



HAL
open science

Une méthode de détermination d'un réseau de transport optimal

Paul-Henri Fargier

► **To cite this version:**

Paul-Henri Fargier. Une méthode de détermination d'un réseau de transport optimal. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1977. Français. NNT: . tel-00287598

HAL Id: tel-00287598

<https://theses.hal.science/tel-00287598>

Submitted on 12 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR INGENIEUR
Recherche Opérationnelle

par

Paul-Henri FARGIER



**UNE METHODE DE DETERMINATION
D'UN RESEAU DE TRANSPORT OPTIMAL.**



Thèse soutenue le 23 septembre 1977 devant la Commission d'Examen :

Président : J. KUNTZMANN

Examineurs : J. FONLUPT
P.J. LAURENT
M. SAKAROVITCH

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMTIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICLOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFLISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMCZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHILIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAEFERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MATRES DE CONFERENCES ASSOCIEES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier Monsieur J. KUNTZMANN d'avoir accepté de diriger ce Jury. Je remercie Monsieur Michel SAKAROVITCH qui a dirigé ce travail, malgré la distance et ses nombreuses autres charges, et fait également partie de ce Jury. Je remercie Messieurs P.J. LAURENT et J. FONLUPT qui sont aussi membres du Jury. De plus M. J. FONLUPT, ayant lu une version préliminaire de cette thèse, m'a aidé de ses commentaires et suggestions.

La plus grande partie de ce travail a été effectuée dans le cadre de l'Institut de Recherche des Transports qui m'a procuré les conditions pour le réaliser.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	1
I - <u>ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE</u>	3
1 - Modèles particuliers	3
2 - Modèles généraux	5
3 - Méthodes heuristiques	8
4 - Conclusion	9
II - <u>DESCRIPTION ET DISCUSSION DU MODELE</u>	11
1 - Description du modèle. Définition du problème à résoudre	11
2 - Signification des coûts fixes et unitaires	13
3 - Situations dont le modèle peut rendre compte	15
4 - Aspects non pris en compte dans le modèle	17
5 - Conclusion	20
III - <u>PRESENTATION DE LA METHODE SEP UTILISEE</u>	22
1 - Rappel sur la méthode SEP	22
2 - Choix et propriétés des sommets q dans le problème \mathcal{P} de choix de réseau	24
3 - Algorithme	27
4 - Conclusion	28
IV - <u>PROGRAMMES LINEAIRES ASSOCIES AU MODELE</u>	29
1 - Présentation de ces programmes	29
2 - Le programme PDRC et son dual DDRC	34
V - <u>SYSTEMES DE PEAGES ET D'ITINERAIRES. LEUR UTILISATION DANS LA PROCEDURE SEP</u>	37
1 - Propriétés relatives aux systèmes de péages	37
2 - Cas où $\hat{C} = \hat{\hat{C}}$	39
3 - Commentaires sur le cas $\hat{C} \neq \hat{\hat{C}}$	41
4 - Application à la procédure SEP	43
5 - Conclusion	45

	Pages
VI - <u>DETERMINATION D'UN "BON" SYSTEME DE PEAGES</u>	46
1 - Méthode de décomposition	46
2 - Généralités sur les variations de péages arc par arc ...	48
3 - Algorithme de variation des péages d'un arc	52
4 - L'algorithme de détermination d'un "bon" système de péages	55
VII - <u>RECAPITULATION DE L'ENSEMBLE DE LA METHODE</u>	59
1 - Algorithme général	59
2 - Algorithme TRAIT (q)	60
3 - Algorithme SYST (q)	61
4 - Algorithme VAR (i,q)	63
5 - Commentaires sur ces algorithmes	63
VIII - <u>TESTS EFFECTUES SUR ORDINATEUR</u>	65
1 - Description des programmes RETRO	65
2 - Durées de calcul sur l'ordinateur	67
<u>ANNEXE I</u> <u>APPROXIMATION DU PROGRAMME PDRC PAR UN PROGRAMME CONVEXE</u>	70
Résumé	70
I - <u>AFFECTATION DU TRAFIC D'UNE RELATION SUR DES ITINERAIRES CONCURRENTS</u>	72
a) Présentation et propriétés du "programme d'affectation" ..	72
b) Programme "dual" du programme d'affectation. Propriétés de dualité	75
II - <u>APPROXIMATION DU PROGRAMME PDRC PAR UN PROGRAMME CONVEXE : PAC(λ, L)</u>	77
a) Le programme PAC (λ, L)	77
b) Programme "dual" de PAC (λ, L). Propriétés de dualité	82
c) Rattachement à la dualité dans les problèmes convexes ...	86
III - <u>ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROGRAMME PAC(λ, L). APPLICATIONS A PDRC ET PDRM</u>	88
a) Vue d'ensemble de la méthode de résolution de PAC (λ, L) ...	88
b) Variation de $z(i,k)$ en fonction de $v(i,k)$ pour une solution suboptimale	89

	Pages
c) Optimisation de l'arc $i \in J$	90
d) Algorithme de résolution de PAC (λ, L)	91
e) Application à la résolution du programme PDRC	93
f) Application à la résolution de PDRM (pour les réseaux de transport)	96
<u>Conclusion</u>	98
<u>ANNEXE II . EXTENSIONS POSSIBLES DE LA METHODE</u>	99
<u>I - ADAPTATION DE LA PROCEDURE SEP SANS MODIFICATION DE LA METHODE D'EVALUATION</u>	99
1 - Saturation des arcs	99
2 - Choix non optimal des itinéraires	100
<u>II - MODIFICATION DE LA METHODE D'EVALUATION</u>	101
1 - Contrainte budgétaire (programme PDRMB)	101
2 - Programme dynamique PDRMD	102
3 - Prise en compte de la saturation des arcs (programme PDRMS)	105
<u>III - PROBLEMES SE RATTACHANT AU CHOIX OPTIMAL D'UN RESEAU</u>	108
1 - Localisation optimale d'équipements (problème de m-centre)	109
2 - Problème de "set covering"	110
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	113

INTRODUCTION

Pris au sens large, le choix d'un réseau optimal comprend la détermination des voies nouvelles à créer, des améliorations à apporter au réseau existant, et des dates auxquelles ces divers investissements doivent être réalisés. Le problème, dans toute sa généralité, est très complexe. Il fait intervenir les lois de demande de trafic sur les relations à desservir, les coûts des divers investissements envisageables, les techniques d'exploitation, l'influence du débit sur le temps de parcours, les valeurs données au temps et aux vies humaines, les avantages indirects, le budget disponible, etc... Il faut de plus tenir compte de l'évolution future de ces divers paramètres, les investissements effectués ayant généralement des répercussions sur de longues périodes. Ceci conduit à des modèles mathématiques généralement complexes qu'on ne peut guère résoudre de façon rigoureuse.

En fait les recherches ont porté sur la résolution de modèles simplifiés qui sont loin de prendre en compte tous les éléments ci-dessus. Ces modèles sont sommairement décrits Chapitre I. Certains d'entre eux s'intéressent surtout aux aménagements de voies existantes. La prise en compte de voies nouvelles à choisir complique le problème. En effet on se trouve alors en présence de discontinuités : existence ou non existence de chacune de ces voies nouvelles (c'est un cas particulier de problème de "charge fixe"). Ceci interdit l'emploi de méthodes de programmation convexe. Or, dès que l'on a quelques dizaines d'investissements possibles, on ne peut envisager de considérer toutes les combinaisons. L'on doit alors utiliser une méthode adaptée aux problèmes combinatoires. Il s'agit presque toujours d'une méthode SEP (Séparation et Evaluation Progressive). Ces méthodes permettent d'obtenir l'optimum sans être obligé de considérer toutes les combinaisons. On peut aussi les utiliser sans aller jusqu'à la solution optimale de façon à réduire le temps machine. On obtient alors une "bonne solution" et une borne supérieure de l'écart avec la solution optimale. Il semble toutefois que les méthodes proposées conduisent à des durées de calcul prohibitives lorsque le nombre de voies nouvelles envisagées atteint quelques dizaines.

Ces procédés ne paraissent guère avoir été utilisés dans les études appliquées. Ces dernières se rattachent plutôt à l'une des deux situations suivantes :

- comparaison précise d'un petit nombre de solutions concurrentes,
- méthodes assez empiriques permettant d'améliorer une solution initiale.

La présente note a pour objet de traiter la situation suivante. Un nombre assez élevé (par exemple une centaine) d'investissements nouveaux sont possibles ; il s'agit soit de voies nouvelles, soit d'améliorations substantielles des voies actuelles. Ces investissements ne sont pas indépendants : les avantages apportés par l'un quelconque d'entre eux dépend de la réalisation ou de la non-réalisation de divers autres. Une demande de trafic donnée doit être satisfaite. Les investissements doivent être choisis de façon à minimiser le coût global (infrastructure plus exploitation).

Pour résoudre ce problème, un modèle simplifié concernant les coûts a dû être adopté : à chaque arc du réseau est associé un coût fixe (lié à l'existence de l'arc) et un coût proportionnel au trafic supporté.

Ce type de problème peut facilement se mettre sous forme de programme linéaire à variables mixtes, résoluble par une procédure SEP : le programme linéaire continu obtenu en oubliant les contraintes d'intégrité fournit un minorant de la valeur de la solution recherchée.

L'originalité de la méthode proposée ici consiste dans le choix du programme linéaire : nous nous sommes efforcés d'introduire le plus grand nombre possible de contraintes simples. La formulation ainsi obtenue présente l'avantage suivant : la solution du programme continu est souvent entière, et, lorsqu'elle ne l'est pas, elle fournit généralement un bon minorant de la valeur optimale du programme en variables mixtes. Un nombre faible d'étapes dans la procédure SEP sera alors suffisant (souvent une seule).

Mais cette formulation présente aussi un inconvénient : le programme continu qui est de grande taille est difficile à résoudre. Une partie importante du travail présenté ici consiste à rechercher, compte tenu des particularités du programme, une méthode pour obtenir rapidement, si possible la solution optimale ou du moins un bon minorant ; en effet dans le cadre de la procédure SEP il est souhaitable, mais non indispensable, d'avoir la solution optimale.

Cette démarche est semblable à celle que Held et Karp, en ref. [13], ont adopté pour l'étude du problème du voyageur de commerce, et qui leur a permis d'aboutir à une procédure efficace. Mukendi, ref. [18], a adopté une démarche analogue pour traiter le problème de m-centre (implantation optimale d'équipements), problème qui peut d'ailleurs être considéré comme un cas particulier de celui traité ici (voir Annexe II). Il est probable que ce type d'approche convienne pour un certain nombre de problèmes combinatoires.

Précisons toutefois que la méthode proposée ici n'est, semble-t-il, efficace que si le réseau étudié ressemble à l'idée que l'on peut se faire d'un réseau de transport. Pour un graphe et des coûts quelconques, la résolution peut être laborieuse. Ceci n'est pas surprenant si on remarque que, dans son formalisme, le problème traité contient des problèmes combinatoires réputés difficiles : en ref.[18], il est rappelé que le problème de m -centre, cas particulier de notre problème, inclut la recherche d'un ensemble stable minimal dans un graphe, et plus généralement le recouvrement minimal d'un hypergraphe par des arêtes.

Ce travail comprend huit chapitres et deux annexes.

Après une analyse bibliographique (Chapitre I), le modèle est décrit, et sa portée et ses possibilités d'application sont discutées (Chapitre II).

Le chapitre III contient un rappel sur la procédure SEP et précise les modalités d'application au problème traité ici.

Le chapitre IV présente le programme linéaire en variables mixtes équivalent à notre problème, et le programme linéaire continu obtenu en négligeant les contraintes d'intégrité. L'étude du dual de ce dernier conduit à introduire des "péages" associés aux arcs du réseau et aux liaisons qui les utilisent.

Le chapitre V montre que la résolution de notre problème peut se ramener à l'établissement d'un "bon système de péages" à chaque étape de la procédure SEP, et que le nombre de ces étapes sera généralement faible et a des chances de se réduire à un.

Le chapitre VI propose une méthode de détermination d'un bon système de péages.

Le chapitre VII récapitule l'ensemble de la méthode. Il suffit, en principe, pour le lire, de connaître le paragraphe II.1 (description du problème), mais il ne contient aucune justification.

Enfin le chapitre IX rend compte des tests effectués sur ordinateur.

En annexe I est présenté une approximation du programme linéaire mentionné plus haut, par un programme convexe soluble par un algorithme relativement simple. C'est cette étude qui a conduit à la méthode de détermination d'un système de péages du chapitre VI. Elle a été rejetée en annexe parce qu'elle n'est pas indispensable à la compréhension du texte principal, mais paraît suffisamment intéressante pour être exposée.

L'annexe II traite d'extensions possibles de la méthode, soit à des situations plus générales que celles du modèle, soit à des problèmes a priori différents de celui traité ici, mais pouvant s'y ramener.

Pour un aperçu rapide du contenu de cette note, on pourra se contenter de lire les paragraphes suivants : II.1 et 2, III.4, IV.1, introduction de V, V.5, VI.2b, et VII.

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

Nous allons effectuer une analyse rapide de diverses études concernant la détermination d'un réseau optimal. Toutefois, nous ne prendrons pas en considération les diverses méthodes de comparaison d'un petit nombre de réseaux définis à l'avance. Nous nous intéresserons seulement aux méthodes permettant de choisir parmi les combinaisons possibles de créations d'arcs nouveaux et d'améliorations des arcs existants, lorsque ces combinaisons sont trop nombreuses pour être étudiées individuellement.

De nombreuses méthodes utilisent une procédure SEP (Séparation et Evaluation Progressive, en anglais "Branch and Bound"). De telles procédures s'appliquent principalement à des problèmes combinatoires, consistant à chercher dans un ensemble fini (mais de grande taille) de solutions possibles celle (ou une de celles) qui minimise une fonction donnée. Nous en rappelons sommairement le principe. L'ensemble des solutions possibles est découpée progressivement en sous-ensembles de plus en plus fins (c'est la "séparation"). Pour chacun de ces sous-ensembles on calcule un minorant de la valeur prise par la fonction dans ce sous-ensemble (c'est l'"évaluation"). Ceci permet d'éliminer les sous-ensembles dont le minorant est supérieur à toute valeur prise par ailleurs par la fonction. Cette procédure peut être poursuivie jusqu'à obtention soit d'une solution optimale, soit simplement d'une "bonne" solution. La réalisation pratique comprend, bien sûr, de nombreuses variantes. On trouvera une étude générale de ces procédures en réf. [19] et [23], et une formulation plus particulière au chapitre III ci-dessous.

Les méthodes de détermination de réseau optimal seront classées, un peu arbitrairement, en modèles simplifiés, modèles généraux, et méthodes heuristiques. Les méthodes heuristiques sont celles qui ne permettent pas d'atteindre l'optimum, mais doivent fournir une "bonne" solution. Les modèles seront dits "généraux" lorsqu'ils prennent en compte l'importance relative des diverses liaisons à desservir, et considèrent à la fois les coûts d'investissement, et ceux liés au déplacements proprement dits (en particulier le temps passé). Les autres seront dits "particuliers".

1 - Modèles particuliers

Bien qu'ils ne répondent pas vraiment à l'objectif poursuivi dans cette note, il a paru intéressant de passer rapidement en revue ces modèles qui peuvent être appliqués dans certains cas particuliers.

a) Minimisation de la somme des distances

SCOTT, réf. [24], en 1969 et HOANG HAI HOC, réf. [15], en 1973 ont proposé des méthodes SEP pour résoudre le problème suivant : étant donné un ensemble d'arcs possibles, trouver ceux qui forment le réseau minimisant la somme des distances entre chaque couple de sommets, la longueur totale du réseau restant inférieure à une limite donnée. Cette formulation ne tient pas compte de l'importance relative de divers courants, et, de plus, ne peut guère être appliquée pour l'amélioration d'un réseau existant.

b) Analyse de la "connectivité"

En 1967 ICHBIAH, réf. [17], a introduit la notion de "connectivité" d'un réseau définie comme suit : à chaque couple de sommets i, j , on associe une valeur φ_{ij} , et la connectivité est la somme des φ_{ij} , étendue à tous les couples connectés par un réseau donné. Il a proposé une procédure SEP pour déterminer, à partir d'un ensemble d'arcs possibles, le réseau qui maximise cette connectivité.

A la différence de la précédente, cette formalisation tient compte de l'importance relative des liaisons. Mais elle néglige les temps de parcours entre sommets, s'intéressant seulement au fait qu'ils soient ou non connectés. Son domaine d'application potentiel paraît limité aux situations pour lesquelles les coûts d'investissement sont tout à fait prépondérants, et où l'on accepte de satisfaire une partie seulement de la demande (le choix de lignes de "métros" en zone urbaine pourrait satisfaire approximativement ces conditions).

c) Investissements de capacité

Dans les études ci-dessus, la capacité des arcs n'était pas prise en compte. D'autres auteurs, au contraire, ont centré leurs recherches sur les investissements de capacité, sans se préoccuper des coûts d'écoulement du flot. Les études ont d'abord concerné le cas du flot entre une source et un puits.

FULKERSON en 1969, réf. [10], et HU en 1970, réf. [16], ont traité le problème suivant. On suppose que le coût pour accroître d'une quantité y_{ij} la capacité d'un arc quelconque (i, j) est égal à $a_{ij} y_{ij}$, a_{ij} étant un coefficient caractéristique de l'arc. On cherche à répartir un budget donné b entre les divers arcs de façon à maximiser la capacité entre la source et le puits considérés. Ce problème peut se mettre sous la forme d'un programme

linéaire en écrivant les équations de conservations du flot, les contraintes de capacité, et la contrainte budgétaire $\sum_{ij} a_{ij} y_{ij} \leq b$.

En 1974, CHRISTOFIDES et BROOKER, réf. [5], ont traité le problème obtenu à partir du précédent en supposant que les accroissements possibles de capacité sont discontinus, en nombre fini, chacun ayant son coût. Ils ont proposé pour le résoudre une procédure SEP.

Par ailleurs, en 1968 DOUILLEZ, réf. [9], a traité un problème plus général en recherchant une séquence optimale d'investissements dans le temps. On se donne un flot croissant dans le temps entre une source et un puits, et une méthode SEP permet de trouver une séquence d'investissement minimisant le coût global (investissements et exploitation), avec une contrainte de fiabilité : il faut pouvoir supporter une panne sur un arc.

Le domaine d'application de ces modèles est limité du fait que l'on ne considère qu'un couple source-puits. Il est, bien sûr, possible de lier par des arcs fictifs la source aux diverses origines et le puits aux diverses destinations, mais en général ceci modifie le problème. Cependant dans certains cas, lorsqu'on étudie le trafic le long d'un axe, cette procédure est sans doute acceptable. En 1972, CHARIFKER et MACULAN, réf. [4], ont généralisé le problème de FULKERSON au cas de plusieurs couples sources-puits et de plusieurs périodes. Ceci les a conduit à des programmes linéaires de grande dimension pour lesquels ils ont proposé des méthodes de résolution. Il ne semble pas qu'ils aient testé ces méthodes autrement que sur des exemples très simples, du moins au moment de leur publication.

2 - Modèles généraux

a) Modèles mis sous forme de programmes linéaires continus

En 1958, GARRISON et MARBLE, réf. [11], ont présenté la formulation suivante. Le coût d'usage de chaque arc est constant, et le coût d'investissement croît linéairement avec la capacité. L'objectif est de minimiser la somme des coûts d'investissement et d'usage, avec des contraintes exprimant la conservation des flux aux sommets, la capacité des arcs, et le budget total.

CARTER et STOWERS, réf. [3], en 1963, ont proposé, dans la formulation précédente, de représenter chaque arc réel par deux arcs fictifs, l'un correspondant à une circulation normale, l'autre à une situation de saturation (il aurait donc un coût d'usage plus élevé). Le rapport des capacités de ces deux arcs reste constant lorsque les capacités sont améliorées par des investissements. En 1966, MORLOCK et CHARNES, réf. [12], ont présenté un modèle semblable avec deux modes de transport.

Ces modèles paraissent intéressants par leur simplicité de formulation. Toutefois, ne prenant pas en compte de charges fixes pour la création d'arcs nouveaux, on ne peut guère envisager de les employer que pour l'amélioration d'arcs existants.

b) Temps de parcours fonction de l'investissement

En 1968 RIDLEY, réf. [20], a cherché le réseau minimisant la somme des coûts d'investissements et des coûts d'écoulement du trafic, en admettant que ces derniers diminuent lorsque l'investissement augmente, et en négligeant les contraintes de capacité.

Soient :

- p_{ij} le coût unitaire sur l'arc (i, j)
- k_{ij} , a_{ij} des constantes, caractéristiques de l'arc (i, j)
- x_{ij} investissement sur l'arc (i, j)
- b_{ij} borne supérieure de x_{ij}
- t_{ij} trafic sur l'arc (i, j) somme des trafics des diverses liaisons
- Q budget disponible

On a $x_{ij} \leq b_{ij}$, $\sum_{ij} x_{ij} \leq Q$, $p_{ij} = k_{ij} - a_{ij} x_{ij}$ ainsi que les contraintes de conservation des flux et on cherche une solution minimisant $\sum_{ij} t_{ij} p_{ij} = \sum_{ij} t_{ij} (k_{ij} - a_{ij} x_{ij})$. Ce programme n'est pas convexe. La méthode de résolution proposée est une procédure SEP, dans laquelle on suppose que les coûts d'investissements ne varient pas de façon absolument continue, et restent des multiples entiers d'une certaine unité.

La philosophie de ce modèle est très différente de celle des modèles présentés au paragraphe a) ci-dessus. Au paragraphe a), le but des investissements était d'augmenter des capacités, et le trafic d'une liaison pouvait se répartir entre des itinéraires concurrents de façon à utiliser au mieux ces capacités ; le modèle pouvait difficilement être utilisé pour le choix des arcs nouveaux. Ici, le but des investissements est de réduire les temps de parcours, on admet implicitement que les arcs fonctionnent en-dessous de leurs capacités, et chaque liaison utilise uniquement son itinéraire le meilleur.

Le phénomène pris en compte par RIDLEY est celui du "rendement croissant" des arcs : le coût total de transport augmente moins vite que la quantité à transporter. Ceci rend le modèle plus apte à prendre en compte la création des arcs nouveaux, bien qu'il n'y ait pas de charge fixe à proprement parler. Mais c'est aussi ce qui empêche le programme d'être convexe, et donc complique sa résolution.

Signalons qu'en 1968, WANG, SNELL et FUNK, ref. [27], ont proposé aussi un modèle où le temps de parcours est fonction de l'investissement, mais où de plus il varie avec le trafic supporté. Toutefois ils envisagent seulement le cas où l'ensemble des liaisons a une destination commune. Ils proposent d'utiliser le "principe du maximum" pour rechercher la solution.

c) Programmes linéaires en variables mixtes

Le choix d'un réseau optimal, avec un coût associé à la création de chaque arc, peut être considéré comme un exemple de problème de "charge fixe". Ce type de problème peut se formaliser à l'aide de programmes comprenant des variables entières. Ici on peut associer à tout arc i une variable $y(i)$, que l'on peut appeler variable d'existence de l'arc, et soumise aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} y(i) &\geq 0 \\ y(i) &\text{ entier} \\ y(i) &\geq \frac{t(i)}{T(i)} \end{aligned}$$

$t(i)$ étant le trafic supporté par l'arc i , et $T(i)$ une valeur supérieure à toutes celles que peut prendre $t(i)$. Si $f(i)$ est le coût de création de l'arc i , la fonction à minimiser comprend un terme $y(i) c(i)$. De cette façon si $t(i) = 0$, $y(i) = 0$ et $y(i) f(i) = 0$
si $t(i) > 0$, $y(i) = 1$ et $y(i) f(i) = f(i)$

ROBERTS et FUNK, ref. [21], en 1964 et HERSHDORFER, réf. [14], en 1965 ont utilisé cette formulation dans le cadre de programmes linéaires en variables mixtes. La programmation linéaire permet des affectations avec ou sans contraintes de capacité, le temps de parcours pouvant varier en fonction du débit selon une courbe linéaire par morceaux. Ces diverses possibilités ont été explorées, et on trouve aussi dans réf. [14] la possibilité de rechercher des sens uniques optimaux.

L'inconvénient de telles méthodes est la durée de résolution. On est amené généralement à utiliser une procédure SEP, dont la durée augmente rapidement avec la taille du problème. En 1970, DANZANVILLIERS et LE MENESTREL, réf. [7], ont étudié cette durée pour un programme simple qu'ils ont appelé COBRA : temps de parcours indépendant du débit, pas de contraintes de capacité. Ils ont trouvé que le temps de calcul doublait chaque fois que l'on augmentait de 3 le nombre d'arcs dont on envisageait la création.

3 - Méthodes heuristiques

L'impossibilité de traiter des problèmes de grande taille par les méthodes du genre de celles qui viennent d'être décrites a poussé à l'emploi de méthodes heuristiques ne permettant ^{pas} de chercher l'optimum, mais susceptibles de fournir une bonne solution.

Dans réf.[1] parue en 1966, BARBIER décrit un programme destiné à choisir un réseau de voies ferrées dans la zone suburbaine de Paris. Ce programme accomplissait les tâches suivantes :

- 1) affectation de toutes les liaisons comme si tous les arcs envisagés étaient construits,
- 2) on considère les arcs envisagés un à un en commençant par ceux pour lesquels le trafic résultant de l'affectation est le plus élevé. Pour chacun de ces arcs on compare le coût d'investissement avec le coût du temps perdu par les usagers de cet arc s'ils devaient se contenter du réseau initial. Si le coût d'investissement est le plus fort, l'arc est éliminé s'il est le plus faible l'arc est conservé, et est considéré pour la suite de l'étape (2) comme un arc initial,
- 3) affectation de toutes les liaisons sur le réseau obtenu en (2),

Les étapes (2) et (3) sont répétées jusqu'à obtention d'un réseau stable, ce qui, en pratique, se produisait très rapidement. Ce programme a donné des résultats jugés intéressants.

Aux Etats-Unis le "Bureau of Public Roads" a effectué une étude, décrite dans réf.[2] en 1966, destinée à définir un réseau routier interurbain. Pour cela on définissait au départ un réseau, dont les sommets étaient les comtés (au nombre de 3076) et dont les arcs joignaient chaque comté aux comtés voisins. Un modèle permettait d'évaluer le trafic de comté à comté. La méthode pour dégager un réseau était la suivante :

- 1) affectation de toutes les liaisons sur la base d'une vitesse uniforme sur tous les arcs,
- 2) modification des vitesses des arcs : la vitesse est d'autant plus élevée que l'arc était plus chargé dans l'affectation précédente,
- 3) on réaffecte avec les vitesses trouvées en (2).

Les étapes (2) et (3) sont répétées jusqu'à obtention d'un niveau stable. La justification de l'étape (2) est la suivante : une route supportant un fort trafic a normalement des caractéristiques permettant une vitesse élevée.

Dans un article de 1974, réf.[26], STEENBRINK décrit une étude d'optimisation du réseau interurbain de Hollande. Il s'agissait non pas de choisir quelles routes construire, mais de trouver le meilleur dimensionnement des routes d'un réseau donné.

A chaque arc on associe une courbe coût total en fonction du trafic, le coût total étant la somme des coûts d'investissements et d'écoulement du trafic (y compris le temps de parcours). La procédure est en trois étapes :

- 1) affectation du trafic des diverses liaisons de façon à minimiser la somme des coûts totaux par tronçon. On en déduit un dimensionnement de chaque tronçon,
- 2) affectation selon le coût ressenti par l'utilisateur compte tenu du dimensionnement précédemment défini,
- 3) dimensionnement des tronçons en fonction des trafics trouvés en (2).

En théorie on devrait faire des itérations entre (2) et (3), mais ceci a paru trop coûteux. Les affectations en (1) et (2), qui devaient tenir compte de la relation trafic-coût, étaient effectuées selon une méthode approximative par tranches successives de trafic. L'ensemble de la procédure semble avoir donné des résultats satisfaisants.

Signalons enfin qu'il est naturel de penser à des procédures interactives entre l'homme et la machine. Dans réf.[25], parue en 1968, STAIRS décrit un essai de cette nature. Son article contient aussi une bonne analyse bibliographique sur le problème du choix d'un réseau de transport optimal.

4 - Conclusion

Les modèles étudiés peuvent être classés en deux catégories

- ceux qui ne font pas intervenir de charge fixe et se résolvent par la programmation linéaire. Ces modèles sont axés sur l'étude de la capacité des arcs et de la meilleure façon de l'améliorer,
- ceux qui tiennent compte des charges fixes (ou du moins comme dans réf.[20] du phénomène de rendement croissant) qui sont résolus par des procédures SEP. Certains de ces modèles négligent les problèmes liés à la capacité ou à la saturation des arcs, mais la présentation

sous forme de programme linéaire à variables mixtes permet de tenir compte à la fois des charges fixes et de la saturation.

Nous nous intéressons plus particulièrement ici aux modèles de la deuxième catégorie. Bien que l'on ait pas toujours de résultats précis à ce sujet, ils semblent nécessiter un temps de calcul augmentant très vite avec la taille du réseau. C'est sans doute une des raisons pour lesquelles des méthodes heuristiques ont été utilisées dans les applications pratiques.

Dans cette note, nous allons nous efforcer de trouver une méthode de résolution plus rapide pour un modèle de la deuxième catégorie. Pour simplifier, nous n'introduirons pas de phénomène de saturation ou de capacité. Nous utiliserons aussi une méthode SEP, mais notre effort portera sur l'obtention d'une bonne fonction d'évaluation, pour réduire le nombre de "séparations" à explorer. Nous avons déjà indiqué dans l'introduction, qu'une approche semblable a été utilisée par HELD et KARP, réf. [13], pour le problème du "voyageur de commerce", pour lequel elle paraît avoir donné de bons résultats.

CHAPITRE II

DESCRIPTION ET DISCUSSION DU MODELE

Un modèle ne peut être qu'une représentation simplifiée de la réalité. Ici nous avons deux raisons particulières de simplification :

- nous ne cherchons pas à résoudre un problème concret bien défini, mais plutôt un type de problèmes se présentant dans des situations assez diverses,
- le souci de trouver une méthode de résolution efficace conduit à ne pas accumuler les difficultés dans un premier temps, quitte à envisager ultérieurement des modèles plus généraux.

Nous donnons un modèle permettant la prise en compte :

- d'arcs avec charge fixe en assez grand nombre,
- d'un réseau existant,
- d'un certain nombre de liaisons ayant chacune leur trafic propre.

1 - Description du modèle, définition du problème à résoudre

Nous considérons un graphe orienté, de dimensions finies, dont les arcs se répartissent en "arcs initiaux" (c'est à dire dont l'existence est acquise) et "en arcs envisagés", qui peuvent être acceptés ou refusés. Nous avons de plus des trafics à écouler sur des liaisons (une liaison est définie par une origine et une destination). A chaque arc envisagé est associé un "coût fixe" à payer si l'arc est accepté (ce coût est dit fixe car il ne dépend pas du trafic supporté par l'arc).

Le problème à résoudre est le suivant : lesquels parmi les arcs envisagés doit-on accepter et lesquels doit-on refuser, si l'on veut un coût total minimal ? Ce coût total comprend :

- les coûts fixes des arcs acceptés,

.../...

- pour chaque arc initial ou accepté, un coût proportionnel au trafic supporté (égal au produit de son coût unitaire par le trafic).

Plus précisément, nous définissons un "problème de choix de réseau" \mathcal{P} par une suite $(S, I, J, K, s_1, s_2, p, f, d_1, d_2, T)$ dans laquelle

S, I, J, K sont des ensembles :

- S est l'ensemble des sommets,
- I est l'ensemble des arcs (initiaux et envisagés),
- J est l'ensemble des arcs envisagés,
- K est l'ensemble des liaisons

L'ensemble des arcs initiaux est donc $I_0 = I - J$

Ces ensembles sont de dimensions finies

$s_1, s_2, p, f, d_1, d_2, T$ sont des fonctions

A chaque $i \in I$, correspondent

- $s_1(i), s_2(i) \in S$, respectivement sommet initial et terminal de l'arc i
- $p(i) \geq 0$ coût unitaire de l'arc

A chaque $i \in J$, correspond

- $f(i) \geq 0$ coût fixe de l'arc

A chaque $k \in K$, correspondent

- $d_1(k), d_2(k) \in S$, respectivement origine et destination de la liaison k
- $T(k)$ trafic qui doit s'écouler entre cette origine et cette destination

Un réseau ω du problème \mathcal{P} , est défini par un sous-ensemble quelconque

$J_1(\omega) \subset J$:

$J_1(\omega)$ est l'ensemble des arcs acceptés,

$J_0(\omega) = J - J_1(\omega)$ est l'ensemble des arcs refusés,

soit $\Omega = \{\omega\}$ l'ensemble de ces solutions possibles ($\text{card } \Omega = 2^{\text{card } J}$). A chaque $\omega \in \Omega$ on fait correspondre un graphe $\zeta(\omega)$ composé de l'ensemble des sommets S , et de l'ensemble d'arcs $I_0 + J_1(\omega)$. A chacun de ces arcs est associé le coût unitaire $p(i)$. Soit $\Delta(\omega, k)$ le coût unitaire du (ou des) itinéraire(s) de coût unitaire minimal de la liaison $k \in K$ (s'il n'y a aucun itinéraire on pose $\Delta(\omega, k) = \infty$).

