



HAL
open science

Introduction de la recherche opérationnelle dans l'enseignement du second degré

Rocio Peniche

► **To cite this version:**

Rocio Peniche. Introduction de la recherche opérationnelle dans l'enseignement du second degré. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1978. Français. NNT: . tel-00288681

HAL Id: tel-00288681

<https://theses.hal.science/tel-00288681>

Submitted on 18 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

Rocio PENICHE



**INTRODUCTION DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE
DANS L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE**



Thèse soutenue le 27 juin 1978 devant la Commission d'Examen :

Président : P. JULLIEN

**Examineurs : J. KUNTZMANN
M. SAKAROVITCH**

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLINET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMTIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESSRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHEENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFLISIER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MAILLON Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

Je tiens tout d'abord à remercier, Monsieur le Professeur Jean KUNTZMANN pour m'avoir accueilli avec bienveillance dans son équipe de Recherche Pédagogique et pour la confiance qu'il m'a faite. J'ai eu l'honneur de pouvoir bénéficier de ses conseils et critiques pendant l'élaboration de ce travail.

Je suis reconnaissante à Monsieur le Professeur P. JULLIEN pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse et pour les suggestions dont il m'a fait part.

Je remercie Monsieur Michel SAKAROVITCH, Maître de Conférence, pour avoir bien voulu faire partie du jury de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ici toute mon admiration pour, non seulement sa compétence scientifique, mais surtout ses remarquables qualités humaines.

Je remercie l'équipe de Recherche Pédagogique, en particulier Nicolas BALACHEFF et Colette LABORDE dont les conseils m'ont beaucoup aidée dans ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur RIOU qui m'a fait bénéficier de son expérience d'enseignant dans les classes secondaires.

Je remercie Monsieur MESSULAM qui a collaboré à la réalisation du programme L.S.E. et tous les professeurs et élèves des lycées qui ont bien voulu participer à l'enquête.

Je n'oublierai pas de remercier Mlle FLORIDO qui s'est chargée de la frappe de ce mémoire avec soin et complaisance, ni Monsieur IGLESIAS et toute l'équipe de reprographie pour leur efficacité et leur accueil toujours sympathique.

TABLE DES MATIERES

	PAGES
INTRODUCTION.....	1
. <i>Qu'est-ce qu'on entend par R.O. ?</i>	1
. <i>Modèles Mathématiques</i>	3
. <i>Mathématiques et autres disciplines</i>	3
. <i>Objectifs de cette recherche</i>	4
. <i>Est-il utile ou souhaitable d'introduire la R.O</i> <i>dans les programmes du secondaire ?</i>	5
. <i>Finalités de l'enseignement de la R.O.</i>	6
 CHAPITRE 1 : ETUDE DES REALISATIONS	 8
1.1. - <i>Etude des travaux antérieurs</i>	8
1.2. - <i>Situation actuelle de la R.O. dans</i> <i>les classes secondaires en France</i>	8
1.2.1 - <i>Club d'informatique et club de mathématiques</i>	9
1.2.2 - <i>Qu'enseigne-t-on actuellement de la R.O. ?</i>	10
1.2.3 - <i>Finalités actuelles de l'enseignement de la R.O.</i>	11
1.3. - <i>La R.O. dans d'autres pays au niveau secondaire</i>	12
 CHAPITRE 2 : UNE EXPERIENCE DANS LE 2nd CYCLE.....	 16
<i>"Plus court chemin entre 2 points donnés dans un graphe"</i>	
2.1. - <i>Exposé préliminaire du sujet de l'expérience</i>	16
2.2. - <i>Présentation du problème et de sa solution</i>	16
2.3. - <i>Objectifs de l'expérience</i>	24
2.4. - <i>Sélection de l'échantillon</i>	24
2.5. - <i>Remarques sur le passage dans les classes</i>	25
2.5.1 - <i>Présentation du programme LSE</i>	27
a. <i>Organigramme</i>	27
b. <i>Présentation de l'algorithme de Bellman</i>	28
c. <i>Test d'utilisation de l'algorithme de Bellman</i>	29
d. <i>Remarques du programme</i>	30
e. <i>Exemple</i>	31
f. <i>Programme</i>	34
2.6. - <i>Exposé du problème sans ordinateur</i>	41
2.7. - <i>Texte et critique des questionnaires</i>	41
2.8. - <i>Dépouillement des questionnaires</i>	47

	PAGES
2.8.1 - Dépouillement des questionnaires des élèves qui ont travaillé avec ordinateur.....	47
2.8.2 - Comparaison des résultats des élèves des lycées techniques et des élèves des lycées classiques et modernes.....	52
2.8.3 - Dépouillement des questionnaires des élèves qui ont travaillé sans ordinateur.....	53
2.8.4 - Comparaison des résultats des élèves qui ont travaillé avec ordinateur et des élèves qui ont travaillé sans ordinateur.....	56
2.8.5 - Dépouillement des questionnaires des enseignants.....	57
2.9. - Conclusions.....	63
 CHAPITRE 3 : RATTACHEMENTS POSSIBLES DANS LES PROGRAMMES.....	 65
3.1. - Est-il utile ou souhaitable de prononcer dans les programmes le mot "R.O." ?	65
3.2. - Contenu proposé.....	66
3.3. - A quel niveau introduire les méthodes de R.O. ?	67
3.4. - Points d'insertion dans les programmes.....	68
3.4.1 - Quelques exemples pour le premier cycle.....	69
- Classes de sixième et cinquième.....	69
- Classes de quatrième et troisième.....	78
3.4.2 - Quelques exemples pour le second cycle.....	89
- Classes de seconde.....	89
- Classes de première	94
- Classes de terminale.....	102
 CONCLUSION.....	 105
 BIBLIOGRAPHIE.....	 108

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous présentons une voie que l'enseignement mathématique au niveau secondaire pourrait prendre : La Recherche Opérationnelle.

Nous considérons que l'une des premières choses à établir est :

QU'EST-CE QU'ON ENTEND PAR R.O. (1) ?

On ne peut pas donner actuellement une définition de la R.O., mais on peut dire qu'elle est une approche scientifique des problèmes de prise de décision. Cette caractérisation est trop générale et donc applicable à d'autres domaines. Nous avons intérêt alors à spécifier un peu plus notre caractérisation :

Il est convenable de remarquer qu'il s'agit d'appliquer certaines méthodes scientifiques (dont nous parlerons plus tard) à la résolution des problèmes concrets réels où on cherche une "solution optimale". Ce qui revient, lorsqu'on a pu bâtir un "modèle" de la réalité, à optimiser une certaine fonction économique, en présence de "contraintes multiples".

Dans le but d'une plus grande clarté, précisons quelques termes :

Solution optimale : élément qui satisfait le mieux certaines conditions dans un ensemble. Cet élément n'est pas toujours unique.

Modèle (mathématique) : représentation schématique d'un phénomène réel par un processus d'abstraction qui associe à ce phénomène des objets formels reliés par des axiomes. Les objets du modèle sont censés représenter les objets du phénomène.

Contraintes multiples : veut tout simplement dire plusieurs conditions à satisfaire en même temps.

La R.O. n'est pas seulement une collection de techniques mathématiques, c'est aussi un mode de pensée. Nous pouvons distinguer deux composants d'un côté une attitude mentale, une façon de voir le monde réel, d'un autre côté les outils dont elle se sert.

(1) Dans la suite, nous écrirons R.O. pour abrégé Recherche Opérationnelle.

Parmi les méthodes scientifiques qu'on utilise en R.O., nous pouvons mentionner :

a) - Les méthodes de graphes et programmation mathématique, employées dans la résolution des problèmes combinatoires . Ces méthodes fournissent des algorithmes qui permettent d'obtenir l'optimum par une voie rapide et qui remplacent l'énumération fastidieuse ou pratiquement irréalisable. Par exemple, le problème du transport d'un certain produit au coût minimum depuis m entrepôts (qui disposent d'une certaine quantité de ce produit), vers n magasins (dont on connaît la demande), sachant les coûts de transport entre les différents entrepôts et les magasins. Pour $m \geq 4$ et $n \geq 4$ le problème devient trop compliqué pour être résolu "à la main". Il existe des algorithmes -l'algorithme Hongrois entre autres- qui permettent d'obtenir une ou la solution optimale en quelques minutes .

b) - Les processus stochastiques qui servent à résoudre les problèmes de type aléatoire. La fonction économique se présente comme l'espérance mathématique du résultat. Par exemple, les problèmes de files d'attente, de gestion scientifique des stocks, de renouvellement des équipements, etc... .

c) - La théorie des jeux, qu'on applique dans des situations de concurrence. On y rencontre des problèmes qui ont à la fois les caractères combinatoire et aléatoire. La théorie des jeux ne permet pas toujours de les résoudre formellement, mais elle apporte une possibilité de réflexion qui facilite la décision.

d) - La programmation dynamique, elle permet de résoudre certains problèmes où il faut prendre une série de décisions qui dépendent les unes des autres. C'est une approche permettant de déterminer la combinaison de décisions qui maximise le gain total.

e) - La simulation. "Nous appellerons simulation (digitale) une technique qui consiste à reproduire (le plus souvent sur ordinateur) le fonctionnement d'un système complexe de manière à pouvoir effectuer des mesures sur le modèle ainsi constitué. Il s'agira donc pour mettre au point un modèle de simulation, de décomposer le système complexe à étudier en éléments. Le fonctionnement de chacun de ces éléments pouvant être décrit par un modèle mathématique tandis que les interactions de ces éléments entre eux sont prises en compte par le programme de simulation. La simulation est donc une technique de résolution du problème caractérisée par l'expérimentation effectuée sur un modèle du système réel" (1) .

MODELES MATHEMATIQUES.

Nous voulons parler de modèles mathématiques parceque la R.O., en tant qu'utilisation des mathématiques, se sert des modélisations.

Cette modélisation est très importante dans certains domaines, comme la médecine, l'économie et la linguistique entre autres. La psychologie et la sociologie sont des disciplines où les modèles sont encore très vagues.

Comme nous l'avons déjà dit, un modèle est une représentation schématique de la réalité qui permet de décrire une situation.

"L'opération de modélisation comprend les phases :

- 1) Analyse de la situation
- 2) Confection d'un modèle
- 3) Etude de ce modèle
- 4) Retour à la situation pour juger si le modèle est adéquat.

Dans l'affirmative, on pourra utiliser le modèle pour prendre des décisions au niveau de la situation.

Dans la négative, on modifiera le modèle ou on abandonnera le problème"⁽¹⁾.

Les méthodes de R.O. interviennent dans l'étude du modèle mais aussi au moment de sa confection. On s'efforcera de trouver un modèle qui soit à la fois :

- Adéquat à la situation
 - Susceptible d'être étudié par des méthodes de R.O..
- Si les outils connus ne permettent pas d'étudier suffisamment bien le modèle, il sera alors nécessaire d'en forger de nouveaux.

MATHEMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES.

L'utilité des mathématiques pour les autres disciplines est principalement qu'elles permettent de donner un caractère quantitatif à des nombreux phénomènes, permettant ainsi de les étudier d'une manière plus précise.

(1) KUNTZMANN J. |49| p.44.

Quand on arrive à représenter un phénomène physique ou social par une formule mathématique satisfaisante, on est mieux placé pour étudier et utiliser ce phénomène.

Depuis quelques années, le champ d'applications des mathématiques a été considérablement élargi. Maintenant l'économiste, le médecin, le géographe, le sociologue, l'architecte auront besoin de mathématiques pour exercer leur profession.⁽²⁾ Il est donc normal qu'on leur en enseigne au cours de leur formation universitaire. Cet enseignement devrait comprendre des méthodes de R.O.. Quand un sujet prend une certaine importance et se rapporte à des idées essentielles dans notre civilisation (par exemple celle d'optimisation), il est souhaitable d'y ouvrir l'esprit des jeunes dès l'enseignement secondaire, à la fois pour y préparer ceux qui auront à utiliser ces techniques et pour les démythifier aux yeux de la population toute entière.

"Il faut avouer que grâce aux ordinateurs et aux nouvelles sciences mathématiques, l'enseignement des mathématiques intéresse la formation non seulement des mathématiciens, des ingénieurs, des physiciens et des chimistes, mais aussi celle des biologistes, médecins, zootechniciens et agronomes, des économistes et chefs d'entreprises, des linguistes et même d'historiens, juristes, diplomates, critiques d'art et de littérature. L'une des conséquences de cette mathématisation sera le fait que la langue dans laquelle s'entendront les gens cultivés sera la mathématique. Les mathématiques sont le latin du vingtième siècle"⁽¹⁾, et plus encore, du 21ème siècle.

. OBJECTIFS DE CETTE RECHERCHE .

Une fois établi ce qu'on entend par R.O. et son utilisation, nous considérons nécessaire d'énoncer les objectifs de notre recherche :

- 1°) - Justifier l'idée d'introduire des sujets de R.O. à l'école secondaire.
- 2°) - Etudier ce qui a été fait dans ce domaine jusqu'à nos jours.
- 3°) - Etudier les possibilités d'introduction de quelques sujets de R.O. à l'école secondaire.
- 4°) - Présenter comme un premier essai une liste de sujets possible à enseigner dans les diverses classes.

EST-IL UTILE OU SOUHAITABLE D'INTRODUIRE LA R.O. DANS LES PROGRAMMES DU SECONDAIRE ?

Comme nous avons déjà vu dans la section "Mathématiques et autres disciplines", les mathématiques s'introduisent de plus en plus dans tous les domaines et la société nous demande aujourd'hui, de les enseigner non plus à une minorité, mais à tous les adolescents comme un outil dont ils auront besoin probablement plus tard.

Il semble évident que les disciplines les plus demandées à l'extérieur seront les disciplines appliquées.

Pour répondre à la question posée plus haut, nous avons fait les réflexions suivantes :

a). Il est nécessaire d'ouvrir l'esprit des élèves à une future présentation des techniques et de les démythifier.

Nous voulons préciser que l'intérêt de la R.O. est beaucoup plus d'ouvrir de nouveaux horizons que d'apprendre à résoudre efficacement quelques problèmes particuliers (dont aucun n'est vital).

b). Il est utile de montrer les applications des mathématiques pour motiver l'étude de certains sujets et pour montrer l'unité de la science qui évoque l'unité de la nature.

En effet, l'étude de certains sujets de R.O. peut aider à mieux comprendre d'autres notions de mathématiques ou même d'autres cours. Par exemple

1. L'étude des graphes peut faciliter la compréhension de certains sujets de probabilité et de logique, fournir des exemples d'applications d'un ensemble dans un autre et constituer un outil intéressant pour les disciplines artistiques⁽¹⁾ littéraires et sociologiques, entre autres.

2. L'étude de la notion d'optimisation, qui est importante pour de nombreux exemples en physique.

Les méthodes de R.O. peuvent aider à comprendre l'unité des sciences dans le sens qu'ils ont des notions également applicables dans différents domaines.

(1) Voir un exemple dans PICARD |61|.

c). L'emploi des mathématiques, pour résoudre des problèmes de mécanique et de physique qu'on utilise dans l'enseignement pour montrer les applications mathématiques, est parfois plus difficile que certains exemples fournis par la R.O. (voir ch.3).

La R.O. constitue une source très abondante de modélisation de situations, accessible aux étudiants de second degré.

d). Il y a de nombreux élèves pour lesquels la trop grande rigueur est une barrière. Pour ces étudiants, "ne vaudra t-il pas mieux s'abstenir de toute axiomatique et présenter les mathématiques comme un instrument au service des autres disciplines ou comme un langage à connaître pour obtenir une meilleure compréhension ?"⁽¹⁾.

e). La R.O. qui est une approche scientifique des problèmes de prise de décision, permet à un grand nombre de personnes qui auront à prendre des décisions, de reconnaître les cas où son intervention est souhaitable.

En somme, nous pourrions dire qu'il vaut la peine d'introduire la R.O. dans l'enseignement mathématique pour les raisons suivantes :

- a. Elle est utile et formatrice
- b. Elle est accessible aux jeunes lycéens
- c. Elle découvrirait aux élèves de vastes horizons sur les applications des mathématiques dans des différents domaines et leur montrerait l'utilité de l'apprentissage des mathématiques.

. FINALITES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA R.O.

Nous avons conclu dans la section précédente qu'il serait souhaitable d'introduire des sujets de R.O. à l'école secondaire. Voyons maintenant quelles seraient les finalités de cet enseignement.

— L'une des finalités serait l'ouverture sur de nouveaux horizons dans l'enseignement mathématique; en apportant un mode différent de pensée, une autre façon de voir le monde réel,

— Une deuxième finalité serait l'utilité. Il faut considérer le genre de Mathématiques dont a besoin un homme de notre temps. La R.O. fournit les outils nécessaires pour la résolution de nombreux problèmes qu'on trouve dans des différents domaines de la science et la technique. Elle permet une meilleure formation des élèves en vue de leur vocation future.

"Précisons bien qu'il ne s'agit pas de former des spécialistes de l'emploi de telle ou telle technique, ni même de surcharger les programmes de matières nouvelles, mais de créer chez les élèves un certain nombre d'habitudes indispensables à une utilisation efficace des mathématiques, de les familiariser avec le passage de l'abstrait au concret et réciproquement"⁽¹⁾.

— Enfin, une finalité formative . Ici, on retrouve plusieurs aspects :

a. Il est nécessaire de développer les aptitudes créatrices des élèves au moyen d'idées stimulantes où ils rencontrent des aspects de la vie courante. Certaines méthodes de R.O. apportent de nombreux exemples faciles qui peuvent servir à cet effet.

b. Ce sont les problèmes de prise de décision qui concernent la R.O., elle contribue donc à une formation utile à la préparation de décisions concernant les activités humaines. Même si certains élèves n'auront pas à utiliser des techniques mathématiques dans leur vie active, ils ne devront pas moins, en tant que citoyens, prendre des décisions.

c. Une autre contribution de la R.O. à la formation des jeunes est de leur montrer que beaucoup de problèmes réels consistent à trouver le meilleur équilibre entre des exigences multiples.

d. En R.O. comme en toute activité mathématique :

"La compréhension d'une théorie difficile, la recherche de la solution d'un problème, plus encore, la conduite d'un calcul, l'écriture d'un programme, donnent des occasions de développer :

- . La volonté
- . Le goût de l'effort
- . La connaissance de ses propres limites
- . La probité intellectuelle
- . L'aptitude à organiser efficacement son travail
- . Le sens critique"⁽¹⁾.

(1) KUNTZMANN |48| p.65

(1) KUNTZMANN |46| p.14

CHAPITRE 1

ETUDE DES REALISATIONS

1.1. - ETUDE DES TRAVAUX ANTERIEURS

Pour la réalisation de notre travail, nous avons classé les travaux existants de la manière suivante :

a. Congrès et études critiques sur l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. Notamment des mathématiques appliquées.

b. Travaux sur des activités mathématiques. Certains d'entre eux ont inspiré des exercices aux clubs de mathématiques et d'informatique.

Par exemple, le livre du problème de l'IREM, |41|, |42|, PENTAMINO, Fletcher |30|, Galion |45|, etc... .

c. Travaux sur l'enseignement des Mathématiques dans différents pays. Ils nous ont servi pour présenter la dernière section.

Après avoir fait l'étude bibliographique, nous étions agréablement surpris par la quantité relativement importante des travaux qui existent, de la catégorie b, se rapprochant de notre sujet. Nous allons étudier les plus importants au Chapitre 3.

1.2. - SITUATION ACTUELLE DE LA R.O. DANS LES CLASSES SECONDAIRES EN FRANCE

Nous avons trouvé dans les programmes de mathématiques de 1976, pour les classes de quatrième et de troisième, la circulaire 71-370 qui cite le paragraphe suivant : "Les problèmes très simples de programmation linéaire donnent lieu à des exercices d'optimisation où intervient la représentation graphique d'équations et d'inéquations du 1^{er} degré. Leur tour nouveau et concret plait aux élèves".

Mis à part celà, il n'y a aucun sujet de R.O. mentionné dans les programmes.

Toutefois, des enseignants très intéressés par les applications des mathématiques ont, souvent, sans connaître le terme "R.O.", travaillé quelques méthodes de R.O. aux lycées.

Actuellement, les programmes de mathématiques sont tellement chargés qu'il est difficile de présenter aux élèves des sujets marginaux. Ce travail est donc fait en général, en dehors des programmes officiels, dans des clubs dits "d'Informatique et de Mathématiques".

De tels clubs existent depuis un certain nombre d'années dans quelques lycées.

1.2.1. - Club d'Informatique et club de Mathématiques

Un club d'informatique existe dans la quasi totalité des établissements équipés d'ordinateurs (jusqu'à présent, il y en a 58 dans toute la France), ainsi que dans quelques lycées où il y a des mini calculateurs ou seulement des petites machines à calculer. Il est animé par des enseignants volontaires et s'adresse à tous les élèves qui s'y intéressent (bien entendu la capacité d'accueil est limitée en fonction du matériel disponible). Puisqu'il s'agit d'une activité qui n'est pas incluse dans un cours officiel, elle fonctionne souvent en dehors des heures de cours. Son contenu varie selon le professeur qui s'en occupe : une bonne partie des enseignants préparent des exercices pour apprendre aux élèves le fonctionnement et l'utilisation d'un ordinateur. D'autres enseignants qui veulent montrer l'utilité des machines en tant qu'instrument de calcul, font des exercices qui demandent beaucoup de calculs. Un dernier groupe de professeurs se sert de l'ordinateur pour l'enseignement programmé, ici on peut inclure d'autres disciplines que les mathématiques. Jusqu'à présent, il semble que les résultats obtenus de cette dernière utilisation ne sont pas très satisfaisants.

Le club de mathématiques, en tant que club, a quelques caractéristiques communes avec le club d'informatique. Il est également dirigé par des professeurs volontaires, s'adresse à tous les élèves qui s'y intéressent, et fonctionne en dehors des heures des cours pour faciliter l'assistance des élèves. Le travail réalisé dans un club de mathématiques est assez varié. Le professeur qui le dirige est tout à fait libre de choisir les activités du club. C'est ainsi qu'on retrouve toute sorte d'exercices, entre autres, des jeux et des casse-têtes. Des revues telles que Pentamino et Petit Archimèdes, fournissent des exercices intéressants pour travailler dans ce club.

Dans le cadre de ces clubs, nous avons trouvé quelques problèmes qui peuvent être rattachés à la R.O.. Nous en parlerons plus précisément dans la section suivante.

1.2.2. - Qu'enseigne-t-on actuellement de la R.O. en France ?

Nous avons constaté à la suite de quelques discussions avec des professeurs et d'une enquête réalisée dans certains lycées (voir Ch.2), que le sujet de R.O. le plus connu est la programmation linéaire. Elle est l'une des seules méthodes de R.O. qui soit actuellement présentée en cours, elle fournit de bons exercices pour pratiquer et développer certaines notions de base en algèbre. Certainement, l'une des contributions les plus importantes de cette méthode à l'enseignement secondaire est la traduction d'une situation donnée par un ensemble de relations algébriques, ce qui constitue la première étape de la résolution de tout problème de programmation linéaire.

La plupart des problèmes traités se limitent à deux variables, ce qui permet une interprétation graphique. Toutefois, il est possible que des problèmes plus complexes soient présentés. Ils sont alors résolus, s'il existe un ordinateur, par la méthode du "simplexe", après avoir présenté la méthode (sous forme d'organigramme, bien souvent).

L'expérience montre que ce genre d'exercices est très bien accueilli par les élèves .

Le matériel pour travailler dans l'enseignement programmé se présente sous forme de fiches. Parmi celles-là, nous en avons trouvé une qui traite des problèmes de programmation linéaire et utilise la méthode du "simplexe" pour sa résolution (fiche SE 14). Elle est encadrée dans les sciences économiques et adaptée au niveau 1^{ère} G (économie générale) et TG2 (technique de gestio

La théorie des graphes est aussi plus ou moins connue de quelques professeurs du secondaire. Parmi les sujets étudiés, nous pouvons citer :

. La représentation des polyèdres réguliers par des graphes planaires. Pentamino N°2 |60|, LANGER |51|.

. Problèmes d'ordonnement résolus à l'aide d'un graphe PERT. DUBAIL |26|, IREM de Grenoble |40|.

. Etude de la solution du jeu des Tours de Hanoï en relation avec des graphes et avec des chemins de Hamilton sur un cube. BECQUAERT |5| , JULLIEN |44|.

. Problèmes du plus court chemin entre deux sommets dans un graphe. COULON |23|.

A ce propos, il vaut peut-être la peine de citer un problème posé dans l'almanach de Mickey de 1978 où il est demandé de trouver le plus court chemin entre deux points donnés à travers un pavage |79|. Nous pouvons constater ici que l'application d'un algorithme du plus court chemin simplifie énormément le travail.

Aussi, il existe une fiche sur la théorie des graphes dans le cadre du club d'informatique. Il s'agit de détecter et énumérer les cycles ou les circuits d'un graphe (fiche N°IN-6).

Une troisième méthode, la simulation, est utilisée au club d'informatique dans les lycées munis d'ordinateur. Parmi les travaux rencontrés :

. Problèmes de simulation par la méthode de Monte-Carlo. BONET |9|.

. Problèmes de simulation de situations spécifiques : épidémie, BADRIKIAN |2|, atelier de réparation, politique de réapprovisionnement, BOUCHER |10|.

Enfin, quelques problèmes d'agrégation d'opinions où l'on cherche à prendre une décision, peuvent être considérés comme sujets de R.O. . MANGENEY |53| .

La plupart de ces sujets sont présentés dans les clubs. Malheureusement, il y a peu de professeurs qui travaillent là-dessus et il est regrettable qu'il n'y ait qu'un nombre réduit d'élèves qui soient présents dans les clubs. Cela est encore dû aux programmes trop chargés. Les élèves n'ont pas tellement de temps pour assister à ce genre d'activités qui aideraient à changer le point de vue des mathématiques qui existe actuellement.

1.2.3. - Finalités actuelles de l'enseignement de la R.O.

Puisque nous avons trouvé que certaines techniques de R.O. étaient étudiées, d'une façon ou d'une autre, aux lycées, nous nous sommes demandés

pourquoi les professeurs enseignaient celles-ci. Les raisons étaient les suivantes :

- a. Elles montrent aux élèves un aspect plus attrayant des Mathématiques
- b. Elles constituent des points de vue nouveaux sur les applications des mathématiques
- c. Il s'agit de sujets qui plaisent aux enseignants et aux élèves.

Nous considérons que ces trois raisons sont très importantes et qu'à elles seules, elles suffisent pour justifier qu'une approche de la R.O. soit faite.

