HAL open science

Etude du polytope associé aux stables d'un graphe et caractérisation dans le cas des graphes série-parallèles

Mouloud Boulala

To cite this version:

Mouloud Boulala. Etude du polytope associé aux stables d'un graphe et caractérisation dans le cas des graphes série-parallèles. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1978. Français. NNT : . tel-00288666

HAL Id: tel-00288666

https://theses.hal.science/tel-00288666v1

Submitted on 18 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Mathématiques Appliquées

Option : Recherche Opérationnelle

par

Mouloud BOULALA

ETUDE DU POLYTOPE ASSOCIE AUX STABLES D'UN GRAPHE ET CARACTERISATION DANS LE CAS DES GRAPHES SERIE–PARALLELES

Thèse soutenue le 23 juin 1978 devant la Commission d'Examen :

Président : M. SAKAROVITCH

Examinateurs : C. BENZAKEN
P. JULLIEN
J.P. UHRY

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmocodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président

Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrométallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

J'exprime, à l'occasion de cette thèse, mon admiration pour la sympathie et la cohérence qui règnent dans l'équipe de recherche opérationnelle, et je remercie Monsieur Michel SAKAROVITCH de m'y avoir accepté et de m'avoir ainsi offert la possibilité de préparer cette thèse, d'acquérir quelques sures connaissances et de dissiper quelques illusions.

Je remercie aussi Monsieur C. BENZAKEN et Monsieur P. JULLIEN qui ont accepté de faire partie du jury.

Que Jean-Pierre UHRY, dont l'aide, la disponibilité et les orientations lucides m'ont été d'un grand secours dans l'ensemble de mon travail, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Madame NEUMANN pour son aide précieuse dans la frappe de cette thèse ainsi que Monsieur IGLESIAS et son équipe pour leur excellent travail dans le tirage de cette thèse.

Mouloud BOULALA

Je dédie cette thèse à Bakhta

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : FACETTES DU POLYTOPE DES STABLES D'UN GRAPHE..... 4

§1 - Une classe de graphes définissant des facettes 5

§2 - Procédures génératrices de facettes 12

CHAPITRE II : POLYTOPE DES STABLES D'UN GRAPHE SERIE-PARALLELE 25

§1 - Introduction 26

§2 - Conjecture de Chvatal 28

§3 - Ensemble d'articulation 30

§4 - Application aux graphes S.P. 37

§5 - Démonstration de la conjecture de Chvatal 39

§6 - Réduction des chaines 45

CHAPITRE III : GRAPHES QUASI-ADJOINTS ET OPERATIONS SUR LES GRAPHES .. 76

§1 - Graphes quasi-adjoints 77

§2 - Opérations sur les graphes 83

INTRODUCTION

Parmi les problèmes dont l'étude a bénéficié des motivations pratiques et théoriques à la fois, se trouve le problème de stable de poids maximum dans un graphe G qui se formule comme suit :
Dans un graphe $G = (X, E)$ simple et non orienté dont tout sommet est muni d'un poids, on cherche un ensemble de sommets non adjacents deux à deux (ensemble stable ou stable) de poids maximum.
Ce problème est encore équivalent au programme linéaire en nombres entiers,

$$P_I(G) = \begin{cases} Ax \leq 1_m \\ x \in \{0,1\}^n \\ \text{Max. } cx \end{cases}$$

où A est la matrice d'incidence arêtes-sommets du graphe $G = (X, E)$, $|E|=m$, $|X| = n$; c un système de poids sur les sommets ; $1_m = (1,\dots 1)$ est un m-vecteur.

Soient N un ensemble fini ($|N| = n$), F une famille de parties de N ($|F| = m$), c un système de poids attribué aux éléments de F.

Une variété assez large de problèmes pratiques, voir [15], se présente sous les formes des problèmes combinatoires qu'on appelle recouvrement, couplage, partitionnement. Ces problèmes consistent à trouver (si possible) un sous-ensemble de F de poids maximum ou minimum tel que respectivement.

(a) tout élément de N appartient à au moins un élément de F.
(b) tout élément de N appartient à au plus un élément de F.
(c) tout élément de N appartient à exactement un élément de F.

Les problèmes (a), (b), (c) peuvent se présenter sous formes de programmes linéaires en nombres entiers,

$$P_a = \begin{cases} \bar{A}x \geq 1_m \\ x \in \{0, 1\}^n \\ \text{Min. } cx \end{cases}$$

$$P_b = \begin{cases} \bar{A}x \leq 1_m \\ x \in \{0, 1\}^n \\ \text{Max. } cx \end{cases}$$

$$P_c = \begin{cases} \bar{A}x = 1_m \\ x \in \{0, 1\}^n \\ \text{Max. } cx \end{cases}$$

où $\bar{A}$ est la matrice d'incidence F - N.

Tous les problèmes de recouvrement , partitionnement et d'autres peuvent se transformer en problèmes de couplage, voir [15], ce qui fait que l'étude du couplage est d'une grande généralité. De plus ce problème est équivalent à un problème de stable de poids maximum dans un graphe G associé à la matrice $\bar{A}$ de la manière suivante :
Les sommets de G sont en correspondance biunivoque avec les colonnes de $\bar{A}$.
Il existe une arête entre deux sommets de G si et seulement si le produit scalaire des colonnes correspondantes est supérieur ou égal à un.

Ce qui précède démontre l'intérêt pratique du problème de stable ; d'autre part l'abondante littérature faite autour de son étude polyédrale et algorithmique ainsi que la place qu'il occupe parmi les problèmes les plus difficiles (N.P. complets) de la combinatoire montrent son intérêt théorique.

L'étude polyédrale ou plus précisément la recherche d'un ensemble minimal de contraintes dit ensemble de facettes qui définit l'enveloppe convexe des stables a pris nettement de l'ampleur ces dernières années pour

plusieurs raisons dont l'une est le fait que l'adjonction d'une ou plusieurs facettes à l'ensemble des contraintes du polyèdre,

$$L(G) = \begin{cases} Ax \leq 1_m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ne fait qu'augmenter la performance des méthodes employées à la résolution du problème.

Finalement, bien que - d'après la forte complexité de l'enveloppe convexe des stables mise en évidence par cette étude - l'espoir d'une caractérisation complète des facettes semble illusoire, une caractérisation partielle ne manquerait pas d'être fort intéressante.

L'objet de cette thèse est l'étude du polytope de R^n, enveloppe convexe des vecteurs représentatifs des stables de G et, plus précisément, des facettes de ce polytope.
Dans le premier chapitre, après avoir situé le sujet et rappelé un certain nombre de résultats classiques relatifs au polytope des stables, on donne une procédure originale de génération de facettes qui permet de proposer un mode de classification des problèmes combinatoires.
Dans le second chapitre, qui est le fruit d'un travail collectif avec J. P. UHRY [4], se trouve présenté un algorithme polynomial de recherche d'un stable de poids maximum dans un graphe série-parallèle avec un certain nombre de théorèmes originaux permettant la démonstration d'une conjecture de Chvatal et la caractérisation complète du polytope des stables d'un graphe série-parallèle.
Enfin le troisième chapitre est consacré à une approche originale pour l'étude d'une conjecture de Maurras sur les graphes quasi-adjoints et à la présentation d'un résultat nouveau sur le polytope des stables d'un graphe résultant de la mise en parallèle de deux graphes.

CHAPITRE I

FACETTES DU POLYTOPE DES STABLES D'UN GRAPHE

§1 - UNE CLASSE DE GRAPHES DEFINISSANT DES FACETTES

Soient $G = (X,E)$ un graphe simple non orienté sans boucle ($X = \{1,2,\ldots,n\}$ l'ensemble des sommets, $E = \{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ l'ensemble des arêtes) ; c un système de poids réels sur les sommets.

Définition 1 : Soit $S \subseteq X$; on désigne par G_S le sous-graphe de G construit sur S.
Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq X$ est dit stable ou indépendant si le sous-graphe G_S ne contient pas d'arêtes.
On appelle "poids" ou "valeur" du stable S la somme $\sum_{i \in S} c_i$ des poids des éléments de S.

Soit x^S le vecteur représentatif du stable S dans $\{0,1\}^n$; ($x_r^S = 1$ si i S, 0 sinon).
On confondra par la suite l'ensemble S avec son vecteur représentatif x^S.
En considérant le stable S (ou $\mathbf{x}^S$) comme un point de R^n, on peut définir l'enveloppe convexe E(G) de ces points.
D'après le théorème de Weyl [20], il existe un ensemble fini d'inéquations linéaires qui définit l'enveloppe convexe E(G) ; le problème de la recherche d'un ensemble minimal d'inéquations linéaires dont chacune représente une n-1 face de E(G) a fait l'objet de nombreuses études, jusqu'à présent, de nature descriptive et non pas algorithmique.

Définition 2 : On appelle "trou" tout ensemble de sommets constituant un cycle impair sans corde (sans arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle) de G et on appelle "anti-trou" le complémentaire d'un trou.
On appelle clique tout ensemble de sommets engendrant un sous-graphe complet de G.

Définition 3 : L'inéquation $F = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o)$ où α_i, $i = 0,1,\ldots,n$ sont supposés, sans perte de généralité, tous entiers et premiers entre eux, est dit "facette" (n-1 face) de E(G) si et seulement si

(i) F est valide pour tout stable de G.

(ii) Il existe n stables de G affinement indépendants vérifiant F avec le signe égal : ces stables ne sont pas forcément maximaux.

Une facette $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ de E(G) est dite "booléenne" si et seulement si $\alpha_i = 0$ ou 1, $i = 1,2,\ldots,n$.

Définition 4 :

$$a+b \ (\mathrm{mod}^* n) = \begin{cases} a+b \text{ si } a+b \leq n \\ \\ a+b-n \text{ si } a+b > n. \end{cases}$$

Remarques :

1) Les contraintes $x_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots n$ sont des facettes de E(G) dites facettes triviales. On considère par exemple la contraintes $x_1 \geq 0$; il est clair qu'elle est vérifiée par tout stable de G et pour montrer qu'elle est facette de E(G), il suffit alors d'exhiber n stables affinement indépendants vérifiant la contrainte avec le signe égal ; ces stables sont les suivants : $S_o = \emptyset$, $S_j = \{j\}$, $j = 2,3,\ldots,n$.

2) Toute facette non triviale $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ vérifie $\alpha_o > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$.

On commence d'abord par montrer que α_o est positif ($\alpha_o > 0$). Si on suppose que $\alpha_o = 0$ alors les coefficients α_i, $i = 1,2,\ldots,n$, doivent être non positifs ($\alpha_i \leq 0$). Comme ils ne peuvent pas être tous nuls, on voit aussi qu'il ne peut y avoir un coefficient unique négatif car sinon la facette est triviale (contradiction).

Alors on doit avoir au moins deux coefficients négatifs, et dans ce cas on peut exhiber au plus n-1 stables affinement indépendants vérifiant la contrainte avec le signe égal; si on suppose que $\alpha_o < 0$ alors le stable vide ($S = \emptyset$) viole la contrainte (contradiction).

Maintenant on suppose que $\alpha_o > 0$ et on démontre $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$.
Si on suppose qu'il existe un coefficient $\alpha_i < 0$ alors, comme il doit y avoir un stable passant par le sommet i et vérifiant la constainte avec égalité, le stable $S - \{i\}$ viole la contrainte (contradiction).

3) Quand on a une inéquation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$, avec $\alpha_o > 0$, vérifiée par tous les stables d'un graphe G, alors pour montrer qu'elle est une facette de E(G), il suffit d'exhiber n stables de G linéairement indépendants vérifient l'inéquation avec le signe égal. Dans ce cas, l'indépendance affine et l'indépendance linéaire coïncident car le vecteur nul ne vérifie pas l'inéquation avec le signe égal.

4) Si G est une clique alors l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$ est une facette de E(G).

Quand G est une clique, il existe n stables linéairement indépendants vérifiant la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$ avec le signe égal ; ces stables sont les suivants :

$S_i = \{i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

5) Si G est un trou alors l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n-1}{2}$ est une facette de E(G)

Quand G est un trou, il existe également n stables linéairement indépendants vérifiant la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n-1}{2}$ avec le signe égal ; ces stables sont les suivants :

$S_i = \{j \mid j = i+p \pmod n),\ P = 0,1,\ldots, K-1\}$, $i = 1,2,\ldots,n$; $K = \frac{n-1}{2}$.

<u>Définition 5</u> : On dit que le graphe G "définit" la facette $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ de E(G) si, pour tout $i \in X$, $\alpha_i > 0$.

<u>Remarques</u> :

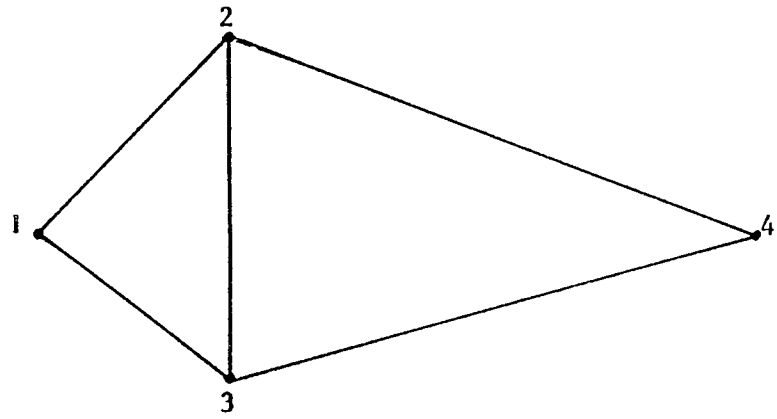
7) Si le graphe G "définit" une facette $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$, alors G est connexe.

Supposons que G ne soit pas connexe, alors G peut s'écrire comme $G = G_1 \cup G_2$ ou $G_i = (X_i, E_i)$ avec $X_i \neq \emptyset$, $i = 1,2$.

Soient l'ensemble $\{\alpha_i \mid i \in X_1\}$; $\alpha_0^1 = \max_{S(G_1)} . \sum_{i \in X_1} \alpha_i x_i$ où $S(G_1)$ est l'ensemble des stables de G_1. On doit avoir $\alpha_1 > 0$ car $X_1 \neq \emptyset$ et $\alpha_i > 0$, $i \in X_1$; par conséquent

tout stable de G vérifiant l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ avec le signe égal doit vérifier l'inéquation $\sum_{i \in X_1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_0^1$ avec le signe égal ; ce qui contredit le fait que l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ est une facette de E(G).

8) L'inéquation $\sum_{i=1}^{3} x_i \leq 1$ est une facette de E(G) relative au graphe G de la figure 1 ; cependant le graphe G ne "définit" pas cette facette car le coefficient relatif au sommet 4 dans la facette est nul.



F. 1

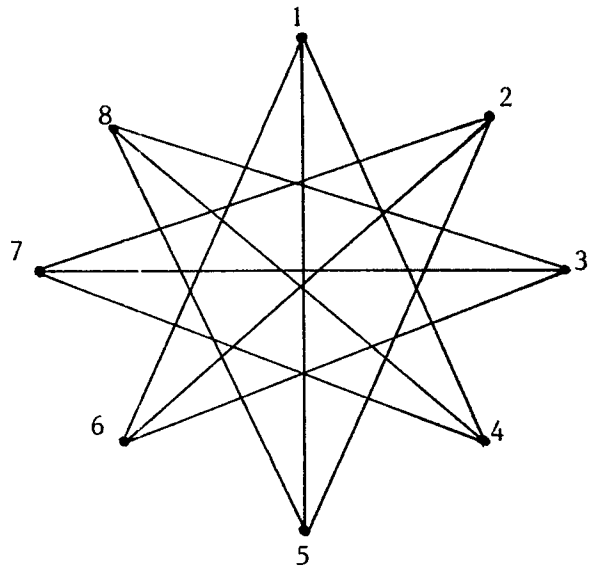
. Vu que les graphes qui sont des cliques, des trous, des anti-trous définissent des facettes, il est tout à fait naturel de penser à enrichir ces classes de graphes par d'autres. Dans ce sens, Trotter [18] a proposé deux classes de graphes ayant le mérite de contenir les classes indiquées ci-dessus l'une est constituée de graphes dits "palmes", l'autre de graphe dits "anti-palmes".

<u>Définition 6</u> : Un graphe $W(n,k) = (X,E)$ est une palme si et seulement si $E = \{(i,j) | j = i+k+p \pmod{n}^{*} ; p = 0,1,2,\ldots,n-2k\}$ où n,k sont entiers tels que $n \geq 2$, $1 \leq k \leq 1/2n$.

On appelle anti-palme le complémentaire d'une palme.

. $W(n,k)$, $\overline{W}(n,k)$ représentent par la suite, respectivement, une palme et une anti-palme.

Le graphe de la figure 2 est un W(8,3).



F. 2

Remarque

9) Il n'est pas difficile de voir que :

- W(n,k) est un graphe régulier de degré n-2k+1.
- W(n,k) possède n stables maximaux de cardinalité k du type $S_i = \{j \mid j = i+p \bmod^* n,\ p = 0,1,\ldots,k-1\}$, $i \in X$.
- W(n,1) est une clique de cardinalité n.
- Pour tout entier $s \geq 2$, W(2s+1, s) est un trou et $\overline{W}(2s+1, 2)$ est un anti-trou.

Parmi les palmes et les anti-palmes, il en existe certaines qui définissent des facettes ; celles-ci ont été caractérisées par Trotter [18] comme suit :

Théorème 1 : Si G = W(n,k) est une palme alors l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k$ est une facette de E(G) si et seulement si n et k sont premiers entre eux.

Théorème 2 : Si $G = \overline{W}(n,k)$ est une anti-palme tel que n,k sont premiers entre eux, $k \geq 2$ alors l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq [k/n]$ est une facette de E(G) ([k/n] est la partie entière de k/n).

Toujours, dans le but d'enrichir les classes de graphes définissant des facettes, Chvatal [5] a proposé une classe de graphe qu'on peut appeler graphes presque α-critiques ayant également le mérite de contenir toutes les palmes et les anti-palmes définissant des facettes.

<u>Définition 7</u> : Dans un graphe G, une arête e est dite critique si la suppression d'une telle arête crée un graphe G^- avec un nombre de stabilité supérieur à celui de G ; c'est à dire $\alpha(G^-) = \alpha(G)+1$.

Un graphe connexe G est dit presque α-critique si la suppression simultanée des arêtes non critiques ne déconnecte pas le graphe.

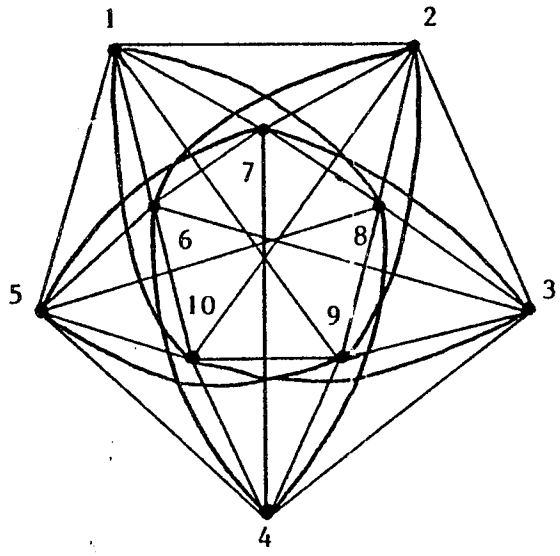
Tout graphe presque α-critique définit une facette comme le montre le résultat suivant [5] :

- Si G est un graphe presque α-critique alors l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \alpha(G)$ est une facette de E(G).

La condition "presque α-critique" est suffisante pour qu'un graphe connexe G définisse une facette, mais elle n'est pas nécessaire.

Le graphe de la figure 3 définit la facette $\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2$ de E(G), ($\alpha(G) = 2$).

Cependant la suppression des arêtes non critiques de G reliant le cycle $C_1 = \{1,2,3,4,5\}$ au cycle $C_2 = \{6,7,8,9,10\}$ déconnecte le graphe G.



F. 3

Après avoir vu une classe de graphes définissant des facettes booléennes, on se pose la question suivante :

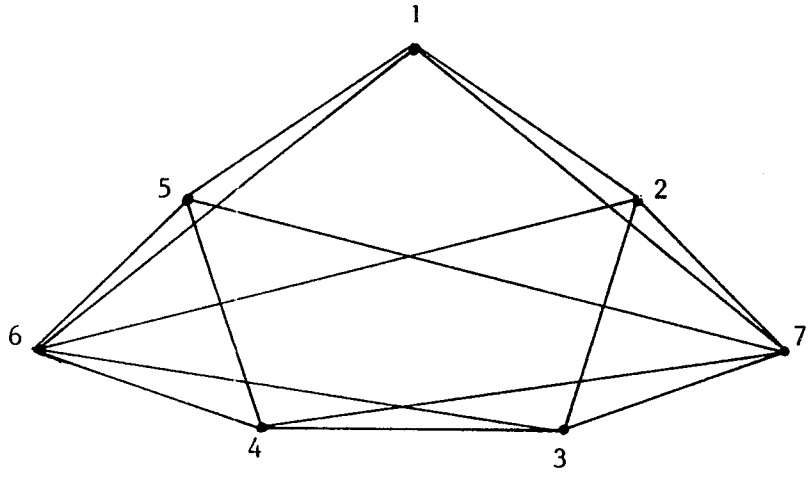
Soit $G = (X,E)$ un graphe contenant un sous-graphe $G^* = (X^*,E^*)$ presque α-critique. Est-ce que la facette $\sum_{i \in X^*} \alpha_i x_i \leq \alpha(G\ )$ de $E(G\ )$ est une facette de $E(G)$?

Plus généralement, si G^* est un sous-graphe de G tel que l'inéquation $\sum_{i \in X^*} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ est une facette de $E(G^*)$, est-ce que cette inéquation est aussi facette de $E(G)$?

La réponse à cette question est généralement négative comme le montre l'exemple suivant :

Le graphe $G = (X,E)$ de la figure 4 possède un sous-graphe $G^* = (X-\{6,7\},E^*)$ qui est un trou de cardinalité 5.

Si l'inéquation $\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 2$ est une facette de $E(G^*)$, elle ne l'est pas pour $E(G)$ car il n'existe pas un stable de G contenant le sommet 6 (ou 7) et vérifiant cette inéquation avec le signe égal.



F. 4

§2 - PROCEDURES GENERATRICES DE FACETTES

L'étude du rapport entre l'enveloppe convexe E(G) des stables de G et l'enveloppe convexe $E(G^*)$ des stables du sous-graphe G^* de G a suscité beaucoup d'attention ; cette étude porte essentiellement sur la manière d'engendrer des facettes de E(G) à partir des facettes de $E(G^*)$, ou plutôt d'étendre des facettes de $E(G^*)$ à des facettes de E(G).

