



**HAL**  
open science

# Comportement oscillatoire d'une famille d'automates cellulaires non uniformes

Eric Goles Chacc

► **To cite this version:**

Eric Goles Chacc. Comportement oscillatoire d'une famille d'automates cellulaires non uniformes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT: . tel-00293368

**HAL Id: tel-00293368**

**<https://theses.hal.science/tel-00293368>**

Submitted on 4 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*et à*

**l'Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR INGENIEUR**

*en Mathématiques Appliquées*

*par*

**Eric GOLES CHACC**



**COMPORTEMENT OSCILLATOIRE D'UNE FAMILLE**

**D'AUTOMATES CELLULAIRES NON UNIFORMES**



**Thèse soutenue le 28 Novembre 1980 devant la commission d'examen**

**N. GASTINEL**

**Président**

**F. ROBERT**

**C. BENZAKEN**

**R. MAYNARD**

**D. PERRIN**

**J. P. UHRY**

**Examineurs**



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie



MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD  
M. René PAUTHENET

---

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

#### CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

#### Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

##### E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

.../...

MM. SARRAZIN Pierre  
SOUQUET Jean-Louis  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

**E.N.S.M.E.E.**

MM. BISCONDI Michel  
BOOS Jean-Yves  
GUILHOT Bernard  
KOBILANSKI André  
LALAUZE René  
LANCELOT François  
LE COZE Jean  
LESBATS Pierre  
SOUSTELLE Michel  
THEVENOT François  
THOMAS Gérard  
TRAN MINH Canh  
DRIVER Julian  
RIEU Jean

**E.N.S.E.R.G.**

MM. BOREL Joseph  
CHEHIKIAN Alain  
VIKTOROVITCH Pierre

**E.N.S.I.E.G.**

MM. BORNARD Guy  
DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
JAUSSAUD Pierre  
Mme JOURDAIN Geneviève  
MM. LEJEUNE Gérard  
PERARD Jacques

**E.N.S.H.G.**

M. DELHAYE Jean-Marc

**E.N.S.I.M.A.G.**

MM. COURTIN Jacques  
LATOMBE Jean-Claude  
LUCAS Michel  
VERDILLON André



Haydée :

Aunque sea inútil  
valga este ejercicio  
de retórica aplicada  
como otro intento fallido  
por creer en algo  
por olvidar que no somos nada,  
ni siquiera este lugar común.





Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur N. GASTINEL pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Monsieur F. ROBERT, qui a dirigé cette thèse, pour ses nombreux conseils et encouragements qui ont rendu possible ce travail.

Monsieur D. PERRIN d'avoir accepté de siéger au jury et pour le soutien qu'il m'a apporté.

Messieurs C. BENZAKEN. R. MAYNARD et J.P. UHRV qui ont bien voulu faire partie de ce jury.

Le DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES de l'UNIVERSITÉ DE CHILI qui a soutenu et encouragé ces recherches.

Je remercie particulièrement mes amis A. EBERHARD, J. OLIVOS et M. TCHUENTE dont la collaboration et la sympathie m'ont été précieuses.

Mes remerciements s'adressent aussi à Mesdames M.J. DOREL, D. HOTTELIER et M. TREVISAN qui ont effectué avec compétence et amabilité la frappe de cette thèse et aux membres du Service de reprographie pour l'excellente qualité de leur travail.

Eric GOLES CHACC



## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION -----	1
CHAPITRE I - COMPORTEMENT ITERATIF DE CERTAINES APPLICA- TIONS ISOTONES -----	7
1.1. Résultats généraux dans la classe des fonctions isotones -----	7
1.2. Fonctions isotones linéaires et de ty- pe produit -----	9
1.3. Rappels sur les matrices non-négatives	9
1.4. Etude de l'itération parallèle pour F linéaire -----	10
1.5. Quelques résultats sur l'iteration "série" associée à F -----	20
1.6. Exemples -----	23
1.7. Fonctions isotones irréductibles ----	29
 CHAPITRE II - COMPORTEMENT PERIODIQUE DES FONCTIONS A SEUIL BINAIRES -----	 39
2.1. Enoncé du problème -----	40
2.2. Définitions et résultats de base ----	41
2.3. Démonstration du théorème -----	44
2.4. Fonctions à seuil "presque" symétriques	46
2.5. Application à une famille d'automates cellulaires uniformes -----	49
2.6. Application à la dynamique de groupes	52
 CHAPITRE III - COMPORTEMENT PERIODIQUE DES FONCTIONS A MULTISEUIL -----	 59
3.1. Définitions et résultats de base ----	61
3.2. Démonstration du théorème -----	71
3.3. Exemples -----	73

CHAPITRE IV - COMPORTEMENT PERIODIQUE DE FONCTIONS A SEUIL BINAIRES AVEC MEMOIRE -----	81
4.1. Enoncé du problème -----	82
4.2. Caractérisation de longueur des cycles	84
4.3. Une famille des fonctions qui admet des cycles de longueur $k+1$ -----	90
4.4. Fonctions à seuil non symétriques ----	93
 CHAPITRE V - ITERATION SERIE CONDUITE SUR UNE FONCTION A SEUIL -----	 97
5.1. Comportement cyclique de l'itération série conduite sur $\Delta$ -----	100
5.2. Exemples sur un tore -----	104
 CONCLUSIONS -----	 113
 REFERENCES -----	 115

## INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude des itérations conduites sur une fonction à valeurs dans un ensemble fini. De façon générale, nous étudions les *itérations parallèle et série*, définies par :

\* Itération parallèle :

$$\begin{aligned} y_1^{r+1} &= f_1(y_1^r, \dots, y_n^r) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_n^{r+1} &= f_n(y_1^r, \dots, y_n^r) \end{aligned}$$

\* Itération série :

$$\begin{aligned} y_1^{r+1} &= f_1(y_1^r, \dots, y_n^r) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_i^{r+1} &= f_i(y_1^{r+1}, \dots, y_{i-1}^{r+1}, y_1^r, \dots, y_n^r) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_n^{r+1} &= f_n(y_1^{r+1}, \dots, y_{n-1}^{r+1}, y_n^r) \end{aligned}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots; y^0 \in B^n$$

où  $B^n$  est un ensemble fini (dans la plupart des cas  $B = \{0, 1\}$ ) et chaque  $f_i$  une application de  $B^n$  dans  $B$ .

Dans cette optique F. ROBERT a caractérisé, à l'aide d'une notion de rayon spectral booléen, une classe de fonctions pour lesquelles une procédure itérative série ou parallèle aboutit toujours à un point fixe unique [21, 22].

C'est pourquoi le premier chapitre est consacré à l'étude des fonctions isotones, essentiellement de type linéaire ou produit booléen, pour lesquelles une notion de rayon spectral permet de caractériser le comportement itératif. De plus, ceci permet de *démontrer* que, pour cette classe des fonctions, *la longueur des cycles est faible par rapport au nombre ( $2^n$ ) des états*, résultat obtenu expérimentalement par le biologiste A. KAUFFMAN en 1970, grâce à une simulation à l'ordinateur [16].

Dans le deuxième chapitre nous étudions le comportement cyclique des fonctions à seuil. Plus précisément, étant donnée une matrice réelle symétrique  $(\alpha_{ij})$ ,  $n \times n$ , et un vecteur  $n$ -dimensionnel  $\vec{\theta}$ , on s'intéresse au comportement, en régime stationnaire, de l'itération parallèle conduite sur une application  $\Delta$ , de  $\{0,1\}^n$  dans lui-même, où chaque composante est une fonction à seuil

avec séparateur  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \theta_i$  ( $y_i \in \{0,1\}$ ).

Dans ce contexte on démontre que l'évolution est très simple :

*convergence vers un point fixe ou vers un cycle de longueur deux (pas de cycle de longueur supérieure à deux).*

On applique ce résultat à une classe d'automates cellulaires uniformes (ce qui permet de généraliser certains résultats obtenus dans [26,28]) et à un modèle, assez simple, de dynamique des groupes [11,15].

Le chapitre III correspond à une généralisation du résultat précédent, dans le cadre d'un ensemble fini de cardinalité quelconque et une extension naturelle des fonctions à seuil.

De même, le chapitre IV est consacré à l'étude des applications à seuil, avec des poids symétriques, quand on fait une itération avec  $k$  pas de mémoire, et l'on démontre *la convergence, quelque soit l'ensemble des vecteurs initiaux, vers un cycle dont la période divise  $k+1$ .*

On voit donc que le comportement cyclique exhibé au deuxième chapitre, est un cas particulier (pour  $k = 1$ ).

Au cinquième chapitre, nous montrons que *l'itération série conduite sur  $\Delta$  (avec composantes à seuil et poids,  $\alpha_{ij}$ , symétriques) a un comportement simple (convergence vers un point fixe, quelque soit le vecteur initial) ou assez complexe (existence de cycles très longs) selon le signe d'un certain paramètre.*

Il convient de signaler que le comportement "2-cyclique" avait été déjà exhibé pour certains automates cellulaires à seuil [26,28] mais, comme ces démonstrations s'appuyaient essentiellement sur la structure particulière de l'espace cellulaire considéré, il était impossible de les généraliser. Par contre, la généralité des résultats présentés ici, a été possible grâce à la *nature algébrique des démonstrations* qui fait abstraction de la structure du graphe d'incidence associé à la matrice des poids  $(\alpha_{ij})$ . Grosso modo, notre démarche a consisté en la détermination *d'un opérateur invariant des fonctions à seuil*, qui prend en compte le type d'itération et les connexions définies par la matrice  $(\alpha_{ij})$ . Supposant alors l'existence d'un cycle de longueur supérieure à deux (ou à 1 dans le chapitre V, ou ne divisant pas  $k+1$  au chapitre IV), on parvient à une contradiction avec la propriété d'invariance de l'opérateur introduit dans la formalisation.

Finalement, ce travail trouve son intérêt dans le fait que l'analyse mathématique faite, éclaire et complète des applications dans divers domaines : dynamique des groupes [11,15], réseaux de McCulloch et Pitts [4,11,17,18,26], automates cellulaires uniformes [11,26,28], stratégies itératives pour trouver un minimum local d'énergie dans le problème des verres de spin [6,10,24] et certains modèles génétiques [2,13,14,29,30,31,32].





**CHAPITRE I**

---

**COMPORTEMENT ITERATIF DE CERTAINES**

**APPLICATIONS ISOTONES**



## I - COMPORTEMENT ITERATIF DE CERTAINES APPLICATIONS ISOTONES

Nous étudions ici le comportement itératif des fonctions booléennes isotones. En particulier celles de type linéaire (chaque composante est un "ou" logique) et produit (chaque composante est un "et" logique). Ceci nous permettra de connaître de manière partielle le comportement itératif pour d'autres fonctions isotones.

Le formalisme adopté est celui de la théorie des matrices non-négatives [3, 7, 20, 33], de manière à ramener le problème de l'itération à l'étude, déjà classique, des puissances d'une matrice booléenne, ce qui permet d'obtenir certaines propriétés de l'itération au vu d'une matrice  $n \times n$ .

Finalement, les résultats obtenus démontrent le fait établi de manière expérimentale par Kauffman [16], que la longueur des cycles est faible par rapport au nombre ( $2^n$ ) d'états possibles.

### (1.1.) RESULTATS GENERAUX DANS LA CLASSE DES FONCTIONS ISOTONES

On dira qu'une application  $F$  de  $\{0,1\}^n$  dans lui-même est isotone si :

$$x \leq y \implies Fx \leq Fy$$

où " $\leq$ " est l'ordre partiel dans  $\{0,1\}^n$ , induit par la relation d'ordre  $0 \leq 1$ .

#### LEMME-1 :

S'il existe :

$x^0 \in \{0,1\}^n$  tel que  $Fx^0 \leq x^0$  (resp.  $Fx^0 \geq x^0$ ), alors il existe

$p \in \mathbb{N}$  tel que :

$$F^{p+1}x^0 = F^p x^0 \text{ (convergence vers un point fixe).}$$

#### Démonstration :

Comme  $F$  est isotone, alors pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leq \dots \leq x^k = F^k x^0 \leq x^{k-1} \leq \dots \leq x^1 = Fx^0 \leq x^0$$

donc, comme  $\{0,1\}^n$  est fini, il existe bien  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $x^{p+1} = x^p$ .

LEMME-2 :

Soit  $F$  isotone alors :

- (i)  $F$  admet au moins un point fixe.
- (ii) Les éléments (appelés aussi états) appartenant à un cycle de longueur supérieure à un, ne sont pas comparables entre eux.
- (iii) La longueur des cycles est inférieure ou égale à  $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$  et cette borne peut être atteinte.

Démonstrations :

(i) et (ii) se déduisent directement du lemme-1.

(iii) La borne est obtenue de (ii) et du fait que l'ensemble maximal des vecteurs non comparables dans le treillis booléen est de cardinalité  $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$  (théorème Sperner [5]).

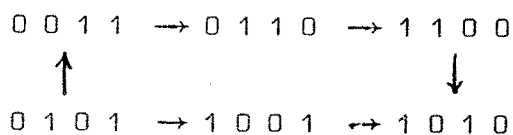
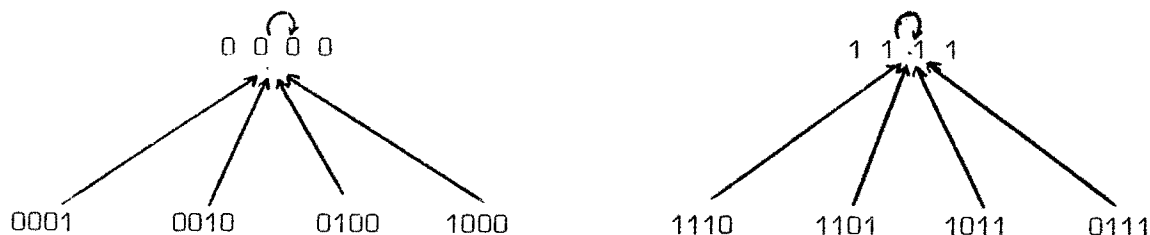
Pour vérifier que la borne est atteinte, il suffit de prendre, pour  $n$  donné, un cycle maximum des vecteurs non comparables et d'envoyer la partie supérieure du treillis à  $\vec{1}$  et l'inférieure à  $\vec{0}$ .  
( $F$  ainsi construite est évidemment isotone).

Exemple :  $n = 4$  ,  $C_4^2 = 6$  :

$$f_1(x) = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 ; f_2(x) = x_1x_4 + x_3x_4 + x_2x_3$$

$$f_3(x) = x_1x_2 + x_2x_4 + x_3x_4 ; f_4(x) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4$$

Graphe de l'itération :



(1.2.) FONCTIONS ISOTONES LINEAIRES ET DE TYPE PRODUIT

Soit  $M(0,1)$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\{0,1\}$ .  
 On définit la somme et la multiplication des éléments de  $M(0,1)$  selon les opérations booléennes "ou", "et" usuelles.  
 On dira que  $F$  est linéaire affine si :

$$Fx = Ax + b ; A \in M(0,1) \text{ et } b \in \{0,1\}^n$$

L'application  $F$  est de type produit si pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$f_i(x) = \prod_{j \in S_i} x_j + b_i, b_i \in \{0,1\}, S_i \subset \{1, \dots, n\}$$

(si  $S_i = \emptyset$  on pose  $\prod_{j \in S_i} x_j = 0$ ).

Il est clair que les fonctions ainsi définies sont isotones. D'autre part, ces deux classes sont en dualité, c'est-à-dire :  $F$  est de type produit si et seulement si sa duale,  $F^*$ , ( $F^*x = \overline{F\bar{x}}$ ), est linéaire affine.

De plus, comme :

$$y = Fx \iff \bar{y} = F^*\bar{x}$$

pour étudier les applications de type produit, il suffit de préciser le comportement itératif des linéaires affines.

(1.3.) RAPPELS SUR LES MATRICES NON-NEGATIVES

Etant donnée  $A \in M(0,1)$  on appellera  $G(A)$  le graphe orienté d'incidence associé à la matrice  $A$ . On dira que  $A$  est réductible s'il existe une matrice de permutation  $P \in M(0,1)$  telle que :

$$P'AP = \begin{array}{|cc|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \\ \hline \end{array} \quad (P' \text{ transposée de } P \text{ et } A_{11}, A_{22} \text{ carrées})$$

dans le cas contraire, on dira que  $A$  est irréductible.

D'autre part, on peut toujours écrire  $A$  sous "forme normale" :

$$P'AP = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{kk} \end{bmatrix} \quad (P \text{ matrice de permutation et } A_{ii} \text{ carrées})$$

où chaque  $A_{ii}$  est irréductible ou bien nulle de taille 1, [37]. Bien entendu, si  $A$  est irréductible, la "forme normale" est triviale puisque  $A = A_{11}$ . Il est important de signaler qu'une matrice  $A$  est irréductible si et seulement si  $G(A)$  est fortement connexe [37].

Pour  $A \in M(0,1)$  on définit :

$$\rho(A) = \begin{cases} \text{ppcm } \{\eta(A_{ii}) / \eta(A_{ii}) \geq 1\} \\ 0 \text{ si } \eta(A_{ii}) = 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, k\} \end{cases}$$

où  $\eta(A_{ii})$  est le plus grand commun diviseur (pgcd) des longueurs des circuits élémentaires du graphe  $G(A_{ii})$  ou zéro si le graphe n'a pas de circuits.

Evidemment si  $A$  est irréductible (cas où la forme normale est triviale) on a :

$$\rho(A) = \text{pgcd}(\text{longueur des circuits élémentaires de } G(A)) \\ \text{et } 1 \leq \rho(A) \leq n$$

#### (1.4.) ETUDE DE L'ITERATION PARALLELE POUR F LINEAIRE

Dans la suite on va étudier l'itération parallèle sur  $Fx = Ax$ . Dans le cas  $Fx = Ax+b$  les résultants sont analogues [8].

Dans le cas  $Fx = Ax$  l'itération prend la forme :

$$\bullet \quad x^{r+1} = A^r x^0, \quad x^0 \in \{0,1\}^n.$$

Il est clair que  $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \{0,1\}^n$  est toujours un point fixe de  $F$ . On va voir dans quelles conditions  $F$  admet des points fixes non triviaux (différents de  $\vec{0}$  et  $\vec{1}$ ).

PROPOSITION-1 : (caractérisation des points fixes)

$Fx = Ax$  admet au moins un point fixe non trivial, si et seulement si  $A$  est réductible :

$$P'AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

et de plus  $A_{11}$  n'a pas de lignes nulles.

Démonstration : résulte directement des définitions.

Remarques :

\* Si la partition des indices associée à la matrice de permutation  $P$ , dans la proposition -1, est  $I, J$ , avec  $I$  associé à  $A_{11}$  et  $J$  à  $A_{22}$ , alors le point fixe non trivial correspondant est :

$$x^* \in \{0,1\}^n \text{ tel que } x_i^* = 1 \text{ si } i \in I \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

\* Si la matrice  $A \in M(0,1)$  associée à  $F$  n'a pas de colonnes nulles, alors  $F$  admet au moins un point fixe non trivial si et seulement si  $A$  est réductible.

\* Si  $A$  est irréductible alors les uniques points fixes de  $F$  sont  $\vec{0}$  et  $\vec{1}$ .

PROPOSITION-2 :

Etant donnée  $A \in M(0,1)$  alors : l'itération parallèle conduite sur  $Fx = Ax$  n'a pas de cycles de longueur supérieure à 1, si et seulement si  $\rho(A) \leq 1$ .



DEMONSTRATION :1) A irréductible :

Si  $\rho(A) = 1$ , alors il existe  $p \leq n^2 - 2n + 2$  tel que  $A^p > 0$  [3], donc il n'y a pas de cycles de longueur supérieure à 1.

Si F n'a pas de cycles, supposons  $\rho(A) = p > 1$ , donc il existe une matrice de permutation P telle que :

$$P \cdot A^p P = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_p \end{array} \\ \hline \end{array} \quad U_i \text{ matrice carrée, irréductible avec } \rho(U_i) = 1, [7,33].$$

donc à partir de la proposition-1,  $F^p$  admet des points fixes non triviaux et comme A est irréductible, ils ne le sont pas de F, alors l'itération parallèle conduite sur F admet des cycles de longueur supérieure à 1. Ce qui est une contradiction.

2) A réductible :

$\rho(A) \leq 1 \implies \eta(A_{ii}) \leq 1$  donc, comme chaque  $A_{ii}$  (dans la forme normale de A) est nulle ou irréductible, il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $A_{ii}^s$  devient une matrice pleine des uns ou nulle, c'est-à-dire pour  $q \geq s$  :

$$A_{ii}^q = A_{ii}^s \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

Il est facile de voir, par récurrence sur le nombre k de blocs, que si  $A_{ii}^s$  sont stables par rapport au produit par elles-mêmes, alors il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que, à une permutation près,  $A^{r+1} = A^r$  [9], donc F n'a pas de cycles.

Si  $F$  n'a pas de cycles, supposons  $\rho(A) = p > 1$ . Il existe donc  $A_{ii}$  (dans la forme normale de  $A$ ) telle que  $\eta(A_{ii}) = r > 1$  avec  $p = \alpha r$ .

Sans perte de généralité, posons  $i = 1$ .

Alors comme  $A_{11}$  est irréductible, il existe  $Q$ , matrice de permutation, tel que :

$$Q' A_{11}^r Q = \begin{bmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_1 \end{bmatrix} \quad V_1 \text{ carrées et irréductibles}$$

si on prend la matrice de permutation  $P_1$  :

$$P_1 = P \begin{array}{|c|c|} \hline Q & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \ddots \\ \hline 0 & & 1 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

On a :

$$P_1' A^r P_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline Q' A_{11}^r Q & \\ \hline 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{22}^r & \\ \hline 0 & \ddots \\ \hline & & A_{kk}^r \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline V_1 & 0 \\ \hline 0 & V_r \\ \hline 0 & A_{22}^r \\ \hline & & \ddots \\ \hline & & & A_{kk}^r \\ \hline \end{array}$$

Soit maintenant  $\{J_i^1\}_{i=1}^r$  la partition d'indices associée aux blocs  $V_1, \dots, V_r$ , et soit  $\{J_i\}_{i=2}^r$  la partition associée aux blocs  $A_{22}^r, \dots, A_{kk}^r$ .

Prenons  $\tilde{X} \in \{0,1\}^n$  tel que  $\tilde{X} = (\tilde{X}_{J_1^1}, \dots, \tilde{X}_{J_1^r}, \tilde{X}_{J_2}, \dots, \tilde{X}_{J_k})$

$\tilde{X}_{J_1^1}, \dots, \tilde{X}_{J_k}$  sont sous-vecteurs de  $\tilde{X}$  avec  $\tilde{X}_{J_1^1} = (1 \dots 1)$  et tous les autres nuls.

On a bien  $P_1^r A^r P_1 \tilde{X} = \tilde{X}$ , donc  $P_1 \tilde{X} \in \{0,1\}^n$  est tel que :

$$F^r(P_1 \tilde{X}) = P_1 \tilde{X},$$

c'est-à-dire  $P_1 \tilde{X}$  est point fixe de  $F^r$ .

Mais comme  $A_{11}$  est irréductible, elle n'admet pas de points fixes non triviaux, donc :

$$Q^r A_{11} Q \begin{bmatrix} \tilde{X}_{J_1^1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{X}_{J_1^r} \end{bmatrix} = Q^r A_{11} Q \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \tilde{X}_{J_1^1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{X}_{J_1^r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prenons  $y = (\tilde{X}_{J_1^1}, \dots, \tilde{X}_{J_1^r})$ , donc on a :

$$P_1^r A P_1 \tilde{X} = \begin{bmatrix} Q^r A_{11} Q & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_{22} & \\ 0 & & \dots & A_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{X}_{J_2} \\ \vdots \\ \tilde{X}_{J_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^r A_{11} Q \tilde{y} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc  $F(P_1 \tilde{X}) \neq P_1 \tilde{X}$ , c'est-à-dire  $P_1 \tilde{X}$  n'est pas point fixe de  $F$ , donc comme  $F^r(P_1 \tilde{X}) = P_1 \tilde{X}$ , alors  $P_1 \tilde{X}$  appartient à un cycle de longueur supérieure à 1 ce qui est une contradiction.

---

PROPOSITION-3 :

Les cycles de l'itération parallèle conduite sur  $Fx = Ax$  sont de longueur inférieure ou égale à  $\rho(A)$ .

De plus, si A est irréductible, l'itération parallèle conduite sur F admet un cycle de longueur p si et seulement si p divise  $\rho(A)$ .

Démonstration :

On démontre d'abord le cas A irréductible : si A est irréductible et  $\rho(A) = k > 1$  alors  $A^\ell$  pour  $\ell \in \{2, \dots, k-1\}$  est irréductible si et seulement si  $\text{pgcd}(k, \ell) = 1$ . De plus si  $\text{pgcd}(k, \ell) = d > 1$ , alors le graphe  $G(A^\ell)$  est décomposable en d composantes fortement connexes indépendantes [7], c'est-à-dire, il existe  $P \in M(0,1)$ , matrice de permutation, telle que :

$$P'A^\ell P = \begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_d \end{bmatrix} \quad U_i : \text{carrée, irréductible}$$

donc, de la proposition-1, les cycles de longueur  $\ell > 1$  sont associés à la puissance  $A^\ell$  telle que  $\text{pgcd}(k, \ell) > 1$ .

Prenons maintenant  $\ell$  ne divisant pas k, mais tel que  $\text{pgcd}(k, \ell) = d > 1$ , alors on a :

$$P'A^d P = \begin{bmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P'A^\ell P = \begin{bmatrix} V_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_d^r \end{bmatrix}$$

avec  $\ell = rd$  et les matrices  $V_i, V_i^r$  irréductibles. Donc (cf. Proposition-1) tout point fixe de  $F^\ell$  l'est de  $F^{d_i}$  ce qui implique la non existence des cycles de longueur  $\ell$ .

Maintenant, soient  $1 = p_0 < p_1 < \dots < p_s = k$ , les diviseurs de  $k$ .

On va montrer que pour chaque  $p \in \{p_0, \dots, p_s\}$  il existe au moins un cycle de longueur  $p$ .

Soit  $\alpha(p_i)$  le nombre des cycles de longueur  $p_i$ . On va montrer par récurrence que  $\alpha(p_i) > 0$ . En effet, pour  $p_0 = 1$ ,  $\alpha(p_0) = 2$  (deux points fixes  $\vec{0}$  et  $\vec{1}$ ) et pour  $p_1$  on a :

$$P^{-1} A^{P_1} P = \begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_{p_1} \end{bmatrix} \quad U_i \text{ blocs irréductibles}$$

donc les points fixes de  $F^{P_i}$  sont composés de blocs de zéros et de uns selon la partition des indices  $\{I_1, \dots, I_{p_1}\}$  définie par  $P$ , alors :

$$\alpha(p_1) = 2^{P_1} - \alpha(p_0) = 2^{P_1} - 2 > 0$$

Supposons  $\alpha(p_j) > 0$  pour  $j \in \{0, \dots, i-1\}$  et démontrons-le pour  $i$ . On a :

$$\alpha(p_i) = 2^{P_i} - \sum_{P_j/P_i} \alpha(p_j) \quad (p/q : p \text{ divise } q)$$

ce qui est égal à :

$$\alpha(p_i) = 2^{P_i} - \sum_{P_j/P_i} 2^{P_j} + \sum_{P_j/P_i} \sum_{P_k/P_j} \alpha(p_k)$$

et par hypothèse de récurrence :

$$\alpha(p_i) > 2^{P_i} - \sum_{P_j/P_i} 2^{P_j}$$

en particulier :

$$\alpha(p_i) > 2^{P_i} - \sum_{k=1}^{P_i-1} 2^k$$

ce qui implique que :

$$\alpha(p_1) > 2^{p_1} - 2^{p_1+1} + 2 > 0$$

donc F admet un cycle de longueur p si et seulement si  $p/\rho(A)$ .

Si A est réductible avec  $\rho(A) = r > 1$  (le cas  $\rho(A) \leq 1$  on l'a vu dans la proposition -2).

