



**HAL**  
open science

# Une application de la statistique descriptive en informatique

Maria Eugénia da Graça Martins

► **To cite this version:**

Maria Eugénia da Graça Martins. Une application de la statistique descriptive en informatique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1979. Français. NNT: . tel-00289849

**HAL Id: tel-00289849**

**<https://theses.hal.science/tel-00289849v1>**

Submitted on 24 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE 3ème Cycle

«Mathématiques Appliquées»

*par*

**Maria Eugénia da GRAÇA MARTINS**



**UNE APPLICATION DE LA STATISTIQUE**

**DESCRIPTIVE EN INFORMATIQUE**



**Thèse soutenue le 24 Septembre devant la commission d'examen**

J.R. BARRA                      Président

B. VAN CUTSEM

PHAM DINH                      Examineurs

M. VERAN

J. DEMONGEOT                      Invité



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

---

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARÈT Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEbNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



Je suis très reconnaissante à Monsieur le Professeur J. R. Barra, qui a bien voulu m'accepter dans son équipe, m'a aidé de ses remarques et critiques constructives et m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie Monsieur le Professeur B. Van Cutsem et Messieurs M. Veran, Pham Dinh et J. Demongeot, qui ont bien voulu accepter de prendre part au jury.

Aussi, il m'est très agréable de reconnaître et remercier ici, les conseils et encouragements de Messieurs Pham Dinh et Demongeot.

Enfin, je remercie Mademoiselle Naudin, qui a assuré la dactylographie d'une partie du manuscrit, ainsi que Monsieur Iglésias et toute l'équipe du service de reprographie, qui a réalisé le tirage.



## TABLE DES MATIERES

	Pages
CHAPITRE I	INTRODUCTION. DEFINITION DU PROBLEME INFORMATIQUE
§1	Introduction ..... 1
§2	Données expérimentales ..... 8
§3	Le problème statistique posé ..... 13
CHAPITRE II	ETUDE DU PROCESSUS GLOBAL DE DEFAUTS DE PAGE
§1	Modèle du processus de renouvellement ..... 15
1.1.	Définition du modèle ..... 15
1.2.	Description de la méthode suivie, dans l'esti- mation des paramètres du modèle ..... 17
1.3.	Application pratique de la méthode définie en 1.2. .... 21
1.4.	Conclusion ..... 28
§2	Modèles markoviens d'ordre 1 ..... 29
2.1.	Rappels sur les chaînes de Markov ..... 29
2.1.1.	Définitions ..... 29
2.1.2.	Notion d'irréductibilité ..... 30
2.1.3.	Périodicité d'une chaîne de Markov ..... 30
2.1.4.	Notion de récurrence ..... 30
2.1.5.	Méthodes algébriques dans les chaînes de Markov. 31
2.1.6.	Détermination des expressions explicites pour les probabilités de transition à n étapes ..... 33
2.2.	Description générale du modèle markovien ..... 35
2.2.1.	Définition du modèle ..... 35
2.2.2.	Quelques résultats utiles ..... 37
2.3.	Un modèle markovien d'ordre 1 ..... 39
2.4.	Modèle des retours d'une chaîne de Markov à l'état initial ..... 42
2.4.1.	Définition du modèle ..... 42
2.4.2.	Fractions rationnelles..Fonctions génératrices.. 43
2.4.3.	Applications des résultats de 2.1. et 2.4.2. au modèle définie en 2.4.1.

	Pages
2.4.4.	Application pratique ..... 48
CHAPITRE III	DEFINITION D'UN MODELE POUR UN PROCESSUS PONCTUEL A VALEURS VECTORIELLES
§1	Présentation des histogrammes ..... 56
§2	Analyse descriptive et interpretation des histogrammes ..... 94
§3	Etude du processus de defauts de page ..... 102
3.1.	Etude d'un lemme ..... 102
3.2.	Loi de l'intervalle entre deux appels suc- cessifs de la même page..... 104
3.3.	Loi de l'intervalle entre un instant quel- conque d'appel de la page i, et le prochain défaut de cette page. Taux de défauts de page .. 111
3.4.	Temps de séjour de la page i dans la mémoire réelle ..... 116
3.5.	Application des résultats antérieurs à un cas particulier ..... 118
CHAPITRE IV	RESUME ET CONCLUSIONS ..... 122
ANNEXE I	..... 125
ANNEXE II	..... 130
BIBLIOGRAPHIE	..... 142

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION.

#### DEFINITION DU PROBLEME INFORMATIQUE.

##### 1. INTRODUCTION

Les premières machines informatiques permettaient d'écrire des programmes, mais n'offraient pas aux utilisateurs les nombreuses facilités que l'on connaît actuellement. A cette époque, les programmes écrits l'étaient dans un langage très proche du langage machine, sans autre outils que les entrées-sorties programmées.

Il va sans dire que les programmeurs, devant posséder à fond un langage complexe et d'une rigueur très poussée, ne pouvaient pas écrire des programmes d'une grande taille, sans passer de nombreuses heures pour les mettre au point. Les programmes d'alors étaient donc de taille modeste et le matériel électronique suffisant pour traiter ces programmes, sans nécessiter un organe de commande compliqué.

Avec l'avènement des langages évolués (FORTRAN, ALGOL), les facilités de plus en plus grandes offertes aux programmeurs les ont, peu à peu, éloigné des contingences des langages machines et leur ont permis de se consacrer, avant tout, aux problèmes traités et non à l'outil de traitement.

Lorsqu'on sait la facilité actuelle pour traiter les matrices, déterminants et autres problèmes mathématiques, on ne s'étonnera pas de la taille de la mémoire nécessaire à de tels traitements.

Or, les réalités technologiques et économiques n'ont pas toujours permis de loger la totalité d'un programme dans la mémoire réelle de la machine.

On est donc arrivé à la situation suivante : le programme exécutable était d'une taille supérieure à la place mémoire disponible pour l'exécuter.

Fort heureusement, les programmes habituellement écrits, n'utilisent, dans chaque instant, qu'une partie restreinte de la place mémoire dont ils ont besoin. Ainsi, l'information n'a besoin de se trouver en mémoire réelle, qu'au moment d'être traitée par les processeurs ; sinon, elle peut être rangée dans des mémoires auxiliaires à accès plus lent, mais moins coûteuses : on a alors affaire à une mémoire hiérarchisée.

La hiérarchie des mémoires comporte au minimum deux niveaux - la mémoire réelle et une mémoire secondaire, constituée généralement de disques ou tambours magnétiques, mais elle peut comporter plus de deux niveaux.

L'exécution d'un programme se traduit par une suite de références à des instructions et à des données. Nous considérons ces instructions et ces données comme occupant des emplacements dans un espace d'adressage linéaire unique - mémoire virtuelle - indépendamment de leur support physique. Nous considérons en outre, que la mémoire virtuelle est découpée en blocs égaux, d'emplacements consécutifs, lesquels sont communément appelés "pages". C'est ce qu'on appelle la pagination.

Conceptuellement, la plus simple opération dans un système de mémoire virtuelle, ne manipule que des mots simples. Pourtant, comme les périphériques de mémoire secondaire sont relativement lents et l'intervalle de temps nécessaire pour opérer un seul mot est fréquemment très proche du temps nécessaire pour opérer un bloc de mots, alors il est plus avantageux de déplacer un bloc de mots qu'un seul.

L'expérience montre aussi que, dès qu'un mot est utilisé, il y a une grande probabilité pour que peu après les mots du même bloc soient aussi utilisés. Les blocs ne doivent pas être trop grands parce que plus ils sont grands, plus grande sera la proportion de ses mots qui ne seront pas utilisés dans un délai bref.

Dans de nombreux systèmes d'exploitation récents - ceux qui utilisent le concept de mémoire virtuelle - c'est le système d'exploitation lui-même qui se charge du découpage en pages, qui contrôle la répartition de l'information entre les différents supports disponibles et qui décide de l'opportunité des

transferts. Dans ce cas, le programmeur ne se préoccupera pas de la taille de la mémoire réelle, et tout se passe comme si elle était suffisamment grande pour contenir n'importe quel programme - d'où le nom de mémoire virtuelle.

La mémoire réelle est également découpée en cases ayant la taille d'une page de sorte que chaque page peut être implantée dans n'importe quelle case de la mémoire réelle. A chaque instant, seul un certain nombre de pages sont présentes dans la mémoire du calculateur et peuvent, de ce fait, être exécutées. Les pages qui, à chaque instant sont présentes dans la mémoire réelle, s'appellent résidentes.

Le concept de mémoire virtuelle est très important et très actuel, dans la mesure où il est intimement lié à la multiprogrammation. C'est-à-dire que, dans un système de mémoire virtuelle, on a la probabilité d'avoir plusieurs programmes, de grande taille, chacun ayant droit à un certain nombre de pages de la mémoire réelle.

Le schéma suivant permet de mieux comprendre ce système.

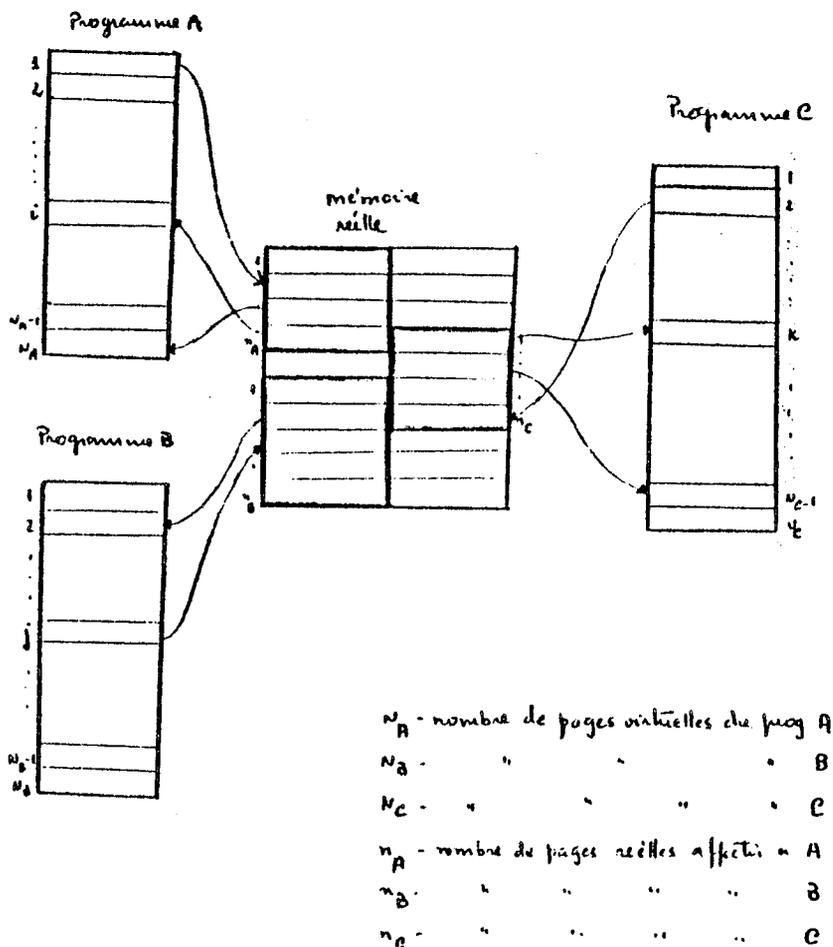


Figure 1

Chaque utilisateur a l'illusion d'avoir un système de calcul, entièrement à lui, c'est-à-dire, un ordinateur virtuel.

Pour un découpage en pages d'une taille donnée [10, page 154], l'exécution d'un programme de  $n$  pages, numérotées de 1 à  $n$ , se traduit par une suite de références aux pages

$$w = p_1 p_2 \dots p_i \dots \text{ avec } p_i = 1, 2, \dots, n$$

où  $p_i$  est le numéro de la page qui contient la  $i$ -ième référence à la mémoire. On appelle la suite  $w$ , la trace du programme.

L'expérience montre [10, page 155], que la suite des références possède les propriétés suivantes, vérifiées pour un grand nombre de programmes :

- 1) La distribution des références n'est pas uniforme sur l'ensemble de la mémoire : l'histogramme des références à la mémoire, fait pendant l'exécution d'un programme, présente généralement des pics marqués, correspondant aux zones les plus fréquemment utilisées (boucles, données localisées).
- 2) On peut diviser la suite des références en sous-suites consécutives  $w_i$  (pas nécessairement de même longueur) telles que si  $L_i$  est l'ensemble de pages distinctes, référencées dans la sous-suite  $w_i$  :
  - a) La distribution des références dans  $w_i$  n'est pas uniforme ; de plus, le nombre de pages de  $L_i$  est souvent petit par rapport au nombre total  $n$  de pages du programme.
  - b)  $L_i$  et  $L_{i+1}$  possèdent en général beaucoup de pages en commun.
  - c)  $L_i$  et  $L_{i+j}$  tendent à devenir non corrélés pour de grandes valeurs de  $j$  : la connaissance de  $L_i$  donne peu d'informations sur la composition de  $L_{i+j}$ , pour de grandes valeurs de  $j$ .

On exprime ces propriétés en disant que la plupart des programmes présentent la propriété de localité. Cette propriété est liée à une certaine

structuration, fréquemment rencontrée, des instructions et des données. Lorsque la structuration est différente, la propriété de localité peut ne plus être vérifiée pour le programme ou pour les données. La propriété de localité est donc un réflexe de la façon de programmer et dépend de chaque programmeur.

Il existe des problèmes propres à la pagination dont l'importance est très grande :

- traduire une adresse virtuelle en adresse réelle
- à quel instant lancer un transfert
- quelles pages charger en mémoire
- quelle page physique libérer en mémoire réelle pour fournir une place à une page dont la présence est devenue nécessaire.

Le premier problème d'ordre purement technique ne nous intéresse pas, pour la suite du travail.

En ce qui concerne la deuxième et la troisième questions, on utilise la stratégie de chargement de page dite "à la demande" - on charge une page en mémoire réelle au moment de la première référence.

Lorsqu'une page référencée n'est pas résidente, c'est-à-dire ne se trouvant pas en mémoire réelle, il y a un ordre de transfert et la page ayant fait défaut est chargée en mémoire réelle. Ce mécanisme porte le nom de "défaut de page".

De plus, quand le système a décidé de charger une page en mémoire réelle, il doit déterminer dans quelle case la placer ; s'il n'existe pas de case libre, il faut déterminer quelle page de la mémoire cédera sa place. L'algorithme qui permet de déterminer cette dernière mémoire s'appelle "algorithme de remplacement".

Il y a une grande variété de ces algorithmes qui peuvent se grouper en trois classes :

Classe 1 - On admet que toutes les pages ont la même probabilité d'être référencées à chaque instant, et l'algorithme de remplacement

n'est basé sur aucune information relative au déroulement antérieur du programme :

EX. FIFO (First-In, First-Out)  
RAND (RANDOM remplacement).

Classe 2 - Les pages sont classifiées d'après leur usage le plus récent en mémoire réelle, et cette information est utilisée dans l'algorithme de remplacement.

EX. Comme exemple d'un algorithme de cette classe on a le LRU. On parlera un peu plus explicitement de cet algorithme, parce que c'est celui qui est utilisé dans notre système de mémoire virtuelle.

La technique du LRU, "Least Recently Used" nécessite à chaque instant une liste des s dernières pages référencées et, pour chaque page, le dernier instant où elle a été référencée (s désigne la taille de la mémoire réelle). Quand une page est référencée, si elle ne fait pas partie de cette liste, on fait sortir de la mémoire réelle la page de cette liste qui a été référencée depuis le plus longtemps.

Classe 3 - Les pages sont classées d'après leurs absences et présences en mémoire réelle, ceci pour toutes les pages et pour le programme entier.

EX. ATLAS (Loop Detection Method).

Quelques études déjà faites sur le comportement des programmes ont montré que l'algorithme de remplacement de pages influence moins ce comportement que les paramètres définis par la taille de chaque page et la taille de la mémoire réelle allouée au programme [10, page 182].

On peut en conclure que les paramètres influant sur l'occurrence des défauts de page sont nombreux et variés :

- Paramètres dûs à la machine.

Il s'agit essentiellement du rapport taille-mémoire réelle / taille-mémoire virtuelle, de la taille d'une page, et de l'environnement dans lequel se déroule le programme.

- Paramètres dûs au langage employé.

Certains langages essayent d'optimiser le concept de localité, en réorganisant les calculs à effectuer.

- Paramètres dûs au programmeur.

Il s'agit surtout de la façon de programmer : en évitant des branchements trop nombreux et en structurant le programme selon certaines règles, on a toutes les chances de voir le nombre de défauts de pages diminuer.

## 2. DONNEES EXPERIMENTALES

Soit E l'espace d'adresse d'un programme, c'est-à-dire l'ensemble de ses n pages virtuelles :

$$E = \{1, 2, \dots, n\}$$

La trace du programme, la suite

$$w = p_1 p_2 \dots p_t \dots \quad p_t \in E$$

des adresses auxquelles le programme accède au cours d'une exécution, sera considérée comme la réalisation d'un processus stochastique à temps discret

$$\begin{matrix} (P_t) \\ t \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

C'est un processus stochastique discret, à valeurs entières, dont l'espace des états est l'ensemble E, puisque la valeur de la variable aléatoire  $P_t$ , est le numéro de la page virtuelle référencée à l'instant t.

On dispose des traces d'un certain nombre de programmes qui ont été choisis comme représentatifs, au sens informatique, d'une population de 20 programmes qu'on a activés dans un système IRIS 80 [3].

Le premier programme que l'on a analysé sera référencé par le nom REFF. Pour une taille de page égale à 512 mots, son espace d'adresse est composé de 41 pages virtuelles et sa trace est composée de 1 000 000 de références.

Pour notre étude, nous disposons d'un mécanisme qui simule la gestion de la mémoire réelle. Sans entrer dans la description de ce mécanisme, il suffit de la considérer ici comme une boîte noire paramétrée. Pour un programme donné, décrit par la trace complète de ses références, cette boîte

génère une suite de défauts de page, avec pour chaque défaut une indication de l'heure et du numéro de la page ayant fait défaut ; à cette suite on appellera trace des défauts de page.

L'algorithme utilisé dans la simulation est le LRU, et les paramètres qu'on considère sont le nombre de pages en mémoire réelle et la taille de chaque page

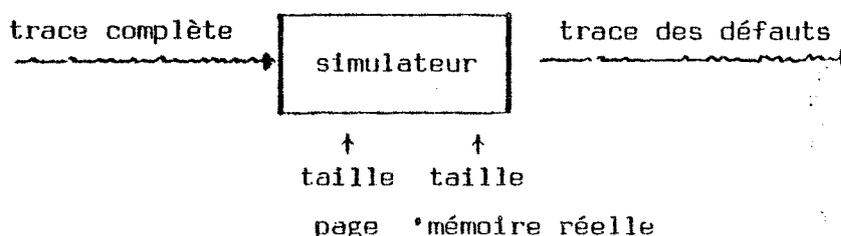


Fig. 2

Nous nous limiterons à faire varier le paramètre taille de mémoire réelle et considérerons que la taille de chaque page est constante et égale à 512 mots.

A partir d'une trace complète d'un programme pour une taille de mémoire réelle donnée, un défaut de page peut apparaître en n'importe quelle référence de page. Dans notre étude, on prend comme unité de temps, le temps entre deux références consécutives de page. L'intervalle de temps entre deux défauts de page est donc un multiple de ce temps de base. Les défauts de page constituent donc un processus ponctuel en temps discret.

Remarque Quand on considère un processus ponctuel discret, on peut lui associer deux processus stochastiques, à savoir :

- la suite binaire  $\{X_i\}$  ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , où

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si un certain événement se réalise à l'instant } i \\ 0 & \text{si cet événement ne se réalise pas à l'instant } i. \end{cases}$$

L'utilisation des éléments 0 et 1 pour représenter les états est très utile, parce que le processus cumulatif

$$N_i = \sum_{k=1}^i X_k, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

nous donne le nombre de réalisations de l'événement dans l'intervalle de temps  $[0, i]$ .

- L'autre processus qu'on considère est la suite des instants  $\Pi_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  pour lesquels l'événement se vérifie.

Pour étudier le processus ponctuel discret, il suffit d'étudier l'un des deux processus qui lui sont associés, parce qu'ils sont liés par la relation

$$\Pi_j > i \quad \text{ssi} \quad N_i \leq j-1, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

d'où  $\text{Prob} [\Pi_j > i] = P [N_i \leq j-1]$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

Si l'on représente par  $F_j(i) = \text{Prob} [\Pi_j \leq i]$

$$\text{Prob} [N_i = j] = F_j(i) - F_{j+1}(i)$$

Pour une trace donnée et pour une taille  $s$  de mémoire fixée, la simulation permet donc d'obtenir les éléments  $\lambda_i$  d'un tableau à double entrée où figurent en ligne les numéros des pages  $p \in E$  qui font défauts, et en colonne les instants  $t$  des références successives aux pages. Les valeurs de  $t$  sont des valeurs entières  $1, 2, \dots, N$ . On représente par  $N$  le nombre total de références exécutées par le programme pendant une activation.

P \ T	T					
	1	2	...	j	...	N
1	$l_{11}$	$l_{12}$	...	$l_{1j}$	...	$l_{1N}$
2	$l_{21}$	$l_{22}$	...	$l_{2j}$	...	$l_{2N}$
...						
i	$l_{i1}$	$l_{i2}$	...	$l_{ij}$	...	$l_{iN}$
...						
n	$l_{n1}$	$l_{n2}$	...	$l_{nj}$	...	$l_{nN}$

Fig. 3

On attribue aux éléments  $l_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  les valeurs 1 ou 0 selon que la page  $i$  fait défaut à l'instant  $j$  ou non.

On rappelle que, à chaque instant, seulement une page peut être référencée, donc à chaque instant il ne peut y avoir qu'un défaut de page. Ainsi, si les éléments d'une colonne  $j$  ne sont pas tous nuls, il y aura seulement un des éléments  $l_{ij}$ ,  $j$  fixé, qui sera égal à 1.

Pour une taille donnée  $s$ , de la mémoire réelle, considérons la suite des instants  $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  où une page quelconque fait défaut, c'est-à-dire considérons sur le tableau de la figure 3 les instants pour lesquels il y a un 1 en ordonnée.

Cette suite  $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots$  constitue le processus des instants pour lesquels l'événement d'un processus ponctuel à temps discret se vérifie : dans notre cas, le processus ponctuel des défauts de page, on le représente par  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

De même, considérons les instants  $t_1^i, t_2^i, \dots, t_j^i, \dots$  pour lesquels la page  $i$  fait défaut, c'est-à-dire sur la ligne  $i$  du tableau, considérons les instants pour lesquels  $\lambda_{it_j^i} = 1$ .

Pour chaque  $i, i = 1, 2, \dots, n$ , les défauts de la page  $i$  constituent un processus ponctuel à temps discret dont la suite  $t_1^i, t_2^i, \dots, t_j^i, \dots$  est une réalisation de la suite des instants où se vérifie l'événement qui définit ce processus ponctuel. Le processus des instants où la page  $i$  fait défaut est représenté par  $(\Pi_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ . L'indice  $i$  traduit le fait que le processus  $(\Pi_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$  est associé à la page  $i$ .

Remarque Le processus ponctuel à temps discret des défauts de page, représenté par le processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , est la superposition des  $n$  processus ponctuels à temps discrets, associés aux défauts de chaque page  $i$  et représentés par les processus  $(\Pi_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Le processus ponctuel  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , superposition des  $n$  processus ponctuels, sera appelé processus ponctuel global.

Pour le programme REFF et pour les valeurs suivantes de  $s$  :

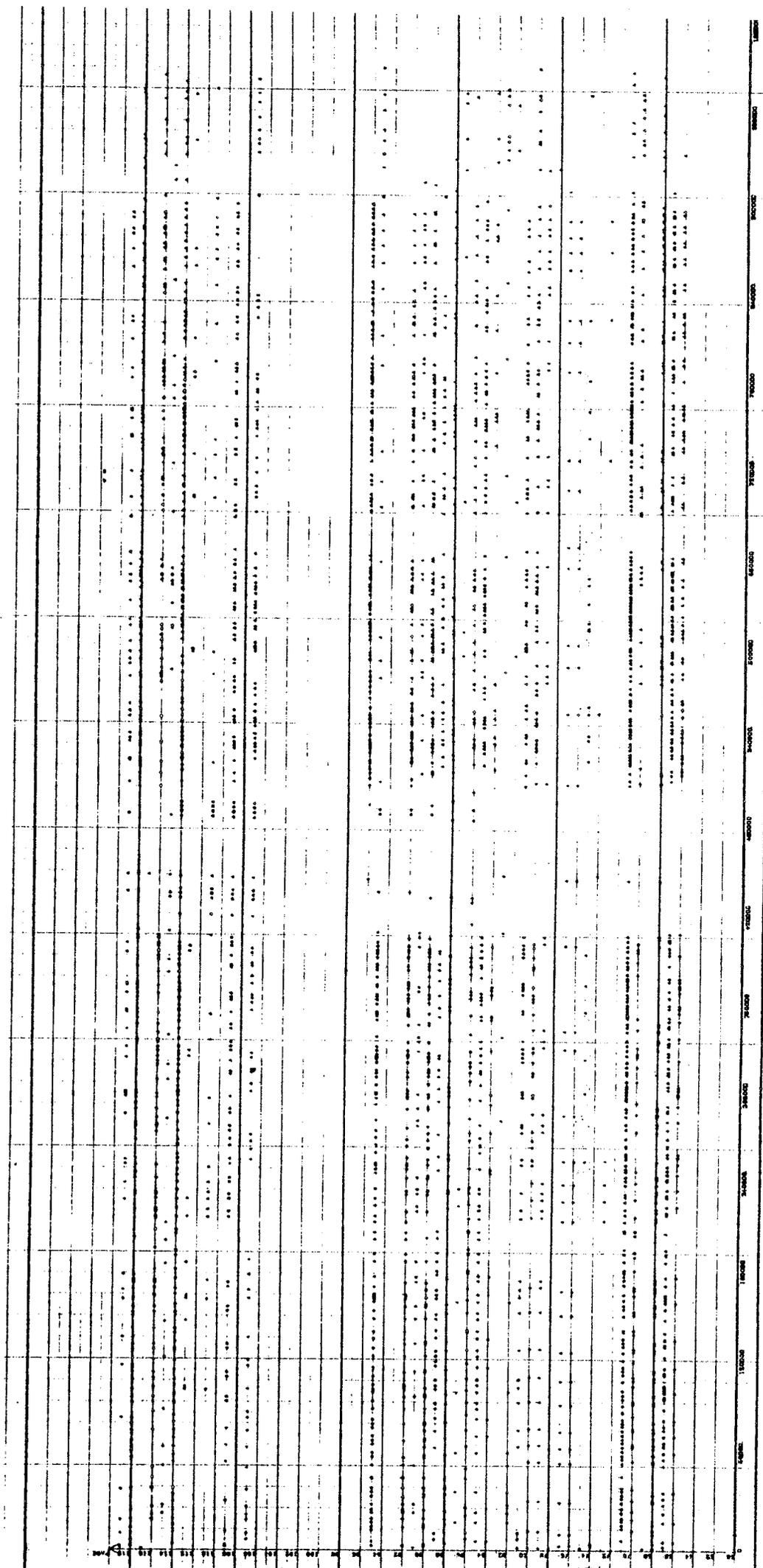
$s=20$	$s=26$	$s=30$
(graphique 1)	(graphique 2)	(graphique 3)

On trouvera ci-après les représentations graphiques des réalisations des processus ponctuels dont on vient de parler (PROGRAMME DESS1, de l'anexe II.)

Conclusion Du point de vue statistique, on va travailler sur les processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et  $(\Pi_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , obtenus en considérant plusieurs valeurs pour le paramètre  $s$ , taille de la mémoire réelle ; les réalisations de ces processus représentent donc les données expérimentales.

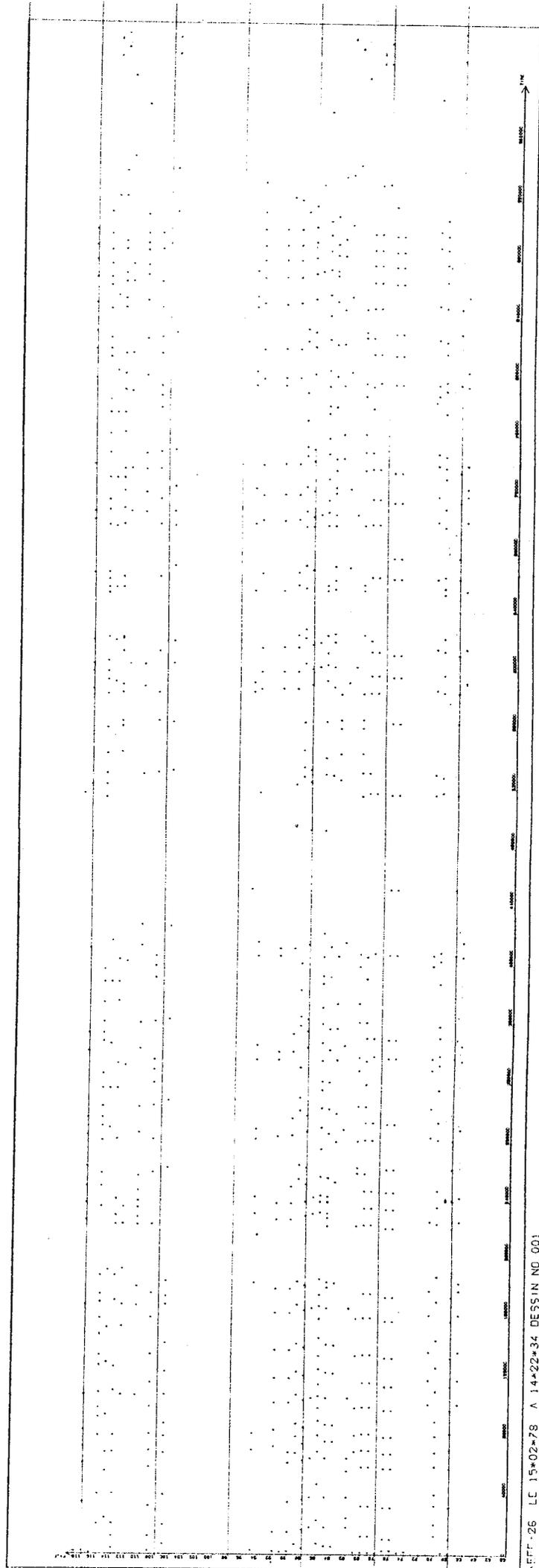
GRAPHIQUE 1

TAILLE MEMOIRE REELLE = 20



GRAPHIQUE 2

TAILLE MEMOIRE REELLE = 26

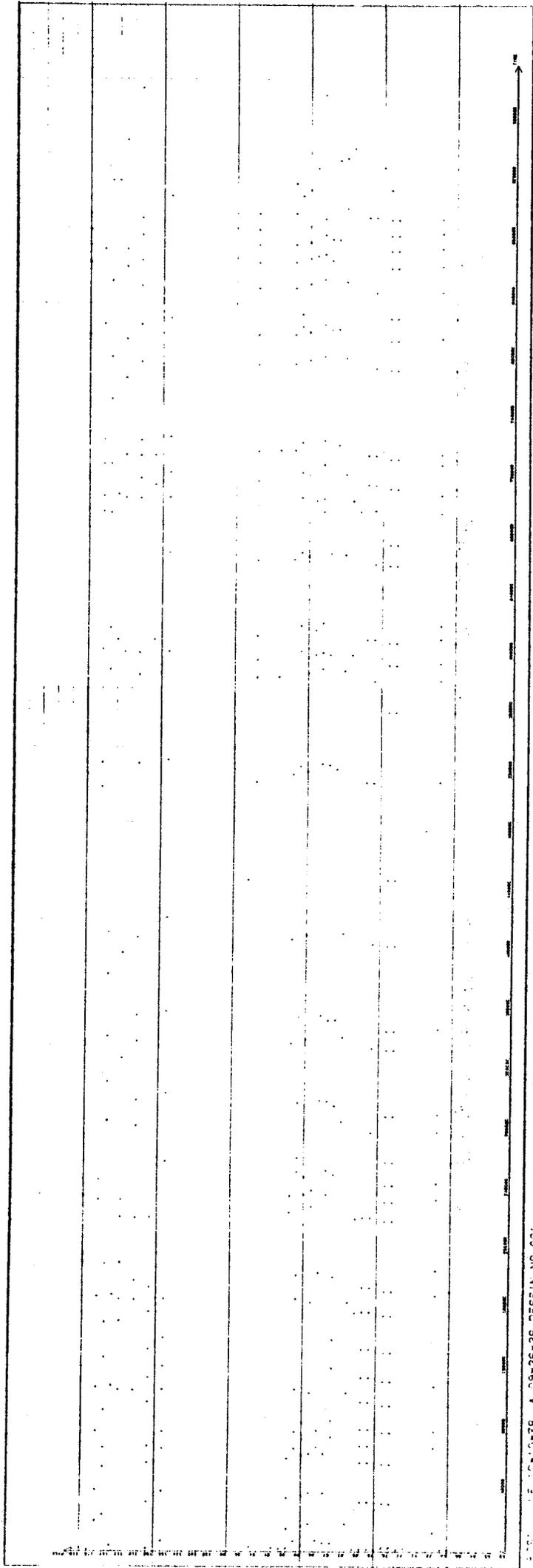


LE 15\*02\*78 A 14\*22\*34 DESSIN NO 001

Fig. 5

GRAPHIQUE 3

TAILLE MEMOIRE RELLE = 30



LE 10-10-78 A 09-36-38 DESSIN NC 021

Fig. 6

### 3. LE PROBLEME STATISTIQUE POSE

Un problème fondamental dans la gestion d'un système de mémoire virtuelle est celui de décider quelles sont les pages qui doivent occuper la mémoire réelle et combien de pages physiques de la mémoire réelle doivent être allouées à un programme.

L'objet de cette étude est de trouver un compromis, si possible optimum, entre les deux objectifs contradictoires suivants :

- a) Minimiser le nombre de transferts de pages entre la mémoire réelle et la mémoire virtuelle.
- b) Minimiser la taille de la mémoire réelle. En effet, une grande mémoire réelle ou un trop grand nombre de transferts, sont onéreux pour des raisons différentes.

Il y a au moins trois raisons pour lesquelles ce problème est important :

- 1) Plus grand est le trafic entre les deux niveaux de la mémoire, plus difficile sera de décider quelles sont les pages qu'on doit déplacer et où les placer.
- 2) Comme le temps  $T$  de traversée entre les deux mémoires est très long, relativement à l'intervalle de temps entre deux accès à la mémoire réelle, si on a beaucoup de données en mouvement, on peut être conduit à l'encombrement du canal reliant les deux niveaux de la mémoire.
- 3) Trop de trafic de données peut conduire à une sérieuse interférence dans l'efficacité du processeur central, dû au fait qu'un cycle mémoire (temps entre deux accès mémoire) au niveau de la mémoire réelle, est bien plus petit qu'un cycle mémoire au niveau des périphériques de la mémoire secondaire.

Or, pour un programme donné, nous avons considéré le processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , qui pour une taille de mémoire réelle fixée en  $s$ , décrit le comportement du programme en ce qui concerne les instants où apparaissent des défauts de page, durant l'activation du programme.

Nous nous proposons de trouver une loi de probabilité pour le processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , donc un modèle de comportement du programme (dans le sens indiqué ci-dessus), dans un système de mémoire virtuelle. A partir de ce modèle, on tirera certaines conclusions dont une des plus importantes sera de déterminer la taille optimale de la mémoire réelle qu'on doit affecter au programme.

Pour la définition de la loi du processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  nous avons procédé de deux façons distinctes :

- Dans un premier temps, ce qui fera l'objet du chapitre II, pour un  $s$  fixé, on étudie le processus ponctuel global des défauts de page, sans spécifier la page qui fait défaut. Le processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sera donc le processus étudié dans cette partie.

- Dans un deuxième temps, chapitre III, on prend en considération le numéro de la page qui fait défaut. On étudie alors les  $n$  processus ponctuels à temps discret associés à chaque page, et on étudie les processus  $(\Pi_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , composants du processus global  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Remarque Dans la suite, on représente par la même notation le processus ponctuel et le processus des instants où se réalise l'événement associé au processus.



## CHAPITRE II

### ETUDE DU PROCESSUS GLOBAL DES DEFAUTS DE PAGE

Dans la suite nous nous proposons de trouver une loi de probabilité pour le processus ponctuel  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Si on représente les intervalles entre défauts de page consécutifs par  $T_1, T_2, \dots, T_j, \dots$ , la suite des instants  $\Pi_j$ , où il y a eu un défaut de page, est donnée par

$$(1) \quad \Pi_j = T_1 + T_2 + \dots + T_j \quad \Pi_0 = 0, \quad j \in \mathbb{N}$$

Avec ce formalisme, définir un modèle pour le comportement du programme, c'est énoncer un ensemble d'hypothèses sur les variables aléatoires  $T_j$ .

On étudiera successivement deux types de lois de probabilité de ce processus.

D'abord, on supposera que ce processus est un processus de renouvellement, on verra alors que ce modèle ne s'ajuste pas à nos données expérimentales et on supposera ensuite que le processus étudié est un processus de Markov.

#### 1. MODELE DU PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

##### 1.1. Définition du modèle

Définition [15, page 182] : une suite de variables aléatoires  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite un processus de renouvellement, si elle peut s'écrire sous la forme

$$(1.1) \quad S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n \quad S_0 = 0$$

où les  $T_k$  sont des variables aléatoires,

- a) indépendantes
- b) identiquement distribuées, de distribution commune  $F(x)$ , telle que  $F(0) = 0$ .

Hypothèse  $(H_1)$  : Le processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ; est un processus de renouvellement. On désigne par  $P_\lambda$  et par  $F(x)$ , respectivement la loi et la fonction de répartition commune des  $T_k$ , définies en (1.1).

Dans la pratique, il y a fréquemment des situations où les intervalles entre les événements, dans un processus de renouvellement, ont une loi de probabilité qui est une combinaison convexe, en nombre inconnu, de plusieurs lois de probabilités, elles-mêmes inconnues.

