = 35$ . This clearly proves that, in the absence of spontaneous emission, although DL is not observed before  $t = 17$ , there is a memory in the system which is destroyed by spontaneous emission. This reinforces the idea that, when the perturbation is reversed, a dynamically localized state is recovered, at least partially. In fact, the revival of DL is only partial, and a part of it is irremediably destroyed. As shown in Figs. 1 and 2, a second perturbation cycle from  $t = \Theta$  to  $2\Theta$  has been performed, and a second revival is observed. However, its amplitude is smaller than the first one, and the shape of the velocity distribution is also damaged. This is due to fundamental reasons, although spontaneous emission or experimental imperfections could also contribute.

A detailed discussion of the physical processes at work in our experiment is beyond the scope of this Letter, and will be published elsewhere. We give here a few guidelines to the theoretical interpretation. The robust structure behind DL is the existence of Floquet states for a time-periodic Hamiltonian system, which are eigenstates of the evolution operator over one period. By their definition, such states repeat identically (except for a phase factor) at each kick and thus do not spread in momentum space. Any initial state can be expanded on the complete set of Floquet states. Chaotic diffusion is—in this picture—due to a gradual dephasing of the various Floquet states (of different eigenenergies) that contribute to the initial state. However, a nontrivial property of the periodically kicked rotor is that all Floquet states are *localized* in momentum space [14]: this is the temporal analogy to Anderson localization in disordered one-dimensional systems, as put on firm ground in Ref. [15]. Only Floquet states localized close to the initial (zero) momentum significantly overlap with the initial state and contribute to the long term dynamics. At sufficiently long times, the various Floquet states significantly contributing to the dynamics are completely dephased (in a characteristic time which is but the break time), the momentum distribution covers all significantly populated Floquet states, but cannot extend further in momentum space, leading to the freezing of the diffusive growth. When the dynamics is no longer exactly periodic, population is transferred among the various Floquet states, and Floquet states localized farther from  $P = 0$

can be populated. In this situation, DL is thus expected to be destroyed. There is, however, a situation where such an evolution can be controlled: if, at any time, the Hamiltonian is almost periodic with, for example, a kick strength  $K(t)$  slowly changing with time  $t$ , an adiabatic approximation can be used. The atomic state at time  $t$  can be expanded in terms of the “instantaneous” Floquet eigenbasis corresponding to the local value of  $K(t)$ . If the variation of  $K(t)$  is slow enough, the evolution is adiabatic in the Floquet basis, meaning that the populations of the Floquet eigenstates do not change with time, while the eigenstates themselves evolve [16,17]. This leads to an apparent diffusive broadening of the momentum distribution [18], but the robust Floquet structure is still underlying. To recover the localization, it is sufficient to reverse the evolution of  $K(t)$  back to its initial value. One then recovers the initial well localized Floquet eigenstates with unchanged populations, i.e., a dynamically localized momentum distribution. This is the deep origin of the revival of the localization experimentally observed above. Any phenomenon breaking phase coherence (such as a spontaneous emission) will redistribute the atomic wave function over other Floquet states, eliminating all possibility of revival. However, the revival is only partial, because the evolution cannot be made 100% adiabatic. Indeed, even for very slow changes of  $K(t)$ , there are some avoided crossings between various Floquet states of such size that they will be crossed neither diabatically, nor adiabatically, and will consequently redistribute the population over the Floquet states, partially destroying the reversibility.

To summarize, we have observed that the destruction of dynamical localization in the kicked rotor, induced by a nonperiodic driving can be partially reversed. If the external driving evolves sufficiently slowly, some information is carefully stored in the populations of the various Floquet states. Although it is not visible in the momentum distribution—which seems to follow an irreversible diffusive broadening—it can be easily restored by reverting the driving back to its initial value, producing a relocalization of the wave function. We have also shown that this intrinsically quantum behavior is destroyed by decoherence, i.e., by adding spontaneous emission to the experiment.

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM) is UMR 8523 du CNRS et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Centre d'Études et de Recherches Laser et Applications (CERLA) is supported by Ministère de la Recherche and Région Nord-Pas de Calais. Laboratoire Kastler-Brossel de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure is UMR 8552 du CNRS. CPU time on various computers has been provided by IDRIS.

- 
- [1] G. Casati, B.V. Chirikov, D.L. Shepelyansky, and I. Guarneri, *Phys. Rep.* **154**, 77 (1987); F.M. Izrailev, *Phys. Rep.* **196**, 299 (1990).
  - [2] F.L. Moore, J.C. Robinson, C.F. Bharucha, P.E. Williams, and M.G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2974 (1994).
  - [3] G. Casati, I. Guarneri, M. Lechaz, D.L. Shepelyansky, and C. Sinha, *Phys. Lett. A* **154**, 19 (1991).
  - [4] B.G. Klappauf, W.H. Oskay, D.A. Steck, and M.G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1203 (1998).
  - [5] J. Ringot, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, and D. Delande, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2741 (2000).
  - [6] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J.C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 224101 (2002).
  - [7] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4111 (1998).
  - [8] D.L. Shepelyansky, *Physica (Amsterdam)* **28D**, 103 (1987).
  - [9] D. Cohen, *Phys. Rev. A* **44**, 2292 (1991).
  - [10] M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2297 (1991).
  - [11] J. Ringot, P. Szriftgiser, and J.C. Garreau, *Phys. Rev. A* **65**, 013403 (2002).
  - [12] One can indeed conceive carefully prepared initial states that would evolve to a narrower shape, but this is clearly not the case here.
  - [13] Each point in Fig. 2 represents a different experiment with a different  $N$ . The resonant pulse of light is always applied at  $t = 17$  and the Raman detection then performed. Any significant heating effect would enlarge the momentum distribution and would be detected.
  - [14] G. Casati, I. Guarneri, F.M. Izrailev, and R. Scharf, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 5 (1990).
  - [15] D.R. Grempel, R.E. Prange, and S. Fishman, *Phys. Rev. A* **29**, 1639 (1984).
  - [16] J. Zakrzewski and D. Delande, *J. Phys. B* **28**, L667 (1995).
  - [17] D.W. Hone, R. Ketzmerick, and W. Kohn, *Phys. Rev. A* **56**, 4045 (1997).
  - [18] H. Lignier, J.C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande, *Europhys. Lett.* **69**, 327 (2005).

---



## Annexe C

# Lois d'échelle quantiques pour la délocalisation dynamique

Quantum Scaling Laws in the Onset of Dynamical Delocalization

Phys. Rev. Lett. 97, 264101 (2006)

Dans cet article, nous nous intéressons à une variante du kicked rotor où le forçage est constitué de deux séries de pulses de période incommensurable. Ce kicked rotor à deux fréquences semble *a priori* équivalent au modèle d'Anderson à deux dimensions qui prévoit que la localisation existe toujours. Nous avons montré que ce n'est pas le cas. En ajoutant progressivement la seconde fréquence dans le forçage, nous avons vu que la localisation dynamique est brisée aussitôt que l'amplitude de la seconde fréquence est non nulle et qu'un régime diffusif apparaît alors de façon graduelle et donc que cette destruction n'est pas non plus gouvernée par une transition de phase. De plus, nous avons montré que cette destruction de la localisation dynamique obéit à une loi d'échelle bien définie fonction des paramètres classique  $K$  et quantique  $\hbar$ .

## Quantum Scaling Laws in the Onset of Dynamical Delocalization

Julien Chabé,<sup>1</sup> Hans Lignier,<sup>1,\*</sup> Hugo Cavalcante,<sup>1,†</sup> Dominique Delande,<sup>2</sup> Pascal Szriftgiser,<sup>1</sup> and Jean Claude Garreau<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université des Sciences et Technologies de Lille, Centre d'Études et Recherches Lasers et Applications, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire Kastler-Brossel, Case 74, UPMC, 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

(Received 3 July 2006; revised manuscript received 9 October 2006; published 26 December 2006)

We study the destruction of dynamical localization experimentally observed in an atomic realization of the kicked rotor by a deterministic Hamiltonian perturbation, with a temporal periodicity incommensurate with the principal driving. We show that the destruction is gradual, with well-defined scaling laws for the various classical and quantum parameters, in sharp contrast to predictions based on the analogy with Anderson localization.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.264101

PACS numbers: 05.45.Mt, 03.65.Yz, 05.70.Fh, 32.80.Lg

Quantum chaos is defined as the dynamical behavior of a *quantum* system whose *classical* limit is chaotic. This has triggered a large number of studies trying to relate classical properties to quantum properties, e.g., Lyapunov exponents to quantum fidelity [1], or to detect quantum stability in a quantum-chaotic system [2].

Quantum-chaotic dynamics manifests itself by characteristic behaviors in which quantum interference plays an important role, making the dynamics distinct from classical dynamics. An example that shall concern us particularly here is *dynamical localization* (DL) [3], observed in time-periodic systems. DL is the suppression of the classical chaotic diffusion by quantum interference due to long-range coherence in momentum space; it manifests itself after a typical “localization time” as an exponential localization of the averaged momentum distribution. Because the system is time periodic, one can use the Floquet theorem to build a basis of quasieigenstates (states that are left unchanged, except for a phase factor, under the temporal evolution over one period). This makes it possible to map the quasieigenstates of the time-periodic system on the true eigenstates of a quasirandom static one-dimensional system, which presents the nontrivial Anderson localization. Anderson (or strong) localization has been a major subject in physics in the last decades, with implications in several areas, beyond the primary field of solid state physics [4]. In this Letter, we show that studying the breakdown of dynamical localization also brings some new insight on the physics of Anderson localization. The latter is known to be strongly dependent on the number of freedoms, with marginal localization in dimension 2 and the coexistence of localized and delocalized states—depending on the parameters—in dimension 3. By playing with the temporal dependence of the Hamiltonian—for example by adding incommensurate frequencies to make a quasiperiodic Hamiltonian—it is possible to study temporal analogs of the Anderson model in various dimensions. What happens if one introduces progressively a second (incommensurate) frequency in the system, by increasing its amplitude from zero? As the system is now

quasiperiodic with two frequencies, it is reasonable to assume that it can be mapped onto a two-dimensional Anderson model [5] which, for a small perturbation, is a quasi-1D model. One then expects localization to be preserved, at the cost of an increased localization length [6]. In the present work, we show experimentally that this is *not* the case: it is a “diffusive scenario” that takes place, where DL is continuously destroyed by the perturbation. We unravel the scaling laws governing the phenomenon.

We consider an atomic version of the kicked rotor, a paradigmatic system for studies of classical [8] and quantum chaos [9–12]. It consists in exposing laser-cooled atoms to short, periodic pulses of a far-detuned standing wave. Using this system, DL has been unambiguously observed [13]. The temporal periodicity is a key ingredient. Random fluctuations on the strengths of the successive kicks, have been experimentally shown to destroy DL [9], even for fluctuations not significantly affecting the classical diffusive behavior. Similarly, the introduction of a small amount of non-Hamiltonian evolution (spontaneous emission) [9] is enough to induce decoherence that reduce or kill quantum interference effects, thus restoring the classical dynamics.

In previous works, we have extended the study of the kicked rotor to the two-frequency quasiperiodic case by adding a second series of kicks: the laser-cooled atoms interact with a modulated standing wave of wave vector  $\mathbf{k}_L = k_L \mathbf{x}$  forming two series of kicks at frequencies  $f_1 = 1/T_1$  (primary series) and  $f_2 = r f_1$  (secondary series), so as to obtain a system described by the Hamiltonian

$$H = \frac{P^2}{2} + \sin\theta \left[ K \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t-n) + aK \sum_{n=0}^{rN-1} \delta\left(t - \frac{n}{r}\right) \right], \quad (1)$$

where we measure momentum in units of  $2\hbar k_L$ ,  $\theta = 2k_L x$ , time in units of  $T_1$ . The normalized kick amplitude is  $K = \Omega_1^2 \hbar k_L^2 \tau T_1 / (2M\Delta)$  ( $\Omega_1$  is the resonant Rabi frequency, proportional to the light intensity,  $\Delta$  is the detuning of the laser with respect to the atomic resonance, and  $\tau$  is



the duration of the kicks. In such units, the normalized Planck constant, describing the “quanticity” of the system, is  $\tilde{\hbar} = 4\hbar k_L^2 T_1 / M$ ; it can thus be controlled by changing the frequency of the kicks. We have shown that, in the quasiperiodic case ( $r$  irrational), with  $a = 1$ , DL is apparently destroyed [11]. Because of the finite duration of the experiment, it is not known whether DL exists at very long time (in the Anderson scenario, the localization time increases exponentially with  $a$ ) or is simply completely destroyed.

