



**HAL**  
open science

# Analyse d'un cube de données : décomposition tensorielle et liens entre procédures de comparaison de tableaux rectangulaires de données

Dominique Mizere

► **To cite this version:**

Dominique Mizere. Analyse d'un cube de données : décomposition tensorielle et liens entre procédures de comparaison de tableaux rectangulaires de données. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981. Français. NNT : . tel-00294623

**HAL Id: tel-00294623**

**<https://theses.hal.science/tel-00294623>**

Submitted on 10 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**  
*et à*  
**l' Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**  
*«Mathématiques appliquées»*

*par*

**MIZERE Dominique**



**ANALYSE D'UN CUBE DE DONNEES:**

**DECOMPOSITION TENSORIELLE ET LIENS ENTRE  
PROCEDURES DE COMPARAISON DE TABLEAUX  
RECTANGULAIRES DE DONNEES.**



**Thèse soutenue le 17 Juin 1981 devant la commission d'examen.**

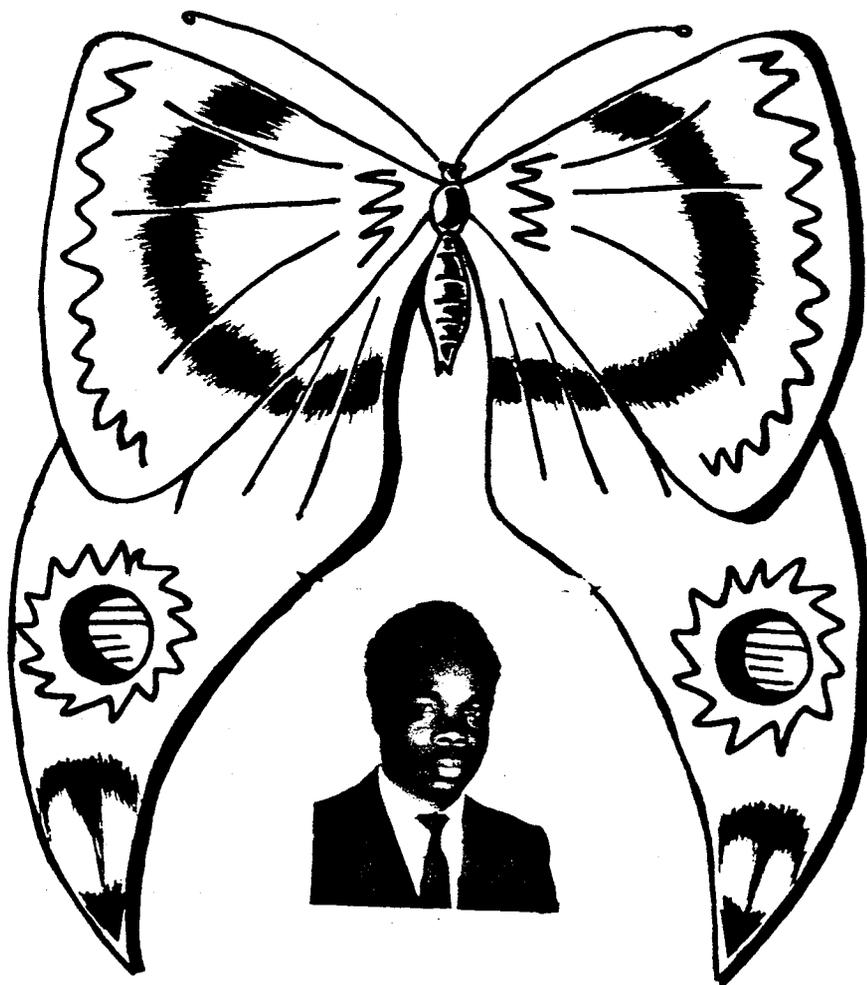
J. R. BARRA	Président	}	Examineurs
G. DROUET D'AUBIGNY			
Y. ESCOUFIER			
G. ROMIER			
B. VAN CUTSEM			



"LE CALCUL MATRICIEL  
ad usum statisticorum  
a vécu"

J. P. BENZECRI

(l'analyse des données - 2)



NZUNZA KIESSI

(MIZERE DOMINIQUE)

né le 17 JUILLET 1952 à KANGAMBUNZU (Rep. du Zaïre)  
Nat. Congolaise



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEGER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEUBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD

M. René PAUTHENET

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

**CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)**

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

**Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)**

**E.N.S.E.E.G.**

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

**C.E.N.G.**

MM. SARRAZIN Pierre  
SOUQUET Jean-Louis  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

**E.N.S.M.E.E.**

MM. BISCONDI Michel  
BOOS Jean-Yves  
GUILHOT Bernard  
KOBILANSKI André  
LALAUZE René  
LANCELOT François  
LE COZE Jean  
LESBATS Pierre  
SOUSTELLE Michel  
THEVENOT François  
THOMAS Gérard  
TRAN MINH Canh  
DRIVER Julian  
RIEU Jean

**E.N.S.E.R.G.**

MM. BOREL Joseph  
CHEHIKIAN Alain  
VIKTOROVITCH Pierre

**E.N.S.I.E.G.**

MM. BORNARD Guy  
DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
JAUSSAUD Pierre  
Mme JOURDAIN Geneviève  
MM. LEJEUNE Gérard  
PERARD Jacques

**E.N.S.H.G.**

M. DELHAYE Jean-Marc

**E.N.S.I.M.A.G.**

MM. COURTIN Jacques  
LATOMBE Jean-Claude  
LUCAS Michel  
VERDILLON André



Je suis très reconnaissant à Monsieur  
Gérard DROUET d'Aubigny, Maître Assistant à l'Université de Grenoble  
d'avoir dirigé ces travaux de recherche et accepté d'être membre du  
Jury.

La persévérance dans le travail plus la chaleur humaine font de lui  
une personnalité hors du commun.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs :

BARRA J.R. professeur à l'Université de Grenoble qui a bien voulu  
accepter d'être le Président du Jury

ESCOUFIER Y. professeur à l'Université de Montpellier d'avoir accepté  
d'être membre du Jury

ROMIER G. professeur à l'Université de Grenoble d'avoir accepté d'être  
membre du Jury

VAN CUTSEM professeur à l'Université de Grenoble d'avoir accepté d'être  
membre du Jury

Pour la réalisation de ce travail, je remercie J. TRINQUART pour son  
aide en informatique, le service de reprographie de l'I.R.M.A. et le  
service de dactylographie à qui je dois la présentation.

A ma famille et amis je dis :

"Matondo Mingi "

-:-:-:-



## TABLE DES MATIERES

	page
- Introduction	1
- Notations	5
 <u>CHAPITRE I : Bases algébriques</u>	
- <u>Introduction</u>	
§ (I.1) ... L'espace Euclidien $M_{p,n}(\mathbb{R})$ : le schéma de dualité	9
1.1.1. ... Matrice et application linéaire	
1.1.2. ... Formes bilinéaires et Espace Euclidien	
1.1.3. ... Formes linéaires - dualité et transposition	
1.1.4. ... Trace d'une matrice - l'espace Euclidien $M_{p,n}(\mathbb{R})$ : le schéma de dualité	
§ (I.2) ... L'espace Euclidien $E \otimes F$ : introduction au problème du choix de métrique	14
1.2.1. ... Le produit tensoriel	
1.2.2. ... Décomposition directe - tenseurs associés à une application linéaire	
1.2.3. ... Produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels	
1.2.4. ... L'espace Euclidien $F \otimes E$ : le choix de métrique	
 <u>CHAPITRE II : Analyse des tenseurs d'ordre deux</u>	
§ (II.1) ... Nature des données : définitions et notations	25
2.1.1. ... Le cube de données	
2.1.2. ... La stratification du Cube	
§ (II.2) ... Analyse des strates : définitions et notations	33
2.2.1. ... Rappels	
2.2.2. ... Analyse du cube par stratification selon le facteur K	
2.2.3. ... Analyse du cube par stratification selon le facteur I	
2.2.4. ... Analyse du cube par stratification selon le facteur J	
2.2.5. ... Les relations de dualité	

- § (II.3) ... Analyses inter-strates 4
  - 2.3.1. ... Analyse inter-strates k et i
  - 2.3.2. ... Remarque sur les analyses inter strates j

### CHAPITRE III : Analyse des tenseurs d'ordre trois

- Introduction générale 4

#### Partie A : Les développements Mathématiques 5

- § (A.1) ... Analyse des différences
- § (A.2) ... Analyse du tenseur  $x^{KIJ}$  élément de  $(G \otimes F) \otimes E$  : Analyse du nuage global  $N = \bigcup_K x^{KIJ}(k)$
- § (A.3) ... Analyse du tenseur  $x^{KIJ}$  élément de  $G \otimes (F \otimes E)$  : Comparaison des tableaux  $X^k (k \in K)$
- § (A.4) ... Analyse du tenseur  $x^{IKJ}$  élément de  $F \otimes (G \otimes E)$  : Métriques intra et métriques inter

#### Partie B : L'analyse statistique 65

- § (B.1) ... Analyse des différences et analyse du nuage global
  - B.1.1. ... Analyse des différences
  - B.1.2. ... Analyse du nuage global
  - B.1.3. ... Problème du choix de la métrique M dans E
- § (B.2) ... Analyse du nuage des tableaux  $X^k (k \in K)$  : le choix des métriques
- § (B.3) ... Description des liaisons entre m paquets de variables : l'analyse canonique généralisée

#### Partie C : Analyse des référentiels : décomposition d'un tenseur 75

- § (C.1) ... Analyse du référentiel dérivant de l'ACP du tenseur  $x^{KIJ}$  de  $(G \otimes F) \otimes E$ 
  - C.1.1. ... Introduction
  - C.1.2. ... Analyse et décomposition tensorielle
  - C.1.3. ... Cas particulier où les ensembles I, J et K jouent des rôles symétriques
- § (C.2) ... Analyse du référentiel dérivant de l'ACP du tenseur  $x^{KIJ}$  de  $G \otimes (F \otimes E)$  : reconstitution des strates  $X^k$  de données.

### CHAPITRE IV : Applications

- § (4.1) ... Un tableau rectangulaire de données est un cube spécifique 9
  - 4.1.1. ... Introduction
  - 4.1.2. ... Cube de données et analyses
  - 4.1.3. ... Analyse du nuage des représentants des catégories
  - 4.1.4. ... Fibrage

§ (4.2) ... Le problème des rotations procrustes où la recherche d'une métrique inter	104
4.2.1. ... Position du problème et formulation des hypothèses mathématiques	
4.2.1. (a) ... Formalisation traditionnelle du problème	
4.2.1. (b) ... La nouvelle approche où la recherche de la métrique inter	
4.2.2. ... Comparaison des tableaux $X^k$ solution des rotations procrustes	
4.2.3. ... Analyse des différences ou résiduelle	
4.2.4. ... Indicateur de liaison entre deux nuages de points	
§ (4.3) ... Comparaison avec d'autres procédures	124
4.3.1. ... L'approche de Jaffrenou	
4.3.2. ... L'approche d'Escoufier	
4.3.3. ... Les métriques relationnelles de Schektman	
- Exemple pratique	159
- Annexe	163
- Bibliographie	167



## INTRODUCTION

Le développement des techniques d'analyse d'un cube de données s'est heurté jusqu'à présent à l'inadaptation du calcul matriciel au problème rencontré. Ainsi J.P. BENZECRI écrivait-il dans "critique du calcul matriciel" ([2], pp.58) : dès qu'on s'avance dans des applications du calcul tensoriel (e.g. à la géométrie, la mécanique et la physique) les conventions du calcul matriciel sont dépassées par la complexité des êtres mathématiques que l'on rencontre. Mais les notations du calcul matriciel impuissantes a-t-on dit, à représenter les tenseurs d'ordre supérieurs à deux ne suffisent même pas à exprimer complètement les propriétés du tenseur d'ordre deux".

L'inadaptation du langage matriciel a engendré des méthodes d'analyse incomplètes, aussi notre travail se propose t-il d'utiliser le formalisme tensoriel pour rendre compte des techniques existantes, ainsi présentées comme des prolongements naturels des techniques usuelles d'Analyse des Données. Cette présentation permet de définir une notion de dualité généralisée et de mettre en évidence le rôle prédominant du choix des métriques dans l'analyse d'un cube de données.

Les bases algébriques développées dans le CHAPITRE I permettent de montrer les liens existants entre une présentation matricielle et une présentation tensorielle. L'extension au cas d'un tenseur d'ordre trois nécessaire à l'étude d'un cube de données, permet de situer notre travail par rapport à celui de JAFFRENOU [24].

Au CHAPITRE II, on définit le cube de données comme une fonction  $x$  définie sur le produit cartésien  $\prod_{h=1}^3 I_h$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et représentée par un tableau à trois indices. Conventionnellement les éléments de  $I_h$  sont respectivement pour  $h = 1, 2, 3$  appelés des individus, des variables et des juges et jouent des rôles symétriques suivant le mode de

stratification du cube qui conduit usuellement le statisticien à réduire le problème à celui de l'étude d'un tableau rectangulaire de données. Ainsi le formalisme qu'on développe ici montre que les procédures utilisées notamment par CARROL [10], TUCKER [42], ESCOUFIER [18], BOUROCHE [8] et L'HERMIER DES PLANTES [28] conduisent à une perte d'information.

Nous montrons de plus que le mode de stratification, interprété comme une application de la propriété universelle permet de définir un fibrage spécifique des espaces vectoriels réels  $E_1, E_2 \otimes E_1, E_2 \otimes (E_3 \otimes E_1)$  de dimension finie qui permet la construction de nuages de points dont les éléments sont des représentants d'éléments de  $I_h (h=1,2,3)$ . Nous généralisons ainsi au cas des tenseurs d'ordre trois l'interprétation géométrique usuelle de la dualité. L'analyse de ces nuages permet de construire des résumés du cube des données. Ainsi donc, par le biais des tenseurs d'ordre deux, les nuages de points construits dans  $E_h (h=1,2,3)$  font l'objet d'une analyse et d'une interprétation statistique dans les termes usuels, lorsque la dualité qui caractérise "vecteur-individus" et "vecteur-variables" dans un tenseur d'ordre deux est étendue aux "tenseur-individus" et "vecteur-variables" ou bien aux "vecteur-individus" et "tenseur-variables" dans un tenseur d'ordre trois. Cette extension peut alors être prolongée très naturellement aux tenseurs d'ordre supérieur à trois au prix d'un accroissement combinatoire du nombre de modes de stratification possibles.

L'importance du choix d'une métrique guidant l'analyse est dégagée au CHAPITRE III. Nous montrons en particulier le rôle du mode de centrage d'un cube de données. De plus, la définition d'une métrique à effet relationnel au sens de SCHEKTMAN [37] et CROQUETTE [11] apparaît comme un cas particulier non identifiable au choix usuel d'un produit tensoriel (ou de Kronecker) de deux métriques, bien qu'elle définisse aussi de façon naturelle une structure en bloc.

Nous montrons dans le CHAPITRE IV que l'analyse d'un tenseur d'ordre deux est équivalente à l'analyse d'un tenseur d'ordre trois sous forme disjonctive complète, lorsque l'on fait choix d'une métrique induite par le

codage des variables, suivant les termes de C. DROUËT d'AUBIGNY [12], montrant ainsi le statut respectif de l'Analyse en Composantes Principales et l'Analyse Factorielle des Correspondances Multiples.

Enfin nous donnons une présentation nouvelle du problème des rotations procrustes, en tant qu'analyse d'un tenseur d'ordre quatre caractérisé par un choix pertinent de métriques. Nous montrons que ce choix est fortement lié à la définition d'indices de liaisons entre tableaux de données qui caractérisent les procédures de comparaison de tableaux de données. Ainsi les procédures d'ESCOUFIER, de L'HERMIER DES PLANTES, de JAFFRENOU et de SCHEKTMAN apparaissent comme autant de cas particuliers caractérisés par un choix de métriques.

Dans cette dernière partie, nous donnons de plus, un exemple pratique d'application qui présente l'intérêt de montrer l'importance du mode de centrage.



NOTATIONS

$L_{\mathbb{R}}(F;E)$  ... L'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel réel  $F$  dans l'espace vectoriel réel  $E$

$M_{p,n}(\mathbb{R})$  ... L'ensemble des matrices réelles à  $p$  lignes et  $n$  colonnes

$L_2(F \times E; \mathbb{R})$  ... L'ensemble des formes bilinéaires sur  $F \times E$

$\dim(E)$  ... Dimension de  $E$

$|J|$  ... Cardinal de  $J$

$\underline{u}$  (resp  $\underline{u}^J$ ) ... Un vecteur de  $E$  (resp  $E$  isomorphe à  $\mathbb{R}^{|J|}$ )

$\underline{x}$  ... Un tenseur de  $F \otimes E$

$\tilde{\text{Tr}}(A)$  ... Trace de  $A$

$\det(A)$  ... Déterminant de  $A$

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_M$	}	produit scolaire	}	dans l'espace Euclidien $(E,M)$
$ \underline{u} _M$	}	norme		

$t_M$  ... transposée de  $M$

$A = \bigcup_i A_i$  ...  $A$  est la partition des ensembles  $A$

$\perp_W$  ... L'orthogonal de  $W$

$E = \bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}$  ...  $E$  est somme directe des sous espaces vectoriels  $E_{\alpha}$

$\delta_{j,j'}^{\alpha} = \delta_j^{j'}$  ... Symbole de Kronecker

$\text{Cos}(\underline{u}, \underline{v})$  ... Cosinus de l'angle entre les vecteurs  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  de  $(E,M)$

$\text{Cov}(X,Y)$ ...	}	..... covariance	}	empirique	}	entre les variables $X$ et $Y$
$\text{Cor}(X,Y)$ ...	}	lettres minuscules ... corrélation				
$\text{Var}(X)$ ...	}	..... variance	}	.....	}	de la variable
$\sigma(X)$ ...	}	..... écart types				

$I_p$  ... Matrice identité d'ordre  $p$

$\text{Im}(x)$  ... Image de l'application linéaire  $x$

$\text{Ker}(x)$  ... Noyau " " "



CHAPITRE I : BASES ALGEBRIQUES



Introduction

E et F étant deux espaces vectoriels réels de dimension finie.

On se propose de montrer dans ce chapitre que les espaces vectoriels réels de dimension finie :

$M_{p,n}(\mathbb{R})$  des matrices à p lignes et n colonnes

$E \otimes F$  produit tensoriel de E et de F

peuvent être munis de structures Euclidiennes à partir desquelles est introduit le "schéma de dualité" caractérisant un tableau de données X (élément de  $M_{p,n}(\mathbb{R})$ ) "individus x caractères".

Par un choix de métriques, on construit entre ces deux espaces une isométrie qui permettra dans les chapitres suivant d'identifier tableau de données X et tenseur  $\chi$  (correspondant) pour leur analyse.

§ (I.1) ... L'espace Euclidien  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  : le schéma de dualité

On considère deux espaces vectoriels réels E et F de dimension finie respective p et n, munis des bases respectives :

$\{e_j / j=1, \dots, p\}$  et  $\{f_i / i=1, \dots, n\}$ ,  $M_{p,n}(\mathbb{R})$ ,  $L_{\mathbb{R}}(F;E)$

l'espace vectoriel des applications linéaires de F dans E et  $L_2(F \times E; \mathbb{R})$

l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur F x E.

1.1.1. Matrice et application linéaire

Définition et propriété 1

"La matrice  $M(x:(f_i), (e_j))$  associée à toute application linéaire x de  $L_{\mathbb{R}}(F;E)$  a pour colonnes les vecteurs images par x des vecteurs  $(f_i)$  dans la base  $(e_j)$  de E :  $M(x:(f_i), (e_j)) = [x(f_1), \dots, x(f_n)]$ "

Théorème 1 [34]

" $L_{\mathbb{R}}(F;E)$  et  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  sont deux espaces vectoriels isomorphes"

soit  $E_{ij}$  un élément de  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  tel que

$$E_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la j<sup>ème</sup> ligne et de la i<sup>ème</sup> colonne qui vaut 1.

Théorème 2 [34]

" $\{E_{ij} / i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p\}$  constitue la base canonique de  $M_{p,n}(\mathbb{R})$ "

$M_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  sont deux espaces vectoriels isomorphes de dimension  $pn$ .

### 1.1.2 Formes bilinéaires et Espaces Euclidiens

Théorème 3 ([27] pp 342)

"A toute forme bilinéaire  $m$  définie sur  $F \times E$ , on peut associer la matrice  $M = [m_{ij}]$  définie par  $m_{ij} = m(\underline{f}_i, \underline{e}_j)$ .

L'application de  $L_2(F \times E; \mathbb{R})$  dans  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  qui à  $m$  fait correspondre sa matrice  $M$  est un isomorphisme d'espace vectoriel et pour tout couple  $(\underline{v}, \underline{u})$  de  $F \times E$  nous avons :  $m(\underline{v}, \underline{u}) = {}^t \underline{u} M \underline{v} = {}^t \underline{v} {}^t M \underline{u}$ .

$m(\underline{f}_i, \underline{e}_j)$  est appelé terme générique de  $M$ .

En particulier lorsque nous aurons  $E=F$  nous dirons simplement que  $m$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

Lemme 1 ([26] pp 51)

"Une forme bilinéaire  $m$  sur  $E$  est symétrique si, et seulement, si sa matrice  $M$  est symétrique.

Définition 2 ([26] pp 53)

<<Une forme quadratique  $q$  sur  $E$  est une fonction  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $q(-\underline{u}) = q(\underline{u})$  pour tout  $\underline{u}$  et telle que  $2m(\underline{u}, \underline{v}) = [q(\underline{u}+\underline{v}) - q(\underline{u}) - q(\underline{v})]$   $m$  soit une forme bilinéaire sur  $E$ .>>

Théorème 4 ([26] pp 54)

<<Toute forme bilinéaire symétrique  $m$  sur  $E$  définit une forme quadratique  $q$  sur  $E$  par la formule :  $q(\underline{u}) = m(\underline{u}, \underline{u})$ , c'est la seule forme quadratique  $q$  telle que :  $2m(\underline{u}, \underline{v}) = q(\underline{u}+\underline{v}) - q(\underline{u}) - q(\underline{v})$ .>>

Définition 3 ([26] pp 60)

<<On dit qu'une forme quadratique  $q$  est définie positive si pour tout  $\underline{u} \neq \underline{0}$   $q(\underline{u}) > 0$ .>>

Définition 4 ([26] pp 64)

<<Un espace vectoriel Euclidien  $E$  est un espace vectoriel de dimension fini sur  $\mathbb{R}$  muni d'une forme bilinéaire symétrique  $m$  dont la forme quadratique associée est définie positive.>>

Dans ce cas la forme  $m$  sera dite symétrique définie positive.

Sa matrice associée  $M$  est souvent appelée métrique.

$m(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_M$  définit un produit scalaire.

$\sqrt{q(\underline{u})} = |\underline{u}|_M$  une norme Euclidienne

et  $|\underline{u} - \underline{v}|_M$  une distance Euclidienne

L'espace Euclidien ainsi défini est caractérisé par le couple  $(E, M)$ .

### 1.1.3 Formes linéaires = Dualité et transposition

On note  $E^*$  l'ensemble  $L_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$  des formes linéaires sur  $E$ ,  $E^*$  est le dual algébrique de  $E$  et  $E^{**}$  bidual de  $E$ .

#### Théorème 5

<< -  $\dim E = \dim E^*$

- les  $p$  formes linéaires  $e^{*j}$  ( $j=1\dots p$ ) sur  $E$  telles que  $e^{*j}(e_j) = \delta_j^j$ , forment une base de  $E^*$  avec  $\delta_j^j$ , le symbole de Kronecker >>

#### Corollaire

<< Toute forme linéaire  $y$  de  $E^*$  s'écrit dans la base  $(e^{*j})$   
 $y = \sum_j y(e_j) e^{*j}$  >>

Preuve triviale.

#### Théorème 6

<< L'application de  $E \times E^*$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout couple  $(u, u^*)$  fait correspondre  $u^*(u)$  est une forme bilinéaire canonique notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  >>

#### Théorème 7 [34]

<< L'application canonique de  $E$  dans  $E^{**}$  qui à tout élément  $u$  fait correspondre  $\underline{u}^{**}$  tel que  $\langle \underline{u}^*, \underline{u}^{**} \rangle = \langle u, u^* \rangle$  est un isomorphisme d'espace vectoriel. >>

Par suite on identifiera  $E$  et  $E^{**}$ .

#### Théorème et définition 8

<< Soit  $x$  un élément de  $L_{\mathbb{R}}(F; E)$ . On appelle transposée de  $x$  l'application de  $E^*$  dans  $F^*$  qui à tout élément  $y$  de  $E^*$  fait correspondre  $yx$ .

C'est une application linéaire notée  ${}^t x$  et définie par :

$$(\forall v \in F) (\forall y \in E^*) \langle v, {}^t x(y) \rangle = \langle x(v), y \rangle \gg$$

#### Propriétés 2

$$\begin{aligned} << 1 - x \in L_{\mathbb{R}}(F; E) &\iff {}^t x \in L_{\mathbb{R}}(E^*; F^*) \\ 2 - {}^t(x_1 \circ x_2) &= {}^t x_2 \circ {}^t x_1 \\ 3 - {}^t({}^t x) &= x \end{aligned}$$

#### Théorème 8

Pour tout  $x \in L_{\mathbb{R}}(F; E)$  nous avons  $M({}^t x; (e^{*j}), (f^{*i})) = M(x; (f_i), (e_j))$

#### Théorème 9 ([28]pp 69)

<< Pour tout espace Euclidien  $(E, M)$ , la fonction  $\varphi$ , qui associe à tout vecteur  $u$  de  $E$  la forme linéaire  $\langle u, \cdot \rangle_M$  de  $E^*$  est un isomorphisme d'espace vectoriel. >>

Puisque  $\varphi(\underline{e}_j) = \sum_i \varphi(\underline{e}_j) (\underline{e}_j, \underline{e}^{*i}) \underline{e}^{*i}$  (corollaire du théorème 5).

On montre facilement que la matrice associée à  $\varphi$  dans les bases :  $(\underline{e}_j)$  et  $(\underline{e}^{*j'})$  est  $M$

#### 1.1.4 Trace d'une matrice - l'Espace Euclidien $M_{p,n}(\mathbb{R})$ :

Introduction au schéma de dualité

##### Définition 5

<< Soit  $A = (a_{jj'})$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . On appelle trace de  $A$  la somme de ses éléments diagonaux i.e :  $\text{Tr}(A) = \sum_j a_{jj}$ . >>

##### Propriétés 3

- 1 -  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tA)$
- 2 -  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
- 3 -  $\text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(A{}^tA) = \sum_j (a_{jj})^2$
- 4 -  $\text{Tr}(\lambda(A+B)) = \lambda(\text{Tr}(A) + \text{Tr}(B))$   $\lambda \in \mathbb{R}$

##### Proposition 1

<< Soient  $(E,M)$  et  $(F,N)$  deux espaces Euclidiens tels que  $N$  soit diagonale. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  de matrices associées respectives  $X$  et  $Y$ .

L'application :  $t : M_{p,n}(\mathbb{R}) \times M_{p,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(X,Y) \longrightarrow \text{Tr}(XN{}^tYM)$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Elle confère à  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  la structure d'espace Euclidien. >>

On note respectivement le produit scalaire et la norme Euclidienne.

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle_{N,M} = t(X, Y)$$

$$\|X\|_{N,M} = (t(X, X))^{1/2}$$

##### Démonstration

La bilinéarité est triviale

##### Symétrie

$$t(X, Y) = \text{Tr}(XN{}^tYM) = \text{Tr}({}^t(XN{}^tYM)) = \text{Tr}(MYN{}^tX)$$

$$= \text{Tr}(YN{}^tXM) = t(Y, X)$$

##### $t$ est définie positive

En effet nous avons :

$$X = M(x; (\underline{f}^{*i}), (\underline{e}_j)) = [x(\underline{f}^{*1}), \dots, x(\underline{f}^{*n})]$$

$$Y = M(y; (\underline{f}^{*i}), (\underline{e}_j)) = [y(\underline{f}^{*1}), \dots, y(\underline{f}^{*i}), \dots, y(\underline{f}^{*n})]$$

posons pour tout élément  $i$  de  $]n]$  :  $(]n]) = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\underline{x}_i = x(\underline{f}^{*i})$$

$$\underline{y}_i = y(\underline{f}^{*i})$$

$N = [n_{ij}]$  avec  $n_{ii} = 0$  pour  $i \neq i'$

nous avons les relations

$$XN^t Y = \sum_i n_{ii} x_i^t y_i$$

$$\text{Tr}(XN^t Y M) = \sum_i \langle x_i, y_i \rangle_{n_{ii} M}$$

$$X \neq 0 \iff \exists i_0 \in ]n] \text{ tel que } (x_{i_0} \neq 0) \iff (|x_{i_0}| n_{i_0 i_0} M > 0)$$

La stricte positivité de

$$t(X, X) = \sum_i |x_i|^2_{n_{ii} M}$$

résulte de ce que pour tout  $i \neq i_0$ , on a

$$|x_i|_{n_{ii} M} \geq 0$$

C.Q.F.D.

Le schéma de dualité ([32], pp 197-198)

Soient  $\{\omega_i / i \in ]n]\}$  un ensemble d'objets et  $X^j$  ( $j \in ]p]$ )  $p$  caractères réels observés sur  $\{\omega_i\}$

$$X = \begin{pmatrix} x_i^j & \dots \\ \vdots & \\ x_i^j & \dots \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{jème ligne} \\ \text{i ème} \\ \text{colonne} \end{matrix} \quad \text{avec } x_i^j = X^j(\omega_i) = \omega_i(X^j)$$

est le tableau des données "individus x caractères".

A  $\omega_i$  reperé sur les  $p$  caractères  $X^j$  ( $j \in ]p]$ ) sont associés :

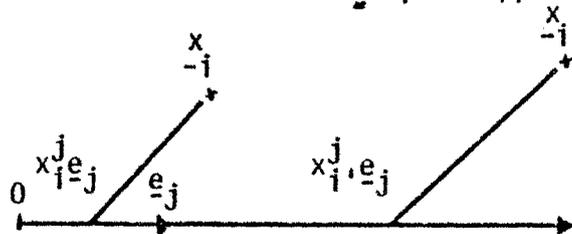
le vecteur

$$\underline{x}_i = \sum_j \omega_i(X^j) \underline{e}_j \quad \text{dans } E$$

l'axe

$$\underline{f}_i \quad \text{dans } F = \bigoplus_i \underline{f}_i$$

$x_i^j$  est la coordonnée du vecteur  $\underline{x}_i$  par rapport à la base  $\underline{f}_j$



La forme linéaire

$$\underline{f}^{*i} \quad \text{dans } F^*, \quad x_i^j = \underline{f}^{*i}(X^j)$$

à  $X^j$  mesuré sur les  $n$  objets  $\omega_i$  ( $i \in ]n]$ ) sont associés :

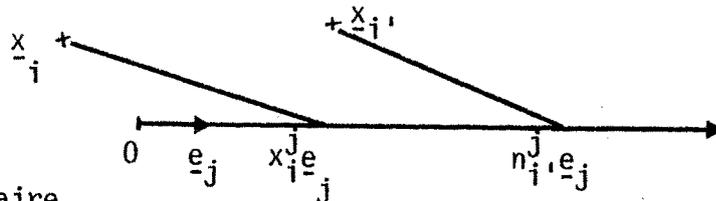
le vecteur

$$\underline{x}^j = \sum_i X_i^j(\omega_i) \underline{f}_i \text{ dans } F$$

l'axe

$$\underline{\Delta} e_j \text{ dans } E = \bigoplus_j \underline{\Delta} e_j$$

$x_i^j$  est la coordonnée du vecteur  $\underline{x}_i$  par rapport à la base  $\underline{e}_j$

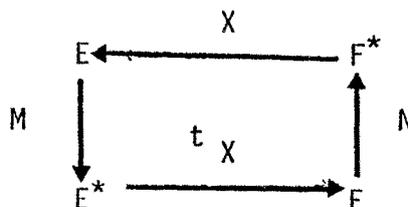


La forme linéaire

$$\underline{e}^{*j} \text{ dans } E^*, x_i^j = \underline{e}^{*j}(\underline{x}_i)$$

toutes ces considérations traduisent la dualité existant entre les objets  $\omega_i$  ( $i=1..n$ ) et les caractères  $X^j$  ( $j=1..p$ ).

Soit  $m$  (resp  $n$ ) l'isomorphisme canonique de  $E$  dans  $E^*$  (resp  $F$  dans  $F^*$ ) de matrices respectives  $M$  et  $N$ . La matrice  $XN^tXM$ , associée à l'endomorphisme  $x_0 n_0^t x_0 m$  permet de traiter simultanément lignes et colonnes du tableau  $X$  que nous avons interprétées en termes de dualité, ainsi appelle-t-on schéma de dualité le diagramme commutatif associé à  $x_0 n_0^t x_0 m$ .



§ (I.2) L'espace Euclidien  $E \otimes F$  : introduction au problème du choix des métriques

1.2.1. Le produit tensoriel

Etant donné

$$\left( \begin{array}{l} (E \times F) \\ \mathbb{R} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \sum \lambda \underline{u}, \underline{v} (\underline{u}, \underline{v}) \\ (\underline{u}, \underline{v}) \in E \times F \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \lambda \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ \lambda \underline{u}, \underline{v} = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de fois} \end{array} \right.$$

l'espace vectoriel réel des combinaisons linéaires formelles des éléments de l'ensemble  $E \times F$ , soit  $H$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^{(E \times F)}$  engendré par les éléments de la forme :

$$\begin{aligned} &(\underline{u}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) - (\underline{u}, \underline{v}_1) - (\underline{u}, \underline{v}_2) ; (\lambda \underline{u}, \underline{v}) - \lambda (\underline{u}, \underline{v}) \\ &(\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}) - (\underline{u}_1, \underline{v}) - (\underline{u}_2, \underline{v}) ; (\underline{u}, \beta \underline{v}) - \beta (\underline{u}, \underline{v}) \end{aligned} \quad (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

qui annulent toute application bilinéaire définie sur  $E \times F$  et à valeur dans un espace vectoriel réel quelconque  $L$  de dimension finie.

Définition 1

<<On appelle produit tensoriel de  $E$  et  $F$ , noté  $E \otimes F$ , l'espace quotient  $\mathbb{R}^{(E \times F)} / H$  muni de l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \varphi : E \times F &\longrightarrow E \otimes F \\ (\underline{u}, \underline{v}) &\longrightarrow \varphi(\underline{u}, \underline{v}) \end{aligned}$$

$\varphi(\underline{u}, \underline{v})$  noté  $\underline{u} \otimes \underline{v}$  est appelé produit tensoriel de  $\underline{u}$  et de  $\underline{v}$ >>

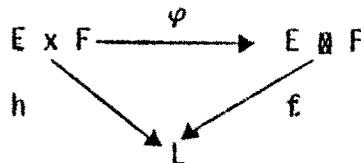
Proposition et définition 2 [5] : La propriété universelle

<<Soit  $(E \otimes F, \varphi)$  un produit tensoriel. Pour toute application bilinéaire  $h$  définie sur  $E \times F$  à valeur dans  $L$ , il existe une application linéaire unique  $f$  de  $E \otimes F$  dans  $L$  telle que :

$$h = f \circ \varphi$$

On dit que  $E \otimes F$  et  $\varphi$  sont un ensemble et une application universels associés à  $E \times F$ . >>

Le diagramme suivant est commutatif



Cette propriété universelle est souvent exprimée sous la forme

$$\langle\langle L_2(E \times F; L) \text{ est isomorphe à } L_{\mathbb{R}}(E \otimes F; L) \rangle\rangle$$

1.2.2. Décomposition directe et tenseur associé à une application linéaire

Proposition 2 ([21] pp 16)

<<Soient  $E = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$  et  $F = \bigoplus_{\mu} F_{\mu}$  deux sommes directes de familles de sous-espaces vectoriels respectifs de  $E$  et  $F$ , alors  $E \otimes F = \bigoplus_{\lambda \mu} (E_{\lambda} \otimes F_{\mu})$ >>

Corollaire 1 ([5], pp 10)

<<

Si  $F$  admet une base  $(\underline{f}_i)$ , tout élément de  $E \otimes F$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\sum_i \underline{u}_i \otimes \underline{f}_i \quad \text{où } \underline{u}_i \in E \quad \gg$$

Corollaire 2 ([5], pp 11)

<<

Si  $(\underline{e}_j)$  est une base de  $E$  et  $(\underline{f}_i)$  une base de  $F$ , les éléments  $\underline{e}_j \otimes \underline{f}_i$  forment une base de  $E \otimes F$ . Nous avons  $\dim(E \otimes F) = \dim(E) \cdot \dim(F)$ . >>

Proposition 3 ([5] pp 15)

<<

Le produit tensoriel  $E^* \otimes F^*$  des duals de E et F est isomorphe au dual de  $E \otimes F$  ; on définit un isomorphisme de  $E^* \otimes F^*$  sur  $(E \otimes F)^*$  en faisant correspondre à tout produit tensoriel  $\underline{u}^* \otimes \underline{v}^*$  la forme linéaire  $x$  sur  $E \otimes F$  définie par :

$$x(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \underline{u}, \underline{u}^* \rangle \cdot \langle \underline{v}, \underline{v}^* \rangle \quad \gg$$

Par suite nous identifierons  $E^* \otimes F^*$  et  $(E \otimes F)^*$

Proposition 4 ([5], pp 46)

<<

L'application linéaire qui à tout tenseur  $\underline{v}^* \otimes \underline{u}$  fait correspondre l'application linéaire :

$$\underline{v} \longmapsto \langle \underline{v}, \underline{v}^* \rangle \underline{u}$$

est un isomorphisme de :  $F^* \otimes E$  dans  $L_{\mathbb{R}}(F; E)$

Remarque (Greub [21] pp 38)

<< On note  $\underline{v}^* \otimes \underline{u}$  l'élément de  $L_{\mathbb{R}}(F; E)$  associé au tenseur  $\underline{v}^* \otimes \underline{u}$  de  $F^* \otimes E$  défini par :  $(\underline{v}^* \otimes \underline{u})(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \underline{v}^* \rangle \underline{u}$

Soit  $x$  un élément de  $L_{\mathbb{R}}(F; E)$  et  $\underline{v} = \sum_i v_i \underline{f}_i$

$$\begin{aligned} x(\underline{v}) &= \sum_i v_i x(\underline{f}_i) = \sum_i \underline{f}_i^{*i}(\underline{v}) x(\underline{f}_i) \\ &= \sum_i \langle \underline{v}, \underline{f}_i^{*i} \rangle x(\underline{f}_i) \end{aligned}$$

Il lui correspond donc dans  $F^* \otimes E$  le tenseur

$$\underline{x} = \sum_i \underline{f}_i^{*i} \otimes x(\underline{f}_i)$$

Si dans la proposition ci-dessus on remplace  $F^*$  par  $F^{**} = F$ , on a : l'isomorphisme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} L_{\mathbb{R}}(F^*; E) & \longleftrightarrow & F \otimes E \\ x & \longmapsto & \underline{x} = \sum_i \underline{f}_i \otimes x(\underline{f}_i^{*i}) \end{array} \right.$$

posons  $x(\underline{f}_i^{*i}) = \underline{x}_i$  pour tout  $i=1, 2, \dots, n$ .

L'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \underline{f}_i \otimes \underline{x}_i & : & F^* \longrightarrow E \\ \underline{t}^* & \longrightarrow & \underline{t}^* \otimes \underline{x}_i \end{array}$$

généralise l'opérateur coordonné.

L'image de  $F^*$  par :

- $\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i$  est un axe déterminé par  $\underline{x}_i$
- $(\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i)_{\underline{x}_i} \in N \subset E$ ,  $N$  de cardinal fini

est une famille d'axes, associés aux éléments de  $N$

-  $(\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i)_{\underline{x}_i} \in N)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  est un ensemble de  $n$  familles d'axes.  
 Cette image constitue un fibrage de  $E$  (voir figure 1.1, la notion de fibrage sera définie au chapitre suivant).

On identifie le tenseur

$\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i$  à l'application linéaire

$\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i$  de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  de matrice

$$M(\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i; (j^{ki}), (e_j)) = [0, \dots, 0, \underbrace{x_i}_{i\text{ème élément}}, 0, \dots, 0] \quad \text{associée}$$

Nous avons par exemple :  $M(\sum_i (\underline{f}_i \otimes \underline{x}_i); (f^* i), (e_j)) = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n]$

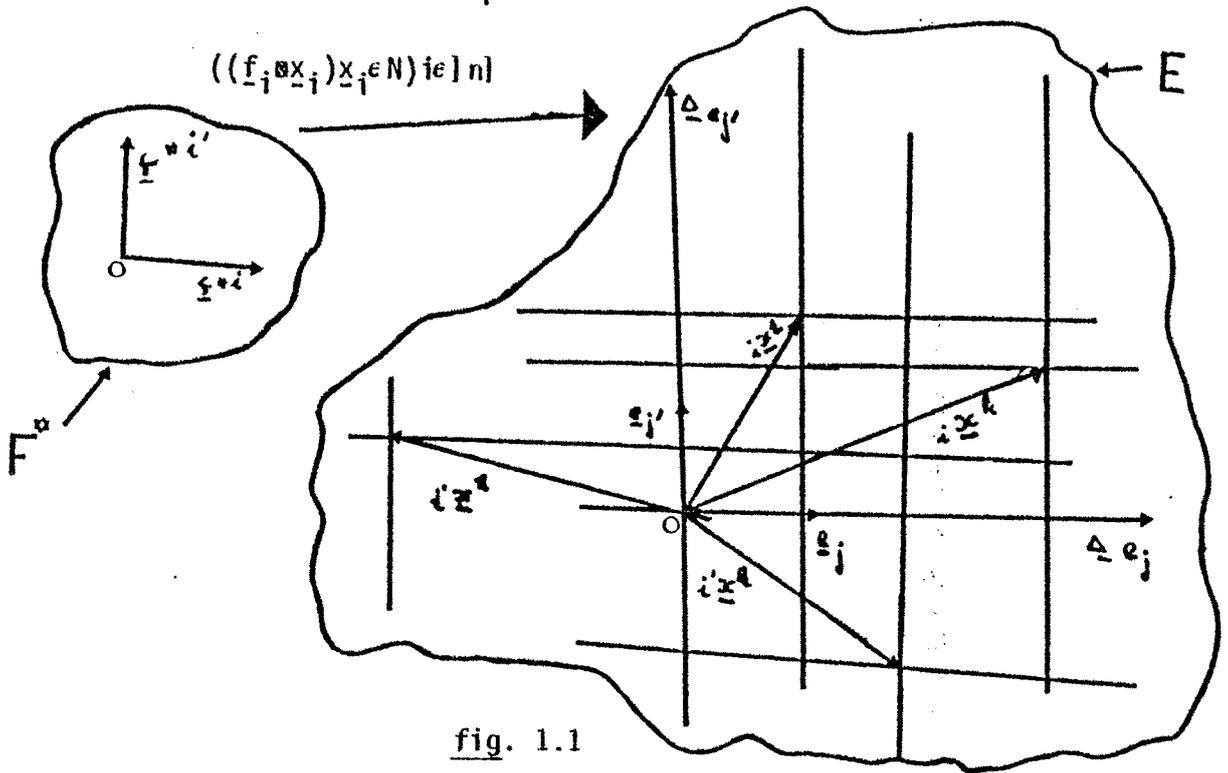


fig. 1.1

### 1.2.3. Produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels

Si en plus des espaces vectoriels  $E$  et  $F$  on considère l'espace vectoriel réel  $G$  de dimension finie muni d'une base  $\{g_k / k \in \{1, \dots, m\}\}$

Proposition 5 ([8] pp 28)

<<

Il existe un isomorphisme unique de  $E \otimes F \otimes G$  dans  $(E \otimes F) \otimes G$  défini par

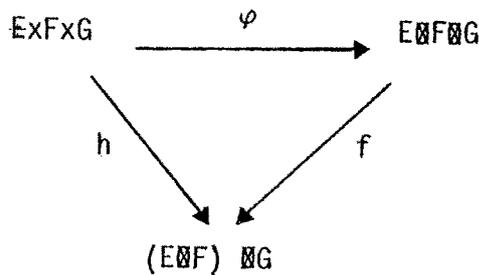
$$E \otimes F \otimes G \longrightarrow (E \otimes F) \otimes G$$

$$\underline{u} \otimes \underline{v} \otimes \underline{w} \longrightarrow (\underline{u} \otimes \underline{v}) \otimes \underline{w}$$

pour tout  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \in E \otimes F \otimes G$  >>

Preuve

Cette proposition est une application de la propriété universelle en considérant le diagramme commutatif suivant :



où h est une application trilinéaire définie comme suit :

$$h(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = (\underline{u} \otimes \underline{v}) \otimes \underline{w}$$

A tout élément x de  $L_{\mathbb{R}}(G^*; F \otimes E)$  correspond dans  $G \otimes (F \otimes E)$  le tenseur  $\tilde{x} = \sum_k g_k \otimes x(g^{*k})$

puisque  $x(g^{*k})$  est un tenseur de  $F \otimes E$ , il lui correspond une application linéaire  $x^k$  de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  telle que  $x(g^{*k}) = \sum_i f_i \otimes x^k(f^{*i})$

$\tilde{x}^k$  est le tenseur d'ordre deux associé au tenseur  $\tilde{x}$  d'ordre trois

Si  $\tilde{x}^k$  s'écrit  $\tilde{x}^k = \sum_{ij} x_{kij} f_i \otimes e_j$  alors  $\tilde{x}$  s'écrit

$$\tilde{x} = \sum_k \sum_{i,j} x_{kij} g_k \otimes (f_i \otimes e_j)$$

notons I, J et K les ensembles de variations respectives des indices i, j, et k. Toute confusion entre tenseurs d'ordres deux ou trois sera évitée en notant  $x^{KIJ}$  le tenseur  $\tilde{x}$  et  $x^{kIJ}$  le tenseur  $\tilde{x}^k$ .