Dans cette première partie, pour l'étude de ce modèle, nous avons pris comme données expérimentales, des réalisations du processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , quand le paramètre taille de mémoire réelle  $s$  prend les valeurs 10, 20 et 30.

Il est nécessaire de faire ici une remarque sur les valeurs de  $s$  qu'on a essayées. On a considéré l'intervalle  $[10,30]$  parce que le programme étudié a 41 pages virtuelles. En effet, une taille de mémoire réelle inférieure à 10 aurait entraîné un grand pourcentage de défauts de page, ce qui ne nous intéresse pas ; de même, une taille supérieure à 30, entraîne un pourcentage de défauts très petit et ne justifierait pas tout l'espace de la mémoire réelle alloué au programme.

Pour chaque réalisation du processus  $\Pi_j$ , pour  $s = 10, 20$  et  $30$ , on a tracé l'histogramme des intervalles entre l'occurrence des événements, c'est-à-dire ici, les intervalles entre défauts de page.

Ce sont les graphiques 4 ( $s = 10$ ), 5 ( $s = 20$ ) et 6 ( $s = 30$ ), qu'on représente ci-après.

Graphique 4

HISTOGRAMME du nombre d'intervalles  
entre défauts de page successifs  
Taille de la mémoire réelle = 10

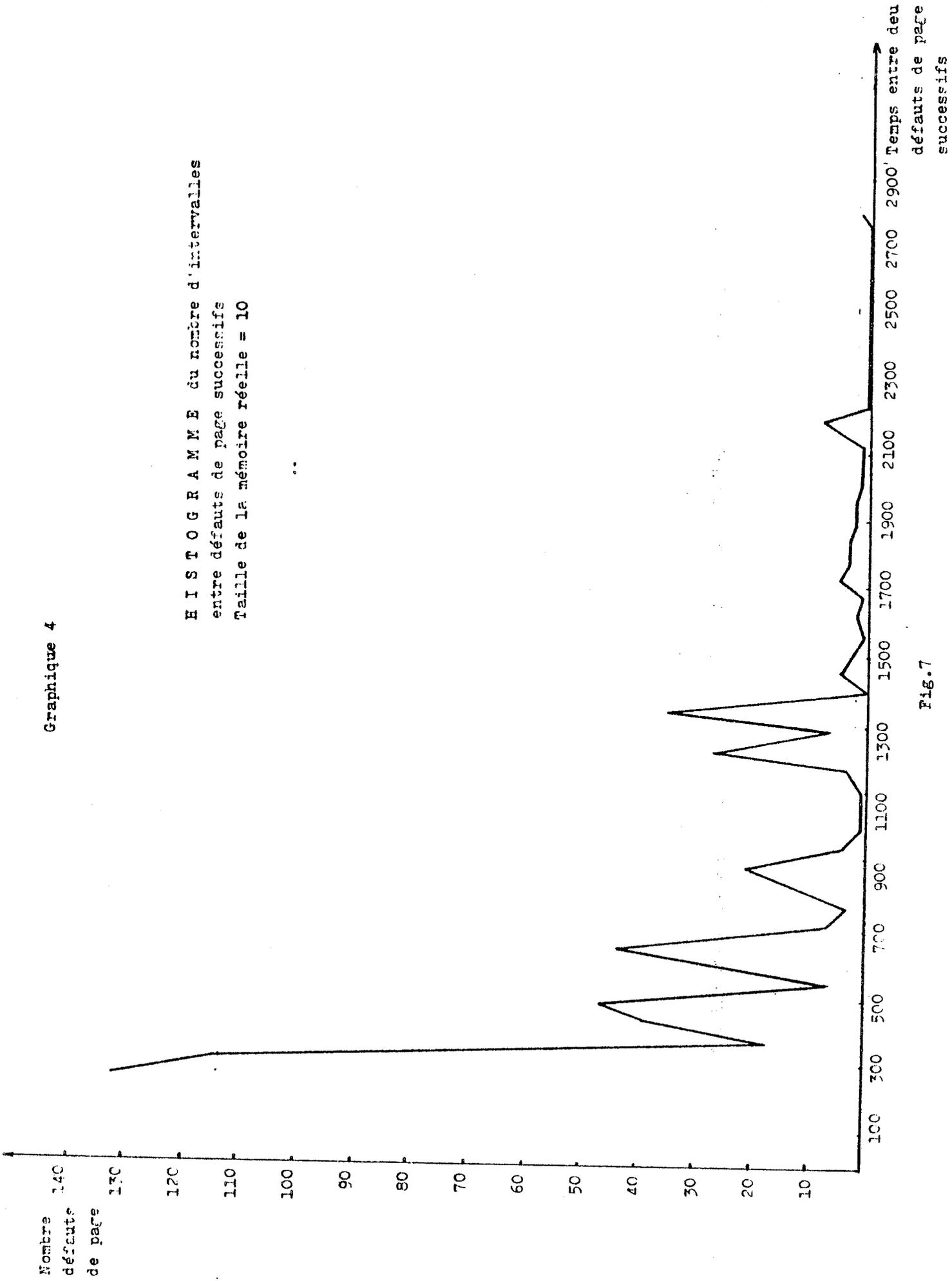
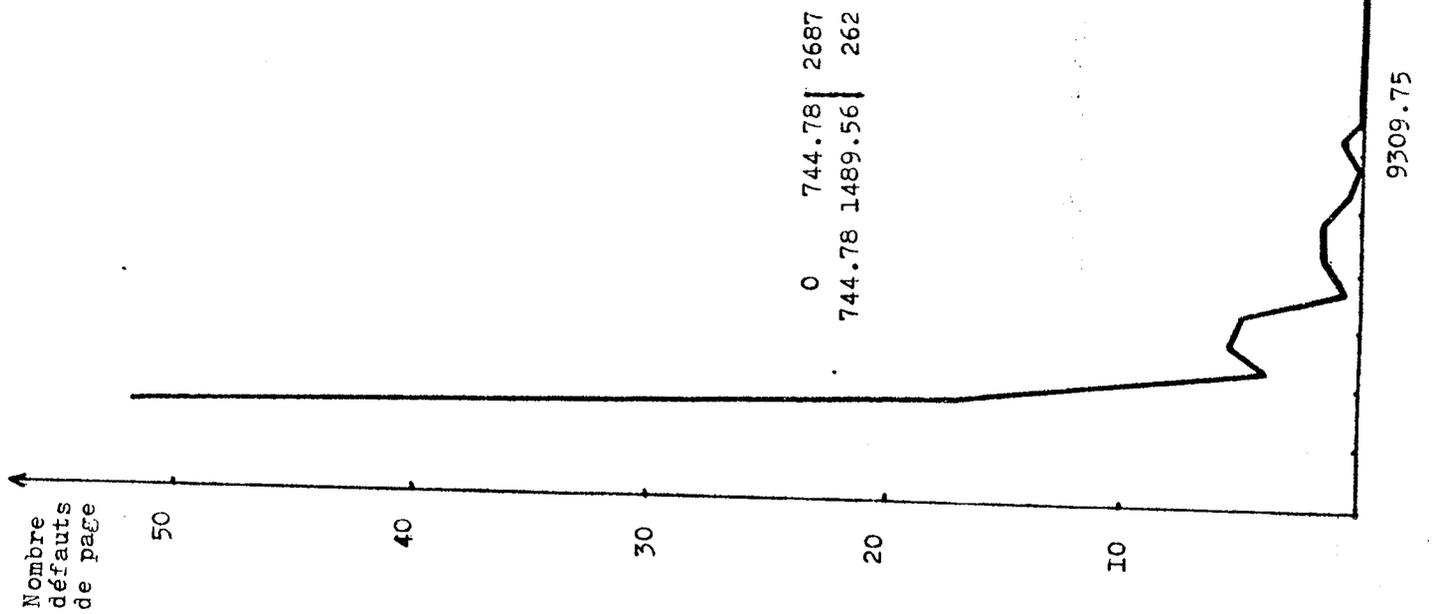


Fig. 7

Graphique 5

HISTOGRAMME du nombre d'intervalles  
entre défauts de page successifs  
Taille de la mémoire réelle = 20

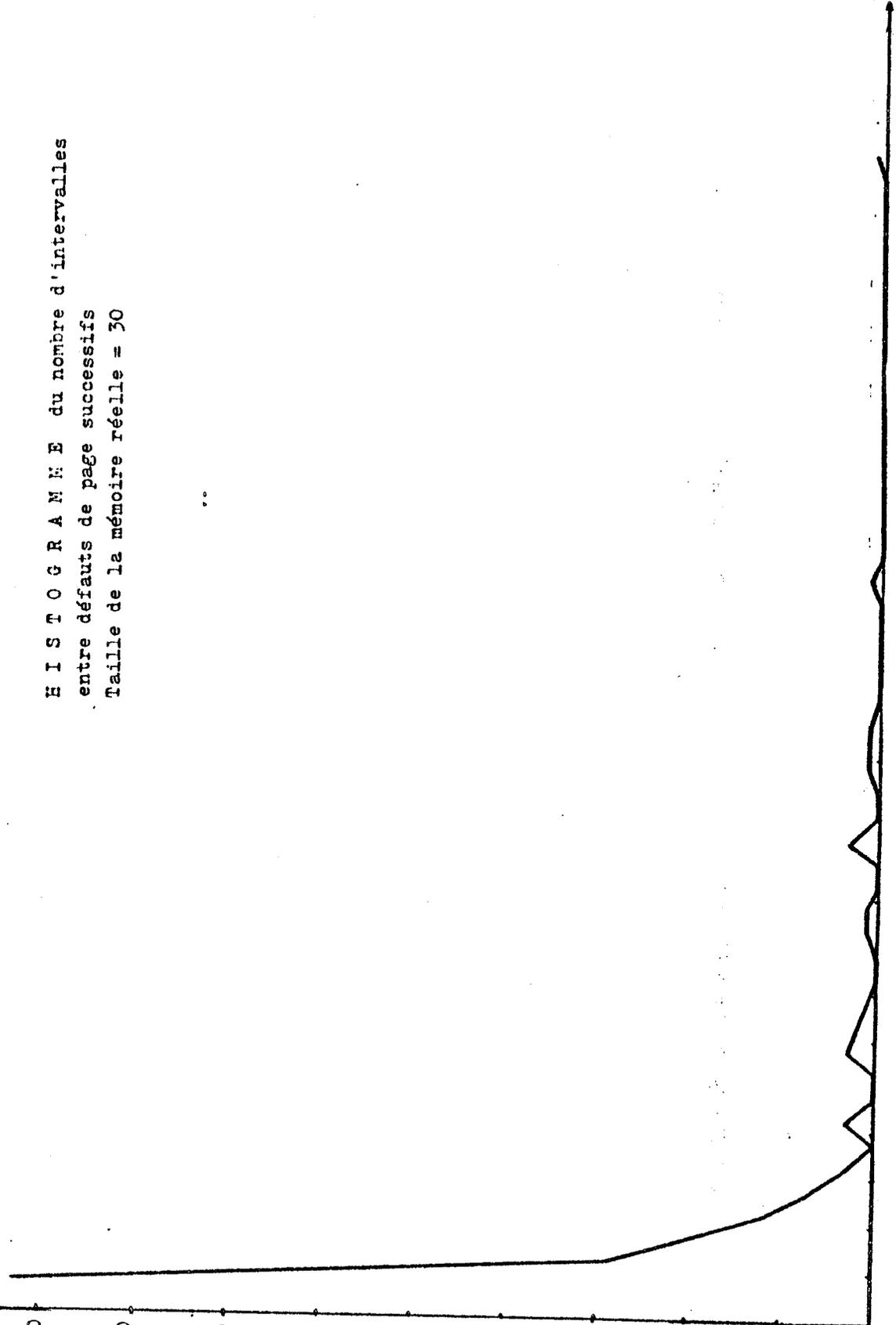


Graphique 6

HISTOGRAMME du nombre d'intervalles  
entre défauts de page successifs  
Taille de la mémoire réelle = 30

Nombre  
défauts  
de page

100  
90  
80  
70  
60  
50  
40  
30  
20  
10



15488.25

30976.5

46464.75

61953

Temps entre deux  
défauts de page  
successifs

Fig. 9

Tous ces histogrammes ont une caractéristique commune : leur caractère multimodal, ce qui nous a conduit à l'hypothèse statistique suivante, concernant la fonction de densité  $f(x)$  de la loi  $P_\lambda$ .

Hypothèse : Les données expérimentales constituent un échantillon  $E$ , représentatif d'une loi  $P_\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ , dont la densité  $f(x)$  a la forme suivante :

$$(1.2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^k p_i f_{\lambda_i}(x), \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

où les  $f_{\lambda_i}(x)$  sont densités de probabilités dépendantes de paramètres  $\lambda_i \in \mathcal{U}$ .

Dans la pratique, pour l'estimation des paramètres  $p_i$  et  $\lambda_i$ , entre plusieurs techniques possibles, nous avons choisi une méthode due à Anne Schröder [35].

On a choisi cette méthode, d'abord parce qu'elle nous permet, très facilement, de détecter dans un échantillon observé, la présence d'échantillons de lois de probabilités connues, sans faire aucune hypothèse sur la distribution de la population-mère. En second lieu, cette méthode a été appliquée par Anne Schröder, avec des résultats positifs [34], sur des ensembles de données expérimentales obtenues de la même façon que les nôtres.

Avant de présenter les résultats obtenus en appliquant cette méthode, on fera une description de la technique utilisée [35].

## 1.2. Description de la méthode suivie dans l'estimation des paramètres du modèle

Considérons un sous-ensemble fini  $E$ , de  $\mathbb{R}$ , contenant  $N$  éléments et une famille de densités de probabilités  $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{U}}$ , de type connu, dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathcal{U}$ , où  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^s$ . La méthode de Anne Schröder permet de trouver une partition de  $E$  en sous-ensembles  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et un ensemble de  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , où  $\forall i, i = 1, \dots, k, \lambda_i \in \mathcal{U}$ , tel que :

Pour tout  $i$ ,  $P_i$  peut être considéré comme un échantillon provenant d'une population de loi de probabilité  $P_{\lambda_i}$ .

L'algorithme utilisé ici, pour l'estimation des  $P_i$  et des  $\lambda_i$ , est une application d'une généralisation faite par Anne Schroeder, de l'algorithme des Nuées Dynamiques, quand les noyaux sont les paramètres  $\lambda_i$ , inconnus, des densités  $f_{\lambda_i}$ .

Ainsi [35], si on représente par

a)  $\mathcal{P}_k$ , l'ensemble des partitions de  $E$  en  $k$  sous-ensembles

$$\mathcal{P}_k = \{P\} \quad \text{où} \quad P = (P_1, \dots, P_k)$$

b)  $\mathcal{L}$ , l'espace des traits caractéristiques de ces sous-ensembles : les noyaux, et par

c)  $\mathcal{L}_k$ , l'ensemble de  $k$ -uplets d'éléments de  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L}_k = \{L\} \quad \text{où} \quad L = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad \lambda_i \in \mathcal{L}$$

$$\forall i, i = 1, \dots, k$$

l'algorithme des Nuées Dynamiques permet de trouver un couple  $(L, P) \in \mathcal{L}_k \times \mathcal{P}_k$  qui minimise un critère noté

$$(1.3) \quad W : \mathcal{L}_k \times \mathcal{P}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

L'idée de base de cet algorithme [35], est de déduire de tout élément  $P$  de  $\mathcal{P}_k$ , un élément  $L$  de  $\mathcal{L}_k$ ,  $L = g(P)$ , et de tout élément  $L$  de  $\mathcal{L}_k$  un élément  $P$  de  $\mathcal{P}_k$ ,  $P = f(L)$ , de façon que les valeurs  $W(L, P)$  sur les couples successifs soient décroissantes.

Pour la définition de  $f$  et  $g$ , considérons les applications :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} D : E \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ R : \mathcal{L} \times \{1, 2, \dots, k\} \times \mathcal{P}_k &\rightarrow \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies de la façon suivante [35] :

$$(1.5) \quad L = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \rightarrow f(L) = P = (P_1, \dots, P_k)$$

tel que  $\forall i, P_i = \{x \in E / \forall j \neq i, D(x, \lambda_i) \leq D(x, \lambda_j)\}$

(si  $D(x, \lambda_i) = D(x, \lambda_j)$ , alors  $x \in P_{\inf(i,j)}$ )

$$(1.6) \quad P = (P_1, \dots, P_k) \rightarrow g(P) = L = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \text{ où}$$

$\forall i, \lambda_i$  est tel que  $R(\lambda_i, i, P) = \min_{\lambda \in \mathbb{L}} R(\lambda, i, P)$

L'application  $R$  peut être définie de façon à donner une mesure de la distance du sous-ensemble  $P_i$ , de la partition  $P$ , à  $\lambda$ . Dans ce cas, le critère à minimiser sera [35] :

$$(1.7) \quad W : \mathbb{L}_k \times \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(L, P) \rightarrow W(L, P) = \sum_{i=1}^k R(\lambda_i, i, P)$$

Pour initier les calculs, il faut commencer par donner soit une partition initiale  $P^{(0)}$ , soit un élément  $L^{(0)} \in \mathbb{L}_k$ . Supposons  $P^{(0)}$ , la partition initiale donnée

$$L^{(0)} = g(P^{(0)})$$

$$(L^{(0)}, P^{(0)}) = (g(P^{(0)}), P^{(0)})$$

La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  est définie par récurrence. Si on a  $(L^{(n)}, P^{(n)})$ , alors  $(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$  est définie par

$$(1.8) \quad P^{(n+1)} = f(L^{(n)}) \quad \text{et} \quad L^{(n+1)} = g(P^{(n+1)}) = g \circ f(L^{(n)})$$

Dans [35], Anne Schroeder montre que la suite  $W(L^{(n)}, P^{(n)})$  décroît et converge quand,  $D$  étant fixé, les fonctions  $R$  et  $W$  sont définies par :

$$(1.9) \quad R(\lambda, i, P) = \sum_{x \in P_i} D(x, \lambda)$$

$$W(L, P) = \sum_{i=1}^k R(\lambda_i, i, P) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in P_i} D(x, \lambda_i)$$

La limite  $W_{P^{(n)}}^*$  de  $W(L^{(n)}, P^{(n)})$  quand cette suite est convergente, dépend de la partition initiale  $P^{(0)}$ . Pour partitions initiales différentes, on obtient des limites différentes.

On remarque aussi que les estimateurs obtenus, c'est-à-dire les couples  $(L, P)$  telles que  $W(L, P) = W_{P^{(0)}}^*$ , dépendent de la façon dont la fonction  $D$  est définie.

Dans l'algorithme que nous avons utilisé, cette fonction est définie de la façon suivante [35] :

$$(1.10) \quad D : E \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ D(x, \lambda) = \log [f^* / f_\lambda(x)]$$

où  $f^*$  est tel que

$$f^* \geq \max \{f_\lambda(x) / \lambda \in \mathbb{L}, x \in E\}$$

Ainsi, en utilisant les expressions (1.9),

$$(1.11) \quad \begin{aligned} R(\lambda, i, P) &= \sum_{x \in P_i} \log [f^* / f_\lambda(x)] \\ &= \log [f^{* |P_i|} / \prod_{x \in P_i} f_\lambda(x)] \quad |P_i| = \text{card } P_i \\ &= |P_i| \times \alpha e - \log \prod_{x \in P_i} f_\lambda(x) \end{aligned}$$

d'où  $\forall (L, P) \in \mathbb{L}_k \times \mathbb{P}_k$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} W(L, P) &= \alpha e \times \sum_{i=1}^k |P_i| - \sum_{i=1}^k \log \prod_{x \in P_i} f_{\lambda_i}(x) \\ &= N \times \alpha e - \log \prod_{i=1}^k \prod_{x \in P_i} f_{\lambda_i}(x) \end{aligned}$$

Dans l'application de l'algorithme, pour trouver le couple (L,P) qui minimise W, nous sommes donc conduits à maximiser

$$(1.13) \quad \prod_{i=1}^k \prod_{x \in P_i} f_{\lambda_i}(x)$$

Remarque : La définition de l'application D par la relation (1.10) entraîne que les estimateurs  $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  obtenus à partir de  $P = (P_1, \dots, P_k)$  par la fonction g soient les estimateurs du maximum de vraisemblance.

### 1.3. Application pratique de la méthode définie en 1.2.

Dans l'application pratique de l'algorithme décrit précédemment, nous avons considéré comme famille de densités connue la famille exponentielle. Nous avons aussi fixé  $k = 2$  pour la raison suivante : les résultats obtenus par Anne Schroeder nous conduisaient à cette hypothèse et, ainsi, il y avait déjà quelque information dont on voulait profiter.

La fonction densité a donc la forme

$$(1.14) \quad f(x) = p f_{\lambda_1}(x) + (1-p) f_{\lambda_2}(x)$$

où  $f_{\lambda_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x} \quad i = 1, 2$

Pour initier l'application de l'algorithme, nous avons commencé par partager l'échantillon donné

$E = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N)$  - (on représente par  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N$  les intervalles successifs entre défauts de page, obtenus durant une activation du programme) - en deux échantillons  $P_1^{(0)}$  et  $P_2^{(0)}$ , de la façon suivante.

On engendre une suite de nombres aléatoires  $(z_1, z_2, \dots, z_N)$ , de distribution uniforme dans l'intervalle  $]0, 1[$ , avec la taille de l'échantillon E. Etant donné un numéro r quelconque de l'intervalle  $]0, 1[$ , la partition des éléments de E par les sous-ensembles  $P_1^{(0)}$  et  $P_2^{(0)}$  est faite de la façon suivante

$$\begin{aligned} \text{si } z_i \leq N & \quad \text{alors} & \quad \lambda_i \in P_1^{(0)} \\ z_i > N & \quad \text{"} & \quad \lambda_i \in P_2^{(0)} \end{aligned}$$

Pour différentes valeurs de  $r$ , on obtient différentes partitions initiales. Dans notre application nous avons considéré  $r = .5, .6, .7, .8$  et  $.9$ .

Pour chaque partition initiale  $P^{(0)}$ , les estimateurs  $\lambda_1^{(0)}$  et  $\lambda_2^{(0)}$  de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $P_1^{(0)}$  et  $P_2^{(0)}$ , supposés échantillons issus de populations caractérisées par distributions exponentielles, de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Ainsi

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{1}{\bar{x}_{P_1^{(0)}}}, \quad \lambda_2^{(0)} = \frac{1}{\bar{x}_{P_2^{(0)}}}$$

La nouvelle partition  $P^{(1)} = (P_1^{(1)}, P_2^{(1)})$  est obtenue à partir de  $I = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$  en tenant compte de (1.10) et (1.5),

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= \{x \in E \mid f_{\lambda_1^{(0)}}(x) \geq f_{\lambda_2^{(0)}}(x)\} \\ P_2^{(1)} &= \{x \in E \mid f_{\lambda_2^{(0)}}(x) \geq f_{\lambda_1^{(0)}}(x)\} \end{aligned}$$

En général

$$P_1^{(i)} = \{x \in E \mid f_{\lambda_1^{(i-1)}}(x) \geq f_{\lambda_2^{(i-1)}}(x)\}$$

$$P_2^{(i)} = \{x \in E \mid f_{\lambda_2^{(i-1)}}(x) \geq f_{\lambda_1^{(i-1)}}(x)\}$$

et

$$\lambda_1^{(i)} = \frac{1}{\bar{x}_{P_1^{(i)}}}, \quad \lambda_2^{(i)} = \frac{1}{\bar{x}_{P_2^{(i)}}}$$

Nous poursuivons les calculs jusqu'à obtenir deux couples  $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)})$  et  $(\lambda_1^{(i+1)}, \lambda_2^{(i+1)})$ , tels que

$$| (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}) - (\lambda_1^{(i+1)}, \lambda_2^{(i+1)}) | \leq \delta$$

où  $\delta$  est fixé et suffisamment petit.

Pour les différents couples finals obtenus en considérant les différentes partitions initiales, nous calculons la valeur de l'expression

$$\prod_{x \in P_1} f_{\lambda_1}(x) \cdot \prod_{x \in P_2} f_{\lambda_2}(x)$$

et le couple que donne la valeur maximale est l'estimateur  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  de  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

La valeur  $p$ , dans l'expression (1.14) est estimée par

$$p^* = \frac{\text{card } P_1^*}{N}$$

où  $P_1^*$  est l'échantillon à partir duquel on a obtenu  $\lambda_1^*$ .

Pourtant tous les résultats que nous avons obtenus sont très mauvais, c'est-à-dire la distribution globale obtenue, considérée comme estimateur de la distribution de la population dont nos données sont un échantillon, a été rejetée par le test du  $\chi^2$ .

On présente dans la suite, les résultats obtenus (programmes MELEXP et TESTQUI2 , de l'anexe II)

a) Taille  $s$  de la mémoire réelle : 10

Taille  $N$  de l'échantillon : 25974

1. Estimateurs obtenus

$$\lambda_1^* = . 01065$$

$$\lambda_2^* = . 1246$$

$$p^* = . 3547$$

d'où l'estimation  $f^*$  de la fonction densité  $f$

$$f^*(x) = .0038e^{-.0106x} + .0804e^{-.1246x}$$

$$\text{Alors } F^*(x) = 1 - .3547e^{-.0106x} - .6453e^{-.1246x}$$

est la fonction de répartition correspondant.

## 2. Test d'ajustement

Le test d'ajustement qu'on a considéré pour tester l'hypothèse

$$H_0 : F = F^*$$

où  $F$  est la fonction de distribution d'une variable aléatoire  $X$  dont notre échantillon constitue un ensemble de  $N$  observations, a été le test du  $\chi^2$ .

Dans l'hypothèse que nous avons faite, concernant la fonction densité  $f$ , on n'a spécifié que sa forme et on a dû estimer les paramètres  $\lambda_1$ . Ainsi, nous avons considéré la variable aléatoire

$$K_n(\Lambda_n^*) = \sum_{i=1}^r \left[ \frac{X_i - np_i(\Lambda_n^*)}{\sqrt{np_i(\Lambda_n^*)}} \right]^2$$

où  $r$  est le nombre d'intervalles  $I_1, \dots, I_r$  considérés en  $\mathbb{R}^+$

$X_i$  est le nombre de répétitions de  $E_i = \{w : X(w) \in I_i\}$  dans un échantillon de taille  $n$

$$p_i(\Lambda^*) = P_{\Lambda^*}(E_i)$$

On sait que [16, page 306],

$$K_n(\Lambda_n^*) \xrightarrow[\text{en loi}]{} \chi_{r-\ell-1}^2$$

où  $\ell$  est le nombre de paramètres estimés.

Pour tester l'hypothèse  $H_0$  on prend comme région d'acceptation de seuil  $\alpha$ ,

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : k_n(x; \Lambda_n^*) \leq \chi^2(\alpha)\}$$

où

$$P \{ \chi_{r-\ell-1}^2 \geq \chi^2(\alpha) \} = \alpha$$

Dans notre cas les valeurs obtenues ont été

$$k_N(x; \Lambda_N^*) = 8384$$

Nombre de degrés de liberté : 44

Comme les tables usuelles du  $\chi^2$  ne couvrent pas la région pour laquelle le nombre de degrés de liberté  $\nu > 30$ , on a dû employer l'approximation suivante [24, page 294].

$$U = \sqrt{2 \chi^2} - \sqrt{2\nu-1} \rightsquigarrow N(0,1)$$

Dans l'exemple numérique traité

$$u = 120.2$$

Pour  $\alpha = .05$ , la région d'acceptation est l'intervalle  $]-\infty, 1.65]$  d'où la conclusion suivante.

3. Conclusion : on rejette l'hypothèse  $H_0$

b) Taille  $s$  de la mémoire réelle : 20

Taille  $N$  de l'échantillon : 3040

1. Estimateurs obtenus :

$$\lambda_1^* = .01958$$

$$\lambda_2^* = .001365$$

$$p^* = .5931$$

$$f^*(x) = .0116\ell \begin{matrix} -.0196x & -.0014x \\ +.0006\ell \end{matrix}$$

$$F^*(x) = 1 \begin{matrix} -.0196x & -.0014x \\ -.5931\ell & -.4069\ell \end{matrix}$$

2. Hypothèse  $H_0 : F = F^*$

$$K_N(x; \Lambda_N^*) = 1634$$

nombre de degrés de liberté : 70

Approx. gaussienne  $u = 45.38$

3. Conclusion : On rejette l'hypothèse  $H_0$

c) Taille  $s$  de la mémoire réelle : 30

Taille  $N$  de l'échantillon : 446

1. Estimateurs obtenus :

$$\lambda_1^* = .007209$$

$$\lambda_2^* = .0002503$$

$$\rho^* = .4641$$

$$f^*(x) = .033l \begin{matrix} -.0072x \\ + .0001l \end{matrix} \begin{matrix} -.0003x \\ + .0001l \end{matrix}$$

$$F^*(x) = 1 \begin{matrix} -.0072x \\ -.4641l \end{matrix} \begin{matrix} -.0003x \\ -.5359l \end{matrix}$$

2. Hypothèse  $H_0 : F = F^*$

$$K_N(x; \Lambda_N^*) = 1634$$

nombre de degrés de liberté : 33

approx. gaussienne,  $u = 42.23$

3. Conclusion : On rejette l'hypothèse  $H_0$ .

#### 1.4. Conclusion

A ce point-là, nous avons décidé d'abandonner cette méthode, parce que nous n'avons aucune autre information qui nous permettrait de juger sur le nombre de phénomènes aléatoires indépendants que nous avons supposé influencer nos données et qui nous ont conduit à l'hypothèse initiale.

De même, nous n'avons aucune information sur le type de fonctions composantes du mélange.

Toutefois, si on connaissait le type et le nombre de fonctions composantes du mélange, l'application de la méthode d'Anne Schroeder ne serait pas un garant d'obtenir le couple optimal  $(L,P)$  en entendant par couple optimal, le couple qui minimise le critère choisi. Pour chaque couple initial  $(L^{(0)}, P^{(0)})$ , nous calculons un minimum local. C'est seulement après un calcul exhaustif de tous ces minimums qu'on pourrait s'assurer d'obtenir le minimum global. Il est évident que ce calcul est impossible (dans la pratique, ce problème se simplifie parce que, surtout quand les classes sous-jacentes sont bien distinguables, le nombre de ces minimums est assez restreint

De plus, ce minimum global dépend aussi de la définition du critère  $W$ . Pour différents critères on obtiendra différents estimateurs pour la fonction  $f$ . A notre avis, on doit même conjuguer le critère à optimiser avec le type de fonction qu'on suppose connue. Le critère que nous avons appliqué nous a conduit aux estimateurs du maximum de vraisemblance. Ces estimateurs existent et sont uniques pour la distribution exponentielle, mais, toutes les distributions de probabilité n'ont pas cette particularité.

Pourtant, cette méthode a un aspect très agréable qui le rend très différent de toutes les autres méthodes connues, pour estimer les composants d'un mélange : c'est la facilité du traitement algébrique de l'algorithme utilisé.

D'ailleurs, le problème de séparer une population hétérogène en plusieurs populations homogènes, est un problème qui n'est pas encore résolu. La plus grande partie de la bibliographie existante à ce sujet traite le problème

du point de vue théorique. Dans le cas où il est possible de spécifier l'hypothèse nulle (la plupart des fois cette spécification est difficile), le traitement algébrique employé pour trouver la solution est très compliqué.

De plus, la plupart des algorithmes décrits traitent le problème de mélanges de populations de loi normale et, presque toujours, le cas unidimensionnel.

Conclusion Nous avons un problème bien spécifique, pour lequel nous voulons trouver, si possible, une solution. Or, nous pensons que, en insistant trop sur l'hypothèse  $H$ , nous courrions le risque de nous éloigner de notre objectif, parce que l'outil de traitement de cette hypothèse est lui-même un problème.

Ainsi, on a décidé d'abandonner l'hypothèse du processus de renouvellement, dont la loi est un mélange d'exponentielles.

La généralisation naturelle du modèle du processus de renouvellement est prendre un modèle d'un processus de Markov. L'étude de ce modèle est l'objet du paragraphe 2.

## 2. MODELES MARKOVIENS D'ORDRE 1

### 2.1. Rappels sur les chaînes de Markov

Nous rappelons la définition de chaîne de Markov et les principales propriétés qui nous seront utiles par la suite. On énoncera aussi quelques théorèmes, sans les démontrer.

Pour les rappels, on a suivi les oeuvres de Karlin [23] et de Feller [14].

#### 2.1.1. Définitions

Considérons une famille de variables aléatoires  $X_t$ , où  $t$  est un paramètre décrivant un ensemble d'indices  $T$ .

Représentons par  $S$  l'ensemble des valeurs possibles de chaque v.a.  $X_t$ , qu'on appellera d'espace des états.

On dit que le processus stochastique défini par les v.a.  $X_t$  est un processus de Markov si

$$\begin{aligned} & t_1 < t_2 < \dots < t_n < t \\ (2.1) \quad & \Pr \{a < X_t \leq b \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n\} = \\ & = \Pr \{a < X_t \leq b \mid X_{t_n} = x_n\} \end{aligned}$$

La fonction

$$(2.2) \quad P(x,s;t,A) = \Pr \{X_t \in A \mid X_s = x\}$$

où  $A$  est un intervalle de la droite réelle, est appelée probabilité de transition. Si cette fonction ne dépend que de  $t-s$ , on dit que le processus de Markov a des probabilités stationnaires.

Une chaîne de Markov discrète  $\{X_n\}$ , est un processus dont l'espace des états est un ensemble fini ou dénombrable et pour lequel  $T = (0,1,2,\dots)$ .

Dans la suite, on représentera l'espace des états au moyen des entiers non négatifs  $(0, 1, 2, \dots)$  ; on dira donc que  $X_n$  est dans l'état  $i$ , si  $X_n = i$ .

Nous nous limiterons aux chaînes de Markov avec des probabilités de transition stationnaires. Les probabilités de transition en une étape seront représentées par la matrice  $P = [p_{ij}]$ , appelée matrice de transition ou matrice de Markov de la chaîne.

Un processus de Markov est complètement déterminé si on connaît la matrice  $P$  et la distribution de probabilités initiales  $P\{X_0 = i\} = p_i$ ,  $i \in S$ .

### 2.1.2. Notion d'irréductibilité

On dit que l'état  $j$  est accessible à partir de l'état  $i$ , s'il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $p_{ij}^{(n)} > 0$  (on représente par  $p_{ij}^{(n)}$  la probabilité de transition en  $n$  étapes, c'est-à-dire, le terme général de  $P^n$ ).

On dit que deux états  $i$  et  $j$  communiquent s'ils sont accessibles, chacun l'un à l'autre, et l'on écrit  $i \leftrightarrow j$ . Ce concept de communication est une relation d'équivalence, donc on peut partager l'ensemble des états en classes d'équivalence où chaque classe est constituée par les états qui communiquent entre eux. Si cette relation d'équivalence n'entraîne qu'une seule classe d'équivalence, on dit que la chaîne de Markov est irréductible.

### 2.1.3. Périodicité d'une chaîne de Markov

On définit la période de l'état  $i$ ,  $d(i)$ , comme le plus grand diviseur commun de tous les entiers  $n \geq 1$ , pour lesquels  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .

Une chaîne de Markov dans laquelle tous les états ont une période égale à 1, est appelée aperiodique.

### 2.1.4. Notion de récurrence

Représentons par  $f_{jk}^{(n)}$  la probabilité que le système, étant dans l'état  $j$ , retourne la première fois à l'état  $k$ , après exactement  $n$  étapes.

On dit qu'un état  $i$  est récurrent si et seulement si

$$(2.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$$

Un état non récurrent est appelé transitoire.

Propriété : si  $i \leftrightarrow j$  et si  $i$  est récurrent, alors  $j$  est récurrent.

Ainsi, tous les états d'une classe d'équivalence sont récurrents ou non récurrents.

Il existe donc une partition unique  $C_i, i \in I$ , de l'ensemble des états récurrents telle que chacun des  $C_i, i \in I$  est une des classes d'équivalence induites par la relation d'irréductibilité. Les parties  $C_i$  sont appelées [31], classes de récurrence du processus.

Si  $i$  est un élément d'une classe récurrente apériodique,

$$(2.4) \quad \mu_i = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

représente l'instant moyen de récurrence. Si  $\mu_i > 0$ , on dit que l'état est récurrent positif. Si  $\mu_i = 0$ , on dit que l'état est récurrent nul.

Dans une classe récurrente, tous les états sont soit récurrents positifs, soit récurrents nuls. On parlera de la classe comme récurrente positive ou récurrente nulle. On utilise aussi, respectivement, les termes ergodique forte et ergodique faible.

On aura besoin dans la suite de quelques résultats concernant la théorie des matrices dont on donnera un bref résumé.

### 2.1.5. Méthodes algébriques dans les chaînes de Markov

#### 2.1.5.1; Rappels sur les matrices carrées non négatives

On dit qu'une matrice carrée est réductible [9] si, par une permu-

tation des lignes et des colonnes, on peut obtenir une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

où B est une matrice carrée. Dans le cas contraire, la matrice est dite irréductible.

La notion d'irréductibilité pour une matrice de transition P correspond à la notion d'irréductibilité de la chaîne de Markov associée.

Théorème de Perron-Frobenius ([9], page 120)

Soit A une matrice non négative et irréductible. Alors on a les résultats suivants :

- i) A a une valeur propre réelle positive  $\lambda_1$ .
- ii) Il existe un vecteur propre x, correspondant à  $\lambda_1$  dont les éléments sont tous positifs, tels que  $Ax = \lambda_1 x$ .
- iii) Pour toute valeur propre  $\alpha$  de A

$$|\alpha| \leq \lambda_1$$

- iv)  $\lambda_1$  croît quand un élément de A croît.
- v)  $\lambda_1$  est une racine simple de l'équation

$$|\lambda I - A| = 0$$

- vi)  $\lambda_1 \leq \max_j (\sum_k a_{jk})$ ,  $\lambda_1 \leq \max_k (\sum_j a_{jk})$

On dit que la matrice A est primitive si  $\lambda_1$  est la seule valeur propre de module 1 et toutes les autres sont inférieures.

