



HAL
open science

Sur l'exploitation d'un réseau de transport en commun : le problème du roulement des agents de conduite

Alain-René Amalric

► To cite this version:

Alain-René Amalric. Sur l'exploitation d'un réseau de transport en commun : le problème du roulement des agents de conduite. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT: . tel-00293113

HAL Id: tel-00293113

<https://theses.hal.science/tel-00293113>

Submitted on 3 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble
et à
l' Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR INGENIEUR
Recherche Opérationnelle

par

Alain-René AMALRIC



**SUR L'EXPLOITATION D'UN RESEAU
DE TRANSPORT EN COMMUN :
LE PROBLEME DU ROULEMENT DES AGENTS DE CONDUITE**



Thèse soutenue le 16 décembre 1980 devant la Commission d'Examen :

Monsieur M. SAKAROVITCH	Président
Messieurs J.J. PERRET	} Examineurs
F. ROBERT	
J.P. URHY	

Monsieur Michel SAKAROVITCH me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse et je l'en remercie.

Je voudrais également remercier Messieurs Jean-Jacques PERRET et François ROBERT d'avoir bien voulu faire partie de ce jury.

Que Messieurs Michel SAKAROVITCH et Jean-Pierre URHY trouvent ici le témoignage de ma gratitude, le premier pour m'avoir initié à la Recherche Opérationnelle puis admis dans son équipe, le second pour m'avoir guidé tout au long de ce travail.

J'ajouterai que le soutien de Monsieur Jean-Pierre URHY m'a été précieux en recherche opérationnelle (mais aussi dans d'autres domaines) et que sa clairvoyance, sa vive intelligence et sa disponibilité m'ont apporté les conditions idéales pour réussir, dans ce projet comme dans bien d'autres.

Je voudrais également exprimer ma gratitude au Capitaine de Vaisseau PRIVE, Chef du Groupe de Recherche Opérationnelle de la Marine à Toulon qui m'a donné les moyens d'achever cette thèse.

Que Madame Denise JOUFFREY trouve ici mes remerciements pour le soin et la compétence dont elle a fait preuve pour la réalisation matérielle de ce travail.

Alain-René AMALRIC

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I - L'EXPLOITATION D'UN RESEAU DE TRANSPORT EN COMMUN.....	1
1. Introduction	3
2. L'exploitation d'un réseau de transport en commun	5
3. Construction du graphique de ligne	7
4. Habillage de l'horaire	14
5. Le problème du roulement des agents de conduite	16
6. Conclusion	21
CHAPITRE II - TOUR D'HORIZON DES MODELES ET TECHNIQUES MATHÉMATIQUES D'AIDE A L'EXPLOITATION	23
1. Introduction	25
2. Géométrie optimale d'un réseau de transport en commun	26
3. Implantation optimale des arrêts sur une ligne	29
4. Taux optimal de départ des autobus sur une ligne	32
5. Découpage du graphique de ligne en trains de véhicules	36
6. Habillage des horaires	41
7. Construction des tableaux de roulement	47
8. Conclusion	52

CHAPITRE III - AFFECTATION OPTIMALE DES JOURS DE REPOS DANS UN TABLEAU DE ROULEMENT	53
1. Introduction	55
2. Construction du graphe value $G = (\Gamma, U, c)$	56
3. Etude préliminaire	58
4. Relaxation du problème Méthode de résolution et résultats numériques	63
 CHAPITRE IV - UNE METHODE DE DECOMPOSITION DU PROBLEME D'AFFECTATION DES JOURS DE REPOS	 75
1. Présentation du chapitre	77
2. Etude du problème (P)	77
3. Caractérisation des solutions optimales de (P)	84
4. Sous-gradient optimal	86
 CONCLUSION	 91
 ANNEXE 1	 95
<u>Partie I - Formulation du problème d'affectation des jours de repos : un programme quadratique</u>	97
1. Introduction	97
2. Notations	97
3. Formulation	98
4. Méthode de résolution et résultats numériques	100
<u>Partie II - Présentation du produit programme CITAR</u>	107
1. Introduction	107
2. Présentation du produit-programme CITAR	107
 ANNEXE 2 - SCHEMAS	 113

ANNEXE 3 -	121
Une variante paramétrique de l'algorithme de Moore	123
1. Position du problème	123
2. Notation et définitions.....	124
3. Etude du problème	124
4. Enoncé de l'algorithme	126
5. Finitude	126
ANNEXE 4 - RESULTATS NUMERIQUES	129
BIBLIOGRAPHIE	139

INTRODUCTION

Les "problèmes de la cité" constituent un champ d'applications privilégiées de la recherche opérationnelle. L'approche scientifique des problèmes de prise de décision y trouve un support pratique et théorique favorable à un échange dialectique entre l'interprétation des phénomènes et l'élaboration de techniques mathématiques. Nombreux sont les exemples où, à partir de problèmes concrets, cette approche a permis un enrichissement de la recherche opérationnelle. Sans prétendre faire partie de ce cas de figure, notre travail vise deux objectifs majeurs :

- . Le premier consiste à faire le point sur les outils dont dispose le chercheur opérationnel pour aborder les problèmes posés par l'organisation des transports en commun dans une agglomération;

- . Le second tente de combler une lacune et d'apporter une contribution à la résolution d'un problème spécifique : celui du roulement des agents de conduite dans un réseau.

Dans cet esprit, s'agissant d'un ensemble complexe de problèmes, notre première démarche a été d'effectuer une analyse d'existant afin de faciliter la description des difficultés que produit la gestion opérationnelle d'un réseau réel. C'est l'objet du chapitre I. Vient ensuite un tour d'horizon des techniques mathématiques susceptibles d'aider à l'exploitation d'un réseau de transport. Cet exposé, qui constitue le chapitre II, comporte certaines contributions ou adaptations personnelles que nous signalons au passage.

Sans être la partie centrale de cette thèse, ces deux premières parties n'en constituent pas moins une phase importante au double plan de l'analyse et de la compréhension de la problématique des transports en commun. On peut cependant se contenter du paragraphe 5 du chapitre I pour aborder les chapitres III et IV dans lesquels nous nous intéressons essentiellement au problème du roulement des agents de conduite.

Notre analyse bibliographique (11), (18), (22) a mis en évidence le manque de publications apportant une réponse satisfaisante au problème. C'est donc une approche et une formulation originales des problèmes de roulement que nous proposons dans le chapitre III. Le modèle que nous avons construit et qui apparente le problème à celui du voyageur de commerce (15) se formule comme un programme linéaire en nombres entiers de grande dimension.

La résolution de la relaxation continue de ce programme linéaire entier nous a donné - dans le cadre spécifique du problème - d'excellents résultats parce que la solution continue était dans la majeure partie des cas également celle du programme entier. Nul doute que la structure particulière du problème et des données contribue à ce phénomène.

En revanche, pour des données quelconques, la résolution est loin d'être aussi aisée. Ceci n'est pas surprenant si l'on remarque que le problème contient dans son formalisme des problèmes NP-durs.

Comme dans la plupart des problèmes combinatoires, une procédure S.E.P. (20) pour laquelle on dispose d'un bon minorant de la valeur optimale converge généralement en un nombre faible d'étapes; la résolution du programme linéaire continu apparaît comme intéressante.

Malheureusement, la grande dimension du programme linéaire nécessite l'utilisation d'un gros calculateur, et, bien que l'on ait obtenu par ordinateurs des résultats au moins aussi bons que ceux obtenus manuellement, la construction automatique des tableaux de roulement ne justifie pas l'emploi de moyens aussi importants.

Notre objectif a donc été de mettre en oeuvre une méthode de décomposition (6), (17), (23) qui tienne compte au mieux de la structure particulière du problème et qui permette une résolution sur mini (voir micro) ordinateur. Ceci fait l'objet du chapitre IV.

L'annexe 1, qui contient deux parties, fait état de deux approches différentes du problème. Dans la partie I, nous exprimons le problème de roulement comme un programme linéaire en variables binaires et fonction quadratique (24). La méthode de résolution est basée sur une technique d'énumération implicite (4) dont les très faibles performances algorithmiques traduisent la difficulté du problème. Ainsi, contrairement à ce qui se passe dans le formalisme du chapitre III, le temps de calcul est très fortement dépendant de la dimension du problème.

Dans la partie II, nous proposons une approche interactive fondée sur un algorithme d'optimisation (9, § 5, chapitre 10) très simple visant à apporter une aide plutôt qu'une réponse définitive. Ceci a donné lieu à la réalisation du produit-programme CITAR (Construction Interactive de Tableaux de Roulement) dont l'implémentation sur mini ordinateur ne pose pas de difficultés.

L'annexe 2 contient les schémas explicatifs.

L'annexe 3 décrit une variante paramétrique de l'algorithme de Moore dont nous ferons usage dans le chapitre IV.

L'annexe 4 donne les résultats numériques de l'algorithme dual du chapitre IV.

Chapitre I

L'EXPLOITATION D'UN RESEAU
DE TRANSPORT EN COMMUN

1. INTRODUCTION

Le problème du transport des habitants d'une ville d'un point à un autre de leur cité s'inscrit au rang des questions politiques, organisationnelles et sociales dont l'acuité est vivement ressentie par le citoyen anonyme que l'on qualifie "d'usager". L'époque est révolue où, sur l'agora à Athènes, les membres de la cité résolvaient en "temps réel" les problèmes de leur ville. L'autorégulation (par la richesse) des problèmes de circulation que l'on a pu connaître à la naissance de l'ère industrielle est, elle aussi, révolue. Les décideurs, qui ont quitté l'agora pour s'asseoir à la Chambre des Députés ou au Conseil Municipal..., doivent tenir compte de l'impact politique de ce fameux usager.

Se pose donc la question de savoir comment, et à moindre coût, minimiser la désutilité globale des habitants de la cité lorsqu'ils sont confrontés aux 'multiples embarras' (de circulation par exemple) causés par le milieu urbain ?"

Cette question est à la source d'un nombre impressionnant de problèmes modélisables. On peut citer, bien sûr, celui des transports en commun, mais aussi celui du plan de circulation dans l'agglomération, de la collecte des ordures ménagères, de l'implantation des équipements (hôpitaux, parkings...), du découpage en districts "homogènes" pour assurer une répartition harmonieuse des votes, de la coordination des feux, ...

La "fonction désutilité" sous-jacente dans l'ensemble des problèmes de la cité est très difficile à appréhender du fait de son aspect

multicritère. A l'inverse, les critères sont aisés à définir en termes d'utilité. On pense, par exemple, au temps d'attente, au taux d'encombrement... mais il est déjà plus ardu de définir une échelle commune à l'ensemble des critères que l'on va retenir comme élément constitutif d'une certaine fonction objectif représentative du problème considéré. Lorsqu'on cherche à déterminer l'ensemble des contraintes, la question qui semblait claire se transforme en un problème plutôt mal posé, puisque ce qui peut paraître contraignant pour un élément de population ne l'est pas pour un autre. A titre d'exemple, la mise en place de couloirs de circulation en contresens, réservé au transport en commun, modifie la fluidité de la circulation automobile privée. Elle est donc ressentie de façon négative par l'utilisateur qui emprunte son propre véhicule et de façon positive par ce même utilisateur qui emprunte le réseau de transport en commun.

Cette complexité, ajoutée à l'aspect impondérable de certains éléments, place le chercheur opérationnel devant une réalité : les modélisations ne peuvent pas apporter une solution rigoureuse et universelle aux problèmes posés mais constituent plutôt un outil d'analyse et une aide à la décision.

Par ailleurs, les activités humaines n'ont pas attendu la découverte des techniques de modélisation et l'invention de l'ordinateur pour se développer.

C'est donc bien souvent un système déjà installé qu'il convient d'optimiser, mais sans en modifier les structures fondamentales.

Les réseaux de transport n'échappent pas à ce phénomène. C'est la raison pour laquelle l'analyse des différentes techniques mises en oeuvre pour assurer l'exploitation d'un réseau de transport en commun apparaît comme centrale dans ce chapitre.

2. L'EXPLOITATION D'UN RESEAU DE TRANSPORT EN COMMUN

Le terme exploitation contient implicitement l'idée que l'"entreprise de transport" définie par un ensemble de moyens matériels et humains est déjà structurée et implantée sur le site qu'elle doit servir. Ceci nous place bien dans le cadre d'un système installé dont il convient d'assurer le fonctionnement. Cependant, bien que le dessin d'un réseau constitue une opération très complexe où interviennent des aspects politiques, sociaux et financiers, il paraît souhaitable de mentionner les deux points fondamentaux que l'on doit prendre en compte pour mettre en place un réseau de transport.

Concernant le premier point, il faut citer la collecte des éléments statistiques qui vont permettre de cerner l'environnement du futur réseau, tels que la demande prévisionnelle de transport aux différentes heures de la journée et pour différentes périodes (du mois, de l'année) et aussi tels que les conditions de circulation pour divers itinéraires au double plan de la durée et des dissymétries des trajets. Ces éléments vont permettre d'appréhender, de concevoir une géométrie pour le futur réseau.

Pour ce qui est du deuxième point, il s'agit, au vu des sondages, du fichier population, compte tenu de l'implantation des centres d'activité, de déterminer la flotte de véhicules à affecter sur l'ensemble du réseau (voire sur chaque ligne), la nature (type de propulsion, accordéon, puissance...), la capacité des véhicules par ligne du réseau, les fréquences de passages des autobus sur chaque itinéraire, l'effectif du personnel.

Mais une fois que le réseau de transport est configuré, il faut en assurer l'exploitation. Doit être résolue alors une séquence de problèmes où la présence de "feedback" complique la recherche d'une solution (voir à ce sujet réf. [3]). Cette séquence se décompose de la manière suivante :

- 2.1 CONSTRUCTION DU GRAPHIQUE DE LIGNE, afin de définir pendant la durée de fonctionnement de l'unité d'exploitation (i.e. la ligne considérée), les horaires, la nature, le numéro d'exploitation (affectation nominative) des véhicules mis en oeuvre (voir schémas n° 1 et 2, annexe 2).
- 2.2 HABILLAGE DE L'HORAIRE à partir du graphique de ligne. La durée de rotation de chaque véhicule affecté à la ligne pendant le temps de fonctionnement de l'unité d'exploitation est découpée en services. On génère ainsi une partition des horaires conformes aux conditions statutaires de travail (voir schéma n° 3, annexe 2).
- 2.3 Confection du TABLEAU DE ROULEMENT afin d'affecter les agents (conducteurs de bus) sur les différents services (définis par l'habillage des horaires) en respectant une règle du jeu doublement contrainte par les nécessités de l'exploitation visant à assurer l'intégralité des services pour chaque jour du calendrier, et par les demandes et les statuts du personnel concernant l'attribution des congés et des jours de repos (voir schéma n° 4, annexe 2).

Cette séquence, si elle représente le corps du problème, n'assure pas le fonctionnement automatique du réseau au plan du quotidien. Il faut tenir compte des aléas de toutes natures qui viennent en perturber la bonne marche : indisponibilité du personnel, variation ponctuelle du trafic...

La direction de l'exploitation établit donc quotidiennement une feuille de service qui prévoit, avec précision, l'utilisation du personnel et du matériel.

Nous allons reprendre en détail dans la suite de ce paragraphe les différents points que nous venons d'évoquer car chacun d'eux présente des particularités. De plus chaque réseau possède sa propre "personnalité" et c'est à partir d'un cas réel pris comme exemple que nous donnons une rapide analyse de l'existant.

3. CONSTRUCTION DU GRAPHIQUE DE LIGNE

3.1 INTRODUCTION ET DEFINITIONS

Dans le cadre du réseau étudié trois éléments apparaissent comme fondamentaux :

- . itinéraire et point d'arrêt
- . Fréquence
- . Amplitude (que l'on définit précisément ci-dessous)

Ces trois points constituent les données de base à partir desquelles on fonde la construction du graphique de ligne dont on donne ci-après un exemple récapitulant la terminologie utilisée.

Définitions et notations

On appelle :

Ligne : l'unité d'exploitation (dans son sens le plus large) permettant d'assurer la desserte des usagers sur un site donné.

X : ensemble des arrêts de la ligne

U : ensemble des arcs reliant deux arrêts adjacents

$G = (X,U)$ est l'itinéraire dont les sommets sont les points d'arrêts et les arcs les voies routières empruntées par les bus de la ligne.

Fréquence : On appelle fréquence la durée $\Delta(t)$ qui sépare le passage de deux bus consécutifs. Cet abus de langage étant utilisé couramment dans les transports en commun nous avons décidé de le conserver. Si l'on note $d(t)$ = le taux de départ des autobus au temps t , la fréquence s'exprime par la relation :

$$\Delta(t).d(t) = 1$$

Amplitude : c'est l'intervalle de temps (t_1, t_2) correspondant à la durée du service maximum que doit assurer la ligne dans une journée. (La journée peut être de plusieurs types : jours ouvrables (JO), dimanches et fêtes (DF), samedi...). t_1 (respectivement t_2) correspond au début (respectivement à la fin) de fonctionnement de la ligne.

Plage horaire : la journée est elle-même décomposée en plusieurs catégories : normale, heures de pointe, hors pointe, qui définissent diverses plages horaires (PH).

Trajet = chemin de $G = (X, U)$ allant d'un terminus à l'autre. Si A et R sont les deux terminus de la ligne, on notera :

$$(A, x(j_1), x(j_2), \dots, x(j_q), R)$$

le trajet du terminus A au terminus R. Notons que les trajets peuvent varier en fonction des plages horaires ou du sens de déplacement. Les trajets sont notés i_A si le sens de déplacement sur l'itinéraire est du terminus A vers le terminus R et i_R dans le sens contraire (i représente le numéro du trajet considéré). Les trajets sont numérotés par ordre croissant en fonction du temps $t \in (t_1, t_2)$.

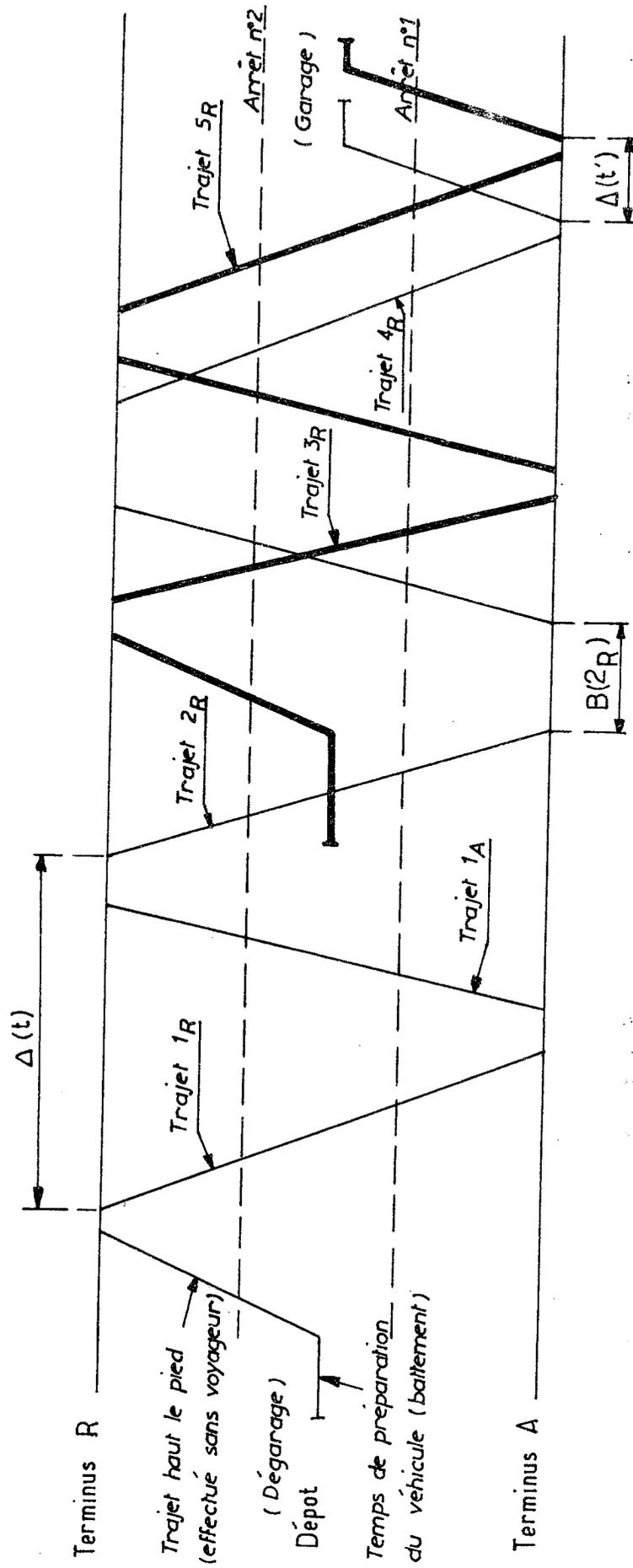
Rotation : Voyage aller-retour d'un bus donné sur l'itinéraire correspondant à un couple (i_A, j_R) .

Battement : temps minimum séparant deux trajets consécutifs. On le notera $B(i_A)$ s'il se situe après le trajet i_A et $B(i_R)$ s'il se situe après le trajet i_R .

Train : Ensemble des rotations qu'effectue un bus donné, pour une amplitude complète, sur une ligne (un train correspond au service d'un bus donné sur une journée et sur la ligne considérée).

Charge : On note $c(u,t)$ le nombre de voyageurs par unité de temps, au temps t , sur le tronçon u . Et on définit la charge $c(t)$ au temps t de la manière suivante :

$$c(t) = \max_{u \in U} c(u,t)$$



Le trait fin ——— représente le train TR(1)

Le trait épais ——— représente le train TR(2)

REVENIR DE CHAQUE ...

3.2 LISTE DES DONNEES, CONTRAINTES ET RESULTATS DU GRAPHIQUE DE LIGNES

Données et contraintes

- . le trajet :
 - terminus,
 - arrêts fixes et facultatifs
 - longueur de l'aller-retour...

- . la durée du trajet :
 - selon les régimes de demande (point hors pointe, normal...)
 - selon l'importance de la circulation
 - les battements nécessaires pour la régulation du trafic

- . la fréquence :
 - selon les jours (semaines, dimanches, jours fériés...)
 - selon l'horaire été-hiver

- . les variations tolérables de celle-ci

- . la durée de déplacement de véhicule du dépôt vers le point de départ et vice-versa

- . les horaires obligatoires et sens de déplacement à respecter (départ de ligne, sorties d'usines...)

- . la typologie des véhicules, capacité, possibilité de baralisation

Résultats

- . tableau de passage des véhicules aux différents points de la ligne durant une journée type → HORAIRES

- . trains de véhicules nécessaires au fonctionnement de la ligne
NOMBRE DE BUS MINI
PREVISIONS D'ENTRETIEN
AMPLITUDE DU SERVICE PAR TRAINS

3.3

ANALYSE DE LA CONSTRUCTION MANUELLE

Le graphique de ligne est un schéma (n° 1, en annexe 2) dans le plan distance/temps. En ordonnée, figurent les deux points extrêmes de la ligne (terminus) à l'intérieur desquels se placent les arrêts intermédiaires. Leur écart respectif traduit la distance kilométrique réelle via l'échelle adoptée. En abscisse figurent les heures comprises dans l'amplitude. La durée moyenne de trajet est représentée par un segment dont la pente est la vitesse moyenne de trajet.

L'obtention de la durée moyenne résulte d'une saisie de donnée. Le principe consiste à faire tourner à vide un bus sur la ligne dans les différentes plages horaires (PH) considérées pendant plusieurs journées. Pour chaque PH on obtient une durée moyenne de trajet d'où une durée moyenne sur toute l'amplitude. Si l'écart type n'est pas trop élevé on adopte cette dernière (c'est le cas de la ligne n° 18) sinon on recherche à regrouper les PH qui ont des durées moyennes homogènes. Dans le premier cas cela se traduit par un schéma sur lequel toutes les pentes sont identiques dans le second il y a variation des pentes en fonction de l'heure.

Sur la ligne étudiée ici l'amplitude correspond à la période 5 h 25 - 22 h 35. Ceci définit les deux points de transport extrêmes pour les usagers. Le battement est de l'ordre de 5 minutes à chaque terminus et atteint 15 minutes lorsqu'on veut établir une pause. Pour gérer la régulation du trafic le battement peut devenir important : 21 h 35 - 22 h 15 pour le bus J ou 12 h 35 - 13 h 35 pour le bus I (ce dernier battement autorisant l'implantation d'un repas pour le chauffeur).

La première démarche consiste à implanter le train qui devient opérationnel à 5 h 25 (bus A) contraint par l'horaire et le point de charge obligatoire (5 h 25/Grand Place). La deuxième démarche est relative à la fréquence nominale (PH normale). En se calant sur le premier train, on trace dans la plage horaire 8 h/12 h un ensemble de segments de pente égale à la vitesse moyenne qui définit l'ensemble des trains nécessaires pour satisfaire la fréquence nominale ; dans cette même PH on place des battements de l'ordre de 5 mn sur l'axe centre ville et de l'ordre de 10 mn sur l'axe Grand Place.

On s'intéresse ensuite aux heures de pointes par exemple 7 h / 8 h. La charge correspondante sera résorbée par l'adjonction d'un bus supplémentaire (le bus E) sachant que le déplacement global des usagers s'effectue de la périphérie vers le centre ville. Cette augmentation du nombre de bus implique donc une amélioration de la fréquence. En ce qui concerne l'horaire de départ des trains, on tient compte du temps de préparation des véhicules, mais il est difficile de donner une règle précise à cet égard du fait de l'interaction du module découpage des services. En effet, on s'autorise une modification de l'horaire de départ pour approcher au mieux 8 h de travail pour chaque service. Par contre le point de départ des trains résulte de points de ramassage obligatoires (i.e. le train A à partir de Grand Place, le train C à partir du centre ville).

La création du graphique se poursuit dans l'optique que l'on vient de définir pour toutes les PH de l'amplitude en respectant l'ensemble des contraintes.

3.3.1 Découpage en trains de véhicules

Le graphique de ligne est ensuite découpé en trains de véhicules ce qui permettra de déterminer la quantité minimum de bus nécessaire. Ce découpage en trains est loin d'être trivial car il convient de raccorder entre eux les différents trajets en adoptant les battements d'une durée suffisante pour assurer une certaine régulation des flux de véhicules sur la ligne. L'ensemble des trajets (y compris les battements retenus) que l'on décide de raccorder va constituer le service d'un bus donné à l'intérieur de l'amplitude (t_1, t_2) pour la ligne considérée. Le nombre de combinaisons possibles est extrêmement élevé et il faut surtout compter sur l'expérience des techniciens du bureau des horaires pour réaliser cette opération.

4. HABILLAGE DE L'HORAIRE

4.1 DEFINITIONS

Le graphique de ligne fournit un certain nombre de trains que l'on peut noter TR(1), TR(2), ... TR(q) (q correspondant au nombre d'autobus nécessaire au fonctionnement de la ligne). Reste à définir le nombre et les caractéristiques des services, qu'il faut prévoir pour assurer la rotation des véhicules sur la ligne.

