



HAL
open science

Utilisation de la méthode de validation croisée pour le lissage par fonctions Spline à une ou deux variables

Florencio Utreras

► **To cite this version:**

Florencio Utreras. Utilisation de la méthode de validation croisée pour le lissage par fonctions Spline à une ou deux variables. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1979. Français. NNT : . tel-00289018

HAL Id: tel-00289018

<https://theses.hal.science/tel-00289018>

Submitted on 19 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR INGENIEUR
mathématiques appliquées
option: analyse numérique**

par

UTRERAS Florencio

**UTILISATION DE LA METHODE DE VALIDATION
CROISEE POUR LE LISSAGE PAR FONCTIONS SPLINE
A UNE OU DEUX VARIABLES.**



Thèse soutenue le 11 Mai 1979 devant la commission d'examen

N. GASTINEL	}	PRESIDENT
P.J. LAURENT		EXAMINATEURS
C. CARASSO		
F. CHATELIN		

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Cryptogamie
MM. STOEUBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET

M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Electronique - automatique
BESSON Jean	Chimie minérale
BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
BONNETAIN Lucien	Génie chimique
BONNIER Etienne	Métallurgie
* BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
COUMES André	Electronique - automatique
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electronique - automatique
FOULARD Claude	Electronique - automatique
LANCIA Roland	Electronique - automatique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
PAUTHENET René	Electronique - automatique
PERRET René	Electronique - automatique
POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
* en congé pour études	

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
BOUVARD Maurice	Génie mécanique
COHEN Joseph	Electronique - automatique
GUYOT Pierre	Métallurgie physique
LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM.	ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	ZADWORNY François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	CHARTIER Germain	Electronique - automatique
	CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
	IVANES Marcel	Electronique - automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
	BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM. KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
SOUQUET	U.S.M.G.
CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M. BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM. DAVID	Centre national recherche scientifique
DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

à ma femme Lucia et
à ma fille Consuelo.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur P.J. LAURENT qui a dirigé cette thèse ; ses nombreux conseils et encouragements, ainsi que la sympathie qu'il m'a témoignée, m'ont été précieux dans l'accomplissement de ce travail.

Monsieur le Professeur N. GASTINEL a bien voulu s'intéresser à ce travail et accepter de présider le jury. Je le prie de trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

Je témoigne ma gratitude à Madame F. CHATELIN pour ses judicieuses remarques et pour avoir eu l'amabilité de participer au jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur C. CARASSO, Maître de Conférences à l'Université de Saint-Etienne pour l'intérêt qu'il porte à ce travail en se déplaçant pour participer au jury.

Je tiens aussi à remercier toute l'Equipe d'Analyse Numérique et particulièrement à Monsieur DUCHON avec qui j'ai eu des fructueuses discussions.

Enfin, comment ne pas remercier Madame CARRE-PIERRAT, pour sa patience dans la frappe de ce manuscrit, et toutes les personnes du Service de Reproduction qui auront contribué à son impression.

TABLE DES MATIERES

Première partie : Le lissage à une variable

Chapitre I - LES METHODES DE CHOIX DU PARAMETRE D'AJUSTEMENT	1
1 - Introduction	1
2 - Rappels sur les Fonctions Spline Polynômiales	7
3 - La méthode de REINSCH	10
4 - la méthode de MALLOWS	13
5 - La méthode de Validation Croisée	15
Chapitre II - Réalisation Pratique de la méthode de Validation Croisée	22
1 - Introduction	22
2 - Rappels sur l'approximation des problèmes variationnels	23
3 - L'expression approchée des valeurs propres	27
4 - Le cas des Noeuds Equidistants	44
4.1 - Les Splines Cubiques	45
4.2 - Les Splines Quintiques	46
5 - Une méthode pratique dans le cas général	47
6 - Commentaires	48
Chapitre III - Expériences Numériques	
1 - Introduction	49
2 - Le cas de Pas et Variances Egales	49
2.1 - Mise en Oeuvre de la méthode	50
2.2 - Exemples d'utilisation	51
2.3 - Le comportement asymptotique de la méthode	56
3 - Une comparaison des méthodes	60

4 - Le cas des points non equidistants et variances différentes	65
4.1 - Mise en oeuvre de la méthode	65
4.2 - Exemples numériques	66
5 - L'alternative graphique	69

Chapitre IV - Optimalité asymptotique de la méthode de Validation Croisée

1 - Introduction	75
2 - Définitions et résultats préliminaires	76
3 - Une inégalité importante	85
4 - Le comportement asymptotique de $\mu_{1,n}$ et $\mu_{2,n}$	100
5 - La méthode de Validation Croisée est Asymptotiquement optimale	110

Chapitre V - Un procédé de lissage pour un grand nombre de noeuds

1 - Introduction	115
2 - Le raccordement de deux fonctions lisses	115
3 - Le procédé par raccordement	119
4 - Expériences numériques	121

Deuxième partie : Le lissage à deux variables

Chapitre VI - Etude des valeurs propres associées aux fonctions spline bidimensionnelles

1 - Introduction	130
2 - Rappels et notations	130
3 - La méthode de Validation Croisée	136
4 - Le comportement asymptotique des valeurs propres	137
5 - Etude de quelques cas importants	142

5.1 - Spline Plaque Mince avec condition de bord	142
5.2 - Spline Plaque Mince avec frontière libre	145
6 - Conclusions	146

Chapitre VII - Les Fonctions Spline Bicubiques

1 - Introduction	147
2 - Rappels et Notations	147
3 - Les Valeurs Propres Associées	151
4 - La méthode de Validation Croisée est Asymptotiquement Optimale	154
4.1 - Notations et Rappels	154
4.2 - Etude des Quantités $b_{n,m}^2$; $\mu_{1,n,m}$; $\mu_{2,n,m}$	156

Chapitre VIII - Expériences Numériques à 2 Variables

1 - Introduction	164
2 - Les Fonctions Spline du Type Plaque Mince	164
3 - Mise en oeuvre de la méthode de Validation Croisée	166
4 - Expériences numériques	167
5 - Le procédé par raccordement	174
6 - Les temps d'exécution	178
7 - Conclusions et travail futur	179

Bibliographie	185
---------------	-----

Première partie

LE LISSAGE A UNE VARIABLE

CHAPITRE I

LES METHODES DE CHOIX DU PARAMETRE D'AJUSTEMENT

INTRODUCTION

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b]$ de la droite réelle. Soient aussi $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ n points de l'intervalle $[a, b]$.

On considère le problème d'approcher f , ses valeurs aux points t_1, \dots, t_n étant supposées connues avec des erreurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$; c'est-à-dire, en connaissant :

$$(1.1) \quad z_i = f(t_i) + \epsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

On suppose que les erreurs ϵ_i $i=1, 2, \dots, n$ peuvent être considérées comme des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle :

$$(1.2) \quad E[\epsilon_i] = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$(1.3) \quad E[\epsilon_i \epsilon_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ v_i^2 & \text{si } i = j \end{cases}$$

D'autre part, on suppose que f est "lisse". Ceci veut dire que f appartient à $H^q[a, b]$ (q entier positif), où :

$$(1.4) \quad H^q[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f, f', \dots, f^{(q-1)} \text{ absolument continues et } \int_a^b [f^{(q)}(t)]^2 dt < +\infty\}$$

$$\text{On posera alors : } \|f\|_{H^q[a, b]}^2 = \sum_{i=0}^q \int_a^b [f^{(i)}(t)]^2 dt$$

Plus tard, on verra qu'il ne suffit pas que f appartienne à $H^q[a,b]$, mais qu'il faut que l'énergie de f donnée par :

$$J(f) = \int_a^b [f^{(q)}(t)]^2 dt$$

soit 'raisonnable', par rapport à v_i^2 (et n). Il est en effet clair que dans certaines situations (par exemple lorsque f ressemble beaucoup au bruit) il n'y a aucun espoir. On verra ceci plus clairement dans les exemples numériques, mais il restera toujours au bon sens de l'utilisateur la décision de savoir quand f est "raisonnable".

Pour résoudre ce problème, on considère la fonction spline d'ajustement de paramètre τ et d'ordre q basée sur les noeuds t_1, t_2, \dots, t_n ; c'est-à-dire, la solution unique ($n > q$) du problème.

$$(1.5) \quad \text{Minimiser } \left\{ \tau \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2 \right\}$$

$g \in H^q[a,b]$

avec

$$(1.6) \quad \alpha_i = \beta \cdot \frac{1}{v_i} \quad i=1,2,\dots,n \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$$

où β est une constante de proportionnalité choisie pour avoir $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$.

Il faut remarquer que ceci n'implique pas la connaissance des v_i , mais des quantités proportionnelles, où la constante de proportionnalité est la même.

Si les v_i sont donnés, il suffira de prendre :

$$(1.7) \quad \alpha_i^2 = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2}} \cdot \frac{1}{v_i^2} \quad i=1,\dots,n$$

Le deuxième cas à remarquer, est celui où l'on sait que les v_i sont tous égaux à v . On aura donc :

$$(1.8) \quad \alpha_i^2 = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

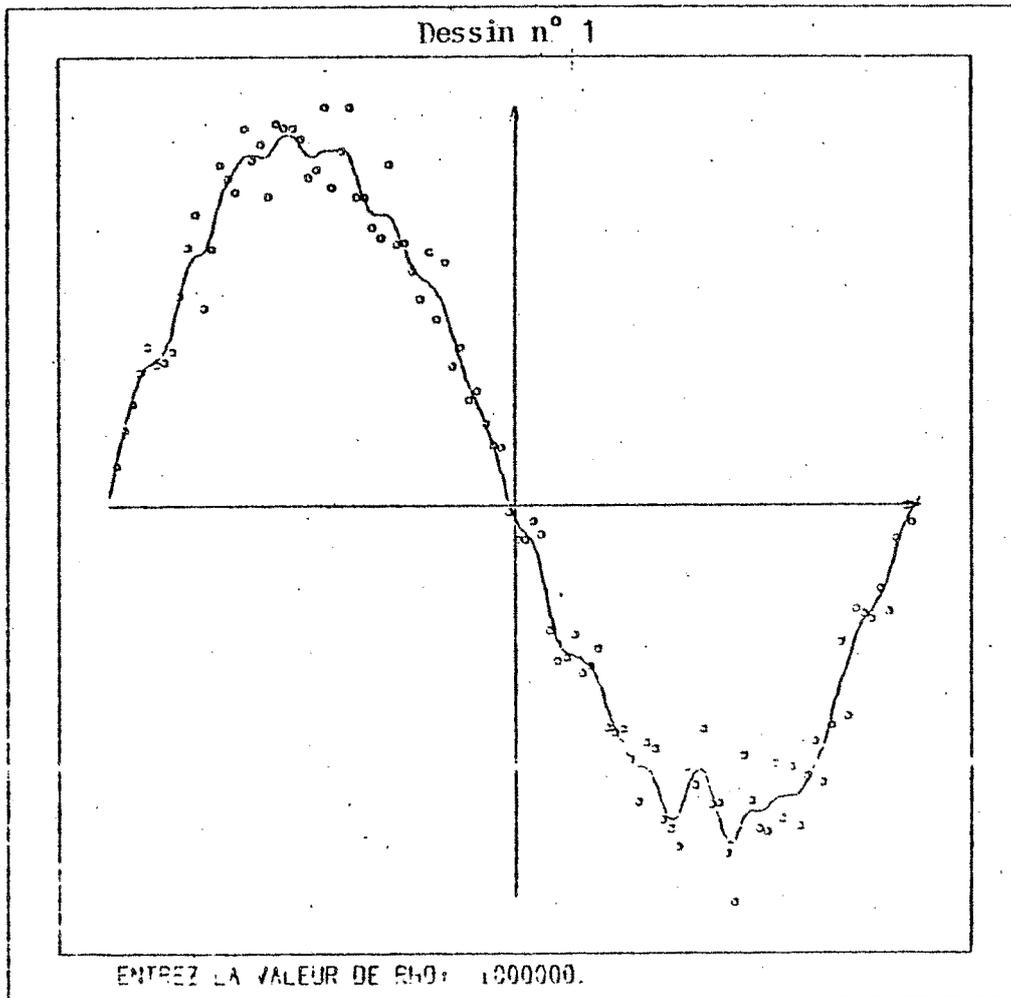
Il est bien connu (cf. [5],[30]) que la solution de (1.5) est une fonction spline polynomiale de degré $2q-1$.

Reste le problème de choisir τ , le paramètre d'ajustement, c'est-à-dire, l'équilibre entre le caractère "lisse" de la fonction mesuré par

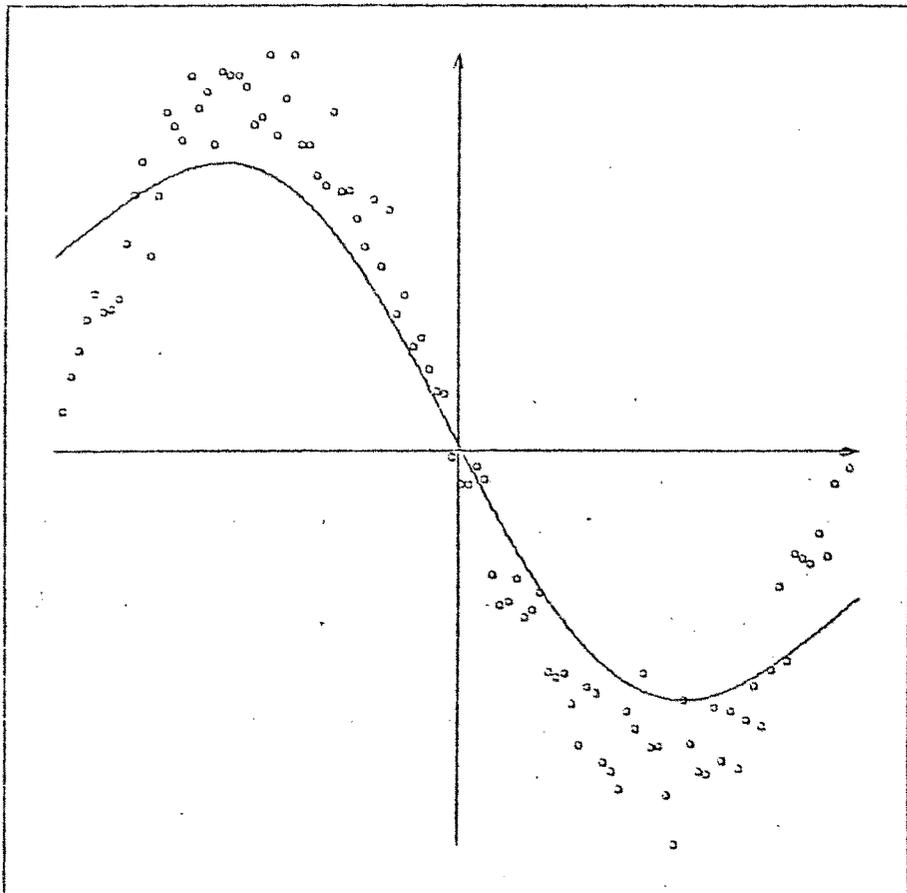
$$\int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt \text{ et la "fidélité" aux données, mesuré par}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2.$$

Le choix de ce paramètre est extrêmement important, en effet, une valeur de τ trop faible fait passer la spline très près des données, et du fait des erreurs, produit une mauvaise approximation de f (cf. dessin n° 1) ; par contre, τ trop important produit un lissage trop marqué, et on risque d'éliminer les variations de la fonction (cf. dessin n° 2 et n° 3).

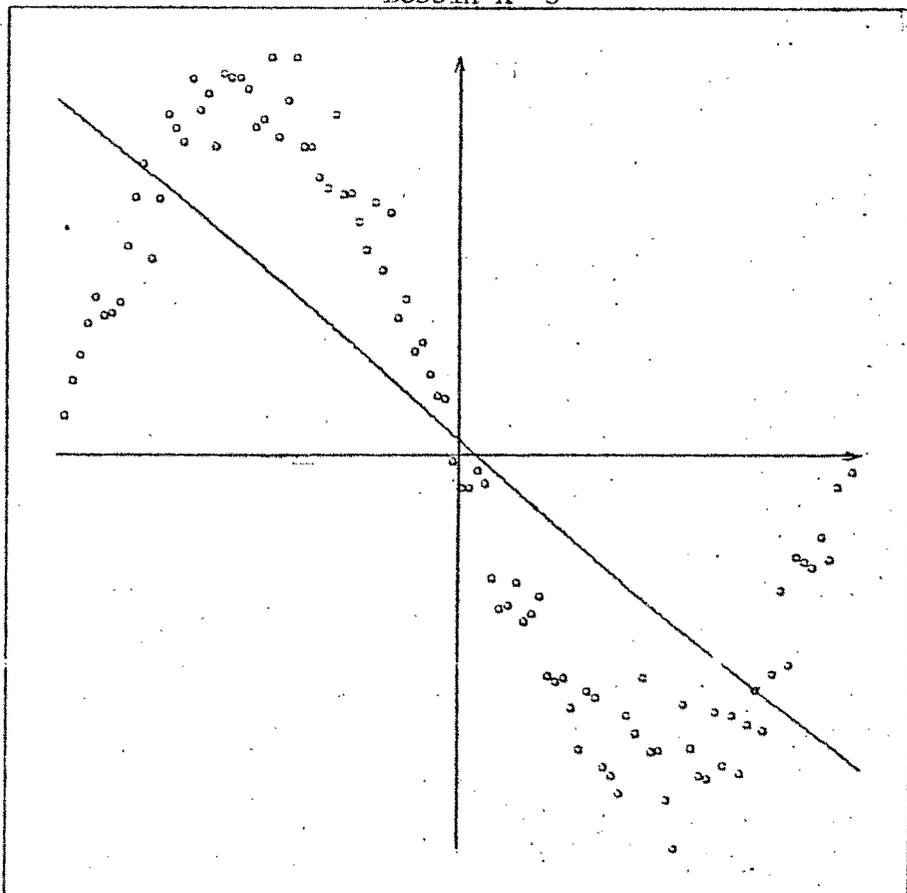


Dessin n° 2



ENTREZ LA VALEUR DE RHO: 50.0

Dessin n° 3



ENTREZ LA VALEUR DE RHO: 1.0

Il y a eu plusieurs tentatives de détermination du paramètre τ ; ces tentatives peuvent se diviser en deux groupes : celles qui donnent un comportement théorique du paramètre optimal en fonction de quantités généralement inconnues comme $\int_a^b (f^{(q)})^2 dt$, etc..., et celles qui conduisent au calcul effectif de ce paramètre.

Dans le premier groupe se situent les travaux de Wahba [55] sur la détermination de ce paramètre dans le cas où f est une fonction satisfaisant certaines conditions de périodicité, ainsi que la fonction spline utilisée pour l'approcher. Dans ce même esprit se situe le travail de Cogburn et Davis [10] pour l'estimation de densités de probabilités en utilisant des splines périodiques ; ou pour ce même problème, le travail de Wahba [57] donne un résultat similaire. L'inconvénient principal de ces résultats est qu'ils ne donnent pas une méthode pour trouver τ à partir d'un ensemble de données.

Le premier choix pratique de ce paramètre a été suggéré par Reinsch [38], [39], qui obtient des résultats numériques satisfaisants dans le cas où $v_i = v$ supposé connu. Reinsch propose de choisir τ tel que

$$(1.9) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{n,\tau}(t_i) - z_i)^2 = v^2$$

où $\sigma_{n,\tau}$ est la solution du problème :

$$(1.10) \quad \text{Minimiser } \left\{ \tau \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(t_i) - z_i)^2 \right\}$$

$g \in H^q[a, b]$

Dans le cas où f et la spline sont périodiques, Wahba [55] démontre que le choix optimal (dans un sens qui sera défini plus tard) est donné par :

$$(1.11) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{n,\tau}(t_i) - z_i)^2 = k v^2$$

où k est une constante inférieure à 1. Reinsch [37] suggère aussi cette possibilité en conseillant de choisir k dans l'intervalle

$[1 - \sqrt{\frac{2}{n}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}]$ Wold [64] observe aussi sur un certain nombre d'exemples

que k devrait être choisi dans l'intervalle $[0.7, 0.95]$. Malheureusement, personne ne connaît exactement la bonne valeur de k , ce qui nous place devant un problème équivalent au premier. Malgré cela, et étant donné que la première suggestion de Reinsch donne $k = 1$, on appellera dans la suite ce choix, la méthode de Reinsch. Le deuxième inconvénient de cette méthode est le fait qu'on ne connaît pas toujours une bonne estimation de v^2 .

Si l'estimation des v_i ne pose pas de problèmes, il est possible d'obtenir une bonne valeur de τ en utilisant une méthode décrite par Mallows [33] dans le cas de modèles linéaires paramétriques. Cette méthode donne des meilleurs résultats que celle de Reinsch, comme il a été constaté par Craven et Wahba [13]. On fera une description de cette méthode au paragraphe 4 de ce chapitre.

La première méthode permettant de calculer τ dans le cas des splines périodiques a été donnée par Andersen et Bloomfield [3], [4] et correspond à supposer que f est un processus stochastique et à calculer l'estimateur de vraisemblance maximum de f . Dans ces articles, ils obtiennent des très bons résultats numériques pour des échantillons de taille moyenne (environ 100 points), mais Wahba [55] démontre que cette méthode n'est pas souhaitable (mauvaises propriétés de convergence) pour des échantillons très grands. Malheureusement, la méthode de Andersen et Bloomfield n'est pas applicable au cas dont on s'occupe dans ce travail.

En 1975 Wahba et Wold [61] ont proposé pour la première fois la méthode dite de Validation Croisée, basée sur une idée de Allen [2] et Stone [46] pour choisir le paramètre de "lissage" dans certains modèles linéaires. Ultérieurement Wahba [55] a proposé une modification de cette méthode qui permet d'obtenir de bonnes propriétés de convergence dans le cas des splines périodiques et Golub, Wahba, Heath [25] ont appliqué cette méthode aux modèles linéaires avec de très bons résultats numériques. Finalement Wahba [58] et Craven et Wahba [13] ont proposé l'adaptation de cette méthode au cas présent ; les résultats numériques obtenus étaient très bons, mais le temps de calcul limitait la méthode à des tailles faibles (on avait traité $n \leq 50$). Le but de ce travail est d'obtenir un algorithme de calcul permettant d'appliquer cette méthode pour des tailles plus élevées

et aussi pour un grand nombre de points, et de formaliser certaines propriétés théoriques qui avaient été conjecturées par Craven et Wahba [13].

Ainsi, dans le chapitre 2 de cette première partie on propose une méthode de calcul du τ par Validation Croisée qui permet de diviser le temps de calcul par un facteur n . Dans le chapitre 3, on présente des expériences numériques permettant d'apprécier les qualités de la méthode, en faisant une comparaison entre autres avec la méthode de Reinsch. Dans le chapitre 4 on donne certaines propriétés théoriques. Et, dans le chapitre 5, on propose une méthode de lissage pour un grand nombre de données.

2 - RAPPELS SUR LES FONCTIONS SPLINE POLYNOMIALES -

Soient $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ n points de l'intervalle $[a, b]$ et

$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$; alors si $n \geq q$ (q entier positif) le problème

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \text{Minimiser } \left\{ \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt \right\} \\ & g \in H^q[a, b] \\ & g(t_i) = x_i \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

a une et une seule solution $\sigma \in H^q[a, b]$. De plus, il est bien connu (cf. par exemple [1], [5], [30]) que σ satisfait :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \sigma \text{ est un polynôme de degré } 2q-1 \text{ dans chacun des intervalles} \\ & [t_i, t_{i+1}] \quad i=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \sigma \text{ est un polynôme de degré } q-1 \text{ dans les intervalles } [a, t_1] \\ & [t_n, b]. \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \sigma \in C^{2q-2}$$

$$(2.5) \quad \sigma(t_i) = x_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

Notons S_n^q l'espace de toutes les fonctions satisfaisant aux conditions (2.2), (2.3), (2.4). On appellera S_n^q l'espace des fonctions spline d'ordre q basées sur les noeuds t_1, t_2, \dots, t_n . Il est connu que S_n^q est un espace vectoriel de dimension n . La solution de (2.1) sera alors le seul élément de S_n^q qui satisfait aux conditions d'interpolation (2.5).

On appellera base canonique de S_n^q , la base composée d'éléments σ_i $i=1, 2, \dots, n$ tels que :

$$(2.6) \quad \sigma_i(t_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Il est facile de voir que dans cette base, σ s'écrit :

$$(2.7) \quad \sigma(t) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i(t)$$

Soient $\sigma, s \in S_n^q$ et considérons la forme bilinéaire

$$(2.8) \quad B(\sigma, s) = \int_a^b \sigma^{(q)}(t) s^{(q)}(t) dt$$

Alors si $\sigma(t_i) = x_i, s(t_i) = y_i$ $i=1, 2, \dots, n$ on aura :

$$\begin{aligned} B(\sigma, s) &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i \sigma_i(t) \right)^{(q)} \left(\sum_{j=1}^n y_j \sigma_j(t) \right)^{(q)} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \int_a^b \sigma_i^{(q)}(t) \sigma_j^{(q)}(t) dt \end{aligned}$$

définissons :

$$(2.9) \quad \omega_{ij} = \int_a^b \sigma_i^{(q)}(t) \sigma_j^{(q)}(t) dt$$

$$(2.10) \quad \Omega = (\omega_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

On a alors :

$$(2.11) \quad B(\sigma, s) = \langle x, \Omega y \rangle \quad ; \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ étant le produit scalaire dans } \mathbb{R}^n$$

La matrice Ω ainsi définie a les propriétés suivantes :

$$(2.12) \quad \langle x, \Omega y \rangle \geq 0$$

$$(2.13) \quad \Omega = \Omega^T \quad \Omega \text{ est symétrique.}$$

Soient maintenant z_1, z_2, \dots, z_n n nombres réels. On définit la fonction spline d'ajustement d'ordre q et paramètre τ (et de poids $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) pour les données z_1, \dots, z_n correspondant aux noeuds t_1, \dots, t_n comme la solution unique du problème :

$$(2.14) \quad \text{Minimiser } \left\{ \tau \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2 \right\}$$

$$g \in H^q[a, b] \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \right)$$

or,

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{g \in H^q[a, b]} \left\{ \tau \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2 \right\} \\ &= \text{Min}_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \text{Min}_{g \in H^q[a, b]} \left\{ \tau \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2 \right\} \right. \\ & \quad \left. g(t_i) = x_i \quad i=1, 2, \dots, n \right\} \\ &= \text{Min}_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \tau \langle x, \Omega x \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (x_i - z_i)^2 \right\} \end{aligned}$$

Si l'on appelle $\sigma_{n, \tau}$ la solution unique de (2.14), on voit que le vecteur $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ avec $\gamma_i = \sigma_{n, \tau}(t_i)$ satisfait donc :

$$(2.15) \quad \tau \Omega \gamma + \frac{1}{n} D \gamma = \frac{1}{n} D z$$

où D est la matrice diagonale qui a comme éléments diagonaux

$$d_{ii} = \alpha_i^2 \quad i=1,2,\dots,n.$$

On en déduit :

$$(2.16) \quad y = A(\tau)z$$

avec

$$(2.17) \quad A(\tau) = (D+n\tau\Omega)^{-1}D \\ = (I+n\tau D^{-1}\Omega)^{-1}$$

3 - LA METHODE DE REINSCH

Cette méthode est basée sur la remarque très simple suivante : comme

$$(3.1) \quad \epsilon_i = z_i - f(t_i) \quad i=1,\dots,n$$

avec les hypothèses qu'on a fait sur ϵ_i , on a :

$$(3.2) \quad E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} (z_i - f(t_i))^2\right\} = 1$$

d'où l'idée que, si n n'est pas trop faible

$$(3.3) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} (z_i - f(t_i))^2 \approx 1$$

or, si $\sigma_{n,\tau}(t_i)$ est une "bonne approximation" de $f(t_i)$, on aura approximativement :

$$(3.4) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} (z_i - \sigma_{n,\tau}(t_i))^2 = 1$$

d'où l'idée intuitive de choisir τ de façon que (3.4) soit satisfaite.

Les expériences numériques de Reinsch montrent que, en effet cette valeur de τ n'est pas un mauvais choix, mais comme on l'avait dit dans le premier paragraphe, il vaudrait mieux choisir τ de façon à avoir :

$$(3.5) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} (z_i - \sigma_{n,\tau}(t_i))^2 = k < 1$$

Seulement, le choix de la bonne valeur de k est aussi compliqué que le problème initial.

Reste à montrer qu'il existe une solution de l'équation (3.4).

Dénotons par λ_{in} $i=1,2,\dots,n$ les valeurs propres de la matrice $D^{-1}\Omega$. Il

est clair que $\lambda_{in} \geq 0$, $i=1,2,\dots,n$; de plus, on a :

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \lambda_{1n} &= \lambda_{2n} = \dots = \lambda_{qn} = 0 \\ \lambda_{in} &> 0 && i > q \end{aligned}$$

Puisque $D^{-1/2}\Omega D^{-1/2}$ est symétrique, semi-définie positive, il existe Q unitaire telle que :

$$(3.7) \quad Q^T D^{-1/2}\Omega D^{-1/2}Q = \Lambda$$

avec Λ matrice diagonale contenant les valeurs propres de $D^{-1}\Omega$. L'égalité (3.7) entraîne :

$$(3.8) \quad D^{-1}\Omega = D^{-1/2}Q\Lambda Q^T D^{1/2}$$

d'où

$$(3.9) \quad \begin{aligned} A(\tau) &= (I + n\tau D^{-1/2}Q\Lambda Q^T D^{1/2})^{-1} \\ &= D^{-1/2}Q(I + n\tau\Lambda)^{-1}Q^T D^{1/2} \end{aligned}$$

Notons :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \hat{z} &= Q^T D^{1/2}z \\ \hat{y} &= Q^T D^{1/2}y \end{aligned} \quad y = (\sigma_{n,\tau}(t_1), \dots, \sigma_{n,\tau}(t_n))^T$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \hat{y} &= (I+n\tau\Lambda)^{-1}\hat{z} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (z_i - y_i)^2 &= \frac{1}{n} \|D^{1/2}(z-y)\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \|D^T D^{1/2}(z-y)\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \|\hat{z} - \hat{y}\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2 \tau^2 \lambda_{in}^2}{(1+n\tau\lambda_{in})^2} \hat{z}_i \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} (3.11) \quad F(\tau) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2} (z_i - y_i)^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (z_i - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{n\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{n^2 \tau^2 \lambda_{in}^2}{(1+n\tau\lambda_{in})^2} \hat{z}_i \end{aligned}$$

Il est clair que F est une fonction strictement croissante de τ . Si la solution de $F(\tau)=1$ existe, elle est donc unique. Or, puisque $F(0)=0$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution de $F(\tau)=1$ est que :

$$(3.12) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F(\tau) > 1$$

Or, il est bien connu que lorsque τ tend vers $+\infty$ (n fixé), $\sigma_{n,\tau}$ tend vers le polynôme de moindres carrés de degré $q-1$. On notera donc $\sigma_{n,\infty}$ l'élément de P_{q-1} tel que :

$$(3.13) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{n,\infty}(t_i) - z_i) \cdot \frac{1}{v_i^2} = \text{Min}_{p \in P_{q-1}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p(t_i) - z_i)^2 \frac{1}{v_i^2}$$

où $P_{q-1} = \{\text{polynômes de degré } \leq q-1\}$

On a donc, la proposition suivante :

Proposition 3.1 - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une et une seule solution de :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2} (z_i - \sigma_{n,\tau}(t_i))^2 = 1$$

est que l'on ait :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^2} (z_i - \sigma_{n,\infty}(t_i))^2 > 1$$

Dans le chapitre III on présentera un ensemble d'expériences numériques pour cette méthode.

4 - LA METHODE DE MALLOWS -

Pour définir cette méthode de calcul de τ , considérons la valeur moyenne du carré des écarts entre $\sigma_{n,\tau}$ et f aux points t_i (pondérés par

$$\alpha_i^2 = \frac{\beta^2}{v_i^2} :$$

$$(4.1) \quad T^2(\tau) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{n,\tau}(t_i) - f(t_i))^2 \alpha_i^2$$

$$= \frac{1}{n} \| D^{1/2} (\Lambda(\tau) z - \vec{f}) \|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne dans R^n et $\vec{f} = (f(t_1), \dots, f(t_n))^T$.

Il est très facile de démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.1

$$(4.2) \quad ET^2(\tau) = \frac{1}{n} \| D^{1/2} (\vec{f} - \Lambda(\tau) \vec{f}) \|^2 + \frac{\beta^2}{n} \text{Tr}(\Lambda^2(\tau))$$

Démonstration. On a $z = \vec{f} + \vec{\varepsilon}$ donc :

$$\frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (A(\tau) z - \vec{f}) \right\|^2 = \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (A(\tau) \vec{f} - \vec{f}) + D^{1/2} A(\tau) \vec{\varepsilon} \right\|^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} E \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (A(\tau) z - \vec{f}) \right\|^2 &= \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (A(\tau) \vec{f} - \vec{f}) \right\|^2 + E \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} A(\tau) \vec{\varepsilon} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (A(\tau) \vec{f} - \vec{f}) \right\|^2 + \frac{\beta^2}{n} \text{Tr} (D^{1/2} A(\tau) D^{-1/2})^2 \\ &= \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (A(\tau) \vec{f} - \vec{f}) \right\|^2 + \frac{\beta^2}{n} \text{Tr} (A^2(\tau)) \end{aligned}$$

CQFD

Or, si l'on pouvait minimiser $ET^2(\tau)$, le choix serait vraisemblablement très bon. Malheureusement, cette quantité étant inconnue, on ne peut le faire. Mais l'on connaît un estimateur sans biais de $ET^2(\tau)$, il est donné par la proposition 4.2 qui suit :

Proposition 4.2 - Si l'on note :

$$(4.3) \quad \hat{T}^2(\tau) = \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (I - A(\tau)) z \right\|^2 - \frac{\beta^2}{n} \text{Tr} (I - A(\tau))^2 + \frac{\beta^2}{n} \text{Tr} (A^2(\tau))$$

alors, on a :

$$E \hat{T}^2(\tau) = ET^2(\tau)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} E \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (I - A(\tau)) (\vec{f} + \vec{\varepsilon}) \right\|^2 &= E \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (\vec{f} - A(\tau) \vec{f}) + D^{1/2} (\vec{\varepsilon} - A(\tau) \vec{\varepsilon}) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (\vec{f} - A(\tau) \vec{f}) \right\|^2 + \frac{1}{n} E \left\| D^{1/2} (\vec{\varepsilon} - A(\tau) \vec{\varepsilon}) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left\| D^{1/2} (\vec{f} - A(\tau) \vec{f}) \right\|^2 + \frac{1}{n} \text{Tr} (I - A(\tau))^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat

C.Q.F.D.

Comme Mallows pour le cas de régression linéaire paramétrique, Wahba [13] propose donc d'estimer τ en minimisant (4.3).

Pour le calcul effectif du paramètre, on se rapportera aux chapitres 2 et 3.

5 - LA METHODE DE VALIDATION CROISEE -

La première version de cette méthode a été proposée par Wahba et Wold [61] suivant une idée de Allen, reprise par Stone [46] qui avaient introduit la Validation Croisée Ordinaire (ou PRESS) pour le choix du paramètre de lissage dans l'estimation de modèles linéaires. Cette première version est basée sur l'idée très simple suivante :

Notons : $\sigma_{n,\tau,k}$ la solution unique du problème suivant :

$$(5.1) \quad \text{Minimiser } \left\{ \tau \int_a^b [g^{(q)}(t)] dt + \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (g(t_i) - z_i)^2 \cdot \alpha_i^2 \right\}$$

$g \in \mathcal{H}^q[a, b]$

Donc, $\sigma_{n,\tau,k}$ est la fonction spline d'ajustement de paramètre τ en utilisant les mêmes données sauf (t_k, z_k) . Si τ est un bon choix pour le paramètre, alors il paraît assez intuitif que $\sigma_{n,\tau,k}(t_k)$ devrait être en moyenne un bon estimateur de la variable aléatoire $Z_k = f(t_k) + \epsilon_k$. Si l'on mesure la différence entre Z_k et $\sigma_{n,\tau,k}(t_k)$ par $(z_k - \sigma_{n,\tau,k}(t_k))^2$ on peut donc penser à choisir τ de façon à minimiser :

$$(5.2) \quad V_0(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_k - \sigma_{n,\tau,k}(t_k))^2$$

Or, il paraît assez arbitraire de choisir un poids égal pour l'écart en chaque point, d'une part, parce qu'ils n'interviennent pas avec le même poids dans le calcul de la spline, et ensuite, parce que les points se trouvant au "bord" devraient être estimés moins bien que ceux qui se trouvent au "milieu". Il existe d'autres arguments permettant de prouver que $V_0(\tau)$ n'est pas très convenable dans certains cas, (ces arguments sont développés par Wahba [58] et Golub, Heath et Wahba [25] dans le cas des modèles linéaires).

Pour voir plus clairement ce que représente $V_0(\tau)$, on obtiendra une expression en termes de $A(\tau)$.

Notons : $s_{n,\tau,k}(\cdot; \theta)$ la solution unique du problème :

$$(5.3) \quad \text{Min}\{\tau \int_a^b [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{\alpha_k^2}{n} [g(t_k) - \theta]^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2\}$$

Il est clair que :

$$(5.4) \quad s_{n,\tau,k}(t; \sigma_{n,\tau,k}(t_k)) = \sigma_{n,\tau,k}(t)$$

puisque :

$$\begin{aligned} & \tau \int_a^b (\sigma_{n,\tau,k}^{(q)}(t))^2 dt + \frac{\alpha_k^2}{n} [\sigma_{n,\tau,k}(t_k) - \sigma_{n,\tau,k}(t_k)]^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i^2 (\sigma_{n,\tau,k}(t_i) - z_i)^2 \leq \\ & \leq \tau \int_a^b (g^{(q)}(t))^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2 \\ & \leq \tau \int_a^b (g^{(q)}(t))^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i^2 (g(t_i) - z_i)^2 \\ & \leq \tau \int_a^b (g^{(q)}(t))^2 dt + \frac{\alpha_k^2}{n} [g(t_k) - z_k]^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (g(t_i) - z_i)^2 \alpha_i^2 \end{aligned}$$

pour tout $g \in H^q[a, b]$.

Lemme 5.1 -

$$(5.5) \quad \sigma_{n,\tau,k}(t_k) - z_k = \frac{(\sigma_{n,\tau}(t_k) - z_k)}{(1 - \frac{\partial}{\partial z_k} \sigma_{n,\tau}(t_k))}$$

Démonstration - Soit $\theta = \sigma_{n,\tau,k}(t_k)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \theta &= s_{n,\tau,k}(t_k ; \theta) = s_{n,\tau,k}(t_k ; z_k) + (\theta - z_k) \frac{\partial s_{n,\tau,k}(t_k ; z_k)}{\partial z_k} \\ &= \sigma_{n,\tau}(t_k) + (\alpha - z_k) \frac{\partial \sigma_{n,\tau}(t_k)}{\partial z_k} \\ \alpha - z_k &= \sigma_{n,\tau}(t_k) - z_k + (\alpha - z_k) \frac{\partial \sigma_{n,\tau}(t_k)}{\partial z_k} \end{aligned}$$

d'où le résultat

CQFD

Notons $a_{ij}(\tau)$ les éléments de $A(\tau)$, alors on a :

$$(5.6) \quad \sigma_{n,\tau}(t_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj}(\tau) \cdot z_j$$

d'où

$$(5.7) \quad \frac{\partial \sigma_{n,\tau}(t_k)}{\partial z_k} = a_{kk}(\tau)$$

et on obtient :

$$(5.8) \quad V_0(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(\sigma_{n,\tau}(t_i) - z_i)^2 / (1 - a_{ii}(\tau))^2]$$

Dans cette expression on voit plus clairement le fait que si les a_{ii} étaient tous égaux alors, il serait logique de considérer qu'une bonne valeur de τ soit la valeur qui minimise $V_0(\tau)$. Or, ce n'est pas le cas, mais l'on peut s'y ramener. Pour cela considérons d'abord le cas périodique.

Définition 5.1 - Considérons l'espace Hilbert $\mathcal{H}^q[a,b]$ des fonctions 'périodisables' défini par :

$$\mathcal{H}^q[a,b] = \{g \in H^q[a,b] / \int_a^b g^{(j)}(t) dt = 0 \quad j=0, \dots, q\}$$

muni du produit scalaire :

$$(g, \phi)_q = \int_a^b g^{(q)}(t) \phi^{(q)}(t) dt$$

Il est bien connu que le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^{(q)}[a, b]$ est donné par $\mathcal{K}(t, s)$

$$(5.9) \quad \mathcal{K}(t, s) = (-1)^q \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2\pi v)^{2q}} e^{2\pi i v \frac{s-t}{b-a}}$$

Définissons maintenant la fonction spline d'ajustement périodique basée sur les noeuds t_1, \dots, t_n pour les données r_1, \dots, r_n comme étant la solution unique du problème :

$$(5.10) \quad \text{Minimiser } \left\{ \tau \int_a^b [\phi^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\phi(t_i) - r_i)^2 \right\}$$

$\phi \in \mathcal{H}^{(q)}[a, b]$

Notons $p_{n, \tau}$ cette solution, on aura alors :

$$(5.11) \quad p_{n, \tau}(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathcal{K}(t, t_i)$$

γ étant donné par :

$$(5.12) \quad \gamma = (K + n \tau I)^{-1} r$$

avec $K = (k_{ij})$ où $k_{ij} = \mathcal{K}(t_i, t_j)$

Si l'on note $u_i = p_{n, \tau}(t_i)$ $i=1, \dots, n$ on aura

$$(5.13) \quad u = K(K + n \tau I)^{-1} r$$

$$= \mathcal{A}(\tau) r$$

Or, pour le cas des pas équidistants, on aura :

$$(5.14) \quad k_{ij} = \mathcal{K}(t_i, t_j) = B(|i-j|) \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{array}$$

où

$$(5.15) \quad B(s) = (-1)^q \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{\infty} \frac{i}{(2\pi v)^{2q}} e^{2\pi i v h s} \quad h = \frac{1}{n}$$

Il est clair que K est symétrique, constante sur toutes les diagonales et de plus, circulante ; on a alors (cf. [6]) :

$$(5.16) \quad K = W \Lambda W^* \quad \Lambda \text{ matrice diagonale}$$

où W^* est la transposée conjuguée de W et

$$(5.17) \quad W = (w_{jk}) \quad w_{jk} = e^{2\pi i j k / n} \quad i \sim \sqrt{-1}$$

Il est important de remarquer que si M est une matrice diagonale quelconque, alors $W^* M W$ est circulante.

Du fait que K soit circulante, on obtient que $\mathcal{A}(\tau)$ est circulante et donc

$$a_{kk}(\tau) = a_{jj}(\tau) \quad \begin{matrix} k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

En particulier :

$$(5.18) \quad a_{kk}(\tau) = \frac{1}{n} \text{Tr}(\mathcal{A}(\tau))$$

On voit donc que si $\mathcal{A}(\tau)$ est circulante, tous les points interviennent de la même façon dans le calcul de $a(\tau)_r$, il est donc logique d'attribuer un même poids à tous les points dans l'expression de la Validation Croisée. De plus, $V_o(\tau)$ devient (à cause de 5.18)

$$(5.19) \quad V_o(\tau) = \frac{1}{n} \frac{\| \mathcal{A}(\tau)_r \|^2}{\left(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(\mathcal{A}(\tau))\right)^2}$$

Considérons maintenant le cas général pour lequel la matrice $\Lambda(\tau)$ n'est même pas symétrique. Pour la "symétriser" faisons le changement de coordonnées suivant :

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \tilde{z} &= D^{1/2} z & D &= \text{diagonale } (\alpha_i^2) \\ \tilde{y} &= D^{1/2} y \end{aligned}$$

Alors, l'égalité $y = A(\tau)z$ devient :

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= D^{1/2} A(\tau) z \\ &= D^{1/2} A(\tau) D^{-1/2} \tilde{z} \\ \tilde{y} &= \tilde{A}(\tau) \tilde{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\tau) &= D^{1/2} (I + n\tau D^{-1} \Omega)^{-1} D^{-1/2} \\ &= (I + n\tau D^{-1/2} \Omega D^{1/2})^{-1} \end{aligned}$$

qui est bien une matrice symétrique. De plus, elle est semi-définie positive. Soit Q unitaire telle que :

$$(5.22) \quad Q \Lambda Q^* = D^{-1/2} \Omega D^{1/2}$$

et définissons

$$(5.23) \quad \Gamma = W Q^*$$

Considérons le changement de coordonnées :

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \bar{z} &= \Gamma \tilde{z} \\ \bar{y} &= \Gamma \tilde{y} \end{aligned}$$

Alors, on aura :

$$(5.25) \quad \bar{y} = W Q^* \tilde{A}(\tau) Q W^* \bar{z}$$

La matrice $W Q^* \tilde{A}(\tau) Q W^*$ étant circulante, on peut maintenant appliquer la Validation Croisée Ordinaire : le résultat est la Validation Croisée Générale.

Pour l'expression à minimiser on a donc :

$$\begin{aligned}
 V(\tau) &= \frac{1}{n} \frac{||\bar{A}(\tau)\bar{z}-\bar{z}||^2}{(1-\frac{1}{n}\text{Tr}(\bar{A}(\tau)))^2} && \text{avec } \bar{A}(\tau) = WQ^*\tilde{A}(\tau)QW^* \\
 &= \frac{1}{n} \frac{||\tilde{A}(\tau)\tilde{z}-\tilde{z}||^2}{(1-\frac{1}{n}\text{Tr}(\tilde{A}(\tau)))^2} \\
 (5.26) \quad V(\tau) &= \frac{1}{n} \frac{||D^{1/2}(A(\tau)z-z)||^2}{(1-\frac{1}{n}\text{Tr}(A(\tau)))^2}
 \end{aligned}$$

Pour obtenir un bon choix du paramètre d'ajustement, on sera amené à minimiser (5.26) sur l'ensemble des réels positifs.

Dans le chapitre suivant on étudiera une méthode pratique pour faire ce calcul et des exemples numériques seront présentés au chapitre III.

Cette méthode est applicable à d'autres contextes tels que : Régularisation de Tichonov (voir Wahba [54], [58]), Estimation de densités (cf. [57], [58], [62]) ou Modèles Linéaires Paramétriques (cf. [24], [25], [58]) entre autres.

CHAPITRE II

REALISATION PRATIQUE DE LA METHODE DE VALIDATION CROISEE

1 - INTRODUCTION -

Dans le chapitre précédent on a vu que pour obtenir une bonne estimation du paramètre τ d'ajustement par la méthode de Validation Croisée, il faut minimiser la fonction (de Validation Croisée) :

$$(1.1) \quad V(\tau) = \frac{1}{n} \frac{\|D^{1/2}(z-A(\tau)z)\|^2}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A(\tau)))^2}$$

Or, tous les algorithmes disponibles pour obtenir le minimum de V , nécessitent des évaluations de $V(\tau)$ et éventuellement de $V'(\tau)$. Il est donc très important d'étudier un algorithme rapide pour calculer $V(\tau)$.

En regardant l'expression (1.1), on voit que l'évaluation du numérateur coûte le calcul de $A(\tau)z$, plus n multiplications et une division (les sommes ne sont pas comptées). Le nombre d'opérations nécessaires pour évaluer ce numérateur sera donc (cf. Pailua [35]) :

$$(1.2) \quad \text{Coût Numérateur} = 30n + n + 1$$

Ce coût est linéaire en n ; par contre, l'évaluation du dénominateur est beaucoup plus compliquée : en effet, il faut calculer $\text{Tr}(A(\tau))$. Pour cela, il faut expliciter $A(\tau)$ où une matrice qui lui est semblable.

La connaissance explicite de $A(\tau)$ coûte le calcul de $A(\tau)e_i$, $i=1,2,\dots,n$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n , d'où :

$$(1.3) \quad \text{Coût dénominateur} = n(30n) + 1$$

On voit clairement que c'est ce calcul qui est le plus coûteux. Or, si l'on connaissait les valeurs propres de $D^{-1}\Omega$, on pourrait épargner ce calcul :

en effet, si β_{in} dénote les valeurs propres de $A(\tau)$, on aura :

$$(1.4) \quad \beta_{in} = \frac{1}{1 + n\tau \lambda_{in}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où λ_{in} $i=1, \dots, n$ sont les valeurs propres de $D^{-1}\Omega$. Dans [13] Craven & Wahba utilisent un algorithme de Reinsch pour calculer exactement les valeurs propres, mais ceci est encore très coûteux puisque le coût est encore $O(n^3)$, même s'il est fait en une seule fois.

Dans ce chapitre on trouvera une approximation calculable des valeurs propres qui permettra de les connaître en ne faisant que $2n$ opérations si les pas sont équidistants et les variances égales, et $O(n^2)$ opérations dans le cas contraire.

2 - RAPPELS SUR L'APPROXIMATION DES PROBLEMES VARIATIONNELS

Dans ce paragraphe, on présentera essentiellement les résultats de Fix [20] sur l'effet des erreurs de quadrature sur la solution d'équations variationnelles et sur le calcul des valeurs propres de problèmes variationnels. Les résultats de Fix sont plus généraux que ceux qu'on présentera ici, mais l'on adoptera en partie ses notations.

Soit H un espace de Hilbert et \mathcal{B}, \mathcal{A} deux formes hermitiennes réelles définies sur $H \times H$.

Soit $u_0 \in H$; on s'intéresse à la solution de l'équation variationnelle :

$$(2.1) \quad \mathcal{B}(u, v) = \mathcal{A}(u_0, v) \quad \text{pour tout } v \in H$$

Pour \mathcal{B} et \mathcal{A} , on fera les hypothèses suivantes :

$$(2.2) \quad |\mathcal{B}(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{pour tout } u, v \in H$$

$$(2.3) \quad |\mathcal{A}(u, v)| \leq C_2 \|u\|_H \|v\|_H$$

$$(2.4) \quad \inf_{\|u\|_H=1} \sup_{\|v\|_H=1} |\mathcal{B}(u, v)| \geq C_0$$

$$(2.5) \quad \inf_{\|v\|_H=1} \sup_{\|u\|_H=1} |\mathcal{B}(u,v)| \geq C_0$$

Il est clair que avec ces hypothèses, le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence d'un opérateur \mathcal{T} linéaire continue défini sur H tel que :

$$(2.6) \quad \mathcal{B}(\mathcal{T}u_0, v) = \mathcal{A}(u_0, v) \quad \text{pour tout } v \in H$$

On s'intéresse à ce qui se produit lorsqu'on remplace \mathcal{B} et \mathcal{A} par des approximations $\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n$ c'est-à-dire, aux solutions de l'équation :

$$(2.7) \quad \mathcal{B}_n(u_n, v) = \mathcal{A}_n(u_0, v) \quad \text{pour tout } v \in H$$

Pour cela, définissons les formes bilinéaires $e_{\mathcal{B}_n}, e_{\mathcal{A}_n}$ par les équations suivantes :

$$(2.8) \quad \mathcal{B}_n(u, v) = \mathcal{B}(u, v) + e_{\mathcal{B}_n}(u, v)$$

$$(2.9) \quad \mathcal{A}_n(u, v) = \mathcal{A}(u, v) + e_{\mathcal{A}_n}(u, v)$$

On définit maintenant les "erreurs maximum" par :

$$(2.10) \quad \eta_{\mathcal{B}}^n = \sup_{\|v\|_H=1} \sup_{\|w\|_H=1} |e_{\mathcal{B}_n}(v, w)|$$

$$(2.11) \quad \eta_{\mathcal{A}}^n = \sup_{\|v\|_H=1} \sup_{\|w\|_H=1} |e_{\mathcal{A}_n}(v, w)|$$

Supposons maintenant que $\eta_{\mathcal{B}}^n$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini ; il est simple, mais très important de voir que dans ce cas il existe \mathcal{T}_n tel que $\mathcal{T}_n u_0$ soit solution de (2.7), ceci est donné dans le lemme suivant :

Lemme 2.1 - Si $\eta_{\mathcal{B}}^n$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et C ne dépendant que de N_0 telle que :

$$(2.12) \quad \inf_{\|v\|_H=1} \sup_{\|w\|_H=1} |\mathcal{B}_n(v,w)| \geq C \quad \text{pour } n \geq N_0$$

Ceci entraîne l'existence de \mathcal{I}_n tel que :

$$(2.13) \quad \mathcal{B}_n(\mathcal{I}_n u_0, v) = \mathcal{A}_n(u_0, v) \quad \text{pour tout } v \in H$$

Pour borner l'erreur $\mathcal{I}_n u_0 - \mathcal{I}_n u_0$, définissons d'abord :

$$(2.14) \quad \delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{I}_n u_0) = \sup_{\|v\|=1} |e_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{I}_n u_0, v)|$$

$$(2.15) \quad \delta_{\mathcal{A}}^n(u_0) = \sup_{\|v\|=1} |e_{\mathcal{A}_n}(u_0, v)|$$

Théorème (Fix) 2.2 - Si $\eta_{\mathcal{B}}^n$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Alors :

$$(2.16) \quad \|\mathcal{I}_n u_0 - \mathcal{I}_n u_0\| \leq C_1 \delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{I}_n u_0) + C_2 \delta_{\mathcal{A}}^n(u_0)$$

avec C_1, C_2 indépendantes de n .

