



**HAL**  
open science

# Propriétés optimales de certains estimateurs d'interaction en analyse de variance

Claudine Robert

► **To cite this version:**

Claudine Robert. Propriétés optimales de certains estimateurs d'interaction en analyse de variance. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT: . tel-00300324

**HAL Id: tel-00300324**

**<https://theses.hal.science/tel-00300324>**

Submitted on 18 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE 3<sup>e</sup> CYCLE  
Mathématiques Appliquées**

*par*

**Claudine ROBERT**



**PROPRIETES OPTIMALES DE CERTAINS  
ESTIMATEURS D'INTERACTION  
EN ANALYSE DE VARIANCE**



**Thèse soutenue le 7 mai 1982 devant la Commission d'Examen :**

<b>Monsieur</b>	<b>J.R. BARRA</b>	<b>:</b>	<b>Président</b>
<b>Messieurs</b>	<b>H. CAUSSINUS Y. ESCOUFIER B. VAN CUTSEM</b>	<b>}</b>	<b>Examineurs</b>



**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

---

**MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.**

**PROFESSEURS DE 1ère CLASSE**

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologie
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-physiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hydrodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et cryptogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard  
 VAUQUOIS Bernard  
 VERAÏN Alice  
 VERAÏN André  
 VIGNAIS Pierre

Mathématiques appliquées  
 Mathématiques appliquées  
 Pharmacie galénique  
 Biophysique  
 Biochimie médicale

**PROFESSEURS DE 2ème CLASSE**

MM. ARNAUD Yves  
 AURIAULT Jean-Louis  
 BEGUIN Claude  
 BOITET Christian  
 BOUTHINON Michel  
 BRUGEL Lucien  
 BUISSON Roger  
 CASTAING Bernard  
 CHARDON Michel  
 CHEHIKIAN Alain  
 COHEN Henri  
 COHENADDAD Jean-Pierre  
 COLIN DE VERDIERE Yves  
 CONTE René  
 CYROT Michel  
 DEPASSEL Roger  
 DOUCE Roland  
 DUFRESNOY Alain  
 GASPARD François  
 GAUTRON René  
 GIDON Maurice  
 GIGNOUX Claude  
 GLENAT René  
 GOSSE Jean-Pierre  
 GROS Yves  
 GUITTON Jacques  
 HACQUES Gérard  
 HERBIN Jacky  
 HICTER Pierre  
 IDELMAN Simon  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 JULLIEN Pierre  
 KERCKOVE Claude

Chimie IUT 1  
 Mécanique IUT 1  
 Chimie organique  
 Mathématiques appliquées  
 E.E.A. IUT 1  
 Energétique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique  
 Géographie  
 E.E.A. IUT 1  
 Mathématiques pures  
 Physique  
 Mathématiques pures  
 Physique IUT 1  
 Physique du solide  
 Mécanique des fluides  
 Physiologie végétale  
 Mathématiques pures  
 Physique  
 Chimie  
 Géologie  
 Sciences nucléaires  
 Chimie organique  
 E.E.A. IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Chimie  
 Mathématiques appliquées  
 Géographie  
 Chimie  
 Physiologie animale  
 Biochimie  
 Mathématiques appliquées  
 Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

#### CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------



MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

#### MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépto-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAUY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophtalmologie

**MM. PARAMELLE Bernard**  
**RACINET Claude**  
**RAMBAUD Pierre**  
**RAPHAEL Bernard**  
**SCHAEFER René**  
**SEIGNEURIN Jean-Marie**  
**SOTTO Jean-Jacques**  
**STOEBNER Pierre**

**Pneumologie**  
**Gynécologie-Obstétrique**  
**Pédiatrie**  
**Stomatologie**  
**Cancérologie**  
**Bactériologie-virologie**  
**Hématologie**  
**Anatomie-pathologique**

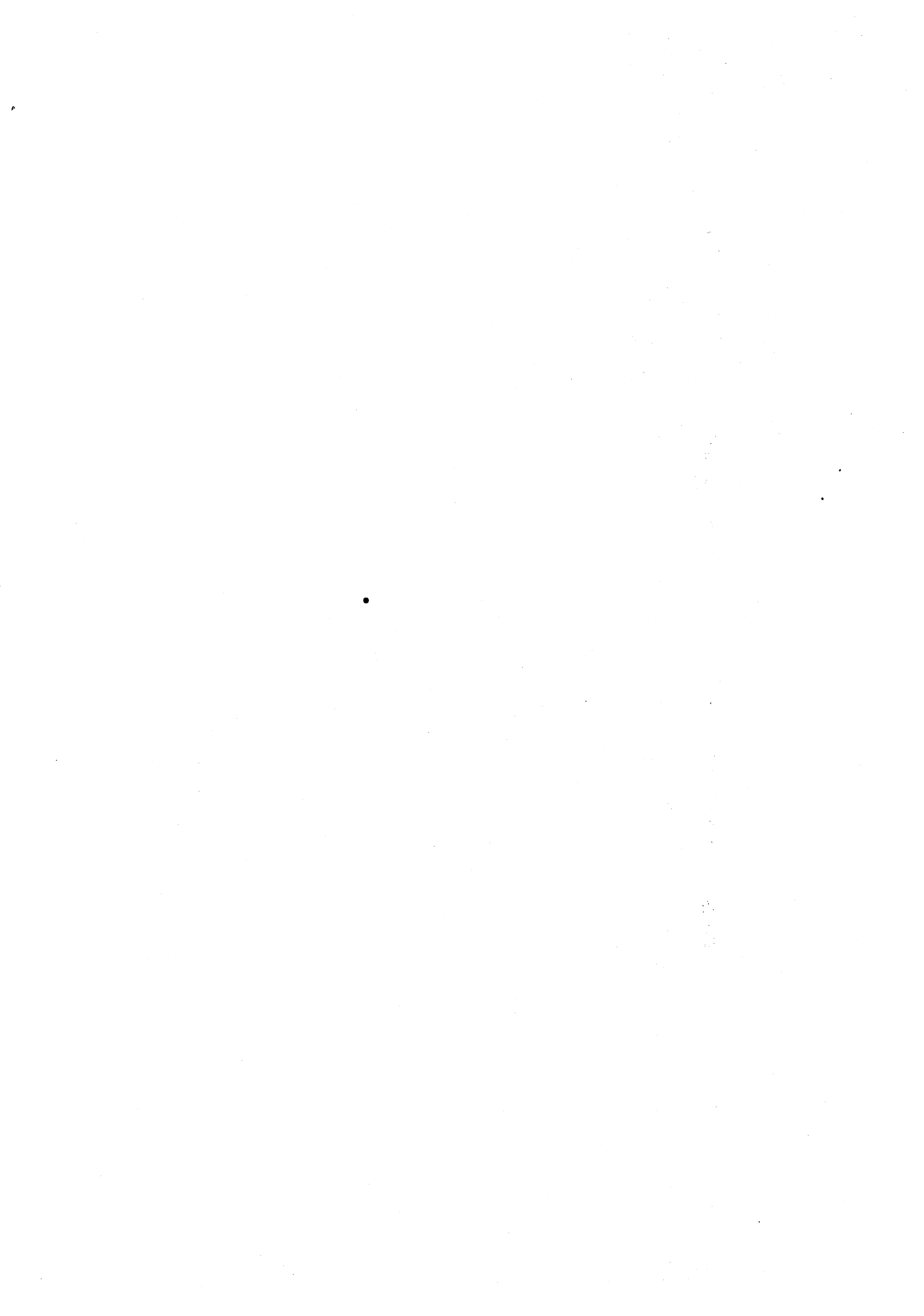


Je suis reconnaissante à Monsieur BARRA de m'avoir proposé ce sujet et d'en avoir guidé la réalisation avec une attention amicale.

Je remercie Messieurs CAUSSINUS, ESCOUFIER et VAN CUTSEM d'avoir accepté la tâche ingrate de lire la rédaction de ce travail et de bien vouloir participer au jury.

L'équipe de Statistiques de Grenoble m'a toujours accueillie avec sympathie et je remercie en particulier A. ANTONIADIS et B. FREDENUCCI pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

La dactylographie de ce document a été assurée de main de maître par Monique MARCHAND. Que soient également remerciés tous ceux qui ont participé à sa réalisation matérielle.



# SOMMAIRE

	pages
INTRODUCTION .....	I
CHAPITRE I - ESTIMATEURS D'INTERACTION .....	1
1. - Position du problème .....	3
2. - Construction des estimateurs .....	5
3. - Position par rapport aux solutions des équations du maximum de vraisemblance .....	7
4. - Changement de repère .....	13
CHAPITRE II - MOMENTS D'ORDRE 1 ET 2 DES ESTIMATEURS	17
1. - Un lemme de calcul de probabilités .....	19
2. - Calcul des moments d'ordre 1 et 2 .....	24
3. - Estimateur sans biais linéaire .....	27
CHAPITRE III - APPROXIMATIONS SUR LES LOIS DES ESTIMATEURS .....	31
1. - Approximations des moments d'ordre 1 et 2 .....	34
2. - Approximation gaussienne des fonctions caractéristiques des estimateurs .....	41
CHAPITRE IV - PROBLEMES DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ESTIMATEURS D'INTERACTION .....	51
Annexe I - Démonstration des lemmes II.1.1, II.1.2, II.1.3 ...	59
Annexe II - Etude des fonctions $\epsilon_n$ .....	71
Annexe III - Construction d'une suite emboîtée de matrices de $\sum_{r,s}$	83
BIBLIOGRAPHIE .....	93



## INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes d'analyse de variance, on est amené à tenir compte de l'interaction des différents facteurs. Citons, à titre d'illustration, les exemples classiques suivants :

- on répend sur un terrain agricole deux engrais A et B . On constate que les effets de A et B ne sont pas simplement additifs ; plus précisément, en faisant varier les quantités de chaque engrais, on est amené à penser qu'il y a, en plus de l'effet additif, un effet multiplicatif et un renforcement de l'effet de chaque engrais, dû à la présence de l'autre.

- On sait que le tabac d'une part, l'alcool d'autre part, ont une incidence sur l'apparition de l'infarctus du myocarde. On sait aussi que la présence des deux facteurs tabac et alcool renforce l'influence de chaque facteur.

On pourrait citer bien d'autres cas, tels que ceux posés par l'administration simultanée de deux médicaments A et B . Il s'agit, lorsqu'on est en présence de deux facteurs A et B à effet additif d'une part, multiplicatif d'autre part et qui influent l'un sur l'autre, d'évaluer ces différents termes, et plus spécialement l'effet multiplicatif global ainsi que l'action de chaque facteur sur l'autre.

Il est ainsi naturel d'essayer de rendre compte du phénomène par un modèle bilinéaire ; et, afin de pouvoir appliquer ce modèle statistique, il est nécessaire de mettre en évidence de "bonnes propriétés" d'estimateurs des paramètres du modèle ; c'est là l'objet de ce travail.



On supposera donc que l'on considère deux facteurs A et B et que, A étant au niveau  $i$  et B au niveau  $j$ , la moyenne  $m_{i,j}$  du phénomène étudié s'écrit :

$$m_{i,j} = a + \theta_i + \mu_j + \lambda \theta_i \mu_j + \theta'_i \mu_j + \theta_i \mu'_j$$

où  $a$  et  $\lambda$  sont des constantes,  $\theta_i$  représente l'influence du facteur A au niveau  $i$ ,  $\mu_j$  l'influence du facteur B au niveau  $j$ ,  $\theta'_i$  l'influence de A sur B et  $\mu'_j$  l'influence de B sur A.

Pour traiter les problèmes posés ci-dessus, on suppose avoir des observations gaussiennes, indépendantes, de moyenne  $m_{i,j}$  et de variance constante  $\sigma^2$  inconnue ; les paramètres inconnus sont  $\sigma^2, a, \lambda, \theta_i, \theta'_i, \mu_j, \mu'_j$ . Partant d'un plan factoriel sans répétitions correspondant aux niveaux  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, s$ , on cherche alors à estimer  $\sigma^2, a, \lambda, \theta, \theta', \mu, \mu'$ , où :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix}, \quad \theta' = \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \vdots \\ \theta'_r \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{pmatrix}, \quad \mu' = \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_s \end{pmatrix}.$$

Afin que ce problème d'estimation ait un sens, il faut que les vecteurs  $\theta, \theta', \mu, \mu'$  soient déterminés de manière unique. Pour cela, il suffit d'imposer les conditions suivantes :

$$\sum_1^r \theta_i = \sum_1^r \theta'_i = \sum_1^r \theta_i \theta'_i = 0$$

$$\sum_1^s \mu_j = \sum_1^s \mu'_j = \sum_1^s \mu_j \mu'_j = 0.$$

C'est-à-dire que si  $M$  est la matrice définie par :

$$M = ((m_{i,j}))_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s}}$$

et si  $I$  (resp.  $J$ ) désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^r$  (resp.  $\mathbb{R}^s$ ) dont toutes les composantes valent 1,  $M$  s'écrit :

$$M = a I^t J + \theta^t J + I^t \mu + \lambda \theta^t \mu + \theta'^t \mu + \theta^t \mu',$$

$$\text{avec : } {}^t\theta I = {}^t\theta' J = {}^t\theta\theta' = 0$$

$${}^t\mu J = {}^t\mu' J = {}^t\mu\mu' = 0 .$$

La spécificité de l'étude des problèmes posés réside donc dans la décomposition de la partie non linéaire de  $M$  (i.e. :  $M - \alpha I^t J - \theta^t J - I^t \mu$ ) en somme de trois matrices orthogonales entre elles et orthogonales à la partie linéaire, pour le produit matriciel :  $\langle M, M' \rangle = \text{Trace}(M^t M')$  .

Dans ce travail, nous étudions des propriétés d'estimateurs  $\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}'$  de  $\lambda, \theta', \mu'$  construits à partir d'estimateurs  $\hat{\theta}, \hat{\mu}$  de  $\theta, \mu$  et proposés dans [1].

Les équations du maximum de vraisemblance de la structure statistique correspondant au modèle que nous avons choisi sont établies au chapitre I, § 2. Comme on ne sait pas les résoudre, on prend pour estimateurs de  $\theta$  et  $\mu$  les estimateurs  $\hat{\theta}, \hat{\mu}$  du maximum de vraisemblance dans le cas où l'interaction est nulle (i.e.  $\lambda = 0, \theta' = 0, \mu' = 0$ ), puis comme estimateurs de  $a, \lambda, \theta', \mu'$  ceux du maximum de vraisemblance lorsqu'on suppose  $\theta$  et  $\mu$  fixés,  $\theta = \hat{\theta}, \mu = \hat{\mu}$  .

Dans le chapitre II et l'annexe I, nous calculons les moments d'ordre 1 et 2 de ces estimateurs, en employant comme technique de calcul le conditionnement par rapport à  $(\hat{\theta}, \hat{\mu})$  . Il s'avère que tous les résultats obtenus s'expriment à partir de certaines fonctions  $\epsilon_n$  . Nous donnons dans l'annexe II plusieurs formes pour ces fonctions et des propriétés qui devraient permettre des calculs numériques aisés lors des applications.

Dans le chapitre III, nous cherchons dans quels cas les moments d'ordre 1 et 2 des différences entre les estimateurs et le paramètre correspondant sont "petits" lorsque  $r$  et  $s$  sont "grands" et qu'ils sont équivalents. Nous trouvons (proposition III.1.1 et III.1.2) des conditions simples à énoncer pour que ces moments d'ordre 1 et 2 soient "petits". De plus, nous montrons (proposition III.2.1), en passant par les fonctions caractéristiques de variables aléatoires de mêmes lois, que lorsqu'on multiplie ces différences par des constantes appropriées, les lois des variables aléatoires ainsi obtenues sont approximativement normales.

Lorsqu'on a une suite d'estimateurs du maximum de vraisemblance d'un même paramètre, obtenue à partir d'échantillons empiriques dont la taille augmente, les propriétés de consistance et de normalité asymptotique, traduites en termes d'approximations, sont analogues aux propriétés obtenues dans le chapitre III. Cependant, inversement, les résultats de ce chapitre sont des résultats sur les lois des estimateurs et ne peuvent pas être considérés comme des résultats de consistance et de normalité asymptotique ; d'ailleurs, nous disposons pour un couple  $(r, s)$ ,  $r$  et  $s$  grands, d'un plan factoriel et non d'un échantillon empirique ; de plus, l'ensemble  $a, \lambda, \theta, \theta', \mu, \mu'$  des paramètres à étudier dépend du plan factoriel considéré et varie complètement si nous changeons les dimensions de ce plan.

Dans le chapitre IV et l'annexe III, nous montrons que si, au lieu d'estimer séparément  $a, \lambda, \theta, \theta', \mu, \mu'$  nous estimons, à partir de  $\hat{a}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}, \hat{\theta}', \hat{\mu}, \hat{\mu}'$  les nombres  $m_{i,j}$ , il existe des cas où on peut aussi construire, à partir de plans factoriels emboîtés, dont les dimensions augmentent, des suites d'estimateurs pour chaque  $m_{i,j}$  ; et nous montrons qu'avec des définitions convenables, on peut envisager dans de tels cas des études sur la consistance et la convergence presque sûre de la suite des estimateurs proposés.

Ces questions, abordées à la fin de ce travail, ouvrent la voie à une nouvelle famille de problèmes en statistique paramétrique.

## **CHAPITRE I**

### **Estimateurs d'interaction**



## I. - POSITION DU PROBLEME.

Nous nous plaçons dans un cas particulier d'analyse de la variance et nous étudions les propriétés d'estimateurs d'interaction pour des observations indépendantes, gaussiennes, de même variance  $\sigma^2$  inconnue, et dont la moyenne est une fonction connue, non linéaire, ici quadratique, de paramètres inconnus.

Plus précisément, nous sommes dans le cas de deux facteurs admettant respectivement  $r$  et  $s$  niveaux ; pour chacun des  $rs$  niveaux possibles, nous disposons d'une observation, les observations étant indépendantes dans leur ensemble. Ou encore, en terme d'analyse de la variance, on dispose d'un plan factoriel d'ordre 2, complet, sans répétitions, mais avec interaction bilinéaire.

Finalement, on étudie la structure statistique :

$$(I.0) \quad \left\{ \mathcal{M}_{r,s}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{r,s}}, N(M, \sigma^2 \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{1}_s), \sigma^2 \in \mathbb{R}^+, M \in \Sigma_{r,s} \right\}$$

où  $(\mathcal{M}_{r,s}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{r,s}})$  est l'espace des matrices d'ordre  $(r,s)$  muni de la tribu des boréliens, et où  $\Sigma_{r,s}$  est le sous-ensemble des matrices  $M$  qui s'écrivent :

$$(I.1) \quad M = \alpha \mathbf{I}^t \mathbf{J} + \theta^t \mathbf{J} + \mathbf{I}^t \mu + \lambda \theta^t \mu + \theta'^t \mu + \theta^t \mu'$$

$$\text{où : } (\theta, \theta', \mathbf{I}) \in (\mathbb{R}^r)^3, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mu, \mu', \mathbf{J}) \in (\mathbb{R}^s)^3, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

avec :

$$(I.2) \quad \begin{aligned} {}^t\theta I &= {}^t\theta' I = {}^t\theta\theta' = 0 \\ {}^t\mu J &= {}^t\mu' J = {}^t\mu\mu' = 0 \end{aligned} .$$

L'objet de cette étude est d'estimer les paramètres  $\alpha, \theta, \mu, \lambda, \theta', \mu'$ .  $\theta, \mu$  représentent l'influence de chaque facteur pris isolément,  $\theta', \mu'$  celle de chacun des facteurs sur l'autre, et  $\lambda$  est le coefficient d'interaction des facteurs pris isolément. Notons que les contraintes (I.2) assurent l'unicité dans l'écriture (I.1).

L'analyse de la variance envisagée est particulière dans le sens suivant ; toute matrice  $M$  d'ordre  $(r, s)$  peut s'écrire :

$$M = M_1 + M_2, \quad \text{Tr } M_1 {}^t M_2 = 0$$

avec  $M_1 = \alpha I {}^t J + \theta {}^t J + I {}^t \mu,$

les paramètres  $\theta$  et  $\mu$  satisfaisant à (I.2). Mais on suppose ici de plus que  $M_2$  peut se décomposer ainsi à partir des vecteurs  $\theta$  et  $\mu$  intervenant dans  $M_1$  :

$$M_2 = \lambda \theta {}^t \mu + \theta' {}^t \mu + \theta {}^t \mu'$$

$\theta'$  et  $\mu'$  satisfaisant à (I.2).

Nous appellerons  $M_1$  matrice des influences linéaires, et  $M_2$  matrice des interactions.

Signalons que, dès 1949, Tuckey [10] a proposé un test de nullité du paramètre  $\lambda$  lorsqu'on suppose que  $M_2$  s'écrit :

$$M_2 = \lambda \theta {}^t \mu .$$

Mais on peut aussi envisager les cas où  $M_2$  se décompose en produit de matrices unicolonnes et unilignes qui ne sont pas  $\theta$  et  $\mu$ . Plus précisément, en 1972, Johnson et Graybill [6], puis en 1978, K.R. Gabriel se sont intéressés au cas où  $M_2$  est de la forme :

$$M_2 = \theta^t \mu'$$

ou plus généralement :

$$M_2 = \sum_1^n \theta^i t \mu^i$$

Ces auteurs calculent, avec différentes méthodes faisant intervenir des décompositions de matrices en valeurs singulières, des estimateurs du maximum de vraisemblance pour  $\alpha, \theta, \mu, \theta^i, \mu^i$ ,  $i=1, \dots, r$ . Notons que ces méthodes pourraient aussi s'appliquer dans le cas que nous envisageons ici, lorsque  $\lambda = 0$ , si nous n'avons pas les contraintes (I.2), en écrivant :

$$M = \alpha I^t J + \theta ({}^t J + {}^t \mu') + (\theta' + I) {}^t \mu$$

## 2. - CONSTRUCTION DES ESTIMATEURS.

Nous considérons le produit scalaire matriciel suivant, où  $\text{Tr} M$  désigne la trace de la matrice  $M$  :

$$(A, B) \in (\mathcal{M}_{r,s})^2 \quad \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A {}^t B)$$

La norme sur  $\mathcal{M}_{r,s}$  est associée à ce produit scalaire. Rappelons que si  $s = 1$ , le produit scalaire des matrices  $A$  et  $B$  est égal au produit scalaire usuel des vecteurs qu'elles représentent ; en identifiant  $\mathcal{M}_{r,1}$  et  $\mathbb{R}^r$ , on peut écrire :

$$(I.3) \quad \forall (\theta, \theta') \in (\mathcal{M}_{r,1})^2 \quad \begin{aligned} \langle \theta, \theta' \rangle &= {}^t \theta \theta' = \text{Tr}(\theta {}^t \theta') \\ \|\theta {}^t \theta\| &= \|\theta\|^2 \end{aligned}$$

Les estimateurs étudiés ont été définis par J. R. Barra [ 1 ]. La méthode utilisée pour les construire est la suivante :

Soit  $X$  une matrice d'observations, c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{M}_{(r,s)}$ .