A cette fin, une procédure connue dans la littérature sous le nom de procédure séquentielle a été proposée par Nemhauser et Trotter [10] sous la forme du théorème suivant :

Théorème 3 : Si l'inéquation $\sum_{i\in X^*} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ est une facette de $E(G^*)$ alors il existe β_i, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_o$ tels que l'inéquation $\sum_{i\in X^*} \alpha_i x_i + \sum_{i\in X-X^*} \beta_i x_i \leq \alpha_o$ est une facette de E(G).

Démonstration : On suppose, sans perte de généralité, que G est connexe et que le sous-graphe G^* de G est construit sur n-1 sommets et soit n le sommet de G qui n'est pas un sommet de G^*.

On cherche à affecter un coefficient β_n au sommet n tel que l'inéquation $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \beta_n x_n \leq \alpha_o$ soit une facette de E(G).

On définit β_n comme suit :

$$\beta_n = \alpha_o - Z^*$$

$$Z^* = \max_{\{X^S \mid S\in S(\overline{G})\}} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$$ où $\overline{G}$ est le sous-graphe de G obtenu en effaçant le sommet n et son voisinage V(n). $\overline{G} = (X-V(n)\cup\{n\}, \overline{E})$; $S(\overline{G})$ est l'ensemble des stables de $\overline{G}$; X^S le vecteur représentatif de S.

Comme $\overline{G}$ est un sous-graphe de G alors $\beta_n \geq 0$.

D'après la définition de β_n, il est facile de voir que tout stable de G vérifie la contrainte $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \beta_n x_n \leq \alpha_o$, et pour achever la démonstration il faut exhiber n stables linéairement indépendants vérifiant cette contrainte avec le signe égal.

Soit $\bar{s}_i$ un stable de $\bar{G}$ tel que $Z^* = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^{\bar{s}_i}$ et $s_n = \bar{s}_i \cup \{n\}$.

Alors les n-1 stables qui définissent la facette $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$ de $E(G^*)$ avec le stable s_n forment n stables linéairement indépendants vérifiant l'inéquation $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \beta_n x_n \leq \alpha_o$ avec le signe égal.

c.q.f.d.

Remarques :

10) La facette déterminée par la procédure séquentielle dépend de l'ordre dans lequel les coefficients β_i sont déterminés.

La facette $\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 2$ définie par le trou G_C, $C = \{1,2,3,4,5\}$, du graphe G de la figure 4 n'est pas une facette de E(G). Cependant l'application de la procédure séquentielle à cette facette dans l'ordre β_6, β_7 donne la facette $\sum_{i=1}^{5} x_i + 2x_6 \leq 2$ de E(G) et dans l'ordre β_7, β_6 donne la facette $\sum_{i=1}^{5} x_i + 2x_7 \leq 2$ de E(G).

11) Soit $G^* = (X^*,E^*)$ un sous-graphe de $G = (X,E)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'inéquation $\sum_{i \in X} x_i \leq 1$ soit une facette de E(G) est que G soit une clique maximale.

Démonstration :

C.S. : Si G est une clique maximale, alors tout stable de G vérifie l'inéquation $\sum_{i \in X^*} x_i \leq 1$, et on va exhiber n stables linéairement indépendants vérifiant cette inéquation avec le signe égal.

On considère les stables $s_i = \{i\}$, $i \in X^*$; et comme G^* est une clique maximale alors pour tout sommet $j \in X-X^*$ il existe un sommet $i \in X^*$ tel que $(i,j) \notin E$; ce qui fait qu'au sommet j on peut associer le stable $s_j = \{j,i\}$; par conséquent les stables S_i, $i \in X$, s_j, $j \in X-X^*$ forment n stables linéairement indépendants vérifiant l'inéquation $\sum_{i \in X^*} x_i \leq 1$ avec le signe égal.

C.N. : Si G est une clique non maxiamle alors il existe un sommet $j \in X-X^*$ tel que le sous-graphe construit sur les sommets $X^* \cup \{j\}$ est une clique ; et par conséquent tout stable vérifiant l'inéquation $\sum_{i \in X^*} x_i \leq 1$ avec le signe égal vérifie également l'inéquation $\sum_{i \in X^* \cup \{j\}} x_i \leq 1$ avec le signe égal, ce qui contredit le fait que $\sum_{i \in X^*} x_i \leq 1$ est une facette de E(G).

c.q.f.d.

12) On peut se demander si la procédure séquentielle est capable d'engendrer toutes les facettes de E(G) en explorant tout ou partie des sous-graphes de G ?

La réponse est non ; il existe généralement des facettes de E(G) que la procédure séquentielle est incapable d'engendrer ; ces facettes sont en quelque sorte propres au graphe G, comme le montre l'exemple suivant :

Soit G un trou de cardinalité 5.

Les seules facettes non triviales relatives aux sous-graphes de G strictement inclus dans G sont celles représentées par les inégalités $x_i+x_j \leq 1$, (i,j) est une arête de G.

Cependant la facette $\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 2$ de E(G) ne peut être engendrée à partir d'aucune facette $x_i+x_j \leq 1$ à l'aide de la procédure séquentielle.

La nécessité d'une généralisation de la procédure séquentielle se fait sentir et, effectivement, Uri Reled [15] a proposé une procédure génératrice de facettes dont la procédure séquentielle est une variante.

Soient S(G) l'ensemble des stables de G, $U \in S(G)$, Z un ensemble de sommets contenant le voisinage de U, G^* le sous-graphe de G construit sur l'ensemble de sommets $X^* = X-U \cup Z$, $S(G^*)$ l'ensemble des stables de G^*.

Si $F_1 = (\sum_{i \in X^*} \alpha_i x_i \leq \alpha_o)$ est valide sur $S(G^*)$, $F_2 = (\sum_{i \in X^*} \alpha_i x_i + \sum_{i \in U \cup Z} \beta_i x_i \leq \alpha_o + \sum_{i \in U} \beta_i$ est valide sur S(G) alors en écrivant F_2 d'une autre manière on trouve que le vecteur $\beta = (\beta_i | i \in U \cup Z)$ vérifie les inéquations suivantes :

$$\sum_{i \in Z} \beta_i x_i + \sum_{i \in U} \beta_i (x_i - 1) \leq \alpha_o - \sum_{i \in X^*} \alpha_i x_i \qquad \forall x \text{ vecteur représentatif d'un stable de G.}$$

<u>Théorème 4</u> : Si F_1 est une facette de $E(G^*)$ alors F_2 est une facette de E(G) si et seulement si β est un sommet du polyèdre V.

<u>Remarque</u> :

13) Il est intéressant de noter que le problème de la recherche d'un stable de poids maximum dans $S(G^*)$ défini ci-dessus est un sous-problème de celui de la recherche d'un stable de poids maximum dans S(G) obtenu en fixant certaines variables à la valeur 1 ($x_i = 1$, $i \in U$) et d'autres à la valeur 0 ($x_i = 0$, $i \in Z$).

Exemple 1 :

Soit G un trou de cardinalité 5 ; si $U = \{4\}$ et $Z = \{3,5\}$ alors $S(G^*)$ est l'ensemble des stables du sous-graphe G^* de G construit sur l'ensemble de sommets $\{1,2\}$.

Comme $x_1+x_2 \leq 1$ est une facette de E(G) alors d'après le théorème 4, l'inéquation $x_1+x_2+\beta_3x_3+\beta_4x_4+\beta_5x_5 \leq 1+\beta_4$ est une facette de F(G) si et seulement si β est un sommet du polyèdre $V = \{\beta | \beta \in B\}$.

$$\beta = \begin{cases} 1 \leq 1 + \beta_4 \\ 1 + \beta_3 \leq 1 + \beta_4 \\ 1 + \beta_5 \leq 1 + \beta_4 \\ \beta_3 + \beta_5 \leq 1 + \beta_4 \end{cases}$$

Le polyèdre V est de dimension 3 et possède 2 sommets (0,0,0) et (1,1,1) auxquels correspondent les facettes $x_1+x_2 \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 2$ de E(G).

On voit bien que cette procédure a permis d'obtenir la facette $\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 2$ que la procédure séquentielle dans la remarque 12 ne pouvait engendrer.

On sait donc comment, à partir d'une facette relative à un sous-graphe d'un graphe G, on peut engendrer des facettes relatives au graphe G. Une approche naturelle, en vue de caractériser toutes les facettes de E(G), est de chercher à caractériser tous les sous-graphes de G qui définissent des facettes. Cependant, l'aboutissement d'une telle approche semble très difficile à cause de la complexité des classes de graphes définissant des facettes, ce que montre les théorèmes suivants :

Wolsey et Padberg [21, 14] ont proposé une procédure permettant, à partir d'un graphe qui définit une facette, de construire d'une manière répétitive un graphe définissant une facette à coefficients arbitrairement grands.

Théorème 5 (Wolsey - Padberg) : Soit G = (X,E) un graphe qui définit une facett $\sum_{i \in X} \alpha_i x_i \leq \alpha_o$, et soit le graphe G' = (X',E') obtenu en ajoutant au graphe G = (X,E) de nouveaux sommets et arêtes comme suit :

Pour tout sommet i de G on crée un sommet n+i qu'on relie au sommet i.

On crée un sommet 2n+1 qu'on relie à tous les sommets n+i, i = 1,2,..., n.

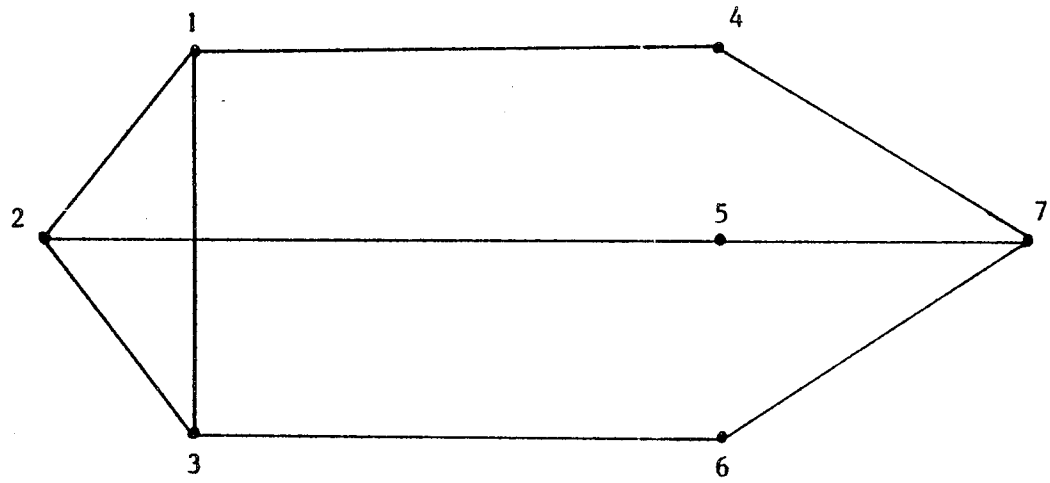
Alors le graphe G' définit la facette $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i+x_{n+i}) + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i-\alpha_o)x_{2n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Exemple 2 :

La procédure du théorème 5 appliquée à une clique de cardinalité 3 donne le graphe de la figure 5. D'après le théorème 5, ce graphe définit la facette $\sum_{i=1}^{6} x_i + 2x_7 \leq 9$.

On voit bien que tout stable de ce graphe vérifie la contrainte $\sum_{i=1}^{6} x_i + 2x_7 \leq 3$; et en particulier il existe 7 stables linéairement indépendants vérifiant la contrainte avec le signe égal, ces stables sont les suivants :

$s_1 = \{1,5,6\}$, $s_2 = \{1,7\}$, $s_3 = \{2,4,6\}$, $s_4 = \{2,7\}$, $s_5 = \{3,4,5\}$, $s_6 = \{3,7\}$, $s_7 = \{4,5,6\}$.



F. 5

Pour montrer encore mieux la complexité des classes de graphes définissant des facettes, on propose par la suite une procédure de même type que celle de Wolsey et Padberg.

Soient $G = (X,E)$ un graphe, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un ensemble de n stables linéairement indépendants définissant la facette $\Sigma\alpha_i x_i \leq \alpha_o$ de $E(G)$; et soit G' le graphe $G' = (X',E')$ obtenu en ajoutant au graphe $G = (X,E)$ de nouveaux sommets et arêtes comme suit :

Pour tout stable s_i de S on crée un sommet $n+i$ qu'on relie aux sommets $X-s_i$ (le voisinage du stable s_i dans G).

On crée un sommet $2n+1$ qu'on relie à tous les sommets $n+i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

On note par X_K l'intersection de K stables quelconques de S c'est à dire $X_K = s_{i_1} \cap s_{i_2} \ldots s_{i_K}$; et par $\mathcal{X}_K$ l'ensemble des X_K.

<u>Théorème 6</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que l'inéquation

$$\sum_{i=1}^{n} (n-1)\alpha_i x_i + \alpha_o \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+i} \leq \alpha_o n$$ soit une facette de $E(G')$ est que

$$\alpha_o \geq \frac{n-1}{n-k} \sum_{i \in X_K} \alpha_i, \quad \forall X_k \in \mathcal{X}_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

<u>Démonstration</u> :

C.N. : Si la condition n'est pas satisfaite, c'est à dire s'il existe K stables de S tels que $(n-1) \sum_{i \in X_K} \alpha_i > \alpha_o(n-K)$ alors le stable constitué par la réunion X_K et les sommets $n+i$, $i \in X_K$, viole l'inégalité.

C.S. : Si la condition est satisfaite, alors on peut vérifier que tous les stables de G' vérifient l'inéquation en particulier les $2n+1$ stables $s'_1 = s_1 \cup \{n+1\} \ldots$, $s'_n = s_n \cup \{2n\}$, $s'_{n+1} = s_1 \cup \{2n+1\} \ldots$, $s'_{2n} = s_n \cup \{2n+1\}$, $s'_{2n+1} = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ vérifient l'inéquation avec le signe égal.

Pour terminer la démonstration on montre que les $2n+1$ stables indiquées ci-dessus sont linéairement indépendants ; la matrice de ces stables est la suivante :

$$M(S') = \begin{array}{c|cccccccccc}
 & s'_1 & s'_2 & & & s'_n & s'_{n+1} & s'_{n+2} & & s'_{2n} & s'_{2n+1} \\
\hline
1 & & & & & & & & & & 0 \\
2 & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & s_1 & s_2 & \cdots & & s_n & s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \vdots \\
n & & & & & & & & & & 0 \\
\hline
n+1 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\
n+2 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 0 & & & & & \\
2n & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\
\hline
2n+1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0
\end{array}$$

On retranche la $2n^{\text{ème}}$ ligne de chacune des $n+1^{\text{ème}}$ ..., $2n-1^{\text{ème}}$ lignes ; ainsi que la $2n^{\text{ème}}$ colonne de chacune des $n+1^{\text{ème}}$, ..., $2n-1^{\text{ème}}$ colonnes. Alors on trouve une matrice dans laquelle la dernière ligne et la dernière colonne ne contiennent, chacune, qu'un seul 1. En développant selon la dernière ligne, ensuite selon la dernière colonne on trouve une matrice de même déterminant.

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & & & & & \\
2 & & & & & \\
\vdots & s_1 & \cdots & s_n & s_1 - s_n & \cdots & s_{n-1} - s_n \\
n & & & & & \\
\hline
1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 \; 1 & -1 & 0 & \cdots & 0
\end{array}$$

En ajoutant la somme des n-1 premières colonnes à la $n^{ème}$ colonne on trouve également une matrice de même déterminant.

$$\begin{array}{|c|ccc|c|c|ccc|}
\hline
s_1 & & \cdots & & s_{n-1} & s_n + \sum_{i=1}^{n-1} s_i & s_1 - s_n & \cdots & s_{n-1} - s_n \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\
0 & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & & 0 & & & & \\
0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\
\hline
\end{array}$$

En développant selon les lignes correspondantes à la matrice unité, on trouve une matrice de même déterminant.

$$\begin{array}{|c|c|ccc|c|}
\hline
s_n + \sum_{i=1}^{n-1} s_i & s_1 - s_n & & \cdots & & s_{n-1} - s_n \\
\hline
\end{array}$$

En retranchant la somme des n-1 dernières colonnes de la première colonne on trouve une matrice de même déterminant.

$$\begin{vmatrix} n.S_n & S_1-S_n & \cdots & S_{n-1}-S_n \end{vmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est égal à n fois le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{vmatrix} S_n & S_1-S_n & \cdots & S_{n-1}-S_n \end{vmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est égal au déterminant de la matrice obtenue en ajoutant la première colonne à toutes les autres colonnes, qui est exactement la matrice M(S), où M(S) est la matrice dont les colonnes sont les stables de S qui sont linéairement indépendants, ce qui fait que le déterminant de M(S) est égal à n fois le déterminant de M(S) (det.M(S) = n.det M(S) $\neq$ 0).

c.q.f.d

Corollaire : Si G est une clique qui définit la facette $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$ alors G' définit la facette :

$$\sum_{i=1}^{n} (n-1)x_i + \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+i} \leq n.$$

Démonstration : Il suffit de montrer que la condition du théorème 6 est vérifiée. En effet, quant G est une clique on a $\alpha_o = 1$; $\sum_{X_K} \alpha_i = 0$ ou 1.

Pour $\sum_{X_K} \alpha_i = 0$ la condition se réduit à $1 \geq 0$.

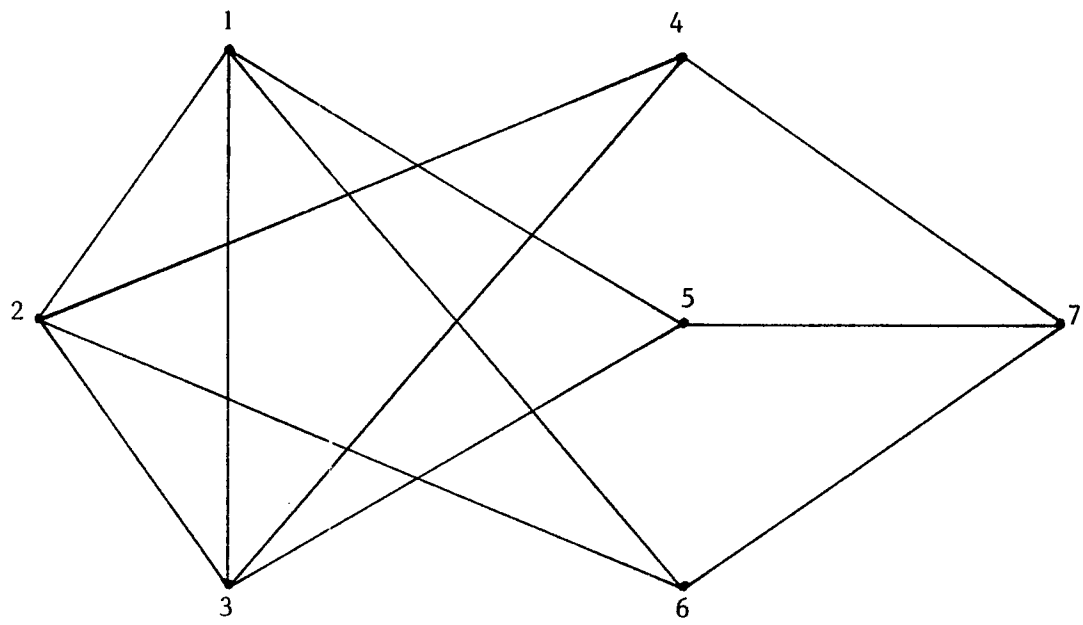
Pour $\sum_{X_K} \alpha_i = 1$ on doit avoir K = 1 et la condition se réduit à $1 \geq 1$.

c.q.f.d

Exemple 3 :

La procédure du théorème 6 appliquée à une clique de cardinalité 3 donne le graphe de la figure 5. D'après le corollaire 1, ce graphe définit la facette

$$2(x_1+x_2+x_3) + \sum_{i=1}^{7} x_i \leq 3.$$



F. 6

Remarque :

14) Le corollaire montre que pour tout entier N il existe un graphe G qui définit une facette à coefficients supérieurs à N ; c'est à dire les coefficients des facettes de l'enveloppe convexe des stables d'un graphe ne sont pas bornés. Il se trouve que pour les graphes adjoints, les graphes bipartis, les graphes de comparabilité, les graphes série-parallèle dans lesquels le problème du stable n'est pas difficile, les coefficients des facettes de l'enveloppe convexe des stables sont bornés, ou plus exactement chaque facette est booléenne. Ceci suggère la manière suivante de classer les problèmes combinatoires. On dit que le programme en nombres entiers P est de rang K si le maximum des coefficients des facettes de l'enveloppe convexe E(P) des solutions entières de P est égal à K.

Ainsi le problème de stable dans un graphe quelconque est de rang non borné, ce qui correspond bien à sa réputation d'être très difficile.

Finalement, on peut conjecturer que les problèmes de rangs bornés sont ceux qui admettent des algorithmes polynomiaux. Ceci impliquerait que le problème du stable de poids maximum dans un graphe parfait (qui est de rang 1 parce que les facettes booléennes relatives aux cliques maximales définissent l'enveloppe convexe E(G)) admet un algorithme polynomial. D'autre part, on sait que le problème du stable de poids maximum dans un graphe sans étoile admet un algorithme polynomial [10,17] ; on conjecture que ce problème est de rang 2).

Les procédures des théorèmes 5, 6, tout en montrant la complexité de l'enveloppe convexe E(G), incitent à regarder le problème sous un angle différent.

Soit, d'une manière générale, le problème $P = (\max.cx / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, x entier, $i = 1,\ldots,m)$ où a_{ij}, b_i sont des nombres réels, $L = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ est un polyèdre borné de dimension n.

Chvatal dans [6] s'est interrogé sur le rapport qui pouvait exister entre le polyèdre L et l'enveloppe convexe E(P) des solutions réalisables du problème P, voire la possibilité d'obtenir E(P) à partir de L.

Exemple 4 :

Soient G = (X,E) un graphe simple non orienté et sans boucle ($|X| = n$, $|E| = m$), C un système de poids sur les arêtes. On désigne par Y le vecteur représentatif d'un sous-ensemble quelconque d'arêtes de G. Le problème de la recherche d'un couplage (ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux) de poids

maximum s'écrit $P = (\max.cy / \sum_{\{i/e_i \in \Omega_j\}} y_i \leq 1,\ y \in \{0,1\}^m,\ j = 1,2,\ldots,m)$ où Ω_j est l'ensemble d'arêtes adjacentes au sommet j.

Edmonds dans [8] a montré que l'enveloppe convexe E(P) des couplage de G peut être décrit comme suit :

$$E(P) = \begin{cases} \sum_{\{i/e_i \in \Omega_j\}} y_i \leq 1, \quad y \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n\ ;\ i = 1,2,\ldots,m. \\ \\ \sum_{\{i/e_i \in A(S)\}} x_i \leq s \end{cases}$$

où A(S) est un ensemble d'arêtes défini sur un ensemble de sommets S de cardinal impair égal à 2s+1 ; s entier.