Démonstration - On a l'identité suivante :

$$\mathcal{B}_n(\mathcal{I}_n u_0 - \mathcal{I}_n u_0, v) = e_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{I}_n u_0, v) - e_{\mathcal{A}_n}(u_0, v)$$

Mais, puisque $\eta_{\mathcal{B}}^n$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, le lemme 2.1 nous dit qu'il existe C tel que :

$$\inf_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} |\mathcal{B}_n(u,v)| \geq C, \quad \text{pour } n \geq N_0$$

d'où

$$\sup_{\|v\|=1} |\mathcal{B}_n(u,v)| \geq C \|u\| \quad \text{pour tout } u \in H$$

donc :

$$C \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\| \leq \sup_{\|v\|=1} |e_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{T}u_0, v)| + \sup_{\|v\|=1} |e_{\mathcal{A}_n}(u_0, v)|$$

d'où le résultat :

C.Q.F.D.

Considérons maintenant le problème de valeurs propres.

$$(2.17) \quad \mathcal{B}(u, v) = \lambda \mathcal{A}(u, v) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}$$

Etant donné que \mathcal{T} et \mathcal{T}_n sont autoadjoints, les valeurs propres sont semi-simples, c'est-à-dire, ces multiplicités algébriques et géométriques coïncident.

Pour résoudre (2.17), on approche \mathcal{B} et \mathcal{A} par \mathcal{B}_n et \mathcal{A}_n respectivement et l'on considère le problème :

$$(2.18) \quad \mathcal{B}_n(u_n, v) = \lambda_n \mathcal{A}_n(u_n, v) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}$$

Théorème 2.3 - Si $\eta_{\mathcal{B}}^n, \eta_{\mathcal{A}}^n$ tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini alors :

- (i) - les valeurs propres de \mathcal{T}_n convergent vers les valeurs propres de \mathcal{T} lorsque n tend vers l'infini.
- (ii) - les vecteurs propres de \mathcal{T}_n convergent vers les vecteurs propres de \mathcal{T} lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration - D'après le théorème (2.2) on avait :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\| &\leq C_1 \delta_{\mathcal{B}}^n(\mathcal{T}u_0) + C_2 \delta_{\mathcal{A}}^n(u_0) \\ &\leq C_1 \eta_{\mathcal{B}}^n \|\mathcal{T}\| \|u_0\| + C_2 \eta_{\mathcal{A}}^n \|u_0\| \end{aligned}$$

d'où :

$$\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_n\| = \sup_{\|u_0\|=1} \|\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}_n u_0\| \leq C_1 \eta_B^n \|\mathcal{T}\| + C_2 \eta_A^n$$

donc,

$\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_n\|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Or, il est bien connu (cf. [8], [9], [7]) que la convergence en norme de \mathcal{T}_n continuité entraîne que les valeurs et vecteurs propres de \mathcal{T}_n 'convergent' vers ceux de \mathcal{T} lorsque n tend vers l'infini

C.Q.F.D.

En outre Fix [20] trouve des bornes pour les erreurs dans le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres. Nous n'aurons pas à les utiliser ici.

Nota : Pour les vecteurs propres, 'convergence' veut dire 'sous-suite convergente'

3 - L'EXPRESSION APPROCHÉE DES VALEURS PROPRES -

Considérons les formes quadratiques $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ définies sur $H^q[0,1]$ par les expressions suivantes :

$$(3.1) \quad \mathcal{B}(u, v) = \int_0^1 u^{(q)}(t) v^{(q)}(t) dt$$

$$(3.2) \quad \mathcal{A}(u, v) = \int_0^1 \omega(t) u(t) v(t) dt$$

où ω est une fonction positive et dérivable telle qu'il existe $C_1, C_2 > 0$, vérifiant :

$$(3.3) \quad 0 < C_1 \leq \omega'(t) \leq C_2 \quad \text{pour tout } t \in [0,1]$$

Considérons le problème de valeurs propres associé à \mathcal{B}, \mathcal{A} :

$$(3.4) \quad \mathcal{B}(u, v) = \mu \mathcal{A}(u, v) \quad \text{pour tout } v \in H^q[0,1]$$

Pour des raisons de clarté dans ce qui suivra, nous introduisons quelques notations :

$$(3.5) \quad r_i^n = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{t_i - t_1}{t_n - t_1} \quad i=1,2,\dots,n$$

(les r_i^n sont disposés sur $[0,1]$ entre $r_1^n = \frac{1}{2n}$ et $r_n^n = 1 - \frac{1}{2n}$ dans la même disposition que les t_i).

Soit $\bar{\Omega}_n$ la matrice associée à cet ensemble de noeuds, il est facile de voir que :

$$(3.6) \quad \Omega = \left[\frac{n-1}{n(t_n - t_1)} \right]^{2q-1} \bar{\Omega}_n$$

Notons \mathbb{S}_n^q l'espace des fonctions spline d'ordre q basées sur les noeuds $\{r_1^n, \dots, r_n^n\}$. On aura alors pour $\sigma, s \in \mathbb{S}_n^q$:

$$(3.7) \quad \mathcal{B}(\sigma, s) = \langle \gamma, \bar{\Omega}_n x \rangle = \langle \bar{\Omega}_n \gamma, x \rangle$$

pour $x_i = s(r_i^n), y_i = \sigma(r_i^n) \quad i=1,2,\dots,n$

Considérons maintenant une méthode de quadrature approchée pour calculer \mathcal{A} .

$$(3.8) \quad \mathcal{A}_n(u, v) = \int_0^1 \Pi_n(u \cdot v \cdot \omega)(t) dt \quad \forall u, v \in H^q[0,1]$$

Π_n étant l'opérateur d'interpolation sur $\{r_1^n, \dots, r_n^n\}$ défini de la manière suivante :

Définition 3.1 - Soit $g \in H^q[0,1]$, alors $\pi_n g$ sera définie par :

$$(3.9) \quad \pi_n g(t) = \begin{cases} g(r_1^n) & t \in [0, r_1^n] \\ g(r_i^n) + (t - r_i^n) \frac{g(r_{i+1}^n) - g(r_i^n)}{h_i^n} & t \in [r_i^n, r_{i+1}^n] \\ g(r_n^n) & t \in [r_n^n, 1] \end{cases} \quad i=1, \dots, n-1$$

avec $h_i^n = r_{i+1}^n - r_i^n \quad i=1, \dots, n-1$

Remarque : $\pi_n g$ est la seule fonction spline d'ordre 1 qu'interpole g aux noeuds $\{r_1^n, \dots, r_n^n\}$.

Avec cette définition, on aura les propriétés suivantes :

Proposition 3.1 - Soit $g \in H^q[0,1]$ et $\pi_n g$ la fonction définie par l'expression (3.9), alors si $q \geq 2$ on a :

$$(i) \int_0^1 \pi_n g(t) dt = \sum_{i=1}^n d_i^n g(r_i^n)$$

où $d_1^n = r_1^n + \frac{1}{2} h_1^n$ $d_n^n = 1 - r_n^n + \frac{1}{2} h_{n-1}^n$

$$d_i^n = \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \quad i=1,2,\dots,n-1$$

$$(ii) \left| \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 \pi_n g(t) dt \right| \leq \bar{\delta}_n^2 \left[\int_0^1 (g''(t))^2 dt \right]^{1/2}$$

où $\bar{\delta}_n = \text{Max} \{r_1^n, h_1^n, h_2^n, \dots, h_{n-1}^n, 1-r_n^n\}$

Il faut remarquer que (ii) a lieu parce qu'on a l'égalité :

$$r_1^n = 1 - r_n^n$$

Démonstration -

$$\begin{aligned} (i) \int_0^1 \pi_n g(t) dt &= r_1^n g(r_1^n) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} \left[g(r_i^n) + (t-r_i^n) \frac{g(r_{i+1}^n) - g(r_i^n)}{h_i^n} \right] \\ &\quad + (1-r_n^n) g(r_n^n) \\ &= r_1^n g(r_1^n) + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^n \frac{g(r_{i+1}^n) + g(r_i^n)}{2} \\ &\quad + (1-r_n^n) g(r_n^n) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(ii) Pour évaluer l'erreur d'intégration, il faut d'abord remarquer que la formule est exacte sur les polynômes de degré 1, en effet :

Sur l'intervalle $[r_i^n, r_{i+1}^n]$ elle est exacte, puisque l'interpolation est exacte. Reste à savoir si :

$$r_1^n p(r_1^n) + (1-r_n^n) p(r_n^n) = \int_0^{r_1^n} p(t) dt + \int_{r_n^n}^1 p(t) dt$$

Si $p(t) = \alpha + t\beta$, alors :

$$\int_0^{r_1^n} (\alpha + t\beta) dt = r_1^n \alpha + \frac{1}{2} (r_1^n)^2 \beta$$

$$\int_{r_n^n}^1 (\alpha + t\beta) dt = (1-r_n^n) (\alpha + \beta r_n^n) + \frac{1}{2} (1-r_n^n)^2 \beta$$

en additionnant, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1^n} p(t) dt + \int_{r_n^n}^1 p(t) dt &= r_1^n \alpha + r_1^n r_1^n \beta - \frac{1}{2} (r_1^n)^2 \beta + \\ &+ (1-r_n^n) p(r_n^n) + \frac{1}{2} (1-r_n^n)^2 \beta \\ &= r_1^n p(r_1^n) + (1-r_n^n)^2 p(r_n^n) \end{aligned}$$

(puisque $r_1^n = 1 - r_n^n$)

Pour démontrer la formule, il suffit de considérer maintenant, la formule de Taylor appliquée à g :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \int_0^1 (t-x)_+ g''(x) dx$$

$$\pi_n g(t) = \pi_n (g(0) + tg'(0)) + \pi_n \int_0^1 (t-x)_+ g''(x) dx$$

si l'on intègre, on obtient :

$$\int_0^1 \pi_n g(t) dt = \sum_{i=1}^n d_i^n \int_0^1 (r_i^n - x)_+ g''(x) dx + \int_0^1 \pi_n (g(0) + tg'(0)) dt$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 \pi_n g(t) dt &= \int_0^1 \int_0^1 (t-x)_+ g''(x) dx dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n d_i^n (r_i^n - x)_+ g''(x) dx dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (t-x)_+ dt - \sum_{i=1}^n d_i^n (r_i^n - x)_+ \right] g''(x) dx \end{aligned}$$

Notons : $k(x) = \int_0^1 (t-x)_+ dt - \sum_{i=1}^n d_i^n (r_i^n - x)_+$

Si l'on examine les trois cas possibles, on a :

1) $0 \leq x < r_1^n$

$$\sum_{i=1}^n d_i^n (r_i^n - x)_+ = \int_0^1 (t-x) dt = \frac{1}{2} [(1-x)^2 - x^2] = \frac{1}{2} [1-2x]$$

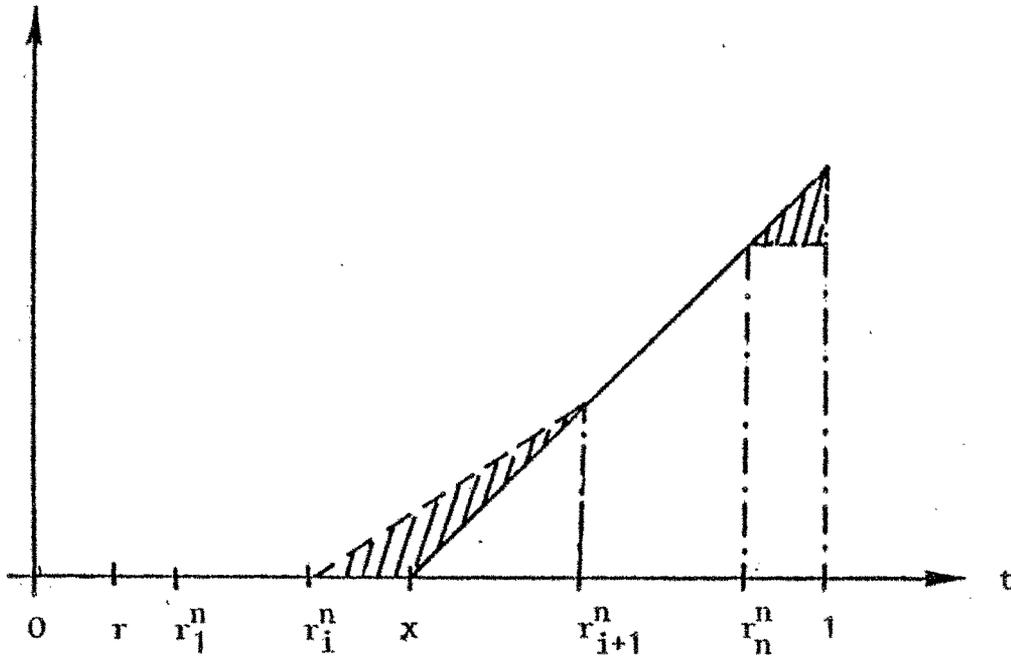
$$\int_0^1 (t-x)_+ dt = \int_0^1 (t-x) dt - \int_0^x (t-x) dt = \frac{1}{2} x^2 + \int_0^1 (t-x) dt$$

$$k(x) = -\frac{1}{2} x^2$$

2) $r_i^n \leq x < r_{i+1}^n$

$$1 \leq i \leq n-1$$

On aura alors la situation décrite dans le dessin ci-dessous.



Les différences seront données par les parties achurées. On aura alors :

$$\int_0^1 (t-x)_+ dt - \sum_{i=1}^n d_i^n (r_i^n - x)_+ = \frac{1}{2} (1-r_n^n)^2 + \frac{1}{2} [r_{i+1}^n - x]^2 - \frac{1}{2} h_i^n [r_{i+1}^n - x]$$

3) $r_n^n \leq x \leq 1$

De manière analogue au premier intervalle, on obtient :

$$k(x) = \frac{1}{2} (1-x)^2$$

Si l'on reprend l'expression de l'erreur, on aura alors :

$$\int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 \pi_n g(t) dt = \int_0^1 k(x) g''(x) dx$$

d'où, par l'inégalité de Schwartz :

$$\left| \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 \pi_n g(t) dt \right| \leq \left[\int_0^1 k^2(x) dx \right]^{1/2} \left[\int_0^1 [g''(x)]^2 dx \right]^{1/2}$$

Calculons maintenant $\int_0^1 k^2(x) dx$. On a :

$$k^2(x) \leq \begin{cases} \frac{1}{4} (r_1^n)^4 \\ \frac{1}{4} [(1-r_n^n)^4 + (h_1^n)^4 + 2(1-r_n^n)^2 (h_1^n)^2] \\ \frac{1}{4} (1-r_n^n)^4 \end{cases}$$

Si l'on définit $\bar{\delta}_n = \text{Max}\{r_1^n, (1-r_n^n), h_1^n, \dots, h_n^n\}$ on obtient :

$$k^2(x) \leq \bar{\delta}_n^4 \Rightarrow \int_0^1 k^2(x) dx \leq \bar{\delta}_n^4$$

d'où :

$$\left| \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 \pi_n g(t) dt \right| \leq \bar{\delta}_n^2 \left[\int_0^1 (g'(t))^2 dt \right]^{1/2}$$

C.Q.F.D.

Considérons maintenant $\mathcal{B}_n \equiv \mathcal{B}$ et alors, le problème de valeurs propres approchées, aux sens du paragraphe précédent, devient :

$$\mathcal{B}_n(u_n, v) = \mu_n \mathcal{A}_n(u_n, v) \quad \text{pour tout } v \in H^q[0,1]$$

donc :

$$(3.12) \quad \int_0^1 u_n^{(q)}(t) v^{(q)}(t) dt = \mu_n \sum_{i=1}^n u_n(r_i^n) v(r_i^n) \omega(r_i^n) d_i^n \quad \forall v \in H^q[0,1]$$

Or, il est bien connu (cf. Laurent [30]) que si $g \in H^q[0,1]$ satisfait :

$$\int_0^1 g^{(q)}(t) v^{(q)}(t) dt = \sum_{i=1}^n \eta_i^n v(r_i^n) \quad \text{pour tout } v \in H^q[0,1]$$

alors, $g \in \mathcal{S}_n^q$, l'espace des fonctions spline d'ordre q basées sur les noeuds $\{r_1^n, \dots, r_n^n\}$. On a donc que u_n , fonction propre approchée de u , est

une fonction spline d'ordre q . Et il est clair que (3.12) est équivalent à :

$$(3.13) \quad \int_0^1 u_n^{(q)}(t) \sigma^{(q)}(t) dt = \mu_n \sum_{i=1}^n u_n(r_i^n) \sigma(r_i^n) \omega(r_i^n) d_i^n \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n^q$$

$$u_n \in \mathcal{S}_n^q$$

Soient \vec{x} le vecteur des valeurs aux noeuds de u_n , et $\vec{\sigma}$ le vecteur des valeurs aux noeuds de σ , alors, lorsque σ parcourt \mathcal{S}_n^q , $\vec{\sigma}$ parcourt \mathbb{R}^n et on voit, en tenant compte de l'égalité (2.11) du chapitre I, que (3.13) est équivalent à :

$$(3.14) \quad \langle \bar{\Omega}_n \vec{x}, \vec{\sigma} \rangle = \mu_n \langle D_n \vec{x}, \vec{\sigma} \rangle \quad \forall \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^n$$

avec D_n matrice diagonale d'éléments :

$$(D_n)_{(i)} = \omega(r_i^n) d_i^n \quad i=1,2,\dots,n$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante :

$$(3.15) \quad \omega(r_i^n) d_i^n = \frac{1}{n} \alpha_i^2$$

alors le problème (3.14) s'écrit sous forme matricielle :

$$(3.16) \quad \Omega_n \vec{x} = \frac{1}{n} \mu_n D_n \vec{x}$$

Avec D_n matrice diagonale d'éléments $d_{ii} = \alpha_i^2 \quad i=1,\dots,n$. Notons encore $\lambda_n = \frac{1}{n} \mu_n$ et on obtient le problème de valeurs propres associé à la matrice $D_n^{-1} \Omega_n$ que l'on voulait traiter.

Si l'on applique maintenant les résultats du paragraphe précédent, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.2 - Soient λ_{in} $i=1, \dots, n$, les valeurs propres associées à la matrice Ω_n , et $\mu_{in} = n \lambda_{in}$.

Si δ_n tend vers zéro de telle façon qu'il existe $\omega \in H^2[0,1]$ telle que :

$$(i) \quad \omega(r_1^n) = \frac{1}{n d_1^n} \cdot \alpha_i^2 \quad i=1, \dots, n$$

$$(ii) \quad \exists C_1, C_2 > 0 \quad C_1 \leq \omega'(t) \leq C_2$$

Alors, μ_{in} convergent vers les valeurs propres du problème variationnel :

$$(3.17) \quad \mathcal{P}(u, v) = \mu \mathcal{A}(u, v) \quad \forall v \in H^q[0,1]$$

Démonstration - Pour appliquer le théorème (2.2) il faut faire attention au fait que n n'est pas coercive. Pour remédier à cela, il suffira de déplacer les valeurs propres, en considérant les problèmes :

$$(3.18) \quad \tilde{\mathcal{P}}(u, \phi) = \tilde{\mu} \mathcal{A}(u, \phi) \quad \forall \phi \in H^q[0,1]$$

$$(3.19) \quad \tilde{\mathcal{P}}_n(u, \phi) = \tilde{\mu}_n \mathcal{A}_n(u, \phi) \quad \forall \phi \in H^q[0,1]$$

où

$$\tilde{\mathcal{P}}(u, \phi) = \mathcal{P}(u, \phi) + \mathcal{A}(u, \phi)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(u, \phi) = \mathcal{P}(u, \phi) + \mathcal{A}_n(u, \phi)$$

Alors, si u est vecteur propre de valeur propre μ du problème (3.17), on aura :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(u, \phi) &= \mathcal{P}(u, \phi) + \mathcal{A}(u, \phi) \\ &= \mu \mathcal{A}(u, \phi) + \mathcal{A}(u, \phi) \\ &= (1+\mu) \mathcal{A}(u, \phi) \end{aligned}$$

d'où :

$$\tilde{\mu}_i = 1 + \mu_i \quad i=1,2,3,\dots$$

D'une manière analogue :

$$\tilde{\mu}_{in} = 1 + \mu_{in} \quad i=1,2,\dots,n$$

Mais $\tilde{\mathcal{P}}$ est coercive ; en effet, Necaš (cf. [34]) démontre que $\tilde{\mathcal{P}}(u,u)$ est équivalente à la norme canonique de $H^1[0,1]$.

Pour appliquer le théorème 2.2 du paragraphe précédent, il suffit de vérifier que :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\eta}_B^n \\ \tilde{\eta}_A^n \end{array} \right\} \text{ tend vers zéro lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

En effet :

$$\tilde{\eta}_B^n = \tilde{\eta}_A^n \leq \frac{1}{\delta_n^2} \|\omega\|_{H^1[0,1]}^2 \quad (\omega \text{ étant défini à la proposition 3.1})$$

Il en résulte donc que les $\tilde{\mu}_{in}$ convergent vers le $\tilde{\mu}_i$, d'où le résultat

C.Q.F.D.

Nota : Il convient de discuter un peu l'hypothèse (i), c'est-à-dire, l'existence de ω telle que :

$$\omega(r_i^n) = \frac{1}{nd_i^n} \alpha_i^2 \quad i=1,2,\dots,n$$

Cette fonction a une expression simple dans deux cas :

- Le premier est le cas des pas équidistants et variances égales où la fonction ω est identiquement égale à 1.
- Le deuxième cas se produit quand on peut choisir t_i d'une manière inversement proportionnelle aux variances ; ici aussi on a ω identiquement égale à 1.

En général, cette hypothèse entraîne l'existence d'une relation entre le choix du pas et les variances, cette relation doit rester la même au fur et à mesure que n varie. On pense qu'on pourrait affaiblir cette hypothèse à une condition du type :

$$\text{il existe : } \omega_n(r_i^n) \equiv \frac{1}{nd_1^n} \alpha_i^2$$

$$\text{avec } \omega_n \frac{H^2[0,1]}{\omega}$$

On a donc trouvé le comportement des valeurs propres de $D_n^{-1} \bar{\omega}_n$; il reste à connaître celui de la trace de $\bar{A}_n(\tau)$. Pour faire ceci, il faut rappeler que $\bar{A}_n(\tau)$ satisfait l'égalité :

$$(R_n(\tau) \phi)(r_i^n) = (\bar{A}_n(\tau) \begin{bmatrix} \phi(r_1^n) \\ \vdots \\ \phi(r_n^n) \end{bmatrix})_i \quad i=1,2,\dots,n$$

où $R_n(\tau)$ est défini par l'égalité variationnelle :

$$(3.20) \quad \tau \mathcal{B}(R_n(\tau) \phi, \psi) + \mathcal{A}_n(R_n(\tau) \phi, \psi) = \mathcal{A}_n(\phi, \psi) \quad \forall \psi \in H^q[0,1]$$

on aura alors :

$$T_{\mathcal{R}}(R_n(\tau)) = T_{\mathcal{R}}(A_n(\tau))$$

$R_n(\tau)$ est un opérateur compact autoadjoint défini sur $H^q[0,1]$ à valeurs dans S_n^q . Définissons maintenant $R(\tau)$ par :

$$(3.21) \quad \tau \mathcal{B}(R(\tau) \phi, \psi) + \mathcal{A}(R(\tau) \phi, \psi) = \mathcal{A}(\phi, \psi) \quad \forall \psi \in H^q[0,1]$$

$R(\tau)$ est aussi compact, autoadjoint défini sur $H^q[0,1]$.

Notons encore : $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}(\phi, \psi) = \tau \mathcal{B}(\phi, \psi) + \mathcal{A}(\phi, \psi)$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R},n}(\phi, \psi) = \tau \mathcal{B}(\phi, \psi) + \mathcal{A}_n(\phi, \psi)$$

Lemme 3.3 - Si η_i $i=1,2,\dots$ dénotent les valeurs propres du problème :

$$u \in H_0^1 \quad \int_0^1 [u'(t)] [\psi'(t)] dt = \eta \int_0^1 u(t) \psi(t) dt \quad \forall \psi \in H_0^1[0,1]$$

$$\text{où} \quad H_0^1[0,1] = \{v \in H^1[0,1] / v(0) = v(1) = 0\}$$

Alors il existe une constante C telle que :

$$(3.22) \quad \mu_{i+q} \geq C(\eta_i)^q \quad i=1,2,\dots$$

Démonstration - Il n'est pas difficile de voir que les valeurs propres μ_i du problème :

$$q \geq 2 \quad u \in H^q[0,1] \quad \mathcal{B}(u, \phi) = \mu \mathcal{A}(u, \phi) \quad \forall \phi \in H^q[0,1]$$

et celles du problème :

$$u \in H_0^q[0,1] \quad \mathcal{B}(u, \phi) = \xi \mathcal{A}(u, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^q[0,1]$$

$$\text{avec} \quad H_0^q[0,1] = \{\psi \in H^q[0,1] / \psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(1) = 0 \quad j=0,\dots,q-1\}$$

sont liées par la relation :

$$\xi_i = \mu_{i+q} \quad i=1,2,3,\dots$$

Il est clair qu'on a l'inclusion :

$$H_0^q[0,1] \subset H_0^{q-1}[0,1] \subset \dots \subset H_0^1[0,1]$$

Soit alors $\phi \in H_0^q[0,1]$. On a :

$$\int_0^1 [\phi'(t)]^2 dt = - \int_0^1 \phi(t) \phi''(t) dt$$

$$\left\{ \int_0^1 [\phi'(t)]^2 dt \right\}^2 \leq \int_0^1 \phi^2(t) dt \cdot \int_0^1 [\phi''(t)]^2 dt$$

$$\frac{\int_0^1 [\phi'(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \leq \frac{\int_0^1 [\phi''(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt}$$

On va démontrer par récurrence que l'on a :

$$(3.23) \quad \frac{\int_0^1 [\phi^{(m)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \leq \frac{\int_0^1 [\phi^{(m+1)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt}$$

(3.23) est vrai pour $m = 1, 2$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour $j \leq m$ ($m > q-1$), et démontrons qu'elle est vraie pour $m + 1$.

$$\int_0^1 \phi^{(m)}(t) \phi^{(m)}(t) dt = - \int_0^1 \phi^{(m-1)}(t) \phi^{(m+1)}(t) dt$$

d'où :

$$\left\{ \int_0^1 [\phi^{(m)}(t)]^2 dt \right\}^2 \leq \int_0^1 [\phi^{(m-1)}(t)]^2 dt \int_0^1 [\phi^{(m+1)}(t)]^2 dt$$

En divisant des deux côtés par $[\int_0^1 \phi^2(t) dt]^2$ on a :

$$(3.24) \quad \frac{\int_0^1 [\phi^{(m)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \leq \frac{\int_0^1 [\phi^{(m-1)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \cdot \frac{\int_0^1 [\phi^{(m+1)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt}$$

Notons :

$$I_m = \frac{\int_0^1 [\phi^{(m)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt}$$

Alors (3.24) devient :

$$(3.25) \quad I_m^2 \leq I_{m-1} I_{m+1} \quad \forall m \leq q-1$$

soit :

$$I_{m-1} I_m^2 \leq I_{m-1}^2 I_{m+1} \quad \text{et en utilisant (3.25)}$$

$$\leq I_{m-2} I_m I_{m+1}$$

d'où :

$$I_{m-1} I_m \leq I_{m-2} I_{m+1}$$

$$I_{m-2} I_{m-1} I_m \leq I_{m-2}^2 I_{m+1} \quad \text{en utilisant (3.25)}$$

$$\leq I_{m-1} I_{m-3} I_{m+1}$$

donc :

$$I_{m-2} I_m \leq I_{m-3} I_{m+1}$$

On aura donc :

$$I_{m-j} I_m \leq I_{m-j-1} I_{m+1} \quad j=1, \dots, m-2$$

Pour $j = m-2$, on obtient :

$$I_2 I_m \leq I_1 I_{m+1}$$

$$\text{Mais on a : } I_2 \geq I_1^2 \quad \text{d'où : } I_1 I_m \leq I_{m+1}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$(I_1)^{m+1} \leq I_{m+1}$$

soit :

$$\left\{ \frac{\int_0^1 [\phi'(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \right\}^q \leq \frac{\int_0^1 [\phi^{(q)}(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \quad \forall \phi \in H_0^q[0,1]$$

De plus, étant donnée que $C_1 \leq \omega'(t) \leq C_2$ on aura :

$$C_1^2 \mathcal{A}(\phi, \phi) \leq \int_0^1 \phi^2(t) dt \leq C_2^2 \mathcal{A}(\phi, \phi)$$

d'où :

$$\left\{ \frac{\int_0^1 [\phi'(t)]^2 dt}{\int_0^1 \phi^2(t) dt} \right\}^2 \leq \frac{1}{C_1^2} \frac{\mathcal{B}(\phi, \phi)}{\mathcal{A}(\phi, \phi)}$$

Si l'on utilise maintenant la définition des valeurs propres en termes du quotient de Raleigh, on obtient par le principe de monotonie (cf. Weinberger [63], Gould [27], etc...) que :

$$\eta_i^q \leq \xi_i \quad i=1,2,\dots$$

C.Q.F.D.

Une version plus complète de ce lemme sera donnée au chapitre IV comme une conséquence d'une inégalité sur les valeurs propres de $\bar{\Omega}_n$.

Théorème 3.4 - Pour $\tau > 0$ fixé, on a :

$$(i) \quad ||R(\tau) - R_n(\tau)|| = O(\delta_n^2)$$

(ii) $R(\tau)$ est un opérateur qui appartient à la Classe de Trace, c'est-à-dire, $T_r(R(\tau)) < +\infty$. De plus :

$$\text{Tr}(R(\tau)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+\tau\mu_i} < +\infty$$

$$(3.23) \quad (iii) \quad \text{Tr}(R_n(\tau)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\tau\mu_i} + \xi_n \quad \text{où } \begin{matrix} \xi_n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{matrix}$$

Démonstration - \mathcal{P}_τ est une forme bilinéaire, bicontinue et coercive, alors on peut appliquer le théorème (2.2) du paragraphe 2 pour obtenir :

$$\|R(\tau) - R_n(\tau)\|u\| \leq [\eta_{B_\tau}^n \cdot \|R(\tau)\| + \eta_A^n] \|u\|_{H^q[0,1]}$$

mais $\eta_{B_\tau}^n = \eta_A^n \leq \delta_n^2 \cdot \|\omega\|_{H^2[0,1]}$ ce qui donne le résultat (i).

Pour démontrer (ii) il suffit d'utiliser le lemme (3.3) et le fait que les valeurs propres η_i $i=1,2,\dots$ du problème :

$$u \in H_0^1[0,1] \quad \int_0^1 u'(t)\phi'(t)dt = \lambda \int_0^1 u(t)\phi(t)dt \quad \forall \phi \in H_0^1[0,1]$$

sont données par :

$$\eta_i = (i\pi)^2 \quad i=1,2,\dots$$

Alors la série : $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+\tau\mu_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+\tau(i\pi)^{2q}}$

est convergente pour $q \geq 1$.

Soit $\bar{R}_n(\tau)$ l'opérateur compact autoadjoint définie par :

$$\bar{R}_n(\tau)\phi \in S_n^q \quad \tau \mathcal{P}(\bar{R}_n(\tau)\phi, \sigma) + \mathcal{A}(\bar{R}_n(\tau)\phi, \sigma) = \mathcal{A}(\phi, \sigma) \quad \forall \sigma \in S_n^q$$

Notons $\frac{1}{1+\tau\xi_{in}}$ $i=1,\dots,n$ les valeurs propres de $\bar{R}_n(\tau)$. On a :

$$a) \quad \frac{1}{1+\tau\xi_{in}} \leq \frac{1}{1+\tau\mu_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

$$b) \quad \|R(\tau) - \bar{R}_n(\tau)\| = O(\delta_n^2)$$

l'inégalité a) traduit la monotonie de l'approximation de Galerkin (ou de Raleigh-Ritz) et b) représente l'estimation d'erreur (cf. par exemple [7], [8]).

Calculons la différence entre $\text{Tr}(R(\tau))$ et $\text{Tr}(\bar{R}_n(\tau))$.

$$\text{Tr}(R(\tau)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+\tau\mu_i}$$

$$\text{Tr}(\bar{R}_n(\tau)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\tau\xi_{in}}$$

Etant donné que $\mu_{i+q} \geq (i\pi)^{2q}$, on a :

$$\sum_{i=J}^{\infty} \frac{1}{1+\tau\mu_i} = O(J^{-2q})$$

De plus, on peut choisir $N(J)$ tel que $\forall n \geq N(J)$ on ait :

$$\left| \sum_{i=1}^J \frac{1}{1+\tau\mu_i} - \sum_{i=1}^J \frac{1}{1+\tau\xi_{in}} \right| < O(J^{-2q})$$

d'où :

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(R(\tau)) - \text{Tr}(\bar{R}_n(\tau))| &\leq \left| \sum_{i=1}^J \frac{1}{1+\tau\mu_i} - \sum_{i=1}^J \frac{1}{1+\tau\xi_{in}} \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{i=J}^{\infty} \frac{1}{1+\tau\mu_i} \right| + \left| \sum_{i=J}^n \frac{1}{1+\tau\xi_{in}} \right| \\ &\leq J^{-2q} + 2 O(J^{-2q}) = O(J^{-2q}) \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(\bar{R}_n(\tau)) - \text{Tr}(R(\tau))| &\leq \sum_{i=1}^n | \langle s_i, (R_n(\tau) - \bar{R}_n(\tau)) s_i \rangle | \\ &\leq n \|R_n(\tau) - \bar{R}_n(\tau)\| \\ &\leq n O(\delta_n^2) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Dans les paragraphes suivants on examinera le calcul des valeurs propres du problème continu dans plusieurs cas pratiques. Mais avant, il est bon de rappeler le résultat classique suivant : (cf. [27]).

Proposition 3.5 - Les deux problèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \phi \in H^q[0,1] \mathcal{A}(\phi, \psi) &= \eta \mathcal{A}(\phi, \psi) & \forall \psi \in H^q[0,1] \\ \text{Trouver } \phi \in C^{2q}[0,1] D^{2q} \phi &= \eta \omega \phi \\ \phi^{(j)}(0) &= \phi^{(j)}(1) = 0 & j=0,1,\dots,q-1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

4 - LE CAS DES NOEUDS EQUIDISTANTS -

Considérons maintenant le calcul des Valeurs Propres dans le cas où les pas sont équidistants et $v_i^2 = v \quad i=1,2,\dots,n$.

Dans ce cas, on aura les relations suivantes :

$$(4.1) \quad t_i = t_1 + (i-1)h \quad i=1,\dots,n$$

$$(4.2) \quad r_i^n = \frac{1}{2n} + (i-1) \cdot \frac{1}{n} \quad i=1,\dots,n$$

$$(4.3) \quad d_i^n = \frac{1}{n} \quad i=1,2,\dots,n$$

$$(4.4) \quad \alpha_i^2 = 1 \quad i=1,2,\dots,n$$

$$(4.5) \quad \omega(r_i^n) = 1 \quad i=1,2,\dots,n$$

Le problème de valeurs propres à résoudre sera simplement :

$$(4.6) \quad \begin{aligned} D^{(2q)} \phi &= \eta \phi \\ \phi^{(j)}(0) &= \phi^{(j)}(1) = 0 & j=0,1,\dots,q-1. \end{aligned}$$

Et l'expression approchée des valeurs propres sera alors :

$$\lambda_{in} = 0 \quad i=1, \dots, q$$

(4.7)

$$n\lambda_{jn} \cong \frac{1}{(nh)^{2q}} \cdot \eta_{j-q} \quad j=q+1, \dots, n$$

Et l'expression approchée de la trace devient :

$$(4.8) \quad \text{Tr}((I+n\tau\Omega)^{-1}) \cong q + \sum_{i=q+1}^n \frac{1}{1+\tau} \frac{1}{(nh)^{2q}} \cdot \eta_{i-q}$$

C'est cette expression qui a été utilisée pour calculer $V(\tau)$ et l'estimateur $\hat{\tau}$ du paramètre optimal. Dans le chapitre suivant on présentera des expériences numériques permettant de dire que l'estimateur obtenu est un bon choix du paramètre de lissage.

4.1 - Les Splines Cubiques ($q = 2$)

Dans le cas $q = 2$, le problème est simplement :

$$(4.9) \quad D^{(iv)}\phi = \eta\phi$$

$$\phi(0) = \phi(1) = 0$$

$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

Ce problème correspond aux vibrations libres d'une baguette (cf. Courant [12]). Les valeurs propres sont données par :

$$(4.10) \quad \eta_i = (p_i \pi)^4 \quad i \in \mathbb{N}$$

où $\{p_i\}_1^\infty$ sont les solutions positives de l'équation :

$$(4.11) \quad \cos p \pi \cosh p \pi = 1$$

Dans le tableau n°1 on donne les dix premières racines de l'équation (4.11).

A partir de la dixième, on constate que l'on a : $p_k = k + \frac{1}{2}$, à la précision machine près.

Tableau N°1

1	1.50561873114194	6	6.49999999913815
2	2.49975267007397	7	7.50000000003725
3	3.50001067943591	8	8.4999999999838
4	4.49999953848358	9	9.50000000000007
5	5.50000001994390	10	10.5000000000000

4.2 - Les Splines Quintiques -

Dans le cas des splines quintiques le problème technique de trouver les valeurs propres devient difficile, mais on a réussi à trouver l'équation grâce à l'utilisation du système Réduce de calcul formel.

On obtient que :

$$(4.12) \quad \eta_i = p_i^6 \quad i=1, \dots$$

où $\{p_i\}_{i \in N}$ est l'ensemble des racines positives de l'équation :

$$(4.13) \quad \sin \frac{p}{2} [\sin^2 \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2} + \cos \frac{p}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} p + 2 \cos \frac{p}{2} - 2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{2} p] = 0$$

Les racines d'indice $2k-1$ de cette équation sont données par le tableau n° 2 pour $k \leq 10$. Pour $k > 10$, on a (à précision machine près)

$p_{2k-1} = (2k-1)\pi$. Les racines paires sont données par :

$$(4.14) \quad p_{2k} = 2k\pi \quad k=1, 2, \dots$$

Tableau n°2

1	2.527482153303429	6	34.55751918948855
2	9.427052987008248	7	40.84070449666733
3	15.70795337857853	8	47.12388980384693
4	21.99114861798320	9	53.40707511102652
5	28.27433388212243	10	59.69026041820610

5 - UNE METHODE PRATIQUE DANS LE CAS GENERAL -

Dans le cas des pas non-équidistants et v_i éventuellement différents, on ne sait pas calculer explicitement les valeurs propres du problème continu (3.24). Pour palier à cet inconvénient, on calculera une approximation des valeurs propres du problème continu, à l'aide d'une discrétisation par différences finies, ce qui revient à résoudre :

$$(5.1) \quad \frac{1}{(m+1)^{2q}} F X = \theta \bar{D} X \quad X \in R^m \quad m \geq n$$

où F est la matrice de discrétisation par différences finies de l'opérateur $D^{(2q)}$ et \bar{D} est la matrice diagonale contenant les valeurs aux noeuds du maillage régulier de la fonction ω .

Ce problème est équivalent au problème symétrique suivant :

$$(5.2) \quad \frac{1}{(m+1)^{2q}} \cdot \bar{D}^{-1/2} F \bar{D}^{-1/2} V = \theta V$$

La matrice F a une structure de bande avec $2q+1$ diagonales non-nulles et la matrice $\bar{D}^{-1/2} F \bar{D}^{-1/2}$ sera de même. On peut donc utiliser la méthode de Schwarz (cf. [45]) pour réduire cette matrice à la forme tridiagonale, avec un coût beaucoup plus petit que celui de tridiagonaliser Ω directement. Ensuite on utilise une version de QR pour matrices symétriques tridiagonales (cf. Saad [41]) pour trouver les valeurs propres.

Cette méthode a été essayée avec succès en utilisant $m=2n$, pour les splines cubiques. Dans ce cas, la matrice F est donnée par :

$$(5.3) \quad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 & & & \\ 4 & -6 & 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & \\ & & & & & -1 \\ & & -1 & 4 & -6 & 4 \\ & & & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Pour évaluer \bar{D} , il faut pouvoir calculer $\omega(t)$, or, on sait que :

$$\omega(r_i^n) = \frac{1}{nd_i^n} \alpha_i^2 \quad i=1,2,\dots,n$$

Soit alors $L(t)$ la fonction spline d'ordre 1 qui interpole ω aux points r_i^n $i=1,2,\dots,n$. On prendra comme $\omega(t)$, la valeur $L(t)$ de cet interpolant.

Il existe un cas particulier de pas non équidistants qu'il est intéressant de remarquer. C'est celui où la fonction $\omega(r_i^n)$ vaut 1 partout. Dans ce cas, le problème continu est le même que celui des problèmes à noeuds équidistants et les valeurs propres peuvent être calculées par les tables du paragraphe 4.

6 - COMMENTAIRES -

Les méthodes proposées dans ce paragraphe ont été programmées en FORTRAN-IV G et les résultats numériques sont très bons, malgré le fait que les approximations des valeurs propres ne sont numériquement bonnes que pour les premières, c'est-à-dire, les plus petites. Ceci est dû (au moins c'est qu'on pense) au fait déjà remarqué par Schoenberg [42], Reinsch [39], (dans le cas des variances égales) qui est la grande importance des petites valeurs propres, et la relativement petite importance des grandes. D'autres raisons théoriques seront données au chapitre IV.

CHAPITRE III

EXPERIENCES NUMERIQUES

1 - INTRODUCTION -

Le but du présent chapitre est d'illustrer à l'aide d'expériences numériques le comportement de la méthode de Validation Croisée.

Ainsi, dans le premier paragraphe on décrit la façon de mettre en oeuvre la méthode de Validation Croisée pour le cas des pas équidistants et on donne un tableau des temps de calcul, ainsi que quelques exemples d'utilisation sur des données fictives.

Dans le deuxième paragraphe on compare à l'aide d'une simulation, les différentes méthodes décrites dans le chapitre I.

Dans le troisième paragraphe, on décrit la mise en oeuvre de la méthode pour le cas des pas non équidistants et variances différentes. On donne aussi quelques exemples d'application sur des données fictives.

Finalement, dans le dernier paragraphe, on montre comment on peut choisir le paramètre d'une manière non automatique, à l'aide d'un écran de visualisation, et on discute les avantages et inconvénients de cette procédure.

2 - LE CAS DE PAS ET VARIANCES EGALES -

Dans tous les exemples de ce paragraphe, on considère que les points t_i $i=1, \dots, n$ sont équidistants et que l'écart type des erreurs ϵ_i $i=1, \dots, n$ est le même.

Tous les exemples de ce paragraphe, correspondent à des données fictives obtenues en faisant :

$$(2.1) \quad z_i = f(t_i) + \epsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

où f est une fonction connue. Les ε_i sont générés comme des nombres pseudo aléatoires de moyenne nulle et variance v^2 , à l'aide d'un sous-programme basé sur la théorie des grands nombres.

De plus, toutes les fonctions f choisies comme exemple, ont l'intervalle $[0,1]$ comme domaine de définition. Les fonctions splines utilisées sont des cubiques.

2.1 - Mise en oeuvre de la méthode -

Dans les paragraphes précédents on a vu que la méthode de Validation Croisée consiste à minimiser la fonction $V(\tau)$ construite à partir des données :

$$(2.2) \quad V(\tau) = \frac{\frac{1}{n} \|z - A(\tau)z\|^2}{\left(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A(\tau))\right)^2}$$

Pour calculer $A(\tau)z$ pour un τ donné, on utilisera la méthode de Paihua décrite dans [35]. La trace de $A(\tau)$ est obtenue en utilisant les valeurs propres de l'opérateur différentiel associé (cf. chapitre 2).

Pour obtenir ensuite la valeur de τ qui minimise $V(\tau)$, on utilise une méthode de recherche globale. (Méthode de la Section Dorée cf. [47]). Cette méthode exige l'hypothèse que la fonction soit unimodal, ce qui a été constaté dans tous les cas étudiés, mais ceci n'a pas pu être démontré.

Un rapport permettant d'utiliser ces programmes pour le cas des splines cubiques est à la disposition des utilisateurs (cf.[50]). Un rapport analogue pour les splines quintiques apparaîtra prochainement.

Etant donné que la méthode de minimisation est une méthode qui permet d'obtenir à chaque pas un intervalle où se trouve la valeur optimale, il reste à choisir la précision avec laquelle on considère que le calcul est fini. On a utilisé pendant un certain temps le test :

$$(2.3) \quad \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_2} < 10^{-5}$$

où $[\tau_1, \tau_2]$ est l'intervalle fourni par l'algorithme, mais l'on s'est aperçu que sans perdre rien dans la précision de la spline obtenue, on pouvait utiliser 10^{-3} au lieu de 10^{-5} , diminuant ainsi le temps de calcul de moitié.

Dans le tableau n° 1 ci-dessous on donne les temps de calcul pour l'ordinateur IBM 360/67 du C.I.C.G. Les temps sont donnés en secondes.

Tableau n° 1

n	T.C.V.P.	T.C.P.O.	T.TOTAL
50	0.0031	0.7962	0.7993
100	0.0066	1.1310	1.1376
150	0.0098	1.7466	1.7564
200	0.0134	2.4569	2.4703
250	0.0215	3.1580	3.1795
300	0.0193	3.7720	2.7913
350	0.0238	4.4208	4.4446
400	0.0269	4.8706	4.8975

Comme on peut remarquer, le temps croît linéairement avec le nombre de points avec une relation

$$(2.4) \quad \text{temps} \approx 0.012n$$

2.2 - Exemples d'utilisation -

Dans cette section, on illustre le comportement de la méthode avec trois exemples qui sont les suivants :

Exemple 1 - On considère la fonction $f(x) = \sin(2\pi x)$ dans l'intervalle $[0,1]$. Un écart type de $v = 0.1$ est fixé pour les erreurs et l'on considère les cas $n=40$ et $n=100$.

Les résultats obtenus sont représentés de la manière suivante :

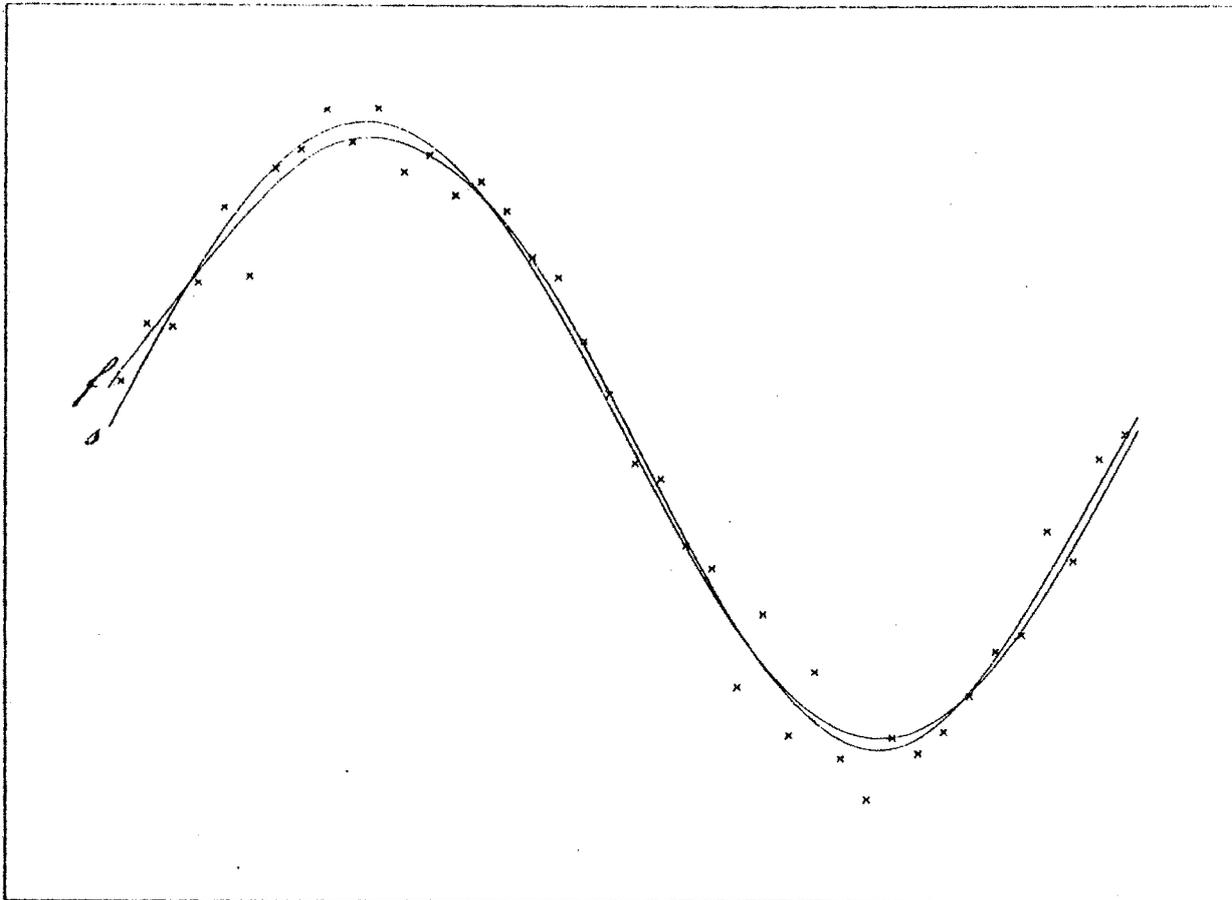
Dans un même dessin on représente les données (X) la fonction f (marquée par F à l'extrémité gauche) et la fonction spline (marquée par un S). On fait un dessin pour chaque cas.

Exemple n° 2 - On utilise la fonction $f(x) = e^{-16(x - \frac{1}{2})^2}$ dans l'intervalle $[0,1]$. L'écart type est de 0.1 et l'on considère aussi $n=40,100$.

Exemple n° 3 - Dans ce cas $f(x) = e^{-2x} \sin(4\pi x)$ dans l'intervalle $[0,1]$. L'écart type est de 0.1 et l'on considère les cas $n=40,100$.

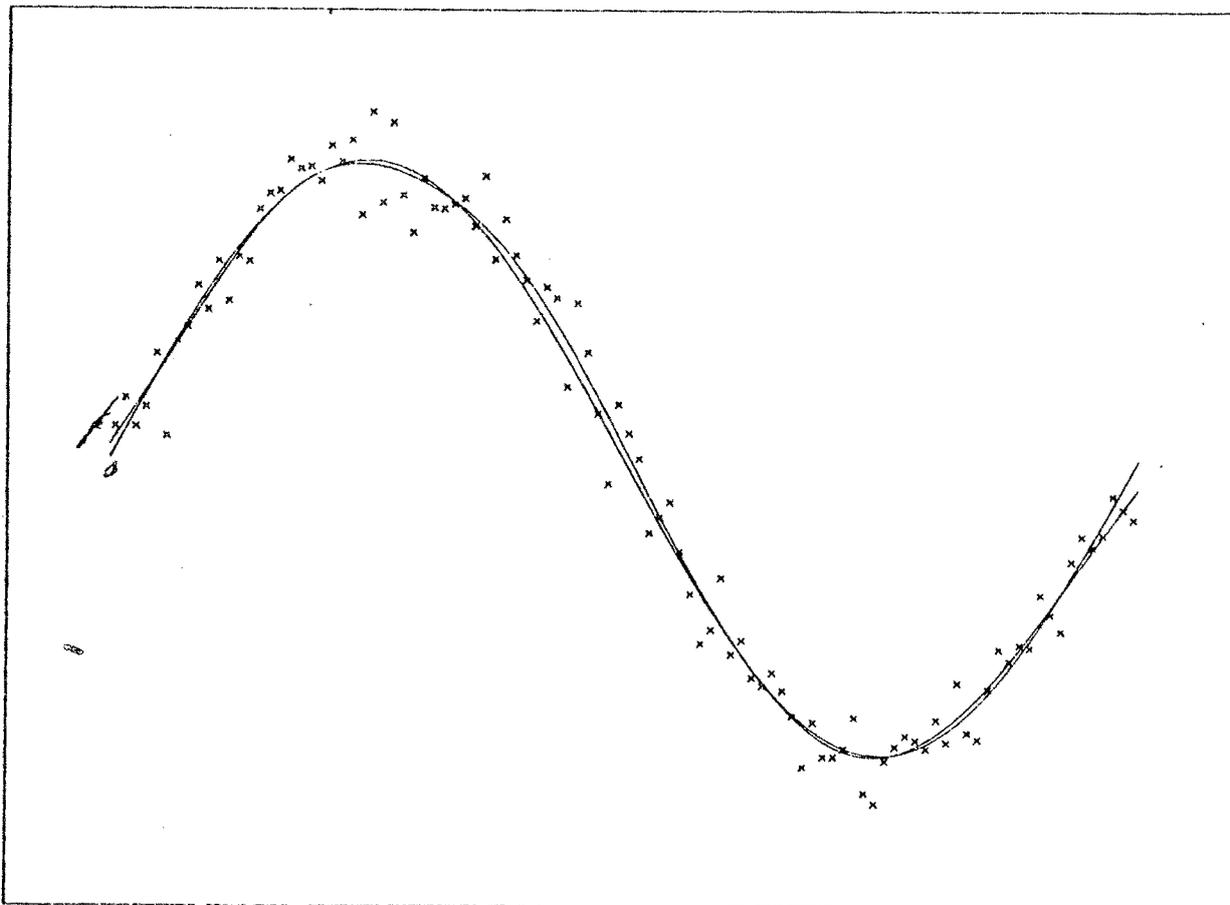
Les dessins se trouvent dans les pages qui suivent. On peut y voir que la méthode est très intéressante pour résoudre ce type de problèmes. On a aussi résolu plusieurs exemples réels d'utilisation qui donnent des résultats très satisfaisants pour les utilisateurs.

