



**HAL**  
open science

# Programmation bilinéaire : une approche de résolution par relaxation

Alejandro Chagoya-Guzman

► **To cite this version:**

Alejandro Chagoya-Guzman. Programmation bilinéaire : une approche de résolution par relaxation. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT: . tel-00292330

**HAL Id: tel-00292330**

**<https://theses.hal.science/tel-00292330>**

Submitted on 1 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

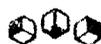
*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**  
Mathématiques appliquées  
Option: «recherche opérationnelle»

*par*

**CHAGOYA-GUZMAN Alejandro**



**PROGRAMMATION BILINEAIRE:**

**UNE APPROCHE DE RESOLUTION PAR RELAXATION.**



**Thèse soutenue le 27 juin 1980 devant la commission d'examen**

**Monsieur M. SAKAROVITCH**                      **Président**

**Messieurs C. BENZAKEN**  
**J. FONLUPT**                                      **Examineurs**  
**P.J. LAURENT**

**Monsieur W.R. PULLEYBLANK**                      **Invité**



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Énergétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette,	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Héléne	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane-	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



Je remercie vivement M. Michel SAKAROVITCH pour l'accueil qu'il m'a offert dans son équipe et pour la bonne volonté avec laquelle il a facilité la réalisation de cette thèse.

MM. Claude BENZAKEN, Pierre-Jean LAURENT et William Robert PULLEYBLANK me font le grand honneur de participer à ce jury et j'y suis très sensible.

Je ne saurais jamais assez remercier M. Jean FONLUPT pour ses compétences et ses qualités humaines, sa disponibilité, ses encouragements et sa patience au cours de la réalisation de ce travail qui sans lui n'aurait jamais été possible.

Je tiens à témoigner mon affection à tous les membres de l'équipe de Recherche Opérationnelle. En particulier, MM. J.P. UHRV et les informaticiens de cette équipe m'ont donné beaucoup de bons conseils pour la partie expérimentale de ce travail.

La frappe du manuscrit a été assurée par Mme NEUMANN avec autant de soin que de rapidité et je tiens à lui exprimer ma reconnaissance.

M. IGLESIAS et son service de reprographie m'ont beaucoup impressionné par l'efficacité avec laquelle ils ont effectué le tirage de cette thèse et je les en remercie sincèrement.

Je tiens à signaler finalement que ce travail n'a été possible que grâce au soutien financier de l'organisme mexicain CONACYT.



TABLE DES MATIERES



	Pages
INTRODUCTION .....	1
<u>CHAPITRE I</u> : LE PROBLEME DE PROGRAMMATION BILINEAIRE .....	3
I.1 - Propriétés .....	4
I.2 - Relation entre le P.P.B. et d'autres problèmes d'optimisation .....	5
I.3 - Complexité du P.P.B. ....	6
I.4 - Méthodes de résolution connues dans la littérature ....	6
 <u>CHAPITRE II</u> : LE PROBLEME DE PROGRAMMATION BILINEAIRE APPROCHE ...	11
II.1 - La face produit tensoriel des polyèdres $K_1$ et $K_2$ .....	12
II.2 - Rapport entre le P.P.B. et le P.P.B.A. ....	15
 <u>CHAPITRE III</u> : RESOLUTION DU PROBLEME DE PROGRAMMATION BILINEAIRE APPROCHE .....	21
III.1 - Introduction .....	22
III.2 - Décomposition du P.P.B.A. ....	23
III.4 - Méthode de résolution du P.P.B.A. ....	24
III.4.1 - Introduction .....	24
III.4.2 - Méthodes envisageables .....	24
III.4.3 - Description générale de la méthode .....	25
III.4.4 - Résolution du P.B.A.R. ....	27
III.4.5 - Recherche du Plus Grand Pas .....	33
III.4.6 - Détermination d'une direction d'amélioration	37
III.4.6.1 - Introduction .....	37
III.4.6.2 - Cas de deux hypercubes .....	38
III.4.6.3 - Cas d'un Polyèdre quelconque et un hypercube .....	50
III.4.6.4 - Cas général .....	51
 <u>CHAPITRE IV</u> : RESOLUTION DU PROBLEME DE PROGRAMMATION BILINEAIRE	52
IV.1 - Introduction .....	53
IV.2 - Stratégie générale de séparation .....	53

IV.2.1 - Terminologie .....	53
IV.2.2 - Choix du sommet à explorer .....	54
IV.2.3 - Séparation au sommet $\ell$ .....	54
IV.2.4 - Evaluation au sommet $(\ell, k)$ , $k = 1, \dots, \ell_2$ .....	55
IV.2.5 - Evaluation au sommet $(\ell, \ell_2+1)$ .....	55
IV.2.6 - Exclusion des sommets inutiles .....	56
IV.2.7 - Résumé de la stratégie de séparation .....	56
IV.3 - Stratégie de séparation quand $K_2$ est un hypercube ....	57
IV.3.1 - Introduction .....	57
IV.3.2 - Séparation au sommet $\ell$ .....	57
IV.3.3 - Choix de l'indice de séparation $j_0$ .....	58
IV.3.4 - Evaluation au sommet $\ell$ .....	59
IV.3.5 - Calcul d'un optimum local .....	60
IV.3.6 - Mise en oeuvre de la stratégie de séparation .....	60
 <b>CHAPITRE V : EXPERIMENTATION DE L'ALGORITHME</b>	
V.1 - Introduction .....	63
V.2 - Performances de la méthode de résolution du P.P.B.A. ....	63
V.2.1 - Cas de deux hypercubes .....	63
V.2.2 - Cas d'un polyèdre et d'un hypercube .....	65
V.3 - Performances de l'algorithme de S.E.P. ....	67
 CONCLUSION .....	 72
BIBLIOGRAPHIE .....	74
RAPPEL DES ABREVIATIONS ET NOTATIONS .....	78

# INTRODUCTION



Le problème de programmation bilinéaire (P.P.B.) peut se formuler de la manière suivante :

$$\bar{v} = \text{Min}\{v(x,y) = x^t C y + \langle p^t, x \rangle + \langle q^t, y \rangle \mid x \geq 0,^{(1)} Ax = e ; y \geq 0, By = f\}$$

$$\text{où : } x, p \in \mathbb{R}^{n_1}; y, q \in \mathbb{R}^{n_2}; p \in \mathbb{R}^{m_1}; q \in \mathbb{R}^{m_2}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}; B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}; C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$$

Sans perte de généralité, on supposera que les polyèdres  $K_1 = \{x \geq 0 \mid Ax = e\}$  et  $K_2 = \{y \geq 0 \mid By = f\}$  sont bornés.

Le P.P.B. est un programme non convexe très général. On verra au Chapitre I qu'il englobe plusieurs problèmes bien connus dans la littérature.

On associe au P.P.B. un programme linéaire appelé dans la suite problème de programmation bilinéaire approché (P.P.B.A.) dont la solution optimale constitue une borne inférieure pour  $\bar{v}$  ce qui justifie le choix de son nom. Ce programme linéaire est étudié au Chapitre II.

Afin de résoudre entièrement le P.P.B., on met en oeuvre au chapitre IV des techniques de séparation et évaluation progressives (S.E.P.) fondées sur le P.P.B.A.

Puisque l'intérêt est d'obtenir rapidement une borne pour  $\bar{v}$ , au chapitre III on développe des méthodes duales de résolution du P.P.B.A. qui est un programme linéaire de grande taille mais à structure particulière. On génère de cette façon une suite non décroissante de bornes inférieures pour  $\bar{v}$ , la meilleure de ces bornes étant la solution optimale du P.P.B.A. A chaque itération, on a donc une borne pour  $\bar{v}$  et la décision d'entamer l'itération suivante est prise en fonction des critères tels que le temps de calcul ou l'amélioration relative de la borne.

L'algorithme de résolution du B.P.P. a été programmé sur l'ordinateur Iris 80 du CICG et la discussion des expériences numériques sur plusieurs exemples fait l'objet du Chapitre V.

---

(1) Le scalaire zéro et le vecteur nul seront représentés tous deux par le symbole 0 sans risque de confusion.



CHAPITRE I

LE PROBLEME  
DE PROGRAMMATION BILINEAIRE



### I.1 - Propriétés

Le P.P.B. est

$$(1) \quad \bar{v} = \text{Min}\{v(x,y) = \langle p^t, x \rangle + \langle q^t, y \rangle + x^t c y \mid x \in K_1, y \in K_2\}$$

Il peut s'écrire alternativement de la manière suivante :

$$(2) \quad \text{Min}\{\Psi(x) \mid x \in K_1\}$$

où :

$$(3) \quad \Psi(x) = \text{Min}\{v(x,y) \mid y \in K_2\}$$

On montre facilement (voir [9]) que  $\Psi(x)$  est une fonction concave et affine par morceaux.

Remarque 1 : On déduit de (3) qu'en fixant l'une des variables, on obtient un programme linéaire en l'autre.

Cette remarque est la base de la procédure pour obtenir un optimum local du P.P.B. proposée dans [23].

Remarque 2 : Le P.P.B. sous la forme donnée par l'expression (1) est l'extension directe du problème de programmation linéaire où la fonction objective est soumise elle aussi à des contraintes linéaires.

Remarque 3 : Le P.P.B. admet une formulation dont la fonction objective est linéaire mais dont l'ensemble de solutions réalisables n'est pas forcément convexe ; d'ailleurs cet ensemble peut être déconnecté [11].

Nous finissons ce paragraphe avec une importante propriété du P.P.B. qui permet d'astreindre la recherche d'une solution optimale aux points extrêmes des polyèdres  $K_1$  et  $K_2$ .

#### Proposition 1 [9]

Il existe un point extrême  $\bar{x}$  de  $K_1$  et un point extrême  $\bar{y}$  de  $K_2$  tels que le couple  $(\bar{x}, \bar{y})$  est solution optimale du P.P.B.

Cette proposition suggère une méthode de résolution du P.P.B. fondée sur des algorithmes de classement des points extrêmes [3], [30] qui s'avère inefficace même pour des polyèdres à un nombre moyen de sommets puisque déjà pour des

polyèdres  $K_1$  et  $K_2$  à mille points extrêmes chacun on pourrait énumérer jusqu'à un million de solutions.

## I.2 - RELATION ENTRE LE P.P.B. ET D'AUTRES PROBLEMES D'OPTIMISATION

Malgré sa formulation plutôt simple, le P.P.B. est un problème très général. Les problèmes suivants sont des cas particuliers de celui-ci.

### a) Programmation Quadratique concave (P.P.Q.)

On montre dans [23] que le problème de minimiser une fonction quadratique concave sous contraintes linéaires peut se formuler comme un P.P.B.

### b) Programmation linéaire en variables bivalentes

Le P.P.Q.

$$(4) \text{ Min}\{ \langle p^t, x \rangle + M \langle x^t, (1-x) \rangle \mid Ax \leq e, 0 \leq x \leq \bar{1} \}$$

Où:  $M$  est un réel positif arbitrairement grand et

$\bar{1}$  est un vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

est une réformulation du problème en variables bivalentes :

$$\text{Min}\{ \langle p^t, x \rangle \mid Ax \leq e \quad x_j = 0,1 \text{ pour tout } j \}$$

Ce résultat est montré dans [31]. La classe de fonctions donnée par .

l'expression (4) a été élargie dans [14] à une classe de fonctions définies sur l'hypercube qui est plus générale.

### c) Théorie des jeux

Considérons le jeu à deux personnes I, II dont les vecteurs des stratégies mixtes sont  $x, y$  et les matrices de gain sont  $A, B$ . Le but du joueur est :

$$(5) \text{ Max}_x \{ x^t A y \mid x \geq 0, \sum_j x_j = 1 \}$$

et du joueur II est :

$$(6) \text{ Max}_y \{ x^t B y \mid y \geq 0, \sum_j y_j = 1 \}$$

La recherche d'un point d'équilibre de ce jeu, c'est à dire d'un couple de solutions  $(x_0, y_0)$  de (5) et (6) respectivement, est équivalent à la résolution d'un P.P.Q. [29].

D'autre part, le jeu max-min à deux personnes  $x, y$  étudié dans [7]

$$(7) \quad \text{Max}_x \text{Min}_y \{ \langle p^t, x \rangle + \langle q^t, y \rangle \mid Ax + By \leq b ; x, y \geq 0 \}$$

où le joueur  $x$ , par hypothèse jouant le premier, modifie à la fois la fonction objective et les contraintes du joueur  $y$ , est équivalent au P.P.B.

#### d) Le problème d'Affectation en trois dimensions

La généralisation du problème d'Affectation [35] au cas tri-dimensionnel peut s'écrire comme un P.P.B. [10].

### I.3 - COMPLEXITE DU P.P.B.

Du paragraphe précédent on tire que le P.P.B. est au moins aussi complexe que le problème de programmation en variables bivalentes dont certains problèmes combinatoires classiques comme le problème d'affectation quadratique [27] ou le problème de stable maximum dans une graphe [34] pour n'en citer que deux, sont bien connus comme des problèmes NP-complets [12]. Ceci nous fait douter de l'existence d'un algorithme polynomial pour résoudre le P.P.B.

### I.4 - METHODES DE RESOLUTION CONNUES DANS LA LITTERATURE

Le pionner dans ce domaine a été sans doute Hoang Tui [37] avec sa méthode de résolution du problème :

$$(8) \quad \text{Min}\{f(x) \mid x \in K\}$$

où

$$K = \{x \geq 0 \mid Ax \leq e\} \subset \mathbb{R}^n$$

sous les hypothèses :

- $f$  est concave et son domaine contient  $K$ .
- Il existe une extension concave de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Le polyèdre  $K$  est non dégénéré.

Cette méthode rapidement rappelée, commence avec l'identification d'un optimum local  $\bar{x}$  du problème. Une coupe de Tui est alors déterminée et ajoutée aux contraintes de telle façon que tous les points de  $K$  qui ne peuvent pas être solution de (8), y compris  $\bar{x}$  sont désormais exclus de considération.

La procédure est recommencée sur un polyèdre qui est donc plus petit et ceci jusqu'à ce que la solution global du problème soit mise en évidence.

La coupe de Tui est l'hyperplan passant par les points  $x_1, \dots, x_n$  qui se trouvent sur les arêtes issues de  $\bar{x}$  vers les points extrêmes adjacents et tels que  $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = f(\bar{x})$ . Ceci suppose qu'il y a exactement  $n$  points extrêmes adjacents à n'importe lequel des autres, donc que  $K$  est non dégénéré.

Tui ne fournit pas de preuve de finitude de sa méthode et d'ailleurs dans [40] l'auteur exhibe un contre-exemple sur lequel elle boucle. Cependant, l'idée s'est largement répandue et a inspiré de nombreux algorithmes.

Dans le domaine de la programmation en nombres entiers, la méthode de la coupe de convexité développée dans [16] et fondée sur les idées de Tui et de Balas [1] trouve également des applications.

L'une des premières méthodes proposées pour maximiser sous un polyèdre éventuellement dégénéré une fonction quadratique non convexe est [32]. A chaque itération cette méthode détermine un optimum local du problème et une coupe qui réduit l'ensemble des solutions réalisables. Zwart [40] a donné aussi un contre-exemple pour cette méthode.

Konno [23] donne pour un  $\epsilon > 0$  choisi au préalable un algorithme pour déterminer un optimum local à  $\epsilon$  près qui consiste en la résolution d'une suite de programmes linéaires, et un algorithme approximatif de coupes fondé sur les idées de Tui et Ritter pour obtenir une solution  $\epsilon$ -optimale du P.P.B. Avant la détermination de la coupe, l'optimum local est translaté à l'origine du système de coordonnées.

La preuve de convergence n'est pas fournie mais les expériences pratiquées sur de divers exemples ont été toujours concluantes. Le cas le plus important qui a été traité est  $m_1 = 10$ ,  $n_1 = 22$  ;  $m_2 = 13$ ,  $n_2 = 24$  avec des données générées au hasard où 20.7 sec. de C.P.U. dans une machine CYBER 74 ont été nécessaires. Le rapport de  $\epsilon$  à la meilleure solution réalisable trouvée était de 1/20.

Konno applique la méthode ci-dessus au problème de maximisation d'une fonction quadratique convexe sous des contraintes linéaires [24] en établissant l'équivalence avec le P.P.B. En général les coupes ainsi obtenues sont beaucoup plus profondes que les coupes de Tui.

Dans ce cas, l'exemple traité le plus important :  $m_1 = m_2 = 11$  ;  $n_1 = n_2 = 22$  avec des données à structure spéciale, a demandé 28 secondes de C.P.U. sur le CYBER 74. Le rapport de  $\epsilon$  à la meilleure solution réalisable trouvée était de 1/10.

Dans un papier récent [25], Konno a encore adapté son algorithme pour résoudre des problèmes bilinéaires de sac à dos en variables bivalentes en un nombre fini de pas. L'obtention de la coupe demande la résolution d'un problème

de sac à dos en variables bivalentes paramétré. Elle peut se faire soit par une recherche au hasard, soit approximativement en travaillant avec le problème en continu.

Fonlupt [9] développe une méthode de résolution du P.P.B. en partant du produit tensoriel de deux ensembles convexes ; elle comporte une grande partie du fondement théorique du présent document. Une méthode de coupes  $y$  est aussi proposée dont la dérivation est faite itérativement en paramétrant des programmes linéaires du type P.P.B.A. à partir d'une coupe de Tui. Les coupes ainsi obtenues sont de plus en plus profondes.

Une autre adaptation de la méthode de Tui pour résoudre le P.P.B. avec  $K_1$  ou  $K_2$  éventuellement dégénéré est donnée dans [11]. Les coupes sont obtenues à partir d'un point extrême quelconque de  $K_1$  ou  $K_2$  et la dégénérescence est traitée à la façon de Balas [1].

L'algorithme n'est pas garanti de s'arrêter au bout d'un nombre fini de pas mais les expériences numériques sur des exemples tirés au hasard se sont terminées toutes au bout d'un maximum de 67 itérations de l'algorithme.

Dans la presque totalité des cas traités, les deux polyèdres  $K_1$ ,  $K_2$  étaient de dimension identique, la taille la plus importante étant  $m_1 = m_2 = 5$ ,  $n_1 = n_2 = 15$ .

Un algorithme de coupes semblable à ce dernier mais prouvé fini se trouve dans [38]. Il a l'intérêt de conserver la structure du problème après l'adjonction des coupes, ce qui est important quand l'un des polyèdres  $K_1$  ou  $K_2$  possède une structure particulière.

Deux procédures sont fournies pour la détermination d'un optimum pseudo global du problème, c'est à dire d'un point  $(\bar{x}, \bar{y})$  tel que

$$v(\bar{x}, \bar{y}) \leq v(x, y)$$

pour tout  $x \in N_\delta(\bar{x}) \cap K_1$  et pour tout  $y \in K_2$  où  $N_\delta(\bar{x})$  est un voisinage de  $\bar{x}$  de rayon  $\delta$ .

A partir de cet optimum pseudo-global, une coupe est générée en résolvant une séquence de programmes linéaires paramétrés. De même que dans [9] cette procédure est itérative et on peut ainsi obtenir chaque fois des coupes plus profondes. Après adjonction de l'un de celles-ci, un nouvel optimum pseudo-global est recherché sur l'ensemble qui en résulte et ainsi de suite jusqu'à ce que la région à explorer soit vide.