On constate aisément que, pour  $\theta, \mu, \lambda, \theta', \mu'$  fixés, le minimum en  $\alpha$  de

$$\|X - M\|^2, \quad M \in \Sigma_{r,s}$$

est atteint lorsque  $\alpha$  est égal à :

$$(I.4) \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{rs} {}^t I X J.$$

D'autre part, on sait ([1]) que le minimum en  $(\theta, \mu)$  de :

$$\{\|X - \hat{\alpha} I {}^t J - \theta {}^t J - I {}^t \mu\|; {}^t I \theta = {}^t J \mu = 0\}$$

est atteint au point :

$$(I.5) \quad \begin{cases} \hat{\theta} = \frac{1}{s} X J - \hat{\alpha} I \\ \hat{\mu} = \frac{1}{r} {}^t X I - \hat{\alpha} J. \end{cases}$$

Enfin, on cherche le minimum en  $(\lambda, \theta', \mu')$  de :

$$\|X - \hat{\alpha} I {}^t J - \hat{\theta} {}^t J - I {}^t \hat{\mu} - \lambda \hat{\theta} \hat{\mu} - \theta' {}^t \hat{\mu} - \theta' {}^t \hat{\mu}'\|$$

sous les contraintes :

$${}^t \hat{\theta} \theta' = {}^t I \theta' = 0, \quad {}^t \hat{\mu} \mu' = {}^t J \mu' = 0.$$

On montre dans [1] qu'il est atteint au point  $(\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}')$  défini ainsi :  
posons :

$$(I.6) \quad \begin{cases} Y = X - \hat{\alpha} I {}^t J - \hat{\theta} {}^t J - I {}^t \hat{\mu} \\ \hat{\lambda} = \frac{{}^t \hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} Y \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} \\ \hat{\theta}' = \left( \mathbb{1}_r - \frac{\hat{\theta} {}^t \hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} \right) Y \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} = Y \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} - \hat{\lambda} \hat{\theta} \\ \hat{\mu}' = \left( \mathbb{1}_s - \frac{\hat{\mu} {}^t \hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} \right) {}^t Y \frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} = {}^t Y \frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} - \hat{\lambda} \hat{\mu}. \end{cases}$$

On prend pour estimateurs des paramètres de la structure statistique (I.0) respectivement  $\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}'$ .

Remarque.

1) Nous verrons au paragraphe suivant comment ces estimateurs se situent par rapport au minimum de :

$$\{ \|X-M\|^2, M \in \Sigma_{r,s} \}.$$

2) Quand l'interaction est nulle, les estimateurs  $\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\mu}$  sont les estimateurs classiques de  $\alpha, \theta, \mu$  ; ils sont sans biais et de loi normale.

3) Nous étudions ici des propriétés de  $\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}'$ .

### 3. - POSITION PAR RAPPORT AUX SOLUTIONS DES EQUATIONS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

PROPOSITION 1. - Si X désigne une matrice d'observation, les solutions  $\tilde{\alpha}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}, \tilde{\lambda}, \tilde{\theta}', \tilde{\mu}', \tilde{\sigma}^2$  des équations du maximum de vraisemblance pour les paramètres  $\alpha, \theta, \mu, \lambda, \theta', \mu', \sigma^2$  de la structure statistique (I.0) vérifient :

$$(I.7) \quad 1) \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{rs} {}^t I X J.$$

2) Si on pose  $Y = X - \tilde{\alpha} I {}^t J - \tilde{\theta} {}^t J - I {}^t \tilde{\mu}$  :

$$\tilde{\lambda} = \frac{{}^t \tilde{\theta}}{\|\tilde{\theta}\|^2} Y \frac{\tilde{\mu}}{\|\tilde{\mu}\|^2}$$

$$(I.8) \quad \tilde{\theta}' = \left( \mathbb{1}_r - \frac{\tilde{\theta} {}^t \tilde{\theta}}{\|\tilde{\theta}\|^2} \right) Y \frac{{}^t \tilde{\mu}}{\|\tilde{\mu}\|^2}$$

$$\tilde{\mu}' = \left( \mathbb{1}_s - \frac{\tilde{\mu} {}^t \tilde{\mu}}{\|\tilde{\mu}\|^2} \right) {}^t Y \frac{\tilde{\theta}}{\|\tilde{\theta}\|^2}.$$

3)  $(\hat{\theta}, \hat{\mu})$  étant définis par (I.5) :

$$(I.9) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta} &= \hat{\theta} + \frac{1}{s} \theta_0 \\ \tilde{\mu} &= \hat{\mu} + \frac{1}{s} \mu_0 \end{aligned}$$

où  $\theta_0$  et  $\mu_0$  sont orthogonaux respectivement à  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\mu}$  et vérifient :

$$(I.10) \quad \begin{aligned} \theta_0 &= \left( \mathbb{1}_r - \frac{\tilde{\theta}^t \tilde{\theta}}{\|\tilde{\theta}\|^2} \right) Y \tilde{\mu}' \\ \mu_0 &= \left( \mathbb{1}_s - \frac{\tilde{\mu}^t \tilde{\mu}}{\|\tilde{\mu}\|^2} \right)^t Y \tilde{\theta}' \end{aligned}$$

$$(I.11) \quad 4) \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\|X - \tilde{M}\|^2}{rs}$$

$$(I.12) \quad \text{où } \tilde{M} = \tilde{\alpha} I^t J + \tilde{\theta}^t J + I^t \tilde{\mu} + \tilde{\lambda} \tilde{\theta}^t \tilde{\mu} + \tilde{\theta}'^t \tilde{\mu} + \tilde{\theta}^t \tilde{\mu}' .$$

Démonstration de la proposition 1. - La fonction de vraisemblance de la structure (I.0) s'écrit :

$$\mathcal{L}(X, \sigma^2, M) = (\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-rs} e^{-\frac{\|X-M\|^2}{2\sigma^2}}$$

où  $M$  est la fonction déterminée par (I.1), des variables  $\alpha, \lambda, \theta, \mu, \theta', \mu'$  satisfaisant à (I.2).

Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les valeurs de  $\sigma^2, \alpha, \theta, \mu, \lambda, \theta', \mu'$  qui rendent  $\mathcal{L}(X, \sigma^2, M)$  maximum, soit encore celles qui rendent maximum :

$$\text{Log } \mathcal{L}(X, \sigma^2, M) = -\frac{\|X-M\|^2}{2\sigma^2} - \frac{rs}{2} \text{Log } \sigma^2 - \frac{rs}{2} \text{Log}(2\pi) .$$

Cette écriture permet de constater que le maximum en  $M$  de  $\text{Log } \mathcal{L}(X, \sigma^2, M)$  est indépendant de  $\sigma^2$ , d'où :

$$\text{Max}_{\sigma^2 \in \mathbb{R}, M \in \Sigma_{r,s}} (\text{Log } \mathcal{L}(X, \sigma^2, M)) = \text{Max}_{\sigma^2 \in \mathbb{R}} (\text{Log } \mathcal{L}(X, \sigma^2, \bar{M}))$$

où  $\bar{M}$  vérifie

$$(I.13) \quad \bar{M} = \min_{M \in \Sigma_{r,s}} \|X-M\|^2 .$$

En dérivant  $\text{Log}(X, \sigma^2, \bar{M})$  par rapport à  $\sigma^2$ , on voit que l'estimateur  $\tilde{\sigma}^2$  du maximum de vraisemblance de  $\sigma^2$  est donné par :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\|X - \bar{M}\|^2}{rs}$$

d'où (I.11), puisque les définitions (I.12) et (I.13) de  $\tilde{M}$  et  $\bar{M}$  coïncident trivialement.

On est donc ramené, pour trouver les estimateurs du maximum de vraisemblance à calculer :

$$\min_{M \in \sum_{r,s}} \|X-M\|^2 .$$

Pour cela, considérons la décomposition suivante de  $X$  :

$$X = Y + Z$$

où  $Y$  a été défini en (I.6).

Décomposons  $M$ , qui appartient à  $\sum_{r,s}$ , sous la forme :

$$M = M_1 + M_2$$

$$\text{où } M_1 = \alpha I^t J + \theta^t J + I^t \mu .$$

$$\text{D'où : } X-M = (Z-M_1) + (Y-M_2)$$

$$Z-M_1 = (\hat{\alpha}-\alpha)I^t J + (\hat{\theta}-\theta)^t J + I^t(\hat{\mu}-\mu) .$$

Or, par construction de  $Y$  :

$${}^t I Y = 0 , \quad Y J = 0$$

et les contraintes (I.2) ont pour conséquence :

$${}^t I M_2 = 0 , \quad M_2 J = 0 .$$

Donc :

$$\langle Z-M_1 , Y-M_2 \rangle = 0$$

$$\text{et } \|X-M\|^2 = \|Z-M_1\|^2 + \|Y-M_2\|^2 .$$

En tenant compte de (I.3), on a immédiatement :

$$\|Z-M_1\|^2 = rs. (\hat{\alpha}-\alpha)^2 + \|\theta-\hat{\theta}\|^2 . s + \|\mu-\hat{\mu}\|^2 . r .$$

D'autre part, les calculs faits lors de la construction de  $\hat{\lambda}, \hat{\theta}, \hat{\mu}$  permettent d'écrire :

$$\text{Min}_{\lambda, \theta', \mu'} \|Y - M_2\|^2 = \|Y - \bar{\lambda} \theta^t \mu - \bar{\theta}'^t \mu - \theta^t \bar{\mu}'\|^2$$

où :

$$(I.14) \quad \begin{cases} \bar{\lambda} = \frac{\theta^t Y \mu}{\|\theta\|^2 \|\mu\|^2} \\ \bar{\theta}' = \left( \mathbf{I}_r - \frac{\theta^t \theta}{\|\theta\|^2} \right) Y \frac{\mu}{\|\mu\|^2} \\ \bar{\mu}' = \left( \mathbf{I}_s - \frac{\mu \mu^t}{\|\mu\|^2} \right)^t Y \frac{\theta}{\|\theta\|^2} \end{cases}$$

d'où les égalités (I.8).

Or, toujours en tenant compte de (I.3) :

$$\|Y - \bar{\lambda} \theta^t \mu - \bar{\theta}'^t \mu - \theta^t \bar{\mu}'\|^2 = \|Y\|^2 + \bar{\lambda}^2 \|\theta\|^2 \|\mu\|^2 - \frac{\|{}^t Y \theta\|^2}{\|\theta\|^2} - \frac{\|Y \mu\|^2}{\|\mu\|^2}$$

Le minimum de  $\|X - M\|^2$  est donc le minimum en  $(\theta, \mu)$  de :

$$f(\theta, \mu) = \text{Min}_{\alpha, \lambda, \theta', \mu'} \|X - M\|^2$$

Le minimum en  $(\alpha, \lambda, \theta', \mu')$  de  $\|X - M\|^2$  est obtenu pour  $(\hat{\alpha}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}', \bar{\mu}')$

et est égal à :

$$f(\theta, \mu) = s \|\theta - \hat{\theta}\|^2 + r \|\mu - \hat{\mu}\|^2 + \|Y\|^2 + \bar{\lambda}^2 \|\theta\|^2 \|\mu\|^2 - \frac{\|{}^t Y \theta\|^2}{\|\theta\|^2} - \frac{\|Y \mu\|^2}{\|\mu\|^2}$$

Les équations du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire ici du minimum de  $f(\theta, \mu)$ , s'écrivent, compte-tenu des contraintes sur  $\theta$  et  $\mu$  :

$$(I.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \mu) = k \mathbf{I}, & k \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial \mu}(\theta, \mu) = k' \mathbf{J}, & k' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour calculer  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ , nous utilisons les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\|\theta\|^2} = - \frac{2\theta}{\|\theta\|^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \|{}^t Y \theta\|^2 = 2 Y^t Y \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\lambda} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\|\theta\|^2} \times \left( \frac{t_{\mu}}{\|\mu\|^2} t_Y \right) \theta = -2\bar{\lambda} \frac{\theta}{\|\theta\|^2} + \frac{1}{\|\theta\|^2} Y \frac{\mu}{\|\mu\|^2} .$$

On trouve alors :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \mu) = s(\theta - \hat{\theta}) - \left( \mathbb{1}_r - \frac{\theta^t \theta}{\|\theta\|^2} \right) Y \bar{\mu}' .$$

En particulier :

$$t_I \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \mu) = 0$$

d'où :  $k = 0$  .

On calcule de même  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(\theta, \mu)$  , qui est un vecteur orthogonal à  $J$  , donc :

$$k' = 0$$

et les équations (I.15) deviennent :

$$(I.16) \quad \begin{cases} (\theta - \hat{\theta}) = \frac{1}{s} \left( \mathbb{1}_r - \frac{\theta^t \theta}{\|\theta\|^2} \right) Y \bar{\mu}' \\ (\mu - \hat{\mu}) = \frac{1}{r} \left( \mathbb{1}_s - \frac{\mu^t \mu}{\|\mu\|^2} \right) t_Y \bar{\theta}' \end{cases}$$

d'où (I.9) et (I.10), l'orthogonalité de  $\tilde{\theta}$  et  $\theta_0$  ,  $\tilde{\mu}$  et  $\mu_0$  résultant des égalités :

$$t_{\tilde{\theta}} \left( \mathbb{1}_r - \frac{\tilde{\theta}^t \tilde{\theta}}{\|\tilde{\theta}\|^2} \right) = t_{\tilde{\theta}} - t_{\tilde{\theta}} = 0 \quad , \quad t_{IY} = 0$$

$$t_{\tilde{\mu}} \left( \mathbb{1}_s - \frac{\tilde{\mu}^t \tilde{\mu}}{\|\tilde{\mu}\|^2} \right) = t_{\tilde{\mu}} - t_{\tilde{\mu}} = 0 \quad , \quad YJ = 0 .$$

### Remarques.

1) Par construction,  $\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\mu}$  sont les estimateurs du maximum de vraisemblance dans le cas "linéaire", c'est-à-dire lorsque les interactions sont nulles ( $\lambda = 0$  ,  $\theta' = 0$  ,  $\mu' = 0$ ) ;  $\hat{\theta}', \hat{\mu}', \hat{\lambda}$  , comme fonctions de  $(\theta, \mu)$  , sont les solutions des équations du maximum de vraisemblance pour  $\theta$  et  $\mu$  connus,  $\theta = \hat{\theta}$  ,  $\mu = \hat{\mu}$  .

Les vecteurs  $(\theta_0, \mu_0)$  définis dans (I.9) représentent ici la perturbation subie par la solution  $(\hat{\theta}, \hat{\mu})$  des équations du maximum de vraisemblance dans le modèle linéaire  $(M_2=0)$ , lorsqu'on introduit dans ce modèle la matrice d'interaction  $M_2$  :

$$M_2 = \lambda \theta^t \mu + \theta'^t \mu + \theta^t \mu' .$$

2) On peut regarder si les équations se simplifient dans les cas particuliers suivants :

1er cas : Il n'y a pas action d'un facteur sur l'autre, soit :

$$\theta' = 0 , \quad \mu' = 0 .$$

Dans ce cas :

$$\|Y - M_2\|^2 = \|Y\|^2 - \bar{\lambda}^{-2} \|\mu\|^2 \|\theta\|^2$$

et les équations (I.16) deviennent :

$$\begin{cases} \theta - \hat{\theta} = \frac{-1}{s} \bar{\lambda} \left( \mathbb{1}_r - \frac{\theta^t \theta}{\|\theta\|^2} \right) Y \mu \\ \mu - \hat{\mu} = \frac{-1}{r} \bar{\lambda} \left( \mathbb{1}_s - \frac{\mu^t \mu}{\|\mu\|^2} \right)^t Y \theta \end{cases}$$

les équations ont été étudiées numériquement par Ward et Dick [11], qui ont considéré des solutions itératives.

2e cas : Il n'y a pas d'interaction directe en ce sens que :  $\lambda = 0$  .

La statistique  $\bar{\lambda}$  définie en (I.14) n'est plus un estimateur, mais nous l'utilisons ici par commodité d'écriture :

$$\|Y - M_2\|^2 = \|Y\|^2 - \frac{\|{}^t Y \theta\|^2}{\|\theta\|^2} - \frac{\|Y \mu\|^2}{\|\mu\|^2} + 2 \bar{\lambda} \|\theta\|^2 \|\mu\|^2$$

D'où l'écriture suivante pour les équations (I.9) :

$$\begin{cases} \theta - \hat{\theta} = + \frac{1}{s} \left( \mathbb{1}_r - \frac{\theta^t \theta}{\|\theta\|^2} \right) Y (\bar{\mu}' - \bar{\lambda} \mu) \\ \mu - \hat{\mu} = + \frac{1}{r} \left( \mathbb{1}_s - \frac{\mu^t \mu}{\|\mu\|^2} \right)^t Y (\bar{\theta}' - \bar{\lambda} \theta) . \end{cases}$$

Dans ces deux cas particuliers, les considérations d'orthogonalité faites sur  $\tilde{\theta}, \theta_0$  (resp.  $\tilde{\mu}, \mu_0$ ) restent bien sûr valables, mais aucun autre résultat n'apparaît simplement, en particulier sur  $\|\theta_0\|$  (resp.  $\|\mu_0\|$ ). En effet, les équations du maximum de vraisemblance restent difficiles à étudier ; (on pourra dans un travail ultérieur regarder des solutions itératives dans le 2e cas ou dans le cas général).

#### 4. - CHANGEMENT DE REPERE.

Afin de simplifier les contraintes (I.2), nous allons nous placer en fait dans les sous-espaces orthogonaux respectivement à I et J :

Pour  $i = r$  ou  $i = s$ , soit  $C_i$  la matrice orthogonale d'ordre  $i$  dont les termes de la première ligne sont égaux à  $\frac{1}{\sqrt{i}}$ .

Nous utiliserons le lemme suivant ([ 2 ], page 111) :

LEMME 1. - Soit X une matrice aléatoire de loi  $N(M, \sigma^2 \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{1}_s)$ . Soient A et B deux matrices telles que le produit  $A \times B$  existe ; alors, en posant :

$$Z = AXB$$

la loi de Z est :

$$N(AMB, \sigma^2 A^t A \otimes B B^t).$$

Appliquons ce lemme avec :

$$A = C_r, \quad B = {}^t C_s.$$

Puisque, par définition de  $C_r$  et  $C_s$ , on a :

$$C_r^t C_r = \mathbf{1}_r, \quad C_s^t C_s = \mathbf{1}_s$$

la loi de Z est  $N(C_r M^t C_s, \sigma^2 \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{1}_s)$ .



Soient  $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$  les vecteurs définis par :

$$C_r^\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad C_r^{\theta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta' \end{pmatrix}$$

$$C_s^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad C_s^{\mu'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}.$$

Les contraintes (I.2) deviennent :

$$(I.2') \quad {}^t\beta\beta' = {}^t\gamma\gamma' = 0.$$

On définit de même les vecteurs aléatoires  $\hat{\beta}, \hat{\beta}', \hat{\gamma}, \hat{\gamma}'$  :

$$C_r^{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}, \quad C_r^{\hat{\theta}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\beta}' \end{pmatrix}$$

$$C_s^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}, \quad C_s^{\hat{\mu}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\gamma}' \end{pmatrix}.$$

D'autre part :

$$C_r M^t C_s = \alpha \sqrt{rs} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{s} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P & & \end{pmatrix}$$

$$\text{où } P = \lambda \beta {}^t\gamma + \beta' {}^t\gamma + \beta {}^t\gamma'.$$

De plus, si  $z_{ij}$  désignent les éléments de  $Z$  :

$$\hat{\alpha} = \frac{z_{1,1}}{rs}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\sqrt{s}} \begin{pmatrix} z_{2,1} \\ \vdots \\ z_{n,1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} z_{1,2} \\ \vdots \\ z_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Comme les variables aléatoires  $z_{ij}$  sont indépendantes dans leur ensemble, et de loi respectives  $N(m'_{ij}, \sigma^2)$ ,  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  sont des statistiques indépendantes de loi respectives

$$N\left(\alpha, \frac{\sigma^2}{rs}\right), \quad N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{s} \mathbb{1}_{r-1}\right), \quad N\left(\gamma, \frac{\sigma^2}{r} \mathbb{1}_{s-1}\right).$$

Enfin, en posant :

$$V_1 = \frac{\hat{\beta} {}^t\hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2}, \quad V_2 = \frac{\hat{\gamma} {}^t\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2}$$

on a :

$$C_r \frac{\hat{\theta}^t \hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} {}^t C_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & V_1 \end{pmatrix}, \quad C_s \frac{\hat{\mu}^t \hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} {}^t C_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & V_2 \end{pmatrix}$$

et on peut écrire,  $Z'$  étant le bloc inférieur droit  $(r-1)(s-1)$  de la matrice  $C_r Y^t C_s$  dont la loi <sup>est</sup>  $N(P, \sigma^2 \mathbb{1}_{r-1} \otimes \mathbb{1}_{s-1})$  :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{{}^t \hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2} Z' \frac{\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2} \\ (I.10) \quad \hat{\beta}' &= (\mathbb{1}_{r-1} - V_1) Z' \frac{\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2} \\ \hat{\gamma}' &= (\mathbb{1}_{s-1} - V_2) {}^t Z' \frac{\hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2} . \end{aligned}$$

Nous considérerons par la suite les vecteurs  $\beta, \beta', \gamma, \gamma', \hat{\beta}, \hat{\beta}', \hat{\gamma}, \hat{\gamma}'$  et les matrices  $Z, Z'$ . On pourra se reporter, à la fin de l'étude, à ce paragraphe pour faire le lien avec les paramètres de la structure (I.0).

Remarquons que ce changement de repère ne perturbe pas l'étude statistique puisque  $C_r$  et  $C_s$  sont des matrices connues, c'est-à-dire qui ne dépendent pas des paramètres inconnus.



## CHAPITRE II

### Moments d'ordre 1 et 2 des estimateurs



## I. - UN LEMME DE CALCUL DE PROBABILITES.

Nous définissons la fonction  $\epsilon_n$  suivante :

$$(II.1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \epsilon_n(x) = (n-1)e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!(2m+n)}$$

D'autres expressions de  $\epsilon_n$  et certaines propriétés de ces fonctions sont données dans l'annexe II.

Nous énonçons dans le lemme suivant les résultats dont on a besoin pour calculer les moments d'ordre 1 et 2 des estimateurs  $\hat{\lambda}, \hat{\theta}, \hat{\mu}'$ .