Cependant, il existe un lien entre le polycèdre $L = (\sum_{\{i/e_i \in \Omega_j\}} y_i \leq 1$ $y \geq 0)$ et l'enveloppe convexe E(P) qui se traduit par le fait que toute inégalité du type $\sum_{\{i/e_i \in A(S)\}} y_i \leq s$ s'obtient à partir de L de la manière suivante

En faisant la somme des inégalités $\sum_{\{i/e_i \in \Omega_j\}} y_i \leq 1$ pout tout $j \in S$ on trouve

$$2 \sum_{\{i/e_i \in A(S)\}} y_i \leq 2s+1 \quad \text{ou} \quad \sum_{\{i/e_i \in A(S)\}} y_i \leq s + \frac{1}{2}.$$

Comme le premier membre de l'inégalité est entier le second membre doit l'être aussi et on obtient $\sum_{e_i \in A(S)} x_i \leq s$.

Après avoir constaté, le lien indiqué ci-dessu entre L et E(P) pour le problème de couplage, Chvatal définit ce qu'il appelle fermeture du polyèdre L relatif au problème P.

<u>Définition 8</u> : On dit que l'inégalité $\Sigma \alpha_j x_j \leq b$ appartient à la fermeture élémentaire de L s'il existe des inégalités $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, $i = 1,2,\ldots,r$, de L et des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = a_j \text{ (entier)},\ j = 1,2,\ldots,n.$$

$$[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i] \leq b$$

On note par $e^1(L)$ la fermeture élémentaire de L ; et pour tout $K > 1$ on définit $e^K(L)$ récursivement comme suit :

$$e^K(L) = e(L \cup e^{K-1}(L)).$$

Finalement on met $C(L) = \bigcup_{K=1}^{\infty} e^K(L)$.

L'ensemble C(L) est appelé fermeture de L.

Cette procédure de construction de la fermeture C(L) qui, à chaque itération, consiste à construire la fermeture élémentaire d'un polyèdre borné, va permettre la construction de E(P).

<u>Théorème 7</u> (Chvatal [6]) : Si l'inégalité $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq c_o$, ($c_o, c_1, \ldots, c_n$ sont entiers) est valide pour tous les points entiers de L, alors $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq c_o$ appartient à la fermeture de L.

<u>Remarque</u> :

15) D'après le théorème 7, on voit que toutes les inégalités définissant l'enveloppe convexe E(P) appartiennent à la fermeture de L ; la démonstration de ce théorème montre également que la procédure ci-dessus, qu'on appelle procédure de Chvatal, construit la fermeture de L en un nombre fini d'itérations. Donc pour tout problème de programmation linéaire en nombres entiers P avec un polyèdre borné L, il existe un entier K tel que $C(L) = e^K(L)$; si on appelle le plus petit K vérifiant cette propriété, rang du problème P, alors on accède à une classification des problèmes combinatoires selon leurs rangs.

Pour cette classification, également, Chvatal [6] montre que le rang du problème de stable dans un graphe en général n'est pas borné et conjecture que les problèmes combinatoires de rangs bornés peuvent avoir des algorithmes polynomiaux, en particulier le problème de stable de poids maximum dans un graphe parfait dont le rang est égal à 1 quand on part de la formulation du problème de stable de poids maximum dans un graphe en termes de cliques.

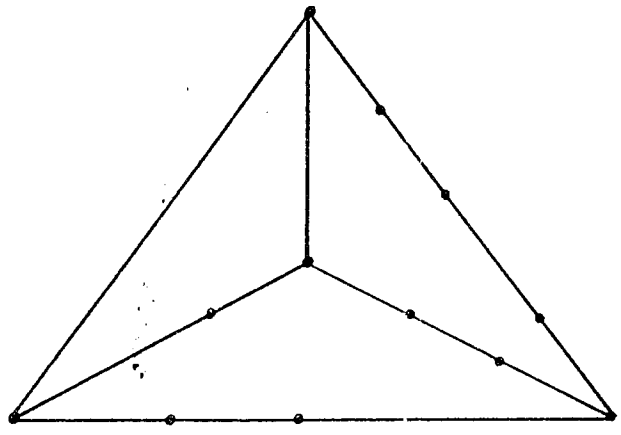
CHAPITRE II

POLYTOPE DES STABLES D'UN GRAPHE SERIE-PARALLELE

§1 - INTRODUCTION

Le chapitre I montre la difficulté que représente le problème d'une caractérisation complète de l'enveloppe convexe E (G) relatif à un graphe quelconque G.
Cependant, pour certaines classes de graphes telles que la classe des graphes adjoints, certains travaux [5, 8] ont déjà abouti à la caractérisation complète de l'enveloppe convexe des stables.
Dans ce chapitre, on situe le problème dans le cadre de la classe des graphes série parallèle qu'on définira ci-dessous ; pour cette classe de graphes Chvatal [5] a conjecturé la forme de l'enveloppe convexe des stables.
On va démontrer ici cette conjecture, moyennant une méthode qui utilise la théorie de la programmation linéaire, et caractériser les facettes de l'enveloppe convexe des stables.

Définition 1 : Un graphe G = (X, E) est dit série-parallèle (S-P) s'il ne contient pas de sous-graphe partiel homéomorphe à K_4.
(Un homéomorphe à K_4 est obtenu par subdivision des arêtes de la clique à 4 sommets. Figure 1).



F. 1

Pour bien comprendre la structure topologique des graphes série-parallèles, on va énumérer un certain nombre de leurs propriétés.

P.1 : Un graphe S.P possède un sommet de degré ≤ 2 cf. [5, 7]

P.2 : Un graphe S.P est planaire (et tout dual planaire est S.P).

On considère les deux opérations de réduction suivantes sur les multigraphes.

Ø1 : Si x est un sommet de degré 2, y, z les sommets qui lui sont adjacents, "effacer" x du graphe et ajouter une arête entre y et z.

F. 2

Ø2 : Remplacer une arête double par une arête simple.

P.3 : Les opérations Ø1 et Ø2 conservent la propriété S.P.

P.4 : Par applications répétitives des opérations Ø1 et Ø2, un graphe S.P connexe sans point d'articulation peut se ramener à une arête.

P.5 : Inversement, un graphe S.P connexe sans point d'articulation peut toujours se construire par subdivision et doublement d'arêtes à partir d'une arête .

Cette propriété fournit une représentation planaire d'un graphe S.P.

P.6 : Un graphe S.Pest trois coloriable. (corollaire de P.1).

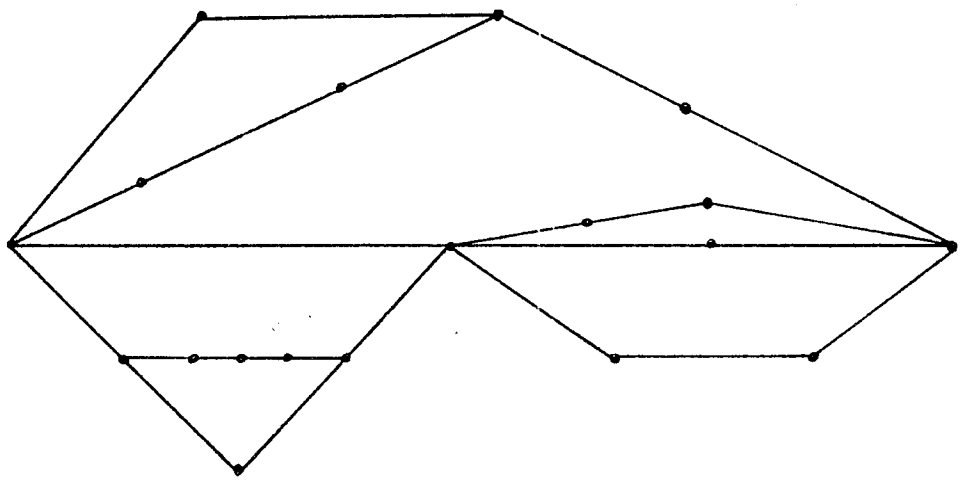
P.7 : Les graphes S.P vérifient la conjecture forte des graphes parfaits. On sait que les graphes planaires vérifient cette conjecture, mais dans le cas des graphes S.P cela résulte simplement de leur définition et de la propriété 6.

P.8 : Si on note n(Ø1) (resp. n(Ø2)) le nombre d'opérations Ø1 (resp. Ø2) permettant de réduire un graphe S.P simple et sans point d'articulation à une arête double alors :

$n(Ø1) \leq n-2$; $n(Ø2) \leq n(Ø1)-1$; $m \leq 2n-3$

En effet seule l'opération Ø1 supprime un sommet et peut créer en plus une arête double si le graphe de départ est simple.

On a en plus $m-2 = n(\emptyset 1) + n(\emptyset 2)$ d'où $m \leq 2n-3$.
(Un exemple de graphes S.P est donné par la figure 2).



F. 3

§2 - CONJECTURE DE CHVATAL

Chvatal a proposé comme enveloppe convexe des stables d'un graphe S.P. $G = (X, E)$ le polyèdre défini par les inéquations suivantes :

$$P_o(G) \begin{cases} x_i + x_j \leq 1 \quad \forall\, (i, j) \in E & (1) \\ \sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2} \quad \forall\, C \in \mathcal{C} & (2) \\ x_i \geq 0 & (3) \end{cases}$$

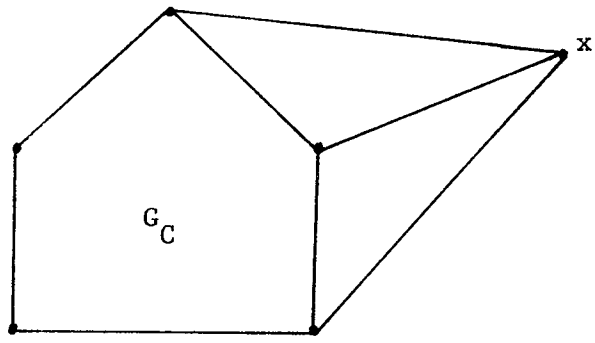
Où $\mathcal{C} = \{C \subset X \,/\, G_C$ est un trou$\}$

Il est bien clair que les contraintes de $P_o(G)$ sont valides pour tout stable d'un graphe quelconque G et il est bien connu également que les contraintes (3) et, pour les arêtes qui sont des cliques maximales, les contraintes (1) sont des facettes de l'enveloppe convexe E(G).
Par contre les contraintes (2) ne sont pas en général des facettes alors que cette propriété est vraie dans les graphes S.P.

Théorème 1 : Dans un graphe S.P. les inéquations (2) sont des facettes de l'enveloppe convexe des stables.

Démonstration :

Il suffit d'exhiber, pour chaque contrainte de type (2), n stables linéairement indépendants
On considère un trou G_C. On sait qu'il existe $|C|$ stables maximums dans G_C de cardinal $\frac{|C|-1}{2}$.
D'autre part, $\forall$ x X - C, il existe toujours un stable maximum sur G_C dont aucun sommet n'est adjacent à x. En effet, sinon x serait adjacent à au moins 3 sommets de G_C et la figure ainsi obtenue serait homéomorphe à K_4 (figure 4).



F. 4

$\forall$ x X - C, on définit donc un stable composé de x et d'un stable maximum de G_C qui lui est compatible.
Ces derniers stables et les $|C|$ stables qu'on a déterminé avant forment une famille de n stables linéairement indépendants vérifiant avec égalité la contrainte $\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C| - 1}{2}$

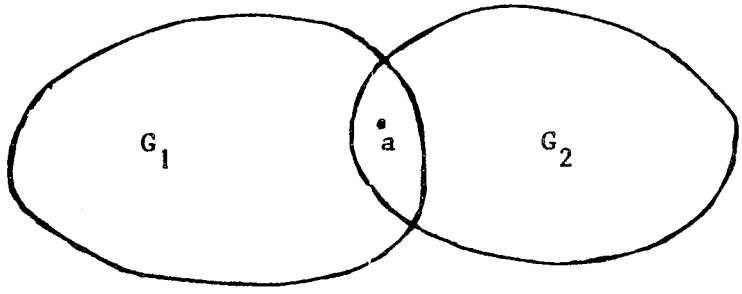
c. q. f. d.

§3 - ENSEMBLE D'ARTICULATION

Dans ce paragraphe on va traiter des graphes possédant des ensembles d'articulations à un ou deux sommets ; les graphes considérés ne sont pas nécessairement S.P.

Point d'articulation :

Soit $G = (X, E)$ un graphe qui possède un point d'articulation a. On peut séparer ce graphe en deux composantes $G_1 = (X_1, E_1)$, $G_2 = (X_2, E_2)$ telles que $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \{a\}$, $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (figure 5).



F. 5

On désigne par S_a^1 (resp. $S_{\bar{a}}^1$) le stable de poids maximum sur G_1 qui contient (resp. qui ne contient pas) le sommet a et on désigne par s_a^1 (resp. $s_{\bar{a}}^1$) la valeur de ce stable ; (de manière générale, on note en majuscule les stables et en minuscule les valeurs).

Théorème 2 : Soit S^2 le stable de poids maximum sur G_2 quand on affecte le poids $\alpha_a = s_a^1 - s_{\bar{a}}^1$ au sommet a, les poids des autres sommets de G_2 étant inchangés et soit le stable de G obtenu de la manière suivante :

$$S = \begin{cases} S^2 \cup S_a^1 & \text{si } a \in S^2 \\ S^2 \cup S_{\bar{a}}^1 & \text{si } a \notin S^2 \end{cases}$$

Alors S est un stable de poids maximum dans G de valeur $s = s^2 + s_{\bar{a}}^1$.

Démonstration :

On peut dire que, vu de G_2, G_1 "se résume" aux valeurs s_a^1 et $s_{\bar{a}}^1$.

L'ensemble S défini par le théorème est bien un stable.

Si $a \in S^2$ on a $s = s^2 + s_a^1 - \alpha_a = s^2 + s_{\bar{a}}^1$.

Si $a \notin S^2$ on a $s = s^2 + s_{\bar{a}}^1$.

Supposons qu'il existe un indépendant S^o tel que $s^o > s$, alors la restriction de S^o sur G_2 définirait un stable de poids $s^o - s_{\bar{a}}^1$ (après changement de poids de a), d'où $s^o - s_{\bar{a}}^1 \leq s^2 \rightarrow s^o \leq s$. Contradiction

c. q. f. d.

Remarques :

1) Le théorème 2 fournit immédiatement un algorithme de recherche d'un stable de poids maximum sur une chaine $\{ x_o, x_1, \ldots, x_i, x_k \}$. Il suffit de considérer dans l'ordre les points d'articulation $x_1, x_2 \ldots, x_i \ldots, x_{k-i}$

2) Il résulte de la définition d'un graphe S.P. que cette propriété se conserve sur les sous-graphes. En particulier, si un tel graphe possède un point d'articulation, chaque composante est elle-même un graphe série-parallèle .

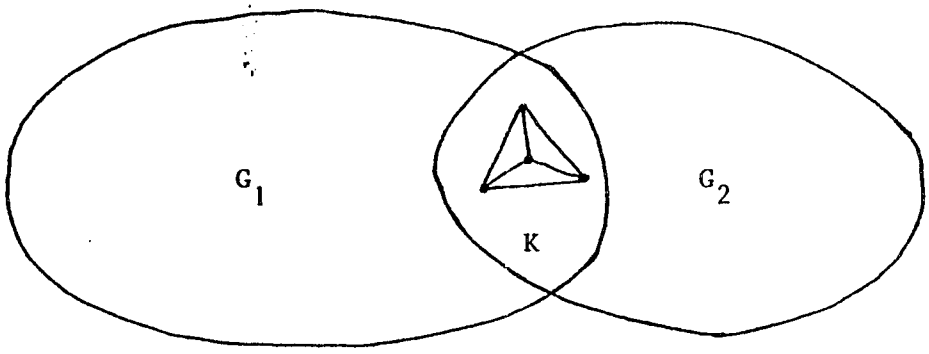
Si on dispose d'un algorithme polynomial de recherche d'un stable de poids maximum dans un graphe S.P. sans point d'articulation, théorème 2 permet de l'étendre à l'ensemble des graphes S.P. De plus on sait [5] que les facettes de l'enveloppe convexe des stables d'un graphe avec point d'articulation s'obtient par la réunion des facettes de l'enveloppe convexe des stables de chaque composante. Il suffit donc de démontrer la conjecture de Chvatal pour les graphes sans point d'articulation.

3) Le théorème 2 s'étend facilement au cas d'un graphe qui possède un ensemble d'articulation qui est une clique K.

On note de manière similaire :

$S_{\bar{K}}^1$ le stable de poids maximum sur G_1 qui ne contient aucun sommet de K ;

$\forall\, a \in K$, S_a^1 le stable de poids maximum sur G_1 qui contient a.



F. 6

S^2 le stable de poids maximum sur G_2 après changement des poids des sommets de K ($\forall$ a $\in$ K, $\alpha_a = s^1_a - s^1_{\bar{K}}$).

$$S = \begin{cases} S^2 \cup S^1_{\bar{K}} & \text{si } S^2 \cap K = \emptyset \\ S^2 \cup S^1_a & \text{si } S^2 \cap K = \{a\} \end{cases}$$

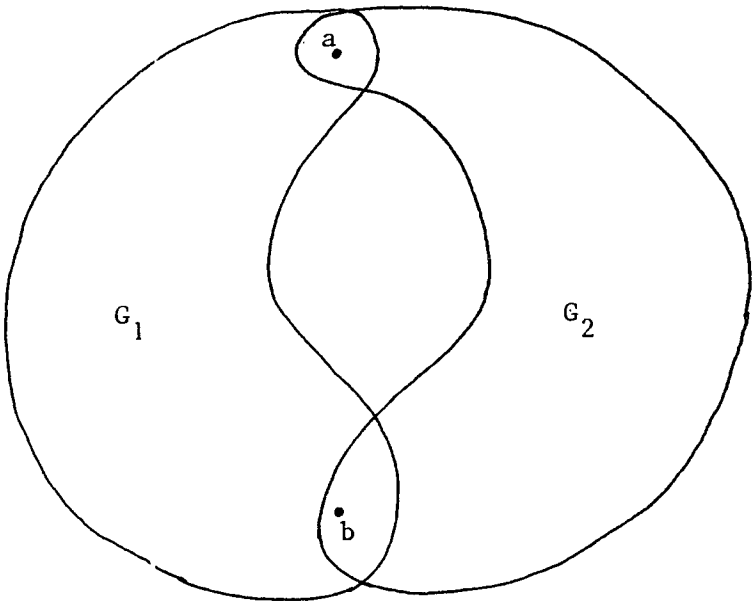
est un stable de poids maximum de valeurs $s = s^2 + s^1$.

<u>Graphes 2 - connexes</u> :

Le théorème 2 du paragraphe précédent permet une sorte de décomposition dans la recherche d'un stable de poids maximum dans les graphes à point d'articulation. On va étendre ce principe aux graphes pour lesquels il existe des ensembles d'articulation à deux sommets et cela conduira à un algorithme polynomial de recherche dans les graphes S.P.

On considère un graphe $G = (X, E)$ possédant un ensemble d'articulation à deux sommets a, b . On peut donc "séparer le graphe en deux composantes $G_1 = (X_1, E_1)$ et $G_2 = (X_2, E_2)$ telles que $X_1 \cup X_2 = X$, $E_1 \cup E_2 = E$,

$X_1 \cap X_2 = \{a, b\}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$



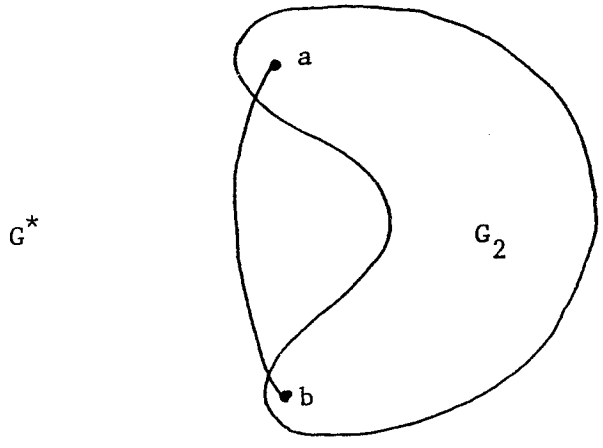
F. 7

Comme dans le cas d'un graphe avec point d'articulation, on se rend compte que pour le problème, "vu" de G_2, G_1 se résume à la valeur de quatre stables de poids maximum S^1_{ab}, $S^1_{\bar{a}\bar{b}}$, $S^1_{a\bar{b}}$, $S^1_{\bar{a}b}$, qui contiennent respectivement a et b, ni a ni b, a mais pas b, b mais pas a.

On va établir un théorème analogue au théorème 2 mais, alors que précédemment il suffisait de changer le poids de a dans G_2, on va devoir maintenant ajouter à G_2 une chaine à 1, 2 où 3 arêtes entre a et b qui "résumera" G_1. C'est cette opération qu'on définit maintenant.

<u>Opération Ω</u>

Ω_1 : si $(a,b) \in E_1$ (S^1_{ab} n'est pas défini), on définit G^* à partir de G_2 en ajoutant une arête entre a et b à G_2.



F. 8

Les poids des sommets de G_2 différents de a, b sont inchangés et les poids de a, b sont :

$$\alpha_a = s^1_{a\bar{b}} - s^1_{\bar{a}\bar{b}}$$

$$\alpha_b = s^1_{\bar{a}b} - s^1_{\bar{a}\bar{b}}$$

$$\sigma = s^1_{\bar{a}\bar{b}}$$

(On est en fait dans le cas d'un ensemble d'articulation qui est une clique (Cf. Rem. 3)).

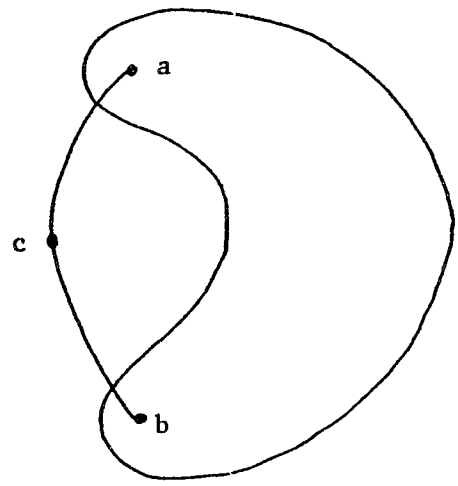
Pour la suite on considère la quantité.

$$\alpha_o = s^1_{ab} + s^1_{\bar{a}\bar{b}} - (s^1_{a\bar{b}} + s^1_{\bar{a}b})$$

Ω_2 : si $\alpha_o \geq 0$

On définit G^* à partir de G_2 en ajoutant une chaine de deux arêtes {a, c, b} entre a et b.

