



HAL
open science

Dynamique non-linéaire et anisotropie primordiale en cosmologie

Cyril Pitrou

► **To cite this version:**

Cyril Pitrou. Dynamique non-linéaire et anisotropie primordiale en cosmologie. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00289516

HAL Id: tel-00289516

<https://theses.hal.science/tel-00289516>

Submitted on 20 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale de Physique de la région parisienne
Institut d'Astrophysique de Paris

THÈSE de DOCTORAT de l'Université Paris VI

présentée par

Cyril PITROU

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'Université Paris VI

Spécialité : Physique Théorique

**Dynamique non-linéaire et anisotropie primordiale en
cosmologie**

soutenue le 29 mai 2008 devant le jury composé de

Mme	Ruth DURRER	Rapporteur
Mr	David LANGLOIS	Rapporteur
Mr	David SPERGEL	Examineur
Mr	Jean-Philippe UZAN	Directeur de thèse
Mr	Filippo VERNIZZI	Examineur
Mr	Jean-Bernard ZUBER	Président

Résumé

La grande précision des mesures du fond diffus cosmologique nécessitent de comprendre avec finesse la physique sous-jacente afin d'en tirer des conclusions pertinentes sur la phase primordiale de l'univers. Dans cette thèse nous étudions la théorie des perturbations non-linéaires dans le cadre de la relativité générale. Notre but est de déterminer le transfert des perturbations de la métrique ainsi que des perturbations du contenu matériel, entre la phase primordiale de l'univers et les observations réalisées aujourd'hui. Nous nous plaçons tout d'abord dans l'approximation fluide afin d'appréhender les comportements généraux attendus. Ensuite nous étudions la théorie cinétique au second ordre, nécessaire pour obtenir le transfert radiatif non-linéaire, dans le but de déterminer la non-gaussianité dans le fond diffus cosmologique. Nous étudions également la théorie des perturbations linéaires autour d'espaces anisotropes. Nous élaborons la théorie des perturbations invariantes de jauge autour d'un espace de Bianchi I, puis nous étudions les signatures observationnelles d'une phase primordiale d'inflation possédant cette symétrie.

Mots Clés : Cosmologie, inflation, perturbations, anisotropie, CMB, non-gaussianité, Bianchi.

Abstract

Non-linear dynamics and primordial anisotropy in cosmology

The high accuracy in the measurements of the cosmic microwave background requires to understand in details the underlying physics in order to draw relevant conclusions for the primordial phase of the universe. In this thesis, we study the theory of non-linear perturbations in the framework of general relativity. Our goal is to determine the transfer of the metric perturbations together with the matter content perturbations, between the inflationary primordial phase of the universe and the observations performed today. We first consider the fluid approximation in order to extract the general leading behaviours. We then turn to the kinetic theory at second order, which is necessary in order to obtain the non-linear transfer function for radiation, in order to determine the non-Gaussianity in the cosmic microwave background. We also study the linear perturbation theory around anisotropic universes. We set up the gauge invariant perturbation theory around a Bianchi I space-time, and we study the observational signatures of a model of inflation having this symmetry.

Key Words : Cosmology, inflation, perturbations, anisotropy, CMB, non-Gaussianity, Bianchi.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Philippe Uzan, mon directeur de thèse, pour avoir accepté d'encadrer cette thèse et m'avoir fait confiance après un simple café. Je lui dois une disponibilité sans faille doublée d'une bonne humeur permanente qui m'ont permis d'effectuer ces recherches dans les meilleures conditions. Il ne reste plus qu'à attendre 2035 pour devenir des amis de 30 ans.

Je tiens également à remercier le jury de thèse, Jean-Bernard Zuber, Filippo Vernizzi, David Spergel et plus particulièrement Ruth Durrer et David Langlois pour avoir accepté d'être rapporteurs.

Merci aux collaborateurs de ces trois années, Peter Dunsby, Chris Clarkson, Bob Osano, Francis Bernardeau, Raul Abramo, et Thiago Pereira, ce dernier étant devenu par ailleurs un ami et professeur de portugais, pour qui j'aurai beaucoup de mal à rendre la qualité de l'accueil qu'il m'a fait au Brésil.

Je remercie les membres de l'Institut d'Astrophysique de Paris, pour les discussions pas uniquement techniques que j'ai eues avec eux, plus particulièrement Guillaume Faye pour m'avoir éclairé sur l'utilisation des ordinateurs, Gilles Esposito-Farez pour des déjeuners tardifs, ainsi que Carlo Schimd et Simon Prunet pour m'avoir rassuré face aux difficultés d'une thèse.

Je remercie l'équipe PLANET et plus précisément Jean-Philippe Beaulieu, John Greenhill et Stefan Dieters, pour avoir accepté de me faire découvrir l'astronomie et les marsupiaux.

Je remercie les thésards et ex-thésards, notamment ceux qui supportent et supportaient de près mes calculs bruyants, Frank Genêt, Andrew Fox, Marc Lilley et Yuko Kakazu.

On arrive à une thèse après une scolarité assez longue et la liste des professeurs à qui je suis redevable est très longue. Je ne peux donc être exhaustif mais je remercie Mr Souquet, Mr Quibel, Mr Ranty, Mr Palet, et Pierre Salati. Je remercie également Antony Carrington, Pierre Rodière, George Smoot et Jodi Lamoureux pour m'avoir initié à la recherche.

Je remercie toute ma famille qui a toujours respecté tous mes choix, notamment ma mère qui

a subitement montré beaucoup d'intérêt pour la cosmologie. Cette thèse ne serait pas sans mon père qui m'a transmis le goût de la physique et expliqué le calcul différentiel avec persévérance quand mes expériences balistiques estivales le nécessitaient.

Merci à tous mes amis, mes compagnons de route et de randonnée, Sébastien, David, Etienne, Jean et Béatrice, les Orleanais, Pierre, Claire, Mathieu, Jean-Yves, Toto et Céline, les Lyonnais, Sophie, Hélène, Samuel, Elise, Mickael, Anne et Stéphane, les musiciens des "Spiders", Yann, Julien, David, Pierre et Neko.

Enfin toute ma reconnaissance va à ma très chère Lucie pour son soutien permanent et sa compréhension sans limite des besoins intemporels de la recherche.

Introduction

En 2003, alors que je terminais mon DEA, les résultats du satellite WMAP sur la mesure du fond cosmologique ont fait passer la cosmologie dans une ère de grande précision, en complétant significativement les résultats similaires du satellite COBE parus en 1992. Le modèle standard du big-bang comporte certes encore beaucoup d'inconnues, notamment pour son contenu matériel sombre, mais il devenait ainsi capable de quantifier précisément ce qu'il n'expliquait pas. Depuis ce moment là, le modèle de l'*inflation* a également été admis et a été adjoint au modèle du big-bang chaud pour former le modèle standard de la cosmologie. L'inflation permet d'expliquer l'origine des fluctuations à partir desquelles les structures astrophysiques se sont formées par effondrement gravitationnel. Cependant cette phase primordiale d'expansion accélérée se situe à des échelles d'énergie inaccessibles en laboratoire, et constitue donc une fenêtre sur la physique des très hautes énergies qui reste à découvrir. Sa description reste pour l'heure phénoménologique et un grand nombre de modèles d'inflation ont été construits, avec pour la plupart une motivation issue de la théorie des cordes. Les mesures les plus anciennes que nous pouvons obtenir de cette époque sont à chercher soit dans le fond diffus cosmologique soit dans les ondes gravitationnelles primordiales. Cependant l'univers ayant été opaque après l'inflation, le fond diffus cosmologique ne constitue pas une fenêtre directe sur l'inflation et seule l'étude détaillée de la dynamique des perturbations permet de remonter à la phase primordiale de l'univers. Quant aux ondes gravitationnelles primordiales, en principe elles témoignent directement de l'inflation mais leur détection directe reste encore un objectif à long terme.

L'étude de la dynamique des perturbations se fait généralement en perturbant linéairement les équations d'Einstein autour d'un espace homogène et isotrope, dit espace de fond. Cette théorie linéaire n'offre que très peu de prise pour différencier les modèles d'inflation. Les équations d'Einstein étant intrinsèquement non-linéaires, des effets fins sont attendus lorsque l'on prend en compte les perturbations au delà de l'ordre linéaire. Ceci peut notamment être à l'origine d'effets *non-gaussiens* qui pourront éventuellement être détectés par le satellite *Planck*, qui est la prochaine mission d'observation du fond diffus dont le lancement est prévu en octobre 2008. Pour cela il faudra nécessairement comprendre tous les effets d'évolution afin de contraindre la non-gaussianité héritée de l'inflation. La dynamique des perturbations de la métrique, c'est-à-dire de l'espace temps, est donnée par les équations d'Einstein. La dynamique du contenu matériel est soit envisagée dans l'approximation fluide, soit dans le cadre plus précis de la théorie cinétique par l'équation de Boltzmann. Par ailleurs le fait de supposer que l'espace est globalement isotrope pour dériver les équations d'évolution doit être testé si l'on

souhaite que le modèle repose sur un minimum d'hypothèses. Comme on peut montrer que cette isotropie décroît, cette interrogation concerne essentiellement la phase primordiale de l'univers. Pour cela, il faut développer toutes les prédictions d'une éventuelle anisotropie afin d'obtenir des prédictions génériques qui pourront être contraintes par les observations. Afin d'étudier ces deux aspects, ma thèse s'est focalisée sur la théorie non-linéaire autour d'un espace de fond homogène et isotrope ainsi que sur la théorie linéaire autour des espaces anisotropes.

Dans la première partie de cette thèse nous rappelons les résultats du modèle standard du big-bang en le reformulant éventuellement d'une manière nouvelle dans le but de l'étendre. Le premier chapitre rappelle les grandes lignes de la description de l'espace de fond en rappelant les principaux résultats du big-bang chaud. Le second chapitre passe en revue la théorie des perturbations linéaires dans un cadre simplifié. Nous étudions ainsi le cas idéal d'un mélange de radiation et de matière noire froide afin d'étudier les propriétés essentielles des perturbations de la métrique. Nous étudions ensuite dans l'approximation fluide la dynamique du mélange couplé de baryons et de radiation. Nous y présentons également le formalisme $1 + 3$ qui peut être utilisé comme une formulation alternative pour étudier la dynamique des perturbations. Dans le chapitre 3, nous exposons la physique du fond diffus cosmologique ainsi que la théorie cinétique qui constitue une bien meilleure description que l'approximation fluide. Nous avons essayé d'utiliser une formulation basée sur l'utilisation de tétrades afin de rendre plus transparent la microphysique. Dans le chapitre 4 nous exposons le modèle standard de l'inflation en insistant principalement sur le mécanisme de génération des fluctuations primordiales. Nous présentons comment cette dérivation peut être transposée au formalisme $1 + 3$. Ceci a donné lieu à une publication en collaboration avec Jean-Philippe Uzan dans *Physical Review D*.

Dans la seconde partie nous étudions les perturbations jusqu'au second ordre. Dans le chapitre 5, nous commençons d'abord par étudier la dépendance de jauge inhérente aux perturbations. Nous rappelons d'abord comment s'en affranchir en construisant des variables invariantes de jauge pour les quantités tensorielles, puis nous présentons comment cette méthode peut être généralisée à la théorie cinétique. Ceci a fait l'objet d'une publication dans *Classical and Quantum Gravity*. Nous exposons également comment les perturbations des quantités tensorielles peuvent être déterminées informatiquement, et nous exposons les grandes lignes du programme utilisé tout au long de cette thèse. Dans le chapitre 6 nous résumons les équations du second ordre et nous donnons autant que possible les solutions analytiques. Nous suivons pour cela la même démarche qu'au premier ordre en considérant d'abord les cas simplifiés d'un mélange de matière noire et de radiation dans l'approximation fluide. Puis nous étudions la dynamique des baryons couplés à la radiation et enfin présentons partiellement les résultats obtenus pour la théorie cinétique. Dans le chapitre 7 nous étudions certains aspects de la dynamique non-linéaire pendant l'inflation concernant la génération d'ondes gravitationnelles. Ceci a fait l'objet d'une publication en collaboration avec Bob Osano, Peter Dunsby, Jean-Philippe Uzan et Chris Clarkson dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. Nous rappelons également les prédictions génériques du modèle d'inflation standard, puis nous abordons les signatures observationnelles qui peuvent en être déduites sans prendre en compte les effets d'évolution.

Dans la troisième partie nous étudions la théorie des perturbations dans les espaces anisotropes, plus précisément pour des espaces de Bianchi I . Dans le chapitre 8 nous exposons la

construction formelle des perturbations invariantes de jauge ainsi que les équations dynamiques qu'elles satisfont. Ceci a donné lieu à une publication en collaboration avec Thiago Pereira et Jean-Philippe Uzan dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. Dans le chapitre 9 nous appliquons cette théorie à un modèle simple d'inflation afin d'en déterminer les signatures observationnelles. Ceci permet également d'évaluer la robustesse du modèle standard de l'inflation isotrope. Ces résultats ont également été publiés avec les mêmes auteurs dans le même journal.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Introduction	ix
I Introduction au modèle standard du Big-Bang	1
1 Cadre Général	3
1.1 Hypothèses	3
1.2 L'univers homogène et isotrope	4
1.2.1 Métrique	4
1.2.2 Loi de Hubble et décalage vers le rouge	5
1.2.3 Tenseur énergie-impulsion	6
1.2.4 Les équations de Friedmann	7
1.2.5 Notion d'horizon et de causalité	7
1.3 Le big-bang chaud	8
1.3.1 Dynamique de l'univers	8
1.3.2 Histoire thermique	10
1.3.3 Problèmes du big-bang chaud	11
2 Théorie des perturbations linéaires	13
2.1 Quantités perturbées	14
2.1.1 Décomposition SVT	14
2.1.2 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie-impulsion	15
2.1.3 Equations d'évolution des perturbations linéaires	17
2.2 Dynamique au premier ordre	19
2.2.1 Ère de radiation	19
2.2.2 Ère de matière	21
2.2.3 Transition radiation-matière	21

2.2.4	Loi de conservation	26
2.2.5	Intéactions baryons-photons	27
2.3	Le formalisme 1+3	30
2.3.1	Principe général	30
2.3.2	Utilisation de la dérivée de Lie	32
2.3.3	Comparaison des approches Bardeen et 1+3	33
3	Théorie cinétique et physique du fond diffus cosmologique	35
3.1	Effet Sachs-Wolfe	35
3.2	Multipôles	37
3.2.1	Prédictions statistiques multipôlaires	37
3.2.2	Approximation du ciel plat	38
3.2.3	Epaisseur de la surface de dernière diffusion	38
3.3	Théorie cinétique	40
3.3.1	Description statistique d'un ensemble de particules	40
3.3.2	Perturbations de tétrades	43
3.3.3	Equation des géodésiques	44
3.3.4	Terme de Liouville	46
3.3.5	Terme de collision pour la radiation	47
3.3.6	Hierarchie de Boltzmann et lien avec les observations du fond diffus	48
3.3.7	La limite fluide de l'équation de Boltzmann	49
3.3.8	Conclusion	50
4	L'inflation standard	51
4.1	Phénoménologie	52
4.2	Quantification de l'inflaton et spectre primordial	53
4.3	La variable de Mukhanov-Sasaki en formalisme 1+3 (article)	57
II	Dynamique au delà de l'approximation linéaire et non-gaussianité	63
5	La théorie des perturbations dans le régime non-linéaire	67
5.1	Problématique	67
5.2	La théorie des perturbations : tenseurs et fonction de distribution (article)	70
5.3	Traitement informatique des perturbations	103
5.3.1	xAct	103
5.3.2	Algorithme de perturbation	103
5.3.3	Un exemple simple : la perturbation au premier ordre du scalaire de Ricci	108
6	Dynamique au second ordre	111
6.1	État des lieux	111
6.2	Approximation fluide	112
6.2.1	Équations d'évolution des perturbations	112
6.2.2	Loi de conservation	114
6.2.3	Ère de radiation	115
6.2.4	Ère de matière	118

6.2.5	Transition radiation-matière	119
6.2.6	Intéactions baryons-photons	121
6.2.7	Physique du fond diffus cosmologique	121
6.3	Théorie cinétique au second ordre	123
6.3.1	Équation des géodésiques	123
6.3.2	Terme de Liouville	124
6.3.3	Hierarchie de Boltzmann et lien avec les observations	125
6.3.4	Limite fluide de l'équation de Boltzmann	126
7	L'inflation au delà de l'ordre linéaire et signature à grande échelle	127
7.1	Généralités	127
7.2	Ondes gravitationnelles générées par des effets de second-ordre pendant l'inflation (article)	128
7.3	Le formalisme in-in	155
7.4	Perturbations scalaires générées au second ordre	155
7.5	Les signatures observationnelles	156
7.5.1	Statistiques sur des champs	156
7.5.2	Le bispectre aux grandes échelles	158
III	Cosmologie dans un univers anisotrope	161
8	Théorie des perturbations autour d'un espace de Bianchi I	163
8.1	Theorie des perturbations cosmologiques dans un univers anisotrope (article) . . .	164
8.2	Variables invariantes de jauge dans le cas d'un espace de Bianchi quelconque . . .	197
9	Modèle d'inflation anisotrope et signatures observationnelles (article)	199
	Conclusion et perspectives de recherche	249
	Appendices	251
A	Commutation des dérivées covariantes	251
B	Quantités géométriques	252
B.1	Symboles de Christoffel	252
B.2	Connections affines	253
B.3	Tenseur d'Einstein	254
C	Perturbations de la matière	256
C.1	Vitesse	256
C.2	Tenseur énergie-impulsion	257
D	Équations au second ordre dans le cas plat	258
D.1	Équations de conservation	258
D.2	Équations d'Einstein dans le cas d'un fluide parfait avec $c_s^2 \neq w$	258
E	Conservation de la perturbation de courbure comobile au second ordre	259
	Bibliographie	262

Première partie

Introduction au modèle standard du
Big-Bang

Chapitre 1

Cadre Général

Sommaire

1.1	Hypothèses	3
1.2	L'univers homogène et isotrope	4
1.2.1	Métrique	4
1.2.2	Loi de Hubble et décalage vers le rouge	5
1.2.3	Tenseur énergie-impulsion	6
1.2.4	Les équations de Friedmann	7
1.2.5	Notion d'horizon et de causalité	7
1.3	Le big-bang chaud	8
1.3.1	Dynamique de l'univers	8
1.3.2	Histoire thermique	10
1.3.3	Problèmes du big-bang chaud	11

1.1 Hypothèses

La cosmologie est le domaine de la physique consacré à l'étude de l'univers (observable) à grande échelle, c'est-à-dire de sa structure et de son contenu matériel. Sa structure est décrite par une variété différentielle quadridimensionnelle qui modélise l'espace-temps, et son contenu matériel est décrit par des champs vivant dans cette variété. La relation entre ces deux éléments de la théorie est fournie par la relativité générale (RG). De plus, le principe de covariance implique que l'interaction des champs matériels est donnée par la physique de la relativité restreinte. Le fait que la relativité générale soit locale rend nécessaire une hypothèse supplémentaire (à tester) sur la topologie de l'univers, au moins dans sa partie observable [Luminet *et al.* 03]. De plus, la relativité générale n'a été validée expérimentalement qu'à des échelles bien inférieures aux échelles cosmologiques, si bien que son utilisation aux échelles cosmologiques constitue une extrapolation dont la validité doit être testée. Cette théorie est plus communément remise en cause lorsqu'elle rentre en conflit avec la physique des particules, c'est-à-dire aux grandes énergies. Ceci ne manque pas d'arriver lorsqu'on s'intéresse plus précisément aux origines de l'univers. La cosmologie se résume donc principalement à la résolution des équations d'Einstein pour notre univers en tant

que système physique. Cependant, les observations nécessaires pour réaliser cette tâche souffrent de limitations qui la rendent impossible en pratique. D'une part, les observations cosmologiques consistent le plus souvent en la mesure de rayonnement électromagnétique si bien que l'on accède uniquement à une partie de notre cône de lumière passé. Une manière de s'affranchir de cette dégénérescence pourrait être d'observer le rayonnement après un ou plusieurs changements de direction, par diffusion sur les nuages de poussière [Goodman 95]. Une autre possibilité serait de tirer parti de notre évolution temporelle pour utiliser la superposition des cônes de lumières aussi mince soit elle [Uzan et al. 07a]. La mise en oeuvre des deux tests reste néanmoins improbable pour le moment. On introduit donc une hypothèse supplémentaire appelée *principe cosmologique*, qui consiste à supposer que l'univers est homogène et isotrope à grande échelle, ce qui implique que tous les points de l'univers sont équivalents, et permet de lever la dégénérescence. Idéalement il faudra revenir sur cette hypothèse et la tester [Uzan et al. 07b]. Par ailleurs, d'un point de vue expérimental nous ne disposons que d'un seul univers, le nôtre, si bien qu'il n'existe pas de reproductibilité de l'expérience¹. Etant donné que bien souvent nous compensons la finitude de notre intelligence face à un problème complexe en développant des théories statistiques, la cosmologie également est un domaine dans lequel les prédictions sont statistiques. Cependant la théorie de l'inflation, qui permet d'expliquer l'origine des fluctuations primordiales, est de nature intrinsèquement statistique ce qui justifie plus fondamentalement le traitement statistique de l'évolution de l'univers.

1.2 L'univers homogène et isotrope

1.2.1 Métrique

Dans toute cette thèse nous utiliserons les unités pour lesquelles $c = \hbar = 1$. La métrique la plus générale compatible avec le principe cosmologique est de la forme (dite de Friedmann-Lemaître)

$$\bar{g}_{\mu\nu} = -(dt)_\mu(dt)_\nu + a^2(t)\gamma_{ij}(\mathbf{x})(dx^i)_\mu(dx^j)_\nu, \quad (1.1)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, x^i sont les coordonnées spatiales comobiles avec $i = 1, 2, 3$, t est le temps cosmique et γ_{ij} est la métrique des sections spatiales de temps constant qui doit satisfaire les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie. Les notations $(dt)_\mu$, $(dx^i)_\mu$ correspondent aux formes associées aux coordonnées, les indices grecs allant de 0 à 4. On peut montrer [Wald 84] que cette hypothèse contraint le tenseur de Riemann et les tenseurs associés correspondant à la métrique γ_{ij} à être de la forme

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K\gamma_{k[i}\gamma_{j]l} \quad \Rightarrow \quad {}^{(3)}R_{ij} = 2K\gamma_{ij} \quad \Rightarrow \quad {}^{(3)}R = 6K, \quad (1.2)$$

où K est une constante caractérisant la courbure des sections spatiales de l'univers. Selon que K est positif, nul, ou négatif, ces sections sont respectivement sphériques, euclidiennes, ou hyperboliques. Le temps t est parfois aussi appelé temps physique car il correspond au temps propre d'un observateur de quadrivecteur vitesse $(dt)_\mu$, c'est-à-dire d'un observateur comobile puisque

¹C'est également le cas de la paléontologie ou de la géologie et celles ci peuvent être considérées comme une cosmologie, au sens étymologique du terme, restreinte à la ligne d'univers de la Terre qui est une autre partie de l'espace-temps accessible aux mesures. Néanmoins la recherche d'exoplanètes et l'exobiologie ouvrent ces domaines à la reproductibilité de la mesure [Ellis 75, Bondi 61].

les coordonnées spatiales x^i d'un tel observateur sont constantes. Il peut souvent être pratique d'introduire le temps conforme η défini par l'équation différentielle

$$ad\eta = dt. \quad (1.3)$$

La métrique (1.1) se réécrit alors

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) [-(d\eta)_\mu(d\eta)_\nu + \gamma_{ij}(dx^i)_\mu(dx^j)_\nu]. \quad (1.4)$$

On constate alors que dans le cas où la métrique des sections spatiales est plate ($K = 0$), la métrique spatiale en coordonnées cartésiennes s'écrit $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ si bien que $\bar{g}_{\mu\nu}$ est conforme à une métrique de Minkowski². Les géodésiques de type lumière sont alors paramétrées par

$$d\eta = n_i dx^i, \quad (1.5)$$

où n^i est un vecteur unitaire constant, et la structure causale est alors plus immédiate. Les tenseurs de Riemann et tenseurs d'Einstein associés à la métrique (1.4) sont donnés dans l'appendice B.

1.2.2 Loi de Hubble et décalage vers le rouge

On peut lire sur la métrique (1.1) que les distances comobile \mathbf{x} et physique \mathbf{r} sur une section spatiale de temps constant, déterminées respectivement par la métrique γ_{ij} et la métrique $h_{ij} = a^2\gamma_{ij}$, sont reliées par

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}. \quad (1.6)$$

Les sections spatiales étant paramétrées par le temps cosmique t qui est aussi le temps propre des observateurs comobiles, on en déduit la vitesse d'étirement des distances telles que mesurée par ces observateurs

$$\dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + a(t)\dot{\mathbf{x}}, \quad (1.7)$$

où un point signifie une dérivée par rapport à t et où $H \equiv \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble. Pour des points situés à une distance comobile constante ($\dot{\mathbf{x}} = 0$), on remarque une dilatation des distances caractérisée par le paramètre de Hubble. On peut montrer que cette dilatation des longueurs s'applique également aux longueurs d'onde. En effet, dans l'approximation de l'optique géométrique le vecteur tangent à la trajectoire d'un rayon lumineux, $\bar{k}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, satisfait

$$\bar{k}^\mu \bar{k}_\mu = 0, \quad \bar{k}^\mu \bar{\nabla}_\mu \bar{k}^\nu = 0. \quad (1.8)$$

Un observateur comobile mesure une énergie donnée par $\bar{E} = -\bar{k}^\mu \bar{u}_\mu$ et une impulsion donnée par $\bar{p}^\mu = \bar{k}^\mu - \bar{E}\bar{u}^\mu$, où $\bar{p}^\mu \bar{u}_\mu = 0$. En utilisant les expressions données en appendice B pour les symboles de Christoffel nécessaires pour exprimer la dérivée covariante, on déduit des équations (1.8) que

$$\frac{\dot{\bar{E}}}{\bar{E}} = -H = -\frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.9)$$

²Ceci est également valable dans le cas où les sections spatiales ne sont pas plates.

L'énergie du photon étant reliée à sa longueur d'onde par $\bar{E} = \frac{h}{\lambda}$, on en déduit que $\lambda \sim a$. Ce décalage de longueur d'onde est vers le rouge entre le moment d'émission et moment d'observation car a est croissant, et il est paramétré par z défini selon

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (1.10)$$

On définit par ailleurs le nombre d'*e*-folds³ entre des temps t_1 et t_2 par

$$N_{t_1, t_2} \equiv \ln [a(t_2)/a(t_1)] = \ln \left[\frac{1 + z_1}{1 + z_2} \right]. \quad (1.11)$$

1.2.3 Tenseur énergie-impulsion

Dans une description continue telle que celle faite en relativité générale, le contenu matériel est encodé dans un tenseur symétrique $T_{\mu\nu}$. En toute généralité, la signification physique de ce tenseur peut être mise en évidence en utilisant le quadrivecteur vitesse d'un observateur n_μ , c'est-à-dire tel que $n^\mu n_\mu = -1$. En effet, en définissant à partir d'une métrique quelconque $g_{\mu\nu}$ le tenseur de projection $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$, on obtient l'identité

$$T_{\mu\nu} = \left(T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \right) n_\mu n_\nu + 2T_{\alpha\beta} n^\alpha h^\beta_{(\mu} n_{\nu)} + T_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu, \quad (1.12)$$

où on a noté $X_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}X_{\mu\nu} + \frac{1}{2}X_{\nu\mu}$. Les quantités

$$\rho \equiv T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad q_\mu \equiv T_{\alpha\beta} n^\alpha h^\beta_\mu \quad \text{et} \quad P_{\mu\nu} \equiv T_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \quad (1.13)$$

sont respectivement la densité d'énergie, la densité d'impulsion et le tenseur des contraintes mesurés par cet observateur. On peut décomposer encore cette dernière quantité en séparant la pression définie par $P \equiv \frac{1}{3}P^\mu_\mu$, et le tenseur de pression anisotrope défini par $\Pi^{\mu\nu} \equiv P^{\mu\nu} - Ph^{\mu\nu}$. Dans le cas d'un fluide parfait, le tenseur de pression anisotrope est nul puisqu'il n'y a pas de viscosité. Par ailleurs, toujours dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de transfert de chaleur, et si $q^\mu = 0$, l'observateur est dit comobile avec le fluide. L'observateur mesure alors la densité d'énergie $\rho = \sqrt{-p_\nu p^\nu}$ dans le référentiel où le fluide est au repos et sa quadrivitesse coïncide avec celle de fluide, c'est-à-dire

$$n^\mu = u^\mu \equiv \frac{p^\mu}{\rho}. \quad (1.14)$$

Le tenseur énergie-impulsion dans le cas d'un fluide parfait s'écrit donc

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}). \quad (1.15)$$

Les symétries de l'espace temps associées à la métrique (1.1) imposent que le contenu de l'univers à grande échelle doit nécessairement être décrit par un tenseur énergie-impulsion de la forme

$$T_{\mu\nu} = A\bar{g}_{\mu\nu} + B(dt)_\mu(dt)_\nu. \quad (1.16)$$

On en déduit donc que pour un espace de Friedmann-Lemaître, le contenu matériel est celui d'un fluide parfait de densité d'énergie et de pression notées $\bar{\rho}$ et \bar{P} . Les coordonnées comobiles correspondent alors à des observateurs de quadrivitesse $\bar{u}_\mu \equiv (dt)_\mu$ qui suivent le fluide.

³Repliement de facteur *e*. Dans le système international, il s'agit plus précisément du Neper, tandis que le décibel possède une définition semblable mais en base 10.

1.2.4 Les équations de Friedmann

On définit le tenseur d'Einstein à partir du tenseur de Ricci par $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. L'équation d'Einstein qui lit le contenu matériel de l'espace-temps avec sa géométrie s'écrit $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, avec $\kappa = 8\pi G$. Dans le cas d'un fluide parfait et pour la métrique (1.1), elle implique les deux équations suivantes, dites de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\bar{\rho} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\bar{\rho} + 3\bar{P}) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.18)$$

Λ est la constante cosmologique, et sa valeur mesurée a été extrêmement variable au cours du XX^{ème} siècle. Elle a en effet été introduite par Einstein pour permettre une solution statique de l'équation (1.17), c'est-à-dire telle que $H = 0$. Puis l'expansion cosmique ayant été mise en évidence expérimentalement elle a été abandonnée avant de refaire surface pour expliquer la dynamique récente de l'univers. Nous n'aborderons pas ce point dans ce manuscrit. L'équation de conservation $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ n'est pas indépendante des deux équations précédentes dont elle peut être déduite, et s'écrit

$$\dot{\bar{\rho}} + 3H(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0. \quad (1.19)$$

L'ensemble de ces trois équations peut être réécrit en temps conforme sous la forme

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3}\bar{\rho}a^2 - K + \frac{\Lambda a^2}{3}, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa a^2}{6}(\bar{\rho} + 3\bar{P}) + \frac{\Lambda a^2}{3}, \quad (1.21)$$

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0, \quad (1.22)$$

avec $\mathcal{H} = aH = \frac{a'}{a}$, et où ' signifie une dérivée par rapport au temps conforme. De ces trois équations seulement deux sont indépendantes puisque la troisième peut être déduite des deux premières. Cependant nous avons trois fonctions à déterminer, $\bar{\rho}$, \bar{P} et a . Il faut donc ajouter une équation supplémentaire en utilisant une équation d'état qui relie \bar{P} à $\bar{\rho}$.

1.2.5 Notion d'horizon et de causalité

L'équation des géodésiques en temps conforme (1.5) permet de comprendre simplement la structure causale de l'univers. A un temps conforme η donné, un observateur comobile n'a pu voir les particules situées au delà d'une sphère de rayon conforme

$$r(\eta) = \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' = \int_{0^+}^{t(\eta)} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.23)$$

Si $a(t) \sim t^n$ proche de la singularité, avec $n < 1$, on en déduit que η_i possède une valeur finie. Dans ce cas, $r(\eta)$ a également une valeur finie qu'on appelle alors rayon de l'*horizon des particules*. On définit également les rayons de Hubble physique et comobile par

$$d_H = \frac{1}{H} \quad d_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mathcal{H}}. \quad (1.24)$$

On distinguera donc les échelles super-Hubble des échelles sub-Hubble selon qu'elles correspondent à des longueurs (physiques ou comobiles) plus grandes ou plus petites que le rayon de Hubble (physique ou comobile). Une discussion plus détaillée sur les différents types d'horizon et leurs signification physique peut être trouvée dans la référence [Rindler 02].

1.3 Le big-bang chaud

1.3.1 Dynamique de l'univers

Si l'on se donne une équation d'état pour le fluide $P = w(\rho)\rho$, on peut récrire l'équation de conservation (1.19) sous la forme

$$d \ln \bar{\rho} = -3(1 + w)d \ln a. \quad (1.25)$$

La solution générale est donc

$$\bar{\rho} \sim \exp\left(-3 \int (1 + w) d \ln a\right). \quad (1.26)$$

Si le fluide total est un mélange de plusieurs fluides, w va dépendre de ρ et donc du temps. Si en revanche il n'y a qu'un seul fluide ou si un fluide est dominant, w peut éventuellement être constant et dépend des caractéristiques du fluide. Dans ce cas la densité d'énergie dépend du facteur d'échelle selon

$$\bar{\rho} \sim a^{-3(1+w)}. \quad (1.27)$$

Pour de la matière essentiellement non relativiste et froide, c'est-à-dire dont l'énergie est dominée par l'énergie de masse, $w = 0$. Pour un fluide de radiation, $w = 1/3$. Ces valeurs seront justifiées à partir de la théorie statistique et de la limite fluide qui peut en être tirée dans la section 3.3.1. Quant à la constante cosmologique, elle peut être interprétée comme un fluide d'équation d'état $w = -1$. La densité d'énergie de ces trois types de fluides évolue selon

$$\bar{\rho}(a) \propto \begin{cases} a^{-3} & \text{si } w = 0 \\ a^{-4} & \text{si } w = 1/3 \\ \text{Cste} & \text{si } w = -1 \text{ et } H = \text{Cste}. \end{cases} \quad (1.28)$$

On remarque que la densité d'énergie de la radiation se dilue plus vite que la matière froide. En effet le nombre de photons par unité de volume physique évolue comme le nombre de particules de matière par unité de volume physique, mais les photons perdent de l'énergie au cours de l'expansion d'après la loi (1.9) si bien que la densité d'énergie de la radiation diminue plus vite que celle de la matière froide. Quelle que soit la nature de la matière dominant aujourd'hui le contenu énergétique (matière ou constante cosmologique) on en déduit qu'il était inévitablement dominé par la radiation dans le passé. Le moment où le contenu en énergie est divisé équitablement entre matière et radiation est appelé équivalence et correspond à un décalage vers le rouge z_{eq} donné par

$$1 + z_{\text{eq}} = \left. \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} \right|_0. \quad (1.29)$$

De plus, puisque la présence d'une constante cosmologique est favorisée par les observations, l'univers tend à être dominé par celle-ci. Le moment où le facteur d'échelle commence à accélérer ($\ddot{a} > 0$) correspond à un décalage vers le rouge z_Λ donné par

$$1 + z_\Lambda = \left(\frac{2\bar{\rho}_\Lambda}{\bar{\rho}_m} \right)^{1/3} \Big|_0. \quad (1.30)$$

Les équations de Friedmann (1.17) permettent également dans le cas plat de déduire la loi de puissance du facteur d'échelle en fonction du temps lorsque l'univers est dominé par un de ces trois types de fluides

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3} & \text{si } w = 0 \\ t^{1/2} & \text{si } w = 1/3 \\ e^{Ht} & \text{si } w = -1 \text{ et } H = \text{Cste}, \end{cases} \quad (1.31)$$

ou

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \eta^2 & \text{si } w = 0 \\ \eta & \text{si } w = 1/3 \\ \frac{-1}{H\eta} & \text{si } w = -1 \text{ et } H = \text{Cste}. \end{cases}$$

Plus généralement, dans le cas plat sans constante cosmologique, on peut utiliser les équations de Friedmann (1.20) et (1.21) pour en déduire que

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3w) = 0, \quad (1.32)$$

dont la solution dans le cas où w est constant est de la forme

$$a \propto \eta^\nu, \quad \text{avec } \nu = \frac{2}{1 + 3w}. \quad (1.33)$$

Pour obtenir une solution plus précise qui prend en compte toutes les formes d'énergie, il est commode d'introduire la densité critique $\bar{\rho}_{\text{crit}} \equiv 3H^2/\kappa$ ainsi que $\Omega_e \equiv \bar{\rho}_e/\bar{\rho}_{\text{crit}}$ pour chaque type de matière indexé par e . On introduit également $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/(3H^2)$, et $\Omega_K \equiv -K/(aH)^2$ de telle sorte que la première équation de Friedmann se récrive sous la forme d'une contrainte

$$\sum_e \Omega_e + \Omega_\Lambda + \Omega_K \equiv \Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (1.34)$$

Si le paramètre d'état w_e des différents types de matière est constant, cette équation peut être réécrite en fonction des valeurs mesurées aujourd'hui, que l'on indexe habituellement par 0

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \sum_e \Omega_{e0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_e)} + \Omega_{K0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda 0}. \quad (1.35)$$

La mesure actuelle des paramètres permet donc de déterminer l'histoire de l'univers, en intégrant cette équation différentielle. Les dernières valeurs combinant toutes les dernières mesures peuvent être trouvées dans [Spergel *et al.* 07]. Dans ce modèle appelé *concordant*, le paramètre de Hubble aujourd'hui est de l'ordre de $H_0 \simeq 73 \text{ Mpc}^{-1} \text{ km s}^{-1}$, le contenu en matière est donné par $\Omega_{m0} \simeq 0.26$. Seulement une partie de la matière est baryonique et sa proportion est donnée par $\Omega_{b0} \simeq 0.041$, le reste est sous forme de matière noire froide, c'est-à-dire de matière n'interagissant pas

avec la radiation⁴. La radiation est largement sous-dominante puisque $\Omega_{r0} \simeq 8.23 \times 10^{-5}$, si bien que l'essentiel du contenu matériel est sous forme d'une constante cosmologique car $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0.72$. Enfin les sections spatiales sont essentiellement plates puisque $|\Omega_{K0}| < 0.02$. On obtient avec ces valeurs $z_{\text{eq}} \simeq 3600$ et $z_{\Lambda} \simeq 0.77$.

1.3.2 Histoire thermique

Dans la description précédente de l'univers, nous avons supposé que le contenu matériel de l'univers pouvait être décrit par un ensemble de fluides de paramètres d'état connus et constants. Nous avons également supposé que ces différents constituants n'interagissaient pas si bien que l'équation de conservation (1.19) est satisfaite pour chaque espèce. Une théorie plus satisfaisante doit faire intervenir une description statistique de la matière et prendre en compte les réactions possibles entre les différentes espèces que nous connaissons dans le cadre de la physique des particules. La description fluide doit alors émerger comme une limite de la description statistique. La distribution des particules d'une espèce est caractérisée par sa fonction de distribution $f_e(\mathbf{p}, t, \mathbf{x})$, encodant la probabilité qu'une particule soit en \mathbf{x} avec une impulsion \mathbf{p} à un temps t . Plus précisément, pour un observateur de quadrivecteur vitesse u_μ , à un instant t le nombre de particules de cette espèce dN_e dans un élément de volume dV autour de \mathbf{x} appartenant à l'hypersurface de type espace orthogonale à u_μ , et de volume $d^3\mathbf{p}$ autour de \mathbf{p} est donné par

$$dN_e = f_e(\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) dV d^3\mathbf{p}. \quad (1.36)$$

Plus de détails peuvent être trouvés dans les références [Stewart 71, Bernstein 88]. Pour l'espace-temps associé à la métrique (1.1), l'homogénéité implique que les fonctions de distribution ne dépendent pas de la position \mathbf{x} . De plus l'isotropie implique qu'elles ne dépendent que de la norme et pas de la direction de l'impulsion \mathbf{p} . On utilisera donc pour cet espace des fonctions de distribution de la forme $\bar{f}_e(\bar{p}, t)$, ou éventuellement $\bar{f}_e(\bar{E}, t)$ puisque pour une espèce donnée les particules sont de même masse m_e et il y a une relation univoque entre l'énergie et la norme de l'impulsion $\bar{E}^2 - \bar{p}^2 = m_e^2$. Les quantités thermodynamiques, notamment celles intervenant dans le tenseur énergie-impulsion de fond peuvent être calculées à partir de cette fonction

$$\bar{n}_e(t) = \int \bar{f}_e(\bar{p}, t) 4\pi \bar{p}^2 d\bar{p}, \quad (1.37)$$

$$\bar{\rho}_e(t) = \int \bar{f}_e(\bar{p}, t) \bar{E}(\bar{p}) 4\pi \bar{p}^2 d\bar{p}, \quad (1.38)$$

$$\bar{P}_e(t) = \int \bar{f}_e(\bar{p}, t) \frac{\bar{p}^2}{3\bar{E}(\bar{p})} 4\pi \bar{p}^2 d\bar{p}. \quad (1.39)$$

Nous justifierons ces expressions dans la section 3.3.1. Si le taux d'interaction des particules est plus élevé que le taux d'expansion de Hubble H , ces particules sont maintenues à l'équilibre thermodynamique entre elles et suivent une statistique de Fermi-Dirac pour les fermions ou une statistique de Bose-Einstein pour les bosons, et une température pour chaque espèce peut être définie. Le gaz de photons suit un spectre de corps noir (une statistique de Bose-Einstein avec un potentiel chimique nul) et sa température est aussi appelée température de l'univers. On peut montrer que

$$\bar{\rho}_r(\bar{T}) = g_\star(\bar{T}) \left(\frac{\pi^2}{30} \right) \bar{T}^4, \quad (1.40)$$

⁴Sa nature exacte est encore inconnue.

où $g_*(\bar{T})$ dépend du nombre effectifs d'espèces relativistes (c'est-à-dire telles que $\bar{T} \gg m$). Son expression est donnée d'après les hélicités g_i des particules relativistes selon

$$g_* = \sum_{i=\text{bosons}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i. \quad (1.41)$$

Mis à part les sauts de température dus aux variations de g_* lorsque la température passe en dessous de la masse d'une espèce, on déduit en comparant à l'équation (1.28) que la température de l'univers décroît comme $\bar{T} \sim 1/a$. Chaque interaction possède une température en dessous de laquelle elle est gelée. L'histoire thermique de l'univers est donc un ensemble de interactions entre espèces qui s'éteignent tour à tour lorsque la température diminue avec l'expansion. Avant d'être majoritairement sous forme d'hydrogène, les protons et électrons étaient donc sous forme de plasma d'ions, interagissant par diffusion Compton. En effet si les photons ont une énergie au dessous de l'énergie d'ionisation de l'hydrogène ils ne peuvent plus empêcher les états liés entre protons et électrons. Il existe donc un intervalle de temps pendant lequel les baryons sont devenus transparents aux photons en se recombinant sous forme d'hydrogène. Cet intervalle de temps délimite un volume d'espace-temps appelé surface de dernière diffusion⁵. La température du gaz de radiation a ensuite continué à décroître et est aujourd'hui mesurée et appelée rayonnement de fond diffus (CMB). Les photons de ce fond diffus ont été émis autour d'un décalage vers le rouge de l'ordre de $z_{\text{LSS}} \simeq 1085$ et correspondent toujours à une distribution de corps noir puisque le décalage vers le rouge n'est pas dépendant de la longueur d'onde. La température correspondante de ce corps noir est de $\bar{T}_0 = 2.725 \text{ K}$. Beaucoup plus tôt, la température est suffisamment élevée pour permettre des réactions nucléaires. Il s'agit donc d'une époque, appelée nucléosynthèse primordiale, où les premiers noyaux plus lourds que l'hydrogène se forment. Elle a lieu à environ $z \simeq 10^{10}$.

1.3.3 Problèmes du big-bang chaud

- La platitude de l'univers :

Les données expérimentales indiquent que l'univers est extrêmement plat aujourd'hui, avec $|\Omega_K| < 0.02$. On remarque que pour de la matière avec un paramètre d'état $w_e > -1/3$, le rapport Ω_K/Ω_e est croissant avec a . Plus précisément, le rapport Ω_K/Ω_e est au moins croissant comme a dans l'ère dominée par la matière et comme a^2 dans l'ère dominée par la radiation. L'univers aurait donc été au moins 10^{10} fois plus plat au moment de la nucléosynthèse primordiale, et encore plus plat avant. Ces conditions initiales n'apparaissent pas naturelles, car elles requièrent un ajustement fin⁶ des ces conditions initiales qui paraît peu satisfaisant.

- Isotropie et homogénéité :

Sur la surface de dernière diffusion, seules des zones de l'espace d'une taille comparable à $r(\eta_{\text{LSS}})$ ont pu avoir le temps de thermaliser. On peut calculer à partir de l'équation (2.53) que le nombre de ces zones thermalisées dans le CMB observé aujourd'hui est de l'ordre de

$$\left(\frac{\eta_0 - \eta_{\text{LSS}}}{\eta_{\text{LSS}}}\right)^3 \sim \left(\frac{a_0}{a_{\text{LSS}}}\right)^{3/2} \sim (1 + z_{\text{LSS}})^{3/2} \gg 1. \quad (1.42)$$

⁵ *Last scattering surface* en anglais. Nous la mentionnerons donc par LSS.

⁶ *fine tuning* en anglais.

Ceci contraste avec la très grande isotropie observée du CMB qui laisse penser que $r(\eta_{\text{LSS}})$ doit être plus grand.

– Formation des structures :

L'espace-temps évoqué jusqu'à présent est strictement homogène et ne rend donc pas compte des inhomogénéités de densité. L'étude des perturbations autour de cet espace-temps de fond renseigne sur la formation des structures dont toutes les structures astrophysiques sont issues. L'étude détaillée dans le chapitre 2 montre que les perturbations de densité ne peuvent croître sensiblement pendant l'ère dominée par la radiation tandis qu'elles croissent comme le facteur d'échelle pendant l'ère dominée par la matière. L'univers étant fortement non linéaire aujourd'hui, $(\delta\rho/\bar{\rho})_0 \sim 1$ et donc $(\delta\rho/\bar{\rho})_{\text{eq}} \sim 10^{-4}$, ce qui est compatible avec l'ordre de grandeur des fluctuations du CMB (10^{-5}). Les fluctuations thermiques ne permettent pas d'expliquer la formation de telles inhomogénéités pendant l'ère dominée par la radiation. De plus nous verrons au chapitre suivant que les perturbations ayant une longueur d'onde λ super-Hubble sont gelées. Or pour un univers dominé par la radiation comme c'est le cas avant l'équivalence, $\lambda \sim a \sim t^{1/2}$ tandis que $d_H \sim t$ si bien que toutes les échelles de perturbations ont été à un moment super-Hubble et donc gelées. Il faut donc postuler l'existence du spectre des perturbations initiales sans pouvoir l'expliquer. Le spectre le plus compatible avec les observations est un spectre invariant d'échelle (dénommé spectre de Harrison-Zel'dovich [Harrison 70, Zeldovich 72]), et son origine reste donc inexpliquée dans le cadre du big-bang chaud.

Nous verrons au chapitre 4 que le mécanisme de l'inflation permet de répondre à ces limitations, avec une grande pertinence expérimentale. La combinaison de l'inflation et du big-bang chaud sera dénommée *modèle cosmologique standard*⁷.

⁷La notion de modèle standard est aussi variable que la notion de nouveauté. Jusqu'à peu la théorie de l'inflation était considérée comme une extension du modèle standard qui coïncidait alors avec le big-bang chaud, mais les observations détaillées du CMB lui donnent un support expérimental favorable et permettent de plus de compléter le modèle du big-bang chaud en expliquant l'origine des structures. Elle tend donc à y être incorporée.

Chapitre 2

Théorie des perturbations linéaires

Sommaire

2.1	Quantités perturbées	14
2.1.1	Décomposition SVT	14
2.1.2	Perturbations de la métrique et du tenseur énergie-impulsion	15
2.1.3	Equations d'évolution des perturbations linéaires	17
2.2	Dynamique au premier ordre	19
2.2.1	Ère de radiation	19
2.2.2	Ère de matière	21
2.2.3	Transition radiation-matière	21
2.2.4	Loi de conservation	26
2.2.5	Intéractions baryons-photons	27
2.3	Le formalisme 1+3	30
2.3.1	Principe général	30
2.3.2	Utilisation de la dérivée de Lie	32
2.3.3	Comparaison des approches Bardeen et 1+3	33

Observationnellement, l'univers n'est qu'approximativement homogène et en dessous de la taille des amas de galaxies il est même fortement inhomogène. Etant donnée la complexité de la relativité générale et plus particulièrement son caractère intrinsèquement non-linéaire, il va falloir adopter une résolution approchée afin de comprendre de la formation de ces structures. Nous allons donc adopter une résolution perturbative autour d'un espace de Friedmann-Lemaître. Cette perturbation d'un espace-temps va donner lieu au problème de jauge, et nous exposerons en détail ses conséquences dans la partie II. Dans toute cette partie nous nous affranchirons de ce problème en travaillant dans une jauge donnée, c'est à dire en utilisant certaines conditions sur les perturbations. Nous présentons dans les sections 2.1 et 2.2 les équations des perturbations et leurs solutions en nous concentrant principalement sur les perturbations de la métrique. Nous nous inspirons principalement de [Kodama & Sasaki 84] et plus particulièrement de [Peter & Uzan 05]. Dans la section 2.3 nous exposons brièvement une approche perturbative alternative essentiellement basée sur le formalisme ADM [Arnowitt *et al.* 62], dit formalisme 1 + 3. Dans le chapitre 3 nous exposons ensuite la physique des perturbations du CMB.

2.1 Quantités perturbées

2.1.1 Décomposition SVT

Sur une variété tridimensionnelle munie d'une métrique γ_{ij} à laquelle on associe une dérivée covariante D_i , tout champ vectoriel X_i peut être décomposé en un mode dit scalaire S et un mode vectoriel V_i selon

$$X_i = D_i S + V_i \quad \text{avec} \quad D^i V_i = 0. \quad (2.1)$$

X_i comporte trois degrés de liberté. Le mode scalaire en comporte un, tandis que le mode vectoriel en comporte deux du fait de la condition de transversalité qui lui est imposée. De même, tout tenseur symétrique du second ordre X_{ij} peut se décomposer en deux modes scalaires S_1, S_2 , un mode vectoriel V_i et un mode tensoriel T_{ij} selon

$$X_{ij} = D_i D_j S_1 + S_2 \gamma_{ij} + D_{(i} V_{j)} + T_{ij} \quad \text{avec} \quad D^i V_i = 0, D^i T_{ij} = T^i_i = 0. \quad (2.2)$$

X_{ij} comporte six degrés de liberté. Les deux modes scalaires en comportent deux, le mode vectoriel en comporte deux du fait de la condition de transversalité, et le mode tensoriel contient les deux restants puisque quatre conditions lui sont imposées. On peut choisir de redistribuer les deux degrés de liberté scalaires en les séparant entre la trace $3X \equiv 3X^i_i = \Delta S_1 + 3S_2$ et S_1 , avec $\Delta \equiv D_i D^i$. Cette décomposition est dénommée scalaire-vecteur-tenseur (SVT). Les composantes scalaires et vectorielles d'un tenseur du premier ordre peuvent être extraites selon

$$\begin{aligned} S &= \Delta^{-1} D^i X_i \equiv \mathcal{P}_S^i X_i, \\ V^j &= \left(\delta_i^j - D^j \Delta^{-1} D_i \right) X^i \equiv \mathcal{P}_{V,i}^j X^i. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Quant aux composantes SVT d'un tenseur du second ordre, elles peuvent être extraites selon

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \gamma^{kl} X_{kl}, \\ \hat{X}_{ij} &\equiv X_{ij} - X \gamma_{ij} \equiv \hat{\mathcal{P}}_{ij}^{kl} X_{kl}, \\ S_1 &= \frac{3}{2} [\Delta(\Delta + 3K)]^{-1} D^i D^j \hat{X}_{ij} \equiv \mathcal{Q}_S^{ij} \hat{X}_{ij}, \\ V_k &= 2(\Delta + 2K)^{-1} \Delta \mathcal{P}_{V,k}^j \mathcal{P}_S^i \hat{X}_{ij}, \\ T_{kl} &= \mathcal{P}_{V,k}^i \mathcal{P}_{V,l}^j \hat{X}_{ij} \equiv \mathcal{P}_{T,kl}^{ij} \hat{X}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il faut remarquer que cette décomposition n'est pas locale puisqu'elle fait intervenir l'inverse du laplacien dont la signification rigoureuse fait intervenir une fonction de Green intégrée sur tout l'espace. En définissant la fonction de Green comme étant la solution de

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta_{\mathbb{D}}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.6)$$

la signification de $A = \Delta^{-1} B$ est plus précisément

$$A(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') B(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (2.7)$$

où l'intégrale porte sur tout la variété tridimensionnelle. On a noté le symbole de Dirac $\delta_{\mathbb{D}}$ afin de le différencier des perturbations. Cette décomposition n'est en principe pas unique puisque

l'on peut rajouter à la fonction de Green toute fonction harmonique, c'est à dire satisfaisant l'équation de Laplace $\Delta f = 0$. Dans le cas où la variété est sans bord, c'est-à-dire pour un univers fermé, et le cas où la variété est non compacte avec des fonctions qui décroissent suffisamment asymptotiquement, les seules solutions de l'équation de Laplace sont des constantes, si bien que $A(\mathbf{x})$ est défini à une constante près [Stewart 90]. Pour dériver ces expressions, nous avons utilisé les relations de commutation données en appendice A. Il est crucial d'utiliser ces formules afin d'extraire les quantités intervenant dans la décomposition (2.2). En effet on peut constater assez fréquemment dans la littérature une mauvaise extraction même dans le cas sans courbure, par exemple dans les équation (78) et (79) de [Finelli *et al.* 06], l'équation (3.12) de [Malik & Wands 04], l'équation (3.9) de [Malik 05]. Enfin, afin de simplifier l'utilisation implicite de fonctions de Green, on introduit un ensemble complet de modes propres du laplacien sous réserve de montrer son existence [Stein & Weiss 71, Berger *et al.* 71, Lehoucq *et al.* 03]. Il s'agit d'un ensemble de fonction $Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ satisfaisant l'équation de Helmholtz

$$\Delta Q_{\mathbf{k}} = -(k^2 - K) Q_{\mathbf{k}}, \quad (2.8)$$

et qui doivent satisfaire la relation de fermeture

$$\sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) Q_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}') = \delta_{\mathbb{D}}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.9)$$

On peut ensuite décomposer toute fonction $f(\mathbf{x})$ selon

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

et travailler sur les coefficients $f(\mathbf{k})$ pour lesquels le laplacien correspond à une multiplication par $-k^2 + K$. Dans le cas d'un univers plat cette base est celles des exponentielles $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ et la somme sur \mathbf{k} est continue ($\int d\mathbf{k}$). La décomposition correspond alors à la transformée de Fourier que nous utiliserons au cours de cette thèse. Il s'agit donc de la convention qui équilibre les facteurs 2π entre la transformée de Fourier et son inverse.

2.1.2 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie-impulsion

La métrique (1.1), une fois perturbée, peut être paramétrée selon

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \left\{ -(1 + 2\Phi)(d\eta)_{\mu}(d\eta)_{\nu} + [(1 - 2\Psi)\gamma_{ij} + 2D_{(i}E_{j)} + 2E_{ij}] (dx^i)_{\mu}(dx^j)_{\nu} \right\}, \quad (2.11)$$

où on rappelle que D_i est la dérivée covariante associée à la métrique des sections spatiales, c'est-à-dire telle que $D_i\gamma_{jk} = 0$. Cette décomposition, qui n'est pas la plus générale possible, correspond à un choix de jauge, celui de la jauge Newtonienne. Nous expliquerons plus en détail le problème de la liberté de jauge dans la partie II au chapitre 5. Cette décomposition fait apparaître des degrés de liberté scalaires, Φ et Ψ , des degrés de liberté vectoriels E_i , et des degrés de liberté tensoriels E_{ij} . On constate donc qu'il y a deux degrés de libertés scalaires, deux degrés de liberté vectoriels et deux degrés de liberté tensoriels. Sur les 10 degrés de liberté possibles de la perturbation de la métrique, 4 sont absorbés par le fait de fixer la jauge comme nous le verrons dans la section 5.2, et il nous reste donc bien 6 degrés de liberté. On rappelle que les indices

latins $i, j, k \dots$ sont montés et descendus avec la métrique spatiale conforme de fond γ_{ij} . Cela signifie que les variables de perturbation vivent dans l'espace tangent des sections spatiales de fond.

Quant à la matière, elle est décrite dans l'espace perturbé par la perturbation de sa densité d'énergie, de sa pression et de sa quadrivitesse selon

$$\rho \equiv \bar{\rho} + \delta\rho \equiv \bar{\rho}(1 + \delta), \quad P = \bar{P} + \delta P, \quad u^\mu = \bar{u}^\mu + \frac{v^\mu}{a}. \quad (2.12)$$

Les quatre composantes de la variable de perturbation de vitesse v^μ ne sont pas indépendantes car les vecteurs de quadrivitesse sont soumis à la normalisation $u_\mu u^\mu = \bar{u}_\mu \bar{u}^\mu = -1$. Il n'y a donc que trois degrés de liberté que l'on choisit de décrire par les composantes spatiales v^i , v^0 étant déterminé par la condition de normalisation. On décompose ces trois degrés de liberté en deux degrés de liberté vectoriel \hat{v}^i et un degré de liberté scalaire v selon

$$v^i = \hat{v}^i + D^i v, \quad \text{avec} \quad D_i \hat{v}^i = 0. \quad (2.13)$$

Les perturbations de densité d'énergie et de pression ne sont pas indépendantes et sont reliées dans le cas d'un fluide barotropique, puisque P est alors une fonction de ρ . On définit la vitesse du son adiabatique c_s selon

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2. \quad (2.14)$$

L'équation de conservation (1.22) nous permet d'obtenir la relation suivante entre le paramètre d'état w et la vitesse du son c_s

$$w' = -3\mathcal{H}(1 + w)(c_s^2 - w). \quad (2.15)$$

En toute généralité le tenseur énergie impulsion compatible avec l'espace perturbé admet aussi un tenseur de pression anisotrope. On utilisera donc la décomposition

$$T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) + a^2 \bar{P} \pi_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

dans le cas d'un fluide non parfait.

Toutes les quantités perturbées sont ensuite décomposées en ordre de perturbations selon [Bruni *et al.* 97, Nakamura 07]

$$W = \sum_n \frac{\delta^{(n)} W}{n!}. \quad (2.17)$$

La somme commence à $n = 0$ pour les quantités qui sont non nulles sur l'espace de fond, comme par exemple ρ ou P , et nous utilisons alors la convention $\delta^{(0)}\rho = \bar{\rho}$. La somme commence à $n = 1$ pour les quantités nulles sur l'espace de fond, comme les perturbations de la métrique intervenant dans la décomposition (2.11). Nous utilisons également la notation $W^{(n)} \equiv \delta^{(n)} W$ pour la perturbation d'ordre n . Dans toute cette partie, nous nous restreignons aux perturbations linéaires c'est-à-dire que nous ne considérons que $\delta^{(1)} W$ et nous utiliserons même l'abus de notation δW à la place de $\delta^{(1)} W$. Quant aux quantités qui sont nulles sur l'espace de fond, nous utiliserons la notation W à la place de $W^{(1)}$. Dans la partie II nous détaillerons la théorie des perturbations jusqu'au second ordre et restaurerons des notations sans ambiguïté.

Les perturbations du tenseur d'Einstein et du tenseur énergie-impulsion correspondant à la métrique (2.11) sont rapportées dans l'appendice B.

Nous allons maintenant effectuer une décomposition SVT des équations d'Einstein ainsi que des équations de conservation des fluides. Cependant, cette décomposition n'a été définie que pour des tenseurs vivant dans l'espace tangent aux sections spatiales de fond, puisque nous l'avons définie pour des variétés tridimensionnelles. Nous pouvons néanmoins décomposer un champ vectoriel X_μ vivant dans l'espace-temps de fond selon

$$X_\mu = -\bar{u}_\mu [\bar{u}^\nu X_\nu] + \bar{h}_\mu^\nu X_\nu, \quad (2.18)$$

où $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu$ est le projecteur sur les surfaces orthogonales à \bar{u}_μ . $\bar{u}^\nu X_\nu$ est un champ scalaire et peut donc être considéré comme un champ scalaire sur les sections spatiales de fond. $\bar{h}_\mu^\nu X_\nu$ est un champ vectoriel qui peut être considéré comme un champ vectoriel vivant dans l'espace tangent des sections spatiales de fond puisqu'il est orthogonal à \bar{u}_μ . On s'intéressera donc plus précisément à $\bar{h}_i^\nu X_\nu$. De même, on peut décomposer un champ tensoriel symétrique $X_{\mu\nu}$ selon

$$X_{\mu\nu} = \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu [\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta X_{\alpha\beta}] - 2\bar{u}_{(\mu} \bar{h}_{\nu)}^\beta \bar{u}^\alpha X_{\alpha\beta} + \bar{h}_\mu^\alpha \bar{h}_{\nu}^\beta X_{\alpha\beta}. \quad (2.19)$$

Par les mêmes arguments, $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta X_{\alpha\beta}$, $\bar{h}_i^\beta \bar{u}^\alpha X_{\alpha\beta}$ et $\bar{h}_i^\alpha \bar{h}_j^\beta X_{\alpha\beta}$ sont respectivement un champ scalaire, un champ vectoriel et un champ tensoriel de l'espace tangent associé au section spatiales de fond, pour lesquels nous pouvons effectuer une décomposition SVT. Par la suite lorsque nous noterons X_{00} , X_{0i} ou X_{ij} , nous ferons référence à ces quantités.

Nous présentons ci dessous la décomposition SVT des équations d'Einstein sans constante cosmologique $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Si les différents fluides n'ont pas d'interaction entre eux, les tenseurs énergie impulsion de chaque fluide sont conservés indépendamment, c'est-à-dire qu'ils satisfont $\nabla_\mu T_a^\mu = 0$. Nous présentons également la décomposition SVT de ces équations d'évolution. Dans le cas général, seul le tenseur énergie-impulsion total est conservé et chaque fluide est soumis à une résultante des forces Q_a^μ si bien que l'équation de conservation pour chaque fluide se réécrit

$$\nabla_\mu T_a^{\mu\nu} = Q_a^\nu, \quad \sum_a Q_a^\nu = 0. \quad (2.20)$$

2.1.3 Equations d'évolution des perturbations linéaires

Nous considérons le cas où l'univers est un mélange de plusieurs fluides parfaits et barotropes ($\pi_{\mu\nu} = 0$, $P = P(\rho)$) sans interactions entre eux. Nous utiliserons ensuite ces équations dans le cas où l'univers n'est rempli que de radiation puis que de matière et enfin dans le cas où il s'agit d'un mélange de radiation et de matière froide noire.

Modes scalaires

Les équations d'Einstein scalaires sont données par

- l'équation de Poisson donnée par $(\delta G_{00} - \kappa \delta T_{00}) = 0$,
- la trace de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$,
- le mode scalaire de la partie sans trace de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$,
- le mode scalaire de $(\delta G_{0i} - \kappa \delta T_{0i}) = 0$,

pour obtenir respectivement les équations

$$(\Delta + 3K)\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi - \frac{1}{2}\sum_e \kappa a^2 \bar{\rho}_e \delta_e = 0 \quad (2.21)$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' - K\Psi + 2\mathcal{H}'\Phi - \frac{1}{2}\kappa a^2 \sum_e c_{s,e}^2 \bar{\rho}_e \delta_e = 0 \quad (2.22)$$

$$\Psi - \Phi = 0 \quad (2.23)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi + \frac{1}{2}\sum_e \kappa a^2 \bar{\rho}_e (1 + w_e) v_e = 0. \quad (2.24)$$

Nous obtenons deux équations scalaires d'évolution du fluide en considérant $\nabla_\mu T_{e0}^\mu = 0$ ainsi que le mode scalaire de $\nabla_\mu T_{ei}^\mu = 0$. Il s'agit respectivement de l'équation de conservation ainsi que de l'équation d'Euler de chaque fluide. Dans le cas où w_e est constant, et donc quand $w_e = c_{s,e}^2$, ces équations sont

$$\delta'_e + (1 + w_e) (\Delta v_e - 3\Psi') = 0, \quad (2.25)$$

$$v'_e + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,e}^2)v_e + \Phi + \frac{c_{s,e}^2}{1 + w_e} \delta_e = 0. \quad (2.26)$$

Dans le cas où w n'est pas constant c'est-à-dire pour $w \neq c_s^2$, les équations de conservation sont données en appendice D.1 tandis que les équations d'Einstein sont données en appendice D.2. Si de plus les perturbations ne sont pas barotropiques, c'est-à-dire si la pression ne dépend pas uniquement de ρ , alors il faut considérer une composante non-adiabatique dans les équations précédentes. Ceci peut être le cas soit si les perturbations du fluide considéré sont intrinsèquement non-adiabatiques, soit s'il s'agit d'un mélange de fluides barotropes pour lequel en général le fluide résultant n'est pas barotrope¹. Dans ce dernier cas on contourne le problème en considérant les différentes composantes fluides comme il a été fait dans les équations (2.21-2.24). Nous ne considérerons dans ce manuscrit que le cas des perturbations adiabatiques.

Modes vectoriels

Les équations d'Einstein vectorielles sont données par

– le mode vectoriel de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$,

– le mode vectoriel de $(\delta G_{0i} - \kappa \delta T_{0i}) = 0$,

et sont respectivement

$$(\Delta + 2K) E^{i'} - 2\kappa a^2 \sum_a (1 + w_a) \hat{v}_a^i = 0, \quad (2.27)$$

$$E_i'' + 2\mathcal{H}E_i' = 0. \quad (2.28)$$

Nous obtenons également grâce à la partie vectorielle de $\nabla_\mu T_{ai}^\mu = 0$ l'équation d'Euler vectorielle de chaque fluide

$$\hat{v}_a^{i'} + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)\hat{v}_a^i = 0. \quad (2.29)$$

¹Aux échelles super-Hubble, les perturbations du fluide total restent adiabatiques si elles le sont initialement comme nous le verrons dans la section 2.2.

Modes tensoriels

Les équations d'Einstein tensorielles sont données par le mode tensoriel de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$

$$E''_{ij} + 2\mathcal{H}E'_{ij} + (2K - \Delta)E_{ij} = 0. \quad (2.30)$$

2.2 Dynamique au premier ordre

Nous allons résoudre ces équations en espace de Fourier dans le cas plat, c'est-à-dire que nous allons utiliser $\Delta \rightarrow -k^2$ et les conditions de transversalité $D^i E_i = D^i E_{ij} = 0$ s'écrivent $k^i E_i = k^i E_{ij} = 0$. Ce choix est justifié par la phase d'inflation primordiale et aussi par les contraintes observationnelles données dans la section 1.3. Afin d'obtenir des solutions exactes, nous nous placerons dans les trois cas simples suivants. Tout d'abord nous étudierons le cas d'un univers dominé par le rayonnement, puis le cas d'un univers dominé par la matière, et enfin un cas plus général prenant en compte un mélange de matière noire et de rayonnement. Nous utiliserons les équations de la section 2.1.3 afin d'étudier ce dernier cas. Puisque celles-ci ont été dérivées en supposant que les différents fluides n'ont pas d'interaction, cela signifie que l'on considère un fluide de matière noire mélangé à un fluide de radiation. Puisque l'essentiel de la matière est sous forme de matière noire, la matière baryonique interagissant avec la radiation étant minoritaire, cette approximation constitue une bonne description lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des variables de perturbation de la métrique. Enfin, nous étudierons la dynamique des baryons dans l'approximation fluide.

En ce qui concerne les modes vectoriels, la solution de l'équation d'Euler vectorielle (2.29) est de la forme

$$\hat{v}^i \propto a^{-(1-3c_s^2)}, \quad (2.31)$$

tandis que la solution de l'équation d'évolution (2.28) est

$$E'_i \propto a^{-2}. \quad (2.32)$$

Les perturbations de métrique vectorielles décroissent avec l'évolution du facteur d'échelle et ne vont donc pas intervenir dans la formation des structures. De plus, dans le cas où la vitesse n'a pas de composante vectorielle, c'est-à-dire si $\hat{v}_i = 0$, alors l'équation de contrainte (2.27) implique que $E'_i = 0$. Nous négligerons donc dans la suite les perturbations vectorielles au premier ordre.

2.2.1 Ère de radiation

Dans le cas plat, l'équation d'évolution (2.30) au premier ordre en perturbations est une équation différentielle linéaire d'ordre deux. L'ensemble des solutions est donc un espace vectoriel de dimension deux. La solution divergente quand $k\eta \ll 1$ n'est pas physique, ou plutôt correspond au mode le plus décroissant qui devient négligeable quand $k\eta$ croît. Nous ne retiendrons que la solution non divergente quand $k\eta \ll 1$. Pendant l'ère de radiation, cette solution est

$$E_{ij} \propto j_0(k\eta)\varepsilon_{ij} = \frac{\sin(k\eta)}{k\eta}\varepsilon_{ij}, \quad (2.33)$$

où ε_{ij} est un tenseur transverse sans trace constant normé, c'est à dire tel que $k^i \varepsilon_{ij} = \varepsilon^i_i = 0$, $\varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} = 1$. Les fonctions j_n sont les fonctions de Bessel sphériques, reliées aux fonctions de

Bessel du premier ordre J_n par

$$j_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \quad (2.34)$$

En ce qui concerne les modes scalaires du premier ordre dans le cas plat, on peut récrire l'équation (2.22) en utilisant le fait que l'équation (2.23), dérivée pour un mélange de fluides parfaits, implique pour les variables de perturbation du premier ordre² $\Phi = \Psi$. On obtient alors dans le cas d'un univers plat dominé par la radiation

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Phi - \frac{\kappa a^2}{6}\bar{\rho}_r\delta_r = 0 \quad (2.35)$$

En combinant cette équation avec l'équation (2.21) afin d'éliminer δ_r , et en utilisant l'équation (1.32) nous obtenons

$$\Phi'' + 4\mathcal{H}\Phi' - \frac{1}{3}\Delta\Phi = 0, \quad (2.36)$$

dont la solution la moins décroissante est (en espace de Fourier)

$$\Psi = \Phi = A(k)3\sqrt{3}(k\eta)^{-1}j_1\left(k\eta/\sqrt{3}\right) = A(k)\frac{9\sqrt{3}}{(k\eta)^3}\left[\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right) - \frac{k\eta}{\sqrt{3}}\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right)\right]. \quad (2.37)$$

Les coefficients numériques ont été choisis de telle sorte pour que $\Phi \rightarrow A(k)$ dans la limite $k\eta \rightarrow 0$. Nous pouvons ensuite obtenir v et δ à partir de l'équation (2.24) et l'équation (2.21). Nous obtenons respectivement

$$v = -\frac{A(k)}{2k^3\eta^2}3\sqrt{3}\left[2\sqrt{3}k\eta\cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) + (k^2\eta^2 - 6)\sin\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right)\right] \quad (2.38)$$

et

$$\delta = \frac{A(k)}{(k\eta)^3}\left[12\sqrt{3}(3 - k^2\eta^2)\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right) + 6k\eta(k^2\eta^2 - 6)\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right)\right]. \quad (2.39)$$

Pour des modes super-Hubble ($k\eta \ll 1$)

$$\Phi = \Psi \simeq A(k), \quad kv \simeq -\frac{A(k)}{2}k\eta, \quad \delta \simeq -2A(k), \quad (2.40)$$

les perturbations de métrique et de densité d'énergie sont donc gelées. En revanche pour des modes sub-Hubble

$$\Phi = \Psi \simeq A(k)\frac{9}{(k\eta)^2}\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right), \quad kv \simeq -\frac{3\sqrt{3}A(k)}{2}\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right). \quad (2.41)$$

On constate donc que les perturbations de métriques sont amorties lorsqu'elles rentrent sous le rayon de Hubble et que les perturbations de densité d'énergie ne sont pas croissantes. Nous verrons que ceci n'est plus le cas si le contenu matériel est dominé par la matière. L'intensité des perturbations pour un mode rentré sous le rayon de Hubble pendant l'ère de radiation sera donc atténuée d'autant plus que ce mode est devenu sub-Hubble tôt.

²Si l'on considère la transition radiation-matière, on montre grâce à la théorie statistique détaillée dans la section 3.3 que le tenseur de pression anisotrope de la radiation ne peut plus être négligé. De plus les neutrinos, que nous ignorons totalement dans ce manuscrit, développent également un tenseur de pression anisotrope et ne peuvent donc pas être décrit par un fluide parfait au premier ordre dans les perturbations.

2.2.2 Ère de matière

Pendant l'ère de matière, la solution la moins décroissante de l'équation d'évolution (2.30) est

$$E_{ij} \sim 3 \frac{j_1(k\eta)}{k\eta} \epsilon_{ij} = 3 \frac{\sin(k\eta) - k\eta \cos(k\eta)}{(k\eta)^3} \epsilon_{ij}. \quad (2.42)$$

En ce qui concerne les modes scalaires du premier ordre dans le cas plat, en procédant de la même manière que pour le cas d'un univers dominé par la radiation, on peut récrire l'équation (2.22) sous la forme

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' = 0. \quad (2.43)$$

La solution la moins décroissante est constante et s'écrit donc

$$\Psi = \Phi = A(k). \quad (2.44)$$

Nous pouvons ensuite obtenir v et δ à partir de l'équation (2.24) et l'équation (2.21). Nous obtenons respectivement

$$v = -\frac{1}{3}A(k)\eta \quad (2.45)$$

et

$$\delta = -\left[\frac{1}{6}(k\eta)^2 + 2\right]A(k). \quad (2.46)$$

Nous constatons que pour des modes sub-Hubble le contraste de densité est croissant comme $(k\eta)^2 \sim a$. C'est donc pendant l'ère de matière que l'effondrement gravitationnel peut mener à la formation des structures à partir de fluctuations primordiales.

2.2.3 Transition radiation-matière

L'ère dominée par la matière succède à l'ère dominée par la radiation, les solutions présentées dans les deux cas ci-dessus ne sont donc pas valables partout. Afin de les raccorder, nous allons étudier le cas d'un univers dominé par un mélange de matière et de rayonnement sans interaction. La densité d'énergie et la pression sont additifs pour des fluides suffisamment dilués si bien que la densité d'énergie totale ainsi que la pression totale sont données par

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \quad P = P_m + P_r. \quad (2.47)$$

Nous déduisons tout d'abord que le paramètre d'état total est donné par

$$\rho w = \rho_m w_m + \rho_r w_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (2.48)$$

De plus en dérivant cette relation et en utilisant l'équation (2.15) qui est satisfaite pour chaque fluide ainsi que pour le fluide total, nous en déduisons que

$$\bar{\rho} c_s^2 = \bar{\rho}_m \left(\frac{1+w_m}{1+w}\right) c_{s,m}^2 + \bar{\rho}_r \left(\frac{1+w_r}{1+w}\right) c_{s,r}^2 = \frac{4w}{3(1+w)} \bar{\rho}. \quad (2.49)$$

Plutôt que d'utiliser le temps conforme comme paramètre d'évolution des variables de perturbation, nous allons utiliser le facteur d'échelle normalisé à l'équivalence

$$y \equiv \frac{a}{a_{\text{eq}}} = \frac{1+z_{\text{eq}}}{1+z}. \quad (2.50)$$

Nous définissons de plus la longueur $\lambda_{\text{eq}} = 2\pi d_H(\eta_{\text{eq}})$. Au facteur 2π près il s'agit du rayon de Hubble à l'équivalence. Le mode associé, et qui devient donc sub-Hubble après l'équivalence, est donné par

$$k_{\text{eq}} \equiv \mathcal{H}_{\text{eq}} \equiv \mathcal{H}(\eta_{\text{eq}}). \quad (2.51)$$

La fonction de Hubble et la première équation de Friedmann (1.20) dans le cas plat s'écrivent respectivement

$$\mathcal{H} = \frac{y'}{y}, \quad \mathcal{H}^2 = \frac{1+y}{2y^2} \mathcal{H}_{\text{eq}}. \quad (2.52)$$

Nous pouvons résoudre facilement ce système pour déduire l'évolution de y en fonction du temps conforme. Tout d'abord nous déduisons facilement que $y'' = (k_{\text{eq}}/2)^2$, et nous obtenons

$$y = \frac{k_{\text{eq}}\eta}{\sqrt{2}} + \frac{(k_{\text{eq}}\eta)^2}{8}, \quad \eta = \frac{2\sqrt{2}}{k_{\text{eq}}} \left(-1 + \sqrt{1+y} \right), \quad (2.53)$$

ce qui interpole les solutions obtenues dans la section 1.32. De plus, comme $\bar{\rho}_r \propto a^{-4}$ et $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$, nous déduisons que

$$y = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r}, \quad \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}} = \frac{1}{1+y}, \quad \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}} = \frac{y}{1+y} \quad (2.54)$$

ainsi que

$$w = \frac{1}{3(1+y)}, \quad c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{(1 + \frac{3}{4}y)}. \quad (2.55)$$

Afin de paramétrer l'évolution des perturbations scalaires par y , nous avons également besoin de pouvoir passer des dérivées par rapport à η à des dérivées par rapport à y , grâce aux relations

$$X' = \sqrt{\frac{1+y}{2}} k_{\text{eq}} \frac{dX}{dy}, \quad X'' = \frac{1+y}{2} k_{\text{eq}}^2 \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{k_{\text{eq}}^2}{4} \frac{dX}{dy}. \quad (2.56)$$

L'équation (2.22), combinée à l'équation (2.21) peut être réécrite en utilisant tous ces résultats préliminaires selon

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left[\frac{8+9y}{2y(1+y)} \right] \frac{d\Phi}{dy} + \frac{1}{y(1+y)} \Phi + \frac{2}{3(1+y)k_{\text{eq}}^2} k^2 \Phi + \frac{1}{2y(1+y)} \delta_m = 0. \quad (2.57)$$

Dans la limite où $y \gg 1$, en utilisant l'équation de Poisson (2.21), cette équation est approximée par l'équation

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left[\frac{6+7y}{2y(1+y)} \right] \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad (2.58)$$

et on retrouve en utilisant les relations (2.56) l'équation d'évolution en ère de matière (2.43). L'équation (2.57) d'évolution pour Φ fait intervenir le contraste de densité de la matière dont il va falloir déterminer l'évolution. L'équation de conservation (2.25) ainsi que l'équation d'Euler (2.26) au premier ordre pour la matière s'écrivent en fonction de y

$$\frac{d\delta_m}{dy} = \frac{k}{k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{1+y}} v_m + 3 \frac{d\Phi}{dy}, \quad (2.59)$$

$$\frac{dv_m}{dy} = -\frac{v_m}{y} - \frac{k}{k_{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{1+y}} \Phi. \quad (2.60)$$

Ces équations peuvent être combinées pour obtenir un équation différentielle du second ordre pour δ_m

$$\frac{d^2\delta_m}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} = S_\Phi(y) \equiv +3 \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left[\frac{6+9y}{2y(1+y)} \right] \frac{d\Phi}{dy} - \frac{2k^2}{(1+y)k_{\text{eq}}^2} \Phi. \quad (2.61)$$

Avant de rechercher les solutions de ce système d'équations couplées (2.57-2.61), il nous faut déterminer les conditions initiales du contraste de densité du fluide de matière. Le mélange de fluides parfaits n'étant pas a priori parfait, on suppose de plus que le mélange du fluide de radiation et du fluide de matière se comportent comme un seul fluide parfait, c'est-à-dire que le fluide total dont les quantités thermodynamique sont données par les relations (2.47) satisfait $\delta P = c_s^2 \delta \rho$, où c_s est donné dans les relations (2.55). Comme $\delta \rho = \delta \rho_m + \delta \rho_r$ on obtient que le contraste de densité du fluide total est donné par

$$\delta = \frac{y\delta_m + \delta_r}{1+y}. \quad (2.62)$$

Pour que le fluide total satisfasse $\delta P = c_s^2 \delta \rho$ il faut alors que les contrastes de densités satisfassent la condition d'adiabaticité

$$\delta_m = 3\delta_r/4. \quad (2.63)$$

On utilise donc cette condition si l'on suppose des conditions initiales adiabatiques. Une représentation des solutions de l'équation (2.61) peut être écrite sous forme intégrale en utilisant la méthode de la fonction de Green. On obtient

$$\delta_m(y) = C_1 + C_2 \ln \left(\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y}+1} \right) + \int_0^y G(y, \tilde{y}) S_\Phi(\tilde{y}) d\tilde{y}, \quad (2.64)$$

où

$$G(y, \tilde{y}) = \tilde{y} \sqrt{1+\tilde{y}} \ln \left[\frac{(\sqrt{1+\tilde{y}}+1)(\sqrt{1+y}-1)}{(\sqrt{1+y}+1)(\sqrt{1+\tilde{y}}-1)} \right]. \quad (2.65)$$

Nous allons maintenant nous restreindre au domaine où la radiation domine le contenu énergétique de l'univers, c'est-à-dire quand $y \ll 1$. D'après la relation (2.53), la solution particulière multipliant C_2 est de la forme $\simeq \ln(\sqrt{1+y}-1) \propto \ln(k\eta)$. Pour des conditions initiales adiabatiques, en utilisant le fait que la solution (2.39) pour un univers dominé par la radiation possède une valeur finie dans cette limite $[3\Phi(y=0)/2]$, et comme la solution particulière de (2.64) tend vers 0 dans cette limite, on obtient que C_2 est nécessairement nul et $C_1 = 3\Phi(y=0)/2$.

Nous cherchons de plus à décrire des modes qui rentrent sous le rayon de Hubble lorsque cette limite $y \ll 1$ est encore valable. Un mode est sous le rayon de Hubble si $k\eta = \sqrt{2}ky/k_{\text{eq}} \gg 1$. Comme l'essentiel de la variation de Φ et donc de S_Φ se situe aux alentours de $\eta = 1/k$, c'est-à-dire de $y = k_{\text{eq}}/(\sqrt{2}k)$, la solution particulière peut être évaluée en menant l'intégrale jusqu'à l'infini. Pour cela nous supposons que Φ est déterminé principalement par δ_r dans l'équation de Poisson (2.21). Après intégration numérique, en utilisant pour Φ la solution obtenue dans un univers dominé par la radiation (2.37), on obtient que cette solution est correctement approchée par

$$\int_0^y G(y, \tilde{y}) S_\Phi(\tilde{y}) d\tilde{y} \simeq -6 + 9 \ln \left(\frac{k\sqrt{2}y}{k_{\text{eq}}} \right). \quad (2.66)$$

Finalement, dans ce régime la croissance du contraste de densité de la matière est correctement décrite par

$$\delta_m(k, y) \simeq \Phi(k, y = 0) \left[-4.5 + 9 \ln \left(\frac{k\sqrt{2y}}{k_{\text{eq}}} \right) \right]. \quad (2.67)$$

Nous constatons donc que pour des modes sub-Hubble dans l'ère dominée par la radiation, $\delta_m \propto \ln y$. Or d'après l'équation (2.39) pour ces modes

$$\delta_r(k, y) \sim 6\Phi(k, y = 0) \cos \left[\frac{k}{k_{\text{eq}}} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\sqrt{1+y} - 1) \right], \quad (2.68)$$

si bien qu'il va exister un temps correspondant à un facteur d'échelle réduit y^* où la contribution à l'équation de Poisson (2.21) du fluide de matière devient comparable à celle du fluide de radiation (voir Figs. 2.1 et 2.2).

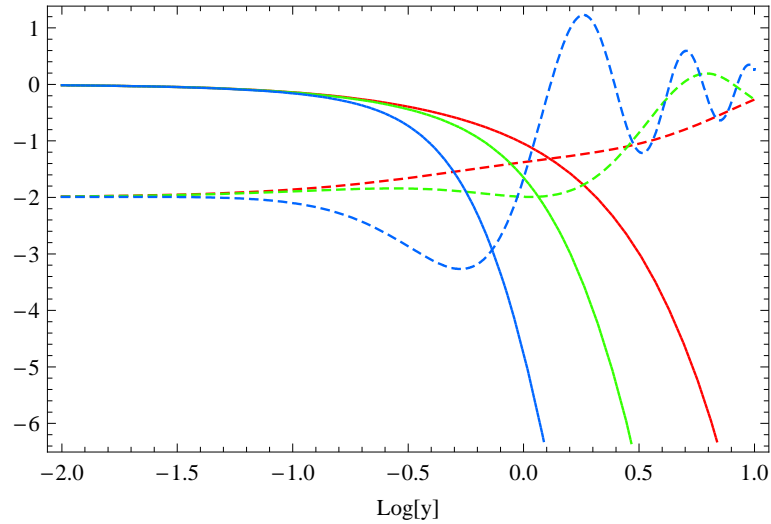


FIG. 2.1: $\delta\rho_m = \frac{y}{1+y}\delta_m$ (en trait plein) et $\delta\rho_r = \frac{1}{1+y}\delta_r$ (en tirets) pour $k/k_{\text{eq}} = 1, 2, 5$ respectivement en rouge vert et bleu. Pour des modes plus grands que k_{eq} il apparaît que le potentiel gravitationnel va être déterminé par les fluctuations dans le fluide de matière avant l'équivalence.

Nous allons donc étudier le régime où pour ce mode sub-Hubble, le potentiel Φ est principalement déterminé par δ_m plutôt que δ_r , c'est-à-dire pour $y \gg y^*(k)$. L'équation de Poisson dans cette approximation s'écrit

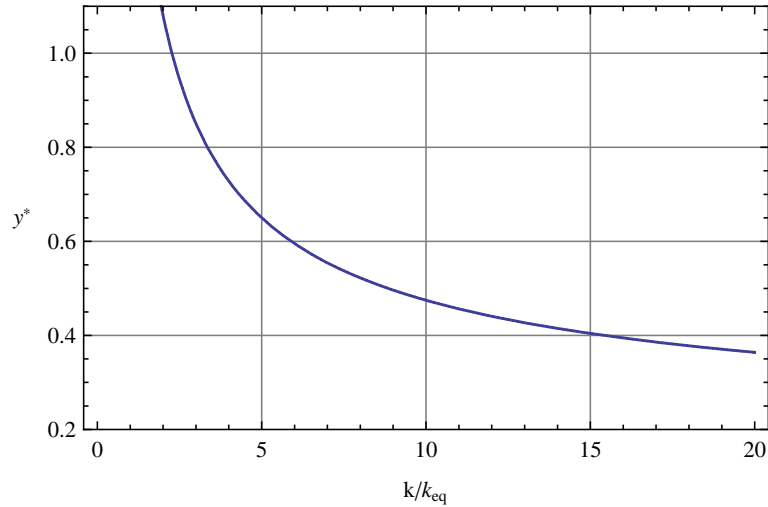
$$\Phi = -\frac{3k_{\text{eq}}^2}{4yk^2}\delta_m. \quad (2.69)$$

et le terme dominant de S_Φ est alors

$$S_\Phi \simeq -\frac{2k^2}{(1+y)k_{\text{eq}}^2}\Phi. \quad (2.70)$$

L'équation d'évolution de δ_m (2.61) prend donc la forme suivante

$$\frac{d^2\delta_m}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} - \frac{3}{2y(1+y)}\delta_m = 0, \quad (2.71)$$

FIG. 2.2: y^* en fonction du rapport k/k_{eq}

qui est l'équation de Mészáros [Mészáros 74]. Ses solutions sont de la forme

$$D_+(y) = y + 2/3, \quad D_-(y) = -2\sqrt{1+y} + D_+(y) \ln \left(\frac{\sqrt{1+y} + 1}{\sqrt{1+y} - 1} \right). \quad (2.72)$$

La solution est donc une combinaison linéaire de D_+ et D_- dont les coefficients doivent être déterminés de telle sorte qu'elle se raccorde à la solution (2.67), dans la limite $y \ll 1$. Le potentiel Φ est ensuite déduit de l'équation (2.69). Cependant, une intégration numérique donnera des résultats plus précis, et les résultats sont présentés sur la figure 2.1.

On s'intéresse maintenant aux modes qui sont super-Hubble pendant toute la transition entre l'ère de rayonnement et l'ère de matière, c'est-à-dire les modes tels que $k\eta = \sqrt{2}ky/k_{\text{eq}} \gg 1$. Pour ces modes, l'équation de conservation (2.25) s'écrit respectivement pour la radiation et pour la matière

$$\delta'_r - 4\Psi' = 0, \quad (2.73)$$

$$\delta'_m - 3\Psi' = 0, \quad (2.74)$$

ce qui implique que si nous avons des conditions initiales adiabatiques, alors cette condition reste satisfaite pour les modes super-Hubble car

$$\left(\delta_m - \frac{3}{4}\delta_r \right)' = 0. \quad (2.75)$$

Nous pouvons en déduire que pour les modes super-Hubble avec des conditions initiales adiabatiques

$$\delta_m = \frac{3(1+y)}{4(1+\frac{3}{4}y)}\delta, \quad \delta_r = \frac{(1+y)}{(1+\frac{3}{4}y)}\delta. \quad (2.76)$$

En utilisant ce résultat ainsi que l'équation de Poisson (2.21) pour les modes super-Hubble, on obtient

$$\delta = -2 \left(\Phi + \frac{d\Phi}{dy} y \right), \quad (2.77)$$

et on peut donc récrire l'équation d'évolution de Φ (2.57) sous la forme fermée

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left[\frac{32 + 54y + 21y^2}{2y(1+y)(4+3y)} \right] \frac{d\Phi}{dy} + \frac{1}{y(1+y)(4+3y)} \Phi = 0. \quad (2.78)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$\Phi(y) = C_1 \frac{\sqrt{1+y}}{y^3} + C_2 \frac{(-16 - 8y + 2y^2 + 9y^3)}{y^3}. \quad (2.79)$$

En imposant que la limite quand $y \ll 1$ est finie et vaut $\Phi(0) = A(k)$, on a nécessairement $C_1 = 16C_2$ et $C_2 = \Phi(0)/10 = A(k)/10$. La solution s'écrit donc

$$\Phi(y) = \frac{A(k)}{10y^3} \left[16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 \right]. \quad (2.80)$$

On remarque qu'après la transition, $\Phi(y)$ tend vers une constante qui est donnée par

$$\Phi(y \gg 1) = \frac{9}{10} \Phi(y \ll 1). \quad (2.81)$$

2.2.4 Loi de conservation

Dans le cas de modes super-Hubble, nous avons vu que les contrastes de densité du mélange radiation matière froide peuvent être reliés au contraste de densité total par les équations (2.76) si les conditions initiales des perturbations sont adiabatiques. On en déduit que le fluide total est un fluide parfait pour les modes super-Hubble car $\delta P - c_s^2 \delta \rho = 0$. On peut alors combiner les équations (2.21-2.23) pour obtenir

$$\Psi'' + \mathcal{H}\Phi' + \mathcal{H}\Psi'(2 + 3c_s^2) + 3\Phi(c_s^2 - w) - c_s^2 \Delta \Psi = 0. \quad (2.82)$$

En utilisant la contrainte (2.23) qui nous permet d'écrire $\Phi = \Psi$, cette équation se récrit

$$\Psi'' + \Psi' 3\mathcal{H}(1 + c_s^2) + 3\Psi(c_s^2 - w) - c_s^2 \Delta \Psi = 0. \quad (2.83)$$

Pour les modes super-Hubble cette équation prend la forme d'une loi de conservation

$$\frac{-\mathcal{H}}{2Q} \mathcal{R}^{(1)'} \simeq 0, \quad (2.84)$$

avec $Q \equiv \mathcal{H}\bar{\rho}/\bar{\rho}' = -\frac{1}{3(1+w)}$ et où $\mathcal{R}^{(1)}$ est la perturbation de courbure en jauge comobile donnée au premier ordre,

$$\mathcal{R}^{(1)} \equiv \Psi - \frac{2Q}{\mathcal{H}} (\Psi' + \mathcal{H}\Phi). \quad (2.85)$$

Cette relation peut être utilisée pour établir un lien entre les variables de perturbation super-Hubble avant et après la transition rayonnement-matière mais aussi pour établir un lien entre la phase d'inflation primordiale et l'ère de radiation. Il s'agit de la version intégrale de l'équation (2.83). La solution particulière correspond à la solution croissante de l'équation (2.83) tandis que la solution de l'équation homogène, c'est-à-dire avec $\mathcal{R}^{(1)} = 0$ correspond au mode décroissant de l'équation (2.83).

Dans une ère dominée par un fluide de paramètre d'état w constant, c'est-à-dire tel que $w = c_s^2$, une fois le mode décroissant négligeable, on peut relier Ψ à \mathcal{R} pour des modes super-Hubble par

$$\Psi_I = \frac{3(1+w)}{5+3w} \mathcal{R}_I^{(1)}, \quad (2.86)$$

où l'indice I signifie qu'il s'agit une condition initiale pour les modes lorsqu'ils sont super-Hubble. Cet indice est pratique car il signifie également que cette valeur est héritée de l'inflation. On retrouve alors en évaluant cette relation en $w = 1/3$ et $w = 0$ la relation (2.81) entre le potentiel super-Hubble pendant les ères de radiation et de matière.

Au cours des sections précédentes, nous avons donc vu que les perturbations vectorielles étaient négligeables car amorties systématiquement, tandis que les perturbations tensorielles sont amorties uniquement lorsqu'elles deviennent sub-Hubble. Quant aux perturbations de la métrique, lorsqu'elles sont super-Hubble elles sont constantes et ne varient que d'un facteur 9/10 à la transition rayonnement matière. Les modes sub-Hubble sont eux amortis pendant l'ère de radiation mais regagnent une légère croissance logarithmique au moment de la transition radiation-matière, puis sont constants pendant l'ère de matière.

2.2.5 Interactions baryons-photons

La description précédente qui supposait que toute la matière n'interagissait pas avec la radiation est adaptée quand il s'agit de déterminer le potentiel Φ . En revanche si l'on veut déterminer correctement les fluctuations du fluide de radiation, il faut prendre en compte son interaction avec les baryons, et ce d'autant plus que la densité d'énergie des photons diminue pour devenir inférieure à celle des baryons. On introduit pour paramétrer ce moment le rapport

$$R = \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_r}, \quad (2.87)$$

où on a divisé le contenu en matière entre matière noire froide ρ_c et matière baryonique ρ_b ($\rho_m = \rho_c + \rho_b$). Si on introduit le rapport $\epsilon \equiv \rho_b/\rho_m \simeq 0.15$, alors $R = \frac{3}{4}\epsilon y$. Dans la limite $R \ll 1$, et on s'attend à ce que les baryons perturbent peu les conclusions établies pour un univers dominé par la radiation. Cependant, lorsque on approche l'équivalence, nous avons vu que la matière n'interagissait pas avec la radiation, c'est-à-dire la matière noire froide, va déterminer le potentiel gravitationnel, tandis que parallèlement R croît et que les effets de l'interaction avec les baryons vont se faire ressentir pour la radiation. La forme de l'équation (2.20) qui caractérise l'interaction entre le fluide de radiation et le fluide de baryons doit être justifiée à partir de l'étude cinétique et nous exposerons la démarche nécessaire pour cela dans la section 3.3.7. Dans l'approximation fluide, on obtient donc l'équation de conservation et l'équation d'Euler sous la forme

$$\delta'_r = \frac{4}{3}k^2 v_r + 4\Psi', \quad v'_r = -\frac{1}{4}\delta_r - \Phi + \frac{1}{6}k^2 \pi_r + \tau'(v_b - v_r) \quad (2.88)$$

$$\delta'_b = k^2 v_b + 3\Psi', \quad v'_b = -\mathcal{H}v_b - \Phi - \frac{\tau'}{R}(v_b - v_r), \quad (2.89)$$

où $\tau' = a\bar{n}_e\sigma_T$, σ_T étant la section efficace de la diffusion Compton, \bar{n}_e la densité d'électrons libres de fond et $k^2\pi_r \equiv k^i k^j \pi_{ij}$. La pression anisotrope est la manifestation du fait que le fluide de radiation soumis aux diffusions Compton sur les baryons ne va plus rester un fluide

parfait. Par conséquent il faut déterminer, via la théorie cinétique, sa forme la mieux adaptée à l'approximation fluide. Il peut être montré grâce à la théorie cinétique que si les interactions entre les photons et les baryons sont fortes, $\pi_r \simeq -\frac{96}{45}v_r/\tau'$. Il faut également faire la distinction entre Φ et Ψ qui vont cesser d'être égaux à cause de la présence de ce tenseur de pression anisotrope car ce tenseur intervient dans l'équation (2.23). Dans un premier temps nous allons considérer des échelles telles que $k/\tau' \ll 1$, c'est-à-dire que nous allons considérer le régime de couplage fort³ [Peebles & Yu 70, Sachs & Wolfe 67]. Plus précisément, nous allons considérer un développement perturbatif des équations dans le paramètre k/τ' et travailler d'abord à l'ordre dominant. Nous obtenons à partir de l'ordre dominant des équations d'Euler et de conservation

$$v_b = v_r + \mathcal{O}(k/\tau'), \quad \delta'_r = \frac{4}{3}\delta'_b + \mathcal{O}(k/\tau'). \quad (2.90)$$

Les équations d'Euler se réécrivent donc

$$[(1+R)v_r]' = -\frac{1}{4}\delta_r - (1+R)\Phi + \mathcal{O}(k/\tau'), \quad (2.91)$$

ce qui permet ensuite de fermer la dérivée de l'équation de conservation de la radiation

$$\delta_r'' + \frac{R'}{1+R}\delta_r' + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_r = 4 \left[\Phi'' + \frac{R'}{1+R}\Phi' - \frac{1}{3}k^2\Phi \right] + \mathcal{O}(k/\tau') \equiv F(\Phi) + \mathcal{O}(k/\tau'). \quad (2.92)$$

Le membre de gauche est une équation d'oscillation harmonique amortie, dont l'amortissement et le changement de fréquence sont dus à la proportion croissante R de baryons par rapport aux photons. Alors que le potentiel est de plus en plus déterminé par le contraste de densité de la matière noire qui s'effondre gravitationnellement, celui-ci agit comme un terme de forçage pour cette équation harmonique qui décale la position moyenne des oscillations. Dans la limite où le terme d'amortissement est faible devant la pulsation des oscillations, c'est-à-dire

$$\omega_s \equiv \frac{k}{\sqrt{3(1+R)}} \gg \frac{R'}{1+R}, \quad (2.93)$$

on peut donner une solution en couplage fort dans l'approximation WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) à l'équation homogène. Pour une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants du type

$$f'' + \frac{B'}{B}f' + \omega^2 f = 0, \quad (2.94)$$

on peut estimer deux solutions linéairement indépendantes par les solutions approchées

$$f_{\text{WKB}}^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{B\omega}} \exp \left[\pm i \int_0^\eta \omega(\eta') d\eta' \right]. \quad (2.95)$$

Ces fonctions satisfont l'équation

$$f_{\text{WKB}}'' + \frac{B'}{B}f_{\text{WKB}}' + (\omega^2 - Q_{\text{WKB}})f_{\text{WKB}} = 0, \quad (2.96)$$

³ *tight coupling* en anglais.

avec la différence par rapport à l'équation (2.94) donnée par

$$Q_{\text{WKB}} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{B'}{B} \right)^2 + 3 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{B''}{B} + \frac{\omega''}{\omega} \right]. \quad (2.97)$$

Dans le cas où ce terme peut être négligé par rapport à ω^2 , ces solutions sont de bonnes approximations analytiques. Dans le cas de l'équation homogène associée à l'équation (2.92), $\omega = \omega_s$ et $B = 3(1 + R) = 1/\omega^2$. La condition de validité de l'approximation WKB s'écrit donc

$$\left| \frac{Q_{\text{WKB}}}{\omega^2} \right| = \frac{3}{4k^2} \left[R'' - \frac{1}{4} \frac{(R')^2}{(1+R)} \right] = \frac{9\epsilon}{64} \left(\frac{k_{\text{eq}}}{k} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{8} \epsilon(y-1) \right] \ll 1 \quad (2.98)$$

Pour le mode $k = k_{\text{eq}}$ au moment de l'équivalence ($y = 1$), cette quantité vaut approximativement 0.02 et varie très peu jusqu'au découplage à $y_{\text{LSS}} = (1 + z_{\text{eq}})/(1 + z_{\text{LSS}}) \simeq 3.3$. L'approximation WKB constitue donc une très bonne estimation pour les modes $k > k_{\text{eq}}$. Les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2.92) sont donc pour ces modes correctement approchées par

$$\delta_{r,1}(\eta) = \frac{1}{(1+R)^{1/4}} \cos[kr_s(\eta)], \quad \delta_{r,2}(\eta) = \frac{1}{(1+R)^{1/4}} \sin[kr_s(\eta)], \quad (2.99)$$

avec

$$kr_s(\eta) \equiv \int_0^\eta \omega_s(\eta') d\eta'. \quad (2.100)$$

On peut déterminer la solution générale forcée par le terme $F(\Phi)$ grâce à la méthode de la fonction de Green

$$\delta_r(\eta) = C_1 \delta_{r,1} + C_2 \delta_{r,2} + \int_0^\eta G(\eta, \eta') F(\eta') d\eta', \quad (2.101)$$

où la fonction de Green est

$$G(\eta, \eta') \equiv \frac{\delta_{r,1}(\eta') \delta_{r,2}(\eta) - \delta_{r,1}(\eta) \delta_{r,2}(\eta')}{\delta_{r,1}(\eta') \delta'_{r,2}(\eta') - \delta_{r,2}(\eta') \delta'_{r,1}(\eta')} = \frac{\sqrt{3} [1 + R(\eta')]^{3/4}}{k [1 + R(\eta)]^{1/4}} \sin[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')]. \quad (2.102)$$

Dans le cas où les variations de R et Φ sont très lentes devant la période des oscillations, on peut donner une solution approchée de cette solution générale. Nous allons donner une explication intuitive de la forme que l'on obtient alors. L'équation (2.92) peut se récrire au premier ordre dans le développement en k/τ' comme une équation pour la quantité $\mathcal{Q} \equiv \frac{\delta_r}{4} - \Phi$ selon

$$[(1+R)\mathcal{Q}]' + \frac{k^2}{3} \mathcal{Q} = -\frac{k^2}{3} (2+R)\Phi. \quad (2.103)$$

Dans le cas où R et Φ varient lentement, ce qui est le cas quand l'univers devient dominé par la matière, cette équation est comme celle d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation ω_s , forcé par une force lentement dérivante. Le système est analogue à celui d'un ressort et d'une masse posés sur un plan incliné et soumis au frottement visqueux, pour lequel on augmenterait lentement l'angle d'inclinaison du plan. \mathcal{Q} va donc osciller autour de la position moyenne $-\Phi(2+R)$. En l'absence de frottement, l'amplitude est donnée par la différence entre sa valeur initiale et la position moyenne, c'est-à-dire $\mathcal{Q}(0) + \Phi(2+R)$. La présence du frottement visqueux va ensuite

atténuer cette amplitude comme vu précédemment d'un facteur $1/(1+R)^{1/4}$ et faire dériver lentement la pulsation des oscillations. On aura donc

$$\mathcal{Q}(k, \eta) = -(2+R)\Phi + \frac{[\mathcal{Q}(0) + (2+R)\Phi]}{(1+R)^{1/4}} \cos[kr_s(\eta)]. \quad (2.104)$$

Nous verrons dans la section (3.1) que la quantité $\Theta_{\text{SW}} \equiv \frac{\delta_{\tau}}{4} + \Phi = \mathcal{Q} + 2\Phi$ est reliée aux fluctuations de température du CMB. On obtient donc pour cette variable

$$\Theta_{\text{SW}}(k, \eta) = \frac{[\Theta_{\text{SW}}(0) + R\Phi]}{(1+R)^{1/4}} \cos[kr_s(\eta)] - R\Phi. \quad (2.105)$$

Si nous souhaitons raffiner cette description, il faut prendre en compte les effets dans l'ordre suivant en k/τ' . Nous ne rentrerons pas dans le détail de ce calcul. La principale conclusion est que le terme d'amortissement se trouve modifié, et qu'on peut en rendre compte en multipliant les solutions (2.99) par un facteur d'amortissement $\exp[-(k/k_{\text{D}})^2]$, dit amortissement Silk [Silk 68], où l'échelle d'amortissement k_{D} est donnée par [Hu 95]

$$k_{\text{D}}^{-2}(\eta) = \frac{1}{6} \int_0^{\eta} \frac{1}{1+R(\eta')} \left[\frac{16}{15} + \frac{R^2(\eta')}{1+R(\eta')} \right] \frac{d\eta'}{\tau'(\eta')}. \quad (2.106)$$

En pratique nous utiliserons cette approche phénoménologique pour décrire l'état de la surface de dernière diffusion et nous noterons alors $k_{\text{D}} = k_{\text{D}}(\eta_{\text{LSS}})$.

2.3 Le formalisme 1+3

2.3.1 Principe général

Jusqu'à présent, nous avons présenté une approche perturbative basée sur des coordonnées, un espace de fond et des variables invariantes de jauge. Cette approche a été introduite par Bardeen [Bardeen 80] et est majoritairement utilisée dans les publications de cosmologie. On peut cependant adopter un point de vue tout à fait opposé et utiliser un formalisme covariant qui ne se réfère pas aux coordonnées mais utilise des objets tensoriels ayant une existence propre indépendante du choix de coordonnées. Nous allons résumer ce formalisme mais plus de détails peuvent être trouvés dans [Ellis & van Elst 98]. Afin de donner une interprétation dynamique aux équations, c'est-à-dire sous la forme d'évolution temporelle de quantités physiques, on réalise un découpage local 1+3 de l'espace temps. Cela consiste à supposer qu'il existe un ensemble d'observateurs de quadrivitesse u^{μ} dont les lignes d'univers constituent une partition de l'espace-temps et dont le temps propre τ sert de coordonnée temporelle. En se référant aux variations de quantités physiques le long des trajectoires suivies par ces observateurs, on définira une dérivée temporelle. De même, en se référant aux variations de quantités physiques le long des surfaces localement orthogonales au flot de ces observateurs, on obtiendra une dérivée spatiale. Formellement, ces observateurs permettent de définir une projection parallèle $U^{\mu}_{\nu} = -u^{\mu}u_{\nu}$ ainsi qu'une projection orthogonale $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}$. On peut donc décomposer tout vecteur en sa partie parallèle et sa partie orthogonale, et généraliser cette décomposition pour des tenseurs quelconques. On décomposera ainsi le tenseur énergie impulsion comme dans l'équation (1.15), ainsi que le tenseur de Ricci et le tenseur de Riemann, et si l'on s'intéresse à la théorie cinétique on

décomposera l'espace tangent. On définit alors la dérivée directionnelle et la dérivée spatiale d'un tenseur quelconque T^μ_ν par

$$\dot{T}^\mu_\nu \equiv u^\alpha \nabla_\alpha T^\mu_\nu, \quad D_\alpha T^\mu_\nu \equiv h^\beta_\alpha h^\omega_\nu h^\mu_\sigma \nabla_\beta T^\sigma_\omega \equiv P_h(\nabla_\alpha T^\mu_\nu). \quad (2.107)$$

On décompose la dérivée covariante de u_μ selon

$$\nabla_\nu u_\mu = -u_\nu a_\mu + D_\nu u_\mu \equiv -u_\nu a_\mu + \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (2.108)$$

a_μ est l'accélération qui est non nulle si les observateurs ne suivent pas de géodésique, $\sigma_{\mu\nu}$ est le cisaillement⁴ et $\omega_{\mu\nu}$ est la vorticité. D_μ est compatible avec $h_{\mu\nu}$, c'est-à-dire $D_\alpha h_{\mu\nu} = 0$, mais n'est sans torsion que si $\omega_{\mu\nu} = 0$. Dans ce dernier cas, on peut définir des sections spatiales globales orthogonales à l'ensemble des observateurs de quadrivitesse u^μ . Dans ce cas on bénéficie également d'une foliation de l'espace-temps c'est-à-dire d'un ensemble d'hypersurfaces de type espace qui réalise une partition de l'espace-temps. Ce découpage en tranches d'espace est appelé formalisme 3 + 1 (voir [Gourgoulhon 07] pour des notes de cours sur ce sujet). Lorsque l'on exprime cette foliation en faisant référence explicitement aux coordonnées, ce formalisme est plus connu sous le nom de formalisme ADM [Arnowitt et al. 62]. Les approches 1 + 3 et 3 + 1 sont donc différentes mais très liées. Dans le cas où il n'y a pas de vorticité, $D_\mu u_\nu = D_\nu u_\mu$ et on définit le tenseur

$$K_{\mu\nu} \equiv D_{(\mu} u_{\nu)} = \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}. \quad (2.109)$$

$K_{\mu\nu}$ est alors symétrique et orthogonal à u^μ ($K_{\mu\nu} u^\mu = 0$) et est appelé courbure extrinsèque des sections spatiales. On peut alors relier le tenseur de Riemann associé à $g_{\mu\nu}$ à celui associé à $h_{\mu\nu}$, en utilisant la relation de Gauss-Codazzi

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\rho} &= {}^3R_{\alpha\beta\gamma\rho} + 2K_{\alpha[\gamma} K_{\rho]\beta} + 4u_{[\alpha} a_{\beta]} a_{[\rho} u_{\gamma]} + 4(D_{[\alpha} K_{\beta][\rho]} u_{\gamma]} + 4u_{[\beta} K_{\alpha]}^\lambda K_{\lambda[\rho} u_{\gamma]} \\ &\quad + 4u_{[\beta} P_h(\dot{K}_{\alpha][\rho]} u_{\gamma]} + 4(D_{[\alpha} K_{\beta][\rho]} u_{\gamma]} + 4(D_{[\gamma} K_{\beta][\rho]} u_{\alpha]} + 4u_{[\gamma} D_{\rho]} a_{[\beta} u_{\alpha]}). \end{aligned}$$

Si la matière est sans vorticité alors elle peut servir à réaliser ce découpage, sinon il faut distinguer le flot d'observateurs qui servent au découpage 1 + 3 du flot de matière. En projetant la relation de commutation des dérivées covariantes selon les composantes parallèles et orthogonales ainsi qu'en projetant les identités de Bianchi et en utilisant $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, on obtient un ensemble d'équations d'évolution et de contrainte [Ellis & van Elst 98].

Cette approche ne fait pas référence explicitement à une espace de fond si bien qu'il faut trouver une procédure afin de donner un sens à la notion de perturbations. Une solution consiste à prendre des gradients spatiaux (D_μ) des quantités physiques. Par exemple, dans ce formalisme, l'équation de conservation s'écrit

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + P) = 0. \quad (2.110)$$

En appliquant l'opérateur D_μ , on obtient

$$D_\mu \dot{\rho} + (\rho + P) D_\mu \Theta + \Theta D_\mu(\rho + P) = 0. \quad (2.111)$$

⁴ *shear* en anglais.

