



HAL
open science

Contributions à la théorie des structures relationnelles discrètes, en particulier des graphes et des ordres partiels

Stéphane Foldes

► **To cite this version:**

Stéphane Foldes. Contributions à la théorie des structures relationnelles discrètes, en particulier des graphes et des ordres partiels. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Observatoire de Paris; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1979. tel-00288798

HAL Id: tel-00288798

<https://theses.hal.science/tel-00288798>

Submitted on 18 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

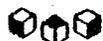
présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le titre de
DOCTEUR ES SCIENCES
« MATHÉMATIQUES »

par

Stéphane FOLDES



**CONTRIBUTIONS A LA THEORIE DES STRUCTURES
RELATIONNELLES DISCRETES, EN PARTICULIER
DES GRAPHES ET DES ORDRES PARTIELS**



Soutenue le 28 février 1979 devant la commission d'examen

P. JULLIEN

Président

C. BENZAKEN

P.L. HAMMER

F. JAEGER

M. LAS VERGNAS

M. SAKAROVITCH

Examineurs

CONTRIBUTIONS A LA THEORIE DES STRUCTURES RELATIONNELLES DISCRETES,
EN PARTICULIER DES GRAPHES ET DES ORDRES PARTIELS

S. FOLDES

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEIBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. : DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. : ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
---------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET

M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Electronique - automatique
BESSON Jean	Chimie minérale
BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
BONNETAIN Lucien	Génie chimique
BONNIER Etienne	Métallurgie
* BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
COUMES André	Electronique - automatique
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electronique - automatique
FOULARD Claude	Electronique - automatique
LANCIA Roland	Electronique - automatique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
PAUTHENET René	Electronique - automatique
PERRET René	Electronique - automatique
POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
* en congé pour études	

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
BOUVARD Maurice	Génie mécanique
COHEN Joseph	Electronique - automatique
GUYOT Pierre	Métallurgie physique
LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM. ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
ROBERT François	Analyse numérique
ZADWORNY François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
CHARTIER Germain	Electronique - automatique
CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
IVANES Marcel	Electronique - automatique
LESIEUR Marcel	Mécanique
MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
PIAU Jean-Michel	Mécanique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M. SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M. FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM. ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
BRONOEL Guy	Maître de Recherche
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique) E.N.S.E.E.G.

MM. BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM. KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
SOUQUET	U.S.M.G.
CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M. BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM. DAVID	Centre national recherche scientifique
DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

Je voudrais remercier ceux qui à des périodes différentes de ma vie d'étudiant m'ont fait confiance. Les travaux dont ce mémoire est la récapitulation n'auraient peut-être pas pu se réaliser sans leur appui intellectuel ou matériel. Ma reconnaissance va tout particulièrement à

M. le Docteur Faloux,

M. le Professeur Ehresmann,

Mme le Professeur Ehresmann,

M. le Professeur Tutte,

M. le Professeur Benzaken.



CHAPITRE 1 : MULTIRELATIONS

1.1 - HOMOMORPHISMES

Notre terminologie s'inspire de celle de Fraïssé [34], quoiqu'elle en diffère légèrement.

Soit $f : V \rightarrow W$ une application. Pour tout cardinal n , fini ou infini, notons $f^n : V^n \rightarrow W^n$, l'application produit définie "par coordonnées". Tout sous-ensemble de V^n est appelé une relation n-aire (relation d'arité n) sur V . Un type relationnel est une fonction $t : I \rightarrow Cn$, où I est un ensemble quelconque et Cn désigne la classe des cardinaux. Une multirelation de type t sur V est un couple (V, R) , où $R = (R_i : i \in I)$ est une famille de relations sur V , R_i ayant pour arité $t(i)$ pour tout $i \in I$. Si étant donné un cardinal n , chaque $t(i)$ est strictement inférieur à n , alors on parlera d'une multirelation d'arité inférieure à n . Si (V, R) et (V', R') ont le même type t , alors on appelle homomorphisme de (V, R) vers (V', R') toute application $h : V \rightarrow V'$ telle que pour chaque $i \in I$, $h^{t(i)}(R_i) \subseteq R'_i$. Toutes les structures considérées dans la suite de ce chapitre seront des relations ou multirelations, et une grande partie des propositions présentées peuvent être vues comme des théorèmes sur certaines sous-catégories particulières de la catégorie définie par les homomorphismes qu'on vient d'introduire.

Soit Ens la catégorie dont les objets sont tous les ensembles et les flèches les applications entre ensembles. Nous entendons par catégorie concrète toute sous-catégorie de Ens . La sous-catégorie pleine de Ens engendrée par C sera notée $P(C)$. Dans la suite toute catégorie sera supposée être petite. Sous cette hypothèse, le théorème classique de Cayley concernant les groupes admet l'extension catégorique suivante : toute catégorie est isomorphe à une catégorie concrète appropriée.

Soit C une catégorie concrète. Pour tout nombre cardinal n , une application $f : V \rightarrow W$, où $V, W \in C$, est appelée n -admissible pour C , si pour tout $X \subseteq V$ tel que $\text{Card}(X) < n$, il existe $g : V \rightarrow W$, $g \in C$, ayant la même restriction à X que l'application f .

Proposition 1.1.1. : Soient C et S des catégories concrètes telles que $C \subseteq S \subseteq P(C)$. Pour tout cardinal n les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe des multirelations d'arité inférieure à n sur les objets de C , constituant une catégorie dont l'intersection avec S est précisément C ,

(ii) Toute application $f \in S$ qui est n -admissible pour C , appartient nécessairement à C . \square

La condition (ii) de la proposition précédente est étroitement liée à des propriétés étudiées par Jezek [39] et Jonsson [40], ainsi qu'à la caractérisation des groupes d'automorphisme des graphes orientés (en tant que groupes opérant fidèlement) par la validité d'une forme généralisée du théorème chinois [15].

Les propositions qui suivent sont des conséquences immédiates de la Proposition 1.1.1.

Proposition 1.1.2. : Une catégorie concrète C est une catégorie de multirelations d'arité inférieure à n si et seulement si toute application n -admissible pour C appartient à C .