What are the scaling laws for the onset of delocalization? In order to understand the origin of such laws, we analyze perturbatively the effect of the second series. The effect of each individual kick is expressed by a unitary evolution operator:

$$U(a, K, \tilde{\hbar}) = \exp\left(-i \frac{aK \sin\theta}{\tilde{\hbar}}\right). \quad (2)$$

For sufficiently small  $a$ —such that  $aK/\tilde{\hbar} \ll 1$ —this operator is close to unity and a single kick only slightly modifies the atomic state. It is the accumulation of a series of small kicks which significantly perturbs the dynamics. If the ratio  $r$  of the two frequencies is sufficiently far from any simple rational number, the second series of kicks is applied at quasirandom phases (measured with respect to the principal sequence), so that there is no coherent action of consecutive kicks. In classical language, the positions  $\theta$  at consecutive secondary kicks are uncorrelated. In the unperturbed Floquet basis, the *incoherent* cumulative effect of the secondary kicks results in a diffusive process. The strength of a single secondary kick being proportional to  $aK/\tilde{\hbar}$ , the incoherent cumulative effect of  $n$  secondary kicks is proportional to  $na^2K^2/\tilde{\hbar}^2$ , and the characteristic time scale for the effect of the secondary kick series then scales as  $T_2\tilde{\hbar}^2/(a^2K^2)$ . The other important time scale in the problem is the localization time, scaling like  $T_1K^2/\tilde{\hbar}^2$ . If the cumulated effect of the secondary kick sequence during the localization time is small enough, DL has time to establish before being destroyed. On the opposite, for strong enough secondary kicks, diffusion in the Floquet basis is dominant and no localization is expected. The crossover between the two regimes arrives when the two time scales are comparable, i.e., when  $T_2\tilde{\hbar}^2/(a^2K^2) \simeq T_1K^2/\tilde{\hbar}^2$ , or (assuming  $r$  is of the order of unity)

$$\tilde{a} \equiv \frac{aK^2}{\tilde{\hbar}^2} \simeq 1. \quad (3)$$

One sees that  $\tilde{a}$  represents the scaled parameter governing the onset of delocalization. It depends on both the “chaoticity” parameter  $K$  and the quanticity parameter, the effective Planck constant  $\tilde{\hbar}$ , which shows the intrinsic quantum nature of the phenomenon. However, if the preceding discussion establishes the form of the relevant parameter  $\tilde{a}$ , it is not sufficient for deciding whether the Anderson or the diffusive scenario actually takes place.

The experimental setup has been described elsewhere [14]. Cesium atoms are trapped and cooled in a magneto-optical trap, down to a temperature around  $3 \mu\text{K}$ . The trap is turned off, and the atoms interact with the doubly pulsed standing wave [Eq. (1)]. Raman stimulated transitions are used to measure the population  $\Pi(P)$  of a given momentum class, which can be chosen by changing the Raman detuning. The degree of localization can be directly determined by measuring the population in the zero momentum class  $\Pi_0 = \Pi(P = 0)$ . As the number of atoms in a given run is constant,  $\Pi_0$  is smaller if the momentum distribution is larger, that is  $\Pi_0 \propto \langle \Delta P^2 \rangle^{-1/2}$ . We measure  $Pi_0$  by counting the number of atoms around zero-momentum, in a range narrower than the width of the initial distribution (few recoil momenta) and much smaller than the final width. The standing wave has a one-way power ranging from 90 to 120 mW and its frequency is continuously monitored by a lambda meter.

In order to study the destruction of DL, we choose a number of kicks that is larger than the localization time  $N_L \propto (K/\tilde{\hbar})^2$  and measure  $\Pi_0$  for increasing values of  $a$  from zero to 0.25. Figure 1 displays the typical results for seven sets of parameters, that are shown in Table I. Visual inspection of Fig. 1 does not reveal any obvious scaling law relating the different curves.

Numerical simulations of the kicked rotor quantum dynamics are useful for a detailed interpretation of the results. A few complications must be included in our simulations, which are, ordered by decreasing importance, the finite temporal length of the pulses which makes the

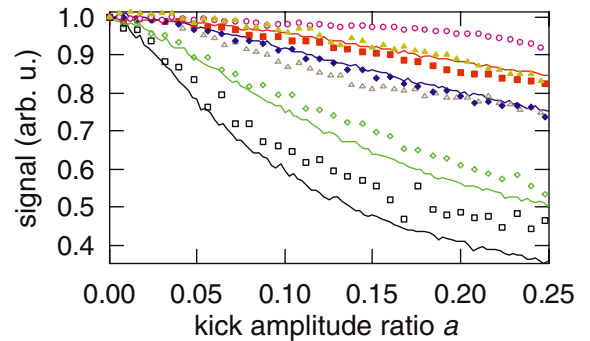


FIG. 1 (color online). Number of zero-velocity atoms as a function of the ratio  $a$  of amplitudes of the two series of kicks for various values of  $\tilde{\hbar}$  and  $K$ . In order to ease the comparison, the curves have been normalized so that the value at  $a = 0$  is 1 for all curves. Parameters and plotting conventions are listed in Table I. Solid lines are numerical simulations for the curves at  $K = 6.8$ , with no adjustable parameter: the kick strength at the center of the atomic cloud is calculated from the properties of the beam, the temporal profile of the kicks is measured and spontaneous emission rates are calculated from the measured laser intensity, detuning, and from the oscillator strength of the atomic transition. Fluctuations on the solid lines are due to numerical noise.



TABLE I. Sets of parameters used in the curves of Fig. 1. The parameters  $r = f_2/f_1 = 0.681$  and the ratio  $N/N_L \approx 2.5$  ( $N_L$  is the localization time for  $a = 0$ ) are the same for all data series. The pulse duration  $\tau$  is  $0.6 \mu\text{s}$  for the four top lines and  $0.7 \mu\text{s}$  for the bottom three ones.

$f_1$ (kHz)	$\Delta$ (GHz)	$P$ (mW)	$N$	$N_L$	$K$	$\hbar$	Symbol
30.000	-18.8	95	35	14	6.8	3.46	■
36.000	-15.6	95	50	20	6.8	2.88	◆
54.000	-10.5	95	113	45	6.8	1.92	◇
72.000	-7.9	95	200	79	6.8	1.44	□
30.000	-21.3	62	18	7	4.5	3.46	○
30.000	-21.3	87	35	14	6.3	3.46	▲
30.000	-21.3	123	70	28	8.9	3.46	△

kicks slightly different from  $\delta$ -kicks, the spatial variation of the laser intensity across the atomic cloud (which implies that all atoms do not feel the same  $K$  value) and residual spontaneous emission. Altogether, they affect the shape of the curves in a limited way: the decay of  $\Pi_0$  with  $a$  is slower by about 20%. Figure 1 shows a comparison of the numerical calculation for the four curves at  $K = 6.8$  and various  $\hbar$  values with the corresponding experimental curves: the agreement is very good. There is no adjustable parameter, all the quantities have been either directly measured or calculated from measured quantities and first principles. Small deviations are observed for the lowest curve. This is probably an experimental artifact due to the long duration of the full kick sequence (2.8 ms, compared to 1.2 ms for the upper curve). The atoms are freely falling due to gravity, and, as they escape the central region of the Gaussian-profiled standing wave, they see a lower light intensity and the momentum diffusion is slowed down, and so is the delocalization.

In the various series, a constant ratio  $N/N_L = 2.5$  ( $N_L$  is the localization time at  $a = 0$ ) is kept in order to insure that all experiments correspond to the same “localization stage”. The other parameters have been chosen to allow us to vary either  $\hbar$  or  $K$  keeping all other parameters constant. We choose  $r = 0.681$ , a typical “irrational” number, i.e., far from any simple rational, in order to avoid DL and sub-Fourier resonances [15] which are observed in a narrow range around rational numbers.

Data in Fig. 1 clearly demonstrate that the destruction of DL by a second series of kicks is gradual and certainly not a phase transition. In order to evidence the universality of the observed behavior, we show in Fig. 2 the same data plotted as a function of the scaled amplitude  $\tilde{a}$ , given by Eq. (3). The seven experimental curves now coincide, which proves that  $\tilde{a}$  is the truly relevant parameter.

Although the preceding results are clear-cut proofs that the second series of kicks gradually reduce the localization of the system, this can result from two completely different mechanisms. (i) “Diffusive scenario”: The second series destroys the DL and restores the diffusive behavior of the

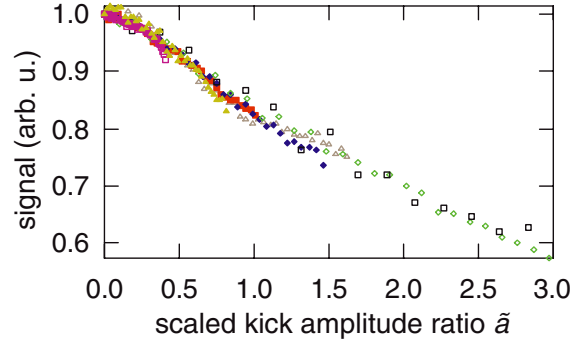


FIG. 2 (color online). Number of zero-velocity atoms as a function of the scaled kick series amplitude ratio,  $\tilde{a} = aK^2/\hbar^2$ . One observes the superposition of all curves. Parameters and plotting conventions are listed in Table I (as in Fig. 1).

classical system, with a diffusion constant smoothly increasing from zero (for vanishing  $a$ ), leading to a Gaussian distribution. (ii) “Anderson scenario”: The localization (i.e., the exponential shape) is preserved, but with a localization length  $L$  that increases *exponentially* with  $\tilde{a}$ . Which of these two scenarios is at play in our experiment can be decided by measuring the momentum distributions. The top plot at Fig. 3 shows the experimentally observed momentum distribution for various values of  $\hbar$  and  $K = 6.8$ . It shows a gradual evolution from an exponential shape (strictly observed for  $\tilde{a} = 0$ ) to a Gaussian shape at  $\tilde{a} = 5.6$  (in the diffusive regime). Moreover, the bottom plot of Fig. 3 shows that, even if the exponential shape in the wings is preserved when  $\tilde{a}$  is varied from 0 to  $\sim 1$ , the localization length varies very little (we have also checked numerically that it does *not* increase exponentially with  $\tilde{a}$ ), whereas the effect of the second series of (small) kicks is visible near the center of the distribution, which is broader and lower. We can thus conclude that the diffusive scenario (i) is the one at play in our experiment. This is interesting and intriguing, as previous theoretical works [5,7] on a slightly different quasiperiodic system—a single series of kicks amplitude modulated periodically at an incommensurate frequency—showed the Anderson scenario at play. We thus conclude that quasiperiodicity with two incommensurate frequencies in the driving of the system is not enough to determine whether the system is localized or not. In other words, quasiperiodic driving of a Hamiltonian system might not lead to a universal behavior. This is a rather difficult theoretical problem, never treated in the literature, to the best of our knowledge. Experiments on the quasiperiodically driven atomic rotor thus help to clarify this stimulating issue.

In conclusion, we have observed that the destruction of dynamical localization by the addition of a small Hamiltonian periodic perturbation of incommensurate frequency, leads to a gradual destruction of the localization, through a continuous growth of a residual diffusion constant, and *not* to the equivalent of Anderson localization in a 2D system.

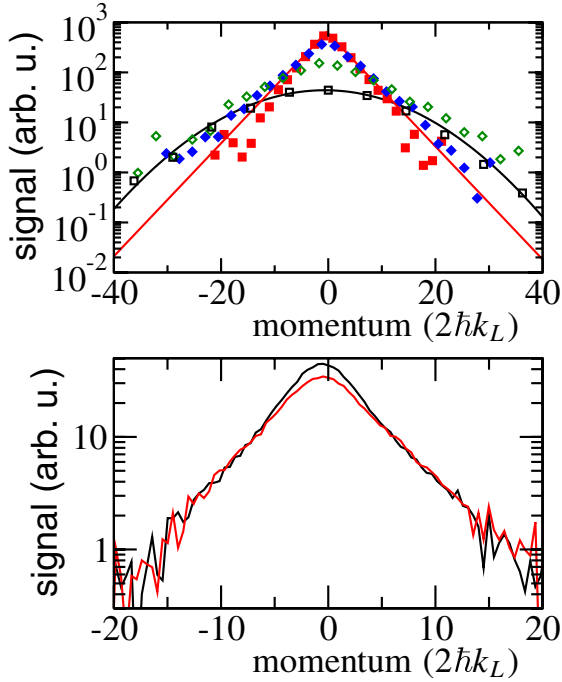


FIG. 3 (color online). *Top plot:* Experimental momentum distributions (in log scale) for fixed  $a = 0.25$  and  $K = 6.8$  and various values of  $\tilde{k}$ . It shows the gradual evolution from an exponential shape at small  $\tilde{a}$  to a Gaussian shape—characteristic of a diffusive behavior—at large  $\tilde{a}$ . *Bottom plot:* Momentum distributions (log scale) for fixed  $K = 6.3$  and  $\tilde{k} = 3.46$  and (a)  $\tilde{a} = 0$  and (b)  $\tilde{a} = 0.83$ . They coincide in the wings, showing that there is no significant increase of the localization length with  $\tilde{a}$ . Near the maximum at  $P = 0$ , the distribution for  $\tilde{a} = 0.83$  is broader and lower, proving that the perturbation has destroyed DL and initiated a diffusive behavior (see parameters in Table I).