1.3. - LA R.O. DANS D'AUTRES PAYS AU NIVEAU SECONDAIRE

Nous avons cherché à savoir si la R.O. était enseignée à l'école secondaire dans d'autres pays. Parmi la bibliographie accessible, nous avons utilisé des comptes rendu de congrès ainsi que quelques livres d'enseignement mathématique dans les lycées. Ils nous ont permis de connaître qu'est-ce qui se fait sur le sujet à l'étranger.

GRANDE BRETAGNE

Nous parlerons d'abord de l'Angleterre. Il est bien connu que ce pays est très en avance en matière éducative. En effet, nous avons trouvé une collection, très intéressante, de livres pour les lycées [71]. Il s'agit de la collection SMP (School Mathematics Project) de 1972. Cette collection a été élaborée par une équipe de 30 mathématiciens parmi lesquels : M.B. THWAITES, M.H.M. CUNDY, M. T. H. JONES, M.D.A. QUADLING et M.T.D. MORRIS. Cette équipe a commencé à travailler en 1961.

La collection SMP est constituée de 7 livres utilisés dans les "Grammar schools" qui vont de l'âge de 11 ans jusqu'à l'âge de 17-18 ans. Cette école correspondrait au lycée classique et moderne français. Elle est divisée en 2 cycles :

Les 5 premières années d'études préparent des candidats à l'examen appelé "O-Level" et les 2 dernières années sont consacrées à la préparation du "A-Level".

C'est dans les 5 premiers livres que nous avons trouvé certaines techniques de R.O. plus ou moins développées : méthodes des graphes et réseaux, programmation linéaire et simulation. Voyons les un peu plus en détail :

A la fin des trois premiers livres, il y a un chapitre consacré aux casse-têtes, ici, nous avons trouvé quelques problèmes faciles à résoudre à l'aide des graphes et qui peuvent motiver une introduction à cette théorie.

Dans le livre 2, le chapitre consacré à la topologie contient une introduction aux graphes : Ils étudient des graphes colorables, le problème des ponts de Koenigsberg et introduisent la représentation matricielle des graphes.

C'est dans le livre 3 qu'on trouve une présentation de la programmation linéaire, cette étude est limitée à deux variables pour rechercher les solutions graphiquement. Il existe également un chapitre sur des réseaux où l'on parle de matrices d'incidence.

Nous avons retrouvé dans le livre 4 un chapitre sur les réseaux qui contient une théorie plus avancée et des applications. C'est à ce niveau que la présentation des premiers problèmes de simulation est faite, dans le chapitre de statistiques et probabilités.

Dans le 5^e livre, on retrouve la programmation linéaire et une petite approche aux problèmes non-linéaires à 2 variables.

Les programmes des deux dernières années (livres 6 et 7) sont très chargés et ils ne contiennent aucun sujet de R.O.

Nous avons trouvé d'autres collections anglaises qui traitent aussi des problèmes de R.O.. Les sujets se limitent dans ces cas à la programmation linéaire et aux graphes et réseaux. Voir par exemple : BRIDER [11], BRIDGEWATER [12], COPLEY [21], HOLT [39] et JAMES [43].

En Grande Bretagne, les jeux de simulation s'intègrent de plus en plus dans l'emploi du temps des lycées. Nous avons trouvé une étude sur les jeux de simulation à l'école (TAYLOR [74]) où les auteurs ont cherché à faire le point sur cette nouvelle méthode d'enseignement.

BELGIQUE

Un autre pays qui inclut des méthodes de R.O. dans l'enseignement secondaire est la Belgique. Des sujets tels que théorie des graphes, PAPY [56], et programmation linéaire, SERVAIS [72], font partie de l'enseignement mathématique depuis 1966. Quelques notions de la théorie des graphes sont introduites à l'âge

de 15 ans.

Voici une citation relevée dans une conférence de M. SERVAIS [72] p.154, à propos des mathématiques nouvelles au niveau secondaire en Belgique :

"...l'éducation mathématique nouvelle a une base plus large et plus solide, elle assure aux matières classiques valables d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'analyse une connaissance plus forte et mieux intégrée et elle permet enfin d'étendre le domaine de l'étude aux éléments d'algèbre linéaire de topologie et de probabilités". Le domaine d'algèbre linéaire comprendrait la programmation linéaire et celui de la topologie, les graphes et réseaux.

ITALIE

Un article, très intéressant, d'Emma CASTELNUOVO [14] signale qu'en 1969 elle a vécu une expérience avec ses élèves de 13-14 ans. Cette expérience consistait à étudier différentes représentations utilisant la notion de barycentre et parmi les applications, il y avait la programmation linéaire. Nous en parlerons au chapitre 3.

TCHÉCOSLOVAQUIE

Dans le colloque UNESCO de 1966, il existe un article de VYSIN [78] qui parle des problèmes d'une expérience de renouveau faite par l'union des mathématiciens et physiciens tchécoslovaques dans les 6^e-9^e classes des écoles de base de 9 ans (élèves de 11-15 ans). Il signale qu'à partir de la 7^e(6^e en France), ils se proposent d'étudier entre autres, des problèmes simples de programmation linéaire. Ce qui restait à décider c'était l'initiation à certains éléments de topologie et aux graphes. Nous n'avons pas de renseignements sur la situation actuelle, mais les tendances à s'ouvrir à ces nouvelles voies d'enseignement étaient assez marquées.

ARGENTINE

En 1966, Luis A. SANTALO publie son livre "la Matematica en la escuela secundaria" [66], où il propose une série de changements dans la pédagogie des mathématiques et dans les programmes des lycées. A ce propos, il parle des applications des mathématiques et signale 4 directions : statistique, physique, ordinateurs et programmation linéaire.

Il présente un modèle de programmes des lycées et situe l'intro-

duction de cette technique comme exemple des systèmes d'équations linéaires à deux variables.

En Argentine, l'école secondaire est constituée de 6 années (13 à 18ans). SANTALO propose de faire la présentation de ces sujets en 3ème année (à l'âge de 15 ans).

CANADA

Il existe au Canada depuis 1971, un réseau des centres d'apprentissage dans les écoles du Québec. Il s'agit d'une conception modulaire des activités pour l'acquisition de connaissances nouvelles. Dans ce cadre, il existe :

- a. Des thèmes mathématiques : théorie de graphes entre autres
- b. Des thèmes didactiques : simulation entre autres
- c. Des thèmes "activité mathématique" : modèles mathématiques, par exemple.

Malheureusement, nous n'avons pas de détails sur les programmes des lycées, mais les activités citées plus haut nous permettent de dire qu'il y a des méthodes de R.O. qui font partie des cours de mathématiques dans les lycées du Canada.

Nous avons parlé des travaux faits dans certains pays. Pour terminer, nous voulons dire quelques mots en ce qui concerne les pays du CONTINENT AMERICAIN :

En 1965, l'une des activités de l'O.E.A.⁽¹⁾, (tous les pays d'Amérique à exception de Cuba), a consisté à réaliser des monographies sur divers sujets de mathématiques.⁽²⁾ Entre autres, il y avait "programacion lineal" et "algunas aplicaciones de matematicas" (quelques applications des mathématiques). Comme ces travaux pouvaient être utilisés au niveau secondaire, cela a représenté une ouverture aux mathématiques appliquées et particulièrement à la R.O..

(1) Organizacion de Estados Americanos.

(2) Voir VALEIRAS |77|.

CHAPITRE 2

UNE EXPERIENCE DANS LE 2ND CYCLE

"PLUS COURT CHEMIN ENTRE DEUX POINTS DONNES DANS UN GRAPHE"

2.1. - EXPOSE PRELIMINAIRE DU SUJET DE L'EXPERIENCE

Il n'est pas sans intérêt d'enregistrer les réactions des élèves et enseignants à propos des sujets proposés. Cette idée nous a poussé à faire une expérience qui comprend la présentation d'un problème classique de théorie des graphes appelé "problème du plus court chemin entre deux points donnés dans un graphe".

Nous avons fait ce choix car il s'agit d'un problème pratique, intéressant et qui n'exigeant pas de connaissances antérieures, pouvait être exposé à n'importe quelle classe du niveau secondaire.

Puisque nous avons accès à quelques lycées équipés d'ordinateur, nous avons jugé intéressant de présenter un tel problème, sous forme de programme pédagogique. Le même programme a été présenté aussi dans d'autres lycées, sans utiliser d'ordinateur.

Cette expérience n'était pas incluse dans les programmes officiels aussi a-t-il fallu la mener en dehors du temps scolaire normal (soit en club d'informatique, soit en club des mathématiques).

Une fois le problème traité, il fallait connaître le point de vue des élèves et celui des enseignants sur le sujet. A ce propos, nous avons réalisé une enquête qui nous a fourni les données nécessaires.

2.2. - PRESENTATION DU PROBLEME ET DE SA SOLUTION

Une façon sympathique d'introduire ce sujet était de le présenter comme le problème appelé "de la diligence" :

Il s'agit d'un homme qui, il y a un siècle, doit traverser les Etats-Unis en diligence en passant par des régions dangereuses.

Ses points de départ et de destination sont fixés mais il peut choisir les villes intermédiaires qui peuvent jaloner son itinéraire.

Les routes possibles sont marquées par les arcs dans la figure 1 où chaque ville est représentée par un numéro.

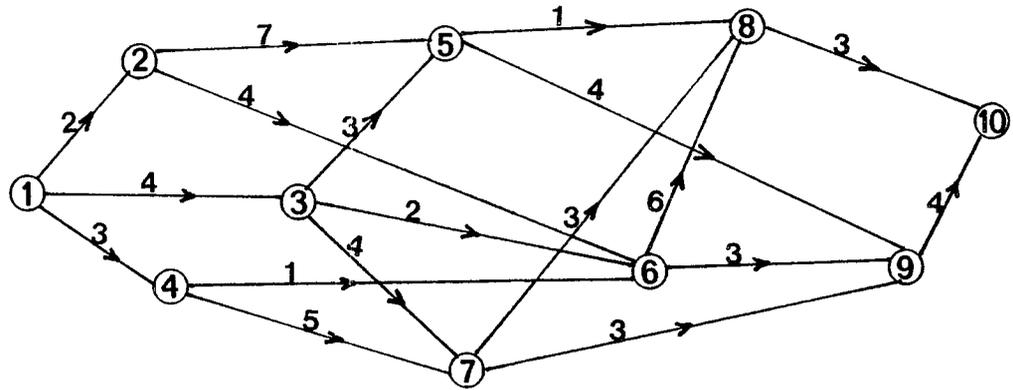


Figure 1

REMARQUE : Le fait de marquer une direction dans les arcs du graphe, ne veut pas dire qu'il s'agit de routes à sens unique (elles n'existaient pas il y a un siècle). Nous voulons simplement signaler la direction de déplacement du voyageur.

Cet homme a trouvé une très bonne méthode pour déterminer sa route : il y a une compagnie qui assure les voyageurs de la diligence pour chaque tronçon entre deux villes, le prix du transport compris. Les coûts varient selon le danger de la région.

Notre voyageur a fait la réflexion suivante : s'il choisit la route la moins chère (ce qui est déjà avantageux pour lui), elle sera en même temps la route la moins dangereuse.

Les prix fixés par la compagnie d'assurances correspondent aux chiffres marqués sur les arcs du graphe (figure 1).

Pour résoudre ce problème, il nous faut connaître quelques notions

D'une façon intuitive, un graphe est un schéma constitué par un ensemble de points et par un ensemble de flèches reliant chacun de ceux-ci. Les points sont appelés les sommets du graphe et les flèches, les arcs du graphe.

Soit X l'ensemble des sommets d'un graphe et U l'ensemble d'arcs. Pour un graphe $G = (X, U)$, on définit une application $d : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque arc fait correspondre sa "longueur".

Soit $G = (X, U)$ un graphe et $x_0, x_k \in X$. Un chemin de x_0 à x_k dans G est une séquence alternée de sommets et d'arcs, $(x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, x_{k-1}, u_k, x_k)$, chaque arc de la séquence ayant pour extrémité initiale le sommet qui le précède et pour extrémité terminale le sommet qui le suit dans la séquence .

La longueur d'un chemin sera égale à la somme des longueurs des arcs qui le constituent.

Un circuit est un chemin simple dont les deux extrémités sont confondues.

Il existe de très nombreux algorithmes de recherche de plus courts chemins (une bibliographie sur le sujet datant de plusieurs années donnait 150 titres). Malheureusement, il n'y a pas une procédure unique car les différentes procédures se trouvent plus ou moins adaptées aux différents types de problèmes :

- Le graphe comporte ou ne comporte pas de circuit.
- Les longueurs sont toutes positives ou nulles, ou certaines longueurs peuvent être négatives.

Dans notre problème, les opérations sur les prix sont de même nature que les opérations sur les distances en ce sens que le prix correspondant à un chemin est la somme des prix de chacun des arcs du chemin. Cette analogie nous autorise à assimiler le prix d'un parcours à une longueur.

Trouver le parcours de prix minimum revient dans ce langage à chercher le chemin de longueur minimum.

Dans la littérature, on appelle ce problème "problème du plus court chemin".

Sa solution s'applique à un grand nombre de situations où la longueur des arcs peut représenter n'importe quelle mesure (longueur, temps, poids, prix, etc...).

Pour résoudre notre problème, nous avons choisi l'algorithme de Bellman qui est l'un des plus performants et intéressants sur le plan théorique. Il est utilisable uniquement pour les graphes qui ne possèdent pas de circuits, ce qui est bien le cas ici.

Il faut dire aussi, que nous avons fait ce choix parce-qu'il s'agit d'un algorithme assez facile pour les élèves.

On pourrait se demander pourquoi utiliser cet algorithme s'il suffit de faire la liste de tous les chemins du graphe et de choisir l'un de ceux dont la longueur est minimum. La difficulté provient du fait que le nombre de chemins à considérer croît très vite avec le nombre de sommets et d'arcs du graphe.

Précisément, dans la pratique, on rencontre des graphes ayant un grand nombre de sommets et d'arcs.

Avant de présenter l'algorithme de Bellman, quelques nouvelles définitions sont nécessaires :

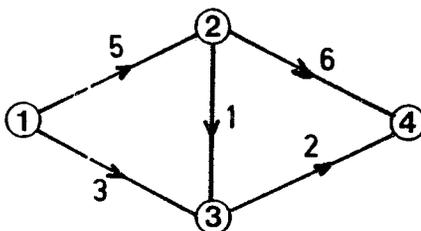
On dit que x est un prédécesseur de y , s'il existe un arc de la forme (x,y) dans le graphe.

A partir d'un graphe donné, on peut construire la matrice T des longueurs associée à ce graphe. C'est une matrice $n \times n$ où n est le nombre des sommets du graphe. Les n lignes représentent les n sommets du graphe ainsi que les n colonnes. Chaque élément t_{ij} correspond à la longueur de l'arc (i,j) .

Si l'arc (i,j) n'existe pas dans le graphe, on mettra "infini" dans la case correspondante. L'interprétation de ceci est que si entre deux sommets il n'existe pas d'arc, il s'agit de sommets inaccessibles entre eux. Du point de vue algébrique, " ∞ " est l'élément neutre de l'opération minimum.

Par exemple :

Pour le graphe suivant ;



La matrice des longueurs correspondante est :

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 5 & 3 & \infty \\
 \infty & 0 & 1 & 6 \\
 \infty & \infty & 0 & 2 \\
 \infty & \infty & \infty & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Etant donnée une matrice carrée M dont les cases contiennent des entiers positifs ou infini, et des zéros dans les cases de la diagonale, il est possible de trouver un graphe dont la matrice des longueurs soit M.

Algorithme de Bellman :

Le principe de cet algorithme consiste à chercher les plus courtes distances de proche en proche, à partir du sommet de départ, pour chacun des sommets du graphe. Une fois qu'on a calculé la plus courte distance du sommet origine à un sommet y, on marquera le sommet y.

On ne peut marquer un sommet, qui si on a déjà marqué tous ses prédécesseurs.

Soit :

S l'ensemble des sommets marqués

PI(y) la plus courte distance de l'origine au sommet y

PR(y) le sommet prédécesseur du sommet y et qui appartient au plus court chemin de l'origine au sommet y.

Si l'on considère l'arc $u = (x, y)$, on notera l'extrémité initiale de u : $I(u) = x$ et son extrémité terminale : $T(u) = y$

Algorithme :

(0) Poser $S = \{1\}$
 $PI(1) = 0$
 $PR(1) = 0$

(1) Chercher un sommet hors de S dont tous les prédecesseurs sont dans S :

. Si un tel sommet n'existe pas, c'est terminé. Soit S contient tous les sommets du graphe, soit à partir du sommet de départ, il n'existe pas dans G un chemin joignant ce sommet à x pour tout $x \in X$.

. Si un tel sommet "y" existe, aller en (2).

(2) Poser :

$$PI(y) = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} PI(I(u)) + d(u) \\ \{u \mid T(u) = y\} \end{array} \right\}$$

Supposons qu'on choisit l'arc \tilde{u}

$$S = \{1\} \cup \{y\}$$

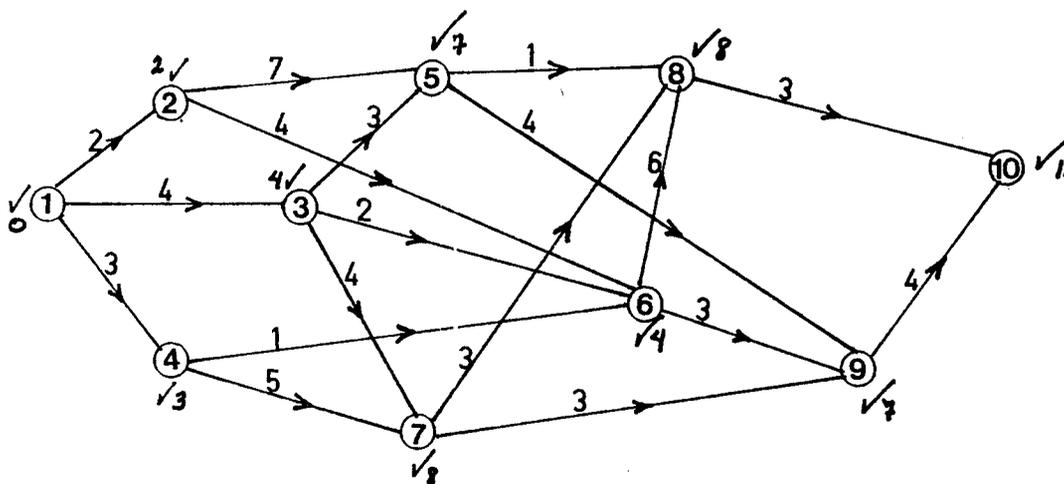
$$PR(y) = I(\tilde{u})$$

Si il y a deux (ou plusieurs) sommets y_1, y_2 tels que :
 $PI(y_1) = PI(y_2)$ on choisira le premier d'entre eux.

Aller en (1).

Une fois l'algorithme terminé, le plus court chemin peut être retrouvé facilement puisque tous les sommets prédecesseurs de chaque sommet du graphe sont connus.

Exemple d'application:



$$S = \{1\}$$

$$PI(1) = 0$$

$$PR(1) = 0$$

$$S = \{1,2\}$$

$$PI(2) = 2$$

$$PR(2) = 1$$

$$S = \{1,2,3\}$$

$$PI(3) = 4$$

$$PR(3) = 1$$

$$S = \{1,2,3,4\}$$

$$PI(4) = 3$$

$$PR(4) = 1$$

$$S = \{1,2,3,4,6\}$$

$$PI(6) = 4$$

$$PR(6) = 4$$

$$S = \{1,2,3,4,6,5\}$$

$$PI(5) = 7$$

$$PR(5) = 3$$

$$S = \{1,2,3,4,6,5,7\}$$

$$PI(7) = 8$$

$$PR(7) = 3 \text{ ou } 4$$

$$S = \{1,2,3,4,6,5,7,9\}$$

$$PI(9) = 7$$

$$PR(9) = 6$$

$$S = \{1,2,3,4,6,5,7,9,8\}$$

$$PI(8) = 8$$

$$PR(8) = 5$$

$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$PI(10) = 11$$

$$PR(10) = 8 \text{ ou } 9$$

Plus court chemin : 1-3-5-8-10
ou 1-4-6-9-10

Dont la valeur est : $PI(10) = 11.$

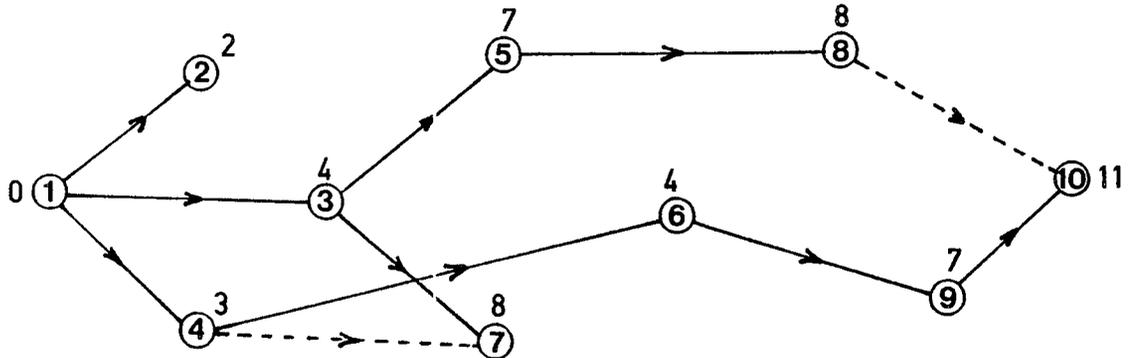
Justification de l'algorithme :

S'il n'existe pas de sommet hors de S dont tous les prédécesseurs sont dans S mais que cependant S est différent de X , on peut remonter de proche en proche d'un sommet hors de S à un prédécesseur hors de S et ceci indéfiniment. Comme le graphe est fini, cette manière d'opérer a mis en évidence un circuit. Comme le réseau est supposé sans circuit, on voit qu'on a une contradiction ; donc le critère d'arrêt au pas(1) est justifié.

Cet algorithme sert à trouver non seulement le plus court chemin du sommet origine au dernier sommet, mais il permet aussi de connaître en même temps, pour chaque sommet du graphe, le plus court chemin à partir du sommet d'origine, c'est ce qu'on appelle l'arborescence de plus courts chemins

Exemple :

Si l'on applique l'algorithme de Bellman au graphe ci-dessus, (fig.1), on obtient l'arborescence suivante :



Les lignes en pointillées dénotent une autre possibilité qui donne la même valeur.

Le plus court chemin n'est pas toujours unique, il existe des graphes qui ont des plus courts chemins différents comme dans l'exemple ci-dessus.

Précédemment, nous avons noté que l'algorithme de Bellman était applicable seulement pour les graphes qui ne possèdent pas de circuit. Cela vient du fait qu'au moment où on trouve un circuit dans un graphe, on ne peut plus avancer puisque le processus de marquage de cet algorithme met comme condition nécessaire pour marquer un sommet, que tous ses prédécesseurs soient déjà marqués.

Cet algorithme est la transcription précise du principe d'optimalité de Bellman qui est l'idée centrale de la programmation dynamique. Voici de quoi il s'agit : Parmi les principales caractéristiques d'une classe de problèmes de programmation dynamique, on retrouve les suivantes :

- . Le problème peut être divisé en étapes
- . Chaque étape a un certain nombre d'états
- . Une fois qu'on est dans un état, la décision optimale pour les étapes qui restent, ne remet pas en cause les décisions qu'on a prises pour les étapes antérieures (elles sont les optimales pour arriver à cette étape là du problème).

Cette propriété est appelée "principe d'optimalité".⁽¹⁾

(1) Pour approfondir le sujet voir CHEVALLIER | 15 | , BELLMAN | 7 |

2.3. - OBJECTIFS DE L'EXPERIENCE

Les objectifs que nous nous sommes proposés avec cette expérience sont :

1. Connaître le degré d'acceptation de ce problème par les élèves et les professeurs des lycées.
2. Connaître le point de vue des professeurs à propos des problèmes d'optimisation.
3. Connaître le degré d'assimilation de ce genre de problèmes.
4. Connaître l'avis des professeurs et des élèves sur l'introduction possible de tels sujets dans l'enseignement secondaire.

2.4. - SELECTION DE L'ECHANTILLON

Nous avons rencontré certaines contraintes pour la réalisation de notre expérience.

Tout d'abord, il a fallu trouver des enseignants susceptibles de collaborer. Ceci n'a pas posé beaucoup de problèmes. Néanmoins, dans plusieurs cas, le facteur temps nous a beaucoup limité. Il y avait des enseignants intéressés par le problème qui n'ont pas pu réaliser l'expérience à cause de l'approche de la fin de l'année scolaire.

Nous nous sommes trouvés limités pour la sélection de notre échantillon et nous ne prétendons pas que celui - là puisse servir pour une généralisation des résultats, nous avons simplement voulu faire une expérience au niveau des lycées.

Puisqu'il s'agissait d'un problème n'ayant pas besoin de connaissances antérieures, nous n'étions pas restreints dans le choix des classes.

L'expérience a été faite dans les classes suivantes :

3 classes de 1^è (B,C,G)
 et 5 classes de 2^è (A,C,C,G,T)
 avec ordinateur, et
 1 classe de 1^è C
 et 1 classe de 2^è T
 sans ordinateur.

2.5. - REMARQUES SUR LE PASSAGE DU PROGRAMME DANS LES CLASSES

Nous n'avons pas assisté à toutes les séances. Notre présence n'était pas indispensable, l'exercice est fait de telle sorte qu'il suffit du programme et quelques instructions annexes, pour que les enseignants puissent le mener au but.

Nous allons décrire brièvement comment l'expérience s'est déroulée dans les classes où nous étions présents.

Avant de faire passer les élèves devant l'ordinateur, on leur a donné quelques précisions et remarques dont ils avaient besoin pour bien suivre le programme. Par exemple, quelle est la représentation matricielle d'un graphe, qu'est-ce que c'est qu'un algorithme, remarques telles que "ne pas oublier de faire le graphe quand on leur donne la matrice des longueurs", "faire un grand dessin pour travailler proprement", etc... .

Une fois devant les écrans, les élèves se trouvaient très attirés par la manipulation des touches. Ils considéraient l'exercice comme un jeu, et nous croyons que cette attitude élimine certains préjugés que la plupart des élèves ont vis à vis des mathématiques:

Il a été constaté que la machine ne peut que difficilement donner des indications sur les fautes commises par les élèves, l'enseignant reste indispensable pour celà.