Par définition, le coût total du réseau ω est

$$C(\omega) = \sum_{k \in K} \Delta(\omega, k) T(k) + \sum_{i \in J_1} f(i)$$

Un réseau optimal est un réseau $\hat{\omega} \in \Omega$ réalisant le minimum de C sur Ω , c'est à dire tel que $C(\hat{\omega}) = \min_{\omega \in \Omega} C(\omega)$

Nous noterons \hat{C} ce minimum de C sur Ω , et l'appellerons "valeur optimale de C ".

Remarque - Si dans le graphe (S, I) il existe un itinéraire pour toute liaison $k \in K$, il y a au moins un réseau ω de coût total $C(\omega)$ fini : celui qui est défini par $J_0(\omega) = \emptyset, J_1(\omega) = J$; comme les réseaux possibles sont en nombre fini, il en est alors au moins un qui réalise le minimum de C , donc qui est optimal.

Si par contre il existe une liaison pour laquelle il n'y a pas d'itinéraire, alors $C(\omega)$ est infini pour tout $\omega \in \Omega$. D'un point de vue formel, toute solution est optimale.

2 - Signification des coûts fixes et unitaires

Pour les arcs envisagés, l'ensemble "coût fixe, coût unitaire" peut s'exprimer ainsi : si l'arc $i \in J$ supporte un trafic $t(i)$, on lui assure un coût global $c(i)$ défini par les formules :

$$\begin{aligned} c(i) &= f(i) + p(i) t(i) && \text{si } t(i) > 0 \\ c(i) &= 0 && \text{si } t(i) = 0 \end{aligned}$$

Le coût $c(i)$ représente en fait la somme des coûts d'investissement et d'exploitation convenablement actualisés (le coût d'exploitation incluant le temps des usagers si on le désire). Une première façon d'utiliser le modèle consiste à représenter le coût d'investissement par $f(i)$ et celui d'exploitation par $p(i) t(i)$. Mais cette façon de procéder ne doit pas être systématique : en effet les coûts d'investissement sont souvent fonction du trafic à assurer, et possèdent eux-mêmes une partie fixe et une partie variable.

Plus précisément, un arc ne correspond pas forcément a priori à une infrastructure donnée : cette infrastructure peut être fonction du $t(i)$ obtenu. Par exemple, si l'on envisage de construire une route nouvelle, celle-ci sera à 2 voies, 3 voies ou autoroutière, suivant le trafic qu'elle aura à supporter. La courbe $c(i) = f(t(i))$ qui nous intéresse est en

fait l'enveloppe de courbes dont chacune correspond à une infrastructure donnée (Voir fig. 1). Le modèle revient à supposer que l'on peut assimiler cette courbe à une droite, l'ordonnée pour $t(i) = 0$ étant le coût fixe $f(i)$. Notons que si cette courbe est concave, on peut l'approcher en introduisant dans le modèle plusieurs arcs fictifs en parallèle comme le montre la fig. 2 le trafic AB utilisant l'arc de coût minimal, tout se passe comme si l'on avait un seul arc dont le coût serait donné par la courbe en traits pleins.

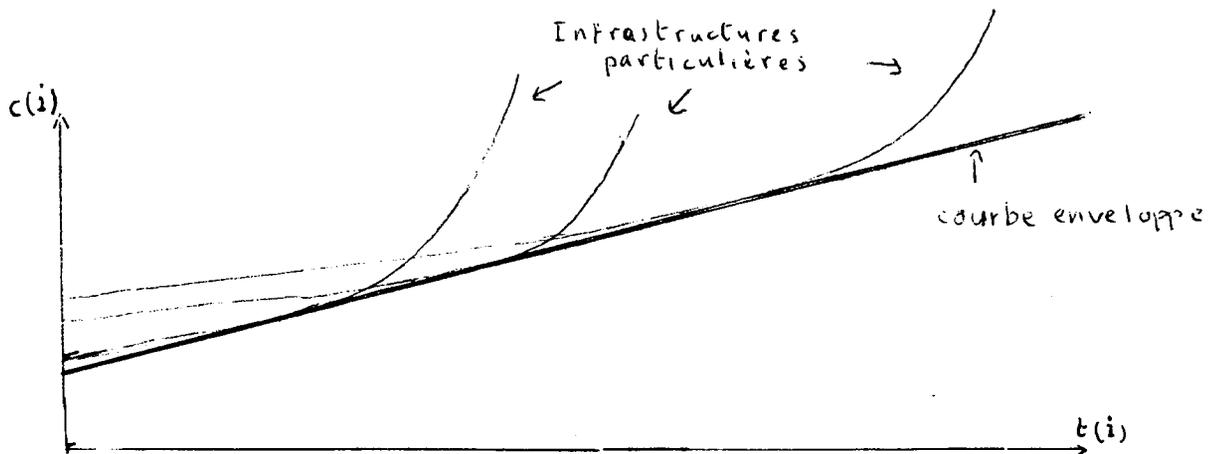


Fig 1 : coût total d'un arc en fonction du trafic

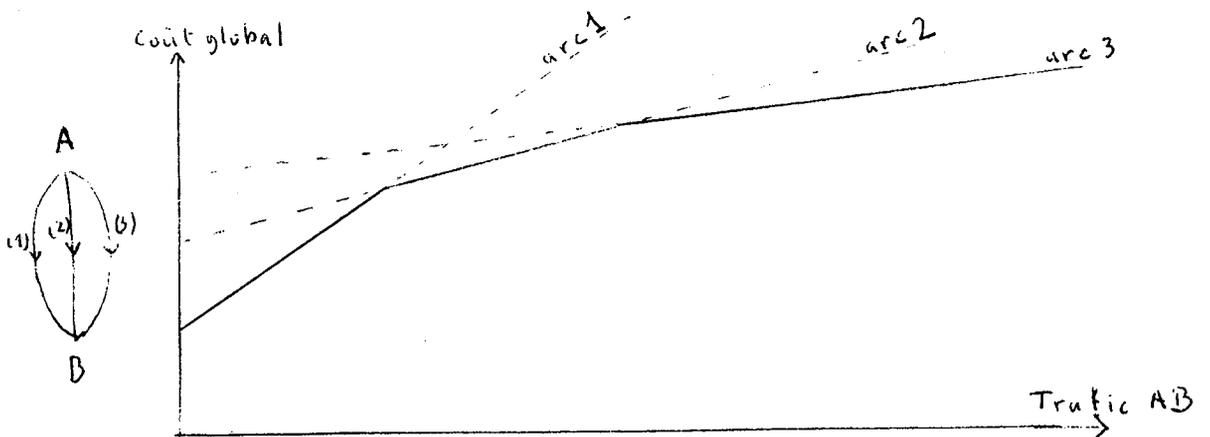


Fig 2 Cas de 3 arcs en parallèle entre A et B (le trait plein représente le coût de l'arc utilisé en fonction du trafic)

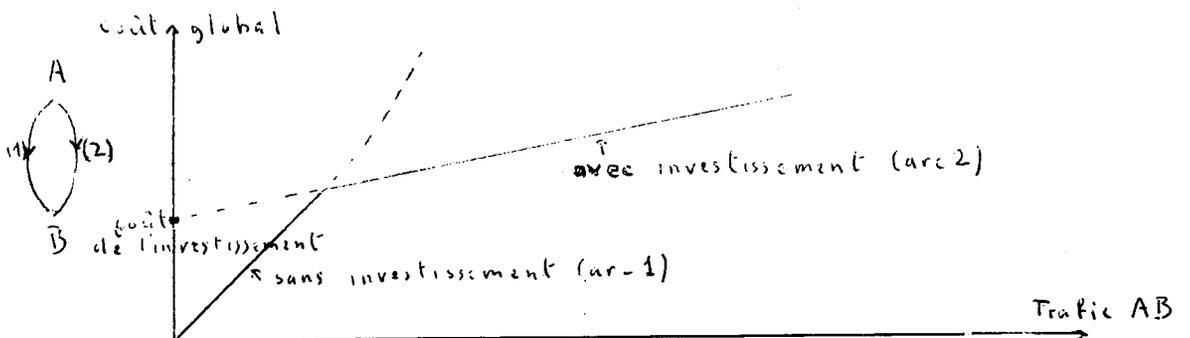


Fig 3. Investissement envisagé sur un arc existant.

Enfin on peut tenter de représenter par le modèle certaines situations où n'apparaissent pas clairement, au départ, les notions de coût fixe et de coût unitaire. Considérons le problème du choix d'un réseau à desservir par autobus. Il n'y a pas d'investissement proprement dit sur les arcs qui seront desservis. Mais on peut s'efforcer de définir pour chaque arc une courbe "coût global" en fonction du trafic voyageurs : ce coût global comprendra l'amortissement des autobus, les frais d'exploitation, le temps passé par les voyageurs. Cette courbe de coût devra alors être approchée par une droite. La pente de cette droite sera le coût unitaire $p(i)$ et l'ordonnée de la droite pour un trafic nul sera le coût fixe $f(i)$. En règle générale ce coût fixe sera positif en raison du phénomène de rendement croissant (le coût global augmente moins que proportionnellement au trafic). A noter que si la courbe en question est concave, on pourra la représenter par plusieurs arcs en parallèle comme indiqué ci-dessus (Voir fig. 2).

3 - Situations dont le modèle peut rendre compte

En dehors des situations qui peuvent être clairement représentées par le modèle, certaines autres peuvent aussi être rattachées à ce dernier, en particulier par la création d'arcs fictifs. Nous passons ci-dessous en revue les principaux cas.

a) Investissements sur des arcs existants

Les investissements à envisager ne consistent pas uniquement en la création d'arcs nouveaux ; il peut aussi s'agir d'améliorations apportées à des arcs existants (par exemple porter une route de 2 à 3 voies). Ceci peut être pris en compte par le modèle en introduisant un arc fictif, en parallèle au premier, représentant la situation après investissement (Voir fig. 3); la solution optimale correspondra forcément à la situation la moins coûteuse. Toutefois une difficulté se présente si l'arc 1 peut se trouver en situation de saturation. Ce problème est discuté ci-dessous, paragraphe II 4 a).

b) Voies à double sens de circulation

Supposons qu'il y ait des voies envisagées à double sens de circulation pour lesquelles la formule du coût

$$\begin{array}{lll} c(i) = f(i) + p(i) t(i) & & \text{si } t(i) > 0 \\ c(i) = 0 & & \text{si } t(i) = 0 \end{array}$$

s'applique en appelant $t(i)$ le trafic total des deux sens.

On peut se ramener au cas du réseau à sens uniques par le procédé suivant : chaque voie à double sens AB est remplacée par l'ensemble d'arcs (AC, BC, DA, DB, CD) représenté fig. 4. La disposition est telle que l'arc CD est emprunté aussi bien

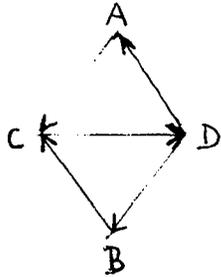


Fig 4. Représentation de la voie à double sens AB

par le trafic allant de A vers B que de B vers A.

Il suffit donc :

- d'attribuer à l'arc CD les coûts fixe et unitaire de la voie à double sens AB,
- d'attribuer aux arcs AC, BC, DA, DB des coûts fixes et unitaires tous nuls.

Le modèle permet donc de prendre en compte les voies à double sens. On peut craindre toutefois que ces dernières ne conduisent à augmenter considérablement la taille du réseau donc la difficulté de résolution du problème. On verra qu'il n'en est rien compte tenu de l'algorithme que nous proposons et qu'il ne sera pas nécessaire de réaliser effectivement la transformation de la fig. 4 (Voir paragraphe VII 5)). Cette transformation a seulement un but de démonstration.

c) Eléments ponctuels représentés par des arcs

L'on pourra introduire des arcs fictifs représentant le temps à perdre à une intersection, le temps d'attente aux stations de transport en commun, le temps perdu aux changements entre deux lignes de transport en commun...etc... Ces arcs auront un coût fixe nul.

De plus on pourra utiliser des arcs représentant des investissements de nature ponctuelle : aéroports, implantation d'une station de transport en commun, etc... l'arc fictif correspondant aura alors un coût fixe non nul. Ainsi le modèle permettra de choisir quelles implantations il faut retenir parmi un ensemble possible.

d) Trafic dépendant du coût

Dans notre modèle, le trafic $T(k)$ de chaque liaison k est donné et doit être écoulé quel qu'en soit le coût. On peut toutefois s'affranchir partiellement de cette condition

.../...

en ajoutant au réseau "réel" un arc fictif joignant directement l'origine et la destination de la liaison k. Donnons à cet arc fictif un coût fixe nul et un coût unitaire u , et notons C_k le coût pour assurer la liaison par le réseau réel. Dans ces conditions si $C_k > u T(k)$ le trafic de la liaison k empruntera l'arc fictif. Si $C_k < u T(k)$, au contraire ce trafic utilisera le réseau réel.

On peut même avoir une solution plus progressive en décomposant la liaison. Considérons la fig. 5. Soient

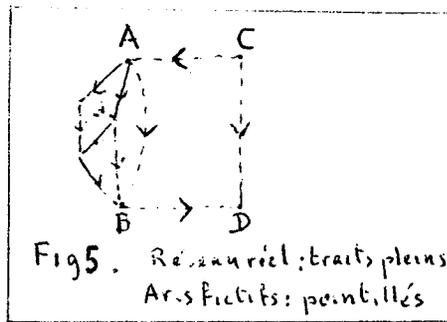
T_{AB} et T_{CD} les trafics respectifs des liaisons AB et CD
 u_{AB} et u_{CD} les coûts unitaires respectifs des arcs fictifs AB et CD ($u_{CD} < u_{AB}$).

Les arcs fictifs ont tous des coûts fixes nuls, et CA et BD ont des coûts unitaires nuls. Soient :

C_1 le coût pour assurer un trafic T_{AB} entre A et B par le réseau réel
 C_2 " " " " $T_{AB} + T_{CD}$ " " " " ($C_2 > C_1$)

Le trafic entre A et B empruntant le réseau réel sera

0 si $C_1 > u_{AB} T_{AB}$
 T_{AB} si $C_1 < u_{AB} T_{AB}$ et $C_2 - C_1 > u_{CD} T_{CD}$
 $T_{AB} + T_{CD}$ si $C_1 < u_{AB} T_{AB}$ et $C_2 - C_1 < u_{CD} T_{CD}$



4 - Aspects non pris en compte dans le modèle

Le modèle peut être utile même si l'on désire prendre en compte des aspects qui n'y sont pas prévus. On peut en effet s'en servir pour définir un certain nombre de solutions qui seront ensuite comparées avec plus de précision (ces solutions seront obtenues en faisant varier la valeur de certains paramètres). Dans certains cas des tâtonnements peuvent permettre de s'approcher de la réalité. Enfin, on peut envisager pour une étape ultérieure des aménagements du modèle (l'Annexe II donne des précisions à ce sujet).

Diverses situations sont discutées plus particulièrement ci-dessous.

a) Saturation des arcs

Le modèle ne prend pas en compte le phénomène de saturation, qui consiste en ce que la courbe donnant le coût global d'un arc en fonction du trafic qu'il supporte soit convexe (Voir fig. 6). Le cas d'une contrainte de capacité peut être considéré comme un cas particulier limite de cette situation. En ce qui concerne les arcs envisagés, compte tenu des indications du paragraphe a), cette restriction du modèle ne devrait pas être trop générale. On peut s'attendre à observer plutôt le phénomène inverse d'une courbe concave (Voir fig.

Toutefois la saturation peut jouer un rôle important pour les arcs existants, et même, dans certains cas, pour les arcs envisagés, car des contraintes peuvent empêcher d'accroître indéfiniment les capacités des infrastructures : c'est donc une question qu'il importe de considérer.

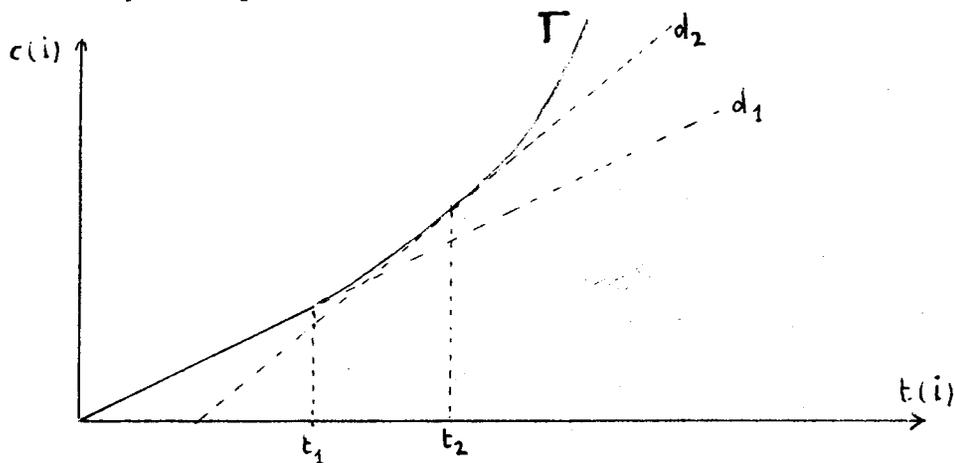


Fig 6. Cas d'un arc susceptible de saturation.

Soit un arc i dont le coût global varie en fonction du trafic selon la courbe de la fig. 6. Dans le modèle, on est obligé de remplacer cette courbe par une droite. Supposons que ce soit la droite d_1 confondue avec Γ si $t(i) < t_1$. Si, à l'optimum, on a un trafic $t(i)$ inférieur à t_1 , cet optimum est valable. Par contre si $t(i)$ est supérieur à t_1 on a une solution qui ne correspond pas à la réalité.

On aurait pu aussi remplacer la courbe Γ par la droite d_2 tangente à Γ pour $t(i) = t_2$. Dans ces conditions, l'optimum serait valable s'il donnait un trafic $t(i)$ voisin de t_2 . Ceci suggère donc un processus de tâtonnement : remplacer Γ par des tangentes à cette courbe.

jusqu'à ce que l'optimum soit voisin du point de tangence. Toutefois ceci devient difficilement réalisable s'il y a beaucoup d'arcs dans ces conditions. On peut faire les remarques suivantes

- il y a une certaine antinomie entre le fait qu'un réseau soit optimal et qu'il contienne de nombreux arcs saturés ; si cela arrive, cela veut peut être dire que le problème n'a pas été bien posé,
- l'on pourrait s'efforcer d'automatiser le processus de tâtonnement indiqué ci-dessus,
- dans ce processus, Γ est toujours remplacé par un minorant ; cette remarque doit permettre d'adapter notre procédure SEP.

On trouvera en Annexe II quelques précisions sur ces deux dernières remarques.

b) Evolution dans le temps

Aucune évolution des données (en particulier des demandes de trafic) au cours du temps n'est possible dans le cadre du modèle. En fait ce modèle doit normalement donner une (ou plusieurs) solution pour une année "horizon", et il faut ensuite rechercher les meilleures séquences d'étapes intermédiaires pour atteindre cette (ou ces) solution.

On peut toutefois envisager un modèle analogue, légèrement plus compliqué dans sa forme, dans lequel les demandes de trafic à des périodes différentes seraient considérées comme des données indépendantes. On trouvera en Annexe II des indications sur la possibilité d'adapter à ce cas la méthode présentée dans cette étude.

c) Choix non optimal des itinéraires

Selon notre modèle, chaque courant utilise l'itinéraire de coût d'écoulement $(p(i) T(k))$ minimal. Ceci suppose, soit que le choix de l'itinéraire est confié à une autorité coordinatrice, soit que la tarification amène l'usager à effectuer spontanément un tel choix. Cette condition peut être mal remplie dans la réalité. Par exemple le coût d'utilisation d'une voiture tel qu'il est ressenti par l'usager est en général assez différent du coût pour la collectivité.

Si l'on veut tenir compte de ce phénomène, il faudra obtenir du modèle plusieurs solutions que l'on comparera ensuite entre elles par des calculs plus fins. Remarquons que le coût total du réseau calculé par le modèle constitue alors un **minorant** de sa valeur réelle, puisque l'on suppose un choix optimal des itinéraires. Ceci permet d'envisager d'adapter notre méthode SEP. (Voir Annexe II).

d) Contrainte budgétaire

Si l'on se trouve en présence d'une contrainte budgétaire, il y aura lieu de procéder par tâtonnements : dans le calcul des $f(i)$ et $p(i)$, il faut choisir un taux d'actualisation tel que cette contrainte soit vérifiée. On verra en Annexe II comment ceci pourrait être inclue dans la méthode elle-même.

e) Trafic induit

Dans la réalité, les trafics des diverses liaisons dépendent des coûts ressentis par les usagers (phénomène de trafic induit). Une première approximation pourra dans certains cas être obtenue par les procédés décrits paragraphe II 3 d) ci-dessus. Mais ceux-ci peuvent se révéler tout à fait insuffisants.

Se pose alors le problème du critère, qui ne peut plus être la minimisation du coût global. On peut faire appel, pour ceci, à des notions telles que le "surplus" défini par les économistes, ou l'"accessibilité" que l'on peut exprimer de plusieurs façons.

On peut seulement demander au modèle présenté dans cette note de fournir un certain nombre de solutions que l'on comparera ensuite en tenant compte de ce phénomène. Sans doute peut-on envisager aussi une extension de la méthode SEP. Ceci ne sera pas étudié dans cette note.

5 - Conclusion

Le modèle que nous avons présenté est relativement général, mais il est loin de prendre en compte tous les aspects du choix d'un réseau de transport réel. Pour certains de ces aspects (saturation de quelques arcs, contrainte budgétaire) quelques tâtonnements doivent permettre d'obtenir une bonne solution. D'une façon plus générale, ce modèle paraît adapté à un premier dégrossissage, lorsqu'il y a un assez grand nombre d'arcs nouveaux envisagés. En effet il peut permettre de dégager un certain nombre de solutions qui pourront être ensuite comparées entre elles de façon plus précise en tenant compte de tous les aspects qu'on jugera importants.

On peut aussi envisager d'étendre ce modèle, et la méthode de résolution proposée plus loin, pour tenir compte de certaines situations actuellement exclues. L'Annexe II donnera des indications sur certaines extensions possibles.

Notons enfin que certains problèmes a priori sans rapport avec le choix d'un réseau de transport, peuvent se mettre sous la même forme mathématique, ce qui permet d'envisager le même type de méthode de résolution. L'Annexe II présentera deux exemples : localisation optimale d'équipements (problème de m-centre) et "set-covering"

CHAPITRE III

PRESENTATION DE LA METHODE S E P UTILISEE

Le problème défini au chapitre II consiste à trouver un élément $\hat{\omega} \in \Omega$ (Ω étant de dimension finie) tel que $\mathcal{C}(\hat{\omega}) = \min_{\omega \in \Omega} \mathcal{C}(\omega)$.

Nous allons utiliser pour le résoudre une méthode SEP (Separation et Evaluation Progressive),

1 - Rappel sur la méthode SEP

Nous n'allons pas exposer cette méthode dans toute sa généralité, mais simplement sous la forme utilisée ici (pour une description plus générale, voir réf. [19] ou [23]).

Il s'agit de construire une arborescence finie $\mathcal{A}(Q, H)$ dont les propriétés sont décrites ci-dessous. (Une arborescence est un graphe orienté sans cycle, comportant un sommet dit "racine" à partir duquel il existe un chemin vers chacun des autres sommets). Q est l'ensemble des sommets, H celui des arcs.

\mathcal{A} est obtenue à l'aide d'une suite d'arborescences $\mathcal{A}_n(Q_n, H_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) de la façon indiquée ci-dessous.

a) Description de l'arborescence \mathcal{A}_n

- (1) A chaque sommet $q \in Q_n$ correspond un sous-ensemble non vide de Ω : $\Phi(q) \subset \Omega$
- (2) Posons $q = 1$ pour la racine de l'arborescence ; $\Phi(1) = \Omega$
- (3) Une fonction d'"évaluation" g associée à tout $q \in Q_n$ une valeur $g(q)$, minorant de \mathcal{C} sur $\Phi(q)$, c'est à dire telle que $\forall \omega \in \Phi(q), \mathcal{C}(\omega) \geq g(q)$. Si $\Phi(q)$ contient un seul élément ω , on doit avoir $\mathcal{C}(\omega) = g(q)$.

On peut avoir $g(q) = +\infty$.

- (4) A tout sommet $q \in Q_n$, tel que $g(q) < +\infty$, est associé :

- soit $\omega^*(q) \in \Phi(q)$ tel que $\zeta(\omega^*(q)) = g(q)$; alors le réseau $\omega^*(q)$ est dit q - optimal (il est optimal pour le sous-ensemble $\Phi(q)$), et le sommet q est dit terminal q ne peut avoir de descendants,

- soit une partition de $\Phi(q)$ en deux sous-ensembles $\Phi_1(q)$ et $\Phi_2(q)$ non vides (c'est le mécanisme de "séparation").

Si q est tel que $\Phi(q)$ possède un seul élément, il est forcément terminal.

Si $g(q) = +\infty$, tout $\omega \in \Phi(q)$ peut être considéré comme q -optimal, et q est terminal.

(5) Un sommet sans descendants est dit "pendant". Tout sommet terminal est pendant, mais l'inverse est faux.

(6) Tout sommet $q \in Q_n$ non pendant a deux descendants que l'on notera $r_1(q)$ et $r_2(q)$. Et l'on a $\Phi(r_1(q)) = \Phi_1(q)$, $\Phi(r_2(q)) = \Phi_2(q)$, $\Phi_1(q)$ et $\Phi_2(q)$ ayant été définis en (4).

b) Construction des \mathcal{A}_n successifs

\mathcal{A}_1 est composé du seul sommet 1. Donc $Q_1 = \{1\}$, $H_1 = \emptyset$. Le sommet 1 est tel que $\Phi(1) = \Omega$. On lui associe d'une part $g(1)$, d'autre part $\omega^*(1)$ ou $(\Phi_1(1), \Phi_2(1))$, ces divers éléments possédant les propriétés indiquées en a).

Les arborescences successives sont ensuite construites à partir de \mathcal{A}_1 en procédant comme suit. Supposons que la dernière arborescence construite soit \mathcal{A}_i . On considère un sommet pendant de \mathcal{A}_i pour lequel la fonction g est minimale. Soit $\tilde{q} \in Q_i$ ce sommet.

Si \tilde{q} est terminal, on arrête ici la construction des \mathcal{A}_n , on pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$; nous verrons que, si $g(\tilde{q}) < +\infty$, $\omega^*(\tilde{q})$ est une solution optimale du problème \mathcal{T} , et que, si $g(\tilde{q}) = +\infty$, le problème \mathcal{T} n'a pas de solution de coût fini.

Si \tilde{q} n'est pas terminal, il existe une partition de $\Phi(q)$ en $\Phi_1(q)$ et $\Phi_2(q)$. Alors \mathcal{A}_{i+1} se déduit de \mathcal{A}_i par les opérations suivantes :

(1) \mathcal{A}_{i+1} contient \mathcal{A}_i ; pour tout $q \in Q_i$, $\Phi(q)$, $g(q)$, $\Phi_1(q)$, $\Phi_2(q)$ et $\omega^*(q)$ sont conservés inchangés

(2) Q_{i+1} s'obtient en ajoutant à Q_i deux sommets que l'on notera $r_1(\tilde{q})$ et $r_2(\tilde{q})$.

(3) H_{i+1} s'obtient en ajoutant à H_i les deux arcs $(\tilde{q}, r_1(\tilde{q}))$ et $(\tilde{q}, r_2(\tilde{q}))$.

.../...

(4) On pose $\tilde{\Phi}(r_1(\tilde{q})) = \tilde{\Phi}_1(\tilde{q})$ et $\tilde{\Phi}(r_2(\tilde{q})) = \tilde{\Phi}_2(\tilde{q})$

(5) On associe à $r_1(\tilde{q})$, d'une part $g(r_1(\tilde{q}))$, d'autre part $\omega^*(r_1(\tilde{q}))$ ou $[\tilde{\Phi}_1(r_1(\tilde{q})), \tilde{\Phi}_2(r_1(\tilde{q}))]$, ces divers éléments possédant les propriétés indiquées en a). On effectue les opérations semblables pour $r_2(\tilde{q})$.

Il est facile de vérifier que les \mathcal{A}_m successifs ainsi construits correspondent bien à la description donnée en a). Dans les constructions de \mathcal{A}_{i+1} seul le point (5) ci-dessus peut présenter des difficultés : il faut disposer d'une méthode de calcul des éléments associés à tout sommet nouveau, cette méthode étant telle que les propriétés indiquées en a) soient vérifiées.

Remarque : L'arborescence \mathcal{A} peut se limiter à \mathcal{A}_1 , qui se compose elle-même du seul sommet 1. Ceci arrive lorsque le sommet 1 est terminal, c'est à dire que l'on connaît $\omega^*(1)$ tel que $\mathcal{C}(\omega^*(1)) = g(1) \leq \mathcal{C}(\omega) \quad \forall \omega \in \tilde{\Phi}(1) = \Omega$

c) Cette procédure fournit une solution optimale

Montrons d'abord qu'elle se termine après un nombre d'étapes fini. \mathcal{A}_1 contient un sommet pendant. En passant de \mathcal{A}_i à \mathcal{A}_{i+1} on augmente de 1 le nombre de sommets pendants (le sommet \tilde{q} n'est plus pendant, mais $r_1(\tilde{q})$ et $r_2(\tilde{q})$ le sont). Donc \mathcal{A}_m a m sommets pendants. La fonction $\tilde{\Phi}$ associe à chacun de ces sommets un sous-ensemble de Ω non vide. Par construction ces m sous-ensembles forment une partition de Ω . Leur nombre est donc inférieur à $\text{card } \Omega$. On a donc toujours $m \leq \text{card } \Omega$.

On arrive donc en un nombre d'étapes fini à la situation d'arrêt prévue en b) : le sommet pendant \tilde{q} , qui minimise le fonction g , est terminal. On a alors $\mathcal{C}(\omega^*(\tilde{q})) = g(\tilde{q})$. Or à tout $\omega \in \Omega$ correspond un sommet pendant q' tel que $\omega \in \tilde{\Phi}(q')$ (car les $\tilde{\Phi}(q')$ forment une partition de Ω). Or $\mathcal{C}(\omega) \geq g(q')$ par définition de g ; comme $g(q') \geq g(\tilde{q})$, on a $\mathcal{C}(\omega) \geq g(\tilde{q}) = \mathcal{C}(\omega^*(\tilde{q}))$. Ceci exprime bien que $\omega^*(\tilde{q})$ est une solution optimale.

2 - Choix et propriétés des sommets q dans le problème \mathcal{P} de choix de réseau

a) Définition de $q \in Q_m$

Nous allons définir un sommet quelconque $q \in Q_m$ par deux sous-ensembles disjoints de J :

- $\mathcal{J}_0(q) \subset \mathcal{J}$ ensemble des arcs refusés

- $\mathcal{J}_1(q) \subset \mathcal{J}$ ensemble des arcs acceptés ($\mathcal{J}_1(q) \cap \mathcal{J}_0(q) = \emptyset$)

Par conséquent, $\mathcal{J}_2(q) = \mathcal{J} - \mathcal{J}_1(q) - \mathcal{J}_0(q)$ est l'ensemble des arcs non décidés.

On pose $\Phi(q) = \{ \omega \in \Omega \mid \mathcal{J}_1(\omega) \supset \mathcal{J}_1(q), \mathcal{J}_0(\omega) \supset \mathcal{J}_0(q) \}$. C'est à dire que $\Phi(q)$ est l'ensemble des solutions possibles ω telles que les arcs $i \in \mathcal{J}_0(q)$ sont acceptés et les arcs $i \in \mathcal{J}_1(q)$ sont refusés.

Ces notations ne sont pas tout à fait correctes, car \mathcal{J}_0 et \mathcal{J}_1 représentent d'une part des applications définies sur Ω et d'autres des applications définies sur Q . Toutefois aucune confusion ne paraît possible. La correspondance est la suivante : si $q \in Q$ est tel que $\Phi(q)$ comporte un seul élément ω , $\mathcal{J}_0(q) = \mathcal{J}_0(\omega)$ et $\mathcal{J}_1(q) = \mathcal{J}_1(\omega)$

b) Problème de choix de réseau de transport associé au sommet q

Notons que l'on peut associer, de façon naturelle, au sommet $q \in Q_n$, un problème de choix de réseau de transport semblable à celui défini paragraphe II.1, en supprimant les arcs refusés, et en considérant les arcs acceptés comme des arcs initiaux.