Proposition 1.1.3. : Un monoïde de transformation C sur un ensemble V est le monoïde des endomorphismes d'une multirelation sur V d'arité inférieure à n , si et seulement si toute transformation de V qui est n -admissible pour C appartient à C .

1.2 - AUTOMORPHISMES LOCAUX ET INTERVALLES

Un automorphisme local d'une multirelation $M = (V, R)$ est un isomorphisme d'une restriction $M|V_1$ de M vers une autre restriction $M|V_2$. Dans les années cinquante, Fraïssé a introduit la notion suivante d'intervalle. $I \subseteq V$ est appelé un intervalle si tout automorphisme local de la restriction $M|I$ se prolonge par l'identité sur $V \setminus I$ en un automorphisme local de M [34].

Une partie S de V s'appelle un intervalle fort si elle vérifie les conditions suivantes, pour chaque relation R de M :

Soit n l'arité de R et soit $x = (x_i : i \in n)$ un élément de $V^n \setminus S^n$. Soit y le n -uplet obtenu en remplaçant dans x un des termes appartenant à S par un autre élément de S . Alors $x \in R \iff y \in R$.

Pour les propriétés élémentaires des intervalles forts, voir [10] et [17]. Dans [10] les intervalles forts sont appelés "parties solidaires". Il est facile

de voir que tout intervalle fort est un intervalle. Dans le cas des relations d'ordre ou des graphes sans boucle, orientés ou non orientés, les deux notions coïncident. Aussi les intervalles forts d'une multirelation jouissent de la propriété très utile de fermeture pour l'intersection et définissent ainsi un opérateur de fermeture sur l'ensemble (ordonné par inclusion) des parties de V . La fermeture d'une paire $\{x,y\}$ s'appelle segment et se note $[x,y]$. Le segment est propre si $x \neq y$. La multirelation (V,R) est dense si $\text{Card}(V) > 1$ et tout segment propre est infini. Elle est dit dispersée si elle n'admet pas de restriction dense.

Une congruence de décomposition C d'une multirelation $M = (V,R)$ est une relation d'équivalence sur V dont toutes les classes sont des intervalles forts. On définit alors le quotient M/C , qui est une multirelation du même type que M , et dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des classes de C . (Le quotient est appelé "charpente" dans [10]). La proposition suivante [10,17] généralise un résultat de Hansdorff relatif aux ordres totaux. Une multirelation est finitaire si elle se compose d'un nombre fini de relations d'arité fini.

Proposition 1.2.1. : Toute multirelation M finitaire ou bien est dispersée, ou bien se décompose, d'une façon unique, en intervalles forts sur lesquels la restriction de M est dispersée, et qui déterminent un quotient dense.

Toujours dans le contexte des ordres totaux, Gelyzal [37] a généralisé le résultat de Hansdorff à des propriétés plus abstraites que "dense" ou "dispersée". Les résultats de Gleyzal s'étendent également aux relations quelconques [14,17].

Dans [10] et [17] on examine encore l'opération "somme relationnelle", qui correspond à la construction de relations à partir d'intervalles forts disjoints et d'un quotient donné. Le produit lexicographique est un cas particulier de cette opération.

Quelques propriétés du treillis des congruences de décomposition des relations finitaires, analogue aux treillis de congruences algébriques, sont données dans [10].

Les liens entre les intervalles de Fraïssé et certaines concepts étudiés en théorie des graphes et hypergraphes [17] semblent avoir échappé à l'attention. Notons par exemple que les classes d'équivalence du préordre vicinal d'un graphe [24] sont des intervalles particuliers.

CHAPITRE 2 : RELATIONS D'ORDRE

2.1 - OPERATEURS DE FERMETURE SUR LES ORDRES TOTAUX ET LES BONS ORDRES

Soit R un ensemble partiellement ordonné. Rappelons qu'un opérateur de fermeture de R est une application $f : R \rightarrow R$ vérifiant les axiomes

$$x \leq f(x) \quad ,$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad ,$$

$$f(f(x)) = f(x) \quad .$$

L'ensemble des opérateurs de fermeture se note $F(R)$, et il est lui-même ordonné par

$$f \leq g \iff \forall x \in R \quad f(x) \leq g(x) \quad .$$

Il existe une littérature abondante étudiant le lien entre certaines propriétés remarquables de R et celles de $F(R)$. Nous nous sommes intéressés au cas des ordres totaux, et en particulier aux ensembles bien ordonnés (ordinaux) [8]. La terminologie suit celle de [44].

Dans les cinq propositions suivantes, R désigne un ordre total quelconque.

Proposition 2.1.1. L'ordre $F(R)$ des opérateurs de fermeture est un inf demi-treillis.

Proposition 2.1.2. $F(R)$ est un sup demi-treillis si et seulement si R est dépourvu de lacunes et admet un maximum.

Proposition 2.1.3. Si $F(R)$ est un treillis, alors c'est un treillis distributif, complet, et infiniment distributif pour la borne inférieure.

Proposition 2.1.4. Si $F(R)$ est un treillis, alors (il est complet et) les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $F(R)$ est infiniment distributif pour la borne supérieure,
- (ii) $F(R)$ est complété (c'est-à-dire $F(R)$ est un treillis de Boole),
- (iii) R n'admet pas de sous-ordre isomorphe à l'ensemble (muni de l'ordre naturel $\{0\} \cup \{1/n : n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Proposition 2.1.5. Si $F(R)$ est un treillis complet infiniment distributif, alors c'est un treillis complet, complètement distributif.

Considérons maintenant les ensembles bien ordonnés, c'est-à-dire les nombres ordinaux munis de l'ordre naturel. La proposition suivante décrit la dépendance de la structure de $F(\alpha)$ de celle de l'ordinal α . Le caractère cofinal de α est noté $cf(\alpha)$.