On utilisera tout au long de ce travail l'une ou l'autre notation du tenseur associé à une application linéaire.

1.2.4. L'espace Euclidien  $F \otimes E$  : le choix de métrique

La matrice  $M = (m(\underline{f}_i \otimes \underline{e}_j, \underline{f}_{i'} \otimes \underline{e}_{j'}))$  associée à une forme bilinéaire  $m$  sur  $F \otimes E$  muni de la base  $\{\underline{f}_i \otimes \underline{e}_j / i \in I, j \in J\}$  se décompose naturellement en blocs.

$$M = (M_{ii'})_{i, i' \in I}$$

$$M_{ii'} = (m(\underline{f}_i \otimes \underline{e}_j, \underline{f}_{i'} \otimes \underline{e}_{j'}))_{j, j' \in J}$$

Chaque bloc  $M_{ii'}$  est la matrice d'une forme bilinéaire définie sur  $(\Delta \underline{f}_i \otimes E) \times (\Delta \underline{f}_{i'} \otimes E)$

où  $\Delta \underline{f}_i$  est l'axe passant par l'origine, de vecteur directeur  $\underline{f}_i$  on a :

$$F \otimes E = \bigoplus_i (\Delta \underline{f}_i \otimes E)$$

Les métriques  $M_{ii'}$  peuvent être choisies à priori dans les sous-espaces de contraintes  $\Delta \underline{f}_i \otimes E$  ( $i \in I$ ) (engendrés par la base  $\{\underline{f}_i \otimes \underline{e}_j / j \in J\}$  définis par SCHEKTMAN [ 37] qui propose une méthode de construction des  $M_{ii'}$  ( $i \neq i'$ ).

Lorsque  $m$  est symétrique définie positive, les choix distincts des métriques  $M_{ii'}$  définissent autant de structures Euclidiennes dans  $F \otimes E$ .

En particulier, si on pose à priori  $m(\underline{f}_i \otimes \underline{e}_j, \underline{f}_{i'} \otimes \underline{e}_{j'}) = 0$  pour  $i \neq i'$

$M$  a alors une structure bloc diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & & 0 \\ & M_{ii} & \\ 0 & & M_{nn} \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi la forme usuelle de la métrique  $M$  utilisée dans la  $\Sigma$  - stratégie développée en analyse canonique généralisée, en analyse des correspondances multiples et dans l'étude des liaisons globales entre plusieurs paquets de variables

Un autre type de métrique souvent rencontré en statistique est obtenu en imposant à  $m$ , la décomposition suivante :

$$m(\underline{f}_i \otimes \underline{e}_j, \underline{f}_{i'} \otimes \underline{e}_{j'}) = n(\underline{f}_i, \underline{f}_{i'}) \cdot q(\underline{e}_j, \underline{e}_{j'})$$

où  $n$  (resp  $q$ ) est une forme bilinéaire sur  $F$  (resp  $E$ )

$$Q = (q(\underline{e}_j, \underline{e}_{j'}))_{j, j' \in J}, N = (n(\underline{f}_i, \underline{f}_{i'}))_{i, i' \in I}$$

$$M = \{ n(\underline{f}_i, \underline{f}_{i'}) Q \}_{i, i' \in I}$$

est appelé produit tensoriel (ou de Kronecker) de  $N$  et  $Q$  et noté  $N \otimes Q$ .  
(de même  $m$  est noté  $n \otimes q$ ).

Cette matrice vérifie les propriétés suivantes :

Propriété [23]

<< 1°)  $(N \oslash Q)^- = N^- \oslash Q^-$   
 où  $Q^-$  est l'inverse généralisée de Moore Penrose de  $Q$  vérifiant  
 $QQ^-Q = Q$

2°)  ${}^t(N \oslash Q) = {}^tN \oslash {}^tQ$

3°)  $\det(N \oslash Q) = (\det(N))^p \cdot (\det(Q))^n \gg$

Soit  $X = (x_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$  (resp  $Y = (y_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ ) la matrice associée

à  $x$  (resp  $y$ ) élément de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  de tenseur

$\tilde{x} = \sum_{i,j} x_{ij} f_i \otimes e_j$  (resp  $\tilde{y} = \sum_{i,j} y_{ij} f_i \otimes e_j$ ) on a les résultats suivants :

Proposition 6

<< Etant donné  $(E, Q)$  et  $(F, N)$  deux espaces Euclidiens.

L'application  $m$  définie sur  $(F \otimes E) \times (F \otimes E)$  dans  $\mathbb{R}$  qui au couple  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  fait correspondre :

$$\sum_{i,i'} \sum_{j,j'} x_{ij} y_{i'j'} \langle f_i, f_{i'} \rangle_N \cdot \langle e_j, e_{j'} \rangle_Q$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Elle confère à  $F \otimes E$ , la structure d'espace Euclidien.

En particulier :

$$m(f_i \otimes e_j, f_{i'} \otimes e_{j'}) = \langle f_i, f_{i'} \rangle_N \cdot \langle e_j, e_{j'} \rangle_Q \gg$$

Etablissons le résultat suivant avant de démontrer cette proposition.

Lemme fondamental

$$\langle \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_{N \oslash Q} = \langle \langle X, Y \rangle_{N, Q} \gg$$

Preuve

Développons  $\langle \langle X, Y \rangle_{N, Q} = \text{Tr}(XN^t YQ)$

$${}^t YQ = \left( \sum_{j'} y_{i'j'} \langle e_{j'}, e_j \rangle_Q \right)_{i \in I}^{j \in J}$$

$$N^t YQ = \left( \sum_{i'} \langle f_i, f_{i'} \rangle_N \left[ \sum_{j'} y_{i'j'} \langle e_{j'}, e_j \rangle_Q \right] \right)_{i \in I}^{j \in J}$$

$$XN^t YQ = \left( \sum_i x_{ij} \sum_{i'} \langle f_i, f_{i'} \rangle_N \sum_{j'} y_{i'j'} \langle e_{j'}, e_j \rangle_Q \right)_{\substack{j \in J \\ i \in I}}^{j \in J}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{Tr}(XN^tYQ) &= \sum_{j,i} x_{ij} \sum_{i'} \langle f_{i'}, f_{i'} \rangle_N \sum_{j'} y_{i'j'} \langle e_{j'}, e_{j'} \rangle_Q \\ &= \sum_{i,i'} \sum_{j,j'} x_{ij} y_{i'j'} \langle f_{i'}, f_{i'} \rangle_N \cdot \langle e_{j'}, e_{j'} \rangle_Q \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(XN^tYQ) = \langle X, Y \rangle_{N \otimes Q} \quad \text{C.Q.F.M.}$$

### Démonstration de la proposition 6

$N$  est diagonalisable en  $N = SD^tS$

ou  $S$  est une matrice orthogonale et  $D$  une matrice diagonale définie positive.

Aussi a-t-on

$$\begin{aligned} \langle\langle X, Y \rangle\rangle_{N, Q} &= \text{Tr}(XN^tYQ) = \text{Tr}[(XS)D^t(S^tY)Q] \\ &= \text{Tr}[(XS)D^t(YS)Q] \\ &= \langle\langle X', Y' \rangle\rangle_{D, Q} \end{aligned}$$

avec

$$X' = XS \quad Y' = YS$$

et d'après la proposition 1§ (I.1)  $\langle\langle X', X' \rangle\rangle_{D, Q}$  est positif strictement pour  $X' \neq 0$  c'est à dire pour

$X \neq 0$  puisque  $S \neq 0$ . Donc  $\langle\langle X, X \rangle\rangle_{N, Q}$  est strictement positif.

Ce qui entraîne que  $n \otimes q$  est définie positive.

La symétrie est triviale. C.Q.F.M.

### Remarques

- 1) Nous effectuons dans  $F$  le changement de base substituant, à la base  $\{f_i\}$  celle formée par les vecteurs propres de  $N$ .
- 2) L'importance de la métrique  $N \otimes Q$  est montrée dans le lemme fondamental qui, on le verra, établit une "équivalence" entre un nuage d'éléments de  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  et son image dans  $F \otimes E$ . Cette propriété n'est pas vérifiée par les métriques introduites plus haut.



CHAPITRE : II

ANALYSE DES TENSEURS D'ORDRE DEUX



§ (II.1) Natures des données : définitions et notations2.1.1. Le cube de données

Selon le type de données que l'on étudie, on s'intéresse à trois ensembles finis : I de cardinal n, J de cardinal p et K de cardinal m. En psychométrie par exemple, I représente généralement un ensemble d'individus (personnes interrogés, testées etc ...), J un ensemble de stimulis (tests psychologiques, excitation, etc ...) et K un ensemble de sujets (juges, périodes, expériences etc ...). En Sociométrie I et K peuvent représenter deux groupes de personnes (garçons et filles d'une même classe etc ...) et J un ensemble de caractéristiques mesurant l'état des rapports sociaux entre ces deux groupes.

En analyse de variance, pour le plan factoriel d'ordre deux avec répétitions dans lequel et pour chaque case, les traitements sont effectués sur les mêmes unités expérimentales formant l'ensemble I, J et K représentant les ensembles des traitements associés respectivement à l'un et l'autre facteur.

Dans les séries chronologiques multidimensionnelles, d'un phénomène  $W \in I$  (économique, social etc ...), plusieurs mesures  $j \in J$  sont enregistrées (production et vente d'un produit de consommation etc ...) à chaque instant  $t \in T$  (date, intervalles de temps réguliers etc ...).

Dans ce texte nous adopterons la terminologie suivante :

I représente l'ensemble des individus, J l'ensemble des variables et K l'ensemble des juges.

Définition 1 [2]

<< On appelle cube de données la fonction x.

$$x : I \times K \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(i, k, j) \longrightarrow x(i, k, j) \quad \gg$$

le tableau  $X = (x(i, k, j))_{\substack{i \in I \\ k \in K \\ j \in J}}$  à trois indices qui lui est associé sera

aussi appelé cube de données. Sa représentation graphique donne :

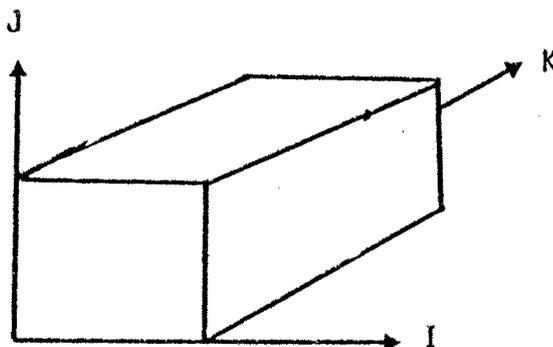


fig. 2.1

I, J et K pouvant ne pas avoir le même cardinal, on devrait plutôt parler d'un parallélépipède de données au lieu de la terminologie consacrée de cube de données.

La fonction x peut revêtir plusieurs natures différentes : mesures réelles, fréquences (absolues ou relatives), nombre binaire etc ...

On peut citer plusieurs exemples dont voici cinq :

Exemple 1

Dans le plan factoriel d'ordre deux avec répétitions, x représente la variable réponse des unités expérimentales  $i \in I$  aux traitements  $j \in J$  et  $k \in K$ .

Exemple 2 [14]

En analyse des préférences, étant donné  $U = I \times I$  un ensemble d'unités statistiques où I est un ensemble d'objets à comparer, V un ensemble de valeurs réelles mesurant des degrés de préférence et K un ensemble de sujets émettant des jugements de préférence sur les objets i et i'.

Le protocole expérimental P définit le cube de données :

$$P : U \times K \times V \longrightarrow \{0,1\}$$

$$((i, i'), k, v) \longrightarrow p_{(i, i')}^k(v) = \begin{cases} 1 & \text{le juge k exprime sa} \\ & \text{préférence pour i comparé} \\ & \text{à i' par la valeur v} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Exemple 3

<< Etant donné un questionnaire regroupant p variables qualitatives  $x^j$  (de  $k_j$  modalités chacune) à l'intension de n individus  $i \in I$ .

Notons  $C_k^j = \{i \in I / X^j(i) = q_k; k \in J\}$  la catégorie des individus associés à la modalité  $q_k$  de  $X^j$ .  $q_k$  est le code de  $C_k^j$ .

$C^j$  l'ensemble des catégories induites sur I par la variable  $X^j$  et  $K = \prod_j C^j$ .

On définit le cube x de données comme suit :

$$x : I \times K \times J \longrightarrow \{0,1\}$$

$$(i, k, j) \longrightarrow x(i, k, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in C_k^j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les  $C_k^j$  ne sont pas forcément égaux, et on prendra les  $q_k$  tous distincts (cf paragraphe § (IV.1)). >>

Exemple 4

<< Pour comparer la productivité d'un certain nombre d'entreprises  $i \in I$  dans des secteurs d'activités commun  $j \in J$  et sur la machine de type  $t \in T$ . La fonction  $x$

$$x : I \times T \times J \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

$$(i, t, j) \longrightarrow x(i, t, j) \text{ définit le nombre de pièces fabriquées par ouvrier sur la machine de type } t.$$

Exemple 5

<< Dans les séries chronologiques multidimensionnelles, à chaque instant  $t \in T$ ,  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^j, \dots, X_t^p)$  représente une variable de composante les  $p$  mesures réelles  $X_t^j$  ( $j \in J$ ) enregistrées sur  $n$  objets  $w \in I$  d'un phénomène naturel donné.

On définit le cube  $x$  de données comme suit :

$$x : I \times T \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w, t, j) \longrightarrow x(w, t, j) = X_t^j(w)$$

2.1.2. Stratification du cube

Soient  $E_h$  (resp  $I_h$ ) ( $h=1,2,3$ ) l'un quelconque des espaces vectoriels (resp ensembles)  $E, F$  et  $G$  (resp  $I, J$  et  $K$ ) et :

$$X = (x(i_{h_1}, i_{h_2}, i_{h_3})) \begin{matrix} i_{h_1} \in I_1 \\ i_{h_2} \in I_2 \\ i_{h_3} \in I_3 \end{matrix} \dots \text{le cube de données définis}$$

sur  $I_1 \times I_2 \times I_3$ .

Si l'on note  $\{e_h\}$  une base de  $E_h$  on construit à partir de  $X$  le tenseur

$$x^{I_1 I_2 I_3} = \sum_{i_{h_1} \in I_1} \sum_{i_{h_2} \in I_2} \sum_{i_{h_3} \in I_3} x(i_{h_1}, i_{h_2}, i_{h_3}) e_{h_1} \otimes e_{h_2} \otimes e_{h_3}$$

élément de  $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$

$E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$  peut être considéré grâce à la propriété universelle comme le produit tensoriel  $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$ . Par conséquent  $x^{I_1 I_2 I_3}$  peut s'écrire

$$x^{I_1 I_2 I_3} = \sum_{i_{h_1} \in I_1} \sum_{i_{h_2} \in I_2} \sum_{i_{h_3} \in I_3} x(i_{h_1}, i_{h_2}, i_{h_3}) e_{h_1} \otimes (e_{h_2} \otimes e_{h_3})$$

$$= \sum_{i_{h_1} \in I_1} e_{h_1} \otimes x(e^{*h_1})$$

$$= x$$

où  $x$  est élément de  $L_{\mathbb{R}}(E_1^*; E_2 \otimes E_3)$

D'après les résultats du paragraphe (1.2) du tenseur  $x$  d'ordre trois, est associé le tenseur d'ordre deux.

$$\begin{aligned} x_{i_{h_1}}^i &= x(e^* h_1) \\ &= \sum_{i_{h_2}} e_{h_2} \otimes x^i_{h_1}(e^* h_2) \\ &= x^i_{h_1} I_2 I_3 \end{aligned}$$

où  $x^i_{h_1}$  est élément de  $L_{\mathbb{R}}(E_2^*; E_3)$ .

On pose donc la définition :

Définition 2

<< Etant donné un cube  $x$  défini sur  $I_1 \times I_2 \times I_3$ . On appelle strate  $(i_{h_1})$ , l'application linéaire  $x^i_{h_1}$  de  $L_{\mathbb{R}}(E_2^*; E_3)$  de matrice :

$$x^i_{h_1} = \left[ \begin{array}{c} x(i_{h_1}, i_{h_2}, i_{h_3}) \end{array} \right]_{\substack{i_{h_2} \in I_2 \\ i_{h_3} \in I_3}} \text{ associée } \gg$$

Le tableau  $x^i_{h_1}$  à deux indices sera aussi appelé strate  $i_{h_1}$ . On dira dans ce cas que l'on a stratifié le cube  $x$  suivant le facteur  $I_1$  (au sens analyse de variance)  $I_1$ .

$x^i_{h_1}$  a pour graphique le rectangle

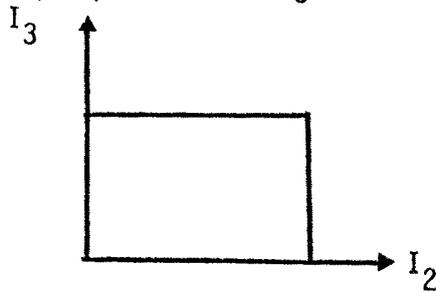


fig. 2.2

en faisant varier  $i_{h_1}$  dans  $I_1$ , on constate que la stratification traduit un découpage de  $x$  en des strates parallèles suivant facteur  $I_1$ .

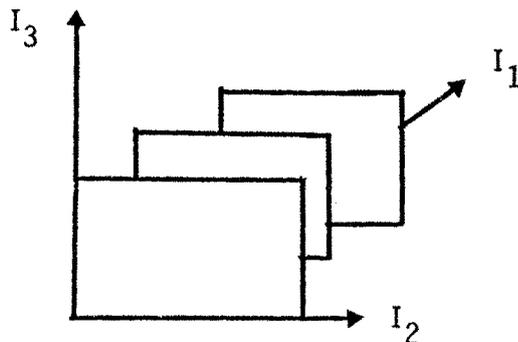


fig. 2.3

On peut citer plusieurs exemples selon la nature des ensembles  $I_1, I_2, I_3$  et des espaces vectoriels  $E_1, E_2$  et  $E_3$ .

1er cas :  $I_1 = J, I_2 = K, I_3 = I, E_1 = E, E_2 = G$  et  $E_3 = F$

<< Dans l'exemple (3) ci-dessus, on définit la strate  $Z^j$  élément de  $L_{\mathbb{R}}(G^j; F)$  de matrice :  $Z^j = (x(i, j, k))_{\substack{k \in C_k^j \\ i \in I}}$  avec  $G = \oplus G^j$  et  $\dim(G^j) = k_j$

Les tableaux  $Z^j$  ( $j \in J$ ) disjonctifs complets permettent d'étudier les liaisons de dépendance entre les variables  $X^j$  ( $j \in J$ ) prises deux à deux, à l'aide des techniques d'analyse des correspondances (cf § (IV.1)).

2ème cas :  $I_1 = K, I_2 = I, I_3 = J, E_3 = E, E_2 = F$  et  $E_1 = G$

<< L'application linéaire  $X^k$  de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  de matrice :

$$X^k = (x(k, i, j))_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$$

avec :

$$x(k, i, j) = {}_k X^j(i)$$

${}_k X^i$  est une mesure réelle sur  $I$  associée à différentes expériences  $k \in K$  et définit la strate  $k$  des tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ).

On peut étudier les liaisons globales entre les variables de différentes expériences, à l'aide des techniques d'analyses canoniques généralisées, mais aussi différentes notions "d'équivalence" entre ces tableaux, dont le problème des "rotations procrustes" offre un exemple particulier

3ème cas :  $I_1 = I, I_2 = K, I_3 = J, E_1 = F, E_2 = G$  et  $E_3 = E$

<< Dans les séries chronologiques multidimensionnelles, l'application linéaire  $\gamma^i$  de  $L_{\mathbb{R}}(G^*; E)$  de matrice associée

$$\gamma^i = \left( x(\omega, t, j) \right)_{\substack{t \in T \\ j \in J}}$$

$$x(\omega, t, j) = x^j(\omega, t)$$

est la réalisation de la "fonction aléatoire"  $x^j(\cdot, \omega)$ .

La trajectoire  $\omega = i$  définit la strate  $i$ ; pour laquelle  $X^j(i, t)$  est une mesure réelle  $j \in J$  enregistrée à la date  $t \in T$  sur l'objet  $i \in I$ .

2.1.3. Interprétation géométrique de la stratification : le fibrage

Soit  $\underline{a}$  un élément de  $E^*$ . L'image de  $E$  par  $\underline{a}$  est notée :

$$\underline{a}(E) = \{ \underline{a}(\underline{u}) \mid \underline{u} \in E \}$$

Définition 3 [15]

$\ll \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , on appelle fibre  $\alpha$  (ou courbe de niveau  $\alpha$ ) l'ensemble

$$a_\alpha = \{ \underline{u} \in E / \underline{a}(\underline{u}) = \alpha \}$$

Remarques

- $a_0 = \text{Ker}(\underline{a})$
- la courbe de niveau  $\alpha$  associée à un élément  $\underline{a}$  de  $E^*$  est une droite
- soit  $\underline{u}_0 (u_{j0})_{j \in J}$  un élément de  $E$ .  $e^{*j}$  définit dans  $E$  le fibrage

$$j \alpha = \{ \underline{u} \in E / e^{*j}(\frac{1}{u_{j0}} \underline{u}) = \alpha \}$$

associé à l'axe  $\underline{e}_j$ , les vecteurs  $\underline{u}_i$  solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{*1}(\frac{1}{u_{10}} \underline{u}_i) = \alpha_i \\ \vdots \\ e^{*j}(\frac{1}{u_{j0}} \underline{u}_i) = \alpha_i \\ \vdots \\ e^{*p}(\frac{1}{u_{p0}} \underline{u}_i) = \alpha_i \end{array} \right.$$

sont colinéaires à  $\underline{u}_0$ . En effet on a  $\underline{u}_i = \sum e^{*j}(\underline{u}_i) \underline{e}_j = \alpha_i \underline{u}_0$ . soit  $X = (x_{ijk})$  un cube de données. Il permet de construire plusieurs fibrages :

- dans  $E$

On construit le fibrage :

$$k \alpha_j = \{ \underline{x} \in E / e^{*j}(\underline{x}) = x_{ijk} \} \quad (k \in K, j \in J)$$

associé à l'axe  $\underline{e}_j$ . La stratification de  $X$  suivant le facteur  $K$  permet de construire pour chaque  $k \in K$ ,  $n$  vecteurs

$x_k^i (i=1, 2, \dots, n)$  solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{*1}(k \underline{x}^i) = x_{ik1} \\ \vdots \\ e^{*j}(k \underline{x}^i) = x_{ikj} \\ \vdots \\ e^{*p}(k \underline{x}^i) = x_{ikp} \end{array} \right.$$

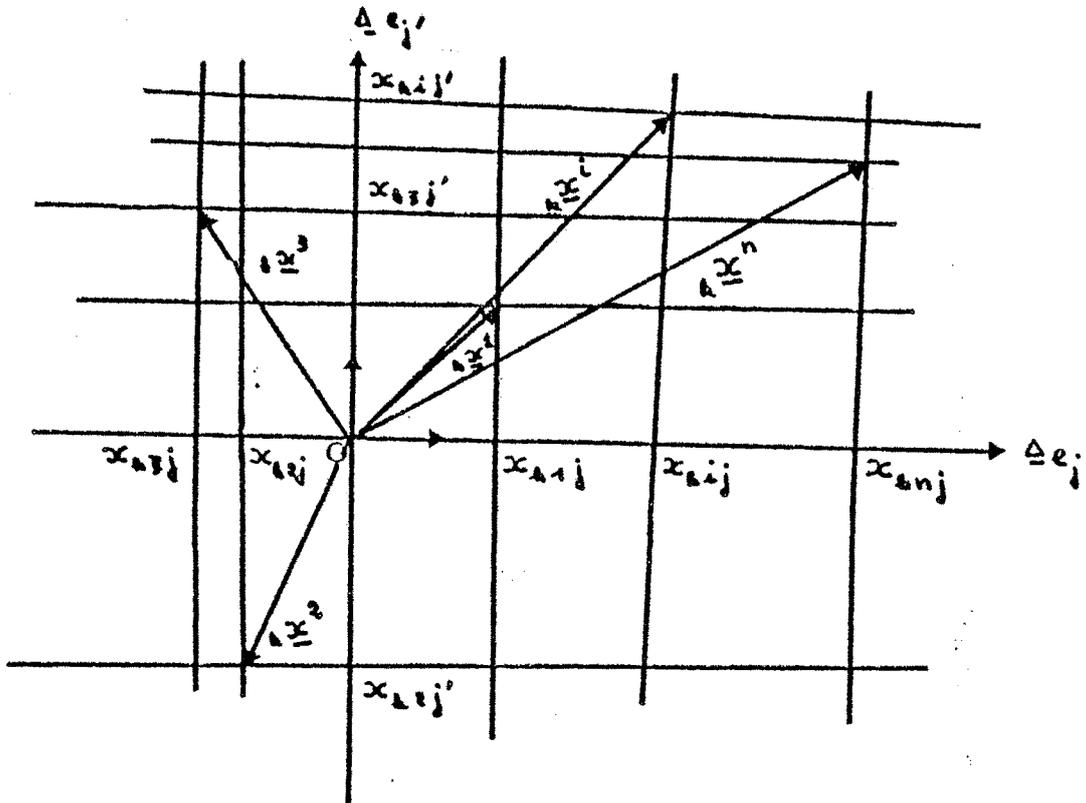


Fig. 2.4 Fibrage dans E

Les points situés sur une même fibre ont le même score par rapport à la variable  $j$  de représentant  $\Delta_{-ej}$ .

Dans  $F\mathbb{E}$  on construit les fibres :

$$a_k = \{(\mu / f^{*i} \mathbb{e}^{*j}(\mu) = x_{ijk}) \mid (k \in K)\} \text{ associées aux axes } \Delta_{f_i \mathbb{e}_j}$$

Ce même cube  $X$  permet de construire dans  $F\mathbb{E}$  des tenseurs  $\chi^k$  solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{*1} \mathbb{e}^{*1}(\chi^k) = N_{11k} \\ \vdots \\ f^{*i} \mathbb{e}^{*j}(\chi^k) = X_{ijk} \\ \vdots \\ f^{*n} \mathbb{e}^{*p}(\chi^k) = X_{npk} \end{array} \right.$$

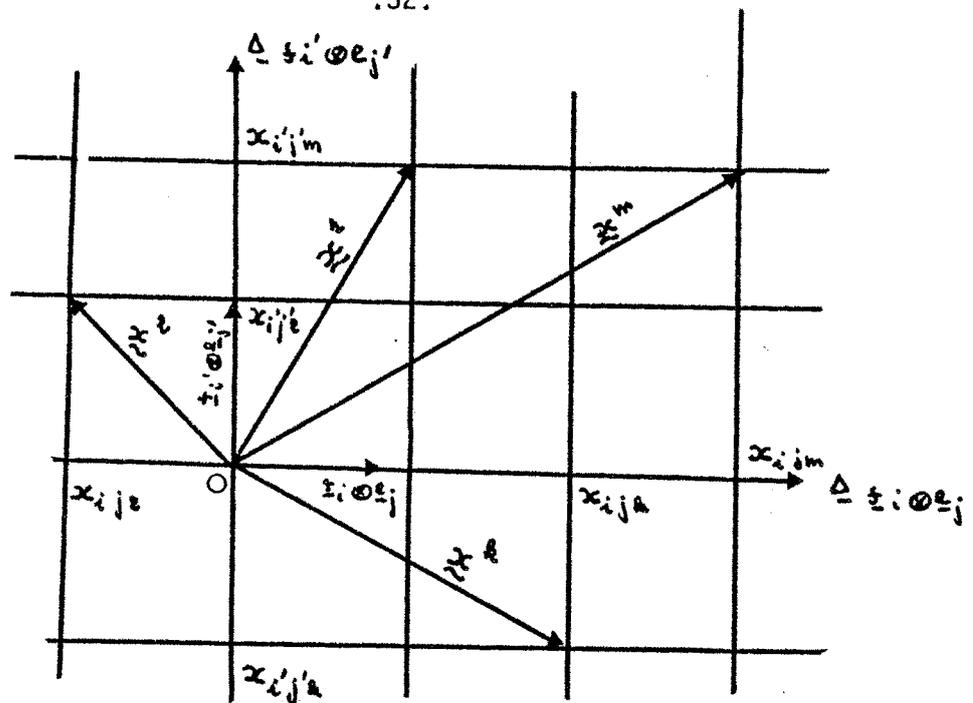


fig 2.5 : Fibrage dans F ⊗ E

Dans F ⊗ F ⊗ E on construit les fibres :

$$a_k = \{ \chi \mid f^{*i} \otimes g^{*k} \otimes e^{*j}(\chi) = x_{ikj} \} \text{ associés aux axes}$$

$$\Delta_{f_i \otimes g_k \otimes e_j}$$

A l'aide du cube  $\chi$  on peut construire un tenseur  $\chi^k$ .

Solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{*1} \otimes g^{*k} \otimes e^{*1}(\chi^k) = x_{1k1} \\ \vdots \\ f^{*i} \otimes g^{*k} \otimes e^{*j}(\chi^k) = x_{ikj} \\ \vdots \\ f^{*n} \otimes g^{*k} \otimes e^{*p}(\chi^k) = x_{nkp} \end{array} \right.$$

et "plongé" dans le sous-espace vectoriel

$$F \otimes_{\Delta_k} g_k \otimes E \text{ de } F \otimes G \otimes E = \phi_k(F \otimes_{\Delta_k} g_k \otimes E)$$

$$= F \otimes (\phi_k(\Delta_k \otimes g_k \otimes E))$$

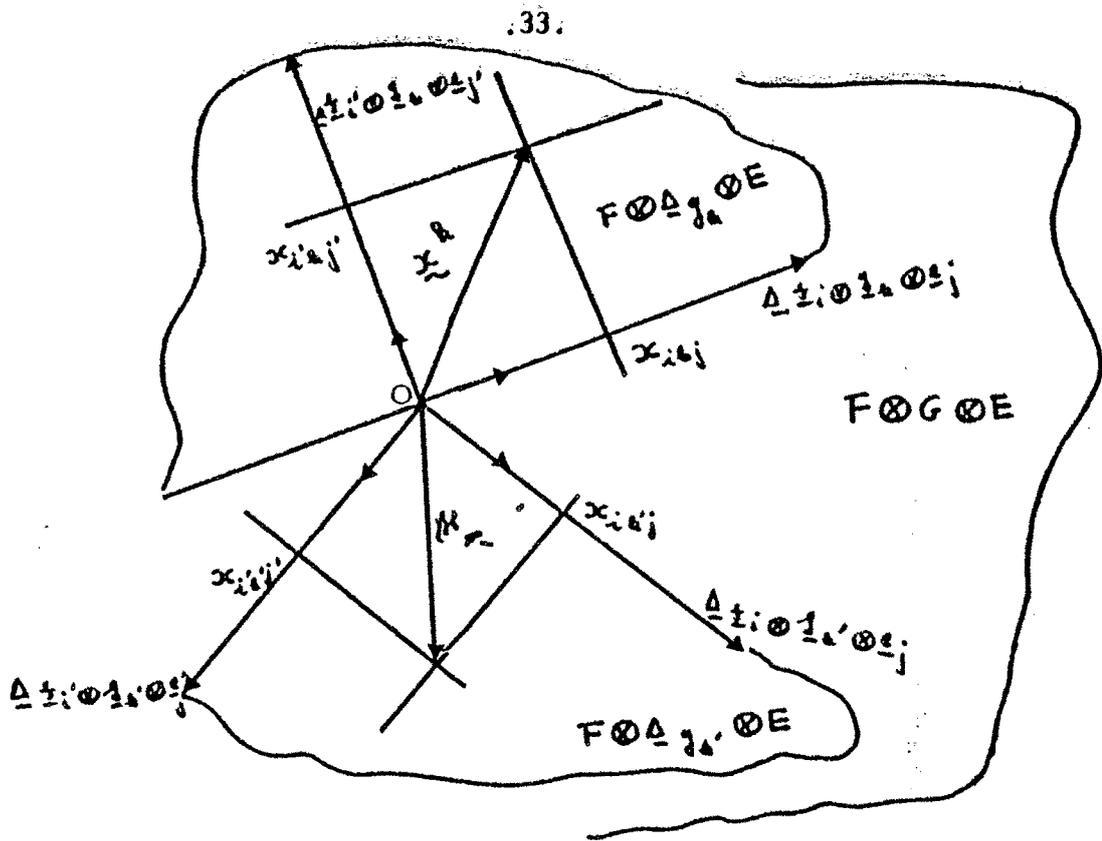


fig 2.6 : Fibrage dans  $F \otimes G \otimes E$

Remarques :

- 1) La structure des tenseurs  $x_{i'j}^k$  ( $k \in K$ ) sera étudiée au paragraphe (4.2.2)
- 2) On aboutit à des représentations géométriques semblables lorsqu'on considère la stratification de cube  $X$  selon le facteur  $I$  et  $J$ .

§ (II.2) Analyse des strates : Définitions et notations

2.2.1. Rappels

On considère trois espaces Euclidiens  $(E, M)$ ,  $(F, N)$  et  $(G, Q)$  munis de leurs bases canoniques respectives  $\{e_j | j \in J\}$ ,  $\{f_i | i \in I\}$  et  $\{g_k | k \in K\}$ .  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{|J|}$ ,  $F$  à  $\mathbb{R}^{|I|}$  et  $G$  à  $\mathbb{R}^{|K|}$  soit  $N = \{x_{i'j}^k | i' \in I, j \in J, k \in K\}$  un nuage de  $n$  points dans

Définition 1 [32]

<< Le triplet  $(N, E, M)$  est une image Euclidienne du couple  $(I, d_I)$  s'il existe une application  $f$  de  $I$  dans  $E$  vérifiant :

- 1-  $f(I) = N$
- 2-  $d_I(i, i') = |f(i) - f(i')|_M$

où  $d_I$  est une distance Euclidienne sur  $I$ . >>

Définition 2 [32]

<< Deux images Euclidiennes  $(N_1, E_1, M_1)$  et  $(N_2, E_2, M_2)$  de  $(I, d_I)$  sont dites équivalentes s'il existe une application bijective  $f$  de  $N_1$  dans  $N_2$  vérifiant

$$|f(x^{iJ}) - f(x^{i'J})|_{M_2} = |x^{iJ} - x^{i'J}|_{M_1} \gg$$

En conséquence, les analyses des nuages de points  $N_1$  et  $N_2$  donnent exactement les mêmes résultats, puisque  $f$  est une isométrie de  $N_1$  dans  $N_2$ .

2.2.2 Analyse du cube par stratification selon le facteur K

Dans ce paragraphe nous mettons en évidence les nuages des points que l'analyse du tenseur  $x^{kIJ}$  de  $\mathbb{F} \otimes E$  associé à l'élément  $x^k$  de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  permet de décrire :

$$\begin{aligned} x^{kIJ} &= \sum_{i,j} x(k,i,j) \underline{f}_i \otimes \underline{e}_j \\ &= \sum_i \underline{f}_i \otimes x^k(\underline{f}^* i) \end{aligned}$$

Le vecteur  ${}_k \underline{x}^{iJ} = x^k(\underline{f}^* i)$  ( $i \in I$ ) est le  $i$ (ème) vecteur colonne de la matrice  ${}_k \underline{x}^k = M({}_k \underline{x}^k; (\underline{f}^* i), (\underline{e}_j))$  obtenu par stratification selon  $K$ .

Par suite  ${}_k \underline{x}^{iJ}$  représente l'individu  $i$  dans la strate  $k$ .

Notons respectivement :

$$\begin{aligned} N_x(k) &= \{({}_k \underline{x}^{iJ}, p_i) \mid i \in I\} \\ g_x^{kJ} &= \sum_i p_i {}_k \underline{x}^{iJ} \end{aligned}$$

Le nuage de ces individus et son barycentre, lorsque l'individu  $i$  est affecté du poids  $p_i$  :

$$p_i > 0, \sum_i p_i = 1$$

$g_x^{kJ}$  représente l'individu moyen repéré dans la strate  $k$ .

La transposée de  $x^k$  a pour matrice :

$${}_k \underline{t}_x^k = M({}_k \underline{t}_x^k; (\underline{e}^{*j}), (\underline{f}_i))$$

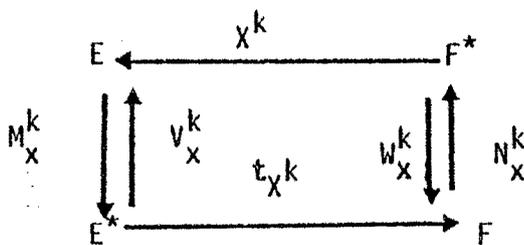
La variable  $j$  (ou  ${}_k \underline{x}^j$ ) dans la strate  $k$  est représentée par le vecteur :

$${}_k \underline{x}^{jI} = {}_k \underline{t}_x^k(\underline{e}^{*j}) \quad (j \in J)$$

$$M_x(k) = \{({}_k \underline{x}^{jI}, \frac{1}{|J|}) \mid j \in J\}$$

représente le nuage de ces points et  ${}_k \bar{x}^j$  la moyenne empirique de  ${}_k \underline{x}^j$ .

L'analyse de la strate  $k$  est résumée par le schéma de dualité



La description des nuages de points  $N_x(k)$  et  $M_x(k)$  se fait usuellement en prenant  $N_x^k = Dp$  la métrique diagonale des poids  $p_j$ . On fait alors l'Analyse en Composantes principales (A.C.P.) du tableau  $X^k$   $Dp$ -centré. Cette démarche nous conduit à faire  $|K|=m$  Analyses en Composantes principales. Pour lesquelles les métriques  $M_x^k (k \in K)$  pourront ne pas être choisies identiques. Ce choix dépend de la connaissance de chaque phénomène à étudier et des objectifs à atteindre. SCHEKTMAN ([37], pp 28) utilise le terme "d'idéologie".

Nous indiquerons au chapitre suivant la façon dont SCHEKTMAN et Croquette [11] abordent le problème en présentant les "idéologies" possibles pour analyser un tableau cubique.

Remarque 1 :

Nous reprenons dans ce paragraphe les notations de SCHEKTMAN et Croquette. Soit  $\underline{j}_n$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont toutes égales à l'unité, par suite :

$$g_x^{kj} = \sum_i p_i k^i j^i$$

Le barycentre des nuages  $N_x(k)$  s'écrit aussi :

$$g_x^{kj} = \sum_{jk} \bar{x}^j e_j$$

$$k \bar{x}^j = \langle k X_j^T, \underline{j}_n \rangle_{Dp}$$

Proposition et définition 3 :  $Dp$ -centrage du tableau  $X^k$

<< Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1 -  $\forall j \in J \quad k \bar{x}^j = 0$

2 -  $g_x^{kj} = 0$

Si l'une des deux propriétés est vérifiée, on dit que le tableau  $X^k$  est  $Dp$ -centré. >>

Lorsque la 1ère propriété est vérifiée, on dit que les variables  $x^{jI} (j \in J)$  sont centrées et lorsque la 2ème est vérifiée on dit que le nuage des points  $N_x^{(k)}$  est centré.

#### Définition 4

<< On dit que la variable  $x^j$  est réduite si :

$$\sigma(x^j) = 1 \quad \gg$$

#### Remarques

Grâce aux relations de dualité § (2.2.5), l'analyse des tenseurs  $x^{kIJ}$  et  $x^{kJI}$  donne exactement les mêmes nuages de points, les mêmes schémas de dualité, donc les mêmes résultats.

Lorsque I représente un ensemble de sujets soumis à des tests  $j \in J$  à divers occasions (temps)  $k \in K$ . On retrouve l'exemple traité sous les noms de "différences inter-individuelles dans des différences intra-individuelles" et "différence inter variables dans des différences inter-individuelles" par A. BUSS ([9], pp 43-44).