Plus précisément, le problème \mathcal{P} ayant été défini au paragraphe II.1 par la suite $(S, I, J, K, s_1, s_2, p, d_1, d_2, T)$, nous associons au sommet q le problème $\mathcal{P}^q(S, I^q, J^q, K, s_1, s_2, p, f, d_1, d_2, T)$ dans lequel

$$I^q = I - \mathcal{J}_0(q)$$

$$J^q = J - \mathcal{J}_0(q) - \mathcal{J}_1(q)$$

Les fonctions s_1, s_2, p, f sont les mêmes que dans \mathcal{P} , mais restreintes aux sous-ensembles I^q de I ou J^q de J .

Aux éléments $\Omega, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{C}, \hat{\mathcal{C}}$ de \mathcal{P} correspondent $\Omega^q, \mathcal{J}_0^q, \mathcal{J}_1^q, \mathcal{C}^q, \hat{\mathcal{C}}^q$ de \mathcal{P}^q

Ω^q est isomorphe à $\Phi(q) \subset \Omega$ par l'isomorphisme $\mathcal{J}^q : \omega^q \in \Omega^q \rightarrow \omega \in \Phi(q) \subset \Omega$ défini par $J_1(\omega) = J_1^q(\omega^q) + J_1(q)$. On a alors :

$$\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}^q(\omega^q) + \sum_{i \in \mathcal{J}_1(q)} f(i)$$

.../...

Cette formule indique que l'on passe du coût d'un réseau de \mathcal{T}^q au coût du réseau correspondant de \mathcal{T} en ajoutant la somme des coûts fixes des arcs qui sont seulement envisagés dans \mathcal{T} alors que l'on suppose leur existence dans \mathcal{T}^q .

Cette propriété sera utile dans la procédure SEP. En effet ; l'on en déduit immédiatement :

Théorème I

a) Si \mathfrak{m} est un minimum des coûts des réseaux du problème \mathcal{T}^q associé au sommet $q \in Q$, $\mathfrak{m} + \sum_{i \in J_1(q)} f(i)$ peut être utilisé comme fonction d'évaluation $g(q)$ dans la procédure SEP de résolution du problème .

b) Si $\hat{\omega}^q \in \Omega^q$ est un réseau optimal de \mathcal{T}^q , alors $\tilde{\omega} \in \Omega$ défini par $J_1(\tilde{\omega}) = J_1^q(\hat{\omega}^q) + J_1(q)$ est q -optimal et peut être choisi comme $\omega^*(q)$ dans la même procédure SEP ; et l'on a
$$C(\tilde{\omega}) = C^q(\hat{\omega}^q) + \sum_{i \in J_1(q)} f(i)$$

Remarque : $\mathcal{T}, I, J, \Omega$ etc... peuvent s'écrire $\mathcal{T}^1, I^1, J^1, \Omega^1$, $q = 1$ représentant, on le rappelle, la racine de l'arborescence \mathcal{A} .

c) Les sous-ensembles $\Phi_{1(q)}$ et $\Phi_{2(q)}$

Si $q \in Q_n$ n'est pas un sommet terminal, il faut lui associer une partition de $\Phi(q)$ en deux sous-ensembles $\Phi_{1(q)}$ et $\Phi_{2(q)}$.

Rappelons que $\Phi(q) = \{\omega \in \Omega \mid J_1(\omega) \supset J_1(q), J_0(\omega) \supset J_0(q)\}$. Pour définir $\Phi_{1(q)}$ et $\Phi_{2(q)}$, nous choisissons un arc $j^*(q) \in J_2(q)$ et nous posons :

$$\Phi_{1(q)} = \{\omega \in \Omega \mid J_1(\omega) \supset J_1(q), J_0(\omega) \supset J_0(q) + \{j^*(q)\}\}$$

$$\Phi_{2(q)} = \{\omega \in \Omega \mid J_1(\omega) \supset J_1(q) + \{j^*(q)\}, J_0(\omega) \supset J_0(q)\}$$

Autrement dit, un arc non décidé dans $\Phi(q)$ est transformé en arc refusé dans $\Phi_{1(q)}$ et en arc accepté dans $\Phi_{2(q)}$. Il est clair que $\Phi_{1(q)} \cap \Phi_{2(q)} = \emptyset$ et que $\Phi_{1(q)} + \Phi_{2(q)} = \Phi(q)$.

Cette partition permet de définir des descendants de q répondant aux conditions du paragraphe 1 a (6). En effet, en posant :

.../...

$$J_0(r_1(q)) = J_0(q) + \{j^*(q)\}$$

$$J_1(r_1(q)) = J_1(q)$$

$$J_0(r_2(q)) = J_0(q)$$

$$J_1(r_2(q)) = J_1(q) + \{j^*(q)\}$$

on a bien $\Phi(r_1(q)) = \Phi_1(q)$ et $\Phi(r_2(q)) = \Phi_2(q)$

En conclusion de ce paragraphe, à tout sommet $q \in Q_n$ doit être associé soit $\omega^*(q)$, et alors q est terminal, soit $j^*(q)$, qui permet de définir $\Phi_1(q)$ et $\Phi_2(q)$.

3 - Algorithme

Nous donnons ci-dessous l'algorithme de construction des \mathcal{A}_n successifs, que nous appellerons "algorithme général" de la méthode. Dans cet algorithme, P représente l'ensemble des sommets pendants à un instant donné.

G1 - Calcul pour $q = 1$ de $g(q)$ et $(\omega^*(q)$ ou $j^*(q))$. $P = \{1\}$

Si $g(1) = +\infty$, il n'y a pas de solution finie, et l'algorithme est terminé. Sinon aller en G2

G2 - Choisir $\tilde{q} \in P$ tel que $g(\tilde{q}) = \min_{q \in P} g(q)$

G3 - Le sommet \tilde{q} est-il terminal ?

Si oui, $\omega^*(q)$ est un réseau optimal, de coût total $g(\tilde{q})$; l'algorithme est terminé

Si non, faire $P = P - \{\tilde{q}\}$, aller en G4

G4 - Pour $q^* = r_1(\tilde{q})$, puis pour $q^* = r_2(\tilde{q})$, effectuer les opérations G41 et G42 ci-dessous :

- G41 Calcul de $g(q^*)$ et $(\omega^*(q^*)$ ou $j^*(q^*))$

- G42 $P = P + \{q^*\}$

G5 - Aller en G2

Dans cet algorithme, pour exécuter G1 et G41, il faut définir, pour tout sommet $q \in Q$, une procédure de calcul de $g(q)$ d'une part, $\omega^*(q)$ ou $j^*(q)$ d'autre part. Ceci est l'objet des chapitres suivants.

On peut faire quelques commentaires sur cet algorithme. Le nombre de sommets de l'arborescence \mathcal{A} sera d'autant plus réduit que :

- $g(q)$ est un minorant plus strict de ζ sur $\Phi(q)$,

- les chances d'obtenir un réseau q -optimal $\omega^*(q)$ sont plus grandes, car alors l'on a la meilleure solution possible de $g(q)$ et un réseau correspondant. On peut donc résumer ces indications en disant que \mathcal{A} est d'autant plus réduit que $g(q)$ est meilleur.

Mais, par ailleurs, améliorer $g(q)$ va prendre du temps d'ordinateur. Est-ce que ce temps supplémentaire passé à chaque sommet de \mathcal{A} sera compensé par la diminution du nombre de ces sommets ? Il est bien difficile de répondre avec certitude à une telle question, et les choix opérés sont forcément empiriques.

Si l'on prend comme élément de référence la méthode "classique" utilisée dans COBRA, réf. [7], (voir paragraphe I-2c), la méthode présentée ici se caractérise par un effort pour diminuer le nombre des sommets de \mathcal{A} , en améliorant $g(q)$. Nous n'irons toutefois pas jusqu'au bout des possibilités dans ce sens : dans certains cas, nous renoncerons aux calculs qui permettraient d'améliorer $g(q)$, pensant que, pour les applications les plus pausibles, ils ne seraient pas "rentables". Cette façon de procéder peut être rapprochée de celle de Held et Karp (réf. [13]) pour le problème des voyageurs de commerce.

4 - Conclusion

Comme toutes les méthodes SEP, la méthode proposée ici consiste à parcourir les sommets d'une arborescence. A chaque sommet q de cette arborescence, correspond un problème de choix de réseau. Ce problème \mathcal{J}^q est semblable au problème initial ; il en diffère par le fait que certains arcs envisagés de \mathcal{J} sont soit supprimés, soit transformés en arcs initiaux (c'est à dire sans coût fixe). Lorsque l'on se trouve au sommet q , l'on doit :

- soit résoudre le problème \mathcal{J}^q , ce qui permet de définir un réseau $\omega^*(q)$ dit q -optimal (optimal pour le sommet q), et alors q est un sommet terminal,
- soit obtenir un minorant de la valeur optimale de \mathcal{J}^q , ce qui permet de calculer la fonction d'évaluation $g(q)$ de \mathcal{J} au sommet q .

Dans ce dernier cas, q a deux successeurs obtenus en choisissant un arc envisagé $j^*(q)$ de \mathcal{J}^q , que l'on supprime pour l'un des successeurs, et que l'on transforme en arc initial pour l'autre. Il reste à définir une méthode permettant soit de résoudre \mathcal{J}^q , soit de lui trouver un minorant.

CHAPITRE IV

PROGRAMMES LINEAIRES ASSOCIES AU MODELE

1 - Présentation de ces programmes

Ce chapitre va présenter une formulation équivalente au problème de choix de réseau, sous forme de programme linéaire en variables mixtes. La résolution du programme linéaire continu obtenu en relâchant les contraintes d'intégrité fournira alors, soit un minorant de la valeur du problème \mathcal{P} , soit, si les variables voulues sont entières, directement une solution optimale de ce problème. La même opération peut évidemment s'effectuer pour les problèmes \mathcal{P}^q , ce qui donne un moyen d'utiliser la méthode SEP présentée au chapitre précédent.

Nous avons vu paragraphe I-2 c) que l'on peut mettre le problème de choix de réseau sous forme de programmes linéaires en variables mixtes en reprenant une méthode habituelle des problèmes de "charge fixe". Malheureusement, cette méthode conduit à des temps de calcul trop élevés, en raison du nombre de sommets de l'arborescence à explorer. Pour réduire ce nombre, nous avons formulé un programme linéaire différent devant fournir une meilleure fonction d'évaluation. Pour ceci nous nous sommes efforcés

- d'écrire de nouvelles contraintes vérifiées par des variables entières,
- d'écrire si possible ces contraintes de façon que l'égalité soit vérifiée à l'optimum du programme entier. Dans la formulation du paragraphe I-2 c), la contrainte $y(i) \geq \frac{t(i)}{T}$ est très loin de satisfaire cette condition, puisque, en général, à l'optimum, on a pour les arcs acceptés $y(i) = 1$ et $\frac{t(i)}{T} \ll 1$.

Soit $t(i,k)$ le trafic de la liaison k empruntant l'arc i . Nous introduisons les variables $x(i,k) = \frac{t(i,k)}{T(k)}$ (proportion du trafic de la liaison k empruntant l'arc i). Ceci nous permet d'écrire $y(i) \geq x(i,k)$, $\forall k \in K$. Nous avons donc plus de contraintes, et de plus, à l'optimum du programme en variables mixtes, chaque liaison utilisera généralement un seul itinéraire, sur lequel nous aurons $x(i,k) = 1$, donc $y(i) = x(i,k)$.

Ceci nous conduit au programme du tableau I, en notant, pour tout $s \in S$

- $A(s) = \{ i \in I \mid s_2(i) = s \}$ ensemble des arcs aboutissant à s

- $B(s) = \{ i \in I \mid s_1(i) = s \}$ ensemble des arcs issus de s

- $\forall k \in K, \delta(s, k) = -1$ si $s = d_1(k)$

" = 1 si $s = d_2(k)$

" = 0 si $s \neq d_1(k), d_2(k)$

$\forall i \in I, k \in K$	$x(i, k) \geq 0$
$\forall s \in S, k \in K$	$\sum_{i \in A(s)} x(i, k) - \sum_{i \in B(s)} x(i, k) = \delta(s, k)$
$\forall i \in J, k \in K$	$y(i) - x(i, k) \geq 0$
$\forall i \in J$	$y(i)$ entier
	$\text{Min } C = \sum_{i \in J} f(i)y(i) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p(i)T(k)x(i, k)$

TABLEAU I - Programme en variable mixte PDRM

Ce programme sera appelé PDRM (Programme de Détermination de Rés en variables Mixtes), le programme obtenu en supprimant les contraintes " $y(i)$ entier" sera appelé PDRC (Primal de Détermination de Réseau en variables Continues) et le dual de PDRC sera appelé DDRC. Les programmes PDRC et DDRC sont présentés tableau II.

Nous notons

- C la fonction objective de PDRC et PDRM,
- \hat{C} la valeur optimale de cette fonction dans PDRC,
- $\hat{\hat{C}}$ la valeur optimale de cette fonction dans PDRM,
- U la fonction objective de DDRC.

On posera \hat{C} (respectivement $\hat{\hat{C}}$) infini si PDRC (respectivement PDRM) n'a pas de solution réalisable.

	PRIMAL (PDRC)	DUAL (DDRC)
$\forall i \in I, \forall k \in K$	$x(i, k) \geq 0$	$u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) \leq v(i, k) + p(i) T(k)$ $v(i, k) = 0$ pour tout $i \in I_0 = I - J$
$\forall s \in S, \forall k \in K$	$\sum_{i \in A(s)} x(i, k) - \sum_{i \in B(s)} x(i, k) = \delta(s, k)$	$u(s, k)$
$\forall i \in J$	$y(i)$	$\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$
$\forall i \in J, \forall k \in K$	$y(i) - x(i, k) \geq 0$	$v(i, k) \geq 0$
	$\text{Min } C = \sum_{i \in I} f(i) y(i) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p(i) T(k) x(i, k)$	$\text{Max } U = \sum_{k \in K} u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k)$
	<p><u>Nota</u> : on a $\delta(s, k) = -1$ si $s = d_1(k)$ " = 1 si $s = d_2(k)$ " = 0 si $s \neq d_1(k), d_2(k)$</p>	

Tableau II : Programme continu PDRC et son dual DDRC

On rappelle que $\mathcal{C}(\omega)$ est le coût total du réseau ω du problème \mathcal{P} , et que $\hat{\mathcal{C}}$ est le coût total d'un réseau optimal de \mathcal{P} , appelé "valeur optimale de \mathcal{P} ".

Nous dirons qu'une solution réalisable de PDRM et un réseau ω de \mathcal{S} se correspondent, lorsque $J_1(\omega) = \{i \in J \mid y(i) = 1\}$. Il y a toujours un réseau et un seul qui correspond à une solution réalisable de PDRM. Par contre, un réseau ω étant donné, il peut y avoir selon les cas 0, 1 ou plusieurs solutions réalisables de PDRM qui lui correspondent.

Le théorème ci-dessous précise les relations entre les programmes PDRM, PDRC, DDRC et le problème \mathcal{P} .

Théorème II

a) Lorsqu'une solution réalisable de PDRM, de fonction objective C , et un réseau ω de \mathcal{S} , se correspondent, on a $C \geq \mathcal{C}(\omega)$. Si $\mathcal{C}(\omega)$ est fini, il existe toujours au moins une solution réalisable de PDRM qui lui correspond et telle que $C = \mathcal{C}(\omega)$.

b) On a toujours $\hat{C} = \hat{\mathcal{C}}$. Si $\hat{\mathcal{C}}$ est fini, le réseau qui correspond à une solution optimale de PDRM est optimal dans \mathcal{S} . Si $\hat{\mathcal{C}}$ est infini, il n'y a pas de solution réalisable dans PDRM.

c) Si une solution optimale de PDRC est telle que $y(i) = 0$ ou 1 pour tout $i \in J$, c'est une solution optimale de PDRM, et $\hat{C} = \hat{C} = \hat{\mathcal{C}}$

d) D'une part \hat{C} , d'autre part \mathcal{U} pour toute solution réalisable de DDRC sont des minorant de $\hat{\mathcal{C}} = \hat{C}$

Démonstration

a) Si une solution réalisable de PDRM et un réseau ω de \mathcal{S} se correspondent on a

$$\sum_{i \in J} f(i) y(i) = \sum_{i \in J_1(\omega)} f(i)$$

et $\sum_{i \in I} p(i) x(i, k) \geq \Delta(\omega, k)$, car $\Delta(\omega, k)$ est ^{défini comme} le coût unitaire minimal pour la liaison

$$\text{Donc } C = \sum_{i \in J} f(i) y(i) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p(i) T(k) x(i, k) \geq \sum_{i \in J_1(\omega)} f(i) + \sum_{k \in K} \Delta(\omega, k) T(k) = \mathcal{C}(\omega)$$

soit $C \geq \mathcal{C}(\omega)$

Si $\mathcal{C}(\omega)$ est fini, il existe au moins un chemin pour chaque liaison n'utilisant que des arcs de $J_1(\omega)$ ou de I_c (arcs initiaux). On choisit pour chaque liaison k un tel chemin de coût unitaire minimal sur lequel on pose $x(i, k) = 1$. On pose $x(i, k) = 0$ sur tous les autres arcs de I . On a bien ainsi, pour tout k , $\sum_{i \in I} p(i) x(i, k) = P(\omega, k)$. Par ailleurs on pose $y(i) = 1$ si $i \in J_1(\omega)$, et $y(i) = 0$ si $i \in J - J_1(\omega)$. On a bien ainsi une solution réalisable de PDRM correspondant à ω et telle que $C = \mathcal{C}(\omega)$.

) Soit une solution réalisable de PDRM de fonction objective C . En vertu de a)) il existe $\omega \in \Omega$ tel que $C \geq \mathcal{C}(\omega)$; comme $\mathcal{C}(\omega) \geq \hat{C}$, $C \geq \hat{C}$, $\hat{C} = \min C \geq \hat{C}$. Soit $\hat{\omega}$ un réseau optimal de \mathcal{J} . Si $\hat{C} < \infty$, en vertu de a), il lui correspond une solution réalisable de PDRM dont la fonction objective vaut $\mathcal{C}(\hat{\omega}) = \hat{C}$. Comme cette fonction objective est supérieure ou égale à \hat{C} , on a $\hat{C} \leq \hat{C}$; donc $\hat{C} = \hat{C}$. Si $\hat{C} = \infty$, il existe au moins une liaison n'ayant aucun itinéraire par les arcs de I , donc PDRM n'a pas de solution réalisable : $\hat{C} = \hat{C} = \infty$.

c) Evident

d) Puisque PDRC se déduit de PDRM en supprimant la contrainte "y(i) entier", on a $\hat{C} \leq \hat{C}$. Par ailleurs, en raison des propriétés de la dualité, pour toute solution réalisable de DDRC, $u \leq \hat{C}$. Ceci est valable a fortiori si \hat{C} est infini. ■⁽¹⁾

On peut associer des programmes semblables à PDRM, PDRC et DDRC à chaque sommet q de l'arborescence de la procédure SEP. On a vu en effet, paragraphe III 2 b) qu'au sommet q correspond le problème \mathcal{J}^q de choix de réseau. On aura de même PDRM^q, PDRC^q et DDRC^q (PDRM pouvant s'écrire PDRM¹, et de même pour PDRC et DDRC).

Les théorèmes I et II nous montrent que cela peut nous permettre de calculer des fonctions d'évaluation $g(q)$ et des réseaux $\omega^*(q)$ dans la procédure SEP.

Mais ces programmes sont de très grande taille. Ils sont bien plus gros en particulier que les programmes correspondants dans la méthode "classique" du paragraphe COBRA : dans ce dernier cas, on pouvait regrouper les liaisons par origine, et il y avait une seule contrainte pour chaque variable $y(i)$. Toutefois PDRC et DDRC ont des structures

(1) Le signe ■ signifie la fin d'une démonstration.

particulières pouvant aider à les résoudre. C'est pourquoi nous allons les étudier de façon plus précise. Il va de soi que les résultats obtenus pourront s'étendre au PDRC^q et DDRCC^q.

2 - Le programme PDRC et son dual DDRCC

Le PDRC et son dual DDRCC figurent au tableau II, dans lequel chaque variable d'un programme est indiquée en face de la relation correspondante de l'autre programme.

Si on suppose les $v(i, k)$ fixés, on peut reconnaître dans le DDRCC, pour chaque liaison $k \in K$, un programme de plus court chemin, chaque arc i ayant une longueur $v(i, k) + p(i)T(k)$. Nous allons préciser cela.

a) Notations et définitions

- un "itinéraire de la liaison k " est un sous-ensemble de I , dont les éléments sont des arcs constituant un chemin sans circuit allant de l'origine $d_1(k)$ à la destination $d_2(k)$ de la liaison k ,

- $\Lambda(k)$ est l'ensemble des itinéraires de la liaison k ,

- \hat{C} et \hat{C} sont des valeurs de C à l'optimum respectivement du PDRC et du PDRM,

- la variable $v(i, k)$ du DDRCC sera appelée "péage" de l'arc i pour la liaison k ;

$\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$ exprime que le coût fixe d'un arc envisagé est réparti en péages imposés aux diverses liaisons ; par convention, $v(i, k) = 0$ pour tout arc initial ;

- le "coût d'usage" de l'arc i pour la liaison k est par définition

$\gamma(i, k) = v(i, k) + p(i)T(k)$, c'est à dire la somme du péage et du coût proportionnel correspondant à l'usage de l'arc par l'ensemble du trafic de la liaison;

- le "coût d'usage" $\Gamma(\ell)$ d'un itinéraire $\ell \in \Lambda(k)$ est la somme des coûts d'usage $\gamma(i, k)$ des arcs composant cet itinéraire. Le "coût d'usage minimal" $\Gamma_1(k)$ de la liaison k est le minimum des coûts des divers itinéraires $\ell \in \Lambda(k)$. Le ou les itinéraires pour lesquels ce minimum est réalisé sont les "itinéraires de coût d'usage minimal" de la liaison k (s'il n'y a aucun itinéraire pour la liaison k , on posera $\Gamma_1(k) = \infty$);

- dans une solution réalisable du PDRC, on dit qu'une liaison k "utilise un arc i " si $x(i, k) > 0$; on dit que cette liaison "utilise l'itinéraire $\ell \in \Lambda(k)$ " si elle utilise tous les arcs de ℓ .

b) Propriétés

Théorème III - Pour toute solution réalisable du DDRC, on a :

$\forall k \in K, u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) \leq \Gamma_1(k)$ coût d'usage minimal de la liaison k

$$u \leq \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$$

De plus $u = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$ si et seulement si $u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) = \Gamma_1(k), \forall k \in K.$

Démonstration

Soit une liaison $k \in K$. on a, pour tout $i \in I$:

$$u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) \leq \gamma(i, k)$$

Soit un itinéraire $\ell \in \Lambda(k)$. En faisant la somme membre à membre des inégalités ci-dessus pour tout $i \in \ell$, on obtient :

$$u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) \leq \Gamma(\ell) \text{ coût d'usage de l'itinéraire } \ell$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $\ell \in \Lambda(k)$, on en déduit

$$u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) \leq \Gamma_1(k)$$

$$\text{et } u = \sum_{k \in K} u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) \leq \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$$

La validité de la dernière partie du théorème s'en déduit immédiatement. ■

Théorème IV - Soient une solution réalisable du PDRC et une solution réalisable du DDRC. Pour que ces deux solutions soient optimales, il faut et il suffit que les 3 conditions suivantes soient simultanément vérifiées :

a) chaque liaison $k \in K$ utilise (dans PDRC) seulement son ou ses itinéraires de coût d'usage minimal (dans DDRC).

b) $u = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$

c) chaque arc $i \in J$ tel que $y(i) > 0$ est utilisé par (au moins) toutes les liaisons k pour lesquelles le péage $v(i, k) > 0$; pour ces relations on a $x(i, k) = y(i)$.

Démonstration

1) Les conditions sont nécessaires.

Le théorème des écarts complémentaires montre que :

$$x(i, k) > 0 \Rightarrow u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) = \gamma(i, k)$$

Soit un itinéraire $\ell_1 \in \Lambda(k)$, utilisé par la liaison k . Pour chacun des arcs $i \in \ell_1$, l'égalité ci-dessus est vérifiée. On en déduit, en faisant la somme membre à membre de ces égalités

$$u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) = \Gamma(\ell_1)$$

Par définition de $\Gamma_1(k)$, $\Gamma_1(k) \leq \Gamma(\ell_1)$. Rapproché de l'énoncé du théorème III, cela donne

$$\Gamma_1(k) \leq u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) = \Gamma(\ell_1) \leq \Gamma_1(k)$$

soit $\Gamma_1(k) = \Gamma(\ell_1)$. Donc ℓ_1 est bien un itinéraire de coût d'usage minimal, ce qui démontre la proposition a). La proposition b) se déduit alors de la dernière partie du théorème III. Enfin, le théorème des écarts complémentaires montre que

$$v(i, k) > 0 \Rightarrow y(i) - x(i, k) = 0, \text{ ce qui démontre la proposition c).}$$

2) Les conditions sont suffisantes.

Il suffit de montrer que les conditions du théorème des écarts complémentaires sont vérifiées :

- $(v(i, k) > 0 \Rightarrow y(i) = x(i, k))$ est évident si $y(i) = 0$ et résulte de la condition c) si $y(i) > 0$

- $(x(i, k) > 0 \Rightarrow u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) = \gamma(i, k))$ résulte des conditions a) et b) ; la condition a) montre que $x(i, k) > 0$ implique que l'arc i est sur un itinéraire de coût d'usage minimal de la liaison k ; de la condition b) on déduit que $u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) = \Gamma_1(k)$ (voir Théorème III), ce qui n'est possible que si sur tout arc i appartenant à un itinéraire de coût d'usage minimal de la liaison k , $u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) = \gamma(i, k)$. ■

Il résulte immédiatement de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire V - Pour toute solution optimale du DDRC nous avons :

$$- u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) = \Gamma_1(k), \text{ pour tout } k \in K$$

$$- U = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$$

En conclusion nous sommes amenés à considérer des programmes, PDRC et DDRC, de grande taille, mais de structure très particulière. Les solutions de DDRC sont étroitement liées aux valeurs prises par ce que nous avons appelé les "péages". Nous allons les étudier sous cet angle en introduisant la notion de systèmes de péages et d'itinéraires.

CHAPITRE V

SYSTEMES DE PEAGES ET D'ITINERAIRES LEUR UTILISATION DANS LA PROCEDURE SEP

Dans le chapitre précédent, nous avons appelé "péage" la variable $v(i,k)$ associée à l'arc envisagé i et à la liaison k , dans le dual DDRC, et coût d'usage $\gamma(i,k)$ de l'arc i pour la liaison k la somme du péage et du coût proportionnel correspondant à l'usage de l'arc par l'ensemble du trafic de la liaison, soit : $\gamma(i,k) = v(i) + p(i)T(k)$. Pour tout arc initial, $v(i,k)$ est nul par convention et $\gamma(i,k) = p(i)T(k)$. Pour un arc envisagé donné la somme des péages des diverses liaisons est égale au coût fixe : $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$.

Nous avons montré qu'à l'optimum du programme continu :

- chaque liaison k utilise seulement son ou ses itinéraires de coût d'usage minimal ; ce coût est noté $\Gamma_1(k)$,
- chaque arc envisagé est soit absolument inutilisé, soit utilisé par toutes les liaisons y ayant un péage strictement positif,
- la valeur du programme continu est égal à la somme des coûts d'usage minimaux des diverses liaisons : $\hat{C} = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$.

Dans ce chapitre nous continuons d'étudier le DDRC, mais les propriétés seront exprimées relativement aux péages. Le résultat important sera le suivant : à partir d'un "système de péages", on peut obtenir, pour un sommet q de l'arborescence \mathcal{A} , une détermination possible de la fonction d'évaluation $g(q)$, et dans certains cas un réseau q -optimal $\omega^*(q)$.

1 - Propriétés relatives aux systèmes de péages

On appelle "système de péages" un ensemble $\{v(i,k), i \in J, k \in K\}$ tel que $v(i,k) \geq 0$ et $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$ (pour tout $i \in J$). Les $v(i,k)$ d'une solution réalisable quelconque du DDRC forment un système de péages.

A tout système de péages on associe les coûts d'usage $\gamma(i,k)$, $\Gamma(l)$ et $\Gamma_1(k)$ définis en III-2 a).

Un système de péages est dit optimal s'il existe une solution optimale du DDRC dont il fait partie.

Théorème VI - A tout système de péages on peut faire correspondre une solution réalisable du DDRC dont il fasse partie et telle que $U = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$. Une telle solution réalise le maximum de U pour ce système de péages, et sera dite suboptimale. Ce maximum sera noté \tilde{U}

Démonstration

A toute liaison $k \in K$ correspondent des coûts d'usage $\gamma(i, k)$, et donc un coût d'usage minimal pour aller de l'origine $d_1(k)$ de la liaison à un sommet quelconque $s \in S$. Donnons à $u(s, k)$ la valeur de ce coût minimal (pour tout $s \in S$). On obtient ainsi une solution réalisable du DDRC, telle que $u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k) = \Gamma_1(k)$, et donc $U = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$. En vertu du théorème I, cette solution réalise le maximum de U pour ce système de péages. ■

Corollaire VII - Pour tout système de péages, on a $\tilde{U} = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k) \leq \hat{C} \leq \hat{\hat{C}}$. On a $\tilde{U} = \hat{C}$ si et seulement si le système de péages est optimal.

Démonstration

En vertu du théorème IV, $\tilde{U} \leq \hat{C}$. De plus $\hat{C} \leq \hat{\hat{C}}$ puisque le

PDRC se déduit du PDRM en supprimant les contraintes d'intégrité pour les $y(i)$. La deuxième partie du corollaire résulte directement des définitions des systèmes de péages optimaux et de \tilde{U} . ■

Remarque - Le fait que $\sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$ soit un minorant de \hat{C} peut se démontrer directement (sans faire intervenir PDRC et DDRC). En effet, supposons connu un réseau optimal (c'est à dire correspondant à une solution optimale du PDRM). A chaque liaison k correspond un itinéraire $l'(k)$ dans ce réseau. Soit $\Gamma'(k)$ le coût d'usage de cet itinéraire (calculé à l'aide des $\gamma(i, k)$).

$$\text{On a } \Gamma'(k) = \sum_{i \in l'(k)} p(i)T(k) + \sum_{i \in l'(k) \cap J_1(\omega)} v(i, k)$$

$$\text{et } \hat{C} = \sum_{k \in K} \sum_{i \in l'(k)} p(i)T(k) + \sum_{i \in J_1(\omega)} f(i)$$

$$\text{Or } \sum_{i \in J_1(\omega)} f(i) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in J_1(\omega)} v(i, k)$$

$$\text{On en déduit } \hat{C} \geq \sum_{k \in K} \Gamma'(k)$$

Par ailleurs, pour tout $k \in K$, $\Gamma_1(k) \leq \Gamma_2(k)$. Donc on a

$$\sum_{k \in K} \Gamma_1(k) \leq \sum_{k \in K} \Gamma_2(k) \leq \hat{C} \quad \blacksquare$$

On appellera "système de péages et d'itinéraires" un ensemble

$$\{v(i, k), l^*(k), i \in J, k \in K\} \text{ tel que } \{v(i, k)\} \text{ soit un système de péages et } l^*(k)$$

soit un itinéraire de coût d'usage minimal de la liaison k (lorsque $\{v(i, k)\}$ est donné, il n'y a un choix à effectuer pour $\ell^*(k)$ que si la liaison k dispose de plusieurs itinéraires de coût d'usage minimal).

Un tel système étant donné, on classera les arcs $i \in J$ en 3 catégories de la façon suivante

- la catégorie 1 comprend les arcs $i \in J$ tels que $v(i, k) > 0 \Rightarrow i \in \ell^*(k)$
- la catégorie 2 comprend les arcs n'appartenant à aucun itinéraire $\ell^*(k)$
- les autres arcs de J sont de catégorie 3

Théorème VIII

Si l'on a un système de péages et d'itinéraires sans arc de la catégorie 3, alors le système de péages est optimal, $\tilde{U} = \hat{C} = \hat{\hat{C}} = \hat{C}$, et le réseau de \mathcal{G} , tel que $J_1(\omega)$ soit égal à l'ensemble des arcs de la catégorie 1, forme un réseau optimal.

Démonstration

Posons

- $y(i) = 1$ sur les arcs de catégorie 1 et $y(i) = 0$ sur les autres
- $x(i, k) = 1$ sur les arcs $i \in \ell^*(k)$, $x(i, k) = 0$ sur les autres

Considérons, de plus, la solution suboptimale du DDRC pour le système de péages considéré (voir Théorème IV).

Alors les conditions du théorème II sont remplies pour que l'on se trouve à l'optimum des PDRC et DDRC. Comme les $y(i)$ sont entiers, on est aussi à l'optimum du PDRM. ■

Ceci montre que deux situations sont à distinguer : si $\hat{C} = \hat{\hat{C}}$, il est possible de trouver des systèmes de péages et d'itinéraires sans arc de catégorie 3. Dans le cas contraire cela est impossible. Nous allons étudier ces deux cas.

2 - Cas où $\hat{C} = \hat{\hat{C}}$

- a) Existence de systèmes de péages et d'itinéraires sans arc de catégorie 3.