Cet algorithme est fini et peut être facilement adapté à la recherche d'une solution approximative à la façon de Konno. La dégénérescence est traitée de la même manière que dans le cas précédent.

Une méthode de S.E.P. pour résoudre le P.P.B. se trouve dans [7]. La séparation est faite sur les variables individuelles en les forçant à rester hors base une par une et l'évaluation est donnée par la résolution d'un programme linéaire dont la dérivation est tout de même d'une nature complètement différente de celle du P.P.B.A. La preuve de finitude est fournie mais l'auteur ne présente pas d'expérience numérique.

Une généralisation de l'algorithme du P.P.Q. convexe [35] est donnée dans [22] pour obtenir dans l'absence de dégénérescence des optimums locaux pour le P.P.Q. sans hypothèse de convexité, en introduisant le concept de solution de base complémentaire.

Cet algorithme est fini et devient tout naturellement l'algorithme du simplexe si la fonction objective du problème est linéaire.

Les méthodes de décomposition en programmation linéaire ont été généralisées et appliquées à certains problèmes non linéaires. Ainsi, dans [26] des algorithmes  $\epsilon$ -convergeants fondés sur une généralisation de la décomposition de Benders sont donnés pour résoudre le P.P.Q. indéfini. D'autre part, selon le principe de décomposition de Dantzig et Wolfe, [33] présente une méthode pour résoudre le P.P.Q. où la matrice de la forme quadratique est semi-définie positive.

La résolution du problème d'optimisation quadratique en variables bivariantes est étudiée dans [17] par des relaxations linéaires. Une classe de fonctions  $\gamma$  est donnée, dont les surmodulaires notamment, pour lesquelles la solution du problème relaxé est aussi solution du problème original.

Pour le Problème de Programmation Concave (P.P.C.) des méthodes finies apparentées à celles de Tui sont proposées dans [41], [4], [36].

Une approche différente se trouve en [21] dans le cas où l'ensemble des contraintes constitue un polyèdre borné et non dégénéré. La définition de l'enveloppe convexe d'une fonction sur un ensemble  $\gamma$  est donnée ainsi qu'une méthode pour obtenir celle de la fonction objective sur un ensemble qui contient la région réalisable. A chaque itération, cet ensemble devient plus serré et on continue jusqu'à ce que l'identification de la solution globale du problème soit immédiate.

Pour le Problème de Programmation Quasi-Concave (P.P.Q.C.) on connaît une méthode de coupes [28] qui a l'intérêt de savoir distinguer les points extrêmes originaux de ceux induits par les coupes. Le principe de cette méthode qui est finie et qui traite sans difficulté les cas dégénérés se trouve sur la programmation linéaire et sur la méthode de Tui.

Si la fonction à optimiser satisfait en plus l'hypothèse d'être différentiable sur un ensemble ouvert qui contient la région réalisable, l'algorithme dans [5] qui est une énumération astucieuse est applicable. Il consiste d'abord en une méthode pour déceler un optimum local éventuellement dégénéré à partir duquel certaines contraintes sont relâchées. L'énumération est alors faite sur les faces relâchées.

Dans [2] l'auteur développe une méthode de calcul de bornes pour une classe particulière de problèmes non convexes soumis à des contraintes linéaires de la forme  $Ax \geq b$  où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . L'idée est d'associer un problème qui comporte la seule contrainte  $uAx \geq ub$  à la place des  $m$  autres  $Ax \geq b$ , où  $u$  est un vecteur multiplicateur des lignes de  $A$ . Pour chaque  $u \geq 0$  ce problème auxiliaire donne une borne du problème original et on montre que l'inclusion de cette méthode dans une technique de S.E.P. ne demande pas la recherche du meilleur multiplicateur  $u$  à chaque évaluation mais qu'il suffit de tester la réalisabilité d'un système de contraintes linéaires.

Finalement [21] propose un algorithme de résolution du problème de programmation pseudo-concave et en particulier du problème

$$\text{Max}\{f(x) = \langle p^t, x \rangle + m(\langle x^t, Cx \rangle)^{1/2} \mid x \geq 0, Ax \leq b\}$$

où  $m < 0$  et  $C$  est définie-positif qui a des applications dans les problèmes de prise de décision sous risque.

C'est une décomposition de la région réalisable en simplexes de dimensions diverses qui, par la programmation linéaire et le critère du gradient sélectionne une séquence de ces simplexes chacun desquels est associé à un maximum relatif strictement croissant. On montre que cette procédure est finie et que l'élément le plus grand de ladite séquence est la solution globale du problème.



CHAPITRE II

LE PROBLEME DE PROGRAMMATION  
BILINEAIRE APPROCHE



II.1 - LE FACE-PRODUIT TENSORIEL DES POLYEDRES  $K_1$  ET  $K_2$

Comme il a été mentionné au chapitre précédent, l'étude du produit tensoriel de deux ensembles convexes est faite dans [9] et par conséquent, certains résultats de cette théorie utilisés ici, seront rappelés sans démonstration.

Il est convenable de supposer que les polyèdres  $K_1$  et  $K_2$  ont été mis au préalable sous forme canonique par rapport à une base réalisable, c'est à dire que l'on connaît une partition  $(A_B, A_H)$  des colonnes de A et une partition  $(B_B, B_H)$  des colonnes de B telles que  $A_B$  et  $B_B$  sont des matrices carrées non singulières. A ce moment là  $K_1$  et  $K_2$  s'écrivent :

$$K_1 = \{x = (x_B, x_H) \geq 0 \mid x_B + \bar{A}x_H = \bar{e}\}$$

$$K_2 = \{y = (y_B, y_H) \geq 0 \mid y_B + \bar{B}y_H = \bar{f}\}$$

où :  $x_B, \bar{e} \in \mathbb{R}^{\ell_1}, x_H \in \mathbb{R}^{h_1}, \ell_1 + h_1 = n_1$

$$\bar{A} = (A_B)^{-1}A_H \in \mathbb{R}^{h_1 \times h_1}$$

$$y_B, \bar{f} \in \mathbb{R}^{\ell_2}, y_H \in \mathbb{R}^{h_2}, \ell_2 + h_2 = n_2$$

$$\bar{B} = (B_B)^{-1}B_H \in \mathbb{R}^{h_2 \times h_2}$$

Le face-produit tensoriel de  $K_1$  et  $K_2$  que nous noterons  $K_1 \boxtimes K_2$  dans la suite est défini par le système (PTC) ci-dessous. On montre dans [9] que  $K_1 \boxtimes K_2$  est un ensemble convexe fermé et qu'il est compact si et seulement si  $K_1$  et  $K_2$  sont bornés.

Dans l'écriture du système (PTC) nous utilisons les notations suivantes :  $x \circ y$  est un vecteur dont les coordonnées sont

$$(x^i \circ y^j, i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2)$$

Pour chaque  $j = 1, \dots, n_2$  ;  $x \circ y^j$  est un vecteur dont les coordonnées sont

$$(x^i \circ y^j, i = 1, \dots, n_1)$$

Pour chaque  $i = 1, \dots, n_1$  ;  $x^i \circ y$  est un vecteur dont les coordonnées sont

$$(x^i \circ y^j, j = 1, \dots, n_2)$$

Finalement, si  $w \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha$  est un scalaire,  $\alpha w$  est le vecteur dont les coordonnées sont

$$(\alpha w^1, \dots, \alpha w^n)$$

$$\left. \begin{aligned}
 (1) \quad & x_B^{\circ} y_H^j + \bar{A} x_H^{\circ} y_H^j - \bar{e} y_H^i = 0 ; j = 1, \dots, h_2 \\
 (2) \quad & x_B^{\circ} y_B^i + \bar{A} x_H^{\circ} y_B^i - \bar{e} y_B^i = 0 ; i = 1, \dots, l_2 \\
 (3) \quad & \bar{B} y_H + y_B = \bar{f} \\
 (4) \quad & \bar{A} x_H + x_B = \bar{e} \\
 (5) \quad & \bar{B} x_H^j y_H + x_H^j y_B - x_H^j \bar{f} = 0 ; j = 1, \dots, h_1 \\
 (6) \quad & \bar{B} x_B^i y_H + x_B^i y_B - x_B^i \bar{f} = 0 ; i = 1, \dots, l_1
 \end{aligned} \right\}$$

(PIC)

Intuitivement, le système (PTC) est obtenu en multipliant une à une les contraintes de  $K_1$  par chacune de celles de  $K_2$  et en remplaçant chaque produit  $x^i \cdot y^j$  par une nouvelle variable  $x^i \circ y^j$ .

Le P.P.B.A. peut donc se formuler de la manière suivante :

$$(P.P.B.A.) \quad \vec{v}_A = \text{Min} \{ \langle p^t, x \rangle + \langle q^t, y \rangle + \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} c_{jk} x^j \circ y^k \mid Z = (x \circ y, y, x) \in K_1 \otimes K_2 \}$$

A propos du système (PTC) quelques remarques sont pertinentes.

Remarque 1 : Dans le système de contraintes (PTC) l'un des ensembles d'équations (2) ou (6) est surabondant et peut donc être éliminé. Nous adoptons la règle de garder celui qui contient le plus petit nombre de contraintes et sans perte de généralité de le choisir comme l'ensemble (2) ; (6) est donc exclu désormais du système (PTC) qui, de cette façon, possède  $\ell_1 \cdot n_2 + \ell_2 \cdot h_1 + \ell_1 + \ell_2$  équations et  $n_1(n_2+1) + n_2$  variables.

Remarque 2 : Le système (PTC) se décompose en deux sous-systèmes : celui constitué par les équations (1) à (4) et celui formé par (5) et (6) que nous appellerons respectivement sous-systèmes (A) et (B). Chacun d'eux possède une structure diagonale par bloc. C'est à partir de cette décomposition que nous proposons une méthode pour résoudre le P.P.B.A. dans le chapitre suivant.

Remarque 3 : Le système (PTC) peut s'écrire de manière plus concise

$$(PTL) \quad \left\{ \begin{array}{l} (7) \quad x \circ y \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0 \\ (8) \quad Ax \circ y^j - ey^j = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, n_2 \\ (9) \quad By = f \\ (10) \quad Ax = e \\ (11) \quad Bx^i \circ y - fx^i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n_1 \end{array} \right.$$

Remarque 4 : Le système (PTC) est similaire au polytope d'affectation [35] dans le sens que chaque variable  $x^i \circ y^j$  apparaît exactement dans deux ensembles de contraintes : l'ensemble (8) et l'ensemble (11).

En raison de sa symétrie, le système (PTL) sera utilisé comme représentation de  $K_1 \boxtimes K_2$  dans la description de la première phase de la méthode de résolution du P.P.B.A.

## II.2 - RAPPORT ENTRE LE P.P.B. ET LE P.P.B.A.

Dans ce paragraphe, nous justifions le choix du P.P.B.A. comme outil de résolution du P.P.B. ; pour ce faire, nous introduisons tout d'abord la notation et la définition suivantes :

Pour  $K = K_1, K_2$  ou  $K_1 \boxtimes K_2$ , nous noterons  $E(K)$  l'ensemble des points extrêmes de  $K$ .

Définition : Le vecteur  $z$  sera dit "de la forme produit", s'il existe  $x \in K_1$  et  $y \in K_2$  tels que <sup>(1)</sup>  $z = (x \otimes y, y, x)$ .

Théorème 1 : Si  $\bar{x} \in E(K_1)$  et  $\bar{y} \in E(K_2)$  alors  $\bar{z} = (\bar{x} \otimes \bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \in E(K_1 \boxtimes K_2)$ .

Ce théorème est également démontré dans [9] mais vu l'importance du résultat pour notre étude, nous reprenons sa preuve ici.

Suivant la notation établie au paragraphe précédent, il suffit de montrer que le vecteur  $\bar{z}$  :

$$\begin{cases} x_B \circ y_H & = 0 \\ x_B \circ y_B & = \bar{e} \otimes \bar{f} \\ x_H \circ y_B & = 0 \\ y_B & = \bar{f} \\ x_B & = \bar{e} \end{cases}$$

est une solution réalisable de base pour  $K_1 \boxtimes K_2$ .

En considérant le système (PTC), il est immédiat à vérifier que  $\bar{z} \in K_1 \boxtimes K_2$ . D'autre part, la matrice  $M$  extraite de (PTC) qui correspond au vecteur  $\bar{z}$  est

(1) Si  $x = (x^1, \dots, x^{n_1})$  et  $y = (y^1, \dots, y^{n_2})$ ,  $x \otimes y$  est le vecteur dont les composantes sont

$$(x^i \cdot y^j, i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2)$$

$x_B^1$	$\dots$	$x_B^{h_2}$	$x_B^1$	$\dots$	$x_B^{l_2}$	$x_H^1$	$\dots$	$x_B^{h_1}$	$y_B^1$	$\dots$	$y_B^{l_2}$	$x_B^1$	$\dots$	$x_B^{l_1}$
I	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	I	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	I	:	:	$\bar{a}_1$	:	:	$-e^{-1}$	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	$-e^{-l_1}$	:	:	:	:	:
:	:	:	:	I	:	:	$\bar{a}_{h_1}$	:	$-e^{-1}$	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	$-e^{-l_1}$	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	I	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	I	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	I	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	I	:

où  $\bar{a}_j$  représente la jème colonne de  $\bar{A}$ ,  $j = 1, \dots, h_1$ .

Nous avons vu, à la remarque 1, que le nombre d'équations indépendantes du système (PIC) est  $r = l_1 l_2 + h_1 l_2 + h_2 l_1 + l_1 + l_2$  et  $r$  coïncide justement avec le nombre de lignes et de colonnes de la matrice  $M$ .

Ainsi  $M$  est carrée, diagonale-inférieure par blocs, à éléments non nuls sur la diagonale principale et par conséquent non singulière.

C.Q.F.D.

Remarque 5 : La solution  $\bar{z}$  du théorème 1 est très dégénérée puisqu'elle comporte  $l_1 h_2 + l_2 h_1$  variables de base nulles.

La réciproque du théorème 1 est fautive ainsi que le montre l'exemple ci-dessous ; cependant, si  $K_1$  ou  $K_2$  est un simplexe, le théorème 1 est vrai dans les deux sens : tous les points extrêmes de  $K_1 \times K_2$  sont de la forme produit. Ce résultat est montré dans [9].

Exemple : Prenons comme  $K_1$  et  $K_2$  l'hypercube binaire dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$K_1 \begin{cases} x_1 \geq 0, x'_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x'_2 \geq 0 \\ x_1 + x'_1 = 1 \\ x_2 + x'_2 = 1 \end{cases}$$

$$K_2 \begin{cases} y_1 \geq 0, y'_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y'_2 \geq 0 \\ y_1 + y'_1 = 1 \\ y_2 + y'_2 = 1 \end{cases}$$

Dans ces conditions  $K_1 \boxtimes K_2$  s'écrit



Considérons maintenant la partition suivante des colonnes de

$K_1 \otimes K_2$

$$\bar{z}_B = (x_1 \circ y_1, x_2 \circ y_1, x_1' \circ y_1', x_2' \circ y_1', x_1 \circ y_2, x_2 \circ y_2, x_1' \circ y_2', x_2' \circ y_2', y_1, y_1', y_2, y_2', x_1, x_1', x_2, x_2')$$

$$\bar{z}_H = (x_1' \circ y_1, x_2' \circ y_1, x_1 \circ y_1', x_2 \circ y_1', x_1 \circ y_2, x_2 \circ y_2, x_1' \circ y_2', x_2' \circ y_2')$$

et posons  $\bar{z}_H = 0$ . Le système d'équations qui en résulte est

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \circ y_1 = x_2 \circ y_1 = y_1 \\ x_1 \circ y_1' = x_2 \circ y_1' = y_1' \\ x_1' \circ y_2 = x_2' \circ y_2 = y_2 \\ x_1' \circ y_2' = x_2' \circ y_2' = y_2' \\ x_1 \circ y_1 = x_1' \circ y_2' = x_1 \\ x_2 \circ y_1 = x_2' \circ y_2' = x_2 \\ x_1' \circ y_1' = x_1' \circ y_2 = x_1' \\ x_2' \circ y_1' = x_2' \circ y_2 = x_2' \\ x_1 + x_1' = 1 \\ x_2 + x_2' = 1 \\ y_1 + y_1' = 1 \\ y_2 + y_2' = 1 \end{array} \right.$$

Une simple vérification suffit pour voir que la seule solution que ce système admet est

$$\bar{z}_B = \underbrace{(1/2, \dots, 1/2)}_{16 \text{ composantes}}$$

Si  $\bar{z} = (\bar{z}_B, \bar{z}_H)$  n'est pas un point extrême alors il existe

$z' = (z'_B, z'_H) \in K_1 \otimes K_2$  et  $z'' = (z''_B, z''_H) \in K_1 \otimes K_2$  tels que

$$(12) \quad \bar{z}_B = \frac{1}{2} z'_B + \frac{1}{2} z''_B$$

$$(13) \quad \bar{z}_H = \frac{1}{2} z'_H + \frac{1}{2} z''_H$$

Mais  $\bar{z}_H = 0$ ,  $z'_H \geq 0$ ,  $z''_H \geq 0$  et (13) entraînent forcément  $\bar{z}'_H = \bar{z}''_H = 0$  en plus, de (12) et du fait que  $\bar{z}_B$  admet une solution unique, on déduit que la seule possibilité pour  $\bar{z}'_B$  et  $\bar{z}''_B$  est

$$\bar{z}_B = \bar{z}'_B = \bar{z}''_B$$

Ainsi,  $\bar{z}$  est bien un point extrême de  $K_1 \times K_2$  qui n'est pas de la forme produit.

En résumé le théorème 1 et la remarque I.2 établissent que la relation entre les valeurs des fonctions objectives du P.P.B. et du P.P.B.A. à l'optimum est

$$\bar{v}_A \leq \bar{v}$$

avec l'inégalité stricte éventuellement possible.



CHAPITRE III

RESOLUTION DU PROBLEME  
DE PROGRAMMATION BILINEAIRE APPROCHE



### III.1 - INTRODUCTION

Il a été établi au chapitre précédent que la solution optimale  $\bar{v}_A$  du P.P.B.A. ne résoud pas forcément le P.P.B. mais que  $\bar{v}_A$  constitue une borne inférieure pour  $\bar{v}$ . Il est donc naturel de penser à développer des stratégies de séparation de l'ensemble de solutions réalisables du P.P.B. en utilisant le P.P.B.A. comme évaluation afin de le résoudre entièrement. La mise en oeuvre de telles stratégies sera l'objet du Chapitre IV.

La borne obtenue par le P.P.B.A. doit répondre aux exigences toujours demandées dans les méthodes de S.E.P. à savoir être

- i) Rapidement obtenue
- ii) Suffisamment serrée pour que la taille de l'arborescence d'exploration ne soit pas trop importante.

De i) il est évident que l'on a intérêt à développer des méthodes duales de résolution du P.P.B.A. puisque de cette façon on peut se passer de le résoudre entièrement si le nombre d'itérations demandées est excessif ou si l'amélioration d'une itération à la suivante devient faible et de ii) on voit qu'il est quand même nécessaire de consacrer un certain temps pour le calcul de la borne. Dans le chapitre V nous montrons comment on a établi expérimentalement un compromis entre ces deux exigences.

