



**HAL**  
open science

# Etude algorithmique de certaines classes de graphes parfaits : les graphes de parité, les graphes i-triangulés, les graphes parfaits trois chromatiques

Michel Burlet

► **To cite this version:**

Michel Burlet. Etude algorithmique de certaines classes de graphes parfaits : les graphes de parité, les graphes i-triangulés, les graphes parfaits trois chromatiques. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981. Français. NNT: . tel-00294963

**HAL Id: tel-00294963**

**<https://theses.hal.science/tel-00294963>**

Submitted on 10 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*et à*

**l'Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE**

**Mathématiques appliquées**

**Option : Recherche Opérationnelle**

*par*

***Michel Burlet***



**ETUDE ALGORITHMIQUE  
DE CERTAINES CLASSES DE GRAPHS PARFAITS.**

- Les graphes de parité
- Les graphes *i*- triangulés
- Les graphes parfaits trois chromatiques.



Thèse soutenue le 28 septembre 1981 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	M. SAKAROVITCH	:	Président
Messieurs	C. BENZAKEN J. FONLUPT F. JAEGER C. PAYAN	}	Examineurs



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

---

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEGER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Cryptogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD  
Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD  
M. René PAUTHENET

---

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

#### CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

#### Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

##### E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

MM. SARRAZIN Pierre  
SOUQUET Jean-Louis  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

**E.N.S.M.E.E.**

MM. BISCONDI Michel  
BOOS Jean-Yves  
GUILHOT Bernard  
KOBILANSKI André  
LALAUZE René  
LANCELOT François  
LE COZE Jean  
LESBATS Pierre  
SOUSTELLE Michel  
THEVENOT François  
THOMAS Gérard  
TRAN MINH Canh  
DRIVER Julian  
RIEU Jean

**E.N.S.E.R.G.**

MM. BOREL Joseph  
CHEHIKIAN Alain  
VIKTOROVITCH Pierre

**E.N.S.I.E.G.**

MM. BORNARD Guy  
DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
JAUSSAUD Pierre  
Mme JOURDAIN Geneviève  
MM. LEJEUNE Gérard  
PERARD Jacques

**E.N.S.H.G.**

M. DELHAYE Jean-Marc

**E.N.S.I.M.A.G.**

MM. COURTIN Jacques  
LATOMBE Jean-Claude  
LUCAS Michel  
VERDILLON André



	Page:
INTRODUCTION	
CHAPITRE I : CARACTERISATION, DESCRIPTION ET PROPRIETES D'UN GRAPHE DE PARITE	
1.-Définitions	1
2.-Caractérisations	1
3.-Propriétés des ensembles d'articulation minimaux	10
CHAPITRE II : ALGORITHMES POLYNOMIAUX DE RECONNAISSANCE ET D'OPTIMISATION POUR LES GRAPHE DE PARITE	2
1.-Partition des sommets d'un graphe de parité en niveaux, propriétés du sous-graphe induit par un niveau	2
2.-Caractérisation constructive et problème de la reconnaissance	3
3.-Les problèmes d'optimisation	4
CHAPITRE III: CARACTERISATIONS, PROPRIETES ET ALGORITHMES POUR LES GRAPHE I-TRIANGLES	5
1.-Définitions	5
2.-Caractérisations et propriétés	5
3.-Algorithmes polynomiaux de reconnaissance et d'optimisation pour les graphes i-triangulés	7
CHAPITRE IV : GRAPHE SANS CLIQUE DE CARDINALITE QUATRE PARFAITS	7
1.-Définitions et préliminaire	8
2.-Algorithme de coloration d'un graphe de G	8
3.-Applications	10
REFERENCES	10



Je remercie vivement Monsieur Jean FONLUPT et Monsieur Jean Pierre UHRY pour la compétence et la patience avec lesquelles ils ont dirigé ce travail.

Je remercie Monsieur Michel SAKAROVITCH qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Monsieur Claude BENZAKEN, Monsieur François JAEGER et Monsieur Charles PAYAN en acceptant de participer à ce jury.

Profitant de cette occasion, je voudrais exprimer ma sympathie à tous les membres de l'équipe de Recherche Opérationnelle.

Que Madame BELLET et Madame NEUMANN trouvent ici mes remerciements pour les soins et la compétence dont elles ont fait preuve pour la réalisation matérielle de ce travail.

Je remercie tous les membres du service de reprographie pour l'efficacité avec laquelle ils ont effectué le tirage de cette thèse.

Michel BURLET.









Berge et Gilmore [3] proposaient au début des années soixante une seconde conjecture, non encore résolue, et connue comme la conjecture forte des graphes parfaits: Un graphe  $G = (V, E)$  est parfait si et seulement si ni  $G$ , ni son complémentaire ne contient un cycle élémentaire de longueur impaire supérieure à cinq sans corde.

Les tentatives pour résoudre ce dernier problème ont suivi principalement deux directions:

- L'une a consisté à démontrer la conjecture forte pour des classes de graphes parfaits particulières: graphes planaire [32], graphes  $i$ -triangulés [15], graphes triangulés [11], graphes de Meyniel [27], graphes sans clique à quatre [33], graphes sans étoile [29], graphes torroïdaux [19], graphes des cordes d'un cercle [35] ..., sont venues s'ajouter aux classes connues initialement: graphes  $1$  partis [12], graphes adjoints de graphe biparti [12], graphes de comparabilité [12].

- L'autre a été de déterminer les propriétés des graphes imparfaits critiques: Padberg [28], Bland, Huang, Trotter [7], Chvátal [37]. Un graphe imparfait critique est un graphe non parfait, et minimal (au sens des sommets) pour cette propriété.

Le travail présenté ici n'est pas une tentative de résolution de la conjecture forte des graphes parfaits. Il a pour principal objectif de découvrir certaines propriétés topologiques et algorithmiques de certaines classes de graphes connues pour vérifier la conjecture. Les travaux de Fulkerson et Lovász montrent en effet que le problème du stable de poids maximum pour un graphe parfait peut se formuler comme un problème de programmation linéaire dont les seules contraintes sont données par les cliques maximales et que cette propriété est caractéristique des graphes parfaits.

Il peut sembler intéressant de trouver des méthodes de résolution de ce programme linéaire qui soient polynomiales. Une approche, très générale, basée sur la méthode des ellipsoïdes a permis à Grötschel, Lovász et Schrijver de proposer un algorithme polynomial pour le problème du stable de poids maximum et de la coloration minimum de tout graphe parfait. (Le théorème des graphes parfaits, montre que cet algorithme peut aussi être utilisé pour les problèmes de cliques). Cette méthode ne donne malheureusement aucune indication sur la structure des graphes parfaits et ne semble pas pour le moment d'une grande utilité combinatoire et pratique. Elle doit être comprise comme une contribution théorique, montrant que certains problèmes d'optimisations sur les graphes parfaits peuvent se résoudre en temps polynomial. Les algorithmes "pratiquement bons" devant être de nature plus combinatoire.

L'étude algorithmique des graphes parfaits, mis à part ce dernier travail, est relativement peu explorée. En effet si un certain nombre de classes de graphes parfaits ont été caractérisées, il est relativement surprenant de constater qu'il existe peu de travaux qui étudient algorithmiquement ces classes de graphes (cf. Fulkerson [14], Gavril [16]). On peut penser en particulier aux problèmes classiques des graphes parfaits (stable ou clique de poids maximum, recouvrement minimum des sommets par des cliques ou par des stables) mais également au problème premier de la reconnaissance de ces graphes en temps polynomial.

Ces problèmes demeurent ouverts pour une grande variété de graphes parfaits: graphes de Meyniel, graphes parfaits planaires, graphes parfaits sans clique à quatre etc. . .

D'autres classes de graphes parfaits ont leur aspect algorithmique partiellement étudié, en particulier pour les graphes parfaits sans étoile, seul le problème de leur reconnaissance en temps polynomial reste à établir [22], [23] (cf. Ben Rebaa [1]).

D'autres classes enfin ont leur aspect algorithmique parfaitement résolu. Nous voulons parler des graphes de relation d'ordre [12], des graphes bipartis [12] et des graphes triangulés [16].

Nous ne citons que les classes maximales, en oubliant les nombreuses sous-classes, bien que le problème de leur reconnaissance ne manque pas d'intérêt et ait souvent conduit à très jolis résultats, voir le livre de Golombic pour de nombreuses références [18].

Nous nous sommes intéressés dans cette étude à trois classes particulières de graphes parfaits:

- Les graphes de parité
- Les graphes *i*-triangulés
- Les graphes sans clique à 4 parfaits.

#### Les graphes de parité

=====

Les graphes de parité sont une généralisation assez naturelle des graphes bipartis. Ils sont définis en 1.3. Dans le chapitre I, on donne une caractérisation de ces graphes: un graphe *G* est de parité, si et seulement si, chaque cycle élémentaire impair de *G*, de longueur au moins 5 contient deux cordons qui se croisent. (cf. def. I.4)

Un théorème de Sachs [30] nous permet alors d'affirmer que ces graphes sont parfaits.

On démontre ensuite quelques propriétés de ces graphes et l'on y précise ce que sont leurs ensembles d'articulation minimaux. Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Gallai [15] concernant les graphes *i*-triangulés présentés au chapitre III.

Au chapitre suivant on donne un algorithme polynomial de reconnaissance des graphes de parité. On montre aussi que ces graphes sont en fait constitués par "l'assemblage" de deux classes de graphes parfaits: les graphes bipartis et les cographes, étudiés par Corneil, Lerchs, Stewart [10], appelé ici 2-graphes de parité.

Plus précisément: la classe des graphes parfaits est fermée par construction de vrais et faux jumeaux. (remplacer un sommet par un ensemble de deux sommets reliés ou non (cf. Lovász [25] )). Elle est aussi fermée par extension avec des graphes bipartis (théorème II.21). On démontrera que les graphes de parité sont exactement ceux obtenus par ces opérations appliquées itérativement au graphe ne comportant qu'un seul sommet

Le théorème de caractérisation constructive nous permet d'établir des algorithmes polynomiaux pour les quatre problèmes d'optimisation déjà cités (en cardinalité et en poids). La justification de ces algorithmes constitue une nouvelle démonstration de la perfection de ces graphes.

### Les graphes $i$ -triangulés

=====

Le concept de graphe  $i$ -triangulé (cf. définition III.1 ) introduit par Gallai [15] est à rapprocher de la caractérisation donnée pour un graphe de parité. Gallai a démontré qu'un graphe  $i$ -triangulé est  $\alpha$ -parfait. Une démonstration beaucoup plus élégante a été donnée depuis par Surányi [31] . En fait Gallai avait démontré un résultat plus fort, puisqu'il caractérisait les graphes  $i$ -triangulés par leurs ensembles d'articulations relativement minimaux, et que son approche précisait la structure de ces ensembles d'articulations.

Aucune des deux démonstrations ne conduit cependant à un des algorithmes cherchés, de reconnaissance, ou d'optimisation. Ici poursuivant les résultats de Gallai nous obtenons une caractérisation constructive de ces graphes, de laquelle coulent tous ces algorithmes. Tous ces résultats sont présentés au chapitre III.

### Les graphes parfaits sans clique à quatre

=====

Ces graphes sont étudiés dans le dernier chapitre de cette thèse.

Tucker démontre [33] que les graphes sans clique à quatre (cf. définition III.1) vérifient la conjecture forte des graphes parfaits.

Ces graphes étant parfaits on les désignera souvent comme parfaits trois coloriables.

La démonstration initiale de la conjecture pour cette classe de graphes était longue. Tucker [34] redonna une autre démonstration en s'appuyant sur des résultats que Padberg [28] avait obtenu pour les graphes imparfaits critiques. Son approche dans les deux démonstrations n'est pas algorithmique.

Nous établissons ici une démonstration nouvelle du résultat, celle-ci est un algorithme polynomial de coloration pour une sous-classe de la classe étudiée.

On obtient quelques résultats sur la structure des graphes de cette sous-classe.

Enfin une démonstration rapide et élégante, qui reprend une des idées de l'algorithme proposé nous conduit à un autre résultat de Tucker [32] : un graphe  $G$  planaire vérifie la conjecture forte des graphes parfaits.





1.-DEFINITIONS

Notation

Soit  $G = (V(G), E(G))$  un graphe qui a pour ensemble de sommet  $V(G)$  et pour ensemble d'arêtes  $E(G)$ .

Quand aucune confusion n'est possible, on écrira  $V$  et  $E$  pour  $V(G)$  et  $E(G)$ .

Les graphes de parité sont une généralisation assez naturelle des graphes bipartis. Ils sont définis ci-dessous.

définition I.1

Une chaîne minimale est une chaîne élémentaire qui est un sous-graphe induit.

Dans le graphe de la figure 1, les chaînes  $(x, z, t, v, y)$  et  $(x, z, u, v, y)$  sont minimales au contraire par exemple de la chaîne  $(x, z, t, u, v)$ .

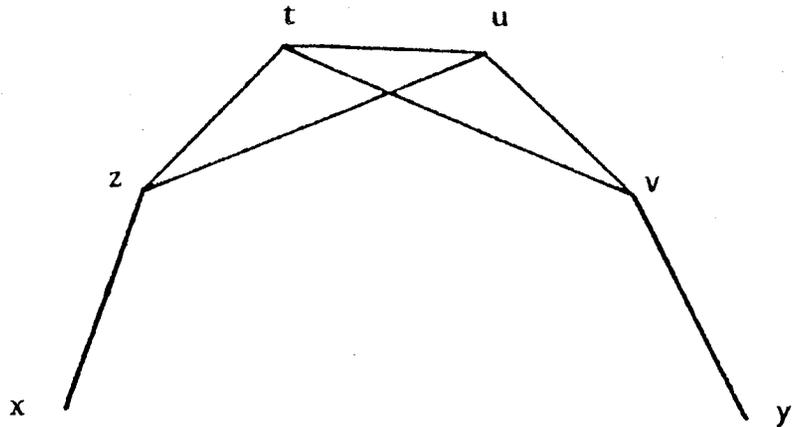


Figure 1

définition 1.2

La parité d'une chaîne minimale est la parité de son nombre d'arêtes.

En particulier, si deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents, la seule chaîne minimale les reliant est l'arête  $(x,y)$  cette chaîne est impaire.

définition 1.3

Un graphe (simple et non orienté)  $G = (V,E)$  est de parité si pour toutes paires de sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ , toutes les chaînes minimales reliant  $x$  à  $y$  ont même parité.

Il est clair que la notion de graphe de parité généralise celle de biparti.

Les cliques sont des graphes de parité non biparti

Le graphe de la figure ci-dessous est un exemple moins trivial.

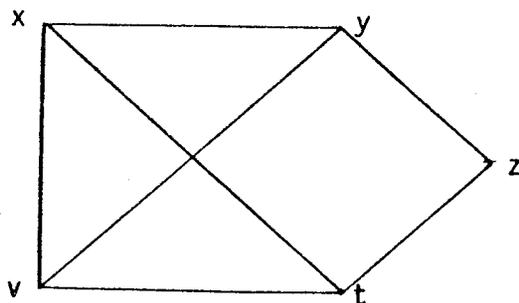


Figure 2

2.-CARACTERISATIONS

---

définition 1.4

On dit que deux cordes  $(x,y)$  et  $(z,t)$  d'un cycle élémentaire se croisent, si les sommets  $x,y,z,t$  sont différents et situés dans cet ordre sur le cycle.

**Théorème 1.5**

=====

Un graphe  $G = (V, E)$  est un graphe de parité, si et seulement si tout cycle élémentaire impair de  $G$ , de longueur au moins 5, contient deux cordes qui se croisent.

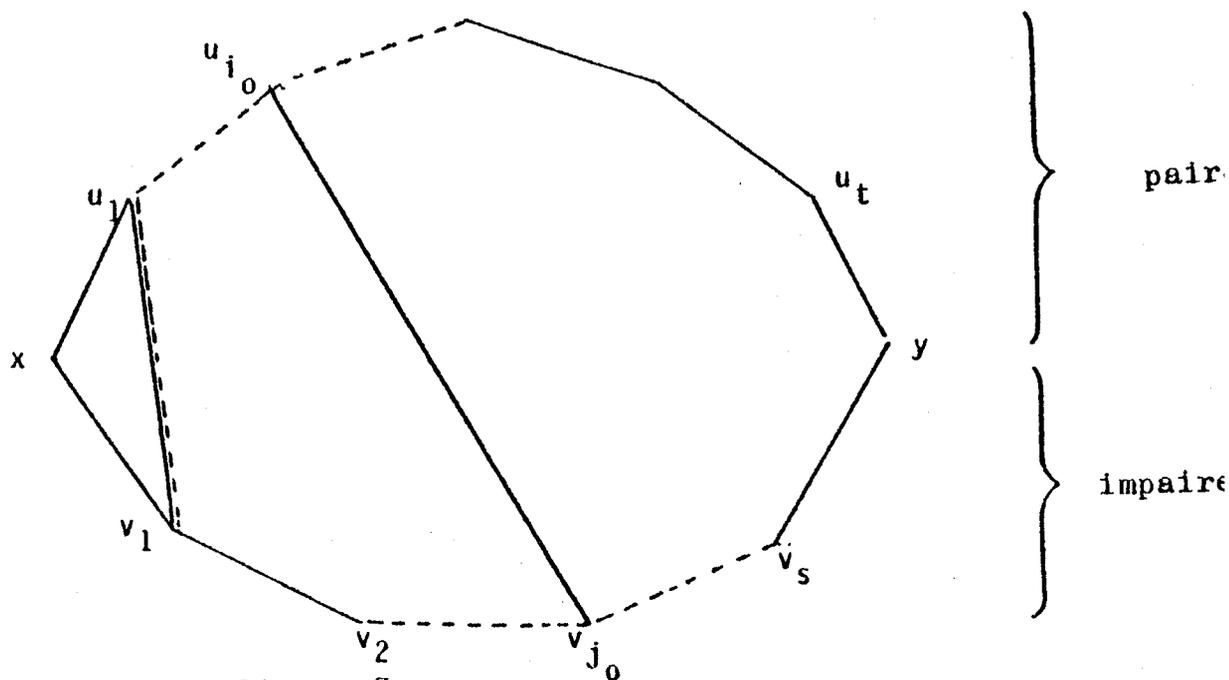
démonstration:

- condition nécessaire: la condition est nécessaire pour un cycle à 5. Supposons la propriété démontrée pour un cycle élémentaire de cardinalité  $k (k \equiv 1(2))$ , démontrons cette propriété pour un cycle de cardinalité  $k+2$ .

Il est facile de vérifier qu'un tel cycle impair doit posséder au moins deux cordes, et que deux cordes qui ne se croisent pas créent au moins un cycle impair de cardinalité inférieure à  $k$ , dans lequel la récurrence entraîne la propriété.

- condition suffisante: supposons qu'il existe un graphe  $G$  vérifiant la condition, et qui ne soit pas de parité. La structure exigée de  $G$  étant héréditaire (par sous-graphe induit), on choisira un contre-exemple minimal au sens des sommets.

Ce contre-exemple possède deux sommets  $x$  et  $y$  reliés par une chaîne minimale paire  $(x, u_1, \dots, u_t, y)$  où  $t$  est impair, et une chaîne minimale impaire  $(x, v_1, \dots, v_s, y)$  où  $s$  est pair et supérieur ou égal à 2.



Soient  $i_0 = \min \{i \mid \exists j > 1 : (u_i, v_j) \in E\}$ ,  
 $j_0 = \max \{j \mid \exists (u_{i_0}, v_j) \in E\}$ .

On a  $i_0 < t$  et  $j_0 > 1$  puisque par hypothèse le cycle impair formé par ces deux chaînes a deux cordes qui se croisent. Les deux chaînes  $(u_{i_0}, v_{j_0}, v_{j_0+1}, \dots, v_s, y)$  et  $(u_{i_0}, u_{i_0+1}, \dots, u_t, y)$  sont minimales et ont la même parité puisqu'elles sont contenues dans un sous-graphe de  $G$ . De même  $(x, u_1, \dots, u_{i_0}, v_{j_0})$  et  $(x, v_1, \dots, v_{j_0})$  ont la même parité.

Cependant, la somme des longueurs de ces quatre chaînes égale  $(s-j_0+2) + (t-i_0+1) + (i_0+1) + j_0 = s+t+4$  qui est impair, contradiction.

**Théorème I.6 (Sachs [30] )**  
 =====

Les graphes de parité sont des graphes parfaits.

Donnons un corollaire évident:

**Corollaire I.6.1**

Un graphe  $G = (V, E)$  est un graphe de parité si et seulement si il ne contient pas comme sous-graphe induit  $\Delta_{2k+1}$  cycle impair sans corde sur  $2k+1$  sommets ( $k \geq 2$ ).

$\Delta'_{2k+1}$  cycle impair, avec pour seule corde une corde courte, sur  $2k+1$  sommets ( $k \geq 2$ ) (cf. définition III.2).

$\tilde{\Delta}_5$  cycle sur 5 sommets avec exactement deux cordes, adjacentes au même sommet.

**démonstration:**  
 -----

- condition nécessaire : évidente.
- condition suffisante : démontrons que si un graphe satisfait les hypothèses, il a dans tous ses cycles impairs des cordes qui se croisent.

Cela est vrai pour les cycles à 5.

Soit dans  $G$  le plus petit cycle impair pour lequel cela est faux.

Ce cycle impair contient: soit deux cordes courtes qui ne se croisent pas, et dans ce cas elles dessinent un cycle impair plus petit qui vérifie la propriété, contradiction, soit une corde non courte qui appartient à un cycle impair plus petit qui vérifie la propriété, contradiction.

Il est intéressant à ce stade de rappeler deux résultats connexes:

a/ graphes  $i$ -triangulés (cf. def. III.1)

Un graphe  $i$ -triangulé est parfait. Gallai [15] et Surányi [31] .

b/ le résultat plus général de Meyniel [27] .

Un graphe  $G$  tel que tout cycle élémentaire impair a deux cordes est parfait.

Nous donnons (figure 4) un graphe qui contient deux cordes dans tous ses cycles impairs, mais qui n'est cependant ni  $i$ -triangulé, ni de parité.

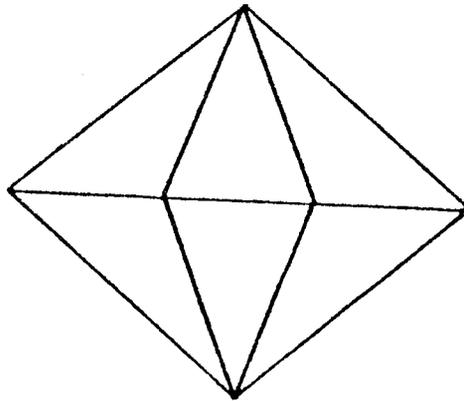


Figure 4

### 3.-PROPRIETES DES ENSEMBLES D'ARTICULATION MINIMAUX

---

#### Notations

---

On notera pour un graphe  $G = (V, E)$  et  $S \subseteq V$   $G(S)$  le sous graphe induit par  $S$ .

On notera  $\Gamma_x$  les sommets adjacents a  $x$ .

$$\Gamma_x = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}.$$

Pour  $A \subseteq V$   $\Gamma_x \cap A$  sera noté  $\Gamma_x(A)$

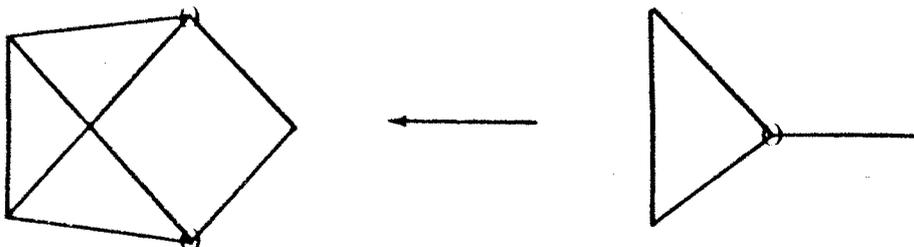
Occasionnellement, pour  $H = G(A)$  (où  $A \subseteq V$ ) un sous graphe de  $G$ , nous écrirons  $\Gamma_x(H)$  pour  $\Gamma_x(A)$ .