On appelle service l'emploi du temps d'un agent de conduite dans la journée. Par exemple un service peut consister pour un agent donné à conduire un autobus pendant un certain temps, s'arrêter, puis reprendre la conduite d'un nouveau véhicule, ou bien encore conduire pendant 8 h 00 d'affilé. Cette définition fonctionnelle du service n'est pas suffisante pour caractériser formellement les services. Pour ce faire nous avons besoin de la notion de points de relève possibles.

Un point de relève est à la fois le lieu (dépôt, terminus, ...) et le temps à partir (ou à compter) desquels un chauffeur en remplace un autre.

Bien entendu, étant donné un train TR(i) un certain nombre de points de relève sont possibles (au maximum après chaque trajet, au minimum compte tenu des conditions statutaires tous les n trajets). Les parties du train TR(i) séparant deux points de relèves possibles consécutifs sont appelées des "tronçons horizontaux", en revanche lorsqu'on passe d'un point de relève possible d'un train TR(i) au point de relève possible d'un train TR(j) on définit un "tronçon oblique". Dans ce contexte, un service s'exprime comme une suite de tronçons compatible avec la réglementation et les contraintes d'antériorité.

4.2 BUT DE L'HABILLAGE

La nécessité d'un découpage des trains en plusieurs services est évidente si on se rappelle que le train est défini comme étant la rotation d'un bus sur une ligne pendant toute l'amplitude. La démarche actuelle du découpage des services est fondée sur le respect aussi absolu que possible de la contrainte : "continuité du travail d'un chauffeur sur une durée voisine de 8 h".

Dans une première phase le graphique de ligne est décomposé suivant l'ensemble des trains (cf n° 2 annexe 2). Sur chacun des trains on procède par tâtonnements à un découpage en services homogènes au sens "être voisin de 8 h". (voir n° 3 annexe 2).

La difficulté de la démarche manuelle est assez claire d'autant plus qu'il faut :

- . minimiser le nombre de repas
- . ne pas créer de discontinuité dans les services
- . ne pas provoquer des dépassements abusifs au-delà de 8 h
- . placer les points de relève au terminus et au même endroit que la prise de service
- . minimiser le nombre de services dont l'amplitude dépasse 12 h

etc.

En fait les conditions statutaires de travail sont telles qu'une modification du graphique de ligne via l'amplitude ou les battements s'avère souvent nécessaire.

4.3 LISTE DES DONNEES, CONTRAINTES ET RESULTATS DU DECOUPAGE DES SERVICES

Données et contraintes

- . trains de véhicules de la ligne considérée
- . tronçons obliques et horizontaux
- . réglementation, souhaits du personnel
- . coûts des services

Résultats

- . les postes de travail sur la ligne, la durée de ces postes
- . nombre de personnes minimum et maximum nécessaires au fonctionnement
- . le coût du choix effectué.

5. LE PROBLEME DU ROULEMENT DES AGENTS DE CONDUITE

5.1 POSITION DU PROBLEME

La construction des tableaux de roulement des agents de conduite du réseau routier constitue un problème typique d'exploitation. En effet, il s'agit d'affecter les agents de conduite sur les différents services pour chaque jour calendaire (exploitation de la ligne), mais aussi de définir un cycle de travail hebdomadaire pour chaque agent (gestion du personnel).

Ainsi les données du problème sont elles réparties en deux groupes :

a) Du point de vue de l'exploitation

Il faut assurer aux usagers du réseau un service conforme à la demande. Nous avons défini la stratégie visant à satisfaire cette demande en déterminant un ensemble de tâches (résultats de l'habillage des horaires) à effectuer quotidiennement.

Pour faciliter l'exposé, considérons l'ensemble des services qu'il faut impérativement accomplir pour assurer la desserte de la ligne 18 et ce conformément aux indications portées sur le tableau "découpage des services" (schéma n° 3 en annexe 2). On vérifiera sans peine que le temps global nécessaire à la stricte réalisation des tâches indiquées dans le tableau "découpage de services" totalise 745 h 00. Si l'on affecte un groupe de 18 agents de

conduite à la ligne considérée, le temps moyen de travail est d'environ 41 h 23, en revanche avec 19 agents de conduite ce même temps moyen passe à 39 h 13. Ces deux temps moyens hebdomadaires sont inacceptables, le premier au plan du personnel roulant, le deuxième au plan de l'exploitation. On résoud cette difficulté en assurant une régulation du roulement qui permettra d'absorber les difficultés ponctuelles qui ne manquent pas d'apparaître lors de la gestion quotidienne telle que l'absence inopinée d'un agent de conduite. Ainsi en rajoutant deux pseudo-services (affectables à une ligne quelconque suivant les besoins) dont la durée est fixée pour la convenance initialement à 7 h 40 nous obtenons une charge hebdomadaire de 760 h 20 à laquelle correspond pour 19 agents une durée moyenne de travail d'environ 40 h 01. Voici donc déterminé le nombre N d'agents de conduite qu'il faut affecter à la ligne pour en assurer le fonctionnement quotidien tout au long d'une semaine civile (i.e. lundi à dimanche). La méthode opératoire que l'on vient de décrire à l'aide de notre exemple peut être étendue facilement à toutes les lignes et c'est sans perte de généralité que nous considérons le nombre d'agents N comme une donnée du problème de roulement. Et par conséquence, connaissant le nombre de services $s(j)$ à effectuer chaque jour j de la semaine civile considérée, nous en déduisons immédiatement le nombre $r(j) = N - s(j)$ de repos affectables dans le tableau de roulement pour le jour j en question. On vérifiera sans peine cette relation sur la grille de roulement (n° 4 annexe 2) donnée à titre d'exemple et construite à partir du tableau "découpage des services". (Cette affectation des services constitue une contrainte technique que nous appellerons dans la suite de cet exposé : contrainte de recouvrement).

- b) Du point de vue du personnel roulant les contraintes statutaires s'assortissent de souhaits et desiderata dont il convient de tenir compte autant que faire se peut. Avant de décrire ces contraintes, nous allons définir un certain nombre de points utiles à la bonne compréhension d'un système de roulement.

5.2 DEFINITIONS ET NOTATIONS

$K = (1, 2, \dots, 7)$ ensemble des jours de la semaine civile de lundi à dimanche

$s(k)$ = nombre de services à effectuer le jour k sur une unité d'exploitation (ligne) donnée.

N = nombre d'agents affectés à l'unité d'exploitation

$r(k)$ = nombre de repos affectable au jour k du roulement.

planning de travail :

On le définit relativement à une durée (ie une semaine, une quinzaine...).

Il représente la succession des jours de travail (avec les services ou postes à effectuer) et des jours de repos que doit faire un agent donné pendant la durée que l'on a choisie.

Séquence travaillée :

Il s'agit de la succession des jours de travail compris strictement entre deux jours de repos directement consécutif. Cette notion n'a un sens qu'à l'intérieur d'un planning de travail.

Configuration : planning de travail pour une semaine civile comprise entre le lundi et le dimanche. Si l'on s'intéresse simplement à l'affectation des jours de repos et des jours de travail, on peut représenter une configuration comme un vecteur de $(0,1)^7$, par exemple $\gamma = (0110001)$ qui exprime le fait que lundi, jeudi, vendredi, samedi sont les jours travaillés (coordonnées nulles), les autres jours de la semaine étant chomés. Ainsi $\gamma(k) = 1$ si le jour k est travaillé, 0 sinon.

Grille de roulement :

C'est une matrice (N,7) où l'on trouve en colonne les jours de la semaine civile (lundi à dimanche) et en ligne N configurations correspondant aux N agents. La grille de roulement se parcourt de manière cyclique, chaque agent effectuant successivement les N configurations de la grille. Le planning de travail est donc défini pour chaque agent sur une durée N semaines civiles.

5.3 CONTRAINTES ET OBJECTIFS PARTICULIERS AU RESEAU ETUDIE

5.3.1 Pour l'exploitation

- (1) Les contraintes de recouvrement qui sont typiquement des contraintes d'exploitation impliquent que chaque colonne de la grille de roulement du lundi au dimanche doit posséder tous les services que doit assurer l'unité d'exploitation (la ligne) pour chacun des jours en question.
- (2) La durée du travail à effectuer sur chaque configuration (c'est-à-dire le temps de travail pour une semaine civile) doit être aussi proche que possible de la durée moyenne hebdomadaire de travail sur la ligne. Il s'agit en effet pour l'exploitation de diminuer l'absentéisme en réalisant un meilleur équilibre du temps de travail.

5.3.2 Pour les agents de conduite*

- (1) Chaque configuration doit posséder au moins un jour de repos et au plus trois jours de repos.
- (2) Les agents ne doivent pas assurer un service deux dimanches de suite.
- (3) La grille de roulement ne doit pas comporter de séquences travaillées d'une longueur supérieure à six jours ou d'une longueur inférieure à deux jours.

* Ces règles peuvent varier d'un réseau à un autre. [10]

- (4) Les services sont répartis en deux catégories : matin et soir. Les séquences travaillées doivent contenir les mêmes services ou à défaut des services de la même catégorie pour assurer un rythme de travail aussi homogène que possible.
- (5) En revanche pour augmenter le nombre de demi-journées de repos, certains agents souhaitent effectuer un service de matin avant les périodes de repos et recommencer une nouvelle séquence travaillée avec un service du soir.

Notons que les contraintes (4) et (5) sont contradictoires.

- (6) Le nombre de jours de repos accolés (par paire, par triplet, ...) doit être aussi élevé que possible.

5.4

DIMENSION DU PROBLEME DE ROULEMENT

Il existe $C_N^{r(k)}$ manière d'implanter les jours de repos dans une colonne d'indice $k \in K$, donc étant donné $r(k)$, pour $k \in K$, et N il est possible de générer

$$P_r = \prod_{k \in K} C_N^{r(k)}$$

tableaux de roulement relatifs au planning des jours de repos. Si ce planning est donné, il existe alors :

$$P_s = \prod_{k \in K} (S(k)!)$$

tableaux de roulement relatifs aux services. Donc le problème général du roulement à N agents avec $s(k)$ services à assurer pour $k \in K$ correspond à :

$$P_g = \prod_{k \in K} (s(k)!) \cdot C_N^{r(k)} = \prod_{k \in K} A_N^{r(k)}$$

tableaux de roulement. Dans l'exemple donné en annexe (schéma n° 4) $P_g = 2.10^{100}$ c'est-à-dire plus d'un milliard de fois le nombre estimé d'atomes dans l'univers (le nombre de solutions n'est pas toujours caractéristique, mais dans le cas présent, ce problème appartient à la classe des problèmes réputés difficiles.).

6. CONCLUSION

L'analyse des trois points centraux de l'exploitation d'un réseau de transport en commun :

- . construction des graphiques de ligne
- . habillage des horaires
- . confection des tableaux de roulement

montre la difficulté d'envisager une approche globale à travers laquelle un modèle mathématique même très simple permettrait de connaître l'incidence sur les performances du réseau d'une variation du potentiel matériel (autobus) ou humain (agent de conduite), d'une modification de la charge, du coût de transport... En revanche, les méthodes qui sont actuellement utilisées (pour la plupart manuelles) n'apportent aucun moyen à la direction de l'exploitation de connaître rapidement l'influence de la variation de paramètres fondamentaux comme la fréquence, ou le nombre d'agents de conduite. De plus, les méthodes utilisées qui reposent pour l'essentiel sur l'expérience et le tâtonnement des techniciens spécialisés ne permettent pas de prendre en compte facilement plusieurs hypothèses ou même d'apporter des éléments de réponse face aux critères d'optimisation.

Par exemple, on considère la fréquence (c'est-à-dire le taux de départ des autobus) comme une donnée du graphique de ligne, or il semble plus réaliste de déterminer en premier lieu (quitte à l'estimer dans un premier temps) la charge de la ligne pour en déduire la fréquence. Les spécialistes déterminent le découpage du graphique de ligne en train par tâtonnements et essais successifs. Or une variation des temps de battement peut faire apparaître d'autres solutions plus intéressantes.

En ce qui concerne l'habillage des horaires, qui constitue apparemment un problème typiquement combinatoire, l'utilisation d'un modèle mathématique devrait conduire à une meilleure analyse que l'approche manuelle. Quant aux tableaux de roulement, il est clair qu'un outil d'aide à la décision permettant un dialogue rapide et l'étude de situations variées avec les

agents de conduite, permettrait à la direction de l'exploitation d'assurer une meilleure gestion de son personnel.

C'est pour répondre à cette argumentation, que nous proposons dans le chapitre suivant un tour d'horizon des différents modèles et techniques mathématiques qu'il est possible d'utiliser pour aider l'exploitation (Ce dernier aspect est en fait non négligeable car pour une vingtaine de lignes il faut construire chaque année environ soixante graphiques de ligne, deux cents habillages d'horaires et une centaine de tableaux de roulement).

Chapitre II

TOUR D'HORIZON DES MODELES
ET TECHNIQUES MATHÉMATIQUES D'AIDE
A L'EXPLOITATION

1. INTRODUCTION

Ce chapitre est destiné à présenter quelques modèles et techniques mathématiques qui peuvent apporter des outils d'analyse à la direction de l'exploitation. L'aide à la décision qui est proposée s'intéresse à des domaines précis de l'exploitation et ne permet pas une analyse globale (même simple) ainsi que nous l'avons souligné préalablement. En revanche, on peut s'attendre, à travers l'étude des modélisations proposées, à une meilleure compréhension des problèmes et des solutions envisageables.

Bien que l'on s'intéresse essentiellement à l'aspect opérationnel (les problèmes d'exploitation stricto sensus), on peut difficilement passer sous silence la question fondamentale (située en aval) de savoir comment définir la géométrie optimale d'un réseau de transport. Dans cet esprit, nous présentons un modèle (§ 2) qui permet, à partir d'un réseau déjà structuré, d'ajouter une nouvelle ligne et d'en définir la géométrie. Nous donnerons ensuite un modèle relatif à un problème connexe au précédent : l'implantation des arrêts sur la ligne d'autobus (§ 3). Nous avons indiqué au chapitre I que les arrêts constituent une entrée du graphique de ligne, d'où l'intérêt d'en optimiser l'implantation.

Concernant la gestion de la flotte d'autobus, on propose une méthode d'analyse (§ 4) qui permet, à partir de la charge des usagers, de déterminer le meilleur taux de départ des autobus. Nous donnons ensuite une méthode (§ 5) permettant d'optimiser le découpage du graphique de ligne en train de véhicules. Notons que tous les modèles énoncés jusqu'à présent s'intéressent au graphique de ligne.

Dans la suite du chapitre, nous proposons une méthode basée sur la programmation linéaire (§ 6) permettant d'assurer un habillage des horaires.

Au sujet du problème du roulement, nous donnons (§ 7) une analyse bibliographique critique mettant en évidence l'absence de publications qui permettent d'aborder la construction automatique des grilles de roulement de manière satisfaisante.

2. GEOMETRIE OPTIMALE D'UN RESEAU DE TRANSPORT EN COMMUN

2.1 APPROCHE GENERALE

Dans [2] P.H. Fargier présente une étude sur la détermination d'une configuration optimale d'un réseau de transport. Dans la pratique, le choix d'un réseau implique la définition de la géométrie des voies ou lignes nouvelles. Cette détermination fait intervenir des éléments tels que les lois de demandes de trafic sur les sites à desservir, les coûts des divers investissements nécessaires, l'influence du débit sur le temps de parcours etc. Dans ce type de problème, il est fructueux de prendre en compte le phénomène du rendement croissant des arcs. Le rapport du gain marginal pour une unité supplémentaire transportée à la perte marginale impliquée par le transport de cette unité supplémentaire est considéré comme supérieur à un. Ce phénomène est dû, en particulier, à la présence de coûts d'investissements fixes. Aussi, ce modèle est-il bien adapté aux implantations d'équipement lourd (infrastructure routière) mais il n'est pas exclu de l'adapter au cas d'un réseau de transport en commun. En effet, la mise en fonction d'une nouvelle ligne (voir d'un réseau) entraîne des coûts fixes d'acquisition d'autobus, par exemple, ou d'équipement de l'unité d'exploitation en ligne électrique haute tension.

2.2 DESCRIPTION DU MODELE

Le phénomène central pris en compte dans le modèle proposé par consiste à répartir, sur chaque arc appartenant à l'extension envisagée du réseau, les coûts fixes qui résultent de la modification prévue.

La contribution d'un arc sera effective s'il est retenu dans la solution optimale.

Pour résoudre le problème, on génère l'ensemble des liaisons possibles sur l'extension proposée. Une liaison représente, en fait, dans le modèle, un ensemble de chemins reliant un couple de terminus possibles.

On écrit ensuite le problème comme un programme linéaire en nombres entiers où l'on cherche l'affectation (en terme d'arcs) qui permet d'écouler à moindre coût (y compris les charges fixes) le trafic. En effet, la fonction objective est composée de la somme des coûts fixes et des coûts d'usage de chaque arc. Notons que les coût d'usage sont supposés croître de manière linéaire avec l'intensité du trafic.

Pour résoudre le problème, on utilise une méthode S.E.P., ce qui implique l'obtention rapide d'une évaluation fine de la solution optimale du programme linéaire. Pour ce faire, on cherche une bonne solution du programme dual, en utilisant (compte tenu de la structure particulière du problème) une méthode de décomposition basée sur une technique de sous-gradient.

2.3 PRINCIPE DE LA METHODE

Le programme dual permet de définir, en fixant certaines variables, un système de péage sur chaque arc. On interprète ce système en disant que chaque liaison qui veut passer par un arc donné doit verser à cet arc, un certain péage, de telle sorte que la somme des péages versés par l'ensemble des liaisons passant par l'arc en question soit égale au coût fixe nécessaire à la construction de cet arc.

La résolution du dual à péage fixé passe par la recherche (pour chaque liaison) du chemin de coût minimum sachant que le coût de passage sur un arc est égal à la somme du coût d'usage et du péage. Du point de vue primal, cela signifie que le trafic aura tendance à s'écouler par les chemins de moindre coût. C'est justement grâce à une comparaison des solutions primales et duales effectuée en utilisant le théorème des écarts complémentaires, que l'on peut soit affirmer que la système de péage utilisé nous a conduits à l'optimum du dual (et par là même du primal) soit déterminer une direction de déplacement qui va permettre de définir un nouveau système de péage.

En conclusion, les techniques mathématiques présentées dans [2] sont très intéressantes et méritent, à ce titre, d'être étudiées; en revanche, il convient d'émettre des réserves sur l'adaptation du modèle à notre cas.

2.4 ADAPTATION DU MODELE AU RESEAU DE TRANSPORT EN COMMUN PAR AUTOBUS

Dans le cadre des transports en commun par autobus, il est difficile de prendre en compte un coût fixe de construction d'un arc contrairement à ce qui se passe pour le métropolitain ou un réseau routier où les coûts d'infrastructure sont importants et d'évaluation relativement aisée.

Cependant, nous proposons une approche qui, sans prendre en compte la notion de coût fixe de manière totalement réaliste, n'en présente pas moins un certain intérêt;

- . Au niveau des coûts fixes :

Pour assurer une fréquence Δ sur un arc u donné, de longueur $L(u)$, sur lequel la vitesse est $V(u)$, il faut :

$$\frac{L(u)}{V(u) \cdot \Delta}$$

autobus en rotation sur cet arc. On peut considérer que le coût fixe de "création" d'un arc est proportionnel à la longueur de l'arc et inversement proportionnel à la fréquence. On peut d'ailleurs, grâce à ce formalisme, imaginer de créer un multigraphe associé au réseau dans lequel les arcs entre chaque carrefour recevraient des fréquences différentes.

- . Au niveau du coût d'usage :

Dans ce contexte, le coût d'usage d'un arc est proportionnel au temps global passé sur cet arc, y compris le temps d'attente nécessaire pour emprunter l'autobus si on utilise celui-ci à compter de l'extrémité initiale de l'arc. On constate qu'il y a là une difficulté provenant de ce qu'un usager peut fort bien parcourir plusieurs arcs de suite dans le même autobus. Par ailleurs, on ne prend pas en compte le phénomène des correspondances d'une ligne à l'autre;

3. IMPLANTATION OPTIMALE DES ARRETS SUR UNE LIGNE

3.1 DESCRIPTION DU PROBLEME

Dès lors que la géométrie d'une liaison du réseau de transport est définie, le problème se pose de savoir où placer les arrêts de bus sur la ligne. A l'évidence, un certain nombre d'emplacements (compte tenu de la largeur des voies, du sens de circulation, des possibilités d'installation d'abris...) peuvent être retenus comme possibles. En revanche, le nombre d'arrêts peut être considéré comme donné (contrainte budgétaire, distance minimale entre deux arrêts...). Ces différents éléments ne suffisent pas, à eux seuls, pour déterminer l'implantation précise des arrêts d'autobus sur la ligne. Pour répondre à cette question, nous proposons ici une approche originale du problème en le considérant comme un problème de localisation. [19]

3.2 FORMULATION

Pour pouvoir prendre en compte la désutilité (ou découragement) ressentie par l'utilisateur du fait du trop grand éloignement de l'arrêt par rapport à son domicile, on définit une "zone d'influence" de la ligne constituée par une certaine surface S entourant géographiquement la liaison considérée; S est ensuite quadrillé, et chaque carré de population en résultant représenté par le couple (u,v) de ses coordonnées est numéroté de 1 à n pour constituer un ensemble I . On note de la même manière $\delta(i)$ la densité de population du carré $i \in I$, J l'ensemble des arrêts possibles et $d(i,j)$ la distance minimale séparant $j \in J$ de $i \in I$. Pour la convenance, on considère la population du carré $i \in I$ comme un usager.

On note $y(j)$ la variable d'existence de l'arrêt j et $x(i,j)$ la variable de décision positionnée à 1 si l'utilisateur (au sens défini ci-dessus) se rend à l'arrêt j , positionnée à 0 sinon.

Appelons $b(j)$ le coût fixe d'installation de l'arrêt j et exprimons par $D(i,j) = \delta(i) \cdot d(i,j)$ la désutilité ressentie par l'utilisateur i lorsqu'il souhaite se rendre de i vers j .

Enfin, rappelons que I est l'ensemble des usagers de la zone S et J l'ensemble des arrêts possibles sur la ligne.

3.3 PRESENTATION DU MODELE

La détermination de l'affectation optimale des arrêts sur une unité d'exploitation donnée se formule comme suit :

$$\begin{cases}
 \sum_{\substack{j \in J \\ i \neq j}} x(i,j) + y(j) = 1 \quad \forall i \in I & (1) \\
 x(i,j) \leq y(j) \quad \forall (i,j) \in I \times J, i \neq j & (2) \\
 y(j) = 0, 1 \\
 x(i,j) = 0, 1 \\
 \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} D(i,j) x(i,j) + \sum_{j \in J} b(j)y(j) = Z(\text{Min})
 \end{cases}$$

La relation (1) exprime le fait qu'un usager doit se rendre à un arrêt et un seul (le plus proche possible de son lieu d'habitation).

La contrainte (2) signifie qu'un usager ne peut se rendre à un arrêt que s'il existe.

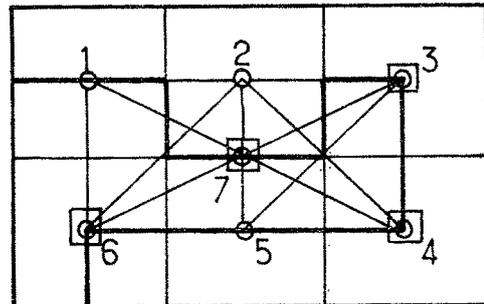
EXEMPLE :

<u>Légende</u>	 Ligne  Arrêts de bus possibles  Usager
----------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<u>Notations</u>	I = (1,2,3,4,5,6) ensemble des usagers J = (3,4,6,7) ensemble des arrêts possibles
------------------	---------------------------------------------------------------------------------------

la contrainte :

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ j \in J}} x(i,j) + y(i) = 1$$



$\forall i \in I$ signifie pour l'usager i :

$$x(1,3) + x(1,4) + x(1,6) + x(1,7) = 1$$

car aucun arrêt est constructible en 1, donc $y(1) = 0$.

En revanche, pour l'usager 3 on peut écrire soit :

$$x(3,6) + x(3,7) + x(3,4) = 0 \quad \text{si } y(3) = 1 \quad \text{et alors}$$

$$x(3,3) = y(3) = 1 \quad (\text{voir la contrainte (1) ci-dessous})$$

soit $x(3,6) + x(3,7) + x(3,4) = 1$

si $y(3) = 0$ et alors l'utilisateur 3 ira emprunter l'un des arrêts 4, 6 ou 7. Notons au passage que si $I \cap J = \emptyset$ les contraintes du type ci-dessus n'ont pas lieu d'être.

La solution optimale du programme linéaire en nombre entiers P_m définit donc l'ensemble X des arrêts de la ligne considérée (voir définitions, chapitre I, § 3.1).

Le problème P_m présente une structure particulière, et de nombreuses études ont été faites sur les techniques mathématiques à mettre en oeuvre pour le résoudre [19].

4. TAUX OPTIMAL DE DEPART DES AUTOBUS SUR UNE LIGNE

4.1 REMARQUES PRELIMINAIRES

A cette étape, on suppose la géométrie de la ligne parfaitement définie. En particulier, on connaît l'ensemble des arrêts dont les terminus constituent deux points particuliers. Pour simplifier, supposons la ligne parfaitement symétrique en notant bien que cette restriction diminue grandement la complexité du problème que l'on doit résoudre en présence d'itinéraire dissymétrique ou comportant des bifurcations. Cette hypothèse de symétrie est tout à fait centrale dans le modèle que nous allons décrire. Pour déterminer la fréquence de passage des autobus sur la ligne, on suppose connaître comme entrées la courbe $c(t)$ de charge sur la ligne (voir chapitre I, § 3.1) estimée ou mesurée, le temps de rotation, et l'intervalle $[0, T]$ correspondant à tout ou partie de l'amplitude. Notons que le temps de rotation est supposé constant sur l'intervalle d'étude $[0, T]$.

4.2 DEFINITIONS ET NOTATIONS

$c(t)$ = courbe de charge de la ligne

$d(t)$ = taux de départ des autobus

$[0, T]$ = intervalle de temps compris dans l'amplitude

r = durée de la rotation supposée constante dans $[0, T]$

$D(t)$: nombre de véhicules ayant circulé sur la ligne pendant $[0, t]$

$\Delta(t)$: temps minimum séparant le passage de deux autobus consécutifs lié au taux de départ par la relation $\Delta(t) \cdot d(t) = 1$

τ_{\max} : trafic maximum supporté par la ligne

$\tau(t, r)$: trafic enregistré sur la ligne à partir de la date t et pendant une rotation

F_{\min} (resp. F_{\max}) :
nombre minimum (resp. maximum) de bus à mettre en circulation sur la ligne.

4.3 ETUDE DU MODELE

Nous donnons une rapide description du modèle proposé dans [21].
Notons tout d'abord deux points :

a)
$$\int_{s-r}^s c(u) du = \text{Max}_{t \in [0, T]} \int_{t-r}^t c(u) du = \tau(s, r) = \tau_{\max}$$

correspond au trafic maximum sur la ligne considérée, puisqu'il s'agit de la masse maximum de passagers transportés pendant la durée r d'une rotation qui débute au temps optimal $s \in [0, T]$.

$$b) \quad \text{M a x}_{t \in [0, T]} \int_{t-r}^t d(u) \cdot du = D(s'+r) - D(s') = F_{\text{max}}$$

correspond au nombre maximum de bus mis en circulation sur la ligne pendant la durée d'exploitation $[0, T]$ considérée, puisqu'il s'agit du nombre maximum de véhicules circulant pendant une rotation sur l'intervalle $[0, T]$. On enregistre ce nombre maximum à compter de la date s' .