Proposition 2.1.6. Soient α et β deux nombres ordinaux avec des expansions normales

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} a_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} a_k \quad \text{et} \quad \beta = \omega^{\beta_1} b_1 + \dots + \omega^{\beta_l} b_l ,$$

$\alpha_1 > \dots > \alpha_k$, $\beta_1 > \dots > \beta_l$. Pour que $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ soient isomorphes, il faut et il suffit que les cinq conditions suivantes soient simultanément vérifiées:

- (i) $\text{Card } \alpha = \text{Card } \beta$
- (ii) $\text{Card } \omega^{\alpha_k} = \text{Card } \omega^{\beta_l}$
- (iii) $cf(\alpha) = cf(\beta)$
- (iv) α est un cardinal $\Leftrightarrow \beta$ est un cardinal,
- (v) ω^{α_k} est un cardinal $\Leftrightarrow \omega^{\beta_l}$ est un cardinal.

2.2 - ARITHMÉTIQUE TRANSFINIE

Le problème de la continuité des trois opérations élémentaires de l'arithmétique transfinie, l'addition, la multiplication et l'exponentiation, furent examinés dans [11]. On peut poser le problème d'une façon générale, pour une loi de composition binaire $*$ sur les ordinaux. On supposera toujours que $*$ est croissante en chacune de ses variables, c'est-à-dire que pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \text{On}$, $\alpha \leq \beta$ implique $\alpha * \gamma \leq \beta * \gamma$ et $\gamma * \alpha \leq \gamma * \beta$. Une suite d'ordinaux indexée par l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à un ordinal non-nul donné ϱ est une ϱ -suite. Là encore, on ne considère que des ϱ -suites croissantes. Une ϱ -suite non stationnaire est dite fondamentale. Ceci implique en particulier que ϱ est un ordinal limite. Soient $(\alpha_\xi : \xi < \varrho)$ et $(\beta_\xi : \xi < \varrho)$ deux ϱ -suites. On a

toujours l'inégalité

$$\lim (\alpha_{\xi} * \beta_{\xi} : \xi < \rho) \leq \lim (\alpha_{\xi} : \xi < \rho) * \lim (\beta_{\xi} : \xi < \rho) .$$

Le problème de la continuité est celui de savoir si l'on a l'égalité.

On a étudié le cas où $*$ est l'une des opérations binaires addition, multiplication ou exponentiation. Le symbole $*$ désigne désormais une quelconque de ces opérations. On peut faire deux observations. D'une part, si $(\alpha_{i\xi} : \xi < \rho)$ et $(\beta_{i\xi} : \xi < \rho)$ sont des suites fondamentales pour $i = 1, 2$, telles que $\lim (\alpha_{1\xi} : \xi < \rho) = \lim (\alpha_{2\xi} : \xi < \rho)$ et $\lim (\beta_{1\xi} : \xi < \rho) = \lim (\beta_{2\xi} : \xi < \rho)$, alors

$$\lim (\alpha_{1\xi} * \beta_{1\xi}) = \lim (\alpha_{2\xi} * \beta_{2\xi}) .$$

D'autre part, on a

$$\lim (\alpha_{1\xi} * \beta_{1\xi}) = \lim (\alpha_{1\xi} * \lim \beta_{1\xi}) .$$

En posant donc $\alpha = \lim \alpha_{1\xi}$, $\beta = \lim \beta_{1\xi}$, on peut étudier les conditions de l'égalité

$$\lim (\alpha_{1\xi} * \beta) = \alpha * \beta ,$$

dont la validité ne dépendra que de α et β , et nullement du choix de la suite particulière $\alpha_{1\xi}$ convergeant vers α . Les résultats de [11] donnent des conditions nécessaires et suffisantes sur α et β pour que cette égalité soit vérifiée, et ceci séparément dans les cas spécifiques des trois opérations que $*$ représente.

Un problème de commutativité de l'addition transfinie est considéré dans [9]. On se donne un cardinal régulier transfini ω_{α} et une famille $(\alpha_{\xi} : \xi < \omega_{\alpha})$ de nombres ordinaux quelconques. Cette famille est dite ω_{α} -commutative si pour toute permutation σ de ω_{α} , c'est-à-dire des indices $\xi < \omega_{\alpha}$,

$$\sum (\alpha_{\xi} : \xi < \omega_{\alpha}) = \sum (\alpha_{\sigma(\xi)} : \xi < \omega_{\alpha}) .$$

Le concept de cofinalité joue un rôle important dans l'étude de la ω_{α} -commutativité. On donne en particulier des bornes sur le nombre (en général infini) de ω_{α} -sommes distinctes d'une famille $(\alpha_{\xi} : \xi < \omega_{\alpha})$.

2.3 - ALGÈBRES DE BOOLE FINIES

Les algèbres de Boole peuvent être axiomatisées soit comme ensembles ordonnés (treillis distributifs et complémentés), soit comme anneaux (unitaires et idempotents). En outre, les opérations de treillis peuvent être introduites sans faire référence à une structure d'ordre. Dans [13] on donne une caractérisation combinatoire des algèbres de Boole finies, vues en tant que graphes (avec un sommet distingué arbitrairement choisi). Il est connu que le diagramme de Hasse d'une algèbre de Boole finie (comme ensemble ordonné) est une puissance cartésienne du graphe K_2 . Ce diagramme est le plus souvent appelé un hypercube. Tous les sommets d'un hypercube sont équivalents sous l'action de son groupe d'automorphismes. On peut donc choisir n'importe quel sommet et l'orientation du graphe définie à partir de ce choix [5] détermine la structure d'un ensemble ordonné (treillis de Boole). La caractérisation combinatoire suivante des hypercubes équivaut donc à une axiomatisation des algèbres de Boole finies.

Proposition 2.3.1. Un graphe complet biparti avec fonction de distance $d(x,y)$ est un hypercube si et seulement si pour toute paire de sommets x,y le nombre de chemins géodésiques entre x et y est $d(x,y)!$

Il est possible de donner une variante de cette proposition:

Proposition 2.3.2. Un graphe connexe biparti avec sa distance $d(x,y)$ est un hypercube si et seulement si pour toute paire de sommets x, y et pour tout i , $0 \leq i \leq d(x,y)$, le nombre de sommets z tels que $d(x,z)=i$ et $d(z,y)=d(x,y)-i$, est précisément le coefficient binomial $\binom{d(x,y)}{i}$.