METHODE DE VALIDATION CROISEE



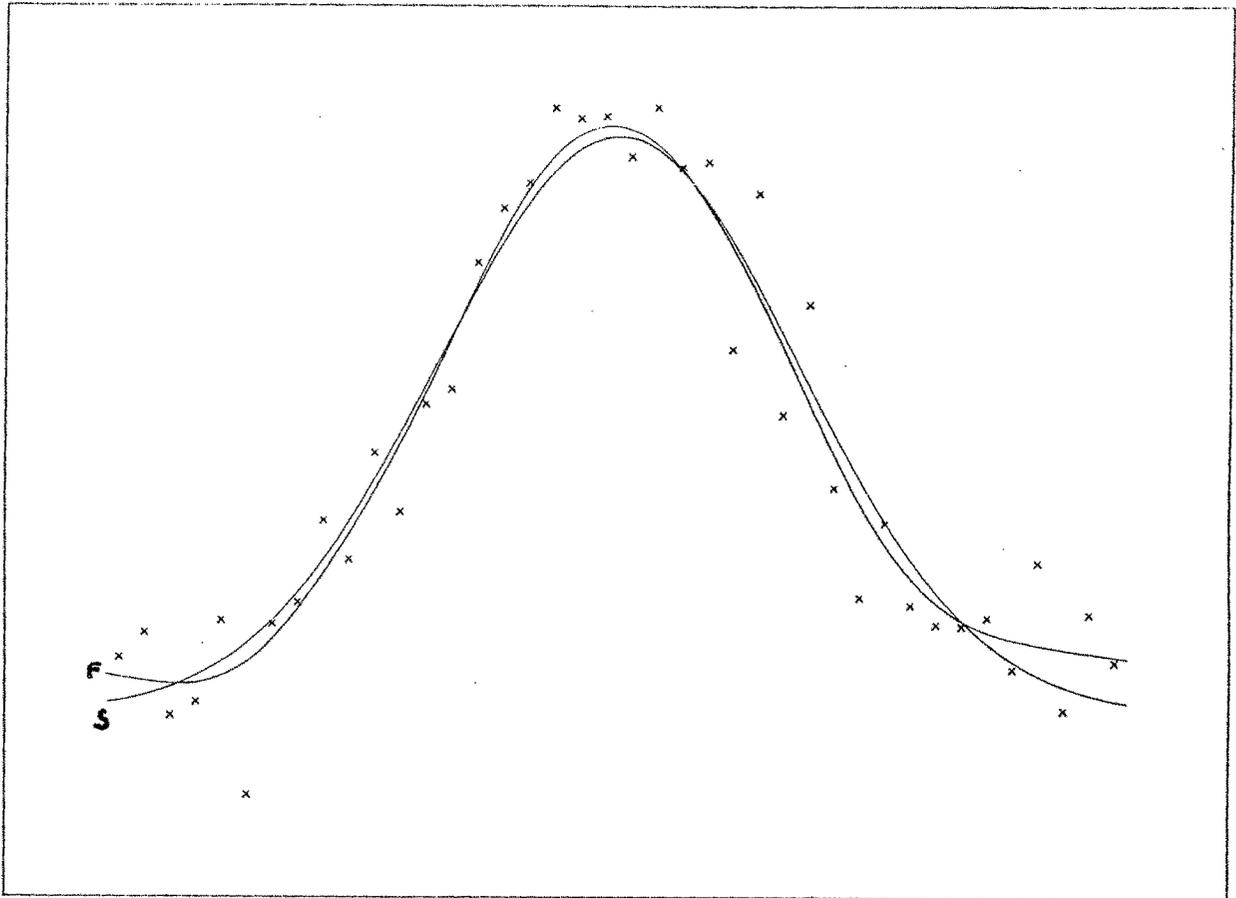
Exemple 1 : 40 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



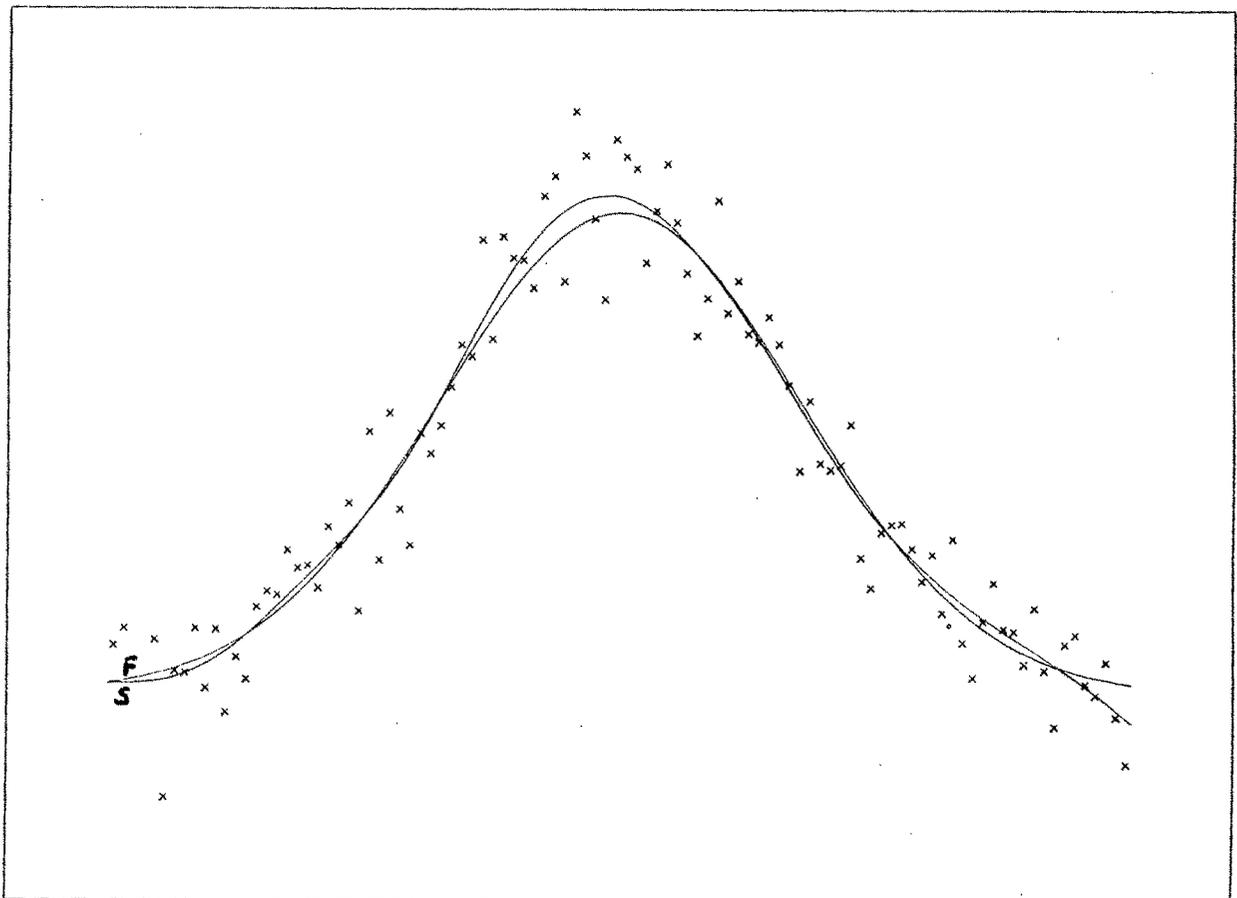
Exemple 1 : 100 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



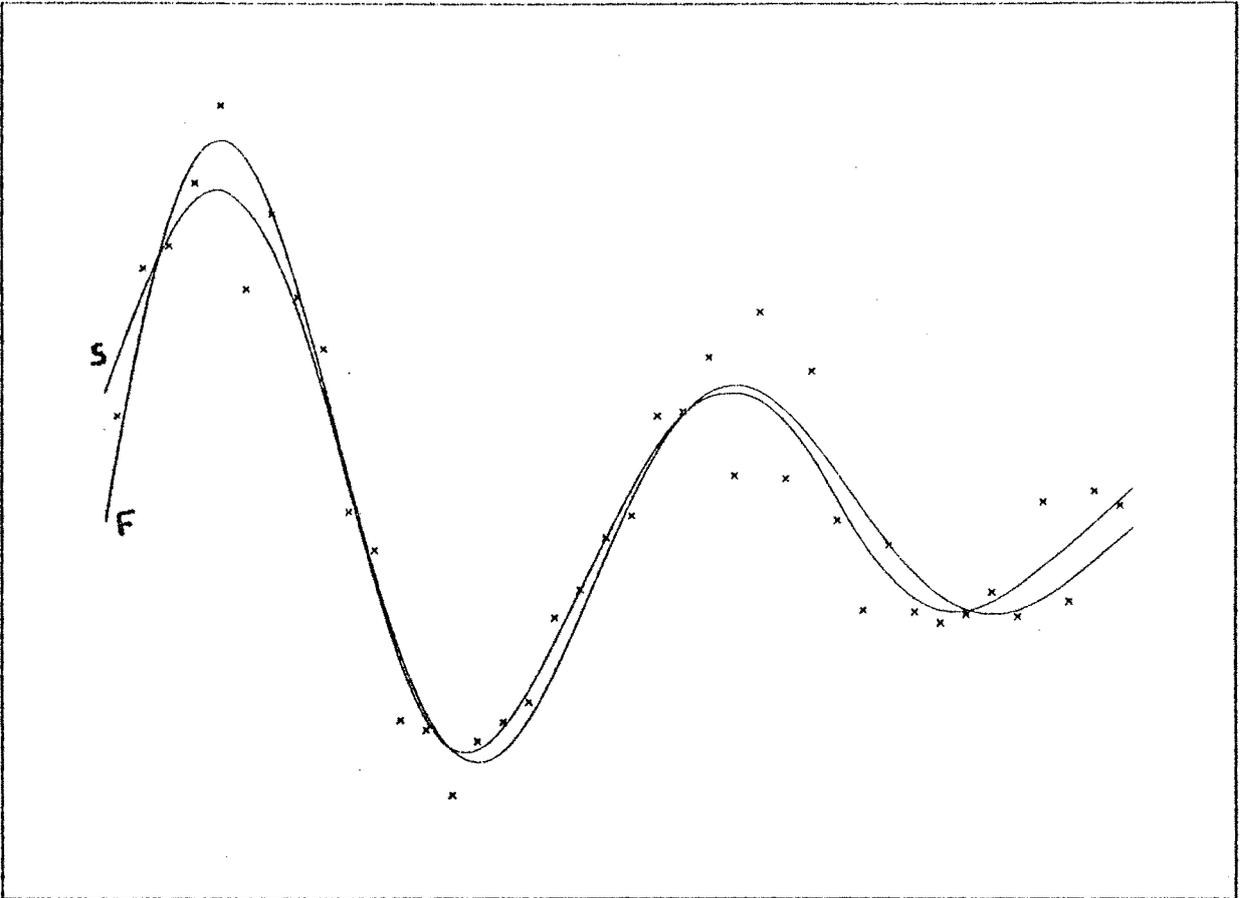
Exemple 2 : 40 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



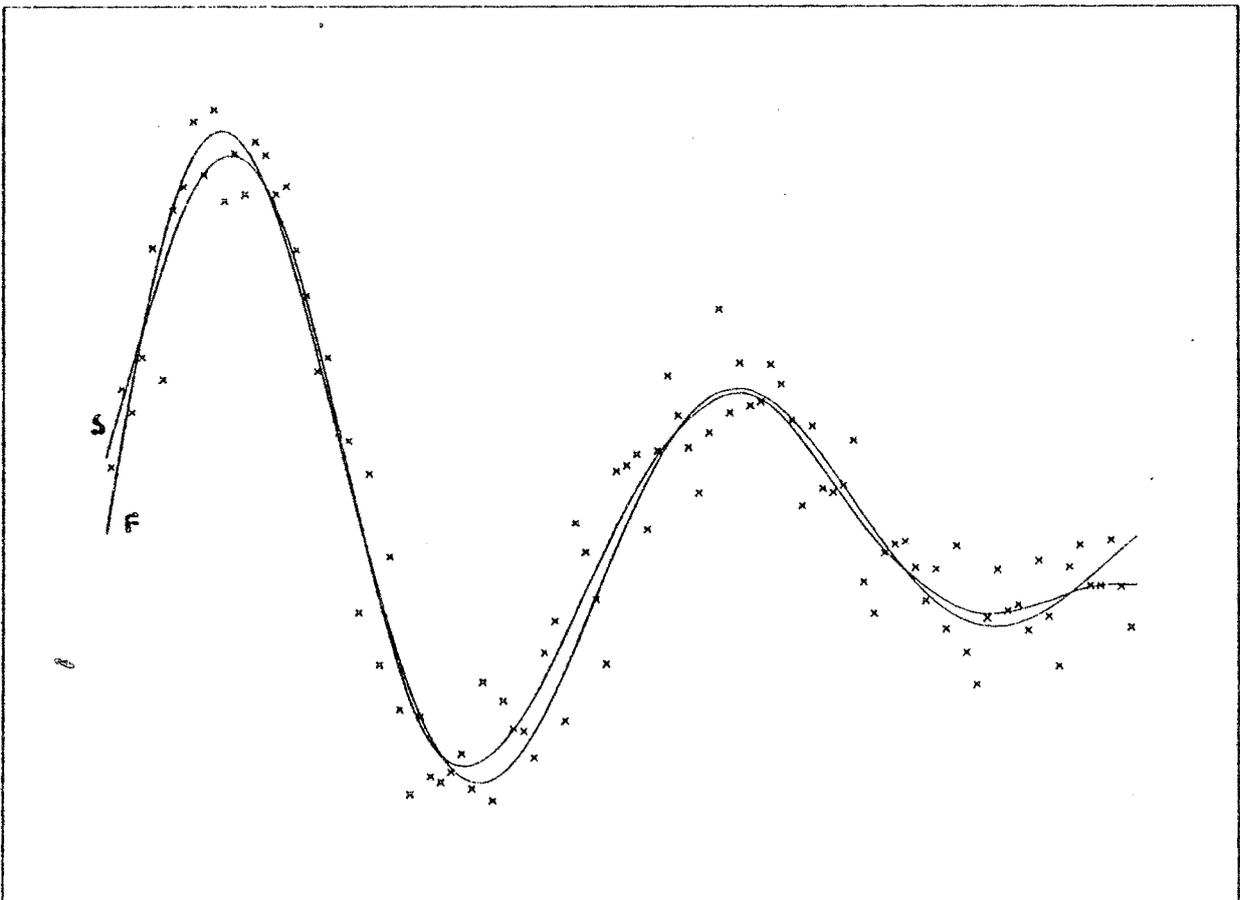
Exemple 2 : 100 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



Exemple 3 : 40 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



Exemple 3 : 100 points

2.3 - Le Comportement Asymptotique de la Méthode -

Le but de ce paragraphe est de montrer à l'aide de quelques exemples comment se comporte la solution α_{n,τ^*} lorsque le nombre de points augmente. f et v étant fixés.

On a donc pris trois fonctions test définies dans l'intervalle $[0,1]$. Dans tous les cas, l'écart type de la perturbation a été fixé à environ 10% de la valeur maximum de f . On a donc répété l'expérience pour $n=50,100,200$ et 400 constatant que dans chaque cas, au fur et à mesure que n augmente, la spline de lissage obtenue par la méthode de Validation Croisée s'approche de plus en plus de f . Ce résultat empirique n'a pas pu être démontré, mais quelques résultats (relativement peu importants) ont pu être obtenus.

Dans les pages suivantes on présente les résultats de ces simulations. Pour chaque f , on représente la fonction, les données (X) et la spline. Ceci pour chaque valeur de n .

Les fonctions test utilisées sont les suivantes :

$$1) - \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right) \quad v = 0.1$$

$$2) - \quad f(x) = 4\pi \cos (4\pi x) \quad v = 0.1$$

$$3) - \quad f(x) = \pi \cos \pi x + \frac{3\pi}{2} \cos (3\pi x) \quad v = 0.1$$

METHODE DE VALIDATION CROISEE

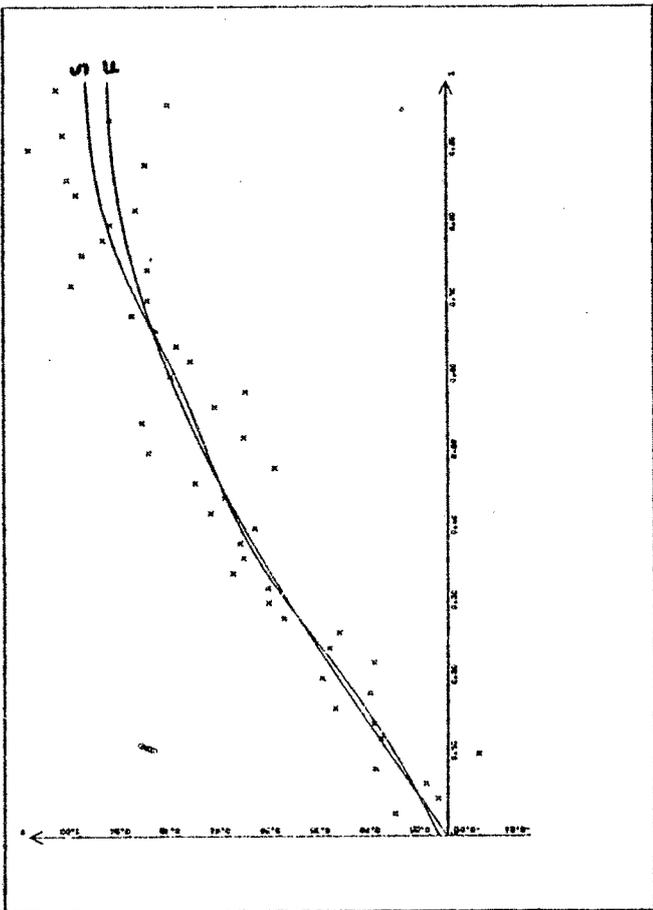


FIGURE 1: 50 POINTS

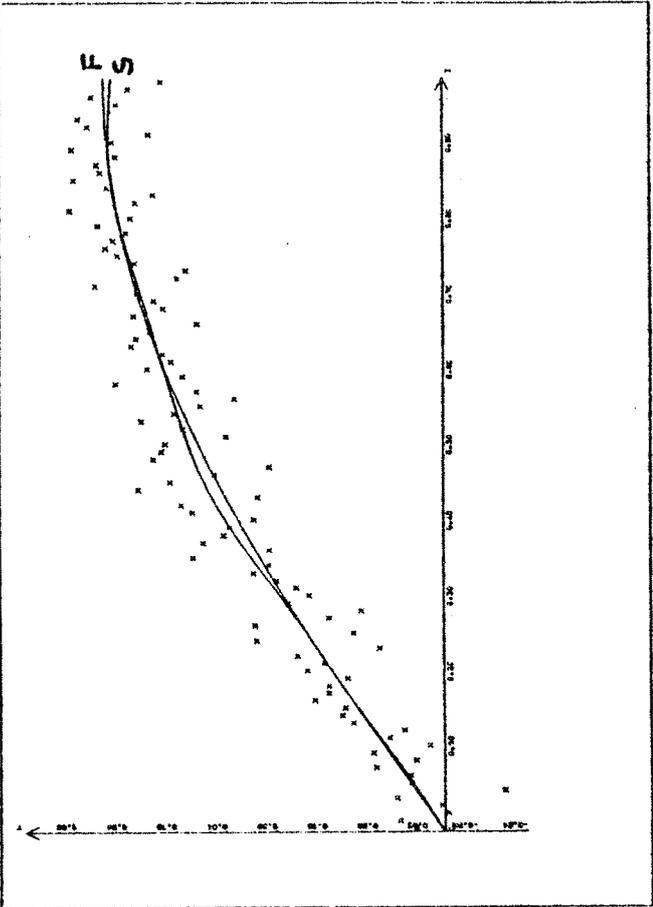


FIGURE 2: 100 POINTS

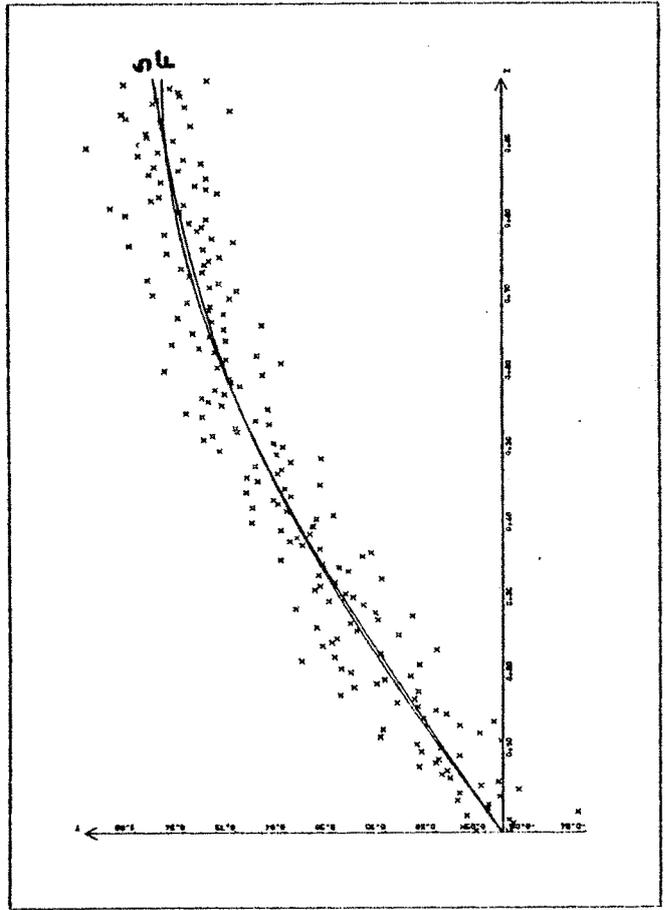


FIGURE 3: 200 POINTS

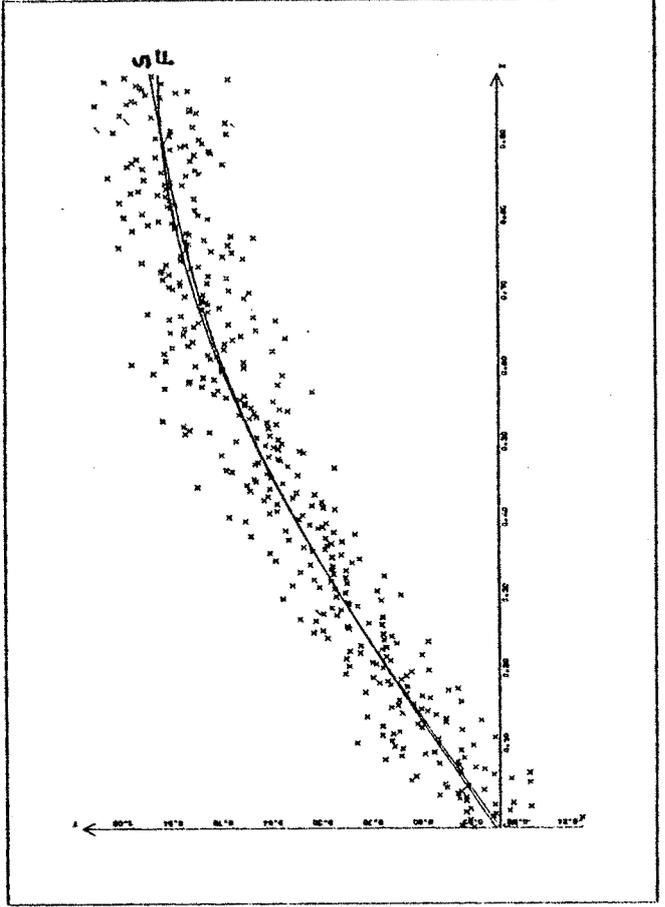


FIGURE 4: 400 POINTS

METHODE DE VALIDATION CROISEE

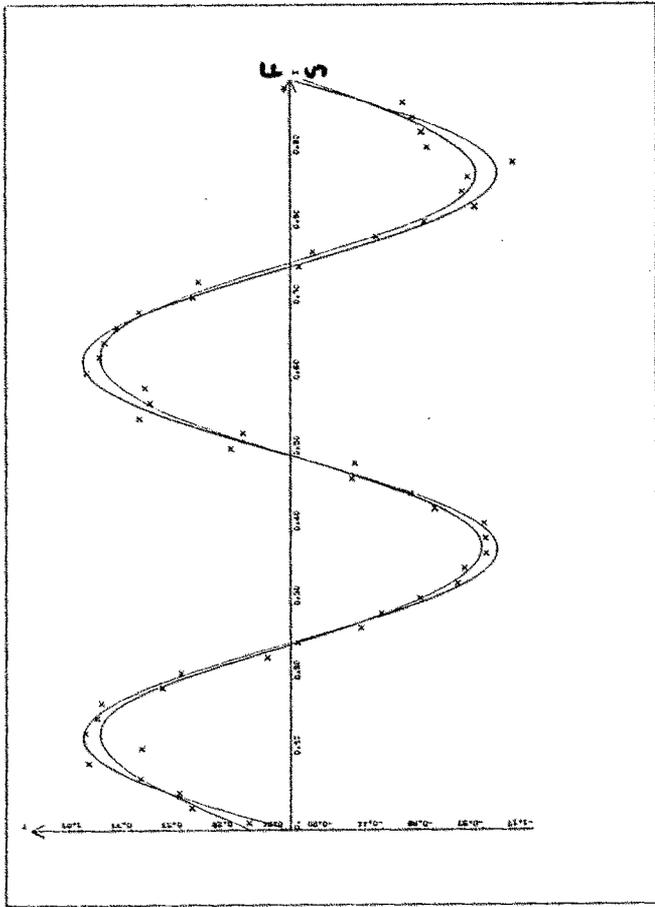


FIGURE 1: 50 POINTS

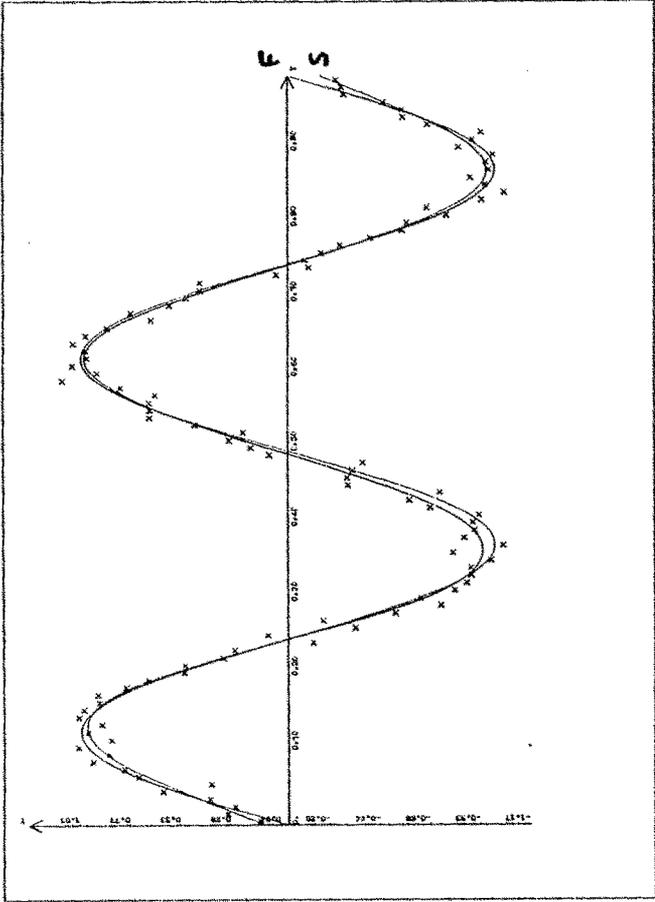


FIGURE 2: 100 POINTS

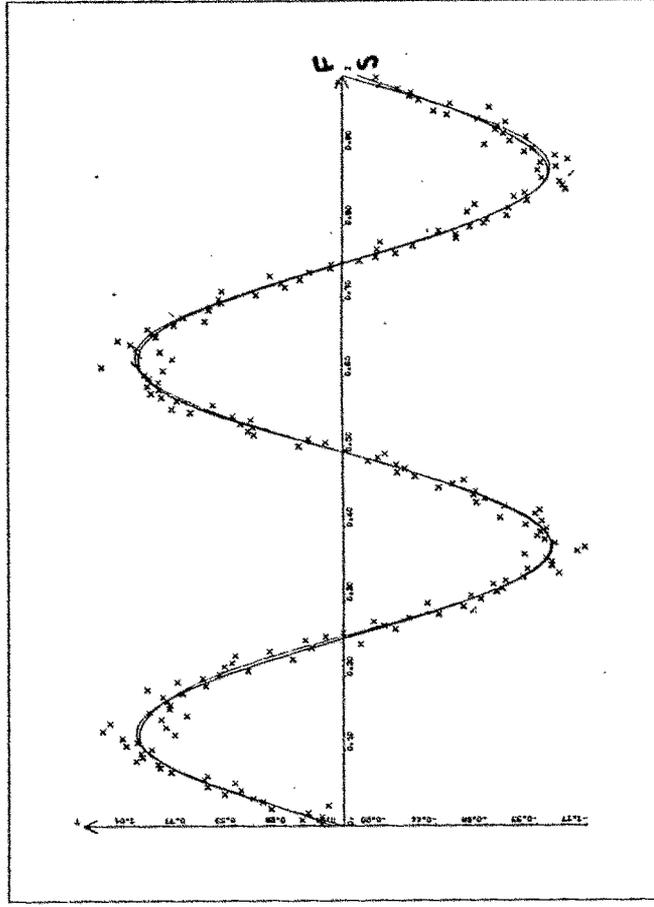


FIGURE 3: 200 POINTS

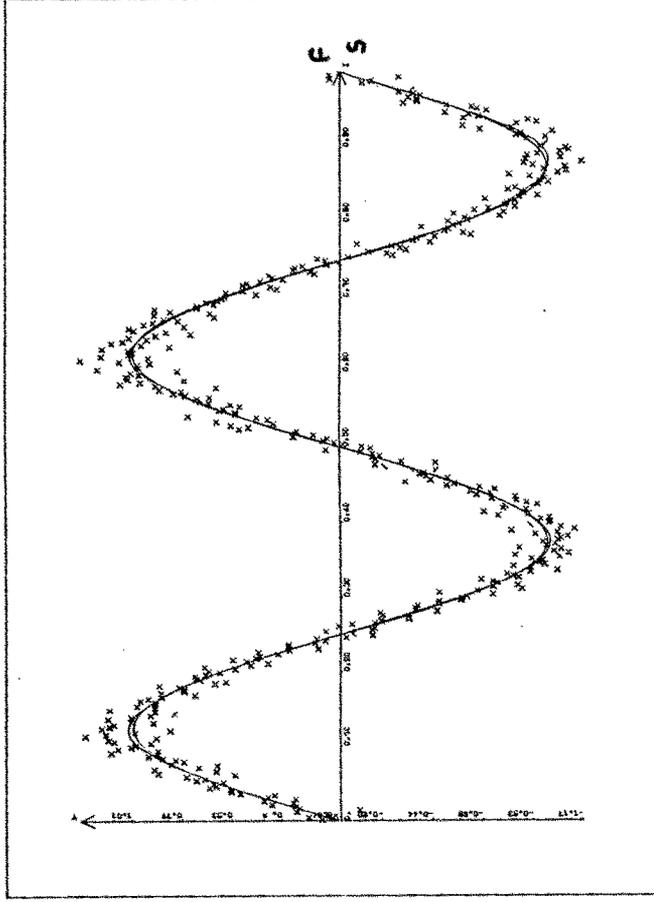


FIGURE 4: 400 POINTS

METHODE DE VALIDATION CROISEE

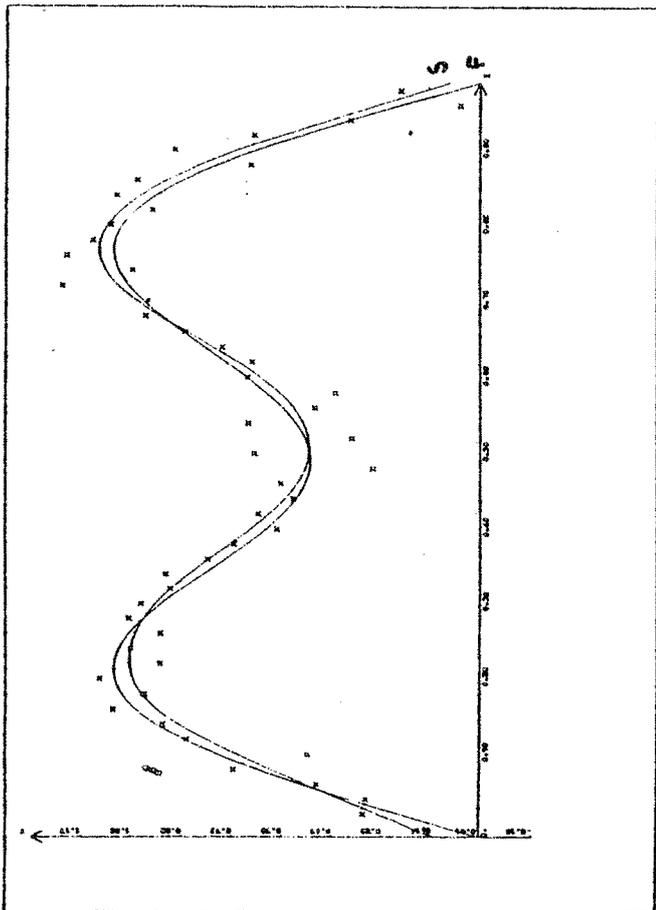


FIGURE 1: 50 POINTS

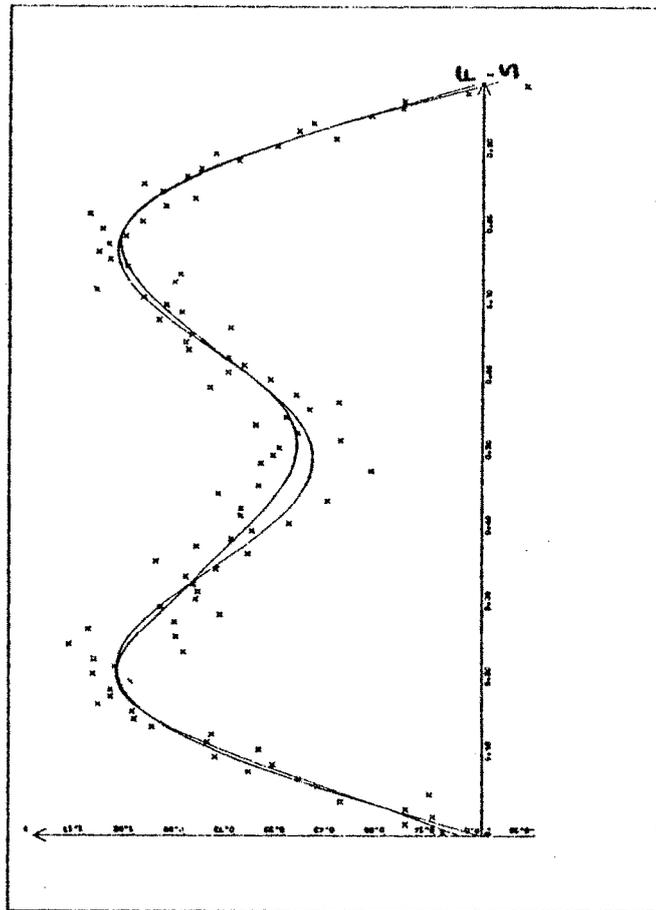


FIGURE 2: 100 POINTS

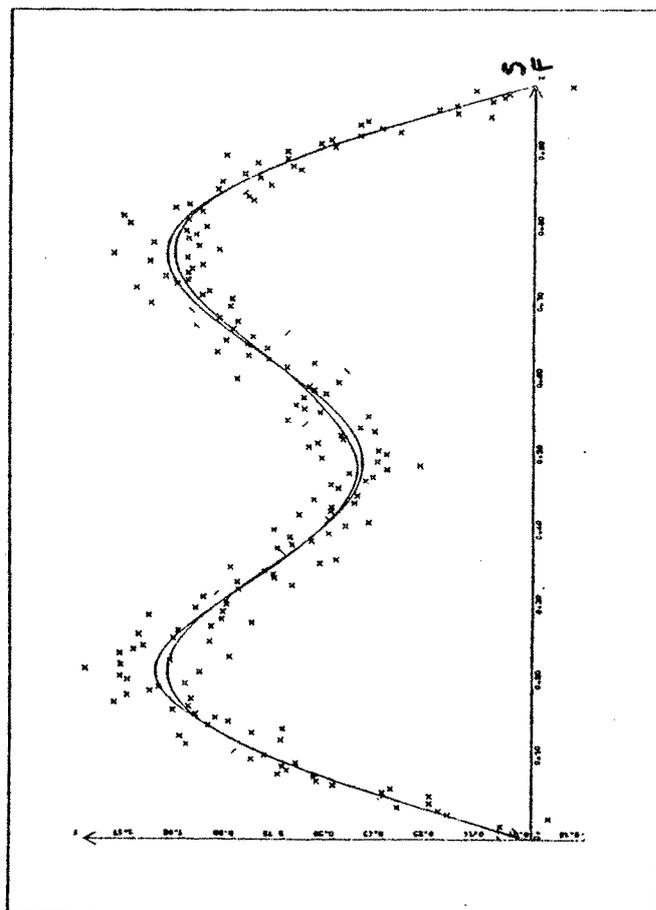


FIGURE 3: 200 POINTS

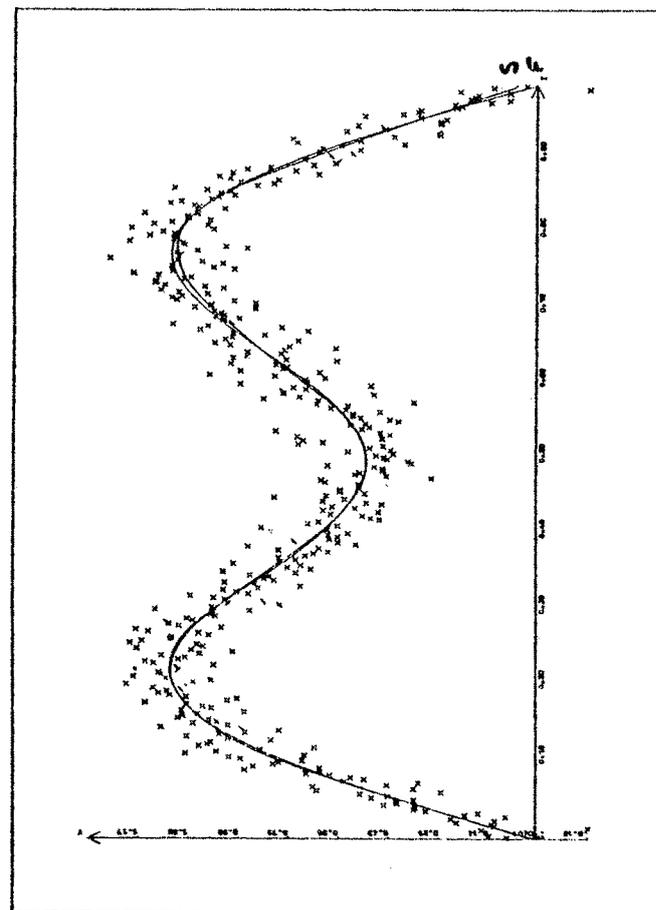


FIGURE 4: 400 POINTS

3 - UNE COMPARAISON DES METHODES -

Dans ce paragraphe on présente une comparaison des méthodes décrites dans le paragraphe 1, cette comparaison étant faite sur la base d'une simulation pour le cas où les pas sont égaux et la variance est unique, et égale à v .

Du point de vue temps de calcul, les trois méthodes ont presque les mêmes caractéristiques, en utilisant bien sûr, les approximations du chapitre précédent pour les valeurs propres.

La deuxième chose à regarder est le fait que les méthodes de Reinsch et Mallows ont besoin de la connaissance d'un bon estimateur de v^2 , ce qui n'est pas toujours possible.

Dans la comparaison qui est faite dans ce paragraphe, on peut utiliser comme v^2 la valeur utilisée pour générer les nombres aléatoires (ceci est faire un beau cadeau à la méthode, puisque v^2 n'est pas connu en général).

Pour faire cette comparaison on considère les trois paramètres suivants :

$$(3.1) \quad I_e(\tau) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - \sigma_{n,\tau}(t_i))^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - \sigma_{n,\hat{\tau}}(t_i))^2}$$

où $\hat{\tau}$ est la valeur qui minimise.

$$(3.2) \quad \text{Var}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - \sigma_{n,\tau}(t_i))^2$$

$$(3.3) \quad I_d(\tau) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f'(t_i) - \sigma'_{n,\tau}(t_i))^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f'(t_i) - \sigma'_{n,\bar{\tau}}(t_i))^2}$$

où $\bar{\tau}$ est la valeur qui minimise :

$$(3.4) \quad \text{Var}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f'(t_i) - \sigma'_{n,\tau}(t_i))^2$$

Et finalement, on considère :

$$(3.5) \quad I_J(\tau) = \frac{\int_0^1 [(f - \sigma_{n,\tau})''(t)]^2 dt}{\int_0^1 [(f - \sigma_{n,\tilde{\tau}})''(t)]^2 dt}$$

où $\tilde{\tau}$ est la valeur qui minimise :

$$(3.6) \quad J(\tau) = \int_0^1 [(f - \sigma_{n,\tau})''(t)]^2 dt$$

Ces trois paramètres mesurent d'une certaine façon la qualité de l'approximation, et ils permettent de comparer les méthodes. Si les valeurs de ces paramètres sont proches de 1, la méthode sera bonne pour ce critère et parmi deux méthodes, la "meilleure" sera celle qui produit la valeur du paramètre la plus proche de 1.

Soient τ^* la valeur qui minimise $V(\tau)$, c'est-à-dire, le paramètre obtenu par validation croisée. τ_R le paramètre obtenu par la méthode de Reinsch et τ_M le paramètre obtenu par la méthode de Mallows. Dans les tableaux des pages suivantes on présente pour plusieurs valeurs de n et v , les moyennes obtenues pour les trois indices définis, ces moyennes étant réalisées en utilisant l'ensemble des 10 fonctions test données plus bas.

Ainsi, dans les tableaux 1 à 4 on étudie le comportement de I_e . Dans les tableaux 5 à 8 on observe I_d et dans les 9 à 12, l'indice I_J .

Fonctions Test

1) - $\sin(2\pi x)$

2) - $\sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x)$

3) - e^{-3x}

4) - $e^{-2x} \sin 2\pi x$

5) - $25x - 128x^2 + 282.5x^3$

$-278.7x^4 + 100.0x^5$

6) - $3x - 27.6x^2 + 136x^3 - 210x^4 + 100x^5$

7) - $e^{-16(x - \frac{1}{2})^2}$

8) - $4(x-1)^2$

9) - $10(x-0.5)(x-0.25)(x-0.75)$

10) - $\arctg(4(x - \frac{1}{2}))$

Paramètre I_e

Tableau n° 1 - $v = 0.100$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.596	1.285	1.046	1.032	1.045	1.048	1.104	1.105
MALLOWS		2.372	3.495	3.237	4.110	5.396	6.748	9.908	11.120
REINSCH		1.560	1.254	1.099	1.830	2.565	3.036	3.160	3.231

Tableau n° 2 - $v = 0.050$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.130	1.025	1.027	1.029	1.061	1.140	1.071	1.027
MALLOWS		2.272	2.756	3.045	4.159	5.504	5.587	6.301	7.777
REINSCH		1.133	1.283	2.701	2.402	1.544	1.299	1.220	1.061

Tableau n° 3 - $v = 0.010$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.648	1.518	1.015	1.030	1.030	1.040	1.012	1.013
MALLOWS		1.648	2.037	3.010	2.946	3.516	4.395	5.170	5.338
REINSCH		1.054	1.896	2.049	1.168	1.124	1.086	1.728	1.575

Tableau n° 4 - $v = 0.005$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.320	1.258	1.296	1.013	1.019	1.026	1.016	1.042
MALLOWS		1.320	2.403	2.183	2.493	3.005	4.067	4.364	4.788
REINSCH		1.726	1.801	1.216	1.447	1.350	1.261	1.294	1.455

Paramètre I_d

Tableau n° 5 - $v = 0.100$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.383	1.664	1.262	1.262	1.253	1.259	1.289	1.390
MALLOWS		5.157	13.810	18.645	29.631	54.996	79.589	-	-
REINSCH		1.656	1.264	1.372	1.651	2.171	2.191	2.267	2.437

Tableau n° 6 - $v = 0.050$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.374	1.240	1.247	1.237	1.316	1.428	1.321	1.249
MALLOWS		4.340	10.466	13.635	25.898	42.519	57.369	97.597	-
REINSCH		1.402	1.533	2.308	2.065	1.498	1.410	1.384	1.266

Tableau n° 7 - $v = 0.010$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		2.284	2.187	1.263	1.285	1.257	1.374	1.251	1.252
MALLOWS		2.284	4.821	7.901	10.964	22.321	36.058	53.625	55.547
REINSCH		1.265	1.905	1.964	1.397	1.326	1.277	1.759	1.560

Tableau n° 8 - $v = 0.005$

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.501	1.315	1.555	1.256	1.271	1.268	1.237	1.252
MALLOWS		1.501	3.619	5.915	10.614	14.343	24.524	32.284	41.279
REINSCH		1.653	1.639	1.513	1.701	1.524	1.450	1.477	1.522

Paramètre I_j

Tableau n° 9 - v = 0,100

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		2.563	3.043	1.478	2.160	1.526	1.618	1.978	2.892
MALLOWS		-	-	-	-	-	-	-	-
REINSCH		1.562	1.144	2.877	1.244	1.614	1.888	1.523	1.611

Tableau n° 10 - v = 0,050

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		1.090	1.393	1.350	1.381	2.434	3.871	2.581	1.359
MALLOWS		-	-	-	-	-	-	-	-
REINSCH		1.044	1.087	1.784	1.492	1.067	1.067	1.064	1.169

Tableau n° 11 - v = 0,010

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		100.269	-	1.449	1.208	1.326	2.416	1.776	1.718
MALLOWS		100.269	-	-	-	-	-	-	-
REINSCH		1.288	1.359	1.332	1.067	1.069	1.143	1.184	1.093

Tableau n° 12 - v = 0,005

METHODE	N	20	40	60	100	150	200	300	400
MDVCG		-	8.694	40.507	1.793	1.449	1.971	1.825	1.574
MALLOWS		-	-	-	-	-	-	-	-
REINSCH		1.443	1.101	1.096	1.172	1.119	1.041	1.045	1.062

Les résultats des tableaux précédents permettent de dire que les méthodes de Reinsch et Validation Croisée sont les meilleures. Mais il faut insister sur le fait que la méthode de Reinsch a été utilisée en donnant l'écart type. Dans la pratique cet écart type n'est pas connu et la seule méthode applicable reste la méthode de Validation Croisée.

On peut remarquer aussi que pour des valeurs de n modérées et v assez grand, la méthode de Reinsch semble être préférable mais, lorsque le nombre de points est grand, où lorsque v est petit, la méthode de Validation Croisée l'emporte.

Il faut remarquer aussi la décroissance des indices avec n , ceci sera montré théoriquement dans le chapitre IV.

4 - LE CAS DES POINTS NON EQUIDISTANTS ET VARIANCES DIFFERENTES -

Dans ce paragraphe on présente quelques exemples d'utilisation de la méthode de Validation Croisée dans le cas où les points ne sont pas équidistants et les variances sont éventuellement différentes.

4.1 - Mise en oeuvre de la méthode -

Comme on l'avait vu dans le chapitre II, le problème est de calculer les valeurs propres de $D^{-1}\Omega$. Or, on avait vu aussi, dans la section 5 de ce chapitre une méthode pour approcher ces valeurs propres en calculant les valeurs propres d'une matrice bande. Ce calcul peut être effectué en $O(n^2)$ opérations en utilisant l'algorithme de réduction de Schwarz (cf. [45]) et QR avec déplacement (cf. [41]).

Pour calculer la fonction spline d'ajustement on utilise une méthode du type Pajua. L'algorithme et les programmes pour ce calcul apparaîtront séparément.

Finalement, pour minimiser $V(\tau)$, on utilise un algorithme de recherche globale (le même que pour le cas des pas équidistants).

Les temps de calcul du paramètre de lissage en utilisant cette méthode sont données ci-dessous. Le temps le plus important étant celui du calcul des valeurs propres, il est évident que si l'on a plusieurs cas à traiter sur la même grille, on aura à faire ce calcul une seule fois et le coût de chaque spline sera inférieur.

Splines Cubiques

n	T.C.V.P.	T.C.P.O.	T.C.F.S.
40	2.9703	0.9348	0.0266
60	6.6031	1.1742	0.0401
80	11.7702	1.5447	0.0560
100	18.1964	1.8627	0.0681

4.2 - Exemples Numériques -

Dans les exemples des pages suivantes, on s'est donné les points :

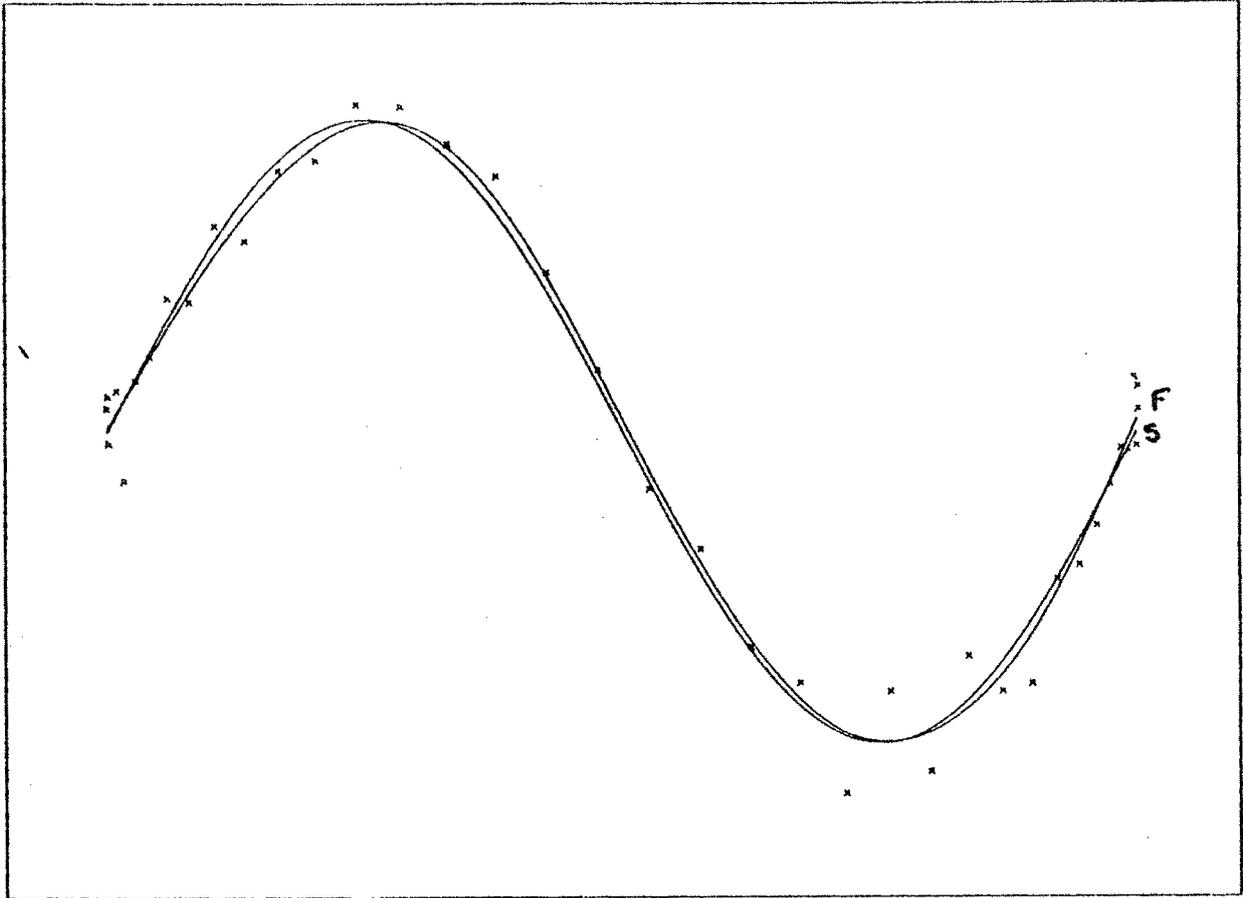
$$(4.1) \quad t_i = \int_0^{i/n} \omega(t) dt$$

avec $\omega(t) = 1 + \cos \pi t$

Pour différentes valeurs de n, on a perturbé une fonction test avec des variables pseudo-aléatoires gaussiennes de même écart type, et l'on a calculé ensuite la spline de lissage de paramètre τ^* choisi par la méthode décrite plus haut. On représente ensuite les données (X) la fonction originale (F) et la spline ainsi obtenue (S). Dans chaque cas on note en bas du dessin, la fonction, le nombre de points et l'écart type.