We have also determined and tested the quantum scaling laws governing the onset of delocalization.

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM) is UMR 8523 du CNRS et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Laboratoire Kastler-Brossel is laboratoire de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure, UMR No. 8552 du CNRS.

\*Present address: Dipartimento di Fisica "E. Fermi", Università di Pisa, 56127 Pisa, Italy.

\*Present address: Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901 Recife, PE, Brazil.

- [1] R. A. Jalabert and H. M. Pastawski, Phys. Rev. Lett. **86**, 2490 (2001); F. M. Cucchietti, D. A. R. Dalvit, J. P. Paz, and W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **91**, 210403 (2003).
- [2] S. Schlunk, M. B. d'Arcy, S. A. Gardiner, D. Cassettari, R. M. Godun, and G. S. Summy, Phys. Rev. Lett. **90**, 054101 (2003).
- [3] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and J. Ford, *Stochastic Behavior of a Quantum Pendulum under a Periodic Perturbation*, Lecture Notes in Physics Vol. 93 (Springer-Verlag, Berlin, 1979), p. 334; F. M. Izrailev, Phys. Rep. **196**, 299 (1990).
- [4] P. W. Anderson, Rev. Mod. Phys. **50**, 191 (1978); D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman, Phys. Rev. A **29**, 1639 (1984); E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979); B. Kramer and A. Mackinnon, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
- [5] D. L. Shepelyansky, Physica (Amsterdam) **8D**, 208 (1983); E. Doron and S. Fishman, Phys. Rev. Lett. **60**, 867 (1988).
- [6] If a third incommensurate frequency is added, the Anderson scenario predicts that DL is destroyed for a finite strength of the perturbation, like for a standard phase transition. This is supported by numerical experiments [7].
- [7] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **62**, 345 (1989).
- [8] B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
- [9] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **81**, 1203 (1998); H. Ammann, R. Gray, I. Shvachuck, and N. Christensen, Phys. Rev. Lett. **80**, 4111 (1998).
- [10] M. K. Oberthaler, R. M. Godun, M. B. d'Arcy, G. S. Summy, and K. Burnett, Phys. Rev. Lett. **83**, 4447 (1999).
- [11] J. Ringot, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande, Phys. Rev. Lett. **85**, 2741 (2000).
- [12] C. E. Creffield, G. Hur, and T. S. Monteiro, Phys. Rev. Lett. **96**, 024103 (2006).
- [13] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **73**, 2974 (1994).
- [14] P. Szriftgiser, H. Lignier, J. Ringot, J. C. Garreau, and D. Delande, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul. **8**, 301 (2003); J. Ringot, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, Phys. Rev. A **65**, 013403 (2001); J. Ringot, Y. Lecoq, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser, Eur. Phys. J. D **7**, 285 (1999).
- [15] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J. C. Garreau, Phys. Rev. Lett. **89**, 224101 (2002).



## Annexe D

# Polarisation de spin pour la vélocimétrie Raman

Improving Raman Velocimetry by Spin Polarisation

Optics Comm. 274, 254-259 (2007)

Pendant ma première année de thèse, nous avons mis au point une technique de polarisation du spin des atomes pour augmenter la résolution de la vélocimétrie Raman. L'objectif est de pouvoir sélectionner une classe d'impulsion suffisamment fine pour obtenir des effets quantiques plus importants. En effet, en vertu du principe d'HEISENBERG une faible dispersion des vitesses implique une longueur de DE BROGLIE plus importante pour nos atomes froids, celle-ci peut s'étendre sur plusieurs dizaines de longueur caractéristique du potentiel. Les résultats présentés dans l'article ci-après, montrent que nous sommes parvenu à pousser la résolution Raman jusqu'à la limite Fourier, c'est à dire que la résolution est limitée par la durée du pulse Raman appliqué. Nous sommes donc passés d'une résolution de  $v_r/2$  à  $v_r/50$ . Un telle résolution nous permet d'envisager de nouvelles expériences sur la localisation comme par exemple une expérience où on ne peuple qu'un seul état de Floquet d'un double kicked rotor [86].

# Improving Raman velocimetry of laser-cooled cesium atoms by spin-polarization

Julien Chabé, Hans Lignier<sup>1</sup>, Pascal Szriftgiser, Jean Claude Garreau<sup>\*</sup>

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Centre d'Études et de Recherches Laser et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France<sup>2</sup>

Received 23 September 2006; received in revised form 24 January 2007; accepted 2 February 2007

## Abstract

We study the performances of Raman velocimetry applied to laser-cooled, spin-polarized, cesium atoms. Atoms are optically pumped into the  $F = 4$ ,  $m_F = 0$  ground-state Zeeman sublevel, which is insensitive to magnetic perturbations. High resolution Raman stimulated spectroscopy is shown to produce Fourier-limited lines, allowing, in realistic experimental conditions, atomic velocity selection to one-fiftieth of a recoil velocity.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 42.50.Vk; 32.80.Pj; 32.60.+i

Keywords: Raman velocimetry; Spin polarization; Laser-cooled atoms

## 1. Introduction

Raman stimulated spectroscopy has been one of the most fertile techniques used for manipulating laser-cooled atoms. It has been used for atomic velocity selection [1], sub-recoil laser cooling [2,3] and quantum state preparation and detection [4,5], with applications in as different fields as quantum chaos [6,7], quantum dynamics in optical lattices [8–10], quantum information processing [11], and high-precision metrology of fundamental constants [12–14]. Being a *stimulated* two-photon transition between two ground-state hyperfine sublevels, the width of the Raman line is, in principle, limited only by the duration of interaction between the atom and the light (the Fourier limit), as no natural widths are involved in the process. These sharp transitions can thus be used to select a very thin velocity class. A laser radiation of wavelength  $\lambda_L$  pro-

duces optical potentials with a typical well width of the order of  $\lambda_L/2$  (e.g. in a standing wave), whereas the so-called recoil velocity  $v_r = \hbar k_L/M$  (with  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  and  $M$  the mass of the atom) corresponds to a de Broglie wavelength  $\lambda_{dB} = \lambda_L$ . One thus sees that the deep quantum regime  $\lambda_{dB} \gg \lambda_L/2$  implies very sharp, “sub-recoil”, velocity distributions with  $\langle v^2 \rangle^{1/2} \ll v_r$ , which cannot be obtained in a simple magneto-optical trap.

For the alkaline atoms, the ground state presents hyperfine Zeeman sublevels, so that the Zeeman effect and light shifts inhomogeneously broaden the Raman transition. In order to obtain sharper lines one must pump the atoms into a particular sublevel, avoiding inhomogeneous broadening. In this respect, the  $m_F = 0$  Zeeman sublevel<sup>3</sup> is particularly interesting, as this level is not affected by the first order Zeeman effect, and the second order effect is negligible for the low magnetic fields we are considering here.<sup>4</sup>

<sup>\*</sup> Corresponding author. Tel.: +33 3 20336449; fax: +33 3 20337020.  
E-mail address: [jean-claude.garreau@univ-lille1.fr](mailto:jean-claude.garreau@univ-lille1.fr) (J.C. Garreau).

<sup>1</sup> Present address: Dipartimento di Fisica “E. Fermi”, Università di Pisa, Pisa, Italy.

<sup>2</sup> <http://www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq>.

<sup>3</sup> Throughout this paper, except otherwise indicated, we use the following convention to note Zeeman sublevels: ground state sublevels are noted  $F$ ,  $m_F$  and excited-state sublevels are noted  $F'$ ,  $m'_F$ .

<sup>4</sup> The order of magnitude of the *broadening* induced by the second order Zeeman effect in our setup is 1 mHz.

Atom spin polarization has been used in many recent experiments in various fields. In metrology, it was used in building frequency standards [15], measuring the ratio  $h/M$  in cesium [12] and rubidium [13], and in a recent determination of the fine structure constant [14]. It has also played an important role in optical dipole traps and side-band cooling [16–18]. None of these works, however, concentrate in the polarization process itself. The aim of the present work is thus to study in greater detail the polarization process in the context of Raman velocimetry of cold atoms. We describe a setup allowing optical pumping of laser-cooled cesium atoms into the  $F = 4, m_4 = 0$  ground-state hyperfine sublevel, concentrating on the improvement of the sensitivity of the Raman velocimetry (RV) technique. This allows us, moreover, to measure and minimize the heating induced in the atoms by the polarization process itself. We achieve a degree of polarization of  $\sim 75\%$  of the atoms in the  $m_4 = 0$  sublevel with an increase of the r.m.s. velocity limited to 20%. The observed Raman transition full width at half maximum (FWHM) is 160 Hz, which corresponds to a velocity resolution of  $v_r/50$  (or  $70 \mu\text{m/s}$ , the best reported velocity resolution to our knowledge), to be compared to the  $v_r/2$  resolution of the compensated-magnetic-field line we observed in the same experimental setup [19] with unpolarized atoms. We show that the Raman line resolution (in the velocity-independent case) is Fourier-limited, i.e. the width of the line is comparable to the inverse of the duration of the Raman pulse. In this sense, we can say that we approached the RV ultimate limit.

## 2. Experimental setup

In this section, we briefly discuss basic aspects of atom spin polarization. We consider specifically the case of the cesium atom, although most of our conclusions can be easily extended to other alkalis. Atomic spin polarization is performed in the presence of a bias magnetic field, which defines a fixed quantization axis for all atoms.

The polarization technique we use, schematically presented in Fig. 1, is based on the fact that the Clebsch–Gordan coefficient coupling the ground state sublevel  $F, m_F = 0$  to the excited sublevel  $F' = F, m_{F'} = 0$  vanishes. This means, for cesium, that if one optically pumps the atom with linearly polarized light on the  $F = 4 \rightarrow F' = 4$  transition, the  $m_4 = 0$  level is a dark state, in which atoms are trapped. Because they are in a dark state, they are not submitted to spontaneous emission heating due to fluorescence cycles. The transition is however not closed, as the atoms can spontaneously decay from the excited  $F' = 4$  level to the  $F = 3$  level, so that one must use a repumper laser beam coupling the levels  $F = 3$  and  $F' = 4$ , which brings those atoms back into the polarizing cycle.

Our experimental setup (Fig. 2) consists of a standard magneto-optical trap (MOT), a polarizing beam, a repumper beam and a stimulated Raman spectroscopy setup. This setup can be used in two different configurations. If

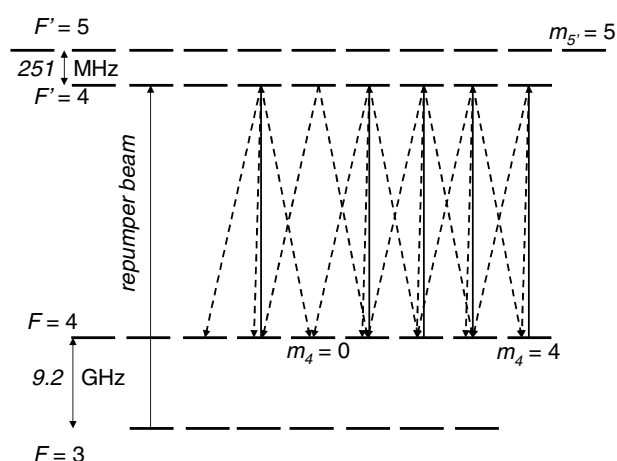


Fig. 1. Pumping atoms with a  $\pi$ -polarized radiation on a  $F \rightarrow F$  transition polarizes the atoms in the magnetic field-insensitive  $m_4 = 0$  Zeeman sublevel. Laser-induced transitions are represented by solid arrows, spontaneous-emission transitions by dashed arrows. In order to keep the figure readable, we did not represent all possible transitions.

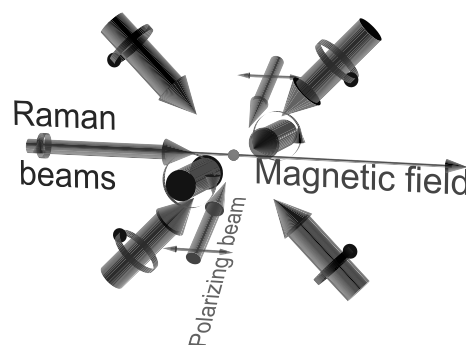


Fig. 2. Experimental setup. The atomic cloud is at the center. Three back-reflected beams (thick arrows) provide magneto-optical trapping and cooling, two  $\sigma^+$  Raman beams (thin arrows) (displayed here in the copropagating configuration) induce Raman transitions. The back-reflected polarizing beam (thinner arrows) is linearly polarized along the bias magnetic field. The Raman beams are horizontal and aligned with the bias magnetic field, while the polarizing beam is orthogonal to it, making a  $45^\circ$  angle with respect to the horizontal.

the Raman beams are copropagating, one can measure individual Zeeman sublevel populations, as the dependence in the atomic velocity due to Doppler effect cancels out in such case. If the beams are counterpropagating, the Doppler effect makes the transition probability dependent on the velocity, and the setup can be used to measure velocity class populations, and thus to reconstruct velocity distributions. Our laser-cooling sequence includes a 25 ms-long Sisyphus-molasses phase with a large detuning ( $-6\Gamma$ ) and small intensity (1% of the saturation intensity) which allows us to achieve a final temperature around  $3 \mu\text{K}$ , close to the Sisyphus limit temperature [20]. The polarizing beam (PB), whose polarization is parallel to the bias magnetic field, is extracted from the same diode laser that produces the MOT beams. An independent acousto-optical modulator controls its frequency. After interacting with the atom



cloud, the PB is reflected back on the cloud by a mirror, preventing the atoms to be pushed out of the axis of the setup by the radiation pressure. The typical incident power on the atom cloud is  $2.5 \mu\text{W}$ . More details on our experimental setup can be found in previous publications [21,19].

