



HAL
open science

Triangulations minimales des surfaces orientables et génération de graphes sup-immérgeables

Odile Chevalier

► **To cite this version:**

Odile Chevalier. Triangulations minimales des surfaces orientables et génération de graphes sup-immérgeables. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981. Français. NNT: . tel-00295230

HAL Id: tel-00295230

<https://theses.hal.science/tel-00295230>

Submitted on 11 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

et à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR INGENIEUR

(Mathématiques Appliquées)

par

Odile CHEVALIER



**TRIANGULATIONS MINIMALES
DES SURFACES ORIENTABLES
ET GENERATION DE GRAPHS SUP -IMMERGEABLES.**



Thèse soutenue le 8 décembre 1981 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	C. BENZAKEN	: Président
Messieurs	A. BOUCHET F. JAEGER J. FONLUPT F. ROBERT N.H. XUONG	} Examineurs

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle AGNIUS-DELORS Claudine
ALARY Josette

MM. AMBROISE-THOMAS Pierre

ARMAND Gilbert

BENZAKEN Claude

BIAREZ Jean-Pierre

BILLET Jean

BOUCHET Yves

BRUGEL Lucien

BUISSON René

BUTEL Jean

COHEN-ADDAD Jean-Pierre

COLOMB Maurice

CONTE René

DELOBEL Claude

DEPASSEL Roger

GAUTRON René

GIDON Paul

GLENAT René

GROULADE Joseph

HACQUES Gérard

HOLLARD Daniel

HUGONOT Robert

IDELMAN Simon

JOLY Jean-René

JULLIEN Pierre

Mme KAHANE Josette

MM. KRAKOWIACK Sacha

KUHN Gérard

LUU DUC Cuong

MICHOULIER Jean

Mme MINIER Colette

Physique pharmaceutique

Chimie analytique

Parasitologie

Géographie

Mathématiques appliquées

Mécanique

Géographie

Anatomie

Energétique (I.U.T. I)

Physique (I.U.T. I)

Orthopédie

Spectrométrie physique

Biochimie médicale

Physique (I.U.T. I)

M.I.A.G.

Mécanique des fluides

Chimie

Géologie et minéralogie

Chimie organique

Biochimie médicale

Calcul numérique

Hématologie

Hygiène et médecine préventive

Physiologie animale

Mathématiques pures

Mathématiques appliquées

Physique

Mathématiques appliquées

Physique (I.U.T. I)

Chimie organique - pharmacie

Physique (I.U.T. I)

Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD
M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

MM. SARRAZIN Pierre
 SOUQUET Jean-Louis
 TOUZAIN Philippe
 URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
 BOOS Jean-Yves
 GUILHOT Bernard
 KOBILANSKI André
 LALAUZE René
 LANCELOT François
 LE COZE Jean
 LESBATS Pierre
 SOUSTELLE Michel
 THEVENOT François
 THOMAS Gérard
 TRAN MINH Canh
 DRIVER Julian
 RIEU Jean.

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
 CHEHIKIAN Alain
 VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
 DESCHIZEAUX Pierre
 GLANGEAUD François
 JAUSSAUD Pierre
 Mme JOURDAIN Geneviève
 MM. LEJEUNE Gérard
 PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
 LATOMBE Jean-Claude
 LUCAS Michel
 VERDILLON André

Je tiens à remercier

Monsieur C. BENZAKEN, Professeur à l'Université de Grenoble, qui a accepté de présider le jury de cette thèse,

Monsieur A. BOUCHET, Professeur à l'Université du Maine,

Monsieur F. JAEGER, Chargé de Recherche au C.N.R.S.,

Monsieur J. FONLUPT, Ingénieur des Ponts,

Monsieur F. ROBERT, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble,

Monsieur N.H. XUONG, Maître-Assistant à l'Université de Grenoble, qui a su guider mes premiers pas dans la recherche sans ménager son temps, ni sa patience,

d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie également Madame NEUMANN pour la frappe de cette thèse et le Service de Reprographie pour la qualité du tirage.

	Pages
I-3 - Classification des cas	25
I-4 - Notations	27
II - Graphes de Cayley	32
II-1 - Définition	32
II-2 - Constellation réduite	34
III - Immersions triangulaires	39
IV - Immersion de K_n	43
IV-1 - Méthode de Gustin	43
IV-2 - Méthode de Youngs : les vortex	45
V - Principe de résolution	47
VI - Résultats	52
VI-1 - Remarques préliminaires	52
VI-2 - Cas 7 et 10	58
VI-3 - Cas 4 et 1	62
VI-4 - Cas 11 et 8	70
VI-5 - Cas 2	72
VI-6 - Cas 3, 5, 6 et 9	74
VI-7 - Cas 0	92
VI-8 - Conclusion	93
<u>CHAPITRE III - GENERATION DE GRAPHES SUP-IMMERGEABLES ...</u>	<u>95</u>
I - Présentation du problème	97
II - Définitions et rappels	97
II-1 - Rappels	97
II-2 - Détermination de $\gamma_M(G)$	99
II-3 - Orientation	100
III - Nouvelle caractérisation des graphes sup- immergeables	101
III-1 - Remarques préliminaires	101
III-2 - Caractérisations	102
III-3 - Remarques	108
IV - Génération des graphes s.i.	112
BIBLIOGRAPHIE	116

INTRODUCTION

L'étude des graphes topologiques remonte aux travaux d'Euler sur les polyèdres, mais ce sont des conjectures comme celle des quatre couleurs (1850?) et celle d'Heawood (1890) qui marquent le début réel de l'étude de ces graphes. Ces deux conjectures s'intéressent aux graphes "dessinés" sur une surface, c'est-à-dire pour lesquels les sommets sont des points de la surface, les arêtes des courbes simples, et deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités communes. La nature topologique du support sur lequel on réalise le dessin conduit à la notion de "graphe topologique".

La conjecture (Heawood) sur le genre du graphe complet a cédé progressivement grâce aux efforts de Ringel, Gustin et Youngs. De nouvelles théories sont apparues, qui ont permis la résolution de cette conjecture et ont conduit à étudier les propriétés algébriques des représentations topologiques des graphes. La théorie des graphes quotient de Gustin a été modifiée par Youngs, qui a introduit la notion de vortex. Cette théorie, beaucoup plus générale que ce que nécessitait la résolution de la conjecture de Heawood sur le chromatisme des surfaces, a été développée et unifiée par Jacques, qui a introduit les notions de constellation quotient et constellation réduite.

Le chapitre I est consacré à quelques rappels sur les graphes topologiques et les propriétés algébriques des constellations; on y introduit les surfaces à l'aide du concept combinatoire de complexe cellulaire, ce qui permet dans toute la suite de ne pas faire appel, au cours des démonstrations, aux notions topologiques.

Le chapitre II porte sur l'étude de triangulations minimales de surfaces orientables: déterminer le nombre de points minimum nécessaires pour trianguler une surface orientable d'un genre donné. Ce problème est fortement lié à celui du

genre du graphe complet (puisque K_n triangule la surface de genre $\gamma(K_n)$ pour $n \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$), et les théories de Gustin, Youngs et Jacques ont permis de le résoudre partiellement. Après une étude des constellations dans le cas des triangulations, nous donnons une méthode permettant de trouver de nouvelles triangulations minimales de surfaces orientables.

Le chapitre III présente une étude d'une classe particulière de graphes, pour lesquels le nombre minimum de faces d'une immersion 2-cellulaire dans une surface orientable est 1 ou 2: les graphes sup-immérgeables. A partir de la caractérisation de ces graphes obtenue par N.H.Xuong et M.Jungerman, et à l'aide du concept d'orientation, nous donnons d'autres caractérisations permettant de générer ces graphes sup-immérgeables. Ce travail a été fait en commun avec C. Payan, F. Jaeger et N.H. Xuong.

CHAPITRE I

DEFINITIONS GENERALES - GRAPHS - SURFACES - IMMERSIONS

I - GRAPHES

Un graphe G est un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble fini non vide (appelé ensemble des sommets de G) et $E(G)$ une famille de parties à deux éléments de $V(G)$ (appelé ensemble des arêtes de G).

G est orienté si pour toute arête de $E(G)$ on a mis un ordre sur ses extrémités.

Un graphe G est dit simple si $E(G)$ est un ensemble de parties à deux éléments distincts de $V(G)$.

Pour toutes les autres définitions, se référer à [1].

Dans toute la suite, on notera :

$$n = |V(G)|$$

$$m = |E(G)|$$

Le nombre de Betti d'un graphe G connexe, noté $\beta(G)$, est défini par

$$\beta(G) = m - n + 1.$$

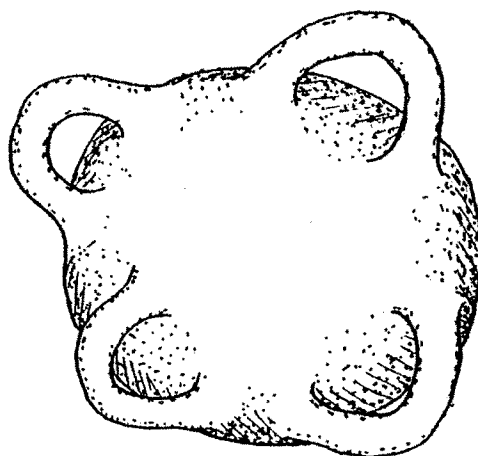
II - SURFACES

II-1 - D'un point de vue topologique, une surface est une variété compacte à deux dimensions, c'est à dire localement homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux surfaces orientables.

Plus simplement, appelons S_p une sphère à laquelle on a ajouté p anses -ou prenons un morceau de gruyère avec p trous-. S_p est l'image d'une surface orientable de genre p .

Selon cette notation, S_0 désigne la sphère et S_1 le tore. La figure 1 nous montre une sphère avec 4 anses, donc une surface de genre 4.



II-2 - D'un point de vue combinatoire, il existe plusieurs variétés de définitions d'une surface, à partir de concepts combinatoires différents, suivant l'étude envisagée.

Nous définissons ici les surfaces à partir des complexes cellulaires.

II-2-1 - On appelle complexe cellulaire tout triplet $K = (\Sigma, \delta, \phi)$ où :

- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots\}$ est un ensemble fini non vide dont les éléments sont nommés arcs. Dans Σ est donnée une involution sans point fixe notée $a \longleftrightarrow a'$. Les deux arcs a et a' sont dits opposés.

- $\Phi = \{f_1, f_2, \dots\}$ est un ensemble fini non vide dont les éléments s'appellent facettes. Φ est muni d'une involution sans point fixe notée $f \longleftrightarrow f'$. Les deux facettes f et f' sont dites opposées.

- δ est une application de Φ dans $S(\Sigma)$, l'ensemble des mots circulaires de Σ . $\delta(f)$ est le bord de f .

On appelle arête de K toute paire d'arcs opposés et on note $A = \{a, a'\}$. $E(K)$ est l'ensemble des arêtes de K .

Toute paire de facettes opposées constitue une face de K , que l'on note $F = \{f, f'\}$.

Tout complexe cellulaire défini comme ci-dessus vérifie les trois conditions suivantes :

C1 : Si $\delta(f) = a_1 a_2 \dots a_k$ alors $\delta(f') = a'_k a'_{k-1} \dots a'_2 a'_1$ ($k \geq 1$).

C2 : Chaque arc figure exactement deux fois dans la famille des bords $\{\delta(f_i) / f_i \in \Phi\}$.

C3 : K ne peut pas s'exprimer comme union disjointe de deux complexes cellulaires.

II-2-2 - Etant donné un mot circulaire $a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_k$ ($k \geq 1$) le successeur de a_i est $a_{i+1} \pmod k$.

Dans la famille des bords des facettes de K , chaque arc admet deux successeurs qui constituent sa paire de successeurs.

Un mot circulaire $a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_k$ ($k \geq 1$) appartenant à $S(\Sigma)$ est dit admissible si, pour tout i , la paire de successeurs de a_i est $\{a_{i-1}, a_{i+1}\}$. Si un mot $a_1 \dots a_k$ est admissible, alors son inverse $a_k \dots a_2 a_1$ l'est aussi.

On appelle sommet de K , une paire de mots circulaires admissibles dont l'un est l'inverse de l'autre, que l'on note :

$$x = \{a_1 a_2 \dots a_k, a_k \dots a_2 a_1\}$$

On note K_0 l'ensemble des sommets de K .

Un arc a_i figurant dans le second membre est dit entrant dans le sommet x et son opposé a'_i est un arc sortant de x

On montre alors que :

Proposition 1 : Tout mot circulaire admissible de $S(\Sigma)$ est une permutation circulaire de Σ .

Proposition 2 : Tout arc est entrant dans un sommet unique.

On peut alors définir

Le squelette d'un complexe cellulaire K est le graphe

$$K_1 = (K_0, E(K))$$

où une arête $A = \{a, a'\}$ est incidente à un sommet x si et seulement si a ou a' est un arc entrant en x .

Chaque arête étant incidente à deux sommets au plus, K_1 est bien un graphe.

II-2-3 - Orientabilité

Une orientation d'un complexe cellulaire K est la donnée de la famille des couples ordonnés de bords opposés.

K est dit orientable lorsqu'il existe une orientation telle que tout arc apparaît exactement une fois dans l'ensemble des bords figurant en première position de chaque couple.

Dans toute la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux complexes cellulaires orientables.

II-2-4 - Classification des complexes cellulaires

Soient K un complexe cellulaire et $F = \{f, f'\}$ une face de K .

Supposons $\delta(f) = a_1 a_2 \dots a_i \dots a_k$ et $\delta(f') = a'_k \dots a'_i \dots a'_2 a'_1$

On définit les opérations suivantes :

- S1 : Remplacer dans tous les bords où ils apparaissent a_i et a'_i par $b_i c_i$ et $c'_i b'_i$ respectivement (b_i, c_i, b'_i, c'_i sont de nouveaux arcs).
- S2 : Remplacer une face $F = \{f, f'\}$ par deux nouvelles faces $F_1 = \{f_1, f'_1\}$ et $F_2 = \{f_2, f'_2\}$ en introduisant deux nouveaux arcs opposés b et b' , avec $\delta(f_1) = a_1 a_2 \dots a_i b$, $\delta(f_2) = b' a_{i+1} \dots a_k$ donc $\delta(f'_1) = b' a'_1 \dots a'_2 a'_i$ et $\delta(f'_2) = a'_k \dots a'_{i+1} b$.

R1 et R2 sont les opérations inverses (nommées réductions) de S1 et S2 (nommées subdivisions) respectivement.

On remarque que l'orientabilité est conservée par ces opérations de subdivisions et réductions élémentaires.

Deux complexes cellulaires sont dits équivalents lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par l'application d'une suite finie de subdivisions et de réductions élémentaires.

Considérons les complexes cellulaires suivants :

$$M_0 : \Sigma_0 = \{a, a'\}$$

$$\phi_0 = \{f, f'\}$$

$$\delta(f) = a a' \quad \delta(f') = a a'$$

$$M_g \ (g \in \mathbb{N}^*) : \Sigma_g = \{a_1, a'_1, \dots, a_g, a'_g, b_1, b'_1, \dots, b_g, b'_g\}$$

$$\phi_g = \{f, f'\}$$

$$\delta(f) = a_1 b_1 a'_1 b'_1 a_2 b_2 a'_2 b'_2 \dots a_g b_g a'_g b'_g$$

$$\delta(f') = b_g a_g b'_g a'_g \dots b_2 a_2 b'_2 a'_2 b_1 a_1 b'_1 a'_1$$

On a alors le

Théorème : Tout complexe cellulaire orientable est équivalent à un M_g ($g \geq 0$).

On définit alors la caractéristique d'Euler d'un complexe cellulaire K par :

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2$$

où

$$n_0 = \text{nombre de sommets} = \text{card}(K_0)$$

$$n_1 = \text{nombre d'arêtes} = 1/2 \text{ card}(\Sigma)$$

$$n_2 = \text{nombre de faces} = 1/2 \text{ card}(\Phi)$$

qui est un invariant combinatoire, c'est à dire identique pour tous les complexes cellulaires d'une même classe d'équivalence.

II-2-5 - Surface

On appelle surface S une classe d'équivalence de complexes cellulaires.

On dira que la surface S est sous-jacente au complexe cellulaire K (choisi dans la classe d'équivalence), lequel recouvre S .

La surface S est parfaitement définie par son orientabilité et sa caractéristique, qui est celle d'un (et donc de tout) complexe cellulaire la recouvrant.

On pose $\chi(S) = 2-2g$

g est appelé genre de la surface S .

g s'interprète topologiquement comme le nombre d'anses de la surface S (cf. 2-1).

II-2-6 - Constellation

Ce concept de complexe cellulaire est à relier à celui de constellation introduit pour la première fois dans [10].

En effet on a le

Théorème : La donnée d'un complexe cellulaire orientable $K = (\Sigma, \delta, \phi)$ équivaut à la donnée d'un triplet $C = (\Sigma, \alpha, \phi)$ appelé constellation où α est une involution et ϕ une permutation de Σ .

Considérons un complexe cellulaire $K = (\Sigma, \delta, \phi)$.

Chaque arc de Σ figure exactement deux fois dans la famille des bords $\{\delta(f_1) \mid f_1 \in \Phi\}$. Il existe donc un ensemble Ω_1 de bords dans lequel chaque arc de Σ figure exactement une fois. Par conséquent, chaque bord appartenant à Ω_1 représente une permutation circulaire de Σ .

La permutation ϕ est définie comme le produit de toutes ces permutations circulaires. L'involution α est celle donnée par le complexe cellulaire.

On obtient ainsi une constellation $C = (\Sigma, \alpha, \phi)$.

Inversement soit Σ un ensemble fini muni d'une involution α sans point fixe.

Considérons une permutation ϕ de Σ dont la décomposition en produit de permutations circulaires s'écrit :

$$\phi = \Pi(\phi_i)$$

A chaque ϕ_i faisons correspondre la permutation ϕ'_i qui s'obtient en remplaçant dans ϕ_i^{-1} l'inverse de ϕ_i - chaque élément a de Σ par son opposé $a' = \alpha(a)$. A tout couple (ϕ_i, ϕ'_i) on associe un couple (f_i, f'_i) dont les éléments appartiennent à un ensemble Φ muni d'une involution $f \rightarrow f'$.

On pose

$$\delta(f_i) = \phi_i$$

$$\delta(f'_i) = \phi'_i.$$

En supposant, comme nous le ferons dans toute la suite, que le groupe engendré par ϕ et α est transitif, le triplet $K = (\Sigma, \delta, \phi)$ vérifie les axiomes d'un complexe cellulaire orientable.

III - INTERVALLE D'IMMERSION D'UN GRAPHE

Etant donné un graphe G et une surface S , se pose la question suivante : Peut-on "dessiner" G sur la surface S de sorte que les arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités ?

III-1 - Immersion d'un graphe dans une surface

Un graphe G est dit immergeable dans une surface S si G est équivalent à un sous-graphe partiel du squelette K_1 d'un complexe cellulaire K recouvrant S .

Une immersion est donc la donnée du triplet (G, K, S) . Elle est dite squelettique ou 2-cellulaire lorsque G est isomorphe au squelette K_1 de K .

Géométriquement, lorsqu'un graphe a une immersion squelettique dans une surface, il divise cette dernière en plusieurs régions lesquelles sont homéomorphes à un disque ouvert. On parle alors d'immersion 2-cellulaire.

Youngs, dans [25], a été le premier à s'intéresser aux immersions minimales, c'est à dire, telles qu'il n'existe pas d'immersion du graphe considéré dans une surface de caractéristique supérieure. Ces immersions sont caractérisées par le

Théorème [25] : Une immersion est minimale si et seulement si c'est une immersion 2-cellulaire maximale.

(Une immersion 2-cellulaire est dite maximale si son nombre de faces est supérieur à celui de toute autre immersion 2-cellulaire).

Dans [24], N.H. Xuong exprime en termes combinatoires cette notion d'immersion minimale :

Un graphe est dit inf-immmergeable dans S s'il est immergeable dans S mais non dans toute surface de caractéristique strictement supérieure à celle de S .

Les immersions d'un graphe inf-immmergeable sont caractérisées par les propositions suivantes :

Proposition 1 [25] : Un graphe G est inf-immmergeable dans une surface S de caractéristique χ si et seulement si :

- il existe une immersion squelettique de G dans S ;
- il n'existe pas d'immersion squelettique de G dans une surface de caractéristique $\chi' > \chi$.

Proposition 2 [24] : Si un graphe G est inf-immmergeable dans une surface S , alors toute immersion de G dans S est squelettique.

Ces résultats justifient l'intérêt qu'on porte à la classe des immersions 2-cellulaires (ou squelettiques).

Considérons une immersion 2-cellulaire d'un graphe G : (G, K, S) . Nous avons

$$\chi(S) = \chi(K)$$

$$2 - 2g = n_0 - n_1 + n_2$$

soit

$$2 - 2g = n - m + f$$

où f est le nombre de faces de l'immersion.

III-2 - Genre d'un graphe

On appelle genre d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, le plus petit entier ≥ 0 pour lequel G est immergeable dans une surface de genre $\gamma(G)$.

Le genre $\gamma(G)$ de G peut être caractérisé par le

Théorème [25] : Un graphe G est de genre γ si et seulement si toute immersion de G dans une surface S de genre γ est 2-cellulaire.

Ce théorème de caractérisation ne donne malheureusement pas de méthode pour trouver la surface de genre minimum où un graphe admet une immersion 2-cellulaire, et donc de résoudre le problème de la détermination du genre γ d'un graphe. Cependant, il a permis à Youngs, dans [25], dans le cas des triangulations, d'obtenir le

Théorème : Si G est le squelette d'une triangulation d'une surface orientable de genre g , alors $\gamma(G) = g$.

III-3 - Genre maximum

On appelle genre maximum d'un graphe G , noté $\gamma_M(G)$, le maximum du genre des surfaces dans lesquelles G admet une immersion 2-cellulaire.

N.H. Xuong, dans [23], a déterminé le genre maximum γ_M d'un graphe G à l'aide d'un nouvel invariant combinatoire ξ appelé déficience de Betti (cf. Ch. III).

Dans [5], en utilisant la technique d'immersion dans les surfaces orientables due à Heffter et Edmonds, Duke a démontré que si un graphe G admet des immersions squelettiques dans des surfaces de genre g_1 et g_2 ($g_1 \leq g_2$) alors pour tout entier g tel que $g_1 \leq g \leq g_2$ il existe une immersion squelettique de G dans une surface de genre g .

On appelle alors intervalle d'immersion d'un graphe G l'intervalle :

$$I(G) = [\gamma(G), \gamma_M(G)].$$

IV - TECHNIQUES D'IMMERSION D'UN GRAPHE DANS UNE SURFACE

IV-1 - Rotations

Soit G un graphe connexe. Construisons un graphe orienté \vec{G} en mettant une flèche sur chaque arête de G . A chaque arc A_i de \vec{G} faisons correspondre une paire d'étiquettes $\{a_i, a'_i\}$ avec les conventions suivantes :

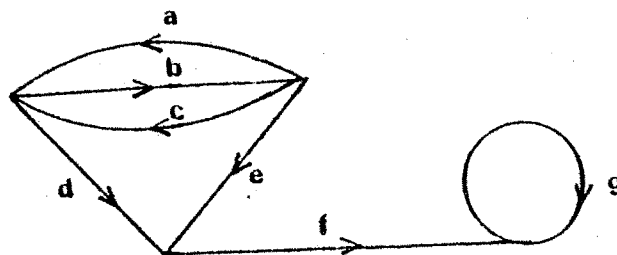
- la correspondance est bi-univoque,
- si a_i est l'étiquette de l'arc A_i parcouru dans le sens de la flèche alors a'_i sera celle du même arc parcouru dans le sens opposé.

Dans la suite, nous désignerons par :

- Σ l'ensemble des a_i et des a'_i . Σ est appelé ensemble des arcs.
- α l'application qui associe a'_i à a_i . C'est une involu-
tion sans point fixe de Σ .

Par définition, une rotation de G est une permutation ρ de Σ telle que chaque orbite de ρ est une permutation circulaire des arcs entrant dans un sommet de G (voir [19]).

Exemple :



$$\rho = (a'b'cd')(abc'e')(df'e)(fg'g)$$

On pose : $\sigma = \alpha\rho$

(donc $\rho = \alpha\sigma$ car α est une involution)

$||\sigma||$ = nombre d'orbitres de σ .

Heffter et Edmonds ([6]) ont montré le

Théorème : Un graphe G a une immersion 2-cellulaire dans une surface orientable de genre γ si et seulement si G admet une rotation ρ telle que

$$n - m + ||\alpha\rho|| = 2 - 2\gamma$$

Il est donc équivalent de chercher les immersions 2-cellulaires et les rotations. Mais il est plus facile de travailler sur ces dernières car visualiser ce qui se passe sur une surface de genre g pour $g > 2$ est mal aisé.

IV-2 - Constellations

Toute immersion 2-cellulaire d'un graphe G dans une surface orientable de genre γ est donc caractérisée par la donnée, en chaque sommet, d'une permutation circulaire des arêtes incidentes à ce sommet. On lui associe le triplet (Σ, α, σ) . On retrouve le concept de constellation, associé à celui du complexe cellulaire à partir duquel nous avons défini les surfaces.

D'une façon générale, les classes de transitivité du groupe $[\sigma, \alpha]$ des permutations engendrées par σ et α définissent les composantes connexes du graphe associé à la constellation (Σ, α, σ) [10]. Dans toute la suite, nous ne considérerons que des graphes connexes, donc le groupe $[\sigma, \alpha]$ sera transitif.