Au temps t , le nombre de passagers $c(t)$ passant par le point de charge maximum divisé par le nombre $d(t)$ de bus qui les y amène correspond au facteur de chargement (toujours limité par la capacité B des bus, c'est-à-dire : $\frac{c(t)}{d(t)} \leq B$).

Si sur l'arc de charge maximum les bus sont toujours saturés, il est clair que la flotte de bus affectée à la ligne est minimum. Cette considération s'exprime plus synthétiquement par la relation $F_{\text{min}} = \frac{\tau_{\text{max}}}{B}$ dans laquelle F_{min} est la quantité minimum de bus à mettre en circulation sur la ligne. Evidemment, cette approche satisfait (en terme de coût fixe) pleinement la direction de l'exploitation, à l'inverse elle risque d'avoir de fâcheuses répercussions sur le temps d'attente des usagers. Le second critère va donc consister à minimiser ce temps d'attente.

Si $\Delta(t)$ est le temps qui s'écoule entre le passage de deux bus consécutifs, on a $d(t) \cdot \Delta(t) = 1$. Pendant $\Delta(t)$ le nombre de passagers qui s'accumule est $c(t) \cdot \Delta(t)$ avec un temps moyen d'attente de $\Delta(t)/2$. Sur la durée d'exploitation de la ligne, le temps moyen d'attente est :

$$w = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \frac{c(t)}{d(t)} dt$$

Sur la période $[s-r, s]$ qui détermine τ_{max} et qui correspond à une période de pointe, il n'est manifestement pas possible de minimiser w , compte tenu de la politique $F_{\text{min}} = \tau_{\text{max}}/B$ qui

implique tout simplement $c(t) = B.d(t)$. En revanche, sur la période $[0, s-r]$ (ou $[s, T]$), il est possible de pratiquer une optimisation en cherchant la fonction $d(t)$ solution du problème variationnel suivant :

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \frac{1}{2} \int_0^{s-r} \frac{c(t)}{D'(t)} dt \\ \text{soumis à :} \\ D(t+r) - D(t) \leq F_{\min}, \quad 0 \leq t \leq s-r \end{array} \right. \quad (3)$$

où $D(t+r) - D(t) = \int_t^{t+r} d(t) dt.$

La relation (3) exprime le fait que, hors pointe, la capacité de transport peut être inférieure sur la durée d'une rotation à la capacité maximale de transport, à savoir F_{\min} . On résout le problème variationnel (V) en utilisant la relation d'Euler qui permet de montrer que, hors pointe, $d(t) = q \cdot \sqrt{c(t)}$ où q est inversement proportionnel au facteur de chargement. De plus, lorsque la relation (3) est serrée, on a $D'(t+r) = D'(t)$, c'est-à-dire $d(t+r) = d(t)$ ainsi que le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2} d(t+r) = q \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c(t)} \\ d(t_1+r) = q \cdot \sqrt{c(t_1)} \\ d(t_2+r) = q \cdot \sqrt{c(t_2)} \end{array} \right.$$

dont la solution est un triplet - non nécessairement unique - qui détermine sur l'intervalle $(0, s-r)$ le type de relation qu'il faut choisir entre $d(t) = q \sqrt{c(t)}$, $d(t) = d(t+r) = c(t+r)$ et $d(t) = d(t+r) = q \cdot \sqrt{c(t+r)}$.

Ces diverses considérations permettent de définir le nombre de bus à affecter à la ligne ainsi que les horaires de départ et le nombre probable de passagers à bord sur l'arc de charge maximum pour chaque autobus de la ligne.

La connaissance de la fonction $d(t)$ ne suffit cependant pas pour construire le graphique de ligne. En effet, avec $d(t)$ on est simplement capable de tracer des trajets obliques reliant entre eux les terminus de la ligne. Reste alors à réunir les trajets en tenant compte des temps de battements pour former les divers trains de véhicules appelés à circuler sur la ligne. Ce n'est qu'alors que le graphique de ligne sera considéré comme acquis. Nous proposons, dans le paragraphe suivant, une technique mathématique visant à assurer le découpage en trains de véhicules. Le modèle que nous indiquons est inspiré de l'article [14] .

5. DECOUPAGE DU GRAPHIQUE DE LIGNE EN TRAINS DE VEHICULES

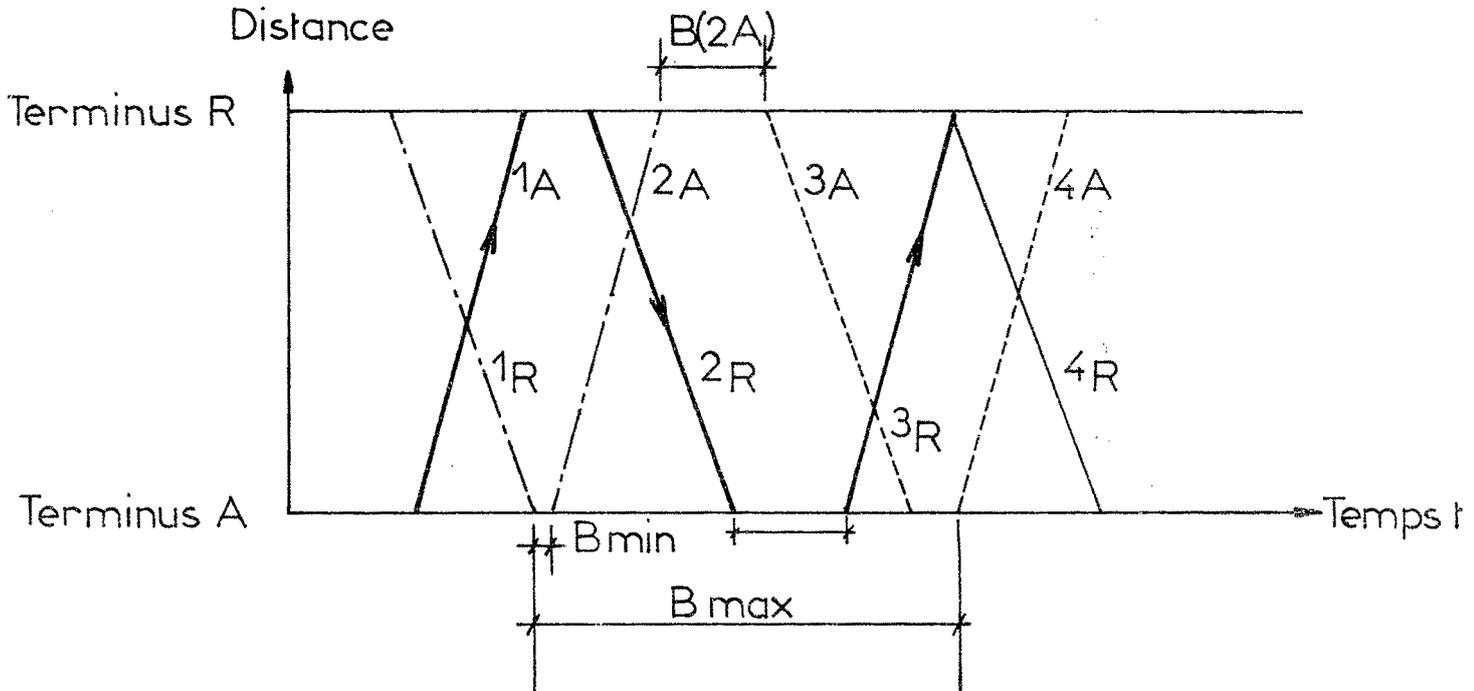
5.1 LA NOTION DE REGULATION

Hormis la remarque formulée à la fin du paragraphe précédent, notons que la connaissance du taux de départ des autobus et, corrélativement, la taille optimale de la flotte de bus à mettre en circulation sur la ligne ne suffisent pas du point de vue de l'exploitant à définir ce qu'il est convenu d'appeler le graphique de ligne, dans le sens où l'exploitant en question ne possède aucun moyen pour assurer une régulation du trafic.

En effet, de multiples perturbations peuvent survenir lors de l'exploitation d'une ligne, par exemple un embarras excessif de circulation (ou, à l'inverse, une fluidité anormale), une panne mécanique, une défaillance humaine... Ces diverses perturbations peuvent être absorbées en définissant autour des points de départ optimaux des autobus, un temps de battement dont il convient de déterminer la durée idéale.

5.2 LES DONNEES DU PROBLEME

On se reportera au chapitre I, § 3.1, en ce qui concerne les définitions et les notations. Pour préciser davantage les choses, on consultera avantageusement le schéma suivant :



On note B_{min} et B_{max} la durée minimum et maximum des battements $B(i_A)$ ou $B(j_R)$ pour tout i et tout j .

Ces notations permettent de caractériser un train de véhicules donné, disons $TR(k)$, par la séquence :

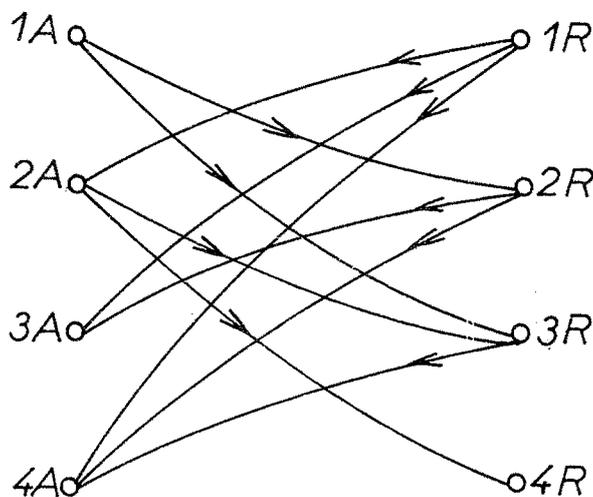
$$TR(k) = [j(1)_A, B(j(1)_A), j(2)_R, B(j(2)_R), \dots, j(q)_A, B(j(q)_A), j(q+1)_R]$$

5.3 FORMULATION

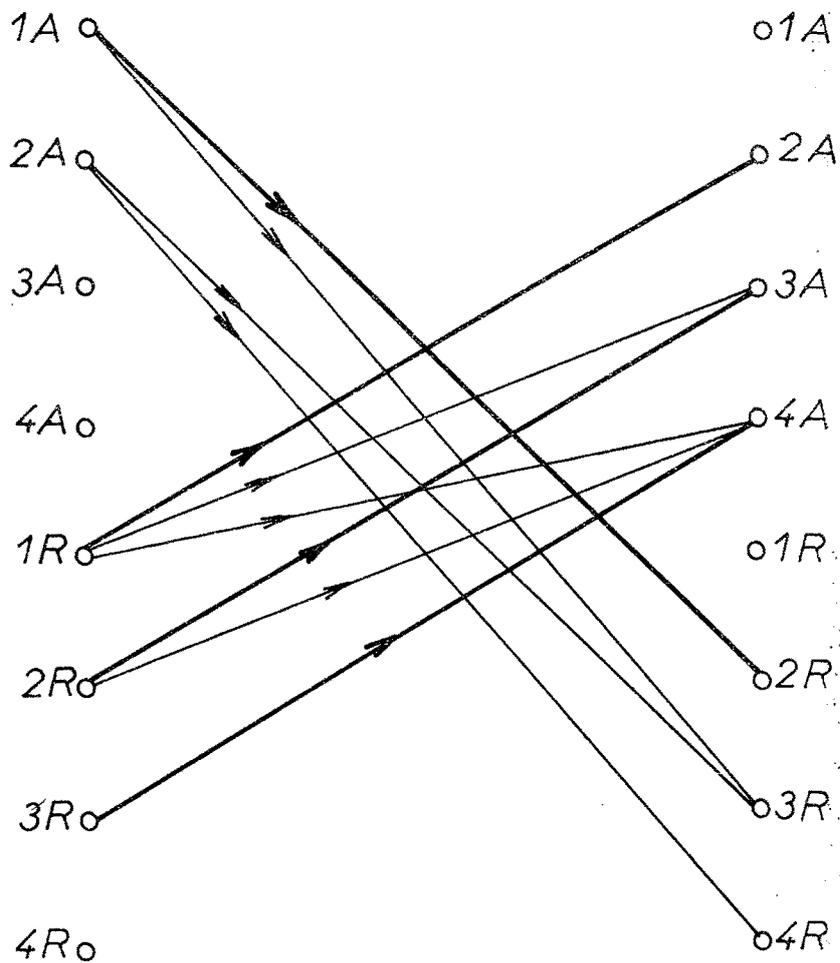
Considérons le graphe $G = (X \cup Y, V)$ où X représente l'ensemble des trajets i_A de A vers R et Y l'ensemble de trajets j_R de R vers A . Nous aurons $v = (i_A, j_R) \in V$ si, et seulement si j_R peut suivre i_A . B_{\min} étant positif, le graphe $G = (X \cup Y, V)$ est sans circuits. Cette remarque, bien qu'évidente, joue un rôle important dans la méthode de résolution.

On peut associer à chaque arc $v = (i_A, j_R) \in V$ une fonction coût $p(v)$ qui pénalise les battements de faible durée, c'est-à-dire ceux qui assurent une régulation de la ligne insuffisante. Dans ces conditions il est clair que les chemins du graphe G sont en bijection avec les séquences de la forme TR . En conséquence, toute décomposition de G en chemins disjoints correspond à autant de séquences $TR(1), TR(2), \dots, TR(q)$ représentant les q trajets de véhicules nécessaires à l'exploitation de la ligne. On peut donc dire que la construction des trajets avec un nombre minimal de bus (voire un nombre donné si la flotte d'autobus affectée à la ligne est identifiée) revient à décomposer le graphe G en un nombre minimal (voire un nombre donné) de chemins disjoints.

Exemple de graphe G conforme au schéma précédent



Pour ce faire, on construit le réseau de transport défini par $R = (S, T, V', c, p)$ où $S = XUY$, $P = XUY$ et V' est l'ensemble des arcs du graphe biparté construit en dupliquant XUY . A titre d'exemple, voici le réseau R construit à partir du schéma précédent:



On sait qu'il y a bijection entre un couplage parfait de R et une couverture de G en sommets disjoints. Le problème de la décomposition en trains optimisant la somme des coûts des battements se ramène donc à la recherche d'un couplage parfait de poids minimum dans un graphe biparté.

Les sommets S représentent les départs et ceux de P les arrivées des trains de véhicules. Un couplage donné de R définit un ensemble de trains de véhicules (i.e. le couplage constitué des arcs $(1_A, 2_R)$, $(1_R, 2_A)$, $(2_R, 3_A)$, $(3_R, 4_A)$) correspond aux trains suivants :

$$\begin{aligned} \text{TR}(1) &= \{ 1_A, B(1_A), 2_R, B(2_R), 3_A \} \\ \text{TR}(2) &= \{ 1_R, B(1_R), 2_A \} \\ \text{TR}(3) &= \{ 3_R, B(3_R), 4_A \} \\ \text{TR}(4) &= \{ 4_R \} \end{aligned}$$

Initialement, la cardinalité du couplage est nulle et l'on a autant de trains que de sommets de S. Dès qu'on ajoute un arc au couplage courant, le nombre de trains diminue d'une unité. Pour un couplage donné M le nombre de trains vaut :

$$\text{card}(S) - \text{card}(M)$$

Plus généralement, le nombre de trains correspond au nombre de sommets de S non saturés par le couplage. En outre, les sommets non saturés de S (resp. P) correspondent aux trajets terminaux (resp. initiaux) des trains. Si la flotte de bus est donnée, on arrêtera la recherche d'un couplage M de coût minimum dès que $\text{card}(S) - \text{card}(M)$ a atteint cette valeur, sinon on poursuivra jusqu'à l'optimum.

6. HABILLAGE DES HORAIRES

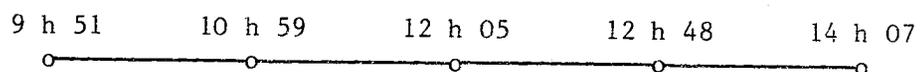
Le problème d'habillage des horaires [13] , [14] est certainement celui qui a donné lieu au plus grand nombre de publications sur les problèmes d'exploitation de lignes. Après avoir rappelé la formulation généralement adoptée pour ce type de problème, nous décrivons quelques méthodes de résolution dont une méthode personnelle basée sur une heuristique.

6.1 LE PROBLEME DE L'HABILLAGE DES HORAIRES

La construction du graphique de ligne, et plus particulièrement la résolution du problème de la régulation du trafic sur la ligne, nous ont permis de décomposer le graphe $G = (XUY, V)$ en un ensemble disjoint de séquences de la forme $TR(1), TR(2), \dots TR(q)$.

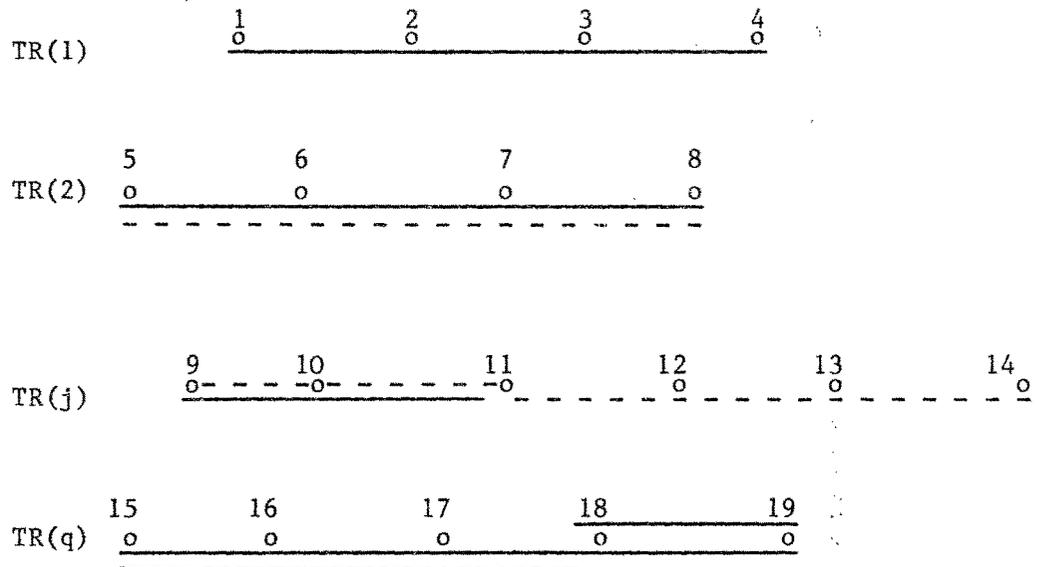
Etant donné un ensemble de trains de véhicules $TR(1), TR(2), \dots TR(q)$, comment découper le temps de travail pour affecter à des agents de conduite un service conforme aux conditions statutaires et d'exploitation. Ainsi disposant de q trains de véhicules, on pourrait définir q services. Mais la durée de ces services serait égale à celle de l'amplitude ce qui est impossible statutairement. Il faut donc étaler la charge de travail. Ainsi, connaissant la durée globale de fonctionnement de la ligne sur une journée et la durée moyenne d'un service, on en déduit le nombre M de services nécessaires. Reste alors à répartir ces M services sur l'ensemble des trains de véhicules : c'est l'objet de l'habillage des horaires.

Contrairement à la modélisation précédente, nous allons définir chaque battement comme étant un sommet et chaque trajet comme étant un arc. Dans ce contexte, on peut représenter $TR(j)$ par le chemin suivant, donné à titre d'exemple :



Les horaires indiqués donnent les dates de départ de l'autobus considéré. Chaque sommet correspond alternativement à un terminus. En fonction de la nature de l'exploitation, il est possible de définir sur chacun de ces chemins un ensemble de "points de relève possibles" (dans le sens où un chauffeur peut en remplacer un autre). Cet ensemble est constitué de sommets privilégiés notés ω_i , $i = 1, 2, \dots, R$ reliés entre eux par des arcs appelés tronçons. (voir à ce sujet les définitions données au § 4.1, chap. I).

Exemple :



Dans cet exemple $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{5, 6, 7, 8\}$ constituent des points de relève possibles. Les arcs $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$... représentent des tronçons horizontaux, alors que les arcs du type $(7, 12)$ sont des tronçons diagonaux qui correspondent au fait qu'un conducteur d'autobus est susceptible de changer de véhicule sur la ligne.

On peut, à présent, définir précisément un service comme étant une succession de points de relève et de tronçons conforme aux conditions statutaires et aux impératifs de l'exploitation. Par exemple $(9, 10, 11, 18, 19)$, $(11, 12, 13, 14)$ et $(15, 16, 17, 18)$ peuvent constituer des services.

6.2 FORMULATION DU PROBLEME

L'idée de base (qui paraît très fructueuse dans la plus grande partie des problèmes combinatoires) consiste à générer automatiquement un ensemble $J_K = \{w(1), w(2), \dots, w(K)\}$ de services réalisables au double plan de l'exploitation et des conditions statutaires du personnel roulant. On affecte, lors de la génération, à chaque service $w(j)$ un coût $p(j)$ représentatif de la désutilité ressentie par l'agent qui se le verrait confié. Bien entendu, l'énumération proposée ci-dessus peut ne pas être exhaustive.

Noton $U = \{w(1), w(2), \dots, w(n)\}$ l'ensemble des services retenus et $p(1), p(2), \dots, p(r)$ les poids qui sont attachés à chaque service. Par ailleurs, on note $w(i), i = 1, 2, \dots, m$ tous les tronçons possibles sur la ligne considérée.

Il est alors aisé de définir la matrice booléenne représentative de la couverture des tronçons par les services de la manière suivante :

$$a(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si le tronçon } (i) \text{ appartient au service } w(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons, $x(j)$ la variable de décision positionnée à 1 si le service $w(j)$ est retenu dans la solution, à 0 sinon. De plus, si un service $w(j)$ contient un tronçon oblique (ou diagonal) équivalent à un changement de véhicule, on peut lui associer un temps de transfert $t(j) \geq 0$. Enfin on déduit à partir des conditions d'exploitation, telles que la durée moyenne de travail hebdomadaire sur la ligne, deux types d'information privilégiés : le nombre N de services à effectuer et le temps maximum D que l'on peut répartir sur les divers temps de transfert. On peut, à présent, formuler le problème de l'habillage d'une ligne comme un problème de partitionnement (PAR) :

$$\begin{cases}
 \sum_{j \in J} a(i,j) x(j) = 1, \quad \forall i \in I & (13) \\
 \sum_{j \in J} x(j) = M & (14) \\
 \sum_{j \in J} t(j)x(j) \leq D & (15) \\
 x(j) = 0, 1, \quad \forall j \in J & (16) \\
 \sum_{j \in J} p(j)x(j) = z \text{ (Min)} & (17)
 \end{cases}
 \text{(PAR)}$$

La relation (13) signifie qu'un tronçon $t(i)$ ne peut appartenir qu'à un seul service - disons $w(j)$ - à la fois. Les contraintes (14) et (15) indiquent que l'on souhaite sélectionner exactement M services parmi les $\text{card}(J)$ possibles et que le temps global de transfert en résultant ne doit pas excéder D . La contrainte (16) force les variables $x(j)$ à 0 ou 1. Enfin (17) décrit la fonction objectif qui consiste à minimiser le coût global des M services sélectionnés.

6.3 METHODE DE RESOLUTION

6.3.1 Principe général

Une des approches classiques possibles, lorsqu'on traite des problèmes d'optimisation du type (PAR), consiste à mettre en oeuvre une méthode S.E.P. [1] [20] dans laquelle la recherche d'une bonne évaluation est primordiale. Cette évaluation sera d'autant meilleure que son écart avec la solution optimale entière est minimum. Une manière de faire consiste à résoudre le programme linéaire (P) obtenu en relaxant les contraintes d'intégrité de (PAR). Bien entendu, le temps passé à rechercher l'évaluation de (PAR), s'il est trop élevé, va pénaliser globalement les performances de l'algorithme S.E.P. mis en oeuvre, même si l'évaluation est bonne. Si le programme linéaire (P) présente un grand nombre de contraintes et possède une structure favorisant la mise en oeuvre d'une méthode de décomposition, on pourra utiliser une technique de relaxation lagrangienne [6], sinon pourquoi ne pas adopter une heuristique de résolution du dual.

6.2.1 Résolution du programme linéaire continu (P) : méthode duale du simplexe avec variables bornées

Dans le problème (P), la relation d'intégrité (16) de (PAR) devient $0 \leq x(j) \leq 1, \forall j \in J$. Par ailleurs, l'équation (13) peut être transformée en posant $n(j) = \sum_{i \in I} a(i,j)$, $n(j)$ étant en l'occurrence le nombre de tronçons couverts par le service d'indice j . Notons m le nombre total de tronçons. Dans ces conditions, on peut remplacer les m équations du type (13) par les $m + 1$ équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a(i,j)x(j) &\leq 1, \forall i \in I \\ \sum_{j \in J} n(j)x(j) &\geq m \end{aligned}$$

et mettre en oeuvre très facilement la méthode duale du simplexe.

6.2.2 Recherche directe d'une bonne évaluation

La méthode proposée s'inspire des procédures utilisées dans [5]. Considérons un tronçon (le premier dans la logique de la procédure, le i ème pour la convenance de l'exposé). A ce i ème tronçon, est associée la contrainte suivante :

$$\sum_{j \in J} a(i,j)x(j) = 1$$

et l'ensemble noté $J(i) = \{j/a(i,j) = 1\}$. Posons : $p(j_0) = \text{Min}_{j \in J(i)} \{p(j)\}$, ce qui permet d'écrire la fonction objectif sous la

la forme : $z = p(j_0) + \sum_{j \in J} p'(j)x(j)$ avec

$p'(j) = p(j) - a(i,j) \cdot p(j_0) \geq 0$ (A noter que, dans le problème (PAR) les coûts $p(j)$ sont supposés non négatifs sans perte de généralité, à défaut on écrirait $x'(j) = 1 - x(j)$). Après n itérations, on fait apparaître m coûts réduits de valeur nulle et une évaluation $z(0) = \sum_{i=0}^{m-1} p(j_i)$ de la fonction objectif qui s'écrit alors:

$$z = z(0) + \sum_{j \in J} p'(j)x(j)$$

Si l'on se fixe comme but la recherche d'une solution réalisable, on peut imaginer une recherche par énumération d'un ensemble de M variables, parmi les m ayant un coût réduit nul, satisfaisant la condition (15).

6.3.3 Résolution du problème (PAR) à l'aide d'un algorithme d'énumération implicite

Le problème (PAR) consiste à rechercher, dans une famille de services acceptables, un sous-ensemble (des services) de coût minimum qui constitue une partition de l'ensemble des tronçons.