2.1.5.2. Relations entre les valeurs propres de la matrice de transition P et les notions de récurrence et de périodicité de la chaîne

Considérons une matrice de transition P. Cette matrice a une valeur propre égale à 1 parce que

$$P \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

où  $\mathbf{1}$  est un vecteur colonne dont les éléments sont tous égaux à 1.

D'autre part, et d'après le théorème de Perron-Frobenius, nous pouvons conclure que aucune des autres valeurs propres ne peut excéder 1 en module.

THEOREME ([23], page 105)

Si P est une matrice de Markov finie, la multiplicité de la valeur propre 1 est égale au nombre de classes récurrentes associées à P.

De ce théorème, nous tirons la conclusion que si la chaîne de Markov est irréductible, alors il y a une seule valeur propre égale à 1.

THEOREME ([23], page 110)

Si P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie, périodique de période d et irréductible, les racines d-ièmes de l'unité sont alors des valeurs propres de P, chacune avec la multiplicité un, et il n'y a pas d'autres valeurs propres de module un.

Conclusion. Si la chaîne de Markov est irréductible et apériodique, alors la matrice de transition de la chaîne a une seule valeur propre égale à 1 et toutes les autres valeurs propres sont en module inférieures à 1.

2.1.6. Détermination des expressions explicites pour les probabilités de transition à n étapes

Considérons une chaîne de Markov irréductible, apériodique et récurrente, à p états 1...p.

Supposons qu'à l'état initial le système se trouve dans un certain état i. Désignons par  $v_n$  et  $u_n$ , respectivement les probabilités  $f_{ii}^{(n)}$  et  $p_{ii}^{(n)}$ ,

$$v_n = f_{ii}^{(n)} \quad , \quad u_n = p_{ii}^{(n)}$$

Par convention,  $u_0 = 1$  et  $v_0 = 0$ .

On a l'égalité suivante :

$$(2.5) \quad u_n = u_0 v_n + u_1 m_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Soient  $V(z)$  et  $U(z)$ , les fonctions génératrices des probabilités  $\{v_n\}$  et  $\{u_n\}$

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$$

THEOREME ([14], page 311)

Les fonctions génératrices de  $\{v_n\}$  et  $\{u_n\}$  satisfont la relation suivante :

$$(2.6) \quad U(z) = \frac{1}{1 - V(z)}$$

Dans la suite, on va essayer d'obtenir des expressions explicites pour les probabilités de transition en  $n$  pas, soit  $p_{ij}^{(n)}$ .

Soit  $j$  et  $k$  fixés. La fonction génératrice des probabilités  $p_{jk}^{(n)}$  est :

$$(2.7) \quad P_{jk}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jk}^{(n)} s^n$$

Multipliant par  $s p_{ij}$  et additionnant sur  $j = 1, \dots, p$ , on a

$$(2.8) \quad s \sum_{j=1}^p p_{jk}(s) P_{jk}(s) = P_{ik}(s) - p_{ik}^{(0)}$$

où

$$p_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Pour  $k$  et  $s$  fixés, les quantités  $z_j = P_{jk}(s)$  vérifient un système d'équations linéaires de la forme

$$(2.9) \quad z_i - s \sum_{j=1}^p p_{ij} z_j = p_{ik}^{(0)}$$

Les solutions du système sont des fonctions rationnelles de  $s$ , de dénominateur commun  $D(s)$  qui est le déterminant du système.

Si on fait le changement de variable  $s = t^{-1}$ ,  $t^p D(t^{-1})$  est un polynôme caractéristique de la matrice  $Q$ . Ses racines  $t_1, t_2, \dots, t_p$  sont les valeurs propres de la matrice de transition  $Q$ .

Admettons que toutes les valeurs propres sont distinctes et différentes de zéro. Compte-tenu de l'étude des fonctions rationnelles, on peut

écrire :

$$(2.10) \quad P_{jk}(s) = \frac{b_{jk}^{(1)}}{1-st_1} + \frac{b_{jk}^{(2)}}{1-st_2} + \dots + \frac{b_{jk}^{(p)}}{1-st_p}$$

$$\text{avec } |s| < \frac{1}{\max_i |t_i|}$$

Du développement en série entière des fractions, on obtient

$$(2.11) \quad p_{jk}^{(n)} = b_{jk}^{(1)} t_1^n + \dots + b_{jk}^{(p)} t_p^n$$

où les coefficients  $b_{jk}^{(v)}$  sont déterminés sans ambiguïté par les solutions de certains systèmes d'équations linéaires.

## 2.2. Description générale du modèle markovien

### 2.2.1. Définition du modèle

Soit  $E = \{1, \dots, n\}$  la mémoire virtuelle d'un certain programme, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les pages qui peuvent être référencées pendant l'exécution du programme.

Soit  $P_t$  la page référencée à l'instant  $t \in T$ ,  $T \subset [0, 1, 2, \dots]$ , et  $c_t$  le vecteur de dimension  $s$ , de terme général  $c_t^{(i)}$ ,

$$(2.12) \quad c_t \rightarrow [c_t^{(1)} \quad c_t^{(2)} \quad \dots \quad c_t^{(s)}] \quad , \quad i=1, \dots, s \quad c_t^{(i)} \in E$$

qu'on va utiliser pour représenter à l'instant  $t$  l'état de la mémoire réelle.

D'après ce qu'on a dit sur l'algorithme du LRU utilisé dans notre simulation, pour obtenir les configurations successives (ensemble de pages et ordination respective) de la mémoire réelle, dans les instants successifs, les pages sont rangées dans le vecteur  $c_t$  de la façon suivante : les pages les plus anciennement utilisées gardent les dernières places, et ceci par

ordre croissant d'ancienneté. C'est-à-dire,  $c_t^{(s)}$  est, à l'instant  $t$ , le numéro de la page la plus anciennement référencée, alors que la page qui se trouve dans la place  $c_t^{(1)}$  est la page référencée la plus récemment.

Si, à l'instant  $t+1$  la page  $P_{t+1}$  est référencée, alors, ou bien cette page  $\in c_t$  et se trouve dans la position  $i$ , et dans ce cas

$$(2.13) \quad c_{t+1} \rightarrow [c_t^{(i)} c_t^{(1)} c_t^{(2)} \dots c_t^{(i-1)} c_t^{(s)}] \\ \rightarrow [c_{t+1}^{(1)} c_{t+1}^{(2)} \dots c_{t+1}^{(s)}]$$

ou bien, c'est une page qui n'appartient pas à  $c_t$  et, dans ce cas

$$(2.14) \quad c_{t+1} \rightarrow [P_{t+1} c_t^{(1)} \dots c_t^{(s-1)}] \\ \rightarrow [c_{t+1}^{(1)} c_{t+1}^{(2)} \dots c_{t+1}^{(s)}]$$

Ainsi, l'événement  $A$  qui consiste en une page à faire défaut dans l'instant  $t$  n'est que l'intersection des deux événements suivants : la page est référencée dans l'instant  $t$  et elle ne se trouvait pas dans la mémoire réelle, ce qui veut dire qu'elle n'appartenait pas au vecteur  $c_t$ . Pour connaître la probabilité de l'événement  $A$  on a besoin de connaître la probabilité qu'une certaine page soit dans la position  $m$ ,  $m \leq s$ , de la mémoire réelle.

Les  $n(n-1)\dots(n-s+1)$ , différentes configurations possibles de la mémoire réelle, peuvent être considérées comme les états d'une chaîne de Markov, irréductible et ergodique forte<sup>(1)</sup>. Dans ces conditions et d'après le théorème ergodique pour les chaînes de Markov, il existe un comportement stationnaire du système qui est indépendant de l'état initial.

Si on représente par  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, n(n-1) \dots (n-s+1)$ , les probabilités limites d'occupation des états, on a

$$(2.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(n)} = u_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n(n-1)\dots(n-s+1)} u_k = 1$$

La distribution de probabilités  $\{u_k\}$ , peut être obtenue comme solution unique du système [14],

(1)

Qu'on démontrera dans le final du chapitre III.

$$(2.16) \quad u_k = \sum_{j=1}^{n(n-1)\dots(n-s+1)} u_j p_{jk}$$

Alors, la probabilité qu'une page  $i$  soit dans la position  $m$  de la mémoire réelle est donnée par

$$(2.17) \quad p(i,m) = \sum_B u_j$$

où  $B$  est l'ensemble des états  $j$  pour lesquels la page  $i$  se trouve dans la position  $m$ .

Dans la pratique, la matrice de transition  $P = [p_{ij}]$ , ne peut pas être calculée, à cause de sa grande taille, d'où la distribution  $\{u_k\}$  ne peut être obtenue à partir de (2.16).

### 2.2.2. Quelques résultats utiles

Cependant, il y a un problème, celui de l'organisation d'un ensemble de livres sur une étagère, qui est traité par des modèles de chaînes de Markov analogues au nôtre (voir [19], [6], [20], [5]), et dont les résultats sont susceptibles d'être appliqués par nous.

Dans [19], Heindricks considère le modèle suivant : on a un ensemble de livres  $B_1, B_2, \dots, B_N$ , qui sont rangés dans une étagère. Quand on demande un livre, on le retire et, avant la demande suivante, on le place à gauche de tous les autres, lesquels sont tous déplacés vers la droite, pour lui faire place. Les demandes sont supposées indépendantes et on demande  $B_i$  avec probabilité  $p_i$ . Les  $N!$  configurations possibles des livres dans l'étagère sont considérées comme les états d'une chaîne de Markov, irréductible et apériodique.

Il existe donc les probabilités limites  $u_k$  d'occupation des états pour lesquels on trouve l'expression suivante :

$$(2.18) \quad u_k = \prod_{n=1}^N \left( \frac{p_{i_n}}{\sum_{j=n}^N p_{ij}} \right) \quad k = 1, 2, \dots, N!$$

où  $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_N}\}$  est la configuration correspondant à l'état  $k$ .

Dans ce papier [19] un problème reste ouvert : la détermination de la probabilité  $p(i,n)$  que le livre  $B_i$  soit dans la position  $n$ . Ce problème est résolu par Burville et Kingman [6] qui donnent l'expression suivante pour la probabilité

$$(2.19) \quad p(i,n) = p_i \sum_{a=0}^{n-1} (-1)^{n-1-a} \binom{N-1-a}{n-1-a} \sum_{\substack{|B|=a \\ B \neq i}} [1 - P(B)]^{-1}$$

où 
$$P(B) = \sum_{j \in B} p_j$$

2.2.3. Application des résultats de 2.2.2. au modèle défini en 2.2.1.

Sur le processus stochastique  $(P_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , défini en I-2, on fera les hypothèses suivantes :

a) Pour toute famille  $t_1, t_2, \dots, t_p$  d'entiers positifs, deux à deux distincts, les variables aléatoires

$$P_{t_1}, P_{t_2}, \dots, P_{t_p} \text{ sont indépendantes.}$$

b) Toutes les variables aléatoires  $P_t$  ont la même distribution, définie par

$$\forall t, \forall j \in E, \text{Prob}(\{P_t = j\}) = \beta_j$$

c)  $\forall j, \beta_j$  est différent de zéro.

Avec ces hypothèses, la probabilité qu'une page  $i$  soit dans la position  $m$ ,  $m \leq s$ , de la mémoire réelle, est donnée par

$$(2.20) \quad p(i,m) = \beta_i \sum_{a=0}^{m-1} (-1)^{m-1-a} \binom{n-1-a}{m-1-a} \sum_{\substack{|B|=a \\ B \neq i}} [1 - P(B)]^{-1}$$

où 
$$P(B) = \sum_{j \in B} \beta_j.$$

Alors, la probabilité qu'une page  $i$  soit dans la mémoire réelle est donnée par

$$(2.21) \sum_{m=1}^s p(i,m) = \beta_i \sum_{m=1}^s \left\{ \sum_{a=0}^{m-1} (-1)^{m-1-a} \binom{n-1-a}{m-1-a} \sum_{\substack{|B|=a \\ B \neq i}} 1 - P(B) \right\}^{-1}$$

d'où la probabilité de la page  $i$  faire défaut, c'est-à-dire la probabilité de l'évènement  $A$ , est :

$$(2.22) P(A) = \beta_i \left\{ 1 - \beta_i \sum_{m=1}^s \left[ \sum_{a=0}^{m-1} (-1)^{m-1-a} \binom{n-1-a}{m-1-a} \sum_{\substack{|B|=a \\ B \neq i}} [1 - P(B)]^{-1} \right] \right\}$$

Note : Les probabilités  $\beta_i$  ne sont pas connues. Pour les obtenir statistiquement, il suffit de prendre la fréquence des références qui, au cours d'une exécution concernent la page  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### 2.3. Un modèle markovien d'ordre 1

Il y a aussi d'autres façons d'envisager le problème de modélisation du processus des défauts de page, en considérant, de même, les chaînes de Markov. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, les articles de Franklin et Gupta [18] et Bogott et Franklin [2].

Dans ces travaux, ils ont considéré un modèle ayant pour base un graphe dirigé,  $G \equiv [N, A]$ , construit de la façon suivante.

Les noeuds  $N$  et les arcs du graphe sont respectivement les pages et les transitions entre les pages ; les transitions entre les pages et les probabilités de leur occurrence sont obtenues à partir de la trace complète du programme.

Chaque arc  $(\alpha, \beta)$  correspond à une transition de la page  $\alpha$  pour la page  $\beta$ . A l'arc  $(\alpha, \beta)$  on a associé le nombre  $n_{\alpha\beta}$  de fois que la page  $\beta$  suit la page  $\alpha$ .

Ce numéro sera utilisé pour obtenir la probabilité de transition  $p_{\alpha\beta}$  de la page  $\alpha$  pour la page  $\beta$ . Pour obtenir  $p_{\alpha\beta}$ , il suffit de diviser le numéro  $n_{\alpha\beta}$  pour  $n_{\alpha}$ , qui est le nombre d'arcs qui ont pour origine  $\alpha$ .

Le graphe ainsi obtenu est considéré comme un modèle de Markov de premier ordre, c'est-à-dire que les noeuds et les arcs représentent les états et les probabilités de transition d'une chaîne de Markov, où les probabilités de transition entre les états ne dépendent que de l'état précédent.

La matrice  $P = (p_{\alpha\beta})$ ,  $\alpha, \beta \in N$ , est la matrice de transition entre les pages et on la considère comme la matrice de transition de la chaîne de Markov considérée.

Bogott et Franklin ont construit un programme qui simule la gestion de la mémoire réelle, et ont pris comme données soit la trace complète des références aux pages virtuelles du programme à analyser, soit la matrice de transition du modèle de Markov considéré.

Pour chaque ensemble de données, la simulation leur a permis d'obtenir, pour différentes tailles de la mémoire réelle et pour les algorithmes IRU, FIFO et RANDOM, le nombre de défauts de pages : on remarque qu'ils se sont intéressés plutôt au nombre de défauts de page qu'aux instants où se vérifient ces défauts. Ainsi, pour chaque algorithme, ils ont fait une étude comparative entre les deux courbes qu'on obtient quand on considère les probabilités de défauts de page - rapport du nombre de défauts au nombre d'accès à la mémoire - pour les différentes tailles de la mémoire réelle.

D'ailleurs, presque tous les travaux qu'on a examinés, sur les défauts de page, donnent des résultats, surtout en ce qui concerne la performance de l'algorithme utilisé.

Le seul travail qu'on a trouvé et qui, d'après nous, fait une analyse statistique plus profonde, a été celui de Lewis et Sheddler (28). Ici, ils font l'analyse d'un programme, à partir de trois traces de défauts de page, obtenues en utilisant l'algorithme LRU, et en prenant trois tailles différentes pour la mémoire réelle. Dans ce papier, ils ont essayé de construire un modèle pour le processus des défauts de page et ont commencé par un modèle de Poisson.

Ce modèle s'est montré tout de suite inadéquat. Après, ils ont formulé l'hypothèse selon laquelle le processus serait un processus de renouvellement. Les tests utilisés pour vérifier cette hypothèse l'ont rejetée aussi (remarquons que ces résultats sont en accord avec ceux que nous avons obtenus au chapitre II, paragraphe 1).

Finalement, ils ont supposé qu'il y avait deux types d'intervalles,  $X_j$ , entre défauts de pages, avec des fonctions de densités  $p_1(x)$  et  $p_2(x)$ , et ont formulé un modèle semi-Markovien à deux états dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_1 \\ 1-\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= P [X_j \in p_1(x) \mid X_{j-1} \in p_1(x)] & \alpha_2 &= P[X_j \in p_2(x) \mid X_{j-1} \in p_2(x)] \\ 1-\alpha_1 &= P [X_j \in p_2(x) \mid X_{j-1} \in p_1(x)] & 1-\alpha_2 &= P[X_j \in p_1(x) \mid X_{j-1} \in p_2(x)] \end{aligned}$$

Pour l'estimation des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et des paramètres des fonctions densités  $p_1(x)$  et  $p_2(x)$  dont le type a été supposé connu, trop d'hypothèses ont dû être faites, quelques-unes liées aux caractéristiques du programme en étude. Par exemple, pour une certaine taille de la mémoire réelle, il est supposé que les intervalles de type I sont ceux qui ont une longueur supérieure à 30 000 unités. Pour d'autres programmes, cette hypothèse n'est plus valable. Ainsi, il est très difficile de schématiser la méthode d'estimation.

D'ailleurs, dans l'analyse du modèle proposé dans ce papier, seulement ont été considérées trois tailles de la mémoire réelle, donc il n'a pas été étudié la variation des paramètres estimés, par rapport à la taille de la mémoire réelle qui est le problème fondamental.

De plus, ce modèle n'est pas complètement satisfaisant. La conclusion de son analyse est qu'on doit considérer trois types d'intervalles plutôt que deux types ; donc le modèle plus convenable serait celui d'une chaîne de Markov à trois états.

En faisant un petit résumé de ce qu'on a dit jusqu'ici, nous sommes arrivés à la situation suivante : les modèles les plus simples comme celui des accroissements indépendants, et celui de Poisson, ne s'adaptent pas.

Ainsi, on a décidé de prendre le modèle décrit dans la suite.

## 2.4. Modèle des retours d'une chaîne de Markov à l'état initial

### 2.4.1. Définition du modèle

Pour la définition de ce nouveau modèle, nous continuons toujours à considérer comme données expérimentales les réalisations du processus ponctuel à temps discret  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , pour  $s = 10, 20$  et  $30$ .

Comme ce processus s'est montré très difficile à étudier directement, on a essayé de trouver une chaîne de Markov  $M$  à  $p+1$  états, notés  $0, 1, \dots, p$ , définie par une matrice de transition  $Q$  et un système de probabilités initiales qui puisse simuler le comportement du processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Hypothèse  $(H_2)$  : Les retours de la chaîne de Markov  $M$  à l'état initial  $0$  simulent les instants  $\Pi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , pour lesquels l'évènement du processus ponctuel  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , se vérifie.

Ainsi, nous associons le passage du système  $M$  dans l'état  $0$ , à l'occurrence d'un défaut de page.

Dans un langage plus formel, qu'on a introduit en II.2.2, nous dirons que le système à l'instant  $k$  retourne dans l'état  $0$  quand se vérifie l'évènement  $E_k$  suivant : la page  $P_k \in C_{k-1}$ .

Ainsi, en considérant une réalisation du système  $M$  et en étudiant les passages du système dans l'état  $0$ , on obtiendra une simulation du processus  $(\Pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Notre objectif est de déduire des renseignements concernant la matrice  $Q$  et donc les caractéristiques du modèle sous-jacent.

### 2.4.2. Fractions rationnelles. Fonctions génératrices

Dans cette partie, on donnera un résultat assez important, concernant les fonctions génératrices et les fractions rationnelles. (Voir Paul Montel [30]).

LEMME - Pour qu'une série entière en  $s$  représente une fraction rationnelle, il faut et il suffit que ses coefficients vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Dem :

1) Condition nécessaire.

$$\text{Soit (2.23) } A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

une fraction rationnelle de la forme

$$(2.24) \quad A(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$$

où  $U(s)$  et  $V(s)$  sont des polynômes sans racines communes et de degré  $p-1$  et  $q$  respectivement. On suppose que  $p \leq q$

$$(2.25) \quad \begin{aligned} U(s) &= u_0 + u_1 s + \dots + u_{p-1} s^{p-1} \\ V(s) &= 1 + v_1 s + \dots + v_q s^q \end{aligned}$$

(on peut toujours admettre  $v_0 = 1$ , car on peut diviser les deux termes  $u(s)$  et  $v(s)$  par  $v_0 \neq 0$ ).

Alors

$$A(s) V(s) = U(s)$$

d'où la relation de récurrence

$$(2.26) \quad a_{n+q} + a_{n+q-1} v_1 + \dots + a_n v_q = 0 \quad n \geq 0$$

Donc, les  $a_n$  vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre  $q$  ou d'ordre moindre [30], suivant que le déterminant

$$(2.27) \quad d_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{q-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_q \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{q+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q-1} & a_q & \dots & a_{2q-2} \end{vmatrix}$$

est différent de 0 ou non. On suppose  $d_0 \neq 0$ .

Si la suite  $a_n$  vérifie une récurrence d'ordre  $q$ , on a

$$v_q a_n + v_{q-1} a_{n+1} + \dots + v_1 a_{n+q-1} + a_{n+q} = 0$$

$$v_q a_{n+1} + v_{q-1} a_{n+2} + \dots + v_1 a_{n+q} + a_{n+q+1} = 0$$

.....

$$v_q a_{n+q} + v_{q-1} a_{n+q+1} + \dots + v_1 a_{n+2q-1} + a_{n+2q} = 0$$

On en déduit que, quel que soit  $n$

$$D_n^q = D_{n+1}^q = D_{n+2}^q = \dots = 0$$

où

$$(2.28) \quad D_n^q = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+q} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+q+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+q} & a_{n+q+1} & \dots & a_{n+2q} \end{vmatrix}$$

2) Condition suffisante

Supposons que les coefficients  $a_n$  vérifient une récurrence linéaire d'ordre  $q$ , à coefficients constants,

$$v_q a_n + v_{q-1} a_{n+1} + \dots + v_1 a_{n+q-1} + a_{n+q} = 0$$

Si  $d_0 \neq 0$ , on a

$$a_n = \beta_1 t_1^n + \beta_2 t_2^n + \dots + \beta_q t_q^n$$

en désignant par  $t_1, t_2, \dots, t_q$ , les racines supposées distinctes de l'équation caractéristique

$$s^q + v_1 s^{q-1} + v_2 s^{q-2} + \dots + v_q = 0$$

On a alors

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \beta_1 \sum_{n=0}^{\infty} (t_1 s)^n + \beta_2 \sum_{n=0}^{\infty} (t_2 s)^n + \dots + \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} (t_q s)^n$$

$$(2.29) \quad \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{\beta_1}{1-t_1 s} + \frac{\beta_2}{1-t_2 s} + \dots + \frac{\beta_q}{1-t_q s}$$

qui converge pour  $|s| < \frac{1}{\max_i |t_i|}$

Si les racines ne sont pas toutes distinctes et s'il y a, par exemple, une racine d'ordre  $i$ , on aura le développement

$$(2.30) \quad \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{\beta_1}{1-st_1} + \frac{\beta_2}{(1-st_1)^2} + \dots + \frac{\beta_i}{(1-st_1)^i} + \frac{\beta_{i+1}}{1-st_{i+1}} + \dots + \frac{\beta_q}{1-st_q}$$

où les racines  $t_1, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_q$  sont distinctes.

Remarque : Dans la pratique, pour vérifier qu'une série entière  $A(s)$  est une fraction rationnelle, il suffit de vérifier que les déterminants

$D_n^q = D_{n+1}^q = \dots = 0$ , où  $q$  est le degré du polynôme  $V(s)$ .

2.4.3. Application des résultats de 2.1 et 2.4.2. au modèle défini en 2.4.1.

Sur le modèle de la chaîne de Markov M, à p+1 états 0,1,...,p, on fera l'hypothèse suivante :

Hypothèse : La chaîne de Markov M est irréductible et ergodique forte. De plus, sa matrice de transition Q, a toutes les valeurs propres distinctes.

THEOREME Soit V(z) la fonction génératrice du premier retour en zéro, du système défini par la chaîne de Markov M. Alors la fonction  $U(z) = \frac{1}{1-V(z)}$  est une fraction rationnelle admettant p+1 pôles simples, lesquels sont les inverses des valeurs propres de la matrice de transition Q.

Dem : De la relation (2.11) on a que

$$(2.31) \quad u_n = \alpha_1 t_1^n + \alpha_2 t_2^n + \dots + \alpha_{p+1} t_{p+1}^n$$

Le théorème découle immédiatement du Lemme de 2.4.2 et du raisonnement qui a conduit aux relations (2.10).

En admettant qu'une des valeurs propres est égale à 1, on obtient, à partir des relations antérieures, les relations suivantes

$$(2.32) \quad (u_k - u_{k-1}) - \Sigma_1 (u_{k-1} - u_{k-2}) + \Sigma_2 (u_{k-2} - u_{k-3}) + \dots + (-1)^p \Sigma_p (u_{k-p} - u_{k-p-1}) = 0$$

où  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$  sont les fonctions symétriques fondamentales des autres valeurs propres. C'est-à-dire

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i=1}^p t_i \\ \Sigma_2 &= \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^p t_i t_j \\ &\dots \dots \dots \\ \Sigma_p &= \prod_{i=1}^p t_i \end{aligned}$$



#### 2.4.4. Application pratique

En ce qui concerne la vérification pratique de ce modèle, nous avons commencé par estimer les valeurs des probabilités  $v_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Les estimateurs utilisés ont été

$$\frac{n_{00}^{(n)}}{n_0}$$

où  $n_{00}^{(n)}$  est le nombre de fois que le système passe de l'état 0 à l'état 0 en  $n$  pas, et  $n_0$  le nombre de passages dans l'état 0.

Sur les estimateurs utilisés, on peut faire les considérations suivantes [1].

Soit  $D$  un ensemble de paires  $(i, j)$  et considérons la classe des matrices de transition  $(p_{ij})_{s \times s}$ , tels que  $p_{ij} > 0$ , si et seulement si  $(i, j) \in D$ . Supposons que  $D$  est régulier, c'est-à-dire, les matrices de la classe considérée sont ergodiques fortes et irréductibles.

Représentons par  $n_{ij}$  le nombre de fois que, dans une réalisation, le système passe directement de l'état  $i$  à l'état  $j$  et par  $n_i$  le nombre total de passages en  $i$ . On a le théorème suivant ([1], page ).

THEOREME Si  $D$  est régulier, alors les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $p_{ij}$  sont

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

A partir des estimateurs  $\hat{v}_n$ , on a obtenu les estimateurs pour  $u_n$  en utilisant les relations (2.5). Une fois ces valeurs obtenues, on a vérifié que les coefficients de la fonction génératrice  $U(z)$ , satisfont à des relations de récurrence dont on a estimé l'ordre  $p$ , à partir des déterminants  $D(p, k)$ . Tous ces résultats se trouvent consignés dans le programme MEMOIRE de l'annexe II.

Ce programme permet donc :

- a) D'obtenir les estimateurs des probabilités  $u_n$
- b) De calculer les déterminants  $D(p, k)$ . Ce calcul doit être poursuivi jusqu'à

obtenir une valeur de p telle que

$$D(p,k) < 10^{-5} \quad , \quad \forall k \geq 2p+1$$

La valeur maximale considérée pour k a été k = 50.

c) De calculer la solution du système (2.3.4), après y avoir remplacé la valeur de p déjà obtenue. On obtient les valeurs de  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_p$ .

d) De calculer les racines du polynôme

$$s^P - s^{P-1} \epsilon_1 + s^{P-2} \epsilon_2 - \dots + (-1)^P \epsilon_p = 0$$

qui sont les valeurs propres de la matrice de transition Q.

Résultats (cf. tableaux des figures 10, 11, 12, 13 et 14)

1. Pour une taille de la mémoire réelle égale à 10, la valeur de p obtenue est

Les valeurs propres sont en module égales à

$$|t_1| = 1.1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 5$$

$$|t_2| = . \ 4 \ 6 \ 0 \ 0 \ 2$$

$$|t_3| = 1.1 \ 6 \ 8 \ 3 \ 2$$

$$|t_4| = 1.1 \ 6 \ 8 \ 3 \ 2$$

Ces valeurs ne sont pas en accord avec l'hypothèse faite sur l'ergodicité de la chaîne de Markov, selon laquelle toutes les valeurs devraient être, en module, inférieures à 1.

Pour une taille de la mémoire réelle égale à 20, on a obtenu les valeurs suivantes :

$$p = 4$$

$$\text{Valeurs propres : } |t_1| = .2 \ 9 \ 1 \ 0 \ 3$$

$$|t_2| = .2 \ 9 \ 1 \ 0 \ 3$$

$$|t_3| = 2.5 \ 0 \ 5 \ 7 \ 7$$

$$|t_4| = .3 \ 1 \ 3 \ 8 \ 4$$

Finalement, pour une taille de la mémoire réelle égale à 30, on a les résultats suivants :

$p = 3$

Valeurs propres :  $|t_1| = .2\ 4\ 6\ 3\ 9$

$|t_2| = .1\ 6\ 5\ 4\ 5$

$|t_3| = 3.3\ 5\ 5\ 2\ 4$

### Conclusion

Dans les trois applications pratiques considérées, les résultats ne sont pas en accord avec l'hypothèse faite sur la chaîne de Markov parce qu'il y a toujours des valeurs propres, en module, supérieures à 1.

Ainsi, on n'a pas pu conclure que ce modèle de la chaîne de Markov à  $p+1$ , était un modèle adéquate pour notre processus.

Il est convenable , à ce point-là, de remarquer le suivant : dans le programme MEMOIRE, on a eu besoin de faire appel à quelques sous-routines de la bibliothèque des programmes du CII, notamment pour le calcul des déterminants et des racines du polynôme. Or, ce peut être le cas, qu'on ait introduit des erreurs d'arrondissement et de troncature, de façon à falsifier les résultats.

Toutefois, le raisonnement développé dans ce paragraphe, nous semble très intéressant parce qu'il nous permet d'estimer l'ordre et les valeurs propres d'une matrice de transition  $Q$ , associés à une chaîne de Markov  $M$ , quand on ne connaît qu'un élément  $p_{ij}^{(n)}$ ,  $i$  et  $j$  fixés, de  $Q^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Tableau 1

NOMBRE DE PAGES EN MEMOIRE : 10

P= 3

DETERMINANTS (P,K)

.155243E-04	.118416E-04	.474302E-05	.129790E-04	.697462E-05	-.725018E-05
.433537E-05	.976691E-05	-.101704E-04	.106577E-05	-.109049E-05	-.316073E-05
.690463E-05	-.344525E-05	.102655E-04	-.743597E-05	-.526446E-05	.734717E-07
.023046E-05	-.473521E-05	.170903E-06	-.223335E-05	.361913E-05	-.220641E-05
.117338E-05	.239392E-06	-.14023E-05	.117012E-06	.247679E-05	-.640763E-06
-.221033E-05	-.221289E-06	.346035E-05	-.443497E-05	.600959E-05	-.256352E-05
.100478E-05	-.263296E-06	-.133109E-05	.353562E-05	-.328303E-05	.194101E-05
.191531E-06	-.119750E-05				

RACINES DU POLYNOME

.125751E+00	.000000E+00	-.165185E+00	.000000E+00	.353507E+01	.000000E+00
-------------	-------------	--------------	-------------	-------------	-------------

Fig.10

Tableau 2

NOMBRE DE PAGES EN MEMOIRE : 10

P= 4

DETERMINANTS (P,K)

.909224E-06	.3236736E-06	.537762E-06	-.105532E-05	.231931E-06	-.450762E-06
.3537-5E-06	.902501E-06	-.567329E-06	.245235E-08	.137613E-07	-.425095E-06
.571096E-06	-.480376E-06	.846554E-06	-.311263E-06	-.276233E-06	.172118E-07
.5603-5E-06	-.371311E-06	.539206E-07	-.225340E-06	.257101E-06	-.135045E-06
.605661E-07	-.496590E-07	-.112031E-06	.61054E-07	.190255E-05	-.021352E-07
-.102215E-06	-.185333E-06	.275303E-06	-.303767E-06	.507555E-06	-.123794E-06
-.116747E-06	.217562E-07	-.149539E-06	.279210E-06	-.200940E-06	.173431E-06

RACINES DU POLYNOME

.11-645E+01+.00000E+00I	-.46002-E-01+.00000E+00I	-.457915E+00+.106174E+01I
.407915E+00-.105174E+01I		

Tableau 3

NOMBRE DE PAGES EN MEMOIRE : 20

P = 3

DETERMINANTS (P,K)

.173652E-04	-.207668E-06	.849035E-05	.525315E-06	-.105911E-04	-.404373E-06
.135573E-06	.485615E-05	.467306E-05	.56905E-06	-.667501E-05	-.270201E-05
.599523E-05	.169472E-05	-.323391E-05	.591025E-05	.330173E-05	-.473181E-05
.700647E-05	.345530E-05	-.1-2161E-04	-.635137E-05	.272511E-05	.645867E-05
.429999E-05	-.367399E-05	-.864499E-05	.14223E-05	.387147E-05	.247122E-05
-.191355E-05	-.35914E-05	-.256131E-05	.237941E-05	.284797E-05	.971407E-06
.124667E-05	.130716E-06	.223343E-06	-.356450E-05	.117484E-05	-.155790E-05
.161521E-05	-.703170E-06				

PACINES DU POLYNOME

.100061E+00	.293197E+00	.189961E+00	-.298197E+00	.227099E+00	.000500E+00
-------------	-------------	-------------	--------------	-------------	-------------

Fig.12

Tableau 4

NOMBRE DE PAGES EN MEMOIRE : 20

P = 4

DETERMINANTS (P, F)

.05730E-06	.331494E-06	.125062E-06	.115724E-06	.177263E-07	.957720E-07
.12771E-07	.523213E-07	.514038E-07	.500059E-07	.206619E-06	.735478E-07
.350161E-06	.292045E-06	.582471E-07	.455827E-06	.426943E-06	.426542E-07
.051736E-07	.207732E-06	.809047E-07	.705470E-06	.156223E-06	.139966E-06
.723051E-07	.750078E-07	.719079E-06	.664323E-07	.550263E-07	.171178E-07
.103479E-05	.859237E-07	.147293E-06	.735403E-07	.219371E-06	.220240E-06
.107444E-06	.155403E-06	.255051E-07	.181608E-07	.958221E-07	.137452E-06

RACINES DU POLYME

.24422E-01	.200061E+001	.24422E-01	.290061E+001	.250577E+001	.000000E+001
.318337E+001	.000000E+001				

Tableau 5

NOMBRE DE PAGES EN MEMOIRE : 30

P = 3

DETERMINANTS (P,K)

.105146E-07	-.475946E-10	-.756697E-10	-.45313-E-10	-.137906E-06
.115149E-06	.261737E-07	-.153170E-06	.253623E-06	.462290E-07
-.14321E-06	-.156379E-06	-.202319E-05	-.295952E-05	.434494E-05
.797213E-06	-.525225E-06	-.104764E-06	.112031E-06	.265648E-07
-.454437E-06	.154337E-06	-.161533E-06	.260702E-06	.366900E-07
-.577392E-06	.486714E-06	-.571917E-07	-.104115E-05	-.786654E-06
.557046E-06	.103235E-06	-.137167E-06	-.276783E-06	.607020E-07

RACINES DU POLYNOME

.246793E+03+.000000E+00I      -.165433E+00+.000000E+00I      .335524E+01+.000000E+00I

## CHAPITRE III

### DEFINITION D'UN MODELE POUR UN PROCESSUS PONCTUEL A VALEURS VECTORIELLES.

#### 1. PRESENTATION DES HISTOGRAMMES

Jusqu'ici, on a considéré le processus  $\Pi_j$  comme un processus ponctuel à temps discret. Dans le champ d'action de la statistique descriptive qu'on essaye d'utiliser, c'était l'hypothèse la plus simple.

Toutefois, tous les modèles qu'on a essayés d'adapter au processus  $\Pi_j$  ont été rejetés et on n'a donc pas réussi à trouver un modèle qui puisse représenter convenablement les données.

On a donc décidé d'envisager le processus d'une autre façon : on va considérer  $\Pi_j$  comme un processus ponctuel à valeurs vectorielles. L'occurrence d'un défaut de page n'est plus indépendant de la page concernée, mais par contre, on tient compte du numéro  $p$  de la page ayant fait défaut. Ce numéro  $p$  appartient à un ensemble  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Dans ce cas, nous avons comme données expérimentales, la suite des instants où il y a eu un défaut de page avec, pour chaque défaut, le numéro de la page concernée.

Ce processus  $\Pi_j$  est considéré comme une superposition de  $n$  processus ponctuels à temps discret  $\Pi_j^p$  où s'identifie par  $\Pi_j^p$  le processus des instants où la page  $p$  fait défaut,  $p \in E$ . Ainsi, une réalisation de  $\Pi_j$  est une suite d'événements telle que l'occurrence d'un événement à l'instant  $j$  se vérifie, si et seulement si un événement se vérifie dans un processus  $\Pi_j^p$  (voir figure 15).

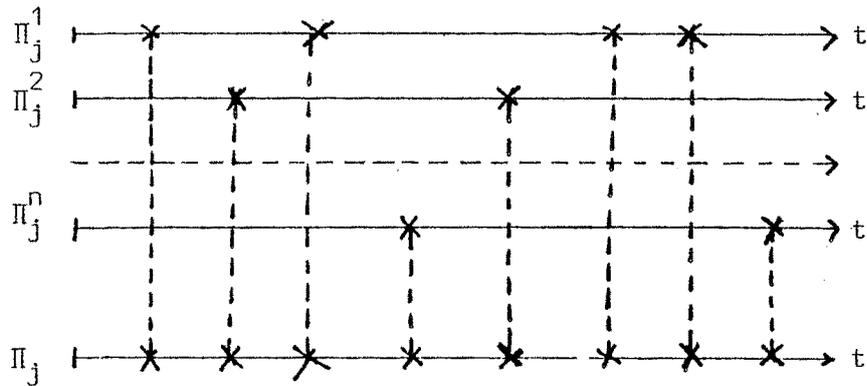


Fig. 15 Superposition de n processus ponctuels

Nous supposons que les occurrences multiples ont probabilité nulle. L'espace des états du processus ponctuel  $\Pi_j$  sera donc l'ensemble de n éléments

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Les propriétés du processus  $\Pi_j$  seront déduites de celles des processus  $\Pi_j^p$  et c'est donc ces processus qu'on étudie.

