



Dynamique Eulerienne-Lagrangienne et généralisée et caractérisation de la reconnexion diffusive.

Carlos Cartes

► To cite this version:

Carlos Cartes. Dynamique Eulerienne-Lagrangienne et généralisée et caractérisation de la reconnexion diffusive.. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00293446

HAL Id: tel-00293446

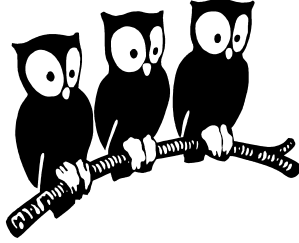
<https://theses.hal.science/tel-00293446>

Submitted on 4 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
Département de Physique
Laboratoire de Physique Statistique



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

présentée par

Carlos CARTES

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique des liquides

Sujet de la thèse

**Dynamique Eulerienne-Lagrangienne
généralisée et caractérisation de la
reconnexion diffusive**

Soutenue le 6 de Juin 2008 devant le jury composé de :

Marc-Étienne BRACHET	Directeur
Michel MOREAU	Président du Jury
Mikhaël BALABANE	Rapporteur
Dwight BARKLEY	Rapporteur
Miguel BUSTAMANTE	Examineur
Fabrice DEBBASCH	Examineur
Edriss TITI	Examineur
Laurette S. TUCKERMAN	Examineur

Remerciements

J'aime celui qui jette des paroles d'or au-devant de ses oeuvres
et qui tient toujours plus qu'il ne promet : car il veut son déclin.

Friedrich Nietzsche

Cette thèse est la culmination de quatre années de séjour en France dont trois de travail comme thésard dans le Laboratoire de Physique Statistique du Département de Physique de l'École Normale Supérieure à Paris. Je remercie ses directeurs Jacques MEUNIER et Eric PEREZ de m'y avoir accueilli.

Mon séjour au LPS aura été impossible sans l'aide et les conseils de Marcel CLERC et Enrique TIRAPEGUI qui m'ont ainsi donnée l'opportunité de travailler en France. Le début de mon séjour a été possible grâce à Martine BEN AMAR qui m'a accueillie dans son DEA et une bourse Île de France. La thèse était financé par le Gouvernement du Chili, avec une bourse CONICYT.

Mon travail était dirigé par Marc-Étienne BRACHET que je doit remercier tous les conseils et vastes connaissances scientifiques qu'il a partagé avec moi.

Je remercie les rapporteurs Mikhaël BALABANE et Dwight BARKLEY pour s'être chargés de la tâche, pas toujours facile, de reviser et corriger ce manuscrit et aussi aux membres du jury : Miguel BUSTAMANTE, Fabrice DEBBASCH, Michel MOREAU, Enrique TIRAPEGUI, Edriss TITI et Laurette S. TUCKERMAN.

J'ai bénéficié de la connaissance et de la grande expertise de Miguel BUSTAMANTE, Fabrice DEBBASCH, Giorgio KRSTULOVIC et Annick POUQUET.

Je doit ma gratitude au Daniel LE MOAL, Rémy PORTIER et Zaïre DISSI pour l'assistance technique et l'aide toujours disponible pour résoudre mes doutes informatiques. Je remercie également les secrétaires du LPS Marie-Christine GEFFLOT, Annie RIBAUDEAU et Nora SADAOUI.

Pendant la période de ma thèse j'avais eu l'opportunité de connaître des jeunes chercheurs dans l'atmosphère chaleureuse et amicale de la salle DC21 :

Laurant BOUE, Sebastian , Hervé ROUAULT, Miguel TREJO, Cyril CICHOWLAS, Damian SIMON, Nestor SEPÚLVEDA.

J'adresse un immense merci à Edith HANTZ et Marc-Étienne BRACHET pour la générosité, l'amitié et le constant support que j'ai reçu d'eux dans les moments les plus difficiles.

Je voudrais remercier aussi pour le soutien moral pendant ces quatre longues années qui ne furent pas très faciles des amis que j'ai connu à Paris, hors du circle académique : Kamilla, Daniella, Henri, Mario, Claudia, Paulita, Nelson...

Finalement je doit tendrement remercier du support qui m'ont donnée à distance mes parents, mes frères et amis du Chili et ma très chère Jaky.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Théorie Eulerienne-Lagrangienne	5
2.1	Équations d'Euler et variables de Clebsch	5
2.2	Transformation de Weber	7
2.3	Représentation d'un champ de vitesse quelconque	10
2.4	Formulation de Constantin des équations de Navier-Stokes . .	12
3	Généralisation de la formulation de Constantin	19
3.1	L'accélération en variables de Weber-Clebsch	19
3.2	Formulation générale de la dynamique de Navier-Stokes	20
3.2.1	Méthode de résolution de Moore-Penrose	22
3.2.2	Formulation de Ohkitani-Constantin et limite singulière	24
3.2.3	Critère de reinitialisation	26
3.3	Résultats numériques	26
3.3.1	Écoulement de Taylor-Green	27
3.3.2	Vortex de Boratav, Peltz et Zabusky	32
3.4	Évaluation du critère de reconnexion	37
4	Extension aux fluides compressibles	41
4.1	Principe d'action stationnaire pour les fluides parfaits	41
4.2	Extension aux fluides visqueux	43
4.3	Validation Numérique	43
4.3.1	Dynamique Visqueuse	43
4.4	Conclusion	43
5	Extension à la magnétohydrodynamique	47
5.1	Potentiel vectoriel magnétique en variables de Weber-Clebsch .	47

5.2	Simulations Numériques	51
5.2.1	Effet dynamo : l'écoulement ABC	51
5.2.2	Vortex d'Orszag-Tang en 2D	53
5.2.3	Vortex d'Orszag-Tang en 2.5D	55
5.2.4	Vortex d'Orszag-Tang en 3D	57
5.3	Conclusions	58
A	Méthodes Numériques	69
A.1	Les Méthodes Spectrales	69
A.1.1	Convergence des Méthodes Spectrales	71
A.1.2	Approximation d'une équation différentiel partiel par la méthode pseudo-spectrale	71
A.1.3	Méthode pseudo-spectrale	71
A.1.4	Correction de l' <i>aliasing</i>	72
A.1.5	Intégration par partie et conservation de l'énergie . . .	73
A.2	Schémas temporels	74
B	Symétries de Taylor-Green et optimisation du code	75
B.1	Génération des champs	75
B.2	Symétries de Taylor-Green	75
B.3	Solution de Moore-Penrose et norme minimale	77
B.3.1	Minimisation et détermination du terme de jauge . . .	78
B.3.2	Implémentation de Moore-Penrose	78
C	Articles publiés et en préparation	81

Table des notations

x^i Coordonnées Euleriennes.

$\mathbf{u}(x, t)$ Champ vectoriel (en trois dimensions) en coordonnées Euleriennes.

$\phi(x, t)$ Champ scalaire en coordonnées Euleriennes.

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ Dérivée partielle sur la variable x^i .

∂_t Dérivée partielle sur le temps.

∇ Opérateur gradient.

$\times$ Produit vectoriel.

$\mathcal{L}$ Densité Lagrangienne.

D_t Dérivée matérielle.

a^i Coordonnées Lagrangiennes.

$X^i(a, t)$ Position d'une particule en coordonnées Lagrangiennes.

$\tilde{\phi}(a, t)$ Champ scalaire en coordonnées Lagrangiennes.

ν Viscosité Cinématique.

η Resistivité Magnétique.

R Nombre de Reynolds.

Ma Nombre de Mach.

Introduction

Cette thèse est basée sur la représentation Eulerienne-Lagrangienne [1] de la vitesse, que nous appelons la transformation de Weber-Clebsch, en faisant intervenir trois paires de potentiels scalaires. Rappelons que les variables de Clebsch [2, 3, 4] (une seule paire de potentiel) ont été originellement introduites pour permettre une formulation variationnelle de la dynamique des fluides parfaits. Cependant, contrairement à la transformation de Weber-Clebsch [5], les variables de Clebsch ne permettent pas de représenter un champ de vitesse quelconque.

Constantin a construit en 2002 [6] une extension de la description de Weber-Clebsch des fluides parfaits aux fluides visqueux. La nécessité de réinitialiser périodiquement les coordonnées Lagrangiennes a été interprété par Ohkitani et Constantin [7] comme un diagnostic de la reconnexion de la vorticité. Rappelons qu'on parle de reconnexion quand la topologie des lignes de vorticité change : la reconnexion de la vorticité est un processus fondamental en mécanique des fluides [8, 9, 10] et son origine est dissipative. En effet, sans dissipation et dans la mesure où l'écoulement reste régulier, les lignes de vorticité sont simplement transportées par le fluide, comme l'indique le théorème d'Helmholtz. Le concept de reconnexion n'existe pas uniquement dans le contexte d'hydrodynamique visqueuse. En effet, on parle également de reconnexion dans les superfluides [11] dans les cristaux liquides [12] en en MHD [13]. Avant les travaux de Ohkitani et Constantin, les principales approches de la reconnexion en hydrodynamique se basaient sur des expériences de reconnexion des anneaux de vorticité [14, 15, 16, 17, 9, 18](par la simplicité dans la génération des anneaux) et sur des simulations numériques de tubes de vorticité parallèles [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26] (par l'importance pratique de la turbulence générée pour les tubes de vorticité dans les ailes des avions).

Remarquons que les travaux de Ohkitani et Constantin avaient été précédés de tentatives par Grossmann [27] et Levich et al. [28]. Ces tentatives n'avaient pas fonctionné car elles n'employaient qu'une seule paire de variables de Clebsch et souffraient d'un problème de surdétermination conduisant, en général, à l'absence de solution des équations dynamiques.

Le présent travail est fondamentalement une généralisation de la formulation de Ohkitani et Constantin. Notre généralisation consiste, à partir du système sous-déterminé qu'on obtient en écrivant la dynamique en termes de potentiels de Weber-Clebsch, à faire un choix plus général que celui de Constantin, au niveau des conditions supplémentaires qui permettent d'obtenir un système déterminé d'équations d'évolution pour les potentiels.

Le système de Constantin est contenu dans notre formulation, qui est plus générale, dans une limite singulière. L'équivalence entre l'équation d'évolution de potentiel de Weber-Clebsch et l'équation de Navier Stokes repose, dans tous les cas, sur l'inversibilité d'une certaine matrice. Cette condition d'inversibilité est violée en codimension 1 avec le choix particulier fait par Constantin. Avec notre choix qui est plus général, cette condition n'est violée qu'en codimension 4. Dans la formulation de Constantin, il est ainsi indispensable de procéder à une réinitialisation des variables Lagrangiennes après un temps fini. Par contre, en pratique quand le nombre de Reynolds est assez bas, notre formulation reste valable sans avoir à réaliser de réinitialisation.

Quand on travaille à nombre de Reynolds plus élevés, condition indispensable aux études de la reconnexion, notre formulation conduit également en pratique à la nécessité de procéder à des réinitialisations, comme dans la formulation de Constantin. Rappelons que le nouveau diagnostic de reconnexion proposé par Ohkitani et Constantin consiste en l'accélération de la fréquence de réinitialisation. Un de nos résultats principaux est que notre formulation généralisée contient la même accélération de réinitialisation et permet donc également de capturer la reconnexion de vortex.

Pour comparer les résultats obtenus en utilisant notre formulation généralisée à ceux qui sont obtenus dans la formulation d'Ohkitani et Constantin nous avons procédé à des simulations numériques d'un certain nombre d'écoulements obéissants aux équations de Navier Stokes. Dans tous les cas, notre formulation a démontré son utilité en permettant de diagnostiquer les phénomènes de reconnexion.

Nous avons également étendu notre formulation aux équations de Navier Stokes compressibles. Nous avons pu vérifier pour l'instant la bonne convergence des algorithmes et nous comptons procéder dans le futur à l'étude de la reconnexion de la vorticité en régime compressible.

Rappelons que la magnétohydrodynamique (MHD) [29] joue un rôle fon-

damental dans la physique stellaire [30]. Dans ce contexte, la reconnexion magnétique est un processus qui n'est pas encore complètement compris [31]. Cependant il est en général admis que les phénomènes de reconnexion magnétiques, en causant une restructuration de la topologie des lignes du champ magnétique, jouent un rôle fondamental en permettant la libération de l'énergie magnétique. Ces phénomènes de reconnexion jouent également un rôle important dans des domaines aussi divers que la dynamique interne des tokamaks, les aurores boréales, ainsi que dans les queues de comètes.

Nous avons pu étendre notre formulation généralisée à la magnétohydrodynamique en exprimant le potentiel vecteur magnétique à l'aide des variables de Weber-Clebsch. Nous avons étudié numériquement une série d'écoulements de MHD en 2 et 3 dimensions et avons démontré une corrélation entre la reconnexion magnétique et l'accélération des réinitialisations.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante : nous commençons par passer en revue les formulations Euleriennes-Lagrangiennes existantes : variables de Clebsch, transformation de Weber et théorie de Constantin pour les équations de Navier-Stokes. Le second chapitre est consacré à notre généralisation de la théorie de Constantin et à l'étude numérique de la reconnexion de la vorticité. Le troisième chapitre contient l'extension de notre généralisation aux fluides visqueux et compressibles. Le quatrième chapitre est consacré à l'extension à la MHD et aux études de reconnexion magnétiques dans divers écoulements. Les appendices contiennent les détails techniques concernant les méthodes numériques ainsi qu'une description détaillée de notre version de l'algorithme de Moore-Penrose [32, 33]. Un article publié et un article accepté sont joints à la fin de ce manuscrit.

Chapitre 2

Théorie Eulerienne-Lagrangienne

Dans ce chapitre nous rappelons les notions de base qui ont servie de point de départ à notre travail. On verra qu'à partir des variables de Clebsch, qui était au départ un moyen pour représenter les lignes de vorticité, il est possible d'écrire (avec certaines restrictions) les équations d'Euler à partir d'un principe d'action stationaire.

Ensuite, pour éviter les restrictions des variables de Clebsch, nous introduisons la transformation de Weber-Clebsch, qu'est également une façon d'écrire les équations d'Euler en utilisant le formalisme Eulerien-Lagrangien.

Finalement, pour compléter notre rappel, on verra l'extension introduite par Constantin de la transformation de Weber-Clebsch, en ajoutant de la diffusion, pour ainsi arriver à une description Eulerienne-Lagrangienne de la dynamique de Navier-Stokes.

2.1 Équations d'Euler et variables de Clebsch

Considérons les équations d'Euler incompressibles pour un fluide de densité unité

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Rappelons l'équation d'évolution pour la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$,

$$D_t \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

où D_t est la dérivée matérielle

$$D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla .$$

Une conséquence bien connue de cette équation est que les lignes de vorticité sont matérielles (théorème de Hemholtz).

Représentation des lignes de vorticité

Les variables de Clebsch [2] peuvent être considérées, au départ, comme un moyen de représenter ces lignes de vorticité. En effet, à partir de cette transformation, qui définit les champs de vitesse en terme des variables scalaires (λ, μ, ϕ)

$$\mathbf{u} = \lambda \nabla \mu - \nabla \phi, \quad (2.2)$$

on peut écrire la vorticité comme

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \lambda \times \nabla \mu.$$

Les lignes de vorticité $\mathbf{r}(s)$ sont définies comme les solutions du système

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}(s)) ,$$

qui admet les deux intégrales premières

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{r}(s)) &= \text{cte.} \\ \mu(\mathbf{r}(s)) &= \text{cte.} \end{aligned}$$

Autrement dit : les intersections des surfaces $\lambda = \text{cte}$ et $\mu = \text{cte}$ sont les lignes de vorticité.  tant donné que les lignes de vorticité d'un écoulement vérifiant les équations d'Euler sont matérielles, les fonctions λ et μ doivent varier de façon telle que ces surfaces soient en mouvement avec le fluide.

Principe d'action stationnaire

Les variables de Clebsch sont aussi utiles pour trouver un principe variationnel pour les équations d'Euler. En effet, la densité Lagrangienne pour les équations d'Euler peut être écrite comme

$$\mathcal{L} = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \lambda \partial_t \mu, \quad (2.3)$$

et les variations de $\mathcal{L}$ par rapport aux champs λ , μ et ϕ fournissent le système d'équations

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mu} &= -D_t \lambda = 0 \\
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} &= D_t \mu = 0 \\
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

À partir du système (2.4) et de l'identité

$$[\nabla, D_t] \equiv (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla,$$

on peut obtenir l'équation d'évolution pour $\mathbf{u}$ (voir plus loin, équation (3.2), au début du Chapitre 3)

$$D_t \mathbf{u} = -\nabla \left(D_t \phi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right). \tag{2.5}$$

Ainsi les équations d'Euler (2.1) découlent bien de l'action (2.3).

2.2 Transformation de Weber

Forme Lagrangienne des équations dynamiques

Notons a^i la coordonnée initiale (à $t = 0$) d'une particule fluide et $X^i(a, t)$ sa position au temps t . Notons $A^i(x, t)$ l'application inverse : $a^i \equiv A^i(X^i(a, t), t)$.

Les coordonnées Euleriennes au temps t sont par définition les variables $x^i = X^i(a, t)$. La vitesse Lagrangienne d'une particule de fluide est

$$\tilde{u}^i(a, t) = \frac{\partial X^i}{\partial t}(a, t)$$

et son accélération

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t}(a, t) = \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2}(a, t).$$

L'équation de Newton pour les particules du fluide est

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2}(a, t) = F_X^i(a, t),$$

où les forces $F_X^i(a, t)$ sont données, pour un fluide de densité unitaire, par

$$F_X^i(a, t) = -\frac{\partial p}{\partial x^i}(X(a, t), t)$$

$p(X(a, t))$ est la pression dans les coordonnées Euleriennes.

Ainsi les équations de mouvement pour les particules sont

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2}(a, t) = -\frac{\partial p}{\partial x^i}(X(a, t), t). \quad (2.6)$$

Pour un fluide incompressible le déterminant de la matrice de transformation entre les coordonnées Lagrangiennes et Euleriennes vérifie

$$\det\left(\frac{\partial X^i}{\partial a^j}\right) = 1, \quad (2.7)$$

valeur qui est fixé à partir de la relation entre les éléments de volume dans les deux systèmes de coordonnées. La transformation est donc toujours inversible.

À partir de l'équation (2.6) faisons une transformation de coordonnées pour les dérivés de p en utilisant

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial a^j} \\ \frac{\partial}{\partial a^i} &= \frac{\partial X^j}{\partial a^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (2.8)$$

nous obtenons

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2}(a, t) = -\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial a^j}(a, t) \quad (2.9)$$

où $\tilde{p}(a, t)$ est la pression dans les coordonnées Lagrangiennes.

Multiplions l'équation (2.9) par la transformation de coordonnées inverse $\frac{\partial X^i}{\partial a^j}$ pour obtenir

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2}(a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j}(a, t) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial a^j}(a, t) \quad (2.10)$$

qui est la *forme Lagrangienne* des équations dynamiques.

Transformation de Weber

Le membre de gauche de l'équation (2.10) peut être écrit comme

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2}(a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j}(a, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j}(a, t) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a^j} \left| \frac{\partial X^i}{\partial t}(a, t) \right|^2$$

et l'équation (2.10) deviens

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j} (a, t) \right) = - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial a^j} (a, t) \quad (2.11)$$

où le terme $\tilde{q}(a, t)$ dans (2.11) est donné par

$$\tilde{q}(a, t) = \tilde{p}(a, t) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) \right|^2.$$

Intégrons (2.11) sur t en maintenant les a^i fixes

$$\left[\frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j} (a, t) \right]_0^t = \frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j} (a, t) - \tilde{u}_0^j(a)$$

nous obtenons

$$\frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) \frac{\partial X^i}{\partial a^j} (a, t) - \tilde{u}_0^j(a) = - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a^j} (a, t), \quad (2.12)$$

où le terme $\tilde{\phi}$ s'écrit

$$\tilde{\phi}(a, t) = \int_0^t \left(\tilde{p}(a, s) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial X^i}{\partial t} (a, s) \right|^2 \right) ds.$$

Le système des équations (2.12) est appelé [2] *transformation de Weber*.

Passage aux coordonnées Euleriennes : Transformation de Weber-Clebsch

En effectuant une transformation de coordonnées

$$\frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) = \tilde{u}_0^j(a) \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a^j} (a, t). \quad (2.13)$$

en identifiant $\tilde{\mu}^i(a, t) = a^i$ et, pour la vitesse initiale, $\tilde{\lambda}^i(a, t) = \tilde{u}_0^i(a)$ nous obtenons les équations d'évolution pour les champs en coordonnées Lagrangiennes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\lambda}^i}{\partial t} (a, t) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\mu}^i}{\partial t} (a, t) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} (a, t) &= \tilde{p}(a, t) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial X^i}{\partial t} (a, t) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En passant aux coordonnées Euleriennes, en notant $\mu^i(x, t) = A^i(x, t)$ et $\lambda^i(x, t) = u_0^i(\mu(x, t))$, nous obtenons la *Transformation de Weber-Clebsch*

$$u^i(x, t) = \sum_{j=1}^3 \lambda^j \frac{\partial \mu^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (2.15)$$

Évolution Eulerienne

En utilisant pour la dérivée matérielle la notation

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \equiv D_t$$

les équations (2.14) pour les variables de Clebsch s'écrivent finalement en coordonnées Euleriennes

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i(x, t) &= 0 \\ D_t \mu^i(x, t) &= 0 \\ D_t \phi(x, t) &= p(x, t) - \frac{1}{2} |u^i(x, t)|^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La transformation de Weber-Clebsch (2.15) et les lois d'évolution (2.16) sont très similaires à la définition des variables de Clebsch (2.2) et au système (2.4). Une différence notable est cependant le nombre de paires des potentiels.

2.3 Représentation d'un champ de vitesse quelconque

Si on utilise les variables de Clebsch (2.2) pour représenter une vitesse $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \lambda \nabla \mu - \nabla \phi,$$

nous avons le problème que $\mathbf{u}$ est restreint aux champs d'hélicité moyenne

$$h = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x$$

nulle [27]. En effet en écrivant h en terme de variables de Clebsch

$$h = \int_V (\lambda \nabla \mu - \nabla \phi) \cdot (\nabla \lambda \times \nabla \mu) d^3x = - \int_V \nabla \phi \cdot (\nabla \lambda \times \nabla \mu) d^3x,$$

le terme $\lambda \nabla \mu$ est perpendiculaire au $\nabla \lambda \times \nabla \mu$ et donc le produit scalaire est nul. Pour le terme qui reste on intègre par parties

$$\int_V \nabla \phi \cdot (\nabla \lambda \times \nabla \mu) d^3x = \oint_{\partial V} \phi (\nabla \lambda \times \nabla \mu) \cdot d\mathbf{s} - \int_V \phi \nabla \cdot (\nabla \lambda \times \nabla \mu)$$

mais dans un domaine est périodique, le premier terme du membre de droite est nul. D'autre part $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ et en conséquence nous avons

$$\nabla \cdot (\nabla \lambda \times \nabla \mu) = 0$$

et nous arrivons finalement à

$$h = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x = 0.$$

D'autre part en considérant maintenant deux paires de variables de Clebsch, nous avons pour chaque composante de la vitesse

$$u^j = \sum_{i=1}^2 \lambda^i \frac{\partial \mu^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \phi}{\partial x^j},$$

et on arrive à une système d'équations du second degré dans ces inconnues qui n'a pas de solution analytique. Et on ne dispose pas d'une façon systématique de trouver les λ^i et μ^i correspondant à une vitesse arbitraire $\mathbf{u}$.

Par contre, si maintenant on utilise la même quantité de paires que de dimensions spatiales (trois dans le cas de ce travail), nous arrivons à la transformation de Weber-Clebsch

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi, \quad (2.17)$$

avec laquelle il est possible de représenter un champ de vitesse arbitraire en posant

$$\begin{aligned} \lambda^i(x, 0) &= u^i(x, 0) \\ \mu^i(x, 0) &= x^i \\ \phi(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est complètement équivalent au cas de la transformation de Weber de la Section 2.2.

Une autre façon d'étudier la possibilité de représenter un champs de vitesse donnée en termes de 1, 2 ou 3 paires de potentiels de Clebsch est de considérer les variations possibles d'une représentation existante.

Partons du champs de vitesse donné

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^p \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi$$

où $p = 1, 2$ ou 3 et voyons si une variation infinitésimal quelconque $\delta \mathbf{u}$ peut être représentée par une variation des champs $\delta \lambda^i$, $\delta \mu^i$ et $\delta \phi$.

La relation à satisfaire est

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^p (\delta \lambda^i \nabla \mu^i - \delta \mu^i \nabla \lambda^i) - \nabla \left(\delta \phi - \sum_{i=1}^p \delta \mu^i \lambda^i \right),$$

pour une paire le système est sur déterminé, pour 2 et 3 paires le système est sous déterminé et donc nous sommes obligés d'ajouter des conditions additionnels.

2.4 Formulation de Constantin des équations de Navier-Stokes

Dans cette section nous rappelons l'extension introduite par Constantin [6], de la formulation Eulerienne-Lagrangienne des équations d'Euler vers les équations de Navier-Stokes.

Le point de départ de Constantin [6] est l'expression de la vitesse Eulerienne $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ obtenue par la transformation de Weber-Clebsch

$$u^i = \sum_{m=1}^3 \lambda^m \frac{\partial \mu^m}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (2.18)$$

Les champs figurant dans cette équation admettent la même interprétation que pour la transformation de Weber : λ^m sont les composants de la vitesse Lagrangienne, μ^m les coordonnées Lagrangiennes et ϕ est le champ qui fixe la condition d'incompressibilité sur la vitesse.

De façon similaire à la transformation de Weber nous avons les coordonnées Lagrangiennes $a^i = \mu^i(x, t)$ et les coordonnées Euleriennes $x^i = X^i(a, t)$.

Relation de commutation

Considérons alors le premier terme du membre de droite de (2.18) comme une transformation des coordonnées. Il est alors possible d'écrire les dérivés dans les coordonnées Lagrangiennes de la même façon que pour (2.8)

$$\frac{\partial}{\partial a^i} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial X^m}{\partial a^i} \frac{\partial}{\partial x^m}. \quad (2.19)$$

De la même façon il est possible d'écrire les dérivés des coordonnées Euleriennes en terme des variables Lagrangiennes

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mu^m}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial a^m}. \quad (2.20)$$

Nous avons aussi les relations pour les commutateurs

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial a^i}, \frac{\partial}{\partial a^k} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Avec les relations (2.19), (2.20) et (2.21) nous pouvons calculer le commutateur entre les opérateurs ∂_x et ∂_a

$$\left[\frac{\partial}{\partial a^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial a^i}, \frac{\partial \mu^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial a^m} \right] = \frac{\partial}{\partial a^i} \left(\frac{\partial \mu^m}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial a^m}. \quad (2.22)$$

En introduisant le vecteur de déplacement $\ell^m = \mu^m - x^m$ qui lie la position Eulerienne actuelle x à la position Lagrangienne originale μ , nous pouvons exprimer le commutateur (2.22) comme

$$\left[\frac{\partial}{\partial a^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = \frac{\partial}{\partial a^i} \left(\frac{\partial \ell^m}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial a^m} = C_{m,k;i} \frac{\partial}{\partial a^m}.$$

Le terme $C_{m,k;i}$ est lié aux coefficients de Christoffel Γ_{ij}^m [6] de la connexion plane en $\mathbb{R}^3$ par la formule

$$\Gamma_{ij}^m = -\frac{\partial X^k}{\partial a^j} C_{m,k;i}. \quad (2.23)$$

Dynamique diffusive

Considérons maintenant une évolution diffusive de nos champs. Pour cela définissons l'opérateur

$$\Gamma = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla - \nu \Delta, \quad (2.24)$$

où ν est la viscosité et $\mathbf{u}$ est la vitesse Eulerienne. Quand l'opérateur (2.24) est appliqué sur un vecteur ou une matrice, chaque composante est prise indépendamment.

L'opérateur (2.24) a la propriété

$$\Gamma(fg) = (\Gamma f)g + f(\Gamma g) - 2\nu \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^k}, \quad (2.25)$$

qui est une conséquence directe de la définition (2.24).

Constantin impose que les coordonnées μ^i soient advectées et diffusées de façon telle que

$$\Gamma \mu^i = 0. \quad (2.26)$$

Maintenant nous avons besoin que les transformations des coordonnées soient inversibles pour tout t , ce qui arrive naturellement quand la diffusion est zéro ($\nu = 0$) et le fluide est incompressible parce que le volume de l'élément de fluide doit être préservé par la transformation de coordonnées, ce qui veut dire

$$\text{Det}(\nabla \mu) = 1,$$

où

$$(\nabla \mu)_{jk} = \frac{\partial \mu^j}{\partial x^k}.$$

Dans le cas diffusif ($\nu \neq 0$), on définit la matrice de transformation Q comme

$$(Q)_{jk} = \frac{\partial X^j}{\partial a^k}.$$

Évolution des matrices de changement des coordonnées

En suivant Constantin [6]. Considérons le cas où les matrices de transformation restent inversibles et leurs équations d'évolution sont régulières. Pour obtenir l'équation d'évolution de la matrice de transformation $(\nabla \mu)_{ij}$ on applique ∂_{x^j} sur l'équation (2.26) pour μ^i . Il vient

$$\Gamma(\nabla\mu)_{ij} + (\nabla\mu)_{im} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} = 0. \quad (2.27)$$

Pour calculer l'évolution de Q on utilise le fait que

$$\Gamma\left((Q)_{ji}(\nabla\mu)_{il}\right) = 0$$

parce que $(Q)_{ji}(\nabla\mu)_{il} = I$.

