



HAL
open science

Etude numérique de la stabilité dynamique de modèles macroéconomiques : logiciel pour MODULECO

Filomena Dias d'Almeida

► **To cite this version:**

Filomena Dias d'Almeida. Etude numérique de la stabilité dynamique de modèles macroéconomiques : logiciel pour MODULECO. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT : . tel-00292484

HAL Id: tel-00292484

<https://theses.hal.science/tel-00292484>

Submitted on 1 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

«Analyse numérique»

par

DIAS D'ALMEIDA Filomena



**ETUDE NUMERIQUE DE LA STABILITE DYNAMIQUE
DE MODELES MACROECONOMIQUES.**

— LOGICIEL POUR MODULECO —



Thèse soutenue le 26 juin 1980 devant la commission d'examen.

Monsieur B. OUDET Président

Madame F. CHATELIN

Messieurs I.S. DUFF Examineurs

P. NEPOMIASTCHY

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD

M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

.../...

MM. SARRAZIN Pierre
SOUQUET Jean-Louis
TOUZAIN Philippe
URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
BOOS Jean-Yves
GUILHOT Bernard
KOBILANSKI André
LALAUZE René
LANCELOT François
LE COZE Jean
LESBATS Pierre
SOUSTELLE Michel
THEVENOT François
THOMAS Gérard
TRAN MINH Canh
DRIVER Julian
RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
CHEHIKIAN Alain
VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
DESCHIZEAUX Pierre
GLANGEAUD François
JAUSSAUD Pierre
Mme JOURDAIN Geneviève
MM. LEJEUNE Gérard
PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
LATOMBE Jean-Claude
LUCAS Michel
VERDILLON André

à mes parents

J'exprime toute ma reconnaissance à Madame F. Chatelin qui a dirigé cette Thèse, pour ses nombreux conseils et encouragements ainsi que pour la sympathie qu'elle m'a témoignée.

Monsieur B. Oudet a constamment suivi la progression de ce travail en particulier dans son aspect économétrique. Sa disponibilité permanente et son dynamisme m'ont énormément aidé. Je le remercie d'avoir accepté de présider ce Jury.

Je remercie Monsieur Duff (Computer Science and Systems Division de Harwell) et Monsieur Nepomiaschty (Ingénieur de recherche à l'INRIA) qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury. Je leur suis très reconnaissante pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée lors des conférences auxquelles nous avons participé.

Je tiens aussi à remercier :

C. Di Crescenzo, A. Barraud, A. Poncet et Y. Saad, pour leurs précieux conseils en ce qui concerne la programmation ;

Toute l'Equipe d'Analyse Numérique, pour l'ambiance amicale dans laquelle j'ai été accueillie ;

Les membres de l'Equipe MODULECO de Grenoble et le personnel du C.I.C.G.

Enfin, je remercie Madame M. Trévisan qui a assuré la dactylographie du manuscrit et toute l'Equipe du Service de Reprographie qui aura contribué à son impression.

Que tous, au-delà de l'aspect formel et trop répété des mots, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction -----	1
Index des Notations -----	5
CHAPITRE I - LE PROBLEME ECONOMETRIQUE DE BASE -----	7
1. Ecriture d'un modèle linéaire sous la forme(1) -----	7
2. Stabilité dynamique des modèles macroécono- miques -----	11
CHAPITRE II - ETUDE NUMERIQUE DE LA STABILITE DYNAMIQUE DES MODELES DE TAILLE MOYENNE ET DES MAQUET- TES DE GRANDS MODELES -----	13
1. Méthode QZ -----	14
1.1. Rappels -----	14
1.2. Algorithme QZ -----	17
1.3. Caractéristiques numériques -----	22
2. Application pratique de la méthode définie à MINIMETRIC -----	23
2.1. Résultats numériques -----	23
2.2. Résultats économiques -----	24
2.3. Chocs de structure -----	28
CHAPITRE III - ETUDE NUMERIQUE DE LA STABILITE DES GRANDS MODELES -----	31
1. Généralisation de la méthode de la puissance -----	32
1.1. Méthode itérative générale (approche ma- trices creuses) -----	34
1.2. Méthode itérative par blocs (en utilisant la forme "cheminée" de B) -----	36
1.3. Résultats numériques -----	40
2. Généralisation de la méthode des itérations simultanées -----	44
2.1. Algorithme -----	44
2.2. Résultats numériques -----	45

3. Décomposition spectrale incomplète -----	48
4. Le conditionnement du problème généralisé de valeurs propres -----	50
CONCLUSION -----	54
ANNEXE : CARACTERISATION DES SOUS-PROGRAMMES FORTRAN CORRES- PONDANT AUX METHODES DECRITES -----	55
A - SOUS-PROGRAMME QZ : méthode QZ -----	57
B - SOUS-PROGRAMME SPDITER : méthode de la puissance gé- néralisée -----	60
C - SOUS-PROGRAMME XAMINE : méthode de la puissance gé- néralisée dans le cas où B est donnée sous la forme cheminée -----	65
D - SOUS-PROGRAMME ITERSIM : méthode des itérations si- multanées dans les cas où B est donné sous la forme cheminée -----	70

I N T R O D U C T I O N

On présente l'étude de la résolution de problèmes généralisés de valeurs propres issus de l'analyse de modèles macroéconomiques. Cette étude a pour but l'écriture de modules logiciels numériques destinés à être intégrés à MODULECO, logiciel modulaire pour la modélisation macroéconomique, créé en conjonction par l'INRIA, l'INSEE et la Direction de la Prévision du Ministère de l'Economie.

Un modèle macroéconomique linéarisé et discrétisé est présenté sous la forme d'un système d'équations aux différences :

$$Mx_t + Nx_{t-1} + Py_t = 0$$

où x_t est le vecteur des variables d'état (expliquées par le modèle) et y_t le vecteur des variables de contrôle.

La stabilité dynamique d'un modèle, présenté sous cette forme qui caractérise l'évolution autonome du modèle à la suite d'une perturbation initiale, est déterminée par les valeurs propres du problème généralisé suivant :

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0$$

où $A = N$ et $B = -M$ sont les matrices creuses non symétriques de grande dimension, N est singulière et, dans les exemples traités, M est régulière.

Un modèle est dit asymptotiquement stable au sens de Lyapounov, si toutes les valeurs propres de ce problème sont, en module, inférieures à 1.

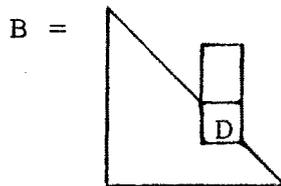
Pour l'étude de la stabilité dynamique à court terme, on s'intéresse aussi au calcul des vecteurs propres associés aux valeurs propres dominantes (Oudet (1975)).

Dans le chapitre I, nous étudions le problème de valeurs propres déterminant la stabilité dynamique d'un modèle macro-économique, ainsi que l'utilisation des valeurs propres, et vecteurs propres associés, dans la formule de décomposition spectrale qui détermine la propagation des écarts, par rapport à une trajectoire de référence au cours de plusieurs périodes, produits par une perturbation à une période initiale, aux périodes suivantes.

Dans le chapitre II, on s'intéresse à la résolution de problèmes de valeurs propres dans le cas de modèles de taille moyenne ou de maquettes de grands modèles, par la méthode QZ. En II.2, nous présentons les résultats de l'application à MINIMETRIC (dans ses trois versions de dimensions 13, 20 et 83).

Dans le chapitre III, nous étudions le cas des problèmes de valeurs propres correspondant aux grands modèles, avec l'adaptation de méthodes itératives du type puissance itérée (III.1) et itérations simultanées (III.2), au cas de problèmes généralisés de valeurs propres de grandes dimensions,

- a) dans le cas général où A et B sont creuses mais sans structure particulière,
- b) dans le cas où B a été préalablement permutée pour avoir la forme cheminée suivante :



où la dimension de D est beaucoup plus petite que celle de B.

En III.1.3. et III.2.2. nous présentons quelques résultats de l'application de ces méthodes au calcul des éléments propres dominants de la maquette MINIMETRIC de dimension 83 et du modèle METRIC de dimension 751. Au paragraphe III.3 on considère l'adaptation de la formule de décomposition spectrale au cas où l'on n'a que les éléments propres dominants et en III.4 le conditionnement du problème généralisé de valeurs propres.

On a essentiellement testé les valeurs numériques sur les exemples fournis par ces modèles, afin d'étudier la précision numérique des algorithmes proposés. L'interprétation économique à partir de nos valeurs numériques ne peut être faite qu'avec une extrême prudence. En effet d'après Malgrange (1980) un biais systématique sur les caractéristiques du modèle peut être introduit par la linéarisation, si le modèle linéarisé est non stationnaire et s'il n'est pas possible par la normalisation choisie de le rendre stationnaire.

En particulier la valeur propre dominante 2.37 calculée pour METRIC ne doit pas entraîner à une conclusion trop hâtive d'instabilité.

En annexe on décrit les détails d'implémentation des méthodes employées.

INDEX DES NOTATIONSNOTATIONS GÉNÉRALES

$A = (a_{ij})$, a_{ij} élément de la ligne i et colonne j de A

A^T matrice transposée de A (réelle)

A^H matrice transposée conjuguée de A

H matrice de Hessenberg : $h_{ij} = 0, i > j+1$

Q matrice unitaire : $Q^T Q = Q Q^T = I$

Z matrice unitaire

R, U, T , matrices triangulaires supérieures

L matrice triangulaire inférieure

λ valeur propre

$\|x\|_2$ norme euclidienne de x : $\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2) \right]^{1/2}$

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ matrice diagonale de dimension n à éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement

\leftarrow signe d'affectation d'une valeur à une variable (ex : $I \leftarrow I+1$: I prend la valeur de I , plus 1)

NOTATIONS DU CHAPITRE III

T matrice quasi triangulaire (triangulaire par blocs avec blocs diagonaux de dimension 2×2 , au plus).

Q matrice unitaire de dimension $n \times v$: $Q^T Q = I$

Z, Y matrices de dimension $n \times v$

P, \bar{Q} matrices de permutation de lignes et colonnes (respectivement)

P_a matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres dominantes

P_b matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres non dominantes

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

CHAPITRE I

LE PROBLÈME ÉCONOMÉTRIQUE DE BASE

Les modèles macroéconométriques auxquels nous nous intéressons (par exemple METRIC (INSEE (1977)) se présentent après linéarisation et discrétisation, comme un système linéaire d'équations aux différences, de la forme :

$$(1) \quad Mx_t + Nx_{t-1} + Py_t = 0$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

où $x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t$ sont les variables d'état endogènes formant le vecteur x_t ; $y_1^t, y_2^t, \dots, y_r^t$ sont les variables de contrôle ou exogènes, à la période t , qui forment le vecteur y_t ;

M , N et P sont des matrices réelles de tailles respectivement égales à : $n \times n$, $n \times n$ et $n \times r$, non symétriques et très creuses.

Les variables dites endogènes sont celles qui sont expliquées par le modèle, les variables exogènes étant définies extérieurement au modèle.

1. ÉCRITURE D'UN MODÈLE LINÉAIRE SOUS LA FORME (1).

Le modèle sous la forme (1) exprime une récurrence à deux niveaux quels que soient les retards maximaux des variables intervenant dans le modèle.

Pour mettre le modèle sous cette forme le vecteur x_t , des variables endogènes, comprendra donc, outre les variables de la période t , celles des périodes précédentes sauf celles correspondantes au retard maximum de chaque variable. Le vecteur x_{t-1} aura comme composantes les variables correspondantes de x_t , retardées d'une période.

Exemple :

Voyons sur un exemple à 3 variables la signification de cette notation.

Soit le modèle suivant :

$$(S) \begin{cases} a = c + a_{-1} + 2 b_{-1} + 0.2 c_{-1} \\ b = 2 a + 2 c + b_{-1} + b_{-2} \\ c = 0.5 a + 2 c_{-2} + c_{-3} \end{cases}$$

où interviennent les variables a, b, c , de la période t ainsi que les variables a_{-1}, b_{-1} et c_{-1} de la période $t-1$, b_{-2} et c_{-2} de la période $t-2$ et c_{-3} de la période $t-3$.

Les retards maximaux de a, b, c sont donc 1, 2, 3 respectivement. On pose : $x_t = (x_i^t)$, $x_{t-1} = (x_i^{t-1})$, $i = 1, \dots, 6$, où $x_1^t = a$, $x_2^t = b$, $x_3^t = c$, $x_4^t = b_{-1}$, $x_5^t = c_{-1}$, $x_6^t = c_{-2}$ et $x_1^{t-1} = a_{-1}$, $x_2^{t-1} = b_{-1}$, $x_3^{t-1} = c_{-1}$, $x_4^{t-1} = b_{-2}$, $x_5^{t-1} = c_{-2}$, $x_6^{t-1} = c_{-3}$, et

on ajoute à S les 3 identités suivantes, définissant la liaison entre les variables retardées de x_t et celles de x_{t-1} :

$$\begin{cases} b_{-1} = b_{-1} \\ c_{-1} = c_{-1} \\ c_{-2} = c_{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4^t = x_2^{t-1} \\ x_5^t = x_3^{t-1} \\ x_6^t = x_5^{t-1} \end{cases}$$

Le système (S) s'écrit donc à l'aide des vecteurs x_t et x_{t-1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1^t + x_3^t + x_1^{t-1} + 2x_2^{t-1} + 0.2x_3^{t-1} = 0 \\ -x_2^t + 2x_1^t + 2x_3^t + x_2^{t-1} + x_4^{t-1} = 0 \\ -x_3^t + 0.5x_1^t + 2x_5^{t-1} + x_6^{t-1} = 0 \\ -x_4^t + x_2^{t-1} = 0 \\ -x_5^t + x_3^{t-1} = 0 \\ -x_6^t + x_5^{t-1} = 0 \end{array} \right.$$

Voyons comment sont déterminées les matrices M et N.