Comme données expérimentales, nous avons pour chaque page la suite des instants où la page fait défaut.

Pour plusieurs valeurs du paramètre s, taille mémoire réelle, on a commencé par construire les histogrammes des intervalles entre les événements des processus  $\Pi_j^p$ . Pour cela, on a construit le programme GENITA de l'annexe II.

Après une première analyse de ces histogrammes, on a décidé de limiter notre étude aux valeurs de  $s \in [20, 30]$ , parce que c'était dans cet intervalle qu'il nous a semblé se trouver la taille optimale pour le paramètre s.

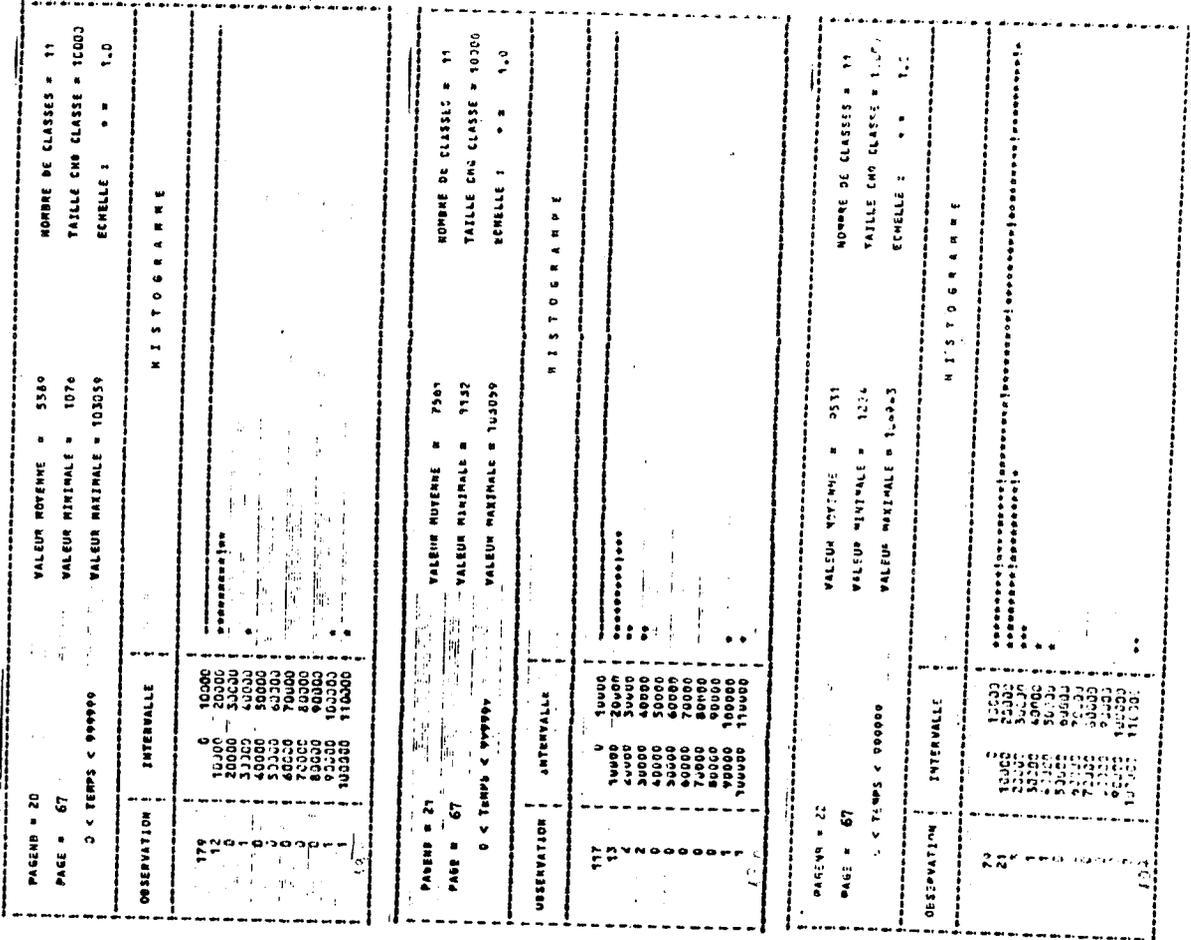
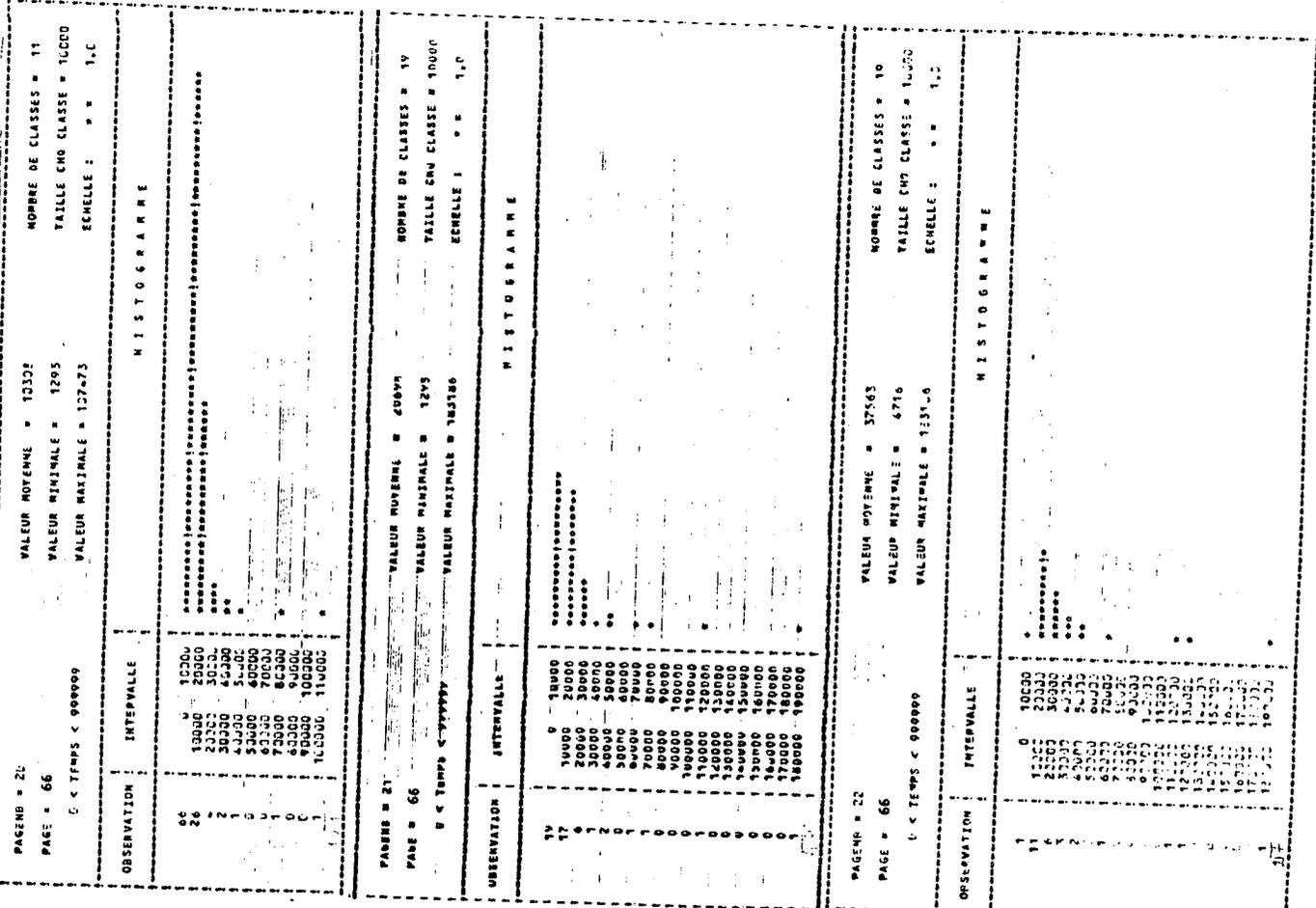
Avant de présenter quelques-uns des histogrammes obtenus, nous ferons les considérations suivantes.

1. Le paramètre Pagenb qui apparaît en tête de l'histogramme représente la taille de la mémoire réelle, donc il est le paramètre qu'on a représenté jusqu'ici par s. La raison de cette nomenclature, c'est que le paramètre faisait partie, avec le nom Pagenb, de certains programmes déjà constitués en fichier et qu'on a eu besoin d'utiliser. Pour une question d'uniformité dans les programmes, on n'a pas changé le nom.

2. Le numéro de la page est aussi défini dans les programmes qu'on a utilisés. Dans le cas présent, l'ensemble E de ces pages est constitué par les numéros {64,65,...,92,95,96,107,109,111,113,114,...,119}, donc on a une mémoire virtuelle de 41 pages.

3. L'unité de temps est donnée par l'intervalle de temps entre deux références aux pages. Nous travaillons donc avec un million de références.

4. Pour la présentation des histogrammes, on a pour chaque page p, groupé les histogrammes correspondants au processus  $\Pi_j^P$  qu'on obtient quand on fait varier la taille mémoire réelle. Ces histogrammes ont été groupés par ordre croissant du paramètre Pagenb.



PAGE n° 11  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....

PAGE n° 12  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....

PAGE n° 13  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 14  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....
14	140000	.....

PAGE n° 14  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 15  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....
14	140000	.....
15	150000	.....

PAGE n° 15  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 16  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....
14	140000	.....
15	150000	.....
16	160000	.....

PAGE n° 16  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 17  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....
14	140000	.....
15	150000	.....
16	160000	.....
17	170000	.....

PAGE n° 17  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 18  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....
14	140000	.....
15	150000	.....
16	160000	.....
17	170000	.....
18	180000	.....

PAGE n° 18  
 PAGE n° 07  
 NOMBRE DE CLASSES = 19  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 0 1 0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
3	30000	.....
4	40000	.....
5	50000	.....
6	60000	.....
7	70000	.....
8	80000	.....
9	90000	.....
10	100000	.....
11	110000	.....
12	120000	.....
13	130000	.....
14	140000	.....
15	150000	.....
16	160000	.....
17	170000	.....
18	180000	.....
19	190000	.....

PAGE#R = 20  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 7579  
 VALEUR MINIMALE = 1007  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000

HISTOGRAMME

112	0
13	10000
5	20000
2	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000

PAGE#R = 21  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 7250  
 VALEUR MINIMALE = 1007  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000

HISTOGRAMME

87	0
13	10000
5	20000
2	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000

PAGE#R = 22  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 13609  
 VALEUR MINIMALE = 1797  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000

HISTOGRAMME

10	0
4	10000
3	20000
2	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000

PAGE#R = 23  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 15152  
 VALEUR MINIMALE = 1936  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000

HISTOGRAMME

10	0
4	10000
3	20000
2	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000

PAGE#R = 24  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 17149  
 VALEUR MINIMALE = 1936  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000

HISTOGRAMME

10	0
4	10000
3	20000
2	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000

PAGE#R = 25  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 27151  
 VALEUR MINIMALE = 2163  
 VALEUR MAXIMALE = 70343

NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000

HISTOGRAMME

17	0
1	10000
1	20000
1	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000

PAGE#R = 26  
 PAGE = 68  
 0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 36291  
 VALEUR MINIMALE = 9253  
 VALEUR MAXIMALE = 106296

NOMBRE DE CLASSES = 17  
 TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* = 1,0

INTERVALLE

0	10000
10000	20000
20000	30000
30000	40000
40000	50000
50000	60000
60000	70000
70000	80000
80000	90000
90000	100000
100000	110000
110000	120000
120000	130000
130000	140000
140000	150000
150000	160000
160000	170000

HISTOGRAMME

1	0
1	10000
1	20000
1	30000
1	40000
1	50000
1	60000
1	70000
1	80000
1	90000
1	100000
1	110000
1	120000
1	130000
1	140000
1	150000
1	160000
1	170000

PAGE n° 27  
 PAGE = 66  
 V < TEMPS < 999999  
 Valeur Moyenne = 32575  
 Valeur Minimale = 11301  
 Valeur Maximale = 73353  
 Nombre de Classes = 6  
 Taille Chq Classe = 1177  
 Echelle : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	10000 - 20000
1	20000 - 30000
2	30000 - 40000
3	40000 - 50000
4	50000 - 60000
5	60000 - 70000
6	70000 - 80000

PAGE n° 28  
 PAGE = 68  
 V < TEMPS < 999999  
 Valeur Moyenne = 63536  
 Valeur Minimale = 16752  
 Valeur Maximale = 125712  
 Nombre de Classes = 11  
 Taille Chq Classe = 11703  
 Echelle : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	10000 - 20000
1	20000 - 30000
2	30000 - 40000
3	40000 - 50000
4	50000 - 60000
5	60000 - 70000
6	70000 - 80000
7	80000 - 90000
8	90000 - 100000
9	100000 - 110000
10	110000 - 120000

PAGE n° 29  
 PAGE = 69  
 V < TEMPS < 999999  
 Valeur Moyenne = 66207  
 Valeur Minimale = 16352  
 Valeur Maximale = 126763  
 Nombre de Classes = 10  
 Taille Chq Classe = 12663  
 Echelle : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	10000 - 20000
1	20000 - 30000
2	30000 - 40000
3	40000 - 50000
4	50000 - 60000
5	60000 - 70000
6	70000 - 80000
7	80000 - 90000
8	90000 - 100000
9	100000 - 110000
10	110000 - 120000

PAGE n° 20  
 PAGE = 70  
 V < TEMPS < 999999  
 Valeur Moyenne = 10424  
 Valeur Minimale = 1455  
 Valeur Maximale = 108443  
 Nombre de Classes = 11  
 Taille Chq Classe = 16209  
 Echelle : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	10000 - 20000
1	20000 - 30000
2	30000 - 40000
3	40000 - 50000
4	50000 - 60000
5	60000 - 70000
6	70000 - 80000
7	80000 - 90000
8	90000 - 100000
9	100000 - 110000

PAGE n° 21  
 PAGE = 70  
 V < TEMPS < 999999  
 Valeur Moyenne = 11679  
 Valeur Minimale = 1455  
 Valeur Maximale = 11000  
 Nombre de Classes = 11  
 Taille Chq Classe = 11000  
 Echelle : \* \* 1,0

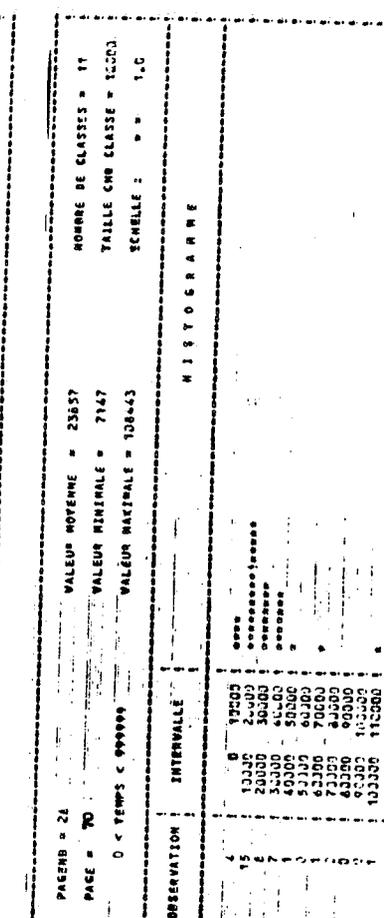
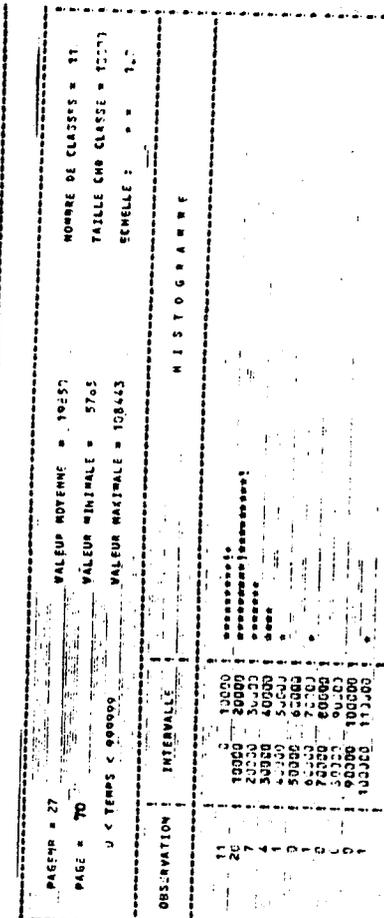
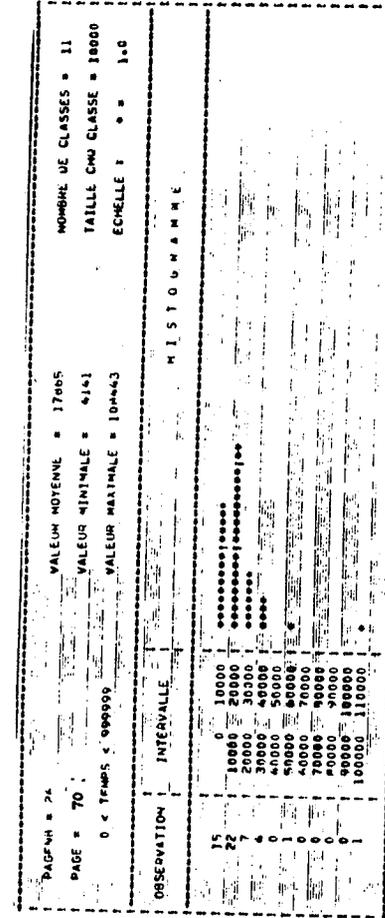
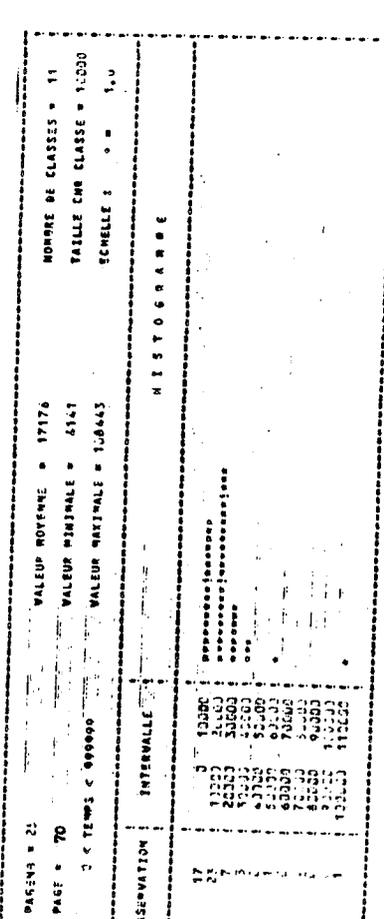
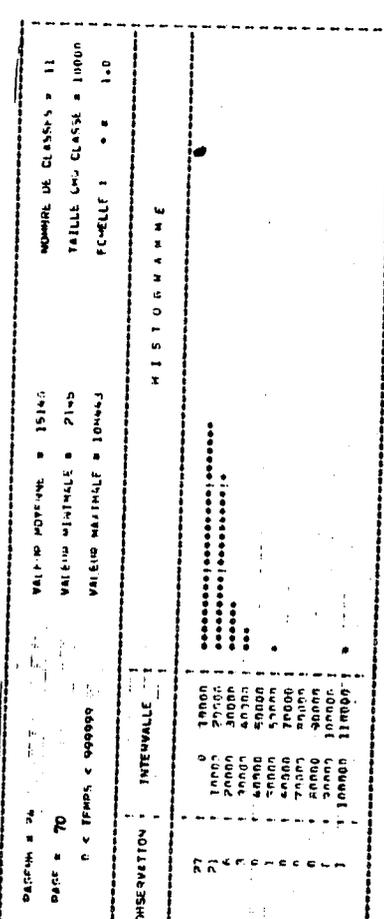
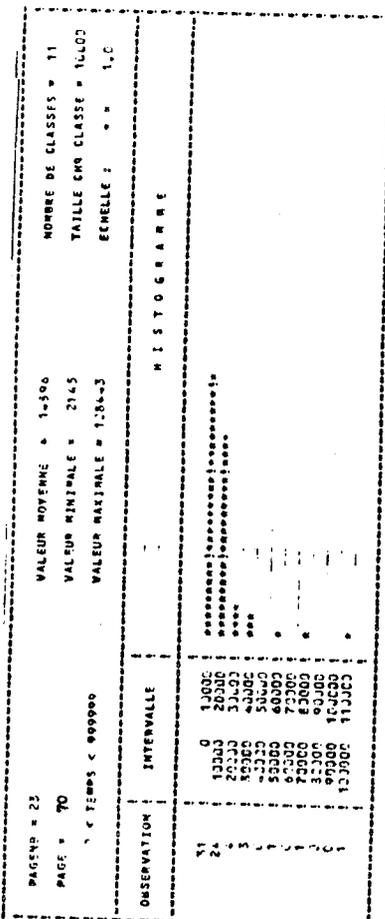
HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	10000 - 20000
1	20000 - 30000
2	30000 - 40000
3	40000 - 50000
4	50000 - 60000
5	60000 - 70000
6	70000 - 80000
7	80000 - 90000
8	90000 - 100000
9	100000 - 110000

PAGE n° 22  
 PAGE = 70  
 V < TEMPS < 999999  
 Valeur Moyenne = 11506  
 Valeur Minimale = 1955  
 Valeur Maximale = 12003  
 Nombre de Classes = 11  
 Taille Chq Classe = 11000  
 Echelle : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	10000 - 20000
1	20000 - 30000
2	30000 - 40000
3	40000 - 50000
4	50000 - 60000
5	60000 - 70000
6	70000 - 80000
7	80000 - 90000
8	90000 - 100000
9	100000 - 110000



PAGERS = 20    VALEUR MOYENNE = 4231    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 71    VALEUR MINIMALE = 1203    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 64275    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000

PAGERS = 21    VALEUR MOYENNE = 3923    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 72    VALEUR MINIMALE = 1203    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 64275    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000

PAGERS = 22    VALEUR MOYENNE = 5449    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 73    VALEUR MINIMALE = 1545    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 64275    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000

PAGERS = 23    VALEUR MOYENNE = 7915    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 74    VALEUR MINIMALE = 1420    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 64275    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000

PAGERS = 24    VALEUR MOYENNE = 28475    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 70    VALEUR MINIMALE = 7167    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 108443    ECHELLE : 0 0 1,0

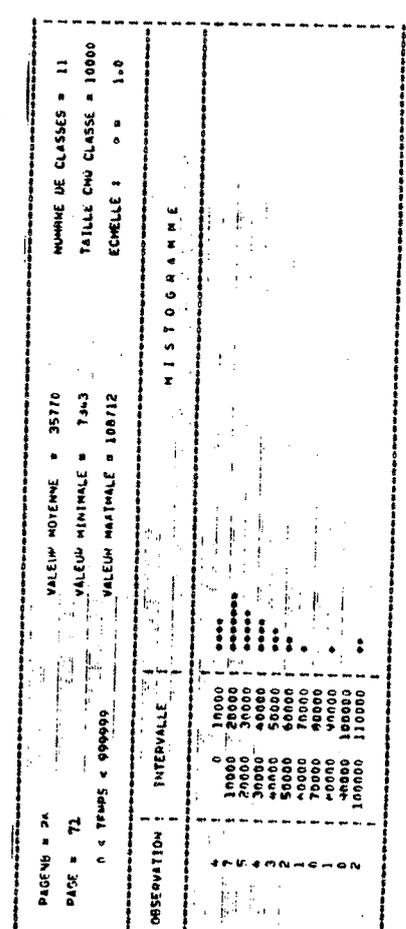
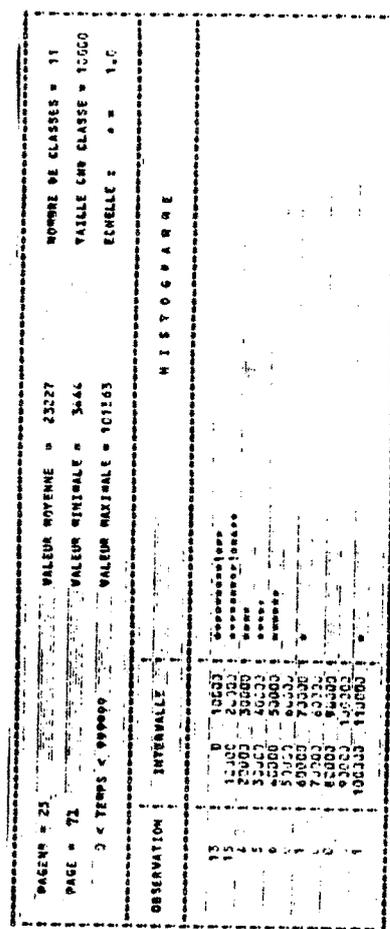
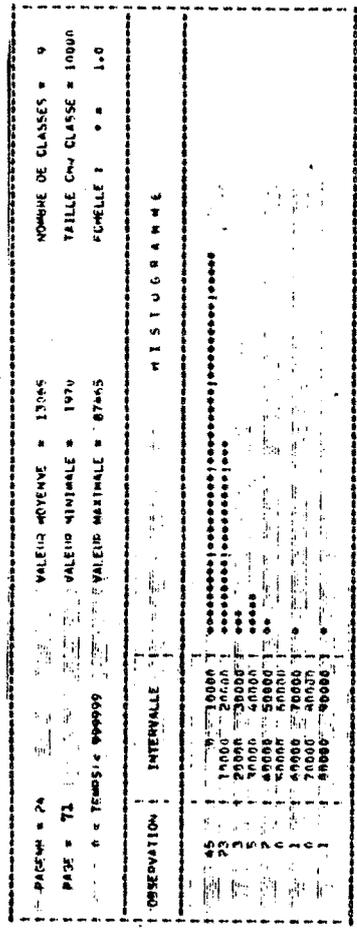
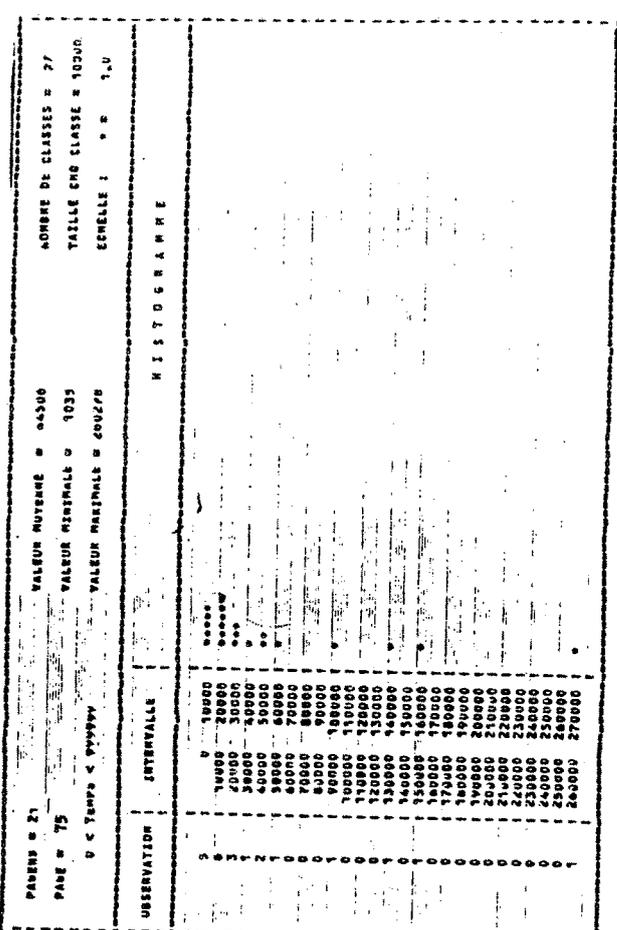
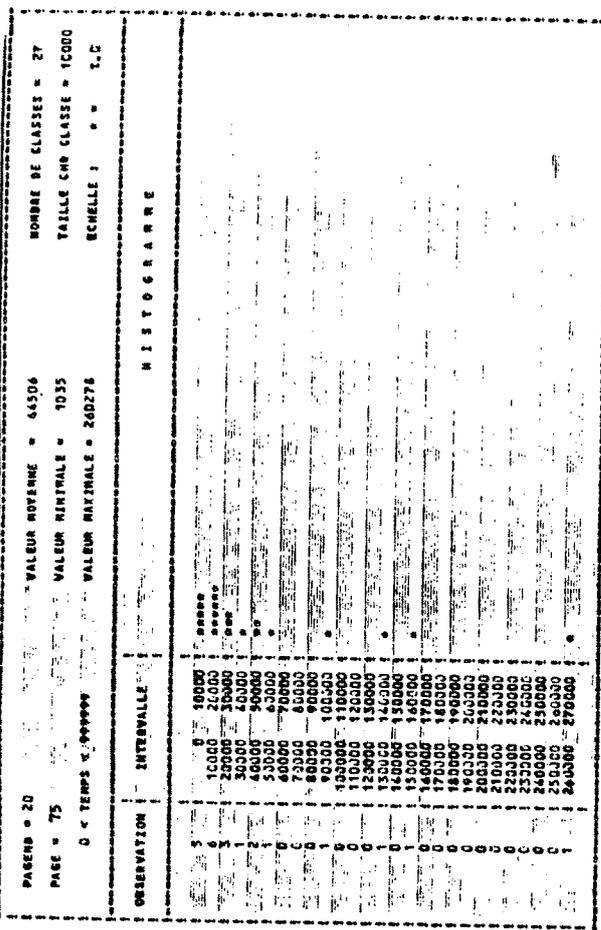
HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000
9	80000 90000
10	90000 100000
11	100000 110000

PAGERS = 25    VALEUR MOYENNE = 33509    NOMBRE DE CLASSES = 17  
 PAGE = 70    VALEUR MINIMALE = 7167    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 108527    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000
9	80000 90000
10	90000 100000
11	100000 110000
12	110000 120000
13	120000 130000
14	130000 140000
15	140000 150000
16	150000 160000
17	160000 170000



PAGES 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29  
 PAGE = 76  
 0 < TEMPS < 999999  
 NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* 0 1.0

VALEUR MOYENNE = 24231  
 VALEUR MINIMALE = 7793  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

N I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
2	0	10000
14	10000	20000
2	20000	30000
4	30000	40000
4	40000	50000
2	50000	60000
2	60000	70000

PAGES 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29  
 PAGE = 77  
 0 < TEMPS < 999999  
 NOMBRE DE CLASSES = 7  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* 0 1.0

VALEUR MOYENNE = 20866  
 VALEUR MINIMALE = 7882  
 VALEUR MAXIMALE = 64215

N I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
2	0	10000
14	10000	20000
2	20000	30000
4	30000	40000
4	40000	50000
2	50000	60000
2	60000	70000

PAGES 30  
 PAGE = 78  
 0 < TEMPS < 999999  
 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* 0 1.0

VALEUR MOYENNE = 28991  
 VALEUR MINIMALE = 10299  
 VALEUR MAXIMALE = 112266

N I S T O G R A M M E

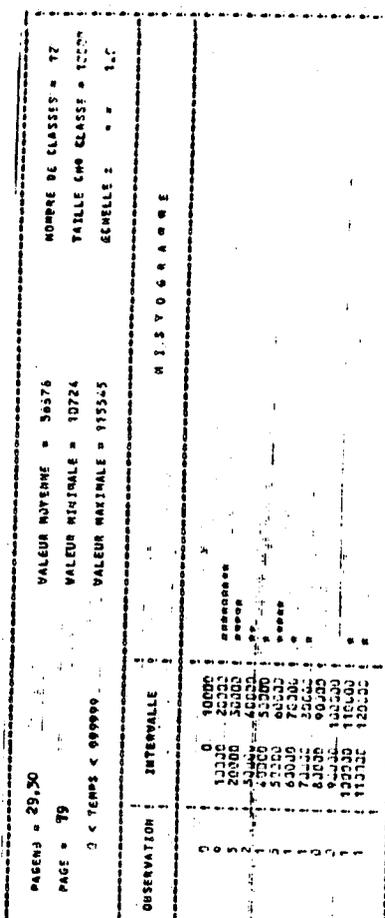
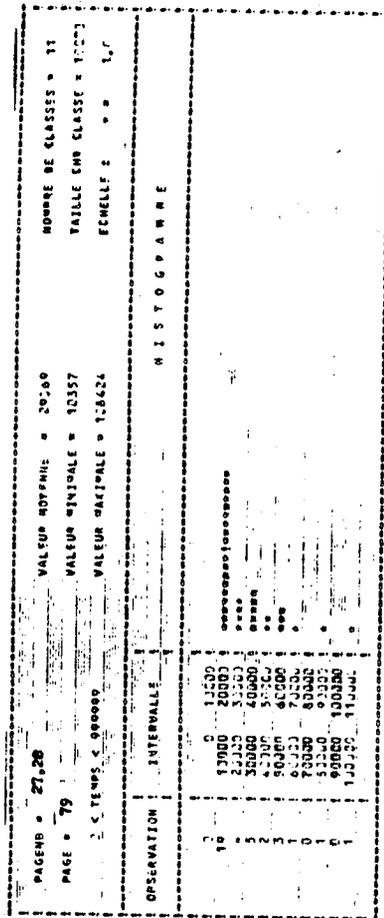
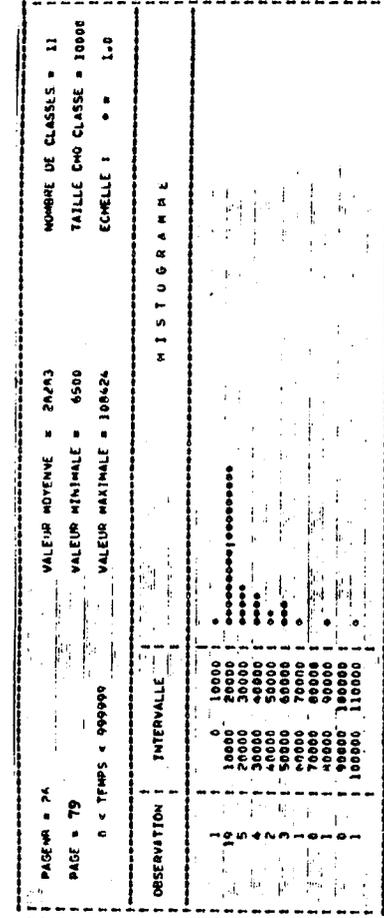
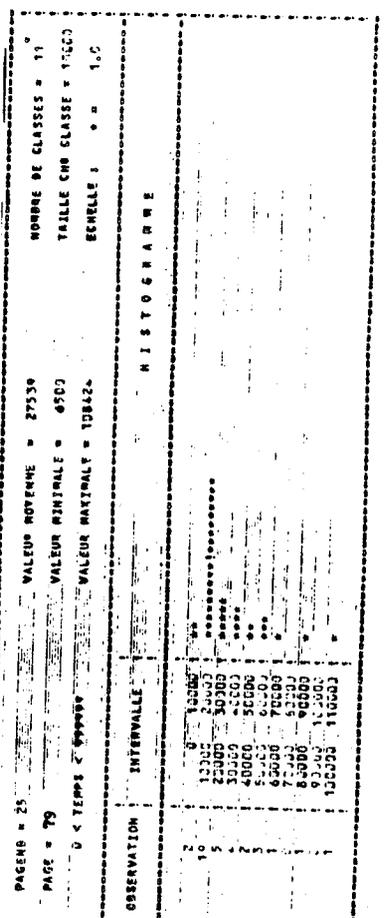
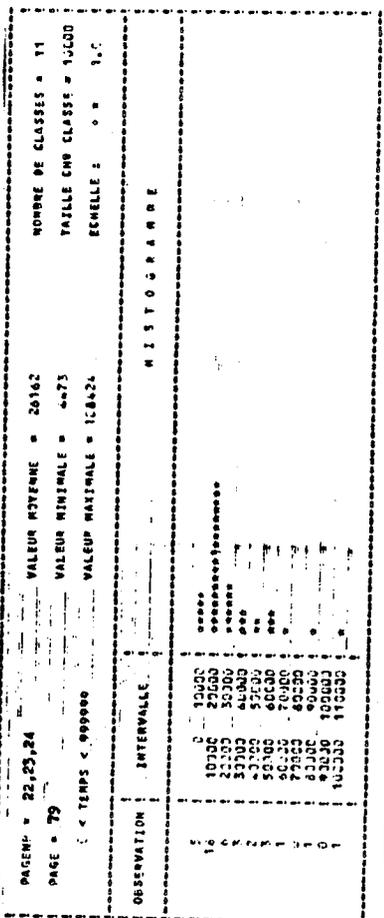
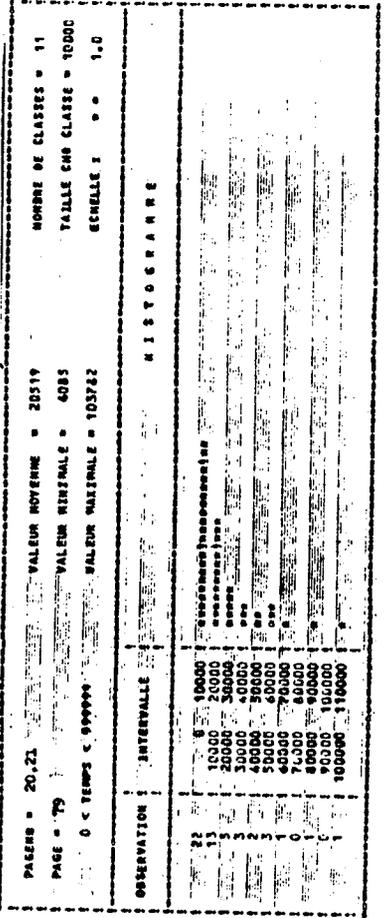
OBSERVATION	INTERVALLE	.....
2	0	10000
14	10000	20000
2	20000	30000
4	30000	40000
4	40000	50000
2	50000	60000
2	60000	70000
2	70000	80000
2	80000	90000
2	90000	100000
2	100000	110000
2	110000	120000

PAGES 30  
 PAGE = 77  
 0 < TEMPS < 999999  
 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 ECHELLE : \* 0 1.0

VALEUR MOYENNE = 23502  
 VALEUR MINIMALE = 10108  
 VALEUR MAXIMALE = 112266

N I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
2	0	10000
14	10000	20000
2	20000	30000
4	30000	40000
4	40000	50000
2	50000	60000
2	60000	70000
2	70000	80000
2	80000	90000
2	90000	100000
2	100000	110000
2	110000	120000



PAGE-N° = 20,21    VALEUR MOYENNE = 10172    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 80    VALEUR MINIMALE = 1639    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 108426    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
54	0	10000
32	10300	20000
4	20600	30000
6	30900	40000
1	41200	50000
1	51500	60000
6	61800	70000
0	72100	80000
0	82400	90000
0	92700	100000
1	103000	110000

PAGE-N° = 22    VALEUR MOYENNE = 12321    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 80    VALEUR MINIMALE = 1639    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 108426    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
31	0	12000
38	12000	24000
4	24000	36000
1	36000	48000
1	48000	60000
1	60000	72000
0	72000	84000
0	84000	96000
0	96000	108000
1	108000	120000

PAGE-N° = 23    VALEUR MOYENNE = 15675    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 80    VALEUR MINIMALE = 2760    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 108426    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
10	0	10000
23	10000	20000
1	20000	30000
1	30000	40000
1	40000	50000
0	50000	60000
0	60000	70000
0	70000	80000
0	80000	90000
1	90000	100000

PAGE-N° = 24,25    VALEUR MOYENNE = 13442    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 80    VALEUR MINIMALE = 2746    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 108426    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
14	0	14000
27	14000	28000
4	28000	42000
1	42000	56000
0	56000	70000
0	70000	84000
0	84000	98000
1	98000	112000

PAGE-N° = 26    VALEUR MOYENNE = 27819    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 80    VALEUR MINIMALE = 7590    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 111608    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
28	0	10000
1	10000	20000
1	20000	30000
2	30000	40000
0	40000	50000
0	50000	60000
0	60000	70000
0	70000	80000
0	80000	90000
0	90000	100000
1	100000	110000
1	110000	120000

PAGE-N° = 27,28    VALEUR MOYENNE = 26361    NOMBRE DE CLASSES = 16  
 PAGE = 80    VALEUR MINIMALE = 13357    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 153205    ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
25	0	10000
1	10000	20000
1	20000	30000
1	30000	40000
1	40000	50000
1	50000	60000
1	60000	70000
1	70000	80000
1	80000	90000
1	90000	100000
1	100000	110000
1	110000	120000
1	120000	130000
1	130000	140000
1	140000	150000
1	150000	160000

PAGES = 23  
 PAGE = 01  
 VALEUR MOYENNE = 17072  
 VALEUR MINIMALE = 2212  
 VALEUR MAXIMALE = 17260  
 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 TAILLE CHU CLASSE = 16000  
 ECHELLE : 0 = 1,0  
 N < TEMPS < 999999

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
21	0 10700	.....
25	10700 20700	.....
26	20700 30700	.....
2	30700 40700	.....
3	40700 50700	.....
4	50700 60700	.....
5	60700 70700	.....
6	70700 80700	.....
7	80700 90700	.....
8	90700 100700	.....
9	100700 110700	.....
0	110700 120700	.....
1	120700 130700	.....
2	130700 140700	.....