Nous prenons la relation (2.25) et l'équation (2.27) pour trouver

$$\Gamma(Q)_{jn} = (Q)_{mn} \frac{\partial u^j}{\partial x^m} + 2\nu(Q)_{ln} \frac{\partial(Q)_{ji}}{\partial x^k} \frac{\partial(\nabla\mu)_{il}}{\partial x^k}. \quad (2.28)$$

Constantin suppose que les solutions de (2.27) et (2.28) sont régulières si la vitesse d'advection $\mathbf{u}$ est suffisamment régulière.

Dynamique de la vitesse Lagrangienne

Pour l'évolution des champs λ^i on applique D_t sur (2.18), en utilisant la relation

$$\left[D_t, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = -\frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^l}$$

on obtient

$$D_t u^i = \sum_{m=1}^3 \left(D_t \lambda^m \frac{\partial \mu^m}{\partial x^i} + \lambda^m \frac{\partial}{\partial x^i} D_t \mu^m \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(D_t \phi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right).$$

Nous avons aussi, à partir de les équations de Navier-Stokes :

$$D_t u^i = \nu \Delta u^i - \frac{\partial}{\partial x^i} p.$$

On calcule le terme Δu^i avec la transformation (2.18), on utilise l'équation (2.26) et on regroupe les termes pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\Gamma \phi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - p \right) = \sum_{m=1}^3 \left(\Gamma \lambda^m \frac{\partial \mu^m}{\partial x^i} - 2\nu \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mu^m}{\partial x^i} \right). \quad (2.29)$$

Maintenant on sépare le champ ϕ pour avoir l'équation de la pression

$$\Gamma \phi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - p = c. \quad (2.30)$$

où c est une constante.

Pour obtenir la dynamique de λ^l il faut inverser la matrice

$$\frac{\partial \mu^m}{\partial x^i}$$

dans l'expression (2.29) donc il sera impossible de transformer les coordonnées si le déterminant

$$\det \left(\frac{\partial \mu^m}{\partial x^i} \right) = 0.$$

Alors, si la matrice est inversible, la dynamique de λ^l est décrite par

$$\Gamma \lambda^l = 2\nu \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^k} C_{m,k;l}. \quad (2.31)$$

Il faut remarquer que la dynamique de $\mathbf{u}$ est complètement décrite par les équations (2.26), (2.31) et la condition d'incompressibilité pour $\mathbf{u}$. Donc l'équation (2.30) devient une identité.

Résumé des équations dynamiques de Constantin

Pour finir nous rappelons les équations pour le système de Constantin qui représente la dynamique de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \Gamma \lambda^l &= 2\nu \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^k} C_{m,k;l} \\ \Gamma \mu^l &= 0 \\ \Gamma \phi &= p - \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + c, \end{aligned} \quad (2.32)$$

qui est, bien sûr, complètement équivalent à (2.16) quand la dissipation ν est nulle.

Pour avoir une notation plus simple et similaire au travail réalisé dans cette thèse nous écrivons le terme $C_{m,k;l}$, qui est dans l'équation pour λ^l en (2.32), en variables Euleriennes. Nous avons

$$C_{m,k;l} = \frac{\partial}{\partial a^l} \left(\frac{\partial \ell^m}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial X^j}{\partial a^l} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \mu^m}{\partial x^k} - \delta_{mk} \right).$$

Comme nous avons déjà vu il est possible d'écrire le jacobien de la transformation de coordonnées comme

$$\frac{\partial X^j}{\partial a^l} = \left(\frac{\partial \mu^l}{\partial x^j} \right)^{-1} = (\nabla \mu)_{lj}^{-1}$$

et nous arrivons à

$$\Gamma \lambda^l = 2\nu (\nabla \mu)_{lj}^{-1} \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} (\nabla \mu)_{mj} . \quad (2.33)$$

Dans l'équation (2.33) on voit qu'il y aura des problèmes quand le déterminant de $(\nabla \mu)_{lj}$ est nul et car la transformation entre coordonnées sera non-inversible.

Chapitre 3

Généralisation de la formulation de Constantin

Ce chapitre débute par notre généralisation de la théorie de Constantin pour les équations de Navier-Stokes. Ensuite, nous comparons notre formulation généralisée avec celle de Constantin au point de vue théorique et numérique, et nous verrons en détail les différences en stabilité et en précision pour différents types d'écoulements.

3.1 L'accélération en variables de Weber-Clebsch

En partant de la transformation de Weber-Clebsch pour la vitesse $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi \quad (3.1)$$

et en effectuant une variation sur la transformation de Weber-Clebsch (3.1) nous obtenons la relation

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 (\delta \lambda^i \nabla \mu^i - \delta \mu^i \nabla \lambda^i) - \nabla \left(\delta \phi - \sum_{i=1}^3 \delta \mu^i \lambda^i \right) \quad (3.2)$$

où le symbole δ représente une variation spatiale ou temporelle. Dans le système (3.2) il est déjà possible de voir que nous avons trois équations (les $\delta \mathbf{u}$) et six inconnues à trouver (les $\delta \lambda^i$ et $\delta \mu^i$, $\delta \phi$ est fixé par la condition d'incompressibilité $\nabla \mathbf{u} = 0$).

Pour traduire l'évolution temporelle de $\mathbf{u}$, en termes des potentiels de Weber-Clebsch, utilisons la dérivée matérielle D_t et l'identité

$$[\nabla, D_t] \equiv (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla.$$

Calculons la dérivée convective de $\mathbf{u}$ qui s'écrit en fonction des potentiels

$$D_t \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 (D_t \lambda^i \nabla \mu^i + \lambda^i \nabla D_t \mu^i - \lambda^i (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mu^i) - \nabla D_t \phi + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi.$$

Pour cela, on écrit sous forma gradient pour avoir

$$\sum_{i=1}^3 \lambda^i \nabla D_t \mu^i = \sum_{i=1}^3 (\nabla (\lambda^i D_t \mu^i) - D_t \mu^i \nabla \lambda^i)$$

et on remarque que

$$\sum_{i=1}^3 (\lambda^i (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mu^i) - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2.$$

Finalement on regroupe les gradients pour obtenir

$$D_t \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 (D_t \lambda^i \nabla \mu^i - D_t \mu^i \nabla \lambda^i) - \nabla \left(D_t \phi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \sum_{i=1}^3 D_t \mu^i \lambda^i \right). \quad (3.3)$$

Remarquons que l'expression (3.3) est très similaire à (3.2) avec la seule différence du terme $\frac{1}{2} \mathbf{u}^2$ qui vient du commutateur entre le gradient et la dérivée matérielle.

3.2 Formulation générale de la dynamique de Navier-Stokes

Considérons les équations d'Euler incompressibles, perturbées par une force volumique $\mathbf{f}$

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{u} &= -\nabla p + \mathbf{f}[\mathbf{u}, x, t] \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues quand le forçage $\mathbf{f}$ est la dissipation visqueuse

$$\mathbf{f} = \nu \Delta \mathbf{u}.$$

L'idée est de chercher des équations d'évolution, sous sa forme la plus générale, pour les potentiels (3.1) en remplaçant D_t , dans l'équation de mouvement (3.4), par son expression (3.3).

Posons

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= L^i[\lambda, \mu] \\ D_t \mu^i &= M^i[\lambda, \mu]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En identifiant les termes gradients et non manifestement gradients dans (3.3) et (3.4), il vient

$$D_t \phi + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - \sum_{i=1}^3 M^i \lambda^i = p + G \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^3 (L^i \nabla \mu^i - M^i \nabla \lambda^i) = \mathbf{f} - \nabla G \quad (3.7)$$

où G est une fonction de jauge arbitraire qui provient du fait que la séparation des termes manifestement gradients n'est pas unique.

Étant donné la restriction d'incompressibilité (3.4) sur $\mathbf{u}$, le potentiel ϕ n'est pas libre et doit obéir à l'équation non-locale

$$\Delta \phi = \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot (\lambda^i \nabla \mu^i).$$

De la même façon que dans le système (3.4) l'équation pour p ne participe pas à la dynamique. Ainsi l'équation (3.6) devient une identité qu'il n'est pas nécessaire d'intégrer.

L'équation (3.7) est un système de 3 équations linéaires pour les 6 inconnues L^i , M^i . Pour résoudre le système avec $\mathbf{f}$ nous remarquons que quand les potentiels λ^i et μ^i obéissent aux équations

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= 0 \\ D_t \mu^i &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ils décrivent les équations d'Euler [2], c'est à dire le système (3.4) avec $\nu = 0$. Dans le cas sur déterminé (plus d'équations que d'inconnues) l'équation (3.7) généralement n'a pas de solution, nous considérons donc seulement le cas sous déterminé (plus d'inconnues que d'équations).

Pour obtenir des équations d'évolutions comparables à celles de Constantin [6] nous désirons obtenir des équations d'advection-diffusion avec second membre pour λ^i et μ^i . Pour cela, introduisons $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$, définis par

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= L^i[\lambda, \mu] = \nu \Delta \lambda^i + \tilde{L}^i[\lambda, \mu] \\ D_t \mu^i &= M^i[\lambda, \mu] = \nu \Delta \mu^i + \tilde{M}^i[\lambda, \mu]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les termes $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$ doivent vérifier le système

$$\sum_{i=1}^3 \left(\tilde{L}^i \nabla \mu^i - \tilde{M}^i \nabla \lambda^i \right) = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G} \quad (3.10)$$

où $\tilde{G}$ est une fonction scalaire arbitraire, reliée à l'ancienne fonction G par la relation $G = \tilde{G} - \nu \Delta \phi + \nu \lambda^i \Delta \mu^i$, et

$$\tilde{\mathbf{f}} = 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i. \quad (3.11)$$

La procédure pour obtenir $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$ consiste à résoudre le système linéaire (3.10) de 3 équations pour 6 inconnues.

3.2.1 Méthode de résolution de Moore-Penrose

Le système (3.10) est sous déterminé (6 inconnues et seulement 3 équations). Il faut donc imposer des restrictions supplémentaires.

La façon la plus directe est de faire tous les coefficients $\tilde{M}^i = 0$ comme dans la formulation de Constantin [6] (voir le système (2.32)). On aura alors 3 équations pour 3 inconnues. Une méthode plus générale consiste à imposer des conditions supplémentaires sur la longueur de la solution. Pour faire ça nous utilisons l'algorithme de Moore-Penrose [32, 33, 34] qui produit 3 conditions additionnelles et nous pouvons résoudre le système plus général (3.10).

Solution de Moore-Penrose

Dans le cas sous déterminé, la solution général de Moore-Penrose [32, 33, 34] consiste à trouver la solution du système linéaire (3.10) avec la condition supplémentaire que la norme

$$\sum_{i=1}^3 \left(\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^{-2} \widetilde{M}^i \widetilde{M}^i \right) \quad (3.12)$$

soit la plus petite possible. La constante τ est introduite ici pour des raisons dimensionnelles. En effet, la transformation de Weber-Clebsch (3.1) implique que les dimensions de λ^i et μ^i soient

$$\begin{aligned} [\lambda^i] &= \frac{L}{T} \\ [\mu^i] &= L \end{aligned}$$

parce que le produit $\lambda \nabla \mu$ a les dimensions de la vitesse et les champs μ^i ont les dimensions de L parce que ils sont les coordonnées Lagrangiennes du système (voir la Section 2.4). Donc, à partir des équations (3.9) il est clair que les dimensions de $\tilde{L}^i$ et $\widetilde{M}^i$ sont

$$\begin{aligned} \tilde{L}^i &= \frac{L}{T^2} \\ \widetilde{M}^i &= \frac{L}{T} \end{aligned}$$

et le paramètre τ dans (3.12) a ainsi les dimensions du temps.

La solution générale de Moore-Penrose qui minimise la norme (3.12) est calculée dans l'Annexe B.3. Elle est explicitement donné par les équations (B.8) et (B.9). En remplaçant par ces solutions $\tilde{L}^i$ et $\widetilde{M}^i$ dans (3.9) on obtient les équations d'évolution explicites

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= \nu \triangle \lambda^i + \nabla \mu^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) \\ D_t \mu^i &= \nu \triangle \mu^i + -\tau^2 \nabla \lambda^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) , \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $\mathbb{H}$ représente à la matrice carrée symétrique

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^3 \left(\tau^2 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\beta \lambda^i + \partial_\alpha \mu^i \partial_\beta \mu^i \right) \quad (3.14)$$

et la fonction arbitraire $\tilde{G}$ est explicitement donnée par

$$\tilde{G} = \Delta^{-1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}} \quad (3.15)$$

de façon à minimiser la norme général (B.11), ce qui entraîne une bonne stabilité numérique.

3.2.2 Formulation de Ohkitani-Constantin et limite singulière

La formulation de Constantin [6] peut être directement obtenue à partir des équations d'évolution (3.9) en ajoutant au système linéaire la condition qu'impose $\tilde{M}^i = 0$ et en fixant $\tilde{G} = 0$. Avec ces conditions supplémentaires (et arbitraires) le système (3.9) devient

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= \nu \Delta \lambda^i + \tilde{L}^i[\lambda, \mu] \\ D_t \mu^i &= \nu \Delta \mu^i, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $\tilde{L}^i$ satisfait l'équation (3.10) qui devient maintenant le système déterminé

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{L}^i \nabla \mu^i = 2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i. \quad (3.17)$$

Cette formulation est contenue dans nos équations (3.13), dans la limite $\tau \rightarrow 0$. En effet, la matrice (3.14) devient alors

$$\sum_{i=1}^3 \partial_\alpha \mu^i \partial_\beta \mu^i,$$

donc la matrice $\mathbb{H}$ peut être écrite comme $\mathbb{H} = (\nabla \boldsymbol{\mu}) \cdot (\nabla \boldsymbol{\mu})^T$ et en choisissant $\tilde{G} = 0$ on arrive au système

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= \nu \Delta \lambda^i + (\nabla \boldsymbol{\mu})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{f}} \\ D_t \mu^i &= \nu \Delta \mu^i, \end{aligned} \quad (3.18)$$

qui est bien équivalent, en utilisant (3.11), au système (2.32) avec l'équation (2.33) pour les λ^i .

Méthode numérique de Ohkitani-Constantin

Remarquons que les calculs numériques effectués par Ohkitani et Constantin [7] ne sont pas explicitement basés sur la formulation [6] qui est détaillée dans la Section 2.4. Ainsi les calculs directs ne sont pas faits avec le système (3.18).

Dans le but de simplifier les calculs numériques, Ohkitani et Constantin [7] ont remplacé le système (3.18) par le champ $\mathbf{w}$ qui est défini comme

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \nabla \mu^i \quad (3.19)$$

Alors l'équation d'évolution pour $\mathbf{w}$ est

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\nabla (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nu \Delta \mathbf{w}. \quad (3.20)$$

En plus de cette équation, il faut calculer également l'évolution du vecteur $\ell^m = \mu^m - x^m$, en utilisant l'équation :

$$D_t \ell = -\mathbf{u} + \nu \Delta \ell, \quad (3.21)$$

qui est complètement équivalente à l'équation d'évolution pour μ^i (2.26). En utilisant les équations (3.20) et (3.21) il suffit alors de calculer la matrice $\nabla \mu$ pour obtenir les champs λ^i par inversion de la relation (3.19).

Pour pouvoir effectuer cette inversion nous avons besoin que la matrice $\nabla \mu$ soit inversible, ce qui est nécessaire pour que la transformation de coordonnées

$$\mathbf{w} = \nabla \mu \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (3.22)$$

soit unique et bien définie dans tous les points dans l'espace.

La quantité $\mathbf{w}$ joue ici le rôle d'une *vitesse compressible* dans le sens que

$$\mathbf{u} = \mathcal{P} \mathbf{w},$$

où $\mathcal{P}$ est la projection de Leray-Hodge sur les fonctions de divergence nulle [6].

Remarquons que cette méthode permet d'utiliser des équations d'évolution ne présentant que des nonlinéarités quadratiques et permet aussi d'économiser de la mémoire et temps de calcul par rapport à l'intégration directe du système (3.18).

Comparaison des condition d'inversibilité

La méthode de Constantin aura des problèmes quand le déterminant $\det(\nabla \boldsymbol{\mu}) = 0$ qui est le cas dans une variété de codimension 1. Dans un espace de 3 dimensions, la situation générique est que pour chaque point dans l'espace (x^1, x^2, x^3) il existe un temps t^* pour lequel le déterminant devient zéro.

Par contre dans notre cas plus général, avec 3 équations et 6 inconnues, la non-inversibilité de

$$\mathbb{H} = \nabla(\boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla(\boldsymbol{\mu})^T + \tau^2 \nabla(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla(\boldsymbol{\lambda})^T$$

arrivera dans une variété de codimension 4, qui correspond à des points isolés dans l'espace-temps.

En conséquence la condition $\det(\nabla \boldsymbol{\mu}) = 0$ arrivera plus facilement, dans une codimension plus basse que la condition $\det(\mathbb{H})$, et (comme on le verra dans les simulations numériques) $\tau \rightarrow 0$ est une *limite singulière*.

3.2.3 Critère de réinitialisation

Comme on vient de voir, quand le déterminant $\det(\mathbb{H})$ s'anulle, les équations d'évolution de potentiels de Weber-Clebsch (3.13) ne sont plus définies. Pour éviter cette situation nous suivons Ohkitani et Constantin [7] et nous faisons une *réinitialisation*. Plus précisément, quand le minimum spatial du déterminant

$$\text{Min}(\det(\mathbb{H})) \leq \epsilon^2$$

on transforme les champs de façon que

$$\begin{aligned} \mu_p^i &= 0 \\ \lambda^i &= u^i(t_0) \\ \phi &= 0, \end{aligned}$$

où $u^i(t_0)$ sont les composants de la vitesse obtenues à partir de (3.1) à l'instant t_0 , où la réinitialisation est effectuée, et les champs λ^i , μ^i et ϕ^i sont générés de la même façon que dans l'Annexe B.1.

3.3 Résultats numériques

Cette section contient les résultats des simulations numériques appliqués aux équations de Navier-Stokes. Nous utilisons des méthodes pseudo-spectrales à cause de leur facilité d'implémentation et par leur précision.

Les détails de l'implémentation sont décrits dans l'Annexe A.1

3.3.1 Écoulement de Taylor-Green

L'écoulement de Taylor-Green est un écoulement standard dans l'étude de la turbulence [35]. Ses avantages sont l'existence de plusieurs études [36] qui permettent d'effectuer des comparaisons, ainsi que des économies de temps de calcul et de mémoire qui sont obtenues en exploitant ses symétries (voir l'Annexe B.2).

La condition initiale de Taylor-Green est :

$$\begin{aligned} u^1 &= \sin x \cos y \cos z \\ u^2 &= -\cos x \sin y \cos z \\ u^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Comme la longueur et la vitesse initiale sont d'ordre 1, le nombre de Reynolds est défini dans ce qui suit comme $R = 1/\nu$.

Les simulations qui suivent sont effectuées avec une résolution de 192^3 .

Dans la suite nous comparons des simulations des potentiels de Weber-Clebsch en utilisant les équations (3.9) et (3.15) avec lesquelles nous obtenons la vitesse $\mathbf{u}$ à partir de (3.1) avec la vitesse provenant d'une simulation directe des équations de Navier-Stokes.

Les équations de Navier-Stokes sont intégrées en utilisant des méthodes pseudo-spectrales standard [37]. Le schéma temporel est le Adams-Baschforth d'ordre 2 (voir l'Annexe A.2).

Intégration sans reinitialisation

Considérons d'abord des simulations sans reinitialisation, où les champs sont initialisés seulement à $t = 0$.

L'évolution temporelle du minimum spatial du déterminant de la matrice $\mathbb{H}$ (3.14) est représentée dans la Figure 3.1 pour plusieurs valeurs du paramètre τ . Il est clair que, quand on s'approche de la limite de OC ($\tau = 0$), le minimum du déterminant arrive à zéro dans un temps fini et la simulation ne peut plus continuer. D'autre part, quand $\tau \neq 0$ le déterminant reste positif et la simulation peut continuer. Ce comportement est consistant avec la condition d'inversibilité de $\mathbb{H}$, discutée dans la Section 3.2.2. La nature singulière de la limite quand $\tau \rightarrow 0$ est manifeste.

Pour caractériser et mesurer la précision de notre algorithme pour les potentiels de Weber-Clebsch avec $\tau \neq 0$, nous calculons l'*enstrophie* associée qui est définie comme

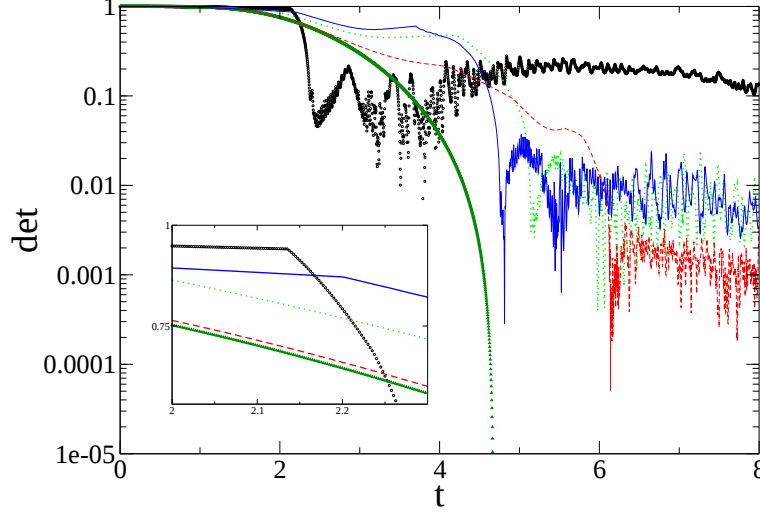


FIG. 3.1 – Évolution temporelle du minimum de $\det(\mathbb{H})$ pour un nombre de Reynolds $R = 40$ avec $\tau = 0, 0.01, 0.1, 0.2$ et 1 (à partir de bas en haut, pour $t = 2.1$, voir l'insert).

$$\Omega(t) = \sum_k k^2 E(k, t) \quad (3.24)$$

où $E(k, t)$ est le spectre d'énergie qui est calculé à partir de la vitesse dans l'espace de Fourier $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k - \frac{\Delta k}{2} < |\mathbf{k}'| < k + \frac{\Delta k}{2}} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)|^2. \quad (3.25)$$

Ainsi on calcule $E(k, t)$ moyennant sur des couches sphériques de largeur $\Delta k = 1$. L'enstrophie ainsi calculée est comparée avec celle des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

Il est clair, en inspectant la Figure 3.2, que l'enstrophie calculée avec une résolution de 192^3 est bien résolue tant que le nombre de Reynolds reste plus petit que $R \simeq 150$. En conséquence, quand $\tau = 1$, notre algorithme général (3.13) reproduit bien la dynamique de Navier-Stokes (faite avec les mêmes paramètres) pour *tous les temps* quand le nombre de Reynolds n'est pas trop grand. Nous avons aussi vérifié qu'un nombre de Reynolds plus grand nécessite une résolution plus grande.

L'évolution temporelle du spectre d'énergie est montrée dans la Figure 3.3. Une erreur apparaît à grand nombre d'onde k , même quand l'enstrophie

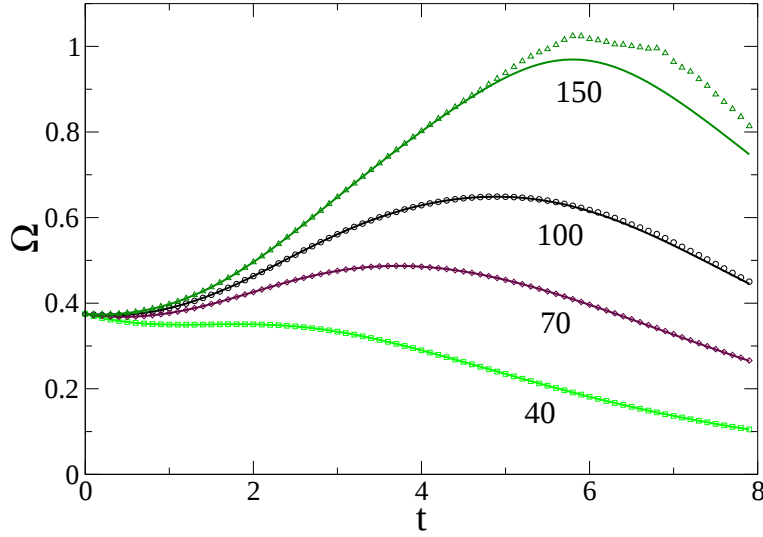


FIG. 3.2 – Évolution temporelle de l'enstrophie Ω pour les nombres de Reynolds $R = 40$, 70 , 100 et 150 ($\square$, $\diamond$, $\circ$ et $\triangle$) et $\tau = 1$. Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

est bien résolue (voir Figure 3.2). Quand le temps augmente de 1 à 2.5, le temps où arrive le premier minimum du déterminant $\det(\mathbb{H})$ pour $\tau = 1$, le nombre d'onde auquel arrive l'erreur diminue. Cependant le niveau de l'erreur est plus grande. Ensuite, quand l'enstrophie diminue, l'erreur devient plus petite comme on peut le voir dans la Figure 3.3 à $t = 7.5$.

Intégration avec reinitialisation

Considérons maintenant, en suivant Ohkitani et Constantin [7] c.f. Section 3.2.3, des calculs faits avec reinitialisations.

Ohkitani et Constantin ont lié l'annulation du $\det(\nabla \mu)$ à une diffusion de particules très intense qui a lieu là où la reconnexion est produite. Dans notre formulation généralisée, les champs λ^i et μ^i sont traités de la même façon, donc nous nous attendons à ce que la diffusion intense des particules soit associée aussi à une quasi-annulation de notre déterminant $\det(\mathbb{H})$.

Il est clair à partir de la Figure 3.4 que l'enstrophie calculée avec une résolution de 192^3 , un seuil de $\epsilon^2 = 0.01$ et $\tau = 1$ est assez bien résolue, à condition que le nombre de Reynolds reste au dessous de $R \simeq 800$, donc si on fait des reinitialisations il est possible de réaliser des simulations numériques

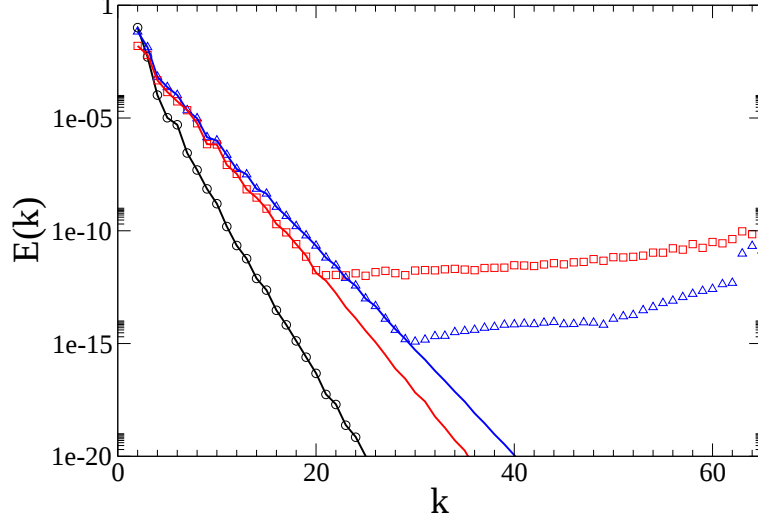


FIG. 3.3 – Évolution du spectre d'énergie pour le nombre de Reynolds $R = 40$ pour $t = 1, 2.5$ et 7.5 ($\circ$, $\square$, et $\triangle$) et $\tau = 1$. Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

avec un nombre de Reynolds beaucoup plus grand.

Un mécanisme qui peut diminuer $\det(\mathbb{H})$ est l'effet de l'advection sur les équations (3.9) qui force à aligner les gradients $\nabla \lambda$ et $\nabla \mu$ dans la même direction. Ce comportement conduit à une perte de précision numérique quand on résout le système (3.10), ce qui pose des problèmes pour inverser la matrice $\mathbb{H}$. Il faut remarquer que ces problèmes sont automatiquement résolus quand on fait une reinitialisation.

L'évolution temporelle de l'erreur dans le spectre d'énergie est montrée dans la Figure 3.5. À partir de la figure il est clair qu'après une reinitialisation, les erreurs qui résident dans les hauts nombres d'onde diminuent très vite. Ainsi juste après de faire la reinitialisation on retrouve la dynamique de Navier-Stokes dans les échelles les plus petites, dans un processus d'*auto guérison du spectre*.