Pour placer dans les matrices M et N les coefficients des variables retardées b_{-1} , c_{-1} et c_{-2} , figurant dans les 3 premières équations on a une ambiguïté puisqu'ils peuvent figurer soit en M, soit en N. On choisit de les placer en N pour que M soit permutable en une forme "cheminée" dont on parlera au chapitre III.

Les coefficients des variables b_{-1} , c_{-1} et c_{-2} dans les 3 dernières équations sont placés en M.

Alors les matrices M et N d'ordre 6 correspondant à (S), avec ces conventions sont :

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & & 1 & & & \\ \hline 2 & -1 & 2 & & & \\ \hline 0.5 & & -1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ \hline & & & & -1 & \\ \hline & & & & & -1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a & b & c & b_{-1} & c_{-1} & c_{-2} \\ \hline \end{array}$$

$$N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 0.2 & & & \\ \hline & 1 & & 1 & & \\ \hline & & & & 2 & 1 \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{-1} & b_{-1} & c_{-1} & b_{-2} & c_{-2} & c_{-3} \\ \hline \end{array}$$

En pratique les modèles sont de très grande taille : METRIC, dans sa version actuelle a une dimension $n = 751$, mais une autre version de dimension supérieure à 1000 est en préparation.

Pour l'analyse de ces macromodèles, il existe des versions réduites pour étudier plus précisément certains secteurs de l'économie.

Ainsi, le modèle METRIC (751), que nous utiliserons dans les exemples à trois versions réduites (MINIMETRIC), de tailles respectivement $n = 13$, $n = 20$ et $n = 83$ qui correspondent respectivement à une version annuelle calculée (et non pas estimée) après quelques simplifications provenant de résolutions partielles, à une version trimestrielle où l'on simplifie certains retards ; et à une réestimation du modèle METRIC sans l'incorporation du secteur financier.

2 - STABILITE DYNAMIQUE DES MODELES MACROECONOMIQUES

Nous nous intéressons à l'étude de la dynamique du modèle, c'est-à-dire, l'étude de la stabilité, au sens de Lyapounov, qui caractérise l'évolution propre du modèle, elle résulte des conditions initiales.

Le modèle est dit instable si, donnée une trajectoire de référence, une perturbation de celle-ci, à la période t entraîne un écart croissant de la trajectoire ultérieure. Il est stable sinon.

La connaissance de l'évolution des écarts des variables d'état, par rapport à une trajectoire prévue, à la suite d'une perturbation peut déterminer la politique économique à suivre d'où l'intérêt de l'analyse de la stabilité du modèle.

Soit x_{t-1}^* , x_t^* , ..., x_{t+N}^* la trajectoire de référence au cours des périodes $t-1$, t , ..., $t+N$, prévue à partir de l'état initial x_{t-1}^* et des vecteurs de commande y_{t-1}^* , y_t^* , ..., y_{t+N-1}^* .

Si on suppose qu'à la période t se produisent les écarts $\Delta x_t = x_t - x_t^*$ par rapport à la trajectoire de référence, alors, l'évolution autonome du modèle déterminera les écarts Δx_{t+m} , $m = 1, 2, \dots, N$ dans les périodes suivantes.

A long terme l'évolution des écarts est déterminée par les valeurs propres du problème :

$$(2) \quad Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0$$

où $A = N$ et $B = -M$.

La critère de Lyapounov donne comme condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique, que les modules des valeurs propres soient inférieures à 1.

A court terme, supposant que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de (2) et u_1, u_2, \dots, u_n les vecteurs propres associés, on vérifie par un calcul simple (cf. Oudet (1975)) que les écarts à la période $t+m$, en conséquence de la perturbation initiale Δx_t , sont donnés par la formule de décomposition spectrale suivante :

$$\Delta x_{jt+m} = \sum_{k=1}^n \Delta x_{kt} \left[\sum_{\ell} \lambda_{\ell}^m u_{j\ell} v_{\ell k} + \sum_{\ell} 2 \rho_{\ell}^m \sqrt{p^2 + q^2} \cos(m\theta_{\ell} + \psi) \right],$$

où $U = (u_{j\ell})_{j,\ell}$ est la matrice des vecteurs propres

$U^{-1} = (v_{j\ell})_{j,\ell}$ est son inverse

p est la partie réelle de $u_{j\ell} v_{\ell k}$

q est la partie imaginaire de $u_{j\ell} v_{\ell k}$

(si $u_{j\ell} = a_{j\ell} + ib_{j\ell}$ et $v_{\ell k} = \alpha_{\ell k} + i\beta_{\ell k}$ alors

$$p = a_{j\ell} \alpha_{\ell k} - b_{j\ell} \beta_{\ell k} \quad \text{et} \quad q = a_{j\ell} \beta_{\ell k} + b_{j\ell} \alpha_{\ell k}$$

$$\psi = \text{Arctg} \frac{q}{p}$$

θ_{ℓ} est l'angle de la $\ell^{\text{ème}}$ vecteur propre (complexe)

ρ_{ℓ} est son module

λ_{ℓ} est une valeur propre réelle.

CHAPITRE II

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA STABILITÉ DYNAMIQUE DES MODÈLES DE TAILLE MOYENNE ET DES MAQUETTES DE GRANDS MODÈLES.

On a à résoudre le problème de valeurs propres :

$$(2) Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0$$

pour étudier la stabilité du modèle linéaire sous la forme (1), les matrices A et B étant creuses et non symétriques.

On considère ici le cas des modèles ou maquettes de dimension inférieur à 100.

L'intérêt de résoudre le problème (2) au lieu de résoudre, si B^{-1} existe, le problème :

$$(3) B^{-1} Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

qui lui est formellement équivalent provient du fait que, d'une part le mauvais conditionnement de B relatif à l'inversion peut entraîner des instabilités numériques et d'autre part, la matrice $B^{-1} A$ n'est plus creuse.

Deux méthodes se présentent pour résoudre le problème (2) directement : la méthode QZ de Moler et Stewart (Moler et Stewart (1973)) et la méthode LZ de Linda Kaufmann (Kaufmann 1974)). On a choisit la méthode QZ puisque LZ est plus particulièrement adaptée aux problèmes de matrices complexes et QZ, utilisant des transformations unitaires est plus stable.

1. METHODE QZ

1.1. Rappels

Avant de décrire rapidement l'algorithme QZ qui généralise au problème (2) la méthode QR, on rappelle les théorèmes et notations de base suivantes (cf. Wilkinson (1965) et Stewart (1973)).

Théorème 1 : Soient A et B des matrices carrées de $\mathbb{C}^{n \times n}$, alors il existe deux matrices unitaires, Q et Z, telles que QAZ et QBZ sont triangulaires supérieures.

Théorème 2 : Soient A et B deux matrices carrées de $\mathbb{C}^{n \times n}$ et U, V des matrices inversibles de $\mathbb{C}^{n \times n}$, alors, les problèmes généralisés de valeurs propres, suivants, sont équivalents

$$(i) \quad Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0$$

$$(ii) \quad UAVx = \lambda UBx, \quad x \neq 0$$

De plus, si \underline{x} est vecteur propre de (i) alors $V^{-1}\underline{x}$ est vecteur propre de (ii).

Ces deux résultats permettent théoriquement de remplacer le problème (2) initial par un autre de type $QAZx = \lambda QBZx$, équivalent, où Q et Z sont des matrices unitaires et construites de façon à ce que QAZ et QBZ soient triangulaires supérieures.

Ceci est fait itérativement, en accumulant en Q et Z des produits de réflecteurs de Householder.

Définition : On appelle réflecteur de Householder une matrice unitaire symétrique de la forme :

$$I - \frac{2 \underline{u} \underline{u}^T}{\|\underline{u}\|_2^2}, \quad \text{où } \underline{u} \in \mathbb{R}^n.$$

On dit que ce réflecteur appartient à la classe

$$\mathcal{H}_r(k) \text{ si } u^T = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_{k+r-1}, 0, \dots, 0)$$

* Algorithme de construction d'un réflecteur de Householder :

Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n , et Q le réflecteur de Householder à construire, $Q \in \mathcal{H}_r(k)$.

$$\text{On a } Q = I - \frac{2 u u^T}{\|u\|_2^2} = I + v u^T, \text{ si } v \text{ représente le vec-}$$

teur $-\frac{2}{\|u\|_2^2} \cdot u$, alors u et v sont obtenus par l'algorithme

suisant :

$$1^\circ/ \quad R = \text{signe}(x) \sqrt{\sum_{i=k}^{k+r-1} x_i^2} \quad (\text{+ signifiant "prend la valeur de"})$$

$$2^\circ/ \quad v_j = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, k+r, \dots, n$$

$$v_k = -(x_k + R)/R$$

$$v_i = -x_i/R, \quad i = k+1, k+2, \dots, k+r-1$$

$$3^\circ/ \quad u_j = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, k+r, \dots, n$$

$$u_k = 1$$

$$u_i = v_i/v_1, \quad i = k+1, k+2, \dots, k+r-1$$

Propriété : Q ainsi construit est un réflecteur de Householder de la classe $\mathcal{H}_r(k)$ tel que si $x \neq \sum_{i=1}^k x_i e_i$, alors

$$Qx = \sum_{i=1}^{k-1} x_i e_i - \zeta_k e_k + \sum_{i=k+r}^n x_i e_i,$$

où

$$\zeta_k = \sqrt{\sum_{i=k}^{k+r-1} x_i^2} \text{ et } e_i \text{ est le } i\text{ème vecteur de la base}$$

canonique de \mathbb{R}^n . C'est-à-dire, les composantes d'ordre $k+1$ à $k+r-1$ de Qx sont nulles.

En particulier, si $Q \in \mathcal{H}_n(1)$ et si $x \neq \|x\|_2 e_1$ alors $Qx = \|x\|_2 e_1$.

Si on multiplie $Q \in \mathcal{H}_r(k)$ par une matrice A réelle quelconque, on aura

$QA = [Qa_{.1} \ Qa_{.2} \ \dots \ Qa_{.n}]$, ($a_{.j}$ représentant la colonne j de A) avec

$$Qa_{.j} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ij} e_i - \sqrt{\sum_{i=k}^{k+r-1} a_{ij}^2} e_k + \sum_{i=k+r}^n a_{ij} e_i.$$

On voit donc que la matrice QA ne diffère de A que sur les lignes $k, k+1, \dots, k+r-1$.

Si dans la colonne j de A on a r composantes nulles en lignes $k, k+1, \dots, k+r-1$:

$$a_{kj} = a_{k+1j} = \dots = a_{k+r-1j} = 0, \text{ alors } Qa_{.j} = a_{.j}$$

De même si on multiplie A par $Z \in \mathcal{H}_r(k)$ on aura

$$AZ = \begin{bmatrix} a_{1.} & Z \\ a_{2.} & Z \\ \dots & \dots \\ a_{n.} & Z \end{bmatrix}, \text{ où } a_{i.} \text{ représente la } i\text{ème ligne de } A,$$

$$\text{et } a_i. Z = \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} e_j^T - \sqrt{\sum_{j=k}^{k+r-1} a_{ij}^2} e_k^T + \sum_{j=k+r}^n a_{ij} e_j^T,$$

donc AZ ne diffère de A que sur les colonnes $k, k+1, \dots, k+r-1$.

Dans la suite Q désignera les matrices réflecteurs de Householder de $\mathcal{H}_r(k)$ prémultiplicatrices et Z les matrices de $\mathcal{H}_r(k)$ post-multiplicatrices.

1.2. Algorithme QZ

1.2.1. Phase préparatoire

* Réduire B à la forme triangulaire supérieure en multipliant à gauche par une matrice Q qui est le produit accumulé de matrices $Q \in \mathcal{H}_{n+k-1}(k)$, pour $k = 1, 2, \dots, n-1$.

On a alors le problème équivalent à (2) :

$$QAx = \lambda QBx, \text{ où } QB \text{ est triangulaire.}$$

* Réduire QA à la forme de Hessenberg (H est une matrice de Hessenberg si $h_{ij} = 0, \forall i > j+1$) avec conservation de la forme triangulaire de QB.

Il existe des réflecteurs de Householder Q' et Z tels que Q'QA a la forme de Hessenberg et Q'Q BZ est triangulaire supérieure et, de plus, la post-multiplication par Z conserve la forme de Hessenberg de Q'QA.

Donc le problème, équivalent à (2),

$$\underbrace{Q'QAZ}_H x = \lambda \underbrace{Q'QBZ}_T x$$

à des matrices H et T respectivement de la forme de Hessenberg et triangulaire supérieure.

1.2.2. Phase itérative

* Réduire H à la forme quasitriangulaire (i.e. bloc triangulaire supérieure, avec des blocs diagonaux de taille 1 ou 2), en conservant T de la forme triangulaire supérieure.

Supposons qu'à l'itération k on a le problème :

$$H_k x = \lambda T_k x$$

équivalent à (2) et de matrices H_k et T_k de forme de Hessenberg et triangulaire supérieure respectivement.

H_k est décomposée en QR, i.e., on détermine Q_k et R_k telles que $H_k = Q_k \cdot R_k$: Q_k est unitaire et R_k est triangulaire supérieure.

$Q_k^T T_k$ n'étant pas triangulaire supérieure, on détermine un réflecteur de Householder Z_k , post-multiplicateur, tel que $Q_k^T T_k Z_k$ soit triangulaire supérieure. La propriété (p.15) explique la conservation de la forme de Hessenberg en $Q_k^T H_k Z_k$, car Q_k et Z_k sont construites pas à pas, comme produit de matrices de $\mathcal{H}_3(\ell)$, ($\ell = n-2, \dots, k-1$; $k = 1, 2, \dots, n-2$).