G^*



F. 9

Les poids des sommets de G_2 différents de a et b sont inchangés dans G^* et les poids des sommets a, b, c sont les suivants :

$\alpha_a = s^1_{ab} - s^1_{\bar{a}b}$

$\alpha_b = s^1_{ab} - s^1_{a\bar{b}}$

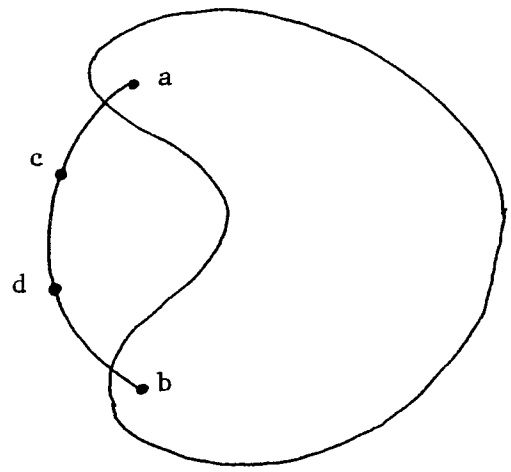
$\alpha_c = \alpha_o$

On pose $\sigma = s^1_{\bar{a}\bar{b}} - \alpha_o = s^1_{a\bar{b}} + s^1_{\bar{a}b} - s^1_{ab}$

Ω_3 : si $\alpha_o < 0$

G^* est obtenu à partir de G_2 en ajoutant une chaine de trois arêtes $\{a, c, d, b\}$ entre a et b.

G^*



F. 10

Les poids des sommets de G_2 différents de a et b sont inchangés dans G^* et les poids des sommets a, b, c, d sont les suivants.

$\alpha_a = s^1_{a\bar{b}} - s^1_{\bar{a}\bar{b}}$

$\alpha_b = s^1_{\bar{a}b} - s^1_{\bar{a}\bar{b}}$

$\alpha_c = \alpha_d = - \alpha_o$

$\sigma = s^1_{\bar{a}\bar{b}} + \alpha_o = 2\, s^1_{\bar{a}\bar{b}} - (s^1_{a\bar{b}} + s^1_{\bar{a}b})$.

<u>Théorème 3</u> : Soit S^* le stable de poids maximum sur G^*, S^2 sa restriction à G_2 (après suppression éventuelle des sommets c ou d) et soit S l'ensemble stable de G défini de la manière suivante

$$S = \begin{cases} S^2 \cup S^1_{ab} & \text{si } a \in S^2 \text{ et } b \in S^2 \quad (1) \\ S^2 \cup S^1_{\bar{a}\bar{b}} & \text{si } a \notin S^2 \text{ et } b \notin S^2 \quad (2) \\ S^2 \cup S^1_{a\bar{b}} & \text{si } a \in S^2 \text{ et } b \notin S^2 \quad (3) \\ S^2 \cup S^1_{\bar{a}b} & \text{si } a \notin S^2 \text{ et } b \in S^2 \quad (4) \end{cases}$$

Alors S est un stable de poids maximum dans G de valeur $s = s^* + \sigma$

<u>Démonstration :</u>

Il suffit de vérifier que S est un stable de poids $s = s^* + \sigma$ dans les quatre cas (1), (2), (3) et (4) ; et inversement que tout stable S^o sur G, définit sur G_2 (après avoir ajouté à la restriction sur G_2 les sommets c ou d si cela est nécessaire) un stable $S^{*\prime}$ de valeur $s^{*\prime} = s^o - \sigma$.

Si S n'était pas optimal, il existerait S^o tel que $s^o > s \rightarrow s^{*\prime} > s$, contredisant l'optimalité de S^* dans G^*.

On se contente de faire cette vérification dans un seul cas.

On suppose par exemple $\alpha_o < 0$, $a \in S$, $b \notin S$.

Alors puisque α_d 0, le sommet d sera dans S et on aura :

$$S = S^* - \{d\} \cup S^1_{a\bar{b}}$$

$$s = s^* - \alpha_d - \alpha_a + s^1_{a\bar{b}} = s^* + \alpha_o - s^1_{a\bar{b}} + s^1_{a\bar{b}}$$

$$= s^* + \alpha_o + s^1_{\bar{a}\bar{b}}$$

$$= s^* + \sigma$$

On remarque sur cet exemple qu'il est essentiel que les poids des sommets c et d soient non négatifs, ce qui conduit à considérer deux cas pour G^*, suivant le signe de α_o.

c. q. f. d.

§4 - APPLICATION AUX GRAPHES S.P.

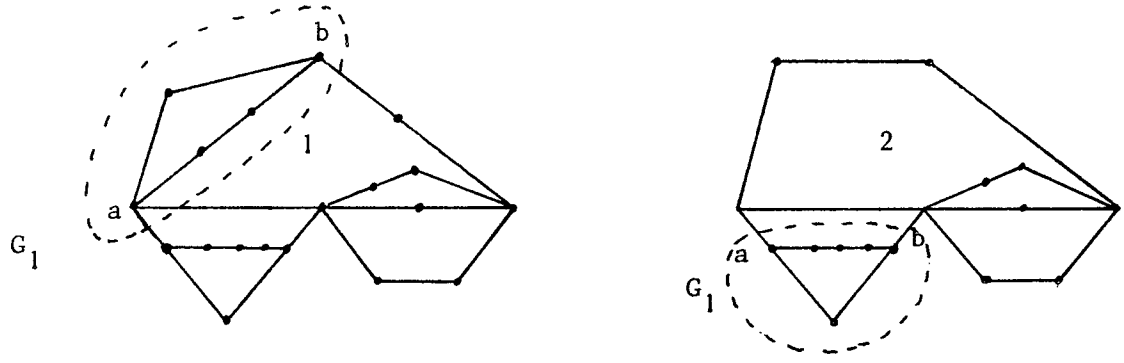
L'application de ce qui a été fait dans les paragraphes précédents aux graphes S.P. permet d'obtenir un algorithme de recherche d'un stable de poids maximum dans un graphe S.P. dont le principe est le suivant :

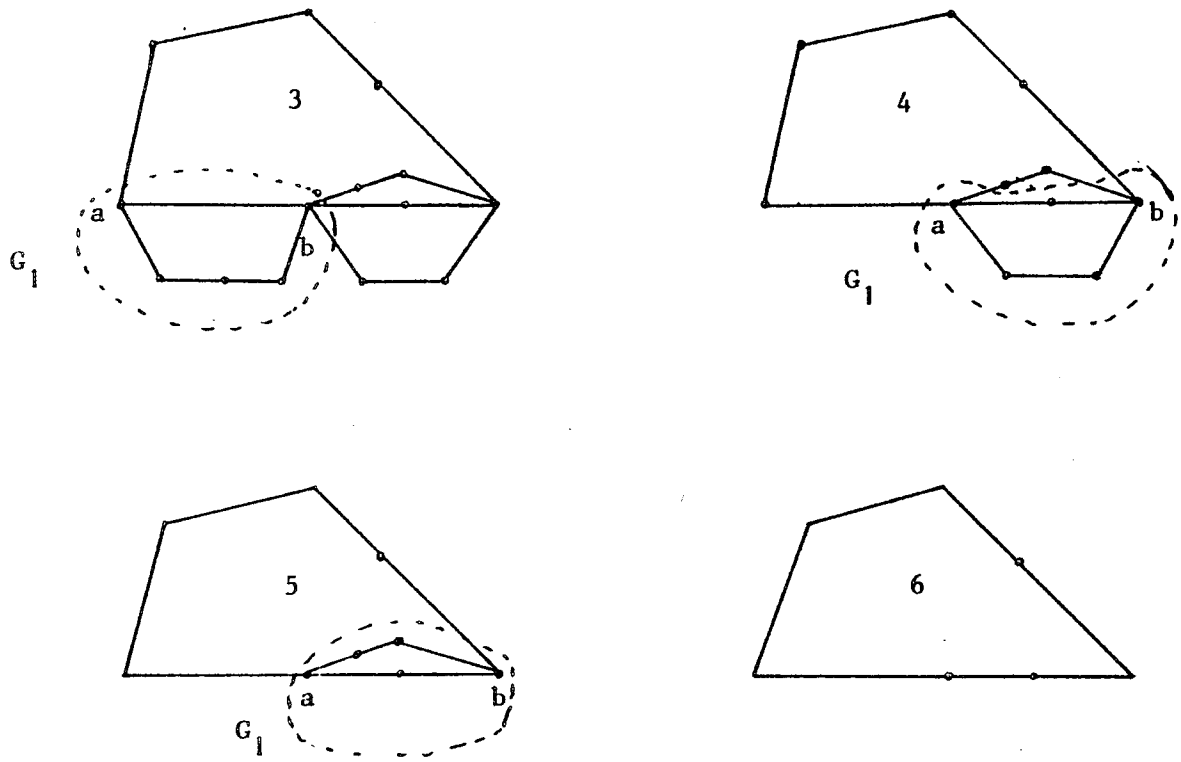
Soit G = (X,E) un graphe S.P., connexe, simple et sans point d'articulation. On sait alors que par application répétitive des opérations Ø1 (remplacement d'un sommet de degré 2 par une arête entre ses voisins) et Ø2 (remplacement d'une arête double par une arête simple), le graphe peut se ramener à une arête.

On applique d'abord l'opération Ø1, tant que cela est possible. On finira par détecter une arête double d'extrémités a et b ; {a,b} constitue alors un ensemble déconnectant de G. L'arête double correspond dans le graphe de départ à deux chaînes d'extrémités a, b. On note G_1 cette composante. Il est facile de calculer sur G_1 les stables S^1_{ab}, $S^1_{\overline{ab}}$, $S^1_{\overline{ab}}$, $S^1_{\overline{ab}}$. On peut donc appliquer le théorème 3 et remplacer ces deux chaînes par une seule. Le nouveau graphe ainsi obtenu est S.P. et la connaissance du stable de poids maximum sur ce graphe permet de calculer le stable de poids maximum sur G.

On recommence donc la procédure sur ce graphe et ainsi de suite jusqu'à obtenir d'un cycle.

On va illustrer, sur le graphe de la figure 2, une telle séquence possible de réductions.





F. 11

Evaluation de la complexité de l'algorithme

On note n(Ø1) et n(Ø2) le nombre d'opérations de type Ø1 et celui de type Ø2 nécessaire pour réduire le graphe. Pour trouver tous les ensembles d'articulations, il suffit de réduire le graphe en notant au fur et à mesure les extrémités des arêtes doubles. Il faut donc n(Ø1) n(Ø2) opérations ; le nombre d'ensembles d'articulations étant égal à n(Ø2). On effectuera donc n(Ø2) fois l'opération Ω. Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour effectuer cette opération est proportionnel à la longueur des deux chaînes à réduire, mais un sommet non extrémité n'intervenant que dans une seule chaîne, le nombre total d'opérations sera proportionnel au nombre total de sommets considérés. C'est à dire les n sommets initiaux plus les sommets créés par application de l'opération Ω, c'est à dire au maxium 2 à chaque fois, donc 2n(Ø2) en tout.

On a vu (propriété 8) que n(Ø1) et n(Ø2) étaient majorés par une fonction linéaire en n et donc le nombre total d'opérations est lui aussi majoré par une fonction linéaire en n.

§5 - DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE CHVATAL

On rappelle la forme de l'enveloppe convexe des stables d'un graphe S.P. proposé par Chvatal

$$P_o(G) = \begin{cases} x_i + x_j \leq 1 & \forall (i,j) \in E \quad (1) \\ \sum_{i \in C} x_i \leq \ell_C & \forall C \in \mathcal{C} \quad (2) \\ x_i \geq 0 & (3) \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \{C \subset X / G_C \text{ est un trou}\}$, $\ell_C = \frac{|C|-1}{2}$

Pour démontrer l'intégrité des sommets de $P_o(G)$, on considère le programme linéaire suivant :

$$P(G) = \begin{cases} x \in P_o(G) \\ \max . c . x . \end{cases}$$

On sait que pour tout sommet de $P_o(G)$, il existe un vecteur c tel que ce sommet soit solution optimale unique de P(G). Il suffit donc de démontrer que pour tout vecteur coût, il existe une solution optimale de P(G) qui est le vecteur représentatif d'un stable ; pour cela on modifiera l'algorithm donné au §4. Pour construire en même temps que le stable de poids maximum une solution optimale du dual D(G) de P(G).

Ce dual s'écrit :

$$D(G) \begin{cases} \sum_{\{e \in E : i \in e\}} y_e + \sum_{C \in \mathcal{C} : i \in C} y_C \geq c_i & \forall i \in X \\ y \geq 0 \\ \text{Min} \sum_{e \in E} y_e + \sum_{C \in \mathcal{C}} \ell_C y_C \end{cases}$$

Une solution réalisable du daul est un ensemble de valeurs non négatives associé aux arêtes et aux trous tel que, pour tout sommet, la somme de ces valeurs pour les arêtes et les trous auxuquels il appartient soit supérieure ou égale à son poids.

Pour construire une solution optimale de D(G), on construit un couple (X,Y) où X est entier, de solutions de P(G) et D(G) vérifiant les conditions des écarts complémentaires qui s'énoncent comme suit :
Soit S le stable dont X est le vecteur représentatif et soit Ω_i l'ensemble d'arêtes adjacentes au sommet i.

$$i \in S \Rightarrow \sum_{e \in \Omega_i} y_e + \sum_{\{C \mid i \in C\}} y_C = c_i$$

$$y_C > 0,\ e = (i,j) \Rightarrow i \in S \text{ ou } j \in S.$$

$$e = (i,j),\ i,j \notin S \Rightarrow y_C = 0$$

$$y_C > 0 \Rightarrow \sum_{i \in C} x_i = \ell_C \quad \text{(le trou } G_C \text{ est saturé)}.$$

$$\sum_{i \in C} x_i < \ell_C \Rightarrow y_C = 0.$$

D'autre part, si on suppose, sans perte de généralité, que les poids associés du graphe G sont entiers, alors on montre que la solution optimale construite pour le dual est entière.

<u>Définition 2</u> : Soit $\alpha(r) = \sum_{\{C \in \mathcal{C} / i \in C\}} y_C$.

On dit qu'une solution de D(G) est propre si $\forall i \in X$, $\alpha(i) \leq c_i$.

Dans la suite, on pourra se limiter aux solutions propres grâce au lemme suivant :

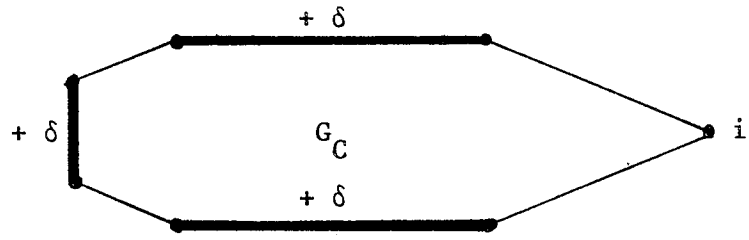
<u>Lemme</u> : Soit une solution y^o de D(G). Alors il existe une solution propre $\tilde{y}$ de D(G) donnant même valeur à la fonction objective.

<u>Démonstration</u> : Soit $\tilde{y}$ une solution de D(G) de même valeur que y^o et minimisant $\sum_{\mathcal{C}} y_C$.

Supposons qu'elle ne soit pas propre.

Alors $\exists$ i tel que $\tilde{\alpha}(i) > c_i$.

Soit C un trou contenant i tel que $\tilde{y}_C > 0$.



F. 12

Posons $\delta = \mathrm{Min}\{\tilde{y}_C, \tilde{\alpha}(i)-c_i\}$, $\delta > 0$.

Définissons une nouvelle solution y^1 de la manière suivante :

a) $\hat{y}_C = \tilde{y}_C - \delta$.

b) Pour toutes les arêtes à distance paire de i (en gras sur la figure) $\hat{y}_e = \tilde{y}_e + \delta$.

c) Les autres variables sont identiques.

Alors cette nouvelle solution reste réalisable puisque la couverture de tous les sommets est inchangée sauf celle de i qui diminue de δ.

De plus, cette nouvelle situation donne même valeur que $\tilde{y}$ à la fonction object puisque on perd $\delta \times \ell_C$ sur le cycle mais qu'il y a ℓ_C variables associées aux arêtes qui augmentent de δ.

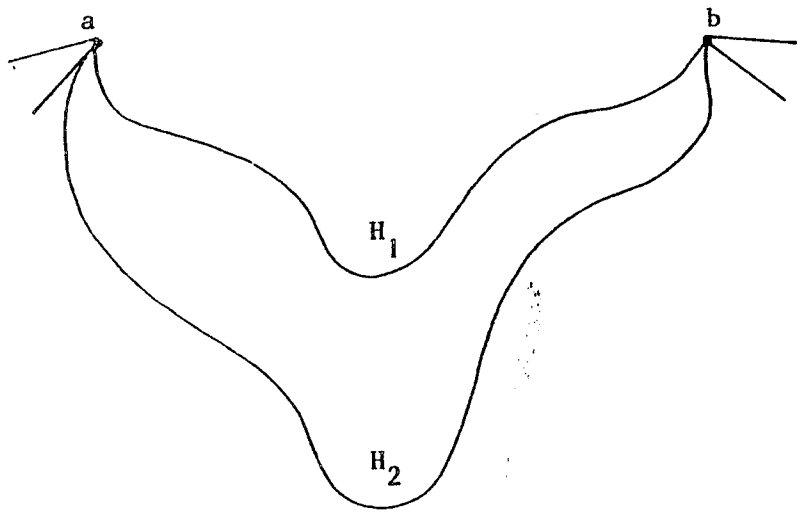
Or $\sum_{C \in \mathcal{C}} y'_C = \sum_{C \in \mathcal{C}} \tilde{y}_C - \delta < \sum_{C \in \mathcal{C}} \tilde{y}_C$ ce qui contredit les hypothèses.

c.q.f.d

L'opération centrale de l'algorithme, qui réduit un graphe S.P. sans point d'articulation à une chaîne, donné au paragraphe 4, est le remplacement d'une manière directe de deux chaînes de mêmes extrémités dans G par une seule à 2, 3 ou 4 sommets définssant un graphe réduit G^*.

La modification qu'on va apporter à l'algorithme est que ce remplacement sera fait d'une manière indirecte, ou plus précisément, les deux chaînes à remplace subissent d'abord certaines opérations, qu'on va définir, qui les transforment en chaînes plus simples à traiter ; ensuite on montre, pour chacune de ces opérations, que si G^* est obtenu à partir de G par une de ces opérations et si $P(G^*)$ et $D(G^*)$ ont des solutions optimales entières alors P(G) et D(G) aussi.

On a vu au paragraphe 4 que l'opération Ø1 permet d'obtenir un ensemble déconnectant de deux sommets a, b qui sont les extrémités de deux chaînes H_1, H_2 dans le graphe série-parallèle G.



F. 13

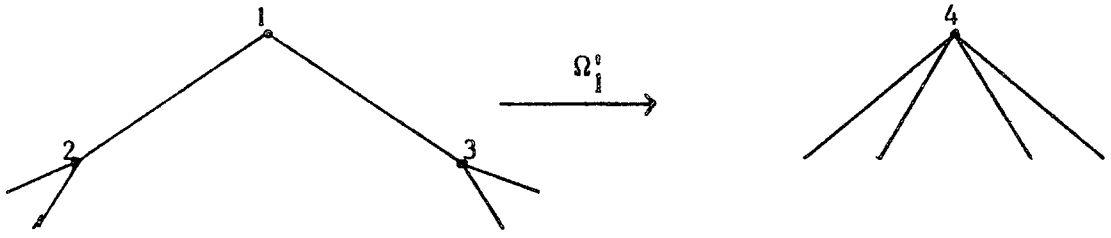
Remarque

4) Par la suite, toute chaîne va être représentée d'une manière schématique de telle sorte que si (i,j) est une arête de la chaîne alors le sommet i sera dessiné "plus haut" si et seulement si $c_i > c_j$.

On va définir maintenant quelques oéprations pour réduire chacune des chaînes H_1, H_2 à une chaîne d'extrémités a', b' ayant au plus quatre arêtes.

Définition 3 : Le sommet 1 est dit 2-dominant si et seulement si :
Le sommet 1 est de degré 2.
Les adjacents 2, 3 du sommet 1 ne sont pas reliés entre eux.
$c_1 \geq \max.(c_2,c_3)$.

Opération Ω' :
Ω'_1 : L'opération Ω'_1 consiste à remplacer les trois sommets 1, 2, 3 (où 1 est un sommet 2-dominant, 2 et 3 ses adjacents), par un seul sommet 4 relié aux adjacents de 2 et 3 et de poids $c_4 = (c_2+c_3-c_1)$ le poids c_4 peut être négatif.



F. 14

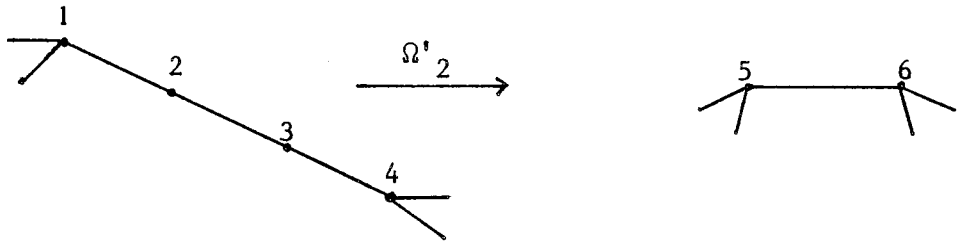
Remarque

5) Ω'_1 conserve la propriété S.P.

Ω'_2 : Soit H une chaîne à quatre sommets 1, 2, 3, 4 telle que $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c$
L'opération Ω'_2 consiste à remplacer la chaîne H par une arête (5,6) telle que

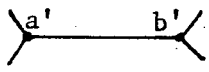
$c_5 = c_1 \pm c_3 - c_2$.

$c_6 = c_4$

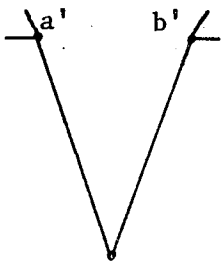


F. 15

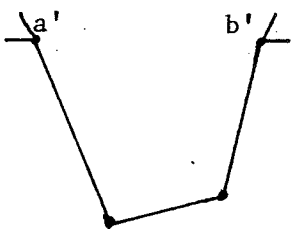
L'application de l'opération Ω' autant que possible sur chacune des chaînes H_1, H_2 du graphe série-parallèle G les réduit à des chaînes de type F18, F19, F20 ou F21.