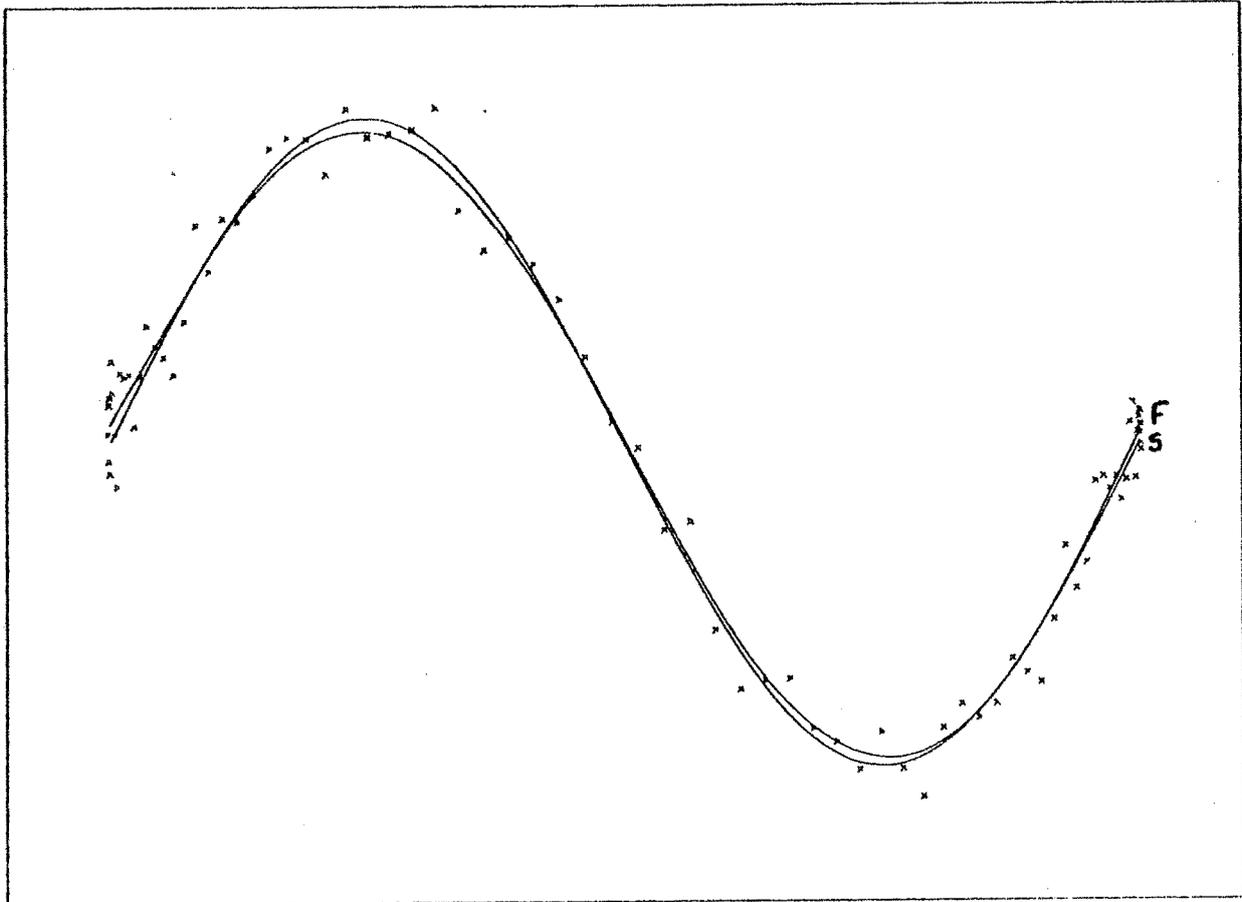
On peut constater que les résultats sont aussi bons que dans le cas des pas égaux. Il est important cependant de remarquer que, bien qu'étant donnée une configuration de points quelconque, l'existence d'une fonction lisse qui prenne ces valeurs soit toujours assurée il faut que le caractère lisse soit "assez petit" pour que la trace soit approchée avec suffisamment de précision.

METHODE DE VALIDATION CROISEE



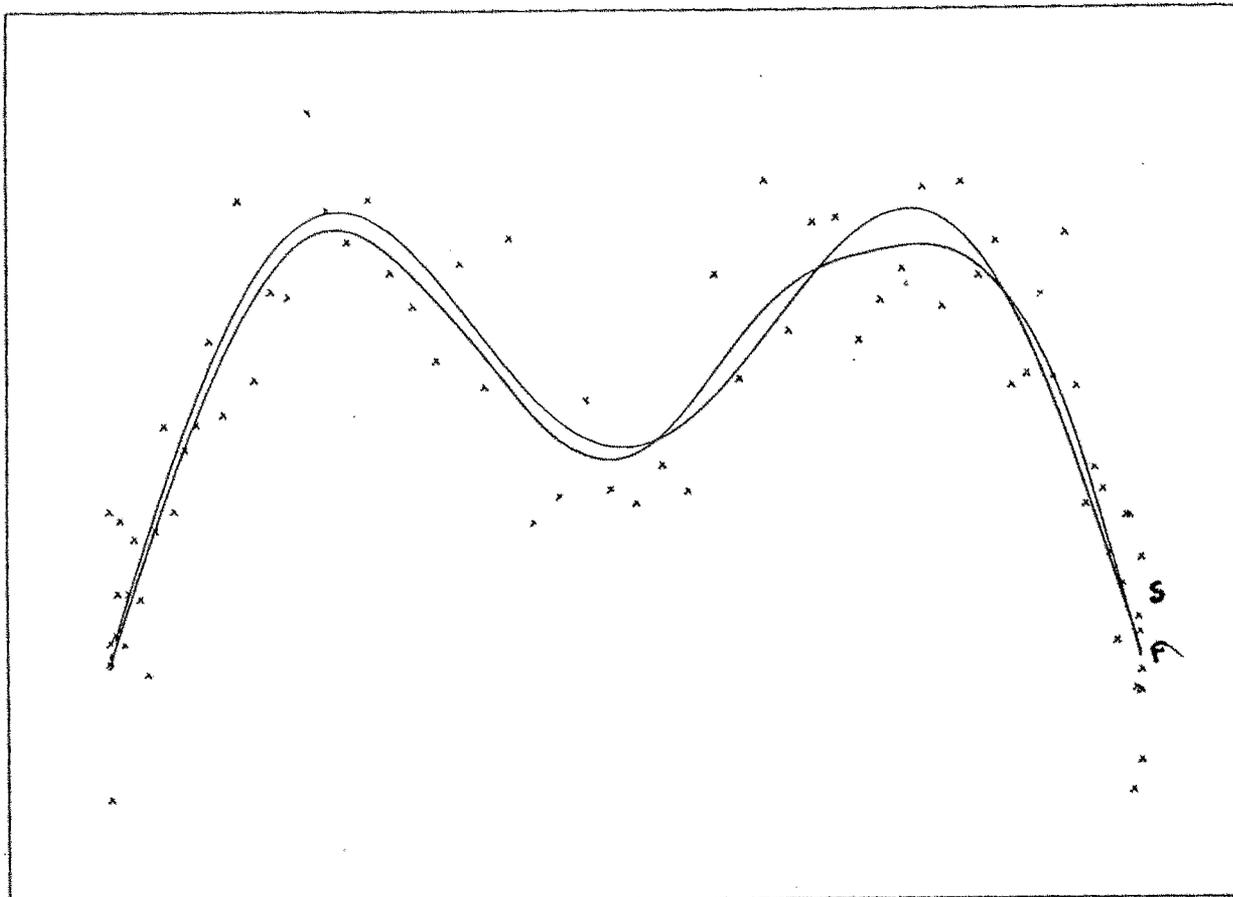
Exemple 1 : 40 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



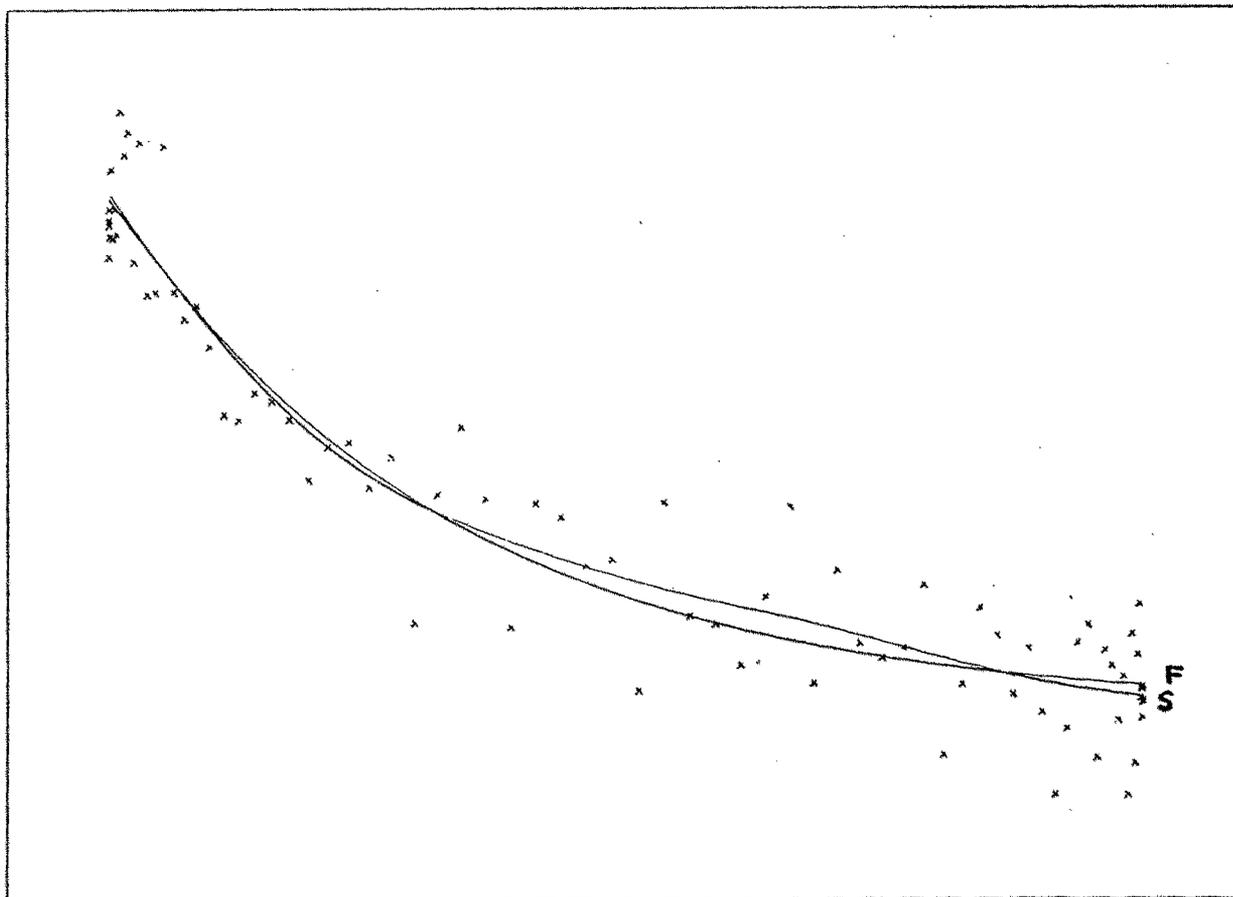
Exemple 1 : 100 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



Exemple 2 : 100 points

METHODE DE VALIDATION CROISEE



Exemple 3 : 100 points

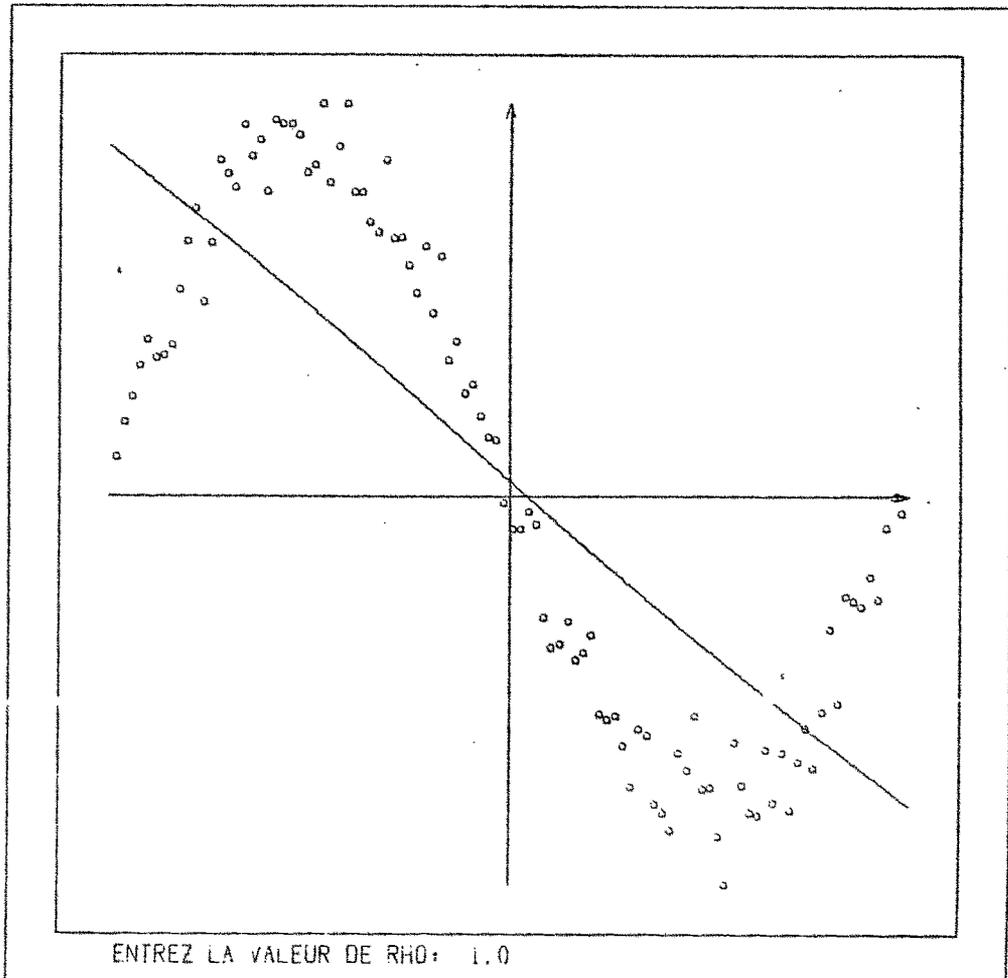
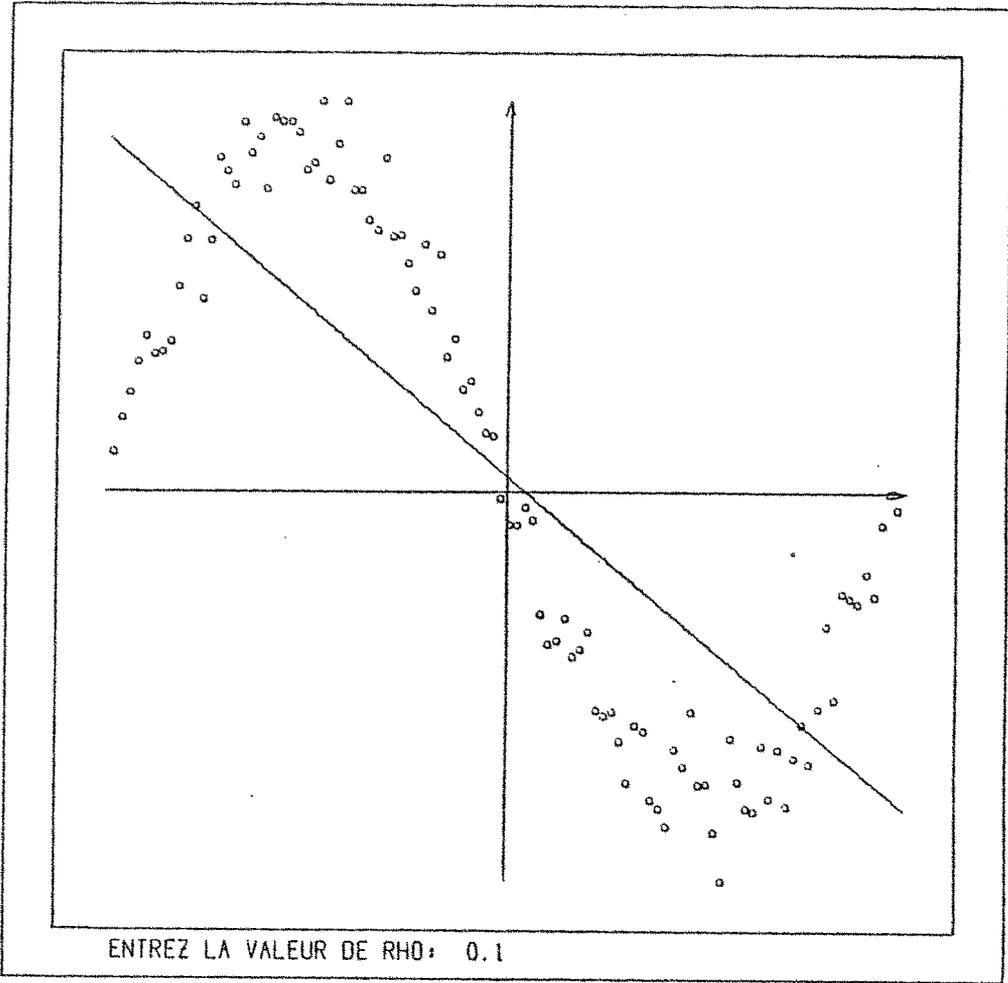
5 - L'ALTERNATIVE GRAPHIQUE -

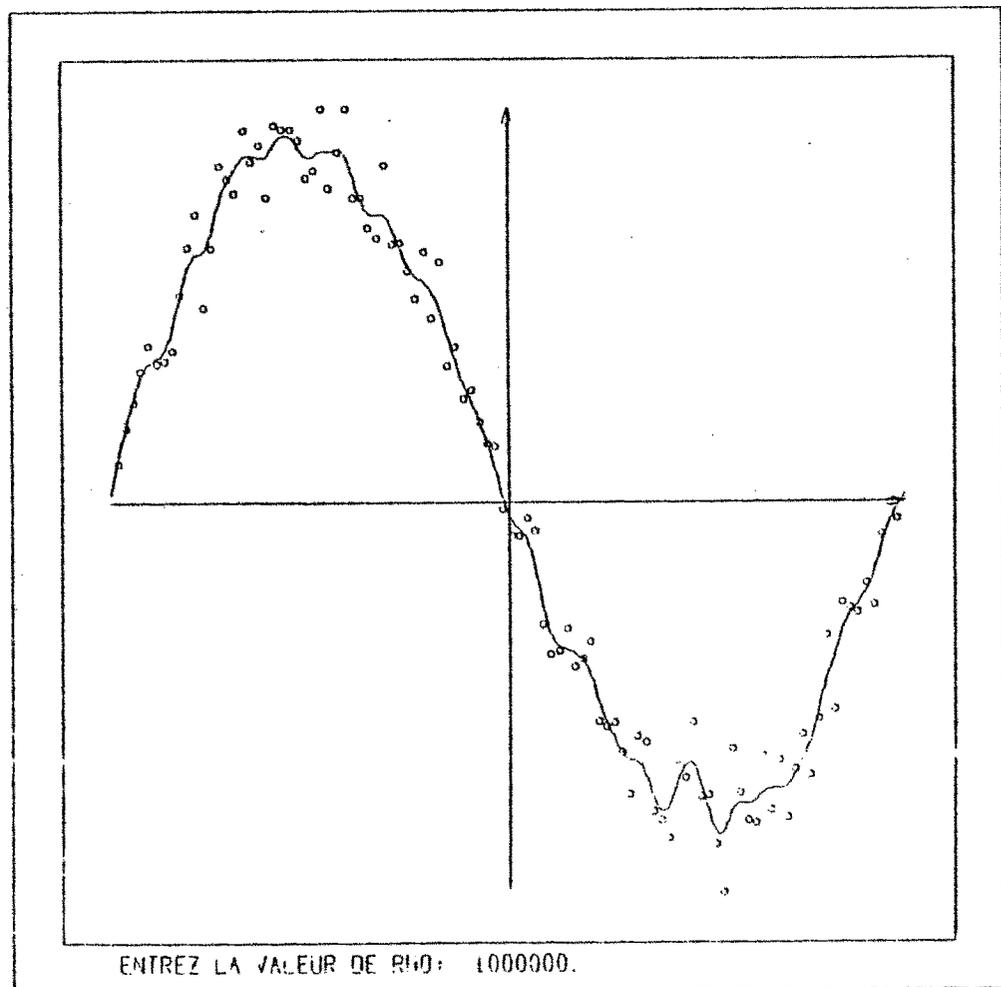
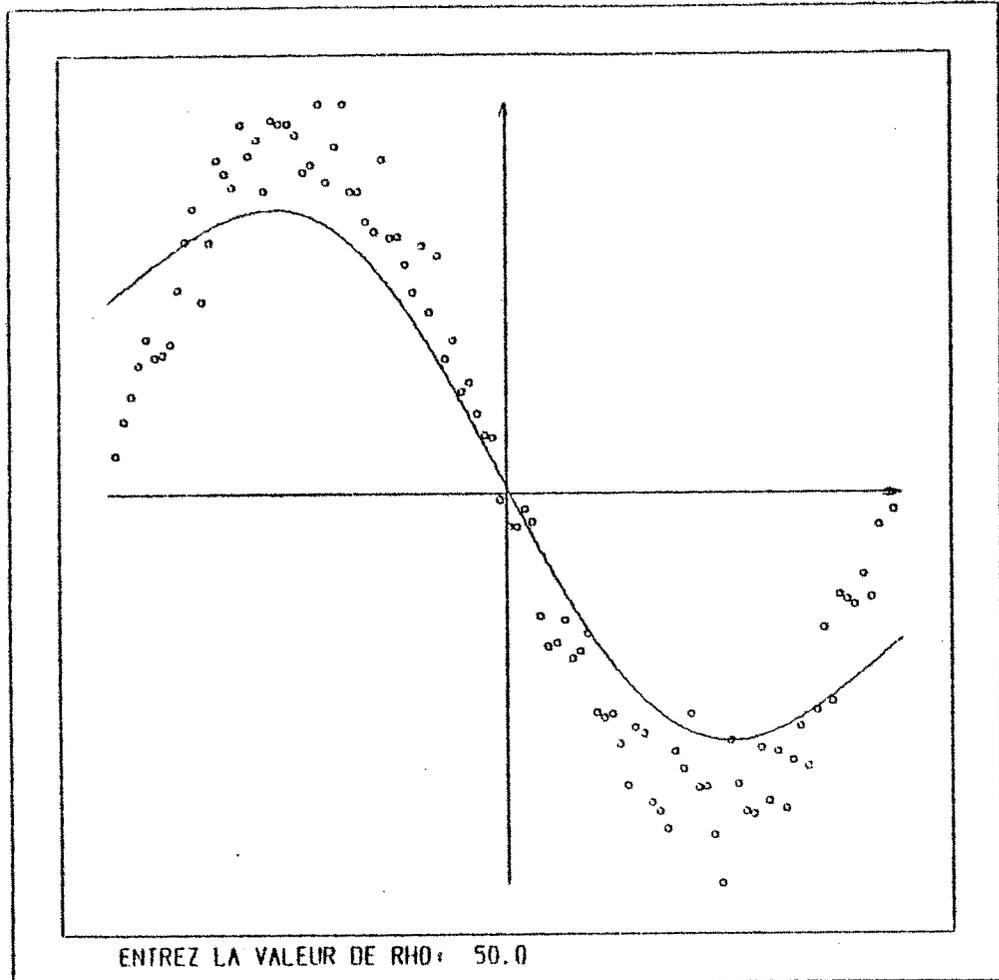
Il existe une autre façon (non automatique) de choisir le paramètre de lissage. Elle consiste à essayer d'une façon interactive, à l'aide d'un écran de visualisation, plusieurs valeurs de ce paramètre et à choisir ensuite le dessin que l'on pense être le plus approprié. Ce choix est fait en général en essayant de trouver la 'limite' entre une spline qui est lisse et celle qui oscille "trop".

Cette manière de choisir le paramètre est spécialement adaptée au cas où l'expérimentateur connaît à priori la forme de ses courbes et peut donc discerner entre deux valeurs de τ avec assez de clarté.

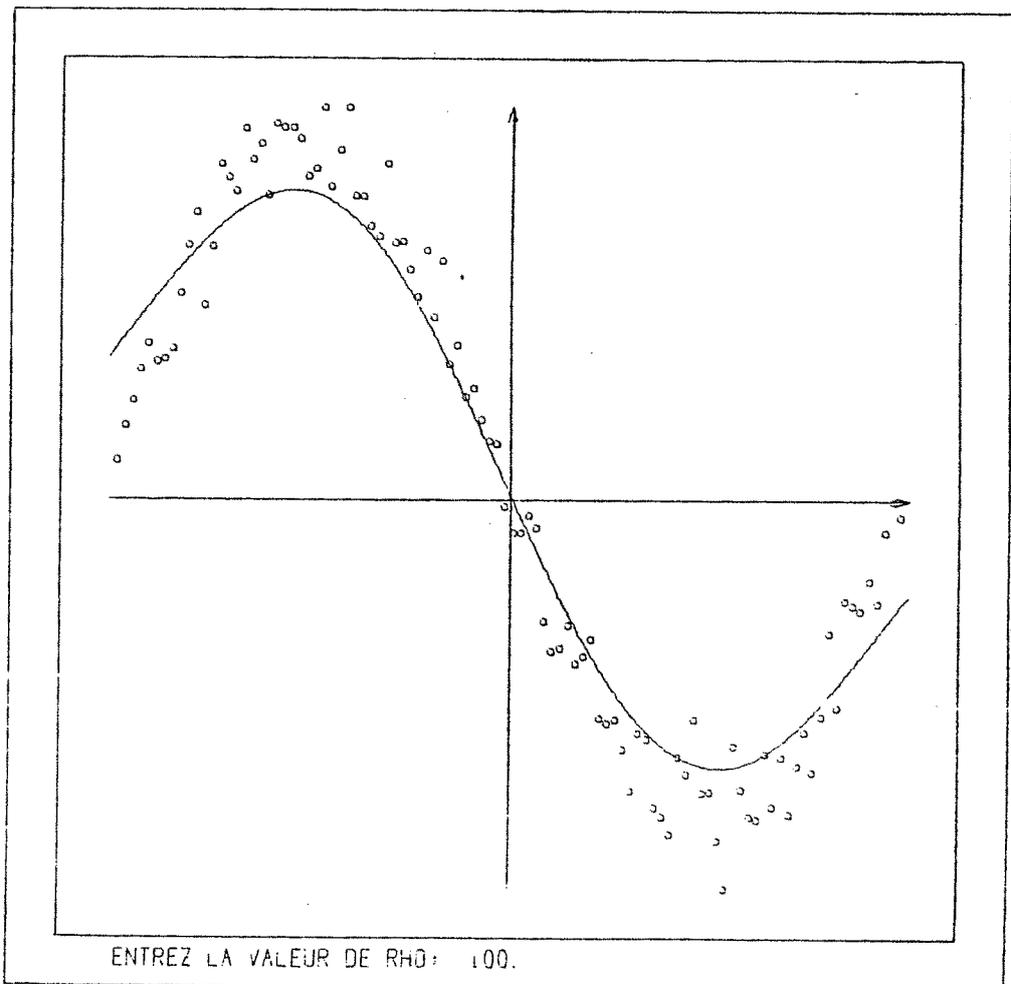
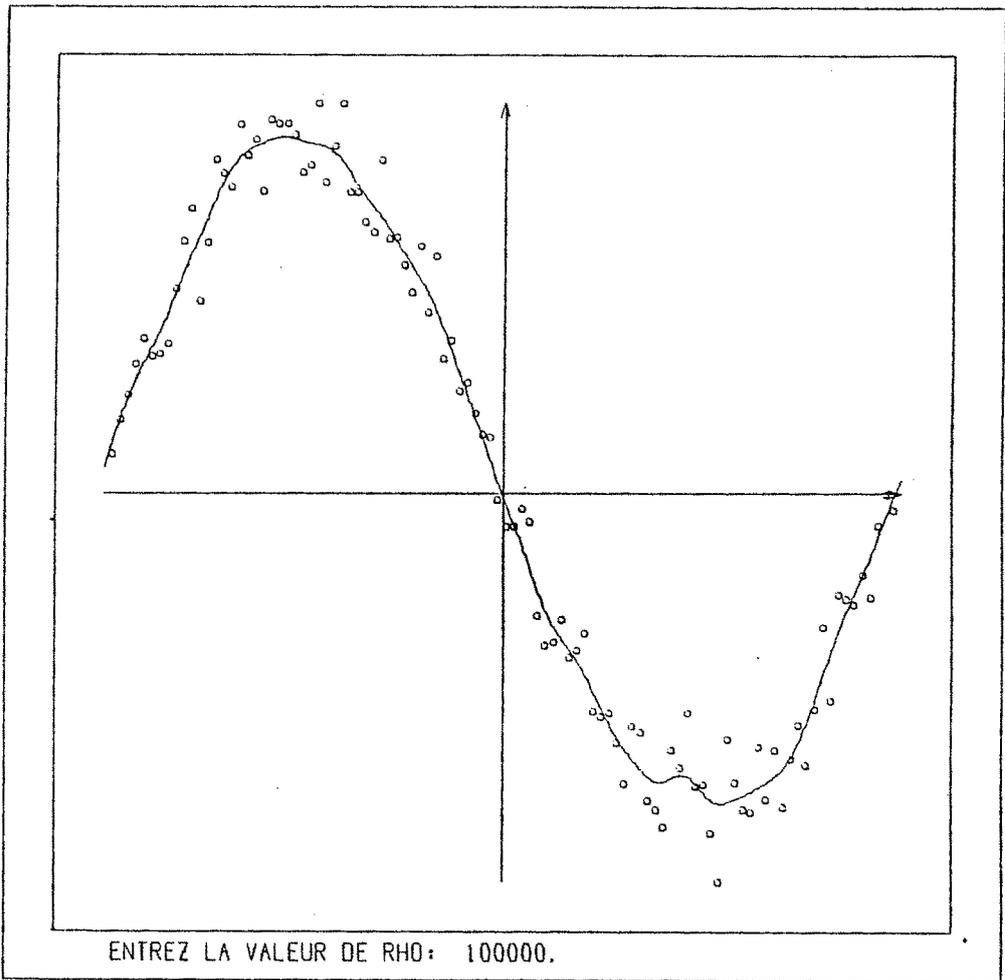
Les inconvénients de cette méthode sont d'une part le fait que c'est très lent et donc impraticable dans le cas où on aurait de nombreux cas à traiter et deuxièmement, le fait que si l'écart type est petit, l'écran ne nous permettra pas de voir les oscillations de la spline.

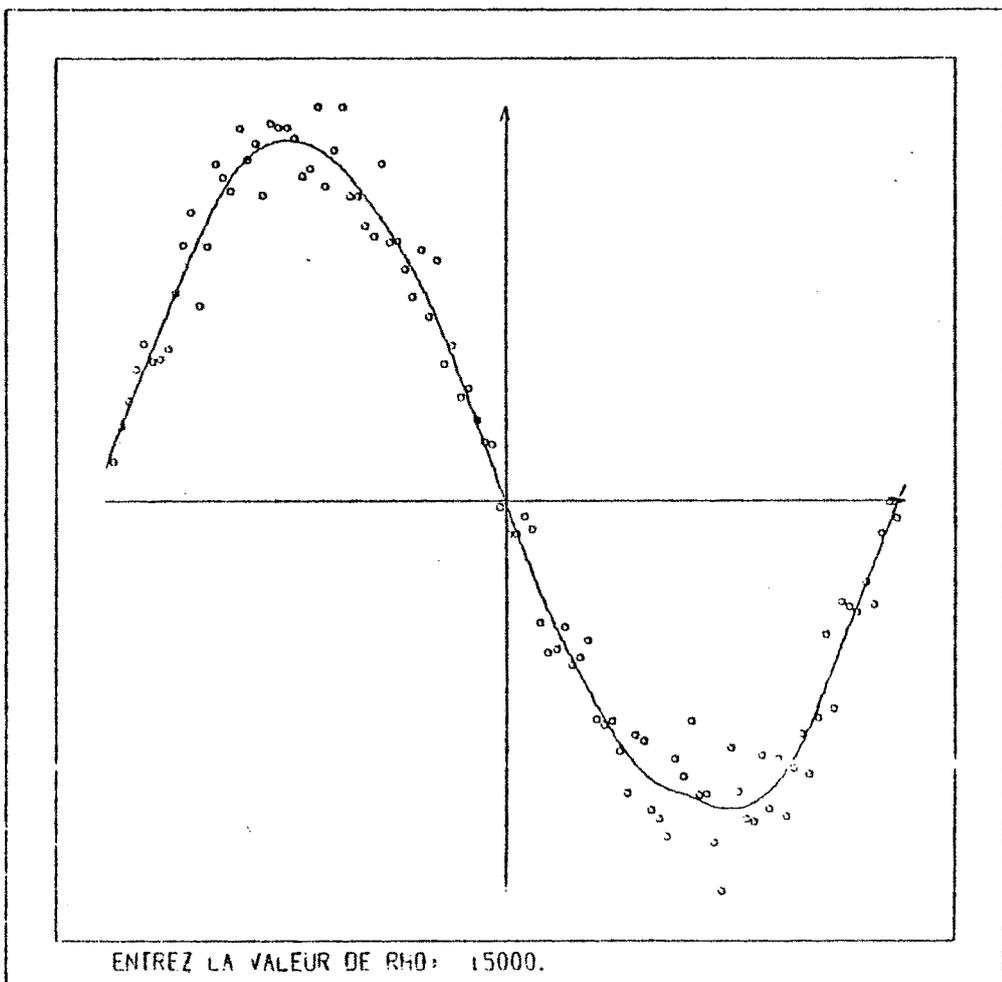
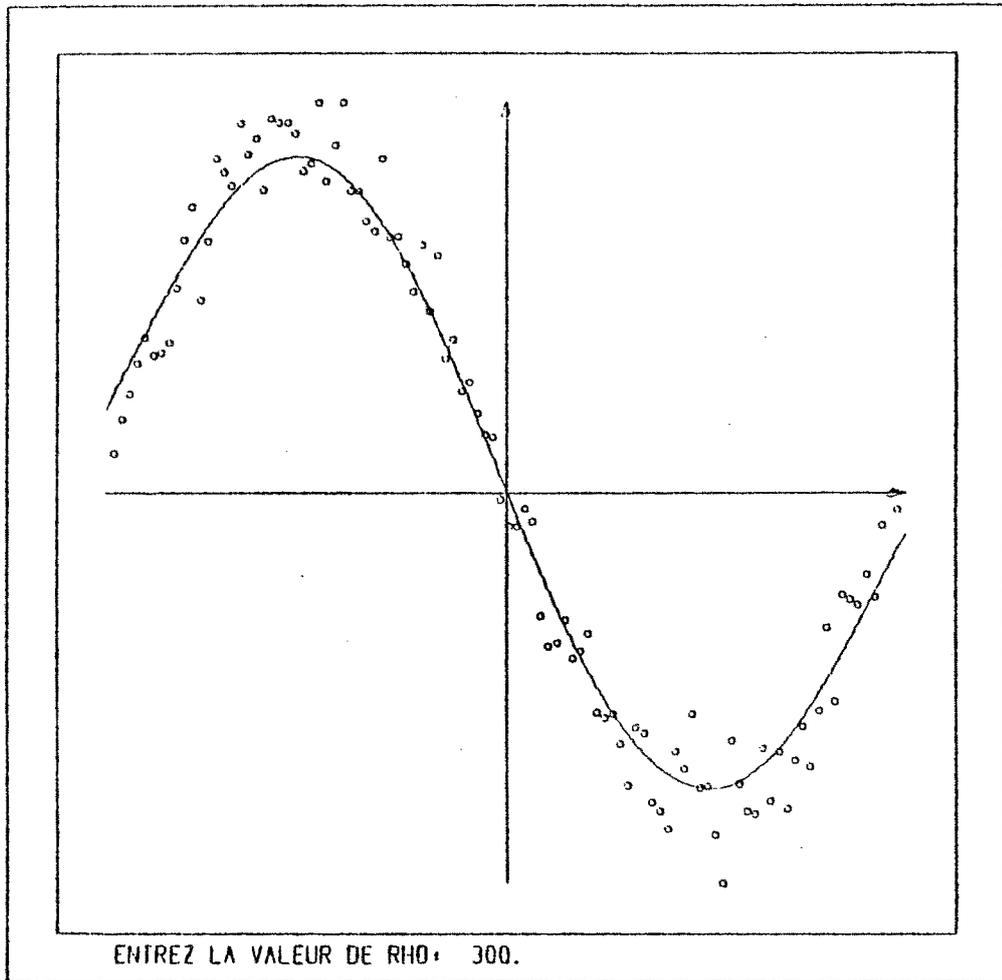
On a programmé cette méthode sur l'écran du C.I.C.G. et l'on donne dans la suite les résultats d'une séance type de travail. Dans chaque dessin on marque les données et la spline obtenue avec le paramètre listé en bas. On obtient ainsi une valeur de 3000. pour le paramètre $(1/n\tau)$ et le paramètre optimal était 2340. Il faut ajouter que le résultat est très bon dans ce cas et que la différence de I_e avec la validation croisée est très faible. (La personne qui a fait le choix ne connaissait pas la fonction sous-jacente).

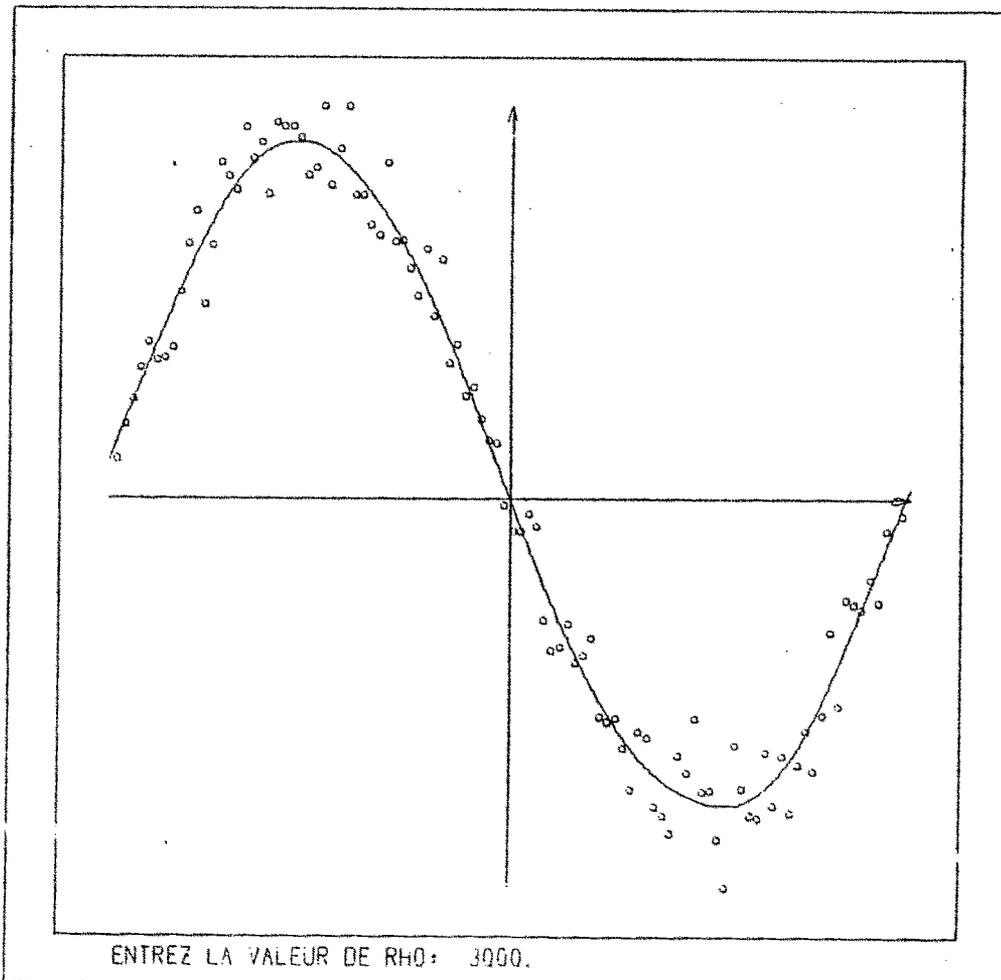
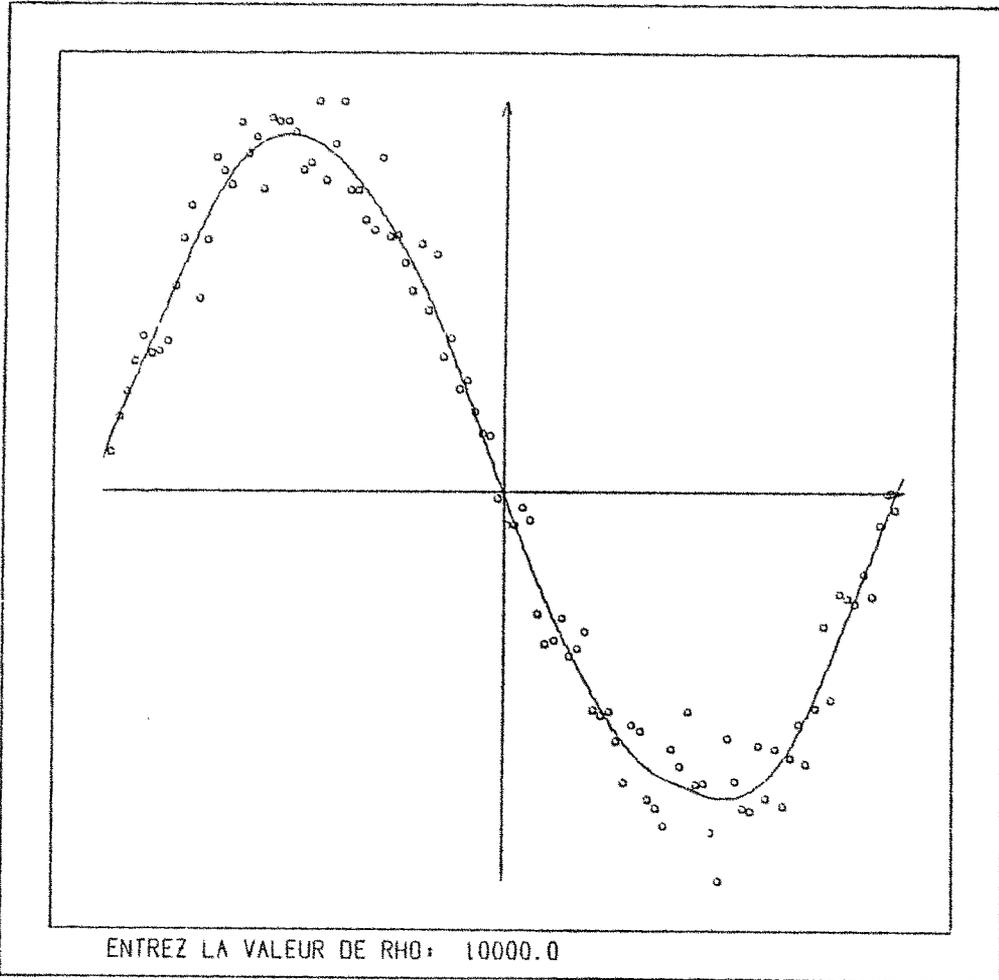




UTRERAS LE 05/01/78 A 16:37:50 DESSI







CHAPITRE IV

OPTIMALITE ASYMPTOTIQUE DE LA METHODE DE

VALIDATION CROISEE

1 - INTRODUCTION -

Dans le chapitre précédent on a pu constater numériquement les avantages de la méthode de Validation Croisée pour choisir le paramètre de lissage. En particulier, on a observé la convergence de la fonction spline ainsi obtenue vers la fonction, lorsque le nombre de points augmente. On a vu aussi que l'inefficacité relative de la méthode, par rapport à trois critères d'optimalité, tend vers 1 lorsque le nombre de points devient grand. Dans ce chapitre, on donnera quelques résultats théoriques sur le comportement asymptotique de la méthode, dans le cas des pas égaux ($t_{i+1} - t_i = h$ $i=1,2,\dots,n-1$) et variances égales ($v_i^2 = v^2$ $i=1,2,\dots,n$), cette hypothèse peut être levée dans presque tous les résultats de ce chapitre, sauf dans la borne qu'on obtiendra pour les valeurs propres, ce qui empêche d'obtenir en général le résultat le plus important de ce chapitre, c'est-à-dire, la convergence vers 1 de l'inefficacité relative. (La définition précise de ces notions sera donnée au paragraphe 2).

Pour apprécier plus clairement la valeur des résultats de ce chapitre, il faut considérer la méthode du point de vue statistique. En effet, le problème de trouver une approximation de f , peut être ramené à celui de trouver une estimation du vecteur des valeurs de f aux points t_1, t_2, \dots, t_n ; en connaissant le vecteur z .

Or, le vecteur z est une réalisation du vecteur aléatoire Z qui a une distribution de moyenne \vec{f} et matrice de covariance $v^2 I$ (I matrice identité $n \times n$). Il est donc très simple de voir que $\hat{y} = z$ est une estimation sans biais de \vec{f} . Mais, sa "variance" est égale à :

$$(1.1) \quad E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - f_i)^2 \right\} = v^2$$

indépendamment de la valeur de n . Il est clair que z n'est pas le meilleur estimateur possible de \vec{f} , et ceci illustre le fait bien connu des statisticiens qu'un estimateur sans biais n'a aucune raison d'être un bon estimateur. En particulier, on sait qu'un petit biais peut diminuer beaucoup la variance. Dans ce contexte, le calcul de la fonction spline d'ajustement de paramètre τ , consiste à considérer l'estimateur suivant :

$$(1.2) \quad \hat{y}(\tau) = A(\tau)z$$

qui aura comme "variance"

$$(1.3) \quad E \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i(\tau) - f_i)^2 \right\} = \sigma^2 E T^2(\tau) \equiv E \text{Var}(\tau)$$

Dans les paragraphes qui suivent, on démontrera que si τ est choisi comme la valeur qui minimise $EV(\tau)$, alors, $E\text{Var}(\tau)$ converge vers zéro lorsque n croît. On démontrera aussi que asymptotiquement, cette valeur de τ se comporte de la même façon que celle qui minimise la variance.

Les résultats de ce chapitre avaient été conjecturés par Craven et Wahba [13] qui avaient donné le schéma de la démonstration, en supposant vrais plusieurs résultats, notamment les résultats du paragraphe 3, le théorème (4.2) et le lemme (2.4).

2 - DEFINITIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES -

Par simplicité on considérera l'intervalle $[0,1]$ et n points uniformément distribués

$$(2.1) \quad t_i^n = \frac{2i-1}{2n} \quad i=1,2,\dots,n$$

(éventuellement, on pourra supprimer l'indice supérieur).

Comme dans les chapitres précédents S_n^q sera l'espace des fonctions spline d'ordre q basées sur ces noeuds et Ω_n^q la matrice associée à la forme quadratique définissant les splines.

Notons encore :

$$(2.2) \quad z_i^n = f(t_i^n) + \epsilon_i^n \quad i=1,2,\dots,n$$

Et supposons que les $\{\epsilon_i^n\}_{i=1,\dots,n}$ puissent être considérés comme des variables aléatoires telles que :

$$(2.3) \quad E(\epsilon_i^n) = 0 \quad i=1,\dots,n$$

$$(2.4) \quad E\{(\epsilon_i^n)^2\} = v^2 \quad i=1,\dots,n$$

$$(2.5) \quad E\{\epsilon_i^n \epsilon_j^n\} = 0 \quad i \neq j$$

On supposera aussi que $f \in C^q[0,1]$. Enfin, il sera utile d'ajouter un indice n à toutes les matrices et expressions du chapitre 2, en particulier, on aura :

$$(2.6) \quad \Lambda_n(\tau) = (I + n\tau\Omega_n)^{-1}$$

$$(2.7) \quad V_n(\tau) = \frac{\frac{1}{n} \|\vec{z}^n - \Lambda_n(\tau) \vec{z}^n\|^2}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(\Lambda_n(\tau)))^2}$$

$$(2.8) \quad \text{Var}_n(\tau) = \frac{1}{n} \|\vec{f} - \Lambda_n(\tau) \vec{z}^n\|^2$$

Et $\sigma_{n,\tau}$ désignera la fonction spline d'ajustement d'ordre q et de paramètre τ basée sur n points.

Notons τ_n^* la valeur qui minimise $EV_n(\tau)$ et $\hat{\tau}_n$ la valeur qui minimise $E\text{Var}_n(\tau)$.

On avait :

$$\begin{aligned} \text{Var}_n(\tau) &= \frac{1}{n} \|\vec{f} - \Lambda_n(\tau) (\vec{f} + \epsilon)\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \{ \|\vec{f} - \Lambda_n(\tau) \vec{f}\|^2 + \|\Lambda_n(\tau) \vec{\epsilon}\|^2 - 2 \langle \vec{f} - \Lambda_n(\tau) \vec{f}, \Lambda_n(\tau) \vec{\epsilon} \rangle \} \end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux côtés, on aura :

$$(2.9) \quad \text{EVar}_n(\tau) = \frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2 + \frac{v^2}{n} \text{Tr}(A_n^2(\tau))$$

puisque l'indépendance des ε_i nous assure que l'autre terme est nul.

Introduisons encore quelques notations (essentiellement les mêmes que celles utilisées par Craven et Wahba [13]).

$$(2.10) \quad b_n^2(\tau) = \frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2$$

$$(2.11) \quad \mu_{2,n}(\tau) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n^2(\tau))$$

On a donc :

$$(2.12) \quad \text{EVar}_n(\tau) = b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau)$$

Calculons maintenant $\text{EV}_n(\tau)$. On a :

$$\begin{aligned} V_n(\tau) &= \frac{\frac{1}{n} \|\vec{f} + \vec{\varepsilon} - A_n(\tau) (\vec{f} + \vec{\varepsilon})\|^2}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau)))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f} + \vec{\varepsilon} - A_n(\tau) \vec{\varepsilon}\|^2}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau)))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n} (\|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2 + \|\vec{\varepsilon}\|^2 + \|A_n(\tau) \vec{\varepsilon}\|^2 + 2 \langle \vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}, \vec{\varepsilon} \rangle}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau)))^2} \\ &\quad - \frac{2 \langle \vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}, A_n(\tau) \vec{\varepsilon} \rangle - 2 \langle \vec{\varepsilon}, A_n(\tau) \vec{\varepsilon} \rangle}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau)))^2} \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour l'espérance :

$$(2.13) \quad EV_n(\tau) = \frac{\frac{1}{n} \{ \| \vec{f} - A_n(\tau) f \|^2 + nv^2 + v^2 \text{Tr}(A_n^2(\tau)) - 2v^2 \text{Tr}(A_n(\tau)) \}}{\left(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau))\right)^2}$$

Notons aussi :

$$(2.14) \quad \mu_{1,n}(\tau) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau))$$

Avec cette notation et (2.10), (2.11), l'expression (2.13) devient :

$$(2.15) \quad EV_n(\tau) = \frac{b_n^2(\tau) + v^2(1 - 2\mu_{1,n}(\tau) + \mu_{2,n}(\tau))}{(1 - \mu_{1,n}(\tau))^2}$$

Dans tout ce qui suit, on supposera que f n'est pas un polynôme de degré $q-1$. Dans ce cas, le théorème principal de ce chapitre est trivial comme on verra plus loin.

Démontrons d'abord deux inégalités concernant $EV_n(\tau)$ et $EVar_n(\tau)$.

Lemme 2.1 - Pour tout $\tau > 0$, on a :

$$(2.16) \quad \frac{|EVar_n(\tau) + v^2 - EV_n(\tau)|}{EVar_n(\tau)} < h_n(\tau)$$

avec

$$(2.17) \quad h_n(\tau) = \mu_{1,n}^2(\tau) + 2\mu_{1,n}(\tau) + \frac{\mu_{1,n}^2(\tau)}{\mu_{2,n}(\tau)} \frac{1}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2}$$

Démonstration

$$EVar_n(\tau) + v^2 - EV_n(\tau) = b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau) + v^2 - \frac{b_n^2(\tau) + v^2(1 - 2\mu_{1,n}(\tau) + \mu_{2,n}(\tau))}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau) + v^2 - \frac{b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau) + v^2 - 2v^2 \mu_{1,n}(\tau)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2} \\
 &= \left(b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau) \right) \left[1 - \frac{1}{(1 - \mu_{1,n}(\tau))^2} \right] + \\
 &\quad + \frac{v^2 (1 - \mu_{1,n}(\tau))^2 - v^2 (1 - 2\mu_{1,n}(\tau))}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2} \\
 &= \text{EVar}_n(\tau) \left[1 - \frac{1}{(1 - \mu_{1,n}(\tau))^2} \right] + \frac{v^2 \mu_{1,n}^2(\tau)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{|\text{EVar}_n(\tau) + v^2 - \text{EV}_n(\tau)|}{\text{EVar}_n(\tau)} &= \left| 1 - \frac{1}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2} + \frac{v^2}{b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau)} \frac{\mu_{1,n}^2(\tau)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2} \right| \\
 &= \left| \frac{\mu_{1,n}^2(\tau) - 2\mu_{1,n}(\tau)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2} + \frac{v^2 \mu_{2,n}(\tau)}{b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau)} \cdot \frac{\mu_{1,n}^2(\tau)}{\mu_{2,n}(\tau) [1 - \mu_{1,n}(\tau)]} \right| \\
 &\leq \left[2\mu_{1,n}(\tau) + \mu_{1,n}^2(\tau) + \frac{\mu_{1,n}^2(\tau)}{\mu_{2,n}(\tau)} \right] \frac{1}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2}
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Définissons maintenant l'inefficacité par rapport à $\text{EVar}_n(\hat{\tau}_n)$.

Définition 2.1 - Si $\hat{\tau}_n$ est la valeur qui minimise $\text{EVar}_n(\tau)$ et τ_n^* est celle qui minimise $\text{EV}_n(\tau)$, on définit l'inefficacité relative de τ_n^* par :

$$(2.18) \quad I_n(\tau_n^*) = \frac{\text{EVar}_n(\tau_n^*)}{\text{EVar}_n(\hat{\tau}_n)}$$

Le lemme suivant nous donne une inégalité pour l'inefficacité en termes de h_n .