**LEMME 1.** - Soient  $X$  un vecteur aléatoire de loi  $N(m, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$  et  $m'$  un vecteur orthogonal à  $m$ . Posons :

$$a = \frac{\|m\|^2}{2\sigma^2}, \quad a' = \frac{\|m'\|^2}{2\sigma^2}.$$

1. - Soit  $R = \frac{\langle X, m \rangle}{\|X\|^2}$  ; alors :

$$E(R) = 2a \frac{\epsilon_n(a)}{n-1}, \quad E(R^2) = a(\epsilon_n(a) - \epsilon_{n-2}(a)).$$

2. - Soit  $R' = \frac{\langle X, m' \rangle}{\|X\|^2}$  , alors :

$$E(R') = E(RR') = 0$$

$$E(R'^2) = a' \left( \frac{\epsilon_{n-2}(a)}{n-3} - \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \right).$$

3. - Soit  $V = \frac{X^t X}{\|X\|^2}$  , alors :

$$E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) = \frac{\epsilon_{n-2}(a)}{\sigma^2 \times (n-3)}$$

$$E(V) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\epsilon_{n+2}(a)}{n+1} \right) m^t m + \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \cdot \mathbb{I}_n.$$

4. - Soit  $S = RX - m$ , alors :

$$E(S) = -m\epsilon_n(a)$$

$$E(S^t S) = [(n+2)\epsilon_n(a) - n\epsilon_{n+2}(a)] \frac{m^t m}{2} + a[\epsilon_{n+2}(a) - \epsilon_n(a)] \sigma^2 \mathbb{1}_n.$$

5. - Soit  $T = R'X - m'$ , alors :

$$E(T) = \left( \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} - 1 \right) m'$$

$$E(T^t T) = A_1 m'^t m' + A_2 m^t m + A_3 \mathbb{1}_n$$

$$\text{où } A_1 = \left[ 1 - \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} - \frac{\epsilon_{n+2}(a)}{n+1} \right]$$

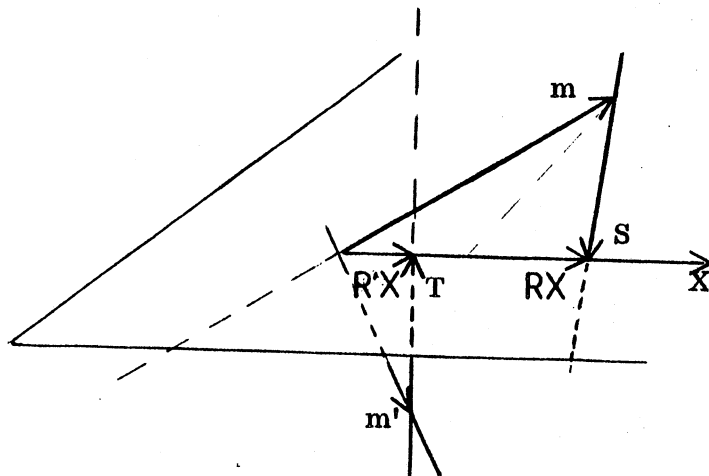
$$A_2 = \frac{a'}{2a} \left[ \frac{n+2}{n+1} \epsilon_{n+2}(a) - \frac{n}{n-1} \epsilon_n(a) \right]$$

$$A_3 = a' \sigma^2 \left( \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} - \frac{\epsilon_{n+2}(a)}{n+1} \right).$$

6. - Soit  $W = S^t T + T^t S$ , alors :

$$E(W) = \left( \epsilon_{n+2}(a) - \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \right) (m^t m' + m'^t m).$$

Remarque.  $RX$  est en fait la projection orthogonale de  $m$  sur la demi-droite portée par  $X$ , et de même  $R'X$  est la projection orthogonale de  $m'$  sur cette demi-droite. Les vecteurs  $S$  et  $T$  sont représentés sur le schéma suivant :



En particulier  $V, S, T, W$  ne dépendent que de la direction de  $X$  ; il est donc possible que l'on puisse démontrer une partie de ce lemme en utilisant la loi de la direction de  $X$  , c'est-à-dire la loi de Von Mises (cf. [ 4 ]), ce qui donnerait peut-être une explication directe du rôle central que joue la fonction  $\epsilon_n(x)$  .

Nous nous bornerons à donner une démonstration élémentaire et directe de ce lemme, en utilisant les résultats donnés dans les deux lemmes suivants.

**LEMME 2.** - Soient  $U, V, W$  trois variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\Gamma(a, \gamma, \lambda)$  ,  $\Gamma(b, \lambda)$  ,  $\Gamma(c, \lambda)$  . Soient  $\alpha, \beta, \delta$  trois nombres réels positifs tels que :

$$a' + b' - \delta > 0 \text{ , où } a' = a + \alpha \text{ , } b' = b + \beta \text{ ,}$$

alors :

$$(II.2) \quad E\left(\frac{U^\alpha V^\beta}{(U+V)^\delta}\right) = Ke^{-(\gamma/\lambda)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma/\lambda)^m}{m!} \frac{\Gamma(a'+m) \times \Gamma(a'+b'+m-\delta)}{\Gamma(a+m) \times \Gamma(a'+b'+m)}$$

$$\text{avec } K = \lambda^{\alpha+\beta-\delta} \frac{\Gamma(b')}{\Gamma(b)} .$$

De plus, si  $\epsilon$  est un nombre réel strictement positif tel que :

$$a'+b'+c'-\delta > 0 \text{ , où } c' = c + \epsilon \text{ ,}$$

alors :

$$(II.3) \quad E\left(\frac{U^\alpha V^\beta W^\epsilon}{(U+V+W)^\delta}\right) = K'e^{-(\gamma/\lambda)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma/\lambda)^m}{m!} \frac{\Gamma(a'+m) \Gamma(a'+b'+c'+m-\delta)}{\Gamma(a+m) \Gamma(a'+b'+c'+m)}$$

$$\text{avec } K' = \lambda^{\alpha+\beta+\epsilon-\delta} \frac{\Gamma(b')\Gamma(c')}{\Gamma(b)\Gamma(c)} .$$

Pour simplifier les écritures, posons :

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= \epsilon_n(x) - \epsilon_{n-2}(x) \\ \eta_n(x) &= \frac{\epsilon_{n-2}(x)}{n-3} - \frac{\epsilon_n(x)}{n-1} . \end{aligned}$$



**LEMME 3.** - Les notations étant celles du lemme 1, on a

aussi :

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2}\right) = 2a\sigma^2(1 - \epsilon_n(a))$$

$$E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^2}\right) = 2a'\sigma^2 \frac{\epsilon_n(a)}{n-1}$$

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^4}{\|X\|^4}\right) = 4a^2\sigma^4 \left(1 + \frac{n-3}{2}\epsilon_n(a) - \frac{n-1}{2}\epsilon_{n+2}(a)\right)$$

$$E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^4}{\|X\|^4}\right) = 6a'^2\sigma^4 \eta_{n+2}(a)$$

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2 \langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) = 2aa'\sigma^4 \delta_{n+2}(a) .$$

Si  $m''$  désigne un vecteur orthogonal à  $m$  et  $m'$  et :

$$a'' = \frac{\|m''\|^2}{2\sigma^2} ,$$

on a :

$$E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2 \langle X, m'' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) = 2a'a''\sigma^4 \eta_{n+2}(a) .$$

La démonstration du lemme 2 est élémentaire et rédigée dans l'annexe I, § 1.

Le principe de la démonstration du lemme 3 est le suivant (les calculs figurent dans l'annexe I, §2).

On considère la décomposition suivante de  $X$  :

$$(II.4) \quad X = m \left(1 + \frac{\sigma}{\|m\|} \mathcal{U}_1\right) + \sigma \mathcal{V}$$

où  $\mathcal{U}_1$  suit la loi  $N(0,1)$ ,  $\mathcal{V}$  est un vecteur aléatoire gaussien centré, indépendant de  $\mathcal{U}_1$  et dont la covariance est la forme quadratique unité du sous-espace orthogonal à  $m$ .

On peut alors écrire :

$$\langle X, m \rangle = \sqrt{2a} \sigma^2 (\sqrt{2a} + \mathcal{U}_1)$$

$$(II.5) \quad \|X\|^2 = \sigma^2(Z+Z'), \quad Z = (\sqrt{2a} + \mathcal{U}_1)^2, \quad Z' = \|\mathcal{V}'\|^2.$$

Z suit la loi  $\Gamma(\frac{1}{2}, 2a, 2)$  et Z' est une variable aléatoire indépendante de Z et de loi  $\Gamma(\frac{n-1}{2}, 2)$ .

E(R) se calcule directement à partir de l'égalité :

$$E(R) = \sqrt{2a} \times E\left(\frac{(\sqrt{2a} + \mathcal{U}_1)}{(\sqrt{2a} + \mathcal{U}_1)^2 + Z'}\right).$$

Le calcul des espérances de la forme :

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^i}{\|X\|^j}\right) \quad i \in \{2, 4\}, \quad j \in \{2, 4\}$$

se fait à l'aide des formules (II.5), en utilisant l'égalité (II.2) ; on obtient alors une formule de la forme :

$$K'(a) e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n)$$

et la décomposition en éléments simples de  $K(m, n)$  par rapport à m donne le résultat.

Les espérances des autres variables aléatoires réelles ou vectorielles figurant dans les lemmes 2 et 3 se calculent de même, à partir de la décomposition suivante :

$$(II.6) \quad X = m \left(1 + \frac{\sigma}{\|m\|}\right) \mathcal{U}_1 + \sigma \frac{m'}{\|m'\|} \mathcal{U}_2 + \sigma \mathcal{V}'$$

où  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}'$  sont des variables aléatoires indépendantes ;  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  sont de loi  $N(0, 1)$  et  $\mathcal{V}'$  est un vecteur aléatoire gaussien centré dont la covariance est la forme quadratique unité du sous-espace orthogonal à m et  $m'$ .

On a en effet :

$$(II.7) \quad \langle X, m' \rangle^2 = 2a' \sigma^4 Y$$

$$\|X\|^2 = \sigma^2(Z+Y+Z') = \sigma^2(U+Y)$$

où Y suit la loi  $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$ , Z suit la loi  $\Gamma(\frac{n}{2}-1, 2)$ , les variables Z, Y, Z' étant indépendantes ; U et Y sont aussi indépendantes, et

la loi de  $U$  est  $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}, 2a, 2\right)$ .

Enfin, les égalités matricielles du lemme 1 se démontrent en décomposant  $S^t S, T^t T$  en somme et produit de variables aléatoires dont on a calculé les espérances (les calculs sont donnés dans l'annexe I, §3).

## 2. - CALCUL DES MOMENTS D'ORDRE 1 ET 2.

PROPOSITION 1. - La loi de  $\hat{\lambda}$  conditionnelle à  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  est :

$$N\left(\frac{{}^t \hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2} P \frac{\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2}, \frac{\sigma^2}{\|\hat{\beta}\|^2 \|\hat{\gamma}\|^2}\right).$$

La loi de  $\hat{\beta}'$  conditionnelle à  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  est :

$$N\left((\mathbb{1}_{r-1} - V_1) P \frac{\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2}, \sigma^2 \frac{\mathbb{1}_{r-1} - V_1}{\|\hat{\gamma}\|^2}\right).$$

La loi de  $\hat{\gamma}'$  conditionnelle à  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  est :

$$N\left((\mathbb{1}_{s-1} - V_2) {}^t P \frac{\hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2}, \sigma^2 \frac{\mathbb{1}_{s-1} - V_2}{\|\hat{\beta}\|^2}\right).$$

Démonstration. - On a vu dans le chapitre 1, §4, que les variables  $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, Z'$  sont indépendantes ; on peut, pour calculer les lois conditionnelles, utiliser le lemme I.4.1. D'où la normalité de ces lois conditionnelles et leurs valeurs moyennes.

L'application du même lemme permet de calculer :

$$\sigma^2(\hat{\lambda}_c) = \sigma^2 \frac{{}^t \hat{\beta} \hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^4} \otimes \frac{{}^t \hat{\gamma} \hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^4} = \frac{\sigma^2}{\|\hat{\beta}\|^2 \|\hat{\gamma}\|^2}$$

où  $\sigma^2(\hat{\lambda}_c)$  est la variance de la loi de  $\hat{\lambda}$  conditionnelle à  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ . Et comme :

$$(\mathbb{1}_{r-1} - V_1) {}^t (\mathbb{1}_{r-1} - V_1) = \mathbb{1}_{r-1} - V_1$$

on peut écrire :

$$\sigma^2(\hat{\beta}'_c) = \sigma^2(\mathbb{1}_{r-1} - V_1)(\mathbb{1}_{r-1} - V_1) \otimes \frac{t^{\hat{\gamma}} \hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^4} = \sigma^2 \frac{\mathbb{1}_{r-1} - V_1}{\|\hat{\gamma}\|^2}$$

et de même :

$$\sigma^2(\hat{\gamma}'_c) = \sigma^2 \frac{\mathbb{1}_{s-1} - V_2}{\|\hat{\beta}\|^2}$$

où  $\sigma(\hat{\beta}'_c)$ ,  $\sigma(\hat{\gamma}'_c)$  désignent les variances des lois conditionnelles de  $\hat{\beta}'$ ,  $\hat{\gamma}'$ .

c. q. f. d.

Par analogie avec les notations du lemme 1, introduisons les notations suivantes :

$$(II.8) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\|\beta\|^2 s}{2\sigma^2}, & a' &= \frac{\|\beta'\|^2 s}{2\sigma^2} \\ R_1 &= \frac{\langle \hat{\beta}, \beta \rangle}{\|\hat{\beta}\|^2}, & R'_1 &= \frac{\langle \hat{\beta}, \beta' \rangle}{\|\hat{\beta}\|^2} \\ S_1 &= R_1 \hat{\beta} - \beta, & T_1 &= R'_1 \hat{\beta} - \beta' \\ W_1 &= S_1 {}^t T_1 + T_1 {}^t S_1. \end{aligned}$$

On définit de même  $b, b', R_2, R'_2, S_2, T_2, W_2$  en remplaçant  $(s, \beta, \beta', \hat{\beta})$  par  $(r, \gamma, \gamma', \hat{\gamma})$ .

Plus généralement, comme on a toujours supposé qu'il y avait symétrie entre les deux facteurs, la démonstration de propriétés relatives aux deux facteurs ne sera exposée que dans le cas du premier facteur.

PROPOSITION 2. - Les notations étant définies dans (II.8), les moments d'ordre 1 et 2 des estimateurs sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\hat{\lambda}) = \lambda E(R_1)E(R_2) \\ E(\hat{\beta}') = -E(R_2)(\lambda E(S_1) + E(T_1)) \\ E(\hat{\gamma}') = -E(R_1)(\lambda E(S_2) + E(T_2)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\hat{\lambda}^2) = \sigma^2 E\left(\frac{1}{\|\hat{\beta}\|^2}\right) E\left(\frac{1}{\|\hat{\gamma}\|^2}\right) + \lambda^2 E(R_1^2)E(R_2^2) + E(R_1^2)E(R_2^2) + E(R_1'^2)E(R_2^2) \\ E(\hat{\beta}'^t \hat{\beta}') = \sigma^2 (\mathbb{1}_{r-1} - E(V_1)) E\left(\frac{1}{\|\hat{\beta}\|^2}\right) + E(R_2^2)(\lambda^2 E(S_1^t S_1) + \lambda E(W_1) + E(T_1^t T_1)) \\ \quad + E(R_2'^2)E(S_1^t S_1) \\ E(\hat{\gamma}'^t \hat{\gamma}') = \sigma^2 (\mathbb{1}_{s-1} - E(V_2)) E\left(\frac{1}{\|\hat{\gamma}\|^2}\right) + E(R_1^2)(\lambda^2 E(S_2^t S_2) + \lambda E(W_2) + E(T_2^t T_2)) \\ \quad + E(R_1'^2)E(S_2^t S_2) . \end{array} \right.$$

Démonstration. - Il suffit de réécrire la proposition 2 avec les notations (II.8) ; les moments des estimateurs sont égaux aux espérances des moments de leur loi conditionnelle à  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ . Comme, d'après le lemme 1 :

$$E(R_1') = E(R_1 R_1') = E(R_2') = E(R_2 R_2') = 0$$

et que  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\gamma}$  sont indépendants, on a immédiatement les résultats annoncés.

Plus précisément, pour les moments d'ordre 1 :

$$(II.9) \quad \begin{array}{l} E(\hat{\lambda} | (\hat{\beta}, \hat{\gamma})) = \lambda R_1 R_2 + R_1 R_2' + R_1' R_2 \\ E(\hat{\beta}' | (\hat{\beta}, \hat{\gamma})) = -R_2(\lambda S_1 + T_1) - R_2' S_1 \end{array}$$

Pour les moments d'ordre 2, on peut écrire :

$$\sigma^2(\hat{\lambda} | (\hat{\beta}, \hat{\gamma})) = E(\hat{\lambda}^2 | (\hat{\beta}, \hat{\gamma})) - [E(\hat{\lambda} | (\hat{\beta}, \hat{\gamma}))]^2$$

d'où, d'après la proposition (II.4) et (II.9) :

$$(II.10) \quad E(\hat{\lambda}^2 | (\hat{\beta}, \hat{\gamma})) = \frac{\sigma^2}{\|\hat{\beta}\|^2 \|\hat{\gamma}\|^2} + (\lambda R_1 R_2 + R_1 R_2' + R_1' R_2)^2 .$$

De même :

$$(II.11) \quad E(\hat{\beta}'^t \hat{\beta} | (\hat{\beta}, \hat{\gamma})) = (\mathbf{1}_{r-1} - V_1) \frac{\sigma^2}{\|\hat{\beta}\|^2} + [R_2(\lambda S_1 + T_1) + R_2' S_1]^t [R_2(\lambda S_1 + T_1) + R_2' S_1]$$

**COROLLAIRE 3.** - Les moments d'ordre 1 et 2 des estimateurs proposés s'expriment tous à l'aide des fonctions  $\epsilon_n$  définies en (II.1). En particulier :

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda 2a \frac{\epsilon_{r-1}^{(a)}}{r-2} \times 2b \frac{\epsilon_{s-1}^{(b)}}{s-2}$$

$$E(\hat{\beta}') = 2b \frac{\epsilon_{s-1}^{(b)}}{s-2} \left( \lambda \epsilon_{r-1}^{(a)} \beta + \left( 1 - \frac{\epsilon_{r-1}^{(a)}}{r-2} \right) \beta' \right)$$

$$E(\hat{\gamma}') = 2a \frac{\epsilon_{r-1}^{(a)}}{r-2} \left( \lambda \epsilon_{s-1}^{(b)} \gamma + \left( 1 - \frac{\epsilon_{s-1}^{(b)}}{s-2} \right) \gamma' \right)$$

Démonstration. - Elle est immédiate en appliquant le lemme 1 aux vecteurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\gamma}$ .

### 3. - ESTIMATEUR SANS BIAIS LINEAIRE.

L'estimateur  $\hat{\lambda}$  étant biaisé, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, il est assez naturel de chercher si il existe un estimateur  $\hat{\lambda}'$  de  $\lambda$ , sans biais, linéaire en  $Y$  :

$$\hat{\lambda}' = {}^t f(\hat{\theta}) Y g(\hat{\mu})$$

Le changement de repère du chapitre I - §4, permet de ramener cette question à l'existence pour tout  $(r, s)$  d'une fonction  $(f_r, g_s)$  de  $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$  telle que, si on pose :

$$\hat{\lambda}' = {}^t f_r(\hat{\beta}) Z' g_s(\hat{\gamma})$$

alors :

$$E(\hat{\lambda}') = \lambda$$

soit, en refaisant le calcul de  $E(\hat{\lambda})$ , par conditionnement par rapport à  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  :

$$\lambda = {}^t E(f_r(\hat{\beta})) \times P \times E(g_s(\hat{\gamma}))$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme :

$$(II.12) \quad \lambda = \lambda x_1 x_2 + x_1 x'_2 + x'_1 x_2$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad x_1 &= \langle E(f_r(\hat{\beta})), \beta \rangle, & x_2 &= \langle E(g_s(\hat{\gamma})), \gamma \rangle \\ x'_1 &= \langle E(f_r(\hat{\beta})), \beta' \rangle, & x'_2 &= \langle E(g_s(\hat{\gamma})), \gamma' \rangle. \end{aligned}$$

(II.12) devant être vérifiée pour tout  $(\beta, \beta')$  et tout  $(\gamma, \gamma')$ , on peut,  $\beta$  et  $\gamma$  étant fixés, faire tendre  $\|\beta'\|$  et  $\|\gamma'\|$  vers 0. Alors  $x'_1$  et  $x'_2$  tendront vers 0, et on doit donc avoir, par passage à la limite dans (II.12) :

$$\forall (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \quad \lambda = \lambda x_1 x_2.$$

D'où, comme  $x_1$  et  $x_2$  sont des quantités indépendantes :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Et en reportant dans (II.12) :

$$(x'_1 + x'_2) = 0$$

d'où, comme  $x'_1$  et  $x'_2$  sont des quantités indépendantes :

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = 0.$$

Mais si, pour tout vecteur  $\beta'$  orthogonal à  $\beta$ , on a :

$$x'_1 = \langle E(f_r(\hat{\beta})), \beta' \rangle = 0$$

cela implique que  $E(f_r(\hat{\beta}))$  et  $\beta$  sont colinéaires.

La condition :

$$x_1 = \langle E(f_r(\hat{\beta})), \beta \rangle = 1$$

montre alors que :

$$E\{f_r(\hat{\beta})\} = \frac{\beta}{\|\beta\|^2} .$$

Le même raisonnement pour  $g_s$  montre qu'on est ramené à chercher un estimateur  $h_n$  sans biais de  $\frac{\theta}{\|\theta\|^2}$  pour la structure statistique  $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), N(\theta, \sigma^2 \mathbb{1}_n), \theta \in [\mathbb{R}^n - \{0\}]\}$ . Supposons qu'il existe une application  $h_n$  de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui soit un tel estimateur ; alors, on doit avoir :

$$(II.13) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(x) e^{-\frac{\|x-\theta\|^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\theta}{\|\theta\|^2} .$$

D'après le corollaire classique du théorème de Lebesgue sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, le premier membre de l'égalité (II.13) définit une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$ , et le second membre n'est pas la restriction à  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  d'une fonction continue.

Donc il n'existe pas de tel estimateur, et nous avons en fait pris ici  $\frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2}$ , où  $\hat{\theta}$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ , comme estimateur de  $\frac{\theta}{\|\theta\|^2}$ . Nous n'avons pas regardé si  $\frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2}$  réalisait le minimum de  $E\left(h_n(\theta) - \frac{\theta}{\|\theta\|^2}\right)^2$ .