Soit  $P'AP$  la forme normale de A :

$$P'AP = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

Comme  $\rho(A) = \text{ppcm} \{ \eta(A_{ii}) / \eta(A_{ii}) \geq 1 \} = r > 1$ , alors l'ensemble  $I = \{ i \in \{1, \dots, n\} / \eta(A_{ii}) > 1 \}$  est non vide. De plus, pour chaque  $i \in I$ , soit  $\eta(A_{ii}) = \ell_i > 1$ ; comme, par construction de la forme normale,  $A_{ii}$  est irréductible, alors on a :

$$Q_i' A_{ii}^{\ell_i} Q_i = \begin{bmatrix} B_1^{(i)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & B_{\ell_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

où chaque  $B_j^{(i)}$  est irréductible et  $\rho(B_j^{(i)}) = 1$ .

Mais, comme  $r = \theta_i \ell_i$  pour  $i \in I$ , alors :

$$Q_i' A_{ii}^r Q_i = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & C_{\ell_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

où  $C_j^{(i)}$  est irréductible  
et  $\eta(C_j^{(i)}) = 1 \quad j = 1, \dots, \ell_i$

Donc il existe  $Q \in M(0,1)$  telle que :

$$Q'A^rQ = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_{ss} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est telle que chaque  $D_{ii}$  est irréductible ou bien une matrice nulle à un élément, et si  $D_{ii}$  est irréductible alors  $\rho(D_{ii}) = 1$ .

Donc, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que :

$$Q'A^{rp}Q = Q'A^{r(p+1)}Q \quad [13]$$

donc, on a :

$$A^{s+r} = A^s \quad \text{pour } s \geq rp$$

alors pour tout  $x \in \{0,1\}^n$  on aura :

$$A^s x^{s+r} = A^s x$$

Donc, s'il y a des cycles, ils doivent être de longueur plus petite que  $\rho(A) = r$ .

---

Remarques :

- 1) Dans le cas  $A$  irréductible, avec  $\rho(A) = 1$ , la convergence vers le point fixe  $\vec{1}$  est assurée en au plus  $n^2 - 2n + 2$  pas [3].
- 2) Si  $A$  est réductible et  $\rho(A) = 0$ , la convergence vers le point fixe  $\vec{0}$  est assurée en  $n$  pas [9]
- 3) Si  $A$  est réductible, on peut borner  $\rho(A)$ , donc la longueur des cycles, par :

$$\rho(A) \leq \left[ \frac{n^k}{k} \right]_+ \leq \left[ 2^{\frac{n}{e \ln 2}} \right]_+ \approx 2^{\frac{n}{2}}$$

où  $k$  est le nombre de blocs dans la "forme normale" de  $A$  et  $[q]_+$  le plus petit entier supérieur ou égal à  $q$ . [9].

Résumons le comportement de l'itération parallèle sur des fonctions booléennes linéaires ou de type produit, par le tableau suivant :

TYPE DE MATRICE	$\rho(A)$	EXISTENCE DE POINTS FIXES	EXISTENCE DE CYCLES	MAJORATION OU BORNE DE LONGUEURS DE CYCLES
MATRICE IRREDUCTIBLE	1	$\vec{0}, \vec{1}$ points fixes uniques	il n'y a pas de cycles	1
	$\rho(A) > 1$	$\vec{0}, \vec{1}$ points fixes uniques	il y a des cycles	$\rho(A) \leq n$ (atteinte)
MATRICE REDUCTIBLE	$\rho(A) \leq 1$	$\vec{0}$ unique si $\rho(A) = 0$ $\vec{0}$ et d'autres si $\rho(A) = 1$	il n'y a pas de cycles	1
	$\rho(A) > 1$	$\vec{0}$ et des autres	il y a des cycles	$\rho(A) \leq \left[ 2^{\frac{n}{e \ln 2}} \right]_+$ (majoration)

On voit donc que la longueur des cycles est faible par rapport au nombre des états possibles ( $2^n$ ). Si la matrice A est irréductible, la longueur est inférieure ou égale à n et dans le cas réductible elle est de l'ordre de la racine carrée du nombre d'états possibles. Ce qui permet de préciser, le résultat expérimentale obtenu par Kauffman. [16].





Démonstration :

(1) i) Si  $\mathcal{L}$  est irréductible alors nécessairement  $a_{11} = 1$ , sinon la première colonne de  $\mathcal{L}$  serait nulle, ce qui contredit l'irréductibilité de  $\mathcal{L}$ .

Donc  $\rho(A) = 1$ .

De plus, par définition de  $G$ ,  $g_1(x) = f_1(x)$  donc si  $\mathcal{L} = (\ell_{ij})$  alors  $\ell_{11} = 1$ , donc  $\rho(\mathcal{L}) = 1$ .

ii) Si  $\mathcal{L}$  est irréductible, de (i) on a  $\rho(\mathcal{L}) = 1$  donc  $\rho(\mathcal{L}) = 1 < n-1$ .  
Si  $\mathcal{L}$  est réductible, alors il existe  $P \in M(0,1)$  tel que :

$$P^{-1} \mathcal{L} P = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \hline 0 & \mathcal{L}_{22} \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

avec :  $\rho(\mathcal{L}_{11}) = 0$  et  $\mathcal{L}_{22}$  irréductible [ 8 ]. Donc par définition de  $\rho$  on a :

$$\rho(\mathcal{L}) = \eta(\mathcal{L}_{22})$$

Mais  $\eta(\mathcal{L}_{22})$  est inférieure à la taille de  $\mathcal{L}_{22}$ , donc  $\rho(\mathcal{L}) \leq n-1$ .

iii) Si  $\text{diag}(A) \neq 0$ ,  $\rho(A) = 1$  et de plus  $\text{diag}(\mathcal{L}) \neq 0$ , par définition de  $G$ .

Donc si  $\mathcal{L}$  irréductible on a  $\rho(\mathcal{L}) = 1$

Si  $\mathcal{L}$  est réductible, de (1), et comme  $\eta(\mathcal{L}_{11}) = 0$  alors

$\text{diag}(\mathcal{L}_{11}) = \vec{0}$ , donc nécessairement :

$\text{diag}(\mathcal{L}_{22}) \neq \vec{0}$  donc  $\eta(\mathcal{L}_{22}) = 1$ , alors :

$$\rho(\mathcal{L}) = \eta(\mathcal{L}_{22}) = 1.$$

- (2) i) Si A est réductible et A a au moins une colonne nulle alors  $\mathcal{L}$  aussi, donc  $\mathcal{L}$  est réductible.  
Si A n'a pas de colonnes nulles, alors  $Fx = Ax$  (voir proposition-2) admet un point fixe non trivial. Donc comme F et G ont les mêmes points fixes  $\mathcal{L}$  est réductible.
- ii) Démontré dans [8].
- iii) Si  $\text{diag}(A) > \vec{0}$ , alors  $\text{diag}(\mathcal{L}) > \vec{0}$   
donc  $\rho(A) = \rho(\mathcal{L}) = 1$ .
- 

PROPOSITION-5

Etant donnée  $Fx = Ax$ ,  $A \in M(0,1)$  alors :

1) Si A est irréductible

i) pour tout  $x \in \{0,1\}^n$  il existe  $s \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$  tel que :

$$G^{s+p}x = G^s x \quad 1 \leq p \leq n-1$$

ii) Si  $\mathcal{L}$  est irréductible alors l'itération parallèle conduite sur F et G n'a pas de cycles.

iii) Si  $\text{diag}(A) \neq \vec{0}$  alors l'itération parallèle conduite sur F et G n'a pas de cycles.

2) Si A est réductible :

i) Si  $\rho(A) = 0$  alors l'itération parallèle conduite sur F et G n'a pas de cycles.

ii) Si  $\text{diag}(A) > \vec{0}$ , alors l'itération parallèle conduite sur F et G n'a pas de cycles.

Démonstration :

Découle directement de la proposition précédente et du théorème-1 appliqué à  $Gx = \mathcal{L}x$ .

Remarque :

On verra dans les exemples qu'en général le fait que l'itération parallèle conduite sur F n'ait pas de cycles, n'implique pas la même propriété pour l'itération parallèle conduite sur G.

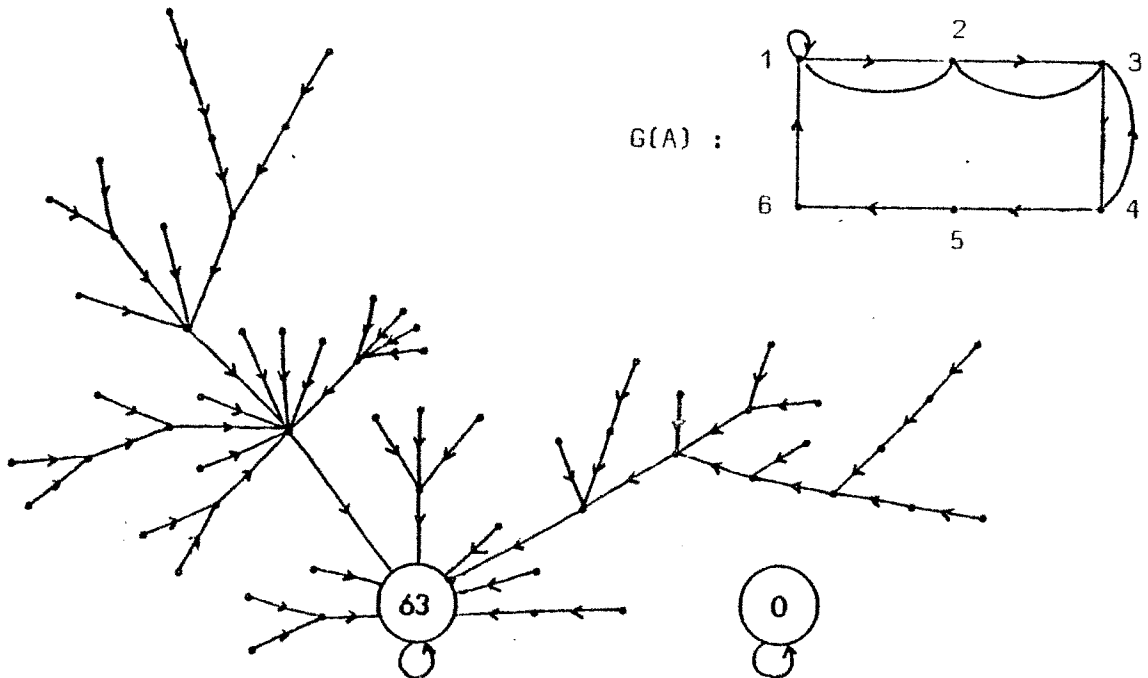
Les résultats exposés ci-dessus pour l'itération "série" peuvent être généralisés aisément aux itérations du type "série-parallèle" [8, 23].

(1.6.) EXEMPLES

Exemple-1 - Itération parallèle (\*)

Matrice A irréductible,  $\rho(A) = 1$ ,  $n = 6$

$f_1(x) = x_1 + x_2, f_2(x) = x_1 + x_3, f_3(x) = x_2 + x_4, f_4(x) = x_3 + x_5$   
 $f_5(x) = x_6, f_6(x) = x_1.$

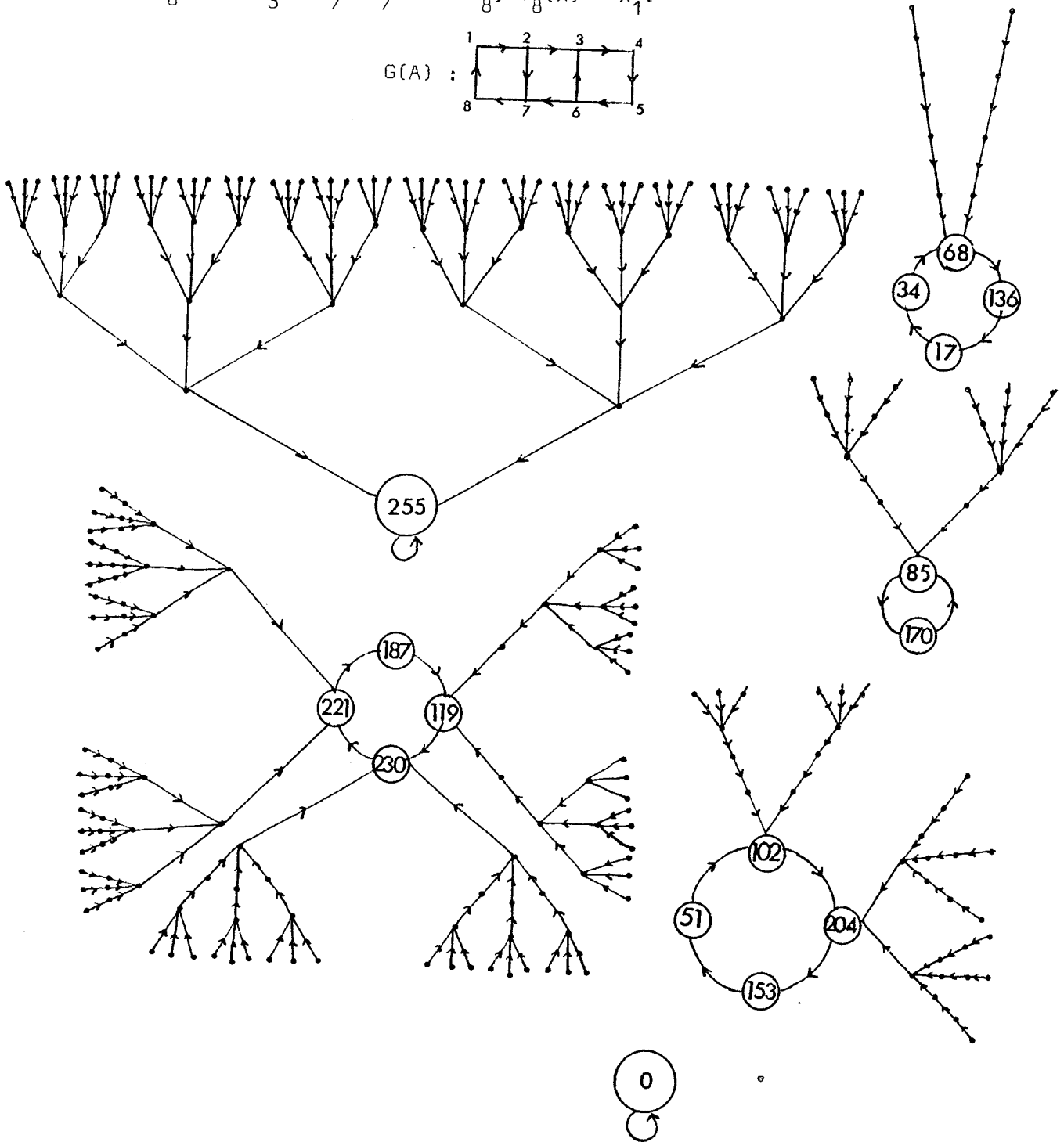
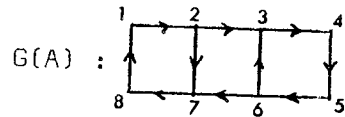


(\*) chaque "." représente un vecteur booléen et chaque nombre entier le vecteur booléen associé à sa représentation binaire.

Exemple-2 - Itération parallèle

Matrice A irréductible,  $\rho(A) = 4$ ,  $n = 8$

$$f_1(x) = x_2, f_2(x) = x_3 + x_7, f_3(x) = x_4, f_4(x) = x_5, f_5(x) = x_6, \\ f_6(x) = x_3 + x_7, f_7(x) = x_8, f_8(x) = x_1.$$

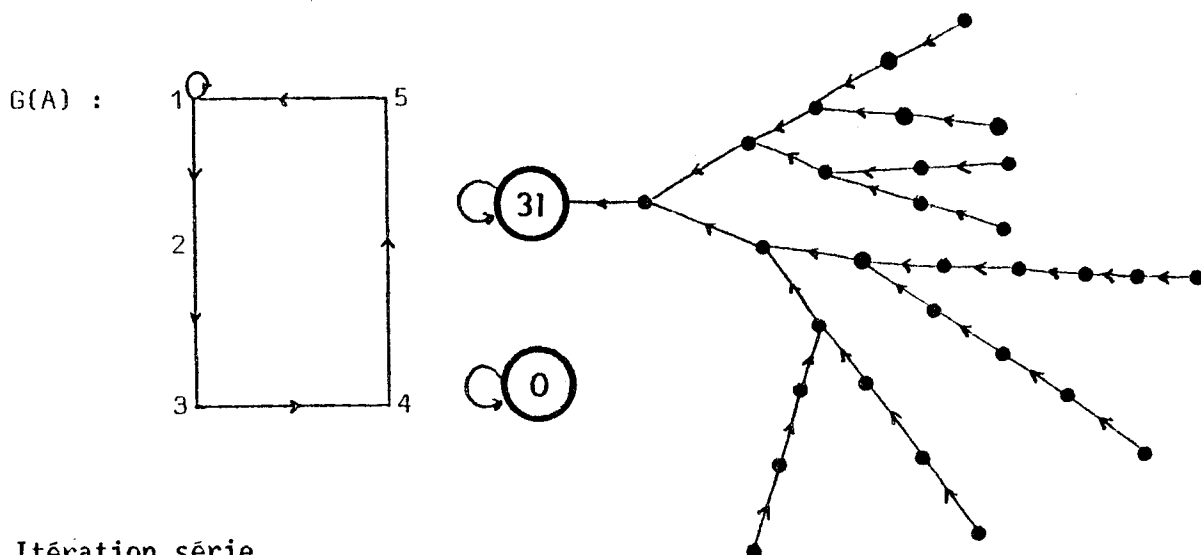


Exemple-3 - Comparaison des itérations série et parallèle

Itération parallèle

Matrice A irréductible  $\rho(A) = 1$ ,  $\text{diag}(A) \neq \vec{0}$ ,  $n = 5$

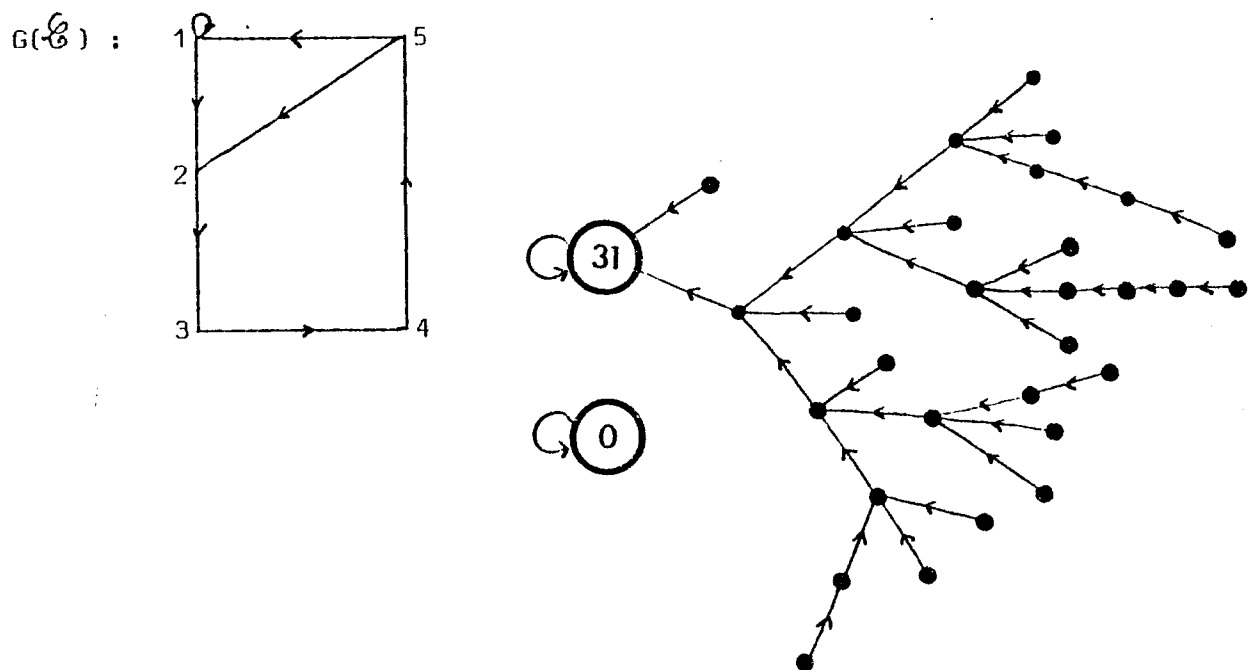
$$f_1(x) = x_1 + x_2, f_2(x) = x_3, f_3(x) = x_4, f_4(x) = x_5, f_5(x) = x_1$$



Itération série

Matrice  $\mathcal{G}$  irréductible  $\rho(\mathcal{G}) = 1$ ,  $\text{diag}(\mathcal{G}) \neq \vec{0}$

$$g_1(x) = x_1 + x_2, g_2(x) = x_3, g_3(x) = x_4, g_4(x) = x_5, g_5(x) = x_1 + x_2$$

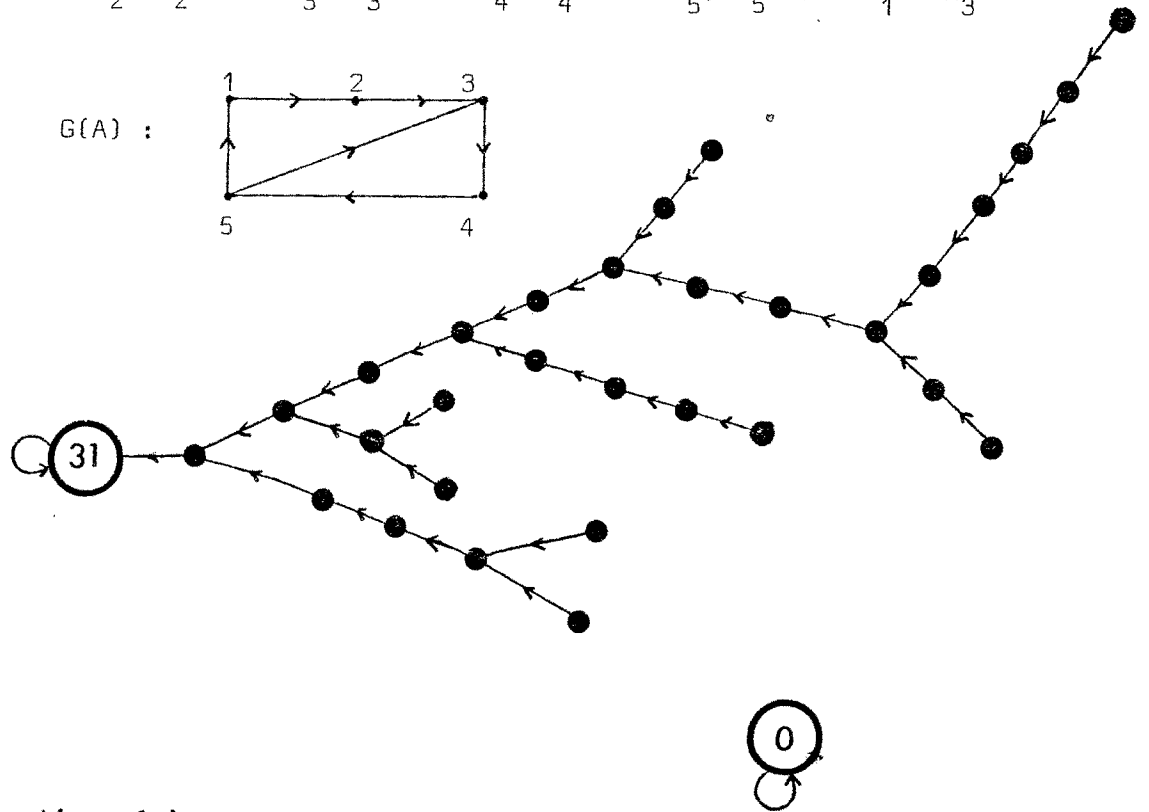


Exemple-4 - Comparaison des itérations série et parallèle

Itération parallèle

Matrice A irréductible  $\rho(A) = 1, n = 5$

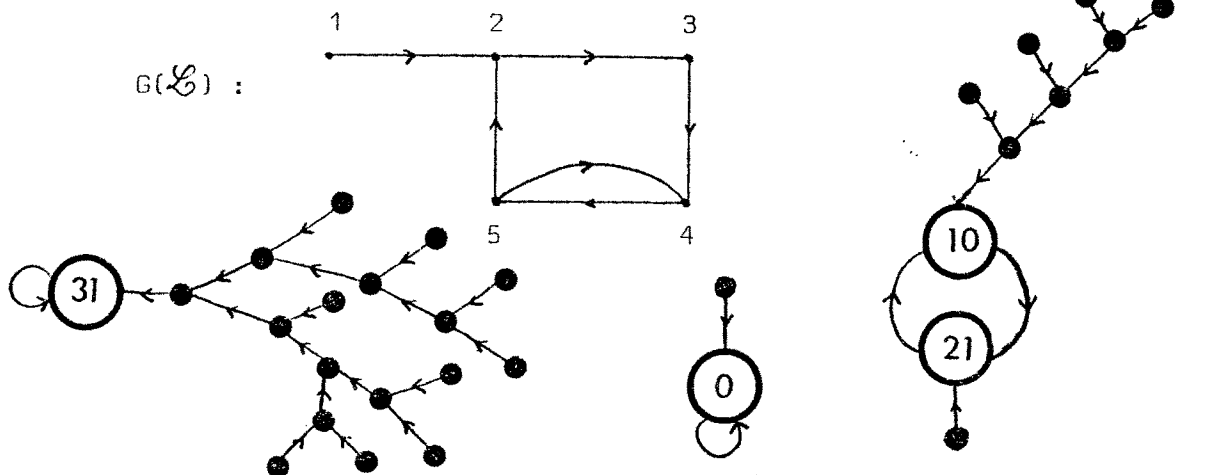
$$f_1(x) = x_2, f_2(x) = x_3, f_3(x) = x_4, f_4(x) = x_5, f_5(x) = x_1 + x_3$$



Itération série

Matrice  $\mathcal{L}$  réductible  $\rho(\mathcal{L}) = 2$ .

$$g_1(x) = x_2, g_2(x) = x_3, g_3(x) = x_4, g_4(x) = x_5, g_5(x) = x_2 + x_4$$



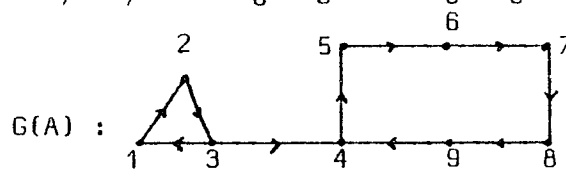
Exemple-5 - Comparaison des itérations série et parallèle

Itération parallèle

Matrice A réductible,  $\rho(A) = 6$ ,  $n = 9$

$$f_1(x) = x_2, f_2(x) = x_3, f_3(x) = x_1 + x_4, f_4(x) = x_5, f_5(x) = x_6$$

$$f_6(x) = x_7, f_7(x) = x_8, f_8(x) = x_9, f_9(x) = x_4$$



Comme le graphe associé à l'itération est trop grand, on donne seulement le nombre et la longueur des cycles.