Atoms issued from the MOT setup are mostly in the  $F=4$  ground-state hyperfine level. The Raman-resonant atoms are transferred by a Raman pulse to the  $F=3$  level and the atoms remaining in the  $F=4$  level are pushed out of the interaction region by a resonant pushing-beam pulse. Atoms in the  $F=3$  level are then optically repumped to the  $F=4$  level where they are excited by (frequency-modulated) resonant light and their fluorescence is optically detected with a lock-in amplifier.

The magnetic field fluctuations are reduced in our setup by an active compensation scheme: small coils with the axis oriented along the three orthogonal directions and located at opposite corners of the cesium-vapor cell measure the magnetic field fluctuations, which are electronically interpolated to deduce a value at the center of the cell. This error signal is used to generate currents sent through 3 mutually orthogonal Helmholtz coil pairs that generate a compensating field. A constant bias current can also be applied to the compensating coils in order to correct the DC component of the magnetic field<sup>5</sup> (we verified that this component remains stable to better than 1% over periods of time of 1 h). This scheme allows thus a reduction of the magnetic field fluctuations even if one wants to keep a constant, non zero, bias field. We measured a residual magnetic field r.m.s. fluctuation of  $300 \mu\text{G}$  [19].

In the present work, we use  $\sigma^+$ -polarized Raman beams [11], so that a given Raman transition involves only two Zeeman sublevels  $m_F \rightarrow m_F + 1 \rightarrow m_F$ , and the intensity of each line in the Raman spectrum measures the individual sublevel populations.

### 3. Polarizing the atoms

In order to measure the polarization, we perform Raman stimulated spectroscopy with copropagating beams, for which the transition is insensitive to the atomic velocity. The bias magnetic field is adjusted so that Raman lines are clearly separated. Fig. 3 compares the Raman spectra obtained without (a) and with (b) polarization. In presence of the PB, 75% of the atoms have been pumped into the  $m_4 = 0$  sublevel. The fact that not all the atoms are in the dark state can be attributed to experimental imperfections in defining the polarization of the PB beam, due to its transmission through the MOT cell walls at an angle that is not exactly  $90^\circ$ , and to a residual misalignment between the PB polarization and the bias magnetic field, whose direction varies a little bit across the atom cloud. Polarizations higher than 95% were reported in the litera-

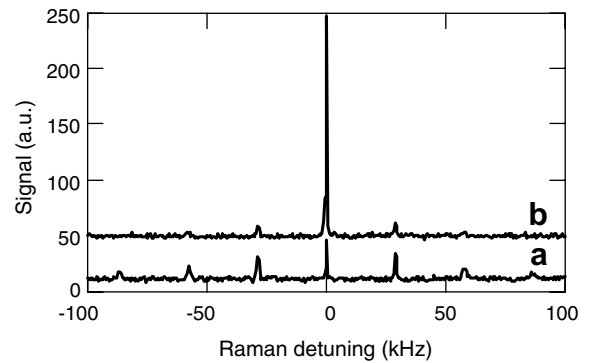


Fig. 3. Copropagating-beam Raman spectra. (a) No polarizing beam applied. (b) Polarizing beam applied (this plot was vertically shifted in order to easy comparison); 75% of the atoms are in the  $m_4 = 0$  Zeeman sublevel. The power of the PB is  $2.5 \mu\text{W}$  and its detuning  $-0.5\Gamma$ .

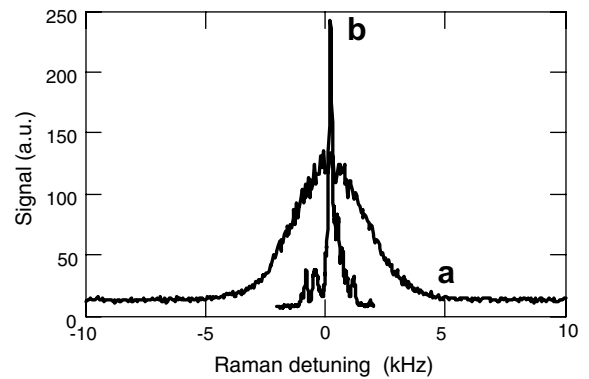


Fig. 4. Comparison between copropagating-beam Raman spectra: (a) the unpolarized line obtained with no bias field (3.5 kHz FWHM) and the active compensation of the magnetic field on, and (b) the polarized  $m_4 = 0$  line. The FWHM of the polarized line is 160 Hz, which implies a velocity resolution of  $v_r/50$ .

ture, [16,22], but optimizing our setup to such level would imply an overall redesigning, which is not worth a gain of  $\sim 20\%$  in the atom number. By comparing the total area in all lines in the two spectra, we deduce that about 20% of the atoms were lost in the polarization process, which can be attributed essentially to the atom cloud free fall due to gravity.

In Fig. 4a we show the line obtained with unpolarized atoms, bias magnetic field tunned to zero, and the active compensation of field fluctuations on. This line includes contributions from all Zeeman sublevels, and its width can be attributed to inhomogeneous broadening of the various components due to light-shift and residual magnetic-field fluctuations [19]. This line is compared to the single polarized  $m_4 = 0$  line. The improvement factor in the FWHM is 22. The measured FWHM of the polarized line is 160 Hz, which, when multiplied by the Raman pulse duration (7 ms) gives 1.12: we are thus very close to the Fourier limit. The structures in the pedestal of the polarized line are due to weak  $m_4 = 0 \rightarrow m_3 = \pm 1$  and  $m_4 = \pm 1 \rightarrow m_3 = 0$  transitions due to the fact that the Raman beams wavevectors are not perfectly aligned with

<sup>5</sup> In order to adjust the bias current, we minimize the width of the Raman line in the copropagating configuration.

the bias magnetic field. In the counterpropagating case, the Doppler broadening prevents a direct measure of the resolution. However, as the perturbing effects are identical as in the copropagating case, it is rather safe to assume that the resolution is the same in both cases.

The fluorescence cycles performed by the atom during the polarization process inevitably induce spontaneous-emission heating. In order to evaluate this heating effect, we compared the lines obtained in the counterpropagating Raman beam configuration with and without polarization. The observed width of 160 Hz in the polarized case corresponds, when extrapolated to the counterpropagating configuration, to a velocity resolution of  $\sim 0.02 v_r$ , to be compared to  $\sim 0.4 v_r$  in the unpolarized case. Table 1 displays the parameters used and the observed linewidths. A back-reflected PB produces a minimum of heating for a detuning of  $-0.5\Gamma$ , corresponding to the minimum temperature of the Doppler cooling. We then observe an increase in the r.m.s. velocity of only 20%, from 4.0 to 4.8  $v_r$ . We can roughly interpret this heating effect by calculating the number of fluorescence cycles necessary to bring an atom from a Zeeman substate  $m_F$  to the substate  $m_F = 0$  and averaging over both  $m_F$  and over the random direction of the spontaneously-emitted photons. We obtain a value for the increase in the r.m.s. velocity of  $1.1 v_r$ , which matches well with the experimental values shown in Table 1.

Fig. 5 compares the counterpropagating-beam spectra obtained with and without the application of the PB. They are very well fitted by Gaussians, and can be considered as directly proportional to the velocity distribution. The ratio of the surfaces of the two distributions is  $\sim 11\%$  which constitutes a rather acceptable loss. We also observed a decrease of a factor 1.8 in the signal to noise ratio in the polarized case. This is probably due to the fact that the number of atoms present in the cloud has larger fluctuations because of the polarization process itself, as compared to the fluctuations observed in the absence of polarization. That is, the polarization both reduces the number of atoms and increases its fluctuations, thus degrading the signal to noise ratio more strongly than the observed loss in the atom number.

Finally, we have modeled the dynamics of the polarization process, and quantified the main stray effect, namely the polarization defect of the PB. Fig. 6 shows a comparison of the experimentally observed level populations and

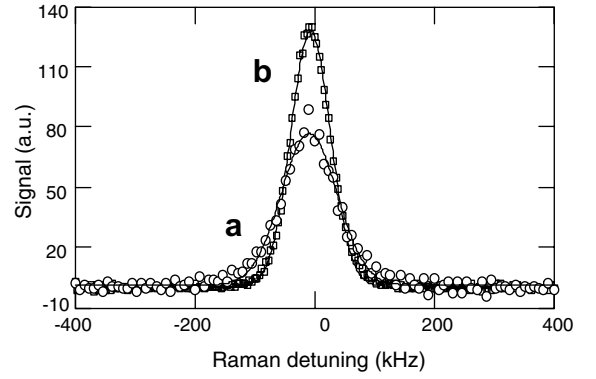


Fig. 5. Counterpropagating-beam, velocity-sensitive Raman spectra. (a) Spectrum obtained with atomic polarization on the  $m_4 = 0$  line (empty circles); (b) spectrum obtained with active compensation of the magnetic field (empty squares). Both lines are well fitted by Gaussians, from which one deduces r.m.s. velocities of, resp., 4.8 and 4.0  $v_r$ , (4.6 and 3.2  $\mu\text{K}$ ). For comparison, the recoil velocity corresponds to 8.27 kHz of Raman detuning.

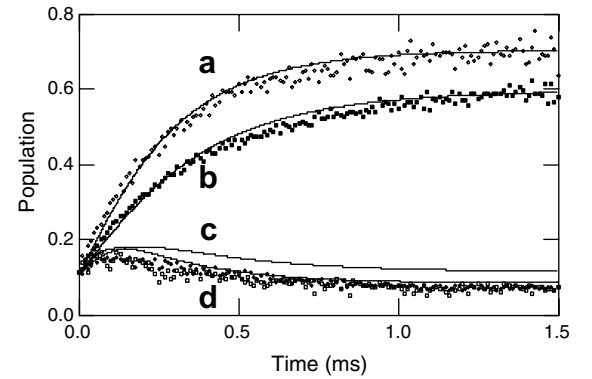


Fig. 6. Dynamics of the polarization process. (a) Population of the  $m_4 = 0$  level with  $\Delta_{\text{PB}} = -0.5\Gamma$ , (solid lines are fits of the experimental data by numerical simulation curves); (b) Population of the  $m_4 = 0$  level with  $\Delta_{\text{PB}} = 0$ ; (c) Population of the  $m_4 = 1$  level with  $\Delta_{\text{PB}} = -0.5\Gamma$ ; (d) Population of the  $m_4 = 1$  level with  $\Delta_{\text{PB}} = -0.5\Gamma$ . Parameters are  $I_{\text{PB}}/I_s = 0.019$ ,  $I_{\text{repumper}}/I_s = 0.023$ ,  $\alpha = 0.013$  [cf. Eq. (A.4)].

the evolution predicted by a rate-equation model described in Appendix A. The simulation fits very well the experimental results, except for the population of the  $m_4 = 1$  level with  $\Delta_{\text{PB}} = 0$ , where one observes a systematic shift, probably due to the fact that these small values are close to the limit detection level. We deduce a rather small depolarization value of  $\alpha = 0.013$  (see Eq. (A.4)), which shows that the polarization process is very sensitive to this effect.

#### 4. Conclusion

We evidenced the ability of the polarization technique to produce very sharp Raman lines, allowing high-resolution Raman velocimetry of laser-cooled atoms. Our results imply a velocity resolution of 70  $\mu\text{m/s}$ , or  $v_r/50$ , which can be compared to  $v_r/18$  reported in [8],  $v_r/17$  in [22] (both with cesium) and 290  $\mu\text{m/s}$ , or  $v_r/100$ , in [1] (for sodium). The present work thus corresponds to the best observed

Table 1

Heating induced by the polarization process

$\Delta_{\text{PB}} (\Gamma)$	$\tau$ (ms)	$P$ ( $\mu\text{W}$ )	FWHM (kHz)	$v_{\text{r.m.s.}}$ ( $v_r$ )
-1.0	0.53	2.41	98.6	5.2
-0.5	0.32	2.34	91.3	4.8
0.0	0.65	2.36	99.6	5.2
No PB	-	-	75.3	4.0

Parameters are the detuning  $\Delta_{\text{PB}}$  and the power  $P$  of the polarizing beam and  $\tau$  the total duration of the polarization process (the duration is chosen so that 50% of the atoms are pumped into the  $m_4 = 0$  level).



velocity resolution. Such a resolution implies a de Broglie wavelength of  $50\lambda_L$ , which potentially generates coherent atomic wavefunctions extending up to 100 wells of a standing wave. The technique is thus highly useful in manipulating the external degrees of freedom of atoms in the frame of experiments on quantum dynamics.