On a vu que la matrice $A = (a(i,j))$ comprend en ligne les tronçons et en colonnes les services. Si l'on adoptait une méthode booléenne de recherche directe des solutions, on affecterait successivement les poids 0 ou 1 à l'ensemble des variables (plusieurs milliers dans un problème d'habillage), or les contraintes sont en nombre bien inférieur (200 environ), c'est pourquoi dans [4] on cherche principalement à saturer les contraintes. Cette démarche est facilitée en réorganisant la matrice A en listes classées par la relation d'ordre :

$$\text{liste}(i) \preceq \text{liste}(k) \implies \sum_{j \in J} a(i,j) \leq \sum_{j \in J} a(k,j)$$

Les contraintes seront donc saturées par ordre croissant des listes. On va donc d'abord recouvrir les tronçons pour lesquels le choix est faible, puisque la première liste correspond à la ligne de A possédant le plus petit nombre de 1. A l'intérieur d'une liste, on choisira les services de plus faible coût marginal. Ainsi, puisque la liste (i) comprend les numéros des services qui couvrent en premier (lorsqu'on descend (les colonnes) le tronçon i, on est assuré qu'aucun des tronçons précédant i ne seront couverts par des services figurant dans la liste (i).

Des expériences numériques ont été effectuées sur ces modèles [1], [16], [13], qui ont montré une certaine complémentarité. Ainsi, lorsqu'un problème n'était pas résolu par une de ces techniques, une autre en venait généralement à bout. Mais dans tous les cas, ces approches ne sont pas suffisamment interactives pour laisser aux techniciens du bureau des horaires le sentiment d'apporter une contribution personnelle à l'élaboration de la solution. Ils s'opposent donc à l'implantation définitive de telles techniques.

7. CONSTRUCTION DES TABLEAUX DE ROULEMENT

7.1 POSITION DU PROBLEME

L'habillage des lignes fournit un découpage optimal des services (voir, à titre d'exemple, le schéma n° 3, annexe 2) à partir duquel il convient de réaliser le tableau de roulement (schéma n° 4 annexe 2). Il s'agit, en fait, d'attribuer au personnel chargé de la conduite des autobus un cycle - disons hebdomadaire - de travail permettant d'assurer la charge des services à effectuer sur la période considérée, tout en respectant les contraintes d'exploitation et les conditions statutaires de travail. A l'inverse des points étudiés précédemment, ces contraintes peuvent varier de façon notable d'un réseau de transport à l'autre, ce qui rend malaisé une approche globale du problème de roulement (voir à ce sujet [10] où l'on fait une étude comparative et analytique sur plusieurs réseaux de transport aux Etats Unis et en Europe). De plus, les objectifs de l'exploitation vont à l'encontre des contraintes statutaires. Enfin, les souhaits du personnel roulant, que l'on cherche bien sûr à prendre en compte, sont bien souvent eux-mêmes contradictoires. Aussi peut-on dire que parmi l'ensemble des problèmes que pose l'exploitation d'un réseau de transport en commun, celui de la confection automatique des tableaux de roulement est le plus flou, le plus difficile à cerner. La tentation est donc grande de présenter le problème comme non modélisable et juste susceptible d'une assistance purement informatique [3].

7.2 ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

7.2.1 Le problème du roulement des quarts dans les entreprises à feu continu

Dans [20], R. Trémolière étudie le problème du roulement des quarts dans les entreprises à feu continu. Il s'agit d'un problème voisin de celui de l'affectation des jours de repos. En effet, l'unité d'exploitation dispose d'un certain nombre de postes sur lesquels doit être affecté en permanence un opérateur. Ces postes peuvent être comparés aux autobus sur l'unité d'exploitation que constitue la ligne, puisque, pendant sa durée d'utilisation, tout bus doit être affecté en permanence à un agent de conduite. Dans le cas du roulement par quarts, on affecte en général cinq opérateurs à chaque poste, bien que l'affectation d'un nombre fractionnaire d'opérateurs soit possible si l'on admet l'intervention de briseurs de quart (multivalence), ce qui reviendrait à autoriser un agent (polyvalent) à travailler un certain temps sur un poste, puis le reste de son temps de travail sur un autre poste. Ceci étant, il faut signaler que la charge est identique pour chaque jour calendaire, puisqu'il faut effectuer invariablement un service de nuit, de matin et de soir. C'est à partir de quelques considérations de ce type qu'on établit un certain nombre de relations arithmétiques, relatives à la longueur des cycles de planning, le nombre d'opérateurs, les débuts de cycles dans le planning, etc. Fort de ces remarques, on met en oeuvre dans [20] un algorithme de type exploratoire qui permet d'obtenir, après un nombre limité de descentes et de remontées dans l'arborescence des plannings possibles, l'ensemble des tableaux de roulement de quarts réalisables.

La méthode proposée dans [20], si elle est applicable dans les entreprises à feu continu où l'on dispose systématiquement de trois services à assurer chaque jour, ne peut être envisagée dans notre cas puisque nous disposons d'un nombre variable de services à assurer chaque jour. De plus, la dimension du problème est bien plus importante puisqu'il nous faut compter de 5 à 20 services par jour pour une ligne de moyenne importance.

7.2.2 Implantation des jours de repos et des jours travaillés dans une grille de roulement

a) Les données et les hypothèses

Le problème que l'on cherche à résoudre dans [11] est le suivant : "comment choisir des configurations de type $[0,1]^7$ (voir à ce sujet la définition §5.2 chapitre I), de façon à respecter les contraintes d'exploitation : couverture des services, et les contraintes statutaires : séquençement des configurations retenues ?"

On fait dans [11] une hypothèse très forte : "les configurations comportent systématiquement deux jours de repos accolés. On peut ainsi représenter par une matrice carrée $P = (\gamma_{ij})$ les configurations possibles :

$$(\gamma_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Formulation

On ramène le problème à celui du niveau de la main-d'oeuvre de caisses enregistreuses dans une grande surface, ou bien de postes de péage sur une autoroute. Ainsi, étant donné :

- $s(i)$, $i=1,2,\dots,7$ le nombre de jours de services qu'il faut affecter au jour i des tableaux de roulement,
- (γ_{ij}) , la matrice des configurations possibles,

trouver $x(j)$ le nombre de personnes qui doivent commencer à travailler le jour j pour finir à la date $(j+5) \bmod (7)$ tel que le nombre total de personnes affectées à la ligne soit minimum.

Il est très important de souligner que, dans cette formulation, on cherche un niveau global de la main-d'oeuvre minimum, c'est-à-dire le nombre minimum d'agents à affecter au roulement. Le problème se formule comme suit :

$$(PLE) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^7 \gamma_{ij} \cdot x(j) \geq s(i), \quad i=1,2,\dots,7 \quad (18) \\ x(j) \geq 0, \text{ entier} \\ \sum_{j=1}^7 x(j) = w \text{ (Min)} \quad (19) \end{array} \right.$$

où la contrainte (18) exprime que le niveau de la main-d'oeuvre à la date i doit être suffisant pour gérer la ligne et la fonction objective (19) signifie que l'on minimise l'investissement global en main-d'oeuvre.

On trouve dans [11] un algorithme tenant compte de la structure spécifique du problème pour résoudre PLE. A titre d'exemple, on obtient pour $s = (15, 15, 17, 15, 15, 15, 5)$ le vecteur $x = (8, 0, 7, 0, 8, 0, 0)$ qui assure le recouvrement des services sous réserve d'affecter 23 agents sur le roulement (à comparer avec le roulement figurant sur le schéma n° 3 en annexe 2). Ce résultat implique de choisir 8 configurations du type (1 1 1 1 1 0 0), 7 configurations du type (0 0 1 1 1 1 2), et 8 configurations du type (1 1 0 0 1 1 1). Malheureusement, il ne sera plus possible d'effectuer un séquençement des configurations compatible avec les conditions statutaires. De plus, [11] n'indique aucune méthode rigoureuse sur la façon d'effectuer ce séquençement. Cette approche pose donc deux difficultés:

- (1) le niveau minimum de main-d'oeuvre obtenu est trop élevé (ceci est provoqué par l'hypothèse indiquée en a)

- (2) la résolution du problème PLE (recouvrement des services), puis du problème de séquençement, peut conduire à une infaisabilité.

7.2.3 Planning de travail en milieu hospitalier

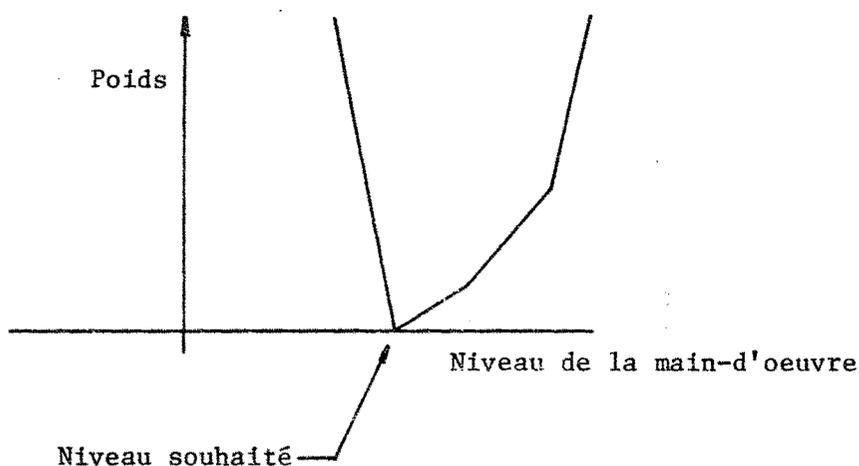
- a) Position du problème : les données et les hypothèses

On trouve dans [18] une approche très différente qui consiste à considérer les roulements comme non cycliques. On détermine ainsi, pour chaque agent, le découpage du travail sur une période de longueur fixe (i.e. une quinzaine, voire un mois). Puis, on effectue un nouveau découpage pour la période suivante tout en tenant compte de l'histoire du système, c'est-à-dire du planning précédent. Cette succession de plannings pose un problème majeur qui est celui du séquençement des différentes périodes. Notons que le mécanisme adopté est intéressant pour les agents car on recueille, pour chaque période, le planning désiré et l'on tente de s'y conformer au mieux compte tenu des contraintes d'exploitation. A signaler enfin qu'on ne s'intéresse pas à l'affectation des services mais simplement à l'implantation des jours de repos.

- b) Le modèle et la méthode de résolution

Dans un premier temps on génère tous les plannings statutairement possibles sur une durée donnée (i.e. 15 jours). Cette génération ne tient compte que des contraintes obligatoires (i.e. ne pas avoir une séquence travaillée de plus de 6 jours, ou du moins de 2 jours...).

On définit ensuite un ensemble de contraintes non obligatoires dont la violation n'entraîne qu'une pénalité. Par ailleurs, on pénalise pour chaque jour de la période considérée l'écart entre le taux réel et le taux désiré de la main-d'oeuvre. Les poids sont en fait des fonctions à l'allure suivante :



où l'on pénalise très fortement les écarts négatifs.

En outre, si un agent a été satisfait sur la période précédente (le degré de satisfaction est inversement proportionnel à l'écart entre le planning qu'on lui a affecté et celui qu'il avait proposé), on attache moins d'importance à le satisfaire sur la période donnée. Ces différentes considérations permettent de ramener la problème à la minimisation d'une seule fonction multicritère à variable bivalente que l'on résout grâce à un algorithme de descente (voir à ce sujet [18]).

8. CONCLUSION

Les techniques et modèles mathématiques que nous avons présenté dans ce chapitre ne constituent en aucun cas une panacée permettant de résoudre, via l'informatique, l'ensemble des problèmes que rencontre l'exploitant d'un réseau de transport en commun.

En revanche, ils constituent une panoplie d'outils d'analyse dont l'objectif se veut modeste : permettre de tester des hypothèses, assurer une meilleure compréhension des phénomènes et même déboucher sur un dialogue mieux construit entre l'exploitation et les agents de conduite du réseau. En ce qui concerne ce dernier point, il va sans dire que la construction automatique des grilles de roulement apporterait un élément important. Malheureusement, on

a pu constater la pauvreté de la contribution de la recherche opérationnelle dans ce domaine. C'est pourquoi nous avons décidé de construire un modèle et une méthode de résolution qui répondent à nos objectifs de manière aussi satisfaisante que possible. Après une première tentative infructueuse, qui ramenait le problème à un programme quadratique à variables bivalentes (voir à ce sujet l'annexe I), nous avons pu formuler le problème du roulement comme celui de la recherche d'un circuit hamiltonien de coût maximum avec des contraintes supplémentaires dites de recouvrement. L'étude de ce modèle est détaillée dans les chapitres suivants.

Pour faciliter la prise en compte du problème, nous avons limité notre étude à l'implantation des jours de repos et des jours de travail dans les tableaux de roulement. L'affectation des services se fait dans une phase suivante. Cette séparation du problème en deux phases en réduit très fortement la combinatoire comme nous l'avons mentionné au chapitre I, paragraphe 7. De plus, l'affectation des services, une fois l'implantation des jours de repos effectuée, paraît être un problème de résolution assez aisé.

Chapitre III

AFFECTATION OPTIMALE DES JOURS DE REPOS
DANS UN TABLEAU DE ROULEMENT

I. INTRODUCTION

Dans notre première approche du problème de roulement, nous avons adopté comme démarche, de traduire l'ensemble des contraintes directement sous la forme de relations mathématiques (voir partie I, annexe 1). Cette façon de faire s'est révélée inefficace d'un strict point de vue algorithmique mais aussi très rigide car nous savons [10] que les conditions de travail, les souhaits et les contraintes statutaires varient beaucoup d'un réseau de transport en commun à l'autre. En conséquence, même si l'algorithme que nous avons proposé s'était révélé performant, le programme n'aurait eu aucune portabilité. Nous avons donc tenté de formuler le problème de manière aussi générale que possible, de telle sorte que les entrées nécessaires à sa résolution puissent être générées automatiquement.

Dans une note de travail [12] on propose une approche qui nous a mis sur la voie du modèle définitif.

On suppose disposer d'un ensemble de configurations

$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ représentant toutes les semaines civiles possibles, compte tenu des contraintes statutaires. A chaque configuration est attaché un poids p_j pour $j = 1, 2, \dots, n$. A partir de Γ on sait construire un graphe valué $G = (\Gamma, U, c)$. En effet, il n'est pas toujours possible de faire suivre γ_i par γ_j mais si oui, on peut définir un arc $u \in U$ entre γ_i et γ_j et on sait évaluer un coût de séquençement $c(ij)$ correspondant à la fonction c de U dans R .

Ceci étant défini, on peut lire dans [12]: "De bons roulements cor-
" respondent, dans le graphe G ainsi valué, à des circuits de N
" arcs et de valeurs faibles (N étant le nombre d'agents de roule-
" ment). La difficulté de cette formulation réside cette fois dans
" la prise en compte des contraintes de partitionnement. Pour les
" intégrer à la méthode, il faut en effet construire un algorithme
" nouveau et spécifique dont la mise au point exigera sans doute un
" important travail ... et dont on ne peut garantir a priori les
" performances". Notre objectif a donc été de mettre en oeuvre l'al-
" gorithme spécifique dont il est question à partir d'une formulation
entièrement neuve du problème.

2. CONSTRUCTION DU GRAPHE VALUE $G = (\Gamma, U, c)$

Le générateur qui doit construire $G = (\Gamma, U, c)$ constitue l'inter-
face qui permettra de prendre en compte sans difficulté la plus
grande partie des contraintes statutaires. Ainsi, lorsqu'on passe
d'un réseau à un autre, il conviendra simplement de modifier l'in-
terface. Dans notre cas, on édite à partir de toutes les combinai-
sons possibles de 1 à 3 jours de repos sur une semaine civile l'en-
semble Γ , en éliminant les configurations qui contiennent le
schéma : Repos - Travail - Repos. A la génération, chaque configu-
ration reçoit un coût qui tient compte du nombre de jours de repos
global mais aussi du nombre de jours de repos accolés. Bien entendu,
il est aisé de prendre en compte d'autres critères pour l'évaluation
des poids attachés à chaque configuration. Reste à définir les arcs
 $u = (\gamma_i, \gamma_j) \in U$, c'est-à-dire déterminer si le sommet γ_j peut suivre
le sommet γ_i . Ceci revient à étudier le planning résultant de la
concaténation de la configuration correspondant à γ_j à la configu-
ration correspondant à γ_i . Le planning créé correspond à une durée
de 14 jours. Si le planning ne vérifie pas les contraintes (2) et (3)
du paragraphe 5.3.2, chapitre I, alors l'arc (γ_i, γ_j) n'appartient
pas à U . En revanche, l'arc (γ_j, γ_i) peut fort bien exister, de
même que la boucle (γ_i, γ_i) .

Exemple : Considérons les trois sommets $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$ de Γ correspondant aux trois configurations suivantes :

$$\gamma_i = (0 0 R R 0 0 R)$$

$$\gamma_j = (R 0 0 0 0 R 0)$$

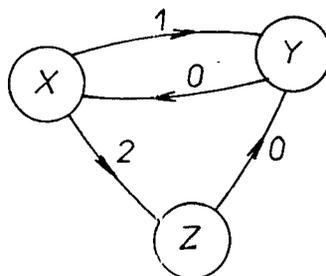
$$\gamma_k = (R R 0 0 0 0 0)$$

où les 0 correspondent à des jours de travail et les R à des jours de repos.

A partir de ces trois sommets, on peut construire six plannings, dont les trois suivants :

- $(\gamma_i, \gamma_j) = (0 0 R R 0 0 R R 0 0 0 0 R 0)$ possible
- $(\gamma_j, \gamma_k) = (R 0 0 0 0 R 0 R R 0 0 0 0 0)$ impossible car il faudrait travailler deux dimanches de suite et effectuer une séquence R O R
- $(\gamma_k, \gamma_i) = (R R 0 0 0 0 0 0 0 R R 0 0 R)$ impossible car il faudrait travailler plus de six jours consécutifs.

Le graphe valué correspondant à $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$ peut être défini (à déterminer avec l'exploitation) par :



On dispose d'une routine qui assure le calcul des coûts $c(i,j)$ pour tous les couples (γ_i, γ_j) en affectant $-\infty$ si l'arc (γ_i, γ_j) ne peut exister ou une valeur finie non négative si le séquençement (γ_i, γ_j) est possible. En outre $c(i,j)$ tient compte de la qualité du séquençement dans la mesure où une bonne succession des configurations peut entraîner une augmentation du nombre de repos accordés.

3. ETUDE PRELIMINAIRE

3.1 NOTATIONS ET DEFINITIONS

Γ = $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ ensemble des configurations

$p(j)$ = poids de la configuration γ_j

$c(i,j)$ = coût de séquençement (γ_i, γ_j)

$x(i) = \begin{cases} 1 & \text{si la configuration } \gamma_i \text{ est retenue dans le tableau} \\ & \text{de roulement} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$y(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si la configuration } \gamma_j \text{ suit la configuration } \gamma_i \\ & \text{dans le tableau de roulement} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$a(j,k) = \begin{cases} 1 & \text{si la configuration } \gamma_j \text{ possède un jour de repos le} \\ & \text{jour } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

G = (Γ, U, c) graphe valué construit à partir de Γ

$U(S)$ = ensemble des arcs du sous-graphe partiel de G construit sur S

f_i = nombre maximum d'occurrences autorisé de la configuration γ_i dans le tableau de roulement (par défaut $f_i = N$, dans tous les cas $f_i \leq N$)

N = Nombre d'agents du tableau de roulement

$r(k)$ = nombre de repos le jour k

3.2 FORMULATION

Pour présenter au mieux la démarche que nous avons suivie, il convient de noter que le problème de roulement présente deux aspects dont le formalisme et la structure diffèrent très fortement.

- a) D'une part, il s'agit de résoudre un problème de recouvrement visant à sélectionner parmi l'ensemble des configurations $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ un sous-ensemble Γ^* assurant à coût minimum la couverture des services.

Notons bien que Γ^* peut contenir plusieurs occurrences d'une même configuration, c'est-à-dire que, parmi les N configurations (puisque'il faut N agents) un certain nombre peut correspondre à la même configuration répétée plusieurs fois. Par exemple, il faudra 7 configurations γ_7 , 3 configurations γ_{41} , 5 configurations γ_{21} et 4 configurations γ_{27} pour un roulement à 19 agents.

Pour la convenance, on duplique les configurations de Γ^* qui sont répétées plusieurs fois en autant de sommets qu'il y a d'occurrences afin de construire un ensemble X de sommets. A partir de l'exemple précédent, on obtiendrait $X = \{ \gamma_A, \gamma_B, \dots, \gamma_C, 41_A, 41_B, 41_C, 21_A, \dots, 21_E, 27_A, \dots, 27_D \}$.

- b) D'autre part, il s'agit de chercher dans le graphe $G_X = (X, U(X))$ un circuit hamiltonien de coût maximum. ($U(X)$ représente ici l'ensemble des arcs qu'il est possible de construire à partir de X).

Mais comme nous l'avons déjà signalé au chapitre II, paragraphe 7.2.2, page 51, ces deux aspects ne doivent pas être dissociés. C'est donc globalement qu'il faut formuler le problème.

Pour ce faire, on numérote de 1 à f_1 chaque configuration γ_i de façon à obtenir un nouvel ensemble $\Gamma = \gamma_1^1, \dots, \gamma_1^{f_1}, \gamma_2^1, \dots, \gamma_2^{f_2}, \dots, \gamma_n^1, \dots, \gamma_n^{f_n}$. Numérotons à nouveau tous les indices et posons $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$.

Ceci étant, le problème de roulement à N agents peut se formuler comme le programme linéaire en variables bivalentes PR_1 suivant :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^q a(k,j) x(j) = r(k), \quad k=1,2,\dots,7 & (1) \\
 & \sum_{j=1}^q x(j) = N & (2) \\
 & \sum_{j=1}^q y(i,j) = x(i), \quad i=1,2,\dots,q & (3) \\
 & \sum_{i=1}^q y(i,j) = x(j), \quad j=1,2,\dots,q & (4) \\
 & \sum_{(i,j) \in U(S)} y(i,j) \leq \sum_{i \in S} x(i) - \max_{i \in S} x(i), \quad \forall S \subset X, |S| \leq N-1 & (5) \\
 & x(j) = 0,1 \quad j=1,2,\dots,q & (6) \\
 & y(i,j) = 0,1 \quad i=1,2,\dots,q, \quad j=1,2,\dots,q & (7) \\
 & \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q y(i,j) c(i,j) + \sum_{j=1}^q x(j) p(j) = Z(\text{Max}) & (8)
 \end{aligned} \right\} PR_1
 \end{aligned}$$

La relation (1) exprime le fait qu'il faut assurer le recouvrement des services pour tous les jours de la semaine, l'égalité (2) implique que l'on doit sélectionner N agents, les contraintes (3), (4), (5) qui sont centrales dans ce modèle servent à relier le problème de recouvrement et celui du séquençement. En effet, lorsque les variables $x(i)$ sont positionnées pour $i=1,2,\dots,n$, les contraintes (3) et (4) dans lesquelles $x(i)=0$ ne tiennent plus et seules subsistent celles pour lesquelles $x(i)=1$. Par ailleurs, dans la contrainte (5), si l'ensemble S ne contient que des sommets non sélectionnés (c'est-à-dire tels que $x(i)=0, i \in S$), alors :

$$\sum_{i \in S} x(i) - \max(x(i)) = 0$$

et la relation (5) ne tient pas. En revanche, si S contient des sommets positionnés à 1, pour l'ensemble des indices $i \in I_S \subset S$ tel que $x(i)=1, i \in I_S$ nous avons très exactement :

$$\sum_{i \in S} x(i) - \max(x(i)) = \sum_{i \in I_S} x(i) - 1 = |I_S| - 1$$

Donc à x fixé, notons I l'ensemble des indices tel que $x(i)=1$, pour $i \in I$, on peut alors écrire :

$$(TSP) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in I} y(ij) = 1, \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} y(ij) = 1, \forall j \in I \\ \sum_{(i,j) \in U(S)} y(ij) \leq |S| - 1, \forall S \subset I \end{array} \right.$$

ce qui correspond très exactement au problème du voyageur de commerce sur N sommets (en effet, $\sum_{i \in I} x(i)=N$). Nous avons donc écrit avec les contraintes (3), (4), (5) une espèce de généralisation du voyageur de commerce. Notons, en outre, que la relation (5) peut s'écrire :

$$\sum_{(i,j) \in U(S)} y(i,j) \leq \sum_{i \in S} x(i) - x(k), \forall k \in S, \forall S \subset X \text{ tel que } |S| \leq N-1$$

en conséquence, les contraintes (1) à (5) définissent bien un polyèdre convexe et on peut écrire le problème PRC_1 correspondant à la relaxation continue de PR_1 .

Si la solution optimale de PRC_1 est entière, nous aurons effectivement obtenu une solution au problème d'affectation des jours de repos dans le tableau de roulement.

3.3 DIMENSION ET COMPLEXITE DES PROBLEMES PR_1

Soit n le nombre initial de configurations distinctes générés et f_i le nombre maximum d'occurrences de γ_i . On a alors :

$$\text{card}(\Gamma) = \sum_{i=1}^n f_i = q$$

qui définit le nombre de variables de type $x(i)$ et q^2 variables de type $y(i,j)$. PR_1 comporte donc $q(q+1)$ variables. En revanche, le nombre de contraintes s'exprime par la relation :

$$\sum_{j=1}^{2^{N-1}} j \cdot \binom{N-1}{j} + 2q + 8$$

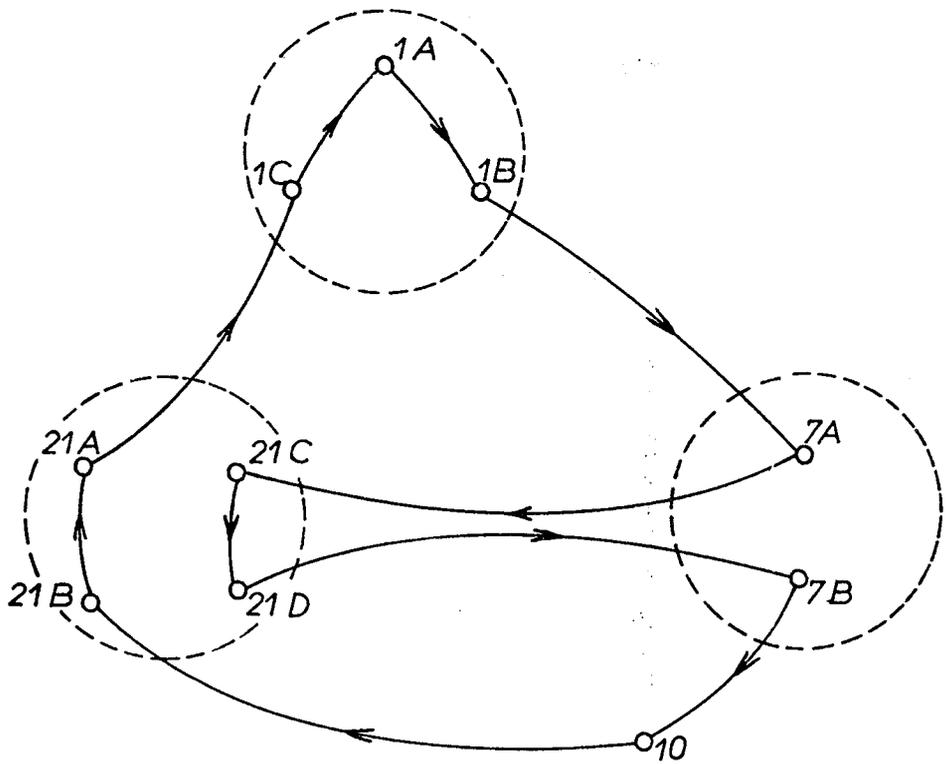
Le programme PR_1 est donc un énorme programme linéaire, puisque q vaut environ 200 et N de 5 à 30 en moyenne. Quant à la complexité de PR_1 , disons que s'agissant de résoudre une extension du problème du voyageur de commerce auquel on a rajouté des contraintes supplémentaires de recouvrement, nous sommes en présence d'un problème NP dur. D'ailleurs, à Γ^* fixé il s'agit précisément d'un problème de voyageur de commerce.