#### 2.2.3. Analyse du cube par stratification selon le facteur I

$$x^{iKJ} = \sum_{k,j} x(i,k,j) g_k \otimes e_j = \sum_k g_k \otimes y^i(g^{*k})$$

$y^i$  est élément de  $L_{\mathbb{R}}(G^*; E)$  et le vecteur  $y^{kJ} = y^i(g^{*k})$  ( $k \in K$ ) est le  $k$ (ème) vecteur colonne de la strate :

$$Y^i = M(y^i; (g^{*k}), (e_j))$$

le nuage :

$$N_y(i) = \{ (y^{kJ}, q_k) \mid k \in K \} \text{ des juges}$$

a pour barycentre :

$$g_y^{iJ} = \sum_k q_k y^{kJ}$$

le poids  $q_k$  de  $k$  vérifié

$$q_k > 0, \quad \sum_k q_k = 1$$

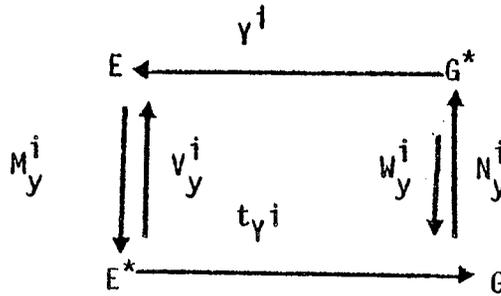
$$t_y^i = M(t_y^i; (e^{*i}), (g_k))$$

les vecteurs  $y^{jK} = t_y^i(e^{*i})$  ( $j \in J$ ) forment le nuage des variables

$$M_y(i) = \{ (y^{jK}, \frac{1}{[J]}) \mid j \in J \}$$

$\bar{y}^j$  est la moyenne empirique de  $y^j$ .

L'analyse de la strate  $i$  est résumée par schéma de dualité.



La description des nuages de points  $N_y(i)$  et  $M_y(i)$  se fait usuellement en prenant  $N_y^i = D_q$  la métrique diagonale des poids  $q_k$ .

On fait alors l'A.C.P. du tableau  $Y^i D_q$ -centré.

Lorsque  $K$  est un ensemble de périodes (temps, expériences, occasions etc ...) analyser le nuage de point :

- $N_y(i)$  revient simplement à décrire l'évolution de la trajectoire  $i$ .  
La visualisation se faisant dans les plans factoriels
- $M_y(i)$  revient à décrire les liaisons entre variables  $j \in J$  observées aux mêmes instants  $t \in T$  sur un même individu  $i$ .

#### Remarques

- Un exemple classique est celui des grandeurs  
 $P$  comme production totale (des biens de consommation et d'équipement)  
 $C$  comme celle des biens de consommation  
 $I$  comme celle des biens d'équipement (égale à l'investissement)  
 $R$  comme les revenus distribués  
 Lesquelles grandeurs sont observées à chaque période  $t \in T$  dans un pays  $i$ .  
 Ces variables sont liées par des relations affines dits modèles économique de Keynes (cf Malinvaud [29] pp 55, 129)
- Lorsque  $I$  représente un ensemble de sujets soumis à des tests  $j \in J$  à divers occasions  $k \in K$ , on retrouve l'exemple traité par A. BUSS ([9], pp 43-44) sous les noms de "différences inter-occasions dans des différences intra-individuelles" et "différences inter-variables dans des changements intra-individuels".

2.2.4. Analyse du cube par stratification selon le facteur J

$$x^{jKI} = \sum_{k,i} x(j,k,i) g_k f_i = \sum_k g_k z^j(g^{*k})$$

$z^j$  est élément de  $L_{\mathbb{R}}(G^*;F)$

$j_z^{kI} = z^j(g^{*k})$  ( $k \in K$ ) est le k(ème) vecteur colonne de la strate

$$Z^j = M(z^j; (g^{*k}), (f_i))$$

notons respectivement

$$N_Z(j) = \{(j_z^{kI}, q_k) \mid k \in K\}$$

$$g_z^{jI} = \sum_k q_k j_z^{kI}$$

le nuage des juges et son barycentre

$$t_Z^j = M(t_Z^j; (f^{*i}), (g_k))$$

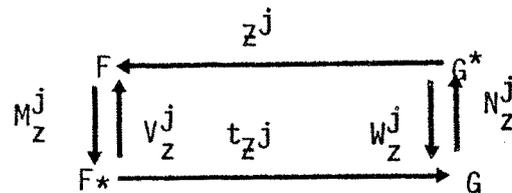
les vecteurs  $j_z^{iK} = t_Z^j(f^{*i})$  ( $i \in I$ ) forment le nuage des individus

$$M_Z(j) = \{(j_z^{iK}, p_i) \mid i \in I\}$$

de barycentre

$$g_z^{jK} = \sum_i p_i j_z^{iK}$$

L'analyse de la strate j est résumée par le schéma de dualité



Pour la description des nuages de points  $N_Z(j)$  et  $M_Z(j)$  il y a lieu d'observer trois cas concernant le choix des métriques.

1er cas :  $N_Z^j = D_q, p_i = \frac{1}{|I|}$  et  $M_Z^j$  quelconque

Alors on fait l'ACP du tableau  $Z^j$   $D_q$ -centré

2ème cas :  $M_Z^j = D_p, q_k = \frac{1}{|K|}$  et  $N_Z^j$  quelconque

Alors on fait l'ACP du tableau  $t_Z^j$   $D_p$ -centré.

3ème cas :  $M_Z^j = D_p$  et  $N_Z^j = D_q$ . Alors on fait l'ACP du tableau  $Z^j$  (ou  $t_Z^j$ ) centré en ligne et colonne, i.e. la transposée  $t_Z^j$  du tableau  $Z^j$   $D_q$ -centré est  $D_p$ -centré. On le note  $Z^j$  est  $D_q$ - $D_p$ -centré. Lorsqu'en particulier  $Z^j$  est un plan d'expérience d'ordre deux (simple) analyser  $Z^j$  revient dans le cas d'un  $D_q$ - $D_p$ -centrage à analyser le tableau des résidus.

Lorsqu'en particulier  $K$  est l'ensemble des temps, analyser le nuage  $M_z(j)$  revient dans le cas d'un  $D_q$  - centrage à décrire les liaisons entre échantillons de la variable  $j$  construits à partir des individus  $i \in I$ . Et dans le cas d'un  $D_p$  - centrage à décrire les individus  $i \in I$  par rapport à la variable  $j$ .

De même analyser le nuage  $N_z(j)$  revient dans le cas d'un  $D_q$  - centrage à décrire l'évolution de la variable  $j$  observée globalement sur un échantillon d'individus et dans le cas d'un  $D_p$  - centrage à décrire entre autres les liaisons auto-regressives de cette même variable :

$j^z^t$  est-il un processus auto-régressif d'ordre un ? i.e

$$j^z^t = a j^z^{t-1} + \varepsilon_t \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{cf PHAM DINH TUAN [ 33]})$$

Exemples 1 : Analyse de  $M_z(j)$

1)  $D_q$  - centrage

Le prix  $j$  du produit manufacturé  $i$  est-il moins explicable par le prix  $j$  de la matière première  $i'$  que par celui de la matière première  $i''$  ?

2)  $D_p$  - centrage

Description de plusieurs denrées agricoles  $i \in I$  à travers (par exemple) leur rendement  $j \in J$

Exemple 2 : Analyse de  $N_z(j)$

Evolution du prix  $j$  du pétrole pratiqué par différents pays producteurs  $i \in I$  pendant la période allant de l'après deuxième guerre mondiale jusqu'à nos jours.

Exemple 3 : La sociomatrice de Thomas ([ 32], pp 294)

$I$  et  $K$  ( $=I$ ) sont l'ensemble des élèves d'une classe.

Le tableau

$$Z^j = (x(j, k, i))_{\substack{k \in K \\ i \in I}}$$

où  $x(j, k, i)$  est la note d'affinité (de 0 à 20) donnée par l'élève  $k$  à l'élève  $i$  avec :  $x(j, i, i) = 20$

est appelé sociomatrice de Thomas.

$N_z(j)$  est le nuage des élèves par rapport aux notes qu'ils donnent et  $M_z(j)$  celui par rapport aux notes reçues.

Exemple 4 : Les phénomènes spatio-temporels

$X_{j-t}(\omega)$  représente par exemple la hauteur des pluies tombées en différents endroits  $\omega \in I$  à des périodes  $t \in T$  antérieures à une date  $j \in J$ .

$$t \in T_j = \{0, \dots, j\}$$

pour  $t$  fixé

$X_{j-t}(\omega)$   
est la réalisation de la trajectoire

$$t \longrightarrow X_{j-t}(\omega)$$

Pour les vecteurs

$$j \overset{tI}{\underset{Z}{\longleftarrow}} \text{ de } N_Z(j)$$

leur moyenne dite moyenne temporelle

$$j \overset{tI}{\underset{Z}{\longleftarrow}} = \sum_{\omega} p_{\omega} X_{j-t}(\omega)$$

est la réalisation de la trajectoire moyenne.

$$t \longrightarrow j \overset{tI}{\underset{Z}{\longleftarrow}}$$

leur covariance

$$\langle j \overset{tI}{\underset{Z}{\longleftarrow}}, j \overset{t'I}{\underset{Z}{\longleftarrow}} \rangle_{D_p} = C(t, t')$$

est la fonction d'auto-covariance et

$C(t, t)$  est dite variance temporelle.

Pour les vecteurs

$$j \overset{\omega T}{\underset{Z}{\longleftarrow}} (\omega \in I)$$

du nuage  $M_Z(j)$ , leur moyenne  $j \overset{\omega T}{\underset{Z}{\longleftarrow}} = \sum_{\omega} X_{j-t}(\omega) q_{\omega}$  dite moyenne spatiale et leur variance.

$$\langle j \overset{\omega T}{\underset{Z}{\longleftarrow}}, j \overset{\omega' T}{\underset{Z}{\longleftarrow}} \rangle_{D_q}$$

la variance spatiale

Exemple 5

<< Lorsque  $I$  représente un ensemble de sujets soumis à des tests  $j \in J$  à diverses occasions  $k \in K$ . On retrouve l'exemple traité sous les noms de "différences inter individuelles dans des changements intra-individuelles" et "différences inter-occasions dans des différences inter-individuelles" par A. BUSS ([9], pp 43-44). >>

2.2.5. Les relations de dualité

Les strates  $x^i_{h_1} \in L_{\mathbb{R}}(E_2^*; E_3)$  ( $i_{h_1} \in I_1$ ) (cf notations du paragraphe § (2.1.2.)) permettent d'établir la dualité entre individus  $\omega_i \in I$ , juge  $\omega_k \in K$  et variable  $j \in J$  en croisant lignes et colonnes des tableaux  $X^i_{h_1}$  qui leur sont associés par les relations :

$$\begin{aligned} X_{kij} &= X^j_k(\omega_i) = e^{*j}_k(x^i_{h_1}) = \omega_i(x^j_k) = f^{*i}_k(x^{jI}) \\ &= j^k Z^k(\omega_i) = g^{*k}_j(j^i K) = \omega_i(j^k) = f^{*i}_j(j^{kI}) \\ &= i^j Y^j(\omega_k) = e^{*j}_i(y^{kJ}) = \omega_k(i^j) = g^{*k}_i(i^{jK}) \\ &= j^i Z^i(\omega_k) = f^{*i}_j(j^{kI}) = \omega_k(j^i) = g^{*k}_j(j^{iK}) \end{aligned}$$

qui se traduisent dans l'espace vectoriel E par l'égalité des vecteurs :

$$\begin{aligned} k^i X^{iJ} &= \sum_j e^{*j}_k(x^i_{h_1}) e_j \\ &= i^j Y^{jK} \end{aligned}$$

intersection entre les strates i et k (voir fig : 2.7) puisque l'on a respectivement dans G et F :

$$\begin{aligned} i^j Y^{jK} &= j^i Z^i K \\ k^i X^{iJ} &= j^i Z^i K \end{aligned}$$

Il en résulte que les métriques :

$$M^i_Z = D_p \text{ et } N^j_Z = D_q$$

permettent l'étude des vecteurs :

$$j^i Z^i K (i \in I), j^k Z^k I (k \in K)$$

en faisant intervenir des notions de moyenne, de variance etc ...

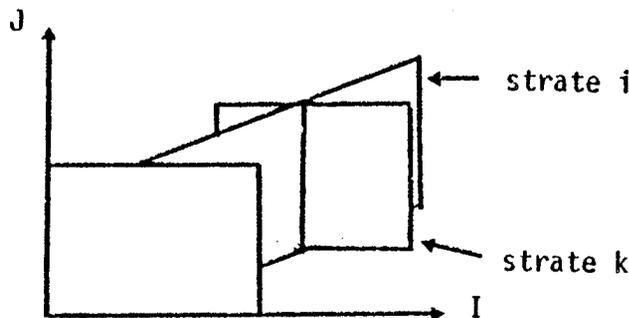


fig : 2.7

Les tenseurs d'ordre trois associés aux applications linéaires de  $L_{\mathbb{R}}(E_1^* \otimes E_2 \otimes E_3)$  définissent des relations de dualité issues du croisement de vecteurs de  $E_1$  et de tenseurs d'ordre deux de  $E_2 \otimes E_3$  avec :

$$E_h \in \{E, F, G\} \quad (h=1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} X_{kij} &= {}_i Y^j (\omega_k) = f^{*i} \otimes e^{*j} (X^k) = \omega_k ({}_i Y^j) = g^{*k} ({}_i Y^{jK}) \\ &= {}_k X^j (\omega_i) = g^{*k} \otimes e^{*j} (X^i) = \omega_i ({}_k X^j) = f^{*i} ({}_k X^{jI}) \\ &= Z^j (\omega_{i,k}) = e^{*j} ({}_k X^{iJ}) = \omega_{i,k} (Z^j) = g^{*k} \otimes f^{*i} (Z^j) \end{aligned}$$

avec  $\omega_{i,k} = (\omega_i, \omega_k)$

$X^k$  appartient à l'espace des juges  $F \otimes E$ ,  $X^i$  à l'espace des individus  $G \otimes E$  et  $Z^j$  à l'espace des variables  $G \otimes F$ .

#### Remarque

Les relations de dualité définies à partir des tenseurs d'ordre quatre ne seront pas données, compte tenu du nombre important de produit tensoriel de quatre espaces vectoriels qu'on peut construire à partir des trois seuls espaces  $E, F$  et  $G$ .

### § (II.3) Analyses inter-strates

#### 2.3.1. Analyse inter-strates k

Dans ce paragraphe, on se propose d'analyser le nuage  $N_X = \{(g_X^{kJ}, q_k) \mid (k \in K)\}$  "d'individus moyens"

afin de rendre compte des proximités globales existant entre les  $m$  "populations" d'individus, chacune ayant pour représentant le nuage des points :

$$N_X(k) = \{({}_k X^{iJ}, p_i) \mid i \in I\}$$

de barycentre

$$g_X^{kJ} = \sum_i p_i {}_k X^{iJ}$$

Les analyses faites au paragraphe (2.2.2.) ne tenaient pas compte de leurs positions.

Lorsque  $K$  est un ensemble de périodes, Bourroche ([8]) analyse l'évolution de ces populations en recherchant notamment les axes d'évolution qui différencient le mieux possible les nuages de points  $N_X(k)$ .

C'est un problème du type Analyse Factorielle Discriminante présenté par l'auteur comme une Analyse en Composants Principales de centres de gravités :

$$g_x^{kJ} \quad (k \in K)$$

soit :

$G_x = M(g_x; (g^{*k}), (e_j))$  où  $g_x$  est un élément de  $L_{\mathbb{R}}(G^*; E)$  vérifiant pour tout  $k \in K$

$$g_x(g^{*k}) = g_x^{kJ}$$

$${}^t G_x = M({}^t g_x; (e^{*j}), (g_k))$$

On forme ainsi le nuage des variables

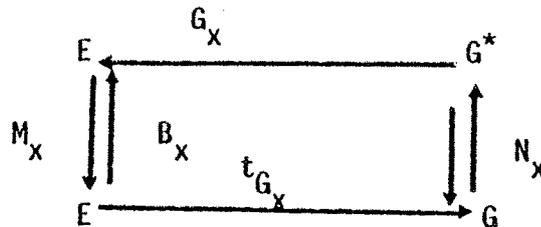
$$M_x = \left\{ \left( g_x^{jK}, \frac{1}{|J|} \right) \mid j \in J \right\}$$

$$g_x^{jK} = {}^t g_x(e^{*j})(j \in J) \\ = ({}_k \bar{x}^j)_{k \in K}$$

Ce nuage est centré sur la moyenne Empirique des  $g_x^j$

$$\bar{g}_x^j = \frac{1}{k} \sum_k g_x^j = \bar{x}^j$$

On effectue alors l'analyse des nuages de points  $N_x$  et  $M_x$  résumée par le schéma de dualité



- Pour analyser les proximités globales entre les  $m$  nuages de points  $N_x(k)$ , on prend pour métriques :

$$N_x = D_q, M_x = M_x^k \quad \forall k \in K$$

où  $M_x^k$  est la métrique utilisée pour analyser la strate  $k$ .

On fait alors l'A.C.P. du tableau  $G_x$   $D_q$ -centré.

- Pour rechercher les axes qui différencient le mieux possible les  $m$  nuages de points  $N_x(k)$ , on prend pour métriques :

$$N_x = D_q, M_x = V_x^{-1}$$

où  $V_x$  est la forme quadratique d'inertie totale classiquement composée en somme de deux formes quadratiques :

$$V_x = W_x + B_x$$

où  $W_x$  est la forme quadratique d'inertie intra-strates

$$W_x = \sum_k q_k X^k D_p^k t_X^k$$

le tableau  $X^k$  étant  $D_p$ -centré et  $B_x$  est la forme quadratique d'inertie inter-strates  $k$

$$B_x = G_x D_q^t G_x$$

On fait alors l'ACP du tableau  $G_x D_q$ -centré.

L'analyse des nuages de points  $N_x$  et  $M_x$  est celle de BOUROCHE [8] dans le cas particulier où  $K$  est l'ensemble des temps.

Remarque : Analyse inter-strate  $i$

Pour obtenir les résultats de l'analyse inter-strate  $i$ , il suffit de faire une transcription des résultats de l'analyse inter-strates  $k$  en prenant la précaution de remplacer  $i$  en  $k$ ,  $X$  (resp  $x$ ) en  $Y$  (resp  $y$ ),  $G$  en  $F$  et  $K$  en  $I$

2.3.2. Remarque : Analyse inter-strates  $j$

Au paragraphe précédent, nous avons analysé les proximités globales entre nuages d'individus (resp. de juges) de représentants choisis dans l'espace vectoriel  $E$ . Dans ce paragraphe nous analysons le même phénomène à la différence que sa représentation se fait dans  $G$  en ce qui concerne les individus et dans  $F$  en ce qui concerne les juges (cf. § (2.2.5)).

a) Analyse dans  $G$

Le nuage d'individus moyens

$$M_z = \left\{ \left( g_z^{jK}, \frac{1}{|J|} \right) \mid j \in J \right\}$$

avec

$$g_z^{jK} = \sum_i p_i j_z^{iK}$$

Le barycentre du nuage

$$M_z(j) = \left\{ \left( j_z^{iK}, p_i \right) \mid i \in I_j \right\} \quad \text{des individus}$$

est identique au nuage des variables  $M_x$  qui a été étudié au paragraphe (2.3.1.) puisque :

$$g_z^{jK} = \sum_i p_i j_z^{iK} = \left( \sum_i p_i x_{ijk} \right)_{k \in K} = \left( \bar{x}^j \right)_k = g_x^{jK}$$

b) Analyse dans F

Il suffit d'adapter à ce paragraphe les résultats du (a) en remplaçant  $K$  par  $I$ ,  $p_i$  par  $q_k$  et  $X$  en  $Y$ .

Exemple : La reconnaissance des formes.

Nous modifions quelque peu la présentation de J. ROMEDER ([35], pp 5). Nous posons le problème de la reconnaissance des lettres de l'alphabet en vue de leur lecture automatique. Nous disposons pour ce faire d'un ensemble  $K$  de lettres (de l'alphabet français par exemple) et d'un certain nombre de personnes  $i \in I$  chargées de les écrire dans des carrés identiques, subdivisés chacun en 36 petits carrés  $j \in J$  (voir fig. 2.8).

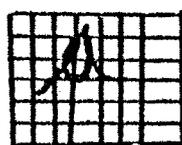


fig : 2.8

Le cube  $x$  de données est défini par :

$$x : I \times K \times J \longrightarrow \{0,1\}$$

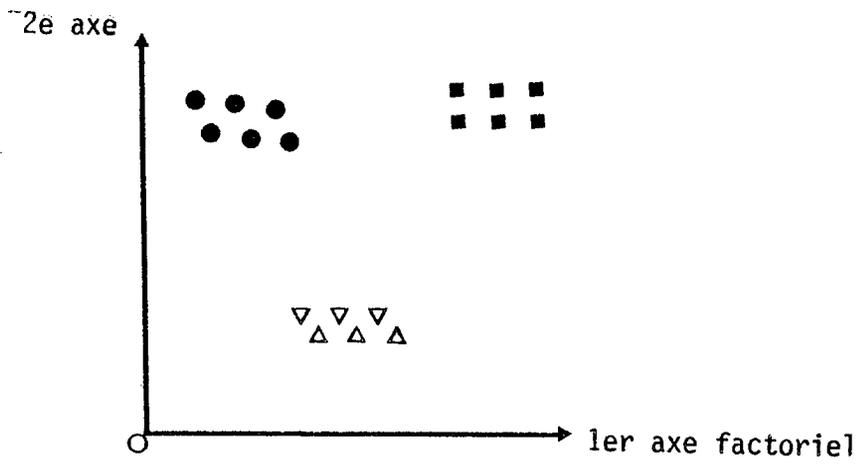
$$(i,k,j) \longrightarrow x(i,k,j) = \begin{cases} 1 & \text{Si l'intersection entre le } j(\text{ème}) \\ & \text{petit carré et la } k(\text{ème}) \text{ lettre} \\ & \text{écrite par la personne } i \text{ est non} \\ & \text{vide} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Si l'analyse discriminante des 26 nuages de points :

$$N_x(k) = \left( \begin{array}{c} i^j \\ k \\ \hline | I \end{array} , \underline{1} \right) \quad (k=1,2,\dots,26)$$

fait apparaître une séparation nette des strates sur les plans factoriels (voir : fig. 2.9), alors chacune des lettres est écrite différemment par l'ensemble des individus, ce qui implique qu'elles n'ont pas la même forme. Mais d'autres analyses, telles que celles des strates  $X^k$  peuvent révéler les groupes d'individus ayant sensiblement la même écriture.

L'analyse de la strate  $Y^i$  permet d'analyser l'écriture d'un individu à travers les 26 lettres de l'alphabet. Nous pouvons aussi étudier la prévisior notamment en affectant une personne supplémentaire à un des groupes d'individus  $N_x(k)$  déjà existant.



lettre	code
a	●
f	■
m	▽

fig : 2.9

CHAPITRE : III

ANALYSE DES TENSEURS D'ORDRE TROIS



### Introduction Générale

Soient  $E_h \in \{ E, F, G \}$  ( $h=1,2,3$ ) un espace Euclidien

$I_h \in \{ I, J, K \}$  ( $h=1,2,3$ ) un ensemble et

$X = (x(i_{h_1}, i_{h_2}, i_{h_3}))$  le cube de données définis  
 $i_{h_1} \in I_1$   
 $i_{h_2} \in I_2$   
 $i_{h_3} \in I_3$

Sur le produit Cartésien  $I_1 \times I_2 \times I_3$ .

Si l'on note  $(e_h)$  la base canonique de  $E_h$ , on construit à partir de  $X$  le tenseur :

$$\chi^{I_1 I_2 I_3} = \sum_{i_h} \sum_{i_h} \sum_{i_h} x(i_{h_1}, i_{h_2}, i_{h_3}) e_{-h_1} \otimes e_{-h_2} \otimes e_{-h_3} \text{ élément de } E_1 \otimes E_2 \otimes E_3.$$

Le produit tensoriel  $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$  peut être considéré grâce à la propriété universelle comme l'un des produits tensoriels  $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$ ;  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ . Dans ce chapitre nous nous proposons d'analyser le tenseur  $\chi^{I_1 I_2 I_3}$  comme élément de  $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$  puis de  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ . Cette analyse consiste à établir dans la partie A tous les développements mathématiques nécessaires (mise en évidence des nuages de points qui seront soumis à la description, établissement des schémas de dualité, diagonalisation de la matrice "d'inertie" etc ...) à l'analyse statistique proposée dans la partie B (centrage des nuages, choix de métriques, qualité de représentation, indicateurs de liaisons etc ...). Dans la troisième partie préciserons la notion de référentiel introduite par JAFFRENOU [24] et l'HERMIER DES PLANTES [28] puis nous en ferons l'analyse.



Partie A : les développements mathématiques

§ (A.1) Analyse des différences

On se propose d'analyser dans ce paragraphe le nuage des points  $N = \{((g_x^{kJ} - g_y^{iJ}), \bar{p}_i, q_k) / (k \in K, i \in I)\}$  ... pour rendre compte au mieux des différences existant entre individus et juges à l'aide du tenseur  $\chi$  de  $(G \otimes F) \otimes E$  associé à l'élément  $x$  de  $L_{\mathbb{R}}(G^* \otimes F^*; E)$  de matrice associée  $X = M(x; (g^{*k} \otimes f^{*i}), (e_j))$  et tel que pour tout  $(k, i) \in K \times I$   $x(g^{*k} \otimes f^{*i}) = (g_x^{kJ} - g_y^{iJ})$  la différence entre populations moyennes I et K.

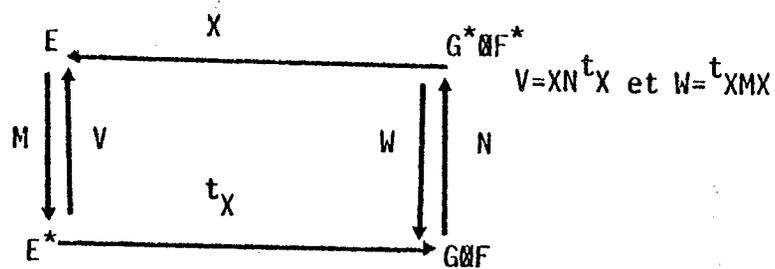
Les tenseurs :

$$\begin{aligned} \tilde{g}^j &= t_x(e^{*j}) \quad (j \in J) \\ &= \sum_{k,i} (\bar{x}_k^j - \bar{y}_i^j) g_k \otimes f_i \end{aligned}$$

permettent de construire dans  $G \otimes F$  le nuage des variables

$$M = \{ \tilde{g}^j, \frac{1}{|J|} \mid j \in J \}$$

dont l'analyse est résumée par le schéma de dualité



L'analyse spectrale de  $VM$  permet de construire les vecteurs propres  $\underline{u}^{\lambda J}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots$ )  $M$ -orthonormés dans  $E$  et  $\underline{c}^{\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots$ ) tenseurs  $N$ -orthogonaux de  $G \otimes F$  qui vérifient  $\underline{c}^{\lambda} = t_X M \underline{u}^{\lambda J}$ .

Le vecteur  $(g_x^{kJ} - g_y^{iJ})$  s'écrit dans la base  $\{\underline{u}^{\lambda J} \mid \lambda = 1, 2, \dots\}$

$$(g_x^{kJ} - g_y^{iJ}) = \sum_{\lambda} \alpha(k, i, \lambda) \underline{u}^{\lambda J}$$

de plus

$$|g_x^{kJ} - g_y^{iJ}|_M^2 = \sum_{\lambda} (\alpha(k, i, \lambda))^2$$

Ce qui nous permettra de construire un indice au paragraphe (B.1.1.) à l'aide de :

$$\underline{c}^{\lambda} = \sum_{k,i} \alpha(k, i, \lambda) g_k \otimes f_i$$

§ (A.2) Analyse du tenseur  $X^{KIJ}$  élément de  $(G \otimes F) \otimes E$  :

Analyse du nuage global

Dans ce paragraphe on se propose de faire la description du nuage global des points  $N = \bigcup_k N_x(k)$  à l'aide du tenseur  $X^{KIJ}$  de  $(G \otimes F) \otimes E$  associé à l'élément  $z_x$  de  $L_{\mathbb{R}}(G^* \otimes F^*; E)$  de matrice  $Z_x$  associée :

$$\begin{aligned} X^{KIJ} &= \sum_{k,i,j} \sum_{\alpha} X(k,i,j) (g_k \otimes f_i) \otimes e_j \\ &= \sum_{k,i} \sum_{\alpha} (g_k \otimes f_i) \otimes Z_x (g^{*k} \otimes f^{*i}) \end{aligned}$$

pour un  $k$  donné, les vecteurs

$$z_x^{iJ} = z_x (g^{*k} \otimes f^{*i}) \quad (i \in I)$$

forment le nuage des points

$$N_x(k) = \{ (z_x^{iJ}, p_i) \mid i \in I \}$$

et le nuage global des points individus

$$N = \bigcup_k N_x(k)$$

a pour barycentre

$$g^J = \sum_k q_k \frac{g^{kJ}}{q_x}$$

La transposée de  $Z_x$  a pour matrice

$$\begin{aligned} {}^t Z_x &= M({}^t Z_x; (e^{*j}), (g_k \otimes f_i)) \\ z_x^j &= {}^t z_x (e^{*j}) \\ &= \sum_{k,i} \sum_{\alpha} X(j,k,i) g_k \otimes f_i \\ &= X^{jKI} \quad (j \in J) \end{aligned}$$

forment le nuage des variables

$$M = \{ (z_x^j, \frac{1}{|J|}) \mid j \in J \}$$

par suite, ce problème est aussi celui de la description des liaisons existantes entre les strates  $j$ .

Le tableau  $Z_X$  s'écrit :

$$Z_X = [1x^{1J}, \dots, 1x^{nJ}, \dots, kx^{iJ}, \dots, kx^{iJ}, \dots, mx^{1J}, \dots, mx^{xJ}]$$

$$= [X^1 | \dots | X^k | \dots | X^m]$$

$Z_X$  est la concaténation des strates obtenues par stratification du cube  $X$  selon le facteur  $K$ .

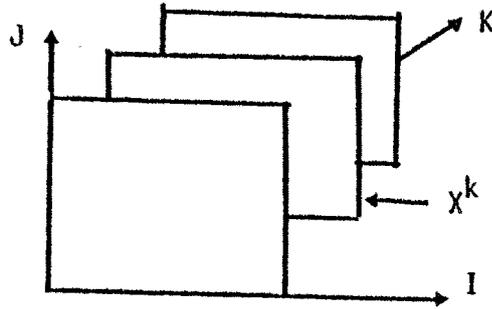
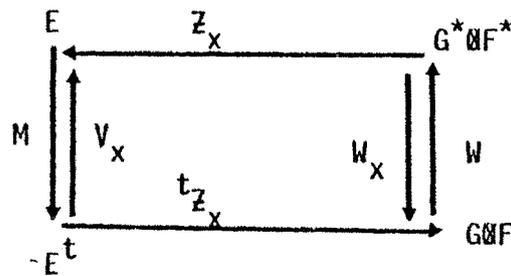


fig : 3.1

Le schéma de dualité associé à l'analyse du tableau  $Z_X$  est le suivant :



L'analyse spectrale de  $V_X^M$  permet de construire les vecteurs propres  $\underline{u}^{\lambda J}$  ( $\lambda=1, 2, \dots$ )  $M$ -orthonormés dans  $E$  et  $c^\lambda$  ( $\lambda=1, 2, \dots$ ) tenseurs  $N$ -orthogonaux de  $G \otimes F$  qui vérifient  $c^\lambda = t_{Z_X} M \underline{u}^{\lambda J}$

Les vecteurs  $kx^{iJ}$  s'écrivent dans la base  $\{\underline{u}^{\lambda J}\}$

$$kx^{iJ} = \sum_{\lambda} \alpha(k, i, \lambda) \underline{u}^{\lambda J}$$

$$|kx^{iJ}|^2 = \sum_{\lambda} (\alpha(k, i, \lambda))^2$$

Ce qui nous permettra avec  $c^\lambda = \sum_{k, i} \alpha(k, i, \lambda) g_{k, i}$  de construire un indice au paragraphe (B.1.2).

Remarque 1 :

Grâce aux relations de dualité §(2.2.5), l'analyse des tenseurs  $x^{JKI}$ , éléments de  $E \otimes (G \otimes F)$  et  $x^{KIJ}$  éléments de  $(G \otimes F) \otimes E$  donne exactement les mêmes nuages de points, les mêmes schémas de dualité, donc les mêmes résultats, ce malgré une permutation des vecteurs de base.

Remarque 2 : A propos de l'analyse du tenseur  $x^{IKJ}$  élément de  $(F \otimes G) \otimes E$

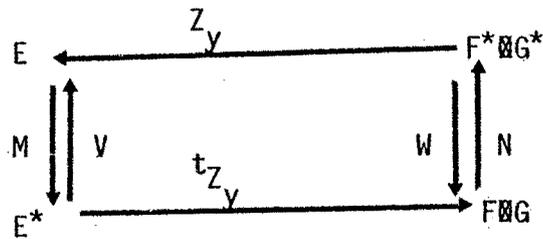
Le tableau  $Z_y$  associé à ce tenseur est la concaténation (i.e mise côte à côte) des strates  $Y^i (i \in I)$  par conséquent le formalisme mathématique lié à son analyse est identique à celui du paragraphe précédent. Ce tenseur permet la description des nuages de points :

$$N = \bigcup_i N_y(i)$$

$$M = \{ (x^{jIK}, \frac{1}{|J|} \mid j \in J) \}$$

$$\text{avec } N_y(i) = \{ ({}_i y^{kJ}, q_k \mid k \in K) \}$$

Le schéma de dualité associé à l'analyse de ce tableau est le suivant



Remarque 2.1 :

Lorsque l'ensemble K représente l'ensemble des temps, analyser N revient à décrire l'évolution conjointe des différents individus  $i \in I$  dans les plans factoriels, en effet soit  $\{u_1, u_2\}$  la base du premier plan factoriel issue de l'ACP du tableau  $Z_y$ .

La projection du vecteur  ${}_i y^{tJ}$  s'écrit dans cette base :

$$\alpha_{i,1}(t)u_1 + \alpha_{i,2}(t)u_2 \quad t \in T$$

$\alpha_{i,1}(t)$  et  $\alpha_{i,2}(t)$  s'interprètent comme abscisse et ordonnée du point  $i \in I$  à l'instant  $t \in T$ . La courbe joignant les points  $(\alpha_{i,1}(t), \alpha_{i,2}(t)) (t \in T)$  constitue la trajectoire du point  $i$  (voir fig. 3.2).

Chacun des axes factoriels peut ne pas être un axe des temps (ou d'évolution) dans le cas où il l'est, il s'interprète en termes de tendance.

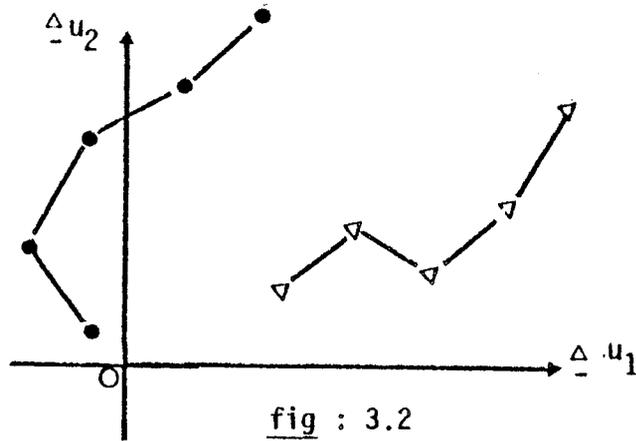


fig : 3.2

§(A.3) Analyse du tenseur  $x^{KIJ}$  élément de  $G\mathbb{M}(F\mathbb{M}E)$  : Comparaison de plusieurs tableaux de données

Dans ce paragraphe nous proposons une manière d'aborder la comparaison des tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ). D'autres manières seront présentées au chapitre IV à titre de comparaison de procédures : celle d'Escoufier [18] et de l'Hermier des plantes [28] en termes d'opérateurs, celle de SCHEKTMAN [37] en termes de métriques relationnelles, celle de Jaffrenou [24] enfin l'approche en termes de rotations procrustes (c.f. notamment Sibson [40]). Au nuage des tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) substituons celui des tenseurs de  $F\mathbb{M}E$  qui lui est équivalent (au sens de l'équivalence entre images Euclidiennes)

$$N = \{(x^{kIJ}, q_k) / k \in K\}$$

Cette analyse se fait à partir du tenseur  $x^{KIJ}$  de  $G\mathbb{M}(F\mathbb{M}E)$  associé à l'élément  $x_y$  de  $L_{\mathbb{R}}(G^*; F\mathbb{M}E)$  de matrice associée  $X_y$ .

En effet :

$$\begin{aligned} x^{KIJ} &= \sum_{k,i,j} x(k,i,j) g_k \otimes (f_i \otimes e_j) \\ &= \sum_k q_k \otimes x_y(g^{*k}) \end{aligned}$$

les tenseurs :

$$x_y(g^{*k}) = x^{kIJ} = \chi^k \quad (k \in K)$$

forment le nuage des juges  $N$  de barycentre :

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_k q_k \chi^k \\ t_{X_y} &= M(t_{X_y}; (f^{*i} \otimes e^{*j}), (g_k)) \end{aligned}$$

pour  $i$  fixé, les vecteurs

$${}_i y^{jK} = t_{xy}({}_i f^{*i} \otimes e^{*j}) \quad (j \in J)$$

forment le nuage  $M_y(i)$  des variables et  $M = \bigcup_i M_y(i)$

est le nuage global qui sera soumis à la description.

La matrice  $t_{xy}$  s'écrit :

$$t_{xy} = [t_y^1 | \dots | t_y^i | \dots | t_y^n]$$

par conséquent le tableau  $X_y$  est la superposition des strates obtenues par stratification du cube  $X$  suivant le facteur  $I$  (fig. 3.3).

Le schéma de dualité suivant est associé à l'analyse du tableau  $X_y$  :

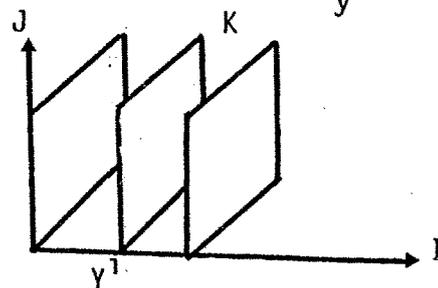
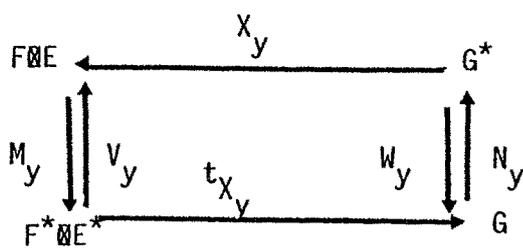


fig : 3.3

Remarque : Analyse du tenseur  $x^{KIJ}$  élément de  $G \otimes (E \otimes F)$

On aurait pu décrire le nuage des tableaux  $X^k (k \in K)$  à l'aide du nuage équivalent des tenseurs de  $E \otimes F$  à partir du tenseur  $x^{KJI}$  :

$$\{ (x^{kJI}, q_k) \mid k \in K \}$$

La matrice  $X_z$  qui lui est associée est la superposition des strates  $Z^j (j \in J)$

Le nuage des variables est le suivant :

$$M = \bigcup_j M_z(j)$$

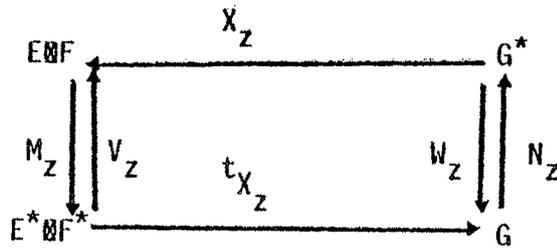
$$M_z(j) = \{ ({}_j z^{iK}, \frac{1}{|I|}) \mid i \in I \}$$

Compte tenu du fait qu'on a la relation de dualité :

$${}_j z^{iK} = {}_i y^{jK}$$

le problème se ramène à celui étudié au début de ce paragraphe.

Le schéma de dualité pour cette analyse est le suivant :



§ (A.4) Analyse du tenseur  $x^{IKJ}$  élément de  $F \otimes (G \otimes E)$  : Métriques intra et métriques inter

Dans ce paragraphe on se propose tout d'abord de décrire les liaisons entre  $m$  paquets de  $p$  variables chacun à l'aide des tenseurs  $x^{IKJ}$  de  $F \otimes (G \otimes E)$  associé à l'élément  $y_x$  de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; G \otimes E)$  de matrice  $Y_x$  associée, puis de caractériser le rôle fondamental de certaines matrices servant à construire les métriques dans  $G \otimes E$ .

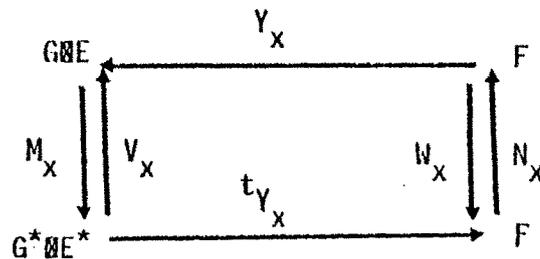
Les nuages de points étudiés sont :

$$M = \bigoplus_k M_x(k)$$

$$M_x(k) = \left\{ \left( \begin{matrix} x^{jI} \\ k \end{matrix}, \underline{1} \right) \mid k \in J \right\}$$

$$N = \left\{ \left( x^{iKJ}, p_i \right) \mid i \in I \right\}$$

La matrice  $Y_x$  est la superposition des strates  $x^k$  ( $k \in K$ ) par conséquent son analyse est identique à celle du tableau  $X_y$  du paragraphe précédent. Le schéma de dualité associé à l'analyse de  $Y_x$  est le suivant :



Métriques intra et métriques inter

Décomposons  $G$  en :  $G = \bigoplus_k \Delta_{-g_k}$

où  $\Delta_{-g_k}$  est la droite engendrée par le vecteur de base  $g_k$  par suite :

$$G \otimes E = \bigoplus_k (\Delta_{-g_k} \otimes E)$$

$\Delta_{g_k} \otimes E$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $\{g_k \otimes e_j / j \in J\}$  et est isomorphe à  $E$ .

Dans ce cas la métrique :

$$M_X = \left[ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} k \in K \\ j \in J \end{matrix} \\ m(g_k \otimes e_j, g_{k'} \otimes e_{j'}) & \\ & \begin{matrix} k \in K \\ j' \in J \end{matrix} \end{array} \right]$$

s'écrit comme matrice bloc

$$M_X = (M_{kk'})_{\substack{k \in K \\ k' \in K}}$$

$$M_{kk'} = (m(g_k \otimes e_j, g_{k'} \otimes e_{j'}))_{\substack{j \in J \\ j' \in J}}$$

$m_{kk'}$  ( $k=k'$ ) est une forme bilinéaire symétrique que l'on supposera définie positive sur  $\Delta_{g_k} \otimes E$ .

Elle permet de munir cet espace vectoriel d'un produit scalaire de matrice associée :

$M_{kk'}$  ( $k=k'$ ) appelé métrique intra

$m_{kk'}$  ( $k \neq k'$ ) est une forme bilinéaire définie sur  $(\Delta_{g_k} \otimes E) \times (\Delta_{g_{k'}} \otimes E)$ .

Elle permet de fixer les positions des sous-espaces vectoriels  $\Delta_{g_k} \otimes E$  et  $\Delta_{g_{k'}} \otimes E$  dans  $G \otimes E$ .

De matrice associée  $M_{kk'}$  ( $k \neq k'$ ), elle est appelée métrique inter par CROQUETTE [11].