Donc on prend, à l'itération k+1, $H_{k+1} = Q_k^T H_k Z_k$ et $T_{k+1} = Q_k^T T_k Z_k$ et on a le problème équivalent à (2) :

$$Q_k^T H_k Z_k x = \lambda Q_k^T T_k Z_k x$$

Remarques :

1) Cette itération est formellement équivalente à une itération QR sur $H_k T_k^{-1}$; en effet, si $C_k = H_k T_k^{-1} = R_k Q_k^T$ et $C_{k+1} = Q_k^T C_k Q_k$, alors $H_{k+1} T_{k+1}^{-1} = (Q_k^T H_k Z_k) (Q_k^T T_k Z_k)^{-1} = Q_k^T H_k Z_k Z_k^T T_k^{-1} Q_k = Q_k^T C_k Q_k = C_{k+1}$.

2) Pour accélérer la convergence qui est de l'ordre de celle de $\{[\max_i |\lambda_i/\lambda_{i-1}|]^k\}$ quand $k \rightarrow \infty$, et en même temps maintenir les calculs en arithmétique réelle on utilise des doubles translations d'origine.

A chaque itération, on détermine σ_1 et σ_2 , translations d'origine, qui sont les valeurs propres du sous problème de taille 2, du coin inférieur droit de H_k et T_k .

La matrice à décomposer en QR est maintenant

$C_k = (H_k - \sigma_1 T_k) (H_k - \sigma_2 T_k)$; $C_k = Q_k R_k$, Q_k est unitaire et R_k est triangulaire supérieure.

Le réflecteur de Householder Z_k est déterminé par les conditions : $Q_k^T T_k Z_k$ triangulaire supérieure et $Q_k^T H_k Z_k$ a la forme de Hessenberg.

Alors le problème :

$Q_k^T H_k Z_k x = \lambda Q_k^T T_k Z_k x$, (itération $k+1$) est équivalent à (2) et converge vers :

$$H_\infty x = \lambda T_\infty x$$

problème équivalent à (2), aussi, où H_∞ est quasi triangulaire et T_∞ est triangulaire supérieure.

La vitesse de convergence est maintenant de l'ordre de celle de $\{[\max_i \frac{(\lambda_1 - \sigma_1)(\lambda_{i-1} - \sigma_2)}{\lambda_{i-2}^2}]^k\}$, quand $k \rightarrow \infty$, donc, quadratique.

(Notons que σ_1 approche λ_1 et σ_2 approche λ_{i-1}).

1.2.3. Extraire les valeurs propres des blocs diagonaux de H_∞ et T_∞ .

Quand un bloc 2×2 définit une paire de valeurs propres réelles, alors, on trouve les transformations unitaires (appartenant à $\mathcal{H}_2(\lambda)$) nécessaires à la triangularisation de ce bloc et on les applique effectivement à H_∞ et T_∞ . Mais quand le bloc diagonal définit une paire de valeurs propres complexes conjuguées les transformations unitaires (complexes) qui le réduiraient à la forme triangulaire ne sont pas explicitement appliquées à H_∞ et T_∞ et servent seulement à calculer les éléments diagonaux qui en résulteraient sur H_∞ et T_∞ .

Donc on transforme, par des réflecteurs de Householder, le problème dans le problème équivalent :

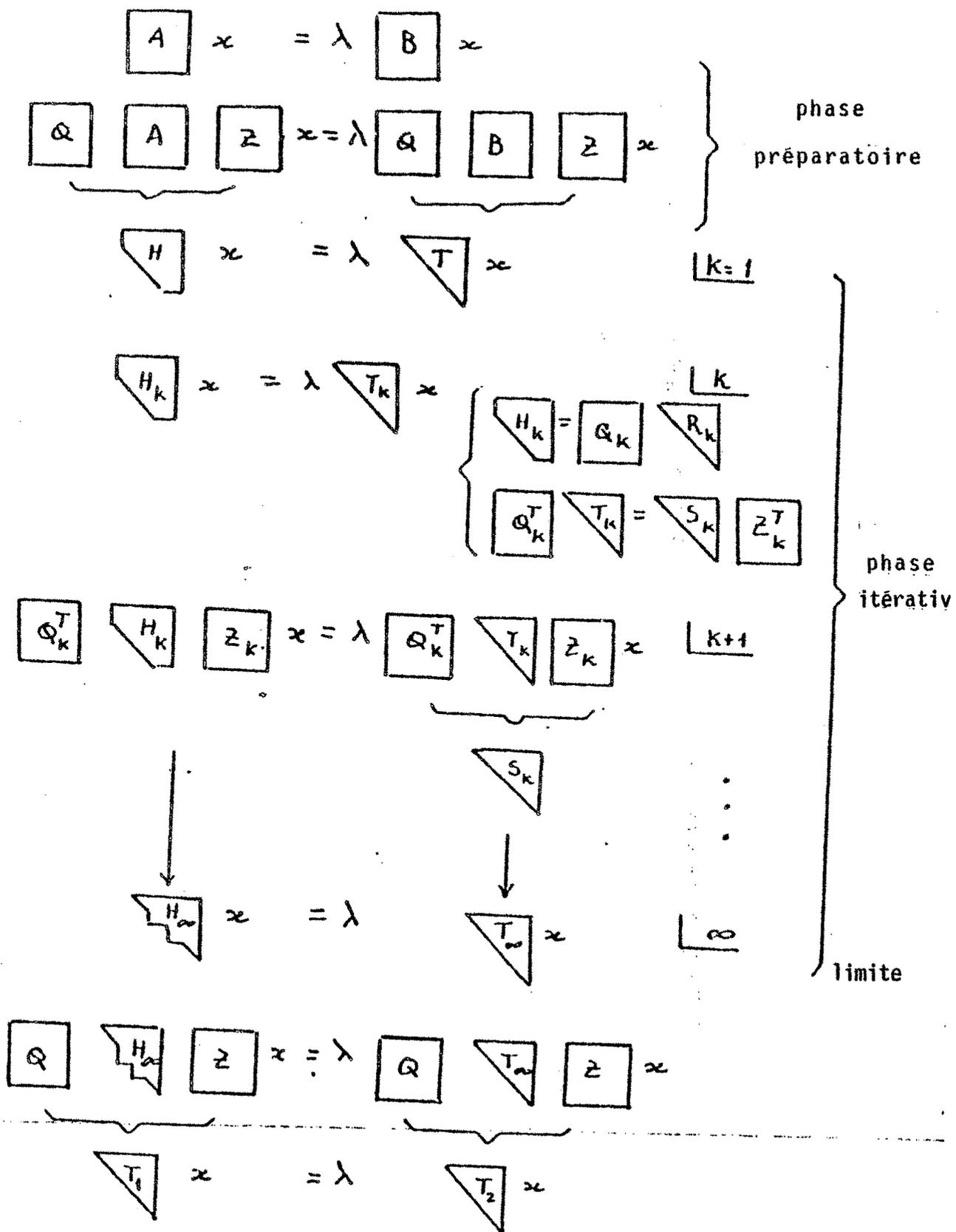
$$T_1 x = \lambda T_2 x$$

où T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures. On ne calcule explicitement que les diagonales respectives de T_1 et T_2 . Les quotients des éléments diagonaux, sont les valeurs propres du problème (2).

1.2.4. Obtenir les vecteurs propres

Les vecteurs propres de $T_1 x = \lambda T_2 x$ sont obtenus par itération inverse et multipliés par le produit accumulé des réflecteurs Z (post-multiplicateurs).

Schéma de l'algorithme QZ



1.3. Caractéristiques numériques

Cette méthode est numériquement très stable et applicable même si A et B sont singulières. Elle est donc particulièrement indiquée pour la résolution de (2) quand A et B proviennent de l'équation linéarisé d'un modèle économique, puisque dans ces cas là, on a constaté que A est singulière et B mal conditionnée pour l'inversion.

Le tableau suivant donne un ordre de grandeur du nombre d'opérations à effectuer, en fonction de n (dimension de A et B).

opérations phases	additions	multiplications	racines carrées
phase préparatoire	$17/3 n^3$	$17/3 n^3$	n^2
phase itérative (1 pas)	$13 n^2$	$13 n^2$	$3n$

Avec des doubles translations d'origine, la convergence de la méthode est quadratique et on a en pratique des temps de calcul de l'ordre de $k.n^3$ avec $k \approx 0.5$ si l'on veut les vecteurs propres et $k \approx 0.2$ sinon (temps de calcul sur un IBM 360, en FORTRAN IV).

2. APPLICATION PRATIQUE DE LA METHODE DEFINIE A MINIMETRIC

On a appliqué QZ sur les versions linéarisées de MINIMETRIC de tailles respectivement $n = 13$, $n = 20$, $n = 83$, dont les coefficients sont donnés en (INSEE (1977)) pour calculer toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres.

2.1. Résultats Numériques : Comparaison de QZ et QR après inversion, pour les maquettes de taille 13 et 20.

N.B. : Les calculs numériques ont été faits en double précision de manière à mieux cerner les problèmes d'instabilité numérique, mais il est clair que la précision demandée par les économistes ne nécessite que la simple précision en règle générale.

En comparant les résultats obtenus par QZ avec ceux donnés en (INSEE (1977)) on constate qu'ils diffèrent à partir de la deuxième ou troisième décimale selon les cas.

La méthode utilisée en (INSEE (1977)) consiste à appliquer QR après une inversion de la matrice B. Or celle-ci est difficile à inverser parce que la décomposition de Gauss, même avec pivotage, conduit à certains pivots très grands et d'autres très petits. Pour vérifier cela on a calculé B^{-1} en utilisant une procédure Harwell, de façon que $\|BB^{-1}-I\|$ soit de l'ordre de 10^{-11} . Cette matrice B^{-1} diffère considérablement de celle qui figure en (INSEE (1977)), ce qui explique les différences obtenues sur les valeurs propres (F. d'Almeida et F. Chatelin (1978)).

La comparaison avec la méthode QR, après inversion de B (B^{-1} étant maintenant calculée avec une précision de l'ordre de 10^{-11}) est résumée dans le tableau suivant :

		QZ	QR
précision		# 10^{-13}	# 10^{-7}
temps de calcul (*)	n = 13	≈ 1.7 s	≈ 1 s
	n = 20	≈ 3.6 s	≈ 3 s
nombre d'additions et multiplications	phase préparatoire	$17/3 n^3$	$5/3 n^3$
	phase itérative (2 pas)	$13 n^2$	$5 n^2$
nombre de racines carrées	phase préparatoire	n^2	n
	phase itérative (1 pas)	3 n	n

Tableau 1

(*) temps de calcul sur un IBM 360 en Fortran IV, version H, les précisions étant mesurées par la norme euclidienne du vecteur résiduel $\|Ax - \lambda Bx\|_2$

2.2. Résultats économiques : Application de QZ à une maquette de taille 83.

Le tableau 2 donne les 20 plus grandes valeurs propres (arrondies à 3 décimales), ainsi que leur module et période. La période d'une valeur propre complexe est donnée par le quotient $2\pi/\omega$ où ω est l'argument de la valeur propre complexe considérée $\omega \in]0, 2\pi[$.

Pour $n = 83$, comme l'indiquent les normes des vecteurs résiduels les valeurs propres ont une précision numérique de l'ordre de 10^{-9} , au moins. Pourtant, la plus grande valeur propre est nettement supérieure à 1 (1.22) ce qui est en contradiction avec les résultats obtenus par simulation pour le modèle non linéarisé. Ayant fait toutes les vérifications possibles à partir des matrices A et B à notre disposition, il ne reste que la possibilité d'une erreur sur les données A et B dans (INSEE (1977)).

Neanmoins on notera que le module de la valeur propre λ_1 croit en même temps que la dimension de la maquette :

$$\lambda_1(13) = 0.838 ; \quad \lambda_1(20) = 0.996 ; \quad \lambda_1(83) = 1.22$$

λ	n = 13				n = 20				n = 83			
	p.réelle	p.imag.	module	période	p.réelle	p.imag.	module	période	p.réelle	p.imag.	module	période
1	0.838	0	0.838	∞	0.995	0.033	0.996	189.5	1.220	0	1.220	∞
2	0.524	0.558	0.766	7.8	0.995	-0.033	0.996	1.0	1.026	0	1.026	∞
3	0.524	-0.558	0.766	1.1	0.991	0	0.991	∞				
4	0.650	0	0.650	∞	0.859	0.045	0.859	120.0	0.959	0.149	0.971	40.8
5	0.642	0	0.642	∞	0.859	-0.045	0.859	1.0	0.959	-0.149	0.971	1.0
6	-0.163	0.060	0.173	2.3	0.850	0	0.850	∞	0.892	0	0.892	∞
7	-0.163	-0.060	0.173	1.8	0.556	0.073	0.561	48.1	0.698	0.507	0.862	10.0
8	0.004	0.136	0.136	4.1	0.556	-0.073	0.561	1.0	0.698	-0.507	0.862	1.1
9	0.004	-0.138	0.138	1.3	0.162	0.267	0.312	6.1	0.416	0.736	0.846	5.9
10	0.001	0	0.001	∞	0.162	-0.267	0.312	1.2	0.416	-0.736	0.846	1.2
11	0.000	0	0.000		-0.244	0.038	0.247	2.1	0.834	0.035	0.835	151.8
12	0.000	0	0.000		-0.244	-0.038	0.247	1.9	0.834	-0.035	0.835	1.0
13	0.000	0	0.000		-0.055	0.221	0.228	3.5	0.119	0.804	0.812	4.4
14					-0.055	-0.221	0.228	1.4	0.119	-0.804	0.812	1.3
15					-0.005	0.049	0.049	3.8	-0.781	0	0.781	∞
16					-0.005	-0.049	0.049	1.4	-0.704	0.280	0.757	2.3
17					0.000	0	0.000		0.704	-0.280	0.757	1.8
18					0.000	0	0.000		-0.191	0.732	0.756	3.4
19					0.000	0	0.000		-0.191	0.732	0.756	1.4
20					0.000	0	0.000		-0.497	0.520	0.720	2.7
									-0.497	-520	0.720	1.6

Temps de calcul 1 mn 57 s (IBM 360)
 précision # 10⁻⁹

TABEAU 2

Distribution des 20 plus grandes valeurs propres (en module) de MINIMETRIC de dimension 83. Les valeurs propres λ_{21} à λ_{83} se trouvent dans le cercle hachuré.