#### définition I.7

- On appelle vrais jumeaux deux sommets  $x$  et  $y$  reliés par une arête, qui ont mêmes adjacents. (cad,  $\Gamma_x \setminus \{y\} = \Gamma_y \setminus \{x\}$ )
- On appelle faux jumeaux deux sommets  $x$  et  $y$  non reliés, qui ont mêmes adjacents. (cad,  $\Gamma_x = \Gamma_y$ ).

On sait Lovász [25] que l'opération qui consiste à ajouter un jumeau, vrai ou faux, d'un sommet à un graphe parfait est une opération qui construit un nouveau graphe parfait.

De plus cette opération appliquée à un graphe de parité lui conserve cette propriété, ceci est cependant faux pour les graphes  $i$ -triangulés (figure 5) mais vrai pour les graphes de Meyniel



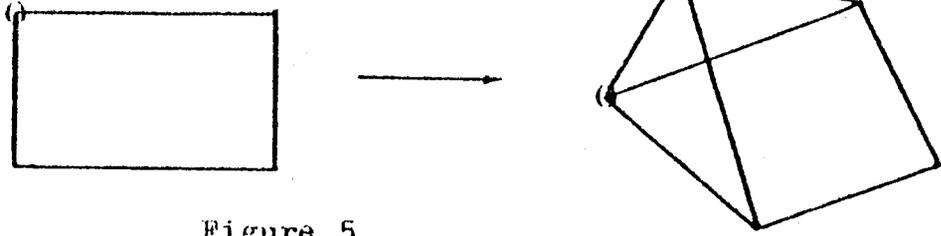


Figure 5

définition 1.8

Un graphe sans jumeaux sera dit premier.

On donne figure 6 un exemple de réduction d'un graphe de parité, par suppression de vrais et faux jumeaux, et un graphe de parité premier.

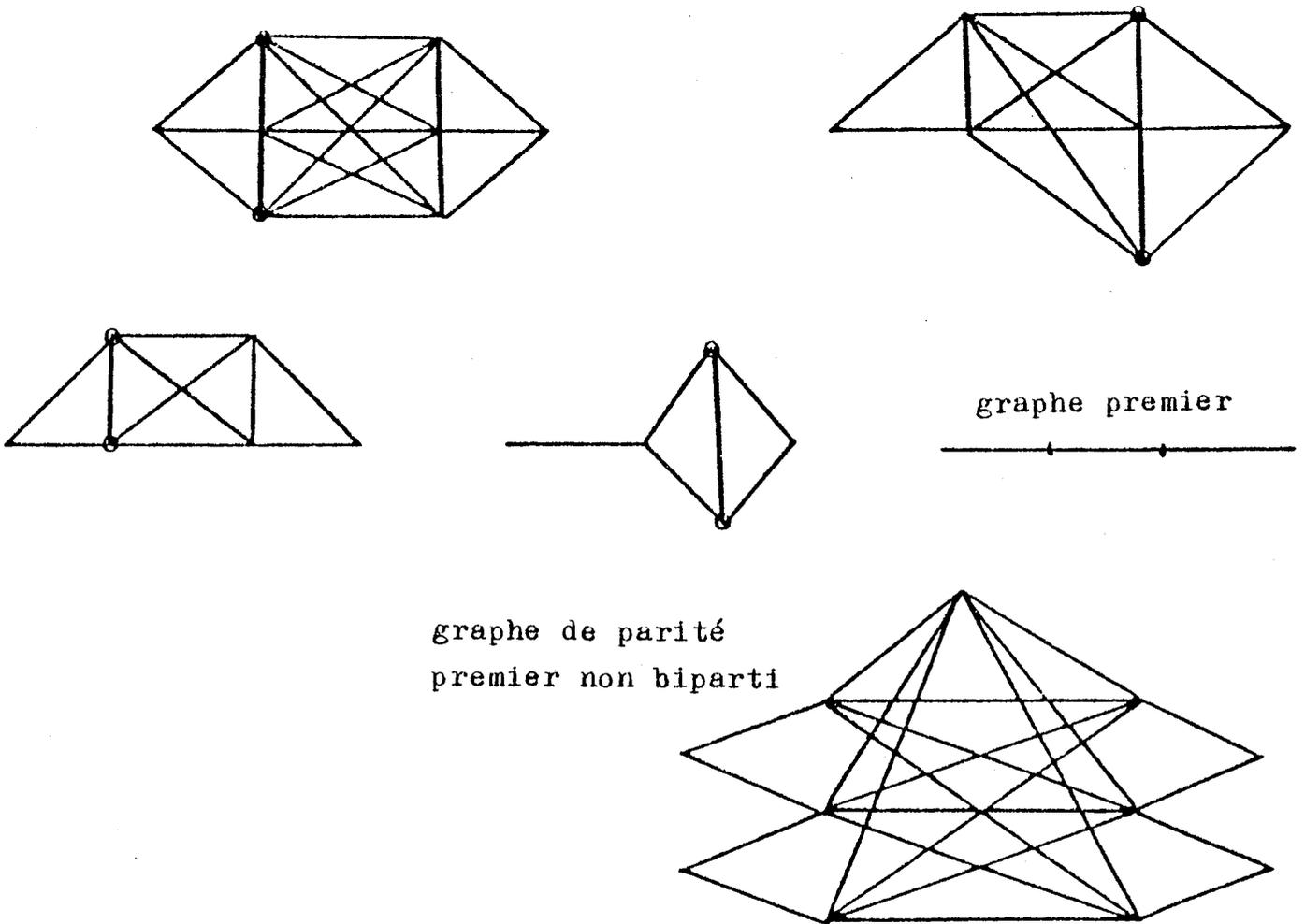


Figure 6

définition I.9

Dans un graphe de parité  $G = (V, E)$  on appelle partition induite par un sommet  $x$  la bipartition ordonnée des sommets de  $G$ , notée  $(P_x, I_x)$ , où  $P_x$  (resp.  $I_x$ ) est l'ensemble des sommets de  $V$  reliés à  $x$  par une chaîne minimale paire (respectivement impaire). On considère que  $x$  est relié à  $x$  par une chaîne minimale paire.

Notation

On peut ne s'intéresser qu'à la restriction de la bipartition, induite par  $x$ , à un sous ensemble  $A$  de  $V$ . On note alors:

$$P_x(A) = P_x \cap A \quad \text{et} \quad I_x(A) = I_x \cap A$$

Lemme I.10

On peut partitionner tout ensemble d'articulation  $A$  minimal, d'un graphe de parité  $G = (V, E)$ , en deux parties notées  $R$  et  $B$  qui ont les propriétés suivantes: les sommets de  $R$  induisent la même partition des sommets de  $V \setminus A$ , et les sommets de  $B$  la partition inverse, c'est à dire,

$$\forall r_1, \forall r_2 \in R \quad P_{r_1}(V \setminus A) = P_{r_2}(V \setminus A) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad I_{r_1}(V \setminus A) = I_{r_2}(V \setminus A)$$

$$\forall r_1 \in R, \forall b_1 \in B \quad P_{r_1}(V \setminus A) = I_{b_1}(V \setminus A) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad I_{r_1}(V \setminus A) = P_{b_1}(V \setminus A)$$

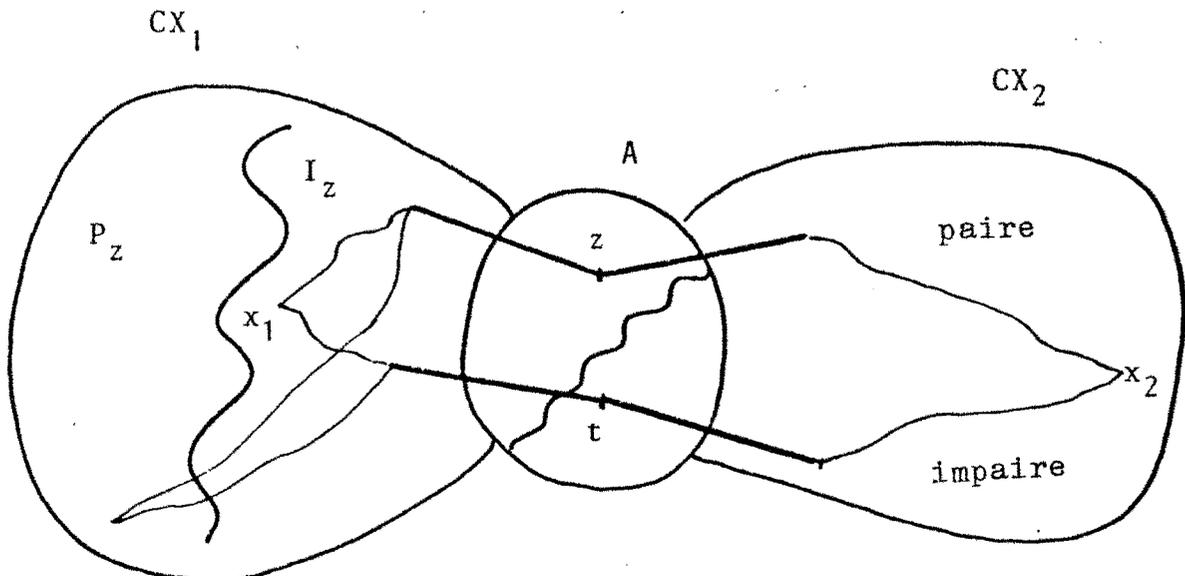


Figure 7

démonstration :

On suppose  $|A| > 1$  (sinon la propriété est triviale)  
Soient  $CX_1$  et  $CX_2$  deux composantes connexes distinctes du sous-  
graphe construit sur  $V \setminus A$

Soient  $x_1$  appartenant à  $CX_1$  et  $x_2$  appartenant à  $CX_2$  et deux  
sommets distincts  $z$  et  $t$  de  $A$ .

Puisque  $A$  est minimal, il existe une chaîne minima-  
le  $C_1(x_1, x_2)$  joignant  $x_1$  à  $x_2$  ne contenant que le seul som-  
met  $z$  de  $A$  et une chaîne minimale  $C_2(x_1, x_2)$  ne comportant que  
 $t$  dans  $A$ . Il est facile de conclure puisque les chaînes  
 $C_1(x_1, x_2)$  et  $C_2(x_1, x_2)$  sont de parités identiques que  $P_t = P_z$  ou  
 $P_t = I_z$ .

Lemme I.11

Soit  $A$  un ensemble d'articulation minimal partitionné  
en  $R$  et  $B$  comme dans le lemme précédent:

$$\forall r_1 \in R, \forall r_2 \in R, (r_1, r_2) \in E \Rightarrow \Gamma_{r_1}(V \setminus A) = \Gamma_{r_2}(V \setminus A)$$

démonstration

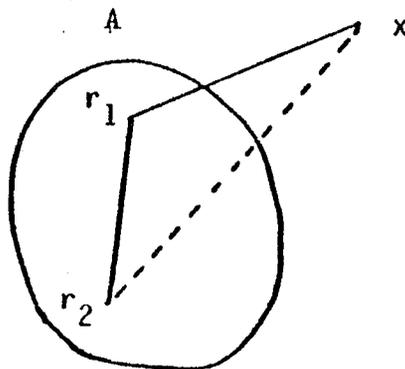


Figure 8

Supposons la propriété fausse

Soit  $x \in \Gamma_{r_1}(V \setminus A)$  et  $x \notin \Gamma_{r_2}(V \setminus A)$

Alors  $(r_2, r_1, x)$  est une chaîne minimale paire, et donc  $x \in I_{r_1}$  et  $x \in P_{r_2}$ , ce qui contredit le lemme I.10.

Lemme I.12

Avec les mêmes hypothèses que celles du lemme précédent:  $\forall r_1 \in R, \forall r_2 \in R, (r_1, r_2) \in E \Rightarrow \Gamma_{r_1}(B) = \Gamma_{r_2}(B)$ .

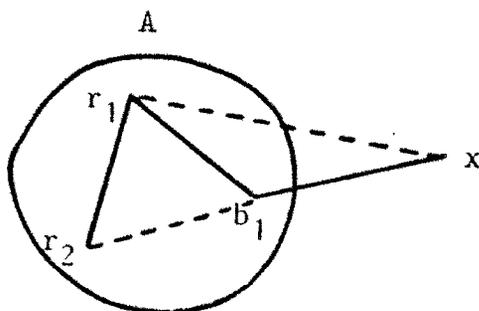


Figure 9

démonstration:

Supposons que  $b_1 \in \Gamma_{r_1}(B)$  et  $b_1 \notin \Gamma_{r_2}(B)$ , et soit  $x$  un sommet de  $V \setminus A$  adjacent à  $b_1$  (un tel sommet  $x$  existe par minimalité de  $A$ ).

Puisque  $(r_2, b_1), (r_1, x)$  et  $(r_2, x)$  n'appartiennent pas à  $E$ , il existe une chaîne minimale de  $r_1$  à  $x$  de longueur 2, et une chaîne minimale de  $r_2$  à  $x$  de longueur 3. Ceci contredit le lemme I.10.

Lemme I.13

Toujours sous les hypothèses précédentes, une composante connexe du sous-graphe induit par les sommets de  $R$  n'a pas de chaîne minimale de longueur 3.

démonstration :

Supposons qu'il existe une telle chaîne:  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$   
Soit un sommet  $x$  de  $V \setminus A$  adjacent à  $r_1$ .

On sait lemme I.11 que  $x$  est aussi adjacent à  $r_2, r_3$  et  $r_4$ . Le sous-graphe induit par ces cinq sommets est un cycle à 5 qui a comme seules cordes celles issues de  $x$ , contradiction.

Remarque I.14

=====

Cette propriété est encore vraie si l'on prend pour ensemble  $R$  les adjacents d'un sommet quelconque d'un graphe de parité. (qui constituent un ensemble d'articulation non forcément minimal).

définition I.15

Un 2-graphe de parité est un graphe dans lequel la longueur de toutes les chaînes minimales est au plus deux.

Exemples :

Une clique est un 2-graphe de parité.

Un graphe multiparti complet est un 2-graphe de parité.

On appelle ici multiparti complet, un graphe pour lequel on peut partitionner les sommets en des stables, et où deux sommets sont reliés s'ils appartiennent à des stables différents. (Un tel graphe est un graphe  $i$ -triangulé).

(Gallai [15]).

On donne ci-dessous une propriété caractéristique d'un 2-graphe de parité. Pour d'autres propriétés se rapporter à Corneil, Lerchs, Stewart [10].

Lemme I.16

Un 2-graphe de parité connexe  $G = (V, E)$  avec  $|V| > 1$  contient au moins deux jumeaux (vrais ou faux).

démonstration :

Pour une clique la propriété est vérifiée. Sinon soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$  non adjacents. Il existe un ensemble d'articulation minimal  $A$  qui sépare  $x$  de  $y$ .

Soient  $CX_x$  et  $CX_y$  leur composante connexe respective, du graphe induit sur  $V \setminus A$ .

Quelque soit le sommet  $z$  de  $CX_x$ ,  $z$  est adjacent à tous les sommets de  $A$ , sinon il existerait une chaîne minimale de longueur 3.

Soit  $CX_x = \{x\}$  et  $CX_y = \{y\}$  et  $x$  et  $y$  sont faux jumeaux, soit par exemple  $|CX_x| > 1$ .

On poursuit alors la démonstration par récurrence dans  $CX_x$ .

Des jumeaux dans le sous graphe  $CX_x$  seront effectivement jumeaux dans le graphe initial puisqu'ils ont mêmes adjacents dans  $A$ .

On déduit immédiatement du lemme I.16 un algorithme de construction de tous les 2-graphes de parité connexes. (cf. Fig. 10)

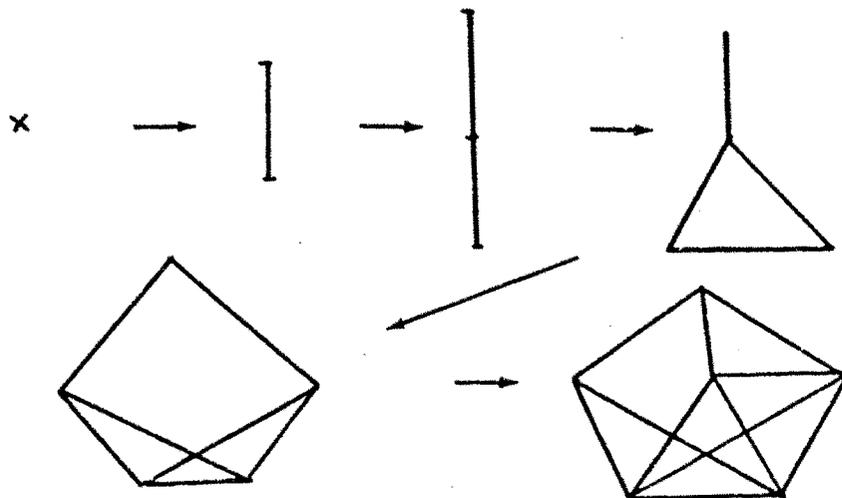


Figure 10

**Théorème I.17**

=====

Dans un graphe de parité premier, tout ensemble d'articulation minimal est un graphe biparti (une des deux parties peut être vide).

démonstration :

-----

Ce théorème découle directement des Lemmes précédents. On y montrait qu'une composante connexe du sous-graphe induit  $G(R)$  (respectivement  $G(B)$ ) est un 2-graphe de parité et que pour tous couples de sommets  $r_1$  et  $r_2$  d'une telle composante,

$$\Gamma_{r_1}^{r_2}(B) = \Gamma_{r_2}^{r_1}(B) \quad \text{et} \quad \Gamma_{r_1}^{r_2}(V \setminus A) = \Gamma_{r_2}^{r_1}(V \setminus A).$$

Des jumeaux vrais ou faux relativement à cette composante sont donc bien des jumeaux dans le graphe  $G$ . On peut par suppression de jumeaux vrais ou faux réduire cette composante en un seul sommet.

Nous donnons ci-dessous deux autres propriétés concernant les graphes de parité.

**Lemme I.18**

-----  
Dans un graphe de parité 2-connexe  $G = (V, E)$ , si deux sommets  $x$  et  $y$  adjacents ont des voisinages disjoints alors  $I_x = P_y$ .

démonstration :

-----

Soit  $z$  un sommet de  $V$  qui contredit la propriété. Puisque  $G$  est 2-connexe, il existe un cycle élémentaire de  $G$  contenant l'arête  $(x, y)$  et le sommet  $z$ . De ce cycle élémentaire on peut extraire deux chaînes minimales:

$(x, u_1, \dots, u_s, z)$  et  $(y, v_1, \dots, v_t, z)$  où  $s$  et  $t$  sont de même parité et  $\geq 2$ . En effet  $z$  ne peut être adjacent de  $x$  (res de  $y$ ), car le cycle  $(z, x, y, v_1, \dots, v_t, z)$  ne pourrait avoir deux cordes qui se croisent.

Il existe au moins une corde reliant  $y$  à un sommet  $u_i$   $i \geq 2$  de la chaîne  $(x, u_1, \dots, u_s, z)$  sinon  $y$  et  $z$  seraient reliés par deux chaînes minimales de parité différentes.

Soit  $i_0 = \max \{i \mid (y, u_i) \in E\}$

Les chaînes  $(y, u_{i_0}, u_{i_0+1}, \dots, u_s, z)$  et  $(y, v_1, \dots, v_t, z)$  sont de même parité, le cycle  $(y, x, u_1, \dots, u_{i_0}, y)$  est donc impair. Il ne peut avoir deux cordes qui se croisent, contradiction.

Lemme I.19

Soit  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  un sous-graphe biparti connexe d'un graphe de parité  $G = (V, E)$  et  $x \in V$ .

Si  $\Gamma_x(V_1) \neq \emptyset$  et  $\Gamma_x(V_2) \neq \emptyset$  alors le sous-graphe de  $G$  induit par  $(\Gamma_x(V_1) \cup \Gamma_x(V_2))$  est un biparti complet.

démonstration:

Soient  $v_1 \in \Gamma_x(V_1), v_2 \in \Gamma_x(V_2)$  tels que  $(v_1, v_2) \notin E$ . Soit une chaîne minimale du sous-graphe  $B$  reliant  $v_1$  à  $v_2$ . Cette chaîne avec la chaîne  $(v_1, x, v_2)$  forme un cycle impair. Les seules cordes possibles de ce cycle impair sont issues de  $x$ , contradiction.





1.-PARTITION DES SOMMETS D'UN GRAPHE DE PARITE EN NIVEAU

-----  
PROPRIETES DU SOUS GRAPHE INDUIT PAR UN NIVEAU,  
-----

Pour reconnaître un graphe de parité nous allons le "pendre" par un sommet et étudier la structure des différents niveaux (définis ci-dessous). Ceci nous conduira non seulement à l'algorithme polynomial de reconnaissance mais aussi au théorème qui donne une caractérisation constructive très simple des graphes de parité.

Ce théorème est à la base des algorithmes d'optimisation décrits plus loin.

Nous allons étudier ici la partition  $(P_a, I_a)$  induite par un sommet  $a$  bien précisé d'un graphe de parité  $G = (V, E)$ .

définition II.1

On appellera  $C(x,y)$  une plus courte chaîne ( en nombre d'arêtes ) reliant  $x$  à  $y$ .

définition II.2

On appellera niveau  $i$ , noté  $N_i$ , de  $G$  l'ensemble des sommets de  $V$  à distance  $i$  de  $a$ .

$$N_i = \{x \in V \mid |C(a,x)| = i\}$$

Les sommets de  $N_i$  sont reliés à  $a$  par des chaînes minimales de la parité de  $i$ .

Le niveau  $N_0$  est réduit au sommet  $a$ .

Le niveau  $N_1$  est l'ensemble des sommets adjacents à  $a$ .

Soit  $m$  la cardinalité de la plus longue chaîne minimale issue de  $a$ , on posera :

$$N_{m+1} = \emptyset.$$

Remarque II.3

=====

L'algorithme de plus court chemin de Dijkstra permet de déterminer en temps polynomial la partition de  $V$  en niveaux.

Remarque II.4  
=====

Une arête  $(x,y)$  a soit ses extrémités dans un même niveau, soit dans deux niveaux successifs.

On donne (figure 11) deux pendaisons possibles du graphe de la (figure 6).

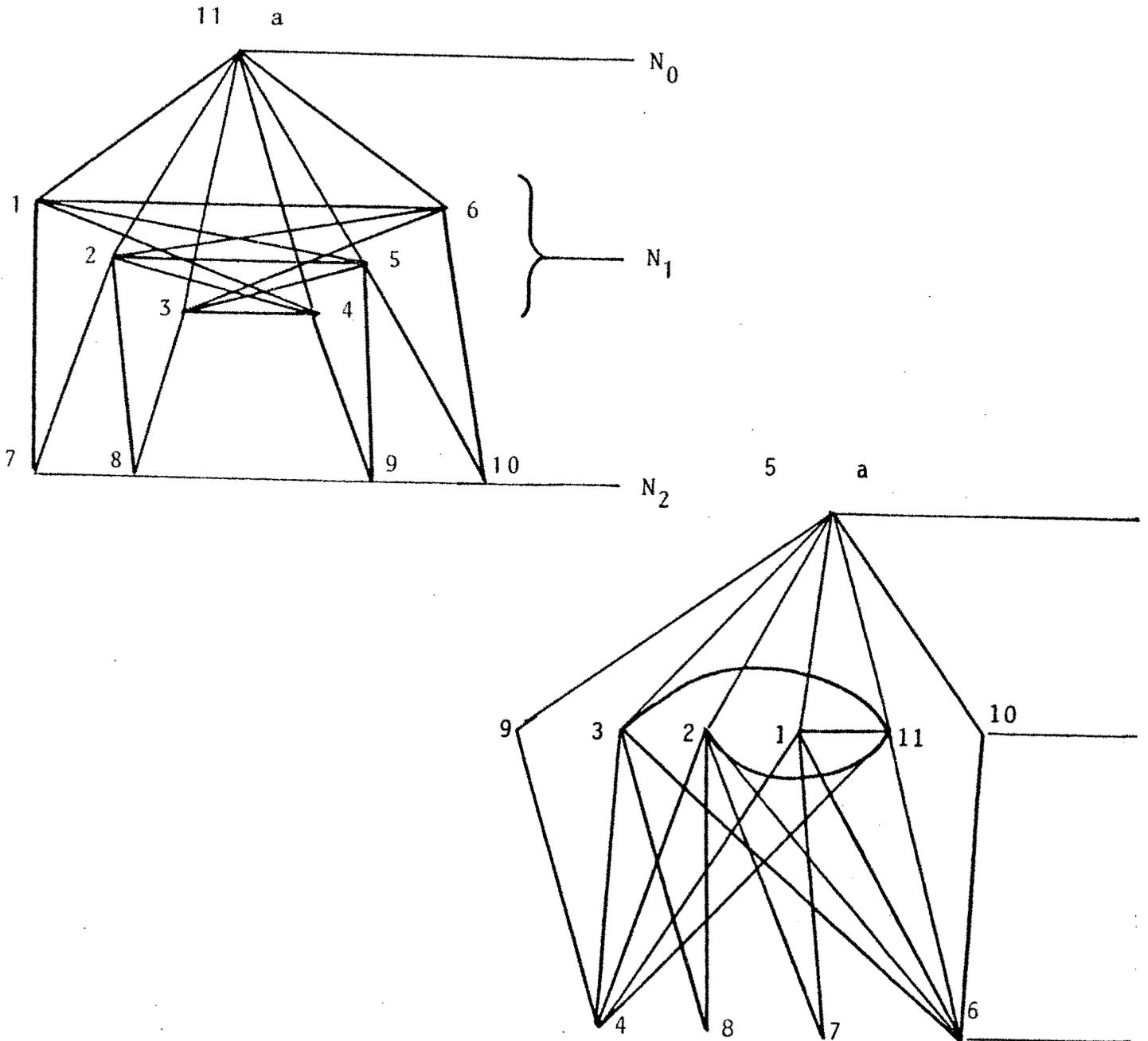


Figure 11

Lemme II.5

Les sommets d'une composante connexe du sous-graphe induit  $G(N_i)$  ont mêmes adjacents au niveau  $N_{i-1}$ .