Théorème IX

La condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{C} = \hat{C}$ et que le PDRC ait une solution optimale unique est qu'il existe un système de péage optimal où chaque liaison $k \in K$ n'ait qu'un itinéraire de coût d'usage minimal. Le réseau optimal unique $\hat{\omega}$ est alors défini comme suit : $J_1(\omega)$ est l'ensemble des arcs de J empruntés par l'une ou l'autre des liaisons.

Démonstration

L'existence d'un tel système de péages implique que les $x(i, k)$ et $y(i)$ soient définis sans ambiguïté à l'optimum du PDRC, en raison du théorème II : $x(i, k) = 1$ sur l'itinéraire relatif à la liaison k , et 0 partout ailleurs ; si $x(i, k) = 1$, $y(i) = 1$; si pour tout $k \in K$ $x(i, k) = 0$, il existe un k tel que $v(i, k) > 0$, donc $y(i) = x(i, k) = 0$.

Réciproquement si le PDRC a une seule solution, et si $\hat{C} = \hat{C}$, cette solution est entière, et le théorème des écarts complémentaires montre qu'il existe une solution du DDRC pour laquelle $x(i, k) = 0$ implique $u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) < \gamma(i, k)$. Par conséquent tout itinéraire non utilisé a un coût d'usage supérieur à celui de l'itinéraire utilisé.

Lorsque ces conditions sont réalisées, le système de péages et d'itinéraires correspondant n'a pas d'arc de catégorie 3. La dernière partie de l'énoncé du théorème se déduit alors du théorème VIII. ■

Corollaire

Si $\hat{C} = \hat{C}$:

- a) Une perturbation aussi petite que l'on veut des $f(i)$ et $p(i)$ permet d'obtenir un système de péages optimal pour lequel chaque liaison $k \in K$ n'ait qu'un itinéraire de coût d'usage minimal.
- b) A tout système de péages optimal, l'on peut associer des itinéraires $\ell^*(k)$ tels qu'il n'y ait pas d'arc de catégorie 3.

Démonstration

a) Si PDRC a une solution optimale unique, cette proposition est contenue dans le théorème I. Sinon, considérons une solution optimale de PDRM entière pour les $x(i, k)$. Elle est solution optimale de PDRC puisque $\hat{C} = \hat{C}$. Elle est de plus un point extrême du polytope des solutions réalisables de PDRC (dans aucune direction de l'espace des $x(i, k)$ et $y(i)$ on ne peut

se déplacer de part et d'autre de cette solution). Par conséquent on peut trouver une perturbation aussi petite que l'on veut des coefficients de la fonction objective ($p(i)$ et $f(i)$) qui la rende optimum unique de PDRC. A ce moment le théorème IX s'applique.

- b) Si le PDRC a une solution unique, $\forall k \in K$ l'itinéraire $\ell^*(k)$ sera l'itinéraire unique utilisé par la liaison k ; en vertu du théorème IV les conditions cherchées sont bien satisfaites. Si le PDRC a plusieurs solutions, on effectue une perturbation du type décrit ci-dessus, assez petite pour qu'aucun nouvel itinéraire de coût d'usage minimal n'apparaisse. On est ainsi ramené au cas où le PDRC a une solution unique.

b) Interprétation économique

Si $\hat{C} = \hat{C}$, le théorème IX montre qu'il existe, éventuellement moyennant une légère perturbation, un système de péages tel qu'à l'optimum chaque liaison doit utiliser l'itinéraire (unique) qui conduit pour elle à un coût d'usage minimal.

Supposons alors que si une liaison k utilise l'arc i elle doit payer le péage $v(i, k)$ plus le coût proportionnel $p(i) T(k)$, et que chaque liaison utilise l'itinéraire le moins coûteux pour elle. Alors, la solution optimale est telle que chaque arc est soit inutilisé, soit entièrement "payé" par les liaisons qui l'utilisent.

Ceci indique la possibilité théorique de confier l'exploitation de chaque arc à une entreprise différente en remplissant la condition suivante : en dépit de la concurrence que ces entreprises se feraient entre elles, chacune pourrait récupérer les charges fixes $f(i)$ de l'arc dont elle a la charge à l'aide de péages lorsque l'arc fait partie du réseau optimal. On peut aussi envisager une autorité centrale attribuant les péages. Si elle attribue de bons péages, on obtient le réseau optimal.

Ceci peut être considéré comme une extension de la théorie du surplus, pour laquelle un investissement est économiquement rentable si la somme des surplus que seraient disposés à payer les divers usagers dépassent le coût de l'investissement.

3 - Commentaires sur le cas $\hat{C} \neq \hat{C}$

Dans ce cas, à l'optimum du dual, l'on a plusieurs itinéraires de coût d'usage minimal pour certaines liaisons, et cette circonstance ne peut pas être supprimée par de légères perturbations.

Lorsque l'on s'efforce de construire des exemples vérifiant cette propriété, l'on arrive à des situations qui ne devraient pas être très fréquentes dans les applications concrètes aux réseaux de transport.

La figure 7 montre deux cas simples conduisant à deux itinéraires par liaison.

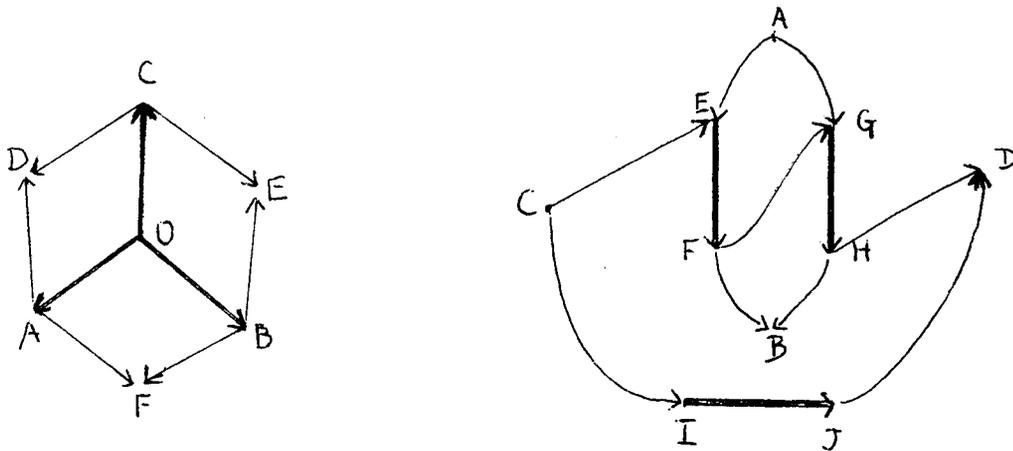


Fig. 7 - Solutions optimales à 2 itinéraires par liaison

Dans la figure de gauche, on a 3 liaisons OD, OE et OF ayant chacune un trafic unité. Tous les coefficients $p(i)$ sont nuls. On a $f(i) = 1$ sur OA, OB, OC et $f(i) = 0$ sur les autres arcs. Il est facile de vérifier que la solution du PDRC correspond à $y(i) = 1/2$ sur tous les arcs, chaque liaison comportant 2 itinéraires :

- pour la liaison OD les itinéraires OAD et OCD,
- pour la liaison OE les itinéraires OCE et OBE,
- pour la liaison OF les itinéraires OAF et OBF.

Le coût total est ainsi $\frac{1}{2} (f(AB) + f(OB) + f(OC)) = 3/2$ alors qu'il serait égal à 2 pour la solution optimale du PDRM (2 des arcs OA, OB, OC devant être créés).

Dans la figure de droite, on a 2 liaisons CD et AB, de trafic unité chacune. Les coefficients $p(i)$ sont nuls ; on a $f(i) = 1$ sur EF, GH et IJ, et $f(i) = 0$ sur les autres arcs. On a de nouveau $y(i) = 1/2$ partout à la solution optimale : AB utilise les itinéraires AEFB et AGHB et CD les itinéraires CEF GHD et CIJD. Ici encore on obtient un coût total de 3/2, alors que la solution optimale du PDRM aurait un coût égal à 2.

Dans ces deux cas, les résultats concernant $y(i)$ sont inchangés si les valeurs de $f(i)$ et $p(i)$ sont peu différentes de celles données. Il s'agit donc d'une difficulté intrinsèque

au problème, que l'on ne peut résoudre en perturbant légèrement les données.

4 - Application à la procédure SEP

Nous allons utiliser les propriétés des péages du problème \mathcal{P}^q pour déterminer une fonction d'évaluation $g(q)$ et, éventuellement, un réseau q -optimal $\omega^*(q)$.

Compte tenu de la définition de \mathcal{P}^q , un système de péages et d'itinéraires de ce problème est un ensemble de péages sur les arcs $i \in J_2(q) = J - J_1(q) - J_0(q)$ (avec $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$), et un ensemble d'itinéraires de coût d'usage minimal utilisant les arcs $i \in I - J_0(q)$; il n'y a pas de péages sur $J_1(q)$.

Nous notons $\Gamma_1^q(k)$ le coût d'usage minimal des divers itinéraires de la liaison $k \in K$ pour le problème \mathcal{P}^q et nous posons $\tilde{U}^q = \sum_{k \in K} \Gamma_1^q(k)$.

Théorème XI

Soit un système de péages et d'itinéraires du problème \mathcal{P}^q .

- $\sum_{i \in J_1(q)} f(i) + \tilde{U}^q$ peut être pris comme fonction d'évaluation $g(q)$ dans la procédure SEP de résolution du problème \mathcal{P}^q .
- Soit $E \subset J$ l'ensemble des arcs $i \in J_1(q)$ et des arcs de catégorie 1. S'il n'y a pas d'arcs de catégorie 3, le réseau $\tilde{\omega}$ défini par $J(\tilde{\omega}) = E$ est q -optimal et l'on a $C(\tilde{\omega}) = \sum_{i \in J_1(q)} f(i) + \tilde{U}^q$; $\tilde{\omega}$ peut alors être pris comme $\omega^*(q)$ dans la procédure SEP de résolution du problème \mathcal{P}^q .

Démonstration

- \tilde{U}^q est un minorant des coûts des réseaux du problème \mathcal{P}^q en raison du corollaire VII appliqué à \mathcal{P}^q . La proposition se déduit alors immédiatement du théorème I a).
- S'il n'y a pas d'arc de catégorie 3, en vertu du théorème VIII appliqué à \mathcal{P}^q , le réseau $\omega^q \in \Omega^q$ tel que $J_1^q(\omega^q)$ soit égal à l'ensemble des arcs de catégorie 1 est optimal dans \mathcal{P}^q , et $C^q(\omega^q) = \tilde{U}^q$. La proposition se déduit alors immédiatement du théorème I b). ■

Nous sommes maintenant en mesure de préciser l'algorithme du paragraphe III-3 : il faut, pour chaque sommet q de \mathcal{A} , définir d'une part $g(q)$, d'autre part $\omega^*(q)$ ou $j^*(q)$. Pour ceci on considérera un système de péages et d'itinéraires de \mathcal{J}^q . On en déduit $g(q)$ à l'aide du théorème XI a). S'il n'y a pas d'arcs de catégorie 3, on en déduit $\omega^*(q)$ à l'aide du théorème XI b). S'il y a des arcs de catégorie 3, il faut choisir $j^*(q)$. Pour le choix de $j^*(q)$, on a adopté la règle suivante : prendre un arc de catégorie 3 de coût fixe maximal.

Cette règle a été choisie dans l'espoir d'augmenter les chances qu'il n'y ait pas d'arc de catégorie 3 parmi les successeurs du sommet q , de façon à réduire la taille de l'arborescence \mathcal{A} .

Nous introduisons par conséquent un algorithme de traitement du sommet q , appelé TRAIT (q), comportant les étapes ci-dessous :

- T1 - Détermination d'un système de péages et d'itinéraires pour \mathcal{J}^q et calcul de la valeur correspondante de \tilde{U}^q
- T2 - Si \tilde{U}^q est infini, $g(q) = \infty$, $\omega^*(q)$ est quelconque dans Ω^q , et l'algorithme est terminé

Si \tilde{U}^q est fini, aller en T3

T3 - Calcul de $g(q) = \sum_{i \in J_1(q)} f(i) + \tilde{U}^q$

T4 - Y-a-t-il au moins un arc de catégorie 3 ?

- si oui $j^*(q)$ est l'arc (ou un des arcs) de catégorie 3 de coût fixe minimal
- si non $\omega^*(q)$ est le réseau défini par $J_1(\omega^*(q)) = J_1(q) + \{ \text{arcs de cat. 1} \}$

L'algorithme est terminé dans les deux cas.

Mais il nous reste encore à préciser T1. Il est bien sûr facile de trouver un système de péages et d'itinéraires, mais il est clair que le système choisi influera sur la taille de \mathcal{A} . L'idéal serait d'avoir un système de péage optimal, c'est à dire correspondant à une solution optimale du DDRC. Mais il n'est pas certain qu'il soit payant d'effectuer de longs calculs pour cela.

5- Conclusion.

Les principaux résultats obtenus concernant le problème \mathcal{T} peuvent être résumés comme suit.

Soit un ensemble quelconque de péages $v(i,k) \geq 0$ (par définition nuls pour les arcs initiaux, et tels que $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$ pour les arcs envisagés) et soit pour chaque liaison k un itinéraire $l^*(k)$ de coût d'usage minimal. Le coût d'usage de $l^*(k)$ est noté $\Gamma_1(k)$, et l'on pose $\tilde{U} = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$. Les $v(i,k)$ et $l^*(k)$ forment un "système de péages et d'itinéraires".

Nous considérons que chaque liaison k utilise l'itinéraire $l^*(k)$ et lui seul, et paye les péages $v(i,k)$ correspondants. Comme $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$, le coût fixe de l'arc i sera entièrement payé si, et seulement si, il est utilisé par toutes les liaisons y ayant un péage strictement positif. Les arcs envisagés sont classés en 3 catégories :

- la catégorie 1 contient ceux qui sont entièrement payés par les liaisons qui les utilisent,
- la catégorie 2 contient ceux qui sont absolument inutilisés,
- la catégorie 3 comprend tous les autres.

Nous avons montré que :

- s'il n'y a pas d'arcs de catégorie 3, on obtient une solution optimale de \mathcal{T} en acceptant les arcs de catégorie 1, et en refusant ceux de catégorie 2 ; le coût total de cette solution est $\tilde{U} = \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$,
- s'il y a des arcs de catégorie 3, \tilde{U} est un minorant de la valeur optimale \hat{C} de \mathcal{T} .

Ceci s'applique évidemment à \mathcal{T}^q dans le cadre de la procédure SEP. En ce qui concerne cette dernière on peut tirer les conclusions suivantes :

- a) il reste à définir une méthode de détermination d'un "bon" système de péages, ceci est l'objet du chapitre VI,
- b) Si $\hat{C}^q = \hat{\hat{C}}^q$ il est possible de trouver un système de péages et d'itinéraires tel que le sommet q soit terminal (absence d'arcs de catégorie 3)
- c) Les circonstances $\hat{C} \neq \hat{\hat{C}}$ semblent peu fréquentes en pratique, si l'on met au point une méthode ayant des chances de fournir un système de péages optimal, on peut espérer que l'arborescence \mathcal{A} sera très réduite.

CHAPITRE VI

DETERMINATION D'UN "BON" SYSTEME DE PEAGES

Nous avons vu qu'un système de péages associé au sommet q permet de donner une valeur à la fonction d'évaluation $g(q)$, et dans certains cas de déterminer un réseau q -optimal $\omega^*(q)$.

Trouver un "bon" système de péages revient à trouver une "bonne" solution du programme PDRC^q. Comme PDRC^q a la même structure que PDRC¹ = PDRC, dans un but de simplification nous utiliserons les notations relatives à PDRC dans l'ensemble de ce chapitre.

L'idéal serait de trouver une solution optimale du PDRC. A défaut on doit chercher à s'en approcher.

Le programme PDRC (et son dual) sont de grande dimension. Par exemple pour 100 liaisons, 100 arcs envisagés et 100 arcs initiaux, il y a 20000 variables $x(i, k)$. De plus ces programmes ont une structure très particulière. Il ne paraît donc pas recommandé d'appliquer directement la méthode de simplexe. On peut envisager

- soit l'emploi du simplexe avec une méthode de décomposition,
- soit l'établissement d'un algorithme spécifique.

Nous discutons sommairement la première possibilité au paragraphe 1, avant de présenter l'algorithme spécifique qui a été adopté.

1 - Méthode de décomposition

Le programme PDRC a une forme adaptée à l'utilisation de méthodes de décomposition de type "Dantzig et Wolfe" (voir réf. [6]).

On définira un "bloc" par liaison $k \in K$, le bloc de la liaison k étant constitué par les contraintes $\sum_{i \in A(s)} x(i, k) - \sum_{i \in B(s)} x(i, k) = \delta(s, k)$ relatives à cette liaison.

Le PDRC se décompose donc en (card K) blocs, et en un dernier sous-système formé de toutes les contraintes contenant $y(i)$.

Les points extrêmes d'un bloc de la liaison k consistent à poser $x(i, k) = 1$ pour les arcs d'un des itinéraires possibles de la liaison, et $x(i, k) = 0$ sur les autres arcs

Ceci nous conduit à introduire les notations

$X(\ell)$ trafic de l'itinéraire ℓ

$\Lambda(k)$ ensemble de tous les itinéraires de la liaison k ; $\Lambda = \bigcup_{k \in K} \Lambda(k)$

$L(k)$ sous-ensemble de $\Lambda(k)$; $L = \bigcup_{k \in K} L(k)$

$L(i, k) = \{ \ell \mid \ell \in L(k), i \in I(\ell) \}$; on a donc $L(k) = \bigcup_{i \in I} L(i, k)$

$\Lambda(i, k) = \{ \ell \mid \ell \in \Lambda(k), i \in I(\ell) \}$

Si nous connaissons L , nous pouvons en déduire sans ambiguïté les $L(k)$.

Nous introduisons le programme linéaire "restreint à L " ci-dessous, PR(L).

$\forall \ell \in \bigcup_{k \in K} L(k)$ $\forall k \in K$ $\forall i \in I, \forall k \in K$ $\forall i \in I$	$x(\ell) \geq 0$ $\sum_{\ell \in L(k)} x(\ell) = 1$ $y(i) - \sum_{\ell \in L(i, k)} x(\ell) \geq 0$ $y(i)$ $\text{Min } C = \sum_{i \in I} f(i) y(i) +$ $\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in L(i, k)} p(i) T(k) x(\ell)$	$V(k) \leq \sum_{i \in I(\ell)} p(i) T(k) + \sum_{i \in I(\ell) \cap J} v(i, k)$ $v(k)$ $v(i, k) \geq 0$ $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$ $\text{Max } u = \sum_{k \in K} v(k)$
	Primal	Dual

Si $L = \Lambda$, s-a-d, pour tout k , $L(k) = \Lambda(k)$, le primal ci-dessus est équivalent au PDRC. La méthode de Dantzig et Wolfe conduit à un algorithme du type suivant :

- (1) $\forall k \in K$, $L(k)$ comprend un itinéraire de coût unitaire minimal, et, éventuellement, n'importe quels autres itinéraires de la liaison k ,
- (2) On résout le programme linéaire PR(L) (ce qui fournit les valeurs du primal et du dual à l'optimum),
- (3) On considère pour chaque liaison $k \in K$ un itinéraire de coût d'usage minimal (avec les valeurs $v(i, k)$ obtenues en (2)). Cet itinéraire fait-il partie de $L(k)$ pour tout $k \in K$?

Si oui, l'algorithme est terminé, la solution obtenue en (2) était optimale,

Si non, pour tout $k \in K$, ajouter cet itinéraire à $L(k)$. On peut, de plus, enlever de $L(k)$ les itinéraires pour lesquels $X(\ell) = 0$, si C a diminué au dernier passage en (2) (par rapport au passage précédent)

Cet algorithme se termine en un nombre fini d'étapes : en effet le nombre de situations possibles en (2) est fini (les itinéraires possibles sont en nombres finis) et nous allons montrer que l'on ne repasse jamais par la même situation. Pour ceci observons d'abord que C ne peut pas augmenter puisque entre deux passages successifs en (2) on a ajouté un ou plusieurs itinéraires qui peuvent être utilisés, et on n'a supprimé que des itinéraires qui n'étaient pas utilisés ; considérons maintenant deux passages en (2) de rang n_1 et n_2 ($n_2 > n_1$) ; au passage n_2 , ou bien C est plus petit qu'au passage n_1 , ou bien au moins un $L(k)$ contient au moins un itinéraire qu'il ne contenait pas au passage n_1 (puisque à chaque passage en (3) on ajoute un itinéraire à au moins un $L(k)$, et que cet itinéraire n'a pas été supprimé si C n'a pas diminué). Ceci démontre que l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes. Il reste à montrer que lorsque l'algorithme se termine, on est à l'optimum de PDRC. Ceci résulte du fait que $PR(\Lambda)$ est équivalent à PDRC et que l'on est à l'optimum de $PR(\Lambda)$ car les relations des écarts complémentaires entre le primal et le dual de $PR(\Lambda)$ sont vérifiées.

On n'a pas exploré plus complètement cette voie car

- le programme $PR(L)$ est lui-même d'assez grandes dimensions (les contraintes contenant un $y(i)$ sont au nombre de $\text{card } K \times \text{card } J$)
- il semble qu'il faille introduire un grand nombre d'itinéraires avant d'arriver à l'optimum.

Remarque - Le dual de $PR(L)$ contient au début de l'algorithme peu de contraintes ($\text{card } J$ plus une par itinéraire) ; cependant il devient vraisemblablement de grande taille au cours du développement des calculs en raison du nombre d'itinéraires à introduire et à conserver dans L . Mais si l'on trouvait un moyen de limiter ce nombre d'itinéraires, cela rendrait cette méthode utilisable. Cette remarque sera reprise au paragraphe VI-4 b).

2 - Généralités sur les variations de péages arc par arc

a) Variation des péages et valeur du minimum $\tilde{U} : \sum_{k \in K} \Gamma_1(k)$

Reprenons la classification des arcs en catégorie 1, 2 et 3 (voir paragraphe

V-1). Si tous les arcs sont de catégorie 1 ou 2, on peut en déduire un réseau optimal. Supposons qu'il existe au moins un arc $i \in J$ de catégorie 3, cela signifie qu'il existe :

- au moins une liaison k_1 telle que $l^*(k_1)$ contienne i
- au moins une liaison k_2 , avec $v(i, k_2) > 0$, telle que $l^*(k_2)$ ne contienne pas i .

.../...

On rappelle que $\Gamma_1(k)$ est le coût d'usage de l'itinéraire $\ell^*(k)$. Si on remplace $v(i, k)$ par $v'(i, k_1) = v(i, k_1) + \delta v$, et $v(i, k_2)$ par $v'(i, k_2) - \delta v$, sans que cela modifie $\ell^*(k_1)$ et $\ell^*(k_2)$, on aura augmenté $\Gamma_1(k_1)$ de δv sans modifier $\Gamma_1(k_2)$. On aura donc augmenté \tilde{U} de δv .

Plus précisément, on note :

- $\Gamma_2(i, k)$ le coût d'usage minimal des itinéraires de k utilisant l'arc i
$$\Gamma_2(i, k) = \min_{\ell \in L(i, k)} \Gamma(\ell)$$
- $\Gamma_3(i, k)$ le coût d'usage minimal des itinéraires de k n'utilisant pas l'arc i
$$\Gamma_3(i, k) = \min_{\ell \in L(k) - L(i, k)} \Gamma(\ell)$$
- $\delta v_1 = \Gamma_3(i, k_1) - \Gamma_1(k_1)$
- $\delta v_2 = \Gamma_2(i, k_2) - \Gamma_1(k_2)$

On peut faire varier $v(i, k_1)$ et $v(i, k_2)$ de façon à augmenter \tilde{U} de $\delta v = \min(\delta v_1, \delta v_2, v(i, k_2))$.

En conséquence, s'il existe des arcs de catégorie 3, on peut augmenter \tilde{U} à l'aide de variations de péages, en considérant les arcs un à un, tant que les liaisons concernées n'ont qu'un itinéraire de coût d'usage minimal.

Malheureusement cette dernière restriction est très gênante : en effet les variations décrites ci-dessus ont pour effet de créer des situations où les liaisons ont deux itinéraires de coût d'usage minimal.

La procédure s'arrête donc assez vite. L'on est alors logiquement conduit à envisager de faire varier les péages sur plusieurs arcs simultanément.

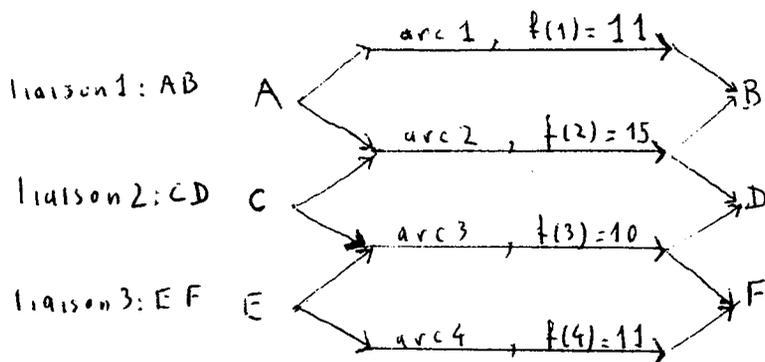
Toutefois nous avons essayé d'éviter cela et nous avons cherché s'il n'était pas possible de trouver un algorithme conduisant à l'optimum en ne faisant varier à chaque étape que les péages $v(i, k)$ d'un seul arc. Ceci nous a conduit à une étude théorique exposée en Annexe I.

L'algorithme finalement adopté a été directement inspiré de cette étude, mais il peut être exposé et compris indépendamment d'elle. L'on a tenu compte du fait que l'on ne cherche pas forcément la solution optimale du dual du PDRC, ce qui a permis des simplifications.

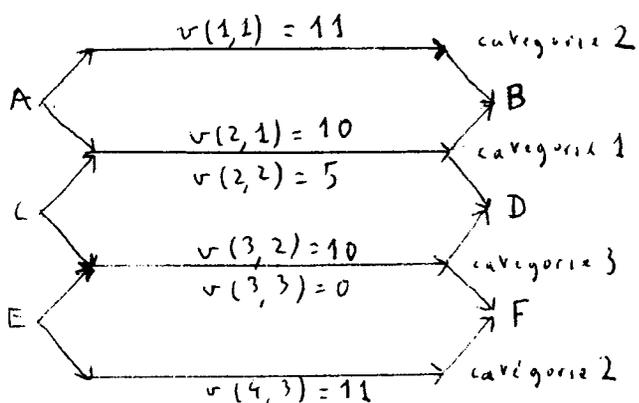
b) Présentation de l'algorithme dans le cas d'un exemple simple.

Nous allons d'abord montrer sur un exemple simple comment l'algorithme fonctionne avant d'en donner une description précise et d'en étudier les propriétés.

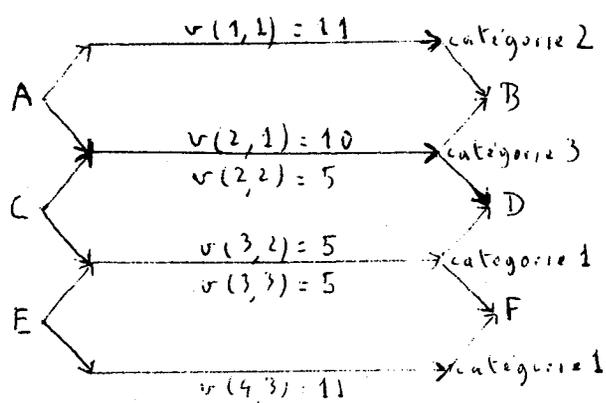
On envisage le réseau et les liaisons représentées en haut de la figure 8. Tous les coûts unitaires sont nuls, et les coûts fixes sont nuls sauf sur les 4 arcs représentés par des traits horizontaux et nommés arc 1, arc 2, arc 3, arc 4. Les 3 liaisons à satisfaire sont AB, CD, et EF. Les coûts proportionnels étant nuls, leur trafic est sans importance.



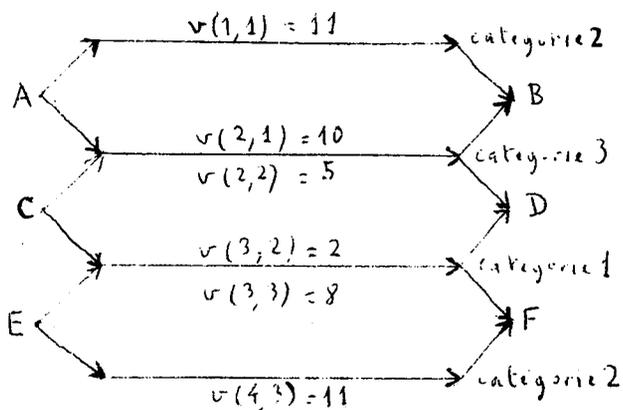
Description du réseau.



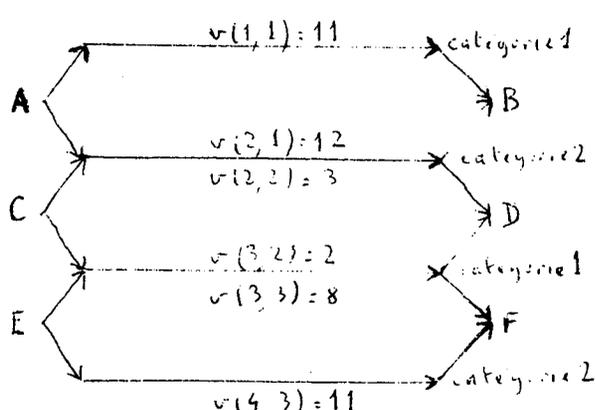
Situation I



Situation II



Situation III



Situation IV

Fig. 8 - Variations des péages sur un réseau simple

On suppose que la solution de départ est celle de la situation I de la figure 8. Le seul arc de catégorie 3 est l'arc 3. Pour améliorer la fonction critère du dual on doit augmenter $v(3, 3)$ et diminuer $v(3, 2)$ jusqu'à ce qu'on arrive à la situation II. En effet si on continue à baisser $v(3, 2)$ le plus court chemin de la relation 2 passera par l'arc 2, et on n'améliore plus la fonction critère. Mais alors on se trouve dans la situation bloquée décrite plus haut en modifiant les péages de l'arc 2, on n'améliore pas non plus la fonction critère.

Pour éviter ce "blocage", on va continuer à faire varier les péages de l'arc 3 au-delà de la situation II. Certes, on n'améliore pas la fonction critère, mais on ne l'aggrave pas non plus. On va continuer jusqu'à ce que, pour chacune de deux liaisons intéressées (CD et EF), l'itinéraire passant par l'arc 3 présente le même avantage par rapport à l'itinéraire concurrent. On arrive ainsi à la situation III : $v(2, 2) - v(3, 2) = v(4, 3) - v(3, 3) = \dots$. On a alors un seul arc de catégorie 3, l'arc 2, sur lequel on recommence la même opération de façon à arriver à la situation IV qui ne comprend plus que des arcs de catégorie 1 ou 2. On est donc à l'optimum, non seulement du PDRC mais du PDRM : le réseau optimal consiste à construire les arcs 1 et 3 de catégorie 1.