Afin de la mettre sous la forme d'une équation d'évolution pour $D_\mu \rho$ il faut commuter la dérivée spatiale avec la dérivée temporelle. En notant $K_{\mu\nu} \equiv D_\nu u_\mu = \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, on obtient

$$\begin{aligned} D_\mu \dot{\rho} &= (D_\mu \rho)^\cdot - u_\mu a_\nu D^\nu \rho - a_\mu \dot{\rho} + K_{\mu\nu} D^\nu \rho \\ &= P_h [(D_\mu \rho)^\cdot] - a_\mu \dot{\rho} + K_{\mu\nu} D^\nu \rho. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Des relations de commutations similaires pour des vecteurs et tenseurs d'ordre supérieur existent et permettent de généraliser cette méthode au delà des scalaires. La différence fondamentale entre le formalisme 1 + 3 et l'approche perturbative basée sur les coordonnées tient dans le fait que dans le formalisme 1 + 3 on ne fait pas référence de façon explicite à un espace de fond. En revanche, lorsque l'on choisit de résoudre les équations qui sont intrinsèquement non linéaires, on choisit une procédure itérative de résolution. À la première itération on choisit les quantités qui sont non nulles et cela spécifie la forme générale de l'espace temps. Par exemple pour rechercher des solutions proches de la solution de Friedmann-Lemaître, on va choisir dans la première itération $\Theta \neq 0$ mais $\sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = 0$. On choisit également $D_\mu Z = 0$ pour Z un champ scalaire quelconque. En ayant résolu les équations avec cette prescription, on réutilise les solutions obtenues afin d'améliorer les solutions dans une seconde itération. Par exemple dans l'équation (2.111), on utilisera les solutions pour Θ , ρ et P trouvées à la première itération afin de déterminer une équation satisfaite par les $D_\mu Z$. Les variables non nulles lors de la première itération sont donc appelées variables de fond tandis que celles qui sont non nulles uniquement à partir de la seconde itération sont appelées variables perturbées du premier ordre et ainsi de suite. L'approche 1+3 résout donc de manière perturbative des équations exactes, tandis que l'approche basée sur l'utilisation de coordonnées résout de façon exacte des équations approchées. Il reste à montrer que ces deux approches se rejoignent quand le nombre d'itérations tend vers l'infini, ce qui n'a pas été fait. Nous ne détaillerons pas plus le formalisme 1 + 3 mais nous présenterons dans la section 5.3 comment il peut être utilisé pour déterminer de façon algorithmique les perturbations de l'approche en coordonnées dans une utilisation hybride.

2.3.2 Utilisation de la dérivée de Lie

Une amélioration possible du formalisme 1 + 3 consiste à utiliser la dérivée de Lie dans la direction u_μ , notée \mathcal{L}_u , plutôt que la dérivée covariante directionnelle. En utilisant $\mathcal{L}_u X_\mu = \dot{X}_\mu + X_\nu \nabla_\mu u^\nu$, on peut par exemple remettre l'équation (2.112) sous la forme

$$D_\mu(\dot{\rho}) = \mathcal{L}_u(D_\mu \rho) - a_\mu \dot{\rho}. \quad (2.113)$$

L'intérêt d'utiliser une dérivée de Lie réside dans le fait que cette quantité s'identifie à la dérivée par rapport au temps cosmique t lorsque l'on considère une variable de perturbation du premier ordre spatiale sur un espace de fond homogène, et pas seulement pour les scalaires comme c'est le cas pour la dérivée directionnelle $u^\mu \nabla_\mu$. En effet, au premier ordre

$$\mathcal{L}_u X_i = u^\nu \partial_\nu X_i + X_\nu \partial_i u^\nu = u^\nu \partial_\nu X_i = \frac{\partial X_i}{\partial t}, \quad (2.114)$$

où on a utilisé que nécessairement $\partial_i u^\nu = 0$ doit être pris à l'ordre le plus bas et est donc nul pour un espace homogène⁵. Cette formulation permet donc d'entrevoir l'unification des deux

⁵Plus généralement, dans un système de coordonnées localement orthogonal et ayant une coordonnée temporelle correspondant au temps propre des observateurs de quadrivitesse u^μ , la dérivée de Lie s'identifie à la dérivée partielle temporelle.

formalismes. En définissant le facteur d'échelle moyen S par

$$S = \ln \left[\frac{1}{3} \int d\tau \Theta \right] \equiv \ln \alpha, \quad (2.115)$$

on peut montrer [Langlois & Vernizzi 05] qu'en utilisant seulement l'équation de conservation (2.111)

$$\mathcal{L}_u \mathcal{R}_\mu = -\frac{\Theta}{3(\rho + P)} \left(D_\mu P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} D_\mu \rho \right), \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_\mu \equiv D_\mu \alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} D_\mu \rho. \quad (2.116)$$

Pour des perturbations adiabatiques $D_\mu P - \left(\dot{P}/\dot{\rho} \right) D_\mu \rho = 0$, et cette loi est une loi de conservation. On montre alors qu'il s'agit d'une généralisation non perturbative de la loi de conservation de la perturbation de courbure comobile, et on peut retrouver la loi de conservation de la perturbation de courbure comobile donnée par l'équation (2.84).

2.3.3 Comparaison des approches Bardeen et 1+3

On peut comparer les deux approches perturbatives en développant les quantités 1 + 3 en perturbations autour de l'espace de fond à symétries maximales dans l'approche en coordonnées. Les quantités 1 + 3 peuvent ainsi être exprimées en fonction des variables de perturbations. On peut également développer en perturbations les équations satisfaites par les variables 1 + 3. On obtient ainsi une comparaison immédiate des deux formalismes, cette comparaison pouvant être étendue à tout ordre. On trouvera dans [Osano *et al.* 07] ainsi que dans [Bruni *et al.* 92] les résultats d'une telle démarche. On retiendra que pour comparer l'approche 1 + 3 à l'approche en coordonnées, il faut exprimer cette première dans cette dernière, mais que la démarche inverse n'a pas été établie et reste à explorer. Une différence fondamentale entre les deux formalismes réside dans le fait que l'approche 1 + 3 définit les gradients dits spatiaux sur l'espace physique, avec les notions de décomposition *SVT* et de laplacien associées, tandis que l'approche en coordonnées fait référence pour tout ordre de perturbation à l'espace de fond pour définir la notion de gradient spatial. Une conséquence pratique importante est qu'il semble difficile de construire facilement une décomposition en modes dans l'approche 1 + 3, ce qui est utile si l'on souhaite avoir des équations différentielles uniquement dans le temps, tandis qu'elle est automatique dans l'approche en coordonnées. Bien que l'on puisse espérer que les deux démarches mènent aux mêmes résultats et même prédictions, il apparaît donc encore incertain lorsque l'on dépasse la théorie linéaire que les formalismes soient équivalents. En particulier, la procédure de moyennage qui est essentielle dans l'approche en coordonnées n'est pas explicitement construite, et même si la liberté de jauge peut être interprétée comme un changement de procédure de moyennage, celle-ci n'est pas acquise de façon systématique.

Chapitre 3

Théorie cinétique et physique du fond diffus cosmologique

3.1 Effet Sachs-Wolfe

Si lorsque la condition de couplage fort est vérifiée on peut décrire la radiation par un fluide parfait puisque le tenseur de pression anisotrope y est effacé par les diffusions multiples, cela n'est en revanche plus le cas après la recombinaison lorsque les photons n'interagissent plus avec la matière et suivent dans l'approximation de l'optique géométrique des géodésiques nulles. Tout d'abord nous supposons que la surface de dernière diffusion est infiniment fine et que l'on passe instantanément du couplage fort à la propagation libre¹ des photons. En étudiant la propagation le long d'une géodésique nulle dans un espace perturbé, nous pouvons relier les perturbations de la métrique et du fluide de radiation avant le découplage avec celles du CMB observé aujourd'hui. Dans l'approximation de l'optique géométrique, nous pouvons définir pour un photon une trajectoire paramétrée $x^\mu(\lambda)$. Nous définissons le vecteur tangent à cette trajectoire par $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ qui satisfait la condition de norme nulle et l'équation géodésique

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = k^\mu \left(\frac{\partial k^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu k^\rho \right) = 0. \quad (3.1)$$

On décompose le vecteur tangent selon $k^\mu = \bar{k}^\mu + \delta k^\mu$, et ces conditions doivent être satisfaites à la fois pour le vecteur de fond et le vecteur perturbé. Comme $\bar{k}_\mu \bar{k}^\mu = 0$ nous pouvons décomposer ce vecteur de type lumière selon

$$\bar{k}^\mu = \bar{E} [\bar{u}^\mu + \bar{e}^\mu], \quad \text{avec} \quad \bar{E} = -\bar{k}^\nu \bar{u}_\nu, \quad \bar{e}^\mu = \frac{1}{\bar{E}} \bar{h}^\mu_\nu \bar{k}^\nu. \quad (3.2)$$

De même nous décomposons la perturbation δk^μ selon

$$\delta k^\mu = \bar{E} [\delta_E \bar{u}^\mu + \delta e^\mu], \quad \text{avec} \quad \delta_E = -\frac{1}{\bar{E}} \delta k^\nu \bar{u}_\nu, \quad \delta e^\mu = \frac{1}{\bar{E}} \bar{h}^\mu_\nu \delta k^\nu, \quad (3.3)$$

c'est-à-dire $k^\mu = \bar{E} [(1 + \delta_E) \bar{u}^\mu + (\bar{e}^\mu + \delta e^\mu)]$. La condition de normalisation implique $\gamma_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j = 1$ et l'équation géodésique sur l'espace de fond (1.9) nous donne $\bar{E} \sim 1/a$. Toujours en négligeant

¹*free-streaming* en anglais.

les modes vectoriels, nous déduisons finalement de l'équation géodésique au premier ordre pour la composante d'indice $\nu = 0$

$$\frac{d\delta_E}{d\lambda} = -\Phi' - 2\bar{e}^i \partial_i \Phi + \Psi' - E'_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j. \quad (3.4)$$

L'énergie d'un photon mesurée par un observateur comobile avec un fluide de quadrivecteur vitesse u^μ est donnée par $\mathcal{E} = -k_\mu u^\mu$. Il faut bien réaliser que δ_E est le contraste d'énergie tel que mesuré par un observateur de quadrivitesse $\bar{u}_\mu = (dt)_\mu$ qui n'est pas normalisé à -1 sur l'espace perturbé. Si l'on prend en compte le fait que l'observateur doit satisfaire $u^\mu u_\mu = -1$ sur l'espace perturbé et que de plus on souhaite que celui ci soit comobile avec les baryons, $u^\mu = u_b^\mu$, alors on obtient (toujours au premier ordre dans les perturbations) en définissant $\mathcal{E} \equiv \bar{\mathcal{E}} (1 + \delta_{\mathcal{E}})$

$$\delta_{\mathcal{E}} = [\delta_E + \Phi - \bar{e}_i v_b^i]. \quad (3.5)$$

On peut donc relier le contraste d'énergie $\delta_{\mathcal{E}_e}$ mesurée à l'émission du photon en x_e^i à η_e à celui $\delta_{\mathcal{E}_0}$ mesurée aujourd'hui en x_0^i à η_0 . A l'ordre le plus bas, ces points de l'espace-temps sont reliés par

$$x_0^i - x_e^i = \bar{e}^i (\eta_0 - \eta_e) \quad (3.6)$$

et on a donc au premier ordre

$$\delta_{\mathcal{E}_0} = \delta_{\mathcal{E}_e} + [\delta_E + \Phi - \bar{e}_i (v_b^i)]_e^0. \quad (3.7)$$

Il nous faut donc intégrer l'équation (3.4) afin de pouvoir expliciter cette expression. On obtient finalement au premier ordre en négligeant les modes vectoriels

$$\delta_{\mathcal{E}_0} = \delta_{\mathcal{E}_e} + [\Phi + \bar{e}_i v_b^i]_0^e + \int_e^0 (\Phi' + \Psi' - E'_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j) d\eta. \quad (3.8)$$

On peut montrer en utilisant la physique de la recombinaison que la surface de dernière diffusion correspond à une surface de densité d'énergie de radiation constante, c'est-à-dire que les points (η, \mathbf{x}) de cette surface satisfont $\rho_r(\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}) = \bar{\rho}_r(\bar{\eta}_{\text{LSS}})$. Si on suppose qu'avant cette surface les interactions entre baryons et photons sont très fortes, alors la radiation est constamment thermalisée et sa fonction de distribution est celle d'un corps noir. Elle est donc entièrement caractérisée par sa température $T(\eta, \mathbf{x})$ qui est reliée à la densité d'énergie selon

$$\rho = 4\sigma_B T^4, \quad (3.9)$$

avec σ_B la constante de Stefan-Boltzmann dont la valeur dans les unités $c = 1$, $\hbar = 1$ et $k_B = 1$, est sans dimension et vaut $\pi^2/60$. On peut ainsi définir un contraste de température par $T(\eta, \mathbf{x}) \equiv \bar{T}(\eta) [1 + \Theta(\eta, \mathbf{x})]$. On souhaite exprimer les quantités perturbées de l'équation (3.8) qui sont évaluées sur la surface de dernière diffusion en fonction de leurs valeurs prises sur la surface moyenne de dernière diffusion définie par $\bar{\eta}_{\text{LSS}}$. Dans cette hypothèse de couplage fort avant la surface de dernière diffusion, on utilise le fait que la quantité qui intervient dans un spectre de corps noir est \mathcal{E}/T , et que par conséquent, une fois intégré sur toutes les énergies, les conclusions de l'équation (3.8) tirées pour $\delta_{\mathcal{E}}$ seront valables pour Θ , et on relie le contraste de température à celui de densité de radiation en utilisant l'équation (3.9) par $(1 + \Theta)^4 = 1 + \delta_r$.

Au premier ordre on aura $\Theta^{(1)}[\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\eta_{\text{LSS}})] = \delta_r^{(1)}[\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\eta_{\text{LSS}})]/4 \simeq \delta_r^{(1)}[\bar{\eta}_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\bar{\eta}_{\text{LSS}})]/4$. On obtient donc que la température observée dans une direction $-\bar{\mathbf{e}}^i$ est donnée par

$$\Theta(\eta_0, \mathbf{x}_0, -\bar{\mathbf{e}}^i) = \frac{1}{4}\delta_r + [\Phi + \bar{e}_i v_b^i](\bar{\eta}_{\text{LSS}}, \mathbf{x}_e) + \int_e^0 (\Phi' + \Psi' - E'_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j) d\eta + F(0), \quad (3.10)$$

où $F(0)$ est une fonction des variables de perturbations ici et aujourd'hui qui n'intervient pas dans les différences directionnelles. Le terme $\Theta_{\text{SW}}(k, \eta) \equiv [\delta_r(k, \eta)/4 + \Phi(k, \eta)]$ est appelé effet *Sachs-Wolfe propre*, le terme faisant intervenir la vitesse des baryons à la dernière diffusion est un effet *Doppler* $\Theta_{\text{Dop}}(k, \eta) \equiv [\bar{e}_i v_b^i(k, \eta)]$, et le terme intégré est appelé effet *Sachs-Wolfe intégré*.

3.2 Multipôles

3.2.1 Prédictions statistiques multipôlares

Lorsque l'on établit des prédictions pour l'univers, nous n'avons accès qu'à des prédictions statistiques sur un ensemble de réalisations d'univers. Nous détaillerons ce point plus particulièrement dans le chapitre dédié à l'inflation. Les propriétés statistiques de $\Phi^{(1)}(k)$ [Eq. (2.37)] au début de l'ère de radiation sont données par celles de $A(k)$ (voir l'équation 2.37 pour la définition). Le corrélateur à deux points de cette quantité est donné en espace de Fourier par

$$\langle A(\mathbf{k})A(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\text{D}}^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\Phi}(k). \quad (3.11)$$

P_{Φ} est le spectre de puissance des fluctuations et ne dépend que de la norme de \mathbf{k} ce qui traduit l'isotropie statistique. Quant à la fonction δ_{D}^3 , elle traduit l'hypothèse d'homogénéité des propriétés statistiques des fluctuations. Le corrélateur à deux points contient toute l'information sur la statistique d'un champ gaussien car tout corrélateur à n points peut être exprimé en fonction du corrélateur à deux points (voir l'introduction de la partie II). Grâce à l'isotropie statistique, on déduit que la corrélation de température du CMB venant de régions différentes du ciel ne dépend que de leur séparation angulaire et peut donc être décomposée sur la base des polynômes de Legendre selon

$$\langle \Theta(\mathbf{e}_1)\Theta(\mathbf{e}_2) \rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2). \quad (3.12)$$

Cela revient à réaliser une décomposition de la température mesurée en harmoniques sphériques selon

$$\Theta(\mathbf{e}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{e}), \quad (3.13)$$

et à considérer les corrélations des $a_{\ell m}$ qui, à cause de l'isotropie statistique, satisfont

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle = C_{\ell_1} \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (3.14)$$

En utilisant ces propriétés et en négligeant l'effet Sachs-Wolfe intégré, on peut montrer que

$$\begin{aligned} a_{\ell m} &= 4\pi i^{\ell} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\Theta_{\text{SW}} j_{\ell}(k\Delta\eta_E) + v_b(k) \frac{j'_{\ell}(k\Delta\eta_E)}{k} \right] Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \\ &\equiv 4\pi i^{\ell} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} g_{\ell}(k, \eta_{\text{LSS}}) \Phi^{(1)}(\mathbf{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad \text{avec} \quad \Delta\eta_E \equiv \eta_0 - \eta_{\text{LSS}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

La fonction $g_\ell(k, \eta)$ contient à la fois le transfert des perturbations de métrique et de matière en perturbations de température, ainsi que les effets de projections sur la sphère des observations. En utilisant la propriété (3.11), on déduit que le spectre de puissance angulaire C_ℓ est donné au premier ordre dans les perturbations par

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int |g_\ell(k, \eta_{\text{LSS}})|^2 P_\Phi(k) k^2 dk. \quad (3.16)$$

C_ℓ est la variance des fluctuations de température sur une échelle angulaire de l'ordre de $\theta \sim \pi/\ell$.

3.2.2 Approximation du ciel plat

Le résultat précédent peut être simplifié si l'on se place dans l'approximation du ciel plat. Si l'on regarde une direction du ciel \mathbf{e} , c'est-à-dire telle que les photons nous parvenant de cette zone soient approximativement parallèles entre eux et de direction $-\mathbf{e}$, alors on peut décomposer un mode \mathbf{k} en une partie parallèle à \mathbf{e} et une partie orthogonale selon

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_r, \quad \text{avec} \quad k_r = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}. \quad (3.17)$$

Dans ce cadre d'approximation, l'effet Sachs-Wolfe propre et l'effet Doppler s'écrivent respectivement

$$\Theta_{\text{SW}}^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) = \left[\frac{\delta_r^{(1)}}{4}(k, \eta) + \Phi^{(1)}(k, \eta) \right], \quad \Theta_{\text{Dop}}^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) = \left[-ik_r v_b^{(1)}(k, \eta) \right], \quad (3.18)$$

et on définit $g^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) \equiv \frac{1}{A(k)} \left[\Theta_{\text{SW}}^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) + \Theta_{\text{Dop}}^{(1)}(\mathbf{k}, \eta) \right]$. On peut alors montrer que le spectre angulaire s'écrit alors pour $\ell \gg 1$

$$C_\ell \simeq \frac{1}{2\pi (\Delta\eta_E)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_r P_\Phi(k) |g(\mathbf{k}, \eta_{\text{LSS}})|^2, \quad (3.19)$$

où $\Delta\eta_E k_\perp = \ell$. L'approximation du ciel plat n'est valable que pour $\ell \gg 1$. Dans la limite des grandes échelles, c'est-à-dire pour $\ell \ll 1$, on obtient pour un spectre invariant d'échelle, c'est-à-dire ayant un comportement proportionnel à k^{-3} , une solution approchée du spectre de puissance angulaire (3.16) donnée par

$$\ell(\ell + 1)C_\ell \simeq \frac{9}{100\pi} P_\Phi k^3. \quad (3.20)$$

Cette expression est ensuite utilisée pour normaliser le spectre de puissance par comparaison aux observations.

3.2.3 Epaisseur de la surface de dernière diffusion

En pratique, la recombinaison n'est pas instantanée et la surface de dernière diffusion est en fait un volume. Si l'on désigne par $r = (\eta_0 - \eta)$ la distance comobile à laquelle un photon a été diffusé pour la dernière fois avant d'être observé aujourd'hui, alors on peut relier le nombre de photons $N(r)$ qui ont parcouru au moins une distance r au nombre de photons $N(r + dr)$ qui ont parcouru au moins une distance $r + dr$ par

$$N(r + dr) = N(r) - \tilde{\sigma} dr N(r), \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(r)}{dr} = -\tilde{\sigma} N(r) \quad (3.21)$$

où nous utilisons la notation $\tilde{\sigma} \equiv an_e\sigma_T$. On en déduit que $N(r) = N_{tot} \exp[-\int_0^r \tilde{\sigma}(r')dr']$. On définit ensuite la fonction de visibilité $v(r)$ comme la probabilité pour qu'un photon qui nous arrive ait été diffusé pour la dernière fois entre r et $r + dr$. En termes différentiels on obtient

$$v(r) = -\frac{1}{N_{tot}} \frac{dN}{dr}, \quad \Rightarrow \quad v(r) = \tilde{\sigma}(r) \exp\left[-\int_0^r \tilde{\sigma}(r')dr'\right]. \quad (3.22)$$

En posant $\frac{d\tau}{dr} \equiv \tilde{\sigma}$, c'est-à-dire $\tau = \int_0^r \tilde{\sigma}(r')dr'^2$, la fonction de visibilité se réécrit

$$v(r) = \frac{d\tau}{dr} e^{-\tau}. \quad (3.23)$$

Néanmoins nous avons déjà utilisé la notation $\tau' \equiv \frac{d\tau}{dr}$ ce qui implique $\tau' = \frac{d\tau}{d(\eta_0 - \eta)} = -\frac{d\tau}{d\eta}$, le signe résultant d'une convention historique.

Afin de tenir compte de cette épaisseur dans l'approximation du ciel plat, il faut remplacer $g(\mathbf{k}, \eta_{LSS})$ par

$$\hat{g}(\mathbf{k}, \eta_{LSS}) \equiv \int v(\eta) g(\mathbf{k}, \eta) e^{(ik_r\eta)} d\eta. \quad (3.24)$$

Cette méthode permet d'obtenir pour un spectre de puissance P_{Φ} invariant d'échelle, les prédictions du spectre de puissance angulaire apparaissant sur la figure 3.1, où l'épaisseur de la surface de dernière diffusion ainsi que l'amortissement Silk ont été pris en compte [Seljak 94].

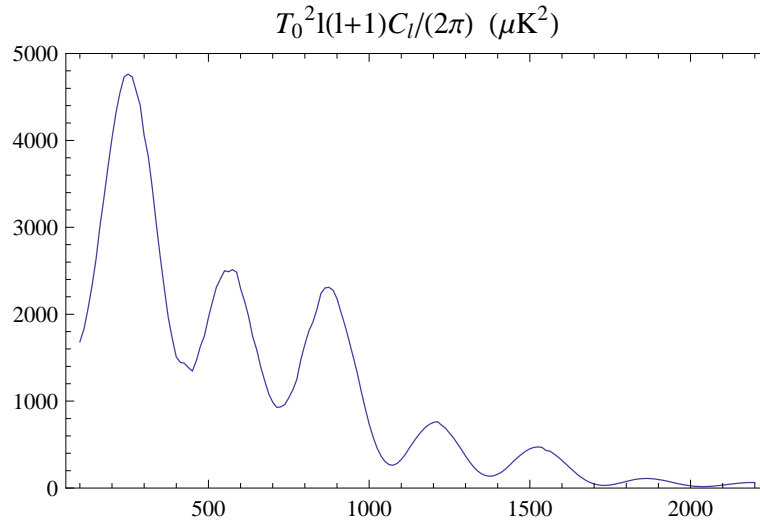


FIG. 3.1: Spectre angulaire dans l'approximation fluide en ciel plat, obtenu par intégration dans un code *Mathematica* des équations (2.88,2.89), avec le potentiel gravitationnel déterminé par l'équation de Poisson (2.21) en prenant en compte la matière noire froide.

Nous verrons dans la section 3.3 qu'il est nécessaire d'aller au delà de l'approximation fluide afin d'obtenir des prédictions précises pour le spectre angulaire. Il faut alors résoudre l'équation de Boltzmann et les équations d'Einstein de façon numérique afin de générer les prédictions pour tous les modèles d'univers envisageables et sélectionner celui qui est le plus compatible

² τ est appelé profondeur optique

avec les observations [Spergel *et al.* 07]. Le meilleur ajustement³ aux données récoltées par le satellite consacré à la mesure du fond diffus WMAP est présenté sur la figure 3.2. Plusieurs codes sont disponibles en libre accès afin de réaliser ces intégrations numériques, les plus utilisés étant CMBFAST [Seljak & Zaldarriaga] et CAMB [Lewis & Challinor]. Une étude détaillée de la dépendance des caractéristiques du spectre angulaire dans les paramètres cosmologiques est exposée dans [Riaziuelo 00].

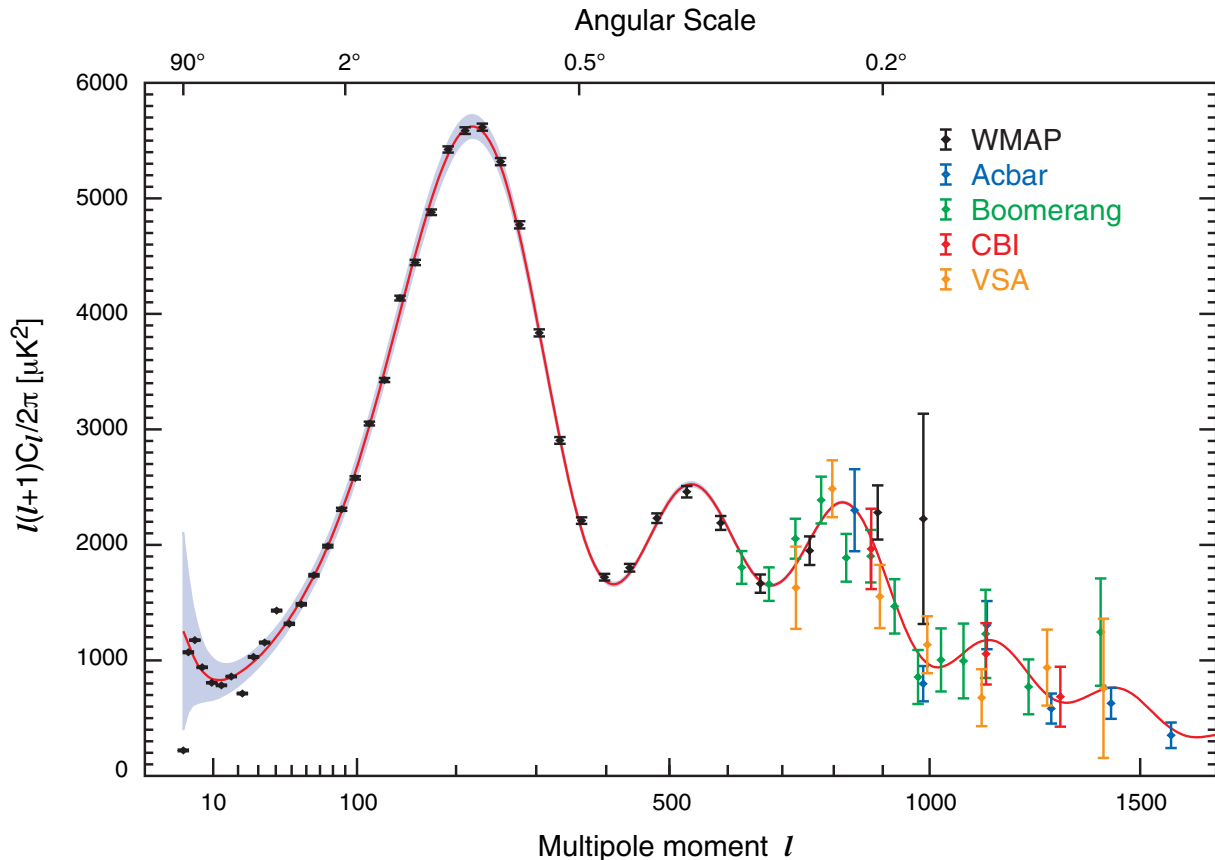


FIG. 3.2: Résultats de WMAP : Spectre de puissance angulaire de la température. En noir sont reportés les points mesurés et en rouge le meilleur ajustement correspondant au modèle concordant est tracé. Figure tirée de [Spergel *et al.* 07].

3.3 Théorie cinétique

3.3.1 Description statistique d'un ensemble de particules

Dans le cas général, et particulièrement pour la radiation, le contenu matériel de l'univers ne peut pas être décrit par un fluide parfait, et il faut prendre en compte la présence du tenseur de pression anisotrope. L'évolution de ce tenseur ne peut pas être déterminée seulement à

³ *best fit* en anglais.

partir de l'équation de conservation du tenseur énergie impulsion. De plus les forces entre les différents fluides doivent être déterminées afin de pouvoir écrire les équations de conservation couplées (2.20). Ces interactions résultent principalement de diffusions entre particules dont les sections efficaces nous sont connues d'après la microphysique. On adopte une description statistique qui va être caractérisée par la fonction de distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ [Hillery *et al.* 84]. Nous pourrons ensuite remonter à l'approximation fluide afin de déterminer les forces entre les différents fluides. De plus, dans le régime de couplage fort, le tenseur de pression anisotrope peut être déterminé ce qui justifie alors de se restreindre à la description fluide. Lorsque l'on passe à la limite fluide, le paramètre d'équation d'état w peut être déterminé à partir de la vitesse quadratique moyenne des particules et de leur masse. Avant de dériver ce lien, il nous faut pouvoir utiliser les résultats de la physique locale dérivés dans un espace-temps Minkowskien. On va donc se ramener localement à un espace temps Minkowskien en utilisant une base de vecteurs orthonormés e_a , $a = 0, 1, 2, 3$, appelée tétrade ou champ de tétrade, qui satisfont

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

où η_{ab} est la métrique de Minkowski. On définit également une base de formes associées e^a , $a = 0, 1, 2, 3$ satisfaisant

$$g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b = \eta^{ab}, \quad \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b = g_{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Les impulsions \mathbf{P} des particules peuvent donc être écrites soit dans la base associée au système de coordonnées ∂_μ soit dans la base de la tétrade et on aura donc

$$\mathbf{P} = p^\mu \partial_\mu = \pi^a e_a. \quad (3.27)$$

Afin de pouvoir utiliser les résultats de la physique des particules, on préférera donc écrire la fonction de distribution sous la forme $f(\mathbf{x}, \pi^a)$, en sous entendant le champ de tétrade utilisé dans la décomposition des impulsions. On utilise alors les notations standard de la relativité restreinte

$$n^i \equiv \frac{\pi^i}{\pi^0}, \quad \beta = \sqrt{n^i n_i}, \quad \hat{n}^i = n^i / \beta, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (3.28)$$

Pour une particule massive $\pi^a \pi_a = -m^2$ et donc $\pi^0 = \gamma m$, si bien que n^i est la vitesse, \hat{n}^i son vecteur unitaire direction, et β la norme de cette vitesse qui satisfait nécessairement $\beta < 1$. Pour une particule non massive, $\beta = 1$ et $\hat{n}^i = n^i$ est le vecteur unitaire direction de cette particule. Pour un ensemble de particules de masse m n'ayant pas de mouvement d'ensemble ($\langle \pi^i \rangle = 0$), la pression est donnée par

$$P \equiv \frac{2N \langle \pi^i n_i \rangle}{6} = \frac{1}{3} m N \langle \gamma \beta^2 \rangle. \quad (3.29)$$

Cette formule a une explication intuitive. Si on effectue une intégrale sur toutes les impulsions qui traversent une surface donnée, on montre que cela revient à considérer que seulement un sixième des particules traversera la surface en ayant une incidence normale, ce qui explique le facteur 1/6. Ensuite les particules qui touchent la surface rebondissent en y laissant deux fois leur impulsion qui est π^i . Ce nombre de particules qui touche la surface par unité de temps est proportionnel à la vitesse $n^i = \beta \hat{n}^i$ et à la densité de particules N . L'énergie de cet ensemble de particules est la moyenne des énergies $\rho = N \langle \pi^0 \rangle = m N \langle \gamma \rangle$. On en conclut donc que le paramètre d'état s'écrit

$$w = \frac{\langle \gamma \beta^2 \rangle}{3 \langle \gamma \rangle}. \quad (3.30)$$

On en conclut donc que pour pouvoir décrire la matière avec un paramètre d'état nul il faut que toutes les particules aient une vitesse nulle. En cosmologie, lorsque l'on parle d'un fluide de pression nulle ($w = 0$) pour lequel il existe généralement une vitesse d'ensemble, on doit donc comprendre qu'il s'agit d'un fluide pour lequel $P \ll \rho c^2$. Pour la radiation on trouve $P = \frac{1}{3}N\langle\pi^i n_i\rangle = \frac{1}{3}N\langle\pi^0\rangle = \rho/3$.

Une approche plus rigoureuse consiste à définir un tenseur énergie-impulsion à partir de la fonction de distribution selon⁴

$$\begin{aligned} T^{ab}(x^\mu) &\equiv \int \delta_D(\pi^c \pi_c - m^2) f(x^\mu, \pi^d) \pi^a \pi^b d\pi^0 d^3\pi^i, \\ &= \int f(x^\mu, \pi^i) \pi^0 (\beta\pi^0)^2 n^a n^b d(\beta\pi^0) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où on note $n^a = (1, n^i) = (1, \beta\hat{n}^i)$ et $d\Omega = d^2\hat{n}^i$. Nous avons également utilisé l'abus de notation $f(x^\mu, \pi^i)$ pour signifier $f(x^\mu, \pi^a)$ où la composante π^0 est déterminée en résolvant la contrainte du Dirac qui assure que les particules sont sur leur couche de masse. On utilisera également la notation $f(x^\mu, \pi^0, \hat{n}^i)$ qui correspond à des coordonnées sphériques pour π^i dans le cas de la radiation. En revanche dans le cas de matière de masse non nulle, il faut comprendre cette notation comme signifiant $f[x^\mu, \pi^0(\pi^i), \hat{n}^i(\pi^i)]$. Pour passer d'une intégrale sur π^a à une intégrale sur π^i dans la définition (3.31) nous avons effectué l'intégrale sur π^0 , puis nous avons remarqué que la norme de π^i , c'est-à-dire $\sqrt{\pi^i \pi_i}$, vérifie $\sqrt{\pi^i \pi_i} = \beta\pi^0 = \sqrt{(\pi^0)^2 - m^2}$, et nous avons donc utilisé des coordonnées sphériques. Nous pouvons effectuer un changement de variable dans l'intégrale en utilisant $d(\beta\pi^0) = d\pi^0/\beta$, pour retrouver la forme standard dans la littérature

$$T^{ab}(x^\mu) = \int f(x^\mu, \pi^i) (\pi^0)^3 \beta n^a n^b d\pi^0 d\Omega. \quad (3.32)$$

Cette formulation, plus pratique pour les calculs, a néanmoins l'inconvénient d'obscurcir la signification de la fonction de distribution, puisqu'il s'agit de la densité de probabilité de trouver en un point de l'espace-temps donné une particule d'impulsion π^i . On définit alors la moyenne d'une quantité physique tensorielle par

$$\langle X \rangle \equiv \int f(x^\mu, \pi^i) X(\pi^i) d^3\pi^i = \int f(x^\mu, \pi^0, \hat{n}^i) X(\pi^0, \hat{n}^i) (\beta\pi^0)^2 d(\beta\pi^0) d\Omega. \quad (3.33)$$

Il s'agit ici d'une moyenne sur toutes les particules se situant en un point (t, \mathbf{x}) de l'espace à ne pas confondre avec les moyennes stochastiques introduites dans la section 3.2.1. Par définition, le champ de tétrade \tilde{e}_a correspond à un observateur comobile avec le fluide si les composantes du tenseur énergie-impulsion dans cette tétrade satisfont $T^{0i} = 0$. La densité d'énergie, la pression

⁴Nous utilisons la convention qui consiste à utiliser les deux hyperboloïdes de masse, c'est-à-dire que $f(x^\mu, -\pi^0, \pi^i) = f(x^\mu, \pi^0, \pi^i)$, ce qui revient à considérer la moitié des photons normalement orientés vers le futur comme étant orientés vers le passé, afin d'avoir une fonction de distribution plus "symétrique".

et la pression anisotrope mesurées par un tel observateur sont alors données par

$$\begin{aligned}
\rho &= T^{00} = \int f(x^\mu, \pi^0, \hat{n}^i) \pi^0 (\beta \pi^0)^2 d(\beta \pi^0) d\Omega = \langle \pi^0 \rangle \\
P &= \frac{1}{3} T^i_i = \frac{1}{3} \int f(x^\mu, \pi^0, \hat{n}^i) \beta^2 \pi^0 (\beta \pi^0)^2 d(\beta \pi^0) d\Omega = \frac{1}{3} \langle \beta^2 \pi^0 \rangle \\
\tilde{\Pi}^{ij} &= T^{ij} - P \delta^{ij} = \int f(x^\mu, \pi^0, \hat{n}^i) \beta^2 \pi^0 \hat{n}^{(ij)} (\beta \pi^0)^2 d(\beta \pi^0) d\Omega \\
&= \langle \beta^2 \pi^0 \hat{n}^{(ij)} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

avec $\hat{n}^{(ij)} \equiv (\hat{n}^i \hat{n}^j - \frac{1}{3} \delta^{ij})$. On retrouve bien la relation (3.30). c'est-à-dire que le tenseur énergie-impulsion se décompose en toute généralité selon

$$\mathbf{T} = \left[(P + \rho) \delta_0^a \delta_0^b + P \eta^{ab} + \delta_i^a \delta_j^b \tilde{\Pi}^{ij} \right] \tilde{e}_a \tilde{e}_b. \tag{3.35}$$

Dans une tétrade quelconque e_a qui peut être obtenue à partir d'une transformation de Lorentz $e_a = \tilde{e}_b \Lambda_a^b$, en définissant $U^a = \Lambda^a_0$, le tenseur énergie-impulsion s'écrit grâce à la propriété $\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta^{cd} = \eta^{ab}$

$$\mathbf{T} = \left[(\rho + P) U^a U^b + P \eta^{ab} + \Pi^{ab} \right] e_a e_b \quad \text{avec} \quad \Pi^{ab} \equiv \Lambda^a_i \Lambda^b_j \tilde{\Pi}^{ij}. \tag{3.36}$$

En pratique on choisit cette tétrade telle que $e^0 \sim d\eta$. Nous détaillerons cette construction dans la section 5.2.

3.3.2 Perturbations de tétrades

Lorsque l'on s'intéresse à un espace perturbé, on décompose les tétrades en perturbations selon

$$e_a = \bar{e}_a + \delta e_a, \tag{3.37}$$

de telle sorte que la relation de normalisation (3.25) soit satisfaite. Les perturbations de la tétrade peuvent être exprimées en fonction de la tétrade de fond selon

$$e_a = \mathcal{R}_a^b \bar{e}_b, \quad e^b = \bar{e}^a \mathcal{S}_a^b, \quad \mathcal{R}_a^c \mathcal{S}_c^b = \mathcal{S}_a^c \mathcal{R}_c^b = \delta_a^b, \tag{3.38}$$

c'est-à-dire en notant $\mathcal{R}_a^b = \bar{\mathcal{R}}_a^b + \mathcal{R}_a^{(1)b}$

$$\delta e_a = \mathcal{R}_a^{(1)b} \bar{e}_b, \quad \delta e^b = \bar{e}^a \mathcal{S}_a^{(1)b}. \tag{3.39}$$

\mathcal{R} et son inverse \mathcal{S} représentent la transformation nécessaires pour passer de la tétrade perturbée, à la tétrade de l'espace de fond. La condition de normalisation fixe nécessairement $\mathcal{R}_{(ab)}$ et $\mathcal{S}_{(ab)}$. La partie antisymétrique peut être choisie si l'on se donne une prescription, car elle correspond à la liberté de transformation de Lorentz dans le choix du champ de tétrades. La transformation de Lorentz peut être choisie si nous fixons systématiquement le choix de la tétrade de telle sorte que $e^0 \sim d\eta$, ce qui implique $\mathcal{R}_{i0}^{(1)} = \mathcal{S}_{i0}^{(1)} = 0$. Quant à la liberté de rotation, on la fixe en choisissant $\mathcal{R}_{[ij]}^{(1)} = \mathcal{S}_{[ij]}^{(1)} = 0$. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Durrer & Straumann 88, Durrer 94, Pitrou 07].

3.3.3 Equation des géodésiques

Une particule d'impulsion $p^\mu \partial_\mu = \pi^a e_a$ (un photon si l'on s'intéresse à la fonction de distribution de la radiation) suit une géodésique. Sa trajectoire est donnée par $\frac{dx^\mu}{ds} = p^\mu$, où s est un paramètre affine le long de la trajectoire. De plus, le long d'une trajectoire géodésique, le vecteur tangent est transporté parallèlement, c'est-à-dire

$$p^\mu \nabla_\mu p^\nu = \frac{dp^\nu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu p^\alpha p^\beta = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{dp^\nu}{ds} \equiv p^\mu \frac{\partial p^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (3.40)$$

Etant donné que nous avons choisi d'utiliser les impulsions dans une base orthonormée, il nous faut transposer cette équation géodésique dans la base orthonormée. On peut montrer qu'elle se réécrit alors

$$\frac{d\pi_a}{ds} + \omega_{bac} \pi^c \pi^b = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{d\pi_a}{ds} \equiv \pi^b \partial_{e_b} \pi_a, \quad (3.41)$$

où les ω_{abc} sont les connections affines dont les expressions sont détaillées dans l'appendice B.2. On peut donc extraire les perturbations ordre par ordre de cette équation en utilisant les expressions de perturbation des connections. On a donc pour l'évolution de l'énergie π^0 à l'ordre le plus bas

$$\left(\frac{d\pi^0}{ds} \right)^{(0)} = \bar{\omega}_{00i} \pi^0 \pi^i + \bar{\omega}_{i0j} \pi^i \pi^j. \quad (3.42)$$

Cependant nous souhaitons connaître l'évolution en fonction de η . Nous utilisons donc

$$\frac{d\eta}{ds} = p^0 = \pi^a e_a^0 \quad (3.43)$$

qui à l'ordre le plus bas implique $\frac{ds}{d\eta} = \frac{a}{\pi^0}$. Avec les valeurs données dans l'appendice B.2, on obtient donc quelle que soit la masse de la particule

$$\left(\frac{d\pi^0}{d\eta} \right)^{(0)} = -\mathcal{H} \pi^0 n^i n_i. \quad (3.44)$$

L'expression générale pour une particule de masse m s'écrit dans la formulation de la relativité restreinte

$$\left(\frac{d\pi^0}{d\eta} \right)^{(0)} = -\mathcal{H} \pi^0 \beta^2 \Leftrightarrow \frac{d\beta}{d\eta} = -\mathcal{H} \frac{\beta}{\gamma^2} \Leftrightarrow \frac{d\gamma}{d\eta} = -\mathcal{H} \beta^2 \gamma. \quad (3.45)$$

On retrouve donc que l'énergie $\pi^0 = \gamma m$ d'une particule massive non relativiste, c'est-à-dire telle que $\beta \ll 1$ ne varie pas au cours de l'évolution. Pour une particule massive on peut exprimer les dérivées en fonction du temps conforme η en fonction du temps propre de la particule τ en utilisant $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{d\eta}$. Pour la radiation, $\beta = 1$ et on retrouve la loi du décalage vers le rouge $\frac{d(a\pi^0)}{d\eta} = 0$. On montre aussi que

$$\left(\frac{d\pi^k}{ds} \right)^{(0)} = -\bar{\omega}_{0ki} \pi^0 \pi^i - \bar{\omega}_{ikj} \pi^i \pi^j = -\frac{\mathcal{H} \pi^0 \pi^k}{a} \Rightarrow \left(\frac{dn^k}{d\eta} \right)^{(0)} = -\frac{\mathcal{H}}{\gamma^2} n^k. \quad (3.46)$$

Cette relation, une fois projetée sur n_k redonne $\frac{d\beta}{d\eta} = -\mathcal{H} \beta / \gamma^2$, et on en déduit également qu'il n'y a pas de changement de direction à l'ordre le plus bas puisqu'elle implique également

$$\left(\frac{d\hat{n}^k}{d\eta} \right)^{(0)} = 0. \quad (3.47)$$

Pour les particules massives, l'impulsion s'aligne avec le flot de Hubble, tandis que n^i est constant pour les particules sans masse puisque $\gamma = \infty$, ce qui se comprend, puisque dans le cas des photons ce vecteur est soumis à la contrainte $n^i n_i = 1$. En répétant cette procédure au premier ordre, c'est-à-dire en utilisant

$$\left(\frac{d\pi^0}{ds}\right)^{(1)} = +\omega_{00i}^{(1)}\pi^0\pi^i + \omega_{i0j}^{(1)}\pi^i\pi^j, \quad (3.48)$$

ainsi que la relation valable jusqu'au premier ordre entre η et le paramètre affine s

$$\left(\frac{ds}{d\eta}\right) = \frac{a}{\pi^0}(1 + \Phi), \quad (3.49)$$

on obtient

$$\left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(1)} = \pi^0 [-n^i \partial_i \Phi + \Psi' n^i n_i - E'_{ij} n^i n^j]. \quad (3.50)$$

On peut récrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(1)} = \pi^0 [-\beta \hat{n}^i \partial_i \Phi + \beta^2 (\Psi' - E'_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j)]. \quad (3.51)$$

Cette équation d'évolution pour l'énergie implique que l'évolution de la norme de la vitesse satisfait au premier ordre

$$\left(\frac{d\beta}{d\eta}\right)^{(1)} = \frac{1}{\pi^0 \beta \gamma^2} \left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(1)} = \frac{1}{\gamma^2} [-\hat{n}^i \partial_i \Phi + \beta (\Psi' - E'_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j)]. \quad (3.52)$$

En ce qui concerne l'évolution de la direction \hat{n}^i , on la déduit de

$$\left(\frac{d\pi^k}{ds}\right)^{(1)} = -\omega_{0ki}^{(1)}\pi^i\pi^0 - \omega_{ikj}^{(1)}\pi^i\pi^j - \omega_{ik0}^{(1)}\pi^i\pi^0 - \omega_{0k0}^{(1)}\pi^0\pi^0, \quad (3.53)$$

et on obtient en utilisant la définition $\perp^{ij} = \delta^{ij} - \hat{n}^i \hat{n}^j$,

$$\left(\frac{d\hat{n}^i}{d\eta}\right)^{(1)} = -\perp^{ij} \left(\beta \partial_j \Psi + \frac{1}{\beta} \partial_j \Phi + E'_{jk} \hat{n}^k \right) - 2\beta \partial^{[i} E_{k]j} \perp^{jk}. \quad (3.54)$$

On a utilisé ci-dessus la définition $X_{[ij]} = \frac{1}{2}(X_{ij} - X_{ji})$. Tout d'abord on remarque qu'en combinant cette équation d'évolution de la direction avec l'équation d'évolution de la norme de la vitesse (3.52), on obtient pour une particule non relativiste ($\beta \ll 1$)

$$\frac{d(\beta \hat{n}^i)}{d\eta} = -\partial_i \Phi. \quad (3.55)$$

On reconnaît l'équation obtenue en mécanique Newtonienne puisque la vitesse est $n^i = \beta \hat{n}^i$ et Φ s'identifie au potentiel gravitationnel. On remarque également que pour le cas $\beta = 1$, l'expansion \mathcal{H} n'intervient pas car deux espaces reliés par une transformation conforme ont les mêmes géodésiques nulles et l'espace-temps de Friedmann-Lemaître est conforme à l'espace de Minkowski.

Le cas de la radiation correspond à $\beta = 1$ et l'équation d'évolution de l'énergie (3.51) s'écrit dans ce cas

$$\frac{d \ln(a\pi^0)}{d\eta} = \left[-\frac{d\Phi}{d\eta} + \Phi' + \Psi' - E'_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j \right]. \quad (3.56)$$

Pour un observateur dont le quadrivecteur vitesse U_a correspond à une vitesse v^i par rapport à e_0 , c'est-à-dire $U_a = \delta_a^0 + \delta_a^i v_i$, l'énergie du photon mesurée est $\pi^a U_a$. En définissant

$$\frac{(a\pi^a U_a)|_0}{(a\pi^a U_a)|_e} \equiv \frac{1 + \delta\mathcal{E}_0}{1 + \delta\mathcal{E}_e}, \quad (3.57)$$

on obtient au premier ordre

$$\delta\mathcal{E}_0 - \delta\mathcal{E}_e = -[\Phi + \bar{e}_i v_b^i]_e^0 + \int_e^0 (\Phi' + \Psi' - E'_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j) d\eta, \quad (3.58)$$

ce qui a déjà été obtenu dans l'équation (3.7) sans passer par l'utilisation de tétrades. De plus, si on néglige l'effet des ondes gravitationnelles, l'équation de déviation prend la forme

$$\left(\frac{d\hat{n}^i}{d\eta} \right)^{(1)} = -\perp^{ij} \partial_j (\Psi + \Phi), \quad (3.59)$$

qui est le résultat standard des effets de lentille gravitationnelle sur la radiation, utilisé par exemple pour les effets de lentilles faibles [Hoekstra *et al.* 06].

3.3.4 Terme de Liouville

L'équation d'évolution de la fonction de distribution est donnée par l'équation de Boltzmann

$$L[f] = C[f] \quad (3.60)$$

où $L[f]$ est l'opérateur de Liouville relativiste qui décrit l'évolution dans l'espace des phases, et $C[f]$ est le terme de collision qui intervient lors d'une description multifluide en interaction. En utilisant le champ de tétrades comme base de l'espace tangent, le terme de Liouville s'écrit

$$L[f] \equiv \frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial \pi^a} \frac{d\pi^a}{d\eta}, \quad (3.61)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial \pi^0} \frac{d\pi^0}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial \hat{n}^i} \frac{d\hat{n}^i}{d\eta}. \quad (3.62)$$

Plus rigoureusement l'équation précédente est satisfaite par $\delta_D(\pi^a \pi_a - m^2) f$ mais comme d'après l'équation des géodésiques (3.41) $\frac{d\pi^a}{ds} \pi_a = 0$, ce terme se factorise dans l'équation de Boltzmann. En utilisant les résultats de la section précédente ainsi que la propriété $\bar{f} = \bar{f}(\eta, \pi^0)$, on en déduit que cette équation s'écrit pour l'espace de fond

$$\bar{L}[f] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} - \mathcal{H} \pi^0 \beta^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0}. \quad (3.63)$$

Au premier ordre, nous n'avons besoin de l'équation donnant $\frac{dn^i}{d\eta}$ que sur l'espace de fond car f ne dépend de n^i qu'à partir du premier ordre. On obtient alors

$$L^{(1)}[f] = \frac{\partial \delta^{(1)} f}{\partial \eta} + \beta \hat{n}^j \partial_j \delta^{(1)} f - \mathcal{H} \pi^0 \beta^2 \frac{\partial \delta^{(1)} f}{\partial \pi^0} + [-\beta \hat{n}^j \partial_j \Phi + \beta^2 (\Psi' - E'_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j)] \pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0}. \quad (3.64)$$

Le cas de la radiation auquel nous nous intéressons plus particulièrement s'écrit en prenant $\beta = 1$

$$\bar{L}[f] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} - \mathcal{H} \pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \quad (3.65)$$

$$L^{(1)}[f] = \frac{\partial \delta^{(1)} f}{\partial \eta} + \hat{n}^j \partial_j \delta^{(1)} f - \mathcal{H} \pi^0 \frac{\partial \delta^{(1)} f}{\partial \pi^0} + [-\hat{n}^j \partial_j \Phi + (\Psi' - E'_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j)] \pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0}. \quad (3.66)$$

3.3.5 Terme de collision pour la radiation

Le terme de collision est de la forme

$$C[f] = \frac{df_+}{d\eta} - \frac{df_-}{d\eta}, \quad (3.67)$$

où $\frac{df_+}{d\eta}$ et $\frac{df_-}{d\eta}$ sont respectivement le taux entrant et le taux sortant résultant des interactions baryons-photons par diffusion Compton. Pour le terme de collision de la radiation, ces expressions sont plus facilement exprimées dans le référentiel où les baryons sont au repos qui correspond à la tétrade $\tilde{e}_a = e_b \Lambda_a^b$, où Λ_a^b est la transformée de Lorentz permettant de passer du référentiel des observateurs comobiles au référentiel des baryons. On relie la fonction de distribution dans ces deux bases par $\tilde{f}(x^\mu, \tilde{\pi}^a) = f(x^\mu, \pi^a)$, et donc

$$\tilde{f}(x^\mu, \pi^a) = \exp \left[\pi^d (\Lambda_d^c - \delta_d^c) \frac{\partial}{\partial \pi^c} \right] f(x^\mu, \pi^a), \quad (3.68)$$

où dans le développement en puissance de l'exponentielle, les dérivées partielles doivent être ordonnées à droite afin de n'agir que sur f . Au niveau de l'espace de fond on a $\tilde{f}(x^\mu, \pi^0) = \bar{f}(x^\mu, \pi^0)$. Au premier ordre on a

$$\delta^{(1)} \tilde{f}(x^\mu, \pi^a) = \delta^{(1)} f(x^\mu, \pi^a) + \pi_i v_b^{i(1)} \frac{\partial}{\partial \pi^0} \bar{f}(x^\mu, \pi^0). \quad (3.69)$$

La limite à basse énergie de la diffusion Compton, pour laquelle l'énergie des baryons est assimilable à leur énergie au repos, est la diffusion Thomson. Le terme de collision au premier ordre [Itzykson & Zuber 80, Peskin & Schroeder 95], dans les bases \tilde{e}_a et e_a respectivement, s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(1)}[\tilde{f}(\pi)] &= \tilde{\tau}' \int \left[\delta^{(1)} \tilde{f}(\pi^0, n^{i'}) - \delta^{(1)} \tilde{f}(\pi^0, n^i) \right] \left(1 + \frac{3}{4} n^{(ij)} n'_{(ij)} \right) \frac{d^2 \Omega'}{4\pi}, \quad (3.70) \\ C^{(1)}[f(\pi)] &= \tau' \int \left[\delta^{(1)} f(\pi^0, n^{i'}) - \delta^{(1)} f(\pi^0, n^i) - \pi^0 n_i v_b^{i(1)} \frac{\partial}{\partial \pi^0} \bar{f}(x^\mu, \pi^0) \right] \left(1 + \frac{3}{4} n^{(ij)} n'_{(ij)} \right) \frac{d^2 \Omega'}{4\pi}. \end{aligned}$$

3.3.6 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations du fond diffus

Dans le cas de la radiation, on mesure l'énergie bolométrique, c'est-à-dire l'énergie dans toutes les longueurs d'onde. On définit donc la brillance bolométrique par

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{I}}(x^\mu, n^i) &\equiv 4\pi \int \bar{f}(x^\mu, \pi^0, n^i) (\pi^0)^3 d\pi^0 \\ \mathcal{I}^{(1)}(x^\mu, n^i) &\equiv 4\pi \int \delta^{(1)} f(x^\mu, \pi^0, n^i) (\pi^0)^3 d\pi^0.\end{aligned}\quad (3.71)$$

En intégrant l'équation de Boltzmann sur π^0 , on en déduit que la brillance satisfait les équations d'évolution ordre par ordre [Ma & Bertschinger 95]

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{I}}}{\partial \eta} - 4\mathcal{H}\bar{\mathcal{I}} = 0 \quad (3.72)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + n^i \partial_i \right) \frac{\mathcal{I}^{(1)}}{4} + \mathcal{H}\mathcal{I}^{(1)} + \left(n^i \partial_i \Phi^{(1)} - \Psi^{(1)'} + E'_{ij} n^i n^j \right) \bar{\mathcal{I}} = \frac{1}{4} C^{(1)}[\mathcal{I}], \quad (3.73)$$

avec

$$C^{(1)}[\mathcal{I}] = \tau' \left[\int \mathcal{I}^{(1)} \frac{d^2\Omega}{4\pi} - \mathcal{I}^{(1)} + 4v_b^{i(1)} n_i + \frac{3}{4} n^i n^j \int \mathcal{I}^{(1)} n_{(ij)} \frac{d^2\Omega}{4\pi} \right]. \quad (3.74)$$

On peut définir un contraste de température directionnelle Θ comme dans la section 3.1 qui sera relié à la brillance par

$$\Theta = \frac{\mathcal{I}^{(1)}}{4\bar{\mathcal{I}}}. \quad (3.75)$$

Le terme de collision au premier ordre dérivé ci-dessus n'introduit pas de distorsion spectrale si bien que le spectre de corps noir n'est pas modifié par les interactions baryons-photons. Or nous avons vu que la libre propagation des photons n'introduit pas non plus de distorsion spectrale si bien que le spectre de corps noir est conservé, et la température suffit à caractériser de façon unique la fonction de distribution. Ceci justifie donc qu'on puisse parler de température pour décrire la fonction de distribution. Au second ordre dans les perturbations ce résultat ne sera plus valable, même dans la limite basse énergie de la diffusion Thomson [Bartolo *et al.* 06]. On peut décomposer la dépendance directionnelle de la brillance et similairement du contraste de température en multipôles selon

$$\mathcal{I}^{(1)}(x^\mu, n^i) \equiv \sum_p \mathcal{M}_{i_1 \dots i_p}^{(1)}(x^\mu) \hat{n}^{i_1} \dots \hat{n}^{i_p}, \quad (3.76)$$

où les moments de ce développements sont symétriques et sans trace. Les trois premiers moments peuvent être reliés au tenseur énergie impulsion

$$\begin{aligned}T^{00(1)} &= \mathcal{M}^{(1)} \\ T^{0i(1)} &= \mathcal{M}^{i(1)} \\ T^{ij(1)} &= \mathcal{M}^{ij(1)}.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Après être passé en espace de Fourier

$$\mathcal{M}_{i_1 \dots i_p}^{(1)}(\eta, \mathbf{x}) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{M}_{i_1 \dots i_p}^{(1)}(\eta, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (3.78)$$

on peut extraire successivement les multipôles de l'équation de Boltzmann. Pour l'équation du premier ordre, on obtient une succession d'équations différentielles qui couplent l'évolution de $\mathcal{M}_{i_1 \dots i_p}^{(1)}$ à $\mathcal{M}_{i_1 \dots i_{p-1}}^{(1)}$ et $\mathcal{M}_{i_1 \dots i_{p+1}}^{(1)}$. En utilisant les relations (3.77), les deux premiers multipôles de l'équation d'évolution (3.73) permettent d'obtenir pour la radiation l'équation de conservation et l'équation d'Euler (2.88). Par la même méthode on retrouve ces mêmes équations de conservation et d'Euler (2.89) pour la matière baryonique. Si on néglige les termes de collision, il s'agit des équations (2.25) et (2.26) dérivées dans l'approximation fluide. Inversement, ces termes de collision permettent de donner la forme des forces entre les différents fluides définies par les relations (2.20). Nous verrons dans la section suivante pourquoi la description fluide peut être retrouvée à partir de l'approche cinétique. Une autre possibilité pour extraire la dépendance directionnelle consiste à considérer une décomposition sur la base des harmoniques sphériques qui a une relation bijective avec la décomposition en tenseurs symétriques sans trace [Thorne 80]. On définit alors

$$\mathcal{I}^{(1)}(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell m} \mathcal{I}_{\ell m}^{(1)}(\eta, k) (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad (3.79)$$

et on emploie une définition similaire pour le contraste de température en définissant les $\Theta_{\ell m}^{(1)}(\eta, k)$. On obtient alors une série infinie d'équations différentielles couplées indexées par ℓ et m . On peut montrer que seuls les multipôles satisfaisant $|m| = 0, 1, 2$ seront non nuls. Il est ensuite possible de déduire les C_ℓ des propriétés statistiques des $\Theta_{\ell m}^{(1)}(\eta, k)$. Une résolution correcte des équations donnant la dynamique de ces quantités nécessite de considérer la polarisation de la radiation. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Riazuelo 00, Hu & White 97a, Peter & Uzan 05]. De plus, une fois ces équations établies, il faut pouvoir les intégrer numériquement. Une solution efficace algorithmiquement a été développée dans [Seljak & Zaldarriaga 96].

3.3.7 La limite fluide de l'équation de Boltzmann

Nous suivons essentiellement [Ehlers 71] pour montrer que l'équation de Boltzmann implique l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion. En multipliant l'équation de Boltzmann (3.61) par $\delta_D(\pi^a \pi_a - m^2)$, puis en multipliant encore par $\frac{d\eta}{ds} \pi^b$ et en intégrant sur les quadri-impulsions π^d , on obtient

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \pi^a} \frac{\partial \pi^a}{\partial s} - C[f] \right] \pi^b \delta_D(\pi_d \pi^d - m^2) d^4\pi &= 0, \\ \int \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu} p^\mu - \frac{\partial f}{\partial \pi^a} \omega_{eaf} \pi^e \pi^f - C[f] \right] \pi^b \delta_D(\pi_d \pi^d - m^2) d^4\pi &= 0, \\ \int \left[\partial_{ea} f \pi^a + f \omega_{af}^a \pi^f + f \omega_{ebf} \pi^e \pi^f - C[f] \right] \pi^b \delta_D(\pi_d \pi^d - m^2) d^4\pi &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'équation géodésique (3.41) pour passer de la première à la seconde ligne, puis pour passer de la seconde à la troisième nous avons intégré par parties et utilisé le fait que

$$\frac{d}{ds} \delta_D(\pi_d \pi^d - m^2) = 0. \quad (3.80)$$

On reconnaît alors l'équation de conservation

$$\partial_{ea} T^{ab} + \omega_{ad}^a T^{db} + \omega_a^b T^{ad} = \nabla_a T^{ab} = Q^b \quad \text{avec} \quad Q^b \equiv \int C[f] \pi^b \delta_D(\pi_d \pi^d - m^2) d^4\pi. \quad (3.81)$$

Si $b = 0$ cela correspond au moment le plus bas et on retrouve l'équation de conservation tandis que pour $b = i$ on retrouve l'équation d'Euler. Il faut cependant veiller au fait que cet indice b correspond à la base de tétrade et donc lorsque l'on souhaite retrouver l'équation de conservation (2.25) et l'équation d'Euler (2.26) qui sont exprimées dans la base associées aux coordonnées, il faudra utiliser le champ de tétrade pour effectuer la conversion, c'est-à-dire projeter avec $(e_b)^\mu$. Ceci est expliqué en détails dans l'approximation fluide effectuée dans la section 5.2.

3.3.8 Conclusion

Nous avons résumé au cours de ces trois derniers chapitres le modèle standard du big-bang chaud pour l'espace de fond, la croissance des perturbations de métrique ainsi que les perturbations du fond diffus cosmologique. Evidemment ces aspects sont imbriqués puisque pour déterminer la croissance des perturbations de métrique il faut connaître le tenseur énergie impulsion des différentes espèces remplissant l'univers. Si pour certaines espèces, une approximation fluide suffit amplement (matière noire) une description statistique est requise pour la radiation et la matière baryonique ainsi que les neutrinos. Comme nous l'avons déjà évoqué à la fin de la section 3.2.2, la résolution de cet ensemble d'équations est nécessairement numérique. Cependant, elle nécessite d'abord de connaître les conditions initiales loin dans l'ère de radiation. Inversement, on peut déterminer ces conditions initiales en recherchant le meilleur ajustement aux observations, mais alors elle restent inexplicées par le modèle. Le mécanisme de l'inflation, dont nous allons donner les grandes lignes dans le chapitre suivant, permet d'apporter une réponse au problème des conditions initiales tout en résolvant les problèmes de platitude et d'isotropie du big-bang chaud.

Chapitre 4

L'inflation standard

Sommaire

4.1	Phénoménologie	52
4.2	Quantification de l'inflaton et spectre primordial	53
4.3	La variable de Mukhanov-Sasaki en formalisme 1+3 (article)	57

Les problèmes du big-bang chaud trouvent une résolution élégante si l'on suppose que celui-ci a été précédé par une ère d'expansion accélérée. La conséquence de cette phase est d'étendre la zone en contact causal avant le découplage de telle sorte que tout l'univers observable soit bien plus petit qu'une telle zone. Le problème de la platitude est alors résolu car la matière permettant une telle phase accélérée satisfait nécessairement $w < -1/3$ et donc sa densité d'énergie diminue moins vite que $1/a^2$. Le terme de courbure Ω_K dans l'équation de Friedmann décroît alors plus rapidement que celui du contenu matériel et son importance relative décroît. Si l'inflation est soutenue par une matière dont la densité d'énergie ne se dilue quasiment pas, c'est-à-dire $w \simeq -1$, alors l'importance relative de la courbure par rapport au contenu matériel va comme $\simeq a^{-2}$. Même si dans l'ère de radiation et l'ère de matière ce comportement s'est inversé, avec une phase d'inflation suffisamment longue on explique la valeur encore très basse de la courbure. Basé sur ces motivations, le premier modèle d'inflation avec une interprétation physique claire a été proposé dans [Guth 81] afin de résoudre le problème de la platitude et de l'horizon. La théorie des perturbations pendant l'inflation a ensuite été développée presque aussitôt [Mukhanov & Chibisov 81] et a permis de donner une explication simple aux conditions initiales des perturbations du big-bang chaud en plaçant leur origine dans les fluctuations quantiques. Les premiers modèles d'inflation supposaient tout de même que l'univers était dans un état d'équilibre thermique préexistant, et suffisamment homogène sur de grandes échelles pour survivre jusqu'au déclenchement de la phase d'inflation. Ce problème a été résolu avec la théorie de l'inflation chaotique selon laquelle l'inflation peut débuter même si l'univers n'est pas en équilibre thermique. Dans ce cas, l'univers observable est alors issu d'une cellule de taille sub-Planckienne et ses conditions globales aujourd'hui sont issues des conditions locales quantiques d'alors. Le modèle le plus simple d'inflation chaotique est celui de l'inflation à un champ en roulement lent. Nous allons décrire rapidement ce modèle ainsi que ses prédictions pour le spectre des anisotropies primordiales.

4.1 Phénoménologie

La période d'inflation peut être décrite dans les modèles les plus simples avec un contenu matériel qui se réduit à un champ scalaire évoluant sur un potentiel $V(\varphi)$. L'action d'Hilbert-Einstein associée est alors

$$\begin{aligned} S &= \int \left(\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right) \sqrt{-g} d^4 \mathbf{x} \\ &= \int \mathcal{L} d^4 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

En variant cette action par rapport à la métrique, on obtient l'équation d'Einstein avec un tenseur énergie-impulsion donné par

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi + V(\varphi) \right). \quad (4.2)$$

Si on sépare le champ scalaire en une partie de fond $\bar{\varphi}$ et une partie perturbée $\delta\varphi$, alors on obtient sur le fond

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2 + V(\bar{\varphi}), \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2 - V(\bar{\varphi}). \quad (4.3)$$

Ces quantités doivent ensuite être utilisées dans les équations de Friedmann-Lemaître (1.17). L'équation de conservation est alors l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + V_{,\varphi} = 0, \quad (4.4)$$

où $V_{,\varphi} \equiv \frac{dV}{d\bar{\varphi}}$. Au niveau de l'espace de fond on remarque que pour un terme potentiel plus grand que le terme cinétique, on peut obtenir une pression négative, c'est-à-dire un type de matière dont la densité d'énergie se dilue moins vite que la matière froide. De plus si $\dot{\bar{\varphi}}^2 < V(\bar{\varphi})$, alors $\bar{\rho} + 3\bar{P} < 0$ et donc on obtient une phase accélérée, $\ddot{a} > 0$.

La dynamique du champ scalaire de fond possède un attracteur [Uzan & Lehoucq 01]. Sur cet attracteur le champ est en roulement lent le long de son potentiel si bien que $\dot{\bar{\varphi}}^2 \ll V$ et $\ddot{\bar{\varphi}} \ll 3H\dot{\bar{\varphi}}$. On obtient alors $\bar{P} \simeq -\bar{\rho}$ et on a donc quasiment affaire à une constante cosmologique. Afin de quantifier plus précisément ces rapports, on introduit les paramètres de roulement lent

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{3}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2}{\frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2 + V}, \quad (4.5)$$

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\bar{\varphi}}}{H\dot{\bar{\varphi}}}, \quad (4.6)$$

qui permettent ainsi de ne pas avoir à décrire explicitement la forme du potentiel et qui sont infinitésimaux sur l'attracteur. Les prédictions des modèles d'inflation seront données en fonction de ces paramètres de roulement lent. L'intérêt de ne pas utiliser une pure constante cosmologique réside dans le fait que la sortie du régime d'inflation se fait lorsque la condition de roulement lent n'est plus satisfaite et que le champ est dans la partie basse de son potentiel. L'avantage de lui donner une structure dynamique à travers un champ réside aussi dans le fait qu'on va s'intéresser à la dynamique des perturbations $\delta\varphi$. Nous allons maintenant voir comment évoluent ces perturbations mais aussi par quel moyen nous pouvons obtenir des prédictions en fixant des conditions initiales adéquates pour la perturbation du champ scalaire.

4.2 Quantification de l'inflaton et spectre primordial

Dans ce qui suit on ne travaille qu'au premier ordre en perturbations. Nous avons déjà vu qu'il y avait quatre degrés de liberté de perturbations scalaires de la métrique, auxquels s'ajoute un degré de liberté scalaire du champ lui-même. Deux de ces cinq degrés sont des degrés de liberté de jauge et ne sont pas physiques tandis que deux autres sont déterminés par des équations de contraintes, c'est-à-dire des équations non dynamiques qui sont les équations (2.21) et (2.24). Nous n'avons au final qu'un degré de liberté dynamique scalaire et nous cherchons à l'isoler. On introduit la perturbation du champ en jauge plate

$$\mathcal{Q} \equiv \delta\varphi + \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{H}\Psi = \delta\varphi + \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\Psi, \quad (4.7)$$

ainsi que la perturbation de courbure comobile

$$\mathcal{R} \equiv \Psi + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\delta\varphi = \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\mathcal{Q}. \quad (4.8)$$

En introduisant les variables

$$u \equiv \frac{2a\Phi}{\kappa\bar{\varphi}'}, \quad z = a\frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}, \quad \theta \equiv \frac{1}{z}, \quad (4.9)$$

et en utilisant les équations de fond, on peut récrire la perturbation de courbure comobile selon $\mathcal{R} = \theta u' - \theta' u$. Si on définit la variable

$$v \equiv z\mathcal{R} = a\mathcal{Q}, \quad (4.10)$$

alors cette relation se réduit à la relation simple entre u et v

$$zv = (uz)'. \quad (4.11)$$

v (ou v/a) est appelée variable de Mukhanov-Sasaki [Mukhanov 85, Sasaki 86]. En utilisant l'équation (2.22) avec l'équation de Poisson (2.21) pour fermer l'équation en Φ , on montre que l'introduction de toutes ces quantités permet de reformuler le résultat selon

$$\mathcal{R}' = \theta\Delta u \Rightarrow u'' - \left(\Delta + \frac{\theta''}{\theta}\right)u = 0. \quad (4.12)$$

Cette équation est une équation de type oscillateur harmonique, mais avec un terme de masse variable. La relation (4.11) permet également de déduire l'équation dynamique de type oscillateur harmonique pour v

$$v'' - \left(\Delta + \frac{z''}{z}\right)v = 0. \quad (4.13)$$

En ce qui concerne les modes tensoriels, nous avons deux degrés de liberté dynamiques à identifier. Dans l'espace de Fourier¹, on introduit deux vecteurs unitaires e_i^1 et e_i^2 de l'espace orthogonal à

¹Les fonctions $\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]$ sont fonctions propres du laplacien et constituent une base orthogonale complète pour décomposer toutes les fonctions. Une base de fonctions orthogonales à valeurs vectorielles et tensorielles peut être construite à partir de cette base en la multipliant par les vecteurs et tenseurs de polarisation appropriés. Cependant cette décomposition suppose que la topologie de l'univers est triviale, c'est-à-dire que l'univers est plat et infini. Pour un univers plat mais fermé seuls certains modes interviennent dans la décomposition en modes. Pour le cas non plat, il faudra travailler avec une autre base de fonctions propres du Laplacien.

k^i ($k^i e_i^1 = k^i e_i^2 = 0$). On définit ensuite les tenseurs de polarisation

$$\varepsilon_{ij}^+ \equiv \frac{e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{ij}^\times \equiv \frac{e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1}{\sqrt{2}}, \quad (4.14)$$

qui sont sans trace ($\varepsilon_{ij} \gamma^{ij} = 0$) et transverses ($\varepsilon_{ij} k^i = 0$). On peut alors décomposer E_{ij} selon cette base

$$E_{ij} = E_+ \varepsilon_{ij}^+ + E_\times \varepsilon_{ij}^\times. \quad (4.15)$$

En introduisant

$$\mu_+ = \frac{a}{\sqrt{\kappa}} E_+, \quad \mu_\times = \frac{a}{\sqrt{\kappa}} E_\times, \quad (4.16)$$

l'équation dynamique pour E_{ij} implique l'équation dynamique

$$\mu'' - \left(\Delta + \frac{a''}{a} \right) \mu = 0 \quad (4.17)$$

qui est satisfaite pour μ_+ et μ_\times .

Nous avons donc identifié des degrés de liberté dynamiques (u et v) pour les perturbations scalaires, ainsi que la relation pour passer de l'un à l'autre mais rien ne permet de privilégier l'un sur l'autre ou même éventuellement sur les éventuelles combinaisons linéaires qu'on pourrait construire, si l'on souhaite ensuite bâtir une théorie quantique [Deruelle *et al.* 92]. De même nous avons identifié facilement les degrés de liberté dynamiques correspondant aux ondes gravitationnelles et toute combinaison linéaire possède la même dynamique. Cependant si l'on souhaite hiérarchiser les degrés de liberté scalaires, il faut s'intéresser directement à l'action plutôt qu'aux équations d'Einstein qui en résultent. On peut alors identifier les degrés de liberté dits canoniques.

En effet, en perturbant l'action (4.1) au second ordre dans les perturbations, on peut la récrire à des dérivées totales près sous la forme [Mukhanov *et al.* 92]

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int d\eta d^3 \mathbf{x} \left[(v')^2 + \frac{z''}{z} v^2 - \partial_i v \partial^i v \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int d\eta d^3 \mathbf{x} \left[(\mu'_+)^2 + \frac{a''}{a} \mu_+^2 - \partial_i \mu_+ \partial^i \mu_+ + (\mu'_\times)^2 + \frac{a''}{a} \mu_\times^2 - \partial_i \mu_\times \partial^i \mu_\times \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

On définit à partir du développement ci-dessus le lagrangien

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[(v')^2 + \frac{z''}{z} v^2 - \partial_i v \partial^i v + (\mu'_+)^2 + \frac{a''}{a} \mu_+^2 - \partial_i \mu_+ \partial^i \mu_+ + (\mu'_\times)^2 + \frac{a''}{a} \mu_\times^2 - \partial_i \mu_\times \partial^i \mu_\times \right]. \quad (4.19)$$

La perturbation de l'action à l'ordre deux fait donc intervenir l'action de trois champs scalaires libres avec masses variables. Dans le régime où $z''/z \ll k^2$ cette équation s'identifie à celle de trois champs scalaires libres dans un espace de Minkowski. Nous allons donc appliquer la procédure standard de quantification en s'assurant de retrouver cette limite. Nous promouvons v au rang d'opérateur² selon

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{k} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\eta) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\eta) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right] \quad (4.20)$$

²Nous travaillons en représentation de Heisenberg.

où les fonctions $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ satisfont

$$v_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (4.21)$$

Le champ conjugué à $v(\eta, \mathbf{x})$ est $\pi(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}^{(2)}}{\delta v} = v'(\eta, \mathbf{x})$, et il est aussi promu au rang d'opérateur de manière similaire. On impose donc les relations de commutation

$$[\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\eta, \mathbf{x}')] = i\delta_{\mathbb{D}}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.22)$$

En imposant les relations standards sur les opérateurs de création et d'annihilation

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbb{D}}^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.23)$$

cela implique que les fonctions $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ doivent être normalisées selon

$$v_{\mathbf{k}}(\eta)v_{\mathbf{k}'}^*(\eta) - v_{\mathbf{k}'}^*(\eta)v_{\mathbf{k}}(\eta) = i. \quad (4.24)$$

Puisque l'on souhaite retrouver la limite du vide d'un espace de Minkowski lorsque $z''/z \ll k^2$, qui est équivalente à $k\eta \rightarrow -\infty$, alors on impose dans cette limite³

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} \exp(-ik\eta). \quad (4.25)$$

En définissant le Hamiltonien⁴ par une transformation de Legendre selon

$$H(\eta) \equiv \int \mathcal{H} d^3\mathbf{x} \equiv \int (v'\pi - \mathcal{L}) d^3\mathbf{x}, \quad (4.26)$$

ainsi que $H^{(2)}$ associé, alors l'équation d'évolution (4.21) des modes $v_{\mathbf{k}}$ prend la forme d'équations d'Heisenberg

$$\hat{v}' = i[\hat{H}^{(2)}(\eta), \hat{v}], \quad \hat{\pi}' = i[\hat{H}^{(2)}(\eta), \hat{\pi}]. \quad (4.27)$$

On applique une procédure similaire pour quantifier μ_+ et μ_\times et les évolutions de modes $\mu_{+, \mathbf{k}}$ et $\mu_{\times, \mathbf{k}}$ doivent satisfaire

$$\mu_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu_{\mathbf{k}} = 0. \quad (4.28)$$

Une fois sur l'attracteur de roulement lent, on peut montrer que $\epsilon'/\mathcal{H} = \mathcal{O}(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta)$ et $\delta'/\mathcal{H} = \mathcal{O}(\epsilon^2, \delta^2, \delta\epsilon)$ si bien qu'au premier ordre dans ces paramètres de roulement lent [Lidsey *et al.* 97]

$$\frac{z''}{z} = \frac{2 + 6\epsilon - 3\delta}{\eta^2}, \quad \frac{a''}{a} = \frac{2 + 3\epsilon}{\eta^2}, \quad z = a \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{\kappa}}, \quad \mathcal{H} = aH = -\frac{(1 + \epsilon)}{\eta}. \quad (4.29)$$

Toujours au premier ordre dans les paramètres de roulement lent, la solution de l'équation (4.21) qui satisfait à la condition (4.25) est

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} H_{\nu_S}^{(1)}(-k\eta), \quad \text{avec } \nu_S = 3/2 + 2\epsilon - \delta. \quad (4.30)$$

³Ceci est équivalent à un choix du vide, c'est-à-dire un état $|0\rangle$ tel que $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \forall \mathbf{k}$, dit vide de Bunch-Davies.

⁴Nous utilisons la même lettre que pour la fonction de Hubble et il ne devrait pas y avoir de confusion possible d'après le contexte

De même pour les degrés de liberté tensoriels, la solution de l'équation (4.28) qui satisfait à la condition (4.25) est

$$\mu_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2} H_{\nu_T}^{(1)}(-k\eta), \quad \text{avec } \nu_T = 3/2 + \epsilon. \quad (4.31)$$

Les $H_{\nu}^{(1)}$ sont les fonctions de Hankel de première espèce. On remarque que la limite asymptotique des ces fonctions quand $k\eta \rightarrow -\infty$ implique que

$$\hat{Q}(\eta, \mathbf{x}) \equiv \frac{\hat{v}(\eta, \mathbf{x})}{a} \sim \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right] \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \frac{1}{k^{\nu_S}}. \quad (4.32)$$

Dans la limite super-Hubble, les observables que l'on pourra construire à partir de la perturbation du champ en jauge plate (\mathcal{Q}) vont commuter entre-elles et vont donc être interprétables comme des variables stochastiques. De plus, le fait que l'on ait quantifié la théorie libre implique que leur statistique est gaussienne, et il suffit de calculer le corrélateur à deux points pour la caractériser. On définit ainsi

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{Q}_{\mathbf{k}} \hat{Q}_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle &\equiv \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{Q}}(k) \equiv \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{Q}}(k) \\ \langle 0 | \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle &\equiv \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k). \end{aligned} \quad (4.33)$$

On obtient plus précisément

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa H^2}{8\pi^2 \epsilon} \left(\frac{k}{aH} \right)^{2\delta-4\epsilon}, \quad (4.34)$$

c'est-à-dire

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa H^2}{4\epsilon k^3} \left(\frac{k}{aH} \right)^{2\delta-4\epsilon}. \quad (4.35)$$

La procédure de quantification pour les modes tensoriels amènera les mêmes conclusions avec $E_+/\sqrt{\kappa}$ et $E_\times/\sqrt{\kappa}$ à la place de \mathcal{Q} et ν_T à la place ν_S . On définira donc

$$\langle 0 | \hat{E}_{+, \mathbf{k}} \hat{E}_{+, \mathbf{k}'} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{E}_{\times, \mathbf{k}} \hat{E}_{\times, \mathbf{k}'} | 0 \rangle \equiv \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_E(k). \quad (4.36)$$

On déduit de (4.29) qu'à l'ordre le plus bas dans les paramètres de roulement lent $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa}{2\epsilon} \mathcal{P}_{\mathcal{Q}}(k)$, et donc

$$\mathcal{P}_E = 2\epsilon \mathcal{P}_{\mathcal{R}}. \quad (4.37)$$

Cependant la quantité qui caractérise les ondes gravitationnelles est non pas E , mais $2E$. On définira donc

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = 8\mathcal{P}_E, \quad (4.38)$$

un facteur 2 supplémentaire venant du fait que l'on veut rendre compte de la puissance dans les deux polarisations. On aura donc au final une relation entre les spectres de puissance des perturbations scalaires et tensorielles donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = 16\epsilon \mathcal{P}_{\mathcal{R}}. \quad (4.39)$$

De plus, on déduit des expressions de ν_S et ν_T en fonction des paramètres de roulement lent que l'indice spectral est donné par

$$\begin{aligned} n_S - 1 &\equiv \frac{d\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln(k)} = 2\delta - 4\epsilon \\ n_T &\equiv \frac{d\mathcal{P}_T}{d \ln(k)} = -2\epsilon. \end{aligned}$$

L'amplitude globale des fluctuations est dépendante de l'échelle d'inflation c'est-à-dire de la valeur de H pendant l'inflation, mais le rapport des amplitudes tensorielles et scalaires est directement lié au paramètre de roulement lent ϵ . On considérera ensuite que les fluctuations sont remplacées par des fluctuations classiques d'un champ stochastique dont les moyennes d'ensembles $\langle \dots \rangle$ sont égales aux moyennes des opérateurs correspondants dans le vide $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$. On utilisera le fait que la perturbation de courbure en jauge comobile \mathcal{R} est constante pour en déduire ses propriétés statistiques comme nous avons fait dans le chapitre 2. De plus, ce mécanisme prédit un spectre quasiment invariant d'échelle (si on néglige les paramètres de roulement lent) car $P(k) \sim k^{-3}$, ce qui est favorisé expérimentalement.

4.3 La variable de Mukhanov-Sasaki en formalisme 1+3 (article)

Jusqu'à présent, nous avons utilisé le formalisme basé sur les coordonnées afin de traiter les perturbations pendant l'inflation. On peut néanmoins s'interroger sur son équivalent dans le formalisme 1+3. Un premier problème apparent vient du fait que les perturbations des quantités scalaires X dans le formalisme en coordonnées sont remplacées par des gradients spatiaux $D_\mu X$. De plus, le formalisme 1+3 ne fait pas référence explicitement à un espace de fond. Ces deux différences essentielles font qu'il n'apparaît pas de méthode simple pour donner un sens à une perturbation de l'action. L'action n'est pas un champ scalaire et en considérer le gradient spatial n'a pas de sens. On peut cependant tenter d'isoler les degrés de libertés canoniques dans le formalisme 1+3 afin d'obtenir des prédictions quantitatives. On calquera alors la procédure de quantification sur l'approche en coordonnées. Ceci est l'objet de l'article qui suit.

Quantization of perturbations during inflation in the 1 + 3 covariant formalism

Cyril Pitrou* and Jean-Philippe Uzan†

Institut d'Astrophysique de Paris, UMR-7095 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 98 bis bd Arago, 75014 Paris, France
(Received 25 January 2007; published 18 April 2007)

This note derives the analogue of the Mukhanov-Sasaki variables both for scalar and tensor perturbations in the 1 + 3 covariant formalism. The possibility of generalizing them to nonflat Friedmann-Lemaître universes is discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevD.75.087302](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.087302)

PACS numbers: 98.80.Cq

The theory of cosmological perturbations is a cornerstone of the modern cosmological model. It contains two distinct features. First, it describes the growth of density perturbations from an initial state in an expanding universe filled with matter and radiation, taking into account the evolution from the super-Hubble to the sub-Hubble regime. Second, it finds the origin of the initial power spectrum of density perturbations in the amplification of vacuum quantum fluctuations of a scalar field during inflation.

Two formalisms are used to describe the evolution of perturbations. The first relies on the parametrization of the most general spacetime close to a Friedmann-Lemaître (FL) universe and on the construction of gauge invariant variables [1]. The second is based on a general 1 + 3 decomposition of the Einstein equation [2]. The philosophies and advantages of these two formalisms are different.

The Bardeen formalism is restricted to perturbations around a FL universe (with metric $\bar{g}_{\mu\nu}$) and expands the spacetime metric as $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$. The metric perturbation is then decomposed as

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = & 2a^2(\eta)[-Ad\eta^2 + (D_i B + \bar{B}_i)dx^i d\eta \\ & + (C\gamma_{ij} + D_i D_j E + D_{(i} \bar{E}_{j)} + \bar{E}_{ij})dx^i dx^j] \end{aligned} \quad (1)$$

and the 10 degrees of freedom are decomposed in 4 scalars (A, C, B, E), 4 vectors (\bar{E}_i, \bar{B}_i with $D_i \bar{B}^i = 0, \dots$), and 2 tensors (\bar{E}_{ij} with $\bar{E}_i^i = D_i \bar{E}^{ij} = 0$). During inflation, it was shown that the Mukhanov-Sasaki (MS) variable v , a gauge invariant variable that mixes matter and metric perturbations, must be quantized [3–5]. This approach is thus completely predictive (initial conditions and perturbations evolution) for an almost flat FL spacetime. It is not straightforward to extend it to less symmetrical inflationary models [6,7], for which the quantization procedure has not been investigated (see, however, Ref. [8] for nonflat FL universes and Ref. [9] for non-FL spacetimes).

The 1 + 3 covariant description assumes the existence of a preferred congruence of worldlines representing the average motion of matter. The central object is the 4-velocity u^a of these worldlines together with the kinemat-

cal quantities arising from the decomposition

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (2)$$

where $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$, $\Theta = \nabla_a u^a$ is the expansion rate, σ_{ab} the shear (symmetric trace-free with $\sigma_{ab} u^a = 0$), ω_{ab} the vorticity (antisymmetric with $\omega_{ab} u^a = 0$), and $\dot{u}_a \equiv u^b \nabla_b u_a$. A fully orthogonally projected covariant derivative D_a , referred to as a spatial gradient, is defined and a complete set of evolution equations can be obtained for these quantities (together with the electric and magnetic parts of the Weyl tensor, E_{ab} and H_{ab} and the matter variables) without needing to specify the spacetime geometry (see e.g. Ref. [10] for details). The formalism can then be used to study the evolution of perturbations in various spacetimes (see e.g. Ref. [11] for Bianchi universes) and beyond the linear order in the case of almost FL universes [12,13]). In this case, the perturbation variables have a clear interpretation and have been related to the Bardeen variables both for fluids [14] and scalar fields [15]. On the other hand, the scalar-vector-tensor decomposition is not straightforward [16] and the analogue of the Mukhanov-Sasaki variable v has not been derived so that it is difficult to argue which quantity must be quantized in this formalism.

The goal of this article is to identify this variable in the 1 + 3 covariant formalism. In Sec. I, we recall the construction of the Mukhanov-Sasaki variable. We then identify in Sec. II its counterpart in the 1 + 3 covariant formalism for an almost FL spacetime. Section III addresses the question of gravitational waves. Finally, we conclude on the use and possible extensions of these variables in Sec. IV.

I. QUANTIZATION OF THE MUKHANOV-SASAKI VARIABLE

Focusing on scalar modes of the decomposition (1), one defines the two gauge invariant potentials, $\Phi = A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E)'$ and $\Psi = -C - \mathcal{H}(B - E')$, where $\mathcal{H} = a'/a$. For a universe filled by a single scalar field φ , one can define the gauge invariant field fluctuation $Q = \delta\varphi - \varphi' C / \mathcal{H}$. The curvature perturbation in the comoving gauge is then given by

*Electronic address: pitrou@iap.fr

†Electronic address: uzan@iap.fr

$$\mathcal{R} = -C + \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi'} = \frac{\mathcal{H}}{\varphi'} Q, \quad (3)$$

when assuming a background FL universe with flat spatial sections. Introducing the two variables

$$u \equiv \frac{2a\Phi}{\kappa\varphi'}, \quad \theta \equiv \frac{1}{z} \equiv \frac{\mathcal{H}}{a\varphi'} = \frac{H}{a\dot{\varphi}}, \quad (4)$$

with $\kappa = 8\pi G$, \mathcal{R} takes the simple form $\mathcal{R} = \theta u' - \theta' u$, where use has been made of the background equation $\theta' = (-a\theta\varphi'' + \mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)/a\varphi' = -\theta\varphi''/\varphi' - \kappa\varphi'/2a$. If we define

$$v \equiv z\mathcal{R} = aQ, \quad (5)$$

it reduces to the simple relation $zv = (uz)'$. Thus, \mathcal{R}' takes the simple form $\mathcal{R}' = \theta u'' - \theta'' u$. Additionally, the perturbed Einstein equations imply that $\mathcal{R}' = \theta\Delta u$. Provided $\varphi' \neq 0$, i.e. we are not in a strictly de Sitter phase, this leads to

$$u'' - \left(\Delta + \frac{\theta''}{\theta}\right)u = 0 \quad (6)$$

which can also be written as

$$z^2\mathcal{R}' = \Delta \left(\int \mathcal{R} z^2 d\eta \right). \quad (7)$$

This form is strictly equivalent to $\mathcal{R}'' - \Delta\mathcal{R} + 2(z'/z)\mathcal{R}' = 0$, that is to

$$v'' - \left(\Delta + \frac{z''}{z}\right)v = 0. \quad (8)$$

This is the equation of a harmonic oscillator with time varying mass $m^2 = z''/z$. To show that v is indeed the canonical variable to be quantized (contrary to u which satisfies a similar equation with z replaced by θ), one needs to expand the action of the scalar field coupled to gravity up to second order [5]. The standard procedure is then to promote v to the status of an operator and set the initial conditions by requiring that it is in its vacuum state on sub-Hubble scales (in Fourier space, that is when $k\eta \rightarrow -\infty$). At the end of inflation, all cosmologically relevant scales are super-Hubble ($k\eta \ll 1$) and the conservation of \mathcal{R} on these scales is used to propagate the large scale perturbations generated during inflation to the postinflationary eras.

II. QUANTIZATION IN THE 1 + 3 FORMALISM

A. Generalities

Let us first stress an important point concerning time derivative. In the coordinate based approach, the dot refers to a derivative with respect to the cosmic time. In the covariant formalism, a natural time derivative is introduced as $u^a\nabla_a$ which is a derivative along the worldline of the observer. For an almost FL spacetime, it is clear that, for any order 1 scalar quantity X , $u^a\nabla_a X = \partial_t X$ since u^a has

to be evaluated at the background level. It is indeed not the case anymore for vector or tensor quantities, or at second order in the perturbations. Another time derivative can be constructed from the Lie derivative along u^a , \mathcal{L}_u . This derivative exactly matches the derivative with respect to cosmic time for any type of perturbations [17]. For instance, $\mathcal{L}_u X_a = u^b\nabla_b X_a + X_b\nabla_a u^b$, and it is easily checked that the second term exactly compensates the term arising from the divergence of u^a . We recall that the Lie derivative satisfies

$$D_a(\dot{X}) = \mathcal{L}_u(D_a X) - \dot{u}_a \dot{X}. \quad (9)$$

In the 1 + 3 covariant formalism, the main equations for a spacetime with vanishing vorticity ($\omega_{ab} = 0$ in the decomposition (2)) are the Raychaudhuri equation

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 = D_a \dot{u}^a - \frac{\kappa}{2}(\rho + 3P) - 2\sigma^2, \quad (10)$$

the Gauss-Codacci equation

$$\mathcal{K} = 2\left(-\frac{\Theta^2}{3} + \kappa\rho + \sigma^2\right), \quad (11)$$

together with the conservation equations

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + P) = 0, \quad D_a P = -(\rho + P)\dot{u}_a, \quad (12)$$

where $2\sigma^2 = \sigma_{ab}\sigma^{ab}$. For a scalar field $\rho = \dot{\psi}^2/2 + V$ and $P = \dot{\psi}^2/2 - V$ with $\psi = \dot{\phi}$. We define the scale factor S by the relation $\dot{S}/S = H \equiv \Theta/3$. The previous equations imply that

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2}\dot{\psi}^2 - \sigma^2 + \frac{1}{6}\mathcal{K} + \frac{D_a \dot{u}^a}{3} \quad (13)$$

and the Gauss equation leads to

$$\dot{\mathcal{K}} = -\frac{2}{3}\Theta(\mathcal{K} + 2D_a \dot{u}^a) + 2(\sigma^2) \cdot + 2\Theta\sigma^2 \quad (14)$$

and

$$D_a \mathcal{K} = -\frac{4}{3}\Theta D_a \Theta + 2\kappa\psi D_a \psi + 2D_a(\sigma^2). \quad (15)$$

Let us now introduce the central quantity in our discussion:

$$\mathcal{R}_a \equiv \frac{1}{3} \left[\int_{\mathcal{L}} (D_a \Theta) d\tau - D_a \left(\int_{\mathcal{L}} \Theta d\tau \right) \right] \equiv \frac{v_a}{z}, \quad (16)$$

where τ is the proper time along the fluid flow lines. It follows from the identity (9) that

$$\mathcal{L}_u \mathcal{R}_a = -H\dot{u}_a = H(D_a \psi)/\psi, \quad (17)$$

which is a useful relation in order to close the equations in \mathcal{R}_a . The conservation equation implies that $\mathcal{L}_u(\psi D_a \psi) = -\psi D_a(\Theta\psi)$ which, combined with Eq. (15), gives

$$\frac{1}{4} S^2 D_a(\mathcal{K} - 2\sigma^2) = U_a + \frac{2\Theta}{3\kappa\psi^2} \left[\mathcal{L}_u U_a + \frac{1}{3}\Theta U_a \right] \quad (18)$$

with $U_a = \kappa S^2 \psi D_a \psi / 2$. Now, introducing

$$V_a \equiv z S^2 \left[\frac{1}{4} D_a (\mathcal{K} - 2\sigma^2) + \left(\sigma^2 - \frac{1}{6} \mathcal{K} - \frac{D_b \dot{u}^b}{3} \right) \frac{D_a \psi}{\psi} \right] \quad (19)$$

and developing $\mathcal{L}_u(zU_a)$ with the help of Eqs. (13) and (18), it can be shown that

$$\mathcal{L}_u \mathcal{R}_a = \frac{1}{S z^2} \int \frac{z V_a}{S} d\tau. \quad (20)$$

Whatever the values taken by the shear and the spatial curvature, this intermediary result is exact, that is valid for any order of perturbation. Note its similarity with Eq. (7).

B. Flat FL spacetimes

Let us now focus on homogeneous spacetimes with flat spatial sections; this includes the FL spacetimes for which the shear vanishes and Bianchi I spacetimes. Homogeneity implies that the spatial gradient of any scalar function vanishes ($D_a f = 0, \forall f$) and in particular $D_a P = 0$ so that $\dot{u}_a = 0$. Flatness implies that $\mathcal{K} = 0$ and that the 3D-Ricci tensor vanishes, ${}^{(3)}R_{ab} = 0$, which leads to the simplified equation for the shear:

$$\dot{\sigma}_{ab} + \Theta \sigma_{ab} = 0 \Rightarrow (\sigma^2) \cdot + \Theta \sigma^2 = 0. \quad (21)$$

This means that the only nonvanishing quantities are Θ, ϕ, ψ , and σ . At first order in the perturbations, we have to consider the gradients of these quantities but also terms like \dot{u}_a and \mathcal{K} . FL spacetimes are also isotropic. This implies that $\sigma = 0$ and $S = a$ for the background. Consequently, we can discard gradients of σ^2 which are second order. Thus, the only remaining term in the expression (19) of V_a is $\frac{1}{4} z S^2 D_a \mathcal{K}$.

In order to get a closed equation for \mathcal{R}_a , we need to express V_a in terms of \mathcal{R}_a in Eq. (20). Taking the spatial gradient of Eq. (14) and using Eq. (9) for handling the time derivative, we obtain the first order relation:

$$\mathcal{L}_u \left(\frac{S^2 D_a \mathcal{K}}{4} \right) = \frac{S^2 H}{\psi} D_a (D_b D^b \psi) = S^2 H D_b D^b \left(\frac{D_a \psi}{\psi} \right),$$

where the last equality follows from the flat background assumption. Equation (17) and the commutation relation $S^2 D_b D^b \mathcal{L}_u X_a = \mathcal{L}_u (S^2 D_b D^b X_a)$, valid at first order, imply $\mathcal{L}_u \left(\frac{S^2 D_a \mathcal{K}}{4} \right) = \mathcal{L}_u (S^2 D_b D^b \mathcal{R}_a)$ which once integrated leads to

$$\frac{S^2 D_a \mathcal{K}}{4} = S^2 D_b D^b \mathcal{R}_a \equiv \Delta \mathcal{R}_a \quad (22)$$

up to a constant F_a satisfying $\mathcal{L}_u F_a = 0$ which can be absorbed in the integration initial boundary surface of Eq. (16). Thus Eq. (20) reads

$$\mathcal{L}_u \mathcal{R}_a = \frac{1}{S z^2} \int \frac{z^2}{S} \Delta \mathcal{R}_a d\tau. \quad (23)$$

At this stage, it is useful to introduce a vector field $w_a \equiv S u_a$, and the conformal proper time $\hat{\tau}$ defined by $S d\hat{\tau} = d\tau$. It is easily seen that for a spatial vector (i.e. $u^a X_a = 0$) $\mathcal{L}_w X_a = S \mathcal{L}_u X_a$. The Lie derivative along w_a matches at first order the derivative with respect to the conformal time η , as the Lie derivative along u_a was matching the derivative with respect to the cosmic time. For scalars we thus use the notation $X' \equiv \mathcal{L}_w X$. With this definition, Eq. (23) can be recast as

$$z^2 \mathcal{L}_w \mathcal{R}_a = \int z^2 \Delta \mathcal{R}_a d\hat{\tau}, \quad (24)$$

which is similar to Eq. (7). By the same token, we deduce that v_a defined in Eq. (16) satisfies Eq. (8). It can be checked that its spatial components are linked to the MS variable at first order in perturbations by $v_i = \partial_i v$, and consequently the initial conditions obtained from the quantization of v can be used to set the initial conditions for v_a and then \mathcal{R}_a . v_a is thus the analogue in the 1 + 3 formalism of the MS variable v in the Bardeen formalism and it satisfies

$$\mathcal{L}_w^2 (v_a) - \left(\Delta + \frac{z''}{z} \right) v_a = 0. \quad (25)$$

III. GRAVITATIONAL WAVES

It can be shown that the magnetic part of the Weyl tensor H_{ab} is a good variable to describe the gravitational waves [16,18], and it satisfies at first order for flat FL spacetimes

$$\mathcal{L}_w^2 H_{ab} + 2 \mathcal{L}_w (\mathcal{H} H_{ab}) - \Delta H_{ab} = 0. \quad (26)$$

\mathcal{E}_{ab} defined by $\mathcal{L}_w \mathcal{E}_{ab} = H_{ab}$ satisfies

$$\mathcal{L}_w^2 \mathcal{E}_{ab} + 2 \mathcal{H} \mathcal{L}_w (\mathcal{E}_{ab}) - \Delta \mathcal{E}_{ab} = 0, \quad (27)$$

where the integration constant is set to 0 as for the scalar case. This is exactly the equation satisfied by the gravitational waves \bar{E}_{ij} . Indeed, these variables are linked at first order by $\mathcal{E}_{ab} = \rho^{cd}{}_{<a} \partial_c \bar{E}_{b>d}$ [18], where $\rho^{ab}{}_c$ is a completely antisymmetric tensor normalized such that $\rho^{12}{}_3 = 1$. With $\mu_{ab} \equiv \frac{S}{\sqrt{8\pi G}} \mathcal{E}_{ab}$, Eq. (27) leads at first order to

$$\mathcal{L}_w^2 (\mu_{ab}) - \left(\Delta + \frac{S''}{S} \right) \mu_{ab} = 0 \quad (28)$$

which is the equation for a harmonic oscillator with a time varying mass S''/S . Just as for the scalar perturbations case, the quantization of the gravitational waves in perturbation theory can be used to set the initial conditions for μ_{ab} and thus for \mathcal{E}_{ab} and H_{ab} .

IV. CONCLUSIONS

We have identified the scalar and tensor variables that map to the Mukhanov-Sasaki variables when considering an almost FL universe with Euclidean spatial sections in the 1 + 3 covariant formalism. Let us stress that in Ref. [12], $\mathcal{R}_a \equiv -D_a \alpha$ (where $\alpha = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{L}} \Theta d\eta$ is the integrated volume expansion along u_a) was proposed. But clearly, this maps at linear order to $\partial_a (\mathcal{R} - \frac{1}{3} \times \int \Delta(V + E') d\eta)$, where V is the scalar part of the perturbation of the velocity. The additional term in our definition (16) cancels this discrepancy as it can be seen from the constraint $\frac{2}{3} D_a \Theta = D_b \sigma_a^b$ which implies that at first order $D_a \Theta = \frac{1}{a} \partial_a \Delta V$. Alternatively, this can be seen directly on the expression of Θ in terms of perturbation variables by use of the (0 - i) Einstein equation. The two variables agree at leading order on super-Hubble scales.

Two generalizations with less restrictive backgrounds can be considered: flat but anisotropic spatial sections ($K \equiv \frac{S^2 \mathcal{K}}{6} = 0, \sigma \neq 0$), and isotropic but nonflat FL spacetimes ($K \neq 0, \sigma = 0$). The cornerstone of the derivation of Sec. II is the possibility of expressing V_a only in terms of \mathcal{R}_a to get a closed equation from Eq. (20). In the first case, two other terms in Eq. (19) contribute at first order. $z S^2 \sigma^2 \frac{D_a \psi}{\psi}$ changes the definition of the effective varying mass, but the term $\frac{z S^2}{2} D_a (\sigma^2)$ acts as a source on the right-hand side of Eq. (8). This term represents a coupling of the gravitational waves (σ_{ab} at first order) with the shear of the

background spacetime. As for \mathcal{E}_{ab} , Eq. (27) will be supplemented with an integral nontrivial source term which couples the background shear to the electric part of the Weyl tensor [18]. Thus both equations are mixed with these new source terms, which are of the same order of magnitude as the quantized variables. Note that this is not surprising since at second order in the perturbations around a FL spacetime the scalar and tensor degrees of freedom are coupled [18,19]. In the second case ($K \neq 0, \sigma = 0$),

$$V_a = z \left[\frac{S^2}{4} D_a \mathcal{K} - K \frac{D_a \psi}{\psi} \right] \equiv \frac{z}{4} \tilde{C}_a. \quad (29)$$

The spatial gradient of Eq. (14) leads at first order to

$$\mathcal{L}_u \tilde{C}_a = \frac{S^2 H}{\psi} D_a (D_b D^b \psi) - 3K \mathcal{L}_u \zeta_a, \quad (30)$$

where $\zeta_a \equiv D_a \alpha + \frac{D_a \psi}{3\psi}$ is a possible nonlinear generalization of the curvature perturbation on uniform density hypersurfaces. From the conservation equation (12), it can be shown [13,17] that ζ_a is conserved (in the sense of the Lie derivative) on large scales for adiabatic perturbations, and thus \tilde{C}_a is also conserved in the same sense on super-Hubble scales for adiabatic perturbations [20]. Because of this term, \tilde{C}_a cannot be expressed solely in terms of \mathcal{R}_a as has been done with Eq. (22). Indeed, it contains an additional term involving ζ_a [12].

-
- [1] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
 [2] G. F. R. Ellis, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi,"* Course XLVII, edited by R. K. Sachs (Academic Press, New York, 1971), pp. 104–179.
 [3] V. F. Mukhanov, *JETP Lett.* **41**, 493 (1985).
 [4] M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1036 (1986).
 [5] V. F. Mukhanov, F. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
 [6] G. F. R. Ellis *et al.*, *Gen. Relativ. Gravit.* **34**, 1445 (2002); J.-P. Uzan, U. Kirchner, and G. F. R. Ellis, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **344**, L65 (2003); G. F. R. Ellis *et al.*, *Gen. Relativ. Gravit.* **34**, 1445 (2002).
 [7] A. B. Burd and J. D. Barrow, *Nucl. Phys.* **B308**, 929 (1988); S. Byland and D. Scialom, *Phys. Rev. D* **57**, 6065 (1998).
 [8] J. Garriga *et al.*, *Nucl. Phys.* **B513**, 343 (1998); J. C. Hwang and H. Noh, *Phys. Rev. D* **66**, 084009 (2002); J. Martin and P. Peter, *Phys. Rev. D* **68**, 103517 (2003).
 [9] R. B. Abbott, B. Bednarz, and S. D. Ellis, *Phys. Rev. D* **33**, 2147 (1986); K. Tomita and M. Den, *Phys. Rev. D* **34**, 3570 (1986).
 [10] G. F. R. Ellis and H. van Elst, gr-qc/9812046.
 [11] P. K. S. Dunsby, *Phys. Rev. D* **48**, 3562 (1993).
 [12] D. Langlois and F. Vernizzi, *Phys. Rev. D* **72**, 103501 (2005).
 [13] D. Langlois and F. Vernizzi, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 091303 (2005).
 [14] M. Bruni, P. Dunsby, and G. F. R. Ellis, *Astrophys. J.* **395**, 34 (1992).
 [15] M. Bruni, G. F. R. Ellis, and P. Dunsby, *Classical Quantum Gravity* **9**, 921 (1992).
 [16] C. Clarkson, *Phys. Rev. D* **70**, 103524 (2004).
 [17] D. Langlois and F. Vernizzi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2007) 017.
 [18] B. Osano, C. Pitrou, P. K. S. Dunsby, J.-P. Uzan, and C. Clarkson, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2007) 003.
 [19] J. Maldacena, *J. High Energy Phys.* **05** (2003) 013.
 [20] G. F. R. Ellis, M. Bruni, and J. Hwang, *Phys. Rev. D* **42**, 1035 (1990).

Deuxième partie

Dynamique au delà de l'approximation linéaire et non-gaussianité

La théorie des perturbations linéaires cesse d'être pertinente lorsque les perturbations ne sont plus infinitésimales, c'est-à-dire pour $\delta \sim 1$, puisqu'alors la dynamique non-linéaire domine. L'étude de la formation des structures nécessite donc d'aller au delà de la théorie linéaire. Cependant dans le cadre de la relativité générale ceci est très rapidement difficile. En effet la nature intrinsèquement non-linéaire émerge dès que nous étudions les perturbations au second ordre. Une solution consiste à tirer parti du fait que nous n'avons besoin du régime non-linéaire que lorsque les structures se forment, c'est-à-dire pour de modes sub-Hubble. Or dans cette limite la théorie de Newton est une très bonne approximation de la relativité générale. On utilise donc cette théorie simplifiée afin de pousser la résolution des équations plus loin. En étudiant systématiquement la dynamique des modes croissants on peut développer un formalisme inspiré des diagrammes de Feynmann permettant de décrire de manière statistique les perturbations de densité et de vitesse. Ce formalisme est expliqué exhaustivement dans [Bernardeau *et al.* 02]. Observationnellement ces statistiques sont réalisées sur les catalogues de galaxies. Cependant ce formalisme cesse d'être pertinent lorsque l'on souhaite étudier les perturbation du fond diffus au delà de l'ordre linéaire. Tout d'abord il est inadapté car les modes d'intérêt pour le fond diffus ne sont pas nécessairement sub-Hubble au moment du découplage et donc on ne peut utiliser l'approximation Newtonienne. En étudiant plutôt la relativité générale au premier ordre non-linéaire, c'est-à-dire au second ordre on capturera donc sa nature non-linéaire tout en limitant au plus les complications analytiques. Dans le chapitre 5 nous détaillerons comment la théorie des perturbations linéaires peut être étendue au second ordre. La compréhension des phénomènes non-linéaires permettra donc soit de valider la relativité générale au delà de son approximation linéaire ou bien de remonter aux condition initiales non-linéaires loin dans l'ère de radiation. L'un ne s'envisage pas sans l'autre sauf si l'on montre que ces deux aspects correspondent à des échelles bien distinctes. Nous avons vu dans le chapitre 4 que les prédictions de l'inflation à l'ordre linéaire sont relativement génériques. Les différents modèles doivent prédire un spectre quasiment invariant d'échelle car celui-ci est favorisé observationnellement et ne vont se distinguer essentiellement que dans la déviation légère à ce spectre (l'indice spectral). On ne dispose donc que de très peu de marge pour éliminer ou valider les différents modèles. Cependant si l'on s'intéresse à la dynamique non-linéaire, alors des différences notoires vont émerger. On caractérise essentiellement les conditions initiales non-linéaire à la fin de l'inflation par un paramètre noté f_{NL} (voir la section 7.8 pour la définition mathématique). Ce paramètre permet de caractériser le caractère non-gaussien des perturbations de courbure comobile à la fin de l'inflation. D'après le théorème de Wick, un champ est gaussien $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ si les moyennes stochastiques des corrélations de ce champ en un ensemble de points $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$ satisfont

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{R}(\mathbf{x}_{2p+1}) \rangle &= 0, \\ \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{R}(\mathbf{x}_{2p}) \rangle &= \sum_{\substack{\text{partitions} \\ \text{par paires}}} \prod_{\substack{\text{paires} \\ (i,j)}} \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}_i) \mathcal{R}(\mathbf{x}_j) \rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nous constatons donc qu'un champ gaussien est caractérisé par les corrélations à deux points, c'est-à-dire en espace de Fourier par le spectre de puissance. La déviation la plus immédiate est donc donnée par les corrélations à trois points, appelée bispectre en espace de Fourier, et nous verrons comment le paramètre f_{NL} y est relié. Nous avons vu qu'au premier ordre les champs étaient gaussiens, et l'évolution linéaire n'altère pas cette propriété. Seuls des effets non-linéaires permettent de générer un bispectre non-nul. Ces effets peuvent avoir lieu pendant l'inflation ou

après. On parlera alors soit de non-gaussiannité primordiale ou alors de non-gaussiannité générée par l'évolution. On montre que l'inflation chaotique à un champ présentée au chapitre 4 prédit un taux très faible de non-gaussiannité, c'est-à-dire $f_{\text{NL}} \ll 1$. Les modèles d'inflation prédisant des taux plus significatifs de non-gaussiannité font donc en général intervenir plusieurs champs et ne prédisent pas alors des conditions initiales adiabatiques au début de l'ère de radiation. Quant à la non-gaussiannité due à l'évolution, elle provient à la fois de la dynamique non-linéaire de la perturbation de courbure comobile et du fait que les observables (la température du fond diffus essentiellement) y sont reliées non-linéairement. Nous aborderons les prédictions de non-gaussiannité de l'inflation à un champ dans le chapitre 7.

