



**HAL**  
open science

# Analyse et comparaison d'itérations discrètes : la méthode de Newton dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$

Souad El Bernoussi

► **To cite this version:**

Souad El Bernoussi. Analyse et comparaison d'itérations discrètes : la méthode de Newton dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ . Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT : . tel-00300389

**HAL Id: tel-00300389**

**<https://theses.hal.science/tel-00300389>**

Submitted on 18 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE**

**Analyse Numérique**

*par*

**Souad EL BERNOUSSI**



**ANALYSE ET COMPARAISON D'ITERATIONS DISCRETES.**

**LA METHODE DE NEWTON DANS  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ .**



**Thèse soutenue le 11 mai 1982 devant la Commission d'Examen :**

**Monsieur P.J. LAURENT : Président**

**Messieurs J.M. LABORDE**

**C. MOSER**

**F. ROBERT**

**J. SIFAKIS**

**Examineurs**



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1<sup>ère</sup> CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et crytogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard  
 VAUQUOIS Bernard  
 VERRAIN Alice  
 VERRAIN André  
 VIGNAIS Pierre

Mathématiques appliquées  
 Mathématiques appliquées  
 Pharmacie galénique  
 Biophysique  
 Biochimie médicale

#### PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves  
 AURIAULT Jean-Louis  
 BEGUIN Claude  
 BOITET Christian  
 BOUTHINON Michel  
 BRUGEL Lucien  
 BUISSON Roger  
 CASTAING Bernard  
 CHARDON Michel  
 CHEHIKIAN Alain  
 COHEN Henri  
 COHENADDAD Jean-Pierre  
 COLIN DE VERDIERE Yves  
 CONTE René  
 CYROT Michel  
 DEPASSEL Roger  
 DOUCE Roland  
 DUFRESNOY Alain  
 GASPARD François  
 GAUTRON René  
 GIDON Maurice  
 GIGNOUX Claude  
 GLENAT René  
 GOSSE Jean-Pierre  
 GROS Yves  
 GUITTON Jacques  
 HACQUES Gérard  
 HERBIN Jacky  
 HICTER Pierre  
 IDELMAN Simon  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 JULLIEN Pierre  
 KERCKOVE Claude

Chimie IUT 1  
 Mécanique IUT 1  
 Chimie organique  
 Mathématiques appliquées  
 E.E.A. IUT 1  
 Energétique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique  
 Géographie  
 E.E.A. IUT 1  
 Mathématiques pures  
 Physique  
 Mathématiques pures  
 Physique IUT 1  
 Physique du solide  
 Mécanique des fluides  
 Physiologie végétale  
 Mathématiques pures  
 Physique  
 Chimie  
 Géologie  
 Sciences nucléaires  
 Chimie organique  
 E.E.A. IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Chimie  
 Mathématiques appliquées  
 Géographie  
 Chimie  
 Physiologie animale  
 Biochimie  
 Mathématiques appliquées  
 Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

#### CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------



MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

#### MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépto-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAUIROY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophtalmologie

**MM. PARAMELLE Bernard**  
**RACINET Claude**  
**RAMBAUD Pierre**  
**RAPHAEL Bernard**  
**SCHAEFER René**  
**SEIGNEURIN Jean-Marie**  
**SOTTO Jean-Jacques**  
**STOEBNER Pierre**

**Pneumologie**  
**Gynécologie-Obstétrique**  
**Pédiatrie**  
**Stomatologie**  
**Cancérologie**  
**Bactériologie-virologie**  
**Hématologie**  
**Anatomie-pathologique**



Que Monsieur F. ROBERT accepte ma plus profonde gratitude d'avoir bien voulu diriger cette thèse. Ses conseils et ses encouragements ont été pour moi un soutien très précieux.