Lemme 2.2 - L'inégalité suivante est vérifiée si $h_n(\tau_n^*) < 1$

$$(2.19) \quad I_n(\tau_n^*) = \frac{\text{EVar}_n(\tau_n^*)}{\text{EVar}_n(\hat{\tau}_n)} \leq \frac{1+h_n(\hat{\tau}_n)}{1-h_n(\tau_n^*)}$$

Démonstration - L'inégalité du lemme 2.1 peut s'écrire :

$$\text{EVar}_n(\tau) (1-h_n(\tau)) \leq \text{EV}_n(\tau) - v^2 \leq \text{EVar}_n(\tau) (1+h_n(\tau))$$

En particulier, on aura :

$$\text{EV}_n(\hat{\tau}_n) - v^2 \leq \text{EVar}_n(\hat{\tau}_n) (1+h_n(\hat{\tau}_n))$$

mais

$$\text{EV}_n(\tau_n^*) \leq \text{EV}_n(\tau) \quad \text{pour tout } \tau > 0$$

alors :

$$(2.20) \quad \text{EV}_n(\tau_n^*) - v^2 \leq \text{EV}_n(\hat{\tau}_n) - v^2 \leq \text{EVar}_n(\hat{\tau}_n) (1+h_n(\hat{\tau}_n))$$

D'autre part :

$$\text{EVar}_n(\tau_n^*) (1-h_n(\tau_n^*)) \leq \text{EV}_n(\tau_n^*) - v^2$$

d'où

$$(2.21) \quad \text{EVar}_n(\tau_n^*) (1-h_n(\tau_n^*)) \leq \text{EVar}_n(\hat{\tau}_n) (1+h_n(\hat{\tau}_n))$$

$$I_n(\tau_n^*) = \frac{\text{EVar}_n(\tau_n^*)}{\text{EVar}_n(\hat{\tau}_n)} \leq \frac{1+h_n(\hat{\tau}_n)}{1-h_n(\tau_n^*)}$$

C.Q.F.D.

Dorénavant on s'efforcera de montrer que $h_n(\tau_n^*)$ et $h_n(\hat{\tau}_n)$ convergent vers zéro lorsque n tend vers l'infini ; pour n grand, on aura forcément donc l'inégalité du lemme 2.2.

Les deux lemmes qui suivent permettent de connaître le comportement de $b_n^2(\tau)$ lorsque n croît. Ceci est le premier pas vers la connaissance du comportement de $h_n(\tau)$.

Lemme 2.3 - Si $f \in H^q[0,1]$, alors :

$$b_n^2(\tau) \leq \tau \int_0^1 [f^{(q)}(t)]^2 dt \quad \text{pour tout } \tau > 0$$

Démonstration - On a :

$$b_n^2(\tau) = \frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2$$

et on sait que $A_n(\tau) \vec{f}$ est le vecteur des valeurs aux noeuds de la fonction $f_{n,\tau}$ qui est solution du problème de minimisation suivant :

$$\text{Min}_{g \in H^q[0,1]} \left\{ \tau \int_0^1 [g^{(q)}(t)]^2 dt + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(t_i) - f(t_i))^2 \right\}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f_{n,\lambda}(t_i))^2 + \tau \int_0^1 [f_{n,\tau}^{(q)}(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2 + \tau \int_0^1 (f_{n,\tau}^{(q)})^2 dt \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(t_i) - f(t_i))^2 + \tau \int_0^1 (g^{(q)}(t))^2 dt \quad \forall g \in H^q[0,1] \end{aligned}$$

en particulier pour $g = f$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2 &\leq \frac{1}{n} \|\vec{f} - A_n(\tau) \vec{f}\|^2 + \tau \int_0^1 (f_{n,\tau}^{(q)}(t))^2 dt \\ &\leq \tau \int_0^1 [f^{(q)}(t)]^2 dt \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Ce lemme nous dit que si τ_n tend vers zéro, alors $b_n^2(\tau_n)$ tend vers zéro. Reste à connaître le comportement de τ_n lorsque $b_n^2(\tau_n)$ tend vers zéro.

Lemme 2.4 - si $\tau_n \geq \theta > 0$ pour tout n , alors, il existe un $\delta > 0$ et un $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$b_n^2(\tau_n) \geq \delta \quad \forall n \geq N$$

Démonstration

a) - Montrons que $\tau_n \geq \theta$ entraîne $b_n^2(\tau_n) \geq b_n^2(\theta)$.

En effet, si l'on note $\vec{f} = Q_n^T \vec{f}$ où $Q_n^T \Omega_n Q_n = \Lambda_n$ avec Λ_n matrice diagonale, on voit que :

$$\begin{aligned} b_n^2(\alpha) &= \frac{1}{n} | \vec{f} - \Lambda_n(\alpha) \vec{f} |^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{in}^2 \frac{\lambda_{in}^2 n^2 \alpha^2}{(1 + \lambda_{in} n \alpha)^2} \end{aligned}$$

Etant donné que $\lambda_{in} \geq 0 \quad i=1, \dots, n$ on a que $b_n^2(\alpha)$ est une fonction croissante de α .

b) - On a vu (cf. chapitre 2) que $f_{n,\theta} = R_n(\theta) f$ converge vers $f_\theta = R(\theta) f$ dans $l^q[0, 1]$.

De plus, étant donné que f n'est pas un polynôme de degré $q-1$, on aura que $f_\theta \neq f$; en effet, si l'on prend :

$$g(t) = \frac{\int_0^1 f^2(t) dt}{\int_0^1 f^2(t) dt + \theta \int_0^1 [f^{(q)}(t)]^2 dt} \cdot f(t) \neq f(t)$$

on obtient :

$$\theta \int_0^1 [g^{(q)}(t)]^2 dt = \frac{[\int_0^1 f^2(\xi) d\xi]^2}{[\int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \theta \int_0^1 (f^{(q)}(\xi))^2 d\xi]^2} \cdot \theta \cdot \int_0^1 [f^{(q)}(t)]^2 dt$$

$$\int_0^1 [g(t) - f(t)]^2 dt = \frac{\theta^2 \left[\int_0^1 (f^{(q)}(t))^2 dt \right]^2}{\left[\int_0^1 (f^2(\xi)) d\xi + \theta \int_0^1 (f^{(q)}(\xi))^2 d\xi \right]^2} \cdot \int_0^1 f^2(t) dt$$

d'où :

$$\begin{aligned} \theta \int_0^1 (g^{(q)}(t))^2 dt + \int_0^1 (g(t) - f(t))^2 dt &= \frac{\left[\int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \theta \int_0^1 (f^{(q)}(\xi))^2 d\xi \right]}{\left[\int_0^1 (f^2(\xi)) d\xi + \theta \int_0^1 (f^{(q)}(\xi))^2 d\xi \right]^2} \cdot \\ &\quad \theta \int_0^1 [f^{(q)}(t)]^2 dt \cdot \int_0^1 f^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{\int_0^1 f^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 f^2(\xi) d\xi + \theta \int_0^1 (f^{(q)}(\xi))^2 d\xi} \cdot \theta \int_0^1 (f^{(q)}(t))^2 dt \\ &< \theta \int_0^1 (f^{(q)}(t))^2 dt \end{aligned}$$

d'où le fait que $f_\theta \neq f$.

On a donc : $f_{n,\theta} \xrightarrow{H^q[0,1]} f_\theta \neq f$

$$\text{or, } b_n^2(\theta) = \frac{1}{n} \|\vec{f} - \vec{f}_{n,\theta}\|^2 = \int_0^1 (f - f_{n,\theta})^2(\xi) d\xi + \frac{C}{n^2} \|f - f_{n,\theta}\|_{H^q[0,1]}$$

d'où :

$$b_n^2(\theta) \longrightarrow \int_0^1 (f - f_\theta)^2(\xi) d\xi > 0$$

Il suffit de prendre $\delta = \frac{1}{2} \int_0^1 (f - f_\theta)^2(\xi) d\xi > 0$ et l'inégalité sera satisfaite pour $n \geq N$.

C.Q.F.D.

Pour étudier le comportement de $\mu_{1,n}$; $\mu_{2,n}$ il nous faudra d'abord connaître le comportement des valeurs propres de Ω_n d'une façon plus précise, ceci est le but du paragraphe suivant.

3 - UNE INEGALITE IMPORTANTE -

En vue de l'obtention de bornes pour les valeurs propres λ_{in} de Ω_n , il faudra d'abord trouver un problème matriciel de valeurs propres équivalent au problème de trouver les valeurs propres de n .

Soit $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma \in S_n$ telle que :

$$(3.1) \quad \sigma(t_i) = X_i \quad i=1,2,\dots,n$$

Dénotons :

$$\beta_i = \sigma^{(2q-2)}(t_i) \quad i=1,2,\dots,n$$

$$S_i = (-1)^q [\sigma^{(2q-1)}(t_i^+) - \sigma^{(2q-1)}(t_i^-)]$$

D'après la théorie des fonctions spline (cf. [1], [30], [35], etc...) on a les relations suivantes :

$$(3.2) \quad \vec{s} = \Omega_n \vec{X}$$

$$(3.3) \quad s_j = (-1)^q \frac{\beta_{j+1} - 2\beta_j + \beta_{j-1}}{h} \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\beta_\ell = 0 \quad \text{si} \quad \ell \notin \{2,3,\dots,n-1\}$$

Notons Δ l'opérateur de différence progressive, c'est-à-dire :

$$(3.4) \quad \Delta X_j = X_{j+1} - X_j$$

et σ l'opérateur d'incrémentation, c'est-à-dire :

$$(3.5) \quad \sigma X_j = X_{j+1}$$

Avec ces notations, on peut énoncer le résultat suivant, (pour la démonstration cf. [1]) :

Lemme 3.1 - Soient ϕ_k^m $k = 0, 1, \dots, m-1$ $m=1, 2, \dots$
 les constantes définies par les relations suivantes :

$$\phi_0^1 = 1$$

$$\phi_0^2 = 1 \quad \phi_1^2 = 1$$

$$\phi_k^m = (k+1) \phi_k^{m-1} + (m-k) \phi_{k-1}^{m-1} \quad k=1, 2, \dots, m-2$$

$$\phi_0^m = \phi_{m-1}^m = 1$$

Alors, les coefficients β_j $j=1, \dots, n$ satisfont au système d'équations suivant :

$$(3.7) \quad \frac{(\mathcal{A}^{-1}\Delta^2)^{q-1}}{h^{2q-2}} X_j = \frac{1}{(2q-1)!} \sum_{k=-(q-1)}^{q-1} \phi_{k+q-1}^{(2q-1)} \beta_{j+k} \quad j=2, \dots, n-1$$

Avec ce résultat et les équations (3.2), (3.3) on obtient pour le problème de valeurs propres :

$$(3.8) \quad \Omega_n \vec{X} = \lambda \vec{X}$$

soit $\vec{s} = \lambda \vec{X}$

$$\text{d'où : } (-1)^q \frac{\mathcal{A}^{-1}\Delta^2}{h} \cdot \beta_j = \lambda X_j \quad j=1, 2, \dots, n$$

Si l'on applique des deux côtés l'opérateur $(\mathcal{A}^{-1}\Delta^2)^{q-1}$ et l'on divise par h^{2q-2} on obtient :

$$(3.9) \quad (-1)^q \frac{(\mathcal{A}^{-1}\Delta^2)^q}{h^{2q-1}} \beta_j = \lambda \frac{(\mathcal{A}^{-1}\Delta^2)^{q-1}}{h^{2q-2}} X_j$$

$$= \lambda \frac{1}{(2q-1)!} \sum_{k=-(q-1)}^{q-1} \phi_{k+q-1}^{(2q-1)} \beta_{j+k} \quad j=2, \dots, n-1$$

et en divisant par h , ce problème devient :

$$(3.10) \quad (-1)^q \frac{(\lambda^{-1} \Delta^2)^q}{h^{2q}} \beta_j = \frac{\lambda}{h} \cdot \frac{1}{(2q-1)!} \sum_{k=-(q-1)}^{q-1} \phi_{k+q-1}^{(2q-1)} \beta_{j+k} \quad j=2, \dots, n-1$$

Il est intéressant de remarquer que chaque valeur propre du problème (3.10) est valeur propre du problème (3.8), mais la réciproque n'est pas vraie pour les deux premières valeurs propres de Ω_n (toutes les deux nulles puisque $q \geq 2$).

Avant d'écrire le problème sous forme matricielle, il faut étudier un peu le comportement des constantes ϕ_k^m intervenant dans cette formulation. Celui-ci est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.2 - Pour tout $m \geq 1$ on a :

$$(3.11) \quad (i) \quad \phi_k^m = \phi_{m-1-k}^m \quad k=0, 1, \dots, m-1$$

$$(3.12) \quad (ii) \quad \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k^m = m!$$

Démonstration

(i) On procède par récurrence sur m .

$$\text{Pour } m = 1 \quad \phi_0^1 = 1$$

$$m = 2 \quad \phi_0^2 = \phi_1^2 = 1$$

On voit donc que (i) est vérifiée pour $m = 1, 2$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour m et démontrons qu'elle est encore vérifiée pour $m+1$. On a :

$$(3.13) \quad \phi_j^{m+1} = (j+1) \phi_j^m + (m+1-j) \phi_{j-1}^m$$

ceci à cause de la définition (3.6). Utilisons maintenant l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$\phi_j^m = \phi_{m-1-j}^m$$

$$\phi_{j-1}^m = \phi_{m-1-(j-1)}^m = \phi_{m-j}^m$$

$$(3.14) \quad \phi_j^{m+1} = (j+1) \phi_{m-1-j}^m + (m+1-j) \phi_{m-j}^m$$

Utilisons encore la relation de récurrence (3.6) pour calculer ϕ_{m-j}^{m+1} ; on a :

$$\phi_{m-j}^{m+1} = (m-j+1) \phi_{m-j}^m + (m+1-(m-j)) \phi_{m-j-1}^m$$

(3.15)

$$\phi_{m-j}^{m+1} = (m-j+1) \phi_{m-j}^m + (j+1) \phi_{m-1-j}^m$$

Les égalités (3.14) et (3.15) entraînent :

$$\phi_j^{m+1} = \phi_{m+1-1-j}^{m+1} \quad j=0,1,\dots,m$$

ce qui complète la démonstration de (i).

(ii) On procède encore par récurrence.

L'égalité est vérifiée pour $m = 1, 2$; en effet :

$$m = 1 \quad \phi_0^1 = 1 = 1!$$

$$m = 2 \quad \phi_0^2 + \phi_1^2 = 2 = 2!$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour m et montrons qu'elle est alors vérifiée pour $m+1$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \phi_k^{m+1} &= \sum_{k=1}^{m-1} \{ (k+1) \phi_k^m + (m+1-k) \phi_{k-1}^m \} + 2 \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} (k+1) \phi_k^m + \sum_{k=1}^{m-1} (m+1-k) \phi_{k-1}^m + 2 \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} (k+1) \phi_k^m + \sum_{j=0}^{m-2} (m-j) \phi_j^m + 2 \\
 &= m \phi_{m-1}^m + \cancel{\sum_{k=1}^{m-2} k \phi_k^m} + \sum_{k=1}^{m-2} \phi_k^m + \sum_{j=1}^{m-2} m \phi_j^m - \cancel{\sum_{j=1}^{m-2} j \phi_j^m} \\
 &\qquad\qquad\qquad + m \phi_0^m + 2 \\
 &= m \phi_{m-1}^m + \sum_{k=1}^{m-2} \phi_k^m + \sum_{j=1}^{m-2} m \phi_j^m + m \phi_0^m + 2 \\
 &= m \sum_{j=0}^{m-1} \phi_j^m + \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k^m \\
 &= (m+1) \sum_{j=0}^{m-1} \phi_j^m = (m+1) m! = (m+1)!
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Ecrivons maintenant le problème (3.10) de façon matricielle. Pour cela, notons $\vec{\beta}$ le vecteur de R^{n-2} défini par :

$$\vec{\beta}^T = (\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1})$$

Le problème (3.10) s'écrit donc :

$$(3.16) \quad \frac{1}{h^{2q}} K \vec{\beta} = \frac{\lambda}{\hbar} M \vec{\beta}$$

De plus, M est une matrice de Toeplitz (c'est-à-dire, constante sur la diagonale et sous diagonales).

On peut donc appliquer le résultat suivant :

Lemme 3.3 - Soit M une matrice de Toeplitz d'éléments

$$m_{ij} = a_{i-j} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n-2 \\ 1 \leq j \leq n-2 \end{array}$$

où a_ℓ est une suite telle que : $a_{-\ell} = \bar{a}_\ell$ (\bar{a}_ℓ est le complexe conjugué de a_ℓ).
Et soit $\phi(\theta)$ la fonction définie par :

$$(3.18) \quad \psi(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{ik\theta} \quad \theta \in \mathbf{R}$$

Il faut remarquer que ψ est une fonction réelle à valeurs réelles. On peut considérer alors son sup et inf. Soient :

$$m_\psi = \inf_{\theta \in \mathbf{R}} \psi(\theta)$$

$$M_\psi = \sup_{\theta \in \mathbf{R}} \psi(\theta)$$

Les cas $m_\psi = -\infty$ $M_\psi = +\infty$ ne sont pas exclus. Alors :

$$m_\psi \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_{n-2} \leq M_\psi$$

où $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_{n-2}$ sont les valeurs propres de M ordonnées de façon croissante.

Démonstration - cf. Kac, Murdock et Szëgo [28].

Dans notre cas, la fonction $\psi(\theta)$ devient :

$$(3.19) \quad \psi(\theta) = \phi_{q-1}^{2q-1} + 2 \sum_{j=1}^{q-1} \phi_{q-1+j}^{2q-1} \cos(j\theta) \frac{1}{(2q-1)!}$$

$\psi(\theta)$ est donc un polynôme trigonométrique. Le sup de $\psi(\theta)$ est très simple à bomer, en effet :

$$\text{Sup } \psi(\theta) \leq \phi_{q-1}^{2q-1} + \sum_{j=1}^{q-1} \phi_{q-1+j}^{2q-1} \cdot 1 \frac{1}{(2q-1)!}$$

$$(3.20) \quad \text{Sup}\{\psi(\theta)\} \leq 1$$

Le problème difficile est celui d'étudier si l'inf de $\psi(\theta)$ est positif ou non. Ceci a été fait par Schoenberg (cf.[43]) qui donne le résultat suivant :

Lemme 3.4 - La réciproque du polynôme $\psi(\theta)$ admet un développement en série :

$$\frac{1}{\psi(\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} (2 \sin \frac{\theta}{2})^{2k}$$

qui est convergent pour toutes les valeurs de $\theta(\theta \in \mathbb{R})$ et ses coefficients sont des nombres rationnels positifs.

Démonstration - Cf. Schoenberg [43].

A l'aide de ce résultat, on obtient que :

$$(3.21) \quad m_{\psi} \geq \left[\sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} 2^{2k} \right]^{-1} > 0$$

On a donc démontré les propriétés contenues dans le lemme suivant :

et V est une matrice de la forme :

$$(3.25) \quad V = \begin{bmatrix} \text{q-1} & & & \\ \text{q-1} & \text{diagonal} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \text{q-1} \\ 0 & 0 & & \text{diagonal} & \\ & & & & \text{q-1} \end{bmatrix}$$

De plus, V est symétrique.

Les valeurs propres de \tilde{K} étant connues, on utilisera le lemme suivant pour borner les valeurs propres de K .

Lemme 3.6 - Soit C une matrice symétrique de taille m , et F une matrice symétrique définie positive de taille m . Si $\theta_1, \dots, \theta_m$ sont les valeurs propres du problème :

$$(3.26) \quad Cy = \theta Fy \quad y \in R^m$$

et ξ_1, \dots, ξ_m sont celles du problème :

$$(3.27) \quad (C + uu^T)y = \xi Fy$$

avec $u \in R^m$, alors, les $\xi_i \quad i=1, \dots, m$; séparent les $\theta_i \quad i=1, 2, \dots, m$. C'est-à-dire :

$$(3.28) \quad \theta_1 \leq \xi_1 \leq \theta_2 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \xi_m$$

Démonstration - Cf. Gantmacher [21], Duc-Jacquet [19].

Pour appliquer ce résultat au problème de trouver les valeurs propres de K , il suffit de remarquer que V peut s'écrire :

$$(3.29) \quad V = \sum_{k=1}^{q(q-1)} \delta_k u_k u_k^T, \quad \text{avec } u_k \in \mathbb{R}^{n-2}, \delta_k = \pm 1$$

Il suffit d'appliquer le lemme (3.6) d'une façon répétée pour trouver le résultat suivant :

Lemme 3.7 - Soient ξ_1, \dots, ξ_{n-2} les valeurs propres de K ordonnées par ordre croissant et $\eta_1^q, \dots, \eta_{n-2}^q$ les valeurs propres de \tilde{K} . Alors :

$$(3.30) \quad \eta_{i-(q-1)q}^q \leq \xi_i \leq \eta_{i+q(q-1)}^q, \quad i=q(q-1)+1, \dots, n-2-q(q-1)$$

On va utiliser maintenant tous ces lemmes pour démontrer l'inégalité qui donne le comportement des valeurs propres de Ω_n .

Théorème 3.1 - Soient $\lambda_{in} \quad 1 \leq i \leq n$ les valeurs propres de la matrice Ω_n .

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$; $0 < C_1 < C_2$ telles que :

$$(3.31) \quad C_1 \frac{(i+q)^{2q}}{n} \leq \lambda_{i+q,n} \leq C_2 \frac{(i+q)^{2q}}{n} \quad i=1, \dots, n-q$$

$$\lambda_{1n} = \lambda_{2n} = \dots = \lambda_{qn} = 0$$

Démonstration - On a déjà vu que les valeurs propres $\lambda_{3n}, \dots, \lambda_{nn}$

sont aussi valeurs propres du problème :

$$\frac{1}{h^{2q}} K \vec{\beta} = \frac{\lambda}{h} M \vec{\beta} \quad \vec{\beta} \in \mathbb{R}^{n-2}$$

si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}$ dénotent les valeurs propres de K ordonnées de façon croissante, alors on a :

$$\frac{1}{h^{2q}} \xi_i \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+2} \leq \frac{1}{m_\psi} \frac{1}{h^{2q}} \xi_i \quad 1 \leq i \leq n-2$$

Si l'on utilise maintenant le lemme (3.7), on a :

$$(3.32) \quad \frac{1}{h^{2q}} \eta_{i-(q-1)q}^q \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+2} \leq \frac{1}{m_\psi} \frac{1}{h^{2q}} \eta_{i+q(q-1)}^q$$

$$i = q(q-1)+1, \dots, n-2-(q-1)q$$

Il suffit maintenant de connaître le comportement de :

$$\frac{1}{h^{2q}} \eta_k^q$$

On a :

$$(3.33) \quad \frac{1}{h^{2q}} \eta_k^q = \left[\left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n-1} \right) n^2 \right]^q$$

Etudions donc : $\left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n-1} \right) n^2$.

$$n^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n-1} \right) = n^2 \left(\frac{1}{2!} \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^2 - \frac{1}{4!} \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^4 + \frac{1}{6!} \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^6 - \dots \right)$$

mais on a :

$$\frac{1}{4!} \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^4 = \pi^2 \frac{\pi^2}{4!} \left(\frac{k}{n-1} \right)^4 < \pi^2 \left(\frac{k}{n-1} \right)^2 \frac{\pi^2}{4!} < \left(\frac{\pi k}{n-1} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4!}$$

et, de plus :

$$\frac{1}{6!} \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^6 - \frac{1}{8!} \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^8 + \dots > 0$$

d'où :

$$(3.34) \quad 1 - \cos \frac{k\pi}{n-1} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4!} \right) \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^2$$

D'autre part, on a :

$$1 - \cos \frac{k \pi}{n-1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{k \pi}{n-1} \right)^2 + \frac{1}{6!} \left(\frac{k \pi}{n-1} \right)^6$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6!} \pi^4 \right) \left(\frac{k \pi}{n-1} \right)^2$$

d'où l'existence de C_3, C_4 constantes positives telles que :

$$C_4 k^2 \leq n^2 \left(1 - \cos \frac{k \pi}{n-1} \right) \quad C_3 k^2 \quad 1 \leq k \leq n-1$$

En remplaçant cette inégalité dans (3.32), on obtient :

$$C_4 (i+q-2-q(q-1))^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq \frac{1}{m_\psi} C_3 (i+q(q-1)+q-2)^{2q}$$

$$C_4 (i-q^2-2)^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_3' (i+q^2-2)^{2q}$$

$$C_4 (i+q)^{2q} \left[\frac{i-q^2-2}{i+q} \right]^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_3' (i+q)^{2q} \left(\frac{i+q^2-2}{i+q} \right)^{2q}$$

$$C_4 (i+q)^{2q} \left[1 - \frac{q^2+q+2}{i+q} \right]^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_3' (i+q)^{2q} \left(1 + \frac{q^2-q-2}{i+q} \right)^{2q}$$

$$C_4 (i+q)^{2q} \left[1 - \frac{q^2+q+2}{q^2+q+3} \right]^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_3' (1+q)^{2q} (i+q)^{2q} \quad i \geq q^2+3$$

$$(3.35) \quad C_4'' (i+q)^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_3'' (i+q)^{2q} \quad i = q^2+3, \dots, n-q^2$$

Reste à démontrer cette inégalité pour les valeurs de i qui n'appartiennent pas à cet ensemble.

Considérons d'abord le cas $i=1, \dots, q^2+2$. On sait que les valeurs $\frac{1}{h} \lambda_{i+q,n}$ convergent vers les valeurs propres λ_{i+q} d'un problème différentiel. On a donc l'existence de N tel que :

$$\max_{i=1, \dots, q^2+2} \left| \lambda_{i+q} - \frac{1}{h} \lambda_{q+i,n} \right| \leq 1 \quad \forall n \geq N$$

On aura donc :

$$0 < \lambda_{i+q} - 1 \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq \lambda_{i+q} + 1$$

$$(i+q)^{2q} \frac{\lambda_{i+q}^{-1}}{(i+q)^{2q}} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq \frac{\lambda_{i+q}^{+1}}{(i+q)^{2q}} \cdot (i+q)^{2q}$$

et il suffit de prendre :

$$C_5 = \text{Max}_{1 \leq i \leq q^2+2} \frac{\lambda_{i+q}^{+1}}{(i+q)^{2q}}$$

$$C_6 = \text{Min}_{1 \leq i \leq q^2+2} \frac{\lambda_{i+q}^{-1}}{(i+q)^{2q}}$$

Et on aura :

$$(3.36) \quad C_6 (i+q)^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_5 (i+q)^{2q} \quad 1 \leq i \leq q^2+2$$

Considérons maintenant le cas : $i = n-q^2+1, \dots, n-q$. Il suffit de voir que $\frac{1}{h} \lambda_{n,n}$ est bornée par $C_7 n^{2q}$. En effet,

$$\frac{1}{h} \lambda_{n-q^2+q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq \frac{1}{h} \lambda_{n,n}$$

$$C_4'' (n-q^2+q)^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_7 n^{2q}$$

$$C_4'' (i+q)^{2q} \cdot \left(\frac{n-q^2+q}{i+q}\right)^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C_7 (i+q)^{2q} \left(\frac{n}{i+q}\right)^{2q}$$

Or, ils existent $C_8, C_9 > 0$ telles que :

$$\left(\frac{n-q^2+q}{i+q}\right)^{2q} \geq C_8$$

$$i = n-q^2+1, \dots, n-q$$

$$\left(\frac{n}{i+q}\right)^{2q} \leq C_9$$

On a donc :

$$C'_9 (i+q)^{2q} \leq \frac{1}{h} \lambda_{i+q,n} \leq C'_8 (i+q)^{2q} \quad i=n-q^2+1, \dots, n-q$$

Reste seulement à démontrer que $\frac{1}{h} \lambda_{n,n}$ est bornée par $C_7 n^{2q}$. En effet, le rayon spectral de K est borné par :

$$\text{sp}(K) \leq \text{Max}_{1 \leq i \leq n-2} \sum_{j=1}^{n-2} |k_{ij}| = 2^{2q}$$

On a donc :

$$\frac{1}{h} \lambda_{nn} \leq \frac{\text{sp}(k)}{m_\psi} \cdot \frac{1}{h^{2q}}$$

d'où :

$$\frac{1}{h} \lambda_{nn} \leq \frac{2^{2q}}{m_\psi} \cdot n^{2q}$$

Ce qui termine la démonstration.

C.Q.F.D.

Cette inégalité primordiale pour la démonstration des résultats annoncés au début de ce chapitre et c'est justement cette inégalité qui est très difficile à prouver dans le cas des pas non équidistants. Toutes les autres démonstrations sont généralisables à ce cas.

Corollaire 3.2 - Soient $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres du problème

$$D^{(2q)} \phi = (-1)^q \mu \phi$$

$$\phi^{(j)}(0) = \phi^{(j)}(1) = 0 \quad j=0, 1, \dots, q-1$$

Alors il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$C_2 i^{2q} \leq \mu_i \leq C_1 i^{2q}$$

Démonstration. Immédiate.

4 - LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\mu_{1,n}$ et $\mu_{2,n}$

Comme conséquence immédiate des résultats du paragraphe précédent on obtient le comportement asymptotique des quantités $\mu_{1,n}(\tau)$, $\mu_{2,n}(\tau)$.

Théorème 4.1 - Soit $\{\tau_n\}$ une suite de nombres positifs tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$$

Alors, pour que $\mu_{1,n}(\tau_n)$, $\mu_{2,n}(\tau_n)$ tendent vers 0, il faut et il suffit que : $n \tau_n^{1/2q}$ tende vers l'infini. De plus, ils existent $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ telles que :

$$(4.1) \quad o(1) + k_1 \leq n \tau_n^{1/2q} \mu_{1,n}(\tau_n) \leq k_2 + o(1) \quad \forall n \geq N$$

$$(4.2) \quad o(1) + k_3 \leq n \tau_n^{1/2q} \mu_{2,n}(\tau_n) \leq k_4 + o(1)$$

Où $o(1) \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration -

(i) - Montrons d'abord que $\mu_{1,n}(\tau_n) \rightarrow 0$ entraîne $n \tau_n^{1/2q} \rightarrow \infty$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mu_{1,n}(\tau_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} \\ &\geq \frac{1}{1+C_1 \tau_n n^{2q}} \end{aligned}$$

donc, $\mu_{1,n}(\tau_n) \rightarrow 0$ entraîne $\frac{1}{1+C_u \tau_n n^{2q}} \rightarrow 0$

ce qui entraîne que : $n^{2q} \tau_n = (\tau_n^{1/2q} n)^{2q} \rightarrow +\infty$

(ii) - Montrons maintenant l'inégalité (4.1).

$$\mu_{1,n}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+n \tau_n \lambda_{in}}$$

et en utilisant l'inégalité du théorème (3.1) on obtient :

$$\frac{1}{n} \left(q + \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+C_2 \tau_n i^{2q}} \right) \leq \mu_{1,n}(\tau) \leq \frac{1}{n} \left(q + \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+\tau_n C_1 i^{2q}} \right)$$

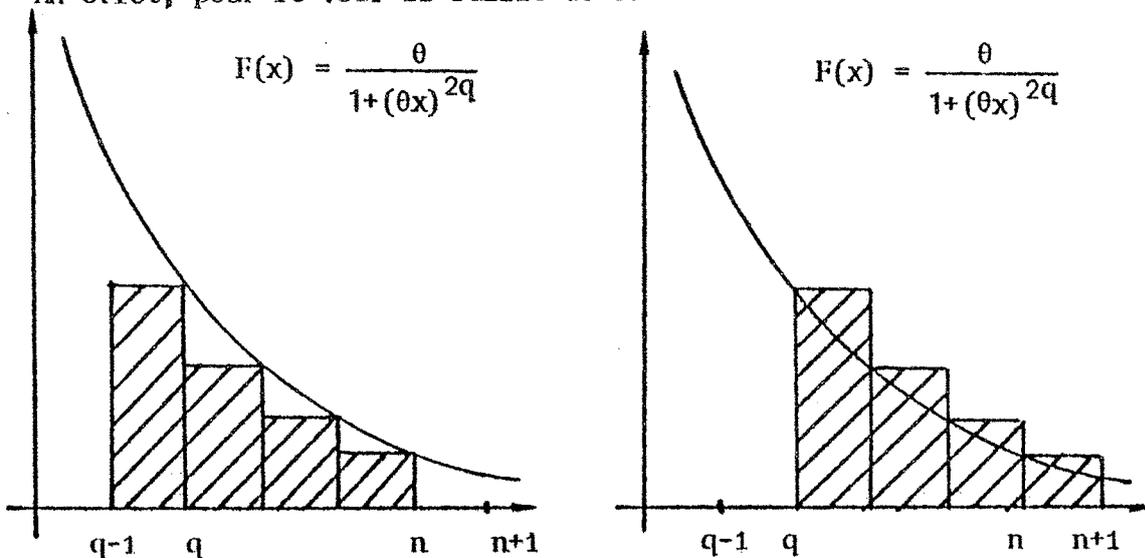
Il suffit donc de connaître, le comportement de la quantité :

$$(4.3) \quad r(\tau_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+\tau_n C i^{2q}}$$

Soit $\theta = (\tau_n C)^{\frac{1}{2q}}$; alors on a les inégalités suivantes :

$$(4.4) \quad \frac{1}{n} \int_q^{n+1} \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n \frac{\theta}{1+(\theta i)^{2q}} \leq \frac{1}{n} \int_{q-1}^n \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} dx$$

En effet, pour le voir il suffit de considérer les dessins suivants :



Dans les deux cas, l'aire comprise entre l'axe des X et la fonction en escalier correspond à $r(\tau_n)$ et l'aire sous la courbe $F(X)$ correspond aux intégrales de l'inégalité (4.4).

Mais

$$\int_{q-1}^n \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{\theta}{1+(\theta x)^q} dx$$

En faisant le changement de variable $u = \theta x$, on a :

$$(4.5) \quad \int_{q-1}^n \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{2q}} du$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_q^{n+1} \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} dx &= \int_{q\theta}^{(n+1)\theta} \frac{1}{1+u^{2q}} du \\ &= \int_{q(C\tau_n)^{1/2q}}^{(n+1)(C\tau_n)^{1/2q}} \frac{1}{1+u^{2q}} du \end{aligned}$$

Mais, l'on sait que $\tau_n^{1/2q}$ tend vers 0, et $n \tau_n^{1/2q}$ tend vers l'infini, on a donc :

$$(4.6) \quad \int_q^{n+1} \frac{\theta}{1+(\theta x)^{2q}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{2q}} du + o(1)$$

où $o(1)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Maintenant, en remplaçant (4.5) et (4.6) dans (4.4), on obtient :

$$o(1) + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{2q}} du \leq (n\theta) \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n \frac{1}{(1+\theta i)^{2q}} \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{2q}} du$$

Avec cette inégalité, on obtient :

$$\mu_{1,n}(\tau) \leq \frac{1}{n} \left(q + \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+\tau_n C_1 i^{2q}} \right)$$

$$\leq \frac{q}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+\tau_n C_1 i^{2q}}$$

d'où :

$$(4.7) \quad n \tau_n^{1/2q} \mu_{1,n}(\tau) \leq q \tau_n^{1/2q} + \frac{1}{C_1^{2q}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{2q}} du$$

et aussi :

$$\begin{aligned} n \tau_n^{1/2q} \mu_{1,n}(\tau) &\geq q \tau_n^{1/2q} + \frac{1}{n} \sum_{i=q}^n \frac{1}{1+\tau_n C_2 i^{2q}} \cdot n \tau_n^{1/2q} \\ &\geq q \tau_n^{1/2q} + \frac{1}{C_2^{2q}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{2q}} du + o(1) \end{aligned}$$

ce qui avec (4.7) démontre l'inégalité (4.1). La démonstration de (4.2) est exactement la même, de telle façon qu'on ne l'écrira pas ici.

C.Q.F.D.

Pour les besoins de la démonstration du paragraphe suivant, il est bon de démontrer ici le résultat suivant.

Théorème 4.2 - S'il existe $d > 0$ tel que $\tau_n n^{2q} \leq d$ alors, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\frac{\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau_n)]^2} \geq \delta \quad \forall n \in J_n$$

où J_n est un sous-ensemble infini de \mathbb{N} .

Démonstration

1er cas : supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n n^{2q} = 0$

On a :

$$\begin{aligned} |1 - \mu_{1,n}(\tau_n)| &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\tau_n n \lambda_{in}}{1 + \tau_n n \lambda_{in}} \\ &\leq \frac{\tau_n}{n} \sum_{i=1}^n n \lambda_{in} \\ &\leq \frac{\tau_n}{n} \cdot \sum_{i=1}^n n \lambda_{in} \\ &\leq \tau_n C_1 d \end{aligned}$$

d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \mu_{1,n}(\tau_n)]^2 = 0$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + \tau_n n \lambda_{in})^2} - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \tau_n n \lambda_{in}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + \tau_n n \lambda_{in}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \tau_n n \lambda_{in}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + \tau_n n \lambda_{in}} - \mu_{1,n}(\tau_n) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} - 1 + 1 - \mu_{1,n}(\tau_n) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} - 1 \right)^2 - (1 - \mu_{1,n}(\tau_n))^2
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n)}{(1 - \mu_{1,n}(\tau_n))^2} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n\tau_n \lambda_{in}}{1+n\tau_n \lambda_{in}} \right)^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n\tau_n \lambda_{in}}{1+n\tau_n \lambda_{in}} \right)^2} - 1 \\
 &\geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n\tau_n \lambda_{in}}{1+n\tau_n \lambda_{in}} \right)^2}{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n\tau_n \lambda_{in} \right\}^2} - 1
 \end{aligned}$$

Mais, puisque $n^{2q} \tau_n$ tend vers zéro, étant donné $\mu > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \implies n \tau_n \lambda_{in} \leq n \tau_n \lambda_{nn} < \mu$$

et on aura donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n)}{(1 - \mu_{1,n}(\tau_n))^2} &\geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{1+\mu} \right\}^2 (n \lambda_{in} \tau_n)^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \tau_n \lambda_{in} \right)^2} - 1 \\
 &\geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n \lambda_{in} \tau_n)^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \tau_n \lambda_{in} \right)^2} - 1 - \frac{2 \frac{\mu}{n} \sum_{i=1}^n (n \lambda_{in} \tau_n)^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \tau_n \lambda_{in} \right)^2} \\
 &\geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n \lambda_{in} \tau_n)^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \tau_n \lambda_{in} \right)^2} - 1 - 2\mu
 \end{aligned}$$

$$\geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n \lambda_{in} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n \lambda_{jn})^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \lambda_{in}} - 2\mu$$

$$\geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{n \lambda_{in}}{n^{2q}} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n \lambda_{jn}}{n^{2q}} \right]^2}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \lambda_{in}/n^{2q} \right]^2} - 2\mu$$

Mais :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n \lambda_{in}}{n^{2q}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_2 \left(\frac{i}{n}\right)^{2q} \leq C_2 \int_0^1 x^{2q} dx = \frac{C_2}{2q+1} = C'_2$$

et aussi :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n \lambda_{jn}}{n^{2q}} \geq C_1 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^{2q}$$

$$\geq C_1 \left[\int_0^1 x^{2q} dx - O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

d'où l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N_1 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{n \lambda_{jn}}{n^{2q}} \geq C_1 \left[\frac{1}{2q+1} - \frac{1}{4q+2} \right]$$

$$\geq \frac{C_1}{4(2q+1)} = C'_1$$

Il existe donc une sous-suite $\{n_k\}$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{n_k \lambda_{jn_k}}{n_k^{2q}} = \gamma$$

avec $0 < \gamma \leq 1$

Considérons maintenant l'ensemble d'indices :

$$I_{n_k} = \{i \in \{1, \dots, n_k\} / C_2 \left(\frac{i}{n_k}\right)^{2q} \leq \gamma\}$$

Pour $k \geq N_2$ cet ensemble n'est pas vide et on aura :

$$I_{n_k} = \{i \in \{1, \dots, n_k\} / \frac{i}{n_k} \leq \frac{\gamma}{C_2}^{1/2q}\}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \left[\frac{\lambda_j n_k}{n_k^{2q}} - \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\lambda_i n_k}{n_k^{2q}} \right]^2 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \left(\left(\frac{i}{n_k} \right)^{2q} C_2 - \gamma \right)^2 \\ &\geq \int_0^1 (C_2 x^{2q} - \gamma)^2 > 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2ème cas - Considérons maintenant le cas où il existe une sous-suite de τ_n telle que l'on ait :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k} n_k^{2q} = \theta > 0$$

Par commodité on dénotera aussi τ_n cette sous-suite. Pour $\eta > 0$ il existera alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |\tau_n n^{2q} - \theta| \leq \eta$$

soit : $\theta_2 = \theta + \eta \quad \theta_1 = \theta - \eta$

Or, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \mu_{1,n}(\tau_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i^{2q} \tau_n}{1 + i^{2q} \tau_n} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{C_1 i^{2q}}{1 + \theta_2} \tau_n \\ &\geq \tau_n \frac{C_1}{1 + \theta_2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^{2q} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{C_1}{1+\theta_2} \beta \tau_n n^{2q} \geq \frac{C_1 \beta \theta_1}{1+\theta_2} > 0$$

avec $\beta > 0$. Il suffit maintenant d'étudier le numérateur. On a :

$$\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} \right]^2$$

Mais, il existe $\overline{C}_1, \overline{C}_2 > 0$ telles que :

$$0 < \overline{C}_1 \leq \mu_{1,n}(\tau_n) \leq \overline{C}_2 < 1$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+n\tau_n \lambda_{in}} &= \frac{1}{1+\tau_n n^{2q} \frac{\lambda_{in}}{n^{2q}}} \\ &\geq \frac{1}{1+\theta_2 C_2 \left(\frac{i}{n}\right)^{2q}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_n} \left[\frac{1}{1+\theta_2 C_2 \left(\frac{i}{n}\right)^{2q}} - \overline{C}_2 \right]^2$$

où I_n est l'ensemble :

$$I_n = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} / \frac{1}{1+\theta_2 C_2 \left(\frac{i}{n}\right)^{2q}} \geq \overline{C}_2 \right\}$$

Mais l'inégalité :

$$\frac{1}{1+\theta_2 C_2 \left(\frac{i}{n}\right)^{2q}} \geq \overline{C}_2$$

est équivalente à :

$$\frac{i}{n} \leq \left[\frac{1}{\theta_2 C_2} \left(1 - \frac{1}{C_2} \right) \right]^{1/2q} < 1$$

Soit $\alpha_0 = \left[\frac{1}{\theta_2 C_2} \left(1 - \frac{1}{C_2} \right) \right]^{1/2q} > 0$

On a :

$$\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n) \geq \frac{1}{n} \sum_{\frac{i}{n} \leq \alpha_0} \left[\frac{1}{1 + \theta_2 C_2 \frac{i}{n}^{2q}} - \overline{C_2} \right]^2$$

Considérons : $F(\xi) = \frac{1}{1 + \theta_2 C_2 \xi^{2q}} - \overline{C_2}$

On aura alors :

$$\mu_{2,n}(\tau_n) - \mu_{1,n}^2(\tau_n) \geq \int_0^{\alpha_0} F(\xi) d\xi + o(1) > 0$$

Ce qui complète la démonstration du deuxième cas.

Il est clair que si $n^{2q} \tau_n$ ne converge pas, il existera toujours des sous-suites convergentes, et la conclusion du théorème sera toujours vraie.

C.Q.F.D.

5 - LA METHODE DE VALIDATION CROISEE EST ASYMPTOTIQUEMENT OPTIMALE -

Dans ce paragraphe, on utilisera les résultats précédents pour obtenir les résultats annoncés dans l'introduction.

Théorème 5.1 - Soit $f \in H^q[0,1]$ et considérons une suite de partitions de $[0,1]$ de la forme suivante :

$$\{t_1^n, t_2^n, t_3^n, \dots, t_n^n\}$$

avec

$$t_1^n = \frac{h}{2} \quad t_{i+1}^n - t_i^n = h \quad i=1, \dots, n-1 \quad h = \frac{1}{n}$$

et $\{\epsilon_i^n\}_{i=1, \dots, n}$ une suite de variables aléatoires telles que :

$$E(\epsilon_i^n) = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$E[(\epsilon_i^n)^2] = \sigma^2 \quad i=1, \dots, n$$

$$E(\epsilon_i^n \epsilon_j^n) = 0 \quad i \neq j \quad i, j=1, \dots, n$$

Considérons alors les données :

$$z_i^n = f(t_i^n) + \epsilon_i^n \quad i=1, \dots, n$$

Soient τ_n^* la valeur qui minimise $E V_n(\tau)$ et $\hat{\tau}_n$ la valeur qui minimise $E \text{Var}_n(\tau)$. On aura alors les résultats suivants :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \text{Var}_n(\tau_n^*) = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E \text{Var}_n(\tau_n^*)}{E \text{Var}_n(\hat{\tau}_n)} = 1$$

Démonstration - On a démontré que :

$$E \text{Var}_n(\tau) = b_n^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n}(\tau)$$

Or, si $\{\tau_n\}$ est une suite de nombres positifs telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \tau_n^{1/2q} = +\infty$$

alors, on a démontré que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \text{Var}_n(\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2(\tau_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{2,n}(\tau_n) = 0$$

Mais $\hat{\tau}_n$ minimise $E \text{Var}_n(\tau)$, donc :

$$0 \leq E \text{Var}_n(\hat{\tau}_n) \leq E \text{Var}_n(\tau_n)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \text{Var}_n(\hat{\tau}_n) = 0$$

Ceci entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2(\hat{\tau}_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{2,n}(\hat{\tau}_n) = 0$$

Or, on a vu que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(\hat{\tau}_n) = 0$ entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\tau}_n = 0$ et aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{2,n}(\hat{\tau}_n) = 0 \text{ entraîne } \lim_{n \rightarrow \infty} n \hat{\tau}_n^{1/2q} = +\infty$$

D'où :

$$(5.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\hat{\tau}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2\mu_{1,n}(\hat{\tau}_n) + \mu_{1,n}^2(\hat{\tau}_n) + \frac{\mu_{1,n}^2(\hat{\tau}_n)}{\mu_{2,n}(\hat{\tau}_n)} \right\} \frac{1}{[1 - \mu_{1,n}(\hat{\tau}_n)]^2} = 0$$

D'autre part :

$$0 \leq E V_n(\hat{\tau}_n) - v^2 \leq E \text{Var}_n(\hat{\tau}_n) (1 + h_n(\hat{\tau}_n))$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{E V_n(\hat{\tau}_n) - v^2\} = 0$$

Mais le minimum de $E V_n(\tau)$ est réalisé par $\tau = \tau_n^*$, d'où :

$$0 \leq E V_n(\tau_n^*) - v^2 \leq E V_n(\hat{\tau}_n) - v^2$$

et
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{E V_n(\tau_n^*) - v^2\} = 0$$

Mais l'on a :

$$E V_n(\tau) - v^2 = \frac{b_n^2(\tau)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2} + v^2 \frac{\mu_{2,n}(\tau) - \mu_{1,n}^2(\tau)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau)]^2}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E V_n(\tau_n^*) - v^2 = 0 \text{ entraîne}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2(\tau_n^*)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau_n^*)]^2} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{2,n}(\tau_n^*) - \mu_{1,n}^2(\tau_n^*)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau_n^*)]^2} = 0$$

Or, pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2(\tau_n^*)}{[1 - \mu_{1,n}(\tau_n^*)]^2} = 0$, il faut soit que le numérateur aille

vers zéro, soit que le dénominateur aille vers l'infini. Mais le dénominateur étant borné par 1, on obtient :

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2(\tau_n^*) = 0$$

d'où :

$$(5.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^* = 0$$

On a aussi que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{2,n}(\tau_n^*) - \mu_{1,n}^2(\tau_n^*)) = 0$$

En utilisant le théorème 4.2, on obtient :

$$(5.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\tau_n^*)^{1/2q} = +\infty$$

Or, $E \text{Var}_n(\tau_n^*) = b_n^2(\tau_n^*) + \mu_{2,n}(\tau_n^*)$ et en utilisant (5.3) et (5.4) on obtient :

$$(5.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \text{Var}_n(\tau_n^*) = 0$$

D'autre part, $h_n(\tau_n^*)$ tend vers zéro et

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E \text{Var}_n(\tau_n^*)}{E \text{Var}_n(\hat{\tau}_n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + h_n(\hat{\tau}_n)}{1 - h_n(\tau_n^*)} = 1$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE V

UN PROCÉDE DE LISSAGE POUR UN GRAND

NOMBRE DE POINTS

1 - INTRODUCTION -

Le but de ce chapitre est d'introduire un procédé de lissage pour le cas où le nombre de données est très important (au delà de 1000 points), et surtout, dans le cas où les données sont reçues régulièrement dans le temps et où l'on veut les lisser sans attendre que toutes les données soient arrivées.

Le procédé qu'on développe dans ce chapitre aura un coût linéaire en n , où n est le nombre total des points traités. Du point de vue temps de calcul, les deux procédés seront comparables et le traitement direct serait dans la plus part des cas, plus cher, mais le procédé de ce chapitre présente deux avantages non négligeables qui sont : d'une part la réduction de la place mémoire nécessaire au traitement, et, d'autre part la possibilité de traiter les données "en continu". Ce dernier point est fondamental surtout dans le cas où le signal arrive constamment, éliminant ainsi la possibilité d'attendre l'arrivée de toutes les données pour lisser.

Pour construire ce procédé on utilisera une idée utilisée par Paihua [35] pour le cas de l'interpolation à deux variables, idée consistant en un raccordement au moyen d'une partition de l'unité, des morceaux de l'approximant.

2 - LE RACCORDEMENT DE DEUX FONCTIONS LISSES -

Soit $g \in H^q[a, b]$ et $h \in H^q[c, d]$ avec $a < c < b < d$

Le problème est de construire une fonction $f \in H^q[a, d]$ telle que :

$$(2.1) \quad f|_{[a,c[} = g|_{[a,c[}$$

$$(2.2) \quad f|_{]b,d]} = h|_{]b,d]}$$

Or, on sait que les fonctions de $H^q[a,d]$ sont caractérisées par :

$W \in H^q[a,d]$ si et seulement si $W^{(j)}$ est absolument continue
pour $j = 0, 1, \dots, q-1$

$$\int_a^d [W^{(q)}(t)]^2 dt < +\infty$$

Considérons alors une partition de l'unité dans $[c,b]$: $\{\alpha_1, \alpha_2\}$
(i.e. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) telle que :

$$(2.3) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in H^q[c,b]$$

On aura alors que la fonction :

$$(2.4) \quad f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [a, c[\\ \alpha_1(x) g(x) + \alpha_2(x) h(x) & x \in [c, b] \\ h(x) & x \in]b, d] \end{cases}$$

est une fonction de $H^q[a, d]$ à condition que :

$$(2.5) \quad \alpha_1^{(j)}(c) = \alpha_1^{(j)}(b) = 0 \quad j=1, \dots, q-1$$

$$(2.6) \quad \alpha_1(c) = 1$$

$$(2.7) \quad \alpha_1(b) = 0$$

$$(2.8) \quad \alpha_2^{(j)}(c) = \alpha_2^{(j)}(b) = 0 \quad j=1, \dots, q-1$$

En effet, on peut prolonger α_1 et α_2 sur $[a, d]$ de la manière suivante :

$$(2.9) \quad \tilde{\alpha}_1(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x < c \\ \alpha_1(x) & c \leq x \leq b \\ 0 & b < x \leq d \end{cases}$$

$$(2.10) \quad \tilde{\alpha}_2(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < c \\ \alpha_2(x) & c \leq x \leq b \\ 1 & b < x \leq d \end{cases}$$

On aura alors $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in H^q[a, d]$ et

$$(2.11) \quad f(x) = \tilde{\alpha}_1(x) \tilde{g}(x) + \tilde{\alpha}_2(x) \tilde{h}(x)$$

où \tilde{g} est une prolongation quelconque de g à $H^q[a, d]$ et \tilde{h} est une prolongation quelconque de h à $H^q[a, d]$.

L'égalité (2.11) entraîne donc $f \in H^q[a, d]$.

Pour construire f dans la pratique, il faut trouver une expression si possible simple de α_1 (et donc de $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$). Pour les besoins de ce travail, on construira un exemple de telles fonctions dans les cas $q=2$ et $q=3$ qui seront les plus employés.

Considérons d'abord une fonction $\alpha \in H^q[0, 1]$ telle que :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \alpha^{(j)}(0) = \alpha^{(j)}(1) = 0 & \quad j=1, \dots, q-1 \\ \alpha(0) = 1 \quad \alpha(1) = 0 \end{aligned}$$

On pourra prendre alors :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \alpha_1(x) &= \alpha\left(\frac{x-c}{b-c}\right) \\ \alpha_2(x) &= 1 - \alpha_1(x) \end{aligned} \quad x \in [c, b]$$

Pour construire une fonction α satisfaisant (2.12) et la contrainte $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ il suffit de considérer un polynôme de degré $2q-1$ satisfaisant aux conditions (2.12). L'unicité de ce polynôme est donnée par le fait qu'on a $2q$ conditions indépendantes. De plus, sa dérivée qui est un polynôme de degré $2q-2$ a seulement $2q-2$ zéros, c'est-à-dire 0 et 1 qui ont une multiplicité $q-1$ chacun. Il est clair donc que la dérivée du polynôme ne change pas de signe dans $[0, 1]$ et on aura que le polynôme est forcément décrois-

sant ce qui entraîne $0 \leq \alpha(t) \leq 1$. Les deux cas les plus utilisés seront $q = 2, 3$. Dans les lignes suivantes on construit les fonctions correspondantes.