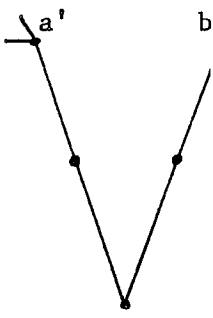
F. 16



F. 17



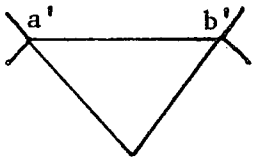
F. 18



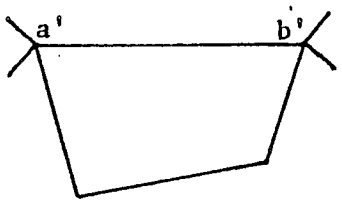
F. 19

Dans le graphe réduit obtenu après l'application de l'opération Ω', l'ensemble des sommets {a',b'} est un ensemble d'articulations, par conséquen l'opération Ω_2 définie au paragraphe 3 permet de remplacer la chaîne de type F19 par une chaîne de type F17, car dans ce sas la quantité α_o définie égalem au paragraphe 3 est non négative ce qui fait que le sous-graphe de G constitu par les deux chaînes H_1, H_2 se réduit à l'un de type F20, F21, F22, F23, F24 ou F25.

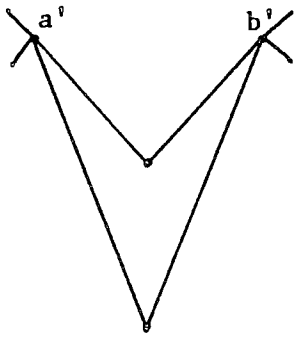
F. 20



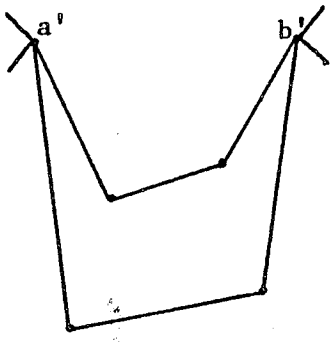
F. 21



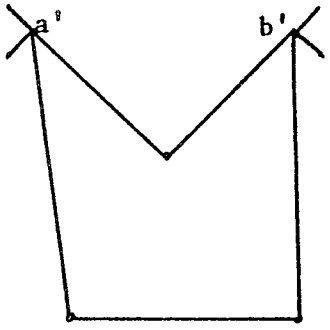
F. 22



F. 23



F. 24



F.25

D'autre part, comme $\{a',b'\}$ est un ensemble d'articulations, en utilisant l'opération Ω on peut remplacer l'un quelconque des sous-graphes indiqués ci-dessus par une chaîne de type F16, F17 ou F18.

Finalement, l'application des opérations Ω'_1, Ω'_2, Ω' a permis de remplacer, d'une manière <u>indirecte</u>, les deux chaînes H_1, H_2 par une seule chaîne de taille réduite.

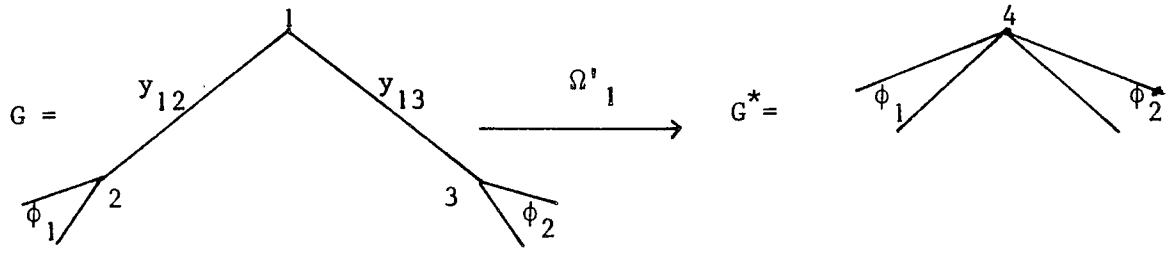
Le graphe réduit, ainsi obtenu, est un graphe série-parallèle car les opérations utilisées conservent la propriété série-parallèle ; par conséquent, on peut répéter cette procédure de réduction jusqu'à ce que le graphe réduit soit une chaîne.

Soient G le graphe réduit obtenu en appliquant une opération quelconque O sur le graphe série-parallèle G ; (X^*,Y^*) un couple de solutions optimales entières de $P_o(G^*)$, $D(G^*)$ où Y^* est une solution propre dans le sens du lemme ; S^* le stable de poids maximum correspondant à X^*. Pour achever la démonstration de la conjecture de Chvatal, il suffit de construire à partir de (X^*,Y^*) un couple (X,Y) de solutions optimales entières de $P(G)$, $D(G)$; c'est ce qui est fait au paragraphe suivant.

§6 - REDUCTIONS DES CHAINES

Cas 1 : $0 = \Omega_1$

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω'_1 sur G.



F. 26

Comme S est le stable de poids maximum dont X est le vecteur représentatif alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{1\} & \text{si } 4 \notin S \\ S^* \cup \{2,3\} - \{4\} & \text{si } 4 \in S \end{cases}$$

On va maintenant construire à partir de Y^* une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient $\phi_1 + \phi_2$ la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 4 ; α la somme des poids des trous passant par le sommet 4.

Par hypothèse on a $c_1 \geq c_2$; $c_1 \geq c_3$; $c_4 = c_2 + c_3 - c_1$.

D'après la contrainte de D(G) relative à 4, on a $= \phi_1 + \phi_2 + \alpha \geq c_2 + c_3 - c_1$

Il est évident qu'à tout trou passant par 4 dans G^* correspond un trou passant par les sommets 1, 2, 3 dans G ; ce dernier aura, dans la solution Y cherchée, le même poids que possède son correpondant dans la solution Y^*.

a) $4 \in S^*$ $\quad (S = S^* \cup \{2,3\} - \{4\})$.

Dans ce cas la condition des écarts complémentaires relative au sommet 4 devi

$$\phi_1 + \phi_2 + \alpha = c_2 + c_3 - c_1$$

La solution Y de D(G) qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2 et 3 qui sont respectivement :

$$y_{12} + y_{13} + \alpha \geq c_1$$

$$y_{12} + \phi_1 + \alpha = c_2$$

$$\phi_2 + y_{13} + \alpha = c_3$$

Alors il est clair que la solution Y cherché, à partir de Y^*, est celle dans laquelle :

$$y_{12} = \phi_2 - (c_3 - c_1) \geq 0 \qquad \text{car } c_1 \geq c_3$$

$$y_{13} = \phi_1 - (c_2 - c_1) \geq 0 \qquad \text{car } c_1 \geq c_2.$$

Par exemple si on veut vérifier la contrainte sur le sommet 1, il suffit de substituer aux variables y_{12}, y_{13} leurs valeurs et tenir compte de la contrainte de $D(G^*)$ sur le sommet 4.

b) $4 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{1\})$.

Dans ce cas la contrainte de $D(G^*)$ relative au sommet 4 est :

$$\phi_1 + \phi_2 + \alpha \geq c_2 + c_3 - c_1$$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2 et 3 qui sont respectivement :

$$y_{12} + y_{13} + \alpha = c_1$$

$$y_{12} + \phi_1 + \alpha \geq c_2$$

$$\phi_2 + y_{13} + \alpha \geq c_3.$$

Soit $\beta = \phi_1 + \phi_2 + \alpha - (c_3 + c_2 - c_1)$; alors on distingue deux cas :

1) $\phi_1 - (c_2 - c_1) \geq \beta$.

Dans ce cas la solution Y cherchée est celle dans laquelle :

$$y_{12} = \phi_2 - (c_3 - c_1)$$

$$y_{13} = \phi_1 - (c_2 - c_1) - \beta = c_3 - \phi_2 - \alpha \geq 0 \text{ car } \phi_1 - (c_2 - c_1) \geq \beta.$$

2) $\phi_1 - (c_2 - c_1) < \beta$.

Dans ce cas la solution Y est celle dans laquelle :

$$y_{12} = \phi_2 - (c_3 - c_1) - \gamma = c_1 - \alpha \quad \text{où } \gamma = \beta - (\phi_2 - (c_2 - c_1))$$

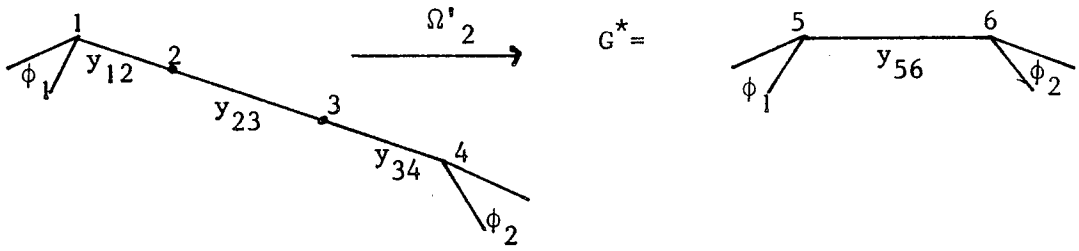
$$y_{13} = 0.$$

La non négativité de $y_{12} = c_1 - \alpha$ vient du fait que $\alpha \leq c_3 + c_2 - c_1$ car Y^* est une solution propre de D(G). Dans ce cas, si on veut vérifier, par exemple, la contrainte sur le sommet 3, alors, en substituant à la variable y_{13} sa valeur nulle, cette contrainte se réduit à $\phi_2 + \alpha \geq c_3$ ce qui est vrai si on tient compte de la contrainte de $D(G^*)$ sur le sommet 4 et de la condition $\phi_1-(c_2-c_1) <$

c.q.f.d

Cas 2 : $O = \Omega'_2$

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω'_2 sur G.



F. 27

Comme S^* est le stable de poids maximum dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{4,2\} - \{6\} \text{ si } 6 \in S^* \\ S^* \cup \{1,3\} - \{5\} \text{ si } 5 \in S^*. \end{cases}$$

On va maintenant constuire à partir de Y^* une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes à 5 (resp. 6) autres que l'arête (5,6) dans G^* ; α la somme des poids des trous passant par les sommets 5, 6 ; y_{16} le poids de l'arête (5,6).

D'après l'opération on a : $c_5 = c_1 + c_3 - c_2$; $c_6 = c_4$; $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4$.

D'après les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 5, 6 on doit avoir :

$$y_{56} + \phi_1 + \alpha \geq c_1 + c_3 - c_2$$
$$y_{56} + \phi_2 + \alpha \geq c_4.$$

A tout trou passant par les sommets 5, 6 dans G^* correspond un trou passant par les sommets 1, 2, 3, 4 dans G ; ce dernier aura, dans la solution Y cherchée, lé même poids que possède son correspondant dans la solution de $D(G^*)$.

a) $6 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{2,4\} - \{6\})$.

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 5 deviennent respectivement :

$$y_{56} + \phi_2 + \alpha = c_4$$
$$y_{56} + \phi_1 + \alpha \geq c_1 + c_3 - c_2$$

La solution Y de D(G) qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4 qui sont respectivement :

$$y_{12} + \phi_1 + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + \alpha = c_2$$
$$y_{23} + y_{34} + \alpha \geq c_3$$
$$y_{34} + \phi_2 + \alpha = c_4.$$

Alors la solution Y cherchée est celle dans laquelle :

$$y_{12} = c_2 - c_3 + y_{56} \geq 0 \quad \text{car} \quad c_2 \geq c_3$$
$$y_{23} = (c_3 - \alpha) - y_{56} \geq 0$$
$$y_{34} = y_{56}.$$

La non négativité de $y_{23} = (c_3 - \alpha) - y_{56}$ vient de la contrainte de $D(G^*)$ relative au sommet 6 et de $c_3 \geq c_4$.

Pour vérifier, par exemple, la contrainte relative au sommet 1, il suffit de substituer à la variable y_{12} sa valeur et tenir compte de la contrainte de $D(G^*)$ relative au sommet 5.

b) $5 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1,2\} - \{5\})$.

Dans ce cas, les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 5, 6 sont respectivement :

$$y_{56} + \phi_1 + \alpha = c_1 + c_3 - c_2$$
$$y_{56} + \phi_2 + \alpha \geq c_4.$$

La solution Y de D(G) qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3 ,4 qui sont respectiveme

$$y_{12} + \phi_1 + \alpha = c_1$$

$$y_{12} + y_{23} + \alpha \geq c_2$$

$$y_{23} + y_{34} + \alpha = c_3$$

$$y_{34} + \phi_2 + \alpha \geq c_4.$$

Alors on distingue deux cas :

1) $c_3 - \alpha > y_{56}$.

Dans ce cas, la solution Y est celle dans laquelle :

$$y_{12} = c_2 - c_3 + y_{56} \geq 0 \quad \text{car} \quad c_2 \geq c_3$$

$$y_{23} = (c_3 - \alpha) - y_{56} \geq 0 \text{ par hypothèse}$$

$$y_{34} = y_{56}.$$

2) $c_3 - \alpha \leq y_{56}$.

Dans ce cas, la solution Y est celle dans laquelle :

$$y_{12} = c_2 - c_3 + y_{56}$$

$$y_{23} = 0$$

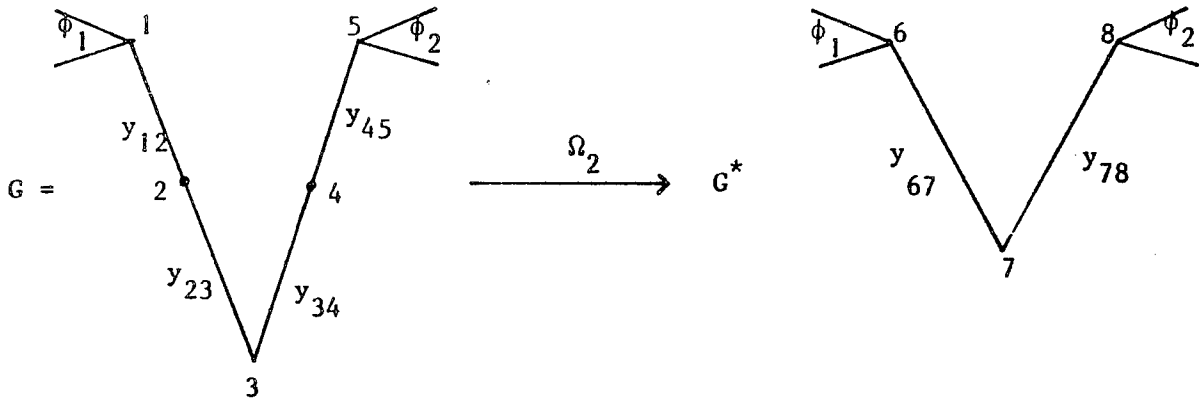
$$y_{34} = c_3 - \alpha.$$

La non négativité de $y_{34} = c_3 - \alpha$ vient du fait que $\alpha \leq c_4 \leq c_3$ car y^* est une solut propre de $D(G^*)$. Pour vérifier, par exemple, la contrainte relative au sommet il suffit de substituer aux variables y_{12} et y_{23} leurs valeurs et tenir compt de la contrainte D(G) relative à 5 et de la condition (2).

c.q.f.

Cas 3 : $0 = \Omega_2$

Soit G^* les graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_2 sur la chaîne Fl du graphe G.



F. 28

Comme S^* est le stable de poids maximum dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentation X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{2,4\} - \{7\} & \text{si } 7 \in S^* \\ S^* \cup \{1,5,3\} - \{6,8\} & \text{si } 6,8 \in S^* \\ S^* \cup \{1,4\} - \{6\} & \text{si } 6 \in S^*,\ 8 \notin S^* \\ S^* \cup \{2,5\} - \{8\} & \text{si } 6 \notin S^*,\ 8 \in S^*. \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 6 (resp. 8) dans G^* autres que l'arête (6,7) (resp. (7,8)) ; y_{67}, y_{78} le poids des arêtes (6,7), (7,8) ; α la somme des poids des trous passant les sommets 6, 7, 8 dans G^*.

D'après l'opération on a :

$$c_6 = c_1 + c_3 - c_2$$

$$c_7 = c_3$$

$$c_8 = c_5 + c_3 - c_4.$$

D'après les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8 on doit avoir :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha \geq c_6 = c_1 + c_3 - c_2$$

$$y_{78} + \phi_2 + \alpha \geq c_8 = c_5 + c_3 - c_4$$

$$y_{67} + y_{78} + \alpha \geq c_7 = c_3.$$

Soit $\beta = y_{67} + y_{78} + \alpha - c_3$.

A tout trou passant par les sommets 6, 7, 8 dans G^* correspond un trou passan par les sommets 1, 2, 3, 4, 5 dans G. Ce dernier aura, dans la solution Y che chée, le même poids que possède son correspondant dans la solution de $D(G^*)$.

a) $7 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{2,4\} - \{7\})$.

La solution Y de D(G) qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 qui sont respectivement :

$$y_{12} + \phi_1 + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + \alpha = c_2$$
$$y_{23} + y_{34} + \alpha \geq c_3$$
$$y_{34} + y_{45} + \alpha = c_4$$
$$y_{45} + \phi_2 + \alpha \geq c_5.$$

Dans ce cas $\beta = 0$; la solution Y est celle dans laquelle :

$$y_{12} = c_2 - c_3 + y_{67} \geq 0 \quad \text{car} \quad c_2 \geq c_3$$
$$y_{23} = y_{78}$$
$$y_{34} = y_{67}$$
$$y_{45} = c_4 - c_3 + y_{78} \geq 0 \quad \text{car } c_4 \geq c_3.$$

b) $6, 8 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1,5,3\} - \{6,8\})$.

La solution Y de D(G) qu'on va construire doit satisfaire les conditions de écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 qui sont respectivement :

$$y_{12} + \phi_1 + \alpha = c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + \alpha \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{34} + \alpha = c_3$$
$$y_{34} + y_{45} + \alpha \geq c_4$$
$$y_{45} + \phi_2 + \alpha = c_5.$$

Dans ce cas $\beta \geq 0$; la solution Y est celle dans laquelle :

$y_{12} = c_2 - c_3 + y_{67}$

$y_{23} = \max.(0, y_{78} - \beta)$

$y_{34} = y_{67} + \mathrm{Min}(0, y_{78} - \beta)$

$y_{45} = c_4 - c_3 + y_{87}$

c) $6 \in S^*$, $8 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{1,4\} - \{6\})$.

Dans ce cas le poids y_{78} est nul car aucun des sommets 7, 8 n'appartient à S^*, et la solution Y, qu'on va construire, doit satisfaire les condition des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 qui sont respectivement :

$y_{12} + \phi_1 + \alpha = c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha \geq c_2$

$y_{23} + y_{34} + \alpha \geq c_3$

$y_{34} + y_{45} + \alpha = c_4$

$y_{45} + \phi_2 + \alpha \geq c_5$.

La solution Y est celle dans laquelle :

y_{12}, y_{45} gardent les mêmes valeurs qu'aux cas précédents

$y_{23} = 0$

$y_{34} = c_3 - \alpha$.

La non négativité de $y_{34} = c_3 - \alpha$ vient du fait que Y^* est une solution propre de $D(G^*)$.

d) $8 \in S^*$, $6 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{2,5\} - \{8\})$.

Ce cas est le symétrique du cas précédent ; le poids y_{67} est nul car aucun des sommets 6, 7 n'appartient à S^* ; la solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 qui sont respectivement :

$y_{12} + \phi_1 + \alpha \geq c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha = c_2$

$y_{23} + y_{34} + \alpha \geq c_3$

$y_{34} + y_{45} + \alpha \geq c_4$

$y_{45} + \phi_2 + \alpha = c_5$.

La solution Y est celle dans laquelle :

y_{12}, y_{45} gardent les mêmes valeurs qu'aux cas précédent

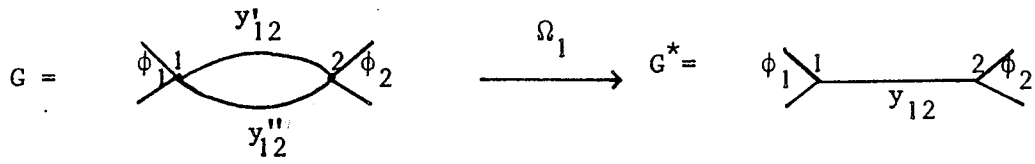
$y_{23} = c_3 - \alpha$

$y_{34} = 0$

c.q.f.

Cas 4 : $0 = \Omega_1$

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_1 sur le sous-graphe F20 du graphe G.



F. 29

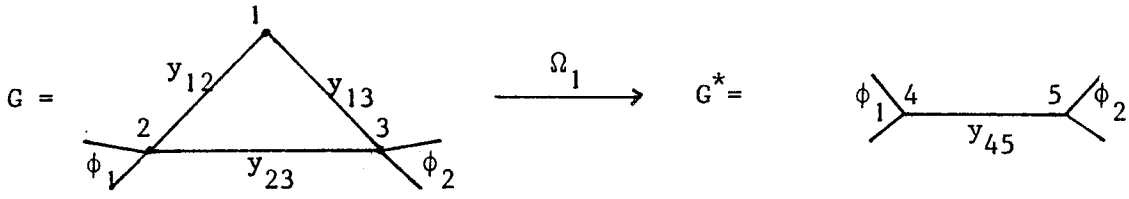
Dans ce cas $S = S^*$; la construction de la solution Y est triviale ; Y est celle dans laquelle :

$y'_{12} = y_{12}$

$y''_{12} = 0$ (voir F29)

Cas 5 : $0 = \Omega_1$

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_1 sur le sous-graphe F21 du graphe G.



F. 30

Comme S^* est le stable de poids maximum de G dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{2\} - \{4\} & \text{si } 4 \in S^* \\ S^* \cup \{3\} - \{5\} & \text{si } 5 \in S^* \\ S^* \cup \{1\} & \text{si } 4,5 \notin S^*. \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 4 (resp. 5) autre que l'arête (4,5) ; y_{45} le poids de l'arête (4,5) ; la somme des poids des trous passant par les sommets 4, 5 dans G^*.

A tout trou passant par les sommets 4, 5 dans G^* correspond un trou passant les sommets 2, 3 dans G ; ce dernier aura, dans la solution Y cherchée, le même poids que possède son correspondant dans Y^*. Il reste le trou G_c, $c = \{1,2,3\}$, auquel on affecte la variable y_c.

D'après l'opération on a :

$$c_4 = c_2 - c_1$$

$$c_5 = c_3 - c_1.$$

D'après les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 4, 5 on doit avoir :

$$y_{45} + \phi_1 + \alpha \geq c_2 - c_1$$

$$y_{45} + \phi_2 + \alpha \geq c_3 - c_1.$$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3 dans chacun des cas suivants :

1) $4 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{2\} - \{4\})$.