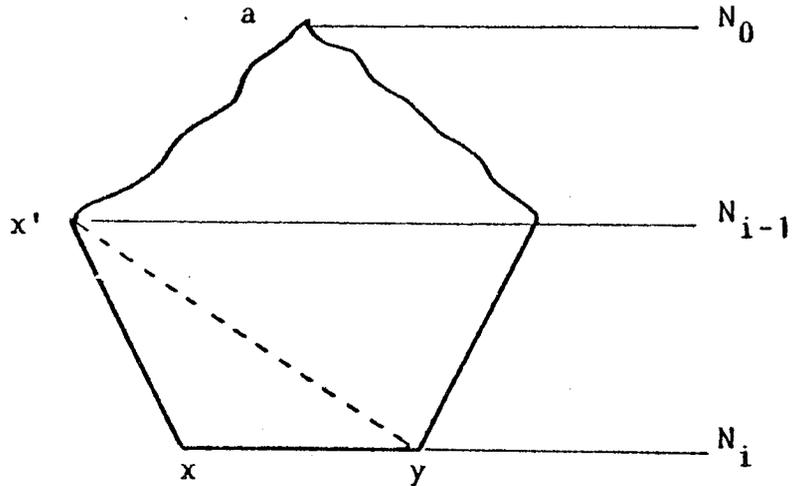


Figure 12

démonstration:

Soient  $x \in N_i$  et  $y \in N_i$  et  $(x,y) \in E$ .

Soit  $x' \in \Gamma_x(N_{i-1})$

Supposons que  $(y,x') \notin E$ .

Puisque l'arête  $(x',y)$  n'existe pas on peut en concaténant une chaîne  $C(a,x')$  avec la chaîne  $(x',x,y)$  exhiber une chaîne reliant  $a$  à  $y$  de la parité de  $i+1$ . Or il existe par définition une chaîne de  $a$  à  $y$  de la parité de  $i$ , contradiction.

Ce lemme montre que le sous-graphe induit par un niveau est un 2-graphe de parité. (cf.lemme I.13).

définition II.6

On supprime le niveau  $N_i$ , et on note:

$G_i^1, G_i^2, \dots, G_i^q$  les différentes composantes connexes obtenues dans le sous-graphe induit par les sommets:

$$N_{i+1} \cup N_{i+2} \dots \cup N_m$$

On note aussi  $X_i^k$  les sommets de  $N_i$  adjacents à la composante  $G_i^k$ .

Voir l'exemple de la figure 11.

Remarque II.7

Les ensembles  $X_i^k$  ne sont pas nécessairement dis-joints et ne recouvrent pas non plus nécessairement tous les sommets de  $N_i$ .

Lemme II.8

$$\forall x \in X_i^k \text{ et } \forall y \in X_i^k,$$

$$(x, y) \in E \Rightarrow \Gamma_x(G_i^k) = \Gamma_y(G_i^k).$$

démonstration

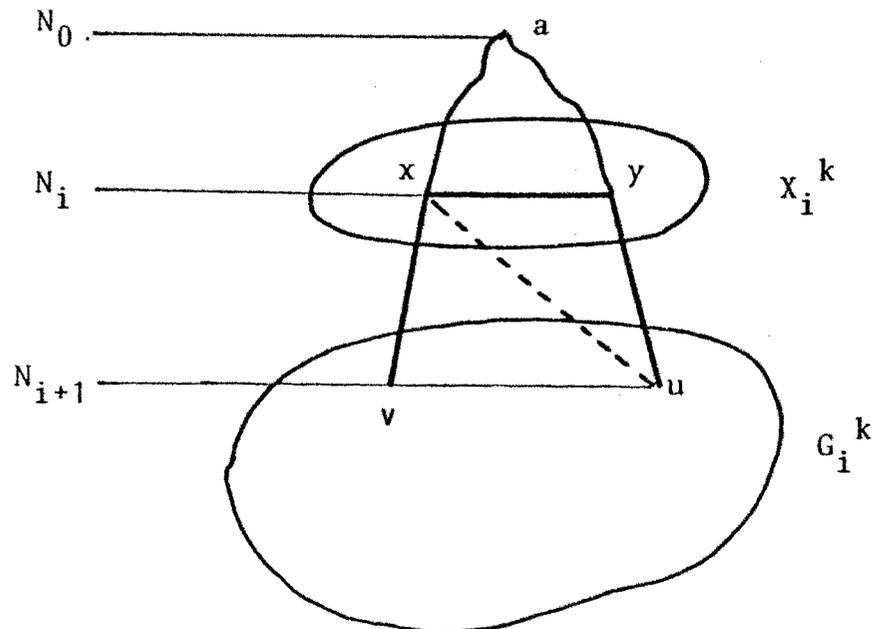


Figure 13

Si la propriété est fausse, il existe une configuration illustrée par la figure 13

Soient  $u \in \Gamma_y(N_{i+1})$ ,  $v \in \Gamma_x(N_{i+1})$  et  $(x,u) \notin E$ .

- Il existe une chaîne  $C(a,u)$  de la parité de  $i+1$ .
- $(u,y,x)$  est une chaîne minimale de longueur 2. Ce qui signifie que l'on peut trouver une chaîne minimale  $(u, \dots, v, x)$  paire ayant ses sommets dans  $G_i^k$ . Concaténons cette chaîne avec une chaîne  $C(a,x)$ , on obtient une chaîne de la parité de  $i$  qui relie  $u$  à  $a$  d'où la contradiction.

Lemme 11.9

Si  $x, y \in X_i^k$ , alors  $\Gamma_x(N_i - X_i^k) = \Gamma_y(N_i - X_i^k)$ .

démonstration:

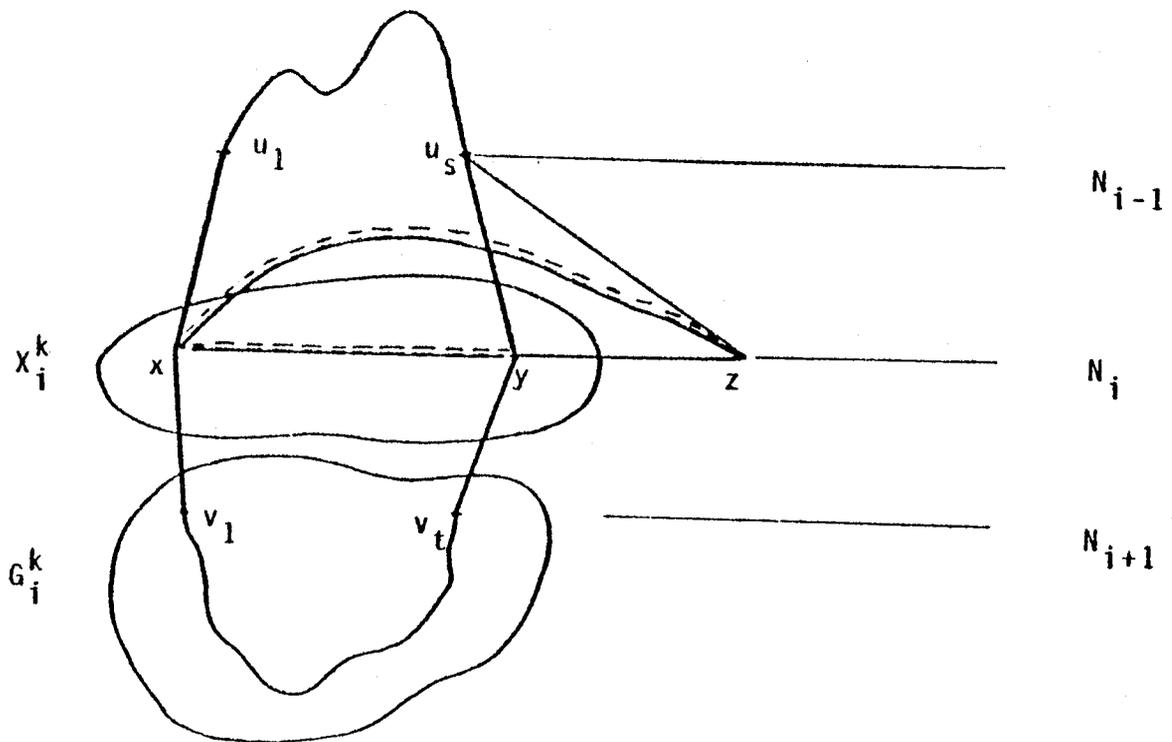


Figure 14

Soient  $x$  et  $y \in X_i^k$   $z \in \Gamma_y(N_i - X_i^k)$  et  $(y, z) \in E$

Soit  $(x, v_1, \dots, v_t, y)$  la plus courte chaîne reliant  $x$  à  $y$  qui a ses sommets intermédiaires  $(v_1, v_2, \dots, v_t)$  dans  $G_i^k$ , et qui utilise au moins un des sommets de  $G_i^k$ .

Soit  $(x, u_1, \dots, u_s, y)$  la plus courte chaîne reliant  $x$  à  $y$  qui a ses sommets intermédiaires  $(u_1, u_2, \dots, u_s)$  dans  $N_0 \cup \dots \cup N_{i-1}$  et qui contient au moins un sommet de  $N_0 \cup N_1 \dots \cup N_{i-1}$ .

On sait que  $(u_s, z) \in E$  (cf. lemme II.5)

Considérons le cycle  $(x, u_1, \dots, u_s, z, y, v_t, \dots, v_1, x)$ . Ce cycle est impair. Ses seules cordes sont  $(u_s, y)$  et éventuellement  $(x, y)$  et  $(x, z)$ .

Si  $(x, z)$  n'appartient pas à  $E$ , le cycle impair ne contient pas deux cordes qui se croisent.

#### définition II.10

Associons à un niveau  $N_i$  déterminé un graphe  $G' = (V', E')$ .

Les sommets de  $G'$  sont en bijection avec les  $X_i^k$ .

Deux sommets de  $G'$  sont reliés si les  $X_i^k$  et  $X_i^{k'}$  correspondants, ont une intersection non vide, et ne sont pas inclus l'un dans l'autre, c'est-à-dire,

$$X_i^k \cap X_i^{k'} \neq \emptyset, X_i^k \setminus X_i^{k'} \neq \emptyset, X_i^{k'} \setminus X_i^k \neq \emptyset.$$

- Soient  $C_1, \dots, C_p$  les composantes connexes de  $G'$ .

- Soit  $U_i^t = \bigcup_k (X_i^k)$ , où  $k$  parcourt les sommets de  $C_t$ .

Il est facile de vérifier que la famille

$$u_i = (U_i^1, \dots, U_i^p)$$
 est une famille d'ensembles em-

boîtés, partiellement ordonnée par inclusion.

La famille  $u_m$  associée à  $N_m$  est vide.

Lemme II.11

Si  $X_i^k$  et  $X_i^{k'}$  appartiennent à la même composante de  $G'$ , il n'existe pas d'arête  $(z, w)$  avec

$$z \in X_i^k \setminus X_i^{k'} \text{ et } w \in X_i^{k'}.$$

démonstration:

Supposons qu'il existe une arête  $(z, w)$  telle que  $z \in X_i^k \setminus X_i^{k'}$  et  $w \in X_i^{k'}$  où  $X_i^k$  et  $X_i^{k'}$  appartiennent à la même composante de  $G'$ , et supposons que nous ayons choisi  $z, w, k, k'$  de telle façon que la distance  $d$  entre  $k$  et  $k'$  dans le graphe  $G'$  soit aussi petite que possible.

Soit  $k_0 = k, \dots, k_d = k'$  une plus courte chaîne reliant  $k$  à  $k'$  dans  $G'$ .

On a  $X_i^{k_0} \cap X_i^{k_1} \neq \emptyset$ , disons  $z' \in X_i^{k_0} \cap X_i^{k_1}$ .

Si  $d \geq 2$ , alors par le lemme II.9

$(z'w) \in E$  et de plus  $z' \notin X_i^{k'}$ . En remplaçant  $z, w, k, k'$  par  $z', w, k_1, k'$  on obtient une distance plus petite dans  $G'$ , ce qui est une contradiction.

Donc  $d = 1$ .

Soient  $(z, v_1, \dots, v_s, z')$  et  $(z', u_1, \dots, u_{s'}, w)$  les plus courtes chaînes, dont tous les sommets intermédiaires sont dans  $G_i^k$  et  $G_i^{k'}$  respectivement, et utilisant au moins un sommet de  $G_i^k$  et  $G_i^{k'}$  respectivement. On vérifie facilement que  $s$  et  $s'$  sont impairs.

D'où  $(z, v_1, \dots, v_s, z', u_1, \dots, u_{s'}, w, z)$  est un cycle impair sans cordes qui se croisent, ce qui est une contradiction.

définition II.12

Un élément  $U_i^t$  de la famille  $u_i$  est dit e-maximal, si il existe une arête  $(x, y) \in G(N_i)$  telle que  $x \in U_i^t, y \notin U_i^t$  et  $U_i^t$  est maximal dans  $u_i$  pour cette propriété.

Lemme II.13

Dans un graphe de parité, un élément e-maximal  $U_i^t$ , minimal dans  $U_i$  pour cette propriété, peut se réduire par suppression de vrais ou faux jumeaux en un stable. Après réduction, les éléments de cet  $U_i^t$  sont des faux jumeaux dans le sous-graphe induit par  $N_0 \cup \dots \cup N_{i-1} \cup V(G_i^k)$ , où  $k$  parcourt l'ensemble des indices tels que  $X_i^k \not\subseteq U_i^t$ .

démonstration:

Soient  $U_i^t$  un élément e-maximal de  $U_i$ , minimal par inclusion et  $K = \{k \mid X_i^k \subseteq U_i^t\}$ .

Soit  $(x, y)$  une arête de  $G(N_i)$  associé au  $U_i^t$  choisi, par la définition II.12.

- Soient  $X_i^k$  et  $X_i^{k'}$  avec  $k$  et  $k' \in K$ . Par choix de  $U_i^t$ , il n'existe pas d'arête  $(u, v)$  avec  $u \in X_i^k \setminus X_i^{k'}$ ,  $v \in X_i^{k'}$ .

Donc (lemme II.8) pour deux sommets quelconques  $u$  et  $v$  d'une composante connexe de  $G(U_i^t)$  on a

$$\Gamma_u \left( \bigcup_k V(G_i^k) \right) = \Gamma_v \left( \bigcup_k V(G_i^k) \right) \text{ où } k \text{ parcourt } K.$$

- Pour deux sommets quelconques  $u$  et  $v$  de  $G(U_i^t)$  on a

$$\Gamma_u(N_i - U_i^t) = \Gamma_v(N_i - U_i^t) \text{ (cf. lemme II.9).}$$

Ce qui entraîne que  $y \in \Gamma_u$  et  $y \in \Gamma_v$ , et donc

$$\Gamma_u(N_{i-1}) = \Gamma_v(N_{i-1}) \text{ (cf. lemme II.5).}$$

- Démontrons que pour deux sommets quelconques  $u$  et  $v$  de  $G(U_i^t)$  on a  $\Gamma_u \left( \bigcup_k V(G_i^k) \right) = \Gamma_v \left( \bigcup_k V(G_i^k) \right)$  où  $k$  parcourt l'ensemble des indices tels que  $X_i^k \not\subseteq U_i^t$ .

Supposons qu'il existe  $k' \notin K$  avec  $w \in G_i^{k'}$ ,  $(u, w) \in E$  et  $(v, w) \notin E$ .

Alors  $u \in X_1^{k'}$  et donc  $U_1^t \subseteq X_1^{k'}$ .  $U_1^t$  est e-maximal, donc (lemme II.11)  $y \in X_1^{k'}$ . Le lemme II.8 démontre alors  $\Gamma_u(G_1^{k'}) = \Gamma_y(G_1^{k'}) = \Gamma_v(G_1^{k'})$ , ce qui entraîne que  $(v, w)$  est une arête, contredisant l'hypothèse.

Chaque composante connexe de  $G(U_1^t)$  est un 2-graphe de parité qui peut être réduit par suppression de vrais et faux jumeaux en un seul sommet (lemme I.16). Ces opérations peuvent se reporter sur le graphe  $G = (V, E)$ .

Le lemme précédent est l'argument fondamental pour l'algorithme de reconnaissance donné plus loin, qui nous permettra de démontrer le théorème ci-dessous.

## 2.-CARACTERISATION CONSTRUCTIVE ET PROBLEME DE LA RECONNAISSANCE

---

### définition II.14

On appelle prolongement d'un graphe  $G^*$  par un biparti  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  l'opération qui consiste à créer un nouveau graphe  $G$  obtenu par identification de certains sommets de  $V_1$  avec un ensemble de faux jumeaux de  $G^*$  (éventuellement réduit à un seul sommet).

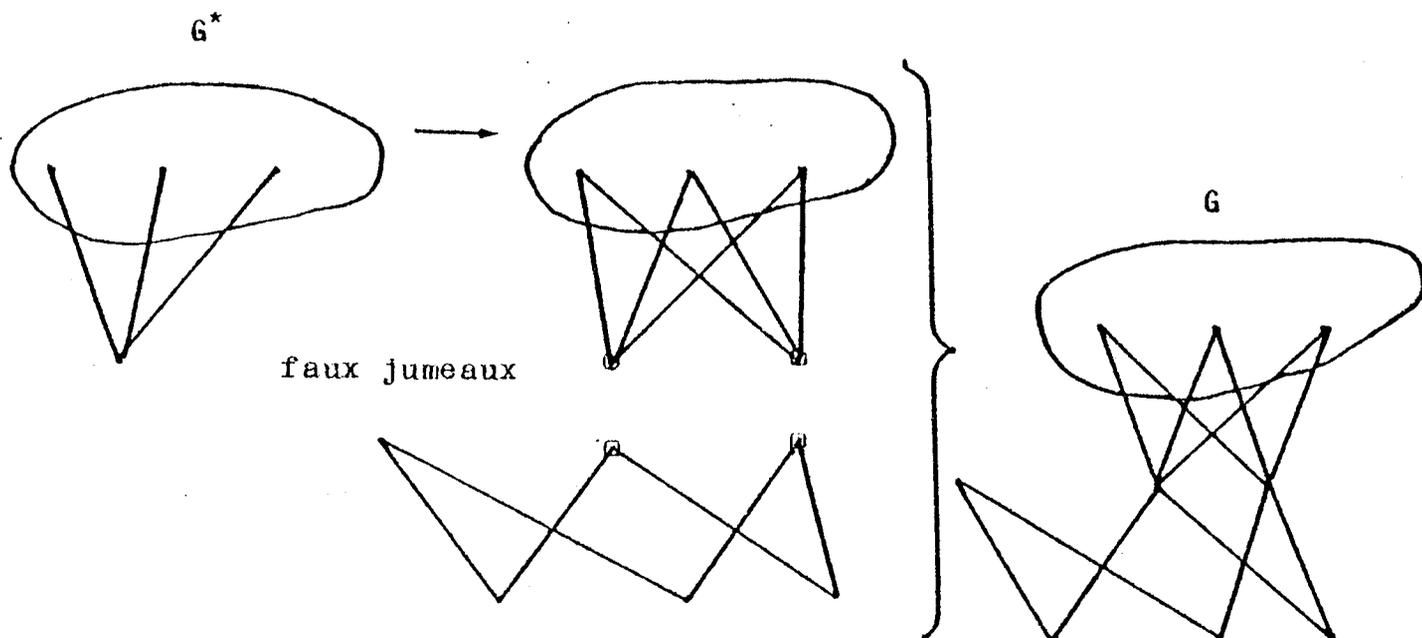


Figure 15

Théorème II.15

=====

Tout graphe de parité connexe  $G = (V, E)$  s'obtient à partir d'un sommet unique par les opérations suivantes:

$\phi_1$  création d'un faux jumeau,

$\phi_2$  création d'un vrai jumeau,

$\phi_3$  prolongement par un biparti,

appliquées successivement et dans un ordre quelconque.

Il est bien évident qu'un graphe obtenu par les opérations  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  comme indiqué par le théorème II.15 est un graphe de parité.

L'algorithme suivant va en fait vérifier qu'un graphe qui satisfait les lemmes II.5, II.8, II.11, II.13 peut être construit par ces trois opérations à partir d'un sommet unique.

L'algorithme consiste à rechercher les bipartis qui éventuellement prolonge (comme en  $\phi_3$ ) un graphe pendu par un sommet  $a$ .

On effectue cette recherche en partant du niveau le plus bas  $N_m$  et en remontant de niveau en niveau. Dès que l'on détecte qu'un de ces bipartis prolonge le reste du graphe on supprime ce biparti. C'est l'opération inverse de  $\phi_3$ .

Plus précisément nous allons en partant du niveau  $N_m$  réduire à chaque itération, un des niveaux successivement rencontrés en un stable, ceci par les opérations inverses de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ .

Il est clair que le niveau  $N_m$  peut se ramener en un stable par les seules opérations de réduction d'un 2-graphe de parité ( $\phi_1^{-1}$  et  $\phi_2^{-1}$ ).

Lemme II.16

Si chacun des niveaux  $N_j$  ( $j > i$ ) est un stable alors tous les graphes  $G_i^k$  sont des graphes bipartis.

démonstration:

-----  
évidente.

Imaginons que les niveaux  $N_j (j > i)$  sont réduits en des stables. Nous décrivons l'itération qui consiste à réduire le niveau  $N_i$  en un stable.

Nous allons dans cette itération nous intéresser principalement aux  $U_i^t$  e-maximaux de  $u_i$ .

Pour chacun d'eux, en commençant par un minimal, après vérification qu'il satisfait le lemme II.13, nous retirons de  $G$  par  $\phi_3^{-1}$  un biparti. Ceci nous permet de réduire  $G(U_i^t)$  par  $\phi_2^{-1}$  et  $\phi_1^{-1}$  en un seul sommet. Lorsque la liste des éléments e-maximaux de  $u_i$  est épuisée on peut par  $\phi_1^{-1}$  et  $\phi_2^{-1}$  réduire le niveau  $N_i$  en un stable.

définition II.17

De la même manière que le graphe  $G_i^k$  correspond à un  $X_i^k$  on fera correspondre un graphe  $H_i^t$  à un élément  $U_i^t$  de la famille  $u_i$  avec:

$$V(H_i^t) = \cup_k V(G_i^k) \text{ et } E(H_i^t) = \cup_k E(G_i^k)$$

où  $k$  parcourt les sommets de  $C_t$ .

A.1 - Algorithme de reconnaissance d'un graphe de parité.

---

début

Pour  $i := m$  jusqu'à 1 faire

début

Construire la famille ordonnée  $u_i$ , détecter les éléments e-maximaux de  $u_i$ .

tant que  $u_i \neq \emptyset$  faire

début

Choisir  $U_i^t$  un élément minimal de  $u_i$ .