L'influence du paramètre τ dans les erreurs est montrée dans la Figure 3.6. Il est clair que les erreurs après une reinitialisation sont plus grandes quand $\tau = 0.1$ que quand $\tau = 0$. Cependant les erreurs à la fin de la simulation sont petites et de la même grandeur dans le deux cas.

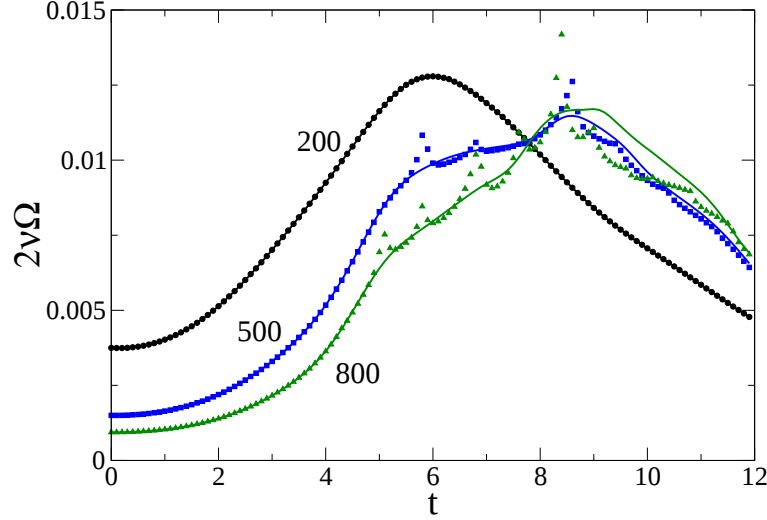


FIG. 3.4 – Évolution temporelle de la dissipation énergie $2\nu\Omega$ avec $\tau = 1$ et seuil de reinitialisation $\epsilon^2 = 0.01$ avec un nombre de Reynolds $R = 200, 500$ et 800 ($\circ$, $\square$, et $\triangle$). Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

Fréquence des reinitialisations

L'influence du paramètre τ sur la distribution temporelle des intervalles

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1} \quad (3.26)$$

entre les temps des reinitialisations t_j , avec une valeur fixe du seuil $\epsilon^2 = 0.01$, est montré dans la Figure 3.7. Il est possible de voir que, pour un temps donné, l'intervalle est une fonction croissante de τ . Cependant le comportement général de Δt est bien préservé quand τ est suffisamment petit. Si nous regardons avec attention, on note que quand $t \simeq 10$, les intervalles entre reinitialisations Δt augmentent depuis $\Delta t \simeq 0.25$ vers $\Delta t \simeq 0.5$ quand τ est varié de 0 vers 0.01. Nous avons aussi indiqué l'influence de τ dans le nombre total de reinitialisations entre $t = 0$ et $t = 12$ sur la Table 3.1. La table montre que le nombre total de reinitialisations diminue quand τ est augmenté de 0 à 0.001. Remarquons que cet effet arrive pour des valeurs de τ qui sont beaucoup plus petit que Δt .

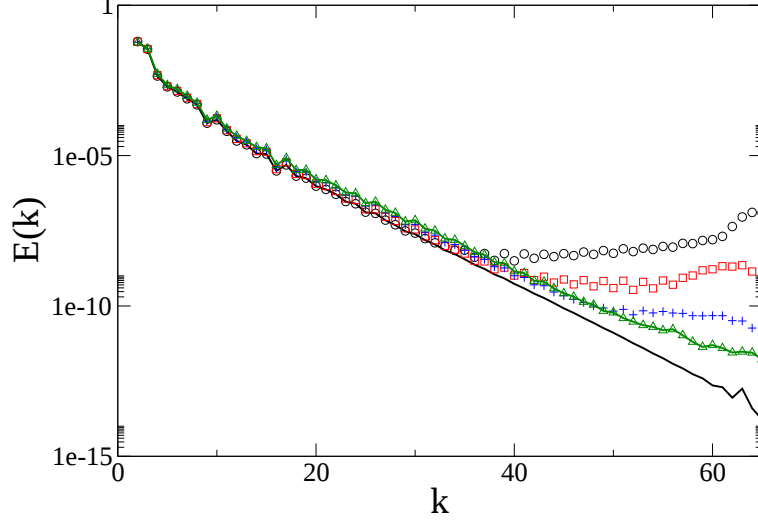


FIG. 3.5 – Évolution temporelle du spectre d'énergie après une reinitialisation pour un nombre de Reynolds $R = 200$ avec $\tau = 0.01$, à $t = 3.6$ (jusqu'après la reinitialisation), 3.7, 3.8 et 3.9 ($\circ$, $\square$, $+$ and $\triangle$) Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de Navier-Stokes à $t = 3.6$ et 3.9.

3.3.2 Vortex de Boratav, Peltz et Zabusky

La condition initiale de Boratav, Peltz et Zabusky [38] consiste en deux tubes de vorticité initialement perpendiculaires. Elle était envisagée comme un cas spécial et très particulier pour étudier la reconnexion de vortex. Ce cas est spécial parce que les reconnexions ont lieu dans un intervalle, tant spatial que temporel, très marqué. Pour cela elle a été utilisée par Ohkitani et Constantin [7] pour tester leur formulation des équations de Navier-Stokes avec les potentiels de Weber-Clebsch.

Dans cette section, nous montrons les résultats de notre algorithme généralisé avec la condition initial BPZ et $\tau \neq 0$. Nous montrons aussi la comparaison entre l'algorithme de Ohkitani-Constantin et le notre.

Conditions initiales

La distribution initiale de vorticité est donnée par [38]

$$\omega(\eta) = \begin{cases} \hat{\omega} & \text{si } \eta \leq 0 \\ \hat{\omega} [1 - f(\eta)] & \text{si } 0 < \eta < 1 \\ 0 & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

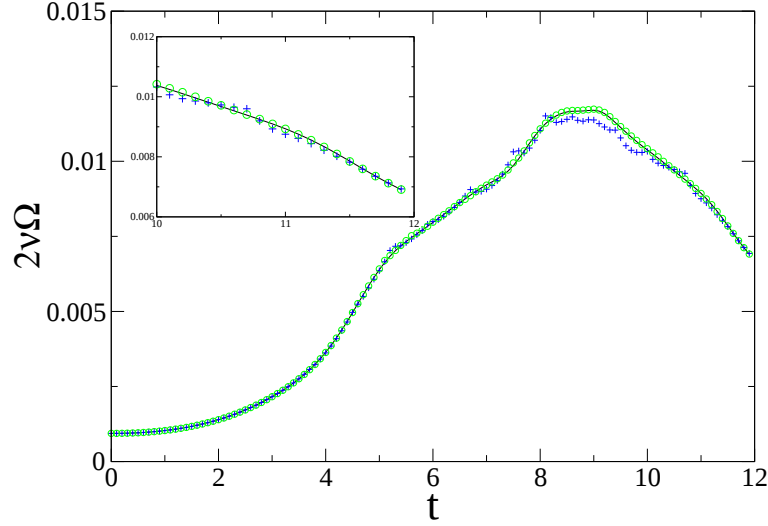


FIG. 3.6 – Évolution temporelle de la dissipation d'énergie $2\nu\Omega$ pour un nombre de Reynolds $R = 800$ pour $\tau = 0$ et 0.1 ($\circ$ et $+$). Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

où

$$\eta = \frac{r - r_i}{r_o - r_i}$$

et

$$f(\eta) = \exp\left(\frac{-2.56085}{\eta} e^{\frac{1}{\eta-1}}\right)$$

et

$$r^2 = (x - x_{01})^2 + (y - y_{01})^2,$$

pour le vortex dans l'axe z , et

$$r^2 = (x - x_{02})^2 + (z - z_{02})^2,$$

pour le vortex dans l'axe y . La valeur $\hat{\omega}$ est la vorticité dans le noyau. Les valeurs x_{01} , y_{01} , x_{02} et z_{02} sont les positions des centres des vortex, r_i et r_o sont les radii intérieur et extérieur des vortex.

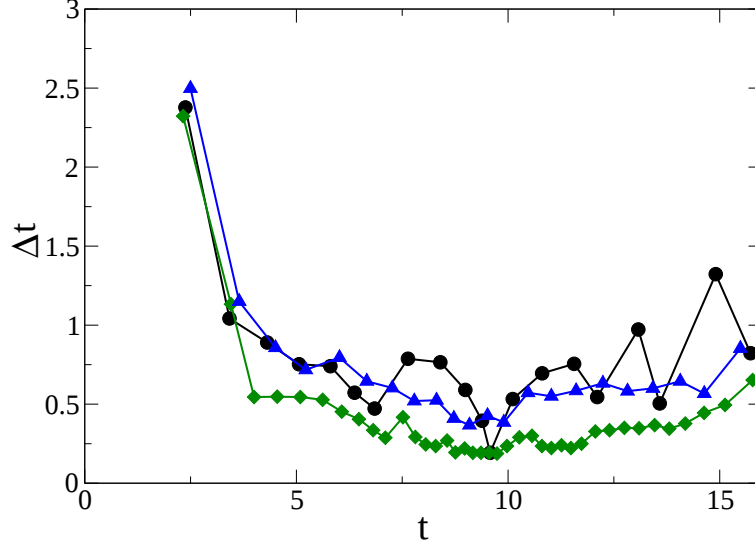


FIG. 3.7 – Évolution temporelle des intervalles entre les reinitialisations Δt_j versus le temps de reinitialisation t_j pour un nombre de Reynolds $R = 800$ pour $\tau = 0$, 0.01 et 1 ($\diamond$, $\triangle$ et $\circ$).

Les simulations qui suivent ont été réalisées en résolution 128^3 . Nous avons utilisé les valeurs : $\hat{\omega} = 12$, $x_{01} = \frac{3}{4}\pi$, $x_{02} = \frac{5}{4}\pi$, $y_{01} = z_{02} = \pi$, $r_o = \frac{\pi}{4}$ et $r_i = \frac{7}{48}\pi$.

Le nombre de Reynolds Re est calculé à partir de la circulation initiale des tubes de vortacité Γ_{Tube} tel que

$$Re = \frac{\Gamma_{\text{Tube}}}{\nu}$$

où la circulation est

$$\Gamma_{\text{Tube}} = 2\pi \int_0^{r_o} \omega r dr \simeq 0.447\pi \hat{\omega} r_o^2 = 10.44.$$

Dans notre cas, avec une viscosité $\nu = 100$, le nombre de Reynolds est de 1044.

Comparaison entre l'algorithme Weber-Clebsch et les simulations directes

Nous utilisons le même type de comparaison que dans le cas de l'écoulement de Taylor-Green : on comparera notre formulation des poten-

Valeur de τ	Nombre de Reinitialisations
0.0	29
0.001	20
0.005	17
0.01	16
0.05	14
0.1	15
1.0	13

TAB. 3.1 – Variations avec τ du nombre total de reinitialisations entre $t = 0$ et $t = 12$ (avec les mêmes paramètres de la Figure 3.7).

tiels de Weber-Clebsch avec des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

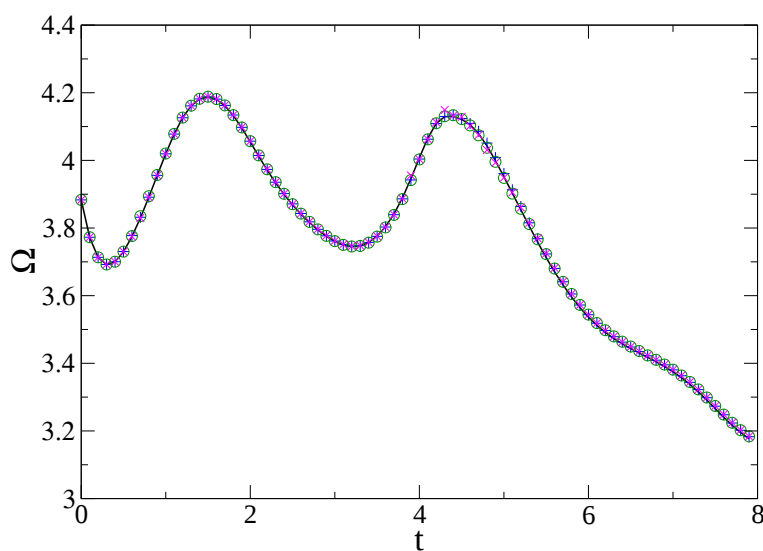


FIG. 3.8 – Évolution temporelle de l'enstrophie Ω pour un nombre de Reynolds de $R = 1044$ avec $\tau = 0, 0.01$ et 0.1 (+, o et x), la ligne continue représente la simulation des équations de Navier-Stokes.

Comme dans le cas antérieur on utilise l'enstrophie (3.24) et le spectre d'énergie (3.25) pour faire la comparaison entre les deux formulations. Sur

la Figure 3.8, avec différents valeurs de τ , il est clair que l'enstrophie est toujours bien résolue.

Le temps entre reinitialisations comme méthode de capture de la reconnexion

Étudions maintenant l'influence du paramètre τ dans la distribution des Δt_j (3.26) avec une valeur pour le seuil $\epsilon^2 = 0.1$. Nous utilisons la même résolution et nombre de Reynolds que pour la Figure 3.8.

On voit dans la Figure 3.9 que pour toutes les valeurs de τ , il y a le même minimum, très marqué, correspondant à un maximum dans l'enstrophie. Le minimum le plus marqué correspond au moment où la reconnexion de vortex a lieu.

Dans la même figure est présentée la simulation faite avec les paramètres de OC [7] qui est tout à fait en accord avec nos résultats.

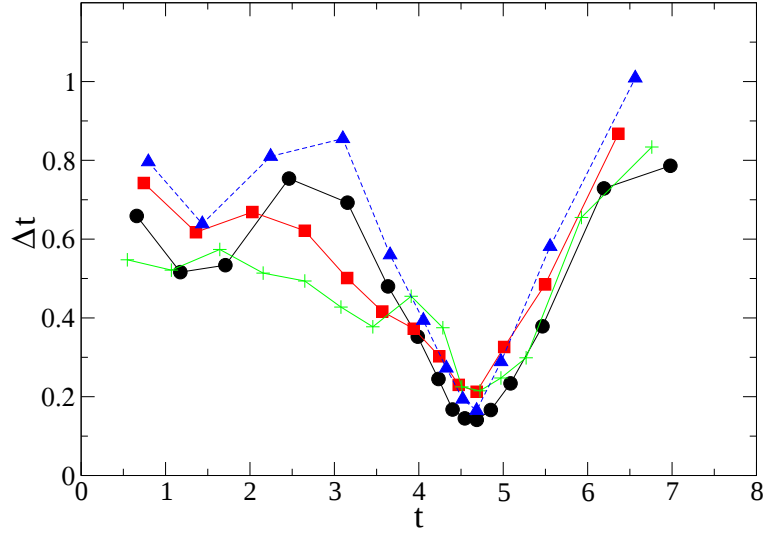


FIG. 3.9 – Évolution temporelle de Δt pour $\tau = 0, 0.01$ et 0.1 ($\circ$, $\square$ et $+$), les triangles correspondent à la simulation effectuée par Ohkitani-Constantin.

Dans la Figure 3.10 nous avons représenté l'évolution temporelle du module de la vorticité $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ qui permet de suivre la reconnexion de vortex dans l'espace physique. Il n'est pas difficile de se convaincre de l'utilité de la méthode quand on compare où est le minimum de Δt dans la Figure 3.9 avec le moment où la reconnexion est produite, autour de $t \sim 4.5$.

D'autre part, on voit dans la Figure 3.12 qu'il est clair que la région spatiale où sont les minima de $\det(\mathbb{H})$ au moment d'une reinitialisation. Il est normal de trouver que la zone où est produite la reconnexion correspond à la petite région d'interaction entre les deux vortex principaux. C'est la même région où se trouvent les minima du $\det(\mathbb{H})$. Cette région est spatialement la même pour toute valeur de τ .

3.4 Évaluation du critère de reconnexion

Nous venons d'étudier deux écoulements avec la dynamique de Navier-Stokes. Dans l'un d'eux, le vortex de Taylor-Green, les couches de vorticité sont formées au début de la dynamique et après elles s'enroulent par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [36]. Dans l'autre cas l'écoulement BPZ consiste en deux tubes de vorticité placés de façon perpendiculaire entre eux. Ces deux tubes interagissent et toute la reconnexion se passe au point de contact. Cette condition a été initialement conçue pour étudier la reconnexion de vortex en détail [38].

Il est possible de dire que dans le cas de l'écoulement de Taylor-Green les reconnexions sont beaucoup moins prononcées que dans le cas de la condition BPZ. Ceci est observé en comparant dans les Figures 3.7 et 3.9 les minima de Δt qui ont une allure très diff rent.

L'explication de cette différence apparait en observant les Figures 3.12 et 3.11. Dans le cas de la condition BPZ les minima de $\det(\mathbb{H})$ sont dans une région petite et limitée qui correspond à la région d'interaction entre les deux vortex. Mais si nous prenons le même type de comparaison pour l'écoulement de Taylor-Green, nous trouvons que les minima ne sont plus localisés mais ils forment des lignes que relient les differents vortex qui caractérisent cet écoulement. Ainsi le phénomène est beaucoup moins intense et localisé dans le cas de Taylor-Green par la nature même de la reconnexion.

Les figures 3.10, 3.11 et 3.12 ont été faites avec VAPOR [39, 40].

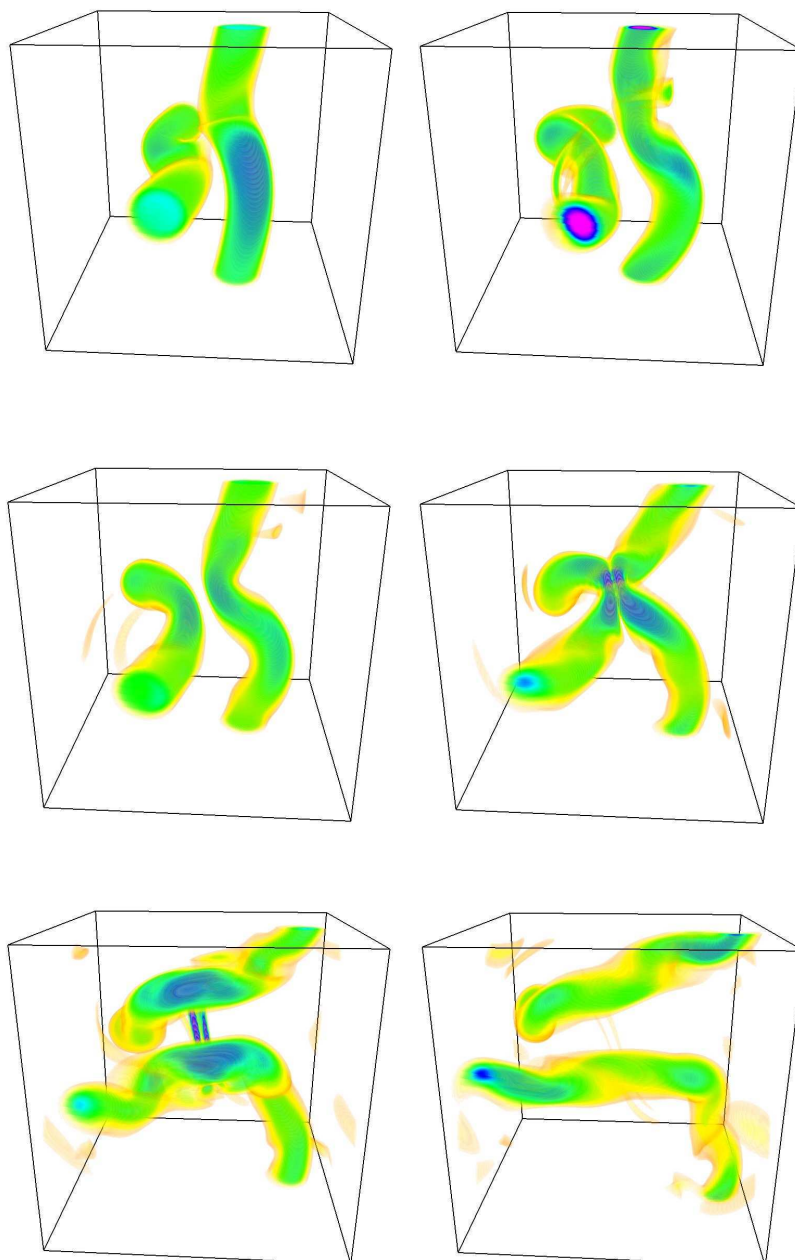


FIG. 3.10 – Évolution temporelle de ω^2 pour $\tau = 0.01$. Pour le processus de la reconnexion de vortex avec la condition BPZ. Avec les temps $t = 0.6, 1.8, 3.0, 4.2, 5.4$ et 6.6 .

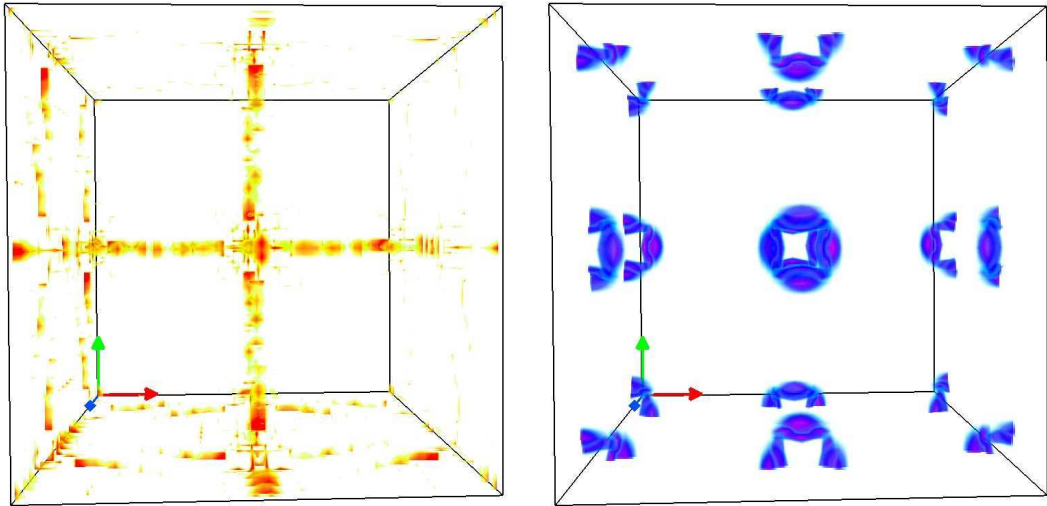


FIG. 3.11 – Processus de la reconnexion de vortex avec la condition de Taylor-Green. Image des minima de $\det(\mathbb{H})$ au moment d'une reinitialisation (gauche) avec la vorticité correspondante ω^2 pour $\tau = 0.1$ (droite), une résolution de 64^3 et un nombre de Reynolds de 200 dans la boîte périodique $[0, 2\pi]^3$.

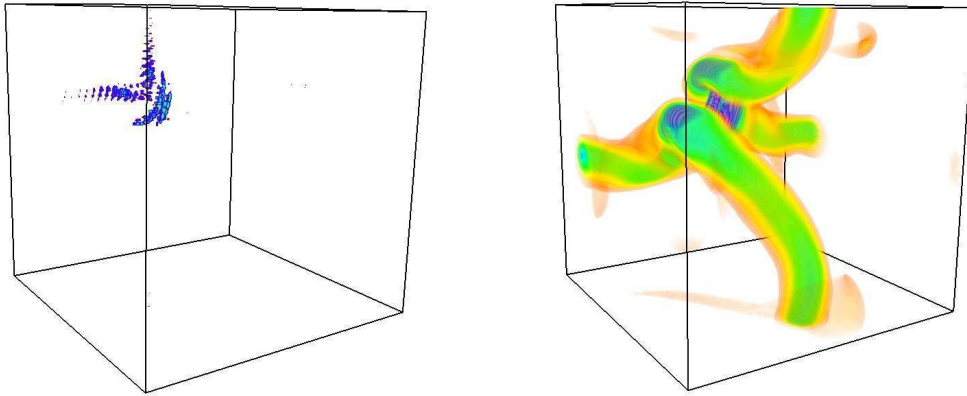


FIG. 3.12 – Visualisation du déterminant de (3.14) (gauche) et du carré de la vorticité (droite) pour la condition initiale BPZ avec $\tau = 0.01$ à l'instant d'une reinitialisation. On remarque que le minimum du déterminant (en bleu) coïncide avec le point d'interaction des deux vortex.

Chapitre 4

Extension aux fluides compressibles

Ce chapitre contiens des résultats préliminaires obtenues dans le dernier mois de travail de cette thèse. Nous étendons notre formulation aux fluides compressibles et visqueux. La nouvelle formulation est validée sur l'écoulement de Taylor-Green compressible. Nous avons pu, par l'instant, seulement vérifier la bonne convergence des algorithmes. Nous comptons d'étudier cette formulation plus profondément dans le futur.

4.1 Principe d'action stationnaire pour les fluides parfaits

L'énergie d'un fluide compressible contenu dans un élément de volume est [41]

$$\mathcal{H} = \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \rho \varepsilon, \quad (4.1)$$

le premier terme étant l'énergie cinétique et le second l'énergie interne (ε est l'énergie interne par unité de masse du fluide).

Pour déduire les équations de mouvement nous utilisons la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L} = \rho \lambda^i \partial_t \mu^i - \rho \partial_t \phi + \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \rho \varepsilon. \quad (4.2)$$

Le signe du terme $\rho \partial_t \phi$ vient de la définition du champ de vitesse $\mathbf{u} = \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi$, (si nous avons défini la vitesse irrotationnelle par $\mathbf{u} = \nabla \psi$, le terme serait positif).

A partir de la densité Lagrangienne (4.2), nous faisons les variations pour chaque champ, et on obtient les équations [42, 43, 44, 45]

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= 0 \\ D_t \mu^i &= 0 \\ D_t \phi &= \varepsilon + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \\ \partial_t \rho &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ici on suppose que la dynamique est barotrope, cela veut dire que la pression est une fonction que dépend seulement de la densité $p(\rho)$. Donc nous avons la relation pour l'énergie par unité de masse

$$d\varepsilon = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

et nous avons pour l'enthalpie par unité de masse

$$dw = \frac{dp}{\rho},$$

à partir de lesquelles est possible de déduire la relation

$$\varepsilon + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w.$$

Donc la dynamique de ϕ dans le système (4.3) devient

$$D_t \phi = w - \frac{\mathbf{u}^2}{2} \tag{4.4}$$

Ici on utilisera la relation fonctionnelle pour w

$$w = \frac{(\rho - 1)}{Ma^2}, \tag{4.5}$$

où Ma est le nombre de Mach pour un écoulement de densité $\rho_0 = 1$ et de vitesse $\mathbf{u} \sim 1$. Dans cette approximation nous supposons que la densité ρ est proche d'être uniforme dans tout l'écoulement et en conséquence le nombre de Mach est petit.

Pour fixer le ρ initial, nous imposons la condition d'incompressibilité sur w à $t = 0$

$$w_0 = -\Delta^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \tag{4.6}$$

et la relation (4.5).

4.2 Extension aux fluides visqueux

Les équations de base pour un fluide visqueux et compressible sont

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{u} &= -\nabla w + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \partial_t \rho &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) , \end{aligned} \quad (4.7)$$

en consequence les équations pour les potentiels de Weber-Clebsch (3.9) restent toujours les mêmes pour λ^i et μ^i , mais l'équation (3.6) pour ϕ devient

$$D_t \phi = w + \lambda^i \widetilde{M}^i - \widetilde{G} - \frac{|u|^2}{2} + \nu \Delta \phi. \quad (4.8)$$

Ainsi, le système d'équations d'évolution est

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= \nu \Delta \lambda^i + \widetilde{L}^i[\lambda, \mu] \\ D_t \mu^i &= \nu \Delta \mu^i + \widetilde{M}^i[\lambda, \mu] \\ \partial_t \rho &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ D_t \phi &= w + \lambda^i \widetilde{M}^i - \widetilde{G} - \frac{|u|^2}{2} + \nu \Delta \phi. \end{aligned}$$

4.3 Validation Numérique

Pour valider notre nouvel algorithme nous avons utilisé la condition initiale de Taylor-Green, un nombre de Mach $Ma = 0.3$ et une résolution spatiale de 128^3 .

La condition initiale pour la densité est donnée par la relation (4.6).

4.3.1 Dynamique Visqueuse

Pour un nombre de Reynolds $R = 200$ l'évolution de l'enstrophie pour différentes valeurs de τ est montrée dans la figure(4.1). Un bon accord est obtenu avec les résultats directs de l'intégration des équations de Navier-Stokes. L'évolution de la moyenne spatiale de $\rho^2/2$ est montrée dans la figure (4.2). Enfin, l'évolution temporelle des intervalles entre les reinitialisations pour différents τ est montrée dans la figure (4.3)

4.4 Conclusion

Nous avons pu étendre notre formulation au cas compressible et visqueux. Nous comptons explorer dans le futur la possibilité d'étudier la reconnexion en régime compressible à l'aide de cette méthode.

