Dynamique Eulerienne-Lagrangienne généralisée et caracterisation de la reconnexion diffusive

Carlos CARTES sous la direction de Marc-Etienne BRACHET

Laboratoire de Physique Statistique École Normale Supérieure

6 juin 2008

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- 2 Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Transformation de Weber-Clebsch.

Formulation Eulerienne-Lagrangienne classique de la dynamique des équations d'Euler incompressibles :

 $D_t \mathbf{u} = -\nabla p$ $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

(avec $D_t \equiv \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$).

La vitesse est représentée de façon non-linéaire à partir de 3 paires de potentiels

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda^{i}(\mathbf{x},t) \nabla \mu^{i}(\mathbf{x},t) - \nabla \phi(\mathbf{x},t)$$

Dynamique pour les potentiels reproduisant les équations d'Euler :

$$D_t \lambda^i(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$D_t \mu^i(\mathbf{x}, t) = 0$$

Transformation de Weber-Clebsch.

Si maintenant nous initialisons les champs à t = 0

$$\lambda^{i}(\mathbf{x}, 0) = u^{i}(\mathbf{x}, 0)$$

 $\mu^{i}(\mathbf{x}, 0) = x^{i}$
 $\phi(\mathbf{x}, 0) = 0.$

Nous pouvons interpréter les champs μ^i et λ^i comme

P. Constantin. Journal of the American Mathematical Society, 14(2):263-278, 2001.

 $\mu'(\mathbf{x}, t)$: Application Lagrangienne inverse ("Back-to-labels Map") $\lambda^{i}(\mathbf{x}, t) = u^{i}(\mu(\mathbf{x}, t), 0)$: Vitesse initiale composée par l'application Lagrangienne inverse

Dynamique des champs.

- Cherchons la dynamique des potentiels de telle façon que **u** suive les équations de Navier-Stokes.
- Quand $D_t \lambda^i = D_t \mu^i = 0$, **u** suit les équations d'Euler.
- La dynamique de u est fixée par la dynamique de λⁱ et μⁱ. En général nous pouvons écrire la dynamique des potentiels comme

 $D_t \lambda^i = L^i$ $D_t \mu^i = M^i.$

< □ > < □ >

Dynamique des champs.

- Cherchons la dynamique des potentiels de telle façon que u suive les équations de Navier-Stokes.
- Quand $D_t \lambda^i = D_t \mu^i = 0$, **u** suit les équations d'Euler.
- La dynamique de u est fixée par la dynamique de λⁱ et μⁱ. En général nous pouvons écrire la dynamique des potentiels comme

$$D_t \lambda^i = L^i$$
$$D_t \mu^i = M^i$$

Dynamique des champs.

- Cherchons la dynamique des potentiels de telle façon que u suive les équations de Navier-Stokes.
- Quand $D_t \lambda^i = D_t \mu^i = 0$, **u** suit les équations d'Euler.
- La dynamique de u est fixée par la dynamique de λⁱ et μⁱ. En général nous pouvons écrire la dynamique des potentiels comme

$$egin{array}{rcl} D_t\lambda^i&=&L^i\ D_t\mu^i&=&M^i \end{array}$$

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Équations de mouvement.

Pour obtenir les équations du mouvement qui reproduisent la dynamique de Navier-Stokes, on applique D_t sur la définition de la transformation de Weber-Clebsch pour obtenir

$$D_t \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \left(L^i \nabla \mu^i - M^i \nabla \lambda^i \right)$$
$$- \nabla \left(D_t \phi + \frac{1}{2} |u|^2 - \sum_{i=1}^3 M^i \lambda^i \right)$$

Nous avons aussi les équations de Navier-Stokes

$$D_t \mathbf{u} = -\nabla \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\nu} \Delta \mathbf{u}.$$

Équations de mouvement.