Supprimer  $U_i^t$  de  $u_i$ .

Si  $U_i^t$  n'est pas e-maximal, ni un élément maximal de  $u_i$  alors

début

Soit  $U_i^t$  un élément de  $u_i$  contenant  $U_i^t$  et minimal pour cette propriété

$V(H_i^{t'}) := V(H_i^{t'}) \cup V(H_i^t)$  ;  $E(H_i^{t'}) := E(H_i^{t'}) \cup E(H_i^t)$ .

fin

Si  $U_i^t$  est e-maximal alors

début

Vérifier que les sommets de  $G(U_i^t)$  ont les mêmes adjacents dans le sous-graphe défini au lemme II.13.

Vérifier que les sommets d'une composante de  $G(U_i^t)$  a les mêmes adjacents dans  $H_i^t$ .

Vérifier que chaque composante connexe de  $G(U_i^t)$  est un 2-graphe de parité et la réduire en un sommet unique.

Supprimer  $H_i^t$  par  $\phi_3^{-1}$ .

Réduire  $G(U_i^t)$  en un sommet unique.

fin

fin

Vérifier que chaque composante connexe de  $G(N_i)$  a les mêmes adjacents dans  $N_{i+1}$  et  $N_{i-1}$ .

Vérifier aussi que ces composantes sont des 2-graphes de parité et les réduire en un seul sommet.

fin

fin

On note que chaque opération de réduction effectuée dans cet algorithme peut se faire par  $\phi_1^{-1}$  et  $\phi_2^{-1}$ .

On note aussi que les  $U_i^t$  non marqués maximaux, et les composantes connexes sans successeurs au niveau  $N_i$ , lorsque l'on vient d'épuiser la famille  $u_i$ , donnent les  $X_{i-1}^k$ .

Il est clair que cet algorithme s'arrête en un nombre fini d'itérations, et qu'il réduit un graphe de parité en un seul sommet. Nous venons d'établir qu'un graphe de parité peut se construire suivant les opérations indiquées dans le théorème II.15.

Remarque II.18

=====

Chacune des opérations de l'algorithme présenté ci-dessus (algorithme de Dijkstra, établir la famille  $u_i$ , ordonner  $u_i$ , détecter les éléments e-maximaux de  $u_i$ , vérification de voisinage, reconnaître qu'un graphe est un 2-graphe de parité, ... ) est de l'ordre du carré du nombre de sommets traités par l'opération.

Le nombre d'ensembles  $X_i^k$  rencontrés par l'algorithme est inférieur à  $|V|$ . C'est dire que l'on créera au plus  $|V|$  sommets dans l'algorithme.

Le nombre de sommets examinés par chaque procédure est donc de l'ordre de  $2|V|$ . L'algorithme présenté ci-dessus est donc en  $o(|V|^2)$ . (En [10] on propose un algorithme pour reconnaître un 2-graphe de parité en  $o(|V|^2)$ ).

Remarque II.19

=====

Nous venons de démontrer qu'un graphe est un graphe de parité si et seulement si il vérifie les lemmes II.5, II.8 et II.13. Si le graphe n'est pas de parité, l'algorithme trouve le lemme qui n'est pas vérifié.

La démonstration du lemme en question, nous permet alors de détecter un cycle impair qui ne contient pas deux cordes qui se croisent.

Nous pouvons donc utiliser cet algorithme pour mettre en évidence, dans tout graphe qui n'est pas de parité, un cycle impair qui ne vérifie pas l'hypothèse du théorème I.5.

Remarque II.20

=====

Un nouveau problème, apparemment similaire à celui de reconnaître un graphe de parité, est celui-ci :

Soient  $G$  un graphe et un couple de sommets  $(x, y)$  de  $G$ .  
Les chaînes minimales joignant  $x$  à  $y$  sont-elles toutes paires?

Un algorithme polynomial pour ce problème nous permettrait de vérifier en temps polynomial qu'un graphe n'a pas de cycle impair sans corde.

En effet, énumérons toutes les chaînes minimales de longueur 2 ce qui est polynomial.

Soit  $(x, z, y)$  une telle chaîne. Retirons le sommet  $z$  et les sommets  $\Gamma_z \setminus (\{x\} \cup \{y\})$ .

Si toutes les chaînes minimales qui joignent maintenant  $x$  à  $y$  sont paires, alors  $x, z, y$  n'appartiennent pas à un cycle impair sans corde, sinon ils appartiennent à un cycle impair sans corde.

Le même algorithme dans le complémentaire de  $G$ , nous permettrait de vérifier l'hypothèse de la conjecture forte

des graphes parfaits.

Ce problème apparait beaucoup plus difficile.

Nous donnons ici un théorème suggéré par le résultat précédent. Ce théorème donne une démonstration directe du théorème de Sachs (I.6). (quand on connaît le théorème II.15.)

**Théorème II.21**

=====

Le prolongement d'un graphe parfait par un biparti construit un nouveau graphe parfait.

démonstration:

-----  
Il suffit de démontrer que dans un graphe parfait prolongé par un biparti, la cardinalité de la clique maximum est égale au nombre chromatique.

L'opération  $\phi_3$  n'augmente pas la cardinalité de la clique ni le nombre chromatique d'un graphe, excepté quand le graphe est trivial.

### 3.-LES PROBLEMES D'OPTIMISATION.

-----

L'intérêt de la caractérisation de la première partie du chapitre, est qu'elle permet la construction d'algorithmes polynomiaux pour les quatre problèmes d'optimisations des graphes parfaits.

Ces algorithmes sont indépendants d'algorithmes plus généraux comme celui proposé par Grötschel, Lovász, Schrijver [21], car ils sont basés sur l'algorithme de stable de poids maximum dans un graphe biparti (Ford Fulkerson [12]).

C'est aussi le cas, par exemple, des algorithmes proposés dans ce dernier ouvrage pour les graphes de relation d'ordre. On s'attache ici à résoudre les problèmes avec une fonction poids :  $c$  entière, non négative, définie sur  $V$ .

On pourrait penser, en effet, qu'il suffit de résoudre les problèmes de cardinalité maximum, puisque la transformation d'un sommet en faux jumeaux (ou vrais jumeaux) permet de ramener un problème à fonction coût entière en un problème de cardinalité.

Transformation qui d'un graphe de parité construit un graphe de parité. Malheureusement cette transformation n'est pas polynomial, et par suite nous considérons des problèmes généraux d'optimisations.

Soit  $K$  la matrice de toutes les cliques maximales de  $G = (V, E)$ , où  $|V| = n$ ; chacune des lignes de  $K$  est le vecteur représentatif d'une clique maximale de  $G$  dans  $\{0, 1\}^n$ .

De même on appelle  $S$  la matrice de tous les stables maximaux de  $G$ .

Les quatre problèmes à résoudre couplés par dualité sont les suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} Kx \leq 1 \\ x_i \geq 0 \\ \sum_i c_i x_i = z(\max) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} yK \geq c \\ y_i \geq 0 \\ \sum_i y_i = w(\min) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Sx \leq 1 \\ x_i \geq 0 \\ \sum_i c_i x_i = z(\max) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} yS \geq c \\ y_i \geq 0 \\ \sum_i y_i = w(\min) \end{array} \right.$$

On résout chacun des couples suivants simultanément.

- i , Stable de poids maximum et recouvrement de poids minimum par des cliques.
- ii, Clique de poids maximum et recouvrement de poids minimum par des stables.

La méthode employée, désormais classique depuis les travaux d'Edmonds sur le couplage, (par exemple, [ 8 ] ) consiste à trouver pour toute fonction poids  $c$  entière, non négative, définie sur  $V$ , un couple de solutions duales  $x$  et  $y$  entières, qui vérifient le théorème des écarts complémentaires.

On se contente ici de donner pour les trois opérations  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  qui transforment un graphe de parité  $G^*$  en un graphe  $G$ , les transformations sur les poids et les indications qui permettent d'obtenir à partir d'un couple optimal entier défini sur  $G^*$   $x^*$  et  $y^*$  un couple optimal entier  $x$  et  $y$  défini sur  $G$ .

#### Notations

On notera  $\alpha$  le sommet de  $G^*$  concerné par les opérations  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ;  $c_\alpha^*$  son poids  $K_1^{*\alpha}, K_2^{*\alpha}, \dots, K_\ell^{*\alpha}$  toutes les cliques maximales de  $G^*$  contenant le sommet  $\alpha$ , associés aux composantes de  $y^*$  strictement positives, et notées respectivement:

$$y^*(K_1^{*\alpha}), \dots, y^*(K_\ell^{*\alpha})$$

Ces cliques sont les traces de  $2^\ell$  cliques maximales du graphe  $G$  dans le cas faux jumeaux (où  $\phi_1$  transforme  $\alpha$  en  $a$  et  $b$ ), notées respectivement:

$$K_1^a, K_2^a, \dots, K_\ell^a, K_1^b, K_2^b, \dots, K_\ell^b.$$

Elles sont les traces de  $\ell$  cliques maximales sur le graphe  $G$  dans les cas vrais jumeaux (où  $\phi_2$  transforme  $\alpha$  en  $a$  et  $b$ ) notées respectivement:

$$K_1^{ab}, K_2^{ab}, \dots, K_\ell^{ab}.$$

A.2 - Algorithme de stable de poids maximum et de couverture  
 -----  
 de poids minimum par des cliques maximales.  
 -----

A.2.1 - faux jumeaux : a et b

Cas particulier de A.2.3 où l'on prend pour B :

$$B = (V_1 \cup V_2, A) \quad V_1 = (\{a\}, \{b\}) \quad V_2 = \emptyset \quad A = \emptyset$$

A.2.2 - vrais jumeaux : a et b

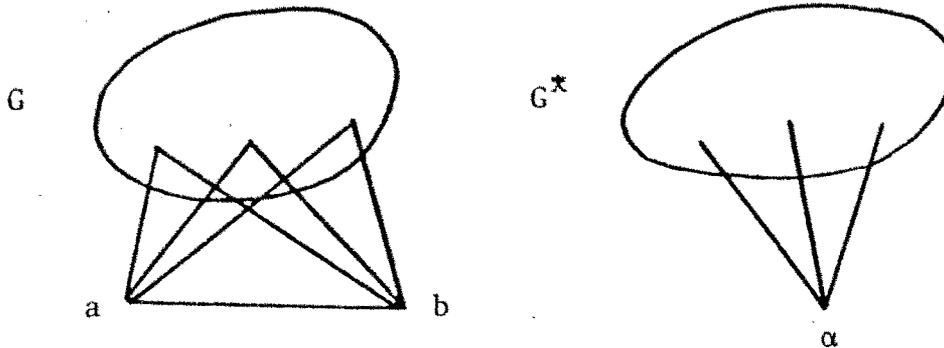


Figure 16

On pose  $c_\alpha^* = \max(c_a, c_b) = c_a$

transformation sur les couples des solutions optimales

cas où  $x^*(\alpha) = 1$

$$x(a) = 1 \quad x(b) = 0$$

$$y(K_1^{ab}) = y(K_1^{*\alpha}), \dots, y(K_\ell^{ab}) = y^*(K_\ell^{*\alpha})$$

cas où  $x^*(\alpha) = 0$

$$x(a) = 0 \quad x(b) = 0$$

$$y(K_1^{ab}) = y^*(K_1^{*\alpha}), \dots, y(K_\ell^{ab}) = y^*(K_\ell^{*\alpha})$$

Les composantes de x et de y non définies sont inchangées. Ce couple x et y vérifie le théorème des écarts complémentaires.

A.2.3 - prolongement par un biparti

On suppose que le biparti  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  n'est "accroché" que par deux faux jumeaux  $a$  et  $b$ . Le lecteur s'affranchira sans difficulté de cette restriction.

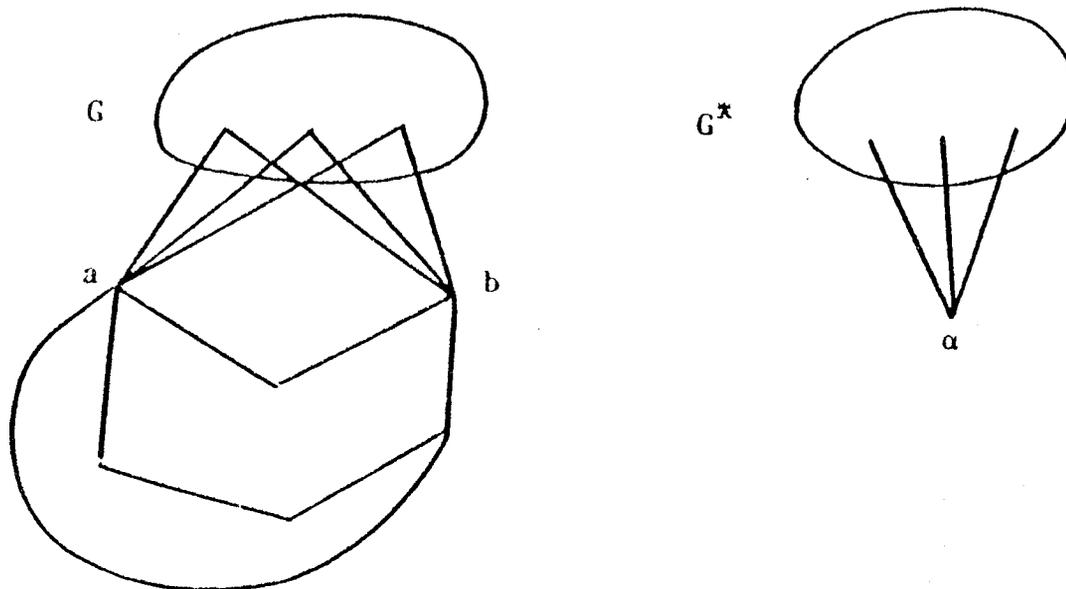


Figure 17

On pose  $c_\alpha^* = s_{\max}^B - s_{\overline{ab}}^B$ , où  $s_{\max}^B$  désigne la valeur d'un stable de poids maximum dans  $B$  noté  $S_{\max}^B$  est  $s_{\overline{ab}}^B$  désigne la valeur d'un stable de poids maximum dans  $B$ , où l'on a supprimé le sommet  $a$  et le sommet  $b$ . (de manière générale, nous noterons en majuscules les ensembles, et en minuscules les valeurs).

L'idée de cette transformation est extrêmement simple. Dès qu'un sommet dans le voisinage  $\Gamma_\alpha(G^*)$  de  $a$  ou de  $b$  est dans le stable de poids maximum de  $G$ , celui-ci contient  $S_{\overline{ab}}^B$ . Dans l'autre cas il contient  $S_{\max}^B$ . On traduit donc par  $c_\alpha^*$  le regret qu'il y a à mettre  $\alpha$  dans le stable maximum de  $G^*$ .

transformation sur les couples de solutions optimales

cas où  $x^*(\alpha) = 1$

On obtient  $x$  en retirant à  $x$  sa composante  $x^*(\alpha)$ , et en complétant par un vecteur représentatif de  $S_{\max}^B$ .

cas où  $x^*(\alpha) = 0$

On complète dans ce cas par un vecteur représentatif de  $S_{ab}^B$ .

Pour obtenir  $y$  le processus est légèrement plus compliqué. Il s'agit de résoudre le système suivant en nombre entier.

$$\left. \begin{array}{l} y(k_1^a) + y(k_1^b) = y^*(K_1^{\alpha}) \\ y(k_\ell^a) + y(k_\ell^b) = y^*(K_\ell^{\alpha}) \\ y(k_1^a) + y(k_2^a) + \dots + y(k_\ell^a) = \xi_a \\ y(k_1^b) + y(k_2^b) + \dots + y(k_\ell^b) = \xi_b \end{array} \right\} \quad (1)$$

cas où  $x^*(\alpha) = 1$

Nous savons que  $y^*(K_1^{\alpha}) + y^*(K_2^{\alpha}) + \dots + y^*(K_\ell^{\alpha}) = c_\alpha^*$

On prendra  $\xi_a + \xi_b = c_\alpha^*$

Le système linéaire (1) est du type problème de transport. Il est facile d'en trouver des solutions entières, si son second membre est entier.

Il reste à déterminer  $\xi_a$  et  $\xi_b$  de manière à ce que la solution  $x$  et  $y$  trouvée satisfasse le théorème des écarts complémentaires.

Construisons à partir de  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  un nouveau graphe biparti  $B' = (V_1' \cup V_2', A')$ .

$$V_2' = V_2 \cup \{\beta\} \quad V_1' = V_1 \quad A' = A \cup \{(\beta, a), (\beta, b)\}$$

On pose  $c_\beta = c_\alpha^*$

Résolvons le stable de poids maximum dans  $B'$  et soit  $x'$  et  $y'$  le couple optimal entier obtenu.

Il existe dans  $B'$  un stable de poids maximum contenant  $\beta : S_{ab}^B \cup \{\beta\}$  et tel que  $s_{\max}^{B'} = s_{\max}^B$ .

Le théorème des écarts complémentaires appliqué au graphe  $B'$  permet d'écrire :

$$* y'((\beta, a)) + y'((\beta, b)) = c_{\alpha}^*$$

\* seules les arêtes du biparti  $B'$  ayant une de leurs extrémités dans tout stable de poids maximum de  $B'$  ont une composante de  $y'$  strictement positive.

On posera :  $\xi_a = y'((\beta, a))$

$$\xi_b = y'((\beta, b)).$$

On montre aisément que le  $x$  précédemment décrit et que le  $y$  obtenu en : reportant les composantes de  $y$  correspondant à des cliques qui ne contiennent pas  $\alpha$ , résolvant le système linéaire (1), et par restriction de  $y'$  aux arêtes de  $B$  (maintenant cliques de  $G$ ), vérifient le théorème des écarts complémentaires.

cas où  $x^*(\alpha) = 0$

Ce cas est identique en tout point au précédent, si ce n'est que la quantité  $y^*(K_1^{\alpha}) + y^*(K_2^{\alpha}) + \dots + y^*(K_{\ell}^{\alpha})$  peut être supérieure et non plus égale à  $c_{\alpha}^*$ .

On remplacera dans ce cas  $\xi_a$  et  $\xi_b$  par une solution quelconque entière du système d'inégalité suivant :

$$\begin{cases} \xi_a \leq y'((\beta, a)) \\ \xi_b \leq y'((\beta, b)) \\ \xi_a + \xi_b = y^*(K_1^{\alpha}) + y^*(K_2^{\alpha}) + \dots + y^*(K_{\ell}^{\alpha}). \end{cases}$$

Dans tous les cas on a su obtenir un couple de solutions entières  $x$  et  $y$  vérifiant le théorème des écarts complémentaires.

Remarque II.22

=====

Pour l'évaluation des performances de l'algorithme proposé ci-dessus, nous supposons connue une suite d'opérations  $\phi_i$  ( $i=1,2,3$ ) qui construit  $G$  à partir d'un sommet. La procédure la plus coûteuse contenue dans l'algorithme, est le calcul du stable de poids maximum dans un graphe biparti (cette opération est bornée par le cube du nombre de sommets du biparti). La somme du nombre des sommets de tous les bipartis rencontrés dans une construction de  $G$  est inférieure ou égale à  $|V|$ . La complexité de cet algorithme est donc  $O(|V|^3)$ .

A.3 - Algorithme de clique de poids maximum et de couverture de poids minimum par des cliques maximales.

Les notations utilisées ici se traduisent directement des précédentes.

A.3.1 -  $\phi_1$  - faux jumeaux : a et b

identique au cas A.3.3.

A.3.2 -  $\phi_2$  - vrais jumeaux: a et b

on pose  $c_\alpha^* = c_a + c_b$

- cas où  $x^*(\alpha) = 1$  alors  $x(a) = 1$  et  $x(b) = 1$

- cas où  $x^*(\alpha) = 0$  alors  $x(a) = 0$  et  $x(b) = 0$

Par une procédure similaire à celle de A.2.1, nous obtenons un vecteur  $y$  entier qui satisfait avec  $x$  les conditions du théorème des écarts complémentaires.

A.3.3 -  $\phi_3$  - prolongement par un biparti

Il est facile de voir que la clique de poids maximum est contenue soit dans  $G$  soit dans  $B$ .

on pose  $c_\alpha^* = \max(c_a, c_b) = c_a$

On trouve la clique de poids maximum dans  $G^*$ , et la clique de poids maximum dans  $B$ .

On prend comme solution  $x$  du primal, le vecteur caractéristique défini sur  $V$  de celle ayant le poids le plus fort.

Pour trouver une solution duale  $y$  définie sur  $G$  nous allons, comme en A.2.3, partir d'une solution duale du problème du stable de poids maximum sur le graphe  $B'$ . ( $B'$  est défini comme précédemment, le sommet  $\beta$  de  $B'$  porte le poids de la clique définie par  $x$  diminué de  $c_a$ ). La solution duale  $y'$  a ses composantes strictement positives sur des stables de  $B'$  qui sont, par restriction, des stables sur  $B$ . Ces derniers peuvent être partitionnés, suivant qu'ils contiennent ou non le sommet  $a$ , en deux familles, notées:

$$S_a^B, S_a^B.$$

La solution  $y^*$  définie sur  $G^*$  a ses composantes strictement positives sur des stables qui peuvent se partitionner en deux familles notées:

$$S_a^{G^*}, S_a^{G^*}.$$

Une valeur est affectée à chacun des stables de ces familles, cette quantité est initialement la composante (entière) de  $y'$  ou  $y^*$  correspondant au stable.

Nous juxtaposons maintenant deux stables:

l'un d'une famille définie sur  $B$ , l'autre d'une famille définie sur  $G$  de manière à obtenir un stable défini sur  $G$ .

Au stable ainsi obtenu correspond une composante du vecteur  $y$  cherché, égale au minimum des valeurs associées aux deux stables le constituant. On retranche ce minimum aux valeurs de ces deux stables.

Les stables auxquels correspond une valeur nulle sont supprimés. Nous continuons à définir  $y$  de cette manière, jusqu'à épuisement des familles.

Il est cependant nécessaire de procéder par ordre.

Nous concaténons d'abord la famille  $S_a^B$  avec la famille  $S_\alpha^{G^*}$  (où  $\alpha$  est remplacé par  $a$  toujours, et aussi par  $b$  quand le stable de  $S_a^B$  contient  $b$ ).

A cette étape, les contraintes du problème dual correspondant aux sommets  $a$  et  $b$  sont satisfaites.

On peut alors juxtaposer  $S_\alpha^{G^*}$  ( $\alpha$  est supprimé) avec  $S_a^B$  et finalement juxtaposer le reste de cette dernière avec  $S_\alpha^{G^*}$ . Si la clique de poids maximum est dans  $B$ , il reste un surplus de stables de  $S_\alpha^{G^*}$ , on les reconduit avec leur poids dans la solution cherchée.

Cette procédure nous permet de trouver une solution duale  $y$  (entière) qui satisfait avec  $x$  le théorème des écarts complémentaires.

Remarque II.23

=====

Le paragraphe A.3.3 suppose connu un algorithme pour recouvrir les sommets d'un graphe biparti par des stables (problème dual de la clique de poids maximum). Un tel algorithme, apparemment jamais décrit n'est pas difficile à imaginer en  $\sigma(n^3)$  où  $n$  est la cardinalité des sommets du biparti (Voir remarque suivante).

Utilisant alors des arguments semblables à ceux de la remarque II.22 on montre que la complexité de l'algorithme proposé est en  $\sigma(|V|^3)$ .

Le très court et très technique dernier paragraphe A.3 obscurcit le fait que les problèmes "clique de cardinalité maximum" et "coloration minimum" ont une solution quasi "greedy". Ici encore, nous retrouvons le fait qu'un graphe de parité est très semblable à un graphe biparti: le problème de la clique de cardinalité maximum  $y$  est plus facile que le problème du stable de cardinalité maximum.

Remarque 11.24

=====

Algorithme de couverture de poids minimum par des stables pour un graphe biparti.

Soit  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  un graphe biparti, et une fonction poids entière non-négative définie sur les sommets de  $B$ .

$B$  peut contenir des sommets isolés.

Soit le sous-graphe défini sur les sommets portant un poids strictement positif et appartenant à une clique de poids maximum (une clique de poids maximum peut être un sommet isolé).