Toute immersion 2-cellulaire d'un graphe G dans une surface de genre γ permet de définir un graphe dual [19]. Les faces de l'immersion peuvent aisément être obtenues sur la constellation $C = (\Sigma, \alpha, \sigma)$: leurs bords sont les orbitres de la permutation $\phi = \sigma\alpha$. On montre que la constellation

associée à ce graphe dual est $C^* = (\Sigma, \alpha, \phi)$, et que l'on a une dualité puisque $\sigma = \phi\alpha$.

On appellera donc constellation duale de la constellation $C = (\Sigma, \alpha, \sigma)$ la constellation $C^* = (\Sigma, \alpha, \phi = \sigma\alpha)$.

Soit $C = (\Sigma, \alpha, \sigma)$ une constellation.

L'ensemble Σ muni des trois opérations unaires $\sigma, \bar{\sigma}$ et α liées par les identités

$$\begin{aligned}\alpha \alpha x &= x \\ \sigma \bar{\sigma} x &= \bar{\sigma} \sigma x = x\end{aligned}$$

a une structure d'algèbre, ce qui permet d'introduire les concepts habituels de sous-algèbre, algèbre quotient, homomorphisme, etc... .

La constellation C est monogène si et seulement si le groupe de permutations $[\sigma, \alpha]$ engendré par σ et α est transitif. Nous avons vu plus haut que puisque les graphes étudiés sont connexes, $[\sigma, \alpha]$ est un groupe transitif. Donc toutes les constellations seront ici monogènes.

CHAPITRE II

TRIANGULATIONS MINIMALES DE SURFACES ORIENTABLES

I - INTRODUCTION AU PROBLEME

I-1 - Problème considéré

Considérons un graphe G simple et sans boucle qui triangule une surface S de genre g .

On a la formule d'Euler :

$$n - m + f = 2 - 2g$$

où

$n = |V(G)|$ est le nombre de sommets de G

$m = |E(G)|$ est le nombre d'arêtes de G

f est le nombre de faces de l'immersion de G dans S .

Comme c est une triangulation

$$3f = 2m$$

donc

$$n = 2 - 2g + m - f = 2 - 2g + \frac{m}{3}$$

or

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$m = 3n - 6 + 6g \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) \geq 6n - 12 + 12g$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 7n + 12 - 12g \geq 0 \quad (1)$$

Les deux racines de l'équation $n^2 - 7n + 12 - 12g = 0$ sont

$$\alpha_0 = \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2}$$

et

$$\alpha_1 = \frac{7 - \sqrt{1 + 48g}}{2}$$

Dès que $g \geq 1$, $\alpha_1 \leq 0$

Pour $g \geq 1$ (1) $\Leftrightarrow n \geq \alpha_0 = \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2}$

Le problème auquel nous nous intéressons ici est le suivant :

Etant donnée une surface S de genre g fixé, quel est le nombre minimum de points nécessaires pour trianguler S , c'est à dire quel est le nombre minimum n de sommets que peut avoir un graphe G simple et sans boucle admettant une immersion triangulaire dans S ?

Nous venons de voir que $n \geq n_0 = \lceil \alpha_0 \rceil = \lceil \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \rceil$

où $\lceil r \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal au réel r .

D'où la conjecture, due à Xuong et probablement d'autres :

Le nombre minimum de sommets $n(g)$ d'un graphe triangulant une surface orientable de genre $g > 1$ est

$$n(g) = n_0(g) = \lceil \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \rceil$$

Mais, en 1975, J.P. Huneke a montré le

Théorème [9] : Aucun sous-graphe de K_9 ne triangule S_2 , la surface orientable de genre 2.

Ce qui signifie que pour $g = 2$ $n \geq 10 = n_0(2)+1$. Autrement dit, la conjecture n'est pas vérifiée pour le cas $g = 2$.

L'objet de ce chapitre est de déterminer les valeurs de g pour lesquelles on a $n(g) = n_0(g)$.

I-2 - Relation avec la détermination du genre de K_n

Proposition 1 : Si K_n triangule une surface S de genre g , alors

$$n = n_0(g).$$

Démonstration :

Le fait qu'on ait une triangulation nous donne la relation

$$n = 2 - 2g + \frac{m}{3}$$

Le graphe considéré étant complet, $m = \frac{n(n-1)}{2}$ donc n vérifie l'équation

$$n = 2 - 2g + \frac{n(n-1)}{6} \iff n^2 - 7n + 12 - 12g = 0$$

Comme $n \geq 0$, cela nous donne

$$n = \alpha_0 = \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} = n_0(g) \quad \square$$

La démonstration de la conjecture sur le genre du graphe complet

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

a donné lieu à de nouvelles méthodes d'immersions des graphes à partir de théories s'appuyant sur les graphes de Cayley et les graphes quotients. Elle a aussi amené au

Théorème [19] : K_n admet une immersion triangulaire $\iff n \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$.

Ce théorème et la proposition 1 nous assurent donc que l'on a $n = n_0(g)$ pour tout g de la forme $g = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$ avec $n \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$.

Dans les cas où K_n n'admet pas d'immersion triangulaire dans une surface orientable, Ringel et Youngs ont cherché à déterminer son genre à partir d'immersions triangulaires de graphes "proches de K_n ", i.e. isomorphes à K_n moins quelques arêtes.

On notera $K_n - t$ le graphe obtenu à partir de K_n en supprimant t arêtes.

En particulier, suivant la notation de Ringel, lorsque les arêtes forment un graphe complet à v sommets, on notera $K_n - K_v$.

Cette démarche suggère alors la proposition suivante, analogue à la proposition 1 :

Proposition 2 : Si K_n -t triangule une surface S de genre $g \geq 2$, alors ($t \leq 4 \Rightarrow n = n_0(g)$). Autrement dit, pour cette valeur de g , $n(g) = n_0(g)$.

Démonstration :

$$K_n$$
-t triangule $S_g \Rightarrow n = 2 - 2g + \frac{m}{3}$

$$\text{ici, } m = \frac{n(n-1)}{2} - t, \text{ d'où :}$$

$$n = 2 - 2g + \frac{n(n-1)}{6} - \frac{t}{3}$$

$$\text{ou } n^2 - 7n + 12 - 12g - 2t = 0$$

La solution positive de cette équation est

$$n = \frac{7 + \sqrt{1 + 48g + 8t}}{2}$$

vérifions que l'on a $n = n_0(g)$

$$n = n_0(g) \iff \frac{7 + \sqrt{1 + 48g + 8t}}{2} = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil$$

ce qui équivaut à

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 48g + 8t}}{2} < \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} + 1$$

soit

$$\sqrt{1 + 48g} \leq \sqrt{1 + 48g + 8t} < \sqrt{1 + 48g + 2}$$

La première inégalité est vraie pour tout $t \geq 0$

La seconde équivaut à

$$1 + 48g + 8t < 1 + 48g + 4 + 4\sqrt{1 + 48g}$$

c'est à dire

$$t < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 48g})$$

Or $\sqrt{1 + 48g}$ est une fonction croissante de g .

et dès que $g \geq 2$ on a $1 + \sqrt{1+48g} > 10$

Autrement dit, dès que $g \geq 2$, $\frac{1}{2} \sqrt{1+48g} > 5$.

Ce qui démontre la proposition. \square

Remarques :

1 - On a en fait une proposition similaire où t est fonction de g :

Si K_n - t triangule une surface de genre g , alors

$$(t < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+48g}) \Rightarrow n = n_0(g))$$

2 - La condition $t \leq 4$ a été prise par analogie aux résultats de Ringel et Youngs, que l'on voit dans la suite, sur les immersions des graphes K_n - K_2 et K_n - K_3 .

I-3 - Classifications des cas

Considérons un graphe $G = K_n$ - t admettant une immersion triangulaire dans une surface de genre g .

Nous avons alors $m = 3n-6+6g$ et la formule d'Euler nous donne :

$$(n-3)(n-4) = 12g + 2t \equiv 2t \pmod{12}$$

ce qui donne 4 groupes de cas :

a - $n \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$

alors $t \equiv 0 \pmod{6}$

b - $n \equiv 2$ ou $5 \pmod{12}$

alors $t \equiv 1 \pmod{6}$

c - $n \equiv 1, 6, 9$ ou $10 \pmod{12}$

alors $t \equiv 3 \pmod{6}$

d - $n \equiv 8$ ou $11 \pmod{12}$

alors $t \equiv 4 \pmod{6}$.

Cette classification nous permet d'obtenir quelques résultats immédiats :

Cas a : Pour $t = 0$, la proposition 1 nous a donné des valeurs de n pour lesquelles $n(g) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil$

Cas b : Prenons $t = 1$.

Ringel a donné une immersion triangulaire de $K_n - K_2$ pour $n \equiv 5 \pmod{12}$, et Ringel et Youngs [21] ont fait de même pour $n \equiv 14 \pmod{12}$, soit $n = 12s + 2$ avec s impair. En 1974, Jungermann [11] a résolu le cas restant $n \equiv 2 \pmod{24}$. On a donc le

Théorème : $K_n - K_2$ admet une immersion triangulaire $\iff n \equiv 2$ ou $5 \pmod{12}$.

Mais $K_n - K_2$ est le graphe K_n auquel on a enlevé $t = 1$ arête. Nous avons donc dans ce cas $n = n_0(g)$.

Nous aurons donc $n(g) = n_0(g)$ pour les surfaces où $K_n - K_2$ admet une immersion triangulaire soit

$$g = \frac{(n-3)(n-4)-2}{12}$$

avec $n \equiv 2$ ou $5 \pmod{12}$.

Cas c : Prenons $t = 3$

Ringel [19] et Youngs [28] ont montré le

Théorème : Soit $n \geq 21$. Le graphe $K_n - K_3$ admet une immersion triangulaire dans une surface orientable si et seulement si

$$n \equiv 1, 6, 9 \text{ ou } 10 \pmod{12}.$$

Nous avons donc $n(g) = n_0(g)$ pour les surfaces où

$K_n - K_3$ admet une immersion triangulaire, soit

$$g = \frac{(n-3)(n-4)-6}{12} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} n \geq 21 \\ \text{et} \\ n \equiv 1, 6, 9 \text{ ou } 10 \pmod{12} \end{array}$$

Cas d : Dans [19], Ringel donne, dans la construction de l'immersion de K_{12s+11} , une immersion triangulaire de $K_{12s+11} - K_5$.

De même, il a montré qu'il existe une immersion triangulaire de $K_{12s+8} - K_5$. En résumé, $n \equiv 8$ ou $11 \pmod{12} \Rightarrow \exists$ une immersion triangulaire de $K_n - K_5$. On remarque que le nombre d'arêtes de K_5 est 10.

Pour $g \geq 8$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+48g}) \geq 10 = t$

D'après la remarque 1 du 1-2, $n = n_0(g)$.

Nous avons donc l'égalité $n(g) = n_0(g)$ dans les cas

$$g = \frac{(n-3)(n-4)-20}{12} \quad \text{pour } n \equiv 8 \pmod{12}$$

$$g = \frac{(n-3)(n-4)-16}{12} \quad \text{pour } n \equiv 11 \pmod{12}$$

On ne sait malheureusement rien sur l'immersion triangulaire, possible de $K_n - 4$.

I-4 - Notations

Rappelons que pour tout entier g nous avons posé $n_0(g) = \left\lceil \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rceil$ Pour tout entier i ($0 \leq i \leq 11$), et $s \geq 0$, nous noterons : $g_s^i = \max(g / n_0(g) = 12s+i)$

Cette notation est en accord avec la classification précédente des cas en fonction de la congruence de n modulo 12.

Proposition 3 : Soit $n = 12s+i$ ($0 \leq i \leq 11$) un entier

Si $K_n - t$ triangule une surface de genre g alors :

$$(t \leq 5 \Rightarrow g_s^i = g).$$

Démonstration

On a, d'après le calcul fait dans la démonstration de la Proposition 2 :

$$n = 12s + i = \frac{7+\sqrt{1+48g+8t}}{2} \geq \left\lceil \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rceil \quad (1)$$

D'autre part, il découle de la définition de g_s^i que

$$n = 12s + i = \left\lceil \frac{7+\sqrt{1+48g_s^i}}{2} \right\rceil < \left\lceil \frac{7+\sqrt{1+48(g_s^i+1)}}{2} \right\rceil \quad (2)$$

(1) et (2) donnent

$$g \leq g_s^i$$

Supposons que $g \leq g_s^i - 1$. Dans ce cas, (1) donne

$$n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 48(g_s^i - 1) + 8t}}{2} \quad (3)$$

(2) et (3) donnent alors :

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 48g_s^i}}{2} \leq n \leq \frac{7 + \sqrt{1 + 48(g_s^i - 1) + 8t}}{2}$$

D'où :

$$0 \leq 8(t-6)$$

Ce qui est impossible dès que $t \leq 5$. \square

Proposition 4 : Les g_s^i ont les valeurs suivantes, pour $i \neq 8$, $i \neq 11$ et $12s+i \geq 19$.

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad g_s^0 = 12s^2 - 7s + 1 \\ i = 1 & \quad g_s^1 = 12s^2 - 5s \\ i = 2 & \quad g_s^2 = 12s^2 - 3s \\ i = 3 & \quad g_s^3 = 12s^2 - s \\ i = 4 & \quad g_s^4 = 12s^2 + s \\ i = 5 & \quad g_s^5 = 12s^2 + 3s \\ i = 6 & \quad g_s^6 = 12s^2 + 5s \\ i = 7 & \quad g_s^7 = 12s^2 + 7s + 1 \\ i = 9 & \quad g_s^9 = 12s^2 + 11s + 2 \\ i = 10 & \quad g_s^{10} = 12s^2 + 13s + 3 \end{aligned}$$

et pour ces valeurs

$$n(g) = n_o(g) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil$$

Démonstration

Pour $n \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$, (cas a), K_n admet une immersion triangulaire, ce qui donne les valeurs de g_s^0, g_s^3, g_s^4 et g_s^7 pour tout $s \geq 1$, qui vérifient, d'après les propositions 2 et 3, $n(g) = n_0(g)$.

Pour $n \equiv 2$ ou $5 \pmod{12}$ (cas b), $K_n - K_2$ admet une immersion triangulaire, d'où les valeurs de g_s^2 et g_s^5 , pour tout $s \geq 1$, pour lesquelles nous avons l'égalité $n(g) = n_0(g)$.

Pour $n \equiv 1, 6, 9$ ou $10 \pmod{12}$ (cas c), si $n \geq 21$, $K_n - K_3$ admet une immersion triangulaire, d'où g_s^1, g_s^6, g_s^9 et g_s^{10} , pour lesquels nous avons l'égalité $n(g) = n_0(g)$.

Ce qui donne le résultat pour tous i, s tels que $12s+i \geq 13$. \square

Remarque :

Pour $n \equiv 8$ ou $11 \pmod{12}$, le seul résultat dont nous disposons est que $K_n - K_5$ admet une immersion triangulaire, sur une surface de genre h_s^1 donc

$$g_s^8 \geq h_s^8 = 12s^2 + 9s$$

$$g_s^{11} \geq h_s^{11} = 12s^2 + 15s + 3$$

Cependant, on peut raisonnablement dans ces deux cas faire la conjecture

$$g_s^i = h_s^i + 1$$

En effet $K_n - K_5$ a 10 arêtes de moins que K_n . Nous sommes ici dans le cas d, où $t \equiv 4 \pmod{6}$. Nous pouvons donc supposer l'existence d'une immersion triangulaire pour le graphe G obtenu à partir de K_n en enlevant $t = 4$ arêtes. Si elle existe, cette immersion sera dans une surface de genre $g = h_s^i + 1$.

Les valeurs de g_s^i ont été déterminées pour i et s tels que $12s+i \geq 13$.

Pour les valeurs telles que $12s+i < 19$, nous pouvons cependant établir les résultats suivants :

. $i = 0, 3, 4$ ou 7 , K_{12s+i} admet une immersion triangulaire pour tout $s \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } g_1^0 &= 12s^2 - 7s + 1 = 6 & g_0^7 &= 12s^2 + 7s + 1 = 1 \\ g_1^3 &= 12s^2 - s = 11 \\ g_1^4 &= 12s^2 + s = 13 \end{aligned}$$

vérifient $n(g) = n_0(g)$.

. $i = 2$ ou 5 , $K_{12s+i} - K_2$ admet une immersion triangulaire pour tout $s \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } g_1^2 &= 12s^2 - 3s = 9 \\ g_1^5 &= 12s^2 + 3s = 15 \end{aligned}$$

vérifient $n(g) = n_0(g)$.

. $i = 10$, il existe une immersion triangulaire de $K_{10} - K_3$.

$$g_0^{10} = 12s^2 + 13s + 3 = 3$$

Pour déterminer la valeur de g_s^i pour tout $s > 0$, il est donc raisonnable de faire la conjecture suivante pour les cas $i = 6$ et $i = 1$.

$$\begin{aligned} g_1^6 &= 12s^2 + 5s = 17 \\ g_1^1 &= 12s^2 - 5s = 7 \end{aligned}$$

Les g_s^i vérifient les conditions suivantes :

C1 : $\forall s > 0, \forall i, j \leq 11, i > j \iff g_s^i > g_s^j$

C2 : $\forall s > 0, g_s^{11} < g_{s+1}^0$

D'où l'équivalence suivante :

$$\forall i, j \quad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq 11 \\ 0 \leq j \leq 11 \end{array} \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$$
$$g_{s_1}^i > g_{s_2}^j \iff s_1 > s_2 \text{ ou } (s_1 = s_2 \text{ et } i > j)$$

Pour que l'on ait $n(g) = n_0(g)$ pour tout $g > 2$, il reste donc à montrer deux choses :

. Pour $i = 8$ ou 11 , $g_s^i = h_s^i + 1$ pour tout $s > 0$

$$g_1^6 = 17, \quad g_1^1 = 7$$

. Pour tout g $g_s^i < g \leq g_s^{i+1} \iff n(g) = n(g_s^{i+1})$

C'est à ce deuxième problème que nous nous sommes intéressés.

A partir des immersions connues sur les surfaces de genre g_s^i , peut on déduire des immersions triangulaires sur des surfaces de genre $g_s^i - 1$, puis $g_s^i - 2$, etc... .

Nous allons dans un premier temps voir comment ces immersions triangulaires ont pu être trouvées par Gustin, Youngs, Ringel, etc..., par des méthodes utilisant les graphes de Cayley et les graphes quotients, puis nous verrons dans quels cas nous avons pu en déduire des immersions triangulaires dans des surfaces de genre inférieur.

II - GRAPHES DE CAYLEY

Dû à Cayley, le concept de graphe associé à un groupe a été essentiellement utilisé dans l'étude des graphes définis en termes de générateurs et relations : Coxeter et Moser [4], Burnside [3].

Les propriétés de régularité de ces groupes (ORE [17]) jouent un rôle déterminant pour leurs immersions (Gustin [7]). L'intérêt, pour cette étude, des représentations topologiques des graphes de Cayley est lié à la conjecture sur le genre du graphe complet (Ringel [21] et Youngs [26]).

II-1 - Définition : On appelle graphe de Cayley d'un groupe Γ par rapport à un sous-ensemble Δ de Γ le graphe défini de la façon suivante :

- L'ensemble des sommets est l'ensemble des éléments du groupe Γ .
- Soient h et h' deux éléments de Γ (et donc deux sommets du graphe de Cayley). (h, h') est un arc si et seulement si $h^{-1}h' \in \Delta$.

Pour tout arc (h, h') , on appelle courant porté par l'arc l'élément $h^{-1}h'$ de Δ .

Soit e l'élément neutre de Γ .

$$e \in \Delta \iff \text{tout sommet possède une boucle.}$$

Tout sommet d'un graphe de Cayley est de degré $k = \text{card } \Delta$.

Un graphe de Cayley est symétrique si et seulement si $\Delta = \Delta^{-1}$. Dans ce cas, on a l'habitude de le représenter par un graphe non orienté.

Soit h_1, h_2, \dots, h_p une suite de sommets successifs d'un chemin de G . On peut associer de manière unique à ce chemin l'élément de Γ :

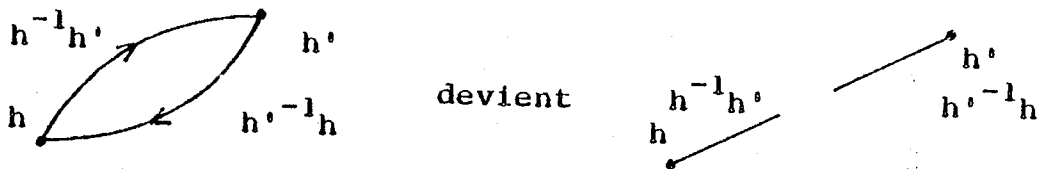
$$(h^{-1} h_2) (h_2^{-1} h_3) \dots (h_{p-1}^{-1} h_p) = h_1^{-1} h_p$$

Les composantes connexes du graphe de Cayley d'un groupe par rapport à un sous-ensemble Δ de Γ sont les classes à gauche de Γ par rapport au sous-groupe engendré par Δ . Un sous-ensemble Δ d'un groupe Γ est donc un système de générateur du groupe si et seulement si le graphe de Cayley associé est connexe.

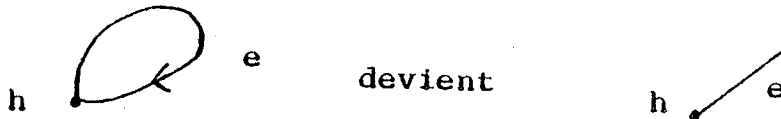
Dans toute la suite nous ne nous intéresserons qu'aux graphes de Cayley symétriques et connexes.

On convient généralement de représenter un graphe symétrique par un graphe non orienté. Ici, la représentation adoptée est la suivante :

tout couple d'arcs opposés est remplacé par 2 demi-arêtes, nommées brins



et les boucles deviennent des demi-arêtes :



Lorsqu'on immerge un graphe de Cayley dans une surface orientable, on obtient, pour tout $h \in \Gamma$, une permutation σ_h de l'ensemble Δ . Autrement dit, à toute immersion 2-cellulaire d'un graphe de Cayley, on peut associer une constellation $C = (\Sigma, \alpha, \sigma)$, appelée constellation de Cayley, définie par (Jacques [10], Gustin [7]) :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Gamma \times \Delta \quad \text{où} \quad \Delta = \Delta^{-1} \quad \text{est un ensemble de générateurs} \\ \alpha(h, d) &= (hd, d^{-1}) \quad d \text{ est le courant porté par le brin } (h, d) \\ \sigma(h, d) &= (h, \sigma_h d) \quad \text{où} \quad (\sigma_h)_{h \in \Gamma} \text{ est une famille de permutations circulaires de } \Delta, \text{ indexée par } \Gamma, \text{ et définie par l'immersion.} \end{aligned}$$

Soit Ω un sous-groupe de Γ tel que si $\Omega h = \Omega h'$ alors $\sigma_h = \sigma_{h'}$, (un tel sous-groupe existe, puisque $\Omega = \{e\}$ convient (où e est l'identité de Γ)).

Il est intéressant, cependant, de choisir Ω aussi grand que possible). Dans ce cas, Γ et Ω permettent de définir une constellation quotient C' de la constellation de Cayley $C = (\Sigma, \alpha, \sigma)$. Cette constellation représente une immersion 2-cellulaire du graphe de Schreier de Γ modulo Δ , où toute boucle est le bord d'une face.

Le graphe de Schreier de Γ modulo Ω est le graphe défini de la façon suivante ([2]) :

- Les sommets sont les classes à droite de Ω dans Γ .
- Il y a un arc de Ωh vers $\Omega h'$, portant le courant $\delta \in \Delta$, si et seulement si $\Omega h \delta = \Omega h'$.

II-2 - Constellation réduite

La constellation C' est la constellation définie par

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Gamma/\Omega \times \Delta \\ \alpha'(\Omega h, d) &= (\Omega h d, d^{-1}) \\ \sigma'(\Omega h, d) &= (\Omega h, \sigma'_{\Omega h} d) \end{aligned}$$

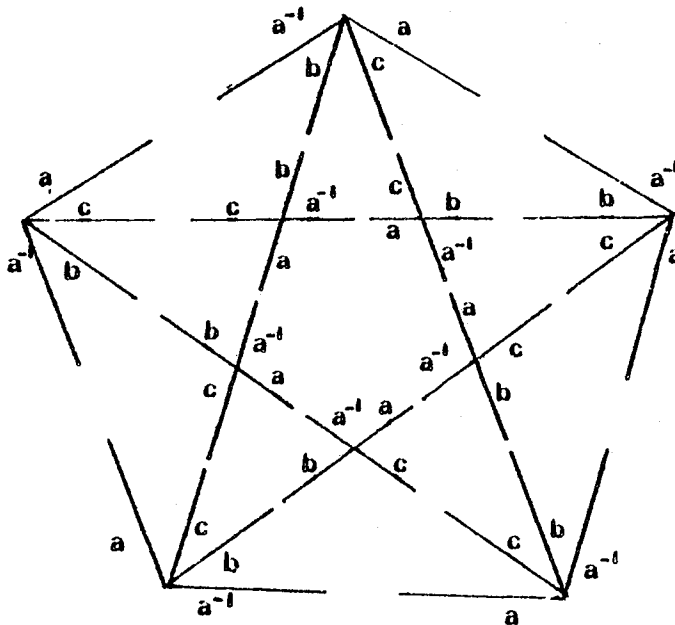
où $\sigma_{\Omega h}^i = \sigma_g$ pour tout g tel que $\Omega g = \Omega h$.