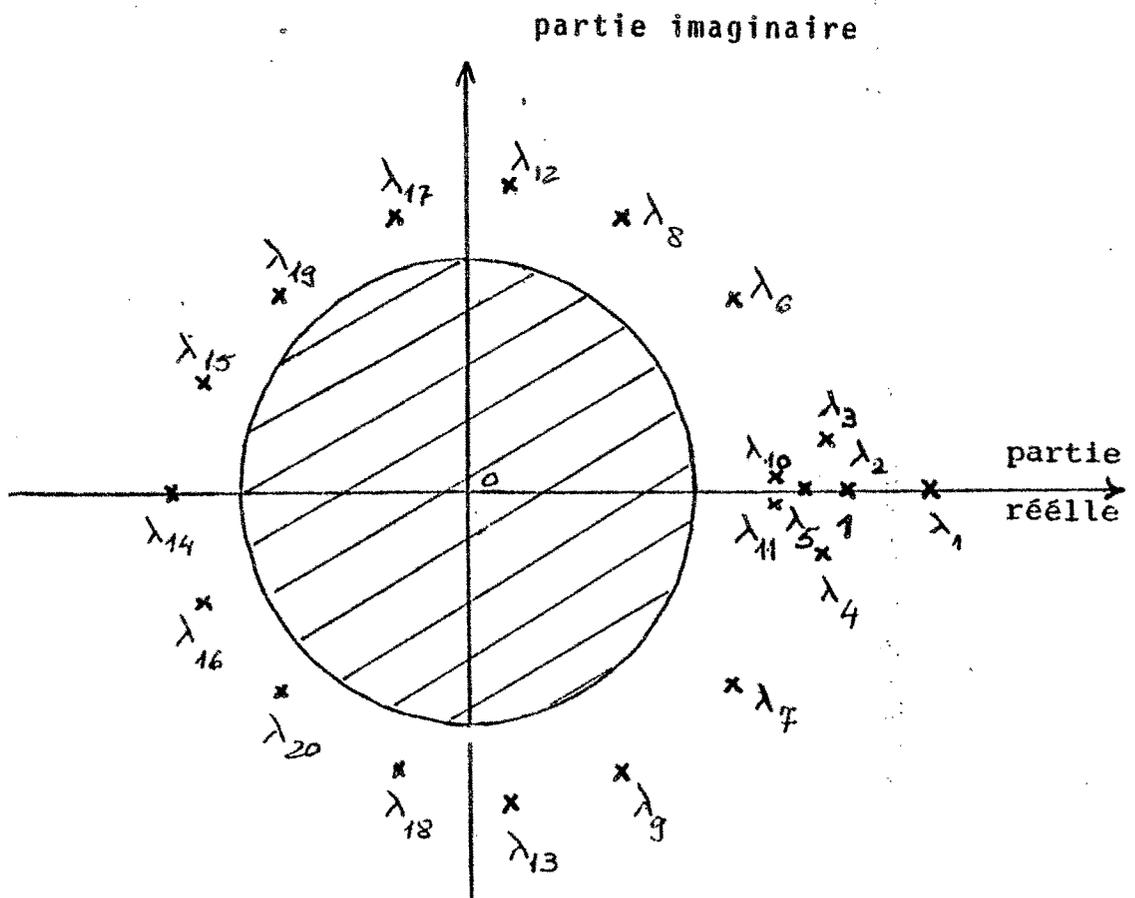


Figure 1

2.3. Chocs de structure

Pour préciser l'influence de certaines variables sur les valeurs propres dominantes on a annulé successivement les colonnes des coefficients de chacune de ces variables sur les matrices M et N de la formule (1) et on calcule les nouvelles valeurs propres (Deleau et Malgrange (1975)).

Sur MINIMETRIC (n = 83) on a testé de cette façon les variables suivantes :

- DENS - demandes d'emplois non satisfaites
- EF - effectifs des entreprises non financières non agricoles
- OENS - offres d'emplois non satisfaites
- X - production interne brute : PIB
- PX - prix de la PIB
- PC - prix à l'utilisation

et les variables retardées X_{-1} , PX_{-1} , PX_{-2} , PX_{-3} .

Les différences entre les valeurs propres originales et celles ainsi obtenues sont données dans le tableau 3.

variables à "annuler"	Différences entre les valeurs propres				
	$ \lambda_1 - \bar{\lambda}_1 $	$ \lambda_2 - \bar{\lambda}_2 $	$ \lambda_3 - \bar{\lambda}_3 $	$ \lambda_4 - \bar{\lambda}_4 $	$ \lambda_5 - \bar{\lambda}_5 $
EP	0.21	0.10	0.00	0.12	0.12
DENS	0.16	0.07	0.00	0.07	0.07
X	0.16	0.00	0.00	0.11	0.11
OENS	0.05	0.00	0.00	0.01	0.01
PX	0.09	0.03	0.17	0.03	0.17
PC	0.09	0.04	0.18	0.02	0.10
X_{-1}	0.12	0.00	0.00	0.04	0.04
PX_{-1}	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
PX_{-2}	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
PX_{-3}	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 3

Ceci vient confirmer l'importance des variables EF, DENS, X₀ qui sont les variables de bouclage et qui jouent donc un rôle très important lors de la résolution du modèle.

CHAPITRE III

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA STABILITÉ DES GRANDS MODÈLES

Pour résoudre le problème (2) dans le cas des grands modèles il est hors de question de calculer tous les éléments propres. On s'intéresse au calcul de quelques valeurs propres de plus grand module et vecteurs propres associés. Ces valeurs propres sont dites dominantes.

On propose l'extension des méthodes itératives de résolution du problème (3) au problème généralisé sous la forme (2) en utilisant explicitement le caractère creux des matrices non symétriques A et B.

La généralisation des algorithmes (de la puissance et des itérations simultanées) au problème (2) a été faite dans deux directions :

- a) Dans le cas général où l'on ne dispose sur la structure de A et B d'aucune autre information que leur caractère très creux.
- b) Dans le cas des modèles macro-économiques où B a la forme "cheminée", déjà obtenue pour la résolution du modèle (cf. Gabay et al. (1978) et Nepomiastchy et al. (1978)).

On suppose les valeurs propres de (2) ordonnées par module décroissant :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

1. GENERALISATION DE LA METHODE DE LA PUISSANCE

Cette première approche de résolution du problème (2) suppose que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Supposons donné le vecteur initial x_0 de norme unité ($\|x_0\|_2 = 1$), alors l'itération généralisée est

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{k-1} = A x_{k-1} \\ \bar{x}_k \text{ solution de : (5) } B \bar{x}_k = Y_{k-1} \\ x_k = \frac{\bar{x}_k}{\|\bar{x}_k\|} \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Si x_0 n'est pas orthogonal au vecteur propre à gauche de $B^{-1}A$, associé à λ_1 , la suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur propre associé à λ_1 et le quotient $\frac{\bar{x}_k(i)}{x_{k-1}(i)}$ converge vers λ_1 ; la vitesse de convergence est de l'ordre de $0\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$

Cette vitesse peut être accélérée en utilisant des translations d'origine (Wilkinson 1965) pour certaines distributions des valeurs propres.

Etant donné que la distribution initiale des valeurs propres du problème initial est symétrique par rapport à l'axe réel, on prend des translations d'origine réelles p et on considère le problème équivalent à (2) suivant :

$$(6) \quad \underbrace{(A - pB)}_{\sim A} x = \underbrace{(\lambda - p)}_{\sim \lambda} B x$$

Si $\tilde{\lambda}_1 = |\lambda_1 - p| > |\lambda_i - p|$, $i = 2, \dots, n$ la méthode de la puissance conduite sur \tilde{A} donnera la valeur propre $\tilde{\lambda}_1$ et on obtient facilement $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 + p$, la vitesse de convergence étant, maintenant, dominée par $\left(\frac{|\tilde{\lambda}_2|}{|\lambda_1 - p|} \right)^k$.

En pratique, dans le cas général de valeurs propres complexes (on suppose λ_1 réelle) la détermination de p n'est pas réalisable que si on connaît la distribution approximative des valeurs propres pour assurer que $|\lambda_1 - p| > |\lambda_i - p|$, $i = 2, \dots, n$.

De plus la méthode de la puissance ne sera pas applicable si on a une paire de valeurs propres complexes conjuguées de plus grand module, ce qu'on n'a pas trouvé fréquemment sur les exemples économétriques étudiés, mais c'est parfaitement possible.

Pour pallier ces difficultés, on présente la généralisation de la méthode des itérations simultanées sur (3) au problème (2) au chapitre III.2.

Soit P le produit des permutations de lignes \bar{P} et \bar{P}_i ($i = 1, \dots, k$) et Q le produit des permutations de colonnes \bar{Q} et \bar{Q}_i ($i = 1, \dots, k$) alors $P B Q = L U$ et on résoud le système :

$$(5') \quad \underbrace{P B Q}_{L U} z_k = P y_{k-1}$$

au lieu de (5), dont la solution \bar{x}_k est obtenue en appliquant la permutation Q à z_k : $\bar{x}_k = Q z_k$.

La solution \bar{x}_k de (5) étant obtenue à partir de la factorisation de B en L/U , on normalise ce vecteur pour obtenir x_k et on itère comme en (4).

1.2. Méthode itérative par blocs (en utilisant la forme "cheminée" de B).

Nous considérons maintenant le cas où B a été permutée de façon à être sous la forme bloc-quasi-triangulaire suivante :

0	0	0	0	p } prologue	
B_1	0	0	0		
B_2	B_3	B_4	0		q } coeur
B_5	B_6	B_7	0		
B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	r } bouclage	
B_8	B_9	B_{10}	0		s } épilogue

$$p + q + r + s = n$$

Ceci est fait par permutation de la matrice d'incidence du modèle (1) (cf. Gabay et al (1978) et Nepomiastchy et al (1978))

D'abord, le prologue du modèle est isolé, en choisissant les lignes qui n'ont d'autres entrées non nulles que la diagonale et, en permutant également les colonnes équivalentes. Ensuite, sur la partie restante l'épilogue est choisi en prenant les colonnes qui n'ont d'autres entrées non nulles que la diagonale pour les mettre à la fin de la partie de la matrice en considération, et l'on procèdera de façon analogue pour les lignes.

Il reste à séparer les équations de bouclage du coeur du modèle : on considère le graphe orienté, associé à la matrice d'incidence, à laquelle on a enlevé les lignes et colonnes correspondantes au prologue et à l'épilogue.

Les noeuds de ce graphe sont les variables x_i^t , $i = 1, 2, \dots, n$ non comprises dans le prologue ni dans l'épilogue du modèle.

On appelle prédécesseur d'un noeud x_i^t tout le noeud x_j^t tel qu'il existe un chemin de longueur finie allant de x_j^t à x_i^t ; on appelle successeur de x_i^t tout le noeud x_k^t tel que x_i^t soit prédécesseur de x_k^t . Alors les variables de bouclage sont celles qui correspondent à des noeuds ayant au moins un successeur qui est aussi son prédécesseur. Les autres variables de la matrice réduite appartiennent au coeur du modèle.

Les équations et variables sont renumérotées de façon à ce qu'une équation définissant un prédécesseur d'une variable du coeur (dans l'ordre initial) précède l'équation définissant cette variable.

Les équations définissant les variables de bouclage sont aussi ramenées à la fin de la matrice réduite.

Le nouvel ordre des lignes et colonnes de B ainsi déterminé définit les permutations à appliquer aussi à la matrice A, pour avoir un problème équivalent de valeurs propres, dont la matrice du second membre a la forme "cheminée".

Les blocs diagonaux sont carrés, B_1 , B_3 et B_{11} sont triangulaires inférieurs et tous les blocs non nuls sont très creux sauf B_4 et B_7 qui peuvent être pleins à 50 %. A est singulière et creuse.

On itère encore suivant le schéma (4) mais pour la résolution de (5) on utilise une méthode par blocs adaptée à la structure particulière de B (cf. d'Almeida (1979)).

Les facteurs triangulaires de B (par blocs) sont alors :

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ \hline B_5 & B_6 & D_1 & 0 \\ \hline B_8 & B_9 & E & B_{11} \\ \hline \end{array} \quad \text{et } U = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & D_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ \hline \end{array}$$

où

$$C = B_3^{-1} \cdot B_4$$

$$D = B_7 - B_6 \cdot B_3^{-1} \cdot B_4 = D_1 \cdot D_2$$

$$E = B_{10} - B_9 \cdot B_3^{-1} \cdot B_4$$

Les matrices C, D et E sont des produits de blocs de B et de l'inverse du bloc triangulaire B_3 .

La décomposition en facteurs triangulaires de B se réduit à celle de la matrice $D = B_7 - B_6 \cdot B_3^{-1} \cdot B_4$ (pleine) dont il faudra trouver les facteurs D_1 et D_2 et dont la taille r est beaucoup plus petite que celle de B. (Par exemple, pour METRIC dont les matrices A et B sont d'ordre 751, les blocs diagonaux sont d'ordre respectivement 37, 284, 29 et 401, donc $r = 29$).

Supposons les vecteurs x et y partitionnés à l'aide du partitionnement des lignes ou colonnes de B .