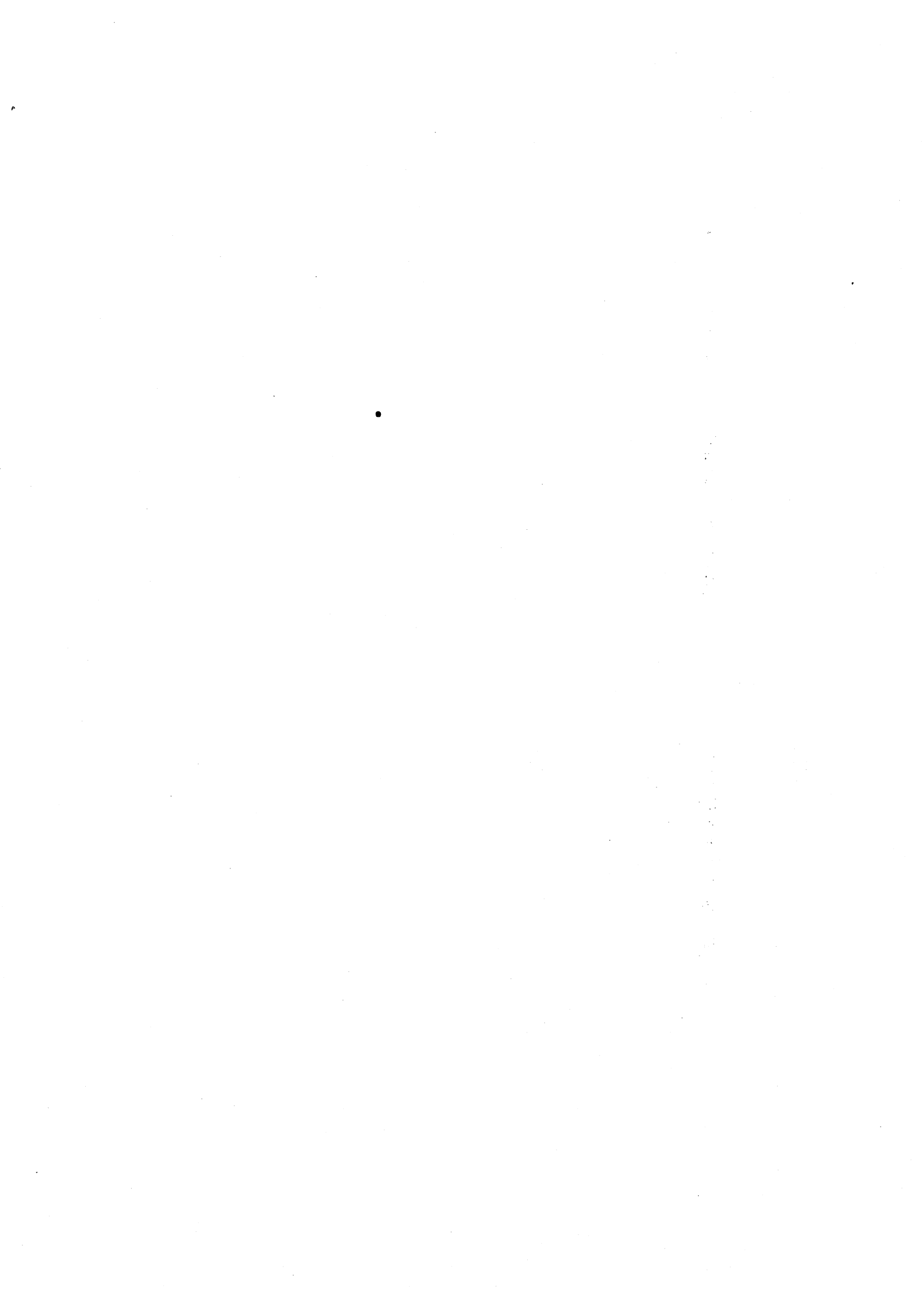
Que Monsieur C. MOSER, reçoive mes plus sincères remerciements pour de nombreuses discussions ainsi que pour son amabilité d'avoir bien voulu participer à ce Jury.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur P.J. LAURENT en acceptant de présider le Jury de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ma sincère et respectueuse reconnaissance

Mes remerciements vont aussi à Monsieur J.M. LABORDRE et Monsieur J. SIFAKIS d'avoir bien voulu prendre siège au sein de ce même jury.

Je voudrais aussi témoigner de l'amitié qui me relie aux membres de l'Equipe d'Analyse Numérique de Grenoble.

Que soient aussi remerciés tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.