Exemple :

$$\Gamma = \{a, b, c / a^5 = b^2 = c^2 = abc = e\}$$

$$\Delta = \{a, b, c, a^{-1}\}$$

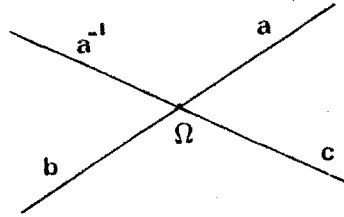
La constellation de Cayley est alors



Les rotations en chaque sommet sont identiques $\sigma = (a c b a^{-1})$

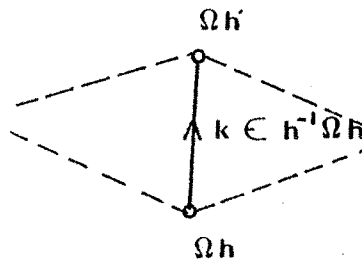
On prend donc $\Omega = \Gamma$.

La constellation quotient est alors :

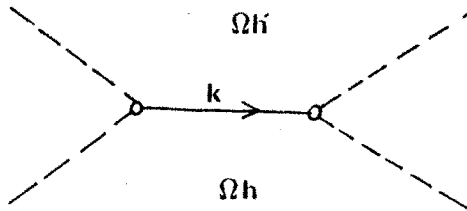


La constellation réduite C^* est, par définition, la constellation duale de la constellation quotient. C'est une immersion 2-cellulaire d'un graphe K , appelé par Youngs graphe quotient, dont chaque arc est orienté et marqué du courant de l'arc dual.

Dans C' on a



et dans C^* cela devient



La constellation réduite vérifie les 5 propriétés suivantes [10]

a - Chaque brin porte un courant prenant ses valeurs dans Δ .

b - Deux brins opposés v et αv portent des courants inverses (si $v = \alpha v$, le courant est d'ordre 2).

c - Les faces sont bijectivement associées aux classes à droite de Γ par rapport à Ω (l'index de Ω dans Γ est appelé index de l'immersion).

d - Les courants apparaissant sur le bord d'une face sont en bijection avec Δ .

e - Si un brin v appartient à une face associée à Ωh et son conjugué αv à une face $\Omega h'$, alors le courant porté par v appartient à l'ensemble $h' \Omega h$ (et donc à $h' \Omega h \cap \Delta$).

Ce qui est très important pour les problèmes d'immersion est la réciproque :

Une constellation "réduite" définie par un sous-groupe Ω d'un groupe Γ et par un ensemble de générateurs Δ de Γ vérifiant les 5 propriétés ci-dessus détermine une immersion 2-cellulaire du graphe de Cayley associé au graphe Γ et à l'ensemble Δ de générateurs.

On remarquera que les bords des faces de la constellation réduite déterminent les permutations pour le graphe de Schreier, et donc pour le graphe de Cayley.

Appelons Π le produit des courants autour d'un sommet de la constellation. On dit que ce sommet est de valence p si l'élément Π est d'ordre p dans le groupe Γ .

On a alors :

Théorème [10] :

Chaque sommet de degré k et de valence p de la constellation réduite engendre $\frac{|\Omega|}{p}$ faces de longueur $k \times p$ dans la constellation de Cayley.

Exemples :

1 - Reprenons l'exemple précédent :

La constellation réduite a une seule face dont le bord est donné par la permutation $\sigma = (a \ c \ b \ a^{-1})$

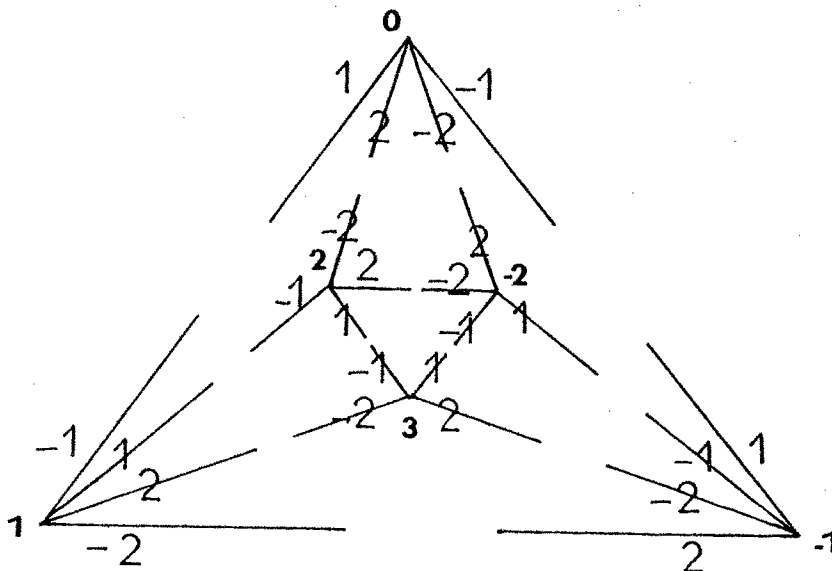


Le sommet x est de degré 1 et de valence 5 (puisque $a^5 = e$). Il engendre $\frac{|\Omega|}{p} = \frac{10}{5} = 2$ faces de longueur 5 dans la représentation initiale.

Le sommet y , de degré 3 et de valence 1 (puisque $a^{-1} \ c \ b = a \ b \ c = e$), engendre 10 faces de longueur 3.

2 - $\Gamma = \mathbb{Z}_6$ $\Delta = \{1, -1, 2, -2\}$

La constellation de Cayley est donc :



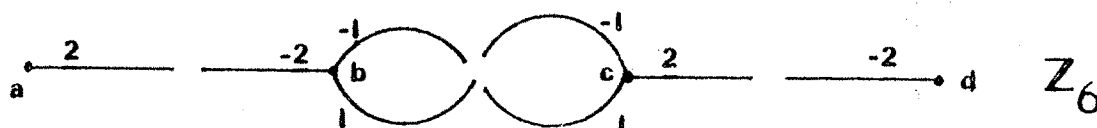
\mathbb{Z}_6

On a deux types de permutations : $\sigma_1 = (1, -1, 2, -2)$ et $\sigma_2 = (1, 2, -2, -1)$.

Soit Ω l'ensemble des éléments pairs de Z_6 .

$$\Omega = \{0, 2, 4\} = \{0, 2, -2\}.$$

La constellation réduite a donc 2 faces, dont les bords sont donnés par σ_1 et σ_2 .



Les sommets a et d, de degré 1 et de valence 3 ($2 + 2 + 2 = -2 - 2 - 2 = 0$) engendrent chacun $\frac{|\Omega|}{p} = 1$ face de longueur 3 dans la représentation initiale.

Les sommets c et d, de degré 3 et de valence 1 ($-2 + 1 + 1 = 0 = -1 - 1 + 2$) engendrent chacun 3 faces de longueur 3.

Nous allons maintenant étudier les propriétés particulières de ces constellations dans le cas où les immersions sont triangulaires.

III - IMMERSIONS TRIANGULAIRES

Une immersion triangulaire d'un graphe G est telle que toutes les faces sont des triangles.

Dans ce cas, en plus des 5 propriétés citées plus haut, la constellation réduite vérifie les 3 propriétés suivantes :

f - Tout sommet de la constellation réduite est de degré 1 ou 3.

g - Le produit des courants autour d'un sommet de degré 3 est égal à e (c'est ce qu'on appelle la loi de Kirchhoff, notée KCL).

h - En un sommet de degré 1 le courant porté est d'ordre 3.

C'est par de telles constellations réduites que Gustin a trouvé des immersions triangulaires du graphe complet K_n dans les cas $n \equiv 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$. Par la même méthode, mais avec des groupes non abéliens, Terry, Welch et Youngs ont déterminé celle du cas $n \equiv 0 \pmod{12}$.

Etude du graphe quotient

Le graphe quotient K admet une immersion 2-cellulaire déterminée par la constellation réduite.

Les arêtes de K sont orientées et portent un courant qui est un élément de Δ .

Les propriétés c- et d- ci-dessus de la constellation réduite se traduisent de la façon suivante sur le graphe quotient K :

Parcourons les arêtes de K en notant les courants des arêtes par lesquelles on passe. On notera d si l'arête parcourue porte un courant d et qu'on la parcourt dans le sens de son orientation, et d^{-1} sinon. Comme Δ est symétrique ($\Delta = \Delta^{-1}$), d^{-1} est aussi un élément de Δ .

Nous obtenons ainsi des permutations circulaires des éléments de Δ qui donnent les faces de la constellation réduite. Le nombre de permutations ainsi produites est appelé index de K . (C'est aussi le nombre de classes à droite de Γ par rapport au sous-groupe Ω).

Pour obtenir la rotation des arcs entrant dans un sommet d du graphe de Cayley, il suffit alors de prendre la permutation correspondant à la face associée à Ωd et de multiplier les éléments de cette rotation à droite par d .

Pour visualiser plus facilement les permutations et les rotations, on dessinera K sur le plan avec la convention suivante :

En un sommet marqué \bullet la rotation des arêtes s'effectuera dans le sens des aiguilles d'une montre.

En un sommet marqué \circ elle s'effectuera en sens contraire.

Exemple : Immersion et graphe quotient de K_7 .

Les sommets de K_7 sont identifiés aux éléments du groupe additif \mathbb{Z}_7 , c'est à dire le groupe des entiers modulo 7.

L'ensemble Δ , puisque K_7 est un graphe complet est $\Delta = \Gamma - \{0\}$.

La constellation réduite doit vérifier les conditions suivantes :

- Il n'y a pas d'élément d'ordre 3 dans \mathbb{Z}_7 donc pas de sommet de degré 1.

- Tous les sommets du graphe de Cayley sont de degré 6 (= card Ω), donc dans la constellation réduite, les sommets du graphe quotient sont de degré 3.

- Tous les sommets sont de valence 1, engendrent 6 faces de longueur 6 dans la constellation de Cayley.

On prend $\Omega = \mathbb{Z}_7$, seul sous-groupe $\neq \{e\}$. Le groupe quotient Γ/Ω n'a qu'un seul élément, donc la constellation réduite n'a qu'une face (propriété c).

La proposition d nous donne donc le nombre d'arêtes du graphe K , d'où la constellation réduite et le graphe quotient suivants :



qui donne la rotation

$$1 \ 3 \ 2 \ \bar{1} \ \bar{3} \ \bar{2}$$

soit, puisque dans \mathbb{Z}_7 $\bar{1} = 6$, $\bar{2} = 5$, $\bar{3} = 4$, la rotation

$$1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5$$

au sommet 0.

La rotation au sommet i s'obtient en ajoutant i (\mathbb{Z}_7 groupe additif) à chaque élément de la rotation.

Ce qui donne le schéma suivant :

0.	1	3	2	6	4	5	
1.	2	4	3	0	5	6	
2.	3	5	4	1	6	0	
3.	4	6	5	2	0	1	(Schéma 1)
4.	5	0	6	3	1	2	
5.	6	1	0	4	2	3	
6.	0	2	1	5	3	4	

Une fois obtenues les rotations de G en chaque sommet à l'aide du graphe quotient, on voit que ce schéma vérifie la règle Δ^* suivante [19], appelée règle de triangulation.

Règle Δ^* : Si à la ligne i nous avons $i \dots jk \dots$ alors à la ligne k on doit avoir $k \dots ij \dots$

Cette règle n'est que l'expression du fait que chaque face est un triangle. Elle est équivalente à la règle R^* , d'un usage plus facile dans la pratique.

Règle R^* : Si à la ligne i on a $i. \dots jk^{\ell} \dots$ alors à la ligne k on doit avoir $k. \dots \ell ij \dots$

IV - IMMERSION DE K_n

Le graphe complet K_n est un graphe de Cayley symétrique et connexe où $\Delta = \Gamma - \{e\}$.

L'étude des immersions de K_n dans une surface S de genre g où $g = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$ se divise en 2 cas :

- Les immersions triangulaires pour les cas dits réguliers, c'est à dire lorsque $n = 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$.
- Les autres cas, avec une méthode dérivée (Youngs).

IV-1 - Cas des triangulations : la méthode de Gustin

Le fait que l'ensemble des générateurs Δ soit $\Gamma - \{e\}$ nous donne quelques résultats supplémentaires :

Le nombre total de brins singuliers de la constellation réduite est $\frac{n}{\omega}$ fois le nombre d'éléments d'ordre 2 du sous-groupe Ω ($\omega = \text{card } \Omega$).

- Soient x le nombre d'éléments d'ordre 2 de Ω et y le nombre de sommets de degré 1 de la constellation réduite. La formule d'Euler fournit alors la condition de compatibilité suivante :

$$\frac{n}{\omega} (n-7-3x) - 4y \equiv 0 \pmod{12}.$$

Exemple : Le cas $n \equiv 7 \pmod{12}$

Nous prenons $\Gamma = \mathbb{Z}_{12s+7}$ et $\Delta = \Gamma - \{0\}$.

Tous les sommets de la constellation sont de degré 3.

Le cas $s = 0$ a été traité en II-3.

Les cas $s = 1$ et $s = 2$ produisent respectivement les graphes des fig. 1 et 2 :

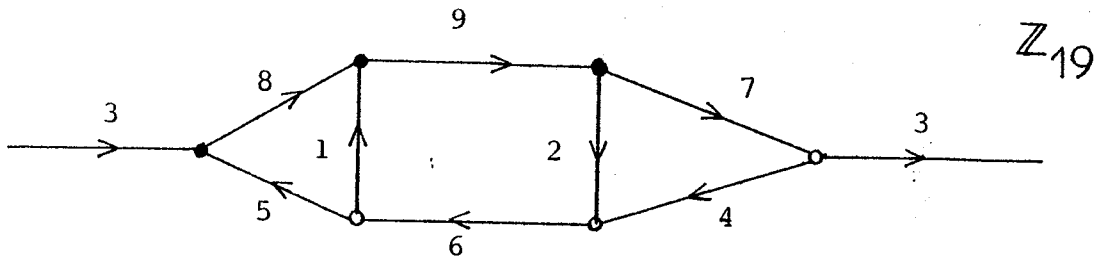


fig.1

Les graphes quotients obtenus sont d'index 1, c'est à dire que toute rotation en un sommet i est obtenue à partir d'une même rotation donnée par le graphe quotient :

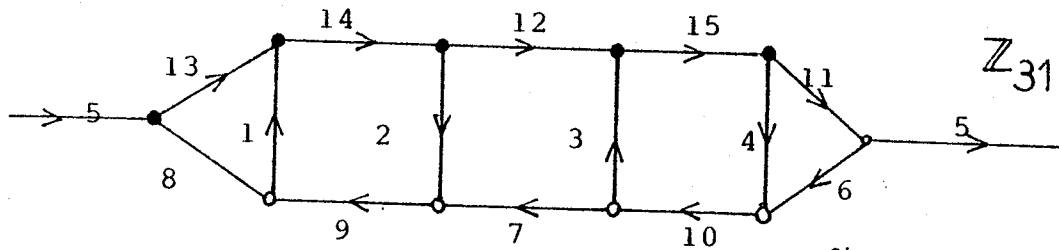


fig.2

La généralisation pour s quelconque est donnée fig. 3.

Les arêtes verticales de K sont orientées alternativement et portent les courants $1, 2, \dots, 2s$ consécutivement. Tous les autres courants sont déterminés par la loi de Kirchhoff.

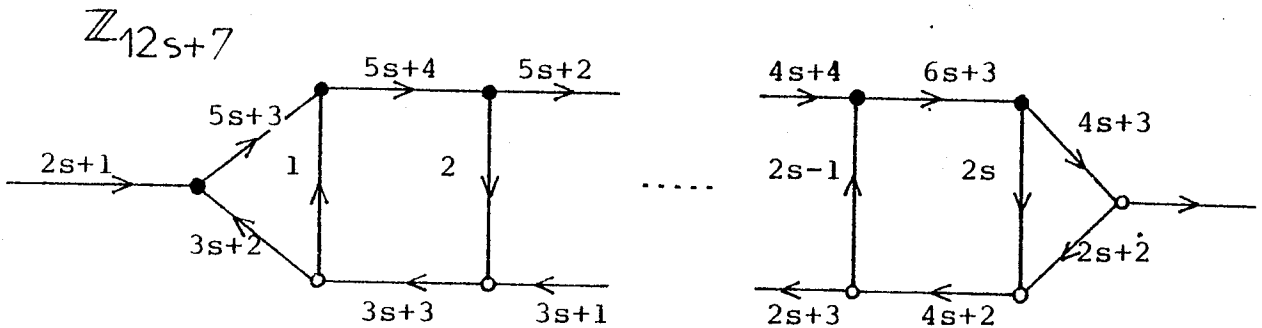


fig.3

K a $6s+3$ arcs, donc $6s+3$ arêtes orientées qui portent $6s+3$ courants qui, avec leurs $6s+3$ opposés, donnent les $12s+6$ éléments de $\mathbb{Z}_{12s+7} - \{0\}$. Le parcours de K engendre une seule rotation de ces éléments de Δ , qui est le bord de la face de la constellation réduite.

IV-2 - La méthode de Youngs : les vortex [26]

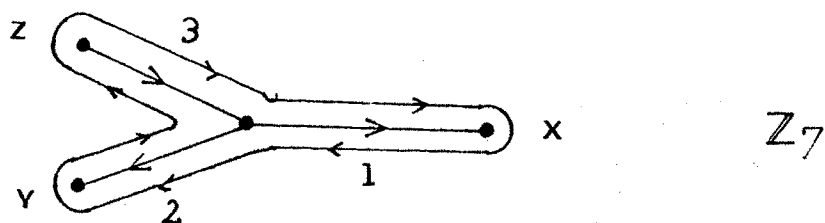
Youngs appelle excès en un sommet d'une constellation réduite le produit des courants autour de ce sommet et appelle vortex un sommet dont l'excès n'est pas e . Il appelle d'autre part vortex propre un vortex de la constellation réduite qui engendre par l'immersion du graphe complet une face de longueur N : dans notre terminologie cela signifie que le sommet est de degré k et de valence p avec $kp = N$.

Youngs cherche alors des constellations réduites qui engendrent soit des faces de longueur 3, soit des faces de longueur N .

En mettant un nouveau sommet à l'intérieur de chaque face de longueur N et en reliant par des arêtes chacun d'eux aux sommets du contour de leur face, on obtient une immersion d'un nouveau graphe dont il ne reste plus qu'à relier entre eux les nouveaux sommets pour obtenir un graphe complet. Il suffit de déterminer le plus petit nombre d'"anses" à rajouter à la surface pour que ces nouvelles arêtes ne se coupent pas : on obtient de cette manière une immersion qui peut être minimale, mais qui conduit à une borne supérieure du graphe complet.

Cela permet de trouver des inversions triangulaires pour d'autres graphes : soit v le nombre de vortex propres. Alors on obtient une immersion triangulaire de $K_{n+v} - K_v$.

Exemple : Immersion triangulaire de $K_{10} - K_3$.



Le graphe quotient vérifie :

- . Chaque sommet est de degré 1 ou 3.
- . La rotation produit un seul circuit.
- . Chaque élément $1, 2, \dots, 6s+3$ de \mathbb{Z}_{12s+7} apparaît exactement une fois.
- . KCL est vérifiée en chaque sommet de degré 3.

Chaque sommet identifié par une lettre est de degré 1 et le courant en ces sommets génère le groupe \mathbb{Z}_{12s+7} .
Ce sont des vortex.

Pour obtenir les rotations, on opère comme sur un graphe K ordinaire mais lorsqu'on passe par un vortex on le note dans la permutation. Cela donne donc ici :

$$1 \ x \ \bar{1} \ 2 \ y \ \bar{2} \ \bar{3} \ z \ 3 \ \text{ soit } 1 \ x \ 6 \ 2 \ y \ 5 \ 4 \ z \ 3$$

Cette permutation donne la rotation du sommet numéroté 0. Les rotations des sommets $1, 2, \dots, 6$ sont obtenus de la façon habituelle (en ajoutant i à chaque élément pour la ligne i).

Les rotations des sommets x, y et z sont obtenues par la règle Δ^* . Ce qui donne le schéma :

0.	1	x	6	2	y	5	4	z	3
1.	2	x	0	3	y	6	5	z	4
2.	3	x	1	4	y	0	6	z	5
3.	4	x	2	5	y	1	0	z	6
4.	5	x	3	6	y	2	1	z	0
5.	6	x	4	0	y	3	2	z	1
6.	0	x	5	1	y	4	3	z	2
x.	0	1	2	3	4	5	6		
y.	0	2	4	6	1	3	5		
z.	0	4	1	5	2	6	3		

C'est une triangulation de $K_{10}-K_3$. Si les 3 sommets x, y, z sont enlevés de l'immersion, on obtient alors l'immersion de K_7 dans laquelle on a 7 triangles et 3 faces d'ordre 7 sur S_3 . Ringel a démontré que les 3 sommets x, y, z peuvent être joints entre eux en adjoignant une seule anse à la surface : nous obtenons alors une représentation topologique de K_{10} de genre $3+1 = 4$. Ce genre étant celui fourni par la conjecture, il est donc minimal ; le genre de K_{10} est donc 4.

V - PRINCIPE DE RESOLUTION

Il faut maintenant montrer que

$$\forall g, \quad g_s^{i-1} < g \leq g_s^i \Rightarrow n(g) = n(g_s^i) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil$$

avec la convention

$$g_s^{11} = g_{s+1}^{-1}$$

Considérons une immersion triangulaire d'un graphe connexe $G = K_n - t$ dans une surface S de genre g_0 . S'il existe une immersion triangulaire d'un graphe G' possédant n sommets dans une surface de genre g_0^{-1} , alors $G' = K_n - (t+6)$.

Théorème : Soit une surface de genre g admettant une triangulation minimale par n points. Si parmi les n lignes représentant les rotations des n sommets du graphe triangulant cette surface, on peut en trouver 6 du type

a. k c c' a' b l
 b. l a a' b' c h
 c. h b b' c' a k
 a'. u b' b a c' v
 b'. v c' c b a' w
 c'. w a' a c b' u

ou bien du type

a. k c c' a' b l
 b. l a a' b' c' c h
 c. h b c' a k
 a'. u b' c a c' v
 b'. v c' b a' w
 c'. w a' a c b b' u

alors il existe un graphe à n sommets triangulant une surface orientable de genre $g-1$.

Démonstration

1 - Considérons le graphe $G' = G - \{(a, a'), (a', b), (b', b), (b', c), (c, c'), (c', a)\}$ dans le premier cas, et $G' = G - \{(a, a'), (a', b), (b, b'), (b, c'), (c, c'), (c', a)\}$ dans le second cas. Les n lignes représentant les rotations de G' se déduisent de celles de G de la façon suivante :

- Les $n-6$ lignes correspondant aux sommets différents de a, b, c, a', b' et c' sont identiques à celles de G .
- Les 6 lignes correspondant à ces sommets sont obtenues à partir de celles de G en supprimant les 6 arêtes : on obtient

a. ... k c b ℓ ...	ou bien	a. ... k c b ℓ ...
b. ... ℓ a c h ...		b. ... ℓ a c h ...
c. ... h b a k ...		c. ... h b a k ...
a'. ... u b' c' v ...		a'. ... u b' c' v ...
b'. ... v c' a' w ...		b'. ... v c' a' w ...
c'. ... w a' b' u ...		c'. ... w a' b' u ...

selon qu'on avait l'un ou l'autre schéma de départ.

Les deux cycles (a,b,c) et (a',b',c') deviennent des faces.

Ces n lignes vérifient la règle Δ^* .

2 - Le graphe G' est connexe.

Supposons qu'il ne le soit pas. Comme les deux cycles (a,b,c) et (a',b',c') appartiennent à G et qu'on ne supprime que des arêtes entre ces deux cycles, G' a donc exactement 2 composantes connexes, G_1 contenant le cycle (a,b,c) et G_2 contenant le cycle (a',b',c'), comportant respectivement n_1 et n_2 sommets et m_1 et m_2 arêtes avec

$$n_1 + n_2 = n$$

$$m_1 + m_2 = m - 6$$

Le schéma des rotations vérifiant la règle Δ^* , G_1 et G_2 admettent une immersion triangulaire dans les surfaces de genre :

$$g_1 = \frac{6-3n_1+m_1}{6} \quad \text{et} \quad g_2 = \frac{6-3n_2+m_2}{6}$$

On a $g_1 g_2 \neq 0$ car si g_1 (ou g_2) = 0, on obtient une triangulation de la surface de genre g par $n-n_1$ points.

$$n = n_1 + n_2 = n_0(g) \geq n_0(g_1) + n_0(g_2)$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48(g_1 + g_2)}}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g_1}}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g_2}}{2} \right\rceil$$

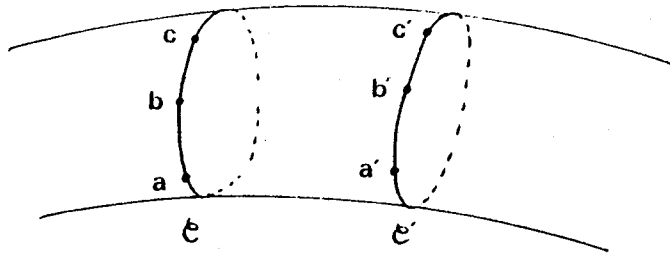
soit

$$\sqrt{1 + 48(g_1 + g_2)} \geq \sqrt{1 + 48g_1} + \sqrt{1 + 48g_2} + 5$$

ce qui est impossible.