PAGES = 24  
 PAGE = 01  
 VALEUR MOYENNE = 24926  
 VALEUR MINIMALE = 2401  
 VALEUR MAXIMALE = 154212  
 NOMBRE DE CLASSES = 16  
 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 = 1,0  
 N < TEMPS < 999999

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
12	0 10000	.....
13	10000 20000	.....
4	20000 30000	.....
5	30000 40000	.....
3	40000 50000	.....
0	50000 60000	.....
2	60000 70000	.....
0	70000 80000	.....
0	80000 90000	.....
0	90000 100000	.....
3	100000 110000	.....
0	110000 120000	.....
0	120000 130000	.....
0	130000 140000	.....
0	140000 150000	.....
1	150000 160000	.....

PAGES = 24  
 PAGE = 01  
 VALEUR MOYENNE = 28595  
 VALEUR MINIMALE = 3998  
 VALEUR MAXIMALE = 156212  
 NOMBRE DE CLASSES = 16  
 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 = 1,0  
 N < TEMPS < 999999

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
7	0 10000	.....
11	10000 20000	.....
2	20000 30000	.....
0	30000 40000	.....
2	40000 50000	.....
0	50000 60000	.....
0	60000 70000	.....
0	70000 80000	.....
0	80000 90000	.....
0	90000 100000	.....
1	100000 110000	.....
0	110000 120000	.....
0	120000 130000	.....
0	130000 140000	.....
0	140000 150000	.....
1	150000 160000	.....

PAGES = 20  
 PAGE = 01  
 VALEUR MOYENNE = 10748  
 VALEUR MINIMALE = 1324  
 VALEUR MAXIMALE = 10369  
 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 = 1,0  
 N < TEMPS < 999999

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
58	0 10000	.....
33	10000 20000	.....
2	20000 30000	.....
3	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
0	50000 60000	.....
0	60000 70000	.....
0	70000 80000	.....
0	80000 90000	.....
0	90000 100000	.....
2	100000 110000	.....

PAGES = 21  
 PAGE = 01  
 VALEUR MOYENNE = 93533  
 VALEUR MINIMALE = 1983  
 VALEUR MAXIMALE = 107269  
 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 = 1,0  
 N < TEMPS < 999999

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
24	0 10000	.....
27	10000 20000	.....
4	20000 30000	.....
2	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
1	50000 60000	.....
0	60000 70000	.....
0	70000 80000	.....
0	80000 90000	.....
0	90000 100000	.....
2	100000 110000	.....

PAGES = 22  
 PAGE = 01  
 VALEUR MOYENNE = 15732  
 VALEUR MINIMALE = 171  
 VALEUR MAXIMALE = 17269  
 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 ECHELLE : 0 = 1,0  
 N < TEMPS < 999999

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
26	0 10000	.....
27	10000 20000	.....
7	20000 30000	.....
1	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
0	50000 60000	.....
0	60000 70000	.....
0	70000 80000	.....
0	80000 90000	.....
0	90000 100000	.....
0	100000 110000	.....

PAGE N° 20      Valeur Moyenne = 23647      Nombre de Classes = 17  
 PAGE = 04      Valeur Minimale = 2242      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 140742      Echelle :    n = 1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
14	0	.....
15	12500	.....
16	25000	.....
17	37500	.....
18	50000	.....
19	62500	.....
20	75000	.....
21	87500	.....
22	100000	.....
23	112500	.....
24	125000	.....
25	137500	.....
26	150000	.....
27	162500	.....
28	175000	.....

PAGE N° 21,22      Valeur Moyenne = 67301      Nombre de Classes = 17  
 PAGE = 04      Valeur Minimale = 4942      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 180742      Echelle :    n = 1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
10	0	.....
11	12500	.....
12	25000	.....
13	37500	.....
14	50000	.....
15	62500	.....
16	75000	.....
17	87500	.....
18	100000	.....
19	112500	.....
20	125000	.....
21	137500	.....
22	150000	.....
23	162500	.....
24	175000	.....

PAGE N° 23,24,25,26      Valeur Moyenne = 32451      Nombre de Classes = 17  
 PAGE = 04      Valeur Minimale = 3496      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 140742      Echelle :    n = 1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
4	0	.....
5	12500	.....
6	25000	.....
7	37500	.....
8	50000	.....
9	62500	.....
10	75000	.....
11	87500	.....
12	100000	.....
13	112500	.....
14	125000	.....
15	137500	.....
16	150000	.....
17	162500	.....
18	175000	.....

PAGE N° 27      Valeur Moyenne = 7783      Nombre de Classes = 12  
 PAGE = 05      Valeur Minimale = 1879      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 116085      Echelle :    n = 1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
17	0	.....
18	12500	.....
19	25000	.....
20	37500	.....
21	50000	.....
22	62500	.....
23	75000	.....
24	87500	.....
25	100000	.....
26	112500	.....
27	125000	.....

PAGE N° 28      Valeur Moyenne = 6402      Nombre de Classes = 12  
 PAGE = 05      Valeur Minimale = 2073      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 116085      Echelle :    n = 1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
19	0	.....
20	12500	.....
21	25000	.....
22	37500	.....
23	50000	.....
24	62500	.....
25	75000	.....
26	87500	.....
27	100000	.....
28	112500	.....

PAGE N° 29      Valeur Moyenne = 11722      Nombre de Classes = 12  
 PAGE = 05      Valeur Minimale = 2273      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 116285      Echelle :    n = 1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
23	0	.....
24	12500	.....
25	25000	.....
26	37500	.....
27	50000	.....
28	62500	.....
29	75000	.....
30	87500	.....
31	100000	.....
32	112500	.....

PAGE# = 23    VALEUR MOYENNE = 12713    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 85    VALEUR MINIMALE = 2073    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 116385    ECHELLE : \* \* 1.0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
43	0	.....
19	10000	.....
2	20000	.....
2	30000	.....
0	40000	.....
0	50000	.....
0	60000	.....
0	70000	.....
0	80000	.....
0	90000	.....
0	100000	.....
0	110000	.....
0	120000	.....

PAGE# = 24    VALEUR MOYENNE = 15562    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 85    VALEUR MINIMALE = 3115    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 116085    ECHELLE : \* \* 1.0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
24	0	.....
76	10000	.....
2	20000	.....
2	30000	.....
0	40000	.....
0	50000	.....
0	60000	.....
0	70000	.....
0	80000	.....
0	90000	.....
0	100000	.....
0	110000	.....
0	120000	.....

PAGE# = 25    VALEUR MOYENNE = 18352    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 85    VALEUR MINIMALE = 3315    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 116385    ECHELLE : \* \* 1.0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
15	0	.....
21	10000	.....
9	20000	.....
0	30000	.....
0	40000	.....
0	50000	.....
0	60000	.....
0	70000	.....
0	80000	.....
0	90000	.....
0	100000	.....
0	110000	.....
0	120000	.....

PAGE# = 26    VALEUR MOYENNE = 19204    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 85    VALEUR MINIMALE = 3315    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 116085    ECHELLE : \* \* 1.0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
13	0	.....
16	10000	.....
16	20000	.....
0	30000	.....
0	40000	.....
0	50000	.....
0	60000	.....
0	70000	.....
0	80000	.....
0	90000	.....
0	100000	.....
0	110000	.....
0	120000	.....

PAGE# = 27    VALEUR MOYENNE = 27352    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 85    VALEUR MINIMALE = 3115    TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 172305    ECHELLE : \* \* 1.0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
11	0	.....
1	10000	.....
2	20000	.....
0	30000	.....
0	40000	.....
0	50000	.....
0	60000	.....
0	70000	.....
0	80000	.....
0	90000	.....
0	100000	.....
0	110000	.....
0	120000	.....

PAGE = 06      VALEUR MOYENNE = 2300      NOMBRE DE CLASSES = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 73782      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
34	0 10000
35	10000 20000
1	20000 30000
1	30000 40000
1	40000 50000
1	50000 60000
1	60000 70000
1	70000 80000
1	80000 90000
1	90000 100000

PAGE = 23      VALEUR MOYENNE = 13959      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 2300      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
33	0 10000
34	10000 20000
35	20000 30000
1	30000 40000
1	40000 50000
1	50000 60000
1	60000 70000
1	70000 80000
1	80000 90000
1	90000 100000

PAGE = 26      VALEUR MOYENNE = 16036      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 3428      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    3,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
10	0 10000
11	10000 20000
12	20000 30000
13	30000 40000
14	40000 50000
15	50000 60000
16	60000 70000
17	70000 80000
18	80000 90000
19	90000 100000

PAGE = 27      VALEUR MOYENNE = 20255      NOMBRE DE CLASSES = 11  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 3322      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000
9	80000 90000
10	90000 100000
11	100000 110000

PAGE = 20      VALEUR MOYENNE = 10636      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 1633      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
37	0 10000
38	10000 20000
39	20000 30000
40	30000 40000
41	40000 50000
42	50000 60000
43	60000 70000
44	70000 80000
45	80000 90000
46	90000 100000

PAGE = 21      VALEUR MOYENNE = 10873      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 2163      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    3,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
33	0 10000
34	10000 20000
35	20000 30000
36	30000 40000
37	40000 50000
38	50000 60000
39	60000 70000
40	70000 80000
41	80000 90000
42	90000 100000

PAGE = 22      VALEUR MOYENNE = 11600      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 2300      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
49	0 10000
50	10000 20000
51	20000 30000
52	30000 40000
53	40000 50000
54	50000 60000
55	60000 70000
56	70000 80000
57	80000 90000
58	90000 100000

PAGE = 23      VALEUR MOYENNE = 12227      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MINIMALE = 2300      TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
 ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
44	0 10000
45	10000 20000
46	20000 30000
47	30000 40000
48	40000 50000
49	50000 60000
50	60000 70000
51	70000 80000
52	80000 90000
53	90000 100000

PAGE# = 20 VALEUR MOYENNE = 11930 NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 88 VALEUR MINIMALE = 1414 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 67925 ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

1	0	10000	#####
2	10000	20000	#####
3	20000	30000	#####
4	30000	40000	#####
5	40000	50000	#####
6	50000	60000	#####
7	60000	70000	#####

PAGE# = 21 VALEUR MOYENNE = 16451 NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 88 VALEUR MINIMALE = 1414 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 76627 ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

1	0	10000	#####
2	10000	20000	#####
3	20000	30000	#####
4	30000	40000	#####
5	40000	50000	#####
6	50000	60000	#####
7	60000	70000	#####
8	70000	80000	#####

PAGE# = 22 VALEUR MOYENNE = 13546 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 88 VALEUR MINIMALE = 1414 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 715083 ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

1	0	10000	#####
2	10000	20000	#####
3	20000	30000	#####
4	30000	40000	#####
5	40000	50000	#####
6	50000	60000	#####
7	60000	70000	#####
8	70000	80000	#####
9	80000	90000	#####
10	90000	100000	#####
11	100000	110000	#####
12	110000	120000	#####

PAGE# = 25 VALEUR MOYENNE = 24593 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 86 VALEUR MINIMALE = 7205 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 137453 ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

1	0	10000	#####
2	10000	20000	#####
3	20000	30000	#####
4	30000	40000	#####
5	40000	50000	#####
6	50000	60000	#####
7	60000	70000	#####
8	70000	80000	#####
9	80000	90000	#####
10	90000	100000	#####
11	100000	110000	#####

PAGE# = 29 VALEUR MOYENNE = 28894 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 86 VALEUR MINIMALE = 7559 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 137455 ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

1	0	10000	#####
2	10000	20000	#####
3	20000	30000	#####
4	30000	40000	#####
5	40000	50000	#####
6	50000	60000	#####
7	60000	70000	#####
8	70000	80000	#####
9	80000	90000	#####
10	90000	100000	#####
11	100000	110000	#####

PAGE# = 24    VALEUR MOYENNE = 22219    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 88    VALEUR MINIMALE = 6520    TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 77859    ECHELLE : 0 0 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

5	0	10000	.....
22	10000	20000	.....
4	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
2	40000	50000	.....
0	50000	60000	.....
0	60000	70000	.....
1	70000	80000	.....

HISTOGRAMME

PAGE# = 27    VALEUR MOYENNE = 28440    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 88    VALEUR MINIMALE = 9966    TAILLE CHA CLASSE = 90703  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 112196    ECHELLE : 0 0 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

10	10000	10375	.....
1	20000	20750	.....
2	30000	31125	.....
3	40000	41500	.....
4	50000	51875	.....
5	60000	62250	.....
6	70000	72625	.....
7	80000	83000	.....
8	90000	93375	.....
9	100000	103750	.....
10	110000	114125	.....
11	120000	124500	.....

HISTOGRAMME

PAGE# = 28    VALEUR MOYENNE = 20346    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 88    VALEUR MINIMALE = 9760    TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 110196    ECHELLE : 0 0 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

17	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
4	20000	30000	.....
2	30000	40000	.....
1	40000	50000	.....
1	50000	60000	.....
0	60000	70000	.....
0	70000	80000	.....
1	80000	90000	.....
1	90000	100000	.....
1	100000	110000	.....
1	110000	120000	.....

HISTOGRAMME

PAGE# = 23    VALEUR MOYENNE = 14322    NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 88    VALEUR MINIMALE = 3306    TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 112243    ECHELLE : 0 0 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

12	0	10000	.....
3	10000	20000	.....
1	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
1	40000	50000	.....
1	50000	60000	.....
0	60000	70000	.....
0	70000	80000	.....
0	80000	90000	.....
0	90000	100000	.....
0	100000	110000	.....
0	110000	120000	.....

HISTOGRAMME

PAGE# = 24    VALEUR MOYENNE = 17519    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 88    VALEUR MINIMALE = 3006    TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 77859    ECHELLE : 0 0 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

12	0	10000	.....
7	10000	20000	.....
4	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
1	40000	50000	.....
0	50000	60000	.....
0	60000	70000	.....
0	70000	80000	.....

HISTOGRAMME

PAGE# = 25    VALEUR MOYENNE = 19604    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 88    VALEUR MINIMALE = 4523    TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 77859    ECHELLE : 0 0 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

6	0	10000	.....
2	10000	20000	.....
1	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
1	40000	50000	.....
1	50000	60000	.....
1	60000	70000	.....
1	70000	80000	.....

HISTOGRAMME

PAGE# = 20 VALEUR MOYENNE = 11500 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 1074 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124671 ECHELLE : \* = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	0 10000
1	10000 20000
2	20000 30000
3	30000 40000
4	40000 50000
5	50000 60000
6	60000 70000
7	70000 80000
8	80000 90000
9	90000 100000
10	100000 110000
11	110000 120000
12	120000 130000

PAGE# = 21 VALEUR MOYENNE = 11589 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 1074 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124671 ECHELLE : \* = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	0 10000
1	10000 20000
2	20000 30000
3	30000 40000
4	40000 50000
5	50000 60000
6	60000 70000
7	70000 80000
8	80000 90000
9	90000 100000
10	100000 110000
11	110000 120000
12	120000 130000

PAGE# = 22 VALEUR MOYENNE = 12014 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 1926 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124671 ECHELLE : \* = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	0 10000
1	10000 20000
2	20000 30000
3	30000 40000
4	40000 50000
5	50000 60000
6	60000 70000
7	70000 80000
8	80000 90000
9	90000 100000
10	100000 110000
11	110000 120000
12	120000 130000

PAGE# = 29 VALEUR MOYENNE = 33740 NOMBRE DE CLASSES = 16  
 PAGE = 08 VALEUR MINIMALE = 10000 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 133710 ECHELLE : \* = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	0 10000
1	10000 20000
2	20000 30000
3	30000 40000
4	40000 50000
5	50000 60000
6	60000 70000
7	70000 80000
8	80000 90000
9	90000 100000
10	100000 110000
11	110000 120000
12	120000 130000
13	130000 140000
14	140000 150000
15	150000 160000

PAGE# = 30 VALEUR MOYENNE = 43549 NOMBRE DE CLASSES = 16  
 PAGE = 08 VALEUR MINIMALE = 10319 TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 133710 ECHELLE : \* = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
0	0 10000
1	10000 20000
2	20000 30000
3	30000 40000
4	40000 50000
5	50000 60000
6	60000 70000
7	70000 80000
8	80000 90000
9	90000 100000
10	100000 110000
11	110000 120000
12	120000 130000
13	130000 140000
14	140000 150000
15	150000 160000

PAGE 23 VALEUR MOYENNE = 1023.6 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 473 TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124597 ECHELLE : 0 = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HAUTEUR
17	0 - 10000	1
16	10000 - 20000	1
15	20000 - 30000	1
14	30000 - 40000	1
13	40000 - 50000	1
12	50000 - 60000	1
11	60000 - 70000	1
10	70000 - 80000	1
9	80000 - 90000	1
8	90000 - 100000	1
7	100000 - 110000	1
6	110000 - 120000	1
5	120000 - 130000	1

PAGE 24 VALEUR MOYENNE = 20545 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 473 TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124597 ECHELLE : 0 = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HAUTEUR
16	0 - 10000	1
15	10000 - 20000	1
14	20000 - 30000	1
13	30000 - 40000	1
12	40000 - 50000	1
11	50000 - 60000	1
10	60000 - 70000	1
9	70000 - 80000	1
8	80000 - 90000	1
7	90000 - 100000	1
6	100000 - 110000	1
5	110000 - 120000	1
4	120000 - 130000	1

PAGE 25 VALEUR MOYENNE = 22400 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 473 TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124597 ECHELLE : 0 = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HAUTEUR
11	0 - 10000	1
10	10000 - 20000	1
9	20000 - 30000	1
8	30000 - 40000	1
7	40000 - 50000	1
6	50000 - 60000	1
5	60000 - 70000	1
4	70000 - 80000	1
3	80000 - 90000	1
2	90000 - 100000	1
1	100000 - 110000	1
0	110000 - 120000	1
0	120000 - 130000	1

PAGE 26 VALEUR MOYENNE = 25111 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 4873 TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124597 ECHELLE : 0 = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HAUTEUR
10	0 - 10000	1
9	10000 - 20000	1
8	20000 - 30000	1
7	30000 - 40000	1
6	40000 - 50000	1
5	50000 - 60000	1
4	60000 - 70000	1
3	70000 - 80000	1
2	80000 - 90000	1
1	90000 - 100000	1
0	100000 - 110000	1
0	110000 - 120000	1
0	120000 - 130000	1

PAGE 27 VALEUR MOYENNE = 28250 NOMBRE DE CLASSES = 13  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 4273 TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 124597 ECHELLE : 0 = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HAUTEUR
1	0 - 10000	1
0	10000 - 20000	1
0	20000 - 30000	1
0	30000 - 40000	1
0	40000 - 50000	1
0	50000 - 60000	1
0	60000 - 70000	1
0	70000 - 80000	1
0	80000 - 90000	1
0	90000 - 100000	1
0	100000 - 110000	1
0	110000 - 120000	1
0	120000 - 130000	1

PAGE 28 VALEUR MOYENNE = 30805 NOMBRE DE CLASSES = 17  
 PAGE = 09 VALEUR MINIMALE = 6175 TAILLE CHO CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 100196 ECHELLE : 0 = 1.0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HAUTEUR
3	0 - 10000	1
2	10000 - 20000	1
1	20000 - 30000	1
0	30000 - 40000	1
0	40000 - 50000	1
0	50000 - 60000	1
0	60000 - 70000	1
0	70000 - 80000	1
0	80000 - 90000	1
0	90000 - 100000	1
0	100000 - 110000	1
0	110000 - 120000	1
0	120000 - 130000	1

PAGE# = 20 VALEUR MOYENNE = 6372 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 400 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 96267 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

129	0	10000	.....
17	10000	20000	.....
3	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
0	40000	50000	.....
7	50000	60000	.....

PAGE# = 21 VALEUR MOYENNE = 9078 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 600 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 96267 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

62	0	10000	.....
34	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
6	40000	50000	.....
9	50000	60000	.....

PAGE# = 22 VALEUR MOYENNE = 11908 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 1720 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 56267 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

30	0	10000	.....
37	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
2	40000	50000	.....
1	50000	60000	.....

PAGE# = 23 VALEUR MOYENNE = 16730 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 3502 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 56267 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

26	0	10000	.....
6	10000	20000	.....
6	20000	30000	.....
6	30000	40000	.....
1	40000	50000	.....
1	50000	60000	.....

PAGE# = 24 VALEUR MOYENNE = 17978 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 3408 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 86399 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

15	0	10000	.....
24	10000	20000	.....
3	20000	30000	.....
5	30000	40000	.....
2	40000	50000	.....
1	50000	60000	.....
6	60000	70000	.....
1	70000	80000	.....
1	80000	90000	.....

PAGE# = 25 VALEUR MOYENNE = 22363 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 3856 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 86399 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

1	0	10000	.....
27	10000	20000	.....
3	20000	30000	.....
1	30000	40000	.....
1	40000	50000	.....
2	50000	60000	.....
1	60000	70000	.....
1	70000	80000	.....
1	80000	90000	.....

PAGE# = 26 VALEUR MOYENNE = 26470 NOMBRE DE CLASSES = 9  
 PAGE = 90 VALEUR MINIMALE = 7120 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 86399 ECHELLE : \* \* 1,0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

4	0	10000	.....
16	10000	20000	.....
5	20000	30000	.....
5	30000	40000	.....
2	40000	50000	.....
2	50000	60000	.....
0	60000	70000	.....
0	70000	80000	.....
1	80000	90000	.....

PAGE n° 2°      Valeur Moyenne = 31517      Nombre de Classes = 12  
 PAGE n° 90      Valeur Minimale = 092      Taille Cho Classe = 17500  
 U < Temps < 00000      Valeur Maximale = 10200      Echelle :      n° = 1,0

M I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
1	0	10000
2	10000	20000
3	20000	30000
4	30000	40000
5	40000	50000
6	50000	60000
7	60000	70000
8	70000	80000
9	80000	90000
10	90000	100000
11	100000	110000
12	110000	120000

PAGE n° 21      Valeur Moyenne = 33266      Nombre de Classes = 17  
 PAGE n° 90      Valeur Minimale = 11371      Taille Cho Classe = 10570  
 U < Temps < 00000      Valeur Maximale = 105106      Echelle :      n° = 1,0

M I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
0	0	10000
1	10000	20000
2	20000	30000
3	30000	40000
4	40000	50000
5	50000	60000
6	60000	70000
7	70000	80000
8	80000	90000
9	90000	100000
10	100000	110000
11	110000	120000
12	120000	130000
13	130000	140000
14	140000	150000
15	150000	160000
16	160000	170000
17	170000	180000

PAGE n° 29      Valeur Moyenne = 11676      Nombre de Classes = 17  
 PAGE n° 90      Valeur Minimale = 11271      Taille Cho Classe = 13027  
 U < Temps < 00000      Valeur Maximale = 103116      Echelle :      n° = 1,0

M I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
0	0	10000
1	10000	20000
2	20000	30000
3	30000	40000
4	40000	50000
5	50000	60000
6	60000	70000
7	70000	80000
8	80000	90000
9	90000	100000
10	100000	110000
11	110000	120000
12	120000	130000
13	130000	140000
14	140000	150000
15	150000	160000
16	160000	170000
17	170000	180000

PAGE n° 22      Valeur Moyenne = 15377      Nombre de Classes = 11  
 PAGE n° 91      Valeur Minimale = 3198      Taille Cho Classe = 10000  
 U < Temps < 00000      Valeur Maximale = 107304      Echelle :      n° = 1,0

M I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
0	0	10000
1	10000	20000
2	20000	30000
3	30000	40000
4	40000	50000
5	50000	60000
6	60000	70000
7	70000	80000
8	80000	90000
9	90000	100000
10	100000	110000

PAGE n° 21      Valeur Moyenne = 22977      Nombre de Classes = 12  
 PAGE n° 92      Valeur Minimale = 3300      Taille Cho Classe = 10000  
 U < Temps < 00000      Valeur Maximale = 172672      Echelle :      n° = 1,0

M I S T O G R A M M E

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
0	0	10000
1	10000	20000
2	20000	30000
3	30000	40000
4	40000	50000
5	50000	60000
6	60000	70000
7	70000	80000
8	80000	90000
9	90000	100000
10	100000	110000
11	110000	120000
12	120000	130000
13	130000	140000
14	140000	150000
15	150000	160000
16	160000	170000
17	170000	180000

PAGE# = 20 VALEUR MOYENNE = 4062 NOMBRE DE CLASSES = 6  
 PAGE = 92 VALEUR MINIMALE = 845 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 U < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 82301 ECHELLE : 0 = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

128	0	10000
17	10000	20000
7	20000	30000
2	30000	40000
0	40000	50000
0	50000	60000
1	60000	70000

PAGE# = 21 VALEUR MOYENNE = 8627 NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 92 VALEUR MINIMALE = 680 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 U < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 78084 ECHELLE : 0 = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

71	0	10000
30	10000	20000
0	20000	30000
2	30000	40000
0	40000	50000
0	50000	60000
0	60000	70000
1	70000	80000

PAGE# = 22 VALEUR MOYENNE = 13503 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 92 VALEUR MINIMALE = 3590 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 U < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 107684 ECHELLE : 0 = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

35	0	10000
23	10000	20000
4	20000	30000
2	30000	40000
0	40000	50000
1	50000	60000
0	60000	70000
0	70000	80000
0	80000	90000
0	90000	100000
1	100000	110000

PAGE# = 23 VALEUR MOYENNE = 16323 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 92 VALEUR MINIMALE = 3590 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 U < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 107684 ECHELLE : 0 = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

23	0	10000
23	10000	20000
2	20000	30000
6	30000	40000
0	40000	50000
0	50000	60000
0	60000	70000
0	70000	80000
0	80000	90000
1	90000	100000
1	100000	110000

PAGE# = 24 VALEUR MOYENNE = 17255 NOMBRE DE CLASSES = 18  
 PAGE = 92 VALEUR MINIMALE = 3590 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 U < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 174023 ECHELLE : 0 = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

21	0	10000
1	10000	20000
2	20000	30000
0	30000	40000
0	40000	50000
0	50000	60000
0	60000	70000
0	70000	80000
0	80000	90000
0	90000	100000
0	100000	110000
0	110000	120000
0	120000	130000
0	130000	140000
0	140000	150000
0	150000	160000
0	160000	170000
1	170000	180000

PAGE# = 25 VALEUR MOYENNE = 23207 NOMBRE DE CLASSES = 19  
 PAGE = 92 VALEUR MINIMALE = 3590 TAILLE CHG CLASSE = 10000  
 U < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 174023 ECHELLE : 0 = 1.0

OBSERVATION INTERVALLE HISTOGRAMME

19	0	10000
1	10000	20000
1	20000	30000
0	30000	40000
0	40000	50000
0	50000	60000
0	60000	70000
0	70000	80000
0	80000	90000
0	90000	100000
0	100000	110000
0	110000	120000
0	120000	130000
0	130000	140000
0	140000	150000
0	150000	160000
0	160000	170000
1	170000	180000
1	180000	190000

PAGE# = 7A      VALEUR MOYENNE = 24900      NOMBRE DE CLASSES = 18  
 PAGE = 92      VALEUR MINIMALE = 5200      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 176023      ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000
9	80000 90000
10	90000 100000
11	100000 110000
12	110000 120000
13	120000 130000
14	130000 140000
15	140000 150000
16	150000 160000
17	160000 170000
18	170000 180000

PAGE# = 27      VALEUR MOYENNE = 37187      NOMBRE DE CLASSES = 16  
 PAGE = 92      VALEUR MINIMALE = 5219      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 191223      ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000
9	80000 90000
10	90000 100000
11	100000 110000
12	110000 120000
13	120000 130000
14	130000 140000
15	140000 150000
16	150000 160000

PAGE# = 20      VALEUR MOYENNE = 8164      NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 95      VALEUR MINIMALE = 543      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 69960      ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000

PAGE# = 21      VALEUR MOYENNE = 9885      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 95      VALEUR MINIMALE = 1192      TAILLE CHU CLASSE = 90000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 74986      ECHELLE :    0    1,7

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000

PAGE# = 22      VALEUR MOYENNE = 11687      NOMBRE DE CLASSES = 19  
 PAGE = 95      VALEUR MINIMALE = 1379      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 101376      ECHELLE :    0    1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
2	10000 20000
3	20000 30000
4	30000 40000
5	40000 50000
6	50000 60000
7	60000 70000
8	70000 80000
9	80000 90000
10	90000 100000
11	100000 110000
12	110000 120000
13	120000 130000
14	130000 140000
15	140000 150000
16	150000 160000
17	160000 170000
18	170000 180000
19	180000 190000

PAGE n° 23 VALEUR MOYENNE = 13379 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 95 VALEUR MINIMALE = 2570 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 101576 ECHELLE : n = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
46	0 10000
20	10000 20000
3	20000 30000
3	30000 40000
0	40000 50000
2	50000 60000
2	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
1	100000 110000

PAGE n° 24 VALEUR MOYENNE = 33142 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 95 VALEUR MINIMALE = 6938 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 101576 ECHELLE : n = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
6	0 10000
6	10000 20000
3	20000 30000
3	30000 40000
2	40000 50000
2	50000 60000
0	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
2	100000 110000

PAGE n° 25 VALEUR MOYENNE = 28293 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 95 VALEUR MINIMALE = 5567 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 101576 ECHELLE : n = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
15	0 10000
15	10000 20000
0	20000 30000
0	30000 40000
0	40000 50000
2	50000 60000
0	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
1	100000 110000

PAGE n° 26 VALEUR MOYENNE = 33142 NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 95 VALEUR MINIMALE = 6938 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 101576 ECHELLE : n = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
6	0 10000
6	10000 20000
3	20000 30000
3	30000 40000
2	40000 50000
2	50000 60000
0	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
2	100000 110000

PAGE n° 27 VALEUR MOYENNE = 64189 NOMBRE DE CLASSES = 23  
 PAGE = 95 VALEUR MINIMALE = 9931 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 260163 ECHELLE : n = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
1	0 10000
7	10000 20000
3	20000 30000
3	30000 40000
1	40000 50000
1	50000 60000
0	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
0	100000 110000
0	110000 120000
0	120000 130000
0	130000 140000
0	140000 150000
0	150000 160000
0	160000 170000
0	170000 180000
0	180000 190000
0	190000 200000
0	200000 210000
0	210000 220000
0	220000 230000
0	230000 240000
0	240000 250000
0	250000 260000

PAGE n° 28 VALEUR MOYENNE = 28293 NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 95 VALEUR MINIMALE = 5567 TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999 VALEUR MAXIMALE = 101576 ECHELLE : n = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
15	0 10000
15	10000 20000
0	20000 30000
0	30000 40000
0	40000 50000
2	50000 60000
0	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
1	100000 110000

PAGE N° 20      Valeur Moyenne = 4250      Nombre de Classes = 6  
 PAGE = 96      Valeur Minimale = 1127      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 30161      Echelle :      1,0

OBSERVATION      INTERVALLE      HISTOGRAMME

102	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
3	30000	40000	.....
4	40000	50000	.....
5	50000	60000	.....

PAGE N° 21      Valeur Moyenne = 3348      Nombre de Classes = 6  
 PAGE = 96      Valeur Minimale = 3167      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 30161      Echelle :      1,0

OBSERVATION      INTERVALLE      HISTOGRAMME

99	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
3	30000	40000	.....
4	40000	50000	.....
5	50000	60000	.....

PAGE N° 22      Valeur Moyenne = 3536      Nombre de Classes = 6  
 PAGE = 96      Valeur Minimale = 1233      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 30161      Echelle :      1,0

OBSERVATION      INTERVALLE      HISTOGRAMME

75	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
3	30000	40000	.....
4	40000	50000	.....
5	50000	60000	.....

PAGE N° 23      Valeur Moyenne = 7923      Nombre de Classes = 6  
 PAGE = 96      Valeur Minimale = 3391      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 30161      Echelle :      1,0

OBSERVATION      INTERVALLE      HISTOGRAMME

7	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
3	30000	40000	.....
4	40000	50000	.....
5	50000	60000	.....

PAGE N° 24      Valeur Moyenne = 14230      Nombre de Classes = 6  
 PAGE = 96      Valeur Minimale = 3581      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 89093      Echelle :      1,0

OBSERVATION      INTERVALLE      HISTOGRAMME

15	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
3	30000	40000	.....
4	40000	50000	.....
5	50000	60000	.....

PAGE N° 25      Valeur Moyenne = 21220      Nombre de Classes = 10  
 PAGE = 96      Valeur Minimale = 3390      Taille Cho Classe = 10000  
 0 < Temps < 999999      Valeur Maximale = 97334      Echelle :      1,0

OBSERVATION      INTERVALLE      HISTOGRAMME

7	0	10000	.....
1	10000	20000	.....
2	20000	30000	.....
3	30000	40000	.....
4	40000	50000	.....
5	50000	60000	.....
6	60000	70000	.....
7	70000	80000	.....
8	80000	90000	.....
9	90000	100000	.....