On choisit pour stable de  $B$  l'ensemble des sommets formés par les sommets isolés de ce sous-graphe, et les sommets appartenant aux autres composantes connexes de ce sous-graphe et d'un même côté de  $B$ . On attribue comme poids à ce stable, le minimum des poids des sommets de ce stable et de la différence entre le poids de la clique de poids maximum de  $B$  et celui de la clique de poids maximum n'ayant pas une extrémité dans le stable choisi. On retranche ce poids à tous les sommets du stable.

On réitère jusqu'à ce que tous les sommets de  $B$  portent un poids nul.

Il est évident que tous les sommets sont recouverts et que la somme des poids attribués est égale au poids de la clique de poids maximum.

définition 11.25

Un graphe  $G = (V, E)$  est fortement parfait, si  $\forall A \subseteq V$ , le sous-graphe  $G(A)$  contient un stable qui intersecte toutes ses cliques maximales.

Un graphe fortement parfait est parfait.

Il est facile de vérifier que les graphes, bipartis, triangulés, complémentaires de triangulés, sont des graphes fortement parfaits.

Ravindra dans un papier non encore publié démontre entre autre que les graphes de relation d'ordre sont fortement parfaits.

Lemme II.26

---

Un graphe de parité  $G = (V, E)$  est un graphe fortement parfait.

démonstration:

-----  
évidente, à partir du théorème de caractérisation constructive des graphes de parité.

Remarque II.27

=====

Appelons graphe unimodulaire un graphe dont la matrice de toutes les cliques maximales est unimodulaire. Les graphes unimodulaires constituent trivialement une classe de graphes parfaits. On peut faire de même avec les graphes équilibrés. Edmonds et Bland [ 6 ] dans un papier non publié ont caractérisé les graphes unimodulaires. On peut souhaiter préciser la position des graphes de parité par rapport aux deux classes précédentes. En fait il est facile de démontrer, puisque les graphes de parité contiennent les graphes multipartis complets, que les graphes de parité ne sont pas unimodulaires, ni même équilibrés, et qu'ils peuvent avoir un nombre exponentiel de cliques (en  $|V|$ ).





## 1.-DEFINITIONS

---

### définition 11.1

Un graphe  $i$ -triangulé est un graphe qui a dans tous ses cycles élémentaires de longueur impaire et supérieure ou égale à cinq, deux cordes qui ne se croisent pas.

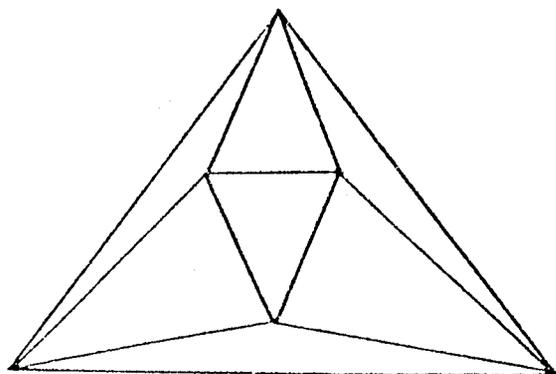
Le concept de graphe  $i$ -triangulé a été introduit par Gallai [15]. Gallai démontrait qu'un graphe  $i$ -triangulé est un graphe  $\alpha$ -parfait. Une preuve beaucoup plus simple de ce même résultat a été donnée depuis par Surányi [31].

Aucune des deux approches ne conduit à des algorithmes polynomiaux de reconnaissance, ou de résolution de l'un des quatre problèmes d'optimisation relatifs aux graphes parfaits.

Nous avons recherché ici une caractérisation constructive de ces graphes, semblable à celle trouvée dans le chapitre précédent pour les graphes de parité. Cette démarche est à rapprocher de celle de Dirac [11] pour les graphes triangulés. (Un graphe triangulé est un graphe tel que tout cycle de longueur supérieure à 3 contient une corde). On vérifie en effet, que les graphes triangulés constituent une sous-classe des graphes  $i$ -triangulés.

Quelques exemples de graphes  $i$ -triangulés:

- Les graphes multipartis complets, qui sont aussi de parité.
- Les graphes triangulés.
- Une clique complètement reliée à un graphe biparti.



multiparti  
complet

Figure 18

Nous rassemblons ci-dessous quelques caractérisations équivalentes des graphes  $i$ -triangulés trouvées par Gallai.

définition III.2

Une arête est corde courte d'un cycle, si elle joint les extrémités de deux arêtes consécutives du cycle.

Théorème III.3 (Gallai)

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  les trois propositions suivantes sont équivalentes, et caractérisent un graphe  $i$ -triangulé

- i , Tout cycle élémentaire de longueur impaire supérieure à trois, contient deux cordes courtes qui ne se croisent pas.
- ii , Dans tout cycle élémentaire de longueur impaire, pour toute arête  $(x, y)$  de ce cycle, il existe un sommet  $z$  de ce cycle qui forme avec  $(x, y)$  un triangle.
- iii, Si deux sommets distincts  $x$  et  $y$  d'un cycle élémentaire  $\Delta$ , de longueur impaire, ne sont pas reliés par une arête de  $G$ , alors il existe deux autres sommets  $z$  et  $t$  différents, reliés par une arête de  $G$  et tels que les quatre sommets  $x, z, y, t$  sont situés dans cet ordre sur  $\Delta$ .

démonstration:

- $i$  implique que  $G$  est  $i$ -triangulé.
- $G$  est  $i$ -triangulé implique  $i$ .

C'est vrai pour un cycle élémentaire de longueur 5. Supposons cette implication vraie pour un cycle de longueur  $2k+1$ , démontrons qu'elle est vraie pour un cycle  $\Delta$  de longueur  $2k+3$ . Une corde non courte divise le cycle en un cycle pair et en un cycle impair, celui-ci contient deux cordes courtes qui ne se croisent pas. Seule l'une d'entre elles peut ne pas être courte pour le cycle initial, mais alors elle crée avec l'autre partie de  $\Delta$  un cycle impair qui

par récurrence a deux cordes courtes qui ne se croisent pas, l'une au moins est corde courte de  $\Delta$ .

- i implique ii.

Ce qui est vérifié pour un cycle élémentaire de longueur 5. Supposons cette implication vraie pour un cycle de longueur  $2k+1$ , démontrons qu'elle est vraie pour un cycle de longueur  $2k+3$ ,  $\Delta$ .

Soient  $u, x, y, t$  quatre sommets consécutifs situés dans cet ordre sur le cycle. Si l'arête  $(u, y)$  existe la propriété est démontrée, de même pour l'arête  $(t, x)$ . Sinon les deux cordes courtes de  $\Delta$  qui ne se croisent pas dessinent un cycle impair de cardinalité  $2k+1$  contenant l'arête  $(x, y)$ . La récurrence entraîne la propriété.

- i implique iii.

Le résultat s'obtient trivialement par récurrence sur la cardinalité du cycle.

- ii implique G est i-triangulé.

Les cycles à 5 de G ont deux cordes qui ne se croisent pas. Démontrons cette implication pour un cycle de G de cardinalité strictement supérieure à 5, impaire. Soit  $(x, y)$  une arête quelconque de ce cycle et  $z$  le sommet qui forme un triangle avec  $(x, y)$ .

Si un tel triplet existe où  $z$  n'est adjacent ni de  $x$  ni de  $y$  sur le cycle, la propriété est démontrée.

Sinon supposons  $z$  adjacent de  $x$  sur le cycle.

Considérons les sommets  $z, x, y, u, v$  consécutifs et dans cet ordre sur le cycle. L'arête  $(v, u)$  appartient à un triangle, le côté de ce triangle qui est une corde courte du cycle n'intersecte pas  $(z, y)$ .

- iii implique G est i-triangulé.

Les cycles à 5 de G ont deux cordes qui ne se croisent pas. Supposons cette implication vraie pour tous les cycles de G de cardinalité  $2k+1$ , démontrons la pour un cycle de G de cardinalité  $2k+3$ . Ce cycle contient au moins une corde  $(x, y)$ , si celle-ci n'est pas courte la propriété s'en déduit par récurrence. Dans

le cas contraire et si l'implication est fausse, il existe un sommet  $z$  tel que  $(z,x) \notin E$  et  $(z,y) \notin E$ . Si l'on applique l'hypothèse à ces deux cordes la propriété se déduit facilement, contradiction.

## 2.-CARACTERISATION ET PROPRIETES

---

### Lemme III.4

---

Soient  $x$  un sommet et  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  un sous-graphe biparti 2-connexe d'un graphe  $G = (V, E)$   $i$ -triangulé.

$$\Gamma_x(V_1) \neq \emptyset \text{ et } \Gamma_x(V_2) \neq \emptyset \Rightarrow V_1 \cup V_2 \subseteq \Gamma_x.$$

De plus soit  $S = \{v \in V \mid V_1 \cup V_2 \subseteq \Gamma_v\}$  alors :

Si  $B$  contient une chaîne minimale de longueur trois, le sous-graphe  $G(S)$  est une clique, sinon ( $B$  est alors biparti complet)  $G(S)$  est un graphe multiparti complet.

démonstration:

---

Soient  $u \in \Gamma_x(V_1)$  et  $v \in \Gamma_x(V_2)$  et  $(z, t)$  une arête quelconque de  $B$ .

Le biparti  $B$  est 2-connexe, il existe une chaîne élémentaire joignant  $u$  à  $v$  et contenant l'arête  $(z, t)$ . Cette chaîne n'est pas nécessairement minimale. Cette chaîne forme avec  $(x, u)$  et  $(x, v)$  un cycle élémentaire impair. Pour chaque arête de ce cycle impair, il existe un sommet du cycle qui forme avec elle un triangle (cf. théorème III.3). Le seul sommet pouvant jouer ce rôle est  $x$ . Ceci est vrai pour toute arête  $(z, t)$  du biparti. Le sommet  $x$  contient dans ses adjacents tous les sommets de  $B$ .

Soit une chaîne minimale de longueur trois  $(u, v, z, t)$  de  $B$ . Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $S$ . Il est facile de vérifier que le graphe de la figure 19, n'est pas  $i$ -triangulé. Pour

que le sous-graphe construit sur les sommets  $x, y, u, v, z, t$  soit 1-triangulé il est nécessaire que  $(x, y)$  appartienne à  $E$ .

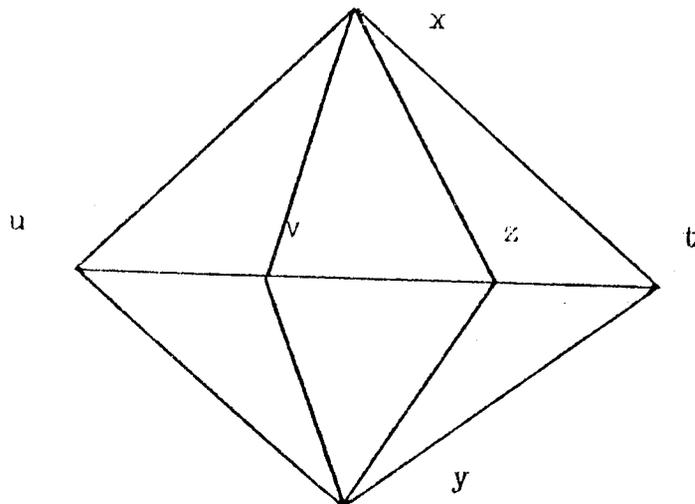


Figure 19

$B$  ne contient pas de chaîne minimale de cardinalité trois. Soient  $s_1, s_2, s_3$  trois sommets de  $S$ . Démontrons que si  $(s_1, s_3) \notin E$  et  $(s_2, s_3) \notin E$  alors  $(s_1, s_2) \notin E$ .

En effet soient deux sommets  $u$  et  $v$  de  $B$  non reliés par une arête. Le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets  $s_1, u, s_2, v$  est un biparti 2-connexe. Si l'arête  $(s_3, s_1) \in E$  la première partie de ce lemme entraîne que  $(s_3, s_2)$  appartient à  $E$ , d'où la contradiction.

La propriété : "n'être pas relié" est donc une relation d'équivalence sur les sommets de  $S$ , elle partitionne les sommets de  $S$ . Les classes de cette partition sont des stables de  $S$ . On a une partition de  $S$  en stables complètement reliés entre eux.  $G(S)$  est un graphe multiparti complet.

Lemme III.5

Soit  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  un sous-graphe biparti 2-con  
nexe d'un graphe  $i$ -triangulé  $G = (V, E)$ .

Soit  $S = \{v \in V \mid V_1 \cup V_2 \subseteq \Gamma_v\}$ . Soit  $B'$  la composante  
2-connexe contenant  $B$ , du graphe  $G(V \setminus S)$ .  $B'$  est bipartie.

démonstration:

Soient  $u \in V_1 \cup V_2$  et  $v \in V_1 \cup V_2$ .

Soit une chaîne élémentaire reliant  $u$  à  $v$  dont  
tous les sommets intermédiaires sont dans  $V \setminus (S \cup V_1 \cup V_2)$ .  
Cette chaîne n'est pas nécessairement minimale. Démontrons  
que le sous-graphe induit par les sommets de  $C \cup V_1 \cup V_2$  est  
biparti. En effet, sinon il existe une chaîne joignant  $u$  à  $v$   
constituée de sommets de  $C$  et une chaîne joignant  $u$  à  $v$  cons  
tituée de sommets de  $B$ , qui concaténées forment un cycle élé  
mentaire de longueur impaire. Il existe donc (théorème III.3  
un sommet de  $C$  qui forme un triangle avec une arête du bipar  
ti  $B$ . Ce sommet appartient à  $S$  (Lemme III.4) contradiction.  
Le lemme est maintenant facile à déduire.

Une propriété remarquable des graphes  $i$ -triangulés  
est qu'il est possible d'en définir les sous-graphes biparti  
2-connexes maximaux au sens des sommets, et que ces sous-grap  
bipartis 2-connexes maximaux sont disjoints au sens des arê  
tes.

On peut détecter relativement facilement pour de  
tels graphes si une arête appartient ou non à un sous-graphe  
biparti 2-connexe, et surtout préciser "le" sous-graphe bipar  
ti 2-connexe maximal auquel elle appartient.

Ces assertions fausses dans le cadre des graphes de  
parité sont précisées ci-dessous, où l'on démontre un théorème

de caractérisation constructive de ces graphes. Celle-ci prolonge la caractérisation constructive des graphes triangulés proposée par Dirac [11] (cf. aussi Fulkerson [14] pour son utilisation dans un algorithme d'optimisation). Elle nous permettra de résoudre en temps polynomial les problèmes de stable de poids maximum, de coloration minimum, de clique de poids maximum et de partition minimum des sommets en cliques, comme l'a permis la caractérisation du théorème II.15 pour les graphes de parité.

Elle nous permettra aussi d'établir en temps polynomial si un graphe  $G = (V, E)$  donné est 1-triangulé, et dans le cas contraire nous donnera un cycle élémentaire de longueur impaire supérieure à 5 qui n'a pas deux cordes qui se croisent.

définition III.6

Pour un graphe  $G = (V, E)$ , on donne les définitions suivantes:

clique simpliciale de G

Clique  $K$  de  $G$  dont aucune arête appartient à un sous-graphe biparti 2-connexe de  $G$ .

sommet simplicial de G

Sommet  $a$  de  $G$  dont les adjacents sont les sommets d'une clique simpliciale  $K$  de  $G$ .

biparti simplicial de G

Sous-graphe biparti  $B = (V_1 \cup V_2, A)$  2-connexe de  $G$  pour lequel il existe une clique simpliciale  $K$  de  $G$  telle que

$$V(K) \cap (V_1 \cup V_2) = \{a\} \text{ et}$$

$$V \cap (V_1 \cup V_2) \setminus \{a\} \quad \Gamma_v(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = V(K) \setminus \{a\}.$$

Les sommets  $V_1 \cup V_2 \setminus \{a\}$  sont dits sommets simpliciaux de  $B$ . (cf. figure 20).

multiparti complet simplicial de G

Sous-graphe  $M$  multiparti complet de  $G$  pour lequel il existe

une clique simpliciale  $K$  de  $G$  telle que

$$V(K) \cap V(M) = \{a\} \text{ et}$$

$$\forall v \in V(M) \setminus \{a\} \quad \Gamma_v(V \setminus V(M)) = V(K) \setminus \{a\} .$$

Les sommets  $V(M) \setminus \{a\}$  sont dits sommets simpliciaux de  $M$ .

Deux des configurations décrites ci-dessus (somme simplicial, biparti simplicial, multiparti simplicial) sont non reliées, si les sommets simpliciaux de l'une sont non adjacents à tous les sommets simpliciaux de l'autre.

On note que les cliques  $K$  des définitions ci-dessus peuvent ne contenir qu'un seul sommet.

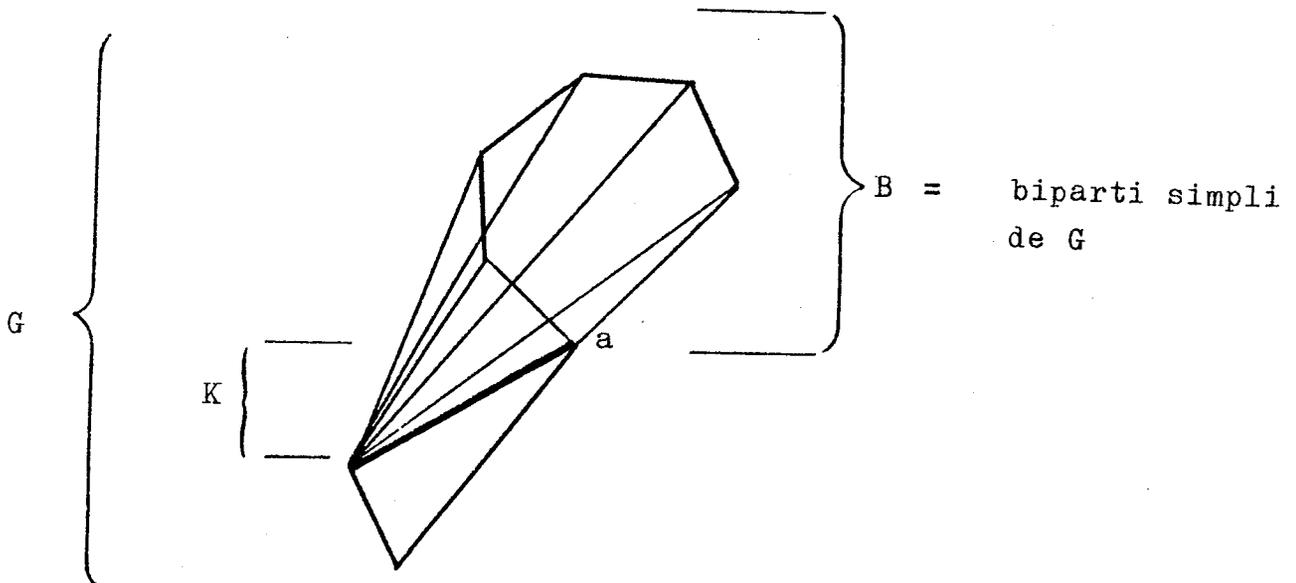


Figure 20

définition III.7

Soient un graphe  $G = (V, E)$  et un ensemble d'articulation  $A \subseteq V$  de  $G$ . Soient  $C_1, \dots, C_p$  les sommets des composantes connexes de  $G(V-A)$  on appelle pièces relativement à  $A$  les sous-graphes  $G(C_1 \cup A), \dots, G(C_p \cup A)$ .

Théorème III.8

=====

Un graphe  $i$ -triangulé connexe  $G = (V, E)$  qui n'est

ni multiparti complet, ni une clique complètement reliée à un graphe biparti 2-connexe, contient au moins deux des configurations suivantes non reliées:

- sommet simplicial
- biparti simplicial
- multiparti complet simplicial.

démonstration:

-----  
La démonstration se fait par récurrence sur  $|V|$ . Le théorème est vrai pour les graphes de cardinalité au plus trois.

Supposons le théorème vrai pour tous les graphes de cardinalité inférieure ou égale à  $(n-1)$ , démontrons-le pour un graphe  $G$  de cardinalité  $n$ .

Le graphe  $G$  n'a pas de cycle pair comme sous-graphe induit  
 $G$  est alors triangulé et l'on démontre ici le résultat de Dirac [11].

Soient deux sommets  $x$  et  $y$  non reliés de  $G$ , il existe un ensemble d'articulation  $A$  minimal qui sépare  $x$  de  $y$ . Cet ensemble d'articulation est une clique. En effet soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $A$  non reliés, et  $CX_x$  (resp.  $CX_y$ ) la composante connexe contenant  $x$  (resp.  $y$ ) de  $G(V-A)$ . Concaténons une chaîne minimale reliant  $u$  à  $v$  qui a tous ses sommets intermédiaires dans  $CX_x$  et une chaîne minimale reliant  $u$  à  $v$  qui a tous ses sommets intermédiaires dans  $CX_y$ . Le cycle ainsi obtenu ne peut être de cardinalité impair (cf. théorème III.3,iii) ce qui contredit l'hypothèse.

Si  $G(A \cup CX_x)$  est une clique,  $x$  est un sommet simplicial, c'est une des configurations cherchées. Sinon, par l'hypothèse de récurrence,  $G(A \cup CX_x)$  contient deux sommets simpliciaux non reliés. L'un d'eux n'est pas dans  $A$ , c'est une des configurations cherchées. De manière identique dans

$CX_y$  on trouve un second sommet simplicial qui n'est pas dans A, il n'est donc pas relié au premier.

G contient un sous-graphe biparti B 2-connexe:

Soit  $S' = \{v \in V(G) \mid B \subseteq \Gamma_v\}$ .

Soit  $B''$  la composante 2-connexe de  $G(V-S')$  contenant B.

Si  $S'$  est vide  $B''$  est une composante 2-connexe bipartie de

Si  $B''$  n'est pas biparti complet:

nous posons  $S = S'$  et  $B' = B''$

Si  $B''$  est biparti complet:

Alors  $G(S')$  est un multiparti complet. Nous posons dans ce cas  $S = \{v \in S' \mid (S' \setminus \{v\}) \subseteq \Gamma_v\}$ . Si S est vide  $G(S' \cup V(B'))$  est

une composante 2-connexe de G qui est un sous-graphe multiparti complet. Nous posons  $B' = G((S' \cup V(B')) \setminus S)$ .

$B'$  est un multiparti complet.

- 1 -  $G(V-S)$  ne contient qu'un seul point d'articulation appartenant à  $B'$  soit a ce point. On pose  $K = S \cup \{a\}$ ,  $K$  est un ensemble d'articulation de G qui est une clique

- 2 -  $G(V-S)$  ne contient pas de point d'articulation. Soit a un sommet quelconque de  $B'$ . On pose  $K = S \cup \{a\}$ ,  $K$  est un ensemble d'articulation qui est une clique, on est ramené au cas précédent pour la suite de la démonstration.

Dans les deux cas ci-dessus  $B'$  est une des configurations simpliciales cherchées, où la clique simpliciale est K. On démontre ci-dessous que K est simpliciale.

Soit une autre pièce relativement à K. Cette autre pièce contient par hypothèse de récurrence deux configurations simpliciales non reliées, l'une d'entre elles n'a aucun sommet simplicial dans K, c'est celle que l'on retient. La clique simpliciale lui correspondant

est simpliciale relativement à la pièce choisie, il faut démontrer qu'elle est aussi simpliciale dans le graphe  $G$ .

Effectivement: un biparti 2-connexe de  $G$  qui contiendrait une arête de cette clique devrait contenir une arête de  $K$  or  $K$  est simpliciale pour  $G$ .

- 3 -  $G(V-S)$  contient au moins deux sommets d'articulations appartenant à  $B'$ . Soit  $a$  l'un de ces sommets.

$K = S \cup \{a\}$  est un ensemble d'articulation qui est une clique. On montre ci-dessous qu'elle est simpliciale.

Par hypothèse de récurrence on peut trouver dans chaque pièce relativement à  $K$  deux des configurations cherchées non reliées, l'une d'entre elles au moins n'a aucun sommet simplicial dans la clique  $G(S \cup \{a\})$ , c'est celle que l'on retient. La clique simpliciale lui correspondant est simpliciale relativement à la pièce choisie, et donc aussi relativement au graphe  $G$  pour les mêmes raisons que ci-dessus.