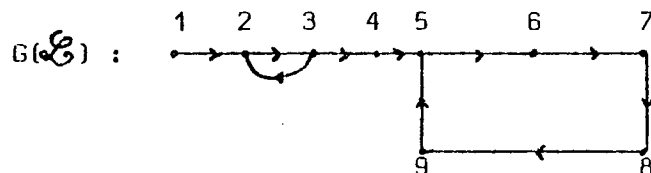
- cycles de longueur 6 : 16
- cycles de longueur 3 : 8
- cycles de longueur 2 : 1
- points fixes : 3

Itération série

Matrice  $\mathcal{G}$  réductible  $\rho(\mathcal{G}) = 10$ .

$$g_1(x) = x_2, g_2(x) = x_3, g_3(x) = x_2 + x_4, g_4(x) = x_5, g_5(x) = x_6$$

$$g_6(x) = x_7, g_7(x) = x_8, g_8(x) = x_9, g_9(x) = x_5$$



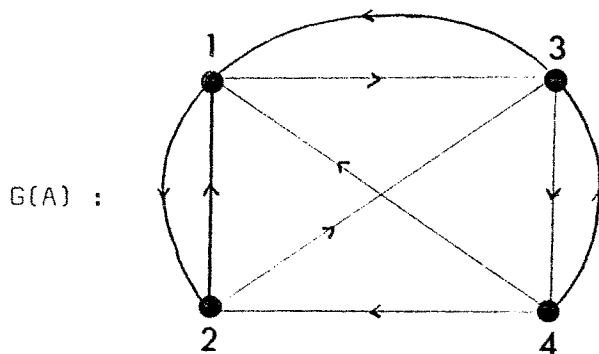
- cycles de longueur 5 : 6
- cycles de longueur 2 : 1
- points fixes : 3



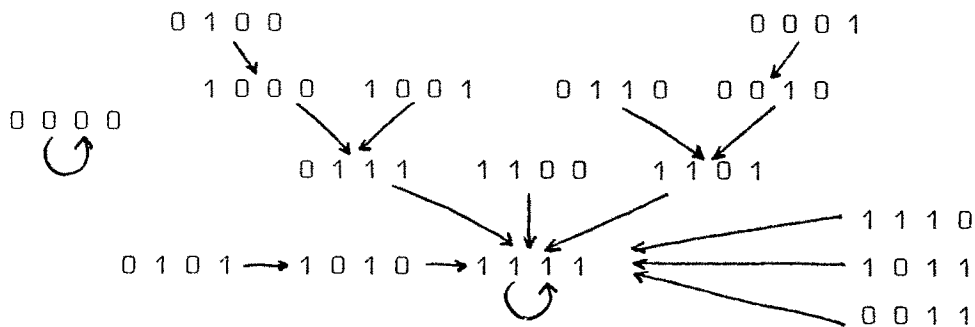
Exemple-6 : Comparaison de l'itération conduite sur F et F\* (duale de F)

Matrice A irréductible,  $\rho(A) = 1$ ,  $n = 4$

$$f_1(x) = x_2 + x_3, f_2(x) = x_1 + x_3, f_3(x) = x_1 + x_4, f_4(x) = x_1 + x_3$$

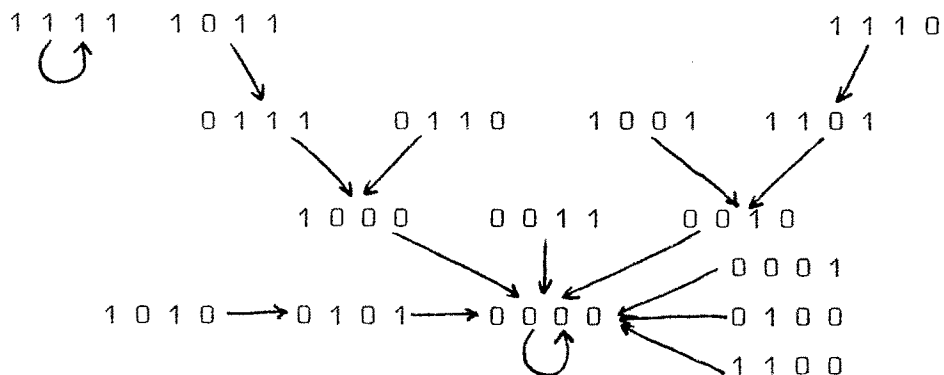


GRAPHE DE L'ITERATION PARALLELE SUR  $FX = AX$  :



GRAPHE DE L'ITERATION PARALLELE SUR  $F^*x$ . (duale de F)

$$f_1^*(x) = x_2x_3, f_2^*(x) = x_1x_3, f_3^*(x) = x_1x_4, f_4^*(x) = x_1x_3$$



(1.7.) FONCTIONS ISOTONES IRREDUCTIBLES

Il est facile de voir que toute fonction isotone  $F$  admet un minorant  $F_{\pi}$  (de type produit) et un majorant  $F_{\Sigma}$  (linéaire), ce qui permet d'écrire, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$F_{\pi}^p x \leq F^p x \leq F_{\Sigma}^p x \quad (1)$$

Evidemment la matrice associée à  $F_{\Sigma}$  est celle d'incidence de  $F$  : qu'on appellera  $B(F) = (b_{ij})$  :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } f_i(x) \text{ dépend de } x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 x_3 + x_1 \\ f_2(x) &= x_4 x_3 + x_2 \\ f_3(x) &= x_4 x_1 + x_2 x_3 \\ f_4(x) &= x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

On a alors :

$$B(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'inégalité (1), pour  $p = 1$ , se traduit par :

$$\begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_2 x_3 x_4 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 \\ x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

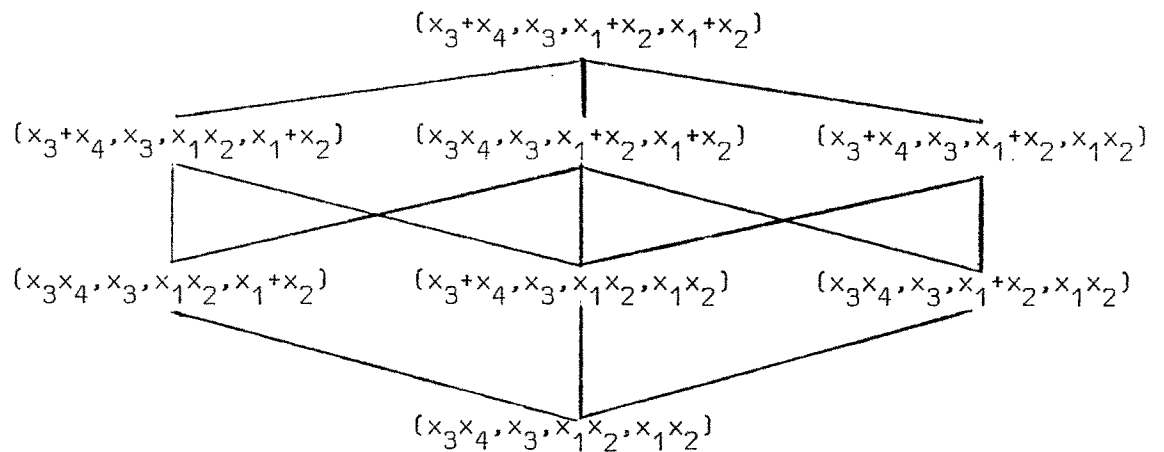
En général, étant donnée  $A \in M(0,1)$  posons :

$$\mathcal{F}(A) = \{F \text{ isotone} / B(F) = A\}$$

il est clair que  $(\mathcal{F}(A), \leq)$  est un treillis avec élément maximal  $F x = Ax$  et minimal  $F_{\Sigma}^* x$  (duale booléenne).

Exemple :

Soit  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  alors  $\mathcal{F}(A) :$



Soit  $S(F)$  l'ensemble des cycles de l'itération parallèle conduite sur  $F$ .  
Alors on a le résultat suivant :

Proposition-6 :

Si  $A \in M(0,1)$  est irréductible alors :

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} S(F) = S(F_{\Sigma}^*)$$

Démonstration :

Notons les composantes de  $F_{\Sigma}^P$  et  $F_{\pi}^P$  de la manière suivante :

$$F_{\Sigma}^P x = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{bmatrix} ; \quad F_{\pi}^P x = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

D'autre part, comme A est irréductible alors  $F_{\Sigma}^P x = x$  si et seulement si il existe  $P \in M(0,1)$ , matrice de permutation, telle que :

$$P'AP = \begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_d \end{bmatrix} \quad \text{avec } U_i \text{ irréductible } i \in \{1, \dots, d\} \\ \text{et } d = \text{pgcd}(\rho(A), d)$$

Appelons  $J_{\ell}$  l'ensemble d'indices associé au bloc  $U_{\ell}$ ,  $\ell \in \{1, \dots, d\}$  ce qui implique :

$$h_i(x) = \sum_{j \in S_i} x_j, \quad \phi \neq S_i \subset J_{\ell} ; \quad \text{pour } i \in J_{\ell}$$

de plus, comme  $F_{\pi}^P, F_{\Sigma}^P$  sont en dualité on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i(x) = \sum_{j \in S_i} x_j, \quad \phi \neq S_i \subset J_{\ell} \\ \text{pour } i \in J_{\ell} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} g_i(x) = \prod_{j \in S_i} x_j, \quad \phi \neq S_i \subset J_{\ell} \\ \text{pour } i \in J_{\ell} \end{array} \right\}$$

et du fait que le cycle défini par  $F^P x = x$  est équivalent à :

$$P'AP(P'x) = \begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{J_1} \\ \vdots \\ x_{J_d} \end{bmatrix} \quad x_{J_i} \text{ bloc des 0 ou des 1}$$

on a bien  $h_1(x) = g_1(x) = x_1$ . C'est-à-dire, si A est irréductible, les cycles de  $F_{\pi}$  et  $F_{\Sigma}$  (particulièrement les points fixes) sont les mêmes. Donc, comme pour tout  $F \in \mathcal{A}(A)$  on a :

$$F_{\pi}^P x \leq F^P x \leq F_{\Sigma}^P x$$

alors  $(F_{\Sigma}^P x = x \iff F_{\pi}^P x) \implies F^P x = x$

D'autre part, si  $q$  divise  $p$ , tel que  $F^q x = x$ , cela implique :

$$F_{\Sigma}^q x \geq x$$

donc, par isotonie, il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que :

$$F_{\Sigma}^{rq+q} x = F_{\Sigma}^{rq} x$$

donc  $x$  appartient à un cycle de longueur inférieure ou égale à  $q$ , ce qui n'est pas possible si  $x$  appartient à un cycle de longueur  $p$  ( $F^i x \neq x$  pour tout  $i \neq sp$ ).

---

COROLLAIRE :

Soit  $F$  isotone ; si  $B(F)$  est irréductible et si  $p$  est un diviseur de  $\rho(B(F))$  alors l'itération parallèle conduite sur  $F$  admet au moins un cycle de longueur  $p$ .

---

Démonstration :

se déduit directement des propositions 3 et 6.

---

Remarque :

La proposition et le corollaire précédents montrent que, étant donnée  $F$  isotone, avec  $B(F)$  irréductible, l'étude de cette matrice permet, au moins partiellement, de connaître le comportement de l'itération parallèle conduite sur  $F$ .

Exemples :

(1) Prenons les applications isotones :

$$F_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3 x_4, x_1 x_4, x_2 + x_4, x_2 + x_3)$$

$$F_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3 x_4, x_1 x_4, x_2 x_4, x_2 + x_3)$$

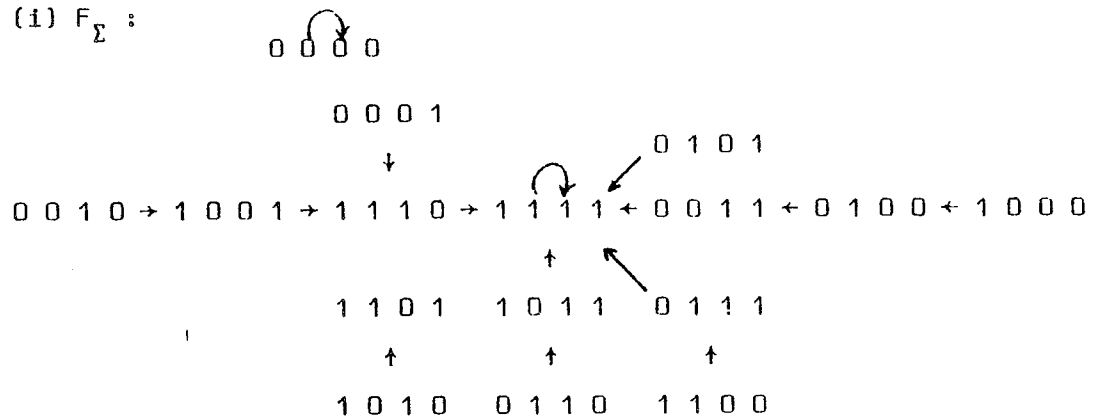
On a alors :

$$F_{\Sigma} : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3+x_4, x_1+x_4, x_2+x_4, x_2+x_3)$$

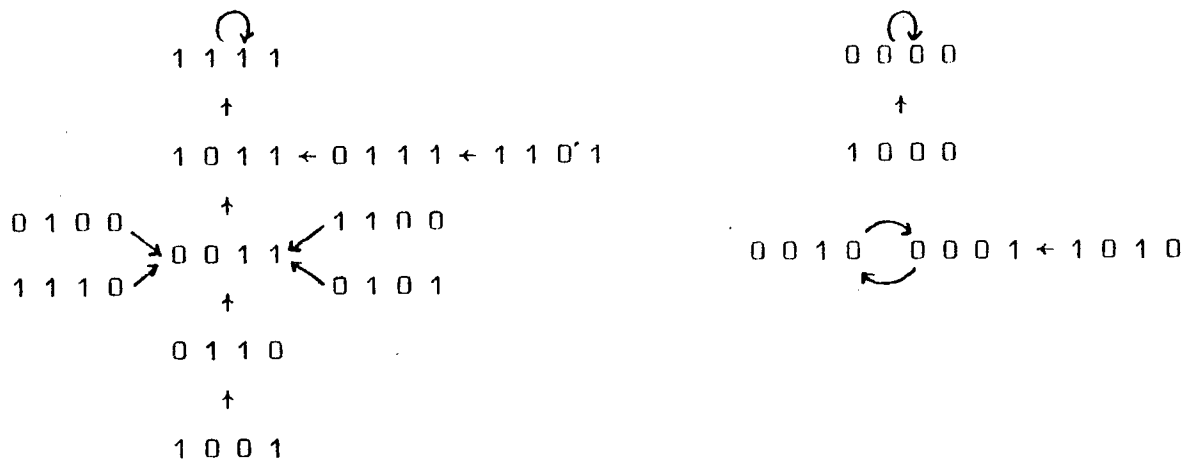
et  $B(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$   $\rho(B(F)) = 1$

Graphe de l'itération parallèle :

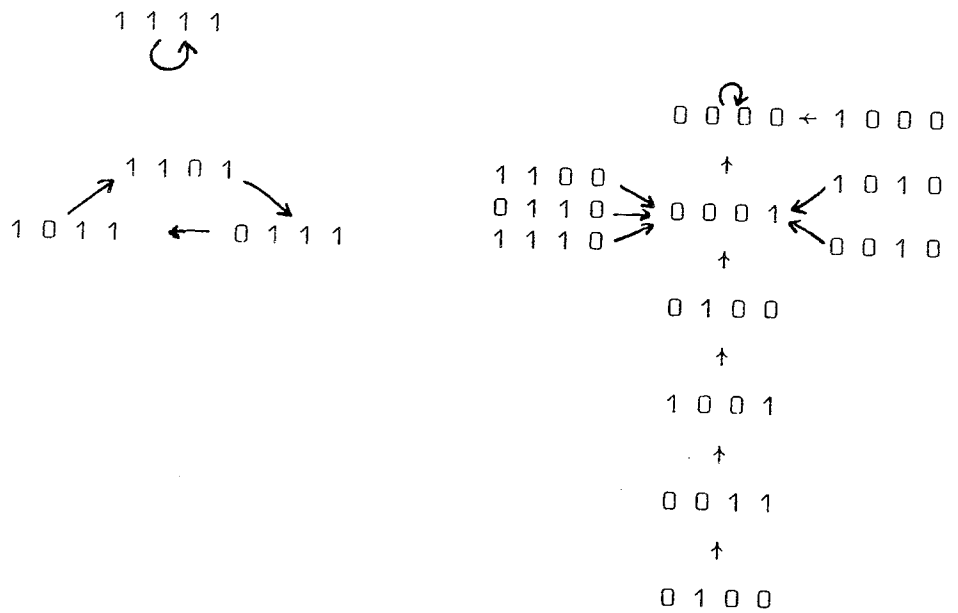
(i)  $F_{\Sigma}$  :



(ii)  $F_1$  :



(iii)  $F_2$  :



On voit ici que une fonction isotone peut avoir des cycles que ne le sont pas de  $F_\Sigma$ .

- (2)
- $F_\Sigma : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_3+x_4, x_2, x_1+x_2)$
  - $F_\pi : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_3x_4, x_2, x_1x_2)$
  - $F_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_3x_4, x_2, x_1+x_2)$
  - $F_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_3+x_4, x_2, x_1x_2)$

Pour ces fonctions, on a les graphes d'itération suivants :

$F_{\Sigma} :$  0000

1000  
 0001  
 0100  
 0011  
 1100  
 0010

1011 1010 1001  
 1101 0101  
 0111  
 1110 → 1111  
 1110 → 1111 → 0110

$F_1 :$

1110  
 1011 ← 0110  
 1101  
 0100 → 0011 ← 0101  
 1100

0010 1010  
 1000 1001  
 0001  
 0000

0111  
1111

$F_2 :$

1000  
0000

0001  
 0100 ← 1001  
 0010  
 1010 → 1100 → 1011  
 0011

1101 0101  
 0111 0110  
 1110  
 1111

$F_{\pi} :$

0111  
 1110  
 1011  
 0011  
 1100  
 1101

1111

0100 0101 0110  
 0010 1010  
 1000  
 0001 → 0000 → 1001

(( $F_{\Sigma}, F_{\pi}$ ) et ( $F_1, F_2$ ) en dualité)





**CHAPITRE II**

---

**COMPORTEMENT PERIODIQUE**

**DES FONCTIONS A SEUIL BINAIRES**



## II - COMPORTEMENT PERIODIQUE DES FONCTIONS A SEUIL BINAIRES

Le comportement itératif des fonctions à seuil a été étudié dans plusieurs domaines [4, 17, 18, 25, 26, 28], en particulier il est intéressant de signaler le modèle neuronal imaginé par Mac Culloch et Pitts [18], un des premiers travaux importants dans ce contexte. Ils ont développé, à partir des propriétés électriques des neurones, un modèle formel d'évolution qui consistait en un réseau d'unités ou modules (neurones formels) inter-connectés. Chaque module reçoit des terminaisons d'autres unités, au moyen de connexions appelées synapses et qui peuvent être excitatrices ou inhibitrices. Le modèle fonctionne en parallèle, avec une échelle temporelle discrète, par tout ou rien, c'est-à-dire que à l'étape  $t$ , chaque module peut être actif ou en repos (1 ou 0). Finalement, la réponse de chaque unité est fonction d'un seuil  $\theta_i$ ; l'unité sera active à l'étape  $t$  si et seulement si la somme réelle des excitations qui lui arrivent à l'étape  $t-1$  est égale ou supérieure au seuil  $\theta_i$ .

Ce qui se traduit par l'itération en parallèle :

$$y^{r+1} = \Delta y^r, \quad r = 0, 1, \dots; \quad y^0 \in \{0, 1\}^n$$

où  $\Delta$  est une application de  $\{0, 1\}^n$  dans lui-même et chaque composante  $\phi_i$  est définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\theta_i, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}; \quad y \in \{0, 1\}^n$$

Dans ce contexte, une inhibition correspond à  $\alpha_{ij} < 0$  et une excitation à  $\alpha_{ij} > 0$ .

La propriété fondamentale de ce modèle est la suivante :

Le comportement de tout automate fini peut être reproduit par un réseau neuronal de Mac Culloch et Pitts construit de manière adéquate [1].

Propriété qui établit la grande complexité du point de vue comportement itératif, de ce modèle.

Il semble donc très difficile, étant donné un réseau de Mac Culloch - Pitts quelconque, de construire un outil mathématique permettant de caractériser son comportement itératif (longueur des cycles, nombre d'états stationnaires, etc).

Dans ce chapitre, nous étudions ce comportement dans le cas de poids symétriques ( $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ), cas certainement particulier, mais de grand intérêt dans plusieurs domaines (automates cellulaires uniformes [25, 26, 28], modèles de psychologie de groupes [1, 1526], physique statistique [6], etc) où les résultats obtenus jusqu'à présent (même dans ce cas) sont assez pauvres.

### (2.1) ENONCE DU PROBLEME

Soit  $B = \{0,1\}$  et prenons l'application :

$$\Delta : B^n \rightarrow B^n$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow (\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$$

où chaque  $\phi_i$ , est une fonction à seuil définie par :

$$\phi_i(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\alpha_{ij}, \theta_i \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

On s'intéresse à l'étude de la longueur des cycles de l'itération parallèle :

$$y^{r+1} = \Delta y^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots ; \quad y^0 \in B^n$$

On démontrera que en fait le comportement cyclique d'une telle itération est décrit par le théorème suivant :

THEOREME-1 :

Pour tout  $y \in B^n$ , il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\Delta y^{s+2} = \Delta y^s.$$

C'est-à-dire que l'itération parallèle sur  $\Delta$  n'a, en régime stationnaire, que des points fixes ou des cycles de longueur deux (pas de cycle de longueur supérieure à 2).

Pour démontrer ce résultat il nous faut quelques définitions et lemmes de base.

(2.2) DEFINITIONS ET RESULTATS DE BASE

Comme  $B^n$  est un ensemble fini, au bout d'un nombre fini de pas, l'itération conduite sur  $\Delta$ , aboutit à un régime stationnaire, c'est-à-dire pour chaque  $y \in B^n$ , il existe  $s, T \in \mathbb{N}, T > 0$  tel que :

$$\Delta_y^{s+T} = \Delta_y^s \text{ et } \Delta_y^{s+r} \neq \Delta_y^s \text{ pour } 0 < r < T$$

Ceci nous permet de définir, pour tout  $y \in B^n$ , la matrice des états en régime stationnaire :

$$X(y, T) = \begin{pmatrix} x_1(0), \dots, x_1(T-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(0), \dots, x_n(T-1) \end{pmatrix} = (\Delta_y^s, \Delta_y^{s+1}, \dots, \Delta_y^{s+T-1})$$

Il est évident que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} x_i(0) &= \phi_i(x_1(T-1), \dots, x_n(T-1)) \\ x_i(\ell+1) &= \phi_i(x_1(\ell), \dots, x_n(\ell)) \quad \ell \in \{0, \dots, T-2\} \end{aligned}$$

appelons  $x_i$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $X(y, T)$  et  $\gamma_i$ , le plus petit diviseur de  $T$ , tel que :

$$x_i(\ell + \gamma_i) = x_i(\ell) \quad \ell \in \{0, \dots, T-1\}$$

On dira que  $\gamma_i$  est la période associée à  $x_i$ .

Soit maintenant  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'ensemble des lignes de la matrice  $X(y, T)$  et définissons l'opérateur :

$$L : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_i, x_j) \rightarrow \alpha_{ij} = \sum_{\ell=0}^{T-1} (x_j(\ell+1) - x_j(\ell-1)) x_i(\ell)$$

où les indices  $\ell \in \{0, \dots, T-1\}$  sont pris modulo  $T$ .

Lemme-1 :

- (i)  $L(x_i, x_j) + L(x_j, x_i) = 0$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$
- (ii) Si  $\gamma_i \leq 2$  alors  $L(x_i, x_j) = 0$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$

Démonstration : découle directement de la définition de L et du fait que  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

---

Etant donnée une ligne  $x_i \in S$ , tel que  $\gamma_i \geq 3$ , notons :

$$\text{supp}(x_i) = \{\ell \in \{0, \dots, T-1\} / x_i(\ell) = 1\}$$

et construisons les ensembles suivants :

$$C_0 = \begin{cases} \emptyset & \text{s'il n'existe pas } \ell_0 \in \{0, \dots, T-1\} \text{ tel que } \{\ell_0, \ell_0+1, \dots, \ell_0-2\} \subset \text{supp}(x_i) \\ \{\ell_0, \ell_0+2, \ell_0+4, \dots, \ell_0-4, \ell_0-2\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$C_1 = \{\ell_1+2s \in \text{supp}(x_i) / s = 0, 1, \dots, q_1\}$$

avec  $\ell_1$ , l'indice le plus petit qui vérifie  $x_i(\ell_1-2) = 0$

et  $q_1$  tel que  $x_i(\ell_1+2q_1+2) = 0$

Pour  $k > 1$  :

$$C_k = \{\ell_k+2s \in \text{supp}(x_i) / s=0, \dots, q_k\} \quad k = 2, \dots, p$$

avec  $\ell_k = \ell_{k-1} + \omega \pmod{T} \notin \{\ell_1, \dots, \ell_{k-1}\}$  le premier indice qu'on trouve tel que  $x_i(\ell_k-2) = 0$  et  $q_k$  l'entier tel que  $x_i(\ell_k+2q_k+2) = 0$ .

Comme  $\gamma_i \geq 3$ , il existe toujours  $\ell_1 \in \text{supp}(x_i)$  tel que  $x_i(\ell_1-2) = 0$ , ce qui permet de construire les ensembles  $C_k$ ,  $k \in \{1, \dots, p\}$ . En plus, il est facile de voir que  $\{C_0, C_1, \dots, C_p\}$  est une partition de  $\text{supp}(x_i)$ .

Exemples :

$\ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x_i$	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

$$C_0 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$C_1 = \{5, 7\}$$

$$C_2 = \{11, 13\}$$

$\ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i$	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1

$$C_0 = \emptyset$$

$$C_1 = \{4, 6\}$$

$$C_2 = \{5, 7, 9, 11, 0\}$$

$$C_3 = \{12\}$$

Le résultat de base pour la démonstration du théorème est donnée par le lemme suivant :

Lemme-2 : soit  $x_i \in S$  tel que  $\gamma_i \geq 3$ , alors :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$$

Démonstration : de la partition du  $\text{supp}(x_i)$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{\ell \in \text{supp}(x_i)} (x_j^{(\ell+1)} - x_j^{(\ell-1)}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{k=0}^p \sum_{\ell \in C_k} (x_j^{(\ell+1)} - x_j^{(\ell-1)}) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{\ell \in C_k} (x_j^{(\ell+1)} - x_j^{(\ell-1)}) \end{aligned}$$

appelons :

$$\Psi_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{\ell \in C_k} (x_j^{(\ell+1)} - x_j^{(\ell-1)})$$

de la définition de  $C_0 = \{\ell_0, \ell_0+2, \dots, \ell_0-2\}$ , on a :

$$\sum_{\ell \in C_0} (x_j^{(\ell+1)} - x_j^{(\ell-1)}) = 0$$

(si  $C_0$  est vide, la somme est nulle par définition), ce qui implique :  $\Psi_{i0} = 0$ .



Prenons donc  $k > 0$ . Du fait que  $\gamma_i \geq 3$ , il existe bien  $C_k \neq 0$ , comme

$C_k = \{l_k, l_k+2, \dots, l_k+2q_k\}$ , on peut écrire :

$$\Psi_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{s=0}^{q_k} (x_j^{(l_k+2s+1)} - x_j^{(l_k+2s-1)})$$

Ce qui est égal à :

$$\Psi_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(l_k+2q_k+1)} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(l_k-1)}$$

mais par construction de  $C_k$  on a :

$$x_i^{(l_k+2q_k+2)} = 0 \quad \text{et} \quad x_i^{(l_k)} = 1$$

donc, par définition de  $\theta_i$  :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(l_k+2q_k+1)} < \theta_i$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(l_k-1)} \geq \theta_i$$

Ce qui implique  $\Psi_{ik} < 0$

donc on a bien :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^p \Psi_{ik} < 0$$

### (2.3) DEMONSTRATION DU THEOREME

Soient  $y \in B^n$  et  $X(y, T)$  sa matrice associée.

Supposons  $T \geq 3$ . Soient :

$$J_2 = \{i \in \{1, \dots, n\} / \gamma_i \leq 2\}$$

$$J_3 = \{i \in \{1, \dots, n\} / \gamma_i \geq 3\}$$

Comme  $T \geq 3$ , il existe au moins une ligne  $x_i$  tel que  $\gamma_i \geq 3$ , donc l'ensemble  $J_3$  est non vide.

En plus :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) = 0 \quad \text{pour } i \in J_2 \quad (\text{lemme-1})$$

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0 \quad \text{pour } i \in J_3 \quad (\text{lemme-2})$$

On a donc :

$$\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$$

mais, comme L est antisymétrique :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) = 0$$

Ce qui est une contradiction. Donc, nécessairement,  $\gamma_i \leq 2$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ce qui implique  $T \leq 2$ .