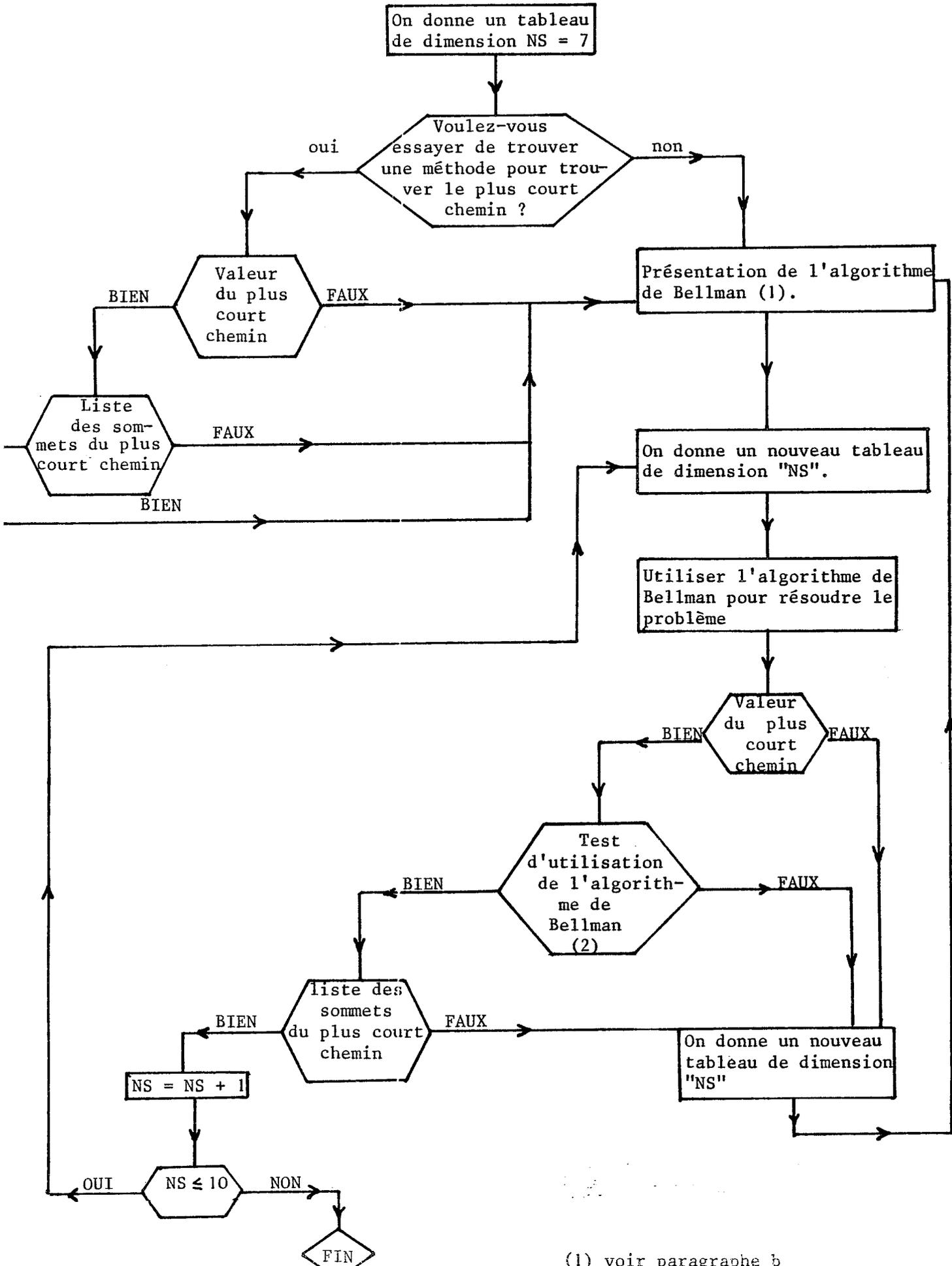
Le programme est fait de telle sorte qu'une fois résolu un premier exercice, on en propose un autre un peu plus compliqué et ainsi de suite. Il est très encourageant pour les élèves de pouvoir résoudre des problèmes de plus en plus compliqués (bien entendu dans une limite raisonnable).

Les jeunes ne sont pas encore habitués à ce système de travail, parfois ils ne font pas attention aux instructions, qui passent une seule fois sur l'écran et qui disparaissent au fur et à mesure qu'arrivent les autres. Cela créait des problèmes et quelquefois le temps prévu (une heure) ne suffisait pas pour finir complètement l'exercice.

Un autre problème que nous avons rencontré, c'est qu'il y a des élèves qui se laissent trop guider par le programme. Ils répondent automatiquement aux questions sans se rendre compte du contenu de l'exercice, ce qui n'est pas du tout l'objectif du travail. Peut-être s'agit-il d'une faute de présentation du programme ?

Ce qui est certain, c'est qu'ils ont travaillé très à l'aise et sans craindre de se tromper. Ceci est une caractéristique de l'enseignement programmé.

a. Organigramme



(1) voir paragraphe b

b. Présentation de l'algorithme de Bellman :

D'abord, en quelques lignes, on dit à l'élève en quoi consiste l'algorithme:

"Je vais vous présenter un algorithme. Le principe de cet algorithme consiste à chercher les plus courtes distances de proche en proche, à partir du sommet de départ, pour chacun des sommets du graphe. Nous aurons donc terminé quand nous aurons marqué tous les sommets du graphe".

Ensuite, on lui demande :

"Quel est le premier sommet que vous marquez ?"

. Si la réponse est fausse, on répète le principe de l'algorithme et la question.

. Si la réponse est correcte :

"Un conseil : chaque fois que vous aurez marqué un sommet, faites-le aussi sur votre graphe, à côté de lui, Indiquez aussi la plus courte distance du sommet de départ au sommet considéré.

Veillez lire ce message avec attention. Si vous ne le comprenez pas, faites appel à votre professeur" pause.

Nous avons fait cette dernière remarque parce que les élèves ne faisaient pas attention au message précédent.

Ensuite : "Quelle distance indiquez-vous à côté du sommet 1 ?"

. Si la réponse est fausse, on répète le message et la question.

. Si la réponse est correcte, on lui donne le message suivant qui est la condition nécessaire pour pouvoir marquer un sommet dans l'algorithme.

"Un sommet est susceptible d'être marqué si tous les sommets qui le précèdent dans le graphe sont déjà marqués.

Quel sommet marquez-vous maintenant ?"

Dans ce cas, il peut y avoir plusieurs sommets susceptibles d'être marqués, l'algorithme nous demande de choisir l'un d'entre eux, il peut y avoir donc plusieurs bonnes réponses.

Puis : "indiquez la plus courte distance de l'origine au sommet que vous venez de marquer".

. Si la réponse est fausse, on lui répète la question.

. Si elle est correcte. D'abord, on lui signale quels sont les sommets qu'il a déjà marqué et ensuite on répète la condition nécessaire pour marquer un sommet et on lui demande quel sommet marquera. Tant qu'il ne répond pas correctement, on lui répète le message. Et ainsi de suite.

Une fois marqués tous les sommets, on lui demande de donner la valeur du plus court chemin entre l'origine et le dernier sommet. Si la réponse est fausse, on répète la question.

Si elle est correcte, on lui demande de donner la plus courte distance entre le sommet origine et chacun des sommets du graphe.

Et enfin, on demande la liste des sommets qui constituent le plus court chemin. Tant qu'il ne répond pas bien, on lui pose à nouveau la question.

Bien entendu, il peut y avoir plusieurs chemins avec la même valeur minimum.

c. Test d'utilisation de l'algorithme de Bellman :

Une fois que l'élève a donné la valeur du plus court chemin, nous voulons savoir s'il a effectivement appliqué l'algorithme de Bellman.

Pour cela, on lui demande de donner la plus courte distance du sommet de départ au sommet x, pour tout sommet x du graphe.

Nous considérons le temps qu'il met pour trouver la réponse à chaque itération et il est "pénalisé" s'il ne trouve pas la réponse dans un temps maximum de 10 secondes.

Il est également "pénalisé" si une réponse est fausse et dans ce cas, on lui repose la question.

Le "pénaliser" veut dire "enlever une certaine quantité de points (5 si sa réponse est fausse, 3 s'il dépasse le temps pour répondre) d'une note donnée au début (PT = 12). A chaque itération, on teste la valeur de PT, si elle est négative ou zéro, on signale à l'élève qu'il a fait trop de fautes ou qu'il a été trop lent et on lui montre à nouveau l'algorithme.

d. Remarques du programme LSE :

Dans le fichier PENIC se trouvent les 8 tableaux correspondants aux différents graphes dont nous avons besoin (2 graphes de 7 sommets, 2 de 8, 2 de 9 et 2 de 10).

Les tableaux de dimension 7, 8 et 10 sont remplis aléatoirement dans les cases déjà prévues (selon la structure du graphe choisie à l'avance).

Les tableaux de dimension 9 sont remplis à l'avance parce qu'ils correspondent aux graphes où le plus court chemin entre l'origine et le dernier sommet, ne contient pas l'arc qui part de l'origine et qui a la plus petite longueur. On a tendance à croire que ce dernier fait partie du chemin le plus court, ce qui n'est pas toujours vrai.

Nous avons mis dans la matrice des longueurs, $1E33 (10^{33})$, à la place de " ∞ " pour symboliser l'inexistence d'arc dans les graphes.

e. Exemple.

SUPPRIMER *
 APPELER PEN
 EXECUTER A PARTIR DE 1

PROGRAMME DE RECHERCHE OPERATIONNELLE;
 VOICI LE TABLEAU ASSOCIE A VOTRE GRAPHE . N'OUBLIEZ PAS DE DESSINER LE
 Graphe.

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

VOULEZ-VOUS ESSAYER DE TROUVER DE VOUS-MEME UNE METHODE
 POUR TROUVER LE PLUS COURT CHEMIN DE 1 AU DERNIER SOMMET ?
 TAPEZ 1 POUR OUI , 0 POUR NON : 1
 DONNEZ LA VALEUR DU PLUS COURT CHEMIN ENTRE L'ORIGINE ET LE
 DERNIER SOMMET ; 14

BIEN !

DONNEZ LA LISTE DES SOMMETS QUI CONSTITUENT LE PLUS COURT CHEMIN
 COMMENCEZ PAR LE SOMMET 1 ET TERMINEZ LA LISTE EN TAPANT 0 .
 TAPEZ 1 SI VOUS DESIREZ REpondRE SINON TAPEZ 0 : 1
 LISTE DES SOMMETS : 1 2 5 7 0

BIEN !

JE VAIS VOUS PRESENTER UN ALGORITHMME .

LE PRINCIPE DE CET ALGORITHMME CONSISTE A CHERCHER
 LES PLUS COURTES DISTANCES DE PROCHE EN PROCHE , A PARTIR
 DU SOMMET DE DEPART , POUR CHACUN DES SOMMETS DU GRAPHE .
 NOUS AURONS DONC TERMINE QUAND NOUS AURONS MARQUE TOUS LES
 SOMMETS DU GRAPHE .

QUEL EST LE PREMIER SOMMET QUE VOUS MARQUEZ ? : 1

BIEN

UN CONSEIL : CHAQUE FOIS QUE VOUS AUREZ MARQUE UN SOMMET ,
 FAITES-LE AUSSI SUR VOTRE GRAPHE , A COTE DE LUI ,
 INDIQUEZ AUSSI LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET DE DEPART
 AU SOMMET CONSIDERE .

 VEUILLEZ LIRE CE MESSAGE AVEC ATTENTION . SI VOUS NE LE
 COMPRENEZ PAS , FAITES APPEL A VOTRE PROFESSEUR .
 PAUSE EN LIGNE 030
 CO NTINUER

QUELLE DISTANCE INDIQUEZ-VOUS A COTE DU SOMMET 1 ? 0

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LE SOMMET 1 .

UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMETS
 QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES ,
 QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ? 3

BIEN

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 6

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : 1 3
UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMETS QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES .
QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ?2

BIEN

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 4

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : 1 2 3
UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMETS QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES .
QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ?4

BIEN

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 6

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : 1 2 3 4
UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMETS QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES .
QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ?5

BIEN

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 22

FAUX JE REPETE :

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 13

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : 1 2 3 4 5
UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMETS QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES .
QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ?6

BIEN

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 22

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : 1 2 3 4 5 6
UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMETS QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES .
QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ?7

BIEN

INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L'ORIGINE AU SOMMET QUE VOUS VENEZ DE MARQUER : 14

BIEN

VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : 1 2 3 4 5 6 7
QUELLE EST LA VALEUR DU PLUS COURT CHEMIN ENTRE L'ORIGINE ET LE DERNIER SOMMET?14

BIEN

QUELS SONT LES SOMMETS QUI CONSTITUENT LE PLUS COURT CHEMIN?

VOUS POUVEZ LE RETROUVER

SUR VOTRE GRAPHE A PARTIR DU DERNIER SOMMET EN FAISANT DES SOUSTRATIONS . COMMENCEZ PAR LE SOMMET DE DEPART

ARRET EN TAPANT 0 EN FIN DE LISTE : 1 2 5 7 0

BIEN

POURSUIVONS AVEC 8 SOMMETS

JE VOUS PRESENTE UN NOUVEAU GRAPHE

VOICI LE TABLEAU ASSOCIE A VOTRE GRAPHE . N'OUBLIEZ PAS DE DESSINER LE

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

DONNEZ LA VALEUR DU PLUS COURT CHEMIN ENTRE L'ORIGINE ET LE DERNIER SOMMET ; 11

BIEN !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 2 : 7

BIEN !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 3 : 9

BIEN !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 4 : 1

BIEN !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 5 : 12

BIEN !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 6 : 5

BIEN !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 7 : 13

FAUX !

DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET 7 : 11

BIEN !

DONNEZ LA LISTE DES SOMMETS QUI CONSTITUENT LE PLUS COURT CHEMIN COMMENCEZ PAR LE SOMMET 1 ET TERMINEZ LA LISTE EN TAPANT 0 .

TAPEZ 1 SI VOUS DESIREZ REpondRE SINON TAPEZ 0 : 1

LISTE DES SOMMETS : 1 4 6 8 0

BIEN !

BIEN ! MAINTENANT POURSUIVEZ AVEC 9 SOMMETS !

JE VOUS PRESENTE UN NOUVEAU GRAPHE

UTILISEZ L'ALGORITHME QUE VOUS VENEZ D'APPRENDRE POUR TROUVER LE PLUS COURT CHEMIN .

VOICI LE TABLEAU ASSOCIE A VOTRE GRAPHE . N'OUBLIEZ PAS DE DESSINER LE I

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

DONNEZ LA VALEUR DU PLUS COURT CHEMIN ENTRE L'ORIGINE ET LE DERNIER SOMMET ;

PRET EN LIGNE 046

f. Programme.

```

APBIDON
PRET
APPELER CHARG
PERFORER A PARTIR DE 1
1* CHARG
2 CHAINE F,L;AFFICHER 'NOM : ';&NET(F)
4 &NET(L);X-Ptr(L,1,'1234567890');SI X>LGR(L) ALORS TERMINER
6 I-CNB(L,X,X);J-CNB(L,X,X);ALLER EN 7+5*J
7 &NET(L);T-CNB(L,1);ALLER EN 29
12 N-CNB(L,X);TABLEAU T[N]
13 FAIRE 13 POUR K-1 JUSQUA N;&NET(L);T[K]-CNB(L,1)
15 ALLER EN 29
17 N-CNB(L,X,X);M-CNB(L,X);TABLEAU T[N,M]
18 FAIRE 20 POUR K-1 JUSQUA N;AFFICHER '*'
20 FAIRE 20 POUR H-1 JUSQUA M;&NET(L);T[K,H]-CNB(L,1)
21 ALLER EN 29
22 M-4;CHAINE T;T-'';SI X>LGR(L) ALORS DEBUT N-0;ALLER EN 27 FIN
23 N-CNB(L,X);SI N#0 ALORS M-ABS(N)
27 FAIRE 27 POUR K-1 JUSQUA M;&NET(L);T-T!L;SI N#0 ET N#-K ALORS T-T!EQB
29 GARER T,I,'#'!F;LIBERER T;ALLER EN 4
32 PROCEDURE &NET(C);AFFICHER '';LIRE C;Z-SKP(C,1,EQC(0)!EQC(18)!EQC(20)
33 SI Z>LGR(C) ALORS DEBUT C-'';RETOUR FIN;C-SCH(C,Z,LGR(C)-Z+1);RETOUR
APPELER PERFI
EXECUTER A PARTIR DE 1

```

```

NOM : PENIC
PERFORATION ?(OUI/NON) 0
IER ENR : 7
DERNIER : 21
L'ENREGISTREMENT 7 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 7 7
L'ENREGISTREMENT 8 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 8 8
L'ENREGISTREMENT 9 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 9 9
L'ENREGISTREMENT 10 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 10 10
L'ENREGISTREMENT 14 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 14\7 7
L'ENREGISTREMENT 16 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 8 8
L'ENREGISTREMENT 18 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI
DIMENSIONS(S) 9 9
L'ENREGISTREMENT 20 EST UN TABLEAU
DIMENSION(S) CONNUE(S) ?(OUI/NON) OUI

```

EX1

PE.IIC

ENREGISTREMENT 7 2 7 7

1E+33 0 0 0 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33

ENREGISTREMENT 8 2 8 8

1E+33 0 0 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 0 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 0 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 0 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33

ENREGISTREMENT 9 2 9 9

1E+33 2 7 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 7 4 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1 2 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 9 9 7 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 8 1 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 8
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33

ENREGISTREMENT 10 2 10 10

1E+33 0 0 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 0 1E+33 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33 1E+33 0 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33

ENREGISTREMENT 14 2 7 7

1E+33 0 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33 1E+33
 1E+33 0 1E+33 0 0 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33

ENREGISTREMENT 16 2 8 8

1E+33 0 0 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33

ENREGISTREMENT 18 2 9 9

1E+33 3 8 7 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 2 9 1E+33 7 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 2 10 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 8 9 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 7 1E+33 1E+33 1E+33
 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1

1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 2
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 5
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
ENREGISTREMENT 20 2 10 10
1E+33 0 1E+33 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
1E+33 1E+33 0 1E+33 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 0 1E+33 1E+33 1E+33
1E+33 1E+33 0 1E+33 1E+33 0 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33 1E+33
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 1E+33 0 1E+33
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0 1E+33
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0 0
1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 1E+33 0
1E+33
& FIN DE FICHIER

TERMINE EN LIGNE 048

APBIDON

PRET

APPELER PEN

PERFORER A PARTIR DE 1

1*PEN RECHERCHE OPERATIONNELLE R PENICHE & J MESSULAM

2*27*04:77

3*PEN

10 CHAINE PV

11 PV-'PROV'

12 CHARGER EX,11,PV,K;SI K=1 ALORS ALLER EN 16

14 TABLEAU EX[4];EX[1]-7;EX[2]-0;EX[3]-1;EX[4]-0

16 NS-EX[1];TYP-EX[3]*(-1);EX[3]-TYP;EX[2]-0

18 TYP-SI TYP=-1 ALORS 1 SINON 2

20 CHARGER T,NS*TYP,'PENIC'

21 SI NS=9 ALORS ALLER EN 29

22 FAIRE 27 POUR X-1 JUSQUA NS

24 FAIRE 27 POUR Y-1 JUSQUA NS

25 SI T[X,Y]>1E6 ALORS ALLER EN 27

26 AA-ENT(ALE(0)*ALE(0)*100);T[X,Y]-T[X,Y]+AA-ENT(AA/15)*15+1

27*

29 SI K#1 ALORS AFFICHER 'PROGRAMME DE RECHERCHE OPERATIONNELLE;'

30 &AF()

50 SI NS#7 ALORS DEBUT X-1;ALLER EN 70 FIN

60 AFFICHER 'VOULEZ-VOUS ESSAYER DE TROUVER DE VOUS-MEME UNE METHODE'

62 AFFICHER 'POUR TROUVER LE PLUS COURT CHEMIN DE 1 AU DERNIER SOMMET'

64 AFFICHER 'TAPEZ 1 POUR OUI ,0 POUR NON : ';LIRE X

66 SI X*(X-1)#0 ALORS ALLER EN 60

68 EX[2]-X

70 GAGER T,10,PV;GAGER EX,11,PV

72 SI X=1 ALORS EXECUTER 'PENA' SINON EXECUTER 'PENI'

234 PROCEDURE &AF() LOCAL X,Y,FL;CHAINE FL;FL-'i'

235 AFFICHER 'VOICI LE TABLEAU ASSOCIE A VOTRE GRAPHE . N' OUBLIEZ PAS

236 AFFICHER ' DESSINER LE GRAPHE .',2/,3X,UJFL

238 FAIRE 238 POUR X-1 JUSQUA NS;AFFICHER[F2.0,U]X,FL

239 AFFICHER[/,3X,U,*-'-']FL,3*NS-1,FL

240 FAIRE 244 POUR X-[JUSQUA NS;AFFICHER[/,F3.0,U]X,FL

242 FAIRE 244 POUR Y-1 JUSQUA NS

244 SI T[X,Y]<100 ALORS AFFICHER[F2.0]T[X,Y] SINON AFFICHER[2X];AFFICH

246 RETOUR

RAPENAPBIDON

PRET

APPELER PENA

PERFORER A PARTIR DE 1

2*27:04:77

3*PEN

10 CHAINE PV,F,B

11 PV-'PROV';F-'FAUX !';B-'BIEN !'

12 CHARGER EX,11,PV;CHARGER T,10,PV

14 NS-EX[1]

16 TABLEAU S[NS],PI[NS],PR[NS]

17 &ZZ(S);&ZZ(PR)

18 FAIRE 18 POUR I-1 JUSQUA NS;PI[1]-1E33

20 S[1]-1;PI[1]-0

22 &PROCI()

28 ALLER EN 22

40 FAIRE 48 POUR ES-1 JUSQUA 3

44 AFFICHER 'DONNEZ LA VALEUR DU PLUS COURT CHEMIN ENTRE L'ORIGINE ET E

45 AFFICHER 'DERNIER SOMMET ; '

46 LIRE EL

47 SI EL=PI[NS] ALORS DEBUT AFFICHER B;ALLER EN 49 FIN

48 AFFICHER F

49 SI EX[4]=0 ALORS ALLER EN 60;PT-12

50 FAIRE 55 POUR I-2 JUSQUA NS-1

51 AFFICHER 'DONNEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET 1 AU SOMMET ',I,''

52 Z1-TEM;LIRE EL;Z2-TEM;SI Z2-Z1>10 ALORS PT-PT-3

53 SI EL=PI[1] ALORS DEBUT AFFICHER B;ALLER EN 55 FIN

54 PT-PT-5;AFFICHER F;ALLER EN 51

55 SI PT<0 ALORS DEBUT &ENG();ALLER EN 59 FIN

56 ALLER EN 60

59 EX[2]-0;ALLER EN 80

60 TABLEAU E[NS];&ZZ(E)

62 FAIRE 78 POUR ES-1 JUSQUA 3

65 AFFICHER 'DONNEZ LA LISTE DES SOMMETS QUI CONSTITUENT LE PLUS COURT E

66 AFFICHER 'COMMENCEZ PAR LE SOMMET 1 ET TERMINEZ LA LISTE EN TAPANT O'

67 &AIDE();AFFICHER 'LISTE DES SOMMETS :'

68 FAIRE 70 POUR Q-1 JUSQUA NS;LIRE E[Q]

69 SI E[Q]>NS ALORS DEBUT AFFICHER F;ZER E;ALLER EN 65 FIN

70 SI E[Q]=0 ALORS ALLER EN 72

72 SI Q=2 ALORS DEBUT AFFICHER F;&ZZ(E);ALLER EN 65 FIN

73 W-0

74 FAIRE 74 POUR Q1-1 JUSQUA Q-2;W-W+T[E[Q1],E[Q1+1]]

76 SI W=PI[NS] ALORS DEBUT AFFICHER B;EX[2]-1;ALLER EN 80 FIN

78 AFFICHER F

79 EX[2]-0

80 SI EX[2]=1 ET EX[1]#7 ALORS DEBUT EX[1]-EX[1]+1;ALLER EN 90 FIN

82 GARER EX,11,PV

86 EXECUTER 'PEN1'

90 SI EX[1]=1 ALORS DEBUT AFFICHER 'TRES BIEN';TERMINER FIN

91 AFFICHER B,' MAINTENANT POURSUIVEZ AVEC ',EX[1],' SOMMETS !'

92 GARER EX,11,PV;AFFICHER 'JE VOUS PRESENTE UN NOUVEAU GRAPHE'

93 AFFICHER 'UTILISEZ L'ALGORITHME QUE VOUS VENEZ D'APPRENDRE POUR '

94 AFFICHER 'TROUVER LE PLUS COURT CHEMIN .'

95 EXECUTER 'PEN'

130 PROCEDURE &AIDE()

132 AFFICHER 'TAPEZ 1 SI VOUS DESIREZ REpondre SINON TAPEZ 0 : ';LIRE EL

134 SI EL*(EL-1)#0 ALORS ALLER EN 132;SI EL=1 ALORS RETOUR

135 RETOUR EN 79

190 PROCEDURE &ENG()

192 AFFICHER 'VOTRE TRAVAIL A COMPORTE TROP DE FAUTES OU A ETE TROP LENT'

196 RETOUR

200 PROCEDURE &PROCI()

202 J-T

204 FAIRE 206 POUR JJ-J JUSQUA NS

206 SI S[JJ]#1 ALORS ALLER EN 210

208 RETOUR EN 40

210 J-JJ

212 FAIRE 220 POUR K-1 JUSQUA NS

214 SI S[K]=1 OU T[K,J]=1E33 ALORS ALLER EN 220

```

216 J-J+1;SI J=NS+1 ALORS RETOUR
217 SI S[J]#1 ALORS ALLER EN 212 SINON ALLER EN 216
220*
222 K-1;PI[J]-T[K,J]+PI[K]
224 FAIRE 230 POUR K-1 JUSQUA NS
226 SI PI[J]<T[K,J]+PI[K] ALORS ALLER EN 230
228 PI[J]-T[K,J]+PI[K];PR[J]-K
230*
231 S[J]-1
232 J-J+1;SI J<NS+1 ALORS ALLER EN 204;RETOUR
247 PROCEDURE &ZZ(XX)
248 FAIRE 248 POUR ZZZ-1 JUSQUA NS;XX[ZZZ]-0
249 RETOUR
RAPENAAPBIDON
PRET
APPELER PENI
PERFORER A PARTIR DE 1
1*PENI RECHERCHE OPERATIONNELLE
2*27:04:77
3*PEN
10 CHAINE B,F;B-'BIEN';F-'FAUX'
11 CHAINE PV;PV-'PROV'
12 CHARGER EX,11;PV;CHARGER T,10,PV;NS-EX(1)
13 &DEB()
14 TABLEAU S[NS],M[NS],PI[NS],PR[NS]
16 &ZZ(S);&ZZ(PR);&ZZ(M)
18 FAIRE 18 POUR I-1 JUSQUA NS;PI(I)-1E33
20 S(I)-1;PI(I)-0
22 AFFICHER 'QUEL EST LE PREMIER SOMMET QUE VOUS MARQUEZ ? : ';LIRE A
24 SI A=1 ALORS AFFICHER B SINON DEBUT AFFICHER F;ALLER EN 22 FIN
25 AFFICHER 'UN CONSEIL : CHAQUE FOIS QUE VOUS AUREZ MARQUE UN SOMMET , '
26 AFFICHER 'FAITES-LE AUSSI SUR VOTRE GRAPHE , A COTE DE LUI , '
27 AFFICHER 'INDIQUEZ AUSSI LA PLUS COURTE DISTANCE DU SOMMET DE DEPART '
28 AFFICHER 'AU SOMMET CONSIDERE .';AFFICHER(/,40'--']
29 AFFICHER 'VEUILLEZ LIRE CE MESSAGE AVEC ATTENTION . SI VOUS NE LE '
30 AFFICHER 'COMPRENEZ PAS , FAITES APPEL A VOTRE PROFESSEUR .';PAUSE
31 AFFICHER 'QUELLE DISTANCE INDIQUEZ-VOUS A COTE DU SOMMET I ? ';LIRE B
34 SI PS=0 ALORS ALLER EN 40
36 AFFICHER(/,U,/, ' JE REPETE ! '];F;ALLER EN 25
40 AFFICHER B
42 &PROCI()
43 AFFICHER 'VOUS AVEZ DEJA MARQUE LE SOMMET I . '
44 AFFICHER 'UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D'ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMES
45 AFFICHER 'QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES , '
60 CHAINE PV;PV-'PROV'
62 GARER S,1,PV
63 GARER M,2,PV
64 GARER PI,3,PV
65 GARER PR,4,PV
70 EXECUTER 'PEN2'
140 PROCEDURE &DEB()
142 AFFICHER 'JE VAIS VOUS PRESENTER '
144 SI EX(4)=0 ALORS AFFICHER('UN ' ] SINON AFFICHER('A NOUVEAU L''')
146 AFFICHER('ALGORITHME .')
152 AFFICHER 'LE PRINCIPE DE CET ALGORITHME CONSISTE A CHERCHER '
153 AFFICHER 'LES PLUS COURTES DISTANCES DE PROCHE EN PROCHE , A PARTIR '
154 AFFICHER 'DU SOMMET DE DEPART ,POUR CHACUN DES SOMMETS DU GRAPHE . '
155 AFFICHER 'VOUS AUREZ DONC TERMINE QUAND VOUS AUREZ MARQUE TOUS LES '
156 AFFICHER 'SOMMETS DU GRAPHE . '
160 RETOUR
200 PROCEDURE &PROCI()
202 J-1
204 FAIRE 206 POUR JJ-J JUSQUA NS
206 SI S[JJ]#1 ALORS ALLER EN 210
208 PAUSE;*ERREUR DE PROGRAMMATION
210 J-JJ