On sait que tout hypercube définit un schéma d'association. Etant donné, d'autre part, un schéma d'association arbitraire, il est possible de déterminer, en examinant uniquement ses nombres d'intersection, s'il provient ou non d'un graphe. En plus, il est facile de voir que la propriété éventuelle d'être biparti pour ce graphe est aussi une propriété des nombres d'intersection du schéma. Il s'ensuit alors de la Proposition 2.3.2 que les schémas d'association de Hamming provenant des hypercubes sont uniquement déterminés par leurs nombres d'intersection.

D'autres propriétés combinatoires et algébriques des schémas d'association de Hamming, dont l'hypercube est un cas particulier, sont examinés dans [6].

CHAPITRE 3 : QUESTIONS RELATIVES AU PRÉORDRE VICINAL D'UN GRAPHE

Dans ce chapitre tous les graphes seront finis et sans boucles. L'ensemble des sommets et celui des arêtes d'un graphe G seront notés $V(G)$ et $E(G)$. Le voisinage $N(x)$ d'un sommet x est l'ensemble des sommets adjacents à x .

Soit S un ensemble fini. Un préordre \preceq est une relation binaire réflexive et transitive sur S . Conformément aux usages on écrit, pour $x, y \in S$,

$$\begin{aligned} x \sim y & \text{ lorsque } (x \preceq y \text{ et } y \preceq x), \\ x < y & \text{ lorsque } (x \preceq y \text{ et non } y \preceq x), \\ x \parallel y & \text{ lorsque } (\text{ni } x \preceq y \text{ ni } y \preceq x). \end{aligned}$$

Une chaîne est un sous-ensemble C de S tel que $x, y \in C$ implique $(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x)$. Une antichaîne est un $C \subseteq S$ tel que $x, y \in C$ et $x \preceq y$ impliquent $x = y$. Un idéal inférieur faible (resp. fort) est un $I \subseteq S$ tel que $x \in I$ et $y < x$ (resp. $y \preceq x$) impliquent $y \in I$. Si le préordre est un ordre partiel, alors les deux notions coïncident. Les idéaux supérieurs faibles et forts sont les idéaux inférieurs faibles et forts du préordre dual. Le nombre de Dilworth du préordre est le nombre minimum de chaînes dont la réunion est S . D'après un célèbre résultat de Dilworth ce nombre est aussi égal au nombre maximum d'éléments d'une antichaîne du préordre.

Soit G un graphe. Le préordre vicinal \preceq est défini sur $V(G)$ comme suit:

$$x \preceq y \text{ si et seulement si } N(x) \subseteq N(y) \cup \{y\} .$$

Le nombre de Dilworth du graphe, noté $D(G)$, est le nombre de Dilworth du préordre vicinal. Dans [24] nous avons étudié la relation entre divers paramètres d'un graphe et la structure de son préordre vicinal. Le nombre de Dilworth joue un rôle particulièrement important. (Récemment F. Buckley et A.J. Hoffman ont prouvé des théorèmes de type Ramsey sur $D(G)$, ainsi que sur le nombre maximum d'éléments non équivalents du préordre vicinal [3,4].)

La relation entre certains paramètres de G et $D(G)$ est immédiate. Ainsi le diamètre de G est au plus $D(G) + 1$, tandis que la maille ne peut excéder $D(G)$.

A l'origine de toute recherche sur le préordre vicinal se trouve le travail de Chvatal et Hammer sur les graphes à seuil [5]. On rappelle qu'un graphe G sur n sommets v_1, \dots, v_n est à seuil, s'il existe des nombres réels a_1, \dots, a_n et b tels que les solutions 0,1 de l'inéquation

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b \quad (1)$$

sont exactement les vecteurs caractéristiques des ensembles stables de G . Chvatal et Hammer ont montré que G est à seuil si et seulement si $D(G) = 1$.

Les graphes à seuil G ont la propriété remarquable que $V(G)$ peut être partitionné en un ensemble stable et un ensemble engendrant une clique. Les graphes G ayant cette propriété sont appelés graphes scindés [22] et ils sont caractérisés par le fait que G et son complément \bar{G} sont triangulés.

Chvatal et Hammer ont également étudié, pour un graphe arbitraire G , le nombre minimum $t(G)$ d'inéquations simultanées de type (1) dont les solutions 0,1 sont les vecteurs caractéristiques des stables de G . En particulier, $t(G)$ est aussi le nombre minimum de sous-graphes partiels à seuils couvrant toutes les arêtes de G . L'équivalence des conditions $t(G)=1$ et $D(G)=1$ laissait espérer l'existence d'une relation simple entre les deux paramètres. Malheureusement aucune comparaison n'existe entre $t(G)$ et $D(G)$ en général. Néanmoins, nous avons le résultat suivants [24]:

Proposition 3.1. Si G est un graphe scindé, alors $t(G) \leq D(G)$.

Les résultats suivants ont également été démontrés dans [24]:

Proposition 3.2. Tout graphe possède un ensemble stable de cardinalité maximum qui est un idéal inférieur faible du préordre vicinal.

Proposition 3.3. Tout graphe sans sommet isolé possède un ensemble absorbant de cardinalité minimum qui est une antichaîne du préordre vicinal.

En particulier il s'ensuit que le nombre d'absorption est au plus $D(G)$.

Proposition 3.4. Soit C un ensemble d'articulation irrédondant d'un graphe G . Nous avons:

(i) C est un idéal supérieur faible du préordre vicinal,

- (ii) après élimination des sommets appartenant à C, une des composantes connexes de cardinalité minimum est soit un singleton, soit un idéal inférieur faible du préordre vicinal.

Ajoutons encore que la Proposition 3.4 permet de généraliser une borne inférieure de Bondy sur le connectivité d'un graphe, et que cette généralisation est optimale dans le cas des graphes scindés [24].

On ne connaît que très mal les graphes avec $D(G) = 2$. Néanmoins, si G est un graphe scindé avec $V(G) = K \cup I$, K engendrant une clique, I stable, alors nous avons les équivalences suivantes [23]:

- (i) G est un graphe représentatif d'intervalles si et seulement si I est la réunion de deux chaînes du préordre vicinal;
- (ii) G est un graphe de comparabilité si et seulement si K est la réunion de deux chaînes du préordre vicinal.