Pour terminer il nous reste à démontrer que la clique  $K$  choisie dans tous les cas ci-dessus est simpliciale. On a toujours  $K = \{a\} \cup S$ . Supposons qu'une arête de cette clique appartienne à un biparti 2-connexe  $B''$  de  $G$ . Cette arête peut être du type  $(u,v)$  où  $u$  et  $v$  sont dans  $S$ , ou du type  $(u,a)$ . Nous ne faisons la démonstration que dans le premier cas, elle serait en tout point identique dans l'autre. Soit  $b$  un sommet de  $B'$  adjacent à  $a$ . Soit  $t$  un sommet du biparti  $B''$  contenant  $(u,v)$ , adjacent à  $u$  et non à  $v$ .

$u$  et  $v \in \Gamma_a$  et  $u$  et  $v \in \Gamma_b$  par définition de  $S$ .

Le lemme III.4 implique alors que  $a \in \Gamma_t$  et  $b \in \Gamma_t$ , d'où  $t \in S$  ce qui est une contradiction.

q.e.d.

#### définition III.9

L'opération adjonction d'un sommet simplicial à un graphe  $G$ , consiste à ajouter un sommet au graphe  $G$ , ce sommet

ayant pour adjacent les sommets d'une clique simpliciale de  $G$ .

L'opération adjonction d'un biparti  $B$  2-connexe simplicial à un graphe  $G$ , consiste à identifier un sommet d'une clique simpliciale  $K$  de  $G$  et un sommet de  $B$  et à relier par une arête tout autre sommet de  $B$  à tout autre sommet de  $K$ .

L'opération adjonction d'un multipart complet  $M$  à un graphe  $G$ , consiste à identifier un sommet d'une clique simpliciale  $K$  de  $G$  et un sommet de  $M$  et à relier par une arête tout autre sommet de  $M$  à tout autre sommet de  $K$ .

**Théorème III.10**

=====

Tout graphe  $G = (V, E)$  connexe,  $i$ -triangulé, s'obtient à partir d'un sommet unique par les opérations suivantes:

$\phi'_1$  adjonction d'un sommet simplicial.

$\phi'_2$  adjonction d'un biparti 2-connexe simplicial.

$\phi'_3$  adjonction d'un multipart complet simplicial.

appliquées itérativement.

Ce théorème est une simple reformulation du théorème précédent

**Remarque III.11**

=====

Les seules arêtes qui dans un graphe  $i$ -triangulé appartiennent à un sous-graphe biparti 2-connexe sont les arêtes qui dans une construction de  $G$  appartiennent à un biparti de l'opération  $\phi'_2$  ou à un multipart complet de l'opération  $\phi'_3$ .

Les sous-graphes bipartis maximaux (au sens des sommets) d'un graphe  $i$ -triangulé sont les bipartis introduits par  $\phi_2^i$  et les sous-graphes bipartis des multipartis complets introduits par  $\phi_3^i$ .

Nous indiquons ci-dessous comment obtenir un des résultats obtenu par Gallai [15] à l'aide du théorème III.10.

définition III.12

Un ensemble de sommets  $A$  de  $G$  est un ensemble d'articulation relativement minimal de  $G$ , si sa suppression déconnecte deux sommets  $x$  et  $y$  du graphe et est minimal pour cette propriété ( $x$  et  $y$  étant fixés).

Théorème III.13 (Gallai)

Un ensemble d'articulation relativement minimal d'un graphe  $i$ -triangulé  $G = (V, E)$  est soit une clique, soit un multiparti complet, soit une clique complètement reliée à un biparti.

démonstration:

La démonstration se fait par récurrence sur  $|V|$ . La propriété est vraie pour les faibles valeurs de  $|V|$ . Supposons la propriété vraie pour  $|V| = n-1$ , démontrons-la pour  $|V| = n$ .

Supposons que dans une suite d'opérations  $\phi_i^j$  pour construire  $G$ , comme indiqué dans le théorème III.10 la dernière de ces opérations soit une adjonction de sommet simplicial à un graphe  $G$ . Soit  $a$  ce sommet simplicial et  $K$

la clique simpliciale correspondante. Considérons un ensemble d'articulation relativement minimal séparant deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ . Deux cas sont à considérer

$$\underline{u \neq a \quad \text{et} \quad v \neq a.}$$

L'ensemble d'articulation considéré ne peut contenir  $a$ , il était ensemble d'articulation minimal relativement à  $u$  et  $v$  dans  $G^*$ . La propriété est vérifiée par récurrence.

$$\underline{u = a \quad \text{et} \quad v \neq a}$$

Si  $a$  est le seul sommet de sa composante d'articulation, l'ensemble d'articulation est la clique  $K$ .

Si la composante d'articulation contenant  $a$  contient aussi un sommet  $t$  de  $K$ , alors l'ensemble d'articulation considéré est aussi ensemble d'articulation relativement minimal pour  $v$  et  $t$  dans  $G^*$ .

$$\text{En effet } \Gamma_a(G^*) \subseteq \Gamma_t(G^*).$$

Le récurrence s'applique.

Si la dernière opération de la suite des  $\phi_i^!$  qui construit  $G$  est une opération de type  $\phi_2^!$  ou  $\phi_3^!$  la démonstration ci-dessus se reconduit aisément.

Etablissons brièvement un corollaire des théorèmes de caractérisation constructive obtenus pour les graphes de parité, et les graphes  $i$ -triangulés.

#### Théorème III.14

=====

Un graphe  $G = (V, E)$  2-connexe qui est à la fois  $i$ -triangulé et de parité appartient à l'une des trois classes suivantes:

- i, bipartis 2-connexes.
- ii, graphes de la classe iii où certains sommets simpliciaux ont été remplacés par des multipartis complets.
- iii, les graphes 2-connexes (triangulés) obtenus à partir d'un sommet par les opérations suivantes: faux jumeaux d'un sommet simplicial, vrai jumeau ( $\phi_2$ ), prolongement par une arête ( $\phi_3$ ), appliquées itérativement et dans un ordre quelconque.

démonstration:

-----

Nous ne donnons que quelques brèves indications sur la démonstration.

Le graphe  $G$  contient un sous-graphe biparti 2-connexe non complet. Il ne peut exister un sommet de  $G$  contenant tous les sommets de ce biparti dans ses adjacents.  $G$  ne peut qu'être ce biparti.

$G$  contient au moins un sous-graphe biparti 2-connexe, et tous les sous-graphes bipartis 2-connexes de  $G$  sont complets. Soit  $B$  l'un d'entre eux. Soit  $S$  les sommets de  $G$  qui contiennent tous les sommets de  $B$  dans leurs adjacents. On démontre que  $G(V-S)$  ne peut avoir de point d'articulation.

$G$  ne contient pas de sous-graphe biparti 2-connexe,  $G$  est triangulé. Il reste à établir quelles sont celles des opérations  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  qui appliquées à un graphe triangulé construisent un graphe triangulé.

3.-ALGORITHMES POLYNOMIAUX DE RECONNAISSANCE ET D'OPTIMISATION  
-----  
POUR LES GRAPHES I-TRIANGULES.  
-----

L'algorithme de reconnaissance consiste simplement à rechercher une des configurations simpliciales indiquées dans le théorème III.8, et à la supprimer par les opérations inverses de  $\phi'_1$ ,  $\phi'_2$ , et  $\phi'_3$ . Pour une configuration simpliciale (supposée simpliciale) on vérifie qu'elle satisfait la définition III.6 hors le fait que la clique qui lui est associée est simpliciale. Cette dernière vérification se fait plus tard dans l'algorithme.

A.4 - Algorithme de reconnaissance  
-----

(1) Chercher un sommet "simplicial", un biparti "simplicial" ou un multipartiel complet "simplicial", par une démarche analogue à celle donnée dans la démonstration du théorème II

Vérifier dans le cas  $\phi'_2$  (resp.  $\phi'_3$ ) qu'aucune arête du biparti simplicial (resp. multipartiel complet simplicial) n'est rouge.

Si oui supprimer par  $\phi'^{-1}_2$  (resp.  $\phi'^{-1}_3$ ) le biparti simplicial (resp. multipartiel complet simplicial) et colorier les arêtes de la clique lui correspondant en rouge.

Si non le graphe n'est pas i-triangulé, fin.

Aller en (1).

Remarque III.15  
=====

Il est clair qu'un tel algorithme est polynomial et qu'il donne une séquence d'opérations  $\phi'_i$  ( $i=1,2,3$ ) pour construire  $G = (V,E)$ , i-triangulé, à partir d'un sommet isolé. Dans le cas où l'algorithme détecte que  $G$  n'est pas i-triangulé, il est facile (la démonstration du lemme en

défaut nous permet) de trouver un cycle impair qui n'a pas deux cordes qui se croisent.

Les notations employées ci-dessous sont celles décrites au chapitre II. Comme dans la définition III.6, nous notons  $K$  la clique simpliciale d'une configuration simpliciale et  $a$  le sommet simplicial de l'opération  $\phi_1^i$  et aussi le sommet commun de  $K$  et d'un biparti simplicial  $B$  (resp. multiparti complet simplicial  $M$ ) de l'opération  $\phi_2^i$  (resp.  $\phi_3^i$ ).

Nous notons  $v_i$  les sommets de  $K$  où  $i = 1, \dots, k$  ( $v_k = a$  pour les opérations  $\phi_2^i$  et  $\phi_3^i$ ).

A.5 - Algorithme de stable de poids maximum et couverture minimum par des cliques.

A.5.1 -  $\phi_1^i$  - opération sommet simplicial

transformation sur les poids

$$c^*(v_i) = c(v_i) - c(a) \quad i = 1, \dots, k$$

transformation sur la solution primale

$$\text{si } x^*(v_i) = 1 \text{ où } v_i \in K \text{ alors } x(v) = x^*(v) \quad \forall v \in V(G^*)$$

$$\text{et } x(a) = 0.$$

$$\text{si } x^*(v_i) = 0 \quad i = 1, \dots, k \text{ alors}$$

$$x(v) = x^*(v) \quad \forall v \in V(G^*) \text{ et } x(a) = 1.$$

transformation sur la solution duale

reporter les poids (composantes de  $y^*$ ) des cliques de  $G^*$  sur les cliques correspondantes de  $G$ , donner à la clique  $G(v(K) \cup \{a\})$  un poids égal à  $c(a)$ .

Le vecteur  $y$  a pour composantes les poids ainsi associés aux cliques de  $G$ .

A.5.2 -  $\phi_2'$  - opération biparti simplicial

transformation sur les poids

$$c^*(v_i) = c(v_i) - s \frac{B}{a} \quad i = 1, \dots, k-1 \text{ et } c^*(a) = s \frac{B}{a}$$

transformation sur la solution primale

$$\text{si } x^*(v_i) = 1 \text{ alors } x(v) = x^*(v) \quad \forall v \in V(G^*) \text{ et}$$

$$x(v) = 0 \quad \forall v \in V(B)$$

$$\text{si } x^*(a) = 1 \text{ (c'est que } s \frac{B}{a} \geq s \frac{B}{a} \text{)}$$

$$x(v) = x^*(v) \quad \forall v \in V(G^*) \setminus \{a\}$$

$$x(v) = 1 \text{ si } v \in S_a^B \text{ et } x(v) = 0 \text{ sinon } \quad \forall v \in V(B)$$

$$\text{si } x^*(v_i) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$x(v) = x^*(v) \quad \forall v \in V(G^*)$$

$$x(v) = 1 \text{ si } v \in S_a^B \text{ et } x(v) = 0 \text{ sinon } \quad \forall v \in V(B).$$

transformation sur la solution duale

$$\text{- dans le cas où } s \frac{B}{a} \geq s \frac{B}{a} .$$

Résoudre le stable de poids maximum dans le bipart.  $B'$  obtenu à partir de  $B$  en ajoutant une arête pendante  $(\beta, a)$  au sommet  $a$ . Le poids du sommet  $\beta$  est  $c(\beta) = s \frac{B}{a} - s \frac{B}{a}$ , les poids des autres sommets sont reportés.

Soit  $y'$  le vecteur optimum du dual de ce problème, chacune de ses composantes est associée à une arête de  $B'$ . Chaque arête de  $B$  est contenue dans une clique maximale unique de  $G$ . Définissons les poids sur les cliques de  $G$ :

Le poids d'une clique maximale de  $G^*$  qui est aussi clique maximale de  $G$  est inchangé.

Le poids (composante de  $y'$ ) associé à une clique de  $B$  est maintenant associé à "la" clique maximale de  $G$  contenant cette arête.

Le vecteur  $y$  a pour composantes les poids ainsi associés aux cliques de  $G$ .

$$\text{- dans le cas où } s \frac{B}{a} < s \frac{B}{a} .$$

$S_a^B$  est le stable de poids maximum de  $B$ .

On résout le stable de poids maximum de  $B$ .

Soit  $y'$  le vecteur du dual à l'optimum de ce problème. On obtient maintenant  $y$  par la même procédure que dans le cas  $s_a^B = s_{\bar{a}}^B$ .

A.5.3 -  $\phi_3^!$  - opération multiparti complet simplicial

Un algorithme pour le problème du stable de poids maximum ( et son problème dual) dans un graphe  $M$  multiparti complet est donné dans la remarque suivante.

Le paragraphe A.5.2 se reconduit mot pour mot, où l'on remplace  $B$  par  $M$  et "arête de  $B$ " par "clique maximale de  $M$ ".

On vérifie dans chacun des cas que les vecteurs  $x$  et  $y$  donnés par l'algorithme satisfont le théorème des écarts complémentaires, et ont leurs composantes entières.

Remarque III.16

=====

Algorithme de stable de poids maximum dans un multiparti complet  $M$ .

Les sommets du multiparti complet  $M$  se partitionnent en stables maximaux de manière unique. Le stable de poids maximum est parmi ces stables celui de poids maximum.

Algorithme de couverture minimum par des cliques dans un multiparti complet  $M$ .

(1) Choisir une clique (un sommet dans chacun des stables maximaux) dont tous les sommets ont un poids strictement positif.

Donner à cette clique le poids de son sommet de plus faible poids, retrancher ce poids à tous les poids des sommets de cette clique.

Si un des stables maximaux a tous ses sommets de poids nuls, donner à l'un quelconque d'entre eux un poids fictif infini.

Si tous les stables maximaux ont un sommet de poids fictif infini fin, sinon, aller en (1).

A.6 - Algorithme de clique de poids maximum et de couverture  
de poids minimum par des stables.

Pour les trois opérations  $\phi_i'$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les poids des sommets de  $G^*$  sont ceux de  $G$ .

A.6.1 - Algorithme de clique de poids maximum.

Opération  $\phi_1'$

La clique cherchée est soit la clique de poids maximum de  $G^*$ , soit la clique  $G(V(K) \cup \{a\})$ .

Opérations  $\phi_2'$  et  $\phi_3'$ .

Un algorithme pour le problème de la clique de poids maximum (et son problème dual) dans un graphe multipartite complet  $M$ , est donné dans la remarque suivante. Si  $K^B$  (resp.  $K^M$ ) est la clique de poids maximum dans le biparti  $B$  (resp. dans le multipartite complet  $M$ ) la clique de poids maximum de  $G$  est soit la clique de poids maximum de  $G^*$  soit la clique  $G(V(K^B) \cup V(K) \setminus \{a\})$  (resp.  $G(V(K^M) \cup V(K) \setminus \{a\})$ ).

En effet une arête de  $B$  (resp. une clique maximale de  $M$ ) est contenue dans exactement une et une seule clique maximale de  $G$ .

Le vecteur  $x$  solution optimale est le vecteur représentatif de la clique trouvée.

A.6.2 - Algorithme de couverture de poids minimum par des  
stables.

La famille des stables qui portent un poids stric-

tement positif à l'optimum du problème posé sur  $G^*$  se partitionne en familles:

$S_i^*$  l'ensemble des stables qui contiennent le sommet  $v_i$  de  $K$ .  $i = 1, \dots, k$ .

$S_K^*$  l'ensemble des stables qui ne contiennent aucun sommet de  $K$ .

Un stable de  $S_i^*$  peut se transformer en un stable de  $S_K^*$  par suppression du sommet  $v_i$ .

Cette opération permet de considérer que la somme des composantes du vecteur  $y^*$  correspondant aux stables de  $S_i^*$  est exactement égale à  $c(v_i)$ , et ce pour tout sommet de  $K$  :  
 $v_i \quad i=1, \dots, k$ .

La famille des stables de  $B$  qui portent un poids strictement positif à l'optimum peut se partitionner en  $S_a^B$  et  $S_a^B$  (où l'on remplace  $B$  par  $M$  pour l'opération  $\phi_3'$ ).

L'algorithme qui donne les stables et les poids cherchés est présenté ci-dessous dans les seuls cas  $\phi_2'$  et  $\phi_3'$  (pour  $\phi_3'$  remplacer  $B$  par  $M$ ).

Les stables  $S_{v_i}^*$   $i=1, \dots, k-1$  sont reportés avec leur poids dans la solution cherchée.

On concatène ensuite les stables de  $S_a^*$  (où  $a=v_k$ ) avec ceux de  $S_a^B$  par une procédure analogue à celle décrite en A.3.3.

Les stables alors en surplus de  $S_a^B$  sont concaténés sans le sommet  $a$  avec ceux de  $S_K^*$ .

On termine en concaténant les familles  $S_K^*$  et  $S_a^B$  jusqu'à épuisement d'une des familles.

On reporte inchangés les stables, et leur poids, de la famille restante.

Le vecteur  $y$ , à composante entière, solution optimale cherchée est le vecteur dont les composantes sont les

poids des stables obtenus. On vérifie que  $x$  et  $y$  satisfont les conditions du théorème des écarts complémentaires, dans tous les cas.

Remarque III.17

=====

Clique de poids maximum et problème dual dans le cas d'un multipartite complet  $M$ .

Les sommets d'un multipartite complet  $M$  se partitionnent en stables maximaux, qui sont les seuls stables maximaux de  $M$ . Une clique de poids maximum contient un sommet de poids maximum de chacun de ces stables. Pour la solution optimale du problème dual on affecte à chacun des stables maximaux de  $M$  le poids du sommet appartenant à la clique trouvée.

Remarque III.18

=====

Pour l'algorithme A.4 de reconnaissance, d'un graphe  $i$ -triangulé, on peut estimer le nombre d'opérations, sans doute trop largement en  $\sigma(|V|^4)$ . Pour les algorithmes d'optimisation A.5 et A.6 reprenant les arguments des remarques II.22 et II.23, on démontre que les deux algorithmes sont en  $\sigma(|V|^3)$ .

Remarque III.19

=====

La remarque II. 27 sur la matrice des cliques d'un graphe de parité reste valable pour les graphes  $i$ -triangulés, puisque le contre-exemple qui y est indiqué est  $i$ -triangulé.

Remarque III.20

=====

Les graphes  $i$ -triangulés sont fortement parfaits. Cette remarque se démontre très facilement en observant que chaque opération  $\phi'_i$  ( $i=1,2,3$ ) conserve la forte perfection.

(On sait que les bipartis et les multipartis complets sont fortement parfaits).







1.-DEFINITIONS ET PRELIMINAIRE

---

définition IV.1

Un graphe parfait sans clique à quatre est un graphe qui n'a pas de clique de cardinalité quatre, comme sous-graphe induit, et tel que ni lui ni son complémentaire ne contient de cycle élémentaire impair de cardinalité au moins 5, sans corde.

Remarque IV.2

=====

Tucker ayant démontré que les graphes sans clique à quatre vérifient la conjecture forte des graphes parfaits, on les désignera aussi comme "les graphes parfaits trois coloriables".

Nous redémontrons ici la conjecture forte des graphes parfaits pour les graphes sans clique à quatre comme sous-graphe induit.

Cette démonstration est de type algorithmique, c'est ce qui la différencie de celles de Tucker [33] et [34]. On obtient comme retombée de la méthode proposée ici, une démonstration rapide d'un autre résultat de Tucker [32] : un graphe planaire vérifie la conjecture forte de graphes parfaits.

La démonstration du théorème principal proposée dans ce chapitre est un algorithme de coloration pour tout graphe  $G = (V, E)$  parfait trois coloriable, et dont chaque sommet appartient à au plus trois cliques de cardinalité trois (ou triangle).

définition IV.3

On appelle  $G$  la classe des graphes parfaits trois coloriables tels que chacun des sommets de ces graphes appartient à au plus trois cliques de cardinalité trois.

Notation IV.4

Les couleurs utilisées seront notées  $a, b$  et  $c$ . Pour un graphe  $G = (V, E)$  trois colorié on notera  $G_{\{a, b\}}$  le sous-graphe de  $G$  construit sur les sommets coloriés en  $a$  et  $b$ .

Avant de proposer l'algorithme, nous donnons dans un bref préliminaire trois lemmes qui ont pour but d'éliminer certains cas de coloration triviaux. Nous restreignons ainsi la classe des graphes (de  $G$ ) que nous allons colorier.

Lemme IV.5

Un graphe de la classe  $G$  qui ne contient pas de clique de cardinalité trois est biparti.

démonstration:

Evident : un graphe sans cycle élémentaire sans corde contenant un cycle élémentaire de longueur impaire supérieure ou égale à 5 contient au moins un triangle.

Lemme IV.6

Soient  $G = (V, E)$  un graphe de  $G$  et  $(v_1, v_2)$  une arête de  $G$  n'appartenant pas à un triangle de  $G$ . Le graphe

$G^1 = (V, E \setminus \{(v_1, v_2)\})$  appartient à la classe  $G$ .

D'une trois coloration de  $G^1$ , on obtient en temps polynomial une trois coloration de  $G$ .

démonstration:

Si l'on crée un cycle élémentaire impair sans corde en retirant l'arête  $(v_1, v_2)$  de  $G$  cela signifie que  $(v_1, v_2)$  était corde courte de ce cycle dans  $G$ , contradiction.

Si l'on crée un cycle élémentaire impair ( $\geq 5$ ) sans corde dans le complémentaire de  $G$ , soit un sommet de ce cycle non adjacent à  $v_1$  et  $v_2$ . Le sous-graphe de  $G$  construit sur  $v_1, v_2$  et ce sommet est un triangle, contradiction.

Si  $v_1$  et  $v_2$  sont de couleur différente dans une trois coloration de  $G^1$ , celle-ci est reportée sur  $G$ .

Si  $v_1$  et  $v_2$  sont de couleur identique, disons:  $a$ , le sous-graphe  $G_{(a,b)}$  ne contient pas de triangle, il est bi-parti (cf. lemme IV.5). On recolorie alors la composante connexe de ce sous-graphe contenant l'arête  $(v_1, v_2)$ .

Lemme IV.7

Soient un graphe  $G = (V, E)$  de la classe  $G$  et  $v$  un de ses sommets. Si  $G^1 = G(V \setminus \{v\})$  est trois colorié, et si  $G - v$  ne contient pas d'arête coloriée, disons, en  $a$  et  $b$ , alors  $G$  peut être polynomialement colorié en trois couleurs.

démonstration:

Le sous-graphe construit sur le sommet  $v$ , les sommets de  $G^1$  coloriés en  $a$  et les sommets de  $G^1$  coloriés en  $b$

ne contient pas de triangle, il est donc biparti, et peut être recolorié en a et b.

Corollaire IV.7.1

Soient un graphe  $G = (V, E)$  de la classe  $G$  et  $v$  un sommet appartenant à deux triangles au plus. Une trois coloration de  $G^1 = G(V \setminus \{v\})$  se prolonge en temps polynomial en une trois coloration de  $G$ .

Dans la présentation de l'algorithme on peut se restreindre aux graphes  $G$  de  $G$  tels que chaque arête appartient à deux triangles au plus. En effet soit une arête  $(v_0, v_1)$  appartenant aux trois triangles :

$$(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_1, v_3) \text{ et } (v_0, v_1, v_4) .$$

On colorie  $G^1 = G(V \setminus \{v_0\})$ . Si  $v_1$  est de couleur a dans la trois coloration de  $G^1$  obtenu, il n'y a pas d'arête colorée en b et c dans  $G(\Gamma_{v_0})$ . Le lemme IV.7 nous permet alors de colorier  $G$ .