Quelques métriques  $M_X$

Si  $m(g_k \otimes e_j, g_{k'} \otimes e_{j'}) = 0 \quad \forall k \neq k' \in K$

$M_X$  a une structure diagonale

$$M_X = \left[ \begin{array}{cc} M_{kk} & 0 \\ & M_{kk} \\ 0 & & M_{mm} \end{array} \right]$$

Les sous-espaces vectoriels  $\Delta_{g_k} \otimes E$  ( $k \in K$ ) sont deux à deux  $M_X$ -orthogonaux.

Connaissant  $M_{kk}$  ( $k \in K$ ) on peut tenter de construire des métriques inter adaptées aux problèmes traités suivant la méthode proposée par SCHEKTMAN [ 37].

$M_{kk'} = n_{kk'}$ ,  $M$ , où  $M$  définit un produit scalaire dans  $E$ ,  $n_{kk'} = n_{k'k}$  et  $n_{kk} > 0$ .

Dans ce cas on a :

$$M_X = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} k \in K \\ k' \in K \end{matrix}$$

$$= N \otimes M$$

$$\text{avec } N = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} k \in K \\ k' \in K \end{matrix}$$

Si  $N$  définit un produit scalaire dans  $G$  :

$$n_{kk'} = \langle g_k, g_{k'} \rangle_N$$

on a

$$\langle g_k \otimes e_j, g_{k'} \otimes e_{j'} \rangle_{N \otimes M} = \langle g_k, g_{k'} \rangle_N \langle e_j, e_{j'} \rangle_M$$

posons

$$\cos \alpha = \frac{\langle e_j, e_{j'} \rangle_M}{|e_j|_M |e_{j'}|_M} \qquad \cos \beta = \frac{\langle g_k, g_{k'} \rangle_N}{|g_k|_N |g_{k'}|_N}$$

Il vient alors lorsque  $k=k'$

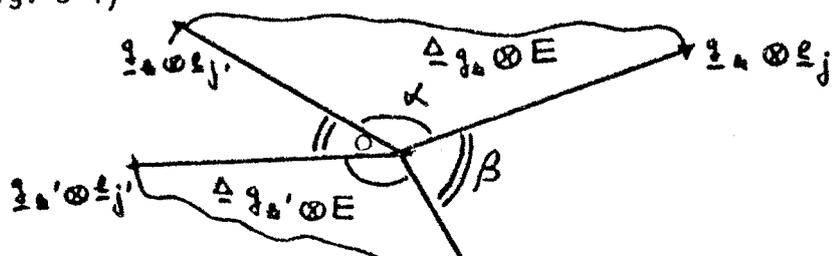
$$\cos(g_k \otimes e_j, g_k \otimes e_{j'}) = \cos \alpha$$

Alors les vecteurs de base de  $\Delta_{g_k} \otimes E$  et  $E$  forment le même angle lorsque  $j=j'$

$$\cos(g_k \otimes e_j, g_{k'} \otimes e_j) = \cos \beta$$

alors les  $j$ (ème) vecteurs de base de  $\Delta_{g_k} \otimes E$  et  $\Delta_{g_{k'}} \otimes E$  ( $k \neq k' \in K$ ) forment un angle constant.

On voit ainsi qu'ici  $M$  joue le rôle de métrique intra et  $N$  celui de métrique inter (voir fig. 3-4)





Seules les positions entre sous-espaces consécutifs sont considérées. Les métriques treillis seront utiles dans les problèmes où une information ordinale sur les nuages  $N_x(k)$  ( $k \in K$ ) doit être prise en compte (nous précisons cela au paragraphe § (4.2)).

Propriété (1)

$$\langle\langle M_x \text{ est symétrique } \quad {}^t M_{kk'} = M_{k'k} \quad \forall k, k' \in K \quad \rangle\rangle$$

Les individus  $i \in I$  se décomposent en :

$$\begin{aligned} x^{iKJ} &= y_{\sim}^i = \sum_k g_k \alpha_k x^{iJ} \\ &= \sum_k k_{\sim} x^i \end{aligned}$$

où le tenseur

$$k_{\sim} x^i = \sum_{k'} \delta_{kk'} g_k \alpha_{k'} x^{iJ} = g_k \alpha_k x^{iJ}$$

est élément de  $\Delta_{-gk} \otimes E$

Propriété (2)

$$\langle\langle \langle k_{\sim} x^i, k'_{\sim} x^i \rangle_{M_x} = \langle k_{\sim} x^i, k'_{\sim} x^i \rangle_{M_{kk'}} \quad \rangle\rangle$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \langle\langle \langle k_{\sim} x^i, k'_{\sim} x^i \rangle_{M_x} &= \langle g_k \alpha_k x^{iJ}, g_{k'} \alpha_{k'} x^{iJ} \rangle_{M_x} \\ &= \sum_{jj'} x_{kij} x_{k'ij'} \langle g_k \alpha_{e_j}, g_{k'} \alpha_{e_{j'}} \rangle_{M_x} \\ &= \langle k_{\sim} x^i, k'_{\sim} x^i \rangle_{M_{kk'}} \end{aligned}$$

C.Q.F.M.

Cette propriété permet de construire une métrique  $M_x$  bloc par bloc à l'aide des matrices  $M_{koko}, M_{k'k'k'}$  et  $M_{kok'}$  ( $k \neq k' \in \{k, k'\} \in K$ )

Soit  $x^k$  un élément de  $L_{\mathbb{R}} (F^*; \Delta_{-g_k} \otimes E)$  tel que :  $x^k(\underline{f}^{*i}) = k_{\sim} x^i \quad \forall i \in I$

On a la propriété :

Propriété (3)

$$\langle\langle M(x^k; (\underline{f}^{*i}), (g_k \alpha_{e_j})) = x^k \text{ la strate n° } k \quad \rangle\rangle$$

et par suite

Proposition (1)

<< Pour :

$$\langle g_k \otimes e_j, g_k \otimes e_j \rangle_{M_{kk}} = \langle e_j, e_j \rangle_M$$

les images Euclidiennes

$$(\{(k^i, p_i) | i \in I\}, \triangle g_k \otimes E, M_{kk}) \text{ et } (\{(k^{iJ}, p_i) | i \in I\}, E, M)$$

de  $(I, d_I)$  sont équivalentes. >>

Ce résultat permet de manipuler les tenseurs  $k^i$  ( $i \in I$ ) au même titre que les vecteurs  $k^{iJ}$  ( $i \in I$ ), sachant que la transformation :

$$\{k^{iJ} | i \in I\} \xrightarrow{T} \{k^i | i \in I\}$$

conserve toute l'information contenue dans l'image Euclidienne :

$$(\{(k^{iJ}, p_i) | i \in I\}, E, M)$$

Corollaire

<< Si  $M_x$  est de la forme :  $M_x = N \otimes M$

La proposition (1) est vérifiée si et seulement si  $|g_k|_N = 1$  >>

Preuve

Pour  $M_x = N \otimes M$  on a :

$$\langle g_k \otimes e_j, g_k \otimes e_j \rangle = \langle g_k, g_k \rangle_N \langle e_j, e_j \rangle_M$$

$$= \langle e_j, e_j \rangle_M$$

$$\Leftrightarrow \langle g_k, g_k \rangle_N = 1 \Leftrightarrow |g_k|_N = 1$$

C.Q.F.M.

La base  $\{g_k | k \in K\}$  de  $G$  est dans ce cas  $N$ -normée

Les nuages :

$$\{(k^i, p_i) | i \in I\} \text{ et } \{(k^{iJ}, p_i) | i \in I\}$$

seront tous deux notés  $N_x(k)$ .

Il a pour barycentre :

$$\begin{aligned} \sum_i p_i k^x_i &= g_k \otimes (\sum_i p_i k^x_i) \\ &= g_k \otimes g_x^{kJ} \end{aligned}$$

On peut vérifier que le nuage dont les points sont :

$$k^x_i - g_k \otimes g_x^{kJ} \quad (i \in I) \text{ est de barycentre nul}$$

$$g_k \otimes g_x^{kJ} = \underline{0} \iff g_x^{kJ} = \underline{0}$$

Proposition (2) (Croquette [11], pp 44)

<< Sous les hypothèses :

i -  $M_{kk}$  ( $k \in \{k_0, k^1\} \subset K$ ) est une métrique sur  $\Delta_{g_k} \otimes E$

ii -  $M_{k_0 k^1}$  est la transposée de  $M_{k^1 k_0}$ . alors  $M_x$  est une métrique (resp. semi métrique) sur  $(\Delta_{g_{k_0}} \otimes E) \oplus (\Delta_{g_{k^1}} \otimes E)$  si et seulement si le rayon spectral de :

$M_{k_0 k_0}^{-1} M_{k_0 k^1} M_{k^1 k^1}^{-1} M_{k^1 k_0}$  est strictement inférieur à 1 (resp. inférieur ou égal à 1). >>

Remarque : Analyse du tenseur  $x^{IJK}$  de  $F \otimes (E \otimes G)$

On aurait pu analyser le nuage des individus  $x^{iKJ}$  ( $i \in I$ ) à l'aide de :

$N = \{(x^{iJK}, p_i) \mid i \in I\}$  qui lui est équivalent à partir du tenseur  $x^{IJK}$  élément de  $F \otimes (E \otimes G)$  associé à l'élément  $y_z$  de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E \otimes G)$  de matrice  $Y_z$  associée.

$Y_z$  est la superposition des strates  $t_z^j$  ( $j \in J$ )

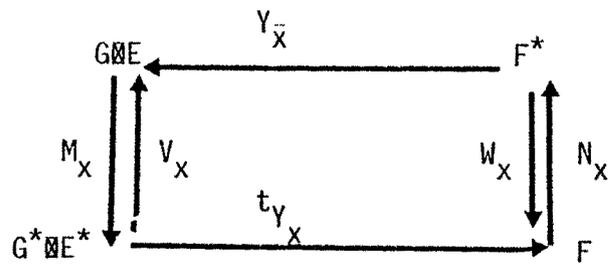
Le nuage des variables est le suivant :

$$M = \bigcup_j M_z(j)$$

$$M_z(j) = \{(j^z^{kI}, \frac{1}{|K|}) \mid k \in K\}$$

Compte tenu du fait qu'on a la relation de dualité :  $j^z^{kI} = k^x_{jI}$

Le problème se ramène à celui étudié au début du paragraphe.  
 Le schéma de dualité pour cette analyse est le suivant :



Partie B : l'analyse statistique

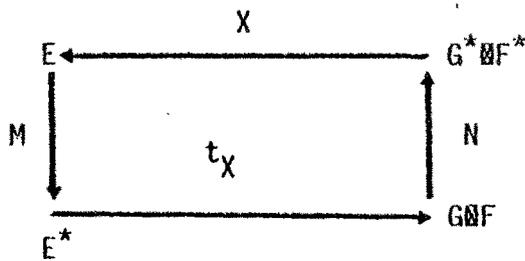
§ (B.1) Analyse des différences et analyse des nuages global

B.1.1. Analyse des différences

Rappelons le schéma de dualité associé à l'analyse des nuages de points :

$$N = \{ ((g_x^{kJ} - g_y^{iJ}), q_k p_i) \mid k \in K, i \in I \} \text{ et}$$

$$M = \{ (g^j, \frac{1}{|J|}) \mid j \in J \}$$



Propriété

<< Le nuage des points N est centré par construction >>

en effet son barycentre  $\sum_{k,i} q_k p_i (g_x^{kJ} - g_y^{iJ}) = \underline{0}$

Pour faire la description des nuages N et M on prend pour métrique  $N = D_q \otimes D_p$  la métrique des poids, le choix de M sera discuté au paragraphe (B.13).

On fait alors l'A.C.P. du tableau X.

Les vecteurs propres  $\underline{u}^{\lambda J}$  (resp.  $\underline{\xi}^\lambda$ ) ( $\lambda = 1, 2, \dots$ ) sont appelés axes principaux.

L'inertie  $I_g$  du nuage N s'écrit :

$$I_g = \sum_{k,i} q_k p_i |g_x^{kJ} - g_y^{iJ}|_M^2 = \sum_{k,i,\lambda} q_k p_i (\alpha(k,i,\lambda))^2$$

et l'indice

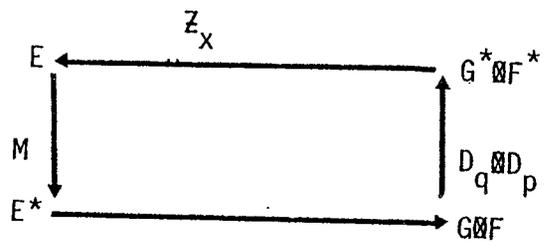
$$q_k p_i ((\alpha(k,i,1))^2 + (\alpha(k,i,2))^2)$$

$$\frac{\sum_{k,i,\lambda} q_k p_i (\alpha(k,i,\lambda))^2}{\sum_{k,i,\lambda} q_k p_i (\alpha(k,i,\lambda))^2}$$

Mesure en pourcentage la contribution expliquée par le premier plan factoriel de la paire  $\{k,i\}$  au moment d'inertie  $I_g$ . Les éléments des paires à indice faible sont homogènes. On traite ainsi un problème d'homogénéité de même nature que celui traité dans un cadre unidimensionnel en statistique inférentielle lorsqu'il s'agit de comparer deux échantillons de taille  $n$  et  $m$  : usuellement traité dans ce cadre à l'aide des statistiques de STUDENT ou de GAUSS (cf J.R. BARRA [1] pp 122).

B.1.2. Analyse du nuage global

La structure relationnelle  $(Z_x, D_q \otimes D_p, M)$  traduite par le schéma de dualité :



permet de décrire les nuages de points

$$N = \bigcup_k N_x(k) \quad M = \left\{ \left( \frac{z_x^j}{\sqrt{z_x^j}}, \frac{1}{|J|} \right) \mid j \in J \right\}$$

Il résulte alors du lemme fondamental (cf § (1.2)) que :

$$\begin{aligned} \langle \frac{z_x^j}{\sqrt{z_x^j}}, \frac{z_x^{j'}}{\sqrt{z_x^{j'}}} \rangle_{D_q \otimes D_p} &= \langle \langle z^j, z^{j'} \rangle \rangle_{D_q, D_p} \\ &= \sum_k q_k \langle \frac{X_k^{jI}}{\sqrt{X_k^{jI}}}, \frac{X_k^{j'I}}{\sqrt{X_k^{j'I}}} \rangle_{D_p} \end{aligned}$$

par suite les images Euclidiennes

$$\left( \left\{ \frac{z_x^j}{\sqrt{z_x^j}} \mid j \in J \right\}, G \otimes F, D_q \otimes D_p \right) \text{ et } \left( \{ z^j \mid j \in J \}, M_{n,m}(\mathbb{R}), \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{D_q, D_p} \right)$$

de  $(J, d_j)$  sont équivalentes.

$\frac{z_x^j}{\sqrt{z_x^j}}$  est le représentant naturel de la strate  $z^j$ .

On fait alors l'A.C.P. du tableau  $Z_x D_q \otimes D_p$  - centré.

$D_q \otimes D_p$  - centrage du tableau  $Z_x$

Soit  $\underline{j}_n$  (resp  $\underline{s}_m$ ) le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  (resp  $\mathbb{R}^m$ ) dont les composantes sont toutes égales à l'unité,  $\underline{s}_m \otimes \underline{j}_n$  est un tenseur de  $G \otimes F$  dont les composantes sont toutes égales à l'unité.

La moyenne empirique  $\bar{z}_x^j$  de la variable  $\frac{z_x^j}{\sqrt{z_x^j}}$  est égale à :

$$\bar{z}_x^j = \langle z_x^j, s_{m \oplus n}^j \rangle_{D_q \oplus D_p}$$

$$= \sum_k q_k \langle k^{X^j I}, j_n \rangle_{D_p}$$

$$= \sum_k q_k k \bar{x}^j$$

Définition (1) :

<< Le tableau  $Z_x$  est dit  $D_q \oplus D_p$  - centré si pour tout  $j \in J$  on a  $\bar{z}_x^j = 0$ . >>

On peut vérifier que le tableau dont les tenseurs lignes sont :

$$(z_x^j - \bar{z}_x^j s_{m \oplus n}^j) \quad (j \in J) \text{ est } D_q \oplus D_p \text{ - centré.}$$

d'où la propriété :

Propriété (1) :

<< Lorsque  $z_x^j$  et  $z_x^{j'}$  sont deux variables centrées  $\langle z_x^j, z_x^{j'} \rangle_{D_q \oplus D_p}$  définit leur covariance empirique. >>

En effet :

$$\langle z_x^j - \bar{z}_x^j s_{m \oplus n}^j, z_x^{j'} - \bar{z}_x^{j'} s_{m \oplus n}^{j'} \rangle_{D_q \oplus D_p} \text{ est égale à}$$

$$\sum_k q_k \langle k^{X^j I} - \bar{z}_x^j j_n, k^{X^{j'} I} - \bar{z}_x^{j'} j_n \rangle_{D_p}$$

est la covariance empirique entre deux variables vectorielles  $j$  et  $j'$  définies sur  $K \times I$  dont les composantes et moyennes empiriques sont identiquement égales à celles des tenseurs  $z_x^j$  et  $z_x^{j'}$ .

Proposition (1)

<< Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1 - \sum_k q_k g_x^{kJ} = 0$$

$$2 - \forall j \in J \quad \bar{z}_x^j = 0$$

où  $\sum_k q_k g_x^{kJ}$  est le barycentre du nuage global  $N$ . >>

Remarque (1)

<< L'expression  $\bar{z}_x^j = \sum_k q_k \bar{x}_k^j$  montre que le centrage de la variable  $z_x^j$  n'entraîne le centrage des variables  $x_k^j$  ( $k \in K$ ) que lorsque toutes ces  $k$  variables ont des moyennes positives. >>

Ainsi donc nous sommes amenés à introduire une nouvelle notion, celle du centrage global.

Définition (2)

<< Les variables  $x_k^j$  ( $k \in K$ ) sont dites globalement centrées si l'on a :

$$\sum_k q_k \bar{x}_k^j = 0 \quad \gg$$

Conséquence :

<< Les tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) sont dits globalement centrés si pour tout  $j \in J$  les variables  $x_k^j$  ( $k \in K$ ) sont globalement centrées. >>

On montre que les tableaux dont les vecteurs colonnes sont  $x_k^{iJ} - (\sum_k q_k g_x^{kJ})$  ( $i \in I$ ) sont globalement centrés,

Remarque (2)

Dire que le tableau  $Z_x$  est  $D_q \otimes D_p$  - centré équivaut à dire que les tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) sont globalement centrés.

On a :

$$\text{Var}(z_x^j) = \sum_k q_k |x_k^{jI} - (\sum_k q_k \bar{x}_k^j)_{-n}|_{D_p}$$

$z_x^j$  est réduite si  $\sigma(z_x^j) = 1$

Propriété (2)

<< Lorsque pour tout  $k \in K$ , les variables  $x_k^j$  ( $j \in J$ ) sont centrées réduites, alors les variables  $z_x^j$  ( $j \in J$ ) sont centrées réduites. >>

Remarque (3)

<< Le mode de centrage construit dans ce paragraphe est identique à celui utilisé en Analyse de variance p-dimensionnelle lorsqu'on considère un plan d'expérience répété à un facteur dans lequel, pour chaque variable réponse  $j \in J$  et pour chaque modalité  $k \in K$ , les traitements sont effectués sur les mêmes unités expérimentales  $i \in I$ , pour  $j \in J$  le modèle de décomposition de tout observation  $x_{jki}$  construit par B.J. WINER ([43] pp 265) s'écrit:

$$(1) x_{jki} = \bar{x}_{j..} + (\bar{x}_{j.i} - \bar{x}_{j..}) + (\bar{x}_{jk.} - \bar{x}_{j..}) + (x_{jki} - \bar{x}_{j.i} - \bar{x}_{jk.} + \bar{x}_{j..})$$

observation = moyenne globale + | effet de l'individu i | + | effet du traitement k | + | résidu

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j..} &= \sum_{k,i} q_k p_i x_{jki} = \sum_k q_k \bar{x}^j_k \\ &= \bar{z}^j_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \bar{x}_{jk.} &= \sum_i p_i x_{jki} \\ &= \bar{x}^j_k \end{aligned}$$

Les tenseurs  $\bar{z}^j_x$  représentent dans ce cas le p "vecteurs" variables réponses (cf PAGES [ 31] pp 42).

Le  $D_q \otimes D_p$  - centrage correspond dans ce cas particulier au centrage global des observations.

Les Indicateurs de liaison

On suppose que les nuages  $N_x(k)$  ( $k \in K$ ) sont centrés.

La matrice de variance covariance  $V_x$  se décompose alors en :

$$\begin{aligned} V_x &= Z_x D_q \otimes D_p t^t_{Z_x} \\ &= \sum_k q_k X^k D_p t^t_{X^k} = \sum_k q_k V^k_x \end{aligned}$$

où  $V^k_x$  est la matrice d'inertie du nuage de point  $N_x(k)$ . par suite l'inertie  $I_g = T_r(V_x M)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k,i} q_k p_i |k^x_{iJ}|^2_M \\ &= \sum_k q_k I^k_g \end{aligned}$$

où  $I^k_g$  est l'inertie des nuages  $N_x(k)$ .

Les vecteurs propres  $u^{\lambda J}$  (resp  $c^\lambda$ ) ( $\lambda=1,2,\dots$ ) sont appelés axes principaux d'inertie puisque :

$$|k^x_{iJ}|^2_M = \sum_\lambda (\alpha_{(k,i,\lambda)})^2 \text{ avec}$$

$$c^\lambda = \sum_{k,i} (\alpha_{(k,i,\lambda)}) g_k \otimes f_i$$

l'indice

$$\frac{q_k p_i ((\alpha_{(k,i,1)})^2 + (\alpha_{(k,i,2)})^2)}{\sum_{k,i,\lambda} q_k p_i (\alpha_{(k,i,\lambda)})^2}$$

Mesure en pourcentage la contribution expliquée par le premier plan factoriel de l'inertie du nuage des points  $N_x(k)$  au moment d'inertie  $I_g$ . Dans un nuage à l'indice faible, on peut y déceler des regroupements d'individus en classe homogènes.

Le cosinus :

$$r = \text{cor}(z_x^j, z_x^{j'}) = \frac{\langle z_x^j, z_x^{j'} \rangle_{D_q \otimes D_p}}{|z_x^j|_{D_q \otimes D_p} |z_x^{j'}|_{D_q \otimes D_p}}$$

permet de mesurer le degré de liaison entre les tableaux  $Z^j$  et  $Z^{j'}$  ( $j \neq j'$ )

Propriété classique de r

$\langle\langle r \in [-1, 1] \rangle\rangle$

Théorème (1)

$\langle\langle r = \pm 1 \iff Z^j = \lambda Z^{j'} + B, \lambda \in R \text{ à le signe de } r$

$B = [b_1, \dots, b_k, \dots, b_m]$

avec  $b_k = ({}_k \bar{x}^j - \lambda {}_k \bar{x}^{j'})_{J_x} \gg$

Preuve

$r = \pm 1 \iff Z_0^j = \lambda Z_0^{j'}, \lambda \in R \text{ à le signe de } r$

où  $Z_0^j = Z^j - C^j, C^j = [c_1^j, \dots, c_k^j, \dots, c_m^j]$

avec  $c_k^j = {}_k \bar{x}^j_{J_x}$

$\iff Z^j = \lambda Z^{j'} + C^j - \lambda C^{j'}$

il suffit de prendre  $B = C^j - \lambda C^{j'}$

C.Q.F.M.

$z^j$  (resp  $z^{j'}$ ) peut représenter par exemple le tableau des dépenses de consommation (resp des revenus) d'un certain nombre de ménages  $i \in I$  à des dates  $t \in T$ . Le coefficient  $\lambda$  est appelé propension marginale à consommer et mesure l'augmentation de la consommation pour une augmentation unitaire du revenu. (cf E. MALINVAUD [29]).

Théorème (2)

<< Lorsque pour tout  $k \in K$ , les variables  ${}_k X^j$  ( $j \in J$ ) sont centrées réduites on a :

$$r = \pm 1 \iff \forall k \in K \quad \text{Cor}({}_k X^j, {}_k X^{j'}) = r \gg$$

Preuve :

$$r = \pm 1 \iff z_1^j = \lambda z_1^{j'}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$  à le signe de  $r$  avec

$$z_1^j = \left[ \frac{{}_1 X^{jI} - \bar{{}_1 X^j}_{-n}}{\sigma({}_1 X^j)}, \dots, \frac{{}_k X^{jI} - \bar{{}_k X^j}_{-n}}{\sigma({}_k X^j)}, \dots, \frac{{}_m X^{jI} - \bar{{}_m X^j}_{-n}}{\sigma({}_m X^j)} \right]$$

$$\iff \forall k \in K \quad \frac{({}_k X^{jI} - \bar{{}_k X^j}_{-n})}{\sigma({}_k X^j)} = \lambda \frac{({}_k X^{j'I} - \bar{{}_k X^{j'}}_{-n})}{\sigma({}_k X^{j'})}$$

$$\iff \forall k \in K \quad ({}_k X^{jI} - \bar{{}_k X^j}_{-n}) = \lambda \frac{\sigma({}_k X^j)}{\sigma({}_k X^{j'})} ({}_k X^{j'I} - \bar{{}_k X^{j'}}_{-n})$$

$$\iff \forall k \in K \quad {}_k X^j - \bar{{}_k X^j} = \lambda \frac{\sigma({}_k X^j)}{\sigma({}_k X^{j'})} ({}_k X^{j'} - \bar{{}_k X^{j'}})$$

$$\text{Cor}({}_k X^j, {}_k X^{j'}) = \frac{\lambda}{|\lambda|}$$

or

$$\|z_1^j\|_{D_q, D_p} = \|z_1^{j'}\|_{D_q, D_p} = 1 \iff |\lambda| = 1 \iff \lambda = \pm 1 = r$$

par suite

$$\text{Cor}({}_k X^j, {}_k X^{j'}) = r$$

C.Q.F.M. >>

r permet donc de déceler les paires de variables :

$$\{x_k^j, x_k^{j'}\} \quad (k \in K) \text{ fortement corrélées}$$

### B.1.3. Problème du choix de la métrique M dans E

Nous présentons dans ce paragraphe la façon dont SCHEKTMAN ([37] pp 23-33) interprète le choix de certaines métriques dites fondamentales et le tableau récapitulatif qu'il avait bien voulu dresser. Etant entendu que le choix d'une métrique M dépend de la connaissance du phénomène à étudier et des buts poursuivis.

L'auteur entend par métrique fondamentales, l'une des cinq suivantes :  
I, V,  $V^{-1}$ , R,  $R^{-1}$

où

I est la matrice unité, V la matrice de variance - covariance et R la matrice des coefficients de corrélation. faire le choix de :

-  $M=I$  revient à accorder une importance égale aux variables.

Les résultats d'une A.C.P. dépendent des unités de mesure (PAGES [32] pp 262).

-  $M=V^{-1}$  la métrique de MAHALANOBIS, revient à ne conserver comme seules informations apportées par les variables que le sous-espace qu'elles engendrent. Décision prise en analyse canonique tandis que dans le plan principal aucune direction n'est privilégiée.

-  $M=R$  plus une variable est corrélées avec les autres plus le rôle qu'elle joue sera importante dans le calcul des distances.

(SCHEKTMAN [ 37] pp 28)

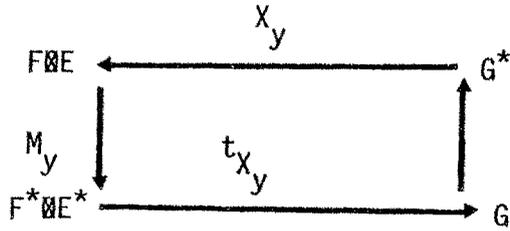
Idéologies \ Traductions Mathématiques	Matrice M	1 Variables	Matrice M	2 Variables
1 Sans effet variance Sans effet covariance	$D[1/\sigma] \Sigma^{-1} D[1/\sigma]$	centrées	$\Sigma^{-1}$	réduites
2 Effet variance Sans effet covariance Sans effet variance Sans effet corrélation	$\Sigma^{-1}$	centrées	$R^{-1}$	réduites
3 Effet variance Sans effet corrélation	$R^{-1}$	centrées	$D[\sigma] R^{-1} D[\sigma]$	réduites
4 Sans effet variance Effet partiel corrélation (normée)	$D[1/\sigma^2]$	centrées	I	réduites
5 Effet variance Effet partiel corrélation	I	centrées	$D[\sigma^2]$	réduites
6 Sans effet variance Effet corrélation	$D[1/\sigma] D[1/\sigma]$	centrées	R	réduites
7 Effet variance Effet corrélation Sans effet variance Effet covariance	R	centrées	$\Sigma$	réduites
8 Effet variance Effet covariance	$\Sigma$	centrées	$D[\sigma] \Sigma D[\sigma]$	réduites

avec  $(V=\Sigma)$

§ (B.2) Analyse du nuage des tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ )

Nous avons les nuages et schéma de dualité suivant :

$$N = (x_{\nu}^k, q_k) \mid k \in K \quad , M = \cup_i y(i)$$



Si l'on décrit les nuages des points N et M avec pour métriques  $N_y = D_q$  et  $M_y = D_p \otimes M$ .

Le lemme fondamental (cf § (1.2)) nous assure que :

$$\begin{aligned} \langle x_{\nu}^k, x_{\nu}^{k'} \rangle_{D_p \otimes M} &= \langle \langle X^k, X^{k'} \rangle \rangle_{D_p, M} \\ &= \sum_i p_i \langle x_{\nu}^{iJ}, x_{\nu}^{iJ} \rangle_M \end{aligned}$$

et par suite : deux images Euclidiennes équivalentes de  $(K, d_K)$  sont données par :

$$((x_{\nu}^k, q_k) \mid k \in K), F \otimes E, D_p \otimes M$$

et

$$((X^k, q_k) \mid k \in K), M_{p,n}(\mathbb{R}), \langle \langle, \rangle \rangle_{D_p, M}$$

$x_{\nu}^k$  est le représentant naturel de  $X^k$

On fait alors l'ACP du tableau  $X_y$   $D_q$ -centré.

$D_q$  - centrage de  $X_y$

Le barycentre  $\bar{x}_{\nu}$  du nuage des points N est égale à :

$$\bar{x}_{\nu} = \sum_k q_k x_{\nu}^k = \sum_k q_k \left( \sum_i f_i \otimes x_{\nu}^{iJ} \right) = \sum_i f_i \otimes \left( \sum_k q_k x_{\nu}^{iJ} \right)$$

par suite à l'aide des relations de dualité

$$\bar{x}_{\nu} = \sum_i f_i \otimes \left( \sum_k q_k y^{kJ} \right) = \sum_i f_i \otimes q_y^{iJ}$$

d'où le résultat :

Proposition

<< Le tableau  $X_y$  est  $D_q$ -centré si et seulement si pour tout  $i \in I$  le tableau  $Y^i$  est  $D_q$ -centré. >>

Preuve

$$(X_y \text{ est } D_q\text{-centré} \stackrel{\text{def}}{\iff} x_{\lambda_0}^k = 0) \iff \left( \forall i \in I \left( g_y^{iJ} = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} Y^i \text{ est } D_q \text{ centré} \right) \right)$$

on a :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} |x^k|_{D_p \otimes M}^2 = \sum_i p_i |x^{iJ}|_M^2 - g_y^{iJ} |x^k|_M^2 \end{array} \right.$$

Soit  $\{x_{\lambda_0}^k \mid k \in K\}$  le nuage centré

l'indice

$$r(x_{\lambda_0}^k, x_{\lambda_0}^{k'}) = \frac{\langle x_{\lambda_0}^k, x_{\lambda_0}^{k'} \rangle_{D_p \otimes M}}{|x_{\lambda_0}^k|_{D_p \otimes M} |x_{\lambda_0}^{k'}|_{D_p \otimes M}}$$

permet de mesurer l'équivalence entre les tableaux  $x^k$  et  $x^{k'}$ .

Propriétés

$$\langle\langle i - r(x_{\lambda_0}^k, x_{\lambda_0}^{k'}) \in [-1, 1] \rangle\rangle$$

$$ii - r(x_{\lambda_0}^k, x_{\lambda_0}^{k'}) = \pm 1 \iff x^k = \lambda x^{k'} + G_y - \lambda G_y$$

$$\text{où } G_y = [g_y^{1J}, \dots, g_y^{iJ}, \dots, g_y^{nJ}], \lambda \in \mathbb{R} \gg$$

Preuve de la 2<sup>e</sup> propriété ci-dessus

$$r(x_{\lambda_0}^k, x_{\lambda_0}^{k'}) = \pm 1 \iff (\sum_i f_i (x_{\lambda_0}^{iJ} - g_y^{iJ})) = \lambda (\sum_i f_i (x_{\lambda_0}^{iJ} - g_y^{iJ}))$$

$$\iff \sum_i f_i x_{\lambda_0}^{iJ} - \sum_i f_i g_y^{iJ}$$

$$\lambda (\sum_i f_i x_{\lambda_0}^{iJ}) - (\sum_i f_i g_y^{iJ})$$

$$\iff x^k - G_y = \lambda x^{k'} - \lambda G_y$$

$$\iff x^k = \lambda x^{k'} + G_y - \lambda G_y \quad \text{C.Q.F.M.}$$

Si  $\lambda=1$  on a  $X^k \equiv X^{k'}$

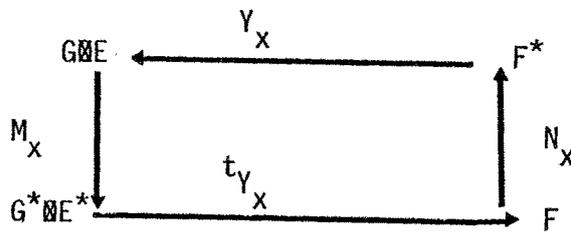
Cet indice permet donc de "décoder" si les deux tableaux peuvent être considérés comme égaux, par conséquent équivalents.

§ (B.3) Description des liaisons entre m paquets de variables l'analyse canonique généralisée

Rappelons les nuages de points et schéma de dualité :

$$N = \{(x^i, p_i) \mid i \in I\}, \quad M = \bigcup_k M_X(k) \quad \text{avec}$$

$$M_X(k) = \left\{ \left( \begin{matrix} X^{jI} \\ \frac{1}{|J|} \end{matrix} \right) \mid k \in K \right\}$$



Pour décrire les nuages de points N et M.

On prend comme métriques :

$$N_X = D_p \quad \text{et} \quad M_X = [M_{kk'}] \quad \begin{matrix} k \in K \\ k' \in K \end{matrix}$$

avec  $M_{kk'} = \begin{cases} V_{kk}^{-1} & k=k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$   $V_{kk} = X^k D_p t_{X^k}$   
 $X^k$  étant  $D_p$ -centré.

On fait alors l'A.C.P. du tableau  $Y_X$   $D_p$ -centré.

Les sous-espaces  $t_{X^k}(E^*)$  ( $k \in K$ ) engendrés par les variables  $X^j$  ( $j \in J$ ) appelés potentiels de prévision par PAGES ([32] pp 353) sont décrits à l'aide des deux propositions suivantes.

Notons respectivement  $\underline{c}^1$ ,  $\underline{a}^1$  et  $\underline{u}^1$  la première composante principale, le premier facteur principal et le premier axe principal issus de l'A.C.P. du tableau  $Y_X$  avec :

$$\underline{c}^1 = t_{Y_X} \underline{a}^1 \quad , \quad \underline{a}^1 = M_{X \underline{u}^1}$$

$u^1$  élément de  $G \otimes E$  s'écrit :

$u^1 = \sum_k g_k \otimes u^1(g^{*k})$  où  $u^1$  est élément de  $L_R(G^*; E)$ . posons  $1u^{kJ} = u^1(g^{*k})$  ( $k \in K$ )

on a le résultat.

Proposition (1)

$$\ll a^1 = \sum_k g_k \otimes 1a^{kJ}$$

$$c^1 = \sum_k 1c^{kJ}$$

par suite

$$|a^1|_{Mx}^{-1} = \sum_k |1a^{kJ}|_{V_k}^2 = \sum_k |1c^{kJ}|_{Dp}^2$$

avec

$$1c^{kJ} = t_X^k 1a^{kJ} \quad \text{et} \quad 1a^{kJ} = V_k^{-1} u^{kJ} \quad \gg$$

Proposition (2) (PAGES [31], pp 13)

$\ll$  L'A.C.P. du tableau  $Y_x$  conduit à rechercher simultanément dans les différents sous-espaces  $t_X^k(E^*)$  ( $k \in K$ ) les vecteurs  $1c^{kJ}$  rendant maximum la  $D_p$ -norme de :

$$\sum_k |1c^{kJ}|$$

sous la contrainte de normalisation :

$$\sum_k |1c^{kJ}|_{Dp}^2 = 1 \quad \gg$$

La description des potentiels de précision se fait en représentant dans les plans factoriels les vecteurs  $1c^{kJ}$  ( $k \in K$ ) en points supplémentaires.

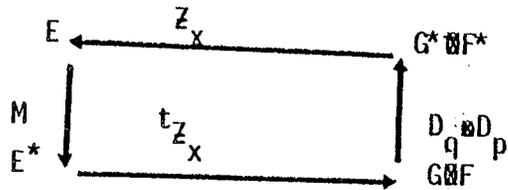


Partie C :  
Analyse des référentiels : Décomposition d'un tenseur

§ (C.1) Référentiels dérivant de l'analyse du tenseur  $x^{KIJ}$  élément de  $(G \otimes F) \otimes E$

C.1.1. Introduction

Considérons le schéma de dualité suivant :



$\underline{u}^{\mu J}$ ,  $\underline{a}^{\mu J}$  et  $\underline{c}^{\mu}$  sont respectivement les  $\mu$ (ème) axe principal, facteur principal et composante principale de valeur propre  $\alpha^{\mu}$  associée issus de l'A.C.P. du tableau  $Z_x$ .  $\underline{c}^{\mu}$  étant un élément de  $G \otimes F$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{c}^{\mu} &= \sum_{k,i} \sum_{\mu} c_{\mu ki} g_k \otimes f_i \\ &= \sum_k g_k \otimes C^{\mu} (g^{*k}) \end{aligned}$$

où  $C^{\mu}$  est élément de  $L_R (G^*; F)$  de matrice  $C^{\mu}$  associée.

Définition [28]

<< On appelle  $\mu$ (ème) référentiel le tenseur  $\underline{c}^{\mu}$  et  $\mu$ (ème) matrice référentielle la matrice  $C^{\mu}$ . >>

Dans l'espace Euclidien  $(M_{n,m}(R), \langle \langle, \rangle \rangle_{D_q, D_p})$  le tableau  $C^1$  est la meilleure (dans un sens que nous préciserons au paragraphe suivant) combinaison linéaire des tableaux initiaux  $Z^j$ . Une analyse de  $C^1$  fournirait une description des individus et juges plus intéressante que celle fournie par chacun des tableaux  $Z^j$ .

C.1.2. Analyse de  $C^\mu$

Nous avons la relation :

$$C^\mu = \sum_j \underline{e}^{*j} (\underline{a}^{\mu j}) Z^j$$

Propriété des  $C^\mu$  (JAFFRENOU)

" Parmi tous les tableaux :

$$\sum_j \underline{e}^{*j} (M \underline{x}^j) Z^j \quad (\underline{x}^j \in E)$$

les tableaux  $C^\mu$  sont ceux qui réalisent successivement le maximum de :

$$\| \sum_j \underline{e}^{*j} (M \underline{x}^j) Z^j \|_{D_q, D_p}^2$$

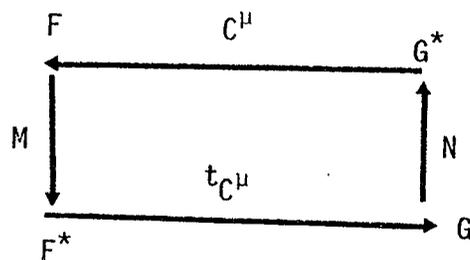
sous la contrainte de M-orthonormalité sur les solutions en  $\underline{x}^j$ .

$$\text{On a } \langle\langle C^\mu, C^{\mu'} \rangle\rangle_{D_q, D_p} = \alpha^\mu \delta_{\mu\mu'}$$

$C^\mu$  fournit les deux nuages de points : "

$$N = \{(\mu \underline{c}^{kI}, q_k) / k \in K\} \text{ et } M = \{(\mu \underline{c}^{iK}, p_i) / i \in I\}$$

L'analyse de  $C^\mu$  est résumée par le schéma de dualité :



Pour décrire les nuages de points N et M on prend comme métriques  $M = D_p$  et  $N = D_q$ .

Centrage du tableau  $C^\mu$

Compte-tenu du mode de centrage du cube, il y a lieu d'observer deux cas.

a) les tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) sont  $D_p$ -centrés à priori

Dans ce cas les tableaux  $Z^j$  ( $j \in J$ ) sont centrés en colonnes et les tableaux  ${}^t Z^j$  ( $j \in J$ ) en ligne. Alors on fait l'ACP du tableau  $C^\mu$   $D_q$ -centré (qui équivaut à un  $D_q$ - $D_p$ -centrage de  $C^\mu$  et  $Z^j$  et §(2.2.4.)) et l'ACP du tableau  ${}^t C^\mu$   $D_p$  centré.

b) les tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) sont globalement centrés (cf. § (B.1.2.))

Dans ce cas, les tableaux  $Z^j$  ( $j \in J$ ) sont globalement centrés. Alors on fait l'ACP du tableau  $C^\mu$  (resp  ${}^t C^\mu$ )  $D_q$  (resp  $D_p$ ) - centré (qui correspond au  $D_q$  (resp  $D_p$ )-centrage de  $Z^j$  (resp  ${}^t Z^j$ ) et l'ACP de ce même tableau  $D_q$ - $D_p$ -centré qui correspond à un  $D_q$ - $D_p$ -centrage de  $Z^j$  (resp  ${}^t Z^j$ ).

Soit  $(\beta_{t,\mu}, \mu^t I, \mu^t K \mid t \in ]s])$  l'ensemble des valeurs propres, axes principaux et composantes principales issues de l'A.C.P. de  $C^\mu$ , on a :

Proposition 1

$$\sum_{t \in ]s]} \beta_{t,\mu} = \alpha^\mu$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \sum_{t \in ]s]} \beta_{t,\mu} &= \text{Tr}(C^\mu D_q {}^t C^\mu D_p) \\ &= \sum_k q_k \mid \mu^t C^k I \mid_{D_p}^2 \\ &= \mid C^\mu \mid_{D_q}^2 \otimes D_p \\ &= \alpha^\mu \end{aligned}$$

Théorème : Décomposition d'un tenseur

$$\ll \underset{t \in ]s]}{c}^{\mu} = \sum_{\mu} \underset{t \in ]s]}{c}^{\mu} \underset{\mu}{t}^k \underset{\mu}{t}^I \gg$$

Preuve :

$$\underset{k}{c}^{\mu} = \sum_k g_k \underset{\mu}{c}^k$$

$$\underset{t \in ]s]}{\mu}^k = \sum_{t \in ]s]} c_{\mu, k, t} \underset{\mu}{t}^I \quad (c_{\mu, k, t} \in \mathbb{R})$$

$$\text{et } \underset{k}{\mu}^k = \sum_k c_{\mu, k, t} g_k$$

d'où

$$\underset{k}{c}^{\mu} = \sum_k g_k \left( \sum_{t \in ]s]} c_{\mu, k, t} \underset{\mu}{t}^I \right)$$

$$= \sum_{t \in ]s]} \left( \sum_k c_{\mu, k, t} g_k \right) \underset{\mu}{t}^I$$

$$= \sum_{t \in ]s]} \underset{\mu}{c}^k \underset{\mu}{t}^I$$

C.Q.F.M.