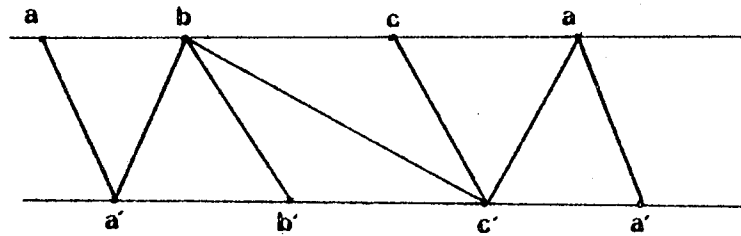
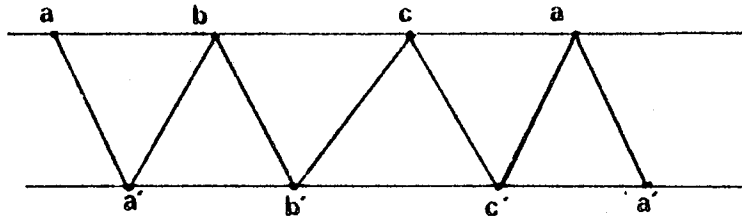
Ce théorème provient de la remarque suivante :

Considérons une immersion triangulaire d'un graphe G dans une surface S de genre g , une anse de la surface S et deux cycles $C = (a, b, c)$ et $C' = (a', b', c')$ "autour" de cette anse, c'est à dire que C et C' sont homotopes et non homologues à zéro



Appelons A la partie de l'anse de la surface S située entre les deux cycles C et C' . S'il existe entre C et C' sur A , 6 arêtes de G alors lorsqu'on enlève ces 6 arêtes l'immersion de G dans S comporte une face homéomorphe à un cylindre, dont les 2 bords sont C et C' . Si on enlève A et que l'on ajoute les deux faces (a, b, c) et (a', b', c') - c'est à dire si l'on coupe l'anse entre C et C' - on obtient alors une immersion de G moins 6 arêtes sur une surface de genre $g-1$ (on a enlevé une anse à S), à condition que cette opération ne déconnecte pas la surface S . Les faces ajoutées étant des triangles, l'immersion est triangulaire.

On peut avoir 2 configurations pour les arêtes entre les 2 cycles, correspondant aux 2 types de rotations du théorème :



Ce qui suit n'est que l'application de ce résultat : à partir des triangulations connues des surfaces de genre g_s^i , nous avons cherché des couples de cycles (C, C') joints "convenablement" par 6 arêtes de façon à obtenir des triangulations des surfaces de genre g_s^{i-1} par suppression de ces 6 arêtes puis d'en déduire d'autres couples de cycles possédant la même propriété pour pouvoir itérer le procédé et trouver des triangulations pour toute surface de genre $g_1^{i-1} < g < g_s^i$. Il faut donc que tous ces couples soient disjoints au sens des arêtes pour que la suppression des 6 arêtes entre un couple de cycles n'entraîne pas la disparition d'un autre couple de cycles.

Un tel couple sera appelé couple solution. Les arêtes $(a, b), (b, c), (c, a), (a', b'), (b', c'), (c', a')$ seront appelées arêtes intérieures.

Les autres arêtes joignant un sommet de C à un sommet de C' seront appelées arêtes extérieures.

VI - RESULTATS

VI-1 - Remarques préliminaires

Nous avons étudié les différents cas en les regroupant selon l'index du graphe quotient qui permet d'obtenir les triangulations.

Pour les cas 7 et 10, 4 et 1, 11 et 8, le graphe quotient est d'index 1. Il est d'index 2 pour le cas 2, et 3 pour les cas 3, 5, 6 et 9. Enfin, pour le cas 0, les graphes quotients utilisant un groupe abélien sont au moins d'index 4 ([15]).

Tous les groupes utilisés sont des groupes abéliens notés additivement.

Une fois l'immersion triangulaire obtenue, c'est à dire dès qu'on a le graphe quotient qui permet de reconstituer la rotation en chaque sommet, il nous faut trouver un couple de cycles (C, C') du type 1 (régulier) ou du type 2.

Considérons une immersion triangulaire de $K_n - K_v$ obtenue par un graphe quotient d'index i et un groupe Z_p ($p = n-v$). Les sommets de K_v sont représentés par des lettres et les $(n-v)$ sommets restants de K_n par les éléments de Z_p . Soit $C = (a, b, c)$ un cycle de cette triangulation dont les sommets sont des éléments de Z_p . La rotation du sommet a contient les sommets b et c , celle du sommet b les sommets a et c . Donc la rotation du sommet $a+k.i$ contient les sommets $b+k.i$ et $c+k.i$, et la rotation du sommet $b+k.i$ les sommets $a+k.i$ et $c+k.i$. Les trois sommets $(a+k.i, b+k.i, c+k.i)$ forment donc un cycle de la triangulation, que l'on notera C_k .

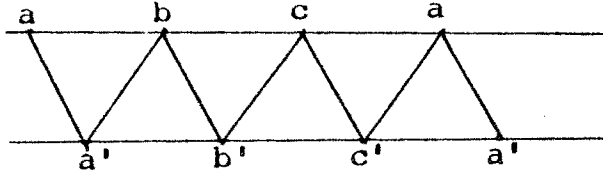
Cette remarque et le résultat suivant s'avèrent très utiles pour la recherche répétitive de couples solutions.

Théorème : Si, pour la triangulation décrite ci-dessus, un couple solution (C, C') , dont tous les sommets sont des éléments de Z_p , existe, alors le couple (C_k, C'_k) est aussi un couple solution du même type que le précédent.

Démonstration

Considérons le cas d'un couple $(C = (a,b,c), C' = (a',b',c'))$ de type 1.

On a les arêtes suivantes :



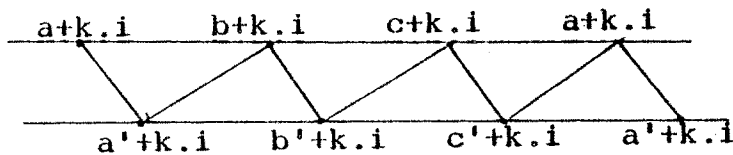
Les rotations des sommets a, b, c comportent les séquences ci-dessous :

- a. c c' a' b
- b. a a' b' c
- c. b b' c' a

Puisque la rotation du sommet $a+k.i$ s'obtient en ajoutant $k.i$ à chaque sommet de la rotation du sommet a , on a donc les rotations suivantes :

- $a+k.i$ $(c+k.i)$ $(c'+k.i)$ $(a'+k.i)$ $(b+k.i)$
- $b+k.i$ $(a+k.i)$ $(a'+k.i)$ $(b'+k.i)$ $(c+k.i)$
- $c+k.i$ $(b+k.i)$ $(b'+k.i)$ $(c'+k.i)$ $(a+k.i)$

ce qui veut dire qu'on a donc



Le couple (C_k, C'_k) est lui aussi un couple solution de type 1. La démonstration est analogue dans le cas de couples de type 2.

L'existence d'un couple solution (C, C') permet donc de déduire l'existence d'autres couples solutions (C_k, C'_k) .

La remarque suivante est la base de ce qui suit :

Remarque 1 : Si parmi les couples solutions on peut en trouver d disjoints au sens des arêtes, alors à partir de la triangulation initiale de la surface de genre g par n points, on peut produire une triangulation de toute surface de genre g' $g \geq g' \geq g-d$, par n points.

Soit $(C = (a, b, c), C' = (a', b', c'))$ un couple solution. On a alors les rotations

a. c c' a' b
b. a a' b' c
c. b b' c' a
a'. b' b a c'
b'. c' c b a'
c'. a' a c b'

La suppression des 6 arêtes extérieures produit une triangulation de la surface de genre $g-1$. Les rotations de cette nouvelle immersion sont obtenues à partir des précédentes, et seules sont modifiées celles des sommets des cycles C et C' .

Soit $((1, 2, 3), (1', 2', 3'))$ un autre couple solution pour l'immersion initiale, d'arêtes disjointes de (C, C') .

On a alors les rotations :

1. 3 3' 1' 2
2. 1 1' 2' 3
3. 2 2' 3' 1
1'. 2' 2 1 3'
2'. 3' 3 2 1'
3'. 1' 1 3 2'

1 - Si les sommets des deux couples sont distincts, alors les rotations des sommets 1, 2, 3, 1', 2' et 3' sont identiques dans les deux immersions : ce couples sera toujours solution dans la nouvelle immersion.

2 - Supposons qu'on ait un sommet commun, par exemple 1 et a. Puisque les deux couples sont d'arêtes disjointes, on aura

$$\{a, b, c, a', c'\} \cap \{2, 3, 1', 3'\} = \emptyset$$

et

$$a \notin \{2, 3, 1', 3'\}$$

On a alors trois possibilités :

2-1 - Un des sommets 2, 3, 1', 3' est identique à b'. Prenons 2 (le résultats est identique si on prend 3, 1' ou 3'). Alors

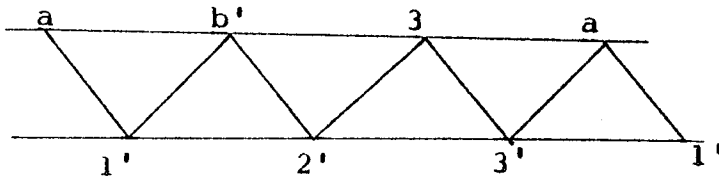
$$\{1, 1', 2', 3\} \cap \{c', c, b, a'\} = \emptyset$$

donc

$$3', 1' \text{ et } 3 \notin \{a, b, c, a', b', c'\}$$

$$2 \notin \{c', c, b, a'\}, 2' \neq 2 = b' \text{ et } 2' \neq 1 = a'$$

On a donc le couple



les rotations des sommets 1', 2', 3' et 3 sont identiques pour les deux immersions. Pour 1 et 2, on a

1. c c' a' b 3 3' 1' b'
2. c' c b a' a 1' 2' 3

Pour chaque rotation, les deux séquences sont disjointes. La modification de l'une d'entre elles lors de la suppression des 6 arêtes n'entraîne aucune modification de l'autre.

Le couple $((1,2,3), (1',2',3'))$ est donc toujours solution dans la nouvelle immersion.

2-2 - Les sommets $2'$ et b' sont identiques. Les rotations des sommets $1', 3', 2$ et 3 sont les mêmes dans les deux immersions. Pour les sommets 1 et $2'$, on a :

1. c c' a' b 3 3' 1' 2
 2'. c' c b a' 3' 3 2 1'

Pour chaque rotation, les deux séquences sont disjointes. Le couple $((1,2,3), (1',2',3'))$ est encore un couple solution.

2-3 - Tous les sommets, sauf 1 et a , sont différents. La seule rotation modifiée est celle du sommet 1 .

1. c c' a' b 3 3' 1' 2
 devient
 1. c b 3 3' 1' 2

Le couple $((1,2,3), (1',2',3'))$ est toujours solution dans la nouvelle immersion.

Si on a d couples dont les arêtes sont disjointes, pour tout k $0 \leq k \leq d$, la suppression des 6 arêtes extérieures de k couples parmi les d produira donc une triangulation de la surface de genre $g-k$.

Remarque 2 : Considérons une immersion triangulaire de $K_n - K_v$ obtenue par un graphe quotient d'index i , et un groupe \mathbb{Z}_p ($p = n-v$) : les v sommets de K_v sont représentés par des lettres, et les $(n-v)$ sommets restants de K_n par les éléments de \mathbb{Z}_p .

Soient (C, C') un couple solution où tous les sommets sont représentés par des nombres, et C l'ensemble des arêtes extérieures et intérieures de (C, C') .

Soit $(x, y) \in C$ avec $x > y$ (x et y sont alors considérés comme éléments de \mathbb{N}).

On pose :

$$D(x, y) = \min(x - y, p - (x - y))$$

$$D_1(C) = \{D(x, y) / (x, y) \text{ arête extérieure de } C\}$$

$$D_2(C) = \{D(x, y) / (x, y) \text{ arête intérieure}\}$$

Nous avons alors :

- si C_k est l'ensemble des arêtes de (C_k, C'_k) , alors $\forall k, D_1(C) = D_1(C_k)$ et $D_2(C) = D_2(C_k)$

- soient $(x_k, y_k) \in C_k, (z, t) \in C$

$$(x_k - k.i, y_k - k.i) \in C$$

$$(x_k, y_k) = (z, t) \Rightarrow x_k - y_k = (x_k - k.i) - (y_k - k.i) = z - t$$

Cela entraîne les résultats suivants :

- si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, il suffit de trouver d couples solutions dont les 6 arêtes extérieures sont disjointes entre elles, de même que les 6 arêtes intérieures, pour avoir une triangulation des surfaces de genre g' où $g - d \leq g' \leq g$.

- si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et $|D_1| = 6$ et $|D_2| = 6$, alors les d couples solutions (C_k, C'_k) $0 \leq k < d$ conviennent ($d.i \leq p$).

Remarque 3 : Considérons toujours la triangulation précédente :

(a, b, c) un cycle de cette triangulation.

Alors (a, b, c) est une face si et seulement si à la ligne a , on a

a. b c

Considérons maintenant (C, C') un couple solution vérifiant $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (on supposera qu'il est de type 1, le raisonnement étant similaire dans le cas du type 2).

$$C = (a, b, c) \text{ et } C' = (a', b', c')$$

En b , on a la rotation

$$b \dots a \ a' \ b' \ c \dots$$

en $b+k.i = b_k$, on a la rotation

$$b_k \dots a_k \ a'_k \ c'_k \ c_k \dots$$

le couple (C_k, C'_k) étant un couple solution.

Effectuons la suppression des 6 arêtes extérieures de (C, C') . On obtient une triangulation pour laquelle (a_k, b_k, c_k) est toujours un cycle. Si c'est devenu une face, c'est qu'on a supprimé les arêtes $a'_k b_k$ et $b'_k c_k$. Comme $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, c'est que $C_k = C$ ou C' .

Dans le cas $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, il suffit donc de s'assurer que tous les éléments de la famille $(C_k, C'_k \mid 0 \leq k \leq d)$ sont distincts pour obtenir d couples solutions convenables.

VI-2 - Cas 7 et 10 [27]

Les graphes quotients sont d'index 1.

L'obtention de ces graphes a été traitée au §IV.

VI-2-1 - Cas 7

K_{12s+7} est le graphe de Cayley associé à $\Gamma = \mathbb{Z}_{12s+7}$ et $\Delta = \Gamma - \{0\}$. On prend $\Omega = \Gamma$.

- Le cas $s = 0$ a été traité au §III-3.

K_7 triangule le tore.

- Le graphe quotient (cf. §III-4-a) du cas $s = 1$ ne comporte pas de couple solution de type 1 ou 2. On ne peut conclure pour $n = 19$.

Proposition 2 :

Pour $s \geq 2$, $\forall g'$ tel que $g_s^6 \leq g' \leq g_s^7$, $n(g') = n(g_s^7)$ et

$$n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil$$

Démonstration

$$g_s^7 - g_s^6 = 2s + 1$$

Si on trouve $2s - 1$ autres couples solutions tous disjoints au sens des arêtes, on pourra en déduire l'existence d'une triangulation par $12s + 7$ points pour toute surface de genre g' où $g_s^6 < g' \leq g_s^7$.

On aura alors $n(g') \leq 12s + 7 = n(g_s^7)$

Or $n(g') \geq n_0(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil = 12s + 7$

Donc $n(g') = n(g_s^7)$ et $n(g') = n_0(g')$.

Restent donc à trouver les $2s$ couples solutions d'arêtes disjointes. Comme le graphe quotient est d'index 1, tout couple (c_k, c'_k) ($0 \leq k < 12s + 7$) est solution et permet d'obtenir une triangulation de la surface de genre $g_s^7 - 1$.

$$D_1 = \{1, 5s + 4, 5s + 2, 3, 2s + 1, 3s + 3\}$$

$$D_2 = \{5s + 3, 5s + 5, 2, 3s + 4, 3s + 2\}$$

- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et $|D_1| = 6$.

- Pour D_2 , deux arêtes vérifient $D(e) = 2$.

$$e_1 = (5s + 5, 5s + 3)$$

$$e_2 = (5s + 4, 5s + 2)$$

En prenant pour couple suivant $((4, 5s+7, 5s+9), (5s+8, 5s+6, 8s+10))$ on obtient deux couples d'arêtes disjointes.

Il suffit de prendre les couples (C_k, C'_k) avec $k = 4\ell$ et $0 \leq \ell < 3s$ qui sont $3s > 2s+1$ couples d'arêtes disjointes.

La proposition est ainsi démontrée. \square

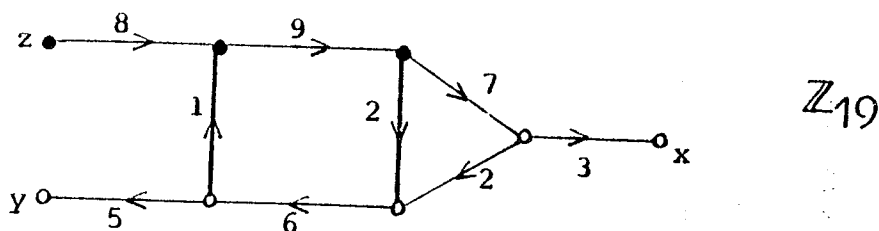
VI-2-2 - Cas 10

$K_{12s+10} - K_3$ triangule la surface de genre g_s^{10} .

Le graphe quotient s'obtient à partir de celui du cas 7 en introduisant les trois sommets x, y, z (sommets de K_3) non adjacents.

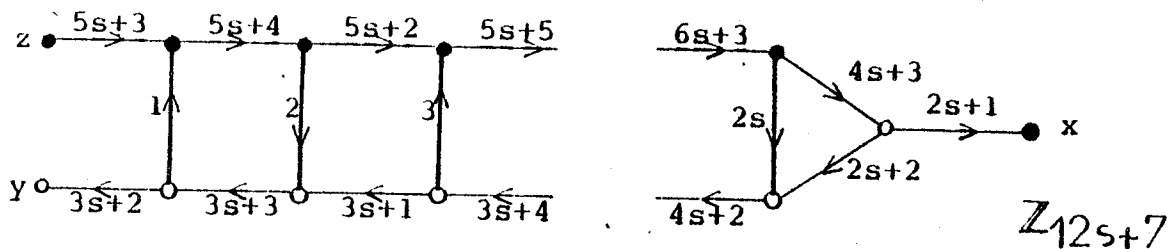
- Dans le cas $s = 0$, $K_{10} - K_3$ triangule S_3 ; donc $n(3) = 10$
Huneke ([9]) a montré que $n(2) = 10$.

- Dans le cas $s = 1$, l'immersion donnée par le graphe quotient

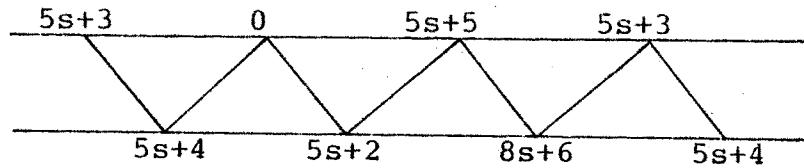


ne contient pas de couple solution. On ne peut conclure.

- Dans le cas $s \geq 2$, le graphe quotient est le suivant :



On obtient le même couple solution (C, C') que pour le cas 7.



Ce qui nous donne les résultats suivants :

Proposition 3

Pour $s \geq 2$, $n(g_s^{10}-1) = n(g_s^{10})$ et $n(g_s^{10}-1) = n_0(g_s^{10}-1)$.

Proposition 4

Pour $s \geq 2$, $\forall g'$ tel que $g_s^9 \leq g' \leq g_s^{10}$, $n(g') = n(g_s^{10})$

et $n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil$

Démonstrations :

Elles sont analogues à celles des propositions 1 et 2.

$g_s^{10} - g_s^9 = 2s+1$. Les $2s$ couples de cycles du cas 7, disjoints au sens des arêtes, sont aussi dans ce cas des couples solutions

VI-3 - Cas 4 et 1

K_{12s+4} et $K_{12s+1} - K_3$ triangulent respectivement les surfaces de genre g_s^4 et g_s^1 . Le groupe employé pour le cas 4 est

$\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+2}$, groupe additif où

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

x est appelé première composante, et y deuxième composante.

$$\Delta = \Gamma - \{(0,0)\}, \Omega = \Gamma.$$

Le graphe quotient est d'index 1.

VI-3-1 - Cas 4 [22]

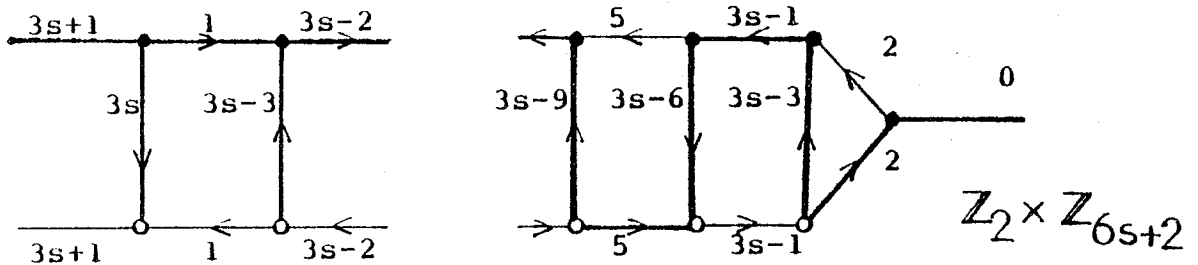
La première composante du courant sera 1 si l'arc est représenté en trait épais, 0 sinon.

- Dans le cas $s = 1$, Jungerman ([13]) a montré l'existence d'une immersion triangulaire de $K_{16}-K_4$. On a donc :

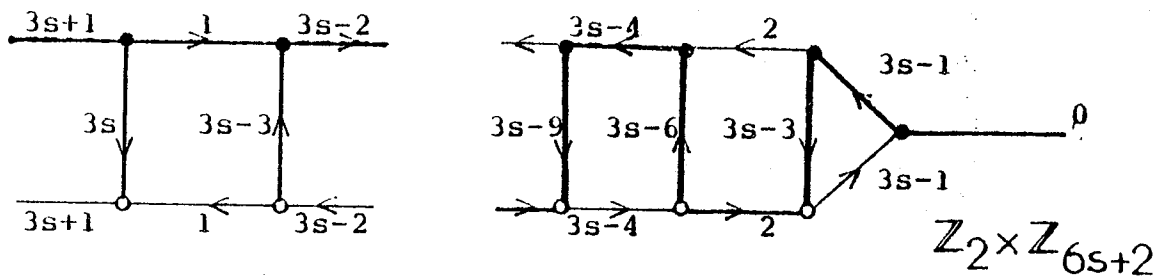
$$n(g_1^4-1) = n(12) = n(g_s^4) = 16 \quad \text{et} \quad n(g_s^4-1) = n_0(g_s^4-1)$$

- Dans le cas $s = 2$, les graphes quotients donnés par Ringel ([19]) ne comportent pas de couple solution.

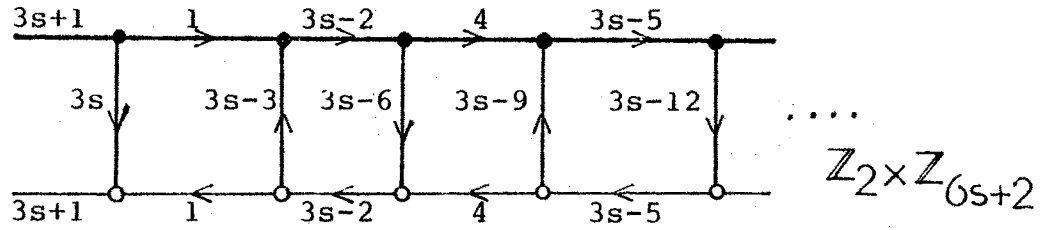
- Pour $s \geq 3$, le graphe quotient est



si s est impair, et dans le cas pair



Dans les deux cas, il commence par



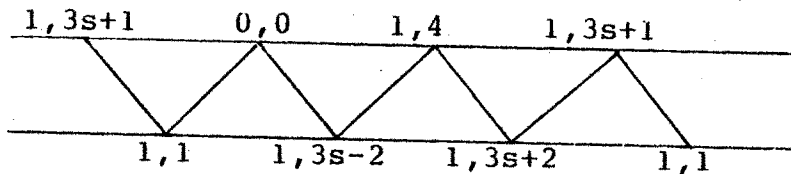
Les demi-arcs ont pour courant les éléments d'ordre 2 du groupe. Le parcours du graphe quotient donne la rotation du sommet $(0,0)$ qui comporte les séquences :

$$\begin{aligned} (0,0) \dots (1,3s+1) (1,1) (1,3s-2) (1,4) \dots \dots \\ \dots (1,6s-2) (0,3s-6) (0,3s-2) (0,3s-3) \dots (0,3s+5) \\ (0,1) (0,3s) (1,3s+1) \dots \dots \end{aligned}$$

ce qui donne les rotations des sommets $(1,4)$ et $(1,3s+1)$:

$$\begin{aligned} (1,4) \dots (0,0) (1,3s-2) (1,3s+2) (1,3s+1) \dots \dots \\ (1,3s+1) \dots (1,4) (1,3s+2) (1,1) (0,0) \end{aligned}$$

Les deux cycles $C = ((1,3s+1), (0,0), (1,4))$ et $C' = ((1,1), (1,3s-2), (1,3s+2))$ forment un couple solution



On a les résultats suivants :

Proposition 5 :

Pour $s \geq 3$, $n(g_s^4 - 1) = n(g_s^4)$ et $n(g_s^4 - 1) = n_0(g_s^4 - 1)$.

Proposition 6 :

Pour $s \geq 3$, $\forall g$ tel que $g_s^3 < g' \leq g_s^4$, $n(g') = n(g_s^4)$

et $n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil$

Démonstration

La proposition 5 se démontre comme la proposition 1 (existence d'un couple solution).

Pour la proposition 6, il faut trouver $(g_s^4 - g_s^3) - 1 = 2s - 1$ couples de cycles solutions d'arêtes disjointes.

Soient (u, v) , (w, x) deux éléments de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+2}$ tels que $v > x$ et $((u, v), (w, x)) \in C$.