Un autre problème du modèle standard réside dans le principe cosmologique. En effet, celui-ci est postulé mais nullement démontré. En principe le mécanisme de l'inflation donne une explication satisfaisante puisqu'on peut montrer que pendant la phase d'inflation toutes les anisotropies sont effacées et que l'univers a été homogénéisé pendant cette période. Néanmoins, nous avons dû considérer que l'univers était asymptotiquement ($t \rightarrow 0$) isotrope et homogène afin de pouvoir quantifier les perturbations. Une autre voie pour étendre le modèle standard consiste non pas à raffiner les perturbations en dépassant la théorie des perturbations linéaires, mais plutôt à étudier des espaces de fond plus généraux ainsi que la cosmologie qui s'en suit afin d'obtenir des contraintes expérimentales sur le principe cosmologique. Nous avons pour cela étudié les espaces anisotropes et nous présenterons les résultats obtenus dans la partie III.

Chapitre 5

La théorie des perturbations dans le régime non-linéaire

Sommaire

5.1	Problématique	67
5.2	La théorie des perturbations : tenseurs et fonction de distribution (article)	70
5.3	Traitement informatique des perturbations	103
5.3.1	xAct	103
5.3.2	Algorithme de perturbation	103
5.3.3	Un exemple simple : la perturbation au premier ordre du scalaire de Ricci	108

5.1 Problématique

Lorsque nous avons perturbé la métrique (2.11), nous avons utilisé seulement six des dix degrés de liberté. Ceci se justifie par la notion de choix de jauge. Pour pouvoir parler de perturbation, il faut établir une relation entre espace de fond et espace perturbé. Cette relation entre espace physique et espace de fond correspond à un choix de jauge. Pour cela, on plonge l'espace physique $\mathcal{M}_{\text{phys}}$ et l'espace de fond \mathcal{M}_0 dans une juxtaposition d'espace-temps. Mathématiquement on considère un espace produit

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{M} \times [0, 1] \quad \text{avec} \quad (\mathcal{M}, 0) = \mathcal{M}_0 \quad (\mathcal{M}, 1) = \mathcal{M}_{\text{phys}}. \quad (5.1)$$

Comme $[0, 1]$ possède une structure de variété différentielle canonique, \mathcal{N} est une variété différentielle à cinq dimensions. On utilise alors un champ de vecteur X (sur \mathcal{N}) normal à tous les espace-temps quadridimensionnels (\mathcal{M}, λ) , c'est-à-dire tel que la cinquième coordonnée soit non-nulle, afin d'identifier les points de l'espace physique et de l'espace de fond ainsi que de tous les espaces intermédiaires de cette construction. En effet ce champ de vecteur définit des courbes intégrales et chaque courbe intégrale passe par un point et un seul pour chaque (\mathcal{M}, λ) . Si de plus $X^4 = 1$, alors les courbes intégrales de X permettent de mettre en relation tous les espace-temps entre eux, notamment l'espace de fond et l'espace physique. On parle alors d'un choix

de jauge. Un champ vectoriel satisfaisant ces propriétés n'est pas unique si bien que l'on a une liberté dans l'identification des points des différents espace-temps. Il s'agit de la liberté de jauge. Un changement de jauge, c'est-à-dire le choix d'un champ Y plutôt que X pour identifier les points des espace-temps est intrinsèquement différent d'un changement de coordonnées. En effet sa signification est *géométrique* et ne dépend donc pas du choix des coordonnées. On présente sur la figure 5.1 deux choix de jauge possibles pour identifier les points d'un espace-temps de fond et ceux de l'espace-temps physique, représentés en une dimension pour les besoins du schéma. Les deux jeux de coordonnées résultants sont également mentionnés et il va donc falloir savoir comment passer de l'un à l'autre. On remarque graphiquement que cela consiste à changer les coordonnées sur l'espace de fond tout en les maintenant sur l'espace physique. Ce changement de coordonnées va être construit à partir du champ $\xi = Y - X$. Il est très important de comprendre que cette situation est très différente d'un simple changement de coordonnées dans une même jauge. En effet, nous présentons sur la figure 5.2 un changement de coordonnées qui préserve le choix d'une jauge pour identifier les points, et nous voyons que les coordonnées sont changées sur tous les espaces de façon simultanée, ce qui n'est pas le cas pour un changement de jauge. Les quantités tensorielles vivant sur les espace-temps se transforment donc différemment selon que l'on change simplement les coordonnées ou que l'on change la jauge utilisée pour identifier les points d'espace-temps différents. Bien que le problème de la jauge soit plus général en physique, il revêt un caractère particulier en relativité générale du fait de l'absence d'espace de fond absolu.

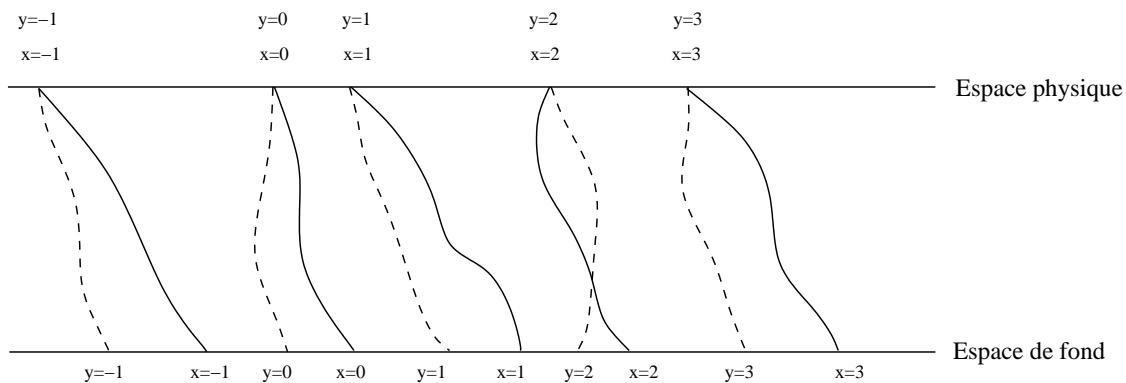


FIG. 5.1: Représentation schématique d'un changement de jauge. Deux champs de jauge (trait plein et tirets) sont représentés avec leur système de coordonnées correspondant ($\{x\}$ et $\{y\}$). On observe que le changement de jauge peut être interprété comme un changement de coordonnées uniquement sur l'espace de fond.

La jauge étant libre a priori, nous pouvons soit choisir une jauge en s'assurant qu'elle est fixée sans ambiguïté, soit travailler avec des variables invariantes de jauge. Nous allons voir que la méthode générale pour construire des variables invariantes de jauge implique qu'elles se réduisent dans une jauge donnée aux variables de perturbations que l'on aurait choisies en fixant initialement la jauge. Les équations satisfaites étant invariantes de jauge comme nous allons le voir, on est assuré que seules des quantités invariantes de jauge doivent intervenir. On peut donc travailler dans une jauge donnée et promouvoir dans les équations les variables de perturbations dans une jauge donnée au rang de variables invariantes de jauge. C'est la démarche

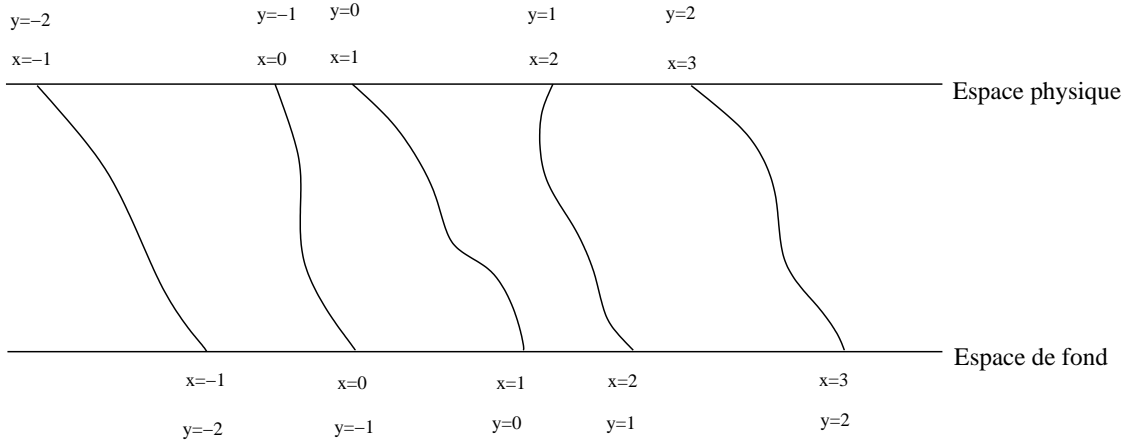


FIG. 5.2: Représentation schématique d'un changement de coordonnées. On change les coordonnées en même temps sur l'espace physique et sur l'espace de fond afin de conserver le choix du champ de jauge

que nous avons adoptée. Les équations présentées dans la partie précédente (équation d'Einstein et équation de Boltzmann) ont été dérivées dans la jauge Newtonienne et sont en fait satisfaites par des variables invariantes de jauge qui se réduisent aux variables de perturbation en jauge Newtonienne. En effet la décomposition générale de la perturbation de la métrique n'est pas donnée par la décomposition (2.11) mais par

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \left\{ -(1 + 2\Phi)(d\eta)_\mu(d\eta)_\nu + (D_i B + B_i)(dx^i)_\mu(d\eta)_\nu + (D_i B + B_i)(dx^i)_\nu(d\eta)_\mu + [(1 - 2\Psi)\gamma_{ij} + 2D_i D_j E + 2D_{(i} E_{j)} + 2E_{ij}] (dx^i)_\mu(dx^j)_\nu \right\}. \quad (5.2)$$

Lors d'un changement de jauge du premier ordre, si on décompose le champ ξ générant la transformation de coordonnées sur l'espace de fond en $\xi^\mu = (T, L^i + D^i L)$ avec $D_i L^i = 0$, alors les variables de perturbation de la métrique se transforment selon

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + T' + \mathcal{H}T, \\ \Psi &\rightarrow \Psi - \mathcal{H}T, \\ B &\rightarrow B - T + L', \\ E &\rightarrow E + L, \\ B^i &\rightarrow B^i + (L^i)', \\ E^i &\rightarrow E^i + L^i, \\ E_{ij} &\rightarrow E_{ij}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

On remarque alors que les quantités

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &\equiv \Phi + \mathcal{H}(B - E') + (B - E)', \\ \hat{\Psi} &\equiv \Psi - \mathcal{H}(B - E'), \\ \hat{\Phi}^i &\equiv -(E^i)' + B^i, \\ E_{ij} & \end{aligned} \quad (5.4)$$

sont invariantes sous une transformation de jauge. Elles sont alors appelées variables invariantes de jauge. Si on dérive les équations d'Einstein en incluant toutes les variables de perturbation, on doit pouvoir faire disparaître les variables B , B^i et E en introduisant $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Phi}^i$, car le résultat doit être invariant de jauge. Dans le but de simplifier l'algèbre, on peut alors omettre dès le début les variables E , B et B^i (fixer la jauge) puis identifier Ψ , Φ et $-(E^i)'$ avec $\hat{\Psi}$, $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Phi}^i$ afin d'obtenir des équations invariantes de jauge. Nous présentons donc dans l'article qui suit la notion de jauge au delà de la théorie des perturbations linéaires, puis nous expliquons comment construire des variables invariantes de jauge, à la fois pour les tenseurs et pour les fonctions de distribution. La notion de jauge au delà de l'ordre linéaire a été explicitée dans [Bruni *et al.* 97] et la construction de variables invariantes de jauge pour les tenseurs a été complètement justifiée mathématiquement dans [Nakamura 07]. La construction d'une fonction de distribution invariante de jauge à l'ordre linéaire a été effectuée dans [Durrer & Straumann 88, Durrer 94]. Le travail pour les fonctions de distribution au delà de l'ordre linéaire constitue donc un travail entièrement nouveau. Il permet d'appliquer la même technique que pour les équations d'Einstein, c'est-à-dire de calculer dans une jauge donnée pour ensuite interpréter les équations de la théorie cinétique obtenues à l'ordre non-linéaire en termes de variables invariantes de jauge. Afin de faire le lien avec la description fluide, nous présentons également comment obtenir cette limite au delà de l'ordre linéaire.

5.2 La théorie des perturbations : tenseurs et fonction de distribution (article)

Gauge-invariant Boltzmann equation and the fluid limit

Cyril Pitrou

Institut d'Astrophysique de Paris, Université Pierre and Marie Curie-Paris VI, CNRS-UMR 7095, 98 bis, Bd Arago, 75014 Paris, France

E-mail: pitrou@iap.fr

Received 2 July 2007, in final form 10 October 2007

Published 27 November 2007

Online at stacks.iop.org/Non/20/6127

Abstract

This paper investigates the collisionless Boltzmann equation up to second order in the cosmological perturbations. It describes the gauge dependence of the distribution function and the construction of a gauge-invariant distribution function and brightness, and then derives the gauge-invariant fluid limit.

1. Introduction

The origin of the large-scale structure is nowadays understood from the gravitational collapse of initial density perturbations, which were produced by amplification of the quantum fluctuations in the inflaton field [1]. The properties of the large-scale structure depend both on the initial conditions at the end of inflation and on the growth of perturbations in a universe filled with non-relativistic matter and radiation. The theory of cosmological perturbations is thus a cornerstone of our understanding of the large-scale structure. The evolution of radiation (photons and neutrinos) needs to be described by a Boltzmann equation [2–4]. Two types of perturbative schemes have extensively been used in the literature in order to describe the evolution of the cosmological perturbations. The first is a 1 + 3 covariant splitting of spacetime [5–7] and the second is a more pedestrian-coordinate-based approach. In the first approach, exact equations on the physical spacetime are derived and perturbative solutions around a background solution are then calculated. In the second approach, an averaging procedure is implicitly assumed and, starting from a background spacetime, perturbation variables satisfying the equations of motion order by order are constructed. In the 1 + 3 approach, the variables used are readily covariant, but the absence of background spacetime can be a problem to simplify the resolution by performing a mode expansion, since the Helmholtz function is in general not defined on the physical spacetime. In the coordinate-based approach, all perturbation variables live on the background spacetime and enjoy the advantages of its highly symmetric properties. However, this extra mathematical structure is at the origin of the gauge issue through the identification mapping that needs to be defined

between the background spacetime and the physical spacetime. Thus, the gauge dependence needs to be understood. An elegant solution is to construct gauge-invariant variables *à la* Bardeen both for the metric perturbation variables [8] and for the distribution function [9, 10]. Since the Boltzmann and Einstein equations are covariant, they can be expressed solely in terms of gauge-invariant variables provided we have a full set at hand. A full comparison of these two formalisms has been performed at first order in [11] and for gravitational waves at second order in [12].

In the coordinate-based approach, the true degrees of freedom identified from the Lagrangian formalism are quantized. They transfer to classical perturbations which inherit a nearly scale invariant power spectrum and Gaussian statistics, when their wavelength stretches outside the horizon, thus providing initial conditions for the standard big-bang model. Conserved quantities [13, 14] enable us to ignore the details of the transition between the inflation and the standard big-bang model (see, however, [15]), and the evolution details only need to be known when the wavelength re-enters the horizon. A first step to extend this procedure in the $1 + 3$ formalism has been taken in [16], where conserved quantities were defined. As for the degrees of freedom which need to be quantized, the first proposal was made in [17], in order to identify them, but it has not yet been motivated by a Lagrangian formulation.

The properties of the observed cosmic microwave background (CMB) anisotropies have confirmed the validity of the linear perturbation theory around a spatially homogeneous and isotropic universe and have set strong constraints on the origin of structures, as predicted by inflation. It now becomes necessary, with the forthcoming increasing precision of data that may allow us to detect deviation from Gaussianity [18], to study the second-order approximation, in order to discuss the accuracy of these first-order results. These non-Gaussian features are also of first importance, since they can help discriminate between different inflation theories. Indeed, one-field driven inflation leads to very small levels of primordial non-Gaussianity [19], whereas multifield inflation can present significant non-Gaussian features [20, 21]. However, since nonGaussian effects also appear through nonlinear evolution, that is from the second-order approximation and beyond of the evolution equations, the study of second-order evolution equations is necessary in order to distinguish between primordial and evolutionary non-Gaussianities (see [22] for a review on non-Gaussianity). Second-order Einstein and Boltzmann equations have been written in the $1 + 3$ formalism [23, 24], but not integrated numerically, partly because the mode expansion is not defined on the physical spacetime, and this would then require a four-dimensional numerical integration. However, the promising formalism of [25], which builds a bridge between the $1 + 3$ formalism and the coordinate-based approach, might shed some light on these issues. Similarly, in the coordinate-based approach, the second-order Einstein equations have been written in terms of gauge-invariant variables [26], and a first attempt has been made to write the Boltzmann equation in a given gauge for the different species filling the universe and to solve them analytically [27, 28].

The goal of this paper is to provide the full mathematical framework for handling distribution functions at second order in the coordinate-based approach taking into account the gauge issue. This will clarify the existing literature and point out some existing mistakes. In section 2 we first briefly review the gauge transformations and the procedure to build gauge-invariant variables. We then present in section 3 the transformation properties of the distribution function, and express them up to second order. In section 4 we define the gauge-invariant distribution function and the gauge-invariant brightness up to second order in the particular case of radiation (but this is readily extendable to cold dark matter). We then deduce in section 5, from the Boltzmann equation, the evolution of the gauge-invariant brightness in

its simplest collisionless form, at first and second orders. To finish, in section 6 we express the fluid limit as a consistency check of our results.

2. Overview on gauge transformations and gauge-invariant variables

2.1. First- and second-order perturbations

We assume that, at lowest order, the universe is well described by a Friedmann–Lemaître spacetime (FL) with flat spatial sections. The most general form of the metric for an almost FL universe is

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= a(\eta)^2 \{ -(1 + 2\Phi) d\eta^2 + 2\omega_i dx^i d\eta + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + h_{ij}] dx^i dx^j \}, \end{aligned} \quad (1)$$

where η is the conformal time and a is the scale factor. We perform a scalar–vector–tensor decomposition as

$$\omega_i = \partial_i B + B_i, \quad (2)$$

$$h_{ij} = 2E_{ij} + \partial_i E_j + \partial_j E_i + 2\partial_i \partial_j E, \quad (3)$$

where B_i , E_i and E_{ij} are transverse ($\partial^i E_i = \partial^i B_i = \partial^i E_{ij} = 0$), and E_{ij} is traceless ($E_i^i = 0$). There are four scalar degrees of freedom (Φ , Ψ , B , E), four vector degrees of freedom (B_i , E_i) and two tensor degrees of freedom (E_{ij}). Each of these perturbation variables can be split into first- and second-order parts as

$$W = W^{(1)} + \frac{1}{2} W^{(2)}. \quad (4)$$

This expansion scheme will refer, as we shall see, to the way gauge transformations and gauge-invariant (GI) variables are defined. First-order variables are solutions of first-order equations which have been extensively studied (see [29] for a review). Second-order equations will involve purely second-order terms, e.g. $W^{(2)}$ and terms quadratic in the first-order variables, e.g. $[W^{(1)}]^2$. There will thus never be any ambiguity about the order of perturbation variables involved as long as the order of the equation considered is known. Consequently, we will often omit to specify the order superscript when there is no risk of confusion.

At first order, 4 of the 10 metric perturbations are gauge degrees of freedom and the 6 remaining degrees of freedom reduce to 2 scalars, 2 vectors and 2 tensors. The three types of perturbations decouple and can thus be treated separately. As long as no vector source terms are present, which is generally the case when no magnetic field or topological defect is taken into account, the vector modes decay as a^{-2} . Thus, we can safely discard them and set $E_i^{(1)} = B_i^{(1)} = 0$. In the following, we shall not include vector modes for the sake of clarity. We checked that our arguments and derivation can trivially (but at the expense of much lengthy expressions) take them into account.

In the fluid description, we assume that the matter content of the universe can be described by a mixture of fluids. The 4-velocity of each fluid is decomposed as

$$u^\mu = \frac{1}{a} (\delta_0^\mu + v^\mu). \quad (5)$$

The perturbation v^μ has only three independent degrees of freedom since u^μ must satisfy $u_\mu u^\mu = -1$. The spatial components can be decomposed as

$$v^i = \partial^i v + \bar{v}^i, \quad (6)$$

\bar{v}^i being the vector degree of freedom and v the scalar degree of freedom. The stress–energy tensor of this fluid is of the form

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (7)$$

where the density and pressure are expanded as follows:

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad P = \bar{P} + \delta P. \quad (8)$$

At the background level, the form of the stress–energy tensor is completely fixed by the symmetry properties of the FL spacetime. However, at the perturbation level, one must consider an anisotropic stress component, $\pi_{\mu\nu}$ with $\pi_\mu^\mu = u^\mu \pi_{\mu\nu} = 0$. The pressure and density of the fluid are related by an equation of state, $P = \rho/3$, in the case of radiation.

At first order, the formalism developed by the seminal work of [8] provides a full set of gauge-invariant variables (GIV). Thanks to the general covariance of the equations at hand (Einstein equations, conservation equations, Boltzmann equation), it was shown that it was possible to get first-order equations involving only these gauge-invariant variables. In addition, if these gauge-invariant variables reduce, in a particular gauge, to the perturbation variables that we use in this particular gauge, then the computation of the equation can be simplified. Actually, we only need to compute the equations in this particular gauge, as long as it is completely fixed, and then to promote by identification our perturbation variables to the gauge-invariant variables. Thus, provided we know this full set of gauge-invariant variables, the apparent loss of generality by fixing the gauge in a calculation is in fact just a way to simplify computations. Eventually, we will reinterpret the equations as being satisfied by gauge-invariant variables. The full set of first-order gauge-invariant variables is well known and is reviewed in [29] and [30]. As gauge transformations up to any order were developed, it remained uncertain [31], whether or not a full set of gauge-invariant variables could be built for second and higher orders. This has been recently clarified [26], and the autosimilarity of the transformation rules for different orders can be used as a guide to build the gauge-invariant variables at any order. We present a summary of the ideas presented in [31] about gauge transformations and the construction of gauge-invariant variables [26].

2.2. Points identification on manifolds

When working with perturbations, we consider two manifolds: a background manifold, \mathcal{M}_0 , with associated metric \bar{g} , which in our case is the FL spacetime, and the physical spacetime \mathcal{M}_1 with the metric g . We consider that the variation of metric boils down to a comparison between tensor fields on distinct manifolds. Thus, in order to give a sense to ‘ $\delta g(P) = g(P) - \bar{g}(\bar{P})$ ’, we need to identify the points P and \bar{P} between these two manifolds and also to set up a procedure for comparing tensors. This will also be necessary for the comparison of any tensor field.

One solution to this problem [31] is to consider an embedding (4+1)-dimensional manifold $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times [0, 1]$, endowed with the trivial differential structure induced, and the projections \mathcal{P}_λ on submanifolds with $\mathcal{P}_0(\mathcal{N}) = \mathcal{M} \times \{0\} = \mathcal{M}_0$ and $\mathcal{P}_1(\mathcal{N}) = \mathcal{M} \times \{1\} = \mathcal{M}_1$. The collection of $\mathcal{M}_\lambda \equiv \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$ is a foliation of \mathcal{N} , and each element is diffeomorphic to the physical spacetime \mathcal{M}_1 and the background spacetime \mathcal{M}_0 . The gauge choice on this stack of spacetimes is defined as a vector field X on \mathcal{N} which satisfies $X^4 = 1$ (the component along the spacetime slicing \mathbb{R}). A vector field defines integral curves that are always tangent to the vector field itself, hence inducing a one-parameter group of diffeomorphisms $\phi(\lambda, \cdot)$, also noted $\phi_\lambda(\cdot)$, a flow, leading in our case from $\phi(0, p \in \mathcal{P}_0(\mathcal{N})) = p \in \mathcal{P}_0(\mathcal{N})$ along the integral curves to $\phi(1, p \in \mathcal{P}_0(\mathcal{N})) = q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{N})$. Due to the never-vanishing last component of X , the integral curves will always be transverse to the stack of spacetimes and the points lying on

the same integral curve, belonging to distinct spacetimes, will be identified. Additionally, the property $X^4 = 1$ ensures that $\phi_{\lambda,X}(\mathcal{P}_0(\mathcal{N})) = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$, i.e. the flow carries a spacetime slice to another. This points' identification is necessary when comparing tensors, but we already see that the arbitrariness in the choice of a gauge vector field X should not have a physical meaning, and this is the well-known *gauge freedom*.

2.3. Tensors' comparison and perturbations

The induced transport, along the flow, of tensors living on the tangent bundle, is determined by the push-forward $\phi_{*\lambda}$ and the pull-back ϕ_λ^* [32] associated with an element ϕ_λ of the group of diffeomorphisms. These two functions encapsulate the transformation properties of the tangent and co-tangent spaces at each point and its image. Indeed, the pull-back can be linked to the local differential properties of the vector field embedded by the Lie derivatives along the vector field in a Taylor-like fashion (see [32] or [31]):

$$\Phi_{X,\lambda}^*(T) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{L}_X^k T, \tag{9}$$

for any tensor T .

A remark about coordinate changes is in order here. When the tensor T is a coordinate x^μ (once μ is fixed, it is a scalar field), the previous definition reduces to the standard finite coordinates transformation

$$x'^\mu \equiv \Phi_{\lambda,\xi}^*(x_\mu) = x^\mu + \lambda \xi^\mu + \frac{\lambda^2}{2} \xi^\mu_{,\nu} \xi^\nu + \dots \tag{10}$$

This is the standard way of defining an active transformation on the manifold, by transporting a point of coordinates x^μ to a point of coordinates x'^μ . This transformation, when performed on the coordinate system—considering the coordinates as a grid on the manifold that one would displace according to the active transformation—induces a passive coordinates transformation, if we decide that the new coordinates of a point q are the coordinates of the point p such that $\phi_\lambda(p) = q$. When considering a transformation induced by a field ξ , we will refer to the passive coordinates transformation induced by the active transportation of the coordinates system.

The expansion of equation (9) on $\mathcal{P}_0(\mathcal{N})$ provides a way to compare a tensor field on $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$ to the corresponding one on the background spacetime $\mathcal{P}_0(\mathcal{N})$. The background value being $T_0 \equiv \mathcal{L}_X^0 T|_{\mathcal{P}_0(\mathcal{N})}$, we obtain a natural definition for the tensor perturbation

$$\Delta_X T_\lambda \equiv \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{L}_X^k T \Big|_{\mathcal{P}_0(\mathcal{N})} = \Phi_{X,\lambda}^*(T) - T_0. \tag{11}$$

The subscript X reminds the gauge dependence. We can read the n th order perturbation as

$$\delta_X^{(n)} T \equiv \mathcal{L}_X^n T|_{\mathcal{P}_0(\mathcal{N})}, \tag{12}$$

which is consistent with the expansion of perturbation variables of the physical metric in equation (4), since the physical spacetime is labeled by $\lambda = 1$. However, the fact that the intermediate spacetime slices $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$ are labeled by λ removes the absolute meaning of order-by-order perturbations, as it can be seen from equation (11). The entire structure embedded by \mathcal{N} is more than just a convenient construction, and this will have important consequences in gauge changes as we will now detail.

2.4. Gauge transformations and gauge invariance

If we consider two gauge choices X and Y , a gauge transformation from X to Y is defined as the diffeomorphism

$$\phi_{X \rightarrow Y, \lambda} = (\phi_{X, \lambda})^{-1}(\phi_{Y, \lambda}), \quad (13)$$

and it induces a pull-back which carries the tensor $\Delta_X T_\lambda$, which is the perturbation in the gauge X , to $\Delta_Y T_\lambda$, which is the perturbation in gauge Y since

$$\begin{aligned} \phi_{X \rightarrow Y, \lambda}^*(\Delta_X T_\lambda + T_0) &= [(\phi_{X, \lambda})^{-1}(\phi_{Y, \lambda})]^* \phi_{X, \lambda}^*(T) \\ &= \phi_{Y, \lambda}^*(\phi_{X, \lambda}^*)^{-1} \phi_{X, \lambda}^*(T) \\ &= \phi_{Y, \lambda}^*(T) \\ &= \Delta_Y T_\lambda + T_0. \end{aligned} \quad (14)$$

As demonstrated in [31], this family (indexed by λ) of gauge transformations fails to be a one-parameter group due to the lack of the composition rule. It should be Taylor-expanded using the so-called knight diffeomorphism along a sequence of vector fields ξ_i . For the three first orders, the expression of this knight diffeomorphism is

$$\begin{aligned} \Delta_Y T_\lambda &= \phi_{X \rightarrow Y, \lambda}^* \Delta_X T_\lambda \\ &= \Delta_X T_\lambda + \lambda \mathcal{L}_{\xi_1} \Delta_X T_\lambda + \frac{\lambda^2}{2!} (\mathcal{L}_{\xi_2} + \mathcal{L}_{\xi_1}^2) \Delta_X T_\lambda + \frac{\lambda^3}{6} (\mathcal{L}_{\xi_3} + 3\mathcal{L}_{\xi_1} \mathcal{L}_{\xi_2} + \mathcal{L}_{\xi_1}^3) \Delta_X T_\lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

The vector fields ξ_1 , ξ_2 and ξ_3 are related to the gauge vector fields X and Y by $\xi_1 = Y - X$, $\xi_2 = [X, Y]$ and $\xi_3 = [2X - Y, [X, Y]]$. By substitution of the perturbation by its expression in equation (11), we identify order by order in λ , and obtain the transformation rules for perturbations order by order. The first and second order transformation rules, on which we will focus our attention, are

$$\delta_Y^{(1)} T - \delta_X^{(1)} T = \mathcal{L}_{\xi_1} T_0, \quad \delta_Y^{(2)} T - \delta_X^{(2)} T = 2\mathcal{L}_{\xi_1} \delta_X^{(1)} T + (\mathcal{L}_{\xi_2} + \mathcal{L}_{\xi_1}^2) T_0. \quad (16)$$

The fact that we had to follow n integral curves of n distinct vector fields for n th order perturbations is a characteristic of knight diffeomorphisms. It arises from the fact that, for the whole differential structure of \mathcal{N} to hold, gauge changes are a more general type of transformation than simple vector-field-induced flows. Consequently, the Taylor-like expansion must be of a more general type. Indeed, for a given gauge change between X and Y , the family of gauge changes $\phi_{X \rightarrow Y, \lambda}$ labeled by λ is not always a group in λ , and this happens for instance if $[X, Y] \neq 0$ (see [31] for a graphic intuition). Although we could, for a fixed $\lambda = \lambda_0$, find ξ such that equation (16) takes a form like equation (11) up to a given order, for instance by fixing $\lambda_0 = 1$, and choosing

$$\xi \equiv \xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{3!}(\xi_3 + \frac{3}{2}[\xi_1, \xi_2]), \quad (17)$$

this would mean that intermediate spacetimes are useless, and we would then ask Einstein equations to hold only for $\mathcal{P}_0(\mathcal{N})$ and $\mathcal{P}_{\lambda_0}(\mathcal{N})$. This would lead to equations in the perturbation variables that mix different orders. The resulting solution, for second order and above, would be very difficult to find.

2.5. Perturbed Einstein equations

Instead, we prefer to use this more complicated but cleaner knight diffeomorphism (equation (16)) to change gauge. It keeps the differential structure built on \mathcal{N} and we additionally demand Einstein equations to be satisfied on each $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$. This can be used to differentiate Einstein equations to first order w.r.t λ and take the limit $\lambda \rightarrow 0$ in order to get a

set of equations that formally take the form $\mathcal{E}_1[\delta^{(1)}g, \delta^{(1)}T] = 0$. Once solved for the solutions of the first-order Einstein equation, we can differentiate twice the Einstein equation w.r.t λ and get an equation of the type

$$\mathcal{E}_2[\delta^{(2)}g, \delta^{(2)}T] = S[\delta^{(1)}g, \delta^{(1)}T], \quad (18)$$

where S stands for a source term quadratic in the first-order variables (see [12] for a concrete example).

We see that the decomposition of perturbation variables in the form given by equation (4) will trigger a similarity between the equations, i.e. \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 have the same form. Purely second-order perturbation variables satisfy the same equation as first-order perturbation variables do, but with a source term. With known sources and known solutions to the homogenous equation, the Green function method enables us to solve, at least formally, the second-order equations, and by recursion at any order. To summarize, the Taylor expansion ‘Taylorizes’ the process for solving the equations by dividing tasks among orders, since Einstein equations are satisfied order by order.

2.6. Gauge-invariant variables

General covariance, i.e. the fact that physics should not depend on a particular choice of coordinates, is an incentive to work with gauge-invariant quantities. As we note from equation (16), a tensor T is gauge invariant up to the n th order if it satisfies $\mathcal{L}_\xi \delta_X^{(r)} T = 0$ for any vector field ξ and any $r \leq n$, as can be deduced by recursion. A consequence of this strong condition is that a tensor is gauge invariant up to order n if and only if T_0 and all its perturbations of order lower than n either vanish or are constant scalars or are combinations of Kronecker deltas with constant coefficients. The Einstein equation is of the form $G - T = 0$, and for this reason it is totally gauge invariant. However, we cannot find non-trivial tensorial quantities (that is, different from $G - T$) gauge invariant up to the order we intend to study perturbations, with which we could express the perturbed set of Einstein equations.

Consequently, we will lower our goal and we will build, by combinations of perturbed tensorial quantities, gauge-invariant variables. These combinations will not be the perturbation of an underlying tensor. This method will prove to be very conclusive since a general procedure exists for perturbations around FL. Eventually, we shall identify observables among these gauge-invariant variables and the fact that they are not the perturbation of a tensor will not matter. It has to be emphasized that the transformation rules of these combinations are not intrinsic and cannot be deduced directly from the knight diffeomorphism since they are not tensorial quantities. Instead, we have to form the combination before and after the gauge change in order to deduce their transformation rules.

We now summarize the standard way to build gauge-invariant variables. For simplicity we consider only the scalar part of the gauge transformations, since we will not consider vector modes in the metric and fluid perturbation variables (again, this could be done, but would just obfuscate the explanations). In the following, we split ξ_r^μ as

$$\xi_r^0 = T^{(r)}, \quad \xi_r^i = \partial^i L^{(r)}, \quad \text{with } r = 1, 2. \quad (19)$$

2.7. First-order gauge-invariant variables

In the subsequent work, we present the transformation rules of perturbed quantities in a simplified notation. Instead of writing $W_Y^{(r)} = W_X^{(r)} + f(\xi_1, \dots, \xi_r)$, in order to state that the difference between the expression of the r th order perturbed variable W in gauge Y and in gauge X is a function f of the knight-diffeomorphism fields ξ_1, \dots, ξ_r , we prefer to

write $W^{(r)} \rightarrow W^{(r)} + f(\xi_1, \dots, \xi_r)$. We recall that the expressions of the fields $(\xi_i)_{1 \leq i \leq r}$ necessary for the knight diffeomorphism are expressed in function of the gauge fields X and Y (see equation (16)). From the transformation rules (16), we deduce that the first-order perturbations of the metric tensor (1) transform as

$$\Phi^{(1)} \rightarrow \Phi^{(1)} + T^{(1)'} + \mathcal{H}T^{(1)} \quad (20)$$

$$B^{(1)} \rightarrow B^{(1)} - T^{(1)} + L^{(1)'} \quad (21)$$

$$\Psi^{(1)} \rightarrow \Psi^{(1)} - \mathcal{H}T^{(1)} \quad (22)$$

$$E^{(1)} \rightarrow E^{(1)} + L^{(1)} \quad (23)$$

$$E_{ij}^{(1)} \rightarrow E_{ij}^{(1)}, \quad (24)$$

while the scalar quantities related to matter transform as

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\rho &\rightarrow \delta^{(1)}\rho + \bar{\rho}'T^{(1)} \\ \delta^{(1)}P &\rightarrow \delta^{(1)}P + \bar{P}'T^{(1)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} v^{(1)} &\rightarrow v^{(1)} - L^{(1)'} \\ \delta^{(1)}\pi^{ij} &\rightarrow \delta^{(1)}\pi^{ij}, \end{aligned} \quad (26)$$

where a prime denotes a derivative w.r.t the conformal time η and where $\mathcal{H} \equiv a'/a$.

From now on, we shall refer to these first-order transformation rules defined by ξ_1 as $\mathcal{T}_{\xi_1}(\Phi^{(1)}), \mathcal{T}_{\xi_1}(B^{(1)}), \dots$ or simply $\mathcal{T}(\Phi^{(1)}), \mathcal{T}(B^{(1)}), \dots$. For instance $\mathcal{T}(\Phi^{(1)}) = \Phi^{(1)} + T^{(1)'} + \mathcal{H}T^{(1)}$.

We first note that the first-order tensorial modes and the first-order anisotropic stress are automatically gauge invariant. For the other perturbation variables, which are not automatically gauge invariant, they are two ways to understand the procedure to build gauge-invariant combinations. The first point of view in building gauge-invariant variables consists in finding a way to get rid of the undesired transformation rule. To do so, we remark that the combinations $B^{(1)} - E^{(1)'}$ and $-E^{(1)'}$ transform under a gauge change as $B^{(1)} - E^{(1)'} \rightarrow B^{(1)} - E^{(1)'} - T^{(1)}$ and $-E^{(1)'} \rightarrow -E^{(1)'} - L^{(1)}$ respectively. We can use these combinations to add ad hoc compensating terms to $\Phi^{(1)}$ and $\Psi^{(1)}$ by defining

$$\hat{\Phi}^{(1)} \equiv \Phi^{(1)} + (B^{(1)} - E^{(1)'})' + \mathcal{H}(B^{(1)} - E^{(1)'}) \quad (27)$$

$$\hat{\Psi}^{(1)} \equiv \Psi^{(1)} - \mathcal{H}(B^{(1)} - E^{(1)'}). \quad (28)$$

$\hat{\Phi}^{(1)}$ and $\hat{\Psi}^{(1)}$ are now gauge invariant, by construction. This can also be understood, from a second point of view, as a gauge transformation for $\Phi^{(1)}$ and $\Psi^{(1)}$ toward the Newtonian gauge (NG) [1], defined by $\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}$, decomposed in $T_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)} = B^{(1)} - E^{(1)'}$, $L_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)} = -E^{(1)}$, which transform the perturbation variables as

$$B^{(1)} \rightarrow 0 \quad (29)$$

$$E^{(1)} \rightarrow 0 \quad (30)$$

$$\Phi^{(1)} \rightarrow \hat{\Phi}^{(1)} \equiv \Phi_{\text{NG}}^{(1)} = \Phi^{(1)} + \mathcal{H}(B^{(1)} - E^{(1)'}) + (B^{(1)} - E^{(1)'})' \quad (31)$$

$$\Psi^{(1)} \rightarrow \hat{\Psi}^{(1)} \equiv \Psi_{\text{NG}}^{(1)} = \Psi^{(1)} - \mathcal{H}(B^{(1)} - E^{(1)'}). \quad (32)$$

Similarly, the gauge-invariant variables that would reduce to $\delta\rho$, δP and v are

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\hat{\rho} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(1)}\rho = \delta^{(1)}\rho + \bar{\rho}'(B^{(1)} - E^{(1)})' \\ \delta^{(1)}\hat{P} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(1)}P = \delta^{(1)}P + \bar{P}'(B^{(1)} - E^{(1)})' \\ \hat{v}^{(1)} &\equiv v_{\text{NG}}^{(1)} = v^{(1)} + E^{(1)'} \\ \hat{\pi}^{ij(1)} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(1)}\pi^{ij} = \delta^{(1)}\pi^{ij}.\end{aligned}\tag{33}$$

Since we have ignored the vector gauge degrees of freedom, $B^{(1)}$ and $E^{(1)}$ are the two gauge-variant variables of the metric perturbation while $\hat{\Phi}^{(1)}$ and $\hat{\Psi}^{(1)}$ are the gauge-invariant parts. As mentioned before, we then force the gauge-invariant variables in the perturbed metric by replacing $\Phi^{(1)}$ with $\hat{\Phi}^{(1)} - \mathcal{H}(B^{(1)} - E^{(1)'}) + (B^{(1)} - E^{(1)'})'$ and applying similar procedures for $\Psi^{(1)}$, $\delta^{(1)}\rho$ and $\delta^{(1)}P$. When developing Einstein equations, we know that general covariance will eventually keep only gauge-invariant terms. Thus, we can either do a full calculation and witness the terms involving the degrees of freedom $B^{(1)}$ and $E^{(1)}$ disappear or perform the calculations with $B^{(1)}$ and $E^{(1)}$ set to zero and obtain the perturbed Einstein equations only in function of gauge-invariant variables. The latter simplifies the computation, which is useful when going to higher orders. The advantage of the second point of view is that the addition of the compensating terms of the first point of view can be seen as a first-order gauge change toward the Newtonian gauge with $\xi_{\rightarrow\text{NG}}^{(1)}$ (decomposed as $T_{\rightarrow\text{NG}}^{(1)}$ and $L_{\rightarrow\text{NG}}^{(1)}$). These enable us to decompose the perturbed metric in a gauge-invariant part and a gauge-variant part as

$$\delta^{(1)}g \equiv \delta^{(1)}\tilde{g} + \mathcal{L}_{-\xi_{\rightarrow\text{NG}}^{(1)}}\tilde{g},\tag{34}$$

as can be seen from the transformation rules under a gauge change characterized by ξ_1

$$\delta^{(1)}\tilde{g} \rightarrow \delta^{(1)}\tilde{g}, \quad -\xi_{\rightarrow\text{NG}}^{(1)} \rightarrow -\xi_{\rightarrow\text{NG}}^{(1)} + \xi_1.\tag{35}$$

This property, which is not general, but happens to hold in the case of cosmological perturbation (i.e. around FL metric) is the key to extending this construction to second order.

It should be noted that this procedure, although achieved by defining gauge-invariant variables which reduce to the perturbation variables in the Newtonian gauge, can be extended to other types of gauge-invariant variables which reduce to perturbation variables in another gauge. For instance, we can use the transformation properties of $\Psi^{(1)}$ and $E^{(1)}$ to add the compensating terms to $\Phi^{(1)}$, $B^{(1)}$ and other variables. The transformation rules $\Psi^{(1)}/\mathcal{H} \rightarrow \Psi^{(1)}/\mathcal{H} - T^{(1)}$ and $-E^{(1)} \rightarrow -E^{(1)} - L^{(1)}$ make it straightforward to build these compensating terms. We need to define $\xi_{\rightarrow\text{FG}}^{(1)}$ decomposed with $T_{\rightarrow\text{FG}}^{(1)} = \Psi^{(1)}/\mathcal{H}$ and $L_{\rightarrow\text{FG}}^{(1)} = -E^{(1)}$. The gauge-invariant variables defined with this procedure reduce to the perturbation variables in the flat gauge ($E^{(1)} = 0$, $\Psi^{(1)} = 0$), and are

$$\tilde{B} \equiv B_{\text{FG}} = B^{(1)} - \frac{\Psi^{(1)}}{\mathcal{H}} - E^{(1)'}, \quad \tilde{\Phi}^{(1)} \equiv \Phi_{\text{FG}}^{(1)} = \Phi^{(1)} + \Psi^{(1)} + \left(\frac{\Psi^{(1)}}{\mathcal{H}}\right)'. \tag{36}$$

2.8. Second-order gauge-invariant variables

For second-order perturbations, equation (16) gives the following transformation rules:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} &\rightarrow \Phi^{(2)} + T'^{(2)} + \mathcal{H}T^{(2)} + S_\Phi \\ B^{(2)} &\rightarrow B^{(2)} - T^{(2)} + L'^{(2)} + S_B \\ \Psi^{(2)} &\rightarrow \Psi^{(2)} - \mathcal{H}T^{(2)} + S_\Psi \\ E^{(2)} &\rightarrow E^{(2)} + L^{(2)} + S_E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{ij}^{(2)} &\rightarrow E_{ij}^{(2)} + S_{Eij} \\
\delta^{(2)}\rho &\rightarrow \delta^{(2)}\rho + \bar{\rho}'T^{(2)} + S_\rho \\
\delta^{(2)}P &\rightarrow \delta^{(2)}P + \bar{P}'T^{(2)} + S_P \\
v^{(2)} &\rightarrow v^{(2)} - L^{(2)'} + S_v \\
\pi^{ij(2)} &\rightarrow \pi^{ij(2)} + 2T^{(1)}(\pi^{ij(1)})' + 2\partial^k L^{(1)}\partial_k \pi^{ij(1)} - 2\pi^{ik(1)}\partial_k \partial^j L^{(1)} - 2\pi^{jk(1)}\partial_k \partial^i L^{(1)},
\end{aligned} \tag{37}$$

where the source terms are quadratic in the first-order variables $T^{(1)}$, $L^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$. We collect the expressions of these terms in appendix A. In the rest of this paper, we shall refer to these second-order transformation rules associated with $(\lambda) \equiv (\lambda_1, \lambda_2)$ as $\mathcal{T}_{(\lambda)}(\Phi^{(2)})$, $\mathcal{T}_{(\lambda)}(B^{(2)})$, \dots or simply $\mathcal{T}(\Phi^{(2)})$, $\mathcal{T}(B^{(2)})$, \dots . These transformation rules are much more complicated than their first-order counterparts. However, the combination defined by $F \equiv \delta^{(2)}g + 2\mathcal{L}_{\lambda \rightarrow \text{NG}}^{(1)}\delta^{(1)}g + \mathcal{L}_{\lambda \rightarrow \text{NG}}^{(2)}\bar{g}$ enjoys the simple transformation rule $F \rightarrow F + \mathcal{L}_{\lambda_2 + [\lambda \rightarrow \text{NG}, \lambda_1]}^{(1)}\bar{g}$ under a gauge change defined by λ_2 and λ_1 (see [26]). As a result, its transformation rule mimics that of first-order perturbations under a gauge change. This means that if we decompose F in the same way as we did for the metric with

$$\begin{aligned}
\Phi_F &\equiv \Phi^{(2)} + S_\Phi(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}) \\
\Psi_F &\equiv \Psi^{(2)} + S_\Psi(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}) \\
B_F &\equiv B^{(2)} + S_B(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}) \\
E_F &\equiv E^{(2)} + S_E(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}) \\
E_{Fij} &\equiv E_{ij}^{(2)} + S_{Eij}(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}),
\end{aligned} \tag{38}$$

then the transformation rules for these quantities will be similar to those of equation (29), but with the vector $\lambda_2 + [\lambda \rightarrow \text{NG}, \lambda_1]$ instead of λ_1 . Consequently, we shall use the same combinations in order to construct gauge-invariant variables which are

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}^{(2)} &\equiv \Phi_F + (B_F - E_F')' + \mathcal{H}(B_F - E_F') \\
\hat{\Psi}^{(2)} &\equiv \Psi_F - \mathcal{H}(B_F - E_F') \\
\hat{E}_{ij}^{(2)} &\equiv E_{Fij}.
\end{aligned} \tag{39}$$

As for the first order, this addition of compensating terms can be understood, from the second point of view, as defining the gauge-invariant variables as the perturbation variables in a given gauge. In our case, it is the Newtonian gauge since it transforms B and E into a null value. This transformation is defined by $\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)}$ that we decompose in

$$\begin{aligned}
T_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)} &= B^{(2)} - E^{(2)} + S_B^{(2)}(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}) - S_E^{(2)}(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}) \\
L_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)} &= -E^{(2)} - S_E^{(2)}(\lambda_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}).
\end{aligned} \tag{40}$$

The second-order gauge-invariant variables can be seen as

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}^{(2)} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)}\Phi \\
\hat{\Psi}^{(2)} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)}\Psi
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{ij}^{(2)} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)}E_{ij} \\
\delta^{(2)}\hat{\rho} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)}\rho \\
\delta^{(2)}\hat{P} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)}P \\
\hat{v}^{(2)} &\equiv v_{\text{NG}}^{(2)} \\
\hat{\pi}^{ij(2)} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)}\pi^{ij},
\end{aligned} \tag{42}$$

where the index NG indicates that we transformed the quantity with formula (16), with the vector fields $\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}$ and $\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)}$ defined above. This means that we have split the second-order metric according to

$$\delta^{(2)}g = \delta^{(2)}\tilde{g} + \mathcal{L}_{-\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)}}\bar{g} + 2\mathcal{L}_{-\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}}\delta^{(1)}g - \mathcal{L}_{-\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}}^2\bar{g}, \tag{43}$$

where $\delta^{(2)}\tilde{g}$ is the gauge-invariant part and $-\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)}$ is the gauge-variant part, as can be seen from the transformation rules under a gauge change characterized by (ξ_1, ξ_2) :

$$\delta^{(2)}\tilde{g} \rightarrow \delta^{(2)}\tilde{g}, \quad -\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)} \rightarrow -\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(2)} + \xi_2 + [\xi_{\rightarrow \text{NG}}^{(1)}, \xi_1]. \tag{44}$$

As for the first order, we can choose other types of combinations, for instance those which are equivalent to setting the gauge as being flat, by using this procedure. In this case, the vector field $\xi_{\rightarrow \text{FG}}^{(2)}$ is decomposed in

$$T_{\rightarrow \text{FG}}^{(2)} = \frac{\Psi^{(2)}}{\mathcal{H}} + \frac{1}{\mathcal{H}}S_{\Psi}^{(2)}(\xi_{\rightarrow \text{FG}}^{(1)}), \quad L_{\rightarrow \text{FG}}^{(2)} = -E^{(2)} - S_E^{(2)}(\xi_{\rightarrow \text{FG}}^{(1)}). \tag{45}$$

It should also be mentioned that the existence of an inverse Laplacian Δ^{-1} of the background spacetime, i.e. a corresponding Green function with boundary conditions, is required for the entirety of this procedure. In other words, when working in Fourier space, all our conclusions will be valid only for modes which do not belong to the kernel of Δ .

3. Gauge transformation of the distribution function

3.1. Pre-Riemannian distribution function

So far, we have set up the mathematical framework to identify points between the background spacetime and the perturbed spacetimes through a gauge field X . This enabled us to define the perturbation of tensors and to calculate their transformation properties under a gauge transformation. However, this only allows us to perform a fluid treatment of the radiation. In the statistical description for a set of particles, we assume that each particle has a given impulsion p^μ and is located at a given position [33]. The equations then have to describe the phase-space distribution of the particles. If the number of particles is high enough, we can define a probability density, the distribution function, of finding a particle in an infinitesimal volume of the phase space. Now, let us focus our attention on this distribution function. The distribution function is a function of the point considered (i.e. its coordinates x^μ) and also a function of the tangent space at this point whose coordinate we label by $p^\nu\partial_\nu$. There is no special reason for this function to be linear in $p^\nu\partial_\nu$, but we can expand it, without any loss of generality, in power series of tensors according to

$$f(x^\nu, p^\nu) = \sum_k \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_k}(x^\nu) p^{\mu_1} \dots p^{\mu_k}. \tag{46}$$

The distribution function is then decomposed as the sum of all the multipoles $\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_k}$ evaluated in a particular point of the tangent space. From the previous section, we know the transformation rules for these tensorial quantities; thus f transforms according to

$$\mathcal{T}_{(\xi)}[f(x^\nu, p^\nu)] \equiv \sum_k \mathcal{T}_{(\xi)}[\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_k}(x^\nu)] p^{\mu_1} \dots p^{\mu_k}, \tag{47}$$

where $\mathcal{T}_{(\xi)}$ refers to the knight diffeomorphism with the set of vectors (ξ_1, ξ_2, \dots) .

As we do not necessarily want to refer explicitly to the decomposition in multipoles, we use the fact that for any vector $\xi = \xi^\mu\partial_\mu$, which defines a flow on the background spacetime

$\mathcal{P}_0(\mathcal{N})$, we can define an induced flow (a natural lift) on the vector tangent bundle $T\mathcal{P}_0(\mathcal{N})$ directed by the vector field $T\xi = [\xi^\mu \partial_\mu, p^\nu (\partial_\nu \xi^\mu) \frac{\partial}{\partial p^\mu}]$. This implies the useful property

$$\mathcal{L}_\xi(\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_p}) p^{\mu_1} \dots p^{\mu_p} = \mathcal{L}_{T\xi}(\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_p}) p^{\mu_1} \dots p^{\mu_p}. \quad (48)$$

With this definition, we can rewrite the transformation rule for f as

$$\mathcal{T}_{(\xi)}[f(x^\nu, p^\nu)] = \mathcal{T}_{(T\xi)}[f(x^\nu, p^\nu)], \quad (49)$$

where now $\mathcal{T}_{(T\xi)}$ refers to the knight diffeomorphism with the set of vectors $(T\xi_1, T\xi_2, \dots)$.

The evolution of the distribution function is dictated by the Boltzmann equation $\frac{df}{d\eta} = C[f]$, where the rhs is the collision term which encodes the local physics. This collision term can be easily expressed in the local Minkowskian frame defined by a tetrad field e_a , from known particles physics. For this reason, the framework developed to define gauge transformations for a general manifold has to be extended to the case of Riemannian manifold. Instead of using the coordinates basis ∂_μ to express a vector of tangent space as $V = p^\mu \partial_\mu$, we prefer to use the tetrads basis e_a and write $V = \pi^a e_a$. In terms of coordinates, this means that the distribution function is a function of x^μ and π^a . When expressing the physics with the tetrad fields, the metric is not just one of the many tensors of the theory whose properties under a gauge transformation we need to know, but rather a central feature of the manifold, since it determines the tetrads (up to a Lorentz transformation) required to express the distribution function. As the metric is a tensor, and as the tetrads are defined according to the metric, the extension is inherited from the previous section.

3.2. Tetrads

3.2.1. Definitions. On each slice $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$, we should have four vector fields¹ (and their associated 1-form fields) labeled by $a = 0, 1, 2, 3$, which satisfy the normalization conditions

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}, \quad e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu} = \eta^{ab}. \quad (50)$$

With these notations, the indices $a, b, c \dots$ are raised and lowered with η_{ab} .

With the formalism developed for tensors, we carry this tetrad field onto the background spacetime using a gauge field X with

$$e_{a,X}^\mu \equiv \phi_{\lambda,X}^*(e_a) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{L}_X^k e_a \quad (51)$$

$$\delta_X^{(n)} e_a \equiv \mathcal{L}_X^n e_a \Big|_{\mathcal{P}_0(\mathcal{N})}, \quad \bar{e}_a \equiv \delta_X^{(0)} e_a,$$

and similar formulae for e^a .

As \bar{e}_a is a basis of the tangent space on the background spacetime (and \bar{e}^a a basis of its dual space), $e_{a,X}^\mu$ and $e_{\mu,X}^a$ can be expressed in the generic form

$$e_{a,X} = R_{a,X}^b \bar{e}_b, \quad e_X^b = \bar{e}^a S_{a,X}^b, \quad R_{a,X}^c S_{c,X}^b = S_{a,X}^c R_{c,X}^b = \delta_a^b, \quad (52)$$

where

$$R_{ab,X} \equiv \sum_k \frac{\lambda^k}{k!} R_{ab,X}^{(k)}, \quad S_{ab,X} \equiv \sum_k \frac{\lambda^k}{k!} S_{ab,X}^{(k)}. \quad (53)$$

Order by order, this reads

$$\delta_X^{(n)} e_a = R_{a,X}^{(n)b} \bar{e}_b, \quad \delta_X^{(n)} e^b = \bar{e}^a S_{a,X}^{(n)b}. \quad (54)$$

¹ The fifth direction which arises from the extension of the manifold from \mathcal{M} to \mathcal{N} is ignored as the component of any tensor is required to vanish in this direction. We thus consider the tangent space at each point of \mathcal{N} as being four dimensional.

3.2.2. *Normalization condition.* Tetrads are four vector fields which satisfy equation (50) and are thus related to the metric. Consequently, the perturbations of the tetrad defined above are partly related to the perturbations of the metric. When pulled back to the background spacetime, equation (50) implies

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda,X}^*(\eta_{ab}) &= \eta_{ab} = \phi_{\lambda,X}^*(e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}) \\ &= \phi_{\lambda,X}^*(e_a^\mu) \phi_{\lambda,X}^*(e_b^\nu) \phi_{\lambda,X}^*(g_{\mu\nu}).\end{aligned}\quad (55)$$

Identifying order by order (in terms of λ), we get in particular for the first and second orders

$$\bar{e}_b \cdot \delta_X^{(1)} e_a + \bar{e}_a \cdot \delta_X^{(1)} e_b + \delta_X^{(1)} g(\bar{e}_a, \bar{e}_b) = 0 \quad (56)$$

$$\bar{e}_b \cdot \delta_X^{(2)} e_a + \bar{e}_a \cdot \delta_X^{(2)} e_b + \delta_X^{(2)} g(\bar{e}_a, \bar{e}_b) + \delta_X^{(1)} e_b \cdot \delta_X^{(1)} e_a + \delta_X^{(1)} g(\delta_X^{(1)} e_a, \bar{e}_b) + \delta_X^{(1)} g(\bar{e}_a, \delta_X^{(1)} e_b) = 0,$$

where a dot product stands for $\bar{g}(\cdot, \cdot)$. From the constraints (56), we can determine the symmetric part of $R_{ab}^{(n)}$ as

$$R_{(ab),X}^{(1)} = -\frac{1}{2} \delta_X^{(1)} g(\bar{e}_a, \bar{e}_b) \quad (57)$$

$$R_{(ab),X}^{(2)} = -\frac{1}{2} \delta_X^{(2)} g(\bar{e}_a, \bar{e}_b) - \delta_X^{(1)} g(R_{ac,X}^{(1)} \bar{e}^c, \bar{e}_b) - \delta_X^{(1)} g(\bar{e}_a, R_{bc,X}^{(1)} \bar{e}^c) - R_{a,X}^{(1)c} R_{bc,X}^{(1)}, \quad (58)$$

which are related to the components of the inverse by

$$S_{ab,X}^{(1)} = -R_{ab,X}^{(1)} \quad (59)$$

$$S_{ab,X}^{(2)} = -R_{ab,X}^{(2)} + 2R_{a,X}^{(1)c} R_{cb,X}^{(1)}. \quad (60)$$

The antisymmetric part, $R_{[ab],X}$, still remains to be chosen as it corresponds to the Lorentz transformation freedom (boost and rotation), which is allowed by definition (50). A first and easy choice would be $R_{[ab],X}^{(n)} = 0$ for any n . However, as mentioned above, we eventually want to decompose a vector $p^\mu \partial_\mu$ on tangent space as

$$p^\mu \partial_\mu = \pi^a e_a = \pi^a e_a^\mu \partial_\mu, \quad (61)$$

and identify π^0 with the energy and π^i with the momentum (although conserved quantities are generally ill defined in general relativity, energy and momentum can be defined when performing perturbations around a maximally symmetric background [35] as is the case here). When working with coordinates, we want to express physical quantities, as measured by comoving observers, i.e. observers of constant spatial coordinates, whose motion is defined by the 1-form $(d\eta)_\mu$ [36]. We thus require $(e^0)_\mu \sim (d\eta)_\mu$, which is equivalent to choosing $S_{a_i,0,X}^{(n)} = 0$ for any n , where $a_i = 1, 2, 3$. This choice allows us to fix the boost in $S^{(n)}$ by imposing the condition $S_{[a_i,0],X}^{(n)} = -S_{[0a_i],X}^{(n)} = -S_{(a_i,0),X}^{(n)}$. As equation (52) implies that for any n

$$S_{ac}^{(n)} + R_{ac}^{(n)} + \prod_{\substack{\{p+q=n, \\ p \geq 1, q \geq 1\}}} S_a^{(p)b} R_{bc}^{(q)} \frac{n!}{p!q!} = 0, \quad (62)$$

it can be checked by recursion that this implies

$$R_{[a_i,0],X}^{(n)} = -R_{[0a_i],X}^{(n)} = -R_{(a_i,0),X}^{(n)}. \quad (63)$$

We also fix the rotation by requiring $S_{[a_i a_j],X}^{(n)} = 0$, and it can be checked similarly, by recursion on equation (62), that this implies $R_{[a_i a_j],X}^{(n)} = 0$.

3.3. Gauge transformation of tetrads

Under a gauge transformation, we can deduce the transformation properties of the tetrad from those of the perturbed metric. For simplicity, we restrict to scalar and tensor perturbations, but this is completely general and can be easily extended to include vectors. In the FL case, we use a natural background tetrad associated with Cartesian coordinates $\bar{e}_0 = (\partial_\eta)/a$, $\bar{e}_{b_i} = (\partial_i)/a$, in order to evaluate equation (57). The notation b_i refers to Lorentz (SO(1,3)) indices running from 1 to 3, whereas i is a coordinate index running from 1 to 3. When uselessly obfuscating the explanation, we will not make the distinction and change b_i for i . We report the detailed expressions for the transformation of the tetrads for the first and second orders in appendix B.

4. Distribution function

Now that the transformation properties of the tetrads are known, we turn to the general transformation of a distribution function $f(x^\mu, \pi^a)$.

4.1. Multipolar expansion

Any function $f(x^\mu, \pi^a)$ can be expanded in symmetric trace-free multipoles as [37]

$$f(x^\mu, \pi^a) = \sum_p F_p(x^\mu, \pi^a) \quad (64)$$

with

$$\begin{aligned} F_p(x^\nu, \pi^a) &\equiv \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_p}(x^\nu) p^{\mu_1} \dots p^{\mu_p} \\ &= [\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_p}(x^\nu) e_{a_1}^{\mu_1} \dots e_{a_p}^{\mu_p}] \pi^{a_1} \dots \pi^{a_p} \\ &\equiv F_{a_1 \dots a_p}(x^\nu) \pi^{a_1} \dots \pi^{a_p}. \end{aligned} \quad (65)$$

We do not need any additional identification procedure for the tangent spaces through a gauge field, in order to identify points of the tangent space of the slices $T\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$. Indeed, once the metric and a gauge field X are chosen, there exists a natural identification with the tetrad fields. First, and as mentioned before, we identify the points of \mathcal{N} which lie on the same integral curves of X , that is, we identify a point $P \in \mathcal{P}_0(\mathcal{N})$ and $\Phi_{\lambda, X}(P) \in \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{N})$. Then, we identify vectors of their respective tangent spaces, if the coordinates of these vectors in their respective local tetrad frames \bar{e}_a and e_a are the same. To be short, we identify $\pi^a e_a$ and $\pi^a \bar{e}_a$. As a consequence, for any given set $\{a_1, \dots, a_p\}$, the function $F_{a_1 \dots a_p}(x^\nu)$ is a scalar field. $F_{a_1 \dots a_p}(x^\nu)$ is then pulled back on the background spacetime using the gauge field X , and we define in this way perturbations

$$\Phi_{\lambda, X}^*[F_{a_1 \dots a_p}(x^\nu)] \equiv F_{X, a_1 \dots a_p}(x^\nu) \equiv \sum_\lambda \frac{\lambda^n}{n!} \delta_X^{(n)} F_{a_1 \dots a_p}(x^\nu) \quad (66)$$

and

$$F_{p, X}(x^\nu, \pi^a) \equiv F_{X, a_1 \dots a_p}(x^\nu) \pi^{a_1} \dots \pi^{a_p}. \quad (67)$$

This perturbation scheme induces a perturbation procedure for the distribution function f as

$$\begin{aligned} f_X(x^\nu, \pi^a) &\equiv \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} \delta_X^{(n)} f(x^\nu, \pi^a), \\ \delta_X^{(n)} f(x^\mu, \pi^a) &\equiv \sum_p \delta_X^{(n)} F_{a_1 \dots a_p}(x^\nu) \pi^{a_1} \dots \pi^{a_p}. \end{aligned} \quad (68)$$

It is essential to stress that π^a is not a perturbed quantity; it is a coordinate of the locally Minkowskian tangent space. However, the tetrad field allows us to see p^μ as a perturbed vector since $p^\mu(\pi^a) = e_a^\mu \pi^a$. In other words, for a given π^a , there is an associated vector whose order-by-order perturbation in a given gauge X is given by $p_X^{\mu(n)} \equiv e_{a,X}^{\mu(n)} \pi^a$.

4.2. Gauge transformation: general case

We can deduce the transformation rule under a gauge change directly on the form (65), pulled back to the background spacetime,

$$\mathcal{T}[f_X(x^\nu, \pi^a)] \equiv \sum_p \mathcal{T}[\mathcal{F}_{X,\mu_1 \dots \mu_p}(x^\nu)] \mathcal{T}(e_{a_1, X}^{\mu_1}) \dots \mathcal{T}(e_{a_p, X}^{\mu_p}) \pi^{a_1} \dots \pi^{a_p}. \quad (69)$$

The first factor in this expression is tensorial. Exactly as for the pre-Riemannian case, its transformation rule is dictated by the knight diffeomorphism, whereas we get the transformation rules of the tetrads from equations (B.2) and (B.4). As we do not necessarily want to refer explicitly to the multipole expansion, the first factor is rewritten by considering f as a function of p^μ using $\pi^a = e_{v,X}^a p^\nu$, and applying equation (49). We then have to consider the resulting distribution function as a function of π^a , knowing that the inversion is now given by $p^\mu(\pi^a) = \mathcal{T}(e_a^\mu) \pi^a$. This will account for $\mathcal{T}(e_{a_1, X}^{\mu_1})$ in equation (69). In a compact form, it reads

$$\mathcal{T}[f_X(x^\nu, \pi^a)] = \mathcal{T}_{(\mathcal{T}\xi)} \{ f_X[x^\nu, e_\mu^a p^\mu] \} \Big|_{p^\mu = \mathcal{T}(e_b^\mu) \pi^b}. \quad (70)$$

To obtain an order-by-order formula, we explicitly define these three steps using a Taylor expansion. First, we use that

$$f_X(x^\nu, \pi^a) = \left[\exp \left(\bar{e}_\mu^b p^\mu S_{b,X}^a \frac{\partial}{\partial \pi^a} \right) f_X \right] (x^\nu, \bar{e}_\mu^b p^\mu) \equiv g_X(x^\nu, p^\mu), \quad (71)$$

in order to consider f as a function of p^μ . We then Taylor-expand back the result of the knight diffeomorphism in order to read the result as a function of π^a ,

$$\mathcal{T}[f_X(x^\nu, \pi^a)] = \left[\exp \left(\bar{e}_b^\mu \pi^a \mathcal{T}(R_{a,X}^b) \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \mathcal{T}_{(\mathcal{T}\xi)}(g_X) \right] (x^\nu, \bar{e}_a^\mu \pi^a). \quad (72)$$

The derivatives in the previous expressions have to be ordered on the right in each term of the expansion in power series of the exponential. When identifying order by order, we need to take into account the expansion in R_{ab} and S_{ab} , in the exponentials and also in the knight diffeomorphism.

We have provided the general transformation rules for the distribution function and we will now specify the transformation properties of the first- and second-order distribution functions.

4.3. The mass shell

The transformation properties of $\delta_X^{(n)} e_a^\mu$ have been chosen so that, in the special case of $f \equiv g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \pi^a \pi^b = \pi_a \pi^a$, it remains unchanged under a gauge transformation, i.e. $\mathcal{T}(\pi^a \pi_a) = \pi^a \pi_a$. Since the tetrads must satisfy equation (50), then $\delta_X^{(n)} f = 0$ for $n \geq 1$, and it implies this property trivially. As a consequence, any function of the form $\delta(\pi_a \pi^a - m^2) f(x^\mu, \pi^a)$ transforms as $\delta(\pi_a \pi^a - m^2) \mathcal{T}[f(x^\mu, \pi^a)]$, where m^2 is the mass of the particles described by the distribution function. In other words, the transformation of the distribution function remains on the mass shell, as has already been mentioned in [9]. We will make use of this property when computing the transformation rules of the distribution function.

5. Application to the perturbation of the Boltzmann equation for radiation

The formalism developed in the previous section is general. We will now apply it to the particular FL case, and from now on we will also focus on the radiation case, that is the case where $m^2 = 0$. For the first and the second orders, we will present the transformation rules of the distribution function for radiation and build a gauge-invariant distribution function as well as a gauge-invariant brightness. We will then write the evolution equation of this gauge-invariant brightness in the case where the photon travels freely through spacetime without being affected by diffusion processes. This is obtained using the collisionless Boltzmann equation

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \pi^0} \frac{\partial \pi^0}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial n^i} \frac{\partial n^i}{\partial \eta} = 0, \quad (73)$$

where $n^i \equiv \pi^i / \pi^0$, from which we will extract the background, the first- and the second-order equations after having pulled it back to the background spacetime. In order to do so, we need to know $\frac{\partial \pi^0}{\partial \eta}$ and $\frac{\partial \pi^i}{\partial \eta}$. By considering p^μ as a perturbed vector, as mentioned in section (4.1), these can be expressed from the geodesic equation

$$p^0 \frac{dp^\mu}{d\eta} = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu p^\nu p^\sigma \quad (74)$$

that we pull back to the background spacetime in order to extract order-by-order equations. Similarly, $\frac{\partial x^i}{\partial \eta}$ is given by the order-by-order expressions of $p^0 \frac{\partial x^i}{\partial \eta} = p^i$, when pulled back to the background spacetime.

At the background level, the space is homogeneous and isotropic. Consequently, the distribution function depends neither on the direction n^i of the photon nor on the position in space x^i . It only depends on π^0 and η , which implies that $\frac{\partial \bar{f}}{\partial n^i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i} = 0$. Since the background geodesic deviation equation implies $\frac{\partial \pi^0}{\partial \eta} = -\mathcal{H}\pi^0$, the collisionless Boltzmann equation reads at the background level

$$\left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} \right|_\pi - \mathcal{H}\pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} = 0. \quad (75)$$

5.1. Gauge transformation at first order

In order to better understand the seemingly heavy but powerful formalism of section 4.2, let us apply it to the first-order gauge transformation of the photon distribution function f in the Boltzmann equation. In this case, equation (70) for $\xi_1 = (T, L)$ leads to

$$\mathcal{T}[\delta(\pi_c \pi^c) \delta_X^{(1)} f] = \delta(\pi_c \pi^c) \left\{ \mathcal{L}_{T\xi_1}[\bar{f}(x^\nu, ap^\mu)] + [\mathcal{T}(R_{a,X}^{(1)b}) + S_{a,X}^{(1)b}] \pi^a \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^b} \right\}. \quad (76)$$

The expressions of $R_{a,X}^b$ and $S_{a,X}^b$, and their transformation rules for the FL case, are given in appendix B. Using the fact that \bar{f} is only a function of π^0 due to the term $\delta(\pi_c \pi^c)$,

$$\mathcal{L}_{T\xi_1}[\bar{f}(x^\nu, ap^\mu)] = T \frac{\partial}{\partial \eta} \Big|_p \bar{f}(x^\nu, ap^\mu) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 (T' + n^i \partial_i T) \quad (77)$$

$$[\mathcal{T}(R_{0,X}^{(1)0}) + S_{0,X}^{(1)0}] \pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 (T' + \mathcal{H}T). \quad (78)$$

Note that there is no term involving $[\mathcal{T}(R_{i,X}^{(1)0}) + S_{i,X}^{(1)0}] \pi^i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0}$, thanks to the prescription in the choice of the tetrad in section 3.2.2.

We then express the derivatives as

$$\left. \frac{\partial \bar{f}(x^\nu, ap^\mu)}{\partial \eta} \right|_p = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} \right|_\pi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \mathcal{H} \pi^0. \quad (79)$$

Putting all the pieces together, we finally get that

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\delta(\pi^c \pi_c) \delta_X^{(1)} f] &= \delta(\pi^c \pi_c) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 n^i \partial_i T + T \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} \right|_\pi \right) \\ &= \delta(\pi^c \pi_c) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 (\mathcal{H} T + n^i \partial_i T), \end{aligned} \quad (80)$$

where in the last step we have made use of the background Boltzmann equation (75).

It can be checked that by considering f as a function of $\sqrt{\pi^i \pi_i}$ instead of π^0 , as allowed by the factor $\delta(\pi^c \pi_c)$, we recover the same result as performed in [9]. However this is slightly more intricate, as it now apparently depends on the three variables π^i which are in fact not independent at the background level.

Although the mathematical framework can seem to be heavy, we did not need to define an extension of the distribution function outside the mass shell nor a gauge transformation field parallel to the mass shell as in [9]. We have first built the distribution function using the tetrad field (it is a function of π^a and not an explicit function of p^μ). Then, as explained in section 4.3, the normalization condition (50), when expressed at each order in equations (56), ensures that it remains on the mass shell during a gauge transformation that we perform using the rules derived for tensors.

5.2. First-order gauge-invariant distribution function for radiation

Now that transformation properties of the first-order distribution function are known, we can use the results of section 2 to define a gauge-invariant distribution function by

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(1)} &\equiv \delta_{\text{NG}}^{(1)} f = \delta_X^{(1)} f + \mathcal{T}_{\xi \rightarrow \text{NG}}^{(1)} (\delta_X^{(1)} f) \\ &= \delta_X^{(1)} f + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 [\mathcal{H}(B^{(1)} - E^{(1)'}) + n^i \partial_i (B^{(1)} - E^{(1)'})]. \end{aligned} \quad (81)$$

As for tensorial quantities, we can choose for instance $\xi_{\rightarrow \text{FG}}^{(1)}$ in the above expression, in order to define another gauge-invariant distribution function. Its expression is given by

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(1)} &\equiv \delta_{\text{FG}}^{(1)} f = \delta_X^{(1)} f + \mathcal{T}_{\xi \rightarrow \text{FG}}^{(1)} (\delta_X^{(1)} f) \\ &= \delta_X^{(1)} f + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \left[\Psi^{(1)} + \frac{n^i \partial_i \Psi^{(1)}}{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

These two first-order gauge-invariant distribution functions are related by

$$\tilde{f}^{(1)} - \hat{f}^{(1)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \left[\hat{\Psi}^{(1)} + \frac{n^i \partial_i \hat{\Psi}^{(1)}}{\mathcal{H}} \right]. \quad (83)$$

It is worth remarking that in the previous literature [9], another gauge-invariant distribution is defined, namely

$$\begin{aligned} F^{(1)} &\equiv \delta_X^{(1)} f + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 [\Psi^{(1)} + n^i \partial_i (B^{(1)} - E^{(1)'})] \\ &= \hat{f}^{(1)} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \hat{\Psi}^{(1)}. \end{aligned} \quad (84)$$

Though it cannot be interpreted as the perturbation of the distribution function in a given gauge since it mixes $\xi \rightarrow_{\text{NG}}$ and $\xi \rightarrow_{\text{FG}}$, this is a better variable to highlight the conformal invariance of the photons propagation and to compare with the null cone integration method [34].

This first-order analysis illustrates the power of this formalism which can be generalized to higher orders in perturbations.

5.3. First-order collisionless Boltzmann equation for radiation

Integrating the gauge-invariant distribution function of radiation over π^0 , we define the gauge-invariant brightness, which is the energy perturbation per unit solid angle in a given direction

$$\hat{\mathcal{I}}^{(1)}(x^\mu, n^i) \equiv 4\pi \int \hat{f}^{(1)}(x^\mu, \pi^0, n^i)(\pi^0)^3 d\pi^0. \quad (85)$$

We choose the normalization of the background distribution function such that the background brightness reduces to the energy density (see section 6 for the fluid approximation)

$$\bar{\mathcal{I}}(\eta) \equiv 4\pi \int \bar{f}(\eta, \pi^0)(\pi^0)^3 d\pi^0 = \bar{\rho}. \quad (86)$$

We can associate gauge-invariant symmetric trace-free moments, $\hat{\mathcal{F}}_{i_1 \dots i_n}$, to this brightness by using the decomposition

$$\hat{\mathcal{I}}^{(1)}(x^\mu, n^i) \equiv \sum_p \hat{\mathcal{F}}_{i_1 \dots i_p}^{(1)}(x^\mu) n^{i_1} \dots n^{i_p}. \quad (87)$$

With these definitions, the integral $\int (\pi^0)^3 d\pi^0$ on the first-order Boltzmann equation leads to the evolution equation for $\hat{\mathcal{I}}^{(1)}$ [38]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + n^i \partial_i \right) \frac{\hat{\mathcal{I}}^{(1)}}{4} + \mathcal{H} \hat{\mathcal{I}}^{(1)} + (n^i \partial_i \hat{\Phi}^{(1)} - \hat{\Psi}^{(1)'}) \bar{\mathcal{I}} = 0, \quad (88)$$

where we have ignored the tensor terms for simplicity. Similarly, a gauge-invariant brightness $\tilde{\mathcal{I}}^{(1)}$, associated with $\tilde{f}^{(1)}$, and a gauge-invariant brightness $M^{(1)}$, [9] associated with $\mathcal{F}^{(1)}$, can be defined. They are related to $\hat{\mathcal{I}}^{(1)}$ by

$$\tilde{\mathcal{I}}^{(1)} = \hat{\mathcal{I}}^{(1)} - 4\bar{\mathcal{I}} \left(\hat{\Psi}^{(1)} + \frac{n^i \partial_i \hat{\Psi}^{(1)}}{\mathcal{H}} \right) \quad M^{(1)} = \hat{\mathcal{I}}^{(1)} - 4\bar{\mathcal{I}} \hat{\Psi}^{(1)}. \quad (89)$$

5.4. Gauge transformation at second order

At second order, the general gauge transformation of the distribution function (70) for $(\xi) = (\xi_1, \xi_2)$, $(T\xi) = (T\xi_1, T\xi_2)$ is given in detail in appendix C. After simplifications, it reads

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left(\delta_X^{(2)} f \right) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} (T^{(2)} + T T' + \partial_i T \partial^i L) \\ &+ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \{ n^i \partial_i T^{(2)} - 2n^j [(\partial_i \partial_j E + E_{ij} + \partial_i \partial_j L) \partial^i T - \Psi \partial_j T] \\ &+ \partial_i T \partial^i T + (T n^i \partial_i T)' + n^i \partial_i (\partial^j L \partial_j T) + 2\Phi n^i \partial_i T \} \\ &+ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 (n^i \partial_i T n^j \partial_j T) + 2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \eta \partial \pi^0} T n^i \partial_i T + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \eta^2} T^2 \\ &+ 2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^0} \pi^0 n^j \partial_j T + 2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^i} \pi^0 \partial^i T + 2 \partial^i L \partial_i \delta_X^{(1)} f + 2T \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (90)$$

This is a cornerstone expression in our study of the second-order distribution function. As for the fluid quantities, knowing the transformation rules under a second-order gauge change is enough to define a second-order gauge-invariant distribution function which is required to write the second-order Boltzmann equation only in terms of gauge-invariant variables. As for tensors, several gauge-invariant distribution functions can be defined, and this relation is also required to express how the different gauge-invariant distribution functions are related.

5.5. Second-order gauge-invariant distribution function for radiation

Again, we can use the results of section 2.8 to define a gauge-invariant distribution function as

$$\hat{f}^{(2)} \equiv \delta_{\text{NG}}^{(2)} f = \delta_X^{(2)} f + \mathcal{T}_{(\xi \rightarrow \text{NG}, \xi \rightarrow \text{NG})}^{(1)} [\delta_X^{(2)} f]. \quad (91)$$

As for tensorial quantities, we can choose for instance $(\xi \rightarrow \text{FG}, \xi \rightarrow \text{FG})^{(1)}$, in order to build another second-order gauge-invariant distribution function

$$\tilde{f}^{(2)} \equiv \delta_{\text{FG}}^{(2)} f = \delta_X^{(2)} f + \mathcal{T}_{(\xi \rightarrow \text{FG}, \xi \rightarrow \text{FG})}^{(1)} [\delta_X^{(2)} f]. \quad (92)$$

The difference between these two gauge-invariant distribution functions is also gauge invariant and is consequently expressed only in terms of gauge-invariant quantities. For the sake of completeness, we give the form of the relation between these two gauge-invariant distribution functions,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(2)} - \hat{f}^{(2)} = & \frac{1}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \left\{ n^k \partial_k [\mathcal{H} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\Psi}^{(1)} \hat{\Psi}^{(1)'} + 2\mathcal{H} \hat{\Psi}^{(1)2}] + \partial_i \hat{\Psi}^{(1)} \partial^i \hat{\Psi}^{(1)} \right. \\ & + n^k \partial_k \left[-\frac{\Delta^{-1}}{2\mathcal{H}} (\Delta \hat{\Psi}^{(1)})^2 + \frac{\Delta^{-1}}{2\mathcal{H}} (\partial^i \partial_j \hat{\Psi}^{(1)} \partial^j \partial_i \hat{\Psi}^{(1)}) \right] \\ & \left. - 2\mathcal{H} n^j E_{ij} \partial^i \hat{\Psi}^{(1)} + (\hat{\Psi}^{(1)} n^i \partial_i \hat{\Psi}^{(1)})' + 2\mathcal{H} (\hat{\Phi}^{(1)} + \hat{\Psi}^{(1)}) n^i \partial_i \hat{\Psi}^{(1)} \right\} \\ & + \frac{1}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 [n^i \partial_i \hat{\Psi}^{(1)} n^j \partial_j \hat{\Psi}^{(1)}] + \frac{2}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \eta \partial \pi^0} \hat{\Psi}^{(1)} n^i \partial_i \hat{\Psi}^{(1)} \\ & + \frac{1}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} \left[\mathcal{H} \hat{\Psi}^{(2)} + \hat{\Psi}^{(1)} \hat{\Psi}^{(1)'} + 2\mathcal{H} \hat{\Psi}^{(1)2} + \mathcal{H} \hat{\Psi}^{(1)} \left(\frac{\hat{\Psi}^{(1)}}{\mathcal{H}} \right)' \right. \\ & \left. - \frac{\Delta^{-1}}{2\mathcal{H}} (\Delta \hat{\Psi}^{(1)})^2 + \frac{\Delta^{-1}}{2\mathcal{H}} (\partial^i \partial_j \hat{\Psi}^{(1)} \partial^j \partial_i \hat{\Psi}^{(1)}) \right] + \frac{2}{\mathcal{H}} \frac{\partial \hat{f}^{(1)}}{\partial \pi^0} \pi^0 n^j \partial_j \hat{\Psi}^{(1)} \\ & + \frac{2}{\mathcal{H}} \frac{\partial \hat{f}^{(1)}}{\partial \pi^i} \pi^0 \partial^i \hat{\Psi}^{(1)} + 2 \frac{\hat{\Psi}^{(1)}}{\mathcal{H}} \frac{\partial \hat{f}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{\mathcal{H}^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \eta^2} (\hat{\Psi}^{(1)})^2. \end{aligned} \quad (93)$$

This clearly demonstrates the power of our formalism since, in contrast to the first order, this relation cannot be guessed intuitively. Also note that this is non-local as it is generally the case for second-order gauge-invariant quantities.

5.6. The second-order gauge-invariant collisionless Boltzmann equation for radiation

Similarly to the first-order case, we define the second-order brightness as

$$\hat{\mathcal{I}}^{(2)}(x^\mu, n^i) \equiv 4\pi \int \hat{f}^{(2)}(x^\mu, \pi^0, n^i) (\pi^0)^3 d\pi^0. \quad (94)$$

We also define the second-order gauge-invariant moments associated with this gauge-invariant brightness by the second-order version of equation (87). The derivation of the collisionless

Boltzmann equation in the Newtonian gauge is detailed in [27, 28]. Once the integral $\int (\pi^0)^3 d\pi^0$ is performed, it leads to an evolution equation for the brightness. As this is a scalar equation, it is gauge invariant and can be expressed only in terms of the gauge-invariant quantities that we have defined and which reduce to the perturbation variables in the Newtonian gauge. Explicitly, it reads

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + n^i \partial_i \right) \frac{\hat{\mathcal{I}}^{(2)}}{4} + \mathcal{H} \hat{\mathcal{I}}^{(2)} + \bar{\mathcal{I}} n^i \partial_i \hat{\Phi}^{(2)} + 2\bar{\mathcal{I}} (\Psi^{(1)} - \Phi^{(1)}) n^i \partial_i \Phi^{(1)} \\ + \frac{1}{2} [\partial_j (\hat{\Phi}^{(1)} + \hat{\Psi}^{(1)}) n^i n^j - \partial^i (\hat{\Phi}^{(1)} + \hat{\Psi}^{(1)})] \frac{\partial \hat{\mathcal{I}}^{(1)}}{\partial n^i} \\ - 2\hat{\mathcal{I}}^{(1)} (\hat{\Psi}^{(1)'} - n^j \partial_j \hat{\Phi}^{(1)}) - \bar{\mathcal{I}} (\hat{\Psi}^{(2)'} + 4\hat{\Psi}^{(1)} \hat{\Psi}^{(1)'}) \\ + \frac{1}{2} (\hat{\Phi}^{(1)} + \hat{\Psi}^{(1)}) n^i \partial_i \hat{\mathcal{I}}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Up to this stage, we agree with the expressions of [27, 28].

6. Fluid approximation

If we want to recover the transformation rule and the gauge-invariant variables for the energy density, the pressure and the velocity of radiation, we need to define a stress–energy tensor from the distribution function of radiation. We already know from special relativity how to define such a tensor. We generalize it by using the local Minkowskian frame

$$\begin{aligned} T^{ab}(x^\mu) &= \int d\pi^0 d^3\pi^i \delta(\pi^c \pi_c) f(x^\mu, \pi^d) \pi^a \pi^b \\ &= \int (\pi^0)^3 f(x^\mu, \pi^d) n^a n^b d\pi^0 d^2n^i, \end{aligned} \quad (96)$$

where $n^a \equiv n^i = \pi^i / \pi^0$, if $a = 1, 2, 3$ and $n^a = 1$ if $a = 0$. In order to evaluate the stress–energy tensor, we have performed one of the integrals which removes the Dirac contribution $\delta(\pi^a \pi_a)$:

$$\int \delta(\pi^a \pi_a) G(x, \pi^a) d\pi^0 d^3\pi^i = \int G(x, \pi^0, n^i) \pi^0 d\pi^0 d^2n^i. \quad (97)$$

Several useful relations for handling integrals of the background distribution function are reported in appendix D. If we are dealing with several species, we can still define a stress–energy tensor for each component, as long as we are dealing with weakly interacting gases. This is the standard kinetic approach in which the interaction between two species is encoded in the collision term of the Boltzmann equation [2].

We define ρ , P , the velocity U^a and the anisotropic stress Π^{ab} ,

$$T^{ab} = \rho U^a U^b + P \perp^{ab} + \Pi^{ab}, \quad (98)$$

with $\perp^{ab} \equiv \eta^{ab} + U^a U^b$, and the properties $U^a U_a = -1$, $\Pi^{ab} \perp_{ab} = 0$, $U_a \Pi^{ab} = 0$. However, fluid quantities are usually expressed using the canonical basis associated with coordinates ∂_μ and not the tetrad field. We thus define $u^\mu = U^a e_a^\mu$ as the coordinates of the velocity in this canonical basis, and we decompose it as in equation (5). Similarly, we define the anisotropic stress expressed in the canonical basis by $\pi^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \Pi^{ab}$. Some confusion can arise from the fact that physicists often design a vector by its coordinates. With this symbolic convention, U^a and u^μ are mathematically the same vector, but expressed in a different basis since $U^a e_a = u^\mu \partial_\mu$. The relations between U^a and u^μ up to second order are

$$\bar{U}^0 = a\bar{u}^0 = 1 \quad \bar{U}^i = a\bar{u}^i = 0, \quad (99)$$

and

$$\begin{aligned}\delta_X^{(1)} U^0 &= 0 \\ \delta_X^{(1)} U^i &= \partial^i (v^{(1)} + B^{(1)}),\end{aligned}\tag{100}$$

$$\begin{aligned}\delta_X^{(2)} U^0 &= \partial_i (v + B) \partial^i (v + B) \\ \delta_X^{(2)} U^i &= \partial^i (v^{(2)} + B^{(2)}) - 2\Phi \partial^i B + 2\Psi \partial^i (B - v) + 2\partial^j (v - B) (\partial^i \partial_j E + E_j^i).\end{aligned}\tag{101}$$

Similarly, the relations between the spatial components of $\pi^{\mu\nu}$ and Π^{ab} are

$$\begin{aligned}\delta_X^{(1)} \pi^{ij} &= \frac{1}{a^2} \delta_X^{(1)} \Pi^{ij} \\ \delta_X^{(2)} \pi^{ij} &= \frac{1}{a^2} [\delta_X^{(2)} \Pi^{ij} + 2\delta_X^{(1)} \Pi^{ik} (\Psi^{(1)} \delta_k^j - \partial_k \partial^j E^{(1)} - E_k^{(1)j}) \\ &\quad + 2\delta_X^{(1)} \Pi^{jk} (\Psi^{(1)} \delta_k^i - \partial_k \partial^i E^{(1)} - E_k^{(1)i})].\end{aligned}\tag{102}$$

The fluid quantities can be extracted from equation (98) as follows:

$$\rho = T^{ab} U_a U_b,\tag{103}$$

$$3P = T^{ab} \perp_{ab},\tag{104}$$

$$\Pi_{ab} = T^{cd} (\perp_{ca} \perp_{db} - \frac{1}{3} \perp_{cd} \perp_{ab}),\tag{105}$$

$$(\rho + P) U^0 U^i = T^{0i}.\tag{106}$$

It is easy to see that the factor $\delta(\pi_a \pi^a)$ in the integral of definition (96) of the stress–energy tensor implies that $P = \rho/3$.

The system of definitions (103)–(106) determines the fluid quantities. Indeed, these quantities can now be calculated iteratively at any order once equation (96) is pulled back to the background spacetime. Since $\bar{U}^0 = 1$ and $\bar{U}^i = 0$, $\bar{\rho}$, \bar{P} and $\bar{\Pi}^{ab}$ are given by

$$\bar{\rho} = 3\bar{P} = \bar{T}^{00} \bar{U}_0 \bar{U}_0, \quad \bar{\Pi}^{ab} = 0,\tag{107}$$

as expected from the background symmetries for a fluid of radiation. Then, since $U^0 = \sqrt{\bar{U}^i \bar{U}_i + 1}$, and using equation (106), we can determine the first-order expression of the velocity

$$\delta_X^{(1)} U^0 = 0 \quad \delta_X^{(1)} U^i = \frac{3}{4\bar{\rho}} \delta_X^{(1)} T^{0i}.\tag{108}$$

Repeating this procedure, we obtain from equations (103)–(106)

$$\begin{aligned}\delta_X^{(1)} \rho &= 3\delta_X^{(1)} P = \delta_X^{(1)} T^{00} \bar{U}_0 \bar{U}_0 \\ \delta_X^{(1)} \Pi^{ij} &= \delta_X^{(1)} T^{ij} - \frac{\delta^{ij}}{3} \delta_X^{(1)} T_k^k,\end{aligned}\tag{109}$$

and the condition $U_a \Pi^{ab} = 0$ implies

$$\begin{aligned}\delta_X^{(1)} \Pi^{i0} &= \delta_X^{(1)} \Pi^{00} = 0 \\ \delta_X^{(2)} \Pi^{00} &= 0 \\ \delta_X^{(2)} \Pi^{0i} &= 2\delta_X^{(1)} \Pi^{ij} \delta_X^{(1)} U_j.\end{aligned}\tag{110}$$

Again, using equation (106), we determine the second-order perturbation of the velocity

$$\delta_X^{(2)} U^0 = \delta_X^{(1)} U^i \delta_X^{(1)} U_i \quad (111)$$

$$\delta_X^{(2)} U^i = \frac{3}{4\bar{\rho}} (\delta_X^{(2)} T^{0i} - \delta_X^{(2)} \Pi^{0j}) - 2 \frac{\delta_X^{(1)} \rho}{\bar{\rho}} \delta_X^{(1)} U^i. \quad (112)$$

Iterating, we obtain from equations (103)–(106)

$$\begin{aligned} \delta_X^{(2)} \rho &= 3\delta_X^{(2)} P = \delta_X^{(2)} T^{00} \bar{U}_0 \bar{U}_0 + 2\bar{T}^{00} \bar{U}_0 \delta_X^{(2)} U_0 \\ \delta_X^{(2)} \Pi^{ij} &= \delta_X^{(2)} T^{ij} - \frac{\delta^{ij}}{3} \delta_X^{(2)} T_k^k - \frac{8}{3} \bar{\rho} \left(\delta_X^{(1)} U^i \delta_X^{(1)} U^j - \frac{\delta^{ij}}{3} \delta_X^{(1)} U^k \delta_X^{(1)} U_k \right). \end{aligned} \quad (113)$$

This shows that, by iterating this procedure, the fluid quantities can be determined up to order n if f , that is T^{ab} , is known up to order n . This means that, by knowing the transformation rule of f under a gauge transformation, we can deduce the transformation rules of the fluid quantities built out of it (ρ , P , U^a , Π^{ab}). Eventually, we are interested in their expressions in the canonical basis in order to compare with the results of section 2, and we need to use equations (99)–(101) and (102).

6.1. First-order fluid quantities transformation

At first order, from relations (109) and (100), and the transformation rule for f , equation (80), we deduce after some algebra that $\delta_X^{(1)} \rho$ transforms as in equation (25). Similarly, from equation (108), relation (100) and the transformation rule for f , equation (80), we deduce that $v^{(1)}$ transforms as in equation (25). By the same method, we easily recover that $\delta^{(1)} \pi^{ij}$ is gauge invariant.

6.2. First-order fluid equations

In order to recover the gauge-invariant conservation equation and the Euler equation of the fluid approximation at first order, we define the first-order gauge-invariant stress–energy tensor by

$$\hat{T}^{ab(1)}(x^\mu) \equiv \int (\pi^0)^3 \hat{f}^{(1)}(x^\mu, \pi^c) n^a n^b d\pi^0 d^2\Omega = \int \hat{\mathcal{T}}^{(1)} n^a n^b \frac{d^2\Omega}{4\pi}, \quad (114)$$

and its associated first-order gauge-invariant fluid quantities, $\hat{\rho}^{(1)}$, $\hat{P}^{(1)}$, $\hat{v}^{(1)}$ and $\hat{\pi}^{ij(1)}$, built from the same types of relation as in the set of equations (103)–(106) and expressed in the canonical basis with equations (100) and (102). Because of the comparison performed in the previous section, these quantities match those defined in equation (33), and this justifies the fact that we use the same notation. We need the useful relations between the first moments and the fluid quantities

$$\hat{\mathcal{F}}^{(1)} = \int \hat{\mathcal{T}}^{(1)} \frac{d\Omega}{4\pi} = \delta^{(1)} \hat{\rho}, \quad (115)$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{i(1)} = \int \hat{\mathcal{T}}^{(1)} n^i \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{4}{3} \bar{\rho} \partial^i \hat{v}^{(1)}, \quad (116)$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{ij(1)} = \int \hat{\mathcal{T}}^{(1)} \left(n^i n^j - \frac{\delta^{ij}}{3} \right) \frac{d\Omega}{4\pi} = \hat{\Pi}^{ij(1)}. \quad (117)$$

Performing $\int d\Omega$ on the brightness evolution equation (88), we recover the first-order conservation equation. However, performing $\int n^i d\Omega$, we recover the first-order Euler equation

as expressed in appendix E, *only if* we neglect the first-order anisotropic pressure. This comes from the fact that the statistical description of radiation leads to an infinite hierarchy of equations coupling moments of orders $p - 1$, p and $p + 1$ [39], whereas the fluid description keeps only the equations involving the monopole and the dipole.

6.3. Second-order fluid quantities transformation

In order to establish the second-order comparison with the fluid description, we need to know how to perform an integral involving $\delta_X^{(1)} f$, for instance on $2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^0} \pi^0 n^j \partial_j T + 2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^i} \pi^0 \partial^i T$. We will thus make use of the multipolar expansion

$$\delta_X^{(1)} f = \bar{f} \frac{\delta_X^{(1)} \rho}{\bar{\rho}} + 4 \bar{f} \partial_i (v^{(1)} + B^{(1)}) n^i + \frac{15 \bar{f}}{2 \bar{\rho}} \delta_X^{(1)} \Pi_{ij} n^i n^j + \dots, \quad (118)$$

from which it can be checked that we recover the correct fluid quantities when used to compute $\delta_X^{(1)} T^{ab}$ in equation (96).

Using the same method as for the first order, with relations (113) and (101), and the transformation rule for the second-order distribution function, equation (90), we deduce that $\delta^{(2)} \rho$ transforms as in equation (37). Additionally, from relations (111), (112), (101) and (110), we deduce that $v^{(2)}$ transforms as in equation (37).

We also note that from definition (113), relations (111), (112) and the transformation rule for f , equation (90), we deduce that $\delta^{(2)} \Pi^{ij}$ transforms according to

$$\delta^{(2)} \Pi^{ij} \rightarrow \delta^{(2)} \Pi^{ij} + 2T (\delta^{(1)} \Pi^{ij})' + 2 \partial^k L \partial_k (\delta^{(1)} \Pi^{ij}). \quad (119)$$

When expressed in the canonical basis ($\pi^{\mu\nu} \equiv e_a^\mu e_b^\nu \Pi^{ab}$), we recover exactly the transformation rule of the anisotropic stress given in equation (37).

This is one of the major results of this paper. We recover the perfect fluid transformation rules for the energy density, the pressure, the velocity and the anisotropic stress given in [40] up to second order, when starting from the statistical description.

6.4. Second-order fluid equations

In order to recover the gauge-invariant conservation equation and the Euler equation of the fluid approximation at the second order, we follow the same procedure as for the first-order case. We thus define the second-order gauge-invariant stress-energy tensor by

$$\hat{T}^{ab(2)}(x^\mu) \equiv \int (\pi^0)^3 \hat{f}^{(2)}(x^\mu, \pi) n^a n^b d\pi^0 d^2\Omega = \int \hat{\mathcal{T}}^{(2)} n^a n^b \frac{d^2\Omega}{4\pi}, \quad (120)$$

and its associated second-order gauge-invariant fluid quantities, $\hat{\rho}^{(2)} \hat{P}^{(2)} \hat{v}^{(2)}$ and $\hat{\pi}^{ij(2)}$, built from the same types of relations as in the set of equations (103)–(106) and expressed in the canonical basis with equations (101) and (102). Because of the comparison performed in the previous section, these quantities match those defined in equation (42), thus justifying the fact that we use the same notation.

In order to recover the conservation and Euler equations of the fluid approximation we perform the integral $\int \frac{d\Omega}{4\pi}$ and $\int \frac{d\Omega}{4\pi} n^i$ on this equation. However, at the second order this has to be done with care since the link between the second-order gauge-invariant brightness and the second-order fluid quantities is given by

$$\hat{\mathcal{F}}^{(2)} = \int \hat{\mathcal{T}}^{(2)} \frac{d\Omega}{4\pi} = \delta^{(2)} \hat{\rho} + \frac{8}{3} \bar{\rho} \partial_i \hat{v}^{(1)} \partial^i \hat{v}^{(1)}, \quad (121)$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{i(2)} = \int \hat{\mathcal{I}}^{(2)} n^i \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{4}{3} \bar{\rho} (\partial^i \hat{v}^{(2)} - 2\hat{\Psi}^{(1)} \partial^i \hat{v}^{(1)}) + \frac{8}{3} \delta^{(1)} \hat{\rho} \partial^i \hat{v}^{(1)}, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}^{ij(2)} &= \int \hat{\mathcal{I}}^{(2)} \left(n^i n^j - \frac{\delta^{ij}}{3} \right) \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &= \hat{\Pi}^{ij(2)} + \frac{8}{3} \bar{\rho} \left[\partial_i \hat{v}^{(1)} \partial_j \hat{v}^{(1)} - \frac{\delta_{ij}}{3} (\partial_k \hat{v}^{(1)} \partial^k \hat{v}^{(1)}) \right]. \end{aligned} \quad (123)$$

This clearly differs from expressions (5.10) and (6.33) of [27] where the term quadratic in v in $\hat{\mathcal{F}}^{(2)}$, the term quadratic in Ψ and v in $\hat{\mathcal{I}}^{(2)}$ are not there. The difference in the energy density perturbation as extracted from $\hat{\mathcal{F}}^{(2)}$ comes from the fact that the fractional energy density $\Delta^{(2)}$ for the radiation is defined as seen by the observer of velocity $e_\mu^0 \sim (d\eta)_\mu$, whereas we define it in the fluid frame. The fractional energy density that they define is related to our quantities by $\bar{\rho} \Delta^{(2)} = \delta_{\text{NG}}^{(2)} T^{00} \bar{U}_0 \bar{U}_0$. The difference in the expressions for the fractional energy density can be traced using equations (113) with equation (111). However, this is only a matter of definition and it is consistent with equation (7.2) of [27]. Implicitly, the authors of [27] do also use a tetrad basis in their section 3 in order to identify coordinates of the tangent space between the background and the perturbed spacetime, in the same way as explained below equation (65). Their p is equal to our π^0 , and the unit vectors n^i match when restricting to the Newtonian gauge. Equations (3.6) and (3.7) of [27] are equivalent to equation (61) when expressed in the Newtonian gauge with the use of equations (52), (B.1) and (B.3). As for the difference in the velocity perturbation as defined from $\hat{\mathcal{F}}^{(2)}$, it comes from the fact that their definition for $v_\gamma^{i(2)}$ has to be interpreted in the tetrad basis, and therefore it matches $\delta_{\text{NG}}^{(2)} U^i$. However, the difference between the tetrad basis and the canonical basis is not computed as in equation (112), and it explains the discrepancy. This can also be checked on the second-order extraction of equation (7.3) in [27]. Indeed, there is an extra term quadratic in Ψ and v^i when compared to equation (2.15) of [41], as a trace of the difference between our perturbed velocity, which matches the definition in the canonical basis usually given by equations (5) and (4), and their perturbed velocity. However, the equations involving $v_\gamma^{i(2)}$ in [27, 28] such as equation (4.6) are consistent with this difference, though the physical interpretation $v_\gamma^{i(2)}$ as being the perturbed velocity of photons in the canonical basis is not correct.

The computation of a term like $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}^{(1)}}{\partial n^i}$ is easily performed using the multipolar expansion

$$\hat{\mathcal{F}}^{(1)} = \bar{f} \frac{\delta^{(1)} \hat{\rho}}{\bar{\rho}} + 4 \bar{f} \partial_i \hat{v}^{(1)} n^i + \frac{15 \bar{f}}{2 \bar{\rho}} \hat{\Pi}_{ij}^{(1)} n^i n^j + \dots \quad (124)$$

Applying this method, we recover the second-order conservation equation detailed in appendix E. As for the Euler equation, we recover it at second order only if we neglect the anisotropic stress up to second order (beware that the anisotropic stress is different from the second moment of the distribution as can be seen in equation (123)) and use the first-order Euler equation.

This is also a major result of this paper. We recover the fluid gauge-invariant equations up to second order, only if we can neglect the anisotropic stress up to second order. It remains to be shown that this is extended up to any order, as we expect.

Let us also stress that in [28], the term $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}^{(1)}}{\partial n^i}$ is evaluated using $\frac{\partial \hat{\mathcal{F}}^{(1)}}{\partial n^i} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial n^i}$, in order to derive equations (4.1) and (4.6). However, this is not correct since \hat{f} is a function of the independent variables η, x^i, π^0, n^i . Even though they are related on a photon geodesic, they are independent in the analytic expression of \hat{f} . Additionally this method is not fruitful because $\frac{\partial x^j}{\partial n^i} \neq \delta_i^j (\eta - \eta_i)$, since n^i does not parametrize a photon geodesic.

Consequently, the subsequent analytic expressions of this reference solving the conservation and Euler equation are not correct (for both radiation and cold dark matter) though the Boltzmann equation is correct. This can also be seen directly from the fact that these equations do not match fluid approximation equations of appendix E. Once corrected for this mistake and taking into account the differences mentioned before, we can check that the collisionless part of the conservation and Euler equations (4.1) and (4.6) of [27] match our equations.

6.5. Validity of the fluid approximation in the literature

In this paper, we have considered so far the fluid approximation as a theoretical framework in which we restrict the description of a species to its energy density and its velocity. The computations involved for the distribution function at second order were rather long, and it was used as a consistency check for the gauge transformation rules and the collisionless Boltzmann equation. Since the fluid approximation is built out of the kinetic theory, it was indeed expected that all the conclusions made in this statistical description could find their fluid approximation counterpart.

It is now necessary to determine under which conditions this can be done, that is when the anisotropic stress can be neglected. This requires us to work on the physics of coupled species, baryons and photons, in the cosmological context. The collision term as well as its physical implications has been studied in [28], and it is very likely that the extraction of its quadrupole in equation (4.18) is not affected by the previous considerations. Indeed, in the tight coupling limit (which requires only the collision term) for a system of photons and electrons highly coupled through the Compton diffusion, the authors of [28] find that the quadrupole satisfies

$$\hat{\mathcal{F}}^{ij(2)} \simeq \frac{8}{3}\bar{\rho} \left[\partial^i \hat{v}^{(1)} \partial^j \hat{v}^{(1)} - \frac{\delta^{ij}}{3} (\partial_k \hat{v}^{(1)} \partial^k \hat{v}^{(1)}) \right]. \quad (125)$$

This result is necessary to determine in which case the fluid approximation can be used. Comparing it with equation (123), we immediately see that the physical interpretation of this result is that the second-order anisotropic stress of radiation $\hat{\Pi}^{ij(2)}$ is suppressed in the tight coupling limit. As a consequence, the fluid approximation can be used in the tight coupling limit also at second order in perturbations.

7. Conclusion

In this paper, we have performed a general investigation of the gauge invariance of the distribution function. This allows us to recover very easily the standard results at the first order and to extend them at the second order. We derived the fluid approximation at first and second orders. This required us to carefully define the stress–energy tensor in the local Minkowskian frame. At the second order, our results differ from those previously derived in the literature [27, 28]. We have tackled down the origin of the differences and shown that it was lying in an incorrect identification between the tetrad and the canonical basis. Our analysis, restricted to the collisionless case, puts the second-order Boltzmann equation, needed if we intend to study non-Gaussianities in the CMB, on firm ground.

Acknowledgments

I thank Jean-Philippe Uzan for drawing the topic to my attention and for his endless comments on the manuscript. The second-order expansions were computed using the tensor calculus

package xAct [42], and I thank Guillaume Faye and José Martín García for their help on it. I thank Ruth Durrer Nicola Bartolo Sabino Matarrese and Antonio Riotto for commenting on their works. Finally, I thank Thiago dos Santos Pereira for his numerous remarks on the draft.

Appendix A. Source terms in second-order transformations

The perturbation variables in the decomposition (1) are extracted as follows:

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1}{2a^2}\delta g_{00}, \\
\Psi &= -\frac{1}{4a^2}(\delta^{ij} - \Delta^{-1}\partial^i\partial^j)\delta g_{ij}, \\
B &= \frac{1}{a^2}\Delta^{-1}\partial^i\delta g_{0i}, \\
E &= \frac{1}{4a^2}(\Delta\Delta)^{-1}(3\partial^i\partial^j - \Delta\delta^{ij})\delta g_{ij}, \\
E_{pq} &= \frac{1}{2a^2}(\delta_p^r - \Delta^{-1}\partial_p\partial^r)(\delta_q^s - \Delta^{-1}\partial_q\partial^s)\left(\delta_r^i\delta_s^j - \frac{1}{3}\delta_{rs}\delta^{ij}\right)\delta g_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Using this method we can read the source terms defined in equation (37), which are quadratic in the gauge change variables T , L and the perturbation variables Φ , Ψ , B , E , E_{ij} , in equation (16):

$$\begin{aligned}
S_\Phi &= T(T'' + 5\mathcal{H}T' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)T + 4\mathcal{H}\Phi + 2\Phi') + T'(2T' + 4\Phi) + \partial_i L\partial^i(T' + \mathcal{H}T + 2\Phi) \\
&\quad + \partial_i L'\partial^i(T - 2B - L'),
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
S_\Psi &= -T(\mathcal{H}T' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)T - 2\Psi' - 4\mathcal{H}\Psi) - \partial_i(\mathcal{H}T - 2\Psi)\partial^i L - \frac{1}{2}(\delta^{ij} - \Delta^{-1}\partial^i\partial^j) \\
&\quad \times \left[\partial_j(2B + L' - T)\partial_i T + \partial_i\partial^k L(2\partial_k\partial_j L + 4\partial_k\partial_j E + 4E_{kj} + (2\mathcal{H}T - 4\Psi)\delta_{kj}) \right. \\
&\quad + T\partial_i\partial_j(L' + 2\mathcal{H}L) + T(2E'_{ij} + 2\partial_i\partial_j E' + 4\mathcal{H}E_{ij} + 4\mathcal{H}\partial_i\partial_j E) \\
&\quad \left. + \partial^k L\partial_k(\partial_i\partial_j L + 2E_{ij} + 2\partial_i\partial_j E) \right].
\end{aligned} \tag{A.3}$$

S_Ψ is slightly different from [13, 44] since, in these works, the extraction of metric perturbation variables is not performed according to equation (A.1). However, this mistake does not matter for their study that focused on the long wavelength limit

$$\begin{aligned}
S_B &= \Delta^{-1}\partial^i\{T'\partial_i(2B + L' - T) + \partial^j L'[2\partial_i\partial_j L + 2(\mathcal{H}T - 2\Psi)\delta_{ij} + 4(E_{ij} + \partial_i\partial_j E)] \\
&\quad + \partial^j\partial_i L\partial_j(2B + L' - T) + \partial^j L\partial_j\partial_i(2B + L' - T) \\
&\quad + \partial_i T(-4\Phi - 2T' - 2\mathcal{H}T) + T\partial_i(2B + L' - T') \\
&\quad + 2\mathcal{H}T\partial_i(2B + L' - T)\},
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
S_E &= (\Delta\Delta)^{-1}\left(\frac{3}{2}\partial^i\partial^j - \frac{1}{2}\Delta\delta^{ij}\right)\{\partial_j(2B + L' - T)\partial_i T \\
&\quad + \partial_i\partial^k L[2\partial_k\partial_j L + 4\partial_k\partial_j E + 4E_{kj} + (2\mathcal{H}T - 4\Psi)\delta_{kj}] \\
&\quad + T\partial_i\partial_j(L' + 2\mathcal{H}L) + T(2E'_{ij} + 2\partial_i\partial_j E' + 4\mathcal{H}E_{ij} + 4\mathcal{H}\partial_i\partial_j E) \\
&\quad + \partial^k L\partial_k(\partial_i\partial_j L + 2E_{ij} + 2\partial_i\partial_j E)\},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
S_{E pq} = & (\delta_p^r - \Delta^{-1} \partial_p \partial^r) (\delta_q^s - \Delta^{-1} \partial_q \partial^s) \left(\delta_r^i \delta_s^j - \frac{\delta_{rs}}{3} \delta^{ij} \right) \\
& \times \{ \partial_i \partial^k L [2 \partial_k \partial_j L + 4 \partial_k \partial_j E + 4 E_{kj} + (2 \mathcal{H} T - 4 \Psi) \delta_{kj}] \\
& + T \partial_i \partial_j (L' + 2 \mathcal{H} L) + \partial_j (2 B + L' - T) \partial_i T \\
& + T (2 E'_{ij} + 2 \partial_i \partial_j E' + 4 \mathcal{H} E_{ij} + 4 \mathcal{H} \partial_i \partial_j E) \\
& + \partial^k L \partial_k (\partial_i \partial_j L + 2 E_{ij} + 2 \partial_i \partial_j E) \}, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$S_\rho = T (\bar{\rho}'' T + \bar{\rho}' T' + 2 \delta \rho') + \partial^i L \partial_i (2 \delta \rho + \bar{\rho}' T), \tag{A.7}$$

$$S_P = T (\bar{P}'' T + \bar{P}' T' + 2 \delta P') + \partial^i L \partial_i (2 \delta P + \bar{P}' T), \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
S_v = & \Delta^{-1} \partial_i [\mathcal{H} T \partial^i (L' - 2v) + T \partial^i (2v' - L'')] \\
& + L^j \partial_j \partial^i (2v - L') + \partial^i L' (\mathcal{H} T + T' + 2 \Phi) + \partial^j (L' - 2v) \partial_j \partial^i L. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Appendix B. Transformation rules of the tetrad fields

R_{ab} and S_{ab} are defined in equation (52). The perturbation variables of the metric are defined in equation (1).