---

Remarques :

- 1) Si les composantes de l'application  $\Delta$  sont des fonctions du type :

$$\phi_i(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \in [a_i, b_i] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

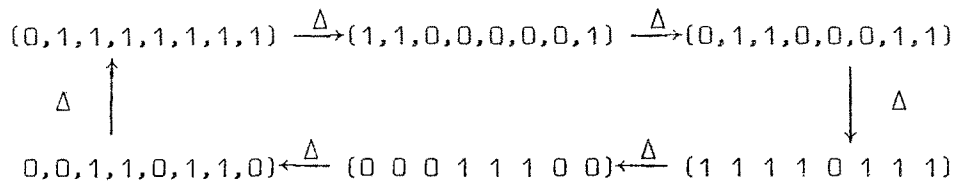
le comportement itératif est, en général, beaucoup plus complexe.

Par exemple, prenons l'application  $\Delta$  :

$$\text{où } \phi_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_{i-1} + y_i + y_{i+1} \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec les indices  $i \in \{1, \dots, 8\}$  pris modulo 8 .

Prenons la configuration  $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{B}^8$ , alors :



qui est un cycle de longueur six.

2) L'hypothèse de symétrie n'est pas une condition nécessaire. Prenons par exemple l'application  $\Delta$  de  $\{0,1\}^4$  dans lui-même, définie par :

$$\begin{aligned}
 \phi_1(y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } y_3 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} & ; & \phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_4 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \phi_3(y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_4 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} & ; & \phi_4(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_2 + y_3 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Malgré le fait que  $\alpha_{12} \neq \alpha_{21}$ , l'itération parallèle conduite sur  $\Delta$ , n'a en régime stationnaire que les points fixes,  $\vec{0}$  et  $\vec{1}$ , et un cycle de longueur deux.

En général, pour  $n$  quelconque, on peut exhiber des fonctions associées à une matrice des poids,  $A = (\alpha_{ij})$ , non symétrique, telles que ses cycles soient de longueur inférieure ou égal à deux. Il suffit de reprendre les applications linéaires du chapitre I (cas particulier des applications à seuil avec  $\theta_i = 1$  et  $\alpha_{ij} \in \{0,1\}$ ) telles que  $\rho(A) \leq 2$ .

D'autre part, il suffit de très peu d'asymétrie, en fait un seul couple de poids non symétriques bien choisi, pour obtenir des cycles très longs, comme on le verra dans le paragraphe suivant.

#### (2.4) FONCTIONS A SEUIL "PRESQUE" SYMETRIQUES

Etant donnée la matrice des poids  $A = (\alpha_{ij})$  et le vecteur des seuils qui définissent l'application  $\Delta$  de  $B^n$  dans lui-même, il est intéressant de se demander comment il faut choisir les coefficients de  $A$  et les poids  $\theta_i$  pour obtenir un comportement fixé à l'avance. (du théorème précédent résulte que si  $A$  est symétrique ce comportement est connu). Plus précisément comment faire pour avoir au moins un cycle de longueur supérieure ou égal à trois, en imposant encore que  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  pour tout couple  $(i,j)$  sauf un. Dans ce contexte, on a le lemme suivant :

LEMME-3 : Une condition suffisante pour que  $\Delta$  ait au moins un cycle de longueur supérieure à  $k$ ,  $k \in \{3, 4, \dots, n+1\}$  est qu'il existe  $k-1$  lignes de  $A = (\alpha_{ij})$ , (supposons les  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{k-1, k-1}$ ) et des poids  $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$  tels que :

1) Pour  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$

$$\alpha_{j\ell} + \alpha_j^+ < \theta_j \quad j \in \{1, \dots, k-1\} \setminus \{\ell+1\}$$

$$\alpha_{\ell+1\ell} + \alpha_{\ell+1}^- \geq \theta_{\ell+1}$$

2)  $\alpha_{jk-1}^+ + \alpha_j^+ < \theta_j \quad j \in \{1, \dots, k-1\} \setminus \{1\}$

$$\alpha_{1k+1} + \alpha_1^- \geq \theta_1$$

3)  $\alpha_{j1} + \alpha_j^+ < \theta_j \quad j \in \{1, \dots, k-1\}$

4)  $\alpha_j^+ < \theta_j \quad j \in \{1, \dots, k-1\} \setminus \{2\}$

$$\alpha_j^- \geq \theta_2$$

avec  $\alpha_j^+ = \sum_{r \geq k} \alpha_{jr}$  ;  $\alpha_j^- = \sum_{r \geq k} \alpha_{jr}$   $j \in \{1, \dots, k-1\}$   
 $\alpha_{jr} > 0$   $\alpha_{jr} < 0$

Démonstration :

Le système des inégalités est compatible ; il suffit de se donner, pour chaque  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $(\alpha_{jk}, \dots, \alpha_{jn}) \in \mathbb{R}^{n-k+1}$  quelconque et ensuite choisir  $(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$  selon la condition (4). Finalement, comme chaque  $\alpha_{ij}$  ;  $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$ , n'apparaît que dans une inégalité, on peut les choisir sans problème.

D'autre part, soit  $e_i \in \{0, 1\}^{k-1}$  l' $i$ -ème vecteur de base, alors il résulte directement des conditions du lemme que :

Pour tout  $y = (y_k, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^{n-k+1}$  on a :

\* Pour  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$

$$\Delta(e_\ell, y) = (e_{\ell+1}, \phi_k(e_\ell, y), \dots, \phi_n(e_\ell, y)) \quad (\text{condition-1})$$

\*  $\Delta(e_{k-1}, y) = (e_1, \phi_k(e_{k-1}, y), \dots, \phi_n(e_{k-1}, y))$  (condition-2)

\*  $\Delta(e_1, y) = (\vec{0}, \phi_k(e_1, y), \dots, \phi_n(e_1, y))$  (condition-3)

\*  $\Delta(\vec{0}, y) = (e_2, \phi_k(\vec{0}, y), \dots, \phi_n(\vec{0}, y))$  (condition-4)

Donc, l'itération parallèle conduite sur  $\Delta$  a, au moins, un cycle de longueur supérieure ou égale à k.

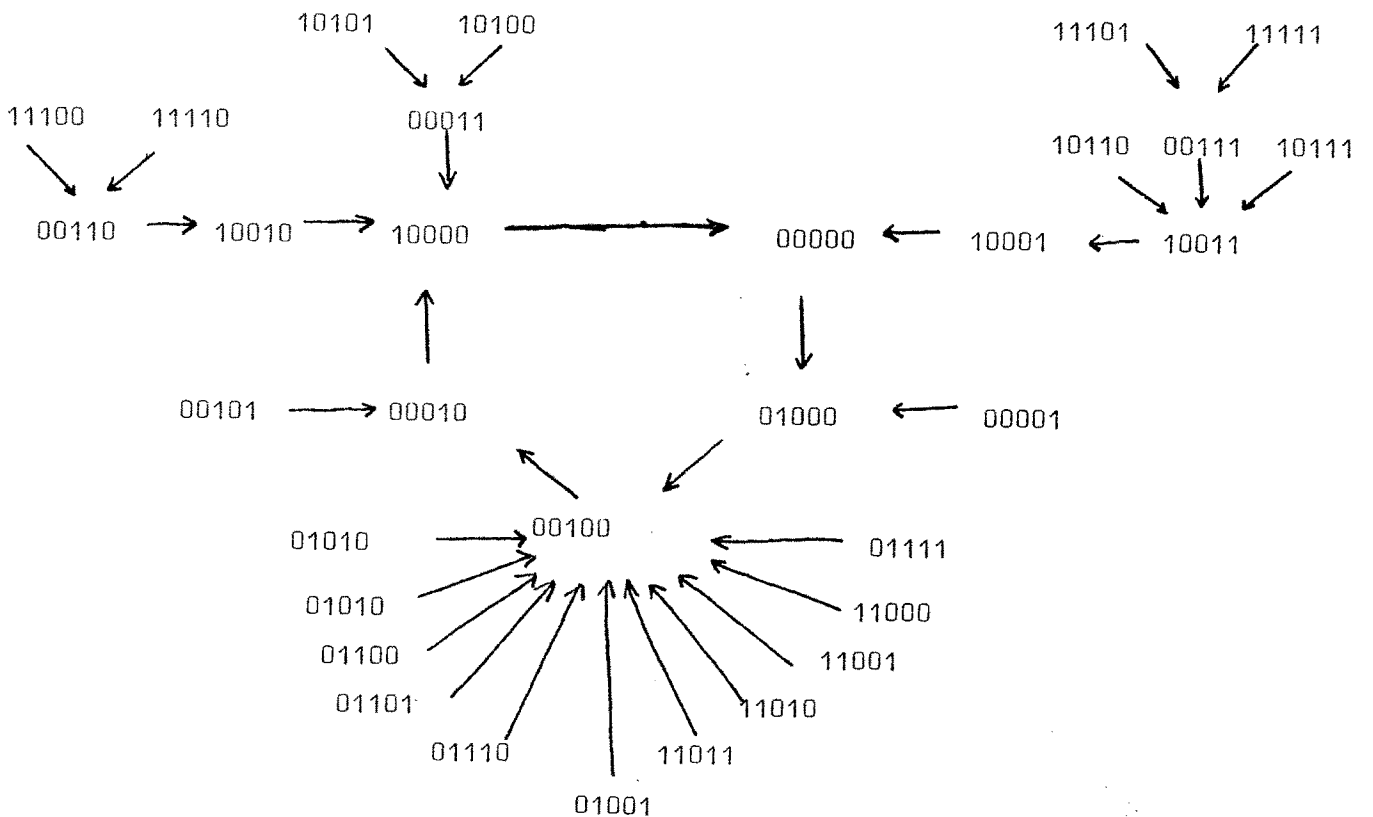
Remarque : Il est facile de voir que sous les conditions du lemme :

$$\theta_2 < 0 ; \alpha_{23} < 0 \text{ et } \alpha_{32} > 0$$

De plus, on peut choisir, pour tout couple  $(i, j) \neq (2, 3), i \neq j, \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ , donc A est "presque symétrique" et pourtant l'itération admet des cycles assez longs.

Exemple :  $(\Delta : B^5 \rightarrow B^5)$

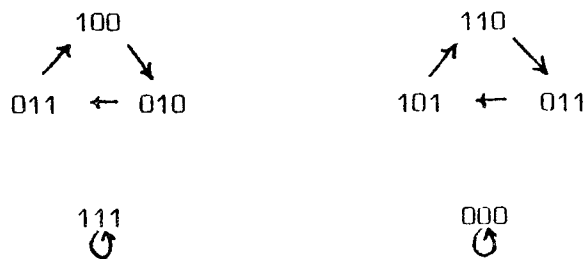
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1.8 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1.2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1.95 & 1 \\ 1.8 & -1.2 & 1.95 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\theta} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -1 \\ 3 \\ 1.9 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Finalement, le fait que  $\text{sgn}(\alpha_{23} \alpha_{32}) = -1$  pourrait faire croire que pour avoir des cycles de longueur inférieure à trois, il suffirait d'imposer soit  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ , soit  $\text{sgn}(\alpha_{ij} \alpha_{ji}) = 1$ . Malheureusement, on peut toujours trouver un contreexemple (et même une famille de contreexemples !):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0.4 \\ 0.9 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\theta} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Graphe de l'itération :



présence de deux cycles de longueur 3.

### (2.5) APPLICATION A UNE FAMILLE D'AUTOMATES CELLULAIRES UNIFORMES

Plusieurs auteurs [25,26,28] se sont intéressés à décrire le comportement cyclique des automates cellulaires uniformes à seuil. On montre dans ce paragraphe que certains résultats, concernant le comportement cyclique, obtenus dans [26,28] dépendant fortement de la nature de la space cellulaire (pavé régulier infini) sont généralisables à des graphes plus complexes de manière directe grâce au théorème précédent.

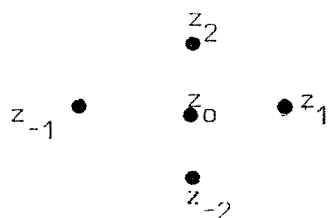
Soit l'automate cellulaire défini par la donnée  $(Z^n, V, \{0,1\}, 0, \phi)$  où :

- $Z^n$  est l'espace cellulaire
- $V$  un voisinage symétrique quelconque :
 
$$V = \{z_{-p}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_p\}, \quad z_j \in Z^n, \quad j \in \{-p, \dots, -1, 0, 1, \dots, p\}$$
- $0$  l'état de repos
- $\phi$  la fonction locale de transition, définie par :
 
$$\phi : \{0,1\}^{2p+1} \rightarrow \{0,1\}$$

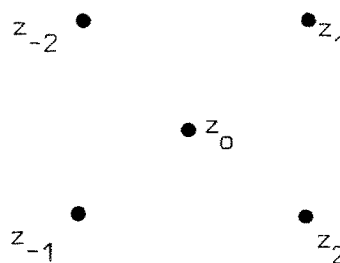
$$\phi(a_{-p}, \dots, a_0, \dots, a_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_0 a_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_{-j} a_{-j} + \sum_{j=1}^p \alpha_j a_j < \theta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\theta, \alpha_j, \alpha_{-j} \in \mathbb{R}, \theta > 0, \alpha_{-j} = \alpha_j$  pour  $j \in \{-p, \dots, 0, \dots, p\}$

Exemples des voisinages dans  $Z^2$  :



Voisinage de J.V. NEUMAN



Voisinage en étoile

Posons maintenant  $C = \{c : Z^n \rightarrow \{0,1\}\}$ . Un élément  $c \in C$  est appelé une configuration sur  $Z^n$ , et son support est défini par :

$$\text{supp}c = \{z \in Z^n / c(z) = 1\}$$

On dira que  $c \in C$  est à support fini si  $|\text{supp}c|$  est fini.

Soit  $\Delta : C \rightarrow C$ , la fonction globale de transition, obtenue par application simultanée (en parallèle) de la fonction locale . On dira que  $\Delta$  est "non-expansive" si pour toute configuration  $c \in C$ , à support fini, on a :

$$\text{supp}(\Delta^s c) \subset H(c) \text{ pour tout } s \in \mathbb{N}$$

où  $H(c)$  est un ensemble fini ne dépendant que de  $c$ .

Il est facile de voir qu'une condition suffisante pour que  $\Delta$  soit "non-expansive", est que :

$$\sum_{j \in J^+} \alpha_j < \theta \text{ avec } J^+ = \{j \in \{1, \dots, p\} / \alpha_j > 0\}$$

dans ces conditions, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE : soit l'automate cellulaire à seuil  $(Z^n, V, \{0,1\}, 0, \emptyset)$  défini ci-dessus, tel que  $\Delta$  soit "non-expansive". Alors pour toute configuration  $c \in C$ , à support fini, il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\Delta^{s+2} c = \Delta^s c.$$

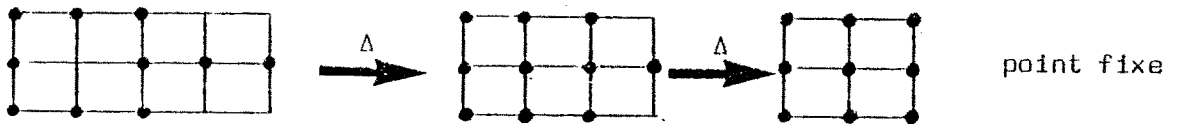
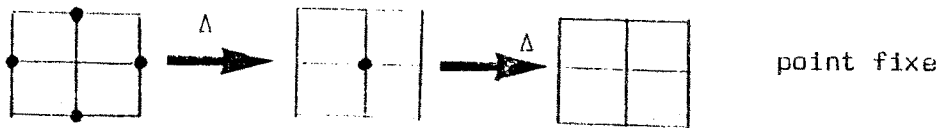
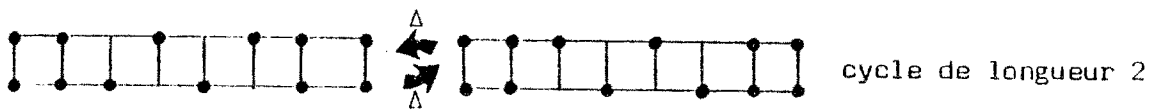
Démonstration : découle du théorème précédent du fait qu'on se ramène au cas d'une itération sur l'ensemble fini  $H(c)$ .

Exemples : Prenons  $(\mathbb{Z}^2, V, \{0,1\}, 0, \emptyset)$  avec le voisinage de NEUMAN, et la fonction locale de transition :

$$\phi: \{0,1\}^5 \rightarrow \{0,1\}$$

$$\phi(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_0 + a_{-2} + a_{-1} + a_1 + a_2 < 3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans les schémas d'évolution qui suivent, les cellules à l'état 0 ne figurent pas, et celles à l'état 1 sont représentées par "•" .

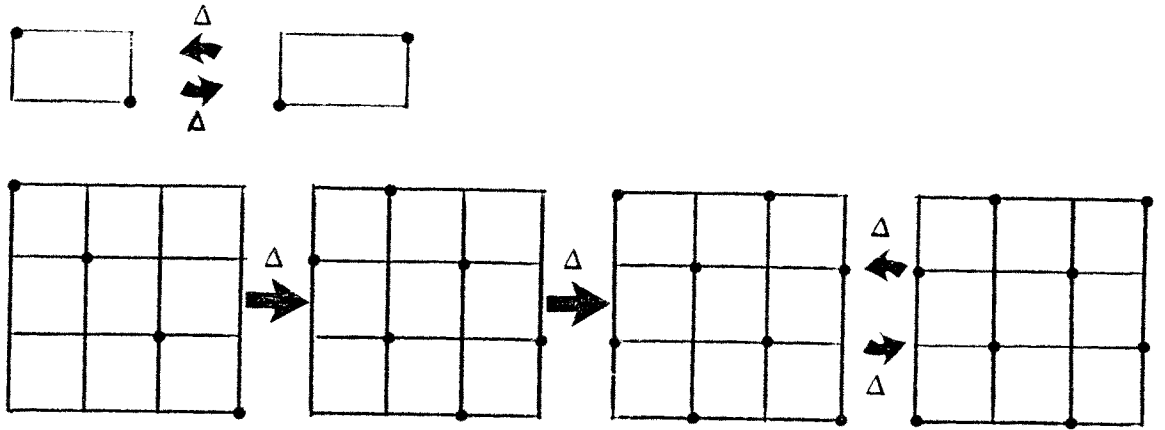


Prenons maintenant, pour le même voisinage :

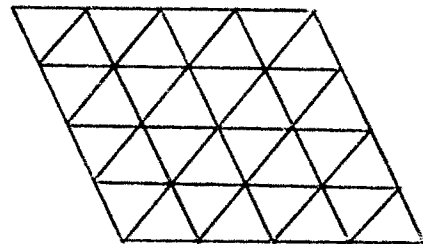
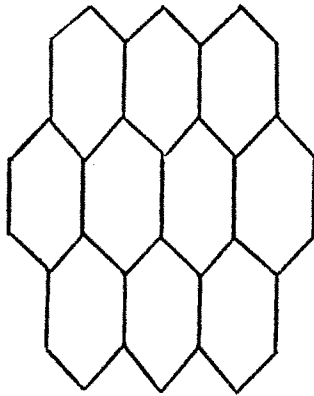
$$\phi(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{-1} + a_{-2} + a_1 + a_2 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici,  $\Delta$  est aussi "non-expansive", malgré le fait que  $\sum_{j \in J^+} \alpha_j = 2$ .





On peut obtenir des résultats similaires sur les deux autres espaces cellulaires uniformes possibles :



### (2.6) APPLICATION A LA DYNAMIQUE DE GROUPES

Considérons un ensemble d'individus  $X = \{1, \dots, n\}$  avec des relations d'amitié, inimitié ou indifférence entre eux. On peut représenter cette structure au moyen d'un graphe (non orienté)  $G = (X, Y, s)$  où  $Y$  est l'ensemble des arcs et  $s$  une application :

$$s : Y \rightarrow \{-1, +1\}$$

$$(i, j) \rightarrow s(i, j) = \begin{cases} +1 & \text{si } i \text{ est ami de } j \\ -1 & \text{si } i \text{ est ennemi de } j \end{cases}$$

On suppose ainsi que  $s(i, j) = s(j, i)$ , c'est-à-dire que la relation d'amitié est symétrique.

L'absence d'un arc entre  $i, j \in X$  représente l'indifférence entre les deux individus. [5]

Exemples :



A partir de cette structure fixe, on peut se demander quel sera le comportement dynamique de la population par rapport à la prise d'une décision entre deux courants d'opinion, appelons les +1 et -1.

Un modèle de comportement, assez simple, pourrait être le suivant :

Soit  $V(i)$ , le voisinage de  $i \in X$  dans le graphe  $G$ . On peut écrire :

$$V(i) = V^+(i) \cup V^-(i) \quad \text{avec} \quad V^+(i) \cap V^-(i) = \emptyset$$

où  $V^+(i)$  est le voisinage des amis et  $V^-(i)$  celui des ennemis du sommet  $i$ . On notera  $|V(i)|$  la cardinalité de  $V(i)$ .

Soit  $x_i(k)$  l'avis de l'individu  $i$  à l'étape  $k$ , pris parmi les éléments de  $B = \{-1, +1\}$ . Nous nous intéresserons à la famille suivante des règles de comportements (règles de majorité) :

$$x_i(k+1) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} +1 \text{ si } \sum_{j \in V^+(i)} x_j(k) - \sum_{j \in V^-(i)} x_j(k) \geq 1 \\ -1 \text{ sinon} \end{array} \right\} & \text{si } |V(i)| \\ & \text{est impair} \\ \left. \begin{array}{l} +1 \text{ si } \alpha x_i(k) + \sum_{j \in V^+(i)} x_j(k) - \sum_{j \in V^-(i)} x_j(k) \geq 1 \\ -1 \text{ sinon} \end{array} \right\} & \text{si } |V(i)| \\ & \text{est pair} \end{cases}$$

avec  $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$

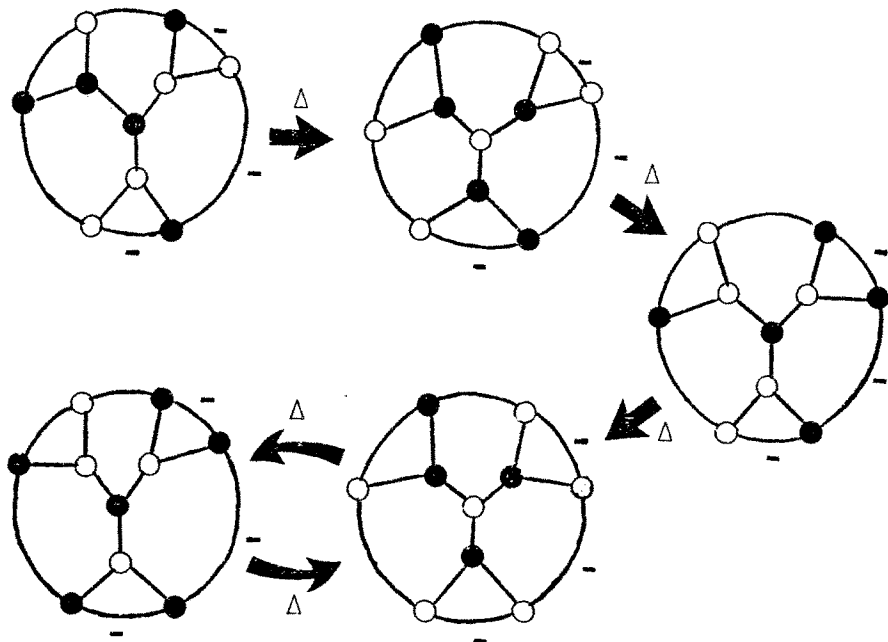
c'est-à-dire qu'un individu va prendre l'avis +1, dans le cas  $|V(i)|$  impair, si le nombre de ses amis avec l'avis +1 plus le nombre de ses ennemis avec l'avis -1 est majoritaire dans son voisinage. Par contre, dans le cas  $|V(i)|$  pair, et  $\alpha \in \{-1, 1\}$ , il prendra compte de son propre avis pour prendre une décision.

Exemples :

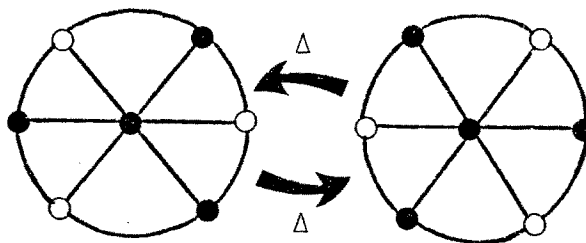
Dans les exemples qui suivent, les individus qui ont l'avis -1 sont représentés par "o" et ceux qui ont l'avis +1 sont représentés par "•". En plus, on notera les arcs marqués -1 par "-" et  $\Delta$  l'application global, simultanée, de la règle de comportement.