Remarque

<< En posant  $|\underset{\mu}{c}^k|_{D_q} = 1$  (normalisation des composants principales) on retrouve la formule

$$\underset{t \in ]s]}{c}^{\mu} = \sum_{t \in ]s]} (\beta_{t, \mu})^{1/2} \underset{\mu}{c}^k \underset{\mu}{t}^I$$

qui est la tensorialisée de la décomposition d'ECKART et YOUNG [44]

$$\underset{t \in ]s]}{c}^{\mu} = \sum_{t \in ]s]} (\beta_{t, \mu})^{1/2} \underset{\mu}{t}^I \underset{\mu}{c}^k$$

En effet :

$$\text{Vec}(C^{\mu}) = \sum_{t \in ]s]} (\beta_{t, \mu})^{1/2} \text{Vec}(\underset{\mu}{t}^I \underset{\mu}{c}^k)$$

$$= \sum_{t \in ]s]} (\beta_{t, \mu})^{1/2} \underset{\mu}{c}^k \underset{\mu}{t}^I$$

$$= \underset{\mu}{c}^{\mu} \gg$$

(Pour les propriétés de l'opérateur Vec, voir Annexe).

Corollaire

<< Le tenseur  $x^{KIJ}$  se décompose comme suit :

$$x^{KIJ} = \sum_{\mu} \sum_{t} c_{\mu}^{tK} u_{\mu}^{tI} u_{\mu}^{tJ} \quad \gg$$

Preuve

D'après la proposition 2 :

$$\begin{aligned} x^{KIJ} &= \sum_{\mu} c_{\mu}^{tK} u_{\mu}^{tI} u_{\mu}^{tJ} \\ &= \sum_{\mu} \left( \sum_{t} c_{\mu}^{tK} u_{\mu}^{tI} \right) u_{\mu}^{tJ} \\ &= \sum_{\mu} c_{\mu}^{tK} u_{\mu}^{tI} u_{\mu}^{tJ} \end{aligned}$$

Proposition 2

<< Le tenseur  $a^{KIJ}$  de  $(GMF) \otimes E$  de rang  $r$  ( $r < p'$ ) tel que :

$$\|x^{KIJ} - a^{KIJ}\|_{D_q \otimes D_p \otimes M}^2 \quad \text{soit minimum}$$

est donnée par la formule

$$a^{KIJ} = \sum_{\mu \in \{r\}} \sum_{t \in \{s\}} c_{\mu}^{tK} u_{\mu}^{tI} u_{\mu}^{tJ} \quad \gg$$

On trouve la démonstration générale de cette proposition dans BENZECRI ([2], pp 76, 169).

Soit :  $E = \sum_{\mu=1}^r \Delta u^{\mu J}$  (resp  $F = \sum_{t=1}^r \Delta u^{tI}$ )

le sous-espace de  $E$  (resp  $F$ ) engendré par les  $r$  premiers axes factoriels.

Propriété

<<  $a^{KIJ}$  est la projection  $D_q \otimes D_p \otimes M$  - orthogonale de  $x^{KIJ}$  sur  $(GMF) \otimes E'$ . >>

On peut aussi approximer  $x^{KIJ}$  par sa projection :

$$\sum_{\mu=1}^{p'} \sum_{t \in \{r\}} c_{\mu}^{tK} u_{\mu}^{tI} u_{\mu}^{tJ}$$

de rang  $r$  dans l'espace  $(GMF') \otimes E'$  i.e la matrice associée à ce tenseur à ce tenseur est de rang  $r$ .

Ce sont là autant de formules approchées de reconstitution de tenseurs de données.

Cas particulier

<< En approximant le tenseur  $x^{KIJ}$  par sa projection :

$$\sum_{\mu=1}^p c_{\mu}^{tIK} u_{\mu}^{tII} u_{\mu}^{\mu J}$$

sur  $(G \otimes_{\mu} u^{tII}) \otimes E$

où  $u_{\mu}^{tII}$  serait par exemple le premier vecteur principal.

On retrouve le modèle analogue à celui de CARROLL [10] i.e :

$$x_{kij} \approx \sum_{\mu \in \{p\}} c_{\mu k} \cdot c_{\mu i} \cdot u_{\mu j} \quad \gg$$

C.1.3. Cas particulier

Les ensembles I, J et K jouent des rôles symétriques

Exemple :

<< Considérons X un plan factoriel d'ordre trois où les ensembles I, J et K sont ceux des traitements relatifs aux trois facteurs réalisés sur les unités d'expériences. >>

Soient :

$$\{ u_{\mu}^{\mu J} \mid \mu \in \{p\} \}, \{ v_{\lambda}^{\lambda I} \mid \lambda \in \{n\} \} \text{ et } \{ w_{\alpha}^{\alpha K} \mid \alpha \in \{m\} \}$$

les vecteurs principaux issus de l'A.C.P. des tenseurs respectifs.

$$x^{KIJ} \text{ de } ((G \otimes F) \otimes E, Q \otimes N \otimes M)$$

$$x^{JKI} \text{ de } ((E \otimes G) \otimes F, M \otimes Q \otimes N) \text{ et}$$

$$x^{JIK} \text{ de } ((E \otimes F) \otimes G, M \otimes N \otimes Q)$$

Proposition 3

<< Le tenseur  $x^{KIJ}$  se décompose comme suit :

$$x^{KIJ} = \sum_{\alpha, \lambda, \mu} (\beta_{\alpha, \lambda, \mu}) w_{\alpha}^{\alpha K} v_{\lambda}^{\lambda I} u_{\mu}^{\mu J}$$

où le réel  $(\beta_{\alpha, \lambda, \mu})$  est égal à :

$$\beta_{\alpha, \lambda, \mu} = \sum_k \langle u_{\mu}^{kI}, v_{\lambda}^{\lambda I} \rangle_N \cdot \langle w_{\alpha}^{\alpha K}, v_{\lambda}^{\lambda I} \rangle_Q \quad \gg$$

Preuve

$$x^{KIJ} = \sum_{\mu \in |p'|} c_{\mu}^{\mu} \otimes \mu^J \quad (\text{théorème de décomposition})$$

où  $c_{\mu}^{\mu} = \sum_k g_k \otimes \mu_c^{kI}$

$\mu_c^{kI}$  élément de  $F$  s'écrit :  $\mu_c^{kI} = \sum_{\lambda} \langle \mu_c^{kI}, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N \underline{v}^{\lambda I}$

Comme élément supplémentaire dans l'espace factoriel engendré par :

$$\{ \underline{v}^{\lambda I} \mid \lambda \in |n'| \}$$

par suite

$$c_{\mu}^{\mu} = \sum_k g_k \otimes \mu_c^{kI}$$

$$= \sum_{\lambda} \left( \sum_k \langle \mu_c^{kI}, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N g_k \right) \otimes \underline{v}^{\lambda I}$$

$\sum_k \langle \mu_c^{kI}, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N g_k$  élément de  $G$  s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \langle \sum_k \langle \mu_c^{kI}, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q \underline{w}^{\alpha K}$$

comme élément supplémentaire dans la base  $\{ \underline{w}^{\alpha K} \mid \alpha \in |m'| \}$   
 en prenant :

$$\beta_{\alpha, \lambda, \mu} = \langle \sum_k \langle \mu_c^{kI}, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q$$

$$= \sum_k \langle \mu_c^{kI}, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N \cdot \langle g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q$$

def

$$= \sum_k g_k \otimes \mu_c^{kI}, \underline{w}^{\alpha K} \otimes \underline{v}^{\lambda I} \rangle_{Q \otimes N}$$

on a :

$$c_{\mu}^{\mu} = \sum_{\alpha, \lambda} \beta_{\alpha, \lambda, \mu} \underline{w}^{\alpha K} \otimes \underline{v}^{\lambda I}$$

ce qui assure la conclusion.

Remarque

<< Les formules de décomposition des tenseurs  $x^{JKI}$  et  $x^{JIK}$  sont identiques à une homothétie près et une permutation près des vecteurs  $\underline{v}^{\lambda I}$ ,  $\underline{w}^{\alpha K}$  et  $\underline{u}^{\mu J}$  à celles établies dans la proposition 3. >>

Corollaire

$$x^{IKJ} = \sum_{\lambda, \alpha, \mu} \beta_{\alpha, \lambda, \mu} \underline{v}^{\lambda I} \underline{w}^{\alpha K} \underline{u}^{\mu J}$$

Preuve

On a : 
$$x^{IKJ} = \sum_{\lambda, \alpha, \mu} f_{\lambda, \alpha, \mu} \underline{v}^{\lambda I} \underline{w}^{\alpha K} \underline{u}^{\mu J}$$

où : 
$$f_{\lambda, \alpha, \mu} = \sum_i \langle \underline{\mu}^i, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q \cdot \langle \underline{f}_i, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N$$

Il suffit donc de montrer que :

$$f_{\lambda, \alpha, \mu} \equiv \beta_{\alpha, \lambda, \mu}$$

On a par dualité entre lignes et colonnes d'un tableau :

$$\underline{\mu}^i = \sum_k f^{*i}_k (\underline{\mu}^k) g_k$$

par suite

$$\langle \underline{\mu}^i, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q = \sum_k f^{*i}_k (\underline{\mu}^k) \langle g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q$$

et

$$\begin{aligned} f_{\lambda, \alpha, \mu} &= \sum_i \left( \sum_k f^{*i}_k (\underline{\mu}^k) \langle g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q \right) \langle \underline{f}_i, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N \\ &= \sum_k \langle g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q \left( \sum_i f^{*i}_k (\underline{\mu}^k) \langle \underline{f}_i, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N \right) \\ &= \sum_k \langle g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q \langle \sum_i f^{*i}_k (\underline{\mu}^k) \underline{f}_i, \underline{v}^{\lambda I} \rangle_N \\ &= \sum_k \langle g_k, \underline{w}^{\alpha K} \rangle_Q \langle \underline{\mu}^k, \underline{v}^{\lambda K} \rangle_N \end{aligned}$$

$$= \beta_{\alpha, \lambda, \mu}$$

C.Q.F.M.

Les tenseurs  $x^{KIJ}$  et  $x^{IKJ}$  éléments respectifs de  $(G \otimes F) \otimes E$  et de  $(F \otimes G) \otimes E$  se décomposent de façon identique à une permutation près des vecteurs  $\underline{v}^{\lambda I}$  et  $\underline{w}^{\alpha K}$ .

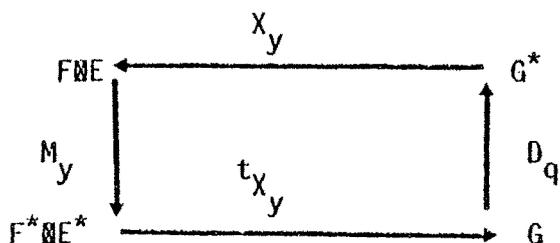
Des formules de la proposition 3 on retrouve le modèle de TUCKER [42] i.e :

$$x_{kij} = \sum_{\alpha} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \beta_{\alpha, \lambda, \mu} \cdot \omega_{\alpha k} \cdot v_{\lambda i} \cdot u_{\mu j}$$

§ (C.2) Référentiels dérivant de l'analyse du tenseur

$x^{KIJ}$  de  $G \otimes (F \otimes E)$  : reconstitution de la strate  $X^k$

Considérons le schéma de dualité suivant :



Soient  $u^{\lambda}$ ,  $a^{\lambda}$  et  $c^{\lambda k}$  respectivement les  $\lambda$ (ème) axe principal, facteur principal et composante principale issues de l'A.C.P. de  $X_y$ .

$u^{\lambda}$  s'écrit :

$$u^{\lambda} = \sum_{i,j} \sum_{\lambda} u_{\lambda ij} f_i \otimes e_j$$

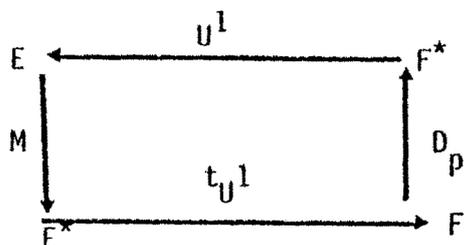
$$= \sum_i f_i \otimes u^{\lambda}(f_i^*)$$

Où  $u^{\lambda}$  est élément de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; E)$  de matrice  $U^{\lambda}$  associée  $U^{\lambda}(\lambda=1)$  fournit les deux nuages de points :

$$N = \{ (\lambda u^{ij}, p_i) \mid i \in I \} \text{ et } M = \{ (\lambda u^{jI}, \underline{1}) \mid j \in J \}$$

le tenseur  $u^{\lambda}$  est appelé (ème) référentiel et  $U^{\lambda} \begin{smallmatrix} | & J \\ \lambda & \\ | & \end{smallmatrix}$  (ème) matrice de référence.

Le schéma de dualité associé à l'analyse de  $U^1$  est le suivant :



Pour décrire N et M on fait l'ACP non centrée de  $U^1$ .

Proposition

<< On a la formule de reconstitution globale des données :

$$x_{\lambda}^k = \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda K}) u^{\lambda} \quad \gg$$

Preuve

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\lambda}^k &= \sum_{\lambda} \langle \tilde{x}_{\lambda}^k, u_{\lambda}^{\lambda} \rangle_{M_y} u_{\lambda}^{\lambda} \\ &= \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda K}) u_{\lambda}^{\lambda} = \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda K}) \left( \sum_i f_{-i} \otimes u^{\lambda}(f^{*i}) \right) \\ &= \sum_i f_{-i} \otimes \left( \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda K}) u^{\lambda}(f^{*i}) \right) \\ &= \sum_i f_{-i} \otimes \left( \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda}) u \right) (f^{*i}) \\ &= f_{-i} \otimes x^k(f^{*i}) \end{aligned}$$

d'où :

$$x^k(f^{*i}) = \left( \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda K}) u^{\lambda} \right) (f^{*i})$$

et :

$$x_{\lambda}^k = \sum_{\lambda} g^{*k}(\underline{c}^{\lambda K}) u^{\lambda}$$

Ce qui assure le résultat énoncé.

CHAPITRE IV : APPLICATIONS



§(IV.1) Un tableau rectangulaire de données est un cube spécifique.

4.1.1. Introduction.

Nous étudions dans ce paragraphe sous quelles conditions un tableau rectangulaire de données  $X$  peut être interprété comme un cube particulier sans affecter pour autant les résultats de son analyse. Cette transformation permet de faire apparaître une information nouvelle qui permettra d'étudier les liaisons entre variables  $X^j$  (définies par ce tableau) en terme de dépendance. Cette approche permettra d'analyser les données en termes de finesse d'une partitions, ce qui n'apparaît pas clairement dans l'analyse usuelle du tableau  $X$ . Pour ce faire, nous mettons en évidence l'information qualitative apportée par les variables  $X^j$  ( $j \in J$ ) en regroupant les individus dans des catégories définies par leurs scores sur chaque variable (cf. Catherine d'AUBIGNY [12]).

Soit  $x$  un élément de  $\mathcal{L}_R(F^*; E)$  de matrice  $X$  associée tel que  $\underline{X}^j I = {}^t_{x(e^{*j})}$  ( $j \in J$ ) soient des variables quantitatives.

Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des valeurs prises par les  $X^j$  sur  $I$ . On a  $\mathcal{X} = \bigcup_j \mathcal{X}_j$  avec  $\mathcal{X}_j = X^j(I)$ .

On peut écrire  $\mathcal{X}_j$  sous la forme

$$\mathcal{X}_j = \{ {}_j x_k / k \in ]m_j] \}$$

où  $m_j$  est le nombre de valeurs différentes de la variable  $X^j$  et  $]m_j] = \{1, 2, \dots, m_j\}$ .

On sait que chaque variable  $X^j$  induit sur  $I$  les catégories

$$\begin{aligned} {}_j C_k &= \{ i \in I / X^j(i) = {}_j x_k \} \\ &= [X^j]^{-1} ({}_j x_k) \end{aligned}$$

${}_j x_k$  est appelé le code de la catégorie  ${}_j C_k$ , ou encore de la modalité  $k$  de  $X^j$ .

On note  $C_j$  l'ensemble des catégories induites sur  $I$  par la variable  $X^j$

$$C_j = \bigcup_{k \in ]m_j]} {}_j C_k \quad \text{et} \quad C = \bigcup_j C_j$$

$$m = |C| \leq \sum_j m_j .$$

Lorsque le tableau  $X$  est quelconque, deux catégories égales peuvent avoir des codes différents (voir fig : 4.1). En tenant compte du fait que dans la définition (1) du cube de données donnée au paragraphe (2.1.1), la façon dont les ensembles  $I, J$  et  $K$  ont été construits n'intervient pas et lorsque  $C$  est l'ensemble des "juges", ses éléments doivent être déterminés de façon unique, on ne peut donc pas leur attribuer deux codes distincts

	i	1	2	3	4	5
j						
$X^1$		80	70	80	50	20
$X^2$		2	4	2	10	50

fig : 4.1  $[X^1]^{-1}(80) = \{1,3\}$  ;  $[X^2]^{-1}(2) = \{1,3\}$  or  $80 \neq 2$  .

#### 4.1.2. Cube de données et analyses.

##### Hypothèse

"Le tableau  $X$  vérifie la condition suivante :  
les catégories induites sur  $I$  par les variables  $X^j$  sont toutes distinctes".

Sous cette hypothèse on a :

$$C = \bigcup_j C_j \quad \text{et} \quad m = \sum_j m_j$$

Puisqu'aucune catégorie n'est vide nous avons au plus  $(2^n)-1$  catégories distinctes pour  $|I| = n$  .

Un exemple :

$j \backslash i$	1	2	3	4	5
$X^1$	80	10	80	80	10
$X^2$	5	20	1	1	5

fig : 4.2

$${}_1C_1 = \{1,3,4\} ; \quad {}_1C_2 = \{2,5\} ; \quad {}_2C_1 = \{1,5\} ; \quad {}_2C_2 = \{2\}$$

$${}_2C_3 = \{3,4\} \quad \text{et} \quad C = \{ \{1,3,4\} , \{2,5\} , \{1,5\} , \{2\} , \{3,4\} \} .$$

Soit  $\{s_k / k \in ]m_j]\}$  la base canonique de l'espace euclidien  $(G_j, M_j)$  isomorphe à  $\mathbb{R}^{m_j}$ .

On définit le cube  $x$  de données comme suit

$$x : I \times C \times J \longrightarrow \{0,1\}$$

$$(i, C_k, j) \longrightarrow x(i, C_k, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in C_k = [X^j]^{-1}(s_1^j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque élément  $j \in J$  permet de mettre en dualité les individus éléments de  $I$  et les catégories éléments de  $C$  par la strate  $z^j$  élément de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(G_j^* ; F)$  de matrice associée

$$z^j = (x(i, C_k, j))_{\substack{i \in I \\ k \in ]m_j]}}$$

qui a pour  $k^{\text{ème}}$  vecteur colonne le vecteur

$$z^k I = \sum_i \Pi_{j C_k}(i) \underline{f}_i$$

où  $\Pi_{j C_k}(\cdot)$  est la fonction indicatrice de la catégorie  ${}_j C_k$ .

$$z^j = M(z^j ; (j \underline{s}^{*k}) , (\underline{f}_i))$$

les vecteurs

$$j\underline{z}^{kI} = z^j ( \underset{j}{s}^{*k} ) \quad (k \in ]m_j])$$

forment le nuage des catégories

$$\mathcal{M} = \{ ( j\underline{z}^{kI} , \frac{1}{m_j} ) / k \in ]m_j] \}$$

$$t_{Z^j} = M(t_{Z^j} ; (\underline{f}^{*i}) , (\underset{j}{s}_k))$$

les vecteurs

$$\underline{z}^{iC_j} = t_{Z^j}^j (\underline{f}^{*i}) \quad (i \in I)$$

$$= \sum_{k \in ]m_j]} \Pi_{j^C_k}^{(i)} j^s_k$$

forment le nuage des individus

$$\mathcal{N} = \{ (\underline{z}^{iC_j} , \frac{1}{|I|}) / i \in I \} .$$

On représente ainsi le tableau  $Z^j$  sous forme disjonctive complète :

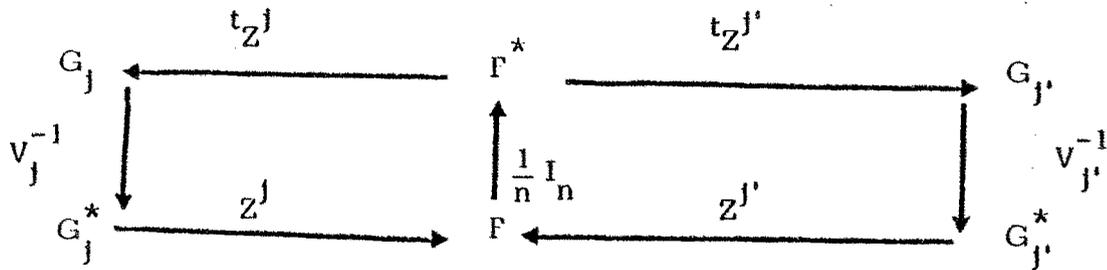
k \ i	1 . . . 1 . . . n	marge	code
1	0      0      0		
⋮			
k	0      0      0	$j^{n_k}$	$j^{x_k}$
⋮			
$\dot{m}_j$	0      0      1		

$$\sum_{k \in ]m_j]} j^{n_k} = n$$

où  $j^{n_k}$  est l'effectif de la catégorie  $j^C_k$  .

En faisant l'hypothèse d'équipondération sur les individus l'analyse du tableau  $t_{Z^j}$  ne nous donne pas de résultats intéressants. Mais le croise-

ment des tableaux  $t_Z^j$  et  $t_Z^{j'}$  ( $j \neq j'$ ) permet d'étudier les relations de dépendances entre variables  $X^j$  et  $X^{j'}$  à l'aide d'une analyse factorielle des correspondances (AFC) traduite par le schéma de dualité suivant



avec 
$$V_j = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} j^{n_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & j^{n_k} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & j^{n_{m_j}} \end{bmatrix}$$

cette A.F.C. n'est autre que l'analyse du tableau de contingence  $V^{jj'} = t_Z^j Z^{j'}$  défini comme tri croisé et de terme générique

$$j j' n_{kk'} = \sum_{i \in I} \Pi_{j C_k \cap j' C_{k'}}^{(i)}$$

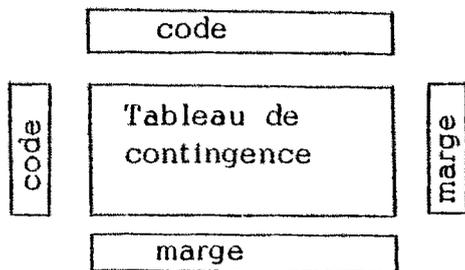


fig : 4.4

Cette analyse ne fait pas intervenir les codage  $j^x_k$ . La liaison entre variables  $X^j$  et  $X^{j'}$  est donc étudiée en terme de dépendance à l'aide d'un des nombreux indices utilisables :

par exemple la statistique du  $\chi^2$  (cf. Catherine d'AUBIGNY [12]).

4.1.3. Analyse du nuage des représentants des catégories.

Nous allons analyser à partir d'un tenseur spécifique le nuage des points  $\bigcup_j N_j$  avec

$$N_j = \{ (k^{x^{iJ}}, p_i) / i \in I, k \in ]m_j] \}$$

où  $k^{x^{iJ}} = \sum_{j'} \delta_{jj'} \prod_{j, C_k} (i) e_{j'}$  représente l'individu  $i$  dans la catégorie  $j$  (

Sachant que tous les individus d'une même catégorie ont le même représentant, cette analyse se résume en celui des  $\sum_j m_j$  représentants (il y a autant de représentants que de catégories).

Soit  $G = \bigoplus_j G_j$  où  $(G_j, N_{jj})$  est un espace euclidien engendré par la base canonique  $\{ j^g_k / k \in ]m_j] \}$   $G_j$  isomorphe à  $\mathbb{R}^{m_j}$ .

Soit  $\underline{x}$  le tenseur de  $E \otimes (G \otimes F)$  associé à l'élément  $x$  de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E^*; G \otimes F)$  de matrice  $\underline{X}$  associée tel que

$$x(\underline{e}^{*j}) = \underline{t}^j = \sum_{j'} \delta_{jj'} \underline{z}^{j'}$$

avec  $\underline{z}^j = \sum_{k \in ]m_j]} j^g_k \otimes j^k I$  un élément de  $G_j \otimes F$

par suite

$$G \otimes F = \bigoplus_j (G_j \otimes F).$$

les tenseurs  $\underline{t}^j$  ( $j \in J$ ) forment le nuage des variables

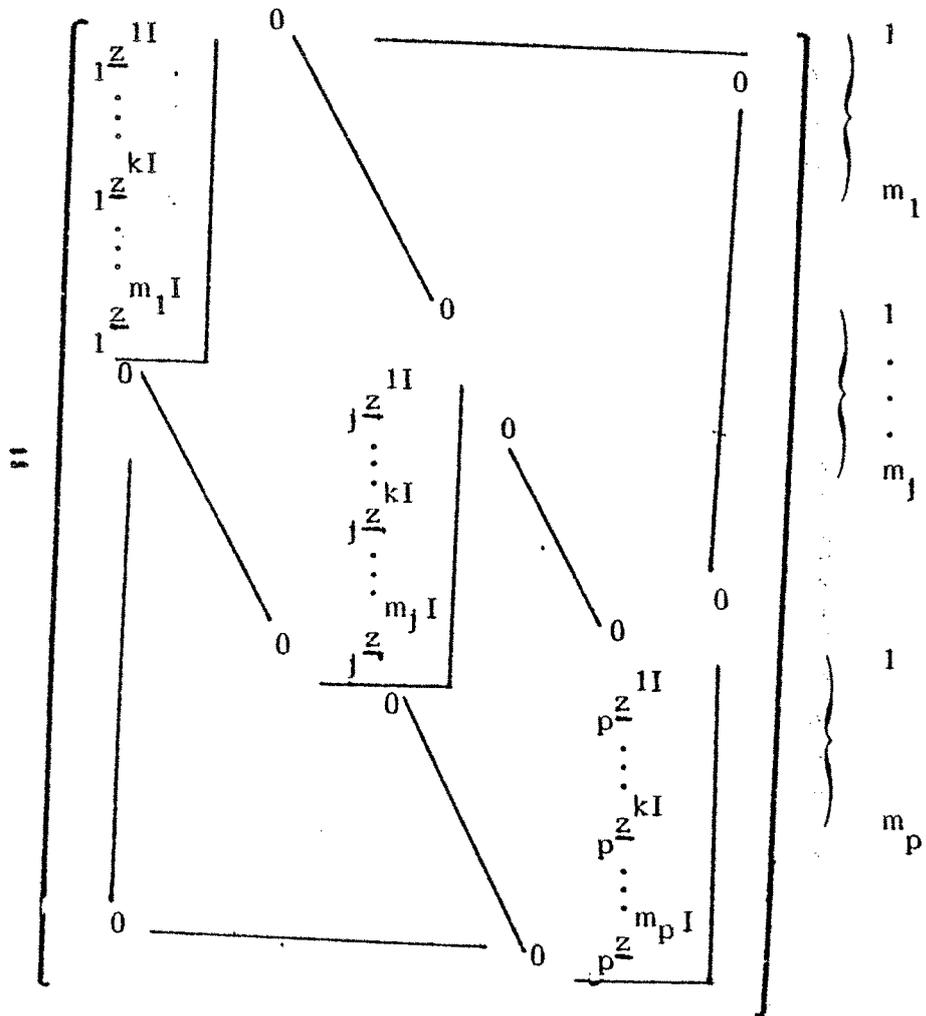
$$\mathcal{M} = \{ (\underline{t}^j, \frac{1}{|J|}) / j \in J \}$$

on a

$$\tilde{X} = M(x; (e^{x_j}) , (j^g_k \otimes f_1))$$

$$= [ \tilde{t}^1 \dots \tilde{t}^j \dots \tilde{t}^p ]$$

$$= \begin{bmatrix} z^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z^j & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & z^p \end{bmatrix}$$



Les vecteurs colonnes de  $\tilde{X}$  forment une base. Par suite le sous-espace vectoriel de  $G \otimes F$  engendré par les tenseurs  $\tilde{t}^j (j \in J)$  est de dimension  $p$ . L'application linéaire  $x$  est injective. A la transposée de  $x$  est associée la matrice

$$\tilde{t}_X = M(\tilde{t}_x ; (j^g \otimes f_i^*), (e_j)) .$$

Les vecteurs

$$\begin{aligned} k^{x i J} &= \tilde{t}_x(j^g \otimes f_i^*) \quad (i \in I, k \in ]m_j]) \\ &= \sum_{j'} \delta_{jj'} \Pi_{j k}^{(i)} e_j \end{aligned}$$

forment les nuages des individus

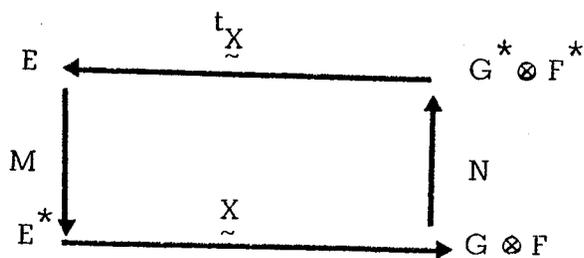
$$N_j = \{ (k^{x i J}, p_i) / i \in I, k \in ]m_j] \}$$

appartenant à l'ensemble

$$C_j = \bigcup_k C_{j k}$$

$\bigcup_j N_j$  est le nuage des  $\sum_j m_j$  représentants d'individus.

Le schéma de dualité suivant est associé à l'analyse du tableau



Pour décrire  $N$  et  $\mathcal{M}$  nous allons choisir pour métriques  $N = Q \otimes D_p$  où  $Q$  (resp.  $D_p$ ) est une métrique dans  $G$  (resp.  $F$ ).

Comme  $G = \bigoplus_j G_j$  on a

$$Q = [ q( j \stackrel{g}{\sim} k , j' \stackrel{g}{\sim} k' ) ]_{\substack{j \in J \\ j' \in J \\ k \in ]m_j] \\ k' \in ]m_{j'}]}}$$

$$= [ N_{jj'} ]_{\substack{j \in J \\ j' \in J}}$$

avec  $N_{jj'}$  une forme bilinéaire définie sur  $G_j \times G_{j'}$ ,  $N_{jj'}$  ( $j \neq j'$ ) est la métrique inter et  $N_{jj}$  métrique intra (cf. paragraphe (3.1.4)).

Nous avons par définition

$$(4.1.3.1) \quad \langle \underline{t}^j , \underline{t}^{j'} \rangle_{Q \otimes D_p} = \langle \underline{z}^j , \underline{z}^{j'} \rangle_{N_{jj'} \otimes D_p}$$

$$= \sum_{\substack{k \in ]m_j] \\ k' \in ]m_{j'}]}} \langle j \stackrel{g}{\sim} k , j' \stackrel{g}{\sim} k' \rangle_{N_{jj'}} \cdot \langle j \stackrel{k I}{\sim} , j' \stackrel{k' I}{\sim} \rangle_{D_p}$$

d'où le résultat suivant

Propriété fondamentale.

"Si l'on pose

$$\langle j \stackrel{g}{\sim} k , j' \stackrel{g}{\sim} k' \rangle_{N_{jj'}} = j^x_k \cdot j'^x_{k'}$$

on a :

$$\langle \tilde{t}^j, \tilde{t}^{j'} \rangle_{Q \otimes D_p} = \langle \underline{X}^{jI}, \underline{X}^{j'I} \rangle_{D_p}$$

où  $\underline{X}^{jI}$  représente la variable  $X^j$  associée au tableau d'origine  $X$  " .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \underline{X}^{jI} &= \sum_i X^{j(i)} \underline{f}_i \\ &= \sum_{k \in ]m_j]} j^x_k \underline{j}^{kI} \end{aligned}$$

$$\text{et } \langle \underline{X}^{jI}, \underline{X}^{j'I} \rangle_{D_p} = \sum_{\substack{k \in ]m_j] \\ k' \in ]m_{j'}]}} j^x_k j'^x_{k'} \langle \underline{j}^{kI}, \underline{j}'^{k'I} \rangle_{D_p}$$

or d'après l'expression (4.1.3.1) on a

$$\langle \tilde{t}^j, \tilde{t}^{j'} \rangle_{Q \otimes D_p} = \sum_{\substack{k \in ]m_j] \\ k' \in ]m_{j'}]}} \langle j^g_k, j'^g_{k'} \rangle_{N_{jj'}} \langle \underline{j}^{kI}, \underline{j}'^{k'I} \rangle_{D_p}$$

l'égalité est assuré si l'on prend

$$\langle j^g_k, j'^g_{k'} \rangle_{N_{jj'}} = j^x_k j'^x_{k'}$$

Par suite on est assuré de l'équivalence des images euclidiennes

$$(\{ \underline{X}^{jI} / j \in J \}, F, D_p) \text{ et } (\{ \tilde{t}^j / j \in J \}, G \otimes F, Q \otimes D_p) .$$

Le tenseur  $\tilde{t}^J$  est donc le représentant de la variable  $X^J$ , c'est en cela que cette propriété est fondamentale. Ainsi donc les analyses des tableaux (non centrés)  $X$  et  $\tilde{t}^X$  donnent les mêmes résultats en ce qui concerne la description dans le plan de composantes principales.

Dans les plans principaux les vecteurs individu initiaux  $\underline{x}^{iJ} = \sum_{j \in J} X^{j(i)} \underline{e}_j$  peuvent être représentés comme points supplémentaires.

Corollaire de la propriété fondamentale :

"Si le tableau  $X$  est  $D_p$ -centré

$$\langle \tilde{t}^J, \tilde{t}^{J'} \rangle_{Q \otimes D_p} = \text{Cov}(X^J, X^{J'})$$

$$|\tilde{t}^J|_{Q \otimes D_p}^2 = \text{Var}(X^J)$$

$$\frac{\langle \tilde{t}^J, \tilde{t}^{J'} \rangle_{Q \otimes D_p}}{|\tilde{t}^J|_{Q \otimes D_p} \cdot |\tilde{t}^{J'}|_{Q \otimes D_p}} = \text{Cor}(X^J, X^{J'}) "$$

Soit  $\underline{a}_j = (x_k)_{k \in ]m_j]}$  le vecteur codage de la variable  $X^j$ ,

on a

$$N_{jj'} = \underline{a}_j \tilde{t}^{\underline{a}_{j'}}$$

#### 4.1.4. Fibrage.

Rappelons que l'on a pour tout  $k \in ]m_j]$

$$\underline{x}^{iJ} = \sum_{j'} \delta_{jj'} \Pi_{j'k}^{(i)} \underline{e}_{j'}$$

Les individus d'une même catégorie ont donc le même représentant et deux individus appartenant à des catégories différentes (induites par une même variable) peuvent aussi avoir le même représentant puisque les codages ne sont pas prises en compte. Remplaçons  $\Pi_{j C_k}^{(i)}$  par  $j^{x_k} \Pi_{j C_k}^{(i)}$  dans l'expression de  $k \underline{x}^{iJ}$ , alors

$$j \underline{z}^{kI} = \sum_{i \in I} j^{x_k} \Pi_{j C_k}^{(i)} f_i$$

$$\forall (k, k') \in ]m_j]^2 \quad k \underline{x}^{iJ} = \alpha k' \underline{x}^{i'J} \quad \text{pour tout } (i, i') \in I^2.$$

Lorsque la variable  $j$  est fixée, les vecteurs individus  $k \underline{x}^{iJ}$  ( $k \in ]m_j]$ ,  $i \in I$ ) sont tous colinéaires et donc portés par une même fibre (cf. exemple §(II.2)). Pour leur description, ils seront tous alignés, car il y a conservation de la colinéarité par changement de base ou par projection. Et quand  $j$  parcourt l'ensemble  $J$ , le plan principal est alors "quadrillé" par les fibres.

On a la représentation suivante de ce plan

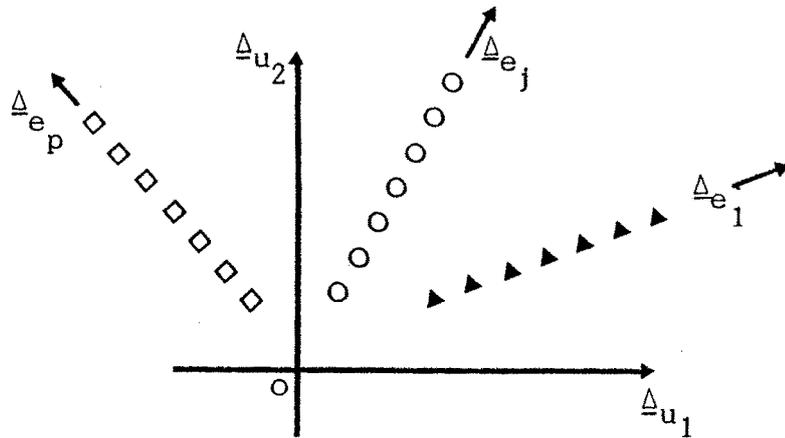


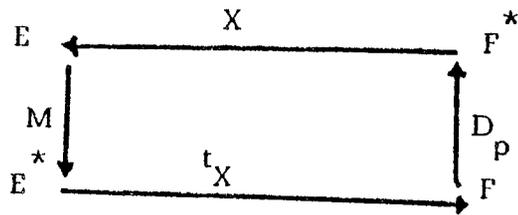
fig : 4.5

1er axe factoriel

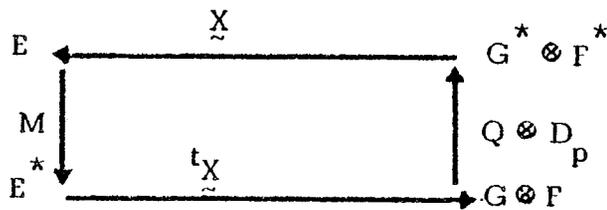
on a

$$\begin{aligned} k \underline{x}^{iJ} &= \sum_{j'} \delta_{jj'} j^{x_k} \Pi_{j C_k}^{(i)} e_j \\ &= \sum_{j'} \delta_{jj'} X^{j(i)} \Pi_{j C_k}^{(i)} e_j \\ &= X^{j(i)} e_j . \end{aligned}$$

Ce qui montre que les fibres en question sont celles construites dans le cas usuel par dualité à l'aide du schéma



Dans ce cas, la description des points se fait non seulement le long d'une fibre, mais aussi par rapport à d'autres. On utilise encore ici le schéma de dualité du paragraphe précédent à savoir :



On décrit les nuages des points  $N$  et  $\mathcal{M}$  en prenant pour  $Q$  la "métrique" de terme générique

$$\langle j^g_k, j^{g'}_{k'} \rangle_{N_{jj'}} \equiv 1 \quad (\text{avec } Q = [N_{jj'}]_{\substack{j \in J \\ j' \in J}}).$$

Dans ce cas la propriété fondamentale

$$\langle \tilde{t}^j, \tilde{t}^{j'} \rangle_{Q \otimes D_p} = \langle \underline{X}^{jI}, \underline{X}^{j'I} \rangle_{D_p} \text{ se trouve conserver.}$$

Remarque :

"Malgré le remplacement de  $\Pi_{j^k}^C(i)$  par  $\Pi_{j^k}^{x_k} \Pi_{j^k}^C(i)$  dans l'expression de  $k \underline{X}^{ij}$ , le sous-espace vectoriel de  $G \otimes F$  engendré par les  $p$  tenseurs  $\tilde{t}^j$  reste de dimension  $p$ ".

§(IV.2) Le problème des rotations procrustes ou la recherche d'une métrique inter.

4.2.1. Position du problème et formulation des hypothèses mathématiques.

a) Formalisation traditionnelle du problème.

Etant données deux images euclidiennes

$$((N_X(k) = \{ (k_{ij}^X, p_i) / i \in I \}, E, I_p)) \quad (k = k_0, k_1) \quad \text{de} \quad (I, d_I) .$$

Les nuages de points  $N_X(k_0)$  et  $N_X(k_1)$  n'ont dans  $(E, I_p)$  ni la même orientation, ni la même forme, la position de l'un par rapport à l'autre étant fixée.

Le problème de la comparaison de ces deux nuages de points se pose en ces termes :

- Dans quelle mesure peut-on considérer comme équivalentes ces deux images euclidiennes ?
- Ces deux nuages de points diffèrent-ils significativement ?

Géométriquement, la résolution de ce problème procède de deux façons, la première par identification, qui consiste à considérer l'un des deux nuages de points (par exemple  $N_X(k_1)$ ) comme une "cible" sur lequel par déplacement on fait coïncider au mieux l'autre nuage de points sans le déformer.

Ces déplacements opèrent (par étapes) une translation (qui permet de rendre les deux nuages de points "concentriques"), une rotation autour de ce centre de gravité commun (ou bien une symétrie), enfin une homothétie (voir fig : 4.6 ; 4.7 ; 4.8)

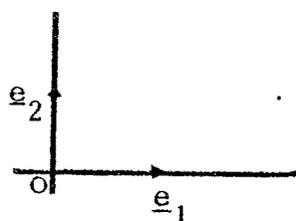
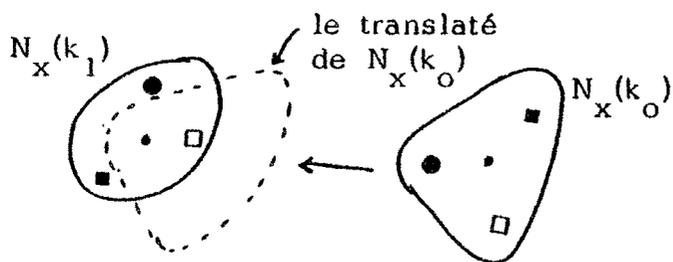


fig : 4.6 : translation

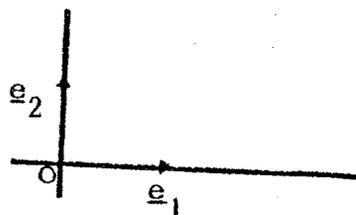
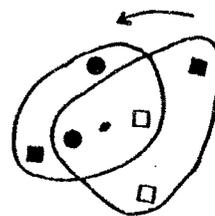


fig : 4.7 : rotation

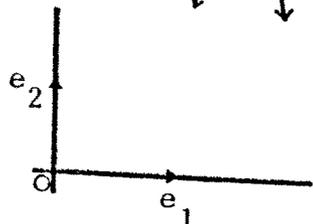
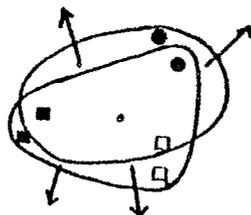


fig : 4.8 : homothétie

Mathématiquement, pour résoudre ce problème on écrit dans  $(M_{p,n}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{D_p, I_p})$  le modèle suivant

$$X^{k_1} = \alpha P X^{k_0} + B + \epsilon$$

où  $B$  est une translation de vecteur  $\underline{b}^J$ ,  $B = [ \underline{b}^J, \dots, \underline{b}^J, \dots, \underline{b}^J ]$ ,  $P$  une application orthogonale (i.e.  ${}^t P P = I_p$ ),  $\alpha$  le rapport d'une homothétie et  $\epsilon$  traduit les résidus de cet ajustement.