4. RELAXATION DU PROBLEME : METHODE DE RESOLUTION ET RESULTATS NUMERIQUES

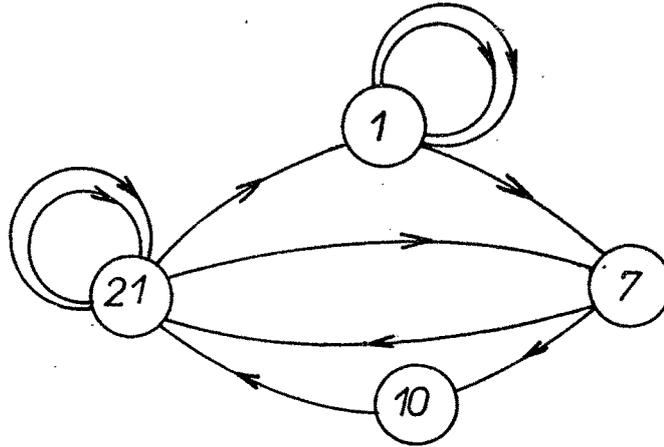
4.1 BUT DE LA RELAXATION UTILISEE

Supposons que PR_1 nous ait donné la solution suivante pour un problème à dix agents : $x_{1A}=x_{1B}=x_{1C}=x_{7A}=x_{7B}=x_{10}=x_{21A}=x_{21B}, x_{21C}=x_{21D}=1$, $x_j=0$ partout ailleurs, et le circuit hamiltonien H_{10} correspondant ci-après (déterminant d'ailleurs de manière unique le tableau de roulement : (1, 1, 7, 21, 21, 7, 10, 21, 21, 1)).

H_{10}



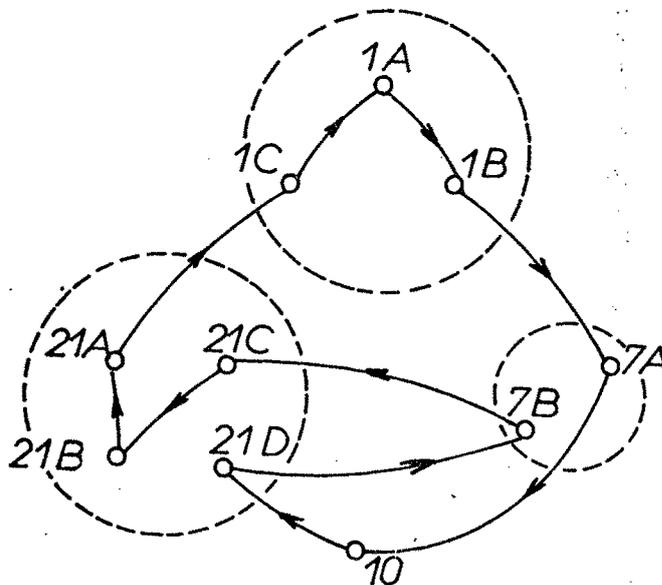
N'ayant que quatre sommets non nuls, on peut contracter le circuit hamiltonien H_{10} pour obtenir le circuit C_4 suivant :



Cette contraction permet de passer de manière unique de H_{10} à C_4 . Par contre, à partir de C_4 , il est possible d'obtenir plusieurs circuits H_{10} , i.e. le tableau de roulement suivant :

(10, 21, 7, 21, 21, 21, 1, 1, 1, 7)

correspondant au graphe :



L'avantage de C_4 par rapport à H_{10} est qu'il permet d'éditer plusieurs solutions, ce qui présente un caractère intéressant pour l'exploitation, dans une optique de discussion avec les agents de conduite.

C'est ce type de résultat que nous obtiendrons si nous formulons le problème comme un programme en nombres entiers et non plus en 0-1 (pour notre exemple nous aurions $x(1)=3, x(7)=2, x(10)=1, x(21)=4, x(j)=0$ partout ailleurs). Dans ce contexte nous obtiendrons comme solution un circuit qui passe $x(i)$ fois exactement par la configuration γ_i .

Ceci ne change pas le formalisme, excepté pour la contrainte de connexité.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \sum_{j=1}^n a(k,j) x(j) = r(k), \quad k=1,2,\dots,7 \\
 \sum_{j=1}^n x(j) = N \\
 \sum_{j=1}^n y(i,j) = x(i), \quad i=1,2,\dots,n \\
 \sum_{i=1}^n y(i,j) = x(j), \quad j=1,2,\dots,n \\
 \sum_{i \in S} \sum_{j \in X-S} y(i,j) \geq \min \{x(i), 1\}, \forall S \subset X \\
 x(j) \geq 0 \text{ entier}, \quad i=1,2,\dots,n \\
 y(i,j) \geq 0 \text{ entier}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y(i,j) c(i,j) + \sum_{j=1}^n p(j) x(j) = Z(\text{Max})
 \end{array} \right\} \text{(PR}_2\text{)} \quad (9)
 \end{array}$$

On constate que la dimension du problème a fortement diminué en passant de $q(q+1)$ à $n(n+1)$ variables. Malheureusement, la contrainte de connectivité (9) rend problématique la résolution de PR_2 comme un programme linéaire puisque sa linéarisation implique un nombre démesuré de contraintes. En effet, il faut écrire à la place de (9) les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \sum_{j \in X-S} y(i,j) \geq b_s \quad , \forall S \subset X \\ b_s \leq 1 \quad , \forall S \subset X \\ b_s \leq x(i) \quad , \forall i \in S, \forall S \subset X \end{array} \right.$$

et introduire :

$$M \cdot \sum_{s=1}^{2^n - 1} b_s$$

dans la fonction objective, où M est un nombre très grand. Dans ces conditions nous aurons :

$$b_s = \min_{i \in S} (x(i), 1)$$

Nous avons donc supprimé la contrainte (9) du programme PR_2 et nous avons décidé de résoudre le problème (P) continu (c'est-à-dire en relaxant les contraintes d'intégrité). Ce problème (P) s'écrit :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a(k,j) x(j) = r(k) \\ \sum_{j=1}^n x(j) = N \\ \sum_{j=1}^n y(i,j) = x(i) \quad , \quad i=1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^n y(i,j) = x(j) \quad , \quad j=1,2,\dots,n \\ x(i) \geq 0 \quad , \forall i \quad , \quad y(i,j) \geq 0 \quad , \forall (i,j) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y(i,j) c(i,j) + \sum_{j=1}^n p(j) x(j) = Z(\text{Max}) \end{array} \right.$$

L'objet de cette relaxation est de tester la finesse de l'évaluation qui résulte de la résolution de (P). En effet, si les solutions optimales de base sont souvent entières, ou à défaut très peu fractionnaires d'une part, et si le graphe correspondant à la solution optimale de base (dans le cas où elle est entière) est souvent connexe d'autre part, il devient alors intéressant de résoudre (PR₂) en utilisant une méthode S.E.P.

4.2 LA METHODE DE RESOLUTION ET LES RESULTATS NUMERIQUES

4.2.1 Méthode de résolution

La routine de génération de configuration nous fournit les 41 configurations possibles (voir schéma n° 5, annexe 2) ainsi que les poids qui leur sont attachés, par ailleurs, la routine de séquençement nous fournit 700 valeurs d'arcs (voir schéma n° 6, annexe 2)). A partir de ces données, la résolution de (P) comme un programme linéaire s'effectue sur une structure très voisine de celle d'un programme de transport. A savoir, sous forme matricielle :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline -I & B_1 \\ \hline -I & B_2 \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{cases} A \cdot x = b \\ -Ix + B_1 y = 0 \\ -Ix + B_2 y = 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ \langle p, x \rangle + \langle c, y \rangle = Z \text{ (Max)} \end{cases}$$

où : $Ax = b$ représente le problème de recouvrement;

$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ la matrice d'un programme de transport.

et I la matrice unité.

Cette structure particulière du problème en deux blocs distincts dont un, le problème de transport, est facile à résoudre pour x fixé, sera exploité utilement par la suite. Néanmoins, le programme linéaire (P) passe assez facilement sur un gros ordinateur.

Nous l'avons utilisé avec succès sur un IRIS 80 et un HP 66, mais comme l'occupation mémoire atteint 250 K octets, il n'est pas envisageable de le faire passer sur un mini ou micro ordinateur. On peut remarquer que nous sommes en présence de 90 contraintes et de 1812 variables lors de la phase I du simplexe.

On aurait pu imaginer utiliser une méthode révisée du simplexe adaptée à notre problème et ne garder en mémoire que l'inverse de la base courante, ce qui aurait entraîné un gain considérable en occupation mémoire; malheureusement, il aurait alors fallu stocker la structure ci-dessus sur mémoire de masse et y faire un nombre considérable d'accès, ce qui se serait traduit par un temps de résolution excessif. D'ailleurs, cette remarque est une règle générale suivant laquelle le produit de l'occupation mémoire par le temps de résolution est une constante.

Nous avons traité l'exemple qui nous a servi de base dans tout ce travail à savoir le roulement donné en schéma n° 4, annexe 2. En outre, nous avons testé l'évolution de la solution lorsque le nombre d'agents varie. Dans tous les cas, le temps CPU est voisin d'une minute sur IRIS 80 et de deux sur HP 66. On constate donc que notre formulation diminue fortement l'influence de la dimension du tableau de roulement (c'est-à-dire le nombre d'agents N) alors que cet élément apparaît comme central pour l'énumération implicite (voir partie I, annexe 1).

4.2.2 Analyse des résultats

Tous les résultats sont donnés à la fin de ce chapitre sous la forme de pseudo-circuits hamiltoniens dont on a tiré un exemple de roulement possible.

Le premier résultat est très significatif pour trois raisons :

- a) la solution optimale de base de (P) pour le roulement à 19 agents (qui constitue notre exemple comparatif) est non seulement entière mais aussi connexe;
- b) la fonction objectif mesurant le nombre de repos accolés est meilleure de 4 points par rapport à la solution donnée par l'énumération implicite (amélioration de 33 % par rapport à l'énumération);
- c) le tableau de roulement obtenu par ordinateur est "meilleur" que celui obtenu à la main (ce qui est relativement rare dans ce type de problème combinatoire) puisqu'on a une évaluation de 16 au lieu de 13 en ce qui concerne le nombre de repos accolés (amélioration de 23 % par rapport à la solution manuelle).

De plus, l'intégrité de la solution a été obtenue dans la plupart des essais numériques effectués et, lorsque ce n'est pas le cas, la solution comporte une faible quantité de variables fractionnaires. Les essais de séparation sur les variables non entières s'avèrent par ailleurs satisfaisants.

Contrairement à ce qui se passe pour le problème du voyageur de commerce, la relaxation adoptée paraît excellente. Ce phénomène est probablement dû à la structure particulière du problème : on peut évoquer par exemple l'aspect dissymétrique du coût des arcs. Par ailleurs, le problème de recouvrement devrait rendre (P) très fractionnaire, or il n'en est rien. On peut penser à cet égard que les données qui impliquent un choix plutôt rigide des configurations pour assurer le nombre de repos nécessaires au dimanche doivent jouer un rôle non négligeable. En outre, le bloc de contrainte relatif au problème de transport ne doit pas être étranger à ce phénomène.

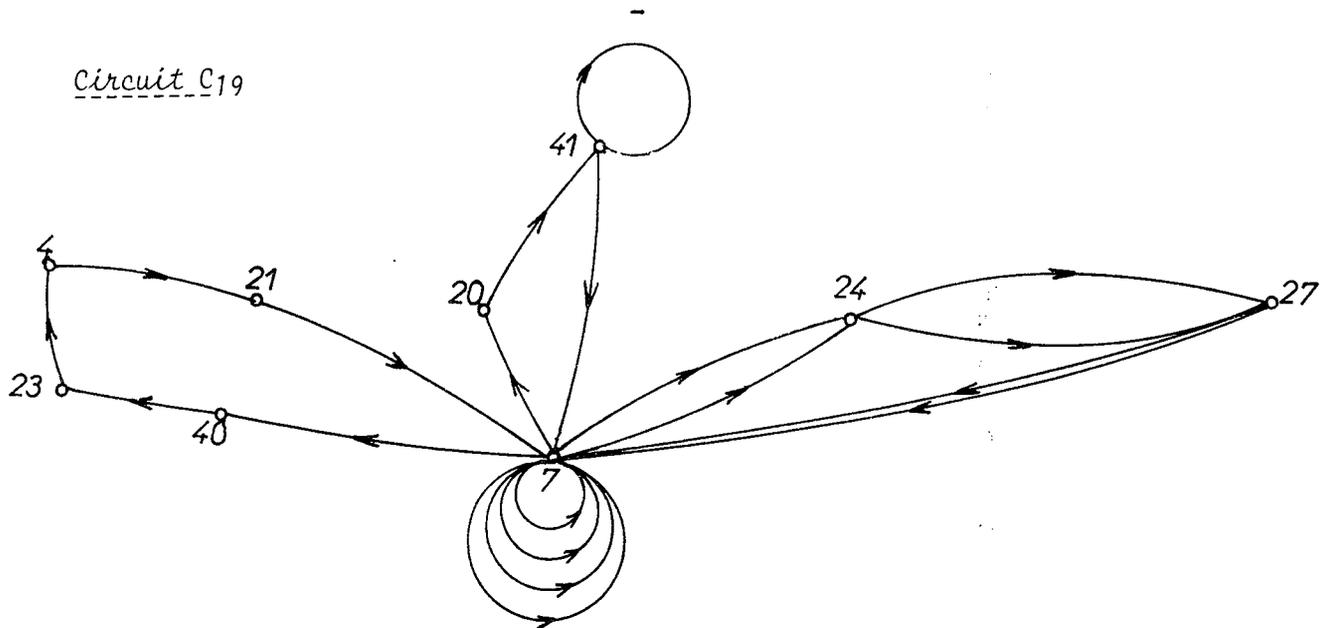
Dans ces conditions il est clair que la mise en oeuvre d'une procédure S.E.P. nous permettra à l'aide de la résolution de (P) fournissant à la fois une évaluation et un moyen de séparation soit sur les variables fractionnaires soit sur les ensembles non connexes [20] de résoudre (PR_2). L'étude détaillée d'une telle procédure ne présente pas un grand intérêt technique puisqu'il s'agit d'une méthode bien connue.

En revanche, il est un problème plus délicat qui consiste à trouver un moyen de résoudre le problème sur des petits calculateurs : mini ou micro-ordinateurs. En effet, la simple résolution de (P) nécessite 250 K octets, ce qui interdit évidemment le développement d'une méthode S.E.P. sur un petit système.

Nous avons donc décidé d'orienter la suite de notre étude sur une des diverses méthodes de décomposition qui pourraient être utilisées pour résoudre (P), [15], [6], [7], [8].

Dans cet esprit nous nous servirons au mieux de la structure particulière du problème.

TABLEAU DE ROULEMENT DES AGENTS
 AVEC $s(k) = 15, 15, 17, 15, 15, 15, 5$
 et $N = 19$



Le séquençement obtenu est par exemple :

(4, 21, 7, 7, 7, 20, 41, 41, 7, 7, 24, 27, 7, 24, 27, 7, 40, 23)

ce qui donne le roulement suivant :

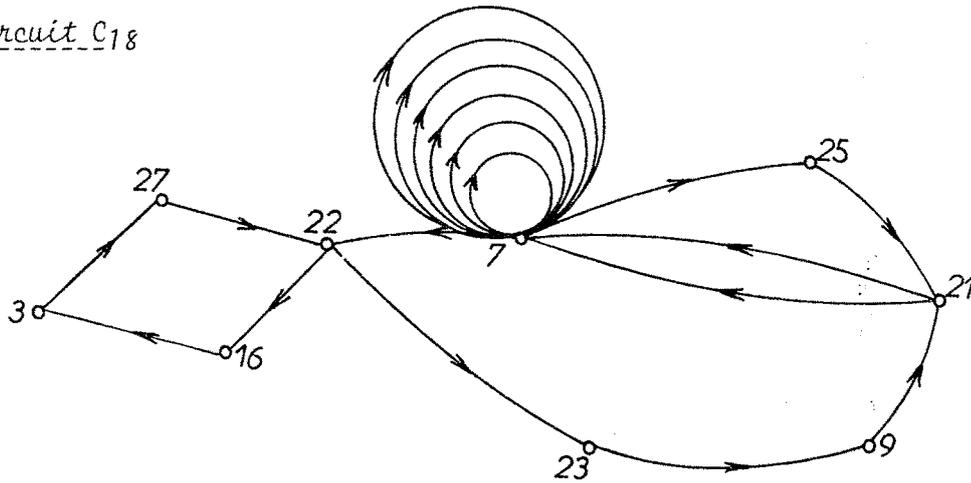
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
			R			
			R			R
						R
						R
			R	R		
				R	R	R
				R	R	R
						R
						R
						R
R	R	R				
R	R					R
						R
R	R	R				
R	R					R
						R
			R	R	R	
					R	R

Nombre total de repos 36
 Nombre moyen de repos par semaine civile 1,89

La fonction objective qui mesure le nombre de repos accolé vaut 16 , celle qui mesure la valeur du roulement vaut 82

TABLEAU DE ROULEMENT DES AGENTS
 AVEC $s(k) = 15, 15, 17, 15, 15, 5$
 et $N = 18$

Circuit C18



Le séquençement obtenu est par exemple :

(7, 7, 7, 25, 21, 7, 7, 22, 16, 3, 27, 22, 23, 9, 21, 7, 7, 7)

ce qui donne le roulement suivant :

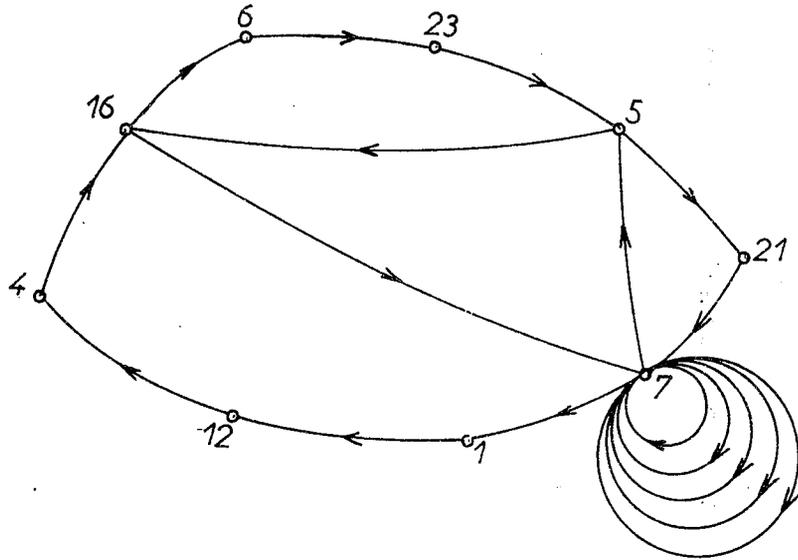
Lundi	Mardi	Mercredi	Jedi	Vendredi	Samedi	Dimanche
						R
						R
						R
R	R			R		
			R			R
						R
				R	R	
	R					R
R	R	R				R
				R	R	
R			R		R	R
			R			R
						R
						R
						R

Nombre total de repos 29
 Nombre moyen de repos 1,61
 par semaine civile

La fonction objective qui mesure le nombre de repos accolé vaut 7, celle qui mesure la valeur du roulement vaut 55

TABLEAU DE ROULEMENT DES AGENTS
 AVEC $s(k) = 15, 15, 17, 15, 15, 15, 5$
 et $N = 17$

Circuit C17



Le séquençement obtenu est par exemple :

(7, 7, 5, 21, 7, 7, 5, 16, 7, 7, 7, 1, 12, 4, 16, 6, 23)

ce qui donne le roulement suivant :

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
						R
						R
				R		
			R			R
						R
				R		R
	R					R
						R
						R
						R
R						
R						R
			R			
	R					R
					R	
					R	R
15	15	17	15	15	15	5

Nombre total de repos 22
 Nombre moyen de repos 1,29
 par semaine civile

Nombre de services

La fonction objective qui mesure le nombre de repos accolé vaut 2 , celle qui mesure la valeur du roulement vaut 39

Chapitre IV

UNE METHODE DE DECOMPOSITION
DU PROBLEME D'AFFECTION
DES JOURS DE REPOS

1. PRESENTATION DU CHAPITRE

La relaxation (P) du problème de roulement que nous avons étudié au chapitre précédent a donné d'excellents résultats. Mais comme nous l'avons vu la résolution du problème (P) implique, pour être intégrée dans une procédure SEP, l'usage d'un gros calculateur.

L'objet de ce chapitre est d'étudier une méthode de décomposition visant à faciliter la résolution du problème (P) sur un mini(voire un micro) ordinateur. Nous nous intéressons, dans un premier temps, à l'analyse formelle du problème. Puis nous donnons une description détaillée de l'algorithme dual que nous avons utilisé en insistant sur l'aspect dual de la méthode qui permet d'interrompre à tout moment les calculs tout en étant sûr d'obtenir une évaluation utilisable dans une procédure SEP.

2. ETUDE DU PROBLEME (P)

Nous reprenons les mêmes notations que celles du chapitre précédent mais, pour la convenance, les indices jusqu'à présent parenthésés seront positionnés sur l'interligne inférieur (exemple : $c(i,j)$ devient c_{ij} , $x(j)$ devient x_j).

2.1 ENONCE DU PROBLEME (P) ET DE SON DUAL (D)

On rappelle que le problème (P) s'énonce de la manière suivante :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, 7 \quad (1) \\ \sum_{j=1}^n x_j = N \quad (2) \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3) \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4) \\ x_j \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^n p_j x_j = Z \text{ (Max)} \quad (5) \end{array} \right.$$

Associons aux contraintes (1), (2), (3), (4) les variables duales suivantes : $\xi = (\lambda, \mu, u, v)$. Le problème primal ne comportant que des égalités, les variables duales sont non astreintes. Le problème dual (D) s'énonce :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \in K} \lambda_k a_{kj} + \mu - (u_j + v_j) \geq p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6) \\ u_i + v_j \geq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n \quad (7) \\ \sum_{k \in K} \lambda_k r_k + \mu N = W \text{ (Min)} \quad (8) \end{array} \right.$$

où $K = \{ 1, 2, \dots, 7 \}$ (voir § 5.2 chapitre 1)

2.2 NOTATIONS ET FONDEMENTS

On considère le problème initial (P) et l'on note $\lambda = (\lambda_k)$, $k \in K$, et μ les variables duales associées aux contraintes (1) et (2). Nous allons utiliser une technique classique de relaxation lagrangienne [6] qui permet d'absorber la résolution de (P) de façon duale. On multiplie les contraintes (1) et (2) par (λ, μ) et l'on retranche la valeur obtenue, à la forme (5). On obtient ainsi un problème paramétré en λ et μ que l'on note $P(\lambda, \mu)$ et qui s'écrit de la manière suivante :

$$P(\lambda, \mu) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n y_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_j \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^n p_j x_j + \sum_{k \in K} \lambda_k \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot x_j - r_k \right) \\ + \mu \left(\sum_{j=1}^n x_j - N \right) = z(\lambda, \mu) \text{ Max} \end{array} \right.$$

Notons que (λ, μ) sont non astreints puisque les relations (1) et (2) correspondent à des égalités.

On appelle K_0 l'ensemble convexe des couples (x, y) non négatifs qui vérifient les contraintes (3) et (4).

En réordonnant les termes en x le problème $P(\lambda, \mu)$ s'écrit :

$$P(\lambda, \mu) : \text{Max } Z(\lambda, \mu) \\ (x, y) \in K_0$$

où :

$$z(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^n x_j (p_j + \sum_{k=1}^7 \lambda_k a_{kj} + \mu) - (\mu N + \sum_{k=1}^7 \lambda_k r_k)$$

On remarque alors que le dual (D) s'écrit :

$$(D) : \text{Min}_{(\lambda, \mu)} (\text{Max}_{(x, y) \in K_0} z(\lambda, \mu) = \text{Min } z^*(\lambda, \mu)$$

où $z^*(\lambda, \mu)$ est définie par $(x^*, y^*) \in K_0$ une solution optimale de $P(\lambda, \mu)$.

Dans cette formulation, on constate que la fonction $z^*(\lambda, \mu) = \text{Max } z(\lambda, \mu)$ est convexe linéaire par morceaux et que la résolution du dual (D) consiste à rechercher le minimum de cette fonction convexe en (λ, μ) . Nous allons utiliser une méthode fondée sur celle des sous-gradients, mais la structure très particulière de K_0 va nous conduire à mettre en oeuvre une technique quelque peu différente, le paragraphe suivant nous donne, à travers l'étude du problème $P(\lambda, \mu)$, les bases de la méthode.

2.3 ETUDE DU PROBLEME $P(\lambda, \mu)$

Posons $\phi = (x, y)$ et notons S la matrice définie par les contraintes (3) et (4). De plus, pour faciliter l'exposé, on notera pour $j=1, 2, \dots, n$:

$$p_j(\lambda, \mu) = p_j + \sum_{k=1}^7 \lambda_k a_{kj} + \mu \text{ et } w(\lambda, \mu) = (c, p(\lambda, \mu))$$

comme un vecteur de $R^{n(n+1)}$. Dans ces conditions, le problème $p(\lambda, \mu)$ s'écrit :

$$P(\lambda, \mu) \left\{ \begin{array}{l} S \cdot \phi = 0, \quad \phi \in R^{n+m} \\ \phi \geq 0 \\ \langle w(\lambda, \mu), \phi \rangle = z(\lambda, \mu) \text{ Max} \end{array} \right.$$

où $m = n^2$.

Remarque 5 : L'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire $P(\lambda, \mu)$ est un cône K_0 de sommet 0. En effet, $\emptyset = 0$ est une solution triviale et si $\emptyset \gg 0$ est solution, alors $\rho \cdot \emptyset$ (où ρ est un scalaire positif ou nul) l'est aussi.

Remarque 6 : La matrice S est la matrice d'incidence aux arcs d'un graphe biparti. Ce graphe biparti que l'on notera par la suite G_\emptyset correspond au graphe $G = (\Gamma, U, c)$ (voir chapitre III), dans lequel on a dupliqué les sommets. Nous indiquons ci-après comment construire G_\emptyset .