Le système $Bx = y$ est alors équivalent à :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & & & \\ \hline B_2 & B_3 & & \\ \hline B_5 & B_6 & D & \\ \hline B_8 & B_9 & E & B_{11} \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 & 0 \\ \hline & I & C & 0 \\ \hline & & I & 0 \\ \hline & & & I \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 B_1 x^1 &= y^1 \\
 B_3 x^2 &= y^2 - B_2 x^1 \\
 D x^3 &= y^3 - B_5 x^1 - B_6 x^2 \\
 x^2 &= x^2 - C x^3 \\
 B_{11} x^4 &= y^4 - B_8 x^1 - B_9 x^2 - B_{10} x^3
 \end{aligned}$$

La résolution de $Bx = y$ se réduit donc à la résolution de deux systèmes triangulaires de matrices B_1 et B_{11} , à l'inversion (par résolution de q systèmes triangulaires inférieurs de pivots 1) de B_3 et à la résolution du système de matrice D par décomposition de Gauss.

Ceci montre tout l'intérêt de la forme cheminée pour B : les problèmes d'instabilité numérique qu'on peut éventuellement rencontrer lors de l'inversion de la matrice B , de taille 751 sont reportés sur le système annexe de matrice D de taille 29. Et cette taille est suffisamment petite pour que le système puisse être résolu avec toute la précision voulue.

1.3. Résultats numériques

1.3.1. - L'ensemble de modules SPDITER réalise la méthode de la puissance itérée dans le cas où A et B n'ont pas de structure particulière, suivant la présentation du paragraphe 1.1.

Pour les tests sur un exemple connu ayant toutes les propriétés structurelles des modèles économétriques on a utilisé la maquette MINIMETRIC de dimension 83 dont les valeurs propres ont été calculées en II par la méthode QZ (valeur de λ_1 calculée par QZ : 1.220352249, avec un résidu de 10^{-9}).

Valeur de n	83	83
Valeur propre dominante	1.22035	1.22035
Norme euclidienne du résidu	0.7×10^{-5}	10^{-5}
Valeur de n(*)	0.1	0.25
Nombre d'itérations	49	52

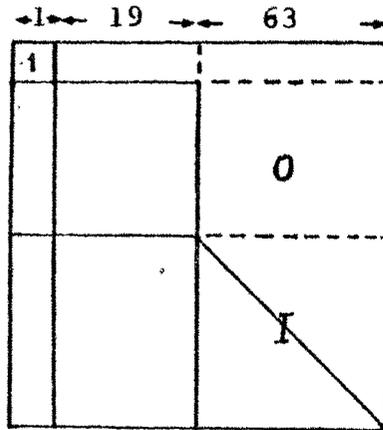
Tableau 4

(*) paramètre traduisant le poids relatif de la stabilité et du caractère creux dans la résolution des systèmes (5), $0 < u < 1$.

Autres résultats :

* Les dimensions des blocs obtenus sont comparées avec les dimensions des blocs de la forme cheminée dans le schéma suivant :

a) forme bloc-triangulaire



b) forme cheminée

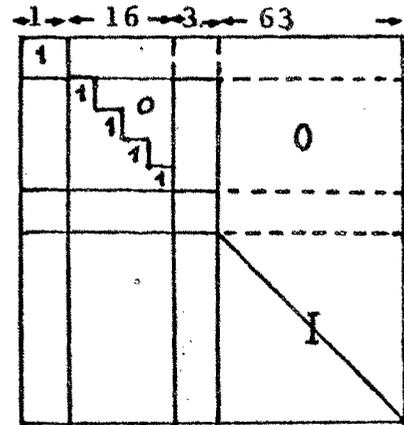


Figure 2

* Le temps de calcul total est de l'ordre de 4s sur un IBM 360/67

* Comportement des translations d'origine sur cet exemple test

Valeur approchée de λ_1 après 8 itérations : 1.15

Translation d'origine obtenue à partir de cette valeur :

1.05 (proche de λ_2)

Valeur proche approchée de la valeur propre vers laquelle la méthode converge : -0.60 (valeur approchée de la plus petite valeur propre λ_n).

Translation d'origine obtenue à partir des valeurs approchées de λ_2 et λ_n : 0.23 (proche de $(\lambda_2 + \lambda_n)/2$)

Valeur approchée de la valeur propre λ_1 : 1.21

Nouvelle vitesse de convergence : $\frac{\lambda_1 - 0.23}{\lambda_2 - 0.23}$

Etant donnée la distribution particulière des valeurs propres de cet exemple l'accélération par translations d'origine n'est pas avantageuse.

1.3.2. - L'ensemble de modules XAMINE réalise la méthode de la puissance itérée dans le cas où B a la forme "cheminée", suivant la présentation faite au paragraphe 1.2.

* Les résultats des tests effectués sur MINIMETRIC de dimension 83 sont résumés dans le tableau suivant :

Valeur de n	83	83
Valeur propre dominante	1.22035	1.22036
Norme euclidienne du résidu	0.9×10^{-5}	0.3×10^{-3}
Nombre d'itérations	51	35

Tableau 5

* Le temps de calcul global est de l'ordre de 11 s sur un HB68, système MULTICS. Les temps partiels étant :

temps de calcul de C et D : ≈ 0.087 s

temps de décomposition de B

en facteurs triangulaires : ≈ 0.004 s

temps moyen de chaque itération : 0.158 s

* Evolution de la norme du vecteur résiduel en fonction du nombre d'itérations:

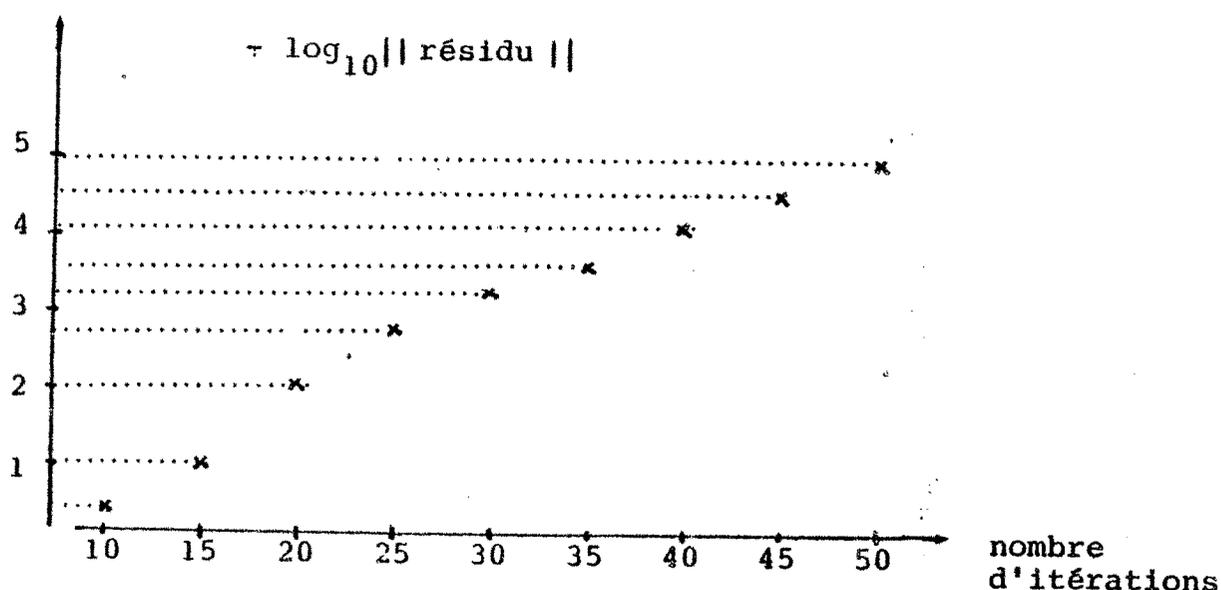


Figure 3

Ces résultats indiquent une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{1}{10^{0.1}} \approx 0.8$ ce qui est d'accord avec la vitesse théorique de convergence : $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \approx 0.8$

* Les résultats des tests effectués sur une version provisoire de METRIC, de dimension 751 sont résumés dans le tableau 6.

Valeur de	751
Valeur propre dominante	2.3711
Norme euclidienne du résidu	0.5×10^{-5}
Nombre d'itérations	19
Temps global de calcul	21s(*)

Tableau 6

(*) Temps de calcul sur un HB 68/MULTICS . Le temps d'initialisation de C et D et de décomposition de D a été de 2 s et le temps moyen de chaque itération de 0.9 s

2 - GENERALISATION DE LA METHODE DES ITERATIONS SIMULTANEEES

Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, la méthode de la puissance ne convergera pas. On propose d'utiliser alors une extension de la méthode de la puissance où l'on itère sur plusieurs, disons v , vecteurs, et on obtient des approximations des v valeurs propres dominantes.

Si $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_v| > |\lambda_{v+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, la vitesse de convergences est alors réglée par $\left| \frac{\lambda_{v+2}}{\lambda_i} \right|$ pour $i = 1, 2, \dots, v$

Pour le problème de valeurs propres simple (3), il existe plusieurs variantes de la méthode d'itération simultanées (cf. G. Stewart (1978), W. Stewart (1976)).

La variante proposée par G.W. Stewart en (Stewart (1978)) qui nous semble la plus performante peut être adaptée de la façon suivante au problème (2):

2.1. Algorithme

On se donne v vecteurs de départ, orthonormés; ce sont les vecteurs colonnes de la matrice Q_0 de taille $n \times v$. Les v vecteurs itérés, au pas k , forment les matrices Y_k ou Q_k (orthonormale) de taille $n \times v$.

Le passage du pas $k-1$ au pas k est le suivant :

1. Calcul de Y_k solution de

$$(7) \quad B Y_k = A Q_{k-1}$$

2. Orthonormalisation de $Y_k = Q_k R_k$, où R_k est une matrice triangulaire supérieure de taille $v \times v$

$$Q_k \leftarrow Y_k R_k^{-1}$$

3. Calcul de Z_k solution de

$$(8) \quad B Z_k = A Q_k$$

4. Calcul de $C_k = Q_k^T Z_k$, de taille $v \times v$

5. Calcul des éléments propres de C_k par la méthode QR, soit :

$$Q^T C_k Q = T_k, \quad T_k \text{ quasi triangulaire}$$

6. $Q_k \leftarrow Q_k \cdot Q$

La résolution des v systèmes linéaires de n équations à n inconnues que représentent les équations (7) et (8) se fait par l'une des deux méthodes exposées pour la résolution de (5) au paragraphe 1.1. et au paragraphe 1.2. de ce chapitre.

Les phases 3, 4 et 5 de calcul de C_k et de ses éléments propres peuvent ne pas être effectuées à chaque itération. De même pour la phase 2, d'orthonormalisation.

2.2. Résultats numériques

L'ensemble de modules ITERSIM réalise la méthode des itérations simultanées généralisée au problème (2) dans le cas où B a la forme "cheminée".

Quelques résultats des tests effectués sur MINIMETRIC (dimension 83) sont résumés dans les tableaux suivants :

Valeur de n	83
Valeur de v	5
1ère valeur propre dominante	1.22035
Norme du résidu	0.9×10^{-5}
Nombre total d'itérations	33
Nombre de fois qu'on calcule les valeurs propres de C	9
Temps global (HB 68)	15 s

Tableau 7 : Calcul d'une valeur propre dominante

N.B. : Les valeurs propres dominantes, connues par l'application de QZ, ayant approximativement les modules suivants :

$$|\lambda_1| \approx 1.22 ; |\lambda_2| \approx 1.03 ; |\lambda_3| \approx 0.97 ; |\lambda_4| \approx 0.97$$

$$|\lambda_5| \approx 0.89 ; |\lambda_6| \approx 0.86 ,$$

on confirme que la vitesse de convergence de cette itération est 0.7 (approximativement).

Valeur de n	83
Valeur de v	7
1ère valeur propre	1.2203
2ème valeur propre	1.0448
3ème valeur propre	$0.9003+0.1041i$
1ère norme de résidu	10^{-4}
2ème norme de résidu	10^{-2}
3ème norme de résidu	10^{-2}
Nombre total d'itérations	41
Nombre de calculs des valeurs propres de C	7
Temps global	

Tableau 8 : Calcul de trois valeurs propres dominantes

N.B. La vitesse de convergence des 3 valeurs propres dominantes est proportionnelle à $\left| \frac{\lambda_{v+1}}{\lambda_1} \right|^k \leq \left| \frac{\lambda_8}{\lambda_3} \right|^k = \left(\frac{0.85}{0.97} \right)^k \approx 0.88$
 $i=1,3$

Les résultats de l'application de ce module à une version provisoire de METRIC sont résumés dans le tableau suivant :

Valeur de n	751
Valeur de v	5
Valeur propre dominante	2.37111
Norme du résidu	0.9×10^{-5}
Nombre total d'itérations	13
Nombre de fois qu'on calcule les valeurs propres de C	4
Temps global (HB 68)	28.3 s

Tableau 9

3. DECOMPOSITION SPECTRALE INCOMPLETE

Comme on a vu au chapitre I.2 l'évolution autonome des écarts des variables par rapport à une trajectoire de référence, est donnée par la formule de décomposition spectrale faisant intervenir toutes les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Dans le cas des grands modèles, où l'on ne connaît que les valeurs propres dominantes et les vecteurs propres associés, voyons sous quelle condition on peut tronquer cette formule pour obtenir des approximations des écarts à la période $t+m$ (Δx_{t+m}) conséquence d'une perturbation initiale Δx_t de la trajectoire de référence $x_{t-1}^*, x_t^*, \dots, x_{t+N}^*$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres ordonnées par module décroissant et $p_1 \dots p_n$ les vecteurs propres à droite associés. On a supposé $B^{-1}A$ diagonalisable et donc, si P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs p_1, \dots, p_n et P^{-1} son inverse, on a $B^{-1}A = P \Delta P^{-1}$ où Δ est la matrice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Supposons qu'on a obtenu les v valeurs propres dominantes et vecteurs propres associés et considérons les partitions suivantes :

$$P = [P_a | P_b] \quad \text{où } P_a = [p_1, \dots, p_v] \quad \text{et } P_b = [p_{v+1}, \dots, p_n]$$

$$\Delta = [\Delta_a | \Delta_b], \quad \text{où } \Delta_a = [\lambda_1, \dots, \lambda_v] \quad \text{et } \Delta_b = [\lambda_{v+1}, \dots, \lambda_n]$$

et

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix}, \quad \text{où } Y_a = \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ \vdots \\ Y_v^T \end{bmatrix} \quad \text{et } Y_b = \begin{bmatrix} Y_{v+1}^T \\ \vdots \\ Y_n^T \end{bmatrix}, \quad \text{est la matrice}$$

dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche.