Pour $q = 2$ le polynôme $\alpha(t)$ sera de degré 3, il est facile de voir qu'il aura la forme :

$$\alpha(t) = (at+b) (1-t)^2 \quad 0 \leq t \leq 1$$

puisque $t = 1$ est une racine double. Il suffit maintenant d'utiliser les relations au point 0,

$$\alpha(0) = b = 1$$

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= a(1-t)^2 - 2(at+b)(1-t) \Big|_{t=0} \\ &= a - 2b = 0 \end{aligned}$$

d'où $a=2$ et le polynôme devient :

$$(2.14) \quad \alpha(t) = (2t+1) (1-t)^2 \quad q=2$$

Considérons maintenant $q=3$, α aura alors la forme :

$$\alpha(t) = (at^2+bt+c) (1-t)^3$$

En utilisant les conditions au point 0, on obtient :

$$\alpha(0) = c = 1$$

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= [(2at+b)(1-t)^3 - 3(at^2+bt+c)(1-t)^2] \Big|_{t=0} \\ &= b - 3c = 0 \quad \text{d'où} \quad b = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha''(0) &= [2a(1-t)^3 - b(2at+b)(1-t)^2 + 6(at^2+bt+c)(1-t)] \Big|_{t=0} \\ &= 2a - 6b + 6c = 0 \quad \text{d'où} \quad a = 6 \end{aligned}$$

et le polynôme devient :

$$(2.15) \quad \alpha(t) = (6t^2 + 3t + 1) (1-t)^3$$

3 - LE PROCÉDÉ PAR RACCORDEMENT -

Considérons maintenant le problème de lisser les données :

$$(3.1) \quad Z_i = f(t_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

où les points t_1, \dots, t_N ne sont pas nécessairement équidistants.

Considérons les sous-ensembles de $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ définis par :

$$(3.2) \quad P^r = \{t_{m(r)}, t_{m(r)+1}, t_{m(r)+2}, \dots, t_{m(r)+n(r)-1}\}$$

où les nombres $m(r), n(r) \quad r=1, \dots, p$ satisfont les propriétés suivantes :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} m(1) &= 1 \\ m(p) + n(p) - 1 &= N \\ m(r) + n(r) &\leq m(r+2) + 1 & r = 1, \dots, p-2 \\ m(r) + 1 &< m(r) + n(r) - 1 & r = 1, \dots, p-1 \\ m(r-1) + n(r-1) &\leq N + 1 \end{aligned}$$

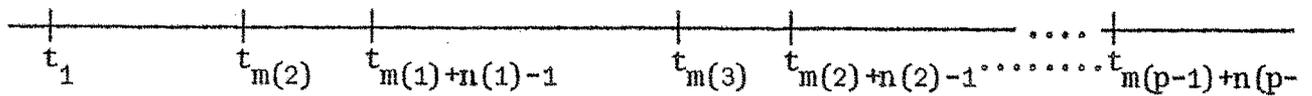
Ces propriétés entraînent sur les ensembles P^r les propriétés fondamentales suivantes :

$$(3.4) \quad \bigcup_{r=1}^p P^r = \{t_1, \dots, t_N\}$$

$$(3.5) \quad P^r \cap P^{r+1} \neq \emptyset \quad r = 1, \dots, p-1$$

$$(3.6) \quad P^r \cap P^{r+2} = \begin{cases} \{t_{m(r+2)}\} \\ \text{soit} \\ \emptyset \end{cases}$$

La situation peut être représentée dans le schéma suivant :



Notons $\hat{\sigma}^r$ la fonction spline d'ajustement d'ordre q et de paramètre choisi par Validation Croisée, basée sur les noeuds appartenant à P^r et ses données respectives. C'est-à-dire, $\hat{\sigma}^r$ est le résultat en lissant le 'paquet' r contenant $n(r)$ points.

Pour obtenir maintenant une fonction lisse qui approche f sur tout l'intervalle $[t_1, t_N]$, il suffit d'appliquer plusieurs fois le résultat du paragraphe précédent, pour obtenir la fonction suivante :

$$\hat{\sigma}^r(t) \quad \text{si} \quad t \in [t_1, t_N] - \bigcup_{r=1}^{p-1} P^r \cap P^{r+1}$$

$$\sigma(t) = \alpha \left(\frac{t - t_{m(r+1)}}{t_{m(r)+n(r)-1} - t_{m(r+1)}} \right) \hat{\sigma}^r(t) +$$

$$+ \left(1 - \alpha \left(\frac{t - t_{m(r+1)}}{t_{m(r)+n(r)-1} - t_{m(r+1)}} \right) \right) \hat{\sigma}^{r+1}(t)$$

$$\text{si } t \in P^r \cap P^{r+1} \quad r = 1, \dots, p-1$$

Il est facile de vérifier que $\sigma \in H^q[t_1, t_N]$. Pour analyser la qualité de cet approximant, il faut d'abord rappeler que si chaque $\hat{\sigma}^r$ était un interpolant de f , alors σ serait aussi un interpolant de f . On peut supposer que si chaque $\hat{\sigma}^r$ est une bonne approximation de f dans son intervalle de définition, alors forcément σ est une bonne approximation de f .

Reste le problème de bien choisir les nombres de points dans chaque ensemble P^r , et la taille des intersections $P^r \cap P^{r+1}$.

Dans le cas où les points sont équidistants, Paihua a montré que, dans le cas d'interpolation, l'effet de bord est sensible sur une quinzaine de points, ceci veut dire qu'il faut éliminer cet effet avec un "chevauchement" convenable. On a constaté dans la pratique, que 40 points sont largement suffisants comme intersection.

Cette condition sur l'intersection oblige à avoir au moins 80 points dans chaque paquet. Or, comme on a vu dans les chapitres précédents, ce nombre doit être choisi en fonction du caractère lisse du signal attendu, il appartient donc à l'utilisateur de voir dans chaque cas le nombre qui lui convient.

Dans le cas des pas non équidistants, l'effet de bord dépend de la distribution des points ; ainsi on pourrait avoir besoin de moins ou de plus de 40 points : on pense qu'un minimum de 50 points doit être considéré. Ceci nous donne un minimum de 100 points par paquet, mais le nombre exact est à choisir par l'utilisateur. Dans ce cas, le choix est d'autant plus important, que le coût du calcul dans chaque paquet dépend d'une façon quadratique de $n(r)$ comme on l'a vu au chapitre III. (Ce coût est dû au calcul du paramètre de lissage par Validation Croisée).

4 - EXPERIENCES NUMERIQUES -

Dans ce paragraphe on présente un ensemble d'expériences numériques faites avec les fonctions spline cubiques ($q = 2$).

Dans tous les exemples de ce paragraphe on a pris les pas équidistants, ce qui n'est important que pour le coût des expériences à réaliser. D'autre part, ce sera souvent le cas pour le lissage des signaux, puisque l'échantillonnage est fait par un instrument à intervalles fixes du temps.

On a choisi arbitrairement un nombre de points identique sur chaque paquet, et aussi dans l'intersection de deux paquets. Ainsi, on aura :

$$(4.1) \quad n(r) = n \quad r = 1, \dots, p$$

$$(4.2) \quad m(r) = rn+k$$

où k est le nombre de points d'intersection entre les paquets.

Comme dans les exemples du chapitre III, on s'est donné une fonction f et un pas h et on a obtenu les données par :

$$(4.3) \quad Z_i = f(t_i) + \epsilon_i$$

où $t_i = a+ih$ et les ϵ_i ont été obtenus par simulation comme des nombres pseudo-aléatoires selon le même procédé utilisé dans le chapitre III.

Le détail des fonctions test utilisées et les valeurs des différents paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

Exemple	Fonction Test	n	k	h	v
1	sin(x)	100	40	0.01	0.5
2		100	20	0.01	0.5
3		100	10	0.01	0.5
4		100	5	0.01	0.5
5	$\frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$	50	20	0.01	0.2
6		200	50	0.01	0.2
7		300	80	0.01	0.2
8		400	100	0.01	0.2
9	$\sin x + 2\sin(2x) + 5\sin 3x + 2\sin 4x$	200	50	0.01	0.8
10		200	50	0.01	0.4
11		200	50	0.01	0.2
12		200	50	0.01	0.1

La représentation choisie est à peu près la même que dans le chapitre III, c'est-à-dire, on trace sur les mêmes axes la fonction test (F) le résultat (R) et les données représentés par une ligne brisée les reliant.

Dans les quatre premiers exemples, on étudie l'effet du choix de la largeur de l'intersection entre les paquets. On observe que l'exemple 4 qui utilise très peu de points dans cette intersection donne un résultat assez mauvais, tandis que l'exemple 1 donne un raccordement parfait entre les morceaux.

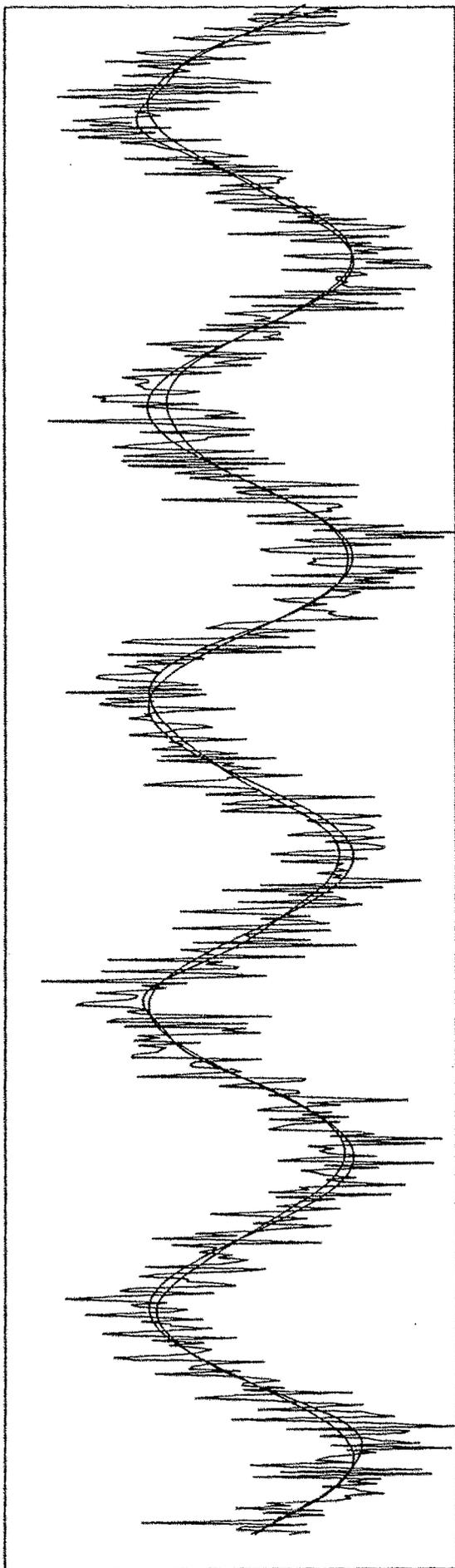
Dans les quatre exemples suivants (5 à 8) on étudie l'effet de l'accroissement du nombre de points dans chaque paquet (sans diminution du pas) ce qui montre l'importance de bien choisir ce nombre (qui ne doit pas être trop petit).

Finalement, les exemples 9 - 12 montrent que si v est plus petit, l'approximation est meilleure qu'avec le même nombre de points dans chaque paquet.

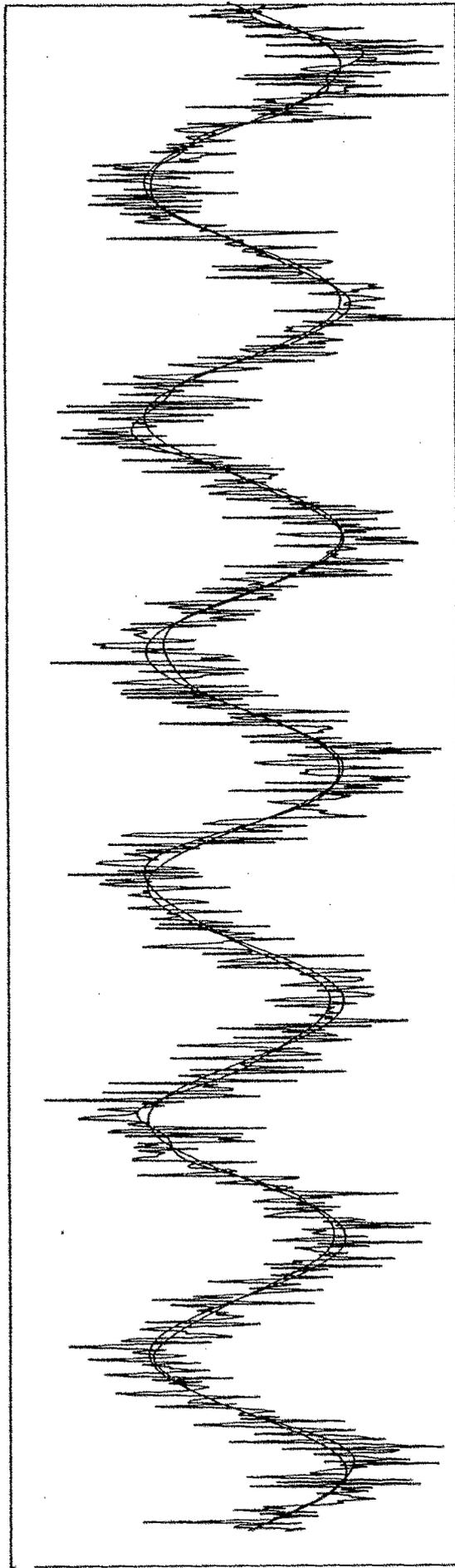
On peut conclure que le procédé est tout à fait praticable, puisqu'il donne de très bons résultats pourvu que les nombres n et k soient raisonnables, or ce choix n'est pas très difficile puisqu'il suffit qu'ils soient plus grands qu'un certain seuil ce qui simplifie beaucoup les choses. Comme conséquence pratique, on pourrait utiliser :

$$k \approx \frac{1}{4} n$$

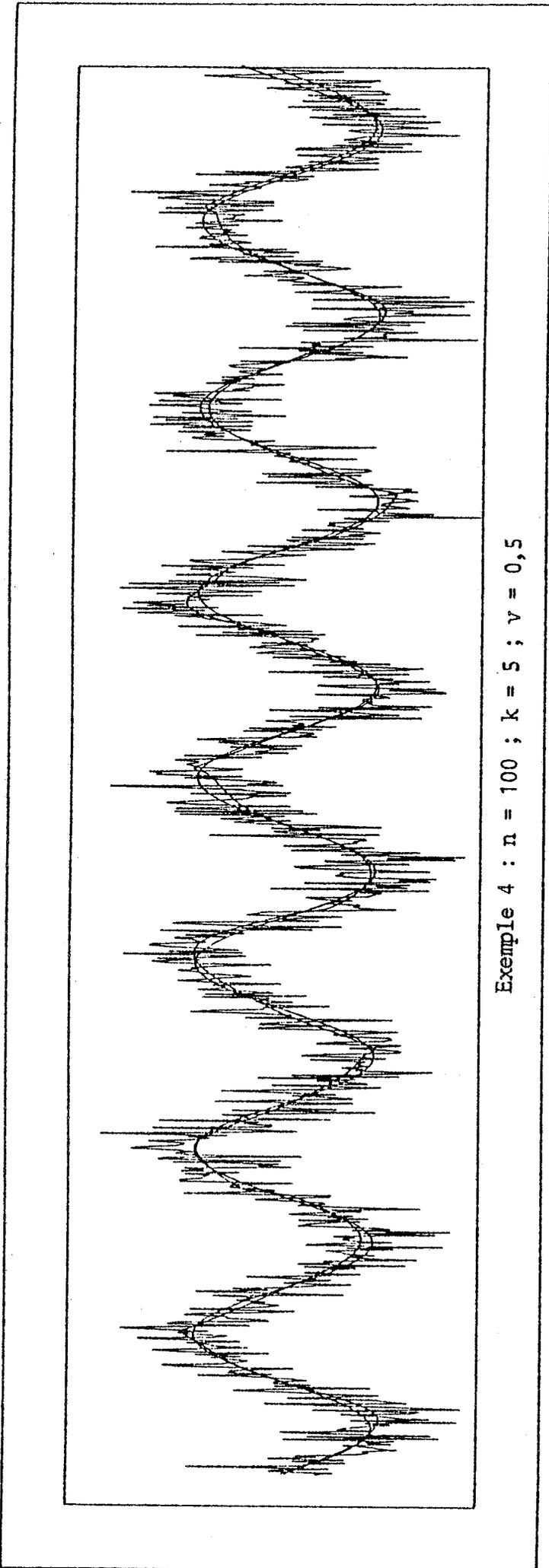
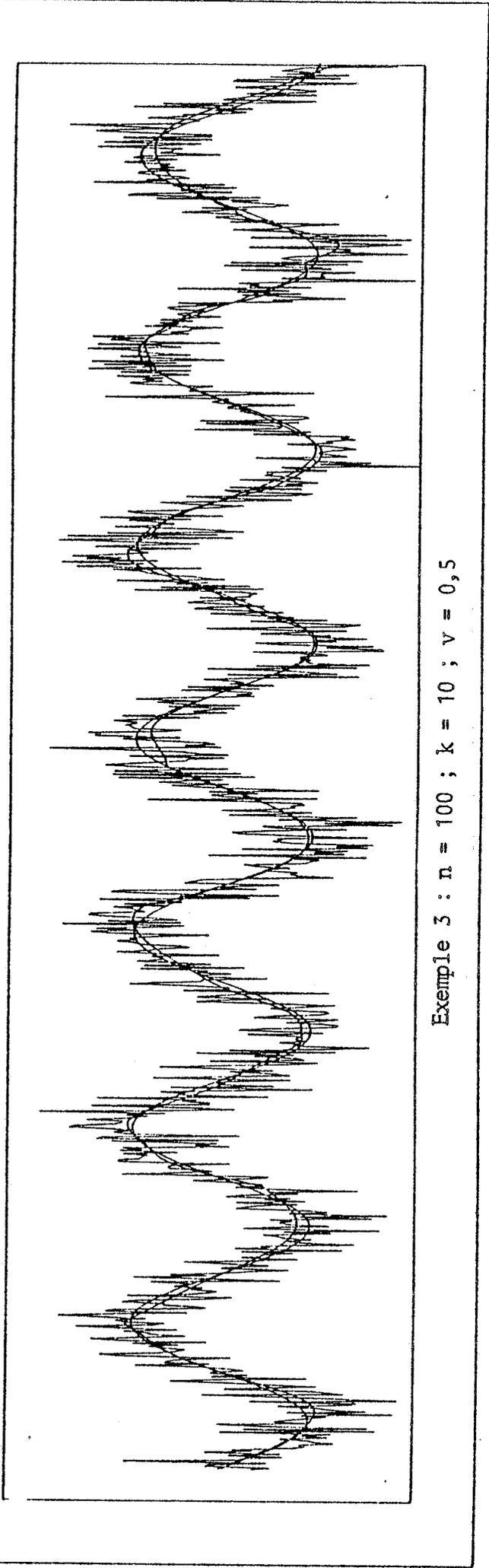
Pour l'utilisation ultérieure des données déjà lissées il pourrait être intéressant d'utiliser la fonction spline d'interpolation d'ordre q associé aux valeurs corrigées. Pour voir les simplifications de ces calculs quand le nombre de points est grand, voir Paihua [35].

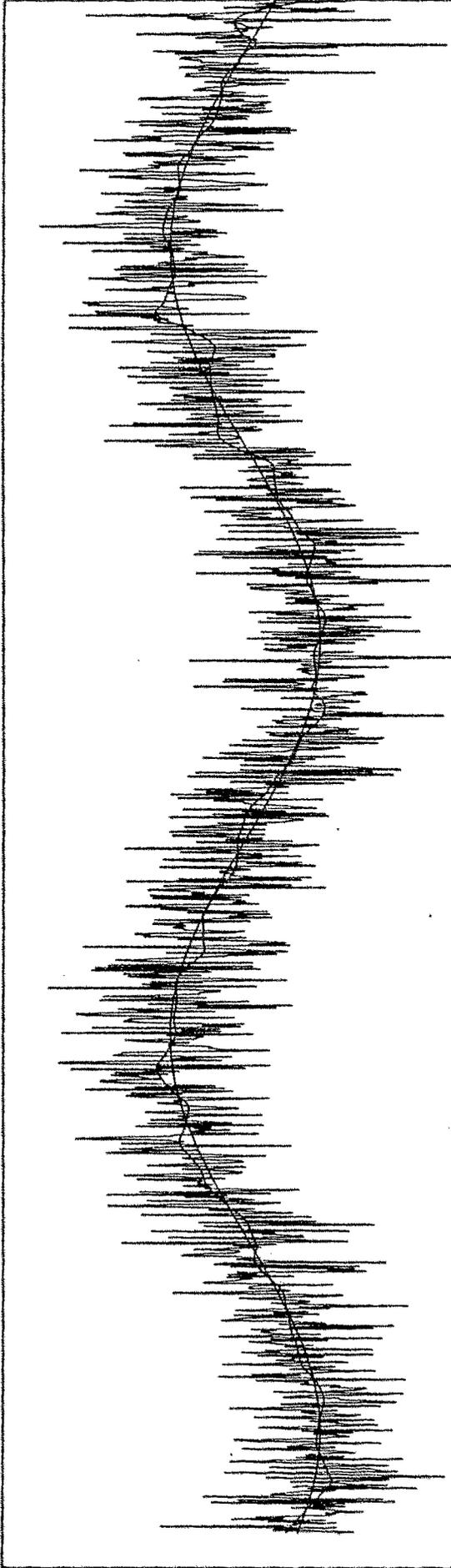


Exemple 1 : $n = 100$; $k = 40$; $v = 0,5$



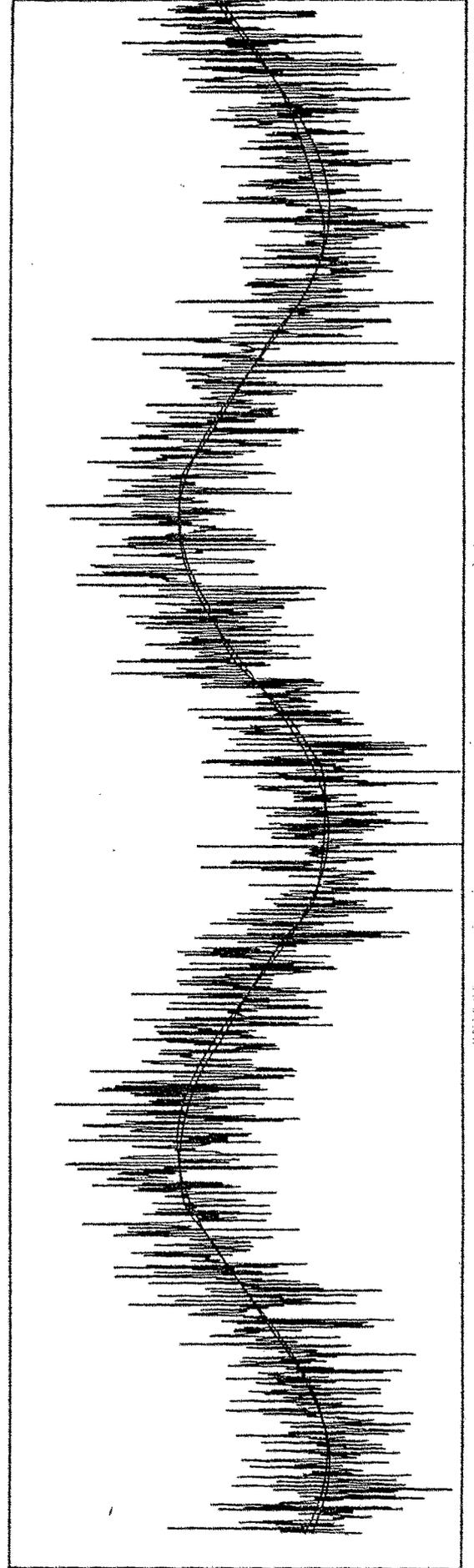
Exemple 2 : $n = 100$; $k = 20$; $v = 0,5$





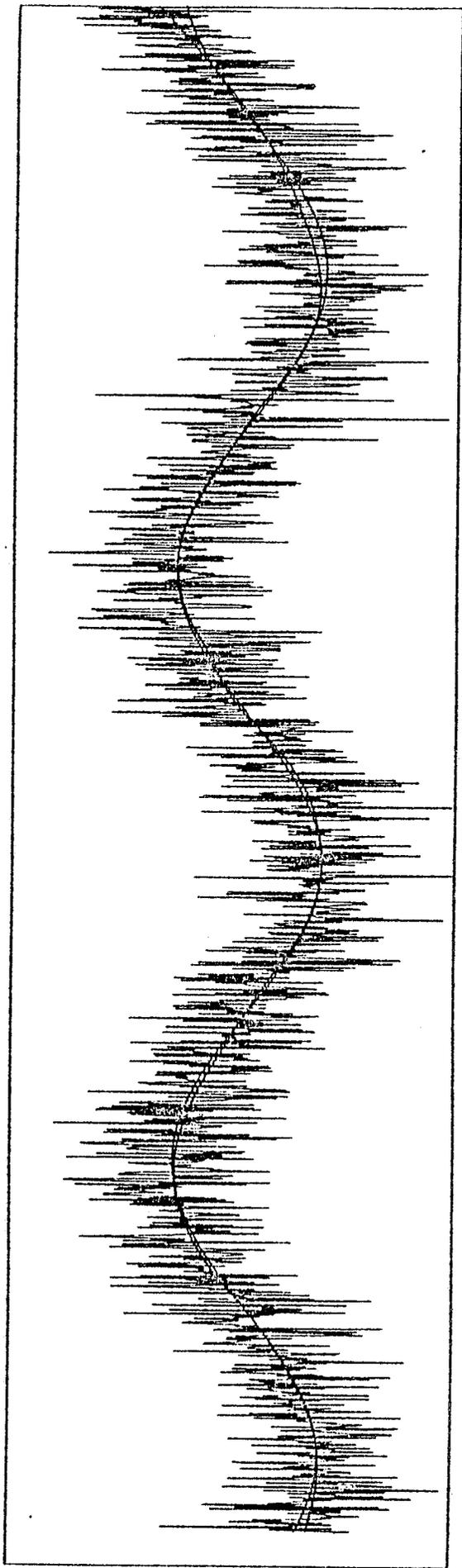
Exemple 5 : $n = 50$; $k = 20$; $v = 0,2$

COLLE LE 01/02/79 A 22:12:47 DI

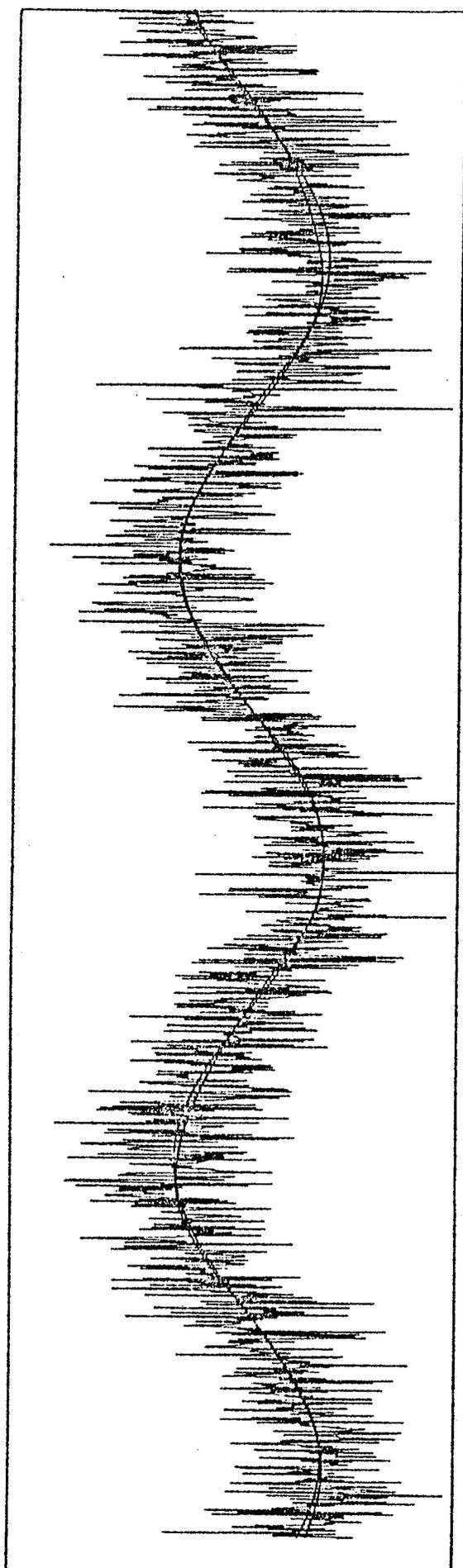


Exemple 6 : $n = 200$; $k = 50$; $v = 0.2$

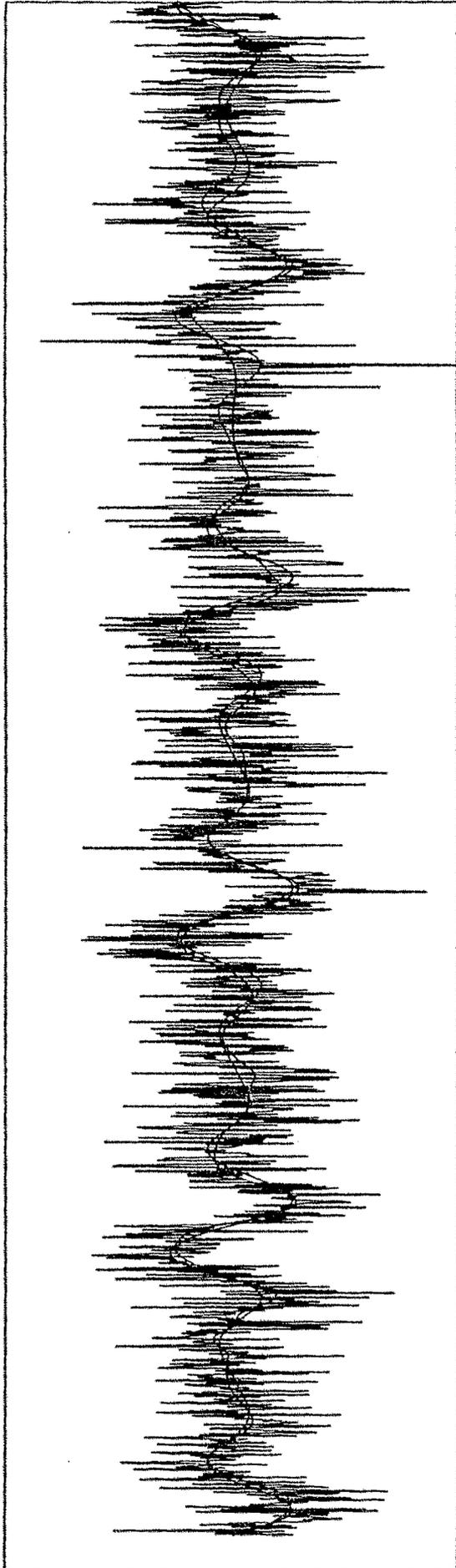
COLLE LE 01/02/79 A 22:13:22 i



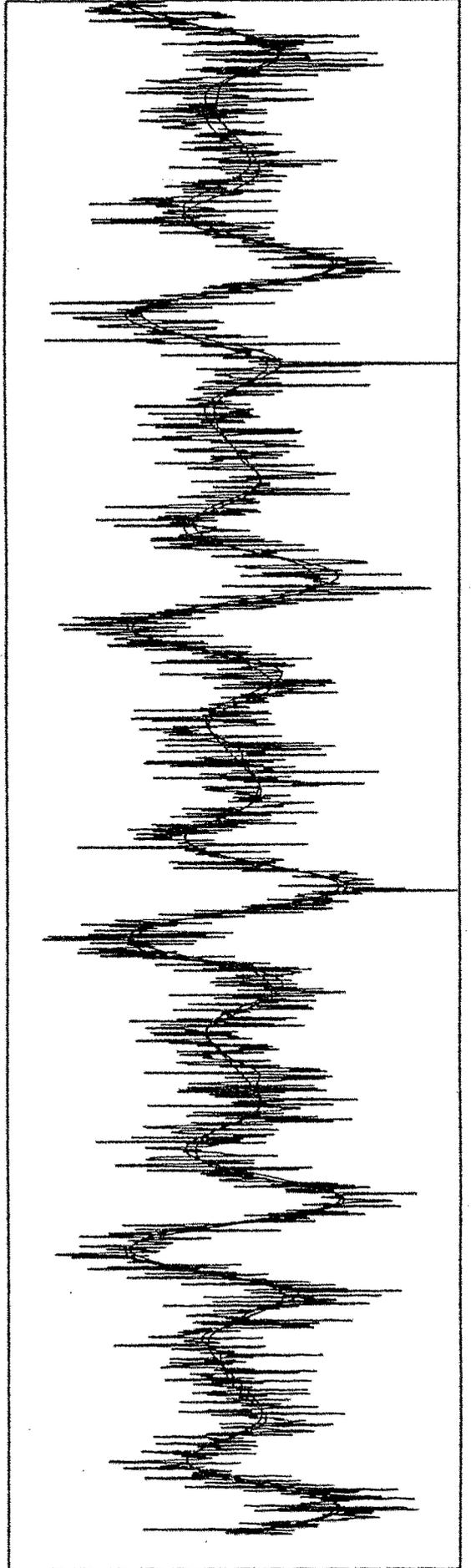
Exemple 7 : $n = 300$; $k = 80$; $v = 0,2$



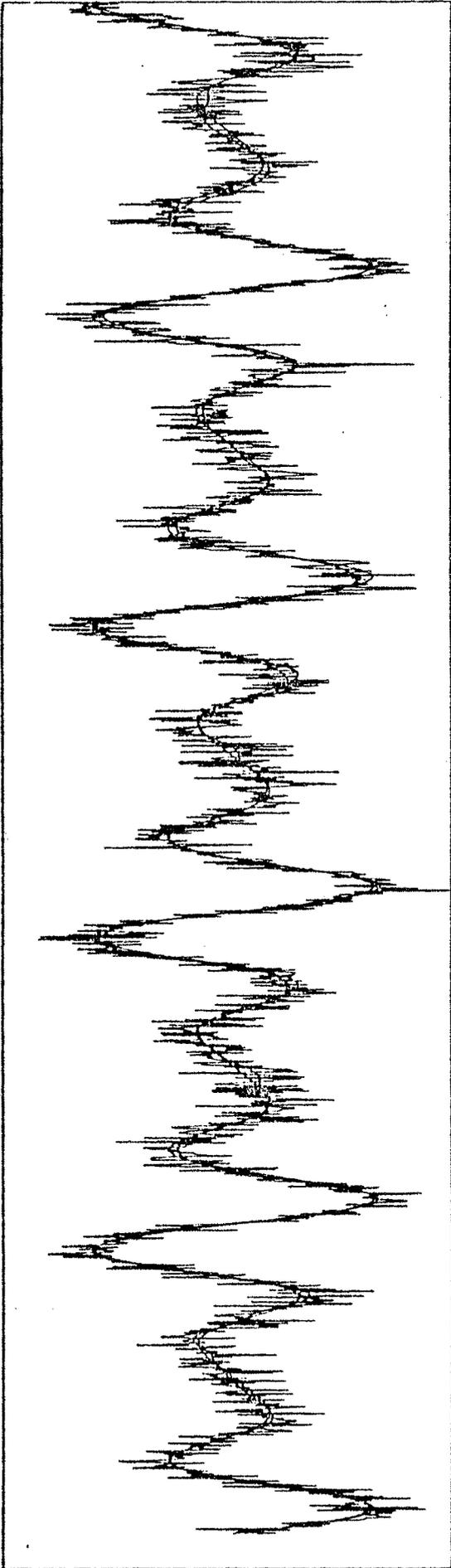
Exemple 8 : $n = 400$; $k = 100$; $v = 0,2$



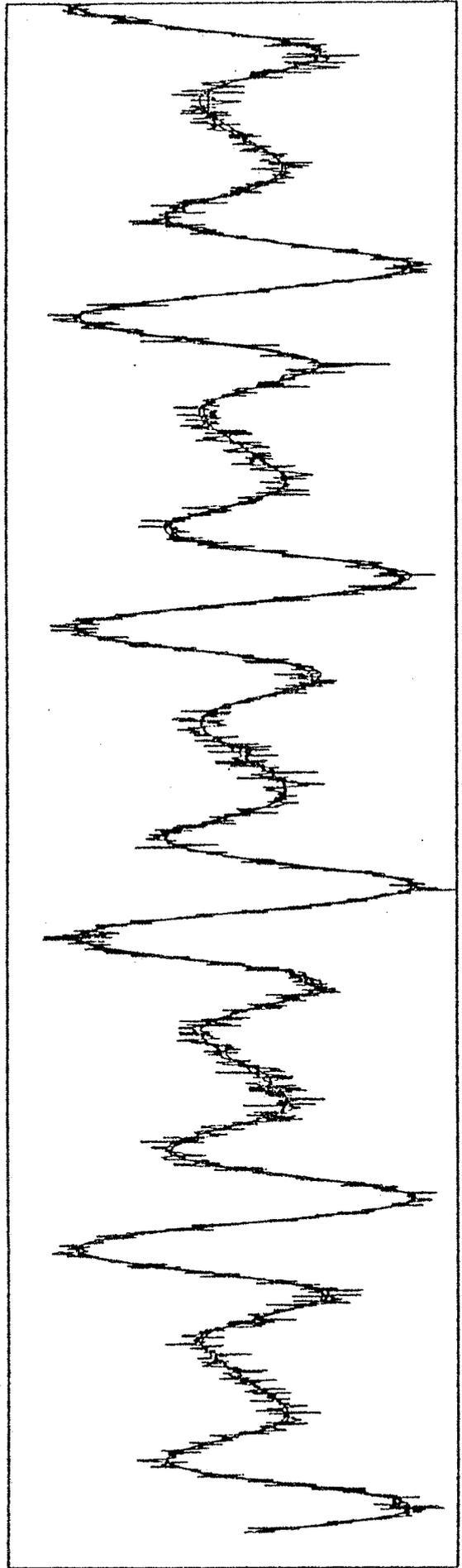
Exemple 9 : $n = 200$; $k = 50$; $v = 0,8$



Exemple 10 : $n = 200$; $k = 50$; $v = 0,4$



Exemple 11 : $n = 200$; $k = 50$; $v = 0,2$



Exemple 12 : $n = 200$; $k = 50$; $v = 0,1$

Deuxième partie

LE LISSAGE A DEUX VARIABLES

CHAPITRE VI

ETUDE DES VALEURS PROPRES ASSOCIEES AUX

FONCTIONS SPLINE BIDIMENSIONNELLES

1 - INTRODUCTION -

Dans le chapitre II on a étudié le comportement asymptotique des valeurs propres de la matrice $D^{-1}\Omega$ associée aux fonctions spline unidimensionnelles et l'on a ensuite utilisé ce résultat pour calculer le paramètre d'ajustement par la Méthode de Validation Croisée. C'est le même type de résultats que l'on obtiendra dans ce chapitre, pour le cas de fonctions spline bidimensionnelles définies sur un ensemble borné de \mathbb{R}^2 .

On obtiendra notamment la convergence des valeurs propres associées aux fonctions spline, et on fera quelques remarques sur la croissance à l'infini de ces valeurs propres, utilisant un résultat de Courant [11].

On verra aussi que les résultats obtenus ne sont pas si utiles que dans le cas d'une variable, mais qu'ils pourraient éventuellement diminuer le coût du calcul. Néanmoins, ils seront très utiles dans le cas des spline d'ajustement bicubiques qu'on introduira à la fin de ce chapitre.

Il faut remarquer que l'on utilisera encore les résultats de Fix [20] qui ont été énoncés au chapitre II (on utilisera les mêmes notations).

2 - RAPPELS ET NOTATIONS -

Le but de ce paragraphe est de présenter un rappel sur les fonctions spline bidimensionnelles. Pour faire ce rappel on utilisera la présentation de Duchon [17], [18], [19].

Définition -

Un espace vectoriel X muni d'un semi-produit scalaire $((\cdot, \cdot))$ d'espace nul N sera dit semi-hilbertien, si X/N est hilbertien, muni de la norme induite par $((\cdot, \cdot))$.

Soit E un ensemble quelconque. On notera R^E l'espace des fonctions réelles définies sur E et $R^{(E)}$ son dual topologique, lorsque R^E est muni de la topologie de la convergence simple.

Il est bien connu que $R^{(E)}$ est l'espace des fonctions réelles définies sur E à support fini. Avec la dualité :

$$(2.1) \quad \langle v, f \rangle = \sum_{t \in E} v(t) f(t) \quad v \in R^{(E)} \quad f \in R^E$$

L'ensemble des fonctions $\{\delta_a\}_{a \in E}$ telles que :

$$(2.2) \quad \delta_a(t) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ 1 & t = a \end{cases}$$

forme une base algébrique de $R^{(E)}$.

Soit N° l'orthogonal de N dans $R^{(E)}$, c'est-à-dire :

$$(2.3) \quad N^\circ = \{v \in R^{(E)} / \langle v, p \rangle = 0 \quad \forall p \in N\}$$

Définition -

X espace semi-hilbertien sera appelé sous-espace semi-hilbertien de R^E si

- (i) $X \subset R^E$
- (ii) l'inclusion du quotient X/N dans R^E/N est continue
- (iii) N est de dimension finie

Définition -

On dira que $X \subset R^E$ sépare les points de E si quels que soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ et z_1, z_2, \dots, z_n réels, il existe $v \in X$ tel que :

$$v(a_i) = z_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Autrement dit, on peut interpoler n'importe quelles données avec les éléments de X.

Avec ces définitions on peut énoncer le résultat suivant du à Duchon [12]. Il peut aussi être obtenu à l'aide du cadre abstrait défini dans [5] , [30].

Théorème 2.1 -

Soit X un sous-espace semi-herbertien de R^E séparant les points de E et soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ tels qu'aucun élément de N ne puisse s'annuler sur a_1, \dots, a_n sans être identiquement nul. Et soient z_1, z_2, \dots, z_n réels. Alors :

(i) - Il existe un et un seul élément $\sigma_n \in X$ solution du problème :

$$(2.4) \quad \begin{array}{l} \text{Minimiser } ((v, v)) \\ v \in X \\ v(a_i) = z_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Cet élément sera appelé fonction spline d'interpolation de données z_1, z_2, \dots, z_n basée sur les noeuds a_1, a_2, \dots, a_n .

(ii) - Quel que soit $\tau > 0$, il existe un et un seul élément $\sigma_{n,\tau} \in X$ solution du problème

$$(2.5) \quad \text{Min} \{ \tau((v, v)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (v(a_i) - z_i)^2 \}$$

$\sigma_{n,\tau}$ sera appelée fonction spline d'ajustement de paramètre τ de données z_1, z_2, \dots, z_n basée sur les noeuds a_1, a_2, \dots, a_n .

On appellera S_n l'espace des fonctions spline basées sur les noeuds a_1, a_2, \dots, a_n .

$$(2.6) \quad S_n = \{ \sigma \in X / \exists d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ ((\sigma, v)) = \sum_{i=1}^n d_i v(a_i) \quad \forall v \in X \}$$

Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 2.2 -

Soit σ_n la fonction spline d'interpolation et $\sigma_{n,\tau}$ la fonction spline d'ajustement, alors :

- (i) $\sigma_n \in S_n$
- (ii) $\sigma_{n,\tau} \in S_n$

De plus, on sait que S_n est un espace vectoriel de dimension n.

Démonstration - cf. Laurent [30], Duchon [18].

Pour caractériser les fonctions spline, il faut introduire la notion suivante :

Définition -

Une fonction $K(\cdot, \cdot)$ définie sur $E \times E$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que :

- (i) - pour tout $v \in N^0$, la fonction $\sum_{t \in E} v(t) K(\cdot, t)$ appartient à X
- (ii) - pour tout $v \in N^0$, $v \in X$ $((\sum_{t \in E} v(t) K(\cdot, t), v)) = \sum_{t \in E} v(t)v(t)$

sera appelée Noyau Reproducteur de X.

Le résultat suivant est dû à Duchon [18].

Théorème 2.3 -

Soit $\{p_1, \dots, p_m\}$ une base de N

(1) - Il existe $d_1, d_2, \dots, d_n ; \beta_1, \dots, \beta_m$ uniques tels que :

$$\sigma_n(t) = \sum_{i=1}^n d_i K(t, a_i) + \sum_{k=1}^m \beta_k p_k(t)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i K(a_j, a_i) + \sum_{k=1}^m \beta_k p_k(a_j) = z_j \quad j = 1, \dots, n$$

avec

$$\sum_{j=1}^n p_k(a_j) d_j = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

(2) - Il existe $d_1^\tau, d_2^\tau, \dots, d_n^\tau ; \beta_1^\tau, \dots, \beta_m^\tau$ uniques tels que :

$$\sigma_{n,\tau}(t) = \sum_{i=1}^n d_i^\tau K(t, a_i) + \sum_{k=1}^m \beta_k^\tau p_k(t)$$

$$\frac{n\tau}{\alpha_i} d_i^\tau + \sum_{j=1}^n K(a_i, a_j) d_j^\tau + \sum_{k=1}^m p_k(a_i) \beta_k^\tau = z_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n p_k(a_j) d_j^\tau = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

(K est un noyau reproduisant quelconque de X)

Soit $\sigma_n^1, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^n$ la base canonique de S_n , c'est-à-dire :

$$(2.7) \quad \sigma_n^i(a_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Définissons alors ω_{ij}^n par :

$$(2.8) \quad \omega_{ij}^n = ((\sigma_n^i, \sigma_n^j)) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Si σ_n est la fonction spline telle que :

$$\sigma_n(a_i) = x_i \quad 1 \leq i \leq n$$

et s_n est la fonction spline satisfaisant :

$$s_n(a_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

on aura :

$$\begin{aligned} (2.9) \quad ((\sigma_n, s_n)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \omega_{ij}^n \\ &= X^T \Omega_n Y \end{aligned}$$

Avec Ω_n la matrice d'éléments ω_{ij}^n .

Comme dans les fonctions spline unidimensionnelles, Ω est symétrique et semi-définie positive. Et il est facile de voir que si $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ est le vecteur des valeurs aux noeuds de la fonction spline d'ajustement $\sigma_{n,\tau}$ de paramètre τ des données Z_1, Z_2, \dots, Z_n on aura le système :

$$(2.10) \quad \tau \Omega_n Y + \frac{1}{n} D_n Y = \frac{1}{n} D_n Z$$

où D_n est la matrice diagonale d'éléments diagonaux α_i^2 .

On a donc :

$$(2.11) \quad Y = A_n(\tau) Z$$

avec

$$(2.12) \quad A_n(\tau) = (I + n \tau D_n^{-1} \Omega_n)^{-1}$$

A la fin de ce chapitre on verra quelques exemples concrets de ces fonctions spline.

3 - LA METHODE DE VALIDATION CROISEE -

Pour voir clairement la nécessité d'étudier les valeurs propres de la matrice $D^{-1}\Omega$, il faut remarquer le fait que la Méthode de Validation Croisée est applicable dans ce cas exactement de la même façon qu'elle l'était dans le cas de pas non-équidistants et variances différentes.

Le problème est exactement le même que celui rencontré à une variable, c'est-à-dire qu'on se propose d'approcher $f \in X$ à partir de la connaissance du vecteur $Z \in R^n$ tel que :

$$Z_i = f(a_i) + \epsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Les points a_1, \dots, a_n appartiennent à E et les erreurs sont considérées comme des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances v_i^2 $i = 1, \dots, n$.

En utilisant l'idée centrale du paragraphe 5 chapitre I, on trouve l'expression de la fonction de Validation Croisée :

$$(3.1) \quad V(\tau) = \frac{\frac{1}{n} ||Z - A_n(\tau) Z||^2}{(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A_n(\tau)))^2}$$

On voit clairement que la connaissance des valeurs propres de $D_n^{-1}\Omega_n$ entraîne la connaissance de la trace de $A_n(\tau)$ pour tout τ . Malheureusement, la réduction du coût de calcul de $V(\tau)$ n'est pas si spectaculaire qu'à une variable, pour la simple raison suivante : le coût de calcul de $A_n(\tau) Z$ est fait en $O(n^3)$ opérations, c'est-à-dire avec le même ordre que le calcul de $A_n(\tau)$. Bien sûr, les algorithmes utilisés pour calculer une spline d'ajustement sont moins coûteux que ceux utilisés pour obtenir $A_n(\tau)$, puisque le coût de $A_n(\tau) Z$ est d'environ 1/5 de celui de $A_n(\tau)$ (cf. Paihua [35]).

Il existe cependant un cas dans lequel il existe un espoir d'obtenir des algorithmes en $O(n)$ pour calculer $A_n(\tau) Z$, c'est le cas de splines bicubiques, ce cas est aussi intéressant parce que c'est le seul où nos approximations conduisent à des résultats explicites (c'est-à-dire à des

formules explicites pour les valeurs propres). On pense cependant que les résultats de ce chapitre pourraient aussi être d'utilité pour les autres types de fonctions spline en utilisant une technique similaire à celle utilisée dans le chapitre II paragraphe 5.

4 - LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES -

Dorénavant on fera l'hypothèse suivante :

$$(4.1) \quad X \subset L^2(E)$$

X muni du produit scalaire $((u, v) + (u, v))$ est un espace de Hilbert.

Ici (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $L^2(E)$. E étant un ouvert, borné de frontière Lipchitzienne.

Considérons maintenant les formes bilinéaires définies sur $X \times X$ par :

$$(4.2) \quad \mathcal{B}(u, v) = ((u, v)) \quad u, v \in X$$

$$(4.3) \quad \mathcal{A}(u, v) = \int_E u v \omega$$

Où l'on suppose que ω est un élément de X tel que :

$$(4.4) \quad K_1 \leq \omega(t) \leq K_2 \quad K_1, K_2 \geq 0 \quad t \in E$$

Il est clair que les formes bilinéaires \mathcal{B} et \mathcal{A} sont continues, symétriques et semi-définies positives sur X.

Considérons maintenant un procédé d'intégration approchée défini sur X tel que :

$$(4.5) \quad \int_E u \omega = \sum_{i=1}^n \omega(a_i) p_i^n(a) u(a_i) + O(h_n^{(1+\theta)}) |u| \quad \theta > 0$$

Où h_n est défini par :

$$(4.6) \quad h_n \equiv \sup_{t \in E} \left\{ \inf_{1 \leq i \leq n} ||t - a_i|| \right\}$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

et $p_i^n(a)$ sont les poids du procédé d'intégration numérique.

Définissons maintenant la forme bilinéaire approchée :

$$(4.7) \quad \mathcal{A}_n(u, v) = \sum_{i=1}^n u(a_i) v(a_i) (a_i) p_i^n(a)$$

On aura donc :

$$(4.8) \quad |\mathcal{Q}(u, v) - \mathcal{A}_n(u, v)| \leq O(h_n^{(1+\theta)}) |u| |v|$$

Le résultat suivant est immédiat :

Proposition 4.1 -

Soient $\mu_{in} \quad 1 \leq i \leq n$ les valeurs propres du problème :

$$(4.9) \quad \mathcal{B}(u, v) = \mu_n \mathcal{A}_n(u, v) \quad \text{pour tout } v \in X \\ |u| = 1$$

Alors :

- (i) - u solution de (4.9) appartient à S_n
- (ii) - les μ_{in} sont aussi les valeurs propres du problème :

$$(4.10) \quad \Omega_n x = \mu_n \bar{D}_n x$$

avec \bar{D}_n matrice diagonale d'éléments $\bar{D}_{ii} = \omega(a_i) p_i^n(a)$

Démonstration -

- (i) si u est solution de (4.10), on a :

$$\begin{aligned} ((u,v)) &= \mu_n \sum_{i=1}^n u(a_i) v(a_i) \omega(a_i) p_i^n(a) \\ &= \sum_{i=1}^n (u(a_i) \omega(a_i) p_i^n(a) \mu_n) v(a_i) \quad \forall v \in X \end{aligned}$$

et d'après la définition de S_n , on voit que $u \in S_n$.

(ii) D'autre part, le fait que u solution de (4.9) appartienne à S_n entraîne que (4.9) est équivalent à :

$$(4.11) \quad \mathcal{B}(u,v) = \mu_n \mathcal{A}_n(u,v) \quad \text{pour tout } v \in S_n \\ |u| = 1$$

Or, d'après la définition de Ω_n , on a :

$$(4.12) \quad \mathcal{B}(u,v) = x^T \Omega y = y^T \Omega x$$

où x est le vecteur des valeurs de u aux points a_1, \dots, a_n et y est le vecteur des valeurs de v aux points a_1, \dots, a_n .

On obtient que (4.12) est équivalent à :

$$(4.13) \quad y^T \Omega x = \mu_n \sum_{i=1}^n x_i \omega(a_i) p_i^n(a) y_i \\ = \mu_n y^T \mathbb{D}_n x$$

problème qui est équivalent à (4.11).

C.Q.F.D.