Pour obtenir les équations du mouvement qui reproduisent la dynamique de Navier-Stokes, on applique D_t sur la définition de la transformation de Weber-Clebsch pour obtenir

$$D_{t}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} \left(L^{i} \nabla \mu^{i} - M^{i} \nabla \lambda^{i} \right)$$
$$- \left(\nabla \left(D_{t} \phi + \frac{1}{2} |u|^{2} - \sum_{i=1}^{3} M^{i} \lambda^{i} \right) \right)$$
Nous avons aussi les équations de Navier-Stokes
$$D_{t}\mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}.$$

< 🗇 🕨 < 🖃 >

Équations du mouvement

Ainsi les L^i et M^i qui donnent la dynamique de Navier-Stokes sont obtenues comme solution de

$$\sum_{i=1}^{3} \left(L^{i} \nabla \mu^{i} - M^{i} \nabla \lambda^{i} \right) = \nu \triangle \mathbf{u} - \nabla \mathbf{G}$$
$$D_{t} \phi + \frac{1}{2} |u|^{2} - \sum_{i=1}^{3} M^{i} \lambda^{i} = p - \mathbf{G}$$

G est un champ scalaire arbitraire.

Il n'est pas nécessaire d'intégrer l'équation pour ϕ qui est fixé par la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Quand on pose $L^i = M^i = G = \nu = 0$, nous obtenons les équations d'Euler.

Équations du mouvement

Pour obtenir des équations d'advection-diffusion, nous effectuons le changement de variable :

$$D_t \lambda^i = L^i = \nu \triangle \lambda^i + \widetilde{L}^i$$
$$D_t \mu^i = M^i = \nu \triangle \mu^i + \widetilde{M}^i.$$

Et nous obtenons le système d'équations pour \widetilde{L}^i et \widetilde{M}^i :

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\widetilde{L}^{i} \nabla \mu^{i} - \widetilde{M}^{i} \nabla \lambda^{i} \right) = 2\nu \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_{\alpha} \lambda^{i} \partial_{\alpha} \nabla \mu^{i} - \nabla \widetilde{G}.$$

 \widetilde{G} est un champ scalaire arbitraire.

Solution de Moore-Penrose

Pour obtenir \widetilde{L}^i et \widetilde{M}^i , il faut résoudre ce système linéaire de 3 équations pour 6 inconnues, il faut donc ajouter des restrictions supplémentaires :

Pseudoinverse de Moore-Penrose.

Nous cherchons à minimiser la norme

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\widetilde{L}^{i} \widetilde{L}^{i} + \tau^{2} \widetilde{M}^{i} \widetilde{M}^{i} \right) \, .$$

L'analyse dimensionnelle indique que le paramètre τ a les dimensions d'un temps. Nous remarquons que quand $\tau \to 0$, il faut avoir $M^i \to 0$ pour

minimiser la norme.

Solution de Moore-Penrose

La solution avec la restriction de Moore-Penrose peut s'écrire :

C. Cartes, M. D. Bustamante and M. E. Brachet. Phys. of Fluids, 19(7) :7101, 2007.

$$D_{t}\lambda^{i} = \nu \bigtriangleup \lambda^{i} + \nabla \mu^{i} \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot \left(2\nu \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_{\alpha}\lambda^{i} \partial_{\alpha} \nabla \mu^{i} - \nabla \widetilde{G} \right)$$
$$D_{t}\mu^{i} = \nu \bigtriangleup \mu^{i} - \tau^{2} \nabla \lambda^{i} \cdot \mathbb{H}^{-1} \cdot \left(2\nu \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_{\alpha}\lambda^{i} \partial_{\alpha} \nabla \mu^{i} - \nabla \widetilde{G} \right)$$

Où le produit scalaire indique une multiplication matricielle ou vectorielle et la matrice symétrique $3 \times 3 \mathbb{H}$ est donnée par :

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^{3} \left(\tau^2 \, \partial_{\alpha} \lambda^i \partial_{\beta} \lambda^i + \partial_{\alpha} \mu^i \partial_{\beta} \mu^i \right) \,.$$

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- 2 Diagnostique de la reconnexion de vortex
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Cas particulier d'Ohkitani-Constantin

La méthode d'Ohkitani-Constantin revient à fixer les termes $\widetilde{M}^i = 0$ (et aussi à faire le choix $\widetilde{G} = 0$) pour obtenir le système :

P. Constantin. Commun. Math. Phys., 216 : 663-686, 2001.

$$\frac{D\lambda^{i}}{Dt} = \nu \triangle \lambda^{i} + (\nabla \mu)^{-1} \cdot 2\nu \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_{\alpha} \lambda^{i} \partial_{\alpha} \nabla \mu^{i}$$

$$\frac{D\mu^{i}}{Dt} = \nu \triangle \mu^{i} .$$

Ceci est equivalent à prendre G et $\tau \rightarrow 0$ dans notre système général Ce choix arbitraire conduit à des singularités en codimension 1.

- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



- La méthode de Constantin aura des problèmes dans une variété de codimension 1, avec τ = 0.
- Par contre, dans notre formulation, les problèmes arriveront dans une variété de codimension 4, avec τ ≠ 0.



Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- 2 Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Les méthodes pseudo-spectrales

Utilisation des Transformations de Fourier rapides (FFT)

- Elles sont standards pour intégrer numériquement les équations de Navier-Stokes.
- Toutes les dérivées et intégrales sont calculées dans l'espace spectrale.
- Tous les termes non-linéaires sont calculés dans l'espace physique.
- Elles profitent d'une convergence exponentielle.
- Elles sont faciles à implémenter (à condition que le domaine soit périodique).
- Nous intégrons numériquement les équations d'évolution pour les potentiels de Weber-Clebsch.
- Les calculs sont effectués sur des serveurs locaux et la machine vectorielle de l'IDRIS.

Les méthodes pseudo-spectrales

Utilisation des Transformations de Fourier rapides (FFT)

- Elles sont standards pour intégrer numériquement les équations de Navier-Stokes.
- Toutes les dérivées et intégrales sont calculées dans l'espace spectrale.
- Tous les termes non-linéaires sont calculés dans l'espace physique.
- Elles profitent d'une convergence exponentielle.
- Elles sont faciles à implémenter (à condition que le domaine soit périodique).
- Nous intégrons numériquement les équations d'évolution pour les potentiels de Weber-Clebsch.
- Les calculs sont effectués sur des serveurs locaux et la machine vectorielle de l'IDRIS.

Le vortex de Taylor-Green

La vitesse pour le vortex de Taylor-Green à t = 0 :

$$u^{1} = \sin x \cos y \cos z$$

$$u^{2} = -\cos x \sin y \cos z$$

$$u^{3} = 0.$$

- Écoulement standard dans l'étude de la turbulence.
- Nos calculs exploitent les symétries de l'écoulement.
- La quantité de points de collocation (résolution spatiale) des calculs presentés est de 192³.

Évolution du minimum spatial du déterminant de \mathbb{H} .


Limite Singulière

- Nous avons démontré que notre système général devient le système d'Ohkitani-Constantin quand G̃ et τ → 0.
- La formulation d'Ohkitani-Constantin rencontre une singularité à temps fini quand det (∇μ) = 0.
- Notre formulation générale ne rencontre pas le même problème, car det(ℍ) ne s'anulle pas.
- Ainsi la limite $\tau \rightarrow 0$ est singulière.

Reste une question : Quelle est la précision des calculs avec au
eq 0 ?

-∃=->

Limite Singulière

- Nous avons démontré que notre système général devient le système d'Ohkitani-Constantin quand G̃ et τ → 0.
- La formulation d'Ohkitani-Constantin rencontre une singularité à temps fini quand det (∇μ) = 0.
- Notre formulation générale ne rencontre pas le même problème, car det(ℍ) ne s'anulle pas.
- Ainsi la limite $\tau \rightarrow 0$ est singulière.

Reste une question :

Quelle est la précision des calculs avec $\tau \neq 0$?

Validation numérique.

Pour caracteriser la précision des calculs Weber-Clebsch nous comparerons leur spectre d'énergie

$$E(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\frac{\bigtriangleup k}{2} < |\mathbf{k}'| < k+\frac{\bigtriangleup k}{2}} \left| \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}',t) \right|^2.$$

et leur enstrophie

$$\Omega(t) = \sum_{k} k^{2} E(k, t) = \frac{1}{2V} \int (\nabla \times \mathbf{u})^{2} d^{3}x$$

avec les resultats des simulations directes des équations de Navier-Stokes.

Comparaison entre Weber-Clebsch et Navier-Stokes

- Il est possible de faire une simulation sans problème à condition que τ ≠ 0.
- Mais le nombre de Reynolds doit rester petit (inferieur à 150), sinon on perd en précision.
- À cause des erreurs dans le spectre.



Comparaison entre Weber-Clebsch et Navier-Stokes

- Il est possible de faire une simulation sans problème à condition que τ ≠ 0.
- Mais le nombre de Reynolds doit rester petit (inferieur à 150), sinon on perd en précision.
 - A cause des erreurs dans le spectre.