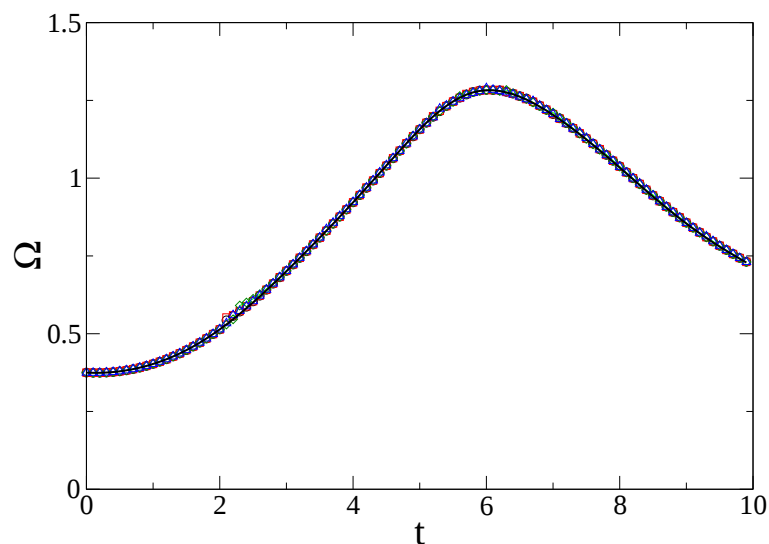


FIG. 4.1 – Évolution temporelle de l'enstrophie Ω pour des nombres de Reynolds et de Mach de $R = 200$ et $Ma = 0.3$ avec $\tau = 0, 0.01, 0.1$ et 1 ($\circ, \square, \diamond$ et $\triangle$), la ligne continue représente la simulation des équations de Navier-Stokes.

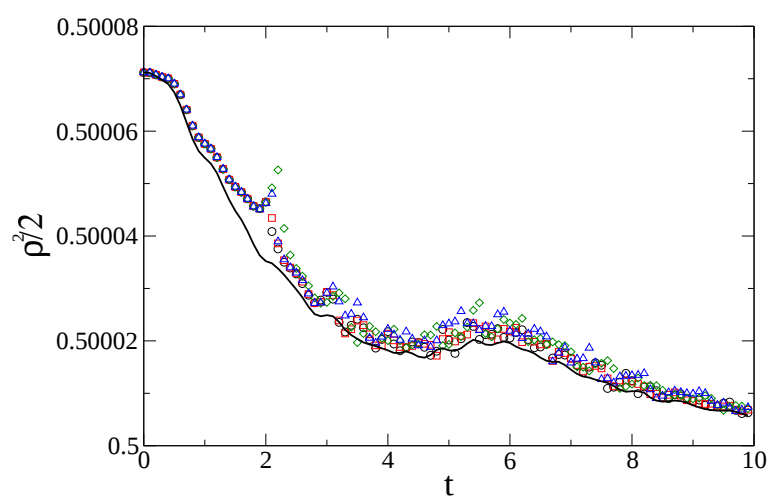


FIG. 4.2 – Évolution temporelle de la quantité $\rho^2/2$ pour des nombres de Reynolds et de Mach de $R = 200$ et $Ma = 0.3$ avec $\tau = 0, 0.01, 0.1$ et 1 ($\circ, \square, \diamond$ et $\triangle$), la ligne continue représente la simulation des équations de Navier-Stokes.

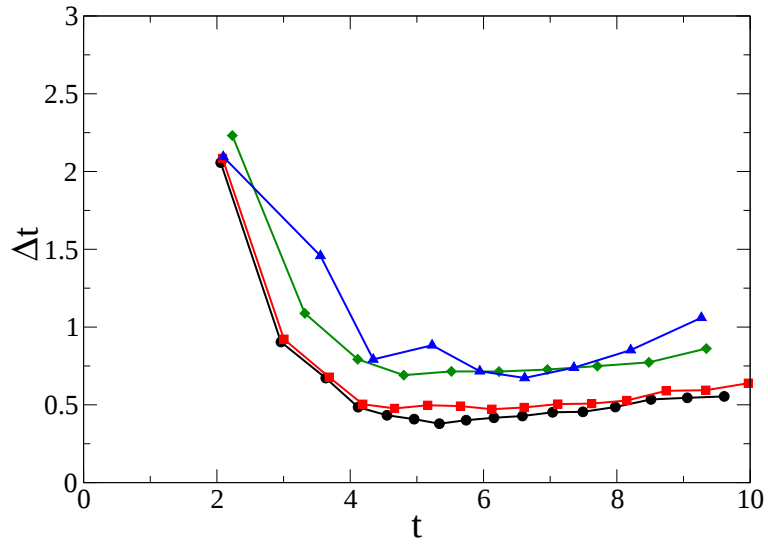


FIG. 4.3 – Évolution temporelle des intervalles entre les reinitialisations Δt_j versus le temps de reinitialisation t_j pour des nombres de Reynolds et de Mach de $R = 200$ et $Ma = 0.3$ avec $\tau = 0, 0.01, 0.1$ et 1 ($\circ$, $\square$, $\diamond$ et $\triangle$).

Chapitre 5

Extension à la magnétohydrodynamique

Ce chapitre est consacré à l'extension à la magnétohydrodynamique de notre généralisation de la méthode de Constantin décrite dans le Chapitre 3.

Cette extension est basée sur la représentation de la dynamique du potentiel vecteur magnétique par la transformation de Weber-Clebsch.

Les équations d'évolution du potentiel vecteur ne sont pas identiques à celles de la vitesse dans le cas Navier-Stokes (présence d'un terme supplémentaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}$).

Nous commençons donc par établir les équations d'évolution adaptées au potentiel vecteur.

Dans une seconde partie nous étudions la validité du critère de reconnection lié à l'accélération des reinitialisations en procédant à la simulation numérique de différents écoulements MHD.

5.1 Potentiel vectoriel magnétique en variables de Weber-Clebsch

Équations d'évolution standard de la MHD

On commence par rappeler les équations standard de la magnétohydrodynamique (MHD) pour l'induction $\mathbf{B}$, en unités alfvéniques [29] :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

avec la dynamique de la vitesse $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nous récrivons les équations pour $\mathbf{B}$ comme

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

qui sont équivalentes à (5.1).

Équations d'évolution pour le potentiel vecteur

À fin d'écrire l'équation pour $\mathbf{B}$ d'une façon plus convenable à notre étude, nous introduisons le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$, tel que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (5.4)$$

unique sous la condition $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (condition similaire à l'incompressibilité pour les équations d'Euler).

L'introduction de cette variable additionnelle est justifiée par le fait que nous construisons la dynamique du champ magnétique à partir de la dynamique de $\mathbf{A}$, en utilisant l'identité vectorielle

$$\nabla \times \left(\sum_{m=1}^3 u^m \nabla A^m - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{A} \right) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} \quad (5.5)$$

et en utilisant la condition d'incompressibilité pour $\mathbf{u}$ nous pouvons écrire les équations pour $\mathbf{B}$ en termes de $\mathbf{A}$:

$$\partial_t \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\sum_{m=1}^3 u^m \nabla A^m - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{A} \right) + \eta \Delta \nabla \times \mathbf{A}$$

pourtant l'équation d'évolution pour $\mathbf{A}$ s'écrit

$$D_t \mathbf{A} = -\nabla c + \sum_{m=1}^3 u^m \nabla A^m + \eta \Delta \mathbf{A} \quad (5.6)$$

où c est un champ scalaire arbitraire.

Extension de la formulation de Weber-Clebsch

En prenant la transformation de Weber-Clebsch (3.1) pour écrire le potentiel vectoriel magnétique

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi, \quad (5.7)$$

nous obtenons l'évolution temporelle de $\mathbf{A}$, en appliquant la dérivée matérielle D_t sur la transformation (5.7), de façon similaire au cas de Navier-Stokes (voir le Chapitre 3), pour obtenir

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{A} = & \sum_{i=1}^3 (D_t \lambda^i \nabla \mu^i - D_t \mu^i \nabla \lambda^i) + \\ & \sum_{m=1}^3 u^m \nabla A^m - \nabla \left(D_t \phi - \sum_{i=1}^3 D_t \mu^i \lambda^i + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

En faisant la même séparation que dans le cas Navier-Stokes nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \eta \Delta \mathbf{A} - \nabla G &= \sum_{i=1}^q (D_t \lambda^i \nabla \mu^i - D_t \mu^i \nabla \lambda^i) \\ c + G &= D_t \phi - \sum_{i=1}^3 D_t \mu^i \lambda^i + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.9)$$

où G est un terme de jauge qui vient du fait que la séparation n'est pas unique. Nous ne résolvons pas la dynamique de ϕ , qui est traduite par la divergence nulle pour $\mathbf{A}$.

Nous imposons que l'évolution temporelle des potentiels λ^i et μ^i soit donnée par

$$\begin{aligned} D_t \lambda^i &= L^i[\lambda, \mu] = \eta \Delta \lambda^i + \tilde{L}^i[\lambda, \mu] \\ D_t \mu^i &= M^i[\lambda, \mu] = \eta \Delta \mu^i + \tilde{M}^i[\lambda, \mu]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nous écrivons la dissipation pour le potentiel vectoriel magnétique, comme dans le cas de Navier-Stokes, par $\mathbf{f} = \eta \Delta \mathbf{A}$ ce qui se traduit pour les termes $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$ par

$$\sum_{i=1}^3 (\tilde{L}^i \nabla \mu^i - \tilde{M}^i \nabla \lambda^i) = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}$$

où $\tilde{G}$ est une fonction arbitraire liée à G par la relation $G = \tilde{G} - \eta \Delta \phi + \eta \lambda^i \Delta \mu^i$, et

$$\tilde{\mathbf{f}} = 2\eta \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i. \quad (5.11)$$

La procédure pour obtenir $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$ est équivalente à la méthode utilisée pour les équations de Navier-Stokes et est expliquée en détail dans la Section 3.2.1 avec la seule différence que pour la norme (3.12) :

$$\sum_{i=1}^3 \left(\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^{-2} \tilde{M}^i \tilde{M}^i \right)$$

la dimension de τ , est différente de celle associée au système de Navier-Stokes. En effet quand nous faisons le même type d'analyse dimensionnelle que dans le cas d'équations de Navier-Stokes, nous trouvons que le terme $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ du système (5.2) doit avoir la même dimension que $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Ainsi $\mathbf{B}$ a les mêmes dimensions que $\mathbf{u}$, donc

$$[\mathbf{B}] = \frac{L}{T}$$

et en observant que les μ^i ont pour unité L (par le fait qu'ils sont les coordonnées Lagrangiennes), nous trouvons que les champs λ^i ont la dimension

$$[\lambda^i] = \frac{L^2}{T},$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} [\tilde{M}^i] &= \frac{L}{T} \\ [\tilde{L}^i] &= \frac{L^2}{T^2}. \end{aligned}$$

Finalement, à partir de la norme (3.12), τ a la dimension :

$$[\tau] = \frac{T}{L}.$$

5.2 Simulations Numériques

Comme pour les équations de Navier-Stokes nous avons réalisé des simulations numérique pour vérifier la concordance entre les formulation de Weber-Clebsch et les équations de MHD directes.

Pour faire des comparaisons on utilisera l'enstrophie magnétique Ω_m définie par

$$\Omega_m(t) = \sum_k k^2 E_m(k, t), \quad (5.12)$$

où $E_m(k, t)$ est l'énergie magnétique du spectre qui est obtenue à partir de la transformation de Fourier $\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}', t)$ du champ magnétique (5.4) moyennée sur des couches sphériques de largeur $\Delta k = 1$,

$$E_m(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k - \frac{\Delta k}{2} < |\mathbf{k}'| < k + \frac{\Delta k}{2}} \left| \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}', t) \right|^2, \quad (5.13)$$

(noter l'équivalence avec (3.25)).

5.2.1 Effet dynamo : l'écoulement ABC

Le premier cas étudié est l'effet de dynamo cinétique dans lequel le champ de vitesse $\mathbf{u}$ est constant et le champ magnétique initial $\mathbf{u} = \mathbf{B}$ est petit à $t = 0$.

Comme la vitesse est constante, on intègre seulement les équations pour les potentiels (5.10). Cela simplifie la dynamique du système.

La vitesse ABC (à partir de Arnold [46], Beltrami et Childress) est décrite par [47]

$$\begin{aligned} u_x &= B_0 \cos k_0 y + C_0 \sin k_0 z \\ u_y &= C_0 \cos k_0 z + A_0 \sin k_0 x \\ u_z &= A_0 \cos k_0 x + B_0 \sin k_0 y \end{aligned}$$

avec $k_0 = 2$ et $A_0 = B_0 = C_0 = 1$.

Pour générer $\mathbf{B}$ on prend comme condition initiale pour le potentiel vectoriel magnétique

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= 0 \\ A_z &= d_0 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

La resistivité magnétique est prise égale à $\eta = 1/12$ et la constante $d_0 = 1/100$. Cette valeur fixe l'énergie initiale et n'est pas importante pour la dynamique du système.

Nous avons effectué des simulations avec différentes valeurs de τ . La Figure 5.1 montre que l'enstrophie magnétique Ω_m est bien résolue pour chaque τ , avec une résolution de 128^3 .

Les reinitialisations sont très régulières dans le temps, avec une fréquence que diminue quand on augmente la résolution, mais il n'y a pas de croissance de la fréquence des reinitialisations dans le temps, comme le montre la Figure 5.2. Ce comportement est cohérent avec la croissance monotone de l'enstrophie magnétique sans l'intense activité localisée que caractérise l'accélération des *reinitialisations* de la Figure 3.9.

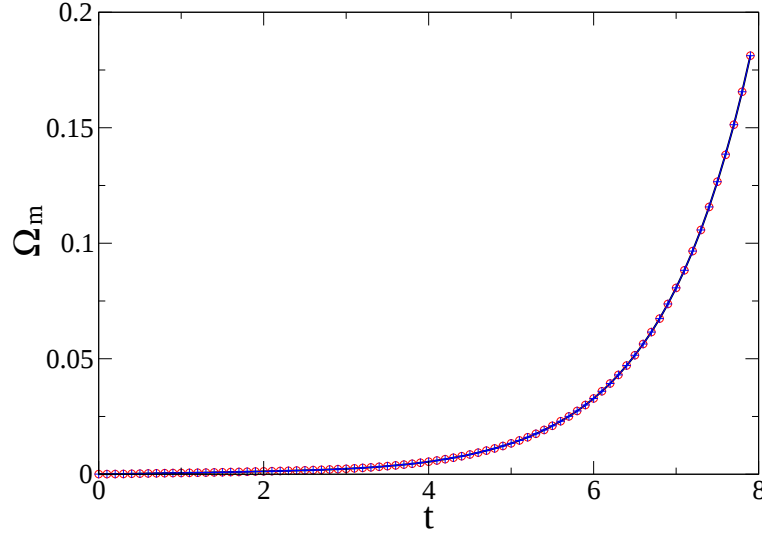


FIG. 5.1 – Évolution temporelle de l'enstrophie magnétique Ω_m pour l'écoulement ABC (dynamo cinématique) avec $\tau = 0$ et 1 ($\circ$ et $+$), avec une résolution de 128^3 et une resistivité magnétique $\eta = 1/12$. Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de MHD.

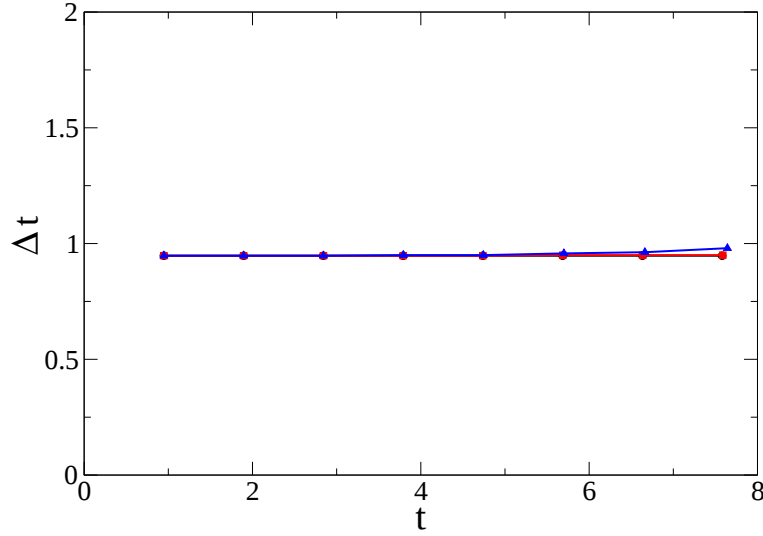


FIG. 5.2 – Évolution temporelle des intervalles entre les reinitialisations Δt pour l'écoulement ABC (dynamo cinématique) pour $\tau = 0, 0.1$ et 1 ($\circ$, $\square$ et $\triangle$) avec une résolution de 128^3 et $\eta = 1/12$.

5.2.2 Vortex d'Orszag-Tang en 2D

Considérons maintenant la dynamique du système pour le champ de vitesse (5.2) qui, avec les équations pour les potentiels de Weber-Clebsch (5.10), donnent la dynamique complète de la MHD.

Pour commencer nous avons choisi de considérer le vortex de Orszag-Tang en 2D qui représente un exemple typique de la reconnexion magnétique en dimension 2 [48].

La condition initiale du vortex de Orszag-Tang en 2D est

$$\begin{aligned}
 u_x &= -2 \sin y \\
 u_y &= -2 \sin x \\
 u_z &= 0 \\
 A_x &= 0 \\
 A_y &= 0 \\
 A_z &= 2 \cos x \cos 2y.
 \end{aligned}$$

Comme dans le cas de l'écoulement ABC, nous avons fait des simulations avec différentes valeurs de τ . Nous avons une bonne concordance entre l'entrophie magnétique qui vient de la simulation directe et qu'est obtenue à partir des potentiels de Weber-Clebsch, comme le montre la Figure 5.3.

Dans la Figure 5.4 on voit l'évolution temporelle de Δt pour différentes valeurs de τ . Il est clair que pour la valeur de t qui présente le Δt le plus petit nous avons une correspondance avec les valeurs où l'enstrophie magnétique Ω_m est la plus haute, voir Figure 5.3. Il faut noter que pour une dynamique exclusivement bidimensionnelle le terme (5.11) est nul et par conséquent les champs $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$ n'ont pas d'influence sur la dynamique de $\mathbf{A}$. Nous arrivons à bien diagnostiquer le fait que la reconnexion magnétique a lieu du fait de l'accélération de la fréquence de reinitialisations.

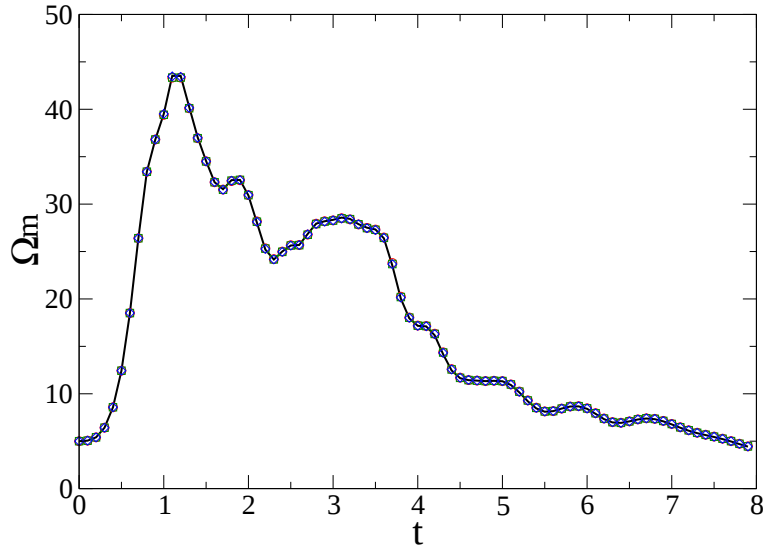


FIG. 5.3 – Évolution temporelle de l'enstrophie magnétique Ω_m pour le vortex de Orszag-Tang en 2D avec $\tau = 0, 0.01$ et 1 ($\circ$, $\square$ et $\diamond$) pour une résolution de 128^2 et $\eta = \nu = 0.005$. Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de MHD.

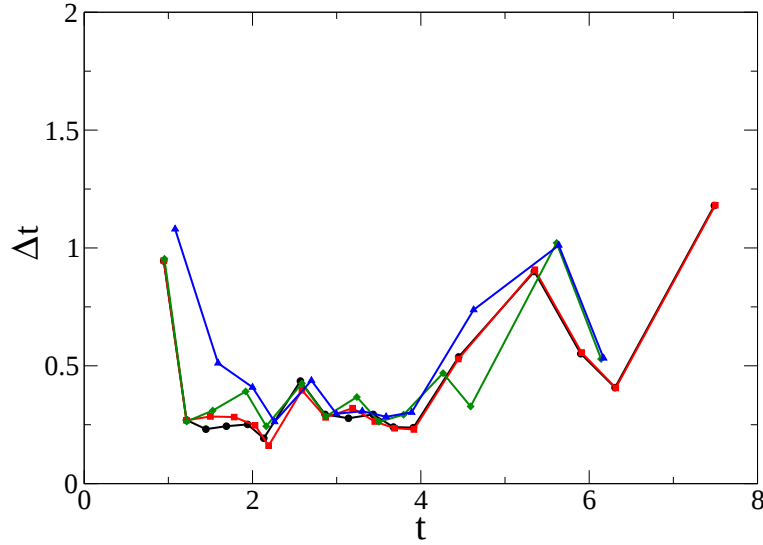


FIG. 5.4 – Évolution temporelle de Δt avec $\tau = 0, 0.01, 0.1$ et 1 ($\circ$, $\square$, $\diamond$ et $\triangle$), pour une simulation de Orszag-Tang en 2D avec $\nu = \eta = 0.005$ et une résolution de 128^2 .

5.2.3 Vortex d'Orszag-Tang en 2.5D

Nous avons fait des simulations avec le vortex d'Orszag-Tang en 2.5 dimensions, pour voir s'il y a une différence significative avec le cas en 2 dimensions. On fait le même type de comparaisons pour l'enstrophie magnétique Ω_m et l'intervalle entre les reinitialisations Δt .

Rappelons le terme 2.5D signifie que les champs sont tridimensionnels mais ne dépendent que de 2 dimensions spatiales [49, 50].

La condition initiale pour le vortex d'Orszag-Tang en 2.5 dimensions est :

$$\begin{aligned}
 u_x &= -2 \sin y \\
 u_y &= 2 \sin x \\
 u_z &= 0 \\
 A_x &= b_0 \sin y \\
 A_y &= -b_0 \sin x \\
 A_z &= 2 \cos x \cos 2y
 \end{aligned}$$

où $b_0 = 0.5$.

Dans la Figure 5.5 nous avons le résultat des simulations avec différentes valeurs de τ . Nous remarquons que pour $\tau = 0.1$ des erreurs sont présentes dans l'enstrophie Ω_m , par comparaison avec les simulations directes. Ces différences n'existent pas dans le cas 2D (Figure 5.3). La différence entre les cas 2D et 2.5D réside dans le fait que le terme (5.11) n'est pas nul, les champs $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$, participent à la dynamique de $\mathbf{A}$. Les effets de cette différence sont visible dans l'enstrophie magnétique. Mais comme dans le cas 2D nous obtenons une bonne concordance entre l'instant où est atteint le maximum de Ω_m et le minimum de Δt comme le montre la Figure (5.6).

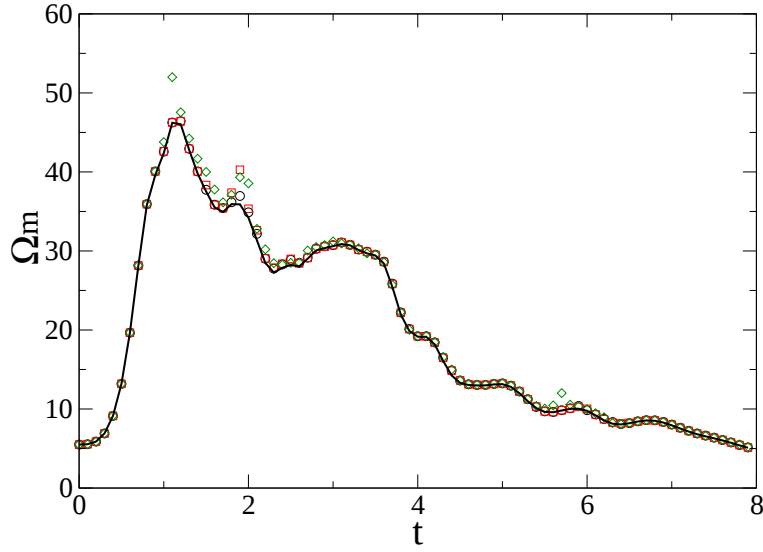


FIG. 5.5 – Évolution temporelle de l'enstrophie magnétique Ω_m pour le vortex de Orszag-Tang en 2.5D avec $\tau = 0, 0.01$ et 0.1 ($\circ$, $\square$ et $\diamond$) avec une résolution de 128^2 et $\eta = \nu = 0.005$. Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de MHD.

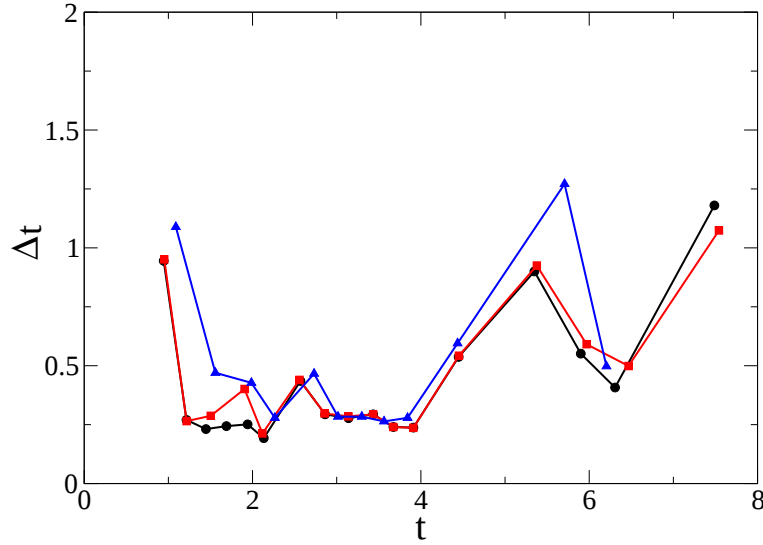


FIG. 5.6 – Évolution temporelle des intervalles entre les reinitialisations Δt avec $\tau = 0, 0.01$ et 0.1 ($\circ$, $\square$ et $\triangle$), pour le vortex de Orszag-Tang en 2.5d.

5.2.4 Vortex d'Orszag-Tang en 3D

Considérons maintenant le cas tridimensionnel [51] avec la condition initiale

$$\begin{aligned} A_x &= c_0 (\cos y - \cos z) \\ A_y &= c_0 (-\cos x + \cos z) \\ A_z &= c_0 (\cos x + \cos 2y) . \end{aligned}$$

où $c_0 = 0.8$, avec la vitesse initiale donnée par

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin y \\ u_y &= \sin x \\ u_z &= 0 . \end{aligned}$$

Comme dans le cas 2D, nous désirons comparer les résultats des simulations avec différentes valeurs de τ . La Figure 5.7 montre que l'enstrophie magnétique est bien résolue avec une résolution de 128^3 et la Figure 5.8 montre le temps entre reinitialisations en fonction de t . L'instant où Δt est minimum correspond à l'instant où l'enstrophie dans la Figure 5.7 est maximale. Ainsi la méthode permet de diagnostiquer la reconnexion magnétique.

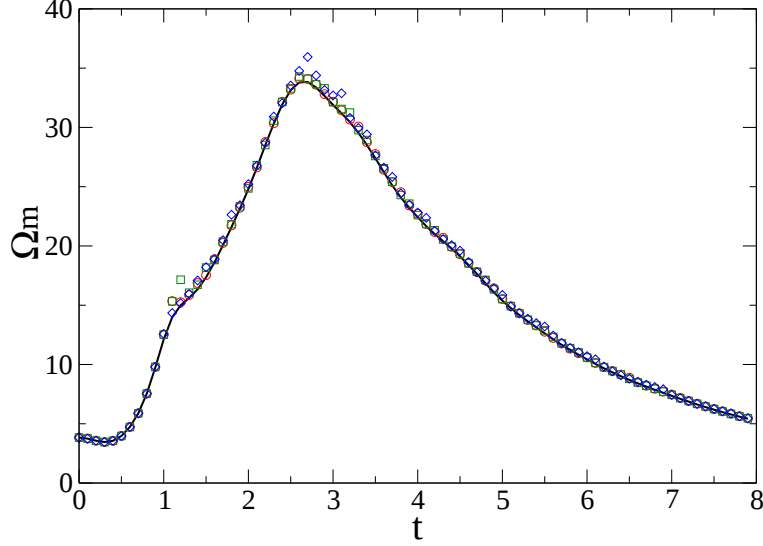


FIG. 5.7 – Évolution temporelle de l'ensrophie magnétique Ω_m pour la condition initial de Orszag-Tang en 3D pour $\tau = 0, 0.1$ et 1 ($\circ$, $\square$ et $\diamond$) avec une résolution de 128^3 et $\eta = \nu = 0.005$. Les lignes continues représentent des simulations directes des équations de MHD.