Soient respectivement  $E(p)$  et  $S(p)$  les groupes des translations ou bien des applications orthogonales et des similitudes (nous reprenons ici les notations de Sibson [40]) avec  $p = \dim(E)$ .

Le modèle mathématique précédent peut s'écrire plus généralement

$$X^{k_1} = T X^{k_0} + \epsilon, \quad T \in \{E(p), S(p)\} = \Gamma(p).$$

Pour faire coïncider au mieux les tableaux  $X^{k_1}$  et  $X^{k_0}$  on calcule l'estimateur  $\hat{T}$  de  $T$  qui minimise le critère d'ajustement (Sibson [40]) :

$$\{ \|\epsilon\|_{D_p, I_p}^2 = \sum_i p_i \left|_{k_1} \underline{x}^{iJ} - T \left|_{k_0} \underline{x}^{iJ} \right|_{I_p}^2 \mid T \in \Gamma(p) \}$$

et l'on mesure l'écart entre les tableaux  $X^{k_1}$  et  $X^{k_0}$  par la statistique procruste (Sibson [40])

$$G_T(X^{k_1}, X^{k_0}) = \sum_i p_i \left|_{k_1} \underline{x}^{iJ} - \hat{T} \left|_{k_0} \underline{x}^{iJ} \right|_{I_p}^2$$

Une deuxième approche par appariement consiste à transformer simultanément les deux nuages de points jusqu'à les faire coïncider au mieux.

## b) La nouvelle approche ou la recherche de la métrique inter.

### b.1. Introduction.

Considérons deux images euclidiennes

$$(N_X(k) = \{ (\left|_{k_0} \underline{x}^i = g_k \otimes \left|_{k_1} \underline{x}^{iJ}, p_i \right) / i \in I \}, \Delta_{g_k} \otimes E, M_{kk}) \mid k = k_0, k_1$$

avec  $M_{k_0 k_0}$  et  $M_{k_1 k_1}$  quelconques. Ces deux images euclidiennes sont équivalentes à celles du sous-paragraphe précédent (cf. proposition §(3.A.4.)).

Le nuage de points  $N_X(k)$  ( $k = k_0, k_1$ ) est représenté dans le sous-espace euclidien  $(\Delta_{g_k} \otimes E, M_{kk})$  de  $G \otimes E = \bigoplus_k (\Delta_{g_k} \otimes E)$ . Rechercher les

positions relatives des deux nuages de points équivaut à rechercher celles des sous espaces  $\Delta_{g_k} \otimes E$  ( $k = k_0, k_1$ ). Elles sont donc déterminées par

la métrique inter  $M_{k_1 k_0}$ .

Enfin l'orientation du nuage  $N_x(k)$  ( $k = k_0, k_1$ ) est celui du sous espace  $\Delta_{g_k} \otimes E$  ( $k = k_0, k_1$ ) dans  $G \otimes E$ .

Pour positionner les nuages de points  $N_x(k)$  ( $k = k_0, k_1$ ) à distance minimale, on s'autorise des translations (à "l'intérieur" de chaque espace euclidien  $(\Delta_{g_k} \otimes E, M_{kk})$ , puisqu'une translation est une bijection d'un espace donné dans lui-même), des rotations (ou symétries) et des homothéties.

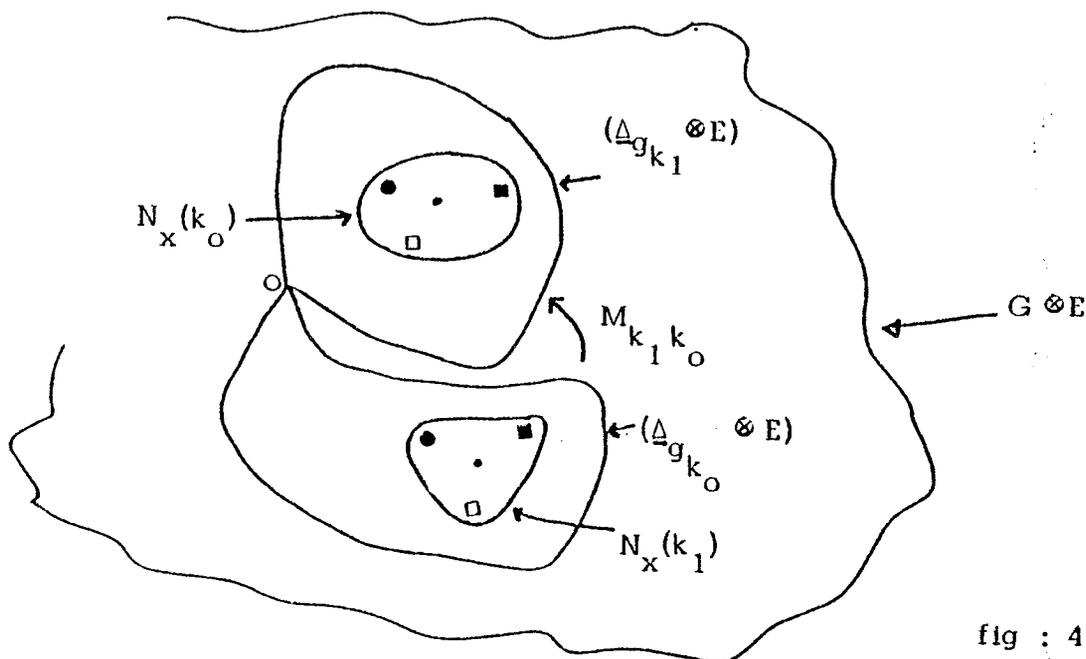


fig : 4.9.

Proposition (1)

" Soient  $\underline{g}^k = \sum_i p_i x_i^k$  le barycentre du nuage des points  $N_x(k)$  et  $T_k$  une translation. On a

$$(\underline{g}^{k'} = T_k \underline{g}^k \quad k \neq k') \iff (\underline{g}^k = \underline{0} \quad \forall k) "$$

La preuve résulte de ce que  $\Delta_{g_k} \otimes E$  et  $\Delta_{g_{k'}} \otimes E$  ( $k \neq k'$ ) sont deux espaces supplémentaires. Faire coïncider deux barycentres revient donc à centrer les deux nuages de points.

Supposons les nuages  $N_x(k)$  ( $k = k_0, k_1$ ) centrés.

Dans  $(\underline{\Delta}_{g_{k_1}} \otimes E, M_{k_1 k_1})$  le modèle mathématique s'écrit

$$(1) \quad N_x(k_1) = \alpha P N_x(k_0) + N_\epsilon$$

où  $N_\epsilon = \{(\epsilon^i, p_i) / i \in I\}$  est le nuage des résidus associés à chacun des individus  $i \in I$ ,  $\epsilon^i = k_1 \tilde{x}^i - \alpha P k_0 \tilde{x}^i$ ,  $\alpha$  le rapport d'une homothétie et

$P$  une isométrie de  $\underline{\Delta}_{g_{k_0}} \otimes E$  dans  $\underline{\Delta}_{g_{k_1}} \otimes E$ . Elle vérifie la condition

d'invariance

$$\langle P_{k_0} \tilde{x}^i, P_{k_0} \tilde{x}^{i'} \rangle_{M_{k_1 k_1}} = \langle k_0 \tilde{x}^i, k_0 \tilde{x}^{i'} \rangle_{M_{k_0 k_0}}$$

qui peut encore s'écrire

$${}^t_P M_{k_1 k_1} P = M_{k_0 k_0}.$$

Remarque (1)

"  $P$  n'est une rotation (ou symétrie) que pour

$$M_{k_1 k_1} = M_{k_0 k_0} = I_p.$$

Nous traitons donc dans ce paragraphe un problème général dont celui des rotations procrustes en est un cas particulier. Dans ce cas, le modèle mathématique ci-dessus ne peut être écrit dans  $M_{p,n}(\mathbb{R})$  à cause des contraintes sur les métriques  $M_{kk}$  ( $k \in K$ ) qui doivent être égales".

b-2 Estimation des paramètres du modèle

On convient de mesurer l'écart entre les points  $k_1 x^i$  et  $k_0 x^i$  ( $i \in I$ ) dans  $\Delta_{-gk} \in E$  par l'écart quadratique :

$$|k_1 x^i - T_{k_0} x^i|_{M_{k_1 k_1}}^2, T \in \Gamma(p)$$

et l'écart entre les nuages de points  $N_X(k_1)$  et  $N_X(k_0)$  par la somme pondérée de ces écarts quadratique :

$$\begin{aligned} \Delta^2(N_X(k_1), N_X(k_0)) &= \sum_i p_i |k_1 x^i - T_{k_0} x^i|_{M_{k_1 k_1}}^2 \\ &= \sum_i p_i |\hat{\xi}^i|_{M_{k_1 k_1}}^2 \end{aligned}$$

$\Delta^2(N_X(k_1), N_X(k_0))$  est l'inertie du nuage des points  $N_E$  (cf notations de CROQUETTE [11]).

Pour positionner les nuages de points  $N_X(k_1)$  et  $N_X(k_0)$  à distance minimale on cherche le paramètre :

T qui minimise

$$\{ \Delta^2(N_X(k_1), N_X(k_0)) \mid T \in \Gamma(p) \}$$

soit  $\hat{T}$  cet estimateur de T le tenseur.

$$\hat{\xi}^i = k_1 x^i - \hat{T}_{k_0} x^i \text{ sera appelé } \underline{\text{tenseur résidu sur l'élément } i \in I}$$

b.2.1 T est l'isométrie P

Proposition (2)

$$\ll \underline{\text{Minimiser}} \left\{ \sum_i p_i |k_1 x^i - T_{k_0} x^i|_{M_{k_1 k_1}}^2 \mid T \in E(p) \right\}$$

revient à maximiser :

$$\{ \text{Tr}(X^{k_0} D_p^{-1} X^{k_1} T) \mid T \in E(p) \}$$

Preuve :

$$\Delta^2(N_X(k_1), N_X(k_0)) = \sum_i p_i |k_1 x^i - P_{k_0} x^i|_{M_{k_1 k_1}}^2$$

$$= \sum_i p_i |k_1^X|^2 |M_{k_1 k_1}| + \sum_i p_i |P_{k_0^X}|^2 |M_{k_1 k_1}|$$

$$- 2 \sum_i p_i \langle k_1^X, P_{k_0^X} \rangle |M_{k_1 k_1}|$$

$$= \sum_i p_i |k_1^X|^2 |M_{k_1 k_1}| + \sum_i p_i |k_0^X|^2 |M_{k_0 k_0}|$$

$$- 2 \sum_i p_i \langle k_1^X, P_{k_0^X} \rangle |M_{k_1 k_1}|$$

avec :

$$\sum_i p_i \langle k_1^X, P_{k_0^X} \rangle |M_{k_1 k_1}| = \sum_i p_i \langle k_1^X, k_0^X \rangle |M_{k_1 k_1 P}|$$

$$= \text{Tr}(X^{k_0}_{D_p} t_X^{k_1} |M_{k_1 k_1 P}|)$$

puisque les deux premiers termes positifs du membre de droite de l'égalité ci-dessus ne dépendent pas des paramètres P, minimiser :

$$\{ \sum_i p_i |k_1^X|^2 - \text{Tr}(X^{k_0}_{D_p} t_X^{k_1} |M_{k_1 k_1 P}|) \mid P \in E(p) \}$$
 revient à maximiser

$$\{ \text{Tr}(X^{k_0}_{D_p} t_X^{k_1} |M_{k_1 k_1 P}| \mid P \in E(p) \}$$

C.Q.F.M.

Les nuages de points  $N_X(k)$  ( $k \in \{k_0, k_1\}$ ) sont plongés dans l'espace Euclidien.

$$(G \oplus E = \oplus_k (\Delta g_k \oplus E), M_X)$$

De plus les seuls termes connus de la matrice  $M_X$  sont les métriques intra  $M_{kk}$  ( $k = k_0, k_1$ )

On cherche à déterminer les matrices inter  $M_{kk'}$  ( $k \neq k' \in \{k_0, k_1\}$ ) la décompositio

$$\sum_i p_i |k_1^X|^2 - |k_0^X|^2 |M_X| = \sum_i p_i |k_1^X|^2 |M_{k_1 k_1}| + \sum_i p_i |k_0^X|^2 |M_{k_0 k_0}|$$

$$- 2 \sum_i p_i \langle k_1^X, k_0^X \rangle |M_{k_1 k_0}|$$

(cf propriété (2) § (3.A.4)

Conduit à choisir pour métrique inter  $M_{k^1 k^0}$ , la matrice :

$$\underline{M_{k^1 k^0} = M_{k^1 k^1} \hat{P}}$$

où  $\hat{P}$  désigne une solution de l'expression (1).

On a donc dans ce cas (Croquette [11])

$$\langle k^1 x^i, k^0 x^i \rangle_{M_{k^1 k^0}} = \langle k^1 x^i, \hat{P} k^0 x^i \rangle_{M_{k^1 k^1}}$$

rechercher l'estimateur  $\hat{P}$  de  $P$  équivaut à rechercher la métrique inter  $M_{k^1 k^0}$ . Une généralisation de cette démarche au cas de  $m$  nuage de points  $N_x(k)$  ( $k \in K$ ) permet de construire  $M_x$  tout entier.

La solution construite par CROQUETTE [11] est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{k^1 k^0} = M_{k^1 k^1} V_{k^1 k^0} (M_{k^0 k^0} V_{k^0 k^1} M_{k^1 k^1} V_{k^1 k^0})^{-1/2} M_{k^0 k^0} \quad (*) \\ t_X^{k^1} M_{k^1 k^0} X^{k^0} D_p = (W_{k^1 k^1} D_p W_{k^0 k^0} D_p)^{1/2} \end{array} \right.$$

La solution est unique si  $V_{k^1 k^0}$  est régulier.

$W_{k^1 k^1} D_p$  est l'opérateur d'ESCOUFIER  $U_{k^1}$  associé au tableau  $X^{k^1}$  et  $V_{k^1 k^0} = X^{k^1} D_p t_X^{k^0}$

Propriété

<< On a la propriété de symétrie :

$$\Delta^2(N_x(k^1), N_x(k^0)) = \Delta^2(N_x(k^0), N_x(k^1)) \gg$$

En effet :

$(W_{k^0 k^0} D_p W_{k^1 k^1} D_p)$  et  $(W_{k^1 k^1} D_p W_{k^0 k^0} D_p)$  ont les mêmes valeurs propres non nulles dans le même ordre de multiplicité (cf SIBSON [40]).

Comme ces deux matrices sont non négatives, on a :

$$\text{Tr}(W_{k^0 k^0} D_p W_{k^1 k^1} D_p)^{1/2} = \sum_i \lambda_i^{1/2} = \text{Tr}(W_{k^1 k^1} D_p W_{k^0 k^0} D_p)^{1/2}$$

(cf Annexe A.4)

Proposition (3)

<< L'isométrie  $\hat{B}$  de  $(\Delta g_{k^1} \mathbb{E}, M_{k^1 k^1})$  dans  $(\Delta g_{k^0} \mathbb{E}, M_{k^0 k^0})$

qui minimise :

$$\left\{ \sum_i p_i |k^0 x^i - B_{k^1 k^0} k^1 x^i|^2 \mid B \in E(p) \right\}$$

est l'adjoint  $\hat{P}^*$ , de l'isométrie  $\hat{P}$  solution de l'expression (1) >>

(pour la définition de  $\hat{P}^*$  confère annexe A.5).

(\*) Pour sa définition voir annexe A.2

Preuve

D'après l'expression (2) on a :

$$M_{k^1 k^0} = M_{k^1 k^1} \hat{P}$$

$$M_{k^0 k^1} = M_{k^0 k^0} \hat{B}$$

La propriété de symétrie ci-dessus entraîne que :

$$M_{k^1 k^0} = {}^t M_{k^0 k^1}$$

Or il est montré en annexe que :

$$\begin{aligned} \hat{P}^* &= M_{k^0 k^0}^{-1} {}^t \hat{P} M_{k^1 k^1} = M_{k^0 k^0}^{-1} {}^t (M_{k^1 k^1} \hat{P}) \\ &= M_{k^0 k^0}^{-1} {}^t (M_{k^1 k^0}) \\ &= M_{k^0 k^0}^{-1} M_{k^0 k^1} \\ &= M_{k^0 k^0}^{-1} (M_{k^0 k^0} \hat{B}) \\ &= \hat{B} \end{aligned}$$

C.Q.F.M.

b.2.2. T est la similitude de  $\hat{P}$

$\hat{P}$  étant l'isométrie construite au paragraphe §(b.2.1) et  $\alpha$  le rapport d'une homothétie.

Proposition 4

<< Le réel :

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{Tr}(W_{k^0 k^0} D_p W_{k^1 k^1} D_p)^{1/2}}{|k^0 \tilde{x}^i|^2 |M_{k^0 k^0}|}$$

Minimise :

$$\sum_i p_i |k^1 \tilde{x}^i| - \hat{\alpha} |k^0 \tilde{x}^i|^2 |M_{k^1 k^1}| \gg$$

Preuve :

posons ...  $\varphi(\alpha) = \sum_i p_i |k^1 \tilde{x}^i| - \alpha |k^0 \tilde{x}^i|^2 |M_{k^1 k^1}|$  la fonction polynôme du

second degré en  $\alpha$  dont la dérivée seconde.



Preuve

$$\begin{aligned} x^k &= \sum_{i,j} f_i^{*i} g_k^{*j} (x^k) f_i g_k e_j \\ &= \sum_{i,j} \sum_{ijk} f_i g_k e_j = \sum_i f_i g_k x^{ij} \\ &= \sum_i f_i g_k x^i \end{aligned}$$

C.Q.F.M.

On peut aussi écrire  $x^k$  sous la forme :

$$\begin{aligned} x^k &= \sum_i f_i x^k (f_i^{*i}) \\ x^k (f_i^{*i}) &= x^i \end{aligned}$$

$x^k$  est un élément de  $L_{\mathbb{R}}(F^*; \Delta g_k \otimes E)$  de matrice associée la strate  $x^k$ .

Les tenseurs  $x^i$  ( $i \in I$ ) forment le nuage des individus :

$$N_x(k) = \{(x^i, p_i) \mid i \in I\}$$

introduit au paragraphe (4.2.1.b).

Théorème

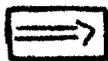
<< Soient  $y^k$  ( $k \in K$ ) un élément de  $F(\Delta g_k \otimes E)$  ( $k \in K$ ) et  $a_k$  ( $k \in K$ ) un réel non nul on a :

$$\left( \sum_{k=1}^m a_k y^k = 0 \right) \iff (y^k = 0 \quad \forall k \in K) \gg$$

Preuve



triviale



$$\sum_{k=1}^l a_k y^k = 0 \implies \sum_{s=1}^l a_s y^s = -a_{l+1} y^{l+1}, \quad l \in [1, m-1]$$

Mais :

$$\begin{aligned} -a_{l+1} y^{l+1} &\in F(\Delta g_{l+1} \otimes E) \\ \sum_{s=1}^l a_s y^s &\in \sum_{s=1}^l (F(\Delta g_s \otimes E)) = F(\sum_{s=1}^l \Delta g_s \otimes E) \end{aligned}$$

et l'on peut montrer (Grenb [21] pp 20)

$$\sum_{s=1}^l (F(\Delta g_s \otimes E)) \cap (F(\Delta g_{l+1} \otimes E))$$

$$F \otimes \left( \left( \sum_{s=1}^l (\Delta g_s \otimes E) \right) \cap (\Delta g_{l+1} \otimes E) \right) \\ \text{"} \\ \{0\}$$

puisque :

$$\left( \sum_{s=1}^l (\Delta g_s \otimes E) \right) \cap (\Delta g_{l+1} \otimes E) = \{0\}$$

(Condition requise par une somme directe de sous-espaces vectoriels cf KATSUMI [25] pp 50).

Par suite :

$$a_{l+1} \underline{v}^{l+1} = 0 \\ \underline{v}^{l+1} = 0 \quad \forall l \in [1, m-1]$$

résulte donc de ce que :

$$a_{l+1} \neq 0$$

C.Q.F.M.

D'après ce théorème, le nuage des points :

$N = \{(\underline{x}^k, q_k) \mid k \in K\}$  ne peut être centré (au sens de la métrique  $D_q$ ) sans le réduire au singleton  $\{0\}$

Ce qui est absurde.

Dans ce paragraphe nous allons faire la description du nuage  $N = \{(\underline{x}^k, q_k) \mid k \in K\}$  des tenseurs  $\underline{x}^k$  ( $k \in K$ ) associés respectivement aux tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) à partir du tenseur  $\underline{x}$  de  $G \otimes (F \otimes (G \otimes E))$  associé à l'élément  $x$  de  $L_{\mathbb{R}}(G^*; F \otimes (G \otimes E))$  de matrice :

$$\underline{x} = M(x; (g^{*k}), (f_i \otimes g_k, \otimes e_j))$$

tel que :

$$x(g^{*k}) = \underline{x}^k \quad (k \in K)$$

D'après le paragraphe (3.A.3) la matrice  $\underline{x}$  est une superposition des tableaux  $\underline{y}^i$

$$\underline{y}^i = [i \underline{y}^1, \dots, i \underline{y}^k, \dots, i \underline{y}^m]$$

vérifiant les relations de dualité :

$$i \underline{y}^k = k \underline{x}^i$$

$\underline{y}^i$  est un élément de  $M_{pm, m}(\mathbb{R})$  de forme bloc diagonale

$$\underline{y}^i = \begin{bmatrix} i \underline{y}^{1j} & & 0 \\ & i \underline{y}^{kj} & \\ 0 & & i \underline{y}^{mj} \end{bmatrix}$$

par suite  $\underline{X}$  s'écrit

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} i^y_{1J} & & 0 \\ 0 & i^y_{kJ} & \\ & & i^y_{mJ} \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{ccc} i^y_{iJ} & & 0 \\ 0 & i^y_{kJ} & \\ & & i^y_{mJ} \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{ccc} n^y_{1J} & & 0 \\ 0 & n^y_{kJ} & \\ & & n^y_{mJ} \end{array} \end{pmatrix}$$

la transposée de  $x$  correspond à la matrice

$$t_{\underline{X}} = M(t_x; (f^{*i} \otimes (g^{*k} \otimes e^{*j}), (g_k))$$

pour  $i$  et  $k$  fixés, les vecteurs

$$t_x(f^{*i} \otimes (g^{*k} \otimes e^{*j})) = i_{,k} y^{jK} \quad (j \in J)$$

vérifient :

$$i_{,k} y^{jK} = \sum_{k'} \delta_{kk'} x_{ijk'} g_{k'} = x_{ijk} g_k$$

d'où la propriété.

Propriété (1)

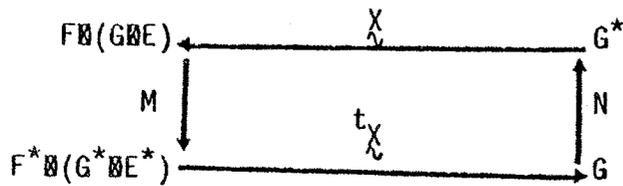
<< Pour  $k$  fixé, les vecteurs  $i_{,k} y^{jK}$  ( $i \in I, j \in J$ ) sont tous portés par l'axe  $\Delta_{g_k}$ . >>

Le nuage des variables est le suivant :

$$M = \bigcup_i M_i$$

$$M_i = \{ (i_{,k} y^{jK}, \frac{1}{|J|}) \mid k \in K, j \in J \}$$

Le schéma de dualité suivant est associé à l'analyse du tableau  $X$  :



Les nuages de points  $N$  et  $M$  sont décrits avec comme métriques :

$$N = D_q \quad , \quad M = D_p \otimes M_X$$

où  $D_p$  (resp.  $M_X$ ) est une métrique dans  $F$  (resp.  $G \otimes E = \sum_k g_k \otimes E$ ) et  $M_X$  une matrice relationnelle.

Nous avons :

$$\underset{D_p \otimes M_X}{|x^k - x^{k'}|^2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i p_i |i x^k - i x^{k'}|^2_{M_X}$$

La somme pondérée des écarts quadratiques résiduelles entre les deux nuages de points  $N_X(k)$  et  $N_X(k')$  ( $k \neq k'$ ).  $M_X$  mesure donc la "variance résiduelle" (ou écart quadratique).

Proposition (6)

<< La matrice de "variance-covariance-" des variables  $i_k y^{jK}$  est bloc diagonale et est égale à :

$$V = \begin{pmatrix} q_1 X^1 \otimes t_X^1 & & 0 \\ & q_k X^k \otimes t_X^k & \\ 0 & & q_m X^m \otimes t_X^m \end{pmatrix} \gg$$

Preuve

$$\begin{aligned}
 V &= \langle i_k y^{jK}, i_{k'} y^{j'K} \rangle_{D_q} \\
 &= (A_{kk'})_{\substack{k \in K \\ k' \in K}} \quad \text{avec } A_{kk'} = \begin{bmatrix} \langle i_k y^{jK}, i_{k'} y^{j'K} \rangle_{D_q} & i \\ & j \\ & j' \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$A_{kk'}$  est de dimension  $(np, np)$  et s'annule pour  $k \neq k'$

$$\begin{aligned}
 \text{Car } \langle i_k y^{jK}, i_{k'} y^{j'K} \rangle_{D_q} &= X_{kij} X_{i'k'j'} \langle g_k, g_{k'} \rangle_{D_q} \\
 &= 0 \text{ pour } k \neq k'
 \end{aligned}$$

On a :

$$A_{kk} = \begin{pmatrix} q_k & x_{ikj} & x_{i'k'j'} \\ & & \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ i' \\ j' \end{matrix}$$

$$= q_k X^k \otimes t_X^k$$

C.Q.F.M.

Cette proposition nous permet de calculer de façon effective la matrice V.

Propriété fondamentale

$$\langle\langle \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'} \rangle\rangle_{D_p \otimes M_X} = \text{tr}(X^k D_p t_X^{k'} M_{k'k}) \quad \gg$$

Preuve

$$\begin{aligned} \langle\langle \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'} \rangle\rangle_{D_p \otimes M_X} &= \sum_i p_i \langle x_i^k, x_i^{k'} \rangle_{M_X} \\ &= \sum_i p_i \langle x_i^k, x_i^{k'} \rangle_{M_{kk'}} \\ &= \text{Tr}(X^{k'} D_p t_X^k M_{kk'}) \\ &= \text{Tr}(X^k D_p t_X^{k'} M_{k'k}) \end{aligned}$$

Propriété (3)

$$\langle\langle \tilde{x}^k \mid \tilde{x}^k \rangle\rangle_{D_p \otimes M_X} = \text{Tr}(X^k D_p t_X^k M_{kk})$$

représente l'inertie du nuage des points  $N_X(k)$

Première application de la propriété fondamentale

lorsqu'il y a égalité entre les deux termes suivants :

$$\langle\langle \tilde{x}^k - \tilde{x}^{k'} \mid \tilde{x}^k - \tilde{x}^{k'} \rangle\rangle_{D_p \otimes M_X} = \sum_i p_i \langle x_i^k - x_i^{k'} \mid x_i^k - x_i^{k'} \rangle_{M_X}$$

$$\Delta^2(N_X(k), N_X(k'))$$

la borne inférieure de

$$\{ \sum_i p_i \langle x_i^k - x_i^{k'} \mid x_i^k - x_i^{k'} \rangle_{M_X} \mid p \in E(p) \}$$

est telle que :

$$\{ M_{kk'} = M_{kk} V_{kk'} (M_{k'k'} V_{k'k} M_{kk} V_{kk'})^{1/2} M_{k'k'} \quad (k \neq k') \}$$

(cf § (4.2, 1.b))

Pour ne pas perdre la propriété (3).

On fait alors l'ACP non centré du tableau  $\chi$ .

Dans le plan des composantes principales les variables :

$i, k, y^{jK}$  ( $i \in I, k \in K, j \in J$ ) sont portées par m fibres les projections des  $\Delta g_k$  ( $k \in K$ ) représentant les juges  $k \in K$  dans G :

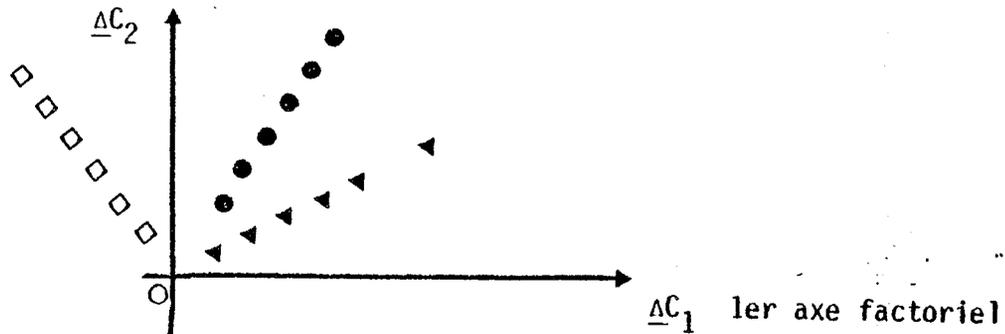


fig : 4.10  $\square; \bullet; \blacktriangledown$  sont les points variables  $i, k, y^{jK}$

Dans le plan des vecteurs principaux on mettra en évidence la classe des tenseurs  $\chi^k$  ( $k \in K$ ) homogènes, c'est-à-dire ceux qui sont des plus rapprochés (deux à deux) possible.

Cas particulier : Utilisation des métriques treillis.

Supposons que le nuage de points  $N_x(t)$  à l'instant  $t \in T$  dépend du nuage  $N_x(t-1)$  qui le précède et seulement de lui, alors pour décrire le nuage des points :

$$N = \{(\chi^t, q_t) \mid t \in T\}$$

On prend pour métrique  $M_x$  la métrique treillis (cf § (A.4)) telle que :

$$Q_{t-1,t} = \begin{bmatrix} M_{t-1,t-1} & M_{t,t-1} \\ M_{t-1,t} & M_{t,t} \end{bmatrix}$$

et

$$M_{t-1,t} = M_{t-1,t-1} V_{t-1,t} (M_{t,t} V_{t,t-1} M_{t-1,t-1} V_{t-1,t})^{-1/2} M_{t,t}$$

On traite ainsi un problème de même nature que celui traité dans les chaînes de MARKOV d'ordre 1 lorsqu'on considère que les résultats d'une épreuve dépendent des résultats de celle qui la précède et seulement d'eux.

4.2.3. Analyse des différences ou résiduelle

Soient  $X^k$  et  $X^{k'}$  ( $k < k'$ ) les deux tableaux qui ont fourni la meilleure approximation. On va analyser le nuage des points :

$$N = \{ ((k, X^i - X^{k'}), p_i) \mid i \in I \}$$

afin de mettre en évidence ceux des points dont l'écart quadratique résiduel :

$$|k, X^i - X^{k'}|_{M_x}^2$$

a été des plus faibles.

Cette analyse se fait à partir du tenseur  $X_t$  de :

$$F \otimes (\Delta g_k \otimes E) \otimes (\Delta g_{k'} \otimes E)$$

associé à l'élément :

$$x_t \text{ de } L_{\mathbb{R}}(F^*; (\Delta g_k \otimes E) \otimes (\Delta g_{k'} \otimes E)) \text{ de matrice}$$

$X_t$  associée telle que :

$$x_t(f^{*i}) = k, X^i - X^{k'} \quad (i \in I)$$

La matrice  $X_t$  s'écrit :

$$X_t = \begin{bmatrix} a X^k \\ X^{k'} \end{bmatrix}$$

où  $a = -1$

A la transposée de  $x_t$  est associé le tableau :

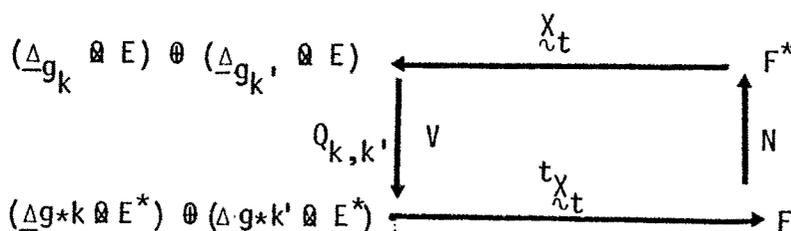
$${}^t X_t = M({}^t x_t; (g^{*k} \otimes e^{*j}), (f_i))$$

$$\text{les vecteurs : } {}^t x_t(g^{*k} \otimes e^{*j}) = \begin{cases} a X^{jI} & k=k \\ k, X^{jI} & k=k' \end{cases} \quad j \in J$$

forment le nuage des variables

$$M = \left\{ \left( a \frac{X^{jI}}{|J|} \mid j \in J \right) \cup \left( k, \frac{X^{jI}}{|J|} \mid j \in J \right) \right\}$$

le schéma de dualité suivant est associé à l'analyse du tableau  $X_t$



$$Q_{k,k'} = \begin{bmatrix} M_{kk} & M_{k'k} \\ M_{kk'} & M_{k'k'} \end{bmatrix}$$

L'analyse du triplet  $(\underline{X}_{\sim t}, D_p, Q_{k,k'})$  permet de construire les tenseurs principaux  $u_{\sim}^{\lambda}$  ( $\lambda=1,2,\dots$ ) dans  $(\Delta g_k \otimes E) \oplus (\Delta g_{k'} \otimes E)$  et  $\underline{c}^{\lambda I}$  ( $\lambda=1,2,\dots$ ) composantes principales dans F vérifiant :

$$\underline{c}^{\lambda I} = t_{\sim t} X_{\sim t} Q_{k,k'} u_{\sim}^{\lambda}$$

le tenseur  $(k' \underline{x}_{\sim}^i - k \underline{x}_{\sim}^i)$  s'écrit dans la base  $\{u_{\sim}^{\lambda}\}$

$$k' \underline{x}_{\sim}^i - k \underline{x}_{\sim}^i = \sum_{\lambda} (\alpha(k',k,i,\lambda)) u_{\sim}^{\lambda}$$

$$\text{avec : } \underline{c}^{\lambda I} = \sum_i (\alpha(k',k,i,\lambda)) f_i$$

$$\begin{aligned} \text{et : } |k' \underline{x}_{\sim}^i - k \underline{x}_{\sim}^i|_{Q_{k,k'}}^2 &= \sum_{\lambda} (\alpha(k',k,i,\lambda))^2 \\ &= |\hat{\underline{e}}_{\sim}^i|_{Q_{k,k'}}^2 \end{aligned}$$

par suite l'inertie Ig du nuage N s'écrit :

$$Ig = \sum_i p_i |k' \underline{x}_{\sim}^i - k \underline{x}_{\sim}^i|_{M_{i,\lambda}}^2 = \sum_{i,\lambda} p_i (\alpha(k',k,i,\lambda))^2$$

l'indice :

$$\frac{p_i ((\alpha(k',k,i,1))^2 + (\alpha(k',k,i,2))^2)}{\sum_{i,\lambda} p_i (\alpha(k',k,i,\lambda))^2}$$

mesure en pourcentage la part d'inertie expliquée par le point  $i \in I$  dans le premier plan principal. Ceux des points dont l'indice est faible sont ceux à écart quadratique résiduel petit.

4.2.4. Indicateur de liaison entre deux nuages de points

l'indice

$$NZ(\tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'}) = \frac{\langle \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'} \rangle_{D_p \otimes M_x}}{\|\tilde{x}^k\|_{D_p \otimes M_x} \times \|\tilde{x}^{k'}\|_{D_p \otimes M_x}}$$

Mesure le degré d'équivalence entre images euclidiennes

$(N_x(k), \Delta_{g_k} \otimes E, M_{kk})$  et  $(N_x(k'), \Delta_{g_{k'}} \otimes E, M_{k'k'})$  tenant compte de leur positions relatives dans  $G \otimes E$  c'est-à-dire des métriques inter  $M_{kk'}$  ( $k \neq k'$ ). Il généralise (comme on le verra au paragraphe suivant) tous les indices de même nature : le RV d'Escoufier le COR de Jaffrenou etc. et satisfait à la propriété générale suivante :

Propriété générale

" $NZ \in [-1, 1]$  "

Théorème

"Pour  $M_x$  solution des notations procrustes

$$(NZ = 1) \iff (X^{k'} = \hat{P} X^k)$$

avec  $\hat{P}$  une application orthogonale".

Preuve



$$\begin{aligned} NZ(\tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'}) &= \frac{\langle \tilde{x}^{k'}, \hat{P} X^k \rangle_{D_p, M_{k'k'}}}{\|\tilde{x}^{k'}\|_{D_p, M_{k'k'}} \|\tilde{x}^k\|_{D_p, M_{kk}}} \\ &= \frac{\langle \hat{P} X^k, \hat{P} X^k \rangle_{D_p, M_{k'k'}}}{\|\tilde{x}^k\|_{D_p, M_{kk}} \times \|\tilde{x}^k\|_{D_p, M_{kk}}} = \frac{\|\tilde{x}^k\|_{D_p, M_{kk}}^2}{\|\tilde{x}^k\|_{D_p, M_{kk}}^2} = 1 \end{aligned}$$



$$\chi^{k'}, \hat{P} \chi^k \in (M_{(p,n)}(\mathbb{R}), \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{D_p, M_{k',k'}})$$

$$\text{et } \underset{\sim}{\text{NZ}}(\underset{\sim}{\chi^{k'}}, \underset{\sim}{\chi^k}) = 1 \implies \chi^{k'} = \lambda \hat{P} \chi^k \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$$

or savons-nous que :

$$\chi^{k'} = \hat{P} \chi^k + \epsilon$$

par conséquent :

$$\lambda = 1 \text{ et } \epsilon = 0$$

C.Q.F.M.

Corollaire :

"Les images Enclidiennes

$$(N_X(k), \underline{\Delta}_{g_k} \otimes E, M_{kk}) \text{ et } (N_X(k'), \underline{\Delta}_{g_k} \otimes E, M_{k',k'}) \text{ de } (I, d_I)$$

sont équivalentes"

car

$$\begin{aligned} |\hat{P} k^{xiJ} - \hat{P} k^{xi'J}|_{M_{k',k'}}^2 &= |\hat{P} (k^{xiJ} - k^{xi'J})|_{M_{k',k'}}^2 \\ &= |k^{xiJ} - k^{xi'J}|_{M_{kk}}^2 \end{aligned}$$

§ (4.3.) Comparaison avec d'autres procédures : autres applications de la propriété fondamentale

$$\langle \underset{\sim}{x}^k, \underset{\sim}{x}^{k'} \rangle_{D_p} \otimes M_x = \text{Tr} (X^k D_p t_{X^{k'}} M_{k',k})$$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que les procédures de comparaisons des tableaux  $X^k (k \in K)$  font toutes la description du nuage des tenseurs  $N = \{(\underset{\sim}{x}^k, q_k) \mid k \in K\}$  et ne diffèrent que par le choix des métriques qui caractérisent les approches d'Esconfier, de Jaffrenou des notations procrustes et des métriques relationnelles de Schektman.

4.3.1. L'approche de Jaffrenou [24]

Si l'on prend  $M_n = N \otimes M$  avec  $N$  une «métrique» dont les termes sont tous égaux à l'unité, alors  $M_{k',k} = M \quad \forall (k, k') \in K^2$  on a la propriété suivante :

Propriété (1)

$$" \langle \underset{\sim}{x}^k, \underset{\sim}{x}^{k'} \rangle_{D_p} \otimes N \otimes M = \langle \langle X^k, X^{k'} \rangle \rangle_{D_p, M} "$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \langle \underset{\sim}{x}^k, \underset{\sim}{x}^{k'} \rangle_{D_p} \otimes N \otimes M &= \text{Tr} (X^k D_p t_{X^{k'}} M) \\ &= \langle \langle X^k, X^{k'} \rangle \rangle_{D_p, M} \end{aligned}$$

C.Q.F.M.

par conséquent les images Euclidiennes de  $(K, d_K)$

$$(\{(\underset{\sim}{x}^k, g_k) \mid h \in K\}, F \otimes G \otimes E, D_p \otimes N \otimes M) \text{ et}$$

$$(\{(\underset{\sim}{x}^k, q_k) \mid h \in K\}, M_{p,n}(\mathbb{R}), \langle \langle, \rangle \rangle_{D_p, M}) \text{ sont équivalentes le}$$

tenseur  $\underset{\sim}{x}^k$  est le représentant du tableau  $X^k$ .

Propriété (2)

$$" \quad \text{NZ}(x_{\lambda}^k, x_{\lambda}^{k'}) = \text{COR}(x^k, x^{k'})$$

d'où la propriété " .

Propriété (3)

$$" \quad \text{NZ}(x_{\lambda 0}^k, x_{\lambda 0}^{k'}) = \pm 1 \iff x^k = \lambda x^{k'} + B$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ a le signe de NZ}$$

$$B = [\underline{b}, \dots, \underline{b}, \dots, \underline{b}]$$

$$\text{avec } \underline{b} = \underline{g}_x^{kJ} - \lambda \underline{g}_x^{k'J} \quad "$$

Interprétation de cette approche

L'interprétation de cette approche réside dans le choix particulier de N.  
En effet on a :

$$\langle \underline{g}_k, \underline{g}_{k'} \rangle_N = 1 \quad \forall k, k' \in K \quad \text{ce qui est équivalent à :}$$

$$|\underline{g}_k|_N = 1 \quad \text{et} \quad \cos(\underline{g}_k, \underline{g}_{k'}) = 1 \Rightarrow \underline{g}_k = \underline{g}_{k'} = \underline{g} \quad \forall k, k' \in K$$

par conséquent l'espace vectoriel G est réduit à la droite  $\underline{\Delta}_g$  engendré par  $\underline{g}$  :

$$G \otimes E = \underline{\Delta}_g \otimes E \quad \text{et}$$

$$F \otimes G \otimes E = F \otimes \underline{\Delta}_g \otimes E \quad \text{est isomorphe à } F \otimes E.$$

Cela revient à positionner les nuages de points

$N_X(k) = (k^{\lambda i}, \rho_i \mid i \in I) \quad (k \in K)$  dans le même espace Euclidien  $(\underline{\Delta}_g \otimes E, M_k)$  où leur description se fait de façon naturelle.

On a alors puisque  $x^k$  est élément de  $F \otimes_{\Delta_g} E$

$$\begin{aligned}
 \langle x^k, x^{k'} \rangle_{D_p \otimes N \otimes M} &= \langle x^k, x^{k'} \rangle_{D_p \otimes M_{kk}} \\
 &= \sum_i p_i \langle k^{xi}, k'^{xi} \rangle_{M_{kk}} \\
 &= \sum_i p_i \langle k^{xiJ}, k'^{xiJ} \rangle_M \quad (\text{et proposition (1) } \S (3.A.4.)) \\
 &= \langle x^{kIJ}, x^{k'IJ} \rangle_{D_p \otimes M} \\
 &= \langle\langle x^k, x^{k'} \rangle\rangle_{D_p, M}
 \end{aligned}$$

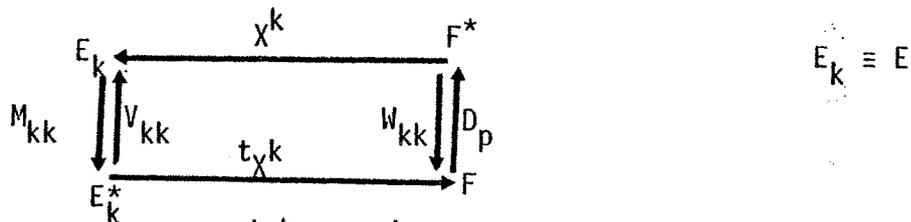
Ceci est une autre démonstration de la propriété (1) ci-dessus.