PAGE# = 20    VALEUR MOYENNE = 8879    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 1315    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 67513    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000

HISTOGRAMME

PAGE# = 21    VALEUR MOYENNE = 10785    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 7879    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 77757    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000

HISTOGRAMME

PAGE# = 22    VALEUR MOYENNE = 12222    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 1879    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 79322    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000

HISTOGRAMME

PAGE# = 23    VALEUR MOYENNE = 14910    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 1879    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 79322    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000

HISTOGRAMME

PAGE# = 24    VALEUR MOYENNE = 18262    NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 3128    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 79922    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000

HISTOGRAMME

PAGE# = 25    VALEUR MOYENNE = 26913    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 5636    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 105805    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000
8	90000
9	100000
10	110000

HISTOGRAMME

PAGE# = 26    VALEUR MOYENNE = 35265    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 5636    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 105805    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000
8	90000
9	100000
10	110000

HISTOGRAMME

PAGE# = 27    VALEUR MOYENNE = 43617    NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 307    VALEUR MINIMALE = 5636    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 105805    ECHELLE : \* = 1.0

OBSERVATION    INTERVALLE

0	10000
1	20000
2	30000
3	40000
4	50000
5	60000
6	70000
7	80000
8	90000
9	100000
10	110000

HISTOGRAMME





PAGE N° 25,26      VALEUR MOYENNE = 28251      NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 111      VALEUR MINIMALE = 6673      TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 103860      ECHELLE :    0    1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0 10000	oooooooooooo
1	10000 20000	oooooooooooo
2	20000 30000	oooooooooooo
3	30000 40000	oooooooooooo
4	40000 50000	oooooooooooo
5	50000 60000	oooooooooooo
6	60000 70000	oooooooooooo
7	70000 80000	oooooooooooo
8	80000 90000	oooooooooooo
9	90000 100000	oooooooooooo
10	100000 110000	oooooooooooo

PAGE N° 27,28      VALEUR MOYENNE = 30700      NOMBRE DE CLASSES = 11  
 PAGE = 111      VALEUR MINIMALE = 6680      TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 103360      ECHELLE :    0    1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0 10000	oooooooooooo
1	10000 20000	oooooooooooo
2	20000 30000	oooooooooooo
3	30000 40000	oooooooooooo
4	40000 50000	oooooooooooo
5	50000 60000	oooooooooooo
6	60000 70000	oooooooooooo
7	70000 80000	oooooooooooo
8	80000 90000	oooooooooooo
9	90000 100000	oooooooooooo
10	100000 110000	oooooooooooo

PAGE N° 29,30      VALEUR MOYENNE = 33666      NOMBRE DE CLASSES = 12  
 PAGE = 111      VALEUR MINIMALE = 6652      TAILLE CHA CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 116382      ECHELLE :    0    1,0

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0 10000	oooooooooooo
1	10000 20000	oooooooooooo
2	20000 30000	oooooooooooo
3	30000 40000	oooooooooooo
4	40000 50000	oooooooooooo
5	50000 60000	oooooooooooo
6	60000 70000	oooooooooooo
7	70000 80000	oooooooooooo
8	80000 90000	oooooooooooo
9	90000 100000	oooooooooooo
10	100000 110000	oooooooooooo
11	110000 120000	oooooooooooo

PAGE# = 20  
PAGE = 113  
0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 55023  
VALEUR MINIMALE = 957  
VALEUR MAXIMALE = 198684

NOMBRE DE CLASSES = 20  
TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	0000000000
1	10000	0000000000
2	20000	0000000000
3	30000	0000000000
4	40000	0000000000
5	50000	0000000000
6	60000	0000000000
7	70000	0000000000
8	80000	0000000000
9	90000	0000000000
10	100000	0000000000
11	110000	0000000000
12	120000	0000000000
13	130000	0000000000
14	140000	0000000000
15	150000	0000000000
16	160000	0000000000
17	170000	0000000000
18	180000	0000000000
19	190000	0000000000
20	200000	0000000000

PAGE# = 20  
PAGE = 113  
0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 43600  
VALEUR MINIMALE = 1726  
VALEUR MAXIMALE = 193994

NOMBRE DE CLASSES = 20  
TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	0000000000
1	10000	0000000000
2	20000	0000000000
3	30000	0000000000
4	40000	0000000000
5	50000	0000000000
6	60000	0000000000
7	70000	0000000000
8	80000	0000000000
9	90000	0000000000
10	100000	0000000000
11	110000	0000000000
12	120000	0000000000
13	130000	0000000000
14	140000	0000000000
15	150000	0000000000
16	160000	0000000000
17	170000	0000000000
18	180000	0000000000
19	190000	0000000000
20	200000	0000000000

PAGE# = 21  
PAGE = 113  
0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 33925  
VALEUR MINIMALE = 957  
VALEUR MAXIMALE = 198684

NOMBRE DE CLASSES = 20  
TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	0000000000
1	10000	0000000000
2	20000	0000000000
3	30000	0000000000
4	40000	0000000000
5	50000	0000000000
6	60000	0000000000
7	70000	0000000000
8	80000	0000000000
9	90000	0000000000
10	100000	0000000000
11	110000	0000000000
12	120000	0000000000
13	130000	0000000000
14	140000	0000000000
15	150000	0000000000
16	160000	0000000000
17	170000	0000000000
18	180000	0000000000
19	190000	0000000000
20	200000	0000000000

PAGE# = 23  
PAGE = 113  
0 < TEMPS < 999999

VALEUR MOYENNE = 66277  
VALEUR MINIMALE = 3717  
VALEUR MAXIMALE = 198684

NOMBRE DE CLASSES = 20  
TAILLE CHQ CLASSE = 10000  
ECHELLE : 0 0 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	HISTOGRAMME
0	0	0000000000
1	10000	0000000000
2	20000	0000000000
3	30000	0000000000
4	40000	0000000000
5	50000	0000000000
6	60000	0000000000
7	70000	0000000000
8	80000	0000000000
9	90000	0000000000
10	100000	0000000000
11	110000	0000000000
12	120000	0000000000
13	130000	0000000000
14	140000	0000000000
15	150000	0000000000
16	160000	0000000000
17	170000	0000000000
18	180000	0000000000
19	190000	0000000000
20	200000	0000000000

PAGE# = 20      VALEUR MOYENNE = 3320      NOMBRE DE CLASSES = 5  
 PAGE = 116      VALEUR MINIMALE = 756      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 40260      ECHELLE : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
189	0 10000	.....
19	10000 20000	.....
15	20000 30000	.....
2	30000 40000	.....
0	40000 50000	.....

PAGE# = 21      VALEUR MOYENNE = 3660      NOMBRE DE CLASSES = 5  
 PAGE = 114      VALEUR MINIMALE = 756      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 40260      ECHELLE : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
189	0 10000	.....
15	10000 20000	.....
1	20000 30000	.....
1	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....

PAGE# = 22      VALEUR MOYENNE = 6910      NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118      VALEUR MINIMALE = 372      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 40260      ECHELLE : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
187	0 10000	.....
1	10000 20000	.....
1	20000 30000	.....
1	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
1	50000 60000	.....
1	60000 70000	.....

PAGE# = 23      VALEUR MOYENNE = 6115      NOMBRE DE CLASSES = 8  
 PAGE = 116      VALEUR MINIMALE = 1110      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 70993      ECHELLE : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
187	0 10000	.....
1	10000 20000	.....
1	20000 30000	.....
1	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
1	50000 60000	.....
1	60000 70000	.....
1	70000 80000	.....

PAGE# = 26      VALEUR MOYENNE = 44477      NOMBRE DE CLASSES = 20  
 PAGE = 123      VALEUR MINIMALE = 3717      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 146660      ECHELLE : \* \* 1,0

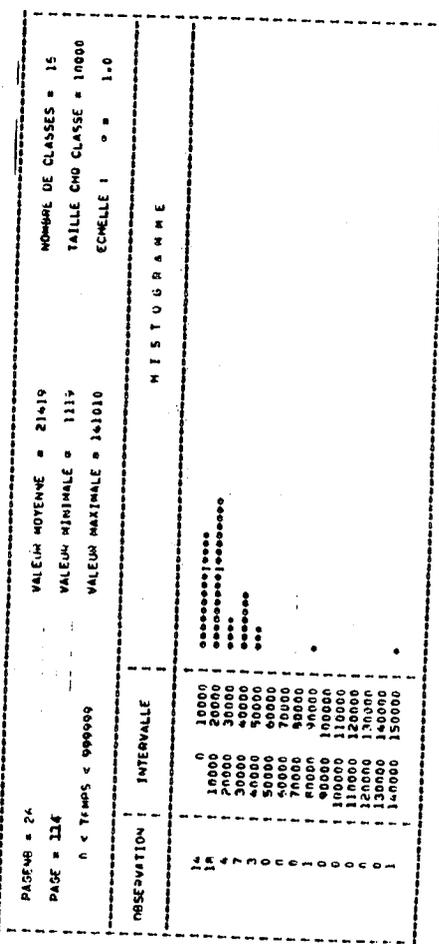
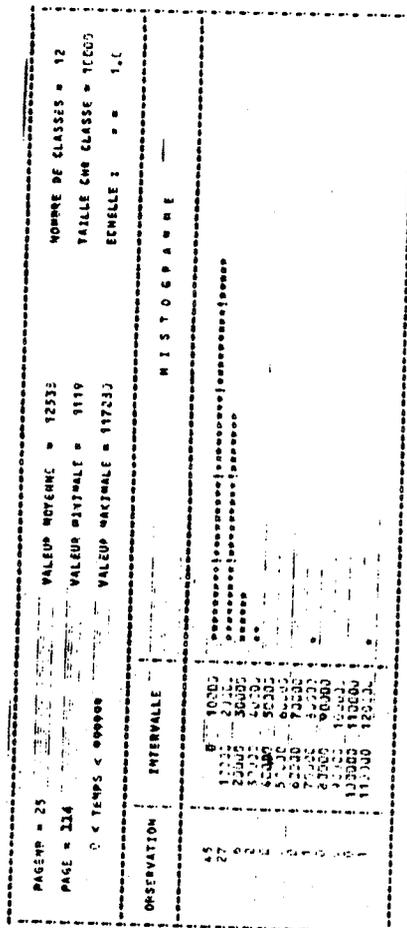
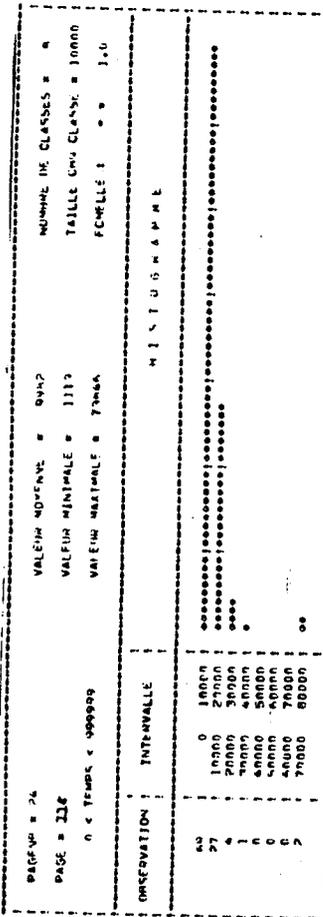
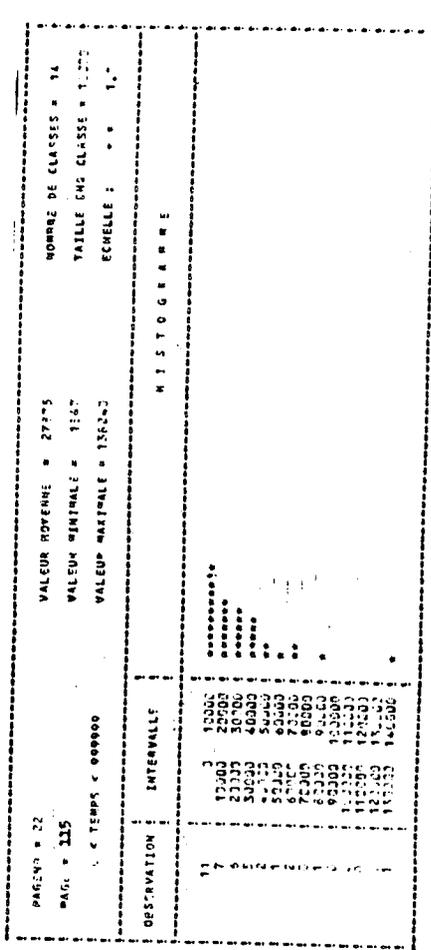
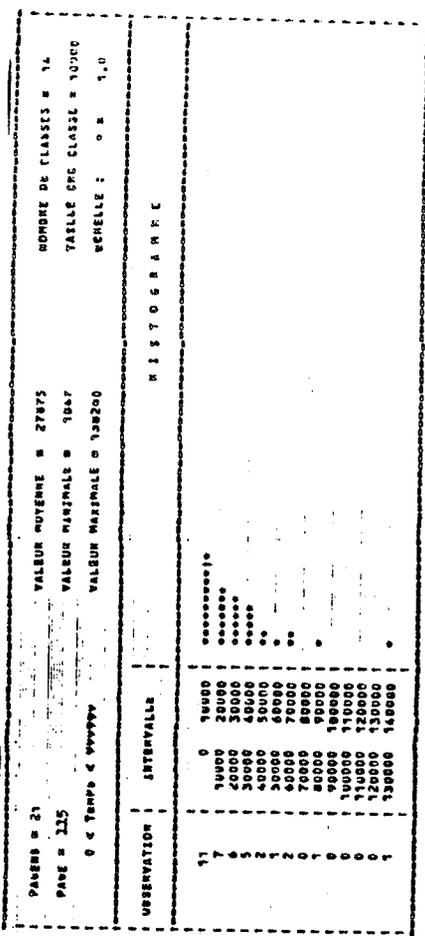
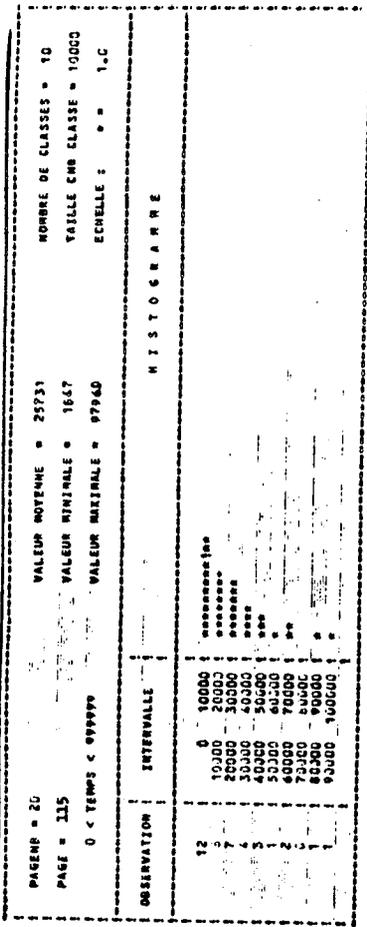
HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
1	0 10000	.....
1	10000 20000	.....
1	20000 30000	.....
1	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
1	50000 60000	.....
1	60000 70000	.....
1	70000 80000	.....
1	80000 90000	.....
1	90000 100000	.....
1	100000 110000	.....
1	110000 120000	.....
1	120000 130000	.....
1	130000 140000	.....
1	140000 150000	.....
1	150000 160000	.....
1	160000 170000	.....
1	170000 180000	.....
1	180000 190000	.....
1	190000 200000	.....

PAGE# = 27      VALEUR MOYENNE = 51105      NOMBRE DE CLASSES = 21  
 PAGE = 125      VALEUR MINIMALE = 9150      TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999      VALEUR MAXIMALE = 202601      ECHELLE : \* \* 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE	.....
1	0 10000	.....
1	10000 20000	.....
1	20000 30000	.....
1	30000 40000	.....
1	40000 50000	.....
1	50000 60000	.....
1	60000 70000	.....
1	70000 80000	.....
1	80000 90000	.....
1	90000 100000	.....
1	100000 110000	.....
1	110000 120000	.....
1	120000 130000	.....
1	130000 140000	.....
1	140000 150000	.....
1	150000 160000	.....
1	160000 170000	.....
1	170000 180000	.....
1	180000 190000	.....
1	190000 200000	.....
1	200000 210000	.....





PAGE# = 20	VALEUR MOYENNE = 7720	NOMBRE DE CLASSES = 11
PAGE = 116	VALEUR MINIMALE = 1030	TAILLE CHQ CLASSE = 10000
0 < TEMPS < 999999	VALEUR MAXIMALE = 100625	ECHELLE : * * 1,0
HISTOGRAMME		
OBSERVATION	INTERVALLE	
109	0 10000	*****
17	10000 20000	*****
3	20000 30000	*****
4	30000 40000	*****
0	40000 50000	*****
0	50000 60000	*****
0	60000 70000	*****
0	70000 80000	*****
0	80000 90000	*****
0	90000 100000	*****
1	100000 110000	*****

PAGE# = 21	VALEUR MOYENNE = 8028	NOMBRE DE CLASSES = 11
PAGE = 116	VALEUR MINIMALE = 1470	TAILLE CHQ CLASSE = 10000
0 < TEMPS < 999999	VALEUR MAXIMALE = 100625	ECHELLE : * * 1,0
HISTOGRAMME		
OBSERVATION	INTERVALLE	
95	0 10000	*****
16	10000 20000	*****
6	20000 30000	*****
3	30000 40000	*****
0	40000 50000	*****
0	50000 60000	*****
0	60000 70000	*****
0	70000 80000	*****
0	80000 90000	*****
0	90000 100000	*****
1	100000 110000	*****

PAGE# = 22	VALEUR MOYENNE = 8775	NOMBRE DE CLASSES = 11
PAGE = 116	VALEUR MINIMALE = 1470	TAILLE CHQ CLASSE = 10000
0 < TEMPS < 999999	VALEUR MAXIMALE = 100625	ECHELLE : * * 1,0
HISTOGRAMME		
OBSERVATION	INTERVALLE	
91	0 10000	*****
16	10000 20000	*****
6	20000 30000	*****
3	30000 40000	*****
0	40000 50000	*****
0	50000 60000	*****
0	60000 70000	*****
0	70000 80000	*****
0	80000 90000	*****
1	90000 100000	*****

PAGE# = 23	VALEUR MOYENNE = 10207	NOMBRE DE CLASSES = 11
PAGE = 116	VALEUR MINIMALE = 1470	TAILLE CHQ CLASSE = 10000
0 < TEMPS < 999999	VALEUR MAXIMALE = 103132	ECHELLE : * * 1,0
HISTOGRAMME		
OBSERVATION	INTERVALLE	
74	0 10000	*****
17	10000 20000	*****
3	20000 30000	*****
4	30000 40000	*****
0	40000 50000	*****
0	50000 60000	*****
0	60000 70000	*****
0	70000 80000	*****
0	80000 90000	*****
0	90000 100000	*****
2	100000 110000	*****

PAGE# = 24	VALEUR MOYENNE = 11176	NOMBRE DE CLASSES = 11
PAGE = 116	VALEUR MINIMALE = 2040	TAILLE CHQ CLASSE = 10000
0 < TEMPS < 999999	VALEUR MAXIMALE = 100030	ECHELLE : * * 1,0
HISTOGRAMME		
OBSERVATION	INTERVALLE	
70	0 10000	*****
17	10000 20000	*****
3	20000 30000	*****
4	30000 40000	*****
0	40000 50000	*****
0	50000 60000	*****
0	60000 70000	*****
0	70000 80000	*****
0	80000 90000	*****
1	90000 100000	*****

PAGE# = 25	VALEUR MOYENNE = 13235	NOMBRE DE CLASSES = 12
PAGE = 116	VALEUR MINIMALE = 2800	TAILLE CHQ CLASSE = 10000
0 < TEMPS < 999999	VALEUR MAXIMALE = 91755	ECHELLE : * * 1,0
HISTOGRAMME		
OBSERVATION	INTERVALLE	
35	0 10000	*****
25	10000 20000	*****
4	20000 30000	*****
0	30000 40000	*****
0	40000 50000	*****
0	50000 60000	*****
0	60000 70000	*****
0	70000 80000	*****
0	80000 90000	*****
1	90000 100000	*****



PAGE N° = 20    VALEUR MOYENNE = 6993    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
121	0 10000
20	10000 20000
7	20000 30000
C	30000 40000
B	40000 50000
D	50000 60000
E	60000 70000
1	70000 80000

PAGE N° = 21    VALEUR MOYENNE = 7188    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
198	0 10000
19	10000 20000
B	20000 30000
D	30000 40000
E	40000 50000
B	50000 60000
1	60000 70000

PAGE N° = 22    VALEUR MOYENNE = 8122    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
112	0 10000
12	10000 20000
1	20000 30000
2	30000 40000
3	40000 50000
4	50000 60000
1	60000 70000

PAGE N° = 23    VALEUR MOYENNE = 15202    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
24	0 10000
26	10000 20000
7	20000 30000
1	30000 40000
1	40000 50000
1	50000 60000
1	60000 70000

PAGE N° = 24    VALEUR MOYENNE = 21054    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
14	0 10000
10	10000 20000
5	20000 30000
7	30000 40000
2	40000 50000
3	50000 60000
0	60000 70000
1	70000 80000

PAGE N° = 25    VALEUR MOYENNE = 25072    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
11	0 10000
10	10000 20000
3	20000 30000
3	30000 40000
7	40000 50000
2	50000 60000
0	60000 70000
7	70000 80000
1	80000 90000
1	90000 100000
1	100000 110000
1	110000 120000
1	120000 130000

PAGE N° = 24    VALEUR MOYENNE = 28035    NOMBRE DE CLASSES = 7  
 PAGE = 118    VALEUR MINIMALE = 1177    TAILLE CHU CLASSE = 10000  
 0 < TEMPS < 999999    VALEUR MAXIMALE = 87714    ECHELLE : \* = 1,0

HISTOGRAMME

OBSERVATION	INTERVALLE
3	0 10000
15	10000 20000
3	20000 30000
3	30000 40000
3	40000 50000
2	50000 60000
0	60000 70000
0	70000 80000
0	80000 90000
0	90000 100000
0	100000 110000
1	110000 120000

PAGE# = 20		VALOR MOYENNE = 12324	NOMBRE DE CLASSES = 6
PAGE = 119		VALOR MINIMAL = 1277	TAILLE CHS CLASSE = 13060
0 < TEMPS < 999999		VALOR MAXIMAL = 50740	ECHELLE : 0 = 1.0
HISTOGRAMME			
OBSERVATION	INTERVALLE		
32	0 10000	oooooooooooooooooooooooooooo	
25	13333	oooooooooooooooooooooooooooo	
18	26666	oooooooooooooooooooooooooooo	
11	40000	oooooooooooooooooooooooooooo	
4	53333	oooooooooooooooooooooooooooo	
2	66666	oooooooooooooooooooooooooooo	
1	80000	oooooooooooooooooooooooooooo	

PAGE# = 21		VALOR MOYENNE = 33704	NOMBRE DE CLASSES = 9
PAGE = 119		VALOR MINIMAL = 0	TAILLE CHS CLASSE = 31000
0 < TEMPS < 999999		VALOR MAXIMAL = 177811	ECHELLE : 0 = 1.0
HISTOGRAMME			
OBSERVATION	INTERVALLE		
1	0 10000	ooo	
14	10000 20000	oooooooooooo	
3	20000 30000	o	
5	30000 40000	oooo	
6	40000 50000	oooo	
7	50000 60000	oooo	
2	60000 70000	oo	
0	70000 80000		
0	80000 90000		
0	90000 100000		
0	100000 110000		
0	110000 120000		
0	120000 130000		
0	130000 140000		
0	140000 150000		
0	150000 160000		
0	160000 170000		
2	170000 180000	oo	

## 2. ANALYSE DESCRIPTIVE ET INTERPRETATION DES HISTOGRAMMES

Après une première analyse des histogrammes obtenus, on a vérifié un fait remarquable : tous les histogrammes obtenus pourraient être regroupés en trois classes, chaque classe ayant un type d'histogramme bien défini. Les histogrammes présentés appartiennent aux deux premiers types qu'on décrit dans la suite.

Type I - Histogramme décroissant.

Ce type d'histogramme a l'allure suivante :

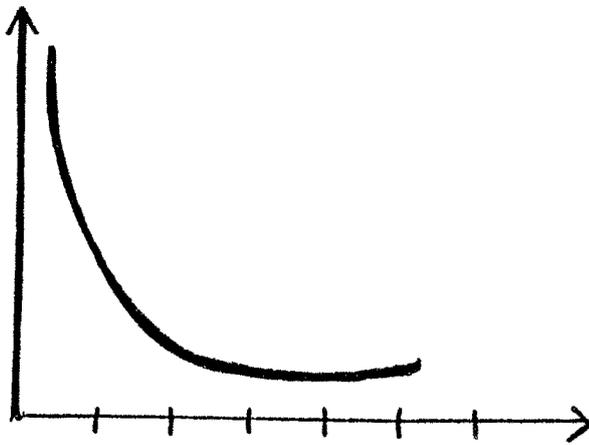


Figure 16

Les fréquences sont décroissantes, normalement, avec une décroissance très rapide. La fréquence des intervalles petits est très grande, mais quand la longueur de ces intervalles augmente, la fréquence commence à décroître très vite.

Interprétation : Les pages correspondant à ce type d'histogramme sont fréquemment référencées mais, comme la mémoire réelle est trop petite, elles ne peuvent pas y rester. Ainsi, la page référencée fait souvent défaut, donc les intervalles entre défauts de page sont petits.

On observe que la taille moyenne de ces intervalles est, pour ce type

d'histogramme, inférieur à 20000 unités, donc en moyenne pour chaque 20000 références de pages, on observe un défaut.

Type II - Histogramme unimodal.

Ce type d'histogramme a l'allure suivante :

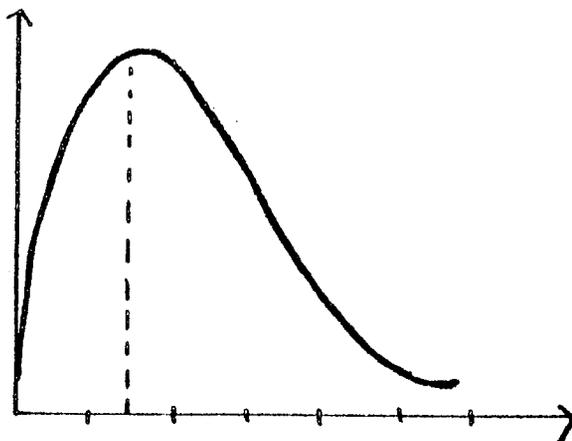


Figure 17

Dans ce type d'histogramme, on note un fait remarquable : la mode se trouve dans la deuxième classe, dans tous les histogrammes appartenant à ce type. Après la deuxième classe, les fréquences sont décroissantes. Par rapport au type I, quand on passe au type II, la fréquence la plus élevée passe de la première classe à la deuxième classe.

Interprétation - Ce type correspond aux pages référencées moins souvent, donc la moyenne de la longueur des intervalles augmente par rapport au type I.

Appartiennent aussi à ce type les pages qui, pour une taille de mémoire réelle plus petite, appartaient au type I. Quand on augmente la taille de la mémoire réelle, les pages référencées souvent ont une plus grande probabilité d'y rester, donc, quand on fait référence à l'une de ces pages, la probabilité qu'elle fasse défaut est plus petite. Ainsi, la moyenne de la longueur des intervalles entre défauts est plus grande que pour le type I et est comprise entre 20000 et 40000 unités.

Type III - Histogramme de fréquences petites et dispersées.

Ce type est caractérisé par des fréquences très petites et très dispersées.

Quand  $s$  est petit, il y a peu de ces histogrammes (cf. tableau 6).

Les histogrammes appartenant à ce type n'ont pas assez d'observations pour être étudiées statistiquement. On ne les a pas présentées.

Interprétation : Appartiennent à ce type les pages rarement référencées et les pages qui ne font jamais de défauts ou qui n'en font que très peu. Par exemple, si une page est référencée très souvent, mais si la mémoire réelle est suffisamment grande, cette page a une grande probabilité de rester dans la mémoire réelle, donc elle fera très peu de défauts.

Pour un programme donné, quand le rapport taille mémoire réelle alloué au programme et taille mémoire virtuelle s'approche de 1, alors toutes les pages auront des histogrammes de ce type.

La grande fréquence de pages dans ce type d'histogramme pour des tailles de la mémoire réelle de 28, 29 et 30 pages (cf. tableau 6) est naturelle parce que notre programme a 41 pages virtuelles, donc on lui a alloué, dans la mémoire réelle, un espace de plus de 70% de sa mémoire virtuelle.

On peut donc conclure que la nature de l'histogramme dépend essentiellement du paramètre taille-mémoire réelle.

En effet, c'est ce qu'on a observé. On a commencé par une taille de mémoire de 20 pages. Dans ce cas, la plupart des pages appartiennent au type I. Plus précisément, on a les pourcentages suivants :

Tableau 6

Type \ s	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
I	66%	59%	46%	37%	32%	10%	2%	0	0	0	0
II	7%	15%	20%	27%	32%	54%	56%	46%	32%	29%	20%
III	27%	26%	34%	36%	36%	36%	42%	54%	68%	71%	80%

Pour chaque type d'histogramme, on a construit le graphe des fréquences de ces histogrammes par rapport à la taille de la mémoire réelle. On représente ces graphes dans les trois figures suivantes.

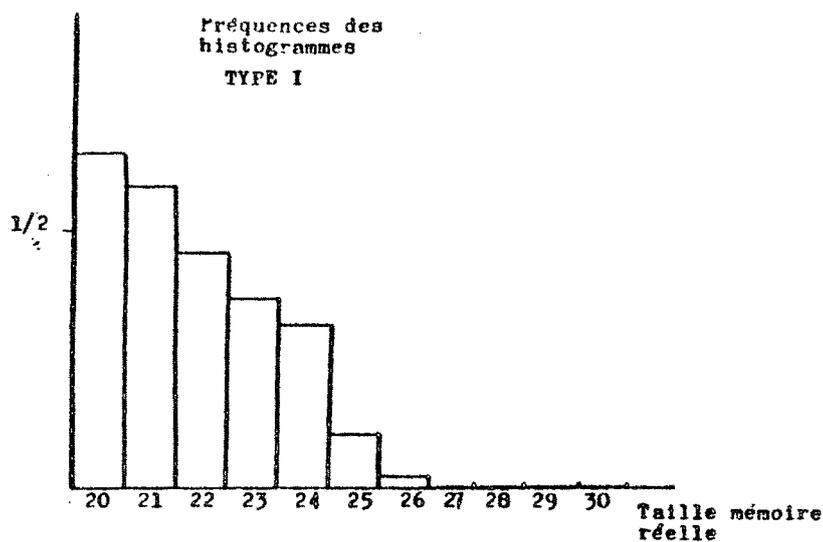


Figure 18 - Histogramme des fréquences des histogrammes de type I pour  $s \in [20, 30]$ .

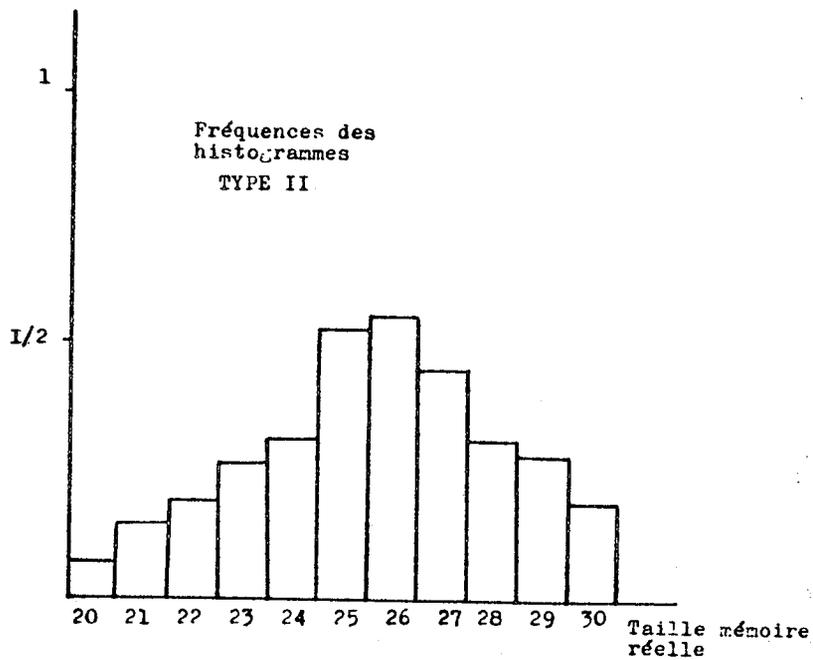


Figure 19 - Histogramme des fréquences des histogrammes de type II, pour  $s \in [20,30]$ .

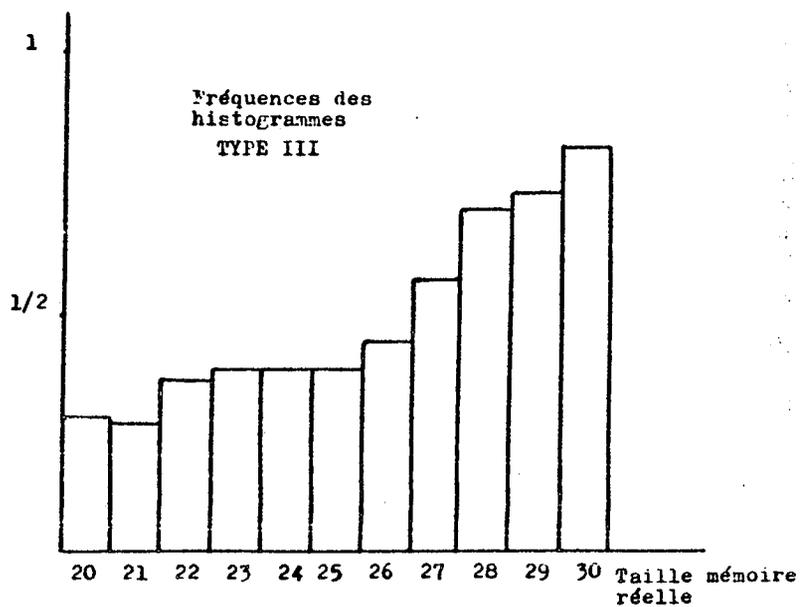


Figure 20 - Histogramme des fréquences des histogrammes de type III, pour  $s \in [20,30]$ .

Quand on augmente progressivement la taille de mémoire réelle jusqu'à 26, la plupart des pages qui appartenaient au type I viennent à appartenir au type II, alors que le nombre de pages qui appartenaient au type III se conserve plus ou moins constant.

Pour une valeur de  $s > 26$  un grand pourcentage des pages qui appartenaient au type II deviennent du type III qui est, pour  $s = 30$ , le type dominant.

Nous pouvons donc considérer notre programme constitué essentiellement par deux ensembles de pages : un ensemble A, plus petit, constitué par les pages qui n'ont pas un comportement normal par rapport à l'ensemble de toutes les pages, soit pour avoir une fréquence d'utilisation très grande, soit pour avoir cette fréquence très petite. Quel que soit le cas, le résultat est toujours un nombre très petit de défauts de page. Les pages appartenant à cet ensemble ont, pour  $s < 26$ , un histogramme de type III.

L'autre ensemble B, le plus nombreux, est constitué par les pages qui ont une fréquence d'utilisation plus uniforme les unes par rapport aux autres. La plupart de ces pages appartiennent, pour  $s = 20$ , au type I (cf. tableau, figure 18). C'est à partir de ces pages  $\in B$ , que nous allons étudier le comportement du programme par rapport à la taille de la mémoire réelle, parce que ces pages, avec la croissance progressive de  $s$ , appartiennent aux types II et III (cf. tableau figure 18). Pour une page  $\in B$ , le fait qu'elle appartient au type III est une conséquence de la taille de la mémoire réelle, c'est-à-dire que le nombre très petit de défauts de page est dû à une taille suffisamment grande de la mémoire réelle alors que, pour une page  $\in A$ , le fait qu'elle a un histogramme de type III ne dépend pas essentiellement de la taille de la mémoire réelle.

Avec le croissance de  $s$ , il y a donc une transition entre le nombre d'histogrammes appartenant à chaque type. Un point très important dans cette transition, est donné par l'abscisse du maximum de la courbe que donne les fréquences des histogrammes du type II par rapport à la taille mémoire réelle, parce que, d'après nous, c'est le type II le plus intéressant, ce qui nous donne

mieux l'idée de l'influence de la taille de la mémoire réelle sur le comportement du programme.

Dans le cas présent, on a  $s = 26$ . Cette valeur, nous la considérons, dans une première approche, comme la taille optimal de la mémoire réelle qu'on doit allouer à ce programme.

Dans cette analyse préliminaire qui nous a conduit à la classification des histogrammes, il y a un autre fait à remarquer : dans la plupart des histogrammes, il y a une classe, contenant un élément qui se situe après un certain nombre de classes qui ne contiennent pas d'éléments.

C'est-à-dire que, pour toutes les pages, il y a un intervalle entre deux défauts successifs, de longueur très grande, par rapport aux autres intervalles.

Par exemple, pour une taille de mémoire réelle égale à 20, on a vérifié que cet intervalle a, dans la plupart des pages, une longueur comprise entre 100000 et 110000 références, donc la classe est la 11ème. Pour une taille de mémoire plus grande, la longueur de cet intervalle augmente, et il n'y a pas une classe fixe à laquelle appartienne cet intervalle.

L'explication qu'on a trouvé pour ce fait, c'est la suivante : il doit y avoir, dans le programme, une boucle. C'est-à-dire que, dans l'exécution du programme et pendant un certain intervalle de temps, il y a un ensemble de pages, toujours les mêmes, qui sont référencées. Si le nombre de ces pages n'est pas trop grand, elles resteront presque toutes dans la mémoire réelle et il n'y aura même aucun défaut. Ainsi, dans cette partie du déroulement du programme, la longueur de l'intervalle entre deux défauts est très grande par rapport aux autres intervalles.

Par exemple, pour  $s = 20$ , dans la visualisation des processus  $\Pi_j^P$ , figure 4, on voit très bien ce qu'on vient de dire. L'intervalle de temps  $41500 < t < 515000$ , correspond nettement à une boucle dans le programme. Il y a une autre boucle plus petite pour  $670000 < t < 700000$ , mais qui n'a pas les mêmes effets sur les histogrammes, que la boucle antérieure.

On peut donc en conclure que cette anomalie dans les histogrammes (classe avec un élément très éloigné des autres) est due essentiellement à la structure du programme.

De l'observation des histogrammes, il y a un autre fait qui doit être pris en considération et pour lequel on essayera aussi de trouver une explication au sens informatique.

On observe, dans certains histogrammes, qu'on a classifiés de type II, que, après une certaine régularité en ce qui concerne le décroissement des fréquences, il y a une fréquence plus grande que l'antérieure et, après, les fréquences commencent de nouveau à décroître. Ces histogrammes présentent donc une deuxième mode, bien que plus petite que la mode de la deuxième classe.

Ce fait peut être dû à ce qu'on a appelé "la propriété de localité", dans le chapitre I. Dans un certain intervalle de temps, il y a un petit ensemble de pages qui sont les plus référencées, et forment de ce fait une "localité". Nous pouvons figurer un programme en faisant des transitions entre "localités". Quand on entre dans une "localité", la longueur des intervalles entre défauts augmente, d'où la deuxième mode observée.

On a ainsi un autre phénomène dû à la structuration des programmes.

Un troisième point qu'on a observé, c'est le suivant : il y a des pages, avec des histogrammes tout à fait pareils. Par exemple, les pages 76 et 77. Cette conclusion pourrait être retirée aussi de l'observation des graphiques qui visualisent ces processus. On observe, dans ces graphiques, que les pages 76 et 77 font toujours des défauts suivis.