```

```

212 FAIRE 220 POUR K-1 JUSQUA NS
214 SI S[K]=1 OU T[K,J]=1E33 ALORS ALLER EN 220
216 J←J+1; SI J=NS+1 ALORS RETOUR; ALLER EN 212
220*
222 M[J]←1; K←1; P1[J]←T[K,J]+P1[K]
224 FAIRE 230 POUR K-1 JUSQUA NS
226 SI P1[J]<T[K,J]+P1[K] ALORS ALLER EN 230
228 P1[J]←T[K,J]+P1[K]; P1[J]←K
230*
232 J←J+1; SI J<NS+1 ALORS ALLER EN 204; RETOUR
247 PROCEDURE &ZZ(XX)
248 FAIRE 248 POUR ZZZ-1 JUSQUA NS; XX[ZZZ]←0
249 RETOUR
RAPENIAPBIDON
PRET
APPELER PEN2
PERFORER A PARTIR DE 1
1*PEN2 RECHERCHE OPERATIONNELLE
2*27:04:77
3*PEN
10 CHAINE B,F,PV,JR
11 JR←' JE REPETE : '
12 B←'BIEN'; F←'FAUX'; PV←'PROV'
13 CHARGER EX,11,PV; CHARGER T,10,PV
14 NS←EX[11]; TABLEAU E[NS]
15 EX[41]←1; GARER EX,11,PV
16 CHARGER S,1,PV; CHARGER M,2,PV; CHARGER P1,3,PV; CHARGER PR,4,PV
26 AFFICHER 'QUEL SOMMET MARQUEZ-VOUS MAINTENANT ?'; LIRE T1
27 SI T1>NS ALORS DEBUT AFFICHER F,JR; ALLER EN 26 FIN
28 SI M[T1]#1 ALORS DEBUT AFFICHER F,JR; ALLER EN 26 FIN
30 AFFICHER B;&ZZ(M)
34 AFFICHER 'INDIQUEZ LA PLUS COURTE DISTANCE DE L''ORIGINE AU SOMMET Q'
35 AFFICHER 'VOUS VENEZ DE MARQUER : '; LIRE V
46 SI V#P1[T1] ALORS DEBUT AFFICHER F,JR; ALLER EN 34 FIN
48 AFFICHER B;S[T1]←1
52 &PROC1()
53 AFFICHER[ / ]
54 AFFICHER 'VOUS AVEZ DEJA MARQUE LES SOMMETS : '; &PROC2()
55 AFFICHER 'UN SOMMET EST SUSCEPTIBLE D''ETRE MARQUE SI TOUS LES SOMMET
56 AFFICHER 'QUI LE PRECEDENT DANS LE GRAPHE SONT DEJA MARQUES .'
70 ALLER EN 26
100 AFFICHER 'QUELLE EST LA VALEUR DU PLUS COURT CHEMIN ENTRE L''ORIGINE
101 AFFICHER 'ET LE DERNIER SOMMET?'
103 LIRE SI
105 SI P1[NS]#SI ALORS DEBUT AFFICHER F; ALLER EN 100 FIN
107 AFFICHER B
108 &ZZ(E)
110 AFFICHER 'QUELS SONT LES SOMMETS QUI CONSTITUENT LE PLUS COURT CHEMIN
111 AFFICHER[ '?',/,20X,'VOUS POUVEZ LE RETROUVER']
112 AFFICHER 'SUR VOTRE GRAPHE A PARTIR DU DERNIER SOMMET EN FAISANT DES
113 AFFICHER 'SOUSTRACTIONS .COMMENCEZ PAR LE SOMMET DE DEPART '
115 AFFICHER 'ARRET EN TAPANT 0 EN FIN DE LISTE : '
116 FAIRE 118 POUR N-1 JUSQUA NS; LIRE E[N]
117 SI E[N]>NS ALORS DEBUT AFFICHER F,JR;&ZZ(E); ALLER EN 110 FIN
118 SI E[N]=0 ALORS ALLER EN 119
119 W←0
120 FAIRE 122 POUR Q-1 JUSQUA N-2
122 W←W+T[E[Q],E[Q+1]]
123 SI W#S1 ALORS DEBUT AFFICHER F,JR;&ZZ(E); ALLER EN 110 FIN
124 AFFICHER B
126 SI EX[21]#1 ALORS ALLER EN 128; EX[11]←EX[11]+1
127 AFFICHER 'POURSUIVONS AVEC ',EX[11],' SOMMETS'
128 GARER EX,11,PV; AFFICHER 'JE VOUS PRESENTE UN NOUVEAU GRAPHE'
129 EXECUTER 'PEN'
200 PROCEDURE &PROC1()
202 J←1

```

```
204 FAIRE 206 POUR JJ=J JUSQUA NS
206 SI S[JJ]#1 ALORS ALLER EN 210
208 RETOUR
210 J=JJ
212 FAIRE 220 POUR K=1 JUSQUA NS
214 SI S[K]=1 OU T[K,J]=1E33 ALORS ALLER EN 220
216 J=J+1;SI J=NS+1 ALORS RETOUR
217 SI S[JJ]#1 ALORS ALLER EN 212 SINON ALLER EN 216
220*
222 M[J]+1;K=1;PI[J]=T[K,J]+PI[K]
224 FAIRE 230 POUR K=1 JUSQUA NS
226 SI PI[J]<T[K,J]+PI[K] ALORS ALLER EN 230
228 PI[J]=T[K,J]+PI[K];PR[J]=K
230*
232 J=J+1;SI J<NS+1 ALORS ALLER EN 204;RETOUR
240 PROCEDURE &PROC2() LOCAL K
241 FAIRE 242 POUR K=1 JUSQUA NS
242 SI S[K]=1 ALORS AFFICHER[F3.0JK
243 SI TI=NS ALORS RETOUR EN 100;RETOUR
247 PROCEDURE &ZZ(XX)
248 FAIRE 248 POUR ZZZ=1 JUSQUA NS;XX[ZZZ]=0
249 RETOUR
RAPPRARAPEN2APBI DON
```

2.6. - EXPOSE DU PROBLEME SANS ORDINATEUR

Comme nous l'avons déjà dit, il y avait des enseignants qui s'intéressaient à notre problème et qui travaillaient dans un lycée non muni d'ordinateur. Nous avons jugé intéressant de faire l'expérience sans utiliser l'ordinateur. Dans ces cas, elle s'est déroulée de la façon suivante :

Tout d'abord, le professeur a donné les définitions, il a fait les remarques nécessaires et ensuite, il a exposé le "problème de la diligence".

Avant de présenter l'algorithme, il a fait faire aux élèves un exercice : essayer de trouver le "plus court chemin" dans un graphe de 7 sommets et dans un autre de 12. Cela avait comme objet de montrer qu'il n'est pas évident de trouver la solution sans utiliser un algorithme, surtout pour le graphe de 12 sommets. On voulait motiver le besoin d'apprendre un algorithme.

Exposé de l'algorithme de Bellman dans le graphe de 7 sommets et proposition d'un exercice où on demandait d'utiliser la procédure de Bellman pour trouver le "plus court chemin" dans un graphe de 10 sommets et dans celui de 12 sommets.

Une fois que les élèves ont compris l'algorithme, l'enseignant a fait les remarques nécessaires et à la fin, il a distribué les questionnaires. Le temps utilisé pour cette expérience était d'une heure.

2.7. - TEXTE ET CRITIQUE DES QUESTIONNAIRES

Voici le questionnaire qui a été distribué aux 178 élèves de 1^è et 2^è des lycées techniques et lycées classiques et modernes. 142 élèves qui ont travaillé sur ordinateur et 36 qui ont fait l'exercice sans ordinateur.

Ensuite, se trouve le questionnaire distribué aux 6 enseignants responsables de ces élèves.

Le questionnaire pour les élèves des lycées non munis d'ordinateurs a été le même, avec les questions 1.1. et 1.2. supprimées ainsi que la première phrase de la 2^è question. Dans celui des enseignants, ont été supprimées les questions 1.1. et 1.2..

DATE :

ETABLISSEMENT :

CLASSE :

		<u>Réponses</u>
1.	Cet exercice vous a-t-il intéressé ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
	Si OUI :	
1.1.	Du point de vue contenu ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
1.2.	Du point de vue de la méthode ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
2.	Si on utilise cet algorithme sans tenir compte de l'ordinateur : Peut-on, assurer qu'on a trouvé le plus court chemin ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
2.1.	Pourquoi ?	----- ----- ----- -----
3.	Pensez-vous qu'il s'agit d'un problème de mathématiques ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
4.	Voyez-vous des liaisons avec d'autres sujets que vous connaissez ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
4.1.	Si oui, lesquels ?	----- ----- ----- -----
5.	Pensez-vous qu'il serait utile d'apprendre des choses de ce genre ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
5.1.	Dites pourquoi	----- ----- ----- -----
6.	Pensez-vous que de tels problèmes sont utiles dans la vie courante ?	OUI <input type="checkbox"/> NON <input type="checkbox"/>
6.1.	Si oui, donnez un exemple	----- ----- ----- -----

DATE :

ETABLISSEMENT :

CLASSE :

NOM :

1.	Selon vous, cet exercice a-t-il intéressé vos élèves ?...	OUI NON	
	Si OUI :		
1.1.	Du point de vue contenu?...	OUI NON	
1.2.	Du point de vue méthode pédagogique?	OUI NON	
2.	A quel point de vue l'exercice vous a-t-il semblé utile pour vos élèves? (numérotez chacun des points de vue selon l'importance que vous leur attribuez). - Acquisition de connaissances que doit avoir un homme de notre temps... - Contact avec des sujets pratiques et stimulants..... - Développement des aptitudes créatrices..... - Autres.....		
3.	Avez vous déjà travaillé sur des problèmes de Recherche Opérationnelle(1) avec vos élèves ?	OUI NON	
3.1.	Si OUI : Lesquels ?		
3.2	Ils ont été présentés en dehors des cours ?	OUI NON	
4.	Considérez-vous que des problèmes d'optimisation de ce genre sont importants dans la vie courante ?	OUI NON	
5.	Considérez-vous qu'il s'agit là de questions de mathématiques ?.....	OUI NON	
	(1) graphes, programmation mathématique processus stochastiques, théorie des jeux, programmation dynamique, simulation, algèbre de scrutins, etc...		

	<p>Si OUI:</p> <p>6. Considérez-vous que les problèmes d'optimisation peuvent se rattacher à un chapitre des mathématiques actuellement enseignés ?</p> <p>6.1. Si OUI, lequel ?</p> <p>Si NON :</p> <p>6.2. S'agit-il d'un sujet tout à fait nouveau ?</p> <p>6.3. Est-ce qu'il faudrait l'introduire dans les programmes ?</p> <p>Dans l'affirmative :</p> <p>7. Au niveau de quelle (ou quelles) classe(s) et quelle (ou quelles) section(s) pensez-vous qu'il serait profitable de présenter les programmes d'optimisation ? (cochez les cases correspondantes).....</p> <p>7.1. Lesquelles ?</p>	<p>OUI</p> <p>NON</p> <p>OUI</p> <p>NON</p> <p>OUI</p> <p>NON</p> <p>2èA</p> <p>2èC</p> <p>2èT</p> <p>1èA</p> <p>1èB</p> <p>1èC</p> <p>1èD</p> <p>1èE</p> <p>T,A</p> <p>T,B</p> <p>T,C</p> <p>T,D</p> <p>T,E</p> <p>autre(s)</p>
--	---	--

8.	Pouvez-vous indiquer un ou plusieurs sujets, parmi ceux qui figurent actuellement dans les programmes scolaires et qui seraient moins importants pour les élèves que les problèmes d'optimisation ? (signaler les niveaux).		<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>
9.	Pensez-vous qu'un ordinateur est essentiel pour présenter de tels problèmes ?	OUI NON	
10.	Avez-vous des remarques à faire ?		<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

Pendant le dépouillement des questionnaires des élèves, nous nous sommes rendu compte de quelques erreurs dont nous voudrions parler.

Les questions 1.1. et 1.2. n'ont pas été comprises. Elles auraient pu nous apporter des détails sur l'intérêt porté au problème même et au problème comme exercice fait sur ordinateur. On sait qu'il y a des jeunes qui s'intéressent beaucoup aux travaux avec l'ordinateur et ils s'intéressent donc à tout exercice qui est fait dans ces conditions.

En ce qui concerne la question 2, nous l'avons posée pour tester le degré de compréhension du problème. Il faut dire que la réponse correcte n'est pas évidente à exprimer et ce n'est pas facile pour un lycéen de se rendre compte de la justification de l'algorithme, même s'il l'a compris.

La question n'était pas assez claire pour les élèves qui ont travaillé sur ordinateur et nous avons eu des réponses telles que "oui, parce que l'ordinateur ne se trompe pas". Les réponses à cette question n'étant pas fiables, nous ne présenterons pas les résultats.

Les élèves qui ont suivi l'expérience sans ordinateur ont eu des meilleures et même quelques bonnes réponses. La question était un peu plus claire pour eux, mais il est possible que cette différence entre les deux groupes soit due au fait que les premiers se sont beaucoup confiés à l'ordinateur et quand on leur a posé la question, ils n'ont pas cherché à réfléchir, tandis que les secondes étaient plus obligés à le faire.

La question 5.1. était pensée pour le cas d'une réponse affirmative à la 5è question, il aurait fallu donc mettre : "Si oui, dites pourquoi".

La 6è question permet de réfléchir pour répondre à la 5è. Il aurait été souhaitable de poser la 6è avant la 5è.

Nous sommes conscients qu'il faut être très clairs et précis quand on veut être compris par les gens. Ceci semble évident, mais, c'est après cette expérience que nous apprécions son importance et que nous nous rendons compte du niveau auquel il faut s'exprimer quand on s'adresse aux élèves.

2.8. - DEPOUILLEMENT DES QUESTIONNAIRES

Nous allons présenter d'abord le dépouillement des questionnaires des élèves qui ont fait l'exercice à l'aide de l'ordinateur ; dans cette catégorie, nous avons comparé les résultats obtenus dans les sections techniques et les sections classiques.

Ensuite, nous avons fait le dépouillement des questionnaires des élèves qui ont travaillé sans ordinateur et après, nous avons voulu faire la comparaison des résultats des élèves qui ont utilisé l'ordinateur et ceux qui ne l'ont pas utilisé. La dernière section est consacrée au dépouillement des questionnaires des enseignants, ceux qui ont travaillé avec ordinateur, puis ceux qui l'ont fait sans ordinateur.

Ces dépouillements ont été faits à la main, les questionnaires n'étaient pas nombreux. Les élèves qui ont travaillé avec l'ordinateur, ont toujours travaillé par équipe de 3 ou 4, et c'est ainsi qu'ils ont répondu aux questionnaires.

Nous ne considérons pas que ces résultats peuvent être traités comme représentatifs. Les conclusions tirées seront sur la population analysée.

2.8.1 - Dépouillement des questionnaires des élèves qui ont travaillé avec ordinateur.

Le questionnaire a été soumis à 142 élèves de 2^e et 1^{er} des lycées techniques et classiques munis d'ordinateurs. Cette population, appartenant à 8 classes en tout, se répartit comme suit :

Lycées :	Classes :	No. total d'élèves :
. E. HERRIOT (Voiron)	2 ^e C, 2 ^e C, 2 ^e A	56
. CALMETTE (Nice)	1 ^{er} B, 1 ^{er} C, 2 ^e C	66
. Technique ADAM DE CRAPONNE (Salon)	1 ^{er} G, 2 ^e TI	20
		TOTAL 142

Nous avons obtenu les résultats suivants :

Question	Nbre de réponses "OUI"		Nbre de réponses "NON"		Nbre d'abstentions	
1	131	(92 %)	9	(06 %)	2	(02 %)
3	84	(59 %)	52	(37 %)	6	(04 %)
4	54	(38 %)	83	(58 %)	5	(04 %)
5	96	(68 %)	40	(28 %)	6	(04 %)
6	111	(78 %)	30	(21 %)	1	(01 %)

Pour être plus clairs, nous avons mis les pourcentages à côté des effectifs dans le même tableau.

Analyse des résultats :

Le nombre élevé de réponses affirmatives à la première question nous permet de constater qu'en effet, il s'agit d'un sujet qui a intéressé la majorité d'élèves.

En ce qui concerne la 3^è question, 59 % de la population considère qu'il s'agit d'un problème de mathématiques. On aurait pu attendre un pourcentage plus bas, d'un côté parcequ'il s'agit d'un type de problème auquel ne sont pas habitués les lycéens et d'un autre côté parcequ'il ne fait appel directement à aucune notion du programme scolaire. Nous pensons que le pourcentage obtenu s'explique du fait que l'exercice a été fait dans le cadre des séances des mathématiques.

C'est un sujet nouveau pour la très grande majorité des élèves et ils n'ont pas l'expérience nécessaire de ce genre de problèmes pour se rendre compte des liens qu'ils peuvent avoir avec d'autres sujets. Bien qu'il y ait eu 38 % de réponses positives à la 4^è question, les réponses à la question 4.1. montre que seulement 15 % ont cité des sujets différents qui peuvent avoir un lien avec l'exercice (voir tableau question 4.1.).

La question 4.1. était une question à laquelle il fallait répondre dans le cas d'une réponse affirmative à la 4^è question. Parmi les 54 ré-

ponses "OUI" à la 4è, seulement 44 ont répondu à 4.1.. Il y a eu 10 abstentions.

Tableau des réponses (considérées correctes) à la question 4.1. :

	Nbre de réponses
Economie	4
Informatique	3
Logique	3
Jeu Marienbad	2
Relations	2
Organisation	2
Histoire	2
Programmation linéaire	1
Trajectoire des missibles	1
Géographie	1
Construction d'une maison	1
TOTAL	22

Tableau des réponses (considérées incorrectes) à la question 4.1 :

Ce qu'on appelle réponses incorrectes, ce sont des réponses qui ne donnent pas des sujets différents ou bien des réponses qui n'ont pas des liens avec l'exercice.

Itinéraires	9
Voyages	5
Société de transports	4
Vie courante	2
Algorithme de développement de décimaux	1
Problèmes de vitesse, distance, temps	1
TOTAL	22

Il y a 68 % de réponses positives à la 5^e question. Une majorité de notre échantillon pense qu'il serait utile d'apprendre des choses de ce genre. On trouvera, dans le tableau de réponses à la question 5.1., les différentes justifications aux réponses de la 5^e question.

Les réponses à la question 5.1. font un total de 115 parmi lesquelles 94 correspondent aux réponses "OUI" et 21 aux réponses "NON". Il y a eu donc 21 abstentions : 2 aux réponses "OUI" et 19 aux réponses "NON". En effet, cette question était plutôt pour les réponses "OUI". Nous allons voir dans le tableau correspondant que les justifications des réponses négatives sont évidentes et se limitent à répéter la question.

Nous avons classé les réponses de la façon suivante :

	Point de vue formatif	Point de vue utilitaire	autre	Total
	Développe la logique 34	utile dans la vie 32	amusant 2	
	Permet de réfléchir 20		facile 1	
	Développe l'es- prit de synthè- se 2		intéressant 3	
TOTAL	56		32	

Pour les réponses "NON" :

inutile	16
trop simple	5
TOTAL	21

Nous remarquons que cet exercice est apprécié pour être formatif et utile. Cette idée d'utilité, nous allons la retrouver dans la 6^è question où on pose directement le problème :

Le pourcentage des jeunes qui considèrent que tels problèmes sont utiles dans la vie courante est plus grand par rapport à celui de la 5^è question. Bien qu'ils jugent ces sujets comme utiles dans la vie, le nombre d'élèves qui les jugent utiles à apprendre, est inférieur. Aussi, le nombre d'abstentions dans la 5^è question est plus grand que dans la 6^è.

Une explication possible est que l'ordre de ces 2 questions devrait être changé. La 6^è question permet une petite réflexion qui influe sur la réponse à la 5^è. Peut-être, si on changeait l'ordre, on aurait des pourcentages similaires.

Dans le cas d'une réponse affirmative à la 6^è question, nous avons demandé de donner un exemple. Il y a eu 10 abstentions et le reste a répondu par les exemples suivants :

	Nbre de réponses
Réseaux routiers	45
Parcours de trajets	37
Economie	16
Relations politiques	1
Construction de maisons	1
Fils électriques	1
TOTAL	101 (70 %)

La plupart des exemples constituent des sujets directement liés avec le problème du plus court chemin, ce qui n'est pas étonnant, mais il y a aussi des exemples originaux et qui pourraient avoir en effet une relation avec le problème traité. Par exemple, la construction d'une maison peut-être pensée comme un problème d'ordonnancement, dans ce cas, utiliser un graphe PERT et le résoudre à l'aide de l'algorithme du plus court chemin. A propos des problèmes de construction de fils électriques, il est certain que nous pouvons nous intéresser à trouver le chemin le plus court pour minimiser les dépenses à faire, par exemple.

2.8.2 - Comparaison des résultats des élèves des lycées techniques et des élèves des lycées classiques et modernes

Nous avons marqué les résultats dans le tableau suivant :

Question	% de réponses "OUI"		Probabilité estimée de réponses "OUI"
	Elèves des lycées techniques (20)	Elèves des lycées classiques et modernes (122)	
1	100 %	90 %	91 %
3	55 %	59 %	58 %
4	40 %	37 %	37 %
5	75 %	66 %	67 %
6	85 %	77 %	78 %

D'après le test de comparaison de deux hypothèses empiriques, appliqué à toutes les questions ⁽¹⁾, nous avons conclu au seuil de 5 % que la différence de pourcentage pour chaque question n'est pas due à la différence de populations. Les deux échantillons sont apparemment issus de la même population de telle sorte que la probabilité de répondre "OUI" à chaque question est celle marquée dans la 4^e colonne du tableau.

Cette comparaison n'a pas une grande signification, en raison de la différence des tailles des deux échantillons.

En outre, au seuil de 10 %, on serait amené en ce qui concerne seulement la première question, à considérer qu'il y a une différence montrant que les élèves des lycées techniques se sont plus intéressés au problème que les élèves des lycées classiques et modernes.

(1) Voir AZOULAY |1| p. 118.

2.8.3 - Dépouillement des questionnaires des élèves qui ont suivi l'exercice sans utiliser l'ordinateur :

Le questionnaire a été soumis à 36 élèves appartenant à 2 classes, distribuées comme suit :

Lycée :	classe :	Nbre total d'élèves :
. St. ROMAIN en GAL	1èC	20
. Technique ADAM DE CRAPONNE (Salon)	2èT	16
		TOTAL 36

Le tableau suivant montre les résultats obtenus :

Question	Nbre de réponses "OUI"	Nbre de réponses "NON"	Nbre d'abstentions
1	31 (86 %)	4 (11 %)	1 (03 %)
2	31 (86 %)	2 (06 %)	3 (08 %)
3	26 (72 %)	10 (28 %)	0 —
4	17 (47 %)	16 (45 %)	3 (08 %)
5	28 (78 %)	8 (22 %)	0 —
6	24 (67 %)	12 (33 %)	0 —

Analyse des résultats :

Dans ce cas aussi, la majorité de la population juge l'exercice intéressant.

En ce qui concerne la 2è question, 31 élèves sur 36 assurent qu'une fois appliqué l'algorithme, le résultat est en effet le plus court chemin, mais seulement 7 savent dire pourquoi. Il est possible que les autres connaissent aussi la réponse, mais n'arrivent pas à l'exprimer.

Voici les réponses considérées correctes à la question 2.1. :

	Nbre de réponses
On élimine de façon méthodique les chemins les plus longs	4
Système logique qui permet de voir les plus courtes distances de chaque sommet à l'origine	3

Les 17 autres réponses (il y a eu 7 abstentions), sont des réponses incorrectes qui montrent soit que l'élève n'a pas compris, soit qu'il n'a pas su exprimer son idée, par exemple :

"On a testé tous les chemins possibles"

Cette affirmation est fausse, ce n'est pas vrai qu'on a testé tous les chemins, il est possible que cet élève voulait dire qu'on a testé tous les arcs possibles et on a éliminé ceux qui ne nous convenaient pas.