3 - Algorithme de variation des péages d'un arc

a) Principe de détermination des nouveaux péages $v'(i, k)$

Habituellement, un grand nombre de liaisons est susceptible d'utiliser un arc donné. Une généralisation naturelle de l'exemple ci-dessus, suggérée par les développements en Annexe I conduit à rechercher des $v'(i, k)$ répondant aux conditions suivantes , en posant

$$\Gamma'_2(i, k) = \Gamma_2(i, k) - v'(i, k) :$$

$$- \sum_{k \in K} v'(i, k) = f(i)$$

- il existe $\delta \Gamma$ tel que :

$$v'(i, k) > 0 \text{ implique } \Gamma'_2(i, k) + v'(i, k) - \Gamma_3(i, k) = \delta \Gamma$$

$$v'(i, k) = 0 \text{ implique } \Gamma'_2(i, k) - \Gamma_3(i, k) > \delta \Gamma$$

Ces formules expriment que la différence des coûts d'usage, entre l'itinéraire passant par i et le meilleur itinéraire concurrent, est la même pour toutes les liaisons à péage positif sur l'arc i ; en quelque sorte, les péages sont tels que passer par l'arc i présente

le même intérêt (ou le même inconvénient) pour toutes ces liaisons ; de plus, pour les liaisons à péage nul, l'arc i doit présenter un intérêt moindre (ou un inconvénient supérieur)

Il existe toujours une solution et une seule à ce système. En effet, si $\delta \Gamma$ est donné, on a : $v'(i, k) = \text{Max} (0, \delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma'_2(i, k))$

Si $\delta \Gamma$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, $\sum_{k \in K} v'(i, k)$, calculé par cette formule, est d'abord nul, puis une fonction croissante de $\delta \Gamma$. Il existe donc une valeur $\delta \Gamma$ et une seule telle que $\sum_{k \in K} v'(i, k) = f(i)$.

b) Algorithme correspondant aux formules ci-dessus

Si tous les $v'(i, k)$ étaient positifs, l'on aurait

$$f(i) = \sum_{k \in K} v'(i, k) = \delta \Gamma \cdot \text{card } K + \sum_{k \in K} (\Gamma_3(i, k) - \Gamma'_2(i, k))$$

soit $\delta \Gamma = \frac{1}{\text{card } K} [f(i) + \sum_{k \in K} (\Gamma'_2(i, k) - \Gamma_3(i, k))]$

Si, avec cette valeur de $\delta \Gamma$, $\delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma'_2(i, k)$ était positif pour tout $k \in K$, la formule $v'(i, k) = \delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma'_2(i, k)$ donnerait la solution de notre problème. Ceci suggère l'algorithme suivant :

(1) $K' = K$

(2) $\delta \Gamma = \frac{1}{\text{card } K'} [f(i) + \sum_{k \in K'} (\Gamma'_2(i, k) - \Gamma_3(i, k))]$

(3) $\forall k \in K', v(i, k) = \delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma'_2(i, k)$

(4) Est-ce que $v(i, k) \geq 0 \quad \forall k \in K'?$

- Si oui l'algorithme est terminé

- Si non $\overset{\text{poser}}{v(i, k) = 0} \quad \forall k \in K'$ tel que $v(i, k) < 0$; $K' = \{ k \in K' \mid v(i, k) > 0 \}$

Aller en (2)

Démonstration de la validité de cet algorithme

Si en (4) l'algorithme ne se termine pas, l'ensemble K' perd au moins un élément. On ne peut donc avoir qu'un nombre fini d'étapes. Par ailleurs, $\delta \Gamma$ diminue chaque fois que l'on recalcule sa valeur en (2), puisque l'on a supprimé dans K' des éléments pour lesquels $\Gamma'_2(i, k) - \Gamma_3(i, k)$ était plus grand que pour les éléments conservés. Par

.../...

conséquent, lorsque l'algorithme se termine, on a :

$$\forall k \in K', v(i, k) \geq 0 \text{ et } \Gamma'_2(i, k) + v'(i, k) - \Gamma_3(i, k) = \delta \Gamma$$

$$\forall k \in K, k \notin K', v(i, k) = 0 \text{ et } \Gamma'_2(i, k) - \Gamma_3(i, k) > \delta \Gamma$$

Les conditions de a) sont donc bien satisfaites.

c) Algorithme de variations des péages utilisé en fait

Si l'on veut que la méthode de choix de réseau soit rapide, l'on doit se demander si la longueur des calculs effectués à chaque sommet de l'arborescence \mathcal{A} est compensé par un gain sur le nombre de sommets à explorer. Aucune réponse sûre ne peut être donnée à cette question. Toutefois, cette préoccupation nous a conduit à modifier l'algorithme ci-dessus pour supprimer certains calculs paraissant peu utiles.

- (1) En traitant un arc i , on n'envisagera pas les liaisons k de péage $v(i, k) = 0$ et dont l'itinéraire de coût d'usage minimal ne passe pas par i ; on pose alors $v'(i, k) = 0$. En effet, on veut éviter de faire entrer dans les calculs les liaisons trop peu intéressées par l'arc i . Très souvent ces calculs conduiraient sans doute à un péage nul. Nous appellerons $K_1(i)$ l'ensemble des liaisons retenues : $K_1(i) = \{ k \in K \mid v(i, k) > 0 \text{ ou } i \in \ell^*(k) \}$
- (2) Pour obtenir $\Gamma'_2(i, k)$ il faut déterminer l'itinéraire de coût d'usage minimal passant par l'arc i . En fait on se contentera de chercher un itinéraire $\ell_0(i, k)$ de coût d'usage minimal obtenu après avoir annulé le coût de l'arc i . Soit $\Gamma''_2(i, k)$ la somme de ce coût d'usage minimal et de $p(i) T(k)$. Si $\ell_0(i, k)$ contient l'arc i , $\Gamma''_2(i, k) = \Gamma'_2(i, k)$. Sinon on a simplement $\Gamma''_2(i, k) < \Gamma'_2(i, k)$. Nous appellerons $K_2(i) = \{ k \in K_1(i) \mid i \notin \ell_0(i, k) \}$ l'ensemble des k pour lesquels on ne peut pas assurer l'égalité $\Gamma''_2(i, k) = \Gamma'_2(i, k)$. Pour $k \in K_2(i)$, si $v(i, k)$ et $v'(i, k)$ sont respectivement la valeur précédente et la valeur nouvelle du péage, on imposera $v'(i, k) \leq v(i, k)$, car on ne veut pas risquer d'obtenir une valeur excessivement élevée. Ceci conduit à :

$$v'(i, k) = \text{Min}(v(i, k), \text{Max}(0, \delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma'_2(i, k)))$$

Là encore, on fait cette approximation parce qu'elle ne concerne que des liaisons peu intéressées par l'arc i , et ne doit donc pas changer sensiblement les résultats, tout en simplifiant pas mal les calculs.

Ceci nous conduit à l'algorithme suivant de "variations des péages de l'arc i ", que nous nommerons VAR(i) :

.../...

V 1 - $K' = K_1(i)$; $\forall k \in K - K_1(i)$, $v'(i, k) = 0$

V 2 - $\delta \Gamma = \frac{1}{\text{card } K'} [f(i) + \sum_{k \in K'} (\Gamma_2''(i, k) - \Gamma_3(i, k))]$

V 3 - $\forall k \in K'$, $v'(i, k) = \delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma_2''(i, k)$

V 4 - Est-ce que $v'(i, k) \geq 0 \forall k \in K'$?

- Si oui aller en V 5

- Si non $v(i, k) = 0 \forall k \in K'$ tel que $v'(i, k) < 0$

$K' = \{ k \in K' \mid v'(i, k) > 0 \}$. Aller en V 2

V 5 - Est-ce que $\forall k \in K_2(i) \cap K'$, $v'(i, k) \leq v(i, k)$?

Si oui $\forall k \in K'$, $v(i, k) = v'(i, k)$; pour tout $k \in K_1$, détermination de $\ell^*(k)$, le, ou un des itinéraire(s) de coût d'usage minimal.

Si non $K' = \{ k \in K' \mid k \in K_2(i) \Rightarrow v'(i, k) < v(i, k) \}$. Aller en V 2

Avant le premier passage en V 5, et entre les passages en V 5 successifs, on a une série d'opérations identiques à celles de l'algorithme donné en b). Chaque passage en V 5 a pour effet de laisser inchangé les péages des liaisons $\in K_2(i)$ qui sans cela auraient augmenté; ceci est conforme ^{aux} indications données plus haut.

Dans le programme qui a servi à tester la méthode (voir chapitre VIII) on a donné aux $v(i, k)$ des valeurs entières. Ceci permettait de réduire notablement les durées de calcul. Ces valeurs étaient tantôt par défaut, tantôt par excès, en sorte que l'on ait exactement $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i, k) = f(i)$. Les relations données plus haut étaient donc vérifiées à une unité près.

Notons enfin que nous nommerons VAR(i, q) le même algorithme appliqué à PDRC^q(au lieu de PDRC).

4 - L'algorithme de détermination d'un "bon" système de péages

a) Description de l'algorithme

Il consiste à effectuer des variations de péages successivement sur les arcs de catégorie 3 jusqu'à ce que

- soit , il n'y ait plus que des arcs de catégorie 1 ou 2

- soit, la valeur U de la fonction critère du DDRC augmente d'une quantité inférieure à un seuil fixé à l'avance.

Dans l'exécution de l'algorithme, chaque fois que l'on modifie les péages d'un arc, on risque de modifier les catégories des autres arcs. C'est pourquoi on attribue à ces derniers la catégorie 0 jusqu'à ce que leur catégorie réelle soit recalculée.

Cet algorithme de détermination d'un système de péages sera appelé SYST. Ses étapes sont les suivantes

S 1 - Numéroté de 1 à Card J les arcs $i \in J$

- Valeurs initiales des péages $v(i, k) \geq 0$ ($i \in J, k \in K$) telles que, $\forall i \in J$

$$\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$$

- Catégorie de tout arc $i \in J$ égale à 0 ; $i_0 = 1$; $U = 0$

- Détermination, pour tout $k \in K$, de l'itinéraire $\ell^*(k)$ de coût d'usage minimal. Si pour une liaison il n'existe pas d'itinéraire aller en S 2 ; sinon aller en S 3

S 2 - Poser $U = \infty$. L'algorithme est terminé

S 3 - Calcul de la catégorie de l'arc i_0

S 4 - Si la catégorie de i_0 est 1 ou 2, aller en S 6

Si la catégorie de i_0 est 3, mettre les catégories de tous les arcs à 0, aller en S 5

S 5 - Utilisation de l'algorithme VAR(i_0), qui donne de nouvelles valeurs des péages $v(i_0, k)$ et de nouveaux $\ell^*(k)$

S 6 - Si $i_0 \neq \text{card } J - i_0 + 1$, aller en S 8

Si $i_0 = \text{card } J$, calcul de U égal à la somme des coûts d'usage des $\ell^*(k)$ de toutes les liaisons $k \in K$. Soit δU l'accroissement de U par rapport à sa valeur précédente. Aller en S 7

S 7 - Si δU est supérieur au seuil fixé à l'avance, poser $i_0 = 1$ et aller en S 8

Dans le cas contraire, calcul des catégories de tous les arcs, et aller en S 9

S 8 - Si la catégorie de i_0 (conservée en mémoire depuis son dernier calcul) est égale à 0, aller en S 2. Sinon aller en S 9

S 9 - Les $v(i, k)$ et $\ell^*(k)$ forment le système de péages et d'itinéraires cherché ; l'algorithme est terminé ; les sorties de l'algorithme comprennent aussi la valeur de U et les catégories des arcs.

Remarques - En S 8, si la catégorie de i_0 est différente de 0, on est certain que tous les arcs sont de catégorie 1 ou 2. En effet, cela signifie que depuis le dernier passage à cet arc on n'a pas trouvé de catégorie 3 au cours des phases S 3.

- On est certain que l'algorithme est fini ; en effet si pour une liaison il n'existe pas d'itinéraire, on passe en S 2 ; dans le cas contraire U (valeur possible du DDRC) ne peut tendre vers l'infini, et le nombre de passages en S 7 tels que δU soit supérieur au seuil est forcément fini.

- Le seuil utilisé en S 7 est en partie arbitraire : sa valeur a normalement une influence sur la rapidité de l'ensemble de la méthode, mais seule l'expérience pourrait nous éclairer à ce sujet.

- On peut ajouter à cet algorithme un critère de sécurité en donnant une limite supérieure au nombre de fois que les arcs sont examinés. Ici aussi on doit être guidé par l'expérience.

- Les valeurs initiales des péages sont en principe quelconques, sous les seules conditions que $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$ et $v(i, k) \gg 0$. Toutefois il paraît clair, et l'expérience le confirme, que la rapidité de l'algorithme dépend largement de ces valeurs initiales. On indiquera paragraphe VIII-1 la méthode utilisée pour les déterminer lors des tests effectués.

- Lorsque l'algorithme SYST sera appliqué à $PDRC^q$, il sera appelé SYST(q).

b) Remarque sur l'utilisation de SYST pour résoudre PDRC

Lorsque le système de péage obtenu est optimal, on a une solution optimale du PDRC. Sinon on a simplement une solution que l'on pense "bonne". Mais il serait peut être possible d'utiliser l'algorithme SYST en liaison avec le programme $PR(L)$ du paragraphe 1 pour obtenir de façon certaine une solution optimale de PDRC. En effet le système de péages obtenu par SYST peut guider le choix des $L(k)$ et éviter d'introduire des itinéraires peu intéressants. La remarque en fin du paragraphe 1 pourrait alors s'appliquer. Nous donnons ci-dessous une idée approximative de la méthode qui pourrait, nous semble-t-il, être employée.

(1) Appliquer l'algorithme SYST

(2) Former $L(k)$, $\forall k \in K$, à l'aide des itinéraires de coût d'usage minimal ou presque minimal

(3) Résoudre le dual de $PR(L)$; on conserve inchangés les péages des arcs ne faisant partie d'aucun itinéraire retenu

- (4) Eventuellement on modifie les péages de certains arcs selon la méthode du paragraphe 3, en laissant inchangée la valeur du dual de $PR(L)$.
- (5) On recherche un itinéraire de coût d'usage minimal pour chaque liaison. S'ils font tous partie du $L(k)$ correspondant, l'algorithme est terminé. Sinon on ajoute cet itinéraire à $L(k)$ et on supprime de $L(k)$ les itinéraires devenus inutiles.

On peut penser que cet algorithme serait beaucoup plus rapide que celui du paragraphe 1, et que les $L(k)$ resteraient de taille limitée (grâce, en particulier, au fait que les péages des arcs inutilisés sont conservés en (3)). Si les péages obtenus en (1) étaient optimaux, l'algorithme donnerait immédiatement la solution optimale.

Cette voie n'a pas été davantage explorée, car elle paraissait peu utile ici, en raison de la remarque en fin du paragraphe III-3 selon laquelle des calculs trop longs pour améliorer la fonction d'évaluation ne sont pas rentables.

CHAPITRE VII

RECAPITULATION DE L'ENSEMBLE DE LA METHODE

Nous avons un "algorithme général" dont l'exécution nécessite l'utilisation de trois autres algorithmes : TRAIT, SYST, VAR. Nous redécrivons ci-dessous ces divers algorithmes, en rappelant les définitions et notations nécessaires. Nous supposons seulement connues la définition du problème et les notations introduites au paragraphe II.1. Le présent chapitre est purement descriptif et ne contient aucune justification.

1 - Algorithme général (Voir paragraphe III.3)

a) Notations et définitions

- Q est un ensemble de "sommets" q . Chacun de ces sommets est défini par deux ensembles $J_0(q) \subset J$ et $J_1(q) \subset J$ avec $J_1(q) \cap J_0(q) = \emptyset$; on a $1 \in Q$ et $J_0(1) = J_1(1) = \emptyset$

- A $q \in Q$ peuvent être associés d'une part à une fonction numérique $g(q)$ dite fonction d'évaluation, et d'autre part $\omega^*(q) \in \Omega$ ou $j^*(q) \in J$, le ou étant exclusif; s'il existe $\omega^*(q)$, q est dit terminal.

- $r_1(q) \in Q$ est défini par $J_0(r_1(q)) = J_0(q) + \{ j^*(q) \}$

$$J_1(r_1(q)) = J_1(q)$$

- $r_2(q) \in Q$ est défini par $J_0(r_2(q)) = J_0(q)$

$$J_1(r_2(q)) = J_1(q) + \{ j^*(q) \}$$

- P est un sous-ensemble de Q

b) Etapas de l'algorithme

G 1 - Exécution de TRAIT(q) pour $q = 1$, qui détermine $g(1)$ et ($\omega^*(1)$ ou $j^*(1)$). Poser $P = \{ 1 \}$. Si $g(1) = +\infty$, il n'y a pas de solution finie et l'algorithme est terminé.

Si $g(1) < \infty$, aller en G 2

G 2 - Choisir $\tilde{q} \in P$ tel que $g(\tilde{q}) = \min_{q \in P} g(q)$

G 3 - Le sommet \tilde{q} est-il terminal ?

Si oui, $\omega^*(\tilde{q})$ est un réseau optimal de coût total $g(\tilde{q})$; l'algorithme est terminé.

Si non, faire $P = P - \{\tilde{q}\}$, aller en G 4

G 4 - Pour $q^* = r_1(\tilde{q})$, puis pour $q^* = r_2(\tilde{q})$, effectuer les opérations G 4 1 et G 4 2 ci-dessous :

- G 4 1 - Exécution de TRAIT (q^*) qui détermine $g(q^*)$ et ($\omega^*(q^*)$ ou $j^*(q^*)$)

- G 4 2 - $P = P + \{q^*\}$

G 5 - Aller en G 2

2 - Algorithme TRAIT (q) (Voir paragraphe V-4)

a) Définitions et notations

- On peut à tout sommet $q \in Q$ faire correspondre un problème de réseau optimal \mathcal{J}^q caractérisé par $\Gamma^q = I - J_0(q)$

$$J^q = J - J_0(q) - J_1(q)$$

- Un itinéraire de la liaison $k \in K$ pour \mathcal{J}^q est un sous-ensemble de Γ^q , dont les éléments sont des arcs constituant un chemin sans circuit de l'origine $d_1(k)$ à la destination $d_2(k)$

- Un système de péages et d'itinéraires pour \mathcal{J}^q est un ensemble $\{v(i, k), \ell^*(k), i \in J^q, k \in K\}$ tel que $v(i, k) \geq 0$, $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$ ($\forall i \in J^q$),

et $\ell^*(k)$ soit un itinéraire de la liaison k pour \mathcal{J}^q

- Un tel système étant donné, on classe les arcs $i \in J^q$ en 3 catégories de la façon suivante :

. i est de catégorie 1 si pour tout $k \in K$, $v(i, k) > 0 \Rightarrow i \in \ell^*(k)$

. i est de catégorie 2 s'il n'appartient à aucun itinéraire $\ell^*(k)$

. i est de catégorie 3 dans tous les autres cas

- U^q est un réel (qui peut être égal à $+\infty$) associé à un système de péages et d'itinéraires.

b) Etapas de l'algorithme

Cet algorithme détermine, pour un sommet $q \in Q$, $g(q)$ et ($\omega^*(q)$ ou $j^*(q)$)

Les étapes sont les suivantes :

T 1 - Exécution de SYST(q) qui détermine un système de péages et d'itinéraires pour \mathcal{J}^q et la valeur correspondante de U^q

T 2 - Si U^q est infini, $g(q) = \infty$, $\omega^*(q)$ est quelconque dans Ω^q , et l'algorithme est terminé

Si U^q est fini, aller en T 3

T 3 - Calcul de $g(q) = \sum_{i \in J_1(q)} f(i) + U^q$

T 4 - Y a-t-il au moins un arc de catégorie 3 ?

Si oui $j^*(q)$ est l'arc (ou l'un des arcs) de catégorie 3 de coût fixe minimal

Si non $\omega^*(q)$ est le réseau défini par $J_1(\omega^*(q)) = J_1(q) + \{\text{arcs de catégorie 1}\}$

L'algorithme est terminé dans les deux cas.

3 - Algorithme SYST(q) (Voir paragraphe VI.4)

a) Définitions et notations

Etant donnés des péages $v(i, k) \geq 0$ ($i \in J^q$, $k \in K$)

- le coût d'usage de l'arc $i \in I^q$ pour la liaison k est $\gamma(i, k) = v(i, k) + p(i) T(k)$

- le coût d'usage d'un itinéraire de la liaison k pour \mathcal{J}^q est la somme des coûts d'usage des arcs composant cet itinéraire.

b) Etapas de l'algorithme

Cet algorithme détermine un système de péages et d'itinéraires pour \mathcal{J}^q , la valeur de U^q , et les catégories des arcs $i \in J^q$ (toutefois si U^q est infini, les autres éléments ne sont pas nécessaires).

On doit se donner au départ un seuil de variations de U^q , et des valeurs initiales des péages $v(i, k) \geq 0$ ($i \in J^q$, $k \in K$) soumises à la seule condition que ,

$$\forall i \in J^q, \sum_{k \in K} v(i, k) = f(i).$$

Les étapes sont les suivantes :

- S 1 - Numéroté de 1 à $\text{Card } J^q$ les arcs $i \in J^q$
Donner aux $v(i, k)$ ($i \in J^q$, $k \in K$) leurs valeurs initiales
Catégorie de tout arc $i \in J^q$ égale à 0 ; $i_0 = 1$; $U^q = 0$
Détermination, pour tout $k \in K$, de l'itinéraire $\ell^*(k)$ pour \mathcal{J}^q de coût d'usage minimal. Si pour une liaison il n'existe pas d'itinéraire pour \mathcal{J}^q , aller en S 2 ; sinon aller en S 3
- S 2 - Poser $U^q = \infty$. L'algorithme est terminé
- S 3 - Calcul de la catégorie de l'arc i_0 pour le système de péages et d'itinéraires $\{v(i, k), \ell^*(k)\}$
- S 4 - Si la catégorie de i_0 est 1 ou 2, aller en S 6
Si la catégorie de i_0 est 3, mettre les catégories de tous les arcs à 0, aller en S 5
- S 5 - Utilisation de l'algorithme VAR (i_0, q), qui détermine de nouvelles valeurs des péages $v(i_0, k)$ et de nouveaux $\ell^*(k)$
- S 6 - Si $i_0 \neq \text{Card } J^q$, $i_0 = i_0 + 1$, aller en S 8
Si $i_0 = \text{Card } J^q$, calcul de U^q égal à la somme des coûts d'usage des $\ell^*(k)$ de toutes les liaisons $k \in K$. Soit δU^q l'accroissement de U^q par rapport à sa valeur précédente. Aller en S 7
- S 7 - Si δU^q est supérieur au seuil de variation que l'on s'est donné, poser $i_0 = 1$ et aller en S 8
Dans le cas contraire, calcul des catégories de tous les arcs pour le système de péages et d'itinéraires $\{v(i, k), \ell^*(k)\}$, et aller en S 9
- S 8 - Si la catégorie de i_0 (conservée en mémoire depuis son dernier calcul) est égale à 0, aller en S 2. Sinon aller en S 9
- S 9 - Les $v(i, k)$ et $\ell^*(k)$ forment le système de péages et d'itinéraires cherché. Les sorties de l'algorithme comprennent aussi U^q et les catégories des arcs de J^q . L'algorithme est terminé.

.../...

4 - Algorithme VAR (i, q) (Voir paragraphe VI.3 c)

a) Définition et notations

$$- K_1(i) = \{k \in K \mid v(i, k) > 0 \text{ ou } i \in \ell^*(k)\} \text{ pour tout } i \in J^q$$

- $\Gamma_3(i, k)$ est le coût d'usage minimal des itinéraires de la liaison k pour J^q n'utilisant pas l'arc i

- Annulons le coût d'usage de l'arc $i \in J^q$. Nous appelons alors $\ell_0(i, k)$ un itinéraire de coût d'usage minimal de la liaison k pour J^q , et $\Gamma_2''(i, k)$ la somme de ce coût d'usage minimal et de $p(i)T(k)$

$$- K_2(i) = \{k \in K_1(i) \mid i \notin \ell_0(i, k)\}$$

b) Etapes de l'algorithme

Etant donné un système de péages et d'itinéraires pour J^q , VAR (i, q) détermine de nouveaux péages pour l'arc i ($i \in J^q$) et les itinéraires $\ell^*(k)$ correspondants.

Les étapes sont les suivantes :

$$V 1 - K' = K_1(i) ; v'(i, k) = 0 \quad \forall k \in K - K_1(i)$$

$$V 2 - \delta \Gamma = \frac{1}{\text{card} K'} \left[p(i) + \sum_{k \in K'} (\Gamma_2''(i, k) - \Gamma_3(i, k)) \right]$$

$$V 3 - v'(i, k) = \delta \Gamma + \Gamma_3(i, k) - \Gamma_2''(i, k), \quad \forall k \in K'$$

V 4 - Est-ce que $v'(i, k) \geq 0$ pour tout $k \in K'$?

Si oui aller en V 5

Si non $v(i, k) = 0, \forall k \in K'$ tel que $v'(i, k) < 0 ; K' = \{k \in K' \mid v'(i, k) > 0\}$. Aller en V 2

V 5 - Est-ce que $\forall k \in K_2(i) \cap K', v'(i, k) \leq v(i, k)$?

Si oui, $\forall k \in K', v(i, k) = v'(i, k)$. Détermination pour chaque liaison k d'un itinéraire $\ell^*(k)$ de coût d'usage minimal pour J^q . L'algorithme est terminé.

Si non $K' = \{k \in K' \mid k \in K_2(i) \Rightarrow v'(i, k) < v(i, k)\}$. Aller en V 2.

5 - Commentaires sur ces algorithmes

Les valeurs initiales des péages à fournir pour SYST(q) sont en principe quelconques, mais leur choix influe sur la rapidité de la méthode. On indiquera au

paragraphe VIII.1 comment l'on a procédé lors des tests effectués.

Les calculs sur ordinateur sont plus rapides lorsqu'on utilise des nombres entiers. C'est pourquoi, lors des tests effectués (Voir chapitre VIII), l'on a systématiquement donné aux $p(i)$, $T(k)$ et $v(i,k)$ des valeurs entières. Pour les péages $v(i,k)$, cela imposait que l'on donne des valeurs entières à la sortie de $VAR(i,q)$. Ces valeurs étaient données tantôt par excès, tantôt par défaut, de façon à ce que l'on ait toujours exactement $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$. Dans ces conditions, U^q (de $SYST(q)$) avait toujours des valeurs entières ainsi que δU^q calculé en S 6. Le seuil de variation utilisé en S 7 était supposé inférieur à 1, de sorte que le programme continuait jusqu'à ce que $\delta U^q = 0$, ou que tous les arcs soient de catégorie 1 ou 2.

On a montré paragraphe II.3 b) que le modèle pouvait être appliqué au cas des voies à double sens. Ceci imposait en principe une transformation assez compliquée du graphe. Cependant, pour utiliser les algorithmes ci-dessus il n'est pas nécessaire de réaliser effectivement cette transformation. En effet, il suffit de déterminer de façon correcte les arcs des itinéraires de coût d'usage minimal. Les arcs à coûts fixe et unitaire nuls n'intervenant pas dans le coût de l'itinéraire, on est ramené à chercher un itinéraire de coût minimal dans un réseau comprenant des "arêtes" (non orientées) ce qui ne pose aucun problème particulier. C'est d'ailleurs ce qui a été fait lors des tests exposés chapitre VIII.

CHAPITRE VIII

TESTS EFFECTUES SUR ORDINATEUR

La méthode présentée dans cette note a été programmée et testée sur un ordinateur 10 070. Le programme a été baptisé RETRO (REseau de TRansport Optimal). Il a été écrit en FORTRAN, à l'exception de l'algorithme de recherche du plus court chemin dans un graphe écrit en assembleur.

1 - Description du programme RETRO

Le programme suit la méthode décrite au Chapitre VII. Les voies peuvent être à sens unique ou à double sens. Comme indiqué au paragraphe VII.5, les diverses grandeurs $f(i)$, $T(k)$, $p(i)$, $v(i,k)$ sont entières tout au long des calculs. Dans SYST(q), on poursuit les calculs jusqu'à ce que δU^q (entier) soit nul ou que les arcs soient tous de catégorie 1 ou 2.

Dans sa version actuelle, le programme n'utilise pas de mémoires périphériques (disque, bande, etc...). La mémoire centrale doit contenir deux tableaux de taille $N1 \times R$, $N1$ étant le nombre d'arcs à coût fixe et R le nombre de liaisons. La présence de ces deux tableaux peut limiter la taille des problèmes qui peuvent être traités par un ordinateur donné. Notons que l'un des tableaux pourrait être transféré en mémoire périphérique sans inconvénient notable.

Il reste à préciser d'une part la méthode d'initialisation des péages nécessaire pour SYST(q), et d'autre part une méthode de génération automatique de réseau introduite pour faire plus commodément les essais.

a) Initialisation des péages

Il est nécessaire d'introduire comme donnée dans SYST(q) des valeurs initiales des péages. Ces valeurs initiales peuvent en principe être quelconques, à condition

de vérifier, $\forall i \in J^A$, $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$. Toutefois l'expérience montre que leur choix influe grandement sur la rapidité de l'exécution du programme.

Dans le programme RETRO ce calcul des valeurs initiales est fait une seule fois, pour SYST (1). Ensuite les mêmes valeurs sont reprises pour SYST (q), en se limitant bien sûr aux arcs de J^A . L'idée guidant la détermination de ces péages était la suivante : on doit, pour un arc donné, attribuer à une liaison un péage d'autant plus élevé que cette liaison paraît avoir intérêt à utiliser cet arc, et qu'elle a un fort trafic.

Après quelques tâtonnement on a adopté la méthode suivante. Soit un arc donné $i \in J$. On définit pour chaque liaison $k \in K$ un poids $\pi_1(i, k) = T(k) \left(\frac{P_1(k)}{P_2(i, k)} \right)^8$, formule dans laquelle

- $P_1(k)$ est la longueur du plus court chemin de la liaison k , la longueur de chaque arc $j \in I$ étant $p(j)$,
- $P_2(i, k)$ est la longueur du plus court chemin de la liaison k utilisant l'arc i , la longueur de chaque arc $j \in I$ étant $p(j)$.

Puis on définit à partir de π_1 un nouveau poids π_2 , de façon à éliminer les liaisons les moins intéressantes, par la formule :

$$\pi_2(i, k) = \text{partie entière de} \left(\frac{\pi_1(i, k) \cdot \text{card } K}{\sum_{k \in K} \pi_1(i, k)} \right)$$

Enfin $v(i, k) = \frac{f(i) \pi_2(i, k)}{\sum_{k \in K} \pi_2(i, k)}$ arrondi tantôt à l'entier supérieur, tantôt à l'entier inférieur, de façon à assurer la relation $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$.

b) Génération de réseaux aléatoires

Pour faire commodément des essais avec des réseaux comparables de tailles diverses, on a écrit un programme de génération automatique de "réseaux aléatoires". Pour construire un tel réseau on part d'un quadrillage carré parfait, et on déplace chaque sommet (d'une longueur inférieure à la moitié d'une maille) de façon aléatoire. On obtient ainsi un réseau dont les maillons sont de longueurs diverses. A chacun de ces maillons on fait correspondre deux arcs parallèles, un sans coût fixe (arc existant), l'autre avec un coût fixe. Tous ces arcs sont à double sens de circulation.

Les coûts proportionnels et coûts fixes des arcs sont calculés proportionnellement à la longueur des maillons ci-dessus, dans les conditions suivantes :

- le coût proportionnel d'un arc avec coût fixe est égal à 4/5 du coût proportionnel de l'arc sans coût fixe correspondant,
- le coefficient permettant de calculer les coûts fixes est choisi de telle sorte que dans la solution optimale la proportion d'arcs à construire soit comprise entre 1/3 et 2/3. Cette condition a été imposée car l'on a constaté que, en dehors de cet intervalle, les durées de calcul se réduisant notablement.

De plus on tire au sort les sommets origine et destination, en imposant toutefois aux quatre sommets extrêmes (formant le carré initial) d'en faire partie de façon que tous les arcs puissent être concernés par l'écoulement du trafic. Chaque sommet choisi se voit attribuer un "poids" tiré au sort, et le trafic de chaque liaison est égal au produit des poids des deux sommets origine et destination.

2 - Durées de calcul sur l'ordinateur

Les résultats concernant les divers passages effectués avec des "réseaux aléatoires" sont rassemblés dans le tableau ci-dessous, dans lequel

N1 représente le nombre d'arcs avec coût fixe

R est le nombre total de liaisons,

"Durée" est la durée de calcul par l'ordinateur en minutes

$$k = \frac{\text{Durée}}{N1 \times R} 10^4$$

N1	45	45	45	45	45	45	45	97	97	97	97	97
R	50	50	50	50	100	100	100	50	50	100	100	100
Durée (minutes)	0,89	0,27	0,43	0,30	0,75	0,40	0,52	0,92	1,46	1,41	1,35	1,38
k	4	1,2	2	1,33	1,7	0,9	1,12	1,9	3	1,4	1,4	1,4

On observe que des problèmes de même taille ont des durées nettement différentes, ce qui prouve la part de hasard intervenant dans cette durée. En particulier il semble que l'on ait des durées particulièrement longues lorsque la procédure SEP doit être utilisée (ce qui est arrivé ici deux fois : la première et la neuvième colonne du tableau).

Compte tenu de ces variations, la valeur de k reste sensiblement constante lorsque la taille du problème varie. Ceci nous conduit à la formule

$$\text{Durée} = k \frac{N1 \times R}{10^4}$$

k étant compris entre 0,9 et 4, avec une valeur probable 1,5.

Cette formule a été établie pour un type de problème bien particulier et ne saurait être généralisée sans précautions. On ne sait pas, par exemple, quelle serait l'influence d'une grande augmentation de taille du réseau. De plus, il semble, à la suite de quelques essais, que l'importance relative des coûts fixes (par rapport aux coûts proportionnels) ait une grande influence : si les coûts proportionnels étaient annulés, les durées seraient beaucoup plus grandes.

Toutefois, on peut penser que la formule ci-dessus donne un ordre de grandeur valable lorsqu'on ne s'éloigne pas trop des conditions des tests. Pour le vérifier on a effectué un passage avec un réseau tiré de l'étude COBRA (voir ref. [7]) avec $N1 = 19$ et $R = 129$. La durée a été de 0,86 minutes, ce qui correspond à $k = 3,3$. On observe que

- cette durée est nettement inférieure à celle qu'aurait sans doute donnée la méthode COBRA après adaptation de cette dernière à l'ordinateur 10070 (5 à 10 minutes),
- la valeur de k entre dans la fourchette donnée plus haut ; elle est toutefois assez élevée étant donné que la procédure SEP n'a pas eu à intervenir.