### III.2 - DECOMPOSITION DU P.P.B.A.

Comme il a été noté à la remarque II.2,  $K_1 \boxtimes K_2$  peut se décomposer en deux sous-systèmes (A) et (B).

Si nous considérons la représentation (PTL) pour  $K_1 \boxtimes K_2$  les sous-systèmes (A) et (B) s'écrivent :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} x \circ y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0 \\ (1) Ax \circ y^j - ey^j = 0 \quad j = 1, \dots, n_2 \\ (2) By = f \\ (3) Ax = e \end{array} \right.$$

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} x \circ y \geq 0, x \geq 0 \\ Bx^i \circ y - fx^i = 0 \quad i = 1, \dots, n_1 \end{array} \right.$$

Remarque 1 : Appelons P.B.A.R. le programme linéaire obtenu en remplaçant les contraintes de  $K_1 \times K_2$  par celles du sous-système (A) dans le P.P.B.A. et  $\bar{v}_R$  la valeur de la fonction objective à l'optimum du P.B.A.R. alors  $\bar{v}_R$  est également une borne pour  $\bar{v}$ .

### III.3 - TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

Par abus de langage nous appellerons les systèmes de contraintes (1), (2) et (3) le jème bloc intermédiaire, le bloc y et le bloc x respectivement.

D'autre part, nous poserons pour le jème bloc

$$c^j = \{c_{ij}, i = 1, \dots, n_1\}$$
$$\text{et } x \circ y^j = \{x^i \circ y^j, i = 1, \dots, n_1\}$$

Aussi pour représenter de manière concise la fonction objective, le vecteur des coûts réduits et les variables du P.P.B.A., nous utiliserons les vecteurs de  $R^{(n_1 \cdot n_2 + n_2 + n_1)}$  r et z définis par

$$r = (C, q, p) \quad (1)$$

$$z = (x \circ y, y, x)$$

et pour faire de même avec le second membre du P.B.A.R. le vecteur t de

$$R^{(m_1 \cdot n_2 + m_2 + m_1)}$$

$$t = (0, f, e)$$

est introduit.

Les sous-systèmes (A) et (B) seront alors écrits de manière abrégée  $\{N_1 z = t\}$  et  $\{N_2 z = 0\}$  avec  $u_1, u_2$  les vecteurs duaux respectifs et  $\bar{z}, \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  les solutions optimales du P.B.A.R. et de son dual.

Finalement, S (respectivement HS) va représenter l'ensemble des colonnes dans la base optimale (respectivement l'ensemble des colonnes hors base à l'optimum) du P.B.A.R.

---

(1) La matrice C est considérée ici comme un vecteur de  $R^{n_1 \cdot n_2}$

### III.4 - METHODE DE RESOLUTION DU P.P.B.A.

#### III.4.1. - Introduction

Nous présentons d'abord une description sommaire de quelques méthodes existantes qui sont applicables à la résolution du P.P.B.A. par décomposition et relaxation dans le but de justifier le choix du type de méthode proposée et ensuite nous passons à la description détaillée de celle-ci qui fera l'objet du reste de ce chapitre.

#### III.4.2 - Méthodes envisageables

a) Méthode exacte : Cette méthode, dont le mode opératoire est analogue à l'algorithme Primal-Dual de la programmation linéaire [6] est donnée dans [9]. Elle suppose que la base optimale S du P.B.A.R. a été obtenue et que celui-ci est écrit sous forme canonique par rapport à S :

$$(4) \quad \begin{aligned} N_1^S z_S + N_1^{HS} z_{HS} &= t \\ N_2^S z_S + N_2^{HS} z_{HS} &= 0 \end{aligned}$$

Si la solution  $z_S$  est réalisable pour le système  $\{N_1^S z_S = t, N_2^S z_S = 0\}$ , elle est optimale pour le P.P.B.A. et sinon, on met en évidence une amélioration du dual de ce programme linéaire.

Cette méthode demande l'inversion d'une matrice dont l'ordre peut atteindre la valeur  $(n_1 - m_1) \cdot m_2$  à chaque itération, ce qui, du point de vue du temps de calcul risque d'être trop long et pour cette raison on juge que son intérêt est plutôt théorique.

b) Méthode des sous gradients : La méthode proposée dans [18], [19], [20] par Held, Karp et Crowder qui en particulier donne des résultats très encourageants pour le problème du voyageur de commerce est en principe applicable à notre problème ; cependant, on n'en retient que l'idée puisque la structure diagonale par bloc du P.P.B.A. demande une méthode spéciale capable d'en tirer profit. En outre, pour la bonne performance pratique de la méthode des sous-gradients, on doit avoir un nombre relativement faible de contraintes violées ce qui n'est pas forcément vrai dans notre cas.

D'autres comparaisons entre la méthode des sous-gradients et celle proposée ici sont faites à la remarque 5.

III.4.3 - Description générale de la méthode

Avec les notations du paragraphe III.3 le P.P.B.A. s'écrit :

$$(5) \quad \bar{v}_A = \text{Min}\{\langle r^t, z \rangle \mid z \geq 0, N_1 z = t ; N_2 z = 0\}$$

ou par passage au dual du sous-système (B)

$$(6) \quad \bar{v}_A = \text{Max}\{g(u_2)\}_{u_2}$$

où la fonction  $g(u_2)$  est donnée par

$$(7) \quad g(u_2) = \text{Min}_z \{\langle r - N_2^t u_2, z \rangle \mid z \geq 0, N_1 z = t\}$$

Remarque 2 : La fonction  $g(u_2)$  possède les propriétés suivantes :

i)  $g(u_2)$  est concave et affine par morceaux puisque c'est l'enveloppe inférieure d'une famille de fonctions affines.

ii) Pour tout  $u_2$

$$g(u_2) \leq \bar{v}_A$$

Par conséquent  $g(u_2)$  est aussi une borne inférieure pour  $\bar{v}$ .

iii) Si  $u_2^i$  est la solution duale obtenue à la  $i$ ème itération de l'algorithme

$$\bar{v}_R < g(u_2^1) < g(u_2^2) < \dots < g(u_2^i) < \dots < \bar{v}_A \leq \bar{v}$$

La méthode décrite ici qui est une méthode approchée comme celle de b) au paragraphe précédent résoud le P.P.B.A. sous la forme (6) en améliorant itérativement sa solution duale  $u_2$  ; c'est une méthode de pénalités puisqu'on peut interpréter  $u_2$  comme un vecteur pénalisant les contraintes du sous-système (B) qui sont violées par la solution du P.B.A.R.

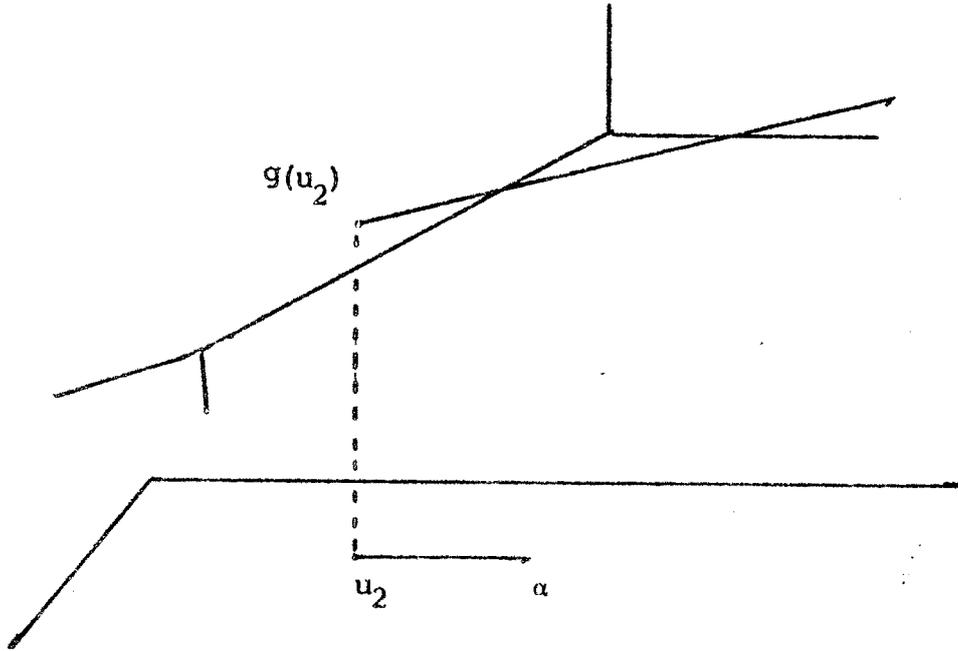
A chaque point  $u_2$  nous devons déterminer :

a) La solution optimale du P.B.A.R., c'est à dire l'évaluation de la fonction  $g$  au point  $u_2$ .

b) Une direction d'amélioration de  $g(u_2)$ , c'est à dire un vecteur  $\alpha \in R^{m_2 \cdot n_1}$  tel que pour un  $\epsilon < 0$  suffisamment petit la relation

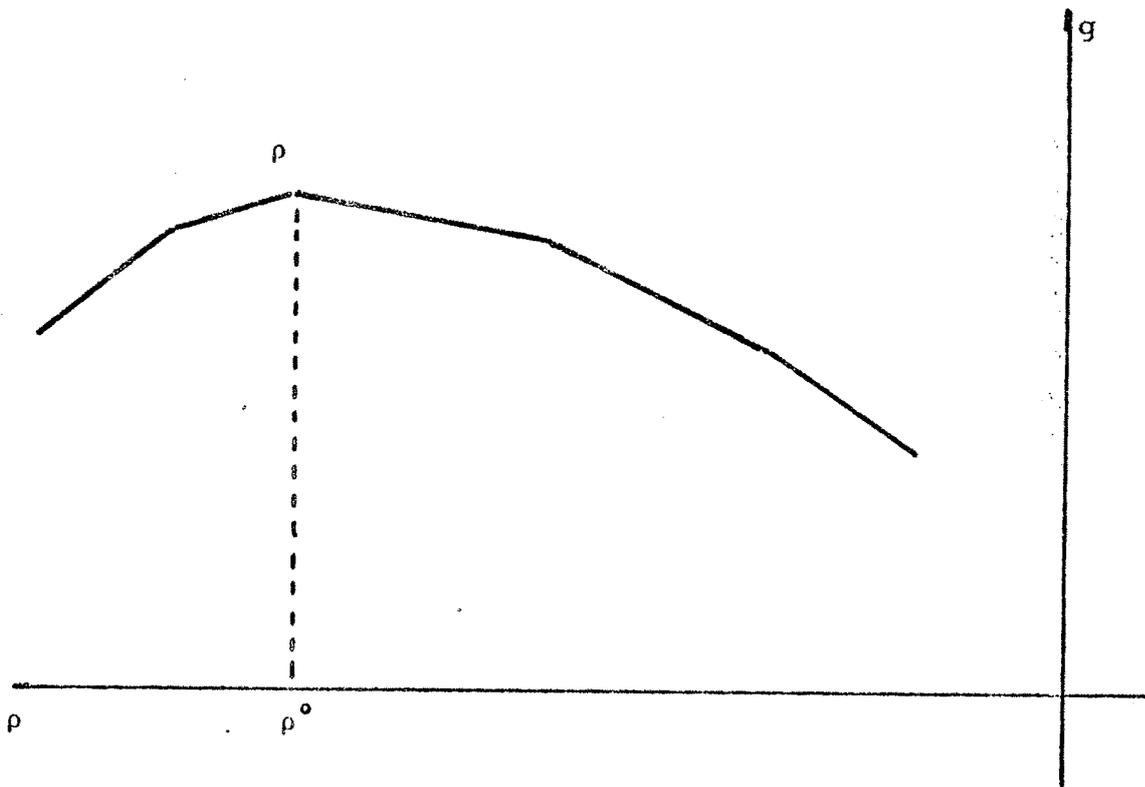
$$g(u_2 + \rho\alpha) > g(u_2)$$

est vérifiée si  $\epsilon < \rho < 0$ .



c) Le plus grand pas  $\rho^0$  dans la direction  $\alpha$  ; c'est à dire la solution du programme

$$(8) \quad g(u_2 + \rho^0 \alpha) = \max_{\rho} \{ g(u_2 + \rho \alpha) \mid \rho < 0 \}$$



Nous allons maintenant passer à la description de chacune des étapes de la méthode.

### III.4.4 - Résolution du P.B.A.R.

La formulation mathématique du P.B.A.R. est

$$(P.B.A.R.) \left\{ \begin{array}{l} x \circ y \geq 0, y \geq 0, x \geq 0 \\ Ax \circ y^j - ey^j = 0, j = 1, \dots, n_2 \\ By = f \\ Ax = e \\ \bar{v}_R = \text{Min} \{ \langle p^t, x \rangle + \langle q^t, y \rangle + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} c_{ij} x^i \circ y^j \} \end{array} \right.$$

Le résultat suivant est démontré dans [9] par une application directe de la théorie de la dualité en programmation linéaire.

Théorème 1 : La solution  $(\bar{x} \circ \bar{y}, \bar{y}, \bar{x})$  du P.B.A.R. est

$$\bar{x} \circ \bar{y}^j = \bar{x}_j \bar{y}^j, j = 1, \dots, n_2; \bar{y}, \bar{x}$$

où

$$\bar{x}_j = \{ \bar{x}_j^i, i = 1, \dots, n_1 \}$$

$$\bar{y} = \{ \bar{y}^j, j = 1, \dots, n_2 \}$$

et

$$\bar{x} = \{ \bar{x}^i, i = 1, \dots, n_1 \}$$

sont respectivement solutions optimales des programmes linéaires

$$(9) \quad \xi_j = \text{Min} \{ \langle C^j, x \rangle \mid x \in K_1 \}, j = 1, \dots, n_2$$

$$(10) \quad \xi_{n_2+1} = \text{Min} \{ \sum_{j=1}^{n_2} (\xi_j + q^j) y^j \mid y \in K_2 \}$$

$$(11) \quad \xi_0 = \text{Min} \{ \langle p^t, x \rangle \mid x \in K_1 \}$$

En plus on a  $\bar{v}_R = \xi_0 + \xi_{n_2+1}$ .

Remarque 3 : La solution optimale du P.B.A.R. est obtenue par la résolution d'un programme linéaire défini sur  $K_2$  et de  $n_2+1$  autres définis sur  $K_1$  dont les fonctions objectives sont en général toutes différentes.

Remarque 4 : Par extension nous dirons que le P.B.A.R. est sous forme canonique s'il se trouve à une permutation des colonnes près sous la forme schématisée ci-dessous. Les notations introduites au chapitre II sont reprises ici.

	xoy				y	x	
$w_1$	$I_{\ell_1}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \bar{A}_1 \\ \vdots \end{matrix}$			$-\bar{e}_1$		0
$w_2$		$I_{\ell_1}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \end{matrix}$		$-\bar{e}_2$		0
$w_{n_2}$			$I_{\ell_1}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \bar{A}_{n_2} \\ \vdots \end{matrix}$	$-\bar{e}_{n_2}$		0
$w_{n_2+1}$				$I_{\ell_2}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \bar{B} \\ \vdots \end{matrix}$		$\bar{f}$
$w_0$						$I_{\ell_1}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \bar{A} \\ \vdots \end{matrix}$
$r =$	$C^1$	$C^2$	...	$C^{n_2}$	$q$	$P$	
$\bar{r} =$	$\bar{C}^1$	$\bar{C}^2$		$\bar{C}^{n_2}$	$\bar{q}$	$\bar{P}$	

où nous posons (1) :

$$A_j = \{a_j^i, i = 1, \dots, n_1\} = (I_{\ell_1}, \bar{A}_j)$$

$$B = \{b_i, i = 1, \dots, n_2\} = (I_{\ell_2}, \bar{B})$$

$$A = \{a_i, i = 1, \dots, n_1\} = (I_{\ell_1}, \bar{A})$$

(1) Pour chaque j et chaque i,  $a_j^i$  est un vecteur colonne à  $\ell_1$  composantes et analoguement pour  $b_i$  et  $a_j$ .

1) Sous cette forme là, une solution réalisable de base  $z = (x^0 y, y, x)$  du P.B.A.R. est déterminée de manière immédiate. En effet, du bloc  $x$  on obtient directement  $x = (\bar{e}, 0)$  du bloc  $y$ ,  $y = (\bar{f}, 0)$  et du jème bloc intermédiaire

$$x^0 y^i = (\bar{e}_j y^j, 0), \quad j = 1, \dots, n_2$$

2) Les vecteurs duaux  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n_2+1}$  sont obtenus par les expressions

$$w_j^i = c_{ij} \quad \text{pour } i = 1, \dots, l_1 \text{ et } j = 1, \dots, n_2$$

$$w_{n_2+1}^i = q^i + \langle w_1^t, \bar{e}_i \rangle \quad \text{pour } i = 1, \dots, l_2$$

$$w_0^i = p^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, l_1$$

3) Le vecteur des coûts réduits  $\bar{r} = (\bar{C}, \bar{q}, \bar{p})$  est aussi facilement calculé par les relations

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \langle w_j^t, a_j^i \rangle \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_1 \text{ et } j = 1, \dots,$$

$$\bar{q}^j = (q^j + \langle w_j^t, \bar{e}_j \rangle) - \langle w_{n_2+1}^t, b_j \rangle \quad \text{pour } j = 1, \dots, n_2$$

$$\bar{p}^i = p^i - \langle w_0^t, a_i \rangle \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_1$$

où l'on vérifie tout de suite que les coûts réduits des colonnes de base sont nuls.

4) Une opération de pivotage sur cette forme du P.B.A.R. est accomplie de manière efficace selon les trois cas possibles pour  $i_0$ , la colonne qui entre dans la base

i)  $i_0$  appartient au jème bloc intermédiaire, c'est à dire la variable  $x^0 y^j$  entre dans la base. On effectue alors un pivot normal sur ce bloc.

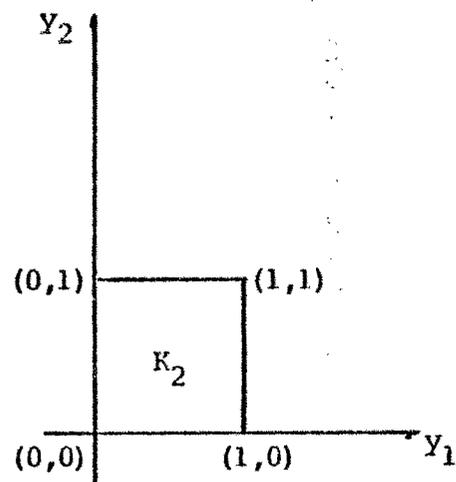
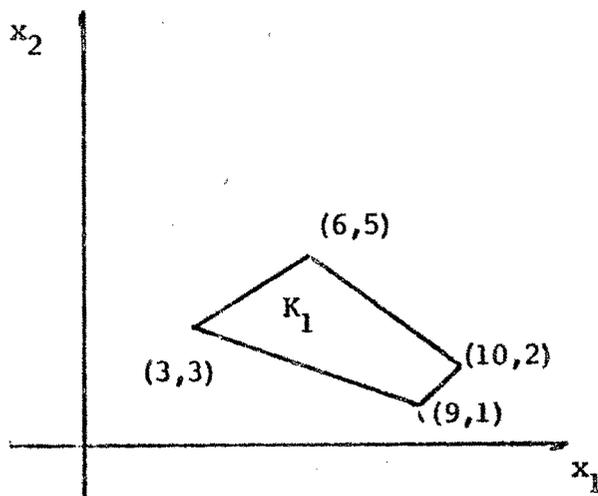
Outre le pivot au bloc  $j$ , on doit mettre à jour  $W_{n_2+1}$  et par conséquent  $\bar{q}$  puisque  $\bar{e}_j$  a été modifié, mais le reste des blocs ne change pas.

ii)  $i_0$  appartient au bloc  $y$ . En dehors de l'opération de pivotage portée sur ce bloc, les vecteurs  $x \cdot y$  et  $W_{n_2+1}$  sont mis à jour en termes de la nouvelle solution  $y'$  et le vecteur  $\bar{q}$  est alors recalculé.

iii)  $i_0$  appartient au bloc  $x$ . Il s'agit du bloc indépendant; un pivot normal sur celui-ci est suffisant dans ce cas.