B.1. First order

$$\begin{aligned}
R_{00,X}^{(1)} &= -S_{00,X}^{(1)} = \Phi^{(1)} \\
R_{0a_i,X}^{(1)} &= -S_{0a_i,X}^{(1)} = -\partial_{a_i} B^{(1)} \\
R_{a_i 0,X}^{(1)} &= -S_{a_i 0,X}^{(1)} = 0 \\
R_{a_i a_k,X}^{(1)} &= -S_{a_i a_k,X}^{(1)} = \Psi^{(1)} \delta_{a_i a_k} - \partial_{a_k} \partial_{a_i} E^{(1)} - E_{a_i a_k}^{(1)}. \tag{B.1}
\end{aligned}$$

We can read directly from these expressions the transformation rules for the tetrad

$$\begin{aligned}
\delta_Y^{(1)} e_0^\mu &= \mathcal{T}(\delta_X^{(1)} e_0^\mu) = -\mathcal{T}(\Phi^{(1)}) \bar{e}_0^\mu - \bar{e}_{a_i}^\mu \partial^{a_i} \mathcal{T}(B^{(1)}) \\
\delta_Y^{(1)} e_{a_i}^\mu &= \mathcal{T}(\delta_X^{(1)} e_{a_i}^\mu) = \mathcal{T}(\Psi^{(1)}) \bar{e}_{a_i}^\mu - \bar{e}_{a_k}^\mu \partial^{a_k} \partial_{a_i} \mathcal{T}(E^{(1)}). \tag{B.2}
\end{aligned}$$

B.2. Second order

$$\begin{aligned}
R_{00,X}^{(2)} &= \Phi^{(2)} - 3\Phi^2 + \partial_i B \partial^i B \\
R_{0a_i,X}^{(2)} &= -\partial_{a_i} B^{(2)} + (2\Phi - 4\Psi) \partial_{a_i} B + 4\partial^{a_j} B (\partial_{a_i} \partial_{a_j} E + E_{a_i a_j}) \\
R_{a_i 0,X}^{(2)} &= -S_{a_i 0,X}^{(2)} = 0 \\
R_{a_i a_k,X}^{(2)} &= -S_{a_i a_k,X}^{(2)} \\
&= \Psi^{(2)} \delta_{a_i a_k} - (\partial_{a_k} \partial_{a_i} E^{(2)} + E_{a_k a_i}^{(2)}) + 3\Psi^2 \delta_{a_i a_k} \\
&\quad + 3(\partial_{a_i} \partial^{a_i} E + E_{a_i}^{a_i}) (\partial_{a_i} \partial_{a_k} E + E_{a_i a_k}) \\
&\quad - 6\Psi (\partial_{a_i} \partial_{a_k} E + E_{a_i a_k}) \\
-S_{00,X}^{(2)} &= \Phi^{(2)} - \Phi^2 + \partial_i B \partial^i B \\
-S_{0a_i,X}^{(2)} &= -\partial_{a_i} B^{(2)} - 2\Psi \partial_{a_i} B + 2\partial^{a_j} B (\partial_{a_i} \partial_{a_j} E + E_{a_i a_j}). \tag{B.3}
\end{aligned}$$

In these formulae, we have omitted the first-order superscript as there is no possible confusion. In the following, we will also omit the first-order superscript. The transformation rules for the

tetrads can be read, as we did for the first-order case:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\delta_X^{(2)} e_0^\mu) &= -[\mathcal{T}(\Phi^{(2)}) - 3\mathcal{T}(\Phi)^2 + \partial_i \mathcal{T}(B) \partial^i \mathcal{T}(B)] \bar{e}_0^\mu \\
&\quad + \{-\partial^{a_i} \mathcal{T}(B^{(2)}) + [2\mathcal{T}(\Phi) - 4\mathcal{T}(\Psi)] \partial^{a_i} \mathcal{T}(B) \\
&\quad + 4\partial^{a_j} \mathcal{T}(B) [\partial^{a_i} \partial_{a_j} \mathcal{T}(E) + E_{a_j}^{a_i}]\} \bar{e}_{a_i}^\mu \\
\mathcal{T}(\delta_X^{(2)} e_{a_i}^\mu) &= [\mathcal{T}(\Psi^{(2)}) + 3\mathcal{T}(\Psi)^2] \bar{e}_{a_i}^\mu \\
&\quad + \{-\partial^{a_k} \partial_{a_i} \mathcal{T}(E^{(2)}) + 3[\partial_{a_i} \partial^{a_j} \mathcal{T}(E) + E_{a_i}^{a_j}][\partial^{a_k} \partial_{a_j} \mathcal{T}(E) + E_{a_j}^{a_k}] \\
&\quad - 6\mathcal{T}(\Psi)[\partial^{a_k} \partial_{a_i} \mathcal{T}(E) + E_{a_i}^{a_k}]\} \bar{e}_{a_k}^\mu.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Appendix C. Transformation of $\delta^{(2)} f$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\delta_X^{(2)} f) &= \left\{ (\mathcal{L}_{T\lambda_2} + \mathcal{L}_{T\lambda_1}^2)[\bar{f}(x^\nu, ap^\mu)] + 2\mathcal{L}_{T\lambda_1}[\delta_X^{(1)} f(x^\nu, ap^\mu)] \right. \\
&\quad + [\mathcal{T}(R_{a,X}^{(2)c}) + S_{a,X}^{(2)c} + 2S_{a,X}^{(1)d} \mathcal{T}(R_{d,X}^{(1)c})] \pi^a \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^c} \\
&\quad + [\mathcal{T}(R_{a,X}^{(1)b}) \mathcal{T}(R_{c,X}^{(1)d}) + S_{a,X}^{(1)b} S_{c,X}^{(1)d} + 2S_{a,X}^{(1)b} \mathcal{T}(R_{c,X}^{(1)d})] \pi^a \pi^c \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \pi^b \partial \pi^d} \\
&\quad + 2\mathcal{T}(R_{a,X}^{(1)b}) \pi^a \frac{\partial}{\partial \pi^b} \mathcal{L}_{T\lambda_1}[\bar{f}(x^\nu, ap^\mu)] + 2\mathcal{L}_{T\lambda_1} \left[S_{a,X}^{(1)b} \pi^a \frac{\partial}{\partial \pi^b} \bar{f}(x^\nu, ap^\mu) \right\} \\
&\quad \left. + 2[\mathcal{T}(R_{a,X}^{(1)b}) + S_{a,X}^{(1)b}] \pi^a \frac{\partial}{\partial \pi^b} \delta_X^{(1)} f(x^\nu, ap^\mu) \right\}.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

These individual terms are explicitly given by

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{T}(R_{0,X}^{(2)0}) + S_{0,X}^{(2)0} + 2S_{0,X}^{(1)0} \mathcal{T}(R_{0,X}^{(1)0})] \pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \\
&= [-(T^{(2)'}) + \mathcal{H}T^{(2)} + S_\Phi(T, L)] + 4\Phi(T' + \mathcal{H}T) + 3(T' + \mathcal{H}T)^2 \\
&\quad - 2\partial_i B \partial^i (-T + L') - \partial_i (-T + L') \partial^i (-T + L') \pi^0 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0},
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$[\mathcal{T}(R_{0,X}^{(1)0}) \mathcal{T}(R_{0,X}^{(1)0}) + S_{0,X}^{(1)0} S_{0,X}^{(1)0} + 2S_{0,X}^{(1)0} \mathcal{T}(R_{0,X}^{(1)0})] \pi^0 \pi^0 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \pi^0 \partial \pi^0} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 (T' + \mathcal{H}T)^2, \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
&2[\mathcal{T}(R_{a,X}^{(1)b}) + S_{a,X}^{(1)b}] \pi^a \frac{\partial}{\partial \pi^b} \delta_X^{(1)} f(x^\nu, ap^\mu) \\
&= -2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^0} \pi^0 (T' + \mathcal{H}T) - 2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^i} \pi^0 (-\partial^i T + \partial^i L') \\
&\quad - 2 \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^i} (\pi^j \partial^i \partial_j L + \mathcal{H} \pi^i T),
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
&2\mathcal{T}(R_{a,X}^{(1)b}) \pi^a \frac{\partial}{\partial \pi^b} \mathcal{L}_{T\lambda_1}[\bar{f}(x^\nu, ap^\mu)] \\
&= -2 \left[\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \left\{ (T' + \mathcal{H}T)(\Phi + T' + \mathcal{H}T) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 (n^i \partial_i T) (\Phi + T' + \mathcal{H}T) - 2T \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \eta \partial \pi^0} (\Phi + T' + \mathcal{H}T) \\
& - 2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 (B^i - \partial^i T + \partial^i L') \partial_i T \\
& - 2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 [n^j \partial^i \partial_j (E + L) + n^j E_j^i + n^i (-\Psi + \mathcal{H}T)] \partial_i T, \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}_{T\xi_1} [S_{c,X}^{(1)b} a\pi^c \frac{\partial}{\partial \pi^b} \bar{f}(x^\nu, a\pi^\mu)] &= 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \eta \partial \pi^0} \pi^0 \Phi T + 2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 (\Phi' T + \partial_i \Phi \partial^i L) \\
& + 2 \left[\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 \right] \Phi (T' + \mathcal{H}T + n^i \partial_i T), \tag{C.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{T\xi_2} + \mathcal{L}_{T\xi_1}^2) [\bar{f}(x^\nu, a\pi^\mu)] &= T^{(2)} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 (T^{(2)'} + \mathcal{H}T^{(2)} + n^i \partial_i T^{(2)}) \\
& + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \eta^2} T^2 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} (TT' + \partial_i T \partial^i L) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \pi^0 \partial \eta} \pi^0 2T (T' + \mathcal{H}T + n^i \partial_i T) \\
& + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial (\pi^0)^2} (\pi^0)^2 [2n^i \partial_i T (\mathcal{H}T + T') + (n^i \partial_i T) (n^j \partial_j T) + \mathcal{H}^2 T^2 + 2\mathcal{H}TT' + (T')^2] \\
& + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0} \pi^0 [TT'' + \mathcal{H}'T^2 + 3\mathcal{H}TT' + Tn^i \partial_i T' + T'n^i \partial_i T + \mathcal{H}^2 T^2 + 2\mathcal{H}Tn^i \partial_i T \\
& + \partial_j T' \partial^j L + \partial_j T \partial^j L' + \mathcal{H} \partial_j T \partial^j L + \partial^j L n^i \partial_i \partial_j T + \partial^j T n^i \partial_i \partial_j L + (T')^2], \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}_{T\xi_1} [\delta_X^{(1)} f(x^\nu, a\pi^\mu)] &= 2(\pi^0 T' + \pi^j \partial_j T) \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^0} + 2(\pi^0 \partial^i L' + \pi^j \partial^i \partial_j L) \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^i} \\
& + 2\partial^i L \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial x^i} + 2T \left(\frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^0} \mathcal{H}\pi^0 + \frac{\partial \delta_X^{(1)} f}{\partial \pi^i} \mathcal{H}\pi^i \right). \tag{C.8}
\end{aligned}$$

In the above formulae, we have omitted to write the fact that the derivatives with respect to η or x^i are taken at fixed π^a .

Appendix D. Integral relations necessary to derive the fluid limit

The integrations on angular directions can be handled with the general formulae (see [43])

$$\int n^{i_1} \dots n^{i_k} \frac{d^2 \Omega}{4\pi} = 0 \quad \text{if } k = 2p + 1 \tag{D.1}$$

$$\int n^{i_1} \dots n^{i_k} \frac{d^2 \Omega}{4\pi} = \frac{1}{k+1} (\delta^{i_1 i_2} \dots \delta^{i_{k-1} i_k}) \quad \text{if } k = 2p. \tag{D.2}$$

By successive integration by parts, we also obtain the following useful results:

$$\begin{aligned}
& \int \bar{f}(x^\mu, \pi^0) (\pi^0)^3 d\pi^0 d^2 \Omega = \bar{\rho}(x^\mu), \\
& \int \frac{\partial \bar{f}(x^\mu, \pi^0)}{\partial \pi^0} (\pi^0)^4 d\pi^0 d^2 \Omega = -4\bar{\rho}(x^\mu), \\
& \int \frac{\partial^2 \bar{f}(x^\mu, \pi^0)}{\partial^2 \pi^0} (\pi^0)^5 d\pi^0 d^2 \Omega = 20\bar{\rho}(x^\mu). \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Appendix E. The fluid limit for radiation

As explained in section 2.1, second-order quantities involve either purely second-order perturbation variables or terms quadratic in first-order perturbation variables. As long as the order of the quantity is known, we can omit the order superscript in order to simplify notations.

E.1. Geometric quantities

In the Newtonian gauge, ignoring vector perturbations for simplicity, the non-vanishing Christoffel symbols associated with the metric (1) are for the background

$${}^{(0)}\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H}, \quad {}^{(0)}\Gamma_{jk}^0 = \mathcal{H}\delta_{jk}, \quad {}^{(0)}\Gamma_{0j}^i = \mathcal{H}\delta_j^i. \quad (\text{E.1})$$

At the first order, we get

$${}^{(1)}\Gamma_{00}^0 = \Phi', \quad {}^{(1)}\Gamma_{0j}^0 = \partial_j \Phi, \quad {}^{(1)}\Gamma_{00}^i = \partial^i \Phi, \quad (\text{E.2})$$

$${}^{(1)}\Gamma_{jk}^0 = 2\mathcal{H}E_{jk} + E'_{jk} - (2\mathcal{H}\Phi + \Psi' + 2\mathcal{H}\Psi)\delta_{jk}, \quad (\text{E.3})$$

$${}^{(1)}\Gamma_{0j}^i = E'^i{}_j - \Psi'\delta_j^i, \quad (\text{E.4})$$

$${}^{(1)}\Gamma_{jk}^i = 2\partial_{(k}[E_{j)}^i - \Psi\delta_{jk}^i] - \partial^i(E_{jk} - \Psi\delta_{jk}), \quad (\text{E.5})$$

where $A_{(ij)} \equiv (A_{ij} + A_{ji})/2$. At the second order, we obtain

$${}^{(2)}\Gamma_{00}^0 = \Phi' - 4\Phi\Phi', \quad {}^{(2)}\Gamma_{0j}^0 = \partial_j \Phi - 4\Phi\partial_j \Phi, \quad (\text{E.6})$$

$${}^{(2)}\Gamma_{00}^i = \partial^i \Phi - 4E^{ij}\partial_j \Phi + 4\Psi\partial^i \Phi, \quad (\text{E.7})$$

$${}^{(2)}\Gamma_{jk}^0 = [-2\mathcal{H}\Psi - \Psi' + 4\Phi\Psi' - 2\mathcal{H}\Phi + 8\mathcal{H}\Phi(\Phi + \Psi)]\delta_{jk} \\ + 2\mathcal{H}E_{jk} - 8\Phi\mathcal{H}E_{jk} + E'_{jk} - 4\Phi E'_{jk}, \quad (\text{E.8})$$

$${}^{(2)}\Gamma_{0j}^i = E_j^{i'} + 4\Psi'E_j^i - \Psi'\delta_j^i - 4\Psi\Psi'\delta_j^i - 4E^{ik}E'_{kj} + 4\Psi E_j^{i'}, \quad (\text{E.9})$$

$${}^{(2)}\Gamma_{jk}^i = 2\partial_{(k}[E_{j)}^i - \Psi\delta_{jk}^i] - \partial^i(E_{jk} - \Psi\delta_{jk}) \\ + 4(E^{il} - \Psi\delta^{il})\{[\partial_l(E_{jk} - \Psi\delta_{jk}) + \partial_j(E_k^i - \Psi\delta_k^i)] \\ - [l \rightarrow kk \rightarrow jj \rightarrow l] - [l \rightarrow jk \rightarrow lj \rightarrow k]\}. \quad (\text{E.10})$$

E.2. The radiation fluid equations

The conservation equation $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ for the stress–energy tensor (7) with a radiation equation of state $P = \rho/3$ and where we assume $\pi^{\mu\nu} = 0$ are the conservation equation

$$(\delta^{(1)}\rho)' + 4\mathcal{H}\delta^{(1)}\rho + \frac{4}{3}\bar{\rho}(\Delta v^{(1)} - 3\Psi^{(1)'}) = 0, \\ (\delta^{(2)}\rho)' + 4\mathcal{H}\delta^{(2)}\rho + \frac{4}{3}\bar{\rho}(\Delta v^{(2)} - 3\Psi^{(2)'}) = S_c, \quad (\text{E.11})$$

and the Euler equation

$$v^{(1)'} + \Phi^{(1)} + \frac{\delta^{(1)}\rho}{4\bar{\rho}} = 0, \quad v^{(2)'} + \Phi^{(2)} + \frac{\delta^{(2)}\rho}{4\bar{\rho}} = S_e, \quad (\text{E.12})$$

where the source terms in the second-order equations, which are quadratic in the first-order perturbation variables, are given by

$$S_c = \frac{8}{3} \{ \delta\rho \Psi' + 6\bar{\rho} \Psi \Psi' - (\Phi + \delta)\bar{\rho} \Delta v + \partial_i v [-\partial^i \delta\rho - 2\bar{\rho} \partial^i v' - 2\bar{\rho} \partial^i \Phi + 3\bar{\rho} \partial^i \Psi] \}, \quad (\text{E.13})$$

$$\partial_i S_e = -2 \left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \partial_i v \right)' + 10\Psi' \partial_i v + 4\Psi \partial_i v' - 2\partial_j (\partial^j v \partial_i v) + 2\Phi \partial_i v' - 2 \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \partial_i \Phi + 4\Phi \partial_i \Phi. \quad (\text{E.14})$$

References

- [1] Mukhanov V F, Feldman F A and Brandenberger R H 1992 *Phys. Rep.* **215** 203
- [2] Ehlers J 1971 General relativity and kinetic theory *General Relativity and Cosmology Proc. Int. School of Physics 'Enrico Fermi', Course XLVII* ed B K Sachs (New York: Academic)
- [3] Stewart J M 1971 *Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory (Springer Lecture Notes in Physics vol 10)* ed J Ehlers, K Hepp and H A Wiedenmüller
- [4] Bernstein J 1988 *Kinetic Theory in the Expanding Universe* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [5] Challinor A and Lansby A 1999 *Astrophys. J.* **513** 1–22 (Preprint [astro-ph/9804301](#))
Challinor A 2000 *Gen. Rel. Grav.* **32** 1059–74 (Preprint [astro-ph/9903283](#))
Gebbie T and Ellis G F R 2000 *Ann. Phys.* **282** 285 (Preprint [astro-ph/9804316](#))
Maartens R, Gebbie T and Ellis G F R 1999 *Phys. Rev. D* **59** 083506 (Preprint [astro-ph/9808163](#))
Gebbie T, Dunsby P and Ellis G F R 2000 *Ann. Phys.* **282** 321 (Preprint [astro-ph/9904408](#))
- [6] Tsagas C G, Challinor A and Maartens R 2007 Relativistic cosmology and large-scale structure Preprint [0705.4397](#)
- [7] Ellis G F R and van Elst H 1999 Cosmological models, in *Theoretical and Observational Cosmology* ed M Lachièze-Rey (Dordrecht: Kluwer) pp 1–116 (Preprint [gr-qc/9812046](#))
- [8] Bardeen J 1981 *Phys. Rev. D* **22** 1882
- [9] Durrer R and Straumann N 1988 *Helv. Phys. Acta* **61** p1027
Durrer R 1994 *Fund. Cosmic Phys.* **15** 209 (Preprint [astro-ph/9311041](#))
- [10] Durrer R 2001 *J. Phys. Stud.* **5** 177–215 (Preprint [astro-ph/0109522](#))
- [11] Bruni M, Ellis G F R and Dunsby P K S 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 921
- [12] Osano B, Pitrou C, Dunsby P K S, Uzan J-P and Clarkson C 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* [JCAP04\(2007\)003](#) (Preprint [gr-qc/0612108](#))
- [13] Malik K A and Wands D 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** L65–72 (Preprint [astro-ph/0307055](#))
- [14] Rigopoulos G I and Shellard E P S 2003 *Phys. Rev. D* **68** 123518 (Preprint [astro-ph/0306620](#))
- [15] Bernardeau F, Kofman L and Uzan J-P 2004 *Phys. Rev. D* **70** 083004 (Preprint [astro-ph/0403315](#))
- [16] Langlois D and Vernizzi F 2005 *Phys. Rev. D* **72** 103501 (Preprint [astro-ph/0509078](#))
- [17] Pitrou C and Uzan J-P 2007 *Phys. Rev. D* **75** 087302 (Preprint [gr-qc/0701121](#))
- [18] Spergel D N *et al* 2007 *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 (Preprint [astro-ph/0603449](#))
- [19] Maldacena J 2003 *J. High Energy Phys.* [JHEP05\(2003\)013](#) (Preprint [astro-ph/0210603](#))
- [20] Bartolo N, Matarrese S and Riotto A 2002 *Phys. Rev. D* **65** 103505 (Preprint [hep-ph/0112261](#))
- [21] Bernardeau F and Uzan J-P 2003 *Phys. Rev. D* **67** 121301(R) (Preprint [astro-ph/0209330](#))
Bernardeau F and Uzan J-P 2002 *Phys. Rev. D* **66** 103506 (Preprint [hep-ph/0207295](#))
- [22] Bartolo N *et al* 2004 *Phys. Rep.* **402** 103–266 (Preprint [astro-ph/0406398](#))
- [23] Gebbie T, Dunsby P K S and Ellis G F R 2000 *Ann. Phys.* **282** 321–94 (Preprint [astro-ph/9904408](#))
- [24] Maartens R, Gebbie T and Ellis G F R 1999 *Phys. Rev. D* **59** 083506 (Preprint [astro-ph/9808163](#))
- [25] Enqvist K *et al* 2007 *Phys. Rev. D* **75** 023515 (Preprint [gr-qc/0611020](#))
- [26] Nakamura K 2007 *Prog. Theor. Phys.* **117** 17–74 (Preprint [gr-qc/0605108](#))
- [27] Bartolo N *et al* 2006 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* [JCAP06\(2006\)024](#) (Preprint [astro-ph/0604416](#))
- [28] Bartolo N *et al* 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* [JCAP01\(2007\)019](#) (Preprint [astro-ph/0610110](#))
- [29] Peter P and Uzan J-P 2005 *Cosmologie Primordiale* (Paris: Belin)
- [30] Kodama H and Sasaki M 1984 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**
- [31] Bruni M *et al* 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 2585–606 (Preprint [gr-qc/9609040](#))
- [32] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago, IL: Chicago University Press)
- [33] Hillery M, O'Connell R F, Scully M O and Wigner E P 1984 *Phys. Rep.* **106** 121

- [34] Durrer R and Zhou Z-H 1996 *Phys. Rev. D* **53** 5394–410 (Preprint astro-ph/9508016)
- [35] Deruelle N, Katz J and Uzan J-P 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 421–34 (Preprint gr-qc/9608046)
- [36] Gourgoulhon E 2007 Preprint gr-qc/0703035
- [37] Thorne K S 1980 *Rev. Mod. Phys.* **52** 299
- [38] Hu W and Sugiyama N 1995 *Phys. Rev. D* **51** 2599–630 (Preprint astro-ph/9411008)
- [39] Hu W and White M 1997 *Phys. Rev. D* **56** 596–615 (Preprint astro-ph/9702170)
- [40] Matarrese S, Mollerach S and Bruni M 1998 *Phys. Rev. D* **58** 043504 (Preprint astro-ph/9707278)
- [41] Bartolo N, Matarrese S and Riotto A 2004 *J. High Energy Phys.* JHEP04(2004)006 (Preprint astro-ph/0308088) JHEP04(2004)006 (Preprint astro-ph/0308088)
- [42] Martin-Garcia J ‘xPerm and xAct’, <http://metric.iem.csic.es/Martin-Garcia/xAct.index.html>
- [43] Uzan J-P 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 1063–88 (Preprint gr-qc/9801108)
- [44] Malik K A 2005 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP11(2005)005 (Preprint astro-ph/0506532)

5.3 Traitement informatique des perturbations

5.3.1 xAct

Nous utilisons le paquet *xAct* [Martin-García 04] spécialisé dans le calcul tensoriel formel. Ce package est une librairie à rajouter dans *Mathematica*. L'objectif ici n'est pas de décrire la syntaxe d'un tel paquet. Une documentation de plusieurs centaines de pages peut être trouvée sur le site où le package peut être téléchargé. Nous avons ici besoin de savoir qu'un tenseur de type X_b^a est représenté par $X[\mathbf{a}, -\mathbf{b}]$, et que l'on dispose d'une fonction appelée `ToCanonical` qui permet de simplifier les expressions tensorielles équivalentes. Par exemple les expressions $A^\mu B_\mu$ et $A_\mu B^\mu$ sont équivalentes et il ne faut garder qu'un représentant de cette classe d'équivalence. La fonction `ToCanonical` remplacera donc $A^\mu B_\mu + A_\mu B^\mu$ par $2A^\mu B_\mu$. Pour commencer à travailler sur des quantités tensorielles, il faut commencer par définir une variété (`M4`) et sa métrique de signature négative (`gbar`) ainsi que la dérivée covariante associée (`CD`). Il s'agit pour nous de l'espace de fond et de la métrique de fond puisque toutes les quantités que nous allons définir (les variables de perturbations) vivent sur l'espace de fond. On définit également le jeu d'indices (`a, b, c, d`) utilisé pour les tenseurs.

```
DefManifold [M4, 4, {a, b, c, d}, ind];
DefMetric [-1, gbar[-a, -b], CD];
```

Automatiquement les tenseurs de Riemann (`RiemannCD`) de Ricci (`RicciCD`) le scalaire de Ricci (`RicciScalarCD`), le tenseur d'Einstein (`EinsteinCD`) et les symboles de Christoffel (`ChristoffelCD`) sont créés, ceci de façon formelle puisque la métrique n'est pas explicitée.

5.3.2 Algorithme de perturbation

On réalise ensuite les perturbations des tenseurs de Riemann, de Ricci et d'Einstein par la méthode de Palatini [Wald 84]. Nous suivons ici les méthodes exposées dans [Brizuela et al. 06]. On relie ces tenseurs associés à $\bar{g}_{\mu\nu}$ à ceux associés à $g_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ en utilisant

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho &= \frac{g^{\rho\alpha}}{2} (\bar{\nabla}_\nu \delta g_{\alpha\sigma} + \bar{\nabla}_\sigma \delta g_{\nu\alpha} - \bar{\nabla}_\alpha \delta g_{\nu\sigma}) \\ \delta R_{\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \bar{\nabla}_\nu \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha - \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\beta \delta\Gamma_{\beta\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\beta\lambda}^\beta \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Puisque $[\bar{g}^{\mu\alpha} + \delta(g^{\mu\alpha})][\bar{g}_{\alpha\nu} + \delta g_{\alpha\nu}] = \delta_\nu^\mu$, on peut relier la perturbation de l'inverse de la métrique $\delta(g^{\mu\alpha})$ à la perturbation de la métrique $\delta g_{\mu\nu}$ par

$$\delta(g^{\mu\nu}) = -\delta g^\mu_\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} [(-\delta g)^k]^\alpha_\beta \right] \bar{g}^{\beta\nu}, \quad \text{où} \quad [(-\delta g)^k]^\alpha_\beta \equiv (-1)^k \delta g^\alpha_{\lambda_1} \delta g^{\lambda_1}_{\lambda_2} \dots \delta g^{\lambda_{k-1}}_\beta. \quad (5.6)$$

On rappelle que $(\delta g)^{\mu\nu} \neq \delta(g^{\mu\nu})$ car les indices sont baissés et levés avec la métrique de fond $\bar{g}_{\mu\nu}$ ainsi que son inverse $\bar{g}^{\mu\nu}$. Dans les développements en perturbation d'une quantité X , on adopte comme évoqué dans la section 5.2, un développement ordre par ordre de la forme

$$\delta X = \sum_{k=1}^{\infty} l^k \frac{\delta^{(k)} X}{k!}. \quad (5.7)$$

Le paramètre l n'est là que pour pouvoir identifier l'ordre n à une puissance n de l . On prendra ensuite $l = 1$. On peut écrire des formules de perturbation générales en utilisant le concept de partition arrangée. Cela est particulièrement fructueux si l'on souhaite organiser le calcul de perturbations de manière recursive. L'ensemble des partition arrangées¹ $\{k_i\}_{m,n}$ est l'ensemble des 2^{n-1} combinaisons d'indices $k_1 \dots k_m$ positifs tels que $k_1 + \dots + k_m = n$. Avec cette outil on peut récrire la perturbation à un ordre n de l'inverse de la métrique comme

$$\begin{aligned}\delta^{(n)}(g^{\mu\nu}) &= \sum_{\{k_i\}_{m,n}} \frac{n!(-1)^m}{k_1! \dots k_m!} \delta^{(k_m)} g^\mu_\alpha \delta^{(k_{m-1})} g^\alpha_\beta \dots \delta^{(k_2)} g^\tau_\rho \delta^{(k_1)} g^{\rho\nu}, \\ \delta^{(n)}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \sum_{\{k_i\}_{m,n}} \frac{n!(-1)^{m+1}}{k_1! \dots k_m!} \delta^{(k_m)} g^\alpha_\beta \delta^{(k_{m-1})} g^\beta_\gamma \dots \delta^{(k_2)} g^{\tau\rho} \delta^{(k_1)} C_{\rho\mu\nu}, \\ \delta^{(n)}C_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla}_\mu \delta^{(n)} g_{\rho\nu} + \bar{\nabla}_\nu \delta^{(n)} g_{\mu\rho} - \bar{\nabla}_\rho \delta^{(n)} g_{\mu\nu} \right).\end{aligned}\tag{5.8}$$

La perturbation des symboles de Christoffel peut ensuite être utilisée dans l'équation (5.5) et

$$\delta^{(n)}R_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\alpha \delta^{(n)}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \bar{\nabla}_\nu \delta^{(n)}\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(-\delta^{(k)}\Gamma_{\mu\lambda}^\beta \delta^{(n-k)}\Gamma_{\beta\nu}^\lambda + \delta^{(k)}\Gamma_{\beta\lambda}^\beta \delta^{(n-k)}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right).\tag{5.9}$$

On construit ensuite en utilisant l'expression précédente les perturbations du tenseur d'Einstein. La mise en place de cette méthode se fait en utilisant la librairie *xPert* qui s'ajoute à *xAct*. Une fois chargée, on définit la perturbation de la métrique en définissant un paramètre de perturbation (1) qui servira à collecter les différents ordres de perturbation, puis on définit la perturbation de la métrique δg (**dg**).

```
DefParameter [ 1 ]
DefMetricPerturbation [ gbar , dg , 1 ]
```

Ceci crée automatiquement les différents ordres de perturbation de la métrique définis par la décomposition (5.7), c'est à dire un ensemble de tenseurs **dg**[1, -a, -b] **dg**[2, -a, -b] ... Cela crée également de façon similaire les perturbations à chaque ordre des tenseurs de Riemann de Ricci et d'Einstein ainsi que ceux associés aux symboles de Christoffels, puis les met en relation avec la perturbation de la métrique en suivant les relations (5.8-5.9).

Une fois ces développements obtenus, il nous faut séparer les coordonnées d'espace des coordonnées de temps. Nous utilisons pour cela le formalisme 1 + 3 sur l'espace de fond. Les observateurs comobiles de quadrivitesse $\bar{u}_\mu \equiv (dt)_\mu$ suivent des géodésiques de l'espace de fond, c'est-à-dire que $\bar{a}_\mu = 0$. De plus, afin de pouvoir définir des surfaces orthogonales aux observateurs, ce flot est nécessairement irrotationnel, c'est-à-dire $\bar{\omega}_{\mu\nu} = 0$. On obtient donc

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{u}_\nu = \bar{\nabla}_\nu \bar{u}_\mu = \bar{K}_{\mu\nu}.\tag{5.10}$$

On définit le champ de vecteur \bar{u}_μ sur la variété **M4**, que l'on normalise par $\bar{u}^\mu \bar{u}_\mu = -1$ en créant une règle automatique, ainsi que la métrique induite $\bar{h}_{\mu\nu}$ (**m spat**) par

```
DefTensor [ u [ a ] , { M4 } ]
AutomaticRules [ u , MakeRule [ { u [ a ] u [ -a , -1 ] } ] ]
DefMetric [ 1 , m spat [ -a , -b ] , cd , InducedFrom -> { gbar , u } ]
```

¹Ceci n'a rien à voir avec les arrangements sur une partition.

Cela génère tous les tenseurs associés comme pour la métrique globale **gbar** mais avec les suffixes **CD** remplacés par **cd**. De plus cela génère automatiquement la courbure extrinsèque associée (**ExtrinsicKmspat**) et suppose implicitement que la vorticité est nulle ce qui fait que nous pouvons parler de sections spatiales. Cela génère également l'accélération a_μ (**Accelerationu**) et comme nous souhaitons que les observateurs de fond de quadrivitesse \bar{u}_μ soient en chute libre nous demandons

```
Accelerationu[a_?TangentM4'pmQ]=0;
```

D'après la définition de $K_{\mu\nu}$ (2.109), et la relation de Gauss-Codazzi (2.110), il suffit de choisir Θ et $\sigma_{\mu\nu}$ ainsi que le tenseur de Riemann associé à $\bar{h}_{\mu\nu}$ afin de caractériser l'espace-temps de fond. La méthode est pour l'instant générale et permet de considérer des espaces-temps plus généraux que des espaces de Friedmann-Lemaître sans courbure. Afin de simplifier les explications, nous nous restreignons pourtant à ce cas. Nous définissons donc le facteur d'échelle (**a**), le champ de Hubble $H = \Theta/3$ (**H**) et explicitons l'expression de la courbure extrinsèque par $K_{\mu\nu} = H\bar{h}_{\mu\nu}$ ainsi que le tenseur de Riemann des sections spatiales, c'est-à-dire associé à $\bar{h}_{\mu\nu}$.

```
DefTensor[a[], {M4}]
DefTensor[H[], {M4}]
ExtrinsicKmspat[a_?TangentM4'pmQ,b_?TangentM4'pmQ] = H[]mspat[a,b]
Riemanncd[a_?TangentM4'pmQ,b_?TangentM4'pmQ,c_?TangentM4'pmQ,
           d_?TangentM4'pmQ]=0
```

On relie ensuite le tenseur de Riemann associé à $\bar{g}_{\mu\nu}$ au tenseur de Riemann associé à $\bar{h}_{\mu\nu}$ en utilisant la relation de Gauss-Codazzi (2.110).

```
RuleRiemann = Flatten[{
  MakeRule[{
    RiemannCD[a_?TangentM4'pmQ,b_?TangentM4'pmQ,c_?TangentM4'pmQ,
              d_?TangentM4'pmQ]=Riemanncd[a,b,c,d]+... }],
  MakeRule[{
    RicciCD[a_?TangentM4'pmQ,b_?TangentM4'pmQ]=RicciCD[a,b]+... }],
  MakeRule[{ RicciCD[]=RicciCD[]+... }],
}]
```

Il nous faut décomposer en 1+3 tous les tenseurs dont nous souhaitons calculer les perturbations. Nous nous intéresserons ainsi par exemple à la perturbation jusqu'au premier ordre de G_{00} ou bien la perturbation jusqu'au second ordre de G_{ij} , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \left(\bar{G}_{\mu\nu} + \delta^{(1)}G_{\mu\nu} \right) \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu \\ & \left(\bar{G}_{\alpha\beta} + \delta^{(1)}G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta^{(2)}G_{\alpha\beta} \right) \bar{h}^\alpha_\mu \bar{h}^\beta_\nu. \end{aligned} \quad (5.11)$$

```
Gdd00[] = ToGeneral[ Perturbed[ EinsteinCD[-a,-b,1]] u[a]u[b] // ToCanonical;
Gddij[-a_?TangentM4'pmQ, -b_?TangentM4'pmQ] = ToGeneral[ Perturbed[
  EinsteinCD[-c,-d],2]] mspat[c,-a] mspat[d,-b] // ToCanonical;
```

La fonction **ToCanonical** a ordonné dans les expressions précédentes les dérivées covariantes doubles et fait apparaître pour cela le tenseur de Riemann en utilisant les relations de commutation des dérivées covariantes. C'est la raison pour laquelle nous avons eu besoin de spécifier

l'expression du tenseur de Riemann. Il nous reste à spécifier explicitement la forme de la perturbation de la métrique à tout ordre afin d'obtenir le développement perturbatif recherché. En toute généralité on peut décomposer la métrique perturbée en suivant la décomposition (5.2)

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} \equiv & -2\Phi\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu + 2a\left(\bar{D}_\alpha B + B_\alpha - 2\bar{K}_{\alpha\lambda}\bar{D}^\lambda E\right)\bar{u}_{(\nu}\bar{h}^{\alpha}_{\mu)} \\ & -2\Psi\frac{\bar{K}_{\mu\nu}}{H} + 2a^2\bar{D}_\mu\bar{D}_\nu E + 2a^2\bar{D}_{(\mu}E_{\nu)} + 2a^2E_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec

$$\bar{D}_\mu a = 0, \quad \bar{D}^\mu E_{\mu\nu} = 0, \quad E^\mu{}_\mu = 0, \quad \bar{D}^\mu E_\mu = 0, \quad \bar{D}^\mu B_{\mu=0}. \quad (5.13)$$

Nous justifierons dans le chapitre 8 pourquoi cette décomposition est très générale en expliquant en détail son intérêt. On rappelle que les indices sont levés et baissés avec la métrique $\bar{g}_{\mu\nu}$. Si l'on souhaite travailler dans la jauge Newtonienne en négligeant de plus les quantités vectorielles, alors on suppose de plus que $B = E = 0$ et $B_\mu = E_\mu = 0$. C'est le choix que nous faisons ici et nous définissons donc les champs de perturbations scalaires Ψ (**Psi**), Φ (**Phi**) et E_{ij} (**Et**) avec leurs propriétés. Nous les utilisons ensuite pour expliciter l'expression de la perturbation de la métrique, en nous restreignant ici par soucis de simplicité au premier ordre.

```
DefTensor [Psi [] , {M4}]
DefTensor [Phi [] , {M4}]
DefTensor [Et[-a, -b] , {M4} , Symmetric[{ -a, -b }], OrthogonalTo -> {u[a] , u[b]} ,
ProjectedWith -> {mspat[a, -c] , mspat[b, -c]}]

dg[LI[1] , a_?TangentM4'pmQ, b_?TangentM4'pmQ] :=
-2 Phi [] u[a]u[b] -2 Psi [] ExtrinsicKmspat[a, b]/H[] +2 a[]^2 Et[a, b]
```

D'après les expressions (5.8,5.9), les perturbations des tenseurs de Ricci, d'Einstein, et des symboles de Christoffel ne font intervenir au final que des dérivées covariantes de fond des perturbations de métrique. D'après l'expression (5.12), on constate qu'il va falloir connaître les dérivées covariantes des variables de perturbations Φ , Ψ et $E_{\mu\nu}$ ainsi que celles de \bar{u}_μ et $\bar{h}_{\mu\nu}$. Comme $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{u}_\mu\bar{u}_\nu$ et $\bar{\nabla}_\alpha\bar{g}_{\mu\nu} = 0$, il suffit de connaître la dérivée covariant de \bar{u}_μ pour connaître celles de $\bar{h}_{\mu\nu}$. Or ceci est donné par la courbure extrinsèque $\bar{K}_{\mu\nu} = H\bar{h}_{\mu\nu}$ grâce à la relation (5.10). On définit donc la règle suivante qui permet de faire apparaître u_μ plutôt que $h_{\mu\nu}$.

```
Rulemspatogbar = Makerule[{
mspat[a_?TangentM4'pmQ, b_?TangentM4'pmQ] , gbar[a, b]+u[a]u[b]
}]
```

A ce stade du calcul nous avons des expressions faisant intervenir des dérivées covariantes ($\bar{\nabla}_\mu$) de Φ , Ψ et E_{ab} ainsi que de a et H . En utilisant le fait que a et H sont constants sur les sections spatiales, on transforme les dérivées covariantes de a et H en dérivées directionnelles puisque $\bar{\nabla}_\mu a = -aH\bar{u}_\mu$ et $\bar{\nabla}_\mu H = -\bar{u}_\mu\dot{H}$. En ce qui concerne Φ , Ψ et E_{ab} il nous faut séparer les variations spatiales des variations temporelles des variables de perturbations, on réalisera une projection 1 + 3 des dérivées covariantes. On utilisera donc les formules de projections 1 + 3

suivantes qui sont restreintes au cas $\bar{\omega}_{\mu\nu} = 0$ $\bar{a}_\mu = 0$

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_\alpha S &= -u_\alpha \dot{S} + \bar{D}_\alpha S \\
 \bar{\nabla}_\alpha \bar{D}_\beta S &= \bar{D}_\alpha \bar{D}_\beta S - \bar{u}_\alpha \bar{D}_\beta \dot{S} + 2\bar{K}_{\gamma(\alpha} \bar{u}_{\beta)} \bar{D}^\gamma S \\
 \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta S &= u_\alpha u_\beta \ddot{S} + \bar{D}_\alpha \bar{D}_\beta S + 2\bar{K}_{\gamma(\alpha} \bar{u}_{\beta)} \bar{D}^\gamma S - 2\bar{u}_{(\alpha} \bar{D}_{\beta)} \dot{S} - \bar{K}_{\alpha\beta} \dot{S} \\
 \bar{\nabla}_\alpha T_{\mu\nu} &= -u_\alpha \dot{T}_{\mu\nu} + \bar{D}_\alpha T_{\mu\nu} + 2\bar{K}_{\alpha\lambda} T^\lambda_{(\nu} \bar{u}_{\mu)} \\
 \bar{\nabla}_\alpha \bar{D}_\beta T_{\mu\nu} &= \bar{D}_\alpha \bar{D}_\beta T_{\mu\nu} - \bar{u}_\alpha \bar{D}_\beta \dot{T}_{\mu\nu} + 2\bar{K}_{\gamma(\alpha} \bar{u}_{\beta)} \bar{D}^\gamma T_{\mu\nu} + 2\bar{K}_\alpha{}^\gamma \bar{D}_\beta T_{\gamma(\mu} \bar{u}_{\nu)}. \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

On créera donc des champs de tenseurs correspondant à \dot{H} , $\dot{\Psi}$, $\dot{\Psi}$, $\dot{\Phi}$, et $\dot{\Phi}$ puis une règle de remplacement qui permettra de mettre en place les décomposition 1 + 3 précédentes. De plus, le facteur d'échelle et le paramètre de Hubble sont constants sur les sections spatiales. Nous utiliserons donc le fait que $\bar{D}_\mu a = \bar{D}_\mu H = 0$.

```

DefTensor[Hp[], {M4}]
DefTensor[Psip[], {M4}]
DefTensor[Psip2[], {M4}]
DefTensor[Phip[], {M4}]
DefTensor[Phip2[], {M4}]
    
```

```

RuleNabla = Flatten[{
  MakeRule[{CD[b][a]], -a[H]u[b]}],
  MakeRule[{CD[b][H]], -Hp[u[b]}],
  MakeRule[{CD[b][Psi]], -Psip[u[b] + cd[b][Psi]]},
  MakeRule[{CD[b][Phi]], -Phip[u[b] + cd[b][Phi]]},
  MakeRule[{CD[a]CD[b][Psi], Psip2[u[a]u[b] + cd[a][cd[b][Psi]]
    -ExtrinsicKmspat[ab]Psip[] + ...}],
  ...
}]
    
```

Nous souhaitons ensuite pouvoir interpréter les résultats en termes de dérivées ordinaires. Les dérivées spatiales (\bar{D}_μ) vont correspondre à des dérivées ordinaires spatiales dans le cas plat. En revanche la dérivée directionnelle $\bar{u}^\mu \bar{\nabla}_\mu$ ne correspond pas à une dérivée par rapport à la coordonnée de temps si la quantité dérivée n'est pas un scalaire. Il faudra alors utiliser une dérivée de Lie, afin d'utiliser la propriété (2.114). On utilisera donc les relations

$$\dot{T}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\bar{u}} T_{\mu\nu} - 2K_{\alpha(\mu} T_{\nu)}^\alpha \quad (5.15)$$

$$\ddot{T}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\bar{u}}^2 T_{\mu\nu} - 4\mathcal{L}_{\bar{u}} T_{\alpha(\mu} \bar{K}_{\nu)}^\alpha + 2T^{\alpha\beta} \bar{K}_{\alpha\mu} \bar{K}_{\beta\nu} + 2T_{\alpha(\mu} \bar{K}_{\nu)\beta} \bar{K}^{\alpha\beta} - 2T_{(\mu}^{\alpha} \dot{\bar{K}}_{\nu)\alpha}, \quad (5.16)$$

et on définira une liste de règles de remplacement correspondante pour E_{ab} puisqu'il s'agit de la seule quantité tensorielle.

```

RuleToLie = Flatten[{
  MakeRule[{u[a]CD[-a][Et[-b,-c]], LieD[u[ind]][Et[-b,-c]]
    -ExtrinsicKmspat[-d,-b]Et[d,-c] - ExtrinsicKmspat[-d,-c]Et[d,-b]}],
  ...
}]
    
```

Une fois appliquées ces règles, toutes les dérivées covariantes auront été projetées en 1 + 3 si bien que l'on obtiendra les perturbations des quantités recherchées en termes de dérivées spatiales (\bar{D}_μ)

sur les variables de perturbation de la métrique, ainsi qu'en termes de dérivées directionnelles selon \bar{u}_μ pour les scalaires a H Φ et Ψ , ou de dérivées de Lie selon \bar{u}_μ pour le tenseur E_{ab} . Toutes ces dérivées correspondent à des dérivées ordinaires, et l'on obtient le résultat recherché.

Si l'on ne souhaite pas que les sections spatiales soient plates, alors il faudra utiliser l'équation (1.2) pour spécifier le tenseur de Riemann des sections spatiales. Les dérivées spatiales (\bar{D}_μ) correspondront alors à des dérivées covariantes associées à $\bar{h}_{\mu\nu}$. Si on souhaite de plus que l'espace puisse être anisotrope alors il faudra tenir compte de $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ dans l'expression du tenseur de courbure extrinsèque. Pour un espace de Bianchi de type I (voir partie III) le tenseur de Riemann des sections spatiales est nul, tandis qu'il faudra l'exprimer en fonction des constantes de structures de l'espace de Bianchi considéré [Ellis & MacCallum 69] pour le cas général. En appliquant la méthode décrite précédemment, la seule différence sera l'expression de la courbure extrinsèque, et ses dérivées directionnelles feront apparaître en plus des dérivées directionnelles selon \bar{u}_μ du cisaillement $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$. On utilisera alors à profit la relation

$$\dot{\bar{\sigma}}^\mu{}_\nu = \mathcal{L}_{\bar{u}}\bar{\sigma}^\mu{}_\nu, \quad (5.17)$$

pour pouvoir interpréter les résultats en termes de dérivées ordinaires par rapport à la coordonnée temporelle. Nous avons utilisé cette méthode afin de calculer tous les développements au second ordre de cette thèse dans le cas homogène et isotrope ainsi que dans le cas d'un espace de Bianchi I dans la partie III.

5.3.3 Un exemple simple : la perturbation au premier ordre du scalaire de Ricci

Jusqu'à présent nous n'avons présenté que la mise en place de l'algorithme en définissant les quantités tensorielles nécessaires, ainsi que des règles de remplacement permettant de mettre en forme les quantités perturbées recherchées. Afin de rendre l'explication plus visuelle, nous allons décrire les étapes principales de l'algorithme pour le cas le plus simple, celui de $R^{(1)}$ pour le cas de perturbations scalaires. On suppose que toutes les champs nécessaires ont été définis ainsi que les règles de remplacement nécessaires, mais que la forme de la métrique perturbée n'a pas été explicitée. On commence par définir la quantité que l'on souhaite perturber et qui va être exprimée en fonction de la perturbation de la métrique.

```
R1 [] = ToGeneral[ Perturbed [ RicciScalarCD [ 1 ] ] // ToCanonical
```

Il est possible de préciser pour toutes les quantités une forme affichée qui sera lisible. On demandera donc que CD soit formaté en $\bar{\nabla}$, Psi en Ψ , et ainsi de suite. Le résultat de l'affectation précédente renvoie donc un résultat de la forme suivante.

$$\bar{R} + l \left(-\delta g_{ab}^{(1)} \bar{R}^{ab} + \bar{\nabla}^b \bar{\nabla}^a \delta g_{ab}^{(1)} - \bar{\nabla}^b \bar{\nabla}_b \delta g_a^{(1)a} \right)$$

On spécifie ensuite la métrique perturbée en nous restreignant à des perturbations scalaires.

```
dg [ LI [ 1 ] , a_?TangentM4 'pmQ, b_?TangentM4 'pmQ ] :=
-2 Phi [ ] u [ a ] u [ b ] -2 Psi [ ] ExtrinsicKmspat [ a , b ] / H [ ]
```

$$-2u_a u_b \Phi - 2\Psi(g_{ab} + u_a u_b)$$

Une fois le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci remplacés, la quantité recherchée prend alors une forme développée qu'il faudra simplifier.

```
Collect [ ContractMetric [R1[] /. RuleRiemann] /. Rulemspattogbar // ToCanonical , 1]
```

$$\begin{aligned}
 & 12H^2 + 6\dot{H} \\
 & + l \left[-6\dot{H}\Phi - 6H^2\Phi + 18H^2\Psi + 6\dot{H}\Psi - 2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Phi + 4\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Psi \right. \\
 & \quad - 2\Phi u^a\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b u^b - 2\Psi u^a\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b u^b - 2\Phi(\bar{\nabla}_a u^a)\bar{\nabla}_b u^b - 2\Psi(\bar{\nabla}_a u^a)\bar{\nabla}_b u^b \\
 & \quad - 4u^a(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b\Psi - 4u^a(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b\Phi - 2\Phi u^a\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a u^b - 2\Psi u^a\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a u^b - 4u^a(\bar{\nabla}_a\Psi)\bar{\nabla}_b u^b \\
 & \quad \left. - 2u^a u^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Psi - 2u^a u^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Phi - 2\Phi(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b u^a - 2\Psi(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b u^a - 4u^a(\bar{\nabla}_a\Phi)\bar{\nabla}_b u^b \right]
 \end{aligned}$$

On transforme les termes du type $\bar{\nabla}_a u_b$ en utilisant le fait qu'ils sont égaux à la courbure extrinsèque. Ceci est réalisé grâce à la fonction `GradNormalToExtrinsicK` qui est fournie par `xAct`.

```
ContractMetric[%//GradNormalToExtrinsicK]
/. Rulemspattogbar//GradNormalToExtrinsicK;
Collect[% // ToCanonical , 1]
```

$$\begin{aligned}
 & 12H^2 + 6\dot{H} \\
 & + l \left[-6\dot{H}\Phi - 6H^2\Phi + 18H^2\Psi + 6\dot{H}\Psi - 2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Phi + 4\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Psi - 6H\Phi u^b\bar{\nabla}_b H \right. \\
 & \quad \left. - 6H\Psi u^b\bar{\nabla}_b H + 12H u^a\bar{\nabla}_a\Phi + 12H u^a\bar{\nabla}_a\Psi - 2u^a u^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Psi - 2u^a u^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Phi \right]
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à réaliser la projection en 1 + 3 des dérivées covariantes grâce à la fonction `RuleNabla`.

```
Collect[%//.RuleNabla//ToCanonical , 1]
```

$$12H^2 + 6\dot{H} + l \left[-12\dot{H}\Phi - 24H^2\Phi - 6H\dot{\Psi} - 24H\dot{\Psi} - 6\ddot{\Psi} - 2\bar{D}_a\bar{D}^a\Phi + 4\bar{D}_a\bar{D}^a\Psi \right]$$

Comme nous n'avons pas de quantité tensorielle, ceci parce que nous ne les avons pas considérées dans cet exemple mais aussi parce qu'on montre qu'elles n'interviennent pas dans $R^{(1)}$ si on les prend en compte, toutes les dérivées directionnelles s'identifient à des dérivées par rapport au temps cosmique. On peut ensuite, si on le désire, exprimer le résultat en temps conforme, ce qui revient à considérer des dérivées dans la direction du quadrivecteur au_μ plutôt que u_μ [Pitrou & Uzan 07].

Chapitre 6

Dynamique au second ordre

Sommaire

6.1	État des lieux	111
6.2	Approximation fluide	112
6.2.1	Équations d'évolution des perturbations	112
6.2.2	Loi de conservation	114
6.2.3	Ère de radiation	115
6.2.4	Ère de matière	118
6.2.5	Transition radiation-matière	119
6.2.6	Intéactions baryons-photons	121
6.2.7	Physique du fond diffus cosmologique	121
6.3	Théorie cinétique au second ordre	123
6.3.1	Équation des géodésiques	123
6.3.2	Terme de Liouville	124
6.3.3	Hierarchie de Boltzmann et lien avec les observations	125
6.3.4	Limite fluide de l'équation de Boltzmann	126

6.1 État des lieux

Lors que j'ai débuté ma thèse en 2005, l'étude de la dynamique des perturbations au second ordre était essentiellement réalisée pour des échelles super-Hubble [Bartolo *et al.* 04b], dans l'approximation fluide, pour un univers dominé soit par la matière soit par la radiation, ou pour des échelles sub-Hubble dans le régime Newtonien [Bernardeau *et al.* 02]. La construction de quantités conservées ainsi que leur utilisation venait d'être réalisée en généralisant les résultats du premier ordre [Malik & Wands 04, Vernizzi 05] de manière perturbative, puis cette procédure a été étendue à tous les ordres au cours de ma thèse [Rigopoulos & Shellard 03, Lyth *et al.* 05, Langlois & Vernizzi 05, Enqvist *et al.* 07]. Je me suis donc intéressé à la dynamique lorsque les modes deviennent sub-Hubble, pendant l'ère de radiation puis pendant l'ère de matière. Ensuite je me suis concentré plus particulièrement sur la transition entre les deux, toujours dans l'approximation fluide, en étudiant plus précisément les oscillations baryoniques au second ordre

dans le but de comprendre les effets non-linéaires sur la surface de dernière diffusion. Par ailleurs la théorie cinétique, qui permet de décrire correctement la radiation et les baryons et de justifier rigoureusement le terme de collision entre les baryons et les photons, n'avait pas été étudiée au second ordre. Des travaux ont été réalisés sur ce sujet au cours de ma thèse [Bartolo *et al.* 06, Bartolo *et al.* 07], et je me suis basé sur cette étude pour en approfondir les fondements théoriques. Une fois décomposée en multipôles, l'équation de Boltzmann fait intervenir une infinité (pour chaque ℓ) d'équations toutes couplées entre elles. La résolution numérique n'est donc pas aisée et ceci justifie l'utilisation de l'approximation fluide que nous exposons dans ce chapitre, dont le but est d'extraire le comportement dominant des solutions. Cette étude permet d'entrevoir les sources de non-gaussianité dues à l'évolution non-linéaire des perturbations, qui viennent s'ajouter à la non-gaussianité primordiale déterminant les conditions initiales. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons alors plus particulièrement à la non-gaussianité primordiale dans le cas de l'inflation à un champ.

6.2 Approximation fluide

6.2.1 Équations d'évolution des perturbations

Comme nous l'avons déjà indiqué, toutes les quantités perturbées sont décomposées en ordre de perturbation selon la relation (2.17). Les perturbations du tenseur d'Einstein et du tenseur énergie-impulsion correspondant à la métrique (2.11) sont rapportées dans l'appendice B. Les équations peuvent être écrites ordre par ordre, et nous utiliserons la notation compacte

$$\mathcal{E}[\delta g, \delta T] = \mathcal{S}[\delta g, \delta T]. \quad (6.1)$$

Cela signifie que ordre par ordre, elle se lit

$$\mathcal{E}[\delta^{(1)}g, \delta^{(1)}T] = 0, \quad \mathcal{E}[\delta^{(2)}g, \delta^{(2)}T] = \mathcal{S}[\delta^{(1)}g, \delta^{(1)}T], \quad (6.2)$$

car les variables de second ordre satisfont les mêmes équations linéaires \mathcal{E} que les variables du premier ordre, mais avec un terme de source \mathcal{S} quadratique dans les variables de premier ordre.

Dans les équations présentées ci-dessous, nous ne considérons que les modes scalaires dans les termes de source des équation du second ordre. Nous avons vu en effet que les modes vectoriels et tensoriels sont décroissants au premier ordre et qu'il est par conséquent justifié de les négliger¹. Nous reportons néanmoins dans l'appendice B les termes de source en incluant les perturbation tensorielles. Nous allons également nous restreindre au cas simplifié d'un mélange de matière noire et de radiation.

Modes scalaires

Les équations d'Einstein scalaires sont données par

- $(\delta G_{00} - \kappa \delta T_{00}) = 0$,
- la trace de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$
- le mode scalaire de la partie sans trace de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$

¹Les modes tensoriels ne sont décroissants que lorsqu'ils sont sub-Hubble. Lorsqu'ils sont super-Hubble, ils sont constants et il est justifié de les négliger dans les termes de source car ils n'interviennent qu'avec une dérivée.

– le mode scalaire de $(\delta G_{0i} - \kappa \delta T_{0i}) = 0$
pour obtenir respectivement les équations

$$(\Delta + 3K)\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi - \frac{1}{2} \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e \delta_e = S_1 \quad (6.3)$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' - K\Psi + 2\mathcal{H}'\Phi - \frac{1}{6}\kappa \bar{\rho}_r \delta_r = S_2 \quad (6.4)$$

$$\Psi - \Phi = S_3 \quad (6.5)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi + \frac{1}{2} \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e (1 + w_e) v_e = S_4. \quad (6.6)$$

Les termes de source sont donnés par

$$S_1 = -8\Psi\Delta\Psi - 3D_i\Psi D^i\Psi - 3\Psi'^2 + \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e (1 + w_e) D_i v_e D^i v_e - 12\mathcal{H}^2\Psi^2 \quad (6.7)$$

$$S_2 = 4\mathcal{H}^2\Psi^2 + \frac{7}{3}D_i\Psi D^i\Psi + \frac{8}{3}\Psi\Delta\Psi + 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + 8\mathcal{H}'\Psi^2 + \Psi'^2 \\ + \frac{1}{3} \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e (1 + w_e) D_i v_e D^i v_e, \quad (6.8)$$

$$S_3 = -4\Psi^2 - \Delta^{-1} \left[2D_i\Psi D^i\Psi + \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e (1 + w_e) D_i v_e D^i v_e \right] \\ + 3(\Delta\Delta)^{-1} D_i D_j \left[2D^i\Psi D^j\Psi + \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e (1 + w_e) D^i v_e D^j v_e \right], \quad (6.9)$$

$$S_4 = 2\mathcal{H}\Psi^2 - 4\Psi\Psi' + 2D_i^{-1}(\Psi' D_i\Psi) \\ + \sum_{e=r,m} \kappa \bar{\rho}_e D_i^{-1} [(1 + w_e)\Psi D_i v_e - (1 + c_{s,e}^2)\delta_e D_i v_e]. \quad (6.10)$$

Pour des fluides sans interaction, ce qui est le cas si on traite uniquement un mélange de radiation et de matière noire, nous obtenons deux équations scalaires d'évolution du fluide en considérant $\bar{\nabla}_\mu T_{e0}^\mu = 0$ ainsi que le mode scalaire de $\nabla_\mu T_{ei}^\mu = 0$. Il s'agit respectivement de l'équation de conservation de chaque fluide ainsi que de l'équation d'Euler de chaque fluide. Dans le cas où w est constant et donc $w = c_s^2$ ces équations sont

$$\delta'_e + (1 + w_e) (\Delta v_e - 3\Psi') = S_{c,e}, \quad (6.11)$$

$$v'_e + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,e}^2)v_e + \Phi + \frac{c_{s,e}^2}{1 + w_e} \delta_e = S_{e,e}. \quad (6.12)$$

Les termes de source de ces équations sont donnés par

$$S_{c,e} = 2(1 + w_e) \{ 3\delta_e \Psi' + 6\Psi\Psi' - (\Phi + \delta_e)\Delta v_e \\ + D_i v_e [-D^i \delta_e - (1 - 3w_e)\mathcal{H}D^i v_e - 2D^i v'_e - 2D^i \Phi + 3D^i \Psi] \}, \quad (6.13)$$

$$D_i S_{e,e} = -2(\delta_e D_i v_e)' - 2\mathcal{H}(1 - 3c_{s,e}^2)\delta_e D_i v_e + 2\mathcal{H}(1 - 3c_{s,e}^2)(\Phi + 2\Psi)D_i v_e + 10\Psi' D_i v_e \\ + 4\Psi D_i v'_e - 2D_j (D^j v_e D_i v_e) + 2\Phi D_i v'_e - 2\delta D_i \Phi + 4\Phi D_i \Phi. \quad (6.14)$$

Dans le cas où w n'est pas constant c'est-à-dire pour $w \neq c_s^2$, les équations de conservation sont données en appendice D.1 tandis que les équations d'Einstein sont données en appendice D.2. Si de plus les perturbations ne sont pas adiabatiques, c'est-à-dire si la pression ne dépend pas uniquement de ρ , alors il faut considérer une composante non-adiabatique dans les équations précédentes. Nous ne considérerons pas cette situation et nous restreindrons dans ce qui suit à des perturbations adiabatiques. Si de plus on souhaite inclure les baryons dans les équations précédentes, il faudra considérer la force qu'exercent les baryons sur les photons (et réciproquement) au second ordre. Celle-ci ne peut être justifiée qu'à partir de la théorie cinétique et sa forme est donnée dans [Bartolo *et al.* 06]. Tout comme au premier ordre, nous étudierons la dynamique des perturbations gravitationnelles sans considérer cet aspect étant donné que la matière noire froide est dominante.

Modes tensoriels

Les équations d'Einstein tensorielles sont données par le mode tensoriel de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$

$$E''_{ij} + 2\mathcal{H}E'_{ij} + (2K - \Delta)E_{ij} = S_{ij}^{TT}, \quad (6.15)$$

où

$$S_{ij}^{TT} = \mathcal{P}_{T,ij}^{kl} [4D_k \Phi D_l \Phi + 2\kappa \bar{\rho}(1+w)D_k v D_l v]. \quad (6.16)$$

Dans l'expression précédente, nous avons utilisé qu'au premier ordre $\Phi = \Psi$ pour un fluide parfait d'après l'équation (6.5).

Nous utiliserons les solutions trouvées pour les équations homogènes satisfaites par les variables de perturbation de premier ordre afin de résoudre les équations du second ordre avec la méthode de la fonction de Green.

6.2.2 Loi de conservation

En suivant la même procédure qu'au premier ordre, on peut montrer (voir section 7.5.2) que pour des modes super-Hubble, la condition d'adiabaticité du mélange radiation-matière noire froide est encore satisfaite au second ordre, et on peut exprimer les contrastes de densité au second ordre en fonction du contraste de densité du fluide total par la version au second ordre de l'équation (2.76). Le fluide total à ces échelles peut être considéré comme un fluide parfait de paramètre d'état variable. De façon plus générale, pour un fluide parfait, on montre en suivant la même procédure qu'au premier ordre à partir des équations d'Einstein de l'appendice D.2, que l'équation d'évolution pour $\Psi^{(2)}$ s'écrit

$$\Psi'' + \Psi' 3\mathcal{H}(1 + c_s^2) + 3\Psi(c_s^2 - w) - c_s^2 \Delta \Psi = S_2 - c_s^2 S_1 + \frac{1}{3} \Delta S_3 + 3S_3(c_s^2 - w) + \mathcal{H}S'_3 \equiv S. \quad (6.17)$$

De façon équivalente, cette équation s'écrit en fonction de $\Phi^{(2)}$ et $\Psi^{(2)}$

$$\Psi'' + \mathcal{H}\Phi' + \mathcal{H}\Psi'(2 + 3c_s^2) + 3\Phi(c_s^2 - w) - c_s^2 \Delta \Psi = S_2 - c_s^2 S_1 + \frac{1}{3} \Delta S_3. \quad (6.18)$$

On peut montrer alors (voir l'appendice E) qu'en utilisant la perturbation de courbure en jauge comobile au second ordre dans sa limite super-Hubble

$$\mathcal{R}^{(2)} = \Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}} \left(\Psi'^{(2)} + \mathcal{H}\Phi^{(2)} - 4\mathcal{H}\Psi^2 - \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}} \right) + (1 + 3c_s^2) (Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi, \quad (6.19)$$

où on rappelle que $Q = -1/[3(1+w)]$, on peut récrire cette équation pour les modes super-Hubble sous la forme

$$\frac{-\mathcal{H}}{2Q}\mathcal{R}^{(2)'} \simeq 0. \quad (6.20)$$

Nous utiliserons donc cette loi de conservation pour établir les liens entre les variables de perturbations du second ordre avant et après un changement d'ère pour des modes super-Hubble, et en particulier pour fixer les conditions initiales dans l'ère de radiation à partir des prédictions inflationnaires.

6.2.3 Ère de radiation

En suivant la même méthode qu'au premier ordre, mais en gardant tous les termes de source quadratiques dans les variables de premier ordre, nous pouvons dériver l'équation d'évolution pour les perturbations scalaires du second ordre dans le cas où l'univers est dominé par la radiation

$$\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' - \frac{1}{3}\Delta\Psi = S_2 - \frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{3}\Delta S_3 + \mathcal{H}S_3' \equiv S_r. \quad (6.21)$$

Cette équation peut être convertie en une équation satisfaite pour Φ en utilisant la contrainte $\Psi - \Phi = S_3$. Afin que l'équation (6.21) soit une équation différentielle uniquement sur le temps, nous passons en espace de Fourier. Les termes de source ne font intervenir que des termes quadratiques dans les variables de perturbation du premier ordre. On relie la transformée de Fourier d'un produit XY à celle de X et Y par

$$[XY](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) X(\mathbf{k}_1) Y(\mathbf{k}_2). \quad (6.22)$$

Afin de simplifier la notation nous n'utilisons pas de notation différente pour une variable et sa transformée de Fourier. Nous omettrons également de spécifier la dépendance en \mathbf{k} là où aucune confusion ne peut être faite. On utilisera également dorénavant la notation compacte

$$\mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}). \quad (6.23)$$

Cette expression fait intervenir nécessairement toutes les valeurs de k_1 et k_2 ce qui entrera en contradiction avec la notion de limite super-Hubble ou sub-Hubble pour lesquelles on souhaite comparer k à $1/\eta$, mais aussi k_1 et k_2 à $1/\eta$. Cependant le but sous-jacent à nos calculs au second ordre est d'obtenir une expression pour le bispectre et nous verrons alors que l'intégrale représentée par $\mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ n'est jamais réalisée, et dans ce cas, il y a bien un sens pour les limites sub-Hubble et super-Hubble. Nous présenterons donc les résultats au second ordre dans les limites super-Hubble et sub-Hubble avec $\mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ en facteur en nous souvenant que cela à un sens uniquement lorsque l'on utilise ces expressions dans le calcul d'un bispectre. Nous notons Ψ_1 et Ψ_2 les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (6.21) que nous souhaitons résoudre. On définit alors la fonction de Green par

$$G_r(\eta, \eta') = \frac{\Psi_1^{(1)}(\eta')\Psi_2^{(1)}(\eta) - \Psi_1^{(1)}(\eta)\Psi_2^{(1)}(\eta')}{\Psi_1^{(1)}(\eta')\Psi_2'^{(1)}(\eta') - \Psi_2^{(1)}(\eta')\Psi_1'^{(1)}(\eta')}. \quad (6.24)$$

La solution générale est alors de la forme

$$\Psi(\eta) = C_1 \Psi_1(\eta) + C_2 \Psi_2(\eta) + \int_0^\eta G_r(\eta, \eta') S_r(\eta') d\eta'. \quad (6.25)$$

La fonction de Green associée à l'équation (6.21) s'écrit explicitement

$$G_r(\eta, \eta') = \frac{\sqrt{3}\eta'}{k^3\eta^3} \left\{ (\eta\eta'k^2 + 3) \sin \left[\frac{k(\eta - \eta')}{\sqrt{3}} \right] - \sqrt{3}k(\eta - \eta') \cos \left[\frac{k(\eta - \eta')}{\sqrt{3}} \right] \right\}. \quad (6.26)$$

Modes super-Hubble

Pour les modes super-Hubble, nous pouvons soit utiliser la limite super-Hubble du résultat précédent, c'est-à-dire en ne gardant dans S_r que les termes dominant dans cette limite qui sont

$$S_r \simeq 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + \Psi'^2 + 3w\Psi'^2 + \mathcal{H}S'_3, \quad (6.27)$$

soit utiliser la conservation de $\mathcal{R}^{(2)}$. Cette dernière méthode est une intégrale première d'une équation du second ordre et est donc une équation du premier ordre comme on peut le voir directement sur l'expression de $\mathcal{R}^{(2)}$. Si à la fin de l'inflation la valeur de $\mathcal{R}^{(2)}$ est $\mathcal{R}_I^{(2)}$, alors on peut utiliser cette valeur comme condition initiale au début de l'ère dominée par la radiation. L'évolution de $\Psi^{(2)}$ est ensuite obtenue en résolvant $\mathcal{R}^{(2)}(\eta) = \mathcal{R}_I^{(2)}$, c'est-à-dire

$$\Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}} \left(\Psi'^{(2)} + \mathcal{H}\Phi^{(2)} \right) = \mathcal{R}_I^{(2)} - (1 + 3c_s^2) (Q\delta)^2 + 4Q\delta\Psi - \frac{2Q}{\mathcal{H}} \left(4\mathcal{H}\Psi^2 + \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}} \right). \quad (6.28)$$

Nous avons vu au premier ordre que pour des modes super-Hubble dans une ère dominée par un fluide de paramètre d'état w constant, une fois la solution décroissante négligeable, c'est-à-dire quand $\Psi^{(1)'} \ll \mathcal{H}\Psi^{(1)}$, nous pouvons relier $\Psi^{(1)}$ à $\mathcal{R}^{(1)}$ par la relation (2.86). Dans ce cas nous pouvons également relier v à Ψ d'après l'équation (2.24) par

$$v^{(1)} = \frac{-2\Psi^{(1)}}{3\mathcal{H}(1+w)}, \quad (6.29)$$

et négliger δ devant Ψ . On applique la même méthode au second ordre. Une fois la solution décroissante négligeable, c'est-à-dire la solution de l'équation homogène associée à l'équation (6.28), et donc que $\Psi^{(2)'} \ll \mathcal{H}\Psi^{(2)}$, nous pouvons déduire une relation entre $\Psi^{(2)}$ et $\mathcal{R}_I^{(2)}$. En utilisant l'équation (6.29) et en exprimant $\Phi^{(2)}$ en fonction de $\Psi^{(2)}$ grâce à la contrainte (6.5), cette relation qui correspond à la solution particulière de l'équation (6.28) s'écrit

$$\begin{aligned} \Psi_I^{(2)}(w) = & \frac{1}{5+3w} \left\{ 3(1+w)\mathcal{R}_I^{(2)} + 4\frac{5+3w}{3(1+w)}\Psi_I^{(1)2} - 2\Delta^{-1} \left[\frac{10+6w}{3(1+w)}\partial_i\Psi_I^{(1)}\partial^i\Psi_I^{(1)} \right] \right. \\ & \left. + 6\Delta^{-2}\partial^j\partial_i \left[\frac{10+6w}{3(1+w)}\partial_j\Psi_I^{(1)}\partial^i\Psi_I^{(1)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Dans le cas de l'ère dominée par la radiation

$$\Psi_{I,r}^{(2)} = \frac{2}{3}\mathcal{R}_{I,r}^{(2)} + \Psi_{I,r}^{(1)2} - \Delta^{-1} \left[\partial_i\Psi_{I,r}^{(1)}\partial^i\Psi_{I,r}^{(1)} \right] + 3\Delta^{-2}\partial^j\partial_i \left[\partial_j\Psi_{I,r}^{(1)}\partial^i\Psi_{I,r}^{(1)} \right], \quad (6.31)$$

où nous rappelons que $\Psi_{I,r}^{(1)} = 2\mathcal{R}_I^{(1)}/3$. Il faut remarquer qu'au second ordre $\Phi^{(2)} \neq \Psi^{(2)}$ et donc d'après l'équation (6.5), on les relie dans le cas super-Hubble par

$$\Phi_I^{(2)} = \Psi_I^{(2)} + 4\Psi_I^{(1)2} + \Delta^{-1} \left[\frac{10+6w}{3(1+w)} \partial_i \Psi_I^{(1)} \partial^i \Psi_I^{(1)} \right] - 3\Delta^{-2} \partial^j \partial_i \left[\frac{10+6w}{3(1+w)} \partial_j \Psi_I^{(1)} \partial^i \Psi_I^{(1)} \right]. \quad (6.32)$$

Modes sub-Hubble

Lorsque nous souhaitons étudier la rentrée d'un mode sous l'horizon, il n'est plus possible d'utiliser la méthode intégrale précédente et nous utiliserons donc la méthode générale de la fonction de Green. La solution dominante de l'équation homogène, notée $\Psi_h^{(2)}$ a la forme donnée par la fonction (2.37) avec une valeur limite quand $k\eta \gg 1$ donnée par $\Psi_{I,r}^{(2)}$

$$\Psi_h^{(2)} = \Psi_{I,r}^{(2)} \frac{9\sqrt{3}}{(k\eta)^3} \left[\sin(k\eta/\sqrt{3}) - \frac{k\eta}{\sqrt{3}} \cos(k\eta/\sqrt{3}) \right]. \quad (6.33)$$

Quant à la solution particulière, ou solution sourcée $\Psi_S^{(2)}$, nous pouvons nous intéresser dans un but de simplification à son ordre dominant en $k\eta$ qui est

$$\Psi_S^{(2)}(k, \eta) \simeq \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \Psi_I^{(1)}(k_1) \Psi_I^{(1)}(k_2) \int_0^\eta I(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \eta, \eta') d\eta', \quad (6.34)$$

où

$$F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \eta) = \frac{27\sqrt{3}k_1k_2}{k^3\eta^2} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + 3 \left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1k_2} \right)^2 \right], \quad (6.35)$$

$$I(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \eta, \eta') = \sin\left(\frac{k_1\eta'}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{k_2\eta'}{\sqrt{3}}\right) \sin\left[\frac{k(\eta' - \eta)}{\sqrt{3}}\right]. \quad (6.36)$$

Afin de dériver ce résultat, nous avons utilisé le fait que dans le terme de source S_r , les termes dominants sont les termes quadratiques en v qui sont tous du type $\sim \mathcal{H}^2 \partial^i v \partial_i v \sim \eta^{-2}$, tandis que les autres termes se comportent asymptotiquement au mieux comme $k^{-2}\eta^{-4}$.

On peut calculer l'intégrale sur I , et on obtient alors pour les modes sub-Hubble ($k_1\eta \gg 1$, $k_2\eta \gg 1$, $k\eta \gg 1$), en notant $\mu = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 / (k_1k_2)$

$$\begin{aligned} \Psi_S^{(2)}(k, \eta) \simeq & \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{81\Psi_I^{(1)}(k_1)\Psi_I^{(1)}(k_2)}{2k^2\eta^2(1-\mu^2)} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + 3 \left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1k_2} \right)^2 \right] \\ & \left[\mu \sin\left(\frac{k_1\eta}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{k_2\eta}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\frac{k_1\eta}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{k_2\eta}{\sqrt{3}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

La solution totale $\Psi_r^{(2)}$ est la somme de $\Psi_S^{(2)}$, qui vient de l'évolution, et de $\Psi_h^{(2)}$, qui porte une information sur la perturbation de courbure à la fin de l'inflation $\mathcal{R}_I^{(2)}$. Outre la dépendance dans la configuration de \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 et μ ainsi que le comportement oscillant, on remarque que l'amplitude des perturbations du second ordre décroît comme $(k\eta)^{-2}$. On conclut donc que le premier ordre comme le second ordre est amorti lorsqu'il rentre sous l'horizon dans l'ère dominée par la radiation. On peut ensuite en déduire le comportement asymptotique du contraste de

densité grâce à l'équation de Poisson (6.3). Comme les termes dominants dans le terme de source sont de l'ordre de $k^2\Psi^{(1)2}/(k\eta)^4$, on peut les négliger devant $\Delta\Psi^{(2)}$ et $\bar{\rho}\delta^{(2)}$. On en déduit qu'asymptotiquement l'équation de Poisson s'écrit dans l'ère de radiation

$$\delta_r^{(2)} = -\frac{2}{3}(k\eta)^2\Psi_r^{(2)}. \quad (6.38)$$

6.2.4 Ère de matière

Dans le cas où l'univers est dominé par la matière,

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' = S_2 + \frac{1}{3}\Delta S_3 + \mathcal{H}S_3' \equiv S_m. \quad (6.39)$$

La fonction de Green associée est

$$G_m(\eta, \eta') = \frac{1}{5} \left(\eta' - \frac{\eta'^6}{\eta^5} \right). \quad (6.40)$$

Modes super-Hubble

Pour les modes super-Hubble, on suit la même démarche que pour l'ère de radiation. Une fois la solution décroissante négligeable, $\Psi^{(2)}$ converge vers $\Psi_I^{(2)}(w=0)$, c'est-à-dire

$$\Psi_{I,m}^{(2)} = \left[\frac{3}{5}\mathcal{R}_I^{(2)} + \frac{4}{3}\Psi_{I,m}^{(1)2} - \Delta^{-1} \left(\frac{4}{3}\partial_i\Psi_{I,m}^{(1)}\partial^i\Psi_{I,m}^{(1)} \right) + \Delta^{-2}\partial^j\partial_i \left(4\partial_j\Psi_{I,m}^{(1)}\partial^i\Psi_{I,m}^{(1)} \right) \right], \quad (6.41)$$

avec $\Psi_{I,m}^{(1)} = 3\mathcal{R}_I^{(1)}/5$. On relie cette valeur à $\Phi_{I,m}^{(2)}$ en utilisant l'équation (6.32) évaluée en $w=0$.

Modes devenant sub-Hubble pendant l'ère de matière

Dans la limite $k\eta \gg 1$, $k_1\eta \gg 1$, $k_2\eta \gg 1$, une fois le mode décroissant du premier ordre négligeable, $\Psi^{(1)}$ est constant et le terme de source S_m s'écrit

$$S_m = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\Psi_{I,m}^{(1)}(k_1)\Psi_{I,m}^{(1)}(k_2) \frac{14k_1^2k_2^2}{3k^2} \left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2} \right], \quad (6.42)$$

où nous avons utilisé la relation (6.29) valable quand Ψ est constant. On en déduit en utilisant l'expression (6.40) de la fonction de Green pour l'ère de matière que

$$\Psi_S^{(2)} = -\mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\Psi_{I,m}^{(1)}(k_1)\Psi_{I,m}^{(1)}(k_2) \frac{k_1^2k_2^2\eta^2}{3k^2} \left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2} \right]. \quad (6.43)$$

Quant à la solution de l'équation homogène $\Psi_h^{(2)}$, elle est égale à $\Psi_{I,m}^{(2)}$ puisque l'équation homogène ne dépend pas de cette approximation. La solution totale $\Psi_m^{(2)}$ est la somme de $\Psi_h^{(2)}$ et $\Psi_{I,m}^{(2)}$, mais asymptotiquement cette dernière va devenir négligeable. On procède de même que pour l'ère de radiation afin de déduire le comportement asymptotique de $\delta^{(2)}$. Nous pouvons négliger le terme de source de l'équation de Poisson (6.3), qui est de l'ordre de $k^2\Psi^{(1)2}$,

devant $\Delta\Psi^{(2)}$ et $\bar{\rho}\delta^{(2)}$ qui sont de l'ordre de $k^2(k\eta)^2\Psi^{(1)2}$. On en déduit alors le comportement asymptotique du contraste de densité par

$$\delta_m = -\frac{1}{6}(k\eta)^2\Psi_m \quad (6.44)$$

valable à la fois pour le premier et le second ordre. Ceci nous permet alors de retrouver le résultat standard de l'effondrement gravitationnel en régime Newtonien [Bernardeau *et al.* 02]

$$\frac{1}{2}\delta_m^{(2)} = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + \frac{2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{7k_1^2 k_2^2} \right] \delta_m^{(1)}(k_1) \delta_m^{(1)}(k_2). \quad (6.45)$$

6.2.5 Transition radiation-matière

Nous décrivons la transition radiation-matière comme nous l'avons fait au premier ordre en la paramétrant par le facteur d'échelle normalisé à l'unité à l'égalité y . L'équation (2.57) au second ordre s'écrit

$$\frac{d^2\Psi^{(2)}}{dy^2} + \frac{6+7y}{2y(1+y)} \frac{d\Psi^{(2)}}{dy} + \frac{1}{y} \frac{d\Phi^{(2)}}{dy} + \frac{2}{3(1+y)k_{\text{eq}}^2} k^2 \Psi^{(2)} + \frac{\Omega_m}{2y^2} \delta_m^{(2)} + \frac{1}{y(1+y)} \Phi^{(2)} = S_{rm}, \quad (6.46)$$

avec

$$S_{rm} = \frac{2}{1+y} \left(S_2 - \frac{S_1}{3} - \frac{k^2 S_3}{3} \right), \quad (6.47)$$

où $\Phi^{(2)}$ est relié à $\Psi^{(2)}$ grâce à l'équation (6.5). Comme au premier ordre, il faut déterminer le contraste de densité afin de pouvoir intégrer cette équation. L'équation de conservation et l'équation d'Euler au second ordre peuvent être combinées afin de donner

$$\frac{d^2\delta_m^{(2)}}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m^{(2)}}{dy} - 3 \frac{d^2\Psi^{(2)}}{dy^2} - \left[\frac{6+9y}{2y(1+y)} \right] \frac{d\Psi^{(2)}}{dy} + \frac{2k^2}{(1+y)k_{\text{eq}}^2} \Phi^{(2)} = S_{\delta_m}, \quad (6.48)$$

avec

$$S_{\delta_m} \equiv \frac{\sqrt{2}}{k_{\text{eq}}\sqrt{1+y}} \left(\frac{dS_c}{dy} + \frac{S_c}{y} \right) + \frac{2k^2}{k_{\text{eq}}^2(1+y)} S_e. \quad (6.49)$$

De façon similaire au premier ordre nous avons un système d'équations différentielles couplées. De plus, il nous faut déterminer des conditions initiales pour $\delta_m^{(2)}$. Le mélange de fluides parfaits n'étant pas a priori parfait, on suppose de plus que le mélange du fluide de radiation et du fluide de matière se comportent comme un seul fluide parfait jusqu'au second ordre, c'est-à-dire que le fluide total dont les quantités thermodynamiques sont données par les relations (2.47) satisfait

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{dP}{d\rho} \delta\rho + \frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\rho^2} (\delta\rho)^2 \\ &= c_s^2 \delta\rho + \frac{1}{2} \frac{dc_s^2}{d\rho} (\delta\rho)^2, \end{aligned} \quad (6.50)$$

où c_s est donné dans les relations (2.55). On obtient alors que les contrastes de densité doivent satisfaire la condition d'adiabaticité donnée par

$$\frac{\delta_r^{(1)}}{4} = \frac{\delta_m^{(1)}}{3}, \quad \frac{\delta_r^{(2)}}{4} = \frac{\delta_m^{(2)}}{3} + \left(\frac{\delta_r^{(1)}}{4} \right)^2. \quad (6.51)$$

On utilisera donc cette condition car on supposera des conditions initiales adiabatiques. On peut montrer en utilisant l'équation de conservation (6.11) que cette condition adiabatique est conservée aux échelles super-Hubble.

Nous allons étudier plus particulièrement des modes rentrés sous l'horizon suffisamment avant l'égalité pour que le potentiel $\Psi^{(2)}$ créé par le contraste de densité dû à la radiation soit devenu plus faible que celui dû à la matière froide. Il s'agit donc d'établir l'effet Mészáros au second ordre. Dans ce cadre d'approximation, l'équation de Poisson se réduit à

$$k^2 \Phi^{(2)} \simeq k^2 \Psi^{(2)} \simeq -\frac{3}{4y} k_{\text{eq}}^2 \delta_m^{(2)}. \quad (6.52)$$

On a négligé S_1 dans cette relation car les termes dominants de S_1/k_{eq}^2 sont de l'ordre de $(k_{\text{eq}}/k)^2 \ll 1$. Quant aux contributions dominantes de S_{δ_m} , elles proviennent de

$$S_c \simeq -2\partial_i (\delta \partial^i v), \quad \partial_i S_e \simeq -2 (\partial_j v \partial^j \partial_i v), \quad (6.53)$$

et contribuent de l'ordre de $(k_{\text{eq}}/k)^0$ à S_{δ_m} . Finalement l'équation de Mészáros au second ordre s'écrit

$$\frac{d^2 \delta_m^{(2)}}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m^{(2)}}{dy} - \frac{3}{2y(1+y)} \delta_m^{(2)} = S_M, \quad (6.54)$$

avec (en notant $\delta \equiv \delta_m^{(1)}$ et $\dot{\delta} \equiv \frac{d\delta}{dy}$ pour simplifier)

$$S_M = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left\{ \left[2\delta\ddot{\delta} + 2\dot{\delta}^2 + \frac{\delta\dot{\delta}}{y(1+y)} \right] + \left[\delta\ddot{\delta} + 2\dot{\delta}^2 + \frac{\delta\dot{\delta}}{2y(1+y)} \right] \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + 2 \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2 k_2^2} \dot{\delta}^2 \right\}. \quad (6.55)$$

L'équation de Green associée à l'équation (6.54) est

$$G(y, y') = \frac{3}{2} y' \sqrt{1+y'} (2+3y)(2+3y') \left\{ \frac{\sqrt{1+y}}{2+3y} - \frac{\sqrt{1+y'}}{2+3y'} + \frac{1}{6} \ln \left[\frac{(\sqrt{1+y'}+1)(\sqrt{1+y}-1)}{(\sqrt{1+y'}-1)(\sqrt{1+y}+1)} \right] \right\}. \quad (6.56)$$

La limite asymptotique quand $y \gg 1$, $y' \gg 1$ de la fonction de Green est

$$G(y, y') \simeq \frac{2}{5} y \left[1 - \left(\frac{y'}{y} \right)^{5/2} \right], \quad (6.57)$$

tandis que la limite asymptotique de S_M s'obtient en utilisant $\delta\ddot{\delta} \ll \dot{\delta}^2$ et $\dot{\delta} \sim \delta/y$

$$S_M \simeq \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) 7 \left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] \frac{\delta(k_1) \delta(k_2)}{y^2}. \quad (6.58)$$

On retrouve bien à partir de ces deux limites le comportement asymptotique sous l'horizon en ère de matière donné par l'équation (6.45). Proche de l'équivalence cette limite asymptotique n'est évidemment pas valable.

6.2.6 Intéractions baryons-photons

Nous venons donc de voir qu'au second ordre pour des modes sub-Hubble, le potentiel $\Psi^{(2)} \simeq \Phi^{(2)}$ est croissant à cause de l'effondrement de la matière noire froide, et de plus se nourrit des perturbations du premier ordre qui ont subi une croissance logarithmique à la fin de l'ère de radiation. Dans les termes du second ordre, on s'attend donc à ce que les termes quadratiques dans les variables de perturbation du premier ordre soient de magnitude inférieure au potentiel du second ordre. Nous allons donc étudier de plus près le système couplé baryons-photons pour les modes tels que $k/k_{\text{eq}} \gg 1$, en supposant que les caractéristiques dominantes du potentiel du second ordre sont dues à l'effondrement de la matière noire froide. Les baryons étant minoritaires dans la matière totale, cette approximation est justifiée si l'on désire comprendre la forme des solutions numériques de ce problème. Nous allons donc négliger tous les termes quadratiques dans les variables de perturbation du premier ordre dans les équations de conservations et d'Euler. On pose de même qu'au premier ordre $\mathcal{Q}^{(2)} = \frac{\delta_r^{(2)}}{4} - \Psi^{(2)}$, dont l'équation d'évolution est donnée d'après l'approximation faite par

$$[(1+R)\mathcal{Q}^{(2)}]' + \frac{k^2}{3}\mathcal{Q}^{(2)} \simeq -\frac{k^2}{3}(2+R)\Phi^{(2)}. \quad (6.59)$$

La différence essentielle par rapport au premier ordre réside dans le fait que $\Psi^{(2)}$ ne peut plus être supposé constant mais est au contraire croissant comme $(k\eta)^2$. Le système possède donc la même analogie qu'au premier ordre sauf qu'une solution WKB ne va plus être possible dans le cas où l'amplitude de $\mathcal{Q}^{(2)}$ est de l'ordre de celle de $\Phi^{(2)}$. Il s'agit d'un système largement forcé dont le comportement est approximativement

$$\mathcal{Q}^{(2)} \simeq -(2+R)\Phi^{(2)} + \frac{6(1+R)(2+R)}{(k\eta)^2}\Psi^{(2)} + \mathcal{O}[1/(k\eta)^4]. \quad (6.60)$$

De même, la version au second ordre de l'équation (2.91) est dans ce cadre d'approximation à l'ordre le plus bas dans le paramètre de couplage fort

$$[(1+R)v_r^{(2)}]' = -\frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{4} - (2+R)\Phi^{(2)}. \quad (6.61)$$

On en déduit l'ordre de grandeur de $v_r^{(2)}$

$$kv_r^{(2)}(y) \simeq -\frac{3(2+R)k_{\text{eq}}}{k\sqrt{2y}}\Psi^{(2)}. \quad (6.62)$$

On rappelle que cette solution n'est valable que lorsque le potentiel au second ordre dirige les oscillations baryoniques. En pratique, l'intervalle de temps entre l'équivalence et la recombinaison ($y_{\text{LSS}} \simeq 3.3$) n'est pas assez grand pour que ce régime soit atteint, même en considérant la pression anisotrope, sauf pour des modes plus grands que k_D .

6.2.7 Physique du fond diffus cosmologique

Nous suivons la même démarche qu'à l'ordre linéaire. La perturbation de l'énergie d'un photon se définit alors jusqu'au second ordre par $\mathcal{E} \equiv \bar{\mathcal{E}}(1 + \delta_{\mathcal{E}}) \equiv \bar{\mathcal{E}}\left(1 + \delta_{\mathcal{E}}^{(1)} + \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{E}}^{(2)}\right)$. On obtient par le même type de raisonnement qu'au premier ordre [Mollerach & Matarrese 97]

$$\delta_{\mathcal{E}}^{(2)} = \left[\delta_E^{(2)} + \Phi^{(2)} - \bar{e}_i v_b^{i(2)} - 2\Phi^2 + 2v_i v^i - 2v_i \delta e^i - 4E_{ij} v^j \bar{e}^i + 4\Psi v_i \bar{e}^i \right]. \quad (6.63)$$

Tout d'abord la perturbation de température sera définie de la même façon que pour la théorie linéaire en utilisant la loi (3.9). Au second ordre on obtient donc que la température est définie à partir du contraste de densité d'énergie selon

$$\Theta^{(2)}[\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\eta_{\text{LSS}})] = \delta_r^{(2)}[\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\eta_{\text{LSS}})]/4 - \frac{3}{16}\delta_r^{(1)2}[\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\eta_{\text{LSS}})], \quad (6.64)$$

même si la distribution des fréquences ne suit pas nécessairement celle d'un corps noir. Afin de relier $\delta_{\mathcal{E}}^{(2)}$ à l'émission avec sa valeur à la réception, il faudra suivre la même démarche mais en tenant compte des difficultés suivantes. Tout d'abord le point d'intersection entre la géodésique suivie par un photon et la surface de dernière diffusion, de coordonnées $[\eta_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\eta_{\text{LSS}})]$ n'est pas confondu avec le point d'intersection de la géodésique avec la surface de dernière diffusion moyenne de coordonnées $[\bar{\eta}_{\text{LSS}}, \mathbf{x}(\bar{\eta}_{\text{LSS}})]$. Il faut le prendre en compte si l'on souhaite se ramener à la surface définie par $\bar{\eta}_{\text{LSS}}$. De plus il faudra tenir compte du fait que la géodésique au premier ordre se distingue de la géodésique obtenue à l'ordre le plus bas dans l'équation (3.6), ce qui en plus d'affecter le point d'intersection avec la surface de dernière diffusion va modifier l'intégration de la version au second ordre de l'équation (3.4). En effet, les variables du premier ordre seront à évaluer sur la trajectoire du premier ordre. De plus, si on intègre le long des géodésiques avec le paramètre affine λ , il faudra tenir compte du $\Delta\lambda$ nécessaire pour partir de la surface de dernière diffusion jusqu'à arriver à l'observateur. Ceci peut être contourné en paramétrant la géodésique par η . Enfin cette méthode repose sur le fait que le spectre de corps noir n'est pas modifié, c'est-à-dire que les interactions fortes avec les baryons ainsi que le libre parcours sur une géodésique affecte de la même manière des photons ayant des énergies différentes (le rapport de leurs énergies reste constant). Ceci est vérifié pour ce qui concerne le parcours sur des géodésiques nulles mais n'est pas a priori vérifié en ce qui concerne les interactions avec les baryons. Au premier ordre, les diffusion Compton avec les électrons ne changent pas l'énergie des photons et il est justifié de caractériser la distribution des photons par une température de corps noir. En revanche ce n'est plus le cas au second ordre où il y a une distorsion spectrale même dans la limite de la diffusion Thomson, qui pourtant n'induit pas de distorsion spectrale dans le référentiel des baryons, mais induit tout de même une distorsion spectrale une fois ramené au référentiel des observateurs comobiles [Dodelson & Jubas 95, Bartolo *et al.* 06]. Parler de température n'a de sens que via l'énergie totale et l'équation (3.9) qui constitue alors une définition de la température, sans qu'elle puisse être associée à un corps noir. Cette approche, essentiellement Lagrangienne, qui consiste à intégrer selon les cônes de lumière est donc complexe, tandis que la théorie cinétique, qui consiste à regarder un point de l'espace l'évolution de la fonction de distribution, ce qui est une approche Eulerienne me semble plus prometteuse au second ordre, et permet de décrire correctement la recombinaison.

Cependant aux grandes échelles (super-Hubble) on peut négliger la vitesse des baryons et donc la distorsion spectrale. De plus la variation du contraste de densité d'énergie lorsque la radiation peut être traitée comme un fluide pendant un temps $\Delta\eta$ est jusqu'au second ordre donnée par $\delta'\Delta\eta$. Or toujours dans la limite super-Hubble, la variation du contraste de température pendant ce même temps le long d'une géodésique est jusqu'au second ordre $-\Psi'\Delta\eta$ d'après l'équation (3.8) évaluée pendant le temps $\Delta\eta$. On en déduit que pour une distribution de corps noir, le contraste de densité d'énergie lorsque les photons sont en propagation libre évolue pendant un temps $\Delta\eta$ selon $-4\Psi'\Delta\eta$ (jusqu'au second ordre). Comme on sait que $\delta' - 4\Psi' \simeq 0$ aux échelles super-Hubble d'après l'équation de conservation (2.25), peu importe qu'on ne sache pas exactement où se situe la surface de dernière diffusion ni son épaisseur au premier ordre

dans les perturbations de la coordonnée temps, puisque le fluide de radiation ou l'ensemble des photons en propagation libre donnent la même évolution du contraste de densité d'énergie. On peut donc considérer pour des échelles super-Hubble que la surface de dernière diffusion n'est pas perturbée² et correspond partout au temps $\bar{\eta}_{\text{LSS}}$. Ceci n'est évidemment plus valable si on ne considère plus des échelles super-Hubble et l'équation (6) de [Bartolo *et al.* 04c] n'a donc de sens que pour des modes super-Hubble. Étant données ces considérations, le contraste de température aux grandes échelles en ne prenant en compte aucun effet intégré³ est donné par [Bartolo *et al.* 04c, Mollerach & Matarrese 97, Pyne & Carroll 96]

$$\Theta^{(2)} = \Phi^{(2)} - \Phi^{(1)2} + \frac{1}{4}\delta_r^{(2)} - \frac{3}{16}\delta_r^{(1)2} + \frac{1}{2}\Phi^{(1)}\delta_r^{(1)}, \quad (6.65)$$

où le membre de droite est à évaluée sur la surface de dernière diffusion de l'espace de fond. Nous utiliserons ce résultat dans la section 7.5.2, lorsque nous chercherons à caractériser la non-gaussianité dans le CMB aux grandes échelles.

6.3 Théorie cinétique au second ordre

Nous suivons la même démarche qu'au premier ordre et l'étendons au second ordre. Nous étudions donc l'équation géodésique au second ordre puis le terme de Liouville de l'équation de Boltzmann. Cette approche est nouvelle puisqu'elle est basée sur l'utilisation de tétrades tout au long du calcul, et correspond au calcul détaillé de la dérivation de l'équation de Boltzmann que nous avons présenté dans la section 5.2. Nous considérons le cas général où les particules peuvent éventuellement être massives sans être pour autant non-relativistes.

6.3.1 Équation des géodésiques

On obtient d'après l'équation géodésique (3.41)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(2)} &= \pi^0 \left[-n^i \partial_i \Phi^{(2)} + \Psi^{(2)'} n^i n_i - E_{ij}^{(2)'} n^i n^j \right. \\ &\quad + 2(\Phi - \Psi) n^i \partial_i \Phi + 2n^i E_{ik} \partial^k \Phi \\ &\quad \left. + 4n^i n^j \left(E'_{k(i} E^k_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij} + \Psi \Psi' \delta_{ij} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.66)$$

On rappelle que le développement utilisé est

$$\left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right) = \left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(0)} + \left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(2)} + \dots \quad (6.67)$$

²Nous l'avons expliqué jusqu'au second ordre mais on s'attend à ce que ce résultat soit valable à tout ordre. En effet dans le formalisme 1 + 3, l'évolution du fluide de radiation est donnée par $\dot{\rho} + \frac{4}{3}\Theta\rho = 0$ tandis que pour un photons de direction e^μ la variation de son énergie dans la direction $u^\mu + e^\mu$ est donnée par $\frac{1}{E}(u^\mu + e^\mu)\nabla_\mu E = -\frac{\Theta}{3} - \sigma_{\mu\nu}e^\mu e^\nu$. Pour des échelles super-Hubble on négligera le terme $e^\mu\nabla_\mu$. Alors, on en déduira les propriétés de la densité d'énergie correspondante en utilisant $\rho = \int f(E, \mathbf{e})E^3 dE d^2\mathbf{e}$ (voir la section suivante). Pour une fonction de distribution de corps noir (vue dans le référentiel comobile avec u^μ), on en déduira que la densité d'énergie correspondante évolue de la même façon que le fluide de radiation, puisque par isotropie des directions des photons, la moyenne sur toutes les directions de $\sigma_{\mu\nu}e^\mu e^\nu$ va être nulle.

³On s'attend à ce que les effets intégrés contribuent aux petites échelles sauf pour le cas de l'effet Sachs-Wolfe tardif dû à la présence d'une constante cosmologique. Nous négligeons donc ces effets intégrés, mais il reste à montrer rigoureusement que cela est correct.

Nous précisons les variables qui sont du second ordre en perturbations mais pas celles qui sont du premier ordre en perturbations afin de simplifier les notations. Les variables du premier ordre apparaissent uniquement sous forme quadratique et il n'y a donc pas de confusion possible.

On peut récrire l'équation (6.66) sous la forme

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\pi^0}{d\eta}\right)^{(2)} &= \pi^0\beta \left[-\hat{n}^i\partial_i\Phi^{(2)} + \beta \left(\Psi^{(2)'} - E_{ij}^{(2)'}\hat{n}^i\hat{n}^j \right) \right. \\ &\quad + 2(\Phi - \Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi \\ &\quad \left. + 4\beta\hat{n}^i\hat{n}^j \left(E'_{k(i}E^k_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij} \right) + 4\beta\Psi\Psi' \right], \end{aligned} \quad (6.68)$$

le cas de la radiation correspondant à $\beta = 1$. L'évolution de la norme de la vitesse se déduit de la même manière que pour l'équation (3.52). On remarque que pour les particules complètement froides, c'est-à-dire sans impulsion ($\beta = 0$), l'énergie est conservée à tout ordre comme on peut le constater sur l'expression générale de l'équation géodésique (3.41) évaluée pour une particule satisfaisant $\pi^i = 0$. Dans ce cas, l'énergie se réduisant à l'énergie de masse, cela traduit uniquement le fait que la masse de la particule est conservée, ce qui était une hypothèse.

6.3.2 Terme de Liouville

L'équation de déviation au premier ordre (3.54) est suffisante car la fonction de distribution de fond ne dépend pas des directions des particules mais seulement du module de leurs impulsions. On utilise également

$$\left(\frac{dx^i}{d\eta}\right)^{(1)} = \left(\frac{p^i}{p^0}\right)^{(1)} = n^i(\Phi + \Psi) - E^i_j n^j, \quad (6.69)$$

pour obtenir dans le cas général

$$\begin{aligned} L^{(2)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\eta} + \beta\hat{n}^j\partial_j\delta^{(2)}f - \mathcal{H}\pi^0\beta^2\frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\pi^0} \\ &\quad + \left[-\hat{n}^j\partial_j\Phi^{(2)} + \beta \left(\Psi^{(2)'} - E_{ij}^{(2)'}\hat{n}^i\hat{n}^j \right) \right] \beta\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0} \\ &\quad + 2\beta \left[\hat{n}^i(\Phi + \Psi) - E^i_j\hat{n}^j \right] \partial_i\delta^{(1)}f + 2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^0}\pi^0\beta \left[-\hat{n}^i\partial_i\Phi + \beta(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j) \right] \\ &\quad - 2 \left[\perp^{ij} \left(\beta\partial_j\Psi + \frac{1}{\beta}\partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k \right) + 2\beta\partial^{[i}E_{k]j}\perp^{jk} \right] \frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\hat{n}^i} \\ &\quad + \left[2(\Phi - \Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi + 4\beta\hat{n}^i\hat{n}^j \left(E'_{k(i}E^k_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij} \right) + 4\beta\Psi\Psi' \right] \beta\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Cette formulation présente l'avantage de séparer clairement la dépendance dans la direction \hat{n}^i des particules et celle dans leur énergie π^0 . On relie ensuite la dépendance en énergie à la dépendance dans la norme de l'impulsion ($\beta\pi^0$) en utilisant $\frac{d\pi^0}{d(\beta\pi^0)} = \beta$. Si enfin on souhaite exprimer les dérivées partielles en fonction de l'impulsion $\pi^i = \beta\pi^0\hat{n}^i$, on utilisera $\frac{\partial f}{\partial\hat{n}^i} = \frac{\partial f}{\partial\pi^i}\beta\pi^0$.

et $\frac{\partial f}{\partial(\beta\pi^0)} = \frac{\partial f}{\partial\pi^i} \hat{n}^i$. On peut alors mettre l'équation de Boltzmann sous la forme

$$\begin{aligned}
L^{(2)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\eta} + \beta\hat{n}^j\partial_j\delta^{(2)}f - \mathcal{H}\pi^i\frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\pi^i} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{\beta}\hat{n}^j\partial_j\Phi^{(2)} + \left(\Psi^{(2)'} - E_{ij}^{(2)'}\hat{n}^i\hat{n}^j \right) \right] \pi^k \frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^k} \\
&\quad + 2\beta \left[\hat{n}^i(\Phi + \Psi) - E_{ij}^i\hat{n}^j \right] \partial_i\delta^{(1)}f + 2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^i} \pi^i\Psi' \\
&\quad - 2 \left[\beta^2 \perp^{ij} \partial_j\Psi + \partial_i\Phi + \beta E'_{ik}\hat{n}^k + 2\beta^2\partial^{[i}E_{k]j} \perp^{jk} \right] \frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^i} \pi^0 \\
&\quad + \left[\frac{2}{\beta}(\Phi - \Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + \frac{2}{\beta}\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi + 4\hat{n}^i\hat{n}^j \left(E'_{k(i}E^k_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij} \right) + 4\Psi\Psi' \right] \pi^i \frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^i}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Cette formulation est plus pratique lorsque l'on veut intégrer l'équation de Boltzmann sur $d^3\pi^i$, car il suffit alors de faire de simples intégrations par parties.

Le cas de la radiation auquel nous nous intéressons plus particulièrement s'écrit en prenant $\beta = 1$

$$\begin{aligned}
L^{(2)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\eta} + \hat{n}^j\partial_j\delta^{(2)}f - \mathcal{H}\pi^0\frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\pi^0} + \left[-\hat{n}^j\partial_j\Phi^{(2)} + \left(\Psi^{(2)'} - E_{ij}^{(2)'}\hat{n}^i\hat{n}^j \right) \right] \pi^0 \frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0} \\
&\quad + 2 \left[\hat{n}^i(\Phi + \Psi) - E_{ij}^i\hat{n}^j \right] \partial_i\delta^{(1)}f + 2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^0} \pi^0 \left[-\hat{n}^i\partial_i\Phi + (\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j) \right] \\
&\quad - 2 \left[\perp^{ij} \left(\partial_j\Psi + \partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k \right) + 2\partial^{[i}E_{k]j} \perp^{jk} \right] \frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\hat{n}^i} \\
&\quad + \left[2(\Phi - \Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi + 4\hat{n}^i\hat{n}^j \left(E'_{k(i}E^k_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij} \right) + 4\Psi\Psi' \right] \pi^0 \frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0}.
\end{aligned} \tag{6.72}$$

6.3.3 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations

Dans le cas de la radiation, on mesure l'énergie intégrée dans toutes les longueurs d'onde. On définit donc la brillance ordre par ordre par

$$\mathcal{I}^{(n)}(x^\mu, n^i) \equiv 4\pi \int \delta^{(n)}f(x^\mu, \pi^0, n^i)\beta(\pi^0)^3 d\pi^0. \tag{6.73}$$

Pour le second ordre on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + n^i\partial_i \right) \frac{\mathcal{I}^{(2)}}{4} + \mathcal{H}\mathcal{I}^{(2)} + \bar{\mathcal{I}}n^i\partial_i\Phi^{(2)} - \bar{\mathcal{I}} \left(\Psi^{(2)'} - E_{ij}^{(2)'}\hat{n}^i\hat{n}^j \right) \\
&- \frac{1}{2} \left[\perp^{ij} \left(\partial_j\Psi + \partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k \right) + 2\partial^{[i}E_{k]j} \perp^{jk} \right] \frac{\partial\mathcal{I}^{(1)}}{\partial n^i} \\
&- \bar{\mathcal{I}} \left[2(\Phi - \Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi + 4\hat{n}^i\hat{n}^j \left(E'_{k(i}E^k_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij} \right) + 4\Psi\Psi' \right] \\
&- 2\mathcal{I}^{(1)} \left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j - n^j\partial_j\Phi \right) + \frac{1}{2} \left[(\Phi + \Psi)n^i - E_{ij}^i\hat{n}^j \right] \partial_i\mathcal{I}^{(1)} = \frac{1}{4}C^{(2)}[\mathcal{I}]. \tag{6.74}
\end{aligned}$$

Nous n'avons pas encore déterminé le terme de collision au second ordre. Une étude a déjà été réalisée dans [Bartolo *et al.* 06]. L'étape suivante consiste à trouver des méthodes efficaces numériquement pour intégrer l'équation de Boltzmann au second ordre une fois décomposée en multipôles. Une étape intermédiaire permettant de capturer l'essentiel de la physique consistera à d'abord en considérer la limite fluide.

6.3.4 Limite fluide de l'équation de Boltzmann

En négligeant la pression anisotrope, et en définissant une approximation de fluide parfait à partir du tenseur énergie-impulsion, on retrouve l'équation de conservation puis l'équation d'Euler, depuis les deux moments les plus bas de l'équation de Boltzmann, ce qui est attendu puisque nous avons montré dans la section 3.3.7 que la théorie cinétique impliquait la conservation du tenseur énergie-impulsion. Cependant une telle méthode fera apparaître la vitesse dans la base de tétrades $U^a e_a$, et si l'on souhaite retrouver les équations (6.11-6.12), il faudra effectuer le changement de base. Cette démarche est détaillée dans [Pitrou 07]. Quant aux conséquences observationnelles sur la surface de dernière diffusion qui peuvent être tirées de cette approximation, nous les aborderons au chapitre suivant. Auparavant, tout comme au premier ordre, il nous faut déterminer les conditions initiales loin dans l'ère de radiation. Celles-ci résultant de la phase d'inflation primordiale, nous devons étudier les effets non-linéaires pendant l'inflation et ceci est également traité dans le chapitre suivant.