Pour ces élèves, l'identification de ce problème comme un problème de mathématiques n'a pas posé beaucoup de problèmes, 26 sur 36 l'identifient ainsi.

Le nombre de réponses "OUI" à la 4^e question représente moins de la moitié de la population. En effet, il s'agit d'un sujet nouveau qu'au premier abord ne permet pas de voir les liens qui peuvent exister entre lui et d'autres sujets. Toutefois, les élèves qui ont dit qu'il voyaient d'autres sujets en liaison avec l'exercice, ont donné quelques bonnes réponses à la question "lesquels" (4.1). Voyons ces réponses :

	Nbre de réponses
Problèmes de dénombrement	6
Arbres de choix (recurrence)	4
Problèmes d'une entreprise	2
Organisation du travail	2
Problèmes d'analyse combinatoire	1
Raids automobiles	1
Procédé par recurrence	1
TOTAL	17 (sur 36)

Un grand nombre de réponses affirmatives à la 5^è question nous permet de dire que la plupart de ces élèves ont apprécié, et considèrent utile d'apprendre des choses de ce genre.

Une fois encore, dans la question 5.1., on retrouve de nombreuses abstentions (9 "OUI", 7 "NON"). Peut-être ne sont-ils pas habitués à dire pourquoi ils pensent telle ou telle chose. Les réponses sont classées comme avant :

- Pour les réponses "OUI" :

Point de vue formatif	Point de vue utilitaire	Autre	TOTAL
développe l'es- prit de logique 5	utile dans la vie et le tra- vail 6	un jeu mathé- matique 1	
nous apprend à raisonner 2	utile pour l'é- conomie 3		
développe l'es- prit de recher- 2 che			
TOTAL 9	9	1	19 (sur 36)

- Pour les 8 réponses "NON", il y a eu 7 abstentions et une réponse qui est évidente :

Inutile	1
---------	---

Pour finir cette analyse, voyons les réponses à la 6^è question :

Le nombre de jeunes qui pense que de tels problèmes sont utiles dans la vie courante est inférieur au précédent mais il correspond aux deux tiers de l'effectif de l'échantillon.

Les exemples de la dernière question (6.1.) se trouvent dans le tableau suivant.

Il n'a pas eu d'abstentions, mais il y a eu des réponses évidentes (comme "voyage") et d'autres qui à priori n'ont pas de liaison avec la problème (par exemple, "chômage").

Voyage	16
Industrie	5
Achats	1
Chômage	1
Pour rédiger une énigme	1
TOTAL	24

2.8.4.- Comparaison des résultats des élèves qui ont travaillé sur ordinateur et des élèves qui n'ont pas travaillé sur ordinateur :

Pour faciliter cette comparaison, nous allons marquer les résultats dans le tableau suivant :

QUESTION	% de réponses "OUI"		Probabilité estimée de réponses "OUI"
	élèves qui ont travaillé avec ordinateur (142)	élèves qui ont travaillé sans ordinateur (36)	
1	92 %	86 %	90 %
3	59 %	72 %	61 %
4	38 %	47 %	39 %
5	68 %	78 %	70 %
6	78 %	67 %	75 %

Nous avons appliqué le test de comparaison de deux hypothèses empiriques à toutes les questions⁽¹⁾ et nous avons conclu qu'au seuil de 5 % la différence de pourcentage pour chaque question, apparemment, n'est pas due à la différence de populations. C'est-à-dire, les deux échantillons sont issus de la même population (élèves, sans distinction) telle que la probabilité de répondre "OUI" à chaque question est celle marquée dans la 4^e colonne du tableau.

Cette comparaison n'a pas une grande signification en raison de la différence de tailles.

(1) Voir AZOULAY |1| p. 118

Au seuil de 10 %, les résultats nous ont amenés à faire les conclusions suivantes :

Pour la 3^è question, la différence de fréquences est apparemment dûe à la différence de populations. Ce qui revient à dire que les élèves qui n'ont pas travaillé avec ordinateur associent plus facilement le problème traité avec la mathématique, que ceux qui ont travaillé sur ordinateur. Celà pourrait s'expliquer par la relation enseignant-élève.

Pour la 6^è question, les élèves qui ont travaillé avec ordinateur, sont un peu plus nombreux à considérer utiles les problèmes d'optimisation dans la vie courante que ceux qui n'ont pas travaillé avec ordinateur, bien que tous les deux constituent une majorité.

Pour le reste des questions, il n'y a pas apparemment une différence de populations.

2.8.5.- Dépouillement des questionnaires des enseignants :

Le questionnaire a été soumis à 5 enseignants qui ont travaillé avec ordinateur. Les résultats obtenus sont les suivants :

Question	Nbre de réponses "OUI"	Nbre de réponses "NON"	Nbre d'absentions
1	4	1	0
1.1	3	1	0
1.2	2	2	0
3	3	2	0
3.2	1	2	0
4	2	1	2
5	5	0	0
6	2	2	1
6.2	2	3	0
6.3	5	0	0
9	1	4	0

Analyse des résultats :

Le nombre de réponses positives à la 1^è question vérifie les affirmations que nous avons faites dans le dépouillement antérieur au sujet de l'intérêt des élèves pour le problème du "plus court chemin".

Nous avons dit que les questions 1.1. et 1.2. du questionnaire des élèves n'ont pas été bien comprises. Nous n'avons pas pu en tirer des conclusions. Dans les questionnaires des enseignants, il y avait les mêmes questions et basés dans celles-là, nous pourrions dire le suivant :

Parmi les quatre enseignants qui jugent que l'exercice à intéressé leurs élèves, il y en a trois qui attribuent cet intérêt au contenu de l'exercice, c'est-à-dire que le problème du plus court chemin et l'algorithme de Bellman ont plu à ces élèves. Ils constituent 57 % du total de notre échantillon d'élèves, ceci peut nous donner une idée approximative des réponses des élèves à cette question.

Il y a deux enseignants qui attribuent cet intérêt à la méthode pédagogique. L'utilisation des ordinateurs et la manipulation des écrans numériques constituent une nouveauté qui rend ce genre d'exercice intéressant pour les lycéens. Le pourcentage correspondant d'élèves est 43 %.

Les réponses à la 2^e question sont les suivantes :

	Nbre de réponses dans chaque ordre				Abstentions
	1 ^e	2 ^e	3 ^e	4 ^e	
a. Acquisition de connaissances que doit avoir un homme de notre temps	0	1	0	2	2
b. Contact avec des sujets pratiques et stimulants	4	1	0	0	0
c. Développement des aptitudes créatrices	1	2	1	0	1
d. Autre	0	1	2	0	2

Les réponses pour "autre" sont :

- Organisation d'un travail
- Problèmes de réflexion
- Problèmes d'optimisation

On pourrait prendre comme classification "représentative"⁽¹⁾, la suivante :

- 1^è - b : Finalité utilitaire
- 2^è - c : Finalité formative
- 3^è - d : Autre (formative)
- 4^è - a : Finalité culturelle

D'après la question n° 3 : 3 enseignants ont déjà travaillé des sujets de R.O. avec leurs élèves. Ils ont marqué dans le tableau correspondant à la question 3.1. les différents problèmes traités.

Voici les réponses à la question 3.1. :

Sujets de la R.O. traités	Nbre d'enseignants
Programmation linéaire	3
Simulation	2
Jeux	2
Problèmes d'optimisation tels que optimiser le nombre de questions pour deviner un mot.	1

Nous croyons que "Jeux" ici, ne se réfère pas à la théorie des jeux connue en R.O.. Il n'est pas facile de faire une telle présentation au niveau secondaire.

Ces sujets ont été exposés plutôt dans les cours qu'en dehors de ceux-ci (question 3.2.). En effet, la programmation linéaire fournit des problèmes qui servent à l'étude des équations et inéquations de 1^{er} degré.

L'opinion à propos de l'importance des problèmes d'optimisation dans la vie courante (4^è question) est divisée : 2 "OUI", 1 "NON", 2 abstentions. Ceci s'explique peut-être parce que ces problèmes ne sont pas bien connus.

Tous les professeurs de notre échantillon considèrent que les problèmes d'optimisation appartiennent aux mathématiques (5^è question), mais ce n'est pas évident de les rattacher aux chapitres des mathématiques actuellement enseignés (6^è question). Néanmoins, dans les réponses correspondantes

(1) Nous avons utilisé la méthode de BORDA. Elle consiste à donner des poids à chaque ordre et faire l'addition pour chaque objet à classer.

à la question 6.1., il y a quelques propositions de chapitres où ces enseignants considèrent possible de rattacher des sujets de R.O. :

- Calcul numérique
- Solution linéaire
- Droites du plan.

Ceci se réfère à la programmation linéaire certainement.

Il y a trois enseignants qui considèrent qu'il ne s'agit pas d'un sujet tout à fait nouveau (question 6.2). Il s'agit des enseignants qui avaient déjà travaillé ces problèmes.

Dans la question 6.3., nous avons trouvé des résultats assez importants : les 5 professeurs affirment qu'il faudrait introduire ces sujets dans les programmes et ils apportent des suggestions sur les niveaux où il faudrait les introduire. Voyons ces propositions dans le tableau suivant :

Enseignants	2èA	2èT	2èC	1èA	1èB	1èD	1èE	1èC	TA	TB	4è	3è	2è	
1	✓			✓	✓				✓	✓				Littéraires
2				✓	✓	✓	✓	✓						Première
3											✓	✓	✓	1er cycle et début du 2è cycle.
4			✓											2èC
5		✓	✓		✓	✓			✓					
Scientifiques			2					1					3	
Littéraires	1			2	3				2	1			9	
Techniques		1				2	1						4	

Les réponses sont en fait très dispersées. L'intérêt est d'introduire la R.O. un peu à tous les niveaux du 2^e cycle et en 4^e et 3^e du 1^{er} cycle. Il y a une tendance à considérer que l'introduction de ces sujets serait plutôt profitable dans les sections littéraires que dans les scientifiques, les sections techniques étant entre les deux.

Les réponses à la question 8 sont les suivantes :

- Géométrie (2^eA)
- Projection orthogonale et produit scalaire (2^eC et 1^eB)
- Matrices (1^eB et 1^eD)
- Rotations vectorielles (1^eB et 1^eD)
- Calcul d'erreurs (2^e, 1^e et Terminale)
- Programme de (Terminale A)
- Continuité (classes littéraires, 1^e et Terminale)
- Tables numériques (toutes classes).

A propos de tables numériques, nous avons trouvé le commentaire suivant : "que du temps perdu pour si peu d'efficacité".

Le programme de Terminale A : "à revoir car non adapté aux élèves de A".

Matrices et rotations vectorielles "sont trop développées en 1^eD".

Nous sommes d'accord sur la nécessité de revoir le programme de Terminale A. En ce qui concerne le chapitre de géométrie en 2^e A, il est facultatif, la proposition faite plus haut, ne reste pas valable.

Il existe aussi des chapitres qui ne sont pas faciles à enseigner (tels que continuité) et on propose donc de les enlever des programmes officiels.

Il est clair que pour faire un changement de programme, il serait nécessaire de faire de nombreuses études et considérations réalisées par des équipes de spécialistes et bien entendu en tenant compte de propositions des professeurs.

Dans la 9^e question, 4 enseignants considèrent qu'un ordinateur n'est pas essentiel pour présenter de tels problèmes: Ceci est vrai, en ef-

fet , mais le traitement de ceux-ci par ordinateur sert à donner une idée d'ulien qui existe entre mathématique appliquée et informatique.

Les remarques faites dans la 10^è question portaient sur le programme et les instructions.

Deux enseignants ont travaillé l'exercice sans ordinateur, l'un des deux a fait l'expérience avec deux autres groupes avec ordinateur et son questionnaire a été dépouillé dans le tableau précédent. Voici donc les réponses d'un seul professeur.

Question	OUI	NON	Abstention
1	1	0	0
3	0	1	0
3.2	0	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0
6	1	0	0
6.2.	0	0	0
6.3	1	0	0
9	1	0	0

La réponse à la 1^è question réaffirme nos conclusions faites sur ce point.

Voici la réponse à la question 2 :

- 1^è - b : Contact avec des sujets pratiques et stimulants
- 2^è - c : Développement des aptitudes créatrices.
- 3^è et 4^è : Abstention

Dans notre classification représentative, les points b et c sont placés dans le même ordre que dans cette réponse.

Cet enseignant n'avait jamais travaillé des problèmes de R.O, mais il considère que ce type de problèmes est important dans la vie courante. Lui aussi, comme tous les autres enseignants pense qu'il s'agit de questions de mathématique.

Il considère que les problèmes d'optimisation peuvent se rattacher à quelques chapitres actuels des mathématiques et il cite :

- convexité
- et - barycentre.

En effet, l'ensemble des solutions d'un problème de programmation linéaire est un ensemble convexe. En ce qui concerne le barycentre, il est possible de faire la relation entre ce sujet et la programmation linéaire (voir Ch.2). Il considère comme les autres enseignants qu'il faudrait introduire ce type de problèmes dans les programmes et les classes qu'il propose sont les suivantes :

2èA, 2èT, 2èC, 1èA, 1èB, 1èD, 1èE, et 1èC.

La majorité des enseignants proposent cette introduction au niveau du 2è cycle. Nous croyons qu'il est possible de la faire à partir du 1er cycle (nous en parlerons au Chapitre 3). Peut-être ces enseignants proposent 2è cycle parce que c'est à ce niveau qu'ils travaillent.

Il n'y a pas de réponse à la question 8, et ce professeur considère qu'un ordinateur est essentiel pour présenter de tels problèmes.

2.9. - CONCLUSIONS

Cette expérience constitue une approche des problèmes de R.O. susceptibles d'être introduits au niveau secondaire. Elle nous a permis d'enregistrer les réactions de quelques élèves et enseignants à propos du problème traité et de tirer certaines conclusions que nous reprendrons ici une à une.

Il aurait été souhaitable d'inclure dans cette expérience différents problèmes représentatifs des diverses techniques de R.O.. Ils nous auraient permis de faire des conclusions générales sur les sujets proposés. Cela étant impossible, en particulier à cause de la limite de temps, aussi bien du côté enseignants que de notre côté, nous nous sommes donc limités à un seul problème classique de R.O..

- Nous nous étions fixé un premier objectif : connaître le degré d'acceptation de ce problème par les élèves et professeurs des lycées.

Nous avons pu constater que le pourcentage d'élèves qui ont jugé intéressant le problème a été très élevé dans tous les cas.

En ce qui concerne les professeurs, tous se sont montrés intéressés par le sujet.

- Un autre objectif était de connaître le point de vue des enseignants à propos des problèmes d'optimisation.

Les points de vue des professeurs sur l'intérêt de cet enseignement sont, d'abord un point de vue utilitaire et ensuite un point de vue formatif. Le premier étant le plus important.

- Nous avons comme troisième objectif de connaître le degré d'assimilation de ce genre de problèmes. Nous ne pensons pas pouvoir le confirmer de façon certaine. Le moyen de contrôle adopté s'est avéré inopérant.

- Notre dernier objectif était de connaître l'avis des professeurs et des élèves sur la possibilité d'introduire de tels sujets dans l'enseignement secondaire. Sur ce point, nous avons eu des réponses très satisfaisantes : Du côté des professeurs, tous ont répondu qu'il faudrait les introduire dans les programmes et ils ont fait quelques suggestions sur les niveaux possibles et les chapitres où les rattacher.

A ce propos, nous voulons citer un paragraphe des résultats de l'enquête "Image des Mathématiques et leur utilisation dans le grand public" [3] : "Les notions d'optimisation et d'information ne figurent pas actuellement dans les programmes. Leur introduction ne semble pas soulever de résistance particulière de la part du corps enseignant".

Du côté des élèves, la majorité considère qu'il serait utile d'introduire des sujets tels que le problème du plus court chemin, dans l'enseignement secondaire.

Bien que ces conclusions concernent une population limitée, qui n'est pas représentative de tous les élèves des lycées et de tous les professeurs de classes secondaires en France, nous retenons le fait qu'une grande majorité des élèves et professeurs interrogés se sont montrés ouverts aux problèmes posés.

Nous nous sommes donc intéressés à faire quelques propositions de sujets susceptibles d'être présentés dans les classes secondaires, objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

RATTACHEMENTS POSSIBLES DANS LES PROGRAMMES

L'objet de ce chapitre est d'exposer certains exemples qui pourront donner des idées aux professeurs sur des questions qui ne sont pas traitées dans les programmes et auxquelles il serait intéressant de réfléchir.

A notre avis, les sujets de R.O. susceptibles d'être introduits au niveau secondaire sont : graphes et réseaux, programmation linéaire, théorie des jeux, simulation et problèmes d'agrégation d'opinions. Ces sujets fournissent de très nombreuses applications des mathématiques parmi lesquelles nous proposons certaines qui pourraient se rattacher aux programmes de mathématiques.

Il est présenté, dans la deuxième section de ce chapitre, un contenu des sujets de R.O. pour les programmes du 1er et 2è cycle.

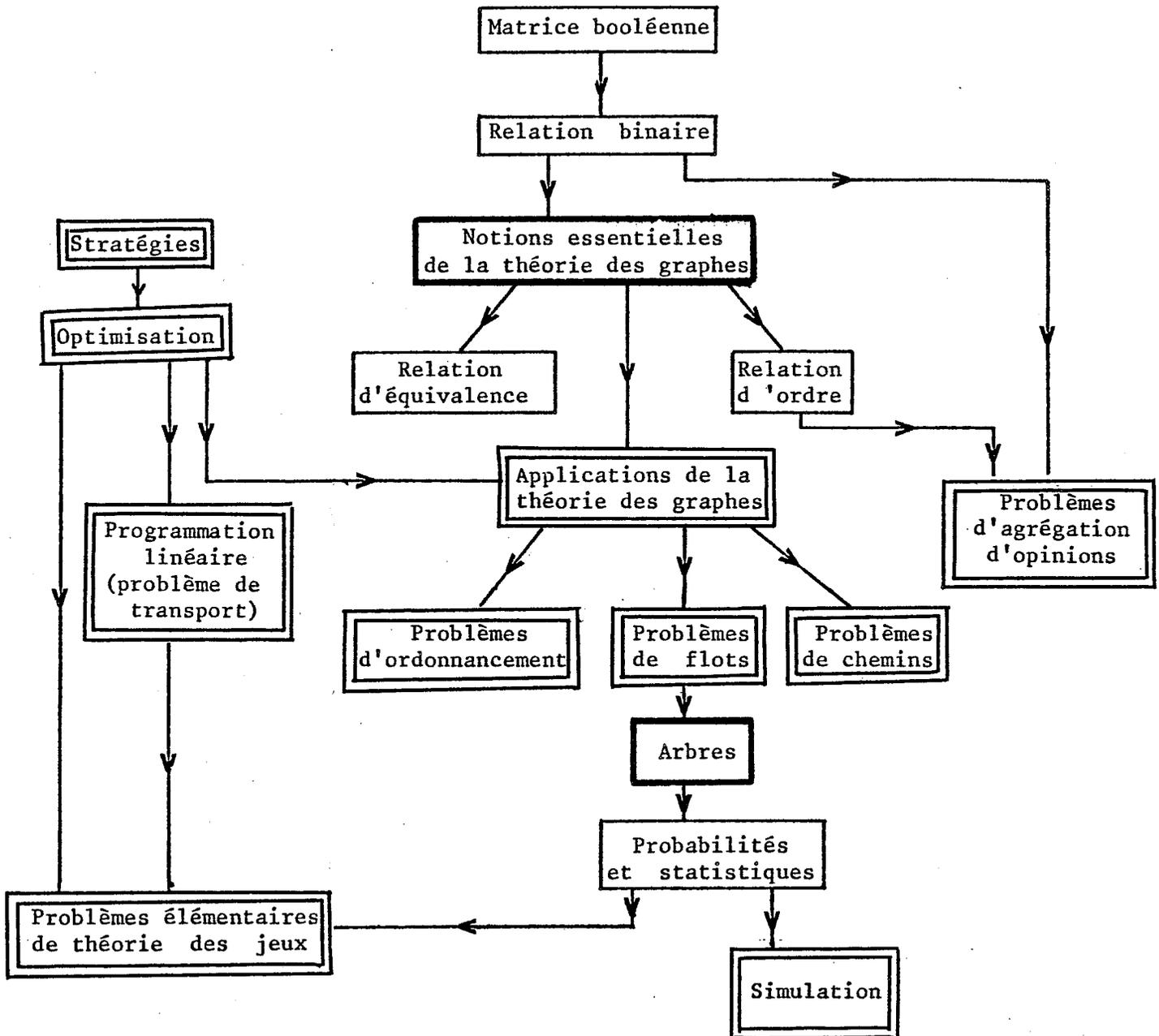
Nous parlerons dans la section 3 des niveaux auxquels nous proposons d'introduire les méthodes de R.O., et la présentation de ces méthodes sera faite en détail dans la dernière section.

3.1. - EST-IL UTILE OU SOUHAITABLE DE PRONONCER DANS LES PROGRAMMES LE MOT "R.O." ?

Nous considérons qu'au niveau du second degré, la R.O. ne mérite pas un gros titre qui risque de laisser croire, d'une part, qu'il s'agit d'une discipline séparée des mathématiques, et d'autre part, qu'elle se limiterait aux sujets présentés. Pour ceci, nous proposons de présenter les insertions possibles sans spécifier aux élèves qu'il s'agit de méthodes de R.O. .

3.2. - CONTENU PROPOSE

Voici un organigramme où s'insèrent quelques sujets de R.O. parmi des contenus qui font partie des programmes de 1er et 2nd cycle.



- Les cases en traits fins correspondent aux contenus des programmes.
- Les cases en traits gras indiquent des sujets dont l'étude est préalable à l'étude de ceux de la R.O.
- Les cases en traits doubles correspondent aux sujets de R.O.

3.3. - A QUEL NIVEAU INTRODUIRE LES METHODES DE R.O. ?

Quand nous nous sommes posé cette question, nous avons cherché, dans les programmes de mathématiques, ainsi que dans les manuels de 1er et 2è cycle, quel était le matériel théorique dont on disposait.

Nous pensons qu'il est possible de donner un léger aperçu des applications des réseaux dès la 6è.

Au cour du premier cycle, après avoir vu les relations binaires, nous proposons de présenter les graphes orientés et leurs représentations matricielles. Les graphes étant une représentation schématique des relations, permettent d'énoncer et de voir clairement de nombreux problèmes pratiques.

L'usage par la pratique de notions telles que connexité, chemin, cycle, etc..., peuvent faciliter l'étude des relations d'ordre et des relations d'équivalence.

Une fois étudiés certains éléments essentiels de la théorie des graphes, il est possible d'aborder des exercices simples d'application de cette théorie. Par exemple : problèmes d'ordonnancement, de flots et de chemins. Il se trouve dans ces problèmes l'idée d'optimisation.

Nous voulons distinguer (toujours au premier cycle), la définition d'arbre. Il s'agit d'une structure qui apparaît assez souvent dans diverses disciplines. En mathématiques, elle sera utile, en particulier, dans le chapitre de probabilités et statistiques. Elle permettra également de présenter d'autres problèmes pratiques.

D'un autre côté, il est possible d'insérer dans les classes de 3è, des exemples de programmation linéaire sous le grand titre "Algèbre".

Le premier cycle étant fondamental, nous pensons établir ainsi d'une part, les bases nécessaires pour une présentation postérieure des applications des mathématiques (plus particulièrement de quelques méthodes de R.O.), et d'autre part ouvrir des nouvelles voies à l'enseignement mathématique.

Les chapitres signalés dans les programmes actuels de 2^e, ne permettent pas de faire des insertions directes de ces sujets. Toutefois, puisque les programmes de ces classes sont essentiellement un approfondissement des concepts étudiés dans le 1^{er} cycle, il serait conseillé de reprendre certains sujets proposés dans les classes du 1^{er} cycle, pour les approfondir ici. Nous parlerons également de l'introduction de quelques problèmes d'agrégation d'opinions, dans la dernière section.

Ces suggestions s'adressent principalement aux sections littéraires, parce qu'on trouve, dans ces sections, beaucoup d'élèves pour lesquels la rigueur est une barrière. Pour ces élèves, il vaudrait mieux leur présenter les mathématiques comme un outil dont ils pourront s'en servir.

Dans les programmes des classes de première, sections C, D et E, il est possible d'insérer quelques problèmes de programmation linéaire. Dans ces mêmes sections, mais aussi dans les sections littéraires, le programme se prête, dans le chapitre de statistiques, à étudier des problèmes simples de théorie des jeux et de simulation. Problèmes qui permettront de revoir certaines notions de probabilité, développer l'intuition nécessaire en probabilités et statistiques et traiter des applications des mathématiques.

En terminale C, E, il y a un chapitre consacré à l'étude du barycentre. Nous proposons un exercice concret : la notion de barycentre appliquée à la programmation linéaire. Il montrera une liaison entre deux sujets des mathématiques et aiderait ainsi à mieux comprendre l'unité de cette science.

3.4. - POINTS D'INSERTION DANS LES PROGRAMMES. QUELQUES EXEMPLES.

En ce qui concerne le premier cycle, nous avons pris pour exemple les fiches GALION pour montrer les points d'insertion proposés.

Les exemples que nous allons donner doivent être considérés comme suggestions aux enseignants, d'un travail susceptible d'être exécuté avec les élèves.

N'ayant pas l'expérience directe du travail dans les écoles secondaires, nous ne considérons pas ces propositions comme définitives. Néanmoins, il faut dire qu'elles ont été choisies, soit parce qu'elles ont fait l'objet d'expériences de quelques professeurs, soit parce que nous les avons jugé intéressantes (nous signalerons, à côté de chacune, quel est, à notre avis, son intérêt).

Si un sujet est intéressant en lui-même, il n'a pas besoin d'être forcément inséré dans l'édifice des connaissances mathématiques du programme. On gagnera beaucoup si l'élève arrive à comprendre l'essentiel du sujet présenté.

Nous allons proposer des points d'insertion par classes: les classes de 6^e et 5^e ensemble, et 4^e et 3^e ensemble.

3.4.1 - Quelques exemples pour le premier cycle.

CLASSES DE SIXIEME ET CINQUIEME

Après l'étude d'introduction aux relations, nous proposons comme exercice, le problème du "plus court chemin dans un graphe", d'une manière non-formelle : dans les fiches Galion de 6^e, après les six premières fiches, se trouve un exercice qui demande de trouver le plus court chemin entre deux points donnés sur un graphe. Parmi les ambitions de ces six premières fiches, les auteurs citent :

- commencer l'année de façon variée et attrayante
- mettre les élèves en situation de recherche tout en les préparant à l'étude du programme.