## **CHAPITRE III**

### **Approximations sur les lois des estimateurs**

1



Pour des nombres  $r$  et  $s$  fixés, nous avons défini des estimateurs des paramètres  $\alpha, \theta, \mu, \lambda, \theta', \mu'$  ; nous nous sommes ramenés, par changement de repère, aux estimateurs correspondants des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \beta', \gamma'$  . Pour indiquer que ces paramètres et leurs estimateurs dépendent de  $r$  et  $s$  , nous les notons, dans ce paragraphe, avec des points :

$$\alpha_{\cdot}, \beta_{\cdot}, \gamma_{\cdot}, \beta'_{\cdot}, \gamma'_{\cdot}, \hat{\alpha}_{\cdot}, \hat{\beta}_{\cdot}, \hat{\gamma}_{\cdot}, \hat{\lambda}_{\cdot}, \hat{\beta}'_{\cdot}, \hat{\gamma}'_{\cdot} .$$

Le point remplace un indice générique qui est  $r$  pour  $\beta_{\cdot}$  ,  $s$  pour  $\gamma_{\cdot}$  et  $(r, s)$  pour les autres quantités énumérées. Nous mettons de même un point aux constantes, vecteurs ou matrices que nous avons introduits dans le chapitre II et qui dépendent de  $(r, s)$  .

Dans ce chapitre, nous faisons tendre  $r$  et  $s$  vers  $+\infty$  dans l'expression des moments d'ordre 1 et 2 et des fonctions caractéristiques des estimateurs  $\hat{\lambda}_{\cdot}, \hat{\beta}'_{\cdot}, \hat{\gamma}'_{\cdot}$  . Plus précisément, nous supposons que ;

(III. 0)  $r$  et  $s$  tendent vers  $+\infty$  en étant équivalents,

c'est-à-dire que nous étudions des propriétés des lois des estimateurs  $\hat{\lambda}_{\cdot}, \hat{\beta}'_{\cdot}, \hat{\mu}'_{\cdot}$  lorsque  $r$  et  $s$  sont grands ; mais nous n'introduisons pas ici de notions de convergence de structures ou d'estimateurs.

## 1. - APPROXIMATION DES MOMENTS D'ORDRE 1 ET 2.

Nous étudions dans quelles conditions le biais  $E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet)$  et l'écart quadratique  $E[(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet)^2]$  sont petits lorsque  $r$  et  $s$  sont grands. Nous cherchons de même des conditions telles que chaque composante de  $E(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)$  (resp.  $E(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)$ ) et chaque terme de la matrice  $E[(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)^t (\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)]$  (resp.  $E[(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)^t (\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)]$ ) soient petits lorsque  $r$  et  $s$  sont grands.

Pour tout  $r$ , nous plongeons  $\mathbb{R}^r$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  et nous notons  $V_{\bullet i}$  les composantes d'un vecteur  $V_\bullet$  de  $\mathbb{R}^r$  (en particulier,  $V_{\bullet i}$  est nul pour tout indice  $i$  supérieur à  $r$ ). De même, une matrice  $M_\bullet$  d'ordre  $(r, s)$  est identifiée à un élément de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  de coordonnées  $M_{\bullet(i,j)}$  (où  $M_{\bullet(i,j)}$  est nul dès que  $i > r$  ou  $j > s$ ). Nous définissons les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \forall V_\bullet \in \mathbb{R}^r & : \lim_f V_\bullet = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^* & \lim_{r \rightarrow +\infty} V_{\bullet i} = 0 \\ \forall M_\bullet \in \mathcal{M}_{(r,s)} & : \lim_f M_\bullet = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow +\infty}} M_{\bullet(i,j)} = 0 . \end{aligned}$$

Sous la condition (III.0), nous faisons pour cette étude les hypothèses suivantes :

$$(H_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \lim \|\beta_\bullet\| \in \overline{\mathbb{R}^*}, \quad \lim \|\gamma_\bullet\| \in \overline{\mathbb{R}^*} \\ \bullet \bullet \quad \text{on n'a pas simultanément :} \\ \quad \lim \lambda_\bullet = 0, \quad \lim_f \beta'_\bullet = 0, \quad \lim_f \gamma'_\bullet = 0 . \end{array} \right.$$

Les estimateurs  $\hat{\lambda}_\bullet, \hat{\beta}'_\bullet, \hat{\gamma}'_\bullet$  étant les estimateurs du maximum de vraisemblance lorsqu'on prend  $\beta_\bullet = \hat{\beta}_\bullet$  et  $\gamma_\bullet = \hat{\gamma}_\bullet$ , il est naturel de supposer que  $\lim \|\beta_\bullet\|$  et  $\lim \|\gamma_\bullet\|$  sont non nuls. La deuxième partie de  $(H_0)$  revient à dire que l'interaction des deux facteurs n'est pas négligeable lorsque  $r$  et  $s$  sont grands.

Sous ces hypothèses, les nombres  $a_\bullet$  et  $b_\bullet$  définis par (II.8) tendent vers  $+\infty$ , puisque :

$$a_\bullet = \frac{\|\beta_\bullet\|^2 s}{\sigma^2}, \quad b_\bullet = \frac{\|\gamma_\bullet\|^2 r}{\sigma^2}.$$

Posons alors :

$$x_\bullet = \frac{r}{2a_\bullet} = \frac{r}{s} \frac{\sigma^2}{\|\beta_\bullet\|^2}, \quad \ell_1 = \lim x_\bullet$$

$$y_\bullet = \frac{s}{2b_\bullet} = \frac{s}{r} \frac{\sigma^2}{\|\gamma_\bullet\|^2}, \quad \ell_2 = \lim y_\bullet.$$

On peut distinguer quatre cas suivant que  $\ell_1$  ou  $\ell_2$  sont nuls ou non, c'est-à-dire suivant que  $\|\beta_\bullet\|^2$  ou  $\|\gamma_\bullet\|^2$  tendent vers l'infini ou non (sous l'hypothèse  $H_0$ ).

Enfin, d'après (A.II.10), on peut écrire, pour tout  $i$  fixé :

$$(III.1) \quad \epsilon_{r-i}(a_\bullet) \sim \frac{x_\bullet}{1+x_\bullet}, \quad \epsilon_{s-i}(b_\bullet) \sim \frac{y_\bullet}{1+y_\bullet}.$$

### A. Etude des biais.

PROPOSITION 1. -  $(H_0)$  étant vérifiée, soit  $(H_1)$  l'hypothèse :

$$(H_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim \|\beta_\bullet\| = \lim \|\gamma_\bullet\| = +\infty \\ \sup |\lambda_\bullet| < +\infty \\ \forall i \in \mathbb{N} \quad \sup |\beta_{\bullet i}| < +\infty, \quad \sup |\beta'_{\bullet i}| < +\infty \\ \sup |\gamma_{\bullet i}| < +\infty, \quad \sup |\gamma'_{\bullet i}| < +\infty. \end{array} \right.$$

Alors  $(H_1)$  est nécessaire et suffisante pour que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet) = 0 \\ \lim_f E(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet) = 0 \\ \lim_f E(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet) = 0. \end{array} \right.$$

Démonstration. - D'après le corollaire II.2.3. :

$$E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet) = \lambda_\bullet \left[ 2a_\bullet \frac{\epsilon_{r-2}(a_\bullet)}{r-3} \times 2b_\bullet \frac{\epsilon_{s-2}(b_\bullet)}{s-3} - 1 \right].$$

En utilisant (III.1) :

$$E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet) \sim \lambda_\bullet \left( \frac{1}{1+x_\bullet} \times \frac{1}{1+y_\bullet} - 1 \right)$$

De même, d'après le corollaire II.2.3 et (III.1) :

$$E(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet) = z_\bullet \beta_\bullet + (z'_\bullet - 1) \beta'_\bullet$$

$$\text{où } z_\bullet = 2b_\bullet \frac{\epsilon_{s-1}(b_\bullet)}{s-2} \times \lambda_\bullet \epsilon_{r-1}(a_\bullet)$$

$$z_\bullet \sim \frac{\lambda_\bullet}{1+y_\bullet} \times \frac{x_\bullet}{1+x_\bullet}$$

$$z'_\bullet = 2b_\bullet \frac{\epsilon_{s-1}(b_\bullet)}{s-2} \times \left( 1 - \frac{\epsilon_{r-1}(a_\bullet)}{r-2} \right)$$

$$z'_\bullet \sim \frac{1}{1+y_\bullet}$$

On a des écritures analogues pour  $E(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)$  et la proposition 1 est une conséquence immédiate de ces formules.

## B. Etude des moments d'ordre 2.

PROPOSITION 2. - Si  $(H_0)$  et  $(H_1)$  sont vérifiées, et si de plus on a :

$$(H_2) \quad \sup_r \frac{\|\beta'_\bullet\|}{\|\beta_\bullet\|} < +\infty, \quad \sup_s \frac{\|\gamma'_\bullet\|}{\|\gamma_\bullet\|} < +\infty$$

alors :

$$\lim E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet)^2 = 0$$

$$\lim_f E[(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)^t (\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)] = 0$$

$$\lim_f E[(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)^t (\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)] = 0.$$

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 3. - Les hypothèses  $(H_0)$  et  $(H_1)$  étant vérifiées :

$$\lim E(R_{\bullet 1}) = \lim E(R_{\bullet 2}) = 1$$

$$\lim_f E(S_{\bullet 1}) = \lim_f E(S_{\bullet 2}) = 0$$

$$\lim_f E(T_{\bullet 1}) = \lim_f E(T_{\bullet 2}) = -1$$

$$\lim E\left(\frac{1}{\|\hat{\beta}_\bullet\|^2}\right) = \lim E\left(\frac{1}{\|\hat{\gamma}_\bullet\|^2}\right) = 0$$

$$\lim E(R_{\bullet 1}^2) = \lim E(R_{\bullet 2}^2) = 1 .$$

$$(III. 2) \quad \begin{cases} \lim_f E(V_{\bullet 1}) = 0 , & \lim_f E(V_{\bullet 2}) = 0 \\ \lim_f E(W_{\bullet 1}) = 0 , & \lim_f E(W_{\bullet 2}) = 0 \end{cases}$$

$$(III. 3) \quad \lim_f E(S_{\bullet 1}^t S_{\bullet 1}) = 0 , \quad \lim_f E(S_{\bullet 2}^t S_{\bullet 2}) = 0$$

De plus, si  $(H_2)$  est vérifiée :

$$(III. 4) \quad \begin{cases} \lim_f (E(T_{\bullet 1}^t T_{\bullet 1}) - \beta'_\bullet{}^t \beta'_\bullet) = 0 \\ \lim_f (E(T_{\bullet 2}^t T_{\bullet 2}) - \gamma'_\bullet{}^t \gamma'_\bullet) = 0 . \end{cases}$$

Démonstration du lemme 3. - En appliquant le lemme II.1.1 à  $\hat{\beta}$  et à  $\hat{\gamma}$ , on a en fonction de  $\epsilon_n$  toutes les espérances considérées dans l'énoncé du lemme 3.

Les quatre premières assertions sont immédiates d'après (III.1).

D'autre part :

$$E(R_{\bullet 1}^2) = a_\bullet \delta_{r-1}(a_\bullet)$$

et d'après le corollaire A.II.1.4 :

$$E(R_{\bullet 1}^2) = 1 - \beta_{r-1}(a_\bullet)$$

avec  $\beta_{r-1}(a_\bullet) \sim 2x_\bullet$

donc :

$$(III. 5) \quad \lim a_\bullet \delta_{r-1}(a_\bullet) = 1 .$$

Enfin, puisque, pour tout  $i$  fixé :

$$(III. 6) \quad \lim \epsilon_{r-i}(a_\bullet) = 0$$

on a trivialement les égalités (III.2).



Ecrivons maintenant, d'après le lemme II.1.1 :

$$E(S_{\bullet 1}^t S_{\bullet 1}) = \frac{1}{2} B_{\bullet 1} \beta_{\bullet}^t \beta_{\bullet} + C_{\bullet 1} \mathbb{1}_{r-1}$$

avec  $B_{\bullet 1} = \epsilon_{r-1}(a_{\bullet}) + \epsilon_{r+1}(a_{\bullet}) - r \delta_{r+1}(a_{\bullet})$

$$C_{\bullet 1} = \frac{\sigma^2}{s} a_{\bullet} \delta_{r+1}(a_{\bullet})$$

En remarquant que :

$$r \delta_{r+1}(a_{\bullet}) = 2x_{\bullet} a_{\bullet} \delta_{r+1}(a_{\bullet})$$

d'après (III.5) et (III.6)

$$\lim B_{\bullet 1} = \lim C_{\bullet 1} = 0$$

ce qui démontre (III.3).

Enfin, on peut écrire, conformément au lemme II.1.1 :

$$E(T_{\bullet 1}^t T_{\bullet 1} - \beta'_{\bullet}^t \beta'_{\bullet}) = (A_{\bullet 1} - 1) \beta'_{\bullet}^t \beta'_{\bullet} + A_{\bullet 2} \beta_{\bullet}^t \beta_{\bullet} + A_{\bullet 3} \mathbb{1}_{r-1} .$$

Il est évident que :

$$\lim A_{\bullet 1} = 1$$

de plus, comme :

$$\frac{a'_{\bullet}}{2a_{\bullet}} = \frac{\|\beta'_{\bullet}\|^2}{2\|\beta_{\bullet}\|^2} .$$

D'après (H<sub>2</sub>), en utilisant (A II.12) :

$$\lim A_{\bullet 2} = 0$$

$$\lim A_{\bullet 3} = 0 .$$

c. q. f. d.

Démonstration de la proposition 2. - On a :

$$E(\hat{\lambda}_{\bullet} - \lambda_{\bullet})^2 = E(\hat{\lambda}_{\bullet}^2) - 2\lambda_{\bullet} E(\hat{\lambda}_{\bullet}) + \lambda_{\bullet}^2 .$$

D'après la proposition II.2.2 :

$$E(\hat{\lambda}_{\bullet} - \lambda_{\bullet})^2 = A_{\bullet} + \lambda_{\bullet}^2 B_{\bullet}$$

$$\text{où } A_{\bullet} = \sigma^2 E\left(\frac{1}{\|\hat{\beta}_{\bullet}\|^2}\right) E\left(\frac{1}{\|\hat{\gamma}_{\bullet}\|^2}\right) + E(R_{\bullet 1}^2)E(R_{\bullet 2}^2) + E(R'_{\bullet 1}^2)E(R'_{\bullet 2}^2)$$

$$B_{\bullet} = E(R_{\bullet 1}^2)E(R_{\bullet 2}^2) - 2E(R_{\bullet 1})E(R_{\bullet 2}) + 1 .$$

Or :

$$E(R'_{\bullet 2}^2) = a' \eta_{r-1}(a_{\bullet}) .$$

D'après (A II.12) :

$$E(R'_{\bullet 1}^2) \sim \frac{a'_{\bullet}}{2a_{\bullet}^2} , \quad \frac{a'_{\bullet}}{2a_{\bullet}^2} = \frac{\|\beta'_{\bullet}\|^2}{\|\beta_{\bullet}\|^2} \times \frac{\sigma^2}{2\|\beta_{\bullet}\|^2 s} .$$

En utilisant  $(H_2)$  :

$$\lim E(R'_{\bullet 1}^2) = \lim E(R'_{\bullet 2}^2) = 0 .$$

Donc, finalement :

$$\lim A_{\bullet} = \lim B_{\bullet} = 0 .$$

Les autres résultats se démontrent de manière analogue, en utilisant la proposition II.2.2 et le lemme 3.

#### Remarque.

1) L'hypothèse  $(H_2)$  signifie que l'influence d'un facteur pris isolément n'est pas négligeable, pour  $r$  et  $s$  grands, devant l'influence de ce facteur sur l'autre. Elle apparaît ici comme hypothèse suffisante, mais on ne sait pas si elle est nécessaire pour que l'on ait (III.4).

2) Les propositions 1 et 2 restent valables si pour tout  $(r, s)$ ,  $\lambda_{\bullet}$  est nul. Dans un tel cas, évidemment, il n'y a pas lieu de considérer l'estimateur  $\hat{\lambda}$ .

De même, ces propositions sont vraies si, pour tout  $(r, s)$ ,  $\beta'_{\bullet}$  et  $\gamma'_{\bullet}$  sont nuls. Dans ce cas, seuls les résultats suivants ont un sens :

$$\lim E(\hat{\lambda}_{\bullet} - \lambda_{\bullet}) = 0 , \quad \lim E[(\hat{\lambda}_{\bullet} - \lambda_{\bullet})^2] = 0 .$$

Enfin, ces propositions sont toujours vraies si on se rapproche d'une seule de ces situations lorsque  $r$  et  $s$  deviennent grands, c'est-à-dire si :

$$\lim \lambda_{\bullet} = 0$$

ou  $\lim_f \beta'_{\bullet} = 0$  ,  $\lim_f \gamma'_{\bullet} = 0$  .

3) Les hypothèses  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  sont vérifiées si par exemple il existe des nombres  $m, m', M, M'$  strictement positifs tels que :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* , \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} m \leq |\beta_{\bullet i}| \leq M \\ m' \leq |\gamma_{\bullet i}| \leq M' \end{cases}$$

ou encore, par exemple, si

$$\beta_{\bullet i} \sim \sqrt{\frac{i}{r}} \quad \gamma_{\bullet i} \sim \sqrt{\frac{i}{r}}$$

etc.

## 2. - APPROXIMATION GAUSSIENNE DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES DES ESTIMATEURS.

PROPOSITION 1. - Les hypothèses  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  étant vérifiées,  
si de plus, on a :

$$(H_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{\|\beta_\bullet\|}{\|\gamma_\bullet\|} = 1 \\ \lim \frac{\|\beta_\bullet\|}{\sqrt{r}} = 0 . \end{array} \right.$$

1) La loi de  $\Lambda_\bullet$  , où :

$$\Lambda_\bullet = K_\bullet (\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet) + 2\lambda_\bullet \sigma$$

avec :

$$K_\bullet = \frac{\|\beta_\bullet\| \|\gamma_\bullet\|}{\sigma}$$

tend vers  $N(0, 1)$  .

2) En posant :

$$K'_\bullet = \frac{\|\beta_\bullet\|}{\sigma}$$

pour tout  $p$  fixé, la loi de la projection sur  $\mathbb{R}^p$  de

$K'_\bullet (\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)$  (resp.  $K'_\bullet (\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)$ ) tend vers  $N(0, \mathbb{I}_p)$  .

Pour démontrer cette proposition, nous considérons la fonction caractéristique  $\psi_\bullet$  de la loi de  $\Lambda_\bullet$  conditionnelle à  $(\hat{\beta}_\bullet, \hat{\gamma}_\bullet)$ . On a alors :

$$\varphi_{\Lambda_\bullet}(t) = E(\psi_\bullet(t)) .$$

Pour le 1), il suffit donc de démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{(r, s)} \varphi_{\Lambda_\bullet}(t) = e^{-t^2/2}$$

et pour cela, on peut, pour tout  $t$ , remplacer la suite de variables aléatoires  $\psi_\bullet(t)$  par une suite  $\bar{\psi}_\bullet(t)$  de variables aléatoires telles que, pour tout couple  $(r, s)$ ,  $\psi_\bullet(t)$  et  $\bar{\psi}_\bullet(t)$  aient même loi. En effet, dans ce cas :

$$\forall (r, s) \quad E(\psi_{\bullet}(t)) = E(\bar{\psi}_{\bullet}(t))$$

$$\varphi_{\Lambda_{\bullet}}(t) = E(\bar{\psi}_{\bullet}(t)) .$$

Or, d'après la décomposition (II.6),  $(\hat{\beta}_{\bullet}, \hat{\gamma}_{\bullet}, Z'_{\bullet})$  a même loi que  $(\bar{\beta}_{\bullet}, \bar{\gamma}_{\bullet}, \bar{Z}'_{\bullet})$  :

$$\bar{\beta}_{\bullet} = \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{s} \|\beta_{\bullet}\|} X_1\right) \beta_{\bullet} + \frac{\sigma}{\sqrt{s}} \frac{X_2}{\|\beta'_{\bullet}\|} \beta'_{\bullet} + \sum_{i=3}^{r-1} X_i e_{\bullet, i}$$

$$\bar{\gamma}_{\bullet} = \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{r} \|\gamma_{\bullet}\|} Y_1\right) \gamma_{\bullet} + \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \frac{Y_2}{\|\gamma'_{\bullet}\|} \gamma'_{\bullet} + \sum_{j=3}^{s-1} Y_j f_{\bullet, j}$$

$$\bar{Z}'_{\bullet, i, j} = P_{\bullet, i, j} + \sigma^2 Z_{(i, j)}$$

où les suites  $(X_n)$ ,  $(Y_n)$ ,  $Z_{(i, j)}$  sont des suites de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , de lois  $N(0, 1)$  et telles que, pour tout couple  $(r, s)$ , les variables de  $\mathcal{F}_{r, s}$  sont indépendantes :

$$\mathcal{F}_{r, s} = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, r-1 \\ j=1, \dots, s-1}} \{X_i, Y_j, Z_{i, j}\}$$

et où  $\left(\frac{\beta_{\bullet}}{\|\beta_{\bullet}\|}, \frac{\beta'_{\bullet}}{\|\beta'_{\bullet}\|}, e_{\bullet, 2}, \dots, e_{\bullet, r-1}\right)$  d'une part,  $\left(\frac{\gamma_{\bullet}}{\|\gamma_{\bullet}\|}, \frac{\gamma'_{\bullet}}{\|\gamma'_{\bullet}\|}, f_{\bullet, 2}, \dots, f_{\bullet, s-1}\right)$  d'autre part, sont des bases orthonormées respectivement de  $\mathbb{R}^{r-1}$  et  $\mathbb{R}^{s-1}$ .

Posons alors :

$$\bar{\lambda} = \frac{t \bar{\beta}_{\bullet}}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2} \bar{Z}_{\bullet} \frac{t \bar{\gamma}_{\bullet}}{\|\bar{\gamma}_{\bullet}\|^2} , \quad \bar{\Lambda}_{\bullet} = K_{\bullet}(\bar{\lambda}_{\bullet} - \lambda_{\bullet}) + 2\lambda_{\bullet} \sigma$$

et prenons pour  $\bar{\psi}_{\bullet}(t)$  la fonction caractéristique de la loi de  $\bar{\Lambda}_{\bullet}$  conditionnelle à  $(\bar{\beta}_{\bullet}, \bar{\gamma}_{\bullet})$ .

Nous définissons :

$$\bar{R}_{\bullet, 1} = \frac{\langle \bar{\beta}_{\bullet}, \beta_{\bullet} \rangle}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2} ; \quad \bar{R}'_{\bullet, 1} = \frac{\langle \bar{\beta}_{\bullet}, \beta'_{\bullet} \rangle}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2}$$

$$\bar{S}_{\bullet, 1} = \bar{R}_{\bullet, 1} \bar{\beta}_{\bullet} - \beta_{\bullet} , \quad \bar{T}_{\bullet, 1} = \bar{R}'_{\bullet, 1} \bar{\beta}_{\bullet} - \beta'_{\bullet}$$

et, de même, à partir de  $(\bar{\gamma}_\bullet, \gamma_\bullet, \gamma'_\bullet)$  les variables aléatoires  $\bar{R}_{\bullet 2}, \bar{R}'_{\bullet 2}, \bar{S}_{\bullet 2}, \bar{T}_{\bullet 2}$ .