Remarque (1)

"La différence entre l'approche de Jaffrenou et celle exposée au paragraphe (B.2.) ne réside que dans le centrage des tableaux  $x^k$  ( $k \in K$ ). "

4.3.2. L'approche d'Escoufier [18]

Considérons le schéma de dualité suivant :



Le tableau  $U_k = t_{x^k} M_{kk} x^k D_p$  est appelé Opérateur d'Escoufier  
 L'ensemble H des opérateurs  $D_p$ -Symétriques sur F définit un sous-espace de  $L_{\mathbb{R}}(F, F)$  qui contient tous les opérateurs  $U_k$  ( $k \in K$ ).

La forme bilinéaire symétrique  $P$  définie sur  $L_{\mathbb{R}}(F; F)$  par :

$$\forall (A, B) \in [L_{\mathbb{R}}(F, F)]^2 \quad P(A, B) = \text{Tr}(AB)$$

permet de définir une distance Euclidienne sur  $H$ .

Lorsque pour  $M_x$  nous faisons le choix suivant :

Premier choix

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{k'k} = M_{k'k'} X^{k'} D_p t_{X^k} M_{kk} \\ M_{kk} \neq I_p \end{array} \right.$$

Dans ce cas :

$$M_{kk} = M_{kk} X^k D_p t_{X^k} M_{kk}$$

ce qui entraîne que :

$$X^k D_p t_{X^k} M_{kk} = I_p.$$

On utilise donc en ce cas la métrique de Mahalanobis

$$M_{kk} = (X^k D_p t_{X^k})^{-1} = V_{kk}^{-1}$$

et on a la propriété

Propriété (4)

$$" \langle X^k, X^{k'} \rangle_{D_p} \otimes M_x = P(U_k, U_{k'}) " "$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'} \rangle_{D_p \otimes M_x} &= \text{Tr}(V_{kk}^{-1} V_{kk'}, V_{k'k'}^{-1} V_{k'k}) \\
 &= \text{Tr}(U_k U_{k'}) \\
 &= P(U_k, U_{k'})
 \end{aligned}$$

C.Q.F.M.

par conséquent : les images Euclidiennes de  $(K, d_K)$

$$(\{(\tilde{x}^k, q_k) \mid k \in K\}, F \otimes G \otimes E, D_p \otimes M_x)$$

$$(\{(U_k, q_k) \mid k \in K\}, H, P)$$

équivalentes.

$\tilde{x}^k$  est le représentant de  $U_k$ .

On a

$$P(U_k, U_{k'}) = \sum_s \rho_{(s,k,k')}^2$$

la somme des carrés des coefficients canoniques entre les paquets de variables  $M_x(k)$  et  $M_x(k')$

Faire le choix de cette métrique  $M_x$  revient à décrire le nuage des tableaux sous l'optique de l'analyse canonique.

Pour obtenir ce résultat, Escoufier ([18], pp. 76) prend comme métrique dans  $E_k$  la matrice  $V_{kk}^{-1}$ .

Deuxième choix

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{k'k} = X^{k'} D_p t_{X^k} \\ M_{kk} = V_{kk} \end{array} \right.$$

On a dans ce cas le résultat suivant :

$$\begin{aligned} P(U_k, U_{k'}) &= \text{Tr}(X^k D_p t_{X^{k'}} X^{k'} D_p t_{X^k}) \\ &= \text{Tr}(V_{kk}, V_{k'k}) \\ &= \sum_{j, j'} \text{cov}^2(X^j, k' X^j) \end{aligned}$$

Plus deux variables (elles peuvent être identiques) ont une covariance élevée, plus leur rôle est important dans le calcul de la distance Euclidienne déduite de  $P$  par conséquent dans la description du nuage des tenseurs  $X^k (k \in K)$  : On met en exergue l'effet variance covariance des variables  $X^j (j \in J, k \in K)$ .

Pour obtenir ce résultat Escoufier ([18], pp. 75) prend comme métrique dans  $E$  la matrice identité  $I_p$ .

Troisième choix

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{k'k} = D_{1/\sigma_k} X^{k'} D_p t_{X^k} D_{1/\sigma_k} \\ M_{kk} = D_{1/\sigma_k} V_{kk} D_{1/\sigma_k} = R_{kk} \end{array} \right.$$

où  $R_{kk}$  est la matrice des coefficients de corrélation des variables

$$X^j (j \in J).$$

On a le résultat :

$$P(U_k, U_{k'}) = \sum_{j, j'} \text{cor}^2({}_k X^j, {}_{k'} X^{j'})$$

Choisir ainsi  $M_X$  revient à supposer que les variables  ${}_k X^j$  ( $k \in K, j \in J$ ) sont centrées-réduites : il y a effet corrélation par analogie à l'effet variance-covariance qui est ici éliminé. Escoufier ([18], pp. 76) prend pour métrique dans  $E_k$ , la matrice  $M_k = D_1 / \sigma_k^2$  pour obtenir le résultat ci-dessus.

Quatrième choix ou le cas particulier de l'Hermier des Plantes [28]

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{k'k} = \chi^{k'} t_{\chi^k} \\ M_{kk} = \chi^k t_{\chi^k} \\ D_p = I_n \end{array} \right.$$

En effet, considérons  $S = \{S^k / k \in K\}$  le cube standard de l'Hermier Des Plantes où  $S^k$  représente la matrice des proximités entre éléments de  $I$ .  $S^k \in S(\mathbb{R}^n)$  espace vectoriel des formes quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\underline{\chi}^k$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  construit à partir de  $S^k$  par l'application  $s$  de  $\{1, 2, \dots, n\}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$x_{s(i, i')}^k = S_{(i, i')}^k \quad (i \text{ colonne, } i' \text{ ligne})$$

$$s(i, i') = \frac{i(i-1)}{2} + i' \quad i = 1, \dots, n, \quad i' \leq i$$

$$\underline{\chi}^k = (x_{s(i, i')}^k)_{s=1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}}$$

Soit  $M$  la matrice diagonale d'ordre  $\frac{n(n+1)}{2}$  de terme générique :

$$m_s(i, i') = \begin{cases} \sqrt{2} & i' < i \\ 1 & i' = i \end{cases}$$

On a la propriété suivante :

Propriété (5) ([28], pp. 12)

$$" \langle X^k, X^{k'} \rangle_M = P(S^k, S^{k'}) "$$

La factorisation canonique de  $S^k$  fournit la strate  $X^k$  i.e.

$$S^k = t_X^k X^k$$

par conséquent on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k'} \rangle_{I_n \otimes M_X} &= \text{Tr}(S^k, S^{k'}) \\ &= P(S^k, S^{k'}) \\ &= \langle \underline{X}^k, \underline{X}^{k'} \rangle_{\tilde{M}} \end{aligned}$$

par conséquent : les images Euclidiennes

$$(\{(x^k, q_k)/k \in K\}, F \otimes G \otimes E, I_n \otimes M_X) \text{ et}$$

$$(\{(\underline{X}^k, q_k)/k \in K\}, R^{n(n+1)/2}, \tilde{M}) \text{ de } (K, d_K)$$

sont équivalentes.

$\tilde{x}^k$  est le représentant du vecteur  $\underline{X}^k$

Choisir ainsi  $M_X$  revient à décrire le nuage des tableaux  $X^k$  ( $k \in K$ ) sous l'optique d'analyse des tableaux des proximités entre éléments de  $I$ .

Pour la description des tenseurs  $\tilde{x}^k$  ( $k \in K$ ) l'Hermier Des Plantes ([28], pp 11) pose une hypothèse d'équipondération des juges  $k \in K$  à notre avis restrictive et on a la propriété :

Propriété (6)

$$"NZ(x^k, x^{k'}) = RV(U_k, U_{k'})$$

"

Théorème

$$"(NZ = \pm 1) \iff (X^{k'} = \lambda P X^k)$$

où  $\lambda \in R$  et  $P$  une isométrie de  $(E_k, M_k)$  dans  $(E_{k'}, M_{k'})$

"

Preuve :

$\boxed{\leftarrow}$  triviale

$\boxed{\Rightarrow}$   $NZ = \pm 1 \Rightarrow U_{k'} = \lambda U_k$

$\Rightarrow$  les triplets  $(X^k, M_{kk}, D_p)$  et  $(X_{k'}, M_{k'k'}, D_p)$  sont équivalents (cf Annexe A.3), ce qui nous amène à envisager deux cas :

- pour  $\lambda = 1$ , il existe une isométrie  $P$  telle que  $X^{k'} = PX^k$

- pour  $\lambda \neq 1$ , il existe une similitude  $\lambda P$  telle que  $X^{k'} = \lambda PX^k$ .

(La démonstration complète a été faite par Escoufier [18], pp 68).

#### 4.3.3 - Les métriques relationnelles de SCHEKTMAN [37]

Définition ([11], pp 47)

"Soient  $\{(k^{\alpha\lambda}, k^{u\lambda}, k^{\lambda I})/\lambda \in ]p_k]\}$  l'ensemble des moments principaux, vecteurs axiaux, variables principales  $D_p$ -normés de l'ACP de  $(X^k, M_{kk}, D_p)$  et  $U_k$  l'isométrie de  $(\Delta g_k \otimes E, M_{kk})$  dans  $(F, D_p)$  définie par  $k(k^{u\lambda}) = k^{\lambda I} \quad \forall \lambda \in ]p_k]$ .

On dit que  $M_X$  est à effet relationnel  $(k, k')$  si

$$M_{kk'} = {}^t U_k D_p U_{k'}$$

avec

$$k^{\lambda I} = \frac{{}^t X^k M_{kk} k^{u\lambda}}{\sqrt{k^{\alpha\lambda}}} \quad \text{et}$$

$p_k$  le nombre de valeurs propres distinctes.

On a la solution suivante (cf croquette [10], pp 49)

$$M_{kk'} = \begin{cases} M_{kk} (V_{kk} M_{kk})^{-1/2} X^k D_p {}^t X^{k'} M_{k'k'} (V_{k'k'} M_{k'k'})^{-1/2} \\ M_{kk} X^k {}^t (W_{kk} D_p)^{-1/2} D_p (W_{k'k'} D_p)^{-1/2} {}^t X^{k'} M_{k'k'} \end{cases}$$

pour  $M_{kk}$  ( $k \in K$ ) commun.

Propriété (11)

" $M_x$  est à effet relationnel  $(k, k')$  si et seulement si

$$\cos(\tilde{u}_k^\lambda, \tilde{u}_{k'}^{\lambda'}) = \cos(\underline{c}_k^{\lambda I}, \underline{c}_{k'}^{\lambda' I}) \forall (\lambda, \lambda') \quad p_k \times p_{k'}$$

"

Propriété (12)

" $M_x$  est à effet relationnel  $(k, k')$  si et seulement si

$$W_{kk', D_p} = (W_{kk, D_p})^{1/2} (W_{k'k', D_p})^{1/2}$$

"

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \langle x^k, x^{k'} \rangle_{D_p \otimes M_x} &= \text{Tr} (W_{kk, D_p})^{1/2} (W_{k'k', D_p})^{1/2} \\ &= P(W_{kk, D_p})^{1/2}, (W_{k'k', D_p})^{1/2} \end{aligned}$$

où  $P$  est le produit scalaire défini au paragraphe (4.3.2).

Par suite les images Euclidiennes

$$\{(x^k, q_k)/k \in K\}, F\theta(G\theta E), M_x \text{ et}$$

$$\{((W_{kk})^{1/2}, q_k)/k \in K, H, P\} \text{ sont équivalentes.}$$

Pour un choix de la métrique intra  $M_{kk}$  (cf §(3.B.1.2.)), il correspond une métrique inter  $M_{k'k}$  ( $k \neq k'$ ).

Exemple : ( 37 , pp 39)

$$- M_{kk} = V_{kk}^{-1} \quad \text{on a } M_{kk'} = V_{kk}^{-1} V_{kk'} V_{k'k}^{-1}$$

$$- M_{kk} = R_{kk} \quad M_{kk'} = R_{kk'}$$

$$- M_{kk} = V_{kk} \quad M_{kk'} = V_{kk'}$$

On retrouve là, les trois choix de l'approche d'Escoufier

$$\begin{aligned} M_{kk} &= V_{kk} \\ D_p &= I_x \\ M_{kk'} &= X^k t_{X^{k'}} \end{aligned}$$

On retrouve également le choix de l'Hermier Des Plantes.

Remarque (2)

Pour décrire le nuage des différences

$N = \{((\tilde{x}_k^i - \tilde{x}_{k'}^i), p_i) / i \in I\}$  afin de pouvoir détecter ceux des individus  $i \in I$  dont la "variance résiduelle"  $|\tilde{x}_k^i - \tilde{x}_{k'}^i|_{Q_{k,k}}$  est faible (relativement aux autres), il suffit de remplacer dans l'analyse du paragraphe (4.2.3) la Métrique  $Q_{k,k}$ , correspondant au type de logique (Escoufier, Jaffrenou, Sc Hektman, Rotations procrustes, etc...) qui sous-tend l'analyse.



EXEMPLE PRATIQUE



EXEMPLE PRATIQUE

Les données sont dans BOUROCHE [ 8]

	<u>Pays</u>	<u>Initiales</u>	<u>Période</u>
1 -	ALLEMAGNE	D	de 1963 à 1970
2 -	AUTRICHE	A	
3 -	BELGIQUE } LUXEMBOURG }	B	
4 -	CANADA	CDN	
5 -	DANEMARK	DK	
6 -	ESPAGNE	E	
7 -	ETATS-UNIS	USA	
8 -	FRANCE	F	
9 -	GRECE	GR	
10 -	IRLANDE	SE	

	<u>Variables</u>	<u>Initiales</u>
1 -	Pourcentage d'actifs dans l'agriculture et l'industrie }	AGI
2 -	Produit national brut en dollars et par hab. x 10 <sup>-2</sup> }	PNB
3 -	Consommation d'électricité en KW <sup>h</sup> par hab. et par an }	ELE
4 -	Nombre de T.V. pour 1000 hab.	TV
5 -	Balance commerciale (millions de dollars) }	BLC



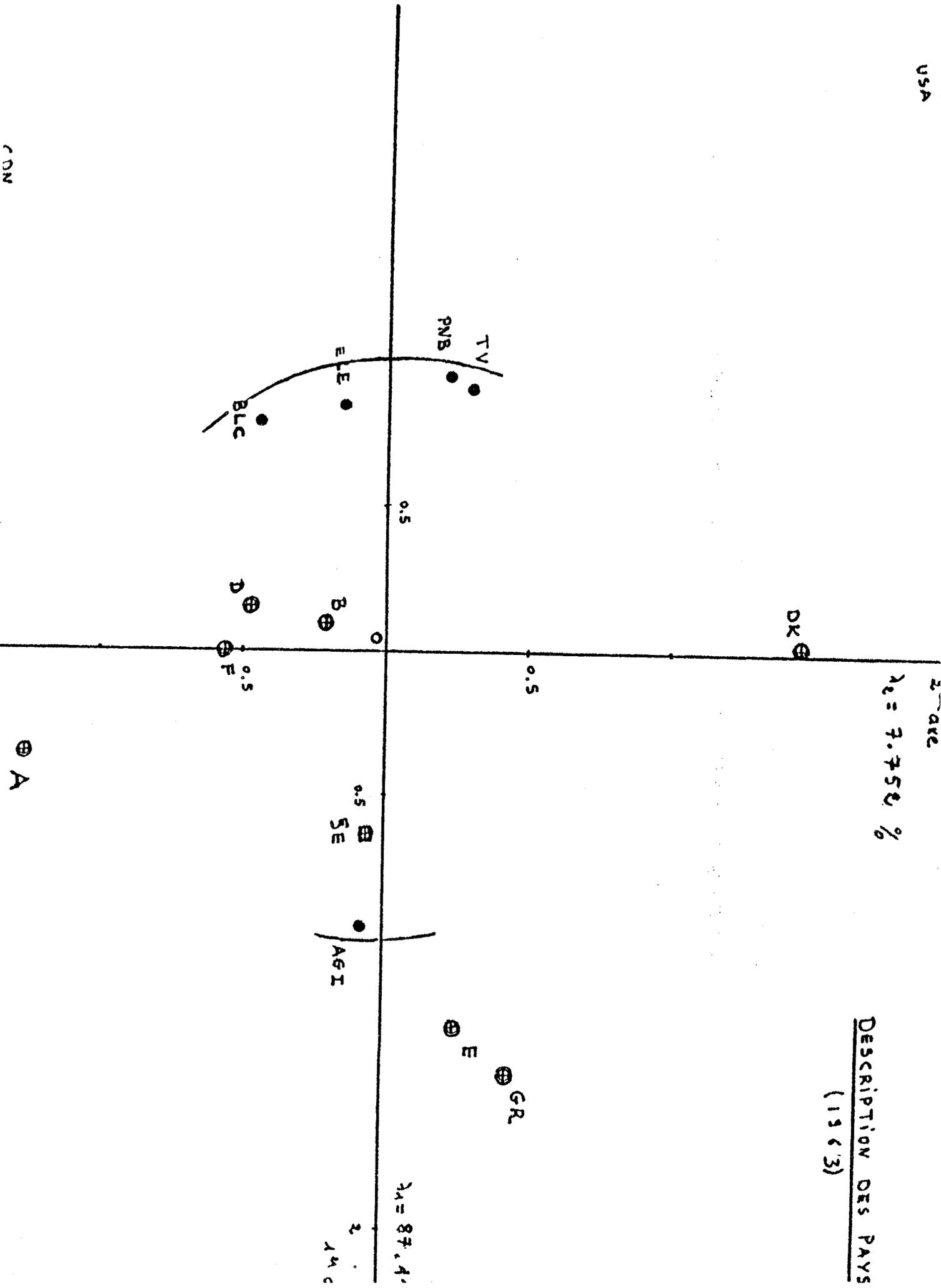
DONNEES

ANNEE	PAYS	A.G.I.	P.N.B.	E.L.E.	T.V.	B.L.C.
1963	D	61.8	1641	2180	131	1.0
	A	63.5	1076	1819	53	0.3
	B	53.2	1500	1633	110	0.2
	CDN	45.7	2253	5742	240	6.9
	DK	58.3	1700	1268	182	- 3.2
	E	72.3	483	588	12	- 6.9
	USA	41.0	3090	4670	300	0.9
	F	60.1	1771	1600	72	0.6
	GR	77.2	520	287	0.0	- 7.9
	SE	60.7	800	793	53	- 3.4
1964	D	61.3	1780	2440	171	1.6
	A	61.7	1190	2060	77	- 4.9
	B	53.0	1660	1920	145	- 2.1
	CDN	44.7	2260	6280	265	1.8
	DK	58.5	1890	1520	210	- 5.8
	E	71.9	570	720	35	- 7.3
	USA	39.5	3330	5180	325	1.2
	F	59.7	1820	1830	111	- 1.2
	GR	78.5	590	380	0.0	- 13.0
	SE	61.0	920	940	78.0	- 15.4

ANNEE	PAYS	A.G.I.	P.N.B.	E.L.E.	T.V.	B.L.C.
1965	D	60.6	1900	2597	192	0.4
	A	69.1	1270	2155	100	- 5.4
	B	52.2	1780	2022	163	0.1
	CDN	43.8	2460	6647	266	0.3
	DK	58.8	2100	1711	230	- 5.6
	E	69.5	670	799	45	- 7.3
	USA	39.1	3650	5473	370	0.8
	F	58.9	1920	1924	132	- 0.3
	GR	74.8	690	445	0.0	- 11.5
	SE	60.3	965	1079	98	- 13.4
1966	D	60.1	2010	2730	213	1.7
	A	60.9	1380	2245	117	- 6.4
	B	51.3	1910	2210	174	- 1.8
	CDN	43.1	2670	7100	279	0.8
	DK	58.5	2320	1850	230	- 5.3
	E	69.7	770	900	70	- 9.5
	USA	39.6	3840	5835	372	0.6
	F	58.4	2060	2035	153	- 1.0
	GR	70.5	755	590	0.0	- 12.7
	SE	59.8	1010	1170	139	- 12.3

ANNEE	PAYS	A.G.I.	P.N.B.	E.L.E.	T.V.	B.L.C.
1967	D	58.6	2030	2904	231	3.6
	A	60.4	1460	2391	134	- 4.7
	B	51.3	2050	2215	185	- 0.7
	CDN	41.9	2840	7440	279	0.8
	DK	60.5	2430	2006	237	- 5.3
	E	69.8	830	967	86	- 7.8
	USA	38.9	4040	6183	392	0.6
	F	57.2	2190	2120	166	- 0.9
	GR	71.3	820	654	0.0	- 9.7
	SE	59.3	1080	1301	143	- 9.5
1968	D	58.4	2200	3088	248	3.6
	A	60.3	1550	2538	134	- 4.4
	B	50.5	2160	2664	185	- 0.8
	CDN	40.9	3010	7780	279	1.8
	DK	51.5	2540	2163	240	- 5.1
	E	66.0	770	1109	90	- 7.6
	USA	38.8	4380	6532	392	0.1
	F	56.2	2530	2216	185	- 1.0
	GR	71.3	860	715	0.0	- 12.2
	SE	58.3	1040	1432	147	- 13.5

ANNEE	PAYS	A.G.I.	P.N.B.	E.L.E.	T.V.	B.L.C.
1969	D	58.7	2520	3322	231	2.7
	A	59.0	1690	2647	134	- 3.2
	B	50.0	2360	2671	186	0.3
	CDN	40.5	3460	8199	279	0.9
	DK	50.4	2860	2413	244	- 6.1
	E	67.8	870	1245	84	- 8.1
	USA	38.3	4660	7013	392	0.2
	F	55.7	2770	2407	185	- 1.7
	GR	70.7	950	823	9	- 12.4
	SE	58.1	1190	1577	151	- 15.3
1970	D	59.3	3040	3551	262	2.4
	A	59.3	1940	2843	173	- 4.8
	B	49.5	2670	2864	207	0.9
	CDN	38.7	3740	8580	279	3.7
	DK	46.9	3160	2662	250	- 7.1
	E	67.0	960	1370	167	- 7.3
	USA	36.7	4760	7379	399	0.4
	F	52.9	2920	2566	201	- 0.8
	GR	70.7	1040	981	10	- 14.0
	SE	57.5	1340	1630	163	- 13.7



CON

DESCRIPTION DES PAYS  
(1963)

DESCRIPTION DES PAYS (1969)

2<sup>e</sup> axe

$\lambda_2 = 3.663\%$

SE

⊕

⊕ USA

⊕ CDN

⊕ DK

TV  
ELE  
PNB

-4.75

-0.5

⊙

0.5

-0.5

⊕ F

⊕ B

⊕ A

-1.5

⊕ D

.146.

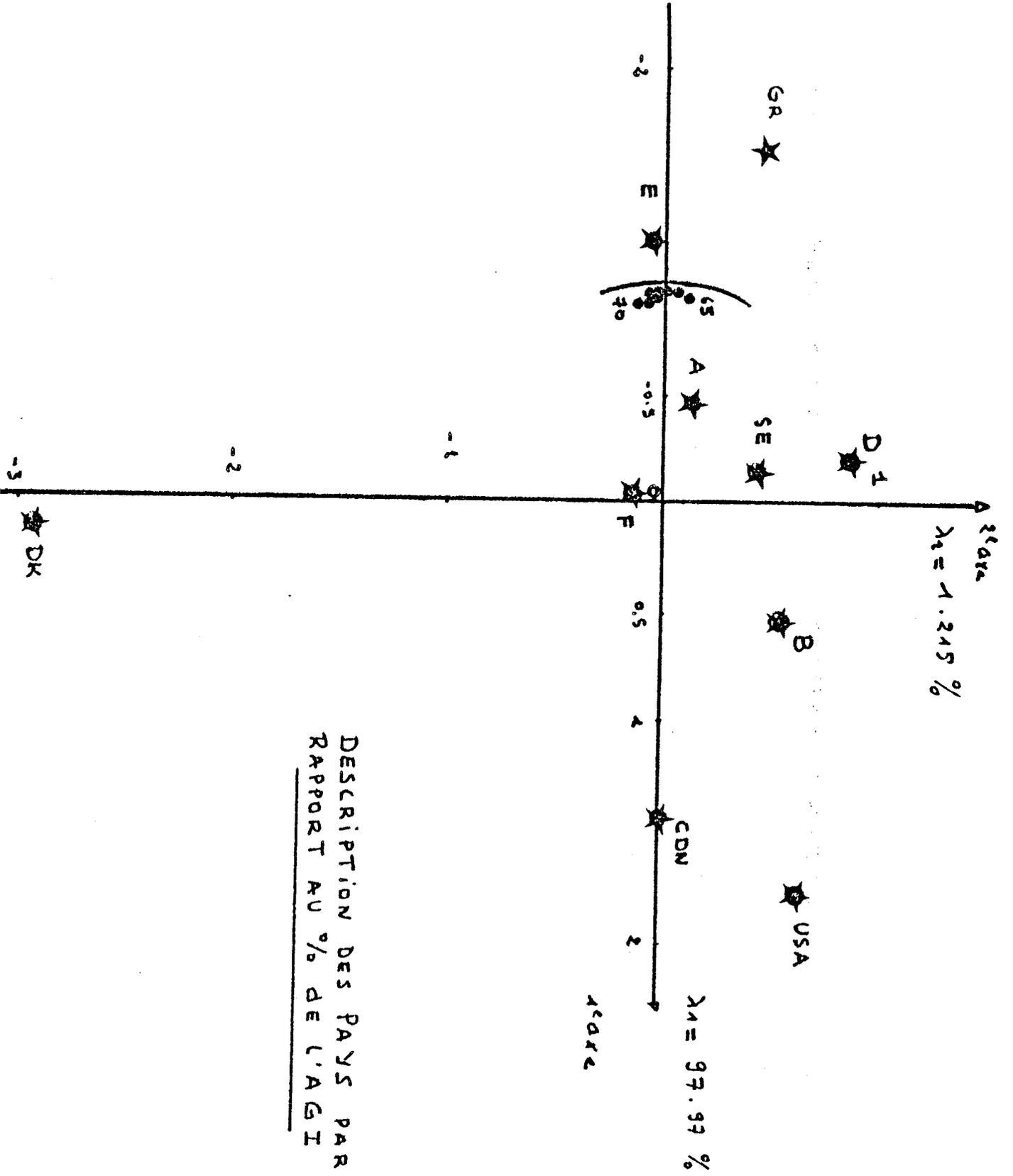
⊕ E

AGI

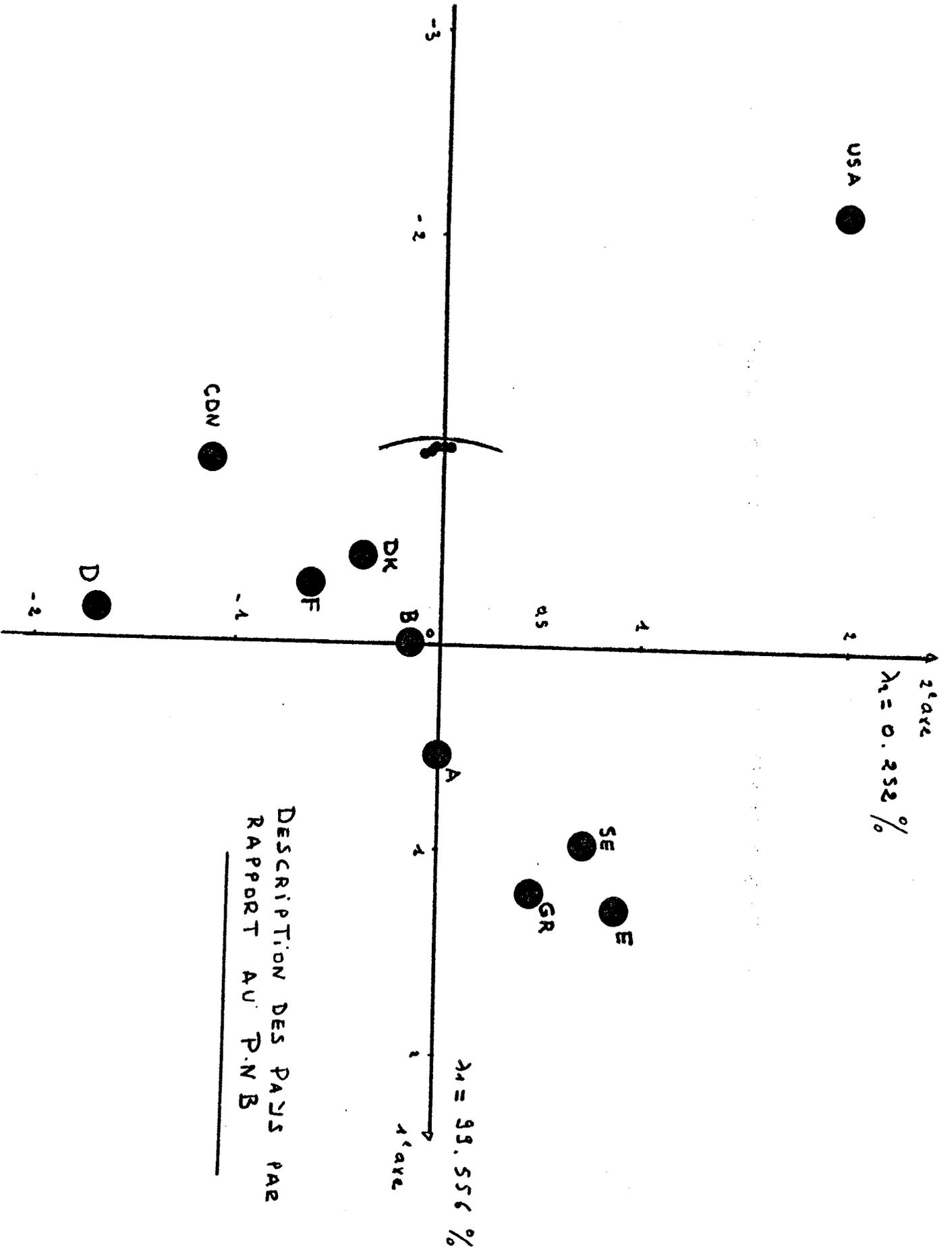
1<sup>er</sup> axe

$\lambda_1 = 83.831\%$

GR



DESCRIPTION DES PAYS PAR  
RAPPORT AU % DE L'AGI



DESCRIPTION DES PAYS PAR  
RAPPORT AU P.N.B

.149.

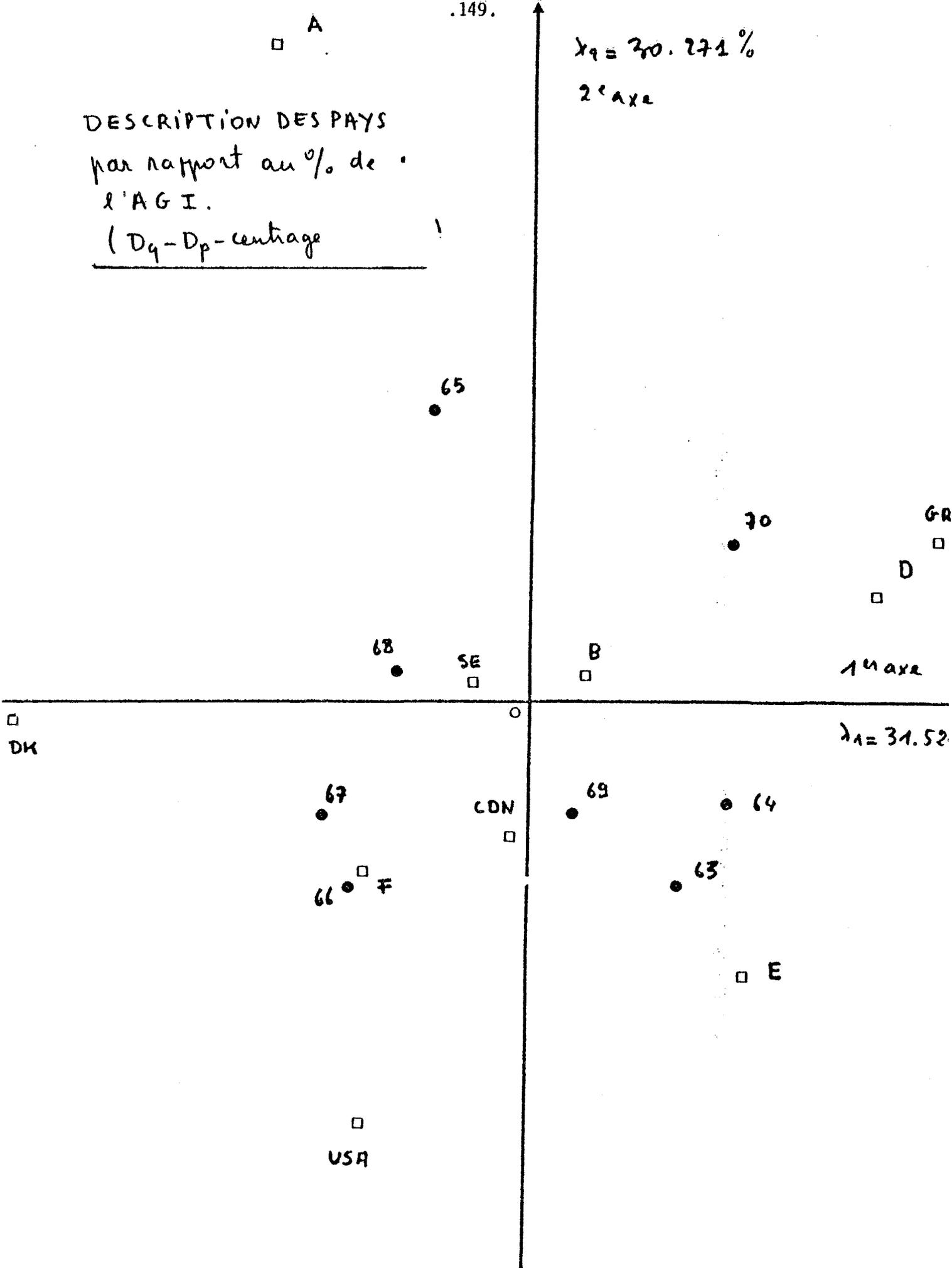
□ A

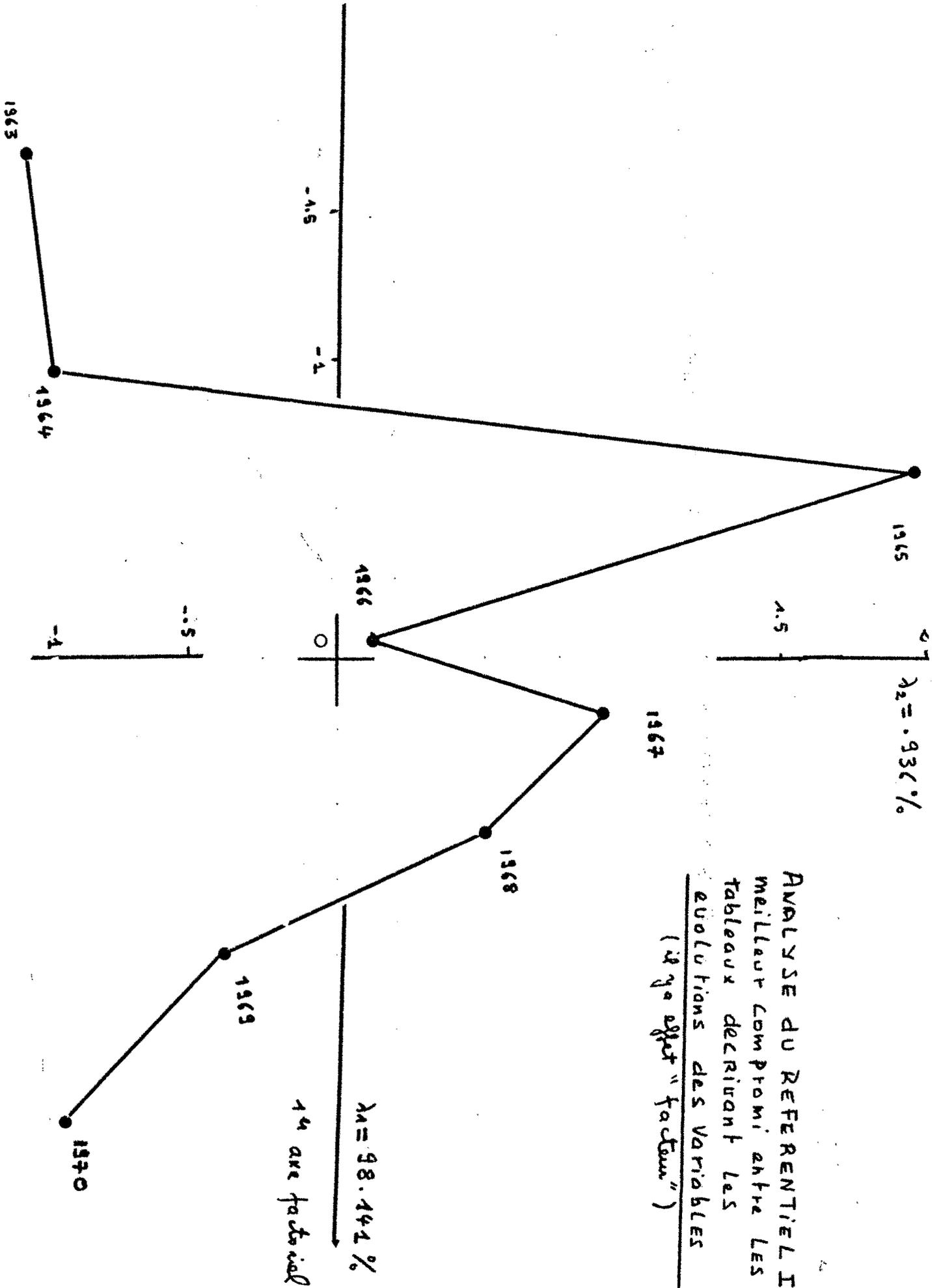
$\lambda_1 = 20.271\%$

2<sup>e</sup> axe

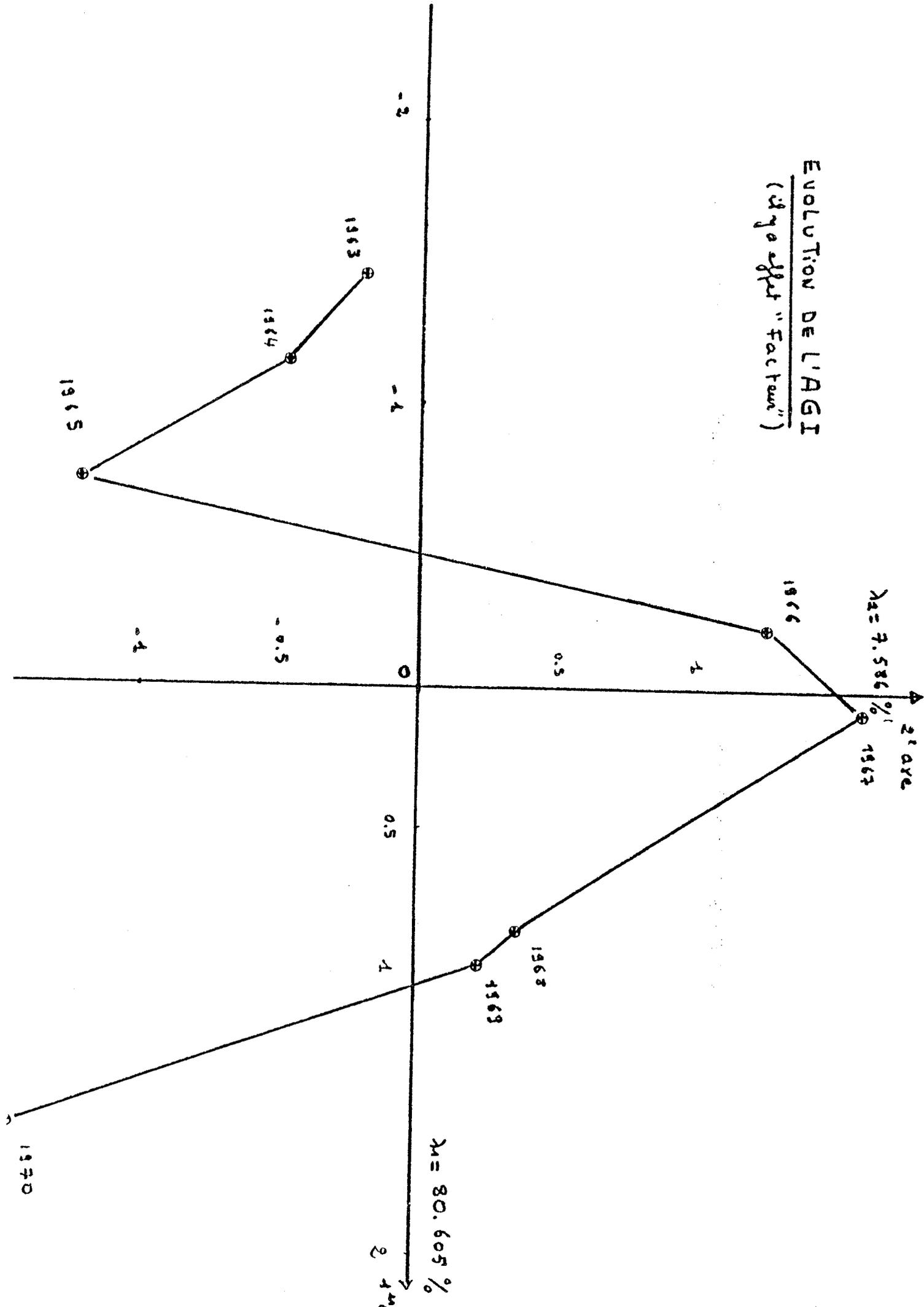
DESCRIPTION DES PAYS  
par rapport au % de  
l'AGI.