*A la mémoire de mon Père*

*A ma Mère*



**T A B L E   D E S   M A T I E R E S**

**CHAPITRE I. Comparaison de procédés série et parallèle d'un opérateur discret sous hypothèse de contraction .....5.**

- 1. Introduction.....7.
- 2. Rappels .....9.
- 3. Compléments : forme générale d'une matrice d'incidence contractante.....11.
- 4. Comparaison des procédés série et parallèle.....14.
  - 1. Majoration de l'indice de convergence globale de l'opérateur de Gauss-Seidel ( $I_G$ )....14.
  - 2. Caractérisation de certain opérateur  $F$  tel que  $G$  soit meilleur que  $F$ .....20.
    - 1. Pour  $F$  contractant quelconque.....20.
      - Cas  $n < 3$ .....20.
      - Cas  $n$  quelconque.....25.
    - 2. Pour  $F$  contractant et  $\xi$  monotone.....32.
      - Cas  $n < 4$ .....33.
      - Cas  $n$  quelconque.....42.
      - Cas où  $F$  est linéaire.....57.
- 5. Conclusion.....63.

**CHAPITRE II. Itération dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ . Points fixes et cycles attractifs. ....65.**

- 1. Introduction.....67.
- 2. Notations et définitions.....67.
- 3. Distances vectorielles discrètes.....69.
- 4. Voisinage à gauche et à droite.....71.
- 5. Caractérisation des applications sur  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ .....72.
- 6. Dérivées à droite et à gauche.....72.
- 7. Dérivées et distances vectorielles.....73.
- 8. Applications.....80.
  - 1. Caractérisation de la convergence locale dans un voisinage immédiat d'un point fixe ou d'un cycle.....80.
  - 2. Exemples.....87.
  - 3. Convergence locale dans un voisinage massif d'un point fixe ou d'un cycle.....92.



<b>CHAPITRE III. Application : Méthode de Newton dans <math>(Z/pZ)^n</math></b> .....	99.
1. Introduction.....	101.
2. Etude de la convergence : Newton simplifié.....	102.
1. Convergence locale dans le voisinage à droite ou à gauche d'une racine $a$ de $F$ .....	102.
2. Convergence locale dans un voisinage massif d'une racine $a$ de $F$ .....	107.
3. Etude de la convergence : Cas général.....	109.
4. Efficacité de la méthode.....	119.
5. Expérimentations numériques.....	119.
6. Commentaires.....	133.
<b>ANNEXE . Formule de Taylor dans <math>Z/2Z</math></b> .....	135.
<b>CONCLUSION .</b> .....	143.
<b>REFERENCES .</b> .....	145.

### INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de certaines itérations dans un ensemble fini. De façon générale, nous envisageons les itérations parallèle et série, définies par :

itération parallèle :

$$y_1^{r+1} = f_1( y_1^r, y_2^r, \dots, y_n^r )$$

⋮

$$y_n^{r+1} = f_n( y_1^r, y_2^r, \dots, y_n^r )$$

où les variables  $y_j$  seront astreintes à appartenir à un ensemble

itération série :

fini

$$y_1^{r+1} = f_1( y_1^r, y_2^r, \dots, y_n^r )$$

$$y_2^{r+1} = f_2( y_1^{r+1}, y_2^r, \dots, y_n^r )$$

⋮

$$y_n^{r+1} = f_n( y_1^{r+1}, y_2^{r+1}, \dots, y_{n-1}^{r+1}, y_n^r )$$

La motivation de ce type d'études repose principalement dans la constatation suivante :

On ne dispose actuellement que de très peu d'outils d'analyse pour des itérations discrètes . Or, parallèlement aux modèles mathématiques "continus" (équations aux dérivées partielles et résolution numérique dans  $R^n$ ) se développe actuellement une modélisation discrète des phénomènes (en physique, en automatique, en biologie, etc...)(cf. [11,15,18]) qui nous amènent (dans le cadre des mathématiques appliquées) à développer et à expérimenter des algorithmes itératifs travaillant directement sur des ensembles finis (en général très grand.) (cf. [9])

Le premier chapitre est consacré à la comparaison des itérations série et parallèle dans le cas d'un opérateur discret contractant  $F$  .

F. ROBERT a défini une notion de contraction à partir de la matrice

d'incidence de  $F$  ( $\rho(B_F) = 0$ , rayon spectral booléen de la matrice d'incidence) ; et a démontré que l'itération série est "plus contractante que l'itération parallèle" ; le but de ce chapitre est de trouver des hypothèses simples portant sur la matrice d'incidence de  $F$ , assurant que  $G$  est "meilleur que  $F$ ".

Les résultats de comparaison de  $G$  et  $F$  sont établis :

- pour  $F$  contractant quelconque ( $n < 3$ , puis  $n$  quelconque)
- pour  $F$  contractant et  $\xi$ -monotone ( $n < 4$ ,  $n$  quelconque, et cas où  $F$  est linéaire).