La contrainte de $D(G^*)$ relative à 4 devient égalité ; et les contraintes que Y doit satisfaire sont :

$$y_{12} + y_{13} + y_c \geq c_1$$

$$\phi_1 + y_{12} + y_{23} + y_c + \alpha = c_2$$

$$\phi_2 + y_{13} + y_{23} + y_c + \alpha \geq c_3.$$

2) $5 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{3\} - \{5\})$.

La contrainte de $D(G^*)$ relative à 5 devient égalité ; et les contraintes que Y doit satisfaire sont :

$$y_{12} + y_{13} + y_c \geq c_1$$
$$\phi_1 + y_{13} + y_{23} + y_c + \alpha \geq c_2$$
$$\phi_2 + y_{12} + y_{23} + y_c + \alpha = c_3.$$

3) $4, 5 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{1\})$.

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives à 5, 6 restent des inégalités ; et les contraintes que Y doit satisfaire sont :

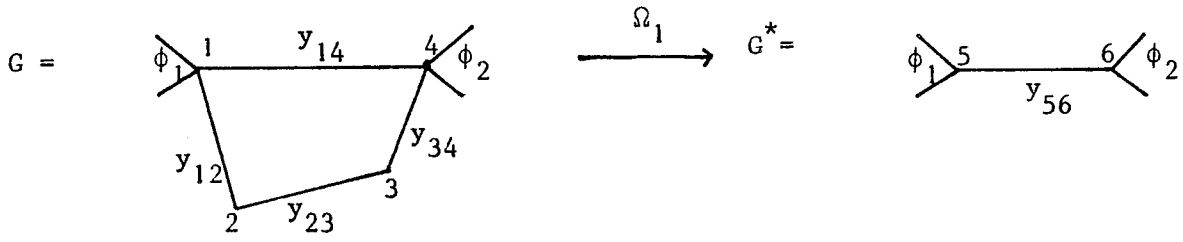
$$y_{12} + y_{13} + y_c = c_1$$
$$\phi_1 + y_{12} + y_{23} + y_c + \alpha \geq c_2$$
$$y_{13} + y_{23} + y_c + \alpha + \phi_2 \geq c_3.$$

La solution Y, valable pour tous les cas, est celle dans laquelle :

$$y_{12} = y_{13} = 0$$
$$y_{23} = y_{45}$$
$$y_c = c_1.$$

<u>Cas 6 : $0 = \Omega_1$</u>

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_1 sur le sous-graphe F22 du graphe G.



F. 31

Comme S^* est le stable de poids maximum de G^* dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{1,3\} - \{5\} & \text{si } 5 \in S^* \\ S^* \cup \{2,4\} - \{6\} & \text{si } 6 \in S^* \\ S^* \cup \{3\} & \text{si } 5,\ 6 \notin S^* \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 5 (resp. 6) autres que l'arête (5,6) ; y_{56} le poids de l'arête (5,6) : α la somme des poids des trous passant par les sommets 5, 6 dans G .

A tout trou passant par les sommets 5, 6 dans G^* correspond un trou passant par les sommets 1, 4 dans G^*; ce dernier aura, dans la solution Y, le même poids que possède son correspondant dans Y^*. D'après l'opération on a :

$$c_5 = c_1 + c_3 - c_2$$

$$c_6 = c_4.$$

D'après les contraintes de D(G) relatives à 5, 6 on doit avoir :

$$y_{56} + \phi_1 + \alpha \geq c_5 = c_1 + c_3 - c_2$$

$$y_{56} + \phi_2 + \alpha \geq c_6 = c_4.$$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4 dans chacun des cas suivants :

1) $5 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1,3\} - \{5\})$.

La contrainte de $D(G^*)$ relative à 5 devient égalité ; et les contraintes que Y doit satisfaire sont :

$$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + \alpha = c_1$$

$$y_{12} + y_{23} \geq c_2$$

$$y_{23} + y_{34} = c_3$$

$$y_{34} + y_{14} + \phi_2 + \alpha \geq c_4.$$

2) $G \in S^*$ $(S = S^* \cup 4,2 - 6)$.

La contrainte de $D(G^*)$ relative à 6 devient égalité ; et les contraintes que Y doit satisfaire sont :

$$y_{12} + y_{13} + \phi_1 + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} = c_2$$
$$y_{23} + y_{34} \geq c_3$$
$$y_{34} + y_{14} + \phi_2 + \alpha = c_4.$$

3) $5, 6 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{3\})$.

La contrainte de $D(G^*)$ relative à 5, 6 restent des inégalités ; et les contrain que Y doit satisfaire sont :

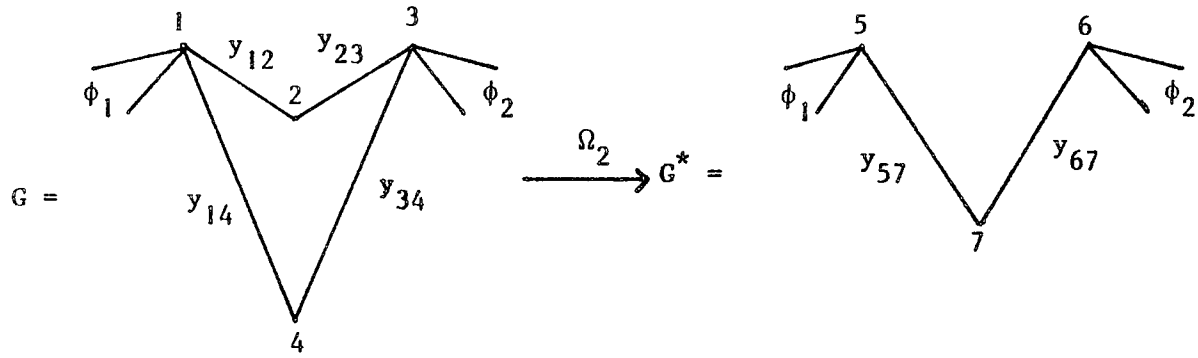
$$y_{12} + y_{13} + \phi_1 + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{34} = c_3$$
$$y_{34} + y_{14} + \phi_2 + \alpha \geq c_4.$$

La solution Y, valable pour tous les cas, est celle dans laquelle :

$$y_{12} = c_2 - c_3$$
$$y_{23} = c_3$$
$$y_{34} = 0$$
$$y_{14} = y_{56}.$$

Cas 7 : $0 = \Omega_2$

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_2 sur le sous-graphe F. 23 du graphe G.



F. 32

Comme S^* est le stable de poids maximum de G^* dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{2, 4\} - \{7\} & \text{si } 7 \in S^* \\ S^* \cup \{1, 3\} - \{5, 6\} & \text{si } 5, 6 \in S^* \\ S^* \cup \{1\} - \{5\} & \text{si } 5 \in S^*, 6 \notin S^* \\ S^* \cup \{3\} - \{6\} & \text{si } 6 \in S^*, 5 \notin S^* \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 5 (resp. 6) autres que l'arête (5, 7) (resp. (6, 7)) ; y_{57}, y_{67} les poids des (5, 7), (6, 7) ; α la somme des poids des trous passant par les sommets 5, 6, 7 dans G^*.

A tout trou passant par les sommets 5, 6, 7 dans G^* correspondent deux trous dans G ; l'un d'eux passe par les sommets 1, 2, 3 ; l'autre passe par les sommets 1, 3, 4.

Soit α_1 (resp. α_2) la somme des poids des trous passant par les sommets 1, 2, 3 (resp. 1, 3, 4) relative à la solution Y qu'on va déterminer.

D'après l'opération on a : $c_5 = c_1$; $c_6 = c_3$; $c_7 = c_2 + c_4$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4 dans les quatre cas suivants :

1) $7 \in S^*$, $(S = S^* \cup \{2, 4\} - \{7\})$

Dans ce cas les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 5, 6, 7 sont :

$$y_{57} + \phi_1 + \alpha \geq c_5 = c_1$$
$$y_{67} + \phi_2 + \alpha \geq c_6 = c_3$$
$$y_{57} + y_{67} + \alpha = c_7 = c_2 + c_4$$

Et les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4 sont :

$$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + \alpha_1 = c_2$$
$$y_{23} + y_{34} + \phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq c_3$$
$$y_{14} + y_{34} + \alpha_2 = c_4$$

2) $5, 6 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 3\} - \{5, 6\})$

Dans ce cas les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 5, 6, 7 sont :

$$y_{57} + \phi_1 + \alpha = c_5 = c_1$$
$$y_{67} + \phi_2 + \alpha = c_6 = c_3$$
$$y_{57} + y_{67} + \alpha \geq c_7 = c_2 + c_4$$

Et les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4 sont :

$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha_1 \geq c_2$

$y_{23} + Y_{34} + \phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_3$

$y_{14} + Y_{34} + \alpha_2 \geq c_4$

3) $5 \in S^*$, $6 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{1\} - \{5\})$

Dans ce cas les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 5, 6, 7 sont:

$y_{57} + \phi_1 + \alpha = c_5 = c_1$

$y_{67} + \phi_2 + \alpha \geq c_6 = c_3$

$y_{67} + y_{57} + \alpha \geq c_7 = c_2 + c_4$

$y_{67} = 0$ car aucun des sommets 6, 7 n'appartient à S^*.
Et les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4 sont :

$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_1$

$y_{23} + Y_{12} + \alpha_1 \geq c_2$

$y_{23} + y_{34} + \phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq c_3$

$y_{34} + y_{14} + \alpha_2 \geq c_4$

$y_{23} = y_{34} = 0$ car aucun des sommets 2, 3, 4 n'appartient à S.

4) $6 \in S^*$, $5 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{3\} - \{6\})$

Ce cas est le symétrique du cas précédent.
Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 5, 6, 7 sont :

$y_{57} + \phi_1 + \alpha \geq c_5 = c_1$

$y_{67} + \phi_2 + \alpha = c_6 = c_3$

$y_{57} + y_{67} + \alpha \geq c_7 = c_2 + c_4$

$y_{57} = 0$ car $5, 7 \notin S^*$.

Et les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4 sont :

$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha_1 \geq c_2$

$y_{23} + y_{34} + \alpha_1 + \alpha_2 + \phi_2 = c_3$

$y_{14} + y_{34} + \alpha_2 \geq c_4$

$y_{12} = y_{14} = 0$ car $1, 2, 4 \notin S$

La solution Y valable pour tous les cas est celle dans laquelle :

a) $\alpha \geq c_2$

$y_{12} = y_{23} = 0$

$y_{14} = y_{57}$

$y_{34} = y_{67}$

$\alpha_1 = c_2$

$\alpha_2 = \alpha - c_2$

b) $\alpha < c_2$

1) $\alpha + y_{56} \geq c_2$

Dans ce cas si on met $\beta = \alpha + y_{56} - c_2$, alors :

$y_{12} = y_{56} - \beta$

$y_{13} = \beta$

$y_{23} = 0$

$y_{34} = y_{67}$

$\alpha_1 = \alpha$

$\alpha_2 = 0$

2) $\alpha + y_{56} < c_2$

Dans ce cas si on met $\beta = c_2 - \alpha - y_{56}$ alors :

$y_{12} = y_{56}$

$y_{13} = 0$

$y_{23} = \beta$

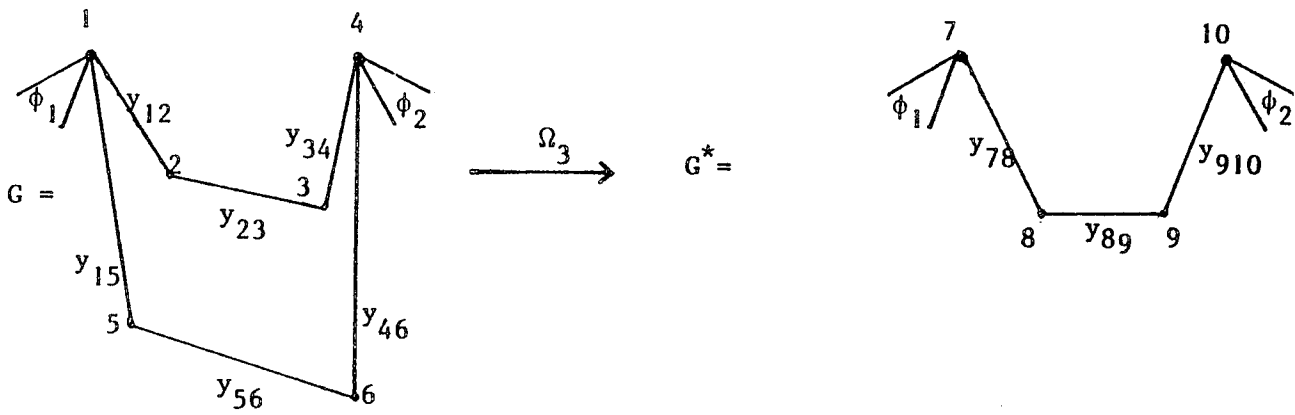
$y_{34} = y_{67} - \beta$

$\alpha_1 = \alpha$

$\alpha_2 = 0$

<u>Cas 8 : $0 = \Omega_3$</u>

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_3 sur le sous-graphe F. 24 du graphe G.
On peut supposer, sans perte de généralité, que $c_2 \geq c_3$; $c_5 \geq c_6$.



F. 33

Comme S^* est le stable de poids maximum de G^* dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{1, 4\} - \{7, 10\} & \text{si } 7, 10 \in S^* \\ S^* \cup \{1, 3, 6\} - \{7, 9\} & \text{si } 7, 9 \in S^* \\ S^* \cup \{4, 2, 5\} - \{8, 10\} & \text{si } 8, 10 \in S^* \\ S^* \cup \{2, 5\} - \{8\} & \text{si } 8 \in S^*, 10 \notin S^* \\ S^* \cup \{2, 5\} - \{9\} & \text{si } 9 \in S^*, 7 \in S^*. \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X, Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 7 (resp. 10) autres que l'arête (7, 8) (resp. (9, 10)) y_{78}, y_{89}, y_{910} les poids des arêtes (7, 8), (8, 9), (9, 10) ; α la somme des poids des trous passant par les sommets 7, 8, 9, 10 dans G^*.
A tout trou passant par les sommets 7, 8, 9, 10 dans G^* correspondent deux trous dans G ; l'un d'eux passe par les sommets 1, 2, 3, 4 ; l'autre passe par les sommets 1, 4, 5, 6.

Soit α_1 (resp. α_2) la somme des poids des trous passant par les sommets 1, 2, 3, 4 (resp. 1, 4, 5, 6) relative à la solution Y qu'on va déterminer.

D'après l'opération on doit avoir :

$$c_7 = c_1 + c_3 + c_6 - c_2 - c_5$$
$$c_8 = c_9 = c_3 + c_6$$
$$c_{10} = c_4$$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les quatre cas suivants :

1) $7, 10 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 4\} - \{7, 10\})$

Dans ce cas les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 7, 8, 9, 10 sont :

$$y_{78} + \phi_1 + \alpha = c_7 = c_1 + c_3 + c_6 - c_2 - c_5$$
$$y_{78} + y_{89} + \alpha \geq c_8 = c_3 + c_6$$
$$y_{89} + y_{910} + \alpha \geq c_9 = c_3 + c_6$$
$$y_{910} + \phi_2 + \alpha = c_{10} = c_4$$
$$y_{89} = 0 \text{ car } 8,9 \notin S^*$$

Et les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont :

$$y_{12} + y_{15} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_1$$
$$y_{23} + y_{12} + \alpha_1 \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{34} + \alpha_1 \geq c_3$$

$y_{34} + y_{46} + \phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_4$

$y_{56} + y_{15} + \alpha_2 \geq c_5$

$y_{56} + y_{46} + \alpha_2 \geq c_6$

$y_{23} = y_{56} = 0$ car 2, 3, 5, 6 $\notin$ S.

2) 7, 9 $\in S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 3, 6\} - \{7, 9\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 7, 8, 9, 10 sont :

$y_{78} + \phi_1 + \alpha = c_7 = c_1 + c_3 + c_6 - c_2 - c_5$

$y_{78} + y_{89} + \alpha \geq c_8 = c_3 + c_6$

$y_{89} + y_{910} + \alpha = c_9 = c_3 + c_6$

$y_{910} + \phi_2 + \alpha \geq c_{10} = c_4$

Et les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont :

$y_{12} + y_{15} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha_1 \geq c_2$

$y_{23} + y_{34} + \alpha_1 = c_3$

$y_{34} + y_{46} + \alpha_1 + \alpha_2 + \phi_2 \geq c_4$

$y_{15} + y_{56} + \alpha_2 \geq c_5$

$y_{56} + y_{46} + \alpha_2 = c_6$

3) 8, 10 $\in S^*$ $(S = S^* \cup \{2, 4, 5\} - \{8, 10\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 7, 8, 9, 10 sont :

$y_{78} + \phi_1 + \alpha \geq c_7 = c_1 + c_3 + c_6 - c_2 - c_5$

$y_{78} + y_{89} + \alpha = c_8 = c_3 + c_6$

$y_{89} + y_{910} + \alpha \geq c_9 = c_3 + c_6$

$y_{910} + \phi_2 + \alpha = c_{10} = c_4$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont :

$y_{12} + y_{15} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha_1 = c_2$

$y_{23} + y_{34} + \alpha_1 \geq c_3$

$y_{34} + y_{46} + \phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = c_4$

$y_{15} + y_{56} + \alpha_2 = c_5$

$y_{56} + y_{46} + \alpha_2 \geq c_6$

4) $8 \in S^*$, $10 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{2, 5\} - \{8\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 7, 8, 9, 10 sont :

$y_{78} + \phi_1 + \alpha \geq c_7 = c_1 + c_3 + c_6 - c_2 - c_5$

$y_{78} + y_{89} + \alpha = c_8 = c_3 + c_6$

$y_{89} + \alpha \geq c_9 = c_3 + c_6$

$\phi_2 + \alpha \geq c_{10} = c_4$

$y_{910} = 0$ car $9, 10 \notin S^*$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$y_{12} + y_{15} + \phi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \geq c_1$

$y_{12} + y_{23} + \alpha_1 = c_2$

$y_{23} + \alpha_1 + y_{34} \geq c_3$

$\phi_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + y_{34} + y_{46} \geq c_4$

$y_{15} + y_{56} + \alpha_2 = c_5$

$y_{56} + \alpha_2 + y_{46} \geq c_6$

$y_{34} = y_{46} = 0$ car $3, 4, 6 \notin S$.

Le cas où $9 \in S^*$ et $7 \in S^*$ est le symétrique du cas précédent.

La solution Y valable pour tous les cas est celle dans laquelle :

a) $\alpha \geq c_3$

$y_{12} = c_2 - c_3$

$y_{23} = y_{34} = 0$

$y_{15} = y_{78} + c_5 - c_6$

$y_{56} = y_{89}$

$y_{46} = y_{910}$

$\alpha_1 = c_3$

$\alpha_2 = \alpha - c_3$

b) $\alpha < c_3$

1) $\alpha + y_{910} < c_3$

Dans ce cas on doit avoir, d'après la contrainte de $D(G^*)$ relative à 9, $y_{89} > c_6$; c'est-à-dire $y_{89} > 0$, ce qui fait qu'il existe un des sommets 8, 9 dans le stable S^*.

Si on met $\beta = c_3 - \alpha - y_{910}$ alors :

$y_{12} = (c_2 - \alpha) - \beta$

$y_{23} = \beta$

$y_{34} = y_{910}$

$y_{15} = c_5 - c_6 + \gamma$ où $\gamma = y_{78} + y_{89} + \alpha - (c_3 + c_6)$

$y_{56} = c_6$

$y_{46} = 0$

$\alpha_1 = \alpha$

$\alpha_2 = 0$

2) $\alpha + y_{910} \geq c_3$

Si on met $\beta = \alpha + y_{910} - c_3$ on doit avoir d'après la contrainte de $D(G^*)$ relative à 9 que $\beta + y_{89} \geq c_6$. Soit $\gamma = \beta + y_{89} - c_6$, alors :

$y_{12} = c_2 - \alpha$

$y_{23} = 0$

$y_{34} = y_{910} - \beta$

$y_{46} = \beta$

$$y_{56} = \begin{cases} 0 \text{ si } \beta \geq c_6 \\ \\ \quad \text{si } \beta < c_6 \end{cases}$$

$$y_{15} = \begin{cases} y_{78} + y_{89} + \alpha - c_3 + (c_5 - c_6) & \text{si } \beta \geq c_6 \\ \\ y_{78} + (y_{89} - \gamma) + \alpha - c_3 + (c_5 - c_6) & \text{si } \beta < c_6 \end{cases}$$

$\alpha_1 = \alpha$

$\alpha_2 = 0$

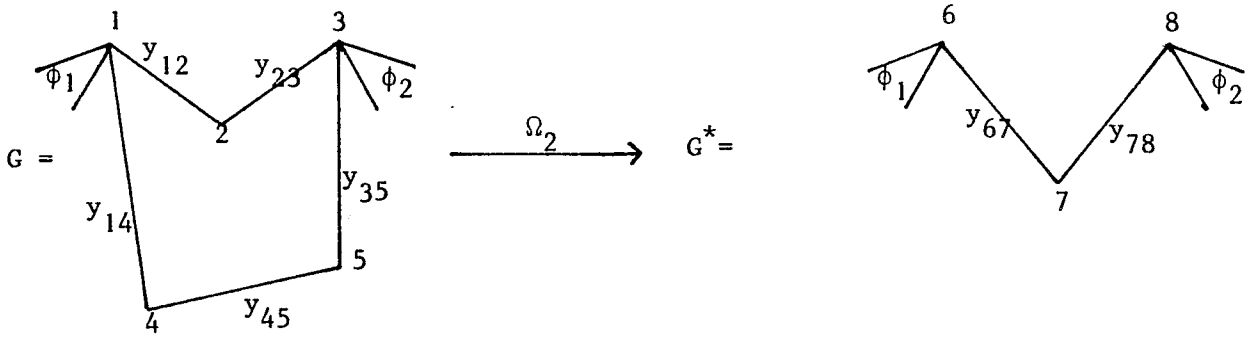
<u>Cas 9 : $0 = \Omega_2$ ou Ω_3</u>

Soit G^* le graphe réduit obtenu en appliquant l'opération Ω_2 ou Ω_3 sur le sous-graphe F. 25 du graphe G.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $c_5 \geq c_4$.