Il en résulte la proposition suivante:

Proposition 3.5. Pour un graphe scindé G nous avons $D(G) \leq 2$ si et seulement si G est à la fois un graphe représentatif d'intervalles et un graphe de comparabilité.

Une caractérisation des graphes scindés G avec $D(G)$ au plus 2 par sous-graphes interdits, a également été donné dans [23].

Dans l'article [25], on a étudié les graphes G dont les sous-graphes engendrés à seuil définissent un matroïde sur $V(G)$. Une caractérisation est donné aussi bien par sous-graphes interdits que par une classification structurale complète.

CHAPITRE 4 : ENDOMORPHISMES ET AUTOMORPHISMES

4.1 - LE THEOREME DE FRUCHT ET SES GENERALISATIONS

Répondant à une question soulevée par König, Frucht a prouvé, en 1939 [35] que tout groupe fini est isomorphe au groupe des automorphismes d'un graphe. Ce théorème reste valide pour les groupes infinis (Frucht [36], Sabidussi [43]). De plus, on peut remplacer dans l'énoncé "graphe" par "hypergraphe k-uniforme", pour tout $k \geq 2$. En fait les travaux de l'école de Prague, et notamment ceux de Hedrlin, Hell, Nesetril et Pultr montrent que pour tout entier $k \geq 2$, tout monoïde est isomorphe au monoïde des endomorphismes d'un hypergraphe k-uniforme. Les résultats de ce type admettent divers équivalents algébriques, e.g.

- (1) tout monoïde est isomorphe au monoïde des endomorphismes d'un demi-groupe (Hedrlin et Lambek);
- (2) tout monoïde est isomorphe au monoïde des endomorphismes d'un treillis borné (Grätzer et Sichler).

Il convient de souligner que la démonstration de ces équivalents algébriques utilise toujours le résultat sur les graphes.

Remarquons que la catégorie des demi-groupes ou celle des treillis bornés est une classe équationnelle finiment présentée d'algèbres universelles. (Pour la terminologie, voir par exemple Evans [7].) Il existe évidemment des classes équationnelles C finiment présentées dans lesquelles on ne peut pas représenter tout monoïde par un monoïde d'endomorphismes. Telle est par exemple la catégorie des monoïdes mêmes, car il n'est pas vrai que tout monoïde soit isomorphe au monoïde des endomorphismes d'un monoïde. Pour abrégier la terminologie, disons que le Théorème de Frucht (resp. le Théorème de Hedrlin-Pultr) est valide pour une catégorie C si tout groupe (resp. tout monoïde) est isomorphe au groupe des automorphismes (resp. au monoïde des endomorphismes) d'un objet de C. Doit-on espérer une caractérisation raisonnable des catégories de structures algébriques vérifiant le Théorème de Frucht ou le Théorème de Hedrlin-Pultr ? La proposition suivante laisse penser le contraire [29].

Proposition 4.1.1. Il n'existe aucun algorithme pour décider si une classe équationnelle finiment présentée vérifie le Théorème de Frucht, ou si elle vérifie le Théorème de Hedrlin-Pultr.

La démonstration utilise la validité du Théorème de Hedrlin-Pultr pour les treillis bornés, ainsi que l'insolubilité récursive du problème du mot dans un monoïde (résultat de Post). Nous aurons l'occasion de revenir sur le problème du mot dans le chapitre suivant.

Dans [29] on montre encore l'indécidabilité récursive d'une propriété catégorique, celle d'être une catégorie liante, qui est plus générale que le Théorème de Hedrlin-Pultr.

4.2 - GRAPHES

Bien que tout groupe soit isomorphe au groupe des automorphismes d'un graphe, il existe, et en abondance, des groupes de permutations sur des ensembles V qui ne sont le groupe des automorphismes d'aucun graphe sur V ni même d'un graphe orienté ou d'un hypergraphe. Tels sont par exemple les groupes alternés A_n pour $n \geq 4$, qui sont $(n-2)$ -transitifs. Une approche possible de l'étude des groupes d'automorphismes de graphes, en tant que groupes de permutations, est illustrée par le résultat suivant, prouvé par Bower et Babai:

Pour tout graphe fini H et pour tout sous-groupe B de $\text{Aut } H$, il existe un graphe G tel que

- (i) H est un sous-graphe engendré de G ,
- (ii) H est stable pour tout $f \in \text{Aut } G$,
- (iii) chaque $f \in \text{Aut } G$ est déterminé d'une façon unique par sa restriction à H ,
- (iv) la restriction de $\text{Aut } G$ à H est précisément B .

Pour une extension de ce résultat aux hypergraphes uniformes, finis ou infinis, voir [14].

Dans [28] nous avons utilisé certains résultats connus sur la catégorie des graphes, ainsi qu'une construction infinie de Erdős et Hajnal, pour démontrer un résultat similaire sur les monoïdes d'endomorphismes, en

tant que monoïdes opérant sur un ensemble. On obtient ainsi la

Proposition 4.2.1. Soit H un graphe et B un sous-monoïde de son monoïde d'endomorphismes End H . Alors il existe un graphe G tel que

- (i) H est un sous-graphe engendré de G ,
- (ii) H est stable par tout $f \in \text{End } G$,
- (iii) chaque $f \in \text{End } G$ est déterminé d'une façon unique par sa restriction à H ,
- (iv) la restriction de End G à H est précisément B .

Cette Proposition généralise à la fois le résultat de Bower et Babai, et le théorème de Hedrlin-Pultr pour la catégorie des graphes.

4.3 - GRAPHES ORIENTES

Soit G un groupe, S un sous-ensemble de G, et $x, y \in G$. Si $x^{-1}y \in S$, alors x est dit congru à y modulo S, on le note par $x \equiv y \pmod{S}$. (Il s'agit d'une relation d'équivalence seulement si S est un sous-groupe.)