Chapitre 7

L'inflation au delà de l'ordre linéaire et signature à grande échelle

Sommaire

7.1	Généralités	127
7.2	Ondes gravitationnelles générées par des effets de second ordre pendant l'inflation (article)	128
7.3	Le formalisme in-in	155
7.4	Perturbations scalaires générées au second ordre	155
7.5	Les signatures observationnelles	156
7.5.1	Statistiques sur des champs	156
7.5.2	Le bispectre aux grandes échelles	158

7.1 Généralités

Dans le modèle le plus simple d'inflation à un champ en roulement lent, on ne peut avoir que de très faibles niveaux de non-gaussianité. En effet, afin d'avoir un roulement lent le potentiel doit être suffisamment plat ce qui limite considérablement l'amplitude des termes quadratiques. On montre ainsi [Bernardeau & Uzan 02, Maldacena 03] que le paramètre caractérisant la non-gaussianité, f_{NL} , est nécessairement de l'ordre des paramètres de roulement lent. Les modèles d'inflation pouvant générer des taux significatifs de non-gaussianité font nécessairement intervenir un contenu matériel plus sophistiqué, par exemple avec plusieurs champs couplés, un terme cinétique non standard, ou bien permettant de ne pas être toujours en roulement lent grâce à un potentiel bien spécifique. Nous avons vu que pour des perturbations adiabatiques, la perturbation de courbure comobile était conservée ce qui revient à établir une loi de conservation pour l'ordre de grandeur des non-gaussianités. Lorsqu'il y a plusieurs champs, il existe un degré de liberté qui n'est pas adiabatique, dit isocourbure, si bien que cela relâche cette contrainte sur le taux de non-gaussianité. On peut ainsi construire un modèle d'inflation à deux champs exploitant ce degré de liberté isocourbure avant de revenir à des perturbations

adiabatiques [Bernardeau & Uzan 02]. Dans ce cas on peut obtenir de façon générique une non-gaussianité très forte, souvent non paramétrisable par le paramètre f_{NL} . Une autre source de non-gaussianité primordiale se situe pendant le réchauffement, c'est-à-dire lors de la transition entre la fin de l'inflation et l'ère dominée par la radiation [Bartolo *et al.* 04a]. En effet, les champs présents pendant l'inflation doivent se désintégrer en d'autres champs, éventuellement ceux du modèle standard des particules. Ce processus, appelé réchauffement, peut éventuellement générer des non-gaussianités via une désintégration inhomogène du champ scalaire [Kofman 03, Bernardeau *et al.* 04b]. Il existe deux manières de traiter les effets non-linéaires pendant l'inflation. Soit on traite quantiquement les perturbations linéaires comme dans le modèle standard de l'inflation, pour ensuite considérer les effets non-linéaires dans les équations d'Einstein, en remplaçant les variables de premier ordre par des variables stochastiques. Soit on traite les termes non-linéaires quantiquement dès le début afin d'être plus cohérent dans la démarche, et alors les termes non-linéaires sont pris en compte en utilisant la représentation en interaction de la théorie quantique. La première approche est celle qui a été considérée dans [Rigopoulos *et al.* 06a, Rigopoulos *et al.* 06b], tandis que la seconde approche est considérée dans [Maldacena 03, Seery & Lidsey 05b, Seery & Lidsey 05a, Chen *et al.* 06, Chen *et al.* 08]. Dans le cas d'un champ test, on peut montrer que ces deux approches donnent les mêmes résultats pour les échelles super-Hubble [Bernardeau *et al.* 04a].

7.2 Ondes gravitationnelles générées par des effets de second ordre pendant l'inflation (article)

Nous allons présenter dans l'article qui suit les résultats obtenus à propos des ondes gravitationnelles générées au second ordre lorsque l'on traite l'interaction au second ordre de façon classique. Nous montrerons alors que la dépendance en \mathbf{k}_i est différente du traitement complètement quantique, tandis que l'ordre de grandeur en fonction des paramètres de roulement lent ainsi qu'en fonction de l'échelle d'inflation H est le même. Ce résultat était déjà connu pour les perturbations scalaires [Rigopoulos *et al.* 05, Acquaviva *et al.* 03]. On montre ainsi que le bispectre avec un degré de liberté tensoriel et deux degrés de libertés scalaires, $\langle E\mathcal{R}\mathcal{R} \rangle$ est de même amplitude que le bispectre à trois scalaires $\langle \mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R} \rangle$. Nous effectuons également une comparaison du formalisme en coordonnées avec le formalisme $1+3$. Nous montrons que lorsque l'on développe le formalisme $1+3$ autour d'un espace homogène et isotrope, on retrouve les résultats de l'approche en coordonnées. Cependant nous montrons que la notion d'onde gravitationnelle est dépendante de l'approche, selon qu'on la définit à partir d'observateurs de l'espace physique ou à partir d'observateurs (fictifs) de l'espace de fond. Ceci peut avoir une importance pour montrer la correspondance formelle entre les deux formalismes.

Gravitational waves generated by second order effects during inflation

Bob Osano¹, Cyril Pitrou², Peter Dunsby^{1,3},
Jean-Philippe Uzan² and Chris Clarkson^{1,4}

¹ Cosmology and Gravity Group, Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, Rondebosch 7701, South Africa

² Institut d'Astrophysique de Paris, Université Pierre et Marie Curie—Paris VI, CNRS-UMR 7095, 98 bis, Boulevard Arago, 75014 Paris, France

³ South African Astronomical Observatory, Observatory 7925, Cape Town, South Africa

⁴ Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Mercantile House, Portsmouth PO1 2EG, UK

E-mail: bob.osano@uct.ac.za, pitrou@iap.fr, peter.dunsby@uct.ac.za, uzan@iap.fr and chris.clarkson@uct.ac.za

Received 5 January 2007

Accepted 15 March 2007

Published 5 April 2007

Online at stacks.iop.org/JCAP/2007/i=04/a=003

doi:10.1088/1475-7516/2007/04/003

Abstract. The generation of gravitational waves during inflation due to the non-linear coupling of scalar and tensor modes is discussed. Two methods describing gravitational wave perturbations are used and compared: a covariant and local approach, as well as a metric based analysis based on the Bardeen formalism. An application to slow-roll inflation is also described.

Keywords: cosmological perturbation theory, gravity waves/theory, inflation

ArXiv ePrint: [gr-qc/0612108](http://arxiv.org/abs/gr-qc/0612108)

Contents

1. Introduction	2
2. Scalar field dynamics	4
2.1. Kinematical quantities	5
2.2. Fluid description of a scalar field	6
2.3. Background equations	7
3. Gravitational waves from density perturbations: covariant formalism	7
3.1. First order equations	7
3.2. Gravitational waves from density perturbations	9
3.3. Propagation equation	10
4. Gravitational waves from density perturbations: coordinate based approach	12
4.1. Scalar modes	13
4.2. Gravitational waves at linear order	14
4.3. Gravitational waves from density perturbations	15
5. Comparison of the two formalisms	16
5.1. Matching at linear order	17
5.2. Matching at second order	18
5.3. Discussion	19
6. Illustration: slow-roll inflation	20
6.1. Slow-roll inflation	20
6.2. Gravitational waves at second order	22
6.3. Expression for $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E},\mathcal{R}\mathcal{R}}$	22
6.4. Orders of magnitude	23
7. Conclusions	24
Acknowledgment	25
References	25

1. Introduction

The generation of gravitational waves (GW) is a general prediction of an early inflationary phase [1]. Their amplitude is related to the energy scale of inflation and they are potentially detectable via observations of B -mode polarization in the cosmic microwave background (CMB) if the energy scale of inflation is larger than $\sim 3 \times 10^{15}$ GeV [2]–[6]. Such a detection would be of primary importance for testing inflationary models.

Among the generic predictions of one field inflation [7] are the existence of (adiabatic) scalar and tensor perturbations of quantum origin with an almost scale invariant power spectrum and Gaussian statistics. Even if non-linear effects in the evolution of perturbations are expected, a simple calculation [8], confirmed by more detailed analysis [9], shows that it is not possible to produce large non-Gaussianity within

single field inflation as long as the slow-roll conditions are preserved throughout the inflationary stage. Deviations from Gaussianity can be larger in, e.g., multi-field inflation scenarios [8, 10] and are thus expected to give details on the inflationary era.

As far as scalar modes are concerned, the deviation from Gaussianity has been parametrized by a (scale-dependent) parameter, f_{NL} . Various constraints have been set on this parameter, mainly from CMB analysis [12] (see [13] for a review on both theoretical and observational issues). Deviation from Gaussianity in the CMB can arise from primordial non-Gaussianity, i.e. generated during inflation, post-inflation dynamics or radiation transfer [14]. It is important to understand them all in order to track down the origin of non-Gaussianity, if detected.

Among the other signatures of non-linear dynamics is the fact that the scalar–vector and tensor (SVT) modes of the perturbations are no longer decoupled. This implies in particular that scalar modes can generate gravity waves. Also, vector modes, that are usually washed out by the evolution, can be generated. In particular, second order scalar perturbations in the post-inflation era will also contribute to B -mode polarization [15] or to multipole coupling in the CMB [16], and it is thus important to understand this coupling in detail.

In this paper, we focus on the gravitational waves generated from scalar modes via second order dynamics. Second order perturbation theory has been investigated in various works [17]–[25] and a fully gauge invariant approach to the problem was recently given in [25]. Second order perturbations during inflation have also been considered in [9, 26], providing the prediction of the bispectrum of perturbations from inflation.

Two main formalisms have been developed to study perturbations, and hence second order effects: the $1 + 3$ covariant formalism [27] in which exact gauge invariant variables describing the physics of interest are first identified and exact equations describing their time and space evolution are then derived and approximated with respect to the symmetry of the background to obtain results at the desired order, and the coordinate based approach of Bardeen [28] in which gauge invariants are identified by combining the metric and matter perturbations and then equations are found for them at the appropriate order of the calculation. In this paper we carry out a detailed comparison of the two approaches up to second order, highlighting the advantages and disadvantages of each method, thus extending earlier work on the linear theory [29]. Our paper also extends the work of [22], in which the relation between the two formalisms on super-Hubble scales is investigated. In particular, we show that the degree of success of one formalism over the other depends on the problem being addressed. This is the first time a complete and transparent matching of tensor perturbations in the two formalisms at first and second order is presented. We also show, using an analytical argument, that the power spectrum of gravitational waves from second order effects is much smaller than the first order on super-Hubble scales. This is in contrast to the fact that during the radiation era the generation of GW from primordial density fluctuations can be large enough to be detected in principle, though this requires the inflationary background of GW to be sufficiently small [23].

This paper is organized as follows. We begin by reviewing scalar field dynamics in section 2 within the $1 + 3$ covariant approach. In section 3, we formulate the problem within the covariant approach followed by a reformulation in the coordinate approach in section 4. A detailed comparison of the two formalisms is then presented in section 5. In section 6, we study gravitational waves that are generated during the slow-roll period of

inflation. In particular, we introduce a generalization of the f_{NL} parameter to take into account gravity waves and we compute the three point correlator involving one graviton and two scalars. Among all three point functions involving scalar and tensor modes, this correlator and the one involving three scalars are the dominant [9]. Finally, we conclude in section 7.

2. Scalar field dynamics

Let us consider a minimally coupled scalar field with Lagrangian density⁵

$$\mathcal{L}_\phi = -\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi + V(\phi) \right], \quad (1)$$

where $V(\phi)$ is a general (effective) potential expressing the self interaction of the scalar field. The equation of motion for the field ϕ following from \mathcal{L}_ϕ is the Klein–Gordon equation

$$\nabla_a \nabla^a \phi - V'(\phi) = 0, \quad (2)$$

where the prime indicates a derivative with respect to ϕ . The energy–momentum tensor of ϕ is of the form

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla_c \phi \nabla^c \phi + V(\phi) \right]; \quad (3)$$

provided $\phi_{,a} \neq 0$, equation (2) follows from the conservation equation

$$\nabla_b T^{ab} = 0. \quad (4)$$

We shall now assume that in the open region U of space–time that we consider, the *momentum density* $\nabla^a \phi$ is *timelike*:

$$\nabla_a \phi \nabla^a \phi < 0. \quad (5)$$

This requirement implies two features: first, ϕ is not constant in U , and so $\{\phi = \text{constant}\}$ specifies well-defined surfaces in space–time. When this is not true (i.e., ϕ is constant in U), then by (3),

$$\nabla_a \phi = 0 \Leftrightarrow T_{ab} = -g_{ab} V(\phi) \Rightarrow V = \text{constant}, \quad (6)$$

in U , (the last being necessarily true due to the conservation law (4)) and we have an effective cosmological constant in U rather than a dynamical scalar field.

⁵ We use conventions of [30]. Units in which $\hbar = c = k_B = 1$ are used throughout this paper, Latin indices $a, b, c \dots$ run from 0 to 3, whereas Latin indices $i, j, k \dots$ run from 1 to 3. The symbol ∇ represents the usual covariant derivative and ∂ corresponds to partial differentiation. Finally the Hilbert–Einstein action in presence of matter is defined by

$$\mathcal{A} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_\phi \right].$$

2.1. Kinematical quantities

Our aim is to give a formal description of the scalar field in terms of fluid quantities; therefore, we assign a 4-velocity vector u^a to the scalar field itself. This will allow us to define the dot derivative, i.e. the *proper time* derivative along the flow lines: $\dot{T}^{a\dots b}{}_{c\dots d} \equiv u^e \nabla_e T^{a\dots b}{}_{c\dots d}$. Now, given the assumption (5), we can choose the 4-velocity field u^a as the unique timelike vector with unit magnitude ($u^a u_a = -1$) parallel to the normals of the hypersurfaces $\{\phi = \text{constant}\}$ [31]⁶,

$$u^a \equiv -\psi^{-1} \nabla^a \phi, \quad (7)$$

where we have defined the field $\psi = \dot{\phi} = (-\nabla_a \phi \nabla^a \phi)^{1/2}$ to denote the magnitude of the momentum density (simply momentum from now on). The choice (7) defines u^a as the unique timelike eigenvector of the energy–momentum tensor (3).⁷

The kinematical quantities associated with the ‘flow vector’ u^a can be obtained by a standard method [33, 34]. We can define a projection tensor into the tangent 3-spaces orthogonal to the flow vector:

$$h_{ab} \equiv g_{ab} + u_a u_b \Rightarrow h^a{}_b h^b{}_c = h^a{}_c, \quad h_{ab} u^b = 0; \quad (8)$$

with this we decompose the tensor $\nabla_b u_a$ as

$$\nabla_b u_a = \tilde{\nabla}_b u_a - \dot{u}_a u_b, \quad \tilde{\nabla}_b u_a = \frac{1}{3} \Theta h_{ab} + \sigma_{ab}, \quad (9)$$

where $\tilde{\nabla}_a$ is the spatially totally projected covariant derivative operator orthogonal to u^a (e.g., $\tilde{\nabla}_a f = h_a{}^b \nabla_b f$; see the appendix of [35] for details), \dot{u}_a is the acceleration ($\dot{u}_b u^b = 0$), and σ_{ab} the shear ($\sigma^a{}_a = \sigma_{ab} u^b = 0$). Then the expansion, shear and acceleration are given in terms of the scalar field by

$$\Theta = -\nabla_a (\psi^{-1} \nabla^a \phi) = -\psi^{-1} [V'(\phi) + \dot{\psi}], \quad (10)$$

$$\sigma_{ab} = -\psi^{-1} h_{(a}{}^c h_{b)}{}^d \nabla_c [\nabla_d \phi], \quad (11)$$

$$a_a = -\psi^{-1} \tilde{\nabla}_a \psi = -\psi^{-1} (\nabla_a \psi + u_a \dot{\psi}), \quad (12)$$

where the last equality in equation (10) follows on using the Klein–Gordon equation (2). We can see from equation (12) that ψ is an *acceleration potential* for the fluid flow [36]. Note also that the vorticity vanishes:

$$\omega_{ab} = -h_a{}^c h_b{}^d \nabla_{[d} (\psi^{-1} \nabla_{c]} \phi) = 0, \quad (13)$$

⁶ In the case of more than one scalar field, this choice can still be made for each scalar field 4-velocity, but not for the 4-velocity of the total fluid. A number of frame choices exist for the 4-velocity of the total fluid, the most common being the energy frame, where the total energy flux vanishes (see [32] for a detailed description of this case).

⁷ The quantity ψ will be positive or negative depending on the initial conditions and the potential V ; in general ϕ could oscillate and change sign even in an expanding phase, and the determination of u^a by (7) will be ill-defined on those surfaces where $\nabla_a \phi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ (including the surfaces of maximum expansion in an oscillating Universe). This will not cause us a problem however, as we assume the solution is differentiable and (5) holds almost everywhere, so determination of u^a almost everywhere by this equation will extend (by continuity) to determination of u^a everywhere in U .

an obvious result with the choice (7), so that $\tilde{\nabla}_a$ is the covariant derivative operator in the 3-spaces orthogonal to u^a , i.e. in the surfaces $\{\phi = \text{constant}\}$. As usual, it is useful to introduce a scale factor a (which has dimensions of length) along each flow line by

$$\frac{\dot{a}}{a} \equiv \frac{1}{3}\Theta = H, \quad (14)$$

where H is the usual Hubble parameter if the Universe is homogeneous and isotropic. Finally, it is important to stress that

$$\tilde{\nabla}_a \phi = 0 \quad (15)$$

which follows from our choice of u^a via equation (7), a result that will be important for the choice of gauge invariant (GI) variables and for the perturbations equations.

2.2. Fluid description of a scalar field

It follows from our choice of the 4-velocity (7) that we can represent a minimally coupled scalar field as a perfect fluid; the energy–momentum tensor (3) takes the usual form for perfect fluids

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab}, \quad (16)$$

where the energy density μ and pressure p of the scalar field ‘fluid’ are given by

$$\mu = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + V(\phi), \quad (17)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - V(\phi). \quad (18)$$

If the scalar field is not minimally coupled this simple representation is no longer valid, but it is still possible to have an imperfect fluid form for the energy–momentum tensor [31].

Using the perfect fluid energy–momentum tensor (16) in (4) one obtains the energy and momentum conservation equations

$$\dot{\mu} + \psi^2 \Theta = 0, \quad (19)$$

$$\psi^2 \dot{u}_a + \tilde{\nabla}_a p = 0. \quad (20)$$

If we now substitute μ and p from equations (17) and (18) into equation (19) we obtain the 1 + 3 form of the Klein–Gordon equation (2):

$$\ddot{\phi} + \Theta \dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (21)$$

an exact ordinary differential equation for ϕ in any space–time with the choice (7) for the 4-velocity. With the same substitution, equation (20) becomes an identity for the acceleration potential ψ . It is convenient to relate p and μ by the *index* γ defined by

$$p = (\gamma - 1)\mu \Leftrightarrow \gamma = \frac{p + \mu}{\mu} = \frac{\psi^2}{\mu}. \quad (22)$$

This index would be constant in the case of a simple one component fluid, but in general will vary with time in the case of a scalar field:

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \Theta(\gamma - 2) - 2\frac{V'}{\psi}. \quad (23)$$

Finally, it is standard to *define* a speed of sound as

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\mu}} = \gamma - 1 - \frac{\dot{\gamma}}{\Theta\gamma}. \quad (24)$$

2.3. Background equations

The previous equations assume nothing on the symmetry of the space–time. We now specify it further and assume that it is close to a flat Friedmann–Lemaître space–time (FL), which we consider as our background space–time. The homogeneity and isotropy assumptions imply that

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} = 0, \quad \omega_{ab} = 0, \quad \tilde{\nabla}_a f = 0, \quad (25)$$

where f is any scalar quantity; in particular

$$\tilde{\nabla}_a \mu = \tilde{\nabla}_a p = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_a \psi = 0, \quad a_a = 0. \quad (26)$$

The background (zero order) equations are given by [37]:

$$3\dot{H} + 3H^2 = 8\pi G [V(\phi) - \psi^2], \quad (27)$$

$$3H^2 = 8\pi G \left[\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + V(\phi) \right], \quad (28)$$

$$\dot{\psi} + 3H\psi + V'(\phi) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mu} + 3H\psi^2 = 0, \quad (29)$$

where all variables are a function of cosmic time t only.

3. Gravitational waves from density perturbations: covariant formalism

3.1. First order equations

The study of linear perturbations of a FL background are relatively straightforward. Let us begin by defining the *first order gauge invariant* (FOGI) variables corresponding respectively to the spatial fluctuations in the energy density, expansion rate and spatial curvature:

$$\begin{aligned} X_a &= \tilde{\nabla}_a \mu, \\ Z_a &= \tilde{\nabla}_a \Theta, \\ C_a &= a^3 \tilde{\nabla}_a \tilde{R}. \end{aligned} \quad (30)$$

The quantities are FOGI because they vanish exactly in the background FL space–time [38, 40]. It turns out that a more suitable quantity for describing density fluctuations is the comoving gradient of the energy density:

$$\mathcal{D}_a = \frac{a}{\mu} X_a, \quad (31)$$

where the ratio X_a/μ allows one to evaluate the magnitude of the energy density perturbation relative to its background value and the scale factor a guarantees that it is dimensionless and comoving.

These quantities exactly characterize the inhomogeneity of any fluid; however we specifically want to characterize the inhomogeneity of the scalar field: this cannot be done using the spatial gradient $\tilde{\nabla}_a \phi$ because it identically vanishes in any space–time by virtue of our choice of 4-velocity field u^a . It follows that in our approach the inhomogeneities

in the matter field are completely incorporated in the spatial variation of the momentum density: $\tilde{\nabla}_a \psi$, so it makes sense to define the dimensionless gradient

$$\Psi_a \equiv \frac{a}{\psi} \tilde{\nabla}_a \psi, \quad (32)$$

which is related to \mathcal{D}_a by

$$\mathcal{D}_a = \frac{\psi^2}{\mu} \Psi_a = \gamma \Psi_a, \quad (33)$$

where we have used equation (17) and γ is given by equation (22); comparing equations (32) and (12) we see that Ψ_a is proportional to the acceleration: it is a gauge invariant measure of the spatial variation of proper time along the flow lines of u^a between two surfaces $\phi = \text{constant}$ (see [33]). The set of linearized equations satisfied by the FOGI variables consists of the *evolution equations*

$$\dot{X}_a = -4HX_a - \psi^2 Z_a, \quad (34)$$

$$\dot{Z}_a = -3HZ_a - 4\pi GX_a + \tilde{\nabla}_a \text{div } \dot{u}, \quad (35)$$

$$\dot{\sigma}_{ab} - \tilde{\nabla}_{\langle a} \dot{u}_{b\rangle} = -2H\sigma_{ab} - E_{ab}, \quad (36)$$

$$\dot{E}_{ab} - \text{curl } H_{ab} = -4\pi G\psi^2 \sigma_{ab} - \Theta E_{ab}, \quad (37)$$

$$\dot{H}_{ab} + \text{curl } E_{ab} = -3HH_{ab}; \quad (38)$$

and the *constraints*

$$0 = \frac{8\pi G}{3} X_a - \text{div } E_a, \quad (39)$$

$$0 = \frac{2}{3} Z_a - \text{div } \sigma_a, \quad (40)$$

$$0 = \text{div } H_a, \quad (41)$$

$$0 = H_{ab} - \text{curl } \sigma_{ab}, \quad (42)$$

$$0 = \text{curl } X_a, \quad (43)$$

$$0 = \text{curl } Z_a. \quad (44)$$

The **curl** operator is defined by $\text{curl } \psi_{ab} = (\text{curl } \psi)_{ab} = \varepsilon_{cd\langle a} \tilde{\nabla}^c \psi_{b\rangle}^d$ where ε_{abc} is the completely antisymmetric tensor with respect to the spatial section defined by $\varepsilon_{bcd} = \varepsilon_{abcd} u^a$, ε_{abcd} being the volume antisymmetric tensor such that $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-g}$. The divergence **div** of a rank n tensor is a rank $n-1$ tensor defined by $(\text{div } \psi)_{i_1 \dots i_{n-1}} \equiv \tilde{\nabla}^{i_n} \psi_{i_1 \dots i_n}$.

Because the background is homogeneous and isotropic, each FOGI vector may be uniquely split into a *curl-free* and *divergence-free* part, usually referred to as scalar and vector parts respectively, which we write as

$$V_a = V_{s_a} + V_{v_a}, \quad (45)$$

where $\text{curl } V_{S_a} = 0$ and $\text{div } V_V = 0$. Similarly, any tensor may be invariantly split into scalar, vector and tensor parts:

$$T_{ab} = T_{S_{ab}} + T_{V_{ab}} + T_{\tau_{ab}} \quad (46)$$

where $\text{curl } T_{S_{ab}} = 0$, $\text{div } \text{div } T_V = 0$ and $\text{div } T_{\tau_a} = 0$. It follows therefore that in the above equations we can separately equate scalar, vector and tensor parts and obtain equations that independently characterize the evolution of each type of perturbation. In the case of a scalar field, the vorticity is exactly zero, so there is no vector contribution to the perturbations.

Let us now concentrate on scalar perturbations at linear order. It is clear from the above discussion that pure scalar modes are characterized by the vanishing of the magnetic part of the Weyl tensor: $H_{ab} = 0$, so the above set of equations reduce to a set of two coupled differential equations for X_a and Z_a :

$$\dot{X}_a + 4HX_a = -\psi^2 Z_a, \quad (47)$$

$$\dot{Z}_a + 3HZ_a = -4\pi GX_a - \psi^{-2} \tilde{\nabla}^2 X_a, \quad (48)$$

and a set of coupled evolution and constraint equations that determine the other variables

$$\dot{\sigma}_{ab} = -\psi^{-2} \tilde{\nabla}_{\langle a} X_{b\rangle} - 2H\sigma_{ab} - E_{ab}, \quad (49)$$

$$\dot{E}_{ab} = -4\pi G \psi^2 \sigma_{ab} - 3HE_{ab}, \quad (50)$$

$$\text{div } \sigma_a = \frac{2}{3} Z_a, \quad (51)$$

$$\text{curl } \sigma_{ab} = 0, \quad (52)$$

$$\text{div } E_a = \frac{8\pi G}{3} X_a. \quad (53)$$

3.2. Gravitational waves from density perturbations

The preceding discussion deals with first order variables and their behaviour at linear order. It is important to keep in mind that we were able to set $H_{ab} = 0$ only because pure scalar perturbations in the absence of vorticity implies that $\text{curl } \sigma_{ab} = 0$ at first order. The vanishing of the magnetic part then follows from equation (42). However, at second order $\text{curl } \sigma_{ab} \neq 0$. We denote the non-vanishing contribution at second order by [21]

$$\Sigma_{ab} = \text{curl } \sigma_{ab}.$$

The new variable is *second order and gauge invariant* (SOGI), as it vanishes at all lower orders [38]. It should be noted that the new variable is just the magnetic part of the Weyl tensor subject to the conditions mentioned above i.e.

$$\Sigma_{ab} = H_{ab}|_{\omega=0}. \quad (54)$$

We are interested in the properties inherited by the new variable from the magnetic part of the Weyl tensor. In particular, it can be shown that the new variable is transverse and traceless at this order and is thus a description of gravitational waves. It should be stressed that in full generality, there are tensorial modes even at first order. By assuming that there are none, we explore a particular subset in the space of solutions. From the ‘iterative resolution’ point of view, this means that we constrain the equations in order to focus on second order GW sourced by terms quadratic in scalar perturbations. In doing so, we artificially switch off GW perturbations at first order.

3.3. Propagation equation

The propagation of the new second order variable now needs to be investigated using a covariant set of equations that are linearized to second order about FL. We make use of equations (19), (20) and the following evolution equations which are up to second order in magnitude;

$$\dot{E}_{ab} = -\Theta E_{ab} + \text{curl } \Sigma_{ab} - 4\pi G\psi^2 \sigma_{ab} + 3\sigma_{c\langle a} E_{b\rangle}{}^c, \quad (55)$$

$$\dot{\Sigma}_{ab} = -\Theta \Sigma_{ab} - \text{curl } E_{ab} - 2\epsilon_{cd\langle a} \dot{u}^c E_{b\rangle}{}^d, \quad (56)$$

together with the constraint

$$\dot{u}^a = -\psi^{-2} \tilde{\nabla}^a p = -\frac{3}{8\pi G\psi^2} \text{div } E^a. \quad (57)$$

Unlike at first order, where the splitting of tensors into their scalar, vector and tensor parts is possible, at second order this can only be achieved for SOGI variables.

We may isolate the tensorial part of the equations by decoupling Σ_{ab} : since it is divergence free it is already a pure tensor mode, whereas E_{ab} is not. The wave equation for the gravitational wave contribution can be found by first taking the time derivative of (56) and making appropriate substitutions using the evolution equations and keeping terms up to second order. The wave equation for Σ_{ab} then reads:

$$\ddot{\Sigma}_{ab} - \tilde{\nabla}^2 \Sigma_{ab} + 7H\dot{\Sigma}_{ab} + (12H^2 - 16\pi G\psi^2) \Sigma_{ab} = S_{ab} \quad (58)$$

where the source is given by the cross-product of the electric Weyl curvature and its divergence (or acceleration):

$$S_{ab} = -[2u^e \nabla_e + 16H - 15Hc_s^2] \left(\frac{1}{4\pi G\psi^2} \epsilon_{cd\langle a} E_{b\rangle}{}^d \text{div } E^c \right). \quad (59)$$

To obtain this, we have used the fact that with a flat background space–time

$$\text{curl curl } T_{ab} = -\tilde{\nabla}^2 T_{ab} + \frac{3}{2} \tilde{\nabla}_{\langle a} \text{div } T_{b\rangle}$$

and used the commutation relation

$$(\text{curl } T_{ab})^\cdot = \text{curl } \dot{T}_{ab} - \frac{1}{3} \Theta \text{curl } T_{ab} - \epsilon_{cd\langle a} \sigma^{ec} D_{|e|} T_{b\rangle}{}^d + \epsilon_{cd\langle a} [\dot{u}^c T_b{}^d + \frac{1}{3} \Theta \dot{u}^c T_b{}^d].$$

We have also used equations (23) and (24) to eliminate $\dot{\psi}/\psi$ from the source term. It can also be shown that S_{ab} is transverse, illustrating that equation (58) represents the gravitational wave contribution at second order. Note that this is a local description of gravitational waves, in contrast to the non-local extraction of tensor modes by projection in Fourier space. Since Σ_{ab} contains exactly the correct number of degrees of freedom possible in GW, any other variable we may choose to describe GW must be related by quadrature, making this a suitable master variable. The situation is analogous to the description of electromagnetic waves: should we use the vector potential, the electric field, or the magnetic field for their description? Mathematically it does not matter of course—each variable obeys a wave equation and the others are related by quadrature. Physically, however, it is the electric and magnetic fields which drive charged particles through the Lorentz force equation—the electromagnetic analogue of the geodesic deviation equation.

In order to express the gravitational wave equation in Fourier space, we define our normalized tensor harmonics as

$$Q^{ab} = \frac{\xi^{ab}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (60)$$

where ξ^{ab} is the polarization tensor, which satisfies the (background) tensor Helmholtz equation: $\tilde{\nabla}^2 Q_{ab} = -(q^2/a^2)Q_{ab}$. As q_a is required to satisfy $q_a u^a = 0$ in the background, it can thus be identified with a 3-vector and will subsequently be written in bold when necessary. We denote harmonics of the opposite polarization with an overbar. Amplitudes of Σ_{ab} may be extracted via

$$\Sigma(\mathbf{k}, t) = \int d^3\mathbf{k} [\Sigma_{ab}(\mathbf{x}, t) Q^{*ab}(\mathbf{k}, \mathbf{x})], \quad (61)$$

with an analogous formula for the opposite parity. This implies that our original variable may be reconstructed from

$$\Sigma_{ab} = \int d^3\mathbf{k} [\Sigma(\mathbf{k}, t) Q_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \bar{\Sigma}(\mathbf{k}, t) \bar{Q}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{x})]. \quad (62)$$

The same relations hold for any transverse tensor. Hence, our wave equation in Fourier space is

$$\Sigma''(\mathbf{k}, \eta) + 6\mathcal{H}\Sigma'(\mathbf{k}, \eta) + [k^2 + 12\mathcal{H}^2 - 16\pi G\psi^2]\Sigma(\mathbf{k}, \eta) = S(\mathbf{k}, \eta), \quad (63)$$

with an identical equation for the opposite polarization. We have converted to conformal time η , where a prime denotes derivatives with respect to η , and we have defined the conformal Hubble parameter as $\mathcal{H} = a'/a$. The source term is composed of a cross-product of the electric part of the Weyl tensor and its divergence. At first order, the electric Weyl tensor is a pure scalar mode, and can therefore be expanded in terms of scalar harmonics. To define these, let $Q^{(s)} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}/(2\pi)^{3/2}$, be a solution to the Helmholtz equation: $\tilde{\nabla}^2 Q^{(s)} = -(q^2/a^2)Q^{(s)}$. Beginning with this basis, it is possible to derive vectorial and (PSTF) tensorial harmonics by taking successive spatial derivatives as follows:

$$Q_a^{(s)} = \tilde{\nabla}_a Q^{(s)} = i\frac{q_a}{a} Q^{(s)}, \quad (64)$$

$$Q_{ab}^{(s)} = \tilde{\nabla}_{(a} \tilde{\nabla}_{b)} Q^{(s)} = -a^{-2} (q_a q_b - \frac{1}{3} h_{ab} q^2) Q^{(s)}. \quad (65)$$

This symmetric tensor has the additional property $q^a q^b Q_{ab}^{(s)} = -(2q^4/3a^2)Q^{(s)}$. Using this representation we can express our source in equation (63) in terms of a convolution in Fourier space, by expanding the electric Weyl tensor as

$$E(\mathbf{q}, \eta) = \int d^3\mathbf{x} E_{ab} Q_{(S)}^{*ab}(\mathbf{q}, \mathbf{x}). \quad (66)$$

Then, the right-hand side of equation (59) expressed in conformal time, accompanied by appropriate Fourier decomposition of each term and making use of the normalization condition for orthonormal basis, yields:

$$S(\mathbf{k}, \eta) = \int d^3\mathbf{q} A(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \{2 [E(\mathbf{q}, \eta) E(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \eta)]' + (16 - 15c_s^2)\mathcal{H} E(\mathbf{q}, \eta) E(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \eta)\} \quad (67)$$

where

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = \frac{i}{6\pi G a^3 \psi^2} \epsilon_{cd\langle a} q_b \rangle q^d (k^c - q^c) |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 \xi^{ab}(\mathbf{k}), \quad (68)$$

with a similar expression for the other polarization.

In principle we can now solve for the gravitational wave contribution Σ_{ab} , and calculate the power spectrum of gravitational waves today. For this however, we need initial conditions for the electric Weyl tensor (or, alternatively Ψ_a).

4. Gravitational waves from density perturbations: coordinate based approach

In this formalism, we consider perturbations around a FL universe with Euclidean spatial sections and expand the metric as

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -(1 + 2A) d\eta^2 + 2\omega_i dx^i d\eta + [(1 + 2C)\delta_{ij} + h_{ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad (69)$$

where η is the conformal time and a the scale factor. We perform a scalar–vector–tensor decomposition as

$$\omega_i = D_i B + \bar{B}_i, \quad (70)$$

and

$$h_{ij} = 2\bar{\mathcal{E}}_{ij} + D_i \bar{\mathcal{E}}_j + D_j \bar{\mathcal{E}}_i + 2D_i D_j \mathcal{E}, \quad (71)$$

where $\bar{B}_i, \bar{\mathcal{E}}_i$ are transverse ($D_i \bar{\mathcal{E}}^i = D_i \bar{B}^i$), and $\bar{\mathcal{E}}_{ij}$ is traceless and transverse ($\bar{\mathcal{E}}^i_i = D_i \bar{\mathcal{E}}^i_j = 0$). Latin indices $i, j, k \dots$ are lowered by use of the spatial metric, e.g. $B^i = \gamma^{ij} B_j$. We fix the gauge and work in the Newtonian gauge defined by $B_i = \mathcal{E} = B = 0$ so that $\Phi = A$ and $\Psi = -C$ are the two Bardeen potentials. As in the previous sections, we assume that the matter content is a scalar field ϕ that can be split into background and perturbation contributions: $\phi = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, \mathbf{x})$. The gauge invariant scalar field perturbation can be defined by

$$Q \equiv \delta\phi - \phi' \frac{C}{\mathcal{H}}, \quad (72)$$

where $\mathcal{H} \equiv a'/a \equiv aH$. We denote the field perturbation in Newtonian gauge by χ so that $Q = \chi + (\phi'/\mathcal{H})\Psi$. Introducing

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\phi'^2}{\mu}, \quad (73)$$

the equation of state (22) takes the form $\gamma = w + 1 = 2\varepsilon/3$. We thus have two expansions: one concerning the perturbation of the metric and the other in the slow-roll parameter ε .

4.1. Scalar modes

Focusing on scalar modes at first order in the perturbation, it is convenient to introduce

$$v = aQ \quad (74)$$

and

$$z \equiv a \frac{\phi'}{\mathcal{H}}, \quad (75)$$

in terms of which the action (displayed equation in footnote 5) takes the form

$$S_{\text{scal}} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d\eta \left[(v')^2 - (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (76)$$

when expanded to second order in the perturbations. It is the action of a canonical scalar field with effective square mass $m_v^2 = -z''/z$. v is the canonical variable that must be quantized [41]. It is decomposed as follows

$$\hat{v}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right]. \quad (77)$$

Here v_k is solution of the Klein–Gordon equation

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0 \quad (78)$$

and the annihilation and creation operators satisfy the commutation relation, $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. We define the free vacuum state by the requirement $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ for all \mathbf{k} .

From the Einstein equation, one can get the expression for the Bardeen potential (recalling that $\Psi = \Phi$)

$$\Delta\Phi = 4\pi G \frac{\phi'^2}{\mathcal{H}} \left(\frac{v}{z} \right)', \quad \left(\frac{a^2\Phi}{\mathcal{H}} \right)' = 4\pi G z v \quad (79)$$

and for the curvature perturbation in comoving gauge

$$\mathcal{R} = -v/z. \quad (80)$$

Once the initial conditions are set, solving equation (78) will give the evolution of $v_k(\eta)$ during inflation, from which $\Phi_k(\eta)$ and $\mathcal{R}_k(\eta)$ can be deduced, using the previous expressions.

Defining the power spectrum as

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (81)$$

one easily finds that

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k}{z} \right|^2. \quad (82)$$

Note also that z and ε are related by the simple relation

$$\sqrt{4\pi G} z = a\sqrt{\varepsilon}, \quad (83)$$

so that

$$\chi = Q - \frac{z}{a} \Phi = Q - \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi G}} \Phi. \quad (84)$$

4.2. Gravitational waves at linear order

At first order, the tensor modes are gauge invariant and their propagation equation is given by

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij}'' + 2\mathcal{H}\bar{\mathcal{E}}_{ij}' - \Delta\bar{\mathcal{E}}_{ij} = 0 \quad (85)$$

since a minimally coupled scalar field has no anisotropic stress. Defining the reduced variable

$$\mu_{ij} = \frac{a}{\sqrt{8\pi G}}\bar{\mathcal{E}}_{ij}, \quad (86)$$

the action (displayed equation in footnote 5) takes the form

$$S_{\text{tens}} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d\eta \left[(\mu'_{ij})^2 - (\partial_k \mu_{ij})^2 + \frac{a''}{a} (\mu_{ij})^2 \right] \quad (87)$$

when expanded to second order. Developing $\bar{\mathcal{E}}_{ij}$, and similarly μ_{ij} , in Fourier space:

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij} = \sum_{\lambda=+, \times} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{E}_{\lambda} \varepsilon_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (88)$$

where $\varepsilon_{ij}^{\lambda}$ is the polarization tensor, the action (87) takes the form of the action for two canonical scalar fields with effective square mass $m_{\mu}^2 = -a''/a$

$$S_{\text{tens}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3\mathbf{x} d\eta \left[(\mu'_{\lambda})^2 - (\partial_k \mu_{\lambda})^2 + \frac{a''}{a} \mu_{\lambda}^2 \right]. \quad (89)$$

If one considers the basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ of the two dimensional space orthogonal to \mathbf{k} then $\varepsilon_{ij}^{\lambda} = (e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2) \delta_{+}^{\lambda} + (e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1) \delta_{\times}^{\lambda}$.

μ_{λ} are the two degrees of freedom that must be quantized [41] and we expand them as

$$\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\mu_{k,\lambda}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{b}_{\mathbf{k},\lambda} + \mu_{k,\lambda}^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} \right] \varepsilon_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k}). \quad (90)$$

μ_k is solution of the Klein–Gordon equation

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu_k = 0, \quad (91)$$

where we have dropped the polarization subscript. The annihilation and creation operators satisfy the commutation relations, $[\hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{b}_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}$ and $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}',\lambda}^{\dagger}] = 0$.

We define the free vacuum state by the requirement $\hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0$ for all \mathbf{k} and λ .

Defining the power spectrum as

$$\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k},\lambda} \mathcal{E}_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_T(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (92)$$

one easily finds that

$$\mathcal{P}_T(k) = 16\pi G \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{\mu_k}{a} \right|^2, \quad (93)$$

where the two polarizations have the same contribution.

4.3. Gravitational waves from density perturbations

At second order, we split the tensor perturbation as $\bar{\mathcal{E}}_{ij} = \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(1)} + \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)}/2$. The evolution equations of $\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)}$ is similar to equation (85), but inherits a source term quadratic in the first order perturbation variables and from the transverse trace-free (TT) part of the stress energy tensor

$$a^2 [T_j^i]^{\text{TT}} = \gamma^{ip} [\partial_j \chi \partial_p \chi]^{\text{TT}}. \quad (94)$$

It follows that the propagation equation is

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)''} + 2\mathcal{H}\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)'} - \Delta\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)} = S_{ij}^{\text{TT}}, \quad (95)$$

where S_{ij}^{TT} is a TT tensor that is quadratic in the first order perturbation variables.

Working in Fourier space, the TT part of any tensor can easily be extracted by means of the projection operator

$$\perp_{ij}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad (96)$$

where $\hat{k}^i = k^i/k$ (note that $\perp_{ij}(\hat{\mathbf{k}})$ is not analytic in k and is a non-local operator) from which we get

$$\begin{aligned} S_{ij}^{\text{TT}}(\mathbf{k}, \eta) &= \left[\perp_i^a \perp_j^b - \frac{1}{2} \perp_{ij} \perp^{ab} \right] S_{ab}(\mathbf{k}, \eta) \\ &\equiv P_{ij}^{ab}(\mathbf{k}) S_{ab}(\mathbf{k}, \eta). \end{aligned} \quad (97)$$

The source term is now obtained as the TT projection of the second order Einstein tensor quadratic in the first order variables and of the stress energy tensor

$$S_{ab} = S_{ab, \text{SS}}^{(2)} + S_{ab, \text{ST}}^{(2)} + S_{ab, \text{TT}}^{(2)}. \quad (98)$$

The three terms respectively indicate terms involving products of first order scalar quantities, first order scalar and tensor quantities and first order tensor quantities. The explicit form of the first term is

$$S_{ij}^{\text{TT}} = 4 [\partial_i \Phi \partial_j \Phi + 4\pi G \partial_i \chi \partial_j \chi]^{\text{TT}}. \quad (99)$$

The first term was considered in [43] and the second term was shown to be the dominant contribution for the production of gravitational waves during preheating [42]. In Fourier space, it is given by

$$S_{ab, \text{SS}}^{(2)} = -4 \left[\int d^3 \mathbf{q} q_b q_a \Phi(\mathbf{q}, \eta) \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \eta) + 4\pi G \int d^3 \mathbf{q} q_b q_a \chi(\mathbf{q}, \eta) \chi(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \eta) \right]. \quad (100)$$

$\mu_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \eta)$ can be decomposed as in equation (88), using the same definition (86) at any order. The two polarizations evolve according to

$$\mu_\lambda^{(2)''} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu_\lambda^{(2)} = -\frac{2a}{\sqrt{8\pi G}} P_{ij}^{ab} S_{ab, \text{SS}}^{(2)} \varepsilon_\lambda^{ij}. \quad (101)$$

Since the polarization tensor is a TT tensor, it is obvious that $P_{ij}^{ab} \varepsilon_\lambda^{ij} = \varepsilon_\lambda^{ab}$, so that

$$\begin{aligned} \mu_\lambda^{(2)''} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \mu_\lambda^{(2)} &= -\frac{4a}{\sqrt{8\pi G}} \varepsilon_\lambda^{ij} \\ &\times \int d^3\mathbf{q} q_i q_j [\Phi(\mathbf{q}, \eta) \Phi(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \eta) + 4\pi G \chi(\mathbf{q}, \eta) \chi(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \eta)]. \end{aligned} \quad (102)$$

From the equation (101), we deduce that the source term derives from an interaction Lagrangian of the form

$$S_{\text{int}} = \int d\eta d^3\mathbf{x} \frac{4a}{\sqrt{8\pi G}} [\partial_i \Phi \partial_j \Phi + 4\pi G \partial_i \chi \partial_j \chi] \mu^{ij}. \quad (103)$$

It describes a two scalar–one graviton interaction. In full generality the interaction term would also include, at lowest order, cubic terms of three scalars, two scalar gravitons and three gravitons. They respectively correspond to second order scalar–scalar modes generated from gravitational waves and second order tensor modes. As emphasized previously, we do not consider these interactions here.

5. Comparison of the two formalisms

Before going further it is instructive to compare the two formalisms and understand how they relate to each other. Note that we go beyond [35], where a comparison of the variables was made at linear order. Here we investigate how the equations map to each other and extend the discussion to second order for the tensor sector. At the background level the scale factors a and expansion rates H introduced in each formalism agree, which explains why we made use of the same notation.

The perturbations of the metric around FL space–time has been split into a first order and a second order part according to

$$X = X^{(1)} + \frac{1}{2} X^{(2)}. \quad (104)$$

We make a similar decomposition for the quantities used in the 1 + 3 covariant formalism. As long as we are interested in the gravitational wave sector, we only need to consider the 4-velocity of the perfect fluid describing the matter content of the universe which we decompose as

$$u^\mu = \frac{1}{a} (\delta_0^\mu + V^\mu). \quad (105)$$

Its spatial components are decomposed as

$$V^i = \partial^i V + \bar{V}^i, \quad (106)$$

\bar{V}^i being the vector degree of freedom and V the scalar degree of freedom. As V^μ has only three independent degrees of freedom since u^μ satisfies $u_\mu u^\mu = -1$, its temporal component is linked to other perturbation variables. We assume that the fluid has no vorticity ($\bar{V}^i = 0$), as it is the case for the scalar fluid we have in mind and consequently we will also drop the vectorial perturbations ($\bar{\mathcal{E}}_i = 0$).

5.1. Matching at linear order

At first order, the spatial components of the shear, acceleration and expansion are respectively given by

$$\sigma_{ij}^{(1)} = a \left(\partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} V^{(1)} + \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(1)'} \right), \quad (107)$$

$$\dot{u}_i^{(1)} = \partial_i \left(\Phi^{(1)} + \mathcal{H}V^{(1)} + V^{(1)'} \right), \quad (108)$$

$$\delta\Theta^{(1)} = \frac{1}{a} \left(-3\Psi^{(1)'} - 3\mathcal{H}\Phi^{(1)} + \Delta V^{(1)} \right). \quad (109)$$

The electric and magnetic part of the Weyl tensor take the form

$$E_{ij}^{(1)} = \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \Phi^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\bar{\mathcal{E}}_{ij}'' + \Delta \bar{\mathcal{E}}_{ij} \right), \quad (110)$$

$$H_{ij}^{(1)} = \eta_{kl\langle i} \partial^k \bar{\mathcal{E}}_{j \rangle}^{(1)'} \equiv \left(\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}}^{(1)'} \right)_{ij}. \quad (111)$$

Note that η_{kli} is the completely antisymmetric tensor normalized such that $\eta_{123} = 1$, which differs from ε_{abc} . We deduce from the last expression that

$$\left(\text{curl } E^{(1)} \right)_{ij} = -\frac{1}{2a} \left[\left(\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}}^{(1)''} \right)_{ij} + \left(\hat{\text{curl}} \Delta \bar{\mathcal{E}}^{(1)} \right)_{ij} \right], \quad (112)$$

where we have used simpler notation by writing $(\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}})_{ij}$ as $\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}}_{ij}$. We also note that the derivative along u_μ of a tensor T of rank (n, m) , vanishing in the background, takes the form

$$\dot{T}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = \partial_t T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} + (n - m) H T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (113)$$

at first order, or alternatively

$$\frac{\left(a^{m-n} T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \right) \cdot}{a^{m-n}} = \partial_t T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}. \quad (114)$$

Again, recall that a dot refers to a derivative along u^μ . Indeed at first order, it reduces to a derivative with respect to the cosmic time but this does not generalize to second order.

Now, equation (38) can be recast as

$$a^{-2} \left(a^2 H_{ij} \right) \cdot + \text{curl } E_{ij} + H H_{ij} = 0. \quad (115)$$

Using the expressions (110) and (111) for the geometric quantities, this equation takes the form

$$\hat{\text{curl}} \left[\frac{1}{2a} \left(\bar{\mathcal{E}}_{ij}'' + 2\mathcal{H} \bar{\mathcal{E}}_{ij}' - \Delta \bar{\mathcal{E}}_{ij} \right) \right] = 0. \quad (116)$$

Similarly equation (58) can be recast as

$$\frac{\left(a^2 H_{ab} \right) \cdot \cdot}{a^2} + 3H \frac{\left(a^2 H_{ab} \right) \cdot}{a^2} + 2(H^2 + \dot{H}) H_{ab} - \tilde{\nabla}^2 H_{ab} = 0, \quad (117)$$

so that it reduces at first order to

$$\hat{\text{curl}} \left[\frac{1}{2a^2} \left(\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(1)''} + 2\mathcal{H} \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(1)'} - \Delta \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(1)} \right) \right] = 0. \quad (118)$$

Thus, equation (118) maps to equation (85) with the identification (111), if there is no vector modes. This can be understood from the fact that in the Bardeen formalism, equation (85) is obtained from the Einstein equation as $\hat{\text{curl}}^{-1}[\hat{\text{curl}} G_{ij}] = 0$.

In the case where there are vector modes, equation (111) has to be replaced by

$$H_{ij}^{(1)} = (\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}}^{(1)'})_{ij} + \frac{1}{2} \eta_{kl} \langle i \partial^k \partial_j \bar{\mathcal{E}}^{(1)'l} \rangle$$

and H_{ab} is no longer a description of the GW, i.e. directly related to the TT part of the space–time metric and the matching is not valid anymore.

5.2. Matching at second order

At second order, the matching is much more intricate mainly because the derivative along u^μ does not match with the derivative respect to cosmic time any more.

Let us introduce the shorthand notation

$$(X \times Y)_{ij} \equiv \eta_{kl} \langle i X^k Y_j^l \rangle \quad (119)$$

for any tensors X^k and Y^{lm} . If $Y^{lm} = \partial^l \partial^m Z$, or $X^k = \partial^k W$, we also use the shorthand notation $Y = \partial \partial Z X = \partial W$.

Among the terms quadratic in first order perturbations, those involving a first order tensorial perturbation can be omitted, as we are only interested in second order effects sourced by scalar contributions. At second order, the geometric quantities of interest read

$$H_{ij}^{(2)} = \left(\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}}^{(2)'} \right)_{ij} - 4 \left(\partial V^{(1)} \times \partial \partial \Phi^{(1)} \right)_{ij} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} (\text{curl } E^{(2)})_{ij} = & -\frac{1}{2a} \left[\left(\hat{\text{curl}} \bar{\mathcal{E}}^{(2)''} \right)_{ij} + \left(\hat{\text{curl}} \Delta \bar{\mathcal{E}}^{(2)} \right)_{ij} \right] \\ & - \frac{2}{a} \left[\left(\partial \Phi^{(1)} \times \partial \partial \Phi^{(1)} \right)_{ij} + \mathcal{H} \left(\partial V^{(1)} \times \partial \partial \Phi^{(1)} \right)_{ij} \right. \\ & \left. - \left(\partial V^{(1)} \times \partial \partial \Phi^{(1)'} \right)_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (121)$$

From the latter expression, we remark that $H_{ij}^{(2)}$ has a term quadratic in first order perturbations involving $V^{(1)}$ and $\Phi^{(1)}$. This terms arise from a difference between the two formalisms related to the fact that geometric quantities, such as $H_{ij} E_{ij}$ etc, live on the physical space–time, whereas in perturbation theory, any perturbation variable at any order, such as $V^{(1)}$, $\mathcal{E}_{ij}^{(2)}$ etc, are fields propagating on the background space–time.

It follows that the splitting into tensor, vector and scalar modes is different. In the covariant formalism, the splitting refers to the fluid on the physical space–time, whereas in perturbation theory it refers to the comoving fluid of the background solution. Indeed, this difference only shows up at second order as the magnetic Weyl tensor vanishes in the background. The one to one correspondence at first order between equations of both formalisms disappears, as the second order equations of the covariant formalism contain the dynamics of the first order quantities.

When keeping terms contributing to the second order, equation (38) has an additional source term and reads

$$\dot{H}_{ab} + \text{curl } E_{ab} + 3H H_{ab} = -2\epsilon_{cd} \langle a \dot{u}^c E_b^d \rangle. \quad (122)$$

If first order tensorial perturbations are neglected then H_{ab} vanishes at first order and equation (113) still holds when applied to H_{ab} . Thus equation (122) can be recast as

$$\frac{(a^2 H_{ab})'}{a^2} + \text{curl} E_{ab} + \frac{\mathcal{H}}{a} H_{ab} = -2\epsilon_{cd\langle a} \dot{u}^c E_{b\rangle}^d. \quad (123)$$

Substituting the geometric quantities for their expressions at second order, and making use of equation (114) to handle the derivatives, equation (115) reads at second order

$$\hat{\text{curl}} \left[\frac{1}{2a} \left(\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)''} + 2\mathcal{H}\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)'} - \Delta\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)} \right) \right] = -\frac{2}{a} \left[(\partial\Phi^{(1)} \times \partial\partial\Phi^{(1)})_{ij} \right. \\ \left. - (\partial V^{(1)} \times \partial\partial\Phi^{(1)})_{ij} - \mathcal{H} (\partial V^{(1)} \times \partial\partial\Phi^{(1)})_{ij} \right]. \quad (124)$$

Using the momentum and constraint equation (40) at first order

$$\Phi^{(1)'} + \mathcal{H}\Phi^{(1)} = (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) V^{(1)} \quad (125)$$

and the background equation $\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -4\pi G\mu(1+w)a^2$, that we deduce from the Raychaudhuri equation and the Gauss–Codacci equation at first order, we can link it to equation (95) as it then reads

$$\frac{1}{a} \hat{\text{curl}} \left[\frac{1}{2} \left(\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)''} + 2\mathcal{H}\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)'} - \Delta\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(2)} \right) \right] = \frac{1}{a} \hat{\text{curl}} \left[2\partial_i\Phi^{(1)}\partial_j\Phi^{(1)} \right. \\ \left. + 8\pi G a^2 (\mu + P) \partial_i V^{(1)} \partial_j V^{(1)} \right]. \quad (126)$$

When applied to a scalar field, this is exactly the gravitational wave propagation equation (95) with the source term (99).

5.3. Discussion

In conclusion, we have matched both the perturbation variables and equations at first and second order in the perturbations. This extends the work of [35] which considered the linear case, and has not been previously investigated.

Even though we restrict to the tensor sector, this comparison is instructive and illustrates the difference of approach between the two formalisms, in a clearer way than at first order. In the Bardeen approach, all perturbation variables live on the unperturbed space–time. At each order, we write exact equations for an approximate space–time. In particular, this implies that the time derivatives are derivative with respect to the cosmic time of the background space–time. In the covariant approach, one derives an exact set of equations (assuming no perturbation to start with). These exact equations are then solved iteratively starting from a background solution which assumes some symmetries. The time derivative is defined in terms of the flow vector as $u^a \nabla_a$. Indeed, at first order for scalars, this derivative matches exactly with the derivative with respect to the background cosmic time. At second order, this is no longer the case. First the flow vector at first order does not coincide with its background value. This implies a (first order) difference between the two time derivatives which must be taken into account. Then, the geometric quantities, such as $H_{ij}E_{ij}$ etc, ‘live’ on the physical space–time, whereas in perturbation theory, any perturbation variable at any order, such as $V^{(1)}$, $\mathcal{E}_{ij}^{(2)}$ etc, live on the background

space–time. This explains why e.g. $H_{ij}^{(2)}$ has a term quadratic in first order perturbations involving $V^{(1)}$ and $\Phi^{(1)}$.

The master variables and corresponding wave equations in both formalisms are also different in nature. In the metric approach the wave equation with source is defined non-locally in Fourier space; in the covariant approach, we are able to derive a local tensorial wave equation which, because it is divergence free, represents the gravitational wave contribution. Of course, we can make a non-local decomposition in Fourier space as required. Furthermore, on one hand the TT part of the metric in a particular gauge is a perturbative approach used to describe GW, and this tells us the shear of spatial lengths with respect to a homogeneous and isotropic background, referring implicitly to a hypothetical set of averaged observers. On the other hand, the covariant description using H_{ab} which is built out of the Weyl tensor and the comoving observer’s velocity, directly describes the dynamically free part of the gravitational field [39] (up to second order when rotation is zero) as seen by the true comoving observers. This is part of the dynamic space–time curvature which directly induces the motion of test particles through the geodesic deviation equation, and it accounts for effects due to the non-homogeneous comoving fluid velocity.

There is one more difference between the two formalisms, concerning the initial conditions. In the Bardeen approach, as we recalled in section 4, there is a natural way to set up the initial conditions on sub-Hubble scales by identifying canonical variables, both for the scalar and tensor modes, and promoting them to the status of quantum operators. In the covariant formalism such variables have not been constructed in full generality (see however [44] for a proposal). Consequently this sets limitations to this formalism since it cannot account for both the evolution and the initial conditions at the same time.

6. Illustration: slow-roll inflation

6.1. Slow-roll inflation

In this section, we focus on the case of a single slow-rolling scalar field and we introduce the slow-roll parameters

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\dot{\psi}^2}{\mu}, \quad \delta = -\frac{\dot{\psi}}{H\psi}. \quad (127)$$

Using the Friedmann equations (27)–(28), these parameters can be expressed in terms of the Hubble parameter as

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi G} \left[\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right]^2, \quad \delta = \frac{1}{4\pi G} \frac{H''(\phi)}{H(\phi)}. \quad (128)$$

Interestingly equation (27) takes the form

$$H^2 \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon \right) = \frac{\kappa}{2} V(\phi), \quad (129)$$

which implies

$$\frac{\ddot{a}}{a} = (1 - \varepsilon) H^2. \quad (130)$$

The equation of state and the sound speed of the equivalent scalar field are thus given by

$$w = -1 + \frac{2}{3}\varepsilon, \quad c_s^2 = -1 + \frac{2}{3}\delta. \quad (131)$$

The evolution equations for ε and δ show that $\dot{\varepsilon}$ and $\dot{\delta}$ are of order 2 in the slow-roll parameters so that at first order in the slow-roll parameters, they can be considered constant. Using the definition of the conformal time and integrating it by parts, one gets

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad (132)$$

assuming ε is constant, from which it follows that

$$\mathcal{H} \equiv aH = -\frac{1}{\eta}(1+\varepsilon) + \mathcal{O}(2), \quad (133)$$

where η varies between $-\infty$ and 0. This implies that

$$\frac{a''}{a} = \frac{2+3\varepsilon}{\eta^2}, \quad \frac{z''}{z} = \frac{2+6\varepsilon-3\delta}{\eta^2}. \quad (134)$$

The general solution of equation (78) is

$$v_k = \sqrt{-\pi\eta/4} [c_1 H_\nu^{(1)}(-k\eta) + c_2 H_\nu^{(2)}(-k\eta)], \quad (135)$$

with $|c_1|^2 - |c_2|^2 = 1$, where $H_\nu^{(1)}$ and $H_\nu^{(2)}$ are Hankel functions of first and second kind and $\nu = 3/2 + 2\varepsilon - \delta$. Among this family of solutions, it is natural to choose the one with $c_2 = 0$ which contains only positive frequencies [41]. It follows that the solution with these initial conditions is

$$v_k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{-\eta} H_\nu^{(1)}(-k\eta). \quad (136)$$

On super-Hubble scales, $|k\eta| \ll 1$, we have

$$v_k \rightarrow 2^{\nu-3/2} \Gamma(\nu) / \Gamma(3/2) (2k)^{-1/2} (-k\eta)^{-\nu+1/2}.$$

Now, using equation (132) to express η and equation (83) to replace z in expression (82), we find that

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{\pi} \frac{H^2}{M_p^2 \varepsilon} \left[2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \left(\nu - \frac{1}{2} \right)^{-2\nu+1} \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\nu+3}, \quad (137)$$

where we have set $M_p^2 = G^{-1}$. At lowest order in the slow-roll parameter, it reduces to

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{\pi} \frac{H^2}{M_p^2 \varepsilon} \left(\frac{k}{aH} \right)^{2\delta-4\varepsilon}. \quad (138)$$

The evolution of the gravitational waves at linear order are dictated by the same equation but with $\nu_T = 3/2 + \varepsilon$, so that

$$\mu_k^{(1)}(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{-\eta} H_{\nu_T}^{(1)}(-k\eta). \quad (139)$$

Similarly as for the scalar mode, we obtain

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16}{\pi} \frac{H^2}{M_p^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\varepsilon}. \quad (140)$$

6.2. Gravitational waves at second order

The couplings between scalar and tensor modes at second order imply that the second order variables can be expanded as

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_{\mathcal{R}\mathcal{R}}^{(2)} + \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{(2)} + \mathcal{R}_{\mathcal{R}\mathcal{E}}^{(2)} \right)$$

and a similar expansion for \mathcal{E} , where, e.g., $\mathcal{R}_{\mathcal{R}\mathcal{E}}^{(2)}$ stands for the second order scalar modes induced by the coupling of first order scalar and tensor modes etc. The deviation from Gaussianity at the time η of the end of inflation can be characterized by a series of coefficients $f_{\text{NL}}^{a,bc}$ defined for example as

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}^{(2)}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \mathcal{E}(\mathbf{k}_1, \eta) \mathcal{E}(\mathbf{k}_2, \eta) f_{\text{NL}}^{\mathcal{R},\mathcal{E}\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \eta) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2. \quad (141)$$

These six coefficients appear in different combinations in the connected part of the three point correlation function of \mathcal{R} and \mathcal{E} . For instance

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c &= \left[2 f_{\text{NL}}^{\mathcal{E},\mathcal{R}\mathcal{R}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) P_{\mathcal{R}}(k_3) P_{\mathcal{R}}(k_2) + f_{\text{NL}}^{\mathcal{R},\mathcal{E}\mathcal{R}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) P_{\mathcal{R}}(k_3) P_{\mathcal{E}}(k_1) \right] \\ &\times \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (142)$$

and $f_{\text{NL}}^{\mathcal{R},\mathcal{R}\mathcal{R}}$ is the standard f_{NL} parameter. One can easily check that $\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c$ involves $f_{\text{NL}}^{\mathcal{R},\mathcal{R}\mathcal{R}}$, $\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{E}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c$ involves $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E},\mathcal{E}\mathcal{R}}$ and $f_{\text{NL}}^{\mathcal{R},\mathcal{E}\mathcal{E}}$, and $\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{E}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{E}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c$ involves $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E},\mathcal{E}\mathcal{E}}$.

6.3. Expression for $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E},\mathcal{R}\mathcal{R}}$

From our analysis, we can give the expression of $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E},\mathcal{R}\mathcal{R}}$. Starting from the fact that $-\varepsilon\mathcal{R} = \Phi(1 + \varepsilon) + \Phi'/\mathcal{H}$ and from the expression (84), we get that $\Phi \sim -\varepsilon\mathcal{R} - \Phi'/\mathcal{H}$ or $\Phi = -\varepsilon\eta \int (\mathcal{R}/\eta^2) d\eta$, and $\sqrt{4\pi G}\chi \sim -\sqrt{\varepsilon}[\mathcal{R} - \Phi'/\mathcal{H}]$. It follows that the source term (99) reduces at lowest order in the slow-roll parameter to

$$S_{ij}^{\text{TT}} = 4 [\varepsilon \partial_i \mathcal{R} \partial_j \mathcal{R}]^{\text{TT}}.$$

The interaction Lagrangian is thus given by

$$S_{\text{int}} = \int d\eta d^3\mathbf{x} \frac{4a}{\sqrt{8\pi G}} \varepsilon \partial_i \mathcal{R} \partial_j \mathcal{R} \mu^{ij}, \quad (143)$$

which reduces to

$$S_{\text{int}} = \int d\eta d^3\mathbf{x} 2\partial_i v \partial_j v \bar{\mathcal{E}}^{ij}. \quad (144)$$

This is the same expression as obtained in [9].

In full generality, during inflation, we should use the ‘in-in’ formalism to compute any correlation function of the interacting fields. As was shown explicitly in [45] for a self-interacting field and more generally in [47], the quantum computation agrees with the classical one on super-Hubble scales at lowest order. Note however that both computations may differ (see [26] versus [9]) due to the fact that in the classical approach the change in vacuum is ignored. The difference does not affect the order of magnitude but the geometric k dependence. In order to get an order of magnitude, we thus restrict our

analysis here to the classical description. This description is also valid when considering the post-inflationary era.

In the classical approach, we can solve equation (102) by mean of a Green function. Since the two independent solutions of the homogeneous equation are $\sqrt{-k\eta}H_{\nu_T}^{(1/2)}(-k\eta)$, the Wronskian of which is $4i/(\pi k)$, the Green function is given by

$$G(k, \eta, \eta') = -i\frac{\pi}{4}\sqrt{\eta\eta'} [H_{\nu_T}^{(1)}(-k\eta)H_{\nu_T}^{(2)}(-k\eta') - H_{\nu_T}^{(1)}(-k\eta')H_{\nu_T}^{(2)}(-k\eta)]. \quad (145)$$

It follows that the expression of the second order tensor perturbation is given by

$$\mu_{\mathbf{k},\lambda}^{(2)}(\eta) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \frac{a(\eta')}{\sqrt{8\pi G}} \varepsilon G(k, \eta, \eta') \int d^3\mathbf{q} (q_i q_j \varepsilon_{\lambda}^{ij}) \mathcal{R}_{\mathbf{q}}(\eta') \mathcal{R}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\eta'). \quad (146)$$

We thus obtain

$$f_{\text{NL}}^{\mathcal{E}_{\lambda}\mathcal{R}\mathcal{R}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \eta) = [\mathcal{R}_{\mathbf{q}_1}(\eta)\mathcal{R}_{\mathbf{q}_2}(\eta)]^{-1} \frac{\varepsilon}{a(\eta)} \times \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' a(\eta') G(k, \eta, \eta') (q_{1i} q_{1j} \varepsilon_{\lambda}^{ij}(\mathbf{k})) \mathcal{R}_{\mathbf{q}_1}(\eta') \mathcal{R}_{\mathbf{q}_2}(\eta'). \quad (147)$$

If we want to estimate equation (142) in the squeezed limit $k_1 \ll k_2, k_3$ the contribution coming from the term involving $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E}_{\lambda}\mathcal{R}\mathcal{R}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \eta)$ can be computed by use of the super-Hubble limit of the Green function

$$|G(k, \eta, \eta')| \simeq \frac{\sqrt{\eta\eta'}}{2\nu_T} \left[\left(\frac{\eta'}{\eta} \right)^{\nu_T} - \left(\frac{\eta'}{\eta} \right)^{-\nu_T} \right].$$

This contribution will be proportional to $(H^4/M_p^4\varepsilon)k_2^{-8}(k_{2i}k_{2j}\varepsilon_{\lambda}^{ij})\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$, which is the same order of magnitude as in [9], but do not have the same geometric dependence as it goes like $k_2^{-5}k_1^{-3}$ instead.

6.4. Orders of magnitude

When we want to estimate $\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k},\lambda}^{(2)}(\eta)\mathcal{E}_{\mathbf{k}',\lambda'}^{(2)*}(\eta) \rangle$, we have to evaluate the unconnected part of $\langle \mathcal{R}_{\mathbf{q}}(\eta')\mathcal{R}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\eta')\mathcal{R}_{\mathbf{p}}^*(\eta'')\mathcal{R}_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}}^*(\eta'') \rangle$, where \mathbf{q} and \mathbf{p} are the two internal momentum and η' and η'' the two integration times. From the Wick theorem, this correlator reduces to $\mathcal{R}(q, \eta')\mathcal{R}^*(q, \eta'')\mathcal{R}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, \eta')\mathcal{R}^*(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|, \eta'')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')[\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{p})]$ and because $k^i\varepsilon_{ij} = 0$ the two terms give the same geometric factor. Thus, the integration on \mathbf{p} is easily done and we can factorize $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$. Now, note that the terms in the integral involve only the modulus of \mathbf{q} and $\mathbf{k}-\mathbf{q}$ so that it does not depend on the angle φ of \mathbf{q} in the plane orthogonal to \mathbf{k} . This implies that the integration of φ will act on a term of $\cos^2 2\varphi$, $\sin^2 2\varphi$ and $\cos 2\varphi \sin 2\varphi$ respectively for $++$, $\times\times$ and $+\times$ so that it gives a term $\pi\delta_{\lambda\lambda'}$. In conclusion, defining the second order power spectrum $\mathcal{P}_T^{(2)}$ by

$$\frac{1}{4}\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k},\lambda}^{(2)}\mathcal{E}_{\mathbf{k}',\lambda'}^{(2)*} \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_T^{(2)}(k)\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}, \quad (148)$$

it can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T^{(2)}(k) &= \frac{k^3}{(2\pi)^3 \pi^2 a^2} \int d\eta' d\eta'' a(\eta') a(\eta'') \varepsilon^2 G(k, \eta, \eta') G^*(k, \eta, \eta'') \\ &\quad \times \int d^3q (q_i q_j \varepsilon_\lambda^{ij})^2 \mathcal{R}(q, \eta') \mathcal{R}^*(q, \eta'') \mathcal{R}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|, \eta') \mathcal{R}^*(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|, \eta''). \end{aligned} \quad (149)$$

Setting $\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = kq\mu$, this reduces to

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T^{(2)}(k) &= \frac{k^3}{(2\pi)^3 \pi a^2} \int q^6 dq (1 - \mu^2)^2 d\mu \\ &\quad \times \left| \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' a(\eta') \varepsilon G(k, \eta, \eta') \mathcal{R}(q, \eta') \mathcal{R}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|, \eta') \right|^2, \end{aligned} \quad (150)$$

after integration over φ which gives a factor $\pi(1 - \mu^2)^2 q^4$.

We can now take the super-Hubble limit of this expression at lowest order in the slow-roll parameters. In order to do so, we make use of the super-Hubble limit of the Green function given above, and we perform the time integral from $1/k$ to η and keep only the leading order contribution:

$$\mathcal{P}_T^{(2)}(k) = \frac{1}{3^4 2^3 \pi^2} G^2 H^4 F(\epsilon, \delta) \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}, \quad (151)$$

where, with the definitions $\mathbf{y} \equiv \mathbf{q}/k$ and $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/k$,

$$F(\epsilon, \delta) \equiv \int (y |\mathbf{n} - \mathbf{y}|)^{-3-4\epsilon+2\delta} y^6 dy (1 - \mu^2)^2 d\mu \quad (152)$$

is a numerical factor. In this approximation, the ratio between the second order power spectrum and the first order power spectrum at leading order in the slow-roll parameters, is given by:

$$\frac{\mathcal{P}_T^{(2)}(k)}{\mathcal{P}_T^{(1)}(k)} = \frac{1}{2^7 3^4 \pi} \left(\frac{H}{M_p} \right)^2 F(\epsilon, \delta). \quad (153)$$

Indeed there are ultraviolet and infrared divergences hidden in $F(\epsilon, \delta)$. We expect the infrared divergence not to be relevant for observable quantities due to finite volume effects (see for instance [46]). The ultraviolet divergence, on the other hand, has to be carefully dimensionally regularized in the context of quantum field theory (see e.g. [47]).

7. Conclusions

In this paper we have investigated the generation of gravitational waves due to second order effects during inflation. We have considered these effects both in the covariant perturbation formalism and in the more standard metric based approach. The relation between the two formalisms at second order has been considered and we have discussed their relative advantages. This comparison leads to a better understanding of the differences in dynamics between the two formalisms.

As an illustration, we have focused on GW generated by the coupling of first order scalar modes. To characterize this coupling we have introduced and computed the

parameter $f_{\text{NL}}^{\mathcal{E}, \mathcal{R}\mathcal{R}}$. It enters in the expression of $\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c$ that was shown to be of order $(H/M_p)^4/\varepsilon$, as $\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c$. On the other hand the power spectrum of GW remains negligible.

This shows that the contribution of $\langle \mathcal{E}_{\mathbf{k}_1} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_3} \rangle_c$ to the CMB bispectrum is important to include in order to constrain the deviation from Gaussianity, e.g. in order to test the consistency relation [48].

Acknowledgment

BO, PKSD and CC acknowledge support from the NRF (South Africa).

References

- [1] Starobinsky A, 1979 *JETP Lett.* **30** 682
- [2] Kamionkowski M, Kosowsky A and Stebbins A, 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2058 [SPIRES]
- [3] Seljak U and Zaldarriaga M, 1996 *Astrophys. J.* **469** 437 [SPIRES]
- [4] Kesden M, Cooray A and Kamionkowski M, 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 011304 [SPIRES]
- [5] Knox L and Song Y, 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 011303 [SPIRES]
- [6] Seljak U and Hirata C M, 1996 *Astrophys. J.* **463** 1 [SPIRES]
- [7] Mukhanov V F and Chibisov G V, 1981 *JETP Lett.* **33** 532
Starobinsky A A, 1982 *Phys. Lett. B* **117** 175 [SPIRES]
Guth A and Pi S Y, 1981 *Phys. Rev. Lett.* **49** 110 [SPIRES]
Bardeen J M, Steinhardt P J and Turner M S, 1983 *Phys. Rev. D* **28** 679 [SPIRES]
- [8] Bernardeau F and Uzan J-P, 2002 *Phys. Rev. D* **66** 103506 [SPIRES]
- [9] Maldacena J, 2003 *J. High Energy Phys.* **JHEP05(2003)013** [SPIRES]
- [10] Salopek D S and Bond R, 1990 *Phys. Rev. D* **42** 3936 [SPIRES]
Linde A and Mukhanov V F, 1997 *Phys. Rev. D* **56** 535 [SPIRES]
Bernardeau F and Uzan J-P, 2003 *Phys. Rev. D* **67** 121301(R) [SPIRES]
Bernardeau F, Brunier T and Uzan J-P, 2006 *Preprint astro-ph/0604200*
Afshordi N and Brandenberger R, 2001 *Phys. Rev. D* **63** 123505 [SPIRES]
Rigoupoulos G I, Shellard E P S and van Tent B J, 2006 *Phys. Rev. D* **73** 083522 [SPIRES]
- [11] Allen T J, Grinstein B and Wise M B, 1987 *Phys. Lett. B* **197** 66 [SPIRES]
Kofman L *et al*, 1989 *Large Scale Structures and Peculiar Motions in the Universe* ed D W Latham and L da Costa (San Francisco: Astronomical Society of the Pacific) p 339
Peebles P J E, 1997 *Astrophys. J.* **483** L1 [SPIRES]
Bucher M and Zhu Y, 1997 *Phys. Rev. D* **55** 7415 [SPIRES]
Gangui A and Mollerach S, 1996 *Phys. Rev. D* **54** 4750 [SPIRES]
Starobinsky A A, 1998 *Grav. Cosmol.* **4** 88 [SPIRES]
- [12] Komatsu E *et al*, 2003 *Astrophys. J. Suppl.* **148** 119
Kogo N and Komatsu E, 2006 *Phys. Rev. D* **73** 083007 [SPIRES]
Liguori M *et al*, 2006 *Phys. Rev. D* **73** 043505 [SPIRES]
Creminelli P *et al*, 2006 *Preprint astro-ph/0610600*
- [13] Bartolo N *et al*, 2004 *Phys. Rep.* **402** 103 [SPIRES]
- [14] Bartolo N *et al*, 2006 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **JCAP06(2006)024** [SPIRES]
Bartolo N *et al*, 2006 *Preprint astro-ph/0610110*
- [15] Mollerach S, Harari D and Matarrese S, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 063002 [SPIRES]
- [16] Prunet S *et al*, 2005 *Phys. Rev. D* **71** 083508 [SPIRES]
- [17] Tomita K, 1967 *Prog. Theor. Phys.* **37** 831 [SPIRES]
- [18] Mena F, Tavakol R and Bruni M, 2002 *Int. J. Mod. Phys. A* **17** 4239 [SPIRES]
- [19] Matarrese S, Mollerach S and Bruni M, 1998 *Phys. Rev. D* **58** 043504 [SPIRES]
- [20] Finelli F *et al*, 2006 *Phys. Rev. D* **74** 083522 [SPIRES]
Noh H and Hwang J, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 104011 [SPIRES]
Malik K A and Wands D, 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** L65 [SPIRES]
Tomita K, 2005 *Phys. Rev. D* **71** 083504 [SPIRES]
- [21] Clarkson C, 2004 *Phys. Rev. D* **70** 103524 [SPIRES]
- [22] Langlois D and Vernizzi F, 2006 *Phys. Rev. D* **72** 103501 [SPIRES]
Langlois D and Vernizzi F, 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 091303 [SPIRES]

- Vernizzi F, 2005 *Phys. Rev. D* **71** 061301 [SPIRES]
- [23] Ananda K A, Clarkson C and Wands D, 2006 *Preprint* [gr-qc/0612013](#)
- [24] Mukhanov V F, Abramo L R W and Brandenberger R H, 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1624 [SPIRES]
- [25] Nakamura K, 2006 *Phys. Rev. D* **74** 101301 [SPIRES]
- [26] Acquaviva V *et al.*, 2003 *Nucl. Phys. B* **667** 119 [SPIRES]
- [27] Ellis G F R and Bruni M, 1989 *Phys. Rev. D* **40** 1804 [SPIRES]
Bruni M, Dunsby P K S and Ellis G F R, 1992 *Astrophys. J.* **395** 34 [SPIRES]
- [28] Bardeen J, 1980 *Phys. Rev. D* **22** 1882 [SPIRES]
- [29] Bruni M, Dunsby P K S and Ellis G F R, 1992 *Astrophys. J.* **395** 34 [SPIRES]
- [30] Wald R M, 1984 *General Relativity* (Chicago, IL: The University of Chicago Press)
- [31] Madsen M S, 1988 *Class. Quantum Grav.* **5** 627 [SPIRES]
- [32] Dunsby P K S, Bruni M and Ellis G F R, 1992 *Astrophys. J.* **395** 54 [SPIRES]
- [33] Ellis G F R, 1971 *General Relativity and Cosmology* ed R K Sachs (New York: Academic) p 104
- [34] Langlois D and Vernizzi F, 2006 *Preprint* [astro-ph/0610064](#)
- [35] Bruni M, Ellis G F R and Dunsby P K S, 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 921 [SPIRES]
- [36] Ellis G F R and van Elst H, 1999 *Theoretical and Observational Cosmology* ed Marc L-R (Dordrecht: Kluwer)
- [37] Bruni M, Ellis G F R and Dunsby P K S, 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 921 [SPIRES]
- [38] Stewart J M and Walker M, 1974 *Proc. R. Soc. A* **341** 49
- [39] Dunsby P K S, Bassett B A and Ellis G F R, 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 1215 [SPIRES]
Maartens R, Ellis G F R and Siklos S T C, 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 1927 [SPIRES]
Maartens R and Bassett B A, 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 705 [SPIRES]
Challinor A, 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 871 [SPIRES]
- [40] Bruni M *et al.*, 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 2585 [SPIRES]
Bruni M and Sonogo S, 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** L29 [SPIRES]
Sopuerta C F, Bruni M and Gaultieri L, 2003 *Preprint* [gr-qc/0306027](#)
- [41] Mukhanov V F, Feldman H and Brandenberger R, 1992 *Phys. Rep.* **215** 204 [SPIRES]
- [42] Kofman L and Uzan J-P, 2007 to be submitted
- [43] Carbone C, Baccigalupi C and Matarrese S, 2006 *Phys. Rev. D* **73** 063503 [SPIRES]
- [44] Pitrou C and Uzan J-P, 2007 *Preprint* [astro-ph/0701121](#)
- [45] Brunier T, Bernardeau F and Uzan J-P, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 063520 [SPIRES]
- [46] Bernardeau F and Uzan J-P, 2004 *Phys. Rev. D* **70** 043533 [SPIRES]
- [47] Weinberg S, 2005 *Phys. Rev. D* **72** 043514 [SPIRES]
Lyth D H and Seery D, 2006 *Preprint* [astro-ph/0607647](#)
- [48] Creminelli P and Zaldarriaga M, 2004 *Phys. Rev. D* **70** 083532 [SPIRES]

7.3 Le formalisme in-in

Nous allons maintenant résumer les idées essentielles du traitement complètement quantique des effets non-linéaires, initié dans [Maldacena 03]. Si l'on souhaite obtenir des prédictions inflationnaires au delà de l'ordre linéaire, alors il faut perturber l'action jusqu'au troisième ordre et traiter les termes cubiques comme une perturbation au lagrangien quadratique [Weinberg 05]. On utilise la représentation en interaction, car on ne peut trouver de solution analytique simple des équations d'évolution si l'on inclut le terme cubique. On traite alors $\mathcal{H}^{(3)} = -\mathcal{L}^{(3)}$ comme un Hamiltonien d'interaction. Pour tout opérateur construit à partir de \hat{v} et $\hat{\pi}$ on peut relier sa valeur $\hat{Q}_I(\eta)$ obtenue s'il est évolué avec le Hamiltonien libre $\mathcal{H}^{(2)}$ à sa valeur $\hat{Q}(\eta)$ si son évolution est donnée par le Hamiltonien total $\mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(3)} + \dots$. On montre alors que

$$\mathcal{Q}(\eta) = (\mathcal{U}^I)^{-1}(\eta, -\infty) \mathcal{Q}_I(\eta) \mathcal{U}^I(\eta, -\infty), \quad (7.1)$$

où

$$\mathcal{U}^I(\eta, -\infty) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\eta} H^{(3)}(\eta') d\eta' \right). \quad (7.2)$$

La notation \mathcal{T} signifie que l'exponentielle est définie à partir de son développement en série et que les champs intervenant dans chaque terme de ce développement doivent y être ordonnés en temps croissants de droite à gauche. Ce formalisme s'appelle *in-in* car il donne les corrélations de deux états entrants plutôt qu'une probabilité de transition comme dans une expérience standard de physique des particules. La première utilisation qui peut en être faite consiste à calculer le corrélateur à trois points qui nécessite un Lagrangien cubique. Cette contribution va venir uniquement du Lagrangien d'interaction. En termes d'équations d'Einstein, elles provient des équations écrites au second ordre. On obtient à l'ordre le plus bas en perturbations

$$\langle 0 | \hat{v}(\eta, \mathbf{x}_1) \hat{v}(\eta, \mathbf{x}_2) \hat{v}(\eta, \mathbf{x}_3) | 0 \rangle = - \int_{-\infty}^{\eta} \langle 0 | \left[\hat{v}(\eta, \mathbf{x}_1) \hat{v}(\eta, \mathbf{x}_2) \hat{v}(\eta, \mathbf{x}_3), H^{(3)}(\eta') \right] | 0 \rangle d\eta'. \quad (7.3)$$

Afin de sélectionner le vide en interaction, on déforme le contour d'intégration en remplaçant η par $\eta + i\epsilon_E |\eta|$, où ϵ_E est un nombre infiniment petit qui permet de faire converger $\exp(-ik\eta)$.

7.4 Perturbations scalaires générées au second ordre

Les résultats obtenus sont présentés plus en détails dans [Maldacena 03]. En espace de Fourier, on obtient dans le cas où les impulsions \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_3 sont du même ordre de grandeur

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_1}(\eta) \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_2}(\eta) \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_3}(\eta) | 0 \rangle = \frac{\delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}{(2\pi)^{3/2}} \left[-2 + \delta - \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_3^2} \right) - 2\epsilon \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_3(k_1 + k_2 + k_3)} \right] \cdot P_{\mathcal{R}}(k_1) P_{\mathcal{R}}(k_2) + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2). \quad (7.4)$$

Dans la limite dite *squeezed*, où $k_3 \ll k_1, k_2$ on obtient

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_1}(\eta) \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_2}(\eta) \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_3}(\eta) | 0 \rangle = \frac{\delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}{(2\pi)^{3/2}} (-4 + 2\delta - 4\epsilon) P_{\mathcal{R}}(k_1) P_{\mathcal{R}}(k_2). \quad (7.5)$$

C'est à partir de ces résultats que nous pouvons conclure que

$$\frac{\mathcal{R}_I^{(2)}}{2} \simeq -\mathcal{R}_I^{(1)2} + \mathcal{O}(\epsilon, \delta), \quad (7.6)$$

et ceci peut être utilisé dans la conditions initiale (6.31). Cette méthode a été généralisée au cas d'un terme cinétique non-standard dans [Seery & Lidsey 05b] puis au cas multi-champs dans [Seery & Lidsey 05a]. On peut pousser le calcul perturbatif jusqu'aux corrections à une boucle. Ceci a été étudié dans [Weinberg 05, Seery 07, Sloth 06, Sloth 07].

7.5 Les signatures observationnelles

7.5.1 Statistiques sur des champs

Nous avons vu précédemment que les champs stochastiques résultants de la quantification des perturbations linéaires avaient une statistique gaussienne. Par conséquent il suffit de caractériser la fonction de corrélation à deux points pour caractériser toutes les propriétés du champ. En espace de Fourier¹, en utilisant l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie statistique de l'univers, on obtient pour le champ \mathcal{R}

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(1)} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^{(1)} \rangle \equiv \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k). \quad (7.7)$$

Le champ en espace réel sous-jacent $\mathcal{R}^{(1)}(\mathbf{x})$ est réel si bien que $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \mathcal{R}_{-\mathbf{k}}^{(1)*}$. Tous les autres champs de la théorie linéaire sont formés à partir de combinaisons linéaires de $\mathcal{R}^{(1)}$ et présentent donc également une statistique gaussienne. Nous avons cependant vu qu'en prenant en compte la dynamique au delà de la théorie linéaire, le champ \mathcal{R} développait nécessairement une statistique non-gaussienne puisque le corrélateur à trois points est non-nul. Cela revient à considérer que $\mathcal{R}^{(1)}$ possède une statistique gaussienne tandis que $\mathcal{R}^{(2)}$ n'est pas gaussien et peut être écrit sous la forme

$$\frac{\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(2)}}{2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1}^{(1)} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2}^{(1)}. \quad (7.8)$$

Ceci constitue une définition de f_{NL} ². En effet d'après le théorème de Wick, une telle décomposition implique

$$\langle \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_1}(\eta) \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_2}(\eta) \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_3}(\eta) \rangle = \frac{\delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}{(2\pi)^{3/2}} \left[2f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) P_{\mathcal{R}}(k_1) P_{\mathcal{R}}(k_2) \right. \\ \left. + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2) \right]. \quad (7.9)$$

On lit donc sur l'expression (7.4) que dans le cas d'une inflation en roulement lent à un champ

$$f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \left[-1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\epsilon}{4} \left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_3^2} \right) - \epsilon \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_3(k_1 + k_2 + k_3)} \right]. \quad (7.10)$$

On pourra éventuellement utiliser la variable $\tilde{\mathcal{R}}$ définie par

$$\exp\left(2\tilde{\mathcal{R}}\right) \equiv 1 + 2\mathcal{R}. \quad (7.11)$$

¹Toujours dans la convention qui équilibre les facteurs 2π entre la transformée de Fourier et sa réciproque.

²Rigoureusement on doit soustraire la valeur moyenne de ce terme quadratique, mais ce terme supplémentaire est proportionnel à $\delta_D^3(\mathbf{k})$ et n'aura donc pas de conséquence lorsque l'on s'intéressera au bispectre.

On y associera alors

$$\tilde{f}_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = f_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + 1, \quad (7.12)$$

et c'est donc pour cette variable que l'on pourra conclure que les effets non linéaires pendant l'inflation sont négligeables puisque proportionnels aux paramètres de roulement lent. De même on pourra définir un f_{NL} pour d'autres champs tels que Φ et Ψ en utilisant une définition similaire à (7.8).

Lorsque nous nous intéressons aux conséquences observationnelles, il faut non pas considérer la fonction de corrélation à trois points dans les sections d'espace à trois dimensions mais sur la sphère bidimensionnelle des observations. On cherchera donc plutôt à caractériser les moyennes d'ensemble de type

$$\langle f(\hat{\mathbf{n}}_1)f(\hat{\mathbf{n}}_2)f(\hat{\mathbf{n}}_3) \rangle. \quad (7.13)$$

Nous présentons ici des idées tirées de [Komatsu 02, Bartolo *et al.* 04a]. Nous avons déjà vu que l'espace de Fourier associé est celui des harmoniques sphériques et on utilisera la décomposition

$$f(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (7.14)$$

Lorsque l'on considère la fonction de corrélation à deux points sur la sphère observée, on considère

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle = C_{\ell_1} \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (7.15)$$

où le présence des symboles de Kronecker provient de l'isotropie statistique supposée, l'égalité définissant donc la variance C_{ℓ} des $a_{\ell m}$. On vérifie bien qu'en utilisant la propriété des harmoniques sphériques

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2), \quad (7.16)$$

on retrouve la relation (3.12).

La fonction de corrélation à trois points dans l'espace des harmoniques sphériques sera caractérisée par le bispectre $B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}$ défini par

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} \rangle \equiv B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Le symbole à droite du second membre est un Wigner-3j qui est directement relié au coefficients de Clebsch-Gordan et caractérise le couplage de deux moments cinétiques (ℓ_1, m_1) (ℓ_2, m_2) en un moment cinétique (ℓ_3, m_3) . Les ℓ doivent donc satisfaire l'inégalité triangulaire ainsi que les propriétés $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 2n$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ imposées par la parité. On peut montrer que les Wigner-3j assurent l'isotropie statistique ainsi que l'invariance par parité. On peut inverser la relation (7.17) en utilisant

$$\sum_{m'_1 m'_2} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m'_1 & m'_2 & M' \end{pmatrix} = \frac{\delta_{\ell_3 L} \delta_{m'_3 M'}}{2L+1}. \quad (7.18)$$

On obtient alors

$$B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} B_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3}. \quad (7.19)$$

De plus on définit le bispectre réduit $b_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ par

$$B_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_{\ell_1\ell_2\ell_3}, \quad (7.20)$$

c'est-à-dire

$$B_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} = \mathcal{G}_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} b_{\ell_1\ell_2\ell_3}, \quad (7.21)$$

où on a utilisé l'équation (7.18) ainsi que la définition

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3} &\equiv \int d\hat{\mathbf{n}} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}}) \\ &= \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

L'intérêt du bispectre réduit réside dans le fait qu'il contient autant d'information que $B_{\ell_1\ell_2\ell_3}^{m_1m_2m_3}$ du fait de l'invariance statistique rotationnelle. De plus, dans la limite du ciel plat le lien avec le bispectre réduit est plus immédiat. Nous ne détaillerons pas plus la construction d'estimateurs pour le bispectre ainsi que l'influence d'une couverture partielle du ciel sur ces estimateurs. Plus de détails peuvent être trouvés dans les références [Yadav *et al.* 07a, Komatsu *et al.* 05, Creminelli *et al.* 07a, Yadav *et al.* 07b].

Une question se pose maintenant. Comment relie t'on les f_{NL} prédits par différents modèles d'inflation aux bispectres observés en prenant en compte les effets de l'évolution. Nous aborderons cette question dans la section suivante, en nous focalisant sur les grandes échelles.

7.5.2 Le bispectre aux grandes échelles

Dans la limite des grandes échelles, l'effet dominant des anisotropies de température est l'effet Sachs-Wolfe propre. Nous avons déjà calculé l'effet au premier ordre, c'est-à-dire relié la perturbation de courbure comobile via les potentiels gravitationnels aux fluctuations de température. Cependant nous devons encore relier les fluctuations de courbure comobile au second ordre avec les fluctuations de température au second ordre. En effet la fonction f dans la définition (7.13) doit être reliée facilement à une mesure physique du CMB. On peut donc prendre le contraste de densité de l'énergie de la radiation reçue depuis une direction $\hat{\mathbf{n}}$ ou bien le contraste de température. On rappelle que la température est alors définie via la relation (3.9) et que l'on peut l'interpréter comme une température si le spectre de corps noir de la radiation n'a pas été déformé. Ceci n'est pas garanti au second ordre sauf si l'épaisseur de la surface de dernière diffusion est infiniment fine et si l'on peut négliger la vitesse des baryons, ce qui est le cas lorsque l'on s'intéresse aux grandes échelles. En effet on considère dans ce cas qu'avant la surface de dernière diffusion le couplage avec les baryons était fort et donc la radiation en équilibre thermique, puis que les photons ont instantanément continué sur des géodésiques sans interaction et que le spectre n'a donc pas été déformé.

Aux grandes échelles, d'après l'équation de Poisson (2.21,6.3), on a pour le contraste de densité du fluide total

$$\delta^{(1)} = -2\Phi^{(1)} \quad \delta^{(2)} = -2\Phi^{(2)} + 8\Psi^{(1)2}. \quad (7.23)$$

On utilise ensuite les conditions initiales adiabatiques (6.51) afin de déterminer $\delta_m^{(2)}$ et $\delta_r^{(2)}$ à partir de $\delta^{(2)}$. Aux grandes échelles on montre, en utilisant les équations de conservation (6.11)

pour la matière et pour la radiation, que les conditions initiales adiabatiques sont conservées. D'après l'équation (6.65), on en déduit donc que pour de telles conditions initiales aux grandes échelles

$$\Theta^{(1)} = \frac{\Phi^{(1)}}{3}, \quad \Theta^{(2)} = \frac{\Phi^{(2)}}{3} - \frac{5}{9}\Phi^{(1)2}. \quad (7.24)$$

On a utilisé dans les expressions précédentes le fait que le découplage a lieu au moment où l'univers est dominé par la matière et donc $\delta \simeq \delta_m$. On peut utiliser les expressions (6.32-6.30) évaluées dans l'ère de matière pour en conclure qu'aux grandes échelles

$$\Theta^{(2)} = \frac{1}{5} \left(\mathcal{R}^{(2)} + 2\mathcal{R}^{(1)2} \right) + \frac{\Phi^{(1)2}}{9} + \frac{2}{3}\Delta^{-1}\partial_i\Phi^{(1)}\partial^i\Phi^{(1)} - 2\Delta^{-2}\partial^j\partial_i \left(\partial_j\Phi^{(1)}\partial^i\Phi^{(1)} \right). \quad (7.25)$$

Dans le cas de l'inflation à un champ en roulement lent, nous avons déjà vu que $\tilde{\mathcal{R}}^{(2)} = \mathcal{R}^{(2)} + 2\mathcal{R}^{(1)2}$, qui correspond au bispectre primordial, était proportionnel aux paramètres de roulement lent et donc par conséquent négligeable. On en déduit que pour ce type d'inflation, l'essentiel du bispectre en température est donc essentiellement lié à des effets d'évolution. Dans la littérature [Komatsu & Spergel 01, Komatsu *et al.* 03, Bartolo *et al.* 04c] on définit le bispectre en température par³

$$\frac{\Theta_k^{(2)}}{2} = g(k, \eta_{\text{LSS}})\mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)f_{\text{NL}}^\Theta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})\Phi_{\mathbf{k}_1}^{(1)}\Phi_{\mathbf{k}_2}^{(1)}, \quad (7.26)$$

où

$$g(k, \eta) \equiv \frac{\Theta^{(1)}(k, \eta)}{\Phi^{(1)}(k, \eta)}. \quad (7.27)$$

Aux grandes échelles on a donc

$$f_{\text{NL}}^\Theta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \left[\frac{5}{3}\tilde{f}_{\text{NL}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) + \frac{1}{6} + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k^2} - 3\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2)}{k^4} \right]. \quad (7.28)$$

L'avantage d'une telle définition est qu'elle permet de considérer une décomposition de la température en harmoniques sphériques jusqu'au second ordre selon

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^{(1)} &= 4\pi i^\ell \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} g_\ell(k, \eta_{\text{LSS}})\Phi^{(1)}(\mathbf{k})Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \\ \frac{a_{\ell m}^{(2)}}{2} &= 4\pi i^\ell \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} g_\ell(k, \eta_{\text{LSS}})\mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)f_{\text{NL}}^\Theta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})\Phi_{\mathbf{k}_1}^{(1)}\Phi_{\mathbf{k}_2}^{(1)}Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Historiquement, il s'agit d'une extension de la formule au premier ordre [Komatsu & Spergel 00] aux grandes échelles. On a donc d'abord supposé que la formule au second ordre était la même qu'au premier ordre aux grandes échelles (dans cette limite $g(k, \eta_{\text{LSS}}) = 1/3$) en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{(1)}}{3} &= \Theta^{(1)} \\ \frac{1}{2} \frac{\Phi^{(2)}}{3} &= \frac{\Theta^{(2)}}{2} = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\frac{1}{3}f_{\text{NL}}^\Theta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})\Phi_{\mathbf{k}_1}^{(1)}\Phi_{\mathbf{k}_2}^{(1)}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

³Plus précisément avec un signe opposé. Nous ne conservons pas ce signe.

Il s'agissait de réaliser rapidement des analyses des données. Puis se rendant compte qu'il n'était pas correct de transposer au second ordre des résultats obtenus au premier ordre, l'expression de f_{NL}^{\ominus} a été établie et il a alors fallu rebaptiser $\Phi^{(2)}$ en $\Phi^{(2)}$ dans les équations (7.30) qui sont alors devenues des définitions dans lesquelles on a remplacé f_{NL}^{Φ} par f_{NL}^{\ominus} . Pour ensuite pouvoir étendre cette définition à des modes pas nécessairement super-Hubble on a alors utilisé la définition (7.26), c'est-à-dire remplacé $1/3$ par $g(k, \eta_{\text{LSS}})$. Finalement cette définition permet d'avoir une similarité dans les expressions (7.29) des $a_{\ell m}$. Une dépendance géométrique supplémentaire, qui n'est pas justifiée, a été suggérée dans les références [Bartolo *et al.* 04a, Bartolo *et al.* 04c] mais elle n'a pas été reprise dans les travaux qui y succèdent.

En utilisant la définition du bispectre réduit (7.21-7.17) ainsi que la décomposition en harmoniques sphériques (7.29), la propriété (7.9) avec Φ à la place de $\hat{\mathcal{R}}$ et les relations

$$\delta(k) = \int \frac{dx}{2\pi} \exp(ikx), \quad (7.31)$$

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{\ell m} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.32)$$

on montre [Creminelli *et al.* 06, Komatsu & Spergel 01] que si f_{NL}^{\ominus} ne dépend que des modules k_1, k_2, k_3 et pas des directions $\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2, \hat{\mathbf{k}}_3$, alors

$$\begin{aligned} b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} \right)^{-1} \left[\langle a_{\ell_1 m_1}^{(2)} a_{\ell_2 m_2}^{(1)} a_{\ell_3 m_3}^{(1)} \rangle + \langle a_{\ell_1 m_1}^{(1)} a_{\ell_2 m_2}^{(2)} a_{\ell_3 m_3}^{(1)} \rangle + \langle a_{\ell_1 m_1}^{(1)} a_{\ell_2 m_2}^{(1)} a_{\ell_3 m_3}^{(2)} \rangle \right] \\ &= 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^3 \int k_1^2 dk_1 k_2^2 dk_2 k_3^2 dk_3 r^2 dr P(k_1) P(k_2) g_{\ell_1}(k_1, \eta_{\text{LSS}}) g_{\ell_2}(k_2, \eta_{\text{LSS}}) g_{\ell_3}(k_3, \eta_{\text{LSS}}) \\ &\quad \cdot j_{\ell_1}(k_1) j_{\ell_2}(k_2) j_{\ell_3}(k_3) f_{\text{NL}}^{\ominus}(k_1, k_2, k_3) + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Dans le cas où l'on suppose de plus que f_{NL}^{\ominus} est constant et n'a aucune dépendance en $k_1 k_2 k_3$, ceci se réécrit sous la forme plus compacte

$$b_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} = 2f_{\text{NL}}^{\ominus} \int r^2 dr [\beta_{\ell_1}(r) \beta_{\ell_2}(r) \alpha_{\ell_3}(r) + (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2)] \quad (7.34)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell}(r) &= \frac{2}{\pi} \int k^2 dk g_{\ell}(k, \eta_{\text{LSS}}) j_{\ell}(kr), \\ \beta_{\ell}(r) &= \frac{2}{\pi} \int k^2 dk g_{\ell}(k, \eta_{\text{LSS}}) j_{\ell}(kr) P(k). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Evidemment comme nous avons montré que cette approximation n'était pas possible, il faut aller plus loin. On décompose alors f_{NL}^{\ominus} grâce aux polynômes de Legendre selon

$$f_{\text{NL}}^{\ominus}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \sum_{n=0}^2 f_n(k_1, k_2, k_3) P_n(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}_2). \quad (7.36)$$

On peut alors généraliser la formule précédente au prix d'un accroissement du temps de calcul. Nous ne reportons ni le détail ni le résultat de ce calcul mais il peut être trouvé dans [Liguori *et al.* 06].

Une possible détection d'un bispectre primordial de type constant est reportée dans la référence [Yadav & Wandelt 07] tandis que les études précédentes étaient compatibles avec une absence de bispectre primordial de type constant [Komatsu *et al.* 03, Creminelli *et al.* 07b, Spergel *et al.* 07].

Troisième partie

Cosmologie dans un univers anisotrope

Chapitre 8

Théorie des perturbations autour d'un espace de Bianchi I

Un problème essentiel des prédictions inflationnaires réside dans le fait que l'inflation explique l'homogénéité l'isotropie et même la platitude de l'univers au niveau de l'espace de fond, mais suppose ces conditions déjà établies et que l'inflaton a atteint un régime de roulement lent depuis un temps asymptotiquement petit afin d'obtenir des prédictions quantiques au niveau des perturbations. Ceci suppose donc que le nombre de e -folds pendant l'inflation soit très grand de telle sorte que l'isotropie de l'espace de fond soit atteinte longtemps avant que l'on puisse traiter les perturbations dans leur vide quantique. Si le nombre d' e -folds n'est que de l'ordre de grandeur du nombre d' e -folds depuis la fin de l'inflation, ou si il est plus grand mais que l'inflaton n'a atteint l'attracteur de roulement que tardivement, alors les conditions initiales des modes devenant sub-Hubble aujourd'hui ne sont pas bien définies. Nous nous intéressons donc dans l'article qui suit à la théorie des perturbations dans un espace anisotrope de type Bianchi I . Le but est de pouvoir traiter les perturbations en même temps que le processus d'isotropisation de l'univers. La différence principale de la dynamique de fond avec le cas isotrope réside dans la variation temporelle de la métrique spatiale γ_{ij} . On caractérisera cette phase avec le cisaillement défini par

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\gamma_{ij})', \quad \sigma^2 \equiv \sigma_{ij} \sigma^{ij}. \quad (8.1)$$

Dans le cas d'un espace de Bianchi I , on montre que pour un contenu matériel ne comportant pas de pression anisotrope, comme c'est le cas pour un champ scalaire, le cisaillement évolue comme¹ $\sigma \sim a^{-2}$, si bien que les effets d'une éventuelle anisotropie sont attendus uniquement dans la phase primordiale de l'univers, c'est-à-dire pendant l'inflation. Formellement on va montrer que les variables de Mukhanov-Sasaki se généralisent, puis dans le chapitre suivant nous montrerons que leur quantification est spécifique au cas isotrope et qu'il n'est plus possible d'obtenir des prédictions robustes pour des modes trop grands.

¹Dans le cas général d'un espace de Bianchi quelconque, l'équation satisfaite par le cisaillement est $(\sigma^i_j)' + 2\mathcal{H}\sigma^i_j = -\left({}^{(3)}R^i_j - {}^{(3)}R\delta^i_j/3\right)$. Dans le cas d'un espace de Bianchi I , les sections spatiales sont plates et donc $(a^2\sigma)' = 0$.

Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe

Thiago S Pereira^{1,2}, Cyril Pitrou² and Jean-Philippe Uzan²

¹ Instituto de Física, Universidade de São Paulo CP 66318, 05315-970
São Paulo, Brazil

² Institut d'Astrophysique de Paris, Université Pierre & Marie Curie—Paris VI,
CNRS-UMR 7095, 98 bis, Boulevard Arago, 75014 Paris, France
E-mail: thiago@if.usp.br, pitrou@iap.fr and uzan@iap.fr

Received 12 July 2007

Accepted 1 August 2007

Published 7 September 2007

Online at stacks.iop.org/JCAP/2007/i=09/a=006

doi:10.1088/1475-7516/2007/09/006

Abstract. This paper describes the theory of cosmological perturbations around a homogeneous and anisotropic universe of the Bianchi I type. Starting from a general parametrization of the perturbed spacetime *à la Bardeen*, a complete set of gauge invariant variables is constructed. Three physical degrees of freedom are identified and it is shown that, in the case where matter is described by a scalar field, they generalize the Mukhanov–Sasaki variables. In order to show that they are canonical variables, the action for the cosmological perturbations at second order is derived. Two major physical imprints of the primordial anisotropy are identified: (1) a scalar–tensor ‘seesaw’ mechanism arising from the fact that scalar, vector and tensor modes do not decouple and (2) an explicit dependence of the statistical properties of the density perturbations and gravity waves on the wavevector instead of its norm. This analysis extends, but also sheds some light on, the quantization procedure that was developed under the assumption of a Friedmann–Lemaître background spacetime, and allows one to investigate the robustness of the predictions of the standard inflationary scenario with respect to the hypothesis on the symmetries of the background spacetime. These effects of a primordial anisotropy may be related to some anomalies of the cosmic microwave background anisotropies on large angular scales.

Keywords: cosmological perturbation theory, inflation, quantum field theory on curved space, physics of the early universe

ArXiv ePrint: [0707.0736](https://arxiv.org/abs/0707.0736)

Contents

1. Cosmological dynamics of Bianchi I universes	4
1.1. General form of the metric	5
1.2. Background equations	6
2. Gauge invariant variables	7
2.1. Mode decomposition	7
2.1.1. Definition of the Fourier transform.	7
2.1.2. Decomposition of the vector and tensor modes.	8
2.1.3. Properties of the projectors, polarization vectors and tensors.	9
2.2. Defining gauge invariant variables	11
2.2.1. Gauge invariant variables for the geometry.	11
2.2.2. Gauge invariant variables for the matter.	12
3. Perturbations equations	13
3.1. Decomposition of the shear tensor	13
3.1.1. Components of the shear.	13
3.1.2. Time evolution of the components of the shear.	14
3.2. Klein–Gordon equation	15
3.3. Einstein equations	15
3.3.1. Scalar modes.	16
3.3.2. Vector modes.	17
3.3.3. Tensor modes.	17
4. Reduced equations and Mukhanov–Sasaki variables	17
4.1. Scalar modes	18
4.2. Tensor modes	19
4.3. Summary	19
4.4. Sub-Hubble limit	20
5. Perturbation of the action	21
5.1. ADM formalism	21
5.2. Action at zeroth and first orders	23
5.3. Action at second order	23
6. Discussion and conclusions	25
Acknowledgments	26
Appendix A. Details on Bianchi I universes	26
A.1. Geometrical quantities in conformal time	26
A.2. Bianchi I universes in cosmic time	27
A.3. Bianchi I universes in the 1 + 3 formalism	27
A.4. General solution of the background equations	28
Appendix B. Properties of the polarizations	29
Appendix C. Perturbed quantities	30

Appendix D. Details concerning the expansion of the action	31
References	31

Inflation [1, 2] (see [3] for a recent review of its status and links with high energy physics) is now a cornerstone of the standard cosmological model. Besides solving the standard problems of the big-bang model (homogeneity, horizon, isotropy, flatness,...), it provides a scenario for the origin of the large scale structure of the universe. In its simplest form, inflation has very definite predictions: the existence of adiabatic initial scalar perturbations and gravitational waves, both with Gaussian statistics and an almost scale invariant power spectrum [4, 5]. Other variants, which in general involve more fields, allow e.g. for isocurvature perturbations [7], non-Gaussianity [8], and modulated fluctuations [9]. All these features let us hope that future data will allow a better understanding of the details (and physics) of this primordial phase.

The predictions of inflation are in agreement with most cosmological data and in particular those of the cosmic microwave background (CMB) by the WMAP satellite [6]. The origin of the density perturbations is related to the amplification of vacuum quantum fluctuations of a scalar field during inflation. In particular, the identification of the degrees of freedom that should be quantized (known as the Mukhanov–Sasaki variables [10]), has been performed assuming a Friedmann–Lemaître background spacetime [5]. This means that homogeneity and isotropy (and even flatness) are in fact assumed from the start of the computation. In the standard lore, one assumes that inflation lasts long enough so that all classical inhomogeneities (mainly spatial curvature and shear) have decayed so that it is perfectly justified to start with a flat Friedmann–Lemaître background spacetime when dealing with the computation of the primordial power spectra for the cosmologically observable modes. This is backed up by the ideas of chaotic inflation and eternal inflation [3]. Note however that a (even small) deviation from flatness [11] or isotropy [12] may have an impact on the dynamics of inflation. It would however be more satisfactory to start from an arbitrary spacetime and understand (1) under which conditions it can be driven toward a Friedmann–Lemaître spacetime during inflation and (2) what are the effects on the evolution and quantization of the perturbations.

The first issue has been addressed by considering the onset of inflation in inhomogeneous and spherically symmetric universes, both numerically in [13] and semi-analytically in [14]. The isotropization of the universe was also investigated by considering the evolution of four-dimensional Bianchi spacetimes [15]–[17] and even Bianchi braneworld [18]. No study has focused on the second issue, i.e. the evolution and the quantization of perturbations during a non-Friedmannian inflationary stage, even though the quantization of test fields and particle production in anisotropic spacetime has been considered [19]. Such an analysis would shed some light on the specificity of the standard quantization procedure which assumes a flat Friedmannian background (see however [20]).

From an observational perspective, a debate concerning possible anomalies on large angular scales in the WMAP has recently driven a lot of activity. Among these anomalies, we count the lack of power in the lowest multipoles, the alignment of the lowest multipoles, and an asymmetry between the two hemispheres (see e.g. [21]). The last two, which point toward a departure from the expected statistical isotropy of the CMB temperature

field, appear much stronger. Various explanations for these anomalies, besides an understood systematic effect that may be related to foreground (see e.g. [22]), have been proposed (such as e.g. the imprint of the topology of space [23, 24] the breakdown of local isotropy due to multiple scalar fields [25] or the existence of a primordial preferred direction [26, 27]).

The broken statistical isotropy of the temperature fluctuations may also be related to a violation of local isotropy, and thus from a departure from the Friedmann–Lemaître symmetries. This can arise either from a late time evolution of the universe (see e.g. [28]–[30] in which it is argued that the subtraction of a Bianchi VII_h leaves a statistically isotropic CMB sky) or from the primordial dynamics which would have imprinted the broken statistical isotropy in the initial conditions. The latter has recently been advocated on the basis of a cylindrically symmetric Bianchi I inflationary model [26]. In these models, the shear decays as the inverse of the third power of the scale factor so that it can play a significant role only in the early stage of the inflationary period. Isotropy is asymptotically reached during inflation and the whole subsequent cosmological evolution can be approximated by a Friedmann–Lemaître universe. It follows (1) that the anisotropy is only imprinted in the largest wavelengths and (2) that the constraints on the shear of the observable universe from the isotropy of the CMB [31]–[34] or big-bang nucleosynthesis [35] are satisfied.

The primordial Bianchi I phase modifies the evolution of the modes (in particular gravity wave and scalar perturbations shall be coupled through the shear) and initial conditions (and thus the quantization procedure) has to be performed in a consistent way with the symmetries of the background spacetime during inflation (see however [26] for a proposal in a locally rotational invariant and homogeneous spacetime of the Kantowski–Sachs family).

In this paper, we investigate the general theory of gauge invariant perturbations about a Bianchi I background spacetime during inflation. Bianchi universes are spatially homogeneous spacetimes and are thus of first importance in cosmology since they express mathematically the cosmological principle. The study of perturbations in Bianchi I was roughed out in [36] where the Bardeen formalism was used (see also [37] and [38] for the case of higher dimensional Kaluza–Klein models). A similar work was undertaken in the 1 + 3 covariant formalism [39] but the identification of gravitational waves and the quantization procedure was not addressed (see [40] for the generalization of the Mukhanov–Sasaki variables in this formalism).