5.3 Conclusions

Nous venons de montrer que la méthode permet, comme dans le cas de la dynamique de Navier-Stokes, d'étudier la reconnexion de vortex pour la MHD.

À la différence du cas du vortex BPZ, pour les conditions initiales des vortex de Orszag-Tang, il n'y a pas de diminution marquée de Δt . Ce comportement de la fréquence de reinitialisations est similaire de celui étudié pour le vortex de Taylor-Green. Par analogie nous déduisons que les régions où la reconnexion de vortex se produit sont étendues et dispersées de façon homogène dans l'espace. Observons maintenant les lignes du champ magnétique, qui sont les lignes où la composante A_z du potentiel vectoriel magnétique est constante (Figure 5.9) au moment où les reinitialisations sont effectuées. On remarque que les régions où $\det(\mathbb{H})$ est minimum sont les mêmes de celles où les lignes du champ magnétique se reconnectent (Figure 5.10). Cette figure montre A_z pour $t \sim 1$, correspondant au minimum de Δt dans la Figure 5.4. Ainsi la méthode est valide pour vérifier la reconnection magnétique en deux dimensions.

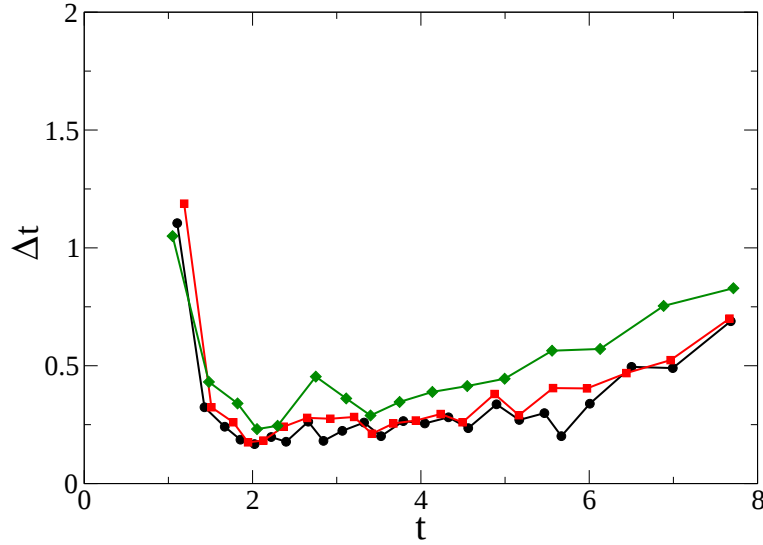


FIG. 5.8 – Évolution temporelle de Δt pour $\tau = 0, 0.1$ et 1 ($\circ$, $\square$ et $\diamond$), pour une simulation du vortex d’Orszag-Tang en 3D.

Néanmoins comme dans le cas des simulations en 2D le terme (5.11) est nul, et donc il n’y a pas d’influence des champs $\tilde{L}^i$ et $\tilde{M}^i$ dans la dynamique de $\mathbf{A}$. Cependant nous arrivons à obtenir un bon diagnostic de la reconnexion en 2D. Il y a ici une situation un peu étrange : le diagnostic sur le déterminant fonctionne, mais la condition d’inversibilité n’est pas nécessaire à la résolution du système.

Nous avons tenté de visualiser en 3D le processus de reconnexion pour le vortex d’Orszag-Tang, voir la Figure 5.11. La situation est moins claire que dans le cas de Navier-Stokes BPZ, voir la Figure 3.12. Nous pouvons observer les régions où le module carré du champ magnétique $\mathbf{B}$ est maximale et les minima de $\det(\mathbb{H})$ mais il n’est pas évident qu’il y ait de la reconnexion des lignes du champ magnétique. Ceci n’est pas surprenant parce que la reconnexion en 3D n’est pas encore un processus bien compris. Il faudra essayer dans le futur avec une condition pour les équations de la MHD, jouant un rôle analogue en MHD à celui du vortex BPZ pour Navier-Stokes. Il nous manque une condition initiale dans laquelle la région spatiale où est produite la reconnexion est limitée et facilement identifiable. À notre avis ce travail reste à effectuer pour pleinement confirmer le critère de reconnexion basé sur $\det(\mathbb{H})$.

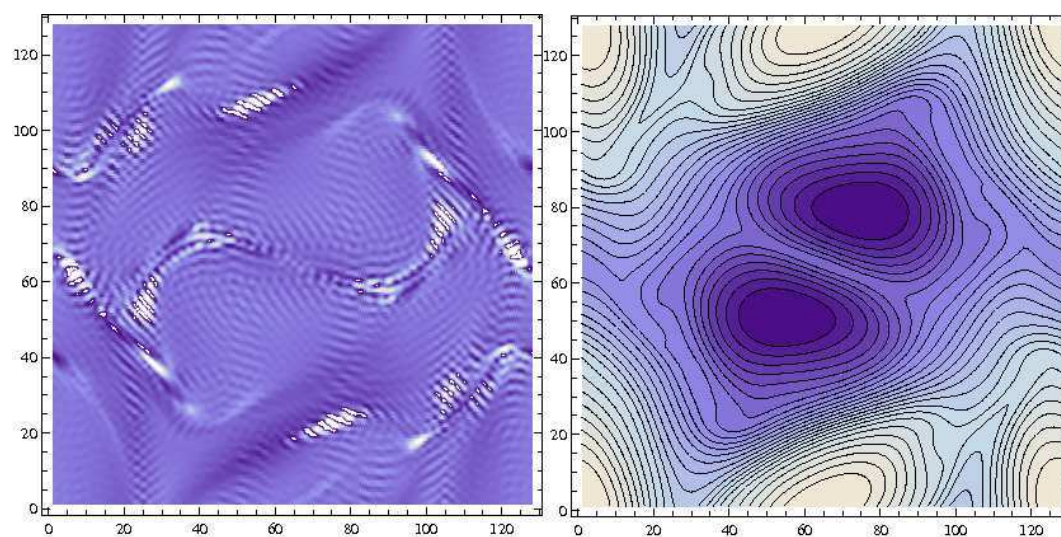


FIG. 5.9 – À gauche image des minima de $\det(\mathbb{H})$ (dans les régions claires) et à droite les lignes du champ magnétique au moment d'une reinitialisation pour une simulation du vortex d'Orszag-Tang en 2D avec $\tau = 0.01$.

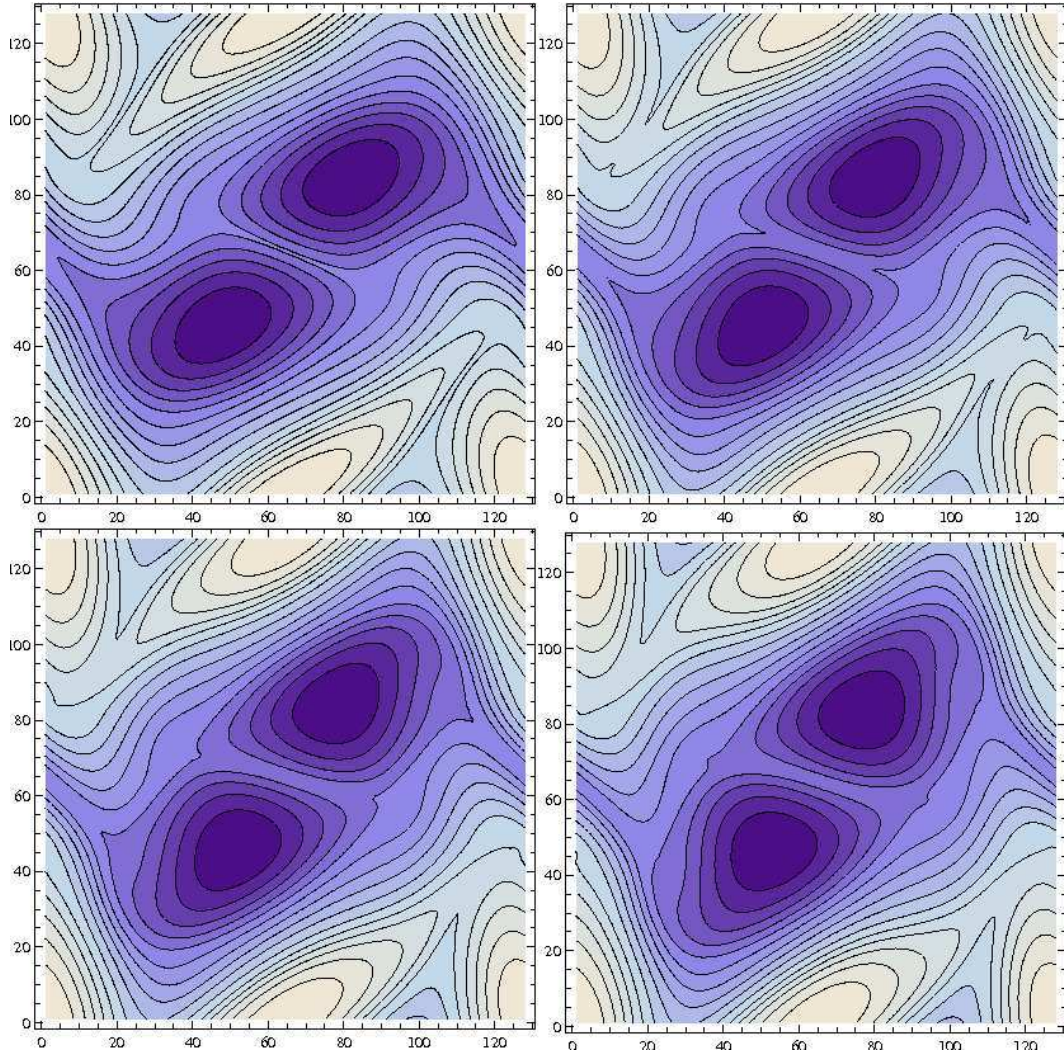


FIG. 5.10 – Évolution temporelle de la composante du potentiel vectoriel magnétique A_z pour les temps $t = 0.8, 0.9, 1.0$ et 1.1 (de gauche à droite et du haut au bas) pour une simulation du vortex de Orszag-Tang en 2D avec $\tau = 0.01$.

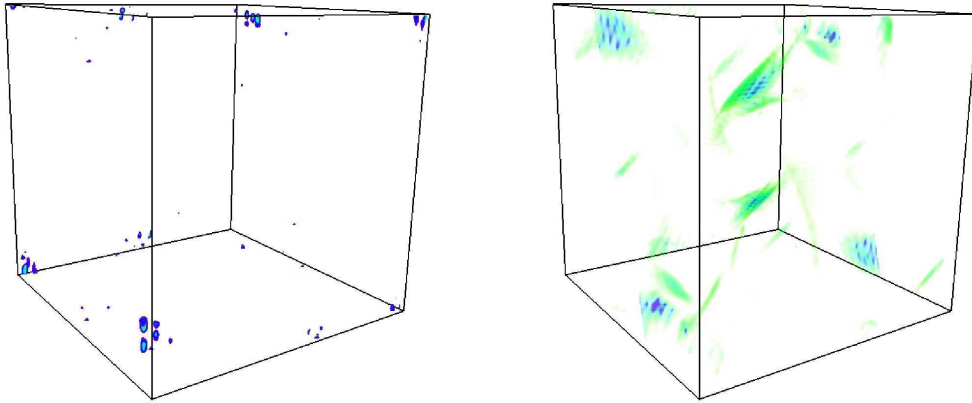


FIG. 5.11 – Visualisation du déterminant de $\mathbb{H}$ (gauche) et du carré du champ magnétique (droite) pour la condition initiale d’Orszag-Tang 3D avec $\tau = 0.01$ à $t = 2$, voir Figure 5.8.

Bibliographie

- [1] P. Constantin. An Eulerian–Lagrangian approach for incompressible fluids : Local theory. *Journal of the American Mathematical Society*, 14(2) :263–278, 2001.
- [2] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- [3] Clebsch A. Uber eine allgemeine transformation der hydrodynamischen gleichungen. *J. Reine Angew. Math.*, 54 :293–313, 1857.
- [4] Clebsch A. Uber die integration der hydrodynamischen gleichungen. *J. Reine Angew. Math.*, 56 :1–10, 1859.
- [5] Weber H. Ueber eine transformation der hydrodynamischen gleichungen. *J. Reine Angew. Math.*, 68 :286–292, 1868.
- [6] P. Constantin. An Eulerian–Lagrangian approach to the Navier–Stokes equations. *Commun. Math. Phys.*, 216 :663–686, 2001.
- [7] K. Ohkitani and P. Constantin. Numerical study of the Eulerian–Lagrangian formulation of the Navier–Stokes equations. *Physics of Fluids*, 15(10) :3251–3254, 2003.
- [8] P. G. Saffman. *Vortex Interactions and Coherent Structures in Turbulence. Proceedings of a symposium conducted by the Mathematics Research Center, The University of Wisconsin*. Richard E. Meyer, ed., 1981.
- [9] P. R. Schatzle. *An Experimental Study of Fusion of Vortex Rings*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 1987.
- [10] P. G. Saffman. A model of vortex reconnection. *J. Fluid Mech.*, 212 :395–402, 1990.
- [11] J. Koplik and H. Levine. Vortex reconnection in superfluid helium. *Physical Review Letters*, 71 :1375–1378, August 1993.

- [12] I. Chuang, B. Yurke, R. Durrer, and N. Turok. Cosmology in the laboratory - Defect dynamics in liquid crystals. *Science*, 251 :1336–1342, March 1991.
- [13] D. Biskamp. *Magnetic Reconnection in Plasmas*. Magnetic reconnection in plasmas, Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2000 xiv, 387 p. Cambridge monographs on plasma physics, vol. 3, ISBN 0521582881, November 2000.
- [14] T. Fohl and J. S. Turner. Colliding vortex rings. *Physics of Fluids*, 18(4) :433–436, 1975.
- [15] Y. Oshima, T. Kambe, and S. Asaka. Interaction of Two Vortex Rings Moving along a Common Axis of Symmetry. *Journal of the Physical Society of Japan*, 38 :1159–+, April 1975.
- [16] Yuko Oshima and Saburo Asaka. Interaction of Two Vortex Rings Moving Side by Side. *Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ*, 26(1) :31–37, 19750700.
- [17] Y. Oshima and S. Asaka. Interaction of Two Vortex Rings along Parallel Axes in Air. *Journal of the Physical Society of Japan*, 42 :708–+, February 1977.
- [18] Yuko Oshima and Naoki Izutsu. Cross-linking of two vortex rings. *Physics of Fluids*, 31(9) :2401–2403, 1988.
- [19] S. Kida and M. Takaoka. Bridging in vortex reconnection. *Physics of Fluids*, 30 :2911–2914, October 1987.
- [20] S. Kida, M. Takaoka, and F. Hussain. Reconnection of two vortex rings. *Physics of Fluids*, 1 :630–632, April 1989.
- [21] W. T. Ashurst and D. I. Meiron. Numerical study of vortex reconnection. *Physical Review Letters*, 58 :1632–1635, April 1987.
- [22] M. V. Melander and N. J. Zabusky. Interaction and 'apparent' reconnection of 3D vortex tubes via direct numerical simulations. In *(IUTAM, Science Council of Japan, Architectural Institute of Japan, et al., Symposium on Fundamental Aspects of Vortex Motion, Tokyo, Japan, Aug. 31-Sept. 4, 1987) Fluid Dynamics Research (ISSN 0169-5983), vol. 3, no. 1-4, Sept. 1988, p. 247-250.*, volume 3, pages 247–250, September 1988.
- [23] M. V. Melander and F. Hussain. Cut-and-connect of two antiparallel vortex tubes. In *Stanford Univ., Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2. Proceedings of the 1988 Summer Program p 257-286 (SEE N89-24538 18-34)*, pages 257–286, December 1988.

- [24] M. V. Melander and F. Hussain. Cross-linking of two antiparallel vortex tubes. *Physics of Fluids*, 1 :633–636, April 1989.
- [25] N. J. Zabusky and M. V. Melander. Three-dimensional vortex tube reconnection : Morphology for orthogonally-offset tubes. *Physica D Non-linear Phenomena*, 37 :555–562, July 1989.
- [26] D. I. Meiron, M. J. Shelley, S. A. Orszag, and W. T. Ashurst. Numerical studies of vortex reconnection. In *Mathematical aspects of vortex dynamics ; Proceedings of the Workshop, Leesburg, VA, Apr. 25-27, 1988 (A90-14976 04-34). Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989, p. 183-194.*, pages 183–194, 1989.
- [27] S. Grossmann. An order-parameter field theory for turbulent fluctuations. *Physical Review A*, 11(6) :2165–2172, 1975.
- [28] E. Levich and L. Shtilman. Non-local invariants of magnetohydrodynamical equations as constraints on the dynamo generation of small scale magnetic fields in non-helical 3d turbulent flow. *Physics Letters*, 91A(3) :117–120, 1982.
- [29] J. A. Shercliff. *A Textbook of Magnetohydrodynamics*. Pergamon Press, 1965.
- [30] T. Gold and F. Hoyle. On the origin of solar flares. *MNRAS*, 120 :89–105, 1960.
- [31] E. Priest and Forbes T. *Magnetic Reconnection*. Cambridge University Press, 2000.
- [32] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26 :394–395, 1920.
- [33] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51 :406–413, 1955.
- [34] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses : Theory and Applications*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. (reprinted by Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Huntington, NY, 1980.).
- [35] G. I. Taylor and A. E. Green. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 158 :499–521, 1937.
- [36] M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf, and U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor–Green vortex. *J. Fluid Mech.*, 130 :411–452, 1983.
- [37] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. SIAM, Philadelphia, 1977.

- [38] O. N. Boratav, R. B. Pelz, and N. J. Zabusky. Reconnection in orthogonally interacting vortex tubes - direct numerical simulations and quantifications. *Physics of Fluids*, 4 :581–605, March 1992.
- [39] J. Clyne, P. Mininni, A. Norton, and M. Rast. Interactive desktop analysis of high resolution simulations : application to turbulent plume dynamics and current sheet formation. *New Journal of Physics*, 9 :301, August 2007.
- [40] J. Clyne and M. Rast. A prototype discovery environment for analyzing and visualizing terascale turbulent fluid flow simulations. *Proceedings of Visualization and Data Analysis*, pages 284–294, 2005.
- [41] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, volume 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon ; Addison-Wesley, London, U.K. ; Reading, U.S.A., 1959.
- [42] H. Bateman. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1932.
- [43] M. J. Sewell. *Maximum and minimum principles*. Cambridge University Press, 1987.
- [44] E. Detyna. Variational principles and gauge theory : an applications to continuous media. *Mathematics Department Report, University of Reading*, 376.
- [45] T. B. Benjamin. Impulse, Flow Force and Variational Principles. *IMA J Appl Math*, 32(1-3) :3–68, 1984.
- [46] V. Arnold and E. Korkina. The growth of a magnetic field in a 3 dimensional steady incompressible flow. *Matematika Mecanika*, 3 :43–51, 1983.
- [47] V. Archontis, S.B.F. Dorch, and Å. Nordlund. Numerical simulations of kinematic dynamo action. *Astronomy & Astrophysics*, 397(2) :393–399, 2003.
- [48] S. A. Orszag and C. M. Tang. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 90 :129, 1979.
- [49] David Montgomery and Leaf Turner. Two-and-a-half-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Fluids*, 25(2) :345–349, 1982.
- [50] Ronald J. DiPerna and Andrew J. Majda. Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations. *Commun. Math. Phys.*, 108(4) :667–689, 1987.
- [51] P. D. Mininni, A. G. Pouquet, and D. C. Montgomery. Small-scale structures in three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :244503, 2006.

- [52] J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.*, 19 :297–301, 1965.

Annexe A

Méthodes Numériques

Les équations simulées par nos codes sont des équations différentielles partielles non-linéaires par la méthode pseudo-spectrale.

A.1 Les Méthodes Spectrales

Pour faciliter la convergence des solutions numériques nous utilisons les méthodes spectrales pour résoudre notre système d'équations. Les écoulements considérés sont périodiques et nous travaillons dans une boîte périodique.

Les champs f vérifient : $f(x+L) = f(x)$ où L est la longueur de périodicité de la boîte. Dans nos simulations nous choisissons $L = 2\pi$. Une fonction continue par morceaux peut être représentée pour une série de Fourier infinie

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}. \quad (\text{A.1})$$

Aussi on peut définir le produit scalaire par

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(x) h(x) dx,$$

où les coefficients de Fourier s'écrivent

$$\hat{f}_k = \langle e^{ikx}, f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (\text{A.2})$$

Dans une simulation numérique f n'est connue que par ses valeurs dans un nombre de points finis de L

$$f_j = f(x_j),$$

avec

$$x_j = j\Delta x \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

de façon telle que l'intervalle d'échantillonnage soit égal à

$$\Delta x = \frac{2\pi}{N}.$$

Les points d'échantillonnage sont supposés être capables de représenter la forme de $f(x)$. Ils constituent *l'espace physique* et les points $j = 0, 1, \dots, N-1$ sont appelés *points de collocation*. Alors les coefficients de Fourier (A.2) deviennent

$$\hat{f}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_N(x_n) e^{-ikx_n}, \quad (\text{A.3})$$

avec

$$x_n = \frac{2\pi n}{N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

C'est la transformée de Fourier discrète (TFD). Nous avons projeté f sur une base de N fonctions (les fonctions sinus et cosinus). Donc nous pouvons trouver une approximation f_N de f en inversant (A.3) de la façon suivante :

$$f_N(x_n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_N(k) e^{ikx_n}. \quad (\text{A.4})$$

Les points $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1$ constituent *l'espace spectral* discret. Ils caractérisent les fonctions de notre base de projection. Il faut remarquer que les fonctions (A.3) et (A.4) s'écrivent d'une façon plus symétrique que (A.1) et (A.2).

A priori effectuer les sommes (A.3) et (A.4) requiert un nombre d'opérations de l'ordre $\mathcal{O}(N^2)$. Ceci a constitué un handicap quant à l'utilisation de cette méthode jusqu'à ce que Cooley et Turkey inventent l'algorithme de transformées de Fourier rapides en 1965 [52] (FFT pour Fast Fourier Transformation). Cet algorithme des FFT permet de réduire le nombre d'opérations à $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Un autre avantage des FFT et de l'utilisation des transformées de Fourier en général réside dans la factorisation des convolutions en 2 et 3 dimensions.

A.1.1 Convergence des Méthodes Spectrales

La convergence des méthodes spectrales est bien meilleure que celle de méthode des différences finies. Cela tient au fait qu'une méthode de calcul par différences finies d'ordre p calcule les coefficients de son approximation d'un champ f dans le développement de Taylor avec $p + 1$ points avec un erreur d'ordre $\mathcal{O}(\Delta x^p)$, alors que les méthodes pseudo-spectrales calculent les coefficients $\hat{f}_N(k)$ de son approximation de f avec les N points de la résolution choisie. L'ordre des méthodes pseudo-spectrales augmente avec la résolution, pour un intervalle d'échantillonnage $\Delta x = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ l'erreur est de l'ordre $\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{N}\right)^N\right)$. Les erreurs décroissent plus vite que toute puissance finie de N , ce qu'on appelle une convergence exponentielle. De ce point de vue les méthodes spectrales permettent un gain considérable de stockage de mémoire pour atteindre une précision fixée.

A.1.2 Approximation d'une équation différentiel partiel par la méthode pseudo-spectrale

Nous devons résoudre une équation aux dérivées partielles en 1D de la forme

$$\begin{aligned} D(v) &= 0 \text{ dans } [0, 2\pi] \times]0, T] \\ v(x, 0) &= v^0(x), \end{aligned}$$

où D est un opérateur différentiel et T un nombre positif.

L'approximation de la solution v du problème consiste à chercher v_N dans une base de fonctions régulières, solution du problème approché. Il s'agit donc de trouver une fonction $v_N(x, t)$ dans $[0, 2\pi] \times]0, T]$ telle que [37]

$$\begin{aligned} D(v_N) &= 0 \text{ dans } [0, 2\pi] \times]0, T] \\ v_N(x, 0) &= v_N^0(x), \end{aligned}$$

La résolution numérique du système des équations que nous avons étudiée utilise des conditions aux limites périodiques. Elle se fait alors de par la recherche des coefficients de Fourier de v_N qui rendent $D(v_N)$ tous nuls.

A.1.3 Méthode pseudo-spectrale

Les méthodes pseudo-spectrales consistent à calculer l'approximation d'une fonction par une base de fonction déterminée en interpolant sur un

ensemble de points de grille (dit de collocation), cela signifie que l'équation différentielle à satisfaire sera exactement résolue sur les points de collocation. C'est cette méthode que nous avons choisi d'utiliser pour calculer les convolutions dans l'espace physique. On utilise comme base les TFD des fonctions trigonométriques qui correspondent précisément aux points de collocation. Pour les termes non-linéaires, on utilise deux FFT inverses ($\mathcal{O}(N \log_2 N)$ opérations) pour avoir les termes dans l'espace physique. Puis, on calcule le produit (N opérations) et on utilise une FFT ($\mathcal{O}(N \log_2 N)$ opérations) pour ramener le produit dans l'espace spectral. Concrètement, si on calcule $w(k) = TFD(\lambda(x_n) \partial_x \mu(x_n))$ on a

$$\begin{aligned}
 TFD(\lambda(x_n) \partial_x \mu(x_n)) &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \lambda(x_n) \partial_x \mu(x_n) e^{-ikx_n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ikx_n} \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\lambda}(p) e^{ipx_n} \sum_{q=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \widehat{\partial_x \mu}(q) e^{iqx_n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{p=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{q=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{ix_n(p+q-k)} \hat{\lambda}(p) \widehat{\partial_x \mu}(q) .
 \end{aligned}$$

La somme sur n comporte tous les termes tels que $p+q-k \equiv 0 \pmod{N}$. Alors les coefficients approchés pour le terme $w(k)$ sont composés de tous les coefficients exacts plus d'autres termes pour lesquels la fonction correspondante $e^{ikx_n} [N]$ ne peut pas être distinguée de la fonction e^{ikx_n} . Ce phénomène est appelé l'*aliasing*, des modes de Fourier sont pris pour d'autres.

Malgré ce défaut, les méthodes pseudo-spectrales demeurent des propriétés intéressantes, surtout dans plusieurs dimensions. En effet les TFD en 3D se factorisent car $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}$. De plus une TFD 3D se calcule comme une succession de TFD 1D, pour N^3 points, on doit faire $3N^2$ TFD 1D sur N points donc $3N^3 \log_2 N$ opérations alors que les produits de convolution en 3D dans l'espace spectral nécessitent N^6 opérations.

Ce passage pour l'espace physique et le recours à des méthodes pseudo-spectrales est une astuce permettant un gain de temps de calcul, mais engendrant le problème d'*aliasing*.

A.1.4 Correction de l'*aliasing*

Il n'est possible de corriger l'erreur d'*aliasing* sur le terme convolué qu'en éliminant les termes aliasés qui reviennent dans l'espace spectral $|k| \leq N/2$.

Sur un réseau de N points les valeurs de k tiennent dans l'intervalle $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ si on travaille modulo N . La méthode permettant de résoudre ce problème consiste à éliminer une partie du spectre, les modes hors de l'intervalle $] -k_{max}, k_{max}[$, avec la condition (pour les non-linéarités d'ordre 2) que $2k_{max} - N < -k_{max}$, c'est à dire que $k_{max} < \frac{N}{3}$. On élimine donc toutes les valeurs du spectre supérieures à $\frac{N}{3}$ et inférieures à $-\frac{N}{3}$. De cette façon toutes les valeurs *repliées* sont mises à zéro à chaque pas du temps et ne posent plus de problème.

On voit que la correction de l'*aliasing* est onéreuse, on perd un tiers des modes utiles aux calculs. Cependant les calculs effectués sont alors complètement équivalents aux calculs par troncature Galerkin. Nous allons voir que cela nous permet d'effectuer correctement des intégrations par partie.