Soit $(S_i : i \in I)$ une famille de sous-groupes. Il est clair que pour toute famille $(a_i : i \in I)$ d'éléments de G indexée par le même ensemble I, si le système de congruences

$$\forall i \in I \quad x \equiv a_i \pmod{S_i} \quad (1)$$

admet une solution $x \in G$, alors

$$\forall i, j \in I \quad a_i \equiv a_j \pmod{S_i S_j} \quad (2)$$

où $S_i S_j = \{ ab : a \in S_i, b \in S_j \}$. Nous disons que le théorème chinois est valide pour la famille $(S_i : i \in I)$ si pour toute famille $(a_i : i \in I)$, la condition (2) n'est pas seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour la solubilité du système (1).

Le théorème suivant a été prouvé dans [15] :

Proposition 4.3.1. Un groupe de permutations G sur un ensemble fini V est le groupe des automorphismes d'un graphe orienté Γ sur V , si et seulement si le théorème chinois est valide pour la famille des stabilisateurs de G. (Flèches multiples et boucles permises pour Γ .)

Cette Proposition n'est plus valide pour V infini. Néanmoins, elle reste vraie dans le cas infini si G est abélien [14].

Remarquons qu'un résultat classique de la théorie élémentaire des nombres peut être énoncé comme suit: Le théorème chinois est valide pour toute famille finie de sous-groupes du groupe Z . Certaines variations possibles sur cet énoncé ont été examinées dans [16]. On a trouvé par exemple que la finitude de la famille des sous-groupes était essentielle, plus précisément:

Proposition 4.3.2. Le théorème chinois est valide pour une famille infinie $(S_i : i \in I)$ de sous-groupes de Z si et seulement si un des S_i est trivial.

Notons finalement que dans un certain sens, les résultats du paragraphe 1.1. sont l'extension catégorique de la Proposition 4.3.1.

4.4 - HYPERGRAPHES

Soit B un groupe quelconque. L'ensemble L_B des translations à gauche de B constitue un groupe de permutations régulier sur B (i.e. transitif et ayant un stabilisateur trivial). Le fait que B et L_B sont des groupes isomorphes est souvent cité comme le théorème de Cayley. Tout groupe régulier de permutations P peut être considéré comme le groupe L_B des translations à gauche d'un groupe abstrait B , isomorphe à P .

Soit k un entier positif. Nous disons qu'un groupe B admet une représentation régulière par un hypergraphe k -uniforme H , si $L_B = \text{Aut } H$. (En particulier, l'ensemble des sommet de H doit être B .) Par exemple, le groupe Z_3 à trois éléments n'admet pas de représentation régulière par aucun hypergraphe k -uniforme, quelque soit k . Dans ce paragraphe nous nous intéressons uniquement aux groupes finis.

Le cas $k=1$ est trivial. De nombreux auteurs ont étudié le cas $k=2$, celui des graphes (voir [31]). Il existe des familles infinies de groupes qui n'ont pas de représentation régulière par un graphe. Pour $k \geq 3$ nous avons obtenu le résultat suivant [30,31] :

Proposition 4.4.1. Il existe un polynôme $p(x)$ à coefficients entiers tel que pour tout $k \geq 3$, tout groupe fini d'ordre au moins $p(k)$ admet une représentation régulière par un hypergraphe k -uniforme.

Le polynôme en question donné dans [31] est $3(x^2+1)^3+(x^2+1)^2$, qui est de degré 6. Néanmoins, tout laisse à penser qu'un polynôme du premier degré satisfaisant aux conditions de la Proposition 4.4.1. existe, et peut-être même un polynôme de la forme $x+c$, c constant.

4.5. - POLYNOMES CHROMATIQUES

L'effet de rotor est une transformation de graphes dans laquelle un sous-graphe ayant une symétrie de rotation est remplacé par son image miroir. (Pour les définitions formelles, voir Tutte [45,46] ou [18].) L'effet de rotor laisse invariant le nombre des sous-arbres maximaux (Brooks, Smith, Stone, Tutte [2] et Tutte [46]). De plus, Tutte a montré dans [45] l'invariance du polynôme dichromatique dans des rotors particuliers, et a posé le problème pour le cas général. Nous avons montré dans [18] que déjà le polynôme chromatique n'est pas invariant dans les rotors généraux. Néanmoins, certains résultats d'invariance ont été donnés dans [14].

L'effet des symétries d'un graphe ou d'un hypergraphe peut être également exploité dans le calcul explicite du polynôme chromatique [21].

CHAPITRE 5 : ALGORITHMES ET PROBLEMES DE DECISION

5.1. - IMMERGEABILITE

Pour les définitions précises des réductions et équivalences algorithmiques, voir Rogers [42] et Ladner, Lynch, Selman [41]. Disons simplement que deux classes d'objets finis C et C' sont polynomialement équivalents lorsque le problème de reconnaissance d'un objet dans C est polynomialement équivalent en temps au problème analogue pour C' .

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble du plan. Un groupe fini est appelé S-planaire s'il peut être dessiné dans S . Ainsi tout graphe S-planaire est a fortiori planaire. Si l'intérieur topologique de S n'est pas vide, alors S contient une copie homéomorphe du plan et les graphes S-planaires sont précisément les graphes planaires. Si S est l'ensemble $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, alors les graphes S-planaires sont ceux dont chaque composant connexe est un chemin simple. Dans tous ces cas il existe des algorithmes très performants pour décider si un graphe fini est S-planaire. D'autre part, on a montré dans [33] qu'il existe des parties $S \subseteq \mathbb{R}^2$ telles que les graphes S-planaires ne sont pas algorithmiquement reconnaissables. Quelle peut être la difficulté du problème de reconnaissance des graphes S-planaires ?

Proposition 5.1.1. [1] Pour chaque classe C de graphes finis il existe un sous-ensemble $p(C)$ du plan, connexe par arcs, tel que C est polynomialement équivalent à la classe des graphes $p(C)$ -planaires.

Une variante purement combinatoire de ce résultat est la proposition suivante:

Proposition 5.1.2. [1] Pour chaque classe C de graphes finis il existe un graphe infini $g(C)$, tel que C est polynomialement équivalent à la classe des graphes finis représentables dans $g(C)$.