Dans ces conditions on trouve que $\alpha_0 = c_2 - c_4$; alors on distingue deux cas :

a) $c_2 \geq c_4$ $(\alpha_0 \geq 0)$



F. 34

Comme S^* est le stable de poids maximum de G^* dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S qu'on va définir, est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{2, 5\} - \{7\} & \text{si } 7 \in S^* \\ S^* \cup \{1, 3\} - \{6, 8\} & \text{si } 6, 8 \in S^* \\ S^* \cup \{1, 5\} - \{6\} & \text{si } 6 \in S^*, 8 \notin S^* \\ S^* \cup \{3, 4\} - \{8\} & \text{si } 8 \in S^*, 6 \notin S^* \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y) vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient ϕ_1 (resp. ϕ_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 6 (resp. 8), autre que l'arête (6, 7), (resp. (7, 8)) ; α la somme des trous passant par les sommets 6, 7, 8 ; y_{67}, y_{78} les poids des arêtes (6, 7), (7, 8).
A tout trou passant par les sommets 6, 7, 8 dans G^* correspond un trou passant par les sommets 1, 2, 3 dans G ; ce dernier aura, dans la solution Y qu'on cherche, le même poids que possède son correspondant dans Y^*. Il reste le trou c = {1, 2, 3, 4, 5} dans G auquel on affecte la variable y_c.

D'après l'opération on a :

$c_6 = c_1 - c_4$

$c_7 = c_2 - c_4$

$c_8 = c_3 - c_5$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 dans chacun des quatre cas suivants :

1) $7 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{2, 5\} - \{7\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8 sont :

$y_{67} + \phi_1 + \alpha \geq c_6 = c_1 - c_4$

$$y_{67} + y_{78} + \alpha = c_7 = c_2 - c_4$$
$$y_{78} + \phi_2 + \alpha \geq c_8 = c_3 - c_5$$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + y_c + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + y_c + \alpha = c_2$$
$$y_{23} + y_{35} + y_c + \alpha + \phi_2 \geq c_3$$
$$y_{14} + y_{45} + y_c \geq c_4$$
$$y_{45} + y_{35} + y_c = c_5$$

2) $6, 8 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 3\} - \{6, 8\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8 sont :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha = c_6 = c_1 - c_4$$
$$y_{67} + y_{78} + \alpha \geq c_7 = c_2 - c_4$$
$$y_{78} + \phi_2 + \alpha = c_8 = c_3 - c_5$$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont ;

$$y_{12} + y_{14} + y_c + \phi_1 + \alpha = c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + y_c + \alpha \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{35} + y_c + \alpha + \phi_2 = c_3$$
$$y_{14} + y_{45} + y_c \geq c_4$$
$$y_{45} + y_{35} + y_c \geq c_5$$

3) $6 \in S^*$, $8 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 5\} - \{6\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8 sont :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha = c_6 = c_1 - c_4$$

$y_{78} + y_{67} + \alpha \geq c_7 = c_2 - c_4$

$y_{78} + \phi_2 + \alpha \geq c_8 = c_3 - c_5$

$y_{78} = 0$ car $7, 8 \notin S^*$.

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + y_c + \alpha = c_1$

$y_{23} + y_{12} + y_c + \alpha \geq c_2$

$y_{23} + y_{35} + y_c + \phi_2 + \alpha \geq c_3$

$y_{14} + y_{45} + y_c \geq c_4$

$y_{45} + y_{35} + y_c = c_5$

$y_{23} = 0$ car $2, 3 \notin S$.

4) $8 \in S^*$, $6 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{3, 4\} - \{8\})$

Ce cas est le symétrique du cas précédent.

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8 sont :

$y_{67} = 0$ car $6, 7 \notin S^*$

$y_{67} + \phi_1 + \alpha \geq c_6 = c_1 - c_4$

$y_{67} + y_{78} + \alpha \geq c_7 = c_2 - c_4$

$y_{78} + \phi_2 + \alpha = c_8 = c_3 - c_5$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$y_{12} = 0$ car $1, 2 \notin S$

$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + y_c + \alpha \geq c_1$

$y_{12} + y_{23} + y_c + \alpha \geq c_2$

$y_{23} + y_{35} + y_c + \alpha + \phi_2 = c_3$

$y_{14} + y_{45} + y_c = c_4$

$y_{45} + y_{35} + y_c \geq c_5$

La solution Y valable pour tous les cas est celle dans laquelle :

$y_{12} = y_{67}$

$y_{23} = y_{78}$

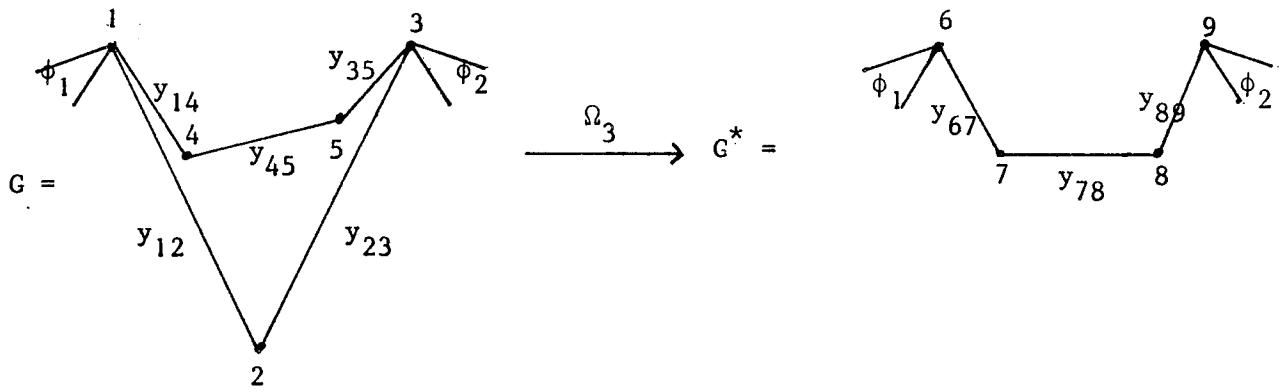
$y_{14} = y_{45} = 0$

$y_{35} = c_5 - c_4$

$y_c = c_4$

c. q. f. d.

b) $c_2 < c_4 \quad (\alpha_0 < 0)$



F. 35

Comme S^* est le stable de poids maximum de G^* dont X^* est le vecteur représentatif, alors le stable S, qu'on va définir est le stable de poids maximum de G dont le vecteur représentatif X est une solution optimale de P(G).

$$S = \begin{cases} S^* \cup \{1, 3\} - \{6, 9\} & \text{si } 6, 9 \in S^* \\ S^* \cup \{1, 5\} - \{6, 8\} & \text{si } 6, 8 \in S^* \\ S^* \cup \{3, 4\} - \{7, 9\} & \text{si } 7, 9 \in S^* \\ S^* \cup \{2, 5\} - \{7\} & \text{si } 7 \in S^* \end{cases}$$

On va maintenant construire une solution Y de D(G) telle que le couple (X,Y)

vérifie les conditions des écarts complémentaires.

Soient α_1, (resp. α_2) la somme des poids des arêtes adjacentes au sommet 6 (resp. 9), autre que l'arête (6, 7), (resp. (8, 9)) ; y_{67}, y_{78}, y_{89} les poids des arêtes (6, 7), (7, 8), (8, 9) ; α la somme des poids des trous passant par les sommets 6, 7, 8, 9 dans G^*.

A tout trou passant par les sommets 6, 7, 8, 9 dans G^* correspond un trou passant par les sommets 1, 4, 5, 3 dans G, ce dernier aura, dans la solution Y qu'on cherche, le même poids que possède son correspondant dans Y^*. Il reste le trou $c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans G auquel on affecte la variable y_c.

D'après l'opération on a :

$$c_6 = c_1 - c_2$$
$$c_7 = c_8 = c_4 - c_2$$
$$c_9 = (c_3 - c_5) + (c_4 - c_2)$$

La solution Y qu'on va construire doit satisfaire les conditions des écarts complémentaires relatives aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 dans chacun des quatre cas suivants :

1) $6, 9 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 3\} - \{6, 9\})$

Les contraitraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8, 9 sont :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha = c_6 = c_1 - c_2$$
$$y_{78} + y_{67} + \alpha \geq c_7 = c_4 - c_2$$
$$y_{78} + y_{89} + \alpha \geq c_8 = c_4 - c_2$$
$$y_{89} + \phi_2 + \alpha = c_9 = (c_3 - c_5) + (c_4 - c_2)$$
$$y_{78} = 0 \text{ car } 7, 8 \notin S^*$$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$$y_{12} + y_{14} + \phi_1 + y_c + \alpha = c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + y_c \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{35} + y_c + \phi_1 + \alpha = c_3$$
$$y_{45} + y_{14} + y_c + \alpha \geq c_4$$
$$y_{45} + y_{35} + y_c + \alpha \geq c_5$$
$$y_{45} = 0 \text{ car } 4, 5 \notin S$$

2) $6, 8 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{1, 5\} - \{6, 8\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8, 9 sont :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha = c_6 = c_1 - c_2$$
$$y_{67} + y_{78} + \alpha \geq c_7 = c_4 - c_2$$
$$y_{78} + y_{89} + \alpha = c_8 = c_4 - c_2$$
$$y_{89} + \phi_2 + \alpha \geq c_9 = (c_3 - c_5) + (c_4 - c_2)$$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$$y_{14} + y_{12} + y_c + \phi_1 + \alpha = c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + y_c \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{35} + y_c + \phi_2 + \alpha \geq c_3$$
$$y_{14} + y_{45} + y_c + \alpha \geq c_4$$
$$y_{45} + y_{35} + y_c + \alpha = c_5$$

3) $7, 9 \in S^*$ $(S = S^* \cup \{3, 4\} - \{7, 9\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8, 9 sont :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha \geq c_6 = c_1 - c_2$$
$$y_{67} + y_{78} + \alpha = c_7 = c_4 - c_2$$
$$y_{78} + y_{89} + \alpha \geq c_8 = c_4 - c_2$$
$$y_{89} + \phi_2 + \alpha = c_9 = (c_3 - c_5) + (c_4 - c_2)$$

Les contraintes qur Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$$y_{12} + y_{14} + y_c + \phi_1 + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + y_c \geq c_2$$
$$y_{23} + y_{35} + y_c + \phi_2 + \alpha = c_3$$
$$y_{14} + y_{45} + y_c + \alpha = c_4$$
$$y_{45} + y_{35} + y_c + \alpha \geq c_5$$

4) $7 \in S^*$, $9 \notin S^*$ $(S = S^* \cup \{2, 5\} - \{7\})$

Les contraintes de $D(G^*)$ relatives aux sommets 6, 7, 8, 9 sont :

$$y_{67} + \phi_1 + \alpha \geq c_6 = c_1 - c_2$$
$$y_{67} + y_{78} + \alpha = c_7 = c_4 - c_2$$
$$y_{89} + y_{78} + \alpha \geq c_8 = c_4 - c_2$$
$$y_{89} + \phi_2 + \alpha \geq c_9 = (c_3 - c_5) + (c_4 - c_2)$$
$$y_{89} = 0 \text{ car } 8, 9 \notin S^*$$

Les contraintes que Y doit satisfaire aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 sont :

$$y_{14} + y_{12} + y_c + \phi_1 + \alpha \geq c_1$$
$$y_{12} + y_{23} + y_c = c_2$$
$$y_{23} + y_{35} + y_c + \phi_1 + \alpha \geq c_3$$
$$y_{14} + y_{45} + y_c + \alpha \geq c_4$$
$$y_{45} + y_{35} + y_c + \alpha = c_5$$
$$y_{14} = 0 \text{ car } 1, 4 \notin S$$

La solution Y valable pour tous les cas est celle dans laquelle :

$$y_{12} = y_{23} = 0$$
$$y_{14} = y_{67}$$

$y_{45} = y_{78}$

$y_{35} = (c_5 - c_4) + y_{89}$

$y_c = c_2$

c. q. f. d.

Remarque 5

Pour construire une solution optimale y du dual, on n'a utilisé, dans chacun des cas précédents que des opérations d'addition et de soustraction ; ce qui fait que, si on suppose que les poids associés aux sommets de G sont entiers, alors la solution y est entière. On dit dans ce cas que le problème P(G) est T. D. I. (totaly dual integer).

Et si on remplace, dans $P_o(G)$, les contraintes sur les arêtes par les contraintes sur les cliques maximales, on trouve :

$$P'_o(G) = \begin{cases} x \geq 0 \\ \sum_K x_i \leq 1 & K \in \mathcal{K} \\ \sum_C x_i \leq \frac{|C - 1|}{2} & C \in \mathcal{C} \end{cases}$$

où $\mathcal{K} = \{K \subset X \mid G_K$ est une clique maximale$\}$

$\mathcal{C} = c \subset X \mid G_c$ est un trou de cardinalité ≥ 5

Soit $P'(G) = (\max. cx \mid x \in P'_o(G))$ et $D'(G)$ son dual.

Les contraintes de $P'_o(G)$ sont toutes des facettes de E(G) ; et si on avait considéré dans la démonstration de la conjecture de Chvatal $p'_o(G)$ au lieu de $P_o(G)$ alors rien ne change que de remplacer toute arête par une clique maximale qui l'a contient ; ce qui implique que le problème P'(G) est également T. D. I.

CHAPITRE III

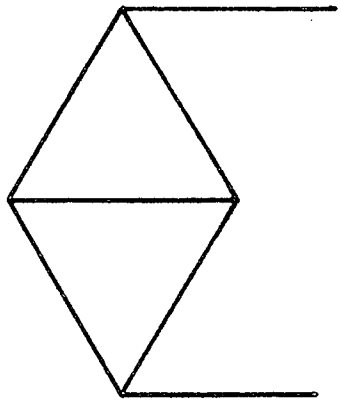
GRAPHES QUASI-ADJOINTS ET OPERATIONS SUR LES GRAPHES

§1 - GRAPHES QUASI-ADJOINTS

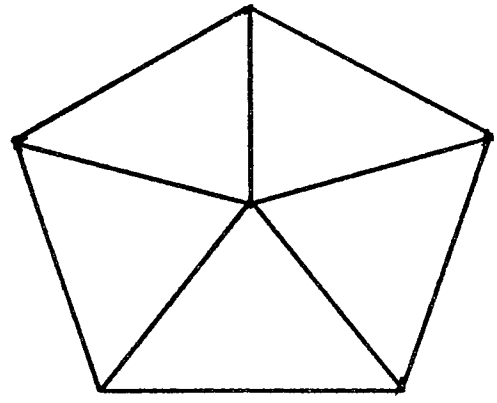
Définition 1 : Un graphe G est dit quasi-adjoint si et seulement si le voisinage de tout sommet se partage en deux cliques ; ce qui est équivalent à dire que le complémentaire du voisinage de tout sommet est un graphe biparti (ces graphes sont les complémentaires des graphes presque-bipartis définis par J. F. MAURRAS [9]).

Remarque 1 :

La classe des graphes adjoints est contenue strictement dans la classe des graphes quasi-adjoints qui, elle-même, est contenue strictement dans la classe des graphes sans étoile (sans sous-graphe isomorphe à k_{3}^{1}). Le graphe de la figure 1, qui n'est pas un graphe adjoint, est un graphe quasi-adjoint ; le graphe de la figure 2, qui n'est pas un graphe quasi-adjoint, est un graphe sans étoile .



F. 1



F. 2

On désigne par $\bar{C}$ (i) le graphe obtenu en reliant le sommet i à tous les sommets d'un anti-trou $\bar{C}$.

Théorème 1 (MAURRAS) : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe $G = (X, E)$ soit quasi-adjoint est qu'il ne contienne pas un sous-graphe isomorphe à $\bar{C}(i)$, $\forall\, i \in X$.

Démonstration :

C. N. : Cette condition est évidente car s'il existe un sous-graphe de G isomorphe à $\bar{C}(i)$, $i \in X$, alors le complémentaire du voisinage du sommet i contient un cycle impair, donc il n'est pas biparti. (contradiction).

C. S. : On suppose que le graphe $G = (X, E)$ ne contienne pas de sous-graphe isomorphe à $\bar{C}(i)$, $i \in X$, et que G ne soit pas quasi-adjoint : Donc il existe un sommet i de $\bar{G} = (X, \bar{E})$ (le complémentaire de G), tel que le non voisinage de i dans $\bar{G}$ (le sous-graphe $\bar{G}_{X'}$, $X' \subset X, (i, j) \notin \bar{E}, \forall\, j \in X'$) est un graphe non non biparti ; ce qui fait que $\bar{G}_{X'}$ contient un trou C et par conséquent le graphe $G = (X, E)$ contient le sous-graphe $\bar{C}(i)$. (contradiction).

Conjecture : (MAURRAS)

Si le graphe $G = (X, E)$ est quasi-adjoint alors les facettes de $E(G)$ sont booleennes.

Une façon de tester l'exactitude de cette conjecture est de se poser la question suivante : soit G^* un sous-graphe de G ; est-ce que l'application de la procédure séquentielle (th.I 3) à une facette booleenne de $E(G^*)$ donne une facette booleenne de $E(G)$? Une réponse négative à cette question prouverait que la conjecture est fausse ; une réponse positive ne permet pas de conclure (cf Rem. I 12).

Théorème 2 : Si $G = (X, E)$ est un graphe quasi-adjoint, G^* un sous-graphe de G, alors la procédure séquentielle appliquée à une facette booleenne de $E(G^*)$ donne une facette booleenne de $E(G)$.

Démonstration :

On suppose, sans perte de généralité, que G^* est un sous-graphe construit sur n-1 sommets de G.

Soit $\sum_{i \in X^*} \alpha_i x_i \leq \alpha_0$ une facette booleenne de $E(G^*)$ définie par l'ensemble

$S = \{s_1, s_2 \dots s_{n-1}\}$ de n-1 stables maximaux linéairement indépendants de G^* et soit n le sommet de G qui n'est pas un sommet de G^*.

Cas 1 : Les adjacents du sommet n forment une clique.
Dans ce cas le coefficient α_n affecté au sommet n par la procédure séquentielle est égal à 0 ou 1, car quand on enlève les adjacents du sommet n dans G^* le stable maximum dans le graphe résultant a un cardinal au moins égal à $\alpha_o - 1$.

Cas 2 : Les adjacents du sommet n se partagent en deux cliques K_1, K_2.
S'il existe un stable de S qui ne rencontre aucune clique alors $\alpha_n = 0$.
S'il existe un stable de S qui rencontre une seule clique alors $\alpha_n = 1$.
Si tout stable de S rencontre les deux cliques à la fois, alors dans la matrice correspondant aux stables (les colonnes de cette matrice sont les vecteurs représentatifs des stables de S), la somme des lignes correspondantes aux sommets de la clique K_1 est égale à la somme des lignes correspondant aux sommets de la clique K_2, ce qui fait que les stables de S sont linéairement dépendants (contradiction). c. q. f. d.

Soient G un graphe quasi-adjoint connexe ; $F = (\Sigma\, \alpha_i\, x_i \leq \alpha_o)$ une facette non booleenne, si elle existe, de E (G) ; M l'ensemble des sommets de G dont les coefficients correspondants dans F sont maximaux ; c'est-à-dire $M = \{i \in x \,/\, \alpha_i$ = un coefficient maximum dans F $\}$.
Il est clair que le nombre de coefficients maximaux dans F est au plus n-1 ; ce qui fait que les facettes non booleennes de E (G) se partitionnent en au plus n-1 classes $C_1, C_2 \dots C_{n-1}$ telles que C_i est la classe de facettes ayant i coefficients maximaux.

Evidemment, pour démontrer la conjecture, il suffit de démontrer que toutes les classes C_i (i = 1, 2 ... n-1) sont vides.

<u>Remarque 2</u> :

Si $\{x^1, x^2 \dots x^n\}$ est l'ensemble de vecteurs représentatifs des stables $\{s_1, s_2 \dots s_n\}$ définissant une facette non booleenne $F = (\Sigma\, \alpha_i\, x_i \leq \alpha_o)$ de E (G) alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i^j = \alpha_o \;;\; j = 1, 2, \dots n,$$

et par conséquent, puisque les x^j forment un système de vecteurs linéairement indépendants, le système :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^j = \beta_o \; ; \; j = 1, 2, \ldots n,$$

n'admet pas de solution avec $\beta_i \in \{ 0, 1\}$.

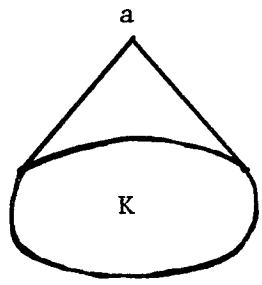
<u>Théorème 3</u> : Les classes C_1, C_2 sont vides.

<u>Démonstration</u> :

1) La classe C_1 est vide :

Soit a le sommet de G qui correspond au coefficient maximum de la facette F.

(i) Le voisinage de a est une clique K.



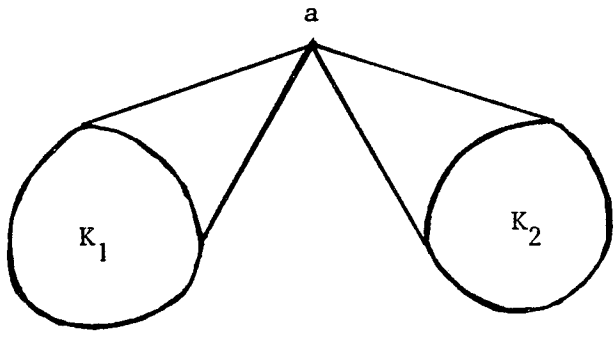
F. 3

Soit s_i un élément de S qui ne contient pas le sommet a alors s_i doit rencontrer la clique K sinon le stable $s_i \cup \{a\}$ viole la facette F (contradiction). Donc tous les éléments de S rencontrent la clique K ou le sommet a ; c'est-à-dire tous les éléments de S vérifient l'égalité

$\sum_{i \in K \cup \{a\}} x_i = 1$; ce qui contredit la remarque 2.

Alors le voisinage de a ne peut être une clique.

(ii) Le voisinage de a se partage en deux cliques K_1, K_2.



F. 4

Soit s_i un élément de S qui ne contient pas le sommet a.

Si s_i ne rencontre aucune clique alors le stable $s_i \cup \{a\}$ viole la facette F (contradiction).

Si s_i rencontre une seule clique (K_1 par exemple) en un sommet j alors le stable $s_i - \{j\} \cup \{a\}$ viole la facette F car $\alpha_a > \alpha_j$ (contradiction).

Donc s_i doit rencontrer les deux cliques K_1, K_2 ; ce qui fait que tous les éléments de S rencontrent la clique $K_1 \cup \{a\}$; c'est-à-dire tous les éléments de S vérifient l'égalité $\sum_{i \in K \cup \{a\}} x_i = 1$; ce qui contredit la remarque 2.

c. q. f. d.

2) La classe C_2 est vide :

Soit a, b les deux sommets de G qui correspondent aux deux coefficients maximaux de la facette F :

(i) a et b ne sont pas adjacents.