Dans le cas de METRIC, il y a un ensemble de μ valeurs propres très voisines de 0, en module, séparées du reste du spectre tel que, si $\nu = n - \mu$, l'erreur relative $\frac{\epsilon}{\|P_a \Delta_a^m Y_a\|_\infty}$ sera négligeable.

4. LE CONDITIONNEMENT DU PROBLEME GENERALISE DE VALEURS PROPRES

Les valeurs propres et vecteurs propres de (2) calculés, due aux erreurs d'arrondi et aux erreurs innérentes aux méthodes numériques sont en fait les éléments propres du problème perturbé

$$(A+E)x = \lambda (B+F)x, \quad x \neq 0$$

où $\|E\|$ et $\|F\|$ sont petites.

On cherche à voir les conséquences de ces perturbations sur la précision des valeurs propres calculées, en particulier si B est proche de la singularité.

4.1. Nombre de conditionnement d'une valeur propre λ , simple de (2)

Soit λ une valeur propre simple de (2) et p_1 et y_1 les vecteurs propres à droite et à gauche respectivement, correspondants à λ et normalisés, de façon à ce que $\|p_1\|_2 = 1$ et $\|y_1\|_2 = 1$. Si $\alpha = y_1^H A p_1$ et $\beta = y_1^H B p_1$ alors $\lambda = \alpha/\beta$ et $\nu^{-1} = (\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2})^{-1}$ est un nombre de conditionnement de λ , c'est-à-dire, il mesure l'influence des perturbations de A et B sur λ (cf. Stewart (1975)).

Si $Bp_1 \neq 0$, $v^{-1} = \frac{k}{\rho}$ où k est la sécante de l'angle fait par y_1 et Bp_1 et $\rho = \sqrt{\|Ap_1\|^2 + \|Bp_1\|^2}$.

Donc, si le vecteur propre à gauche forme un angle petit avec $\{Bp_1\}^\perp$ (espace orthogonal du sous-espace engendré par Bp_1) alors λ est mal conditionné.

4.2. Influence de la presque singularité de B sur le conditionnement des valeurs propres

Si B est presque singulière, B est mal conditionnée pour l'inversion et une petite perturbation F de B peut entraîner une forte perturbation de l'inverse de B (soit H).. On aurait donc :

$(B+F) \bar{B}^{-1} = I \Leftrightarrow \bar{B}^{-1} = B^{-1} + H$, où $\|H\|_2$ peut être grande.

Résoudre numériquement le problème (2) avec B presque singulière correspond à résoudre exactement le problème perturbé :

$$(2') \quad (A+E) x' = \lambda' (B+F) x'$$

où $\|E\|_2, \|F\|_2$ sont petites, B étant presque singulière.

Les méthodes itératives numériques, considérées précédemment impliquent à chaque itération, la résolution de systèmes d'équations de matrice B+F.

Soit λ' la valeur propre calculée du problème (2'). Si les perturbations E et F ont des normes suffisamment petites alors :

$$\lambda' = \frac{\alpha + y_1^H E p_1}{\beta + y_1^H F p_1}, \text{ où } \alpha = y_1^H A p_1 \text{ et } \beta = y_1^H B p_1$$

Définition : Etant données $\lambda_1 = \alpha_1/\beta_1$ et $\lambda_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$
 et $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$, $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$, la distance
 chordale entre λ_1 et λ_2 est :

$$\chi(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{|\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1|}{\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2} + \sqrt{|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2}}$$

Alors (cf. Stewart (1975)),

$$\chi(\lambda, \lambda') \leq \frac{\cos\theta |y_1^H E p_1| + \sin\theta |y_1^H F p_1|}{v - \varepsilon}$$

$$\text{où } v = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \theta = \arctg \lambda, \varepsilon = \sqrt{|y_1^H E p_1|^2 + |y_1^H F p_1|^2}$$

Donc, si v est grand, λ est bien conditionnée et ne sera pas très affectée par les perturbations sur A et B que les erreurs d'arrondi introduisent.

Si B est proche de la singularité, les erreurs d'arrondi sur B pourront entraîner une forte perturbation des solutions des systèmes à résoudre à chaque itération, et dans ce cas, la résolution numérique de (2) correspond à la résolution exacte d'un problème

$$(2'') \quad (A+E)x'' = \lambda''(B+H)x''$$

où $\|H\|_2$ peut être non négligeable et dans ce cas, λ' ne tend pas vers λ .

Dans le cas de QZ, où l'on n'a pas de résolution de systèmes de matrice B à résoudre, c'est à la résolution d'un problème du type (2') que correspond la résolution numérique de (2), et donc, si λ est bien conditionnée, la presque singularité de B ne l'affecte pas.

N.B. : Sur les versions de METRIC et MINIMETRIC connues, le déterminant de B est différent de 0 :

<u>n</u>	<u>déterminant</u>
13	0.47
20	0.90
83	0.83
751	0.60

CONCLUSION

On peut conclure, en ce qui concerne l'analyse dynamique des modèles macroéconomiques, que pour les modèles réduits il est possible d'obtenir toutes les valeurs propres et vecteurs propres avec une grande précision et indépendamment de la singularité éventuelle des deux matrices, en employant la méthode QZ.

Pour les gros modèles, on peut obtenir les valeurs propres dominantes et les vecteurs propres associés par des méthodes itératives.

On constate que la forme cheminée de la matrice B est bien adaptée à l'application de méthodes itératives de calcul de valeurs propres du problème généralisé, car elle permet l'utilisation de versions par blocs de ces méthodes qui sont plus rapides plus stables et demandent moins de place mémoire.

Il serait aussi intéressant d'adapter la méthode d'Arnoldi (Saad (1980)) à ce problème généralisé, en utilisant la forme cheminée de B pour résoudre par blocs les systèmes linéaires de matrice B qui y interviennent.

A N N E X E

P L A N

* Caractérisation des sous-programmes FORTRAN correspondant aux méthodes décrites.

- A. Routine QZ : méthode QZ (cf. chapitre II)
- B. Routine SPDITER : méthode de la puissance dans le cas de structure quelconque pour les matrices A et B (cf. chapitre III.1.1.)
- C. Routine XAMINE : méthode de la puissance dans le cas où la matrice B est donnée sous la forme cheminée (cf. chapitre III.1.2.)
- D. Routine ITERSIM : méthode des itérations simultanées dans le cas où la matrice B est sous la forme cheminée (cf. chapitre III.2)

Pour chacune de ces routines on donne les caractéristiques suivantes :

- 1°) Fonction
- 2°) Arguments
- 3°) Messages d'erreur
- 4°) Blocs COMMON
- 5°) Sous-programmes appelés
- 6°) Méthode et bibliographie

* Exemples de séquences d'appel de ces sous-programmes.

A - SOUS-PROGRAMME QZ

1. FONCTION

Calcule toutes les valeurs propres et en option les vecteurs propres du problème :

$Ax = \lambda Bx$, A et B matrices réelles carrées quelconques par la méthode QZ.

2. APPEL ET ARGUMENTS

CALL QZ (ND, N, A, B, EPS, ALFR, ALFI, BETA, ITER, WANTX, X)

où

- ND est le nombre de lignes de A et B dans la déclaration DIMENSION du programme appelant.
- N est l'ordre du problème (dimension du vecteur d'état)
- A est une matrice réelle (celle du premier membre)
- B est la matrice réelle du second membre
(A et B sont changés par la routine)
- EPS est la précision machine
- ALFR
ALFI sont deux vecteurs réels de dimension N qui à la sortie contiennent, en position i, la partie réelle (respectivement imaginaire) du numérateur de la ième valeur propre).
- BETA vecteur réel de dimension N qui contiendra à la sortie en position i le dénominateur de la valeur propre ième
- ITER vecteur entier qui en position i contiendra le nombre d'itérations nécessaires pour trouver la ième valeur propre
(ITER(I) = -1 si la ième valeur propre n'a pas été trouvée au bout de 30 itérations.
- WANTX variable logique qui doit être TRUE si l'on veut les vecteurs propres et FALSE sinon

X matrice de dimension ND,ND dont la colonne i est le vecteur propre ième si ALFI(I) = 0, sinon la colonne i est la partie réelle et la colonne i+1 la partie imaginaire des vecteurs propres associés aux valeurs propres i et i+1 qui sont complexes conjuguées.

Paramètres d'entrée non changés par QZ :

N, ND, EPS, WANTX

Paramètres d'entrée changés par QZ :

A, B

Paramètres de sortie :

ALFA, ALFI, BETA, ITER, X

3. MESSAGES D'ERREUR

ITER(I) = -1 si en 30 itérations on n'a pas eu convergence de la ième valeur propre.

4. BLOCS COMMON

Aucun

5. AUTRES SOUS-PROGRAMMES APPELES

QZ est une routine d'appel des routines QZHES, QZIT, QZVAL et QZVEC qui font la réduction préalable de A et B à la forme de Hessenberg et triangulaire, respectivement, l'itération, la résolution des sous-problèmes de taille 2 et le calcul des vecteurs propres, respectivement.

6. METHODE

La méthode employée est la méthode QZ, généralisation de QR au cas d'un problème de la forme $Ax = \lambda Bx$. A et B sont réduites à la forme de Hessenberg et triangulaire, respectivement, par des transformations de Householder.

L'itération sur A et B utilise des réflecteurs de Householder et doubles translations d'origine. Le problème converge alors vers un problème $T_1 x = \lambda T_2 x$ où T_1 est bloc-triangulaire avec des blocs diagonaux de taille non supérieur à 2.

Les sous-problèmes diagonaux sont alors résolus par des transformations de Householder.

Finalement, on peut calculer par itération inverse les vecteurs propres.

Références : Moler et Stewart

Siam Journal of Numer. Anal.

Vol. 10, n° 2, avril 1973

B - SOUS-PROGRAMME SPDITER

1. FONCTION

Calcule la valeur propre dominante et le vecteur propre associé du problème $Ax = \lambda Bx$, où A et B sont deux matrices réelles creuses, par la méthode de la puissance généralisée.

2. APPEL ET ARGUMENTS

CALL SPDITER (N, NZ, BV, LICN, ICN, IRN, AV, LICNA, ICNA, IPA, KO, MAXIT, XO, EPSD, IOK, LAM1, U, XN, B1, Y1, W, ICN1, IRN1, IW, IKEEP)

où les paramètres sont comme suit :

- Paramètres d'entrée :

N Ordre des matrices
NZ Nombre d'éléments différents de 0 dans la matrice B
LICN Dimension de vecteur BV, des valeurs de B, qui doit comprendre l'espace pour mettre les facteurs de la décomposition en L/U. De l'ordre de $4 \cdot NZ$
AV Vecteur réel, de dimension LICNA, des valeurs $\neq 0$ de la matrice A
LICNA dimension de AV = nombre d'éléments $\neq 0$ de A
ICNA vecteur de dimension LICNA, entier, contenant les indices de colonne des éléments correspondants de AV
IPA vecteur entier de dimension N+1 qui contient en position i l'indice de début (en AV) de la ligne i.
 $IPA(N+1) = LICNA+1$
MAXIT Limite supérieure du nombre d'itérations
EPSD précision demandée

- U contrôle de la technique de pivotage de Markowitz
0 < U < 1, si U tend vers 1 la stabilité de la décomposition est privilégiée si U tend vers 0 on évite le remplissage.
- BV vecteur réel de dimension LICN changé par la routine, contenant :
- en entrée les valeurs $\neq 0$ de la matrice B (par lignes) et de l'espace libre
 - en sortie les lignes des blocs hors diagonaux permutes, en début, et les éléments de chaque ligne de L/U, pour tous les blocs diagonaux ; les lignes sont dans l'ordre dans lequel on trouve les pivots.
- ICN vecteur entier de dimension LICN changé par la routine contenant les indices de colonne des éléments correspondants de BV
A la sortie sa structure correspond à celle de BV
- IRN vecteur entier de dimension 2NZ (au moins) changé par la routine, qui contient en position i l'indice de début en BV de la ligne et $IRN(N+1) = NZ+1$. A la sortie il est permuté.
- KO entier changé par la routine qui en entrée est l'indice d'une composante $\neq 0$ de X0

- Paramètres d'entrée-sortie :

- X0 vecteur de dimension N contenant à l'entrée le vecteur de départ de l'itération (donné) et en sortie le vecteur propre si IOK = 0

- Paramètres de sortie :

- IOK paramètre entier de contrôle
= 0 si tout va bien
= -1 si la décomposition n'a pas été possible

- = 2 si la décomposition est instable
(changer U)
- = 3 si on a eu MAXIT itérations sans convergence
- = 4 si l'on tombe sur un vecteur itéré nul
(changer X0)

LAMI réel égal à la valeur propre si IOK = 0

- Vecteurs de travail

- XN vecteur réel de dimension N,
 - B1 vecteur réel de dimension NZ
 - ICN1 vecteur entier de dimension NZ
 - IRN1 vecteur entier de dimension N+1
 - Y1 vecteur réel de dimension N, sert à garder le produit de B par X0 à chaque itération
 - W vecteur réel de dimension N utilisé dans la décomposition
 - IW vecteur entier de dimension 8*N ou tableau de dimension (N,8)
 - IKEEP tableau de dimension (N,5) utilisé dans la décomposition et résolution, dont les colonnes après décomposition ont la signification suivante :
- 1ère - longueur des lignes des blocs diagonaux
2ème - permutation : la ligne IKEEP(i,2) au départ devient la ligne i
3ème - même chose pour les colonnes
4ème - longueur de la partie en L de la ligne i d'un bloc diagonal
5ème - longueur des lignes du bloc hors diagonal
IKEEP(1,5) = -1 s'il y a un seul bloc.