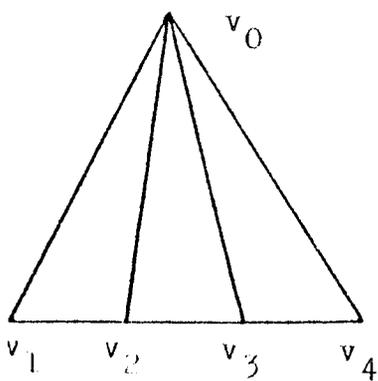
Nous considérons dans la suite un graphe  $G = (V, E)$  de la classe  $G$  où  $|V| = n$ . Nous montrons comment d'une trois coloration obtenue sur  $G^1 = G(V \setminus \{v_0\})$  on établit une trois coloration de  $G$  en temps polynomial. Le graphe  $G$  que l'on considère est tel que chacune de ses arêtes appartient à au moins un triangle et à au plus deux, et tel que chacun de ses sommets  $(v)$  contient dans son voisinage  $(G(\Gamma_v))$  exactement trois arêtes de  $E$ .

Dans un tel algorithme de coloration le choix de  $\{v_0\}$  est important. L'algorithme se sépare en trois cas distincts suivant le choix de  $\{v_0\}$  qui s'effectue suivant la procédure suivante:

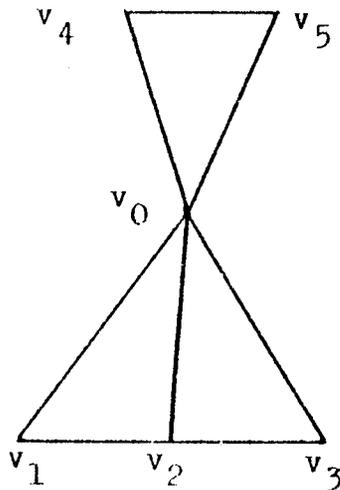
- 1 - Si tous les sommets de  $G$  contiennent dans leur voisinage une chaîne minimale de cardinalité trois, on dit que les sommets de  $G$  sont de type 1. Dans un tel graphe on choisit pour  $v_0$  un sommet quelconque.

- 2 - Si l'on n'est pas dans le cas précédent, on choisit pour sommet  $v_0$  un sommet, s'il en existe, dont le voisinage est formé de deux composantes connexes, respectivement une chaîne minimale de cardinalité 2 et une arête. Dans ce cas  $v_0$  est dit de type 2.

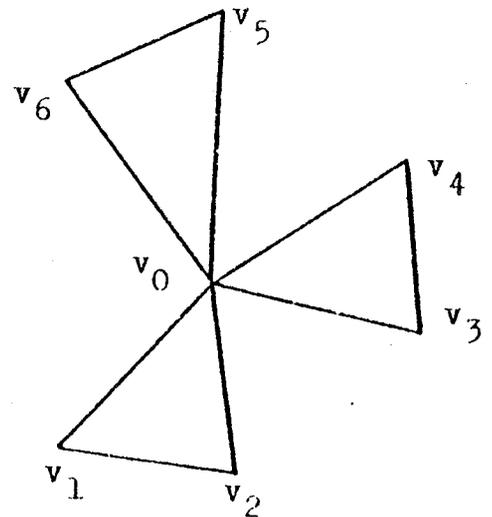
- 3 - Si l'on n'est pas dans un des cas précités, on choisit pour  $v_0$  un sommet quelconque. Le sous-graphe induit par  $v_0$  est constitué de trois arêtes disjointes. Dans ce cas  $v_0$  est dit de type 3.



type 1



type 2



type 3

Figure 21

2.-ALGORITHME DE COLORATION D'UN GRAPHE DE G

A.7 - Algorithme de coloration d'un graphe de la classe G

- A.7.1 Tous les sommets de G sont de type 1.-

Le lemme IV.7 nous indique qu'il existe dans ce cas une seule configuration difficile:

Dans la trois coloration de  $G^1$ ,  $v_1$  et  $v_4$  sont de couleur a,  $v_2$  est de couleur b et  $v_3$  est de couleur c.

L'algorithme se sépare en trois cas, exclusifs:

A.7.1 a - l'arête  $(v_2, v_3)$  appartient à un autre triangle  $(v_2, v_3, v_5)$ .

A.7.1 b - Il existe une chaîne coloriée en b et c reliant les sommets  $v_2$  et  $v_3$ , différente de l'arête  $(v_2, v_3)$

A.7.1 c - Les autres cas.

coloration dans le cas A.7.1 a

L'arête  $(v_2, v_3)$  appartient a deux triangles  $(v_1, v_2, v_3)$  et  $(v_5, v_2, v_3)$ .

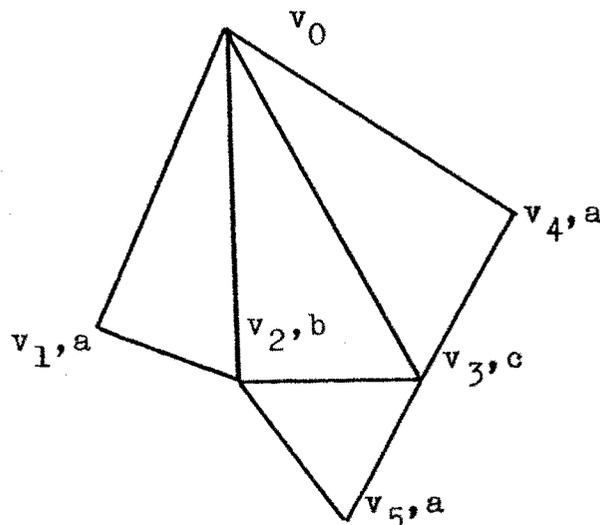


Figure 22

Dans ce cas il n'existe aucune chaîne reliant  $v_1$  à  $v_4$  empruntant des sommets intermédiaires différents de  $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ . Ceci est aussi vrai par raison de symétrie d'une chaîne reliant  $v_4$  à  $v_5$  ou d'une chaîne reliant  $v_1$  à  $v_5$ . En effet supposons qu'une telle chaîne  $(v_1, w_1, w_2, \dots, w_k, v_5)$  existe. Supposons cette chaîne minimale. Aucun des sommets  $w_i$  de cette chaîne ne peut être adjacent à  $v_0, v_2$ , ou  $v_3$ . Les deux cycles  $(v_1, w_1, w_2, \dots, w_k, v_5, v_2)$  et  $(v_1, w_1, \dots, v_5, v_3, v_0)$  n'ont pas de corde, sont de parité différente, et de cardinalité supérieure ou égale à 5, contradiction.

On a démontré que  $v_1, v_4$ , et  $v_5$  sont des sommets d'articulation de  $G$ .

On permute les couleurs  $c$  et  $a$  sur la composante de  $G(V \setminus \{v_1\})$  ne contenant pas  $v_0$ , et on colorie  $v_1$  en  $c$ . De même on peut colorier  $v_4$  en  $b$ . On colorie alors le sommet  $v_0$  en  $a$ .

coloration dans le cas A.7.1 b

Il existe dans  $G^1$  une chaîne élémentaire différente de l'arête  $(v_2, v_3)$  de couleur  $b$  et  $c$ , reliant  $v_2$  à  $v_3$ .

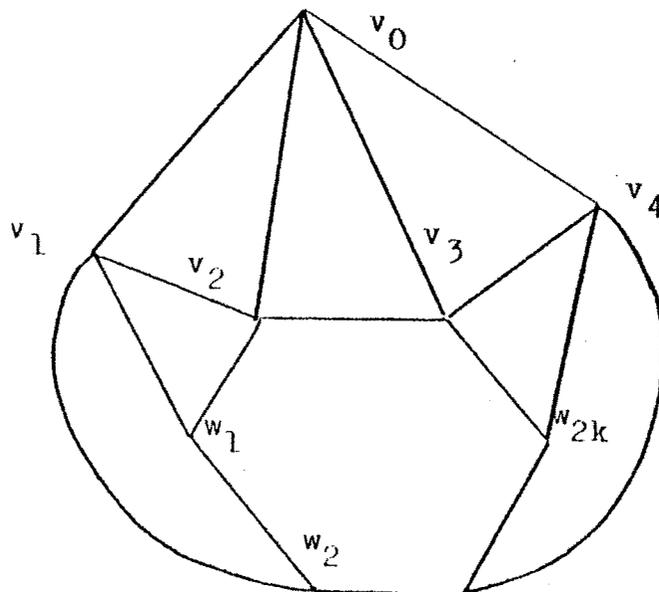


Figure 23

Soit  $C = (v_2, w_1, w_2, \dots, w_{2k}, v_3)$  une telle chaîne minimale  $v_1$  est adjacent à  $w_1$ , puisque  $v_2$  est de type 1,  $v_1$  doit aussi être adjacent à un autre sommet de la chaîne  $C$  sinon  $(v_1, w_1, \dots, v_3, v_0, v_1)$  serait un cycle impair sans corde,  $v_1$  est donc adjacent à  $w_2$ .

De même  $v_4$  est adjacent à  $w_{2k}$  et  $w_{2k-1}$ .

Si  $k = 1$ , on a mis en évidence un anticycle de cardinalité 7 sans corde, et si  $k$  est supérieur le cycle

$(v_1, w_2, \dots, w_{2k-1}, v_4, v_0, v_1)$  est impair et sans corde.

#### coloration dans le cas A.7.1 c

On est dans le cas où ni A.7.1 a et A.7.1 b ne sont vrais.

Supprimons l'arête  $(v_2, v_3)$  de  $G_{\{b, c\}}$ . Le graphe  $G_{\{b, c\}}$  est déconnecté. Echangeons les couleurs b et c dans la composante de  $G_{\{b, c\}}$  contenant  $v_3$ . Colorions  $v_0$  en c.

Les sommets coloriés en a forment maintenant un stable de  $G$ , de même que les sommets coloriés en c. Le graphe  $G_{\{b\}}$  contient la seule arête  $(v_2, v_3)$ . Le graphe  $G_{\{a, b\}}$  ne contient pas de triangle, il est biparti (lemme IV.5), on peut le recolorier.

#### - A.7.2 Coloration dans le cas où $v_0$ est de type 3 ou de type 2.-

$v_0$  est de type 2

Le seul cas où la trois coloration de  $G^1$  ne s'étend pas directement en une trois coloration de  $G$  est décrit ci-dessous.

$$\Gamma_{v_0} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \quad E(G(\Gamma_{v_0})) = ((v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5))$$

$v_1$  et  $v_4$  sont de couleur a

$v_3$  et  $v_5$  sont de couleur c

$v_2$  est de couleur b

$v_0$  est de type 3.

Le seul cas où la trois coloration de  $G^1$  ne s'étend pas directement en une trois coloration de  $G$  est décrit ci-dessous

$$\Gamma_{v_0} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \quad E(G(\Gamma_{v_0})) = ((v_1, v_2), (v_3, v_6), (v_4, v_5)).$$

$v_1$  et  $v_4$  sont de couleur a

$v_3$  et  $v_5$  sont de couleur c

$v_2$  et  $v_6$  sont de couleur b

Nous donnons ci-dessous un lemme qui permet d'éliminer un cas de coloration trivial, et de dégager pour les deux cas (type 2 et type 3) une "structure critique". On explique aussi que seuls les cas de coloration où  $G^1$  contient cette "structure critique" présentent des difficultés.

Lemme IV.8

Toute chaîne du sous-graphe  $G^1_{\{a,c\}}$  reliant  $v_1$  à  $v_3$  ou  $v_1$  à  $v_5$  contient  $v_4$ .

Toute chaîne du sous-graphe  $G^1_{\{a,c\}}$  reliant  $v_3$  à  $v_1$  ou  $v_3$  à  $v_4$  contient  $v_5$ .

démonstration:

-----  
évidente.

Si dans la trois coloration de  $G^1$ , il n'existe pas de chaine reliant  $v_1$  à  $v_4$ , dont les sommets sont coloriés en a et c,  $v_1$  appartient à une composante connexe de  $G^1_{\{a,c\}}$  qui ne contient ni  $v_3$ , ni  $v_4$ , ni  $v_5$ . On commute alors les couleurs dans la composante de  $G^1_{\{a,c\}}$  contenant  $v_1$ . On peut alors colorier  $v_0$ .

Le même procédé s'applique s'il n'existe pas de chaine reliant  $v_3$  à  $v_5$  dont les sommets sont coloriés en a et c.

C'est pourquoi dans toute la suite, on se placera dans le cas où la trois coloration de  $G^1$  contient au moins une chaine de couleur a et c liant  $v_1$  à  $v_4$ , et une chaine de couleur a et c liant  $v_3$  à  $v_5$ .

#### Notation

On note  $C^1$  une chaine minimale de  $G^1_{\{a,c\}}$  reliant  $v_1$  à  $v_4$  :  $C^1 = (v_1, u_1^1, u_2^1, \dots, u_t^1, v_4)$

De même soit  $C^2$  une chaine minimale de  $G^2_{\{a,c\}}$  liant  $v_3$  à  $v_5$  :  $C^2 = (v_3, u_1^2, u_2^2, \dots, u_\ell^2, v_5)$ .

#### définition IV.9

On appelle structure critique le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de  $C^1$ ,  $C^2$  et  $v_0$ .

On appelle  $G_c$  ce sous-graphe.

- Tous les cas de coloration restants, où  $G^1$  contient la structure critique  $G_0$  se subdivisent, comme dans le cas A.7.1, en trois parties exclusives l'une de l'autre:
- A.7.2 a - Il existe un sommet adjacent à  $v_4$  et  $v_5$  différent de  $v_0$ .
- A.7.2 b - Il existe une chaîne dans  $G_{\{a,c\}}^1$  reliant  $v_4$  à  $v_5$  de longueur impaire supérieure à 3.
- A.7.2 c - Les autres cas.

coloration dans le cas A.7.2 c

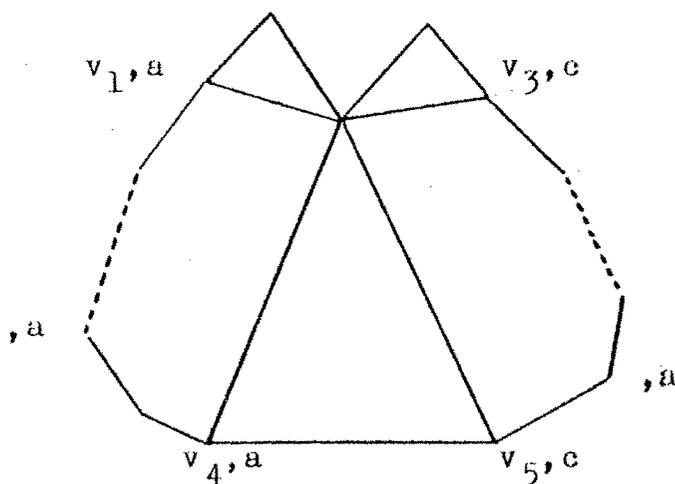


Figure 24

Dans ce cas l'arête  $(v_4, v_5)$  déconnecte le biparti  $G_{\{a,c\}}^1$ . Soit la composante connexe de ce biparti, lorsque l'on enlève l'arête  $(v_4, v_5)$ , contenant  $v_1$  et  $v_4$ . Echangeons les couleurs a et c dans celle-ci. Les sommets  $v_1, v_3, v_4, v_5$  sont maintenant coloriés en c, et les autres adjacents de  $v_0$  en b. Donnons à  $v_0$  la couleur a.

Le sous-graphe  $G_{\{b,c\}}$  ne comporte aucun triangle il est biparti on peut le recolorier.

Propriétés communes des cas A.7.2 a et A.7.2 b.

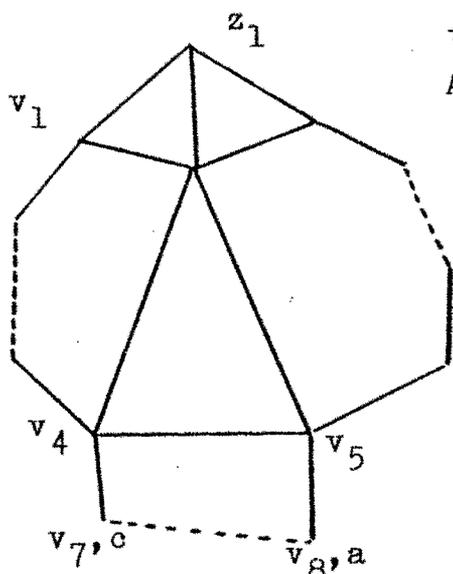
Nous démontrons ci-dessous un théorème qui nous permettra de colorier  $G$  pour les configurations restantes.

Notation IV.10

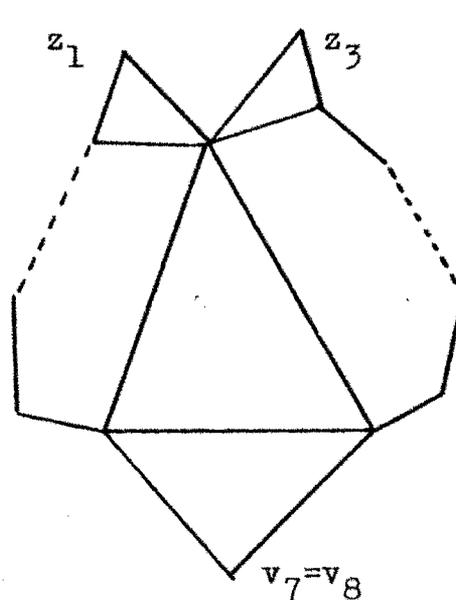
Soit  $G_c$  une structure critique (cf. définition IV.9)  
 On appelle  $z_1$  le sommet adjacent à  $v_0$  et  $v_1$  (précédemment  $v_2$ )  
 et  $z_3$  le sommet adjacent de  $v_0$  et  $v_3$  (précédemment  $v_2$  (resp.  $v_6$   
 pour  $v_0$  de type 2 (resp. de type 3)). On peut avoir  $z_1 = z_3$ .

Dans le cas A.7.2. a on appelle  $v_7 = v_8$  l'adjacent de  $v_4$  et  $v_5$  différent de  $v_0$ .

Dans le cas A.7.2. b on appelle  $v_7$  et  $v_8$  les sommets adjacents respectivement de  $v_4$  et  $v_5$  sur une chaîne  $C^3$  minimale reliant  $v_4$  à  $v_5$  dans  $G^1_{\{a,c\}}$ .



type 2  
A.7.2 b



type 3  
A.7.2 a

Figure 25

définition IV.11

On appelle sommet intérieur de  $C^1$  (resp. de  $C^2$ ) un sommet de  $G$  qui n'appartient pas à  $V(G_c)$  et qui est adjacent à au moins un des sommets de  $C^1 \setminus \{v_4\}$  (resp.  $C^2 \setminus \{v_5\}$ ) et qui est différent de  $z_1$  (resp.  $z_3$ ). Le sommet  $z_1$  (resp.  $z_3$ ) est un sommet intérieur de  $C^1$  si  $r_{z_1}(C^1) \neq \{v_1\}$  (resp. de  $C^2$  si  $r_{z_3}(C^2) \neq \{v_5\}$ ).

définition IV.12

On dit d'une chaîne minimale  $C$  reliant un sommet de  $C^1 \setminus \{v_4\}$  à un sommet de  $C^2 \setminus \{v_5\}$  et dont les sommets intermédiaires n'appartiennent pas à  $V(G_c) \cup (\{v_7\} \cup \{v_8\})$  qu'elle est de type  $(w_i, w_j)$  si  $w_i$  est le premier sommet intermédiaire de cette chaîne et  $w_j$  le dernier.  
 $w_i$  est donc soit  $z_1$  soit un sommet intérieur de  $C^1$ .  
 $w_j$  est donc soit  $z_3$  soit un sommet intérieur de  $C^2$ .

Notation IV.13

Pour une chaîne  $C$  minimale et deux sommets  $w', w''$  de cette chaîne, on note  $C(w', w'')$  la chaîne minimale induite par  $w', w''$  et les sommets de  $C$  situés entre  $w'$  et  $w''$ .

Théorème IV.14

Toute chaîne minimale reliant un sommet de  $C^1 \setminus \{v_4\}$  à un sommet de  $C^2 \setminus \{v_5\}$  et dont les sommets intermédiaires n'appartiennent pas à  $V(G_c) \cup (\{v_7\} \cup \{v_8\})$  est de type:  $(z_1, w_i)$  où  $z_1$  n'est pas intérieur de  $C^1$  et  $w_i$  est intérieur de  $C^2$ , ou alors :

$(w_j, z_3)$  où  $w_j$  est intérieur de  $C^1$  et  $z_3$  n'est pas intérieur de  $C^2$ .

démonstration:

Soit  $C$  une chaîne minimale satisfaisant l'hypothèse du théorème.

- 1 - Aucun sommet de la chaîne n'est adjacent à  $v_0$ .

Soient  $w_i$  et  $w_j$  deux sommets de  $C$ , dans cet ordre sur  $C$  quand on parcourt  $C$  de  $C^1$  vers  $C^2$ , où  $w_i$  est intérieur à  $C^1$  et  $w_j$  intérieur à  $C^2$ , et tels qu'aucun sommet de  $C(w_i, w_j)$  n'est intérieur de  $C^1$  ou de  $C^2$  ( $w_i$  peut être égale à  $w_j$ ).

Si un sommet  $w_k$  de  $C(w_i, w_j)$  est adjacent à  $v_4$  ou  $v_5$  l'arête  $(v_5, v_k)$  ou  $(v_4, v_k)$  n'appartient pas à un triangle du sous-graphe construit sur:

$$V(C(w_i, w_j)) \cup V(G_C)$$

Si l'on exhibe un cycle impair ( $\geq 5$ ) dans ce sous-graphe le sous-graphe construit sur ce cycle impair ne contiendra pas de triangle, contradiction.

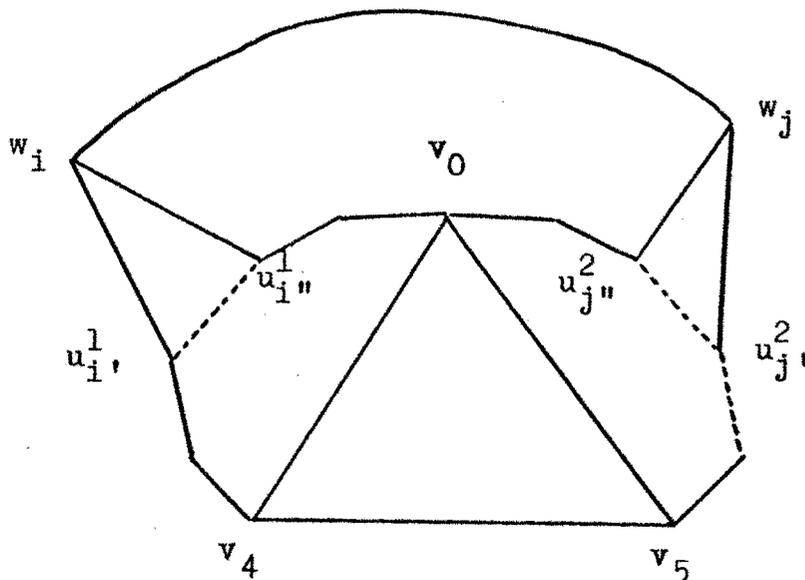


Figure 26

Soit  $u_{i''}^1$  (resp.  $u_{i'}^1$ ) le sommet de  $r_{w_i}(C^1)$  le plus proche de  $v_0$  sur  $C^1$  (resp. de  $v_4$ ).

Soit  $u_{j''}^2$  (resp.  $u_{j'}^2$ ) le sommet de  $r_{w_j}(C^2)$  le plus proche de  $v_0$  sur  $C^2$  (resp. de  $v_5$ ).

Il est facile de voir que  $C^1(v_0, u_{i''}^1)$  et  $C^1(u_{i'}^1, v_4)$  doivent avoir même parité. De même pour

$$C^2(v_0, u_{j''}^2) \text{ et } C^2(v_5, u_{j'}^2).$$

On a donc un cycle impair ( $\geq 5$ ) dans le sous-graphe construit sur  $V(G_c) \cup V(C(w_i, w_j))$ .

- 2 - On vient de démontrer qu'une portion de la chaîne  $C$ , satisfaisant l'hypothèse du théorème, reliant un sommet intérieur de  $C^1$  à un sommet intérieur de  $C^2$  contient soit  $z_1$ , soit  $z_3$ , soit  $z_1$  et  $z_3$ .

Supposons que la chaîne  $C$  contienne  $z_1$  sans contenir  $z_3$ .