Après cette analyse, il nous reste à étudier les histogrammes type I et type II, en ne tenant pas compte des valeurs aberrantes.

Dans le paragraphe suivant, on va étudier le processus associé à une page.

3. ETUDE DU PROCESSUS DE DEFAUTS DE PAGE

3.1. Etude d'un lemme

Nous commençons le §3. par enoncer et démontrer un lemme, qui nous sera utile par la suite.

LEMME 3.1.1

"Soit  $(\frac{D}{T})_{r \geq 1}$ , une suite de vecteurs aléatoires indépendantes et de même loi, où  $D_r^r = 0$  ou 1 et T est une variable aléatoire (v.a.) entière positive; on désigne par G la fonction génératrice (f.g.) de  $T_r$  et par  $G_1$ , la fonction génératrice de  $T_r$  conditionnelle à  $(D_r = 1)$ .

Soit R la variable aléatoire définie par

$$(1) \quad (R=r) = (D_{j+1}=0, D_{j+2}=0, \dots, D_{j+r-1}=0, D_{j+r}=1), \quad r \geq 1$$

Alors, la v.a.

$$(2) \quad X = T_{j+1} + T_{j+2} + \dots + T_{j+R}$$

a pour fonction génératrice

$$(3) \quad G_X = \frac{\beta G_1}{1 - G + \beta G_1}$$

où  $\beta = P((D_r = 1))$

Dem: Par définition de fonction génératrice

$$(4) \quad G_X(u) = \sum_{r \geq 1} E\{u^{T_{j+1} + \dots + T_{j+R}} \mid R=r\} P(R=r)$$

$$= \sum_{r \geq 1} E\{u^{T_{j+r}} \mid (D_{j+r}=1)\} \prod_{i=1}^{r-1} E\{u^{T_{j+i}} \mid (D_{j+i}=0)\} P((D_{j+i}=0))$$

$$P((D_{j+r}=1))$$

Réprésentant par  $G_0(u)$  et  $G_1(u)$ , les fonctions génératrices de  $T_r$  conditionnelles respectivement à  $(D_r=0)$  et  $(D_r=1)$ , et par  $\beta = P((D_r=1))$ , on a

$$\begin{aligned}
 G_X(u) &= \sum_{r \geq 1} G_1(u) (G_0(u))^{r-1} (1-\beta)^{r-1} \beta \\
 (5) \qquad &= \frac{\beta G_1(u)}{1 - (1-\beta)G_0(u)}
 \end{aligned}$$

Mais

$$E\{u^{T_r}\} = E\{u^{T_r} \cdot 1_{(D_r=0)}\} + E\{u^{T_r} \cdot 1_{(D_r=1)}\}$$

d'où

$$(6) \quad G(u) = (1-\beta)G_0(u) + \beta G_1(u)$$

et la démonstration est achevée d'après (5).

PROPOSITION 3.1.1

"Avec les notations et dans les conditions du lemme antérieur, l'espérance mathématique de la v.a. X est égale à

$$(7) \quad E(X) = \frac{E(T)}{\beta} \quad "$$

Dem:

$$X = T_{j+1} + \dots + T_{j+R}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{r \geq 1} E\{T_{j+1} + \dots + T_{j+R} \mid R=r\} P(R=r) \\
 &= \sum_{r \geq 1} E\{T\} r P(R=r)
 \end{aligned}$$

$$(8) \quad = E(T) E(R)$$

D'après la définition, R est une v.a. de loi géométrique, de paramètre  $\beta$ . Ainsi,

$$(9) \quad E(R) = \frac{1}{\beta}$$

et la démonstration est achevée d'après (8).

Remarque 3.1.1

On remarque que l'équation (3) peut être obtenue directement, en faisant un raisonnement de renouvellement (Feller (14), pag.330 et Feller (15), pag.186). En effet, en utilisant les notations du lemme, on a

$$(10) \quad P(X=n) = P(T_{j+1}=n \cdot 1_{(D_r=1)}) + \sum_{k=1}^{n-1} P(T_{j+1}=k \cdot 1_{(D_r=0)}) P(X=n-k)$$

Donc, ces probabilités satisfont à une équation de convolution du type de l'équation de renouvellement.

L'obtention de l'équation (3) à partir de (10) est immédiate.

En appliquant le théorème du renouvellement (Feller (14), pag.330) on obtient les résultats suivants:

1. Si  $P((D_r=0)) > 1$ , alors  $P(X=n) \rightarrow 0$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \frac{P((D_r=1))}{1-P((D_r=0))} = 1$$

2. Si  $P((D_r=0))=1$ , alors

$$P(X=n) \rightarrow \frac{P((D_r=1))}{P((D_r=0))} \mu^{-1}$$

où  $\mu$  est l'espérance mathématique des v.a.  $T_r$ . Donc

$$P(X=n) \rightarrow 0$$

### 3.2. Loi de l'intervalle entre deux appels successifs de la même page

Soit  $E = (1, 2, \dots, n)$  la mémoire virtuelle du programme, c.a.d., l'ensemble de toutes les pages qui peuvent être appelées, pendant l'exécution du programme.

On représente par  $P_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $P_t \in E$ , le numéro de la page appelée à l'instant  $t$ .

Hypothèse (H<sub>1</sub>)

"On considère (P<sub>t</sub>, t ∈ N), comme des variables aléatoires (v.a.) indépendantes, de même loi, définie par

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall j \in E \quad P((P_t=j)) = p_j, \quad p_j \neq 0 "$$

Rappel

Soient c<sup>1</sup>, c<sup>2</sup>, ..., c<sup>s</sup>, les s cases ordonnées, qu'on utilise pour représenter la mémoire réelle (m.r.); elles sont occupées par des pages et on désigne par

$$c_t^i \quad (t \in \mathbb{N}, i=1, \dots, s), \quad c_t^i \in E$$

l'indice de la page qui se trouve dans la case c<sup>i</sup>, à l'instant t. Dans la suite on confondra page et indice de cette page.

Lorsque la mémoire réelle fonctionne selon l'algorithme LRU, à chaque instant t, on opère comme suit:

Si P<sub>t</sub> est dans une case c<sup>i</sup>, i ≤ s, on la transfère dans c<sup>1</sup>. Toutes les pages dans les cases c<sup>j</sup>, pour j < i, sont repoussées d'une case. Les autres pages, c.a.d., celles qui se trouvent dans les cases c<sup>k</sup>, i < k ≤ s, restent dans la même position;

Si P<sub>t</sub> n'est pas dans une case de la m.r., on enlève la page qui se trouve dans c<sup>s</sup>, on décale les autres d'une case et on met P<sub>t</sub> dans c<sup>1</sup>.

Hypothèse (H<sub>2</sub>)

"On considère que la mémoire réelle a une taille s et fonctionne selon l'algorithme LRU"

Notations

Dans ce paragraphe, on se fixe une page i; on ne fait pas apparai-

tre l'indice  $i$ , pour simplifier l'écriture, mais on le fera apparaître dès que nécessaire.

On désigne par

$$(11) \quad Z_r = (T_r^{(i)})_{r \geq 2}$$

la suite des vecteurs aléatoires, définis par

$$(12) \quad t_r = \sum_{i=1}^r T_r^{(i)}$$

est l'instant du  $r$ .ième appel de la page  $i$ ,

$$(13) \quad D_r = \begin{cases} 0, & \text{si la page } i \text{ est en m.r. à l'instant } t_r \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les instants d'appel de la page, pour lesquels  $D_r=1$ , sont des instants où il y a défaut de page. Comme nous sommes intéressés en étudiant le processus des instants des défauts de page, nous nous intéressons plutôt aux instants  $t_r$ , pour lesquels la v.a.  $D_r=1$ .

Enfin, on désigne par  $Q(p)$  la loi géométrique de paramètre  $p$ , c.a.d., définie par la probabilité

$$p (1-p)^{k-1}, \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

Théorème 3.2.1.

"Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , les vecteurs aléatoires  $(Z_r)_{r \geq 2}$  sont indépendantes et ont tous la même loi, définie par:

$$(14) \quad P_{T_r} = Q(p_i)$$

$$(15) \quad P\{(D_r=1)\} = \sum_{\substack{i_1 \neq \dots \neq i_{s-1} \\ \neq i}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1-(p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{(1-p_{i_1})(1-(p_{i_1} + p_{i_2})) \dots (1-(p_{i_1} + \dots + p_{i_{j-1}}))}$$

où  $\forall j, i_j \in E, \text{ si } s > 1$

$$= 1-p_i \quad \text{si } s=1$$

La loi de probabilité de  $T_r$ , conditionnelle à  $(D_r=1)$  est égale à

$$(16) \quad P_1 = Q(p_{i_1}) \otimes_{i_1 \neq i_{s-1}} \sum_{i_1 \neq i_{s-1}} \bar{h}_i(i_1, \dots, i_{s-1}) Q(1-p_{i_1}) \otimes Q(1-(p_{i_1}+p_{i_2})) \otimes \dots \\ \dots \otimes Q(1-(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}})) \otimes \delta_1$$

où  $\otimes$  désigne le produit de convolution

$$h_i(i_1, \dots, i_{s-1}) = \frac{h_i(i_1, \dots, i_{s-1})}{P((D_r=1))}$$

$$h_i(i_1, \dots, i_{s-1}) = \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1-(p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{s-1}}))}{(1-p_{i_1})(1-(p_{i_1}+p_{i_2})) \dots (1-(p_{i_1}+\dots+p_{i_{s-1}}))}$$

$\delta_1$  est la fonction de Dirac, concentrée dans le point 1

pour  $s > 1$  et  $P_1 = Q(p_{i_1}) \cdot \delta_1$  si  $s=1$  "

Dem: L'indépendance des vecteurs aléatoires  $(Z_r)_{r \geq 2}$ , suit immédiatement de l'hypothèse  $(H_1)$ . De cette hypothèse on déduit aussi la loi des v.a.  $T_r$ .

Afin de déterminer la loi de  $T_r$ , conditionnelle à  $D_r=1$ , considérons en détaille une des trajectoires qui donnent

$$T_r = s+u, \quad D_r=1 \quad \text{quand } s > 1.$$

Les résultats pour le cas où  $s=1$  sont immédiats.

D'après l'hypothèse  $(H_2)$ , on a qu'à l'instant  $t_{r-1}$  la page  $i$  se trouve dans la position 1 de la m.r.. A partir de cet instant, jusqu'à l'instant  $t_r$ , on a la trajectoire suivante

$$i_1, \underbrace{i_1, \dots, i_1}_{u_1 \text{ fois}}, i_2, \underbrace{(i_1 \text{ ou } i_2)}_{u_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(i_1 \text{ ou } i_2)}_{u_2 \text{ fois}}, i_3, \underbrace{(i_1 \text{ ou } i_2 \text{ ou } i_3)}_{u_3 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(i_1 \text{ ou } i_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } i_{s-1})}_{u_{s-1} \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(i_1 \text{ ou } i_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } i_{s-1})}_{u_{s-1} \text{ fois}}, \\ \underbrace{(\text{pas}(i_1 \text{ ou } i_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } i_{s-1}))}_{u_{s-1} \text{ fois}}, \text{pas } i, \dots, \text{pas } i, \underbrace{i}_{u_s \text{ fois}}$$

où  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{s-1} \neq i$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_{s-1} \geq 0, u_s \geq 1$$

et  $u_1 + u_2 + \dots + u_{s-1} + u_s = u$

La probabilité de cette trajectoire est

$$p_{i_1}^{u_1} p_{i_1}^{p_{i_1} + p_{i_2}} p_{i_2}^{u_2} p_{i_3} \dots p_{i_{s-1}}^{(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}})^{u_{s-1}}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))^{u_s - 1} p_i$$

La somme, sur toutes les trajectoires possibles, donne

$$(17) \quad P(T_r = s + u, 1(D_r = 1)) = \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \dots \\ i_{s-1} \neq i}} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} p_{i_1}^{u_1} (p_{i_1} + p_{i_2})^{u_2} \dots (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}})^{u_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))^{u_s - 1} p_i$$

où  $\sum_{j=1}^s u_j = u$

Si on somme sur  $u$ , c.a.d., sur  $u_1 \geq 0, \dots, u_{s-1} \geq 0, u_s \geq 1$ , on obtient  $P((D_r = 1))$ . Donc, si  $s > 1$

$$(18) \quad P((D_r = 1)) = \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \dots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{(1 - p_{i_1}) (1 - (p_{i_1} + p_{i_2})) \dots (1 - (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

D'autre part

$$(19) \quad P(T_r = s + u | (D_r = 1)) = \frac{1}{P((D_r = 1))} \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \dots \\ i_{s-1} \neq i}} p_{i_1}^{u_1} (1 - p_{i_1}) (p_{i_1} + p_{i_2})^{u_2} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2})) \dots (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}})^{u_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))^{u_s - 1} p_i h_i(i_1, \dots, i_{s-1})$$

où on a représenté par  $h_i(i_1, \dots, i_{s-1})$  le terme de la somme (18).

En faisant le changement de variables

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 + 1 \\ u'_2 &= u_2 + 1 \\ &\dots \\ u'_{s-1} &= u_{s-1} + 1 \end{aligned}$$

de façon à obtenir les lois géométriques, on a que

$$\sum_{j=1}^{s-1} u'_j + u_s = u + s - 1.$$

Ainsi, à partir de (19), on obtient comme loi de  $T_r$ , conditionnelle à  $D_r=1$ , l'expression suivante

$$(20) \quad P_1 = Q(p_i) \otimes \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \dots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{h_i(i_1, \dots, i_{s-1})}{P((D_r=1))} Q(1-p_{i_1}) \otimes \dots \otimes Q(1-(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}})) \otimes \partial_1$$

où  $\partial_1$  est la loi d'une variable aléatoire toujours égale à 1, d'où la conclusion du théorème.

Remarque 3.2.1

On montrera dans un anexe, à la fin du §3, que la probabilité d'une configuration  $I=(i_1, \dots, i_s)$  de la m.r., est égale à

$$P(I) = p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}} \dots \frac{p_{i_s}}{1-p_{i_1}-\dots-p_{i_{s-1}}}$$

Alors, on a

$$P((D_r=1)) = \sum_{I=(i_1, \dots, i_s)} P(I)$$

où  $\forall j, i_j \in (E-(i))$  et  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_s$

Cette somme semble impossible de calculer numériquement; néanmoins dans la pratique, il n'existe qu'un nombre restreint de classes de pages, ayant des probabilités d'appel très voisines; ainsi, on peut sommer sur un ensemble  $k$  de configurations de classes, au lieu de sommer sur un ensemble, dont la cardinalité est bien supérieure.

Corollaire 3.2.1.

"Sous les hypothèses du théorème 3.2. et conditionnellement à  $D_r=1$ , la fonction génératrice de la v.a.  $T_r$ , est égale à

$$(21) \quad G_1(u) = \frac{u^{s+1} p_i}{1-u(1-p_i)} \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{p_{i_1} \dots p_{i_{s-1}} (1-(p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{s-1}}))}{P((D_r=1))(1-up_{i_1}) \dots (1-u(p_{i_1}+\dots+p_{i_{s-1}}))}$$

si  $s > 1$ , et

$$= \frac{u^2 p_i}{(1-u(1-p_i))} \quad \text{si } s=1 \text{ " .}$$

Dem: D'après la loi de  $(T_r | (D_r=1))$ , obtenue dans le théorème antérieur, on déduit que sa fonction génératrice est, pour  $s > 1$

$$G_1(u) = G_{Q(p_i)} \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq i}} \bar{h}_i(i_1, \dots, i_{s-1}) G_{Q(1-p_{i_1})}(u) \cdot G_{Q(1-(p_{i_1}+p_{i_2}))}(u) \cdot \dots$$

$$\dots G_{Q(1-(p_{i_1}+\dots+p_{i_{s-1}}))}(u) \cdot u$$

$$= \frac{u p_i}{1-u(1-p_i)} \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1-(p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{s-1}})) u (1-p_{i_1})}{P((D_r=1))(1-p_{i_1})(1-(p_{i_1}+p_{i_2})) \dots (1-(p_{i_1}+\dots+p_{i_{s-1}}))}$$

$$\frac{u(1-(p_{i_1}+p_{i_2})) \dots (u(1-(p_{i_1}+\dots+p_{i_{s-1}})))}{(1-up_{i_1})(1-u(p_{i_1}+p_{i_2})) \dots (1-u(p_{i_1}+\dots+p_{i_{s-1}}))} u$$

$$= \frac{u^{s+1} p_i}{1-u(1-p_i)} \sum_{i_1 \neq i, \dots, i_{s-1}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1-(p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{P((D_r=1))(1-up_{i_1}) \dots (1-u(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

Le cas où  $s=1$  est immédiat.

3.3. Loi de l'intervalle entre un instant quelconque d'appel de la page  $i$ , et le prochain défaut de cette page. Taux de défauts de page.

Dans ce paragraphe on utilise les notations du §3.2. et on représente par la v.a.  $U$ , l'intervalle de temps entre un instant quelconque  $t_j$ , et le prochain défaut de la page  $i$ ,

$$U = T_{j+1} + T_{j+2} + \dots + T_{j+R} \quad \text{où } R \geq 1, \text{ est le premier indice tel que}$$

$$D_{j+R} = 1.$$

Théorème 3.3.1.

"Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , la fonction génératrice de la v.a.  $U$  est égale à

$$(23) \quad G_U(u) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{u p_i H(u)}{1-u}}, \quad |u| \leq 1$$

où

$$(24) \quad H(u) = u^s \sum_{i_1 \neq i, \dots, i_{s-1}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1-(p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{(1-up_{i_1})(1-u(p_{i_1} + p_{i_2})) \dots (1-u(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

si  $s > 1$  et

$$H(u) = u(1-p_i) \quad \text{si } s=1"$$



Dem: D'après l'hypothèse (H<sub>1</sub>), les v.a. T<sub>r</sub> sont indépendantes et de même loi géométrique, de paramètre p<sub>1</sub>. Ainsi, en appliquant le lemme 3.1.1. on a

$$(25) \quad G_U(u) = \frac{P((D_r=1)) G_1(u)}{1 - G_{Q(p_1)}(u) + P((D_r=1)) G_1(u)}$$

où, on a représenté par G<sub>1</sub>(u) la f.g. de T<sub>r</sub> conditionnelle à (D<sub>r</sub>=1) et par G<sub>Q(p<sub>1</sub>)</sub>(u), la f.g. de la loi géométrique Q(p<sub>1</sub>).

Dans le cas où s > 1, d'après le corollaire 3.2.1., on a

$$(26) \quad G_1(u) = G_{Q(p_1)}(u) \cdot \frac{1}{P((D_r=1))} \cdot H(u)$$

où

$$H(u) = u^s \sum_{\substack{i_1 \neq 1 \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq 1}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{(1 - u p_{i_1}) (1 - u(p_{i_1} + p_{i_2})) \dots (1 - u(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

et

$$G_{Q(p_1)}(u) = \frac{u p_1}{1 - u(1 - p_1)}$$

En remplaçant (26) et (27) dans (25), on obtient, après un petit calcul

$$G_U(u) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{u p_1 H(u)}{1 - u}}$$

Dans le cas où s=1, d'après le corollaire 3.2.1., on a que G<sub>1</sub>(u) = u.G<sub>Q(p<sub>1</sub>)</sub>(u) et d'après le théorème 3.2.1., on a que P((D<sub>r</sub>=1)) = 1 - p<sub>1</sub>, d'où, en remplaçant ces expressions dans (25), on obtient,

$$G_U(u) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{up_i(1-p_i)}{1-u}}$$

d'où la conclusion du théorème.

Notation

Soit  $t_{r_1}, t_{r_2}, \dots, t_{r_j}, \dots$  la suite des successifs instants d'appel de la page  $i$ , pour lesquels  $D_{r_j} = 1$ , c.a.d., la suite  $(t_{r_j})_{j \geq 1}$ , est la suite des instants de défauts consécutifs de la page  $i$ .

On représente par  $V_j$  l'intervalle entre le  $j$ .ième et le  $(j+1)$ .ième défauts de la page  $i$ .

Avec cette notation, les v.a.  $V_j$  peuvent s'écrire

$$(28) \quad V_j = T_{r_{j+1}} + T_{r_{j+2}} + \dots + T_{r_{j+R-1}} + T_{r_{j+R}} \quad , \quad j \geq 1$$

$$\text{où} \quad D_{r_{j+R}} = D_{r_{j+1}} = 1$$

Corollaire 3.3.1.

"Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , les v.a.  $(V_j, j \geq 1)$  sont indépendantes, de même loi, dont la fonction génératrice est égale à

$$(29) \quad G_V(u) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{up_i H(u)}{1-u}}$$

où

$$(30) \quad H(u) = u^s \sum_{i_1 \neq 1, \dots, i_{s-1} \neq 1} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{(1 - up_{i_1}) \dots (1 - u(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

si  $s > 1$  et

$$(31) \quad H(u) = u (1-p_i) \quad \underline{\text{si } s=1 \text{ "}}$$

Dem: Les v.a.  $V_j$  sont des sommes (28) disjointes de v.a. indépendantes et de même loi, d'où la première partie du théorème. La démonstration est achevée en tenant compte du théorème antérieur.

Remarque 3.3.1.

En tenant compte de la remarque 3.1.1. nous obtenons les résultats suivants:

a) Si la probabilité que la page  $i$  ne sort pas de la m.r. entre deux appels successifs, est inférieure à 1, alors

$$P(V_j = n) \rightarrow 0$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(V_j = n) = 1$$

b) Si par contre, cette probabilité est égale à 1, alors

$$P(V_j = n) \rightarrow 0$$

Proposition 3.3.1.

"Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , l'espérance mathématique de l'intervalle entre défauts successifs de la page  $i$ , est égale à

$$(32) \quad E(V_j) = \frac{1}{\frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{\sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq i}} (1-p_{i_1}) \dots (1-(p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}}$$

si  $s > 1$  et

$$(33) \quad E(V_j) = \frac{1}{p_i (1-p_i)} \quad \underline{\text{si } s=1 \text{ "}}$$



Remarque 3.3.2.

On remarque que le taux de défauts de page est égal à

$$T^i(s,n) = p_i \sum_{I=(i_1, \dots, i_s)} P(I)$$

où  $\forall j, i_j \in (E-(i))$ , d'où on peut déduire l'interprétation suivante: le taux de défauts de page est égal à la probabilité d'appeler la page  $i$ , quand la page est en dehors de la m.r..

Remarque 3.3.3.

Considérons les  $n$  processus de défauts de page, associés aux  $n$  pages du programme. En faisant la superposition de ces  $n$  processus de renouvellement, on obtient un processus, qui n'est plus un processus de renouvellement, et qu'on appelle de processus global de défauts de page.

On défine le taux de défauts de page, pour le processus global, comme la somme des taux de défauts de pages des processus composants,

$$(37) \quad T(s,n) = \sum_{i \in E} T^i(s,n)$$

D'après le théorème 3.3.2. on a que, le taux de défauts de page  $T(s,n)$  est égal à

$$(38) \quad T(s,n) = \sum_{i \in E} p_i \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{(1 - p_{i_1}) \dots (1 - (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

si  $s \geq 1$  et

$$(39) \quad T(1,n) = 1 - \sum_{i=1}^n p_i^2$$

### 3.4. Temps de séjour de la page $i$ , dans la mémoire réelle

Nous pouvons écrire

$$(40) \quad T_r = S_r + (T_r - S_r)$$

où  $S_r$  est le temps de séjour de la page  $i$  dans la m.r., pendant l'intervalle  $(t_{r-1}, t_r)$ .

Théorème 3.4.1.

"Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  et conditionnellement à  $(D_r=1)$  la fonction génératrice du temps de séjour de la page  $i$ , dans la m.r., entre deux appels successifs de cette page, est égale à

$$(41) \quad G_{S_r} | (D_r=1) (u) = u^s \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{P(D_r=1) (1 - u p_{i_1}) \dots (1 - u (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

si  $s > 1$  et

$$(42) \quad = u \quad \text{si } s=1 "$$

Dem: D'après l'hypothèse  $(H_1)$ , les lois conditionnelles de  $S_r$  et  $(T_r - S_r)$  sachant  $(D_r=1)$ , sont indépendantes et la f.g. de  $((T_r - S_r) | (D_r=1))$ , est égale à la f. g. de  $T_r$ . Alors, à partir de (40), on a

$$(43) \quad G_1(u) = G_{S_r} | (D_r=1) (u) \cdot G_{Q(p_i)}(u)$$

où, on a utilisé les notations du corollaire 3.2.1.. Mais, en attendant au même corollaire,

$$(44) \quad G_{S_r} | (D_r=1) (u) = u^s \sum_{\substack{i_1 \neq i \\ \vdots \\ i_{s-1} \neq i}} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{P(D_r=1) (1 - u p_{i_1}) \dots (1 - u (p_{i_1} + \dots + p_{i_{s-1}}))}$$

si  $s > 1$  et

$$= u \quad \text{si } s=1, \text{ d'où le théorème.}$$

### 3.5. Application des résultats antérieurs, à un cas particulier

Dans la suite, on va considérer le cas, le plus simple, où toutes les pages ont la même probabilité d'être appelées.

Hypothèse (H<sub>3</sub>)

" On considère que toutes les pages du programme, ont la même probabilité d'être appelées, c.a.d.

$$\forall j \in E, \quad p_j = \frac{1}{n} \quad "$$

Théorème 3.5.1.

" Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) et (H<sub>3</sub>) le taux de défauts de la page i, défini au §3.3., est égal à

$$T^i(s, n) = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{s}{n} \right) \quad \text{pour } s \geq 1 \quad "$$

Dem: En effet il suffit de remplacer dans les expressions (35) et (36) les probabilités  $p_j$  par  $\frac{1}{n}$ ,  $j$ .

Corollaire 3.5.1.

"Sous les hypothèses du théorème antérieur, le taux de défauts de page du processus global est

$$T(s, n) = 1 - \frac{s}{n} \quad "$$

Dem: Le corollaire suit immédiatement du théorème 3.5.1. et de l'expression (37).

Théorème 3.5.2.

"Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) et (H<sub>3</sub>) et en utilisant les notations du §3.4., on a

$$E(S_r \cdot 1_{(D_r=1)}) = (n-s) \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{n-j} "$$

Dem: En effet, il suffit de considérer la dérivée de la f.g. de  $(S_r | (D_r=1))$  dans le point  $u=1$ ,

$$\{G_{S_r | (D_r=1)}(u)\}'_{u=1} = \sum_{i_1 \neq 1, \dots, i_{s-1} \neq 1} \frac{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_{s-1}} (1 - (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{s-1}}))}{P((D_r=1))(1-p_{i_1}) \dots (1-p_{i_1} - \dots - p_{i_{s-1}})}$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{1-p_{i_1} - \dots - p_{i_j}}$$

d'où, d'après l'hypothèse  $(H_3)$

$$P((D_r=1))E(S_r | (D_r=1)) = (n-s) \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{n-j}$$

Remarque 3.5.1.

En supposant que l'hypothèse  $(H_3)$  est vérifiée pour le programme en étude ( $n=41$ ), on a étudié la fonction  $E(S_r \cdot 1_{(D_r=1)})$ , autant que fonction de  $s$ , c.a.d.

$$f(s) = (41-s) \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{41-j}$$

et on a obtenu la table suivante pour les valeurs de  $s \geq 20$

s	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f(s)	13.30	13.61	13.88	14.10	14.26	14.36	14.40	14.38	14.28	14.10	13.84
s	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
f(s)	13.50	13.05	12.49	11.80	10.97	9.98	8.78	7.34	5.56	3.28	0

Il est intéressant de remarquer que, pour un programme de 41 pages, la moyenne du temps de séjour de chaque page dans la mémoire réelle, entre deux appels successifs de cette page, quand la page sort, a un maximum pour une taille de la mémoire réelle égale à 26.

Remarque 3.5.2.

En considérant toujours l'hypothèse ( $H_3$ ), on va calculer l'expression pour la moyenne du temps de séjour de la page, dans la mémoire réelle entre deux appels successifs,

$$\begin{aligned}
 E(S_r) &= E(S_r \cdot 1_{(D_r=0)}) + E(S_r \cdot 1_{(D_r=1)}) \\
 &= P((D_r=0))E(S_r | (D_r=0)) + E(S_r \cdot 1_{(D_r=1)}) \\
 &= P((D_r=0))E(T_r) + E(S_r \cdot 1_{(D_r=1)}) \\
 &= s + (n-s) \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{n-j}
 \end{aligned}$$

parce que  $E(T_r) = n$  et  $P((D_r=0)) = \frac{s}{n}$

Pour le programme en étude, donc pour  $n=41$ , on a fait l'étude de cette fonction,

$$f(s) = s + (41 - s) \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{41 - j}$$

et on a obtenu les valeurs de la table suivante:

s	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f(s)	33.30	34.61	35.88	37.10	38.26	39.36	40.40	41.38	42.28	43.10	43.84
s	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
f(s)	44.50	45.05	45.49	45.80	45.97	45.98	45.87	45.34	44.56	43.28	41

On remarque que la moyenne du temps de séjour dans la mémoire réelle a un maximum pour une taille de la mémoire réelle égale à 36.

On remarque aussi, que la croissance de la fonction  $f(s)$  est plus rapide jusqu'à une taille de la mémoire réelle égale à 26, et après cette valeur, il y a une croissance plus lente, jusqu'à obtenir la valeur maximale.

## CHAPITRE IV

### RESUME ET CONCLUSIONS

1. On considère comme données expérimentales, les instants d'occurrence des défauts de page, quand le programme est activé dans un système de mémoire virtuelle, à deux niveaux, qu'utilise comme algorithme de remplacement de page, le LRU.

2. Le premier modèle qu'on a essayé, pour représenter le processus ponctuel des instants d'occurrence des défauts de page, a été le processus de renouvellement. On a fait l'hypothèse que la loi des intervalles, entre les instants de renouvellements successifs, était un mélange de lois exponentielles. Néanmoins, ce modèle ne s'est pas montré statistiquement adapté pour représenter les données.

Cette étude a été faite pour trois valeurs différentes de la taille de la mémoire réelle.

3. En supposant toujours que le modèle sous-jacent à notre processus, était celui d'un processus de renouvellement, on a considéré les instants de renouvellement comme les instants de retour d'une certaine chaîne de Markov  $M$ , à l'état 0. Les temps de retour à l'état 0, sont donc les intervalles entre défauts de page successifs. D'après les hypothèses qu'on a fait sur la chaîne de Markov, on a obtenu un modèle d'un processus de renouvellement, dont la loi des intervalles entre renouvellements successifs, a une fonction génératrice, qui est une fraction rationnelle.

La méthode développée, pour le traitement algébrique de ce modèle, nous a permis d'estimer le nombre d'états de la chaîne de Markov  $M$ , ainsi que les valeurs propres de la matrice de transition qui lui est associée.

Toutefois, de même que le modèle antérieur, on a dû rejeter ceci. Cette étude a été faite pour les mêmes tailles de la mémoire ré-

elle, qu'on a utilisé dans l'étude du modèle décrit en 2.

4. On a décidé d'envisager le processus de défauts de page, comme une superposition de  $n$  (nombre de pages virtuelles) processus ponctuels, où chacun de ces processus  $(t_j^i)_{j \in N}$ ,  $i \in E$  ( $E$  est l'ensemble des pages virtuelles), décrit les instants d'occurrence des défauts de chaque page  $i$ . Ces processus, composants du processus global de défauts de page, seront considérés nos données expérimentales.

5. Pour chacun des processus  $(t_j^i)_{j \in N}$ ,  $i \in E$ , on a construit les histogrammes des intervalles entre défauts consécutifs, pour différentes tailles de la mémoire réelle (on a considéré pour la mémoire réelle les tailles entre 20 et 30 pages).

De l'analyse empirique de ces histogrammes, on a avancé l'hypothèse selon laquelle, la taille optimale pour la mémoire réelle serait, pour le programme en étude, de 26 pages. Toutefois, cette hypothèse nécessite d'une confirmation statistique.

On remarque sur ces histogrammes, qu'ils appartiennent fondamentalement à trois types différents et que chaque type est caractéristique d'un certain ensemble de valeurs pour la taille de la mémoire réelle.

6. Sur les processus  $(t_j^i)_{j \in N}$ ,  $i \in E$ , on a formulé certaines hypothèses, qui nous ont permis d'obtenir, pour chaque processus, associé à chaque page  $i$ , la loi des intervalles  $V^i$ , entre les instants de défauts consécutifs. On a obtenu des expressions explicites pour les fonctions génératrices des probabilités, de ces intervalles.

Les formules obtenues sont fonction du paramètre  $s$ , taille de la mémoire réelle et sont théoriquement très simples, quoique d'un traitement algébrique impossible.

7. Pour tester ce modèle, il est nécessaire d'obtenir les probabilités  $P(V^i=k)$ ,  $k \geq s$  ( $s$  est le paramètre qui représente la taille de la mémoire réelle), pour les valeurs de  $s \in (20, 30)$ . Ces probabilités sont théoriquement possibles d'être obtenues, une fois que nous avons l'expression de leur

fonction génératrice. Mais, sur le point de vue pratique, ces calculs sont impossibles, dû à la complexité des expressions des fonctions génératrices obtenues.

8. De même, dû à la complexité des formules obtenues, on n'a pas pu, observer l'effet de la variation de la taille de la mémoire réelle sur les lois des processus.

9. Pour le processus global, superposition des  $n$  processus ponctuels, on a défini une fonction qu'on a appelée de "Taux de défauts de page" et qui est fonction du paramètre  $s$ , taille de la mémoire réelle.

Il serait important d'étudier le comportement de cette fonction, quand on fait varier le paramètre taille de mémoire réelle. De cette étude, nous pensons qu'il serait possible de déduire des renseignements sur la taille de la mémoire réelle qu'on devrait affecter au programme.

Pour des raisons déjà énoncées, nous n'avons pas fait cette étude.

10. Un problème théorique difficile et que reste en ouvert, est l'étude de la loi du processus ponctuel, superposition des  $n$  processus ponctuels.

11. On a analysé un autre programme, qu'a montré les mêmes caractéristiques que le programme étudié, dans ce qui concerne la distribution des histogrammes par plusieurs classes.

ANNEXE I

Determination des probabilités limites d'occupation des états,  
dans une certaine chaîne de Markov

Considérons la mémoire virtuelle du programme, constituée par l'ensemble  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ . Si on considère la mémoire réelle de taille  $s$  les  $n(n-1)\dots(n-s+1)$  configurations possibles qu'elle peut prendre, constituent les états d'une chaîne de Markov  $M$ , finie. Pour faciliter l'exposition, on numérote ces états par les entiers  $1, 2, \dots, n(n-1)\dots(n-s+1)$ .

Réprésentons par  $C_s$ , l'ensemble des configurations de taille  $s$ , c.a.d.,

$$C_s = \{i: i = (i_1, \dots, i_s), i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_s \text{ et } \forall j, i_j \in E\}$$

Lemme 1

"Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  du §3.2, la chaîne de Markov  $M$ , est ergodique.

Dem: On va démontrer que la chaîne de Markov  $M$  est irréductible et apériodique.

a) La chaîne est irréductible

Soient  $i$  et  $j$  deux états quelconques, c.a.d., deux configurations  $\in C_s$ . Alors, d'après l'hypothèse  $(H_2)$ , il existe toujours un  $n > 0$  tel que  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , parce que on peut passer toujours de l'état  $i$  à l'état  $j = (j_1, \dots, j_s)$  au moins en  $s$  pas et avec une probabilité, d'après l'hypothèse  $(H_1)$ , égale à

$$p_{j_s} \cdot p_{j_{s-1}} \cdot \dots \cdot p_{j_1}$$

b) La chaîne est apériodique

pour tout état  $i \in M$ , on a  $p_{ii}^{(1)} = p_{i_1}$ , d'où pour tous les états de la chaîne, la période est égale à 1.