On voit clairement que le problème qu'on doit résoudre pour calculer $\text{Tr}(A_n(\tau))$, c'est-à-dire :

$$(4.14) \quad \Omega_n x = \frac{1}{n} \lambda_n \mathbb{D}_n x$$

est un problème du même type que (4.11). Pour qu'ils soient identiques, il suffit que :

$$\frac{1}{n} D_n = \bar{D}_n$$

soit :

$$(4.15) \quad \omega(a_i) = \frac{1}{np_i^n(a)} \cdot \alpha_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Avec ces éléments de base, et les résultats de Fix [20] énoncés dans le chapitre II, on démontre le théorème suivant :

Théorème 4.2 -

Soient μ_{in} les valeurs propres du problème :

$$\Omega_n x = \mu_n \cdot \frac{1}{n} D_n x$$

et $\{\mu_i\}_{i \in N}$ les valeurs propres du problème :

$$\mathcal{B}(u, v) = \mu \mathcal{A}(u, v) \quad \text{pour tout } v \in X$$

que l'on supposera être semi-simples ; et supposons que $h_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. Si de plus, il existe une fonction $\omega \in X$ telle que :

$$\omega(a_i) = \frac{1}{np_i^n(a)} \alpha_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alors, les valeurs propres μ_{in} convergent vers les μ_i et l'on a :

$$(4.16) \quad |\mu_i - \mu_{in}| = O(h_n^{(1+\theta)})$$

Démonstration -

Il suffit d'appliquer le théorème de Fix (cf. théorème 2.2 du chapitre III)

Remarque -

Comme dans le cas d'une variable le cas le plus important d'application de ce théorème est celui où les pas sont égaux dans les deux directions, et les variances v_i^2 aussi. Ceci nous amène à :

$$\omega(t) = 1 \quad t \in E$$

Voir aussi la remarque faite au chapitre II au sujet du théorème analogue à celui-ci.

Pour montrer la deuxième partie des résultats, c'est-à-dire, le comportement de la trace, on aura besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la semi-norme.

Déf. - On dira que la semi-norme $((\cdot, \cdot))$ croît rapidement à l'infini si les valeurs propres $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ du problème :

$$(u, v) = \mu(u, v)_{L^2(E)} \quad \forall v \in X$$

$$|u| = 1$$

satisfont :

$$(4.17) \quad (i) \quad \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ u_i \neq 0}} \frac{1}{\mu_i} < +\infty$$

$$(4.18) \quad (ii) \quad \sum_{i=J}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} = O(\mu_J^{-1})$$

On peut maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3 -

S'il existe C tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad nh_n < C$. Si de plus $((\cdot, \cdot))$ croît rapidement à l'infini et s'il existe $\omega \in X$, $\omega > 0$ telle que :

$$\omega(a_i) = \frac{1}{np_i^n(a)} \alpha_i^2$$

Alors :

$$(4.19) \quad \text{tr}(A_n(\tau)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\tau\mu_i} + \xi_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$$

Démonstration -

Elle est identique à celle du théorème (3.4) chapitre II.

Dans le paragraphe suivant on étudiera quelques types connus de fonctions spline bidimensionnelles et l'on verra comment celles-ci satisfont les hypothèses des théorèmes précédents.

5 - ETUDE DE QUELQUES CAS IMPORTANTS -

On doit commencer ce paragraphe en rappelant que tous les types de fonctions spline données ici ont un domaine de définition borné. Les résultats ne sont pas extensibles tels qu'ils sont aux fonctions spline définies par J. Duchon (cf. [17], [18], [19]).

5.1 - Splines Plaque Mince Avec Condition de Bord -

Ici on considère $X = H_0^2(E)$ avec :

$$(5.1) \quad H_0^2(E) = \left\{ g \in L^2 / D^\alpha g \in L^2 \quad |\alpha| \leq 2 \right.$$

$$\left. g|_{\partial E} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{\partial E} = 0 \right\}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

et les dérivées sont prises au sens des distributions.

Considérons sur $H_0^2(E) \times H_0^2(E)$ la forme bilinéaire :

$$(5.2) \quad ((u, v)) = \int_E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy$$

et la semi-norme associée :

$$(5.3) \quad ((u, u))^{1/2} = \left\{ \int_E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \right\}^{1/2}$$

$((u, u))$ représente en première approximation, l'énergie de flexion d'une plaque mince.

Les conditions aux limites imposées sur le bord, entraînent que la plaque est encastrée (cf. [12], [27]).

Il est connu que $H_0^2(E)$ est un espace de Hilbert pour cette semi-norme (qui pour ce cas devient une norme). Cet espace satisfait sans problèmes les hypothèses des paragraphes précédents, et l'on peut définir la fonction spline d'interpolation par :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & \int_E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \\ u \in H_0^2(E) \\ u(a_i) = z_i \quad & i=1, \dots, n \end{aligned}$$

Ainsi, le problème de valeurs propres associé à ce type de fonctions spline devient :

$$(5.5) \quad \int_E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \mu \int_E uv$$

$$u \in H_0^2(E) \quad \forall v \in H_0^2(E)$$

Problème qui est équivalent à (cf. Courant & Hilbert [12]).

$$(5.6) \quad \Delta^2 u = u \omega u$$

$$u|_{\partial E} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial E} = 0$$

où Δ^2 est le bilaplacien. C'est-à-dire, (5.6) est un problème de Valeurs propres du bilaplacien avec conditions de bord du type Dirichlet.

Dans le paragraphe précédent, on a vu que pour pouvoir donner un résultat sur $\text{Tr}(A_n(\tau))$, il fallait connaître le comportement à l'infini des valeurs propres μ_i . Ceci est donné dans la proposition suivante :

Proposition 5.1 -

Si E est un ouvert, borné à frontière Lipschitzienne, alors il existe $C_1(E)$, $C_2(E)$ constantes positives, et $N_0 \in \mathbb{N}$ telles que :

$$(5.7) \quad n \geq N_0 \Rightarrow C_1(E) \leq |\mu_n \cdot n^{-4}| \leq C_2(E)$$

Démonstration -

Si l'on considère le quotient de Raleigh associé au problème variationnel :

$$\frac{((u, u))}{\int_E u^2 \omega} = \frac{\left\{ \int_E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right\}}{\int_E u^2 \omega}$$

on a l'inégalité :

$$(5.8) \quad \frac{((u, u))}{K_2 \int_E u^2} \leq \frac{((u, u))}{\int_E u^2 \omega} \leq \frac{((u, u))}{K_1 \int_E u^2}$$

avec $K_1, K_2 > 0$ telles que $K_1 \leq \omega(t) \leq K_2 \quad t \in E$.

Il suffit d'étudier le problème :

$$((u, v)) = \beta(u, v) \quad \forall v \in H_0^2(E)$$

Mais Courant (cf. [11], [12]) a démontré qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et des constantes $C_1'(E)$, $C_2'(E)$ telles que :

$$n \geq N_0 \Rightarrow C_1'(E) \leq \beta_n n^{-4} \leq C_2'(E)$$

mais d'après (5.8) $\frac{1}{K_2} \beta_n \leq \mu_n \leq \frac{1}{K_1} \beta_n$ d'où le résultat.

C.Q.F.D.

On a donc le résultat énoncé dans le théorème (4.3) pour la trace de $A_n(\tau)$.

5.2 - Splines Plaque Mince Avec Frontière Libre -

Les fonctions spline du type étudié dans ce paragraphe ont été caractérisés par Atteia [5] et Thomman [48]. C'est Thomman qui a obtenu le premier algorithme pour les calculer dans le cas où E est un cercle.

On considère $X = H^2(E)$ et la même semi-norme définie dans le paragraphe précédent.

Minimiser cette semi-norme sur $H^2(E)$ correspond physiquement à trouver une plaque mince d'énergie minimum qui passe par tous les points (dans le cas de l'interpolation) la plaque étant libre aux points de la frontière.

Le problème des valeurs propres associé est donné sous forme variationnel par :

$$(5.9) \quad \int_E \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dx dy = \mu \int_E uv \omega dx dy$$

Ce problème est équivalent à un problème différentiel qui diffère de celui traité dans le paragraphe précédent, seulement dans les conditions aux limites. On peut trouver cette formulation dans [48].

Le problème qui reste à résoudre est celui du comportement à l'infini des valeurs propres.

En fait, il suffit d'étudier les valeurs propres du problème simplifié :

$$(5.10) \quad ((u,v)) = \bar{\mu} (u,v) \quad \text{pour tout } v \in H^2(E)$$

Or, en utilisant le résultat du paragraphe précédent, il est simple de voir que :

Proposition 5.2 -

Si E est un ouvert, borné, à frontière Lipschitzienne, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $C_1(E)$ tel que :

$$(5.11) \quad n \geq N_0 \quad \bar{\mu}_n n^{-4} \leq C_1(E)$$

Démonstration -

Considérons encore le quotient de Raleigh :

$$Q(u) = \frac{((u,u))}{(u,u)} \quad u \in H^2(E)$$

On voit que $Q(u)$ est le même que dans le problème de plaque encastree, sauf que l'espace n'est pas le même, mais l'on a :

$$H^2(E) \supset H_0^2(E)$$

si l'on utilise alors le "deuxième principe de monotonie" (cf. Weinberger [63], Courant [12]) on obtient que les valeurs propres $\bar{\mu}_n$ sont bornés par les valeurs propres de la plaque encastree. Si l'on utilise maintenant le résultat de la proposition (5.1), on obtient ce qu'on voulait montrer.

C.Q.F.D.

L'obtention d'une borne inférieure est nettement plus difficile et on n'a pas trouvé dans la littérature une réponse à cette question, sauf dans le cas du domaine circulaire où l'on obtient exactement les valeurs propres (cf. Courant [12]). On pense cependant que l'obtention de cette borne est possible de la trouver en utilisant une technique similaire à celle utilisée par Courant (cf. [11], [12]).

6 - CONCLUSIONS -

On a obtenu un résultat général sur le comportement asymptotique des valeurs propres de la matrice $D_n^{-1} \Omega_n$, pour toutes les fonctions spline définies sur un ensemble borné.

Les exemples énoncés ici ne sont pas exhaustifs et ces résultats peuvent être appliqués notamment aux L-splines, splines de Tchebycheff, etc... (cf. [1], [29], [30]).

Dans le paragraphe suivant, on traitera en détail un cas très intéressant du point de vue pratique : les fonctions splines bicubiques. C'est le seul cas pour lequel on peut donner les résultats d'optimalité obtenus à une dimension.

CHAPITRE VII

LES FONCTIONS SPLINE BICUBIQUES

1 - INTRODUCTION -

Dans ce paragraphe, on définit les fonctions spline de lissage bicubiques, en utilisant les propriétés variationnelles de ces fonctions (cf. [1], [14], [15]).

On montre que les valeurs propres de la matrice Ω correspondante sont égales aux produits des valeurs propres associées aux fonctions spline cubiques. On utilise ensuite ce résultat pour montrer un résultat d'optimalité pour la méthode de Validation Croisée qui est analogue à celui montré dans le chapitre IV pour les fonctions spline unidimensionnelles.

Finalement, on montre comment ces résultats peuvent être utilisés pour obtenir une méthode rapide de lissage de données bruitées.

2 - RAPPELS ET NOTATIONS -

Soient $[a,b]$, $[c,d]$ deux intervalles réels et $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$;
 $c = s_1 < s_2 < \dots < s_m = d$.

Notons :

$$(2.1) \quad p_{ij} = (t_i, s_j) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array}$$

$$\text{Soient } \{z_{ij}\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array} \quad \text{nm nombres réels}$$

Notons $C^{2,2}([a,b] \times [c,d])$ l'ensemble de toutes les fonctions g définies sur $[a,b] \times [c,d]$ telles que :

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial x^j} g \text{ soit continue pour } 0 \leq i, j \leq 2.$$

Sur cet espace, on peut définir le produit scalaire :

$$(2.2) \quad \langle g, f \rangle = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial s^2} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial s^2} dt ds + \int_a^b \int_c^d gf dt ds$$

On complète maintenant $C^{2,2}$ par rapport à ce produit scalaire (et la norme induite) et on appelle l'espace résultant $\tilde{H}^4([a,b] \times [c,d])$. Il est bien connu que les fonctions de \tilde{H}^4 sont des fonctions continues. De plus, il est connu (cf. [1], [15]) que :

$$(2.3) \quad \tilde{H}^4([a,b] \times [c,d]) = H^2[a,b] \otimes H^2[c,d] \quad (\text{complété})$$

et que :

$$(2.4) \quad C^{2,2}([a,b] \times [c,d]) \subset \tilde{H}^4([a,b] \times [c,d])$$

l'inclusion étant algébrique et topologique.

Considérons maintenant $\tilde{H}^4([a,b] \times [c,d])$ le sous-espace hilbertien de \tilde{H}^4 définie par les conditions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(a, s) &= \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(b, s) = 0 & s \in [c, d] \\ \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(t, c) &= \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(t, d) = 0 & t \in [a, b] \\ \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial s^2}(a, c) &= \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial s^2}(a, d) = \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial s^2}(b, c) = \frac{\partial^4 g}{\partial s^2 \partial t^2}(b, d) = 0 \end{aligned}$$

On définit σ , fonction spline d'interpolation bicubique de z aux noeuds p_{ij} $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ comme la solution unique ($n, m > 2$) du problème.

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &\text{Minimiser} && \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial s^2}(t, s) \right\}^2 dt ds \\ &g \in \tilde{H}^4([a,b] \times [c,d]) \\ &g(p_{ij}) = z_{ij} && \begin{aligned} &1 \leq i \leq n \\ &1 \leq j \leq m \end{aligned} \end{aligned}$$

On dénotera $BS_{n,m}$ l'espace des fonctions splines bicubiques. Il est bien connu que $BS_{n,m}$ est un espace vectoriel de dimension nm . Il est aussi connu que $\sigma(\cdot, s)$ est une fonction spline cubique basée sur les noeuds t_1, t_2, \dots, t_n et que $\sigma(t, \cdot)$ est aussi une fonction spline cubique basée sur les noeuds s_1, s_2, \dots, s_m .

De plus, on a :

$$(2.6) \quad \sigma \in C^2([a,b] \times [c,d])$$

Considérons maintenant les bases canoniques de fonctions splines cubiques (à une dimension), c'est-à-dire, les fonctions σ_i^t $i = 1, \dots, n$; σ_j^s $j = 1, \dots, m$ telles que :

(i) σ_i^t est une fonction spline cubique basée sur les noeuds t_1, \dots, t_n

$$(ii) \quad \sigma_i^t(t_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

(iii) σ_j^s est une fonction spline cubique basée sur les noeuds s_1, s_2, \dots, s_m

$$(iv) \quad \sigma_j^s(s_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

Alors, une base de $BS_{n,m}$ est constituée par les fonctions $\sigma_i^t \otimes \sigma_j^s$ $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq m$ d'où :

$$(2.7) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij} \sigma_i^t \otimes \sigma_j^s$$

Définissons maintenant la fonction spline d'ajustement de paramètre τ basée sur les noeuds $\{p_{ij}\}$ comme la solution unique du problème :

$$(2.8) \quad \text{Minimiser } \left\{ \tau \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial s^2}{}^2 dt ds + \frac{1}{nm} \sum_{i,j} (z_{ij} - g(t_i, s_j))^2 \right\}$$

$g \in \tilde{H}^4([a,b] \times [c,d])$

On notera $\sigma_{n,m,\tau}$ la solution de ce problème. Il est clair que

$$\sigma_{n,m,\tau} \in BS_{n,m}$$

Posons :

$$(2.9) \quad Y_{ij} = \sigma_{n,m,\tau}(t_i, s_j) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array}$$

On aura alors :

$$(2.10) \quad \sigma_{n,m,\tau}(t,s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Y_{ij} \sigma_i^t(t) \sigma_j^s(s)$$

$$\frac{\partial^4 \sigma_{n,m,\tau}}{\partial t^2 \partial s^2}(t,s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Y_{ij} \frac{d^2 \sigma_i^t}{dt^2}(t) \frac{d^2 \sigma_j^s}{ds^2}(s)$$

d'où :

$$(2.11) \quad \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{\partial^4 \sigma_{n,m,\tau}}{\partial t^2 \partial s^2} \right\}^2 ds dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m \int_a^b \int_c^d Y_{ij} \frac{d^2 \sigma_i^t}{dt^2}(t) \cdot \frac{d^2 \sigma_k^t}{dt^2}(t) \cdot Y_{k\ell} \cdot \frac{d^2 \sigma_j^s}{ds^2}(s) \frac{d^2 \sigma_\ell^s}{ds^2}(s) ds dt$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell} Y_{ij} Y_{k\ell} \int_a^b \frac{d^2 \sigma_i^t}{dt^2}(t) \frac{d^2 \sigma_k^t}{dt^2}(t) dt \int_c^d \frac{d^2 \sigma_j^s}{ds^2}(s) \frac{d^2 \sigma_\ell^s}{ds^2}(s) ds$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell} Y_{ij} Y_{k\ell} \omega_{ik}^t \omega_{j\ell}^s$$

Avec :

$$(2.12) \quad \omega_{ik}^t = \int_a^b (\sigma_i^t(t)''') (\sigma_k^t(t)''') dt$$

$$(2.13) \quad \omega_{j\ell}^s = \int_c^d (\sigma_j^s(s)''') (\sigma_\ell^s(s)''') ds$$

sont les éléments des matrices Ω_n^t , Ω_m^s définies au chapitre I.

Avec ces relations, il est facile de voir que les éléments Y_{ij} satisfont le système d'équations variationnelles :

$$\begin{aligned} \tau \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m u_{k\ell} \omega_{ik}^t \omega_{j\ell}^s Y_{ij} + \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m Y_{k\ell} u_{k\ell} &= \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m Z_{k\ell} u_{k\ell} \quad \forall u \in R^{n \times m} \end{aligned}$$

d'où on obtient le système :

$$(2.14) \quad \tau \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ik}^t \omega_{j\ell}^s Y_{ij} + \frac{1}{nm} Y_{k\ell} = \frac{1}{nm} Z_{k\ell} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n \\ \ell = 1, \dots, m \end{array}$$

d'où :

$$(2.15) \quad Y = \Lambda_{n,m}(\tau) Z$$

où $\Lambda_{n,m}(\tau)$ est un opérateur linéaire de $R^{n \times m}$ dans $R^{n \times m}$.

Dans le paragraphe suivant, on étudiera les valeurs et vecteurs propres de cet opérateur.

3 - LES VALEURS PROPRES ASSOCIEES -

Comme on l'a vu dans tout cet exposé, l'importance du calcul de la trace de $\Lambda_{n,m}(\tau)$ est fondamental pour pouvoir utiliser la méthode de Validation Croisée, en vue de lisser des données bruitées. Dans le cas présent, on a un opérateur $\Lambda_{n,m}(\tau)$ de $R^{n \times m}$ dans $R^{n \times m}$, pour calculer ses valeurs propres, on démontrera que ses fonctions propres sont données par $u^{t,i} \otimes v^{s,j}$ produit tensoriel des vecteurs propres des matrices Ω_n^t , Ω_m^s .

En effet, soit :

$$(3.1) \quad w(i,j) = u^{t,i} \otimes v^{s,j}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}
 \tau \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ik}^t \omega_{j\ell}^s W_{ij}^{(p,q)} + \frac{1}{nm} W_{k\ell}^{(p,q)} &= \\
 = \tau \sum_{i=1}^n \omega_{ik}^t \sum_{j=1}^m \omega_{j\ell}^s u_i^{t,p} v_j^{s,q} + \frac{1}{nm} u_k^{t,p} v_\ell^{s,q} &= \\
 = \tau \sum_{i=1}^n \omega_{ik}^t u_i^{t,p} \sum_{j=1}^m \omega_{j\ell}^s v_j^{s,q} + \frac{1}{nm} u_k^{t,p} v_\ell^{s,q} &= \\
 = \tau \lambda_{kn}^t u_k^{t,p} \lambda_{\ell m}^s v_\ell^{s,q} + \frac{1}{nm} u_k^{t,p} v_\ell^{s,q} &= \\
 = (1 + \tau nm \lambda_{kn}^t \lambda_{\ell m}^s) \frac{1}{nm} u_k^{t,p} v_\ell^{s,q} &= \\
 = (1 + \tau nm \lambda_{kn}^t \lambda_{\ell m}^s) \frac{1}{nm} W_{k\ell}^{(p,q)} &
 \end{aligned}$$

d'où le fait que :

$$(3.2) \quad A_{n,m}(\tau) W^{(p,q)} = \frac{1}{1 + \tau nm \lambda_{kn}^t \lambda_{\ell m}^s} \cdot W^{(p,q)} \quad \begin{array}{l} 1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq m \end{array}$$

On a aussi :

$$(3.3) \quad \text{Tr}(A_{n,m}(\tau)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \tau nm \lambda_{in}^t \lambda_{jm}^s}$$

Notons :

$$(3.4) \quad \alpha_{i,j,n,m} = \lambda_{in}^t \lambda_{jm}^s$$

Considérons maintenant le cas où les points $\{t_i\}$ et $\{s_j\}$ sont équidistants, c'est-à-dire :

$$(3.5) \quad t_i = a + \frac{2i-1}{2} \cdot h_t \quad i = 1, \dots, n$$

$$h_t = \frac{b-a}{n}$$

$$(3.6) \quad s_j = c + \frac{2j-1}{2} h_s \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$h_s = \frac{d - c}{m}$$

On aura alors les résultats suivants :

Proposition 3.1 -

Lorsque $n, m \rightarrow \infty$, les valeurs propres $\alpha_{i,j,n,m}$ satisfont :

(a) - $\lim_{n,m \rightarrow \infty} nm \alpha_{ijnm} = \beta_{ij} \quad i, j \text{ fixés}$

(b) - Il existe C_1, C_2 constantes positives, et $N_0, M_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} n &\geq N_0 \\ m &\geq M_0 \\ \Rightarrow C_1 i^4 j^4 &\leq nm \alpha_{ijnm} \leq C_2 i^4 j^4 \quad i, j \geq 3 \end{aligned}$$

Avec α_{ij} valeurs propres du problème :

$$\frac{\partial^8 \phi}{\partial t^4 \partial s^4} = \alpha \phi \quad \text{sur } [a, b] \times [c, d]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} (a, s) = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} (b, s) = 0$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} (a, s) = 0 \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} (b, s) = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} (t, c) = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} (t, d) = 0$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} (t, c) = 0 \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} (t, d) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial s^2 \partial t^2} (a, c) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial s^2 \partial t^2} (a, d) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial s^2 \partial t^2} (b, c) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial s^2 \partial t^2} (b, d) = 0$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A_{n,m}(\tau)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \tau \alpha_{nm}} + \epsilon_{nm}(\tau) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \tau \lambda_n \lambda_m} + \epsilon_{nm}(\tau) \end{aligned}$$

avec $\epsilon_{nm}(\tau) \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} 0$ pour τ fixé.

Démonstration -

C'est un cas particulier du théorème 4.2, chapitre VI. Et des inégalités obtenues au chapitre IV.

4 - LA METHODE DE VALIDATION CROISEE EST ASYMPTOTIQUEMENT OPTIMALE -

Le but de ce paragraphe est d'établir un résultat analogue à celui obtenu au chapitre IV. Pour l'obtenir, on suivra le même schéma de démonstration, mais l'on évitera de faire en détail les démonstrations dont l'analogie avec celles du chapitre IV soient trop évidentes.

4.1 - Notations et Rappels -

Dans tout ce paragraphe on prend $a=c=0$; $b=d=1$.

On notera $V_{n,m}(\tau)$ la fonction de validation croisée, c'est-à-dire :

$$(4.1) \quad V_{n,m}(\tau) = \frac{\| |Z^{n,m} - A_{n,m}(\tau) (Z^{n,m})| \|^2}{nm(1 - \frac{1}{nm} \text{Tr}(A_{n,m}(\tau)))^2}$$

où $\| \cdot \|$ dénote ici la norme dans $R^{n \times m}$ (Euclidienne).

Dans tout ce qui suit f sera une fonction de $H^4([a,b] \times [c,d])$ inconnue et Z^{nm} sera le vecteur des données, avec les hypothèses :

$$(4.2) \quad Z_{ij}^{nm} = f(t_i, s_j) + \epsilon_{ij}^{nm} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array}$$

et

$$(4.3) \quad \begin{aligned} E(\varepsilon_{ij}^{nm}) &= 0 \\ E(\varepsilon_{ij}^{nm} \varepsilon_{kl}^{nm}) &= \begin{cases} v^2 & \text{si } i = k \\ & j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

ici $E(\cdot)$ dénote espérance mathématique.

Notons encore :

$$(4.4) \quad \text{Var}_{nm}(\tau) = \frac{1}{nm} \|\vec{f} - A_{nm}(\tau)(Z^{nm})\|^2$$

Si l'on calcule l'espérance, on obtient :

$$(4.5) \quad E\text{Var}_{nm}(\tau) = \frac{1}{nm} \|\vec{f} - A_{n,m}(\tau)(\vec{f})\|^2 + \frac{v^2}{nm} \text{Tr}(A_{n,m}^2(\tau))$$

Analoguement au chapitre IV, on note :

$$(4.6) \quad b_{n,m}^2(\tau) = \frac{1}{nm} \|\vec{f} - A_{n,m}(\tau)(\vec{f})\|^2$$

$$(4.7) \quad \mu_{2,n,m}(\tau) = \frac{1}{nm} \text{Tr}(A_{n,m}^2(\tau))$$

$$(4.8) \quad \mu_{1,n,m}(\tau) = \frac{1}{nm} \text{Tr}(A_{n,m}(\tau))$$

et on aura :

$$(4.9) \quad E\text{Var}_{n,m}(\tau) = b_{n,m}^2(\tau) + v^2 \mu_{2,n,m}(\tau)$$

$$(4.10) \quad EV_{n,m}(\tau) = \frac{b_{n,m}^2(\tau) + v^2(1 - 2\mu_{1,n,m}(\tau) + \mu_{2,n,m}(\tau))}{(1 - \mu_{1,n,m}(\tau))}$$

Le résultat suivant est trivial, compte tenu du lemme (2.1), chapitre IV.

Lemme 4.1 -

Pour tout $\tau > 0$, on a :

$$(4.11) \quad \frac{|E\text{Var}_{n,m}(\tau) + v - EV_{n,m}(\tau)|}{E\text{Var}_{n,m}(\tau)} < h_{n,m}(\tau)$$

$$(4.12) \quad h_{n,m}(\tau) = \mu_{1,n,m}^2(\tau) + 2\mu_{1,n,m}(\tau) + \frac{\mu_{1,n,m}^2(\tau)}{\mu_{2,n,m}(\tau)} \frac{1}{[1-\mu_{1,n,m}(\tau)]^2}$$

Démonstration - cf. lemme (2.1) chapitre IV.

On appellera $\hat{\tau}_{nm}$ la valeur de τ qui minimise $EVar_n(\tau)$ et τ_{nm}^* , celle qui minimise $EV_n(\tau)$. A partir de maintenant, on appelle valeur optimale de τ , la quantité $\hat{\tau}_{nm}$.

Définissons maintenant l'inefficacité (d'utiliser τ_{nm}^* au lieu de $\hat{\tau}_{nm}$) comme :

$$(4.13) \quad I_{nm}(\tau_{nm}^*) = \frac{EVar_{nm}(\tau_{nm}^*)}{EVar_{nm}(\hat{\tau}_{nm})} \geq 1$$

Le lemme suivant est complètement analogue au lemme 2.2, chapitre IV.

Lemme 4.2 -

L'inégalité suivante est vérifiée si $h_{n,m}(\tau_{nm}^*) < 1$

$$(4.14) \quad I_{nm}(\tau_{nm}^*) \leq \frac{1 + h_{nm}(\hat{\tau}_{nm})}{1 - h_{nm}(\tau_{nm}^*)}$$

Démonstration - cf. Lemme 2.2, chapitre IV.

Dans le sous-paragraphe suivant, on étudiera le comportement asymptotique des différentes quantités intervenant dans $h_{nm}(\tau)$, pour pouvoir donner des conclusions similaires à celles du chapitre IV.

4.2 - Etude des quantités $b_{n,m}^2$, $\mu_{1,n,m}$, $\mu_{2,nm}$

Le lemme suivant établit l'analogie du lemme (2.3), chapitre IV.

Lemme 4.3 - si $f \in \tilde{H}^4([0,1] \times [0,1])$ alors :

$$(4.15) \quad b_{n,m}^2(\tau) \leq \tau \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial s^2} \right\}^2 ds dt \quad \tau > 0$$

Démonstration -

Il suffit de voir que la démonstration est la même que celle du lemme (2.3) chapitre IV en utilisant la formulation variationnelle appropriée, c'est-à-dire, formule (2.5).

Le lemme précédent, nous dit que si $\tau_{n,m}$ est une suite qui tend vers zéro, lorsque n, m tendent vers l'infini, il en sera de même pour $b_{n,m}^2(\tau_{n,m})$. Dans le lemme suivant, on étudie la propriété réciproque.

Lemme 4.2 - si $f \in \tilde{H}^4([0,1] \times [0,1])$ et si $\{\tau_{n,m}\}$ est une suite bornée inférieurement par $\theta > 0$, alors il existe $\delta > 0$ et $N, M \in \mathbb{N}$ tels que :

$$(4.16) \quad \begin{array}{l} n \geq N \\ m \geq M \end{array} \quad \longrightarrow \quad b_{n,m}^2(\tau_{n,m}) \geq \delta$$

Démonstration -

(i) - On montre d'abord que $b_{n,m}^2(\tau_{n,m}) \geq b_{n,m}^2(\theta)$.

En effet,

$$b_{n,m}^2(\theta) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \hat{f}_{in}^2 \frac{\alpha_{ijnm}^2 n^2 m^2}{(1 + \tau_{nm} \alpha_{inmm})^2}$$

ce qui montre que $b_{n,m}^2(\cdot)$ est une fonction croissante, d'où

$$b_{n,m}^2(\tau_{n,m}) \geq b_{n,m}^2(\theta).$$

(ii) - Il suffit maintenant d'utiliser les résultats des chapitres III (paragraphe 2) et chapitre VI pour voir que si l'on dénote :

$$f_{n,m,\theta} = \mathcal{R}_{n,m}(\theta) f$$

$$f_{\theta} = \mathcal{R}(\theta) f$$

on aura $\lim_{n,m \rightarrow \infty} f_{n,m,\theta} = f_{\theta}$ la convergence ayant lieu dans \tilde{H}^4 . Si l'on voit maintenant que $f_{\theta} \neq f$, la démonstration est finie, en effet, il suffit de prendre :

$$g = \frac{\int_0^1 \int_0^1 f^2(t,s) dt ds}{\int_0^1 \int_0^1 \left\{ f^2(t,s) + \left[\frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial s^2} \right]^2(t,s) \right\} dt ds} f$$

qui est différent de f , à moins que f soit une fonction bilinéaire plus une constante.

On aura alors :

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [f(t,s) - f_{\theta}(t,s)]^2 dt ds > 0.$$

et le résultat découle du fait que :

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [f_{n,m,\theta}(t,s) - f(t,s)]^2 dt ds = \int_0^1 \int_0^1 (f - f_{\theta})^2 dt ds$$

C.Q.F.D.

Etudions maintenant les quantités $\mu_{1,n,m}$, $\mu_{2,n,m}$ à l'aide de l'inégalité obtenu dans la proposition (3.1)

Proposition 4.3 -

Soit $\{\tau_{nm}\}_{n,m \geq 1}$ une suite de nombres positifs tels que $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \tau_{nm} = 0$. Alors,

on a :

(i) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mu_{1,n,m}(\tau_{n,m})$; $\mu_{2,n,m}(\tau_{nm})$ tendent vers zéro, est que $nm \tau_{nm}^{1/8}$ tende vers l'infini.

(ii) Il existe k_1, k_2, k_3, k_4 constantes positives et $N, M \in \mathbb{N}$ tels que :

$$(4.17) \quad o(1) + k_1 \leq nm \tau_{nm}^{1/4} \mu_{1,n,m}(\tau_{nm}) \leq k_2 + o(1)$$

$$(4.18) \quad o(1) + k_3 \leq nm \tau_{nm}^{1/4} \mu_{2,n,m}(\tau_{nm}) \leq k_4 + o(1)$$

pour $n \geq N, m \geq M$.

Où $o(1) \rightarrow 0$ lorsque n, m tendent vers l'infini.

Démonstration -

On fera la démonstration pour $\mu_{1,n,m}(\tau_{nm})$ puisqu'elle est analogue à celle de $\mu_{2,n,m}(\tau_{nm})$.

(i) Montrons d'abord que $\mu_{1,n,m}(\tau_{nm}) \rightarrow 0$ entraîne $nm \tau_{nm}^{1/4} \rightarrow +\infty$

En effet ,

$$(4.19) \quad \mu_{1,n,m}(\tau_{nm}) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + nm \tau_{nm} \alpha_{ijnm}}$$

$$\geq \frac{1}{1 + nm \tau_{nm} \alpha_{nm nm}}$$

mais, l'inégalité de la proposition (3.1) nous dit qu'il existe $C_2 \geq 0$ telle que :

$$\begin{array}{l} n \geq N \\ m \geq M \end{array} \quad \implies \quad nm \alpha_{nm nm} \leq C_2 n^4 m^4$$

on en déduit :
$$\mu_{1,n,m}(\tau_{nm}) \geq \frac{1}{1 + C_2 \tau_{nm} n^4 m^4}$$

d'où le fait que : $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \tau_{nm} n^4 m^4 = +\infty$

(ii) Pour montrer que $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \tau_{nm}^{1/4} nm = +\infty$ entraîne que

$\mu_{1,n,m}(\tau_{nm}) \rightarrow 0$, on démontrera d'abord l'inégalité (4.17).

On a :

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \mu_{1,n,m}(\tau) &= \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \tau_{nm} \lambda_{in}^t \lambda_{jm}^s} \\ &= \frac{4}{nm} + \frac{1}{nm} \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^m \frac{1}{1 + nm\tau \lambda_{in}^t \lambda_{jm}^s} \end{aligned}$$

en utilisant maintenant la proposition (3.1), on a :

$$(4.21) \quad \frac{1}{nm} \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^m \frac{1}{1 + \tau C_2 i^4 j^4} \leq \mu_{1,n,m}(\tau) - \frac{4}{nm} \leq \frac{1}{nm} \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^m \frac{1}{1 + \tau C_1 i^4 j^4}$$

On voit qu'il suffit d'étudier la quantité :

$$(4.22) \quad r_{n,m}(\tau) = \frac{1}{nm} \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^m \frac{1}{1 + \tau C i^4 j^4} \quad C = C_1, C_2$$

soit $\theta = (\tau C)^{1/4}$, on aura alors :

$$(4.23) \quad nm \theta r_{n,m}(\tau) = \sum_{i=3}^n \sum_{j=3}^m \frac{\theta}{1 + (ij\theta)^4}$$

mais la fonction de deux variables :

$$(4.24) \quad F(x, y) = \frac{1}{1 + (xy\theta)^4}$$

est décroissante dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (avec l'ordre lexicographique). D'où les inégalités :

$$(4.25) \quad \int_3^{n+1} \int_3^{m+1} \frac{\theta}{1 + (\theta xy)^4} dx dy \leq nm \theta r_{nm}(\tau) \leq \int_4^n \int_4^m \frac{\theta}{1 + (\theta xy)^4} dx dy$$

Mais :

$$(4.26) \quad \int_4^n \int_4^m \frac{\theta}{1 + (\theta xy)^4} dx dy \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta}{1 + (\theta xy)^4} dx dy \\ \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^4 y^4} dx dy$$

D'autre part :

$$(4.27) \quad \int_3^{n+1} \int_3^{m+1} \frac{\theta}{1 + (\theta xy)^4} dx dy = \int_{3\theta}^{(n+1)\theta} \int_3^m \frac{1}{1 + (uy)^4} dy du$$

mais le fait que $nm \tau_{nm}^{1/4}$ tend vers l'infini indépendamment de la manière dont n, m tendent vers l'infini, entraîne que :

$$n \tau_{nm}^{1/4} \rightarrow \infty \quad \text{ indép. de } m$$

$$m \tau_{nm}^{1/4} \rightarrow \infty \quad \text{ indép. de } n$$

Alors on a :

$$(4.28) \quad \int_3^{n+1} \int_3^{m+1} \frac{\theta}{1 + (\theta xy)^4} dx dy = \int_0^\infty \int_3^\infty \frac{1}{1 + (u v)^4} du dv + o(1)$$

en utilisant maintenant (4.25), (4.28) et (4.21), on a :

$$k_1 + o(1) \leq nm \tau_{nm}^{1/4} - 4 \tau_{nm}^{1/4} \leq k_2 + o(1)$$

avec :

$$k_1 = \frac{1}{C_2} \int_0^\infty \int_3^\infty \frac{1}{1 + (uv)^4} du dv$$

$$k_2 = \frac{1}{C_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{1 + (uv)^4} \, dudv$$

et $o(1)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

C.Q.F.D.

Pour démontrer les résultats d'optimalité, nous aurons besoin du résultat suivant, dont la démonstration sera omise puisqu'elle est analogue à celle du théorème 4.2, chapitre IV, sauf dans le même type d'inégalités obtenues dans la proposition précédente.

Proposition 4.4 -

S'il existe $d > 0$ tel que $\tau_{nm}^{1/4} nm \leq d$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\frac{\mu_{2,n,m}(\tau_{n,m}) - \mu_{1,n,m}^2(\tau_{n,m})}{(1 - \mu_{1,n,m}(\tau_{nm}))^2} \geq \delta \quad \forall (n,m) \in J$$

où J est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Avec ces résultats, on peut obtenir le théorème d'optimalité pour la méthode de Validation Croisée. La démonstration sera omise puisqu'elle ne diffère en rien de celle du théorème 5.1.

Théorème 4.5 -

Soit $f \in \tilde{H}^4([0,1] \times [0,1])$ et considérons une suite de grilles :

$$\left\{ \begin{array}{l} (t_i^n, s_j^m) \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{array} \right\}$$

avec

$$t_i = \frac{2i-1}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$s_j = \frac{2j-1}{m} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

et $\{\epsilon_{ij}^{nm}\}$ une suite de variables aléatoires telles que :

$$E(\epsilon_{ij}^{nm}) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq m$$

$$E(\epsilon_{ij}^{nm} \epsilon_{kl}^{nm}) = \begin{cases} 1 & i = k \\ & j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons alors les données :

$$z_{ij}^{nm} = f(t_i^n, s_j^m) + \epsilon_{ij}^{nm} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{matrix}$$

Soient enfin $\hat{\tau}_{nm}$ et τ_{nm}^* les valeurs qui minimisent $E\text{Var}_{nm}(\tau)$ et $EV_{nm}(\tau)$ respectivement. On a alors :

$$(a) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} E\text{Var}_n(\tau_{nm}^*) = 0$$

$$(b) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} I_{nm}(\tau_{nm}^*) = 1$$

Démonstration -

Cf. démonstration du théorème (5.1) chapitre IV.

Remarques -

Les résultats démontrés dans ce chapitre constituent une extension triviale de ceux obtenus au chapitre IV. La difficulté de généraliser cette démonstration pour le cas général réside seulement dans les inégalités du paragraphe 3, chapitre IV. Tous les autres résultats sont facilement extensibles à 2 et même à plusieurs dimensions, pourvu l'hypothèse (assez forte) sur les points de prise des données.

CHAPITRE VIII

EXPERIENCES NUMERIQUES A 2 VARIABLES

1 - INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de présenter quelques expériences numériques qui montrent comment on peut utiliser la méthode de Validation Croisée pour le lissage des données prises sur des noeuds arbitraires dans une région quelconque (non nécessairement rectangulaire) du plan \mathbb{R}^2 . C'est le fait que ces noeuds sont quelconques qui rend importantes des méthodes qui seront utilisées, puisque le coût étant de toute façon élevé, elles ne se justifient que dans ce cas. Le cas des grilles uniformes peut être résolu à l'aide des splines bicubiques d'ajustement présentées au chapitre précédent.

Pour faire ces expériences numériques, on a choisi les fonctions spline du type plaque mince dans \mathbb{R}^2 (cf. Duchon [17], [18]), puisque les algorithmes disponibles pour les calculer sont les moins chers parmi les méthodes de ce type (cf. [48], [35], [36]).

Dans le premier paragraphe, on définit les fonctions spline du type plaque mince en utilisant les formalismes du chapitre VI. On décrit ensuite la manière par laquelle on calcule le paramètre d'ajustement, et on montre deux exemples (avec des données fictives) d'utilisation. Dans le dernier paragraphe, on utilise la technique du chapitre V pour étendre la méthode à un grand nombre de noeuds.

2 - LES FONCTIONS SPLINE DU TYPE PLAQUE MINCE

Reprenons la notation du paragraphe 2, chapitre VI. Ainsi, soit $X = D^{-2}L^2(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$(2.1) D^{-2}L^2(\mathbb{R}^2) = \{ \text{Distributions sur } \mathbb{R}^2 \text{ telles que toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont dans } L^2(\mathbb{R}^2) \}$$

et sur $D^{-2}L^2(\mathbb{R}^2)$ on définit la semi-norme.

$$(2.2) \quad ((u,u))^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

Duchon (cf. [17], [18]) montre que les éléments de $D^{-2}L^2(\mathbb{R}^2)$ sont des fonctions continues, que le noyau N de la semi-norme, est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à 1, et qu'il possède un noyau reproduisant (d'espace semi-hilbertien) donné par :

$$(2.3) \quad K(t,s) = \frac{1}{4\pi} ||t-s||^2 \text{Log} ||t-s||^2$$

Si $\{t, t_1, \dots, t_n\}$ est un ensemble de points de \mathbb{R}^2 contenant un sous-ensemble $_1$ -unisolvent (c'est-à-dire, qu'il contienne trois points non alignés), et si Z_1, \dots, Z_n sont n nombres réels, alors les théorèmes du chapitre VI paragraphe 2, nous garantissent l'existence et l'unicité d'une fonction continue $\sigma \in D^{-2}L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} ((\sigma, \sigma) = & \quad \text{Inf} \quad ((u,u)) \\ & u \in D^{-2}L^2(\mathbb{R}^2) \\ & u(t_i) = Z_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

De plus, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que :

$$(2.5) \quad \sigma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i ||t-t_i||^2 \text{Log} ||t-t_i||^2 + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

avec $t = (x, y)$

Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant les équations :

$$j = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j ||t_i - t_j||^2 \text{Log} ||t_i - t_j||^2 + \alpha_1 t_{ix} + \alpha_2 t_{iy} + \alpha_3 = Z_i$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

On peut aussi définir la fonction spline d'ajustement du type plaque mince, qui aura ainsi la forme (2.5), comme celle qui minimise

$$(2.6) \quad \tau((u,u)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u(t_i) - Z_i)^2$$

avec $\tau > 0$, paramètre d'ajustement.

On pourrait aussi considérer des poids différents dans la somme, mais dans nos exemples ils seront toujours égaux.

L'avantage de ces fonctions spline par rapport à celles de Thomman [48] est la simplicité de l'expression du noyau. Il existe un ensemble de programmes permettant de faire des calculs avec ces fonctions spline (cf. [35], [36]).

3 - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE VALIDATION CROISEE

Rappelons que notre problème central consiste à approcher une fonction "lisse" f définie sur une région du plan \mathbb{R}^2 , à partir de la connaissance de :

$$(3.1) \quad Z_i = f(t_i) + \epsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

avec les hypothèses habituelles sur les ϵ_i .

On utilise donc la fonction spline d'ajustement de paramètre $\tau > 0$ du type plaque mince, basée sur Z_1, \dots, Z_n . Pour choisir τ , on utilise la méthode de Validation Croisée qui consiste à minimiser :

$$(3.2) \quad V(\tau) = \frac{\frac{1}{n} \|Z - A(\tau)Z\|^2}{\left(1 - \frac{1}{n} \text{Tr}(A(\tau))\right)^2}$$

avec
$$A(\tau) = (I + n\tau\Omega)^{-1}$$

Dans le cas d'une variable on a pu remplacer $\text{Tr}(A(\tau))$ par une expression explicite, lorsque n était suffisamment grand. Mais, l'on a vu aux paragraphes précédents que la même technique est applicable à 2 variables seulement dans le cas des splines bicubiques, éventuellement on pourrait aussi l'appliquer dans certains cas de domaines bornés différents d'un rectangle, mais on ne l'a pas fait dans ces expériences numériques. Malheureusement, dans le cas des pas non équidistants, on n'a pas d'autre solution que de calculer Ω et utiliser un algorithme QR avec shift (cf [41]) pour trouver les valeurs propres.

On utilise ensuite un algorithme de recherche globale pour trouver τ .

Il faut remarquer que le calcul de Ω et ses valeurs propres se fait en $O(n^3)$ opérations, et que celui de $A(\tau)Z$ aussi, il n'existe donc pas une grande différence comme dans le cas d'une variable, et la réduction qu'il serait possible de faire ne sera jamais aussi spectaculaire qu'à une variable.

4 - EXEMPLES NUMERIQUES

On présente ici deux exemples de lissage de données fictives utilisant la technique du paragraphe précédent.

Dans nos exemples on a pris une fonction définie sur $[0,2] \times [0,1]$ et on a tiré au hasard 100 points t_1, \dots, t_{100} dans ce rectangle. On a ensuite obtenu les Z_i en ajoutant à $f(t_i)$, un nombre pseudo-aléatoire obtenue par simulation. Les nombres pseudo-aléatoires suivent une loi normale de moyenne nulle et écart type 0.1.

On a ensuite tracé les courbes de niveau de la surface bruitée (par interpolation), de la surface lissée et de la fonction test à l'aide du sous-programme $\emptyset B14A$ de Harwell.

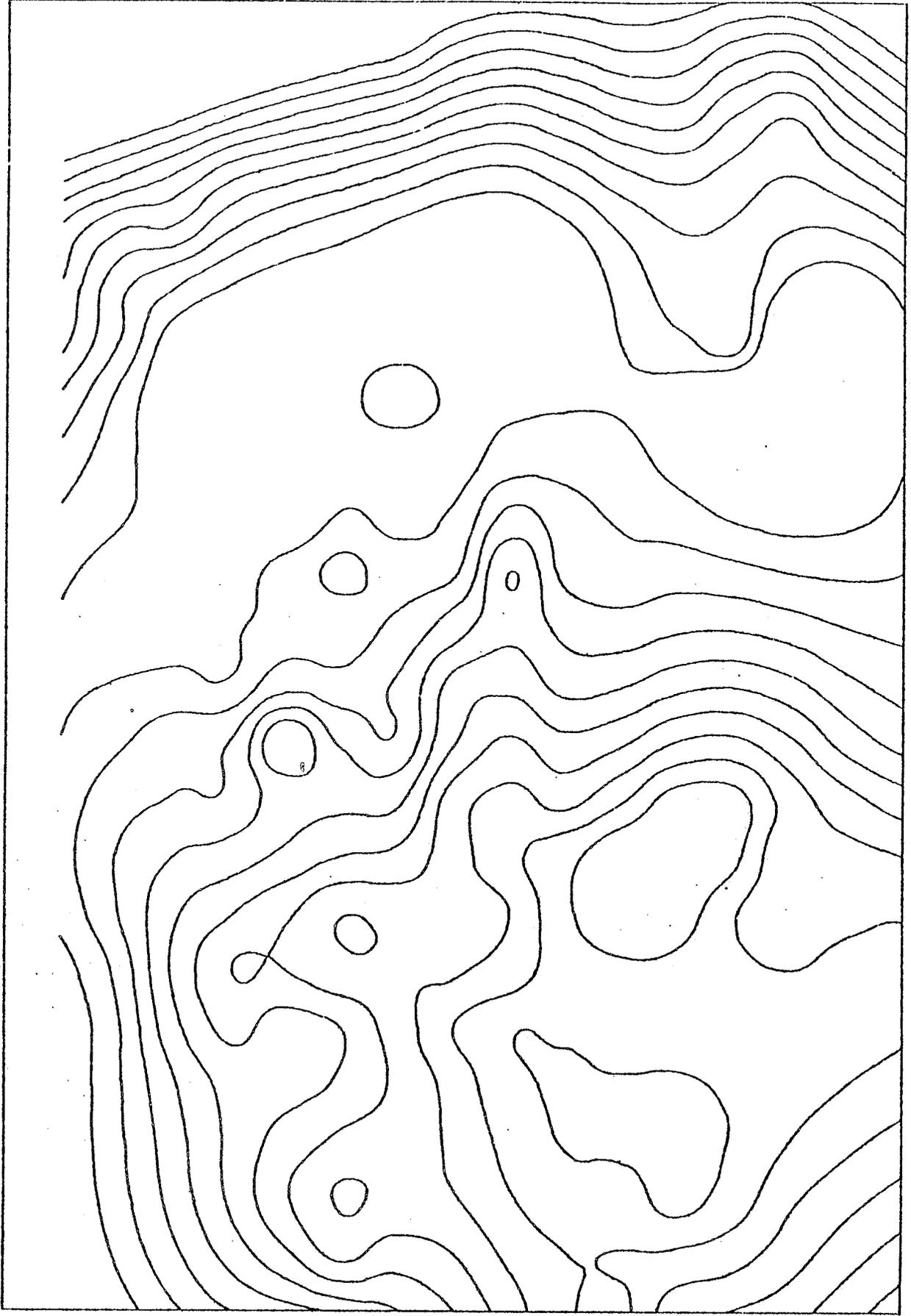
Exemple 1 : $f(x,y) = \sin \left((x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \right)$.

$$2 : f(x,y) = \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}{v_i^2}}$$

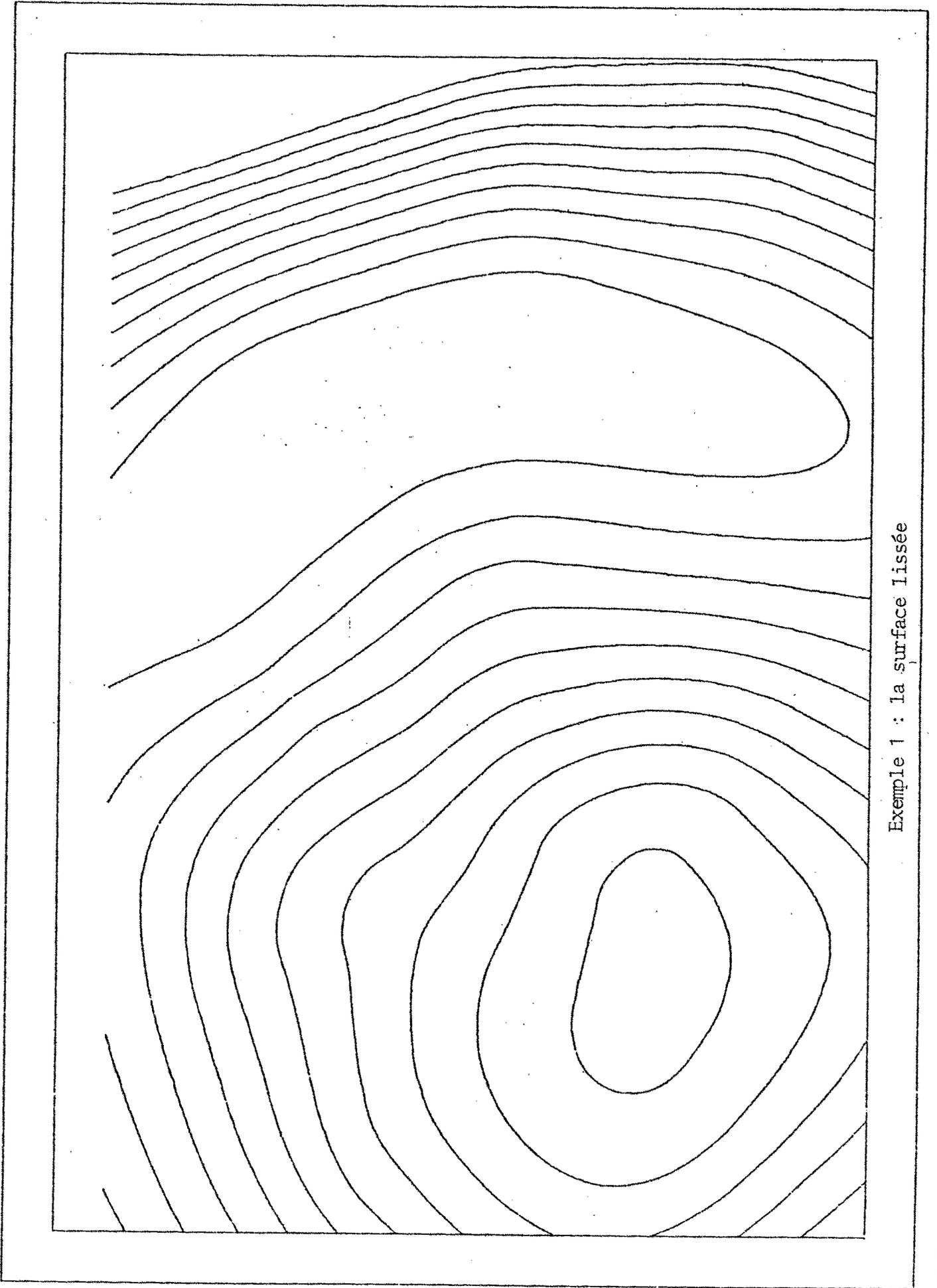
$$x_1 = 0.1 \quad x_2 = 0.4 \quad x_3 = 0.6$$

$$y_1 = 0.1 \quad y_2 = 0.1 \quad y_3 = 1.3$$

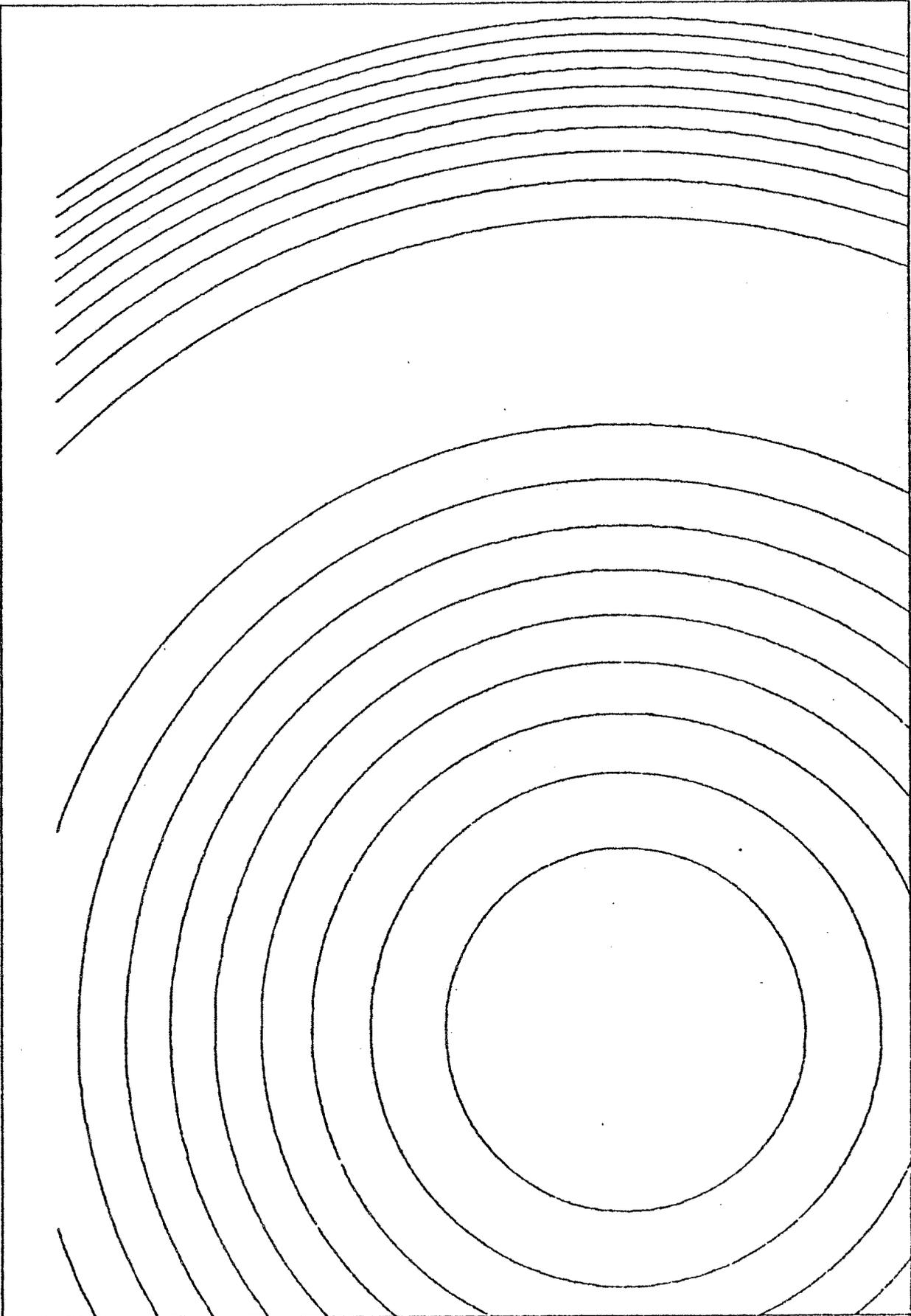
$$v_1 = v \quad v_2 = 1.0 \quad v_3 = 1.0$$