Comparaison entre Weber-Clebsch et Navier-Stokes

- Il est possible de faire une simulation sans problème à condition que τ ≠ 0.
- Mais le nombre de Reynolds doit rester petit (inferieur à 150), sinon on perd en précision.
- À cause des erreurs dans le spectre.



Limite de précision des calculs

- Notre formulation générale ne rencontre pas de singularité, mais on observe une perte de précision pour des nombres de Reynolds plus grand que la centaine.
- À notre résolution (192³) les simulations directes de Navier-Stokes sont précises jusqu'à R ~ 800.
- Pour monter en Reynolds il faut éliminer les erreurs dans le spectre, ce qui peut se faire en effectuant des réinitialisations des champs λⁱ et μⁱ à chaque fois que det(ℍ) < ε.

Réinitialisations.

Si à $t = t_0$ nous avons det(\mathbb{H}) < ϵ . On calcule la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ à partir de la transformation de Weber-Clebsch :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \sum_{i=1}^{S} \lambda^i(\mathbf{x}, t_0) \nabla \mu^i(\mathbf{x}, t_0) - \nabla \phi(\mathbf{x}, t_0)$$

Et on reinitialise les potentiels

$$\lambda^{i}(\mathbf{x}, t_{0}) \leftarrow u^{i}(\mathbf{x}, t_{0})$$

 $\mu^{i}(\mathbf{x}, t_{0}) \leftarrow x^{i}$
 $\phi(\mathbf{x}, t_{0}) \leftarrow 0$

Avec les réinitialisations, la formulation d'Ohkitani-Constantin ne rencontre plus de singularité et il est possible de la comparer avec la notre.

Les réinitialisations



On peut monter jusqu'à un Reynolds de 800 et les erreurs sont corrigées après chaque réinitialisation.

Les réinitialisations



La précision et la quantité des réinitialisations changent avec τ mais la courbe qui représente les intervalles entre réinitialisations $(\triangle t_j = t_j - t_{j-1} \text{ où } t_j \text{ est l'instant d'une réinitialisation) conserve son allure.$

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.

2 Diagnostique de la reconnexion de vortex.

- La reconnexion de vortex.
- Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

La reconnexion de vortex.

La reconnexion consiste en un changement de la topologie des lignes de vorticité : la reconnexion de la vorticité est un processus fondamental en mécanique des fluides et son origine est dissipative.

Expérience de reconnexion d'anneaux de vorticité. P. R. Schatzle. *Ph.D. Thesis*, California Institute of Technology, 1987.



Fig. 1.1 Front View of the Collision

La reconnexion consiste en un changement de la topologie des lignes de vorticité : la reconnexion de la vorticité est un processus fondamental en mécanique des fluides et son origine est dissipative.

Expérience de reconnexion d'anneaux de vorticité. P. R. Schatzle. *Ph.D. Thesis*, California Institute of Technology, 1987.





Critère de reconnexion.

Ohkitani-Constantin : Les réinitialisations fixent une échelle temporel et sa fréquence est liée à la reconnexion de vortex.

K. Ohkitani and P. Constantin. *Phys. of Fluids*, 15(10) : 3251–3254, 2003.



FIG. 2. Isosurfaces plots of $|\omega|$ (darker gray) and $|\zeta|$ (lighter gray) at t=3 for case 1.



FIG. 3. Time evolution of (a) the spatial average $E_{\ell}(t)$ of the displacement and of (b) time intervals of resetting Δt_j against t_j . Case 1 is denoted by a solid line and case 2 by a dashed line.

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.

Diagnostique de la reconnexion de vortex.

- La reconnexion de vortex.
- Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²


- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



t = 3.8

- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



- Condition envisagé comme un cas particulier pour étudier la reconnexion de vortex.
- Les reconnexions ont lieu dans un intervalle très court.
- Simulation faite avec une résolution de 128³.
 Visualisation du carré de la vorticité (∇ × u)²



t = 8.0

Accélération des réinitialisations.

Bon accord avec Navier-Stokes.

- L'instant de la reconnexion est marqué par une accélération des réinitialisations.
- Pas d'accélération pour le vortex de Taylor-Green.



Accélération des réinitialisations.

- Bon accord avec Navier-Stokes.
- L'instant de la reconnexion est marqué par une accélération des réinitialisations.
- Pas d'accélération pour le vortex de Taylor-Green.