Lemme 2

"Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>) du §3.2., les probabilités limites d'occupation des états de la chaîne de Markov M, sont données par

$$(1) \quad u_i = \prod_{k=1}^s \frac{p_{i_k}}{\sum_{j=k} p_{i_j}} \quad , \quad i=1,2,\dots,n(n-1)\dots(n-s-1)$$

où  $i=(i_1, i_2, \dots, i_s)$ ,  $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_s$ ,  $\forall j, i_j \in E$  "

Dem: Comme la chaîne de Markov M est irréductible et apériodique (Lemme 1), il suffit de démontrer que les  $u_i$ , satisfont

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n(n-1)\dots(n-s+1)} u_i = 1$$

et

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n(n-1)\dots(n-s+1)} u_i p_{ij} = u_j \quad , \quad j=1,\dots,n(n-1)\dots(n-s+1)$$

parce que, dans ce cas, on a que (Feller (14), pag.393)

$$u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jk}^{(n)}$$

On commence par démontrer l'expression (2):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_s} u_i &= \sum_{i \in C_s} p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}} \frac{p_{i_3}}{1-p_{i_1}-p_{i_2}} \dots \frac{p_{i_s}}{1-p_{i_1}-\dots-p_{i_{s-1}}} \\ &= \sum_{i'=(i_1, \dots, i_{s-1})} p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}} \dots \frac{p_{i_{s-1}}}{1-p_{i_1}-\dots-p_{i_{s-2}}} \\ &= \sum_{i''=(i_1, \dots, i_{s-2})} p_{i_1} \frac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}} \dots \frac{p_{i_{s-2}}}{1-p_{i_1}-\dots-p_{i_{s-3}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in E} p_{i1} = 1$$

Dans ce qui concerne l'expression (3), on la démontre comme suit:

Considérons un état  $j$  quelconque. Les seuls états  $i$ , dont la probabilité  $p_{ij} \neq 0$ , sont les  $n$  états suivants,

$$(4) \quad \begin{aligned} & (j_1, j_2, \dots, j_s) \\ & (j_2, j_1, \dots, j_s) \\ & (j_2, j_3, j_1, \dots, j_s) \\ & \dots \dots \dots \\ & (j_2, j_3, \dots, j_s, j_1) \\ & (j_2, j_3, \dots, j_s, k) \quad \text{où } k \text{ est un élément quelconque de} \\ & \qquad \qquad \qquad E - (j_1, j_2, \dots, j_s) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{i \in C_s} u_i p_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i p_{j1}$$

où on considère dans la somme du deuxième membre de l'égalité antérieure, seulement les états (4).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i p_{j1} &= p_{j1} u_j + p_{j1} \left( p_{j2} \frac{p_{j1}}{1-p_{j2}} \frac{p_{j3}}{1-p_{j1}-p_{j2}} \dots \frac{p_{j_s}}{1-p_{j1}-\dots-p_{j_{s-1}}} + \right. \\ & \quad + p_{j2} \frac{p_{j3}}{1-p_{j2}} \frac{p_{j1}}{1-p_{j2}-p_{j3}} \dots \frac{p_{j_s}}{1-p_{j1}-p_{j2}-\dots-p_{j_{s-1}}} + \\ & \quad \dots + p_{j2} \frac{p_{j3}}{1-p_{j2}} \frac{p_{j4}}{1-p_{j2}-p_{j3}} \dots \frac{p_{j1}}{1-p_{j2}-p_{j3}-\dots-p_{j_s}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + p_{j_2} \frac{p_{j_3}}{1-p_{j_2}} \dots \frac{p_{s+1}}{1-p_{j_2}-p_{j_3}-\dots-p_{j_s}} + \\
 & + p_{j_2} \frac{p_{j_3}}{1-p_{j_2}} \dots \frac{p_{s+2}}{1-p_{j_2}-p_{j_3}-\dots-p_{j_s}} + \dots \\
 & + p_{j_2} \frac{p_{j_3}}{1-p_{j_2}} \dots \frac{p_n}{1-p_{j_2}-p_{j_3}-\dots-p_{j_s}} ) \\
 = & p_{j_1} u_j + p_{j_1} \left( \frac{1-p_{j_1}}{1-p_{j_2}} p_{j_1} \frac{p_{j_2}}{1-p_{j_1}} \frac{p_{j_3}}{1-p_{j_1}-p_{j_2}} \dots \frac{p_{j_s}}{1-p_{j_1}-\dots-p_{j_{s-1}}} + \right. \\
 & + \frac{(1-p_{j_1})(1-p_{j_1}-p_{j_2})}{(1-p_{j_2})(1-p_{j_2}-p_{j_3})} p_{j_1} \frac{p_{j_2}}{1-p_{j_1}} \frac{p_{j_3}}{1-p_{j_1}-p_{j_2}} \dots \frac{p_{j_s}}{1-p_{j_1}-\dots-p_{j_{s-1}}} + \\
 & + \frac{\prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_k})}{\prod_{i=2}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} p_{j_1} \frac{p_{j_2}}{1-p_{j_1}} \dots \frac{p_{j_s}}{1-p_{j_1}-\dots-p_{j_{s-1}}} + \\
 & + \frac{p_{s+1} \prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_k})}{p_{j_1} \prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} u_j + \frac{p_{s+2} \prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_k})}{p_{j_1} \prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} u_j + \dots \\
 & + \frac{p_n \prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_k})}{p_{j_1} \prod_{i=1}^{s-1} (1-\sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} u_j \\
 = & p_{j_1} u_j \frac{(1-p_{j_1})}{(1-p_{j_2})} u_j \left( p_{j_1} + \frac{(1-\sum_{k=1}^2 p_{j_k})}{(1-\sum_{k=1}^2 p_{j_{k+1}})} p_{j_1} + \frac{\prod_{i=2}^3 (1-\sum_{k=1}^i p_{j_k})}{\prod_{i=2}^3 (1-\sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} p_{j_1} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{\prod_{i=2}^{s-1} (1 - \sum_{k=1}^i p_{j_k})}{\prod_{i=2}^{s-1} (1 - \sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} p_{j_1} + \frac{\prod_{i=2}^s (1 - \sum_{k=1}^i p_{j_k})}{\prod_{i=2}^s (1 - \sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}})} \\
 & = p_{j_1} u_j + \frac{(1-p_{j_1})}{(1-p_{j_2})} u_j (p_{j_1} + \frac{\prod_{k=1}^2 (1 - \sum_{j_k} p_{j_k})}{\prod_{k=1}^2 (1 - \sum_{j_{k+1}} p_{j_{k+1}})} p_{j_1} + \dots + \frac{\prod_{i=2}^{s-1} (1 - \sum_{k=1}^i p_{j_k}) (1 - \sum_{k=2}^s p_{j_k})}{\prod_{i=2}^{s-1} (1 - \sum_{k=1}^i p_{j_{k+1}}) (1 - \sum_{k=2}^s p_{j_k})} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & = p_{j_1} u_j \frac{(1-p_{j_1})}{(1-p_{j_2})} u_j (1-p_{j_2}) \\
 & = u_j
 \end{aligned}$$

Le raisonnement antérieur est le même pour tous les états  $j$ , donc les probabilités  $u_j$ , données par les expressions (1), sont les probabilités limites des états  $j$ .

ANNEXE II

PROGRAMME DESS 1

```
1.      COMMON/TRAC/PAGENB,PAGELG,PERIOD
2.      COMMON/TRAC/TIME,PAGE
3.      COMMON/TRAC/IFault,NFAULT
4.      INTEGER PAGE,TIME,PAGENB,PAGELG,PERIOD
5.      REAL X(3041),Y(3041)
6.      PAGELG=2048
7.      PAGENB=20
8.      DO 3 I=0,3040
9.          X(I)=0
10.         Y(I)=0
11.     3      CALL INITF
12.     DO 2 I=1,3040
13.         TIME=0
14.         CALL NEXTF
15.         IF(TIME.LT.0) GO TO 2
16.         Y(I)=PAGE-60.
17.         X(I)=X(I-1)+TIME
18.     2      CONTINUE
19.     CALL DEBTRA('PAPIER BLANC',12,215,,35,,1)
20.     CALL ECHEL(1,,1,,1,,)
21.     CALL AXLINS(0,,0,,210,,0,,50,0,,3000000,,-0.2,-1,'TIME',4,1)
22.     CALL AXLINS(0,,0,,30,,Y0,,30,60,,120,,0.2,-1,'PAGE',4,1)
23.     CALL ECHEL(0.00007,0.5,1,,1,,)
24.     CALL NUAGES(X,Y,3040,T0,0,1,0,1,1)
25.     CALL FINTRA
26.     STOP
27.     END
```

```

C   ALGORITHME MELANGE EXPONENTIELLE
C
C   COMMON/TRAC/PAGENB,PAGELG,PERIOD,TIME,PAGE,BID(Z),NFAULTO
C
C   INTEGER TIME,PAGENB,PAGELG,PERIOD,PAGE
C   INTEGER P(26000)
C   INTEGER DV1,DV2,CP1,CP2,DERN1,DERN2,X
C
C   PAGELG=2043
C   DO 115 PAGENB=10,50,10
C   WRITE(6,145) PAGENB
C   DO 15 LIP=5,9
C   PAR=LIP/10+0.0
C   DV1=DV2=0
C   IC1=IA=1
C   DO 5 I=1,26000
5  P(I)=0
C
C   REPARTITION INITIALE DES FAUTES DE PAGES EN 2 CLASSES (ALEAT)
C
C   CALL INITF
C   NFAULT=NFAULTO
C   IC2=NFAULT
C   TIME=0
C
C 10 CONTINUE
C   CALL NEXTF
C   IF(TIME,LT,0) GO TO 20
C   CALL ALEAT(IA,IB,Z)
C   IA=IB
C
C   PARTITION ALEATOIRE
C
C   IF(Z.GT,PAR) GO TO 30
C   CAS Z<PAR
C   P(IC1)=TIME
C   DV1=DV1+TIME
C
C   IC1=IC1+1
C   GO TO 10
C 30 CONTINUE
C   CAS Z>PAR
C   P(IC2)=TIME
C   DV2=DV2+TIME
C   IC2=IC2-1
C   GO TO 10
C 20 CONTINUE
C
C   FIN DE LA TRACE
C
C   CP1=IC1-1
C   CP2=NFAULT-IC2
C   DEL1=CP1/DV1+0.0
C   DEL2=CP2/DV2+0.0
C   W=CP1*LOG(DEL1)+CP2*LOG(DEL2)
C   L=1
C
C   IMPRESSION DES VALEURS INITIALES
C
C   WRITE(6,150) PAR
C   WRITE(6,160)
C   WRITE(6,200) L,CP1,CP2
C   WRITE(6,300) DEL1,DEL2,W
C
C   CHANGEMENT DE LA PARTITION
C
C 40 CONTINUE
C
C   DERN1=IC1-1
C
C   I=1
C   CONTINUE
C 50 F1=DEL1*EXP(-DEL1*P(I))
C   F2=DEL2*EXP(-DEL2*P(I))
C
C   IF(F1.GE,F2) GO TO 50
C   CHANGEMENT DE CLASSE
C
C   X=P(DERN1)
C   P(DERN1)=P(I)
C   P(I)=X
C   I=I+1
C   DERN1=DERN1-1
C
C 50 CONTINUE
C   I=I+1
C   IF(I.LL,DERN1)GO TO 51

```

```

C      DERN2=IC2+1
C
C      I=HFAULT
61     CONTINUE
      F1=JLL1*XP(-DEL1*P(I))
      F2=DFL2*EXP(-DEL2*P(I))
C
C      IF(F1.LT.F2) GO TO 60
C
C      CHANGEMENT DE CLASSE
C
      X=P(DERN2)
      P(DERN2)=P(I)
      P(I)=X
      I=I+1
      DERN2=DERN2+1
C
C
60     CONTINUE
      I=I-1
      IF(I.GE.DERN2) GO TO 61
C
C      MISE A JOUR DES CLASSES
C
      N1=IC1-DERN1-1
      N2=DERN2-IC2-1
C
      IF(N1.GT.N2) GO TO 70
C
      N=N1
      GO TO 10
C
70     CONTINUE
      N=N2
81     CONTINUE
      IC1=IC1+N2-N1
      IC2=IC2+N2-N1
      IF(N.EQ.0) GO TO 95
C
      DO 92 I=1,N
      X=P(DERN1+I)
      P(DERN1+I)=P(DERN2-I)
      P(DERN2-I)=X
90     CONTINUE
C
95     CONTINUE
C
C      CALCUL DES NOUVEAUX PARAMETRES
C
      CP1=IC1-1
      CP2=NFAULT-IC2
      DV1=
      DO 101 I=1,CP1
      DV1=DV1+P(I)
100     CONTINUE
      DV2=
      N1=IC2+1
      DO 111 I=NFAULT,N4,-1
      DV2=DV2+P(I)
110     CONTINUE
      DEL1=DEL1
      DEL2=DEL2
      DEL1=CP1/DV1+0.0
      DEL2=CP2/DV2+0.0
      W=CP1*LOG(DEL1)+CP2*LOG(DEL2)
      L=L+1
C
C
      WRITE(6,200) L,CP1,CP2
      WRITE(6,300) DEL1,DEL2,W
C
C
      V=ABS(DEL1-DEL1)
      Y=ABS(DEL2-DEL2)
C
      IF(V.LT.1E-5)IF(Y.LT.1E-5) GO TO 120
      IF(L.GE.25) GO TO 120
C
      GO TO 40
C
120     CONTINUE
      P01=CP1/NFAULT+0.0
      P02=CP2/NFAULT+0.0
      P1=DEL1*CP1/HFAULT
      P2=DEL2*CP2/HFAULT

```

```
WRITE(6, 200)
WRITE(6, 400)
WRITE(6, 500) P1, P2, DEL1, DEL2
WRITE(6, 550) P01, P02
15 CONTINUE
115 CONTINUE
C
STOP
C
145 FORMAT('1', 'PAGENB=', I2)
150 FORMAT('0', 'PARTITION A', F3.1)

200 FORMAT('0', I3, ' REPARTITION', 10X, 'CP1=', I5, 10X, 'CP2=', I5)
300 FORMAT('0', 'DELTA1=', E10.4, 10X, 'DELTA2=', E10.4, 10X, 'W=', E12.6)
400 FORMAT('0', 'APPROXIMATIN HYPER-EXPONENTIELLE')
500 FORMAT('0', 'P1=', E10.4, 8X, 'P2=', E10.4, 10X, 'DELTA1=', E10.4, 8X, 'DELTA2=', E10.4)
550 FORMAT('0', 'P01=', E10.4, 10X, 'P02=', E10.4)
700 FORMAT('0', I5, 5X, I5, 5X, E10.4)
800 FORMAT('0', I6, 5X, I6)
820 FORMAT('////')
END
```

## PROGRAMME TRSTQUIZ

```

C     TEST D'AJUSTEMENT HYPER-EXPONENTIELLE
C
C     COMMON/TRAC/PAGENO,PAGELG,PERIOD,TIME,PAGE,BID(2),NFAULTO
C
C     INTEGER TIME,PAGENO,PAGELG,PERIOD,PAGE
C     INTEGER S,SS,VMAX
C     INTEGER T(9911)
C
C     INITIALISATION DES VARIABLES
C     PAGELG=2143
C
C     DO 51 PAGENO=10,51,10
C     READ(5,100)(DEL1,DEL2,P,IMAX,VMAX)
C     QUI=L=SS=)
C
C     REPARTITION EN CLASSES DES VALEURS TIME
C
C     DO 11 I=1,9911
C 1) T(I)=)
C
C     LECTURE DE LA TRACE
C
C     CALL INITF
C     NFAULT=NFAULTO
C     TIME=)
C
C 2) CONTINUE
C     CALL NEXTF
C     IF(TIME.LT.1) GO TO 30
C     IF(TIME.GT.IMAX) GO TO 35
C     T(TIME)=T(TIME)+1
C     GO TO 2,
C
C 35 T(IMAX+1)=T(IMAX+1)+1
C     GO TO 20
C
C 3) CONTINUE
C
C     FIN DE LA TRACE
C
C     WRITE(6,18) PAGENO,NFAULT
C
C     CALCUL DU QUIZ
C
C     GROUPEMENT DES CLASSES
C
C     CLA=NFAULT/100
C     IF(CLA.LT.10) CLA=10
C     K=IMAX+1
C
C
C     DO 41 I=K,1,-1
C     J=1
C     SS=SS+T(I)
C     IF(SS.GE.CLA) GO TO 50
C 4) CONTINUE
C 5) CONTINUE
C
C     S=0
C     J=J-1
C     K=)
C
C     DO 71 I=1,J
C     IF(K.GT.1) GO TO 30
C     K=I
C
C 6) CONTINUE
C     IF(T(I).GE.CLA)IF(S.EQ.0) GO TO 90
C     S=S+T(I)
C     IF(S.LT.CLA) GO TO 70
C     GO TO 10)
C
C 9) CONTINUE
C     S=T(I)
C
C 10) CONTINUE
C
C     CALCUL DES PARCELLE DU QUIZ
C
C     A=K-0.5
C     U=1+0.5
C     PRO=P*(EXP(-A*DEL1)-EXP(-B*DEL1))+(1-P)*(EXP(-A*DEL2)-EXP(-B*DEL2))

```

```

U=NFAULT*PRO
E=((S-U)*(S-U))/U
QUI=QUI+E
L=L+1
C
WRITE(6,120) A,E,S,PRO,U
C
K=0
S=0
C
70 CONTINUE
C
IF(S.EQ.0) GO TO 110
S=S+SS
A=K-U,5
B=VMAX+0.5
PRO=P*(EXP(-A*DEL1)-EXP(-B*DEL1))+(1-P)*(EXP(-A*DEL2)-EXP(-B*DEL2))
#)
U=NFAULT*PRO
E=((S-U)*(S-U))/U
QUI=QUI+E
L=L+1
C
WRITE(6,120) A,B,S,PRO,U
C
GO TO 115
C
110 CONTINUE
C
A=J+0.5
B=VMAX+0.5
S=SS
PRO=P*(EXP(-A*DEL1)-EXP(-B*DEL1))+(1-P)*(EXP(-A*DEL2)-EXP(-B*DEL2))
#)
U=NFAULT*PRO
E=((S-U)*(S-U))/U
QUI=QUI+E
L=L+1
C
WRITE(6,120) A,B,S,PRO,U
C
115 CONTINUE
C
IMPRESSION DE LA VALEUR FINALE DU QUI2
C
WRITE(6,280)
WRITE(6,290) DEL1,DEL2,P
WRITE(6,260) QUI,L-4
C
IF(L.LE.30) GO TO 60
C
APPROX GAUSSIENNE
C
R=SQRT(2*QUI)
V=SQRT(2*L-9)
RR=R-V
C
WRITE(6,230)
WRITE(6,290)
WRITE(6,300) V,RR
C
60) CONTINUE
C
STOP
C
12) FORMAT(' ',F7.1,5X,F8.1,8X,I6,3X,F7.6,8X,F12.6)
16J FORMAT(E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,I4,2X,I6)
13) FORMAT(' ',I2,15X,'NFAULT=',I6)
25J FORMAT(' ',E10.4,5X,'DELTA1=',E10.4,5X,'DELTA2=',E10.4,5X,'P=',E10.4)
26) FORMAT(' ',E10.4,10X,'DOL=',I4)
23) FORMAT(///)
29) FORMAT(' APPROX GAUSSIENNE')
30) FORMAT(' ',E10.4,10X,'VCENTREE=',E10.4)

```



```

COMMON/ET3/NPAGE,NDEG,X(50)
COMMON/ET4/RACRE(10),RACIM(10)

```

```

DIMENSION VALECR(6)

```

```

WRITE(0,500)
WRITE(0,503)
WRITE(0,510)
WRITE(0,510)
WRITE(0,520)
WRITE(0,530)(NPAGE)
WRITE(0,520)
WRITE(0,540)(NDEG)
WRITE(0,520)
WRITE(0,510)
WRITE(0,520)
WRITE(0,550)
WRITE(0,520)
WRITE(0,510)
WRITE(0,560)

```

```

LIGNE=0
J=0

```

```

DO 10 I=1,50
  IF(X(I).EQ.0) GOTO 10
  J=J+1
  VALECR(J)=X(I)
  IF(J.LT.6) GOTO 10
  WRITE(6,570)(VALECR(K),K=1,6)
  WRITE(6,560)
  J=7
  LIGNE=LIGNE+1
  IF(LIGNE.LT.3) GOTO 10
  WRITE(6,560)
  LIGNE=0

```

```

10 CONTINUE

```

```

IF(J.EQ.1) GOTO 20
WRITE(6,570)(VALECR(I),I=1,J)
WRITE(0,560)
LIGNE=1

```

```

20 CONTINUE

```

```

IF(LIGNE.NE.J) WRITE(6,560)
WRITE(6,510)
WRITE(0,520)
WRITE(0,560)
WRITE(0,520)
WRITE(0,510)

```

```

K=3
P=-2

```

```

DO 30 J=1,NDEG
  K=K+1

```

```

  IF(K.LT.3) GOTO 30
  P=J-2
  WRITE(6,590)
  WRITE(6,600)((RACRE(L),RACIM(L)),L=P,P+2)
  IF(RACIM(P).GE.0) WRITE(6,610)
  IF(RACIM(P+1).GE.0) WRITE(6,620)
  IF(RACIM(P+2).GE.0) WRITE(6,630)
  WRITE(6,590)
  WRITE(6,590)
  WRITE(6,510)
  K=J

```

```

30 CONTINUE

```

```

IF(K.EQ.0) GOTO 40
P=P+3

```

```

WRITE(0,590)
WRITE(6,600)((RACRE(L),RACIM(L)),L=P,NDEG)
IF(RACIM(P).GE.0) WRITE(6,610)
IF((P.LT.NDEG).AND.(RACIM(P+1).GE.0)) WRITE(6,620)
P=P+1

```

```

IF((P.LT.NDEG).AND.(RACIM(NDEG).GE.0)) WRITE(6,630)

```

```

WRITE(0,590)
WRITE(0,590)
WRITE(0,510)

```

```

40 CONTINUE

```

```

WRITE(6,510)
WRITE(0,500)

```

```

C
C      RETURN
C
C
51) FORMAT(1H1)
53) FORMAT(///)
51) FORMAT(10X,105(' '))
52) FORMAT(10X,'**',101X,'**')
53) FORMAT(10X,'**',34X,'NOMBRE DE PAGES EN MEMOIRE : ',13,34X,'**')
54) FORMAT(10X,'**',47X,'P= ',13,47X,'**')
55) FORMAT(10X,'**',41X,'DETERMINANTS (P,K)',41X,'**')
56) FORMAT(10X,'**',6(16X,'**'),'**')
57) FORMAT(10X,12X,6(2X,E12.6,3X))
58) FORMAT(10X,'**',41X,'RACINES DU POLYNOME',41X,'**')
59) FORMAT(10X,'**',3(33X,'**'),'**')
60) FORMAT(10X,12X,3(4X,E12.6,E12.6,'I',5X))
61) FORMAT(10X,20X,'**')
62) FORMAT(10X,62X,'**')
63) FORMAT(10X,96X,'**')
C
C      END
C      REAL FUNCTION DET (P, KK, PREC)

```

```

      INTEGER P
      REAL PREC, Q(51), V(50)
      COMMON /Q /Q
      IND(IY, IX) = (IX-1) + (P+1) * IY
      DO 1 I=1, 30
1      V(I) = 0
      K = P * K
      DO 3 I=1, P+1
      L = P - I + 1
      DO 2 J=1, P
      L = L + 1
      V(IND(J, I)) = Q(L+1) - Q(L)
2      CONTINUE
      V(IND(P+1, I)) = Q(K+1) - Q(K)
      K = K - 1
3      CONTINUE
      CALL DETERM (V, P+1, 0, PREC)
      DET = D
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GERAR
      COMMON /TRAC/ PAGENO, PAGELG, PERIOD, TIME, PAGE, BID(2), NFAULTO
      COMMON /Q /Q
      INTEGER TIME, PAGENO, PAGELG, PERIOD, PAGE
      DIMENSION F(51), N(51), Q(51)
      DO 1 I=1, 51
10      N(I) = 1
      PAGELG = 2.0
      CALL INITF
      NFAULT = NFAULT
      IF (TIME.LT.0) GO TO 21
      TIME = J
      CONTINUE
      CALL NEXTF
      IF (TIME.LT.0) GO TO 43
      IF (TIME.GT.51) GO TO 35
      N(TIME) = N(TIME) + 1
35      GO TO 30
40      CONTINUE
50      DO 51 I=1, 51
      F(I) = N(I) / NFAULT + J.0
      Q(1) = F(1)
      Q(2) = F(1)
      DO 60 J=2, 51
      Q(J+1) = F(J)
      DO 71 I=1, J-1
      Q(J+1) = Q(J+1) + F(I) + Q(J+1-I)
71      CONTINUE
70      CONTINUE
80      GO TO --
      WRITE(6, 100) PAGENO

```

```

100  FORMAT(' ', 'NUPAGES=', 14, 5X, 'TRACE NON TRAITEE')
80   CONTINUE
      RETURN
      END

```

C PROGRAMME GENITA

C MAIN PROGRAM HISTOGRAMME

COMMON/TRACO/PAGENB

INTEGER PAGENB

PAGENB=12

CALL HISTOG (30, 1000, 33)

STOP

END

SUBROUTINE HISTOG (DIMZON, TAICLA, HAUTMX)

C DECLARATIONS

C

COMMON/FAULT/PG,TIME

COMMON/TRACO/PAGENB

INTEGER ACC(192), BUFFER(5000), DIMBUF, DIMHST, DIMORD, DIMZON,  
I END, FSTPAG, HIST(500), I, IND(192), INIT(192), NBPAGE,  
I ORD(2500), PAGE, PAGENB, PG, PT, TAICLA, TIME, TOP, V(6),  
I ZONE(100)

DATA DIMBUF /5000/, DIMORD /2500/, DIMHST /500/, FSTPAG 7647,

DATA NBPAGE /192/, VRAI /1/, FAUX /0/

DATA V(6), 415000, 530000, 671500, 700000, 910000

C INITIALISATION

C

L = 0

DO 1 I=1,NBPAGE

ACC(I)=0

IND(I)=1

INIT(I)=-1

1 CONTINUE

DO 20 I=1,DIMZON

ZONE(I) = 0

20 CONTINUE

DO 2 I=1,DIMBUF

BUFFER(I)=0

2 CONTINUE

TOP=1

FSTPAG = FSTPAG - 1

CALL NEXTF

PAGE = PG - FSTPAG

L = L + TIME

C BOUCLE

C

3 CONTINUE

IF(PG.LT.0) GO TO 9

DO = I=1,NBPAGE

ACC(I) = ACC(I) + TIME

4 CONTINUE

IF(INIT(PAGE).NE.(-1)) GO TO 5

INIT(PAGE) = TOP

ZONE(PAGE) = TOP

TOP = TOP + DIMZON + 1

GO TO 8

5 CONTINUE

C WRITE ACC(PAGE) INTO FILE(PAGE)

IF (IND(PAGE).LE.DIMZON) GO TO 7

IF (TOP.LE.(DIMBUF-DIMZON-1)) GO TO 6

WRITE(6,10) DIMBUF

STOP

6 CONTINUE

BUFFER(ZONE(PAGE)) = TOP

ZONE(PAGE) = TOP

IND(PAGE) = 1

TOP=TOP+DIMZON+1

7 CONTINUE

BUFFER(ZONE(PAGE)+IND(PAGE))=ACC(PAGE)

IND(PAGE)=IND(PAGE)+1

8 CONTINUE

ACC(PAGE)=0

CALL NEXTF

PAGE = PG - FSTPAG

L = L + TIME

GO TO 3

9 CONTINUE

DO 22 PAGE = 1, NBPAGE

```

PG = PAGE + FSTPAG
IF(INIT(PAGE).EQ.(-1)) GO TO 20
DO 11 I=1,DIMORD
  ORD(I)=0
11 CONTINUE
  PT=1
  IND=ZONE(PAGE)+IND(PAGE)
  ZONE(PAGE)=INIT(PAGE)
  IND(PAGE)=1
12 IF((ZONE(PAGE)+IND(PAGE)).GE.END) GO TO 15
  IF(IND(PAGE).LE.DIMZON) GO TO 13
  ZONE(PAGE)=BUFFER(ZONE(PAGE))
  IND(PAGE) = 1
13 CONTINUE
  IF(PT.LE.DIMORD) GO TO 14
  WRITE(6,102) DIMORD,PG
  GO TO 22
14 CONTINUE
  ORD(PT)=BUFFER(ZONE(PAGE)+IND(PAGE))
  PT=PT+1
  IND(PAGE) = IND(PAGE) + 1
  GO TO 12
15 CONTINUE
  PT = PT - 1

CALL DESHST (ORD, PT, TAICLA, HAUTMX, 53, PAGENB, PAGE,
             0,999999)

```

```

21 CONTINUE
22 CONTINUE

RETURN

```

C FORMAT'S  
-----

```

101 FORMAT('1','VECTEUR BUFFER ('',16,'TRES PETIT')
102 FORMAT('1','LE NOMBRE DE CLASSES DE L'HISTOGRAMME('',13,
      '),'EST SUPERIEUR A ''',13,'')
103 FORMAT('1','////VECTEUR ORD('',15,''),TRES PETIT POUR LA PAGE',13,
      '),'
104 FORMAT('1','100('',1,'),',1,' PAGES',13,',',1,' TEMPS -',
      '1','(MOIEN:',1,'F0.2,',1,'),',1,'(MIN:',1,'16,',1,'),',1,'(MAX:',1,'16,
      '),'',1,' (RANGE DE CHAQUE COLONNE DE L'HISTOGRAMME:',1,
      'F0.2,',1,'( ',1513))

```

```

END
SUBROUTINE DESHST
S (AMOST, N, TAICLA, HAUTMX, HAUT, PAGENB, PAGE, TPNIN, TPNAX)
INTEGER AMOST(N),TAICLA,HAUTMX,PAGENB,PAGE,TPNIN,TPNAX,
I HIST(500),DIMHST,COLE(53),HAUT,SOMME,MIN,MAX,I,J,
I MOIEN,RANG,DIMCOL,ASTER,POINT,TRACE,SPACE,NAST,INF,SUP,N,
I VERT
REAL ECH,NCHAR,RHMX,RH
DATA ASTER/'-'/,POINT/'.'/,TRACE/'-'/,SPACE/' '/,DIMCOL/53/,
D  DIMHST/500/,VERT/'!'
RHMX=HAUTMX
RH=HAUT

```

C COMPRENCE DES PARAMETRES

```

IF(N.EQ.) RETURN
IF ((N.GE.1).AND.(TPNIN.LE.TPNAX).AND.(HAUT.LE.DIMCOL)) GO TO 1
WRITE(6,110)
RETURN
1 CONTINUE

```

C CALCUL ECHELLE

```

ECH=PHIX/RH

```

C CALCUL VALEURS MOYENNE, MINIMALE ET MAXIMALE

```

SOMME=AMOST(1)
MIN=AMOST(1)
MAX=AMOST(1)
IF(N.EQ.1) GO TO 5
DO 4 I=2,N
  SOMME=SOMME+AMOST(I)
  IF(AMOST(I).GE.MIN) GO TO 2
  MIN=AMOST(I)
  GO TO 3
2 CONTINUE
  IF(AMOST(I).GT.MAX) MAX=AMOST(I)
3 CONTINUE

```

```

4 CONTINUE
5 CONTINUE
MOIEN=SOMME/N

```

```

NBCLAS=MAX/TAICLA+1
IF(NBCLAS.LE.DIMHST) GO TO 51
WRITE(6,105) NBCLAS, DIMHST
STOP
51 CONTINUE

C   CALCUL HISTOGRAMME

DO 6 I=1,NBCLAS
  HIST(I) = 0
6 CONTINUE
DO 7 I=1,N
  RANG=A*MOST(I)/TAICLA+1
  HIST(RANG)=HIST(RANG)+1
7 CONTINUE

C   ECRIRE ENTETE

WRITE(6,101) PAGENR, MOIEN, NBCLAS, PAGE, MIN, TAICLA,
W   TPMIN, TPMAX, MAX, ECH

C   DESSIN DE L'HISTOGRAMME

INF=1
DO 17 I=1,NBCLAS
  DO 8 J=1,DIMCCL
    COL(J)=SPACE
8 CONTINUE
  NCHAR=HIST(I)/ECH
  IF(NCHAR.GT.HAUT) GO TO 14
  NAST=NCHAR
  IF(NAST.EQ.0) GO TO 10
  DO 9 J=1,NAST
    COL(J)=ASTER
9 CONTINUE
10 CONTINUE
  IF(NAST.EQ.NCHAR) GO TO 13
  IF((NCHAR-NAST).GE.(.5)) GO TO 11
  COL(NAST+1)=POINT
  GO TO 12
11 CONTINUE
  COL(NAST+1)=ASTER
12 CONTINUE
13 CONTINUE
  GO TO 16
14 CONTINUE
  DO 15 J=1,HAUT
    COL(J)=TRACE
15 CONTINUE
16 CONTINUE
  SUP=INF+TAICLA
  DO 18 J=1,HAUT,1
    IF (COL(J).EQ.ASTER) COL(J) = VERT
18 CONTINUE
  WRITE(6,102) HIST(I),INF,SUP,(COL(J),J=1,DIMCCL)
  INF=SUP
17 CONTINUE
WRITE(6,103)

C   SAUTE DE PAGE

WRITE(6,104)

RETURN

100 FORMAT('---> ABORT. PARAMETRES DE HISTOG INCOHERENTES.')
```

```

101 FORMAT (' ',120(' '),/,'1(' ',113(' '),',',/),
F   ' ',12,25X,'VALEUR MOYENNE = ',16,16X,
F   ' ',11E(' '),',',/),
F   ' ',13,26X,'VALEUR MINIMALE = ',16,16X,
F   ' ',11E(' '),',',/),
F   ' ',15,' < TEMPS < ',16,13X,'VALEUR MAXIMALE = ',16,
F   ' ',16X,'ECHELLE : ',16,16X,',',/),
F   ' ',113(' '),',',/),
F   ' ',118(' '),',',/),
F   ' ',13(' '),',',10X,',',37X,',',/),
F   ' ',13X,'OBSERVATION ',3X,'INTERVALLE',3X,',',33X,
F   ' ',13X,'HISTOGRAMME',33X,',',/),
F   ' ',13(' '),',',16X,',',37X,',',/),
F   ' ',118(' '),',',/),
F   ' ',13(' '),',',16X,',',37X,',',/)
```

```

102 FORMAT (' ',16,4X,' ',16,2X,16,' ',1,83A1,' ')
103 FORMAT (' ',13(' '),',',16X,',',37X,',',/,' ',120(' '))
104 FORMAT (' ')
105 FORMAT (' ',1---> ABORT.NOMBRE DE CLASSES(' ',15,' ') SUPERIEUR A
F   DIMENSION DU VECTEUR DIM(' ',15,' ').')
END
```

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Billingsley — Statistical inference for Markov process  
The University of Chicago Press - 1961
- (2) Bogott,R.P. — Evaluation of Markov program models in virtual  
Franklin,M.A. memory systems  
(1975)-Software-Practice and Experience, vol 5,  
337-346
- (3) Burgevin — Analysis of program behavior  
Ingels,Leroudier (1977)-Comm. to the IFIP Congress 77
- (4) Burgevin,P. — Empirical data on program behavior  
Lenfant,J. Université de Rennes - France
- (5) Burville,P.J. —Heaps: aconcept in optimization  
(1974) - J.Inst.Maths.Applics,13,263-278
- (6) Burville,P.J. — On a model for storage and search  
(1973) - J.Appl.Prob.10,697-701
- (7) Coffman,E.G. — Further experimental data on the behavior of  
Varian,L.G. programs in a paging environment  
(1968) - CACM,11,n.7,July
- (8) Cox,D.R. — The statistical analysis of series of events  
Lewis,P.A.W. (1968) - London-Methuen
- (9) Cox,D.R. — The theory of stochastic processes  
Miller,H.D. (1970) - London-Methuen
- (10) Crocus — Systèmes d'exploitation des ordinateurs  
(1975) - Dunod, Paris
- (11) Denning,P.J. — The working set model for program behavior  
(1968) - CACM,11,n.5,May
- (12) Denning,P.J. — On modeling program behavior  
(1972) - Afips Proc. 1972, Spring Joint Comput.  
Conf.937-944
- (13) Denning,P.J. — Properties of the working set model  
Schwartz,S.C. (1972) - CACM,15,n.3, March
- (14) Feller,W — An introduction to probability theory and its  
applications, vol. 1  
(1968) - Wiley - New York
- (15) Feller,W. — An introduction to probability theory and its  
applications, vol. 2  
(1966) - Wiley - New York

- (16) Fourgeaud, C. — Statistique  
Fuchs, A. (1967) - Dunod, Paris
- (17) Franaszek, P.A. — Some distribution-free aspects of paging algo-  
Wagner, T.J. rithm performance  
(1974) Journal of the Association for Compu -  
ting Machinery, vol.21, n.1, January
- (18) Franklin, M.A. — Computation of page fault probability from  
Gupta, R.K. program transition diagram  
(1974) - CACM, 17, n.4, April
- (19) Hendricks, W.J. — An extension of a theorem concerning an interesting  
Markov chain  
(1973) - J.Appl.Prob. - 10, 886-890
- (20) Hendricks, W.J. — The stationary distribution of an interesting  
Markov chain  
(1972) - J.Appl.Prob. - 9, 231-233
- (21) Hendricks, W.J. — An account of self-organizing systems  
(1976) - SIAM J.Comput. vol.5, n.4, December
- (22) Kain, R.Y. — How to evaluate page replacement algorithms
- (23) Karlin — Initiation aux processus aléatoires  
(1969) - Dunod, Paris
- (24) Kendall, M.G. — The advanced theory of statistics  
vol.I, II  
(1948) - London - Griffin
- (25) Leroudier, J. — Quelques aspects de la modélisation des systems  
Parent, M. informatiques par simulation à événements discrets  
(1976) - Iria- Laboria
- (26) Leroudier, J. — A statistical approach to the estimation of service ti  
time distributions for operating systems modelling
- (27) Letac, G. — Transience and recurrence of an interesting Mar-  
kov chain  
(1974) - J.Appl.Prob. 11, 818-824
- (28) Lewis, P.A. — Empirically derived micromodels for sequences  
Shedler of page exceptions  
(1973) - IBM J.Res.Del.
- (29) Mattson, Gecsei, — Evaluation techniques for storage hierarchies  
Shutz, Traiger (1970) - IBM Syst.Journal, n.2

- (30) Montel — Leçons sur les récurrences et leurs applications  
(1957) - Paris, Gauthier - Villars
- (31) Neveu, J. — Chaînes de Markov  
(1970) - Instituto de Matematica - Univ.Federal  
de Pernambuco - Textos de Matematica, 19
- (32) Rivest, R. — On self organizing sequential search heuristics  
(1976) - CACM, 19, n.2, Feb.
- (33) Robbins, H. — A stochastic approximation method  
Monro, S. (1951) - Ann.Math.Stat., 22, 400-407
- (34) Schroeder, A. — Estimation de distributions d'entrée dans les  
modèles de systèmes informatiques  
Iria - Laboria
- (35) Schroeder, A. — Reconnaissance des composants d'un mélange  
(1974) - Thèse de 3-ème cycle
- (36) Schroeder, A. — Analyse d'un mélange de distributions de proba-  
bilité de même type  
(1976) - Revue de Statistique Appliquée, XXIV, 1
- (37) Young, T.Y. — Stochastic estimation of a mixture of normal density  
functions using an information criterion  
(1970) - IEEE Trans.on Information Theory,  
vol.II 16, N.3, 258-263
- (38) Lenfant — Thèse  
(1974) - Université de Rennes
- (39) Barroso, H.M. — Rapport de DEA  
Martins, M.E. (1977) - Université scientifique et Médicale  
de Grenoble



Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

18/5/79

Le Président de la thèse

  
J. R. BARRA

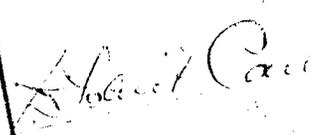
Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

25 mai 1979

Le Président de l'Université  
Scientifique et Médicale



  
25 mai 1979