On posera $D'((u, v), (w, x)) = (t, D(v, x))$

avec

$$t = 0 \text{ si } u = w$$

$$t = 1 \text{ sinon.}$$

Les ensembles D_1 et D_2 sont définis comme précédemment en remplaçant D par D' .

$$D_1 = \{(0, 3s), (1, 1), (1, 3s-2), (0, 3s-6), (0, 3s-2), (0, 1)\}$$

$$D_2 = \{(1, 3s+1), (1, 4), (0, 3s-3), (0, 3s+1), (0, 3)\}$$

$$- D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

$$- |D_1| = 6$$

- Les deux arêtes intérieures vérifiant $D'(e) = (0, 3s-3)$ sont

$$e_1 = ((1, 3s+1), (1, 4))$$

$$e_2 = ((1, 3s-2), (1, 1))$$

Les couples (c_k, c'_k) avec $k = 3\ell, 3\ell+1, 3\ell+2$ et ℓ pair sont des couples solutions dont les arêtes sont disjointes.

Il y en a $\frac{6s+2}{2} = 3s+1 > 2$

La proposition est démontrée. \square

VI-3-2 - Cas 1

Le graphe quotient, d'index 1, est obtenu à partir du groupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s-1}$, $\Gamma = \Delta - \{(0,0)\}$ et $\Omega = \Gamma$.

- Dans le cas $s = 1$, Jungerman a donné une immersion triangulaire de $K_{13} - K_3$. Ici les sommets sont numérotés de 1 à 13.

1	3	4	11	5	6	7	12	8	9	10	13	2
2	13	8	12	6	11	4	5	9	7	10	3	1
3	2	10	8	5	7	11	6	13	9	12	4	1
4	3	12	10	6	9	8	7	13	5	2	11	1
5	11	9	2	4	13	10	12	7	3	8	6	1
6	5	8	13	3	11	2	12	9	4	10	7	1
7	6	10	2	9	13	4	8	11	3	5	12	1
8	12	2	13	6	5	3	10	11	7	4	9	1
9	8	4	6	12	3	13	7	2	5	11	10	1
10	9	11	8	3	2	7	6	4	12	5	13	1
11	4	2	6	3	7	8	10	9	5	1		
12	7	5	10	4	3	9	6	2	8	1		
13	10	5	4	7	9	3	6	8	2	1		

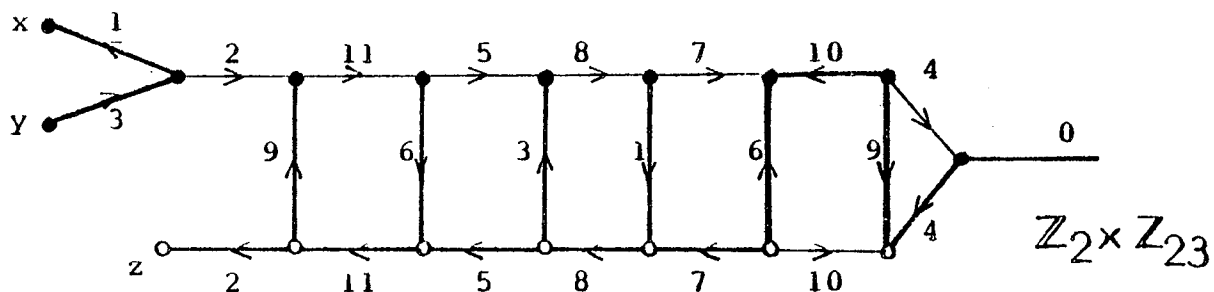
Cette immersion comporte le couple solution $((4,2,7), (5,9,13))$.

$$n(7) = 13$$

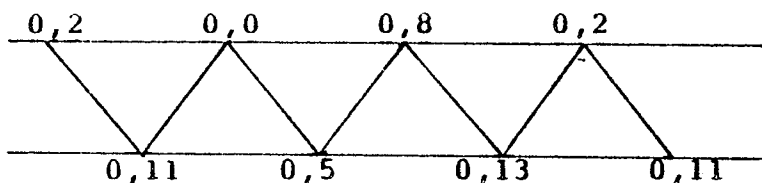
$$n(6) \leq 13 \text{ en fait } n(6) = 13 \text{ car } K_{12} \text{ triangule } S_6.$$

- Dans les cas $s = 2$ et $s = 3$, l'étude des graphes quotients ne permet pas de conclure.

- Dans le cas $s = 4$, le graphe quotient ci-dessous



admet le couple solution

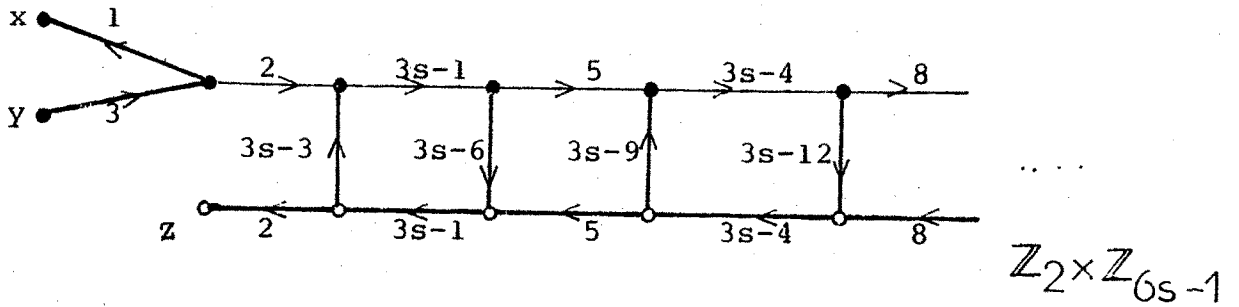


$$g_4^1 - g_4^0 = 2s-1 = 7.$$

Les couples $(C_{(0,k)}, C'_{(0,k)})$ $1 \leq k \leq 5$ sont aussi des couples solutions. Toutes les arêtes extérieures des couples sont disjointes. Les 12 cycles sont distincts (mais non disjointes).

Pour $s \geq 4$, on a donc $\forall g' \quad g_4^0 < g' \leq g_4^1$, $n(g') = n(g_4^1)$ et $n(g') = n_0(g')$.

- Dans le cas $s \geq 5$, comme le graphe quotient donnant l'immersion de K_{12s+4} , le graphe quotient dépend de la parité de s . Cependant il comporte toujours les arcs suivants :



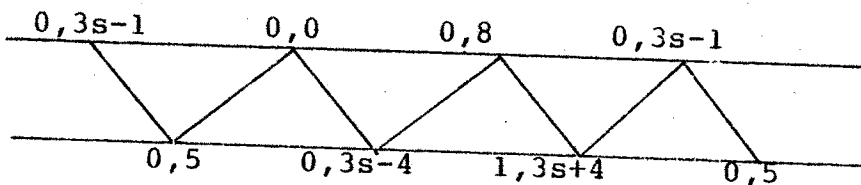
Le parcours du graphe quotient donne la rotation du sommet $(0,0)$:

$(0,0) \dots (0,3s-1) (0,5) (0,3s-4) (0,8) \dots$
 $\dots (0,3s+8) (1,5) (0,3s+5) (0,3s) \dots$
 $\dots (0,6s-9) (0,3s-12) (1,3s-4) (0,3s-9) \dots$

On en déduit les rotations pour les sommets $(0,3s-1)$ et $(0,8)$ qui comportent les séquences :

$(0,3s-1) \dots (0,8) (1,3s+4) (0,5) (0,0) \dots$
 $(0,8) \dots (0,0) (0,3s-4) (1,3s+4) (0,3s-1) \dots$

Les deux cycles $C = ((0,3s-1), (0,0), (0,8))$ et $C' = ((0,5), (0,3s-4), (1,3s+4))$ forment un couple solution.



Cela donne les résultats suivants :

Proposition 7 :

Pour $s \geq 4$, $n(g_s^1-1) = n(g_s^1)$ et $n(g_s^1-1) = n_0(g_s^1-1)$.

Proposition 8 :

Pour $s \geq 4$, $\forall g' \quad g_s^0 < g' \leq g_s^1$, $n(g') = n(g_s^1)$ et
 $n(g') = \left\lceil \frac{7+\sqrt{1+48g'}}{2} \right\rceil$.

Démonstrations :

Les mêmes arguments que ceux développés pour la démonstration de la proposition 1 prouvent la proposition 7.

Pour la proposition 8, il faut trouver $(g_s^0 - g_s^1) - 1 = 2s - 2$ couples solutions.

Pour $s = 4$, cf. paragraphe précédent.

Pour $s \geq 5$, nous avons :

$$D_1 = \{(0, 3s-6), (0, 5), (0, 3s-4), (0, 3s-12), (1, 3s-4), (1, 5)\}$$

$$D_2 = \{(0, 3s-1), (0, 8), (0, 3s-9), (1, 8), (1, 3s-1)\}.$$

$$- D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

$$- |D_1| = 6.$$

Les deux arêtes intérieures pour lesquelles $D(e) = (0, 3s-9)$ sont

$$e_1 = (0, 3s-4), (0, 5)$$

$$e_2 = ((0, 3s-1), (0, 8))$$

En prenant, comme au cas 4, les couples $(c_{0,k}, c'_{(0,k)})$ pour $k = 3\ell, 3\ell+1, 3\ell+2$ et ℓ pair $0 \leq \ell < 2s-2$, on obtient $3s-3$ couples solutions dont les cycles sont dis-joints. Comme $3s-3 > 2s$ pour $s \geq 5$, la proposition est démontrée. \square

VI-4 - Cas 11 et 8

On ne connaît pas le nombre minimum de points nécessaires pour trianguler les surfaces orientables de genre g_s^{11} et g_s^8 .

Par contre, les graphes $K_{12s+11}-K_5$ et $K_{12s+8}-K_5$ admettent une immersion triangulaire dans les surfaces de genre g_s^{11-1} et g_s^8-1 . C'est à partir de ces triangulations que nous pourrions déduire des triangulations de surfaces de genre inférieur.

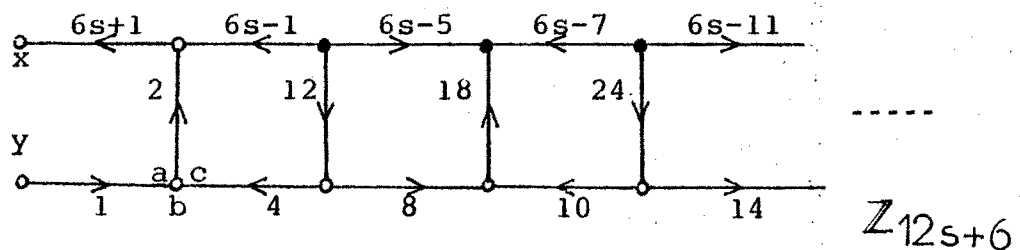
VI-4-1 - Cas 11

Jungerman ([13]) a prouvé qu'il n'existe pas d'immersion triangulaire du graphe $K_{11}-K_5$.

On notera x, y, a, b, c les sommets de K_5 , et les autres sommets de K_{12s+11} sont identifiés aux éléments de Z_{12s+6} .

- Pour $s = 1, 2$ et 3 , les graphes quotients donnés par Ringel dans [19] ne comportent pas de couples solutions.

- Pour $s \geq 4$, le graphe quotient, d'index 1, comporte les arcs suivants : ([20])

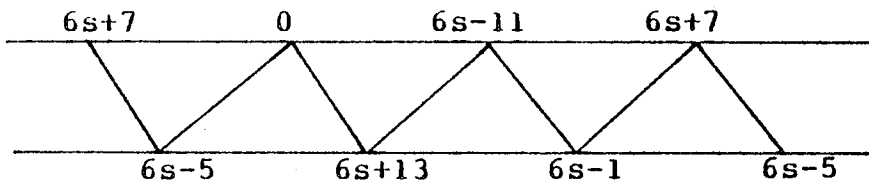


Le parcours du graphe quotient donne la rotation du sommet 0 :
 0. ... 6s+7 6s-5 6s+13 6s-11 ... 6s+17 24 10 18 6s+16 12 4 ...

On aura donc dans les rotations des sommets $6s-11$ et $6s-5$ les séquences suivantes :

$$\begin{array}{cccc} 6s-11. & \dots & 0 & 6s+13 & 6s-1 & 6s+7 \\ 6s-5. & \dots & 6s+13 & 0 & 6s+7 & 6s-1 \end{array}$$

Le couple $(C = (6s+7, 0, 6s-11), C' = (6s-5, 6s+13, 6s-1))$ est un couple solution.



Nous avons alors les résultats suivants :

Proposition 9 :

$$\text{Pour } s \geq 4, \quad n(g_s^{11-2}) = n(g_s^{11-1}) \quad \text{et} \quad n(g_s^{11-2}) = n(g_s^{11-1}).$$

Proposition 10 :

$$\text{Pour } s \geq 4, \quad \text{pour tout } g' \text{ vérifiant } g_s^{10} < g' \leq g_s^{11-1},$$

$$n(g') = n(g_s^{11-1}) \quad \text{et} \quad n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil$$

Démonstration :

La proposition 9 se démontre comme la proposition 1.

Pour la proposition 10, il faut trouver $[g_s^{11-1} - g_s^{10}] - 1 = 2s - 1$ couples solutions compatibles.

$$D_1 = \{12, 6s-5, 6s-7, 24, 10, 8\}$$

$$D_2 = \{6s-1, 6s-11, 18, 4, 14\}$$

Pour $s \geq 4$ on a

$$- D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

$$- |D_1| = 6$$

- Les deux arêtes intérieures vérifiant $D(e) = 18$ sont

$$e_1 = (6s+13, 6s-5)$$

$$e_2 = (6s+7, 6s-11)$$

En prenant les couples (C_k, C'_k) pour $k = 6\ell+j$ avec $0 \leq j \leq 5$, ℓ pair et $0 \leq \ell \leq 2s$, les arêtes correspondant à e_1 et e_2 dans ces couples seront de sommets disjoints, et donc les couples seront d'arêtes disjointes. Il y en a $6s > 2s$.

La propriété est démontrée. \square

VI-4-2 - Cas 8

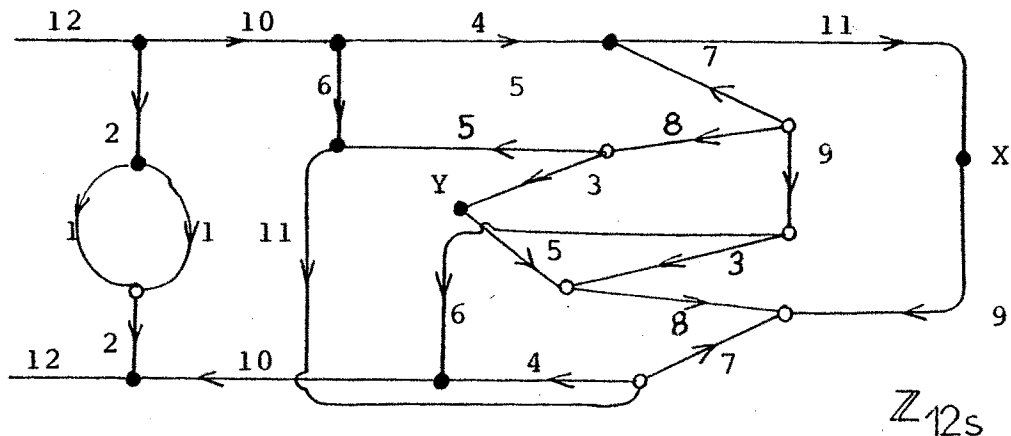
On sait qu'il existe une immersion triangulaire de $K_{12s+8}^{-K_5}$, mais je n'ai pas trouvé le graphe quotient correspondant.

Le seul résultat est donc $n(g_s^8-1) = n_o(g_s^8-1)$.

VI-5 - Cas 2

La première immersion triangulaire de $K_{12s+2}^{-K_2}$ a été donnée par Ringel et Youngs ([21]) pour $n \equiv 14 \pmod{24}$, soit pour s impair. En 1974, Jungerman ([11]) a résolu le cas s pair, et trouvé une immersion triangulaire à l'aide d'un graphe quotient d'index 2, dans le cas s pair comme dans le cas s impair.

Pour $s = 2$, le graphe quotient ci-dessous ne comporte pas de couples solution.



Le graphe quotient donne une immersion triangulaire de $K_n - K_2$ pour $n \equiv 2 \pmod{24}$. En changeant les rotations des sommets marqués *, on obtient l'immersion de $K_n - K_2$ pour $n \equiv 14 \pmod{24}$.

Ce graphe ne comporte pas de couple solution.

VI- 6 - Cas 3, 5, 6 et 9

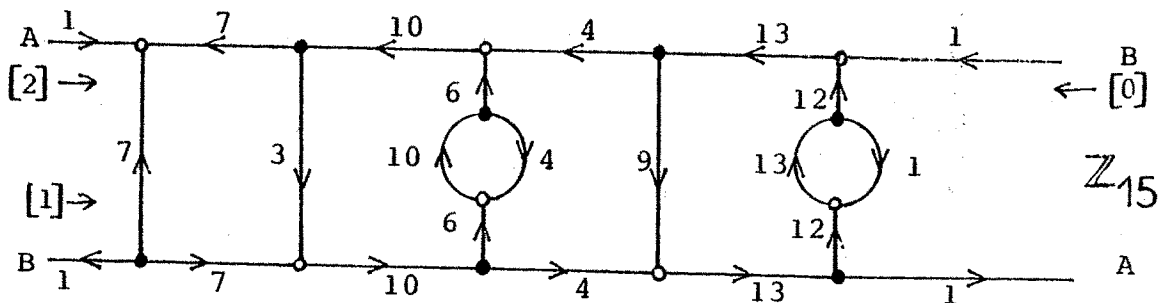
Les graphes K_{12s+3} , $K_{12s+5} - K_2$, $K_{12s+6} - K_3$ et $K_{12s+9} - K_3$ triangulent respectivement les surfaces de genre g_s^3 , g_s^5 , g_s^6 et g_s^9 .

L'immersion triangulaire de K_{12s+3} a été l'une des premières trouvées. La première solution est due à Ringel, et une solution utilisant les graphes quotients a été trouvée par Gustin, qui donna l'exemple de K_{12s+3} avec $s = 2$.

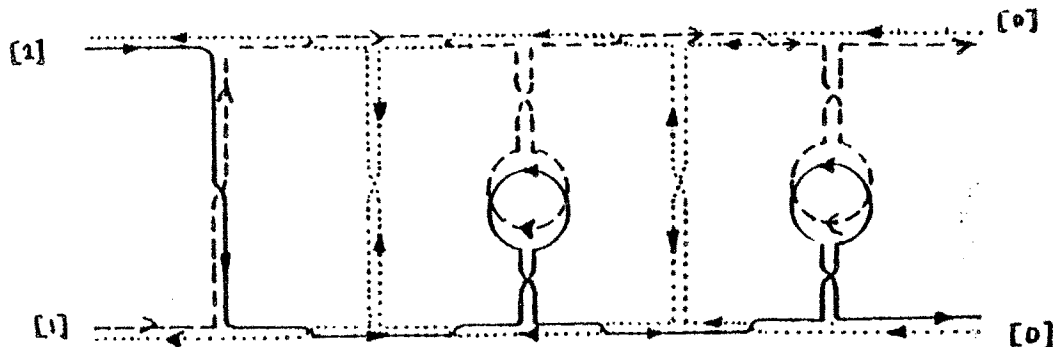
Le groupe employé est \mathbb{Z}_{12s+3} , $\Delta = \mathbb{Z}_{12s+3} - \{0\}$, et Ω est le sous-groupe de Γ dont les éléments sont multiples de 3.

VI-6-1 - Cas 3

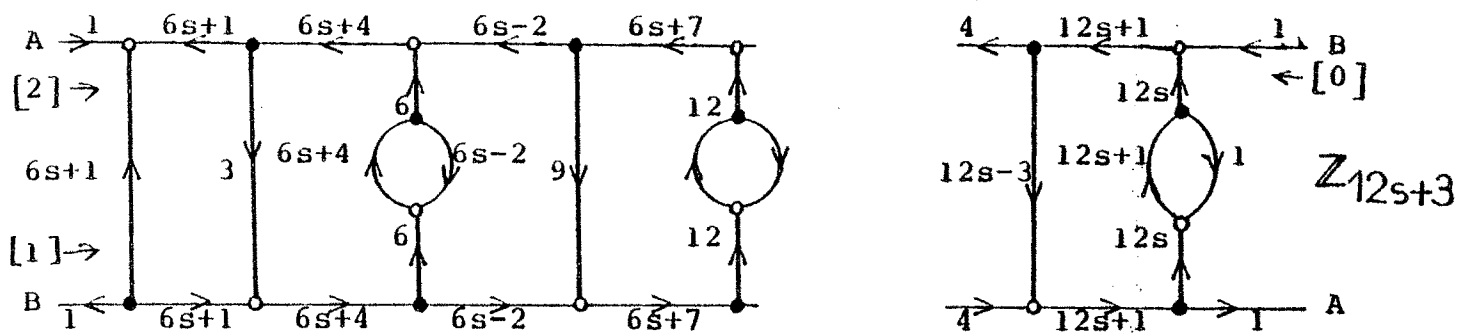
Exemple pour $n = 15$ ($s = 1$)



Les deux extrémités portant la même lettre (A ou B) sont identifiées. Les rotations des trois sommets Ω , Ω_1 et Ω_2 de Γ/Ω s'obtiennent par parcours du graphe quotient, ce sont les trois circuits étiquetés [0], [1] et [2].



Dans le cas général, le graphe quotient est comme ci-dessus un graphe échelle de type Möbius (on fait un demi-tour avant d'identifier les extrémités de l'échelle).

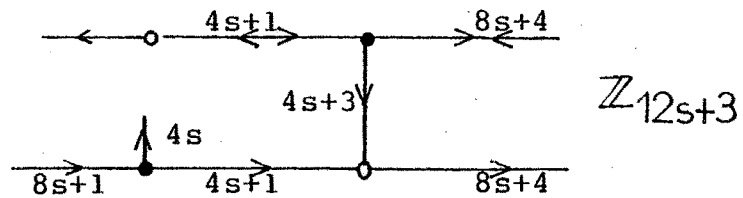


Les couples solution sont différents selon congruence de s modulo 3.

$$1 - s \equiv 0 \pmod{3}$$

$$4s+3 = 4(3k)+3 = 3(4k+1)$$

Le courant $4s+3$ est porté par un arc vertical orienté vers le bas



Les circuits [0] [1] et [2] comportent les séquences suivantes

[0]. ... $8s+4, 4s+3, 8s+2, 4s+2$...

[1]. ... $8s+1, 4s, 8s+2, 4s-1$...

[2]. ... $8s+1, 4s, 8s+2, 4s+2$...

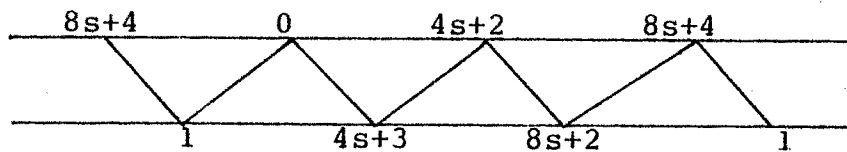
qui vont donner, dans les rotations des sommets $0, 8s+4$ ($\equiv 1 \pmod{3}$) et $4s+2$ ($\equiv 2 \pmod{3}$) les séquences :

0 $8s+4, 4s+3, 8s+2, 4s+2$...

$8s+4$ $4s+2, 1, 4s+3, 0$...

$4s+2$ $0, 8s+2, 1, 8s+4$...

Les deux cycles $C = (8s+4, 0, 4s+2)$ et $C' = (4s+3, 8s+2, 1)$ forment donc un couple solution



Nous avons pour ce couple (C_1, C')

$$D_1 = \{4s, 4s+1, 4s+3\}$$

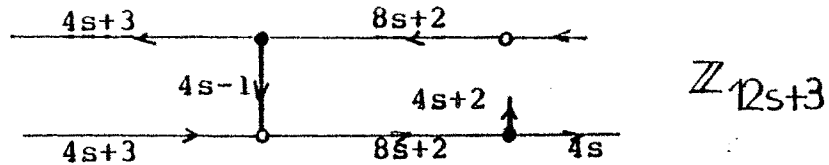
$$D_2 = \{4s-1, 4s+2\}$$

et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$2 - s \equiv 1 \pmod{3}.$$

$$4s-1 = 4(3k+1)-1 = 3(4k+1)$$

Le courant $4s-1$ est porté par un arc vertical orienté vers le bas



Les circuits [0], [1] et [2] comportent les séquences suivantes :

$$[0]. \dots 8s+3, 4s+1, 8s+4, 4s+3 \dots$$

$$[1]. \dots 8s, 4s+1, 8s+1, 4s \dots$$

$$[2]. \dots 8s+3, 4s+1, 8s+1, 4s \dots$$

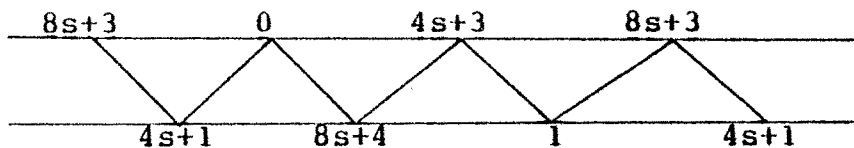
qui vont donner, dans les rotations des sommets $0, 4s+3$ ($\equiv 1 \pmod{3}$) et $8s+3$ ($\equiv 2 \pmod{3}$) les séquences :

$$0. \dots 8s+3, 4s+1, 8s+4, 4s+3 \dots$$

$$4s+3. \dots 0, 8s+4, 1, 8s+3 \dots$$

$$8s+3. \dots 4s+3, 1, 4s+1, 0 \dots$$

Les deux cycles $C = (8s+3, 0, 4s+3)$ et $C' = (4s+1, 8s+4, 1)$ forment un couple solution



Pour ce couple (C, C') nous avons

$$D_1 = \{4s+2, 4s+1, 4s-1\}$$

$$D_2 = \{4s, 4s+3\}$$

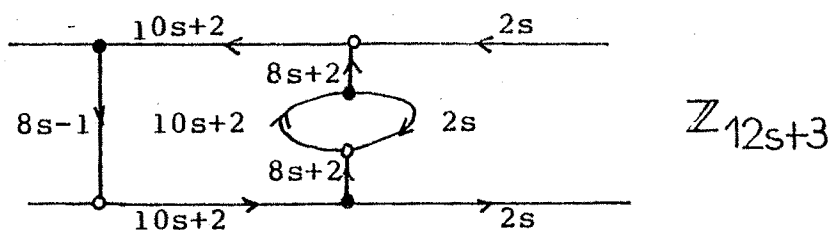
et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

On connaît aussi ([13]), pour $s = 1$, l'existence d'une immersion triangulaire pour $K_{15} - K_4$.

$$3 - s \equiv 2 \pmod{3}$$

$$8s+2 = 8(3k+2) + 2 = 3(8k+6)$$

Le courant $8s+2$ est porté par un arc vertical orienté vers le haut.