1) Pour  $\alpha = 1$

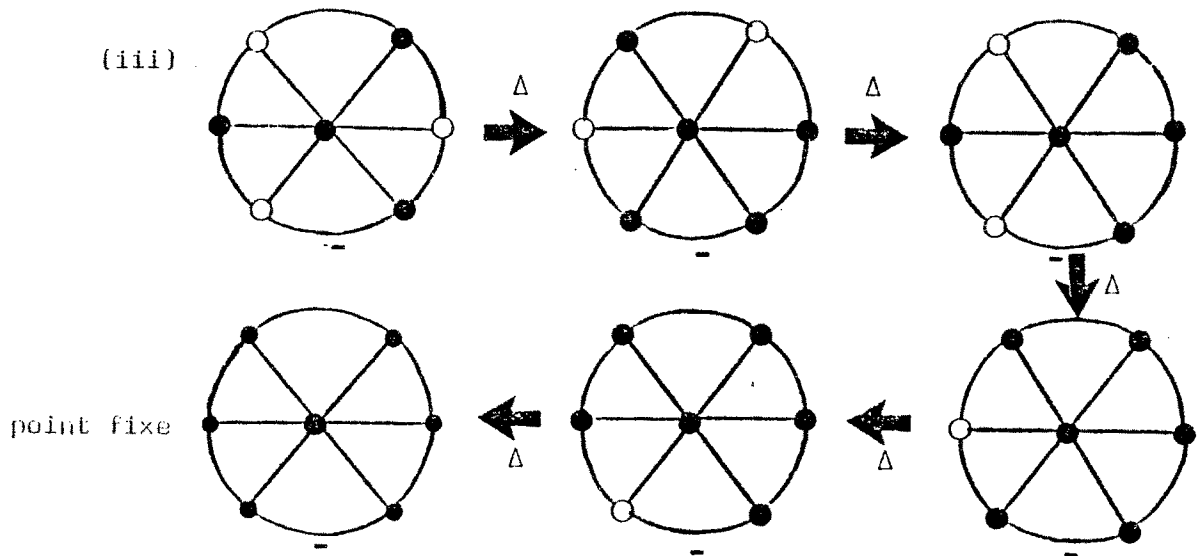
(i)



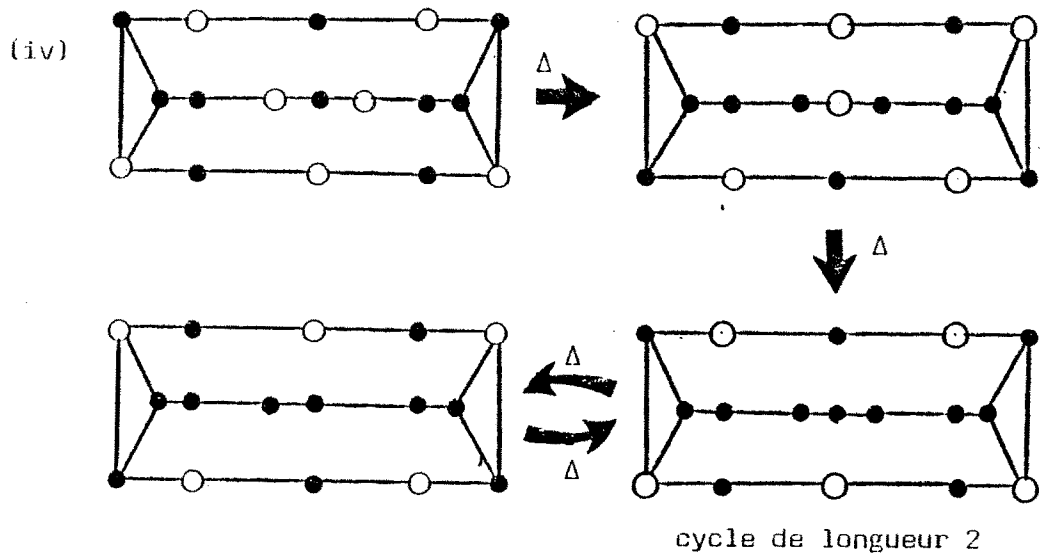
(ii)



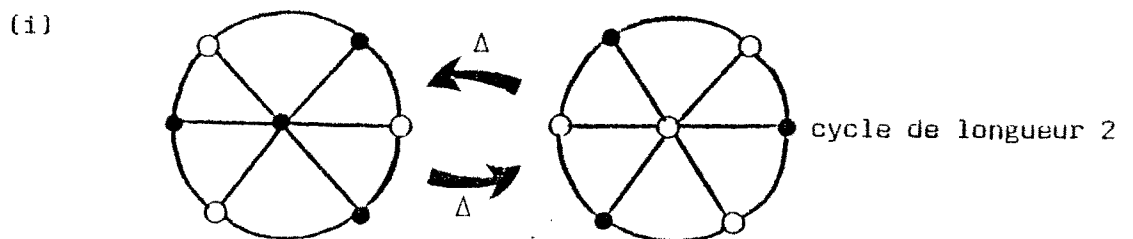
On peut voir ici que le sommet central ("le président") reste stable tandis que la population change d'avis à chaque coup. Par contre, si on ajoute une relation d'inimitié :



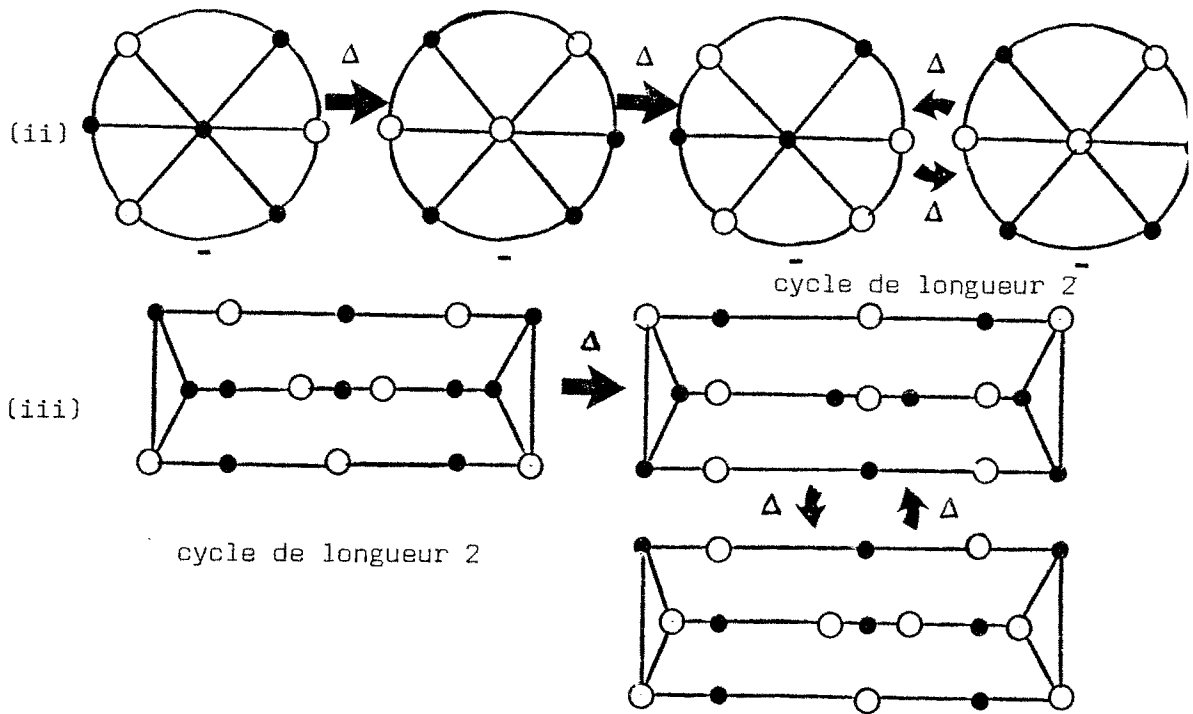
On aboutit à un point fixe où chaque individu a ses avis définitivement arrêtés.



2) Pour  $\alpha = -1$



Cette fois-ci le sommet central ("le président") change systématiquement d'avis à chaque pas.



On voit bien que ces règles de comportement sont des cas particuliers des fonctions à seuil. On peut donc conclure qu'avec ces règles d'évolution, on parvient à un régime stationnaire dans lequel :

- \* ou bien chaque individu a son avis définitivement fixé (point fixe),
- \* ou bien certains individus (sinon tous) oscillent constamment entre deux opinions (clignotement), les autres ayant leurs avis définitivement fixés.
- \* Il ne peut y avoir de comportement plus complexe (il n'y a pas de cycles de longueur supérieure à deux).
- \* Si on suppose que  $s(i,j) \neq s(j,i)$ , c'est-à-dire que la relation d'amitié n'est pas symétrique, l'évolution est plus riche, mais, en général il est difficile de donner des résultats théoriques sur le comportement en régime stationnaire.

Pour conclure, le théorème présenté ici établit de façon générale le comportement cyclique de divers modèles pour lesquels existaient des résultats particuliers : certains modèles en dynamique des groupes [15,24], des réseaux neuronaux symétriques du type Mc. Culloch et Pitts [17,18] et une classe d'automates cellulaires [26,28]].

Cette généralisation a été possible du fait de la nature algébrique de notre démonstration, qui fait abstraction de la particularité du réseau associé à l'itération.

**CHAPITRE III**

---

**COMPORTEMENT PERIODIQUE DES**

**FONCTIONS A MULTISEUIL**



### III - COMPORTEMENT PERIODIQUE DES FONCTIONS A MULTISEUIL

Nous nous intéressons ici au comportement cyclique d'une classe des fonctions définies de la manière suivante :

Soit  $B = \{\theta_1, \dots, \theta_p\}$  tel que  $\theta_i \in \mathbb{R}_+$ ,  
pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ , considérons l'application :

$$\Delta : B^n \rightarrow B^n$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow (\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$$

où chaque  $\phi_i$  est une fonction définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} \theta_{i_1} & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \beta_1^i \\ \vdots & \\ \theta_{i_k} & \text{si } \beta_{k-1}^i \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \beta_k^i \\ \vdots & \\ \theta_{i_{s_i}} & \text{si } \beta_{s_i-1}^i \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \end{cases}$$

avec :

$$(1) \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \beta_1^i < \beta_2^i < \dots < \beta_{s_i-1}^i, \beta_l^i \in \mathbb{R}, l \in \{1, \dots, s_i-1\} \\ \theta_{i_1} < \theta_{i_2} < \dots < \theta_{i_{s_i}}, \theta_{i_l} \in B, l \in \{1, \dots, s_i\}. \end{cases}$$

On dira alors que  $\Delta$  est une "fonction à multiseuil, symétrique et croissante".



Remarques :

1) La propriété (2) implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned} * \phi_i(y) < \phi_i(z) &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z_j \\ * \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z_j &\Rightarrow \phi_i(y) \leq \phi_i(z) \end{aligned}$$

mais la réciproque n'est pas vraie, dans le cas d'égalité.

Cette propriété, pour  $B = \{0,1\}$ , a été essentielle pour la démonstration du théorème (1.II).

2) On voit bien que ce type des fonctions est une généralisation directe du cas binaire étudié avant.

Dans ce chapitre, on va montrer que le comportement de l'itération parallèle sur  $\Delta$  est décrit par le théorème suivant :

THEOREME-1. :

Étant donnée une application  $\Delta$  à multiseuil, symétrique, croissant alors :

pour tout  $y \in B^n$ , il existe  $s \leq p^n$  tel que :

$$\Delta^{s+2} y = \Delta^s y$$

Donc là encore, on a, soit stationnarité, soit convergence sur un cycle d'ordre au plus deux, ce qui montre en fait que le comportement itératif est indépendant de la cardinalité de l'ensemble  $B$  des états.

D'ailleurs, la démonstration repose sur la manipulation, non évidente, des suites périodiques associées au régime stationnaire de l'itération issue d'un vecteur  $y \in B^n$ .

(3.1.) DEFINITIONS ET RESULTATS DE BASE

De façon similaire au chapitre précédent, on associe à chaque  $y \in B^n$ , la matrice des états en régime stationnaire, définie par :

$$X(y, T) = \begin{pmatrix} x_1(0) & \dots & x_1(T-1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n(0) & \dots & x_n(T-1) \end{pmatrix} = (\Delta^s y, \Delta^{s+1} y, \dots, \Delta^{s+T-1} y)$$

où  $T$  est la période associée au vecteur  $y \in B^n$  en régime stationnaire. Il est évident que pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} \cdot x_i(0) &= \phi_i(x_1(T-1), \dots, x_n(T-1)) \\ \cdot x_i(\ell+1) &= \phi_i(x_1(\ell), \dots, x_n(\ell)) \text{ pour } \ell \in \{0, \dots, T-2\} \end{aligned}$$

Appelons  $x_i$  la  $i$ ème ligne de  $X(y, T)$  et  $\gamma_i$  la période associée à  $x_i$  (nécessairement  $\gamma_i$  divise  $T$ ).

Soit  $L$  l'opérateur définie au chapitre-II, rappelons-nous que  $L$  est antisymétrique est qu'il est nul pour tout  $x_i$  tel que  $\gamma_i \leq 2$ . Propriétés que nous utiliserons aussi pour montrer le théorème-1.

$$\text{Soit } \psi(x_i) = \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\}$$

Il est facile de voir que :

$$\psi(x_i) = \sum_{\ell=0}^{T-1} (\sigma_i(\ell+1) - \sigma_i(\ell-1)) x_i(\ell)$$

$$\text{où } \sigma_i(\ell) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(\ell)$$

Notation :

Etant donnés deux vecteurs :

$$a = (a(0), a(2), \dots, a(2k))$$

$$b = (b(-1), b(1), \dots, b(2k+1))$$

$$\text{On note } [a ; b] = \sum_{s=0}^k a(2s)(b(2s+1)-b(2s-1))$$

de même, si on écrit  $a = (a(1), a(3), \dots, a(2k+1))$

et  $b = (b(0), b(2), \dots, b(2k+2))$ , on note :

$$[a ; b] = \sum_{s=0}^k a(2s+1) (b(2s+2)-b(2s))$$

Nous nous intéressons au signe de  $\psi(x_i)$  lorsque  $\gamma_i \geq 3$ . Pour cela, on décompose  $\psi(x_i)$ , à l'aide de la notation introduite ci-dessus, de la manière suivante :

$$\psi(x_i) = \begin{cases} [(x_i(0), x_i(2), \dots, x_i(T-2)) ; (\sigma_i(T-1), \sigma_i(1), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] \\ + [(x_i(1), x_i(3), \dots, x_i(T-1)) ; (\sigma_i(0), \sigma_i(2), \dots, \sigma_i(T-2), \sigma_i(0))] & \text{si } T \text{ est pair} \\ [(x_i(0), x_i(2), \dots, x_i(T-1), x_i(1), x_i(3), \dots, x_i(T-2)) ; \\ (\sigma_i(T-1), \sigma_i(1), \dots, \sigma_i(T-2), \sigma_i(0), \sigma_i(2), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] & \text{si } T \text{ est impair} \end{cases}$$

On va étudier le cas T pair, le cas impair se traite de façon analogue.

Remarques :

- (1) On va donner quelques propriétés de l'opérateur  $[ ; ]$ , appliqué au vecteur  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$  (pour le vecteur  $(x_i(1), \dots, x_i(T-1))$  l'étude est la même).

(2) Si le vecteur  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$  est constant

$$(x_i(2\ell) = x_i(2\ell+2), \ell \in \{0, \dots, \frac{T-2}{2}\}),$$

alors il est évident que :

$$[(x_i(0), x_i(2), \dots, x_i(T-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] = 0$$

Si non, on peut toujours supposer, sans perte de généralité, que deux termes consécutifs sont différents. En effet, s'il existe

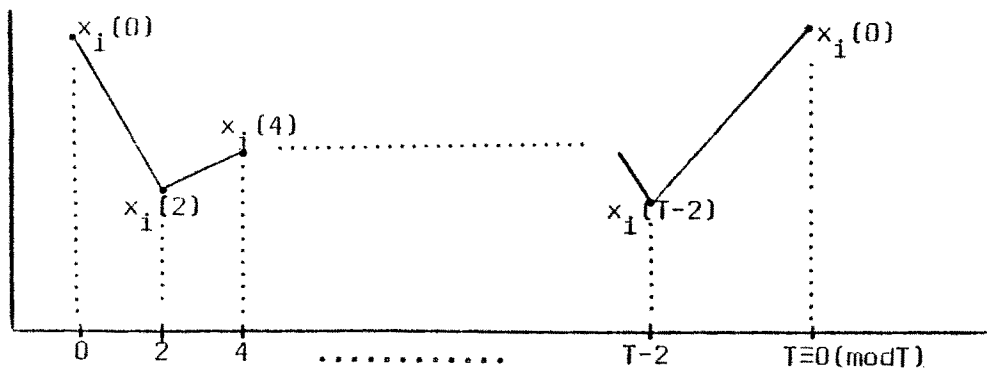
$\ell \in \{0, 2, \dots, T-2\}$  tel que  $x_i(2\ell) = x_i(2\ell+2)$ , alors :

$$\begin{aligned} &[(x_i(0), \dots, x_i(T-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] = \\ &= [(x_i(0), \dots, x_i(2\ell), x_i(2\ell+4), \dots, x_i(T-2)) ; \\ &(\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2\ell-1), \sigma_i(2\ell-3), \dots, \sigma_i(T-1))] \end{aligned}$$

(3) En plus, on peut toujours supposer à une permutation circulaire près, que  $\sigma_i(T-1) \geq \sigma_i(2s+1)$  pour  $s \in \{0, \dots, \frac{T}{2} - 2\}$ , ce qui revient à dire que :

$$x_i(0) \geq x_i(2s) \text{ pour } s \in \{1, \dots, \frac{T-2}{2}\}$$

(4) Dans la suite, on va représenter le vecteur  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$  pour une ligne polygonale :



LEMME-1 :

Soit le vecteur  $(x_i(0), x_i(2), \dots, x_i(2m))$  tel que :

$$x_i(0) > x_i(2) > \dots > x_i(2r) < x_i(2r+2) < \dots < x_i(2m)$$

avec :

$$\sigma_i(T-1) > \sigma_i(l) \text{ pour } l \in \{1, \dots, 2m-3\}$$

$$\sigma_i(2m-1) > \sigma_i(l) \text{ pour } l \in \{1, \dots, 2r-3\}$$

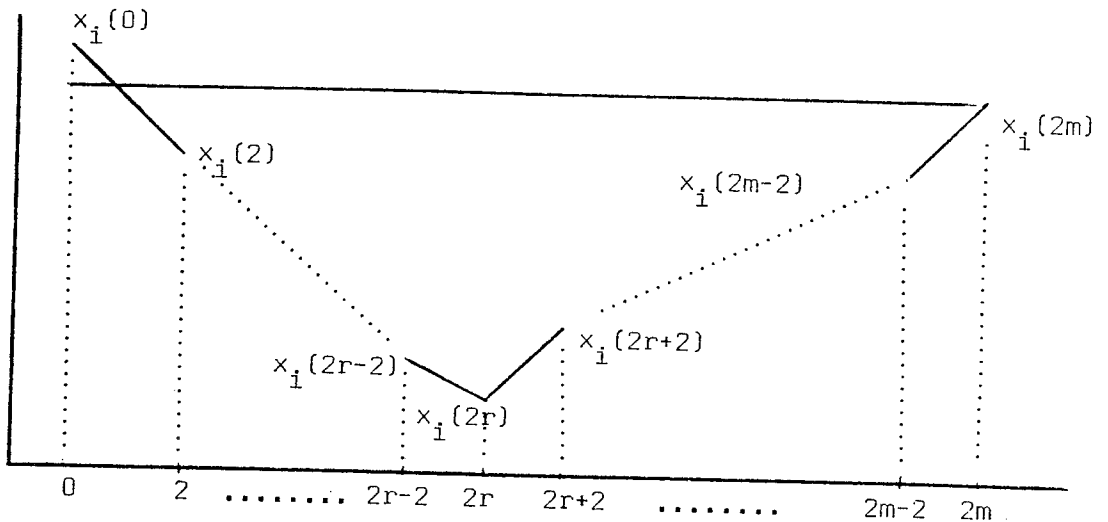
alors :

$$[(x_i(0), \dots, x_i(2m-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m-1))] <$$

$$< [x_i(0) ; (\sigma_i(T-1), \sigma_i(2m-1))] =$$

$$= x_i(0)(\sigma_i(2m-1) - \sigma_i(T-1)) \leq 0$$

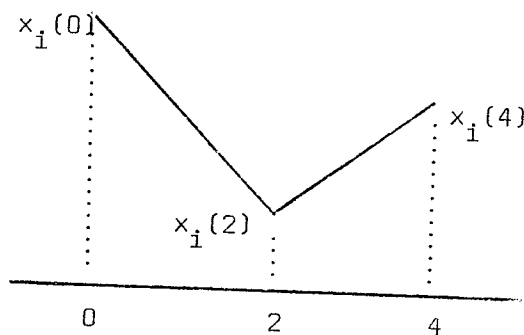
Ce que l'on peut représenter par :



DEMONSTRATION DU LEMME :

par récurrence sur m.

Pour  $m = 2$  ; soit  $\tilde{x} = (x_i(0), x_i(2))$ ,  $\tilde{\sigma} = (\sigma_i(T-1), \sigma_i(1), \sigma_i(3))$   
 avec  $x_i(0) > x_i(2) < x_i(4)$  et  $\sigma_i(T-1) > \sigma_i(1)$ ,  $\sigma_i(T-1) \geq \sigma_i(3)$



$$[\tilde{x} ; \tilde{\sigma}] = x_i(0)(\sigma_i(1) - \sigma_i(T-1)) + x_i(2)(\sigma_i(3) - \sigma_i(1))$$

mais  $x_i(4) > x_i(2)$  implique (par définition de  $\sigma_i$ )  $\sigma_i(3) > \sigma_i(1)$

on a donc :

$$[\tilde{x} ; \tilde{\sigma}] < x_i(0)(\sigma_i(3) - \sigma_i(T-1)) \leq 0$$

Supposons que le lemme soit vrai pour  $m$ , et démontrons-le pour  $m+1$ .

On a donc :

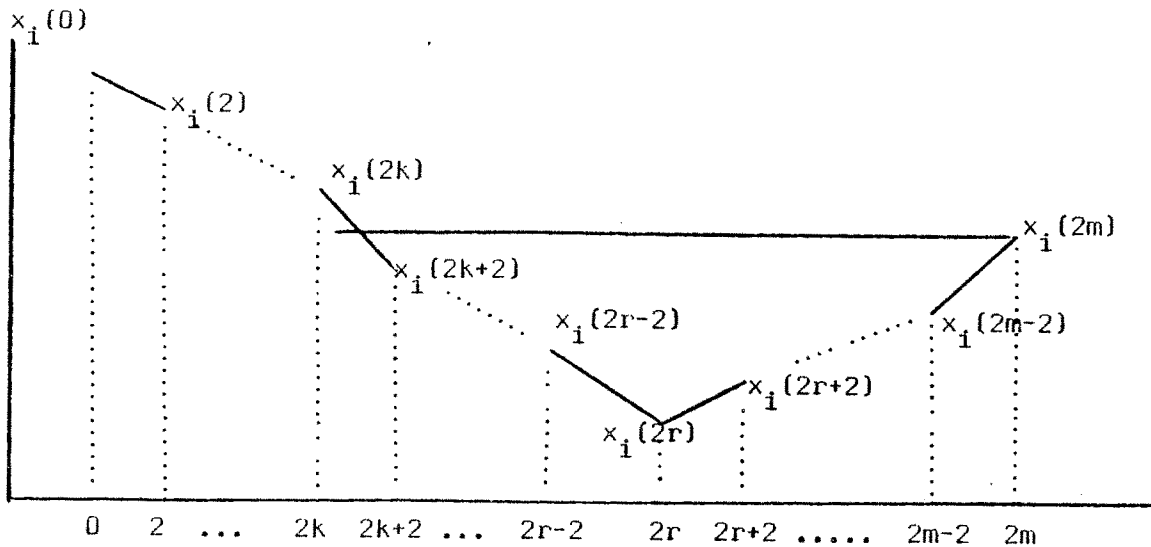
$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(0) > x_i(2) > \dots > x_i(2r) < x_i(2r+2) < \dots < x_i(2m) < x_i(2m+2) \\ \text{avec } \sigma_i(T-1) > \sigma_i(\ell) \text{ pour } \ell \in \{1, 3, \dots, 2m-1\} \\ \sigma_i(T-1) \geq \sigma_i(2m+1) \text{ et } \sigma_i(2m+1) > \sigma_i(\ell) \\ \text{pour } \ell \in \{1, 3, \dots, 2r-3\}. \end{array} \right.$$

Prenons  $k \in \{0, \dots, r-1\}$  l'indice le plus grand tel que :

$$\sigma_i(2k-1) \geq \sigma_i(2m-1)$$

(il existe puisque  $\sigma_i(T-1) > \sigma_i(2m-1)$ )

alors le vecteur  $(x_i(2k), x_i(2k+2), \dots, x_i(2m-2))$  vérifie les hypothèses du lemme :



D'autre part :

$$\begin{aligned} & [(x_i(0), \dots, x_i(2m)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m+1))] = \\ & = x_i(2m)(\sigma_i(2m+1) - \sigma_i(2m-1)) + \\ & + [(x_i(0), \dots, x_i(2k-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2k-1))] + \\ & + [(x_i(2k), \dots, x_i(2m-2)) ; (\sigma_i(2k-1), \dots, \sigma_i(2m-1))] \end{aligned}$$

et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & [(x_i(0), \dots, x_i(2m)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m+1))] < \\ & < [(x_i(0), \dots, x_i(2k-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2k-1))] + \\ & + x_i(2k)(\sigma_i(2m-1) - \sigma_i(2k-1)) + x_i(2m)(\sigma_i(2m+1) - \sigma_i(2m-1)) \end{aligned}$$

comme  $\sigma_i(2k-1) \geq \sigma_i(2m-1)$ , alors  $x_i(2k) \geq x_i(2m)$  et du fait que  $\sigma_i(2m+1) > \sigma_i(2m-1)$ , alors :

$$\begin{aligned} & [(x_i(0), \dots, x_i(2m)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m+1))] < \\ & < [(x_i(0), \dots, x_i(2k-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2k-1))] + \\ & + x_i(2k)(\sigma_i(2m+1) - \sigma_i(2k-1)) \end{aligned}$$

mais comme  $x_i(2) > x_i(4) > \dots > x_i(2k-2) > x_i(2k)$  alors :

$$\begin{aligned} & [(x_i(0), \dots, x_i(2m)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m+1))] < \\ & < x_i(0)(\sigma_i(1) - \sigma_i(T-1)) + x_i(2k)(\sigma_i(2k-1) - \sigma_i(1)) + \\ & + x_i(2k)(\sigma_i(2m+1) - \sigma_i(2k-1)) \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

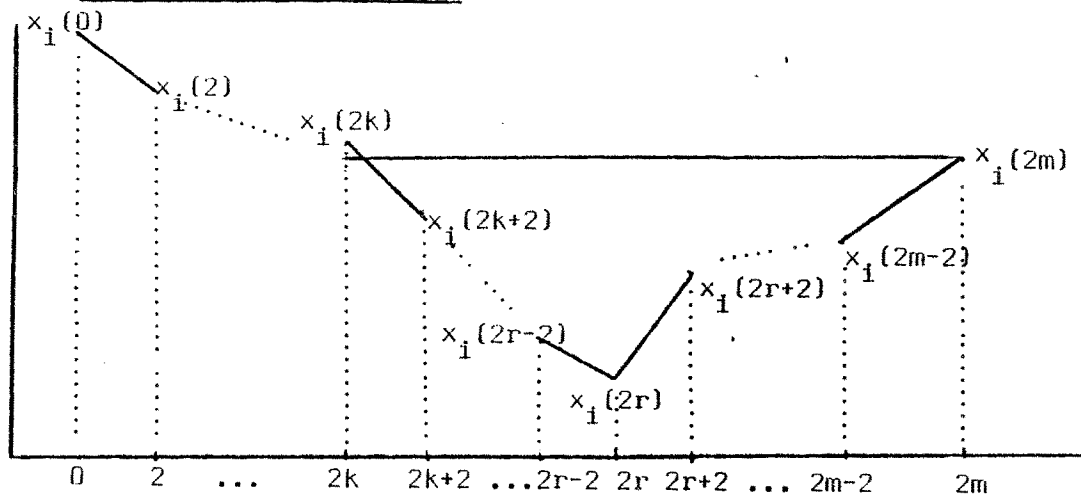
$$\begin{aligned} & \lceil (x_i(0), \dots, x_i(2m)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m+1)) \rceil < \\ & < x_i(0)(\sigma_i(1) - \sigma_i(T-1)) + x_i(2k)(\sigma_i(2m+1) - \sigma_i(1)) \end{aligned}$$

et comme  $x_i(0) > x_i(2k)$  et  $\sigma_i(2m+1) > \sigma_i(1)$  alors :

$$\begin{aligned} & \lceil (x_i(0), \dots, x_i(2m)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m+1)) \rceil < \\ & < x_i(0)(\sigma_i(2m+1) - \sigma_i(1)) \leq 0 \end{aligned}$$


---

Dans le cas plus général :



On déduit une borne du  $\lceil ; \rceil$  en utilisant le lemme-1 pour le vecteur  $(x_i(2k), \dots, x_i(2m))$ , ce qui donne le résultat suivant :

LEMME-2 :

Soit le vecteur  $(x_i(0), \dots, x_i(2m))$  tel que :

$$x_i(0) > x_i(2) > \dots > x_i(2r) < \dots < x_i(2m)$$

avec  $\sigma_i(T-1) > \sigma_i(\ell)$  pour  $\ell \in \{1, \dots, 2m-3\}$

et  $\sigma_i(T-1) \geq \sigma_i(2m-1)$

alors il existe  $k \in \{0, \dots, r-1\}$ , le plus grand entier tel que :

$$\lceil (x_i(0), \dots, x_i(2m-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2m-1)) \rceil <$$

$$< \lceil (x_i(0), \dots, x_i(2k)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(2k-1), \sigma_i(2m-1)) \rceil \leq 0$$

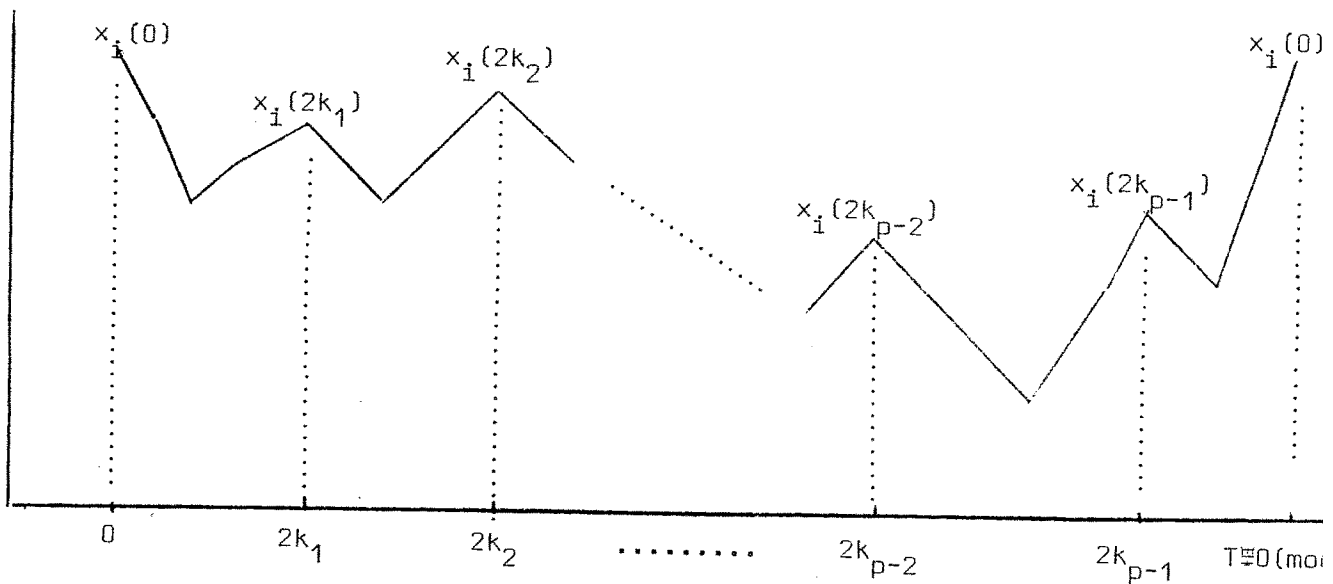


DEMONSTRATION :

directe du lemme-1, en l'appliquant au vecteur  $(x_i(2k), \dots, x_i(2m))$ .