Dans la comparaison avec la méthode COBRA, il faut insister sur deux points importants :

- la durée de RETRO est proportionnelle à $N1$, alors que celle de COBRA est exponentielle en fonction de $N1$ (doublement lorsque $N1$ augmente de 3 unités). Ceci donne très vite un avantage considérable à RETRO lorsque l'on fait croître $N1$.
- la durée de RETRO est proportionnelle au nombre de liaisons R , alors que celle de COBRA est proportionnelle au nombre d'origines des liaisons. Ceci donne un avantage à COBRA lorsque le nombre d'origines et destinations croît et que l'on veut prendre en compte toutes les liaisons entre ces origines et destinations ; en pratique, dans ce cas, si on veut utiliser RETRO, on ne pourra conserver que les liaisons les plus importantes.

ANNEXE I

APPROXIMATION DU PROGRAMME PDRC PAR UN PROGRAMME CONVEXE

Résumé de l'annexe I

Dans le texte principal, le problème de recherche de réseau optimal conduit à l'établissement d'un programme linéaire de grande taille, PDRC, que l'on doit si possible résoudre, ou sinon, pour lequel on doit déterminer un bon minorant de la valeur optimale. Dans cette annexe, on introduit un programme convexe $PAC(\lambda, L)$, λ étant un nombre positif et L un ensemble d'itinéraires du réseau, tel que, si L répond à certaines conditions (qui ne sont malheureusement pas vérifiables a priori), $PAC(\lambda, L)$ "tend" vers PDRC si λ tend vers l'infini. L'on écrit aussi un programme convexe "dual" de $PAC(\lambda, L)$, présentant avec ce dernier les propriétés habituelles de la dualité : en particulier toute solution réalisable du dual a une valeur inférieure ou égale à celle de toute solution du primal, l'égalité ayant lieu à l'optimum.

Dans le dual de $PAC(\lambda, L)$, comme dans celui de PDRC, à chaque arc envisagé est associé un "péage" par liaison, la somme des péages des diverses liaisons étant égale au coût fixe de l'arc. Si tous les péages sont fixés, la meilleure valeur du dual s'obtient en affectant le trafic de chaque liaison sur les itinéraires de L , selon une affectation "exponentielle" : on répartit le trafic entre les itinéraires correspondant à la liaison considérée, proportionnellement à $e^{-\lambda \Gamma(\ell)}$, $\Gamma(\ell)$ étant le "coût d'usage" de l'itinéraire ℓ , c'est à dire la somme des péages et des coûts proportionnels des arcs de ℓ . Par ailleurs, pour un arc envisagé donné, une méthode simple permet de trouver les meilleurs péages possibles, si on suppose fixés les péages de tous les autres arcs ; cette opération est appelée "optimisation de l'arc". On montre que l'on tend (en un nombre infini d'étapes) vers l'optimum de $PAC(\lambda, L)$ en effectuant alternativement des optimisations d'arc et des affectations exponentielles.

Pour tendre vers l'optimum PDRC, il faut non seulement effectuer des optimisations d'arc et des affectations exponentielles, mais aussi faire tendre λ vers l'infini, et ajouter si nécessaire des itinéraires à L . L'on montre qu'il est possible de définir précisément une telle procédure (les itinéraires à ajouter à L sont, pour chaque liaison, à chaque étape, l'itinéraire

de coût d'usage minimal, s'il n'est pas déjà dans L). De plus, à chaque étape, on dispose d'un minorant de la valeur du PDRC.

Toutefois, la procédure ci-dessus est complexe. Or, dans la recherche d'un réseau optimal, il n'est pas indispensable de tendre de façon certaine vers l'optimum de PDRC. C'est pourquoi nous avons préféré utiliser une méthode plus simple. Elle consiste à effectuer, arc par arc, les variations de péages obtenues en faisant tendre λ vers l'infini dans la méthode d'optimisation d'un arc mentionnée ci-dessus. Il n'est plus alors nécessaire de procéder à l'affectation exponentielle ; l'on a seulement besoin de connaître pour chaque liaison le coût d'usage de deux itinéraires : le meilleur passant par l'arc, et le meilleur évitant cet arc. C'est cette méthode qui est exposée dans le texte principal.

TEXTE DE L'ANNEXE I

Dans la recherche d'un algorithme de résolution du PDRC par variations de péages arc par arc, nous nous sommes heurtés au fait que, dans le dual, seul le plus court chemin de chaque liaison intervenait (voir texte principal § VI-2). Ceci correspond au fait que, dans le primal, chaque liaison est normalement affectée à un seul itinéraire. C'est pourquoi l'on a cherché à formuler un problème approché dans lequel le trafic se répartirait entre itinéraires concurrents.

On va d'abord décrire un programme concernant l'affectation du trafic d'une liaison donnée sur plusieurs itinéraires, puis présenter le programme choisi comme approximation de PDRC, étudier ses utilisations possibles, et indiquer sommairement les raisons qui ont conduit à l'algorithme adopté dans le problème du réseau optimal.

I - AFFECTATION DU TRAFIC D'UNE LIAISON SUR DES ITINERAIRES CONCURRENTS

a) Présentation et propriétés du "programme d'affectation"

Plusieurs méthodes d'affectation peuvent être envisagées. Celle qui a paru le mieux convenir ici est la suivante :

Soient L l'ensemble des itinéraires,

$X(\ell)$ le trafic empruntant l'itinéraire ℓ ,

$\Gamma(\ell)$ le coût de l'itinéraire ℓ (nombre réel non négatif),

λ un paramètre réel positif.

Chaque itinéraire ℓ supporte un trafic proportionnel à $e^{-\lambda\Gamma(\ell)}$ c'est à dire si le trafic total de la relation est égal à 1,

$$X(\ell) = \frac{e^{-\lambda\Gamma(\ell)}}{\sum_{m \in L} e^{-\lambda\Gamma(m)}}$$

L'affectation ci-dessus sera appelée "affectation exponentielle de paramètre λ "⁽¹⁾. Si λ est faible, le trafic se répartit à peu près également

(1) L'affectation exponentielle a été en particulier étudiée par R.B. DIAL (réf. [8]) qui a fourni un algorithme permettant de trouver rapidement le résultat de l'affectation entre tous les itinéraires d'un graphe sans circuit.

entre tous les itinéraires. Plus λ a une valeur élevée, plus le trafic se concentre sur les itinéraires de coûts les plus faibles. En particulier, en écrivant la formule ci-dessus sous la forme $X(\ell) = \frac{1}{\sum_{m \in L} e^{-\lambda(\Gamma(m) - \Gamma(\ell))}}$, on

obtient la limite de $X(\ell)$ lorsque λ tend vers l'infini : le trafic emprunte uniquement le (ou les) itinéraires de coût minimal ; s'il y a plusieurs itinéraires minimaux de coûts égaux, le trafic se répartit également entre eux.

Théorème I : L'affectation exponentielle de paramètre λ est la solution unique du programme convexe suivant (que nous appellerons 'programme d'affectation') :

$$\forall \ell \in L \quad X(\ell) \geq 0$$

$$\sum_{\ell \in L} X(\ell) = 1$$

$$\text{Minimiser } R = \sum_{\ell \in L} \frac{X(\ell) \text{ Log } X(\ell)}{\lambda} + \sum_{\ell \in L} \Gamma(\ell) X(\ell)$$

(On pose par convention $0 \text{ Log } 0 = 0$).

Démonstration :

Nous sommes bien en présence d'un programme convexe : les contraintes sont linéaires, la fonction R est définie dans tout le domaine vérifiant les contraintes (grâce à la convention pour $X(\ell) = 0$) et est convexe.

Le domaine étant non vide et compact, la fonction R y étant continue, le minimum de R est atteint en au moins un point. Ce point est une solution optimale du programme.

Pour toute solution optimale, le théorème de Kuhn et Tucker montre qu'il existe un réel ρ tel que $\rho \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{\text{Log } X(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell)$, pour tout $\ell \in L$, l'égalité étant vérifiée si $X(\ell) > 0$. Or ici on ne peut avoir $X(\ell) = 0$ (cela entraînerait $\rho = -\infty$). On a donc, pour tout ℓ , à l'optimum :

$$\frac{\text{Log } X(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) = \rho - \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{soit } X(\ell) = e^{-\lambda \Gamma(\ell)} e^{\rho - \frac{1}{\lambda}}$$

Cette dernière formule, combinée avec $\sum_{\ell \in L} X(\ell) = 1$, permet de retrouver

immédiatement la formule de l'affectation exponentielle. Ceci prouve que :

- la solution optimale est unique,
- elle n'est autre que l'affectation exponentielle de paramètre λ ■ (1).

On notera $\hat{X}(\ell)$ et \hat{R} les valeurs prises par $X(\ell)$ et R à l'optimum.
La démonstration précédente prouve les relations :

$$\hat{X}(\ell) = \frac{e^{-\lambda\Gamma(\ell)}}{\sum_{m \in L} e^{-\lambda\Gamma(m)}} \quad (1)$$

$$\frac{\text{Log } \hat{X}(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) = \rho - \frac{1}{\lambda} \quad \forall \ell \in L \quad (2)$$

Corollaire II : Les valeurs prises par la solution optimale du programme d'affectation vérifient les relations suivantes :

$$\hat{R} = \frac{\text{Log } \hat{X}(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) \quad \forall \ell \in L \quad (3)$$

$$e^{-\lambda\hat{R}} = \sum_{\ell \in L} e^{-\lambda\Gamma(\ell)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \Gamma(\ell)} = \hat{X}(\ell) \quad (5)$$

Démonstration :

On a $\hat{R} = \sum_{\ell \in L} \left(\frac{\text{Log } \hat{X}(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) \right) \hat{X}(\ell)$, soit en raison de (2)

$$\hat{R} = \left(\rho - \frac{1}{\lambda} \right) \sum_{\ell \in L} \hat{X}(\ell) = \rho - \frac{1}{\lambda}$$

ou $\hat{R} = \frac{\text{Log } \hat{X}(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) \quad \forall \ell \in L$ ce qui démontre la formule (3).

Celle-ci peut aussi s'écrire :

$$\lambda\hat{R} = \text{Log } \hat{X}(\ell) + \lambda\Gamma(\ell)$$

$$e^{\lambda\hat{R}} = \hat{X}(\ell) e^{\lambda\Gamma(\ell)} = \left(\sum e^{-\lambda\Gamma(\ell)} \right)^{-1} \text{ en vertu de (1).}$$

(1) Le signe ■ indique la fin d'une démonstration.

$$\text{donc } e^{-\lambda \hat{R}} = \sum_{\ell \in L} e^{-\lambda \Gamma(\ell)} \quad (\text{formule 4})$$

En supposant λ fixé, on en déduit

$$- \lambda e^{-\lambda \hat{R}} d\hat{R} = - \lambda \sum_{\ell \in L} e^{-\lambda \Gamma(\ell)} d\Gamma(\ell)$$

$$\text{soit } \frac{\partial \hat{R}}{\partial \Gamma(\ell)} = \frac{e^{-\lambda \Gamma(\ell)}}{\sum_{m \in L} e^{-\lambda \Gamma(m)}} = \hat{X}(\ell) \quad (\text{formule 5}) \quad \blacksquare$$

Lorsque λ tend vers l'infini, le programme d'affectation devient un programme linéaire dont la solution est évidente : le trafic emprunte uniquement le (ou les) itinéraires de coût minimal ; s'il y a plusieurs itinéraires minimaux de même coût, le trafic se répartit arbitrairement entre eux. On sait que, par contre, la limite de $\hat{X}(\ell)$ si λ tend vers l'infini est toujours unique : le trafic se répartit également entre tous les itinéraires minimaux.

b) Programme "dual" du programme d'affectation. Propriétés de dualité

Nous allons associer au programme d'affectation ci-dessus le programme suivant que nous appellerons son "dual" (le premier étant alors considéré comme le primal) :

$$\begin{aligned} \forall \ell \in L \quad Z(\ell) &\geq 0 \\ \sum_{\ell \in L} Z(\ell) &= 1 \\ \forall \ell \in L \quad V &\leq \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) \end{aligned}$$

Maximiser V

C'est un programme convexe : la fonction Log étant concave, les contraintes définissent bien un domaine convexe, et la fonction objective est linéaire. Remarquons que, lorsque λ tend vers l'infini, le programme d'affectation et son dual deviennent deux programmes linéaires qui sont duaux entre eux au sens habituel de ce terme (à condition de laisser de côté les $Z(\ell)$ qui ne jouent plus aucun rôle).

Théorème III : Le primal et le dual du programme d'affectation ont les propriétés suivantes :

1) Pour toute solution réalisable du primal et toute solution réalisable du dual nous avons $R \geq V$.

2) Nous avons $R = V$ si, et seulement si, le primal et le dual sont chacun à l'optimum.

3) Le primal est à l'optimum si, et seulement si, pour tout $\ell \in L$,
$$V = \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell).$$

Si le dual est à l'optimum, la solution optimale est $X(\ell) = Z(\ell)$.

Démonstration :

Partie 1) : En raison de la relation $\sum_{\ell \in L} Z(\ell) = 1$, pour toute solution réalisable du dual, il existe au moins un ℓ tel que $Z(\ell) \leq \hat{X}(\ell)$. Or l'on a, pour tout ℓ , $V \leq \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell)$. Le logarithme étant une fonction croissante, on en déduit :

$$V \leq \frac{\text{Log } \hat{X}(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) = \hat{R} \quad (\text{en raison de (2)}).$$

On a donc $R \geq \hat{R} \geq V$ ce qui démontre la proposition 1).

Partie 2) : Il résulte immédiatement de 1) que si l'on a $R = V$, on est à l'optimum.

Pour démontrer la réciproque, il suffit d'observer que $Z(\ell) = \hat{X}(\ell)$ pour tout $\ell \in L$, et $V = \hat{R}$, constituent une solution possible du dual. Donc V peut atteindre la valeur \hat{R} , qui est optimale en fonction de ce qui précède.

Partie 3) : On a vu (Théorème I) que le primal a une solution optimale unique. Pour toute solution optimale du dual, on a, pour tout ℓ :

$$\hat{R} = V \leq \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell)$$

soit, en vertu de (2) :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Log } \hat{X}(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) &\leq \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell) \\ \hat{X}(\ell) &\leq Z(\ell) \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\sum_{\ell \in L} \hat{X}(\ell) = \sum_{\ell \in L} Z(\ell)$, on a $\hat{X}(\ell) = Z(\ell)$, pour tout $\ell \in L$; ceci montre que le dual a une solution optimale unique comme le primal, et que ces solutions sont telles que $X(\ell) = Z(\ell)$ ($\ell \in L$).

Puisque $X(\ell) = Z(\ell)$, la relation (2) montre que $\frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell)$ a la même valeur pour tout $\ell \in L$. Cette valeur est le maximum possible de V . Donc, à l'optimum du dual, on a bien $V = \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell)$ ($\forall \ell \in L$).

Réciproquement, si, pour tout $\ell \in L$, $V = \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} + \Gamma(\ell)$, $X(\ell) = Z(\ell)$ est une solution du primal telle que $R = V \sum_{\ell \in L} X(\ell) = V$. La solution du dual est donc optimale. ■

II - APPROXIMATION DU PROGRAMME PDRC PAR UN PROGRAMME CONVEXE: PAC(λ, L)

a) Le programme PAC(λ, L)

En s'inspirant du programme d'affectation décrit ci-dessus, on a construit un programme convexe que l'on peut considérer comme une approximation du programme PDRC (défini chapitre IV du texte principal) et que l'on notera PAC(λ, L) (Programme d'Approximation Convexe).

Notations

On reprend les notations du chapitre II du texte principal, en particulier :

- I l'ensemble des arcs,
- K l'ensemble des liaisons,
- J l'ensemble des arcs envisagés (ayant un coût fixe),
- $f(i)$ le coût fixe de l'arc $i \in J$,
- $T(k)$ le trafic de la relation $k \in K$,
- $p(i)$ le coût unitaire de l'arc $i \in I$.

On supposera $f(i)$ strictement positif, ce qui n'enlève rien à la généralité du modèle, un arc à coût fixe nul pouvant être considéré comme un arc initial.

De plus, à chaque liaison $k \in K$, on fait correspondre un ensemble $L(k) = \{\ell\}$ dont les éléments sont les itinéraires retenus pour cette liaison.

Chaque itinéraire ℓ est défini par un ensemble d'arcs $I(\ell) \subset I$. Les ensembles $L(k)$ sont disjoints (deux liaisons différentes ne peuvent avoir le même itinéraire exactement). On posera

$$L = \bigcup_{k \in K} L(k)$$

$$L(k, i) = \{\ell \mid \ell \in L(k), i \in I(\ell)\}. \text{ On a } L(k) = \bigcup_{i \in I} L(i, k)$$

$X(\ell)$ = rapport entre le trafic utilisant l'itinéraire ℓ et le trafic total de la liaison correspondante.

Le programme $PAC(\lambda, L)$ est présenté dans le tableau I ci-joint (colonne primal). On appellera :

D le domaine des solutions réalisables dans l'espace des $X(\ell), y(i), x(i, k)$.

D_0 la partie de D vérifiant $y(i) \leq 1, \forall i \in J$.

Notons que D et D_0 sont indépendants de λ .

PRIMAL

DUAL

$\forall \ell \in L$	$X(\ell) \geq 0$	$V(k) \leq \sum_{i \in I(\ell)} \gamma(i,k) + \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda}$	$\forall k \in K, \forall \ell \in L(k)$
$\forall k \in K$	$\sum_{\ell \in L(k)} X(\ell) = 1$	$V(k)$	$\forall k \in K$
$\forall i \in I, \forall k \in K$	$x(i,k)$	$\gamma(i,k) = v(i,k) + p(i) T(k)$	$\forall i \in I, \forall k \in K$
		$v(i,k) = 0$	$\forall i \in I - J$
$\forall i \in I, \forall k \in K$	$x(i,k) = \sum_{\ell \in L(i,k)} X(\ell)$	$\gamma(i,k)$	$\forall i \in I, \forall k \in K$
$\forall i \in J$	$\gamma(i)$	$\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$	$\forall i \in J$
$\forall i \in J, \forall k \in K$	$\gamma(i) - x(i,k) \geq 0$	$v(i,k) \geq 0$	$\forall i \in I, \forall k \in K$
	Minimiser $A = C + \frac{E}{\lambda}$		$Z(\ell) \geq 0$	$\forall \ell \in L$
	avec $C = \sum_{i \in J} f(i) \gamma(i) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p(i) T(k) x(i,k)$			$\forall k \in K$
	$E = \sum_{\ell \in L} X(\ell) \text{Log } X(\ell)$			
	On pose $0 \text{Log } 0 = 0$			
				Maximiser $W = \sum_{k \in K} V(k)$

TABIEAU I - Primal et dual du programme PAC(λ, L)

$PAC(\lambda, L)$ est un programme convexe : en effet les contraintes sont linéaires et A est défini et convexe dans D .

La fonction objectif de $PAC(\lambda, L)$ est $A = C + \frac{E}{\lambda}$, C étant la fonction objectif de PDRC. Si l'on fait tendre λ vers l'infini, $PAC(\lambda, L)$ tend vers un programme linéaire que nous noterons $PAC(\infty, L)$. Ce programme est équivalent à PDRC en ce qui concerne les $x(i, k)$ et $y(i)$, à condition que les ensembles $L(k)$ soient suffisamment riches. Plus précisément, L sera dit complet si l'on peut trouver des $X(\ell) \geq 0$ ($\ell \in L$) tels qu'au moins une solution optimale de PDRC puisse être reconstituée par les formules $x(i, k) = \sum_{\ell \in L(i, k)} X(\ell)$. Cette solution sera alors optimale pour $PAC(\infty, L)$: en effet, la valeur de $PAC(\infty, L)$ est a priori au moins égale à celle de PDRC, puisque tout trafic $\{x(i, k)\}$ réalisable dans $PAC(\infty, L)$ l'est aussi dans PDRC.

Théorème IV : Le programme $PAC(\lambda, L)$ possède les propriétés suivantes :

- 1) Il possède une solution optimale et une seule. Appelons M le point correspondant de D , et \hat{A} la valeur de A à l'optimum.
- 2) Si λ tend vers l'infini, M a une limite représentant une solution optimale de $PAC(\infty, L)$ et \hat{A} tend vers la valeur de $PAC(\infty, L)$.
- 3) Si L est complet, la limite de M pour λ infini correspond à une solution optimale de PDRC et la limite de \hat{A} est la valeur de PDRC.

Démonstration :

Partie 1) : La fonction A est définie et continue dans D_0 qui est compact. Elle a donc dans ce domaine un minimum A qu'elle atteint en au moins un point. Il est facile de vérifier que ce point constitue une solution optimale de $PAC(\lambda, L)$.

Supposons que le minimum \hat{A} soit atteint en deux points de D , M_1 et M_2 , distincts l'un de l'autre.

Soient en M_1 $C = C_1$, $E = E_1$
en M_2 $C = C_2$, $E = E_2$

On a $\hat{A} = C_1 + \frac{E_1}{\lambda} = C_2 + \frac{E_2}{\lambda}$

Soit M_3 le milieu de $M_1 M_2$, pour lequel $C = C_3$, $E = E_3$, $A = A_3$.

On a $C_3 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2)$

$E_3 < \frac{1}{2} (E_1 + E_2)$; en effet M_1 et M_2 diffèrent au moins par un des $X(\ell)$, sinon on voit facilement qu'ils seraient confondus (on utilise ici l'hypothèse : $f(i)$ strictement positif) ; et $X \log X$ est une fonction strictement convexe de X .

Donc $A_3 = C_3 + \frac{E_3}{\lambda} < \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + \frac{E_1}{\lambda} + \frac{E_2}{\lambda}) = \hat{A}$ ce qui est en contradiction avec le fait que \hat{A} soit le minimum de A . Il est donc impossible que l'optimum soit atteint en deux points distincts.

Partie 2) : Soient :

- \tilde{E} le minimum de E sur l'ensemble D .
- \tilde{C} le minimum de C sur l'ensemble D .
- $G \in D$ l'ensemble convexe (éventuellement réduit à un point) où $C = \tilde{C}$.
- \tilde{e} le minimum de E sur l'ensemble G .
- $Q \in G$ le point où ce minimum est atteint ; ce point est unique car $X \log X$ est strictement convexe, et $x(i,b)$ et $y(i)$ se déduisent des $X(\ell)$ (ceci est vrai pour $y(i)$ car on est au minimum de C).

$$\text{On a } \text{Min } A = \text{Min } (C + \frac{E}{\lambda}) \geq \text{Min } C + \frac{\text{Min } E}{\lambda}$$

$$\text{Donc } \hat{A} \geq \tilde{C} + \frac{\tilde{E}}{\lambda}$$

Par ailleurs \hat{A} est inférieur ou égal à la valeur prise par A au point Q , soit :

$$\hat{A} \leq \tilde{C} + \frac{\tilde{e}}{\lambda}$$

$$\text{Donc } \tilde{C} + \frac{\tilde{E}}{\lambda} \leq \hat{A} \leq \tilde{C} + \frac{\tilde{e}}{\lambda} \quad (6)$$

Par conséquent, si λ tend vers l'infini, \hat{A} a une limite égale à \tilde{C} .

Nous envisageons maintenant une suite croissante λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ de valeurs prises par λ , et la suite correspondante de points $M_{i \in D_0}$ où l'optimum est réalisé. D_0 étant compact, la suite de M_i a au moins un point d'accumulation. Nous allons montrer que seul le point Q peut être un tel point d'accumulation, ce qui prouvera que M tend vers Q lorsque λ tend vers l'infini

Comme A tend vers C , tout point d'accumulation ne peut être que dans G . Si G est réduit à un point la proposition est démontrée. Dans le cas contraire, soit $N \in G$ un point distinct de Q . On peut trouver un réel positif η et une boule B centrée sur N telle que, dans cette boule $E > \tilde{e} + \eta$. Par ailleurs, dans D , $C \geq \tilde{C}$. Donc dans $D \cap B$, $A = C + \frac{E}{\lambda} > \tilde{C} + \frac{\eta + \tilde{e}}{\lambda} > \hat{A}$, d'après (6). Ceci montre qu'aucun point de la suite M_1 ne peut se trouver dans $D \cap B$, c'est à dire que N ne peut être un point d'accumulation.

Partie 3) : Si L est complet, par définition, à toute solution optimale de PDRC correspond au moins un point de D ayant mêmes $x(i,k)$ et $y(i)$. Or C ne dépend que des $x(i,k)$ et $y(i)$. Donc il y a au moins un point de D pour lequel $C = \hat{C}$ valeur de PDRC.

Le minimum de C sur D , \tilde{C} , est alors égal à \hat{C} (il ne peut lui être inférieur car toute solution réalisable pour $PAC(\lambda, L)$ l'est aussi pour PDRC) et Q correspond bien à une solution optimale de PDRC ■

b) Programme "dual" de $PAC(\lambda, L)$. Propriétés de dualité.

Nous associons au programme $PAC(\lambda, L)$ un autre programme, que nous appelons son "dual", le premier étant alors considéré comme le primal. Le dual est donné, avec le primal, tableau I. Observons que, lorsque λ tend vers l'infini, $PAC(\lambda, L)$ et son dual deviennent deux programmes linéaires, qui sont duaux entre eux au sens habituel de ce terme (à condition de laisser de côté dans le dual les $Z(\ell)$ qui ne jouent plus aucun rôle). Notons \hat{W} la valeur optimale de ce dual. Par analogie avec le DDRC, nous appellerons les $v(i,k)$ péages, et les $\gamma(i,k)$ coûts d'usage.

Théorème V : Le primal et le dual de $PAC(\lambda, L)$ ont les propriétés suivantes :

1) Pour toute solution réalisable du primal et toute solution réalisable du dual nous avons $A \geq \hat{A} = \hat{W} \geq W$.

2) On a $A = W$ si, et seulement si, le primal et le dual sont chacun à l'optimum.

3) Le dual a au moins une solution optimale. A l'optimum du dual, pour tout $\ell \in L$, $Z(\ell)$ prend la valeur $\hat{Z}(\ell)$ égale à $\hat{X}(\ell)$, valeur prise par $X(\ell)$ à l'optimum du primal.

Démonstration :

Partie 1) : Démonstration de $A \geq W$. Conditions pour $A = W$

Considérons le programme linéaire suivant, déduit de PAC(λ, L) en supposant les $X(\ell)$ donnés.

<u>PRIMAL</u>	<u>DUAL</u>
$\forall k \in K, \forall i \in I \quad x(i,k) \dots\dots\dots$	$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(i,k) = v(i,k) + p(i) T(k) \\ v(i,k) = 0 \quad \forall i \in I-J \end{array} \right.$
$\forall k \in K, \forall i \in I \quad x(i,k) = \sum_{\ell \in L(i,k)} X(\ell) \dots\dots$	$\gamma(i,k)$
$\forall i \in J \quad y(i) \dots\dots\dots$	$\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$
$\forall i \in J, \forall k \in K \quad y(i) - x(i,k) \geq 0$	$v(i,k) \geq 0$
Minimiser $C = \sum_{i \in J} f(i) p(i) +$ $\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p(i) T(k) x(i,k)$	Maximiser $\sum_{i \in I, k \in K} \sum_{\ell \in L(i,k)} X(\ell) \gamma(i,$ $\sum_{\ell \in L} X(\ell) \Gamma(\ell)$
	en posant $\Gamma(\ell) = \sum_{i \in I(\ell)} \gamma(i,k) \quad (\forall \ell \in L)$

$\Gamma(\ell)$, intervenant dans le dual, est le coût d'usage de l'itinéraire ℓ ($\ell \in L(k)$)
 Les relations de dualité dans les programmes linéaires montrent que l'on a
 toujours $C \geq \sum_{\ell \in L} X(\ell) \Gamma(\ell)$; l'égalité, ayant lieu si et seulement si $v(i,k)$
 implique $y(i) = x(i,k)$ ($i \in J, k \in K$).

$$\text{Posons } R(k) = \sum_{\ell \in L(k)} \left(\frac{X(\ell) \text{Log } X(\ell)}{\lambda} + X(\ell) \Gamma(\ell) \right)$$

$$\text{L'on a } A = C + \frac{E}{\lambda} \geq \sum_{\ell \in L} X(\ell) \Gamma(\ell) + \frac{E}{\lambda} = \sum_{k \in K} R(k)$$

De plus, en raison du théorème III 1), on a $R(k) \geq V(k) \quad \forall k \in K$
 En effet, $X(\ell), R(k), \Gamma(\ell), V(k)$ et $Z(\ell)$ ci-dessus sont liés par les mêmes
 relations que $X(\ell), R, \Gamma(\ell), V$ et $Z(\ell)$ dans le programme d'affectation et
 son dual. Et l'on a $R(k) = V(k)$ si et seulement si $V(k) = \Gamma(\ell) + \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda}$
 ($\forall \ell \in L(k)$) et $X(\ell) = Z(\ell)$ ($\forall \ell \in L$) (ceci se déduit du Théorème III 2) et 3)).

On en déduit que :

$$- A \geq \sum_{k \in K} R(k) \geq \sum_{k \in K} V(k) = W$$

- $A = W$ si et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

$$\cdot v(i,k) > 0 \text{ implique } y(i) = x(i,k) \quad (i \in J, k \in K)$$

$$\cdot V(k) = \Gamma(\ell) + \text{Log} \frac{Z(\ell)}{\lambda} \quad (k \in K, \ell \in L(k))$$

$$\cdot X(\ell) = Z(\ell) \quad (\ell \in L)$$

Partie 2) : Il résulte immédiatement de la proposition 1) que si $A = W$ le primal et le dual sont tous deux à l'optimum.

Pour prouver la réciproque, il suffit de montrer que cette égalité peut toujours être réalisée. Pour cela, donnons aux variables du primal les valeurs de la solution optimale. Le théorème de Kuhn et Tucker nous apprend qu'il existe des réels $\rho(k)$, $\mu(i,k)$, $\sigma(i,k)$ tels que l'on ait :

$$\forall k \in K, \forall \ell \in L(k), \rho(k) \leq \sum_{i \in I(\ell)} \mu(i,k) + \frac{\text{Log} X(\ell)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}, \text{ l'égalité étant}$$

forcément réalisée si $X(\ell) > 0$.

$$\forall k \in K, \forall i \in I \quad \mu(i,k) = \sigma(i,k) + p(i) T(k)$$

$$\forall k \in K, \forall i \in I-J \quad \sigma(i,k) = 0$$

$$\forall i \in J \quad \sum_{k \in K} \sigma(i,k) = f(i)$$

$$\forall k \in K, \forall i \in J \quad \sigma(i,k) \geq 0 \text{ et, de plus, } \sigma(i,k) > 0 \text{ entraîne } y(i) = x(i,k).$$

Posons, dans le dual, $V(k) = \rho(k) - \frac{1}{\lambda}$, $\gamma(i,k) = \mu(i,k)$, $v(i,k) = \sigma(i,k)$
 $Z(\ell) = X(\ell)$. Compte-tenu des relations ci-dessus, nous avons bien ainsi une solution réalisable. De plus, les conditions données plus haut pour avoir $A = W$ sont bien vérifiées. En effet :

$$1) v(i,k) = \sigma(i,k) > 0 \text{ entraîne } y(i) = x(i,k)$$

2) On a $X(\ell) > 0 \quad \forall \ell \in L$ (sinon $\rho(k)$ serait égal à $-\infty$). On a donc

$$\rho(k) = \sum_{i \in I(\ell)} \mu(i,k) + \frac{\text{Log} X(\ell)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad \forall \ell \in L(k)$$

ce qui est équivalent à $V(k) = \Gamma(\ell) + \frac{\text{Log } X(\ell)}{\lambda}$; il suffit donc de poser $Z(\ell) = X(\ell)$ pour satisfaire les diverses conditions.

Partie 1) : $A \geq \hat{A} = \hat{W} \geq W$ se déduit de $A \geq W$ et de la partie 2) que l'on vient de démontrer.

Partie 3) : Il y a bien au moins une solution optimale du dual puisque l'on vient d'en déterminer une. De plus, l'on a vu que pour toute solution optimale $W = \hat{A}$, et que ceci implique que $Z(\ell)$ est égal, pour tout $\ell \in L$, à la valeur unique de $X(\ell)$ à l'optimum du primal ■

Corollaire VI : Pour qu'une solution réalisable du primal et une solution réalisable du dual soient toutes deux optimales, il faut et il suffit que l'ensemble des conditions suivantes soient réalisées :

$$- V(k) = \sum_{i \in I(\ell)} \gamma(i,k) + \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} \quad \forall k \in K, \ell \in L(k)$$

$$- Z(\ell) = X(\ell) \quad \forall \ell \in L$$

$$- v(i,k) > 0 \text{ entraîne } y(i) = x(i,k) \quad \forall i \in J, \forall k \in K.$$

Démonstration

Ces conditions sont équivalentes à celles de la Remarque en fin de démonstration du Théorème V, partie 1). En effet la première condition ci-dessus revient à dire que les $Z(\ell)$ résultent de l'affectation exponentielle avec les coûts $\Gamma(\ell)$, $V(k)$ prenant la valeur de V ■

Corollaire VII : Pour qu'une solution réalisable du dual de PAC(λ, l) soit optimale, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :

- les $Z(\ell)$ sont égaux aux trafics résultant de l'affectation exponentielle des liaisons $k \in K$ avec les coûts $\Gamma(\ell) = \sum_{i \in I(\ell)} \gamma(i,k) \quad (\ell \in L(k))$.