Définition 1 :

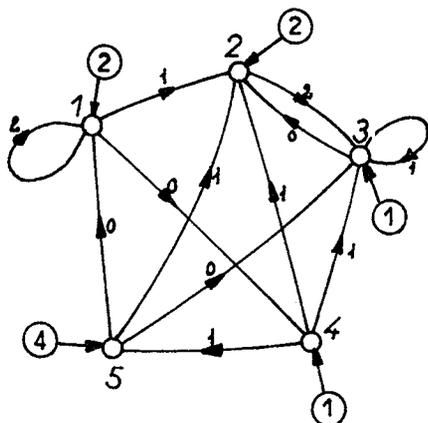
On considère le graphe $G = (\Gamma, U, c)$ associés au problème (P) et l'on duplique chaque sommet γ_j pour $j=1,2,\dots,n$ de façon à définir deux ensemble disjoints X_1 et X_2 correspondant respectivement à Γ . Les arcs du graphe biparti dont on vient de construire l'ensemble des sommets, disons $\tilde{X} = X_1 \cup X_2$, sont définis de la manière suivante :

- a) S'il existe un arc (i,j) de U , reliant les configurations γ_i et γ_j , alors on définit un arc (i_2, j_1) de G_\emptyset , tel que $i_2 \in X_2$ et $j_1 \in X_1$. Notons U_G l'ensemble des arcs ainsi construits.
- b) Pour tout indice $j=1,2,\dots,n$, on définit un arc (j_1, j_2) de G_\emptyset avec $j_2 \in X_2$ et $j_1 \in X_1$. Notons U_Γ l'ensemble des arcs de G_\emptyset ainsi défini.

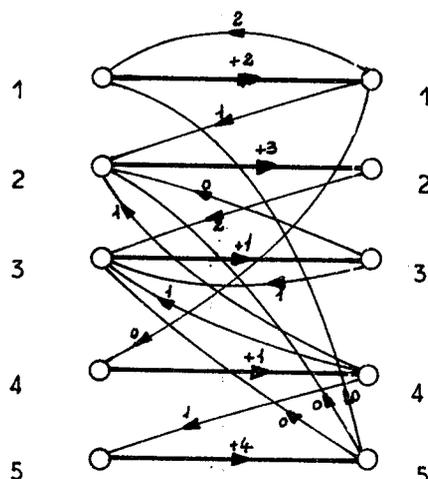
Notons que les variables x et y du problème $P(\lambda, \mu)$ correspondent respectivement aux arcs U_Γ et U_G .

On affectera aux arcs de U_Γ les poids $p(\lambda, \mu)$ et aux arcs de U_G les coûts c .

Exemple :



Grphe $G = (\Gamma, U)$
 les poids attachés aux
 sommets sont cerclés.



Grphe biparti : G_0 déduit
 de G , avec les poids $p(0,0)$

Proposition 3

Les rayons extrêmes du cône K_0 sont en bijection avec les circuits élémentaires du graphe G_0 :

Preuve :

- a) Par définition, toute solution du programme linéaire $S. \phi = 0, \phi \geq 0$ est un flot à composantes non négatives.
- b) Comme les composantes de ϕ sont positives ou nulles, on peut décomposer ce flot sur l'ensemble des circuits élémentaires de G_0 , de vecteurs représentatifs M_1, M_2, \dots, M_g . Appelons f_j le flot élémentaire parcourant le circuit M_j . On peut alors écrire :

$$\phi = \sum_{j=1}^g f_j \cdot M_j, \quad f_j \geq 0 \quad (12)$$

relation dans laquelle ϕ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs représentatifs des circuits de G_ϕ . Ceci montre que les rayons extrêmes du cône K_0 sont des circuits élémentaires du graphe G_ϕ .

- c) Un flot positif sur un circuit élémentaire étant indécomposable (en flot positif), tout circuit élémentaire est un rayon extrême.

Théorème 1 : Le problème de maximisation $P(\lambda, \mu)$ admet une solution optimale et bornée $\phi^* \geq 0$ si, et seulement si tous les circuits de G_ϕ ont une longueur non positive et dans ce cas $w^*(\lambda, \mu) = 0$.

Soit $C(M_k) = \langle w(\lambda, \mu), M_k \rangle$ la longueur du circuit M_k . Le montant $w(\lambda, \mu)$ de $P(\lambda, \mu)$ s'écrit :

$$w(\lambda, \mu) = \langle w(\lambda, \mu), \sum_{j=1}^g f_j \cdot M_j \rangle = \sum_{j=1}^g f_j \cdot C(M_j) \quad (13)$$

- a) Si tous les circuits de G_ϕ ont une longueur négative ou nulle, on déduit facilement de (13) que les flots élémentaires f_j ont une valeur nulle sur les circuits de longueur strictement négative et ont une valeur positive quelconque sur les circuits de longueur nulle. On a donc $Z^*(\lambda, \mu) = 0$.
- b) S'il existe un circuit M_j de longueur strictement positive, on peut y faire circuler un flot f_j arbitrairement grand, et, donc $Z^*(\lambda, \mu)$ est non borné.

Proposition 4 : Pour le système de poids

$$p_j(\lambda, \mu) = -\max_{i \in I} (c_{ij}), \quad \forall j \in J,$$

$P(\lambda, \mu)$ est borné.

Preuve : On remarque que tout circuit de G_\emptyset emprunte alternativement un arc de U_Γ puis un arc de U_G , donc le système de poids $p(\lambda, \mu)$ nous assure qu'il n'existera pas de circuit de longueur positive dans G_\emptyset .

3. CARACTERISATION DES SOLUTIONS OPTIMALES DE (P)

3.1 ENONCE D'UNE CONDITION SUFFISANTE D'OPTIMALITE

Le dual de $P(\lambda, \mu)$ s'écrit :

$$D(\lambda, \mu) \left\{ \begin{array}{l} u_i + v_i \geq c_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \\ u_j + v_j \geq p_j + \sum_{k \in K} \lambda_k a_{kj} + \mu \\ \sum_{k \in K} \lambda_k r_k + \mu \cdot N = v(\lambda, \mu) \text{ Min} \end{array} \right.$$

Condition :

Soit $\emptyset^* = (x^*, y^*)$ une solution optimale de $P(\lambda^*, \mu^*)$ et (λ^*, μ^*) les variables duales correspondantes.

Si \emptyset^* vérifie les contraintes (1) et (2) de (P), alors \emptyset^* est une solution optimale de (P).

Preuve :

$\xi^* = (\lambda^*, \mu^*, u^*, v^*)$ est une solution réalisable de (D) et la condition assure que \emptyset^* est solution réalisable de (P). De plus, on vérifie facilement l'égalité des fonctions objectifs, ce qui assure l'optimalité.

3.2 ENONCE D'UNE CONDITION NECESSAIRE

La condition précédente n'est que suffisante car, si une solution optimale particulière ϕ^* de $P(\lambda^*, \mu^*)$ ne vérifie pas les relations (1) et (2), cela ne signifie pas pour autant que le théorème des écarts complémentaires ne peut pas être vérifié pour (λ^*, μ^*) fixé. En effet, on peut fort bien trouver une solution optimale de $P(\lambda^*, \mu^*)$ permettant de le vérifier. On va donc chercher parmi l'ensemble des solutions optimales de $P(\lambda^*, \mu^*)$ celle, ou la combinaison d'entre elles, qui permet de vérifier les relations (1) et (2).

Ceci permet de donner un caractère nécessaire à la condition suffisante d'optimalité indiquée précédemment.

3.3 VERIFICATION DE L'OPTIMALITE DE P

Soit M_1, M_2, \dots, M_q les q circuits de longueur nulle définissant les solutions optimales du programme $P(\lambda, \mu)$. On appelle B la matrice dont l'élément courant est caractérisée par :

$$b_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si le circuit de longueur nulle } M_k \text{ contient} \\ & \text{l'arc } (j_1, j_2) \text{ de } U_{\Gamma} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème consiste alors à déterminer parmi les M_1, M_2, \dots, M_q les circuits permettant de vérifier les contraintes de recouvrement (1) et (2). Notons f_j le flot parcourant le circuit M_j dans la solution du problème de recouvrement, c'est-à-dire la quantité de circuits M_j qu'il faut sélectionner pour assurer le recouvrement des services.

Le problème de recouvrement se formule alors de la manière suivante:

$$(P_A) \begin{cases} \sum_{\ell=1}^q \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{\ell}^j \right) \cdot f_{\ell} = r_k, \quad k \in K \\ \sum_{\ell=1}^q \left(\sum_{j=1}^n b_{\ell}^j \right) \cdot f_{\ell} = N \\ f_{\ell} \geq 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, q \end{cases}$$

Si (P_A) admet une solution réalisable, $\phi = \sum_{j \in J} f_j \cdot M_j$ est une solution optimale de (P) . Cela signifie que le couple (λ, μ) qui nous a servi à définir le problème $P(\lambda, \mu)$, donc à générer les circuits M_1, M_2, \dots, M_q , correspond à une solution optimale du problème :

$$(D) \begin{cases} \text{Min } z^*(\lambda, \mu) \\ (\lambda, \mu) \end{cases}$$

On en déduit que (ϕ, ξ) constitue un couple de solutions optimales de (P) et (D) .

Si (P_A) n'est pas réalisable, il faut modifier (λ, μ) . Le théorème des alternatives va nous permettre de trouver une direction admissible de déplacement d qui nous permettra d'effectuer cette modification.

4. SOUS-GRADIENT OPTIMAL

4.1 DETERMINATION D'UNE DIRECTION DE DEPLACEMENT

D'après le théorème des alternatives, le système (P_A) n'est pas réalisable, si et seulement si le système (D_A) suivant admet une solution :

$$(D_A) \begin{cases} \sum_{k \in K} d_k \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot b_{\ell}^j \right) - d_0 \sum_{j=1}^n b_{\ell}^j \leq 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, q & (14) \\ (d_0, d_k) \text{ n.a.}, \quad k \in K \\ \sum_{k \in K} r_k d_k + N \cdot d_0 > 0 & (15) \end{cases}$$

Une solution de (D_A) , si elle existe, fournit une direction de déplacement pour le couple (λ, μ) . Il s'agit d'une direction admissible de descente pour le problème : $\text{Min}_{(\lambda, \mu)} z^*(\lambda, \mu)$. On peut en effet constater que :

$$\frac{1}{\rho} (z^*(\lambda + \rho d, \mu + \rho d) - z^*(\lambda, \mu)) = \sum_{k \in K} d_k \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j^* \right) - (d_0 N + \sum_{k \in K} d_k r_k) \leq 0, \quad \text{compte tenu de (14) et (15),}$$

avec $\rho \geq 0$

En pratique, pour vérifier le théorème des alternatives, on peut résoudre le programme linéaire dérivé de (D_A) où on minimise (15). Si l'optimum est égal à 0, (P_A) a une solution donnée par le programme dual, sinon on trouve une direction de descente.

4.2 DETERMINATION DU PAS DE DEPLACEMENT

Il faut déterminer précisément le pas maximum $\rho^* = \max \rho \geq 0$ à effectuer suivant la direction d , à partir du vecteur (λ, μ) pour que le nouveau problème $P(\lambda + \rho^* d, \mu + \rho^* d_0)$ soit borné. C'est-à-dire, étant donné un ensemble de poids $p_j(\lambda + \rho d, \mu + \rho d_0)$ sur les arcs de G_\emptyset , trouver $\rho^* = \max \rho \geq 0$ tel que G_\emptyset n'admette pas de circuit de coût strictement positif.

Ce problème a un sens puisque, pour $\rho = 0$, G_\emptyset n'a pas de circuit de longueur positive. Pour résoudre ce problème, on construit un réseau obtenu en ajoutant un noeud source s à G_\emptyset et en le reliant par des arcs à coût nul à tous les sommets de X_1 . Il est facile de voir que le problème des plus longs chemins de s à tout sommet de ce réseau est borné si et seulement si G_\emptyset n'admet pas de circuit absorbant. On utilisera une forme paramétrique de l'algorithme de Moore [20] pour déterminer la valeur maximum de ρ qui assure cette propriété. Cet algorithme est décrit dans l'annexe 3.

4.6 CONVERGENCE

On sait [23], [8] que les méthodes de sous-gradient optimal, dans le cas de la programmation linéaire, converge en un nombre fini d'étapes.

5. MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME DUAL

Pour obtenir une direction de déplacement d , il convient de résoudre le programme linéaire dérivé de (D_A) .

La difficulté provient de la nécessité d'exhiber tous les circuits de coût nul qui définissent l'ensemble des solutions de $P(\lambda, \mu)$. Pour éviter cet aspect combinatoire, nous avons donc adopté une procédure voisine, dans son esprit, de la méthode de Benders [17]. En effet, pour chaque problème $P(\lambda, \mu)$, on détermine un seul circuit de longueur nulle (le premier qui est donné par la variante paramétrique de l'algorithme de Moore). On introduit ainsi à chaque étape une seule nouvelle contrainte dans le problème (D_A) . Cette procédure, si elle ne garantit plus de faire à chaque itération un pas $\rho^* > 0$ est certainement très efficace pratiquement. Notons à cet égard que le nombre de contraintes serrées, à chaque pas, dans (D_A) est, au plus, égal à $\text{card}(K)$, on pourrait donc imaginer une procédure qui conserverait, à chaque itération, au plus $\text{card}(K)$ circuits de longueur nulle.

ENONCE DE L'ALGORITHME DUAL

(0) initialisation : poser $r=0$, $q=0$ (car on ne possède aucun circuit initialement), $\rho^*=0$

Pour $j=1, \dots, n$, poser :

$$\theta_j = - \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} (c_{ij})$$

déterminer (λ_k^r, μ^r) solution du système suivant :

$$\sum_{k \in K} \lambda_k^r a_{kj} + \mu^r \leq \theta_j - p_j, \quad j=1,2,\dots,n$$

En déduire $\bar{p}_j^r = p_j + \sum_{k \in K} \lambda_k^r a_{kj} + \mu^r$ pour $j=1,2,\dots,n$

(1) Chercher le vecteur :

$$(d_j(q), d_o(q))$$

une solution optimale de base du problème (D_A) dans lequel on maximise

$$Z_A = \sum_{k \in K} r_k d_j + N d_o$$

Si $Z_A > 0$ aller en (2) sinon terminer; on a obtenu une solution optimale du problème (P).

(2) Calculer :

$$\delta_j = \sum_{k=1}^7 d_k a_{kj} + d_o, \quad j=1,2,\dots,n$$

En déduire :

$$\bar{p}_j^{r+1} = \frac{r}{p_j} + \rho^* \delta_j$$

(3) Déterminer à l'aide de la variante paramétrique de l'algorithme de Moore le pas ρ^* maximum.

Soit C_q le circuit de longueur nulle ainsi obtenu et ρ_r^* le nouveau pas de déplacement.

Poser $r = r+1$, $q = q+1$ (on introduit une nouvelle contrainte dans (D_A)). Aller en (1).

CONCLUSION



1. IMPLEMENTATION DE L'ALGORITHME DUAL SUR MINI-ORDINATEUR

L'algorithme proposé au chapitre IV a été programmé en Fortran sur mini-ordinateur (système Mini 6/53 de la CII-HB). La procédure que nous avons développée s'est avérée extrêmement performante au plan algorithmique. En effet, dans la plupart des exemples numériques, les résultats ont été obtenus avec un temps CPU inférieur au temps demandé par l'algorithme du simplexe sur IRIS 80 (voir à ce sujet le chapitre III).

Nous analysons dans l'annexe 4 les résultats obtenus sur l'exemple à 19 agents (voir Annexe 2, schéma n° 4). On peut, d'ores et déjà mentionner que le tableau de roulement à 19 agents est résolu en 59 s et 39 itérations avec notre méthode.

La structure du problème nous a conduits à séparer la procédure en deux phases :

- a) Une première partie dans laquelle on génère les configurations possibles ainsi que les coûts de séquençement, et où l'on détermine le couple (λ, μ) de départ ainsi que l'arborescence initiale $A(X, V, c, 0)$; voir à ce sujet l'annexe 3).

- b) Une deuxième partie, constituant l'algorithme dual proprement dit (voir l'énoncé de l'algorithme au § 5, chapitre IV).

L'occupation mémoire de la partie 1 est d'environ 18 K octets, celle de la partie 2, d'environ 23 K octets.

Notre objectif visant à réduire la dimension du problème est donc parfaitement atteint.

Notons enfin que nous avons testé la réalisation du problème (P_A) avec une précision de 1 %.

2. PROLONGEMENTS POSSIBLES DE L'ETUDE

Dans un premier temps, il conviendrait de mettre en oeuvre une procédure S.E.P. puisque nous savons que, dans son formalisme, le problème contient des problèmes NP durs, et, qu'en toute généralité les solutions du problème (P) ne sont pas forcément entières.

Une extension directe du problème consiste à générer non plus des configurations en $|0,1|^7$ mais des configurations comportant les repos, les services du matin et les services du soir (voire de nuit si cette notion existe). Nul doute que l'on augmente la taille du problème, mais le formalisme reste le même. A cet égard, on peut remarquer que les configurations, dont le sommet correspondant de $G = (\Gamma, U, c)$ possède un degré intérieur nul, peuvent être éliminées (cf. les colonnes entièrement positionnées à -99 dans le schéma n° 6 en annexe 2).

Il convient ensuite de réaliser l'affectation des services dans le tableau de roulement en tenant compte des contraintes et des objectifs décrits au paragraphe 5.3, chapitre I. Si l'obtention d'une affectation réalisable est un problème facile, en revanche la prise en compte de l'objectif 5.3.1(2) du chapitre I reste un problème ouvert.

ANNEXE 1

Partie I

FORMULATION DU PROBLEME D'AFFECTATION
DES JOURS DE REPOS :
UN PROGRAMME QUADRATIQUE

-

1. INTRODUCTION

On s'intéresse seulement à l'implantation optimale des jours de repos dans une grille de roulement. Les données sont les suivantes :

On dispose de n agents numérotés de 1 à n et constituant l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$ des agents affectés à la ligne considérée. Sachant que $J = \{1, 2, \dots, 7\}$ représente l'ensemble des jours de la semaine civile (lundi à dimanche), le problème consiste à répartir les $r(j)$ jours de repos, pour tout j de J , en respectant les contraintes d'exploitation et les contraintes statutaires.

2. NOTATIONS

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ ensemble des agents de la ligne
 $J = \{1, 2, \dots, 7\}$ ensemble des jours de la semaine
 $y(i,j)$: variable d'état positionnée à 1 si l'agent i de I bénéficie d'un jour de repos le jour j de J à 0 sinon.

Pour exprimer le caractère cyclique du roulement, on pose $u(k) = y(i,j)$ si $1 \leq k = i + j(n-1) \leq n$ et $u(k) = u(k-n)$ si $n \leq k \leq 2n$, car toutes les contraintes peuvent s'exprimer dans l'intervalle $[1, 2n]$ avec la variable $u(k)$.

$$K = \{1, 2, \dots, 7.n\} \text{ ensemble des "cases" d'une grille de roulement}$$

à n agents

$$K_0(7) = \{0, 7, 14, \dots, 7.n\}$$

$$K(7) = \{1, 7, 14, \dots, 7.n\}$$

$$K_1(7) = \{7, 14, \dots, 7.n\}$$

$$\text{card}(K) = 7.n = m$$

3. FORMULATION

Le problème de l'affectation optimale des jours de repos dans le tableau de roulement s'énonce comme suit :

$$\text{PR} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p \in K_0} u(j+p) = r(j) , \quad \forall j \in J \quad (1) \\ \sum_{p=k}^{k+7} u(p) \geq 1 , \quad \forall k \in K(7) \quad (2) \\ \sum_{p=k}^{k+7} u(p) \leq 3 , \quad \forall k \in K(7) \quad (3) \\ \sum_{p=k}^{k+6} u(p) \geq 1 , \quad \forall k \in K(7) \quad (4) \\ u(p) + u(p+7) \geq 1 , \quad \forall k \in K_1(7) \quad (5) \\ u(p-1) - u(p) + u(p+1) \leq 1, \quad \forall p \in K \quad (6) \\ u(k) = 0, 1 , \quad \forall k \in K \quad (7) \\ \sum_{k \in K} u(k) \cdot u(k+1) = Z \text{ (Max)} \quad (8) \end{array} \right.$$

PR est donc un programme linéaire à variables binaires et fonction objective quadratique dans lequel les relations (1) sont les contraintes dites de recouvrement où $r(j)$ est le nombre de jours de repos à placer le jour $j \in J$, les relations (2) et (3) correspondent aux contraintes § 5.3.2(1), chapitre I, la relation (4) exprime le fait que l'on ne doit pas travailler plus de 6 jours par semaine civile et la relation (6) traduit l'impossibilité d'avoir une succession "101" (c'est-à-dire Repos - Travail - Repos). (4) et (6) correspondent aux contraintes § 5.3.2(3), chapitre I; enfin les contraintes § 5.3.2(2) s'expriment par la relation (5).

En ce qui concerne la forme quadratique (8), on note qu'elle croît effectivement en fonction du nombre de jours de repos accolés, ce qui traduit l'objectif cherché lors de la construction manuelle des tableaux de roulement.

Remarquons que la forme quadratique (8) n'est pas semi définie positive. En effet, la diagonale de la matrice représentant la forme quadratique est nulle, donc elle ne peut avoir toutes ses valeurs propres de même signe. Le programme (PR) est donc de résolution difficile [24] .

Tout d'abord relaxons les contraintes d'intégrité (7) pour obtenir un programme PRC continu que nous allons linéariser.

Linéarisation de PRC

Remarquons que $u(k) \cdot u(k+1) = \min(u(k), u(k+1))$, on peut donc poser :

$$t(k, k+1) \leq u(k)$$

$$t(k, k+1) \leq u(k+1)$$

et chercher à maximiser

$$\sum_{k \in K} t(k, k+1)$$

au lieu de $\sum_{k \in K} u(k) \cdot u(k+1)$.

On peut donc envisager l'emploi d'une procédure SEP pour résoudre (PR). Malheureusement, l'évaluation ainsi obtenue est très médiocre : sur l'exemple $r = (1,1,2,2,1,1,4)$, une solution réalisable est donnée par le tableau suivant. Elle conduit à une évaluation de 3,6, alors que l'optimum vaut 5. Cette tendance à "étalement" dans le tableau la solution est d'ailleurs une caractéristique de ce type de linéarisation.

Exemple :

	<u>Lundi</u>	<u>Mardi</u>	<u>Mercredi</u>	<u>Jeudi</u>	<u>Vendredi</u>	<u>Samedi</u>	<u>Dimanche</u>
A	1/5	2/5	2/5	2/5	1/5	1/5	4/5
B	1/5	1/5	2/5	2/5	1/5	1/5	4/5
C	1/5	1/5	2/5	2/5	1/5	1/5	4/5
D	1/5	1/5	2/5	2/5	1/5	1/5	4/5
E	1/5	1/5	2/5	2/5	1/5	1/5	4/5
r(j)	1	1	2	2	1	1	4

4. METHODE DE RESOLUTION ET RESULTATS NUMERIQUES

Les résultats peu encourageants obtenus au paragraphe précédent nous ont incités à tenter d'aborder le problème (PR) en utilisant une procédure "d'énumération dirigée". La méthode mise en oeuvre constitue une extension de l'algorithme d'énumération implicite dû à Balas [9].

4.1 FONDEMENT DE LA METHODE

La procédure débute à partir d'un point pour lequel la fonction objectif (i.e. $Z = u Nu^t$) est maximum avec $u \in [0,1]^m$. Puis en se déplaçant suivant la coordonnée (ou une des coordonnées) de u qui permet de se rapprocher le plus du domaine réalisable, on perd progressivement sur le montant de la fonction objective en augmentant le plus possible la "réalisabilité" du problème. C'est donc l'irréalisme qui mesure la distance du point courant de $[0,1]^m$ au domaine réalisable.

4.2 MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME

L'algorithme est en fait une procédure exploratoire dirigée. Le point $u_0 \in [0,1]^m$ de départ est constitué du vecteur unité. A chaque pas d'indice i on tente de positionner une coordonnée de u_i à zéro en choisissant celle pour laquelle l'augmentation de réalisabilité est maximum. On crée ainsi une pile correspondant à la solution courante dont les variables positives indiquent un positionnement à zéro et les variantes négatives en positionnement à un. Le backtracking (ou remontée dans l'arborescence) s'effectue très simplement en dépilant les variables négatives du haut de la pile et en forçant la première variable positive rencontrée à devenir négative. Par exemple, si l'état de la pile avant backtracking est $\text{pil} = (1,21,15,16,17,3,4,5,-6,-7,-8)$, on obtient ensuite $\text{pil} = (1,21,15,16,17,3,4,-5)$. La remontée dans l'arborescence s'effectue dans les cas suivants :

- . on a détecté un sommet qui conduira, si on continue à le faire pousser, à une irréalisabilité;
- . l'évaluation associée au sommet considéré est inférieure au montant de la meilleure solution réalisable trouvée jusqu'à présent;
- . On a trouvé une solution réalisable et on va essayer en dépilant d'en trouver une meilleure.

4.3 RESULTATS NUMERIQUES

Si le principe de la méthode paraît séduisant, en revanche les performances algorithmiques sont très faibles. Ainsi n'a-t-il pas été possible de résoudre le problème à 19 agents, donné à titre d'exemple (Schéma n° 4, annexe 2), en un seul passage. Il a donc fallu fragmenter le problème initial en trois sous-problèmes (dont les résultats sont donnés ci-après) pour obtenir la solution suivante :

		<u>Lu</u>	<u>Ma</u>	<u>Me</u>	<u>Je</u>	<u>Ve</u>	<u>Sa</u>	<u>Di</u>	
	1	R	R	O	O	O	R	O	
	2	O	O	O	R	O	O	R	
	3	O	O	O	O	R	O	O	
	4	O	O	R	O	O	O	R	
	5	R	O	O	O	O	O	R	
	6	O	O	O	O	O	O	R	
	7	O	O	O	O	O	O	R	
	8	O	O	O	R	R	R	R	
	9	O	R	O	O	O	R	R	
Agents de	10	R	R	O	O	O	R	R	Montant du problème Z=12
conduite	11	O	O	O	O	O	O	R	
	12	O	O	O	O	O	O	R	
	13	O	O	O	R	R	R	O	
	14	O	O	R	O	O	O	R	
	15	R	O	O	O	O	O	R	
	16	O	O	O	O	O	O	R	
	17	O	O	O	O	O	O	R	
	18	O	O	O	R	R	O	O	
	19	O	R	O	O	O	R	R	
Nombre repos	r(j)	4	4	2	4	4	4	14	

Ces résultats sont très problématiques. En effet, parmi les sous-problèmes traités, celui à quatre agents implique le positionnement de quelque 23 000 variables, en revanche, il en suffit de 79 pour l'un des sous-problèmes à cinq agents. Les performances varient donc beaucoup avec les données $r(j)$. On peut dire qu'elles se dégradent très vite dès que le problème devient quelque peu difficile à résoudre à la main !