} gardent une copie de BV, ICN, IRN initiaux

Note 1 : ces vecteurs sont en paramètres uniquement pour avoir des dimensions ajustables

Note 2 : dans la version double précision, toutes les variables réelles sont déclarées en double précision.

3. MESSAGES D'ERREUR

IOK \neq 0 indique une erreur comme défini en "Paramètres de sortie"

4. BLOCS COMMON

Il n'y a aucun bloc COMMON à déclarer dans le programme d'appel.

5. SOUS-PROGRAMMES APPELES

Cette routine appelle les sous-programmes Harwell suivants
MC23AD pour réduire B à la forme bloc triangulaire inférieure
MA28AD pour décomposer B en L/U
MA28CD pour la résolution d'un système dont la matrice creuse a des blocs diagonaux décomposés en L/U par MA28AD
(cf. Duff (1977b), Duff et Reid ((1978), Duff (1978a))

6. METHODE

La méthode employée est une généralisation de la méthode de la puissance itérée, comme décrit au chapitre III.1.1 et qui suit le schéma suivant :

1. copie de B en B1
2. décomposition de B en L/U
3. calcul du produit de A par X_0 , stocké en Y
4. IT = 0
5. itérations :
 - a) résolution de $BX = Y$
 - b) calcul de $\lambda = \frac{X(k)}{X_0(k)}$ (k tel que $X_0(k) \neq 0$)
 - c) calcul de $||X||$
 - d) normalisation de X

e) test d'arrêt et préparation de l'itération suivante

. $X_0 = X$

. Calcul du produit de A par X_0 ; stocké en Y

. Calcul du produit de B par X_0 ; stocké en Y1

. $TESTE = ||Y - \lambda * Y1||$

si $TESTE \leq EPSD$ alors sortie de la routine (solution λ, X_0)

sinon

si $IT > MAXIT$ alors sortie de la routine

sinon $IT = IT+1$

aller à 5)

IT étant le nombre d'itérations réalisées,

MAXIT le nombre maximum d'itérations,

EPSD la précision demandée,

X_0 le vecteur de départ en entrée, le vecteur propre en sortie.

C - SOUS PROGRAMME XAMINE

1. FONCTION

Calcule la valeur propre dominante et le vecteur propre associé de $Ax = \lambda Bx$, où A et B sont deux matrices creuses, B ayant la forme "cheminée", par la méthode de la puissance généralisée.

2. APPEL ET ARGUMENTS

CALL XAMINE(N,AV,ICNA,IPA,B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9,
B10,B11,ICN1,ICN2,ICN3,ICN4,ICN5,ICN6,ICN7,ICN8,ICN9,
ICN10,ICN11,IRNT,X0,LAM1,XN,W,C,D,NB3,NB7,IOK)

- Paramètres d'entrée

N entier égal à l'ordre de la matrice A
AV vecteur réel de dimension $NZA^{(1)}$, des valeurs différentes de 0 dans la matrice A
ICNA vecteur entier de dimension $NZA^{(1)}$ contenant les indices de colonnes des éléments correspondants de AV
IPA vecteur entier de dimension N+1 qui contient en position i l'indice de début en AV de la ligne i :
IPA(N+1) = NZA+1
Bi est un vecteur réel contenant les éléments non nuls du bloc i de B (supposant B partitionnée dans les 11 blocs de la forme "cheminée"),
ICNi est un vecteur entier contenant les indices de colonne des éléments de Bi,
IRNT matrice entière de dimension (N,11) dont chaque colonne i contient les indices de début des lignes du bloc Bi,

(1) voir en "4 Blocs COMMON"

- Paramètres d'entrée-sortie

X0 vecteur réel de dimension N, contenant à l'entrée
 le vecteur de départ de l'itération et en sortie
 le vecteur propre si IOK = 0

- Paramètres de sortie

LAMI réel égal à la valeur propre si IOK = 0
IOK entier
 = 0 si la valeur propre a été obtenue à la préci-
 sion demandée
 = 1 si on a une erreur à la décomposition
 = 2 si on trouve un vecteur d'itération nul
 (changer X0)
 = 3 si on a fait MAXIT itérations sans atteindre
 la précision voulue (MAXIT défini en 4. Blocs
 COMMON)

- Paramètres de travail

XN vecteur réel de dimension N
W vecteur de dimension N réel
C matrice réelle de dimensions (NB3, NB7)
D matrice réelle de dimensions (NB7, NB7)
NB7 (égal à NB(7)) entier
NB3 (égal à NB(3)) entier

Note : Dans la version double précision toutes les variables réelles
sont déclarées en double précision.

3. MESSAGES D'ERREUR

IOK \neq 0 indique une erreur comme définie en "Paramètres
de sortie".

4. BLOCS COMMON

XAMINE utilise un bloc COMMON :

- COMMON/XAM/NZB,NB,NZA,MAXIT,EPST,KO

où :

NZB vecteur entier de dimension 11 qui contient en position i le nombre d'éléments non nuls du bloc Bi
NB vecteur entier de dimension 11 qui contient en position i le nombre de lignes du bloc Bi
NZA entier égal au nombre d'éléments non nuls en A.
MAXIT est le nombre maximum d'itérations permises, en entrée, et le nombre d'itérations réalisées, en sortie
EPST réel égal à la précision demandée
KO entier changé par la routine, contenant en entrée l'indice d'une composante $\neq 0$ de X0

5. ROUTINES AUXILIAIRES UTILISEES PAR XAMINE

- 1) routines standard (dépendant des bibliothèques mathématiques dont on dispose)
 - de décomposition d'une matrice pleine (la matrice D) en facteurs triangulaires. Les essais ont été faits avec FO3 AFF de la bibliothèque NAG sur le HB68
 - résolution d'un système linéaire plein, dont la matrice a été décomposée en L/U. Les essais ont été faits avec FO4AJF de la bibliothèque mathématique NAG, sur le HB 68.
- 2) Routines construites et jointes au sous-programme
 - INIT
 - qui calcule $C = B_3^{-1} B_4$
 - et $D = B_7 - B_6 C$

- MC09
qui calcule $y + Ax$, y , x étant des vecteurs et A une matrice codée sous la forme creuse (cf. MC09AD Harwell)
- MC30CF
qui résoud un système linéaire triangulaire, inférieure dont la matrice est codée sous la forme creuse
- COOL
qui obtient un vecteur colonne d'une matrice codée sous la forme creuse
- MC09BL
qui calcule le produit de B par un vecteur, B étant donnée par ses onze blocs codés sous la forme creuse

6. METHODE

La méthode correspondant à ce sous-programme est une généralisation de la méthode de la puissance itérée dans le cas où B à la forme cheminée, comme décrit au chapitre III.1.2., et suit le schéma suivant :

1. Initialisation de $C = B_3^{-1} B_4$
et $D = B_7 - B_6 C$

(Pour obtenir C on a m systèmes de matrice triangulaire inférieure à résoudre, m étant le nombre de colonnes de B_4 . Pour avoir D , on a à faire m produits d'une matrice creuse par un vecteur).

2. Décomposition L/U de D : $D = D1 . D2$
à l'aide d'une routine standard.

3. Calcul du produit de A par X_0 , stocké en Y

4. IT = 0

5. Itération

a) Résolution de $B_1 X^1 = Y^1$

b) Résolution de $B_3 W = Y^2 - B^2 X^1$

c) Résolution de $D_1 D_2 X^3 = Y^3 - B_5 X^1 - B_6 W$

d) Calcul de $X^2 = W - C X^3$

e) Calcul de $B_{11} X^4 = Y^4 - B_8 X^1 - B_9 X^2 - B_{10} X^3$

f) Calcul de $LAM1 = \frac{X(I)}{X_0(I)}$ (I tel que $X_0(I) \neq 0$)

g) Normalisation de X

h) Préparation de l'itération suivante et test d'arrêt

. $X_0 = X$

. Calcul du produit de A par X_0 , stocké en Y

. Calcul du produit de B par X_0 , stocké en Y1

TEXTE = $||Y-LAM1.Y1||$

Si TESTE < EPSD alors sortie de la routine

sinon

si IT ≥ MAXIT alors sortie de la routine

sinon

IT = IT+1

aller à 5)

D - SOUS-PROGRAMME INTERSIM

1. FONCTION

Calcule les valeurs propres dominantes et vecteurs propres associés du problème $Ax = \lambda Bx$, où A et B sont réelles, creuses et B a la forme cheminée, par une méthode des itérations simultanées généralisée.

2. APPEL ET ARGUMENTS

```
CALL ITERSIM(N, NIU, AV, ICNA, IPA, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8,
B9, B10, B11, ICN1, ICN2, ICN3, ICN4, ICN5, ICN6, ICN7, ICN8, ICN9,
ICN10, ICN11, IRNT, IU, U, X, Y, ERR, ITTOT, IOK, V, WM, IM, C, D, W, IC,
ID)
```

- Paramètres d'entrée

N entier égal à l'ordre du problème (dimension du vecteur d'état)

NIU entier égal au nombre de vecteurs sur lesquels on itère

AV vecteur réel de dimension $NZA^{(1)}$, des valeurs différentes de 0 dans la matrice A

ICNA est un vecteur entier de dimension égale au nombre d'éléments non nuls de A contenant les indices de colonne des éléments non nuls de A

IPA est un vecteur entier de dimension N+1 qui contient en position i l'indice de début, en AV et ICNA, de la ligne i de A et $IPA(N+1)$ est égal au nombre d'éléments non nuls de A plus 1.

(1) défini en 4 Blocs COMMON

- B_i est un vecteur réel contenant les éléments non nuls du bloc i de B (en supposant B sous la forme cheminée)
- ICN_i est un vecteur entier contenant les indices de colonne des éléments de B_i
- $IRNT$ est une matrice entière de dimension (N, IR) dont chaque colonne i contient les indices de début de ligne du bloc B_i
- IU entier égal à la première dimension déclarée de U et V : $IU \geq N$

- Paramètres d'entrée/sortie

- U tableau réel de dimension (IU, NIU) qui contient, en entrée, en colonnes $1, \dots, IS^{(1)}$ les approximations, données, des vecteurs propres, comme vecteurs de départ.
Si $IS^{(1)} = 0$ toutes les colonnes de U sont initialisées par une routine $RANDOM$, standard.
En sortie la colonne i de U ($i=1, \dots, IR$)⁽¹⁾, contient le vecteur propre associé à λ_i si λ_i est réelle, sinon la colonne i contient la partie réelle et la colonne $i+1$ la partie imaginaire des vecteurs propres associés à λ_i et λ_{i+1} , qui sont complexes conjugués.

- Paramètres de sortie

- X vecteur réel de dimension NIU qui contient en sortie la partie réelle des valeurs propres dominantes en composantes $X(1), \dots, X(IR)$ ⁽¹⁾
- Y vecteur réel de dimension NIU qui contient en sortie la partie imaginaire des valeurs propres dominantes, en composantes $Y(1), \dots, Y(IR)$ ⁽¹⁾
- ERR vecteur réel de dimension NIU qui contient en positions 1 à IR les résidus des éléments propres correspondants.

(1) défini en 4. Blocs COMMON

ITTOT entier égal au nombre total d'itérations effectuées
IOK entier égal à 0 si toutes les valeurs propres ont
été obtenues en moins de MAXIT itérations.

- Paramètres de travail

V tableau réel de dimension (IU, NIU)
WM tableau réel de dimension (NIU, 4*NIU)
IM vecteur entier de dimension 2*NIU
C tableau réel de dimension (IC, ID)
D tableau réel de dimension (ID, ID)
W vecteur réel de dimension ID
IC entier égal à NB(3)
ID entier égal à NB(7)

3. MESSAGES D'ERREUR

IOK \neq 0 indique une erreur ou instabilité dans la décomposition de la matrice D définie en III.1.2., ou bien non convergence en MAXIT itérations.

4. BLOCS COMMON

Il y a deux blocs COMMON à déclarer dans le programme d'appel de cette routine :

COMMON /PREIN/IR, IS

où

IR entier égal au nombre de valeurs propres demandées
(IR \leq NIU)

IS entier égal au nombre de vecteurs de départ qui
approchent les vecteurs propres en entrée

COMMON /ITXAM/NZB,NB,NZA,TOL,MAXIT,LMAX

où

NZB est un vecteur entier de dimension 11 contenant les nombres d'éléments non nuls de blocs de B
NB est un vecteur entier de dimension 11 contenant les nombres de lignes des blocs de B
NZA entier égal au nombre d'éléments non nuls en A
TOL réel égal à la précision demandée
MAXIT entier égal au nombre maximum d'itérations qu'on veut exécuter
LMAX entier égal au nombre maximum d'itération entre deux résolutions du problème de valeurs propres $C_n x = \lambda x$ (cf. III.2)

5. ROUTINES AUXILIAIRES

Les routines suivantes sont appelées en ITERSIM

1) Routines standard :

- de décomposition d'une matrice pleine (D) en facteurs triangulaires L et U. Les essais ont été faits avec FO3AFF de la bibliothèque NAG sur un HB68
- de résolution d'un système linéaire plein, dont la matrice a été décomposée en L/U. Les essais ont été faits avec FO4AJF de la bibliothèque NAG sur le HB68

2) Routines construites et jointes à ITERSIM

- INIT - qui calcule $C = B_3^{-1}B_4$ et $D = B_7 - B_6C$ (cf. notations du chapitre III.1.2.)
- MC09 - qui calcule $y+Ax$, y et x étant des vecteurs et A une matrice creuse (cf. MC09A de Harwell)

- MC30CF qui résoud un système linéaire triangulaire inférieur dont la matrice est creuse
- CCOL qui obtient un vecteur colonne d'une matrice codée sous la forme creuse
- MC09BL qui calcule le produit de B par un vecteur, B étant donnée par ses onze blocs codés sous la forme creuse
- XAX routine qui calcule la solution de systèmes du type $Bx = Ay$

6. METHODE

La méthode correspondante à ce sous-programme est une généralisation de la méthode des itérations simultanée dans le cas où B a la forme cheminée, comme décrit au chapitre III.1.