- pour tout $i \in J$, il existe un réel $a(i)$ tel que, pour tout $k \in K$:

- . $v(i,k) > 0$ implique $z(i,k) = a(i)$
- . $v(i,k) = 0$ implique $z(i,k) \leq a(i)$.

Démonstration :

Les conditions sont nécessaires en vertu du Corollaire VI, en posant $a(i) = y(i)$. Elles sont suffisantes, car en posant $y(i) = a(i)$ et $X(\ell) = Z(\ell)$, on obtient une solution du primal, qui jointe à la solution présente du dual, vérifie les conditions du corollaire VI ■

c) Rattachement à la dualité dans les problèmes convexes

Soit un problème convexe général : trouver $x \in D$ minimisant $f(x)$ sous des contraintes $g_i(x) \geq a_i$, $i = 1, 2, \dots, m_1$

$$g_i(x) = a_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m$$

dans lequel x est un vecteur, D un domaine convexe, f est une fonction convexe, les g_i sont des fonctions, convexes si $i \leq m_1$ et linéaires si $m_1 < i \leq m$, et les a_i sont des nombres⁽¹⁾. Les fonctions sont définies pour $x \in D$.

A ce problème, on associe le Lagrangien :

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{i=1}^m u_i (g_i(x) - a_i)$$

dans lequel u est un vecteur (u_i) à m dimensions.

Considérons le problème suivant :

Trouver $\text{Max}_u (\text{Min}_x L(x, u))$ pour $x \in D$, $u_i \geq 0$ si $i \leq m_1$, u_i quelconque si $i > m_1$

On montre (voir, par exemple, réf. [22]) que (sous réserve qu'il y ait au moins un point $x \in D$ satisfaisant les contraintes linéaires et tel que $g_i(x) > a_i$, pour tout $i \leq m_1$) ce deuxième problème peut être considéré comme le dual du premier, et en particulier que :

- Toute solution réalisable du 2ème problème a une valeur inférieure ou égale à la valeur de toute solution réalisable du premier.

- L'égalité de ces valeurs a lieu à l'optimum des deux programmes.

- A l'optimum on a les relations des écarts complémentaires :

$$u_i (g_i(x) - a_i) = 0.$$

- Les solutions optimales (x, u) du dual contiennent les solutions optimales (x) du primal.

(1) Les notations de ce paragraphe c) sont indépendantes de celles du reste du texte.

Le problème PAC(λ, L) ayant uniquement des contraintes linéaires, examinons plus particulièrement ce cas. Considérons le problème :

Min $f(x, y)$ sous les contraintes
 x, y

$$x \geq 0$$

$$A_1 x + A_2 y \geq a$$

$$B_1 x + B_2 y = b$$

dans lequel x, y, a, b sont des vecteurs colonnes, A_1, A_2, B_1, B_2 sont des matrices et $f(x, y)$ est une fonction convexe dérivable.

Le dual s'écrit :

$$\text{Max}_{u, v} \text{Min}_{x, y} [f(x, y) - u(A_1 x + A_2 y - a) - v(B_1 x + B_2 y - b)]$$

$$\text{avec } x \geq 0 \quad u \geq 0$$

u et v étant des vecteurs lignes.

$$\text{La condition Min impose } \nabla_y f(x, y) - uA_2 - vB_2 = 0$$

$$\text{La condition Min impose } \nabla_x f(x, y) - uA_1 - vB_1 \geq 0$$

$$\underline{\text{et}} \quad (\nabla_x f(x, y) - uA_1 - vB_1) x = 0$$

($\nabla_x f$ et $\nabla_y f$ sont les gradients par rapport à x et y , sous forme de vecteurs lignes). Si l'on impose ces contraintes, le dual peut être transformé en :

$$\text{Max}_{u, v, xy} [f(x, y) - \nabla_x f(x, y)x - \nabla_y f(x, y)y + ua + vb]$$

Appliquons ces résultats à PAC(λ, L). On obtient :

$$\text{Max}_{V_1, X} \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{\ell \in L} X(\ell) \text{Log } X(\ell) - \frac{1}{\lambda} \sum_{\ell \in L} (1 + \text{Log } X(\ell)) X(\ell) + \sum_{k \in K} V_1(k) \right]$$

dans lequel $V_1(k)$ est la variable duale de la contrainte $\sum_{\ell \in L(k)} X(\ell) = 1$,

et $(1 + \text{Log } X(\ell))$ est la dérivée de $X(\ell) \text{Log } X(\ell)$ par rapport à $X(\ell)$.

D'où, en simplifiant

$$\text{Max}_{V_1, X} \left(- \frac{1}{\lambda} \sum_{\ell \in L} X(\ell) + \sum_{k \in K} V_1(k) \right).$$

Mais comme le primal contient les contraintes $\sum_{\ell \in L(k)} X(\ell) = 1$,

on peut ajouter ces contraintes au dual sans changer l'optimum et l'on trouve

$$\text{Max}_{V_1, X} \sum_{k \in K} [V_1(k) - \frac{1}{\lambda}].$$

On obtient le dual de PAC(λ, L), donné dans le paragraphe b ci-dessus, en posant $V(k) = V_1(k) - \frac{1}{\lambda}$, en remplaçant $X(\ell)$ par $Z(\ell)$ pour éviter toute confusion avec le primal et en écrivant $\sum_{\ell \in L(k)} Z(\ell) = 1$ et les autres contraintes citées plus haut, à l'exception de la contrainte

$(\nabla_x f(x,y) - uA_1 - vB_1)x = 0$, qui concerne seulement la variable $X(\ell) = Z(\ell)$, et qui peut être supprimée car on peut montrer qu'à l'optimum du dual elle est toujours réalisée. A noter que la dérivée de $X(\ell) \log X(\ell)$ n'est pas définie pour $X(\ell) = 0$; ceci n'enlève pas la validité des résultats ci-dessus, car ni le primal, ni le dual ne peuvent avoir $X(\ell) = 0$ à l'optimum.

III - ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROGRAMME PAC(λ, L). APPLICATIONS A PDRC ET PDRM

a) Vue d'ensemble de la méthode de résolution de PAC(λ, L)

Nous allons chercher l'optimum du dual de PAC(λ, L). Nous partons de valeurs de $v(i,k)$, positives et vérifiant $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$, mais, à part cela, quelconques. On en déduit les $\gamma(i,k)$ et les $\Gamma(\ell) = \sum_{i \in I(\ell)} \gamma(i,k)$.

Si on suppose les $v(i,k)$ fixés, pour rendre W maximum, il faut donner aux $Z(\ell)$ les valeurs résultant de l'affectation exponentielle des diverses relations $k \in K$ avec les coûts $\Gamma(\ell)$ ($\ell \in L(k)$).

Nous appellerons "suboptimales" les solutions vérifiant cette condition, et noterons \tilde{W} et $\tilde{V}(k)$ les valeurs prises par W et $V(k)$.

De plus, nous dirons qu'un arc $i \in J$ est "optimisé" s'il existe un réel $a(i)$ tel que, pour tout $k \in K$:

- $v(i,k) > 0$ implique $z(i,k) = a(i)$
- $v(i,k) = 0$ implique $z(i,k) \leq a(i)$

Le Corollaire VII montre que si tous les arcs sont optimisés dans une solution suboptimale, cette solution est optimale.

Si par contre, au moins un arc n'est pas optimisé, nous allons voir qu'il est possible de faire varier les $v(i,k)$ de cet arc de façon à améliorer la solution suboptimale correspondante.

Posons, par analogie avec $x(i,k)$, $z(i,k) = \sum_{\ell \in L(i,k)} Z(\ell)$.

La relation (5) (Corollaire II), nous montre que :

$$\frac{\partial \tilde{V}(k)}{\partial \Gamma(\ell)} = Z(\ell) \quad (\ell \in L(k))$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial v(i,k)} = \frac{\partial \tilde{V}(k)}{\partial v(i,k)} = z(i,k)$$

soit
$$d\tilde{W} = \sum_{k \in K} z(i,k) dv(i,k)$$

Compte-tenu des contraintes $v(i,k) > 0$ et $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$, cette

formule montre que l'on peut améliorer \tilde{W} en faisant varier les $v(i,k)$ d'un arc donné, si et seulement si cet arc n'est pas optimisé ; ou encore que c'est en "optimisant" un arc que l'on maximise \tilde{W} , si on s'interdit de modifier les péages des autres arcs (cette maximisation constitue un problème convexe pour lequel le maximum est forcément atteint).

Ceci suggère la méthode suivante : optimiser les arcs les uns après les autres, en faisant varier les $Z(\ell)$ de façon à être toujours en présence d'une solution suboptimale.

b) Variation de $z(i,k)$ en fonction de $v(i,k)$ pour une solution suboptimale

Soit K_i l'ensemble des liaisons k ayant au moins un itinéraire $\ell \in L(k)$ utilisant l'arc i .

Pour un arc $i \in J$ et une liaison $k \in K_i$ donnés, nous cherchons comment varie $z(i,k) = \sum_{\ell \in L(i,k)} Z(\ell)$ en fonction de $v(i,k)$ lorsque la solution reste suboptimale, les autres péages relatifs à la liaison k restant constants.

Soit $\Gamma_0(\ell)$ la valeur prise par $\Gamma(\ell)$ lorsque $v(i,k) = 0$ ($\ell \in L(i,k)$)

$$A(k) = \sum_{\ell \in L(i,k)} e^{-\lambda \Gamma_0(\ell)}$$

$$B(k) = \sum_{\ell \in L(k) - L(i,k)} e^{-\lambda \Gamma(\ell)}$$

Comme $z(i,k)$ résulte d'une affectation exponentielle avec les coûts $\Gamma(\ell)$, nous avons :

$$\frac{z(i,k)}{A(k)e^{-\lambda v(i,k)}} = \frac{1-z(i,k)}{B(k)}$$

c'est à dire

$$\text{Log} \frac{z(i,k)}{1-z(i,k)} = \text{Log} \frac{B(k)}{A(k)} - \lambda v(i,k)$$

Posons :

$$\zeta(k) = \text{Log} \frac{z(i,k)}{1-z(i,k)}$$

$$D(k) = \text{Log} \frac{B(k)}{A(k)}$$

Nous avons

$$\zeta(k) = D(k) - \lambda v(i,k)$$

c) Optimisation de l'arc $i \in J$

Pour $k \in K - K_i$ l'on doit, bien sûr, avoir $v(i,k) = 0$.

Pour $k \in K_i$, $\zeta(k)$ étant une fonction strictement croissante de $z(i,k)$, la condition d'optimisation de l'arc i peut s'écrire :

$f(i)$, $D(k)$ et λ étant connus, trouver des $v(i,k)$ et $\zeta(k)$ ($k \in K_i$) tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in K_i \quad v(i,k) \geq 0 \\ \quad \quad \quad \sum_{k \in K_i} v(i,k) = f(i) \\ k \in K_i \quad \zeta(k) = D(k) - \lambda v(i,k) \\ \quad \quad \quad \exists \alpha \text{ tel que } v(i,k) \geq 0 \text{ implique } \zeta(k) = \alpha \quad (k \in K_i) \\ \quad \quad \quad v(i,k) = 0 \text{ implique } \zeta(k) \leq \alpha \quad (k \in K_i) \end{array} \right.$$

L'on peut résoudre ce système par la méthode suivante :

- 1) On détermine la solution en s'affranchissant de la condition $v(i,k) \geq 0$ et en imposant $\zeta(k) = \alpha$ (solution immédiate : $\alpha \text{ card } K_i = \sum_{k \in K_i} D(k) + \lambda f(i)$, ce qui détermine α , donc les $v(i,k)$).

2) Si tous les $v(i,k)$ ainsi obtenus sont positifs ou nuls, on a la solution définitive, sinon aller en 3).

3) Pour tout k tel $v(i,k) < 0$ - on pose $v(i,k) = 0$
- on retire ce k de l'ensemble K_i .

Retour en 1).

Le nombre d'éléments de K_i étant fini, cet algorithme se termine en un nombre fini d'étapes. D'une étape à la suivante la valeur de Z augmente ; la solution obtenue satisfait donc bien à toutes les conditions.

d) Algorithme de résolution de PAC(λ, L)

La méthode proposée sera la suivante :

(1) On part d'une solution suboptimale du dual, c'est à dire que l'on choisit des $v(i,k) \geq 0$ vérifiant $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$ et que l'on calcule les

$Z(\ell)$ correspondants par l'affectation exponentielle.

(2) On ordonne les arcs de J et on les considère à tour de rôle, en revenant au premier lorsque l'on a traité le dernier ; pour chacun de ces arcs, on effectue l'optimisation de l'arc (calcul des nouveaux $v(i,k)$) et on détermine la solution suboptimale correspondante (calcul des $Z(\ell)$).

En général ce processus continuerait indéfiniment ; il faut donc adopter un critère d'arrêt.

Propriétés de cet algorithme

1) Si on poursuit l'algorithme indéfiniment, W tend vers sa valeur optimale \hat{W} et les $Z(\ell)$ ($\ell \in L$) tendent chacun vers sa valeur à l'optimum $\hat{Z}(\ell)$.

2) A une étape quelconque de l'algorithme, on peut considérer la solution réalisable du primal obtenue en posant $X(\ell) = Z(\ell)$ ($\ell \in L$), $x(i,k) = \sum_{\ell \in L(i,k)} X(\ell)$ et en donnant à $y(i)$, pour i donné, la valeur du

plus grand $x(i,k)$ ainsi obtenue. Cette solution a les propriétés suivantes :

- l'écart entre A et l'optimum \hat{A} a pour majorant $A-W$: $A-\hat{A} \leq A-W$
- ce majorant $A-W$ tend vers 0 lorsque l'on poursuit l'algorithme ;
- en conséquence A tend vers \hat{A} .

Démonstration de ces propriétés

Partie 1) : Chaque fois que l'on optimise un arc et que l'on calcule la nouvelle solution suboptimale, W augmente ou reste inchangé (si l'arc était déjà optimisé). Comme les W sont bornés supérieurement, la suite des valeurs prises tend vers une limite W_1 .

Considérons, dans l'espace des $v(i,k)$ ($i \in J, k \in K$) le domaine correspondant aux solutions réalisables du dual. Ce domaine est compact. Dans ce domaine, considérons la suite de points correspondant aux solutions du dual fournies par l'algorithme chaque fois que l'on vient d'optimiser le dernier arc de la liste. Cette suite a au moins un point d'accumulation P dans le domaine.

Soit W_2 la valeur de la solution suboptimale correspondant à P . Si $W_2 \neq \hat{W}$, en partant de cette solution et en optimisant successivement dans l'ordre les divers arcs, on augmente W d'une quantité g . Par continuité, en effectuant les mêmes opérations à partir de points se trouvant dans un voisinage convenablement choisi de P , on obtiendrait un gain au moins égal à $g/2$. Ce voisinage ne peut donc contenir qu'un nombre fini de points de la suite, ce qui est contradictoire avec le fait que P soit un point d'accumulation. Par conséquent $W_2 = \hat{W}$.

Si $|W_2 - W_1| = \varepsilon \neq 0$, on peut trouver un voisinage de P dans lequel $|W - W_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, et il y aura une infinité de points de la suite dans ce voisinage, ce qui est contradictoire avec le fait que W tend vers W_1 . Donc $W_1 = W_2 = \hat{W}$, et W tend bien vers \hat{W} .

Considérons maintenant dans le domaine $0 \leq Z(\ell) \leq 1, (\ell \in L)$ la suite des points correspondant aux solutions successives obtenues durant l'application de l'algorithme. Ce domaine étant compact, cette suite a au moins un point d'accumulation Q . Soit W_3 la valeur maximale possible de W en ce point (W_3 est donné par un programme linéaire obtenu en fixant les $Z(\ell)$ dans le dual de $PAC(\lambda, L)$). Si $\hat{W} - W_3 = \eta > 0$, on peut trouver un voisinage de Q dans lequel $W < W_3 + \frac{\eta}{2}$, donc $\hat{W} - W > \frac{\eta}{2}$ ce qui est contradictoire avec le fait que W tend vers \hat{W} . Par conséquent $W_3 = \hat{W}$, ce qui n'est possible que si Q est défini par $Z(\ell) = \hat{Z}(\ell) \quad (\ell \in L)$. Ceci prouve bien que $Z(\ell)$ tend vers $\hat{Z}(\ell) \quad (\ell \in L)$.

Partie 2) : Nous avons vu que $\hat{X}(\ell) = \hat{Z}(\ell)$ (Théorème V.3). Donc dans la suite des solutions considérées du primal, $X(\ell)$ tend vers $\hat{X}(\ell)$ et A tend vers \hat{A} . De même $A-W$ tend vers $\hat{A}-\hat{W} = 0$. Par ailleurs, le théorème V.1 montre que $A \geq \hat{A} \geq W$ ce qui prouve que $A-\hat{A} \leq A-W$.

e) Application à la résolution du programme PDRC

Nous savons que la solution optimale de $PAC(\lambda, L)$ tend vers celle de PDRC lorsque λ tend vers l'infini, à condition que l'ensemble L soit complet (au sens du § II a) ci-dessus). Deux difficultés surgissent pour utiliser cette propriété :

- il faut un nombre infini d'étapes pour résoudre $PAC(\lambda, L)$;
- on ne sait pas choisir à l'avance un ensemble L complet (à moins de prendre tous les itinéraires possibles, ce qui ne peut se faire en pratique).

Ceci nous conduit à changer la valeur de λ avant d'avoir atteint l'optimum d'un $PAC(\lambda, L)$ donné, et à modifier L en cours de processus. Nous allons, en effet, montrer que l'on tend vers la solution optimale de PDRC en adoptant une procédure du type suivant :

Introduire dans $L(k)$ l'itinéraire de coût d'usage minimal (le coût d'usage d'un arc i étant $\gamma(i, k)$) chaque fois qu'il n'y est pas déjà, et passer à un λ plus élevé chaque fois qu'un certain critère (dépendant de λ) est vérifié par la solution du dual de $PAC(\lambda, L)$ que l'on vient d'atteindre.

Plus précisément, envisageons l'algorithme suivant :

(1) Choisir des $\lambda \geq 0$, $v(i, k) \geq 0$, $L(k)$, tels que, $\sum_{k \in K} v(i, k) = f(i)$

et $L(k)$ contient au moins un itinéraire de coût d'usage minimal de la liaison liaison k . Calculer les $Z(\ell)$ de la solution suboptimale correspondante (en effectuant une affectation exponentielle).

(2) On numérote les arcs $i \in J$ de 1 à $\text{card } J$. On pose $i_0 = 1$.

(3) On effectue l'optimisation de l'arc i_0 comme pour l'algorithme de résolution de $PAC(\lambda, L)$. (Ceci donne de nouveaux $v(i, k)$).

(4) Pour chaque liaison $k \in K$, on cherche le (ou un des) itinéraire ℓ^* de coût d'usage minimal ; s'il n'est pas dans $L(k)$, on pose $L(k) = L(k) + \{\ell^*\}$.

(5) On détermine la solution suboptimale correspondant aux λ , $v(i, k)$ et $L(k)$, ce qui donne de nouveaux $Z(\ell)$.

(6) On calcule la valeur W de la solution correspondante du dual de $PAC(\lambda, L)$ et la valeur A de la solution associée du primal (définie plus haut à partir de $X(\ell) = Z(\ell)$).

Si $A - W \leq \frac{1}{\lambda}$, on pose $\lambda = 2\lambda$ et on détermine la nouvelle solution suboptimale. Sinon, on laisse la valeur de λ inchangée.

(7) Si $i_0 \neq \text{card } J$, poser $i_0 = i_0 + 1$, et aller en (3).

Si $i_0 = \text{card } J$, poser $i_0 = 1$, et aller en (3).

Ce processus peut continuer indéfiniment. Il est donc nécessaire d'adopter un critère d'arrêt. Notons que, si à un instant donné nous avons des péages tels qu'il n'y ait pas d'arc de catégorie 3 (selon la définition donnée dans le texte principal § V.1), on a alors directement une solution optimale de PDRC.

Propriétés de cet algorithme

1) Si l'on poursuit l'algorithme indéfiniment, W tend vers la valeur optimale \hat{U} du DDRC.

2) A une étape quelconque de l'algorithme, définissons :

- une solution réalisable du DDRC, conservant les valeurs des $v(i, k)$, pour laquelle U est égal à la somme des coûts d'usage minimaux des itinéraires de chaque liaison ;

- une solution réalisable du PDRC, à partir de $X(\ell) = Z(\ell)$, dont la valeur est C .

Ces solutions ont les propriétés suivantes : si on poursuit indéfiniment l'algorithme :

- U tend vers $\hat{U} = \hat{C}$ valeur optimale du DDRC et du PDRC ;

- ε quelconque étant donné, on peut trouver une situation telle que $C - U < \varepsilon$, donc telle que $C - \hat{C} < \varepsilon$, $U - \hat{U} < \varepsilon$.

Démonstration de ces propriétés

Le nombre d'itinéraires possibles pour chaque liaison étant fini, si l'on poursuit indéfiniment l'algorithme, à partir d'une certaine étape, aucun itinéraire nouveau n'apparaîtra dans la phase (4). On peut démontrer toutes les propriétés de limites en se plaçant au-delà de cette étape. Donc, dans ce qui suit, nous supposons $L(k)$ fixé.

Tant que λ reste fixé à une valeur donnée, l'algorithme se ramène à celui décrit § d ci-dessus pour résoudre PAC(λ, L). Donc $A-W$ tend vers 0, et la condition de doublement de λ en phase (6) est réalisée tôt ou tard. Ceci montre que λ tend vers l'infini.

La suite des valeurs prises par W est monotone non décroissante ; en effet l'optimisation d'un arc suivie du calcul de la nouvelle solution suboptimale (phases (3) et (5)) ne peut faire décroître W ; et il en est de même de l'augmentation de λ (phase (6)) qui réduit la valeur des $\left| \frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} \right|$, avec $\text{Log } Z(\ell) \leq 0$. Par conséquent W (qui est borné supérieurement par U) tend vers une limite W_1 .

Pour chaque valeur de λ , notons $\hat{W}(\lambda)$ la valeur optimale du dual de PAC(λ, L), égale à la valeur optimale $\hat{A}(\lambda)$ de PAC(λ, L). Le Théorème IV montre que, lorsque λ tend vers l'infini, $\hat{W}(\lambda)$ tend vers une limite $\hat{W}(\infty) \geq \hat{U} = C$ ($\hat{W}(\infty) = \hat{U}$ si L est complet, $\hat{W}(\infty) > \hat{U}$ dans le cas contraire).

Considérons, pour la suite des λ , la suite des W obtenus lorsque, en phase (6), $A-W \leq \frac{1}{\lambda}$. De $A \leq \hat{W}(\lambda) \leq W$ on déduit $\hat{W}(\lambda) - W \leq \frac{1}{\lambda}$. Lorsque l'on poursuit l'algorithme, la limite de $\hat{W}(\lambda)$ est $\hat{W}(\infty)$, celle de W est W_1 , celle de $\frac{1}{\lambda}$ est 0. Donc $W_1 = \hat{W}(\infty) \geq \hat{U}$.

Par ailleurs, comme pour chaque $k \in K$ un chemin de coût d'usage minimal fait partie de $L(k)$ et que $\frac{\text{Log } Z(\ell)}{\lambda} \leq 0$, on a $U \leq \hat{U}$ (\hat{U} est le maximum possible de la somme des coûts d'usage des meilleurs itinéraires de chaque liaison).

Par conséquent, d'une part $W_1 \geq \hat{U}$, d'autre part $W \leq U \leq \hat{U}$. En passant à la limite on obtient que W et U tendent tous deux vers $\hat{U} = C$ (ceci prouve que l'ensemble L construit par l'algorithme est complet au sens du § II a)).

Il reste à prouver que l'on peut trouver une situation telle que $C-U \leq \varepsilon$ donné à l'avance. Nous avons :

$$C-U = (C-A) + (A-U)$$

$$C-A = -\frac{1}{\lambda} \sum_{\ell \in L} X(\ell) \text{Log } X(\ell) \leq \frac{\text{card } L}{\lambda} \quad (\text{car } 0 \leq X(\ell) \leq 1)$$

$$\text{donc } -1 \leq X(\ell) \text{Log } X(\ell) \leq 0$$

Plaçons nous, pour λ donné, au moment où, en phase (6), on doit modifier la valeur de λ , c'est à dire où $A-W \leq \frac{1}{\lambda}$.

Dans ces conditions $C-U \leq \frac{\text{card } L + 1}{\lambda}$. Il suffit donc de prendre $\lambda > \frac{\text{card } L + 1}{\epsilon}$. Ceci achève la démonstration des propriétés de l'algorithme.

En fait, dans notre méthode de recherche de réseau optimal, nous n'utilisons pas cet algorithme, mais une procédure simplifiée décrite § f ci-dessous. Avec cette procédure, on ne peut plus assurer la convergence vers la solution de PDRC. Mais PDRC n'est qu'un intermédiaire, pour lequel il suffit d'obtenir une "bonne" solution.

Un algorithme du type décrit dans ce paragraphe, peut-il présenter un intérêt pratique ? Faisons trois remarques à ce sujet :

- Si l'on désirait la solution exacte de PDRC, on pourrait utiliser cet algorithme, sans le pousser trop loin, pour obtenir une bonne initialisation pour une méthode de décomposition du type Dantzig et Wolfe, en guidant le choix des itinéraires de départ (voir § VI 4b du texte principal).

- L'emploi de la procédure simplifiée pour la recherche d'un réseau optimal est valable, en particulier, parce que les graphes intervenant en pratique dans ce problème sont assez "simples" et favorables ; pour des graphes plus complexes, l'algorithme complet pourrait retrouver son intérêt.

- On peut envisager d'appliquer ce type d'approche à des programmes autres que PDRC.

f) Application à la résolution de PDRM (pour les réseaux de transport)

Lorsque la solution optimale de PDRC n'est pas entière, elle nous intéresse seulement parce qu'elle fournit un minorant à PDRM, et des éléments de choix pour le branchement dans la procédure SEP.

Une "bonne" solution obtenue rapidement paraît donc préférable à une solution presque optimale dont l'obtention nécessiterait de longs calculs.

L'étude de ce que devient l'optimisation d'un arc (décrite § c ci-dessus) lorsque λ tend vers l'infini, va nous fournir une simplification.

Soient, pour un arc $i \in J$ donné, et pour tout $k \in K$:

- $\Gamma_1(k)$ le coût d'usage (c'est à dire au sens des $\gamma(i,k)$) du (ou des) itinéraire $\epsilon L(k)$ de la liaison k , de coût minimal passant par l'arc i , en supposant $v(i,k) = 0$.
- $n_1(k)$ le nombre de tels itinéraires ayant un coût égal à $\Gamma_1(k)$.
- $\Gamma_2(k)$ le coût d'usage du (ou des) itinéraire $\epsilon L(k)$ de la liaison k , de coût minimal, ne passant pas par l'arc i .
- $n_2(k)$ le nombre de tels itinéraires ayant un coût égal à $\Gamma_2(k)$.
- $\delta(k) = \Gamma_2(k) - \Gamma_1(k)$
- $O(\frac{1}{\lambda})$ une grandeur qui tend vers 0 si λ tend vers l'infini.

Reprenant les notations du § b) nous avons :

$$\begin{aligned}
 - A(k) &= n_1(k) e^{-\lambda \Gamma_1(k)} (1 + O(\frac{1}{\lambda})) \\
 - B(k) &= n_2(k) e^{-\lambda \Gamma_2(k)} (1 + O(\frac{1}{\lambda})) \\
 - D(k) &= \text{Log} \frac{n_1(k)}{n_2(k)} - \lambda(\Gamma_1(k) - \Gamma_2(k)) + O(\frac{1}{\lambda}) \\
 - \frac{\xi(k)}{\lambda} &= \Gamma_2(k) - \Gamma_1(k) - v(i,k) + O(\frac{1}{\lambda}) = \delta(k) - v(i,k) + O(\frac{1}{\lambda})
 \end{aligned}$$

Si λ tend vers l'infini, l'optimisation de l'arc i devient donc : trouver des $v(i,k)$ ($k \in K_i$) tels que :

$$\left. \begin{aligned}
 \forall k \in K_i \quad v(i,k) &\geq 0 \\
 \sum_{k \in K_i} v(i,k) &= f(i) \\
 \forall k \in K_i \quad \xi(k) &= \delta(k) - v(i,k) \\
 \exists \beta \text{ tel que } &\begin{cases} v(i,k) > 0 \text{ implique } \xi(k) = \beta \\ v(i,k) = 0 \text{ implique } \xi(k) \leq \beta \end{cases}
 \end{aligned} \right\}$$

Cette procédure d'optimisation des arcs présente le gros inconvénient suivant : si on l'utilise on ne peut plus affirmer que les solutions tendront vers l'optimum de PDRC. Nous l'avons cependant adoptée (c'est elle

qui est exposée § VI.3) du texte principal) pour les raisons suivantes :

- Les calculs sont beaucoup plus simples ; aucune exponentielle n'intervenant plus, il est inutile de calculer $Z(\ell)$; on peut prendre pour L l'ensemble de tous les itinéraires possibles, puisqu'il suffit de calculer les grandeurs Γ_1 et Γ_2 qui sont des plus courts chemins.

- Le cas où l'algorithme ne tend pas vers l'optimum de PDRC paraissent correspondre à des situations assez peu fréquentes dans les réseaux de transport.

- Au cours des calculs, le minorant de PDRM (somme des coûts des meilleurs itinéraires) ne peut décroître.

On a de plus adopté les simplifications suivantes (voir texte principal) :

- On ne fait pas d'optimisation sur les arcs de catégorie 1 ou 2 (car si l'on arrive à une situation où il n'y a plus que de tels arcs, on obtient directement la solution optimale de PDRC et PDRM).

- On ne détermine pas toujours la valeur exacte de Γ_1 : on se contente parfois d'en connaître un minorant.

Conclusion

La méthode finalement adoptée dans la recherche du réseau optimal résulte de simplifications telles qu'elle peut être présentée sans faire appel aux développements ci-dessus. C'est ce que nous avons fait dans le texte principal.

Toutefois cette annexe ne nous paraît pas inutile. D'abord, elle diminue le caractère artificiel de la méthode utilisée. De plus, elle pourrait conduire à des algorithmes nouveaux pour résoudre d'autres problèmes, en généralisant cette façon de remplacer un programme linéaire par un programme convexe relativement facile à résoudre.

ANNEXE II

EXTENSIONS POSSIBLES DE LA METHODE

On peut envisager d'étendre la méthode décrite dans le texte principal à des situations a priori non conformes au modèle. Cette annexe rassemble quelques idées dans ce sens, sans étudier de façon complète les cas évoqués, mais en indiquant des directions de recherche possibles.

I - ADAPTATION DE LA PROCEDURE SEP SANS MODIFICATION DE LA METHODE D'EVALUATION

Nous avons défini un problème P consistant à chercher parmi les réseaux d'un certain ensemble $\Omega = \{\omega\}$ celui qui minimise le coût global $C(\omega)$. Envisageons un problème P' , concernant le même ensemble Ω de solutions possibles, dans lequel on veut minimiser un coût global $C'(\omega)$, et tel que l'on ait pour tout $\omega \in \Omega$, $C'(\omega) \geq C(\omega)$. Dans l'utilisation de la procédure SEP, la fonction d'évaluation $g(q)$ valable pour P sera a fortiori valable pour P' . Par contre, les propriétés permettant de trouver une solution "q-optimale" $\omega^*(q)$ ne seront plus valables.

En conséquence, il sera possible d'utiliser pour P' une méthode SEP, utilisant la même fonction d'évaluation que P , mais qui risque de nécessiter l'exploration d'un nombre beaucoup plus grand de sommets de l'arborescence. De plus, il faut, bien sûr, calculer C' chaque fois que le sommet de l'arborescence correspond à une solution unique. Les calculs risquent donc d'être beaucoup plus longs que pour P , et ceci d'autant plus que C' sera différent de C . Toutefois cette méthode peut dans certains cas s'avérer intéressante. Rappelons que si l'on ne recherche pas l'optimum absolu, mais seulement une "bonne" solution, il est souvent possible d'abrégé considérablement les procédures SEP.

Les considérations ci-dessus peuvent s'appliquer aux deux situations suivantes :

1 - Saturation des arcs

Le phénomène de saturation des arcs se traduit par la convexité de la courbe donnant le coût global $c'(i)$ d'un arc $i \in I$ en fonction du trafic $t(i)$ de cet arc (voir Fig. I). Soit P' un problème comportant de tels arcs.