A.1.5 Intégration par partie et conservation de l'énergie

Supposons que notre calcul n'est pas *de-aliasée*. Considérons l'évaluation du produit de la quantité f par $\partial_x g$ et intégrons le par partie dans l'espace spectral. On effectue les sommes dans l'intervalle $] -N/2, N/2[$

$$TFD(f\partial_x g)(n) = \sum_{j+k=n[N]} ik\hat{f}_N(j)\hat{g}_N(k) = \sum_{j+k=n[N]} i(n-j)_{[N]}\hat{f}_N(j)\hat{g}_N(k).$$

C'est ce $(n-j)_{[N]}$ qui nous empêche alors d'effectuer l'intégration par partie de façon exacte. En *de-aliasant* le calcul on effectue les sommes dans l'intervalle $] -k_{max}, k_{max}[$ et

$$\begin{aligned} TFD(f\partial_x g)(n) &= \sum_{j+k=n} ik\hat{f}_N(j)\hat{g}_N(k) = \sum_{j+k=n} i(n-j)\hat{f}_N(j)\hat{g}_N(k) \\ &= in \sum_{j+k=n} \hat{f}_N(j)\hat{g}_N(k) - \sum_{j+k=n} ij\hat{f}_N(j)\hat{g}_N(k) \\ &= TFD(\partial_x(fg))(n) - TFD(g\partial_x f)(n). \end{aligned}$$

Rappelons que l'intégration par partie est une étape nécessaire pour démontrer la conservation de l'énergie qui est conservée pour les méthodes pseudo-spectrales *de-aliasées*.

A.2 Schémas temporels

Nous avons écrit des codes pseudo-spectraux aux conditions aux limites périodiques et à base de FFT pour intégrer des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\partial_t a = L(a) + N(a) ,$$

où désigne l'opérateur linéaire dans l'espace de Fourier et N le terme non-linéaire.

La méthode de résolution est une méthode des différences finies du second ordre. Le pas de temps est effectué par la méthode explicite de Adams-Bashforth

$$a_{t+\Delta t} = \frac{\left(1 - \nu \frac{k^2}{2} \Delta t\right) a_t + \Delta t \left(\frac{3}{2} N(a_t) - \frac{1}{2} N(a_{t-\Delta t})\right)}{1 + \nu \frac{k^2}{2} \Delta t} .$$

Pour débiter l'intégration temporelle nous effectuons un pas de temps d'Euler simple de façon suivante

$$a_{\Delta t} = \frac{a_0 + \Delta t N(a_0)}{1 + \nu k^2 \Delta t} ,$$

où a_0 est la condition initiale.

Symétries de Taylor-Green et optimisation du code

B.1 Génération des champs

Des champs avec une périodicité spatial sont générés à partir de la représentation de Weber-Clebsch (3.1) comme

$$\mu^i = x^i + \mu_p^i, \tag{B.1}$$

on impose aussi que μ_p^i et les autres champs λ^i et ϕ dans (3.1) sont périodiques. Pour générer un champ arbitraire de vitesse $\mathbf{u}$ on peut fixer

$$\begin{aligned} \mu_p^i &= 0 \\ \lambda^i &= u^i \\ \phi &= 0. \end{aligned}$$

Il faut dire que la part non périodique de μ^i dans (B.1) est construite de façon telle que les *gradients* de μ^i sont périodiques.

B.2 Symétries de Taylor-Green

Le vortex de Taylor-Green est un écoulement qui est établi à partir de la condition initial sur $\mathbf{u}$ à $t = 0$

$$\begin{aligned}
u_x &= \sin x \cos y \cos z \\
u_y &= -\cos x \sin y \cos z \\
u_z &= 0.
\end{aligned}$$

Les symétries de cet écoulement sont la symétrie rotationnel d'un angle π autour de l'axes $(x = z = \pi/2)$, $(y = z = \pi/2)$ et $(x = y = \pi/2)$, et symétrie de miroir avec les plans $x = 0, \pi$, $y = 0, \pi$, $z = 0, \pi$. Les plans forment les parois d'une *boîte imperméable*, laquelle confine l'écoulement. Ces symétries correspondent à la représentation particulier des modes de Fourier non nul de la vitesse résolue à partir des équations de Navier-Stokes,

$$\begin{aligned}
\hat{u}^1(m, n, p, t) &= \sin mx \cos ny \cos pz \\
\hat{u}^2(m, n, p, t) &= \cos mx \sin ny \cos pz \\
\hat{u}^3(m, n, p, t) &= \cos mx \cos ny \sin pz,
\end{aligned}$$

où $\hat{\mathbf{u}}(m, n, p, t)$ est nul à l'exception que m, n, p soient tous entiers pairs ou impairs. Nous séparons les champs en parties pairs et impairs et nous utilisons des transformations de Fourier de sinus/cosinus. Nous arrivons ainsi à réduire l'utilisation de mémoire et le temps de calcul.

À partir de la définition de la transformation de Weber-Clebsch (3.1) et pour la condition initiale dans laquelle $u_{t=0}^i = \lambda_{t=0}^i$ on peut déduire que la représentation pour les champs λ^i est

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}^1(m, n, p, t) &= \sin mx \cos ny \cos pz \\
\hat{\lambda}^2(m, n, p, t) &= \cos mx \sin ny \cos pz \\
\hat{\lambda}^3(m, n, p, t) &= \cos mx \cos ny \sin pz,
\end{aligned}$$

et les champs μ_p^i à partir de (B.1) ont la représentation

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_p^1(m, n, p, t) &= \sin mx \cos ny \cos pz \\
\hat{\mu}_p^2(m, n, p, t) &= \cos mx \sin ny \cos pz \\
\hat{\mu}_p^3(m, n, p, t) &= \cos mx \cos ny \sin pz.
\end{aligned}$$

Finalement il faut remarquer que le champ ϕ a une représentation

$$\hat{\phi}(m, n, p, t) = \cos mx \cos ny \cos pz.$$

B.3 Solution de Moore-Penrose et norme minimale

Dans le cas indéterminé $2q > d$ la solution général de Moore-Penrose [32, 33, 34] consiste à trouver la solution du système linéaire (3.10) avec la condition supplémentaire telle que la norme

$$\sum_{i=1}^q \left(\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^{-2} \tilde{M}^i \tilde{M}^i \right) \quad (\text{B.2})$$

soit la plus petite possible. La constante τ provient de l'analyse dimensionnelle des potentiels à partir de la transformation de Weber-Clebsch (3.1). Le paramètre τ a le dimension du temps.

Nous demandons que la norme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\tilde{L}^i, \tilde{M}^i, \mathbf{k}) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \left(\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^{-2} \tilde{M}^i \tilde{M}^i \right) \\ & - \mathbf{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^q \left(\tilde{L}^i \nabla \mu^i - \tilde{M}^i \nabla \lambda^i \right) - \tilde{\mathbf{f}} + \nabla \tilde{G} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

soit minimale dans tous ses arguments.

Ainsi les équations $\partial_{\mathbf{k}} S = 0$ correspondent au système originale (3.10) et, quand le système est satisfait, les équations $\partial_{\tilde{L}^i} S = 0$ et $\partial_{\tilde{M}^i} S = 0$ impliquent que la norme est minimale. Ces équations donnent explicitement les inconnues en fonction du multiplicateur de Lagrange $\mathbf{k}$:

$$\tilde{L}^i = \mathbf{k} \cdot \nabla \mu^i \quad (\text{B.4})$$

$$\tilde{M}^i = -\tau^2 \mathbf{k} \cdot \nabla \lambda^i. \quad (\text{B.5})$$

Nous insérons les solutions dans (3.10) et obtenons l'équation pour le multiplicateur de Lagrange :

$$\mathbb{H} \cdot \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}, \quad (\text{B.6})$$

où la matrice symétrique de $d \times d$ dimensions $\mathbb{H}$ est définie par ses composantes

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^q \left(\tau^2 \partial_{\alpha} \lambda^i \partial_{\beta} \lambda^i + \partial_{\alpha} \mu^i \partial_{\beta} \mu^i \right). \quad (\text{B.7})$$

Si $\mathbb{H}$ est inversible, la solution pour les inconnues s'écrit comme

$$\tilde{L}^i = \nabla \mu^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) \quad (\text{B.8})$$

$$\tilde{M}^i = -\tau^2 \nabla \lambda^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) . \quad (\text{B.9})$$

Finalement on définit la norme de Moore-Penrose qui est l'équation (B.3) évaluée avec la solution (B.8) et (B.9). Nous obtenons finalement

$$\mathcal{S}_{MP}[\tilde{G}] = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) . \quad (\text{B.10})$$

B.3.1 Minimisation et détermination du terme de jauge

La fonction $\tilde{G}$ reste encore à déterminer. Nous allons déterminer $\tilde{G}$ en demandant que la valeur de l'intégral spatiale de la norme $\mathcal{S}_{MP}$ par une fonction poids $W(x^\alpha)$ soit minimale

$$S[\tilde{G}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) W(x^\alpha) d^d x. \quad (\text{B.11})$$

En effectuant des variations sur $\tilde{G}$, nous arrivons aux équations de Euler-Lagrange

$$\nabla \cdot (W \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G})) = 0, \quad (\text{B.12})$$

qui est une équation aux dérivées partielles linéaire de seconde ordre pour $\tilde{G}$.

En pratique, à la place de (B.12), nous résoudrons

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) = 0. \quad (\text{B.13})$$

parce que est plus simple de résoudre que l'équation (B.12). Il faut noter que la minimisation, en utilisant l'équation (B.13), permet d'obtenir un algorithme stable.

B.3.2 Implémentation de Moore-Penrose

Pour économiser de la mémoire et temps de calcul, le terme de l'équation (3.11)

$$\tilde{\mathbf{f}} = 2\nu \sum_{i=1}^q \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i$$

est calculé comme suit :

$$\nu \sum_{i=1}^q (\Delta \mathbf{u} - \Delta \lambda^i \nabla \mu^i - \lambda^i \Delta \nabla \mu^i - \Delta \nabla \phi) .$$

Cette expression est complètement équivalente à (3.11) une fois qu'on utilise le desaliasing à 2/3.



C



Articles publiés et en préparation

Generalized Eulerian-Lagrangian description of Navier-Stokes dynamics

Carlos Cartes, Miguel D. Bustamante,^{a)} and Marc E. Brachet

Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,

associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris, France

(Received 18 December 2006; accepted 4 May 2007; published online 11 July 2007)

Generalized equations of motion for the Weber-Clebsch potentials that reproduce Navier-Stokes dynamics are derived. These depend on a new parameter, with the dimension of time, and reduce to the Ohkitani and Constantin equations in the singular special case where the new parameter vanishes. Let us recall that Ohkitani and Constantin found that the diffusive Lagrangian map became noninvertible under time evolution and required resetting for its calculation. They proposed that high frequency of resetting was a diagnostic for vortex reconnection. Direct numerical simulations are performed. The Navier-Stokes dynamics is well reproduced at small enough Reynolds number without resetting. Computation at higher Reynolds numbers is achieved by performing resettings. The interval between successive resettings is found to abruptly increase when the new parameter is varied from 0 to a value much smaller than the resetting interval. © 2007 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.2748447]

I. INTRODUCTION

The classical¹ Eulerian-Lagrangian formulation of the (inviscid) Euler dynamics in terms of advected Weber-Clebsch potentials was recently extended to describe the (viscous) Navier-Stokes dynamics by Constantin.² Numerical studies of this Eulerian-Lagrangian formulation of the Navier-Stokes equations were then performed by Ohkitani and Constantin (OC).³ They found that the diffusive Lagrangian map becomes noninvertible under time evolution and requires resetting for its calculation. They argued that this sets a time scale and its frequent resetting corresponds to vortex reconnection. The aim of the present paper is to complement these results. Our approach is based on a new generalized set of equations of motion for the Weber-Clebsch potentials. Our main conclusion is that the OC formulation is a special singular case of the new generalized formulation. Here follows a summary of our principal results.

We first derive the generalized equations of motion that turn out to depend on a new parameter τ (with the dimension of time). They are shown to reduce to the OC equations in the *singular* limit $\tau \rightarrow 0$. We then perform direct numerical simulations (DNS) of the viscous Taylor-Green (TG) vortex.⁴ When $\tau \neq 0$, for small enough Reynolds numbers, the Navier-Stokes dynamics is well reproduced *without* resetting. Performing resettings allows computation at much higher Reynolds numbers, with errors that rapidly decay following each resetting. The interval Δt between successive resettings is finally found to sharply increase when τ is varied from 0 to a value much smaller than Δt .

II. THEORETICAL SETTING

In this section, we first derive a (generally underdetermined) linear system that, when obeyed by the convective

derivative of the Weber-Clebsch potentials, implies that the velocity field follows the Navier-Stokes equations. Using the notion of Moore-Penrose⁵⁻⁷ pseudoinverse, the linear system is supplemented by a requirement of minimum norm, which depends on a new parameter τ . The Moore-Penrose solution yields our new generalized equations of motion, which are finally shown to reduce to the OC equations of motion in the singular limit $\tau \rightarrow 0$.

A. Weber-Clebsch representation of acceleration

Our starting point will be the classical¹ Weber-Clebsch representation of the velocity field,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^q \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi, \quad (1)$$

where each of the q pairs of Weber-Clebsch potentials (λ^i, μ^i) is a scalar function of (d -dimensional) space and time, with coordinates $(x^1, \dots, x^d, t)$.

Performing a variation on the Clebsch representation (1) yields the relation

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^q (\delta \lambda^i \nabla \mu^i - \delta \mu^i \nabla \lambda^i) - \nabla \left(\delta \phi - \sum_{i=1}^q \delta \mu^i \lambda^i \right), \quad (2)$$

where the symbol δ stands for any (spatial or temporal) partial derivative.

Defining the convective derivative

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla), \quad (3)$$

and taking into account the identity $[\nabla, D/Dt] \equiv (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla$, it is straightforward to derive from (2) the following explicit expression for the local acceleration:

^{a)}Present address: Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \sum_{i=1}^q \left(\frac{D\lambda^i}{Dt} \nabla \mu^i - \frac{D\mu^i}{Dt} \nabla \lambda^i \right) - \nabla \left(\frac{D\phi}{Dt} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - \sum_{i=1}^q \frac{D\mu^i}{Dt} \lambda^i \right). \quad (4)$$

B. Equations of motion for the potentials

Consider the incompressible with constant (unit) density Euler equations with a forcing term added to the right-hand side (RHS),

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}[\mathbf{u}, \mathbf{x}, t], \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

We will be concerned here with the Navier-Stokes case, where the forcing term reads

$$\mathbf{f} = \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (7)$$

The Navier-Stokes system (5)–(7) can be used to derive an equivalent system of equations of motion for the Weber-Clebsch potentials (1). To wit, we use the RHS of the Euler equations with forcing term (5) to replace the left-hand side (LHS) of our general identity (4). This relation is then split into two parts: one that involves only gradients and another that involves the rest of the terms. This latter part can be written as

$$\frac{D\lambda^i}{Dt} = L^i[\lambda, \mu], \quad (8)$$

$$\frac{D\mu^i}{Dt} = M^i[\lambda, \mu], \quad (9)$$

where L^i, M^i obey the linear equation,

$$\sum_{i=1}^q (L^i \nabla \mu^i - M^i \nabla \lambda^i) = \mathbf{f} - \nabla G. \quad (10)$$

The gradient part reads

$$\frac{D\phi}{Dt} - p = \lambda^i M^i - G - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2. \quad (11)$$

The arbitrary scalar, $G[\lambda, \mu]$, represents a gauge freedom stemming from the nonunique separation of a gradient part.

Let us remark at this point that the incompressibility condition (6) allows one to express ϕ in terms of λ^i and μ^i , as the solution of the linear equation,

$$\Delta \phi = \sum_{i=1}^q \nabla \cdot (\lambda^i \nabla \mu^i). \quad (12)$$

Thus, it is not needed to independently solve Eq. (11) for the field ϕ , since this equation is identically satisfied when ϕ is determined by the incompressibility condition (12).

Equation (10) above is a system of d linear equations for the $2q$ unknowns L^i, M^i . Note that when $\nu=0$ (and thus $\mathbf{f}=0$) a solution to (10) is readily obtained by setting

$L^i=M^i=\mathbf{f}=G=0$. In this case, Eqs. (8) and (9) are just the standard evolution equations for the Weber-Clebsch potentials of the Euler problem.¹

Note also that in the overdetermined case $2q < d$ (e.g., $d=3, q=1$), Eq. (10) in general admits no solution. In this case it is not possible, in general, to reproduce a given $\delta \mathbf{u}$ from Eq. (2) in terms of $\delta \lambda^i$ and $\delta \mu^i$. Thus we consider from now on the case $2q \geq d$.

Considering from now on only the Navier-Stokes case (7), let us make a shift in the unknowns L^i, M^i , which allows the explicit introduction of dissipation in the evolution equations for the potentials,

$$L^i = \tilde{L}^i + \nu \Delta \lambda^i, \quad (13)$$

$$M^i = \tilde{M}^i + \nu \Delta \mu^i. \quad (14)$$

The evolution equations (8) and (9) for the potentials thus now read

$$\frac{D\lambda^i}{Dt} = \nu \Delta \lambda^i + \tilde{L}^i[\lambda, \mu], \quad (15)$$

$$\frac{D\mu^i}{Dt} = \nu \Delta \mu^i + \tilde{M}^i[\lambda, \mu], \quad (16)$$

and (10) is replaced by

$$\sum_{i=1}^q (\tilde{L}^i \nabla \mu^i - \tilde{M}^i \nabla \lambda^i) = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}, \quad (17)$$

where $\tilde{G}$ is an arbitrary scalar function, related to the former arbitrary function G by the relation $G = \tilde{G} - \nu \Delta \phi + \nu \lambda^i \Delta \mu^i$, and

$$\tilde{\mathbf{f}} = 2\nu \sum_{i=1}^q \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i. \quad (18)$$

The procedure to obtain $\tilde{L}^i, \tilde{M}^i$ now consists of solving the linear system (17) of d equations for $2q$ unknowns.

C. Moore-Penrose solution and minimum norm

In the underdetermined case ($2q > d$) the general Moore-Penrose⁵⁻⁷ approach corresponds to finding solutions to the linear system (17) supplemented by a requirement of minimum norm, namely that

$$\sum_{i=1}^q (\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^{-2} \tilde{M}^i \tilde{M}^i) \quad (19)$$

be the smallest possible. Note that in the basic Weber-Clebsch definition (1) the field $\mathbf{u}$ is a velocity with physical dimensions LT^{-1} . Thus, the product $\lambda \mu$ and the field ϕ must have dimensions $L^2 T^{-1}$. It will turn out [see Eq. (27) below] that $[\mu]=L$ and consequently $[\lambda]=LT^{-1}$. Thus, because of relations (15) and (16), the parameter τ that appears in (19) has the dimension of time.

The general Moore-Penrose solution to (17), which minimizes the norm (19), is shown in Appendix A to be

given by (A6) and (A7). Inserting this solution in (15) and (16) we finally obtain the explicit form of the evolution equations

$$\frac{D\lambda^i}{Dt} = \nu \Delta \lambda^i + \nabla \mu^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}), \quad (20)$$

$$\frac{D\mu^i}{Dt} = \nu \Delta \mu^i - \tau^2 \nabla \lambda^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}), \quad (21)$$

where the dot product denotes matrix or vector multiplication of d -dimensional tensors, and $\mathbb{H}^{-1}$ is the inverse of the square symmetric $d \times d$ matrix $\mathbb{H}$, defined by its components,

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^q (\tau^2 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\beta \lambda^i + \partial_\alpha \mu^i \partial_\beta \mu^i). \quad (22)$$

These evolution equations, together with the particular form of the choice for the arbitrary function $\tilde{G}$, which explicitly reads [see Eq. (A11)]

$$\tilde{G} = \Delta^{-1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}}, \quad (23)$$

represents our new algorithm.

D. Ohkitani-Constantin approach

The OC³ approach can be directly recovered from our evolution equations (15) and (16) by supplementing the linear system (17) with the following conditions: (i) $q=d$ (thus we have d equations for $2d$ unknowns), (ii) the d extra conditions $\tilde{M}^i=0$, and (iii) $\tilde{G}=0$. When these conditions are imposed, the evolution equations for the potentials read

$$\frac{D\lambda^i}{Dt} = \nu \Delta \lambda^i + \tilde{L}^i[\lambda, \mu], \quad (24)$$

$$\frac{D\mu^i}{Dt} = \nu \Delta \mu^i, \quad (25)$$

where $\tilde{L}^i$ satisfies Eq. (17), which is now the (determined) $d \times d$ system,

$$\sum_{i=1}^d \tilde{L}^i \nabla \mu^i = 2\nu \sum_{i=1}^d \sum_{\alpha=1}^d \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i. \quad (26)$$

Note that the “internal” index i and the spatial index α are treated on the same footing in Eq. (26), which is only possible when $q=d$. The correspondence with the OC formulation is obtained via the change of notation $\lambda^i \rightarrow v^i$ and $\mu^i \rightarrow A^i$, respectively called “virtual velocity” and “diffusive Lagrangian map” in Ref. 3. It is straightforward to check that our Eqs. (1) and (12) are equivalent to Eqs. (3) and (4) of Ref. 3, and that our Eqs. (24) and (25) are identical to Eqs. (5) and (6) of Ref. 3.

E. Discussion

Let us return to our generalized equations (20)–(22). When $q=d$, the matrix $\mathbb{H}$ has a very simple structure in the limit $\tau \rightarrow 0$ [see Eq. (22)]. Indeed it can be written (with obvious notation) as $\mathbb{H} = (\nabla \mu) \cdot (\nabla \mu)^T$. It is thus straightfor-

ward to show that our new algorithm (20) and (21) (with the particular gauge choice $\tilde{G}=0$) reduces in the limit $\tau \rightarrow 0$ to the Ohkitani-Constantin approach (24)–(26). Note that the existence of a solution to (26) requires (in general) that the matrix $(\nabla \mu)$ be invertible. Problems will thus generically occur when $\det(\nabla \mu)=0$, which is on a manifold of codimension 1. Thus, for any space dimension d , the generic situation is that for every point of space $(x^1, \dots, x^d)$ there exists a time t^* at which the determinant becomes zero.

However, if we do not take the particular choice $\tilde{M}^i=0$, then the solution of the linear system (17) of d equations for $2d$ unknowns generically will be ill defined in a manifold of codimension $(d+1)$, i.e., on isolated points in space time. The corresponding Moore-Penrose solution to (17) requires the invertibility of the matrix $\mathbb{H} = (\nabla \mu) \cdot (\nabla \mu)^T + \tau^2 (\nabla \lambda) \cdot (\nabla \lambda)^T$.

Thus, because the condition $\det(\nabla \mu)=0$ is generically obtained at lower codimension than the condition $\det \mathbb{H}=0$, the limit $\tau \rightarrow 0$ is *singular*.

III. NUMERICAL RESULTS

A. Implementation

Spatially periodic velocity fields can be generated from the Weber-Clebsch representation (1) by setting

$$\mu^i = x^i + \mu_p^i, \quad (27)$$

and assuming that μ_p^i and the other fields λ^i and ϕ appearing in (1) are periodic. Indeed, any given periodic velocity field $\mathbf{u}$ can be represented in this way by setting

$$\mu_p^i = 0, \quad (28)$$

$$\lambda^i = u^i, \quad (29)$$

$$\phi = 0. \quad (30)$$

Note that the time-independent nonperiodic part of μ^i of the form given in (27) is such that the *gradients* of μ^i are periodic. It is easy to check that this representation is consistent with the generalized equations of motions (20) and (21).

Our numerical study will be performed using the so-called Taylor-Green⁴ single-mode initial condition,

$$\begin{aligned} u^1 &= \sin x \cos y \cos z, \\ u^2 &= -\cos x \sin y \cos z, \\ u^3 &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

As the initial length and velocity scales are of order 1, the Reynolds number will be defined by $R=1/\nu$ (Ref. 8).

Standard Fourier pseudospectral methods are used both for their precision and for their ease of implementation.⁹ Symmetries are employed to reduce memory storage and speed up computations. The runs presented below were performed at resolution 192^3 . Implementation details are given in Appendix B.

In what follows, we will systematically compare the velocity field $\mathbf{u}$, obtained from (1) and (12) by evolving the

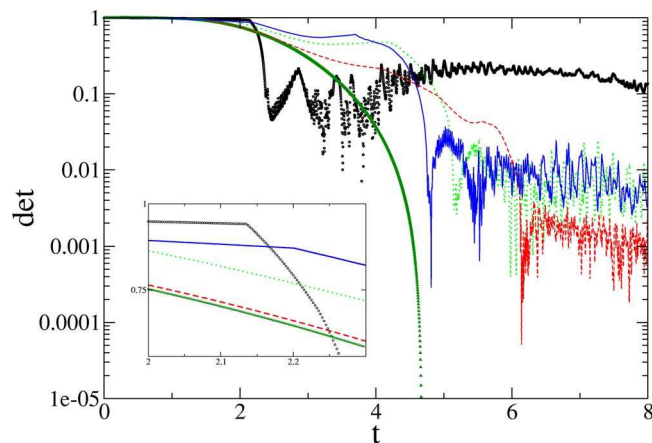


FIG. 1. (Color online) Time evolution of the minimum of $\det(\mathbf{H})$ [see Eq. (22)] at Reynolds number $R=40$ with $\tau=0, 0.01, 0.1, 0.2$, and 1 (from bottom to top at $t=2.1$, see inset).

Weber-Clebsch potentials using (20), (21), and (23), with the velocity field obtained by direct Navier-Stokes evolution from the Taylor-Green initial data (31).

B. Integration without resetting

Let us first consider computations performed *without* resetting. Equations (28)–(30) are thus used only once, to initialize the Weber-Clebsch potentials at the start of the calculation.

The time evolution of the spatial minimum of the determinant of the matrix $\mathbf{H}$, defined in Eq. (22), is displayed in Fig. 1 for various values of τ . It is manifest in the figure that, in the OC limit, when $\tau=0$, the minimum of the determinant reaches zero after a finite time. Then, the computation *cannot* be continued. However, when $\tau \neq 0$, the determinant stays positive and the computation *can* be carried on. This behavior of the determinant is consistent with the issues about the invertibility of $\mathbf{H}$ that were discussed above in Sec. II E. The singular nature of the $\tau \rightarrow 0$ limit is therefore discernible in the figure.

In order to characterize the precision of the $\tau \neq 0$ Weber-Clebsch algorithm we now compare its results with direct Navier-Stokes calculations. More precisely, we compare the associated enstrophy $\Omega(t) = \sum_k k^2 E(k, t)$ and energy spectrum $E(k, t)$, where the energy spectrum is defined by averaging the Fourier transform $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)$ of the velocity field (1) on spherical shells of width $\Delta k = 1$,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)|^2. \quad (32)$$

It is apparent in Fig. 2 that the enstrophy computed at resolution 192^3 is well resolved, provided that the Reynolds number stays well below $R \approx 150$. Thus, for $\tau=1$, our generalized algorithm (20) and (21) reproduces well the Navier-Stokes dynamics *for all times*, provided that the Reynolds number is not too large. This suggests that, in order to trace

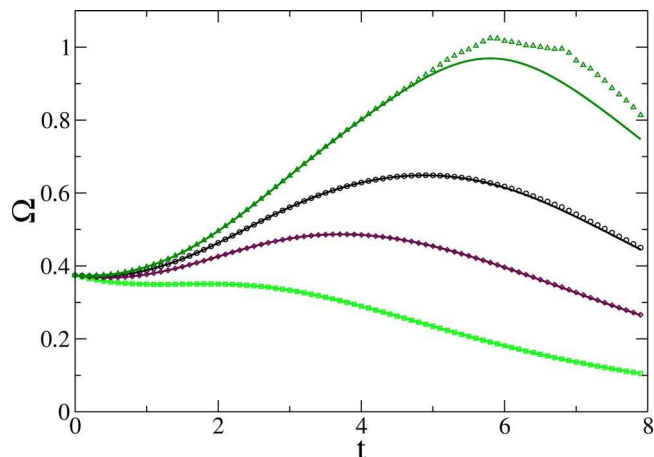


FIG. 2. (Color online) Time evolution of enstrophy Ω at Reynolds numbers $R=40, 70, 100$, and 150 ($\square$, $\diamond$, $\circ$, and $\triangle$), and $\tau=1$. Straight lines are DNS of Navier-Stokes equations.

the Navier-Stokes dynamics without resetting, τ could be matched depending on Reynolds number. This possibility will be studied in future work. We have checked (data not shown) that the limiting Reynolds number is an increasing function of resolution.

Time evolution of the energy spectrum is presented in Fig. 3. It is conspicuous in the figure that an error is present at large wavenumber, even when the vorticity is very well resolved (compare with the lowest Reynolds number in Fig. 2). When time increases from 1 to 2.5 (the time at which the determinant reaches its first minimum, see the $\tau=1$ curve in Fig. 1), the wavenumber above which an error is visible decreases and the level of the error increases. However, for later time this trend is visibly reversed: the error has actually *decreased* at $t=7.5$.

C. Integration with resettings

Following Ohkitani and Constantin,³ we now turn our attention to computations performed *with* resettings. Equations (28)–(30) are thus used not only to initialize the Weber-

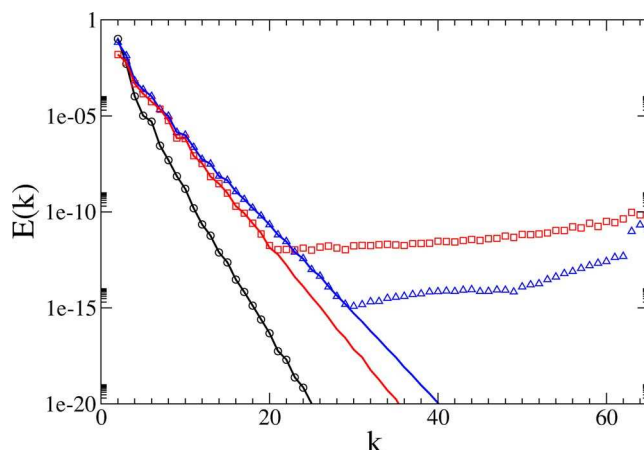


FIG. 3. (Color online) Evolution of the energy spectrum at Reynolds number $R=40$ for $t=1, 2.5$, and 7.5 ($\circ$, $\square$, and $\triangle$), and $\tau=1$. Straight lines are DNS of Navier-Stokes equations.