EXAMPLES DE SEQUENCES D'APPEL

Pour l'exemple donné au chapitre I on présente ici la spécification des paramètres pour chacune des séquences d'appel de ces programmes.

```

      A  SOUS-PROGRAMME QZ

      DIMENSION A(10,10),B(10,10),X(10,10),ALFR(6),ALFI(6),BETA(6),ITER(6)
      LOGICAL WANTX

      ZERO=0.0E0
      N=6
      ND=10
      EPS=10.E-8

C  SUPPOSANT QU'ON NE VEUT PAS LES VECTEURS PROPRES....

      WANTX=.FALSE.

C
C  LECTURE DE A ET B
C

      CALL QZ(ND,N,A,B,EPS,ALFR,ALFI,BETA,ITER,WANTX,X)

      WRITE(6,1)(ITER(I),I=1,N)
      DO 2 I=1,N
      WRITE(6,1)I
      IF(BETA(I).EQ.0.0E0)GO TO 4
      BET=1./BETA(I)
      AI=ALFI(I)
      VPI=AI*BET
      VPR=ALFR(I)*BET
      IF(ABS(AI).GT.0.0E0)GO TO 3
      WRITE(6,5)VPR,ZERO,ABS(VPR)
      GO TO 2
3  WRITE(6,5)VPR,VPI,SQRT(VPR*VPR+VPI*VPI)
      GO TO 2
4  WRITE(6,6)
2  CONTINUE

6  FORMAT("  VALEUR PROPRE INFINIE ")
5  FORMAT(3E18.11)
1  FORMAT(10I4)

C

      STOP
      END
```

B SOUS-PROGRAMME SPDITER

DIMENSION BV(40),ICN(40),IRN(7),AV(10),ICNA(10),IPA(7),X0(6),XN(6),
&BI(10),ICNI(10),YI(10),IRNI(7),W(6),IKEEP(6,5),IW(6,8)
REAL LAM1

C CET EXEMPLE NE SERT QU'A ILLUSTRER LA SEQUENCE D'APPEL.LES
C MATRICES NE SONT PAS CREUSES DANS CET EXEMPLE.

DATA X0/0.,1.,4*0./
N=6
NZ=10
LICN=40
LICNA=10
EPSD=1.E-3
MAXIT=50
U=0.1
K0=2

C
C LECTURE DE
C AV=(1.,2.,0.2,1.,1.,2.,1.,1.,1.,1.)
C ICNA=(1,2,3,1,4,5,6,2,3,5)
C IPA=(1,4,6,8,9,10,11)
C BV=(1.,-1.,-2.,1.,-2.,-0.5,1.,1.,1.,1.)
C ICN=(1,2,1,2,3,1,3,4,5,6)
C IRN=(1,3,6,8,9,10,11)
C

CALL SPDITER(N,NZ,BV,LICN,ICN,IRN,AV,LICNA,ICNA,IPA,K0,MAXIT,X0,
&EPSD,I0K,LAM1,U,XN,BI,YI,W,ICNI,IRNI,IW,IKEEP)

IF(I0K.E.0)WRITE(6,100)I0K
WRITE(6,101)(X0(I),I=1,N)
WRITE(6,102)LAM1

C
C FORMATS D'ECRITURE
C

STOP
END

```

C SOUS-PROGRAMME XAMINE

      DIMENSION AV(10),X0(6),XN(6),W(6),ICNA(10),NZB(11),NB(11),IPA(7),
      &C(2,1),D(1,1),B1(5),B2(5),B3(5),B4(5),B5(5),B6(5),B7(5),
      &BB(5),B9(5),B10(5),B11(5),ICN1(5),ICN2(5),ICN3(5),ICN4(5),ICN5(5),ICN6(5),
      &ICN7(5),ICN8(5),ICN9(5),ICN10(5),ICN11(5),IRNT(6,11)
C CET EXEMPLE NE SERT QU'A ILLUSTRER LA SEQUENCE D'APPEL.LES
C MATRICES NE SONT PAS CREUSES DANS CET EXEMPLE.

      COMMON /XAM/NZB,NB,NZA,MAXIT,EPSD,K0

      DATA X0/0.,1.,4*0./
      N=6
      NZA=10
      EPSD=1.E-3
      MAXIT=50
      K0=2

C
C LECTURE DE
C AV=(1.,2.,0.2,1.,1.,2.,1.,1.,1.,1.)
C ICNA=(1,2,3,1,4,5,6,2,3,5)
C IPA=(1,4,6,8,9,10,11)
C NB=(0,2,2,2,1,1,1,0,0,0,3)
C NZB=(0,0,3,2,0,1,1,0,0,0,3)
C IRNT=(0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1)
C      (0 0 2 2 0 2 2 0 0 0 2)
C      (0 0 4 3 0 0 0 0 0 0 3)
C      (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4)
C      (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
C      (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
C B1=0;B2=0;B5=0;B8=0;B9=0;B10=0;
C ICN1=0;ICN2=0;ICN5=0;ICN8=0;ICN9=0;ICN10=0;
C B3=(1.,-2.,1.) ;B4=(-1.,-2.) ;B6=(-0.5) ;B7=(1.)
C ICN3=(1,1,2) ;ICN4=(1,1) ;ICN6=(1) ;ICN7=(1)
C B11=(1.,1.,1.) ;CN11=(1,2,3) ;

      NB7=NB(7)
      NB3=NB(3)

      CALL XAMINE(N,AV,ICNA,IPA,B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9,
      &B10,B11,ICN1,ICN2,ICN3,ICN4,ICN5,ICN6,ICN7,ICN8,ICN9,
      &ICN10,ICN11,IRNT,X0,LAM1,XN,W,C,D,NB3,NB7,I0K)

      IF(I0K.NE.0)WRITE(6,100)I0K
      WRITE(6,101)(X0(I),I=1,N)
      WRITE(6,102)LAM1

C
C ...
C FORMAT D' ECRITURE
C
      STOP
      END

```

D SOUS-PROGRAMME ITERSIM

```

DIMENSION U(10,3),V(10,3),UH(3,12),IN(6),
&X(3),Y(3),ERR(3),
&C(2,1),D(1,1),B1(5),B2(5),B3(5),B4(5),B5(5),B6(5),B7(5),
&B8(5),B9(5),B10(5),B11(5),ICN1(5),ICN2(5),ICN3(5),ICN4(5),ICN5(5),ICN6(5),
&ICN7(5),ICN8(5),ICN9(5),ICN10(5),ICN11(5),IRNT(6,11)
&,AV(10),IPA(7),ICNA(10),NB(11),NZB(11),U(6)
C CET EXEMPLE NE SERT QU'A ILLUSTRER LA SEQUENCE D'APPEL.LES
C MATRICES NE SONT PAS CREUSES DANS CET EXEMPLE.

```

```

COMMON /ITXAH/NZB,NB,NZA,TOL,MAXIT,LMAX
COMMON /PREIN/IR,IS

```

```

N=6
NZA=10
TOL=1.E-3
MAXIT=50
IR=1
IS=0
NIU=3
LMAX=10
IU=10
IC=2
ID=1

```

```

C
C LECTURE DE
C AV=(1.,2.,0.2,1.,1.,2.,1.,1.,1.,1.)
C ICNA=(1,2,3,1,4,5,6,2,3,5)
C IPA=(1,4,6,8,9,10,11)
C NB=(0,2,2,2,1,1,1,0,0,0,3)
C NZB=(0,0,3,2,0,1,1,0,0,0,3)
C IRNT=(0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1)
C      (0 0 2 2 0 2 2 0 0 0 2)
C      (0 0 4 3 0 0 0 0 0 0 3)
C      (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4)
C      (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
C      (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
C B1=0;B2=0;B5=0;B8=0;B9=0;B10=0;
C ICN1=0;ICN2=0;ICN5=0;ICN8=0;ICN9=0;ICN10=0;
C B3=(1.,-2.,1.) ;B4=(-1.,-2.) ;B6=(-0.5) ;B7=(1.)
C ICN3=(1,1,2) ;ICN4=(1,1) ;ICN6=(1) ;ICN7=(1)
C B11=(1.,1.,1.) ;ICN11=(1,2,3) ;
CALL ITERSIM(N,NIU,AV,ICNA,IPA,B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9,
&B10,B11,ICN1,ICN2,ICN3,ICN4,ICN5,ICN6,ICN7,ICN8,ICN9,ICN10,
&ICN11,IRNT,IU,U,X,Y,ERR,ITTOT,IOK,V,UH,IN,C,D,U,IC,ID)
IF(IOK.NE.0)WRITE(6,100)IOK
WRITE(6,101)ITTOT
WRITE(6,102)(ERR(I),I=1,IR)
WRITE(6,104)
DO 1 I=1,IR
1 WRITE(6,103)X(I),Y(I)
WRITE(6,105)
DO 2 I=1,N
2 WRITE(6,103)(U(I,J),J=1,IR)
C
C FORMATS D'ECRITURE ..
C
STOP
END

```

B I B L I O G R A P H I E

- F. d'ALMEIDA, F. CHATELIN (1978) :
Stabilité Dynamique de Minimetric
Communication au Colloque sur la Construction et Utili-
sations des Modèles Macro-économiques
Le Curtillard, octobre 1978, publié par l'IRIA
- F. d'ALMEIDA (1979)
Methods for solving the unsymmetric generalized eigen-
value problem with large matrices issued from the french
economy models
Conference on Numer. Anal. University of Dundee, Ecosse,
26-29 Juin 1979
à paraître, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag,
1980
- DELEAU, MALGRANGE (1975)
Les méthodes d'analyse des modèles empiriques
Etude des mécanismes du modèle STAR
Annales de l'INSEE n° 20, 1975
- I.S. DUFF (1977a)
A survey of sparse matrix research
Proceeding of IEEE, april 77
- I.S. DUFF (1977b)
MA28 - a set of FORTRAN subroutines for sparse unsymmetric
linear equations
AERE-R8730, Harwell, july 1977
- I.S. DUFF (1978a)
Somme current approaches to the solution of large sparse
systems of linear equations
International Congress on Numerical Methods for Enginee-
ring, Paris, déc. 1978
- I.S. DUFF (1978b)
Practical comparisons of codes for the solution of sparse
linear systems
Harwell Rep. CSS69 présenté au Symposium on Sparse Matrix
Computations, Knoxville, Tennessee, 1978

- I.S. DUFF, J.K. REID (1978)
An implementation of Tarjan's algorithm for the bloc
triangularisation of a matrix
TOMS, vol. 4, n° 2, juin 1978
- GABAY, NEPOMIASTCHY, RACHDI, RAVELLI (1978)
Etude, résolution et optimisation de modèles macroécono-
miques
IRIA, rap. n° 312, juin 1978
- A. GEORGE (1974)
On block-elimination for sparse linear systems
SIAM J. Numer. Anal. Vol. 11, 1974
- HARWELL (1978)
Subroutine library
AERE (1978)
- INSEE (1977)
Analyse statique et dynamique de Metric
Note de la direction des synthèses économiques, INSEE, 1977
- L. KAUFMAN (1973)
The LZ-algorithm to solve the generalized eigenvalue
problem
Stanford, University, May 1973
- MALGRANGE (1980)
Note sur le calcul des valeurs propres d'un modèle macro-
économique
- C.B. MOLER, G.W. STEWART (1973)
An algorithm for generalized matrix eigenvalue problem
SIAM J. Numer. Anal., vol. 10, n° 2, april 1973
- P. NEPOMIASTCHY, A. RAVELLI, F. RECHENMANN (1978)
An automatic method to get an econometric model in a
quasi triangular form
IRIA Rap. n° 313, juin 1978
- B. OUDET (1975)
La dynamique à court terme des modèles macroéconomiques :
applications à STAR
Annales de l'INSEE, n° 20, 1975

SHAUMBERG, WASNIEWSKI, ZLATEV (1979)

On the use of sparse matrix technique in the numerical integration of stiff systems of linear ordinary differential equations

Dundee biennial Conference on Numerical Analysis, juin 1979
à paraître en Lecture, Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1980

SHERMAN (1978)

NSPIV, a FORTRAN subroutine for sparse Gaussian elimination with partial pivoting

TOMS 4, 1978

G.W. STEWART (1973)

Introduction to matrix computation,
Academic Press, New-York, 1973.

G.W. STEWART (1975)

Gershgorin theory for the generalized eigenvalue problem

$Ax = \lambda Bx$

Math. Comp., vol. 29, 130, april 1975

G.W. STEWART (1978)

SRRIT- a FORTRAN subroutine to calculate the determinant invariant subspaces of a real matrix

à paraître en TOMS

W.J. STEWART (1976)

MARCA : Markov chain Analyser

IRISA, publication interne n° 45, juin 1976

Y. SAAD (1978)

The generalized Lanzos method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices.

à paraître, Lin. Alg. Appl. (n° Spécial sur les matrices creuses)

R. TARJAN (1972)

Depth first search and linear graph algorithms

SIAM J. Comp., vol. 1, 1972

J. WILKINSON (1965)

The algebraic eigenvalue problem

Oxford Univ. Press (Clarendon), London et N. York