L'exemple suivant illustre la résolution et la mise du P.B.A.R. sous forme canonique.

Exemple 1 : Considérons le cas  $\ell_1 = m_1 = 4$ ,  $n_1 = 6$  ;  $\ell_2 = m_2 = 2$ ,  $n_2 = 4$  avec les polyèdres



$$K_1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 38 \\ -x_1 - 3x_2 \leq -12 \end{array} \right.$$

$$K_2 \left\{ \begin{array}{l} y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \\ y_1 \leq 1 \\ y_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

On ajoute à  $K_1$  les variables d'écart  $x_3, \dots, x_6$  et à  $K_2$  les variables d'écart  $y_3$  et  $y_4$ .

Les coefficients de la fonction objective associés à la variable  $x^i, i = 1, \dots, n_1$  sont

$$p = (0, 0, 0, 0, 7, 14)$$

à la variable  $y^j, j = 1, \dots, n_2$

$$q = (16, 0, -11, 6)$$

et le coût  $c_{ij}$  associé à la variable  $x^i \cdot y^j, i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2$  est donné par la matrice C:

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 20 & 12 \\ 9 & 16 & -6 & 14 \\ 15 & 16 & -9 & 20 \\ -19 & -8 & -5 & -7 \\ -15 & 10 & 13 & 18 \\ 6 & 8 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

La forme canonique du P.B.A.R. par rapport à sa solution optimale est dans ce cas



En plus, les solutions des programmes (9), (10) et (11) sont respectivement :

$$\xi = \{\xi_j, j = 1, \dots, n_2\} = (-266, 56, -52, 194)$$

$$\xi_{n_2+1} = -194$$

$$\xi_0 = -49$$

et par conséquent  $\bar{v}_R = -243$

Finalement, la solution optimale  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{x})$  est :

$$\bar{x}^1 = (7, 0, 0, 9, 6, 5)$$

$$\bar{x}^2 = (7, 0, 0, 9, 6, 5)$$

$$\bar{x}^3 = 0$$

$$\bar{x}^4 = 0$$

$$\bar{y} = (1, 1, 0, 0)$$

$$\bar{x} = (0, 18, 7, 0, 9, 1)$$

#### III.4.5 - Recherche du plus grand pas

Il est plus avantageux pour la présentation de la méthode de décrire la procédure iii) avant procédure ii) et pour ce faire, nous supposons donc qu'une direction d'amélioration  $\alpha$  a été trouvée.

La fonction  $g(u_2 + \rho\alpha)$  dans (8) est le programme linéaire paramétré

$$(12) \quad g(u_2 + \rho\alpha) = \underset{z}{\text{Min}} \{ \langle r^t - [N_2^t(u_2 + \rho\alpha)]^t, z \rangle \mid z \geq 0 ; N_1 z = t \}$$

De la théorie liée à l'étude de ce genre de problèmes [35] le résultat suivant est bien connu.

Il existe un nombre fini de valeurs de  $\rho : \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$  que nous appelons "points de cassure" avec les propriétés.

i) La fonction  $\rho \rightarrow g(u_2 + \rho\alpha)$  est concave et affine sur chaque intervalle de la forme  $[\rho_\ell, \rho_{\ell+1}]$ .

ii) Le programme linéaire admet la même base optimale pour  $\rho \in [\rho_\ell, \rho_{\ell+1}]$ ,  $\ell = 1, \dots, L-1$ .

iii) Le changement de solution a lieu à chaque point de cassure.

iv) Les bases optimales qui correspondent à deux intervalles successifs ne diffèrent que d'une colonne.

Pour adopter cette approche de résolution de (8), le vecteur  $\bar{d} = \alpha N_2 \in R^{n_1 \cdot n_2}$  sera mis sous forme canonique par rapport à la base optimale du P.B.A.R. par la procédure illustrée sur le vecteur  $r$  au point (3) de la remarque 4, page 29.

Le vecteur  $\bar{d}$  ainsi obtenu est multiplié par  $\rho < 0$  et retranché du vecteur des coûts réduits  $\bar{r}$ . Cette façon de faire nous permet de supposer qu'à chaque nouveau point de cassure rencontré on commence avec une solution duale  $u_2 = 0$ .

Supposons que l'on connaisse le point de cassure  $\rho_{\ell-1}$ ; la solution courante du P.B.A.R. reste optimale tant que

$$\bar{r}^j - \rho \bar{d}^j \geq 0$$

pour tout  $j = 1, \dots, n_1 \cdot n_2 + n_2 + n_1$

et par conséquent le point de cassure  $\rho_\ell$  a lieu à

$$\rho_\ell = - \text{Min}_{J=\{j | \bar{d}^j < 0\}} \left\{ \frac{\bar{r}^j}{\bar{d}^j} \right\}$$

avec la convention  $\rho_\ell = -\infty$  si  $J = \emptyset$ .

Dans ces conditions, si  $\bar{z}$  est la solution optimale courante du P.B.A.R. on peut écrire pour  $\rho_{\ell-1} \leq \rho \leq \rho_\ell$

$$g(u_2 + \rho \alpha) = \langle (\bar{r} - N_2^t u_2)^t, \bar{z} \rangle - \rho \langle \bar{d}^t, \bar{z} \rangle$$

où  $\langle \bar{d}^t, \bar{z} \rangle = P$  est la pente de la fonction  $g$ .

Nous pouvons maintenant passer à la description de l'algorithme de recherche du plus grand pas dont la finitude est assurée par les propriétés de la fonction  $g$ .

Pas 0 :  $g(0)$  et  $\alpha$  ont été obtenus. Poser  $\ell = 0$  et aller au pas 1.

Pas 1 : Déterminer le point de cassure  $\rho_{\ell+1}$  ; appeler  $\bar{z}_\ell$  la solution optimale du P.B.A.R. dans l'intervalle  $[\rho_\ell, \rho_{\ell+1}]$  et aller au pas 2.

Pas 2 : Calculer la pente  $P_\ell$  de la fonction  $g$  ; si  $P_\ell$  est positive, alors faire  $\ell := \ell+1$  et aller au pas 1. Si  $P_\ell$  est négative ou nulle, aller au pas 3.

Pas 3 : Terminer,  $\rho^0 = \rho_\ell$  est la solution optimale de (8).

Remarque 5 : L'algorithme ci-dessus est une recherche séquentielle des points de cassure de la fonction  $g$  et pour cette raison la suite

$$g(u_2 + \rho_1 \alpha), g(u_2 + \rho_2 \alpha), \dots, g(u_2 + \rho^0 \alpha)$$

est strictement croissante. Dans la méthode des sous-gradients par contre, cette propriété n'est pas forcément vérifiée puisque la détermination du pas est faite de manière aléatoire.

Remarque 6 : Il suffit de résoudre entièrement le P.B.A.R. une fois pour l'évaluation initiale de  $g$  puisque par la propriété iv) des programmes paramétrés les évaluations ultérieures peuvent s'accomplir par pivotage selon la procédure indiquée au point (4) de la remarque 4.

Remarque 7 : Plaçons nous comme précédemment au cas où le point de cassure  $\rho_{\ell-1}$  a été déterminé et soient

$$\bar{z} = (\bar{x} \circ \bar{y}, \bar{y}, \bar{x})$$

la solution optimale courante du P.B.A.R. et

$$R_0 = \underset{\{i | \bar{x}^i \in \text{HS et } \bar{d}^i < 0\}}{-} \text{Min} \left\{ \frac{\bar{r}^i}{-\bar{d}^i} \right\}$$

$$R_j = \underset{\{i | \bar{x}^i \circ \bar{y}^j \in \text{HS et } \bar{d}^i < 0\}}{-} \text{Min} \left\{ \frac{\bar{r}^i}{-\bar{d}^i} \right\}$$

$$R_{n_2+1} = \underset{\{i | \bar{y}^i \in \text{HS et } \bar{d}^i < 0\}}{-} \text{Min} \left\{ \frac{\bar{r}^i}{-\bar{d}^i} \right\}$$

les "meilleurs rapports" par bloc.

Le point de cassure  $\rho_\ell$  est alors donné par

$$\rho_\ell = \min_{j=0, \dots, n_2+1} \{R_j\}$$

De cette façon les rapports  $\{R_j\}$  sont mis à jour conformément au changement de solution du P.B.A.R. et on peut calculer les points de cassure efficacement.

Remarque 8 : Pour résoudre un problème similaire à (8), Fonlupt [9] propose alternativement une méthode de recherche au hasard ; les deux raisons suivantes nous mènent à la conclusion qu'elle est moins avantageuse que l'approche paramétrique.

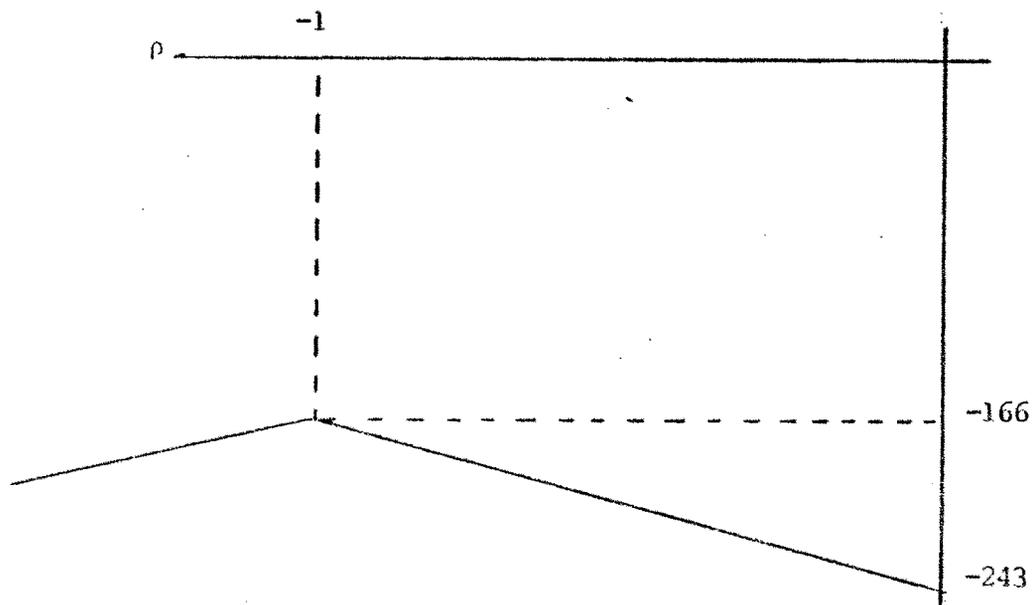
i) Le nombre d'opérations de pivotage nécessaires à l'évaluation de la fonction  $g$  est du même ordre dans les deux cas puisque dans la méthode au hasard on doit résoudre entièrement le P.B.A.R. à chaque évaluation.

ii) L'approche paramétrique donne la solution exacte de (8) alors que la méthode au hasard ne donne qu'une solution approchée.

Exemple 2 : Une direction d'amélioration  $\alpha$  a été obtenue pour le problème de l'exemple 1 par la méthode décrite au paragraphe III.4.6 et le vecteur  $d$  qui en résulte est

$$d = [3.37, 0, 0, 0, 0.92, 0, 0, 5.38, 0, 0, 0, 0.83, 0, 0, 3.37, 0, 0, 0, 0.92, 0, 0, 5.38, 0, 0, 0, 0.83, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -8.75, 0, 0, -1.25, 0, 0]$$

L'exploration de la fonction  $g$  pour la recherche du plus grand pas dans ce cas est représentée graphiquement



dont l'exécution de l'algorithme est résumé dans les tableaux ci-dessous

Situation initiale

	1	2	3	4	y	x
$\bar{r}$	11.06   26.71	17.65   17.76	13   16	13.06   19.71	187   144	8.75   1.75

$\bar{d}$	-1.66   -0.29	-2.46   -0.12	3.37   0.92	-2.46   -0.12	-31.92   0	-8.75   -1.75
-----------	---------------	---------------	-------------	---------------	------------	---------------

Meilleurs rapports par bloc	-6.66	-7.18	$-\infty$	-5.31	-5.86	-1
						↑ Premier point de cassure

Situation après le pivotage

	1	2	3	4	y	x
$\bar{r}$	9.40   26.41	15.19   17.64	16.37   16.92	10.60   19.59	155.08   144	0   0

$\bar{d}$	-1.66   -0.29	-2.46   -0.12	3.37   0.92	-2.46   -0.12	-31.92   0	3.89   -0.78
-----------	---------------	---------------	-------------	---------------	------------	--------------

Meilleurs rapports par bloc	-5.66	-6.18	$-\infty$	-4.31	-4.86	0
						↑ Second point de cassure

A l'itération d'après, la pente devient négative et par conséquent on s'arrête. Dans ce cas particulier, on est déjà à l'optimum du P.P.B.

### III.4.6 - Détermination d'une direction d'amélioration

#### III.4.6.1 - Introduction

On montre maintenant comment on peut exprimer la détermination d'un vecteur de pénalités  $u_2$  qui améliore la solution optimale duale du P.B.A.R. comme la recherche d'une solution réalisable d'un système d'inégalités linéaires dont le membre droit est fonction des coûts réduits.

Ce système d'inégalités possède une structure particulière très simple à exploiter quand les polyèdres  $K_1$  et  $K_2$  sont des hypercubes à sommets en 0-1 ; on présente donc la procédure dans ce cas spécial d'abord et on montre ensuite comment ces idées peuvent s'étendre à des cas plus généraux.

La représentation (PTC) de  $K_1 \cap K_2$  donnée au chapitre II est maintenant reprise ; on rappelle que dans ce cas, le sous-système (B) est constitué uniquement par les blocs associés aux colonnes hors base du bloc x.

### III.4.6.2 - Cas de deux hypercubes

Au cours de ce paragraphe,  $K_1$  et  $K_2$  sont donnés par

$$K_1 : \{x_i + x'_i = 1 \ ; \ i = 1, \dots, m_1\}$$

$$K_2 : \{y_i + y'_i = 1 \ ; \ i = 1, \dots, m_2\}$$

où  $x'_i$  (respectivement  $y'_i$ ) sera appelée la variable complémentaire de  $x_i$  (respectivement de  $y_i$ ) et vice-versa ; on note que dans ce cas  $l_1 = m_1$ ,  $h_1 = m_1$  et  $l_2 = m_2$ ,  $h_2 = m_2$  et que toutes les contraintes du sous-système (B) sont de la forme

$$(13) \quad x_i \circ y_i + x_i \circ y'_i - x_i = 0$$

A une itération quelconque de l'algorithme, on va s'intéresser à trois types de contraintes de ce sous-système.

i) Les contraintes (13) telles que :

- le coût réduit  $\bar{p}^i$  associé à  $x_i$  est strictement positif.
- Il existe une solution de base telle que l'un des variables  $x_i \circ y_i$  ou  $x_i \circ y'_i$  est positive ; supposons que ce soit  $x_i \circ y_j$  ; c'est à dire que la variable  $y_j$  peut être de base.

Ces contraintes qu'on appellera pénalisables, ne peuvent être violées que dans le sens positif.

ii) Les contraintes (13) pour lesquelles les coûts réduits des variables  $x_i \circ y_j$ ,  $x_i \circ y'_j$ ,  $x_i$  sont

$$\bar{c}_{ij} > 0, \bar{c}_{ij}' > 0, \bar{p}^i = 0$$

Ces contraintes, appelées dépénalisables correspondent à une situation spéciale qui ne se présente pas quand la solution du P.B.A.R. est unique. Elles ne peuvent être violées que dans le sens négatif.

iii) Les contraintes (13) telles que

- Le coût réduit  $\bar{p}^i$  associé à  $x_i$  est strictement positif ( $x_i$  est hors base).
- Les variables  $x_i \circ y_j$ ,  $x_i \circ y_j'$  soit elles sont toutes deux hors base, soit l'une d'elles est hors base et l'autre est de base dans un bloc associé à une colonne hors base du bloc  $y$ .

Dans un tel cas, pour toute solution optimale courante  $x_i = 0$ ,  $x_i \circ y_j = 0$ ,  $x_i \circ y_j' = 0$  ; on appellera ce type de contraintes, les contraintes satisfaites.

Il existe d'autres genres de contraintes du sous-système (13), mais elles ne sont pas prises en compte ici.

La  $i$ ème ligne de la matrice  $N_2$  est représentée par  $(N_2)_i$ <sup>(1)</sup> et la notation  $i \in T_k$ ,  $k = 1, 2$  ou  $3$  doit s'interpréter respectivement  $\langle (N_2)_i, z \rangle$  est pénalisable, dépénalisable ou satisfaite.

Affectons alors un poids positif aux contraintes pénalisables, un poids négatif aux contraintes dépénalisables et un poids de signe quelconque aux contraintes satisfaites ; l'amélioration de la borne courante peut, par conséquent, s'écrire

$$(14) \quad \rho \sum_{i \in T_1 \cup T_2 \cup T_3} \alpha_i \langle (N_2)_i, z \rangle$$

Pour un pas  $\rho$  suffisamment petit on garde la même solution du P.B.A.R. et par conséquent

$$(15) \quad \rho \sum_{i \in T_1} \alpha_i \langle (N_2)_i, z \rangle \geq 0$$

$$(16) \quad \rho \sum_{l \in T_2} \alpha_l \langle (N_2)_l, z \rangle \geq 0$$

$$(17) \quad \rho \sum_{k \in T_3} \alpha_k \langle (N_2)_k, z \rangle = 0$$

(1) Quand des précisions sur le bloc du sous-système (B) en question sont nécessaires, on notera  $(N_2)_i^k$  pour la ligne  $i$  de la matrice  $N_2$  dans le bloc  $k$ .

De (15) et (16) on déduit que la seule situation dans laquelle la borne n'est pas améliorée est

$$\begin{aligned} \langle (N_2)_i, z \rangle &= 0 \text{ pour tout } i \in T_1 \\ \text{et } \langle (N_2)_\ell, z \rangle &= 0 \text{ pour tout } \ell \in T_2 \end{aligned}$$

On dira alors qu'une situation de blocage est atteinte. La méthode proposée ici peut atteindre une solution de blocage sans avoir toutefois trouvé la solution optimale du P.P.B.A. mais on constate sur les exemples traités que la solution courante est optimale lorsque cette situation se produit. On dira aussi qu'une situation de blocage apparaît quand la seule possibilité pour le vecteur  $\alpha$  est  $\alpha = 0$ .