Prenons maintenant le vecteur complet  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$  et supposons qu'il ait  $p$  maxima locaux :

$$\{x_i(0), x_i(2k_1), \dots, x_i(2k_{p-1})\}$$



LEMME-3 :

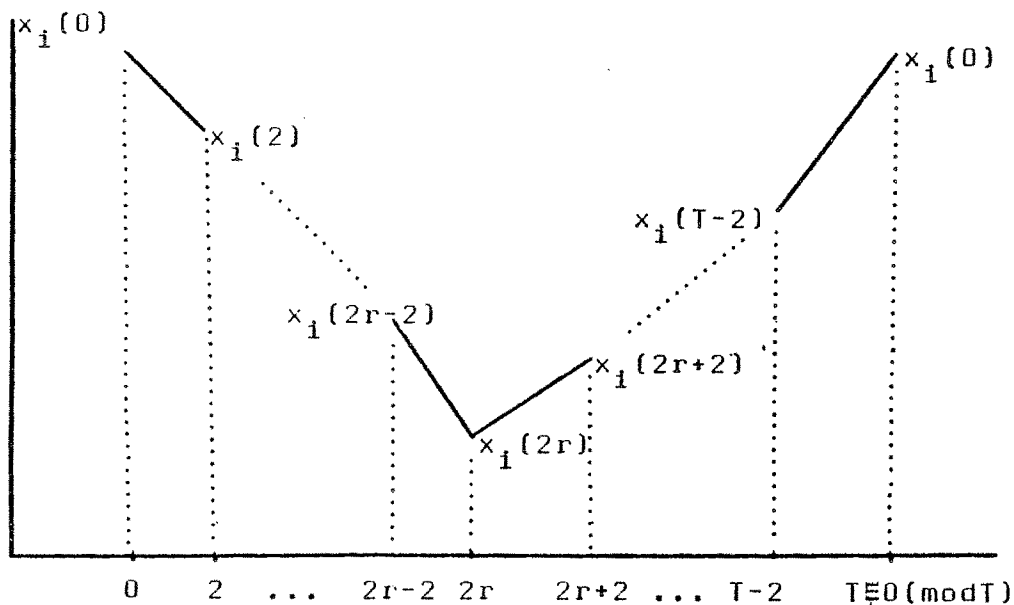
Si le vecteur  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$  admet au moins un maximum local, alors :

$$[(x_i(0), \dots, x_i(T-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] < 0$$

DEMONSTRATION :

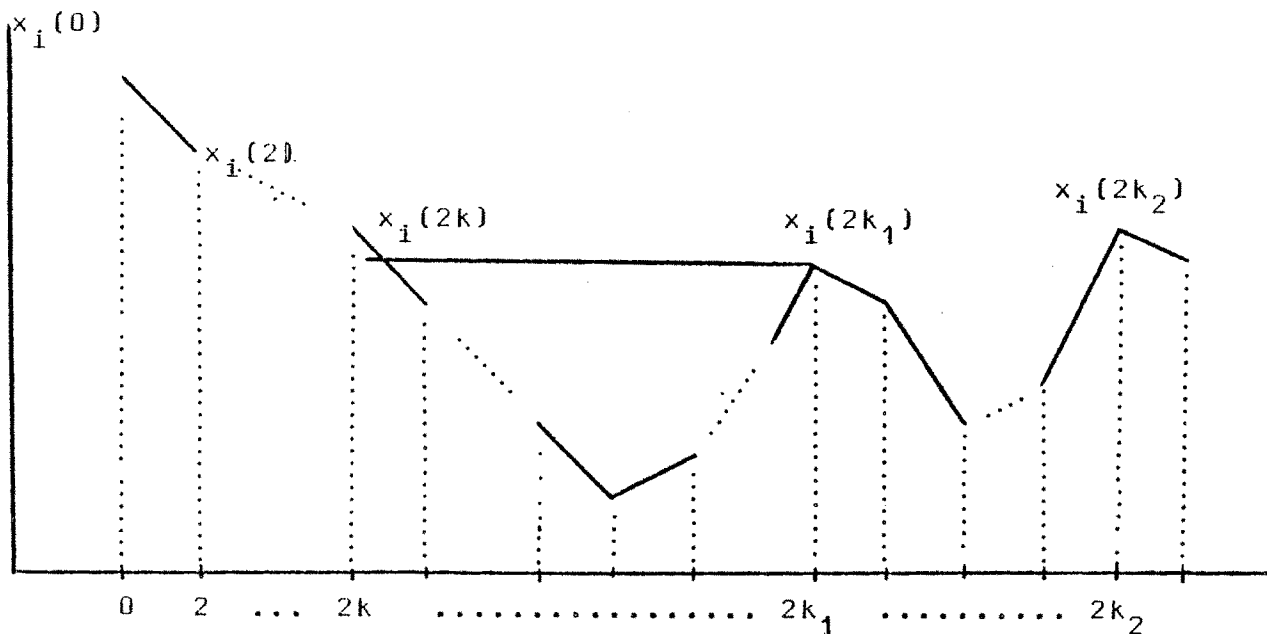
Par récurrence sur le nombre  $p$  des maxima.

Pour  $p = 1$ , il n'y a qu'un maximum local qui est donc  $x_i(0)$  :

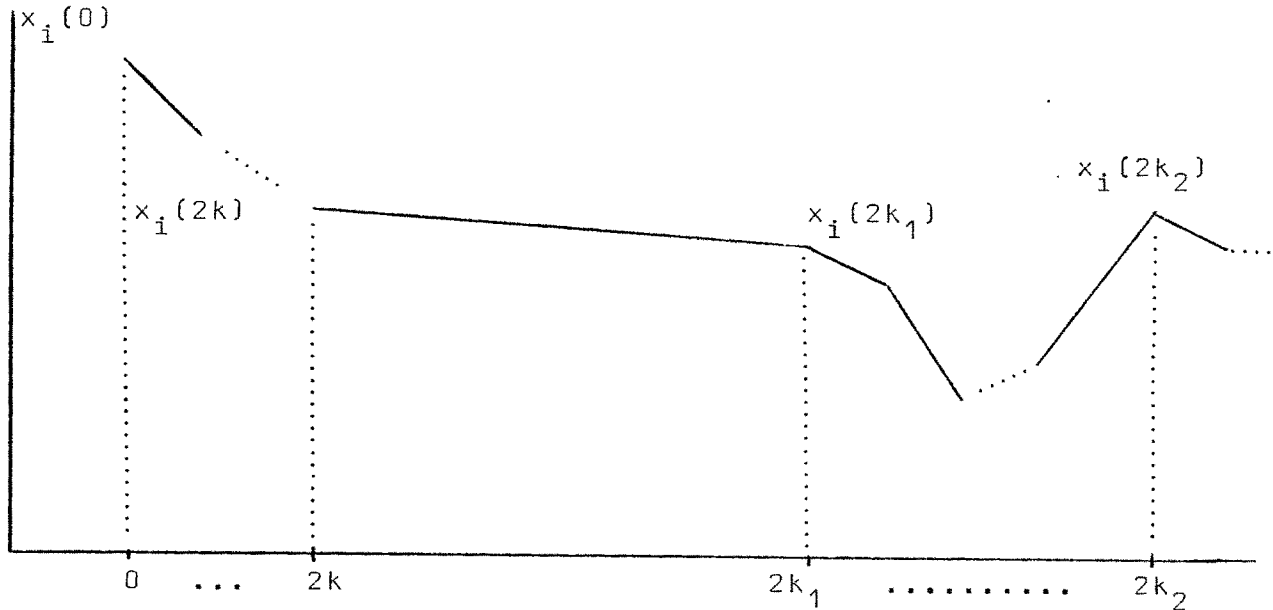


On obtient le résultat directement du lemme-1.

Etant vrai pour  $p$ , on le démontre pour  $p+1$ , en éliminant le maximum local  $x_i(2k_1)$  par utilisation du lemme-2 :



Dans la figure on élimine du [ ; ] le sous-vecteur  $(x_i(2k+2), \dots, x_i(2k_1-1))$  donc on se ramène à la ligne polygonale :



et le nouveau vecteur,  $(x_i(0), \dots, x_i(2k), x_i(2k_1), \dots, x_i(T-2))$ , n'a que  $p$  maxima :

$$\{x_i(0), x_i(2k_2), \dots, x_i(2k_{p-1})\}$$

ce qui démontre le lemme.

Maintenant, en utilisant les propriétés de [ ; ] , on peut énoncer le lemme de base pour la démonstration du théorème :

LEMME-4 :

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\gamma_i \geq 3$ , alors :

$$\Psi(x_i) = \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$$

DEMONSTRATION :

Supposons T pair (pour T impair, la démonstration est analogue), alors on peut écrire :

$$\Psi(x_i) = \Gamma(x_i(0), \dots, x_i(T-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] + \\ + \Gamma(x_i(1), \dots, x_i(T-1)) ; (\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(T-2), \sigma_i(0))]$$

Comme  $\gamma_i \geq 3$ , alors au moins un des deux vecteurs  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$ ,  $(x_i(1), \dots, x_i(T-1))$  n'est pas constant. Supposons  $(x_i(0), \dots, x_i(T-2))$  non constant, donc du lemme-3 :

$$\Gamma(x_i(0), \dots, x_i(T-2)) ; (\sigma_i(T-1), \dots, \sigma_i(T-3), \sigma_i(T-1))] < 0$$

De même, si  $(x_i(1), \dots, x_i(T-1))$  n'est pas constant, de façon similaire aux lemmes 2, 3, 4, on a :

$$\Gamma(x_i(1), \dots, x_i(T-1)) ; (\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(T-2), \sigma_i(0))] < 0$$

Si par contre  $(x_i(1), \dots, x_i(T-1))$  est constant, il est clair que :

$$\Gamma(x_i(1), \dots, x_i(T-1)) ; (\sigma_i(0), \dots, \sigma_i(T-2), \sigma_i(0))] = 0$$

donc on a bien  $\Psi(x_i) < 0$ .

(3.2.) DEMONSTRATION DU THEOREME

Il suffit de remarquer que les lemmes précédents ont servi pour montrer la propriété :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0 \text{ s'il existe } \gamma_i \geq 3$$

dont on peut appliquer la même démonstration du chapitre précédent.

Remarques :

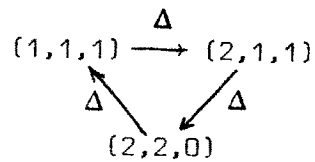
- 1) Si on enlève l'hypothèse de symétrie ( $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ), on peut exhiber des fonctions qui ont, sous l'itération parallèle, des cycles de longueur supérieure à deux. Prenons, par exemple,  $B = \{0,1,2\}$  et l'application  $\Delta$  définie par :

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_2 + 3y_3 < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y_2 + 3y_3 < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

$$\phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_3 < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y_1 + y_3 < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq y_1 + y_3 \end{cases}$$

$$\phi_3(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -y_1 + y_2 < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq -y_1 + y_2 < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq -y_1 + y_2 \end{cases}$$

On a donc le cycle suivant :



- 2) Le théorème reste valable si l'application  $\Delta$  est "décroissante", c'est-à-dire : pour chaque  $i \in \{1,2,\dots,n\}$  :

$$\beta_1^i < \beta_2^i < \dots < \beta_{s_i-1}^i$$

$$\theta_{i_1} > \theta_{i_2} > \dots > \theta_{i_{s_i}}$$

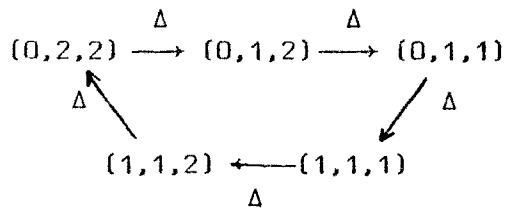
La démonstration est similaire en changeant le sens des inégalités.  
 Par contre, si  $\Delta$  n'est ni croissante, ni décroissante, on peut avoir des cycles plus longs. Par exemple :

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 2 & \text{si } y_2 + y_3 < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y_2 + y_3 < 3 \\ 0 & \text{si } 3 \leq y_2 + y_3 < 5 \\ 3 & \text{si } 5 \leq y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_3 < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y_1 + y_3 < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq y_1 + y_3 \end{cases}$$

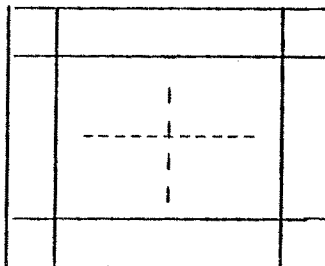
$$\phi_3(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_2 < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq y_1 + y_2 < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq y_1 + y_2 \end{cases}$$

On a donc le cycle suivant :

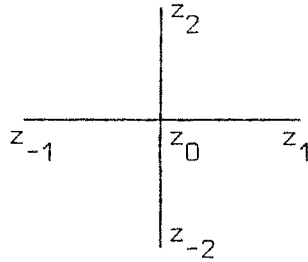


(3.3.) EXEMPLES

Soit l'automate cellulaire "multiseuil" défini par la donnée  $\{T(n,n), V_1\{0,1,2\}, 0, \phi\}$  (cf. paragraphe-5, chapitre-II), où  $T(n,n)$  est une tore  $n \times n$  :



et la fonction locale de transition  $\phi$ , est "à multiseuil", définie sur le voisinage  $V$ . Dans les exemples ci-dessous, on considère seulement le voisinage de Neuman :



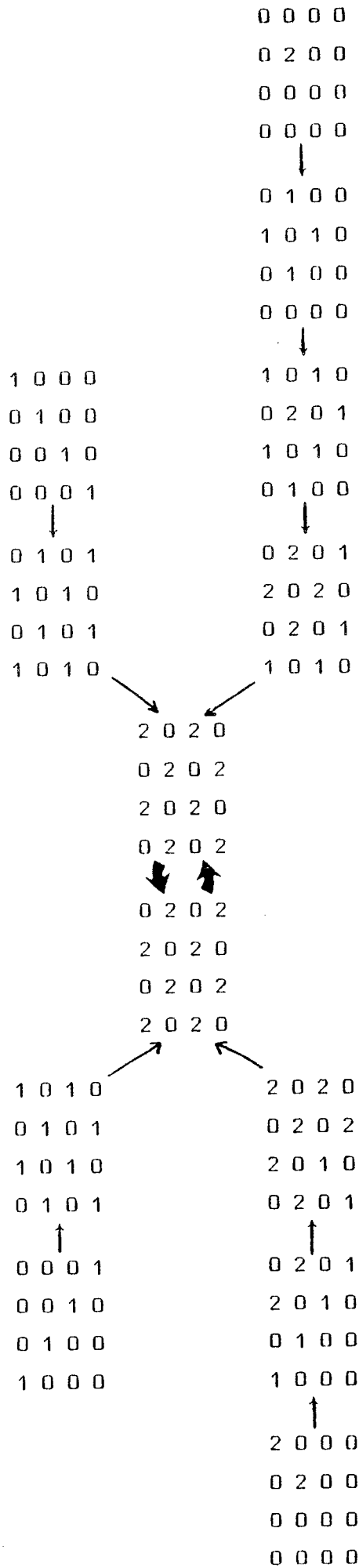
Exemple-1 :

$$\phi(y_{-2}, y_{-1}, y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 < 4 \\ 2 & \text{si } 4 \leq y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 \end{cases}$$

On a l'évolution suivante :

(1)

.75.

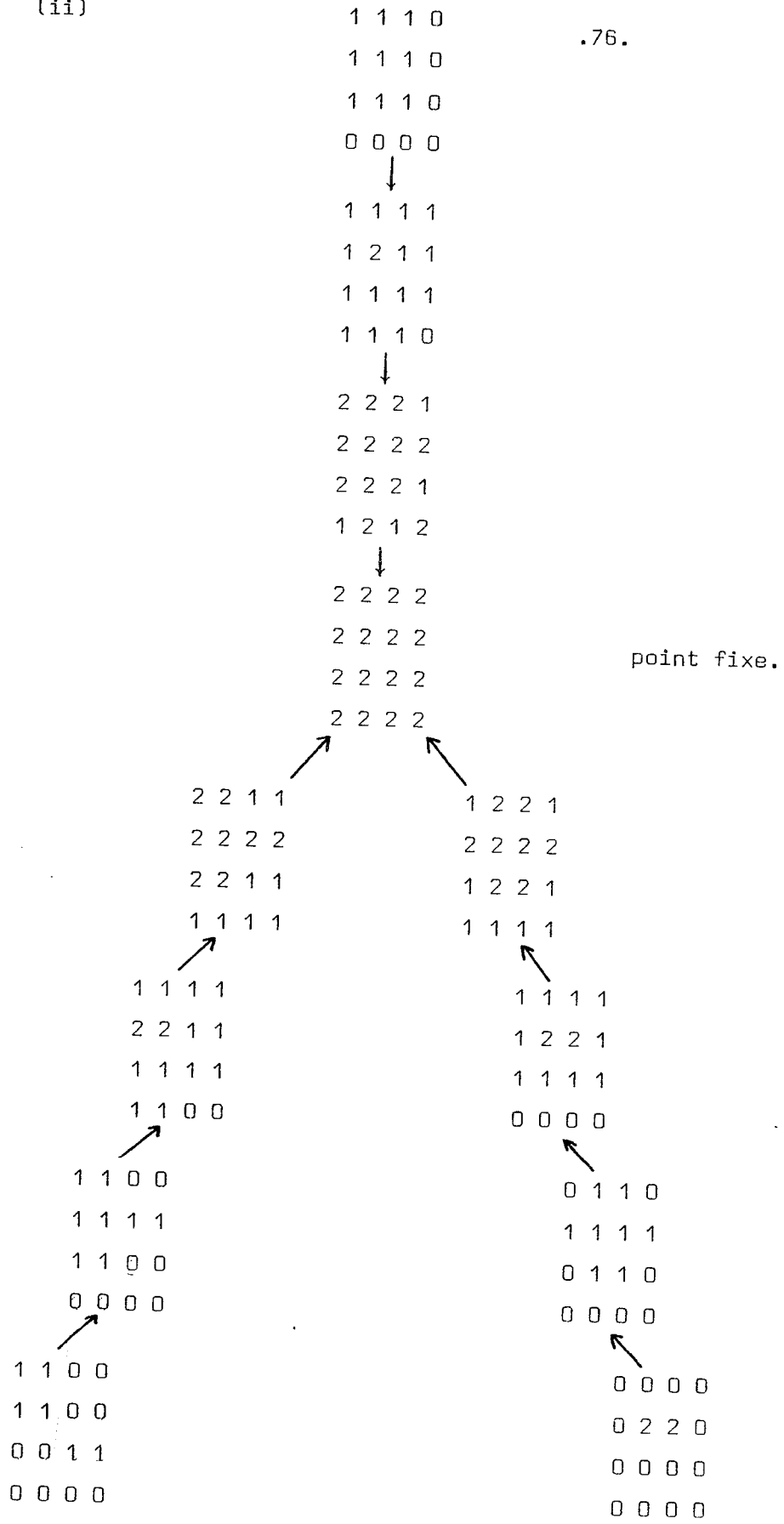


cycle de longueur 2.



(ii)

.76.



Exemple-2

$$\phi(y_{-2}, y_{-1}, y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 < 8 \\ 2 & \text{si } 8 \leq y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 \end{cases}$$

(i)  $\begin{matrix} 2000 & 0101 & 1010 \\ 0200 & 1010 & \leftarrow 0101 \\ 0020 & \rightarrow 0101 & \rightarrow 1010 \\ 0002 & 1010 & 0101 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2022 & 1212 & 2021 & 0202 & 2020 & 0202 \\ 2202 & 2021 & 0202 & 2020 & 0202 & \leftarrow 2020 \\ 2122 & \rightarrow 1212 & \rightarrow 2021 & \rightarrow 0202 & \rightarrow 2020 & \rightarrow 0202 \\ 2222 & 2122 & 1212 & 2021 & 0202 & 2020 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 1222 & 2121 & 1212 & 2121 & 1212 \\ 2222 & \rightarrow 1222 & \rightarrow 2121 & \rightarrow 1212 & \leftarrow 2121 \\ 2222 & 2222 & 1222 & 2121 & \rightarrow 1212 \\ 2222 & 1222 & 2121 & 1212 & 2121 \end{matrix}$

cycles de longueur deux.

(ii)  $\begin{matrix} 0212 & 1111 & 0010 & 0000 & 0000 \\ 2101 & \rightarrow 0111 & \rightarrow 0000 & \rightarrow 0000 & \rightarrow 0000 \\ 1020 & 0101 & 0010 & 0000 & 0000 \\ 0212 & 1010 & 0101 & 0010 & 0000 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2222 & 2112 & 1111 & 1111 \\ 2112 & \rightarrow 1111 & \rightarrow 1111 & \rightarrow 1111 \\ 2222 & 2112 & 1111 & 1111 \\ 2222 & 2222 & 2112 & 1111 \end{matrix}$

points fixes.



**CHAPITRE IV**

**COMPORTEMENT PERIODIQUE DE FONCTIONS  
A SEUIL BINAIRES AVEC MEMOIRE**



IV - COMPORTEMENT PERIODIQUE DE FONCTIONS A SEUIL BINAIRES AVEC MEMOIRE

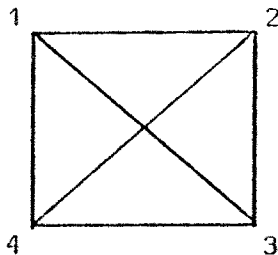
Nous étudions ici le comportement périodique d'un réseau symétrique de fonctions à seuil binaires où l'état de chaque cellule, à l'étape  $t+1$ , dépend des  $k$  derniers états du réseau (cas particulier d'un modèle proposé par Caianello [4]). Dans ce contexte, nous démontrons comment la longueur des cycles dépend du nombre de pas de mémoire. Plus précisément que l'itération avec  $k$  pas de mémoire aboutit, pour une condition initiale quelconque, à un cycle dont la période  $T$  divise  $k+1$ . De plus, étant donné  $k, n \in \mathbb{N}$ , on peut toujours exhiber un réseau symétrique de  $n$  fonctions à seuil, tel que la borne supérieure,  $k+1$ , soit atteinte.

On va illustrer la dépendance de l'itération par rapport à la mémoire par l'exemple suivant :

Prenons l'application  $\Delta$  définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 y_j(\ell) < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

qu'on peut représenter sur le graphe suivant :



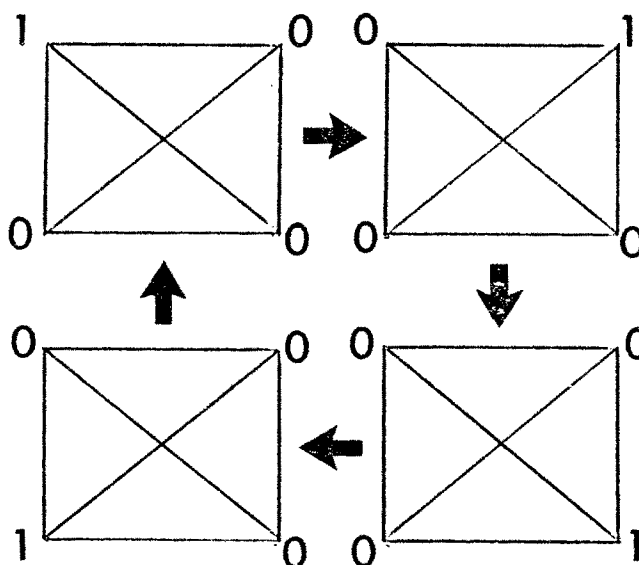
où chaque composante dépend de ses voisins selon l'application précédente.

Si on prend par exemple  $\theta_i = 3$  pour  $i \in \{1,2,3,4\}$ , il est facile de voir qu'il n'y a que deux points fixes  $\vec{0}$  et  $\vec{1}$ .

D'autre part, si on prend, pour la même fonction, trois pas de mémoire :

$$y_i(\ell+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (y_j(\ell) + y_j(\ell-1) + y_j(\ell-2)) < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\theta_i = 3$  pour tout  $i \in \{1,2,3,4\}$ , on a le cycle suivant :



Donc l'itération avec  $k$  pas de mémoire (bien entendu  $k \geq 2$ ) permet d'avoir un comportement cyclique moins trivial que dans le cas  $k=1$  (où l'on a au plus des cycles de longueur 2 (cf. Chapitres II et III)).

#### (4.1) ENONCE DU PROBLEME

Soit  $B = \{0,1\}$  ; considérons l'application :

$$\Delta : B^n \rightarrow B^n$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow (\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$$

avec :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\theta_i, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , on va étudier le comportement cyclique de l'itération avec  $k$  pas de mémoire :

$$\vec{y}(\ell+1) = \Delta \left( \sum_{r=\ell}^{\ell-k+1} \vec{y}(r) \right)$$

avec  $\vec{y}(1), \dots, \vec{y}(k) \in B^n$  donnés.

Ceci est équivalent à écrire :

$$y_i^{(\ell+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (y_j^{(\ell)} + \dots + y_j^{(\ell-k+1)}) < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est intéressant de remarquer que le fait de prendre  $k$  pas de mémoire simule "l'expérience" mémorisée par chaque composante du réseau. Par exemple, pour un réseau d'amitié (voir Chapitre II), chaque individu, avant de réagir, se souvient et prend en compte ce que lui et ses voisins ont fait aux  $k$  étapes précédentes.

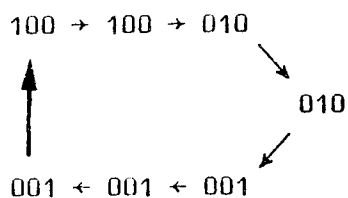
Exemples :

(i)  $n=3, k=6$

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_2 + y_3 < 5 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad \phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_3 < 5 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_3(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_2 < 4 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a le cycle de longueur  $k+1 = 7$  :



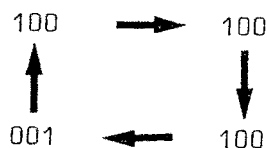
(ii)  $n=3, k=3$

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_3 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad \phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_3 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_3(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_2 < 3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



On a le cycle de longueur  $k+1 = 4$  :



Ces deux exemples montrent d'une part qu'on peut avoir des cycles plus longs que deux (à la différence du cas où  $k=1$ ) et d'autre part qu'il peut y avoir des configurations qui restent invariants pendant un certain nombre d'étapes et qui changent ensuite (situation qui, dans le cas  $k=1$ , est impossible). Plus précisément, il est facile de voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une configuration reste stable (sous l'itération avec  $k$  pas de mémoire) est qu'elle se répète  $k+1$  fois consécutives.