INITIALISATION
 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1 1 1
 4 4 4 4 4 4 4 4

NOMBRE DE SERVICES A ASSURER PAR JOUR -
 NOMBRE DE VARIABLES - 35
 NOMBRE D'AGENTS - 5
 NOMBRE DE REPOS A ASSURER PAR JOUR -
 TOTAL REPOS - 10
 SOLUTION INITIALE FORCEE
 NBFIX - 2
 I - 1J - 1VALIN - 1
 I - 5J - 7VALIN - 1

J MEILLEUR SOLUTION REALISABLE ACTUELLE Z - 4
 1 1 2 3 4 5 6 7
 1 1 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 1 1 0
 0 0 1 1 0 0 0 1
 560

DESCENTE - 390MONTÉE - 170TOTAL -

J MEILLEUR SOLUTION REALISABLE ACTUELLE Z - 4
 1 1 2 3 4 5 6 7
 1 1 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 1 1 1 0
 0 0 1 0 0 0 0 1
 874
 J LA SOLUTION 3 4 5 6 7
 1 1 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 0 0 0 1
 0 0 0 0 1 1 0 0

DESCENTE - 569MONTÉE - 305TOTAL -
 ZOPT NE VARIE PLUS, ON ADMET QUE LA SOLUTION OPTIMALE EST ATTEINTE

STOP BALAS
 RDY:

INITIALISATION

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3	2

NOMBRE DE SERVICES A ASSURER PAR JOUR -
 NOMBRE DE VARIABLES - 4
 NOMBRE D'AGENTS - 28
 NOMBRE DE REPOS A ASSURER PAR JOUR -
 TOTAL REPOS - 8
 SOLUTION INITIALE FORCEE
 NBFIX - 2
 I - 1J - 1VALIN - 1
 I - 4J - 7VALIN - 1

MEILLEUR SOLUTION REALISABLE ACTUELLE 2° 2

J	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1

OPTIMALE EST ATTEINTE

LA SOLUTION REALISABLE EST OPTIMALE

DESCENTE - 23127MONTÉE - 20061
 ZOPT NE VARIE PLUS, ON ADMET QUE LA SOLUTION

STOP BALAS
 RDY:

Partie II

PRESENTATION DU PRODUIT PROGRAMME CITAR

1. INTRODUCTION

Les résultats médiocres que nous avons obtenus précédemment avec la mise en oeuvre d'une technique d'énumération implicite nous ont incités à abandonner la recherche de l'optimalité d'une solution au profit de l'aspect interactif d'un module à composante fortement informatique dans lequel on adopterait une technique de recherche 2, 3 ou 4 optimal d'un circuit hamiltonien. En effet, supposons construite une grille de roulement quelconque. En explorant systématiquement tous les cycles d'ordres 2, 3 ou 4 possibles sur les lignes, puis sur les colonnes, il n'est pas impossible de trouver une permutation qui améliore le montant de la fonction objectif (voir la relation (8) dans la partie I de l'Annexe 1). C'est dans cet esprit qu'a été conçu le programme CITAR.

2. PRESENTATION DU PRODUIT-PROGRAMME CITAR

Le programme CITAR est un outil de Construction Interactive de Tableaux de Roulement dont le but est de guider le technicien du bureau des horaires vers une solution presque optimale du problème d'affectation des jours de repos. CITAR est un programme Fortran, conçu pour utiliser un écran de visualisation géré par un mini (voire un micro) ordinateur. Si l'on dispose d'un buffer d'écran suffisant, on peut construire, de manière interactive, des roulements à 30 agents.

2.1 UTILISATION DU PROGRAMME

Après avoir lu le nombre d'agents et la quantité de jours de repos affectée à chaque jour de la semaine, le programme CITAR affiche une grille sur l'écran de visualisation correspondant au roulement à traiter. Un ensemble de commandes permet à l'utilisateur de construire une première ébauche du tableau de roulement. A chaque modification, la grille est réaffichée automatiquement sur l'écran. CITAR détecte les erreurs de frappe ou même les incohérences, et, dans ce cas, demande à l'opérateur de réintroduire sa commande. Lorsque l'utilisateur estime sa grille suffisamment élaborée, il peut (quelle soit réalisable ou non), décider de l'optimiser en choisissant un niveau 2, 3 ou 4. Le module d'optimisation est fort simple : au niveau i ($i=2,3,4$), on cherche parmi tous les cycles d'ordre i (i.e. toutes les permutations circulaires d'ordre i) s'il existe une (ou plusieurs) permutation(s) sur les lignes et/ou sur les colonnes, permettant d'améliorer la fonction objective tout en maintenant (voire en assurant) la réalisabilité.

2.2 LES FONCTIONS DE CITAR

Suivant le type de fonction demandé, CITAR affiche, supprime, restore ou complète les phrases du questionnaire tout en maintenant l'affichage constant de la grille d'écran. Hormis les fonctions de vérification destinées à détecter les erreurs de frappe et les fautes de vraisemblance, l'utilisateur dispose des commandes suivantes :

- . ? : liste l'ensemble des commandes de CITAR;
- . R.N1.J1.(%) : permet d'afficher un jour de repos pour l'agent N1 le jour J1 (si l'option % est présente, la case marquée est indélabile jusqu'à la fin de la cession);
- . §.N1.J1 : efface la case marquée R en (N1,J1);

- . &.N1.J1.N2.J2 : transfère la case marquée R de (N1,J1) en (N2,J2);
- . #..(N) : permet la vérification de la grille courante. L'option (N) permet (éventuellement) d'optimiser au niveau N si le niveau d'erreur sur la grille est faible;
- . ! : retour au point d'entrée de la session;
- . NO : demande l'arrêt du programme CITAR.

2.3 EXEMPLE D'UTILISATION DE CITAR

(Voir pages suivantes).

oOo

ETAT D'OPTIMISATION : 0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 LU																			
4 MA																			
2 ME																			
4 JE																			
4 VE																			
4 SA																			
14 DI																			

CONTRAINTE, (NUMERO D'AGENT ET JOUR) EN FORMAT (A2,1X,2(12,1X,A2))

NOM DU FICHIER DE SAUVEGARDE ?
G19
NUMERO DE LA GRILLE VOULUE
7

Initialisation :

Nombre d'agents 19

Nombre de jour de repos
de Lundi à Dimanche

Lecture d'une grille
sur le fichier G19

ETAT D'OPTIMISATION : 0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 LU			R						R	R			R						
4 MA			R						R	R			R						
2 ME			R				R												
4 JE			R				R												
4 VE			R				R												
4 SA			R				R												
14 DI			R				R												

CONTRAINTE, (NUMERO D'AGENT ET JOUR) EN FORMAT (A2,1X,2(12,1X,A2))

Visualisation
de la grille n° 7
du fichier G19

8 2

PLUS DE 6 JOURS DE TRAVAIL CONSECUTIFS AU JOUR MA POUR L'AGENT 3
VOULEZ-VOUS OPTIMISER QUAND MEME ? (OUI=OK)

*Commande de vérification
plus niveau d'optimisation*

ETAT D'OPTIMISATION : 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 LU		R						R	R			R						
4 MA			R					R	R			R						
2 ME			R		R													
4 JE			R				R							R	R			
4 VE				R		R				R		R						
4 SA				R	R					R							R	
14 DI		R		R	R	R		R	R	R		R		R	R	R	R	R

CONTRAINTE, (NUMERO D'AGENT ET JOUR) EN FORMAT (A2,1X,2(12,1X,A2))
4 JE 2 JE

Transfert d'un jour de repos

ETAT D'OPTIMISATION : 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 LU			R					R	R			R						
4 MA				R				R	R			R						
2 ME				P		R												
4 JE					R									R	R			
4 VE					R		R				P		R					
4 SA					R	R					R						R	
14 DI		R		R	R	R		R	R	R		R		R	R	R	R	R

CONTRAINTE, (NUMERO D'AGENT ET JOUR) EN FORMAT (A2,1X,2(12,1X,A2))

8 2

PLUS DE 6 JOURS DE TRAVAIL CONSECUTIFS AU JOUR JE POUR L'AGENT 8
VOULEZ-VOUS OPTIMISER QUAND MEME ? (OUI-OK)

ETAT D'OPTIMISATION : 12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 LU				R		R		R		R		R		R					
4 MA				R		R		R		R		R		R					
2 ME				R															
4 JE																			
4 VE																			
4 SA																			
14 DI																			

Optimisation
au niveau 2

ETAT D'OPTIMISATION : 12

--- GRILLE OPTIMISEE AU NIVEAU 2 ---

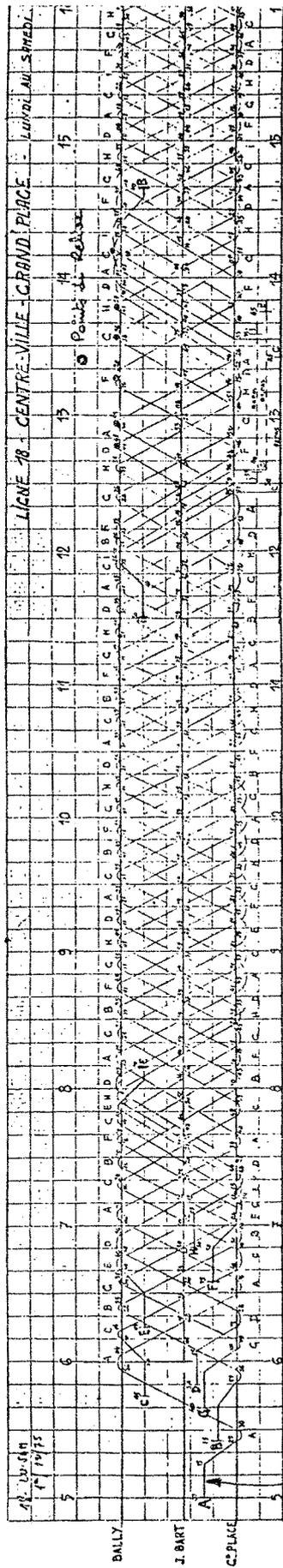
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 LU																			
4 MA																			
2 ME																			
4 JE																			
4 VE																			
4 SA																			
14 DI																			

CONTRAINTE, (NUMERO D'AGENT ET JOUR) EN FORMAT (A2,1X,2(12,1X,A2))

NOM DU FICHIER DE SAUVEGARDE ?
G19
888 ENREGISTREMENT NUMERO 8 888

ANNEXE 2

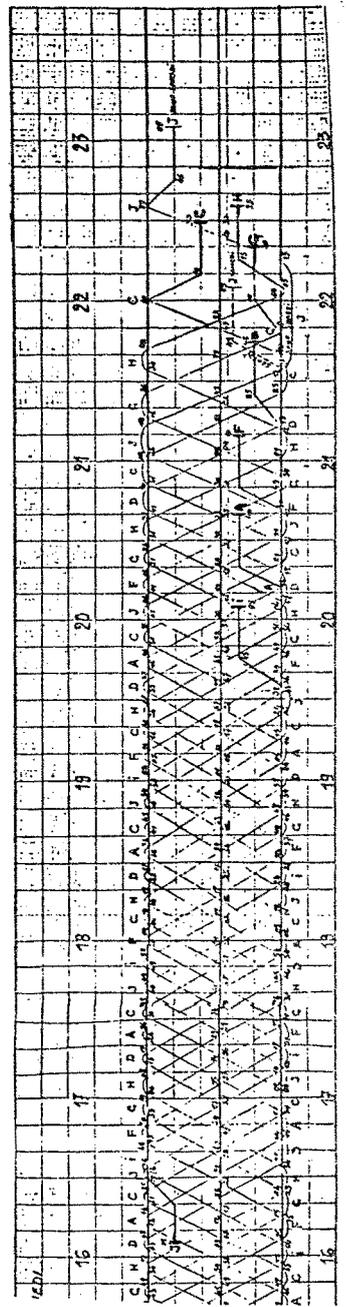
GRAPHIQUE LIGNE 18



A } TRAINS
 B }
 C }
 ()

Temps de préparation du véhicule

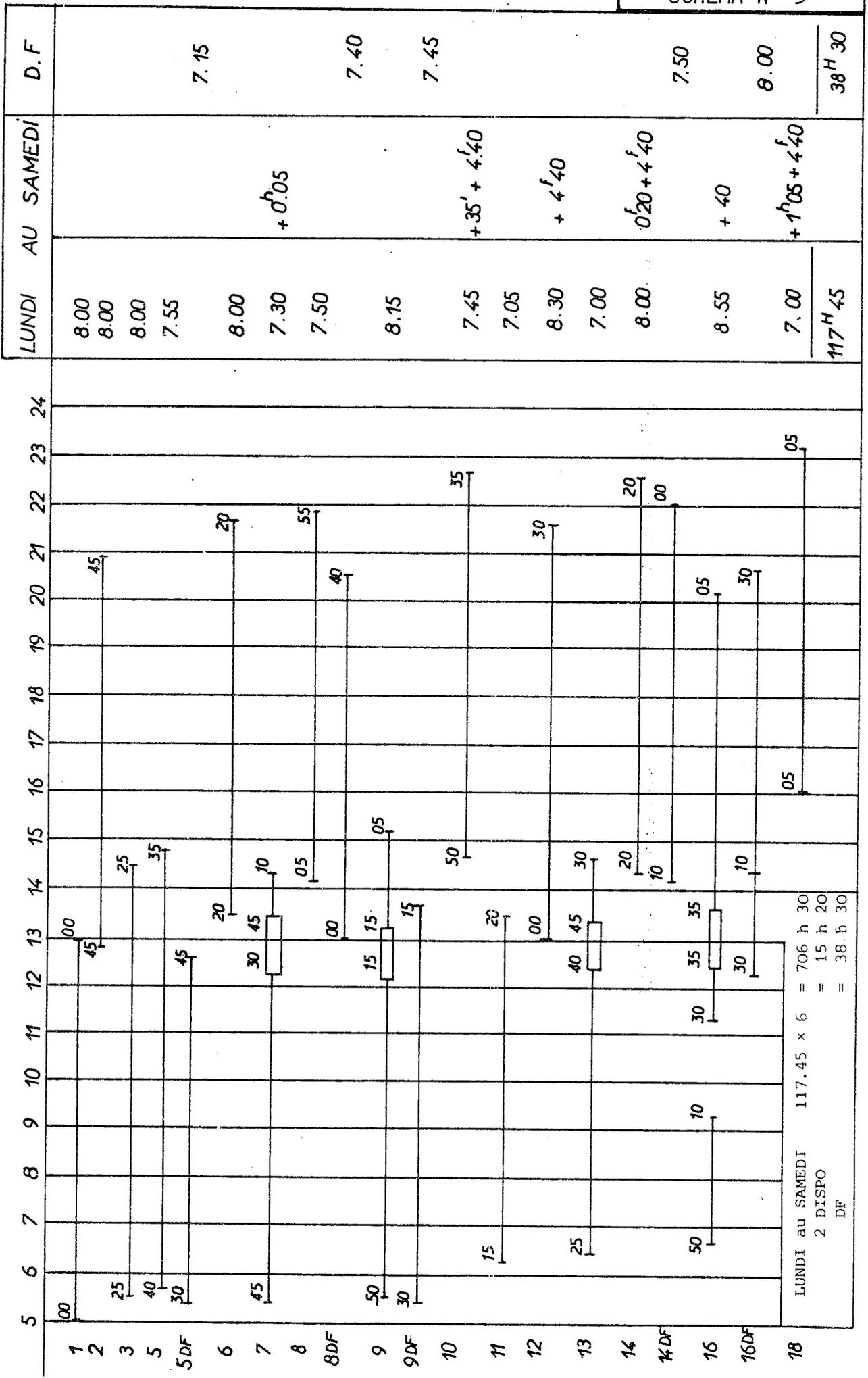
SCHEMA N°1



LIGNE 18

DÉCOUPAGE DES SERVICES

22/03/76

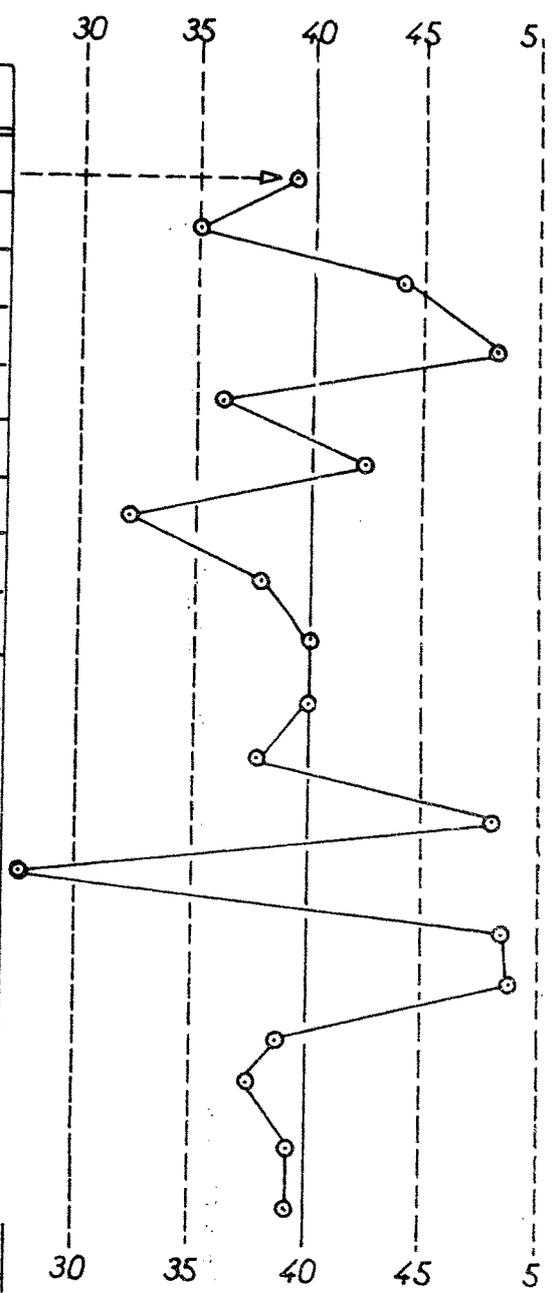


LUNDI au SAMEDI 117.45 x 6 = 706 h 30
 2 DISPO = 15 h 20
 DF = 38 h 30

ROULEMENT LIGNE 18

		LUN	MAR	MER	JEU	VEN	SAM	DIM
1	2	10	10	R	6	6	6	R
2	2	R	13	13	13	13	13	R
3	2	16	16	16	16	16	R	R
4	1	5	5	5	R	14	14	14
5	2	14	R	11	11	11	11	R
6	2	R	12	12	12	12	12	R
7	3	7	9	9	9	R	R	R
8	2	18	18	18	R	R	16	16
9	2	2	R	3	3	3	3	R
10	2	R	2	2	2	2	2	R
11	2	11	11	DM	5	5	R	R
12	1	12	14	14	14	R	5	5
13	3	13	R	R	18	18	18	R
14	1	1	1	1	1	1	1	R
15	1	6	6	6	R	9	9	9
16	2	9	R	10	10	10	10	R
17	2	R	7	7	7	7	7	R
18	2	8	8	8	8	8	R	R
19	2	3	3	DM	R	R	8	8

36	4	4	2	4	4	4	4	14
----	---	---	---	---	---	---	---	----



Répartition de la durée effective de travail d'un agent durant chaque semaine de roulement

- a) 36 REPOS
pour 19 SEMAINES
= 1,9 Repos/semaine
- b) MAXI : 6 jours de travail consécutifs
MINI : 3 jours de travail consécutifs
- c) Semaine civile : MAXI = 48 h 00
MINI = 28 h 00
- d) 2 "DISPOSITIONS" destinées à équilibrer la durée de travail

SCHEMA N°4

35	0100110	5
36	0100011	6
37	0011100	6
38	0011001	5
39	0010011	6
40	0001110	7
41	0000111	8