Notons aussi, qu'en pratique, ce sont les contraintes pénalisables qui permettent d'améliorer la borne courante puisque :

i) Il est toujours vrai au cours de premières itérations que (15) se produit avec l'inégalité stricte pour tout  $z$  qui est solution optimale du P.B.A.R.. Les contraintes pénalisables peuvent donc améliorer le dual de ce programme même si elles sont prises individuellement.

ii) Les contraintes dépénalisables ne se présentent pas sur les premières itérations et ce n'est que de façon globale qu'elles peuvent donner une amélioration puisque si on les considère individuellement elles ne sont pas violées.

D'autre part, on s'aperçoit que (17) reste nulle pour tout  $\alpha_k$  tant que l'on garde la même solution et par conséquent l'affectation de telles pénalités est en principe inutile, mais plus loin on va montrer que dans certains cas, son inclusion est quand même avantageuse (voir exemple 3).

A partir de l'affectation de poids définie ci-dessus on détermine une direction d'amélioration  $\alpha$  et il est naturel de s'intéresser maintenant à étudier les conditions dans lesquelles on peut garder la même solution courante, le pas  $\rho$  sera pris unitaire :  $\rho = -1$ .

#### Systemes d'inéquations associé à la solution courante

Examinons dans l'ordre les blocs intermédiaires et les blocs  $y$  et  $x$  en supposant, comme dans le paragraphe III.4.5, que le vecteur  $d = \alpha N_2$  a été mis au préalable sous forme canonique.

a) jème bloc intermédiaire : Deux situations se présentent pour le vecteur canonique <sup>(1)</sup>  $\bar{d} = \{\bar{d}_{ij}, i = 1, \dots, h_j\}$

i) La variable  $y_j$  peut être de base. Dans ce cas, le nouveau coût réduit est  $\bar{c}_{ij} - \bar{d}_{ij}$  et la solution courante est conservée tant que

$$(18) \quad \bar{c}_{ij} - \bar{d}_{ij} \geq 0$$

ii) La variable  $y_j$  est hors base. On peut déduire également dans ce cas la relation (18) mais puisque  $y_j$  est hors base.

Si  $\bar{d}_{ij} = \bar{c}_{ij}$  on pivote dans le bloc  $j$  mais la solution courante ne change pas puisque toutes les variables associées à ce bloc sont nulles tant que  $y_j$  est nulle. La solution change dès que  $y_j$  entre dans la base, c'est à dire quand l'inégalité

$$(19) \quad \bar{c}_{ij} + \bar{q}_j - \bar{d}_{ij} \geq 0$$

n'est plus satisfaite.

Les relations (18) et (19) sont données de manière concise par

$$(20) \quad \bar{d}_{ij} \leq \text{Min}\{\bar{c}_{ij} + \bar{q}^j, \bar{c}_{ij} + \bar{q}^{j'}\}$$

où  $\bar{c}_{ij}$ , (respectivement  $\bar{q}^{j'}$ ) représente le coût réduit de la variable  $x_i \circ y_j$  (respectivement  $y_j$ ).

b) Bloc y : Notre expérimentation prouve que les inégalités associées à ce bloc, bien qu'elles ne soient pas simples à écrire doivent quand même être considérées. Notons déjà que dans la relation (19) on fait intervenir le vecteur  $\bar{q}$  et en plus, on introduit ci-dessous un système qui, de façon approximative tient compte de ces inégalités.

c) Bloc x : Considérons le schéma suivant qui représente le bloc du sous-système (B) associé à la variable  $x_k$

$\alpha_{k_1}$	1	0	...	0	1	0	...	0	-1
$\alpha_{k_2}$	0	1	...	0	0	1	...	0	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{k_{\ell_2}}$	0	0	...	1	0	0	...	1	-1

$\bar{p}_k$

(1) On indiquera deux indices sur les vecteurs  $\alpha$  et  $\bar{d}$  quand des précisions sur le bloc en question sont nécessaires.

On en déduit que la solution courante est conservée si le nouveau coût réduit est positif ou nul, c'est à dire si la relation

$$(21) \quad \bar{p}^k - \sum_{i \in T_1 \cup T_2 \cup T_3} \alpha_{ki} \geq 0$$

est vérifiée.

### Inégalités supplémentaires

On décrit maintenant quelques relations sur les dépénalités afin de tenir compte, ne fût-ce que de manière imparfaite, du bloc  $y$ , en raisonnant cette fois-ci directement sur les contraintes du sous-système (B) plutôt sur le vecteur canonique  $\bar{d}$ .

Considérons la contrainte

$$x_i \circ y_j + x_i \circ y_j' - x_i = 0$$

qui peut être dépénalisable ou satisfaite. Par le raisonnement qui donne lieu à (20), on garde la même solution courante si

$$\alpha_i \geq \text{Max}\{-(\bar{c}_{ij} + \bar{q}^j), -(\bar{c}_{ij}' + \bar{q}^{j'})\}$$

Mais on réalise expérimentalement que cette relation permet des dépénalités qui sont trop sévères et par conséquent on a adopté la règle empirique de prendre le vecteur  $\bar{q}$  inversement proportionnel au nombre d'équations constituant  $K_2$ . On écrit alors

$$(22) \quad \alpha_i \geq \text{Max}\{-(\bar{c}_{ij} + \bar{q}^j/m_2), -(\bar{c}_{ij}' + \bar{q}^{j'}/m_2)\}$$

Cette règle a donné des résultats satisfaisants dans tous les cas traités.

Remarque 9 : Utilité des contraintes dépénalisables et satisfaites. Supposons que l'on ne tienne compte que des contraintes pénalisables et que  $\bar{p}^k$  soit nul. Dans ces conditions on a une relation pour le bloc  $x$  qui s'écrit

$$\sum_{i \in T_1} \alpha_{ki} \leq 0$$

dont la seule possibilité est  $\alpha_{ki} = 0$  pour tout  $i \in T_1$ , c'est à dire qu'une situation de blocage a été atteinte. Par contre, l'inclusion des contraintes satisfaites avec des dépénalités et des contraintes dépénalisables permet d'éviter cette situation et par conséquent de l'améliorer.

Remarque 10 : La façon de regarder individuellement les conditions qui nous permettent de conserver la solution courante suggère une procédure pour donner des directions d'amélioration valables qui consiste à prendre une par une les contraintes pénalisables. C'est une approche que nous rejetons pour les raisons signalées dans b) du paragraphe III.4.2 et nous adoptons plutôt le critère de regarder toutes les contraintes globalement.

Le système défini par les relations (20) à (22) n'est pas rigoureux, d'une part parce qu'il a été conçu sous l'hypothèse que chaque  $d_{ij}$  (respectivement chaque pénalité) peut augmenter (respectivement diminuer) individuellement alors que ce n'est pas le cas, et, d'autre part, parce que les contraintes (22) ont été établies de manière empirique. Il n'est pas unique non plus, puisque d'autres relations peuvent s'y introduire mais celles que nous avons présentées ont bien marché en pratique et pour cette raison ce sont celles qui ont été conservées.

Ce n'est donc qu'approximativement qu'un  $\alpha$  qui vérifie les relations (20) à (22) garantit de rester sur la même solution du P.B.A.R., mais on va quand même s'intéresser au  $\alpha$  qui donne la meilleure amélioration sur ce domaine

$$\sum_{i \in T_1 \cup T_2} \alpha_i$$

Etant donné la nature non rigoureuse de ce programme linéaire, il n'est certainement pas question de le résoudre de façon exacte mais plutôt de lui trouver rapidement une bonne solution réalisable. Nous proposons pour ce faire une heuristique assez simple qui ne demande qu'un seul balayage des contraintes du sous-système (B) ; dans tous les exemples résolus, elle a montré des performances encourageantes.

On cherche donc à approcher une solution du programme

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{d} \leq \bar{r}^* \\ \alpha_{ki} > 0 \quad \text{si } i \in T_1 ; k = 1, \dots, h_1 \\ \bar{r}_{ki}^{**} \leq \alpha_{ki} \leq 0 \quad \text{si } i \in T_2 \cup T_3 ; k = 1, \dots, h_1 \\ \sum_{i \in T_1 \cup T_2 \cup T_3} \alpha_{ki} \leq \bar{p}^k ; k = 1, \dots, h_1 \\ \text{Max}_{k=1}^{h_1} \sum_{i \in T_1 \cup T_2} \alpha_{ki} \end{array} \right.$$

où  $\bar{r}^*$  est donné par le membre de droit des inégalités (20) et  $\bar{r}^{**} = \{\bar{r}_{ki}^{**}\}$  par celui des inégalités (22).

Décrivons de manière algorithmique l'heuristique de résolution de (23).

Pas 0 Poser  $k := 1, i := 1$  et aller au pas 1.

Pas 1 Examiner la contrainte

$$\langle (N_2)_i^k, z \rangle = 0$$

Si cette contrainte est pénalisable, aller au pas 2 ; si elle est dépénalisable ou satisfaite, aller au pas 3 ; autrement aller directement au pas 4.

Pas 2 Déterminer  $\alpha_{ki}$  à partir de  $\bar{d}_{ij}$  en le faisant croître à partir de zéro jusqu'à  $\bar{r}_{ij}^*$  et aller au pas 4.

Pas 3 Obtenir  $\alpha_{ki}$  en le faisant décroître à partir de zéro jusqu'à  $\bar{r}_{ki}^{**}$  et aller au pas 4.

Pas 4 Faire  $i := i+1$  ; si  $i \leq \ell_2$  aller au pas 1, sinon aller au pas 5.

Pas 5 Si la relation (21) est vérifiée, aller au pas 1, sinon aller au pas 6.

Pas 6 On a forcément

$$\sum_{i \in T_1} \alpha_{ki} > 0 \quad \text{et}$$

$$(24) \quad \sum_{i \in T_1} \alpha_{ki} + \sum_{i \in T_2 \cup T_3} \alpha_{ki} > \frac{-k}{p}$$

Poser

$$\theta_k = \left( \frac{-k}{p} - \sum_{i \in T_2 \cup T_3} \alpha_{ki} \right) / \sum_{i \in T_1} \alpha_{ki}$$

(24) garantit que  $0 \leq \theta_k < 1$ .

Redéfinir les pénalités  $\alpha_{ki}$  par

$$\alpha_{ki} = \theta_k \alpha_{ki} \quad , \quad i \in T_1$$

et aller au pas 7.

Pas 7 Faire  $k := k+1$ . Si  $k \leq h_1$  alors faire  $i := 1$  et aller au pas 1. Autrement terminer.

L'expérimentation de cette heuristique nous montre que la plupart des composantes des vecteurs  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  deviennent au fur et à mesure des itérations soit nulles parce qu'il y a plusieurs solutions de base de  $K_1$  et de  $K_2$  qui sont concurrentes, soit elles deviennent faibles par rapport aux coûts réduits  $\bar{c}_{ij}$ .

En ce qui concerne le bloc  $y$ , les inégalités (22) tiennent compte de ce fait puisque si  $\bar{q}^j = 0$  la dépénalité est nulle ; par contre, au niveau du bloc  $x$  un raffinement de l'heuristique est nécessaire.

On considère pour chaque variable  $x_\ell$  hors base avec  $\bar{p}^\ell = 0$  que le bloc associé à la variable complémentaire  $x'$  fait également partie du sous-système (B) ; de cette façon on ne privilégie pas un bloc par rapport à l'autre mais plutôt on les met tous deux dans un plan d'égalité, et en plus, on gagne davantage de liberté pour le calcul des pénalités.

Puisque la fonction objective du problème original est tirée au hasard dans chacun des blocs du P.B.A.R on a au début une solution unique et donc très peu de variables positives. Aussi, du fait que les directions d'amélioration obtenues par l'heuristique sont aléatoires, cette situation d'unicité est préservée au cours des premières itérations. Pour cette raison, c'est à ce moment-là que les améliorations les plus sensibles sont obtenues ; après, comme il a été déjà indiqué on se retrouve avec des coûts réduits  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  relativement faibles, c'est à dire  $\bar{p} \approx 0$  et  $\bar{q} \approx 0$ , mais l'heuristique reste néanmoins capable de se tirer des situations de blocage les plus courantes.

a)  $\bar{p} \approx 0$  mais  $\bar{q}$  significatif. Dans cette situation, par l'intervention des contraintes satisfaites avec des dépénalités, des contraintes dépénalisables et par l'inclusion de pratiquement tous les blocs du sous-système (B), on arrive à éviter le blocage.

b)  $\bar{p}$  significatif mais  $\bar{q} \approx 0$ . Cette situation est surmontée par le fait que le calcul des pénalités ne se coince pas dans ce cas, même si la dépénalisation n'intervient pas.

c)  $\bar{p} \approx 0$  et  $\bar{q} \approx 0$ . En jouant sur les contraintes dépénalisables, on a vu qu'on peut évoluer vers une situation où il y a moins de solutions concurrentes pour le bloc  $x$  grâce au choix des dépénalités. Sur les exemples traités, on remarque que si cette éventualité se produit, il n'y a pas de contraintes dépénalisables parce que une solution optimale du P.P.B.A. qui n'est pas de la forme produit a été obtenue.

Exemple 3 : Considérons le P.P.B.

$$K_1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x'_1 = 1 \\ x_2 + x'_2 = 1 \\ x_3 + x'_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$K_2 \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y'_1 = 1 \\ y_2 + y'_2 = 1 \end{array} \right.$$

avec  $p = (2, 13, 18, 10, 4, 11)$

$q = (8, 10, 7, 8)$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 12 & 14 \\ 1 & 12 & 11 & 17 \\ 0 & 14 & 14 & 16 \\ 17 & 1 & 6 & 6 \\ 17 & 18 & 9 & 12 \\ 15 & 16 & 18 & 16 \end{bmatrix}$$

L'état du P.P.B.A. au début de la 2<sup>ème</sup> itération est illustré sur le schéma suivant. On marque d'une étoile les colonnes qui peuvent être de base dans une solution courante du P.B.A.R. ; les colonnes nulles de base sont indiquées par une croix et les colonnes hors base par un tiret. On y signale aussi les contraintes de type  $T_1$ ,  $T_2$  ou  $T_3$  du sous-système (B).



Les inégalités (20) sont :

$\alpha_{11}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\alpha_{61}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{52}$	$\alpha_{62}$
1			-1								
	1			-1							
		1			-1						
						-1			1		
							1			-1	
								1			-1
1			-1								
	1			-1							
		1			-1						
						1			-1		
							-1			1	
								-1			1

$\bar{r}^*$
0 + 12
0 + 9.4
0 + 8.8
0 + 6
0 + 3.5
0 + 1.2
6 + 13.3
8.5 + 13.3
2.2 + 13.3
0 + 1.7
7.4 + 1.7
0.8 + 1.7

Les inégalités (22) sont :

$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\alpha_{61}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{52}$	$\alpha_{62}$
1					
	1				
		1			
			1		
				1	
					1

$\bar{r}^{**}$
Max{-(12 + 0/2), -(6 + 13.3/2)}
Max{-(9.4 + 0/2), -(8.5 + 13.3/2)}
Max{-(8.8 + 0/2), -(2.2 + 13.3/2)}
Max{-(6 + 0/2), -(0 + 1.8/2)}
Max{-(3.5 + 0/2), -(0 + 1.8/2)}
Max{-(1.2 + 0/2), -(0 + 1.8/2)}

D'où le résultat préliminaire suivant est obtenu :

$\alpha_{11}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\alpha_{61}$
12	9.4	8.8	-12	-9.4	-8.8

$\alpha_{12}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{52}$	$\alpha_{62}$
-12	3.5	1.2	6	-0.9	-0.9

Notons que pour  $\alpha_{12}$  on a en fait la relation  $-12 \leq \alpha_{12} \leq 1.7$  mais que la contrainte du sous-système (B) associé est dépénalisable; pour cette raison on choisit  $\alpha_{12} = -12$ . Il en est de même pour  $\alpha_{52}$  et  $\alpha_{62}$ .

Les inégalités (21) s'écrivent :

$\alpha_{11}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\alpha_{61}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{52}$	$\alpha_{62}$		
1						1						0	
	1						1					12.9	
		1						1				10.0	
			1						1			-6.0	
				1						1		-10.3	
					1						1	-9.7	

Les facteurs  $\theta_k, k = 1, \dots, n_1$  sont

1	0	0	1	1	1
---	---	---	---	---	---

et la direction d'amélioration est finalement

$\alpha_{11}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{41}$	$\alpha_{51}$	$\alpha_{61}$
12	0	0	-12	-9.4	-8.8

$\alpha_{12}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{52}$	$\alpha_{62}$
-12	0	0	6	-0.9	-0.9

avec  $\sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i \in T_1} \alpha_{ki} = 38$

La méthode qu'on vient d'écrire a été inspirée d'une méthode de pénalités proposée dans [9] pour résoudre le P.P.B.A. Il s'agit aussi d'une méthode approchée dans le sens que sous certaines conditions, même si une direction d'amélioration existe elle peut ne pas la détecter.

Dans cette méthode, l'amélioration du dual du P.B.A.R. se fait en résolvant un programme linéaire auxiliaire défini sur le sous-système (B) dont la fonction objective est obtenue en pénalisant les colonnes hors base et celle qui sont de base mais égales à zéro pour toute solution de base du P.B.A.R.

La seule condition que cette méthode impose sur les pénalités est au niveau du signe qui doit être positif ; ceci permet d'une part une résolution très simple du programme auxiliaire, mais d'autre part a l'inconvénient de fournir des directions d'amélioration qui ne sont pas très bonnes. En effet, on a constaté par l'expérimentation que cette méthode donne en général des améliorations monotones et que par conséquent elle peut demander un nombre considérable d'itérations pour arriver à des bornes intéressantes.

#### III.4.6.3 - Cas d'un polyèdre quelconque et d'un hypercube

Il est intéressant d'étudier ce cas parce que, en quelque sorte, il constitue le pont entre le cas particulier de deux hypercubes pour lequel on dispose maintenant d'une heuristique efficace et le cas tout à fait général de deux polyèdres quelconques.

Pour généraliser l'heuristique proposée à ce cas intermédiaire, on trouve plus avantageux de garder la structure du cube pour le polyèdre  $K_2$  puisque de cette manière la symétrie des blocs intermédiaires ne se perd pas, ce qui est un point important pour l'heuristique.

On dira alors que la variable hors base  $x'$  est complémentaire de la variable  $x$  si on peut passer de l'une à l'autre par une opération de pivotage.

Dans le but de simplifier le problème et sachant que les contraintes dépénalisables sont d'une importance secondaire, on ne s'intéresse pas ici à ce type de contraintes ; les deux autres, par contre, sont traités de la même façon que dans le cas précédent.

Pour l'écriture du systèmes d'inégalités qui permet de rester sur la même solution du P.B.A.R., le passage du vecteur  $d$  sous forme canonique fait intervenir la matrice  $\bar{A}$  des colonnes hors base dans chaque bloc intermédiaire qui n'a plus la structure simple de matrice identité. Le programme linéaire analogue à (23) qui en résulte est d'une nature encore moins rigoureuse que celui-là.

L'heuristique est facilement adaptable à la résolution de ce programme linéaire, mais elle ne garantit pas que la solution trouvée vérifie toutes les inégalités. Elle a été programmée et testée sur plusieurs exemples dont l'un d'eux est présenté au chapitre V. Les résultats obtenus sont encourageants pour continuer la recherche de ce genre de méthodes et en particulier

de raffinements de celle-ci au niveau du système d'inégalités aussi bien que de l'heuristique elle-même.