Soient  $w_i$  et  $w_j$  choisis comme précédemment. On sait que  $z_1 \in V(C(w_i, w_j))$ . On note que  $w_i$  peut être égale à  $z_1$  si  $z_1$  est intérieur.

Soit  $u_{i'}^1$ , le sommet de  $r_{w_i}(C^1)$  le plus proche de  $v_4$

sur  $C^1$  et  $u_{j'}^2$ , le sommet de  $r_{w_j}(C^2)$  le plus proche de  $v_5$  sur  $C^2$ .

Si  $u_{i'}^1$  est différent de  $v_1$  alors le sous-graphe construit sur

$$V(C^1(u_{i'}^1, v_4)) \cup V(C(w_i, w_j)) \cup V(C^2(u_{j'}^2, v_5))$$

est un biparti (cycle pair). Si l'on ajoute  $v_0$  à ce sous-graphe on crée trivialement un cycle impair contenant  $v_0$  ( $\geq 5$ ) et sans triangle, contradiction.

- 3 - Si  $z_1$  et  $z_2$  appartiennent à  $C$  et aucun sommet de  $C$  ( $z$  n'est intérieur de  $C^1$  ou  $C^2$  alors trivialement soit  $z_1$ , soit  $z_2$  mais un seul des deux est intérieur d  $C^1$  ou  $C^2$  respectivement.

Coloration dans le cas A.7.2. a

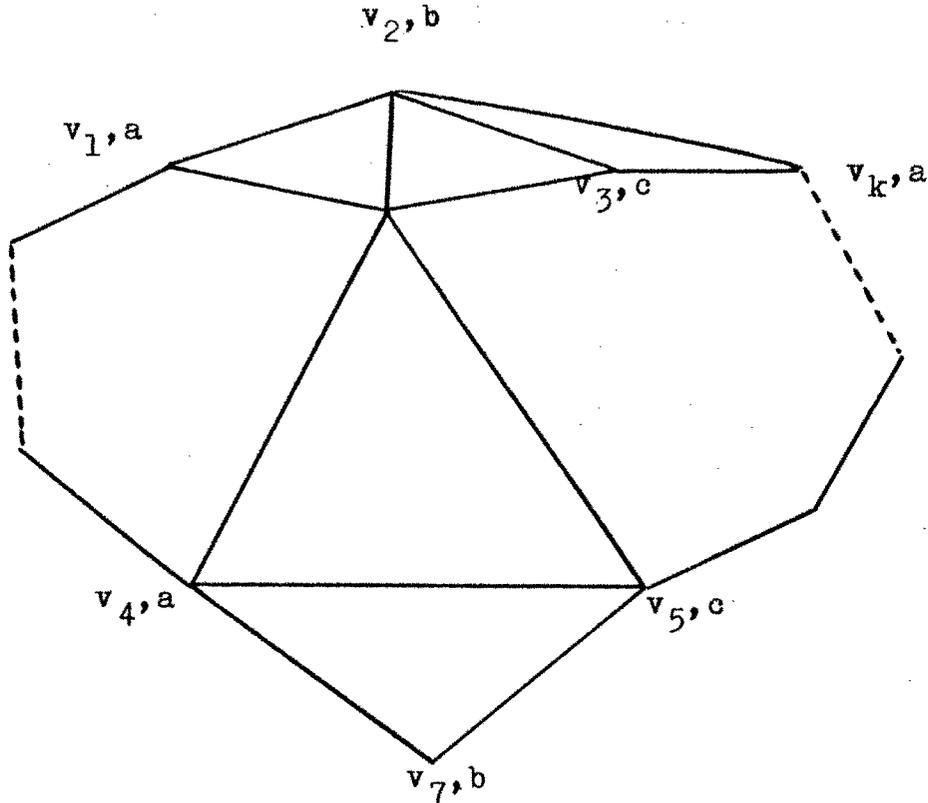


Figure 27

Dans ce cas  $v_0$  ne peut être de type 3, car  $v_4$  ou  $v_5$  aurait été choisi pour  $v_0$  ( $v_7$  ne peut être de type 1).

Dans l'autre cas (Figure 27)  $v_2$  est nécessairement adjacent à un sommet de  $C^2$  (ou  $C^1$ ) de couleur a, soit  $v_k$  ce sommet.

Une chaîne de  $G_{\{a,b\}}^1$  reliant  $v_k$  à un sommet de  $C^1$ , sans contenir  $v_2$ , ne peut exister.

Le théorème précédent nous montre

qu'une telle chaîne contient  $v_7$  or, ceci n'est pas possible car  $v_0$  appartiendrait à un cycle impair sans corde.

Dans la composante connexe du biparti  $G_{(a,b)}^1$ , contenant l'arête  $(v_1, v_2)$  le sommet  $v_2$  est point d'articulation. On commute les couleurs a et b sur la composante connexe de  $G_{(a,b)}^1$  contenant  $v_2$  quand on retire l'arête  $(v_2, v_1)$  de  $G^1$ .

On colorie  $v_0$  en b.

On réarrange les couleurs a et c,  $G_{(a,c)}$  est biparti.

Il reste à colorier un graphe G contenant une des deux configurations (sous-graphes coloriés) de la figure 28(A.7.2 b). On remarque que dans les deux cas la matrice des cliques de G n'est pas équilibrée.

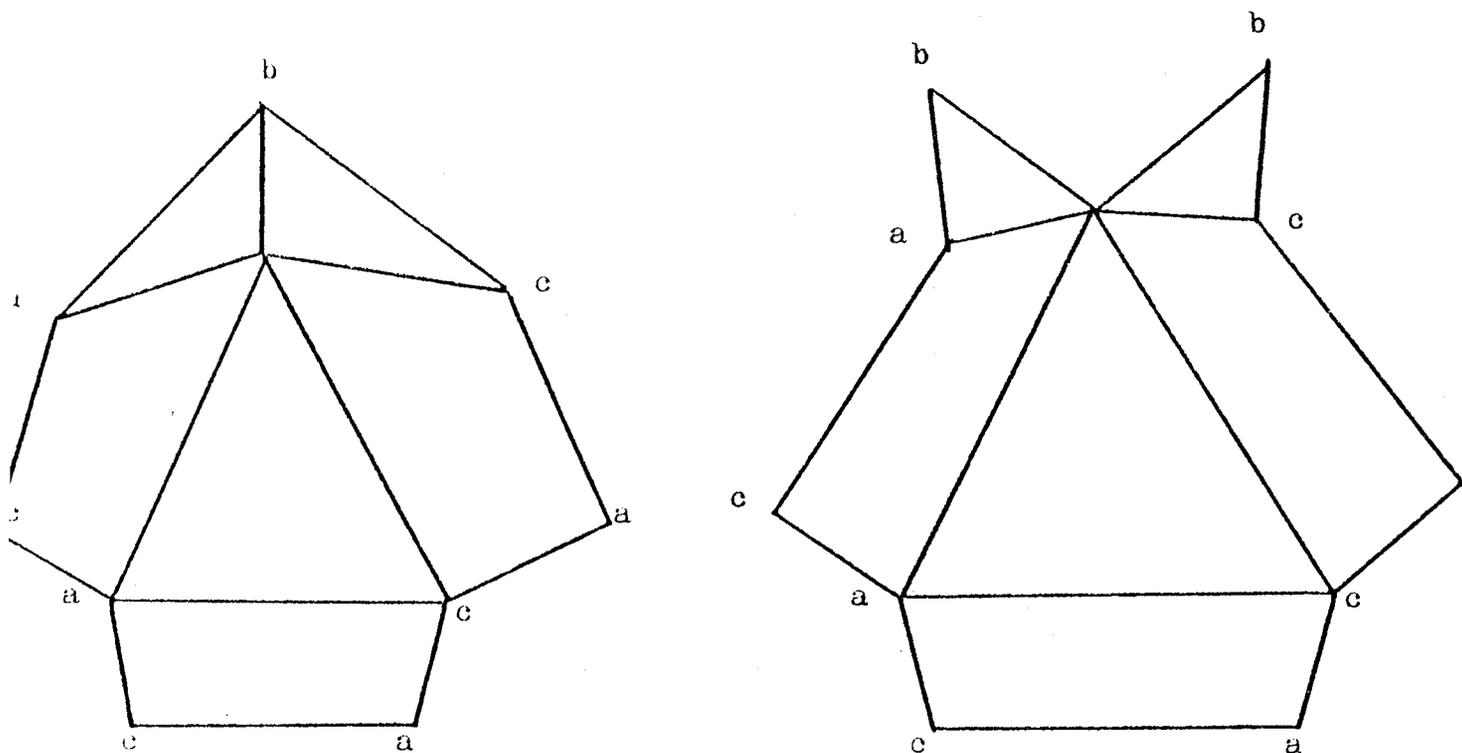


Figure 28

Coloration dans le cas A.7.2. b

définition IV.15

On appelle  $\bar{G}$  le sous-graphe construit sur les sommets de  $G_c$  et les sommets de la chaîne  $C^3$ .

Corollaire IV.14.1

Tout sommet de  $G$  adjacent à un sommet de  $\bar{G}$  et non adjacent à  $(v_0, v_4, v_5)$  est adjacent à une seule des chaînes  $C^1, C^2, C^3$ .

Théorème IV.16

=====

Dans un graphe  $G$  contenant la structure  $\bar{G}$  une des trois arêtes  $(v_0, v_4)$ ,  $(v_0, v_5)$ ,  $(v_4, v_5)$  est un ensemble d'articulation de  $G$ . La coloration est alors triviale.

démonstration:

-----  
Si le théorème est faux, on peut supposer qu'il existe une chaîne reliant un sommet de  $C^3$  à un sommet de  $C^1$  et ne passant pas par  $v_4$  et  $v_5$ , et une chaîne reliant un sommet de  $C^3$  à un sommet de  $C^2$  ne passant pas par  $v_4$  et  $v_5$ .

On appelle  $z_6$  le sommet adjacent à  $v_4$  et  $u_t^1$

$z_7$  le sommet adjacent à  $v_4$  et  $v_7$

$z_8$  le sommet adjacent à  $v_5$  et  $v_8$

$z_9$  le sommet adjacent à  $v_5$  et  $u_\ell^2$ .

$z_6$  peut être égal à  $z_7$ ,  $z_8$  peut être égal à  $z_9$ .

Le théorème IV.14 nous montre que la chaîne reliant  $C^1$  à  $C^3$  est de type  $(z_6, w_j)$  ( $z_6$  n'est pas intérieur à  $C^1$ ) ou

$(w_i, z_7)$  ( $z_7$  n'est pas intérieur à  $C^3$ ).

De même la chaîne reliant  $C^2$  à  $C^3$  est de type  $(z_8, w_\ell)$  ou  $(w_k, z_9)$ .

Dans les quatre cas possibles, on va détecter un sous-graphe biparti  $B$  dans  $G$  et un sommet de  $G$  qui a trois adjacents dans  $B$  :  $s_1, s_2, s_3$ , tels que  $(s_1, s_2) \in E(B)$  et qu'il existe une chaîne de  $B$  reliant  $s_1$  à  $s_3$  qui ne contient pas  $s_2$ , et une chaîne de  $B$  reliant  $s_1$  à  $s_2$  qui ne contient pas  $s_3$ .

Nous ne traitons que le cas :  $w_i = z_6$ ,  $w_j$  et  $w_k$  intérieurs de  $C_3$ ,  $w_\ell = z_9$ .

La chaîne minimale  $(z_6, \dots, w_j, \dots, w_k, \dots, z_9)$  n'utilise qu'un sommet au plus de  $(v_7, z_7)$  et un sommet au plus de  $(v_8, z_8)$ .

Le biparti  $B$  cherché est le sous-graphe construit sur les sommets de cette chaîne, les sommets de  $C^2 \setminus \{v_5\}$ , le sommet  $v_0$  et les sommets de  $C^1$ . Le sommet qui a trois adjacents dans  $B$  est le sommet  $z_6$ .

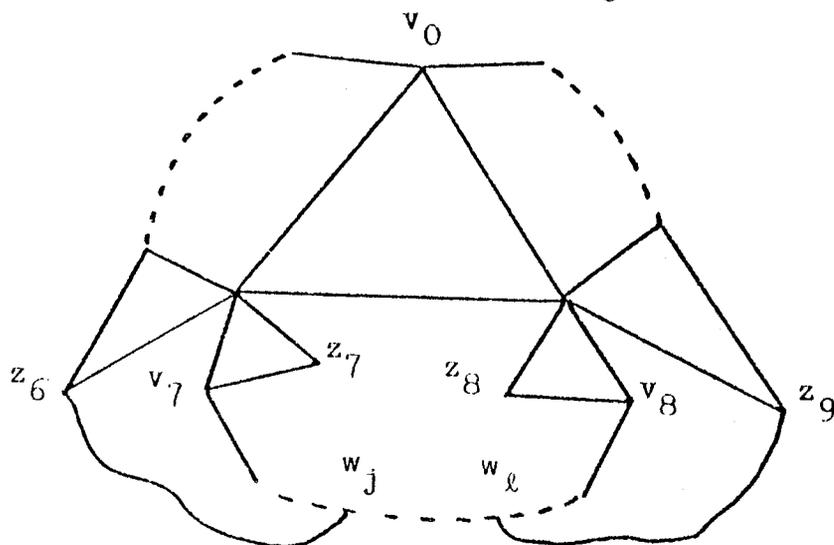


Figure 29

3.-APPLICATIONS

Rappelons un résultat de Padberg [ 28 ] sur les graphes imparfaits critiques.

Théorème IV.17 (Padberg)

Un graphe  $G = (V,E)$  imparfait critique vérifie les propriétés suivantes. (où  $|V| = n$  ,  $\omega = \omega(G)$  ,  $\alpha = \alpha(G)$ ).

- i ,  $n = \alpha\omega + 1$
- ii , Chaque sommet de  $G$  appartient à exactement  $\omega$  cliques de cardinalité  $\omega$  et  $\alpha$  stables de cardinalité  $\alpha$ .
- iii ,  $G$  contient exactement  $n$  cliques de cardinalité  $\omega$  et  $n$  stables de cardinalité  $\alpha$ .
- iiii, Chaque clique de cardinalité  $\omega$  intersecte tous les stables de cardinalité  $\alpha$  sauf un.

Théorème IV.18 (Tucker)

La classe des graphes sans clique à quatre vérifie la conjecture forte des graphes parfaits.

démonstration:

Il suffit de démontrer que les graphes sans clique à quatre, imparfaits critiques contiennent un cycle ou un anticycle impair ( $\geq 5$ ) sans corde. Soit  $G'$  la classe des graphes sans clique à quatre et dont chaque sommet appartient à trois triangles. Le théorème de Padberg (IV.17,ii) nous indique que les graphes imparfaits critiques de clique maximum trois sont dans  $G'$ . Les graphes imparfaits critiques sans clique à quatre sont ceux que l'on ne peut colorier en trois couleurs.

Le chapitre précédent montre que tous les graphes de  $G'$  non trois coloriables contiennent un cycle ou un anticycle impair sans corde ( $\geq 5$ ).

q.e.d.

Remarque IV.19

=====

Le chapitre précédent est une démonstration algorithmique de la conjecture forte des graphes parfaits, pour la classe des graphes sans clique à quatre. Ce n'est pas un algorithme de coloration des graphes de la classe  $G$ .

Le problème "colorier un graphe parfait sans clique à quatre" est différent. Si l'on sait que le graphe que l'on colorie est parfait, sans clique à quatre, on peut imaginer un algorithme polynomial de coloration basé sur l'algèbre linéaire:

On se ramène dans le cas où chaque arête du graphe appartient à au moins une clique de cardinalité trois (lemme IV.6). On écrit (ce qui est polynomial) le système d'inégalités

$$\begin{cases} Kx = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

où  $K$  est la matrice des cliques maximales de  $G$ .

La solution  $x_i = \frac{1}{3} \forall i$  vérifie ce système.

Il reste à appliquer une méthode d'algèbre linéaire qui de cette solution va par une série de pivotages, nous donner une solution de base de ce système d'inéquations. Ceci est polynomial. Cette solution de base sera un stable, intersectant toutes les cliques maximales.

Il est curieux de constater qu'il n'existe pas de méthode "combinatoire" pour ce problème.

Théorème IV.20 (Tucker)

=====

La classe des graphes planaires vérifie la conjecture forte des graphes parfaits.

démonstration:

-----

Nous démontrons que les graphes de cette classe sont  $\gamma$ -parfaits.

La démonstration se fait par récurrence sur  $|V|$ . La propriété est vraie pour les faibles valeurs de  $|V|$ . Supposons qu'elle soit vraie, pour tous les graphes  $G = (V, E)$  planaires avec  $|V| = n-1$ , démontrons qu'elle est vraie pour tous les graphes planaires de cardinalité  $n$ .

Soit  $G = (V, E)$  planaire avec  $|V| = n$ .

Si  $G$  ne contient pas de clique à quatre, c'est le théorème précédent.

$G$  contient au moins une clique à quatre.

Nous colorions  $G$  en quatre couleurs. Soit  $v_0$  un sommet de  $G$  de degré inférieur ou égal à 5.  $G_1 = G(V \setminus \{v_0\})$  est quatre coloriable par hypothèse de récurrence. Soit une quatre coloration de  $G_1$ , les quatre couleurs sont présentes dans le voisinage de  $v_0$  (sinon la propriété est démontrée).

Soient  $v_1, v_2, v_3, v_4$  quatre sommets du voisinage de  $v_0$  coloriés de quatre couleurs différentes. Il existe trois de ces sommets qui ne forment pas un triangle de  $G$ . Le sous-graphe construit sur  $v_0$  et les sommets de  $G$  de couleurs identiques à l'un de ces trois sommets, est trois coloriable : théorème précédent.

q.e.d.

REFERENCES

- [11] BEN REBEA  
Thèse troisième cycle Grenoble
- [12] C.BERGE  
Färbung von Graphen deren sämtliche b z w. ungerade Kreis  
Starr sind (Zusammenfassung), Wiss.Z. Martin - Luther - Uni  
Halle - Wittenberg Math.-Natur. Reihe (1961) 114-115.
- [13] C.BERGE  
Sur une conjecture relative au problème des codes optimaux  
Commun. 13-ème Assemblée Gen. U.R.S.I., Tokyo, 1962.
- [14] C.BERGE  
Some classes of perfect graphs, in: "Graph Theory on Theore-  
tical Physics" (F. Harary, ed.), Acad. Press, New York, 1967,  
pp. 155-165.
- [15] C.BERGE  
Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1970); English transla-  
tion: Graphs and hypergraphs (North Holland, Amsterdam, 1973)
- [16] R.G.BLAND, J.EDMONDS  
Seymour's theorem and good algorithms for totally unimodular  
matrices , in preparation.
- [17] R.G.BLAND, H.C.HUANG, L.E.JR.TROTTER  
Graphical properties related to minimal imperfection,  
Discrete Math. 27. 11-22.
- [18] M.BOULALA, J.P.UHRY  
Polytopes des indépendants d'un graphe série-parallèle.  
Discrete Math. 27 (1979) 225-243.
- [19] M.BURLET, J.P.UHRY  
Parity graphs to appear. Annals of Discrete Math.

- [10] D.G.CORNEIL, H.LERCHS, L.STEWART  
Cographs : a new class of perfect graphs. To appear in  
Discrete Applied Math.
- [11] G.A.DIRAC  
On rigid circuit graphs, Abh. Math. Sen. Univ. Hamburg  
71-76. MR 24 # 57.
- [12] L.R.FORD, D.R.FULKERSON  
Flows in networks (Princeton University Press), Princeto  
N.J. 1962.
- [13] D.R.FULKERSON  
The perfect graph conjecture and the pluperfect graph  
theorem, in: Proc. 2nd Chapel Hill Conf. on Comb. Math.  
and Its Appl., Univ. of North Carolina, Chapel Hill, 1970  
pp. 171-175.
- [14] D.R.FULKERSON  
Anti-Blocking Polyhedra, J. Combinatorial Theory (B)  
12 (1972) 50-71.
- [15] T.GALLAI  
Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. Magyar  
Tud. Akad. Mat. Kutato Int. 7 (1962) A 3-36.
- [16] F.GAVRIL  
Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum  
covering by cliques, and maximum independent set of a  
chordal graph, SIAM J. Comput. 1, 180-187 .MR 48 # 5922.
- [17] R.GILES, L.E.TROTTER, Jr. A.TUCKER.  
The strong perfect graph theorem for a class of parti-  
tionable graphs.  
School of operation research and industrial engineering  
college of engineering CORNELL University. ITHACA, NEW YOR  
Technical report N<sup>o</sup>.481.

- 1181 M.C.GOLEUBIC  
Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.  
Academic Press, N.Y., New York (1980).
- 1191 G.M. GRINSTEAD  
Toroidal graphs and the strong perfect graph conjecture,  
Ph.D.thesis, UCLA.
- 1201 M.GRÖTSCHEL, L.LOVÁSZ and A.SCHRIJVER  
The ellipsoid method and its consequences in combinatorial  
optimization. To appear in *Combinatorica* 2, 1981.
- 1211 M.GRÖTSCHEL, L.LOVÁSZ, A.SCHRIJVER  
Polynomial algorithms for perfect graphs.  
Report N°. 81176 - OR. Institut für Ökonometrie und Opera-  
tions Research, Universität Bonn, W.Germany.
- 1221 WEN LIAN HSU, G.L.NEMHAUSER  
Algorithms for minimum coverings by cliques and maximum  
cliques in claw-free perfect graphs.  
Cornell University ITHACA, N.Y., Technical report  
N°.413 - April 1979.
- 1231 WEN LIAN HSU  
How to color claw-free perfect graphs.  
Cornell University ITHACA, N.Y., Technical report N°.435  
October 1979.
- 1241 L.G.KHACHIAN  
A polynomial algorithm in linear programming.  
*Doklady Akademii Nauk SSSR*, 244 (1979), 1093-1096.  
(English translation: *Soviet Math.Dokt.* 20 (1979) 191-194).
- 1251 L.LOVÁSZ  
Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture.  
*Discrete Math.* 2 (1972) 253-267.

- [26] L. LOVÁSZ  
A Characterization of Perfect Graphs, J. Combinatorial Theory (B) 13 (1972) 95-98.
- [27] H. MEYNIEL  
On the perfect graph conjecture. Discrete Math. 16 (1976) 339-342.
- [28] M. PADBERG  
Perfect zero-one matrices, Math. Programming 6 (1974) 180-196.
- [29] K. R. PARTHASARATHY, G. RAVINDRA  
The strong perfect-graph conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs, J. Combin. Theory B 21, 212-223. MR55 # 10308.
- [30] H. SACHS  
On the Berge conjecture concerning perfect graphs. Combinatorial Structure and their Applications (Gordon and Breach, New-York, 1970) 377-384.
- [31] L. SURÁNYI  
The covering of graphs by cliques. Studia Sci. Math. Hungar. 3 (1968) 345-349.
- [32] A. C. TUCKER  
The strong perfect graph conjecture for planar graphs. Canad. J. Math. 25 (1973) 103-114.
- [33] A. C. TUCKER  
Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs. J. Combinatorial Theory (B) 23 (1977) 143-149.
- [34] A. C. TUCKER  
On Berge's strong perfect graph conjecture, Ann. N. Y. Acad. Sci. 319, 530-535.

Dernière page d'une thèse

---

VU

Grenoble, le 8 9. 1981

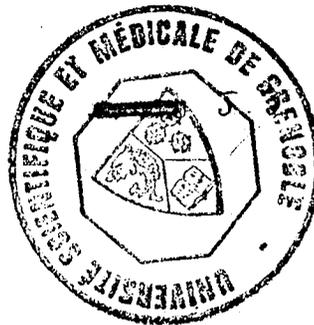
Le Président de la thèse

Nakara

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 9. 9 1981

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



PAYAN

*[Handwritten signature]*

1351 A.C.TUCKER

Circular arc graphs : new uses and a new algorithm, in  
Theory and Application of Graphs, Lecture Notes in Math.  
642 ; pp. 580-589. Springer-Verlag, Berlin.

1361 M.YANNAKAKIS

On a class of totally unimodular matrices  
Unpublished paper. Bell Laboratories Murray Hill,  
New Jersey 07974.

1371 V. CHVÁTAL

On the strong perfect graph conjecture, J. Combinatorial  
Theory (B) 20 (1976) 139-141.