Nous considérons que ce travail de recherche du plus court chemin peut-être fait à l'aide d'un algorithme (celui de Bellman par exemple). Cela ne s'oppose pas aux ambitions des auteurs ; d'un côté, ce problème montre un exemple pratique et d'un autre côté, il ouvre une voie d'étude qui servira plus tard.

Quelques notions de théorie des graphes⁽¹⁾

Un graphe n'est pas un outil mathématique nouveau. Il existe une bijection entre l'ensemble des graphes simples $G = (X, V)$ sur un ensemble fini X (ensemble des sommets du graphe), et l'ensemble des relations binaires sur X . Par conséquent, l'étude des graphes simples peut se ramener à celle des relations binaires. Cependant, le fait que les graphes possèdent une représentation graphique claire, aide l'intuition et stimule l'imagination. Les graphes se trouvent donc être des outils précieux de modélisations des problèmes réels. Cela dit, une fois introduites les relations binaires, il serait intéressant d'étudier les graphes orientés.

Le terme mathématique exact de ce que nous allons appeler "réseaux" est "graphe". Néanmoins, puisque le terme "graphe" a été déjà utilisé dans le contexte des relations (fiche Galion 3), nous avons préféré utiliser celui de "réseaux". Ce terme a l'avantage de pouvoir s'associer facilement aux routes, voies ferrées, circuits électriques, etc... Un grand nombre de problèmes importants par leurs applications concrètes, font intervenir des réseaux de différents types.

Nous proposons les jeux suivants comme exemples d'une introduction possible à l'étude des réseaux. Cette insertion peut-être faite après les sept premières fiches correspondantes au chapitre des Relations de Galion.

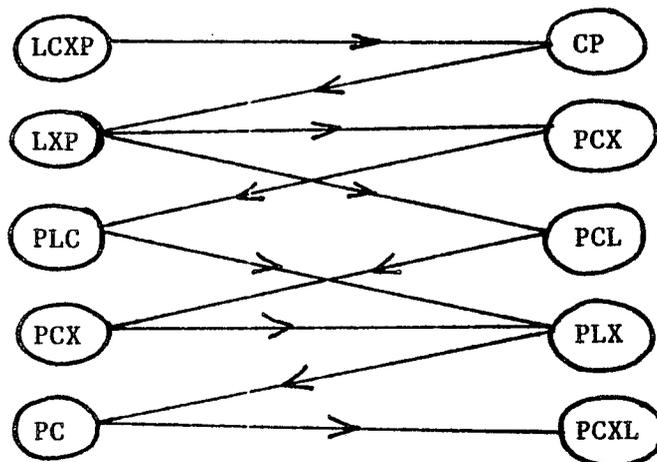
EXEMPLE 1

Les jeux des traversées :

Prenons le vieux problème de la chèvre, du loup et du chou : Un passeur (P) doit faire traverser une rivière à un loup (L), à une chèvre (C) et à un chou (X). Il ne peut porter qu'un seul de ces passagers à la fois dans sa petite barque. Il ne peut pas laisser le loup avec la chèvre, ni cette dernière avec le chou. Comment doit-il faire ?

(1) Nous pensons qu'il n'est pas nécessaire de donner aux élèves les définitions de certaines notions (de théorie des graphes principalement), d'une façon formelle. Une idée intuitive de celles-ci suffirait.

La méthode de solution proposé consiste à construire un réseau biparti⁽¹⁾, dans lequel chacun des 2 ensembles des sommets, représentent les diverses positions du jeu de chacun des 2 côtés de la rivière. Les arcs représentent les mouvements possibles en observant les règles. Nous aurons ainsi un réseau orienté :



EXEMPLE 2

Les jeux de transvasement :

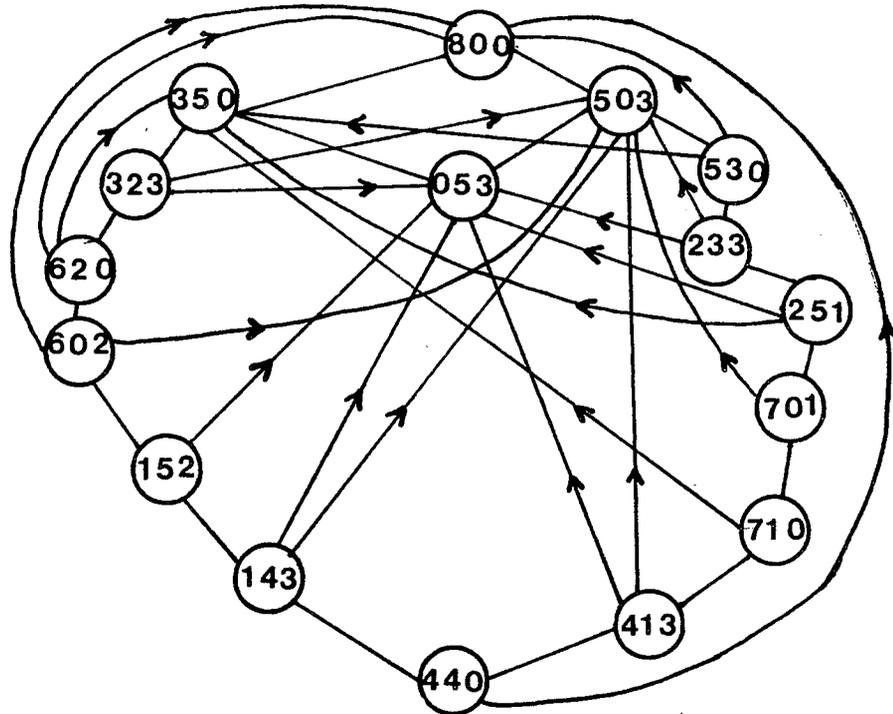
Il est également possible dans ce type de problèmes de trouver la solution en faisant un réseau tel que les sommets correspondent à un ensemble de nombres qui représentent les différents contenus des récipients. Deux sommets seront liés par un arc s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une opération de transvasement (la flèche indique le sens de l'opération). Ce problème est la recherche d'un chemin du réseau allant du sommet de départ au sommet final.

Par exemple⁽²⁾, considérons trois récipients qui mesurent respectivement 8 litres, 5 litres et 3 litres. Le premier contient du vin et on veut le diviser en deux quantités égales en le versant d'un récipient dans l'autre sans utiliser d'autre mesure de capacité que les récipients eux-mêmes.

(1) Un graphe $G = (X, U)$ est dit biparti s'il existe une bipartition de X disons $X = X' \cup X''$ telle que : $(xy) \in U \Rightarrow \begin{cases} x \in X' \text{ et } y \in X'' \text{ ou} \\ x \in X'' \text{ et } y \in X' \end{cases}$

(2) Pris de SAKAROVITCH | 68 | p.5.

Voici le réseau correspondant :



On peut également figurer sous forme de réseau orienté des relations d'amitié entre individus. L'étude de cette relation (ou de ce réseau orienté) peut apporter des renseignements sur la structure du groupe et sur la situation particulière des individus à l'intérieur du groupe.

Comme nous l'avons proposé, après avoir introduit les graphes orientés, il est conseillé d'étudier quelques notions essentielles de la théorie des graphes, avant les relations d'ordre. Dans les fiches Galion, celles-ci apparaissent en 5^e, mais dans d'autres manuels, elles sont étudiées en 4^e.

Pour l'introduction de certaines de ces notions, nous proposons le problème des ponts de Koenigsberg et l'étude de la formule d'Euler :

EXEMPLE 3

Les ponts de Koenigsberg :

Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est au confluent de deux rivières, et comporte une île. Au XVIII^e siècle, il y avait sept ponts disposés ainsi que le représente la figure 1. Les habitants de Koenigsberg cherchaient, s'il était possible, au cours de leur promenade dominicale, de trouver un itinéraire fermé (c'est-à-dire les ramenant à leur point de départ) en traversant une fois et une seule chaque pont.

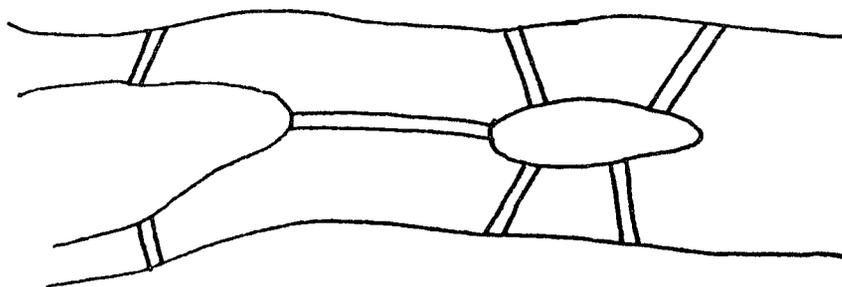


Figure 1 .

Euler trouva la réponse en ramenant le problème à un problème de réseaux.

Il serait intéressant d'étudier avec les élèves la modélisation du problème au moyen d'un réseau.

On essaiera de résoudre le problème des ponts de Koenigsberg avec les élèves. Ensuite, on montrera comment on pourrait ajouter (enlever) un pont de telle sorte qu'une telle promenade soit possible.

De nombreux exercices où l'on remarque le degré⁽¹⁾ de chaque sommet dans un réseau, ainsi que la possibilité (ou l'impossibilité) de faire un circuit Eulerien⁽²⁾ dans celui-ci, permettent d'observer le résultat suivant dû à Euler :

"Il est possible de faire un circuit Eulerien dans un réseau si et seulement si il y a uniquement des sommets de degré pair".

Une fois ce résultat acquis, le problème des ponts de Koenigsberg est facilement résolu.

(1) Soit $G = (X, U)$ un graphe et $x \in X$, on appelle "degré" du sommet x :

$$d_G(x) = \left| \{ (xy) \in U \} \cup \{ (yx) \in U \} \right|$$

(2) Circuit Eulerien est le parcours qu'il faudrait suivre sans lever le crayon de façon à parcourir tous les arcs dans le sens de leur orientation et à revenir au point de départ.

Etude de la formule d'Euler.

Pour déduire la formule d'Euler :

$$S + R = A + 2 \quad \text{où}$$

S est le nombre de sommets du réseau

R " " régions "

A " " arêtes "

Nous proposons de comparer dans différents réseaux les valeurs S + R avec A.

Cette formule est uniquement valable pour les réseaux connexes⁽¹⁾.

Remarque : Il est facile de vérifier (si l'on connaît les relations d'équivalence), que la relation de connexité sur les sommets d'un réseau est une relation d'équivalence.

EXEMPLE 4

Description matricielle des réseaux

Un réseau peut être décrit par une matrice, c'est-à-dire un tableau de nombres qui contient divers renseignements sur le réseau. Suivant les applications envisagées, il y a différentes façons possibles de décrire un réseau par une matrice :

a) - Matrice d'adjacence d'un réseau :

Le schéma "zéro-un" étudié dans la figure 1 du Galion 5 est inclus dans ce type de matrices.

(1) Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommets $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe dans G une chaîne joignant x et y.

Une chaîne joignant deux sommets x et y dans G est une séquence alternée de sommets et d'arcs $(x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, x_{k-1}, u_k, x_k)$, chaque arc de la séquence ayant pour extrémités les sommets qui l'encadrent.

Exemples

1) - Soient 4 garçons, A, B, C et D. Ils jouent entre eux au tennis, si A gagne à B, ceci peut se représenter :



Les résultats de tous les jeux sont signalés dans la matrice suivante :

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	0	0	1	1
C	1	0	0	0
D	0	0	1	0

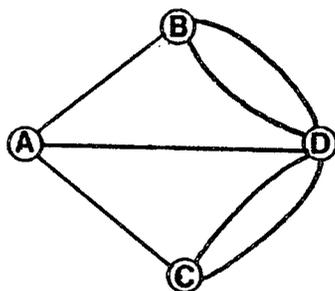
Dessiner le réseau correspondant.

2) - La matrice qui représente une relation de parenté est aussi une matrice d'adjacence.

b) - Matrice associée d'un réseau non-orienté ⁽¹⁾ :

Les éléments de cette matrice représentent le nombre d'arêtes qui relie les sommets du réseau deux à deux.

Par exemple, le réseau des ponts de Königsberg, figure 2, a une représentation matricielle de ce type :



	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	2
C	1	0	0	2
D	1	2	2	0

Figure 2 .

(1) Un réseau non-orienté est constitué de sommets et d'arêtes.

c) - Matrice d'incidence aux arcs

Soit $R = (X, U)$, où $|X| = n$ et $|U| = m$. la matrice d'incidence aux arcs du réseau R est une matrice $n \times m$ dont les éléments sont :

$$e_i^j = \begin{cases} +1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité initiale de l'arc } u_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité terminale de l'arc } u_j \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Quelles conditions doit remplir une telle matrice pour qu'elle définisse un réseau ?

A partir d'un réseau avec des circuits (ou des cycles⁽¹⁾), on construira sa matrice d'incidence et on essaiera d'y localiser les circuits (ou les cycles) existants.

La notion de cycle sera rappelée dans la définition d'arbre en quatrième.

Il existe d'autres matrices pour représenter un réseau, nous verrons une autre (en quatrième), à propos d'un problème classique des applications des réseaux.

Nous voulons citer encore un problème qui est susceptible d'être présenté aux élèves de cinquième et dont la modélisation est simple.

EXEMPLE 5

Un problème de couplage. Affectation du personnel⁽²⁾.

Dans une entreprise, il y a n emplois vacants dans diverses spécialités et un groupe de n candidats qui se proposent pour les remplir. Chaque personne est qualifiée pour un ou plusieurs travaux et on se demande s'il sera possible d'attribuer à chacun la position qui lui convient le mieux.

(1) Un cycle est une séquence circulaire alternée de sommets et d'arcs (tous distincts) $(x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_{k-1}, u_{k-1}, x_k)$, chaque arc de la séquence ayant comme extrémités les sommets qui l'encadrent.

(2) pris de ORE | 55 | p.45.

On voit que pour formuler ce problème on peut dessiner un réseau à $2n$ sommets dans lequel on associe un sommet à chaque emploi et à chaque personne. Ce réseau non-orienté dans lequel un sommet représentant un candidat, est lié par une arête à un sommet représentant un emploi, si et seulement si ce candidat est qualifié pour cet emploi, serait le modèle le mieux adapté.

Pour approfondir les sujets traités, voir comme références :

. BERGE |8|, BARBUT |4|, ORE |55|, SAKAROVITCH |68|.

Pour les applications de théorie des graphes :

. FLETCHER, |30|, CLIFFORD |16| .

Une dernière proposition pour les classes de 5^e. Après la fiche 59, qui correspond à l'étude du cube, nous proposons d'analyser deux représentations de celui-ci, qui relie les polygones et les graphes.

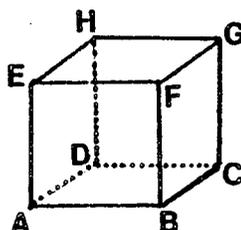
L'un des intérêts de ce travail est de montrer une façon différente de voir le cube (ceci peut-être étudié pour les 5 solides de Platon).

EXEMPLE 6

Deux représentations du cube⁽¹⁾

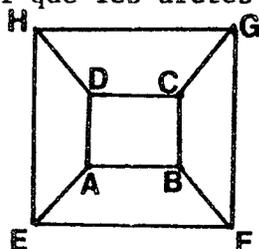
a) - Représentation par un réseau planaire.

le cube



est aussi représenté

par un réseau tel que les arêtes ne se coupent pas en dehors des sommets :



(1) basé sur PENTAMINO 2 |60| p. 25, LANGER |51|.

Un tel réseau est dit planaire.

On essaiera de le construire progressivement :

- On commence par une face.
On compte 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces.
- Les sommets du polyèdre sont les sommets du réseau.
- Les arêtes du polyèdre sont les arêtes du réseau.
- Les faces du polyèdre sont les régions du réseau.

b) - Représentation à l'aide d'un polygone convexe :

Nous voulons représenter le cube par un polygone convexe de 8 sommets, tel que :

- . Les sommets du polygone représentent les sommets du polyèdre
- . Les côtés du polygone représentent certaines arêtes du polyèdre
- . Les autres arêtes du polyèdre étant représentées par des diagonales de façon à reproduire un réseau analogue au précédent mais dont certaines arêtes se coupent.

Essayer de construire cette figure.

Comment peut-on obtenir cette figure à partir du réseau planaire ?

Analyse :

Un parcours de l'octogone en suivant les sommets dans le sens des aiguilles d'une montre, représente un circuit sur le graphe planaire qui passe une et une seule fois par chaque sommet (ce qu'on désigne par circuit Hamiltonien), faire la construction, complétant le polygone par les diagonales représentant les arêtes manquantes du cube.

CLASSES DE QUATRIEME ET DE TROISIEME

Pour suivre l'ordre d'idées établies dans la section 3.2. et pour continuer l'étude des réseaux, nous proposons de mettre la notion d'arbre ainsi que quelques applications de la théorie des graphes, en 4^e ou en 3^e.

Quelques applications des réseaux :

Nous avons vu en 5^e, comment un réseau peut-être défini par une matrice d'incidence.

A partir d'un arbre donné, construire sa matrice d'incidence et remarquer qu'il s'agit d'un réseau qui ne contient pas de cycle et qui est connexe. Ces deux conditions caractérisent un arbre.

EXEMPLE 1

Arbre de poids minimum⁽¹⁾ :

La figure 3 représente le plan de sept villages ; les nombres sur les arcs représentent les distances des tronçons possibles (pas encore construits) entre les villages. On veut construire les tronçons nécessaires tels que tout village soit relié avec les autres. Si la distance totale est minimum, pourquoi le réseau construit doit être un arbre ? Quel est le réseau dont la distance est minimum ?

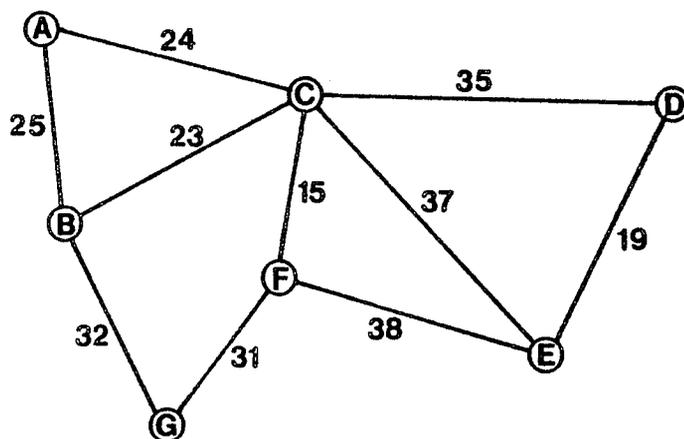


Figure 3 .

(1) Exemple pris de SMP Book 4 | 71 | p. 126.

Les graphes sont des outils souvent nécessaires dans la construction et résolution des modèles. Nous allons voir quelques applications de ceux-ci. Signalons que dans les exemples qui suivent, l'idée d'optimisation est toujours présente.

La méthode PERT (ou chemin critique).

Prenons un grand projet (qui peut être composé de centaines de tâches différentes), sous forme d'un réseau qui montre quelles tâches suivent d'autres tâches et le temps de réalisation de chacune. L'analyse explore simplement le réseau pour trouver la durée minimale du projet et la manière d'atteindre ce minimum (on découvre ainsi les tâches qui influent sur le temps total du projet).

Quand il s'agit de réseaux compliqués, il est possible d'utiliser pour sa résolution, un algorithme de recherche du "plus court chemin"⁽¹⁾ mais au lieu de s'intéresser au "plus court chemin", on s'intéresse au "plus long chemin" (pour pouvoir réaliser toutes les tâches).

Les problèmes d'ordonnancement constituent des problèmes où les relations d'ordre jouent un rôle prépondérant.

L'exemple suivant est un exercice qui a été fait dans une classe de 5è à propos d'une leçon de français où le but était d'étudier le comparatif et le superlatif [40]. (Cet exemple apparaît aussi dans DUBAIL [26]).

EXEMPLE 2

La potion magique :

Pour la fête solennelle du grand dieu Pentates, le druide Statistix doit confectionner la potion magique qu'il fera boire aux guerriers gaulois. La recette de cette potion lui a été communiquée par son père qui la tenait lui-même d'un ancien prêtre du village.

Les préparatifs sont longs et minutieux. Il faut d'abord au druide un chaudron, une serpe d'or et de l'eau très pure d'une source connue de lui seul ; ensuite, il doit rassembler tous

(1) Voir Ch. 2.

les éléments suivants :

- 2 améthystes
- 6 betteraves
- 4 coeurs d'abeilles ouvrières
- 7 dattes d'Egypte
- 9 épines d'acacia
- 15 fraises des bois
- 3 gueules de vipères

et enfin, une branche de houx coupée avec la serpe d'or.

Une fois tous ces ingrédients réunis, il reste beaucoup à faire au druide, car il ne suffit pas de remplir d'eau le chaudron et d'y précipiter tout au hasard. Il faut observer les rites et ils exigent une préparation minutieuse : les 2 améthystes doivent macérer 3 jours avant que l'on ajoute les 7 dattes d'Egypte, les 15 fraises sauvages et les 9 épines d'acacia. Les 3 gueules de vipères devront macérer au moins 4 jours, les fraises des bois au moins 7 jours, la branche de houx, enfin, au moins 3 jours. Et ce n'est pas tout : avant de faire entrer dans la composition les gueules de vipères, il faudra attendre que les 6 betteraves aient macéré au moins 6 jours et les 7 dattes d'Egypte au moins 4 jours .

Enfin, la dernière condition à remplir avant de mettre à macérer la branche de houx, il faudra attendre que les 4 coeurs d'abeilles ouvrières et les 9 épines d'acacia aient macéré 2 jours au moins.

Voilà ce qu'a lu le druide sur le parchemin. Le plus difficile reste à faire car le vieux papier ne dit rien de plus. Les opérations paraissent au druide fort compliquées : Comment va-t-il s'y prendre ? Peux-tu l'aider à trouver la solution la plus rapide, la moins compliquée ?

. Dans quel ordre et quels jours Statistix peut-il introduire dans le chaudron les différents ingrédients entrant dans la potion magique ?

. Il lui faut, bien sûr, s'y prendre à l'avance. Combien de jours avant la cérémonie devra-t-il commencer ? C'est-à-dire quelle est la durée la plus courte de préparation de la potion ?
 {minimale

Construction d'un réseau PERT :

Considérons l'ensemble ξ des neuf évènements :

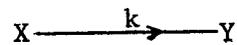
- A : "début de la mécération de a"
- B : " " " " " " b"
-
- H : " " " " " " h"
- FIN : "la potion est prête".

Dans l'ensemble $\xi = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, FIN \}$ considérons la relation α :

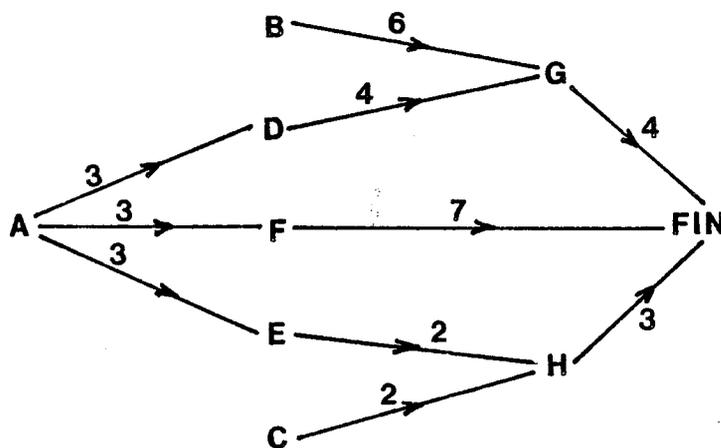
X, α, Y si et seulement si

"il faut commencer X un nombre minimum de jours avant de réaliser Y" ou encore :

"X est avant Y d'au moins k jours", ce qu'on notera par :



Traduisons par un réseau, chacune des conditions 1), 2), 3) et 4) et rassemblons tous ces résultats sur le même réseau :

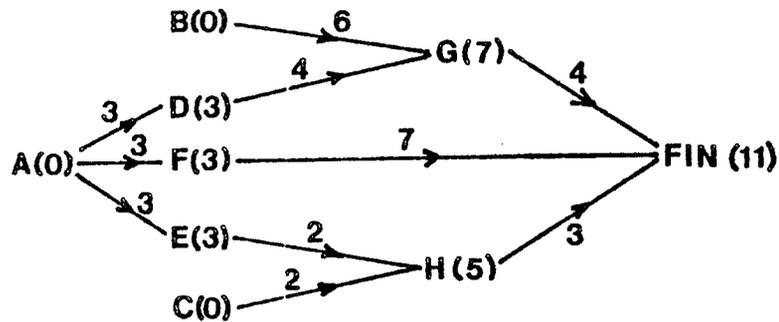


Remarquer que α est une relation d'ordre partiel dans ξ .

Solution :

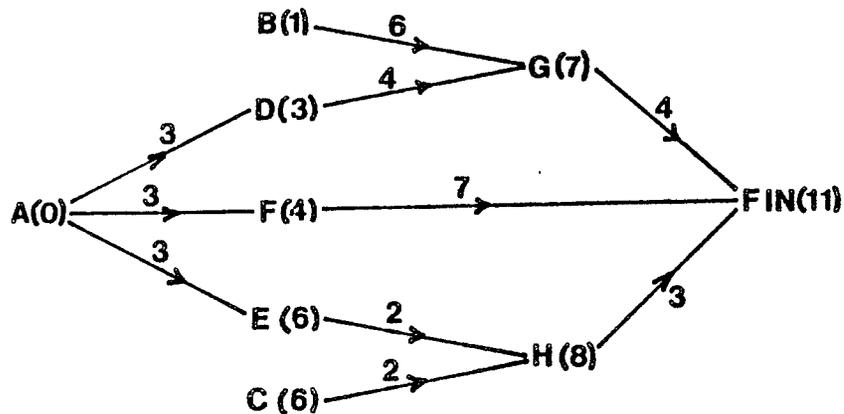
- a). Supposons que l'on commence au même temps A, B et C, ceci à la date 0. La date s'exprimant en nombre de jours, quelles dates peut-on donner aux évènements ? (laisser chercher).

Une solution conduit au résultat suivant :



b). Même problème si l'on décide que la FIN aura lieu à la date 11 et en "remontant le diagramme" qu'est-ce qu'on obtient ? (laisser chercher).

Voici une solution :



Dans le cas a)., les dates de A, B et C étant fixées à 0, il n'est pas possible d'avancer les dates des autres événements. L'opération G peut se faire à une date supérieure à 7 mais elle doit se faire "au plus tôt" à la date 7.