Thus, starting from a general parametrization of the perturbed spacetime *à la Bardeen* [41], we will define in section 2, a scalar–vector–tensor decomposition and construct gauge invariant variables. Contrary to the Friedmann–Lemaître case, these three types of perturbations will be coupled through the shear. In section 3, we derive the perturbation equations. We then show in section 4 that they can be reduced to a set of coupled reduced equations with a mixing between scalar and tensor modes; special care will be taken to vector modes. This work will allow us to generalize the Mukhanov–Sasaki variables and paves the way to the study of the cosmological signatures of a primordial anisotropy [49].

1. Cosmological dynamics of Bianchi I universes

Bianchi spacetimes enjoy a group of isometries simply transitive on spacelike hypersurfaces (see [42]–[44] for a mathematical expositions on Bianchi spacetimes). Thus, they are

homogeneous. It follows that the cosmic time t is the only essential dynamical coordinate and Einstein equations will reduce to ordinary differential equations. The dimension of their group of isotropy [42], that is the group of isometries leaving a given point fixed, is $q = 0$.

1.1. General form of the metric

Bianchi I spacetimes are the simplest anisotropic universe models. They allow for different expansion factors in three orthogonal directions. In comoving coordinates, the metric takes the general form

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 X_i^2(t) (dx^i)^2. \quad (1.1)$$

It includes Friedmann–Lemaître spacetimes as a subcase when the three scale factors are equal. The average scale factor, defined by

$$a(t) \equiv [X_1(t)X_2(t)X_3(t)]^{1/3}, \quad (1.2)$$

characterizes the volume expansion. It follows that we can recast the metric (1.1) as

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(t) dx^i dx^j. \quad (1.3)$$

The ‘spatial metric’ γ_{ij} is the metric on constant time hypersurfaces. It can be decomposed as

$$\gamma_{ij} = \exp[2\beta_i(t)]\delta_{ij}, \quad (1.4)$$

with the constraints

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = 0. \quad (1.5)$$

Let us emphasize that β_i are not the components of a vector so that they are not subjected to the Einstein summation rule. Note also that all italic indices i, j, \dots are lowered with the metric γ_{ij} . The decomposition (1.4) implies that $\dot{\gamma}_{ij} = 2\dot{\beta}_i\gamma_{ij}$, where a dot refers to a derivative with respect to the cosmic time, and it can be checked that the spatial hypersurfaces are flat. This relation, together with the constraint (1.5), implies that the determinant of the spatial metric is constant

$$\dot{\gamma} = \gamma^{ij}\dot{\gamma}_{ij} = 0.$$

This simply means that any comoving volume remains constant during the expansion of the universe, even if this expansion is anisotropic. We define the shear as

$$\hat{\sigma}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij} \quad (1.6)$$

and introduce the scalar $\hat{\sigma}^2 \equiv \hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}^{ij}$. This definition is justified from the relation to the 1 + 3 covariant formalism (see appendix A.3). Let us emphasize at this point that $(\gamma^{ij})' = -2\hat{\sigma}^{ij}$ differs from $\dot{\gamma}^{ij} \equiv \gamma^{ip}\gamma^{jq}\dot{\gamma}_{pk} = +2\hat{\sigma}^{ij}$.

Introducing the conformal time as $dt \equiv a d\eta$, the metric (1.3) can be recast as

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \gamma_{ij}(\eta) dx^i dx^j]. \quad (1.7)$$

We define the comoving Hubble parameter by $\mathcal{H} \equiv a'/a$, where a prime refers to a derivative with respect to the conformal time. The shear tensor, now defined as

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2}\gamma'_{ij}, \quad (1.8)$$

is related to $\hat{\sigma}_{ij}$ by $\sigma_{ij} = a\hat{\sigma}_{ij}$. From the relation $(\gamma_{ij})' = \gamma'_{ij} = 2\beta'_i\gamma_{ij}$, the definition

$$\sigma^2 \equiv \sigma_{ij}\sigma^{ij} \quad (1.9)$$

is explicitly given by

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^3 (\beta'_i)^2, \quad (1.10)$$

and is related to its cosmic time analogous by $\sigma = \hat{\sigma}a$. Again, we stress that $(\gamma^{ij})' = -2\sigma^{ij}$ differs from $(\gamma')^{ij} \equiv \gamma'^{ip}\gamma^{jk}\gamma'_{pk} = +2\sigma^{ij}$.

1.2. Background equations

We concentrate on an inflationary phase during which the matter content of the universe is assumed to be described by a minimally coupled scalar field, φ , with stress-energy tensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - (\frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi + V)g_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Making use of the expressions (A.6) and (A.7) (see appendix A.2), we easily obtain the Friedmann equations

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{1}{2}\varphi'^2 + V(\varphi)a^2 \right] + \frac{1}{6}\sigma^2, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa}{3}[\varphi'^2 - V(\varphi)a^2] - \frac{1}{3}\sigma^2, \quad (1.13)$$

$$(\sigma_j^i)' = -2\mathcal{H}\sigma_j^i, \quad (1.14)$$

where $\kappa \equiv 8\pi G$. The first two are similar to the ones usually used in a Friedmann–Lemaître universe, up to the contribution of the shear (which acts as an extra massless field). The latter equation arises from the trace-free part of the ‘ ij ’-Einstein equations and gives an extra equation compared to the Friedmann–Lemaître case. We can easily integrate it and conclude that the shear evolves as

$$\sigma_j^i = \frac{\mathcal{S}_j^i}{a^2} \quad (1.15)$$

where \mathcal{S}_j^i is a constant tensor, $(\mathcal{S}_j^i)' = 0$. This implies that

$$\sigma^2 = \frac{\mathcal{S}^2}{a^4} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\mathcal{S}^2}{a^6}, \quad (1.16)$$

(with $\mathcal{S}^2 \equiv \mathcal{S}_j^i\mathcal{S}_i^j$) from which we deduce that

$$\sigma' = -2\mathcal{H}\sigma. \quad (1.17)$$

Let us note that these equations can be combined to give

$$2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' = \kappa a^2 V, \quad \kappa(\varphi')^2 = 2\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}' - \sigma^2. \quad (1.18)$$

These equations are completed by a Klein–Gordon equation, which keeps its Friedmann–Lemaître form,

$$\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' + a^2V_\varphi = 0. \quad (1.19)$$

The general solution for the evolution of the scale factor from these equations is detailed in appendix A.4.

2. Gauge invariant variables

This section is devoted to the definition of the gauge invariant variables that describe the perturbed spacetime. We follow a method *à la Bardeen*. In order to define scalar, vector and tensor modes, we will need to use a Fourier transform. We start, in section 2.1, by recalling its definition and stressing its differences with the standard Friedmann–Lemaître case. In section 2.2, we perform a general gauge transformation to identify the gauge invariant variables.

2.1. Mode decomposition

2.1.1. Definition of the Fourier transform. We decompose any quantity in Fourier modes as follows. First, we pick up a comoving coordinates system, $\{x^i\}$, on the constant time hypersurfaces. Then, we decompose any scalar function as

$$f(x^j, \eta) = \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^{3/2}} \hat{f}(k_i, \eta) e^{ik_i x^i}, \quad (2.1)$$

with the inverse Fourier transform

$$\hat{f}(k_j, \eta) = \int \frac{d^3x^i}{(2\pi)^{3/2}} f(x^i, \eta) e^{-ik_i x^i}. \quad (2.2)$$

In the Fourier space, the comoving wave co-vectors k_i are constant, $k'_i = 0$. We now define $k^i \equiv \gamma^{ij} k_j$ that is obviously a time-dependent quantity. Contrary to the standard Friedmann–Lemaître case, we must be careful not to trivially identify k_i and k^i , since this does not commute with the time evolution. Note however that $x_i k^i = x^i k_i$ remains constant so that there is no extra time dependence entering our definitions (2.1) and (2.2). In the following of this paper, we will forget the ‘hat’ and use the notation $f(x^j, \eta)$ and $f(k_j, \eta)$ both for a function and its Fourier transform.

It is easily checked, using the definition (1.8), that

$$(k^i)' = -2\sigma^{ip} k_p. \quad (2.3)$$

This implies that the modulus of the comoving wavevector, $k^2 = k^i k_i = \gamma^{ij} k_i k_j$, is now time dependent and that its rate of change is explicitly given by

$$\frac{k'}{k} = -\sigma^{ij} \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad (2.4)$$

where we have introduced the unit vector

$$\hat{k}_i \equiv \frac{k_i}{k}. \quad (2.5)$$

This vector will turn to be particularly useful for our analysis and we note that it evolves as

$$(\hat{k}^i)' = (\sigma^{pq} \hat{k}_p \hat{k}_q) \hat{k}^i - 2\sigma^{ip} \hat{k}_p. \quad (2.6)$$

Indeed, we find that in the standard Friedmann–Lemaître limit ($\sigma_{ij} = 0$), k^i and k are constant.

2.1.2. Decomposition of the vector and tensor modes. We shall now decompose the perturbations in their scalar, vector and tensor modes.

Any (three-dimensional) vector field, V^i , can be decomposed as

$$V_i = \partial_i V + \bar{V}_i, \quad \text{with } \partial^i \bar{V}_i = 0. \quad (2.7)$$

Note that we have chosen orthogonal (but not Cartesian) coordinates on the (Euclidean) spatial sections (in particular spatial flatness and homogeneity imply that in these coordinates the Christoffel symbols vanish and that $\partial_k \gamma_{ij} = 0$). It follows that its Fourier components can be split as

$$V_i = k_i V + \bar{V}_i, \quad \text{with } k^i \bar{V}_i = 0, \quad (2.8)$$

so that \bar{V}^i lives in the subspace perpendicular to k^i . This is a two-dimensional subspace so that V_i has been split into 1 scalar (V) and two vector modes (\bar{V}_i) that correspond to transverse modes. Let us now consider the base $\{e^1, e^2\}$ of the subspace perpendicular to k^i . By construction, it satisfies the orthonormalization conditions

$$e_i^a k_j \gamma^{ij} = 0, \quad e_i^a e_j^b \gamma^{ij} = \delta^{ab}.$$

Such a basis is defined up to a rotation about the axis k^i . Now, the vector modes can be decomposed on this basis as

$$\bar{V}_i(k_i, \eta) = \sum_{a=1,2} V_a(\hat{k}_i, \eta) e_i^a(\hat{k}_i), \quad (2.9)$$

which defines the two degrees of freedom, V_a , which depend on \hat{k}^i since the decomposition differs for each wavenumber. The two basis vectors allow us to define a projection operator onto the subspace perpendicular to k^i as

$$P_{ij} \equiv e_i^1 e_j^1 + e_i^2 e_j^2 = \gamma_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j. \quad (2.10)$$

It trivially satisfies $P_j^i P_k^j = P_k^i$, $P_j^i k^j = 0$ and $P^{ij} \gamma_{ij} = 2$. It is also the projector on vector modes so that we can always make the scalar–vector decomposition

$$V_i = [\hat{k}^j V_j] \hat{k}_i + P_i^j V_j. \quad (2.11)$$

Analogously, any (three-dimensional) symmetric tensor field, V_{ij} , can be decomposed as

$$V_{ij} = T \gamma_{ij} + \Delta_{ij} S + 2\partial_{(i} \bar{V}_{j)} + 2\bar{V}_{ij}, \quad (2.12)$$

where $\Delta_{ij} \equiv \partial_i \partial_j - \Delta \gamma_{ij}/3$ and

$$\partial_i \bar{V}^i = 0, \quad \bar{V}_i{}^i = 0 = \partial_i \bar{V}^{ij}. \quad (2.13)$$

The symmetric tensor \bar{V}_{ij} is transverse and trace-free. Hence it has only two independent components and can be decomposed as

$$\bar{V}_{ij}(k_i, \eta) = \sum_{\lambda=+, \times} V_\lambda(k^i, \eta) \varepsilon_{ij}^\lambda(\hat{k}_i) \quad (2.14)$$

where the polarization tensors have been defined as

$$\varepsilon_{ij}^\lambda = \frac{e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2}{\sqrt{2}} \delta_+^\lambda + \frac{e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1}{\sqrt{2}} \delta_\times^\lambda. \quad (2.15)$$

It can be checked that they are traceless ($\varepsilon_{ij}^\lambda \gamma^{ij} = 0$), transverse ($\varepsilon_{ij}^\lambda k^i = 0$), and that the two polarizations are perpendicular ($\varepsilon_{ij}^\lambda \varepsilon_{\mu}^{ij} = \delta_\mu^\lambda$). This defines the two tensor degrees of freedom.

In order to deal with the properties of the polarization tensors, it is useful to define two new quantities

$$Q_{ij} \equiv e_i^1 e_j^2 - e_i^2 e_j^1, \quad \text{and} \quad \eta_{\lambda\mu} \equiv \delta_\lambda^+ \delta_\mu^\times - \delta_\mu^+ \delta_\lambda^\times. \quad (2.16)$$

The tensor Q_{ij} trivially satisfies

$$P_{ij} Q^{ij} = 0, \quad Q_{ij} Q^{ij} = 2. \quad (2.17)$$

They allow us to simplify the product of two and three polarization tensors as

$$\varepsilon_{ik}^\lambda \varepsilon_j^{k\mu} = \frac{1}{2} (P_{ij} \delta^{\lambda\mu} + Q_{ij} \eta^{\lambda\mu}), \quad \varepsilon_{ik}^\lambda \varepsilon_\mu^{kj} \varepsilon_\nu^i = 0. \quad (2.18)$$

Introducing the projector operator on tensor modes by

$$\Lambda_{ij}^{ab} = P_i^a P_j^b - \frac{1}{2} P_{ij} P^{ab},$$

and the ‘trace extracting’ operator

$$T_i^j = \hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3} \delta_i^j,$$

the scalar–vector–tensor terms in the decomposition of equation (2.12) are extracted as follows

$$V_{ij} = [\frac{1}{3} V_{ab} \gamma^{ab}] \gamma_{ij} + [\frac{3}{2} V_{ab} T^{ab}] T_{ij} + 2 \hat{k}_{(i} [P_{j)}^a \hat{k}^b V_{ab}] + \Lambda_{ij}^{ab} V_{ab}. \quad (2.19)$$

In this expression, V_{ij} has been split into two scalars (T and S), two vector modes (\bar{V}_i) and two tensor modes (\bar{V}_{ij}). Thus, we can always split any equation $V_i = 0$ by projecting along \hat{k}^i (scalar) and P_j^i (vector) and any equation $V_{ij} = 0$ by projecting along γ^{ij} (scalar), T^{ij} (scalar), $P_i^i \hat{k}^j$ (vector) and Λ_{ab}^{ij} (tensor).

2.1.3. Properties of the projectors, polarization vectors and tensors. The previous SVT decomposition matches the one used in the perturbation theory about a Friedmann–Lemaître spacetime. There is however an important difference that we will have to deal

with. As we pointed out, in a Bianchi I spacetime, the spatial metric is time dependent. It implies in particular that, in order to remain an orthonormal basis perpendicular to k^i during the time evolution, the polarization vectors, and thus the polarization tensors, must have a non-vanishing time derivative. Indeed, since $(k_i)' = 0$, the vector $(e_a^i)'$ is orthogonal to k_i and is thus a linear combination of e^1 and e^2 , that is

$$(e_a^i)' = \sum_b \mathcal{R}_{ab} e_b^i.$$

In each time hypersurface, there is a remaining freedom in the choice of this basis because of the rotational invariance around k^i . We can continuously fix the choice of the basis by imposing

$$\mathcal{R}_{[ab]} = 0.$$

The orthonormalization condition implies that $(e_a^i e_b^j)' = 0$ and thus that

$$\mathcal{R}_{ab} = -\sigma_{ij} e_a^i e_b^j. \quad (2.20)$$

Consequently, the time derivative of any polarization vector is given by

$$(e_i^a)' = \sum_b \mathcal{R}_{ab} e_i^b + 2\sigma_{ij} e_a^j, \quad (2.21)$$

from which we deduce

$$k^i (e_i^a)' = 2\sigma^{pi} k_p e_i^a. \quad (2.22)$$

This allows us to derive the expression of the time derivative of the polarization tensor. Starting from their definitions (2.15), we easily obtain that

$$(\varepsilon_{ij}^\lambda)' = -(\sigma^{kl} \varepsilon_{kl}^\lambda) P_{ij} - (\sigma^{kl} P_{kl}) \varepsilon_{ij}^\lambda + 4\sigma_{(i}^k \varepsilon_{j)k}^\lambda, \quad (2.23)$$

from which we can deduce some useful algebra

$$k^i k^j (\varepsilon_{ij}^\lambda)' = 0, \quad \gamma^{ij} (\varepsilon_{ij}^\lambda)' = 2\sigma^{ij} \varepsilon_{ij}^\lambda, \quad k^i (\varepsilon_{ij}^\lambda)' = 2\sigma^{ip} k_p \varepsilon_{ij}^\lambda. \quad (2.24)$$

We also have that

$$(\varepsilon_j^{i\lambda})' \varepsilon_i^{j\mu} = 0. \quad (2.25)$$

We gather in appendix B some other useful relations concerning the polarization vectors and tensors.

For the sake of completeness, we shall define here two important matrices for the following of our computation,

$$\mathcal{M}_{ab}^\lambda \equiv \varepsilon_{ij}^\lambda e_a^i e_b^j, \quad (2.26)$$

which is manifestly symmetric in ab and

$$\mathcal{N}_{ab} \equiv Q_{ij} e_a^i e_b^j, \quad (2.27)$$

which is antisymmetric in ab . We stress that a and λ are not indices but only labels. It can easily be checked that

$$\mathcal{M}_{ab}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_+^\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta_\times^\lambda, \quad (2.28)$$

and that

$$\sum_a \mathcal{M}_{aa}^\lambda = 0. \quad (2.29)$$

2.2. Defining gauge invariant variables

2.2.1. Gauge invariant variables for the geometry. Let us consider the most general metric of an almost Bianchi I spacetime. It can always be decomposed as

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2A) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (2.30)$$

B_i and h_{ij} can be further conveniently decomposed as

$$B_i = \partial_i B + \bar{B}_i, \quad (2.31)$$

$$h_{ij} \equiv 2C \left(\gamma_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\mathcal{H}} \right) + 2\partial_i \partial_j E + 2\partial_{(i} E_{j)} + 2E_{ij}, \quad (2.32)$$

with

$$\partial_i \bar{B}^i = 0 = \partial_i E^i, \quad E_i^i = 0 = \partial_i E^{ij}. \quad (2.33)$$

Note that this decomposition of h_{ij} involves the shear. This judicious choice is justified, *a posteriori*, by the simplicity of the transformation properties of the perturbation variables, as we shall now see.

Let us consider an active transformation of the coordinate system defined by a vector field ξ . The coordinates of any point change according to

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x^\nu) \quad (2.34)$$

so that the spacetime metric transforms as

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

where $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$ is the Lie derivative of $g_{\mu\nu}$ along ξ . At first order in the perturbations, we decompose the metric as $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ and it follows that

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

The vector field ξ is now decomposed into a scalar and vector part as

$$\xi^0 = T(x^i, \eta), \quad \xi^i = \partial^i L(x^j, \eta) + L^i(x^j, \eta), \quad (2.37)$$

with $\partial_i L^i = 0$. With the use of the expressions (C.1), we deduce that the perturbations of the metric transform as (in Fourier space)

$$A \rightarrow A + T' + \mathcal{H}T \quad (2.38)$$

$$B \rightarrow B - T + \frac{(k^2 L)'}{k^2} \quad (2.39)$$

$$C \rightarrow C + \mathcal{H}T \quad (2.40)$$

$$E \rightarrow E + L, \quad (2.41)$$

for the scalar variables, and as

$$\bar{B}_i \rightarrow \bar{B}_i + \gamma_{ij} (L^j)' - 2ik^j \sigma_{lj} P_i^l L \quad (2.42)$$

$$E_i \rightarrow E_i + L_i, \quad (2.43)$$

for the vector variables. We also obtain that the tensor modes are readily gauge invariant,

$$E_{ij} \rightarrow E_{ij}. \quad (2.44)$$

Had we not included the shear in the decomposition (2.31), this would not be the case.

Let us also note that the transformation rule of the vector modes is different from the one derived in [36] where the non-commutativity between the projection and the time evolution has been neglected.

From the gauge transformations (2.38)–(2.41), we can construct a set of gauge invariant variables for the scalar sector. Only two degrees of freedom remain, the two other being absorbed by the scalar part of the gauge transformation. We define the two gravitational potentials

$$\Phi \equiv A + \frac{1}{a} \left\{ a \left[B - \frac{(k^2 E)'}{k^2} \right] \right\}', \quad (2.45)$$

$$\Psi \equiv -C - \mathcal{H} \left[B - \frac{(k^2 E)'}{k^2} \right]. \quad (2.46)$$

From the gauge transformations (2.42) and (2.43), we deduce that a gauge invariant vector perturbation is given by

$$\Phi_i \equiv \bar{B}_i - \gamma_{ij} (E^j)' + 2ik^j \sigma_{lj} P_i^l E. \quad (2.47)$$

It is obvious from these expressions that when γ_{ij} is time independent, that is when $\sigma_{ij} = 0$, these variables reduce to the standard Bardeen variables defined in the Friedmann–Lemaître case. By analogy, we define the Newtonian gauge by the conditions

$$B = \bar{B}^i = E = 0, \quad (2.48)$$

so that

$$A = \Phi, \quad C = -\Psi, \quad \Phi^i = -(E^i)', \quad (2.49)$$

the latter condition being equivalent to $\Phi_i = -E'_i + 2\sigma_{ij} E^j$.

2.2.2. Gauge invariant variables for the matter. We focus our analysis on the scalar field case, which is the most relevant for the study of inflation. Under a gauge transformation of the form (2.34), it transforms as $\varphi \rightarrow \varphi + \mathcal{L}_\xi \varphi$. At first order in the perturbations, we get

$$\delta\varphi \rightarrow \delta\varphi + \mathcal{L}_\xi \bar{\varphi}, \quad (2.50)$$

that is

$$\delta\varphi \rightarrow \delta\varphi + \mathcal{L}_\xi \bar{\varphi} = \delta\varphi + \varphi' T, \quad (2.51)$$

with use of equation (2.37). Thus, we can define the two gauge invariant variables

$$Q \equiv \delta\varphi - \frac{C}{\mathcal{H}} \varphi' \quad (2.52)$$

and

$$\chi \equiv \delta\varphi + \left[B - \frac{(k^2 E)'}{k^2} \right] \varphi'. \quad (2.53)$$

They are related by

$$Q = \chi + \frac{\Psi}{\mathcal{H}} \varphi'. \quad (2.54)$$

3. Perturbations equations

Once the gauge invariant variables have been defined, we can derive their equations of evolution. The mode decomposition will require a decomposition of the shear tensor in a basis adapted to each wavenumber. We start by defining this decomposition and then we derive the perturbed Klein–Gordon and Einstein equations.

3.1. Decomposition of the shear tensor

The shear σ_{ij} is a symmetric trace-free tensor and, as such, has five independent components. In the coordinates system (1.3)–(1.4), it was expressed in terms of only two independent functions of time $\beta_i(\eta)$. The three remaining degrees of freedom are related to the three Euler angles needed to shift to a general coordinate system.

3.1.1. Components of the shear. As mentioned before, when working out the perturbations in Fourier space, it would be fruitful to decompose the shear in a local basis adapted to the mode we are considering. The shear, being a symmetric trace-free tensor, can be decomposed on the basis $\{\hat{k}_i, e_i^1, e_i^2\}$ as

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2}(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij})\sigma_{\parallel} + 2 \sum_{a=1,2} \sigma_{va} \hat{k}_i e_j^a + \sum_{\lambda=+, \times} \sigma_{T\lambda} \varepsilon_{ij}^{\lambda}. \quad (3.1)$$

This decomposition involves five independent components of the shear in a basis adapted to the wavenumber k_i . We must stress however that $(\sigma_{\parallel}, \sigma_{va}, \sigma_{T\lambda})$ must not be interpreted as the Fourier components of the shear, even if they explicitly depend on k_i . This dependence arises from the local anisotropy of space.

Using equation (3.1), it can be easily worked out that

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \gamma^{ij} &= 0, \\ \sigma_{ij} \hat{k}^i &= \sigma_{\parallel} \hat{k}_j + \sum_a \sigma_{va} e_j^a, \quad \sigma_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j = \sigma_{\parallel}, \end{aligned}$$

and

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{\lambda}^{ij} = \sigma_{T\lambda}, \quad \sigma_{ij} \hat{k}^i e_a^j = \sigma_{va}.$$

The scalar shear is explicitly given by

$$\sigma^2 = \sigma_{ij} \sigma^{ij} = \frac{3}{2} \sigma_{\parallel}^2 + 2 \sum_a \sigma_{va}^2 + \sum_{\lambda} \sigma_{T\lambda}^2, \quad (3.2)$$

which is independent of k_i . We emphasize that the local positivity of the energy density of matter implies that $\sigma^2/6 < \mathcal{H}^2$ and thus

$$\frac{1}{2} \sigma_{\parallel} \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma < \mathcal{H}. \quad (3.3)$$

This, in turn, implies that

$$\sigma_{\parallel} < 2\mathcal{H}, \quad (3.4)$$

a property that shall turn to be very useful in the following of our discussion. Analogously, we have that

$$\sigma_{T\lambda} < \sqrt{6}\mathcal{H}. \quad (3.5)$$

The following derivations will involve the contraction of the shear with the polarization vectors,

$$\sigma_{ij} e_a^i e_b^j = -\frac{1}{2} \sigma_{\parallel} \delta_{ab} + \sum_{\lambda} \sigma_{T\lambda} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda}, \quad (3.6)$$

from which we deduce that

$$\sigma_{ij} P^{ij} = -\sigma_{\parallel}. \quad (3.7)$$

It will also involve the contraction of the shear with the polarization tensors,

$$\sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} = -\frac{1}{2} \sigma_{\parallel} \varepsilon_i^{j\lambda} + \sum_a \sigma_{Va} \hat{k}_i e_l^a \varepsilon_{\lambda}^{lj} + \sum_{\mu} \sigma_{T\mu} \varepsilon_{il}^{\mu} \varepsilon_{\lambda}^{lj}, \quad (3.8)$$

which implies that

$$\sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} P_j^i = \sigma_{T\lambda}, \quad \sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} \varepsilon_j^{i\mu} = -\frac{1}{2} \sigma_{\parallel} \delta_{\mu}^{\lambda}. \quad (3.9)$$

To finish, we will make use of the following expression

$$e_l^b e_a^j \sigma_{jm} \varepsilon_{\lambda}^{lm} = -\frac{1}{2} \sigma_{\parallel} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} + \frac{1}{2} \delta_b^a \sigma_{T\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{N}_{ab} (\sigma_{T+} \delta_{\lambda}^{\times} - \sigma_{T\times} \delta_{\lambda}^+). \quad (3.10)$$

3.1.2. Time evolution of the components of the shear. In the previous paragraph we detailed the definition of the components of the shear in a basis adapted to the wave mode k_i . The time evolution of these modes is easily obtained from equation (1.14)

$$\sigma'_{\parallel} + 2\mathcal{H}\sigma_{\parallel} = -2 \sum_a \sigma_{Va}^2, \quad (3.11)$$

$$\sigma'_{Va} + 2\mathcal{H}\sigma_{Va} = \frac{3}{2} \sigma_{Va} \sigma_{\parallel} - \sum_{b,\lambda} \sigma_{Vb} \sigma_{T\lambda} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda}, \quad (3.12)$$

$$\sigma'_{T\lambda} + 2\mathcal{H}\sigma_{T\lambda} = 2 \sum_{a,b} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} \sigma_{Va} \sigma_{Vb}, \quad (3.13)$$

where the matrix $\mathcal{M}_{ab}^{\lambda}$ is defined in equation (2.26).

These equations allow us to derive some important constraints on the rate of change of σ_{\parallel} and $\sigma_{T\lambda}$. Since equation (3.11) implies that

$$\left| \frac{1}{a^2} (a^2 \sigma_{\parallel})' \right| = 2 \sum_a \sigma_{Va}^2 < \sigma^2 < 6\mathcal{H}^2, \quad (3.14)$$

we can conclude that

$$\left| \frac{1}{a^2} (a^2 \sigma_{\parallel})' \right| < 6\mathcal{H}^2. \quad (3.15)$$

Identically, equation (3.13) implies that

$$\left| \frac{1}{a^2} (a^2 \sigma_{T\lambda})' \right| = 2 \sum_{a,b} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} \sigma_{Va} \sigma_{Vb} < \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}},$$

so that

$$\left| \frac{1}{a^2} (a^2 \sigma_{T\lambda})' \right| < 3\sqrt{2}\mathcal{H}^2. \quad (3.16)$$

The two relations (3.15) and (3.16) will be important at the end of our analysis.

3.2. Klein–Gordon equation

The Klein–Gordon equation, $\square\varphi = V_\varphi$, can be rewritten under the form

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\varphi = V_\varphi(\varphi). \quad (3.17)$$

When expanded at first order in the perturbations, the rhs is trivially given by $V_\varphi(\bar{\varphi}) + V_{\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\chi$. It follows that the Klein–Gordon equation at first order in the perturbations is then obtained to be

$$\chi'' + 2\mathcal{H}\chi' - \gamma^{ij}\partial_i\partial_j\chi + a^2V_{\varphi\varphi}\chi = 2(\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi')\Phi + \varphi'(\Phi' + 3\Psi'), \quad (3.18)$$

where $V_{\varphi\varphi}$ is the second derivative of the potential with respect to the scalar field. Surprisingly, it has the same form as in the Friedmann–Lemaître case. This can be understood if we remind that the d'Alembertian can be expressed as $\square\varphi = \partial_\nu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi]/\sqrt{-g}$, and if we realize that $\sqrt{-g}$ does not involve the shear. Thus, at first order in the perturbations, the only place where the shear σ_{ij} could appear would be associated with δg^{ij} . But then it would multiply $\partial_i\bar{\varphi}$ which vanishes. Consequently the Klein–Gordon equation is not modified. This result is not specific to the scalar field case as the conservation equation in the fluid case is also the same as for a Friedmann–Lemaître spacetime, indeed only as long as the anisotropic stress vanishes (see equation (A.22)).

3.3. Einstein equations

The procedure to obtain the mode decomposition of the Einstein equations is somehow simple. We start from the general perturbed equation $\delta G_\nu^\mu = \kappa\delta T_\nu^\mu$ with the expressions (C.2)–(C.4) and (C.10)–(C.12) respectively for the stress-energy tensor and the Einstein tensor and we then project them, as described in section 2.1.2.

Special care must however be taken. In the Friedmann–Lemaître case, the projections on the scalar, vector and tensor modes commute with the time evolution. This no more the case in a Bianchi I universe, as explained in section 2.1.3. Let us take an example and consider the extraction of the vector part of an equation involving a term of the form $(\Phi^i)' + \mathcal{H}\Phi^i$. We project this equation on the polarization tensor e_i^a to get

$$e_i^a[(\Phi^i)' + \mathcal{H}\Phi^i] = (e_i^a\Phi^i)' - \Phi^i(e_i^a)' + \mathcal{H}\Phi_a.$$

We then use equation (2.21) to rewrite $\Phi^i(e_i^a)'$, and we develop the shear in the basis adapted to the mode k^i . This implies, in particular, that contrary to the Friedmann–Lemaître case, the scalar, vector and tensor modes will be coupled.

This being said, the extraction of the mode decomposition of the Einstein equation is a lengthy but straightforward computation that we carry in the Newtonian gauge. It reduces to (1) Fourier transforming the Einstein equations, (2) projecting them on the modes, (3) commuting the projection operators and the time evolution in order to extract the evolution of the polarizations and (4) finally expressing the decomposition of the shear.

3.3.1. *Scalar modes.* There are four scalar Einstein equations. The first is obtained from $\delta G_0^0 = \kappa \delta T_0^0$ and gives

$$k^2 \Psi + 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) - \frac{\kappa}{2}(\varphi'^2 \Phi - \varphi' \chi' - V_\varphi a^2 \chi) = \frac{1}{2} \sigma^2 [X - 3\Psi] + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\mathcal{H}} \sigma_{\parallel} \Psi - \frac{1}{2} k^2 \sum_a \tilde{\sigma}_{\nu a} \Phi_a - \frac{1}{2} \sum_{\lambda} [\sigma_{\tau\lambda} E'_\lambda + (\sigma'_{\tau\lambda} + 2\mathcal{H}\sigma_{\tau\lambda}) E_\lambda], \quad (3.19)$$

where we have defined the extremely useful variable [2]

$$X \equiv \Phi + \Psi + \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right)', \quad (3.20)$$

and the quantity

$$\sigma_{\nu a} \equiv ik \tilde{\sigma}_{\nu a}. \quad (3.21)$$

As an example, the only tricky term which appears when deriving this equation is $\sigma_j^i (E_i^j)'$, which is obtained from

$$\sigma_j^i (E_i^j)' = (\sigma_j^i E_i^j)' - E_i^j (\sigma_j^i)' = \sum (\sigma_{\tau\lambda} E_\lambda)' - E_i^j (-2\mathcal{H}\sigma_j^i) = \sum (\sigma_{\tau\lambda} E_\lambda)' + 2\mathcal{H}\sigma_{\tau\lambda} E_\lambda,$$

where we have used equation (1.14) to compute $(\sigma_j^i)'$. We will not detail these steps in the following.

The second equation is obtained from $k^i \delta G_i^0 = \kappa k^i \delta T_i^0$. We find

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi - \frac{\kappa}{2} \varphi' \chi = -\frac{1}{2\mathcal{H}} \sigma^2 \Psi + \frac{1}{2} \sigma_{\parallel} X + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sigma_{\tau\lambda} E_\lambda. \quad (3.22)$$

The two remaining equations are obtained from

$$\delta_j^i \delta G_i^j = \kappa \delta_j^i \delta T_i^j, \quad (\hat{k}^i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i) \delta G_i^j = \kappa (\hat{k}^i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i) \delta T_i^j$$

and take the form

$$\begin{aligned} \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi - \frac{1}{3} k^2 (\Phi - \Psi) + \frac{\kappa}{2} [\varphi'^2 \Phi - \varphi' \chi' + V_\varphi a^2 \chi] \\ = -\frac{1}{2} \sigma^2 [X - 3\Psi] + \frac{1}{6} \frac{k^2}{\mathcal{H}} \sigma_{\parallel} \Psi + \frac{1}{2} k^2 \sum_a \tilde{\sigma}_{\nu a} \Phi_a \\ + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} [\sigma_{\tau\lambda} E'_\lambda + (\sigma'_{\tau\lambda} + 2\mathcal{H}\sigma_{\tau\lambda}) E_\lambda], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\frac{2}{3} k^2 (\Phi - \Psi) = \sigma_{\parallel} \left[X' - \frac{k^2 \Psi}{3\mathcal{H}} \right] + 4k^2 \sum_{\lambda, a, b} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} \tilde{\sigma}_{\nu}^a \tilde{\sigma}_{\nu}^b E_\lambda - 2k^2 \sum_a \tilde{\sigma}_{\nu a} \Phi_a. \quad (3.24)$$

It can be checked that indeed equations (3.19) and (3.22)–(3.24) reduces to their well-known Friedmannian form when the shear vanishes.

3.3.2. Vector modes. The two vector equations are obtained from

$$e_a^i \delta G_i^0 = 0, \quad k_i e_a^j \delta G_j^i = 0.$$

They respectively give

$$\Phi_a = -2\tilde{\sigma}_{va} X + 4 \sum_{b,\lambda} \mathcal{M}_{ab}^\lambda \tilde{\sigma}_{vb} E_\lambda, \quad (3.25)$$

and

$$\begin{aligned} \Phi'_a + 2\mathcal{H}\Phi_a - \frac{5}{2}\sigma_{\parallel}\Phi_a + \sum_{b\lambda} \mathcal{M}_{ab}^\lambda \sigma_{T\lambda} \Phi_b &= -2\tilde{\sigma}_{va} X' + 4 \sum_{b,\lambda} \mathcal{M}_{ab}^\lambda \tilde{\sigma}_{vb} E'_\lambda \\ + 4 \sum_{b\lambda} \mathcal{N}_{ab} \tilde{\sigma}_{vb} (\sigma_{T+} \delta_\lambda^\times - \sigma_{T\times} \delta_\lambda^+) E_\lambda, \end{aligned} \quad (3.26)$$

where the matrix \mathcal{N}_{ab} is defined in equation (2.27). It can be shown that equation (3.26) results from the time derivative of equation (3.25) once equations (3.11)–(3.13) are used to express the time derivatives of the shear. This a consequence of the Bianchi identities.

3.3.3. Tensor modes. The equation of evolution of the tensor modes is obtained from $\varepsilon_i^{\lambda} \delta G_j^i = 0$. To simplify, we shall use the shorthand notation $(1 - \lambda)$ for the opposite polarization of λ , i.e. it means that if $\lambda = +$, then $(1 - \lambda) = \times$, and vice versa. With the use of equation (B.6), we obtain

$$\begin{aligned} E_\lambda'' + 2\mathcal{H}E_\lambda' + k^2 E_\lambda &= \sigma_{T\lambda} \left[k^2 \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right) + X' \right] + 2k^2 \sum_{a,b} \mathcal{M}_{ab}^\lambda \tilde{\sigma}_{va} \Phi_b \\ - 2k^2 \sum_a \tilde{\sigma}_{va}^2 E_\lambda - 2\sigma_{T\times} \sigma_{T+} E_{(1-\lambda)} + 2\sigma_{T(1-\lambda)}^2 E_\lambda. \end{aligned} \quad (3.27)$$

It can be shown that in the long wavelength limit, the former equations (3.18), (3.19)–(3.24), (3.25)–(3.26) and (3.27) are equivalent to the ones obtained in a more general gradient expansion of Einstein equations on large scales [45].

4. Reduced equations and Mukhanov–Sasaki variables

The previous equations (3.18), (3.19)–(3.24), (3.25)–(3.26) and (3.27) form a coupled set of equations for the scalar, vector and tensor modes. In a Friedmann–Lemaître spacetime, the three kind of perturbations decouple and one can arbitrarily set one of the contributions to zero to focus on a given type of mode. This is no more possible here, and in particular, it is not possible to neglect the vector modes. Their contribution, as we shall see, is in fact central to get the correct set of reduced equations.

First, we introduce the Mukhanov–Sasaki variables [10] for scalar and tensor modes as

$$v \equiv aQ, \quad \sqrt{\kappa}\mu_\lambda \equiv aE_\lambda, \quad (4.1)$$

exactly in the same way as in a Friedmann–Lemaître spacetime. These three variables were shown to be the canonical degrees of freedom that shall be quantized during inflation when a Friedmann–Lemaître universe is assumed [5].

4.1. Scalar modes

Let us introduce these variables in our analysis and start by focusing on the scalar modes. First, we note that equation (3.22) can be recast under the more compact form

$$(2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel})X = \frac{\kappa}{a}\varphi'v + \sum_{\lambda} \sigma_{T\lambda}E_{\lambda}. \quad (4.2)$$

If we now combine equation (3.19) with equation (3.23), replace the vector mode by its expression (3.25) and use the background equations (1.18), we obtain

$$\mathcal{H}X' + 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)X + \kappa aV_{\varphi}v + k^2\Psi = \frac{k^2}{3}(\Phi - \Psi) + \frac{2k^2}{3\mathcal{H}}\sigma_{\parallel}\Psi. \quad (4.3)$$

Now, using equation (3.24) to simplify the rhs, and again replacing the vector mode by its expression (3.25), we get

$$(2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel})\left(X' + \frac{k^2}{\mathcal{H}}\Psi\right) + 4\kappa a^2VX + 2\kappa aV_{\varphi}v = 4k^2\left(\sum_a \tilde{\sigma}_{V_a}^2 X - \sum_{a,b,\lambda} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} \tilde{\sigma}_{V_a} \tilde{\sigma}_{V_b} E_{\lambda}\right). \quad (4.4)$$

Then, forcing Q in the Klein–Gordon equation (3.18), using also its background version, we obtain

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' + k^2Q + a^2V_{\varphi\varphi}Q + 2a^2V_{\varphi}X - \varphi'\left(X' + \frac{k^2}{\mathcal{H}}\Psi\right) = 0. \quad (4.5)$$

Now, we can replace the last term by using equation (4.4) and the next to last by using equation (4.2) to get

$$\begin{aligned} & Q'' + 2\mathcal{H}Q' + k^2Q + a^2V_{\varphi\varphi}Q + 2a^2V_{\varphi}X \\ &= \frac{\varphi'}{(2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel})} \left[4k^2 \left(\sum_a \tilde{\sigma}_{V_a}^2 X - \sum_{a,b,\lambda} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} \tilde{\sigma}_{V_a} \tilde{\sigma}_{V_b} E_{\lambda} \right) - 4\kappa a^2VX - 2\kappa aV'v \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Introducing the definitions (4.1), we obtain, after some algebra which requires in particular equations (3.11)–(3.13) to express terms such as $\sum_{a,b} \mathcal{M}_{ab}^{\lambda} \tilde{\sigma}_{V_a} \tilde{\sigma}_{V_b}$,

$$v'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + a^2V_{,\varphi\varphi}\right)v = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\varphi'^2}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right)' \kappa v + \sum_{\nu} \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\varphi'\sigma_{T\nu}}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right)' \sqrt{\kappa}\mu_{\nu}. \quad (4.7)$$

This equation is the first central result of this section.

4.2. Tensor modes

The scalar contribution of the tensor equation (3.27) is exactly given by the relation (4.4), so that it reduces, after replacing the vector mode by its expression (3.25), to

$$\begin{aligned} \mu''_\lambda + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \mu_\lambda = & -2\mu_{(1-\lambda)}\sigma_{T+}\sigma_{T\times} + 2\mu_\lambda\sigma_{T(1-\lambda)}^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\varphi'\sigma_{T\lambda}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)' \sqrt{\kappa}v \\ & + \sum_\nu \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\sigma_{T\nu}\sigma_{T\lambda}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)' \mu_\nu + \frac{(a^2\sigma_\parallel)'}{a^2} \mu_\lambda. \end{aligned} \quad (4.8)$$

This equation is the second central result of this section.

4.3. Summary

We have reduced the perturbation equations to a set of three coupled equations for the variables v and μ_λ defined in equation (4.1). If we define two new functions z_s and z_λ by

$$\begin{aligned} \frac{z''_s}{z_s}(\eta, k_i) &\equiv \frac{a''}{a} - a^2V_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\kappa\varphi'^2}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)' \\ \frac{z''_\lambda}{z_\lambda}(\eta, k_i) &\equiv \frac{a''}{a} + 2\sigma_{T(1-\lambda)}^2 + \frac{1}{a^2}(a^2\sigma_\parallel)' + \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\sigma_{T\lambda}^2}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)', \end{aligned} \quad (4.9)$$

the system reduces to

$$v'' + \left(k^2 - \frac{z''_s}{z_s}\right) v = \sum_\nu \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\varphi'\sigma_{T\nu}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)' \sqrt{\kappa}\mu_\nu, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mu''_\lambda + \left(k^2 - \frac{z''_\lambda}{z_\lambda}\right) \mu_\lambda = & \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\varphi'\sigma_{T\lambda}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)' \sqrt{\kappa}v \\ & + \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\sigma_{T\times}\sigma_{T+}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel}\right)' - 2\sigma_{T\times}\sigma_{T+} \right] \mu_{(1-\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Formally, it can be rewritten as

$$V'' + k^2V + \Omega V = \Upsilon V, \quad (4.12)$$

where $V \equiv (v, \mu_+, \mu_\times)$. The matrices Ω and Υ are defined by

$$V'' + \begin{pmatrix} k^2 - \frac{z''_s}{z_s} & 0 & 0 \\ 0 & k^2 - \frac{z''_+}{z_+} & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - \frac{z''_\times}{z_\times} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & \aleph_+ & \aleph_\times \\ \aleph_+ & 0 & \beth \\ \aleph_\times & \beth & 0 \end{pmatrix} V, \quad (4.13)$$

and the functions $\aleph_\lambda(\eta, k_i)$ and $\beth(\eta, k_i)$ can be read on equations (4.10) and (4.11). This is one of the central results of our study.

When the shear vanishes, these equations decouple and we recover the usual equations [5] for the variables v and μ_λ so that we only have three physical degrees of

freedom. Now, the anisotropy of space is at the origin of some interesting effects. First the functions z_s and z_λ are not functions of time only. They depend on k_i explicitly through the components of the decomposition of the shear. Second, the two types of modes are coupled through a non-diagonal mass term. The mass term and the evolution operator cannot be diagonalized at the same time so that we expect the equivalent of a seesaw mechanism. The importance of the vector modes, that cannot be neglected, has to be emphasized again. Had we neglected them, the mass term would not be correct.

4.4. Sub-Hubble limit

Let us consider the behaviour of the mass term appearing in equations (4.10) and (4.11) in the sub-Hubble limit in which $k/\mathcal{H} \gg 1$. We introduce the two slow-roll parameters as

$$\epsilon \equiv 3 \frac{\varphi'^2}{\varphi'^2 + 2a^2 V}, \quad \delta \equiv 1 - \frac{\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'}, \quad (4.14)$$

in terms of which the Friedmann equations take the form

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3-\epsilon} V a^2 + \frac{1}{6} \sigma^2, \quad (3-\delta)\mathcal{H}\varphi' + V_\varphi a^2 = 0, \quad (4.15)$$

and

$$\mathcal{H}' = (1-\epsilon)\mathcal{H}^2 + \left(\frac{\epsilon-3}{6}\right) \sigma^2.$$

We now focus on the behaviour of the functions \aleph_λ , \beth , z_s''/z_s and z_λ''/z_λ in the sub-Hubble regime. We define $x \equiv \sigma/\sqrt{6}\mathcal{H}$ and use the fact that, since $\sigma_\parallel/2 \leq \sigma/\sqrt{6}$ (see equation (3.4)), there exists $\alpha < 1$ such that $0 \leq x < \alpha$ due to the positive energy condition (see equation (3.3)). Starting from the definition (4.10) for \aleph_λ we have

$$|\aleph_\lambda| < \left| \frac{1}{a^2} (a^2 \sigma_{\text{T}\lambda})' \right| \times \left| \frac{2\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right| + 2|\sigma_{\text{T}\lambda}| \times \left| \left(\frac{\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right)' \right|. \quad (4.16)$$

Now, the property (3.16) implies that the first term of the right-hand side of the inequality is smaller than

$$3\sqrt{2}\mathcal{H}^2 \left| \frac{2\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right|.$$

Then,

$$\left| \frac{2\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right| = \sqrt{2\epsilon} \frac{\sqrt{\mathcal{H}^2 - \sigma^2/6}}{\mathcal{H} - \sigma_\parallel/2} \leq \sqrt{2\epsilon} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (4.17)$$

Now, since x varies in the range $0 \leq x < \alpha$, we deduce that $\sqrt{(1+x)/(1-x)} \leq \sqrt{(1+\alpha)/(1-\alpha)}$. Equation (3.5) then implies that the second term of the inequality (4.16) is smaller than

$$2\sqrt{6}\mathcal{H} \times \left| \left(\frac{\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right)' \right|.$$

Then, the absolute value is bounded by

$$\left| \left(\frac{\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right)' \right| < \left| \frac{\sqrt{\kappa}\varphi''}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right| + \left| \frac{\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right| \left| \frac{2\mathcal{H}' - \sigma'_{\parallel}}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right|.$$

Using the fact that equation (3.4) implies $|\sigma'_{\parallel}| < 10\mathcal{H}^2$ ($|\sigma'_{\parallel}| < 6\mathcal{H}^2 + |2\mathcal{H}\sigma_{\parallel}|$), we obtain that

$$\left| \left(\frac{\sqrt{\kappa}\varphi'}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right)' \right| \leq \frac{\sqrt{\epsilon}\mathcal{H}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \left[(1-\delta) + \frac{2(1-\epsilon) + (1-\epsilon/3)\sqrt{6} + 10}{2(1-\alpha)} \right].$$

Gathering all these terms, we thus conclude that

$$|\mathfrak{N}_{\lambda}| < \sqrt{\epsilon}\mathcal{H}^2 \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \left[6 + 2\sqrt{3} \left((1-\delta) + \frac{2(1-\epsilon) + (1-\epsilon/3)\sqrt{6} + 10}{2(1-\alpha)} \right) \right]. \quad (4.18)$$

To summarize, we have shown that

$$|\mathfrak{N}_{\lambda}| < Z\mathcal{H}^2, \quad (4.19)$$

where Z is a finite constant. This constant can in principle be quite large since α can be arbitrarily close to unity in the worst case of an empty universe. A large Z also corresponds to a very ellipsoidal Hubble radius, and this explains why the short wavelength limit has to be taken much smaller than the average Hubble radius.

The same reasoning can be applied for $|\mathfrak{Q}|$, $|z''_s/z_s|$ and $|z''_{\lambda}/z_{\lambda}|$. Thus, it follows that on sub-Hubble scales the three physical degrees of freedom decouple and behave as harmonic oscillators,

$$V'' + k^2V = 0. \quad (4.20)$$

5. Perturbation of the action

In order to construct canonical quantization variables and to properly normalize the amplitude of their quantum fluctuations, one needs to derive the action for the cosmological perturbations. We will now demonstrate that the previous equations (4.10) and (4.11) can be obtained from the expansion of the action, written in the ADM formalism [46], at second order. Another simpler route would have been to infer the action from the equations of motion, which is always possible up to an overall factor, that could then be fixed by considering a simple limiting case. Still, we prefer to work out the action at second order since it provides a check of the previous computations.

5.1. ADM formalism

In the ADM formalism, we expand the metric as

$$ds^2 = -(N^2 - N_i N^i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.1)$$

and the Einstein–Hilbert action for a minimally coupled scalar field, takes the form

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x \sqrt{-g} [NR^{(3)} + N(K_{ij}K^{ij} - K^2) - \kappa N(g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi + 2V(\varphi)) + \kappa N^{-1}(\dot{\varphi} - N^i\partial_i\varphi)^2], \quad (5.2)$$

where $R^{(3)}$ is the Ricci scalar constructed with the metric g_{ij} and K_{ij} is the extrinsic curvature, defined as

$$K_{ij} \equiv \frac{N^{-1}}{2}(\dot{g}_{ij} - 2\nabla_{(i}N_{j)}), \quad K = K_i^i. \quad (5.3)$$

Every spatial index is now manipulated with the metric g_{ij} . The ADM metric is designed in such a way that the constraints arising from the Einstein equations can be immediately derived from the action. Varying equation (5.2) with respect to the lapse N and the shift N_i , we get the Hamiltonian and momentum constraints, respectively

$$R^{(3)} - (K_{ij}K^{ij} - K^2) - 2V - \kappa g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi + N^{-2}\kappa(\dot{\varphi} - N^i\partial_i\varphi)^2 = 0, \quad (5.4)$$

$$\nabla_j(K_i^j - K\delta_i^j) - N^{-1}\kappa(\dot{\varphi} - N^j\partial_j\varphi)\partial_i\varphi = 0. \quad (5.5)$$

Comparing the form (2.30) of the metric in Newtonian gauge with equation (5.1), we conclude that the lapse N and the shift N_i are given by

$$N^2 = (1 + 2\Phi), \quad N_i = 0 \quad (5.6)$$

and that the metric g_{ij} is

$$g_{ij} = a^2 \left[\gamma_{ij} - 2\Psi \left(\gamma_{ij} + \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{H} \right) + 2\partial_{(i}E_{j)} + 2E_{ij} \right]. \quad (5.7)$$

It follows that the Hamiltonian and momentum constraints reduce, at first order, to

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2}\Delta\Psi - \frac{1}{a^2}\hat{\sigma}^{ij}\partial_i\partial_j \left(\frac{\Psi}{H} \right) - 6H\dot{\Psi} + \left(\frac{\Psi}{H} \right) \hat{\sigma}^2 - 3\Psi\hat{\sigma}^2 - \Phi(6H^2 - \hat{\sigma}^2 - \dot{\varphi}^2) \\ + \frac{1}{a}\hat{\sigma}_j^i\partial_i\Phi^j - \hat{\sigma}_j^i(E_j^i) - \kappa V_\varphi\delta\varphi - \kappa\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

and

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2\partial_i \left(\frac{\Psi}{H} \right) - \hat{\sigma}_i^j\partial_j \left[\Phi + \left(\frac{\Psi}{H} \right) \right] + 2\partial_i(\dot{\Psi} + H\Phi) \\ - \frac{1}{2a}\Delta\Phi_i + 2\hat{\sigma}^{jl}\partial_j E_{il} - \hat{\sigma}^{jl}\partial_i E_{jl} - \kappa\dot{\varphi}\partial_i\delta\varphi = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

respectively. Once Fourier transformed, written in conformal time and projected along its scalar and vector components, we recover precisely equations (3.19) and (3.22).

In order to expand the action up to second order in all first order perturbed quantities, we expand the spatial metric as

$$g_{ij} = a^2(\gamma_{ij} + h_{ij}).$$

The inverse metric and its determinant are then given by

$$g^{ij} = a^{-2}(\gamma^{ij} - h^{ij} + h^il h_l^j), \quad \sqrt{g} = a^3[1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h_i^i h_j^j],$$

where

$$h_{ij} = -2\Psi(\gamma_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}/H) + 2\partial_{(i}E_{j)} + 2E_{ij}. \quad (5.10)$$

5.2. Action at zeroth and first orders

The expansions of the action at zeroth and first orders are

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x [a^3(-6H^2 + \hat{\sigma}^2 - 2\kappa V + \kappa\dot{\varphi}^2)] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x \left[-4 \frac{d}{dt} (a^3 H) \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x a^3 [R_1^{(3)} + \hat{\sigma}^{ij} \dot{h}_{ij} - 2\hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_l^i h^{jl} + 12H\dot{\Psi} + 3\Psi(6H^2 - \hat{\sigma}^2 + 2\kappa V - \kappa\dot{\varphi}^2) \\ &\quad + \Phi(6H^2 - \hat{\sigma}^2 - 2\kappa V - \kappa\dot{\varphi}^2) - 2\kappa V_\varphi \delta\varphi + 2\kappa\dot{\varphi} \delta\dot{\varphi}] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x \left\{ \partial_i \left[\partial^i (4a\Psi) - \partial^i \left(\frac{a\Psi}{H} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \left[\Delta \left(\frac{a\Psi}{H} \right) + a^3 \hat{\sigma}^{ij} h_{ij} + 12a^3 H\Psi + 2a^3 \kappa \dot{\varphi} \delta\varphi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

where we use the notation X_n for the n th order term of the quantity X when expanded in perturbations. Note that we have used the background field equations to go from the first line to the second line in equations (5.11) and (5.12). As can be seen, these two terms can be rewritten in terms of total derivatives. It implies that the only non-trivial term will arise from the expansion of the action at second order.

5.3. Action at second order

A lengthy but straightforward computation shows that the expansion of the action at second order is

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2\kappa} \int dt d^3x a^3 \left[R_2^{(3)} + N_1 R_1^{(3)} + \frac{1}{2} h R_1^{(3)} + \mathcal{K}_2 + \frac{1}{2} h \mathcal{K}_1 + \frac{1}{8} h^2 \mathcal{K}_0 \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} h_j^i h_i^j \mathcal{K}_0 - N_1 \mathcal{K}_1 - \frac{1}{2} N_1 h \mathcal{K}_0 + N_1^2 \mathcal{K}_0 + \kappa (-a^{-2} \partial_i \delta\varphi \partial^i \delta\varphi - V_{\varphi\varphi} \delta\varphi^2 \\ &\quad - 2N_1 V_\varphi \delta\varphi - h V_\varphi \delta\varphi - h N_1 V - \frac{1}{4} h^2 V + \frac{1}{2} h_j^i h_i^j V + \delta\dot{\varphi}^2 - 2N_1 \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi} \\ &\quad \left. + N_1^2 \dot{\varphi}^2 + h \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi} - \frac{1}{2} h N_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8} h^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{4} h_j^i h_i^j \dot{\varphi}^2 \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

where

$$a^2 R_1^{(3)} = 4 \left(\Delta - \frac{\hat{\sigma}^{ij} \partial_i \partial_j}{2H} \right) \Psi, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} a^2 R_2^{(3)} &= -\partial_l h^{lj} \partial_i h_j^i - 2h^{jl} \partial_j \partial_i h_l^i - 9\partial_i \Psi \partial^i \Psi - \frac{1}{4} \partial_l h^{ij} \partial^l h_{ij} - \frac{1}{2} \partial_l h_{ij} \partial^i h^{lj} \\ &\quad - 6\partial_i (h^{ji} \partial_j \Psi) + \frac{1}{2} \partial^i \partial_i (h^{jl} h_{jl}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{K}_0 = -6H^2 + \hat{\sigma}^2, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{K}_1 = -2H\dot{h} + \hat{\sigma}^{ij} \dot{h}_{ij} - 2\hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_l^j h^{li}, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 = & 2H\dot{h}_{ij}h^{ij} - 4H\hat{\sigma}_{ij}h^{il}h_l^j - 2\hat{\sigma}_i^l h^{im}\dot{h}_{ml} + 2\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_l^j h^{im}h_m^l + \frac{1}{4}\dot{h}^{ij}\dot{h}_{ij} \\ & + \hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{lm}h^{im}h^{jl} - \frac{1}{4}\dot{h}^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

The construction of the action at second order shall be pursued in Fourier space, since many non-local operators appear, such as inverse Laplacian Δ^{-1} or $(\sigma^{ij}\partial_i\partial_j)^{-1}$, when using the constraints. Also, it simplifies the use of the background equations (3.11)–(3.13) for the components of the shear σ_{\parallel} , $\sigma_{\nu a}$ and $\sigma_{\tau\lambda}$ which were defined in Fourier space. We recall that these components are *not* the Fourier transforms of the shear but its decomposition in a basis adapted to a given mode k_i .

The integral of any 3-divergence is clearly zero in Fourier space. For instance, let us consider a typical term like $\partial_l(\Psi\partial^l\Psi)$, then

$$\int d\eta d^3x \partial_l(\Psi\partial^l\Psi) = \int d\eta d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q} [-\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{q})\Psi_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{q}}]\delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = 0. \quad (5.19)$$

Thus, we first express S_2 in terms of the Fourier modes and then use conformal time. Next, h_{ij} is replaced by its expression (5.10) in function of the variables Ψ , E_j and E_{ij} . All terms involving E_j either vanish or have the form $(E^j)'$, and thus reduce to $-\Phi^j$ in Newtonian gauge. Then, we decompose Φ^j and E_{ij} according to equations (2.9) and (2.14). The constraint (5.9), once expressed in conformal time and in Fourier space, can be projected onto its scalar and vector parts in order to obtain the scalar constraint (4.2) and the vector constraint (3.25). Then, we replace Φ_a in function of X and E_λ using the vector constraint and substitute Φ by $X - \Psi - (\Psi/\mathcal{H})'$. We then eliminate X using the scalar constraint. Finally, we replace E_λ and $\delta\varphi$ by their expressions in terms of the variables μ_λ and v (see equation (4.1)).

After a tedious calculation, that strictly follows the recipe described just above, the action S_2 can be recast under a form that contains only the physical degrees of freedom,

$$\begin{aligned} S_2 = & \frac{1}{2} \int d\eta d^3k \left\{ v'v'^* + \left(\frac{z_s''}{z_s} - k^2 \right) vv^* + \sum_\nu \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\sqrt{k}\varphi'\sigma_{\tau\nu}}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right)' (v^*\mu_\nu + v\mu_\nu^*) \right. \\ & \times \sum_\lambda \left[\mu'_\lambda\mu_\lambda^* + \left(\frac{z_\lambda''}{z_\lambda} - k^2 \right) \mu_\lambda\mu_\lambda^* \right. \\ & \left. \left. + \left[-2\sigma_{\tau\times}\sigma_{\tau+} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{2a^2\sigma_{\tau\times}\sigma_{\tau+}}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} \right)' \right] \mu_{(1-\lambda)}\mu_\lambda^* \right] + \mathcal{T} \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

that is, in a more compact way, as

$$S_2 = \frac{1}{2} \int d\eta d^3k (|V'|^2 - k^2|V|^2 + {}^tV(\Omega - \Upsilon)V^* + \mathcal{T}), \quad (5.21)$$

where \mathcal{T} is a total derivative which, for the sake of completeness, is explicitly given in appendix D.

It is clear under this form that the variation of this action with respect to the physical degrees of freedom leads directly to the equations of motion (4.7) and (4.8). More important, it shows that the overall factor is unity. It also follows from this action that the canonical momentum associated with v and μ_λ are $\pi_v = v'^*$ and $\pi_\lambda = \mu_\lambda^*$.

6. Discussion and conclusions

In this paper, we have presented a full and complete analysis of the theory of cosmological perturbations around a homogeneous but anisotropic background spacetime of the Bianchi I type. We have described the scalar–vector–tensor decomposition and the construction of gauge invariant variables. We have reduced our analysis to a scalar field but it can be easily extended to include hydrodynamical matter.

After presenting the full set of evolution equations for the gauge invariant variables, we have shown that the vector modes can be algebraically expressed in terms of scalar and tensor modes, so that only three physical degrees of freedom remain, one for the scalar sector and two for the tensor sector. Contrary to the Friedmann–Lemaître case, the scalar, vector and tensor perturbation equations do not decorrelate and it was important for the consistency of the computation not to neglect the vector modes. We have shown that these physical degrees of freedom are the trivial generalization of the Mukhanov–Sasaki variables that were derived in a flat Friedmann–Lemaître universe.

We have also constructed the action for the cosmological perturbations up to second order and demonstrated that, after use of the constraints was made, it only contains the physical degrees of freedom and takes a canonical form. We have also shown that in the sub-Hubble limit the scalar and tensor degrees of freedom decouple and behave as standard harmonic oscillators. It follows that one can apply the standard quantization procedure [5] and properly define the normalization of the amplitude of their quantum fluctuations.

The anisotropy of the underlying space induces two physical effects: (1) the equations of motion explicitly involve the wavenumber k_i and (2) a non-diagonal mass term that describes the coupling between scalar perturbation and gravitational waves is at the origin of a scalar–tensor seesaw mechanism.

Since the shear decays as the inverse of the second power of the scale factor, the universe isotropizes and tends toward a Friedmann–Lemaître spacetime. The modes that exit the Hubble radius during inflation while the shear is non-negligible will experience the seesaw mechanism and will have the primordial anisotropy imprinted on their statistical properties. Modes of smaller wavelength will not reflect the anisotropy. It follows that an early Bianchi I phase may be at the origin of a primordial anisotropy of the cosmological perturbations, mainly on large angular scales. The companion article [49] describes such a scenario of early anisotropic slow-roll inflation. Since the post-inflationary evolution is well described by a Friedmann–Lemaître spacetime, observable effects, and in particular those related to the CMB anomalies we alluded to in the introduction, can be taken into account easily once the initial conditions are known. This investigation, that we plan to do later, is beyond the scope of the present work.

Our analysis extends and sheds some light on the robustness of the quantization procedure that was developed under the assumption of a Friedmann–Lemaître background, and thus on the predictions of the standard inflationary scenario. We emphasize that this work is very conservative and that no new speculative hypothesis was invoked. Indeed, we are not claiming that such a primordial anisotropy is needed. On the one hand, it can be used to set stronger constraints on the primordial shear. On the other hand it can also be a useful example for the study of second order perturbations, in which a shear appears only at first order and induces a correlation between scalar and

tensor at second order [47, 48], and more generally for the understanding of quantum field theory in curved (cosmological) spacetimes [19]. One may for instance wonder whether this analysis can be further extended to other Bianchi type or to non-spatially flat spacetimes.

Acknowledgments

We thank Nathalie Deruelle for her thorough remarks on an early version of this text, Marco Peloso, Misao Sasaki and Alberto Vallinotto for enlightening discussions and John Barrow, Lev Kofman and Slava Mukhanov for communication and for pointing out to us complementary references. TSP thanks the Institute of Astrophysics for hospitality during the duration of this work, and the Brazilian research agency Fapesp for financial support.

Appendix A. Details on Bianchi I universes

A.1. Geometrical quantities in conformal time

Starting from the metric (1.7) in conformal time, the expressions of the Christoffel symbols are

$$\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H}, \quad \Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H}\gamma_{ij} + \sigma_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \mathcal{H}\delta_j^i + \sigma_j^i, \quad (\text{A.1})$$

where we have used the definition of the shear to express $\gamma'_{ij} = 2\sigma_{ij}$ so that

$$(\gamma^{ij})' = -2\sigma^{ij}, \quad (\text{A.2})$$

and indeed trivially $(\gamma_j^i)' = (\delta_j^i)' = 0$.

We deduce that the non-vanishing components of the Ricci tensor are given by

$$a^2 R_0^0 = 3\mathcal{H}' + \sigma^2 \quad (\text{A.3})$$

$$a^2 R_j^i = (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_j^i + 2\mathcal{H}\sigma_j^i + (\sigma_j^i)', \quad (\text{A.4})$$

where we recall that $\sigma^2 = \sigma_{ij}\sigma^{ij}$. The Ricci scalar is

$$a^2 R = 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + \sigma^2. \quad (\text{A.5})$$

The non-vanishing components of the Einstein tensor are thus given by

$$a^2 G_0^0 = -3\mathcal{H}^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (\text{A.6})$$

$$a^2 G_j^i = -(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \frac{1}{2}\sigma^2)\delta_j^i + 2\mathcal{H}\sigma_j^i + (\sigma_j^i)'. \quad (\text{A.7})$$

For a general fluid with stress-energy tensor of the form

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) + \pi_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

where ρ is the energy density, P the isotropic pressure and $\pi_{\mu\nu}$ the anisotropic stress ($\pi_{\mu\nu}u^\mu = 0$ and $\pi_\mu^\mu = 0$), it implies that the Einstein equation takes the form

$$3\mathcal{H}^2 = \kappa a^2 \rho + \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa a^2}{6}(\rho + 3P) - \frac{1}{3}\sigma^2, \quad (\text{A.10})$$

$$(\sigma_j^i)' = -2\mathcal{H}\sigma_j^i + \kappa a^2 \tilde{\pi}_j^i, \quad (\text{A.11})$$

which correspond respectively to the ‘00’-component and trace and trace-free part of the ‘ ij ’-equation. The conservation equation for matter reads

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) + \sigma_{ij}\tilde{\pi}^{ij} = 0, \quad (\text{A.12})$$

where the ij -component of $\pi_{\mu\nu}$ has been defined as $a^2\tilde{\pi}_{ij}$ (so that $\tilde{\pi}_j^i = \gamma^{ik}\tilde{\pi}_{kj}$).

To close this system, one needs to specify, as usual, an equation of state for the fluid, that is an equation $P(\rho)$, but also to provide a description for $\pi_{\mu\nu}$. The latter vanishes for a perfect fluid and for a scalar field.

A.2. Bianchi I universes in cosmic time

Starting from the metric (1.3) in cosmic time, the expressions of the Christoffel symbols are

$$\hat{\Gamma}_{ij}^0 = a^2[H\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}], \quad \hat{\Gamma}_{0j}^i = a^2[H\delta_j^i + \frac{1}{2}\gamma^{ik}\dot{\gamma}_{kj}]. \quad (\text{A.13})$$

The Einstein equations take the form

$$3H^2 = \kappa\rho + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) - \frac{1}{3}\hat{\sigma}^2, \quad (\text{A.15})$$

$$(\hat{\sigma}_j^i)^\cdot = -3H\hat{\sigma}_j^i + \kappa\tilde{\pi}_j^i, \quad (\text{A.16})$$

and the conservation equation for the matter reads

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) + \hat{\sigma}_{ij}\tilde{\pi}^{ij} = 0. \quad (\text{A.17})$$

A.3. Bianchi I universes in the 1 + 3 formalism

The dynamics of Bianchi universes can be discussed in terms of the 1 + 3 covariant formalism (see e.g. [39, 42]). This description assumes the existence of a preferred congruence of worldlines representing the average motion of matter. The central object is the 4-velocity u^μ of these worldlines. The symmetries imply that it is orthogonal to the hypersurfaces of homogeneity,

$$u^\mu = -\delta_0^\mu, \quad u_\mu = \delta_{\mu 0}. \quad (\text{A.18})$$

The projection operator on the constant time hypersurfaces is defined as

$$\perp_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu.$$

Its only non-vanishing components being $\perp_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}(t)$.

The central kinematical quantities arise from the decomposition

$$\nabla_\mu u_\nu = -u_\mu \dot{u}_\nu + \frac{1}{3}\Theta \perp_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (\text{A.19})$$

For a Bianchi I universe, homogeneity implies that $D_\mu f = 0$ for all scalar functions (where the spatial derivative operator is defined as $D_\mu T^\alpha = \perp_{\mu}^{\mu'} \perp_{\alpha'}^\alpha \nabla_{\mu'} T^{\alpha'}$ etc). Since $D_\mu P = 0$, the flow is geodesic and irrotational ($\omega_{\mu\nu} = 0$) so that the acceleration also vanishes, $a_\mu = 0$, and we are just left with the expansion, Θ , and the shear $\Sigma_{\mu\nu}$.

It is clear from the form (1.3) that

$$\Theta = 3H. \quad (\text{A.20})$$

The only non-vanishing components of the shear is expressed simply in terms of the trace-free part of the Christoffel symbol $\hat{\Gamma}_{ij}^0$ as

$$\Sigma_{ij} = a^2 \hat{\sigma}_{ij}$$

so that

$$\Sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^3 \dot{\beta}_i^2. \quad (\text{A.21})$$

With the general form (A.8) for the stress-energy tensor, we get the conservation equation

$$\dot{\rho} + (\rho + P)\Theta + \Sigma_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.22})$$

which reduces to equation (A.12).

The Raychaudhuri [42] equation simplifies to

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 = -\Sigma^2 - 4\pi G(\rho + 3P). \quad (\text{A.23})$$

Since $\Theta = 3H$, the rhs is simply $3\ddot{a}/a = 3\mathcal{H}'/a^2$ so that it reduces to equation (A.10).

The Gauss equation takes the form

$${}^{(3)}R_{\mu\nu} = -u^\alpha \nabla_\alpha \Sigma_{\mu\nu} - \Theta \Sigma_{\mu\nu} + \kappa \pi_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \perp_{\mu\nu} (\kappa \rho - \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{1}{2}\Sigma^2). \quad (\text{A.24})$$

We have to be careful here since $u^\alpha \nabla_\alpha \Sigma_{\mu\nu}$ is not equal to $\partial_t \Sigma_{\mu\nu}$. It is given, for the ij -component by $u^\alpha \nabla_\alpha \Sigma_{ij} = (a^2 \hat{\sigma}_{ij})^\cdot - 2\hat{\Gamma}_{0j}^k a^2 \hat{\sigma}_{ik} = a^2 [(\hat{\sigma}_{ij})^\cdot - 2\hat{\sigma}_{ik} \hat{\sigma}_j^k]$.

In the particular case of a Bianchi I spacetime, ${}^{(3)}R_{\mu\nu} = 0$ so that the trace of the generalized Friedmann equation [42] reduces to

$$\kappa \rho - \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{1}{2}\Sigma^2 = {}^{(3)}R.$$

Shifting to conformal time, this gives equation (A.9) when ${}^{(3)}R = 0$. The trace-free part leads to equation (A.11). Note that this implies that when the anisotropic stress vanishes, $a^3 \Sigma_{\mu\nu}$ is constant for the $u^\alpha \nabla_\alpha$ time derivative but that it implies that $a^2 \sigma_j^i$ is constant in terms of the ordinary conformal time derivative. The identification of $u^\mu \nabla_\mu$ and ∂_t holds only for scalars (see e.g. [47]).

A.4. General solution of the background equations

It is useful to determine general solutions of the evolution of the background spacetime [2]. We concentrate on the particular case in which $\pi_{\mu\nu} = 0$ (relevant for scalar fields) and first set

$$\beta_i = B_i W(t). \quad (\text{A.25})$$

Equations (1.10) and (1.16) then imply that

$$\left(\sum B_i^2 \right) \dot{W}^2(t) = \frac{\mathcal{S}^2}{a^6} \quad \text{or} \quad \left(\sum B_i^2 \right) [W'(\eta)]^2 = \frac{\mathcal{S}^2}{a^4},$$

from which we deduce that

$$W(t) = \int \frac{dt}{a^3} \quad \text{or} \quad W(\eta) = \int \frac{d\eta}{a^2}. \quad (\text{A.26})$$

The constraints (1.5) and (1.10) imply that the B_i must satisfy

$$\sum_{i=1}^3 B_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 B_i^2 = \mathcal{S}^2, \quad (\text{A.27})$$

which are trivially solved by setting

$$B_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{S} \sin \alpha_i, \quad \alpha_p = \alpha + \frac{2\pi}{3} p, \quad p \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{A.28})$$

Thus, the general solution is of the form

$$\beta_i(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{S} \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} i \right) \times W, \quad (\text{A.29})$$

where a is solution of

$$3H^2 = \kappa\rho + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{S}^2}{a^6}. \quad (\text{A.30})$$

Once an equation of state is specified, the conservation equation gives $\rho[a]$ and we can solve for $a(t)$.

As an example, consider the case of a pure cosmological constant, $V = \text{const.}$ and $\dot{\varphi} = 0$. The Friedmann equation takes the form

$$H^2 = V_0 \left[1 + \left(\frac{a_*}{a} \right)^6 \right],$$

with $V_0 \equiv \kappa V/3$ and $a_* \equiv (\mathcal{S}/6V_0)^{1/6}$. It can be integrated easily to get

$$a(t) = a_* \left[\sinh \left(3\sqrt{V_0} t \right) \right]^{1/3}. \quad (\text{A.31})$$

Asymptotically, it behaves as the scale factor of a de Sitter universe, $a \propto \exp(\sqrt{V_0} t)$ but at early time the shear dominates and $a \propto t^{1/3}$.

Appendix B. Properties of the polarizations

We summarize here the main properties of the polarization tensors, defined in section 2.1. The time derivative of the polarization tensor is given by

$$(\varepsilon_{ij}^\lambda)' = -(\sigma^{kl} \varepsilon_{kl}^\lambda) P_{ij} - (\sigma^{kl} P_{kl}) \varepsilon_{ij}^\lambda + 4\sigma_{(i}^k \varepsilon_{j)k}^\lambda, \quad (\text{B.1})$$

or equivalently,

$$(\varepsilon_j^{i\lambda})' = -(\sigma^{kl} \varepsilon_{kl}^\lambda) P_j^i - (\sigma^{kl} P_{kl}) \varepsilon_j^{i\lambda} + 2\sigma_j^k \varepsilon_k^{i\lambda}. \quad (\text{B.2})$$

In terms of the decomposition (3.1) of the shear tensor, it takes the forms

$$(\varepsilon_{ij}^\lambda)' = -\sigma_{\text{T}\lambda} P_{ij} + \sigma_{\parallel} \varepsilon_{ij}^\lambda + 4\sigma_{(i}^k \varepsilon_{j)k}^\lambda, \quad (\text{B.3})$$

and

$$(\varepsilon_j^{i\lambda})' = -\sigma_{\text{T}\lambda} P_j^i + \sigma_{\parallel} \varepsilon_j^{i\lambda} + 2\sigma_j^k \varepsilon_k^{i\lambda}, \quad (\text{B.4})$$

and the time derivative of the projection operator P_{ij} is given by

$$(P^{ij})' = -2\sigma_{\text{T}+\varepsilon_+^{ij}} + 2\sigma_{\parallel} P^{ij}. \quad (\text{B.5})$$

Let us also give the following relations that turn to be useful for the derivation of the evolution equation of the tensor modes

$$\begin{aligned} \sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} \sigma_{jp} \varepsilon_{\lambda}^{pi} &= \frac{1}{4} \sigma_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} (\sigma_{\lambda}^2 - \sigma_{(1-\lambda)}^2) \\ \sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} \sigma_{jp} \varepsilon_{(1-\lambda)}^{pi} &= \sigma_{\text{T}\times} \sigma_{\text{T}+} \\ \sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} \sigma^{ip} \varepsilon_{jp}^{\lambda} &= \frac{1}{4} \sigma_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} (\sigma_{\text{T}+}^2 + \sigma_{\text{T}\times}^2) + \frac{1}{2} \sum_a \sigma_{\text{va}}^2 \\ \sigma_{il} \varepsilon_{\lambda}^{lj} \sigma^{ip} \varepsilon_{jp}^{(1-\lambda)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Appendix C. Perturbed quantities

For the sake of completeness, let us give the expression of the Lie derivative (2.36) of the displacement ξ (2.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi} \bar{g}_{00} &= -2a^2 (T' + \mathcal{H}T) \\ \mathcal{L}_{\xi} \bar{g}_{0i} &= a^2 (\xi'_i - \partial_i T - 2\sigma_{ji} \xi^j) \\ \mathcal{L}_{\xi} \bar{g}_{ij} &= a^2 [2\partial_{(i} \xi_{j)} + 2\mathcal{H}T \gamma_{ij} + 2T \sigma_{ij}]. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

The expression of the components of the stress-energy tensor of the scalar field at first order is

$$a^2 \delta T_0^0 = \varphi'^2 \Phi - \varphi' \chi' - V_{\varphi} a^2 \chi, \quad (\text{C.2})$$

$$a^2 \delta T_i^0 = -\partial_i [\varphi' \chi], \quad (\text{C.3})$$

$$a^2 \delta T_i^j = -\delta_j^i [\varphi'^2 \Phi - \varphi' \chi' + V_{\varphi} a^2 \chi]. \quad (\text{C.4})$$

Note that they are exactly the same expressions than in a Friedmann–Lemaître spacetime. It comes from the fact that δg_{ij} never appears. Indeed, the δT_{ij} etc components will be different compared to the Friedmann–Lemaître case.

In Newtonian gauge the Christoffel symbols at first order take the form

$$\delta \Gamma_{00}^0 = \Phi' \quad (\text{C.5})$$

$$\delta \Gamma_{0j}^0 = \partial_j \Phi \quad (\text{C.6})$$

$$\delta \Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H} h_{ij} + \frac{1}{2} h'_{ij} - 2\mathcal{H} \Phi \gamma_{ij} - 2\Phi \hat{\sigma}_{ij} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} h_j^{i'} - \hat{\sigma}_{kj} h^{ki} \\ &= \frac{1}{2} (h_j^i)' - \hat{\sigma}_{kj} h^{ki} + h_{kj} \hat{\sigma}^{ki} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\delta \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \gamma^{li} (\partial_j h_{lk} + \partial_k h_{jl} - \partial_l h_{jk}). \quad (\text{C.9})$$

In Newtonian gauge, the expressions of the components of the Einstein tensor at first order are

$$a^2 \delta G_0^0 = -2\Delta\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 2\sigma^2\Psi - \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}}\right)' \sigma^2 + \frac{\sigma^{ij}}{\mathcal{H}}\partial_i\partial_j\Psi - \sigma^{ij}\partial_i\Phi_j + (E_j^i)'\sigma_i^j + (6\mathcal{H}^2 - \sigma^2)\Phi, \quad (\text{C.10})$$

$$a^2 \delta G_i^0 = -\sigma^2\frac{\partial_i\Psi}{\mathcal{H}} + \sigma_i^j\partial_j\left[\Phi + \Psi + \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}}\right)'\right] - 2\partial_i(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) + \frac{1}{2}\Delta\Phi_i - 2\sigma^{jk}\partial_j E_{ik} + \sigma^{jk}\partial_i E_{jk}, \quad (\text{C.11})$$

$$a^2 \delta G_j^i = \delta_j^i\left[2\Psi'' + (2\mathcal{H}^2 + 4\mathcal{H}')\Phi + \Delta(\Phi - \Psi) + 2\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{H}\Psi'\right] + \partial^i\partial_j(\Psi - \Phi) - \frac{2}{\mathcal{H}}\sigma_k^{(i}\partial_j)\partial^k\Psi + \sigma_j^i\left[-\mathcal{H}\left(\frac{\Psi'}{\mathcal{H}^2}\right)' + \left(\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)'\Psi + \frac{\Delta\Psi}{\mathcal{H}} - \Phi' - \Psi'\right] + \delta_j^i\left[\sigma^2\left(\Phi + \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}}\right)' - 2\Psi\right) + \frac{\sigma^{kl}}{\mathcal{H}}\partial_k\partial_l\Psi\right] + (E_j^i)'' + 2\mathcal{H}(E_j^i)' - \Delta E_j^i + 2[\sigma_k^i(E_j^k)' - \sigma_j^k(E_k^i)'] - \left[(E_l^k)'\sigma_k^l\right]\delta_j^i + \delta_j^i\sigma^{kl}\partial_k\Phi_l - \gamma^{ik}\left[\partial_{(k}(\Phi_{j)})' + 2\mathcal{H}\partial_{(k}\Phi_{j)} - 2\sigma_{(k}^l\partial_{|l}\Phi_{j)}\right]. \quad (\text{C.12})$$

Appendix D. Details concerning the expansion of the action

The total time derivative \mathcal{T} that appears in equation (5.20) is explicitly given by

$$\mathcal{T} = \left[-a^2\sigma_i^l h_{ml} h^{im} + a^2 h_{ij} h^{ij} \mathcal{H} + \mathcal{H}(a\delta\varphi)^2 - \frac{(\varphi'v)^2}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} - \frac{2a\varphi'v\sigma^{ij}E_{ij}}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} - \frac{a^2(\sigma^{ij}E_{ij})^2}{2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel}} - \mathcal{H}\mu_{ij}\mu_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl} - 4a^2\sigma^{jk}E_{ik}\Psi\left(\gamma_j^i + \frac{\sigma_j^i}{\mathcal{H}}\right) + \frac{(2\mathcal{H} - \sigma_{\parallel})a^2k^2\Psi^2}{\mathcal{H}^2} - 18\Psi^2\mathcal{H}a^2 + \frac{7\Psi^2\sigma^2a^2}{\mathcal{H}} + \frac{2\Psi^2a^2\sigma_i^j\sigma_j^k\sigma_k^i}{\mathcal{H}^2} - \frac{2va\Psi\varphi''}{\mathcal{H}} - 6\Psi\varphi'av\right]. \quad (\text{D.1})$$

References

- [1] Linde A D, 1990 *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Chur: Harwood)
- Mukhanov S, 2005 *Fundamental Cosmology* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Peter P and Uzan J-P, 2005 *Cosmologie Primordiale* (Paris: Belin)
- [3] Linde A, 2007 Preprint [0705.0164](#) [hep-th]
- [4] Mukhanov V and Chibisov G V, 1981 *JETP Lett.* **33** 532
- Hawking S W, 1982 *Phys. Lett. B* **115** 295 [SPIRES]

- [5] Mukhanov V F, Feldman F A and Brandenberger R H, 1992 *Phys. Rep.* **215** 203 [SPIRES]
- [6] Spergel D *et al*, 2007 *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 [astro-ph/0603449]
- [7] Linde A D, 1985 *Phys. Lett. B* **158** 375 [SPIRES]
García-Bellido J and Wands D, 1996 *Phys. Rev. D* **53** 5437 [SPIRES]
Mukhanov V F and Steinhardt P J, 1998 *Phys. Lett. B* **422** 52 [SPIRES]
Langlois D, 1999 *Phys. Rev. D* **59** 123512 [SPIRES]
- [8] Komatsu E *et al*, 2006 *Phys. Rep.* **402** 103 [SPIRES] [astro-ph/0406398]
Linde A and Mukhanov V, 1997 *Phys. Rev. D* **56** 535 [SPIRES] [astro-ph/9610219]
Bernardeau F and Uzan J-P, 2002 *Phys. Rev. D* **66** 103506 [SPIRES] [hep-ph/0207295]
Bernardeau F and Uzan J-P, 2003 *Phys. Rev. D* **67** 121301(R) [SPIRES] [astro-ph/0209330]
- [9] Bernardeau F, Kofman L and Uzan J-P, 2004 *Phys. Rev. D* **70** 083004 [SPIRES] [astro-ph/0403315]
- [10] Mukhanov V F, 1985 *Pis. Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **41** 402
Mukhanov V F, 1985 *JETP Lett.* **41** 493 (translation)
Sasaki M, 1986 *Prog. Theor. Phys.* **76** 1036 [SPIRES]
- [11] Ellis G F R *et al*, 2002 *Gen. Rel. Grav.* **34** 1445 [SPIRES] [gr-qc/0109023]
Uzan J-P, Kirchner U and Ellis G F R, 2003 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **344** L65 [astro-ph/0302597]
- [12] Rothman A and Ellis G F R, 1986 *Phys. Lett. B* **180** 19 [SPIRES]
Raychaudhuri A and Modak B, 1988 *Class. Quantum Grav.* **5** 225 [SPIRES]
- [13] Goldwirth D S and Piran T, 1989 *Phys. Rev. D* **40** 3263 [SPIRES]
Goldwirth D S and Piran T, 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2852 [SPIRES]
Iguchi O and Ishihara H, 1997 *Phys. Rev. D* **56** 3216 [SPIRES] [gr-qc/9611047]
- [14] Deruelle N and Goldwirth D S, 1995 *Phys. Rev. D* **51** 1563 [SPIRES] [gr-qc/9409056]
- [15] Collins C B and Hawking S W, 1973 *Astrophys. J.* **180** 317 [SPIRES]
Wald R M, 1983 *Phys. Rev. D* **28** 2118 [SPIRES]
Barrow J D, 1982 *Q. J. R. Astron. Soc.* **23** 344
- [16] Burd A B and Barrow J D, 1988 *Nucl. Phys. B* **308** 929 [SPIRES]
Byland S and Scialom D, 1998 *Phys. Rev. D* **57** 6065 [SPIRES] [gr-qc/9802043]
- [17] Aguirregabiria J and Chamorro A, 2000 *Phys. Rev. D* **62** 084028 [SPIRES] [gr-qc/0006108]
Barrow J D and Hervik S, 2006 *Class. Quantum Grav.* **23** 3053 [SPIRES] [gr-qc/0511127]
- [18] Maartens R, Sahni V and Saini T D, 2001 *Phys. Rev. D* **63** 063509 [SPIRES] [gr-qc/0011105]
Santos M G, Vernizzi F and Ferreira P G, 2001 *Phys. Rev. D* **64** 063506 [SPIRES] [hep-ph/0103112]
Paul B C, 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124001 [SPIRES] [gr-qc/0107005]
Aguirregabiria J, Chimento L P and Lazkoz R, 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 823 [SPIRES] [gr-qc/0303096]
- [19] Zeldovich Y B and Starobinsky A A, 1972 *Sov. Phys. JETP* **34** 1159 [SPIRES]
Berger B J, 1975 *Phys. Rev. D* **12** 368 [SPIRES]
Suresh P K, 2003 *Preprint* gr-qc/0308080
- [20] Garriga J *et al*, 1998 *Nucl. Phys. B* **513** 343 [SPIRES] [astro-ph/9706229]
Garriga J and Mukhanov V F, 1999 *Phys. Lett. B* **458** 219 [SPIRES] [hep-th/9904176]
- [21] Oliveira-Costa A *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 063516 [SPIRES] [astro-ph/0307282]
Eriksen H K *et al*, 2004 *Astrophys. J.* **605** 14 [SPIRES] [astro-ph/0307507]
Schwartz D J *et al*, 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 0403353 [SPIRES] [astro-ph/0403353]
Land K and Magueijo J, 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 071301 [SPIRES] [astro-ph/0502237]
- [22] Prunet S *et al*, 2005 *Phys. Rev. D* **71** 083508 [SPIRES] [astro-ph/0406364]
- [23] Luminet J-P *et al*, 2003 *Nature* **425** 593 [SPIRES] [astro-ph/0310253]
Riazuelo A *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 103514 [SPIRES] [astro-ph/0311314]
Uzan J-P *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 043003 [SPIRES] [astro-ph/0303580]
- [24] Lehoucq R, Uzan J-P and Weeks J, 2003 *Kodai Math. J.* **26** 119 [math.SP/0202072]
Gausmann E *et al*, 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 5155 [SPIRES] [gr-qc/0106038]
Lehoucq R *et al*, 2002 *Class. Quantum Grav.* **19** 4683 [SPIRES] [gr-qc/0205009]
Barrow J D and Kodama H, 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 1753 [SPIRES] [gr-qc/0012074]
- [25] Armendariz-Picon C, 2007 *Preprint* 0705.1167
- [26] Gümürükçüoğlu A E, Contaldi C R and Peloso M, 2006 *Preprint* astro-ph/0608405
- [27] Ackerman L, Carroll S M and Wise M B, 2007 *Phys. Rev. D* **75** 083502 [SPIRES] [astro-ph/0701357]
- [28] Jaffe T R *et al*, 2005 *Astrophys. J. Lett.* **629** L1 [astro-ph/0503213]
- [29] Jaffe T R *et al*, 2006 *Preprint* astro-ph/0606046
- [30] Pontzen A and Challinor A, 2007 *Preprint* 0706.2075 [astro-ph]
- [31] Martens R, Ellis G F R and Stoeger W R, 1996 *Astron. Astrophys.* **309** L7 [SPIRES] [astro-ph/9501016]

- Marteens R, Ellis G F R and Stoeger W R, 1995 *Phys. Rev. D* **51** 1525 [SPIRES] [astro-ph/9510126]
- [32] Stoeger W R, Araujo M E and Gebbie T, 1997 *Astrophys. J.* **476** 435 [SPIRES] [astro-ph/9904346]
- [33] Kogut A, Hinshaw G and Banday A J, 1997 *Phys. Rev. D* **55** 1901 [SPIRES] [astro-ph/9701090]
- [34] Martinez-Gonzalez E and Sanz J L, 1995 *Astron. Astrophys.* **300** 346 [SPIRES]
- [35] Thorne K S, 1967 *Astrophys. J.* **148** 51 [SPIRES]
- [36] Tomita K and Den M, 1986 *Phys. Rev. D* **34** 3570 [SPIRES]
- [37] Noh H and Hwang J-C, 1995 *Phys. Rev. D* **52** 1970 [SPIRES]
- [38] Abbott R B, Bednarz B and Ellis D, 1986 *Phys. Rev. D* **33** 2147 [SPIRES]
- [39] Dunsby P, 1993 *Phys. Rev. D* **48** 3562 [SPIRES]
- [40] Pitrou C and Uzan J-P, 2007 *Phys. Rev. D* **75** 087302 [SPIRES] [gr-qc/0701121]
- [41] Bardeen J M, 1980 *Phys. Rev. D* **22** 1882 [SPIRES]
- Gerlach U and Sengupta U, 1978 *Phys. Rev. D* **18** 1789 [SPIRES]
- [42] van Elst H and Ellis G F R, 1998 *Preprint* gr-qc/9812046
- [43] Ryan M P, 1975 *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
- [44] Ellis G F R and MacCallum M A H, 1969 *Commun. Math. Phys.* **12** 108 [SPIRES]
- [45] Salopek D, 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 1943 [SPIRES]
- Deruelle N and Langlois D, 1995 *Phys. Rev. D* **52** 2007 [SPIRES]
- [46] Arnowitt R, Deser S and Misner C W, 1962 *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed L Witten (New York: Wiley) chapter 7, pp 227–265 [gr-qc/0405109]
- [47] Osano B *et al.*, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP04(2007)003 [SPIRES] [gr-qc/0612108]
- [48] Maldacena J, 2005 *J. High Energy Phys.* JHEP05(2005)013 [SPIRES] [astro-ph/0210603]
- [49] Pitrou C, Pereira T S and Uzan J-P, 2007 in preparation

8.2 Variables invariantes de jauge dans le cas d'un espace de Bianchi quelconque

Dans l'article précédent, nous avons construit des variables invariantes de jauge pour le cas d'un espace de fond de type Bianchi I . On peut généraliser ce procédé à tout espace de fond homogène mais pas nécessairement isotrope en utilisant le formalisme 1 + 3 sur l'espace de fond. Un espace de Bianchi est caractérisé par un ensemble d'observateurs de quadrivitesse \bar{u}_μ en chute libre ($\bar{a}_\mu = \bar{u}^\nu \bar{\nabla}_\nu \bar{u}_\mu = 0$), et sans vorticité ($\bar{\omega}_{\mu\nu} = 0$) [Ellis & MacCallum 69]. La courbure extrinsèque des surfaces orthogonales à ces observateurs est donc

$$\bar{K}_{\mu\nu} = \bar{D}_\mu \bar{u}_\nu = \bar{\nabla}_\mu \bar{u}_\nu. \quad (8.2)$$

Les sections spatiales sont homogènes mais pas nécessairement isotropes. On considère maintenant une perturbation de cette métrique de fond $\delta g_{\mu\nu}$ et un changement de jauge généré par un champ vectoriel ξ^μ . On peut décomposer ce champ vectoriel en 1 + 3 selon

$$\xi^\mu \equiv -\bar{u}^\mu T + \hat{L}^\mu \equiv -\bar{u}^\mu T + \bar{D}^\mu L + L^\mu \quad (8.3)$$

avec $\bar{D}_\mu L^\mu = \bar{u}^\mu L_\mu = \bar{u}^\mu \hat{L}_\mu = 0$, si bien que la transformation de jauge $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} + 2\bar{\nabla}_{(\mu} \xi_{\nu)}$ prend la forme

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} \rightarrow & \delta g_{\mu\nu} + 2\bar{D}_{(\mu} \hat{L}_{\nu)} - 2\bar{u}_{(\mu} \left[\hat{L}_{\nu)} \right] + 2T \bar{K}_{\mu\nu} \\ & + 2\bar{K}_{\alpha(\mu} \hat{L}^\alpha \bar{u}_{\nu)} + 2\bar{u}_{(\mu} \bar{D}_{\nu)} T - 2\bar{u}_\mu \bar{u}_\nu \dot{T}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

On considère une décomposition de la métrique perturbée de la forme

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} \equiv & -2\Phi \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu + 2 \left(\bar{D}_\alpha B + B_\alpha - 2\bar{K}_{\alpha\lambda} \bar{D}^\lambda E \right) \bar{u}_{(\nu} \bar{h}^\alpha_{\mu)} \\ & - 2\Psi \frac{3\bar{K}_{\mu\nu}}{\bar{K}^\alpha_\alpha} + 2\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu E + 2\bar{D}_{(\mu} E_{\nu)} + 2E_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

avec

$$\bar{D}_\mu a = 0, \quad \bar{D}^\mu E_{\mu\nu} = 0, \quad E^\mu{}_\mu = 0, \quad \bar{D}^\mu E_\mu = 0, \quad \bar{D}^\mu B_{\mu=0}. \quad (8.6)$$

En projetant selon $\bar{u}^\mu \bar{u}^\nu$, $\bar{u}^\mu \bar{h}^\nu_\alpha$ et $\bar{h}^\mu_\beta \bar{h}^\nu_\alpha$, on obtient alors que sous une transformation de jauge du premier ordre les variables de perturbation se transforment selon

$$\begin{aligned} \Psi & \rightarrow \Psi - \frac{\bar{K}^\alpha_\alpha}{3} T \\ \Phi & \rightarrow \Phi + \mathcal{L}_u(T) \\ E & \rightarrow E + L \\ B & \rightarrow B - T + \mathcal{L}_u(L) \\ B^\mu & \rightarrow B^\mu + \mathcal{L}_u L^\mu \\ E^\mu & \rightarrow E^\mu + L^\mu \\ E_{\mu\nu} & \rightarrow E_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Il est ensuite facile d'incorporer une transformation conforme $\tilde{\mathbf{g}} \equiv a^2 \mathbf{g}$ dans le raisonnement précédent. On utilisera que $\mathcal{L}_u(\tilde{\mathbf{g}}) = a^2 \mathcal{L}(\mathbf{g}) + 2a \mathcal{L}_u(a) \mathbf{g}$, ce qui permettra de calculer le changement

de courbure extrinsèque ($\tilde{K}_{\mu\nu} \equiv K_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}\bar{h}_{\mu\nu}$) ainsi que la modification de la transformation de jauge de la métrique. On choisira la transformation conforme telle que $K^\alpha_\alpha = 0$ afin que toute l'expansion volumique soit dans le facteur d'échelle a . On aura donc $\tilde{K}^\alpha_\alpha = 3\frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}$. La forme de la perturbation de la métrique $\tilde{\mathbf{g}}$ sera la même que celle de \mathbf{g} au facteur multiplicatif a^2 près, mais en utilisant la courbure extrinsèque $\tilde{K}_{\mu\nu}$ pour le terme en facteur de Ψ , afin que la loi de transformation de cette variable soit inchangée. On obtiendra finalement les lois de transformation

$$\begin{aligned}
\Psi &\rightarrow \Psi - \frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}T \\
\Phi &\rightarrow \Phi + \frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}T + \mathcal{L}_u(T) \\
E &\rightarrow E + L \\
B &\rightarrow B - T + \mathcal{L}_u(L) \\
B^\mu &\rightarrow B^\mu + \mathcal{L}_u(L^\mu) \\
E^\mu &\rightarrow E^\mu + L^\mu \\
E_{\mu\nu} &\rightarrow E_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{8.8}$$

et la dérivée \mathcal{L}_u s'identifie alors à la dérivée par rapport au temps conforme. Nous avons obtenu des transformations simples en paramétrant de façon compliquée la perturbation de la métrique. L'avantage est que les lois de transformation sont maintenant exactement similaires à celles dérivées de façon pédestre dans le cas isotrope. Ici nous n'avons fait usage que de l'hypothèse d'homogénéité, puisque dans les calculs nous avons utilisé que pour tout scalaire X de l'espace de fond, $\bar{D}_\mu X = 0$. Nous pouvons donc calquer la procédure de construction d'ensembles complets de variables invariantes de jauge sur le cas isotrope, en utilisant par exemple les constructions (5.4), où la dérivée simple par rapport au temps conforme doit être remplacée par la dérivée de Lie \mathcal{L}_u . L'ensemble des différentes possibilités est revu dans [Peter & Uzan 05]. On remarque que dans le cas isotrope, $K_{\mu\nu} = 0$, et on retrouve la forme de la perturbation de la métrique (5.2).

Chapitre 9

Modèle d'inflation anisotrope et signatures observationnelles (article)

Lorsque l'on considère les équations d'évolution des degrés de liberté canoniques des perturbations, les termes de masse variables sont cependant très différents du cas isotrope lorsque le cisaillement domine, ce qui va altérer la procédure de quantification. De plus, les degrés de liberté canoniques sont couplés ce qui ne permet pas d'avoir trois champs scalaires indépendants. On peut néanmoins quantifier les degrés de liberté lorsque le cisaillement est intermédiaire et pour des modes pas trop petits, et ainsi prédire le spectre des perturbations primordiales à la fin de l'inflation.

Dans l'article qui suit, nous tirons ainsi les conclusions quant à la quantification des perturbations des degrés de liberté canoniques dans un modèle simple d'inflation, l'inflation chaotique. Les spectres résultants, en plus de dévier de l'invariance d'échelle présentent une dépendance directionnelle héritée de la phase anisotrope. On les décompose donc en harmoniques sphériques selon

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = f(k) \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\ell=\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} r_{\ell m}(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \right]. \quad (9.1)$$

Du fait des symétries des espaces de Bianchi I , les coefficients $r_{\ell m}$ sont réels et non nuls uniquement si ℓ et m sont pairs. On montre alors [Pullen & Kamionkowski 07] que les coefficients $a_{\ell m}$ de décomposition en harmoniques sphériques du CMB présentent des corrélations statistiques non diagonales, c'est-à-dire du type $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle$, si $\ell - \ell'$ est pair.

Predictions from an anisotropic inflationary era

Cyril Pitrou¹, Thiago S Pereira² and Jean-Philippe Uzan¹

¹ Institut d'Astrophysique de Paris, Université Pierre & Marie Curie–Paris VI, CNRS-UMR 7095, 98 bis, Bd Arago, F-75014 Paris, France

² Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66318, 05315-970 São Paulo, Brazil

E-mail: pitrou@iap.fr, thiago@if.usp.br and uzan@iap.fr

Received 28 January 2008

Accepted 14 March 2008

Published 3 April 2008

Online at stacks.iop.org/JCAP/2008/i=04/a=004

doi:10.1088/1475-7516/2008/04/004

Abstract. This paper investigates the predictions of an inflationary phase starting from a homogeneous and anisotropic universe of the Bianchi *I* type. After discussing the evolution of the background spacetime, focusing on the number of *e*-folds and the isotropization, we solve the perturbation equations and predict the power spectra of the curvature perturbations and gravity waves at the end of inflation.

The main features of the early anisotropic phase is (1) a dependence of the spectra on the direction of the modes, (2) a coupling between curvature perturbations and gravity waves and (3) the fact that the two gravity wave polarizations do not share the same spectrum on large scales. All these effects are significant only on large scales and die out on small scales where isotropy is recovered. They depend on a characteristic scale that can, but *a priori* must not, be tuned to some observable scale.

To fix the initial conditions, we propose a procedure that generalizes the one standardly used in inflation but that takes into account the fact that the WKB regime is violated at early times when the shear dominates. We stress that there exist modes that do not satisfy the WKB condition during the shear-dominated regime and for which the amplitude at the end of inflation depends on unknown initial conditions. On such scales, inflation loses its predictability.

This study paves the way for the determination of the cosmological signature of a primordial shear, whatever the Bianchi *I* spacetime. It thus stresses the importance of the WKB regime to draw inflationary predictions and demonstrates that, when the number of *e*-folds is large enough, the predictions converge toward

JCAP04(2008)004

those of inflation in a Friedmann–Lemaître spacetime but that they are less robust in the case of an inflationary era with a small number of e -folds.

Keywords: cosmological perturbation theory, inflation, quantum field theory on curved space, power spectrum

ArXiv ePrint: [0801.3596](https://arxiv.org/abs/0801.3596)

Contents

1. Introduction	3
2. Background dynamics	5
2.1. Definitions and notations	5
2.2. Friedmann equations and their general solutions	6
2.2.1. Friedmann equations.	6
2.2.2. General solutions.	7
2.2.3. Particular case of a cosmological constant.	8
2.2.4. Behaviour close to the singularity.	10
2.3. Slow-roll parameters	11
2.4. Numerical integration for a massive scalar field	12
2.5. Discussion	17
3. Summary of the perturbation theory	18
3.1. Mode decomposition	18
3.2. Decomposition of the shear	19
3.3. Gauge-invariant variables	19
3.4. The Mukhanov–Sasaki variables and their evolution equations	20
4. Prescription for the initial conditions	21
4.1. Friedmann–Lemaître universes	21
4.1.1. Quantization procedure.	21
4.1.2. WKB approximation.	22
4.1.3. Primordial spectra on super-Hubble scales.	23
4.1.4. Conclusion.	24
4.2. Generic Bianchi I universes	24
4.2.1. Characteristic wavenumber.	24
4.2.2. Anisotropy.	25
4.2.3. WKB regime.	25
4.2.4. Couplings.	28
4.3. Prescription for setting the initial conditions	28
4.3.1. Prescription for Bianchi I spacetimes.	28
4.3.2. Freedom in a time redefinition.	29
4.4. Discussion	32
5. Primordial spectra: numerical examples and predictions	34
5.1. Definition of the spectra	34
5.2. Predictions	35

6. Conclusion	36
Acknowledgments	39
Appendix A. Integrating the perturbations	39
A.1. Evolution of the shear components	39
A.2. Systematic construction	40
Appendix B. Slow-roll expressions	42
Appendix C. Particular case $\alpha = \pi/2$	43
References	46

1. Introduction

Inflation [1, 2] (see [3] for a recent review of its status) is now one of the cornerstones of the standard cosmological model. In its simplest form, inflation has very definite predictions: the existence of adiabatic initial scalar perturbations and gravitational waves, both with Gaussian statistics and an almost scale-invariant power spectrum [4, 5]. Various extensions, which in general involve more fields, allow, for example, for isocurvature perturbations [6], non-Gaussianity [7] and modulated fluctuations [8]. All these features let us hope that future data will shed some light on the details (and physics) of this primordial phase of the universe.

Almost the entire literature on inflation assumes that the universe is homogeneous and isotropic while homogeneity and isotropy are what inflation is supposed to explain. Indeed, the dynamics of anisotropic inflationary universes has been widely discussed [9]. It was demonstrated that, under a large variety of conditions, inflation occurs even if the spacetime is initially anisotropic [10], regardless of whether it is dominated by a pure cosmological constant or a slow-rolling scalar field. The isotropization of the universe was even recently generalized to Bianchi braneworld models [11]. It should be emphasized, however, that a deviation from isotropy [10] or flatness [12] may have a strong effect on the dynamics of inflation, and in particular on the number of e -folds.

The study of the perturbations during the isotropization phase has been overlooked, mainly because in the past decades one was mostly focused on large field inflationary models, which generically give very long inflationary phases. This was also backed up by the ideas of chaotic inflation and eternal inflation [3]. In such cases, it is thus an excellent approximation to describe the universe by a Friedmann–Lemaître (FL) spacetime when focusing on the modes observable today since they exited the Hubble radius approximately in the last 60 e -folds. In this case, the origin of the density perturbations is understood as the amplification of vacuum quantum fluctuations of the inflaton. In particular, the degrees of freedom that should be quantized deep in the inflationary phase, and known as the Mukhanov–Sasaki variables [13], were identified [5], which completely fix the initial conditions and make inflation a very predictive theory.

In the context of string theory, constructing a string compactification whose low energy effective Lagrangian is able to produce inflation is challenging (see [14]). In particular, it has proved to be difficult to build large field models [15] (in which the inflaton moves over large distances compared to the Planck scale in field space). This

has led to the idea that, in this framework, an inflationary phase with a small number of e -folds is favoured (see, however, [16]). If so, the predictions of inflation are expected to be sensitive to the initial conditions, and in particular the classical inhomogeneities are not expected to be exponentially suppressed, which makes the search for large scale deviations from homogeneity and isotropy much more motivated, as well as the possibility that the inflaton has not reached the inflationary attractor. More important, it is far from obvious (as we shall discuss in detail later) that all observable modes can be assumed to be in their Bunch–Davies vacuum initially, and more puzzling, that for a given mode modulus the possibility of setting the initial conditions will depend on its direction. If so, then the initial conditions for these modes would have to be set in the stringy phase, an open issue at the time.

The theory of cosmological perturbations in a Bianchi universe was roughed out in [17]–[19] (see also [20] and [21] for the case of higher-dimensional Kaluza–Klein models and [22] for the quantization of test fields and particle production in an anisotropic spacetime). Recently, we performed a full analysis of the cosmological perturbations in an arbitrary Bianchi I universe [23]. It was soon followed by an analysis [24] that focused on a Bianchi I universe with a planar symmetry. As we shall see in this work, the case of a planar symmetric spacetime is not generic (both for the dynamics of the background and the evolution of the perturbations).

From a more observationally oriented perspective, the primordial anisotropy can imprint a preferred direction in the primordial power spectra. This could be related to the possible large scale statistical anomalies [25] of the cosmic microwave background (CMB) anisotropies. Many possible explanations have been proposed, including foregrounds [26], non-trivial spatial topology [27] (which implies a violation of global isotropy [28]), the breakdown of local isotropy due to multiple scalar fields [29], the presence of spinors [30] or dynamical vectors [31], the effect of the spatial gradient of the inflaton [32] or a late-time violation of isotropy [33]. In the case of universes with planar symmetry, the signatures on the CMB were derived by many authors [24, 34, 35]. In this case, a large primordial shear is indeed necessary, which is not in contradiction with the constraints obtained from the CMB [36] or from big bang nucleosynthesis [37]. This brings a secondary motivation to our analysis: can the CMB anisotropy be related to an anisotropic primordial phase or, on the other hand, can it constrain the primordial shear and what are the exact predictions of a primordial anisotropic phase?

This is, however, not our primary motivation. In the first place, we are interested in understanding the genericity of the predictions of inflation, and in particular with respect to the symmetries of the background spacetime. As we shall see, the simple extension considered in this paper drives a lot of questions, concerning both the initial conditions in inflation and, more generally, quantum field theory in curved spacetime.

In this paper, we build on our previous work [23] to investigate the dynamics and predictions of one field inflation starting from a generic Bianchi I universe. After discussing the dynamics of the background in section 2, we focus on the evolution of the perturbations in section 3. In particular, we will need to understand the procedure for the quantization during inflation. As we shall see in section 4, this procedure deviates from the one standardly used in a Friedmann–Lemaître spacetime, and even in a planar symmetric spacetime as discussed in [24]. The main reason for such an extension lies in the fact that there always exist modes that were not in a WKB regime during the shear-dominated

inflationary era. It follows that, while our procedure leads to similar predictions to the standard one on small scales, it appears that there is a lack of predictability on large scales. Indeed, we do not want to push our description beyond the Planck or string scale where extensions of general relativity have to be considered. This may give a description of both the early phase of the inflationary era and also a procedure to fix the initial conditions without any ambiguity. In section 5, we explicitly compute the primordial spectra, for both scalar modes and gravity waves. We will describe in detail the effect of the anisotropy and show how the isotropic predictions are recovered on small scales.

2. Background dynamics

We first set our notation in section 2.1 and describe the dynamics of the background, focusing on its general solutions in section 2.2. We then turn to the slow-roll regime and to the case of a massive free field, that we shall use as our working example, respectively in sections 2.3 and 2.4.

2.1. Definitions and notations

Bianchi spacetimes [38] are spatially homogeneous and those of type *I* have Euclidean hypersurfaces of homogeneity. In comoving coordinates, and using cosmic time, their metric takes the general form

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 X_i^2(t) (dx^i)^2, \quad (2.1)$$

which includes three *a priori* different scale factors. It includes the Friedmann–Lemaître spacetimes as a subcase when the three scale factors are equal, and the extensively studied planar symmetric universes when only two of the three scale factors are different. The average scale factor, defined by

$$S(t) \equiv [X_1(t)X_2(t)X_3(t)]^{1/3}, \quad (2.2)$$

characterizes the volume expansion of the universe. The metric (2.1) can then be recast under the equivalent form

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)\gamma_{ij}(t) dx^i dx^j, \quad (2.3)$$

where the ‘spatial metric’, γ_{ij} , is the metric on constant time hypersurfaces. It can be decomposed as

$$\gamma_{ij} = \exp [2\beta_i(t)] \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

where the functions β_i must satisfy the constraint

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = 0. \quad (2.5)$$

Let us introduce some useful definitions. First, we consider the scale factors

$$a_i \equiv e^{\beta_i(t)}, \quad X_i = Sa_i. \quad (2.6)$$

They are associated with the following Hubble parameters:

$$H \equiv \frac{\dot{S}}{S}, \quad h_i = \frac{\dot{X}_i}{X_i}, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}, \quad (2.7)$$

which are trivially related by

$$h_i = H + \dot{\beta}_i, \quad H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 h_i, \quad (2.8)$$

where the dot refers to a derivative with respect to physical time. We define the shear as

$$\hat{\sigma}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \quad (2.9)$$

and introduce the scalar shear by

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}^{ij} = \sum_i \dot{\beta}_i^2. \quad (2.10)$$

(See appendix A of [23] to see the relation with the shear usually defined in the 1 + 3 formalism.) To finish, we define the conformal time by $dt \equiv S d\eta$, in terms of which the metric (2.3) is recast as

$$ds^2 = S^2(\eta) [-d\eta^2 + \gamma_{ij}(\eta) dx^i dx^j]. \quad (2.11)$$

We define the comoving Hubble parameter by $\mathcal{H} \equiv S'/S$, where a prime refers to a derivative with respect to the conformal time. The shear tensor, now defined as

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2} \gamma'_{ij}, \quad (2.12)$$

is clearly related to $\hat{\sigma}_{ij}$ by $\sigma_{ij} = S \hat{\sigma}_{ij}$ so that $\sigma^2 \equiv \sigma_{ij} \sigma^{ij}$ is explicitly given by $\sigma^2 = \sum_{i=1}^3 (\beta'_i)^2$ and is related to its cosmic time analogous by $\sigma = S \hat{\sigma}$.