## Acknowledgements

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM) is Unité Mixte de Recherche UMR 8523 du CNRS et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Centre d'Études et de Recherches Laser et Applications (CERLA) is supported by Ministère de la Recherche, Région Nord-Pas de Calais and Fonds Européen de Développement Économique des Régions (FEDER).

## Appendix A. Model

In order to understand the dynamics of the polarizing process, we performed, as in Refs. [23,24], numerical simulations based on a rate-equation approach taking into account the effect of the PB and of the repumper. We use in the present Appendix a slightly different notation: we identify a given sublevel by three labels:  $s = \{g,e\}$  characterizing fine-structure state,  $F = \{3,4,5\}$  for the hyperfine sublevel and  $m_F = \{-F\dots F\}$  for the Zeeman sublevel. The general form of these equations is then

$$\begin{aligned} \frac{dN_{s,F,m_F}}{dt} = & \sum_{s_1,F_1,m_1} W_{s_1,F_1,m_1 \rightarrow s,F,m_F} N_{s_1,F_1,m_1} \\ & - \sum_{s_1,F_1,m_1} W_{s,F,m_F \rightarrow s_1,F_1,m_1} N_{s,F,m} + \delta_{s,g} \\ & \times \sum_{s_1,F_1,m_1} \Gamma a_{e,F_1,m_1 \rightarrow g,F,m_F} N_{g,F_1,m_1} \\ & - \delta_{s,e} \Gamma N_{e,F,m}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

where  $N_{s,F,m_F}$  is the population of the sublevel  $\{s, F, m_F\}$ ,  $W_{s,F,m_F \rightarrow s_1,F_1,m_1}$  is the stimulated transition rate between levels  $\{s, F, m_F\}$  and  $\{s_1, F_1, m_1\}$ , and  $a_{e,F_1,m_1 \rightarrow g,F,m_F}$  is the spontaneous emission branching ratio connecting the sublevels  $\{e, F_1, m_1\}$  and  $\{g, F, m_F\}$ . The absorption and stimulated emission rates  $W_{s,F,m_F \rightarrow s_1,F_1,m_1}$  are related to the spontaneous emission rates  $a_{e,F_1,m_1 \rightarrow g,F,m_F}$  by the following relation:

$$W_{s,F,m_F \rightarrow s_1,F_1,m_1} = \frac{3}{2} \frac{\lambda_L^3}{\pi h c} \frac{I}{\Delta_L} \chi_{F \rightarrow F_1} a_{e,F_1,m_1 \rightarrow g,F,m_F} \Gamma \varepsilon_{m_F - m_1}^2, \quad (\text{A.2})$$

where  $\lambda_L = 852$  nm is the laser wavelength,  $I$  the laser intensity expressed in  $\text{W m}^{-2}$  and  $\Delta_L \sim 2\pi \times 1$  MHz the laser linewidth, and

$$\chi_{F \rightarrow F_1} \equiv \mu(\mu + 1) \frac{\Delta_{F \rightarrow F_1}^2 + (\mu - 1)^2}{(\Delta_{F \rightarrow F_1}^2 + \mu^2 - 1)^2 + 4\Delta_{F \rightarrow F_1}^2} \quad (\text{A.3})$$

is the relative probability of exciting a neighboring transition with  $\mu = \Delta_L/\Gamma$  and  $\Delta_{F \rightarrow F_1} = 2(\omega_{F \rightarrow F_1} - \omega_L)/\Gamma$  the position of the atomic linewidth from the laser line. The branching ratios  $a_{e,F_1,m_1 \rightarrow g,F,m_F}$  can be found in [23].<sup>6</sup>

As we indicated in Section 3, the polarization of the PB is contaminated by  $\sigma^+$  and  $\sigma^-$  components. This is taken into account in our simulation by writing its polarization as

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_+ + \alpha\varepsilon_-}{\sqrt{1 + 2\alpha^2}} \quad (\text{A.4})$$

$\alpha$  being an adjustable parameter representing the depolarization of the PB. The coupled rate equations are numerically solved using a standard 4th order Runge-Kutta integration method with the initial condition that all atoms are in the  $F = 4$  ground-state level and that all of its sublevels are equally populated.

## References

- [1] M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 66 (18) (1991) 2297.
- [2] M. Kasevich, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 69 (12) (1992) 1741.
- [3] V. Boyer, L.J. Lising, S.L. Rolston, W.D. Phillips, Phys. Rev. A70 (4) (2004) 043405.
- [4] V. Vuletic, C. Chin, A.J. Kerman, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 81 (26) (1998) 5768.
- [5] M. Morinaga, I. Bouchoule, J.C. Karam, C. Salomon, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4037.
- [6] J. Ringot, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, D. Delande, Phys. Rev. Lett. 85 (13) (2000) 2741.
- [7] D.A. Steck, W.H. Oskay, M.G. Raizen, Phys. Rev. Lett. 88 (12) (2002) 120406.
- [8] M.B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, C. Salomon, Phys. Rev. Lett. 76 (24) (1996) 4508.
- [9] Q. Niu, X.G. Zhao, G.A. Georgakis, M.G. Raizen, Phys. Rev. Lett. 76 (24) (1996) 4504.
- [10] S.R. Wilkinson, C.F. Bharucha, K.W. Madison, Q. Niu, M.G. Raizen, Phys. Rev. Lett. 76 (24) (1996) 4512.
- [11] I. Dotsenko, W. Alt, S. Kuhr, D. Schrader, M. Müller, Y. Miroshnychenko, V. Gomer, A. Rauschenbeutel, D. Meschede, App. Phys. B78 (6) (2004) 711.
- [12] D.S. Weiss, B.C. Young, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 70 (18) (1993) 2706.
- [13] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, Phys. Rev. Lett. 92 (25) (2004) 253001.
- [14] P. Cladé, E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, Phys. Rev. Lett. 96 (3) (2006) 033001.
- [15] K. Gibble, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 70 (12) (1993) 1771.
- [16] K.L. Corwin, S.J.M. Kuppens, D. Cho, C.E. Wieman, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 1311.
- [17] H. Perrin, A. Kuhn, I. Bouchoule, T. Pfau, C. Salomon, Europhys. Lett. 46 (2) (1999) 141.
- [18] D.J. Han, S. Wolf, S. Oliver, C. McCormick, M.T. Depue, D.S. Weiss, Phys. Rev. 85 (4) (2000) 724.
- [19] J. Ringot, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, Phys. Rev. A65 (1) (2001) 013403.
- [20] C. Salomon, J. Dalibard, W.D. Phillips, A. Clairon, S. Guellatti, Europhys. Lett. 12 (8) (1990) 683.

<sup>6</sup> Applying Eq. (A.1) to all transitions produces a set of 43 coupled equations. We noted however that the ratio between different values of  $\chi_{F \rightarrow F_1}$  can be as large as  $10^4$ ; some transitions can in practice be neglected, and one obtains very good results with only 23 equations.

- [21] J. Ringot, Y. Lecoq, J.C. Garreau, P. Szafrangis, *Eur. Phys. J. D7* (3) (1999) 285.
- [22] D.A. Steck, Quantum chaos, transport, and decoherence in atom optics, Ph.D. thesis, University of Texas, USA, Unpublished (2001).
- [23] G. Avila, V. Giordano, V. Candelier, E. de Clercq, G. Theobald, P. Cerez, *Phys. Rev. A36* (8) (1987) 3719.
- [24] J. Sagle, R.K. Namiotka, J. Huennekens, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 29 (12) (1996) 2629.



## Annexe E

# Observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des ondes de matière

Experimental observation of the Anderson transition with atomic matter waves

<http://arxiv.org/abs/0709.4320>

Nous présentons ici l'article soumis à publication sur l'observation de la transition d'Anderson. Ce résultat est détaillé dans le chapitre 3.

# Experimental observation of the Anderson transition with atomic matter waves

Julien Chabé<sup>1</sup>, Gabriel Lemarié<sup>2</sup>, Benoît Grémaud<sup>2</sup>, Dominique Delande<sup>2</sup>, Pascal Szriftgiser<sup>1</sup> & Jean Claude Garreau<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université des Sciences et Technologies de Lille, CNRS, CERLA; F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France\**

<sup>2</sup> *Laboratoire Kastler-Brossel, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, ENS, CNRS; 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France*

**Phase transitions are major phenomena in physics, where a small change in a parameter may induce a dramatic change in the physical properties of a system. Of particular interest in modern physics is the metal-insulator Anderson transition<sup>1</sup> in disordered systems, ultimately due to the interplay between quantum interference and disorder. Here we present the first experimental observation of the Anderson transition using atomic matter waves. The Anderson model describes the effect of random impurities on the quantum properties of a particle in a crystal lattice. The model predicts the existence of a quantum phase transition between an insulator phase, where the wavefunction is exponentially localized at long times, and a metallic phase, where the wavefunction is delocalized and displays diffusive transport. The metal-insulator transition is a fundamental quantum process which plays a central role in the study of quantum disordered systems, and has progressively been extended from its original solid-state physics scope<sup>1-4</sup> to many different fields, including dynamical systems<sup>5,6</sup>, electromagnetic**

---

\* <http://www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq>

**radiation<sup>7-10</sup>, acoustics<sup>11,12</sup>, biology<sup>13,14</sup> and even cosmology<sup>15</sup>. Many studies have pointed out strong analogies between cold atoms trapped in optical lattices and condensed matter physics<sup>16</sup>. Using an atom-optics system formally equivalent to the Anderson model in three dimensions<sup>17-19</sup> we unambiguously demonstrate the Anderson transition. Sensitive measurements of the atomic wavefunction dynamics and the use of finite-size scaling techniques make it possible to extract both the critical disorder strength and the critical exponent of the transition. In doing so, we make full use of the physical concepts underlying phase transition phenomena such as universality classes (i.e., the insensitivity of the critical phenomena to the microscopic properties of the system) and renormalization (which describes the scaling laws in the vicinity of the transition).**

The Anderson model<sup>1-3</sup> starts from the “tight-binding” description of an electron in a lattice, which is essentially composed of two terms: a “diagonal”, on-site, term that describes the energy associated with the site, and a “hopping” term that describes the probability amplitude for the electron to jump to a neighbouring site. Anderson postulated in 1958 that the dominant effect of impurities in the lattice is to randomize the diagonal term, and showed that this generally leads to a localization of the wavefunction, in sharp contrast with the Bloch-wave solution valid for a perfect crystal. This model and its extensions can in fact describe a variety of systems where a wave propagates in a disordered medium (not only a wavefunction but also light<sup>7,8</sup> or acoustic<sup>11,12</sup> waves). The large popularity that the Anderson model has enjoyed for five decades is also due to its mathematical simplicity, allowing analytical approaches; yet, it predicts a wealth of interesting phenomena. One of its most interesting predictions<sup>1,2</sup> is that the wavefunction is always localized in 1D; in 2D it is also localized but with a localization length that increases exponentially with the disorder strength; in 3D it predicts that there should be a phase transition at a well defined mobility edge between

localized and delocalized phases, with the density of impurities or the energy being the control parameter.

Despite the wide interest on the Anderson transition, few experimental results are available. In a crystal, it is very difficult to obtain the conditions for a clean observation of the Anderson localization. Firstly, one has no direct access to the electronic wavefunction and must rely on modifications of bulk properties like conductivity. Secondly, it is hard to reduce decoherence sources to a low enough level to allow quantum effects to be clearly observed. Finally, it is not easy to obtain a high directional confinement so as to produce the equivalent of a 1D or 2D system. It is thus interesting to find other systems that display the Anderson transition, but are more favourable for experimental studies. Anderson localization of photons propagating in a disordered medium has been observed in the microwave regime<sup>11,12</sup> and recently in the visible range<sup>7,8</sup>. Theoretical propositions have also been made recently to observe it with ultracold-atomic matter waves<sup>20,21</sup>. In the present work, we use another system having these properties, the atomic *kicked rotor*<sup>5,6,17-19</sup>.

We engineered a matter-wave system described by an Anderson-like model. It allows us to probe the physics of disordered systems in much better controlled conditions than what is possible in condensed matter physics, namely: (almost) no interaction between the particles exposed to the disordered potential, no absorption in the medium, no coupling with a thermal reservoir which could destroy localization, possibility of preparing an initially localized state and possibility of measuring the final state of the system after a chosen interaction time. Our system consists in a one-dimensional particle exposed to pulses (equally separated in time) of a spatially sinusoidal potential whose amplitude is quasi-periodically modulated at frequencies  $f_2$  and  $f_3$ . The corresponding Hamiltonian reads:

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos x [1 + \varepsilon \cos(2\pi f_2 t) \cos(2\pi f_3 t)] \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n) \quad (1)$$

where  $x$  and  $p$  are the particle position and momentum,  $K$  is the pulse intensity, and  $\delta(t)$  is the Dirac delta function. We have chosen normalized variables such that  $x$  is measured in units of the spatial period of the potential divided by  $2\pi$ , the particle's mass is unity and time is measured in units of pulse period  $T_1$ .