#### (4.2) CARACTERISATION DE LONGUEUR DES CYCLES

Du fait que  $k$  et  $n$  sont deux entiers finis, l'itération avec  $k$  pas de mémoire aboutit nécessairement à un régime stationnaire. C'est-à-dire que pour tout ensemble de  $k$  vecteurs de départ  $\{\vec{y}(1), \dots, \vec{y}(k)\}$ , il existe  $s, T \in \mathbb{N}$  tel que la suite des itérés :

$$\{\vec{y}(s), \dots, \vec{y}(s+T-1)\}$$

se répète indéfiniment avec sa période  $T$  :

$$\vec{y}(s) = \Delta \left( \sum_{r=1}^k \vec{y}(s+T-r \pmod{T}) \right)$$

$$\vec{y}(s+l) = \Delta \left( \sum_{r=1}^k \vec{y}(s+l-r \pmod{T}) \right) \quad \& \in \{1, \dots, T-1\}$$

d'où l'on peut définir, pour chaque ensemble de  $k$  vecteurs de départ  $\{\vec{y}(1), \dots, \vec{y}(k)\}$ , la matrice des états en régime stationnaire :

$$X(\vec{y}(1), \dots, \vec{y}(k); T) = \begin{pmatrix} x_1(0) & \dots & x_1(T-1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n(0) & \dots & x_n(T-1) \end{pmatrix} = (\vec{y}(s), \vec{y}(s+1), \dots, \vec{y}(s+T-1))$$

Comme au chapitre-II, soit  $x_i$  la  $i$ -ème ligne et  $x(\ell)$  la  $\ell$ -ème colonne de la matrice  $X(\hat{y}(1), \dots, \hat{y}(k); T)$ . Il est donc clair que pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$x_i(0) = \phi_i \left( \sum_{r=1}^k x(T-r) \right)$$

$$x_i(\ell+1) = \phi_i \left( \sum_{r=0}^{k-1} x(\ell-r) \right) \quad \ell \in \{0, \dots, T-2\}$$

(les indices sont pris mod T).

Soit  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'ensemble des lignes de la matrice  $X$  et  $\gamma_i$  la période de la ligne  $x_i$  ( $\gamma_i$  divise  $T$ ).

Soit  $L$  l'opérateur :

$$L : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_i, x_j) \longmapsto \alpha_{ij} \sum_{\ell=0}^{T-1} (\sigma_j(\ell+1, \dots, \ell+k) - \sigma_j(\ell-1, \dots, \ell-k)) x_i(\ell)$$

où  $\sigma_j(\ell_1, \dots, \ell_k) = \sum_{s=1}^k x_j(\ell_s)$  et les indices sont pris module  $T$ .

LEMME-1 :

- (i)  $L(x_i, x_j) + L(x_j, x_i) = 0$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$
- (ii) Si  $\gamma_i$  divise  $k+1 \Rightarrow L(x_i, x_j) = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

Démonstration :

(i) immédiat.

(ii) Si  $\gamma_i$  divise  $k+1$  on a  $k+1 = \theta \gamma_i, \theta \in \mathbb{N}$  et comme  $\gamma_i$  divise  $T$  on a aussi  $T = \beta \gamma_i, \beta \in \mathbb{N}$ .

Prenons les ensembles d'indices :

$$C_s = \{s, \gamma_i + s, 2\gamma_i + s, \dots, (\beta-1)\gamma_i + s\} ; s \in \{0, \dots, \gamma_i - 1\}$$

On a donc :

$$L(x_i, x_j) = \alpha_{ij} \sum_{s=0}^{\gamma_i-1} \sum_{\ell \in C_s} (\sigma_j(\ell+1, \dots, \ell+k) - \sigma_j(\ell-1, \dots, \ell-k)) x_i(\ell)$$

Si on écrit :

$$\psi_{is} = \sum_{\ell \in C_s} (\sigma_j(\ell+1, \dots, \ell+k) - \sigma_j(\ell-1, \dots, \ell-k)) x_i(\ell)$$

on a  $L(x_i, x_j) = \alpha_{ij} \sum_{s=0}^{\gamma_i-1} \psi_{is}$

On va donc étudier chaque terme  $\psi_{is}$ .

Comme  $x_i$  est une ligne de période  $\gamma_i$ ,  $x_i(\ell)$  est une constante pour tout  $\ell \in C_s$ . Si  $x_i(s) = 0$ , alors  $\psi_{is} = 0$ . Supposons donc  $x_i(s) = 1$ .

Si on décompose  $\psi_{is}$  :

$$\begin{aligned} \psi_{is} = & \sigma_j(s+1, \dots, s+k) - \sigma_j(s-1, \dots, s-k) + \\ & + \sigma_j(\gamma_i+s+1, \dots, \gamma_i+s+k) - \sigma_j(\gamma_i+s-1, \dots, \gamma_i+s-k) + \\ & + \sigma_j((\beta-1)\gamma_i+s+1, \dots, (\beta-1)\gamma_i+s+k) - \sigma_j((\beta-1)\gamma_i+s-1, \dots, (\beta-1)\gamma_i+s-k). \end{aligned}$$

Il suffit de démontrer que, étant donné  $r_1 \gamma_i + s \in C_s$ , il existe  $r_2 \gamma_i + s \in C_s$  tel que :

$$\sigma_j(r_1 \gamma_i + s + 1, \dots, r_1 \gamma_i + s + k) = \sigma_j(r_2 \gamma_i + s - 1, \dots, r_2 \gamma_i + s - k).$$

Ca suffit donc, étant donné  $r_1 \in \{0, \dots, \beta-1\}$ , de prendre  $r_2 = r_1 + \theta \pmod{\beta}$  ce qui implique  $\psi_{is} = 0$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\gamma_i$  ne divise pas  $k+1$ , et définissons :

$$\text{supp}(x_i) = \{\ell \in \{0, \dots, T-1\} \mid x_i(\ell) = 1\}$$

et construisons la partition  $\{C_i^s\}_{s=0}^P$ , de  $\text{supp}(x_i)$ , suivante :

1°) Construction de  $C_i^0$  :

\* S'il n'existe pas  $\ell \in \{0, \dots, T-1\}$  tel que :

$$\{\ell, \ell+k+1, \ell+2(k+1), \dots, \ell-k-1\} \subset \text{supp}(x_i)$$

on fait  $C_i^0 = \phi$ .

\* Sinon, soit  $\ell_0 \in \{0, \dots, T-1\}$  le premier indice tel que :

$$\{\ell_0, \ell_0+k+1, \dots, \ell_0-k-1\} \subset \text{supp}(x_i)$$

et construisons les ensembles suivants :

$$\begin{cases} A_0 = \{\ell_0, \ell_0+k+1, \dots, \ell_0-k-1\} \\ A_r = \{\ell_r, \ell_r+k+1, \dots, \ell_r-k-1\} ; r \in \{1, \dots, q\} \end{cases}$$

où  $\ell_r \in \{0, \dots, T-1\} \setminus \bigcup_{s=0}^{r-1} A_s$  ;  $\ell_r = \ell_{r-1} + \omega \pmod{T}$

est le premier indice qu'on trouve tel que :

$$\{\ell_r, \ell_r+k+1, \dots, \ell_r-k-1\} \subset \text{supp}(x_i).$$

Finalement, on fait :

$$C_i^0 = \bigcup_{r=0}^q A_r$$

2°) Construction de  $C_i^s$ ,  $s > 0$  :

Comme  $\gamma_i$  ne divise pas  $k+1$ , il est facile de voir qu'il existe toujours  $\ell \in \text{supp}(x_i)$  tel que  $x_i(\ell-k-1) = 0$ .

Construisons donc les ensembles  $\{C_i^s\}_{s \geq 1}$  de la manière suivante :

$$C_i^1 = \{\ell_1 + (k+1)r \in \text{supp}(x_i) / r=0, \dots, q_1\}$$

avec  $\ell_1 \in \text{supp}(x_i)$ , l'indice le plus petit qui vérifie  $x_i(\ell_1-k-1) = 0$  et  $q_1$  le premier qu'on trouve tel que  $x_i(\ell_1 + (k+1)(q_1+1)) = 0$

Pour  $s > 1$  :

$$C_i^s = \{\ell_s + (k+1)r \in \text{supp}(x_i) / r=0, \dots, q_s\}, s \in \{2, \dots, p\}$$

avec  $\ell_s = \ell_{s-1} + \omega \pmod{T} \notin \{\ell_1, \dots, \ell_{s-1}\}$ , le premier indice qu'on trouve tel que  $x_i(\ell_s - k - 1) = 0$  et  $q_s$  tel que  $x_i(\ell_s + (k+1)(q_s + 1)) = 0$ .

Exemples :

$k = 3 :$

$\ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_i$	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0

$$A_0 = \{1, 5, 9, 13\}$$

$$A_1 = \{2, 6, 10, 14\}$$

$$C_i^0 = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$$

$$C_i^1 = \{3, 7, 11\}$$

$k = 4 :$

$\ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i$	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0

$$C_i^0 = \phi ; C_i^1 = \{5, 10, 2, 7\}$$

$$C_i^2 = \{9\} ; C_i^3 = \{11, 3\}$$

LEMME-2 : Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\gamma_i$  ne divise pas  $k+1$ , alors :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$$

Démonstration : De la partition du  $\text{supp}(x_i)$ , on déduit :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{s=0}^p \sum_{\ell \in C_i^s} (\sigma_j(\ell+1, \dots, \ell+k) - \sigma_j(\ell-1, \dots, \ell-k))$$

Appelons  $\psi_{is} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sum_{\ell \in C_i^s} (\sigma_j(\ell+1, \dots, \ell+k) - \sigma_j(\ell-1, \dots, \ell-k))$

Il est immédiat, par la construction de  $C_i^0$ , que  $\psi_{i0} = 0$ . Prenons donc  $s > 0$  :

Du fait que  $\gamma_i$  ne divise pas  $k+1$ , au moins l'ensemble  $C_i^1$  est non vide.

On peut donc écrire :

$$\psi_{is} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sigma_j(\ell_s + q_s(k+1)+1, \dots, \ell_s + q_s(k+1)+k) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sigma_j(\ell_s - 1, \dots, \ell_s - k)$$

et par définition de  $\sigma_j$  :

$$\begin{aligned} \psi_{is} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} [x_j(\ell_s + q_s(k+1)+1) + \dots + x_j(\ell_s + q_s(k+1)+k)] - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} [x_j(\ell_s - 1) + \dots + x_j(\ell_s - k)] \end{aligned}$$

Mais, par construction de  $C_i^s$ , on a :

$$x_i(\ell_s + q_s(k+1)+k+1) = 0 \quad \text{et} \quad x_i(\ell_s) = 1$$

Donc, de la définition de  $\phi_i$  et de l'itération on tire :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} [x_j(\ell_s - 1) + \dots + x_j(\ell_s - k)] \geq \theta_i$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} [x_j(\ell_s + q_s(k+1)+1) + \dots + x_j(\ell_s + q_s(k+1)+k)] < \theta_i$$

ce qui implique  $\psi_{is} < 0$ .

Donc, on a bien  $\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$ .

---

Maintenant, en utilisant les lemmes un et deux, nous sommes en mesure de caractériser la longueur des cycles :

THEOREME-1 : Etant donné les vecteurs de départ  $\vec{y}(1), \dots, \vec{y}(k) \in B^n$  quelconques, l'itération à k pas de mémoire conduite sur  $\Delta$ , aboutit à un cycle dont la période T divise k+1.

Démonstration : Supposons que T ne divise pas k+1, alors il existe une ligne de  $X(\vec{y}(1), \dots, \vec{y}(k); T)$  telle que sa période ne divise pas k+1.

Le reste est analogue, via lemmes 1 et 2, à la démonstration du Théorème (1, Chap. II).

---

#### (4.3) UNE FAMILLE DES FONCTIONS QUI ADMET DES CYCLES DE LONGUEUR k+1

On va voir ici que, étant donné n et  $k \in \mathbb{N}$ , il est toujours possible de construire une application  $\Delta$  de  $B^n$  dans lui-même telle que l'itération avec k pas de mémoire conduite sur  $\Delta$  admette au moins un cycle de longueur k+1. Ceci montre donc que la borne, k+1, donnée par le théorème précédent, est atteinte.

LEMME-3 : Soient n, k  $\in \mathbb{N}$  alors :

(i) Si  $k = \alpha n + r$ ,  $\alpha \geq 1$  ;  $r \in \{0, \dots, n-1\}$ , alors l'application à seuil définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j < k - \alpha \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, r\}$$

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j < k - \alpha + 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{r+1, \dots, n-1\}$$

$$\phi_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{n-1} y_j < k-\alpha \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet, sous l'itération avec k pas de mémoire, au moins un cycle de longueur k+1.

(ii) Si  $1 \leq k < n$ , alors l'application à seuil définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j < k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, k+1\}$$

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j < k+1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{k+2, \dots, n\}$$

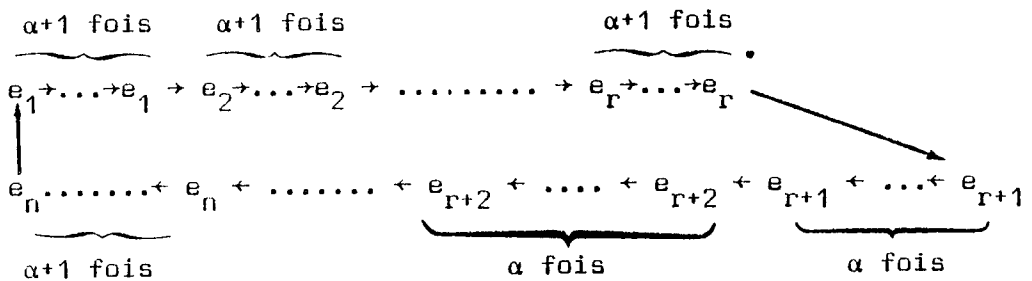
admet au moins un cycle de longueur k+1.

Démonstration :

(i) Il suffit de prendre les vecteurs :

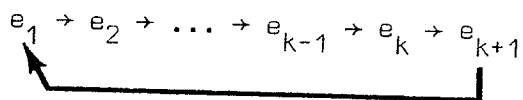
$$\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{\alpha+1 \text{ fois}} \quad \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{\alpha+1 \text{ fois}} \quad \dots \quad \underbrace{e_r, \dots, e_r}_{\alpha+1 \text{ fois}} \quad \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_{r+1}}_{\alpha \text{ fois}} \quad \dots \quad \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{\alpha \text{ fois}}$$

où  $e_i$  est l'i-ème vecteur de base, pour avoir le cycle de longueur k+1 :



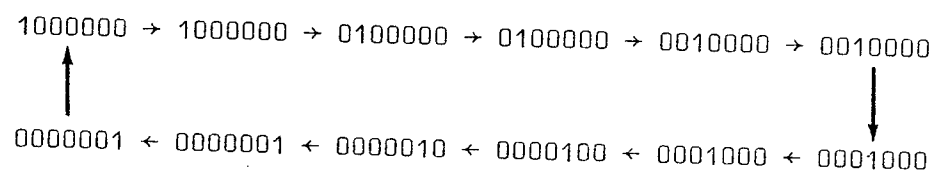


(ii) Il suffit de prendre, comme vecteurs initiaux  $e_1, \dots, e_k$ , pour avoir le cycle :



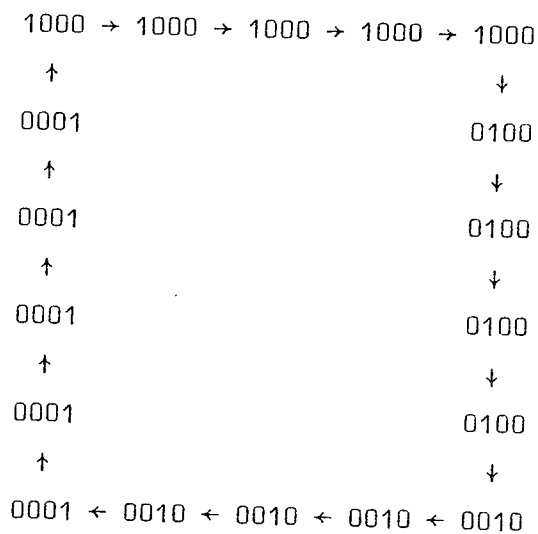
Exemples :

1)  $n=7, k=11 ; k=7+4$



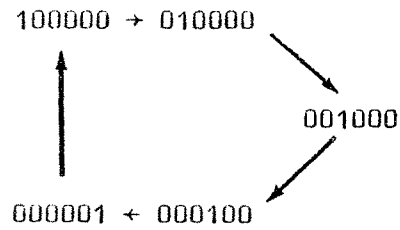
cycle de longueur 12

2)  $n=4 ; k=17 ; k=4 \times 4 + 1$



cycle de longueur 18.

3)  $n=6, k=4$



cycle de longueur 5.

#### (4.4) FONCTIONS A SEUIL NON SYMETRIQUES

Comme dans les chapitres précédents du moment où l'on enlève l'hypothèse de symétrie, le théorème n'est plus valable. Une famille de contre-exemples est la suivante :

Soit  $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$  ; considérons  $\Delta$  définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_{i-1} < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{2, \dots, k\}$$

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_k < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on prend l'itération avec  $k$  pas de mémoire sur  $\Delta$ , on peut exhiber des cycles assez longs. Plus précisément, il existe au moins un cycle de longueur :

$$\frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$$

Pour ceci, il faut prendre les  $k$  vecteurs de départ comme ci-dessous :

Soit  $A_k = (a_{ij}) \in M_{k \times k}(0,1)$  telle que :

$$* a_{i1} = 1 \text{ pour } i \in \{1, \dots, k\}$$

$$* a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < \frac{(j-1)(j+2)}{2} + 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad j \in \{2, \dots, k\}$$

Exemples :

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on prend les k vecteurs de départs :

$$\vec{y}(\ell) = a_\ell, \quad \ell = \{1, \dots, k\}$$

par exemple pour k=4 :

$$\begin{array}{cccc} 1000 & \rightarrow & 1000 & \rightarrow & 1100 & \rightarrow & 1100 \\ & & \uparrow & & & & \downarrow \\ 0001 & & & & & & 0100 \\ & & \uparrow & & & & \downarrow \\ 0010 & \leftarrow & 0010 & \leftarrow & 0110 & \leftarrow & 0110 \end{array}$$

cycle de longueur 10.

---

CHAPITRE V

ITERATION SERIE CONDUITE  
SUR UNE FONCTION A SEUIL



V - ITERATION SERIE CONDUITE SUR UNE FONCTION A SEUIL

Soit  $B = \{0,1\}$  et l'application  $\Delta$  :

$$\Delta : B^n \rightarrow B^n$$

$$y \rightarrow (\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$$

où chaque composante  $\phi_i$  est une fonction à seuil définie comme dans les chapitres précédents (poids  $\alpha_{ij}$  symétriques,  $\alpha_{ij}$  et  $\theta_i$  réels).

On va étudier ici le comportement de l'itération "série" conduite sur  $\Delta$  :

$$y_1^{(\ell+1)} = \phi_1(y_1^{(\ell)}, \dots, y_n^{(\ell)})$$

$$y_2^{(\ell+1)} = \phi_2(y_1^{(\ell+1)}, y_2^{(\ell)}, \dots, y_n^{(\ell)})$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$y_i^{(\ell+1)} = \phi_i(y_1^{(\ell+1)}, \dots, y_{i-1}^{(\ell+1)}, y_i^{(\ell)}, \dots, y_n^{(\ell)})$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$y_n^{(\ell+1)} = \phi_n(y_1^{(\ell+1)}, \dots, y_{n-1}^{(\ell+1)}, y_n^{(\ell)})$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots; \vec{y}(0) \in B^n$$

Il est important de signaler que chaque permutation des indices  $\{1, \dots, n\}$  définie une itération série différente, donc il y a en fait  $n!$  procédés série possibles.

Il est évident que dans l'itération série on obtient les mêmes points fixes que dans l'itération parallèle, mais ceci mis à part le comportement itératif de l'une et de l'autre est, en général; assez différent. On va illustrer ceci par l'exemple suivant :

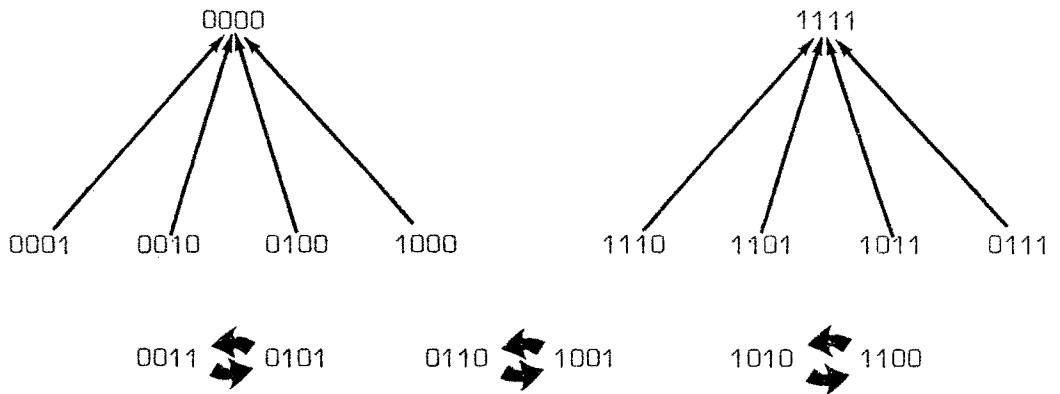
Prenons  $\Delta$  de  $B^4$  dans lui-même avec :

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_2 + y_3 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad ; \qquad \phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_3 + y_4 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

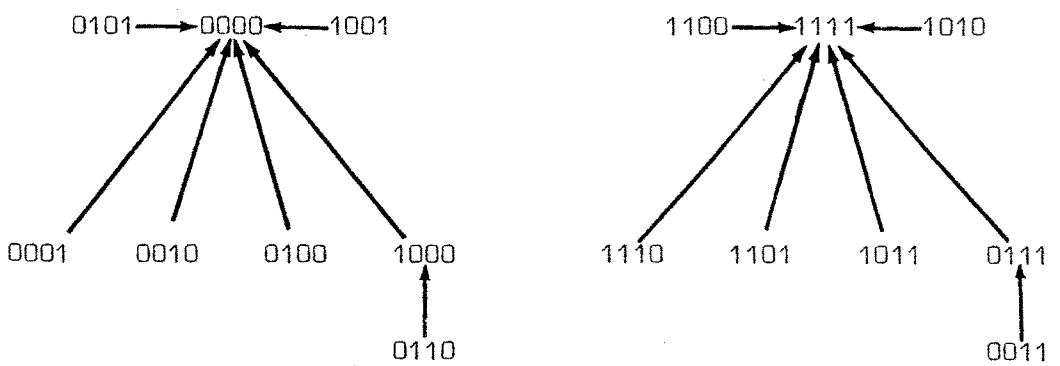
$$\phi_3(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 + y_2 + y_4 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \phi_4(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_2 + y_3 + y_4 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient pour chacune des itérations le graphe d'évolution suivant :

Itération Parallèle :



Itération Série :



On voit, sur cet exemple, que sous l'itération série il y a un éclatement de toutes les composantes cycliques de l'itération parallèle, phénomène que n'est pas généralisable à beaucoup de fonctions booléennes [27].

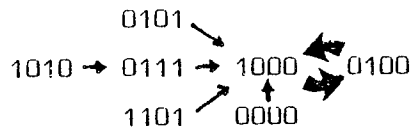
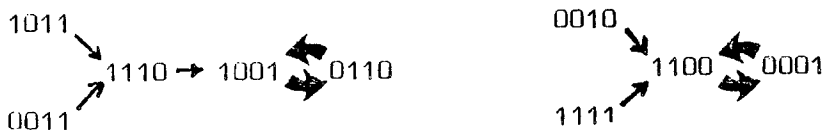
D'autre part, le comportement exhibé ci-dessus n'est pas toujours le même (du point de vue états stationnaires), par exemple si :

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad \phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2y_2 + y_1 + y_3 + y_4 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

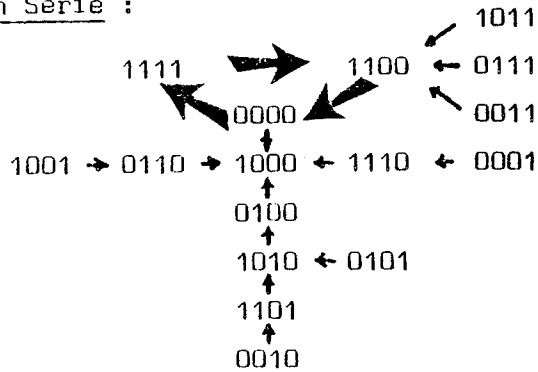
$$\phi_3(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2y_3 + y_1 + y_2 + y_4 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \phi_4(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2y_4 + y_1 + y_2 + y_3 < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a l'évolution suivante :

Itération Parallèle :



Itération Série :



On voit donc que l'itération série peut avoir des cycles, même de longueur supérieure à deux.

Il faut remarquer que dans ce dernier exemple les poids de la diagonale sont négatifs ( $\alpha_{ii} = -2$ ), fait qui sera assez important, comme on verra ci-dessous, pour que l'itération série ait des cycles.

Dans le contexte précédent, nous donnerons une condition suffisante pour que l'itération série conduite sur  $\Delta$  n'ait que des points fixes et nous illustrerons ce résultat par des exemples inspirés du problème de verres de spin [6,11,28].



(5.1) COMPORTEMENT CYCLIQUE DE L'ITERATION SERIE CONDUITE SUR  $\Delta$

Avec les notations précédentes, l'itération série conduite sur  $\Delta$  peut s'écrire :

$$y_i(\ell+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j(\ell+1) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} y_j(\ell) < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Comme  $B^n$  est un ensemble fini, pour tout vecteur initial  $\vec{y}(0) \in B^n$ , il existe  $s, T \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 1$ ,  $T > 0$  tel que :

$$\vec{y}(s+T) = \vec{y}(s), \quad \text{où } T \text{ est la période.}$$

Ceci permet, comme aux chapitres précédents, d'écrire la matrice  $n \times T$  :

$$X(\vec{y}(0); T) = \begin{pmatrix} x_1(0) & \dots & x_1(T-1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n(0) & \dots & x_n(T-1) \end{pmatrix} = (\vec{y}(s), \vec{y}(s+1), \dots, \vec{y}(s+T-1))$$

On a donc, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$x_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j(0) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j(T-1) < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour  $\ell \in \{0, \dots, T-2\}$  :

$$x_i(\ell+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j(\ell+1) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j(\ell) < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $S$  dénote l'ensemble des lignes de  $X$ , soit l'opérateur :

$$L : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_i, x_j) \rightarrow L(x_i, x_j)$$

$$L(x_i, x_j) = \begin{cases} \alpha_{ij} \sum_{\ell=0}^{T-1} x_i(\ell) (x_j(\ell+1) - x_j(\ell)) & \text{si } j \leq i-1 \\ 0 & \text{si } j = i \\ \alpha_{ij} \sum_{\ell=0}^{T-1} x_i(\ell) (x_j(\ell) - x_j(\ell-1)) & \text{si } j \geq i+1 \end{cases}$$

En notant  $\gamma_i$  la période de la ligne  $x_i$  (nécessairement  $\gamma_i$  divise  $T$ ) on a le lemme suivant :

LEMME-1 : (i)  $L(x_i, x_j) + L(x_j, x_i) = 0$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$   
 (ii) Si  $\gamma_i = 1$  alors  $L(x_i, x_j) = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

Démonstration :

(i) Si  $j < i$  (pour  $j > i$  est pareille), on a :

$$\begin{aligned} L(x_i, x_j) &= \alpha_{ij} \sum_{\ell=0}^{T-1} x_i(\ell)(x_j(\ell+1) - x_j(\ell)) \\ &= \alpha_{ij} \left[ \sum_{\ell=0}^{T-1} x_i(\ell-1)x_j(\ell) - \sum_{\ell=0}^{T-1} x_i(\ell)x_j(\ell) \right] \\ &= -\alpha_{ij} \sum_{\ell=0}^{T-1} x_j(\ell)(x_i(\ell) - x_i(\ell-1)) \\ &= -L(x_j, x_i) \end{aligned}$$

(ii) est évident.