Dans le second chapitre on étudie l'attraction de points fixes et de cycles, pour une itération parallèle dans  $(Z/pZ)^n$ . Pour mener cette étude, on introduit une notion de voisinages et de dérivées discrètes (à droite et à gauche).

On donne des résultats de convergence de l'itération vers un point fixe ou vers un cycle à partir d'un voisinage immédiat, puis à partir d'un voisinage massif.

Dans le troisième chapitre, on développe la méthode de Newton dans  $(Z/pZ)^n$  (avec  $p$  premier), par analogie avec le cadre de l'analyse numérique, pour la résolution d'un système d'équations  $F(x) = 0$ .

Dans le cas de Newton simplifié on applique les résultats du chapitre 2 pour étudier le caractère attractif d'une racine dans un voisinage immédiat puis dans un voisinage massif.

Dans le cas général, on étudie la méthode de Newton standard sous certaines conditions (opérateur linéaire, choix d'un point initial dans un voisinage immédiat d'une racine, convergence monotone,...).

On donne de nombreux exemples (pour Newton simplifié et Newton standard) pour illustrer les résultats démontrés. Ces exemples montrent que dans la pratique les résultats de convergence débordent largement le cadre de l'analyse théorique.

Enfin en annexe, nous avons établie une formule de Taylor très simple dans  $Z/pZ$ .

**C H A P I T R E I**

**COMPARAISON DE PROCÉDES SÉRIE ET  
PARALLÈLE D'UN OPÉRATEUR DISCRET  
SOUS HYPOTHÈSE DE CONTRACTION .**



## 1. INTRODUCTION

Pour un même opérateur d'itération  $F$  sur  $n$  variables, la question de la comparaison des performances de l'itération série et de l'itération parallèle associées à  $F$  se pose naturellement dans différents contextes : continu ( $F$  applique  $\mathbb{R}^n$  dans lui même) ou discret ( $F$  applique  $\{0,1\}^n$  dans lui même).

Cependant, il y a de fait très peu de résultats de comparaison établis. Citons :

\* pour le cas continu ( $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) et de plus linéaire ( $F(x) = Jx+h$  correspondant au splitting de Jacobi d'un système linéaire  $Ax+b$ ) on a le résultat classique suivant [11])

si  $A$  est une M-matrice, le procédé itératif série (Gauss-Seidel) converge vers l'unique solution du système linéaire plus vite que le procédé parallèle associé (Jacobi),

Varga étend ce résultat classique (initialement dû à Stein-Rosenberg en 1948) à la comparaison de splittings réguliers [11] d'un système linéaire ; l'argument de base est une notion d'opérateurs monotones sur  $\mathbb{R}^n$  ;

\* pour le cas discret non linéaire ( $F : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ ), [1,3,4,6,8] sous des hypothèses de monotonie et de non expansion,

F. Robert [3,8] obtient des résultats de comparaison : le procédé itératif série est meilleur que le procédé parallèle, en ce sens qu'il converge plus souvent et plus vite vers un point fixe de l'opérateur. Ces résultats restent assez théoriques car les hypothèses introduites sont assez difficiles à vérifier sur des exemples. Toutefois le phénomène observé, s'il n'est pas systématique, semble se produire assez fréquemment pour être remarqué, et en tout cas bien au delà des hypothèses (assez restrictives) permettant de démontrer effectivement qu'il se produit nécessairement.

Par ailleurs, le résultat cité plus haut sur les M-matrices passe en fait dans le cadre discret : sous une hypothèse (assez forte) de contraction booléenne de  $F$ , on montre [8] que le procédé itératif série associé est "plus contractant"

que le procédé parallèle (tous deux convergent en au plus  $n$  pas vers l'unique point fixe).

Néanmoins, ce résultat ne prouve pas que le procédé série soit 'meilleur' (au sens précisé ci-dessus) que le procédé parallèle. On en verra un contre-exemple plus loin.

Le but de ce chapitre est donc, à supposer l'opérateur  $F$  contractant sur  $\{0,1\}^n$  (contraction booléenne) de trouver des hypothèses simples (portant sur la matrice d'incidence  $B(F)$ ) assurant que le procédé série est 'meilleur' que le procédé parallèle associé. (cf. [17] )

Ce travail se situe donc dans le contexte de l'étude fine de procédés itératifs discrets. On peut s'étonner de ce que des questions aussi simples n'aient jamais, à notre connaissance, été étudiées à ce jour. On peut s'étonner aussi de la difficulté que nous avons rencontrée pour établir des résultats un peu généraux, alors que notre contexte est aussi peu technique que possible.