Nous donnons dans la proposition 2 les résultats sur  $\bar{R}_{\bullet 1}$  et  $\bar{R}'_{\bullet 1}$  que nous utiliserons pour la démonstration de la proposition 1.

Nous employons les notations suivantes :

si  $V_\bullet$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p$  fixé, et  $\mathcal{X}_\bullet$  une matrice aléatoire d'ordre  $(p, q)$  fixé, nous écrivons :

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^p & \quad \lim_f V_\bullet = A \quad \text{p. s.} \\ M \in \mathcal{M}_{(p, q)} & \quad \lim_f \mathcal{X}_\bullet = M \quad \text{p. s.} \end{aligned}$$

si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall i \in (1, 2, \dots, p) & \quad \lim V_{\bullet i} = A_{\bullet i} \quad \text{p. s.} \\ \forall (i, j) \in [1, p] \times [1, q] & \quad \lim \mathcal{X}_{\bullet (i, j)} = M_{(i, j)} \quad \text{p. s.} \end{aligned}$$

**PROPOSITION 2.** - Les hypothèses de la proposition 1 étant vérifiées :

$$(III.1) \quad \lim \frac{\|\bar{\beta}_\bullet\|^2}{\|\beta_\bullet\|^2} = 1, \quad \lim \frac{\|\bar{\gamma}_\bullet\|^2}{\|\gamma_\bullet\|^2} = 1 \quad \text{p. s.}$$

$$(III.2) \quad \lim \bar{R}_{\bullet 1} = 1, \quad \lim \bar{R}_{\bullet 2} = 1 \quad \text{p. s.}$$

$$(III.3) \quad \begin{aligned} \lim \|\beta_\bullet\|^2 (\bar{R}_{\bullet 1} - 1) &= -\sigma^2 \quad \text{p. s.} \\ \lim \|\gamma_\bullet\|^2 (\bar{R}_{\bullet 2} - 1) &= -\sigma^2 \quad \text{p. s.} \end{aligned}$$

$$(III.4) \quad \lim \|\beta_\bullet\|^2 \bar{R}'_{\bullet 1} = 0, \quad \lim \|\gamma_\bullet\|^2 \bar{R}'_{\bullet 2} = 0 \quad \text{p. s.}$$

Démonstration de la proposition 2. - Démontrons d'abord un résultat intermédiaire dont nous nous servirons pour démontrer (III.1) et (III.3), à savoir :

$$(III.5) \quad \lim \|\bar{\beta}_\bullet\|^2 - \|\beta_\bullet\|^2 = \sigma^2 \quad \text{p. s.}$$

D'après (III. 0) :

$$\|\bar{\beta}_\bullet\|^2 - \|\beta_\bullet\|^2 = 2\sigma \frac{\|\beta_\bullet\|}{\sqrt{s}} X_1 + \frac{\sigma^2}{s} \sum_1^{r-1} X_i^2 .$$

Par hypothèse, la limite de  $\frac{\|\beta_\bullet\|}{\sqrt{s}}$  est nulle ; donc :

$$\lim 2\sigma \frac{\|\beta_\bullet\|}{\sqrt{s}} X_1 = 0 .$$

D'après la loi forte des grands nombres :

$$\lim \frac{1}{r-1} \sum_1^{r-1} X_i^2 = 1$$

comme  $r$  et  $s$  sont équivalents :

$$\lim \frac{1}{s} \sum_1^{r-1} X_i^2 = 1$$

et finalement :

$$\lim(\|\bar{\beta}_\bullet\|^2 - \|\beta_\bullet\|^2) = \sigma^2 \quad \text{p. s.}$$

d'où le résultat (III. 5).

Et en particulier :

$$\lim \left| \frac{\|\bar{\beta}_\bullet\|^2}{\|\beta_\bullet\|^2} - 1 \right| = \sigma^2 \lim \frac{1}{\|\beta_\bullet\|^2} = 0 \quad \text{p. s.}$$

D'autre part :

$$\bar{R}_\bullet = \frac{\|\beta_\bullet\|^2}{\|\bar{\beta}_\bullet\|^2} \left( 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{s} \|\beta_\bullet\|} X_1 \right) .$$

(III. 2) est donc une conséquence immédiate de (III. 1). De plus,

$$\|\beta_\bullet\|^2 (\bar{R}_\bullet - 1) = \frac{\|\beta_\bullet\|^2}{\|\bar{\beta}_\bullet\|^2} (\|\beta_\bullet\|^2 - \|\bar{\beta}_\bullet\|^2) + \frac{\|\beta_\bullet\|^2}{\|\bar{\beta}_\bullet\|^2} \frac{\|\beta_\bullet\|}{\sqrt{s}} \sigma X_1$$

d'où, en utilisant (III. 1) et (III. 5), le résultat (III. 3).

Enfin, on peut écrire :

$$(III. 6) \quad \|\beta_\bullet\|^2 \bar{R}'_\bullet = \sigma \frac{\|\beta_\bullet\|^2}{\|\bar{\beta}_\bullet\|^2} \frac{\|\beta_\bullet\|}{\sqrt{s}} X_2$$

$$\|\beta_{\bullet}\|^2 \bar{R}'_{\bullet 1} = \sigma \frac{\|\beta_{\bullet}\|^2}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2} \times \frac{\|\beta'_{\bullet}\|}{\|\beta_{\bullet}\|} \times \frac{\|\beta_{\bullet}\|}{\sqrt{s}} X_2$$

et le résultat (III.4) est une conséquence de (III.1).

Démonstration de la proposition 1. -

1) D'après la proposition II.2.1., la loi de  $\bar{\lambda}_{\bullet}$  conditionnelle à  $(\bar{\beta}_{\bullet}, \bar{\gamma}_{\bullet})$  est normale et sa fonction caractéristique  $\bar{\psi}_{\bullet}$  s'écrit :

$$\bar{\psi}_{\bullet}(t) = e^{it\bar{U}_{\bullet}} e^{-\frac{t^2}{2}\bar{U}'_{\bullet}}$$

où  $\bar{U}_{\bullet}$  et  $\bar{U}'_{\bullet}$  sont la moyenne et la variance de cette loi conditionnelle, soit ici, d'après (II.9) et (II.10) :

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\bullet} &= \lambda_{\bullet} [K_{\bullet} (\bar{R}_{\bullet 1} \bar{R}_{\bullet 2} - 1) + 2\sigma] + K_{\bullet} [\bar{R}_{\bullet 1} \bar{R}'_{\bullet 2} + \bar{R}'_{\bullet 1} \bar{R}_{\bullet 2}] \\ \bar{U}'_{\bullet} &= K_{\bullet}^2 \frac{\sigma^2}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2 \|\bar{\gamma}_{\bullet}\|^2} \end{aligned}$$

En remarquant que  $|\bar{\psi}_{\bullet}(t)| \leq 1$ , pour que  $E(\bar{\psi}_{\bullet}(t))$  converge vers  $e^{-t^2/2}$ , il suffit, d'après le théorème de Lebesgue que :

$$(III.7) \quad \lim \bar{U}_{\bullet} = 0 \quad \text{p. s.}$$

$$(III.8) \quad \lim \bar{U}'_{\bullet} = 1 \quad \text{p. s.}$$

(III.8) est une conséquence immédiate de (III.1).

D'autre part, comme  $\|\beta_{\bullet}\|$  et  $\|\gamma_{\bullet}\|$  sont équivalents :

$$K_{\bullet} \sim \frac{\|\beta_{\bullet}\|^2}{\sigma} \sim \frac{\|\gamma_{\bullet}\|^2}{\sigma}$$

d'après (III.2) et (III.4) :

$$\lim K_{\bullet} \bar{R}_{\bullet 1} \bar{R}'_{\bullet 2} = \lim \bar{R}_{\bullet 1} \times \lim K_{\bullet} \bar{R}'_{\bullet 2} = 0$$

$$\lim K_{\bullet} \bar{R}'_{\bullet 1} \bar{R}_{\bullet 2} = 0 .$$

Ecrivons :

$$(\bar{R}_{\bullet 1} \bar{R}_{\bullet 2} - 1) = (\bar{R}_{\bullet 1} - 1) \bar{R}_{\bullet 2} + (\bar{R}_{\bullet 2} - 1)$$

d'après (III.3), comme la suite  $\lambda_{\bullet}$  est bornée :



$$\lim \lambda_{\bullet} [K_{\bullet} (\bar{R}_{\bullet 1} - 1) \bar{R}_{\bullet 2} + \sigma] = 0$$

$$\lim \lambda_{\bullet} [K_{\bullet} (\bar{R}_{\bullet 2} - 1) + \sigma] = 0$$

ce qui démontre (III.8).

2) Soit  $p$  un entier strictement positif et, pour  $(r-1) \geq p$ , notons  $\pi_r$  la projection de  $\mathbb{R}^{r-1}$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $A_r$  la matrice de  $\pi_r$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^{r-1}$  et  $\mathbb{R}^p$ . Posons :

$$\chi_{\bullet} = \pi_r [K_{\bullet} (\hat{\beta}'_{\bullet} - \beta'_{\bullet})] , \quad \bar{\chi}_{\bullet} = \pi_r (K_{\bullet} (\bar{\beta}'_{\bullet} - \beta'_{\bullet}))$$

où :

$$\bar{\beta}'_{\bullet} = \left( \mathbb{I}_{r-1} - \frac{\bar{\beta}_{\bullet} {}^t \bar{\beta}_{\bullet}}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2} \right) \bar{Z}'_{\bullet} \frac{{}^t \bar{\gamma}_{\bullet}}{\|\bar{\gamma}_{\bullet}\|^2} .$$

Soit encore :

$$\bar{\chi}_{\bullet} = A_r K_{\bullet} (\mathbb{I}_{r-1} - \bar{V}_{\bullet 1}) \bar{Z}'_{\bullet} \frac{{}^t \bar{\gamma}_{\bullet}}{\|\bar{\gamma}_{\bullet}\|^2} .$$

Les variables  $\bar{V}_{\bullet 1}, \bar{S}_{\bullet 1}, \bar{T}_{\bullet 1}$  sont obtenues en remplaçant  $(\hat{\beta}_{\bullet}, \hat{\gamma}_{\bullet}, Z'_{\bullet})$  par  $(\bar{\beta}_{\bullet}, \bar{\gamma}_{\bullet}, Z'_{\bullet})$  dans  $V_{\bullet 1}, S_{\bullet 1}, T_{\bullet 1}$ .

D'après la proposition II.2.1, appliquée pour  $(\bar{\beta}_{\bullet}, \bar{\gamma}_{\bullet}, Z'_{\bullet})$ , la loi de  $\bar{\chi}_{\bullet}$  conditionnelle à  $(\bar{\beta}_{\bullet}, \bar{\gamma}_{\bullet})$  est de loi  $N(\bar{U}_{\bullet}, \bar{U}'_{\bullet})$ , avec, d'après la proposition 2.2.1 et (II.11) :

$$\bar{U}_{\bullet} = A_r K_{\bullet} [-\bar{R}_{\bullet 2} (\lambda_{\bullet} \bar{S}_{\bullet 1} + \bar{T}_{\bullet 1}) - \bar{R}'_{\bullet 2} \bar{S}_{\bullet 1} - \beta'_{\bullet}]$$

$$\bar{U}'_{\bullet} = \sigma^2 \frac{K_{\bullet}^2}{\|\bar{\gamma}_{\bullet}\|^2} A_r (\mathbb{I}_{r-1} - \bar{V}_{\bullet 1}) {}^t A_r$$

et admet la fonction caractéristique :

$$t \in \mathbb{R}^p \quad \bar{\psi}_{\bullet}(t) = (e^{i \langle t, \bar{U}_{\bullet} \rangle - {}^t \bar{U}'_{\bullet} t}) .$$

D'après le théorème de Lebesgue, comme  $|\bar{\psi}_{\bullet}(t)| \leq 1$ , pour que  $\varphi_{\bar{\chi}_{\bullet}}(t)$  converge vers  $e^{-\|t\|^2/2}$ , il suffit que :

$$(III.9) \quad \forall t \in \mathbb{R}^p : \quad \lim \langle t, \bar{U}_{\bullet} \rangle = 0 \quad \text{p. s.}$$

$$(III.10) \quad \lim {}^t \bar{U}'_{\bullet} t = \frac{\|t\|^2}{2} \quad \text{p. s.}$$

Mais  $\bar{U}_\bullet$  peut se mettre sous la forme :

$$\bar{U}_\bullet = A_R K_\bullet [ - (\lambda_\bullet \bar{R}_{\bullet 2} + \bar{R}'_{\bullet 2}) S_{\bullet 1} - \bar{R}_{\bullet 2} \bar{R}'_{\bullet 1} \bar{\beta}'_\bullet + \beta'_\bullet (\bar{R}_{\bullet 2} - 1) ]$$

D'après (III.4) :

$$\lim \|\bar{\beta}'_\bullet\| K_\bullet \bar{R}'_{\bullet 1} = \lim \frac{\|\bar{\beta}'_\bullet\|}{\|\beta_\bullet\|} \frac{\|\beta_\bullet\|^2}{\sigma} \bar{R}'_{\bullet 1} = 0 \quad \text{p. s.}$$

donc :

$$\lim K_\bullet \bar{R}_{\bullet 2} \bar{R}'_{\bullet 1} \langle A_R \bar{\beta}'_\bullet, t \rangle = 0 \quad \text{p. s.}$$

D'après (III.3) :

$$\lim K_\bullet (\bar{R}_{\bullet 2} - 1) = 0 \quad \text{p. s.}$$

et comme, d'après  $H_1$ , pour tout  $t$  :

$$\sup |\beta'_1| < +\infty$$

en remarquant que :

$$\sup \|A_R \beta'_\bullet\| = \sup \left( \sum_1^p \beta_{\bullet i}^2 \right) < +\infty$$

on en déduit :

$$\lim K_\bullet (\bar{R}_{\bullet 2} - 1) \langle A_R \beta'_\bullet, t \rangle = 0 \quad \text{p. s.}$$

Enfin, écrivons :

$$A_R K_\bullet \bar{S}_{\bullet 1} = \bar{R}_{\bullet 1} K_\bullet A_R (\bar{\beta}_\bullet - \beta_\bullet) + K_\bullet (\bar{R}_{\bullet 1} - 1) A_R \beta_\bullet$$

Comme pour tout  $i$ , la suite  $\beta_i$  est bornée, d'après (III.3)

$$\lim_f K_\bullet (\bar{R}_{\bullet 1} - 1) A_R \beta_\bullet = 0 \quad \text{p. s.}$$

et comme  $A_R (\bar{\beta}_\bullet - \beta_\bullet)$  suit la loi  $N\left(0, \frac{\|\beta_\bullet\|^2}{s} \mathbf{1}_p\right)$ , et que  $\frac{\|\beta_\bullet\|^2}{s}$  tend vers 0 ;

$$\lim_f \bar{R}_{\bullet 1} K_\bullet A_R (\bar{\beta}_\bullet - \beta_\bullet) = 0$$

ce qui achève de démontrer (III.9).

En remarquant maintenant que :

$$A_r \mathbb{1}_{r-1} {}^t A_r = \mathbb{1}_p, \quad A_r \bar{V}_{\bullet 1} {}^t A_r = \frac{(A_r \bar{\beta}_{\bullet}) {}^t (A_r \bar{\beta}_{\bullet})}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2}$$

on peut écrire :

$${}^t \bar{U}_{\bullet} t = \frac{\sigma^2 K_{\bullet}^2}{\|\bar{Y}_{\bullet}\|^2} \left[ \frac{\|t\|^2}{2} - \left\langle \frac{A_r \bar{\beta}_{\bullet}}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2}, t \right\rangle^2 \right]$$

d'après (III.1), comme  $\|\beta_{\bullet}\|$  et  $\|\gamma_{\bullet}\|$  sont équivalents :

$$\lim \sigma^2 \frac{K_{\bullet}^2}{\|\bar{Y}_{\bullet}\|^2} = 1 \quad \text{p. s.}$$

de plus :

$$\lim \frac{\|A_r \bar{\beta}_{\bullet}\|}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|^2} \leq \lim \frac{1}{\|\bar{\beta}_{\bullet}\|} = 0 \quad \text{p. s.}$$

ce qui démontre (III.10).

Mais comme  $\bar{\chi}_{\bullet}$  et  $\chi_{\bullet}$  ont même loi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^p \quad \varphi_{\bar{\chi}_{\bullet}}(t) = \varphi_{\chi_{\bullet}}(t)$$

d'où :

$$\lim \varphi_{\chi_{\bullet}}(t) = e^{-\|t\|^2/2}$$

ce qui montre que la loi de  $\chi_{\bullet}$  tend vers  $N(0, \mathbb{1}_p)$ .

### Remarque.

1) La proposition 1 montre que  $\Lambda_{\bullet}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi  $N(0,1)$ , ce qui peut permettre de construire des intervalles de confiance approchés de  $\hat{\lambda}$ .

De même,  $\chi_{\bullet}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi  $N(0, \mathbb{1}_p)$ , d'où des intervalles de confiance pour  $\hat{\beta}'_{\bullet 1}, \dots, \hat{\beta}'_{\bullet p}$ , et ceci pour tout  $p$ .

2) Le terme  $2\lambda_{\bullet}\sigma$  dans l'expression de  $\Lambda_{\bullet}$  est dû à ce que l'on n'a pas  $E(\hat{\lambda}_{\bullet}) = \lambda_{\bullet}$ , mais seulement  $\lim E(\hat{\lambda}_{\bullet} - \lambda_{\bullet}) = 0$ .

3) Dans cette proposition, l'hypothèse  $(H_2)$ , à savoir :

$$\sup \frac{\|\beta'_0\|}{\|\beta_0\|} < +\infty, \quad \sup \frac{\|\gamma'_0\|}{\|\gamma_0\|} < +\infty$$

est utilisée, en association avec  $(H_3)$ , uniquement pour démontrer (III.4) et comme on le voit sur l'expression (III.6), elle pourrait être remplacée dans cette proposition par :

$$(H'_2) \quad \lim \frac{\|\beta'_0\|}{\sqrt{r}} = 0, \quad \lim \frac{\|\gamma'_0\|}{\sqrt{r}} = 0.$$

Donc la proposition III.1.2 sera vérifiée en remplaçant  $(H_2)$  par  $(H'_2) \cup (H_3)$ .

On avait vu (voir la remarque à la fin du paragraphe 1 de ce chapitre) que  $(H_2)$  était une condition suffisante dont on ne savait pas si elle était nécessaire pour démontrer la proposition III.1.2. Il en est de même pour  $(H'_2) \cup (H_3)$ .

Mais  $(H_2)$  n'implique pas  $(H'_2) \cup (H_3)$  ; il suffit pour le voir de prendre par exemple :

$$\|\beta_0\| \sim \|\gamma_0\| \sim \|\beta'_0\| \sim \|\gamma'_0\| \sim r.$$

De même  $(H'_2) \cup (H_3)$  n'implique pas  $(H_2)$ , comme on le voit en supposant que :

$$\|\beta_0\| \sim r^{\frac{1}{4}} \quad \|\beta'_0\| \sim \|\gamma'_0\| \sim r^{\frac{1}{3}}.$$

Donc  $(H_2)$  d'une part,  $(H'_2) \cup (H_3)$  d'autre part, soit des hypothèses qui, associées à  $(H_0)$  et  $(H_1)$ , sont suffisantes pour la proposition III.1.2.

4) Les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées par exemple si :

$$\beta_{\bullet i} \sim \frac{i^{1/2}}{r^{3/4}} \quad \gamma_{\bullet i} \sim \frac{i^{1/2}}{r^{3/4}}$$

ou encore si il existe des nombres strictement positifs  $m, m', M, M'$  tels que :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{\log r} \leq \beta_{\bullet i} \leq \frac{M}{\log r} \\ \frac{m}{\log s} \leq \gamma_{\bullet i} \leq \frac{M}{\log s} \end{array} \right.$$

etc.

## **CHAPITRE IV**

### **Problèmes du comportement asymptotique des estimateurs d'interaction**



1. - Dans le chapitre III, nous avons étudié des propriétés des lois de  $\hat{\lambda}_r, \hat{\beta}'_r, \hat{\gamma}'_r$  lorsque  $r$  et  $s$  étaient grands. Mais nous n'avons pas, lors de cette étude, défini une suite d'expériences, c'est-à-dire une suite de matrices  $(M_{(r,s)})_{\substack{r \in \mathbb{N}^* \\ s \in \mathbb{N}^*}}$  telles que :

$$v(r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad M_{rs} \in \sum_{r,s}$$

(où  $\sum_{r,s}$  est défini au chapitre I, §1)

et une suite d'observations  $X_{(r,s)}$  correspondantes.

En particulier, les suites  $\beta_r, \mu_r, \lambda_r, \beta'_r, \mu'_r$  n'étaient pas définies à partir d'une telle suite  $(M_{(r,s)})_{\substack{r \in \mathbb{N}^* \\ s \in \mathbb{N}^*}}$ , et nous n'avons rien supposé sur leurs limites et leurs liens éventuels.

2. - Dans de nombreux problèmes d'estimation, cf. ([12]) on part d'un échantillon empirique pour estimer un ou plusieurs paramètres. La notion de consistance et de convergence des estimateurs lorsque la taille de l'échantillon tend vers  $+\infty$  est classique.

On aurait pu, dans notre problème, pour  $r$  et  $s$  fixé, prendre un échantillon empirique de la structure statistique étudiée, mais ce n'est pas l'objet de ce travail, où, au contraire, on fait tendre  $r$  et  $s$  vers l'infini, en disposant pour tout couple  $(r,s)$  d'un plan factoriel complet, sans répétitions, c'est-à-dire d'une matrice d'observations  $X_{(r,s)}$ . Il est alors naturel de considérer une suite d'expériences où l'on "garde" les observations faites à chaque étape, c'est-à-dire une suite de matrices d'observations  $X_{(r,s)}$  telles que  $X_{(r+1,s+1)}$  soit obtenue en ajoutant une  $(r+1)$ -ème ligne et une  $(s+1)$ -ème colonne à  $X_{(r,s)}$ .



La matrice des observations,  $X_{(r,s)}$ , est la réalisation d'une variable aléatoire de loi  $N(M_{(r,s)}, \sigma^2 \mathbb{1}_r \otimes \mathbb{1}_s)$ ; pour faire une telle suite d'expériences, il faut pouvoir considérer une suite de matrices  $M_{(r,s)}$  qu'on appellera matrices de paramètres, telles que :

$$(IV.1) \quad \forall (r, s) \quad M_{r,s} \in \Sigma_{r,s}$$

(IV.2)  $M_{r+1,s+1}$  est obtenue en bordant  $M_{r,s}$  par une ligne et une colonne.