Dans cet énoncé, on peut interpréter "représentables dans $g(C)$ " soit comme "isomorphes à un sous-graphe partiel de $g(C)$ ", soit comme "isomorphes

à un sous-graphe engendré de $g(C)$ ".

On a vu au paragraphe 4.1. que les théorèmes de représentation des groupes (Frucht) ou monoïdes (Hedrlin Pultr) par des graphes conduisaient à des théorèmes de représentation par différentes variétés de structures algébriques. La Proposition 5.1.2. peut être vue comme un théorème de représentation des degrés d'insolubilité polynomiaux par des graphes. La proposition suivante est une version algébrique de la précédente:

Proposition 5.1.3. [19] Pour toute classe C de treillis finis il existe un treillis infini $t(C)$ tel que C est polynomialement équivalent à la classe des treillis finis isomorphes à des sous-treillis de $t(C)$.

Cette proposition reste vraie pour la variété des demi-treillis. La démonstration utilise, outre la Proposition 5.1.2., la version suivante d'un résultat de Evans:

Soit V une variété d'algèbres universelles tel que tout V-algèbre partielle finie puisse être complétée en une V-algèbre. Alors il existe un algorithme pour décider en temps polynomial, pour toute V-algèbre finiment présentée A et toute pair de mots v et w sur les générateurs de A, si $v=w$ dans A.

(En particulier, le problème du mot est soluble en temps polynomial pour la variété des treillis et des demi-treillis.)

5.2 - DECIDABILITE DE PROPOSITIONS GEOMETRIQUES

Evans a montré que le problème du mot est soluble dans une variété d'algèbres universelles V si et seulement si il existe un algorithme pour décider si un algèbre partielle finie peut être complétée en une algèbre appartenant à V. La possibilité d'une approche similaire au problème de décision de la validité de certaines propositions dans une classe donnée de structures d'incidence a été examinée dans [20]. Ce problème de validité se présente donc comme un analogue naturel du problème du mot.

Une structure d'incidence I est un triple (V, B, R) , où $V = V(I)$ et $B = B(I)$ sont des ensembles quelconques (dits points et droites), et $R = R(I)$ est un sous-ensemble de $V \times B$, appelé relation d'incidence. Si deux points distincts sont incidents avec au plus une droite, alors I est

un plan projectif partiel. Le problème de complétion pour une classe V de structures d'incidence est le problème de la reconnaissance algorithmique des structures d'incidence finies complétables dans V , c'est-à-dire dans une structure I appartenant à V .

Soient $\{p_1, p_2, \dots\}$ et $\{d_1, d_2, \dots\}$ deux ensembles infinis dénombrables disjoints de symboles, appelés p-variables et d-variables. Une formule atomique est une expression de la forme $p_i = p_j$, $d_i = d_j$ ou $p_i \in d_j$. Un théorème élémentaire est une expression formelle obtenue en substituant des formules atomiques aux indéterminées d'une formule du calcul propositionnel, par exemple:

$$(\text{non}(p_1 = p_2) \text{ et } p_1 \in d_1 \text{ et } p_2 \in d_1 \text{ et } p_1 \in d_2 \text{ et } p_2 \in d_2) \Rightarrow (d_1 = d_2)$$

Les théorèmes de configuration de Marshall Hall [38] sont des cas particuliers. Une interprétation des variables dans une structure d'incidence I est une fonction qui associe un point de I à chaque p-variable, et une droite de I à chaque d-variable. La validité d'un théorème élémentaire ζ dans une interprétation est définie de manière évidente. ζ est dit valide dans I , s'il est valide dans toute interprétation des variables dans I . Etant donné une classe V de structures d'incidence, ζ est dit valide dans la classe V s'il est valide dans chaque structure I appartenant à V . L'exemple du théorème élémentaire donné ci-dessus est valide dans les plans projectifs partiels (et dans rien d'autre). Marshall Hall a noté [38] que les théorèmes de Pappus et de Desargues peuvent être exprimés comme des théorèmes élémentaires (de configurations) π et δ . On sait que π est valide dans les plans projectifs provenant des corps commutatifs, tandis que δ est valide dans ceux provenant des corps quelconques. Nous disons que la théorie élémentaire d'une classe V de structures d'incidence est décidable s'il existe un algorithme pour décider si un théorème élémentaire ζ est valide dans V .

Proposition 5.2.1. Soit V une classe de structures d'incidence. Le problème de validité des théorèmes élémentaires dans V est équivalent (au sens des degrés d'insolubilité) au problème de reconnaissance des structures d'incidence finies complétables dans V .

En fait la réduction du problème de complétion dans V à la théorie élémentaire de V peut se faire en temps polynomial.

Une conséquence immédiate de la Proposition 5.2.1. est la suivante:

Proposition 5.2.2. Soit V une classe de structures d'incidence. La théorie élémentaire de V est décidable si et seulement si le problème de complétion dans V admet une solution algorithmique.

On peut en déduire, moyennant des constructions combinatoires de Marshall Hall, Quackenbush, Treash et Lindner, que la théorie élémentaire des classes suivantes de structures d'incidence est décidable:

- (i) plans projectifs,
- (ii) BIBD (balanced incomplete block design) avec $\lambda = 1$,
- (iii) systèmes de triples de Steiner.

On ne sait pas si tout plan projectif partiel fini est complétable dans un plan projectif fini. Une réponse affirmative à cette question, ou même toute caractérisation raisonnable des plans projectifs partiels finis complétables, équivaudrait à la décidabilité de la théorie élémentaire des plans projectifs finis.

Une approche différente au "problème du mot" dans les plans projectifs a été prise dans [32].