#### III.6.4.4 - Cas général

On vient de montrer comment les idées développées sur un cas particulière peuvent s'élargir avec succès à des situations plus générales sans introduire pour cela des modifications trop coûteuses du point de vue du temps de calcul. Même si la question n'a pas été abordée comme les précédentes, il semble tout à fait possible que, moyennant des considérations analogues, on arrive à une heuristique pour déterminer de bonnes directions d'amélioration pour le P.P.B.A. dans le cas où  $K_1$  et  $K_2$  sont quelconques.

CHAPITRE IV

RESOLUTION DU PROBLEME  
DE PROGRAMMATION BILINEAIRE



#### IV.1 - INTRODUCTION

On va maintenant utiliser la méthode de résolution du P.P.B.A. développée dans le chapitre précédent pour calculer des minorants qui seront inclus dans une stratégie de séparation de l'ensemble de solutions réalisables du P.P.B. afin de le résoudre entièrement. En même temps, on pourra, en fonction du nombre de solutions explorées, juger de la qualité du minorant obtenu.

La stratégie de séparation proposée ici est fondée sur la décomposition d'un seul des polyèdres  $K_1$  ou  $K_2$  selon ses faces; nous choisissons par convention le polyèdre  $K_2$ .

Dans une première étape, on va rappeler la stratégie proposée dans [9] pour le cas où  $K_1$  et  $K_2$  sont quelconques, car elle a inspiré celle que nous avons développée pour la résolution du P.P.B. quand au moins l'un des polyèdres est un hypercube.

Dans une deuxième étape, on traitera le cas où  $K_2$  est un hypercube. Dans ce cas le critère de séparation est particulièrement simple à mettre en oeuvre.

#### IV.2 - STRATEGIE GENERALE DE SEPARATION

##### IV.2.1 - Terminologie

L'exploration de l'ensemble de solutions réalisables du P.P.B. est représentée de manière arborescente de telle sorte que chacun de sommets de l'arborescence est associé à une face de  $K_2$ . On rappelle qu'une face de  $K_2$  peut être représentée à une permutation de colonnes près par les relations

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ By = f ; y^j = 0 , j = k+1, \dots, n_2 \end{cases}$$

Les sommets qui n'ont pas de successeur sont appelés sommets pendants de l'arborescence; la racine est le sommet sur lequel le processus est démarré.

A chaque sommet  $l$  correspond une évaluation  $\bar{v}_l$  fournie par la résolution d'un P.P.B.A. associé à la face en question, avec la convention de poser  $\bar{v}_l = \infty$  si celle-ci est vide, ce qui est détecté automatiquement par la résolution de P.P.B.A.

IV.2.2 - Choix du sommet à explorer

Le sommet à partir duquel l'exploration se poursuit est choisi par la règle habituelle, c'est à dire celle de prendre parmi tous les sommets pendants de l'arborescence celui dont l'évaluation est la plus faible.

IV.2.3 - Séparation au sommet  $\ell$

Supposons que ce soit le sommet  $\ell$  qui soit choisi pour continuer l'exploration de l'ensemble des solutions réalisables du P.P.B. et notons  $\bar{v}_\ell$  l'évaluation en ce sommet. Si  $\bar{v}_\ell = \infty$  le problème n'admet pas de solution réalisable, mais dans le cas contraire, la face respective  $K_2^\ell$  peut s'écrire sous forme canonique comme il a été fait pour  $K_1$  et  $K_2$  dans le chapitre II.

$$K_2^\ell \left\{ \begin{array}{l} Y^\ell = (Y_B^\ell, Y_H^\ell) \geq 0 \\ Y_B^\ell + \bar{B}_\ell Y_H^\ell = \bar{f} \end{array} \right.$$

où le vecteur  $Y_B^\ell \in \mathbb{R}^{l_2}$  et  $l_2 \leq m_2$ .

A partir de cette forme-là, nous définissons  $l_2+1$  faces de

$K_2 : K_2^{(\ell,1)}, \dots, K_2^{(\ell,l_2)}, K_2^{(\ell,l_2+1)}$  par les relations :

$$K_2^{(\ell,k)} \left\{ \begin{array}{l} Y^\ell \geq 0 \\ Y_B^\ell + \bar{B}_\ell Y_H^\ell = \bar{f} ; (Y_B^\ell)^k = 0 \end{array} \right.$$

pour  $k = 1, \dots, l_2$  avec  $(Y_B^\ell)^k$  représentant la composante  $k$  du vecteur  $Y_B^\ell$ , et

$$K_2^{(\ell,l_2+1)} \left\{ \begin{array}{l} Y_B^\ell = \bar{f} ; Y_H^\ell = 0 \end{array} \right.$$

c'est à dire le point extrême par rapport auquel  $K_2^\ell$  a été mis sous forme canonique.

On rappelle que par la proposition I.1, il est suffisant de regarder les solutions réalisables de base de  $K_1$  et  $K_2$  pour la recherche d'une solution optimale du P.P.B. Ainsi, si on appelle  $S^\ell$  l'ensemble de solutions réalisables de base de la face  $K_2^\ell$ , la construction des faces  $K_2^{(\ell,k)}$  entraîne que les ensembles  $S^{(\ell,k)}$  vérifient la propriété

$$S^\ell = \bigcup_{k=1}^{\ell_2+1} S^{(\ell,k)}$$

Une propriété de ce type est toujours demandée dans les stratégies de séparation au niveau de la détermination des sommets successeurs ; on peut donc parler proprement des sommets associés aux faces  $\{K_2^{(\ell,k)}, k = 1, \dots, \ell_2\}$  comme les successeurs du sommet  $\ell$ .

#### IV.2.4 - Evaluation au sommet $(\ell, k), k = 1, \dots, \ell_2$

Si le P.P.B.A. associé au sommet  $\ell$  est

$$(1) \quad \bar{v}_\ell = \text{Min}\{\langle r^t, z \rangle \mid z \in K_1 \boxtimes K_2^\ell\}$$

où  $K_1 \boxtimes K_2^\ell$  est représenté avec les notations du chapitre III

$$(2) \quad K_1 \boxtimes K_2^\ell = \{z \geq 0 \mid N_1 z = t ; N_2 z = 0\}$$

et si  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  est la meilleure solution duale trouvée pour (1), on pose

$$(3) \quad \bar{r} = r - N_1^t \bar{u}_1 - N_2^t \bar{u}_2$$

Dans ces conditions la solution  $\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = 0$  est duale-réalisable pour (1) et le calcul de  $\bar{v}_{(\ell,k)}$  peut commencer à partir de cette solution.

D'autre part,  $K_1 \boxtimes K_2^{(\ell,k)}$  est obtenu à partir de (2) par l'adjonction des contraintes

$$\begin{cases} y^k = 0 \\ x^i \cdot y^k = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_1 \end{cases}$$

et le P.P.B.A. qui correspond au sommet  $(\ell, k)$  est alors

$$\bar{v}_{(\ell,k)} = \bar{v}_\ell + \text{Min}\{\langle \bar{r}^t, z \rangle \mid z \geq 0 ; N_1 z = t ; N_2 z = 0 ; y^k = 0 ; x^i \cdot y^k = 0, i=1, \dots, n_1\}$$

#### IV.2.5 - Evaluation au sommet $(\ell, \ell_2+1)$

Soit  $\bar{y} \in K_2^{(\ell, \ell_2+1)}$  ; si  $\bar{x}$  est la solution optimale du programme

linéaire

$$v(\bar{x}, \bar{y}) = \text{Min}_x \{\langle p^t, x \rangle + x^t C \bar{y} \mid x \in K_1\} + \langle q^t, \bar{y} \rangle$$

Le couple  $(\bar{x}, \bar{y})$  est réalisable pour le P.P.B. et par conséquent  $v(\bar{x}, \bar{y})$  est une borne supérieure pour la valeur du P.P.B.

Une alternative possible est d'utiliser la procédure d'optimisation séquentielle proposée par Konno (voir remarque I.1) pour la détermination d'un optimum local du P.P.B. à partir de  $(\bar{x}, \bar{y})$  ; ainsi,  $v(\bar{x}, \bar{y})$  est aussi une borne supérieure pour la valeur du P.P.B. en général plus serrée.

À partir d'un sommet de ce type l'exploration n'est pas poursuivie.

Remarque 1 : Il n'est pas exclu que la solution du P.P.B.A. pour les sommets  $(\ell, k)$ ,  $k \leq \ell_2$  soit de la forme produit et par suite on a également une borne supérieure pour la valeur du P.P.B. dans ce cas.

#### IV.2.6 - Exclusion des sommets inutiles

Plaçons nous à une étape quelconque de l'exécution de l'algorithme de séparation et soit  $\bar{b}$  la meilleure borne supérieure trouvée jusqu'alors selon le paragraphe précédent. Supposons que  $(\ell, k)$ ,  $k \leq \ell_2$  soit le sommet en question si la relation

$$\bar{v}_{(\ell, k)} \geq \bar{b}$$

est vérifiée, toute évaluation issue d'un sommet successeur de  $(\ell, k)$  vérifie également cette relation et par conséquent il est inutile de poursuivre l'exploration à partir de ce sommet.

On en déduit un nouveau critère d'arrêt pour la méthode de résolution du P.P.B.A. car, si  $\bar{v}^i$  est la borne obtenue à l'itération  $i$  de cette méthode pour l'évaluation du sommet  $(\ell, k)$ , on peut arrêter son exécution et poser

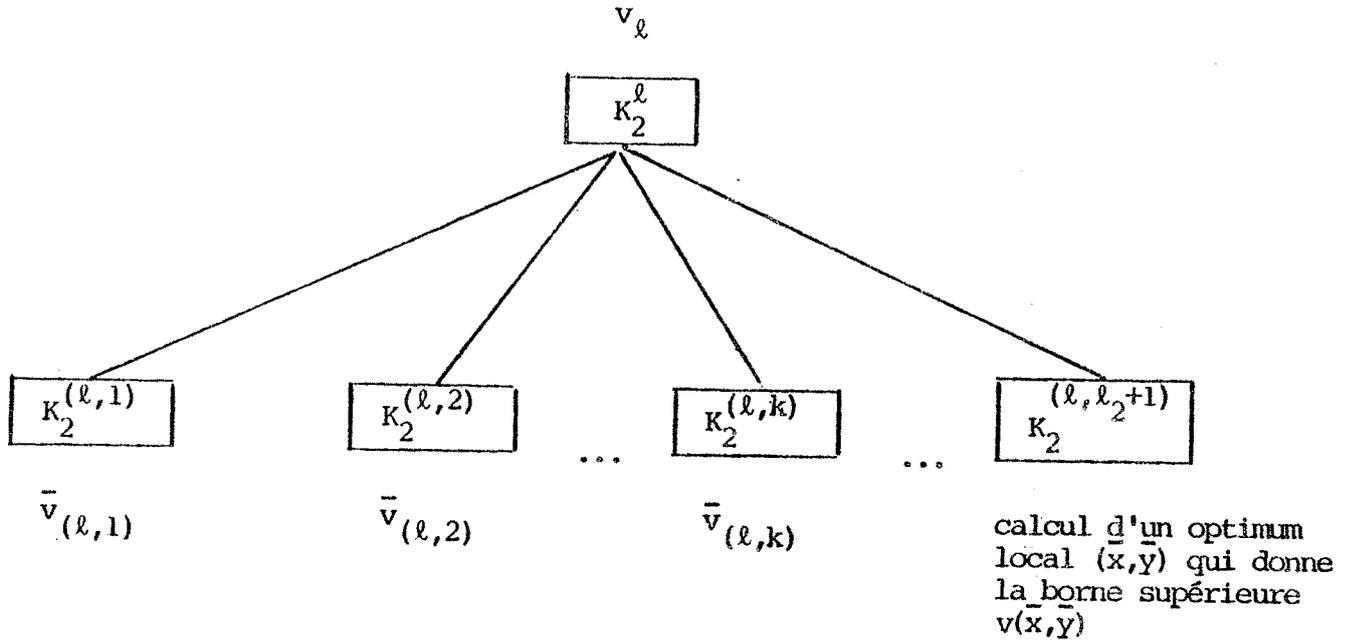
$$\bar{v}_{(\ell, k)} = \infty$$

dès que  $\bar{v}^i \geq \bar{b}$ .

#### IV.2.7 - Résumé de la stratégie de séparation

Nous pouvons récapituler sur la figure suivante la stratégie de séparation que l'on vient de décrire ; elle se poursuit de manière récursive jusqu'à ce qu'on trouve un sommet  $\ell_0$  dont la solution associée est de la forme produit et telle que

$$\bar{v}_{\ell_0} = \bar{b}$$



Il existe certainement d'autres possibilités pour la mise en oeuvre d'un algorithme de S.E.P. pour le P.P.B. ; notons en particulier que dans [9] on en trouve un dont la séparation est fondée sur l'application de la Méthode de Tui (voir paragraphe I.4) à l'un des polyèdres  $K_1$  ou  $K_2$  et pour lequel la résolution d'un problème du type du P.P.B.A. fournit la borne, comme dans l'algorithme présenté ici.

#### IV.3 - STRATEGIE DE SEPARATION QUAND $K_2$ EST UN HYPERCUBE

##### IV.3.1 - Introduction

On va montrer maintenant que quand  $K_2$  est un hypercube, la stratégie de séparation selon les faces de  $K_2$  donne lieu à une arborescence d'exploration qui est binaire et par suite particulièrement simple à mettre en oeuvre.

Dans le cas de deux hypercubes, la séparation est toujours plus intéressante à partir de celui de moindre taille.

##### IV.3.2 - Séparation au sommet $l$

Tout en conservant la même règle de choix du sommet à explorer, supposons que le sommet  $l$  soit sélectionné. Les équations décrivant la face associée sont

$$(4) \quad K_2^l \{ Y_j + Y'_j = 1 ; j = 1, \dots, k \}; 1 \leq k \leq m_2$$

Parmi les équations (4) choisissons celle qui correspond à l'indice  $j_0$

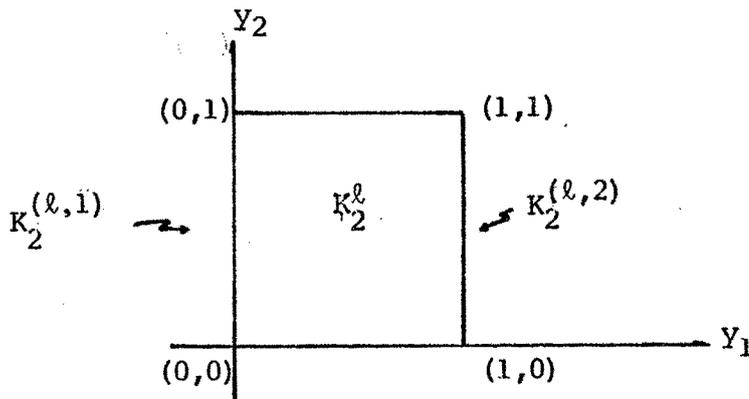
L'ensemble des solutions de base réalisables pour  $K_2$  peut se décomposer en deux sous-ensembles  $S^{(\ell,1)}$ ,  $S^{(\ell,2)}$  associés respectivement aux faces  $K_2^{(\ell,1)}$ ,  $K_2^{(\ell,2)}$  de  $K_2$  :

$$K_2^{(\ell,1)} \begin{cases} Y_j + Y'_j = 1, & j = 1, \dots, k \\ Y_{j_0} = 0 \end{cases}$$

$$K_2^{(\ell,2)} \begin{cases} Y_j + Y'_j = 1, & j = 1, \dots, k \\ Y_{j_0} = 1 \end{cases}$$

Ainsi,  $S^\ell = S^{(\ell,1)} \cup S^{(\ell,2)}$  et on crée deux successeurs pour le sommet  $\ell$ .

Exemple 1 : Dans  $R^2$ , cette décomposition donne pour  $j_0 = 1$



#### IV.3.3 - Choix de l'indice de séparation $j_0$

Nous proposons le choix de l'indice  $j_0$  par l'expression

$$\bar{q}^{j_0} = \text{Max}\{\bar{q}^j \mid j = 1, \dots, n_2\}$$

où  $\bar{q}$  est le vecteur de coûts réduits du bloc  $y$  obtenu à la fin de l'algorithme de résolution du P.P.B.A. correspondant.

Notons que ce critère ne conduit pas à une véritable séparation si  $\bar{q}^{j_0} \approx 0$  et par conséquent le choix de l'indice  $j_0$  doit alors se faire autrement.

Dans cette situation  $j_0$  peut être choisi à partir de la matrice de coûts réduits  $\bar{c}$  par l'expression

$$\bar{c}_{i_0 j_0} = \text{Max}\{\bar{c}_{ij} \mid i = 1, \dots, n_1 ; j = 1, \dots, n_2\}$$

c'est une règle qui a donné de bons résultats en pratique.

#### IV.3.4 - Evaluation au sommet $\ell$

Considérons la face  $K_2^{(\ell, 1)}$  de  $K_2$  ;  $K_1 \boxtimes K_2^{(\ell, 1)}$  est obtenu à partir de  $K_1 \boxtimes K_2^\ell$  par l'adjonction des contraintes

$$\begin{cases} y_{j_0} = 0 \\ x_i \circ y_{j_0} = 0 \end{cases}$$

Ces contraintes, liées à la nature dichotomique de l'hypercube entraînent forcément

$$\begin{cases} y'_{j_0} = 1 \\ x_i \circ y'_{j_0} = 1 ; i = 1, \dots, n_1 \end{cases}$$

où  $x_i \circ y'_{j_0}$  est la variable complémentaire de  $x_i \circ y_{j_0}$ , c'est à dire que la solution du bloc  $j'_0$  et celle de la variable  $y'_{j_0}$  sont imposées et par conséquent elles deviennent une constante du problème.

Une façon de tenir compte de cette constante consiste à rajouter les coûts réduits  $\{\bar{c}_{ij'_0}, i = 1, \dots, n_1\}$  à ceux du bloc  $x$ ,  $\{\bar{p}^i, i = 1, \dots, n_1\}$  ; soit  $\bar{r}'$  le vecteur coût obtenu à partir de  $\bar{r}$  de cette manière .

L'évaluation du sommet  $K_2^{(\ell, 1)}$  est donnée alors par le P.P.B.A.