2.2. Friedmann equations and their general solutions

2.2.1. Friedmann equations. In cosmic time, assuming a general fluid as matter source with stress-energy tensor

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) + \pi_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

where ρ is the energy density, P the isotropic pressure and $\pi_{\mu\nu}$ the anisotropic stress ($\pi_{\mu\nu} u^\mu = 0$ and $\pi^\mu{}_\mu = 0$), the Einstein equations take the form

$$3H^2 = \kappa\rho + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) - \frac{1}{3}\hat{\sigma}^2, \quad (2.15)$$

$$(\hat{\sigma}_j^i)^\cdot = -3H\hat{\sigma}_j^i + \kappa\tilde{\pi}_j^i, \quad (2.16)$$

and the conservation equation for the matter is

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) + \hat{\sigma}_{ij}\tilde{\pi}^{ij} = 0, \quad (2.17)$$

where the ij component of $\pi_{\mu\nu}$ has been defined as $S^2\tilde{\pi}_{ij}$ (so that $\tilde{\pi}_j^i = \gamma^{ik}\tilde{\pi}_{kj}$).

In this work, we focus on inflation and assume that the matter content of the universe is described by a single scalar field so that

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi + V\right) g_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

This implies that

$$3H^2 = \kappa \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right] + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2, \quad (2.19)$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{\kappa}{3} \left[\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)\right] - \frac{1}{3}\hat{\sigma}^2, \quad (2.20)$$

$$(\hat{\sigma}_j^i)^\cdot = -3H\hat{\sigma}_j^i. \quad (2.21)$$

The last of these equations is easily integrated and gives

$$\hat{\sigma}_j^i = \frac{\mathcal{K}_j^i}{S^3}, \quad (2.22)$$

where \mathcal{K}_j^i is a constant tensor, $(\mathcal{K}_j^i)^\cdot = 0$. This implies that

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathcal{K}^2}{S^6}, \quad (2.23)$$

with $\mathcal{K}^2 \equiv \mathcal{K}_j^i\mathcal{K}_i^j$, from which we deduce that

$$\dot{\hat{\sigma}} = -3H\hat{\sigma}. \quad (2.24)$$

The conservation equation reduces to the Klein–Gordon equation, which keeps its Friedmannian form:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_\varphi = 0. \quad (2.25)$$

2.2.2. General solutions. Let us concentrate on the particular case in which $\pi_{\mu\nu} = 0$ (relevant for scalar fields) and first set

$$\beta_i = B_i W(t), \quad (2.26)$$

where B_i are constants yet to be determined. Equations (2.10) and (2.23) then imply that

$$\left(\sum B_i^2\right) \dot{W}^2(t) = \frac{\mathcal{K}^2}{S^6},$$

from which we deduce that

$$W(t) = \int \frac{dt}{S^3}. \quad (2.27)$$

The constraints (2.5) and (2.10) imply that B_i must satisfy

$$\sum_{i=1}^3 B_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 B_i^2 = \mathcal{K}^2, \quad (2.28)$$

which can be trivially satisfied by setting

$$B_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathcal{K} \sin \alpha_i, \quad \text{with } \alpha_i = \alpha + \frac{2\pi}{3}i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.29)$$

Thus, the general solution is of the form

$$\beta_i(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{K} \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} i \right) \times W(t), \quad (2.30)$$

where S is the solution of

$$3H^2 = \kappa\rho + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{K}^2}{S^6}. \quad (2.31)$$

Once an equation of state is specified, the conservation equation gives $\rho[S]$ and we can solve for $S(t)$.

As we shall see, it is convenient to introduce the reduced shear

$$x \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\hat{\sigma}}{H} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sigma}{\mathcal{H}} \quad (2.32)$$

in terms of which the Friedmann equation takes the form

$$(1 - x^2)H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho,$$

so that the local positivity of the energy density implies that $x^2 < 1$.

2.2.3. Particular case of a cosmological constant. First, let us consider the case of a pure cosmological constant, $V = \text{constant}$ and $\dot{\varphi} = 0$. This case is relevant for the initial stage of the inflationary period since we expect first the shear to dominate and the field energy density to be dominated by its potential energy. If not, then the field is fast rolling and its energy density behaves as S^{-6} , exactly as the square of the shear.

The Friedmann equation now takes the form

$$H^2 = V_0 \left[1 + \left(\frac{S_*}{S} \right)^6 \right],$$

with³ $V_0 \equiv \kappa V/3$ and $S_* \equiv (\mathcal{K}^2/6V_0)^{1/6}$. It can be easily integrated to get

$$S(t) = S_* [\sinh(t/\tau_*)]^{1/3}, \quad (2.33)$$

where we have introduced the characteristic time

$$\tau_*^{-1} = 3\sqrt{V_0}. \quad (2.34)$$

Thus, we obtain from equation (2.27)

$$W(t) = W_0 + \frac{\tau_*}{S_*^3} \log \left[\tanh \left(\frac{t}{2\tau_*} \right) \right], \quad (2.35)$$

where the constant W_0 can be set to zero (corresponding to the choice of the origin of time). It follows, using $\sqrt{3/2}\mathcal{K} = S_*^3/\tau_*$, that the directional scale factors behave as

$$X_i = S_* \left[\sinh \left(\frac{t}{\tau_*} \right) \right]^{1/3} \left[\tanh \left(\frac{t}{2\tau_*} \right) \right]^{(2/3) \sin \alpha_i}. \quad (2.36)$$

³ Note the dimensions: $\rho \sim M^4$, $G \sim M^{-2}$, $H \sim M$, $\hat{\sigma} \sim M$, $B_i \sim M$, $W \sim M^{-1}$, $V_0 \sim M^2$, $S_* \sim M^0$ where M is a mass scale.

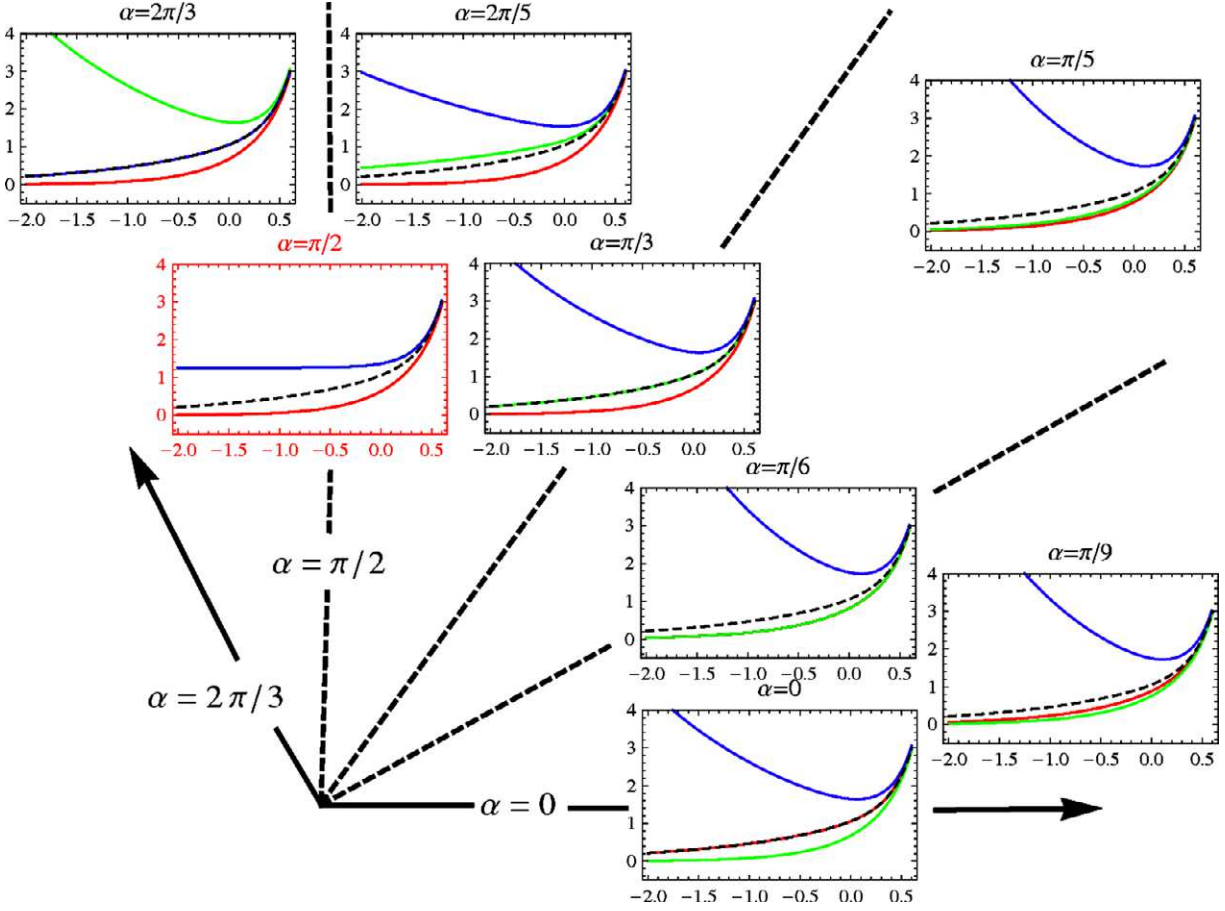


Figure 1. Evolution of the scale factors according to the value of the parameter α . We depict the three directional scale factors and the average scale factor S (dashed line), all in units of S_* . The three directional scale factors are permuted when α is changed by $2\pi/3$. Note that there exist two particular cases in which the spacetime has an extra rotational symmetry when $\alpha = \pi/6$ or $\pi/2$. The latter case is even more peculiar since this is the only Bianchi I universe for which none of the direction is bouncing.

From this expression, we deduce that the directional Hubble parameters evolve as

$$h_i = \frac{1}{3\tau_*} \frac{1}{\sinh(t/\tau_*)} [2 \sin \alpha_i + \cosh(t/\tau_*)] \quad (2.37)$$

and further that the average Hubble parameter and reduced shear are given by

$$H = \frac{1}{3\tau_*} \frac{1}{\tanh(t/\tau_*)}, \quad x = \frac{1}{\cosh(t/\tau_*)}. \quad (2.38)$$

The behaviours of the directional scale factors are depicted in figure 1 for various values of the parameter α . We restrict to $\alpha \in [0, 2\pi/3]$ and it is clear that for $\alpha < \pi/2$ the $i = 3$ direction is bouncing. At $\alpha = \pi/2$ none of the direction is contracting and then it switches to direction $i = 2$, when $\alpha > \pi/2$. It is thus clear that there is always one bouncing direction, except in the particular case in which $\alpha = \pi/2$.

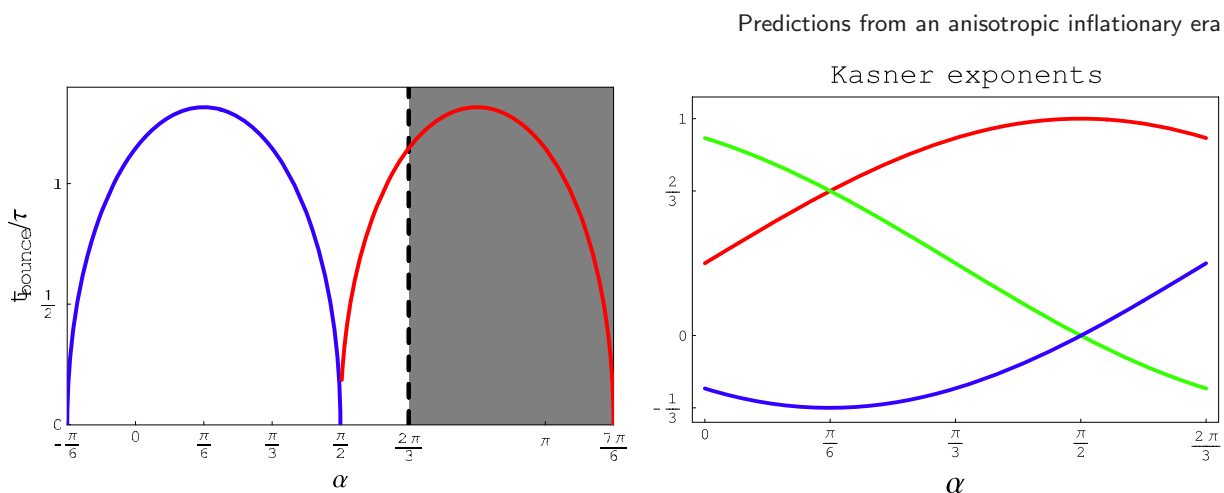


Figure 2. Left: time at which the direction i bounces (blue: $i = 3$), (red: $i = 2$). At $\pi/2$, none of the direction is contracting and a change of the contracting direction occurs. Right: value of the Kasner exponents as a function of the parameter α characterizing the Bianchi I model close to the singularity.

As a first conclusion, let us compute the time at which the contracting direction bounces. Figure 2 (left) depicts the value of the time of the bounce as a function of α and we conclude that it is always smaller than $1.4\tau_*$.

2.2.4. Behaviour close to the singularity. Whatever the potential chosen for the inflaton, the Friedmann equation will be dominated by the shear close to the singularity, so that we can use the solutions obtained in the case of a pure cosmological constant for the sake of discussion. From the previous analysis, we obtain that

$$X_i = S_* \left(\frac{t}{2\tau_*} \right)^{(2/3)\sin\alpha_i + (1/3)} \left[1 + \frac{1}{18}(1 - \sin\alpha_i) \left(\frac{t}{\tau_*} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{t}{\tau_*} \right)^4 \right) \right]. \quad (2.39)$$

The metric can thus be expanded around a Kasner solution of the form

$$ds_{\text{Kasner}}^2 = -dt^2 + S_*^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{t}{2\tau_*} \right)^{2p_i} (dx^i)^2, \quad (2.40)$$

with the indices

$$p_i(\alpha) = \frac{2}{3} \sin\alpha_i + \frac{1}{3}, \quad (2.41)$$

that clearly satisfy $\sum p_i = \sum p_i^2 = 1$ (see figure 2 (right)). We thus have

$$ds^2 \simeq -dt^2 + S_*^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{t}{2\tau_*} \right)^{2p_i} \left[1 + \frac{1}{12}(1 - p_i) \left(\frac{t}{\tau_*} \right)^2 \right] (dx^i)^2, \quad (2.42)$$

up to terms of order $(t/\tau_*)^4$.

The invariants of the metric behave as

$$R = \frac{4}{3\tau_*^2}, \quad (2.43)$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{4}{9\tau_*^2}, \quad (2.44)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{27\tau_*^2} \left\{ 8 + \frac{4}{\cosh^4[t/(2\tau_*)]} + \frac{32 \cosh(t/\tau_*)}{\sinh^4(t/\tau_*)} [3 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) - \sin(\alpha)^3 + 1] \right\}. \quad (2.45)$$

Clearly, we see that R and $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ are regular at the singularity, which is expected for a cosmological-constant-dominated universe since $R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$. The third invariant $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ diverges when we are approaching the singularity, the only exception being the case where $\alpha = \pi/2$, which corresponds to the positive branch considered in [24]. In this particular case, the Kasner metric has exponents $(1, 0, 0)$. We emphasize that the spacetime $\alpha = \pi/2$ is a singular point in the set of Bianchi spacetimes since there is no uniform convergence of the invariants of the metric evaluated on the singularity when $\alpha \rightarrow \pi/2$.

2.3. Slow-roll parameters

In order to discuss our results, we introduce the slow-roll parameters in the usual way by

$$\epsilon \equiv 3 \frac{\varphi'^2}{\varphi'^2 + 2S^2V}, \quad \delta \equiv 1 - \frac{\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'} = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}. \quad (2.46)$$

With these definitions, the Friedmann and Klein–Gordon equations take the form

$$(1 - x^2)\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3 - \epsilon}VS^2, \quad (3 - \delta)\mathcal{H}\varphi' + V_\varphi S^2 = 0, \quad (2.47)$$

and we deduce that

$$\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = (1 - \epsilon) + (\epsilon - 3)x^2, \quad (2.48)$$

so that

$$\frac{S''}{S} = \mathcal{H}^2 [2 - \epsilon + (\epsilon - 3)x^2] \quad (2.49)$$

and

$$\epsilon' = 2\mathcal{H}\epsilon(\epsilon - \delta). \quad (2.50)$$

Interestingly, it is easy to check that

$$x' = -\mathcal{H}x(1 - x^2)(3 - \epsilon),$$

from which we deduce that

$$\delta' = \mathcal{H} \left[-9x^2 + \frac{S^2V_{,\varphi\varphi}}{\mathcal{H}^2} - (1 - x^2)(3\epsilon + 3\delta) + \delta(\delta + \epsilon(1 - x^2)) \right]. \quad (2.51)$$

From the definition (2.46) and making use of the second equation of equations (2.47), we deduce that the slow-roll ϵ parameter takes the form

$$\epsilon = \frac{(1-x^2)}{2\kappa} \left(\frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2 \left(\frac{3-\epsilon}{3-\delta} \right)^2.$$

Once we use the relation $\dot{\varphi}^2 = 2\epsilon V/(3-\epsilon)$, we deduce that

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{(3-\epsilon)(1-x^2)}{(3-\delta)^2}} \frac{V_{,\varphi}}{\sqrt{V}}. \quad (2.52)$$

As long as $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ and in the limit $x \rightarrow 1$, which corresponds to the shear-dominated period prior to the inflationary phase, we have that

$$\epsilon \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow -3, \quad (2.53)$$

but we still have $\delta' \rightarrow 0$. It follows that initially, even if the shear decreases rapidly, φ remains almost constant and δ remains close to -3 . This solution converges when $t \rightarrow 0$ to the pure cosmological constant solution of section 2.2.3. Note that this conclusion differs from the statement of [39].

Before we reach the slow-roll attractor, we may be in a transitory regime in which $\dot{\varphi}^2 \gg V$. Then, this implies that

$$\epsilon \rightarrow 3, \quad \delta \rightarrow 3, \quad \dot{\varphi} \simeq \frac{\varphi_0}{t}.$$

The field velocity decreases so that this solution converges rapidly toward the slow-rolling attractor. These general results on the limiting behaviours will be important to understand the dynamics of the inflaton.

2.4. Numerical integration for a massive scalar field

In this paper, we will consider the explicit example of chaotic inflation with a potential

$$V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (2.54)$$

The dynamical equations (2.19) and (2.25) can be rescaled as

$$h^2 = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \psi^2 + \left(\frac{S_*}{S} \right)^6 \right], \quad (2.55)$$

$$\ddot{\psi} + 3h\dot{\psi} + \psi = 0, \quad (2.56)$$

where we use $\tau = mt$ as a time variable (so that $h = H/m$), $\psi = \varphi/M_p$ (with $M_p^{-2} = 8\pi G = \kappa$) as the field variable, and where $S_* = (\mathcal{K}/m)^{1/3}$. Under this form, it is clear that the various solutions of the system (2.55) and (2.56) are, in general, characterized by the three numbers $\{\psi(t_0), \dot{\psi}(t_0), S_*\}$. As we will now see, this extra dependence on the parameter S_* causes our dynamical system to behave differently from its analogues in Friedmann–Lemaître spacetimes⁴. Under this form, we also see clearly

⁴ There is another way to see this: the term in S^{-6} in equation (2.55) is equivalent to the contribution of a massless scalar field, χ say, that would satisfy the Klein–Gordon equation $\ddot{\chi} + 3h\dot{\chi} = 0$, implying $\dot{\chi} \propto S^{-3}$. One requires initial conditions for this extra degree of freedom as well.

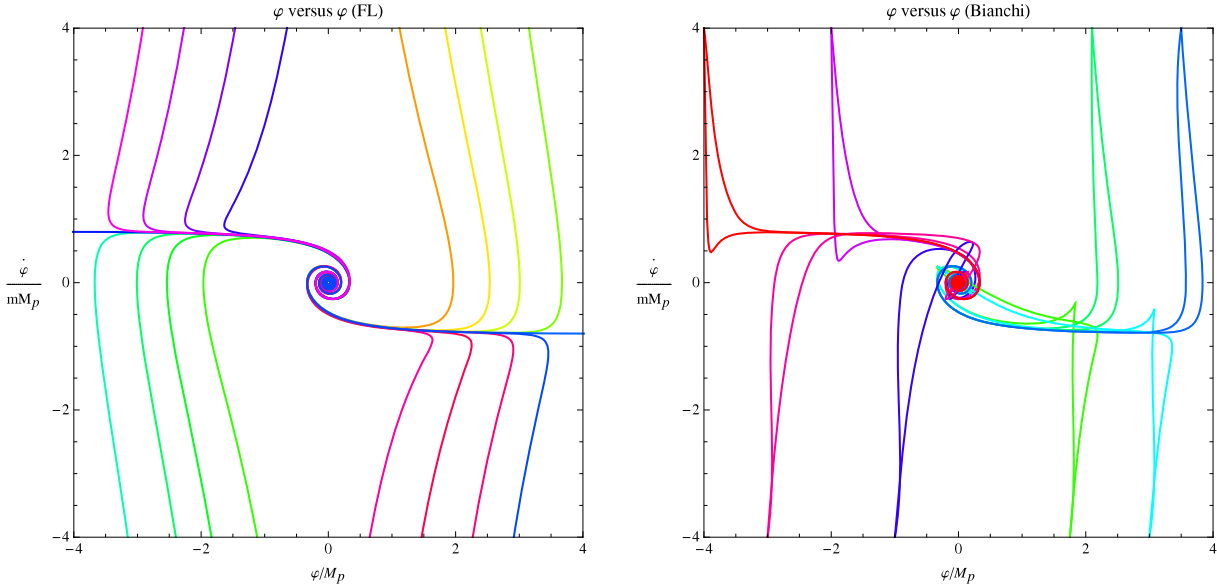


Figure 3. Comparison of the phase portraits of a Friedmann–Lemaître (left) and a Bianchi I inflationary phase. The curves with the same colour correspond to the same initial conditions for the scalar field but starting with different initial shear (see figure 4 for a three-dimensional representation).

that one cannot continuously go from a Bianchi to an FL spacetime (because either $S_* = 0$ or $S_* \neq 0$), even though Bianchi spacetime isotropizes.

It is well known that the dynamics of the inflationary stage in a Friedmann–Lemaître spacetime is characterized by attractor solutions, clearly seen in the phase space. For a large set of initial conditions, the solutions converge to the slow-roll stage defined by an almost constant $\dot{\varphi}$ and φ decreasing accordingly. It is thus given by a roughly horizontal line in the phase portrait which ends with the oscillations of the scalar field at the bottom of its potential. As previously mentioned, the slow-roll inflationary stage in Bianchi I spacetimes possesses the same attractor behaviour, although it is quite different during the initial shear-dominated phase. When the shear dominates, the solutions are rapidly attracted to the point $\dot{\varphi} \simeq 0$ and φ nearly constant. This is the attractor whose solution is given by equations (2.58)–(2.62). It then converges towards the Friedmann–Lemaître behaviour when the shear becomes negligible (see figure 4).

In conclusion, we have a double attraction mechanism, namely of the field dynamics toward the slow-roll attractor and of the Bianchi spacetime toward a Friedmann–Lemaître solution.

In figure 5, we compare the dynamics of the inflationary phase of a Bianchi I and a Friedmann–Lemaître spacetime. While in both cases the (average) scale factors grow, the effect of a shear-dominated phase is to initially decrease the velocity of the expansion of the Bianchi universe. On the other hand, the dynamics of the scalar field is barely affected by the presence of the shear as long as we have reached the slow-roll attractor. In the following we will assume that we have reached this attractor. If the number of e -folds is small, it is not clear that this attractor has been reached, regardless of whether or not we assume a Friedmann–Lemaître spacetime. In such a

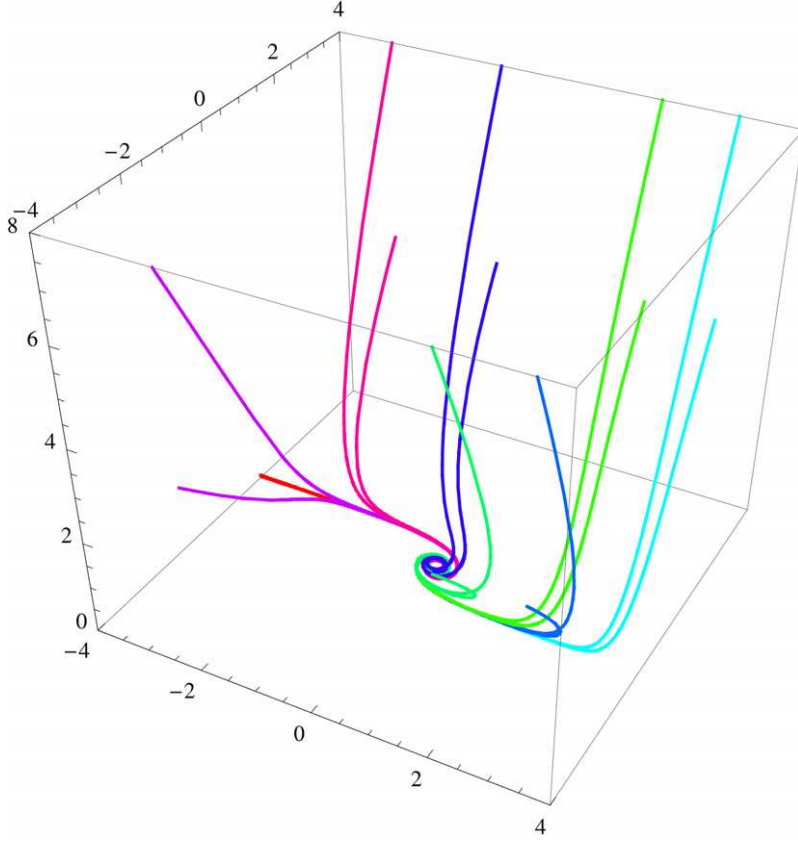


Figure 4. Phase portrait of a Bianchi I inflationary phase in the space $\{\varphi, \dot{\varphi}, \sigma\}$. The plane $\sigma = 0$ corresponds to the FL limit (see figure 3). This illustrates the double attraction mechanism of the spacetime toward FL and of the solution toward the slow-roll attractor.

case, one has to rely on families of trajectories to draw the observational predictions (see, e.g., [40]).

Let us now consider the behaviour close to the singularity and introduce the characteristic time τ_* , explicitly given by

$$\tau_* = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{M_{\text{p}}}{m\varphi_0}}. \quad (2.57)$$

By developing all the previous equations in powers of t/τ_* , we obtain that

$$H(t) = \frac{1}{3t} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{t^2}{\tau_*^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{\tau_*^4}\right) \right], \quad (2.58)$$

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau_*^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{\tau_*^4}\right), \quad (2.59)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{M_{\text{p}}}{\varphi_0} \right)^2 \frac{t^2}{\tau_*^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{\tau_*^4}\right) \right], \quad (2.60)$$

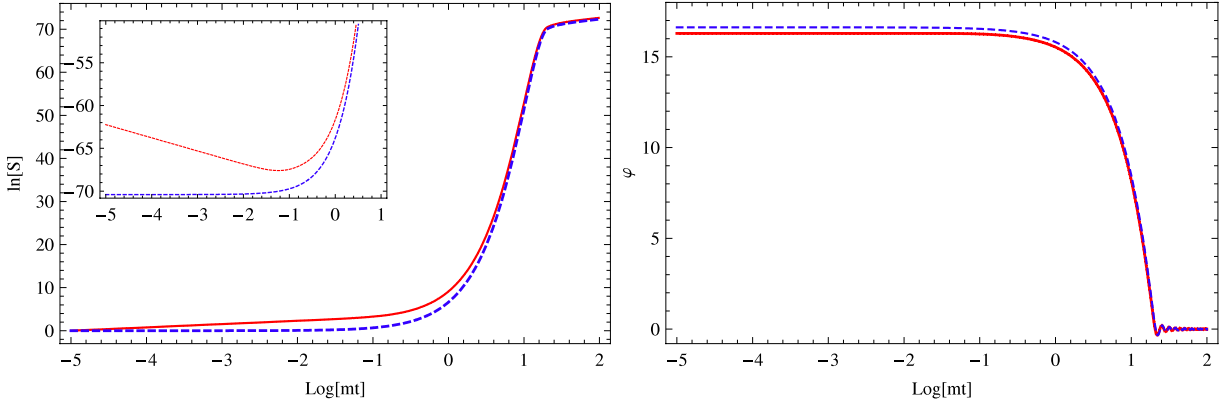


Figure 5. Evolution of the average scale factor (left) and scalar field (right) as a function of time for both the Bianchi (red, solid line) and FL cases (blue, dashed line). The Bianchi solution is characterized by $\varphi_0 = 16M_{\text{p}}$. We have normalized the solutions such that the scale factors have the same value at the end of the inflation when the shear is negligible. The inner-left figure shows the logarithmic evolution of the velocity of the expansion in both cases, the minimum of which indicates the time at which $\dot{S} = 0$ for the Bianchi case.

$$\delta(t) = -3 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau_*^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{\tau_*^4}\right) \right], \quad (2.61)$$

$$\epsilon(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{M_{\text{p}}}{\varphi_0} \right)^2 \frac{t^2}{\tau_*^2} + \mathcal{O}\left(\frac{t^4}{\tau_*^4}\right), \quad (2.62)$$

in complete agreement with the expansions obtained in [24]. In this limit, we understand why $\delta \rightarrow -3$ close to the singularity. It simply reflects the fact that the field decreases as t^2 . This is different from the case of chaotic inflation in a Friedmann–Lemaître spacetime where the field varies linearly with time during the slow-roll regime since in that case

$$\varphi = \varphi_i \left[1 - \left(\frac{M_{\text{p}}}{\varphi_i} \right)^2 \frac{t}{\tau_*} \right], \quad S = S_i \exp \left\{ \frac{1}{M_{\text{p}}^2} [\varphi_i^2 - \varphi^2(t)] \right\},$$

and the slow-roll parameters are explicitly given by

$$\epsilon = 2 \frac{M_{\text{p}}^2}{\varphi^2}, \quad \delta = 0.$$

Let us come back to the slow-roll parameters defined in section 2.3. In the particular case of a quadratic potential, we have

$$\delta' = \mathcal{H}(3 - \delta) \left[\frac{\epsilon^2 - 3\delta}{3 - \epsilon} - x^2(3 - \epsilon) \right], \quad (2.63)$$

since $S^2 V_{,\varphi\varphi} = \epsilon \mathcal{H}^2 (3 - \delta)^2 / (3 - \epsilon)$. During the shear-dominated phase, $\delta \sim -3$ and the previous equation tells us that δ remains constant. It follows from equation (2.50) that ϵ' is of the same order as ϵ (note the difference between the standard case in which ϵ' is second order). It follows that the variation of ϵ cannot be neglected until δ has converged toward 0. Then ϵ can be considered as constant until the end of inflation.

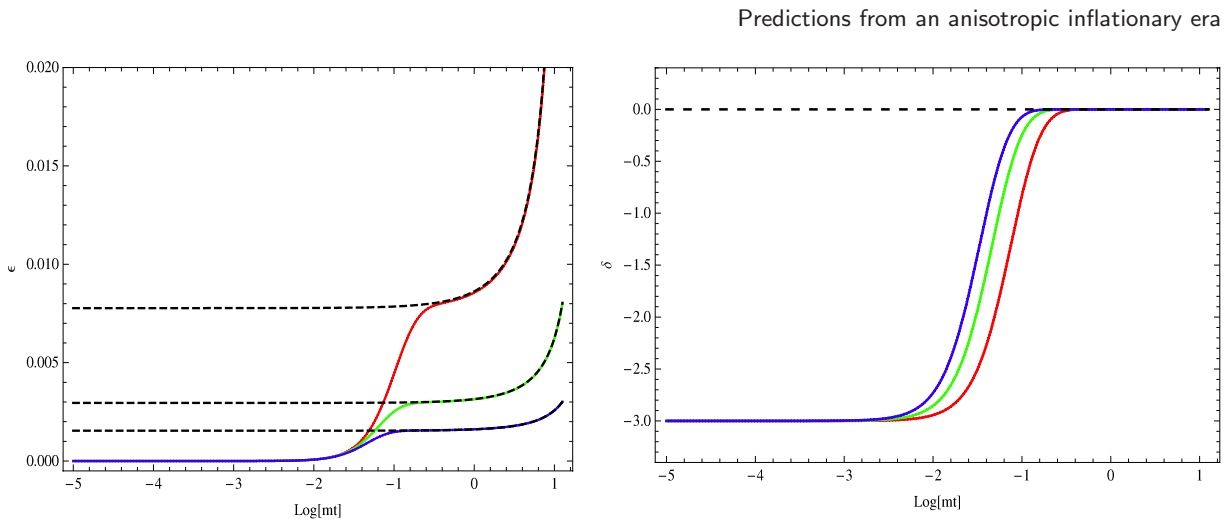


Figure 6. Evolution of the slow-roll parameters ϵ (left) and δ (right) during the inflationary phase for a Bianchi I model (solid lines) with $\alpha = \pi/4$ compared to the case of a Friedmannian model (dashed lines). We assume a potential of the form (2.54) and initial values $\varphi_0 = (16, 26, 36)M_p$ corresponding respectively to the red, green and blue lines.

While the universe isotropizes, both δ and ϵ converged toward their Friedmann–Lemaître value. Figure 6 illustrates the evolution of the two slow-roll parameters and compares them to their values in a Friedmann–Lemaître universe.

For any initial value of the scalar field, φ_0 , we define φ_i as the value of the field when the universe starts to inflate, that is at the time when $\dot{S} = 0$. Then, the number of e -folds of the inflationary period is defined as

$$N[\varphi_i] \equiv \ln \frac{S(\varphi_f)}{S(\varphi_i)} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi, \tag{2.64}$$

where φ_f is the value of the field at which $\epsilon = 1$. Since at that time the shear is negligible, φ_f is given by

$$\varphi_f = \sqrt{2}M_p. \tag{2.65}$$

It follows that, for any initial value of the field, we can characterize the shear-dominated phase by

$$\Delta\varphi[\varphi_0] = \varphi_0 - \varphi_i[\varphi_0], \tag{2.66}$$

which indicates by how much the field has moved prior to inflation. Then, the duration of the inflationary phase is given by

$$N[\varphi_0] = \int_{\varphi_i(\varphi_0)}^{\sqrt{2}M_p} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi. \tag{2.67}$$

This has to be compared with the number of e -folds in the FL case:

$$N_{\text{FL}}[\varphi_i] = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_i}{M_p} \right)^2 - \frac{1}{2}.$$

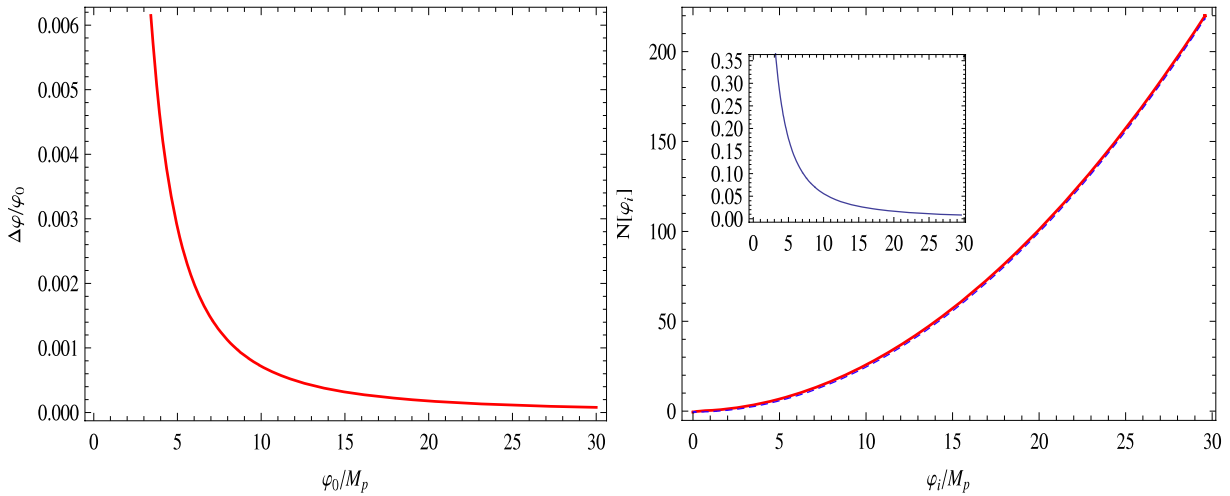


Figure 7. Left: relative variation of the scalar field during the shear-dominated era as a function of its initial value. Right: comparison of the number of e -folds for a Bianchi (solid, red line) and Friedmann–Lemaître (blue, dashed line) inflationary period as a function of φ_i . The inside plot is the relative difference between the number of e -folds of the Bianchi and Friedmann–Lemaître inflationary period as a function of φ_i .

In figure 7 (left), we depict the fractional duration of the shear-dominated phase (see equation (2.66)) as a function of φ_0 . We see that the larger the initial value of the field, the smaller the impact of the shear. Also shown in figure 7 is the number of e -folds for the Friedmann–Lemaître and Bianchi spacetimes. The presence of the shear slightly increases the number of e -folds (solid red line in figure 7).

2.5. Discussion

This general study of the background shows that generically there is always one bouncing direction, except in the particular case $\alpha = \pi/2$ considered in [24] (positive branch). Regarding the dynamics of the universe, the expansions (2.58)–(2.62) at lowest order exactly reproduce the exact (numerical) solutions.

This analysis actually shows that the shear is effective typically until the characteristic time τ_* . Going backward in time, the universe goes rapidly to an initial singularity and is thus past incomplete (in fact as other inflationary models [41]). Indeed, as we shall discuss later, we do not want to extrapolate such a model up to the Planck or string times and we just assume that they are a good description of the inflating universe after this time.

We have focused on the evolution of the ‘slow-roll’ parameters and concluded that the variation of ϵ cannot be neglected until the shear has decayed. We have also shown that the scalar field barely moves during the shear-dominated era and that, with the same initial value for the scalar field, the number of e -folds is almost not affected (even though slightly larger) by a non-vanishing shear.

3. Summary of the perturbation theory

In our previous work [23], we investigated the theory of cosmological perturbations around a Bianchi I universe. We shall now briefly summarize the main steps which are necessary to deduce the dynamical system of equations that we want to solve in this paper.

3.1. Mode decomposition

First, we pick up a comoving coordinates system, $\{x^i\}$, on the constant time hypersurfaces. Any scalar function can then be decomposed in Fourier modes as

$$f(x^j, \eta) = \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^{3/2}} \hat{f}(k_i, \eta) e^{ik_i x^i}. \quad (3.1)$$

In the Fourier space, the comoving wave co-vectors k_i are constant, $k'_i = 0$. We now define $k^i \equiv \gamma^{ij} k_j$ that is obviously a time-dependent quantity. Contrary to the standard Friedmann–Lemaître case, we must be careful not to trivially identify k_i and k^i , since this does not commute with the time evolution. Note, however, that $x_i k^i = x^i k_i$ remains constant.

Besides, since $(k^i)' = -2\sigma^{ip} k_p$, the modulus of the comoving wavevector, $k^2 = k^i k_i = \gamma^{ij} k_i k_j$, is now time-dependent and its rate of change is explicitly given by

$$\frac{k'}{k} = -\sigma^{ij} \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad (3.2)$$

where we have defined the unit vector

$$\hat{k}_i \equiv \frac{k_i}{k}. \quad (3.3)$$

Now, we introduce the base $\{e^1, e^2\}$ of the subspace perpendicular to k^i . By construction, it satisfies the orthonormalization conditions

$$e_i^a k_j \gamma^{ij} = 0, \quad e_i^a e_j^b \gamma^{ij} = \delta^{ab}.$$

Such a basis is indeed defined up to a rotation about the axis k^i . These two basis vectors allow us to define a projection operator onto the subspace perpendicular to k^i as

$$P_{ij} \equiv e_i^1 e_j^1 + e_i^2 e_j^2 = \gamma_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j. \quad (3.4)$$

It trivially satisfies $P_j^i P_k^j = P_k^i$, $P_j^i k^j = 0$ and $P^{ij} \gamma_{ij} = 2$.

Any symmetric tensor \bar{V}_{ij} that is transverse and trace-free has only two independent components and can be decomposed as

$$\bar{V}_{ij}(k_i, \eta) = \sum_{\lambda=+, \times} V_\lambda(k^i, \eta) \varepsilon_{ij}^\lambda(\hat{k}_i), \quad (3.5)$$

where the polarization tensors have been defined as

$$\varepsilon_{ij}^\lambda = \frac{e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2}{\sqrt{2}} \delta_+^\lambda + \frac{e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1}{\sqrt{2}} \delta_\times^\lambda. \quad (3.6)$$

It can be checked that they are traceless ($\varepsilon_{ij}^\lambda \gamma^{ij} = 0$), transverse ($\varepsilon_{ij}^\lambda k^i = 0$) and that the two polarizations are perpendicular ($\varepsilon_{ij}^\lambda \varepsilon_{\mu}^{ij} = \delta_\mu^\lambda$). This defines the two tensor degrees of freedom.

3.2. Decomposition of the shear

It is then fruitful to decompose the shear in a local basis adapted to the mode that we are considering. The shear being a symmetric trace-free tensor, it can be decomposed on the basis $\{\hat{k}_i, e_i^1, e_j^2\}$ as

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2} \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \right) \sigma_{\parallel} + 2 \sum_{a=1,2} \sigma_{V^a} \hat{k}_{(i} e_{j)}^a + \sum_{\lambda=+, \times} \sigma_{T^\lambda} \varepsilon_{ij}^\lambda. \quad (3.7)$$

This decomposition involves 5 independent components in a basis adapted to the wavenumber k_i . We must, however, stress that $(\sigma_{\parallel}, \sigma_{V^a}, \sigma_{T^\lambda})$ do not have to be interpreted as the Fourier components of the shear, even if they explicitly depend on k_i . This dependence arises from the local anisotropy of space.

Using equation (3.7), it is easily worked out that $\sigma_{ij} \gamma^{ij} = 0$, and that

$$\sigma_{ij} \hat{k}^i = \sigma_{\parallel} \hat{k}_j + \sum_a \sigma_{V^a} e_j^a, \quad \sigma_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j = \sigma_{\parallel}, \quad (3.8)$$

and

$$\sigma_{ij} \varepsilon_\lambda^{ij} = \sigma_{T^\lambda}, \quad \sigma_{ij} \hat{k}^i e_a^j = \sigma_{V^a}. \quad (3.9)$$

The scalar shear is explicitly given by

$$\sigma^2 = \sigma_{ij} \sigma^{ij} = \frac{3}{2} \sigma_{\parallel}^2 + 2 \sum_a \sigma_{V^a}^2 + \sum_\lambda \sigma_{T^\lambda}^2, \quad (3.10)$$

which is, by construction, independent of k_i . We emphasize that the local positivity of the energy density of matter implies (see equation (2.32)) that $\sigma^2/6 < \mathcal{H}^2$ and thus

$$\frac{1}{2} \sigma_{\parallel} \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma < \mathcal{H}. \quad (3.11)$$

This, in turn, implies that

$$\sigma_{\parallel} < 2\mathcal{H}, \quad (3.12)$$

a property that shall turn out to be very useful in the following discussion. Analogously, we have that

$$\sigma_{T^\lambda} < \sqrt{6} \mathcal{H}. \quad (3.13)$$

3.3. Gauge-invariant variables

We start from the most general metric of an almost Bianchi I spacetime:

$$ds^2 = S^2 \left[- (1 + 2A) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (3.14)$$

B_i and h_{ij} are further decomposed as

$$B_i = \partial_i B + \bar{B}_i, \quad (3.15)$$

$$h_{ij} \equiv 2C \left(\gamma_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\mathcal{H}} \right) + 2\partial_i \partial_j E + 2\partial_{(i} E_{j)} + 2E_{ij}, \quad (3.16)$$

with

$$\partial_i \bar{B}^i = 0 = \partial_i E^i, \quad E_i^i = 0 = \partial_i E^{ij}. \quad (3.17)$$

We showed, that one can construct the following gauge-invariant variables:

$$\Phi \equiv A + \frac{1}{S} \left\{ S \left[B - \frac{(k^2 E)'}{k^2} \right] \right\}', \quad (3.18)$$

$$\Psi \equiv -C - \mathcal{H} \left[B - \frac{(k^2 E)'}{k^2} \right], \quad (3.19)$$

for the scalar modes,

$$\Phi_i \equiv \bar{B}_i - \gamma_{ij} (E^j)' + 2ik^j \sigma_{lj} P_i^l E, \quad (3.20)$$

for the vector modes and that the tensor mode E_{ij} is readily gauge-invariant.

Concerning the matter sector, one can introduce a single gauge-invariant variable associated with the scalar field perturbation:

$$Q \equiv \delta\varphi - \frac{C}{\mathcal{H}} \varphi'. \quad (3.21)$$

3.4. The Mukhanov–Sasaki variables and their evolution equations

We established that the only degrees of freedom reduce to a scalar mode and two tensor modes:

$$v \equiv SQ, \quad \sqrt{\kappa} \mu_\lambda \equiv SE_\lambda. \quad (3.22)$$

They evolve according to

$$v'' + \omega_v^2(k_i, \eta)v = \sum_\lambda \aleph_\lambda(k_i, \eta)\mu_\lambda, \quad (3.23)$$

$$\mu_\lambda'' + \omega_\lambda^2(k_i, \eta)\mu_\lambda = \aleph_\lambda(k_i, \eta)v + \beth(k_i, \eta)\mu_{(1-\lambda)}, \quad (3.24)$$

where the pulsations are explicitly given by

$$\omega_v^2(k_i, \eta) \equiv k^2 - \frac{z_s''}{z_s}, \quad \omega_\lambda^2(k_i, \eta) \equiv k^2 - \frac{z_\lambda''}{z_\lambda}. \quad (3.25)$$

The two functions z_s and z_λ have been defined by

$$\frac{z_s''}{z_s}(\eta, k_i) \equiv \frac{S''}{S} - S^2 V_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{S^2} \left(\frac{2S^2 \kappa \varphi'^2}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right)', \quad (3.26)$$

$$\frac{z_\lambda''}{z_\lambda}(\eta, k_i) \equiv \frac{S''}{S} + 2\sigma_{T(1-\lambda)}^2 + \frac{1}{S^2} (S^2 \sigma_\parallel)' + \frac{1}{S^2} \left(\frac{2S^2 \sigma_{T\lambda}^2}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right)', \quad (3.27)$$

and we also need the coupling terms

$$\aleph_\lambda(\eta, k_i) \equiv \frac{1}{S^2} \sqrt{\kappa} \left(\frac{2S^2 \varphi' \sigma_{T\lambda}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right)', \quad (3.28)$$

$$\beth(\eta, k_i) \equiv \frac{1}{S^2} \left(\frac{2^2 \sigma_{T\times} \sigma_{T+}}{2\mathcal{H} - \sigma_\parallel} \right)' - 2\sigma_{T\times} \sigma_{T+}. \quad (3.29)$$

4. Prescription for the initial conditions

The set of equations (3.23)–(3.29) completely determines the evolution of the three degrees of freedom of our problem. To be predictive, we must determine the initial conditions.

In an FL spacetime, the procedure is well understood [5] and relies on the quantization of the canonical variables on sub-Hubble scales where it can be shown that they evolve adiabatically.

We have to understand how far this procedure can be extended to a Bianchi universe and how robust it is to the existence of a non-vanishing primordial shear. We thus start, in section 4.1, with a review of the standard FL procedure, to highlight its hypothesis. In section 4.2, we stress, and also quantify, the differences that appear in a Bianchi universe. This will lead us (section 4.3) to propose an extension of the quantization procedure. We shall finish in section 4.4 by critically discussing the limits and weaknesses of our quantization procedure.

4.1. Friedmann–Lemaître universes

For simplicity, let us consider the case of a pure de Sitter phase. This represents no limitation to our following arguments and can be generalized to an almost-de Sitter phase.

4.1.1. Quantization procedure. In order to be quantized, the canonical variables are promoted to the status of quantum operators [5] and are decomposed as

$$\begin{aligned}\hat{v}(\mathbf{x}, \eta) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right], \\ &\equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{v}_{\mathbf{k}}^\dagger(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right],\end{aligned}\quad (4.1)$$

where the creation and annihilation operators satisfy the commutation relations $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. The mode function, $v_k(\eta)$, is a solution of the classical Klein–Gordon equation

$$v_k'' + \omega_v^2(k, \eta) v_k = 0 \quad \text{with } \omega_v^2(k, \eta) = k^2 - \frac{2}{\eta^2}, \quad (4.2)$$

which is the equation of motion for a harmonic oscillator with time-dependent mass, which translates the fact that the field lives in a time-dependent background spacetime. The general solution of equation (4.2) is

$$v_k(\eta) = \left[A(k) H_\nu^{(1)}(-k\eta) + B(k) H_\nu^{(2)}(-k\eta) \right] \sqrt{-\eta},$$

where H_ν are the Hankel functions. In the particular case of a de Sitter era considered here, $\nu = 3/2$ so that

$$H_{3/2}^{(2)}(z) = \left[H_{3/2}^{(1)}(z) \right]^* = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} \left(1 + \frac{1}{iz} \right).$$

Canonical quantization consists in imposing the commutation rules $[\hat{v}(\mathbf{x}, \eta), \hat{v}(\mathbf{x}', \eta)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}', \eta)] = 0$ and $[\hat{v}(\mathbf{x}, \eta), \hat{\pi}(\mathbf{x}', \eta)] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ on constant time hypersurfaces, $\hat{\pi}$ being the conjugate momentum of \hat{v} . From equation (4.1) and the commutation rules

of the annihilation and creation operators, this implies that

$$v_k v_k'^* - v_k^* v_k' = i, \quad (4.3)$$

which determines the normalization of the Wronskian. The choice of a specific mode function $v_k(\eta)$ corresponds to the choice of a prescription for the physical vacuum $|0\rangle$, defined by

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0.$$

The most natural choice for the vacuum is to pick up the solution that corresponds adiabatically to the usual Minkowski vacuum so that

$$v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta},$$

when $k\eta \rightarrow -\infty$. This implies that the mode function is

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{1}{ik\eta} \right) e^{-ik\eta}. \quad (4.4)$$

This choice is referred to as the Bunch–Davies vacuum.

4.1.2. WKB approximation. In more general cases, and for sure in the Bianchi case that follows, we may not have exact solutions for the mode functions. One can redo the previous construction by relying on a WKB approach [42] in which one introduces the WKB mode function

$$v_k^{\text{WKB}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_v}} e^{\pm i \int \omega_v d\eta}. \quad (4.5)$$

It is easily checked that it is a solution of

$$v_k^{\text{WKB}''} + (\omega_v^2 - Q_{\text{WKB}}) v_k^{\text{WKB}} = 0,$$

with

$$Q_{\text{WKB}} = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_v'}{\omega_v} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_v''}{\omega_v}. \quad (4.6)$$

For a function satisfying an equation such as equation (4.2), the WKB solution is thus a good approximation as long as the WKB condition $|Q_{\text{WKB}}/\omega_v^2| \ll 1$ is satisfied. In the example at hand, this condition reduces to $k\eta \rightarrow -\infty$ so that, on sub-Hubble scales, the mode function is actually close to its WKB approximation. We see that the quantization procedure thus relies on the fact that there exists an adiabatic (WKB) solution on sub-Hubble scales.

4.1.3. *Primordial spectra on super-Hubble scales.* Once the initial conditions are fixed, v_k is completely determined and it can then be related to the scalar field perturbation Q (also promoted to the status of operator). After the modes become super-Hubble, i.e. $k\eta \ll 1$, the scalar field perturbation in a flat slicing gauge is given by

$$\hat{Q} \rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{Q}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

where we have used that $S(\eta) = -1/H\eta$ for a pure de Sitter inflationary phase, H being a constant in this case. All the modes are proportional to $(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger)$ so that the variables $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ commute. We thus deduce that \hat{Q} has actually the same statistical properties as a Gaussian classical stochastic field. Effectively, we can replace our quantum operators by stochastic fields with Gaussian statistics and we introduce a unit Gaussian random variable, $e_v(\mathbf{k})$, which satisfies

$$\langle e_v(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad \langle e_v(\mathbf{k}) e_v^*(\mathbf{k}') \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

In this description the mode operators are replaced by stochastic variables according to $\hat{v}_{\mathbf{k}} \rightarrow v_{\mathbf{k}} = v_k(\eta) e_v(\mathbf{k})$ and we identify the (quantum) average in the vacuum, i.e. $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$, by an ensemble (classical) average, $\langle \dots \rangle$.

The correlation function of v is defined as

$$\xi_v \equiv \langle 0 | \hat{v}(\mathbf{x}, \eta) \hat{v}(\mathbf{x}', \eta) | 0 \rangle,$$

and takes the simple form

$$\xi_v = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |v_k|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (4.7)$$

Interestingly, in a Friedmann universe, isotropy implies that we can integrate over the angle to get

$$\xi_v = \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2 \frac{\sin kr}{kr}, \quad (4.8)$$

and it is, because of the symmetries of the background, a function of $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ only. We thus define the power spectra

$$P_v(k) = |v_k|^2, \quad \mathcal{P}_v(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2. \quad (4.9)$$

In the stochastic picture, the correlator of $v_{\mathbf{k}}$ is simply given by

$$\langle v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^* \rangle = P_v(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.10)$$

from which one easily deduces the power spectrum of the curvature perturbation

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{|v_k|^2}{z^2}.$$

Indeed, we can proceed in the same way for gravity waves. Since they are not coupled to scalar modes and since the two polarizations are independent, we introduce two sets of creation and annihilation operators, $\hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}$, one per polarization. On super-Hubble scales, the two modes can be described by two independent Gaussian classical stochastic fields, $\mu_{\mathbf{k},\lambda} = \mu_{\mathbf{k}} e_{\lambda}(\mathbf{k})$, with

$$\langle e_{\lambda}(\mathbf{k}) e_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

The power spectra are thus given by

$$P_\lambda(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\lambda(k) = |\mu_k|^2.$$

Spatial isotropy implies that $P_+ = P_\times$ so that the tensor modes power spectrum is

$$P_T(k) = 2 \frac{\kappa}{S^2} P_+(k). \quad (4.11)$$

4.1.4. Conclusion. To conclude, this short review of the standard procedure highlights (1) the importance of the WKB regime on sub-Hubble scales which allows us to construct a Bunch–Davies vacuum adiabatically, (2) the fact that on super-Hubble scales (where one wants to draw the predictions for the initial power spectra) the quantum operators can be conveniently replaced by stochastic fields, (3) the importance of isotropy which implies that there exist three independent stochastic directions (because modes are decoupled) and (4) the fact that the two gravity wave polarizations have the same power spectrum.

We shall now see which of these properties generalize to a Bianchi universe.

4.2. Generic Bianchi I universes

4.2.1. Characteristic wavenumber. In order to relate our predictions to observations, we introduce the characteristic wavenumber k_{ref} by

$$k_{\text{ref}} \equiv SH|_{t=\tau_*}. \quad (4.12)$$

We define \mathcal{N} as the number of e -folds with the quantity SH rather than S in the definition (2.64). If we denote by \mathcal{N}_{ref} the number of e -folds between $t = \tau_*$ and the end of inflation, and \mathcal{N}_0 the number of e -folds from the end of inflation until now, then we can relate k_{ref} to the largest observable scale today, $k_0 = S_0 H_0$, by

$$\frac{k_{\text{ref}}}{k_0} = e^{(\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_{\text{ref}})}. \quad (4.13)$$

Since during the inflationary era after τ_* , H is nearly constant, then $\mathcal{N}_{\text{ref}} \simeq N_{\text{ref}}$. As for \mathcal{N}_0 , it depends on the post-inflationary evolution and it can be estimated [43] by

$$\mathcal{N}_0 \simeq 62 - \ln \left(\frac{10^{16} \text{ GeV}}{V_{k_0}^{1/4}} \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{V_{k_0}}{V_{\text{end}}} - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{reh}}^{1/4}} \right) - \ln h, \quad (4.14)$$

h being the Hubble parameter in units of $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Typically, $V_{k_0} \sim V_{\text{end}}$ as long as slow-rolling holds. The reheating temperature can be argued to be larger than $\rho_{\text{reh}}^{1/4} > 10^{10} \text{ GeV}$ to avoid the gravitino problem [44]. The amplitude of the cosmological fluctuations (typically of the order of 2×10^{-5} on Hubble scales) roughly implies that $V_{\text{end}}^{1/4}$ is smaller than a few times 10^{16} GeV and, for the same reason as above, has to be larger than 10^{10} GeV in the extreme case. This implies that N_0 has to lie approximately between 50 and 70, which is the order of magnitude also required to solve the horizon and flatness problem.

N_{ref} can be computed from the background dynamics, and as shown in figure 7, it is almost equivalent to its value in the FL case.

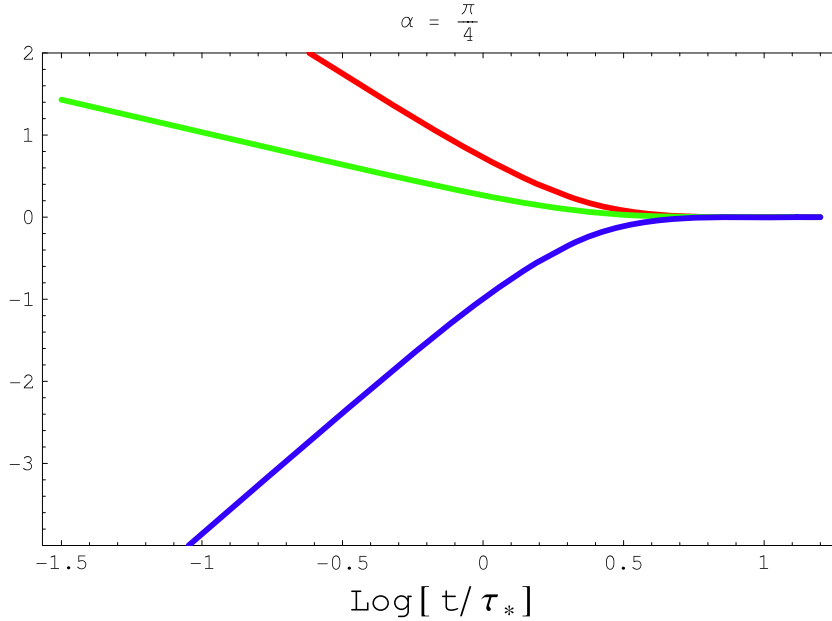


Figure 8. Logarithm of the ratio k/k_{ref} where k_{ref} is the modulus of the wavenumber when the shear is zero. We see that, as soon as the shear grows, k depends on the direction on which it is aligned (each colour corresponds to a principal axis of the Bianchi universe). We have considered a generic Bianchi universe with $\alpha = \pi/4$.

4.2.2. Anisotropy. The first obvious difference with the FL case arises from the local spatial anisotropy.

First, it is clear from the set of equations (3.23) and (3.24) that it implies that the evolution of the mode functions shall depend on k_i and not simply on the modulus. This violation of isotropy will reflect itself on the fact that

- (1) the power spectra at the end of inflation will be functions of \mathbf{k} and not k , i.e. $P_v(k_i)$, $P_\lambda(k_i)$;
- (2) because of the coupling between scalar and gravity waves, there exists a cross-correlation between scalar and tensor, i.e. $\langle v\mu_\lambda \rangle \neq 0$;
- (3) the two polarizations shall *a priori* have two different power spectra, i.e. $P_+ \neq P_\times$.

A second related issue arises from the evolution of a comoving wavenumber. Let us consider the different evolutions of a wave mode of modulus k at the end of inflation according to its orientation. As we see in figure 8, depending on its orientation, this mode has very different time evolutions before it settles to a constant value.

4.2.3. WKB regime. Whatever the Bianchi universe we consider, there is a shear-dominated phase prior to inflation. During this phase $\ddot{S} < 0$. Besides, in a generic Bianchi *I* spacetime (that is, $\alpha \neq \pi/2$) two of the scale factors go to zero while the third is bouncing (in the $\alpha = \pi/2$ case, one scale factor goes to zero while the two others remain constant).

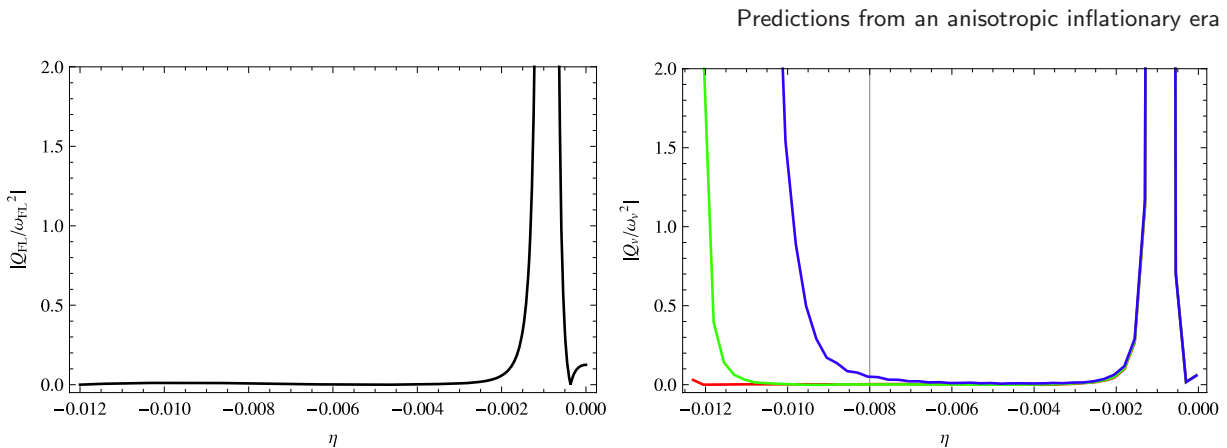


Figure 9. Left panel: evolution of the quantity $|Q/\omega^2|$ for an FL universe. Right panel: evolution of $|Q_v^{\text{WKB}}/\omega_v^2|$ for three different modes, each of them aligned with one of the three orthogonal directions (same colour code as in figure 8), and with the same modulus $10k_{\text{ref}}$ at the end of inflation. The vertical line corresponds to the instant $\eta(\tau_*)$ and we have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$.

For analysing the WKB regime we will consider, as usual, the ratio k/SH to discuss whether a given mode is inside ($k/SH \gg 1$) or outside ($k/SH \ll 1$) the Hubble radius. According to the details shown in appendix A, if we specify to only one direction we have $k \sim 1/a_i \sim S/X_i$, then

$$\frac{k}{SH} = \frac{1}{X_i H} \sim t^{2(1-\sin \alpha_i)/3}$$

during the shear-dominated regime. This shows that, except when $\alpha = \pi/2$, any given mode becomes super-Hubble when we approach the singularity ($t \rightarrow 0$), and that this approach is faster (going backwards in time) for modes aligned with the bouncing direction.

In other words, all modes become super-Hubble in the past, and the mode aligned with the bouncing direction (blue line in figure 8) becomes super-Hubble earlier (again, going backwards in time) than the ones with the same k at the end of inflation but aligned with a growing direction (blue line in figure 9).

For these two reasons, we can doubt the existence of a well-defined adiabatic vacuum for all modes through their early evolution, as happens in FL universes. However, we can still ask whether the WKB regime is reached in a short time interval when the shear is not complete negligible, and how long it lasts given the wavenumber.

Let us thus discuss quantitatively the validity of the WKB approximation. First, we focus on the pulsation, we neglect the effect of the couplings and consider the WKB solutions:

$$v_{\mathbf{k}}^{\text{WKB}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_v}} e^{\pm i \int \omega_v d\eta}, \quad \mu_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{WKB}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\lambda}} e^{\pm i \int \omega_\lambda d\eta}. \quad (4.15)$$

They are good approximations of the solutions of equations (3.23) and (3.24) if $|Q_{v,\lambda}^{\text{WKB}}/\omega_{v,\lambda}^2| \ll 1$, where Q_{WKB} has been defined in equation (4.6).

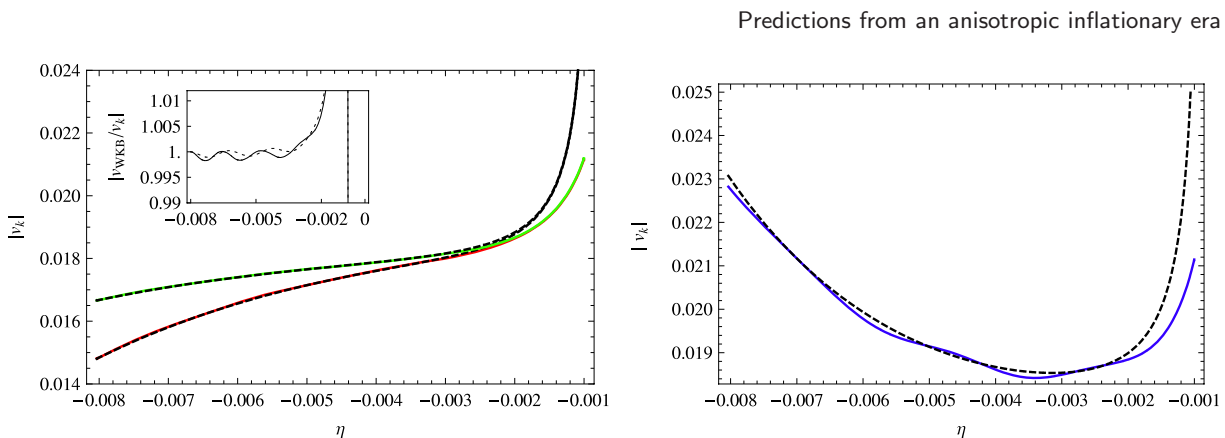


Figure 10. Comparison of the exact (solid lines) solutions and the WKB (dashed lines) solutions (4.15) for the scalar modes for three different directions with $k = 10k_{\text{ref}}$ at the end of inflation. We have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$. The figures show two genuine WKB modes (left panel) and one non-WKB mode (right panel). The inner-left figure shows the ratio $|v_{\mathbf{k}}^{\text{WKB}}/v_{\mathbf{k}}|$ for the modes which satisfy the WKB approximation.

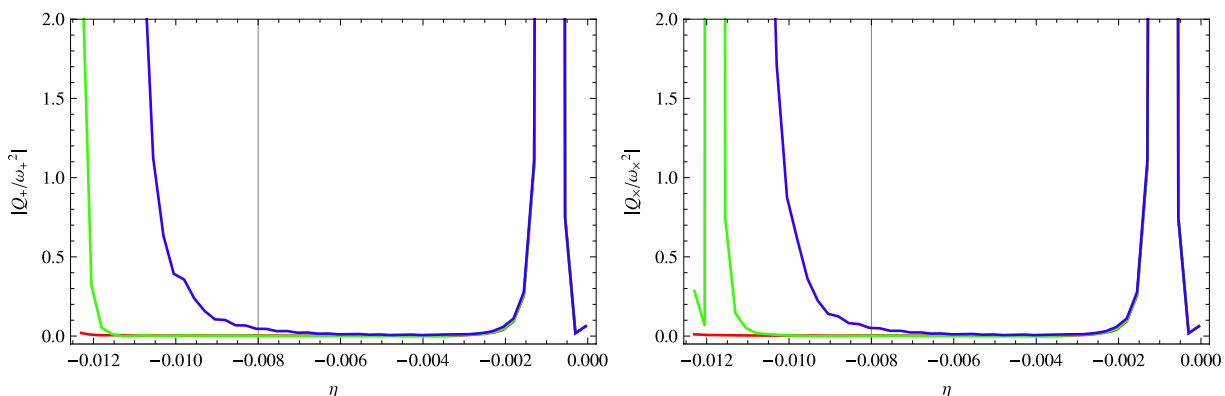


Figure 11. Evolution of $|Q_{\lambda}^{\text{WKB}}/\omega_{\lambda}^2|$ for the two tensor polarizations (left: $\lambda = +$, right: $\lambda = \times$) and for various modes with the same modulus $k = 10k_{\text{ref}}$ at the end of inflation. The vertical lines represent the time $\eta(\tau_*)$. We have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$.

Figure 9 illustrates the validity of the WKB approximation for the scalar modes. It depicts the evolution of $|Q_v^{\text{WKB}}/\omega_v^2|$ as a function of time for three different modes corresponding to the three principal axis of the Bianchi universe. We see that, for a given comoving wavenumber k at the end of inflation, the WKB condition is always violated in the past and that it is violated first in increasing order of the Kasner coefficients (compare with figure 8). It can be checked that the larger the k is, the longer the time during which the WKB condition is restored. For long wavelength modes (typically of order $1/k_{\text{ref}}$), the WKB regime is never established.

Figure 10 compares the exact (numerical) solution and the WKB approximation for a mode $k = 10k_{\text{ref}}$. Figure 11 is similar to figure 9 but for the tensor modes. Indeed, we reach the same conclusions.

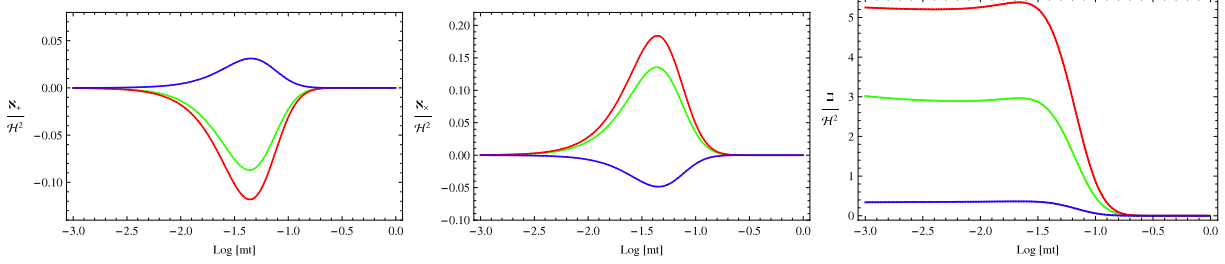


Figure 12. Evolution of $\aleph_\lambda/\mathcal{H}^2$ (left: $\lambda = +$, middle: $\lambda = \times$) and \beth/\mathcal{H}^2 for three modes, each of which is aligned with one of three orthogonal arbitrary directions (represented by three different colours). We have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$. Note that these functions depend only on the direction of the wavenumber and not on its modulus.

4.2.4. Couplings. The third difference arises from the coupling between scalar and tensor modes.

As we demonstrated in our previous analysis [23] (see section 4.4), deep in the sub-Hubble regime (that is, when k/SH is large enough), the three degrees of freedom decouple and behave as a collection of three independent harmonic oscillators.

However, on larger scales the couplings are *a priori* non-negligible. We thus need to evaluate with care the scales for which this is a good approximation.

Figure 12 shows that, while the functions \aleph_λ , which couple gravity waves and scalar modes can be neglected on small scales, this is certainly not the case for the coupling \beth between the two gravity wave polarizations. This coupling cannot be neglected, even at early time, for modes which are not sub-Hubble enough. Typically, the modes for which this coupling cannot be neglected correspond to modes for which the WKB regime cannot be reached.

Let us compare this situation with the case of multi-field inflation. The equations of evolution for the various scalar field perturbations are also usually coupled (see, e.g., [45] for a recent review). However, generally, it is possible to extract independent fields, at least in the sub-Hubble regime [46], so that one can introduce a set of independent stochastic fields. To our knowledge, the situation where this is not possible has not been addressed.

The situation is analogous for us and the long wavelength modes will be particularly difficult to deal with because they can never be considered as independent.

4.3. Prescription for setting the initial conditions

4.3.1. Prescription for Bianchi I spacetimes. It is part of the nature of quantum fluctuations that they do not have initial conditions in the sense that they are continuously excited. As soon as a mode can oscillate, it will be sourced by these quantum fluctuations. Given the discussion of the preceding section, we will thus set the initial conditions at the time where a mode is the deepest in the WKB regime. This time, $t_i(\mathbf{k})$ say, depends explicitly on the mode, which is not a problem since all the modes are independent from each other. In practice, we have fixed $t_i(\mathbf{k})$ by minimizing ω_v .

As we saw, modes with $k < k_{\text{ref}}$ never enter a WKB regime. Given the fact that modes up to approximately k_0 have been excited and have, at least as a good approximation, a

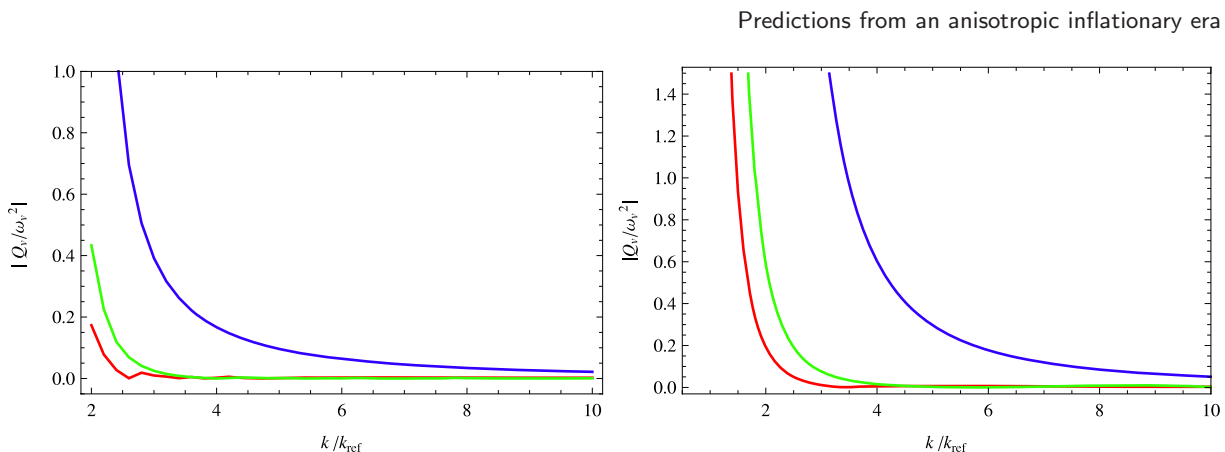


Figure 13. Validity of the WKB approximation at the time we set the initial conditions. Left: we set the initial conditions at $t_i(\mathbf{k})$ and right: at τ_* . The quantity $|Q_v^{\text{WKB}}/\omega_v^2|$ is shown for three orthogonal modes and we have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$.

scale-invariant power spectrum, we have to assume that $k_{\text{ref}} \lesssim k_0$. Then, from figures 13 and 14, we deduce that the WKB is reached for all modes with $k > k_{\text{ref}}$. Indeed, this amounts to a fine tuning on the shear such that only the largest observable modes today were affected by the Bianchi phase.

To check the robustness of this procedure, we have varied the time $t_i(\mathbf{k})$. In particular, we have also assumed, as a test, that $t_i(\mathbf{k}) = \tau_*$ for all modes. It can be shown that this does not affect the predictions for the modes with $k \gtrsim 2k_{\text{ref}}$ while long wavelength modes are more affected. This is simply due to the fact that the duration of their WKB phase is smaller (see figure 16). Also note that the procedure is more robust for the two directions which are not bouncing.

For these modes, and as can be seen from figure 15, it is also a good approximation to neglect the coupling terms in equations (3.23) and (3.24). We emphasize that this hypothesis breaks down approximately at the same time when the WKB approximation also breaks down.

Therefore we will assume that the three modes are independent at the time when they are excited by the quantum fluctuations.

Technically, we thus start our computation by setting

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-i \int \omega_v d\eta}}{\sqrt{2\omega_v(\mathbf{k}, \tau)}} e_v(\mathbf{k}), \quad \text{and} \quad \mu_{\lambda, \mathbf{k}} = \frac{e^{-i \int \omega_\lambda d\eta}}{\sqrt{2\omega_\lambda(\mathbf{k}, \tau)}} e_\lambda(\mathbf{k}), \quad (4.16)$$

up to an arbitrary relative phase which can be absorbed in the definition of the unit random variables and where the three random variables satisfy

$$\langle e_X(\mathbf{k}) e_Y^*(\mathbf{k}') \rangle = \delta_{XY} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

4.3.2. Freedom in a time redefinition. As mentioned in [24], the dynamical system of equation for the Mukhanov–Sasaki variables admits time reparametrizations that conserve the canonicity of the system, in the sense that if $v(\eta)$ is a canonical variable that satisfies

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} + \omega_v^2 v = 0 \quad \text{and} \quad v \frac{dv^*}{d\eta} - v^* \frac{dv}{d\eta} = i,$$

Predictions from an anisotropic inflationary era

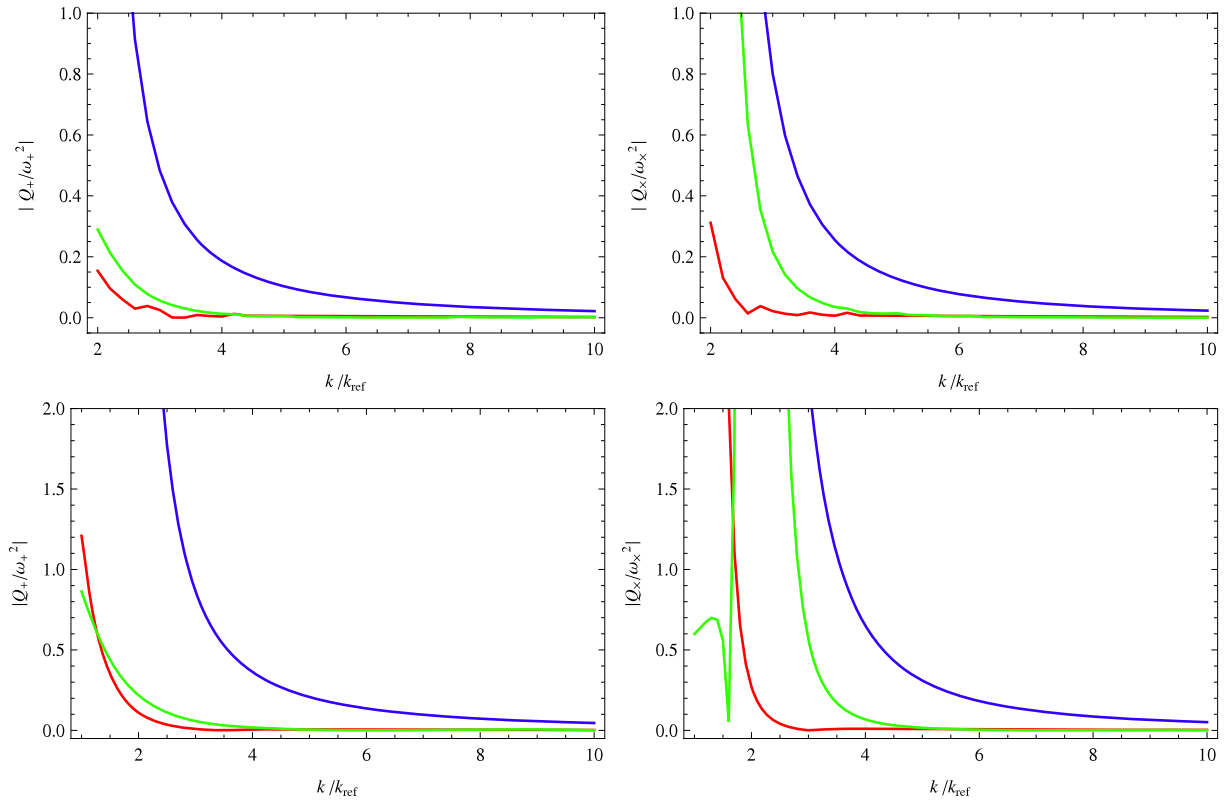


Figure 14. Validity of the WKB approximation for tensor modes. We show the quantity $|Q_\lambda^{\text{WKB}}/\omega_\lambda^2|$ for $\lambda = +$ (left panel) and $\lambda = \times$ (right panel) for three orthogonal modes. We compare setting the initial conditions at $t_i(\mathbf{k})$ (top) and at τ_* (bottom). We have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$.

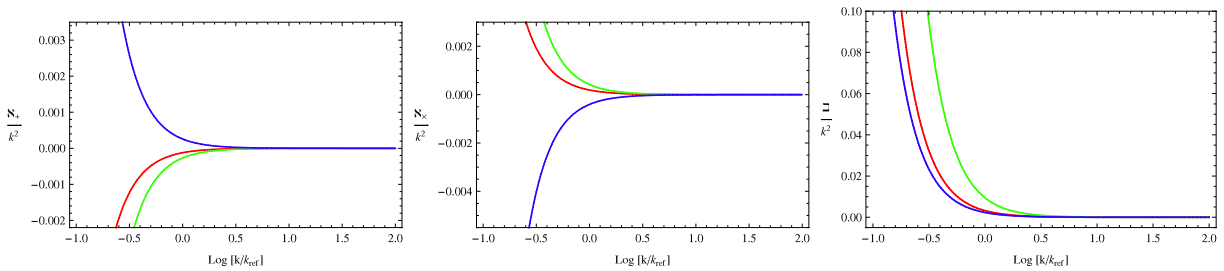


Figure 15. Statistical independence at τ_* . \aleph/k^2 (left) and \beth/k^2 (right) as a function of k at $t = \tau_*$.

then there is a function f and a time τ defined as

$$f(\eta)^2 d\tau = d\eta, \tag{4.17}$$

through which we can define a new variable $u = fv$ that satisfies

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \omega_u^2 u = 0 \quad \text{and} \quad u \frac{du^*}{d\tau} - u^* \frac{du}{d\tau} = i.$$

If, for example, v is a variable for which the WKB condition does not hold, we might wonder whether exists a function f that would lead to a different conclusion concerning the validity of the WKB condition for the variable u .

Predictions from an anisotropic inflationary era

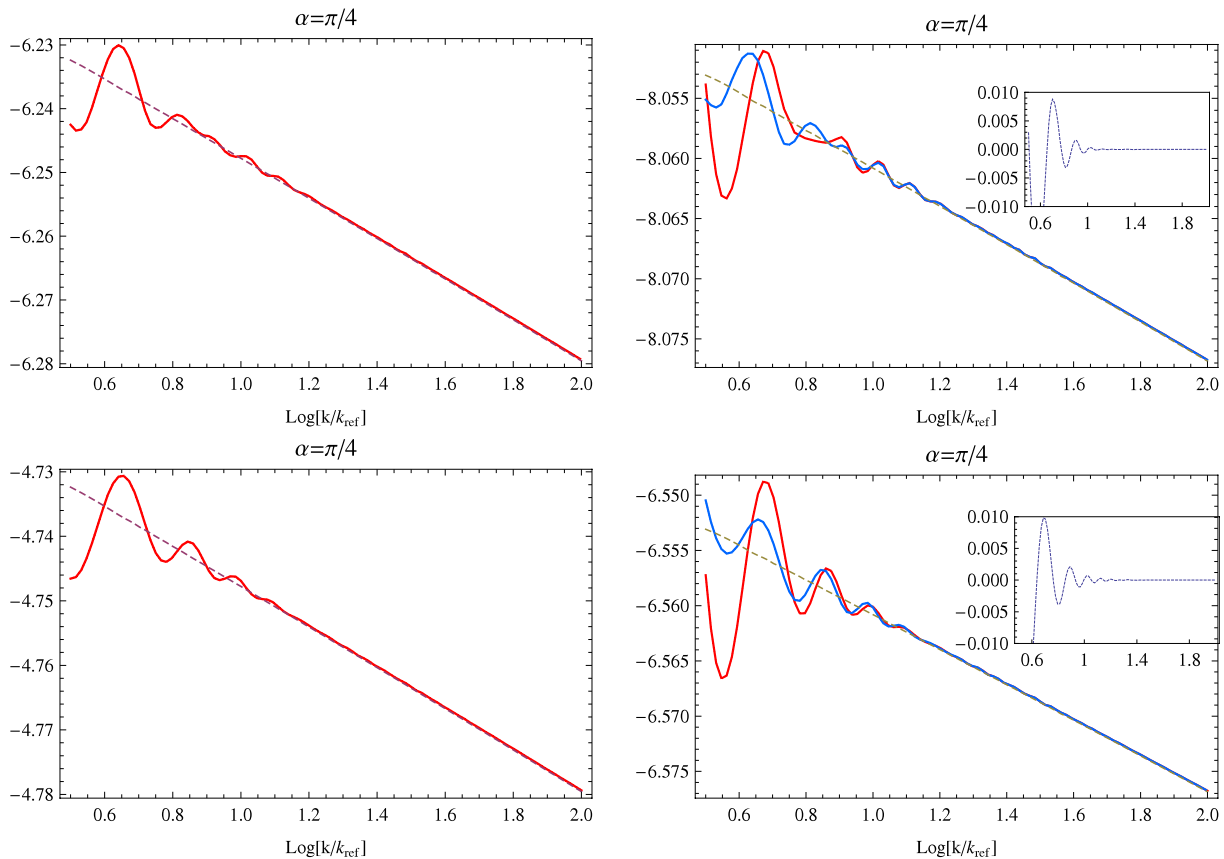


Figure 16. Evolution of $\log[f_R(k)]$ (left) and $\log[f_\lambda(k)]$ for the two polarizations (right) as a function of $\log[k/k_{\text{ref}}]$ for $\varphi_0 = 16.3M_p$. The FL case is given by a dashed line. We also depict (in the inner-right figure) the relative difference between the two polarizations, which shows that on small scales we recover that $P_\times = P_+$, as expected when isotropy is restored. On the upper line the initial conditions were fixed at $t_i(\mathbf{k})$ whereas in the bottom line they were fixed at τ_* . We see that for $\log(k/k_{\text{ref}}) \gtrsim 0.8$ the spectra are identical. For smaller wavenumbers, the WKB regime is too short to unambiguously fix the initial conditions.

In the present case, the transformation equation (4.17) would lead to the same equations of motion satisfied by the new canonical variables

$$\tilde{v} \equiv fv, \quad \tilde{\mu}_+ \equiv f\mu_+, \quad \tilde{\mu}_\times \equiv f\mu_\times, \quad (4.18)$$

where the new pulsations are defined according to

$$\tilde{\omega}_v^2 \equiv \frac{\omega_v^2}{f^4} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\tau^2}, \quad \tilde{\omega}_\lambda^2 \equiv \frac{\omega_\lambda^2}{f^4} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\tau^2}, \quad (4.19)$$

and the coupling functions become

$$\tilde{\aleph}_\lambda \equiv \frac{\aleph_\lambda}{f^4}, \quad \tilde{\beth} \equiv \frac{\beth}{f^4}. \quad (4.20)$$

For the sake of simplicity, let us drop \aleph_λ and \beth in the following discussion. It has been shown in [24] that, if ω_v and ω_λ satisfy the WKB condition, then f is required to

satisfy the condition

$$\frac{1}{f} \left| \frac{d^n f}{d\eta^n} \right| \ll \omega_v^n, \omega_\lambda^n, \quad \text{with } n = 1 \dots 4, \quad (4.21)$$

in order for the new equations to also satisfy the WKB condition. Under such conditions, it would lead to the same quantization procedure. Note that the condition for $n = 4$ is required when we take $|Q^{\text{WKB}}/\omega^2| \ll 1$ for the (correct) WKB condition rather than just $\omega'/\omega^2 \ll 1$, as assumed in [24].

In our case the pulsations ω_v and ω_λ scale like SH when $t \rightarrow 0$, or like $1/\eta$ in conformal time. Let us choose the integration constant W_0 of equation (2.35) such that the initial singularity corresponds to $\eta = 0$. Now, if $\omega \simeq C/\eta$ then the associated function Q_{WKB} behaves as

$$\frac{Q_{\text{WKB}}}{\omega^2} \simeq -\frac{1}{4C^2}.$$

Let us consider now a time redefinition associated with a function $f(\eta) = \eta^A$. Then the WKB condition involves

$$\frac{\tilde{Q}_{\text{WKB}}}{\tilde{\omega}^2} \simeq -\frac{(A + \frac{1}{2})^2}{C^2 + A(A + 1)}. \quad (4.22)$$

We conclude that it is possible for the WKB condition to be fulfilled with a new time coordinate by choosing $A = -1/2$, provided $|C| \neq 1/2$.

Unfortunately, using the expansion (B.2) and the asymptotic behaviours obtained in equations (2.53), we deduce that, when the leading term of ω_v^2 is z_s''/z_s , then $\omega_v^2 \rightarrow -\mathcal{H}^2$, which implies that for this pulsation, $|C| = 1/2$.

Thus, it is never possible to construct a time redefinition which would enable the WKB condition to be satisfied for $\tilde{\omega}_v$. The only exception arises when the leading term of ω_v^2 is k^2 . This happens for $\alpha = \pi/2$ since in this particular case $k \sim t^{-2/3} \sim \eta^{-1}$ and we recover the conclusions reached in [24].

As a conclusion, though we might naively think that redefining time could lead to equations satisfying the WKB conditions for the new canonical variables, it is impossible however to build such a change of time coordinates. The choice of canonical variables is thus unique up to the reparametrization satisfying the conditions (4.21), which would not change our predictions.

4.4. Discussion

Let us discuss our procedure to set the initial conditions.

First, for modes smaller than k_{ref} , the WKB regime was never reached. We have no *natural* prescription to determine their amplitude. A solution, that we do not investigate in this paper, would be to fix them by assuming that they minimize their energy, as proposed in [47] in the study of some trans-Planckian models in which the WKB regime is violated.

On the other hand, and probably in a more conservative way, one could just assume their initial value to be completely random and introduce a free function to describe the initial conditions on large scales. Such a function would then need to be measured from, for example, large angular scale properties of the CMB or predicted by some processes

that arise at the Planck or string scale, and that indeed cannot be accounted for in our description.

In the former case, we lose the predictive power on large scales, that actually may just be beyond the actual size of the observable universe. It may seem that we are back to the (historical) pre-inflationary times, where the form of the initial power spectrum of the Harrison–Zel’dovich type had to be postulated in order to reproduce the observations of the large scale structures. This is somehow a very standard approach in physics in which one learns about the initial conditions of a system by observing its evolution.

Inflationary theories allowed us to actually predict this spectrum, which makes them very predictive. We realize with this study that these inflationary predictions are very sensitive to the existence of a (classical) initial shear. To recover such a predictive power, we have to hope that a theory handling the dynamics of the universe on this scale [48]–[50] or allowing us to generate the shear [51] will also provide a better understanding of the initial conditions.

Indeed, one may wonder whether the arbitrary (pre-WKB era) conditions can be amplified and compete in amplitude with the ones of quantum origin seeded during the WKB regime.

To estimate this, note that at early time (apart from the particular case $\alpha = \pi/2$), ω_v^2 behaves as $-z_s''/z_s$ and ω_λ^2 behaves as $-z_\lambda''/z_\lambda$. The expansion (B.2) then leads to the conclusion that, at early times,

$$\omega_v^2 \simeq +\mathcal{H}^2,$$

whereas at late times, we deduce from our previous analysis that

$$\omega_v^2 \simeq -2\mathcal{H}^2.$$

Thus, the solutions of equation (3.23) has an oscillatory behaviour until the time when $\omega_v = 0$ and the arbitrary initial conditions are not amplified. For the tensor modes the situation is different because, for some configurations of \mathbf{k} , we can have $\omega_\lambda^2 \sim -\mathcal{H}^2$ at early time, and this leads to an exponential growth. However, since $|\omega_\lambda| \lesssim C/\eta$ with $C = \mathcal{O}(1)$, this exponential growth is typically at most of order

$$\exp\left(\frac{\mathcal{O}(1)}{\eta} \times \eta\right) \sim e.$$

It follows that the arbitrary initial conditions either are not amplified or do actually grow, but in the latter case they are amplified by no more than a factor of the order of unity. We thus expect the transitional tachyonic behaviour and our ignorance of the initial state of the perturbations before the WKB regime not to significantly alter the validity of our prescription for the initial conditions of quantum origin set during the WKB regime.

From a practical point of view, we can estimate the effect of the coupling functions \aleph and \beth by changing their amplitude by hand. We have checked that they hardly affect the predictions that are presented in the following section. In particular, that teaches us that the main directional dependence of the power spectra is induced mainly by the directional dependence of the comoving wavenumbers (see figure 8). We have also checked that, when k/k_{ref} increases, our prediction is similar to the one obtained in standard inflation.

In conclusion, we can trust our prescription for modes larger than k_{ref} and we have to assume (somehow as an observational input) that $k_{\text{ref}} < k_0$. This sets a tuning on the primordial shear that we cannot explain with the model at hand. In this regime,

we have checked that it is a robust prescription that is not affected by the unknown preexisting perturbations that are completely arbitrary and that fixes the properties of the long wavelength modes.

5. Primordial spectra: numerical examples and predictions

5.1. Definition of the spectra

To set the initial conditions as previously detailed, we need to first solve numerically the system (3.23) and (3.24). Because of the couplings, each of the three variables, v and μ_λ , will have components along the three independent stochastic directions, even if they were initially independent. For instance

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) = v_v(\mathbf{k}, \eta)e_v(\mathbf{k}) + v_+(\mathbf{k}, \eta)e_+(\mathbf{k}) + v_\times(\mathbf{k}, \eta)e_\times(\mathbf{k})$$

and

$$\mu_{\mathbf{k}\lambda}(\eta) = \mu_{\lambda v}(\mathbf{k}, \eta)e_v(\mathbf{k}) + \mu_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \eta)e_\lambda(\mathbf{k}) + \mu_{\lambda(1-\lambda)}(\mathbf{k}, \eta)e_{1-\lambda}(\mathbf{k})$$

and we deduce from the properties of the random variables that

$$\langle v_{\mathbf{k}}(\eta)v_{\mathbf{k}'}^*(\eta) \rangle = (|v_v(\mathbf{k}, \eta)|^2 + |v_+(\mathbf{k}, \eta)|^2 + |v_\times(\mathbf{k}, \eta)|^2) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.1)$$

The power spectrum of the curvature perturbation at the end of inflation (once the shear has decayed away) is thus

$$P_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{z_S^2} (|v_v(\mathbf{k}, \eta)|^2 + |v_+(\mathbf{k}, \eta)|^2 + |v_\times(\mathbf{k}, \eta)|^2). \quad (5.2)$$

It can be checked, as expected, that for super-Hubble modes, \mathcal{R} is conserved once the shear is negligible. We thus perform our numerical integration in a time interval long enough so that the universe has been isotropized and all the observable modes have become super-Hubble.

The power spectra of the gravity waves are defined analogously by

$$P_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\lambda(\mathbf{k}) = |\mu_{\lambda v}(\mathbf{k}, \eta)|^2 + |\mu_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \eta)|^2 + |\mu_{\lambda(1-\lambda)}(\mathbf{k}, \eta)|^2. \quad (5.3)$$

At the beginning of the radiation era, the background spacetime can be described by a Friedmann–Lemaître solution and the primordial anisotropy is now encoded on the statistical properties of the perturbations on large scales. It is thus convenient to decompose the power spectra on spherical harmonics according to

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}) = f_{\mathcal{R}}(k) \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\ell=\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} r_{\ell m}(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \right], \quad (5.4)$$

and

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathbf{k}) = f_\lambda(k) \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\ell=\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} r_{\ell m}^\lambda(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \right]. \quad (5.5)$$

The three functions $f_R(k)$ and $f_\lambda(k)$ represent the power spectra averaged over the spatial directions:

$$f_X(k) = \int \mathcal{P}_X(\mathbf{k}) \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}}{4\pi}.$$

The three series, $r_{\ell m}(k)$ and $r_{\ell m}^\lambda(k)$, characterize the deviation from statistical isotropy. Indeed, we expect the anisotropy to be negligible on small scales, that is

$$r_{\ell m}(k) \rightarrow 0 \quad \text{when } k \gg k_{\text{ref}},$$

and that

$$r_{\ell m}(k) \rightarrow 0 \quad \text{when } \ell \gg 1,$$

the same being true for $r_{\ell m}^\lambda(k)$. Additionally, because of the symmetries of the spectrum, the only non-vanishing coefficients are obtained for even ℓ and even m . It can also be checked that these coefficients are real and that their values do not depend on the sign of m . Thus, we conclude that there are only $1 + \ell/2$ independent real coefficients:

$$r_{\ell m} \in \mathbb{R}, \quad \ell = 2\ell', \quad m = 2m', \quad m' = 0 \dots \ell'.$$

The gravity waves and curvature perturbation are also correlated so that

$$\langle v_{\mathbf{k}}(\eta) \mu_{\lambda \mathbf{k}'}^*(\eta) \rangle = (|v_v \mu_{\lambda v}| + |v_\lambda \mu_{\lambda \lambda}| + |v_{(1-\lambda)} \mu_{\lambda(1-\lambda)}|) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.6)$$

5.2. Predictions

To illustrate the signatures of a Bianchi I inflationary era, we consider a Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/4$. We fix the initial value $\varphi_0/M_{\text{p}} = 3.25\sqrt{8\pi} \simeq 16.3$ for the inflaton field. This implies that the number of e -folds of the accelerating phase is $N[\varphi_i] \simeq 67$. We also set the reference wavenumber to $k_{\text{ref}} \simeq 157m \simeq 157 \times 10^{-6} M_{\text{p}}$. This corresponds to the definition (4.12) evaluated with the approximate cosmological constant solution (2.33) and (2.38), with the expression (2.57) for assessing τ_* .

We solve numerically the dynamics of the background and the evolution of the perturbations, as detailed in appendix A, in order to compute the spectra defined in section 5.1. In order to understand their behaviour, we present:

- Figure 16: the evolution of the functions $f_R(k)$ and $f_\lambda(k)$ as a function of k for modes ranging from $3k_{\text{ref}}$ to $100k_{\text{ref}}$. This shows the evolution of the isotropic part, which dominates the small scales.

We conclude that the curvature perturbation power spectrum has a spectral index $n_s - 1 \simeq -0.032$. For this model, $\delta \ll \epsilon$ and the modes depicted become super-Hubble when ϵ is almost constant and $\epsilon \sim 0.008$ (see figure 6). The expected spectral index in standard isotropic inflation is thus of order $n_s - 1 = 2\delta - 4\epsilon \sim -0.032$, in full agreement with our numerical computation.

For tensor modes, we clearly see that P_+ and P_\times differ on large scales and converge to the spectrum predicted by standard inflation on small scales. In particular, it can be checked that $n_T = -2\epsilon \sim -0.016$, in full agreement with our numerical computation.

- Figure 17: a Mollweide projection of $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$ for different wavenumbers and for the scalar modes. This provides a visual intuition of the isotropization on small scales.

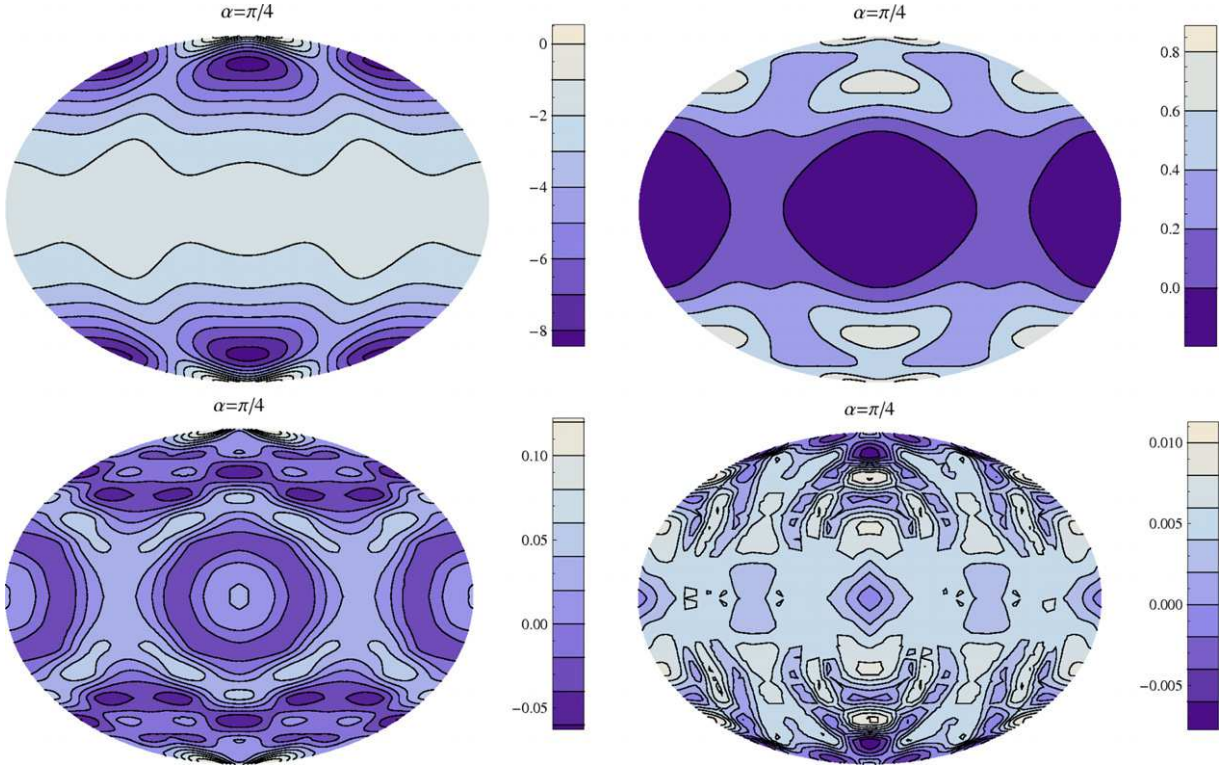


Figure 17. Mollweide projection of the ratio between $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$ and its value in the FL case, expressed as a percentage, for $\log[k/k_{\text{ref}}] = 1/2, 1, 3/2, 2$ from left to right and top to bottom.

- Figure 18: $r_{\ell m}(k)$ and $r_{\ell m}^{\lambda}(k)$ as a function of k for the lowest multipoles ($\ell = 2$). It quantifies the isotropization on small scales, as was observed in the previous figure.

Such predictions can be generated for any Bianchi I spacetime and up to an arbitrary multipole. In appendix C, we provide another example, namely of the particular case $\alpha = \pi/2$ considered in [24].

6. Conclusion

In this paper, we have worked out the predictions of an anisotropic inflationary era for a generic Bianchi I spacetime. We have discussed the isotropization both at the background level and at the linear order in perturbation theory, both for scalar modes and gravity waves.

Generically these spacetimes always enjoy a bouncing direction, apart from the particular case $\alpha = \pi/2$ considered in [24]. (Note that the predictions for this case are, in fact, singular among the predictions since they do not converge uniformly when $\alpha \rightarrow \pi/2$).

Since at early time, the modes are not in a WKB regime, we had to extend the standard procedure to fix the initial conditions (see section 4.3). We showed that the modes larger than k_{ref} always enter a WKB regime before they become super-Hubble

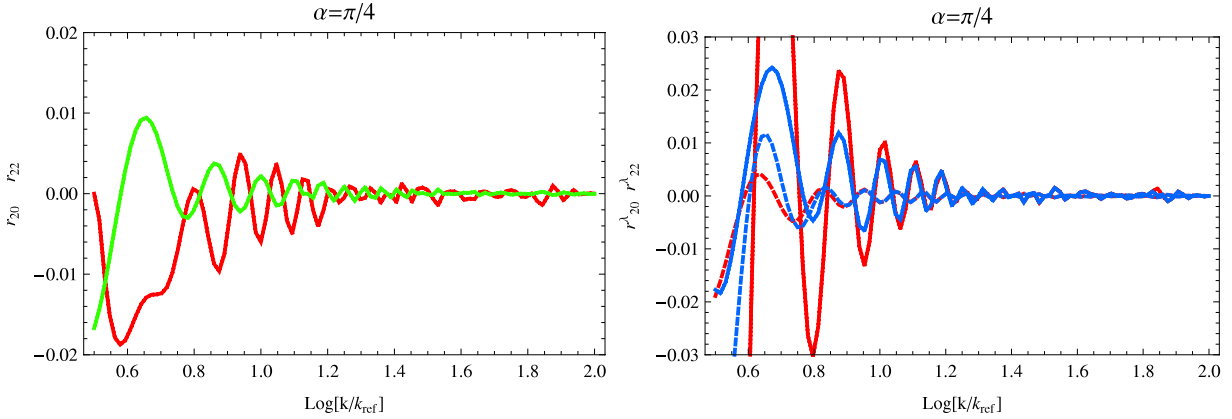


Figure 18. Evolution of $r_{\ell m}(k)$ (left) and $r_{\ell m}^\lambda(k)$ (right) as a function of $\log[k/k_{\text{ref}}]$ for the lowest $\ell = 2$. $m = 0$ and 2 are, respectively, in red and green on the left. On the right $m = 0$ and 2 are, respectively, in continuous and dashed line, the red being the $+$ polarization and the blue the \times polarization.

during inflation. As we discussed, our procedure reproduces the standard one on small scales.

In the particular case where we tune the initial shear so that these initial conditions can be set unambiguously while still having an imprint of the CMB anisotropy, we presented the imprint of the primordial anisotropy in the power spectra of the gravity waves and curvature perturbation at the end of inflation. Two examples were studied but we can provide predictions for any Bianchi I universe. Note that these predictions were drawn by assuming that the slow-roll attractors were reached before the time the modes of observational relevance had exited the horizon. In the case of inflation with a small number of e -folds before that time, it is not clear that this is a realistic hypothesis. If so, one would have to make the predictions in terms of trajectories, that is predictions that will depend on the initial conditions of the scalar field. This is not specific to Bianchi universes but to all models in which the inflationary period is short [40].

Concerning the initial conditions, two problems arise (see the discussion in section 4.4). First, there exists an early shear-dominated phase where the WKB approximation is violated. This forbids us to set the initial conditions as in a Friedmann–Lemaître universe. As we showed, the sub-Hubble modes at the onset of the accelerating phase can be quantized because quantum fluctuations act at all times and can always source oscillatory solutions, when they exist. On the other hand, there always exist non-oscillating modes. These modes are expected not to be much smaller than the Hubble radius today (since there is no trivial imprint of the anisotropy on the CMB). This implies that there exists a cutoff scale above which we cannot predict the spectra from first principles, at least in the theoretical set-up we are considering. Consequently, we conclude that, above this scale, we can only measure the power spectra or postulate their functional form, as was actually done to set the initial conditions before the invention of inflation. We have shown that, even if unknown pre-WKB initial conditions can grow, this growth is at most of the order of unity. Therefore we can safely assume that the perturbations at the end of inflation reflect only those modes that have been seeded during the WKB regime.

Second, for these modes, one cannot assume that they are independent. It implies that we have to consider three interacting fields, which also complicates the quantization procedure. Such an issue was addressed perturbatively in the interaction picture in the case of a self-interacting field in order to estimate the non-Gaussianity [52] but no general formalism has been designed when no interaction-free regime can be exhibited.

In our analysis we have assumed the validity of general relativity up to the singularity. Indeed, we do not take this model for more than what it actually is, e.g. we cannot extrapolate it beyond the Planck or the string scale. There, more degrees of freedom have to be included and can change the dynamics. This could introduce an early chaotic phase [48] since Bianchi I models coupled to p -form fields have never-ending oscillatory behaviour exhibited by generic string theory. Examples of an early dynamics have also been given in terms of Kalb–Ramond axion fields [49], non-commutative geometry [51] and recently loop quantum gravity [50]. Any of these developments may give a description of both the early phase and a procedure to fix the initial conditions.

Coming back to inflation, our study demonstrates to what extent its predictions are sensitive to initial (classical) large scale anisotropies and that, in the presence of a non-vanishing shear, it is impossible to define a Bunch–Davies vacuum in the standard way (see also [53] for a discussion of this issue in the standard picture and the arbitrariness of the choice of the initial state and its influence of the prediction of inflation). Indeed, if we tune the initial conditions such that the number of e -folds is large, none of the problems we address here will affect the observable modes, simply because only modes such that $k/k_{\text{ref}} \gg 1$ are observable and we have shown that in this limit we recover the standard inflationary predictions. If this is the case, one would have no observational imprint of the primordial shear. But our analysis and conclusions may be of some relevance for inflationary model building in the framework of string theory if the feeling that no large field model (and thus no large number of e -folds) can be constructed persists, an issue far beyond the scope of this paper.

Our analysis also shows the importance (and peculiarity) of the Friedmann–Lemaître background in our theoretical predictions and on the quantization procedure, and it gives as well an explicit construction of the difficulties encountered when these symmetries do not exist. We showed that, if the number of e -folds is large, the inflationary predictions converge toward the isotropic predictions, hence demonstrating that they are robust in that regime. In the case of a small number of e -folds, they are very sensitive to the initial shear but also the theoretical construction is less under control.

If the indication of the breakdown of statistical isotropy from the CMB were to be confirmed and related to such an early anisotropic phase, then a new coincidence will appear in the cosmological models since one would need to understand why the characteristic scale is of the order of the Hubble radius today, $k_{\text{ref}} \sim k_0$.

From a more pragmatic attitude, the present work allows us to draw the CMB signatures of such an anisotropic early phase, for any Bianchi I universe. We stress that the general form of the initial power spectra are more general than those heuristically considered in the analysis performed in [35, 54] and go beyond the one derived for the singular case $\alpha = \pi/2$ studied in [24]. The existence of a correlation between gravity waves and curvature perturbation, as well as the fact that the two gravity wave polarizations do not share the same spectrum, may also lead to specific signatures to be investigated.

Acknowledgments

TSP thanks the Brazilian research agency Fapesp for financial support. We thank George Ellis, Lev Kofman, Marco Peloso and Raul Abramo for discussions. We also thank Slava Mukhanov and Francis Bernardeau for reading and commenting on the manuscript. The background and perturbed equations have been checked using the tensor calculus package xAct [55]. We thank José Martín-García for his help in mastering this package.

Appendix A. Integrating the perturbations

We are interested in both the evolution of a cosmological mode and the decomposition of the shear according to this mode until it reaches the Friedmann stage. The co-vector of components k_i is constant by definition (see the discussion below equation (3.1)), but in the Bianchi regime the vector $k^i = \gamma^{ij}k_j$ is not constant since γ_{ij} (and thus γ^{ij}) is time-dependent. This is why we used these co-vectors to label a mode.

Once the background equations are solved for the functions $\beta_i(t)$ and thus $a_i(t)$, γ_{ij} is completely determined so that

$$k^2 = \sum_i \frac{k_i^2}{a_i^2(t)} \quad (\text{A.1})$$

and the associated normal vector is

$$\hat{k}_i = \frac{k_i}{k(t)}, \quad \hat{k}^i = \frac{k_i}{a_i^2(t)k(t)}. \quad (\text{A.2})$$

A.1. Evolution of the shear components

The decomposition of the shear with respect to $\hat{\mathbf{k}}$ also requires the construction of an orthonormal base $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \hat{\mathbf{k}}(t)\}$ that shall satisfy [23]

$$\mathbf{e}_1(t) \cdot \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_1(t) \cdot \mathbf{e}'_2(t), \quad (\text{A.3})$$

where the scalar product is meant in terms of the spatial metric γ_{ij} .