3. - Nous démontrons dans l'annexe III, l'existence de suites

$(M_{(r,s)})_{(r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  vérifiant (IV.1) et (IV.2). A partir d'une telle suite

$(M_{(r,s)})$  on peut définir les suites de paramètres  $a_{\bullet}, \theta_{\bullet}, \mu_{\bullet}, \lambda_{\bullet}, \theta'_{\bullet}, \mu'_{\bullet}$  par :

$$(IV.3) \quad M_{r,s} = a_{\bullet} I_r^t I_s + \theta_{\bullet} I_r^t I_s + I_r^t \mu_{\bullet} + \lambda_{\bullet} \theta_{\bullet} \mu_{\bullet} + \theta'_{\bullet} \mu_{\bullet} + \theta_{\bullet} \mu'_{\bullet}$$

$$(IV.4) \quad {}^t \theta_{\bullet} \theta'_{\bullet} = {}^t I_r \theta_{\bullet} = {}^t I_s \theta'_{\bullet} = 0, \quad {}^t \mu_{\bullet} \mu'_{\bullet} = {}^t I_r \mu_{\bullet} = {}^t I_s \mu'_{\bullet} = 0$$

où  $I_r$  (resp.  $I_s$ ) désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^r$  (resp.  $\mathbb{R}^s$ ) dont toutes les composantes sont égales à 1.

Remarquons que ces suites sont parfaitement définies, les conditions (IV.4) entraînant l'unicité des paramètres  $(a_{\bullet}, \theta_{\bullet}, \mu_{\bullet}, \lambda_{\bullet}, \theta'_{\bullet}, \mu'_{\bullet})$  vérifiant (IV.3).

On peut alors définir par les formules (I.4), (I.5), (I.6) des estimateurs  $\hat{a}_{\bullet}, \hat{\theta}_{\bullet}, \hat{\mu}_{\bullet}, \hat{\lambda}_{\bullet}, \hat{\theta}'_{\bullet}, \hat{\mu}'_{\bullet}$  de ces paramètres. Mais, les matrices  $M_{(r,s)}$  étant emboîtées, le terme d'indice  $(i,j)$  de  $M_{(r,s)}$  ne dépend pas de  $(r,s)$ , pourvu que  $r \geq i$  et  $s \geq i$ . Nous le noterons  $m^{(i,j)}$ . Posons, pour  $(i,j)$  fixé :

$$(IV.5) \quad \forall (r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad r \geq i, \quad s \geq j$$

$$\hat{m}_{\bullet}^{i,j} = \hat{a}_{\bullet} + \hat{\theta}_{\bullet i} + \hat{\mu}_{\bullet j} + \hat{\lambda}_{\bullet} \hat{\theta}_{\bullet i} \hat{\mu}_{\bullet j} + \hat{\theta}_{\bullet i}^2 \hat{\mu}_{\bullet j} + \hat{\theta}_{\bullet i} \hat{\mu}_{\bullet j}^2 .$$

C'est-à-dire que pour tout couple  $(i, j)$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , on a une suite  $\hat{m}_{\bullet}^{(i,j)}$  d'estimateurs du même paramètre  $m^{i,j}$ . Remarquons que l'on a ici une suite d'estimateurs construits non à partir d'un échantillon empirique dont la taille augmente, mais à partir d'un plan factoriel d'ordre 2 dont les dimensions augmentent.

On peut se poser, comme précédemment, les problèmes d'approximations suivants, pour tout couple  $(i, j)$  fixé :

a) a-t-on :

$$(IV.6) \quad \lim E(\hat{m}_{\bullet}^{i,j}) = m^{i,j}$$

$$\lim E[(\hat{m}_{\bullet}^{i,j} - m^{i,j})^2] = 0 ;$$

(IV.7) b) existe-t-il une suite  $K_{\bullet}$  de constantes telles que la loi de  $K_{\bullet}(\hat{m}_{\bullet}^{i,j} - m^{i,j})$  tende vers  $N(0,1)$  ?

#### 4. - UN EXEMPLE.

Nous savons (Proposition A.III.1, 10) qu'il existe des suites  $M_{(r,s)}$  vérifiant (IV.1) et (IV.2) telles que :

$$\forall (r, s) \quad \theta'_{\bullet} = 0, \quad \mu'_{\bullet} = 0 .$$

Posons, lorsque  $r$  est supérieur à  $i$  et  $s$  à  $j$  :

$$\hat{M}_{\bullet} = a_{\bullet} I_r^t I_s^t + \hat{\theta}_{\bullet}^t I_s^t + I_r^t \hat{\mu}_{\bullet} + \hat{\lambda}_{\bullet} \hat{\theta}_{\bullet}^t \mu_{\bullet}$$

en faisant le changement de repère du chapitre I, §4, on voit pour que  $E(\hat{m}_{\bullet}^{i,j})$  ait pour limite  $m^{(i,j)}$ , il faut et il suffit que :

$$(IV.8) \quad \lim_f (E(\hat{P}_{\bullet}) - P_{\bullet}) = 0$$

$$\text{où } P_{\bullet} = \lambda_{\bullet} \beta_{\bullet}^t \gamma_{\bullet} + \beta_{\bullet}^t \gamma'_{\bullet} + \beta'_{\bullet}^t \gamma_{\bullet}$$

$$\hat{P}_{\bullet} = \hat{\lambda}_{\bullet} \hat{\beta}_{\bullet}^t \hat{\gamma}_{\bullet} + \hat{\beta}_{\bullet}^t \hat{\gamma}'_{\bullet} + \hat{\beta}'_{\bullet}^t \hat{\gamma}_{\bullet} .$$

On montre facilement, en conditionnant par rapport à  $(\hat{\beta}_{\bullet}, \hat{\gamma}_{\bullet})$ ,  
que :

$$\begin{aligned} E(\hat{P}_{\bullet}) &= \lambda E(R_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet})^t E(R_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet}) + E(R'_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet})^t E(R_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet}) + E(R_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet})^t E(R'_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet}) \\ &\quad - E(\lambda S_{\bullet 1} + T_{\bullet 1})^t E(R_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet}) - E(S_{\bullet 1})^t E(R'_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet}) \\ &\quad - E(R_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet})^t E(\lambda S_{\bullet 2} + T_{\bullet 2}) - E(R'_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet})^t E(S_{\bullet 2}) . \end{aligned}$$

Or, toutes les espérances figurant dans le membre de droite de  
(IV.8) sont calculées dans le lemme II.1.2, car :

$$\begin{aligned} R_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet} &= S_{\bullet 1} + \beta_{\bullet} & R'_{\bullet 1} \hat{\beta}_{\bullet} &= T_{\bullet 1} + \beta'_{\bullet} \\ R_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet} &= S_{\bullet 2} + \gamma_{\bullet} & R'_{\bullet 2} \hat{\gamma}_{\bullet} &= T_{\bullet 2} + \gamma'_{\bullet} . \end{aligned}$$

En utilisant le lemme II.1.3, on montre aisément (IV.8). Comme  
les matrices  $C_r$  et  $C_s$  définies au chapitre I, §4, sont indépendantes  
de  $M_{r,s}$ , cela démontre la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.** - Les hypothèses  $(H_0)$  et  $(H_1)$  définies dans la proposition 2.1.1 étant vérifiées, l'espérance de  $\hat{m}_{\bullet}^{i,j}$  tend vers  $m_{\bullet}^{i,j}$ .

Commentaire. - Etant donné la proposition A.III.1, la proposition 2 n'a de sens que si l'hypothèse  $(K_0)$  de la proposition A.III.1, d'une part,  $(H_0)$  et  $(H_1)$  d'autre part sont compatibles, c'est-à-dire si il existe des suites (B) et (C) vérifiant  $(K_0)$  telles que les suites  $\theta_{\bullet}, \mu_{\bullet}, \lambda_{\bullet}$  définies par (IV.3) et (IV.4) vérifient  $(H_0)$  et  $(H_1)$ . Or, pour cela, il suffit par exemple que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(m_1, m'_1) & \quad m_1 > 0 , \quad m'_1 > 0 , \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad m_1 \leq b_i \leq m'_1 \\ \mathbb{E}(m_2, m'_2) & \quad m_2 > 0 , \quad m'_2 > 0 , \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad m_2 \leq c_j \leq m'_2 . \end{aligned}$$

5. - Les méthodes et résultats des chapitres II et III doivent nous permettre, dans un travail ultérieur, de répondre plus complètement aux problèmes d'approximations posés dans (IV.6) et (IV.7).

Mais on peut aussi envisager des problèmes de convergence.

Pour cela, considérons la définition suivante d'estimateurs presque sûrement convergents, donnée dans [3], et qui précise la notion usuelle.

DEFINITION. - Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \rho)$  une structure statistique fondamentale et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de statistiques à valeurs respectivement dans  $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$ . Soit  $f$  une application de  $\rho$  dans  $\mathbb{R}^k$ ,  $k$  fixé.  $\theta = f(P)$  est le paramètre à estimer.

Notons  $\rho_n$  la famille des lois  $P_{S_n}$  de  $S_n$ . Supposons que

$$(IV.9) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists g_n : \rho_n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \forall P \in \rho, \quad g_n(P_{S_n}) = f(P) = \theta.$$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'estimateurs de  $\theta$  définis respectivement sur  $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n, \rho_n)$ ; on dit que la suite  $(X_n)$  est presque sûrement convergente si, pour tout  $P$  dans  $\rho$ , la suite  $(X_n)$  vérifie :

$$X_n(S_n) \rightarrow \theta = f(P) \quad \text{p. s.}$$

On dira aussi, lorsque (IV.9) est vérifiée, que  $(X_n)$  est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais si, pour tout  $P$  dans  $\rho$ , l'espérance  $E_{P_{S_n}}(X_n)$  de  $X_n$  par rapport à  $P_{S_n}$  converge, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , vers  $f(P)$ .

Cette définition s'applique au problème considéré :

Soit  $A$  l'ensemble des suites de matrices vérifiant (IV.1) et (IV.2) et  $A_{(r,s)}$  l'ensemble des termes d'indice  $(r,s)$  de ces suites.

Identifions  $\mathcal{M}_{(r,s)}$  avec  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ . La condition (IV.2) montre que si  $\mathcal{M} = \left( M_{(r,s)} \right)_{(r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  est un élément de  $A$ , le système

$\left( \mathcal{M}_{(r,s)}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{(r,s)}}, N \left( M_{(r,s)}, \sigma^2 \mathbb{1}_r \otimes \mathbb{1}_s \right) \right)$  est un système projectif. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  la limite projective ; plus précisément :

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{A} = \bigotimes_{(r,s)} \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{(r,s)}}.$$

En faisant la même construction pour tout élément de  $A$ , on obtient une structure statistique  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  telle que l'image de cette structure par la projection canonique  $\pi_{r,s}$  de  $\Omega$  dans  $\mathcal{M}_{(r,s)}$  est la structure  $\left\{ \mathcal{M}_{(r,s)}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{(r,s)}}, \mathcal{P}_{(r,s)} \right\}$  où :

$$\mathcal{P}_{(r,s)} = \left( N \left( M_{(r,s)}, \sigma^2 \mathbb{1}_r \otimes \mathbb{1}_s \right), M_{(r,s)} \in A_{(r,s)} \right).$$

Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un élément  $P$  de  $\mathcal{P}$  fait correspondre le terme d'indice  $(i,j)$  de la suite  $\mathcal{M} \in A$  qui définit  $P$ . Pour tout  $r \geq i$ , pour tout  $s \geq j$ , soit  $f_{(r,s)}$  l'application qui à  $P_{(r,s)} \in \mathcal{P}_{(r,s)}$  fait correspondre le terme d'indice  $(i,j)$  de la moyenne de  $P_{(r,s)}$ . On a trivialement :

$$\forall (r,s) \quad r \geq i, \quad s \geq j \quad f_{(r,s)} \left( P_{(r,s)} \right) = f(P) = m^{(i,j)}.$$

La suite  $\hat{m}_{\bullet}^{(i,j)} = \hat{m}_{(r,s)}^{(i,j)}$  définie dans (IV.5) est une suite d'estimateurs de  $m^{(i,j)}$  dont la proposition 2 montre qu'ils sont asymptotiquement sans biais.

La question (IV.7) peut, avec une définition évidente, être vue sous l'angle de normalité asymptotique.

On peut également envisager ce type de questions en remplaçant  $(i,j)$  par un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

On peut aussi, conformément à la définition donnée ci-dessus, se demander si la suite  $\hat{m}_{(r,s)}^{(i,j)}$  est une suite d'estimateurs de  $m^{(i,j)}$  presque sûrement convergente, c'est-à-dire si, pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}$ ,  $\hat{m}_{(r,s)}^{(i,j)} \left( \pi_{(r,s)} \right)$  converge presque sûrement vers  $m^{(i,j)}$ . Il faudra à ce niveau, faire intervenir des arguments différents de ceux que nous avons employés ici, et le problème est sans doute plus difficile encore.

**ANNEXE I**

**Démonstration des lemmes 11.1.1, 11.1.2, 11.1.3.**



1. - DEMONSTRATION DU LEMME II.1.2 :

Rappelons que la densité de  $V$  est :

$$f_V(x) = \frac{1}{\lambda^a \Gamma(a)} e^{-\frac{x}{\lambda}} x^{a-1}$$

et que la loi  $\Gamma(a, \gamma, \lambda)$  est définie par :

$$\Gamma(a, \gamma, \lambda) = e^{-\frac{\gamma}{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma/\lambda)^m}{m!} \Gamma(a+m, \lambda) .$$

Les variables  $U$  et  $V$  étant indépendantes :

$$E\left(\frac{U^\alpha V^\beta}{(U+V)^\delta}\right) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} (x+y)^{-\delta} x \left[ e^{-\frac{y}{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma/\lambda)^m}{m!} \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}} x^{a'+m-1}}{\lambda^{a'+m} \Gamma(a'+m)} \right] \\ \times \left[ \frac{e^{-\frac{y}{\lambda}} y^{b'-1}}{\lambda^b \Gamma(b)} \right] dx dy$$

d'où, d'après le théorème de Lebesgue :

$$E\left(\frac{U^\alpha V^\beta}{(U+V)^\delta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{\lambda}} \frac{(\gamma/\lambda)^m}{m!} \times \frac{1}{\lambda^{a'+b'+m} \Gamma(a'+m) \Gamma(b)} \times I_m$$

où : 
$$I_m = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} \times \frac{x^{a'+m-1} y^{b'-1}}{(x+y)^\delta} dx dy .$$

En faisant le changement de variable

$$u = \frac{x}{y} , \quad v = x+y$$

$I_m$  peut s'écrire :

$$I_m = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{u^{a'+m-1}}{(1+u)^{a'+b'+m}} du \times \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{v}{\lambda}} v^{a'+b'+m-1-\delta} dv .$$

Les intégrales  $I_m$  sont définies pour tout  $m$  dès que  $I_0$  est définie, d'où l'hypothèse :

$$a' + b' - \delta > 0$$

et on a alors :



$$I_m = \frac{\Gamma(a'+m)\Gamma(b')}{\Gamma(a'+b'+m)} \times \lambda^{a'+b'+m-\delta} \Gamma(a'+b'+m-\delta)$$

ce qui démontre (II.2).

D'autre part, en posant :

$$Z = V + W, \quad T = \frac{V}{W}$$

on peut écrire :

$$E\left(\frac{U^\alpha V^\beta W^\epsilon}{(U+V+W)^\delta}\right) = E\left(\frac{U^\alpha Z^{\beta+\epsilon} T^\beta}{(U+Z)^\delta (1+T)^{\beta+\epsilon}}\right).$$

Or, on sait (J.R. Barra [ 1 ], page 90 ) que Z et T sont indépendants et de lois respectives  $\Gamma(b+c, \lambda)$  et  $\beta(b, c)$ . En particulier, U, Z, T sont indépendants et :

$$E\left(\frac{U^\alpha V^\beta W^\epsilon}{(U+V+W)^\delta}\right) = E\left(\frac{T^\beta}{(1+T)^{\beta+\epsilon}}\right) E\left(\frac{U^\alpha Z^{\beta+\epsilon}}{(U+Z)^\delta}\right).$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$E\left(\frac{T^\beta}{(1+T)^{\beta+\epsilon}}\right) = \frac{\Gamma(b+c)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \times \frac{\Gamma(b')\Gamma(c')}{\Gamma(b'+c')}.$$

Enfin,  $E\left(\frac{U^\alpha Z^{\beta+\epsilon}}{(U+Z)^\delta}\right)$  se calcule par (II.2) en remplaçant b par b+c et  $\beta$  par  $\beta+\epsilon$ , d'où le résultat (II.3).

## 2. - CALCUL DES ESPERANCES DES VARIABLES ALEATOIRES REELLES DEFINIES DANS LES LEMMES II.1.1 ET II.1.3 :

A) Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m \rangle}{\|X\|^2}\right)$ .

D'après (II.5), il suffit de calculer, pour  $\alpha = \frac{n-1}{2}$

$$\varphi(a) = E\left(\frac{\sqrt{2a} + U_1}{(\sqrt{2a} + U_1)^2 + Z_1'}\right) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha) \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} e^{-\left[\frac{(u-\sqrt{2a})^2}{2} + \frac{v}{2}\right]} \times \frac{uv^{\alpha-1}}{u^2+v} du dv .$$

Or :

$$e^{-\frac{(u-\sqrt{2a})^2}{2}} = e^{-a} e^{-\frac{u^2}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2a)^{\frac{i}{2}} u^i}{i!}$$

d'où :

$$\varphi(a) = \frac{e^{-a}}{2^\alpha \Gamma(\alpha) \sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2a)^{\frac{i}{2}}}{i!} J_i$$

avec :

$$J_i = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} e^{-\frac{u^2}{2} - \frac{v}{2}} \frac{u^{i+1} v^{\alpha-1}}{u^2+v} du dv$$

en particulier :

$$\forall p \in \mathbb{N}, J_{2p} = 0,$$

et en faisant le changement de variable  $u^2 = z$  :

$$\forall p \in \mathbb{N}; J_{2p+1} = 2^\alpha \Gamma(\alpha) 2^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \times E\left(\frac{Y^p}{Y+Z_1'}\right)$$

où  $Y$  est indépendant de  $Z_1'$  et de loi  $\Gamma\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ . Soit, d'après (II.1) :

$$J_{2p+1} = 2^\alpha \Gamma(\alpha) 2^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \times 2^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha+p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+p+1+\frac{1}{2}\right)} .$$

Finalement :

$$\varphi(a) = e^{-a} \times \frac{2^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2a)^{p+\frac{1}{2}}}{(2p+1)!} \times 2^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\alpha+p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+p+\frac{3}{2}\right)} .$$

Mais on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\text{d'où : } \frac{2^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right) &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}+1\right) \dots \times \left(\frac{3}{2}+p-1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3 \times 5 \times \dots \times 2p+1}{2^p} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sqrt{2a} e^{-a} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2a)^p}{(2p+1)!} \times \frac{3 \times 5 \times \dots \times 2p+1}{2} \times \frac{1}{(\alpha+p+\frac{1}{2})} \\ &\quad \frac{3 \times 5 \times \dots \times 2p+1}{(2p+1)!} = \frac{1}{2^p p!}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sqrt{2a} e^{-a} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{p!} \times \frac{1}{2^{p+n}} \\ \varphi(a) &= \sqrt{2a} \frac{\epsilon_n(a)}{n-1}.\end{aligned}$$

B) • Calcul de  $E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right)$ .

D'après (II.5) et (II.2) :

$$E\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{Z+Z'}\right) = \frac{e^{-a}}{2\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m,n)$$

$$K(m,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)} = \frac{2}{2m+n-2}.$$

• Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2}\right)$ . D'après (II.5) et (II.2) :

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2}\right) = 2a\sigma^2 E\left(\frac{Z}{Z+Z'}\right) = 2a\sigma^2 e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m,n)$$

$$K(m,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+1\right)} = \frac{1+2m}{n+2m} = 1 - \frac{n-1}{n+2m}.$$

• Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^4}\right)$ . D'après (II.5) et (II.2) :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^4}\right) &= 2a E\left(\frac{Z}{(Z+Z')^2}\right) \\ &= ae^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(m, n) &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m)} \times \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{n-1}{2} + m - 2)}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{n-1}{2} + m)} \\ &= \frac{2m+1}{(2m+n)(2m+n-2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{n-1}{2m+n} - \frac{n-3}{2m+n-2} \right]. \end{aligned}$$

• Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m \rangle^4}{\|X\|^4}\right)$ . D'après (II.5) et (II.2) :

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^4}{\|X\|^4}\right) = 4a^2 \sigma^4 E\left(\frac{Z^2}{(Z+Z')^2}\right) = 4a^2 \sigma^4 e^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n)$$

$$K(m, n) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m)} \times \frac{\Gamma(m+\frac{n}{2})}{\Gamma(m+\frac{n}{2}+2)}.$$

C) • Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^2}\right)$ . D'après (II.7) et (II.2) :

$$E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^2}\right) = 2a' \sigma^2 E\left(\frac{Y}{U+Y}\right)$$

$$E\left(\frac{Y}{U+Y}\right) = \frac{1}{2} e^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m+1)} = e^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} \times \frac{1}{2m+n}.$$

• Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^4}\right)$ . D'après (II.7) et (II.2) :

$$E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) = 2a' E\left(\frac{Y}{(U+Y)^2}\right)$$

$$E\left(\frac{Y}{(U+Y)^2}\right) = \frac{e^{-a}}{4} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n)$$

$$\begin{aligned} K(m, n) &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + m - 1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + m + 1)} = \frac{4}{(2m+n)(2m+n-2)} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2m+n-2} - \frac{1}{2m+n} \right]. \end{aligned}$$

• Calcul de  $E\left(\frac{\langle X, m \rangle^4}{\|X\|^4}\right)$ . D'après (II. 7) et (II. 2) :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\langle X, m \rangle^4}{\|X\|^4}\right) &= 2a'\sigma^4 E\left(\frac{Y^2}{(U+Y)^2}\right) \\ &= \frac{3a'\sigma^2}{2} e^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n) \end{aligned}$$

$$K(m, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + m)}{\Gamma(\frac{n}{2} + m + 2)} = 4 \left( \frac{1}{2m+n} - \frac{1}{2m+n+2} \right).$$

D'après (II. 7) et (II. 3) :

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2 \langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) = 4aa'\sigma^4 E\left(\frac{ZY}{(Z+Y+Z')^2}\right)$$

$$E\left(\frac{ZY}{(Z+Y+Z')^2}\right) = \frac{1}{2} e^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n)$$

$$\begin{aligned} K(m, n) &= \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2} + 1) \Gamma(\frac{n}{2} + m)}{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n}{2} + m + 2)} \\ &= \frac{2(2m+1)}{(2m+n+2)(2m+n)} = \frac{n+1}{2m+n+2} - \frac{n-1}{2m+n}. \end{aligned}$$

Enfin, on peut écrire, d'après (II. 7) :

$$E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2 \langle X, m'' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) = 4a'a''\sigma^4 E\left(\frac{Y'Y''}{(U+Y'+Y'')^2}\right)$$

où  $U, Y', Y''$  sont indépendantes,  $Y'$  et  $Y''$  étant de loi  $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$ .