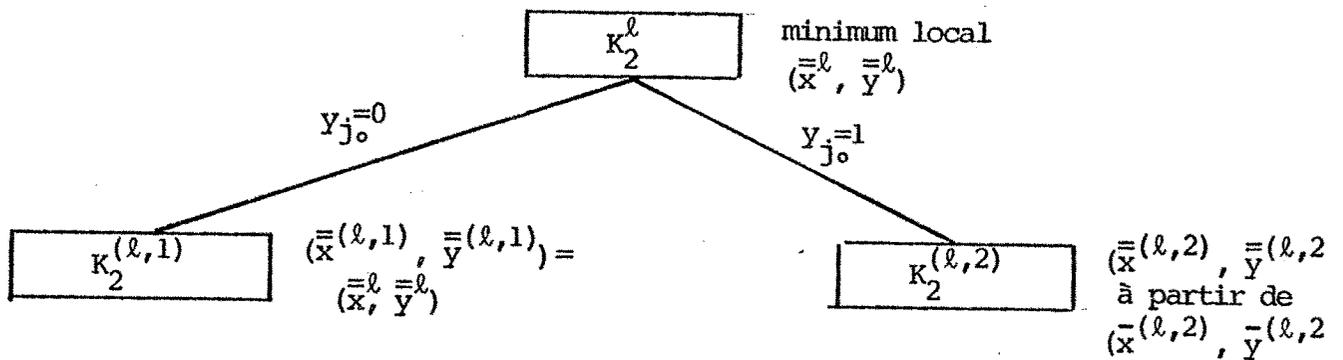
$$\bar{v}_{(\ell, 1)} = \bar{v}_\ell + \text{Min}\{\langle \bar{r}', z \rangle \mid z \in K_1 \boxtimes K_2^{(\ell, 1)}\}$$

et bien entendu l'évaluation de la face  $K_2^{(\ell, 2)}$  s'effectue de manière complètement symétrique.

IV.3.5 - Calcul d'un optimum local

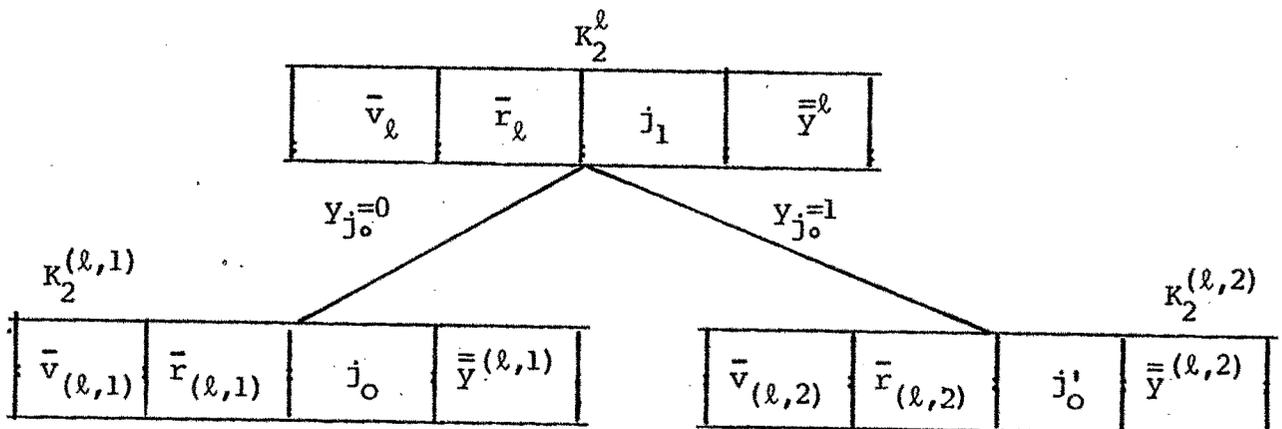
L'inclusion du calcul d'un minimum local du problème surgit de manière naturelle dans la stratégie générale alors qu'ici, ce n'est pas le cas. Du point de vue informatique, il est intéressant de disposer d'une borne supérieure pour la valeur du P.P.B. parce qu'elle permet la gestion en mémoire d'un nombre moins élevé de sommets de l'arborescence.

Pour introduire ce calcul ici soit  $(\bar{x}^{\ell}, \bar{y}^{\ell})$  l'optimum local déterminé au sommet  $\ell$  ; si la séparation est faite selon l'indice  $j_0$ , supposons que la coordonnée  $j_0$  de  $\bar{y}^{\ell}$  soit nulle. Dans ces conditions  $\bar{y}^{\ell} \in K_2^{(\ell,1)}$  et  $(\bar{x}^{\ell}, \bar{y}^{\ell})$  est le minimum local associé au sommet  $(\ell,1)$ . Par contre, pour le sommet  $(\ell,2)$ , un nouvel optimum local  $(\bar{x}^{(\ell,2)}, \bar{y}^{(\ell,2)})$  est obtenu à partir de  $(\bar{x}^{(\ell,2)}, \bar{y}^{(\ell,2)})$  où  $\bar{y}^{(\ell,2)}$  est un sommet quelconque de  $K_2^{(\ell,2)}$



IV.3.6 - Mise en oeuvre de la stratégie de séparation

On récapitule sur le schéma suivant la stratégie de séparation dans ce cas ; les renseignements qui doivent être gérés au niveau de chaque sommet de l'arborescence y sont représentés.



Dans ce tableau, chaque sommet de l'arborescence se définit par 4 cases :

- la première case représente l'évaluation,
- la deuxième case représente le vecteur des coûts réduits,
- la troisième case représente l'indice de séparation,
- la quatrième case représente le point  $\bar{y}^l \in K_2$  associé à l'optimum local du sommet de l'arborescence.



CHAPITRE V  
EXPERIMENTATION DE L'ALGORITHME



## V.1 - INTRODUCTION

La méthode de résolution du P.P.B.A. et l'algorithme de S.E.P. programmés respectivement en langage FORTRAN et ALGOL W ont été mis au point sur l'ordinateur IRIS 80 ; à partir d'une série d'exemples, nous présentons maintenant les résultats expérimentaux en étudiant d'abord la méthode de résolution du P.P.B.A., puis l'algorithme de S.E.P. Les conclusions tirées de cette expérimentation font l'objet de la dernière partie de ce chapitre.

## V.2 - PERFORMANCES DE LA METHODE DE RESOLUTION DU P.P.B.A.

### V.2.1 - Cas de deux hypercubes

Exemple 1 : Soient  $K_1 \subset R^{10}$  et  $K_2 \subset R^9$ . Le vecteur des coûts du problème est tiré au hasard selon une distribution uniforme dans l'intervalle  $[0,100]$ .

Dans ces conditions le P.P.B.A. possède

$$\begin{aligned} m_1 \cdot n_2 + m_1 + m_2 + m_2 \cdot m_1 &= 289 \text{ lignes} \\ \text{et } n_1 \cdot n_2 + n_1 + n_2 &= 398 \text{ colonnes} \end{aligned}$$

et un essai de résolution par l'algorithme du simplexe n'aurait pas de sens.

La figure 1 illustre la courbe de croissance de la borne en fonction du nombre d'itérations ; l'itération 0 correspond à la résolution initiale du P.B.A.R.

La méthode atteint une solution optimale du P.P.B.A. qui n'est pas de la forme produit en onze itérations avec un temps moyen de C.P.U. par itération de 0.40 sec. Six itérations sont suffisantes pour approcher la borne à 5.5 % de l'optimum du P.P.B.

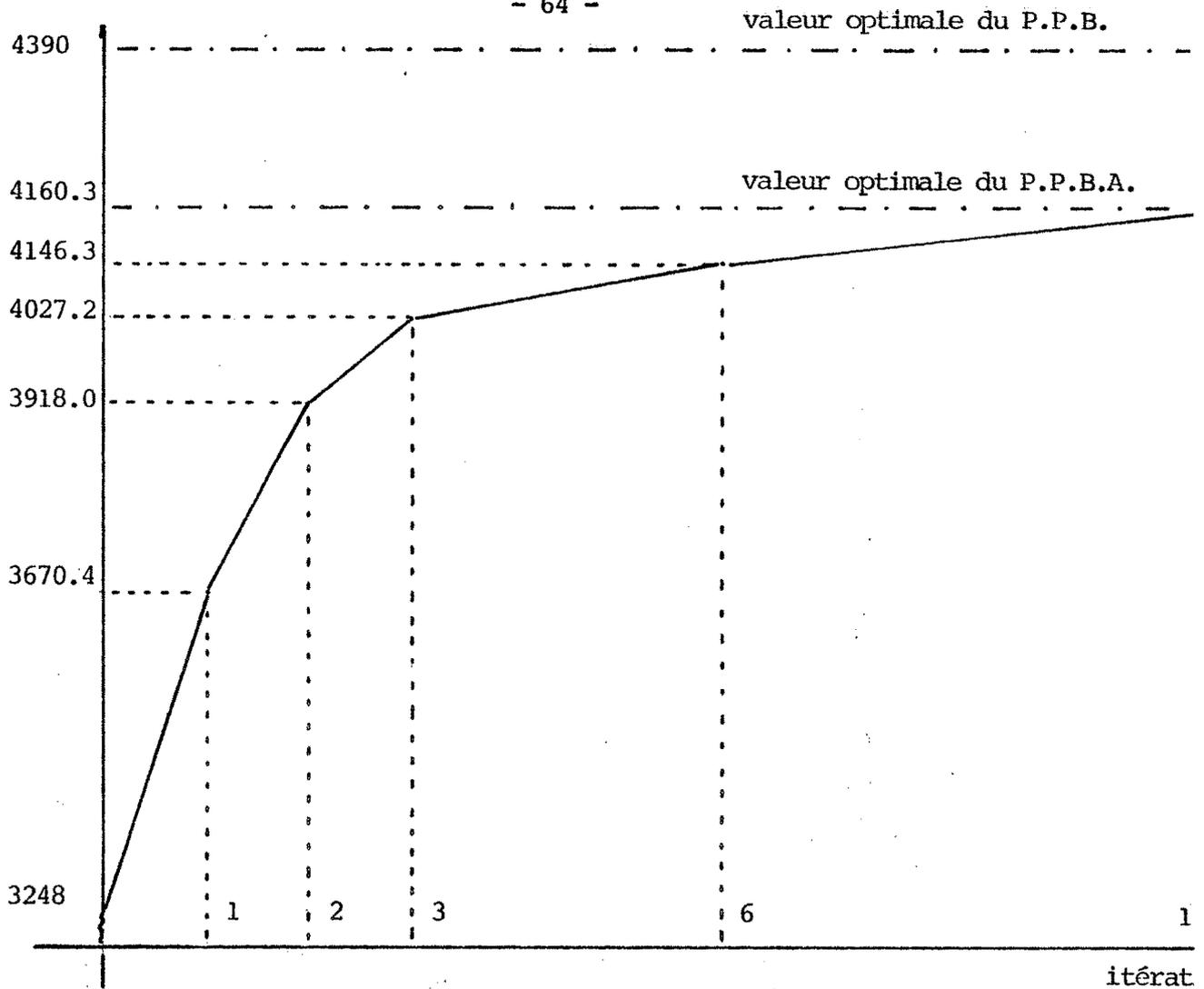


Figure 1.- courbe pour l'exemple 1

Exemples 2 :  $K_1$  et  $K_2$  sont pris comme à l'exemple 1, mais les coûts sont tirés sur l'intervalle  $[0,200]$ . La courbe de croissance est alors donnée sur la figure 2.

L'exécution de la méthode se poursuit jusqu'à la vingtième itération sans qu'aucune situation de blocage ne se produise ; le temps de C.P.U. moyen par itération est de 0.36 sec. et la borne obtenue à l'itération 7 se trouve déjà à 2.2 % de l'optimum du P.P.B.

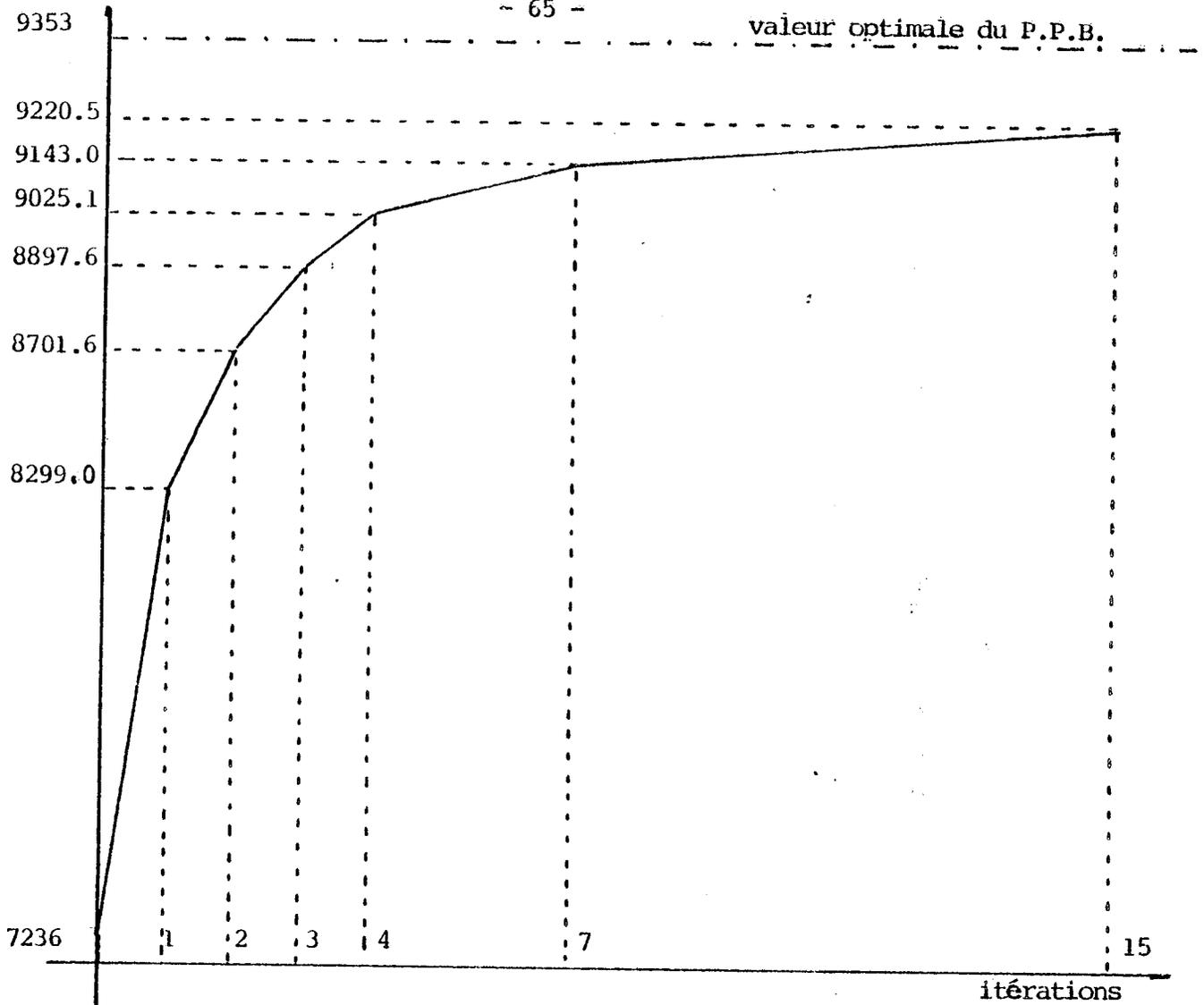


Figure 2 .- courbe pour l'exemple 2

V.2.2.- Cas d'un polyèdre et d'un hypercube.

Exemple 3 : Nous considérons ici  $K_1 \subset K^{10}$  tiré au hasard selon une distribution uniforme sur l'intervalle  $[-40,40]$  et  $K_2$  l'hypercube dans  $R^{10}$ .

La taille du P.P.B.A. est dans ce cas (320,440) et la courbe de croissance de la borne est présentée sur la figure 3.

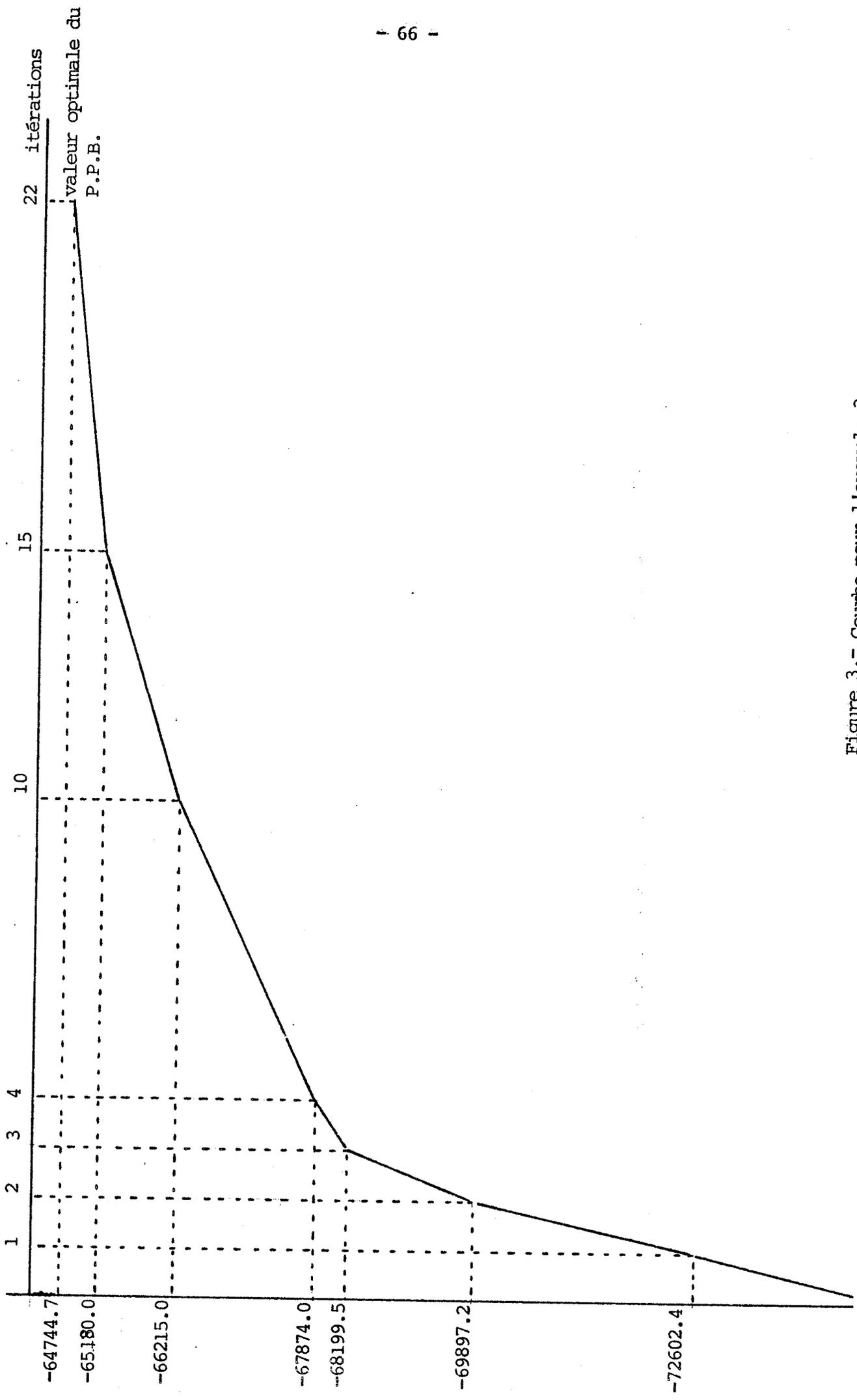


Figure 3.- Courbe pour l'exemple 3

En quatre itérations on approche l'optimum du P.P.B. à 4,8 % près et en six autres on atteint 2.2 %. La solution optimale du P.P.B. est obtenue directement en 22 itérations avec un temps moyen de calcul par itération de 0.95 sec.