Accélération des réinitialisations.

- Bon accord avec Navier-Stokes.
- L'instant de la reconnexion est marqué par une accélération des réinitialisations.
- Pas d'accélération pour le vortex de Taylor-Green.





Minima du déterminant.

Minima du déterminant à l'instant d'une réinitialisation $t \sim 4.5$.





< 🗇 > < 🖃 > <

Reconnexion et limite singulière.

- Quand $\tau = 0$: obligation de reinitialiser pour éviter les singularités
- Quand τ ≠ 0 : obligation de reinitialiser pour éliminer les erreurs à haut Reynolds.
- La quantité des réinitialisations diminue quand τ augmente, mais la courbe qui représente les intervalles entre réinitialisations conserve son allure.
- La reconnexion est toujours diagnostiquée par un minimum de cette courbe.
- Le minimum spatial du déterminant coïncide avec la région de reconnexion.

- = >

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Équations de base.

Les équations pour la magnéto-hydrodynamique incompressible en unités alfveniques sont :

$$D_t \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \eta \triangle \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$D_t \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} + \nu \triangle \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Les équations pour **B** peuvent être écrites en fonction du potentiel vecteur $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$D_t \mathbf{A} = -\nabla \mathbf{c} + \sum_{m=1}^3 u^m \nabla A^m + \eta \Delta \mathbf{A}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- 2 Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- 4 Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Représentation de Weber-Clebsch pour la MHD.

Il est possible définir la transformation de Weber-Clebsch pour le potentiel vecteur magnétique

C. Cartes, M. D. Bustamante, A. Pouquet and M. Brachet Fluid Dynamics Research, 2008.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda^{i} \nabla \mu^{i} - \nabla \phi$$

Avec la même interprétation pour les champs λ^i et μ^i et les mêmes conditions initiales :

$$\lambda^{i}(\mathbf{x}, 0) = A^{i}(\mathbf{x}, 0)$$

 $\mu^{i}(\mathbf{x}, 0) = x^{i}$
 $\phi(\mathbf{x}, 0) = 0.$

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.

Extension à la magnéto-hydrodynamique

- Équations de base pour la MHD.
- Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
- Simulations Numériques.
- Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- 5 Conclusions et perspectives.

Simulations Numériques.

Pour tester la précision de notre algorithme Weber-Clebsch pour la MHD, nous avons étudié un cas standard de dynamo cinématique : la dynamo ABC.

Nous comparons l'enstrophie magnétique obtenue en utilisant les variables de Weber-Clebsch

$$\Omega_m(t) = \frac{1}{2V} \int (\nabla \times \mathbf{B})^2 d^3 x = \frac{1}{2V} \int \mathbf{J}^2 d^3 x$$

avec les resultats des simulations directes des équations de la MHD.

Pour évaluer la validité du critère de reconnexion dans le cas MHD, nous avons étudié 2 écoulements MHD prototypes.

→ Ξ →

Dynamo cinématique : écoulement ABC.

- Condition plus simple pour tester notre formulation : le champ de vitesse est constant donc on intégre seulement les équations du potentiel vecteur.
- Le champ de vitesse initial est donné par

$$u_x = B_0 \cos k_0 y + C_0 \sin k_0 z$$

$$u_y = C_0 \cos k_0 z + A_0 \sin k_0 x$$

$$u_z = A_0 \cos k_0 x + B_0 \sin k_0 y$$

avec
$$k_0 = 2$$
 et
 $A_0 = B_0 = C_0 = 1$.



Résolution 128³, $\eta = 1/12$.

6 juin 2008 41 / 51

Reconnexion magnétique.

La reconnexion magnétique est un changement de la topologie des lignes du champ magnétique qui s'accompagne d'une libération brusque d'énergie magnétique.

Il n'y a pas encore un consensus sur l'instant précis de la reconnexion magnétique, mais le diagnostique usuel est un maximum brusque dans l'enstrophie magnétique.

P. D. Minini, A. G. Pouquet and D. C. Montgomery. Phys. Rev. Lett, 97 :244506, 2006.

Pour caractériser la reconnexion magnétique nous utilisons comme écoulement le vortex d'Orszag-Tang en 2 et 3 dimensions.