Le circuit [1] comporte la séquence suivante :

$$[1]. \dots 4s+1, 2s, 10s+2, 8s+2 \dots$$

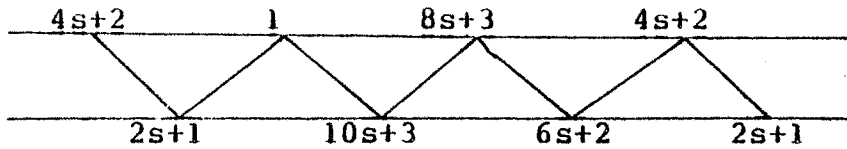
qui produit, pour les sommets 1, $8s+3 \equiv 1 \pmod{3}$ et $4s+2 \equiv 1 \pmod{3}$ les séquences suivantes dans les rotations :

$$1. \dots 4s+2 \ 2s+1 \ 10s+3 \ 8s+3 \dots$$

$$4s+2. \dots 8s+3 \ 6s+2 \ 2s+1 \ 1 \dots$$

$$8s+3. \dots 1 \ 10s+3 \ 6s+2 \ 4s+2 \dots$$

Les deux cycles $C = (4s+2, 1, 8s+3)$ et $C' = (2s+1, 10s+3, 6s+2)$ forment donc un couple solution



Pour ce couple (C, C') nous avons

$$D_1 = \{2s+1, 2s\}$$

$$D_2 = \{4s+1\}$$

et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Ceci nous donne les résultats suivants :

Proposition 11 :

Pour $s \geq 1$, $n(g_s^3 - 1) = n(g_s^3)$ et $n(g_s^3 - 1) = n_0(g_s^3 - 1)$.

Cela découle de l'existence des couples solutions.

Proposition 12 :

Pour $s \geq 1$, et $s \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$, $\forall g' \quad g_s^2 < g' \leq g_s^3$,

$$n(g') = n(g_s^3) \quad \text{et} \quad n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g_s^4}}{2} \right\rceil.$$

Démonstration

$$g_s^2 - g_s^2 = 2s$$

Comme dans les 2 cas ($s \equiv 0$, ou $1 \pmod{3}$) nous avons

$D_1 \cap D_2 = \emptyset$, il suffit donc de trouver des couples solutions pour lesquels les 6 arêtes entre les deux cycles sont toutes distinctes.

$$1 - s \equiv 0 \pmod{3}$$

$$- D_1 = \{4s, 4s+1, 4s+3, 4s+1, 4s, 4s+1\}$$

* Il y a 2 arêtes pour lesquelles $D(x,y) = 4s$:

$$e_1 = (8s+4, 1) \quad \text{où } x \equiv 1 \equiv y \pmod{3}$$

$$e_2 = (8s+2, 4s+2) \quad \text{où } x \equiv 2 \equiv y \pmod{3}$$

Comme les sommets correspondants ont la même congruence dans tous les couples (C_k, C'_k) , une arête du type e_1 ne pourra être supprimée que par une arête du type e_1 .

Il faut donc dénombrer les arêtes de type e_1 différentes. Comme $(8s+4)-1 \neq 1-8s+4$ les $\frac{12s+3}{3}$ arêtes obtenues pour k $0 \leq k \leq 4s+1$ seront distinctes.

Le raisonnement est identique pour l'arête e_2 .

* Regardons les arêtes telles que $D(x,y) = 4s+1$

$$e_1 = (8s+4, 4s+3) \quad x \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{et } y \equiv 0 \pmod{3}$$

$$e_2 = (8s+2, 0) \quad x \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{et } y \equiv 0 \pmod{3}$$

$$e_3 = (4s+2, 1) \quad x \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

Les 3 arêtes sont de type différent.

On aura donc $\frac{12s+3}{3}$ couples solutions dont les 6 arêtes extérieures seront toutes distinctes.

- Parmi les $4s+1$ couples, il faut en trouver $2s-1$ pour lesquels les cycles $\{C_k, C'_k\}$ sont distincts.

Les $\frac{4s}{3}$ premiers conviennent puisque leurs sommets sont distincts.

$$h = \frac{4s}{3}$$

$$C = (0, 4s+2, 8s+4) \quad \text{et } C_h = (1, 4s, 8s+2)$$

$$C' = (1, 4s+3, 8s+2) \quad \text{et } C'_h = (12s+2, 4s+1, 8s+3)$$

C_h n $C'_h = (1, 8s+2)$ mais les deux cycles sont différents

de même, $C_{h+1} \neq C'_1, \dots, C_{2h} \neq C'_h$

Les $2h$ premiers couples conviennent et $2h = \frac{8s}{3} > 2s$.
La démonstration dans le cas $s \equiv 1 \pmod{3}$
est similaire

$$2 - s \equiv 1 \pmod{3}$$

$$- D_1 = \{4s+2, 4s+1, 4s-1\}$$

* $D(e) = 4s+2$ est obtenu pour

$$e_1 = (4s+1, 8s+3) \text{ soit } x \equiv 2 \pmod{3} \text{ et } y \equiv 2 \pmod{3}$$

$$e_2 = (1, 4s+3) \text{ soit } x \equiv 1 \equiv y \pmod{3}$$

e_1 et e_2 ne sont pas de même type. Comme on ne peut avoir
 $(x-y) = (y-x)$ dans Z_{12s+3} , les arêtes correspondants à
 e_1 et e_2 dans les couples (C_k, C'_k) solutions seront
toutes distinctes pour k tel que $0 \leq k \leq \frac{12s+3}{3}$

* $D(e) = 4s+1$ est obtenu pour

$$e_1 = (4s+1, 0) \text{ soit } x \equiv 2 \pmod{3} \text{ et } y \equiv 0 \pmod{3}$$

$$e_2 = (8s+4, 4s+3) \text{ soit } x \equiv 0 \pmod{3} \text{ et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

$$e_3 = (8s+3, 1) \text{ soit } x \equiv 2 \pmod{3} \text{ et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

Les 3 arêtes sont en fait d'un type différent.

On aura là ainsi $4s+1 = \frac{12s+3}{3}$ couples solutions dont les
arêtes extérieures sont distinctes.

- Parmi ces couples, il faut en choisir $2s-1$ de cycles dis-
tincts. C'est le cas pour les couples (C_k, C'_k) $0 \leq k < \frac{4s+2}{3}$
dont les sommets sont distincts.

Posons $h = \frac{4s+2}{3}$

$$C = (0, 4s+3, 8s+3) \text{ et } C_h = (2, 4s+2, 8s+5)$$

$$C^1 = (1, 4s+1, 8s+4) \text{ et } C_h^1 = (3, 4s+3, 8s+3)$$

$$C \neq C_h^1 \text{ et donc } C_1 \neq C_{h+1}^1, \dots, C_h \neq C_{2h}^1$$

On a $2h = \frac{8s-2}{2} > 2s$ couples dont les cycles sont distincts.

La proposition est démontrée dans ce cas. \square

Dans le cas $s \equiv 2 \pmod{3}$, nous n'avons pas trouvé $2s-1$ couples indépendants. On a en effet :

$$D_1 = \{2s+1, 2s\}$$

. $D(e) = 2s+1$ pour les arêtes

$$e_1 = (4s+2, 2s+1) \text{ soit } x \equiv 1 \text{ et } y \equiv 2 \pmod{3}$$

$$e_2 = (10s+3, 1) \text{ soit } x \equiv 2 \text{ et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

$$e_3 = (8s+3, 6s+2) \text{ soit } x \equiv 1 \text{ et } y \equiv 2 \pmod{3}$$

On remarque que pour $3k = 4s+1$, $C_k = C$ et $C'_k = C'$

. $D(e) = 2s$ pour les arêtes

$$e_1 = (2s+1) \text{ soit } x \equiv 2 \text{ et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

$$e_2 = (10s+3, 8s+3) \text{ soit } x \equiv 2 \text{ et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

$$e_3 = (6s+2, 4s+1) \text{ soit } x \equiv 2 \text{ et } y \equiv 1 \pmod{3}$$

On n'a donc que $\frac{4s+1}{3}$ couples pour lesquels les 6 arêtes extérieures sont distinctes.

Pour ces couples, les $\frac{8s+2}{3}$ cycles C_k, C'_k sont distincts.

On a alors :

Proposition 12' :

Pour $s \geq 1$ et $s \equiv 2 \pmod{3}$, $\forall g' \quad g_s^2 - \frac{4s+1}{3} \leq g' \leq g_s$,

$$n(g') = n(g_s) \text{ et } n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil.$$

VI-6-2 - Cas 5

$K_{12s+5} - K_2$ triangule la surface orientable de genre g_s^5 .

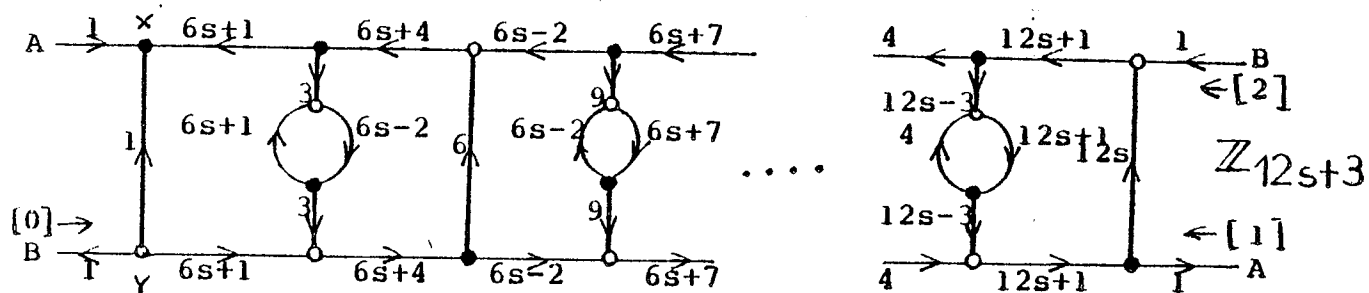
Les deux sommets de K_2 sont désignés par les lettres x

et y , et les $12s+3$ sommets restants de K_{12s+5} par les éléments de \mathbb{Z}_{12s+3} . Le graphe quotient, d'index 3, est fort ressemblant à celui du cas 3.

Là aussi, les solutions dépendent de la congruence de s modulo 3.

Pour $s \equiv 2 \pmod{3}$, on a

$$4s+1 = 4(3k+2) + 1 = 3(4k) + 9 = 3(4k+3) \equiv 0 \pmod{3}$$



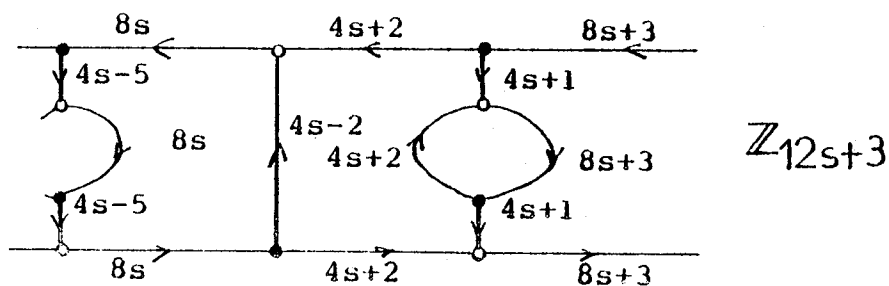
On a les séquences suivantes :

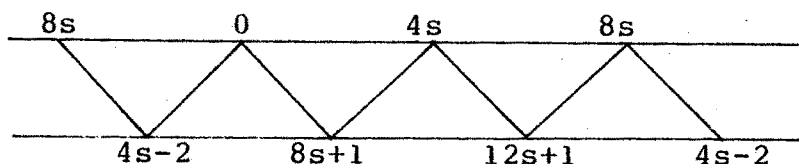
- [0]. ... $8s, 4s-2, 8s+1, 4s$
- [1]. ... $8s+3, 4s+1, 8s+1, 4s+3$
- [2]. ... $8s+3, 4s+1, 8s+1, 4s$

qui vont donner les rotations pour les sommets $0, 4s (\equiv 2 \pmod{3})$, et $8s (\equiv 1 \pmod{3})$

- 0. ... $8s, 4s-2, 8s+1, 4s$
- $4s$ $0, 8s+1, 12s+1, 8s$
- $8s$ $4s, 12s+1, 4s-2, 0$

Le couple $(C = (8s, 0, 4s), C' = (4s-2, 8s+1, 12s+1))$ est donc un couple solution





$$D_1 = \{4s+2, 4s-2, 4s+1\} \text{ et } D_2 = \{4s, 4s+3\}$$

Pour $s \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$, je n'ai pas trouvé de couple solution

On a donc les résultats suivants :

Proposition 13 :

Pour $s \equiv 2 \pmod{3}$, $n(g_s^5 - 1) = n(g_s^5)$ et $n(g_s^5 - 1) = n_0(g_s^5 - 1)$.

Proposition 14 :

Pour $s \equiv 2 \pmod{3}$, $\forall g' \quad g_s^4 < g' \leq g_s^5$, $n(g') = n(g_s^5)$ et

$$n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'^4}}{2} \right\rceil.$$

Démonstration

Il faut trouver $(g_s^5 - g_s^4)^{-1} = 2s-1$ couples solutions.

$$- D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

$$- D_1 = \{4s+2, 4s-2, 4s+1\}$$

Il y a 3 arêtes pour lesquelles $D(e) = 4s+2$

$$e_1 = (8s, 4s-2) \quad \text{soit } x \equiv 1 \text{ et } y \equiv 0$$

$$e_2 = (8s+1, 0) \quad \text{soit } x \equiv 2 \text{ et } y \equiv 0$$

$$e_3 = (12s+1, 4s) \quad \text{soit } x \equiv 1 \text{ et } y \equiv 2$$

Il y a 2 arêtes pour lesquelles $D(e) = 4s+1$

$$e_4 = (8s+1, 4s) \quad \text{soit } x \equiv 2 \text{ et } y \equiv 2$$

$$e_5 = (12s+1, 8s) \quad \text{soit } x \equiv 1 \text{ et } y \equiv 1$$

Toutes ces arêtes sont distinctes. Il y a donc $4s+1$ couples solutions dont les arêtes extérieures sont distinctes.

$$- D_2 = \{ 4s, 4s+3 \}$$

Il y a 4 arêtes pour lesquelles $D(e) = 4s$:

$$\begin{aligned} e_1 &= (12s+1, 4s-2) \quad \text{soit } x \equiv 1 \quad \text{et } y \equiv 0 \\ e_2 &= (4s, 0) \quad \quad \quad \text{soit } x \equiv 2 \quad \text{et } y \equiv 0 \\ e_3 &= (8s, 4s) \quad \quad \quad \text{soit } x \equiv 1 \quad \text{et } y \equiv 2 \\ e_4 &= (12s+1, 8s+1) \quad \text{soit } x \equiv 1 \quad \text{et } y \equiv 2 \end{aligned}$$

Il y a 2 arêtes pour lesquelles $D(e) = 4s+3$

$$\begin{aligned} e_5 &= (8s, 0) \quad \quad \quad \text{soit } x \equiv 1 \quad \text{et } y \equiv 0 \\ e_6 &= (8s+1, 4s-2) \quad \text{soit } x \equiv 2 \quad \text{et } y \equiv 0 \end{aligned}$$

$e_3 \in C$ et $e_4 \in C'$. Les cycles $\{C_k, C'_k / 0 \leq k < 4s+1\}$ ont donc au plus une arête commune. Ils sont donc tous distincts. D'où la proposition.

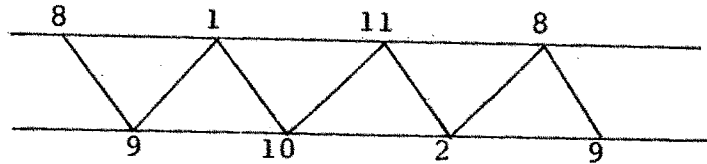
VI-6-3 - Cas 6

$K_{12s+6} - K_3$ triangule la surface de genre g_s^6 ; pour $s \geq 1$.

. Pour $s = 1$, Jungerman ([B]) nous donne l'immersion triangulaire de $K_{18} - K_3$.

1.	3	4	5	6	16	7	8	9	10	11	17	12	13	14	15	18	2
2.	18	5	7	9	8	11	10	12	15	13	17	14	4	16	6	3	1
3.	2	6	17	15	8	13	10	14	12	7	18	11	9	5	16	4	1
4.	3	16	2	14	9	7	13	12	18	15	10	17	11	6	8	5	1
5.	4	8	16	3	9	12	10	13	11	15	14	17	7	2	18	6	1
6.	5	18	10	15	9	14	8	4	11	13	7	12	17	3	2	16	1
7.	16	15	11	14	10	18	3	12	6	13	4	9	2	5	17	8	1
8.	7	17	10	16	5	4	6	14	18	13	3	15	12	11	2	9	1
9.	8	2	7	4	14	6	15	17	13	18	12	5	3	11	16	10	1
10.	9	16	8	17	4	15	6	18	7	14	3	13	5	12	2	11	1
11.	10	2	8	12	16	9	3	18	14	7	15	5	13	6	4	17	1
12.	17	6	7	3	14	16	11	8	15	2	10	5	9	18	4	13	1
13.	12	4	7	6	11	5	10	3	8	18	9	17	2	15	16	14	1
14.	13	16	12	3	10	7	11	18	8	6	9	4	2	17	5	15	1
15.	14	5	11	7	16	3	2	12	8	3	17	9	6	10	4	18	1
16.	6	2	4	3	5	8	10	9	11	12	14	13	15	7	1		
17.	11	4	10	8	7	5	14	2	13	9	15	3	6	12	1		
18.	15	4	12	9	13	8	14	11	3	7	10	6	5	2	1		

Cette immersion comporte le couple suivant :

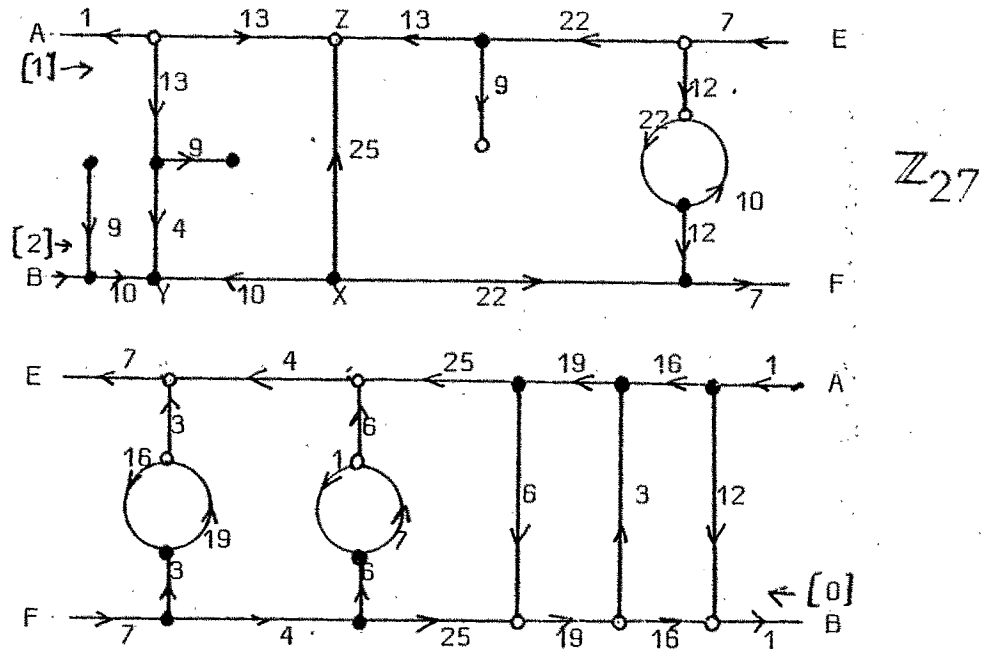


ce qui nous donne une immersion de $K_{18}-K_3-6$ dans la surface de genre $g_s^6-1 = 16$.

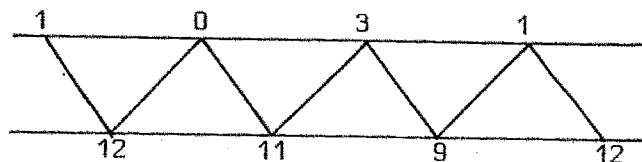
De plus, $K_{18}-K_6$ et $K_{18}-K_7$ admettent des immersions triangulaires dans les surfaces de genre g_1^6-2 et g_1^6-3 .

Les sommets de K_3 sont x, y, z et les autres sommets de K_{12s+6} sont les éléments de Z_{12s+3} .

. Pour $s = 2$, l'immersion de $K_{30}-K_3$ est donnée par le graphe quotient :



Elle comporte le couple solution:



et les 3 autres couples $((3,2,5), (14,13,10)), ((5,4,7), (16,15,12))$ et $((7,6,9), (18,17,14))$, dont toutes les arêtes sont disjointes, nous donnent les immersions triangulaires des surfaces de genre $g' / g_s^5 < g' \leq g_s^6$.

. Pour $s = 3$ et 4 , l'étude des graphes quotients donnés par Ringel dans [19] ne donne rien.

. Pour $s \geq 5$, le graphe quotient, d'index 3, est donné page suivante.

. Pour $s \geq 5$, on obtient, lors du parcours du graphe quotient, les conséquences suivantes par le circuit 0 :

[0]. ... $3s-1, 6s, 3s+1, 6s-3 \dots 9s+4, 6s+3, 9s+2, 6s+6, 9s+7, 6s+9, 9s+5 \dots$

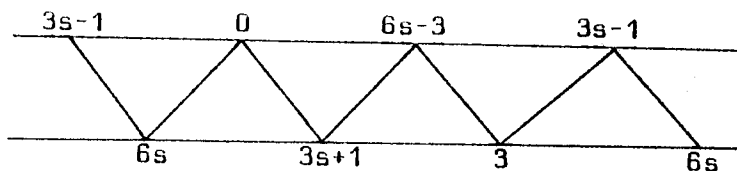
qui vont produire, dans les rotations des sommets 0, $6s$ et $6s-3 (\equiv 0 \pmod{3})$

0. ... $3s-1, 6s, 3s+1, 6s-3 \dots$

$6s$ $3s+1, 0, 3s-1, 3 \dots$

$6s-3$ $0, 3s+1, 3, 3s-1 \dots$

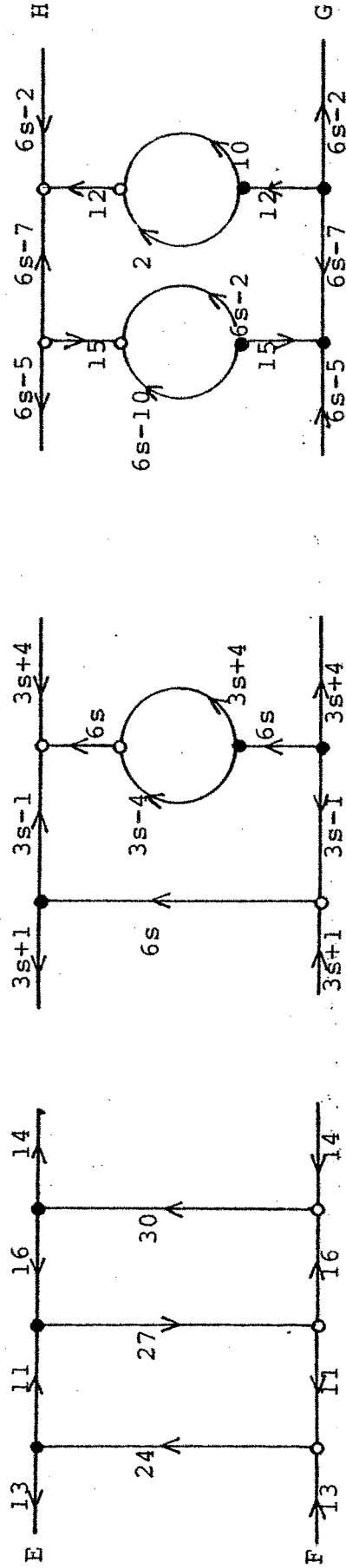
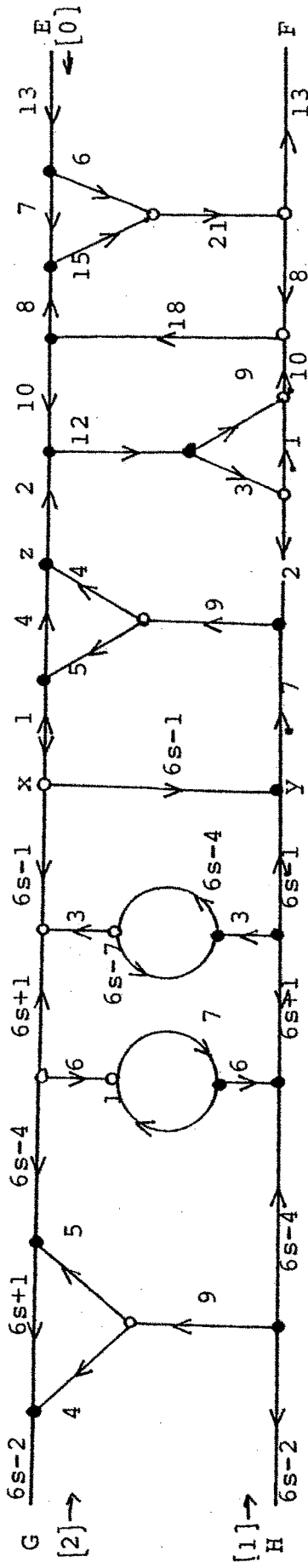
Le couple $(C = (3s-1, 0, 6s-3), C' = (6s, 3s+1, 3))$ est donc solution



On a donc les résultats suivants :

Proposition 15 :

Pour $s \geq 5$, $n(g_s^6-1) = n(g_s^6)$ et $n(g_s^6-1) = n_0(g_s^6-1)$



Z_{12s+3}

Proposition 16 :

Pour $s \geq 5$, $\forall g' \quad g_s^5 < g' \leq g_s^6$, $n(g') = n(g_s^6)$ et

$$n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g'}}{2} \right\rceil.$$

Démonstration

La démonstration de la proposition 15 est analogue à celle de la proposition 1.