In principle, it is only necessary to determine this basis at a given initial time, t_{init} say, in order to extract the initial value of the shear components through equations (3.8) and (3.9):

$$\Sigma(t_{\text{init}}) = (\sigma_{\parallel}, \sigma_{V^1}, \sigma_{V^2}, \sigma_{T^\times}, \sigma_{T^+}). \quad (\text{A.4})$$

Then, to determine the value of Σ at any time, we use that equation (2.21) implies (see [23] for details)

$$\sigma'_{\parallel} + 2\mathcal{H}\sigma_{\parallel} = -2 \sum_a \sigma_{V^a}^2, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma'_{V^a} + 2\mathcal{H}\sigma_{V^a} = \frac{3}{2}\sigma_{V^a}\sigma_{\parallel} - \sum_{b,\lambda} \sigma_{V^b}\sigma_{T^\lambda}\mathcal{M}_{ab}^\lambda, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma'_{T^\lambda} + 2\mathcal{H}\sigma_{T^\lambda} = 2 \sum_{a,b} \mathcal{M}_{ab}^\lambda \sigma_{V^a}\sigma_{V^b}, \quad (\text{A.7})$$

where the matrix \mathcal{M}_{ab}^λ is defined by

$$\mathcal{M}_{ab}^\lambda \equiv \varepsilon_{ij}^\lambda e_a^i e_b^j, \quad (\text{A.8})$$

which is manifestly symmetric in ab . It is explicitly given by

$$\mathcal{M}_{ab}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_+^\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta_\times^\lambda. \quad (\text{A.9})$$

One interesting aspect of the system (A.5)–(A.7) is that it does not depend explicitly on k_i . Once this system has been solved, we can deduce easily the functions $(\omega_v, \omega_\lambda, \mathfrak{R}, \mathfrak{I})$ that enter the equations of evolution of the perturbative modes.

In practice, however, in the regime where $\sigma \ll \mathcal{H}$, small numerical oscillations in the components of the shear are converted into huge numerical instabilities in the system (A.5)–(A.7). In order to avoid these numerical instabilities we turn to another method which we now describe.

A.2. Systematic construction

This method relies on the fact that the solutions of the system (A.5)–(A.7) are, in a general sense, given by

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j, \quad \sigma_{V^a} = \sigma_{ij} \hat{k}^i e_a^j, \quad \sigma_{T^\lambda} = \sigma_{ij} \varepsilon_\lambda^{ij}, \quad (\text{A.10})$$

as a function of time.

Instead of solving (A.5)–(A.7) after having extracted the components of the shear at a fixed initial time, we can determine the dynamics of the shear components through the dynamics of the basis vectors, the polarization tensor and the shear. Once the $\beta'_i(t)$ are determined numerically, the shear is known.

In order to determine the base vectors $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\}$, we first start from a triad $\{\mathbf{e}_x(t), \mathbf{e}_y(t), \mathbf{e}_z(t)\}$ aligned with the xyz -proper axis. Then we introduce three Euler angles to rotate this triad to any given direction.

Let us recall how to deal with rotations in spaces endowed with a general (non-orthonormal) metric. Any rotation matrix about a unit vector $\hat{\mathbf{n}}$ can be constructed by means of infinitesimal rotations of the form

$$R(\theta/N) = 1 + \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{\theta}{N} = 1 + \gamma^{ij} J_j \hat{n}_i \frac{\theta}{N},$$

where θ/N is some infinitesimal angle. The J_j are the generators of the group of rotations. In particular, if we want to specify a rotation about the z axis, then the unit vector aligned with this axis has components

$$\hat{n}_i = (0, 0, e^{\beta_3})$$

and we have

$$R_z(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + e^{-\beta_3} J_z \frac{\theta}{N} \right)^N = \exp [\theta e^{-\beta_3} J_z].$$

It can be shown that, in order to conserve the scalar product, the generators must satisfy $(J_k)_{ij} = -\epsilon_{kij}$, where ϵ_{ijk} is totally antisymmetric normalized such that $\epsilon_{123} = \sqrt{\det(\gamma_{ij})} = 1$. A rotation matrix around the z axis then requires us to use $(J_z)^i_j = (\gamma)^{ik} (J_z)_{kj}$, which

is explicitly given by

$$(J_z)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2\beta_1} & 0 \\ e^{-2\beta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Consequently, taking into account the constraint (2.5), i.e. $\sum_i \beta_i = 0$, any rotation about the z axis can be written as

$$[R_z(\theta)]^i_j = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -e^{(\beta_2-\beta_1)} \sin(\theta) & 0 \\ e^{(\beta_1-\beta_2)} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Similarly, for a rotation about the y axis, we use the generator

$$(J_y)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-2\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e^{-2\beta_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

to get

$$[R_y(\theta)]^i_j = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & e^{(\beta_3-\beta_1)} \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{(\beta_1-\beta_3)} \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Explicitly, the components of the triad from which we start are

$$(e_x)^i \equiv \begin{pmatrix} e^{-\beta_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (e_y)^i \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\beta_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (e_z)^i \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\beta_3} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

The three Euler angles (α, β, γ) are then used to rotate this triad according to, respectively, the x , y and z axis. Explicitly, the triad after rotation is given by

$$\begin{aligned} (e_1)^i &\equiv R_z(\gamma)^i_j R_y(\beta)^j_l R_x(\alpha)^l_p (e_x)^p, \\ (e_2)^i &\equiv R_z(\gamma)^i_j R_y(\beta)^j_l R_x(\alpha)^l_p (e_y)^p, \\ (e_k)^i &\equiv R_z(\gamma)^i_j R_y(\beta)^j_l R_x(\alpha)^l_p (e_z)^p, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

which determines the orthonormal basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_k\}$. This prescription is still incomplete since our problem also requires the co-vector \mathbf{u}_k to be equal to the co-vector $\hat{\mathbf{k}}$ during the whole evolution of the system, i.e.

$$(u_k)_i(t) = \hat{k}_i(t), \quad \forall t.$$

Since k_i should not depend on time, we need to determine the Euler angles as a function of time such that, for any two times t and t' , we have $[u_k(t)]_i = f(t, t')[u_k(t')]_i$. This condition is satisfied provided

$$\tan(\gamma) = \tan(\gamma_f) \exp[(\beta_1 - \beta_2)], \quad (\text{A.17})$$

$$\tan(\beta) = \exp\left[(\beta_3 - \beta_1) \frac{\cos(\gamma_f)}{\cos(\gamma)} \tan(\beta_f)\right], \quad (\text{A.18})$$

where γ_f and β_f are the angles which give the final direction that we consider when the shear has vanished.

Additionally, our problem also requires the condition

$$[(e_2)^i]^\prime [(e_1)_i] = [(e_1)^i]^\prime [(e_2)_i],$$

as a prescription for the choice polarization basis to be continuous. It is fulfilled if

$$\alpha' = -\cos(\beta)\gamma'. \quad (\text{A.19})$$

This equation can be integrated with the help of equations (A.17) and (A.18). Consequently, provided we know (β_f, γ_f) describing the final orientation of a mode, we can determine $(\alpha(t), \gamma(t), \beta(t))$ which will select the triad adapted to the mode *at any time*.

In conclusion, the set of equations (A.16)–(A.19) gives a complete description of the time-evolving triad necessary to extract the components of the shear according to equation (A.10) at any time. This is the procedure we have implemented in our numerical calculations, and is robust to numerical errors.

Appendix B. Slow-roll expressions

We give here, for the sake of completeness, the explicit expressions for z_S''/z_S , z_λ''/z_λ , \aleph_λ and \beth in terms of the slow-roll parameters. Setting

$$w \equiv \frac{\sigma_{\parallel}}{2\mathcal{H}}, \quad y_\lambda \equiv \frac{\sigma_{T\lambda}}{\sqrt{6}\mathcal{H}}, \quad (\text{B.1})$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{z_S''}{z_S} = \mathcal{H}^2 \left\{ 2 + \epsilon \left[5 - 4\delta + 2\epsilon - \frac{(3-\delta)^2}{3-\epsilon} \right] \right. \\ + x^2 [-3 - 6\delta + \epsilon(7 + 4\delta - 4\epsilon)] + 2x^4 (3 - \epsilon)^2 \\ - 6x^2 \{ \epsilon - \delta + x^2(3 - \epsilon) \} + 2\frac{\epsilon}{\mathcal{H}} (1 - x^2) \left(\frac{w}{1-w} \right)' \\ \left. + \left(\frac{w}{1-w} \right) [6\epsilon + 2\epsilon^2 - 4\epsilon\delta + x^2(-4\epsilon^2 + 4\epsilon\delta) + 2x^4(\epsilon^2 - 6\epsilon)] \right\}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_\lambda''}{z_\lambda} = \mathcal{H}^2 \left\{ 2 - \epsilon + 6w - 2\epsilon \left[w + 3 \left(\frac{y_\lambda^2}{1-w} \right) \right] + 12y_{(1-\lambda)}^2 + 18 \left(\frac{y_\lambda^2}{1-w} \right) \right. \\ \left. + (\epsilon - 3)x^2 \left[1 + 2w + 6 \left(\frac{y_\lambda^2}{1-w} \right) \right] + 2\frac{w'}{\mathcal{H}} + \frac{6}{\mathcal{H}} \left(\frac{y_\lambda^2}{1-w} \right)' \right\}, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

$$\aleph_\lambda = \sqrt{6}\mathcal{H}^2 \sqrt{2\epsilon(1-x^2)} \left[\frac{1}{\mathcal{H}} \left(\frac{y_\lambda}{1-w} \right)' + \frac{1}{2}(6 - \epsilon - \delta) \left(\frac{y_\lambda}{1-w} \right) \right], \quad (\text{B.4})$$

$$\beth = 6\mathcal{H}^2 \left[\frac{1}{\mathcal{H}} \left(\frac{y_+ y_\times}{1-w} \right)' + 6(3 - \epsilon + (3 - \epsilon)x^2) \left(\frac{y_+ y_\times}{1-w} \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Appendix C. Particular case $\alpha = \pi/2$

As we stressed, the case $\alpha = \pi/2$ is particular in the sense that this is the only Bianchi I model which does not have any bouncing direction.

Since this model enjoys a planar symmetry (conveniently chosen here to be in the xy plane), the component $\sigma_{T\times}$ of the shear vanishes for any choice of the Euler angles provided that $\alpha = 0$, which corresponds to the symmetry around the z axis. This implies that $\aleph_{\times} \propto \sigma_{\times}$ also vanishes at all times. The function \aleph_{+} behaves as $\sigma_{+}\sigma_{\times}$ and for the

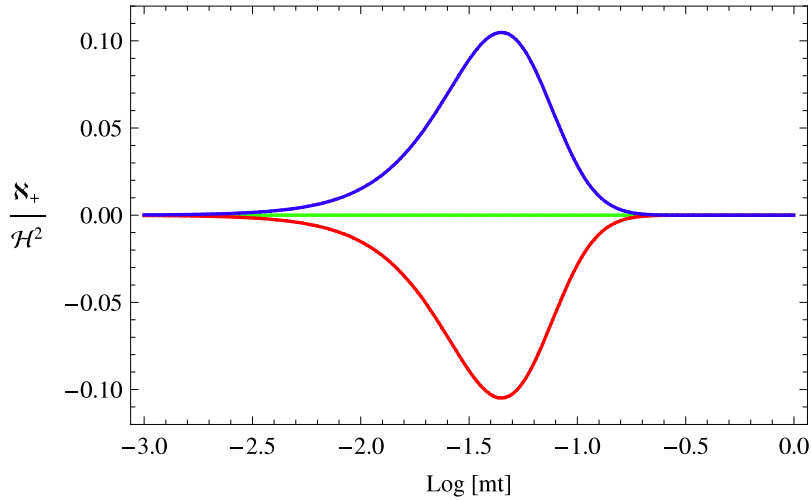


Figure C.1. Evolution of \aleph_{+}/\mathcal{H}^2 for the three orthogonal modes aligned with the x, y and z axis (represented by three different colours). We have considered here a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/2$.

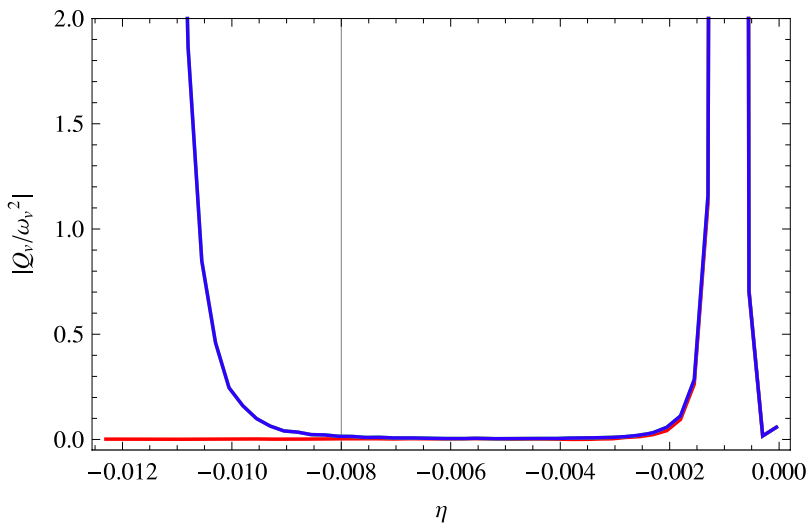


Figure C.2. Evolution of $|Q_v^{\text{WKB}}/\omega_v^2|$ for three different modes, each of them aligned with one of the three orthogonal directions and with the same modulus $10k_{\text{ref}}$ at the end of inflation. We have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/2$.

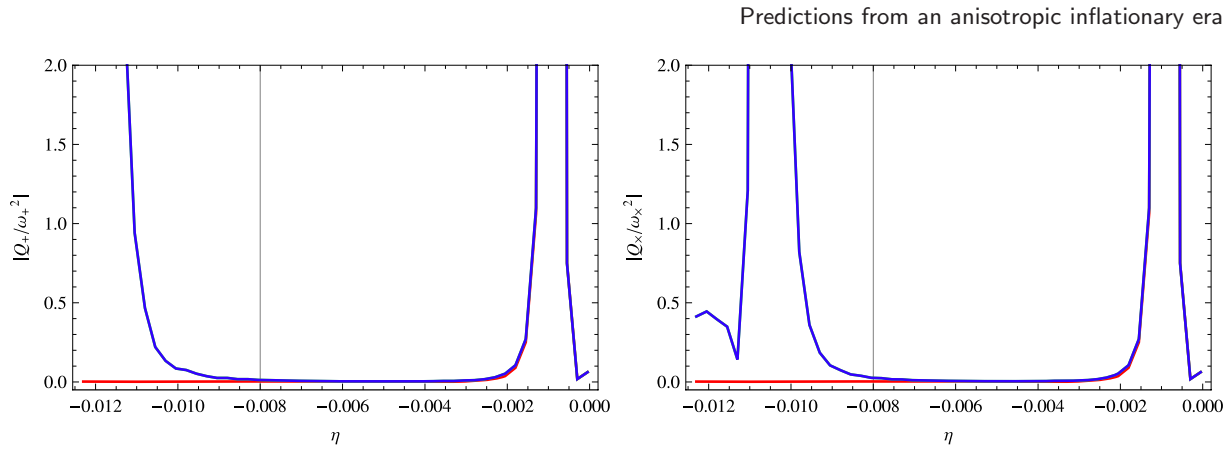


Figure C.3. Evolution of $|Q_\lambda^{\text{WKB}}/\omega_\lambda^2|$ for $\lambda = +$ (left) and $\lambda = \times$ (right) for various modes with the same modulus $10k_{\text{ref}}$ at the end of inflation. We have considered a generic Bianchi spacetime with $\alpha = \pi/2$.

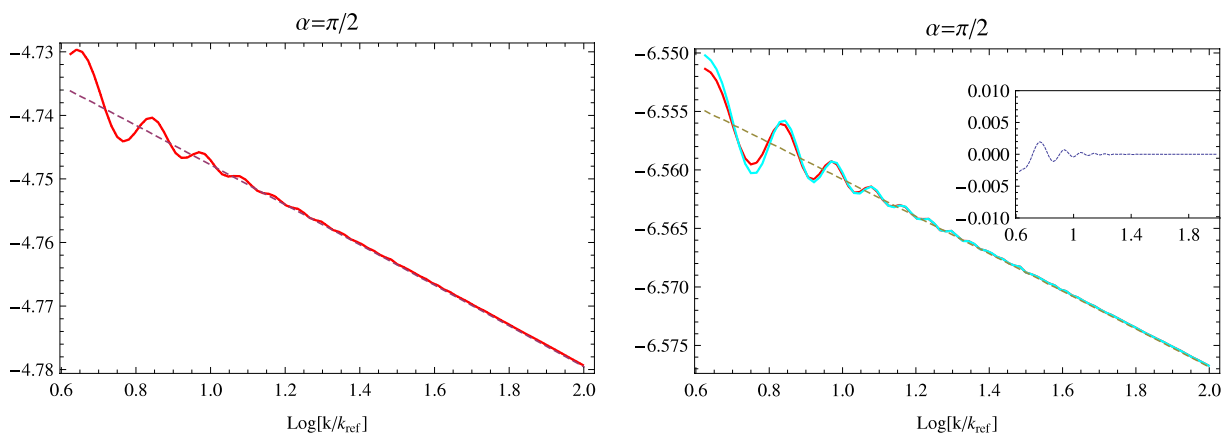


Figure C.4. Evolution of $f_R(k)$ (left) and $f_\lambda(k)$ (right) as a function of $\log[k/k_{\text{ref}}]$. The FL case is shown as a dashed line.

same reason also vanishes. In conclusion, when (and only when) $\alpha = \pi/2$, we have

$$\mathfrak{N}_\times = 0, \quad \mathfrak{C} = 0.$$

This is the reason why it was possible to construct a ‘simplified’ perturbation theory in [24] in splitting into 2 + 1 degrees of freedom from the start of the analysis. As we saw, this is not generic.

Figure C.1 now shows that

$$\frac{\mathfrak{N}_+}{\mathcal{H}^2} \rightarrow 0$$

at early time which implies that the modes were in fact decoupled. Figures C.2 and C.3 consider the validity of the WKB condition. In particular, one can show that on sub-Hubble scales

$$\frac{z_s''}{z_s} \rightarrow \frac{k_z^2}{a_z^2}, \quad \frac{z_\lambda''}{z_\lambda} \rightarrow \frac{k_z^2}{a_z^2}.$$

Predictions from an anisotropic inflationary era

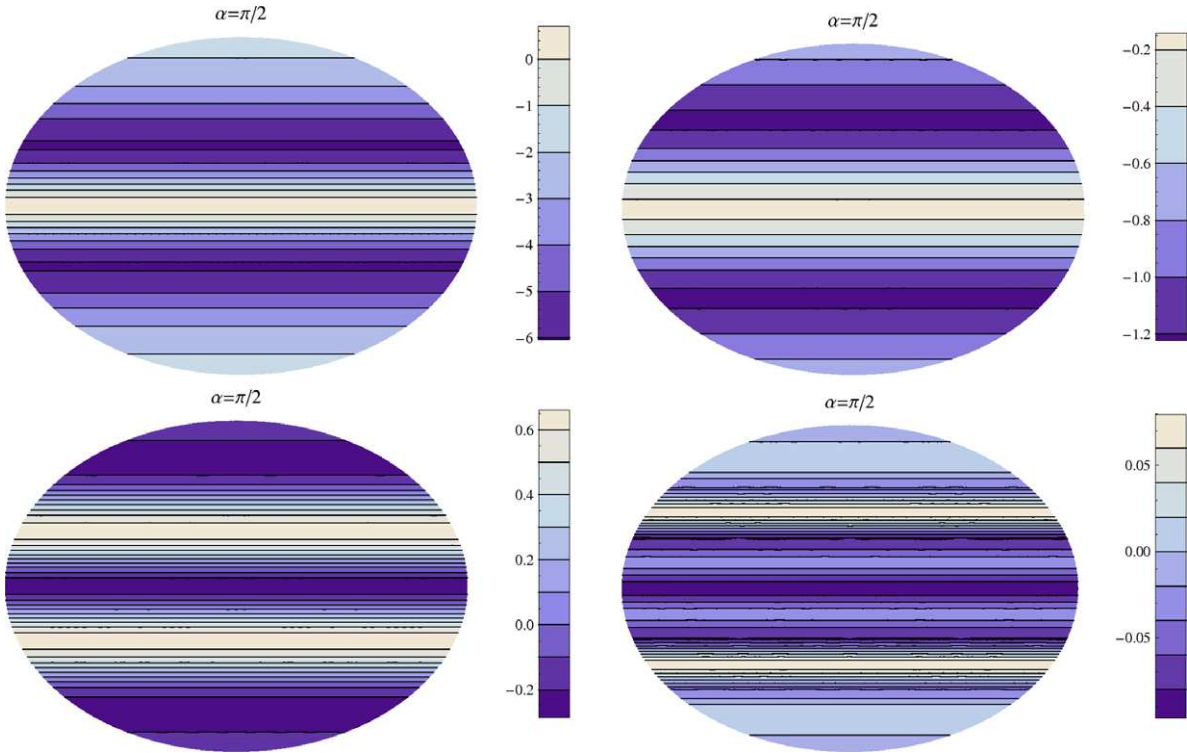


Figure C.5. Mollweide projection of the ratio between $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$ and its value in the FL case, expressed in percentages, for $\log[k/k_{\text{ref}}] = 1/2, 3/4, 1, 3/2$ from left to right, top to bottom. The x axis has been chosen as the vertical axis.

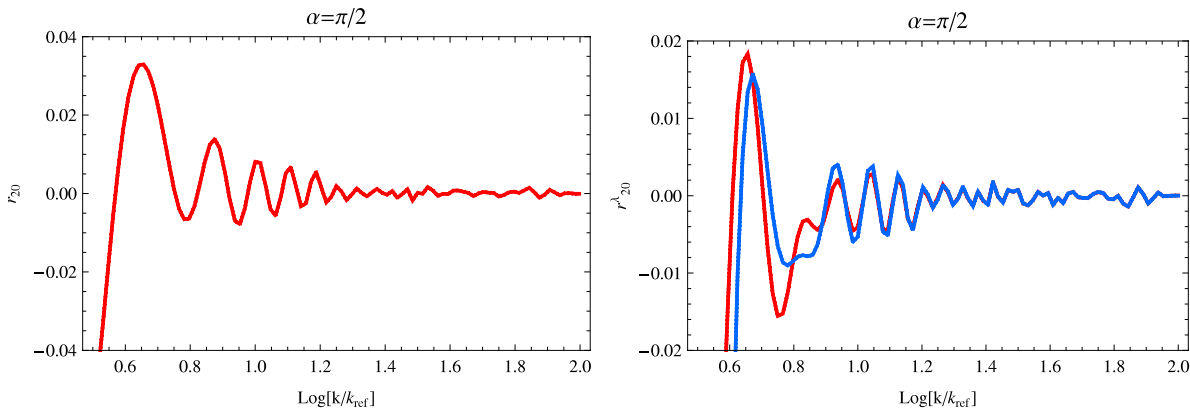


Figure C.6. Evolution of $r_{\ell m}(k)$ (left) and $r_{\ell m}^{\lambda}(k)$ (right) as a function of $\log[k/k_{\text{ref}}]$ for the lowest multipoles ($\ell = 2$). The x axis has been used to perform the spherical harmonics decomposition. As a result of symmetries, only the coefficients with $m = 0$ do not vanish. On the right the red is the $+$ polarization and the blue is the \times polarization.

We have checked that there exists only one time redefinition which leads to adiabatic canonical variables and that agree with all the conclusions in [24].

Following our quantization procedure, we compute the predictions for the power spectra (figures C.4–C.6). Note that the planar symmetry is obvious on the Mollweide projection, which shall be compared to the generic case presented in figure 17. This

illustrates how a detection of anisotropy may permit us to reconstruct the particular Bianchi I structure (if any!) during inflation.

In this particular case, there always exists a WKB regime. We can thus define our initial conditions in the standard way. Following the procedure described in this paper, we can compute the power spectra of this solution. We present here the same figures as in section 5.2.

References

- [1] Linde A D, 1990 *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Chur: Harwood)
- Mukhanov S, 2005 *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Peter P and Uzan J-P, 2005 *Cosmologie Primordiale* (Paris: Belin)
- Bernardeau F, 2007 *Cosmologie, des Fondements Théoriques aux Observations* (Paris: CNRS Éditions)
- [3] Linde A, 2007 *Preprint* [0705.0164](#) [hep-th]
- [4] Mukhanov V and Chibisov G V, 1981 *JETP Lett.* **33** 532
- Hawking S W, 1982 *Phys. Lett. B* **115** 295 [SPIRES]
- [5] Mukhanov V F, Feldman F A and Brandenberger R H, 1992 *Phys. Rep.* **215** 203 [SPIRES]
- [6] Linde A D, 1985 *Phys. Lett. B* **158** 375 [SPIRES]
- García-Bellido J and Wands D, 1996 *Phys. Rev. D* **53** 5437 [SPIRES]
- Mukhanov V F and Steinhardt P J, 1998 *Phys. Lett. B* **422** 52 [SPIRES]
- Langlois D, 1999 *Phys. Rev. D* **59** 123512 [SPIRES]
- [7] Komatsu E *et al.*, 2006 *Phys. Rep.* **402** 103 [SPIRES] [[astro-ph/0406398](#)]
- Linde A and Mukhanov V, 1997 *Phys. Rev. D* **56** 535 [SPIRES] [[astro-ph/9610219](#)]
- Bernardeau F and Uzan J-P, 2002 *Phys. Rev. D* **66** 103506 [SPIRES] [[hep-ph/0207295](#)]
- Bernardeau F and Uzan J-P, 2003 *Phys. Rev. D* **67** 121301(R) [SPIRES] [[astro-ph/0209330](#)]
- Osano B *et al.*, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* [JCAP04\(2007\)003](#) [SPIRES] [[gr-qc/0612108](#)]
- Maldacena J, 2005 *J. High Energy Phys.* [JHEP03\(2005\)013](#) [SPIRES] [[astro-ph/0210603](#)]
- [8] Bernardeau F, Kofman L and Uzan J-P, 2004 *Phys. Rev. D* **70** 083004 [SPIRES] [[astro-ph/0403315](#)]
- [9] Olive K, 1990 *Phys. Rep.* **190** 307 [SPIRES]
- [10] Collins C B and Hawking S W, 1973 *Astrophys. J.* **180** 317 [SPIRES]
- Barrow J D, 1982 *Q. J. R. Astron. Soc.* **23** 344
- Wald R M, 1983 *Phys. Rev. D* **28** 2118 [SPIRES]
- Steigman G and Turner M, 1983 *Phys. Lett. B* **128** 295 [SPIRES]
- Gron O, 1985 *Phys. Rev. D* **32** 2522 [SPIRES]
- Rothman T and Madsen M S, 1985 *Phys. Lett. B* **159** 256 [SPIRES]
- Rothman T and Ellis G F R, 1986 *Phys. Lett. B* **180** 19 [SPIRES]
- Jensen L G and Stein-Schabes J A, 1986 *Phys. Rev. D* **34** 931 [SPIRES]
- Jensen L G and Stein-Schabes J A, 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1146 [SPIRES]
- Patcher T, 1987 *Eur. Phys. Lett.* **4** 1211
- Moss I and Sahni V, 1986 *Phys. Lett. B* **178** 159 [SPIRES]
- Burd A B and Barrow J D, 1988 *Nucl. Phys. B* **308** 929 [SPIRES]
- Raychaudhuri A and Modak B, 1988 *Class. Quantum Grav.* **5** 225 [SPIRES]
- Byland S and Scialom D, 1998 *Phys. Rev. D* **57** 6065 [SPIRES]
- Aguirregabiria J and Chamorro A, 2000 *Phys. Rev. D* **62** 084028 [SPIRES]
- Buniy R V, Berera A and Kephart T W, 2005 *Preprint* [hep-th/0511115](#)
- Barrow J D and Hervik S, 2006 *Class. Quantum Grav.* **23** 3053 [SPIRES]
- [11] Maartens R, Sahni V and Saini T D, 2001 *Phys. Rev. D* **63** 063509 [SPIRES] [[gr-qc/0011105](#)]
- Santos M G, Vernizzi F and Ferreira P G, 2001 *Phys. Rev. D* **64** 063506 [SPIRES] [[hep-ph/0103112](#)]
- Paul B C, 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124001 [SPIRES] [[gr-qc/0107005](#)]
- Aguirregabiria J, Chimento L P and Lazkoz R, 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 823 [SPIRES] [[gr-qc/0303096](#)]
- [12] Ellis G F R *et al.*, 2002 *Gen. Rel. Grav.* **34** 1445 [SPIRES] [[gr-qc/0109023](#)]
- Uzan J-P, Kirchner U and Ellis G F R, 2003 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **344** L65 [[astro-ph/0302597](#)]
- [13] Mukhanov V F, 1985 *Pis. Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **41** 402
- Mukhanov V F, 1985 *JETP Lett.* **41** 493 (translation)
- Sasaki M, 1986 *Prog. Theor. Phys.* **76** 1036 [SPIRES]
- [14] McAllister L and Silverstein E, 2007 *Preprint* [0710.2951](#)

- [15] Bauman D and McAllister L, 2006 *Preprint* [hep-th/0610285](#)
- [16] Bond J R *et al*, 2007 *Phys. Rev. D* **75** 123511 [SPIRES] [[hep-th/0612197](#)]
- [17] Tomita K and Den M, 1986 *Phys. Rev. D* **34** 3570 [SPIRES]
- [18] Dunsby P, 1993 *Phys. Rev. D* **48** 3562 [SPIRES]
- [19] Pitrou C and Uzan J-P, 2007 *Phys. Rev. D* **75** 087302 [SPIRES] [[gr-qc/0701121](#)]
- [20] Noh H and Hwang J-C, 1995 *Phys. Rev. D* **52** 1970 [SPIRES]
- [21] Abbott R B, Bednarz B and Ellis D, 1986 *Phys. Rev. D* **33** 2147 [SPIRES]
- [22] Zeldovich Y B and Starobinsky A A, 1972 *Sov. Phys. JETP* **34** 1159 [SPIRES]
Berger B J, 1975 *Phys. Rev. D* **12** 368 [SPIRES]
Suresh P K, 2003 *Preprint* [gr-qc/0308080](#)
- [23] Pereira T S, Pitrou C and Uzan J-P, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP09(2007)006 [SPIRES] [[0707.0736](#)]
- [24] Gümrükçüoğlu A E, Contaldi C R and Peloso M, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP11(2007)005 [SPIRES] [[0707.4179](#)]
- [25] Oliveira-Costa A *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 063516 [SPIRES] [[astro-ph/0307282](#)]
Eriksen H K *et al*, 2004 *Astrophys. J.* **605** 14 [SPIRES] [[astro-ph/0307507](#)]
Schwartz D J *et al*, 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 0403353 [SPIRES] [[astro-ph/0403353](#)]
Land K and Magueijo J, 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 071301 [SPIRES] [[astro-ph/0502237](#)]
- [26] Prunet S *et al*, 2005 *Phys. Rev. D* **71** 083508 [SPIRES] [[astro-ph/0406364](#)]
- [27] Luminet J-P *et al*, 2003 *Nature* **425** 593 [SPIRES] [[astro-ph/0310253](#)]
Riazuelo A *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 103518 [SPIRES] [[astro-ph/0311314](#)]
Riazuelo A *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 103514 [SPIRES] [[astro-ph/0212223](#)]
Uzan J-P *et al*, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 043003 [SPIRES] [[astro-ph/0303580](#)]
- [28] Lehoucq R, Uzan J-P and Weeks J, 2003 *Kodai Math. J.* **26** 119 [[math.SP/0202072](#)]
Gausmann E *et al*, 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 5155 [SPIRES] [[gr-qc/0106038](#)]
Lehoucq R *et al*, 2002 *Class. Quantum Grav.* **19** 4683 [SPIRES] [[gr-qc/0205009](#)]
Barrow J D and Kodama H, 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 1753 [SPIRES] [[gr-qc/0012074](#)]
- [29] Armendariz-Picon C, 2007 *Preprint* [0705.1167](#)
- [30] Böhmer C G and Mota D F, 2007 *Preprint* [0710.2003](#) [astro-ph]
- [31] Dulaney T, Gresham M I and Wise M B, 2008 *Preprint* [0801.2951](#) [astro-ph]
- [32] Donoghue E P and Donoghue J F, 2004 *Preprint* [astro-ph/0411237](#)
Donoghue J F, Dutta K and Ross A, 2007 *Preprint* [astro-ph/0703455](#)
- [33] Jaffe T R *et al*, 2005 *Astrophys. J. Lett.* **629** L1 [[astro-ph/0503213](#)]
Jaffe T R *et al*, 2006 *Preprint* [astro-ph/0606046](#)
Pontzen A and Challinor A, 2007 *Preprint* [0706.2075](#) [astro-ph]
- [34] Gümrükçüoğlu A E, Contaldi C R and Peloso M, 2006 *Preprint* [astro-ph/0608405](#)
- [35] Ackerman L, Carroll S M and Wise M B, 2007 *Phys. Rev. D* **75** 083502 [SPIRES] [[astro-ph/0701357](#)]
Pullen A R and Kamionkowski M, 2007 *Preprint* [0709.1144](#) [astro-ph]
- [36] Marteens R, Ellis G F R and Stoeger W R, 1996 *Astron. Astrophys.* **309** L7 [SPIRES] [[astro-ph/9501016](#)]
Marteens R, Ellis G F R and Stoeger W R, 1995 *Phys. Rev. D* **51** 1525 [SPIRES] [[astro-ph/9510126](#)]
Stoeger W R, Araujo M E and Gebbie T, 1997 *Astrophys. J.* **476** 435 [SPIRES] [[astro-ph/9904346](#)]
Kogut A, Hinshaw G and Banday A J, 1997 *Phys. Rev. D* **55** 1901 [SPIRES] [[astro-ph/9701090](#)]
Martinez-Gonzalez E and Sanz J L, 1995 *Astron. Astrophys.* **300** 346 [SPIRES]
- [37] Thorne K S, 1967 *Astrophys. J.* **148** 51 [SPIRES]
- [38] Ryan M P, 1975 *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
Ellis G F R and MacCallum M A H, 1969 *Commun. Math. Phys.* **12** 108 [SPIRES]
- [39] Lidsey J E, 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 1239 [SPIRES]
- [40] Kofman L, results presented in seminars and conferences
- [41] Borde A, Guth A H and Vilenkin A, 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 151301 [SPIRES] [[gr-qc/0110012](#)]
- [42] Martin J and Schwartz D J, 2003 *Phys. Rev. D* **67** 083512 [SPIRES] [[astro-ph/0210090](#)]
- [43] Lidsey J E *et al*, 1997 *Rev. Mod. Phys.* **69** 373 [SPIRES]
Lyth D and Liddle A, 1993 *Phys. Rep.* **231** 1 [SPIRES]
- [44] Sarkar S, 1996 *Rep. Prog. Phys.* **59** 1493
- [45] Wands D, 2007 *Preprint* [astro-ph/0702187](#)
- [46] Byrnes C T and Wands D, 2006 *Preprint* [astro-ph/0605679](#)
- [47] Lemoine M *et al*, 2002 *Phys. Rev. D* **65** 023510 [SPIRES] [[hep-th/0109128](#)]
- [48] Damour T and Henneaux M, 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 920 [SPIRES] [[hep-th/0003139](#)]
Damour T and Henneaux M, 2000 *Phys. Lett. B* **488** 108 [SPIRES] [[hep-th/0006171](#)]

- [49] Kaloper N, 1991 *Phys. Rev. D* **44** 2380 [SPIRES]
- [50] Chiou D-W, 2007 *Preprint* 0710.0416
- [51] Di Grezia E *et al*, 2003 *Phys. Rev. D* **68** 105012 [SPIRES] [gr-qc/0305050]
- [52] Maldacena J, 2005 *J. High Energy Phys.* JHEP03(2005)013 [SPIRES] [astro-ph/0210603]
Brunier T, Bernardeau F and Uzan J-P, 2005 *Phys. Rev. D* **71** 063529 [SPIRES] [hep-th/0412186]
Bernardeau F, Brunier T and Uzan J-P, 2004 *Phys. Rev. D* **69** 063520 [SPIRES] [astro-ph/0311422]
Weinberg S, 2005 *Phys. Rev. D* **72** 043514 [SPIRES] [hep-th/0506236]
Weinberg S, 2006 *Phys. Rev. D* **74** 023508 [SPIRES] [hep-th/0605244]
- [53] Armendariz-Picon C, 2006 *Preprint* astro-ph/0612288
- [54] Pullen A R and Kamionkowsky M, 2007 *Phys. Rev. D* **76** 103529 [SPIRES]
- [55] Martín-García J, *xPerm and xAct* <http://metric.iem.csic.es/Martin-Garcia/xAct/index.html>

Conclusion et perspectives de recherche

Cette thèse a essentiellement porté sur la théorie des perturbations, dans le but d'étendre la compréhension que nous avons du modèle cosmologique standard.

Mon premier axe de recherche a été l'étude des perturbations au delà de l'ordre linéaire, en allant des aspects les plus théoriques jusqu'à la résolution des équations dynamiques. Je me suis intéressé à la dépendance de jauge inhérente à la théorie des perturbations afin d'obtenir une formulation invariante de jauge, et j'ai tenté de mettre en relation les différents formalismes utilisés pour traiter les perturbations, dans le but d'obtenir une compréhension la plus complète possible. La dépendance de jauge et les équations dynamiques des perturbations ont été considérées jusque dans le cadre très large de la théorie cinétique, en insistant sur leur relation avec l'approximation fluide qui permet une résolution approchée aisée. La physique des collisions reste cependant à explorer en détails au delà de la théorie linéaire et cela fera l'objet de recherches futures. La précision des mesures attendues de la mission *Planck* rend en effet nécessaire la compréhension de toute la physique non-linéaire, de l'inflation jusqu'aux observations. Quant à la comparaison des formalismes perturbatifs, ceci semble étroitement lié au problème de la moyenne en cosmologie, nécessaire pour décrire l'univers aux grandes échelles. J'espère que les compétences techniques acquises pendant ce travail de thèse me permettront d'engager une réflexion de long terme sur ce problème. Dans un premier temps, j'ai ouvert la voie au calcul informatique des équations de perturbation dans le cadre cosmologique. Si ce travail est poursuivi, il permettra de recentrer les efforts théoriques sur les aspects fondamentaux de la théorie des perturbations plutôt que sur la lourdeur des calculs intermédiaires.

La seconde partie de mes recherches fut consacrée à l'étude des univers anisotropes, dans le but de mieux comprendre les implications du principe cosmologique. Afin d'étudier complètement de tels modèles, il a fallu à la fois travailler sur l'espace de fond et développer la théorie des perturbations. Je me suis restreint au cas le plus simple qui est celui d'un espace de type Bianchi I , pour ensuite en tirer les conséquences sur le spectre de puissance des fluctuations primordiales. Il est techniquement aisé de généraliser la théorie des perturbations invariantes de jauge à tous les types d'espaces anisotropes, mais la résolution des équations dynamiques nécessite de connaître la décomposition en modes pour de tels espaces, et ceci constitue la difficulté principale. Si les anisotropies à grande échelle du fond diffus cosmologique sont confirmées par les nouvelles détections, je pense qu'il sera nécessaire de surmonter ces difficultés mathématiques afin de

posséder un ensemble très large de modèles anisotropes, ainsi que leurs signatures, dans le but de les contraindre observationnellement.

Appendices

Sommaire

A	Commutation des dérivées covariantes	251
B	Quantités géométriques	252
B.1	Symboles de Christoffel	252
B.2	Connections affines	253
B.3	Tenseur d'Einstein	254
C	Perturbations de la matière	256
C.1	Vitesse	256
C.2	Tenseur énergie-impulsion	257
D	Équations au second ordre dans le cas plat	258
D.1	Équations de conservation	258
D.2	Équations d'Einstein dans le cas d'un fluide parfait avec $c_s^2 \neq w$	258
E	Conservation de la perturbation de courbure comobile au second ordre	259

A Commutation des dérivées covariantes

Le tenseur de Riemann et les tenseurs associés de la métrique de fond des sections spatiales γ_{ij} est donné par les équations 1.2. Des relations de commutation générales

$$\begin{aligned} [D_i, D_j] X_k &= {}^{(3)}R_{qkji} X^q \\ [D_i, D_j] X_{kl} &= {}^{(3)}R_{qkji} X^{ql} + {}^{(3)}R_{qlji} X^{kq} \end{aligned} \tag{2}$$

on déduit l'ensemble des relations utiles suivantes.

$$\begin{aligned}
[D_i, D_j] X_k &= K\gamma_{ik}X_j - K\gamma_{jk}X_i \\
[D_i, D_j] X^i &= 2KX_j \\
[\Delta, D_i] X &= 2KD_iX \\
[D_i, D_j] X^i_k &= 2KX_{jk} + KX_{kj} + \gamma_{jk}X^i_i \\
[\Delta, D_j] X_k &= 2KD_jX_k + 2KD_kX_j + 2\gamma_{jk}D^iX_i \\
\Delta\Delta X - D_i\Delta D^iX &= -2K\Delta X \\
D_i\Delta^{-1}X &= (\Delta - 2K)^{-1}D_iX \\
D_pX_q &= \left[\Delta\delta_p^l\delta_q^i - 2K\left(\delta_p^l\delta_q^i + \delta_q^l\delta_p^i - \gamma_{pq}\gamma^{il}\right) \right] D_l\Delta^{-1}X_i \\
D_i\Delta^{-1}X^i &= (\Delta + 2K)^{-1}D_iX^i
\end{aligned} \tag{3}$$

B Quantités géométriques

On utilise la métrique perturbée (2.11) qui correspond à la jauge Newtonienne. $\mathcal{H}(\eta) \equiv a'/a$ est la fonction de Hubble en temps conforme. On rappelle que les indices latin sont montés et baissés avec la métrique spatiale de fond γ_{ij} . On aura par exemple $X^i = \gamma^{ij}X_j$. Toutes les quantités sont perturbées selon la décomposition 2.17. On rappelle également que les perturbations vectorielles au premier ordre sont négligées. Afin de simplifier les notations nous utiliserons également pour le second ordre la définition

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} + D_{(i}E_{j)}. \tag{4}$$

B.1 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel non nuls sont pour l'espace de fond

$${}^{(0)}\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H}, \quad {}^{(0)}\Gamma_{jk}^0 = \mathcal{H}\gamma_{jk}, \quad {}^{(0)}\Gamma_{0j}^i = \mathcal{H}\gamma_j^i. \tag{5}$$

Au premier ordre on obtient

$${}^{(1)}\Gamma_{00}^0 = \Phi', \tag{6}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{0j}^0 = D_j\Phi, \tag{7}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{00}^i = D^i\Phi, \tag{8}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{jk}^0 = 2\mathcal{H}E_{jk} + E'_{jk} - (2\mathcal{H}\Phi + \Psi' + 2\mathcal{H}\Psi)\gamma_{jk}, \tag{9}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{0j}^i = E'^i_j - \Psi'\gamma_j^i, \tag{10}$$

$${}^{(1)}\Gamma_{jk}^i = 2D_{(k}[E_{j)}^i - \Psi\gamma_{j)}^i] - D^i(E_{jk} - \Psi\gamma_{jk}), \tag{11}$$

où on a utilisé la notation de symétrisation $A_{(ij)} \equiv (A_{ij} + A_{ji})/2$. Au second ordre on obtient

$${}^{(2)}\Gamma_{00}^0 = \Phi^{(2)'} - 4\Phi\Phi', \quad (12)$$

$${}^{(2)}\Gamma_{0j}^0 = D_j\Phi^{(2)} - 4\Phi D_j\Phi, \quad (13)$$

$${}^{(2)}\Gamma_{00}^i = D^i\Phi^{(2)} - 4E^{ij}D_j\Phi + 4\Psi D^i\Phi, \quad (14)$$

$${}^{(2)}\Gamma_{jk}^0 = \left[-2\mathcal{H}\Psi^{(2)} - \Psi^{(2)'} + 4\Phi\Psi' - 2\mathcal{H}\Phi^{(2)} + 8\mathcal{H}\Phi(\Phi + \Psi) \right] \gamma_{jk} \\ + 2\mathcal{H}\tilde{E}_{jk}^{(2)} - 8\mathcal{H}\Phi E_{jk} + \tilde{E}_{jk}^{(2)'} - 4\Phi E'_{jk}, \quad (15)$$

$${}^{(2)}\Gamma_{0j}^i = \tilde{E}_j^{i'(2)} + 4\Psi' E_j^i - \Psi^{(2)'} \gamma_j^i - 4\Psi\Psi' \gamma_j^i - 4E^{ik} E'_{kj} + 4\Psi E_j^{i'}, \quad (16)$$

$${}^{(2)}\Gamma_{jk}^i = 2D_{(k}[\tilde{E}_{j)}^i - \Psi^{(2)}\gamma_{j)}^i] - D^i(\tilde{E}_{jk}^{(2)} - \Psi^{(2)}\gamma_{jk}) \\ + 4(E^{il} - \Psi\gamma^{il}) \{D_l(E_{jk} - \Psi\gamma_{jk}) - D_k(E_{lj} - \Psi\gamma_{lj}) - D_j(E_{kl} - \Psi\gamma_{kl})\}. \quad (17)$$

B.2 Connections affines

Si l'on utilise une base de tétrades orthonormées, alors la dérivée covariante est caractérisée par les connections affines [Wald 84] définies par

$$\omega_{abc} \equiv \eta_{bd} e_\nu^d e_a^\mu \nabla_\mu e_c^\nu = -\omega_{acb}. \quad (18)$$

Elles sont reliées au symboles de Christoffel selon

$$\omega_{adc}\eta^{db} = \Gamma_{\mu\sigma}^\nu e_a^\sigma e_c^\mu e^b_\nu + e_a^\sigma e^b_\nu \partial_\sigma e_c^\nu. \quad (19)$$

Dans toute cette section, on se place dans le cas plat avec les tétrades naturellement associées au système de coordonnées cartésien. On effectue un développement perturbatif des connections en développant les symboles de Christoffel ainsi que les tétrades. Tout d'abord, la propriété d'antisymétrie implique $\omega_{000} = \omega_{i00} = 0$ et ce pour tout ordre. Pour la métrique de fond, les seules composantes non nulles sont

$$\bar{\omega}_{i0j} = -\bar{\omega}_{ij0} = -\frac{\mathcal{H}}{a}\delta_{ij}. \quad (20)$$

On vérifie bien qu'à cet ordre les vecteurs de tétrade commutent puisque

$$0 = \bar{\omega}_{abc} - \bar{\omega}_{cba} = \eta_{ab} \bar{e}^d_\nu [\bar{e}_a, \bar{e}_c]^\nu. \quad (21)$$

Au premier ordre on obtient toujours dans la jauge Newtonienne en négligeant les termes vectoriels

$$\omega_{00i}^{(1)} = -\omega_{0i0}^{(1)} = -\frac{1}{a}\partial_i\Phi \\ \omega_{i0j}^{(1)} = -\omega_{ij0}^{(1)} = \frac{1}{a}[-E'_{ij} + (\mathcal{H}\Phi + \Psi')\delta_{ij}] \\ \omega_{jik}^{(1)} = -\omega_{jki}^{(1)} = \frac{2}{a}(\partial_{[k}E_{i]j} - \partial_{[k}\Psi\delta_{i]j}) \\ \omega_{0ij}^{(1)} = 0. \quad (22)$$

Au second ordre, on obtient pour les composantes utilisées

$$\begin{aligned}\omega_{00i}^{(2)} &= -\omega_{0i0}^{(2)} = \frac{1}{a} \left[-\partial_i \Phi^{(2)} + 4\Phi \partial_i \Phi + 2E_{ik} \partial^k \Phi - 2\Psi \partial_i \Phi \right] \\ \omega_{i0j}^{(2)} &= -\omega_{ij0}^{(2)} = \frac{1}{a} \left\{ -\tilde{E}_{ij}^{(2)'} + (\mathcal{H}\Phi^{(2)} + \Psi^{(2)'})\delta_{ij} - 3\mathcal{H}\Phi^2 \delta_{ij} + 2(E'_{ij} - \Psi' \delta_{ij})\Phi \right. \\ &\quad \left. + 2[E'_{ik} - \Psi' \delta_{ik}][E_j^k - \Psi \delta_j^k] + 2[E'_{jk} - \Psi' \delta_{jk}][E_i^k - \Psi \delta_i^k] \right\}.\end{aligned}\quad (23)$$

On peut voir que les tétrades ne commutent plus sur l'espace perturbé car $\omega_{abc}^{(2)} \neq \omega_{cba}^{(2)}$.

B.3 Tenseur d'Einstein

Au niveau de l'espace de fond les composantes non nulles du tenseur d'Einstein sont

$$-a^2 G_0^{0(0)} = +3\mathcal{H}^2 + 3K, \quad (24)$$

$$a^2 G_j^{i(0)} = -\gamma_j^i (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + K). \quad (25)$$

Au premier ordre on obtient

$$-a^2 G_0^{0(1)} = 2\Delta\Psi - 6\mathcal{H}\Psi' - 6\mathcal{H}^2\Phi + 6K\Psi, \quad (26)$$

$$G_{0i}^{(1)} = 2\mathcal{H}D_i\Phi + 2D_i\Psi', \quad (27)$$

$$-a^2 G_i^{0(1)} = 2\mathcal{H}D_i\Phi + 2D_i\Psi', \quad (28)$$

$$a^2 G_j^{i(1)} = \frac{1}{3}\gamma_j^i a^2 \tilde{G}^{(1)} + \Delta_j^i (-\Phi + \Psi) + (2K - \Delta) E_j^i + 2\mathcal{H}E_j^{i'} + E_j^{i''}, \quad (29)$$

où

$$\Delta_j^i \equiv D^i D_j - \frac{1}{3}\gamma_j^i \Delta, \quad \Delta \equiv D_k D^k, \quad (30)$$

et où $\tilde{G} \equiv G_i^i$ est la trace de la partie spatiale du tenseur d'Einstein donnée par

$$\tilde{G}^{(1)} = 6\Psi''^{(1)} + (6\mathcal{H}^2 + 12\mathcal{H}')\Phi^{(1)} + 2\Delta(\Phi^{(1)} - \Psi^{(1)}) + 6\mathcal{H}\Phi^{(1)} + 12\mathcal{H}\Psi'^{(1)} - 6K\Psi^{(1)}. \quad (31)$$

Au second ordre on obtient tout d'abord

$$-a^2 G_0^{0(2)} = 2\Delta\Psi^{(2)} - 6\mathcal{H}^2\Phi^{(2)} - 6\mathcal{H}\Psi'^{(2)} + 6K\Psi^{(2)} - a^2 G_{0SS}^{0(2)} - a^2 G_{0ST}^{0(2)} - a^2 G_{0TT}^{0(2)}, \quad (32)$$

où les indices T et S se réfèrent au type de variables de perturbations du premier ordre (respectivement scalaires et tenseurs) entrant dans les termes quadratiques.

$$-a^2 G_{0SS}^{0(2)} = 6D_i\Psi D^i\Psi + 16\Psi\Delta\Psi + 24\mathcal{H}^2\Phi^2 + 24\mathcal{H}(\Phi - \Psi)\Psi' + 6\Psi'^2 + 24K\Psi^2 \quad (33)$$

$$\begin{aligned}-a^2 G_{0TT}^{0(2)} &= 3D_i E_{jk} D^i E^{jk} - 2D_i E_{jk} D^j E^{ik} + 4E_{ij} \Delta E^{ij} \\ &\quad - 8\mathcal{H}E_{ij} E^{ij'} - E_{ij}' E^{ij'} - 4KE^{ij} E_{ij}\end{aligned}\quad (34)$$

$$-a^2 G_{0ST}^{0(2)} = -4E^{ij} D_i D_j \Psi. \quad (35)$$

Ensuite on obtient

$$G_{0i}^{(2)} = 2\mathcal{H}D_i\Phi^{(2)} + 2D_i\Psi^{(2)'} + \left(K + \frac{1}{2}\Delta\right) E_i^{(2)'} + G_{0iSS}^{(2)} + G_{0iST}^{(2)} + G_{0iTT}^{(2)}, \quad (36)$$

$$-a^2 G_i^{0(2)} = 2\mathcal{H}D_i\Phi^{(2)} + 2D_i\Psi^{(2)'} + \left(K + \frac{1}{2}\Delta\right) E_i^{(2)'} - a^2 G_{iSS}^{0(2)} - a^2 G_{iST}^{0(2)} - a^2 G_{iTT}^{0(2)} \quad (37)$$

avec

$$G_{0iSS}^{(2)} = -8\mathcal{H}\Phi D_i\Phi + 8D_i(\Psi\Psi') - 4\Psi' D_i\Phi, \quad (38)$$

$$G_{0iST}^{(2)} = -2E_i'^j D_j(\Phi + \Psi) + 4E_i^j D_j\Psi', \quad (39)$$

$$G_{0iTT}^{(2)} = 2E^{kl'} D_i E_{kl} + 4E^{kl} D_i E'_{kl} - 4E^{kl} D_l E'_{ik}, \quad (40)$$

et

$$-a^2 G_{iSS}^{0(2)} = -16\mathcal{H}\Phi D_i\Phi + 8D_i(\Psi\Psi') - 4\Psi' D_i\Phi - 8\Phi D_i\Psi', \quad (41)$$

$$-a^2 G_{iST}^{0(2)} = -2E_i'^j D_j(\Phi + \Psi) + 4E_i^j D_j\Psi', \quad (42)$$

$$-a^2 G_{iTT}^{0(2)} = 2E^{kl'} D_i E_{kl} + 4E^{kl} D_i E'_{kl} - 4E^{kl} D_l E'_{ik}. \quad (43)$$

Quant à $G_j^{i(2)}$, on le décompose en une trace et une partie sans trace selon

$$G_j^{i(2)} = \frac{1}{3}\gamma_j^i \tilde{G}^{(2)} + (G_{\text{tf}})^{i(2)}_j. \quad (44)$$

On décompose ensuite ces termes selon

$$\begin{aligned} a^2 (G_{\text{tf}})^{i(2)}_j &= \gamma^{ik} D_{(k} \left[E_j^{(2)''} + 2\mathcal{H}E_j^{(2)'} \right] + (2K - \Delta) E_j^{i(2)} + 2\mathcal{H}E_j^{i(2)'} + E_j^{i(2)''} \\ &\quad + \left[\Delta^i_j (-\Phi^{(2)} + \Psi^{(2)}) \right] + a^2 \left[(G_{\text{tf}})^{i(2)}_{jSS} + (G_{\text{tf}})^{i(2)}_{jST} + (G_{\text{tf}})^{i(2)}_{jTT} \right], \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} a^2 \tilde{G}^{(2)} &= 6\Psi''^{(2)} + 6\mathcal{H}^2\Phi^{(2)} + 2\Delta \left(\Phi^{(2)} - \Psi^{(2)} \right) + 6\mathcal{H}\Phi^{(2)} + 12\mathcal{H}\Psi'^{(2)} + 12\mathcal{H}'\Phi^{(2)} - 6K\Psi^{(2)} \\ &\quad + a^2 \left[\tilde{G}_{SS}^{(2)} + \tilde{G}_{ST}^{(2)} + \tilde{G}_{TT}^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Les termes de couplage sont donnés par

$$a^2 (G_{\text{tf}})_{jSS}^{i(2)} = \frac{1}{3} \gamma_j^i \left[-2D^k \Phi D_k (\Phi - \Psi) - 2D^k \Psi D_k (3\Psi - \Phi) - 8\Psi \Delta \Psi - 4(\Phi - \Psi) \Delta \Phi \right] \\ + 2D^i \Phi D_j (\Phi - \Psi) + 2D^i \Psi D_j (3\Psi - \Phi) + 8\Psi D^i D_j \Psi + 4(\Phi - \Psi) D^i D_j \Phi, \quad (47)$$

$$a^2 (G_{\text{tf}})_{jST}^{i(2)} = \frac{1}{3} \gamma_j^i \left[-4E_{kl} D^k D^l \Psi - 4E_{kl} D^k D^l \Phi \right] + 4E_{kj} D^k D^i \Psi + 4E_k^i D_j D^k \Phi \\ - 2D_k (\Phi + 3\Psi) D^k E_j^i - 4\Delta \Psi E_j^i - 8\Psi \Delta E_j^i + 8\mathcal{H} \Psi' E_j^i + 4\partial^{(i} E_{j)k} D^k (\Psi + \Phi) \\ + 4\Psi'' E_j^i - 16K \Psi E_j^i + 4 \left(E_j^{i''} + 2\mathcal{H} E_j^{i'} \right) (\Psi - \Phi) + 2E_j^{i'} (\Psi' - \Phi'), \quad (48)$$

$$a^2 (G_{\text{tf}})_{jTT}^{i(2)} = \frac{1}{3} \gamma_j^i \left[-6D_k E_{lm} D^k E^{lm} - 8E_{kl} \Delta E^{kl} + 8\mathcal{H} E_{kl}' E^{kl} \right. \\ \left. + 4E_{kl}' E^{kl'} + 4D_i E_{kj} D^j E^{ki} + 4E_{ij} E^{ij''} + 8K E^{lk} E_{kl} \right] \\ + 2D^i E_{kl} D_j E^{kl} - 4E^{kl} (D_l D^i E_{jk} + D_l D_j E_k^i) + 4D_k E_l^i D^k E_j^l - 4D_k E_l^i D^l E_{jk} \\ + 4E^{kl} D^i D_j E_{kl} + 4E^{kl} D_k D_l E_j^i + 4E_k^i \Delta E_j^k - 8\mathcal{H} E_k^i E_j^{k'} \\ - 4E_k^i E_j^{k'} - 4E_k^i E_j^{k''} - 8K E^{ik} E_{kj}, \quad (49)$$

$$\tilde{G}_{SS}^{(2)} = -4D_k \Phi D^k \Phi - 6D_k \Psi D^k \Psi - 4D^k \Psi D_k \Phi + 8(\Psi - \Phi) \Delta \Phi - 16\Psi \Delta \Psi - 24\mathcal{H}^2 \Phi^2 \\ - 48\mathcal{H} \Phi \Psi' + 48\mathcal{H} (\Psi - \Phi) \Psi' + 6(\Psi')^2 - 12\Phi' \Psi' - 48\mathcal{H}' \Phi^2 + 24\Psi'' (\Psi - \Phi) - 8K \Psi^2, \quad (50)$$

$$\tilde{G}_{TT}^{(2)} = +16\mathcal{H} E_{ij} E^{ij'} + 5E_{ij}' E^{ij'} + 8E_{ij} E^{ij''} - 4E_{ij} \Delta E^{ij} \\ - 3D_i E_{jk} D^i E^{jk} + 2D_i E_{jk} D^j E^{ik} - 8K E^{ij} E_{ij}, \quad (51)$$

$$\tilde{G}_{ST}^{(2)} = E^{ij} D_i D_j (-8\Phi + 4\Psi). \quad (52)$$

C Perturbations de la matière

C.1 Vitesse

La vitesse de fond est donnée par

$$w^{\mu(0)} = \frac{1}{a} \delta_0^\mu, \quad (53)$$

$$u_\mu^{(0)} = -a \delta_\mu^0. \quad (54)$$

La perturbation de vitesse v^μ est définie dans les relations (2.12). Elle ne possède que trois degrés de liberté et nous choisissons les composantes spatiales. Au premier ordre on a par définition

$$u^{i(1)} \equiv \frac{1}{a} v^i, \quad (55)$$

$$u_i^{(1)} = a v_i. \quad (56)$$

La composante temporelle est alors reliée aux autres variables de perturbation par

$$u_0^{(1)} = -a \Phi, \quad (57)$$

$$u^{0(1)} = -\frac{1}{a} \Phi. \quad (58)$$

Au second ordre on obtient

$$u^{i(2)} \equiv \frac{1}{a} v^{i(2)}, \quad (59)$$

$$u_i^{(2)} = a \left(v_i^{(2)} + 4E_{ij}v^j - 4\Psi v_i \right), \quad (60)$$

et la composante temporelle vérifie

$$\begin{aligned} u^{0(2)} &= \frac{1}{a} \left(-\Phi^{(2)} + 3\Phi^2 + v_i v^i \right), \\ u_0^{(2)} &= a \left(-\Phi^{(2)} + \Phi^2 - v_i v^i \right). \end{aligned} \quad (61)$$

C.2 Tenseur énergie-impulsion

Au niveau de l'espace de fond les seules composantes non nulles du tenseur énergie impulsion sont

$$T_{00}^{(0)} = a^2 \bar{\rho}, \quad (62)$$

$$T_{ij}^{(0)} = a^2 \bar{P} \gamma_{ij}, \quad (63)$$

$$T_0^{0(0)} = -\bar{\rho}, \quad (64)$$

$$T_j^{i(0)} = \bar{P} \gamma_j^i. \quad (65)$$

Au premier ordre on obtient

$$T_{00}^{(1)} = a^2 (2\bar{\rho}\Phi + \delta\rho), \quad (66)$$

$$T_{0i}^{(1)} = -a^2 (\bar{\rho} + \bar{P}) v_i, \quad (67)$$

$$T_{ij}^{(1)} = a^2 (2\bar{P}(E_{ij} - \Psi\gamma_{ij}) + \delta P \gamma_{ij}). \quad (68)$$

$$T_0^{0(1)} = -\delta\rho, \quad (69)$$

$$T_i^{0(1)} = (\bar{\rho} + \bar{P}) v_i, \quad (70)$$

$$T_j^{i(1)} = \delta P \gamma_j^i. \quad (71)$$

Au second ordre on obtient

$$T_{00}^{(2)} = a^2 \left(\delta^{(2)}\rho + 2\bar{\rho}\Phi^{(2)} + 4\Phi\delta\rho + 2(\bar{\rho} + \bar{P})v_i v^i \right), \quad (72)$$

$$T_{0i}^{(2)} = a^2 \left[-(\bar{\rho} + \bar{P})v_i^{(2)} - 2(\delta P + \delta\rho)v_i - 2(\bar{\rho} + \bar{P})(\Phi v_i + 2E_{ij}v^j - 2\Psi v_i) \right], \quad (73)$$

$$T_{ij}^{(2)} = a^2 \left[\delta^{(2)}P \gamma_{ij} + 2\bar{P}(\tilde{E}_{ij}^{(2)} - \Psi^{(2)}\gamma_{ij}) + 4\delta P(E_{ij} - \Psi\gamma_{ij}) + 2(\bar{\rho} + \bar{P})v_i v_j \right], \quad (74)$$

$$T_0^{0(2)} = -\delta^{(2)}\rho - 2(\bar{\rho} + \bar{P})v_i v^i,$$

$$T_i^{0(2)} = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i^{(2)} + 2(\delta P + \delta\rho)v_i + 2(\bar{\rho} + \bar{P})(-\Phi v_i + 2E_{ij}v^j - 2\Psi v_i)$$

$$T_j^{i(2)} = \delta^{(2)}P \gamma_j^i + 2(\bar{\rho} + \bar{P})v^i v_j. \quad (75)$$

D Équations au second ordre dans le cas plat

D.1 Équations de conservation

Nous considérons ici le cas général d'un fluide parfait mais n'ayant pas nécessairement un paramètre d'état constant, c'est à dire tel que $c_s^2 \neq w$. Pour les modes scalaires l'équation de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ conduit à l'équation

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta + (1 + w)(\Delta v - 3\Psi') = S_c \quad (76)$$

et l'équation d'Euler

$$v'_i + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)v_i + \partial_i\Phi + \frac{c_s^2}{1 + w}\partial_i\delta = S_{e,i}. \quad (77)$$

Les termes de source sont donnés par

$$\begin{aligned} S_c &= (1 + w) \left[12\Psi\Psi' - 2\Phi\Delta v - 2\mathcal{H}v_i v^i (1 - 3c_s^2) - 4v'_i v^i - 4v_i \partial^i \Phi + 6v_i \partial^i \Psi + 4E_{ij} E^{ij} \right] \\ &\quad + (1 + c_s^2) \left[6\delta\Psi' - 2\partial_i(\delta v^i) \right] - 3(c_s^2)' \frac{\bar{\rho}\mathcal{H}}{\bar{\rho}'} \delta^2, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} S_{e,i} &= -2 \frac{1 + c_s^2}{1 + w} (\delta v_i)' - 2\mathcal{H}(1 - 3w) \frac{1 + c_s^2}{1 + w} \delta v_i - 2 \frac{(c_s^2)'}{1 + w} \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} \delta \partial_i \delta + \delta v_i \right) \\ &\quad + 2\mathcal{H}(1 - 3c_s^2)(\Phi + 2\Psi)v_i + 10\Psi'v_i + 4\Psi v'_i - 2\partial_j(v^j v_i) + 2\Phi v'_i \\ &\quad - 2 \frac{1 + c_s^2}{1 + w} \delta \partial_i \Phi + 4\Phi \partial_i \Phi + 4(E_{ij} v^j)' + 4\mathcal{H}E_{ij} v^j (1 - 3c_s^2). \end{aligned} \quad (79)$$

D.2 Équations d'Einstein dans le cas d'un fluide parfait avec $c_s^2 \neq w$

Dans le cas d'un fluide parfait ayant un paramètre d'état variable, ou un mélange de fluide adiabatique se comportant comme tel, les équations d'Einstein impliquent

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi - \kappa a^2 \frac{1}{2} \bar{\rho} \delta = S_1, \quad (80)$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}'\Phi - \frac{1}{2}c_s^2 a^2 \kappa \bar{\rho} \delta = S_2, \quad (81)$$

$$\Delta\Delta(\Psi - \Phi) = \Delta\Delta S_3. \quad (82)$$

$$(83)$$

Les termes de source dans lesquels on néglige les ondes gravitationnelles sont donnés par

$$S_1 = -8\Psi\Delta\Psi - 3\partial_i\Psi\partial^i\Psi - 3\Psi'^2 + 3\mathcal{H}^2(1 + w)\partial_i v\partial^i v - 12\mathcal{H}^2\Psi^2, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{-\kappa(c_s^2)'}{2(1 + w)}(\mathcal{H}\delta^2) + 4(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi^2 + \frac{7}{3}\partial_i\Psi\partial^i\Psi + \frac{8}{3}\Psi\Delta\Psi + 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + \Psi'^2 \\ &\quad + \mathcal{H}^2(1 + w)\partial_i v\partial^i v, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= -4\Psi^2 - \Delta^{-1}(2\partial_i\Psi\partial^i\Psi + 3\mathcal{H}^2(1 + w)\partial_i v\partial^i v) \\ &\quad + 3\Delta^{-2}[\partial_i\partial_j(2\partial^i\Psi\partial^j\Psi + 3\mathcal{H}^2(1 + w)\partial^i v\partial^j v)]. \end{aligned} \quad (86)$$

E Conservation de la perturbation de courbure comobile au second ordre

On peut définir des variables invariantes de jauge associées à la perturbation de courbure Ψ . On définit soit la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie constante soit la perturbation de courbure sur des hypersurfaces comobiles avec le fluide cosmologique. Ces quantités ont été définies dans [Malik & Wands 04] mais néanmoins les lois de transformation des variables de perturbations utilisées dans la construction ne sont prises en compte que dans la limite super-Hubble comme il est montré dans l'appendice de [Pitrou 07] (voir chapitre 5). On peut montrer que ces deux types de perturbations de la courbure se réduisent à la même quantité dans la limite super-Hubble [Vernizzi 05], et jusqu'au second ordre leurs expressions sont données pour les échelles super-Hubble par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(1)} &\simeq \Psi^{(1)} + Q\delta^{(1)}\rho \\ &\simeq \Psi^{(1)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}} \left(\Psi'^{(1)} + \mathcal{H}\Phi^{(1)} \right)\end{aligned}\quad (87)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(2)} &\simeq \Psi^{(2)} + Q\delta^{(2)}\rho + (1 + 3c_s^2) (Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi \\ &\simeq \Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}} \left(\Psi'^{(2)} + \mathcal{H}\Phi^{(2)} - 4\mathcal{H}\Psi^2 - \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}} \right) + (1 + 3c_s^2) (Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi\end{aligned}\quad (88)$$

avec

$$Q \equiv \frac{\mathcal{H}\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} = -\frac{1}{3(1+w)}.\quad (89)$$

Si on ne considère pas la limite super-Hubble, ces deux quantités ne sont pas égales et ce n'est qu'en considérant correctement les lois de transformation de jauge des variables de perturbation que l'on peut construire des variables vraiment invariantes de jauge dans le cas général. Si le contenu matériel est celui d'un champ scalaire, alors la perturbation de courbure comobile correspond à la perturbation de courbure sur les surfaces où $\delta\varphi = 0$. En utilisant la décomposition de la métrique perturbée (5.2) dans le cas plat, ces expressions au premier et second ordre sont données par

$$\mathcal{R}^{(1)} \equiv \Psi^{(1)} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \delta^{(1)}\varphi,\quad (90)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(2)} &\equiv \Psi^{(2)} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \delta^{(2)}\varphi + \left[\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'} \mathcal{H} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2 \right] \left(\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} \right)^2 \\ &\quad - 2\mathcal{H} \frac{\delta\varphi\delta\varphi'}{\bar{\varphi}'^2} - 2(\Psi' + 2\mathcal{H}\Psi) \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} - 2\frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \partial_i E \partial^i (\delta\varphi + \Psi) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta^{ij} - \Delta^{-1} \partial^i \partial^j) \left\{ \partial_j \left(2B - E' + \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} \right) \partial_i \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} + \partial_i \partial^k E [2\partial_k \partial_j E + 4E_{kj} - 4\Psi \delta_{kj}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} (2E'_{ij} + 4\mathcal{H}E'_{ij} + \partial_i \partial_j E') + \partial^k E \partial_k (\partial_i \partial_j E + 2E_{ij}) \right\}.\end{aligned}\quad (91)$$

On peut également mettre la perturbation de courbure comobile au second ordre sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(2)} = & \Psi^{(2)} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \delta^{(2)}\varphi + \left[\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'} \mathcal{H} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2 \right] \left(\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} \right)^2 - 2\mathcal{H} \frac{\delta\varphi \delta\varphi'}{\bar{\varphi}'^2} \\
& - 2(\Psi' + 2\mathcal{H}\Psi) \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} - 2 \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \partial_i E \partial^i \delta\varphi \\
& + \Delta^{-1} \left\{ -\partial_i (\Delta\Psi \partial^i E + \Delta E \partial^i \Psi) + \partial^i \partial^j \left(B - E' + \frac{\delta\varphi}{2\bar{\varphi}'} \right) \partial_i \partial_j \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} \right. \\
& \quad - \Delta \left(B - E' + \frac{\delta\varphi}{2\bar{\varphi}'} \right) \Delta \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} + \frac{1}{2} \left(\partial^i \partial^j \partial^k E \partial_i \partial_j \partial_k E - \partial^k \Delta E \partial_k \Delta E \right) \\
& \quad \left. - \partial^i \partial^j \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} (E'_{ij} + 2\mathcal{H}E_{ij}) + 2E_{ij} \partial^i \partial^j E + \partial_i E_{jk} \partial^i \partial^j \partial^k E \right\}.
\end{aligned}$$

Si l'on souhaite l'expression de la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité constante, il suffit de remplacer φ par ρ dans l'expression de la perturbation de courbure comobile précédente. On la note alors souvent plutôt ζ au signe près. Dans la limite super-Hubble, en utilisant les équations d'Einstein, l'équation de conservation de fond (1.22) et l'équation d'évolution du paramètre d'état (2.15), on retrouve alors les expressions (87).

La perturbation de courbure comobile est la quantité utilisée dans [Maldacena 03] pour obtenir des prédictions dans le cas de l'inflation à un champ scalaire en roulement lent. Plus précisément ces prédictions ont été établies en jauge comobile, puisque par définition dans ce cas la perturbation de courbure comobile se réduit à Ψ et on peut donc identifier ces deux quantités. Si l'on souhaite construire l'expression générale de la perturbation de courbure comobile, il faut veiller à ne pas confondre un changement de jauge avec un changement de coordonnées standard tel qu'expliqué dans la section 5.1. La perturbation de courbure peut être utilisée pour reformuler l'équation d'évolution dans la limite super-Hubble dans le cas de perturbations adiabatiques, comme une loi de conservation

$$\begin{aligned}
\frac{-\mathcal{H}}{2Q} \mathcal{R}^{(1)'} &= 0, \\
\frac{-\mathcal{H}}{2Q} \mathcal{R}^{(2)'} &= 0.
\end{aligned} \tag{92}$$

Le préfacteur est là pour se souvenir que dans une phase de-Sitter pure, $w = -1$, $Q = 0$, et ce résultat n'est plus valide.

On montre ce résultat en décomposant la perturbation de courbure comobile selon

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(1)} &= A_1, \\
\mathcal{R}^{(2)} &= A_2 + B + C,
\end{aligned} \tag{93}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \Psi^{(1)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}(\Psi'^{(1)} + \Phi^{(1)}\mathcal{H}), \\ A_2 &= \Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}(\Psi'^{(2)} + \Phi^{(2)}\mathcal{H}), \\ B &= 2Q \left(4\Psi^2 + \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2} \right), \\ C &= (1 + 3c_s^2)(Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi. \end{aligned}$$

On utilise les relations

$$\left[\frac{2}{3\mathcal{H}(1+w)} \right]' = \left[\frac{-2Q}{\mathcal{H}} \right]' = \frac{1 - 3w + 6c_s^2}{3(1+w)}, \quad (94)$$

$$Q' = 3Q\mathcal{H}(c_s^2 - w), \quad (95)$$

$$\mathcal{H}' = -(1 + 3w)\frac{\mathcal{H}^2}{2}. \quad (96)$$

De plus en utilisant la définition de la vitesse adiabatique du son $c_s^2 \equiv \frac{dP}{d\rho}$ on obtient avec un développement de Taylor [Malik & Wands 04]

$$\delta P^{(2)} = c_s^2 \bar{\rho} \delta^{(2)} + \frac{(\bar{\rho}\delta)^2}{\bar{\rho}'} (c_s^2)'. \quad (97)$$

Le terme A_1 ne fait intervenir que des variables de perturbation du premier ordre et son évolution est donnée par

$$A_1' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}} \left[\Psi^{(1)''} + \mathcal{H}\Phi^{(1)'} + \mathcal{H}\Psi^{(1)'}(2 + 3c_s^2) + 3\Phi^{(1)}\mathcal{H}^2(c_s^2 - w) \right],$$

et on reconnaît l'équation (2.82). Quant à A_2 , son évolution est la même que A_1 mais avec les variables de perturbation du second ordre, car il n'a pas été fait usage de la contrainte $\Phi^{(1)} = \Psi^{(1)}$. On reconnaît alors le membre de gauche de l'équation (6.18). On considère maintenant la contribution de B qui est

$$\begin{aligned} B' &= \left[Q \left(8\Psi^2 + 2\frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2} \right) \right]' \\ &= 3Q\mathcal{H}(c_s^2 - w) \left(8\Psi^2 + 2\frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2} \right) + Q \left(16\Psi\Psi' + \frac{4}{\mathcal{H}^2}\Psi'\Psi'' - 4\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^3}\Psi'^2 \right), \end{aligned} \quad (98)$$

et qui peut être mise sous une forme plus simple grâce à l'équation (2.83)

$$\begin{aligned} B' &= \frac{-2Q}{\mathcal{H}} \left\{ -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2(c_s^2 - w) \left(8\Psi^2 + 2\frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{H}\Psi\Psi' [8 + 6(c_s^2 - w)] - \Psi'^2 [6(1 + c_s^2) - (1 + 3w)] \right\}. \end{aligned} \quad (99)$$

De plus le terme impliquant C évolue selon

$$C' = \Psi' \left(4\Psi + 2\delta \frac{1 + c_s^2}{1 + w} \right) + f(\mathcal{R}'^{(1)}) + 3(c_s^2)'(Q\delta)^2. \quad (100)$$

On utilise alors que pour des perturbations adiabatiques, $\mathcal{R}'^{(1)} = 0$, et on obtient

$$C' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}} \left[6\mathcal{H}\Psi\Psi'(1+w) - 6\mathcal{H}(1+c_s^2)\Psi' \left(\Psi + \frac{\Psi'}{\mathcal{H}} \right) - \frac{3}{2}\mathcal{H}Q(c_s^2)'\delta^2 \right]. \quad (101)$$

En collectant tous les termes on obtient donc

$$B' + C' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}} \left[-8\mathcal{H}\Psi\Psi' - \Psi'^2(1+3w) - \frac{3}{2}(c_s^2 - w)(8\mathcal{H}^2\Psi^2 + 2\Psi'^2) - \frac{3}{2}Q\mathcal{H}(c_s^2)'\delta^2 \right]. \quad (102)$$

On remarque qu'il s'agit exactement de l'opposé du membre de droite de l'équation (6.17) dans la limite super-Hubble

$$S_2 - c_s^2 S_1 \simeq 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + (1+3w)\Psi'^2 + \frac{3}{2}\mathcal{H}Q(c_s^2)'\delta^2 + (c_s^2 - w)(12\mathcal{H}^2\Psi^2 + 3\Psi'^2). \quad (103)$$

Finalement en réunissant ces résultats on obtient les relations (92). Il est crucial de ne pas confondre w avec c_s^2 comme il a été fait dans [Bartolo *et al.* 04b] dans la démonstration car la conservation de la courbure comobile permet justement de faire le lien entre des phases de l'univers pendant lesquelles le paramètre d'état n'est pas le même et est donc par conséquent passé par une phase variable où $w \neq c_s^2$. De plus toute cette démonstration de la loi de conservation peut être faite à partir de l'équation de conservation (76) comme il a été montré dans [Malik & Wands 04] ainsi que de manière non perturbative dans [Lyth & Wands 03, Lyth *et al.* 05, Langlois & Vernizzi 05, Enqvist *et al.* 07].

Bibliographie

- [Acquaviva *et al.* 03] V. ACQUAVIVA, N. BARTOLO, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « Second-Order Cosmological Perturbations from Inflation », *Nucl. Phys. B*, vol. **667**, 119, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209156>.
- [Albrecht *et al.* 82] A. ALBRECHT, P. J. STEINHARDT, M. S. TURNER & F. WILCZEK, « Reheating an Inflationary Universe », *Phys. Rev. Lett.*, vol. **48**, 1437, 1982.
- [Armendariz-Picon 07] C. ARMENDARIZ-PICON, « Why should primordial perturbations be in a vacuum state? », *JCAP*, vol. **0702**, 031, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0612288>.
- [Arnowitt *et al.* 62] R. ARNOWITT, S. DESER & C. W. MISNER, « The dynamics of general relativity », 1962, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0405109>.
- [Babich *et al.* 04] D. BABICH, P. CREMINELLI & M. ZALDARRIAGA, « The shape of non-Gaussianities », *JCAP*, vol. **0408**, 009, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0405356>.
- [Bardeen 80] J. M. BARDEEN, « Gauge Invariant Cosmological Perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **22**, 1882–1905, 1980.
- [Bartolo *et al.* 04a] N. BARTOLO, E. KOMATSU, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « Non-Gaussianity from Inflation : Theory and Observations », *Phys. Rep.*, vol. **402**, 103, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0406398>.
- [Bartolo *et al.* 02] N. BARTOLO, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « Non-Gaussianity from Inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **65**, 103 505, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0112261>.
- [Bartolo *et al.* 04b] N. BARTOLO, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « Enhancement of Non-Gaussianity after Inflation », *JHEP*, vol. **0404**, 006, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0308088>.
- [Bartolo *et al.* 04c] N. BARTOLO, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « Gauge-Invariant Temperature Anisotropies and Primordial Non-Gaussianity », *Phys. Rev. Lett.*, vol. **93**, 231 301, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407505>.
- [Bartolo *et al.* 06] N. BARTOLO, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « CMB Anisotropies at Second Order I », *JCAP*, vol. **0606**, 024, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0604416>.
- [Bartolo *et al.* 07] N. BARTOLO, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « CMB Anisotropies at Second-Order II : Analytical Approach », *JCAP*, vol. **0701**, 019, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0610110>.

- [Berger *et al.* 71] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, vol. 194 de *Lecture Notes in Math.*, springer-verlag édition, 1971.
- [Bernardeau *et al.* 04a] F. BERNARDEAU, T. BRUNIER & J.-P. UZAN, « High order correlation functions for self interacting scalar field in de Sitter space », *Phys. Rev. D*, vol. **69**, 063 520, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0311422>.
- [Bernardeau *et al.* 06] F. BERNARDEAU, T. BRUNIER & J.-P. UZAN, « Models of inflation with primordial non-Gaussianities », 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0604200>.
- [Bernardeau *et al.* 02] F. BERNARDEAU, S. COLOMBI, E. GAZTANAGA & R. SCOCCIMARRO, « Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory », *Phys. Rep.*, vol. **367**, 1–248, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0112551>.
- [Bernardeau *et al.* 04b] F. BERNARDEAU, L. KOFMAN & J.-P. UZAN, « Modulated fluctuations from hybrid inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **70**, 083 004, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0403315>.
- [Bernardeau & Uzan 02] F. BERNARDEAU & J.-P. UZAN, « Non-Gaussianity in multi-field inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **66**, 103 506, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0207295>.
- [Bernardeau & Uzan 03] F. BERNARDEAU & J.-P. UZAN, « Inflationary models inducing non-Gaussian metric fluctuations », *Phys. Rev. D*, vol. **67**, 121 301, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209330>.
- [Bernstein 88] J. BERNSTEIN, *Kinetic theory in the expanding universe*, cambridge university press édition, 1988.
- [Bondi 61] H. BONDI, *Cosmology*, cambridge university press édition, 1961.
- [Brizuela *et al.* 06] D. BRIZUELA, J. M. MARTIN-GARCIA & G. A. MENA MARUGAN, « Second and higher-order perturbations of a spherical spacetime », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 044 039, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0607025>.
- [Bruni *et al.* 92] M. BRUNI, G. F. R. ELLIS & P. K. S. DUNSBY, « Gauge invariant perturbations in a scalar field dominated universe », *Class. Quant. Grav.*, vol. **9**, 921–946, 1992.
- [Bruni *et al.* 97] M. BRUNI, S. MATARRESE, S. MOLLERACH & S. SONEGO, « Perturbations of spacetime : gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond », *Class. Quant. Grav.*, vol. **14**, 2585, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9609040>.
- [Brunier & Bernardeau 06] T. BRUNIER & F. BERNARDEAU, « The shape of high order correlation functions in CMB anisotropy maps », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 083 524, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0602276>.
- [Byrnes *et al.* 06] C. T. BYRNES, M. SASAKI & D. WANDS, « Primordial trispectrum from inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 123 519, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611075>.
- [Challinor 00] A. CHALLINOR, « The covariant perturbative approach to cosmic microwave background anisotropies », *General Relativity and Gravitation*, vol. **32**, 1059, 2000, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9903283>.
- [Challinor & Lasenby 99] A. CHALLINOR & A. LASENBY, « Cosmic microwave background anisotropies in the CDM model : a covariant and gauge-invariant approach », *Astrophys. J.*, vol. **513**, 1, 1999, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9804301>.
- [Chen *et al.* 06] X. CHEN, R. EASTHER & E. A. LIM, « Large Non-Gaussianities in Single Field Inflation », 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611645>.

- [Chen *et al.* 08] X. CHEN, R. EASTHER & E. A. LIM, « Generation and Characterization of Large Non-Gaussianities in Single Field Inflation », 2008, URL <http://arxiv.org/abs/0801.3295>.
- [Chen *et al.* 07] X. CHEN, M. XIN HUANG, S. KACHRU & G. SHIU, « Observational Signatures and Non-Gaussianities of General Single Field Inflation », *JCAP*, vol. **0701**, 002, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0605045>.
- [Cooray 01] A. COORAY, « Non-Gaussian Aspects of Thermal and Kinetic Sunyaev-Zel'dovich Effects », *Phys. Rev. D*, vol. **64**, 063514, 2001, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0105063>.
- [Cooray 02] A. COORAY, « Non-linear Integrated Sachs-Wolfe Effect », *Phys. Rev. D*, vol. **65**, 083518, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0109162>.
- [Cooray & Sheth 02] A. COORAY & R. SHETH, « Halo Models of Large Scale Structure », *Phys. Rep.*, vol. **372**, 1, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0206508>.
- [Cooray & Hu 00] A. R. COORAY & W. HU, « Imprint of Reionization on the Cosmic Microwave Background Bispectrum », *Astrophys. J.*, vol. **534**, 533, 2000, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9910397>.
- [Creminelli *et al.* 06] P. CREMINELLI, A. NICOLIS, L. SENATORE, M. TEGMARK & M. ZALDARRIAGA, « Limits on non-Gaussianities from WMAP data », *JCAP*, vol. **0605**, 004, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509029>.
- [Creminelli *et al.* 07a] P. CREMINELLI, L. SENATORE & M. ZALDARRIAGA, « Estimators for local non-Gaussianities », *JCAP*, vol. **0703**, 019, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0606001>.
- [Creminelli *et al.* 07b] P. CREMINELLI, L. SENATORE, M. ZALDARRIAGA & M. TEGMARK, « Limits on f_{NL} parameters from WMAP 3yr data », *JCAP*, vol. **0703**, 005, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0610600>.
- [Creminelli & Zaldarriaga 04] P. CREMINELLI & M. ZALDARRIAGA, « Single field consistency relation for the 3-point function », *JCAP*, vol. **0410**, 006, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407059>.
- [Davis & Lineweaver 03] T. M. DAVIS & C. H. LINEWEAVER, « Expanding Confusion : common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the Universe », 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310808>.
- [Deruelle *et al.* 92] N. DERUELLE, C. GUNDLACH & D. POLARSKI, « On the quantization of perturbations in inflation », *Class. Quant. Grav.*, vol. **9**, 137–148, 1992.
- [Dodelson & Jubas 95] S. DODELSON & J. M. JUBAS, « Reionization and its imprint on the cosmic microwave background », *Astrophys. J.*, vol. **439**, 503–516, 1995, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9308019>.
- [Dunsby 97] P. K. S. DUNSBY, « A fully covariant description of CMB anisotropies », *Class. Quant. Grav.*, vol. **14**, 3391, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9707022>.
- [Durrer 94] R. DURRER, « Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory », *Fund. Cosmic Phys.*, vol. **15**, 209, 1994, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9311041>.
- [Durrer 01] R. DURRER, « The theory of CMB anisotropies », *J. Phys. Stud.*, vol. **5**, 177, 2001, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0109522>.

- [Durrer & Straumann 88] R. DURRER & N. STRAUMANN, *Helv. Phys. Acta*, vol. **61**, 1027, 1988.
- [Durrer & Zhou 96] R. DURRER & Z. H. ZHOU, « Large Scale Structure Formation with Global Topological Defects. A new Formalism and its implementation by numerical simulations », *Phys. Rev. D*, vol. **53**, 5394, 1996, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9508016>.
- [Ehlers 71] J. EHLERS, *General Relativity and Kinetic theory*, New-York, USA., academic press édition, 1971.
- [Ellis 75] G. ELLIS, « Cosmology and verifiability », *Quarterly Journal of the Astronomical Society*, vol. **16**, 245, 1975.
- [Ellis & Bruni 89] G. F. R. ELLIS & M. BRUNI, « Covariant and gauge invariant approach to cosmological density fluctuations », *Phys. Rev. D*, vol. **40**, 1804–1818, 1989.
- [Ellis & MacCallum 69] G. F. R. ELLIS & M. A. H. MACCALLUM, « A Class of homogeneous cosmological models », *Commun. Math. Phys.*, vol. **12**, 108–141, 1969.
- [Ellis & van Elst 98] G. F. R. ELLIS & H. VAN ELST, « Cosmological models (Cargèse lectures 1998) », 1998, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9812046>.
- [Enqvist *et al.* 07] K. ENQVIST, J. HOGDAHL, S. NURMI & F. VERNIZZI, « Covariant generalization of cosmological perturbation theory », *Phys. Rev. D*, vol. **75**, 023 515, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0611020>.
- [Fergusson & Shellard 06] J. R. FERGUSSON & E. P. S. SHELLARD, « Primordial non-Gaussianity and the CMB bispectrum », 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0612713>.
- [Finelli *et al.* 06] F. FINELLI, G. MAROZZI, G. P. VACCA & G. VENTURI, « Second Order Gauge-Invariant Perturbations during Inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 083 522, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0604081>.
- [Gebbie *et al.* 00] T. GEBBIE, P. DUNSBY & G. ELLIS, « 1+3 Covariant Cosmic Microwave Background anisotropies II : The almost - Friedmann Lemaitre model », *Annals Phys.*, vol. **282**, 321, 2000, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9904408>.
- [Gebbie & Ellis 00] T. GEBBIE & G. F. R. ELLIS, « 1+3 Covariant Cosmic Microwave Background anisotropies I : Algebraic relations for mode and multipole representations », *Annals Phys.*, vol. **282**, 285, 2000, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9804316>.
- [Goldberg & Spergel 99] D. M. GOLDBERG & D. N. SPERGEL, « The Microwave Background Bispectrum, Paper II : A Probe of the Low Redshift Universe », *Phys. Rev. D*, vol. **59**, 103 002, 1999, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9811251>.
- [Goodman 95] J. GOODMAN, « Geocentrism reexamined », *Phys. Rev. D*, vol. **52**, 1821, 1995, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9506068>.
- [Gourgoulhon 07] E. GOURGOULHON, « 3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity », 2007, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035>.
- [Guth 81] A. H. GUTH, « The Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems », *Phys. Rev. D*, vol. **23**, 347–356, 1981.
- [Harrison 70] E. R. HARRISON, « Fluctuations at the threshold of classical cosmology », *Phys. Rev. D*, vol. **1**, 2726–2730, 1970.
- [Hawking 66] S. W. HAWKING, « Perturbations of an expanding universe », *Astrophys. J.*, vol. **145**, 544–554, 1966.

- [Hawking & Ellis 73] S. W. HAWKING & G. F. R. ELLIS, *The large scale structure of spacetime*, Cambridge, cambridge university press édition, 1973.
- [Hillery *et al.* 84] M. HILLERY, R. F. O'CONNELL, M. O. SCULLY & E. P. WIGNER, « Distribution functions in physics : Fundamentals », *Phys. Rep.*, vol. **106**, 121–167, 1984.
- [Hinshaw *et al.* 07] G. HINSHAW, M. R. NOLTA, C. L. BENNETT, R. BEAN, O. DORE, M. R. GREASON, M. HALPERN, R. S. HILL, N. JAROSIK, A. KOGUT, E. KOMATSU, M. LIMON, N. ODEGARD, S. S. MEYER, L. PAGE, H. V. PEIRIS, D. N. SPERGEL, G. S. TUCKER, L. VERDE, J. L. WEILAND, E. WOLLACK & E. L. WRIGHT, « Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Temperature Analysis », *APJS*, vol. **170**, 288, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603451>.
- [Hoekstra *et al.* 06] H. HOEKSTRA, Y. MELLIER, L. VAN WAERBEKE, E. SEMBOLONI, L. FU, M. J. HUDSON, L. C. PARKER, I. TEREÑO & K. BENABED, « First cosmic shear results from the Canada-France-Hawaii Telescope Wide Synoptic Legacy Survey », *Astrophys. J.*, vol. **647**, 116, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0511089>.
- [Hu 95] W. HU, « Wandering in the Background : A CMB Explorer », 1995, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9508126>.
- [Hu 00] W. HU, « Weak lensing of the CMB : A harmonic approach », *Phys. Rev. D*, vol. **62**, 043007, 2000.
- [Hu & Sugiyama 95a] W. HU & N. SUGIYAMA, « Anisotropies in the Cosmic Microwave Background : An Analytic Approach », *Astrophys. J.*, vol. **444**, 489–506, 1995, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9407093>.
- [Hu & Sugiyama 95b] W. HU & N. SUGIYAMA, « Toward Understanding CMB Anisotropies and Their Implications », *Phys. Rev. D*, vol. **51**, 2599, 1995, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9411008>.
- [Hu & White 97a] W. HU & M. WHITE, « CMB Anisotropies : Total Angular Momentum Method », *Phys. Rev. D*, vol. **56**, 596, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9702170>.
- [Hu & White 97b] W. HU & M. WHITE, « A CMB Polarization Primer », *New Astron.*, vol. **2**, 323, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9706147>.
- [Itzykson & Zuber 80] C. ITZYKSON & J. B. ZUBER, *Quantum Field Theory*, New York, USA, mcgraw-hill, international series in pure and applied physics édition, 1980.
- [Kodama & Sasaki 84] H. KODAMA & M. SASAKI, « Cosmological Perturbation Theory », *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. **78**, 1–166, 1984.
- [Kofman 03] L. KOFMAN, « Probing String Theory with Modulated Cosmological Fluctuations », 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0303614>.
- [Komatsu 02] E. KOMATSU, *The Pursuit of Non-Gaussian Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, Thèse de doctorat, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0206039>.
- [Komatsu *et al.* 03] E. KOMATSU, A. KOGUT, M. NOLTA, C. L. BENNETT, M. HALPERN, G. HINSHAW, N. JAROSIK, M. LIMON, S. S. MEYER, L. PAGE, D. N. SPERGEL, G. S. TUCKER, L. VERDE, E. WOLLACK & E. L. WRIGHT, « First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Tests of Gaussianity », *Astrophys. J.*, vol. **148**, 119, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302223>.

- [Komatsu & Spergel 00] E. KOMATSU & D. N. SPERGEL, « The cosmic microwave background bispectrum as a test of the physics of inflation and probe of the astrophysics of the low-redshift universe », 2000, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0012197>.
- [Komatsu & Spergel 01] E. KOMATSU & D. N. SPERGEL, « Acoustic Signatures in the Primary Microwave Background Bispectrum », *Phys. Rev. D*, vol. **63**, 063002, 2001, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0005036>.
- [Komatsu *et al.* 05] E. KOMATSU, D. N. SPERGEL & B. D. WANDEL, « Measuring primordial non-Gaussianity in the cosmic microwave background », *Astrophys. J.*, vol. **634**, 14, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0305189>.
- [Langlois & Vernizzi 05] D. LANGLOIS & F. VERNIZZI, « Conserved non-linear quantities in cosmology », *Phys. Rev. D*, vol. **72**, 103501, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509078>.
- [Larena 07] J. LARENA, *Champs scalaires en cosmologie : Discussion sur les principes d'équivalence et cosmologique.*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, Denis Diderot, 2007.
- [Lehoucq *et al.* 03] R. LEHOUCQ, J.-P. UZAN & J. WEEKS, « Eigenmodes of Lens and Prism Spaces », *Kodai Mathematical Journal*, vol. **26**, 119, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/math/0202072>.
- [Lewis & Challinor] A. LEWIS & A. CHALLINOR, « CAMB », URL <http://camb.info>.
- [Lidsey *et al.* 97] J. E. LIDSEY, A. R. LIDDLE, E. W. KOLB, E. J. COPELAND, T. BARREIRO & M. ABNEY, « Reconstructing the Inflaton Potential — an Overview », *Rev. Mod. Phys.*, vol. **69**, 373, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9508078>.
- [Liguori *et al.* 06] M. LIGUORI, F. K. HANSEN, E. KOMATSU, S. MATARRESE & A. RIOTTO, « Testing Primordial Non-Gaussianity in CMB Anisotropies », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 043505, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509098>.
- [Linde 08] A. LINDE, « Inflationary Cosmology », *Lect. Notes Phys.*, vol. **738**, 1–54, 2008, URL <http://arxiv.org/abs/0705.0164>.
- [Linde & Mukhanov 97] A. LINDE & V. MUKHANOV, « Nongaussian Isocurvature Perturbations from Inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **56**, 535, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9610219>.
- [Linde 82] A. D. LINDE, « A New Inflationary Universe Scenario : A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems », *Phys. Lett.*, vol. **B108**, 389–393, 1982.
- [Linde 83] A. D. LINDE, « Chaotic Inflation », *Phys. Lett.*, vol. **B129**, 177–181, 1983.
- [Luminet *et al.* 03] J. P. LUMINET, J. WEEKS, A. RIAZUELO, R. LEHOUCQ & J. P. UZAN, « Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background », *Nature*, vol. **425**, 593, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310253>.
- [Lyth *et al.* 05] D. H. LYTH, K. A. MALIK & M. SASAKI, « A general proof of the conservation of the curvature perturbation », *JCAP*, vol. **0505**, 004, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411220>.

- [Lyth & Wands 03] D. H. LYTH & D. WANDS, « Conserved cosmological perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **68**, 103 515, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0306498>.
- [Ma & Bertschinger 95] C.-P. MA & E. BERTSCHINGER, « Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges », *Astrophys. J.*, vol. **455**, 7, 1995, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9506072>.
- [Maartens *et al.* 99] R. MAARTENS, T. GEBBIE & G. ELLIS, « Cosmic microwave background anisotropies : Nonlinear dynamics », *Phys. Rev. D*, vol. **59**, 083 506, 1999, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9808163>.
- [Maldacena 03] J. MALDACENA, « Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models », *JHEP*, vol. **0305**, 013, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0210603>.
- [Malik 05] K. A. MALIK, « Gauge-invariant perturbations at second order : multiple scalar fields on large scales », *JCAP*, vol. **0511**, 005, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506532>.
- [Malik & Wands 04] K. A. MALIK & D. WANDS, « Evolution of second-order cosmological perturbations », *Class. Quant. Grav.*, vol. **21**, L65, 2004, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0307055>.
- [Malquarti *et al.* 03] M. MALQUARTI, E. J. COPELAND, A. R. LIDDLE & M. TRODDEN, « A new view of k-essence », *Phys. Rev. D*, vol. **67**, 123 503, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302279>.
- [Martin 07] J. MARTIN, « Inflationary Perturbations : the Cosmological Schwinger Effect », 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0704.3540>.
- [Martin-García 04] J. MARTIN-GARCÍA, « xPerm and xAct », 2004, URL <http://metric.iem.csic.es/Martin-Garcia/xAct/index.html>.
- [Matarrese *et al.* 98a] S. MATARRESE, S. MOLLERACH & M. BRUNI, « Relativistic second-order perturbations of the Einstein-de Sitter Universe », *Phys. Rev. D*, vol. **58**, 043 504, 1998, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9707278>.
- [Matarrese *et al.* 98b] S. MATARRESE, S. MOLLERACH & M. BRUNI, « Relativistic second-order perturbations of the Einstein-de Sitter Universe », *Phys. Rev. D*, vol. **58**, 043 504, 1998, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9707278>.
- [Mészáros 74] P. MÉSZÁROS, « The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum », *Astron. Astrophys.*, vol. **37**, 225–228, 1974.
- [Misner *et al.* 73] C. W. MISNER, K. S. THORNE & J. A. WHEELER, *Gravitation*, San Francisco, USA, freeman édition, 1973.
- [Mollerach & Matarrese 97] S. MOLLERACH & S. MATARRESE, « Cosmic Microwave Background anisotropies from second order gravitational perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **56**, 4494, 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9702234>.
- [Mukhanov *et al.* 92] V. MUKHANOV, H. FELDMAN & R. BRANDENBERGER, « Theory of cosmological perturbations », *Phys. Rep.*, vol. **215**, 203–333, 1992.
- [Mukhanov 85] V. F. MUKHANOV, « Gravitational Instability of the Universe Filled with a Scalar Field », *JETP Lett.*, vol. **41**, 493–496, 1985.

- [Mukhanov & Chibisov 81] V. F. MUKHANOV & G. V. CHIBISOV, « Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe. (In Russian) », *JETP Lett.*, vol. **33**, 532–535, 1981.
- [Nakahara 90] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics*, Bristol, New-York, adam hilger édition, 1990.
- [Nakamura 07] K. NAKAMURA, « Second-order Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory : – Einstein equations in terms of gauge invariant variables – », *Prog. Theor. Phys.*, vol. **117**, 17, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0605108>.
- [Osano *et al.* 07] B. OSANO, C. PITROU, P. DUNSBY, J.-P. UZAN & C. CLARKSON, « Gravitational waves generated by second order effects during inflation », *JCAP*, vol. **0407**, 003, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0612108>.
- [Peebles & Yu 70] P. J. E. PEEBLES & J. T. YU, « Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe », *Astrophys. J.*, vol. **162**, 815–836, 1970.
- [Penzias & Wilson 65] A. A. PENZIAS & R. W. WILSON, « A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s », *Astrophys. J.*, vol. **142**, 419–421, 1965.
- [Pereira *et al.* 07] T. S. PEREIRA, C. PITROU & J.-P. UZAN, « Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe », *JCAP*, vol. **0709**, 006, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0707.0736>.
- [Peskin & Schroeder 95] M. E. PESKIN & D. V. SCHROEDER, *An Introduction to quantum field theory*, Reading, USA, addison-wesley édition, 1995.
- [Peter & Uzan 05] P. PETER & J.-P. UZAN, *Cosmologie primordiale*, Paris, France, belin édition, 2005.
- [Pitrou 07] C. PITROU, « Gauge invariant Boltzmann equation and the fluid limit », *Class. Quant. Grav.*, vol. **24**, 6127, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0701121>.
- [Pitrou & Uzan 07] C. PITROU & J.-P. UZAN, « Quantization of perturbations during inflation in the 1+3 covariant formalism », *Phys. Rev. D*, vol. **75**, 087302, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0701121>.
- [Pullen & Kamionkowski 07] A. R. PULLEN & M. KAMIONKOWSKI, « Cosmic Microwave Background Statistics for a Direction-Dependent Primordial Power Spectrum », *Phys. Rev. D*, vol. **76**, 103529, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0709.1144>.
- [Pyne & Carroll 96] T. PYNE & S. M. CARROLL, « Higher-Order Gravitational Perturbations of the Cosmic Microwave Background », *Phys. Rev. D*, vol. **53**, 2920, 1996, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9510041>.
- [Riazuelo 00] A. RIAZUELO, *Signature de divers modèles d'univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile*, Thèse de doctorat, Université Paris Sud, 2000.
- [Rigopoulos & Shellard 03] G. I. RIGOPOULOS & E. P. S. SHELLARD, « The Separate Universe Approach and the Evolution of Nonlinear Superhorizon Cosmological Perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **68**, 123518, 2003, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0306620>.
- [Rigopoulos & Shellard 05] G. I. RIGOPOULOS & E. P. S. SHELLARD, « Non-linear inflationary perturbations », *JCAP*, vol. **0510**, 006, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0405185>.

- [Rigopoulos *et al.* 05] G. I. RIGOPOULOS, E. P. S. SHELLARD & B. J. W. VAN TENT, « Simple route to non-Gaussianity in inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **72**, 083 507, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0410486>.
- [Rigopoulos *et al.* 06a] G. I. RIGOPOULOS, E. P. S. SHELLARD & B. J. W. VAN TENT, « Large non-Gaussianity in multiple-field inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 083 522, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506704>.
- [Rigopoulos *et al.* 06b] G. I. RIGOPOULOS, E. P. S. SHELLARD & B. J. W. VAN TENT, « Non-linear perturbations in multiple-field inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 083 521, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0504508>.
- [Rindler 02] W. RINDLER, « Visual horizons in world-models », *Gen. Rel. Grav.*, vol. **34**, 133–153, 2002.
- [Riotto & Sloth 08] A. RIOTTO & M. S. SLOTH, « On Resumming Inflationary Perturbations beyond One-loop », 2008, URL <http://arxiv.org/abs/0801.1845>.
- [Sachs & Wolfe 67] R. K. SACHS & A. M. WOLFE, « Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background », *Astrophys. J.*, vol. **147**, 73–90, 1967.
- [Salopek & Bond 90] D. S. SALOPEK & J. R. BOND, « Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models », *Phys. Rev. D*, vol. **42**, 3936–3962, 1990.
- [Sasaki 86] M. SASAKI, « Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe », *Prog. Theor. Phys.*, vol. **76**, 1036, 1986.
- [Sasaki *et al.* 06] M. SASAKI, J. VALIVIITA & D. WANDS, « Non-Gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 103 003, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0607627>.
- [Seery 07] D. SEERY, « One-loop corrections to a scalar field during inflation », *JCAP*, vol. **0711**, 025, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0707.3377>.
- [Seery & Lidsey 05a] D. SEERY & J. E. LIDSEY, « Primordial non-gaussianities from multiple-field inflation », *JCAP*, vol. **0509**, 011, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506056>.
- [Seery & Lidsey 05b] D. SEERY & J. E. LIDSEY, « Primordial non-gaussianities in single field inflation », *JCAP*, vol. **0506**, 003, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0503692>.
- [Seery & Lidsey 07] D. SEERY & J. E. LIDSEY, « Non-gaussianity from the inflationary trispectrum », *JCAP*, vol. **0701**, 008, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611034>.
- [Seljak 94] U. SELJAK, « A Two-Fluid Approximation for Calculating the Cosmic Microwave Background Anisotropies », *Astrophys. J.*, vol. **435**, L87, 1994, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9406050>.
- [Seljak & Zaldarriaga] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, « CMBFAST », URL <http://cmbfast.org>.
- [Seljak & Zaldarriaga 96] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, « A Line of Sight Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies », *Astrophys. J.*, vol. **469**, 437, 1996, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9603033>.
- [Serra & Cooray 08] P. SERRA & A. COORAY, « Impact of Secondary non-Gaussianities on the Search for Primordial Non-Gaussianity », 2008, URL <http://arxiv.org/abs/0801.3276>.
- [Silk 68] J. SILK, « Cosmic black body radiation and galaxy formation », *Astrophys. J.*, vol. **151**, 459–471, 1968.

- [Sloth 06] M. S. SLOTH, « On the one loop corrections to inflation and the CMB anisotropies », *Nucl. Phys. B*, vol. **748**, 149, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0604488>.
- [Sloth 07] M. S. SLOTH, « On the One Loop Corrections to Inflation II : The Consistency Relation », *Nucl. Phys. B*, vol. **775**, 78, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0612138>.
- [Smith & Zaldarriaga 06] K. M. SMITH & M. ZALDARRIAGA, « Algorithms for bispectra : forecasting, optimal analysis, and simulation », 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0612571>.
- [Smoot 97] G. F. SMOOT, « The Cosmic Microwave Background Anisotropy Experiments », 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9705135>.
- [Smoot 08] G. F. SMOOT, « CMB Anisotropies : Their Discovery and Utilization », 2008, URL <http://arxiv.org/abs/0801.2563>.
- [Smoot *et al.* 92] G. F. SMOOT *et al.*, « Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps », *Astrophys. J.*, vol. **396**, L1–L5, 1992.
- [Spergel *et al.* 07] D. N. SPERGEL, R. BEAN, O. DORE, M. R. NOLTA, C. L. BENNETT, J. DUNKLEY, G. HINSHAW, N. JAROSIK, E. KOMATSU, L. PAGE, H. V. PEIRIS, L. VERDE, M. HALPERN, R. S. HILL, A. KOGUT, M. LIMON, S. S. MEYER, N. ODEGARD, G. S. TUCKER, J. L. WEILAND, E. WOLLACK & E. L. WRIGHT, « Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results : Implications for Cosmology », *APJS*, vol. **170**, 377, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603449>.
- [Spergel & Goldberg 99] D. N. SPERGEL & D. M. GOLDBERG, « The Microwave Background Bispectrum, Paper I : Basic Formalism », *Phys. Rev. D*, vol. **59**, 103001, 1999, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9811252>.
- [Stebbins 97] A. STEBBINS, « The CMBR Spectrum », 1997, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9705178>.
- [Stein & Weiss 71] E. STEIN & G. WEISS, *Introduction to Fourier analysis on Euclidian spaces*, princeton university press édition, 1971.
- [Stewart 71] J. STEWART, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*, vol. 10 de *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, Germany ; New York, U.S.A., springer édition, 1971.
- [Stewart 90] J. M. STEWART, « Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models », *Class. Quant. Grav.*, vol. **7**, 1169–1180, 1990.
- [Stewart & Walker 74] J. M. STEWART & M. WALKER, « Perturbations of spacetimes in general relativity », *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. **A341**, 49–74, 1974.
- [Thorne 80] K. S. THORNE, « Multipole Expansions of Gravitational Radiation », *Rev. Mod. Phys.*, vol. **52**, 299–339, 1980.
- [Tsagas *et al.* 07] C. G. TSAGAS, A. CHALLINOR & R. MAARTENS, « Relativistic cosmology and large-scale structure », 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0705.4397>.
- [Uzan 98] J.-P. UZAN, « Dynamics of Relativistic Interacting Gases : from a Kinetic to a Fluid Description », *Class. Quant. Grav.*, vol. **15**, 1063, 1998, URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9801108>.
- [Uzan *et al.* 07a] J.-P. UZAN, F. BERNARDEAU & Y. MELLIER, « Time drift of cosmological redshifts and its variance », 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0711.1950>.

- [Uzan *et al.* 07b] J.-P. UZAN, C. CLARKSON & G. F. R. ELLIS, «Time drift of cosmological redshifts as a test of the Copernican principle», 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0801.0068>.
- [Uzan & Lehoucq 01] J.-P. UZAN & R. LEHOUCQ, «A Dynamical Study of the Friedmann Equations», *Eur. J. Phys.*, vol. **22**, 371, 2001, URL <http://arxiv.org/abs/physics/0108066>.
- [Verde & Spergel 02] L. VERDE & D. N. SPERGEL, «Dark energy and cosmic microwave background bispectrum», *Phys. Rev. D*, vol. **65**, 043007, 2002, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0108179>.
- [Vernizzi 05] F. VERNIZZI, «On the conservation of second-order cosmological perturbations in a scalar field dominated universe», *Phys. Rev. D*, vol. **71**, 061301, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411463>.
- [Vernizzi & Wands 06] F. VERNIZZI & D. WANDS, «Non-Gaussianities in two-field inflation», *JCAP*, vol. **0605**, 019, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603799>.
- [Wald 84] R. WALD, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, U.S., 1984.
- [Weinberg 05] S. WEINBERG, «Quantum Contributions to Cosmological Correlations», *Phys. Rev. D*, vol. **72**, 043514, 2005, URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0506236>.
- [Weinberg 06] S. WEINBERG, «Quantum Contributions to Cosmological Correlations II : Can These Corrections Become Large?», *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 023508, 2006, URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0605244>.
- [Yadav *et al.* 07a] A. P. S. YADAV, E. KOMATSU & B. D. WANDELT, «Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background», *Astrophys. J.*, vol. **664**, 680, 2007, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0701921>.
- [Yadav *et al.* 07b] A. P. S. YADAV, E. KOMATSU, B. D. WANDELT, M. LIGUORI, F. K. HANSEN & S. MATARRESE, «Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background II : Partial Sky Coverage and Inhomogeneous Noise», 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0711.4933>.
- [Yadav & Wandelt 07] A. P. S. YADAV & B. D. WANDELT, «Detection of primordial non-Gaussianity (f_{NL}) in the WMAP 3-year data at above 99.5% confidence», 2007, URL <http://arxiv.org/abs/0712.1148>.
- [Zeldovich 72] Y. B. ZELDOVICH, «A Hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe», *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. **160**, 1–3, 1972.