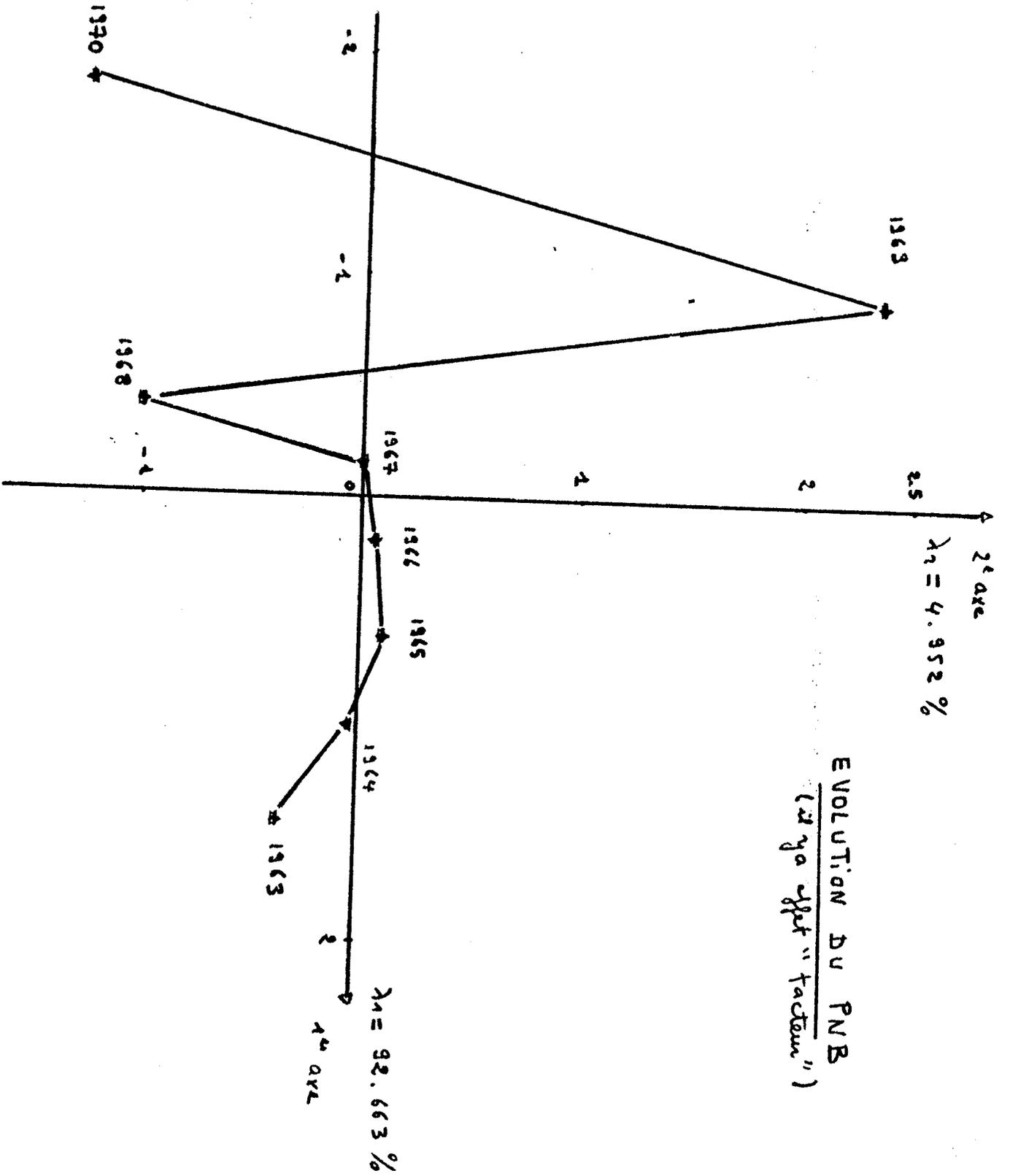
(D<sub>q</sub> - D<sub>p</sub> - centrage)

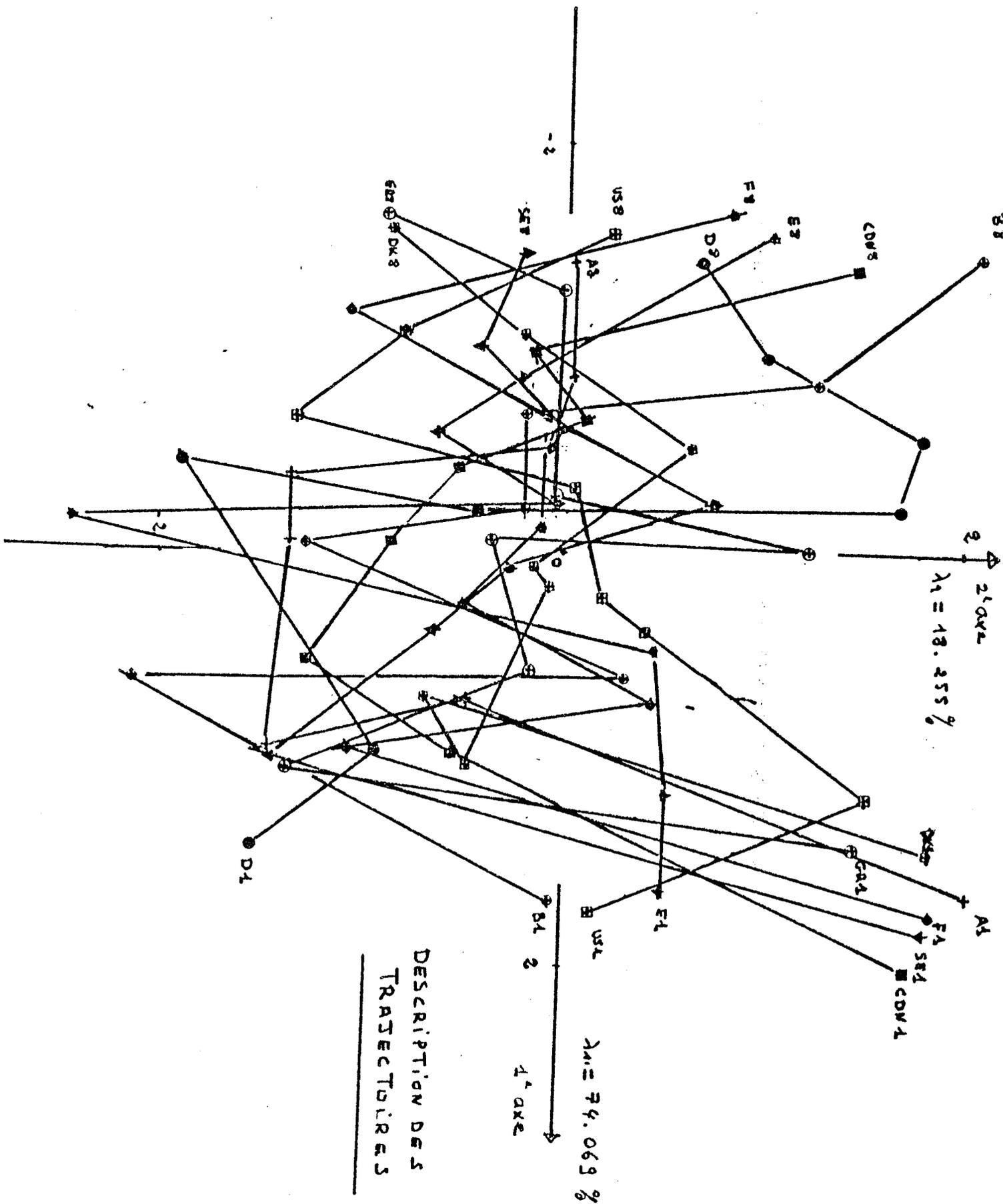




# EVOLUTION DE L'AGI (d'age effect "Facteur")

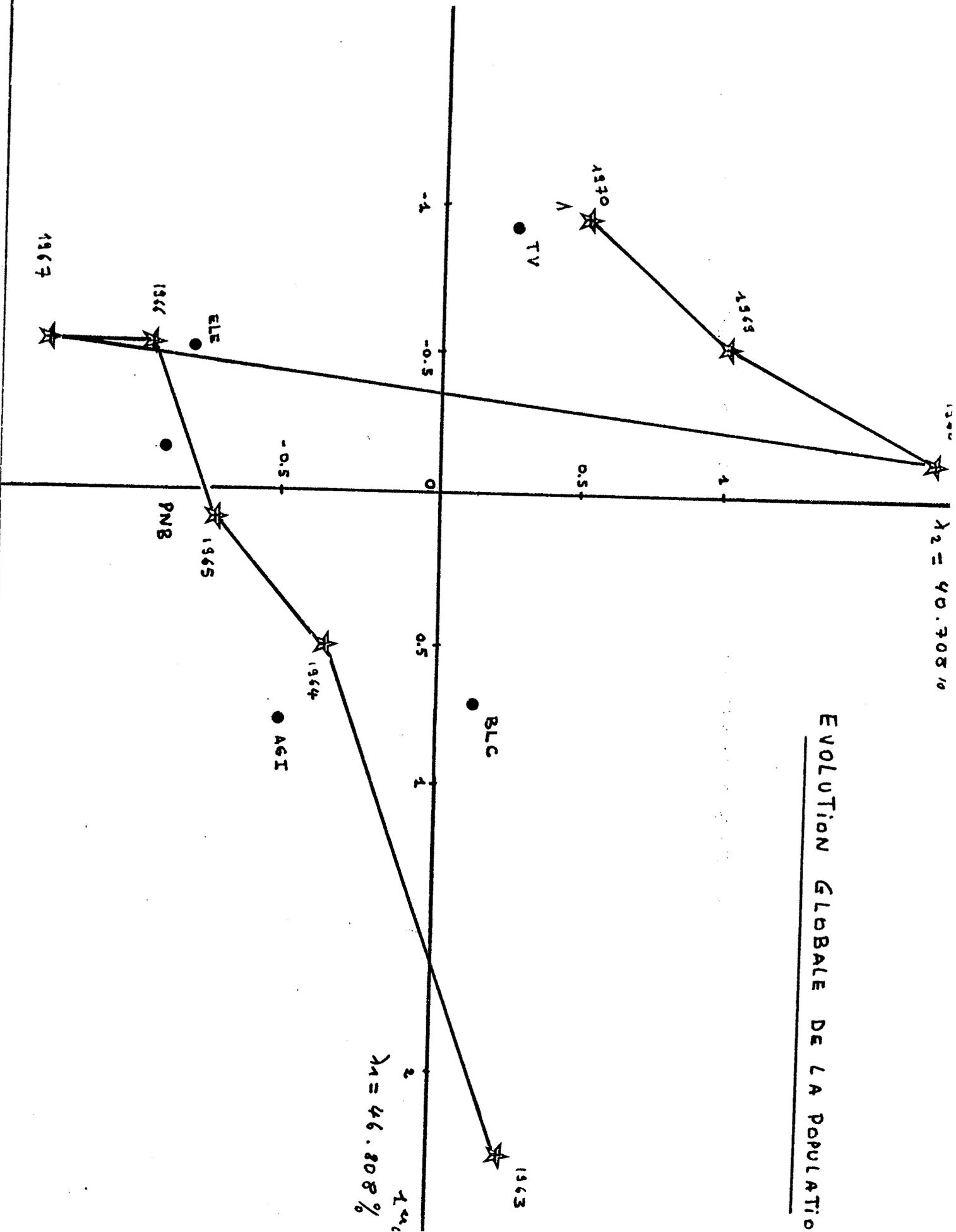


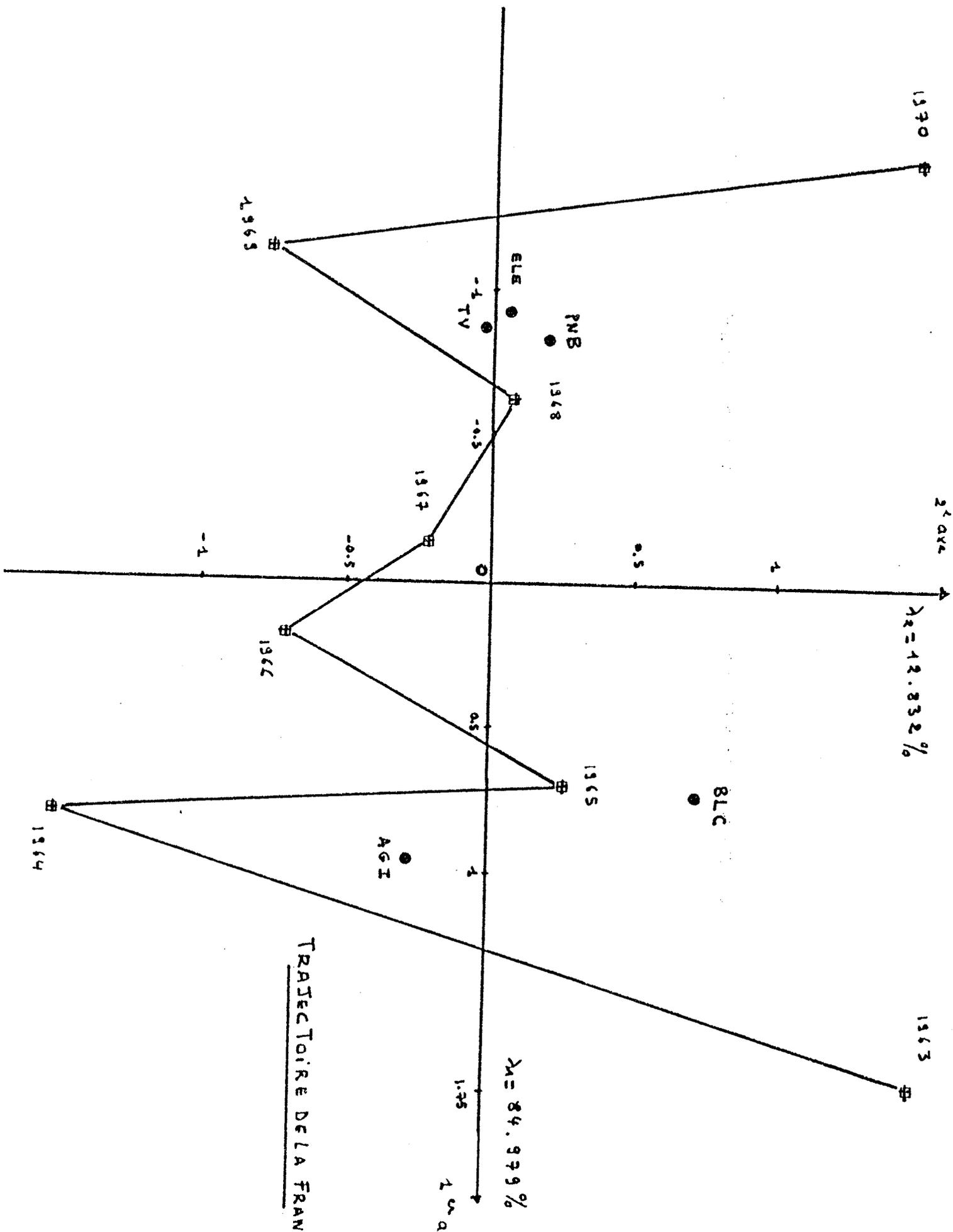




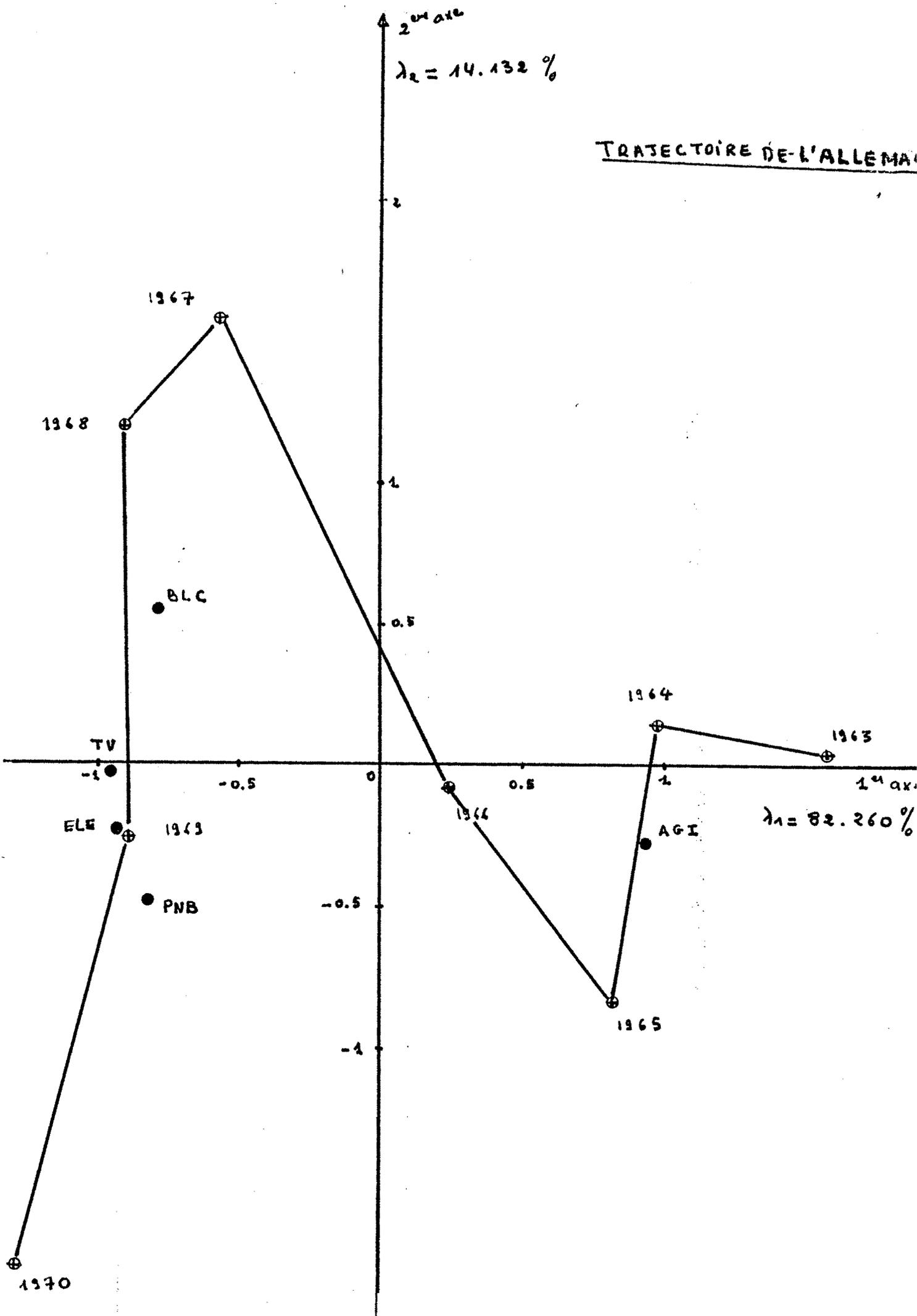
DESCRIPTION DES  
TRAJECTOIRES

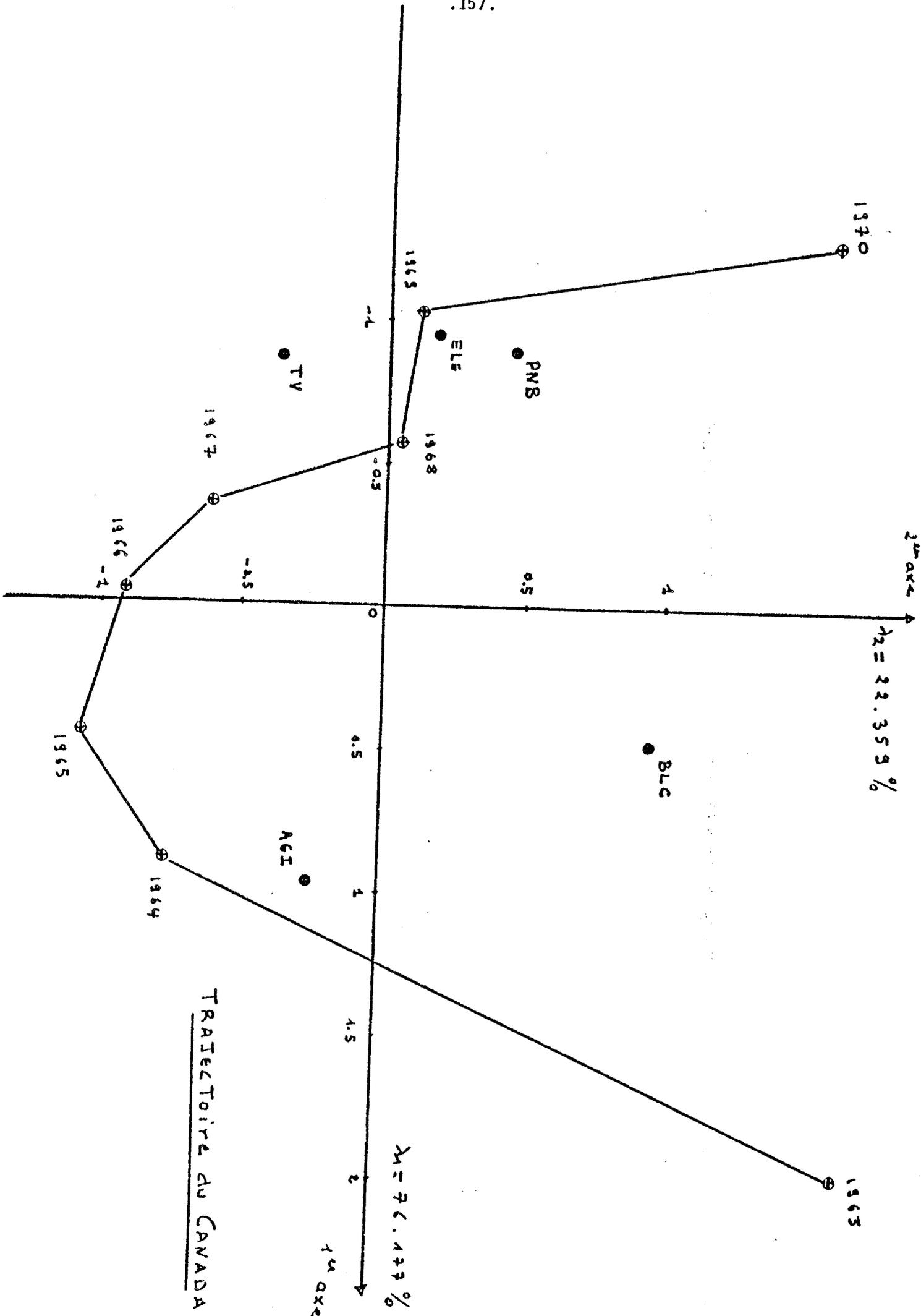
EVOLUTION GLOBALE DE LA POPULATION



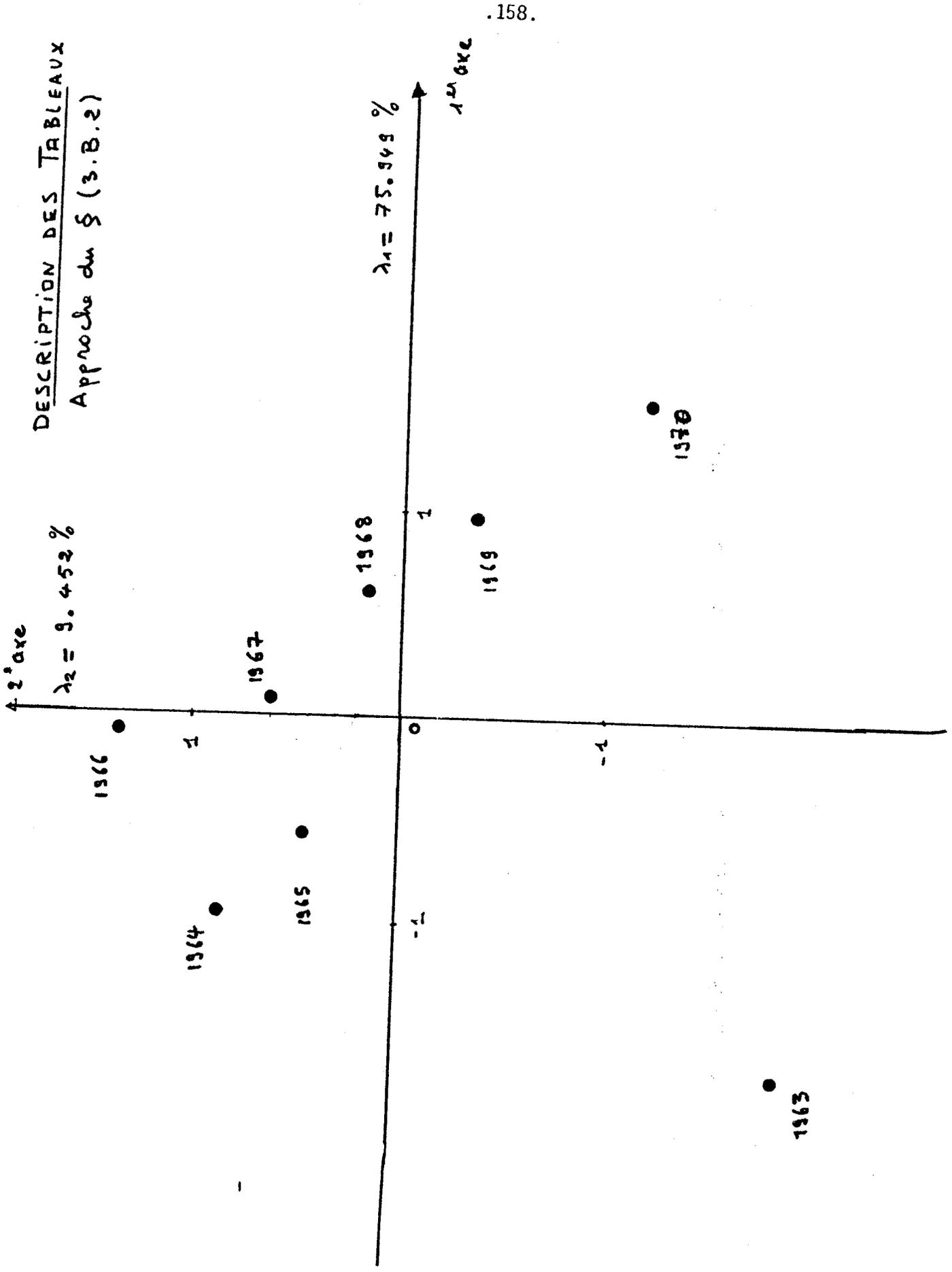


TRAJECTOIRE DE LA FRAN



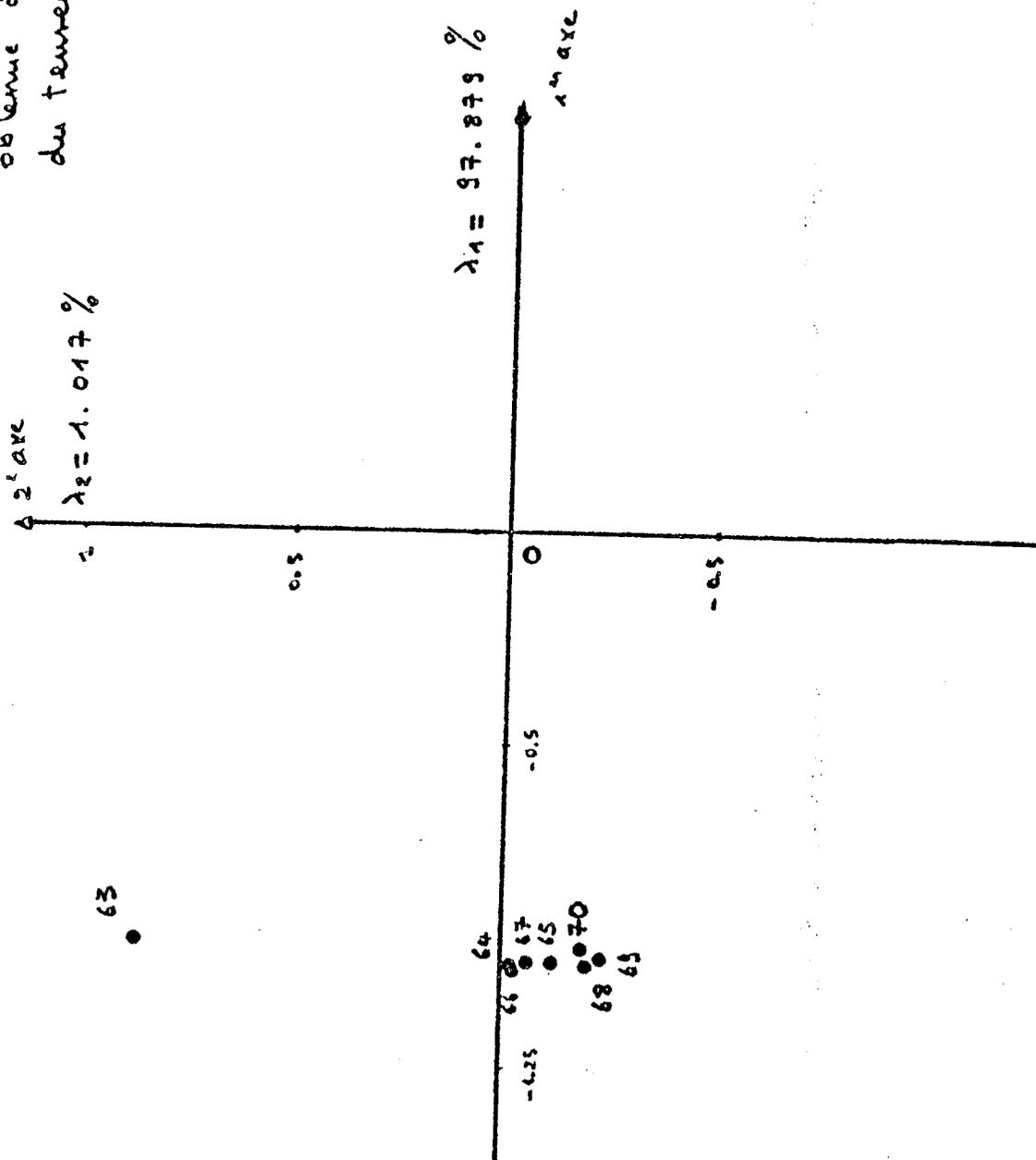


DESCRIPTION DES TABLEAUX  
 Approche du § (3.B.2)



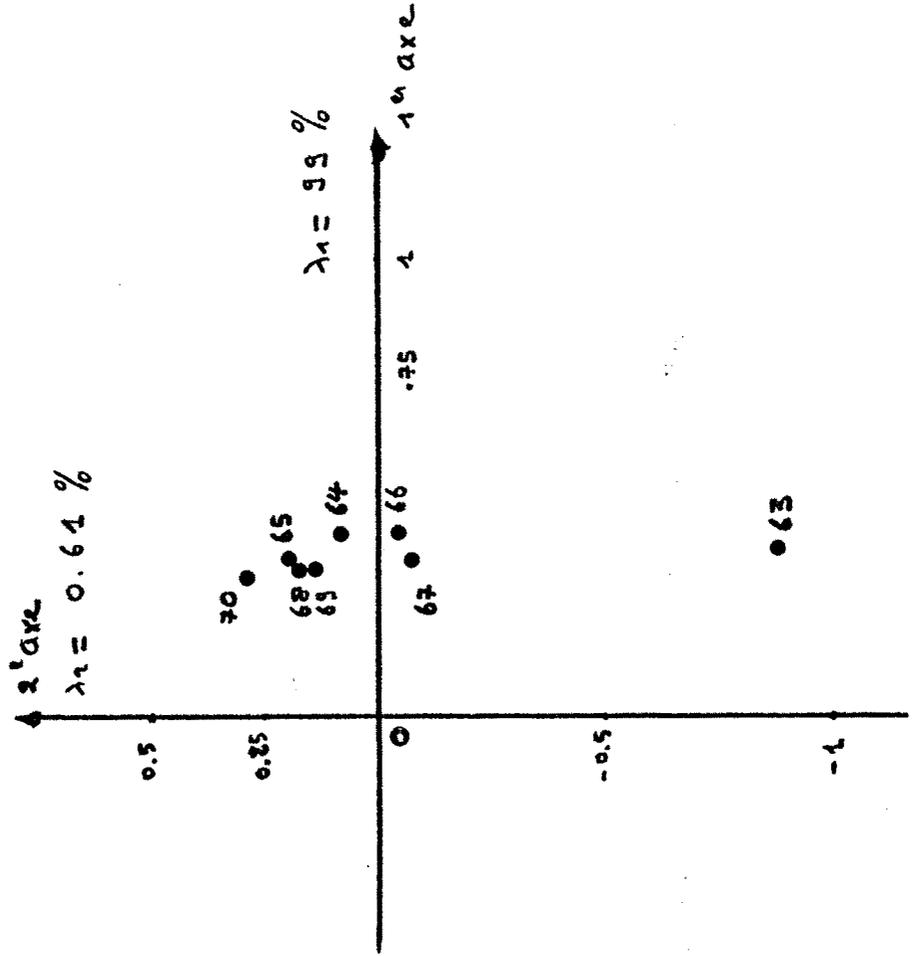
DESCRIPTION DES TABLEAUX  
(JAFFRENDU)

obtenue à partir de l'analyse  
du tenseur  $\chi_{KIZ}$  (cf § (3.B.2))



DESCRIPTION DES TABLEAUX  
(L'HERMIER DES PLANTES)  
obtenue à l'aide du programme  
STATIS

---



ANNEXE



ANNEXEA.1. Opérateur Vec [31]Définition

<< Soient  $\underline{x}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) les vecteurs colonnes d'une matrice  $X$  de dimension  $(p, n)$ . On appelle  $\text{Vec}(X)$  l'unique vecteur dont la  $(i, j)$ ème composante est la  $j$ (ème) composante du  $i$ (ème) vecteur  $\underline{x}_i$  i.e.

$$\text{Vec}(X) = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{pmatrix}$$

Propriétés

1 - Soient  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  deux vecteurs quelconque :

$$\text{Vec}(\underline{x} \underline{y}^t) = \underline{y} \otimes \underline{x}$$

2 -  $\text{Tr}({}^t AB) = {}^t(\text{Vec}(A))\text{Vec}(B)$

3 -  $\text{Vec}(ABC) = ({}^t C \otimes A)\text{Vec}(B)$

4 -  $\text{Vec}(AB) = (I \otimes A)\text{Vec}(B) = ({}^t B \otimes A)\text{Vec}(I)$

$$= ({}^t B \otimes I)\text{Vec}(A)$$

où  $I$  est une matrice identité.

A.2. Décomposition spectrale d'une matrice

Etant donné  $C$  une matrice carrée non négative et  $C = \sum_j s_j p_j p_j^t$  sa décomposition spectrale  $\sum_j (s_j)^m p_j p_j^t$  est noté  $C^m$  pour  $m \in \mathbb{R}$ .

$C^{-1}$  est l'inverse généralisée de  $C$  i.e

$$C C^{-1} = C$$

avec  $\{s_j / j=1, 2, \dots\}$  l'ensemble des valeurs singulières non triviales de  $C$ .

A.3 Equivalence entre tableaux "individus x caractères" dans une optique de description (c\_f ESCOUFIER [18], pp 67)

Equivalence (a')

<< Les triplets  $(X^k, M_{kk}, D_p)$  et  $(X^{k'}, M_{k'k'}, D_p)$  sont équivalents si les opérateurs d'ESCOUFIER associés  $U_k$  et  $U_{k'}$  sont identiques. >>

Equivalence (b')

<< Les triplets  $(X^k, M_{kk}, D_p)$  et  $(X^{k'}, M_{k'k'}, D_p)$  sont équivalents si les opérateurs d'ESCOUFIER associés  $U_k$  et  $U_{k'}$  sont homothétiques. >>

A.4. Trace d'une matrice

Proposition

<< Soit A une matrice carrée

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{la somme des valeurs propres réels ou complexes de A.} \quad \gg$$

Preuve

Soit  $A = \begin{vmatrix} a_{ij} & i=1 \dots n \\ & j=1 \dots n \end{vmatrix}$

$$\varphi(\lambda) = \det |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & & \\ & & & * \\ & & (\lambda - a_{ii}) & \\ * & & & \\ & & & & (\lambda - a_{nn}) \end{vmatrix}$$

le polynôme caractéristique.

On sait que  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

On a  $\varphi(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

$$= \lambda^n - \lambda^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \dots$$

Ce qui entraîne que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Tr}(A)$

C.Q.F.M.

A.5. Adjointe d'une application linéaireDéfinition [11]

<< L'application B de F dans E est l'adjointe de l'application linéaire P de (E,M) dans (F,N) si :

$$\langle Px, y \rangle_N = \langle x, By \rangle_M \quad \forall (x, y) \in E \times F$$

Une telle application B existe quel que soit P est unique et linéaire.

On la note  $P^*$  . >>

Propriétés

<< -  $P^* = M^{-1} t_{PN}$

-  $(P^*)^* = P$

- P est une isométrie  $\iff P^* P = I_E$  >>



BIBLIOGRAPHIE

- [ 1] BARRA J.R. : << Notions fondamentales de statistiques mathématiques. >>  
Edition Dunod 1971
- [ 2] BENZECRI J.P. : << L'analyse des données - tome 2 -  
L'analyse des correspondances. >>  
Edition Dunod 1980
- [ 3] BERGE T. : << On the équivalence of two obliques.  
Congruence, rotation methods, and orthogonal approximations. >>  
Psychométrie Vol 44 n° 3 1979
- [ 4] BERGE T. : << Orthogonal Procruste rotation for two or more matrice. >>  
Psychométrie vol. 42 n° 2 1977
- [ 5] BOURBAKI N. : << Algèbre.  
Chapitre III - Algèbre multilinéaire. >>  
Hermann 1948
- [ 6] BOURBAKI N. : << Algèbre.  
Chapitre II - Algèbre linéaire. >>  
Hermann 1962
- [ 7] BOURGEOIS P. : << Recherche du déplacement minimisant la distance entre  
deux configurations de points indicés par un même ensemble  
fini. Méthodes et applications en reconnaissance des formes  
et en analyse des données cubiques. >>  
Thèse 3ème cycle - 1980 - Paris VI
- [ 8] BOUROCHE J.M. : << Analyse des données ternaires : La double analyse en  
composantes principales. >>  
Thèse 3ème cycle 1975 - Paris VI COREF
- [ 9] BUSS A.R. : << Toward a unified frame work for psychometric concept in the  
multivariate development situation : Intra individual change  
and inter and intraindividual differences.>>  
Longitudinal research in the study of behavior and development.>  
Chapitre II - Academic Press Inc. 1979.
- [ 10] CARROLL : << Analysis of individual differences in multidimensionnal scaling  
via au N-way Generalisation of<< Eckart-Young >>decomposition. >>  
Psychometrica vol. 35 n° 3 - sept.1970

- [ 11] CROQUETTE A. : << Quelques résultats synthétiques en analyse des données multidimensionnelles.  
Optimalité et métriques relationnelles. >>  
Thèse 3ème cycle 1980 - Université de Toulouse.
- [ 12] D'AUBIGNY C. : << Etude de la morphologie des indices d'association. >>  
Thèse 3ème cycle 1980 - Université de Grenoble
- [ 13] D'AUBIGNY G. : << Description statistique des données ordinales : analyses multidimensionnelles. >>  
Thèse 3ème cycle 1975 - Université de Grenoble
- [ 14] D'AUBIGNY G. : << Analyse des données de Préférence. >>  
Séminaire de l'I.M.S.S. - 1980 Grenoble -
- [ 15] D'AUBIGNY G. : << Analyse des données. >>  
Cours de D.E.A. 1979 - Université de Grenoble
- [ 16] ESCOUFIER Y. : << Le traitement des variables vectorielles. >>  
Biometrics 29 - 751-760-1973 -
- [ 17] ESCOUFIER Y. : << A unifying tool for linear multivariate statistical method the RV. coefficient. >>  
Université de Montpellier
- [ 18] ESCOUFIER Y. : << Opérateurs et analyse des tableaux à plus de deux dimensions  
Cahier n° 25 du B.U.R.O. 1976 - Paris VI
- [ 19] GASTINEL N. : << Analyse numérique linéaire. >>  
Hermann 1966.
- [ 20] GRAYBILL A. : << An introduction to linear statistical models. >>  
Vol. 1 Mc. Graw-Hill book 1961
- [ 21] GREUB W.H. : << Multilinear algebra. >>  
Springer-Verlag - Berlin 1967
- [ 22] GOWER J.C. : << Generalized Procrustes analysis. >>  
Psychometrika vol.40 n° 1 - 1975
- [ 23] HENDERSON V. : << Vec and Vech operators for matrices with some uses in  
Jacobians and multivariate statistics. >>  
The Canadian Journal of statistics - vol. 7 n° 1 - pp. 65-81  
1979.

- [ 24] JAFFRENOU P.A. : << Sur l'analyse des familles finies de variables vectorielles bases algébriques et application à la description statistique. >>  
Thèse 3ème cycle 1978 - Université St Etienne.
- [ 25] KATSUMI N. : << Fundamental of linear algebra. >>  
Mc. Graw - Hill Book - 1966
- [ 26] LANE Mc : << Algèbre - les grands théorèmes - tome 2 >>  
Gauthier - Villars 1971
- [ 27] LANG S. : << Algèbre >>  
Addison - Wesley - 1967
- [ 28] L'HERMIER D.P. : << Structuration des tableaux à trois indices de la statistique Théorie et applications d'une méthode d'analyse conjointe.>  
Thèse 3ème cycle 1976 - Université du Languedoc
- [ 29] MALINVAUD E. : << Méthodes statistiques de l'économétrie. >>  
3ème édition Dunod - 1978
- [ 30] MIZERE D. : << Analyse de variance dans le modèle linéaire I lorsque les hypothèses alternatives sont définies par une relation d'ordre. >>  
Rapport de D.E.A. 1979 - Université de Grenoble
- [ 31] PAGES : << Codage et analyse des tableaux logiques. Introduction à la pratique des variables qualitatives. >>  
Cahier n° 27 - B.U.R.O. 1977 - Paris VI
- [ 32] PAGES : << Introduction à l'analyse des données. >>  
SMASH 1976 - Paris VI
- [ 33] PHAM D.T. : << Introduction à l'analyse statistique des séries temporelles. >>  
Cours D.E.A. statistique 1975-76 - Université de Grenoble.
- [ 34] QUEYSANNE : << Algèbre 1er cycle scientifique, préparation aux grandes écoles. >>  
Armand Collin
- [ 35] ROMEDER J.M. : << Méthodes et programmes d'analyse discriminante. >>  
Dunod
- [ 36] SCHEFFE H. : << The analysis of variance. >>  
Wiley publication in Statistic - 1959

- [ 37] SCHEKTMAN Y. : << Introduction à l'analyse en composantes principales sous contraintes de structures sur les facteurs. >>  
Publ. n° 06-78 - Université de Toulouse 1978
- [ 38] SCHÖNEMANN P.H. : << Fitting one matrix to another under choice of a central dilatation and a rigid motion. >>  
Psychometrika vol. 35 n° 2 - 1970
- [ 39] SCHÖNEMANN : << A generalized solution of the orthogonal procruste problem >  
Psychometrika vol. 31 n° 1 - 1966
- [ 40] SIBSON R. : << Studies in the Robustness of multidimensional scaling  
Procrustes statistics >>  
Journal of royal statistics society - vol. 40 n° 2 - pp.234-23  
1978
- [ 41] STEPHENS : << Vector Correlation >>  
Biometrika vol. 66 n° 1 - pp. 41-8 1979
- [ 42] TUCKER L.R. : <<Some mathematical notes on three mode factor analysis. >>  
Psychometrika, vol. 31, n° 3 1966 - p. 279-311
- [ 43] WINER B.J. : << Statistical principles in experimental design. >>  
International Student Edition 1971
- [ 44] YOUNG-ECKART : << The approximation of one matrix by another of lower rank.  
Psychometrika, 1936 - vol. 1 pp. 211-218

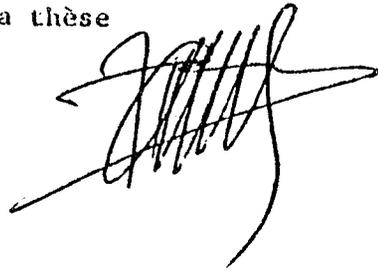
Dernière page d'une thèse

---

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 16/7/67

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

Le Président,

J.J. PAYAN