Pour la proposition 17, il faut trouver $(g_s^6 - g_s^5) - 1 = 2s - 1$ couples solutions disjoints au sens des arêtes.

$$D_1 = \{3s+1, 6s, 3s+2, 6s-6, 3s-4\}$$

$$D_2 = \{3s-1, 6s-3, 6s-4, 3s-2, 3s\}$$

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

Deux arêtes extérieures vérifient $D(e) = 3s+1$

$$e_1 = (6s, 3s-1) \quad \text{avec } x \equiv 0 \quad \text{et } y \equiv 2 \pmod{3}$$

$$e_2 = (3s+1, 0) \quad \text{avec } x \equiv 1 \quad \text{et } y \equiv 0 \pmod{3}$$

On a donc, au moins $4s+1 = \frac{12s+3}{3}$ couples disjoints pour les arêtes extérieures.

$|D_2| = 5$. Les couples auront au plus une arête commune, il seront donc tous distincts.

La proposition est démontrée.

VI-6-4 - Cas 9

Pour $s \geq 1$, on connaît l'existence d'une immersion triangulaire du graphe $K_{12s+9} - K_3$ dans la surface de genre g_s^9 . La première solution a été trouvée par Gustin, mais c'est Youngs qui a donné une solution avec un graphe quotient d'index 3 indépendant de la parité de s .

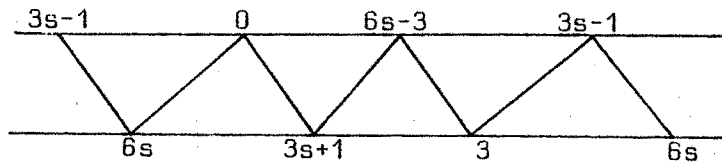
Pour $s \geq 3$, Guy et Ringel ont donné le graphe quotient (page suivante), associé à l'immersion triangulaire de $K_{12s+9} - K_6$ dans la surface de genre $12\binom{2}{s} + 11 = g_s^9 - 2$. ([8])

Les 6 sommets de K_6 sont x, y, z, u, v, w , et les autres sommets de K_{12s+9} sont identifiés aux éléments de \mathbb{Z}_{12s+3} .

Entre les arcs verticaux portant les courants 24 et $6s$, à droite de E , les graphes quotients des cas 6 et 9 sont identiques.

On a donc pour le circuit $[0]$ la même séquence qu'au cas 6 $[0]$ $3s-1, 6s, 3s+1, 6s-3 \dots 9s+4, 6s+3, 9s+2, 6s+6, 9s+7, 6s+9, 9s+5 \dots$

qui produit le même couple de cycles :



On a alors les résultats :

Proposition 17 :

Pour $s \geq 5$, $n(g_s^9 - 3) = n(g_s^9)$ et $n(g_s^9 - 3) = n_0(g_s^9 - 3)$

Démonstration

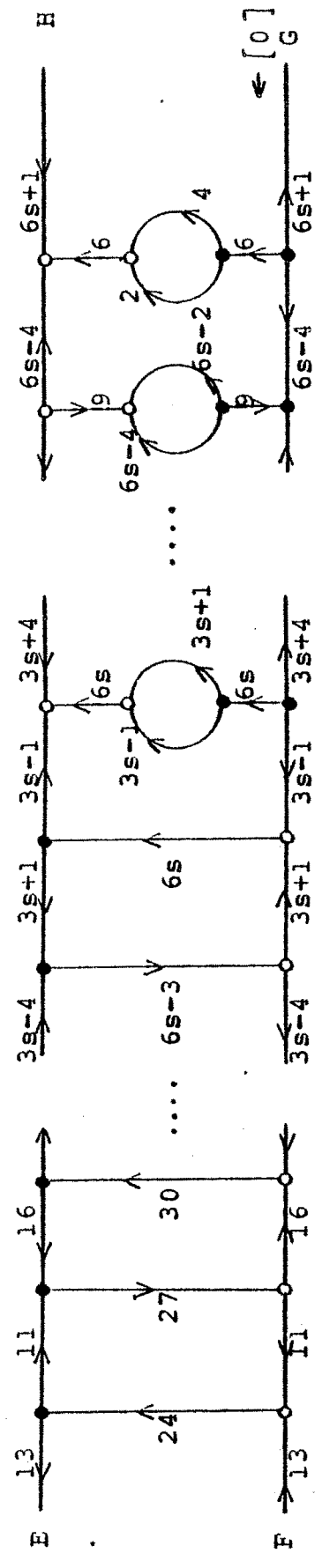
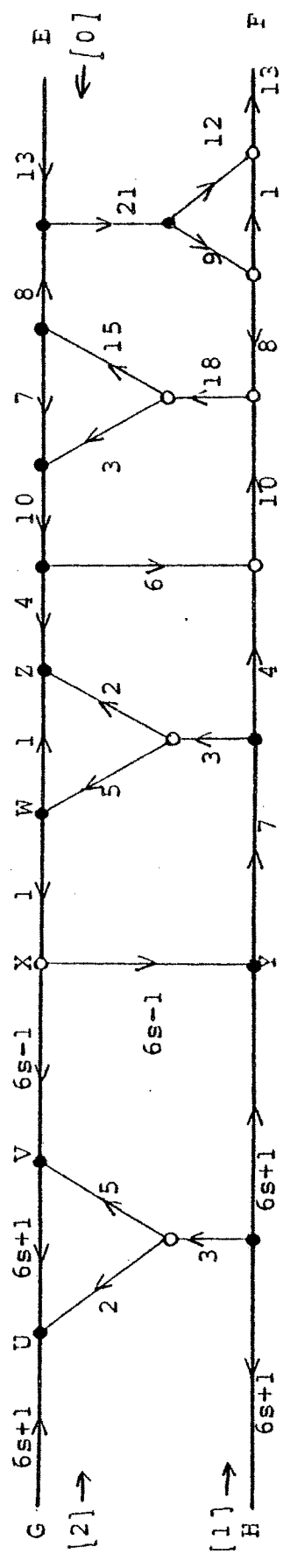
L'existence du couple solution permet d'écrire l'égalité :

$$n(g_s^9 - 3) = n(g_s^9 - 2) \quad \text{or} \quad n(g_s^9 - 2) = n(g_s^9).$$

Proposition 18 :

Pour $s \geq 5$, $\forall g' \quad g_s^8 < g' \leq g_s^9 - 2$, $n(g') = n(g_s^9)$ et

$$n(g') = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g^4}}{2} \right\rceil$$



Z_{12s+3}

Démonstration

$$g_s^8 - g_s^8 = 2s+1$$

Il faut donc trouver $2s-1$ couples pour démontrer la proposition.

Les $4s+1$ couples solutions de la proposition 16 conviennent encore ici.

VI-7 - Cas 0

Puisque c'est un cas où $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$ est entier, il existe une immersion triangulaire de K_{12s} utilisant un graphe quotient d'index 1. Mais il utilise un groupe non abélien (comportant $12s$ élément).

Pour s impair, Ringel utilisé le graphe $A_4 \times Z_s$: le graphe quotient obtenu ne comporte pas de couple solution.

La solution générale utilise le groupe $G(k) \times Z_{2r+1}$ où k et r vérifient

$$n = 3 \cdot 2^k (2r+1)$$

et $G(k)$ est le groupe d'ordre $3 \cdot 2^k$ dont les éléments s'écrivent $[p, a]$ avec a élément du groupe cyclique d'ordre 3 et $p \in \Gamma^+(2^k)$, groupe additif dans $GF(2^k)$.

Elle ne comporte pas de cycle solution.

D.J. Pengelley et M. Jungerman ([15]) ont prouvé qu'il n'existe pas de graphe quotient d'index < 4 utilisant le groupe Z_{12s} . Ils donnent un graphe quotient d'index 4 utilisant le groupe Z_{12s} , mais de graphe est très compliqué et fonction de la congruence de s modulo 8.

Le seul résultat est donc :

$$n(g_s^0) = n_0(g_s^0).$$

VI-8 - Conclusion

Nous n'avons pu conclure que dans certains cas. Le tableau présenté page suivante donne les résultats pour les surfaces de genre inférieur à 80.

L'étude n'a pas abouti dans les cas suivants:

- cas 1 : $s=2$ et $s = 3$
- cas 2 : $s > 1$
- cas 4 : $s = 2$
- cas 5 : $s \equiv 1$ et $2 \pmod{3}$
- cas 6 : $s = 3$ et $s = 4$
- cas 7 : $s = 1$
- cas 8 : $s \geq 1$
- cas 9 : $s = 1, 2, 3$ et 4 et l'immersion de $K_n - K_3 - 6$
- cas 10 : $s = 1$
- cas 11 : $s = 1, 2$ et 3 et l'immersion de $K_n - 4$
- cas 0 : $s \geq 0$

Dans les cas résolus, les couples solutions sont tous du type régulier, ce qui provient sans doute de la symétrie des immersions obtenues à l'aide des graphes quotients.

Pour g "assez grand" (s supérieur à 5), on a

$$n(g) = n_0(g)$$

si g vérifie

- $g = g_s^i$ et $i \neq 8$ et $i \neq 11$
- g appartient à l'un des intervalles suivants:
 - $[g_s^0, g_s^1]$,
 - $[g_s^2, g_s^7]$ si $s \equiv 0 \pmod{3}$
 - $[g_s^2, g_s^4]$, $[g_s^5, g_s^7]$ si $s \equiv 1 \pmod{3}$
 - $[g_s^3 - \frac{4s+1}{3}, g_s^4]$, $[g_s^5, g_s^7]$ si $s \equiv 2 \pmod{3}$
 - $[g_s^8, g_s^9 - 2]$, $[g_s^9, g_s^{11}]$.

SURFACES ADMETTANT UNE TRIANGULATION MINIMALE

PAR N POINTS

G	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	<u>3</u>	<u>7</u>	10	<u>10</u>			<u>12</u>	<u>13</u>		<u>14</u>
G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N	15	<u>15</u>	16	<u>16</u>		<u>17</u>	18	<u>18</u>		
G	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
N	<u>19</u>					<u>21</u>			<u>22</u>	
G	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
N	<u>23</u>					<u>24</u>			<u>25</u>	
G	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
N			<u>26</u>	27	27	27	<u>27</u>			
G	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
N	<u>28</u>	29	29	29	<u>29</u>	30	30	30	<u>30</u>	31
G	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
N	31	31	31	<u>31</u>						
G	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
N			<u>33</u>	34	34	34	34	<u>34</u>		

Les valeurs soulignées correspondent à une surface de genre g_s^i .

CHAPITRE III

GENERATION DE GRAPHS SUP-IMMERGEABLES

I - PRESENTATION DU PROBLEME

Soit G un graphe. Soit $S(G)$ la classe des surfaces orientables où G admet une immersion 2-cellulaire. Le genre de G , $\gamma(G)$, et le genre maximum de G , $\gamma_M(G)$, sont définis respectivement par :

$$\gamma(G) = \min\{\gamma(S) / S \in S(G)\}$$

$$\gamma_M(G) = \max\{\gamma(S) / S \in S(G)\}$$

où $\gamma(S)$ est le genre de la surface S .

Suivant un résultat de Duke, on a

$$S \in S(G) \iff \gamma(G) \leq \gamma(S) \leq \gamma_M(G).$$

L'étude du genre maximum $\gamma_M(G)$ a été abordée pour la première fois par Nordhaus, Stewart et White dans [16]. Mais la détermination de γ_M est due à Xuong dans [23], à partir d'un nouvel invariant combinatoire appelé déficience de Betti.

D'après la formule d'Euler, le nombre de faces d'une immersion 2-cellulaire de G dans une surface de genre $\gamma_M(G)$ est minimum. Ringelsen dans [18] s'est alors intéressé à la classe des graphes où ce minimum est ≤ 2 . De tels graphes sont appelés sup-immérgeables. La caractérisation de ces graphes a été obtenue indépendamment par Jungerman et Xuong.

Dans ce chapitre, nous donnerons, à l'aide du concept d'orientation d'un graphe, d'autres formulations concernant la caractérisation des graphes sup-immérgeables. Ces résultats nous permettront d'établir un procédé de génération de tels graphes.

II - DEFINITIONS ET RAPPELS

II-1 - Rappels

Tous les graphes considérés seront finis, connexes et non orientés. Ils pourront comporter des boucles et des arêtes multiples.

Pour les définitions générales, voir chapitre I.

Soient G un graphe et S une surface orientable de genre g .
Si G admet une immersion 2-cellulaire dans S , la formule d'Euler donne :

$$f = 2 - 2g + m - n$$

où f = nombre de faces de l'immersion de G dans S

$$n = |V(G)|$$

$$m = |E(G)|$$

or $f \geq 1$ donc $1 \leq 2 - 2g + m - n$ soit

$$2g \leq \beta(G) \text{ pour tout } g \in [\gamma(G), \gamma_M(G)]$$

On a donc

$$\gamma_M(G) \leq \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor$$

où $\lfloor r \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel r .

Un graphe G sera dit sup-immmergeable ([16]) lorsque

$$\gamma_M(G) = \left\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \right\rfloor$$

La formule d'Euler peut s'écrire :

$$2g = \beta(G) - (f-1)$$

Nous voyons donc que

- Quand $\beta(G)$ est pair, $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G)}{2} \iff f = 1$.

Le graphe sera appelé sup-immmergeable à une face, noté en abrégé s.i.1.

- Quand $\beta(G)$ est impair, $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G)-1}{2} \iff f = 2$.

Le graphe sera appelé sup-immmergeable à deux faces, noté en abrégé s.i.2.

II-2 - Détermination de $\gamma_M(G)$

On appelle arbre maximal d'un graphe G un arbre T couvrant tous les sommets de G . Un tel arbre comporte $n-1$ arêtes.

On appelle co-arbre de G le complémentaire au sens des arêtes d'un arbre maximal de G .

A tout co-arbre C d'un graphe G , on associe ([23]) le nombre

$\xi(C)$ = nombre de composantes connexes impaires de C
où une composante connexe est dite impaire si elle a un nombre impair d'arêtes. Par la suite nous les noterons c.c.i.

La déficiance de Betti [23] d'un graphe G est l'entier

$$\xi(G) = \min_{C \subseteq G} \xi(C)$$

où C est un co-arbre de G .

On remarque que pour tout co-arbre C de G la parité de $\xi(C)$ est la même que celle de $\beta(G)$. En effet, le nombre d'arêtes d'un arbre maximal d'un graphe G connexe est $n-1$. Donc le nombre d'arêtes d'un co-arbre est $m-(n-1) = m-n+1 = \beta(G)$. Lorsque $\beta(G)$ est pair, nous ne pouvons avoir qu'un nombre pair de c.c.i. puisque le nombre total d'arêtes est pair. Inversement $\beta(G)$ impair implique $\xi(C)$ impair.

D'où $\beta(G) - \xi(G) \equiv 0 \pmod{2}$.

La détermination du genre maximum γ_M d'un graphe G se fait à l'aide de cette déficiance de Betti. Xuong a montré le Théorème [23] : Si G est un graphe connexe de nombre de Betti $\beta(G)$ alors

$$\gamma_M(G) = \frac{1}{2} (\beta(G) - \xi(G)).$$

$\beta(G)$ et $\xi(G)$ étant de même parité, le nombre $1/2(\beta(G) - \xi(G))$ est bien entier.

Dans le cas des graphes sup-immérgeables, ce théorème nous donne :

- si $\beta(G)$ est pair

$$\gamma_M(G) = \frac{\beta(G)}{2} = \frac{1}{2} (\beta(G) - \xi(G))$$

donc $\xi(G) = 0$.

- si $\beta(G)$ est impair

$$\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - 1}{2}$$

d'où $\xi(G) = 1$.

On remarque que l'on a $\xi(G) = f - 1$ où f est le nombre de faces d'une immersion 2-cellulaire de G dans une surface de genre $\gamma_M(G)$.

On a alors le

Théorème (Jungerman [12], Xuong [24]) : Pour qu'un graphe connexe soit sup-immérgeable, il faut et il suffit qu'il contienne un co-arbre dont toutes les composantes connexes, sauf une au plus, soient paires.

C'est essentiellement ce théorème, plus quelques considérations sur les orientations, qui va nous servir dans la suite.

II-3 - Orientation

Soit G un graphe. On obtient un graphe orienté noté \vec{G} en ordonnant, pour chaque arête, l'ensemble de ses extrémités. Par abus de langage, on appellera \vec{G} orientation de G .

On peut alors définir pour tout $x \in V(\vec{G})$

le demi-degré intérieur $d^-(x)$ = nombre d'arcs entrant dans x ;

le demi-degré extérieur $d^+(x)$ = nombre d'arcs sortant de x .

On dit qu'un sommet x peut être atteint à partir d'un sommet y s'il existe dans \vec{G} un chemin d'extrémité initiale y et d'extrémité finale x .

Un sommet $r \in V(\vec{G})$ sera appelé racine si pour tout $y \in V(\vec{G})$, y peut être atteint à partir de r .

On appelle orientation racinée toute orientation de G admettant une racine (en abrégé, on notera O.R.).

On appelle orientation racinée impaire (qu'on abrège ORI) toute orientation \vec{G} de G telle que

- il existe une racine r
- pour tout $x \in V(\vec{G})$, $x \neq r$, $d_{\vec{G}}^-(x)$ est impair.

III - NOUVELLE CARACTERISATION DES GRAPHES SUP-IMMERGEABLES

III-1 - Pour les résultats qui vont suivre, nous avons besoin de quelques remarques très simples sur les orientations.

Lemme 1 : Soient \vec{G} un graphe orienté, x et y deux sommets de \vec{G} tels qu'il existe une chaîne C entre x et y .

Si on change l'orientation des arcs de C , les seuls sommets dont la parité du demi-degré intérieur soit modifiée sont x et y .

Exemple : Soit la chaîne C suivante :



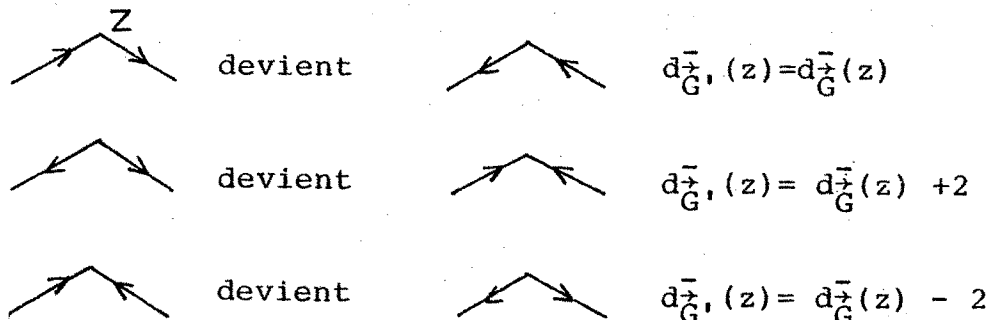
Si on change l'orientation des arcs, C devient:



La suite des demi-degrés intérieurs est modifiée de la façon suivante :

+1 (pour x) ; 0 ; +2 ; 0 ; +2 ; 0 ; 0 ; -2 ; +1 (pour y)

Les sommets autres que x et y voient leur demi-degré intérieur modifié de +2, 0 ou -2.



Lemme 2 : Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

Soit $S \subset V$.

Si $|S| \equiv |E| \pmod{2}$ alors il existe une orientation de G telle que

$$\forall x \in V \quad (x \in S \iff d^-(x) \equiv 1 \pmod{2}).$$

Démonstration : On remarque que si une telle orientation existe, elle doit nécessairement vérifier :

$$|E| = \sum_{x \in S} d_{\vec{G}}^-(x) + \sum_{x \in \bar{S}} d_{\vec{G}}^-(x)$$

donc $|E| \equiv \sum_{x \in S} d_{\vec{G}}^-(x) \pmod{2}$. D'où la condition $|E| \equiv |S| \pmod{2}$

Soit $S \subset V$ tel que $|S| \equiv |E| \pmod{2}$.

a) Il existe une orientation \vec{G}_1 telle que $x \in \bar{S} \implies d_{\vec{G}_1}^-(x) \equiv 0 \pmod{2}$.

En effet, soit \vec{G}_1 une orientation de G telle que $A = |\{x \in \bar{S} / d_{\vec{G}_1}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}\}|$ soit minimum.

Supposons $A \geq 2$.

Alors il existe x et y dans \bar{S} , $x \neq y$, tels que $d_{\vec{G}_1}^-(x) \equiv d_{\vec{G}_1}^-(y) \equiv 1 \pmod{2}$.

G étant connexe il existe une chaîne dans G entre x et y . En changeant dans \vec{G}_1 l'orientation des arcs le long de cette chaîne, on ne change que la parité des demi-degrés intérieurs de x et y (lemme 1).

\vec{G}_1 ayant été choisie telle que A soit minimum, on ne peut donc avoir $A \geq 2$.

Supposons $A = 1$.

Alors il existe $x_0 \in \bar{S}$ tel que $d_{\vec{G}_1}^-(x_0) \equiv 1 \pmod{2}$.

Dans ce cas, nous avons $S \neq \emptyset$.

En effet si S est vide alors $|E|$ est pair (car $|S| \equiv |E| \pmod{2}$). Or, dans ce cas

$$|E| = \sum_{x \in \bar{S} - \{x_0\}} d_{\vec{G}_1}^-(x) + d_{\vec{G}_1}^-(x_0).$$

D'où $|E| \equiv d_{\vec{G}_1}^-(x_0) \pmod{2}$

Par conséquent, si $d_{\vec{G}_1}^-(x_0)$ est impair, alors $|E|$ l'est aussi. Ce qui est une contradiction.

Soit $y \in S$.

G étant connexe, il existe une chaîne C entre x_0 et y . En changeant l'orientation des arcs le long de cette chaîne, on obtient une nouvelle orientation \vec{G}_2 telle que :

- pour tout $x \in \bar{S}$, $x \neq x_0$ $d_{\vec{G}_2}^-(x) = d_{\vec{G}_1}^-(x) \equiv 0 \pmod{2}$

- $d_{\vec{G}_2}^-(x_0) \equiv 0 \pmod{2}$

donc A minimum $\Rightarrow A = 0$.

b) Il existe une orientation \vec{G}_0 de G telle que
 $x \in S \iff d_{\vec{G}_0}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}$.

En effet, parmi les orientations obtenues au a), vérifiant $A = 0$, on choisit une orientation \vec{G}_0 de G telle que
 $B = |\{x \in S \mid d_{\vec{G}_0}^-(x) \equiv 0 \pmod{2}\}|$ soit minimum.

Un raisonnement analogue au précédent (-a-) nous montre que $B \leq 2$. En fait, $B = 0$.

En effet, si $B = 1$, alors il existe $x_0 \in S$ tel que
 $d_{\vec{G}_0}^-(x_0) \equiv 0 \pmod{2}$. Or

$$|E| = \sum_{x \in S - \{x_0\}} d_{\vec{G}_0}^-(x) + \sum_{x \in \bar{S}} d_{\vec{G}_0}^-(x) + d_{\vec{G}_0}^-(x_0)$$

D'où $|E| \equiv |S| - 1 \pmod{2}$, ce qui contredit l'hypothèse

$$|E| \equiv |S| \pmod{2}.$$

Ce qui nous amène au résultat cherché. \square

III-2 - De l'existence de cette orientation se déduisent de nouvelles caractérisations des graphes sup-immérgeables.

Théorème 1 : Soit G un graphe connexe de nombre de Betti pair. Alors G est sup-immérgeable si et seulement si il admet une ORI dont la racine est fixée arbitrairement.

Démonstration

On remarque que dans le cas où G admet une ORI :

$$\begin{aligned} \beta(G) &= m - n + 1 = \sum_{x \neq r} d^-(x) + d^-(r) - (n-1) \\ &= \sum_{x \neq r} (d^-(x) - 1) + d^-(r) \end{aligned}$$

Donc

$$\beta(G) \equiv d^-(r) \pmod{2}$$

Soit

$$\beta(G) \text{ pair} \iff d^-(r) \text{ pair}$$

a) Condition nécessaire

Supposons $G = (V, E)$ sup-immérgeable. Il s'en suit que G contient un arbre maximal T tel que, pour toute composante C_p de $(V, E - E(T))$, $|E(C_p)|$ est pair.