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
X  LISTE DES 41 CONFIGURATIONS ET
X  COUTS ASSOCIES
X  XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

```

1	1000000	1
2	0100000	1
3	0010000	1
4	0001000	1
5	0000100	1
6	0000010	2
7	0000001	2
8	1100000	3
9	1001000	2
10	1000100	3
11	1000010	3
12	1000001	3
13	0110000	3
14	0100100	2
15	0100010	3
16	0100001	3
17	0011000	3
18	0010010	3
19	0010001	3
20	0001100	3
21	0001001	3
22	0000110	4
23	0000011	5
24	1110000	6
25	1100100	4
26	1100010	5
27	1100001	5
28	1001100	4
29	1001001	4
30	1000110	5
31	1000011	6
32	0111000	6
33	0110010	5
34	0110001	5

SCHEMA N°5

ANNEXE 3

UNE VARIANTE PARAMETRIQUE DE L'ALGORITHME
DE MOORE

1. POSITION DU PROBLEME

On considère un graphe $G = (X, U)$ et s un sommet de X tel qu'il existe un chemin de $G = (X, U)$ reliant s à tous sommets x de X . Le sommet s est alors racine du graphe G .

Soit une fonction c de U dans R qui associe à chaque arc u un coût $c(u)$. On admettra que $G = (X, U)$ est un graphe simple sans boucle.

Dans ces conditions, l'algorithme de Moore [20] permet soit de construire l'arborescence des plus courts chemins de s à x , soit de détecter un circuit absorbant.

Le problème que nous allons étudier est quelque peu différent. On dispose d'une fonction supplémentaire d de U dans R associant à chaque arc de U une direction de déplacement. Ainsi, à chaque arc u de U est associé un couple $(c(u), d(u))$.

De plus, on fait l'hypothèse que $G = (X, U)$ ne contient pas de circuits arbsorbants pour les coûts initiaux $c(u)$. On cherche alors à déterminer la valeur maximum ρ^* de $\rho \geq 0$ tel que le graphe $G = (X, U)$ affecté des coûts $c(u) + \rho d(u)$ conserve la propriété d'être sans circuits absorbants. En outre, si ρ^* est borné, on construira un des circuits de longueur nulle, qui devient de coût positif pour $\rho > \rho^*$.

2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

On notera : $A(X,V,c,\rho)$ l'arborescence (de racine s) des plus courts chemins de s à x dans $G = (X,U)$ pour les coûts $c + \rho d$ (on est assuré de l'existence de $A(X,V,c,0)$).

Définition 1 - Soit t_ρ une fonction de X dans R qui associe à chaque sommet x la longueur du chemin de s à x dans $A(X,V,c,\rho)$.

Définition 2 - Soit h une fonction de X dans R qui associe à chaque sommet x la longueur différentielle du chemin de s à x dans $A(X,V,c,0)$, défini par la relation :

$$h(x) = \sum_{V \in L(x)} d(v) \quad (1)$$

où $L(x)$ est l'ensemble des arcs du chemin de s à x . En effet, si les arcs u de U sont affectés des coûts $c(u) + \rho d(u)$, on a :

$$t_\rho(x) = \sum_{V \in L(x)} c(V) + \rho d(v) = t_0(x) + \rho h(x) \quad (2)$$

3. ETUDE DU PROBLEME

Les propositions qui suivent donnent les relations fondamentales à partir desquelles on met en oeuvre la variante paramétrique de l'algorithme de Moore :

Proposition 1

Soit $A(X,V,c,\rho)$ l'arborescence des plus courts chemins de s à x . Alors, pour tout arc $u = (x,y)$ de $U-V$, on a la relation suivante :

$$t_\rho(x) + c(u) + \rho d(u) \geq t(y) \quad (3)$$

Preuve : Si la relation (3) n'est pas vérifiée pour un arc quelconque $u = (x,y)$ de $U-V$, $t_\rho(y)$ ne représente pas le plus court chemin de s à y .

Proposition 2 :

Si un arc $u = (x,y) \in V$ vérifie la relation suivante

$$\eta(u) = h(y) - h(x) - d(u) \leq 0 \quad (4)$$

alors $\forall \rho > 0$ la relation (3) sera vérifiée :

Preuve : Elle se déduit directement des relations (2) et (3).

Définition 3 :

On pose $t_o(y) - t_o(x) - c(u) = \delta(u)$

Théorème 1

La valeur $\tilde{\rho} = \min_{u \in \tilde{U}} \left\{ \frac{-\delta(u)}{\eta(u)} \right\}$ où $\tilde{U} = \left\{ u \in U - V \text{ tel que } \eta(u) > 0 \right\}$

permet de détecter dans $G = (X,U)$ (si \tilde{U} est non vide) :

- a) ou bien un circuit et dans ce cas le circuit détecté est de longueur nulle dans l'arborescence $A(X,V,c,\tilde{\rho})$;
- b) ou bien un cycle qui n'est pas un circuit et dans ce cas l'arc $u^* = (x^*,y^*)$ pour lequel le minimum $\tilde{\rho}$ est atteint entre dans l'arborescence $A(X,V,c,0)$ à la place de l'arc $v = (x,y^*)$ dont l'extrémité terminale est la même que celle de u .

Preuve : Evidente d'après ce qui précède.

4. ENONCE DE L'ALGORITHME

(0) Poser $\rho^* = 0$, déterminer l'arborescence $A(X, V, c, 0)$ en utilisant l'algorithme de Moore.

(1) Si l'ensemble \tilde{U} est non vide, calculer :

$$\tilde{\rho} = \underset{u = (x, y) \in \tilde{U}}{\text{Min}} \left\{ - \frac{\delta(u)}{\eta(u)} \right\}$$

poser $\rho^* = \rho^* + \tilde{\rho}$, aller en (2), sinon, terminer; la direction d ne conduit pas à un circuit absorbant.

(2) Soit $U^* = (x^*, y^*)$ un arc pour lequel le minimum est atteint.

a) Si l'on détecte un circuit dans $U^* \cup V$, terminer.

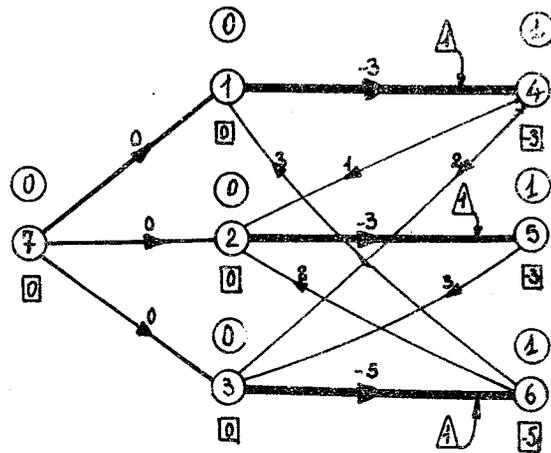
b) Sinon U^* crée un cycle qui n'est pas un circuit. Soit $v^* = (x, y^*)$ l'arc de l'arborescence d'extrémité y^* . Poser $V = V \cup \{u^*\} - \{v^*\}$, $c = c + \tilde{\rho} d$, $t(x) = t(x) + \tilde{\rho} h(x)$, aller en (1).

5. FINITUDE

A chaque fois qu'on passe au pas b, la somme des $h(x)$, $x \in X$, diminue strictement quand on modifie l'arborescence. On ne peut donc retrouver deux fois la même arborescence au cours de l'algorithme, ce qui assure la finitude.

Exemple Numérique

L'arborescence initiale des plus longs chemins $A(X, V, c, 0)$ est la suivante (en trait épais)

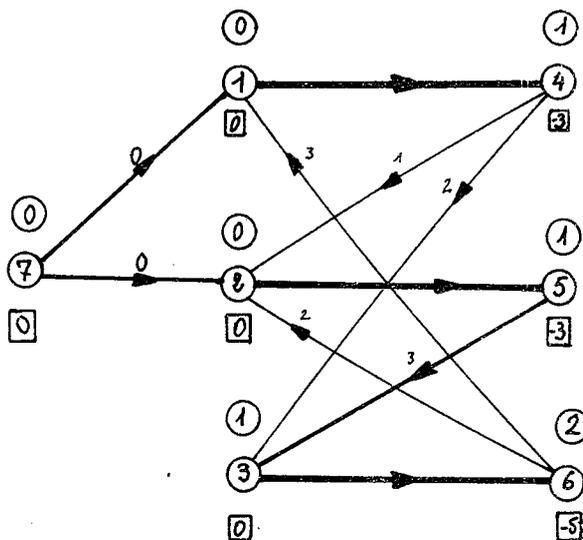


- valeur de h
- valeur de t
- Δ valeur de d

$$\tilde{u} = \{ (4, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 1), (6, 2) \}$$

$$\tilde{f} = \text{Min} \{ 2, 1, 0, 2, 3 \} = 0$$

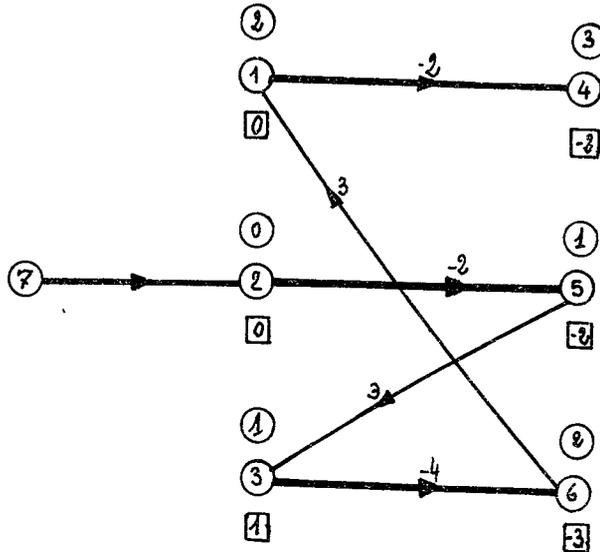
On en déduit la nouvelle arborescence : $A(V, X, c, 0)$



$$\tilde{u} = \{ (4, 2), (6, 1), (6, 2) \}$$

$$\tilde{\xi} = \text{Min} \{ 2, 1, 1, 5 \} = 1$$

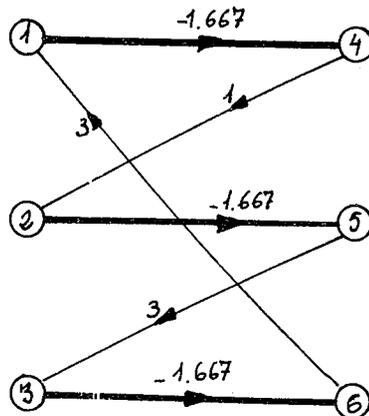
On en déduit $A(X, V, c, 1)$



$$\tilde{u} = \{ (4, 2), (4, 3), (6, 2) \}$$

$$\tilde{\xi} = \text{Min} \{ 1/3, 1/2, 1/2 \} = 1/3$$

On en déduit : $A(X, V, c, 1.333)$



Circuit de longueur nulle.

ANNEXE 4

RESULTATS NUMERIQUES

1. MISE EN OEUVRE DU PROGRAMME

- a) Le programme PINIT réalise l'initialisation et stocke les résultats sur un fichier de sauvegarde. C'est ce même fichier qui sera réutilisé quel que soit le problème traité. La génération et la détermination du coût de séquençement des configurations sont réalisés par les routines GENE et SEQU. La routine TRAIL donne XD correspondant au couple (λ, μ) de départ. Enfin, les routines TINIT et INIT déterminent l'arborescence initiale des plus longs chemins. Cette arborescence est stockée sous forme de liste dans PERE. XTAU et XH correspondent respectivement à t et h (voir annexe 3). XP et XDELTA représentent les coûts $p(\lambda, \mu)$ et la direction δ (voir chapitre IV).

- b) Le programme BENDER, après lecture des paramètres et des données, appelle la routine MOORE qui détermine un circuit de longueur nulle (stocké dans le vecteur CIRCU1) ainsi que le pas de déplacement maximum XRAU. On utilise ensuite la forme révisée du simplexe pour déterminer une nouvelle direction de déplacement en faisant rentrer en base le circuit que l'on vient de détecter. C'est l'objet de la routine PLAUX. On arrête les calculs lorsque la forme d'irréalisabilité de PLAUX est nulle.

2. ANALYSE DES RESULTATS

On constate numériquement que le coût réduit des circuits candidats à rentrer en base est non positif et correspond à l'augmentation marginale du coût de ce circuit suivant la direction XDELTA (voir à ce sujet la relation (14) § 4.1 chapitre IV). De plus, le montant de la forme d'irréalisabilité de (P_A) peut rester invariant pendant plusieurs itérations (mais d'une itération à l'autre on a toujours des circuits différents candidats à rentrer en base). Ce phénomène signifie que la pente de la fonction $Z^x(\lambda, \mu)$ (cf. p.80) reste constante pendant les itérations en question.

3. EXEMPLE NUMERIQUE

On résout le problème de roulement à 19 agents avec les données fournies dans l'annexe 2 schéma n° 4.

oOo

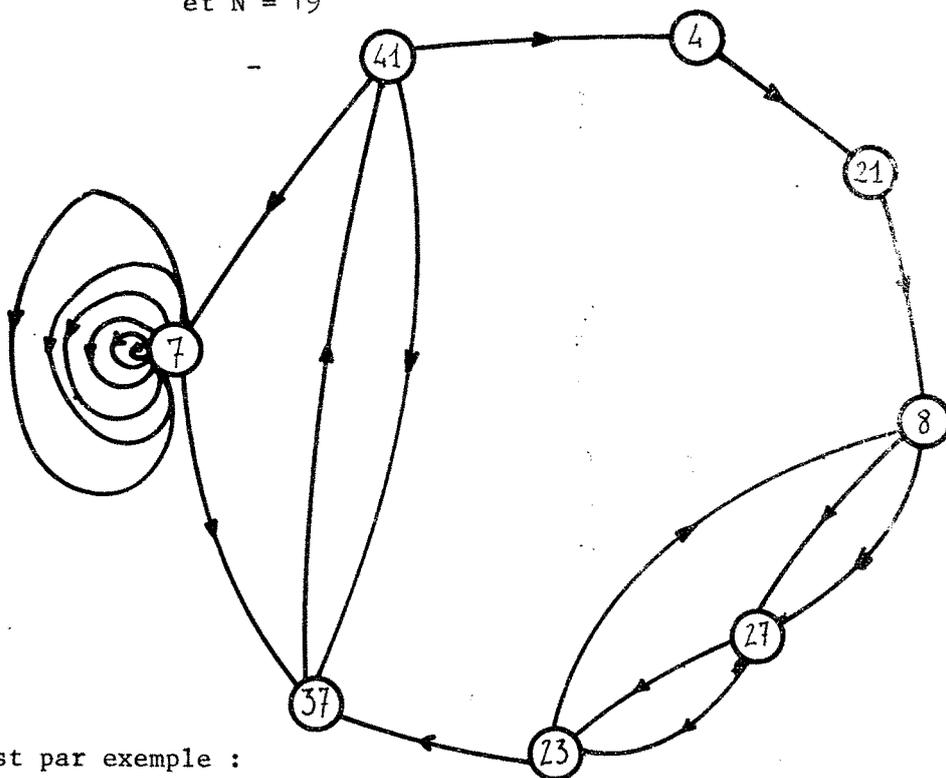
DONNER LE NOMBRE D'AGENTS ET D'ITERATIONS MAX
 19 200
 DONNER LE NMBRE DE DAYS OFF DE LU A DI,7(IX,I2)
 4 4 2 4 4 4 14
 PRECISION RESOLUTION DE PLAUX,FORMAT:--...^...
 XEPI= -0.010

NITER= 39
 -----SOLUTION OPTIMALE-----
 CIRCUIT NUMERO 1 4 45 21 62 24 65 31 72 8 49 27 68 23 64 37 78 41 82
 CIRCUIT NUMERO 2 4 45 21 62 24 65 27 68 37 78 41 82
 CIRCUIT NUMERO 3 23 64 37 78 41 82
 CIRCUIT NUMERO 4 7 48
 CIRCUIT NUMERO 5 7 48 37 78 41 82
 CIRCUIT NUMERO 6 4 45 21 62 41 82
 CIRCUIT NUMERO 7 23 64 8 49 27 68
 CIRCUIT NUMERO 8 4 45 21 62 8 49 27 68 23 64 37 78 41 82

FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 1: 0.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 2: 0.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 3: 0.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 4: 6.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 5: 1.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 6: 0.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 7: 1.0000
 FLOT SUR LE CIRCUIT NUMERO 8: 0.9999

TABLEAU DE ROULEMENT DES AGENTS
 AVEC $s(k) = 15, 15, 17, 15, 15, 15, 5$
 et $N = 19$

Circuit C_{19}



Le séquencement obtenu est par exemple :

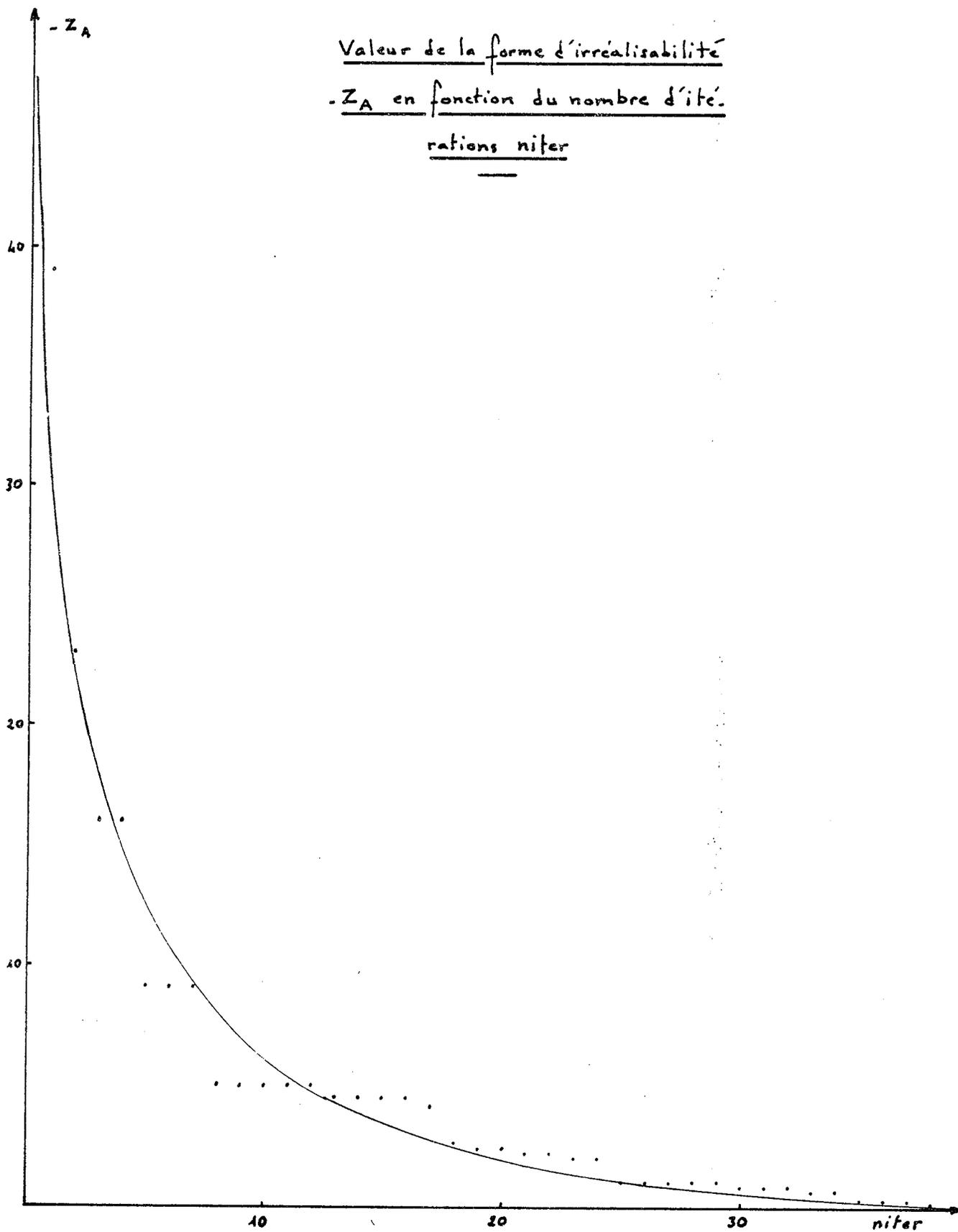
(7,7,7,7,7,7,7,37,41,4,21,8,27,23,8,27,23,37,41)

ce qui donne le roulement suivant :

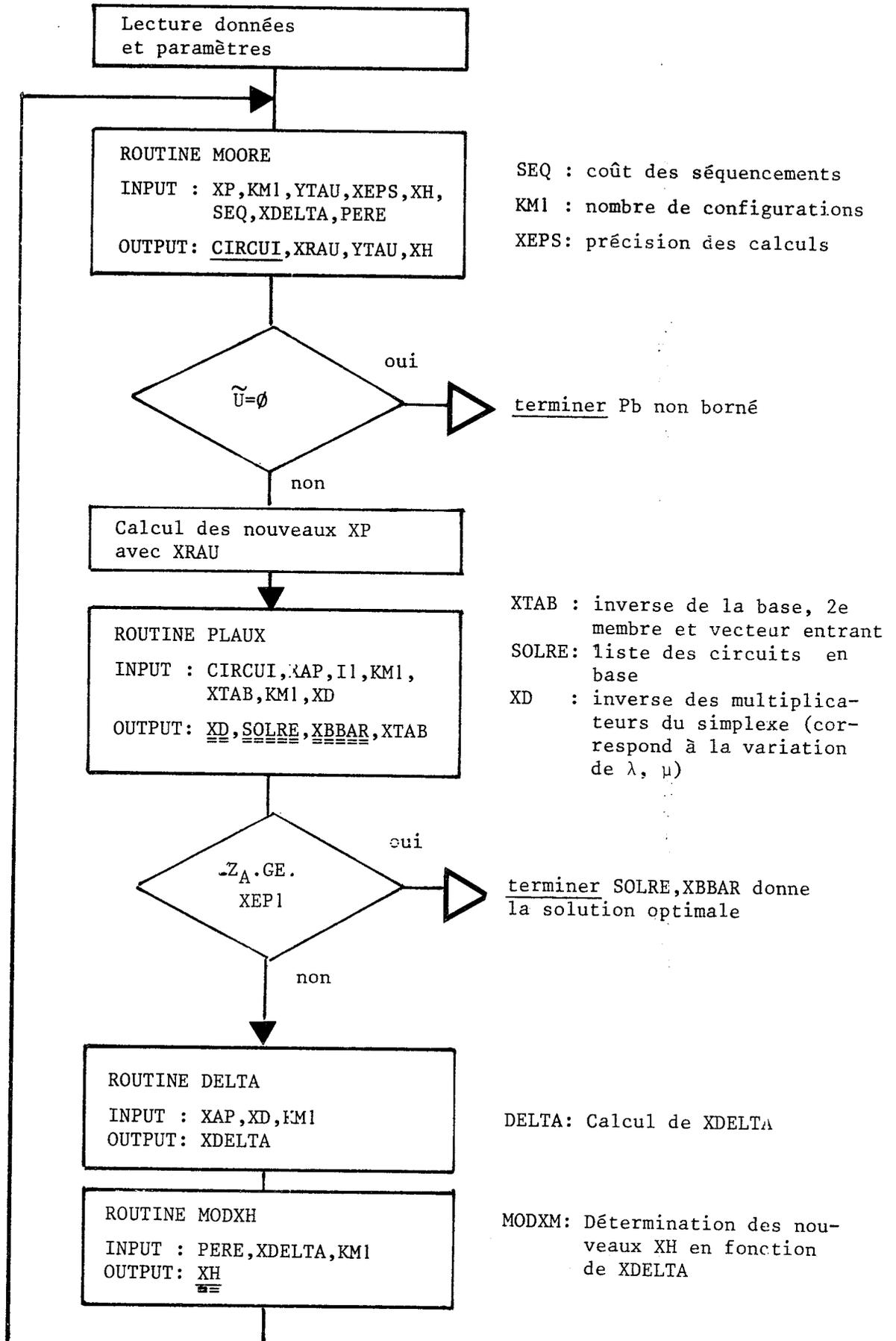
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
						R
						R
						R
						R
						R
						R
						R
						R
		R	R	R		R
				R	R	R
			R			R
			R			R
R	R					R
R	R					R
					R	R
R	R					R
R	R					R
					R	R
		R	R	R		R
				R	R	R

La fonction objective qui mesure le nombre de repos accolé vaut 16, celle qui mesure la valeur du roulement vaut 82.

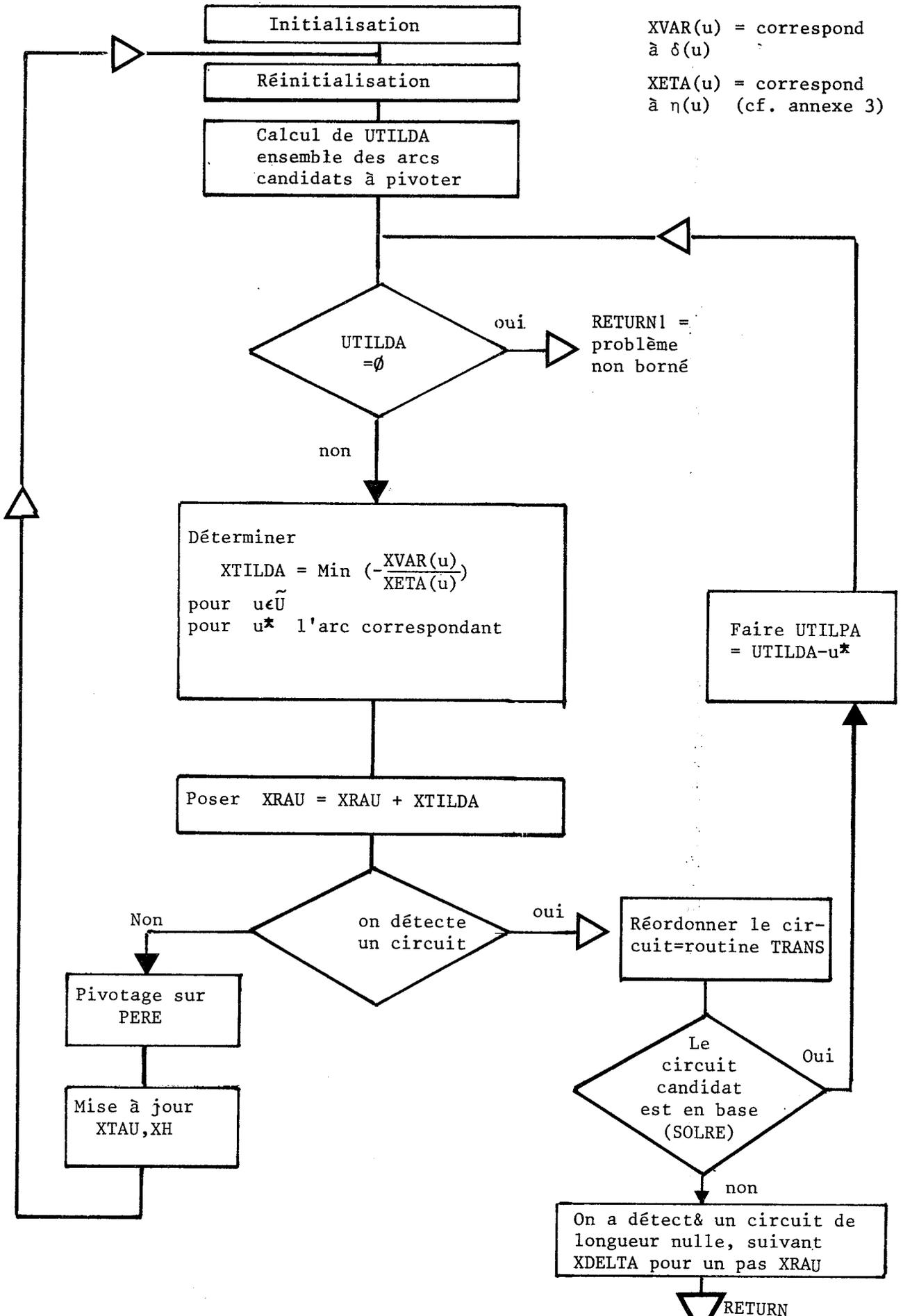
Valeur de la forme d'irréalisabilité
 $-Z_A$ en fonction du nombre d'ité-
raisons niter



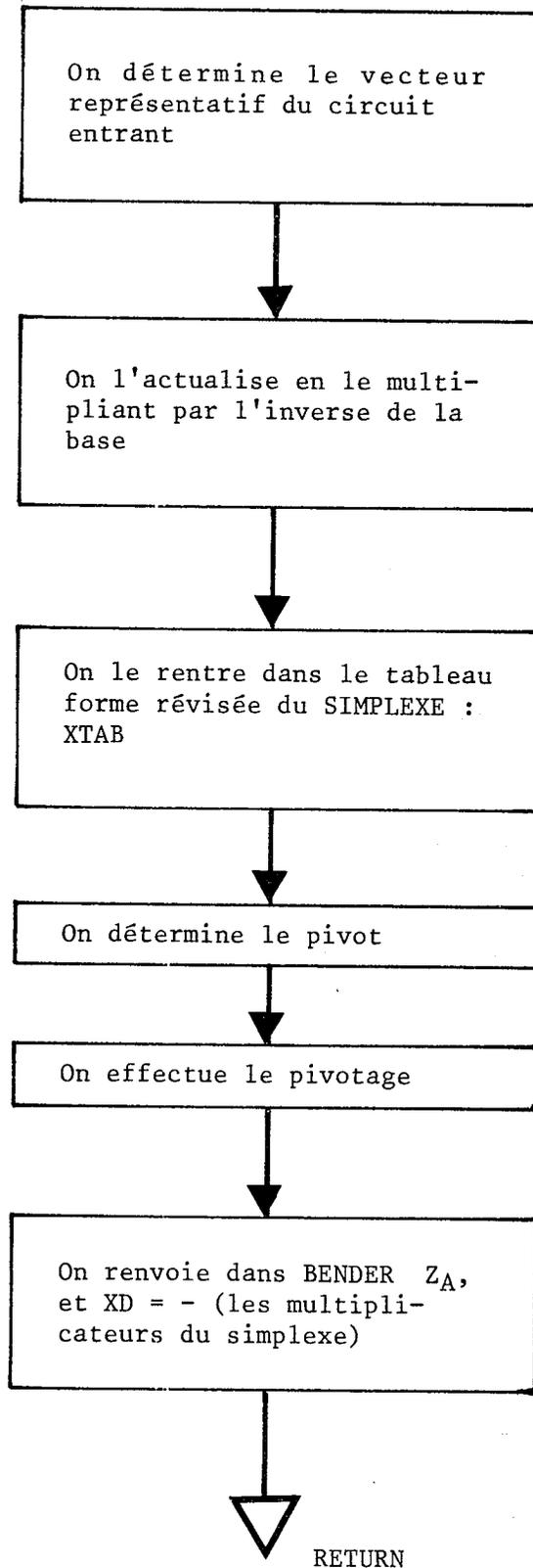
ORGANIGRAMME DU PROGRAMME BENDER



SUBROUTINE MOORE



SUBROUTINE PLAUX



BIBLIOGRAPHIE

- (1) DELORME et HEURGON
"Problèmes de partitionnement, exploration arborescente ou méthode de troncature" - RAIRO V2 - Juin (1975)
- (2) FARGIER Paul Henri
"Une méthode de détermination d'un réseau de transport optimal"
(thèse présentée à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble - 1977)
- (3) FAURE R.
"Etablissement automatique des tableaux de Marche et feuille de service dans un réseau de transport" - 7e Conférence IFIP sur les techniques d'optimisation - Nice 8-13 septembre 1975
- (4) GARFINKEL R.S. et G.L. NEMHAUSER
"The set partitioning problem : set covering with equality constraints" op. Res. 17, 1969, p. 848, 856
- (5) GONDRAN M. et J.L. LAURIERE
"Un algorithme pour le problème de partitionnement" RAIRO - V-I, 1974 - p. 27-40
- (6) GEOFFRION A.M.
"Lagrangean relaxation for integer programming" - Mathematical Programming Study 2 (1974) 83-114
- (7) GEOFFRION and MARSTEN
"Integer programming algorithms : a framework and a state-of-the art survey" - Management Science 18 (1972) pp 465-491

- (8) GRINOLD
"Steepest ascent for large scale linear programs" Siam Review -
Vol. 14 No. 3 - July 1972
- (9) GARFINKEL R.S. et NEMHAUSER G.L.
"Integer programming" - John Wiley and Sons - 1972
- (10) GUNTER P. SHARP
"Constraints for scheduling operators for urban public transit
systems" - Seminaire ORSA transportation science section,
Chicago - 1975
- (11) GUHA et BROWNE
"Optimal scheduling of tours and days off" - Seminaire ORSA,
Chicago - 1975
- (12) HEURGON Edith
"Construction des grilles de roulement" - Direction des Etudes
Générales RATP (Note de travail)
- (13) HEURGON Edith
"Preparing duty rosters for bus routes by computer" - Workshop on
automated techniques for scheduling of vehicle operators for urban
public transportation services, ORSA Transportation Science
Section - Chicago - 1975
- (14) HEURGON, PRESENT, TARIM
"Construction automatique des horaires d'une ligne d'autobus"
7e Conférence IFIP sur les techniques d'optimisation - Nice -
8-13 septembre 1975
- (15) HELD M., KARP R.M
"The travelling salesman problem and minimum spanning tree" - Part I
Operation Research 18 - 1970 - Part II - Mathematical programming 1
1971)

- (16) H. KREGELOH et M. MOJSILOVIC
"Automated formation of staff schedules and duty rosters" -
Seminaire ORSA - Chicago - 1975
- (17) LASDON Leon S.
"Optimization theory for large systems" - Macmillian series in
operations Research (1970)
- (18) MILLER HOLMES
"Nurse scheduling using mathematical programming" Op. res. Vol. 24
No. 5 - Sept.-Oct. 1976
- (19) MUKENDI Cyrille
"Sur l'implantation d'équipements dans un réseau : le problème
de m-centre" (Thèse présentée à l'Université Scientifique et
Médicale de Grenoble - 1975)
- (20) ROY B.
"Algèbre moderne et théorie des graphes" - Tome 2 - Dunod - 1970
- (21) SALZBORN Franz J.
"Optimum bus scheduling" Transp. Sci., 6, No. 2, pp 137-148 -
May 1972
- (22) TREMOLIERES R.
"Le problème de roulement des quarts pour les entreprises à feu
continu - RAIRO Verte - Vol. 10 - No. 2 - Fév. 1976
- (23) URHY J.P.
Méthodes de sous-gradient dans la décomposition de programmes
linéaires (Note manuscrite, IMAG)
- (24) VAN DE PANNE C.
"Methods for linear and quadratic programming" North-Holland/
American Elsevier

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 22 Novembre 1980

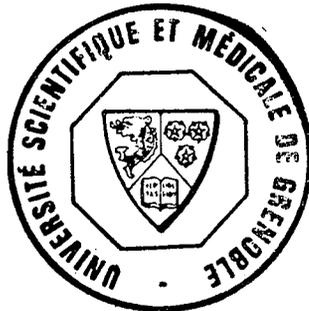
Le Président de la thèse

Thakorniat

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 25.11.80

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



G. Cau

G. CAU