## II. RAPPELS

(1.1) Distance vectorielle discrète  $d$  :

Soient  $x, y \in X = \prod_{i=1}^n X_i$ , avec  $X_i$ , pour  $i=1, \dots, n$ ,

des ensembles finis on définit le vecteur booléen suivant :

$$d(x, y) = \begin{cases} \delta_1(x, y) \\ \delta_i(x, y) \\ \delta_n(x, y) \end{cases}$$

avec  $\delta_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \neq y_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$   $\delta_i$  : distance discrète

sur  $X_i$ .  $d$  vérifie les axiomes suivantes :

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$$

somme  
booléenne

(1.2) Matrice d'incidence et graphe de connexion :

On appelle matrice d'incidence de  $F$  ( $F$  : opérateur discret de  $X$  dans  $X$ ) la matrice booléenne  $B(F) = (b_{ij})$  :

$$b_{ij} = 1 \quad \text{si } f_i \text{ dépend de } x_j$$

$$b_{ij} = 0 \quad \text{sinon.}$$

On appelle graphe de connexion de  $F$  le graphe composé de  $n$  sommets  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ainsi reliés :

un arc va de  $P_j$  à  $P_i$  si  $f_i$  dépend de  $x_j$ ,  
c'est-à-dire si  $b_{ij}=1$



(1.3) Contraction booléenne :

Soit  $F$  un opérateur discret de  $X = (\prod_{i=1}^n X_i)$

dans  $X$ .  $F$  sera dit contractant relativement à la distance vectorielle  $d$ , s'il existe une matrice booléenne  $M(n,n)$ , de rayon booléen nul, telle que :

$$\forall x, y \in X \quad d(F(x), F(y)) \leq \underbrace{M}_{\substack{\text{multiplication} \\ \text{booléenne}}} \cdot d(x, y)$$

PROPOSITION 1 : [ 8 ]

{ Pour que  $F$  soit contractant relativement à  $d$ , il  
{ faut et il suffit que l'une des quatre conditions  
{ suivantes soit réalisée :

{ 1 :  $\rho(B(F)) = 0$  (rayon spectral booléen) (cf [6,8] )

{ 2 : Il existe un entier  $p \leq n$  tel que :

$$\{ [B(F)]^p = 0 \text{ (puissance booléenne)}$$

{ 3 : Il existe une matrice de permutation  $P(n,n)$   
{ telle que :

$$\{ P^t B(F) P$$

{ soit triangulaire supérieure stricte.

{ 4 : Le graphe de connexion de  $B(F)$  est sans circuit.

On rappelle que cette condition de contraction entraîne

\* l'existence et l'unicité d'un point fixe  $\xi$  de  $F$

\* le fait que le procédé itératif parallèle (approximation successives) et le procédé série (méthode de Gauss-Seidel) sont globalement convergent vers  $\xi$ . Il en résulte que leur graphes d'itération sont simples: voir les nombreux exemples ci après.

### III. COMPLÉMENTS : FORME GÉNÉRALE D'UNE MATRICE D'INCIDENCE CONTRACTANTE.

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice booléenne  $(n,n)$ .  
On définit une suite finie croissante d'ensembles  $A_{ij}$ ,  
 $j=1,\dots,n$ , comme suit :

$$N = \{1,2,\dots,n\} \quad (j \in N \text{ correspond à la } j\text{ième ligne de } A)$$

$$A_{i1} = \{i \in N ; \text{si } a_{ij} = 1 \text{ alors } j \in A_{i1} \text{ et } j < i\}$$

⋮

$$A_{ip} = \{i \in N ; \text{si } a_{ij} = 1 \text{ alors } j \in \bigsqcup_{k=1}^{p-1} A_{ik} \text{ où}$$

$$(j \in A_{ip} \text{ et } j < i)\}$$

⋮

$$A_{in} = \{i \in N ; \text{si } a_{ij} = 1 \text{ alors } j \in \bigsqcup_{k=1}^{n-1} A_{ik} \text{ où}$$

$$(j \in A_{in} \text{ et } j < i) \} .$$

REMARQUES :

- { 1) Il se peut que tous les ensembles  $A_{is}$ ,  $s=1,\dots,n$ ,  
{ soient vides.
- { 2) Si  $A_{i1} \neq \phi$ ,  $\exists p \leq n$ , tel que :  
{  $A_{i1} \not\subseteq A_{i2} \not\subseteq \dots \not\subseteq A_{ip} = A_{ip+1} = \dots = A_{in}$ .