D'après (II. 3) :

$$E\left(\frac{Y'Y''}{(U+Y'+Y'')^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-a} \sum_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} K(m, n)$$

$$K(m, n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + m)}{\Gamma(\frac{n}{2} + m + 2)} = 2 \left[ \frac{1}{2m+n} - \frac{1}{2m+n+2} \right].$$

3. - CALCUL DES ESPERANCES DES VECTEURS ET DES MATRICES ALEATOIRES DU LEMME II.1.1.

A) Ecrivons la décomposition (II.4) sous la forme :

$$(II.4') \quad X = \langle X, m \rangle \frac{m}{\|m\|^2} + \sigma \vartheta,$$

d'où :

$$RX = \frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2} \frac{m}{\|m\|^2} + \sigma \frac{\langle X, m \rangle}{\|X\|^2} \vartheta.$$

Le lemme II.1.3 donne la valeur de  $E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2}\right)$ . D'autre part :

$$E\left(\frac{\langle X, m \rangle}{\|X\|^2} \times \vartheta\right) = 0.$$

D'où la valeur de  $E(S)$ .

D'autre part :

$$E(V) = E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2}\right) \frac{m^t m}{\|m\|^4} + \sigma^2 E\left(\frac{\vartheta^t \vartheta}{\|X\|^2}\right).$$

Ecrivons, en désignant par  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base orthonormée de  $m^\perp$  :

$$\vartheta = \sum_1^{n-1} \langle X, e_i \rangle e_i.$$

Donc :

$$E\left(\frac{\langle X, e_i \rangle \langle X, e_j \rangle}{\|X\|^2}\right) = 0.$$

En appliquant le lemme II.1.3 successivement pour  $m' = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  :

$$E\left(\frac{\langle X, e_i \rangle^2}{\|X\|^2}\right) = \frac{\epsilon_n(a)}{n-1}.$$

Soit : 
$$E\left(\frac{\vartheta^t \vartheta}{\|X\|^2}\right) = \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \sum_1^{n-1} e_i^t e_i .$$

Comme  $\frac{m}{\|m\|}$ ,  $e_1, \dots, e_{n-1}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\frac{m^t m}{\|m\|^2} + \sum_1^{n-1} e_i^t e_i = \mathbb{1}_n .$$

Et finalement :

$$E\left(\frac{\vartheta^t \vartheta}{\|X\|^2}\right) = \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \left( \mathbb{1}_n - \frac{m^t m}{\|m\|^2} \right)$$

$$E(V) = \frac{1}{2a\sigma^2} \left( 1 - \epsilon_n(a) - \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \right) m^t m + \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \mathbb{1}_n .$$

En utilisant la formule de récurrence (A.2.4) de l'annexe 2 :

$$E(V) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\epsilon_{n+2}(a)}{n+1} \right) m^t m + \frac{\epsilon_n(a)}{n-1} \mathbb{1}_n .$$

B) Par définition de  $S$ , en utilisant (II.4') :

$$\begin{aligned} E(S^t S) &= E(R^2 X^t X) - E(RX)^t m - m E(R^t X) + m^t m \\ &= E(R^2 X^t X) - 2E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2}{\|X\|^2}\right) \frac{m^t m}{\|m\|^2} + m^t m \end{aligned}$$

$$E(R^2 X^t X) = E\left(\frac{\langle X, m \rangle^4}{\|X\|^4}\right) \frac{m^t m}{\|m\|^4} - \sum_1^{n-1} E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2 \langle X, e_i \rangle^2}{\|X\|^2}\right) e_i^t e_i$$

d'où, par application du lemme II.1.3, le résultat sur  $E(S^t S)$  :

Ecrivons la décomposition (II.6), sous la forme :

$$(II.6') \quad X = \langle X, m \rangle \frac{m}{\|m\|^2} + \langle X, m' \rangle \frac{m'}{\|m'\|^2} + \text{lb}$$

$\frac{m}{\|m\|}$ ,  $\frac{m'}{\|m'\|}$ ,  $f_1, \dots, f_{n-2}$  désignant une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , on

pourra écrire :

$$\mathbb{1}_n = \frac{m^t m}{\|m\|^2} + \frac{m'^t m'}{\|m'\|^2} + \sum_1^{n-2} f_j^t f_j$$

$$w = \sum_1^{n-2} \langle X, f_j \rangle f_j .$$

La valeur de  $E(T)$  se calcule à partir de :

$$E(R'X) = E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^2}\right) \frac{m'}{\|m'\|^2} .$$

Le calcul de  $E(T^t T)$  se fait à partir de :

$$\begin{aligned} E(R'^2 X^t X) &= E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2 \langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) \frac{m^t m}{\|m\|^4} + E\left(\frac{\langle X, m' \rangle^4}{\|X\|^4}\right) \frac{m'^t m'}{\|m'\|^4} \\ &+ \sum_1^{n-2} E\left(\frac{\langle X, m' \rangle \langle X, f_j \rangle^2}{\|X\|^4}\right) f_j^t f_j \end{aligned}$$

où on pourra utiliser le lemme II.1.3 pour  $m'' = f_j$ ,  $j=1,2,\dots,n-2$ .

De même, pour calculer  $E(W)$ , il suffit maintenant d'exprimer :

$$E(RR'X^t X) = E\left(\frac{\langle X, m \rangle^2 \langle X, m' \rangle^2}{\|X\|^4}\right) \frac{(m^t m + m'^t m')}{\|m\|^2 \|m'\|^2} .$$





## ANNEXE II

Etude des fonctions  $\epsilon_n$ .



1. - ETUDE MATHEMATIQUE.

DEFINITION. - Pour tout réel positif x et tout entier n strictement positif, on pose :

$$\epsilon_n(x) = (n-1)e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \times \frac{1}{2m+n} .$$

PROPOSITION 1. - Les fonctions  $\epsilon_n$  vérifient :

$$(AII.1) \quad \forall n \geq 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon_n(x) = 0$$

$$(AII.2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \epsilon_n(x) \leq \frac{n-1}{n}$$

$$(AII.3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \epsilon_n(x) \leq \epsilon_{n+1}(x)$$

$$(AII.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{2x\epsilon_{n+2}(x)}{n+1} = 1 - \frac{n\epsilon_n(x)}{(n-1)} .$$

Démonstration. - En écrivant :

$$\frac{1}{2m+n} \leq \frac{1}{2(m+1)}$$

on a :

$$\epsilon_n(x) \leq \frac{n-1}{2x} e^{-x} (e^{+x} - 1) \leq \frac{n-1}{2x} .$$

D'où le résultat (A.II.1).

Le résultat (A.II.2) s'obtient directement à partir de la majoration :

$$\frac{1}{2m+n} \leq \frac{1}{n} .$$

D'autre part, l'application :

$$f_m(z) = \frac{z-1}{2m+z}$$

étant croissante pour tout m positif, cela démontre (A.II.3).

De plus :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!(2m+n)} = \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(m-1)!m \times (2m+n)} .$$

Or :

$$\frac{1}{m(2m+n)} = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{m} - \frac{2}{2m+n} \right] .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_n(x)}{n-1} &= \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (e^{+x} - 1) - \frac{2x}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!(2m+n+2)} \right] x e^{-x} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{2x}{n(n+1)} \epsilon_{n+2}(x) . \end{aligned}$$

Ce qui démontre (AII.4).

LEMME 2. - Une expression intégrale de  $\epsilon_n$  est :

$$(AII.5) \quad \epsilon_n(x) = \frac{n-1}{2} \int_0^1 e^{-xu} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} du .$$

Le développement en série entière des fonctions  $\epsilon_n$  est donné

par :

$$(AII.6) \quad \epsilon_n(x) = \frac{n-1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} B(k+1, \frac{n}{2})$$

où  $B(p, q)$  est la fonction de Bessel de paramètre  $p$  et  $q$  .

Lorsque  $n$  ou  $x$  , ou les deux tendent vers  $+\infty$  :

$$(AII.7) \quad \epsilon_n(x) \sim \frac{n-1}{2(x + \frac{n}{2} - 1)}$$

et de plus :

$$\forall n > 0 \quad \forall x > 0 \quad \epsilon_n(x) \leq \frac{n-1}{2(x + \frac{n}{2} - 1)} .$$

Démonstration. - En dérivant la fonction  $\epsilon_n$  et en utilisant (AII.4), on montre aisément qu'elle satisfait à l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(AII.8) \quad \forall x > 0 \quad xy'(x) + \left(\frac{n}{2} + x\right)y(x) = n-1 .$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre associée à (AII.8) est :

$$y = kx^{-\frac{n}{2}} e^{-x}.$$

La méthode de variation des constantes donne l'équation différentielle suivante :

$$k'(x) = \frac{n-1}{2} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}.$$

La solution générale de (A.II.8) est donnée sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$(A.II.9) \quad y(x) = \frac{n-1}{2} x^{-\frac{n}{2}} e^{-x} \left[ \int_0^x e^t t^{\frac{n}{2}-1} dt + k \right].$$

Mais on vérifie aisément que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_n(x) = \frac{n-1}{n}.$$

Donc  $\epsilon_n(x)$  est de la forme (A.II.9) pour  $k=0$ , ce qui s'écrit encore :

$$\epsilon_n(x) = \frac{n-1}{2x} \int_0^x e^{-(x-t)} \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{n}{2}-1} dt.$$

Le résultat (A.II.5) s'en déduit par le changement de variable  $u = \frac{t}{x} + 1$

Le résultat (A.II.6) se démontre en développant  $e^{-xu}$  en série entière, puis, par application du théorème de Fatou-Lebesgue, en intervertissant les signes  $\int$  et  $\sum$ .

Pour arriver à (A.II.7), il faut démontrer que :

$$x > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{(x+n) \rightarrow +\infty} J_{n,x} = 1$$

$$\text{où } J_{n,x} = \left(x + \frac{n}{2} - 1\right) \int_0^1 e^{-xu} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} du.$$

Posons :

$$n' = \frac{n}{2} - 1, \quad v = (x+n')u$$

alors :

$$J_{n,x} = \int_{\mathbb{R}} f_{(n,x)}(u) du$$

$$\text{avec : } f_{n,x}(u) = \mathbb{1}_{[0, x+n']} (u) e^{-\frac{x}{x+n'} u} \times \left(1 - \frac{u}{x+n'}\right)^{n'}.$$

En faisant un développement limité de  $\left(1 - \frac{u}{x+n'}\right)^{n'}$  :

$$\begin{aligned} f_{n,x}(u) &= \mathbb{1}_{[0, x+n']} (u) e^{-\frac{xu}{x+n'}} e^{-\frac{n'u}{x+n'}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{u}{x+n'}\right) \right] \\ &= \mathbb{1}_{[0, x+n']} (u) e^{-u} e^{-\frac{n'u}{x+n'}} \mathcal{O}\left(\frac{u}{x+n'}\right) . \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n > 0 \quad \lim_{(n+x) \rightarrow +\infty} f_{n,x}(u) = e^{-u} .$$

D'autre part :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad |f_{n,x}(u)| \leq e^{-u} .$$

Alors, d'après le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{(n+x) \rightarrow +\infty} J_{n,x} = \int_0^{\infty} e^{-x} du = 1 .$$

c. q. f. d.

Remarque. Nous utiliserons dans le chapitre III,

$$(A.II.10) \quad \epsilon_n(x) \underset{(n+x) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2x(1 + \frac{n}{2x})}$$

mais les calculs numériques donnés à la fin de cette annexe sont faits à partir de (A. II. 7) car l'équivalent de  $\epsilon_n$  proposé est numériquement meilleur.

Le résultat (A. II. 6) permet de faire un lien entre les fonctions  $\epsilon_n$  et les fonctions de Bessel... et de voir en particulier qu'il est plus simple de démontrer les propriétés dont on a besoin ici directement, plutôt que d'essayer de le faire à partir de propriétés voisines des fonctions de Bessel.

COROLLAIRE 3. - Si on pose :

$$\eta_n(x) = \frac{\epsilon_{n-2}(x)}{n-3} - \frac{\epsilon_n(x)}{n-1}$$

alors :

$$(A.II.11) \quad \eta_n(x) \underset{(n+x) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(x + \frac{n}{2})^2} .$$

Démonstration. - La fonction  $\eta_{n+2}$  s'écrit encore, d'après (A. II. 5) :

$$\eta_{n+2}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-xu} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} u du .$$

Une démonstration analogue à celle de la formule (A. II. 7) permet d'écrire :

$$(x + \frac{n}{2} - 1)^2 \int_0^1 e^{-xu} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} u du \xrightarrow{(n+x) \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} v e^{-v} dv .$$

D'où le résultat.

Nous donnons maintenant un corollaire où figurent des résultats complémentaires dont nous avons besoin dans le chapitre III.

COROLLAIRE 4. - Posons :

$$\delta_n(x) = \epsilon_n(x) - \epsilon_{n-2}(x)$$

$$\beta_n(x) = nx\eta_{n+2}(x) + \frac{n}{2(n-1)} \epsilon_n(x) + \frac{n-2}{2(n-3)} \epsilon_{n-2}(x)$$

$$\gamma_n(x) = \frac{2n\epsilon_n(x)}{n-1} - \beta_n(x) .$$

Alors :

$$x\delta_{n+2}(x) = 1 - \beta_n(x) .$$

De plus :

$$(A. II. 12) \quad n \rightarrow +\infty, \quad \frac{n}{x} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_n(x) \sim \frac{n}{2x}, \quad \eta_n(x) \sim \frac{1}{2x^2}, \quad \beta_n(x) \sim \frac{n}{x}$$

$$(A. II. 13) \quad n \rightarrow +\infty, \quad \frac{n}{x} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_n(x) \sim \frac{n^2}{4x^2} .$$

Démonstration. - Ecrivons  $\delta_{n+2}$  sous la forme :

$$\delta_{n+2}(x) = \frac{\epsilon_{n+2}(x)}{n+1} + \frac{\epsilon_n(x)}{n-1} - n\eta_{n+2}(x) .$$

D'après (A. II. 4) :



$$x\delta_{n+2}(x) = \frac{1}{2} - \frac{n\epsilon_n(x)}{2(n-1)} + \frac{1}{2} - \frac{n-2}{n-3}\epsilon_{n-3}(x) - nx\eta_{n+2}(x) .$$

Soit :

$$x\delta_{n+2}(x) = 1 - \beta_n(x) .$$

Sous les hypothèses faites dans (A. II. 12), on a, d'après (A. II. 7) et (A. II. 11) :

$$\epsilon_n(x) \sim \frac{n}{2x} , \quad \eta_n(x) \sim \frac{1}{2x^2}$$

et :

$$\frac{x}{n}\beta_n(x) = x^2\eta_n(x) + \frac{x\epsilon_n(x)}{2(n-1)} + \frac{n-2}{n} \frac{x\epsilon_{n-2}(x)}{2(n-3)}$$

donc  $\frac{x}{n}\beta_n(x)$  est la somme de trois termes qui admettent respectivement  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$  comme limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et  $\frac{n}{x}$  tend vers  $0$  .  
Ce qui démontre (A. II. 12).

Enfin, en utilisant (A. II. 4), on peut écrire :

$$\gamma_n(x) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\eta_n(x) + \frac{\epsilon_n(x)}{(n-1)}$$

ce qui démontre que, sous les hypothèses de (A. II. 13):

$$\frac{4x^2}{n^2}\gamma_n(x) \rightarrow 1 .$$

c. q. f. d.

## 2. - UNE AUTRE DEFINITION DE $\epsilon_n(x)$ .

Les notations étant celles du chapitre II, on peut écrire :

$$\epsilon_n(x) = E\left(\frac{Z'}{Z+Z'}\right)$$

où  $Z'$  est la somme des carrés de  $(n-1)$  variables aléatoires indépendantes de loi  $N(0,1)$  ,  $Z$  étant le carré d'une variable aléatoire indépendante de  $Z'$  et de loi  $N(\sqrt{2x}, 1)$  .

Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi  $N(0,1)$  , on peut écrire :

$$e_n(x) = E\left(\frac{Z'_n}{Z+Z'_n}\right)$$

où  $Z'_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2$

$$Z = \left[ \sqrt{2x} \left( 1 + \frac{X_0}{\sqrt{2x}} \right) \right]^2 .$$

Lorsque  $x$  et  $n$  tendent vers  $+\infty$ ,  $\frac{X_0}{\sqrt{2x}}$  tend vers 0, et, d'après la loi forte des grands nombres,  $\frac{Z'_n}{n-1}$  converge presque sûrement vers 1. On pourrait alors espérer démontrer (A. II. 7) par simple application du théorème de Lebesgue en montrant que  $F_n$  converge presque sûrement vers 1, et est borné indépendamment de  $n$ , où :

$$F_n(x) = \frac{2(x + \frac{n}{2} - 1)}{n-1} \times \frac{Z'_n}{Z+Z'_n} .$$

Mais, en écrivant :

$$F_n(x) = \frac{Z'_n}{n-1} \times \frac{2(x + \frac{n}{2} - 1)}{2x \left( 1 + \frac{X_0}{\sqrt{2x}} \right)^2 + \frac{Z'_n}{n-1} \times n-1}$$

on voit qu'on ne peut rien obtenir sans faire des hypothèses plus fortes que celles du lemme 2. Plus précisément, en prenant par exemple les hypothèses de (A. II. 12), on voit que  $F_n(x)$  converge presque sûrement vers 1 ; malheureusement, aucune majoration de  $F_n(x)$  indépendante de  $n$  n'apparaît dans ce cas.

Les résultats donnés dans le premier paragraphe de cette annexe ne sont donc pas une conséquence triviale de théorèmes probabilistes. En particulier, pour obtenir (A. II. 7), il faut passer par une écriture du type (A. II. 5), où les quantités qui dépendent de  $x$  d'une part, de  $n$  d'autre part, interviennent sous forme de produits.

3. - QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES.

Nous avons testé numériquement l'équivalent (A. II. 7) de  $\epsilon_n(x)$ . Plus précisément, pour les entiers  $n$  de 4 à 20 et des valeurs de  $x$  de 5 à 80, nous avons calculé :

$$\epsilon_n(x) = \frac{n-1}{2} \int_0^1 e^{-ux} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} du$$

$$\epsilon'_n(x) = \frac{n-1}{2(x + \frac{n}{2} - 1)}$$

Les calculs ont été faits sur micro-ordinateur "Goupil". Nous en donnons quelques résumés dans les tableaux des pages suivantes. Comme on le verra sur les tableaux 2 et 2 bis, l'équivalent  $\epsilon'_n$  de  $\epsilon_n$  est numériquement bon. En particulier, dans le calcul des approximations des biais et des écarts quadratiques de  $\hat{\lambda}, \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$  (cf. chapitre III, §1), on pourra remplacer  $\epsilon_n$  par  $\epsilon'_n$ ; c'est pourquoi nous ne donnons pas ici de tables plus complètes de valeurs pour  $\epsilon_n(x)$ .

a) Valeurs de  $\epsilon_n(x)$  :

$\begin{matrix} x \\ n \end{matrix}$	10	15	20	30	50	70	80
2	0,05	0,03	0,025	0,016	0,01	0,007	0,006
4	0,13	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,018
6	0,20	0,15	0,11	0,08	0,05	0,03	0,03
8	0,26	0,19	0,15	0,10	0,065	0,05	0,04
10	0,31	0,23	0,19	0,13	0,08	0,06	0,05
12	0,36	0,27	0,22	0,16	0,10	0,07	0,06
14	0,40	0,30	0,25	0,18	0,11	0,08	0,07
16	0,43	0,33	0,27	0,20	0,13	0,09	0,08
18	0,46	0,36	0,30	0,22	0,14	0,10	0,10
20	0,49	0,39	0,32	0,24	0,16	0,12	0,11

Tableau 1 : Valeurs de  $\epsilon_n(x)$

Rappelons que  $\epsilon_n(x)$  est une fonction croissante en  $n$  et décroissante en  $x$ . On pourra ainsi, pour  $2 \leq n \leq 20$  et  $10 \leq x \leq 80$  situer les valeurs de  $\epsilon_n(x)$  ne figurant pas dans le tableau ci-dessus.

Les calculs de  $\epsilon_n$  ont été faits de deux manières différentes (récurrence et vérification par la formule des trapèzes).

b) Etude de l'équivalent  $\epsilon'_n(x)$  :

pour étudier cet équivalent, nous avons calculé les erreurs relatives :

$$\Delta_n(x) = \frac{|\epsilon_n(x) - \epsilon'_n(x)|}{\epsilon_n(x)}$$

Alors  $\Delta_n(x)$  est une fonction décroissante de  $x$  et croissante de  $n$  qui vérifie :

$x \geq 20$	
$n = 2$	$\Delta_n \leq 10^{-7}$
$n = 4$	$\Delta_n \leq 3 \times 10^{-3}$
$n = 8$	$\Delta_n \leq 6 \times 10^{-3}$
$n = 10$	$\Delta_n \leq 7 \times 10^{-3}$
$n = 14$	$\Delta_n \leq 10^{-2}$
$n = 18$	$\Delta_n \leq 10^{-2}$
$n = 20$	$\Delta_n \leq 1,2 \cdot 10^{-2}$

Tableau 2 : erreurs relatives

$2 \leq n \leq 20$	
$x \geq 10$	$\Delta_n \leq 0,03$
$x \geq 20$	$\Delta_n \leq 0,01$
$x \geq 30$	$\Delta_n \leq 0,006$
$x \geq 40$	$\Delta_n \leq 0,004$
$x \geq 50$	$\Delta_n \leq 0,003$
$x \geq 60$	$\Delta_n \leq 0,002$
$x \geq 70$	$\Delta_n \leq 0,001$

Tableau 2bis : erreurs relatives.

c) Nous avons aussi regardé numériquement des limites intervenant dans le chapitre III.

Nous avons posé :

$$\beta_n(x) = 1 - x\delta_{n+2}(x)$$

$n \backslash x$	10	15	20	30	50	70	80
4	0,3	0,21	0,16	0,11	0,07	0,05	0,043
6	0,41	0,30	0,23	0,17	0,10	0,075	0,066
8	0,50	0,38	0,30	0,21	0,13	0,10	0,09
10	0,56	0,44	0,36	0,26	0,17	0,12	0,11
12	0,62	0,50	0,41	0,30	0,20	0,15	0,13
14	0,66	0,54	0,45	0,34	0,23	0,17	0,15
16	0,70	0,58	0,50	0,38	0,25	0,19	0,17
18	0,73	0,61	0,53	0,41	0,28	0,21	0,19
20	0,75	0,64	0,56	0,44	0,30	0,23	0,21

Tableau 3 : Valeurs de  $\beta_n(x) = 1 - x\delta_{n+2}(x)$

### ANNEXE III

Construction d'une suite emboîtée de matrices de  $\Sigma_{r,s}$ .