Dans le cas b)., la date de la FIN étant fixée à 11, il n'est pas possible de retarder les dates des autres événements. L'opération H peut se faire à une date inférieure à 8 mais elle doit se faire "au plus tard" à la date 8.

Dans le cas a)., toute avance de l'une des dates (autre que celles de A, B et C), oblige à avancer celle de A ou de B ou de C.

Dans le cas b)., tout retard de l'une des dates (autre que celle de FIN), retarde la FIN.

En comparant les deux réseaux, on voit que : si on fixe les dates de A, B et C à 0 et la date de FIN à 11, alors certains événements ont une

date parfaitement déterminée, (elles seront appelées dates critiques), alors que d'autres évènements pourront avoir lieu à plusieurs dates possibles.

Remarquer que : dater les évènements de ξ , c'est construire une application

$$\delta : (\xi, \alpha) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)$$

Elle associe à chaque élément X , sa date $\delta(X)$, de telle sorte que :

$$\text{si } X \alpha Y \quad \text{alors} \quad \delta(X) \leq \delta(Y)$$

EXEMPLE 3

Problème du plus court chemin et algorithme de Bellman :

La représentation matricielle du réseau, associée à ce problème est différente de celles étudiées dans les classes de 5è, ici il s'agit d'une matrice des longueurs, dont les éléments représentent la longueur associée à chaque arc. Ces sujets ont été développés au chapitre 2.

EXEMPLE 4

Problème de flot maximum :

La figure 4 représente un réseau où les nombres peuvent être interprétés par exemple comme le nombre maximum de voitures (divisé par 100) qui peuvent passer par chaque tronçon dans une heure. Trouver le nombre maximum de voitures qui peuvent passer d'un bout à l'autre de ce réseau dans une heure.

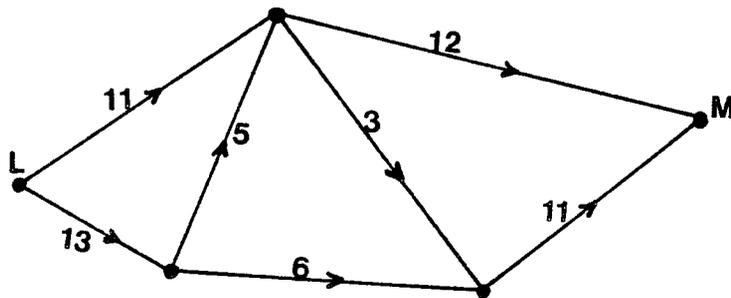


Figure 4 .

EXEMPLE 5 (1)

La figure 5 montre un réseau qui a un flot total de 16. Le flot qui passe à travers ce réseau est marqué sur quelques arcs. Trouver le flot des arcs a, b, c, d et e.

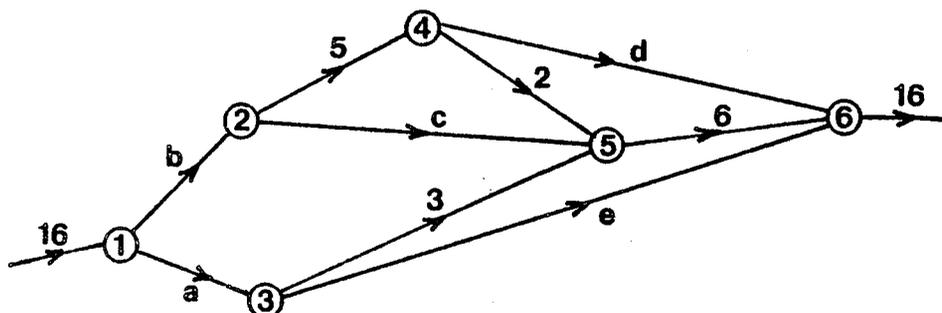


Figure 5 .

Il s'agit de la première loi de Kirchoff des circuits électriques : la somme du flot entrant en chaque sommet est égale à la somme du flot sortant de ce sommet. Un tel flot est dit conservatif.

EXEMPLE 6

Problème du voyageur de commerce :

La figure 6 représente un réseau routier où les nombres indiquent les distances en kilomètres. Un voyageur de commerce habite à A. Il doit visiter tous les villages (sommets) au moins une fois et retourner chez lui. Trouver la plus courte distance pour qu'il fasse son circuit.

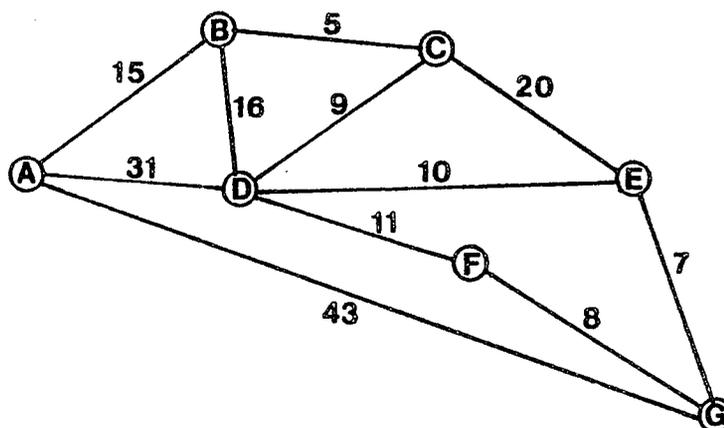


Figure 6 .

(1) pris de BOOK 4 SMP |71| p. 136.

On ne sait pas encore résoudre ce problème dans le cas général. Voici une méthode de solution qui peut-être utilisée pour trouver un chemin "pas trop long".

On commence en A, aller au village le plus près, pour chaque village successif, aller au village le plus près, pas encore visité. Quand tous les villages auront été visités, retourner par l'arête qui relie le dernier sommet à A.

Cette heuristique a l'avantage de visiter chaque village aussitôt que possible, mais elle ne garantit pas que le résultat obtenu soit le plus court circuit.

EXEMPLE 7

Tours de Hanoi :

Sur un socle horizontal sont enfichées trois tiges sur lesquelles peuvent être enfilés des disques de diamètres différents. Initialement les disques sont enfilés sur une même tige, par ordre de diamètres décroissants (le plus gros disque étant en dessous).

Le but du jeu consiste à transporter tous les disques sur une autre tige, en les déplaçant un par un d'une tige à une autre, de telle sorte qu'un disque quelconque ne soit pas couvert par un autre de diamètre supérieur.

Une fois trouvée la stratégie optimale pour reconstituer la tour à n disques dans le jeu des tours de Hanoi, il est possible d'étudier 2 représentations du mouvement des disques. Elles reposent sur des notions simples de théorie des graphes qui devraient être comprises par des élèves de 3^e. Parmi les utilisations de cette analyse, nous pouvons citer : l'étude des applications d'un ensemble dans un autre, l'étude des relations binaires, la représentation d'un espace de dimension 2 et 3 et l'étude des notions telles que stratégie, optimisation et connexité.

Ce travail élaboré par Catherine BECQUAERT | 5 | est présenté de la façon suivante :

a. Description du jeu

b. Reconstitution de la tour à n disques

c. Recherche d'un nombre minimum de coups pour reconstituer la tour d'une tige sur une autre

d. Tours de Hanoï et chemin de Hamilton ⁽²⁾

e. Graphe associé aux déplacements des disques sur les tiges ⁽³⁾

f. Utilisation des tours de Hanoï avec les élèves

Les points qui nous intéressent sont : d et e.

- Voyons l'étude de la partie d :

On remplit un tableau avec des 0 et des 1. Le nombre de colonnes du tableau est égal au nombre de disques et le nombre de lignes est égal au nombre total des situations rencontrées quand on déplace les disques suivant la stratégie optimale.

On passe d'une ligne à la suivante en changeant le chiffre correspondant au disque qui est alors déplacé.

Si on trace sur un cube le chemin qui joint les différents points dont les coordonnées sont données par le tableau, on obtient un chemin de Hamilton ⁽¹⁾.

- En ce qui concerne la partie e :

Les disques sont numérotés par ordre de diamètres croissants : 1, 2, ..., n et les trois tiges sont notées A, B, C.

Une situation est caractérisée dès que l'on connaît pour chaque disque la tige sur laquelle il est placé, donc par une application de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans l'ensemble $\{A, B, C\}$. car les disques sont placés par ordre décroissant. Par exemple, la situation disque 1 en A, disque 2 en B, disque 3 en B s'écrit ABB.

(1) Un chemin est dit Hamiltonien s'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.

(2) Voir également GARDNER [35] p. 52.

(3) Voir également JULLIEN [44]

Considérons dans l'ensemble des situations, la relation p_k :
On passe de la situation x à la situation y en déplaçant le disque k .

Il est alors possible de faire la représentation graphique simultanée de p_1 , p_2 et p_3 (dans ce cas $n = 3$).

Les représentations du graphe $p = p_1 \cup p_2 \cup p_3$ sont connexes : deux situations étant données, il est toujours possible de passer de l'une à l'autre.

On trouve que pour passer de la situation AAA à la situation CCC, la solution est le chemin minimum.

Programmation linéaire :

Comme nous l'avions indiqué, il est possible d'insérer des exemples de programmation linéaire, en 3^e.

En ce qui concerne cette méthode, l'un des intérêts de son étude est le passage d'une situation donnée à un ensemble de relations algébriques.

Les problèmes linéaires se trouvent être de très bons modèles de nombreux systèmes réels. Néanmoins, les problèmes qui peuvent être présentés à ce niveau sont souvent fictifs pour restreindre les inéquations à deux variables. Cela permet de représenter les solutions graphiquement, étant donné qu'aucune méthode de solution n'est encore accessible aux élèves.

Nous ne donnerons pas d'exemples de ce type de problèmes (se reporter aux classes de première, exemple 1, où c'est plus développé) ; il existe une vaste bibliographie sur le sujet⁽¹⁾.

Nous pensons que l'idée d'optimisation est une idée importante dans notre civilisation qui peut-être étudiée à ce propos, ainsi que la notion de contrainte. Il faudrait remarquer également que l'ensemble des solutions des problèmes linéaires constitue un polyèdre convexe (cette notion est déjà connue des élèves).

(1) Consulter par exemple VAJDA | 76 |, SAKAROVITCH | 69 |, FLETCHER | 30 |.
IREM de Strasbourg | 42 |.

3.4.2 - Quelques exemples pour le second cycle

CLASSES DE SECONDE

Les programmes officiels des classes de seconde ne se prêtent pas à des rattachements de sujets de R.O.. Néanmoins, nous pensons qu'il est possible d'étudier (en 2^e A principalement, pour les raisons énoncées dans la section 3.3.), comme applications des mathématiques dans d'autres disciplines, quelques problèmes d'agrégation d'opinions qui sont des problèmes d'ordre social. Ils rappelleront les relations d'ordre, déjà connues des élèves.

Agrégation d'opinions :

Le problème d'agrégation d'opinions se présente lorsqu'un ensemble de votants veut se mettre d'accord (prendre une décision) sur le choix d'un classement complet d'un ensemble fini de candidats.

Chaque votant émet son opinion individuelle en indiquant un ordre total sur l'ensemble de candidats. Pour obtenir une opinion collective à partir des opinions individuelles, il existe plusieurs règles, parmi lesquelles citons celle de Borda et la méthode de comparaison par paires.

La méthode de Borda consiste à associer à chaque objet la somme de ses rangs dans les différents votes, l'ordre en résulte directement. Mais on est souvent conduit à un mauvais résultat.

Par exemple :

Il y a un groupe de 5 votants et 2 candidats : A et B.

L'opinion de chaque votant est la suivante :

1^{er} votant AB

2^e votant AB

3^e votant AB

4^e votant BA

5^e votant BA

Si on applique la méthode de Borda :

$$r(A) = 7$$

$$r(B) = 8$$

d'où, A est le candidat élu.

Mais supposons que les 4^e et 5^e votants, pour favoriser leur candidat, fassent inscrire un candidat médiocre C et qu'ils le préfèrent à A.

Dans ce cas (en supposant que les trois premiers votants ne voient pas la manoeuvre), les opinions seraient :

1^{er} votant ABC

2^e votant ABC

3^e votant ABC

4^e votant BCA

5^e votant BCA

et les rangs de A et B :

$r(A) = 9$ $r(B) = 8$

d'où B est alors le candidat élu.

En conclusion, la possibilité de modifier la liste des candidats permettrait de modifier le résultat du vote.

En ce qui concerne la méthode de comparaison par paires, elle se résume à la règle d'agrégation suivante : si parmi le groupe de votants il y a plus d'individus préférant X à Y que d'individus préférant Y à X, alors dans l'opinion collective, X est préféré à Y.

Voyons dans l'exemple suivant que l'application de cette méthode ne conduit pas nécessairement à un ordre collectif :

EXEMPLE 1

Problème du référendum⁽¹⁾.

On demande aux Français par voie de référendum : "Voulez-vous un régime présidentiel, un régime parlementaire ou un régime d'assemblée ?"

Or, parmi les 20 millions d'électeurs :

. 9 millions préfèrent le présidentiel, accepteraient le parlementaire mais refusent celui d'assemblée.

. 6 millions préfèrent le parlementaire, accepteraient celui d'assemblée mais refusent le présidentiel.

(1) Exercice emprunté au "Nouvel Observateur" du 10 avril 1972 |cf.41|.

. 5 millions préfèrent celui d'Assemblée, accepteraient le présidentiel mais refusent le parlementaire.

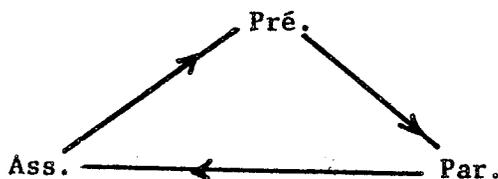
Que va-t-il se passer ?

Ici, il est intéressant de voir, en faisant le graphe correspondant, qu'il ne s'agit pas d'une relation d'ordre, mais que sa restriction à chacun des sous-ensembles à deux éléments, est une relation d'ordre :

Les résultats du vote donnent :

. Présidentiel avant Parlementaire	-	$9 + 5 = 14$
. Parlementaire avant Assemblée	-	$9 + 6 = 15$
. Assemblée avant Présidentiel	-	$5 + 6 = 11$

Celà peut être représenté par un graphe comme suit :



Ce qui ne correspond pas à une relation d'ordre (défaut de transitivité).

Sa restriction à chacun des sous-ensembles à deux éléments est une relation d'ordre.

Un peu plus tard, un homme politique influent parvient à faire poser dans un nouveau référendum la question suivante :

"Le peuple français est-il d'accord pour substituer le régime d'assemblée au régime présidentiel actuellement en vigueur ?"

Quelle sera la réponse à la question ?

Plus tard encore, un autre homme politique de poids, fait organiser un troisième référendum sur le thème :

"Le peuple français préfère-t-il le régime parlementaire au régime d'assemblée ?"

Quelle sera la réponse à cette nouvelle question ?

On suppose qu'il n'y a pas d'abstentions.

Nous voyons donc que l'application de cette méthode amène à une situation paradoxale, appelée "effet condorcet".

L'existence de l'effet de Condorcet dans la méthode majoritaire a mis les chercheurs en quête de "meilleures" règles d'agrégation. Mais ils ont arrêté ces recherches lorsque, en 1948, K. Arrow démontra que les seules règles d'agrégation "raisonnables" (des règles qui obéissent aux principes de "souveraineté" de la collectivité et de "loyauté" vis à vis des individus) consistent à prendre comme opinion collective celle d'un des votants sans tenir compte des opinions des autres votants. Ce votant privilégié assumerait ainsi un rôle de dictateur.

Le résultat d'Arrow a fait changer de voie aux chercheurs. Il n'était plus question de trouver des règles raisonnables d'agrégation d'opinions mais des conditions dans lesquelles la méthode de comparaison par paires pourrait être appliquée sans craindre l'apparition de l'effet Condorcet.

Nous ne considérons pas que cet exemple puisse être présenté aux élèves tel qu'il est, il reste encore du travail pour le transformer en sujet d'étude au niveau des lycées. Néanmoins, la simplicité du sujet et l'accessibilité des programmes de seconde, nous font penser qu'un tel déroulement de résultats peut-être mis à la portée des élèves de seconde.

Voir comme références :

IREM de STRASBOURG, [41] , MANGENEY [53] , CORNE [22],
GLAESER [37].

Applications des réseaux :

Nous avons signalé qu'il serait conseillé de reprendre, certains problèmes vus en quatrième pour les approfondir dans les classes de seconde ; voyons quelques exemples :

EXEMPLE 2

Arbre de poids minimum :

Pour résoudre le problème de la recherche d'un arbre de poids minimum (exemple 1, classes de 4^e), il existe par exemple l'algorithme de Kruskal :

D'abord, on numérote les arcs du réseau par ordre de poids croissants, $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$. On considère l'arc u_0 de poids minimum ; cherchons si l'arc u_1 ne forme pas de cycle avec l'arc u_0 , puis cherchons si l'arc u_2 ne forme pas de cycle avec $\{u_0, u_1\}$, etc. S'il existe un arc qui forme un cycle avec les antérieurs, on ne le prend pas et on continue avec le suivant. Lorsque la procédure ne pourra plus se continuer, on aura un arbre de poids minimum.

Si le réseau donné est connexe, cet algorithme construit un arbre de poids minimum (maximum), en combien d'étapes ?

L'algorithme de Kruskal est facilement programmable en ordinateur et s'il en existe un dans les lycées, on peut mener l'exercice jusqu'à l'élaboration de l'organigramme et le passage en ordinateur, grâce à sa simplicité.

EXEMPLE 3

La potion magique

A propos du problème du graphe PERT (Exemple 2, classes de 4^e), signalons la remarque suivante qui pourrait servir comme exemple de la notion d'homomorphisme d'ordres :

L'application, δ , qui à chaque événement X associe sa date $\delta(X)$ de telle sorte que :

$$\text{Si } X \alpha Y \text{ alors } \delta(X) \leq \delta(Y).$$

$$\delta : (\xi, \alpha) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq) \text{ est un homomorphisme d'ordres.}$$

EXEMPLE 4

Plus court chemin et flot maximum :

Nous avons parlé du problème du plus court chemin entre deux sommets dans un réseau (exemple 3, classes 4^e) et du problème de flot maximum (exemple 4, classes 4^e).

Il serait intéressant de voir avec les élèves (si le niveau de la classe est adéquat), l'étude de la dualité qui apparaît entre ces deux problèmes. Il s'agit de problèmes duaux dont les valeurs optimales sont les

mêmes. Cette justification est facile à montrer⁽¹⁾.

La notion de dualité est une notion importante qui apparaît dans différentes branches des mathématiques qui sembleraient déconnectées, par exemple : théorie des ensembles, géométrie projective dans le plan et topologie.

CLASSES DE PREMIERE

Le premier des trois sujets proposés s'insère dans le cadre des sections C, D et E. Les deux derniers peuvent être étudiés dans les programmes des 5 sections, principalement dans les sections littéraires.

Programmation linéaire :

L'étude des problèmes de programmation linéaire permet de présenter de nombreuses applications des systèmes de plusieurs inéquations de premier degré à deux inconnues.

Il est possible de faire ici, l'étude des solutions graphiques de ces problèmes. Néanmoins, nous croyons que les élèves pourraient voir, en général, comment un problème à plus de deux variables peut-être représenté par un ensemble d'inéquations à plusieurs inconnues.

Nous avons dit pour les classes de 3^e qu'aucune méthode de programmation linéaire n'était encore à la portée des élèves. Par contre, nous pensons qu'en première, il serait conseillé, si un ordinateur est accessible, de leur donner un petit aperçu de la méthode du simplexe (voir fiche SE14). Nous laissons cette suggestion à l'appréciation des enseignants. Ils sauront juger si leurs groupes seraient susceptibles de faire un tel travail.

Un exemple de problèmes de programmation linéaire qui pourrait être étudié dans ces classes est le "problème de transport".

Ce problème en général possède des propriétés spécifiques qui permettent une adaptation de la méthode du simplexe, telle qu'on aboutit à

(1) Le lecteur intéressé est envoyé à FLETCHER |30| p. 43.

un processus opératoire qui est beaucoup plus simple que celui de l'algorithme du simplexe. Pourtant, notre objet n'est pas de montrer ce processus opératoire, nous voulons simplement décrire un autre type de problème, étudier sa modélisation et voir ses solutions graphiques. Pour cela, il faudra se restreindre à 2 variables :

EXEMPLE 1⁽¹⁾

Problème de transport :

Un constructeur a deux dépôts, D_1 et D_2 . Chaque dépôt a un stock de 25 tonnes de sable. Il a deux clients C_1 et C_2 . C_1 commande 20 tonnes de sable et C_2 commande 10 tonnes. Les distances en kilomètres de D_1 et D_2 à C_1 et C_2 sont données dans le tableau suivant :

distance	C_1	C_2
D_1	4	5
D_2	2	1

C'est-à-dire, le client C_1 est à 4 km du dépôt D_1 et 2 km du dépôt D_2 et C_2 est à 5 km de D_1 et à 1 km de D_2 .

Le prix de transport est une somme fixée par tonne au kilomètre, c'est-à-dire pour chaque tonne transportée sur chaque kilomètre.

Comment doit-on fournir chaque client pour que le coût de transport soit le plus bas possible ?

Supposons que le coût de transport par tonne par chaque kilomètre est d'un franc.

Pour la résolution du problème, soit :

x la quantité de tonnes envoyée de D_1 à C_1
 et y " " " " " " D_1 à C_2

(1) Emprunté à HOLT & MARSORAM | 39|.

Alors :

La quantité de tonnes envoyée de D_2 à C_1 sera $(20 - x)$ et celle envoyée de D_2 à C_2 sera $(10 - y)$.

Les deux quantités x et y doivent être supérieures ou égales à zéro. On a alors :

$$\textcircled{1} \dots\dots\dots 0 \leq x \leq 20$$

$$\textcircled{2} \dots\dots\dots 0 \leq y \leq 10$$

D'un autre côté, D_1 contient seulement 25 tonnes ainsi que D_2 , cela se traduit comme suit :

$$\textcircled{3} \dots\dots\dots x + y \leq 25 \quad \text{et}$$

$$20 - x + 10 - y \leq 25$$

$$\textcircled{4} \dots\dots\dots x + y \geq 5$$

Les inéquations $\textcircled{1}$ à $\textcircled{4}$ déterminent la région des valeurs possibles pour x et y .

Le coût de transport T sera :

$$T = 4x + 5y + 2(20 - x) + 1(10 - y)$$

$$T = 2x + 4y + 50$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{T - 50}{4}$$

Il est possible de trouver sur la région analysée les valeurs de x et y que minimisent la valeur de T . Le résultat correspond à :

$$x = 5 \qquad y = 0$$

$$20 - x = 15 \qquad 10 - y = 10 \qquad \text{et} \qquad T = 60 \text{ fr.}$$

Théorie des jeux :

Nous proposons de faire l'insertion de ce sujet dans le chapitre de statistiques, après avoir vu les notions de fréquence et espérance mathématique. L'objet de cet exposé est, d'un côté travailler avec les élèves certaines idées d'intérêt, telles que optimisation et stratégie, d'un autre côté, voir un nouveau type de problèmes, qui demande aux étudiants beaucoup de réflexion.

La théorie des jeux est en général associée à la programmation linéaire, cette association demande une bonne connaissance de la dualité. Pour résoudre des problèmes plus complexes de théorie des jeux, il faudrait résoudre une paire de programmes linéaires duaux, ce qui n'est, à notre avis, ni accessible, ni intéressant pour les élèves du secondaire. Nous verrons donc seulement des problèmes simples du type suivant :

EXEMPLE 2

Un jeu à somme nulle est un jeu où tout ce que gagne l'un des joueurs est perdu par l'autre.

Considérons le jeu à somme nulle suivant ⁽¹⁾ :

Ben et Arthur ont chacun 2 bâtons, l'un rouge et l'autre noir. Au signal donné, chacun présente un bâton. Le jeu peut se schématiser de la manière suivante :

		ARTHUR	
		Bâton noir	Bâton rouge
BEN	Bâton noir	-2	-4
	Bâton rouge	1	4

Les nombres négatifs représentent les pertes de BEN (les gains d'ARTHUR) et les nombres positifs sont les gains de BEN (les pertes d'ARTHUR).

Nous voyons que, si BEN présente toujours le bâton rouge, il ne peut pas perdre, et ARTHUR peut minimiser ses pertes en sortant toujours son bâton noir.

On dit que ce jeu a une solution en stratégies pures (c'est-à-dire le choix de la stratégie pour chaque joueur est parfaitement déterminé et unique). Tout joueur qui essaie de dévier de sa stratégie pure sera pénalisé.

(1) Pris de FLETCHER |30| p.187.

La valeur du jeu est égale à 1. Celà correspond au gain de BEN.

On dit qu'un tel jeu possède un point selle. La méthode pour vérifier s'il existe un point selle dans la matrice du jeu, est la suivante : déterminer, pour chaque colonne, la valeur maximale et pour chaque ligne, la valeur minimale. L'interprétation de ceci est que chacun des joueurs, s'intéresse à connaître, pour chacune de ses stratégies possibles, la perte maximale qu'il peut avoir. Quand on trouve que la valeur maximale des lignes est égale à la valeur minimale des colonnes, alors on appelle cette valeur, "le point selle".

Dans notre cas, la valeur du point selle est 1. Mais ce jeu n'est pas équitable, BEN a une stratégie qui lui permet de toujours gagner. Voyons donc ce qui se passe si l'on modifie la matrice de gain de BEN :

		ARTHUR		valeur minimale
		bâton noir	bâton rouge	
BEN	bâton noir	-1	3	-1
	bâton rouge	4	-6	-6
Valeur maximale		4	3	

La première chose à remarquer est qu'il n'y a pas de point selle. Celà signifie qu'il est nécessaire pour les deux joueurs de mélanger leurs stratégies de telle manière que l'un minimise ses pertes et l'autre maximise ses gains. C'est-à-dire, BEN doit montrer son bâton rouge avec une fréquence x et son bâton noir avec une fréquence $(1 - x)$.

Il s'agit de stratégies mixtes. Le rôle d'une stratégie mixte est d'empêcher l'adversaire de découvrir la stratégie utilisée. Si le jeu a un point selle, il n'y a aucun inconvénient pour un joueur à ce que la stratégie qu'il choisit soit connue de son adversaire.

On mesurera maintenant les résultats du jeu par les espérances mathématiques de gain.