Rappelons que cette méthode n'est pas exacte et qu'en théorie elle peut évoluer vers une situation de blocage, c'est à dire une situation où aucune amélioration du dual n'est trouvée alors que l'optimum n'est pas encore atteint. Cependant, dans tous les exemples traités sur lesquels l'exécution de la méthode est poursuivie jusqu'à ce que l'amélioration du dual ne soit plus possible, la solution optimale du P.P.B.A. a été identifiée.

C'est une méthode qui s'avère très efficace pour trouver en peu d'itérations (3 à 5) une bonne solution approchée du P.P.B.A. et même si par des limitations au niveau du temps de calcul on n'a pas fait de test pour le cas général de deux polyèdres quelconques, elle semble très prometteuse quand on désire obtenir une borne inférieure proche de la valeur du P.P.B.A. Cependant, dans le cas général, quelques raffinements de la procédure de détermination d'une direction d'amélioration seront nécessaires.

### V.3 - PERFORMANCES DE L'ALGORITHME DE S.E.P.

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe précédent ; en limitant à six le nombre d'itérations de la méthode de pénalités, l'exécution de l'algorithme de S.E.P. donne l'arborescence d'exploration montrée à la figure 4 en approximativement 20 sec. de C.P.U.

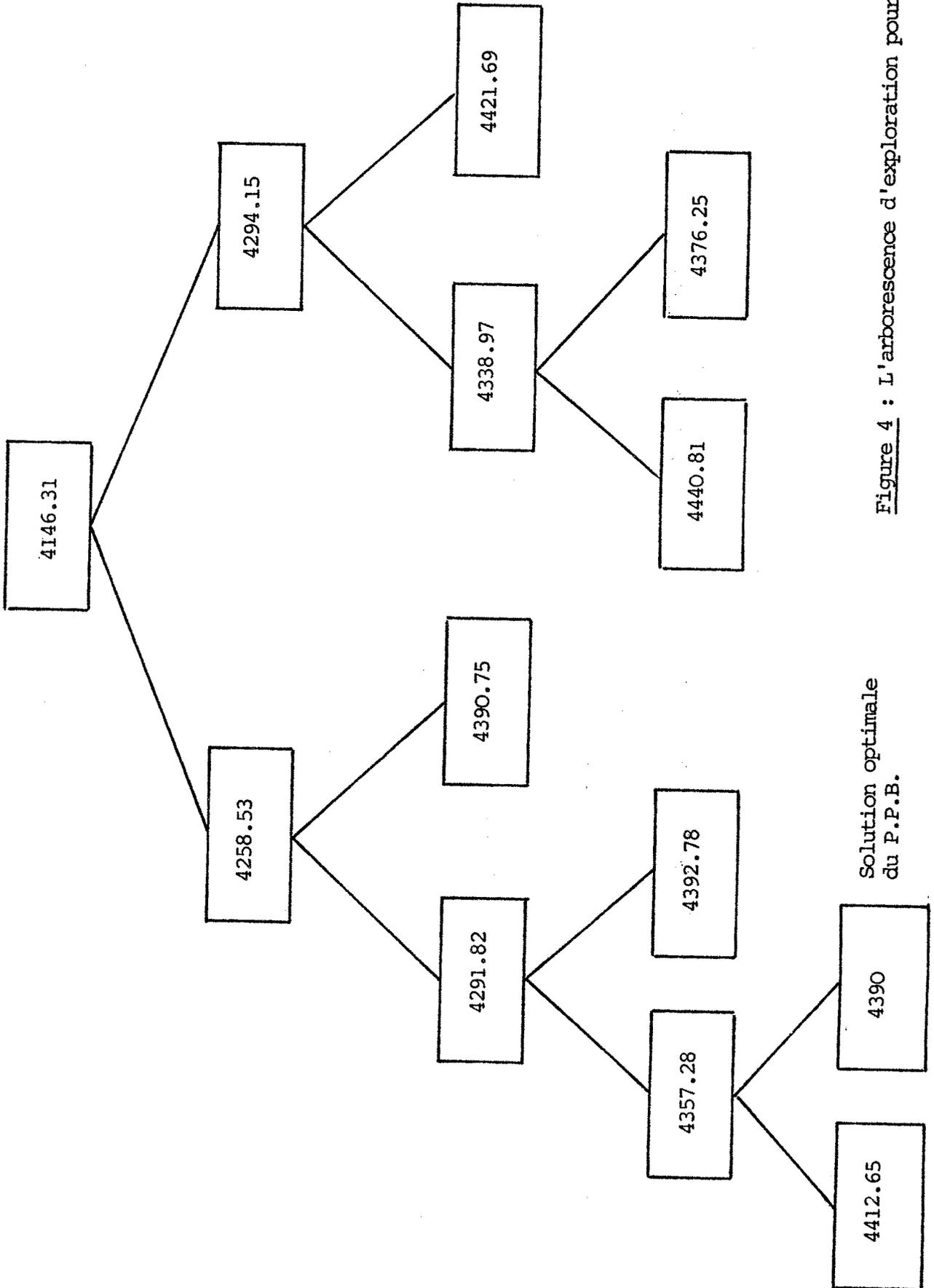


Figure 4 : L'arborescence d'exploration pour l'exemple 1

Au cours du développement de l'arborescence, quatre optimums locaux du problème ont été identifiés dont l'un d'eux était la solution du P.P.B.

Pour l'exemple 2, avec sept itérations de la méthode de pénalités, on développe l'arborescence montrée à la figure 5 en environ 20 secondes de C.P.U.

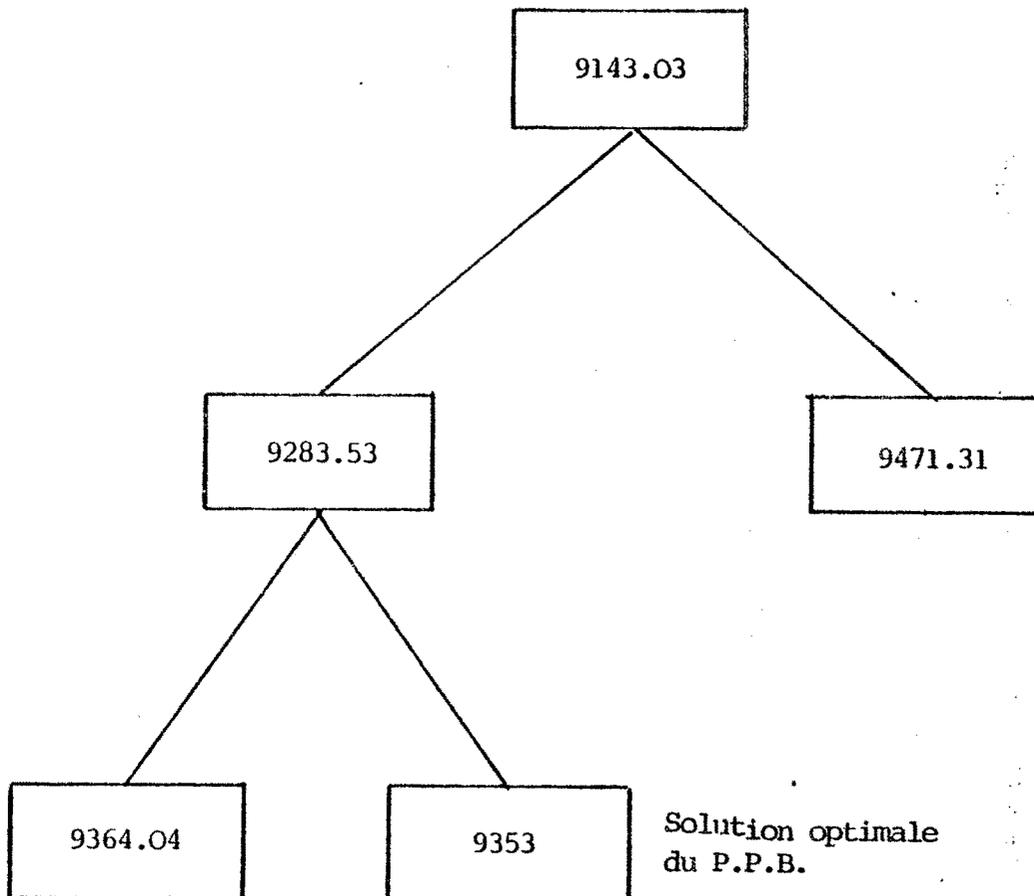


Figure 5 : L'arborescence d'exploration pour l'exemple 2

Le nombre d'optimums locaux identifiés au cours du processus était de 2 dans ce cas.

Au tableau I, nous résumons les performances de l'algorithme sur des exemples divers

Prob.	Type	$m_1$	$n_1$	Intervalle coef- ficients	$m_2$	$n_2$	Intervalle coûts	Evaluation à la racine	Nbre max. d'itéra- tions de la méthode	Nbre de sommets explorés	Valeur optimale
1	H	5	10	-	4	8	[0,100]	1079	2	0	1079
2	P	5	9	[-10,10]	4	8	[-15,15]	-13864.38	3	0	-13864.38
3	H	10	20	-	9	18	[0,100]	4146.31	6	6	4390
4	H	10	20	-	9	18	[0,200]	9143.03	7	2	9353
5	H	10	20	-	10	20	[0,200]	9457.08	7	4	9947
6	P	10	20	[-30,30]	10	20	[-30,30]	-12197.20	7	1	-9876
7	P	10	20	[-40,40]	10	20	[-50,50]	-64744.72	23	0	-64744.72

Tableau I : Récapitulatif des performances de l'algorithme de S.E.P.

La solution du P.B.A.R. constitue une borne très mauvaise pour la valeur du P.P.B. À titre d'exemple considérons le problème 5 dans le tableau ci-dessus; cet exemple a été résolu entièrement à la suite d'une exploration de 4 sommets de l'arborescence. Si la solution du P.B.A.R. est prise comme évaluation, 40 sommets sont explorés à peu près dans le même temps de calcul sans que la solution optimale du P.P.B. ait été atteinte.

Par contre le P.P.B.A. donne des bornes intéressantes qui permettent l'exploration d'un nombre très faible de sommets de l'arborescence.

Dans le cas de deux hypercubes, déjà dans  $R^{10}$  la solution optimale du P.P.B.A. est atteinte en des points extrêmes qui ne sont pas de la forme produit alors que dans le cas d'un polyèdre et un hypercube pour des tailles équivalentes, on a trouvé directement la solution optimale du P.P.B. dans tous les exemples traités.

Ainsi, dans la mesure où le hasard intervient dans la nature des polyèdres  $K_1$  et  $K_2$  on a plus de chances pour que la solution du P.P.B. soit obtenue directement par le P.P.B.A. et dans ce sens le cas de deux hypercubes est le plus défavorable puisque les seuls coefficients qui interviennent alors sont zéro ou un.

Par contre, la résolution du P.P.B.A. est plus simple dans le cas de deux hypercubes tant du point de vue de la résolution du P.B.A.R. (il n'y a aucun pivotage à effectuer mais uniquement la gestion des variables de base) que de la recherche de la direction d'amélioration.

Au vu des résultats notons aussi que dans le cas d'un polyèdre et un hypercube il faudrait traiter des tailles plus importantes pour avoir des solutions optimales du P.P.B.A. qui ne sont pas de la forme produit; nous sommes donc loin encore des tailles limites pour l'algorithme.

Un autre critère est la longueur de l'intervalle de tirage pour les coefficients de la fonction objective; en effet les performances de l'algorithme sont meilleurs dans la mesure où les coûts sont assez distincts. Cela correspond à une situation qui se remarque dans de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire.



## CONCLUSION



Nous avons mis au point une nouvelle méthode de pénalités pour la résolution de certains programmes linéaires de structure spéciale. Cette méthode est particulièrement performante dans le cas où l'on cherche à obtenir rapidement une bonne solution approchée du P.P.B.A. et pourrait se généraliser à d'autres problèmes.

L'algorithme de résolution du P.P.B. peut traiter facilement des problèmes dont la taille est de l'ordre des tailles limites qui ont été traitées par les algorithmes connus dans la littérature. On espère donc pouvoir aborder des tailles non atteintes encore, avec des temps de calcul très prometteurs.

Bien que les résultats obtenus soient très satisfaisants, il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine soit pour apporter des raffinements à l'algorithme, soit pour traiter des problèmes bilinéaires de nature particulière comme le problème de programmation quadratique concave.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] E. BALAS  
Intersection cuts. A new type of cutting planes for integer programming. *Operations Research* 19, (1971).
- [2] D.L. BRICKER  
Bounding a class of non convex linearly-constrained resource allocation problems via the surrogate dual. *Mathematical Programming* 18, (1980)
- [3] A.V. CABOT et R. FRANCIS  
Solving certain nonconvex quadratic minimization problems by ranking the extreme points. *Operations Research* 18, (1970).
- [4] A.V. CABOT  
Variations on a cutting plane method for solving concave minimization problems with linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly* 21, (1974).
- [5] M.J. CARRILLO  
A relaxation algorithm for the minimization of a quasi concave function on a convex polyhedron. *Mathematical Programming*, 13, (1977).
- [6] G.B. DANZIG  
Linear Programming and extension. Princeton University Press, 1962.
- [7] J.E. FALK  
A linear max-min problem. *Mathematical Programming*, 5, (1973).
- [8] J.E. FALK et K.R. HOFFMAN  
A successive underestimation method for concave minimization problems *Mathematics of Operations Research*, Vol. 1, n° 3 (1976).
- [9] J. FONLUPT  
Tensor Product of two convex sets and the bilinear programming problem. Ph. D. Dissertation. Stanford University.
- [10] A.M. FRIEZE  
A bilinear programming formulation of the three-dimensional assignment problem. *Mathematical Programming*, 7, (1974).
- [11] G. GALLO et A. ULKUCU  
Bilinear Programming : An exact algorithm *Mathematical Programming*. 12, (1977).
- [12] M.R. GAREY et D.S. JOHNSON  
Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness. H. Freeman S.F. (1978).
- [13] R.S. GARFINKEL, G.L. NEMHAUSSER  
Integer Programming, John Wiley (1972).

- [14] F. GLOVER et V.J. BOWMAN  
A note on zero-one integer and concave programming. Operations Research  
Vol. 20, n° 1, (1972).
- [15] F. GLOVER et D. KLINGMAN  
Concave programming applied to a special class of 0-1 integer programs  
Operations Research, Vol. 21, n° 1, (1973).
- [16] F. GLOVER  
Convexity cuts and cut search. Operations Research, Vol. 21, n° 1,  
(1973).
- [17] P.L. HAMMER, P. HANSEN et B. SIMEONE  
Best Linear Relaxations for quadratic 0-1 optimization. Istituto per  
le applicazioni del Calcolo M. Picone, August 1976.
- [18] M. HELD et R.M. KARP  
The travelling-Salesman problem and minimum spanning trees. Part I.  
Operations Research, 18, (1970).
- [19] M. HELD et R.M. KARP  
The travelling-Salesman problem and minimum spanning trees. Part II.  
Mathematical Programming 1, (1971).
- [20] M. HELD, P. WOLFE et H.P. CROWDER  
Validation of Subgradient Optimization. Mathematical Programming 6,  
(1974).
- [21] B. VAN HOHENBALKEN  
A finite algorithm to maximise certain pseudo-concave functions on  
polytopes. Mathematical Programming 8, (1975).
- [22] E.L. KELLER  
The general quadratic optimization problem. Mathematical Programming  
5, (1973).
- [23] H. KONNO  
A cutting plane algorithm for solving bilinear programs. Mathematic  
Programming 11, (1976).
- [24] H. KONNO  
Maximization of a convex quadratic function under linear constraints.  
Mathematical Programming 11, (1976).
- [25] H. KONNO  
An algorithm for solving bilinear knapsack problems. Institute of  
Information Sciences and Electronics University of Tsukuba, Japan,  
February 1979.
- [26] P.H. KOUGH  
The Indefinite quadratic programming problem. Operations Research,  
Vol. 27, n° 3, May-June 1979.

- [27] E. LAWLER  
The quadratic assignment problem. *Management Science* 9, (1963).
- [28] A. MAJTHAY et A. WINSTON  
Quasi-concave minimization subject to linear constraints. *Discrete Mathematics* 9, (1974).
- [29] O.L. MANGASARIAN et H. STONE  
Two-person Nonzero-Sum Games and quadratic programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 9, (1964).
- [30] K.G. MURTY  
Solving the fixed charge problem by ranking the extreme points. *Operations Research* Vol. 16, n° 2, (1968).
- [31] M. RAGHAVACHARI  
On connections between zero-one integer programming and concave programming under linear constraints. *Operations Research* 17, (1969).
- [32] K. RITTER  
A cutting plane method for nonconvex quadratic programming. Dans *Integer and Nolinear Programming*, J. ABADIE (1970).
- [33] R.S. SACHER  
A decomposition algorithm for quadratic programming. *Mathematical Programming* 18, (1980).
- [34] M. SAKAROVITICH  
Introduction à l'étude des graphes. Cours polycopié, IRMA (1975).
- [35] M. SAKAROVITICH  
Programmation linéaire. Cours polycopié, IRMA (1979).
- [36] H.A. TAHA  
Concave minimization over a convex polyhedron. *Naval Research Logistics Quarterly* 20, (1973).
- [37] H. TUI  
Concave Programming under linear constraints. *Soviet Mathematics* 5, (1964).
- [38] H. VAISH et C.M. SHETTY  
A cutting plane algorithm for the bilinear programming problem. *Naval Research Logistics Quarterly* 24, (1977).
- [39] P. WOLFE  
The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, Vol. 27, n° 3, (1959).
- [40] P.B. ZWART  
Non linear Programming : Counterexamples to two global optimization algorithms. *Operations Research* 21, (1973).
- [41] P.B. ZWART  
Global maximization of a convex function with linear inequality constraints. *Operations Research* 22, (1974).



RAPPEL  
DES ABREVIATIONS ET DES NOTATIONS



Les abréviations et notations suivantes sont souvent utilisées au cours de cette thèse et pour cette raison nous les rappelons ici avec la référence à la page où elles sont introduites pour la première fois.

<u>Abréviaton ou notation</u>	<u>Signification</u>	<u>Pages</u>
Technique de S.E.P.	Technique de Séparation et Evaluation Progressives	2
P.P.B.A.	Problème de Programmation Bilinéaire Approché	2
P.P.B.	Problème de Programmation Bilinéaire	4
$x \circ y$	Vecteur dont les coordonnées sont $[x^i \cdot y^j, i = 1, \dots, n_1 ; j = 1, \dots, n_2]$	12
$K_1 \boxtimes K_2$	Produit tensoriel des polyèdres $K_1$ et $K_2$	12
Système (PIC)	Représentation de $K_1 \boxtimes K_2$	13
Système (PTL)	Représentation alternative de $K_1 \boxtimes K_2$	14
Sous-Systèmes (A) et (B)	Décomposition du système (PIC) (ou du système (PTL))	14
Point de la forme produit	Vecteur $z = (x \circ y, y, x)$ tel que $x \in K_1, y \in K_2$ et $x^i \cdot y^j = x^i \cdot y^j$ $i = 1, \dots, n_1 ; j = 1, \dots, n_2$	15
P.B.A.R.	Relaxation du P.P.B.A. qui n'inclut que le sous-système (A)	23

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 9 Mai 1980

Le Président de la thèse

*Alchano J*

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université  
Scientifique et Médicale

*Alchano J*