Vortex d'Orszag-Tang en 2D

La condition initiale pour le vortex est :

$$u_x = -2 \sin y$$

$$u_y = -2 \sin x$$

$$u_z = 0$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = 0$$

$$A_z = 2 \cos x \cos 2y$$

Avec une résolution de 128² et $\eta = \nu = 1/200$.
Reconnexion magnétique.

Vortex d'Orszag-Tang en 2D



6 juin 2008 43 / 51

Vortex d'Orszag-Tang en 3D

La condition initiale pour le vortex est :

$$u_x = -\sin y$$

$$u_y = \sin x$$

$$u_z = 0.$$

$$A_x = c_0 (\cos y - \cos z)$$

$$A_y = c_0 (-\cos x + \cos z)$$

$$A_z = c_0 (\cos x + \cos 2y).$$

Avec une résolution de 128³, $c_0 = 0.8$ et $\eta = \nu = 1/200$.

- + ∃ →

Reconnexion magnétique.

Vortex d'Orszag-Tang en 3D



6 juin 2008 44 / 51

Reconnexion magnétique.

Vortex d'Orszag-Tang en 3D



(Laboratoire de Physique Statistique)

6 juin 2008 44 / 51

Conclusions pour la MHD.

- Avec la formulation de Weber-Clebsch il est possible de reproduire la dynamique de la MHD.
- Nous pouvons capturer la reconnexion magnétique en utilisant comme critère de diagnostique l'accélération des intervalles entre réinitialisations △t.
- L'allure des courbes de réinitialisations est plus similaire au vortex de Taylor-Green qu'à l'écoulement de BPZ.
- Les régions où la reconnexion magnétique se produit sont étendues, dans ce sens Orszag-Tang ressemble plus à Taylor-Green que BPZ.

-∃= >+

Lignes directrices

Généralisation de la formulation d'Ohkitani-Constantin.

- Transformation de Weber-Clebsch
- Généralisation : Dynamique diffusive
- Cas particulier d'Ohkitani-Constantin et limite singulière.
- Simulations numériques.
- Diagnostique de la reconnexion de vortex.
 - La reconnexion de vortex.
 - Vortex de Boratav-Pelz-Zabusky.
- 3 Extension à la magnéto-hydrodynamique
 - Équations de base pour la MHD.
 - Weber-Clebsch pour la magnétohydrodynamique
 - Simulations Numériques.
- Extension aux fluides compressibles.
 - Weber-Clebsch pour les fluides compressibles.
- Conclusions et perspectives.

Équations de base.

Nous partons des équations de Navier-Stokes compressibles :

$$D_t \mathbf{u} = -\nabla w + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) ,$$

où *w* est l'enthalpie par unité de masse. Maintenant on doit intégrer l'équation pour ϕ :

$$D_t \phi = w + \lambda^i \widetilde{M}^i - \widetilde{G} - \frac{|u|^2}{2} + \nu \Delta \phi.$$

Si l'écoulement est barotrope et la densité ρ proche de l'unité, nous avons

$$w(\rho)=\frac{\rho-1}{Ma^2}.$$

Validation numérique.



Resolution 128³, nombre de Reynolds 200, nombre de Mach 0.3 avec l'écoulement de Taylor-Green.

Conclusions et perspectives.

Conclusions :

- Généralisation de la formulation de Ohkitani-Constantin.
- Pas de singularité à temps fini mais perte de précision si le Reynolds est haut.
- La courbe de la fréquence de réinitialisation a la même allure indépendamment de la valeur de τ.
- Extension à la MHD et fluides compressibles.

Perspectives :

- Reconnexion compressible et émission du son par la turbulence.
- Turbulence Lagrangienne.

Méthode de Constantin.

$$\begin{split} \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^{3} \lambda^{i} \nabla \mu^{i} \\ &\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\nabla \left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \times \left(\nabla \times \mathbf{u} \right) + \nu \triangle \mathbf{w} \,. \end{split}$$
$$\ell^{m} &= \mu^{m} - \mathbf{x}^{m}$$

$$D_t \ell = -\mathbf{u} + \nu \triangle \ell \,,$$

< 一型

Variables de Clebsch.

$$D_t \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$$
,

$$\mathbf{u} = \lambda \nabla \mu - \nabla \phi,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \lambda \times \nabla \mu.$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \omega(\mathbf{r}(s))$$
$$\lambda(\mathbf{r}(s)) = \text{cte.}$$
$$\mu(\mathbf{r}(s)) = \text{cte.}$$

< 一型