By taking  $\varepsilon = 0$  we obtain the standard kicked rotor (strictly time-periodic) which has been widely used in theoretical and experimental studies of both classical and quantum chaos. This system is known to display a phenomenon called *dynamical localization*<sup>5</sup>, which manifests itself by an exponential localization of the wavefunction in *momentum space*. Dynamical localization has been shown to be a direct analogue of Anderson localization in one dimension, with the following correspondences: Localization takes place in real space for the Anderson model and in momentum space for the kicked rotor, the so-called “stochasticity parameter”  $K$  [see eq. (1)] is the equivalent of the diagonal disorder in the Anderson model.  $K$  will thus be the control parameter for the observation of the Anderson transition in our system, the mobility edge corresponding to a critical value  $K_c$ . It should be noted that dynamical localization exists only when the classical dynamics of the kicked rotor eq. (1) is a chaotic diffusion (inhibited in the quantum case by destructive interference). The experimental observation of dynamical localization in the kicked rotor<sup>17</sup> actually constitutes the first observation of Anderson-like 1D localization with matter waves.

As the Anderson transition between localized and delocalized states exists only in three (or more) dimensions, one must generalize the kicked rotor to obtain a system analogous to the 3D Anderson model. This can be done by introducing further temporal dependencies<sup>18,19</sup> making the Hamiltonian quasi-periodic in time, i.e. by taking  $\varepsilon \neq 0$  in (1) and choosing  $f_2$  and  $f_3$  as incommensurate irrational numbers. One can then use a



generalization of the transformation introduced by Grempel *et al.*<sup>6</sup> to show that the resulting system is substantially equivalent to the 3D Anderson model<sup>18</sup>, the new spatial coordinates in the Anderson model corresponding to the new time dependences in the quasi-periodic kicked rotor. Generally, to introduce additional incommensurable frequencies in the kicked rotor is equivalent to increase the dimensionality of the corresponding Anderson model.

Our atom-optics realization of the kicked rotor has been described in detail elsewhere<sup>22</sup>. Basically, we cool caesium atoms in a standard magneto-optical trap. After a Sisyphus-molasses phase, we obtain a cloud of  $10^7$  atoms at a temperature of  $3.2 \mu\text{K}$ . The laser-cooling setup thus prepares a sample of atoms in a thermal state whose momentum distribution is much narrower than the expected localization length. These atoms then interact with the potential generated by a horizontal standing wave. The laser beams forming the standing wave pass through an acousto-optical modulator driven by an arbitrary-form synthesizer, which allows us to modulate the optical potential at will. One generates in this way short pulses of duration  $0.8 \mu\text{s}$  at  $T_1 = 27.778 \mu\text{s}$ , to which is superimposed a modulation of the form (1), with  $\varepsilon = 0.3$ ,  $f_2 = 2.236$  and  $f_3 = 3.606$ . The standing wave, of typical power 160 mW, is far off-resonant (17.3 GHz to red of the atomic transition, corresponding to  $3.2 \times 10^3$  natural widths) in order to reduce spontaneous emission, which is a source of decoherence in the system. Our setup also allows sensitive measurements of the atomic momentum distribution by means of stimulated Raman transitions<sup>23</sup>. The momentum exchange between the atom and the laser radiation is aligned along the axis of the standing wave, insuring that the spatial dynamics is essentially 1D. Atom-atom interactions are negligible on the time scale of the experiment, which may thus be considered as the superposition of  $10^7$  independent one-particle experiments.

In order to observe the Anderson transition we apply a sequence of kicks to the atomic cloud and measure its dynamics. In the localized regime, the evolution of its momentum distribution is “frozen” after some characteristic time ( $\sim 12$  kicks) into an exponential curve  $\exp(-|p|/p_{loc})$  (where  $p_{loc}$  is the *localization length*). In the diffusive regime, the initial Gaussian shape is preserved and the distribution gets broader as kicks are applied, corresponding to a linear increase of the average kinetic energy. Observing the Anderson transition would thus mean to obtain narrow, exponentially localized distributions for  $K < K_c$  and increasingly broad, Gaussian-shaped distributions for  $K > K_c$ . In practice, however, it is much easier to measure the population  $\Pi_0(t)$  of the zero velocity class. By virtue of the constancy of the total number of atoms,  $\Pi_0^{-2}(t)$  is proportional to  $p_{loc}^2$  in the localized regime and to the average kinetic energy in the diffusive regime. If the dynamics is diffusive then  $\langle p^2 \rangle \propto t$ , which means, by a simple area-conservation argument, that  $\Pi_0(t) \propto t^{-1/2}$ . In the localized regime,  $\Pi_0(t)$  tends asymptotically to a constant value  $p_{loc}^{-1}$ . At the critical point (see below), we expect  $\Pi_0(t) \propto t^{-1/3}$ . So, if we multiply the  $\Pi_0(t)$  curves by  $t^{1/3}$  we obtain curves of positive slope in the localized case and of negative slope in the diffusive (delocalized) regime. This provides us a simple way to clearly distinguish the two regimes, the zero slope curve being the critical curve corresponding to the phase transition.

We performed 44 experimental runs corresponding to different values of  $K$ , below and above the transition. In each run we recorded the value of  $\Pi_0(t)$  as the kicks were applied. We also recorded the background signal obtained by not applying the Raman detection sequence, and the total number of atoms in the cold-atom cloud. These signals were used to correct the experimental data from background signals and from long-term drifts of the cloud population. Fig. 1 displays the experimental data  $\Pi_0(t) \times t^{1/3}$  as a function of time, in the various regimes. It clearly shows the changing of behaviour from localized (positive slope) to diffusion (negative slope) around  $K \approx 3.8$ . However, this is not enough to prove that we observe a true phase transition, characterized by

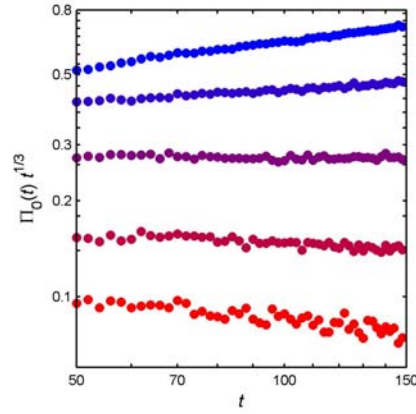


Fig. 1: Direct experimental observation of the Anderson transition. We plot the experimentally measured quantity  $\Pi_0(t) t^{1/3}$  vs. time  $t$  in a log-log scale. The values of the stochasticity parameter  $K$  are (from top to bottom) 0.9, 2.1, 3.8, 6.3 and 9.0, and  $\varepsilon = 0.3$ . The inversion of the slope from positive (localization, blue) to negative (diffusion, red) is clearly visible around  $K \approx 3.8$ .

singular behaviours. In order to do so, we will show that the data follow the scaling laws predicted by renormalization theory applied to the 3D Anderson model. This will permit us to extract the critical singularities, thus to measure the critical disorder and the critical exponents.

When one approaches the critical point, the localization length diverges on the insulator side while the diffusion constant vanishes on the metallic side. However, a strict divergence can be observed only in macroscopically large samples; in small samples the divergence is smoothed. This fact plagued the numerical studies of the solid-state Anderson transition, as only a finite (small) lattice can be dealt with in a computer, and no divergence is observed. In our system, this singular behaviour would show up only for prohibitively large numbers of kicks. Indeed, during our experiment, the atoms are falling under gravity action, and eventually go out of the detection region and are lost. In practice, this limits the maximum number of kicks to around 150. To overcome this limitation, a technique named “finite-size scaling”<sup>24-29</sup> was introduced.

The basic idea is to infer the scaling law allowing proper extrapolation of the measured localization length to an infinite sample.

We have adapted the standard finite-size scaling approach used in numerical studies of the Anderson transition<sup>3</sup> assuming that, for finite interaction time, the quantity  $\Pi_0^{-2}(t)t^{-2/3} \equiv \Lambda(t)$  is an arbitrary function  $f(\zeta t^{-1/3})$  (see methods section), with  $\zeta$  the scaling parameter which depends *only* on  $K$ . By gathering the results obtained for various values of  $t$  and  $K$ , one can reconstruct both the function  $f$  and the scaling parameter  $\zeta(K)$ . It should be emphasized that no assumption about the form of  $f$  has been made. The result is shown in Fig. 2 for numerical simulations of the system and in Fig. 3 for the experimental results, which contain the most important results of this work. In both cases, the scaling hypothesis is justified by the fact that all points in Fig. 2a and 3a lie (within reasonably small errors) on a single curve. The remarkable feature is the existence of two branches: the upper one (asymptotic slope -1 in the log-log plot) corresponds to diffusive motion while the lower one (asymptotic slope +2 in the log-log plot) corresponds to the localized regime, while the critical point is at the right tip joining the diffusive and localized branches. The scaling parameter  $\zeta(K)$  is plotted in Figs. 2b and 3b: it represents the localization length in the localized regime and scales as the inverse of the diffusion constant in the diffusive regime. Clearly, it increases rapidly in the vicinity of the critical value  $K_c$ , on both sides of the transition. Although no hypothesis has been made about its behaviour near the critical point, it is found to behave as  $\zeta \sim |K - K_c|^{-\nu}$  when  $K \rightarrow K_c$  for the numerical results in Fig. 2. The value of the critical exponent  $\nu = 1.6 \pm 0.2$  can be directly extracted from Fig. 2b; the numerical uncertainties in the fitting procedure are the main source of error. Once the existence of the scaling law is established from Figs. 2 and 3, it is more convenient to use a *global* analysis of the numerical data at various values of  $K$  (see ref.<sup>25,26</sup>). We then obtain the more precise value for the critical exponent  $\nu = 1.58 \pm 0.10$ .

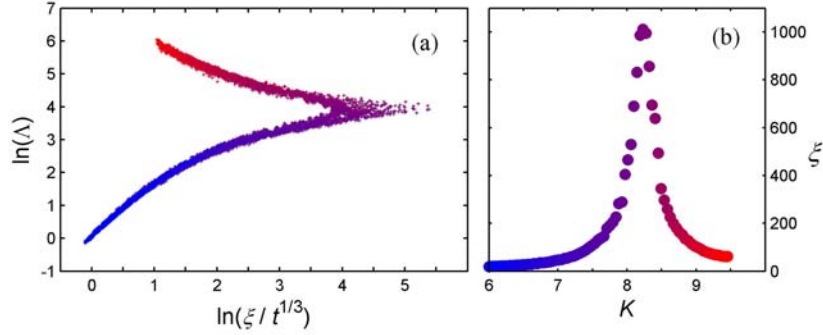


Fig. 2: Finite size scaling applied to the results of numerical simulations of the quasi-periodic kicked rotor ( $\varepsilon = 0.3$ ). We compute the evolution of the zero-velocity class population  $\Pi_0(t)$  as a function of time (from  $10^2$  to  $10^4$  kicks), for various values of  $K$ . The finite-size scaling makes it possible to determine both the scaling function  $f$ , shown in (a), with its upper branch (red), associated with the diffusive regime, and its lower branch (blue), associated with the localized regime. The dependence of the scaling parameter  $\xi$  on  $K$  is shown in (b). It displays a divergent behaviour around the critical point  $K_c = 8.23$ , which is a signature of the Anderson phase transition. The critical exponent is  $\nu = 1.58 \pm 0.10$ , in good agreement with numerical experiments on the Anderson model.