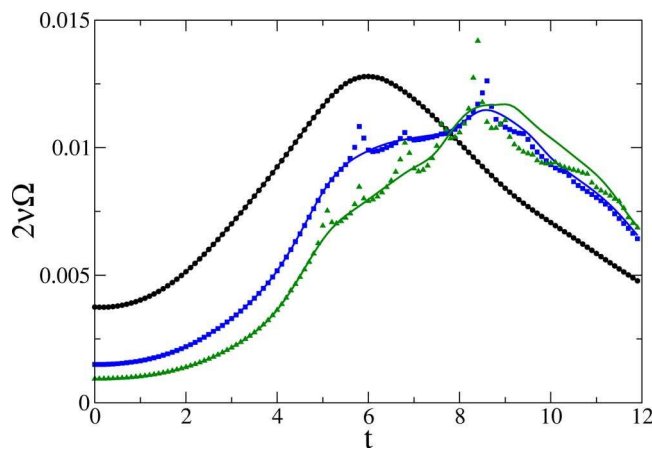


FIG. 4. (Color online) Time evolution of $2\nu\Omega$ with $\tau=1$ and resetting threshold $\epsilon^2=0.01$ at Reynolds numbers $R=200$, 500 , and 800 ($\circ$, $\square$, and $\triangle$). Straight lines are DNS of Navier-Stokes equations.

Clebsch potentials at the start of the calculation but also to *reset* them to the current value of the velocity $\mathbf{u}$, obtained from (1) and (12), whenever the minimum of the determinant of the matrix (22) falls below a given threshold,

$$\det(\mathbf{H}) \leq \epsilon^2. \quad (33)$$

Note that this definition agrees with the resetting criterion of OC³, $|\det(\nabla\boldsymbol{\mu})| \leq \epsilon$ because, in the limit $\tau \rightarrow 0$, $\det(\mathbf{H}) = \det(\nabla\boldsymbol{\mu})^2$ (see Sec. II E above). Ohkitani and Constantin have related the vanishing of $\det(\nabla\boldsymbol{\mu})$ to unusually intense particle diffusion that takes place near reconnection. In the generalized formalism, the fields $(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t))$ are treated essentially on the same footing; thus, it is expected that the phenomenon of intense particle diffusion will be associated with the degeneracy of an object that involves both of them. It is tempting to speculate that this object is $\det(\mathbf{H})$. This matter will be studied in the future.

It is clear in Fig. 4 that the enstrophy computed at resolution 192^3 , using resetting with threshold $\epsilon^2=0.01$ and $\tau=1$, is well resolved, provided that the Reynolds number stays below $R \approx 800$. Figure 4 thus shows that performing resettings allows computation at much higher Reynolds numbers than without resetting (compare with Fig. 2).

A simple dynamical mechanism for the decrease of the determinant $\det(\mathbf{H})$ is the effect of the advection term in Eqs. (15) and (16) that tends to align all the gradients $\nabla\boldsymbol{\lambda}$ and $\nabla\boldsymbol{\mu}$ with the same strain eigendirection (data not shown). This behavior leads to a loss of numerical precision in the solution of the linear system (17) or, equivalently, in the invertibility of the matrix $\mathbf{H}$ [Eq. (22)]. Note that this behavior is cured when performing a resetting.

The time evolution of the error on the energy spectrum is displayed in Fig. 5. It is visible in the figure that, following a resetting, the errors present at high wavenumbers decay rapidly. This shows that right after a resetting Navier-Stokes dynamics is restored at the smallest scales, thereby allowing “auto healing” of the spectrum.

The influence of the parameter τ on the errors is shown in Fig. 6. It is apparent in the figure that the errors prior to

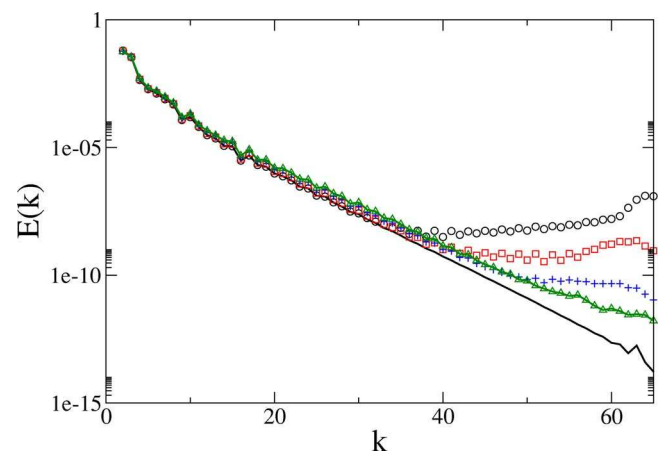


FIG. 5. (Color online) Time evolution of energy spectrum after resetting at Reynolds number $R=200$ with $\tau=0.01$, at $t=3.6$ (just after resetting), 3.7 , 3.8 , and 3.9 ($\circ$, $\square$, $+$, and $\triangle$). Straight lines are DNS of Navier-Stokes equations at $t=3.6$ and 3.9 .

resetting are larger for $\tau=0.1$ than when $\tau=0$. However, note that the errors at the end of the run are small and of the same order of magnitude in both cases (see also Fig. 4).

D. Frequency of resetting

The influence of the parameter τ on the temporal distribution of the intervals $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ between resetting times t_j , at fixed value of the resetting threshold $\epsilon^2=0.01$, is displayed in Fig. 7. It can be seen in the figure that, at a given time, the interval is (generally) an increasing function of τ , but that the prevailing behavior in time of Δt is well preserved when τ is small enough. Note that, for $t \approx 10$, the intervals Δt between resettings are observed to increase from $\Delta t \approx 0.25$ to $\Delta t \approx 0.5$ when τ is varied from 0 to 0.01 . More information on the influence of small nonzero τ on the resetting frequency is obtained by looking at the total number of resettings, between $t=0$ and $t=12$ presented in Table I. The table shows that the total number of resettings decreases when τ is increased from 0 to 0.001 . Note that this effect takes place for values of τ much smaller than Δt .

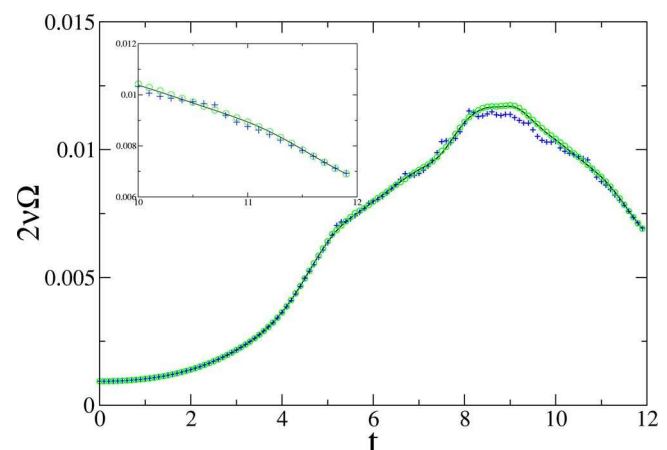


FIG. 6. (Color online) Time evolution for $2\nu\Omega$ at Reynolds number $R=800$ for $\tau=0$ and 0.1 ($\circ$ and $+$). The straight line is a DNS of Navier-Stokes equations.

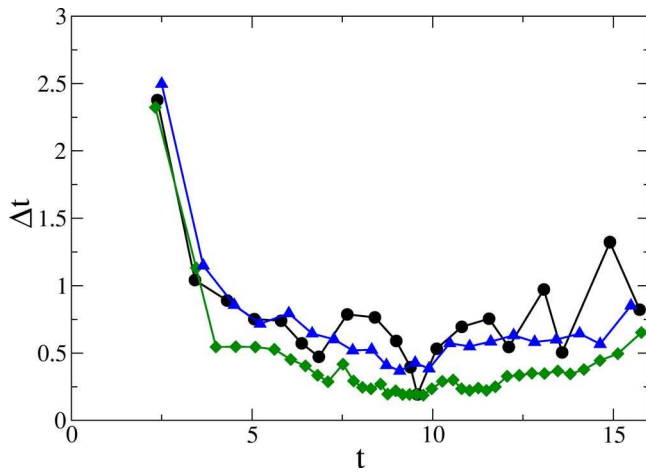


FIG. 7. (Color online) Time evolution of the intervals between resets Δt_j vs resetting time t_j at Reynolds number $R=800$ for $\tau=0, 0.01$ and 1 ($\diamond$, $\triangle$ and $\circ$).

IV. CONCLUSION

A. Summary

We derived generalized equations of motion for the Weber-Clebsch potentials that imply that the velocity field follows Navier-Stokes equations. These new equations were shown to depend on τ (a parameter with the dimension of time) and to reduce to the OC equations in the singular limit $\tau \rightarrow 0$. DNS of the viscous Taylor-Green vortex were performed and the influence of the parameter τ was characterized. For $\tau \neq 0$, it was possible to perform computation *without* resetting and the Navier-Stokes dynamics was well reproduced for small enough Reynolds numbers. However, errors were found to be present at large wavenumbers, even when the vorticity was well resolved. Performing resets allowed us to compute at much higher Reynolds numbers and the level of error was found to rapidly decay following each resetting. The intervals Δt between resets were found to sharply increase when τ was varied from 0 to a value much smaller than Δt .

B. Discussion

The present numerical study was performed on the Taylor-Green vortex, a flow in which vorticity layers are formed in the early stage, followed by their rolling up by

TABLE I. Variations with τ of the total number of resets between $t=0$ and $t=12$ (same conditions as in Fig. 7).

Value of τ	Number of resets
0.0	29
0.001	20
0.005	17
0.01	16
0.05	14
0.1	15
1.0	13

Kelvin-Helmholtz instability.⁸ In contrast, Ohkitani and Constantin³ chose a flow that initially consists of two orthogonally placed vortex tubes. This flow was previously used by Boratav, Pelz, and Zabusky (BPZ)¹⁰ to study in detail vortex reconnection. It can be argued³ that cut-and-connect-type reconnections are much more pronounced in the BPZ flow than in the Taylor-Green flow. Indeed, when comparing the present Fig. 7 with Fig. 3 of OC, it is apparent that the minimum of Δt is much more pronounced in the BPZ flow than in the Taylor-Green flow. Detailed comparison, performed on the BPZ flow, of Δt computed at $\tau \neq 0$ with the Δt of OC, will be reported in the future. Extensions of the present approach to compressible and magnetohydrodynamics flows will also be reported elsewhere.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge very useful scientific discussions with Peter Constantin and Edriss S. Titi. One of the authors (M.E.B.) acknowledges support from an ECOS/CONICYT action.

APPENDIX A: MOORE-PENROSE SOLUTION

1. Minimizing the local norm

Following the general Moore-Penrose⁵⁻⁷ approach, we seek solutions to the linear system (17) supplemented by the requirement that the norm (19) be the smallest possible at each point in space and time. These solutions can be directly obtained by minimizing the following function with respect to all of its arguments:

$$S(\tilde{L}^i, \tilde{M}^i, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^2 \tilde{M}^i \tilde{M}^i) - \mathbf{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^q (\tilde{L}^i \nabla \mu^i - \tilde{M}^i \nabla \lambda^i) - \tilde{\mathbf{f}} + \nabla \tilde{G} \right). \quad (\text{A1})$$

Indeed, the equations $\partial S / \partial \mathbf{k} = 0$ correspond to the original system (17) and, when this system is satisfied, the equations $\partial S / \partial \tilde{L}^i = 0$ and $\partial S / \partial \tilde{M}^i = 0$ imply that the norm is minimal. These equations explicitly give the unknowns in terms of the Lagrange multiplier $\mathbf{k}$,

$$\tilde{L}^i = \mathbf{k} \cdot \nabla \mu^i, \quad (\text{A2})$$

$$\tilde{M}^i = -\tau^2 \mathbf{k} \cdot \nabla \lambda^i. \quad (\text{A3})$$

Inserting these solutions into (17) yields the following equation for the Lagrange multiplier:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}, \quad (\text{A4})$$

where the square symmetric $d \times d$ matrix $\mathbf{H}$ is defined by its components

$$H_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^q (\tau^2 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\beta \lambda^i + \partial_\alpha \mu^i \partial_\beta \mu^i). \quad (\text{A5})$$

When $\mathbf{H}$ is invertible, the solution for the unknowns explicitly reads

$$\tilde{L}^i = \nabla \mu^i \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}), \quad (\text{A6})$$

$$\tilde{M}^i = -\tau^2 \nabla \lambda^i \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}). \quad (\text{A7})$$

Finally, we define the Moore-Penrose norm, which is the norm $\mathcal{S}(\tilde{L}^i, \tilde{M}^i, \mathbf{k})$ in Eq. (A1) evaluated on the above solution. We get

$$\mathcal{S}_{\text{MP}}[\tilde{G}] = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}). \quad (\text{A8})$$

2. Minimizing the space integral of the Moore-Penrose norm using $\tilde{G}$

Notice that the function $\tilde{G}$ remains arbitrary. Given the function $\tilde{G}$ there is a solution given by (A6) and (A7), which minimizes the norm to the value given by Eq. (A8). We determine $\tilde{G}$ by the further requirement of minimum value of the integral throughout space of the norm $\mathcal{S}_{\text{MP}}[\tilde{G}]$ multiplied by a given weight function $W(x^\alpha)$,

$$\mathcal{S}[\tilde{G}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) W(x^\alpha) d^d x. \quad (\text{A9})$$

Variation with respect to $\tilde{G}$ gives the Euler-Lagrange equation,

$$\nabla \cdot (W \mathbf{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G})) = 0, \quad (\text{A10})$$

which is an inhomogeneous, linear, second-order partial differential equation for $\tilde{G}$.

In practice we solve the simpler equation,

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}) = 0. \quad (\text{A11})$$

Note that this equation is straightforward to solve and is strictly equivalent to (A10) only for constant $\mathbf{H}$. However, we find that in the general case of nonconstant $\mathbf{H}$ this simple choice leads to a stable algorithm.

APPENDIX B: NUMERICAL METHODS

Symmetries of the Weber-Clebsch representation are employed to reduce memory storage and speed up computations. Our numerical methods are thus standard; their only specialty stems from the conjunction of the Taylor-Green symmetries with the Weber-Clebsch representation (1).

1. Symmetric Weber-Clebsch representation

The symmetries of the Taylor-Green velocity field (31) implemented in the code are rotational symmetry of angle π around the axis ($x=z=\pi/2$), ($y=z=\pi/2$), and ($x=y=\pi/2$), and mirror symmetry with respect to the planes $x=0, \pi$, $y=0, \pi$, $z=0, \pi$. These planes form the sides of the so-called *impermeable box*, which confines the flow. These symme-

tries correspond to the following particular form for the non-zero Fourier modes of the velocity field solution of the Navier-Stokes equations:

$$\begin{aligned} \hat{u}^1(m, n, p, t) & \sin mx \cos ny \cos pz, \\ \hat{u}^2(m, n, p, t) & \cos mx \sin ny \cos pz, \\ \hat{u}^3(m, n, p, t) & \cos mx \cos ny \sin pz, \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

where $\hat{\mathbf{u}}(m, n, p, t)$ vanishes unless m, n, p are either all even or all odd integers. Separation of the even and odd parts and the use of special sine/cosine Fourier transforms reduces memory storage and speeds up computations.⁸

It is easy to directly check from the Weber-Clebsch representation (1) and (27) that the fields λ^i and μ_p^i admit exactly the same representation (B1) than the velocity field u^i , while the field ϕ admits the similar representation that only involves cosines.

2. Moore-Penrose implementation

In order to save memory and operation count, the right-hand side of (18) is evaluated as

$$\nu \sum_{i=1}^q (\Delta u - \Delta \lambda^i \nabla \mu^i - \lambda^i \Delta \nabla \mu^i - \Delta \nabla \phi). \quad (\text{B2})$$

This expression yields a result identical to (18), because we perform dealiasing using the 2/3 rule.⁹ In a computation cycle, Eq. (23) is first used to obtain $\tilde{G}$ in spectral space. The velocity field obtained from (1) and (12) is dealiased by the 2/3 rule. The matrix elements (22) and the full nonlinear terms of (20) and (21) are then computed in physical space. The nonlinear terms are dealiased in spectral space. Adams-Bashforth time stepping is used to update the potentials. Due to dealiasing, computations performed at resolution N (with N grid points between 0 and 2π) have a maximum wave-number $k_{\text{max}} = N/3$.

¹H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932).

²P. Constantin, "An Eulerian-Lagrangian approach to the Navier-Stokes equations." *Commun. Math. Phys.* **216**, 663 (2001).

³K. Ohkitani and P. Constantin, "Numerical study of the Eulerian-Lagrangian formulation of the Navier-Stokes equations." *Phys. Fluids* **15**, 3251 (2003).

⁴G. I. Taylor and A. E. Green, "Mechanism of the production of small eddies from large ones." *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **158**, 499 (1937).

⁵E. H. Moore, "On the reciprocal of the general algebraic matrix." *Bull. Am. Math. Soc.* **26**, 394 (1920).

⁶R. Penrose, "A generalized inverse for matrices." *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, 406 (1955).

⁷A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications* (Wiley-Interscience, New York, 1974).

⁸M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf, and U. Frisch, "Small-scale structure of the Taylor-Green vortex." *J. Fluid Mech.* **130**, 411 (1983).

⁹D. Gottlieb and S. A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods* (SIAM, Philadelphia, 1977).

¹⁰O. N. Boratav, R. B. Pelz, and N. J. Zabusky, "Reconnection in orthogonally interacting vortex tubes: Direct numerical simulations and quantifications." *Phys. Fluids A* **4**, 581 (1992).

Generalized Eulerian-Lagrangian description of Navier-Stokes and resistive MHD dynamics

Carlos Cartes,¹ Miguel D. Bustamante,² Annick Pouquet,³ and Marc E. Brachet⁴

¹*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,
associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris, France*

²*Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, United Kingdom*

³*National Center for Atmospheric Research, Boulder (CO) 80304 - USA*

⁴*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,
associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris,
France and National Center for Atmospheric Research, Boulder (CO) 80304 - USA*

New generalized equations of motion for the Weber-Clebsch potentials that describe both the Navier-Stokes and MHD dynamics are derived. These depend on a new parameter, which has dimensions of time for Navier-Stokes and inverse velocity for MHD. Direct numerical simulations (DNS) are performed. For Navier-Stokes, the generalized formalism captures the intense reconnection of vortices of the Boratav, Pelz and Zabusky flow, in agreement with the previous study by Ohkitani and Constantin. For MHD, the new formalism is used to detect magnetic reconnection in several flows: the 3D Arnold, Beltrami and Childress (ABC) flow and the (2D and 3D) Orszag-Tang vortex. It is concluded that periods of intense activity in the magnetic enstrophy are correlated with periods of increasingly frequent resettings. Finally, the positive correlation between the sharpness of the increase in resetting frequency and the spatial localization of the reconnection region is discussed.

PACS numbers: 47.10.-g, 47.11.-j, 47.32.C-, 47.65.-d

I. INTRODUCTION

The Eulerian-Lagrangian formulation of the (inviscid) Euler dynamics in terms of advected Weber-Clebsch potentials [1] was extended by Constantin [2] to cover the (viscous) Navier-Stokes dynamics. Ohkitani and Constantin (OC) [3] then performed numerical studies of this formulation of the Navier-Stokes equations. They concluded that the diffusive Lagrangian map becomes non-invertible under time evolution and requires resetting for its calculation. They proposed the observed sharp increase of the frequency of resettings as a new diagnostic of vortex reconnection.

We were able to recently complement these results, using an approach that is based on a generalized set of equations of motion for the Weber-Clebsch potentials that turned out to depend on a parameter τ which has the unit of time for the Navier-Stokes case [4] (the MHD case is different, see below Section II A 3). The OC formulation is the (singular) $\tau \rightarrow 0$ limit case of our generalized formulation. Using direct numerical simulations (DNS) of the viscous Taylor-Green vortex [5] we found that for $\tau \neq 0$ the Navier-Stokes dynamics was well reproduced at small enough Reynolds numbers *without* resetting. However, performing resettings allowed computation at much higher Reynolds number.

The aim of the present article is to extend these results to different flows, both in the Navier-Stokes case and in magnetohydrodynamics, and thereby obtain a new diagnostic for *magnetic* reconnection. Our main conclusion is that intense reconnection of magnetic field lines is indeed captured in our new generalized formulation as a sharp increase of the frequency of resettings. Here follows a

summary of our principal results.

We first derive new generalized equations of motion for the Weber-Clebsch potentials that describe both the Navier-Stokes and MHD dynamics. Performing DNS of the Boratav, Pelz and Zabusky flow [6], that was previously used by Ohkitani and Constantin [3], we first check that our generalized formalism captures the intense Navier-Stokes vortex reconnection of this flow. We demonstrate the reconnection of vortices is actually occurring at the instant of intense activity in the enstrophy, near the lows of the determinant that trigger the resettings. We then study the correlation of magnetic reconnection with increase of resetting frequency by performing DNS of several prototypical MHD flows: the 3D Arnold, Beltrami and Childress (ABC) flow [7] and the Orszag-Tang vortex in 2D [8] and 3D [9].

II. THEORETICAL FRAMEWORK

A. General Setting

1. Weber-Clebsch representation for a class of evolution equations

Let us consider a 3D vector field $\mathbf{Z}$ depending on time and (3-dimensional) space, with coordinates (x^1, x^2, x^3, t) . Assume $\mathbf{Z}$ satisfies an evolution equation of the kind:

$$\frac{D\mathbf{Z}}{Dt} = -\nabla P + \sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha} \nabla Z_{\alpha} + \kappa \Delta \mathbf{Z} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Z} = 0, \quad (2)$$

where greek indices α, β denote vector field components running from 1 to 3, $\mathbf{u}$ is a given 3D velocity field and we have used the convective derivative defined by

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla).$$

In the following sections, two different cases will be considered. In section II B (Navier-Stokes case) the vector field $\mathbf{Z}$ will correspond to the velocity field $\mathbf{u}$, whereas in section II C (MHD case) it will correspond to the magnetic vector potential $\mathbf{A}$.

Let us first recall that performing a change from Lagrangian to Eulerian coordinates on the Weber transformation [10] leads to a description of the Euler equations as a system of three coupled active vector equations in a form that generalizes the Clebsch variable representation [1].

Our starting point will be to apply this classical Weber-Clebsch representation to the field $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \nabla \mu^i - \nabla \phi, \quad (3)$$

where each element of the 3 pairs of Weber-Clebsch potentials (λ^i, μ^i) , $i = 1, 2, 3$ is a scalar function.

Performing a variation on the Weber-Clebsch representation (3) yields the relation

$$\delta \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^3 (\delta \lambda^i \nabla \mu^i - \delta \mu^i \nabla \lambda^i) - \nabla \left(\delta \phi - \sum_{i=1}^3 \delta \mu^i \lambda^i \right), \quad (4)$$

where the symbol δ stands for any (spatial or temporal) partial derivative. Taking into account the identity $[\nabla, \frac{D}{Dt}] \equiv (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla$, it is straightforward to derive from (4) the following explicit expression for the convective derivative of the vector field $\mathbf{Z}$:

$$\frac{D\mathbf{Z}}{Dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{D\lambda^i}{Dt} \nabla \mu^i - \frac{D\mu^i}{Dt} \nabla \lambda^i \right) - \sum_{\alpha=1}^3 Z_\alpha \nabla u_\alpha - \nabla \left(\frac{D\phi}{Dt} - \sum_{i=1}^3 \frac{D\mu^i}{Dt} \lambda^i \right), \quad (5)$$

2. Equations of motion for the potentials

Following steps that are similar to those presented in our previous paper [4], we now derive a system of equations of motion for the Weber-Clebsch potentials (3) that is equivalent to the original equation (1). If we use the RHS of equation (1) to replace the LHS of our general identity (5), the resulting relation can be solved for the time derivative of the potentials:

$$\frac{D\lambda^i}{Dt} = \kappa \Delta \lambda^i + \tilde{L}^i[\lambda, \mu] \quad (6)$$

$$\frac{D\mu^i}{Dt} = \kappa \Delta \mu^i + \tilde{M}^i[\lambda, \mu]. \quad (7)$$

Here $\tilde{L}^i, \tilde{M}^i$ obey the linear equation

$$\sum_{i=1}^3 \left(\tilde{L}^i \nabla \mu^i - \tilde{M}^i \nabla \lambda^i \right) = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla \tilde{G}, \quad (8)$$

where

$$\tilde{\mathbf{f}} = 2\kappa \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\alpha \nabla \mu^i \quad (9)$$

and $\tilde{G}[\lambda, \mu]$ is an arbitrary scalar related to the non-unique separation of a gradient part in eq.(5):

$$\frac{D\phi}{Dt} - P = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \tilde{M}^i - \tilde{G} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{Z}. \quad (10)$$

The “divergence-less gauge” (2) allows one to express ϕ in terms of λ^i and μ^i , as the solution of the linear equation

$$\Delta \phi = \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot (\lambda^i \nabla \mu^i). \quad (11)$$

Thus there is no need to solve equation (10) for the field ϕ , since this equation is identically satisfied when ϕ is determined by eq. (11).

Equation (8) above is a system of 3 linear equations for the 6 unknowns $\tilde{L}^i, \tilde{M}^i$. When $\kappa = 0$ there is a simple solution to (8): $\tilde{L}^i = \tilde{M}^i = \tilde{G} = 0$. In this case the evolution equations (6) and (7) represent simple advection.

3. Moore-Penrose solution and minimum norm

The linear system (8) is underdetermined (3 equations for 6 unknowns). In order to find a solution to the system we need to impose extra conditions. Since $\tilde{L}^i, \tilde{M}^i$ appear in the equations on an equal footing, it is natural to supplement the system by a requirement of minimum norm, namely that

$$\sum_{i=1}^3 (\tilde{L}^i \tilde{L}^i + \tau^{-2} \tilde{M}^i \tilde{M}^i) \quad (12)$$

be the smallest possible (this is the so-called general Moore-Penrose approach [11–13], see also our previous paper [4]). The parameter τ has physical units equal to $[\tilde{M}/\tilde{L}]$. Using eqs.(6),(7) these are the units of $[\mu/\lambda]$. It will turn out (see equation (20) below) that $[\mu] = L$ (length) and this implies from eq.(3) that $[\lambda] = [\mathbf{Z}]$. Therefore the units of τ are

$$[\tau] = \frac{L}{[\mathbf{Z}]}.$$

In the Navier-Stokes case (section II B) $[\mathbf{Z}] = [\mathbf{u}] = LT^{-1}$ and thus $[\tau] = T$, whereas in the MHD case (section II C) $[\mathbf{Z}] = [\mathbf{A}] = L^2T^{-1}$ and thus $[\tau] = TL^{-1}$.

The Moore-Penrose solution to (8), that minimizes the norm (12), is explicitly given in equations (A6,A7) of reference [4]. Inserting this solution in (6),(7) we finally obtain the explicit evolution equations

$$\frac{D\lambda^i}{Dt} = \kappa\Delta\lambda^i + \nabla\mu^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla\tilde{G}) \quad (13)$$

$$\frac{D\mu^i}{Dt} = \kappa\Delta\mu^i - \tau^2 \nabla\lambda^i \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{f}} - \nabla\tilde{G}), \quad (14)$$

where $\tilde{\mathbf{f}}$ is given in eq.(9), the dot product denotes matrix or vector multiplication of 3-dimensional tensors, and $\mathbb{H}^{-1}$ is the inverse of the square symmetric 3×3 matrix $\mathbb{H}$, defined by its components:

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^3 (\tau^2 \partial_\alpha \lambda^i \partial_\beta \lambda^i + \partial_\alpha \mu^i \partial_\beta \mu^i). \quad (15)$$

These evolution equations together with the particular choice for the arbitrary function $\tilde{G}$ (see equation (A11) of reference [4])

$$\tilde{G} = \Delta^{-1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}}, \quad (16)$$

is our new algorithm.

In the Navier-Stokes case, we showed in a previous paper [4] that the limit $\tau \rightarrow 0$ corresponds to the approach used by Ohkitani and Constantin [3]. In the general case (Navier-Stokes as well as MHD), we remark that the matrix $\mathbb{H}$ (see equation (15)) can be written (using obvious notation) as $\mathbb{H} = (\nabla\boldsymbol{\mu}) \cdot (\nabla\boldsymbol{\mu})^T + \tau^2 (\nabla\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\nabla\boldsymbol{\lambda})^T$, which has a very simple structure in the limit $\tau \rightarrow 0$. Because the condition $\det(\nabla\boldsymbol{\mu}) = 0$ is generically obtained at lower codimension than the condition $\det\mathbb{H} = 0$, the limit $\tau \rightarrow 0$ is *singular*.