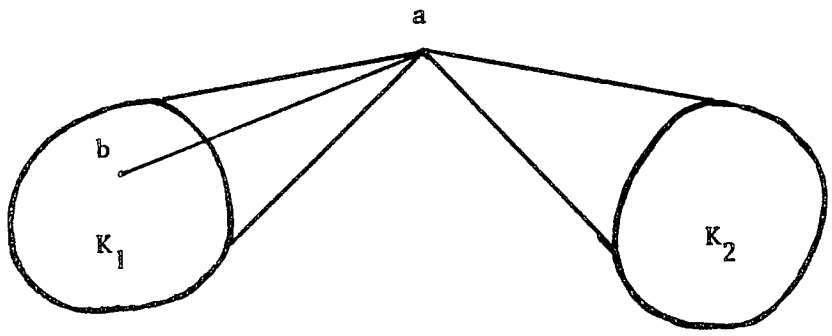
On considère le sommet a et son voisinage et on répète exactement le même raisonnement qu'on a fait pour la classe C_1.

(ii) a et b sont adjacents.

On considère le sommet a et son voisinage.

Si le voisinage du sommet a est une clique, alors le même raisonnement qu'au 1 (i) s'applique.

Sinon le voisinage de a se partage en deux cliques K_1, K_2. On suppose que $b \in K_1$.



F. 5

Soit s_i un élément de S qui ne contient pas le sommet a.

Si s_i ne rencontre aucune clique alors le stable $s_i \cup \{a\}$ viole la facette F. (contradiction).

Donc s_i doit rencontrer au moins une des deux cliques K_1, K_2.

Si s_i rencontre K_2 en un sommet j et pas K_1 alors le stable $s_i\{j\} \cup \{a\}$ viole la facette F car, puisque $b \notin K_2$, $\alpha_a > \alpha_j$; (contradiction). Cela implique si s_i rencontre K_2 il doit rencontrer K_1.

On vient donc de montrer que tout stable de S qui ne contient pas a doit rencontrer K_1 ; ce qui implique que tous les éléments de S rencontrent la clique $K_1 \cup \{a\}$ et cela veut dire aussi que tous les éléments de S vérifient l'égalité $\sum_{i \in K_1 \cup \{a\}} x_i = 1$; ce qui contredit la remarque 2.

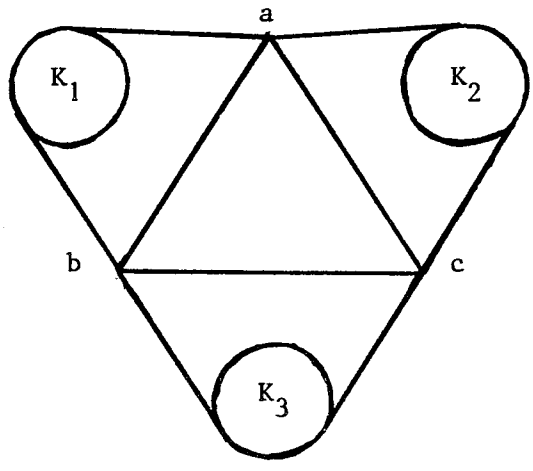
c. q. f. d.

<u>Remarque 3</u> :

Si on arrive à démontrer que les classes C_3, C_4 ... C_{n-1} sont vides, alors la conjecture de MAURRAS serait évidemment démontrée.

Pour démontrer que C_1, C_2 sont vides, on s'est limité à la considération du voisinage des sommets maximaux ; cependant cette considération ne suffit pas pour démontrer que C_3 est vide ; c'est-à-dire que l'analyse doit aller plus loin dans les sommets non maximaux se trouvant en dehors du voisinage des sommets maximaux.

Si on prend l'exemple de la classe C_3 , on voit que si les sommets maximaux a, b, c ne forment pas une clique, alors on se ramène aux raisonnements qu'on a faits pour les classes C_1 et C_2 ; tandis que si les sommets maximaux forment une clique, alors se limiter à la considération de leur voisinage (figure F6) ne suffit pas pour démontrer que C_3 est vide.



F. 6

Si on considère, par exemple, le sommet a et son voisinage qui se partage en deux cliques $K_1 \cup \{b\}$ et $K_2 \cup \{c\}$ et on se propose de montrer, comme on a fait pour C_1 et C_2, que tous les éléments de l'ensemble $S = \{s_1, s_2 \dots s_n\}$ définissant la facette non booleenne F rencontrent la clique $K = K_1 \cup \{b\} \cup \{a\}$, le même raisonnement ne peut pas conclure car il se peut qu'il existe un stable $s_i \in S$ qui passe par le sommet c et ne rencontre pas la clique K.

§2 - OPERATIONS SUR LES GRAPHES

Une opération effectuée sur un graphe G se répercute d'une manière ou d'une autre sur l'enveloppe convexe E (G) des stables de G.
Si H est le graphe qui résulte de cette opération, alors une des questions qu'on peut se poser est de détecter le rapport qui pourrait exister entre les enveloppes convexes E (G) et E (H).

Définition 2 : Soient G, G' deux graphes disjoints au sens des sommets ; i un sommet de G.
L'opération qui consiste à supprimer le sommet i de G et le remplacer par le graphe G' en joignant tous les sommets de G' aux adjacents de i est dite "substitution du graphe G' au sommet i de G".
Pour cette opération, Chvatal [5] a donné une réponse complète à la question soulevée ci-dessus en démontrant le théorème suivant :

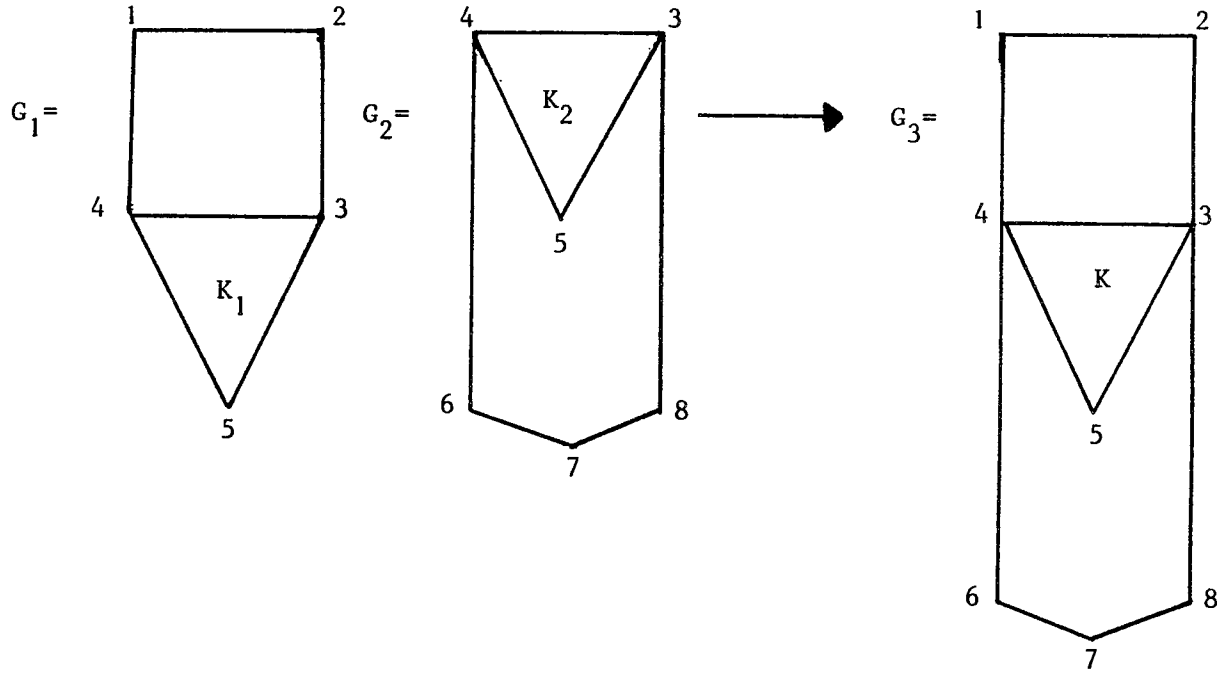
Théorème 4 : Soient $G = (X, E)$, $G' = (X', E')$ deux graphes tels que :
Toutes les facettes non triviales de E (G) sont $\Sigma\, a_{ik}\, x_k \leq b_i$ ..... (1)
Toutes les facettes non triviales de E (G') sont $\Sigma\, a'_{jk}\, x'_k \leq b'_j$.... (2)
Si H est le graphe obtenu à partir de G en substituant le graphe G' au sommet 1 de G alors toutes les facettes non triviales de E (H) sont :

$$a_{i1}\,(\Sigma\, a'_{jk}\, x'_k) + b'_j\,(\sum_{k=2}^{n} a_{ik}\, x_k) \leq b_i b'_j \qquad (3)$$

Remarque 4 :

Balas et Zemel [1] ont montré que si (1), (2) sont respectivement des facettes de E (G) et de E (G') alors (3) sont des facettes de E (H).

Définition 3 : Soient G_1, G_2 deux graphes disjoints au sens des sommets ; K_1, K_2 sont respectivement deux cliques de même cardinalité de G_1, G_2. On appelle mise en série de G_1, G_2 l'opération qui consiste à identifier les deux cliques K_1 et K_2 (la figure F 7 est un exemple de cette opération).



F. 7

Théorème 5 (Chvatal [5]) : Si le graphe G est obtenu par la mise en série de deux graphe G_1 et G_2, alors la réunion des facettes de E (G_1), E (G_2) détermine E (G).

Exemple : Le graphe G_1 de la figure F 7 est un graphe parfait ; par conséquent l'enveloppe convexe E (G_1) des stables de G_1 est le suivant :

$$E\ (G_1) = \begin{cases} x \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_4 \leq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

Le graphe G_2 de la figure F 7 est également parfait ; ce qui fait que E (G_2) est le suivant :

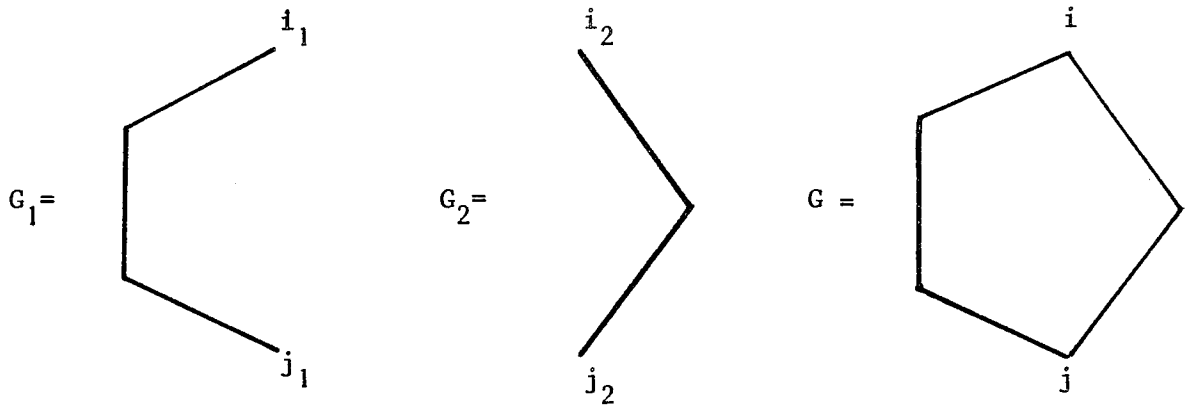
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x_3 + x_8 \leq 1 \\ x_4 + x_6 \leq 1 \\ x_6 + x_7 \leq 1 \\ x_7 + x_8 \leq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

Le graphe G est obtenu par la mise en série des deux graphes G_1, G_2 ; ce qui fait que :

$$E(G) = \begin{cases} x \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_4 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_3 + x_8 \leq 1 \\ x_4 + x_6 \leq 1 \\ x_6 + x_7 \leq 1 \\ x_7 + x_8 \leq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

<u>Définition 4</u> : Soient G_1, G_2 deux graphes disjoints au sens des sommets ; i_1, j_1 deux sommets de G_1 ; i_2, j_2 deux sommets de G_2.

On appelle mise en parallèle de G_1, G_2 l'opération qui consiste à identifier i_1, i_2 et j_1, j_2 (la figure 8 est un exemple de cette opération).



F. 8

<u>Théorème 6</u> : Si le graphe G est obtenu par la mise en parallèle de deux graphes G_1, G_2 alors toute facette booleenne de E (G) s'obtient à partir de la réunion des facettes de E (G_1), E (G_2) par la <u>procédure de Chvatal</u> (cf. th.I 1 en une seul itération.

<u>Démonstration</u> :

Soient $F = (\Sigma\, c_j\, x_j \leq c_o)$ une facette de E (G) ; $(Ax \leq b)$ la réunion des facettes de E (G_1), E (G_2) où A est une matrice d'ordre mxn ; $b \in R^m$.

On associe au graphe G le problème :

$$P = \begin{cases} Ax \leq b \\ \text{Max. } \Sigma\, c_j\, x_j \end{cases}$$

et son dual :

$$D = \begin{cases} y\,A = c \\ \quad y \geq 0 \\ \text{Min. } Yb \end{cases}$$

Si x^* est une solution optimale de P et c^* la valeur correspondante de la fonction objective de (P), alors d'après le théorème de dualité, il existe une solution $y^* \geq 0$ du dual telle que $y^*\,A = c$, $y^*\,b = c^*$; ce qui montre que l'inégalité $\Sigma\, c_j\, x_j \leq c^*$ est une combinaison linéaire des contraintes du polyèdre $(A\,x \leq b)$.

Donc, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $[c^*] = c_o$ ou bien $c^* - c_o < 1$

Cas 1 : L'une des composantes x_i^*, x_j^* est égale à 0 ou 1.

Dans ce cas, on peut voir que c^* est entier, ce qui implique que $c^* = c_o$.
En effet, si on efface le sommet de G correspondant à la composante entière (x_i^* par exemple) quand elle est nulle (resp. le sommet correspondant à la composante entière et ses adjacents quand elle est égale à 1), on obtient un graphe G' qui peut être considéré comme obtenu par la mise en série des deux graphes $G_1' = G_1 - i_1$ (resp. $G_1' = G_1 - i_1 \cup V(i_1)$) et $G_2' = G_2 - i_2$ (resp. $G'_2 = G_2 - i_2 \cup V(i_2)$).
(G - i est le graphe obtenu à partir de G en effaçant le sommet i ; V(i) est le voisinage de i).
Alors, d'après le théorème 3, le maximum de $\Sigma\, c_j x_j$ sur $E(G_1') \cap E(G_2')$ est atteint en un point entier x' ; ainsi le point entier (x', x_i^*) est une solution optimale de P ; donc c^* est entier.

Cas 2 : Les deux composantes x_i^*, x_j^* sont fractionnaires.
Si on efface le sommet i du graphe G, on obtient le graphe G' tel que :

$\sum_{G-i} c_j x_j^* \leq \sum_{G-i} c_j x_j \leq c_o$ où x' est un vecteur entier qui maximise $\sum_{G-i} c_j x_j$

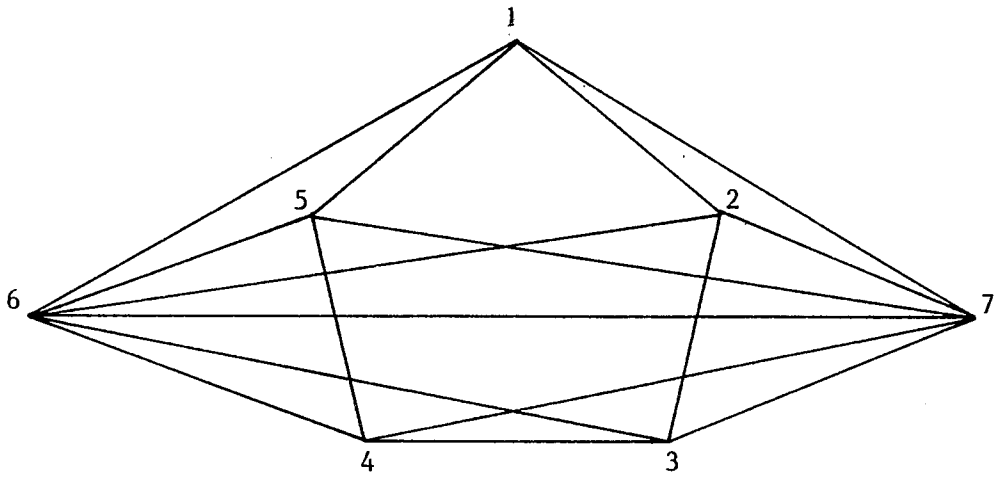
Si on fait la même chose pour j on trouve :

$\sum_{G-j} c_j x_j^* \leq \sum_{G-i} c_j x_j'' \leq c_o$ où x'' est un vecteur entier qui maximise $\sum_{G-j} c_j x_j$

Alors on en déduit que : $c^* - c_o \leq 1/2\,(c_i x_i^* + c_j x_j^*)$.
Comme $c_i = c_j = 1$ et $0 < x_i^* < 1$, $0 \quad x_j^* < 1$ alors $c^* - c_o < 1$

<u>Remarque 5</u> :

Si un graphe G est obtenu par la mise en parallèle de deux graphes G_1, G_2, alors les facettes non booleennes de E (G) ne s'obtiennent pas généralement à partir des facettes de E (G_1), E (G_2) en une seule itération de la procédure de Chvatal (th. II 7).
Le graphe G de la figure F 9 peut être obtenu par la mise en parallèle de deux graphes G_1, G_2 (G_1 est l'arête (6, 7), G_2 est le graphe obtenu à partir de G en effaçant l'arête (6, 7)).



F. 9

Cependant, on peut vérifier que le graphe G définit la facette

$\sum_{i=1}^{5} x_i + 2\,(x_6 + x_7) \leq 2$ de E (G) qu'on ne peut pas obtenir en une seule

itération de la procédure de Chvatal à partir des facettes de E (G_1), E (G_2) où :

$$E\,(G_1) = \begin{cases} x \geq 0 \\ x_6 + x_7 \leq 1 \end{cases}$$

$$E\,(G_2) = \begin{cases} \sum_{i \in K} x_i \leq 1 & K \subset X \text{ tel que } G_K \text{ est une clique maximale.} \\ \sum_{i=1}^{5} x_i + 2x_6 \leq 2 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i + 2x_7 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BALAS and E. ZEMEL "Graph subtitution and set packing polytopes". Carnegie-Mellon University. Pittsburgh, Pennsylvania.

[2] E. BALAS and M. W. PADBERG "Set partitionning : a survey". SIAM Review, 18, 1976, P. P. 710 - 760.

[3] C. BERGE "Graphes et hypergraphes". Dunod Université, 604.

[4] M. BOULALA et J. P. UHRY "Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle". R. R. n° 105 I. M. A. G.

[5] V. CHVATAL "On certain polytopes associated with graphes". C. R. M. 238 University of Montreal october 1973.

[6] V. CHVATAL "Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems". Discrete Mathematics 4 (1973), 305 - 337, North Holland, Publishing Company.

[7] R. J. DUFFIN "Topology of series-parallel networks". Journal of combinatorial analysis and applications 10, 303 - 318, (1965).

[8] J. EDMONDS "Maximum Matching and a polyhedron with 0, 1 vertices". J. of research of the National Bureau of Standards, 69 B., 1965 P. P. 125 - 130.

[9] J. F. MAURRAS "Polytopes à sommets dans $\{0,1\}^n$" Thèse de doctorat d'Etat. Université Paris VII

[10] G. J. MINTY "On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs". Indiana University.

[11] J. L. NEMHAUSER and L. E. TROTTER "Properties of vertex packing and independence system polyedra".
Mathematical programming 6, (1974), 48 - 61

[12] J. L. NEMHAUSER and L. E. TROTTER "Vertex packing : structural properties and algorithms".
Mathematical programming 8, (1975), 232 - 248

[13] M. W. PADBERG "On the facial structure of set packing polyedra".
Mathematical programming 5, (1973), 199 - 215

[14] M. W. PADBERG "On the complexity of set packing polyedra".
Annals of discrete mathematics 1, (1977), 421 - 434

[15] M. W. PADBERG "Covering, packing and knapsack problems".
I. B. M. T. J. Watson Research Center P.O. Box. 218. Yorktown Heights, New York 10598.

[16] U. N. PELED "Properties of facets of binary polytopes".
Annals of discrete mathematics 1, (1977), 435 - 456

[17] N. SBIHI "Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile".
R. R. n° 103 I. M. A. G.

[18] L. E. TROTTER "A class of facet producing graphs for vertex packing polyedra".
Discrete mathematics 12, (1975), 373 - 388

[19] A. TUCKER "The strong perfect graph conjecture for planar graphs".

[20] H. WEYL "Elementare theorie der konvexen polyeder".
Comm. Math. Helv. 7 (1935), 290 - 306

[21] L. A. WOLSEY "Further facet generating procedures dor vertex packing polytopes".
Mathematical programming 11, (1976) , 158 - 163

ERRATA

Page 5, ligne 12 : $i \in S$

Page 7, Remarque 6 : si G est un anti-trou, alors l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2$ est une facette de E(G).

Page 12, ligne 8 : [11].

Page 14, ligne 13 : Peled [16].

Avant le théorème 4, on ajoute : les contraintes ci-dessus définissent un polyèdre V de points $\beta \in R^{|UUZ|}$ tels que l'inéquation F_2 est valide sur S(G) et la procédure de Peled s'énonce sous la forme du théorème suivant :

Page 15, après ligne 6 : B =

Page 23, ligne 1 : $j = 1,2,\ldots,n$; $i = 1,2,\ldots,m$.

ligne 2 à partir du bas : α_j.

Page 29 dans la démonstration du théorème 1 : $\forall x \in X-C$.

Page 32, ligne 5 : $s_{\frac{1}{k}}$

dernière ligne : on supprime $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Page 36, ligne 8 à partir du bas : $\alpha_d > 0$; S^*.

ligne 9 à partir du bas : $a \in S^*$, $b \notin S^*$.

Page 38, ligne 5 : $n(\emptyset 1) + n(\emptyset 2)$.

Page 39, ligne 9 à partir du bas : supprimer le point après §4.

Page 40, ligne 7 et 8 : y_e .

dans définition 2 : $\alpha(i)$.

Page 41, ligne 3 : mettre y^1 au lieu de $\hat{y}$.

ligne 12 : mettre y^1 au lieu de y'.

Page 43, ligne 4 : $c_5 = c_1 + c_3 - c_2$.

ligne 8 : F16, F17, F18 ou F19.

Page 44, ligne 4 : mettre Ω au lieu de Ω'.

Page 80, ligne 1 : mettre 1 au lieu de β_o.

Page 82, ligne 5 : $s_i - \{j\} \cup \{a\}$.

Page 87, ligne 15 : remplacer x_j qui vient juste avant $\leq$ par x_j'.

ligne 4 à partir du bas : th. I.7.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 26 Mai 1978

Le Président de la thèse

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 30 mai 1978

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

Dr G. CAU