Soit \vec{T} une orientation racinée de T avec une racine r arbitraire (autrement dit, \vec{T} est une arborescence de racine r).

Pour tout $x \in V$, $x \neq r$, on a $d_{\vec{T}}^-(x) = 1$.

Chaque composante connexe C_p de $(V, E - E(T))$, par le lemme 2, admet une orientation \vec{C}_p telle que, pour tout $x \in V(C_p)$, $d_{\vec{C}_p}^-(x)$ est pair (on prend $S = \emptyset$ dans le lemme 2).

On vérifie facilement que \vec{T} et les \vec{C}_p donnent une orientation impaire racinée de G de racine r .

b) Condition suffisante

Soit \vec{G} une ORI de G de racine r . Comme $\beta(G)$ est pair on a : $d_{\vec{G}}^-(r)$ pair.

Il est visible que de toute orientation racinée en r on peut extraire une arborescence de racine r .

On obtient donc dans G une arborescence \vec{T} de racine r . On a $d_{\vec{T}}^-(r) = 0$.

Pour tout $x \neq r$, on a $d_{\vec{T}}^-(x) = 1$. Donc tout sommet $x \in V$ a dans $(V, E(\vec{G}) - E(\vec{T}))$ un demi-degré intérieur pair. Toute composante connexe C a un nombre pair d'arcs car :

$$|E(C)| = \sum_{x \in V(C)} d_{\vec{C}}^-(x).$$

Le co-arbre de l'arbre T correspondant à l'arborescence \vec{T} a toutes ses composantes connexes paires.

Remarque

Dans le cas $\xi = 1$, donc β impair, en choisissant la racine r dans la composante connexe impaire du co-arbre, on obtient une orientation racinée où pour tout $x \in V$, $d_{\vec{G}}^-(x)$ est impair.

On a, dans ce cas, le théorème :

G est s.i.l. 2 \iff il existe une orientation racinée dont tous les sommets sont de demi-degré intérieur impair (même la racine).

On remarque que dans ce cas, la racine ne peut être fixée arbitrairement.

Lemme 3 : Dans tout graphe connexe orienté sans circuit, pour tout sommet x de demi-degré intérieur impair, il existe un sommet de demi-degré intérieur pair à partir duquel x peut être atteint.

Démonstration

Soit $x \in V(\vec{G})$ tel que $d_{\vec{G}}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}$

Il existe donc $y_1 \in V(\vec{G})$ tel que $(y_1, x) \in E(\vec{G})$.

Si $d_{\vec{G}}^-(y_1) \equiv 0 \pmod{2}$, c'est fini. Sinon il existe $y_2 \in V(\vec{G})$ tel que $(y_2, y_1) \in E(\vec{G})$. x ne peut être atteint à partir de y_2 .

Compte-tenu de la finitude de $V(\vec{G})$ et du fait que \vec{G} soit sans circuit, la répétition de cette opération conduit sûrement à un sommet y de demi-degré intérieur pair. \square

Théorème 2 : Soit G un graphe connexe de nombre de Betti pair. Alors G est sup-immérgeable si et seulement si, pour tout $S \subseteq V$ tel que $|S| \equiv |E| \pmod{2}$, G admet une orientation telle que :

- $\forall x (x \in S \iff d^-(x) \text{ est impair})$
- $\forall x \in S$, il existe un sommet de $V-S$ à partir duquel on puisse atteindre x .

Démonstration

Soit $S \subseteq V$ tel que $|S| \equiv |E| \pmod{2}$

G étant de nombre de Betti pair, $\beta(G) = |E| - |V| + 1 \equiv 0 \pmod{2}$
donc $|E| \equiv |V| - 1 \pmod{2}$.

Ce qui entraîne $|S| \equiv |V| - 1 \pmod{2}$ donc $V - S \neq \emptyset$.

a - Condition nécessaire

Soit G un graphe connexe s.i.1 ($\beta(G)$ pair).

Il existe un arbre T tel que toute composante connexe C de $|V, E - E(T)|$ vérifie $|E(C)| \equiv 0 \pmod{2}$.

Soit $S \subseteq V$ tel que $|S| \equiv |E| \pmod{2}$ alors $|S| \equiv |V| - 1 \pmod{2}$.

Comme $|E(T)| = |V| - 1$ on a $|S| \equiv |E(T)| \pmod{2}$.

En appliquant le Lemme 2, on voit que T admet une orientation \vec{T} telle que

$$x \in S \iff d_{\vec{T}}(x) \text{ est impair.}$$

\vec{T} est sans circuit car T est sans cycle. Pour tout sommet x de demi-degré intérieur impair (donc $\in S$) il existe un sommet y de demi-degré intérieur pair (donc $\in V - S$) tel que x puisse être atteint dans \vec{T} à partir de y .

Pour chaque composante connexe C de $(V, E - E(T))$, il existe une orientation \vec{C} telle que pour tout $x \in V(C)$, $d_{\vec{C}}(x) \equiv 0 \pmod{2}$ (en appliquant le Lemme 2 avec $S = \emptyset$).

Soit \vec{G} l'orientation qui se déduit de celle de T et des C .

On a :

$$- d_{\vec{G}}(x) = d_{\vec{T}}(x) + d_{\vec{C}}(x) \equiv d_{\vec{T}}(x) \pmod{2}$$

donc $x \in S \iff d_{\vec{G}}(x) \equiv d_{\vec{T}}(x) \equiv 1 \pmod{2}$.

- Pour tout sommet de G tel que $d_{\vec{G}}(x)$ impair, donc $d_{\vec{T}}(x)$ impair, il existe un sommet y de $V - S$, $d_{\vec{G}}(y)$ pair, et un chemin de y à x dans \vec{T} , donc dans \vec{G} .

b - Condition suffisante

Choisissons $S \subseteq V$ tel que $|S| = |V|-1$.

Alors $|S| \equiv |E| \pmod{2}$

Appelons r le sommet de $\bar{S} = V-S$.

Nous avons une orientation vérifiant :

$$- x \in S \iff d_G^+(x) \equiv 1 \pmod{2}$$

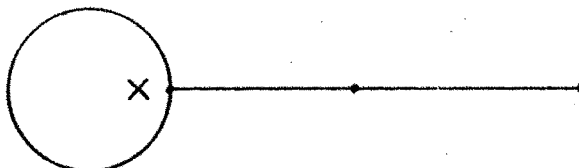
tous les sommets sauf r sont de demi-degré intérieur impair

- Pour tout sommet x de demi-degré intérieur impair, donc tout sommet de $S = V-\{r\}$, il existe un sommet de $V-S$, donc r , tel qu'il y a un chemin de r à x . r est donc racine de \vec{G} .

Nous avons ici une ORI, ce qui veut dire que G est s.i. \square

III-3 - Remarques

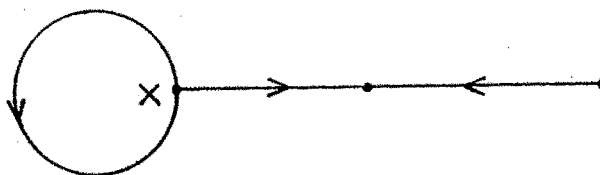
1 - Ce résultat ne peut se généraliser au cas des graphes s.i. 2. Considérons en effet le graphe ci-dessous



Ce graphe est s.i.2, de nombre de Betti $\beta(G) = 1$ impair.

Prenons $S = \{x\}$. On a bien $|S| \equiv |E| \pmod{2}$.

La seule orientation vérifiant $(x \in S \iff d_G^+(x) \text{ impair})$ est la suivante



Or il n'existe pas de sommet de demi-degré intérieur pair à partir duquel on puisse atteindre x .

2 - Considérons les trois conditions suivantes :

i) $\xi(G) = 0$

ii) $\forall S \subseteq V(G)$, $|S| \equiv |E| \pmod{2}$, il existe une orientation vérifiant :

$$\alpha - x \in S \iff d_{\vec{G}}(x) \equiv 1 \pmod{2}$$

β - Si $\bar{S} \neq \emptyset$, pour tout sommet x de S il existe un sommet y de \bar{S} tel qu'il y ait un chemin de y à x .

iii) $\xi(G) \leq 1$.

Nous avons en fait

i) \implies ii) \implies iii)

3 - On a une caractérisation analogue à celle des graphes s.i. pour les graphes de déficience de Betti $\xi(G) \geq 1$.

A toute OR \vec{G} de G on associe le nombre

$$\mu(\vec{G}) = \text{nombre de sommets de demi-degré intérieur pair.}$$

On appelle

$$\mu_0(G) = \min\{\mu(\vec{G}) \mid \vec{G} \text{ OR de } G\}.$$

Nous avons alors le

Théorème 3 : Soit G un graphe connexe tel que $\xi(G) \geq 1$

$$\xi(G) = \mu_0(G) + 1.$$

Démonstration

Elle se fait selon le même schéma que celui du théorème 1.

$$a - \xi(G) \geq \mu_0(G) + 1$$

Soit G un graphe connexe de déficience de Betti $\xi(G)$.

G admet un arbre T tel que le co-arbre ait $\xi(G)$ composantes connexes impaires.

Soit C_0 une composante connexe impaire et r_0 arbitraire $\in V(C_0)$.

On construit une orientation \vec{T} de l'arbre T racinée de racine r_0 .

Pour tout $x \in V$, $x \neq r_0$, on a $d_{\vec{T}}(x) = 1$.

Chaque composante connexe paire, C_p admet une orientation \vec{C}_p telle que pour tout $x \in V(C_p)$, $d_{\vec{C}_p}(x)$ est pair.

Posons $k = \xi(G) - 1$

Les k composantes connexes impaires différentes de C_0 C_{i_1}, \dots, C_{i_k} admettent chacune une orientation telle que pour tout $x \in V(C_{i_j})$, $x \neq x_{i_j}$ arbitraire, $d_{\vec{C}_{i_j}}(x)$ est pair, et $d_{\vec{C}_{i_j}}(x_{i_j})$ est impair.

Pour C_0 , en prenant $S = \{r_0\}$ dans le théorème 2, on a l'existence d'une orientation telle que pour tout $x \in V(C_0)$, $x \neq r_0$, $d_{\vec{C}_0}(x)$ est pair et $d_{\vec{C}_0}(x_0)$ est impair.

L'orientation \vec{G} de G vérifie donc

- Pour tout x , $x \neq x_{i_j} \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq k$, $x \neq r_0$

$$d_{\vec{G}}(x) = d_{\vec{T}}(x) + d_{\vec{C}_\ell}(x) \equiv 1 \pmod{2}$$

- Pour tout $j \quad 1 \leq j \leq k$, $d_{\vec{G}}(x_{i_j}) = d_{\vec{T}}(x_{i_j}) + d_{\vec{C}_{i_j}}(x_{i_j}) \equiv 0 \pmod{2}$

- $d_{\vec{G}}(x_0) = d_{\vec{T}}(x_0) + d_{\vec{C}_0}(x_0) = d_{\vec{C}_0}(x_0) \equiv 1 \pmod{2}$.

On a ici une OR avec k sommets de demi-degré intérieur pair $\mu(\vec{G}) = k = \mu(G) - 1$

donc

$$\mu_0(G) \geq \xi(G) - 1$$

$$b - \xi(G) \leq \mu_0(G) + 1$$

Soit \vec{G} une OR de G de racine r , telle que $\mu(\vec{G}) = \mu_0(G)$.

Montrons d'abord que $d_{\vec{G}}(r) \equiv 1 \pmod{2}$.

En effet, soit \vec{T} une arborescence de racine r extraite de \vec{G} .

Soient $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_p$ ($p \geq 1$) les composantes connexes du co-arbre C correspondant.

On a

$$(P) \quad \forall x (x \in V(\vec{C}_i) \text{ et } x \neq r \Rightarrow d_{\vec{G}}(x) = 1 + d_{\vec{C}_i}(x))$$

Comme $|E(\vec{C}_i)| = \sum d_{\vec{C}_i}(x)$, on voit que si C_i est impaire alors elle contient au moins un sommet x tel que $d_{\vec{C}_i}(x)$ soit impair. Par conséquent si $d_{\vec{G}}(r)$ est pair alors

$$\xi(C) \leq \mu(\vec{G}) - 1$$

Mais dans ce cas, la construction donnée en a- appliquée au co-arbre C donne une OR contenant $\xi(C) - 1 \leq \mu(\vec{G}) - 2$ sommets de demi-degré intérieur pair. Ce qui est impossible.

Compte-tenu de (P), le nombre de sommets du co-arbre C ayant un demi-degré intérieur pair est donc $\mu_0(G) + 1$. D'où

$$\text{nombre de c.c.i. de } C = \xi(C) \leq \mu_0(G) + 1$$

Comme $\xi(G) \leq \xi(C)$, le théorème est démontré. \square

IV - GENERATION DE GRAPHES SUP-IMMERGEABLES

Soit G un graphe connexe de nombre de Betti impair. Dans [24], Xuong a montré les propriétés suivantes qui sont des conséquences immédiates de la définition des graphes sup-immmergeables.

Proposition 1 : G est sup-immmergeable si et seulement si il existe une arête e telle que $G-e$ est sup-immmergeable.

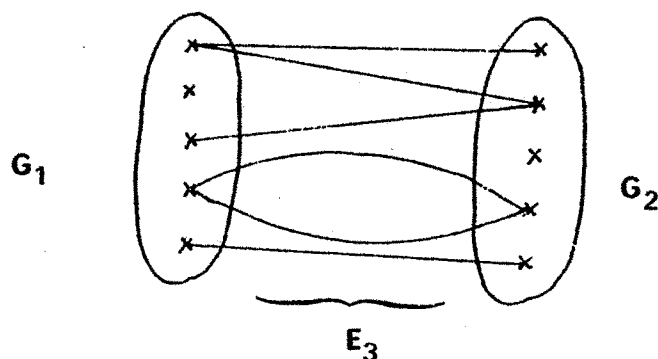
Proposition 2 : Si le graphe $G+e$ obtenu à partir de G en ajoutant une nouvelle arête est s.i., alors G est s.i.

Ces deux propriétés nous permettent donc de ne considérer dans la suite que des graphes de nombre de Betti pair.

Dans [29] a été établi le résultat suivant :

Théorème 4' : Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes s.i.1 tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Alors tout graphe G de la forme $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, où E_3 est une famille d'arêtes dont un sommet $\in V_1$ et l'autre $\in V_2$, est sup-immmergeable.

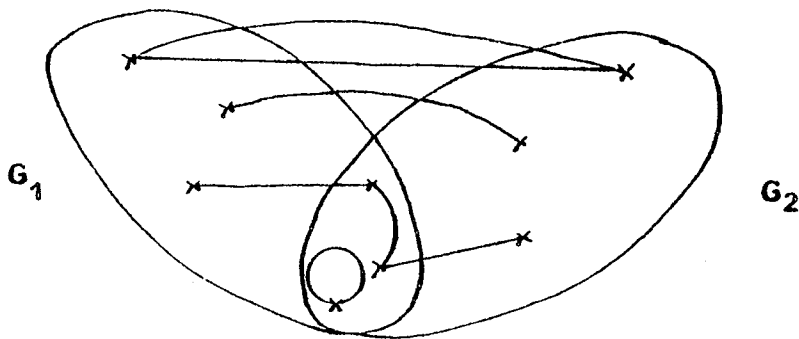
La figure ci-dessous illustre la construction de G .



Ce théorème, dont la démonstration directe n'est pas immédiate, est en fait un cas particulier du théorème suivant, établi à partir des nouvelles caractérisations des graphes sup-immmergeables

Théorème 4 : Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes tels que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Si G_1 et G_2 sont sup-immmergeable à une face, alors le graphe $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, où E_3 est une famille d'arêtes dont une extrémité $\in V_1$ et l'autre $\in V_2$, est sup-immmergeable.

Exemple de construction de G



Démonstration

Il suffit de montrer que G ou $G+e$ admet une ORI (cf. proposition 1), où e est une nouvelle arête.

G_1 est s.i.l., donc admet une ORI de racine r .

Soit \vec{E}_1 l'ensemble des arcs de cette orientation. On désigne par \vec{E}_3 l'ensemble des arcs obtenu en orientant les arêtes de E_3 de V_1 vers V_2 .

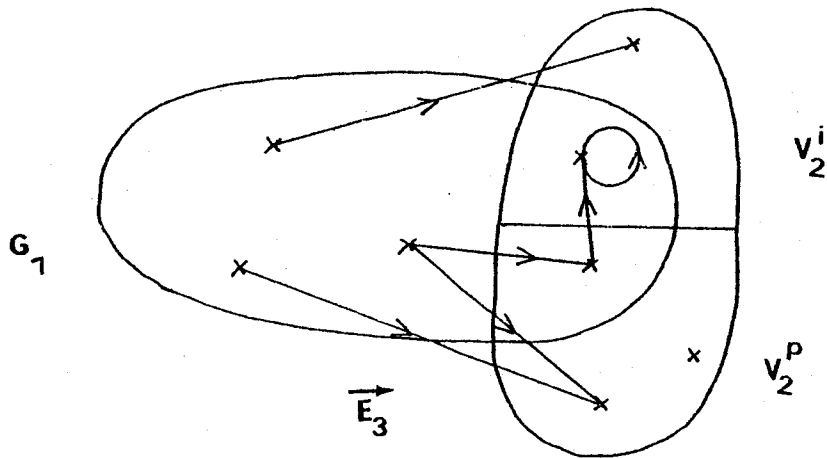
Soit alors \vec{M} le graphe orienté $(V_1 \cup V_2, \vec{E}_1 \cup \vec{E}_3)$.

V_2 est partitionné en 2 sous-ensembles V_2^i et V_2^p tels que

$$x \in V_2^i \iff d_{\vec{M}}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \in V_2^p \iff d_{\vec{M}}^-(x) \equiv 0 \pmod{2}$$

De plus, tout sommet de V_2^i peut être atteint dans \vec{M} à partir de la racine r .



Exemple de construction de \vec{M}

Deux cas peuvent alors se présenter :

1er cas : $|V_2^p| \equiv |E| \pmod{2}$.

Comme $|E| \equiv |V_2| - 1 \pmod{2}$, car G est de nombre de Betti pair, nous avons $V_2^i \neq \emptyset$.

G_2 est s.i.l. Le théorème 3 nous assure l'existence d'une orientation \vec{G}_2 de G_2 telle que :

- $x \in V_2^p \iff d_{\vec{G}_2}^-(x)$ est impair.

ce qui est équivalent à $x \in V_2^i \iff d_{\vec{G}_2}^-(x)$ est pair.

- Pour tout sommet x de V_2^p il existe un sommet y de V_2^i à partir duquel on peut atteindre x ($V_2^i \neq \emptyset$).

Considérons maintenant l'orientation $\vec{G} = (V_1 \cup V_2, \vec{E}_1 \cup \vec{E}_2 \cup \vec{E}_3)$.

Soit $x \in V_1 \cup V_2 - \{r\}$.

- Si $x \in V_1 - V_2$, $d_{\vec{G}}^-(x) = d_{\vec{M}}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}$

- Si $x \in V_2^i$ $d_{\vec{G}}^-(x) = d_{\vec{M}}^-(x) + d_{\vec{G}_2}^-(x) \equiv d_{\vec{M}}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}$

- Si $x \in V_2^p$ $d_{\vec{G}}^-(x) = d_{\vec{M}}^-(x) + d_{\vec{G}_2}^-(x) \equiv d_{\vec{G}_2}^-(x) \equiv 1 \pmod{2}$.

Tout sommet de V_2^i peut être atteint à partir de r .

Pour tout sommet x de V_2^p il existe un sommet y de V_2^i

à partir duquel on puisse atteindre $x.y$ étant atteint à partir de r , x l'est aussi.

On obtient ainsi une ORI, donc G est s.i. .

2ème cas : $|V_2^P| \equiv |E_2| - 1 \pmod{2}$

Soit x_2 un sommet de V_2 . Considérons alors un nouvel arc \vec{e} d'extrémité initiale r et d'extrémité terminale x_2 . Soit \vec{M}' le graphe orienté $\vec{M} + \vec{e}$.

Posons $W = V_2^P \Delta \{x_2\}$ où Δ est la différence symétrique. Alors $x \in W \iff d_{\vec{M}'}(x)$ est pair.

Comme $|W| \equiv |V_2| + 1 \equiv |E_2| \pmod{2}$, en reprenant la démonstration utilisée au cas 1, on montre que $G + \vec{e}$ est un graphe sup-immmergeable de nombre de Betti pair. D'après la proposition 2, G est sup-immmergeable de nombre de Betti impair. \square

Ce théorème a plusieurs conséquences, dont le théorème 4', qui apparaît comme un cas particulier du théorème 4 avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, et le

Corollaire : Soit G un graphe connexe dont l'ensemble des arêtes est partitionnable en deux arbres (non nécessairement maximaux). Alors G est sup-immmergeable.

G peut être considéré comme la réunion de deux arbres, qui sont des graphes s.i.l, disjoints au sens des arêtes. Le théorème 4 nous dit qu'alors G est s.i. .

- [1] BERGE, C.
Graphes et hypergraphes. Dunod, 1973.
- [2] BOLLOBAS, B.
Graph theory. Springer-Verlag, 1979.
- [3] BURNSIDE, W.
Theory of Groups of Finite Order. Réédité Dover Publ.,
New-York, 1955.
- [4] COXETER, H.S.M., MOSER, W.O.J.
Generators and Relations for Discrete Groups.
Ergebnisse der Mathematics und ihrer Grenzgebiete.
Neue Folge, n° 14, Springer, 1964.
- [5] DUKE, R.
The genus, regional number, and Betti number of a graph.
Cand. J. Math. 18, P. 817-822, 1966.
- [6] EDMONDS, J.
A combinatorial representation for polyhedral surfaces.
Notices A.M.S. 7, 646, 1960.
- [7] GUSTIN, W.
Orientable embeddings for Cayley Graphs.
Bull. of the Amer. Soc., V-69 (1973), p. 272-275.
- [8] GUY, R.K., RINGEL, G.
Triangular Embeddings of $K_n - K_6$. J.C.T., 21 B (1976),
p. 140-146.
- [9] HUNEKE, J.P.
A minimum-vertex triangulation. J.C.T., 24 B (1978),
p. 258-266.
- [10] JACQUES, A.
Constellations et propriétés algébriques des graphes
topologiques. Thèse, Université de Paris, 1969.
- [11] JUNGGERMAN, M.
Ph. D. Thesis, University of California, Santa Cruz,
California, 1974.
- [12] JUNGGERMAN, M.
A characterization of upper-embeddable graphs.
Trans. Amer. Math. Soc. 241 (1978), p. 401-406.
- [13] JUNGGERMAN, M.
Orientable Triangular Embeddings of $K_{18} - K_3$ and $K_{13} - K_3$
J.C.T., 16 B (1974), p. 293-294.
- [14] JUNGGERMAN, M.
The genus of $K_n - K_2$. J.C.T., 18 B (1975), p. 53-59.

- [15] JUNGERMAN, M., PENGELLEY, D.J.,
Index 4 orientable embeddings and case 0 of the Heawood
conjecture. J.C.T., 26 B (1979), p. 131-145.
- [16] NORDHAUS, E.A., RINGEISEN, R.D., STEWART, B.M., WHITE, A.T.
A Kuratowski-type theorem for the maximum genus of a
graph. J.C.T., 12 B (1972), p. 260-267.
- [17] ORE, O.
Theory of graphs. Amer. Math. Soc., Colloquium Publ.
Vol. 38, 1962.
- [18] RINGEISEN, R.D.
Upper and lower embeddable graphs. Graph theory and
Applications. Springer-Verlag, 1972.
- [19] RINGEL, G.
Map Color Theorem. Springer-Verlag, 1974.
- [20] RINGEL, G., YOUNGS, J.W.T.
Solution of the Heawood Map-Coloring Problem. Case 11.
J.C.T., 7 (1969), p. 71-93.
- [21] RINGEL, G., YOUNGS, J.W.T.
Lösung des Problems der Nachbargebiete auf orientier-
baren Fläschen. Archiv der Mathematik 20 (Basel),
p. 190-201, (1969).
- [22] TERRY, C.M., WELCH, L.R., YOUNGS, J.W.T.
Solution of the Heawood Map-Coloring Problem. Case 4.
J.C.T., 8 (1970), p. 170-174.
- [23] XUONG, N.H.
How to determine the maximum genus of a graph. J.C.T.
26 B (1979), p. 217-225.
- [24] XUONG, N.H.
Sur quelques problèmes d'immersion d'un graphe dans
une surface. Thèse, Université de Grenoble, Avril 1977.
- [25] YOUNGS, J.W.T.
Minimal Imbeddings and the genus of a graph. J. Math.
Mech. V. 12, p. 303-315 (1963).
- [26] YOUNGS, J.W.T.
The Heawood Map-Coloring Conjecture. Graph Theory and
Theoretical Physics, Ch. 12, Academic Press, New-York,
1967.
- [27] YOUNGS, J.W.T.
The Heawood Map-Coloring Problem. Cases 1, 7 and 10.
J.C.T., 8 (1970), p. 220-231.
- [28] YOUNGS, J.W.T.
Solution of the Heawood Map-Coloring Problem. Cases 3,
5, 6 and 9. J.C.T., 8 (1970), p. 175-219.

- [29] JAEGER, F., PAYAN, C., XUONG, N.H.
A class of Upper- Embeddable Graphs.
J.G.T. 3(1979), p. 387-391

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 17 Novembre 1981

Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 15 11 81

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

Pour le Président,
M. TANCHE
Vice-Président Assesseur