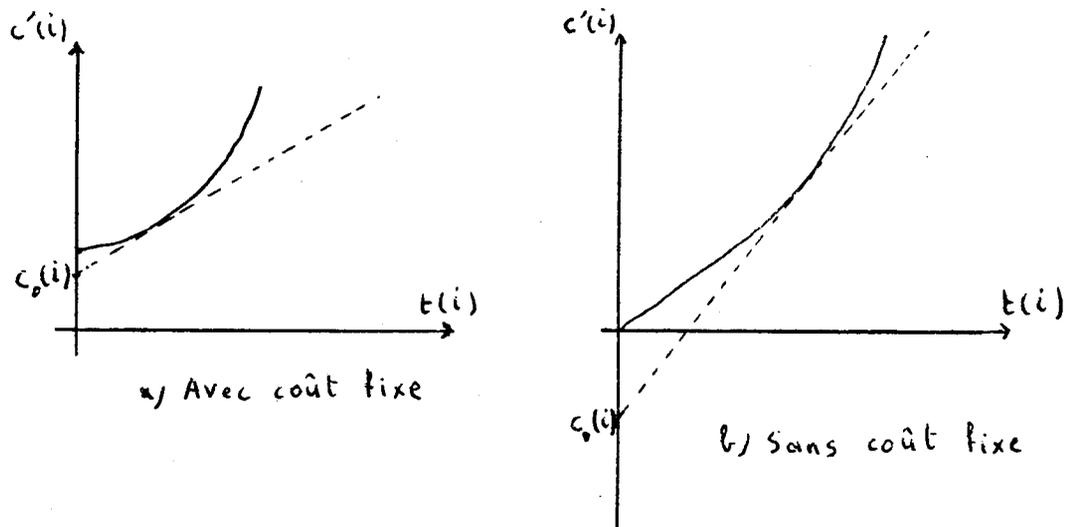


Fig I. Coût global d'un arc en cas de saturation

L'on envisage alors le problème P obtenu en remplaçant chacune de ces courbes par une tangente (si cette tangente donne pour $t(i) = 0$ un coût $c_0(i) < 0$, on remplace $c'(i)$ par $c'(i) - c_0(i)$ ce qui ne modifie pas la solution du problème).

Les problèmes P' et P ainsi définis répondent bien aux conditions ci-dessus permettant d'appliquer à P' une procédure SEP utilisant la fonction évaluation de P . Chaque fois qu'un sommet q de l'arborescence définira une solution unique $\omega \in \Omega$, il faudra calculer $C'(\omega)$, coût global du réseau ω , compte tenu des coûts réels $c'(i)$ de chaque arc. Ceci suppose l'emploi d'une méthode d'affectation du trafic appropriée (on ne peut plus se contenter d'affecter chaque liaison à son plus court chemin).

2 - Choix non optimal des itinéraires

Dans le problème P , un réseau $\omega \in \Omega$ étant donné, chaque liaison est affectée à son itinéraire le moins coûteux (avec les coûts unitaires). Lorsque chaque usager choisit son itinéraire, cette condition est souvent mal réalisée, car le coût ressenti par l'usager peut être assez différent de ce coût unitaire. L'on a alors un coût réel global $C'(\omega) \geq C(\omega)$.

On pourra donc, ici encore, résoudre le problème P' consistant à minimiser C' à l'aide de notre méthode SEP, à condition de disposer d'une méthode de calcul de C' chaque fois que le sommet q de l'arborescence se réduit à un réseau ω unique (ou chaque fois que l'on désire connaître le coût d'une solution donnée, si l'on se contente de rechercher une "bonne" solution).

II - MODIFICATION DE LA METHODE D'EVALUATION

Le problème P est équivalent à un programme linéaire en variables mixtes PDRM ; dans notre méthode, la fonction d'évaluation est obtenue en recherchant une solution (la meilleure possible) du dual DDRC du programme continu correspondant.

Il est possible, en remplaçant PDRM par un programme modifié PDRM* de prendre en compte des phénomènes négligés dans P ; l'on peut alors s'efforcer de trouver une fonction d'évaluation en recherchant une solution du dual DDRC* correspondant.

Nous envisageons ci-dessous trois programmes modifiés :

- PDRMB, incluant une contrainte budgétaire,
- PDRMD, programme "dynamique" tenant compte de l'évolution dans le temps,
- PDRMS, tenant compte de phénomènes de saturation.

1 - Contrainte budgétaire (programme PDRMB)

Nous envisageons le programme PDRMB obtenu en ajoutant au PDRM la contrainte $\sum_{i \in J} f(i) \gamma(i) \leq b$, b étant une constante. Dans ces conditions, le dual DDRCB s'obtient en effectuant les transformations suivantes au DDRC :

- Ajouter une variable $\tau \geq 0$.
- Remplacer $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i)$ par $\sum_{k \in K} v(i,k) = f(i) (1+\tau)$.
- Remplacer le critère $\text{Max } U$ par $\text{Max } (U-b\tau)$.

Si on suppose τ fixé, le DDRCB devient semblable au DDRC, et on peut lui appliquer la même méthode consistant à augmenter U en faisant varier les péages $v(i,k)$. Par ailleurs, si les $v(i,k)$ sont fixés, il est facile de trouver une valeur optimale de τ (il faut augmenter τ tant que la somme des $v(i,k)$ intervenant directement dans le calcul de U est supérieure à b). Ceci suggère de calculer la fonction d'évaluation de la façon suivante :

(1) Poser $\tau = 0$.

(2) Laissant τ inchangé, faire varier les $v(i,k)$ selon l'algorithme SYST de façon à augmenter U .

- (3) τ est-il optimal pour les $v(i,k)$ fixés à leur valeur actuelle ?
- Si non, donner à τ sa valeur optimale, les $v(i,k)$ étant fixés. Aller en (2).
 - Si oui, $U-b\tau$ est la valeur prise par la fonction d'évaluation. L'algorithme est terminé.

Remarquons que si, pour un τ optimal, on a un système de péages et d'itinéraires sans arc de catégorie 3, le réseau optimal sera (comme pour P) composé des arcs de catégorie 1.

2 - Programme dynamique PDRMD

Nous désirons, ici, tenir compte de l'évolution des demandes de trafic en fonction du temps, et déterminer non seulement quels arcs nouveaux doivent être créés, mais aussi le moment où ils doivent être implantés.

Pour ceci, nous divisons la durée pendant laquelle on considère le réseau en N périodes (numérotées de 1 à N). Nous supposons que la création d'un arc nouveau peut avoir lieu au début de chacune de ces périodes ; un arc ainsi créé existe alors pendant toutes les périodes suivantes.

Nous appelons, pour $n = 1, 2, \dots, N$:

- $T_n(k)$ le trafic de la liaison ($k \in K$) pendant la période n .
- $f_n(i)$ le coût fixe correspondant à la création de l'arc i ($i \in J$) au début de la période n .
- $p_n(i)$ le coût unitaire de l'arc i ($i \in I$) pendant la période n .
- $x_n(i,k)$ ($i \in I, k \in K$) la proportion du trafic $T_n(k)$ utilisant l'arc i .
- $t_n(i)$ ($i \in I$) le trafic de l'arc i pendant la période n : $t_n(i) = \sum_{k \in K} x_n(i,k) T_n(k)$

Les coûts $f_n(i)$ et $p_n(i)$ sont actualisés sur le même instant de référence (par exemple au début de la période 1) de façon à être comparables entre eux.

Dans ces conditions, un arc $i \in J$, créé au début de la période n , et supportant des trafics $t_n(i), t_{n+1}(i) \dots t_N(i)$, aura un coût global

$$c(i) = f_n(i) + \sum_{m=n}^N p_m(i) t_m(i)$$

Ceci nous conduit à un programme PDRMD, inspiré de PDRM. Le programme PDRMD se compose de PDRCD, donné Tableau I, et des contraintes $y_n(i)$ entier ($i \in J, n=1,2,\dots,N$). Dans ce programme $y_n(i) = 1$ signifie que l'arc $i \in J$ doit être créé au début de la période n . La contrainte $\sum_{m=1}^n y_m(i) \geq x_n(i,k)$ exprime que le trafic ne peut s'écouler que lorsque l'arc a été créé. Il n'est pas nécessaire d'imposer $y_1(i) \geq 0$, car on a $y_1(i) \geq x_1(i,k) \geq 0$.

Le Tableau I présente aussi le DDRCD, dual du PDRCD. Dans le dual, les contraintes $\sum_{m=n}^N \sum_{k \in K} v_m(i,k) \leq f_n(i)$, pour $n=1,2,\dots,N$, seront appelées "contraintes complémentaires" de rang n . De plus, on appellera contrainte complémentaire "stricte" de rang n , la relation obtenue lorsque l'égalité est vérifiée, c'est à dire $\sum_{m=n}^N \sum_{k \in K} v_m(i,k) = f_n(i)$.

Observons que si nous supprimons dans le DDRCD les contraintes complémentaires, nous obtenons un programme semblable au DDRC avec N card K liaisons indépendantes, de trafic $T_n(k)$, le coût fixe de chaque arc $i \in J$ étant $f_1(i)$.

Supposons que nous voulions faire varier les péages d'un arc $i \in J$ de façon à améliorer le critère U .

- Si l'on fait abstraction des contraintes complémentaires pour l'arc i , on peut appliquer l'algorithme VAR(i).
- Si l'on conserve seulement la contrainte complémentaire de rang n_1 , en lui imposant d'être stricte, on peut appliquer VAR(i), de façon indépendante, d'une part à l'ensemble des périodes 1 à n_1-1 inclus (avec un coût fixe $f_1(i) - f_{n_1}(i)$), d'autre part à l'ensemble des périodes n_1 à N inclus.
- Si nous conservons r contraintes complémentaires, en imposant à chacune d'elle d'être stricte, nous pouvons de même appliquer VAR(i), de façon indépendante, à $(r+1)$ sous-ensembles de l'ensemble des périodes.

Ceci suggère l'emploi d'une méthode SEP analogue à celle proposée dans le texte principal. La fonction d'évaluation s'obtiendrait encore à l'aide de variations de péages, arc par arc. Toutefois, ces variations de péages d'un arc donné $i \in J$ seraient plus complexes, et sans doute d'un type voisin du suivant :

	PRIMAL (PDRCD)	DUAL (DDRCD)
$i \in I, k \in K, n=1,2,\dots,N$	$x_n(i,k) \geq 0$	$u_n(s_2(i),k) - u_n(s_1(i),k) \leq v_n(i,k) + p_n(i) T_n(k)$
$s \in S, k \in K, n=1,2,\dots,N$	$\sum_{i \in A(s)} x_n(i,k) - \sum_{i \in B(s)} x_n(i,k) = \delta(s,k)$	$v_n(i,k) = 0 \text{ si } i \in I-J$
$i \in J$	$y_1(i)$	$u_n(s,k)$
$i \in J, n=2,3,\dots,N$	$y_n(i) \geq 0$	$\sum_{n=1}^N \sum_{k \in K} v_n(i,k) = f_1(i)$
$i \in J, k \in K, n=1,2,\dots,N$	$\sum_{m=1}^n y_m(i) - x_n(i,k) \geq 0$	$\sum_{m=1}^N \sum_{k \in K} v_m(i,k) \leq f_n(i)$
	$\underline{\text{Min}} C = \sum_{n=1}^N \sum_{i \in J} f_n(i) y_n(i) + \sum_{n=1}^N \sum_{i \in J, k \in K} p_n(i) T_n(k) x_n(i,k)$	$v_n(i,k) \geq 0$
		$\underline{\text{Max}} U = \sum_{n=1}^N \sum_{k \in K} [u_n(d_2(k),k) - u_n(d_1(k),k)]$
	<u>Nota</u> : On a $\delta(s,k) = -1$ si $s = d_1(k)$	
	" = 1 si $s = d_2(k)$	
	" = 0 si $s \neq d_1(k), d_2(k)$	

TABLEAU I : Programme continu "dynamique" PDRCD et son dual DDRCD

- (1) L'ensemble des périodes à contrainte complémentaire stricte $E = \emptyset$.
- (2) Découper la suite des périodes $(1, 2, \dots, N)$ aux instants marquant le début des périodes éléments de E . On obtient ainsi $(\text{card } E + 1)$ groupes de périodes. A chacun de ces groupes, on applique l'algorithme $\text{VAR}(i)$.
- (3) Est-ce que toutes les contraintes complémentaires sont vérifiées ?
 - Si oui, les variations de péages de l'arc i sont terminées.
 - Si non, soit n_1 ($2 \leq n_1 \leq N$) tel que $\sum_{m=n}^N \sum_{k \in K} v_m(i, k) / f_{n_1}(i)$ soit maximal ; $E = E + \{n_1\}$; aller en (2).

3 - Prise en compte de la saturation des arcs (programme PDRMS)

On suppose que, pour au moins un certain nombre d'arcs, la courbe donnant le coût global $c(i)$ ($i \in I$) en fonction du trafic $t(i)$ est convexe, et linéaire par morceaux (voir Fig. 2)

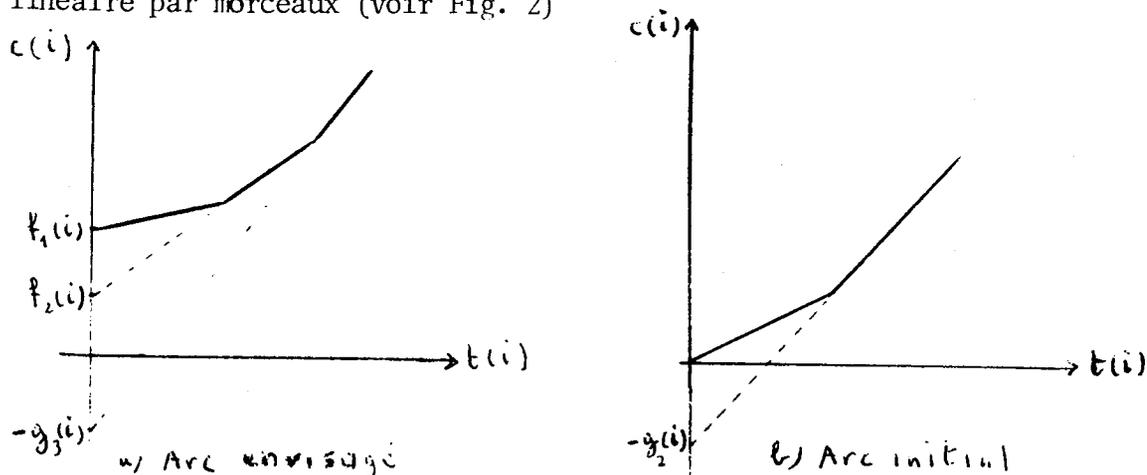


Fig. 2. Coût global d'un arc en fonction du trafic (prise en compte de la saturation)

Pour un arc i , nous appelons $N(i)$ le nombre de parties linéaires ; la $n^{\text{ième}}$ partie linéaire est définie par :

- sa pente $p_n(i)$
- l'ordonnée pour $t(i) = 0$ notée : $f_n(i)$ si elle est positive (alors $g_n(i) = 0$).
- $-g_n(i)$ si elle est négative (alors $f_n(i) = 0$).

L'équation de cette droite est $c_n(i) = f_n(i) - g_n(i) + p_n(i) t(i)$ sachant que $f_n(i) \geq 0$, $g_n(i) \geq 0$, $f_n(i) g_n(i) = 0$.

Ceci nous conduit au programme PDRMS, composé du programme continu PDRCS donné Tableau II, et de la contrainte $y(i)$ entier ($i \in I$). Le Tableau II donne aussi le DDRCS, dual de PDRCS.

Si dans ce dual on suppose les $\lambda_n(i)$ fixés, on est ramené à un programme semblable au DDRC à condition de poser $f(i) = \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) f_n(i)$ et $p(i) = \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) p_n(i)$. On peut alors améliorer la fonction critère en faisant varier le péage arc par arc en appliquant l'algorithme SYST. Réciproquement, on peut songer à faire varier les $\lambda_n(i)$ en supposant fixés, non pas les péages eux-mêmes (ce qui ne serait pas possible), mais les proportions

$$\alpha(i,k) = \frac{v(i,k)}{\sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) f_n(i)} \quad (\text{on a alors } \sum_{k \in K} \alpha(i,k) = 1)$$

Si les $\alpha(i,k)$ sont fixés, le DDRCS prend la forme ci-dessous, appelée "DDRCS réduit".

$$\begin{array}{l} i \in I, k \in K \\ i \in I \\ i \in I, n=1, 2, \dots, N(i) \end{array} \left| \begin{array}{l} u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) \leq \sum_{n=1}^{N(i)} [\lambda_n(i) (\alpha(i,k) f_n(i) + p_n(i) T(k))] \\ \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) = 1 \\ \lambda_n(i) \geq 0 \\ \text{Max } U - \sum_{i=1}^{N(i)} g_n(i) \lambda_n(i) \end{array} \right.$$

Ce programme a un dual, que l'on appellera "PDRCS réduit", qui s'écrit

$$\begin{array}{l} i \in I, k \in K \\ s \in S, k \in K \\ i \in I, n=1, 2, \dots, N(i) \end{array} \left| \begin{array}{l} x(i,k) \geq 0 \\ \sum_{i \in A(s)} x(i,k) - \sum_{i \in B(s)} x(i,k) = \delta(s,k) \\ c(i) \geq \sum_{k \in K} x(i,k) (p_n(i) T(k) + \alpha(i,k) f_n(i)) - g_n(i) \\ \text{Min } \sum_{i \in I} c(i) \end{array} \right.$$

	PRIMAL (PDRCS)	DUAL (DDRCS)
$i \in I, k \in K$	$x(i, k) \geq 0$	$u(s_2(i), k) - u(s_1(i), k) \leq v(i, k) + \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) p_n(i) T(k)$
$s \in S, k \in K$	$\sum_{i \in A(s)} x(i, k) - \sum_{i \in B(s)} x(i, k) = \delta(s, k)$	$u(s, k)$
$i \in I$	$y(i)$	$\sum_{k \in K} v(i, k) = \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) f_n(i)$
$i \in I, k \in K$	$y(i) - x(i, k) \geq 0$	$v(i, k) \geq 0$
$i \in I$	$c(i)$	$\sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) = 1$
$i \in I, n=1, 2, \dots, N(i)$	$c(i) \geq y(i) f_n(i) + p_n(i) \sum_{k \in K} x(i, k) T(k) - g_n(i)$	$\lambda_n(i) \geq 0$
	$\text{Min } C = \sum_{i \in I} c(i)$	$\text{Max } U = \sum_{i=1}^{N(i)} g_n(i) \lambda_n(i)$
		en posant $U = \sum_{k \in K} [u(d_2(k), k) - u(d_1(k), k)]$
	<p><u>Nota</u> : On a $\delta(s, k) = -1$ si $s = d_1(k)$ $= 1$ si $s = d_2(k)$ $= 0$ si $s \neq d_1(k), d_2(k)$</p>	

TABLEAU II : Programme continu avec "saturation" PDRCS et son dual DDRCS

Ce PDRCs réduit peut s'interpréter facilement s'il s'agit d'une affectation de trafic sur un réseau, les coûts sur chaque arc étant une fonction convexe, linéaire par morceau, des trafics des diverses liaisons (cette fonction étant définie par les $\sum_{k \in K} x(i,k) (p_n(i)T(k) + \alpha(i,k)f_n(i)) - g_n(i)$).

A noter que le coût de chaque arc dépend non seulement du trafic total, mais de sa composition, chaque fois que $f_n(i) \neq 0$.

Les développements ci-dessus suggèrent une procédure SEP dont la fonction d'évaluation serait obtenue en effectuant alternativement les deux opérations ci-dessous :

(1) Les $\lambda_n(i)$ étant fixés, appliquer l'algorithme SYST après avoir posé, pour tout $i \in I$, $f(i) = \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) f_n(i)$ et $p(i) = \sum_{n=1}^{N(i)} \lambda_n(i) p_n(i)$.

(2) Les $\alpha(i,k)$ étant fixés, utiliser une méthode d'affectation appropriée pour déterminer des $\lambda_n(i)$ qui améliorent la fonction critère du PDRCs réduit.

Remarquons que si le phénomène de saturation intervient dans beaucoup d'arcs, il est probable que le trafic de nombreuses liaisons se répartira entre plusieurs itinéraires, et, par conséquent, que les $x(i,k)$ correspondants ne seront pas entiers. Il sera alors peu probable que la solution du PDRC soit entière. Il faudra donc parcourir de nombreux sommets de l'arborescence dans la méthode SEP.

III - PROBLEMES SE RATTACHANT AU CHOIX OPTIMAL D'UN RESEAU

Certains problèmes a priori différents du problème P de choix optimal d'un réseau de transport peuvent se mettre sous la même forme mathématique. On peut alors envisager d'employer la même méthode de résolution. Toutefois cette dernière n'a été testée que sur des réseaux de transport de caractéristiques "moyennes", et on ne peut rien dire a priori de son efficacité dans d'autres circonstances. De plus, ces nouveaux problèmes possèdent des particularités dont une méthode adaptée doit permettre de mieux tirer partie. Cependant, il se pourrait que l'approche utilisée pour P suggère des idées de résolution. Nous donnons ci-dessous deux exemples de ces problèmes.

1 - Localisation optimale d'équipements (problème de m-centre)

Soient :

- un ensemble E d'emplacements possibles d'unités de production d'un certain bien,
- un ensemble F de clients à desservir chacun ayant une localisation précise,
- pour tout $n \in E$ une charge fixe $a_n \geq 0$ d'implantation d'une unité de production à l'emplacement n,
- pour tout $m \in F$, une quantité $b_m \geq 0$ de biens à fournir au client m,
- pour tout couple $nm \in E \times F$, un coût $c_{nm} \geq 0$ de fourniture au client m par l'unité de production n d'une unité de bien (en fait c_{nm} inclut tous les coûts proportionnels à la quantité de bien fourni qu'il s'agisse d'investissement, de fabrication, de livraison).

Nous envisageons le problème P_1 suivant : trouver le sous-ensemble $E_1 \subset E$ des emplacements où l'on doit implanter des unités de production, et les quantités $x_{nm} \geq 0$ ($n \in E_1, m \in F$) à fournir par l'unité n au client m de façon à minimiser $\sum_{n \in E_1} a_n + \sum_{n \in E_1, m \in F} c_{nm} x_{nm}$ sous les contraintes

$$\sum_{n \in E_1} x_{nm} = b_m \quad (\text{pour tout } m \in F)$$

On trouvera une étude complète de ce problème dans MUKENDI, réf. [18].

Nous allons montrer que P_1 est équivalent à un problème P de recherche de réseau optimal, illustré en Fig. 3, composé des éléments ci-dessous :

- l'ensemble des sommets $S = E + F + \{\alpha\}$, α étant un sommet supplémentaire,
- l'ensemble des arcs envisagés $J = E$, avec, pour tout $n \in E = J$,

$$\begin{aligned} s_1(n) &= \alpha \\ s_2(n) &= n \in S \\ n(n) &= 0 \\ f(n) &= a_n \end{aligned}$$

- l'ensemble des arcs initiaux $I-J = E \times F$, avec pour tout $nm \in E \times F \in I$,

$$\begin{aligned} s_1(nm) &= n \in S \\ s_2(nm) &= m \in S \\ p(nm) &= c_{nm} \end{aligned}$$

- l'ensemble des liaisons $K = F$ avec, pour tout $m \in F = K$,

$$\begin{aligned} T(m) &= b_m \\ d_1(m) &= \alpha \\ d_2(m) &= m \in S \end{aligned}$$

- o Implantations possibles
- x Clients
- \Rightarrow arc envisagé
- \rightarrow arc initial

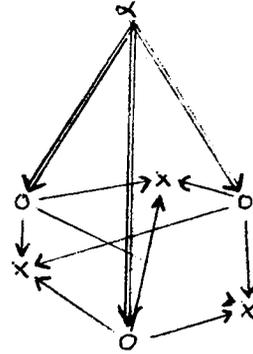


Fig.3. Equivalence des problèmes P_1 et P

A toute solution possible de P_1 on peut faire ^{correspondre} une solution possible de P , et réciproquement, par les relations suivantes :

- le sous-ensemble $E_1 \subset E$ des implantations à réaliser dans la solution de P_1 doit être égal au sous-ensemble $J_1 \subset J = E$ des arcs à réaliser dans la solution de P ,
- à tout $nm \in E \times F \subset I$ correspondent dans toute solution de P_1 une quantité x_{nm} à fournir par l'unité n au client m , et dans toute solution de P des trafics $t(nm, m)$ et $t(n, m)$, égaux entre eux, de la liaison $m \in K$ sur les arcs $nm \in I$ et $n \in I$; pour que les solutions correspondent, on doit avoir $x_{nm} = t(nm, m) = t(n, m)$.

Notons qu'à l'implication de $P_1 : x_{nm} > 0 \Rightarrow n \in E_1$ correspond celle de $P : t(n, m) > 0 \Rightarrow n \in J_1$.

Les coûts des solutions de P_1 et P en correspondance sont égaux : en effet

$$\sum_{n \in E_1} a_n + \sum_{n \in E_1, m \in F} c_{nm} x_{nm} = \sum_{n \in J_1} f(n) + \sum_{i \in I, m \in K} p(i) t(i, m)$$

puisque $E_1 = J_1$, $a_n = f(n)$, $F = K$, $I = E \times F + E$, $p(nm) = c_{nm}$, $x_{nm} = t(nm, m)$, $p(i) = 0$ si $i \notin E \times F$, $t(i, m) = 0$ si $i \in (E - E_1) \times F$.

Ceci achève de montrer l'équivalence des problèmes P et P_1 .

2 - Problème de "set covering"

Ce problème P_2 est défini comme suit : étant donné deux ensembles finis E et F , trouver les y_n ($n \in E$) minimisant $\sum_{n \in E} c_n y_n$ sous les contraintes

$$\sum_{n \in E} a_{mn} y_n \geq 1 \quad \text{pour tout } m \in F$$

$$y_n = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{pour tout } n \in E$$

sachant que les c_n sont des réels ≥ 0 et les a_{mn} sont égaux à 0 ou 1.

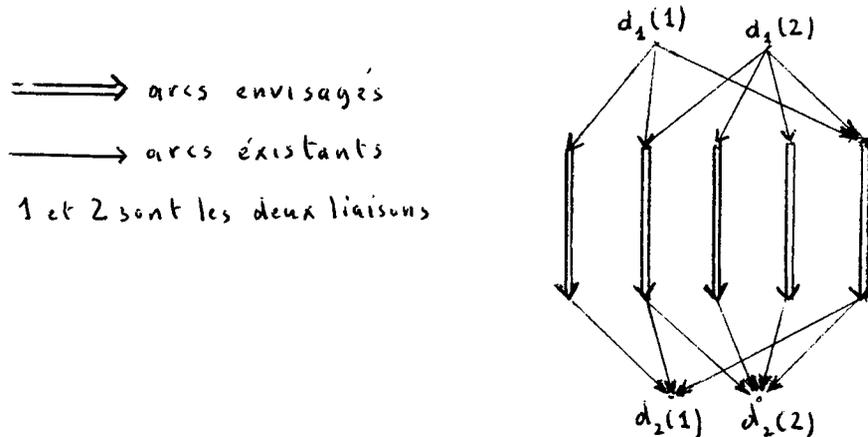


Fig. 4. Equivalence des problèmes P_2 et P

Ce problème P_2 peut être interprété comme un problème P de recherche de réseau optimal (voir Fig. 4) dans lequel :

- l'ensemble des arcs envisagés $J = E$ avec, pour tout $n \in E$,

$$f(n) = c_n$$

$$p(n) = 0$$

- l'ensemble des liaisons $K = F$ avec, pour tout $m \in F$, $T(m) = 1$.

On désire que le trafic de chaque liaison $m \in F$ se répartisse entre les arcs $n \in J$ tels que $a_{mn} = 1$. Ceci s'obtient en ayant :

- un ensemble de sommets S comportant d'une part les éléments $s_1(n)$ et $s_2(n)$ pour tout $n \in J = E$, et d'autre part les éléments $d_1(m)$ et $d_2(m)$ pour tout $m \in K$, tous ces éléments étant distincts,

- un ensemble d'arcs initiaux (I-J) comprenant, pour tout $m \in F$, deux catégories d'arcs : d'une part ceux issus du sommet $d_1(m)$ et aboutissant aux sommets initiaux de tous les arcs de J tels que $a_{mn} = 1$ ($n \in J$), d'autre part ceux issus des sommets terminaux des mêmes arcs de J , et aboutissant au sommet $d_2(m)$; tous ces arcs ont un coût nul.

Une solution de P_2 est définie par les sous-ensemble $E_1 \subset E$ des $n \in E$ tels que $y_n = 1$. Une solution du problème P défini ci-dessus est caractérisée par le sous-ensemble $J_1 \subset J$ des arcs à réaliser (en effet, les coûts unitaires étant

- [16] HU, T.C., Integer programming and network flows. (Addison-Wesley, Reading, Mars 1970).
- [17] ICHBIAH, J.D., Connectivity analysis and branch and bound methods. (Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1967).
- [18] MUKENDI, C., Sur l'implantation d'équipements dans un réseau : le problème de m-centre. (Thèse présentée à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1975).
- [19] LAND, A.H. - DOIG, A., An automatic method of solving discrete programming problems. (Econometrica 28, 1960).
- [20] RIDLEY, T.M., An investment policy to reduce the travel-time in a transportation network (Transportation Research, Vol. 2, 1968).
- [21] ROBERT, P.O. - FUNK, M.L., Toward optimum methods of link addition in transportation networks. (Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1964).
- [22] ROCKAFELLAR, R.T., Convex analysis. (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970).
- [23] ROY, B. - NGHIEM, P.T. - BERTIER, P., Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P. (Metra, 4, 1965).
- [24] SCOTT, A.J., The optimal network problem : some computational procedures. Transportation Research, Vol. 3, 1969).
- [25] STAIRS, S.W., Selecting an optimal traffic network. (Journal of Transport Economics and Policy, Vol. 2, n° 2, 1968).
- [26] STEENBRINK, P.A., Transport network optimization in the Dutch integral transportation study. (Transportation Research, Vol. 8, 1974).
- [27] WANG, J.J. - SNELL, R.S. - FUNK, M.L., Toward a solution for the optimal allocation of investment in urban transportation networks. (Highway Research Record 238, 1968).

tous nuls, les itinéraires utilisés sont indifférents). On dira qu'une solution de P_1 et une solution de P se correspondent si $E_1 = J_1$. Si tel est le cas :

- les deux solutions correspondantes sont soit toutes deux possibles, soit toutes deux impossibles ; en effet, pour chacun des problèmes, une solution est possible si, et seulement si, pour tout $m \in F = K$, $\exists n \in E_1 = J_1$ tel que

$$a_{mn} = 1 ;$$

- si les deux solutions sont possibles elles ont le même coût :

$$\sum_{n \in E} c_n y_n = \sum_{n \in E_1} c_n = \sum_{n \in J_1} f(n).$$

Ceci montre l'équivalence de P et P_2 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBIER, M., Le futur réseau de transports en Région de Paris.
(Cahiers de l'Institut d'Aménagement et d'Urbanisme de la Région
Parisienne, Volume IV-V, n° 4, 1966).
- [2] BROKKE, G.E., Nationwide Highway Travel. (Bureau of Public Roads, U.S.
Department of Commerce, 1966).
- [3] CARTER, E.C. - STOWERS, J.R., Model for funds allocation for urban highway
systems capacity improvements. (Highway Research Record 20, 1963).
- [4] CHARIFKER, I. - MACULAN, N., Operational solution for the network expansion
problem. (Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1972).
- [5] CHRISTOFIDES, N. - BROOKER, P., Optimal expansion of an existing network.
(Mathematical Programming 6, 1974).
- [6] DANTZIG, G.B., Linear programming and extensions. (Princeton University
Press, 1963).
- [7] DANZANVILLIERS, P. - LE MENESTREL, H., Programme COBRA. Choix Optimal de
Branches de Routes et d'Autoroutes. (Institut de Recherche des Trans-
ports, 1970).
- [8] DIAL, R.B., A probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which obviate
Path Enumeration. (Transportation Research, Vol. 5, 1972).
- [9] DOUILLEZ, P.J., Optimizing the investment policy on a transportation network.
(International Center for Management Science, Université Catholique
de Louvain, 1968).
- [10] FULKERSON, D.R., Increasing the capacity of a network : the parametric budget
problem. (Management Science 5, 1959).
- [11] GARRISON, W.L. - MARBLE, D.F., Analysis of highway networks : a linear pro-
gramming formulation. (Highway Research Board, Proc., Vol. 37,
1958).
- [12] HAY, G.A. - MORLOCK, E.K. - CHARNES, A., Toward optimal planning of a two-
mode urban transportation system : a linear programming formulation.
(Highway Research Record 148, 1966).
- [13] HELD, M. - KARP, R.M., The traveling salesman problem and minimum spanning
tree. (Part I, Operations Research 18, 1970, Part II, Mathematical
Programming 1, 1971).
- [14] HERSHDORFER, A.M., Optimal utilisation and synthesis of road networks.
(Department of Civil Engineering, Massachussets Institute of Techno-
logy, 1965).
- [15] HOANG HAI HOC, A computational approach to the selection of an optimal
network. (Management Science, Vol. 19, n° 5, Janvier 1973).