In order to perform a similar analysis of the experimental data, we must consider decoherence processes, which make the strict localization impossible to maintain for arbitrarily long times. In our system, spontaneous emission is such a phase-breaking mechanism. The process where an atom absorbs a photon from the standing wave and performs a spontaneous emission is not included in the Hamiltonian eq. (1). Although this process is rare, it destroys the phase coherence of the atomic matter wave, and consequently breaks Anderson localization. Other sources of decoherence are most likely present in our experiment, such as acoustical vibrations and laser-intensity or frequency fluctuations, which would also break the quantum localization effect and contribute to make the transition less sharp than expected. This is a rather common situation also in solid state physics, where phase-breaking processes are due e.g. to

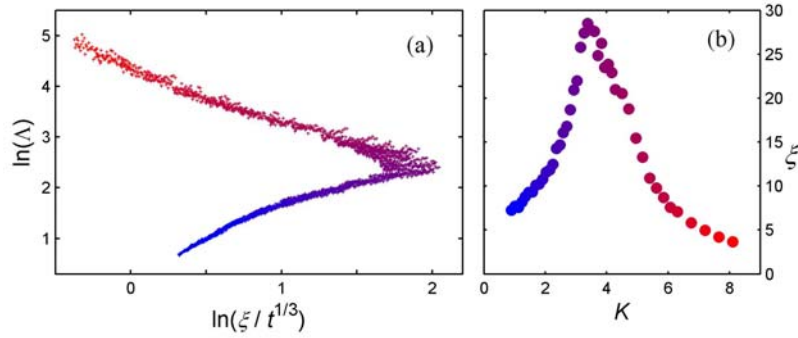


Fig. 3: Finite size scaling applied to the experimental results (with  $\varepsilon = 0.3$  and 50 to 150 kicks). The scaling procedure is identical to the one used in Fig. 2. The fact that all experimental points lie on a single curve in (a), with a diffusive (red) and a localized (blue) branch, is a proof of the relevance of the one-parameter scaling hypothesis. The maximum displayed by the scaling parameter  $\xi$  in (b) in the vicinity of  $K_c = 3.83$  is a clear-cut proof of the Anderson transition. Phase-breaking mechanisms (cf. text) smooth the divergence at the critical point. When these effects are properly taken into account, one obtains a critical exponent  $\nu = 1.55 \pm 0.20$ , compatible with the numerical result.

phonons at finite temperature or electron-electron interactions at zero temperature. We performed numerical experiments taking decoherence into account. The resulting scaling parameter  $\xi(K)$  is plotted in Fig. 4 for various values of the decoherence rate  $\eta$ . Not surprisingly, the sharp divergence at zero rate is smoothed when  $\eta$  increases and the critical value  $K_c$  is shifted. We checked that there is a good agreement (in the perturbative regime  $\eta \rightarrow 0$ ) between the numerical data and the experimental measurements. More precisely, the experimental data are well fitted by the formula:

$$\frac{1}{\xi(K)} = \alpha |K - K_c(\eta)|^\nu + \beta, \quad (2)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are the fitting parameters. This makes it possible to extract from the experimental data a value of the critical exponent  $\nu = 1.55 \pm 0.20$ , in good agreement with the critical exponent obtained above from numerical simulations in the absence of phase-breaking mechanisms.

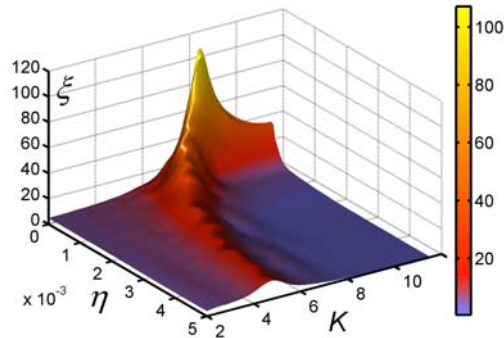


Fig. 4: The scaling parameter  $\xi$  – extracted from finite-size scaling analysis of numerical experiments in the presence of decoherence – as a function of the kick strength  $K$  and the decoherence rate  $\eta$ . One sees that decoherence shifts and smoothes the critical behaviour, but the transition is still clearly visible.

In conclusion, we have presented the first unambiguous experimental evidence of the Anderson transition in 3D with atomic matter waves, characterized by a well defined critical point, a divergence of the localization length below the critical point (in the localized regime) and a vanishing of the diffusion constant above the critical point (in the diffusive regime). We have determined the scaling laws and the critical exponent  $\nu \approx 1.6$  of the Anderson transition. This exponent is significantly larger than unity and very close to the one observed in recent numerical experiments<sup>25,26</sup> on the “pure” Anderson model, enforcing the assumption<sup>18,19</sup> that the two systems are substantially equivalent. Whether this exponent is universal (i.e. independent of the microscopic details) or not remains to be studied. A very interesting point is that our Anderson-equivalent system can be easily generalized to higher dimension, which opens perspectives for fascinating studies of the dependence of the critical exponent on the dimension. Finally, we have shown how to take into account quantitatively spurious phase-breaking mechanisms such as spontaneous emission which smooth the sharp Anderson transition.

## METHODS

**Finite-size scaling.** A quantum phase transition obeys scaling laws in the critical regime. The single parameter scaling theory, successfully used for the standard 3D Anderson model, can be applied to analyze our experimental data, and especially to determine the critical properties of the Anderson transition, i.e. the critical exponents. How can we combine the localized and diffusive dynamics on both sides of the transition in a consistent frame, including possible anomalous diffusion at the critical point? Scaling theory can be applied to  $\Pi_0(t)$  depending on the two variables  $1/t$  and  $(K - K_c)$ . We thus assume the scaling law:

$$\frac{1}{\Pi_0^2(t)} = t^{k_1} F\left[(K - K_c)t^{k_2}\right]$$

with  $F(x)$  an arbitrary function and  $k_1$  and  $k_2$  two exponents which can be determined as follows. In the diffusive regime, for sufficiently long times, the transport depends on the diffusion constant  $D$  which goes to zero as  $K$  approaches  $K_c$  from above:

$D \sim (K - K_c)^s$ . In the localized regime, for sufficiently long times, the behaviour depends on the localization length which diverges as  $K$  goes to  $K_c$ :  $p_{loc} \sim (K_c - K)^{-\nu}$ ,

with  $\nu$  the localization ‘‘length’’ exponent. It is easy to see that these two asymptotic behaviours of  $F$  imply that  $k_1 + sk_2 = 1$  and  $k_1 - 2\nu k_2 = 0$ . Using Wegner's scaling law<sup>27,28</sup> which relates the exponents  $\nu$  and  $s$  by the relation  $s = (d - 2)\nu$  ( $d = 3$  being the dimensionality of the system), we have:  $k_1 = 2/3$  and  $k_2 = 1/3\nu$ . We therefore expect anomalous diffusion, with  $\Pi_0^{-2}(t) \sim t^{2/3}$  to govern the dynamics right at the critical point<sup>29,30</sup>. We can thus exhibit the scaling property by plotting the quantity:

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\Pi_0^2(t)t^{2/3}} = f\left(\frac{\xi}{t^{1/3}}\right)$$

where the two branches  $f_{\pm}$  of the function  $f$  are defined as  $f_{\pm}(x) = F(\pm|x|^{-1/\nu})$  and the scaling parameter  $\xi$  behaves as  $\xi \propto |K - K_c|^{-\nu}$ .



How can we evaluate the critical exponent  $\nu$  and the critical stochasticity parameter  $K_c$ ? The behaviour close to the transition can be found by linearising the scaling function  $F$  around  $K_c$  to obtain:

$$\Lambda(t) = A + B(K - K_c)t^{(1/3\nu)} \quad (3)$$

Then  $K_c$  and the critical exponent  $\nu$  can be obtained by fitting the data with eq. (3).

When taking into account systematic corrections to scaling in the data due to the practical limitations on the number of kicks which can be applied, this procedure leads to a more accurate estimation of the critical parameters. For further details we refer the reader to ref.<sup>25,26</sup>.

1. Anderson, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492-1505 (1958).
2. Anderson, P. W. Local moments and localized states. *Rev. Mod. Phys.* **50**, 191-201 (1978).
3. Kramer, B. & Mackinnon, A. Localization: theory and experiment. *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469-1564 (1993).
4. Thouless, D. J. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Phys. Rep.* **13**, 93-142 (1974).
5. Casati, G., Chirikov, B. V., Ford, J. & Izrailev, F. M. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation in *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Systems*, G. Casati and J. Ford eds., *Lect. Notes Phys.* **93**, 334-352 (1979).
6. Grempel, D. R., Prange, R. E. & Fishman, S. Quantum dynamics of a nonintegrable system. *Phys. Rev. A* **29**, 1639-1647 (1984).

7. Störzer, M., Gross, P., Aegerter, C. M. & Maret, G. Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 063904 (2006).
8. Aegerter, C. M., Störzer, M. & Maret, G. Experimental determination of critical exponents in Anderson localisation of light. *Europhys. Lett.* **75**, 562-568 (2006).
9. Dembowski, C. *et al.* Anderson localization in a string of microwave cavities. *Phys. Rev. E* **60**, 3942-3948 (1999).
10. Genack, A.Z. & Garcia, N.. Observation of Photon Localization in a Three-Dimensional Disordered System. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2064-2067 (1991).
11. Condat, C. A. & Kirkpatrick, T. R. Resonant scattering and Anderson localization of acoustic waves. *Phys. Rev. B* **36**, 6782-6793 (1987).
12. Graham, I. S., Piché, L. & Grant, M. Experimental Evidence for Localization of Acoustic Waves in Three Dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3135-3138 (1990).
13. Bahar, I., Atilgan, A. R., Demirel, M. C. & Erman, B. Vibrational Dynamics of Folded Proteins: Significance of Slow and Fast Motions in Relation to Function and Stability. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2733-2736 (1998).
14. Epstein, C. L. Anderson localization, non-linearity and stable genetic diversity. *J. Stat. Phys.* **124**, 25-46 (2006).
15. Holman, R. & Mersini-Houghton, L. Why the Universe started from a low entropy state. *Phys. Rev. D* **74**, 123510 (2006).
16. Lewenstein, M. *et al.* Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. *Advances in Physics* **56**, 243-379 (2007).
17. Moore, F. L., Robinson, J. C., Bharucha, C. F., Sundaram, B. & Raizen, M. G. Atom Optics Realization of the Quantum  $\delta$ -kicked Rotator. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4598-4601 (1995).

18. Casati, G., Guarneri, I. & Shepelyansky, D. L. Anderson Transition in a One-Dimensional System with Three Incommensurable Frequencies. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 345-348 (1989).
19. Borgonovi, F. & Shepelyansky, D. L. Two Interacting Particles in an Effective 2-3 – d Random Potential. *J. Phys. (France) I* **6**, 287-299 (1996).
20. Gavish, U. & Castin, Y. Matter-Wave Localization in Disordered Cold Atom Lattices. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 020401 (2005).
21. Sanchez-Palencia, L. *et al.* Anderson Localization of Expanding Bose-Einstein Condensates in Random Potentials. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210401 (2007).
22. Szriftgiser, P., Lignier, H., Ringot, J., Garreau, J. C. & Delande, D. Experimental study of quantum chaos with cold atoms. *Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul.* **8**, 301-313 (2003).
23. Ringot, J., Szriftgiser, P. & Garreau, J. C. Subrecoil Raman spectroscopy of cold cesium atoms. *Phys. Rev. A* **65**, 013403 (2001).
24. Fisher, M. E. & Barber, M. N. Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region. *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1516-1519 (1972).
25. Slevin, K. & Ohtsuki, T. Corrections to Scaling at the Anderson Transition. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 382-385 (1999).
26. MacKinnon, A. Critical exponents for the metal-insulator transition, *J. Phys. C* **6**, 2511-2518 (1994).
27. Wegner, F. Electrons in Disordered Systems. Scaling near the Mobility Edge. *Z. Phys.* **B25**, 327-337 (1976).
28. Wegner, F. The Mobility Edge Problem: Continuous Symmetry and a Conjecture. *Z. Phys* **B35**, 207-210 (1979).

29. Ohtsuki, T. & Kawarabayashi, T. Anomalous Diffusion at the Anderson Transitions. *J. Phys. Japan* **66**, 314-317 (1997).

30. Garcia-Garcia, A. M. & Wang, J. Universality in quantum chaos and the one parameter scaling theory. E-print arXiv:0707.3964v2 (2007).

We thank D. Shepelyansky for bringing refs.<sup>18,19</sup> to our attention, and for fruitful discussions; we also thank G. Beck for his help with the experiment. We acknowledge partial financial support by IFRAF.



# Bibliographie

- [1] F. M. Izrailev. *Simple models of quantum chaos : spectrum and eigenfunctions*. Phys. Rep. **196**, 299–392 (1990).
- [2] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen. *Observation of dynamical localization in atomic momentum transfer : a new testing ground for quantum chaos*. Phys. Rev. Lett. **73**, 2974–2977 (1994).
- [3] B. V. Chirikov. *A universal instability of many-dimensional Oscillator System*. Phys. Rep **52**, 263–379 (1979).
- [4] P. Cvitanovic, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan, and A. Wirzba. *Chaos Book Part I Deterministic Chaos*. chaosbook.org, 2005.
- [5] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, and R. B. White. *Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov-Taylor Model*. Phys. Rev. A **23**, 2664–2672 (1981).
- [6] H. Lignier. *Etude de la localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille (2005).
- [7] G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford, and F. M. Izrailev. *Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation*. Lect. Notes Phys. **93**, 334 (1979).
- [8] F. Bloch. *DCber die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*. Z. Phys. **52**, 555 (1928).
- [9] D. L. Shepelyansky. *Localization of diffusive excitation in multi-level systems*. Physica D **28**, 103–114 (1987).
- [10] G. Floquet. *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*. Ann. Ecole Norm. Sup. **12**, 47–88 (1883).
- [11] P. W. Anderson. *Absence of diffusion in certain random lattices*. Phys. Rev. **109**, 1492–150 (1958).
- [12] Z. Ye and A. Alvarez. *Acoustic Localization in Bubbly Liquid Media*. Phys. Rev. Lett. **80**, 3503 – 3506 (1998).
- [13] W. D. S., Bartolini, Paolo, L. Ad, and R. Roberto. *Localization of light in a disordered medium*. Nature **390**, 671–673 (1997).