Faisons l'analyse du jeu de BEN:

Si ARTHUR joue le bâton noir, l'espérance mathématique du gain de BEN est :

$$-1(x) + 4(1 - x) = 4 - 5x$$

Si ARTHUR joue le bâton rouge, l'espérance du gain de BEN sera :

$$3x - 6(1 - x) = 9x - 6$$

La meilleure stratégie pour BEN est que ces deux possibilités soient égales :

$$9x - 6 = 4 - 5x$$

$$14x = 10$$

$$x = \frac{5}{7}$$

L'espérance mathématique du gain de BEN sera :

$$-1\left(\frac{5}{7}\right) + 4\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{7}$$

De la même façon, on peut faire l'analyse du jeu d'ARTHUR et l'on obtient :

$$x = \frac{9}{14}$$

Alors l'espérance mathématique des pertes d'ARTHUR sera : $\frac{3}{7}$

La première chose à remarquer est que les gains de BEN et les pertes d'ARTHUR sont les mêmes, et ceci est exactement ce qui doit se passer dans un jeu à somme nulle.

Voir comme références: HILLIER [38] , VAJDA [76] , SAKAROVITCH [69] , FLETCHER [30] .

Simulation :

Le développement des ordinateurs a fait de la simulation une technique pratique pour résoudre certains problèmes. Elle exige en général, l'utilisation d'un ordinateur, mais il existe des exemples simples où cela n'est pas nécessaire.

En réalisant avec les élèves de tels exercices, nous voulons mettre en jeu leur esprit de recherche et leur imagination. Dans la construction de quelques jeux de simulation, on peut profiter de l'énonciation de leurs règles pour habituer l'élève à analyser une situation de manière à la découper en unités qui se prêtent à la programmation.

La simulation fournit des estimations statistiques plutôt que des résultats exacts et elle demande en général du temps pour analyser et résoudre un problème, mais elle est un outil important pour des problèmes où les techniques analytiques sont insuffisantes.

Notre suggestion est la suivante : placer à la fin du chapitre de statistiques et probabilités, quelques exercices de simulation. Ils constituent un bon moyen pour développer l'intuition nécessaire pour les problèmes de probabilité et pour apprendre à penser en termes statistiques.

EXEMPLE 3⁽¹⁾

Quand l'énergie atomique a commencé à être étudiée, il était nécessaire de connaître l'épaisseur du mur assurant une protection contre les radiations.

Le problème a été résolu en utilisant ce qu'on appelle la méthode Monte-Carlo.

Pour l'essentiel, la technique consistait à simuler le mouvement des neutrons en utilisant des nombres aléatoires qui pouvaient être générés par un disque tournant.

Pour être plus explicites : imaginons un disque divisé par 100 rayons équidistribués. Les parties du disque ainsi obtenues seront numérotées de 1 à 100. Après rotation, un repère fixe nous donnera un nombre qui sera dit nombre aléatoire.

(1) Pris du livre 4 de la collection SMP | 71 | p. 114.

a)- Considérer le problème suivant qui est du même type :
Soit une particule qui est astreinte à se déplacer le long d'une ligne. Elle est bombardée par la gauche ou par la droite et chaque collision la déplace d'une place vers la droite ou vers la gauche. Le mouvement de la particule peut être simulé en jetant une pièce; face signifie se déplacer vers la gauche et pile signifie se déplacer vers la droite.

Jeter une pièce une cinquantaine de fois et trouver la position résultante de la particule

b)- Un exemple un peu plus compliqué suppose que la particule puisse se déplacer sur deux dimensions : vers la gauche, vers la droite, vers le haut et vers le bas.

Réfléchir aux méthodes de simulation de sa position :

- i) jeter une pièce
- ii) lancer un dé
- iii) faire tourner un disque

EXEMPLE 4

Claude BOUCHER (Canada) présente dans [10] une simulation d'un atelier de réparation :

On considère une usine où il y a 3 machines et un ouvrier affecté à la réparation de celles-ci. Il peut arriver qu'une, deux ou même trois machines soient simultanément défectueuses, pendant que l'ouvrier s'affaire à réparer l'une d'elles. Quand les machines attendent sans fonctionner le moment d'être réparées, il s'en suit bien entendu une perte financière causée par le manque de production de ces machines. Pour éviter au maximum ce type de perte, on pourrait concevoir que l'on engage trois ouvriers chargés de la réparation, mais alors on risquerait que plusieurs de ces ouvriers aient à se croiser les bras la plupart du temps, d'où, cette fois-ci, une perte causée par la trop grande oisiveté forcée de certains employés.

Nous demanderons à cette simulation de répondre aux deux questions suivantes :

- Pendant quel pourcentage de temps les machines sont-elles occupées à produire ?
- Pendant quel pourcentage de temps l'ouvrier affecté à la réparation est-il occupé ?

Une fois les résultats connus, on pourrait recommencer la simulation, mais en affectant cette fois-ci deux ouvriers plutôt qu'un à la réparation des machines. On pourrait alors accumuler des statistiques du même type et les comparer aux statistiques précédentes. Si l'on connaît les coûts que l'on peut assigner au manque de production causée par la panne d'une machine de même que le salaire d'un ouvrier, on pourra déterminer s'il vaut mieux ou non accroître le nombre d'ouvriers affectés à cette tâche. On pourrait aussi par des méthodes semblables établir s'il serait souhaitable de remplacer ces machines par des machines plus coûteuses, mais qui auraient une probabilité de panne plus faible, etc...

Voir comme bibliographie annexe : BADRIKIAN | 2 | , TAYLOR | 74 | , BONET | 9 | .

CLASSES DE TERMINALE

Les classes de Terminale C D E, consacrent un chapitre à l'étude du barycentre. En particulier, le manuel ALEPH1, géométrie de terminale CE, contient dans le chapitre du barycentre, une section sur les applications métriques du barycentre. Parmi les problèmes de cette section, il y en a un qui a attiré notre attention. Il comporte plusieurs parties :

a)- Une fois donnée la formule du barycentre de 3 nombres affectés de certains coefficients, on demande de démontrer que l'ensemble des barycentres de ces 3 nombres est l'intervalle $[\mu, m]$, μ et m étant respectivement le plus petit et le plus grand des 3 nombres donnés.

b)- Démontrer que T , l'ensemble des barycentres de 3 points donnés, affectés de coefficients positifs ou nuls, est convexe et contient ces 3 points.

c)- Soit f l'application de T dans \mathbb{R} telle que $f(M) = px + qy$. Démontrer que si M est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients positifs ou nuls α, β, γ , alors $f(M)$ est le barycentre des nombres $a = f(A)$, $b = f(B)$, $c = f(C)$ affectés des coefficients α, β, γ .

d)- Démontrer que f a un minimum atteint en l'un des points A, B, C et un maximum atteint en l'un des points A, B, C .

e)- Une application : déterminer le minimum et le maximum de f et les points en lesquels ces extrêmes sont atteints. A , B , C et f sont donnés.

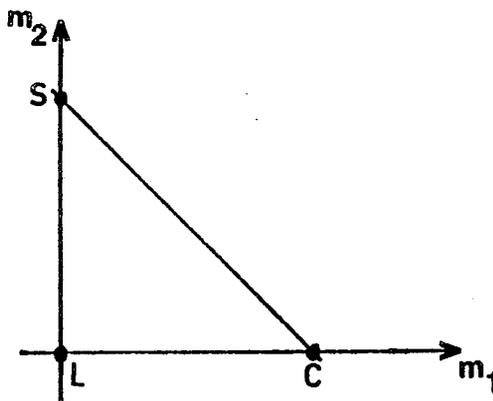
Nous proposons de faire à la suite de l'exercice cité, le problème suivant qui est une application de la notion de barycentre. Il s'agit d'un problème de programmation linéaire où l'on peut montrer : l'ensemble convexe des solutions, l'application définie en (c), et le fait que cette application possède un minimum et un maximum.

EXEMPLE 1⁽¹⁾

Considérons le problème de fabrication du chocolat. Les composants fondamentaux du chocolat sont : cacao, sucre et lait. Ces composants entrent dans des quantités différentes m_1 , m_2 , m_3 selon la qualité du chocolat.

Supposons $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, d'où $m_3 = 1 - m_1 - m_2$.

On représente les trois composants comme sommets C , S , L d'un triangle :



Chaque point du triangle correspond à un mélange de cacao, sucre et lait : les chocolats les plus amers se trouvent vers le sommet C , les plus sucrés vers S et les "plus au lait" se trouvent vers le sommet L . Néanmoins, il faut faire attention : il est vrai qu'à tout point du triangle correspond un certain mélange, mais certains mélanges sont trop liquides ou trop sucrés ou encore ne correspondent pas à la demande du marché. Bref, il y a des conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités m_1 , m_2 et m_3 .

(1) Pris de CASTELNUOVO [14].

Soient par exemple les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_3 \leq \frac{1}{2} \\ m_2 \leq 3m_1 \\ m_2 \leq 3m_3 \\ m_1 \leq m_3 + 3m_2 \end{array} \right.$$

Il est intéressant de laisser aux élèves le soin d'interpréter ces conditions et ensuite de les représenter sur le plan.

Si l'on suppose que les prix unitaires p_1 , p_2 , p_3 du cacao, sucre et lait soient dans le rapport $p_1 : p_2 : p_3 = 4 : 2 : 1$, le prix total de la matière première pour un chocolat contenant des quantités m_1 , m_2 , m_3 de cacao, sucre et lait sera :

$$\textcircled{1} \dots p = 4m_1 + 2m_2 + 1m_3$$

ou bien, si l'on substitue m_3 :

$$p = 3m_1 + m_2 + 1$$

Faire le rapport entre cette équation et l'application f définie en (c).

A tout triplet (m_1, m_2, m_3) , l'équation $\textcircled{1}$ fait correspondre un prix. Ce prix doit être considéré dans la zone où l'on peut fabriquer le chocolat. Or, $\textcircled{1}$ est une droite et lorsque le terme p change, la droite se déplace parallèlement à elle-même. On trouve ainsi la valeur du prix minimum et celle du prix maximum. Ces prix déterminent un intervalle qui est inclu dans l'intervalle $[\mu, m]$ dont on parlait en (a).

p correspondra au barycentre des nombres 4, 2, 1 affectés des coefficients respectifs m_1 , m_2 , m_3 .

CONCLUSION

Serait-il intéressant d'introduire certaines méthodes de R.O. dans les programmes du secondaire ?

Voilà la question à laquelle nous nous sommes proposé de répondre dans ce travail. Pour ceci, nous avons procédé par plusieurs étapes :

- En cherchant quels seraient les avantages d'une telle introduction.
- En faisant un bilan de ce qui a été fait dans ce domaine en France et dans certains pays étrangers.
- En réalisant une expérience et une enquête auprès des 178 élèves et des 6 enseignants de quelques lycées.
- En proposant des sujets susceptibles d'être insérés dans les programmes de 1^{er} et 2^{ème} cycle.

• Les résultats obtenus dans la première phase de ce travail peuvent être résumés comme suit :

Une telle introduction représente l'ouverture de nouvelles voies dans l'enseignement des mathématiques et elle procurera de nombreux exercices sur les applications des mathématiques qui pourront être utiles et formatifs pour les élèves.

• En ce qui concerne la deuxième étape, nous avons trouvé qu'en France, il existe un intérêt croissant vis-à-vis des applications des mathématiques ; cela se manifeste par quelques travaux, parmi lesquels on trouve des sujets qui peuvent être rattachés à la R.O.. La programmation linéaire est mentionnée dans une instruction officielle, mais dans les manuels, nous n'avons rencontré que peu d'exercices sur ce sujet.

Parmi les pays examinés, c'est en Grande-Bretagne qu'il existe la plus grande quantité de sujets de R.O. dans les programmes des écoles secondaires. Leur expérience dure depuis dix sept ans. Ils travaillent principalement trois sujets : programmation linéaire, applications de la théorie des graphes et simulation.

Certains pays (comme la Belgique, la Tchécoslovaquie et l'Argentine) utilisent la programmation linéaire pour fournir des exemples simples au chapitre des inéquations à deux variables. D'autres (comme la

Belgique et le Canada) enseignent quelques notions de la théorie des graphes et ses applications.

• Dans la troisième phase de notre travail, nous avons présenté aux élèves de quelques lycées un problème classique des applications de la théorie des graphes. Ensuite, nous avons fait une enquête dont les résultats nous permettent de conclure, d'une part, que ce problème a été considéré intéressant aussi bien par la majorité des élèves que par la plupart des enseignants ; et d'autre part, que les deux groupes pensent pour la majorité, qu'il serait utile d'apprendre des choses de ce genre.

• Enfin, les exemples de R.O. proposés dans la dernière phase de notre travail sont :

- Quelques méthodes de la théorie des graphes, bien entendu avec une étude des notions essentielles de cette théorie.

Les graphes constituent une représentation schématique des relations. Cette représentation aide l'intuition et stimule l'imagination. Les graphes sont des outils très appréciés dans la construction et la résolution des modèles, et ils fournissent de nombreux et importants exemples pratiques.

- Problèmes de programmation linéaire. Il est bien connu que ces problèmes aident énormément en ce qui concerne les applications des systèmes de plusieurs inéquations à deux inconnues. Ils permettent également de s'exercer dans la modélisation d'un problème et dans l'étude de l'optimisation.

- Problèmes d'agrégation d'opinions. Il s'agit des exemples d'application aux sciences sociales. Ils utilisent pour leur résolution un type de raisonnement auquel ne sont pas habitués les élèves et qui est très important pour mettre en valeur certains phénomènes de groupe.

- Problèmes élémentaires de la théorie des jeux. Une étude de ceux-là est proposée dans le chapitre de probabilités et statistiques. Entre autre, pour montrer des applications qui utilisent des notions telles que : fréquence et espérance mathématique.

En général, cette théorie est reliée à la programmation linéaire. A notre avis, cette liaison est trop compliquée pour la faire dans les classes du secondaire.

- Problèmes de simulation. Les exercices de simulation procurent un bon moyen pour développer l'intuition nécessaire pour les problèmes de probabilité et pour apprendre à penser en termes statistiques. Ils ont l'avantage de "développer les motivations chez les élèves"⁽¹⁾.

Nous avons essayé de donner des directions à prendre dans les cours du niveau secondaire, mais nous sommes conscients qu'il resterait encore du travail à faire, ne serait-ce que pour mettre les sujets proposés sous une forme directement accessible aux élèves.

Nous sommes conscients également de la difficulté qui existe pour introduire des sujets de R.O. dans les programmes des classes du secondaire. Toutefois, nous croyons qu'il vaut la peine de réfléchir sur ce que cela peut apporter aux élèves et sur l'intérêt de les essayer dans les classes.

"L'enseignement, comme la plupart des autres activités, est actuellement dans une phase d'évolution, la base d'une telle évolution est la recherche pédagogique. Le but de celle-ci est d'explorer sans passion toutes les voies que l'enseignement pourrait utiliser sans se préoccuper de savoir si elles seront un jour suivies"⁽²⁾.

(1) TAYLOR | 74 | p.48.

(2) KUNTZMANN | 48 | p.62

BIBLIOGRAPHIE

- |1| AZOULAY, COHEN
Cours et exercices de statistique 5è édition. Société d'édition d'enseignement supérieur. Paris 1973.
- |2| BADRIKIAN
"Compte rendu du groupe "Simulation"" Groupe B4.
Rapports des groupes de travail des journées de Dijon (2,3,4 juin 1974)
Bulletin APMEP N° 296, Décembre 1974. p.p. 865-886.
- |3| BALACHEFF, BONNEVILLE
"Image des mathématiques et leur utilisation dans le grand public".
Bulletin de liaison des chercheurs en pédagogie de l'académie de Grenoble. N° 7, Juin 1975. p. 27.
- |4| BARBUT, D'ADHEMAR, LECLERC, JULLIEN
Mathématiques Elementaires. Applications à la statistique et aux sciences sociales. Tome 2. Presses Universitaires de France. Paris 1974.
- |5| BECQUAERT
"Les tours de Hanoi". Pentamino N° 3, IREM de Grenoble, 1977.
p.p. 55-71.
- |6| BELL, CRAWFORTH, WHEELER
"L'enseignement mathématique en Angleterre". Bull. APMEP.
N° 280, 1971. p.p. 555-560.
- |7| BELLMAN, STUART
Applied Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton N.J. 1962.
- |8| BERGE
Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris 1973.
- |9| BONET
"Problèmes de simulation par la méthode de Monte-Carlo".
Second Séminaire International Galion "La Concrétisation en Mathématique" O.C.D.L. Hatier, Paris 1972.
- |10| BOUCHER
"Jeux de Simulation". Bull. APMEP, N° 287, 1973, p.p. 9-26.
- |11| BRIDER
Comprehensive Mathematics N° 3.
Schofield & Sims ltd. England 1972.
- |12| BRIDGEWATER, CARRINGTON, SMITH
Pergamon Comprehensive Mathematics.
Book 2. Pergamon Press. Great Britain 1973.
- |13| CAPLOW
L'enquête sociologique. Librairie Armand Colin. Paris 1970.

- |14| CASTELNUOVO
"Différentes représentations utilisant la notion de barycentre".
Actes du premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique. Lyon 1969. p.p. 175-200.
- |15| CHEVALLIER
La Programmation Dynamique. Dunod. Paris 1977.
- |16| CLIFFORD
Applied Graph Theory. John Wiley and Sons. Inc. USA 1971.
- |17| 2è CONFERENCE INTERAMERICAINE D'EDUCATION MATHEMATIQUE. 1966.
- |18| 5è CONFERENCE INTERNATIONALE DE R.O. Venise 1969
Edited by John Lawrence. TAVISTOCK Publications. London 1970.
- |19| CONFERENCE O.T.A.N.
Enseignement de la Recherche Opérationnelle. Istambul 1970
Turkey. Tomes I et II. Marc DREVON, Directeur du Congrès.
- |20| CONGRES UNESCO
Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques.
Vol. I, II, III. 1966, 1970, 1972. France 1972.
- |21| COPLEY, Mac ILWAINE, PLUMPTON
Pergamon Modern Mathematics.
Book 2. Pergamon Press Ltd. Great Britain 1972.
- |22| CORNE
"Activités Socio-Mathématiques". Galion, Troisième Séminaire International,
"La Mathématique et ses applications". Juillet 1972. CEDIC.
Paris 1972. p.p. 45-65.
- |23| COULON
"Les graphes". Galion, troisième Séminaire International,
"La Mathématique et ses applications". Juillet 1972. CEDIC.
Paris 1972. p.p. 173-199.
- |24| DIENES, GOLDING
Les premiers pas en Mathématique. Logique et jeux logiques.
OCDL. Paris 1967.
- |25| DIENES
Comprendre la Mathématique. OCDL. Paris 1965.
- |26| DUBAIL
"De la recette de la potion magique à la méthode PERT".
Galion, troisième Séminaire International,
"La Mathématique et ses applications". Juillet 1972. CEDIC.
Paris 1972. p.p. 143-154.
- |27| ENGEL
"The relevance of Modern fields of applied Mathematics for
mathematical Education". Actes du premier congrès international
de l'enseignement mathématique. Lyon 1969. p.p. 125-136.

- |28| FAURE
 "Pour un enseignement cohérent et utile de la R.O."
 Computers in Education. IFIP North Holland Publishing Company 1975.
- |29| FLETCHER
 L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui. OCDL. Paris 1966.
- |30| FLETCHER, CLARKE
 Management and Mathematics. Busines Publications Limited.
 London 1964.
- |31| FREUDENTHAL
 "L'intégration après coup ou à la Source"
 Colloque International UNESCO
 "Modernisation de l'Enseignement Mahtématique dans les pays
 Européens". Bucarest 1968. p.p. 147-158.
- |32| FREUDENTHAL

 Mathématiques et Réalités. Hachette. Paris 1967.
- |33| FULLER
 "Applied Mathematics in Schools".
 Colloque International UNESCO
 "Modernisation de l'Enseignement mathématique dans les pays
 Européens" Bucarest 1968. p.p. 134-139.
- |34| GALION
 Second Séminaire International. "La concrétisation en Mathématique".
 OCDL Hatier. Paris 1972.
- |35| GARDNER
 Problèmes et divertissements mathématiques. Tome I. Dunod.
 Paris 1964.
- |36| GATTEGNO
 Pour un enseignement dynamique des mathématiques.
 Delachaux et Niestlé. Neuchatel 1965.
- |37| GLAESER
 "Rôle de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation
 civique ". Galion. Troisième Séminaire International
 "La mathématique et ses applications".
 Juillet 1972. CEDIC. Paris 1972. p.p. 133-142.
- |38| HILLIER, LIEBERMAN
 Introduction to Operations Research.
 Holden Day Inc. Californie 1974.
- |39| HOLT, MAJORAM
 Mathematics Through experience. Book 3. Blond Educational.
 Great Britain 1973.
- |40| IREM de GRENOBLE
 Expérience MAFRA (Mahtématique-Français) INRDP-IREM. Faite à
 Beaurepaire ; année scolaire 75-76. Dossier au CRDP de Grenoble.

- |41| IREM de STRASBOURG
Le livre du problème Vol.1. 2è édition. Université Louis Pasteur.
CEDIC. Paris 1976.
- |42| IREM de STRASBOURG
Le livre du problème Vol. 4. Université Louis Pasteur.
CEDIC. Paris 1974.
- |43| JAMES
Oxford Secondary Mathematics. Book 4.
Oxford University Press 1972.
- |44| JULLIEN
"Trois Jeux" Galion. Troisième Séminaire International.
"La Mathématique et ses applications" Juillet 1972.
CEDIC. Paris 1972. p.p. 23-43.
- |45| KUNTZMANN
"Apport de l'informatique à l'enseignement mathématique".
Bulletin de liaison des chercheurs en Pédagogie de l'académie de Grenoble N° 7. Juin 1975. p. 29.
- |46| KUNTZMANN
Evolution et étude critique des enseignements de mathématique
CEDIC. Paris 1976.
- |47| KUNTZMANN
Apport de l'informatique à l'enseignement mathématique.
CEDIC. Paris 1974.
- |48| KUNTZMANN
Où vont les mathématiques ? Hermann, Paris 1967.
- |49| KUNTZMANN
Préparation à l'Enseignement des mathématiques. USMG.
- |50| KUNTZMANN
"Les besoins en hommes des mathématiques appliquées et de
l'automatisme".
Mathématiques et Réalité IV. 1964. p.p. 407-410.
- |51| LANGER
"Graphes et polyèdres". Bull. APMEP. N° 306. 1976. p.p. 941-950.
- |52| MOISIL
"Sur quelques problèmes de la modernisation de l'enseignement
des mathématiques et la façon dont ils sont envisagés en
Roumanie". Colloque International UNESCO. "Modernisation de
l'enseignement mathématique dans les pays européens"
Bucarest 1968. p.p. 110-117.
- |53| MANGENEY
"Un exemple de modèle mathématique dans un problème de
sciences sociales"
Bull. APMEP N° 293. 1974. p.p. 275-287.
- |54| NIMIER
Mathématiques et affectivité. Collection Laurence Permond
stock. France 1976.

- |55| ORE
Les graphes et leurs applications. DUNOD. Paris 1970.
- |56| PAPY
"El estado de la reforma de la enseñanza de la matemática en Belgica". 2a conferencia interamericana sobre educación matemática. 1966. p. 123.
- |57| PAPY
"Influence de la Recherche Mathématique dans l'enseignement scolaire". Colloque international UNESCO.
"Modernisation de l'enseignement mathématique dans les pays européens". Bucarest 1968. p.p. 78-85.
- |58| PAPY
Les enfants et la mathématique, 1 et 3.
DIDIER. Paris 1972.
- |59| PENTAMINO 1
IREM de Grenoble. Bulletin de liaison des animateurs de clubs 1973.
- |60| PENTAMINO 2
IREM de Grenoble. Bulletin de liaison des animateurs de clubs 1976.
- |61| PICARD
"Dessin et Mathématique". Bull. APMEP N° 290. 1973. p.p. 516-529.
- |62| POLACK H.O.
"How can we teach applications of mathematics ?"
Actes du premier congrès international de l'enseignement mathématique. Lyon 1969. p.p. 261-272.
- |63| POLLAK H.O.
"Applications of Mathematics". Mathematics Education Chapter VIII, National Society for study of Education Year book LXIX, part I, 1970. p.p. 311-334.
- |64| PROGRAMMES de Mathématiques 1976
Classes de premier et second cycle.
- |65| RENAUT
"Quelques situations de la vie courante qui veulent bien se laisser mathématiser".
Groupe B3. Bull. APMEP. N° 296. 1974. p.p. 833-844.
- |66| SANTALO
La Matemática en la escuela secundaria. EUDEBA. Buenos Aires 1966.
- |67| SAKAROVITCH
Optimisation dans les réseaux. Polycopés USMG-ENSIMAG, 1977.
- |68| SAKAROVITCH
Introduction à l'étude des graphes. Polycopés USMG-ENSIMAG, 1975.
- |69| SAKAROVITCH
Programmation linéaire. Polycopés USMG-ENSIMAG, 1973.

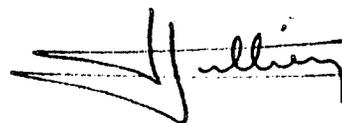
- |70| SAKAROVITCH
Processus aléatoires. Polycopés USMG-ENSIMAG, 1978.
- |71| SCHOOL MATHEMATICS PROJECT
Collection Book 1-5. Cambridge University Press.
Great Britain 1972.
- |72| SERVAIS
"Utilisation de la Mathématique et coordination d'un enseignement moderne de la mathématique avec l'enseignement des autres branches au niveau secondaire".
Colloque International UNESCO. Bucarest 1968. p.p. 158-167.
- |73| TAMMADGE
"Stage a topology in the main school"
Mathematical Gazette, déc. 1964, no. 366.p.p. 365-372.
- |74| TAYLOR, WALFORD
"Les jeux de simulation à l'école"
Casterman 1976.
- |75| TOUYAROT, HAMEAU
Collection "Itinéraire Mathématique"
Mathématique CM2, Cours complet Fernand Nathan.
- |76| VAJDA
Théorie des jeux et Programmation linéaire.
Monographies DUNOD. Paris 1959.
- |77| VALEIRAS
"Actividades de la O.E.A. en matemática".
Informe de la 2a conferencia interamericana sobre educación matemática. 1966. p. 81.
- |78| VYSIN
"Problèmes d'une expérience de renouveau faite par l'union des mathématiciens et physiciens tchécoslovaques dans les 6è-9è classes des écoles de base de 9 ans (élèves de 11-15 ans).
Congrès UNESCO "Tendances nouvelles de l'enseignement des Mathématiques". Vol. II. 1970. p. 241.
- |79|
Almanach de Mickey 1978.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 30 mai 1978

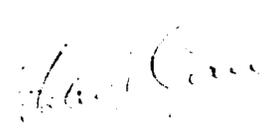
Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 30 mai 1978

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



Dr G. CAU