REFERENCES

1. C. Benzaken et S. Foldes, Polynomial time equivalence of graph recognition and embeddability problems. RR 117, IMAG, Grenoble 1978.
2. R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone et W.T. Tutte, The dissection of rectangles into squares . Duke Math. J. 7 (1940), 312-340.
3. F. Buckley, Ramsey functions on graphs, Thèse Ph.D., The City University of New York, 1978.
4. F. Buckley et A.J. Hoffman, On the maximal achromatic number and other functions of graphs, IBM Research Report, Yorktown Heights 1977.
5. V. Chvatal et P.L. Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming. Annals of Discrete Math. 1 (1977), 145-162.
6. M. Deza et S. Foldes, Some remarks on combinatorial metric spaces and association schemes. South-East Asian Bulletin of Math. 2 (1978), 26-28.
7. T. Evans et C.C. Lindner, Finite Embedding Theorems for Finite Designs and Algebras. Montreal 1977.
8. S. Foldes, Fermetures sur les chaînes. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris A, 276 (1973) , 1405-1406.
9. S. Foldes, Familles \mathcal{W}_α -commutatives de nombres ordinaux. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris A, 276 (1973), 1539-1540.
10. S. Foldes, Relations denses et dispersées: extension d'un théorème de Hausdorff. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris A, 277 (1973), 269-271.
11. S. Foldes, Sur la limite des suites composées de nombres ordinaux. Comptes Rendus Ac. Sc. Paris A, 280 (1975), 1539-1540.
12. S. Foldes, Etudes des relations d'ordre . Thèse de Doctorat d'Université, Paris 1973.
13. S. Foldes, A characterization of hypercubes. Discrete Math. 17 (1977), 155-159.
14. S. Foldes, Symmetries. Thèse Ph.D., Waterloo 1977.
15. S. Foldes, Symmetries of directed graphs and the Chinese remainder theorem. A paraître dans J. Comb. Theory B.

16. S. Foldes, Remarks on the Chinese remainder theorem. Montreal 1978.
17. S. Foldes, On intervals in relational structures. A paraître dans Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math.
18. S. Foldes, The rotor effect can alter the chromatic polynomial. J. Comb. Theory B. 25 (1978), 237-239.
19. S. Foldes, On the time complexity of the lattice embeddability problem. Montreal 1978.
20. S. Foldes, On the decidability of certain theorems in projective planes and other incidence structures. Waterloo 1978.
21. S. Foldes et L. Caccetta, Symmetric calculation of chromatic polynomials. Ars Combinatoria 4 (1977), 289-292.
22. S. Foldes et P.L. Hammer, Split graphs. Proc. 8th S-E Conf. 1977, 311-315.
23. S. Foldes et P.L. Hammer, Split graphs having Dilworth number two. Canad. J. Math. 29 (1977), 666-672.
24. S. Foldes et P.L. Hammer, The Dilworth number of a graph. Annals of Discrete Math. 2 (1978), 211-219.
25. S. Foldes et P.L. Hammer, On a class of matroid-producing graphs. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 18, Combinatorics. Keszthely (Hongrie) 1976.
26. S. Foldes et P.L. Hammer, Split graphs and some related questions. Coll. Int. CNRS no. 260, Problèmes Comb. et Th. des Graphes, 139-140.
27. S. Foldes et E. Mendelsohn, Concrete categories and monoids of relational structures. RR 114, IMAG, Grenoble 1978.
28. S. Foldes et G. Sabidussi, On semigroups of graph endomorphisms. RR 84, IMAG, Grenoble 1977.
29. S. Foldes et G. Sabidussi, Recursive undecidability of the binding property for finitely presented equational classes. Montreal 1978.
30. S. Foldes et N.M. Singhi, Regular representation of abelian groups by 3-uniform hypergraphs. Ars Combinatoria 3 (1977), 15-20.
31. S. Foldes et N.M. Singhi, Regular representation of finite groups by hypergraphs. Canad. J. Math. 30 (1978), 946-960.
32. S. Foldes et N.M. Singhi, A non-constructible projective plane . A paraître dans Geometriae Dedicata.

33. S. Foldes et R. Steinberg, A topological space for which graph embeddability is undecidable. CORR 77-32, Waterloo 1977.
34. R. Fraïssé, Cours de Logique Mathématique. Gauthier-Villars 1971.
35. R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. Compositio Math. 6 (1939) , 239-250.
36. R. Frucht, Sobre la construccion de sistemas parcialmente ordenados con grupo de automorfismos dado. Rev. Union Math. Argentina, 13 (1948), 12-18.
37. A. Gleyzal, Order types and structure of orders. Trans. AMS , 48 (1950) 451-466.
38. M. Hall, Projective planes. Trans. AMS , 54 (1943), 229-277.
39. J. Jezek, On categories of structures and classes of algebras. Dissert. Math. LXXV, Warsawa 1970.
40. B. Jonsson, Topics in Universal Algebra. Springer Lecture Notes, 1972.
41. R.E. Ladner, N.A. Lynch et A.L. Selman, A comparison of polynomial time reducibilities. Theoretical Comp. Sc. 1 (1975), 103-123.
42. H. Rogers, Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw Hill , New York 1967.
43. G. Sabidussi, Graphs with given infinite group. Monatsh. Math. 64 (1960), 64-67.
44. G. Szasz, Théorie des Treillis. Dunod, Paris 1971.
45. W.T. Tutte, Codichromatic graphs. J. Comb. Theory B, 16 (1974), 168-174.
46. W.T. Tutte, The rotor effect with generalized electrical flows. Ars Combinatoria 1 (1976), 3-31.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 Avril 1974,

VU les rapports de M. *BENZAKEN... Claude*.....

M. *LAS... VERENAS... Michel*.....

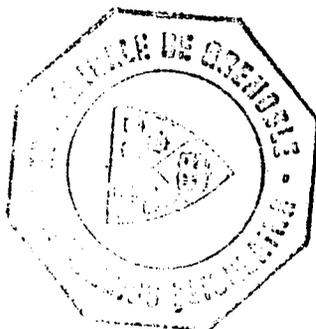
M. *JULIEN... Pierre*.....

Monsieur *FOLDES Helmut*..... est autorisé
à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de
DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à GRENOBLE, le *16 février 1979*

Le Président de l'U.S.M.G.

Le Président de l'I.N.P.G.



M. G. CAU

Ph. TRAYNARD
Président
de l'Institut National Polytechnique

A large, stylized handwritten signature in black ink, appearing to be "Ph. Traynard", written over the printed name and title.