Etant donnée une ligne  $x_i$  telle que  $\gamma_i \geq 2$ , notons :

$$\text{supp}(x_i) = \{\ell \in \{0, \dots, T-1\} / x_i(\ell) = 1\}$$

et construisons la partition de  $\text{supp}(x_i)$  :

$$C_1 = \{\ell_1 + s / \ell_1 + s \in \text{supp}(x_i), s = 0, \dots, q_1\}$$

où  $\ell_1 \in \text{supp}(x_i)$ , est le premier indice qu'on trouve tel que  $x_i(\ell_1 - 1) = 0$  et  $q_1$  le premier tel que  $x_i(\ell_1 + q_1 + 1) = 0$ .

De manière analogue, pour  $r \in \{2, \dots, p\}$

$$C_r = \{\ell_r + s / \ell_r + s \in \text{supp}(x_i), s = 0, \dots, q_r\}$$

où  $\ell_r = \ell_{r-1} + \omega \pmod{T} \in \text{supp}(x_i) \setminus \{\ell_{r-1}, \dots, \ell_1\}$ , est le premier indice qu'on trouve tel que  $x_i(\ell_r - 1) = 0$  et  $q_r$  le premier tel que  $x_i(\ell_r + q_r + 1) = 0$ .

Il est évident que cette partition existe du fait que  $\gamma_i \geq 2$ .

Exemple :

$\ell$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_i$	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0

$$C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{4\}, C_3 = \{6,7,8,9\}$$

LEMME-2 : Soit  $x_i \in S$  tel que  $\gamma_i \geq 2$ , alors, si  $\alpha_{ii} \geq 0$  :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$$

Démonstration : De la partition de  $\text{supp}(x_i)$  on déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \sum_{r=1}^p \sum_{\ell \in C_r} (x_j^{(\ell+1)} - x_j^{(\ell)}) + L(x_i, x_i) + \\ &+ \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \sum_{r=1}^p \sum_{\ell \in C_r} (x_j^{(\ell)} - x_j^{(\ell-1)}) \end{aligned}$$

comme  $C_r = \{\ell_r, \ell_r+1, \dots, \ell_r+q_r\}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) &= \sum_{r=1}^p \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \sum_{s=0}^{q_r} (x_j^{(\ell_r+s+1)} - x_j^{(\ell_r+s)}) + \\ &+ \sum_{r=1}^p \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} (x_j^{(\ell_r+q_r)} - x_j^{(\ell_r-1)}) \\ &= \sum_{r=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(\ell_r+q_r+1)} + \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(\ell_r+q_r)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(\ell_r)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(\ell_r-1)} \right\} \end{aligned}$$

comme on a  $x_j^{(\ell_r+q_r)} = 1$  et  $x_i^{(\ell_r-1)} = 0$ , alors :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) = \sum_{r=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j(\ell_r + q_r + 1) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(\ell_r + q_r) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j(\ell_r) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(\ell_r - 1) \right\} - \sum_{r=1}^p \alpha_{ii} x_j(\ell_r + q_r)$$

et comme, par construction de  $\{C_r\}_{r=1}^p$  :

$$x_i(\ell_r + q_r + 1) = 0 \text{ et } x_i(\ell_r) = 1 \text{ alors ; pour } r \in \{1, \dots, p\} :$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j(\ell_r + q_r + 1) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j(\ell_r + q_r) < \theta_i$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j(\ell_r) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(\ell_r - 1) \geq \theta_i$$

de plus, comme  $\alpha_{ii} \geq 0$  et  $x_j(\ell_r + q_r) = 1$ , pour tout  $r \in \{1, \dots, p\}$ , on a :

$$\sum_{j=1}^n L(x_i, x_j) < 0$$

Des lemmes 1 et 2 on peut énoncer le résultat principal de cet chapitre :

THEOREME-1 : Si  $\alpha_{ii} \geq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors :

Pour tout  $\vec{y}(0) \in B^n$ , il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que, pour l'itération série conduite sur  $\Delta$ , on a :

$$\vec{y}(s+1) = \vec{y}(s) \quad (\text{convergence vers un point fixe})$$

La démonstration résulte immédiatement des lemmes 1 et 2.

Remarques : 1) L'hypothèse  $\alpha_{ii} \geq 0$  assure donc que, dans le passage de l'itération parallèle à l'itération série, tous les cycles (qui étaient de longueur au plus deux, cf. chapitre II) ont disparu. Donc, en régime stationnaire l'itération série n'a que des points fixes (on peut y avoir plusieurs).

2) Si les poids  $\alpha_{ij}$  ne vérifient plus l'hypothèse de symétrie on peut avoir des cycles. Prenons par exemple :

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_3 + y_5 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad \phi_6(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_j(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_{j+1} < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } j \in \{2,3,4,5\}$$

On a, fonctionnant en série, le cycle :



3) Si les  $\alpha_{ii}$  ne vérifient plus l'hypothèse de non négativité, on peut avoir des cycles (cf. exemple dans l'introduction).

## (5.2) EXEMPLES SUR UN TORE

On considère un tore  $T(n,n)$  (cf. chapitre III) où chaque arête représente une liaison d'amitié (+) ou d'inimitié (-). A chaque sommet on associe une règle de majorité (cf. Chapitre II), de manière à ce que, étant donnée une configuration initiale de zéros et uns, elle évolue selon les règles de transition locale de chaque noeud. De plus, on fait cette évolution en série, c'est-à-dire en fixant un parcours particulier du réseau.

L'étude de l'itération série conduite sur un tore, est inspirée du problème de verres de spins [6,27]. Dans ce cadre, chaque sommet représente un spin qui peut prendre deux orientations, symbolisées par la variable  $y_i \in \{0,1\}$  et chaque arête une interaction entre deux spins, qui peut être positive ou négative.

Le problème physique est de trouver une configuration de spins (un marquage du réseau) qui minimise le nombre d'interactions frustrées, où l'interaction (i,j) est frustrée si :

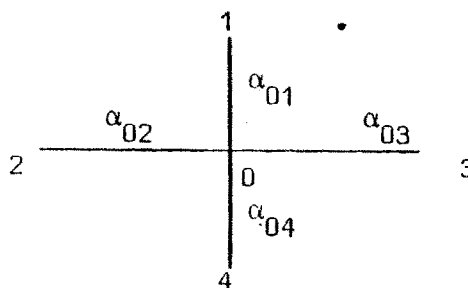
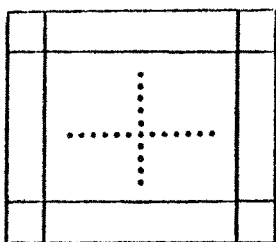
$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = y_j \quad \text{et} \quad (i,j) \quad \text{est négative} \\ y_i \neq y_j \quad \text{et} \quad (i,j) \quad \text{est positive.} \end{array} \right\}$$

Anglès d'Auriac, Maynard, Robert [6,27] ont proposé un algorithme qui au moyen d'une certaine règle de majorité locale (voir réseaux d'amitié, chapitre II), converge, en itération série, vers une configuration de spins (point fixe de la fonction de transition globale) qui est, un minimum local du nombre de frustrations.

D'autre part, on peut constater que pour d'autres choix de la règle de majorité, l'itération série converge vers un cycle (famille périodique des configurations de spins).

Dans le contexte précédent, ce qui nous intéresse ici est de voir dans quelles conditions (par rapport au choix de la règle de majorité) l'itération série admet ou non des cycles.

Prenons donc un tore (n,n) avec des interactions  $\alpha_{ij} \in \{+,-\}$  :



Les règles de majorité considérées sont les suivantes :

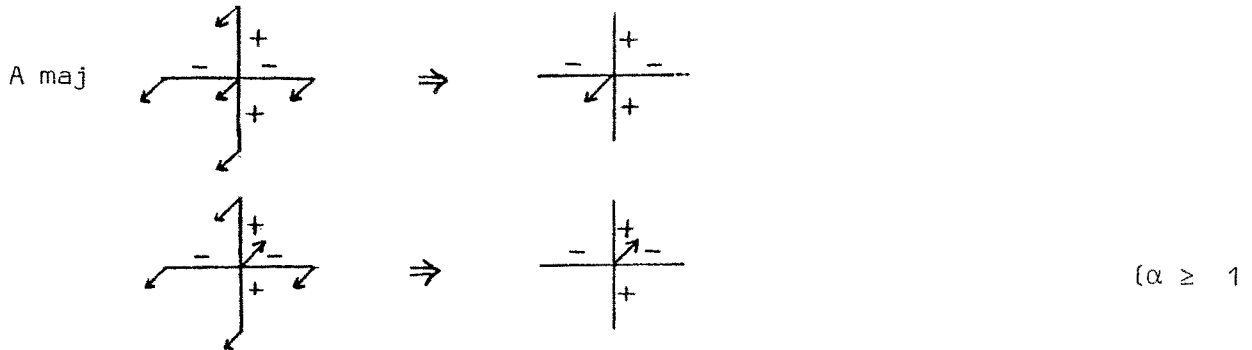
$$A_{maj}(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha y_0 + \sum_{j=1}^4 \alpha_j (y_j) < 3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B_{maj}(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\alpha y_0 + \sum_{j=1}^4 c(y_j) < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

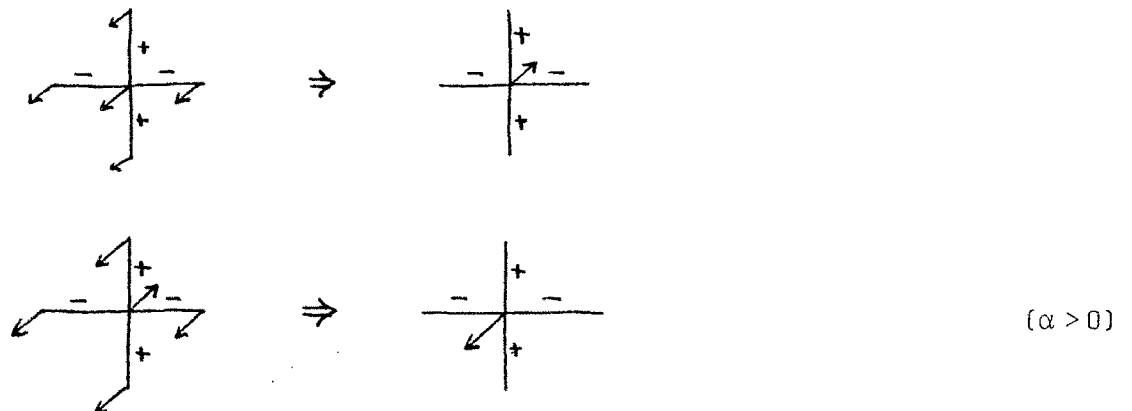
avec  $\alpha \in [0, +\infty[$ ,  $c(y_j) = y_j$  si  $\alpha_{0j} = +$ ;  $1 - y_j$  sinon.

Pour la première règle, A maj, le spin "0" essaie de prendre l'orientation majoritaire entre ceux de ses voisins qui interagissent avec "+" et le contraire de ceux qui interagissent avec "-". S'il y a égalité, il essaie (selon le poids  $\alpha$  qu'il donne à son orientation) de rester invariant :

Exemples : ( ↗ : orientation 1 ; ↘ orientation 0 )



Pour la règle Bmaj, la transition est semblable, sauf dans le cas d'égalité, le spin "0" essaiera (selon le poids  $\alpha$  qu'il donne à son orientation) de changer d'orientation (spin fou):



Si nous faisons l'itération série par lignes, on a :

\* Si l'on utilise dans chaque sommet la règle Amaj, alors pour toute configuration initiale on aboutit à un point fixe (pas nécessairement unique !)

\* Si l'on utilise dans chaque sommet la règle Bmaj avec  $\alpha \in ]0, +\infty[$  la convergence vers un point fixe n'est plus assurée (il peut y avoir des cycles !)

Pour le vérifier il suffit de voir que la règle Amaj à des poids  $\alpha_{ij} = \alpha \geq 0$ , et que, par contre, la règle Bmaj à  $\alpha_{ij} = -\alpha < 0$ , donc les deux points ci-dessus résultent directement du théorème-1.

Exemples :(tore 3x3), itération série par lignes

(i)  $\alpha_{ij} = +$  pour chaque arête (i,j) :

0 + 1 + 0		0 + 0 + 0		
+ + +		+ + +		
1 + 0 + 1		0 + 0 + 0		Amaj, point fixe
+ + +		+ + +		
0 + 1 + 0		0 + 0 + 0		

0 + 1 + 0		1 + 0 + 1		
+ + +		+ + +		
1 + 0 + 1		0 + 1 + 1		Bmaj, cycle de longueur 2
+ + +		+ + +		
0 + 1 + 0		1 + 0 + 1		

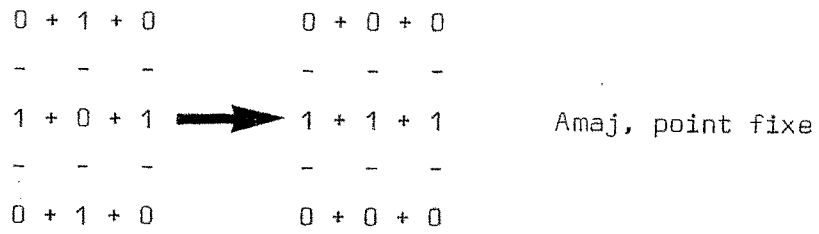
(ii)  $\alpha_{ij} = -$  pour chaque arête (i,j) :

0 - 1 - 0		0 - 1 - 0		
- - -		- - -		
1 - 0 - 1		1 - 0 - 1		Amaj, point fixe
- - -		- - -		
0 - 1 - 0		0 - 1 - 0		

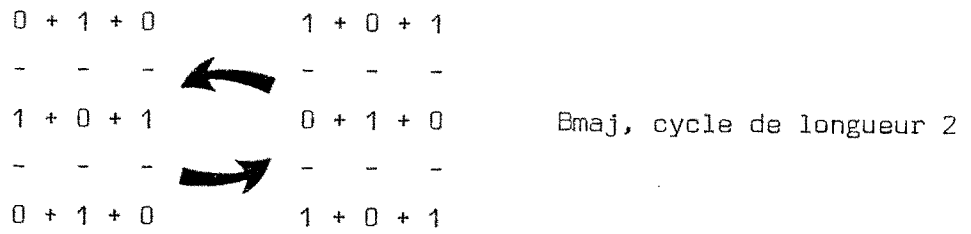
0 - 1 - 0		1 - 0 - 1		
- - -		- - -		
1 - 0 - 1		0 - 1 - 0		Bmaj, cycle de longueur 2
- - -		- - -		
0 - 1 - 0		1 - 0 - 1		



(iii)  $\alpha_{ij} = +$  pour chaque arête horizontale ;  $\alpha_{ij} = -$  pour chaque arête verticale



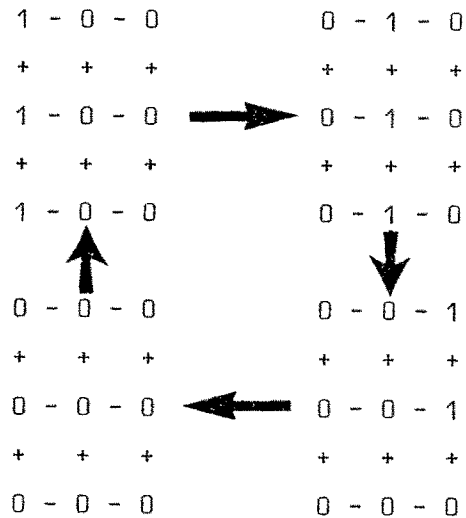
Amaj, point fixe



Bmaj, cycle de longueur 2

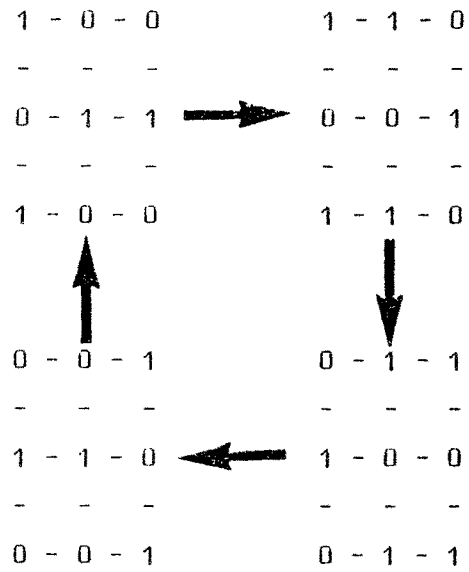
Il est intéressant de remarquer que pour certaines valeurs du paramètre  $\alpha$ , l'itération série, avec la règle Bmaj, a des cycles assez longs. Par exemple :

(i)  $\alpha > 2$ , Bmaj :

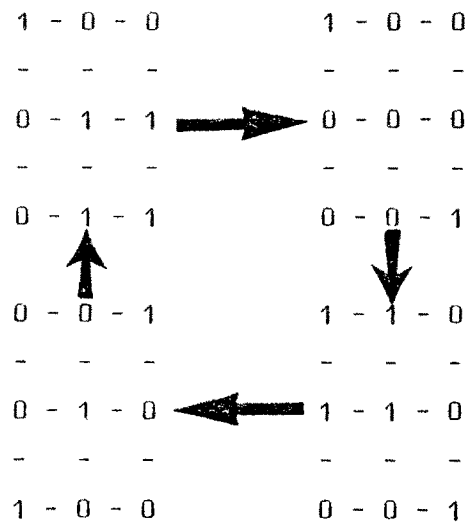


(ii) Prenons maintenant le tore avec tous les  $\alpha_{ij}$  négatifs. Alors, selon les valeurs du paramètre  $\alpha$  on exhibe des cycles assez longs.

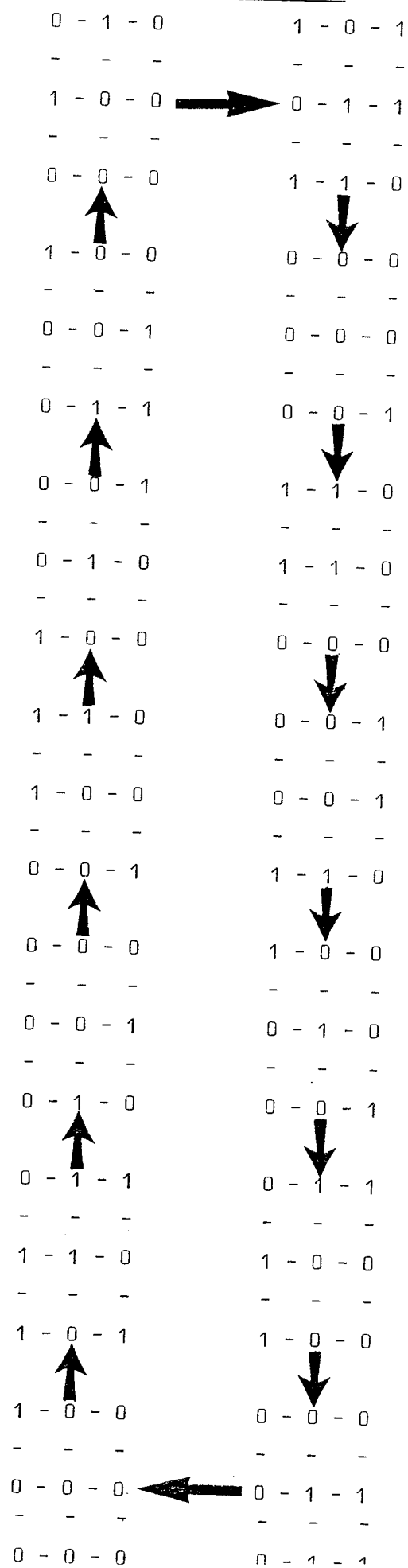
$0 < \alpha \leq 1$  ; Bmaj ; cycle de longueur 4



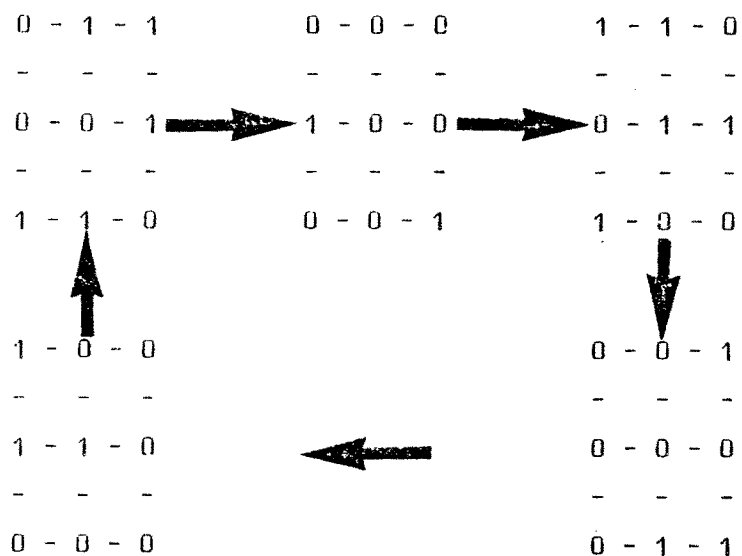
$1 < \alpha \leq 2$  ; Bmaj ; cycle de longueur 4



$\alpha > 2$ , Bmaj : cycle de longueur 14



$\alpha > 2$  ; Bmaj ; cycle de longueur 5



On voit donc que, pour des valeurs différentes du paramètre  $\alpha$ , on obtient des cycles de longueurs assez différentes. Il serait donc intéressant d'approfondir, même dans ce cas particulier, d'un réseau torique, le comportement de l'itération lorsque l'on utilise la Bmaj pour différentes valeurs du paramètre.



## CONCLUSIONS

---

Les résultats présentés ici, établissent le comportement oscillatoire de divers modèles pour lesquels n'existaient que des résultats assez particuliers (automates cellulaires uniformes à seuil, dynamique des groupes, etc.). Malgré ceci, il y a encore certains problèmes à résoudre :

- 1) Dans le premier chapitre, il serait intéressant (en tenant compte des applications biologiques [2,16,29]) de faire le rapport entre la connectivité du graphe d'incidence associé à la matrice et le comportement de l'itération parallèle. On sait que si la matrice est creuse ou trop pleine, le comportement est assez pauvre (un ou deux points fixes en tout), mais il est difficile, sauf au niveau des simulations à l'ordinateur, de déterminer une connectivité telle que l'évolution soit riche (beaucoup des états stationnaires, cycles de longueurs différentes, etc...).
- 2) Dans le deuxième chapitre, nous conjecturons que le nombre de pas nécessaires pour parvenir au régime stationnaire (point fixe ou cycle de longueur 2) est inférieur à  $n$  (nombre des composantes de  $\Delta$ ). De plus, on peut exhiber des exemples où on attend  $n-1$  pas !. D'autre part, une étude des réseaux d'amitié serait souhaitable dans le cas d'une relation d'amitié non symétrique.
- 3) Finalement, au cinquième chapitre, il serait intéressant de caractériser le comportement de l'itération série avec des poids,  $\alpha_{ij}$ , négatifs, et de généraliser le résultat obtenu dans le cadre des itérations "série-parallèle".



## REFERENCES

---

- [1] ATLAN H., "L'organisation biologique et la théorie de l'information",  
Hermann, (1972)
- [2] ATLAN, FOGELMAN, SALOMON, WEISBUCH, "Random boolean Networks",  
Cybernetics, à paraître
- [3] BUSACHER R. and SAATY T., "Finite graphs and networks",  
Mc Graw-Hill, (1965)
- [4] CAIANELLO E. and GRIMSON W., "Synthesis of boolean nets and time behaviour  
of a general mathematical neuron",  
Biol. Cybernetics, 18, 111-117, (1975)
- [5] COMTET L., "Analyse combinatoire", PUF, (1970)
- [6] D'AURIAC A., VILLON P., "Fluctuations d'aimantation dans un verre de spin  
par simulation numérique de Monte-Carlo",  
Rapport DEA, Analyse Numérique, Grenoble (1978)
- [7] GANTMACHER F., "Applications of the theory of matrices",  
Interscience Pub. (1959)
- [8] GOLES E., Rapport DEA, ANUM, Grenoble, (1978)
- [9] GOLES E., "Etude du comportement des itérations sur les fonctions booléennes  
linéaires et de type produit",  
R.R. n° 157, IMAG, (1979)
- [10] GOLES E., "Sequentially iteration of threshold functions",  
Cybernetics, à paraître
- [11] GOLES E., OLIVOS J. "Comportement périodique des fonctions à seuil binaires  
et applications", Discrete Applied. Math., à paraître
- [12] GOLES E., OLIVOS J. "Comportement périodique des fonctions à multiseuil"  
Inf. and Control, à paraître
- [13] GOLES E., SNOUSSI H. "Etude du graphe des chemins pour des réseaux de contrô-  
le logique", RR n° 162, IMAG (1979)



- [14] GOLES E., SNOUSSI H., "Etude dynamique de certains modèles de contrôle génétique",  
Bull. Soc. Française de Biométrie, à paraître
- [15] HARARY F., CARTWRIGHT D., "Structural balance : a generalization of Heider theory", Psychological Review, 63, (1956)
- [16] KAUFFMAN S., "Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetics nets"  
J. Theor. Biol., 22, 437-467, (1969)
- [17] KLEENNE S., "Representation of events in nerve sets and finite automata",  
Automata Studies, Princeton Univ. Press, 4-42, (1956)
- [18] McCulloch, PITTS W., "A Logical calculus of the ideas immanent in nervous activity"  
Bull. Math. Biophys., 5, 115-133, (1943)
- [19] OLIVOS J., "Contribution à l'algorithmique"  
Thèse, Orsay, (1980)
- [20] ROBERT F., Polycopié, Cours D.E.A., Grenoble, (1973-74)
- [21] ROBERT F., "Théorème de Perron-Frobenius et Stein Rosenberg booléens"  
R.R., n° 1, IMAG, (1975)
- [22] ROBERT F., "Itérations sur des ensembles finis, convergence d'automates cellulaires contractants"  
R.R. n° 2, IMAG, (1975)
- [23] ROBERT F., "Comparaison des modes opératoires d'un automate cellulaire fini"  
R.R. n° 31, (1976)
- [24] ROBERT F., "Une approche booléenne du problème de la frustration"  
S.A.N.G., n° 302, IMAG, (1978)
- [25] SCHULTZ D., Thèse, Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich Informatik, Allemagne, à paraître
- [26] SHINGAI R., "Maximum period of 2-dimensional uniform neutral networks"  
Inf. and Control, 41, 324 - 341, (1979)
- [27] SLONE N. "Lengths of cycle time in random neural networks",  
Cornell Univ. Press : Ithaca, (1967)
- [28] TCHUENTE M., "Evolution de certains automates cellulaires uniformes binaire à seuil",  
S.A.N.G., n° 265, IMAG, (1977)

- [29] THOMAS R., "Kinetic Logic",  
Lectures Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, vol. 29,  
(1979)
- [30] THOMAS R., "Boolean formalization of genetic control circuits"  
J. Theor. Biol. 42, 563, (1973)
- [31] VAN-HAM P., LASTERS I., "Reduction Methods for logical control networks"  
J. Theor. Biol. 269-281, 14 (1978)
- [32] VAN HAM P., Ph. D. Thesis, Université libre de Bruxelles, (1975)
- [33] VARGA R. "Matrix iterative analysis", Printice-Hall, series in Automatic  
Computation, (1962).

Dernière page d'une thèse

---

VU

Grenoble, le 4/11/80

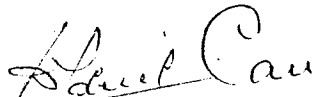
Le Président de la thèse

  
N. GASTINEL

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 6.11.80.

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

  
G. CAU