B. Navier-Stokes equations

The standard incompressible NS equations can be written in the form:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \left(p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha \nabla u_\alpha + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

which is indeed of the general form (1), (2) with $\mathbf{Z} = \mathbf{u}$, $\kappa = \nu$ and $P = p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$.

C. MHD equations

The standard incompressible MHD equations for the fluid velocity $\mathbf{u}$ and the induction field $\mathbf{b}$, expressed in Alfvénic velocity units, can be written in the form:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \quad (17)$$

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \Delta \mathbf{b} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0,$$

where ν and η are the viscosity and magnetic resistivity, respectively.

We introduce the vector potential in the Coulomb gauge:

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Using the identity $\nabla \times (\sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha \nabla A_\alpha - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{b}$ and the incompressibility condition (19), eq. (18) can be written as

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = -\nabla c + \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha \nabla A_\alpha + \eta \Delta \mathbf{A},$$

which is indeed of the general form (1) with $\mathbf{Z} = \mathbf{A}$, $\kappa = \eta$ and $P = c$.

III. NUMERICAL RESULTS

A. Implementation

1. Initial conditions in pseudo-spectral method

Spatially periodic fields can be generated from the Weber-Clebsch representation (3) by setting

$$\mu^i = x^i + \mu_p^i, \quad (20)$$

and assuming that μ_p^i and the other fields λ^i and ϕ appearing in (3) are periodic. Indeed, any given periodic field $\mathbf{Z}$ can be represented in this way by setting

$$\mu_p^i = 0 \quad (21)$$

$$\lambda^i = Z^i \quad (22)$$

$$\phi = 0. \quad (23)$$

Note that the time independent non-periodic part of μ^i of the form given in (20) is such that the *gradients* of μ^i are periodic. It is easy to check that this representation is consistent with the generalized equations of motions (13,14). We chose to use standard Fourier pseudo-spectral methods, both for their precision and for their ease of implementation [14].

2. Resettings and reconnection

Following Ohkitani and Constantin [3], we now define resettings. Equations (21), (22) and (23) are used not only to initialize the Weber-Clebsch potentials at the start of the calculation but also to *reset* them to the current value of the field $\mathbf{Z}$, obtained from (3) and (11), whenever the minimum of the determinant of the matrix (15) falls below a given threshold

$$\det \mathbb{H} \leq \epsilon^2.$$

It is possible to capture reconnection events using resettings. The rationale for this approach is that reconnection events are associated to localized, intense and increasingly fast activity which will drive the potentials to a (unphysical) singularity in a finite time. One way to detect this singularity is via the alignment of the gradients of the potentials, which leads to the vanishing of $\det \mathbb{H}$ at the point(s) where this intense activity or ‘anomalous diffusion’ is taking place. Now, the time scale of this singularity is much smaller than the time scale of the reconnection process itself [3], so when $\det \mathbb{H}$ goes below the given threshold and a resetting of the potentials is performed, the anomalous diffusion starts taking place again, more intensely as we approach the fastest reconnection period, driving the new (reset) potentials to a new finite-time singularity, in a time scale that decreases as we approach this period. Therefore, successive resettings will be more and more frequent near the period of fastest reconnection, and that is what we observe in the numerical simulations. This procedure will be used to capture reconnection events in particular flows in both the Navier-Stokes case ($\mathbf{Z} = \mathbf{u}$, Section III B) and the MHD case ($\mathbf{Z} = \mathbf{A}$, Sections III C 2 and III C 3).

B. Navier-Stokes case: BPZ Flow, resettings and reconnection

Ohkitani and Constantin (OC) [3] used a flow that initially consists of two orthogonally placed vortex tubes that was previously introduced in Boratav, Pelz and Zabusky (BPZ) [6] to study in detail vortex reconnection. Our previous numerical study of the generalized Weber-Clebsch description of Navier-Stokes dynamics [4] was performed using the Taylor-Green vortex, a flow in which vorticity layers are formed in the early stage, followed by their rolling-up by Kelvin-Helmholtz instability [15]. It can be argued [3] that cut-and-connect type reconnections are much more pronounced in the BPZ flow than in the Taylor-Green flow. In this section we present comparisons, performed on the BPZ flow, of our $\tau \neq 0$ generalized algorithm with direct Navier-Stokes simulations and with OC original approach. The potentials are integrated with resettings in resolution 128^3 for a Reynolds number of $R = 1044$, which is the one used by BPZ and OC.

The BPZ initial data is explicitly given in [6].

1. Comparison of Weber-Clebsch algorithm with DNS of Navier-Stokes

In order to characterize the precision of the $\tau \neq 0$ Weber-Clebsch algorithm, we now compare the velocity field $\mathbf{Z} = \mathbf{u}$ obtained from (3) and (11), by evolving the Weber-Clebsch potentials using (13)–(16), with the velocity field obtained independently by direct Navier-Stokes evolution from the BPZ initial data.

More precisely, we compare the associated kinetic enstrophy $\Omega(t) = \sum_k k^2 E(k, t)$ where the kinetic energy spectrum $E(k, t)$ is defined by averaging the Fourier transform $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', \mathbf{t})$ of the velocity field (3) on spherical shells of width $\Delta k = 1$,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k+\Delta k/2} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', \mathbf{t})|^2.$$

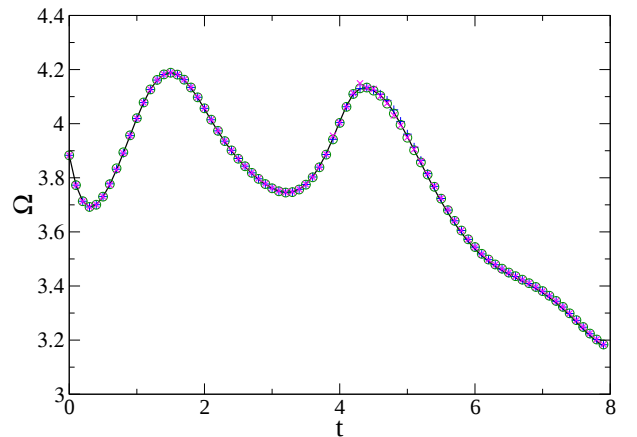


FIG. 1: Navier-Stokes case: BPZ Flow. Temporal evolution of kinetic enstrophy Ω for a Reynolds number of $R = 1044$ with $\tau = 0, 0.01$ and 0.1 (+, $\circ$ and $\times$). The solid line comes from a direct numerical simulation (DNS) at resolution 128^3 .

Figure 1 shows that the kinetic enstrophy is well resolved, independently of the choice of the parameter τ .

2. Time between resettings as a method for reconnection capture

In this section we study the influence of the parameter τ on the temporal distribution of the intervals $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ between resetting times t_j , at fixed value of the

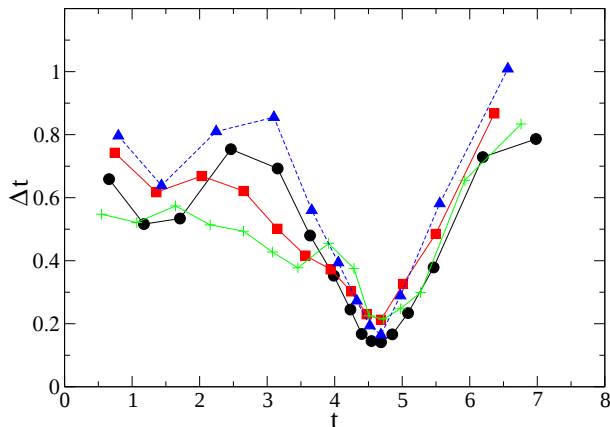


FIG. 2: Navier-Stokes case: BPZ flow. Temporal evolution of resetting interval Δt for $\tau = 0, 0.01$ and 0.1 ($\circ$, $\square$ and $+$), the triangles correspond to the simulation performed by Ohkitani and Constantin.

resetting threshold $\epsilon^2 = 0.1$. Using the same Reynolds number and resolution that was used to create Fig. 1, Figure 2 is a plot of Δt as a function of time, for simulations with different values of τ . In the same figure we also show the corresponding Δt for a replica of the simulation performed by OC, that is in excellent agreement with our general case.

We see that, independently of τ , there are sharp minima in Δt during the periods of maximum enstrophy (see Fig. 1). Inspection of figure 3 demonstrates that the deepest minimum corresponds in fact to the time when reconnection is taking place. The main tubes in the left and right figures are isosurfaces of vorticity corresponding to 60% of the maximum vorticity, which is attained inside each of the main tubes.

Figure 4 (left) shows that the spatial region where the determinant $\det \mathbb{H}$ goes below the threshold before each resetting corresponds to a small, localized neighborhood between the main interacting vortices. This region is seen in the right figure as a bridge connecting the two vortices: this bridge is an isosurface of vorticity corresponding to 73% of the maximum vorticity, which is attained inside the bridge. The main tubes correspond to isosurfaces of 30% of the maximum vorticity. Note that this behavior of the determinant $\det \mathbb{H}$ is also true for any value of τ (data not shown), confirming in this way the original rationale for the study of reconnection with the aid of resettings.

Figures 3 and 4 were made using the VAPOR [16, 17] visualization software.

C. MHD Flows

In this section we study MHD flows with simple initial conditions. The magnetic potential $\mathbf{Z} = \mathbf{A}$ is obtained

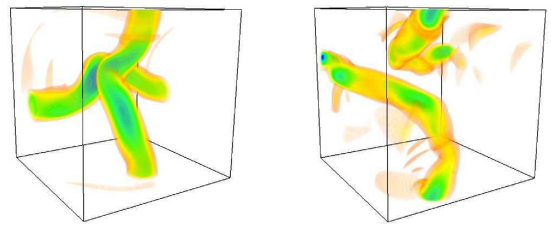


FIG. 3: Visualization of vorticity ω for the BPZ flow (same conditions than in Figures 1 and 2). Note the change of topology of the vortex tubes before (left, $t = 3.2$, $\omega_{\max} = 20$) and after (right, $t = 7.1$, $\omega_{\max} = 15$) the reconnection process. Isosurfaces colors: orange: 6, yellow: 9, green: 12 and blue: 16 (color online).

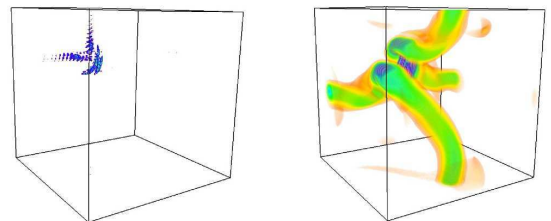


FIG. 4: Visualization of the determinant of the matrix (15) (left) and vorticity (right, with the same color map than in Figure 3) at reconnection time $t = 4.7$, $\omega_{\max} = 43.6$ (see Figure 2), for $\tau = 0.01$. The region where the determinant triggers resetting is within the displayed blue isosurface at 9 times the triggering level ϵ^2 (color online).

in terms of the Weber-Clebsch potentials from (3) and (11), and the Weber-Clebsch potentials are evolved using equations (13)–(16).

We treat the evolution of the velocity field in two different ways: (i) As a kinematic dynamo (ABC flow, Section III C 1), where the velocity is kept constant in time; (ii) Using the full MHD equations (Orszag-Tang 2D and 3D, Sections III C 2 and III C 3), where the velocity field is evolved using the momentum equation (17).

To compare with DNS of the induction equation (18) for the magnetic field we proceed analogously as in the Navier-Stokes case. We compare the magnetic enstrophy [18] $\Omega_m(t) = \sum_k k^2 E_m(k, t)$, where the magnetic energy spectrum $E_m(k, t)$ is defined by averaging the Fourier transform $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}', t)$ of the magnetic field $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$ (with $\mathbf{A}$ given by (3)) on spherical shells of width $\Delta k = 1$,

$$E_m(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k - \Delta k/2 < |\mathbf{k}'| < k + \Delta k/2} |\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}', t)|^2.$$

Note that magnetic dissipation is the square current.

Resettings will be performed with a resetting threshold

$\epsilon^2 = 0.1$. We have checked that $\epsilon^2 = 0.4$ and $\epsilon^2 = 0.025$ give results that vary only slightly (figures not shown). This is an evidence of the robustness of the resetting method and a validation of the rationale for the use of resettings to diagnose reconnection.

1. Kinematic dynamo: ABC Flow

We have used the ABC [7] velocity:

$$\begin{aligned} u_x &= B_0 \cos k_0 y + C_0 \sin k_0 z \\ u_y &= C_0 \cos k_0 z + A_0 \sin k_0 x \\ u_z &= A_0 \cos k_0 x + B_0 \sin k_0 y, \end{aligned}$$

with $k_0 = 2$ and $A_0 = B_0 = C_0 = 1$. We used an initial magnetic seed that reads

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= 0 \\ A_z &= d_0 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

The magnetic resistivity has been chosen as $\eta = 1/12$ and we have set $d_0 = 1/100$ for simplicity (its value is unimportant in the kinematic dynamo).

Runs with resettings are compared for different values of the parameter τ . It is seen in Fig. 5 that the magnetic enstrophy Ω_m is well resolved for each case, at resolution 128^3 .

The resettings are quite regular in time and indeed they slow down as time goes by, at a regular rate which decreases with increasing resolution (figure not shown). There is no increase in the resetting frequency. This behavior is consistent with the monotonic behavior of the magnetic enstrophy and with the absence of localized or intense activity of the magnetic field.

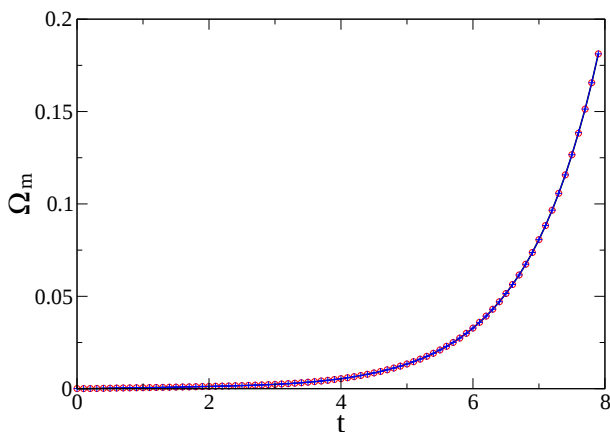


FIG. 5: Temporal evolution of magnetic enstrophy Ω_m for the ABC flow (kinematic dynamo) with $\tau = 0$ and 1 ($\circ$ and $+$), with a resolution of 128^3 and the constants $\nu = 0$ and $\eta = 1/12$. The solid line comes from a direct numerical simulation (DNS) of the induction equation for the magnetic field.

2. Full MHD equations: 2D Orszag-Tang Vortex

In the rest of the paper, the full MHD equations of motion are integrated. The momentum equation for the velocity (17) is integrated together with the Weber Clebsch evolution equations (13)–(16) where the magnetic potential $\mathbf{Z} = \mathbf{A}$ is obtained from (3) and (11).

We have chosen the following initial data for the 2D Orszag-Tang (hereafter, OT) vortex [8]:

$$\begin{aligned} u_x &= -2 \sin y \\ u_y &= 2 \sin x \\ u_z &= 0, \\ A_x &= 0 \\ A_y &= 0 \\ A_z &= 2 \cos x \cos 2y. \end{aligned}$$

The OT vortex has a magnetic hyperbolic X-point located at a stagnation point of the velocity, and is a standard test of magnetic reconnection, both in two dimensions [19] and in three dimensions [20], see below section III C 3.

We compare runs with resettings for different values of the parameter τ . Figure 6 shows that the magnetic enstrophy is well resolved in resolution 128^2 .

Figure 7 shows the time between resettings as a function of time, for runs performed with different values of τ . It is apparent from the figure that there are periods of frequent resettings which coincide with the periods of high magnetic enstrophy from Fig. 6. This is a robust evidence of the utility of the resetting approach for 2D magnetic reconnection.

We have also simulated the Orszag-Tang vortex in the so-called 2.5D setting [21] (see also the DiPerna-Majda's construction [22]), defined by the same initial data as the above 2D Orszag-Tang vortex, but with $A_x = \sin y$ and $A_y = -\sin x$. We obtained (data not shown) a behavior of the resetting frequency which was very similar to that of the 2D case.

3. Full MHD equations: 3D Orszag-Tang Vortex

For the 3D Orszag-Tang vortex [9] the initial magnetic potential reads

$$\begin{aligned} A_x &= c_0 (\cos y - \cos z) \\ A_y &= c_0 (-\cos x + \cos z) \\ A_z &= c_0 (\cos x + \cos 2y), \end{aligned}$$

with $c_0 = 0.8$. The initial velocity is given by

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin y \\ u_y &= \sin x \\ u_z &= 0. \end{aligned}$$

As in the 2D case, we compare runs with resettings for different values of the parameter τ . Figure 8 shows

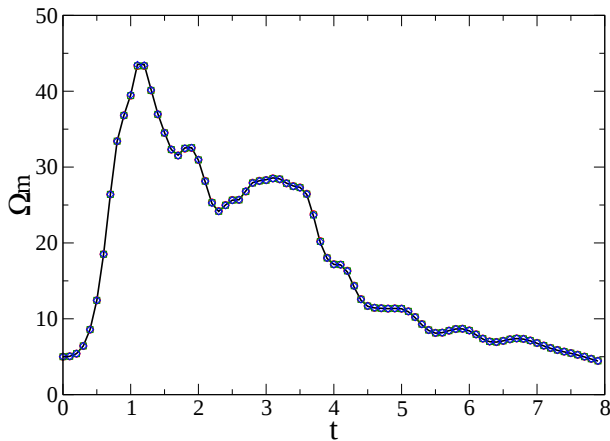


FIG. 6: Temporal evolution of magnetic enstrophy Ω_m for Orszag-Tang in 2D for $\tau = 0, 0.01$ and 1 ($\circ, \square$ and $\diamond$) with a resolution of 128^2 and $\eta = \nu = 0.005$. Solid line: Direct numerical simulation of MHD equations.

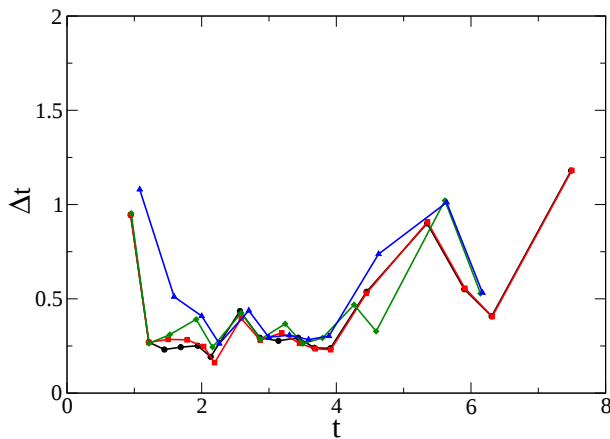


FIG. 7: Temporal evolution of Δt for $\tau = 0, 0.01, 0.1$ and 1 ($\circ, \square, \diamond$ and $\triangle$), for a simulation of Orszag-Tang in 2D with $\nu = \eta = 0.005$ and a resolution of 128^2 .

that the magnetic enstrophy is well resolved in resolution 128^3 , and Fig. 9 shows the time between resettings as a function of time. Again the periods of frequent resettings coincide with the periods of high magnetic enstrophy from Fig. 8, proving the utility of the resetting approach for 3D magnetic reconnection.

IV. CONCLUSIONS

We have shown that the generalized Weber-Clebsch evolution equations allow to study reconnection events for both Navier-Stokes and MHD dynamics. We have checked for the Navier-Stokes BPZ flow that reconnection events can be viewed as periods of fast and localized changes in the geometry of the Weber-Clebsch potentials, leading to more and more frequent resetting of the po-

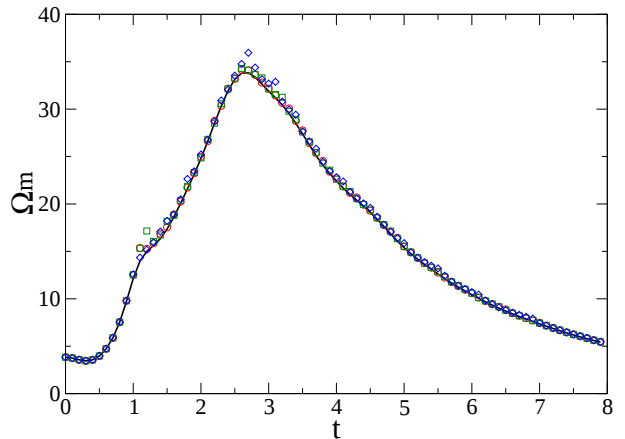


FIG. 8: Temporal evolution of magnetic enstrophy Ω_m for Orszag-Tang in 3D for $\tau = 0, 0.1$ and 1 ($\circ, \square$ and $\diamond$) with a resolution of 128^3 and $\eta = \nu = 0.005$. Solid line: Direct numerical simulation of MHD equations.

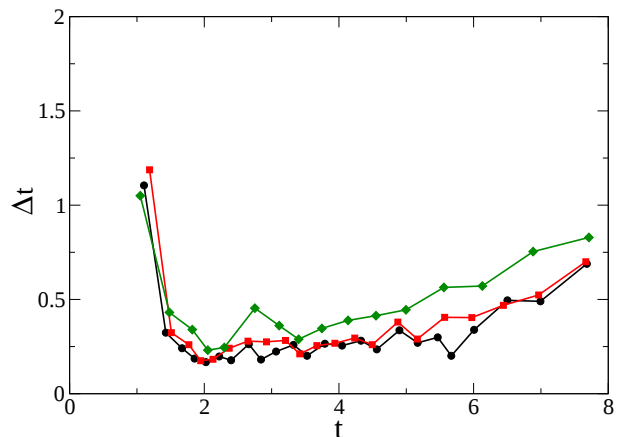


FIG. 9: Temporal evolution of Δt for $\tau = 0, 0.1$ and 1 ($\circ, \square$ and $\diamond$), for a simulation of Orszag-Tang in 3D.

tentials.

We have applied the new generalized Weber-Clebsch evolution equations to the study of magnetic reconnection in MHD. Taking as examples both the 2D and 3D Orszag-Tang vortices, we show a correlation of the reconnection events (associated to periods of high magnetic dissipation) with the periods of fast changes in the geometry of the Weber-Clebsch potentials, leading to frequent resettings of the potentials.

However, unlike the case of BPZ reconnection, in this case the frequency of resettings does not have a sharp peak but a smeared one. Notice that, in the Navier-Stokes case, the corresponding frequency of resettings for the Taylor-Green vortex has also a mild peak. [4] One can argue that the 2D and 3D Orszag-Tang flows

are more similar to Taylor-Green than to BPZ. Indeed, both Orszag-Tang and Taylor-Green have initial conditions with just a few Fourier modes, therefore they are extended spatially, whereas the BPZ initial condition is spatially localized (two orthogonal vortex tubes).

This wide spatial extent of the vorticity in both Orszag-Tang and Taylor-Green vortices, as opposed to the localized extent of BPZ, might be the reason for the mildness in the shape of the minimum of the time between resettings. In both spatially extended cases one expects reconnection events to happen in relatively distant places at similar times, as opposed to the BPZ very localized cut-and-connect type of reconnection. In terms of the singularities of the Weber-Clebsch potentials and associated resetting, we should observe (to be studied in detail in future work) that the set of points where $\det \mathbb{H}$ goes below the threshold consists of an extended region,

as opposed to BPZ where we have confirmed that these points belong to a very localized region in space. Consequently, the widely distributed events that lead to resetting in Orszag-Tang and Taylor-Green configurations would tend to be less correlated in time, leading to the smearing of the minimum of the curve for the time between resettings, which would otherwise be very sharp if the events were more localized and therefore more correlated in time.

Acknowledgments: We acknowledge very useful scientific discussions with Peter Constantin and Edriss S. Titi. One of the authors (MEB.) acknowledges support from an ECOS/CONICYT action. The computations were carried out at the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) of the Centre National pour la Recherche Scientifique (CNRS).

-
- [1] P. Constantin. An Eulerian-Lagrangian approach for incompressible fluids: Local theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 14:263–278, 2001.
 - [2] P. Constantin. An Eulerian-Lagrangian approach to the Navier-Stokes equations. *Commun. Math. Phys.*, 216:663–686, 2001.
 - [3] K. Ohkitani and P. Constantin. Numerical study of the Eulerian-Lagrangian formulation of the Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*, 15(10):3251–3254, 2003.
 - [4] C. Cartes, M. D. Bustamante, and M. Brachet. Generalized Eulerian-Lagrangian description of Navier-Stokes dynamics. *Physics of Fluids*, 19:077101, 2007.
 - [5] G. I. Taylor and A. E. Green. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 158:499–521, 1937.
 - [6] O. N. Boratav, R. B. Pelz, and N. J. Zabusky. Reconnection in orthogonally interacting vortex tubes - direct numerical simulations and quantifications. *Physics of Fluids*, 4:581–605, March 1992.
 - [7] V. Archontis, S.B.F. Dorch, and Å. Nordlund. Numerical simulations of kinematic dynamo action. *Astronomy & Astrophysics*, 397(2):393–399, 2003.
 - [8] S. A. Orszag and C. M. Tang. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 90:129, 1979.
 - [9] P. D. Mininni, A. G. Pouquet, and D. C. Montgomery. Small-scale structures in three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 97:244503, 2006.
 - [10] Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
 - [11] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26:394–395, 1920.
 - [12] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51:406–413, 1955.
 - [13] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. (reprinted by Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Huntington, NY, 1980.).
 - [14] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. SIAM, Philadelphia, 1977.
 - [15] M. E. Brachet, D. I. Meiron, S. A. Orszag, B. G. Nickel, R. H. Morf, and U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid Mech.*, 130:411–452, 1983.
 - [16] J. Clyne, P. Mininni, A. Norton, and M. Rast. Interactive desktop analysis of high resolution simulations: application to turbulent plume dynamics and current sheet formation. *New Journal of Physics*, 9:301, August 2007.
 - [17] J. Clyne and M. Rast. A prototype discovery environment for analyzing and visualizing terascale turbulent fluid flow simulations. *Proceedings of Visualization and Data Analysis*, pages 284–294, 2005.
 - [18] R. B. Dahlburg and J. M. Picone. Evolution of the Orszag-Tang vortex system in a compressible medium. I - Initial average subsonic flow. *Physics of Fluids B*, 1:2153–2171, November 1989.
 - [19] H. Politano, A. Pouquet, and P. L. Sulem. Inertial ranges and resistive instabilities in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1(12):2330–2339, 1989.
 - [20] H. Politano, A. Pouquet, and P. L. Sulem. Current and vorticity dynamics in three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Plasmas*, 2(8):2931–2939, 1995.
 - [21] David Montgomery and Leaf Turner. Two-and-a-half-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Fluids*, 25(2):345–349, 1982.
 - [22] Ronald J. DiPerna and Andrew J. Majda. Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations. *Commun. Math. Phys.*, 108(4):667–689, 1987.

RÉSUMÉ :

Cette thèse est basée sur la représentation Eulerienne-Lagrangienne de la vitesse, qui nous appelons la transformation de Weber-Clebsch. Constantin a construit en 2002 une extension de la description de Weber-Clebsch des fluides parfaits aux fluides visqueux. La nécessité de réinitialiser périodiquement les coordonnées Lagrangiennes à été interprété par Constantin comme un diagnostic de la reconnexion de la vorticité. Le système de Constantin est contenu dans notre formulation, qui est plus générale, dans une limite singulière.

Pour comparer les résultats obtenus en utilisant notre formulation généralisée à ceux qui sont obtenus dans la formulation de Constantin nous avons procédé à des simulations numériques d'un certain nombre d'écoulements obéissants aux équations de Navier Stokes.

Des extensions à la magnéto hydrodynamique et aux fluides compressibles sont également proposées et validées numériquement.

MOTS-CLEFS : formulation Eulerienne-Lagrangienne - reconnexion de vortex - mécanique des fluides - magnéto hydrodynamique - fluides compressibles - méthodes pseudo spectrales

ABSTRACT :

This thesis is based in the Eulerian-Lagrangian representation of the velocity field, wich we call Weber-Clebsch transformation. Constantin, in 2002, built an extension of the Weber-Clebsch description of perfect fluids to viscous fluids. The need to periodically reset the Lagrangian coordinates was interpreted by Constantin as a diagnostic of vortex reconnection. The system of Constantin is contained in our formulation, wich is more general, as a singular limit.

To compare the results obtained using our generalised formulation with the results that are obtained from Constantin's formulation we performed numerical simulations of a number of flows that follows the Navier-Stokes equations.

Extensions to magnetohydrodynamics and compressible fluids are proposed and numerically validated.

KEYWORDS : Eulerian-Lagrangian formulation - vortex reconnection - fluid mechanics - magnetohydrodynamics - compressible fluids - pseudo spectral methods