- [14] B. Fischer, A. Rosen, and S. Fishman. *Localization in frequency for periodically kicked light propagation in a dispersive single-mode fiber*. Opt. Lett. **24**, 1463–1465 (1999).
- [15] G. H. Wannier. *Wave Functions and Effective Hamiltonian for Bloch Electrons in an Electric Field*. Phys. Rev. **117**, 432–439 (1960).
- [16] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange. *Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization*. Phys. Rev. Lett. **49**, 509–512 (1982).
- [17] D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman. *Quantum dynamics of a nonintegrable system*. Phys. Rev. A **29**, 1639–1647 (1984).
- [18] R. Graham, M. Schlautman, and P. Zoller. *Dynamical localization of atomic-beam deflection by a modulated standing light wave*. Phys. Rev. A **45**, 19–22 (1992).
- [19] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaran, and M. G. Raizen. *Atom Optics Realization of the Quantum delta-Kicked Rotor*. Phys. Rev. Lett. **75**, 4598–4601 (1995).
- [20] P. Meystre. *Atom Optics*. Springer Verlag, Berlin.
- [21] W. D. Phillips. *Laser Cooling, Optical Traps and Optical Molasses*. In J. Dalibard, J. M. Raimond, , , and J. Zinn-Justin, editors, *Fundamental Systems in Quantum Optics* pages 165–210 Amsterdam. Ecole des Houches North-Holland.
- [22] H. J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, Berlin.
- [23] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*. J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023–2045 (1989).
- [24] P. Lett, R. Watts, C. Westbrook, W. Phillips, P. Gould, and H. Metcalf. *Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit*. Phys. Rev. Lett. **61** (1989).
- [25] D. A. Steck. *Quantum Chaos, transport, and decoherence in Atom Optics*. Thèse de doctorat, The University of Texas. Cf. pages 94-98.
- [26] D. A. Steck. *Quantum Chaos, Transport, and Decoherence in Atom Optics*. Thèse de doctorat, The University of Texas at Austin. Cf. appendix A "Cesium D Line Data".
- [27] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen. *Quantum Delta-Kicked Rotor : Experimental Observation of Decoherence*. Phys. Rev. Lett **80**, 4111–4115 (1998).
- [28] I. Yavin, M. Weel, A. Andreyuk, and A. Kumarakrishnan. *A calculation of the time-of-flight distribution of trapped atoms*. Am. J. Phys. **70**, 149–152 (2002).

- 
- [29] K. Moler, D. S. Weiss, M. Kasevich, and S. Chu. *Theoretical analysis of velocity selective Raman transitions*. Phys. Rev. A **45**, 342–348 (1992).
- [30] J. Ringot, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau. *Subrecoil Raman spectroscopy of cold cesium atoms*. Phys. Rev. A **65**, 013403–7 (2002).
- [31] J. Ringot. *Chaos quantique avec des atomes froids dans une onde stationnaire pulsée*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et technologies de Lille.
- [32] J. Chabé, H. Lignier, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau. *Improving Raman velocimetry of laser-cooled cesium atoms by spin polarization*. Opt. Commun. **274**, 254–259 (2007).
- [33] M. Kasevich and S. Chu. *Laser cooling below photon recoil with three-level atoms*. Phys. Rev. Lett. **69**, 1741–1744 (1992).
- [34] J. Reichel. *Refroidissement Raman et vols de lévy : atomes de Césium au nanokelvin*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [35] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu. *Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions*. Phys. Rev. Lett. **66**, 2297–2300 (1991).
- [36] P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, and A. Clairon. *Cold Atom Clock Test of Lorentz Invariance in the Matter Sector*. Phys. Rev. Lett **96**, 060801 (2006).
- [37] K. Szymaniec, S. Ghezali, L. Cognet, and A. Clairon. *Injection locking of diode lasers to frequency modulated source*. Opt. Commun. **144**, 50–54 (1997).
- [38] I. Dotsenko, W. Alt, S. Kuhr, D. Schrader, M. Müller, Y. Miroshnychenko, V. Gomer, A. Rauschenbeutel, and D. M. and. *Application of electro-optically generated light fields for Raman spectroscopy of trapped cesium atoms*. App. Phys. B **78**, 711–717 (2004).
- [39] G. Santarelli, A. Clairon, S. N. Lea, and G. M. Tino. *Heterodyne optical phase-locking of extended-cavity semiconductor lasers at 9 GHz*. Opt. Commun. **104**, 339–344 (1994).
- [40] J. Ringot, Y. Lecoq, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser. *Generation of phase-coherent laser beams for Raman spectroscopy and cooling by direct modulation of a diode laser*. Eur. Phys. J. D **7**, 285–288 (1999).
- [41] B. Fröhlich, T. Lahaye, B. Kaltenhäuser, H. Kübler, S. Müller, T. Koch, M. Fattori, and T. Pfau. *Two-frequency acousto-optic modulator driver to improve the beam pointing stability during intensity ramps*. Rev. Sci. Instrum. **78**, 431 (2007).
- [42] P. H. Jones, M. Goonasekera, H. E. Saunders-Singer, and D. R. Meacher. *Shifting the boundaries : Pulse-shape effects in the atom-optics kicked rotor*. Europhys. Lett **67**, 928–933 (2004).



- [43] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen. *Observation of noise and dissipation effects on dynamical localization*. Phys. Rev. Lett. **81**, 1203–1206 (1998).
- [44] K. Vant, G. Ball, and N. Christensen. *Momentum distributions for the quantum  $\delta$ -kicked rotor with decoherence*. Phys. Rev. E **61**, 5994–5996 (2000).
- [45] R. Graham and S. Miyazaki. *Dynamical localization of atomic de Broglie waves : the influence of spontaneous emission*. Phys. Rev. A **53**, 2683–2693 (1996).
- [46] P. Goetsch and R. Graham. *Decoherence by spontaneous emission in an atomic-momentum transfer experiments*. Phys. Rev. A **54**, 5345–5348 (1996).
- [47] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan. *Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*. Phys. Rev. Lett. **42**, 673–676 (1979).
- [48] D. Belitz and T. Kirkpatrick. *The Anderson-Mott transition*. Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).
- [49] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. Wieman, and E. A. Cornell. *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*. Science **269**, 198–201 (1995).
- [50] M. Paalanen and G. A. Thomas. *Experimental tests of localization in semiconductors (metal-insulator transition)*. Helv. Phys. Acta **56**, 27 (1983).
- [51] B. Kramer and A. McKinnon. *Localization : Theory and Experiment*. Rep. Prog. Phys. **56**, 1469–1564 (1993).
- [52] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S. i Kobayashi. *Fine Tuning of Metal-Insulator Transition in Al Ga As Using Persistent Photoconductivity*. Journal of the Physical Society of Japan **56**, 2259–2262 (1987).
- [53] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S. i Kobayashi. *Dielectric Constant Measurement near the Metal-Insulator Transition in Al Ga As*. Journal of the Physical Society of Japan **58**, 791–794 (1989).
- [54] C. V. Haesendonck and Y. Bruynseraede. *Evidence for an Anderson transition in granular Sn films*. Phys. Rev. B **33**, 1684 (1986).
- [55] D. Thouless. *Electrons in disordered systems and the theory of localization*. Phys. Rep. **13**, 93 (1973).
- [56] D. Licciardello and D. Thouless. *Constancy of Minimum Metallic Conductivity in Two Dimensions*. Phys. Rev. Lett. **35**, 1475 (1975).
- [57] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and J. Ford. *Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation* page 334. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag Berlin.
- [58] M. Störser, P. Gross, C. Aegerter, and G. Maret. *Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light*. Phys. Rev. Lett **96**, 063904 (2006).

- 
- [59] C. Aegerter, M. Störser, and G. Maret. *Experimental determination of critical exponents in Anderson Localization of Light*. Europhys. Lett. **75**, 562–568 (2006).
- [60] M. Rusek and A. Orłowski. *Analytical approach to localization of electromagnetic waves in two-dimensional random media*. Phys. Rev. E **51**, R2763–R2766 (1995).
- [61] E. Mandonnet. *Etude théorique d'un gaz de Bose atomique ultra-froid : Diffusion et localisation de la lumière et Condensation de Bose-Einstein en dimensionnalité réduite*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2000).
- [62] I. Baar, A. Atilgan, M. Demirl, and B. Erman. *Vibrational Dynamics of Folded Proteins : Sgnificance of Slow and Fast Motions in Relation to Function and stability*. Phys. Rev. Lett **80**, 2733–2736 (1998).
- [63] C. Epstein. *Anderson localization, non linearity, stable genetic diversity*. J. Stat. Phys. **124**, 25–46 (2006).
- [64] R. Holman and L. Mersini-Houghton. *Why the Universe Started from a Low Entropy State*. Phys. Rev. D **74**, 123510 (2006).
- [65] M. Lewenstein and al. *Ultracold atomic gases in Optical Lattices : Mimicking Condensed Matter Physics and Beyond*. Advances in Physics **56**, 243–379 (2007).
- [66] D. Clément, A. F. Varón, M. Hugbart, J. A. Retter, P. Bouyer, L. Sanchez-Palencia, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, , and A. Aspect. *Suppression of Transport of an Interacting Elongated Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **95**, 170409 (2005).
- [67] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov, , and A. Aspect. *Anderson Localization of Expanding Bose-Einstein Condensates in Random Potentials*. Phys. Rev. Lett. **98**, 210401 (2007).
- [68] A. M. García-García and J. Wang. *Anderson transition in ultracold atoms : Signatures, experimental feasibility*. Phys. Rev. A **74**, 063629 (2006).
- [69] U. Gavish and Y. Castin. *Matter-Wave Localization in Disordered Cold Atom Lattices*. Phys. Rev. Lett **95**, 020401 (2005).
- [70] R. Kuhn, C. Miniatura, D. Delande, O. Sigwarth, and C. Mueller. *Localization of Matter Waves in 2D Disordered Optical Potentials*. Phys. Rev. Lett. **95**, 250403 (2005).
- [71] R. Kuhn, O. Sigwarth, C. Miniatura, D. Delande, and C. Muller. *Coherent Matter Waves Transport in Speckle Potentials*. New J. Phys. **9**, 161 (2007).
- [72] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein. *Routes Towards Anderson-Like Localization of Bose-Einstein Condensates in Disordered Optical Lattices*. Physical Review Letters **95**, 170411 (2005).

- [73] J. E. Lye, L. Fallani, M. Modugno, D. S. Wiersma, C. Fort, and M. Inguscio. *Bose-Einstein Condensate in a Random Potential*. Physical Review Letters **95**, 070401 (2005).
- [74] C. Fort, L. Fallani, V. Guarrera, J. E. Lye, M. Modugno, D. S. Wiersma, and M. Inguscio. *Effect of Optical Disorder and Single Defects on the Expansion of a Bose-Einstein Condensate in a One-Dimensional Waveguide*. Physical Review Letters **95**, 170410 (2005).
- [75] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky. *Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurable frequencies*. Phys. Rev. Lett. **62**, 345–348 (1989).
- [76] G. Lemarié. Quasi-états propres et énergies propres du Kicked Rotor quasi-périodique (2006). Private Communication.
- [77] F. Borgonovi and D. L. Shepelyansky. *Two Interacting Particles in an Effective 2-3-d Random Potential*. J. Phys. I France **6**, 287–299 (1996).
- [78] P. G. de Gennes. *La percolation : un concept unificateur*. La Recherche **7**, 919 (1976).
- [79] D. Stauffer. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis Ltd 4 John St. London WC1N 2ET, 1985.
- [80] F. Wegner. *Electrons in Disordered Systems. Scaling near the Mobility Edge*. Z. Phys. B **25**, 327–337 (1976).
- [81] F. Wegner. *The mobility edge Problem : Continuous symmetry and a conjecture*. Z. Phys. B **35**, 207–210 (1979).
- [82] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J.-C. Garreau, and P. Szriftgiser. *Reversible Destruction of Dynamical Localization*. Phys. Rev. Lett. **95** (2005).
- [83] J. Chabé, H. Lignier, H. Cavalcante, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau. *Quantum scaling laws in the onset of dynamical delocalization*. Phys. Rev. Lett. **97**, 264101 (2006).
- [84] A. MacKinnon. *Critical exponent for the metal-insulator transition*. J. Phys. Condens. Matter **6**, 2511–2518 (1994).
- [85] K. Slevin and T. Ohtsuki. *Corrections to Scaling at the Anderson Transition*. Phys. Rev. Lett. **82**, 382 (1999).
- [86] P. H. Jones, M. M. Stocklin, G. Hur, and T. S. Monteiro. *Atoms in Double-delta-Kicked Periodic Potentials : Chaos with Long-Range Correlations*. Phys. Rev. Lett. **93**, 223002 (2004).