Exemple 1 : Les données

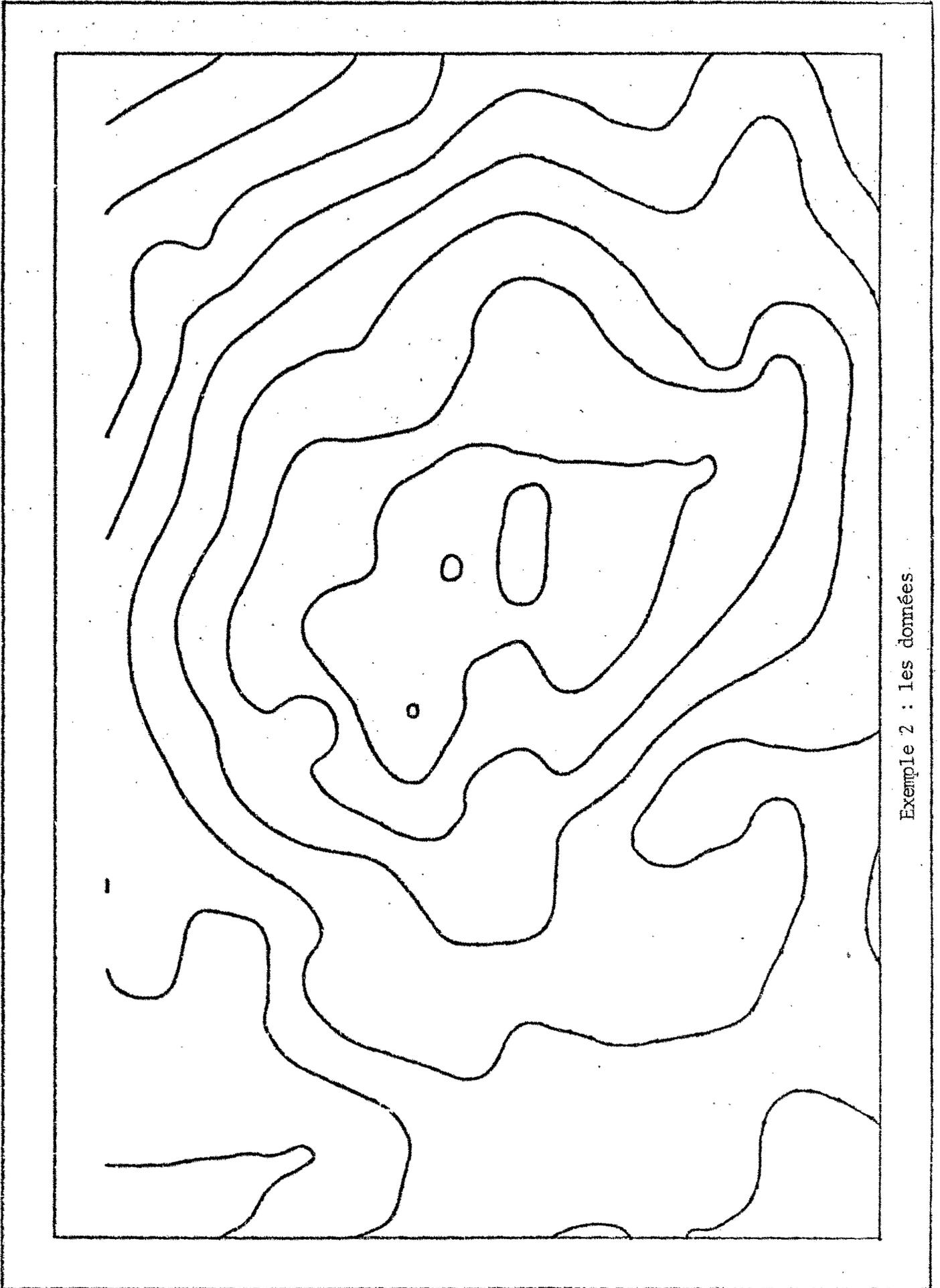


Exemple 1 : la surface lissée



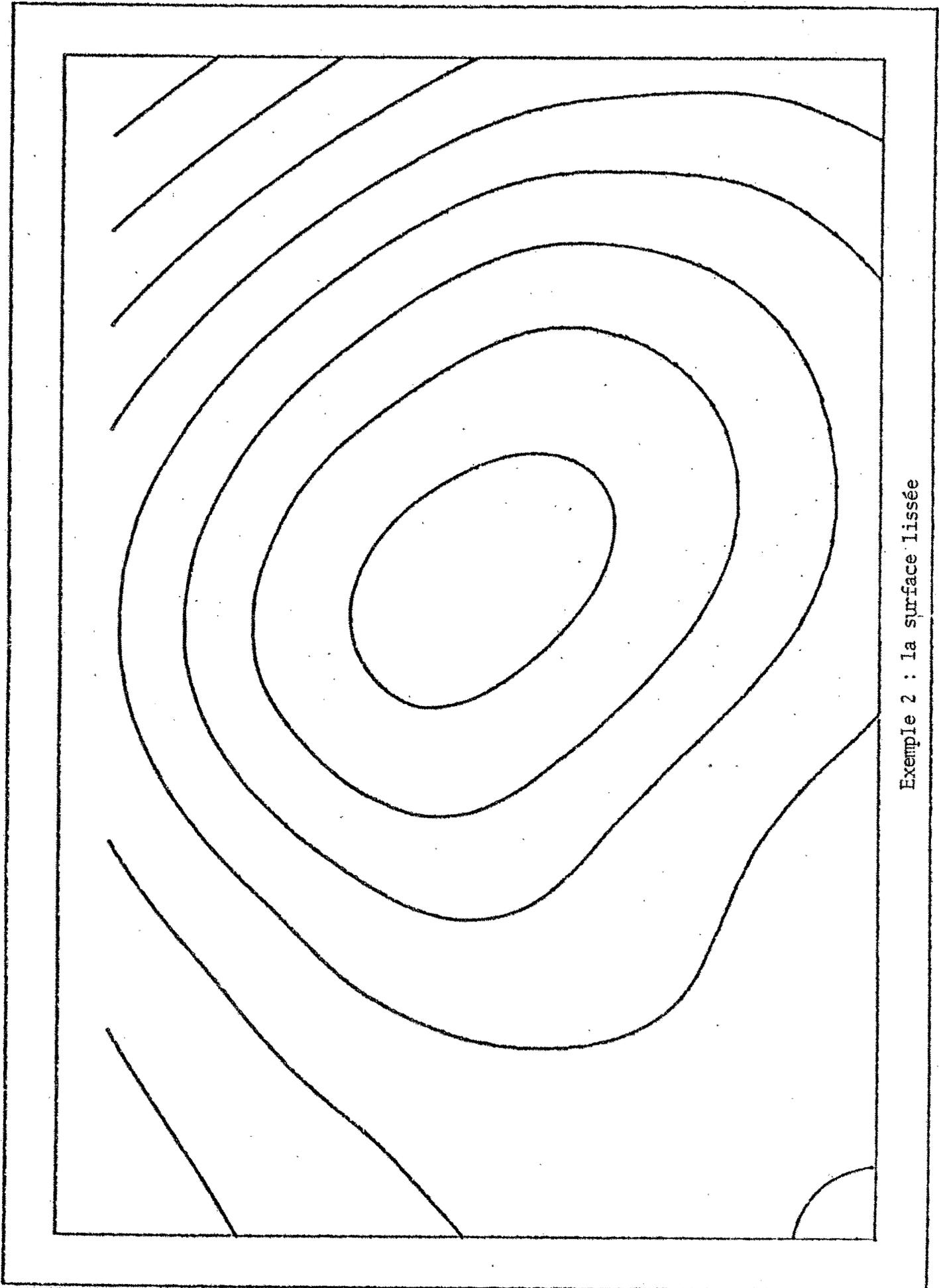
Exemple 1 : la fonction originale

DOS LE 05/03/79 A 23:23:34 DESSIN NO 001



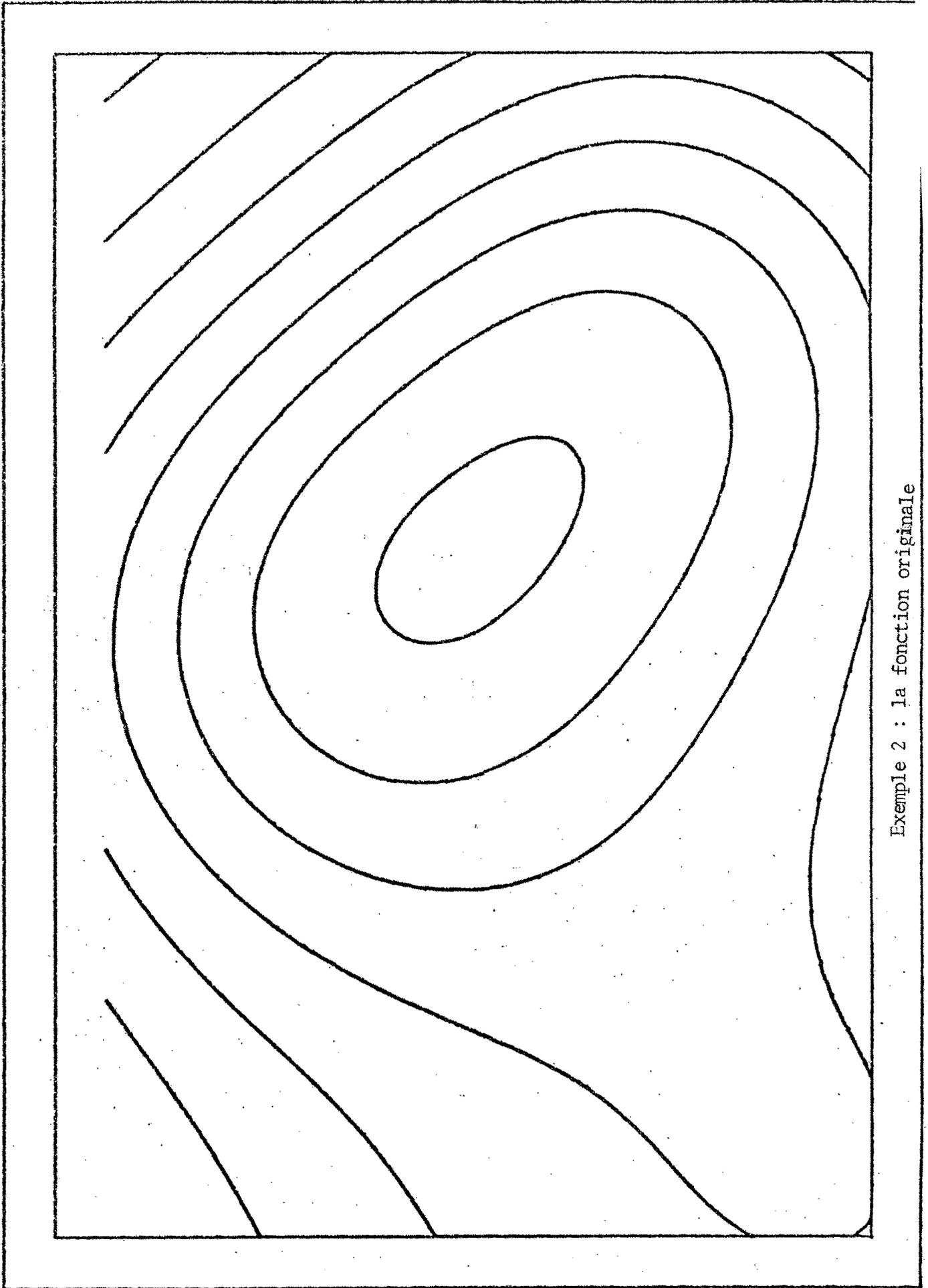
Exemple 2 : les données

— — — — —



Exemple 2 : la surface lissée

DOS LE 23/03/79 A 23:35:16 DESSIN NO 002



Exemple 2 : la fonction originale

5 - LE PROCÉDE PAR RACCORDEMENT

Le but de ce paragraphe est d'appliquer à deux variables les techniques du chapitre V.

Supposons donc que les points t_i $i = 1, \dots, n$ satisfont aux hypothèses suivantes :

- (a) Les points t^i sont intérieurs à un rectangle R.
- (b) Ils sont répartis un peu partout dans R.

Considérons maintenant un recouvrement de $R = [a,b] \times [c,d]$ en sous-rectangles R_{ij} définis par :

$$R1) \quad R_{ij} = [a_i, b_i] \times [c_j, d_j] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, nr_x \\ j = 1, 2, \dots, nr_y \end{array}$$

$$R2) \quad a = a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \dots < b_{nr_x} = b$$

$$R3) \quad c = c_1 < c_2 < d_1 < c_3 < d_2 < \dots < d_{nr_y} = d$$

$$R4) \quad P_{ij} = \{t_k \in R / t^k \in R_{ij}\} \neq \emptyset$$

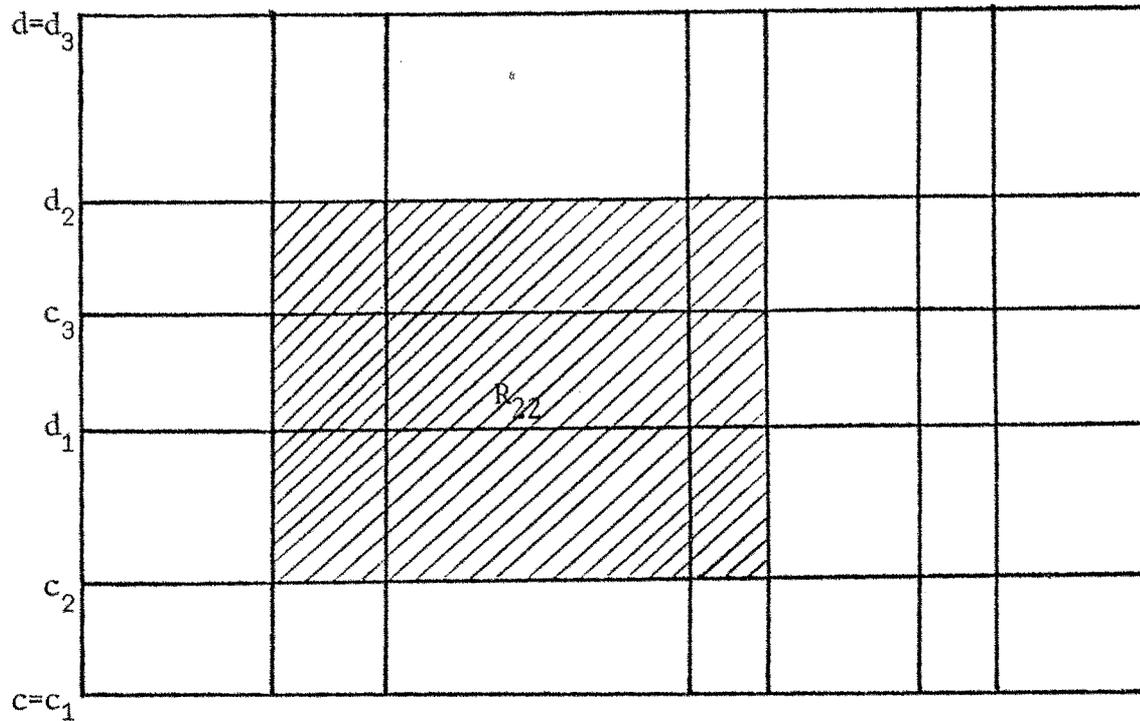
Ceci entraîne :

$$(i) \quad R = \bigcup_{i,j} R_{ij}$$

$$(ii) \quad R_{ij} \cap R_{i+1j} \neq \emptyset \quad 1 \leq i \leq nr_x - 1 \quad j = 1, \dots, nr_y$$

$$(iii) \quad R_{ij} \cap R_{ij+1} \neq \emptyset \quad 1 \leq j \leq nr_y - 1 \quad i = 1, \dots, nr_x$$

La situation est représenté dans le dessin ci-dessous :



Soit maintenant σ_{ij} la fonction spline d'ajustement du type plaque mince (avec paramètre choisi par Validation Croisée) calculée sur les données du rectangle R_{ij} . Dans ce qui suit, on appliquera un procédé de "collage" ou raccordement, pour construire une surface définie sur R , à partir des splines σ_{ij} . L'idée de cette construction est analogue à celle faite à une dimension suivant les idées de Paihua (cf.[36], [35]).

Il faut remarquer que dans la définition des splines locales $\sigma_{i,j+1}$ et $\sigma_{i,j}$ interviennent les points de l'ensemble $P_{i,j+1} \cap P_{ij}$. (De même pour $\sigma_{i+1,j}$, σ_{ij}).

Pour construire la surface définie sur R à partir des σ_{ij} , il suffit d'utiliser répétitivement la proposition suivante dont la démonstration découle facilement des résultats du chapitre V.

Considérons deux rectangles R_A et R_B qui s'intersectent verticalement et considérons deux fonctions appartenant à C^1 : g_A définie sur R_A , et g_B définie sur R_B . On a alors :

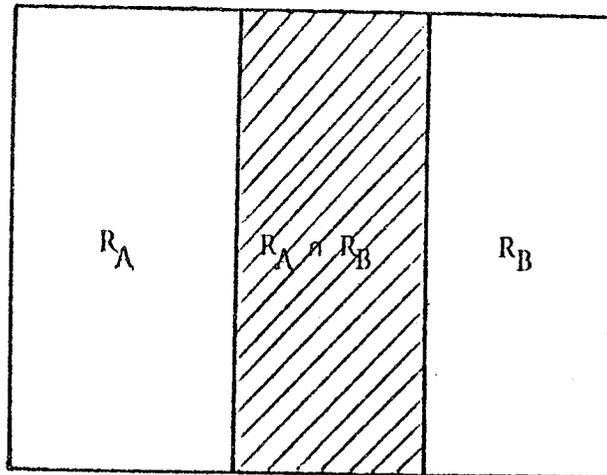
Proposition 5.1

Si on prend :

$$\sigma_{AB}(x,y) = \begin{cases} \sigma_A(x,y) & \text{si } (x,y) \in R_A \setminus R_B \\ \alpha\left(\frac{x-a_0}{b_0-a_0}\right) \sigma_A(x,y) + \left(1 - \alpha\left(\frac{x-a_0}{b_0-a_0}\right)\right) \sigma_B(x,y) & (x,y) \in R_A \cap R_B \\ \sigma_B(x,y) & \text{si } (x,y) \in R_B \setminus R_A \end{cases}$$

où $R_A \cap R_B = [a_0, b_0] \times [\bar{c}, \bar{d}]$

et $\alpha(\tilde{x}) = (\tilde{x} - 1)^2 (2\tilde{x} + 1) \quad \tilde{x} \in [0, 1]$



Alors, σ_{AB} est de classe $C^1(R_A \cup R_B)$.

Démonstration - Cf. [35]

De la même façon, on colle deux fonctions définies sur des rectangles se coupant horizontalement.

En appliquant ce procédé d'une façon répétée, on peut "coller" tous les morceaux pour obtenir :

$$G(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i,j}(x,y) \quad ; \quad (x,y) \in R_{ij} \setminus [R_{i,j-1} \cup R_{i,j+1} \cup R_{i+1,j} \cup R_{i-1,j}] \\ \alpha \left(\frac{x-a_{i+1}}{b_i-a_{i+1}} \right) \sigma_{i,j}(x,y) + (1-\alpha \left(\frac{x-a_{i+1}}{b_i-a_{i+1}} \right)) \sigma_{i+1,j}(x,y) \quad ; \\ \quad \quad \quad (x,y) \in R_{ij} \cap R_{i+1,j} - (R_{i,j+1} \cup R_{i,j-1}) \\ \alpha \left(\frac{y-c_{j+1}}{d_j-c_{j+1}} \right) \sigma_{ij}(x,y) + (1-\alpha \left(\frac{y-c_{j+1}}{d_j-c_{j+1}} \right)) \sigma_{i,j+1}(x,y) \\ \quad \quad \quad (x,y) \in R_{ij} \cap R_{i,j+1} - (R_{i+1,j} \cup R_{i-1,j}) \\ a \left(\frac{x-a_{i+1}}{b_i-a_{i+1}} \right) \left[\alpha \left(\frac{y-c_{j+1}}{d_j-c_{j+1}} \right) \sigma_{ij}(x,y) + (1-\alpha \left(\frac{y-c_{j+1}}{d_j-c_{j+1}} \right)) \sigma_{i,j+1}(x,y) \right] + \\ \quad \quad \quad + (1-\alpha \left(\frac{x-a_{i+1}}{b_i-a_{i+1}} \right)) \left[\alpha \left(\frac{y-c_{j+1}}{d_j-c_{j+1}} \right) \sigma_{i+1,j}(x,y) + (1-\alpha \left(\frac{y-c_{j+1}}{d_j-c_{j+1}} \right)) \sigma_{i+1,j+1}(x,y) \right] \\ \quad \quad \quad (x,y) \in R_{ij} \cap R_{i+1,j} \cap R_{i,j+1} \cap R_{i+1,j+1} \end{array} \right.$$

Avec la convention suivante :

$$\sigma_{0,j} = \sigma_{nrx+1,j} = \sigma_{i,0} = \sigma_{i,nry+1} = 0$$

Les programmes utilisés pour obtenir l'évaluation de G sont facilement constructibles à partir de ceux déjà faits pour l'interpolation (cf. [36]) une note technique permettant d'utiliser ces programmes paraîtra prochainement.

Pour illustrer le fonctionnement de cette technique, on a pris comme exemple la fonction n° 2 du paragraphe précédent et on a fait les mêmes essais mais pour 700 points tirés au hasard dans $[0 ; 2,3] \times [0 ; 1,5]$. Il faut remarquer d'abord que le calcul de Ω et de ses valeurs propres devient complètement impossible si l'on considère la totalité des points, d'une part à cause de l'énorme capacité en mémoire centrale qu'il faudrait, et ensuite à cause du temps de calcul qui sera discuté dans le paragraphe suivant.

On a divisé le rectangle en 24 sous rectangles définis par :

i	1	2	3	4	5	6
a_i	0	0,3	0,7	1	1,4	1,7
b_i	0,6	0,9	1,3	1,6	2	2,3

i	1	2	3	4
c_i	0	0,3	0,7	1
d_i	0,6	0,9	1,3	1,5

Dans le dessin n° 1 on représente les points et la partition décrite ci-dessus. Dans le dessin n° 2 on voit le tracé des courses de Niveau de la surface bruitée, dans le dessin n° 3 on trace les courbes de niveau de la fonction lissée par le procédé de raccordement, et dans le dessin n° 4, on trace la fonction test. (Il est utile de comparer avec le même exemple pour 100 points cf. page 169).

6 - LES TEMPS D'EXECUTION

Considérons finalement les temps de calcul pour les problèmes bidimensionnels, en utilisant la technique déjà exposée. Dans le tableau ci-dessous, on donne les temps de calcul pour différentes valeurs de n, lorsqu'on utilise une seule spline de lissage.

n	TC. Val. Prop.	TC. Par. Opt.	TC. F. Spline	TOTAL
40	4.2370	8.5337	1.0940	13.8647
50	7.5484	16.5525	1.7350	25.8359
60	12.5260	27.6989	2.5500	42.7749
70	19.7569	43.4804	3.5500	66.7873
80	28.4075	59.1651	4.7590	92.3316
90	40.2042	77.8561	6.1910	124.2513
100	53.9608	103.8002	7.8680	165.6290

Il est clair que le temps croît très rapidement lorsque n augmente, plus précisément, on peut donner la formule approximative :

$$\text{temps} \approx n^3 \times 2 \times 10^{-4}$$

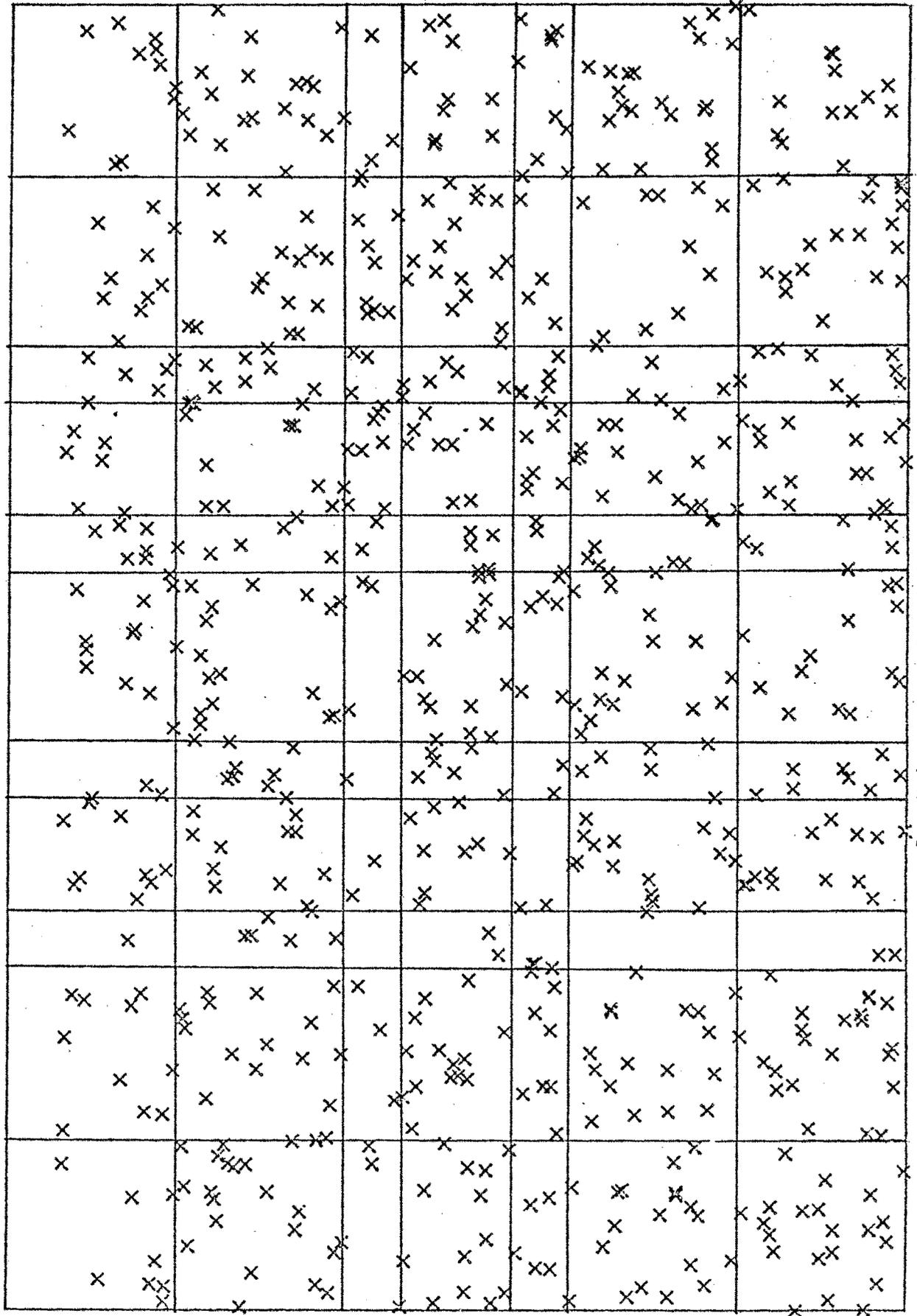
On peut conclure que pour lisser les données fictives de l'exemple du paragraphe précédent, soit $n = 700$, on dépenserait un temps égal à : 61740 secs, or, le procédé par raccordement ne dépense que 1641 secs ce qui représente un gain considérable. Il faut remarquer que ce gain est d'autant plus grand lorsque le nombre de points augmente, puisqu'il est égal à la somme des temps de calcul sur chaque rectangle, qui lui reste en général fixé.

7 - CONCLUSIONS ET TRAVAIL FUTUR

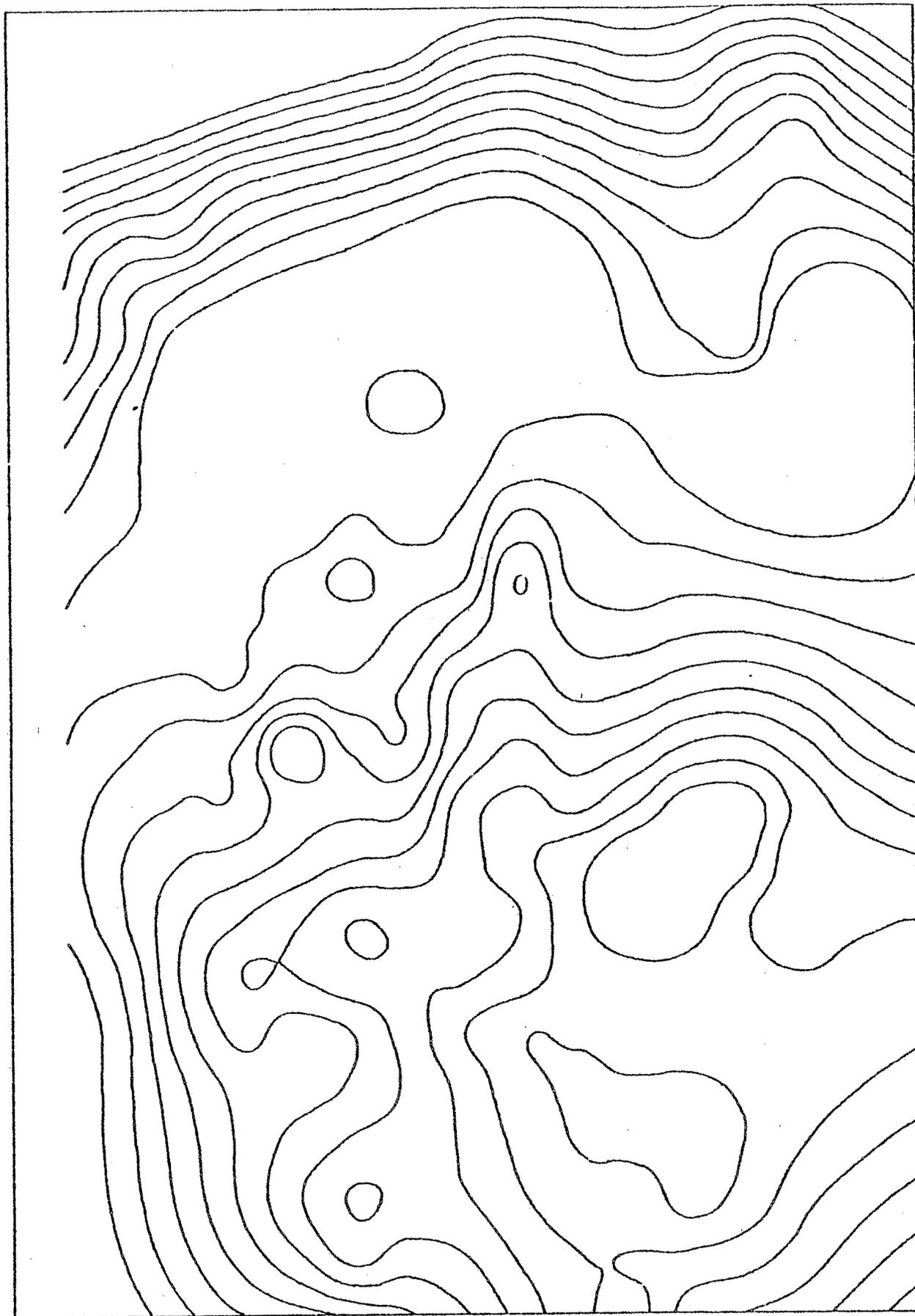
Le problème, à une variable, semble assez bien réglé. Par contre, dans les problèmes à deux variables reste beaucoup à faire. Notamment, on devrait pouvoir utiliser les résultats asymptotiques pour calculer plus efficacement la trace de $A_n(\tau)$. D'autre part, il reste à obtenir les résultats théoriques permettant de justifier d'une façon plus convaincante les résultats pratiques, surtout à deux variables où le seul résultat théorique est donné pour les splines bicubiques.

Il serait souhaitable aussi de démontrer la convergence, en moyenne quadratique par exemple, ceci à une et deux dimensions.

Finalement, il serait bon de trouver un algorithme rapide dans le cas d'une grille uniforme à 2 variables. Ce qui paraît tout à fait possible.

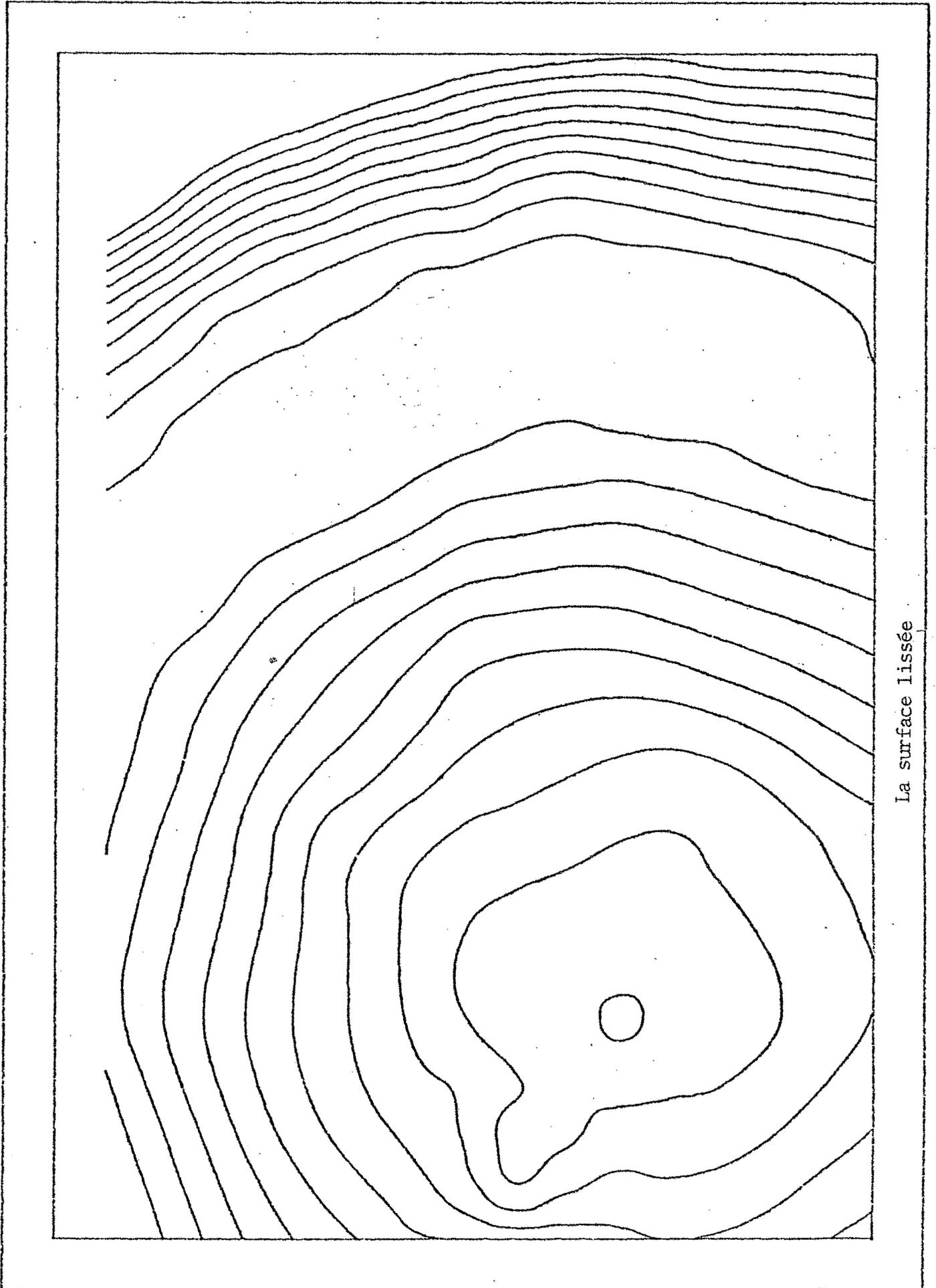


Les Points et la Partition

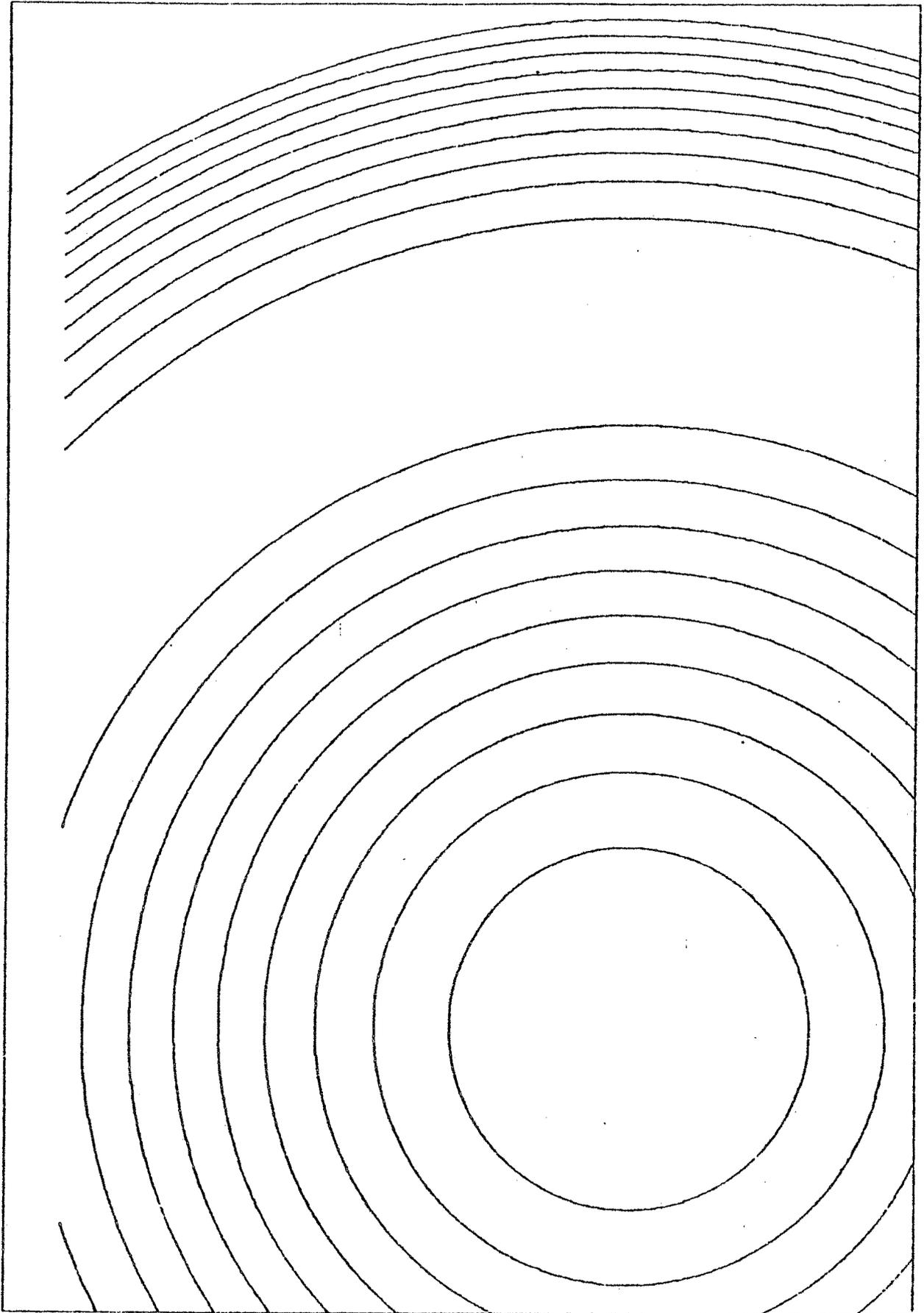


Les données

DOS LE 05/03/79 A 23:24:59 DESSIN NO 003



La surface lissée



la fonction originale

DOS LE 05/03/79 A 23:23:34 DESSIN NO 001

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - AHLBERG, NILSON & WALSH
"The Theory of Splines and Their Applications"
Academic Press, New York (1967)
- [2] - ALLEN, D.M.
"The Relation Between Variable Selection and Data Augmentation
on a Method for Prediction"
Technometrics 16(1), pp. 125-127 - 1974
- [3] - ANDERSEN & BLOOMFIELD
"A Time series Approach to numerical Differentiation"
Technometrics 16(1) pp. 69-75 - 1974
- [4] - ANDERSEN & BLOOMFIELD
"Numerical Differentiation Procedures for non exact Data"
Numerische Mathematik 22, pp. 157-182 - 1974
- [5] - ATTIEA, M.
"Théorie et Applications de Fonctions Spline en Analyse Numérique"
Thèse Grenoble (1966)
- [6] - BELLMAN, R.
"Introduction to Matrix Analysis"
McGraw Hill, New York (1960)
- [7] - BABUSKA I. & A.K. AZIZ
"Foundations of the Finite Element Method with Applications to
Partial Differential Equations"
Edited by A.K. AZIZ, Academic Press, New York (1972)
- [8] - CHATELIN, F.
"Théorie de l'Approximation des Opérateurs Linéaires. Application
au Calcul des Valeurs Propres d'Opérateurs Différentiels et Intégraux"
Cours du DEA d'Analyse Numérique
1976 - Université Scientifique et Médicale de Grenoble

- [9] - CHATELIN, F. & LEMORDANT, J.
"La Méthode de Raleigh-Ritz Appliquée à des Opérateurs Différentiels
Elliptiques, Ordres de Convergence des Eléments Propres"
Numerische Mathematik 23, 215-222 (1975)
- [10] - COGBURN, R. and DAVIS H.T.
"Periodic Splines and Spectra Estimation"
Ann. Statistics 2, 1108-1126, 1974
- [11] - COURANT, R.
"Über die Schwingungen Eingespannter Platten"
Mathematische Zeitschrift 15 (1922)
- [12] - COURANT, R. & HILBERT, D.
"Methods of Mathematical Physics"
Vol I. Interscience Publishers, New York 1953
- [13] - CRAVEN, P. and WAHBA, G.
"Smoothing Noisy Data with Spline Functions"
Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of
Generalized Cross Validation"
Numerische Mathematik 31, 377-403 (1979)
- [14] - DE BOOR, C.
"Bicubic Spline Interpolation"
Journal of Mathematics & Physics 41 p. 212 (1962)
- [15] - DUCATEAU, Ch.
"Etude de quelques Problèmes d'Interpolation"
Thèse - Université de Grenoble - 1971
- [16] - DUCHON, J.
"Fonctions Spline et Vecteurs Aléatoires"
Séminaire d'Analyse Numérique n° 213 - U.S.M.G.
Grenoble, 9/01/1975

- [17] - DUCHON, J.
"Fonctions Spline à Energie Invariante par Rotation"
Rapport de Recherche n° 27
U.S.M.G. - Grenoble 1976
- [18] - DUCHON, J.
"Interpolation des Fonctions de Deux Variables par des Fonctions
Spline du Type Plaque Mince"
R.A.I.R.O. Analyse Numérique
Vol 10 - N° 12 1976 pp. 5-12
- [19] - DUC-JACQUET, M.
"Résolution de Quelques Problèmes d'Analyse Numérique à l'aide
de Perturbations par des Matrices Antyscalaires"
Thèse Grenoble
- [20] - FIX, G.
"Effects of Quadrature Errors in Finite Element Approximation of
Steady State, Eigenvalue and Parabolic Problems "in" Foundations
of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential
Equations"
Edited by A.K. AZIZ. Academic Press, New York (1972)
- [21] - GANTMACHER
"Matrix Theory"
Tome I. Chelsea Pub. Co., New York (1960)
- [22] - GANTMACHER
Op. Cit Tome II
- [23] - GEISSER, S.
"The Predictive Sample Reuse Method With Applications"
J.A.S.A. 70, 350, 320-328
(1975)
- [24] - GOLDSTEIN, M. and SMITH, A.F.M.
"Ridge-Type Estimators for Regression Analysis"
J. Roy. Stat. Soc. Ser. B. 36,2, 284-291
(1974)

- [25] - GOLUB, G., HEATH, M. and WAHBA, G.
"Generalized Cross-Validation as a Method for choosing a Good Ridge Parameter"
Technical Report n° 491 May 1977 - University of Wisconsin Madison
- [26] - GOLUB, G.H. and REINSCH, C.
"Singular Value Decomposition and Least Squares Solution"
Num. Math 14, 403 - 420 (1970)
- [27] - GOULD, S.H.
"Variational Methods For Eigenvalue Problems"
Oxford University Press - London - 1966
- [28] - KAC, M., MURDOCK, W.L. and SZEGÖ, G.
"On the Eigenvalues of Certain Hermitien forms"
Canadian Journal of Mathematics
- [29] - KIMELDORF, G. and WAHBA, G.
"Some Results on Tchebycheffian Spline Functions"
J. Math. Anal. Appl. 33, 82-95, 1971
- [30] - LAURENT, P.J.
"Approximation et Optimisation"
Hermann - Paris - 1972
- [31] - LAURENT, P.J.
"Etude du Développement des Fonctions Spline de Lissage pour des Données de Télémétrie"
Volume I - IMAG - Grenoble 1976
- [32] - LAURENT, P.J.
Op. Cit. Vol II.
- [33] - MALLOWS, C.L.
"Some Concepts on C_p "
Technometrics 15, 661-675 - 1973

- [34] - NECAS, J.
"Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques"
Masson - Paris 1967
- [35] - PAIHUA, L.
"Quelques Méthodes Numériques Pour les Fonctions Spline à une et plusieurs Variables"
Thèse - Grenoble - Mai 1978
- [36] - PAIHUA, L. et UTRERAS, F.
"Un Ensemble de Programmes pour l'Interpolation de Fonctions, par des Fonctions Spline du Type Plaque Mince"
Rapport de Recherche n° 140 - Octobre 1978 - IRMA Grenoble
- [37] - REINSCH, C.
"Smoothing by Spline Functions"
Numerische Mathematik 10, 177-183 (1967)
- [38] - REINSCH, C.
"Smoothing by Spline Functions II"
Numerische Mathematik 16, 451-454 (1971)
- [39] - REINSCH, C.
"Oscillation Matrices with Spline Smoothing"
Numerische Mathematik 24, 375-382 (1975)
- [40] - ROBERT, F.
"Analyse Numérique Itérative"
Cours INP.G - Grenoble 1974
- [41] - SAAD, Y.
"Calcul de Valeurs Propres de Grandes Matrices Hermiennes par des Techniques de Partitionnement"
Thèse - Grenoble - 1974
- [42] - SCHOENBERG, I.J.
"Spline Functions and the Problem of Graduation"
Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)
52, 947-950 - 1964

- [43] - SCHOENBERG, I.J.
"Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant
Data by Analitic Functions"
Quartely of Applied Mathematics - Vol IV - N° 1, 2 (1946)
- [44] - SARD, A.
"Linear Approximation"
Mathematical Surveys
Number 9. Am. Math. Soc. Providence - 1963
- [45] - SCHWARZ, H.R.
"Tridiagonalisation of a Symetric Band Matrix"
in "Linear Algebra" Edited by J.H. Wilkinson et C. Reinsch
- [46] - STONE, M.
"Cross-Validatory Choice and Assesement of Statistical Prediction"
J.R.S.S. Ser. B. 36(2) 111-147 (1974)
- [47] - SUTTI, C.
"One dimensional Minimisation Methods"
in "Minimisation Algorithms" Edited by G.P. Szegö,
Academic Press, London (1972)
- [48] - THOMMAN, J.
"Determination et Construction de Fonctions Spline à Deux
Variables Définies sur un Domaine rectangulaire ou circulaire"
Thèse Lille - 1970
- [49] - UTRERAS, F.
"Sur le Choix du Paramètre d'Ajustement dans le Lissage par
Fonctions Spline"
Exposé au Colloque National d'Analyse Numérique de France
Giens 21 Mai 1978 - Présenté à Num. Math.

- [50] - UTRERAS, F.
"Utilisation des Programmes de Calcul du Paramètre d'Ajustement
dans le Lissage par Fonctions Spline"
Rapport de Recherche n° 121 - U.S.M.G.
Grenoble - Mai 1978
- [51] - UTRERAS, F.
"Quelques Résultats d'Optimalité pour la Méthode de Validation
Croisée"
Exposé au Séminaire d'Analyse Numérique de Grenoble - N° 301
Novembre 1978
- [52] - UTRERAS, F.
"Sur le Choix du Paramètre d'Ajustement dans le Lissage par
Fonctions Spline"
Séminaire d'Analyse Numérique - N° 296
Grenoble - Mars 1978
- [53] - WAHBA, G.
"Optimal Convergence Properties of Variable knot Kernel, and
Orthogonal Series Methods for Density Estimation"
Ann. Statist. 3,15-29, 1975
- [54] - WAHBA, G.
"Practical Approximate Solutions to Linear Operator Equations
When the Data are Noisy"
Siam Journal Numerical Analysis. Vol 14
N° 4 September 1977
- [55] - WAHBA, G.
"Smoothing Noisy Data with Spline Functions"
Num. Math. 24 (1975) pp. 383-393
- [56] - WAHBA, G.
"A Canonical Form of the Problem of Estimating Smooth Surfaces"
Technical Report # 420 Dep. of Statistics.
University of Wisconsin, Madison 1975

- [57] - WAHBA, G.
"Optimal Smoothing of Density Estimates"
in Classification and Clustering, J. Van Ryzin ed., 423-458,
Academic Press (1977)
- [58] - WAHBA, G.
"A Survey of Somme Smoothing Problems and the Method of Generalized
Cross Validation for Solving them"
TR # 430 Dept of Statistics University of Winsconsin
Madison 1976
- [59] - WAHBA, G.
"Improper Priors, Spline Smoothing and the Problem of Guarding
Against Model Errors in Regression"
TR # 508. January 1978 - University of Wisconsin, Madison
- [60] - WAHBA, G.
"Automatic Smoothing of the Log Periodogram"
TR # 536. Dept. of Statistics University of Wisconsin, Madison
August 1978
- [61] - WAHBA, G. and WOLD, S.
"A Completely Automatic French Curve : Fitting Spline Functions
by Cross-Validation"
Comm. Statist. 4, 1-7, 1975
- [62] - WAHBA, G. and WOLD, S.
"Periodic Splines for Spectral Density Estimation : The use of
Cross-Validation for determining the Degree of Smoothing"
Comm. Statist. 4,2,125-121, 1975
- [63] - WEINBERGER, H.F.
"Variational Methods for Eigenvalue Approximation"
Regional Conference Series in Applied Mathematics
N° 15 SIAM ed. 1974
- [64] - WOLD, S.
"Spline functions in Data Analysis"
Technometrics 16, 1, 1-11 (1974)

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 20 Avril 1979

Le Président de la thèse

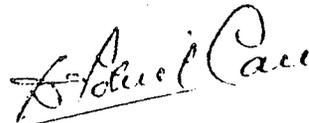


M. W. STINE

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 17 Avril 1979

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



DR G. CAU