Nous voulons construire une suite  $(M_{r,s})_{(r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  de matrices telles que :

$$(A III.1) \quad \forall (r,s) \quad M_{r,s} \in \Sigma_{r,s}$$

(A III.2)  $M_{r+1,s+1}$  est obtenue en ajoutant une  $(r+1)$ -ème ligne et une  $(s+1)$ -ème colonne à  $M_{r,s}$ .

Introduisons d'abord les notations suivantes :

Notation. Etant donné une suite  $\mathcal{U} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , nous notons  $\mathcal{U}_n$  le vecteur de coordonnées  $u_1, \dots, u_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et si  $\mathbf{1}$  est la suite de terme général 1, nous posons :

$$\bar{u}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \quad \bar{U}_n = U_n - \bar{u}_n \mathbf{1}_n.$$

(Remarquons dès maintenant que, pour le produit scalaire usuel :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \bar{U}_n, \mathbf{1}_n \rangle = 0).$$

Nous allons chercher des suites  $(M_{r,s})$  construites de la manière suivante ; soient deux nombres  $a$  et  $\lambda$  et quatre suites :

$$(B) = (b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}, \quad (C) = (c_j)_{j \in \mathbb{N}^*},$$

$$(B') = (b'_i)_{i \in \mathbb{N}^*}, \quad (C') = (c'_j)_{j \in \mathbb{N}^*}.$$

Posons :

$$(A III.3) \quad \forall (r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad M_{r,s} = a I_r^t I_s + B_r^t I_s + I_r^t C_s + \lambda B_r^t C_s + B_r'^t C_s + B_r^t C_s'$$

alors, par construction, la suite  $(M_{r,s})$  vérifie (A III.2).



PROPOSITION 1. - Soit  $M_{(r,s)}$  la suite de matrices définies par (A III. 3), à partir des nombres  $a, \lambda$  et des suites  $(B)$ ,  $(B')$ ,  $(C)$ ,  $(C')$ . On suppose que  $(B)$  et  $(C)$  ne sont pas identiquement nulles, c'est-à-dire :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad B_n \neq 0, \quad C_n \neq 0.$$

1) Si les suites  $(B')$  et  $(C')$  sont identiquement nulles et si :  
 $\forall (r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad (1 + \lambda \bar{c}_s)(1 + \lambda \bar{b}_r) \neq 0$   
alors la suite  $M_{r,s}$  vérifie (A III. 1).

2) Si aucune des suites  $(B)$ ,  $(B')$ ,  $(C)$ ,  $(C')$  n'est identiquement nulle et si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ la moyenne } \frac{1}{rs} \sum_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, s}} m_{ij} \text{ des éléments de } M_{r,s} \text{ est} \\ \text{indépendante de } r \text{ et } s ; \\ \bullet \forall (r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad (1 + \bar{c}'_s)(1 + \bar{b}'_r) \neq 0 ; \end{array} \right.$$

alors la suite  $M_{(r,s)}$  vérifie (A III. 1).

Démonstration de la proposition 1. - Il suffit de construire, à partir de  $a, \lambda, (B), (B'), (C), (C')$  des suites  $a_\bullet, \lambda_\bullet, \theta_\bullet, \mu_\bullet, \theta'_\bullet, \mu'_\bullet$  (le point désignant l'indice  $(r,s)$ ) telles que :

$$(A III. 4) \quad M_{r,s} = a_\bullet I_r^t I_s + \theta_\bullet I_s^t + I_r^t \mu_\bullet + \lambda_\bullet \theta_\bullet \mu_\bullet + \theta'_\bullet \mu_\bullet + \theta_\bullet \mu'_\bullet$$

$$(A III. 5) \quad {}^t \theta_\bullet I_r = {}^t \theta_\bullet \theta'_\bullet = 0, \quad {}^t \mu_\bullet I_s = {}^t \mu_\bullet \mu'_\bullet = 0.$$

Nous savons que si (A III. 4) et (A III. 5) sont vérifiées,  $a_\bullet, \lambda_\bullet, \theta_\bullet, \mu_\bullet, \theta'_\bullet, \mu'_\bullet$  sont déterminés par :

$$a_\bullet = \frac{1}{rs} {}^t I_r M_{(r,s)} I_s$$

$$\theta_\bullet = \frac{1}{s} M_{(r,s)} I_s - a_\bullet I_r, \quad \mu_\bullet = \frac{1}{r} {}^t M_{(r,s)} I_r - a_\bullet I_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$(A III.6) \begin{cases} a_{\bullet} = a + \bar{b}_r + \bar{c}_s + \lambda \bar{b}_r \bar{c}_s + \bar{b}'_r \bar{c}_s + \bar{b}_r \bar{c}'_s \\ \theta_{\bullet} = (1 + \lambda \bar{c}_s + \bar{c}'_s) \bar{B}_r + \bar{c}_s \bar{B}'_r \\ \mu_{\bullet} = (1 + \lambda \bar{b}_r + \bar{b}'_r) \bar{C}_s + \bar{b}_r \bar{C}'_s \end{cases}$$

Soit encore :

$$\theta_{\bullet} = k_{\bullet} \bar{B}_r + k'_{\bullet} \bar{B}'_r, \quad \mu_{\bullet} = \ell_{\bullet} \bar{C}_s + \ell'_{\bullet} \bar{C}'_s$$

$$\text{avec : } \begin{cases} k_{\bullet} = 1 + \lambda \bar{c}_s + \bar{c}'_s, & k'_{\bullet} = \bar{c}_s \\ \ell_{\bullet} = 1 + \lambda \bar{b}_r + \bar{b}'_r, & \ell'_{\bullet} = \bar{b}_r \end{cases}$$

1) On suppose que (B') et (C') sont nulles, d'où :

$$(A III.7) \begin{cases} a_{\bullet} = a + \bar{b}_r + \bar{c}_s + \lambda \bar{b}_r \bar{c}_s \\ \theta_{\bullet} = (1 + \lambda \bar{c}_s) \bar{B}_r \\ \mu_{\bullet} = (1 + \lambda \bar{b}_r) \bar{C}_s \end{cases}$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} M'_{(r,s)} &= a_{\bullet} I_r^t I_s + \theta_{\bullet} I_s + I_r^t \mu_{\bullet} + \lambda_{\bullet} \theta_{\bullet} \mu_{\bullet} \\ &= (a_{\bullet} + \bar{b}_r + \bar{c}_s + \lambda \bar{b}_r \bar{c}_s) I_r^t I_s + (1 + \lambda \bar{c}_s) B_r^t I_s - (1 + \lambda \bar{c}_s) \bar{b}_r I_r^t I_s \\ &\quad + (1 + \lambda \bar{b}_r) I_r^t c_s - (1 + \lambda \bar{b}_r) \bar{c}_s I_r^t I_s \\ &\quad + \lambda_{\bullet} (1 + \lambda \bar{c}_s) (1 + \lambda \bar{b}_r) [B_r^t c_s - \bar{c}_s B_r^t I_s - \bar{b}_r I_r^t c_s + \bar{b}_r \bar{c}_s I_r^t I_s] \end{aligned}$$

Donc, si  $(1 + \lambda \bar{c}_s)(1 + \lambda \bar{b}_r)$  est non nul, en prenant :

$$\lambda_{\bullet} = \frac{\lambda}{(1 + \lambda \bar{c}_s)(1 + \lambda \bar{b}_r)}$$

on voit que :

$$M'_{(r,s)} = a_{\bullet} I_r^t I_s + \theta_{\bullet} I_s + I_r^t \mu_{\bullet} + \lambda_{\bullet} \theta_{\bullet} \mu_{\bullet} = M_{(r,s)}$$

c'est-à-dire que  $M_{(r,s)}$  vérifie (A III.1), avec :

$$\theta'_{\bullet} = 0, \quad \mu'_{\bullet} = 0.$$

2) Revenons au cas général, et supposons que les suites  $B'$  et  $C'$  ne sont pas simultanément identiquement nulles.

Cherchons si on peut trouver des vecteurs  $\theta'_\bullet, \mu'_\bullet$  de la forme :

$$(AIII.8) \quad \begin{aligned} \theta'_\bullet &= z_\bullet \bar{B}_\bullet + z'_\bullet \bar{B}'_\bullet \\ \mu'_\bullet &= t_\bullet \bar{C}_\bullet + t'_\bullet \bar{C}'_\bullet \end{aligned}$$

afin que les relations d'orthogonalité entre  $\theta_\bullet, \theta'_\bullet$  d'une part,  $\mu_\bullet, \mu'_\bullet$  d'autre part, s'écrivent commodément, nous prenons (AIII.8) sous la forme :

$$\begin{aligned} x_\bullet \theta'_\bullet &= (u_\bullet \theta_\bullet + \bar{B}'_r) \quad , \quad u_\bullet = -\langle \theta_\bullet, \bar{B}'_r \rangle / \|\theta_\bullet\|^2 \\ y_\bullet \mu'_\bullet &= (v_\bullet \mu_\bullet + \bar{C}'_s) \quad , \quad v_\bullet = -\langle \mu_\bullet, \bar{C}'_s \rangle / \|\mu_\bullet\|^2 \end{aligned}$$

où  $x_\bullet, y_\bullet$  sont des nombres réels non nuls que nous allons déterminer.

On peut alors écrire :

$$(AIII.9) \quad \begin{aligned} B_r &= a_\bullet \theta_\bullet + a'_\bullet \theta'_\bullet + \bar{b}_r I_r \\ C_r &= b_\bullet \mu_\bullet + b'_\bullet \mu'_\bullet + \bar{c}_r I_s \\ B'_r &= c_\bullet \theta_\bullet + c'_\bullet \theta'_\bullet + \bar{b}'_r I_r \\ C'_s &= d_\bullet \mu_\bullet + d'_\bullet \mu'_\bullet + \bar{c}'_s I_s \end{aligned}$$

avec :

$$(AIII.10) \quad \begin{aligned} a_\bullet &= \frac{1+k'_\bullet u_\bullet}{k_\bullet} \quad , \quad a'_\bullet = -\frac{k'_\bullet}{k_\bullet} x_\bullet \quad , \quad c_\bullet = -u_\bullet \quad , \quad c'_\bullet = x_\bullet \\ b_\bullet &= \frac{1+\ell'_\bullet v_\bullet}{\ell_\bullet} \quad , \quad b'_\bullet = -\frac{\ell'_\bullet}{\ell_\bullet} y_\bullet \quad , \quad d_\bullet = -v_\bullet \quad , \quad d'_\bullet = y_\bullet \end{aligned}$$

en prenant pour seule hypothèse :

$$(K'_1) \quad \forall (r, s) \quad \ell_\bullet k_\bullet \neq 0 .$$

Ecrivons  $M_{(r,s)}$  sous la forme (AIII.3), en remplaçant  $B_r, C_s, B'_r, C'_s$  par les valeurs données dans (AIII.9) ; cela donne :

$$\begin{aligned}
 M_{(r,s)} &= a_r I_r^t I_s + \theta_r I_r^t I_s + I_r^t \mu_r \\
 &+ (\lambda a_r b_r + a_r d_r + c_r b_r) \theta_r^t \mu_r \\
 &+ (\lambda a'_r b_r + a'_r d_r + c'_r b_r) \theta_r^t \mu_r \\
 &+ (\lambda a_r b'_r + a_r d'_r + c_r b'_r) \theta_r^t \mu'_r \\
 &+ (\lambda a'_r b'_r + a'_r d'_r + c'_r d'_r) \theta_r^t \mu'_r .
 \end{aligned}$$

Donc  $(a_r, \theta_r, \theta'_r, \lambda_r, \mu_r, \mu'_r)$  vérifieront (AIII.4) si :

- (a)  $\lambda a_r b_r + a_r d_r + c_r b_r = \lambda_r$
- (b)  $\lambda a'_r b_r + a'_r d_r + c'_r b_r = 1$
- (c)  $\lambda a_r b'_r + a_r d'_r + c_r b'_r = 1$
- (d)  $\lambda a'_r b'_r + a'_r d'_r + b'_r c'_r = 0$  .

L'égalité (d) s'écrit, en remplaçant  $a'_r, b'_r, d'_r, c'_r$  par les valeurs données dans (AIII.10) :

$$\frac{x_r y_r}{k_r \ell_r} (\lambda k'_r \ell'_r - k'_r \ell_r - k_r \ell'_r) = 0 .$$

Comme on a supposé que  $x_r y_r$  et  $k_r \ell_r$  sont non nuls, on a donc :

$$(d'_1) \quad 0 = \lambda k'_r \ell'_r - k'_r \ell_r - k_r \ell'_r$$

et en remplaçant  $k_r, k'_r, \ell_r, \ell'_r$  par leurs valeurs, on trouve :

$$(d'_2) \quad 0 = \bar{b}_r + \bar{c}_s + \lambda \bar{b}_r \bar{c}_s + \bar{b}'_r \bar{c}_s + b_r \bar{c}'_s .$$

Remarquons que  $d'_2$  est vérifiée si :

$$\forall (r, s) \quad a_r = a$$

c'est-à-dire si la moyenne des éléments de  $M_{(r,s)}$  est indépendante de  $r$  et  $s$  .

Les égalités (a), (b), (c), (d) s'écrivent aussi :

$$\lambda_r = \frac{1}{k_r \ell_r} [\lambda + u_r (\lambda k'_r - k_r) + v_r (\lambda \ell'_r - \ell_r) + u_r v_r (\lambda_r k_r \ell_r - k'_r \ell_r - k_r \ell'_r)]$$

$$k_r \ell_r = x_r [v_r (k'_r \ell_r + \ell'_r k_r - \lambda \ell'_r k'_r) + k_r - \lambda k'_r]$$

$$k_r \ell_r = y_r [u_r (k'_r \ell_r + \ell'_r k_r - \lambda \ell'_r k'_r) + \ell_r - \lambda \ell'_r] .$$

Mais, en tenant compte de  $(d'_1)$ , ces équations s'écrivent :

$$(a'_1) \quad \lambda \cdot = \frac{1}{k \cdot \ell \cdot} (\lambda + u \cdot (\lambda k' \cdot - k \cdot) + v \cdot (\lambda \ell' \cdot - \ell \cdot))$$

$$(b'_1) \quad k \cdot \ell \cdot = x \cdot (k \cdot - \lambda k' \cdot)$$

$$(c'_1) \quad k \cdot \ell \cdot = y \cdot (\ell \cdot - \lambda \ell' \cdot) .$$

D'autre part, d'après  $(d'_2)$  :

$$k \cdot \ell \cdot = (1 + \bar{b}'_r)(1 + \bar{c}'_s) ,$$

donc  $(K_1)$  signifie que  $(d'_1)$  et  $(K'_1)$  sont vérifiées. Dans ce cas :

$$(a'_2) \quad \lambda \cdot = \frac{1}{(1 + \bar{b}'_r)(1 + \bar{c}'_s)} (\lambda + (1 + \bar{c}'_s)u \cdot + (1 + \bar{b}'_r)v \cdot)$$

$$(b'_2) \quad x \cdot = (1 + \bar{b}'_r)$$

$$(c'_2) \quad y \cdot = (1 + \bar{c}'_s)$$

la suite  $M_{(r,s)}$  vérifie (A III.2) avec :

$$\theta \cdot = \frac{u \cdot (1 + \bar{c}'_s + \lambda \bar{c}'_s) \bar{B}'_r + (u \cdot \bar{c}'_s + 1) \bar{B}'_r}{(1 + \bar{b}'_r)}$$

$$(AIII.11) \quad \mu \cdot = \frac{v \cdot (1 + \bar{b}'_r + \lambda \bar{b}'_r) \bar{C}'_s + (v \cdot \bar{b}'_r + 1) \bar{C}'_s}{(1 + \bar{c}'_s)}$$

$$\lambda \cdot = \frac{\lambda}{(1 + \bar{b}'_r)(1 + \bar{c}'_s)} + \frac{u \cdot}{1 + \bar{b}'_r} + \frac{v \cdot}{1 + \bar{c}'_s}$$

c. q. f. d.

Remarque.

1) Lorsqu'on passe de  $(r, s)$  à  $(r+1, s+1)$ , lorsque  $B'$  et  $C'$  sont nulles, on introduit deux paramètres, à savoir :

$$b_{r+1} , c_{s+1} .$$

Si  $(K_0)$  est vérifiée à l'ordre  $(r, s)$ , elle sera vérifiée à l'ordre  $(r+1, s+1)$  si  $c_{s+1}$  et  $b_{r+1}$  vérifient :

$$\left(1 + \frac{\lambda}{s+1}(s\bar{c}_s + c_{s+1})\right) \left(1 + \frac{\lambda}{r+1}(r\bar{b}_r + b_{r+1})\right) \neq 0$$

soit encore, en supposant  $\lambda$  non nul :

$$(AIII.12) \quad c_{s+1} \neq -\frac{s+1}{\lambda} - s\bar{c}_s \quad b_{r+1} \neq -\frac{r+1}{\lambda} - r\bar{b}_r$$

(si  $\lambda$  est nul,  $(K_0)$  est automatiquement vérifiée).

La proposition 1 montre donc qu'il existe des suites (B) et (C) telles que la suite des matrices  $M_{(r,s)}$  définies par :

$$(AIII.13) \quad M_{(r,s)} = aI_r^t I_s + B_r^t I_s + I_r^t C_s + \lambda B_r^t C_s$$

vérifie (AIII.1), ((AIII.2) étant vérifiée par construction de la suite  $(M_{r,s})$ ).

2) Dans le cas général, lorsqu'on passe de  $(r,s)$  à  $(r+1, s+1)$ , on introduit quatre paramètres :

$$b_{r+1}, b'_{r+1}, c_{s+1}, c'_{s+1}.$$

Si  $(K_1)$  est vérifiée à l'ordre  $(r,s)$ , elle sera vérifiée à l'ordre  $(r+1, s+1)$  si :

$$(AIII.14) \quad c'_{s+1} \neq -(s+1) - s\bar{c}'_s, \quad b'_{r+1} \neq -(r+1) - r\bar{b}'_r$$

$$(AIII.15) \quad (s+1)(b_{r+1} + b'_{r+1}) + (r+1)(c_{s+1} + c'_{s+1}) + \lambda(b_{r+1} \times s\bar{c}_s + c_{r+1} \times r\bar{b}_r + b_{r+1} c_{s+1}) \\ = -[(s+1)r(\bar{b}_r + \bar{b}'_r) + (r+1)s(\bar{c}_s + \bar{c}'_s) + \lambda r s \bar{b}_r \bar{c}_s].$$

Et la proposition 1 démontre donc qu'il existe des suites (B), (B'), (C), (C') telles que si la suite  $(M_{r,s})$  est définie par (AIII.3), elle vérifie (AIII.1) - (et (AIII.2) par construction) - .

On a donc montré l'existence de suites de matrices  $(M_{r,s})$  vérifiant (IV.1) et (IV.2).

Remarquons toutefois que nous n'avons pas caractérisé l'ensemble des suites  $(M_{r,s})$  de matrices vérifiant (AIII.1) et (AIII.2).



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.R. BARRA. "Analyse multilinéaire de l'interaction entre plusieurs facteurs". Istituto nazionale di alta matematica, Symposia matematica, volume XXV (1981).
- [2] J.R. BARRA. "Mathematical basis of statistics". Probability and mathematical statistics, Academic Press (1981).
- [3] J.R. BARRA. (Séminaire de statistiques de l'Université de Grenoble). à paraître (1982).
- [4] S. DEGERINE. "Etude des structures statistiques associées aux lois de Von Mises". Thèse, Grenoble (1975).
- [5] K.R. GABRIEL. "Least squares approximation of matrices by additive and multiplicative models". J. Statist. Soc. B. 1978 - 40, n°2, pp. 186-196.
- [6] JOHNSON and GRAYBILL. "An analysis of a two-way model with interaction and no replication". Journal of the american statistical Association, December 1972, vol. 67, n°340. Theory and methods section.
- [7] MILLIKEN and GRAYBILL. "Extensions of the General Linear Model". Journal of the american statistical association, June 1970, vol. 65, n°330. Theory and methods section.
- [8] SCHEFFE. "The analysis of variance". 1959, New-York, John Wiley & Sons.
- [9] TUCKEY. "One degree of freedom for non-additivity". Biometrics 5, September 1949, pp. 232-242.
- [10] WARD and DICK. "Non additivity in randomized block designs and balanced incomplete block designs". New-Zealand Journal of Science and Technology, 33, 1959, pp. 430-436.
- [11] Mlle SEEBAGH. Thèse - Grenoble. A paraître (1982).





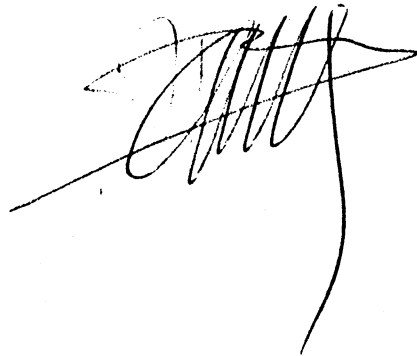
Dernière page d'une thèse

---

VU

Grenoble, le 23.4.82

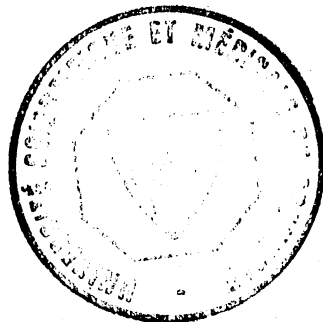
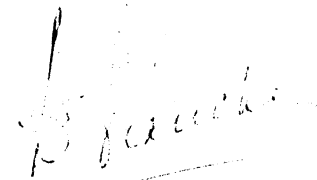
Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 23.4.82

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



Le Président,  
M. TANCHE



Résumé : Le travail présenté est relatif à l'analyse de variance à 2 facteurs, en présence d'interaction multiplicative ; plus précisément, avec les notations classiques, on suppose :

$$m_{i,j} = \alpha + m_i + m^j + \lambda m_i m^j + m_i \mu^j + \theta_i m^j \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, s \end{array}$$

Nous considérons, pour les paramètres d'interaction  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\mu$  des estimateurs proposés par J.R. BARRA. Nous montrons que, sous des hypothèses simples, les lois des estimateurs ont de "bonnes" propriétés d'approximation. De plus, nous clarifions dans ce cas des notions de convergence de structures statistiques et d'estimateurs, ouvrant la voie à une famille nouvelle de problèmes de statistique inférentielle matricielle.

Mots clefs

plan factoriel  
maximum de vraisemblance  
loi conditionnelle  
fonction caractéristique  
convergence presque sûre