NOTATION :

$$S = \{A \in M_{n,n}(X) ; \exists \text{ une permutation } P ; \text{ telle que } P^t A P = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}\}$$

$$C = \{A \in M_{n,n}(X) ; \exists p \leq n \text{ tel que } N = \bigsqcup_{j=1}^p A_{ij}\}$$

PROPOSITION 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. S = C$$

DEMONSTRATION :

Soit  $A \in C \Rightarrow \exists p \leq n$  ;  $N = \bigsqcup_{j=1}^p A_{ij}$  , on ordonne

les éléments de chaque ensemble  $A_{ik}$  , ( $k=1, \dots, p$ ) , en croissant pour tout  $k$  il existe  $s_k$  tel que :

$$A_{ik} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_{ij} = \{k_1, \dots, k_{s_k}\} \text{ avec } k_1 < \dots < k_{s_k}$$

on considère la matrice de permutation  $P$  , qui change l'ordre des lignes de  $A$  comme suit :

$$\underbrace{1_1, \dots, 1_{s_1}}_{S_1 \text{ premières lignes}}, 2_1, \dots, 2_{s_2}, \dots, \underbrace{p_1, \dots, p_{s_p}}_{\text{nième ligne}}$$

$S_1$  premières lignes

nième ligne

il est facile de voir que  $P^t A P$  est triangulaire inférieure stricte d'où

$$C \subset S$$

maintenant on va démontrer que l'ensemble  $C$  est stable par permutations ; pour cela il suffit de démontrer que  $C$  est stable par transposition. Je démontre cela dans le cas simple où les deux lignes à transposer sont prises dans le même ensemble  $A_{ik}$  , la démonstration est pratiquement la même dans le cas général sauf qu'il y a beaucoup plus de cas à étudier.

Soient  $k_t, k_{t'} \in A_{ik}$  , et soit  $H$  la transposition qui permute les deux lignes  $k_t$  et  $k_{t'}$  , on pose  $A' = H^t A H$  .  
Supposons que  $k_t < k_{t'}$

\* pour  $\ell < k$  on a :

$$A'_{i\ell} = A_{i\ell} \quad \text{car } a_{\ell j} = 0 \text{ pour } j=k_t \text{ et } j=k_{t'}$$

$$\text{d'où } a'_{\ell j} = 0 \text{ pour } j=k_t \text{ et } j=k_{t'}$$

\* pour  $\ell = k$

Soit  $j \in A_{ik}$

• si  $j \leq k_t$  on a  $j \in A'_{ik}$  (car  $a_{j k_t} = a_{j k_t} = 0$ )

• si  $k_t < j < k_{t'}$ , on a

si  $a_{j k_t} = 0$  alors  $j \in A'_{ik}$

si  $a_{j k_t} = 1$  il est facile de voir qu'il existe un entier  $m_j$  avec  $k < m_j \leq n$  tel que  $j \in A'_{i m_j}$

• si  $j = k_{t'}$ ,

on pose  $m = \max m_j$ ,  $m' = m+1$

alors  $k_{t'} \in A'_{i m'}$

• si  $j > k_{t'}$ , alors  $j \in A'_{i m'}$

\* pour  $\ell > k$

Il existe  $r$  tel que  $\ell = k+r$ , soit  $s = \min(n, m'+r)$   
alors  $A'_i \subset A_{i m}$ .

### REMARQUE

Dans la proposition 2, on a caractérisé toutes les matrices contractantes booléennes, ce résultat peut être généralisé à des matrices réelles positives, et de rayon spectral nul. En effet, soit  $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$  avec  $A \geq 0$  et  $\rho(A) = 0$ ,  $A = (a_{ij})_{ij}$ , on associe à cette matrice, la matrice  $S(A)$  : "Squelette de A"

$$S(A) = (s_{ij})_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s_{ij} = 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \\ s_{ij} = 1 & \text{si } a_{ij} > 0 \end{cases}$$

Or on sait que [ 2 ] :

$$\rho(A) = 0 \iff S(A) \in S$$

donc on peut déterminer le squelette de toutes les matrices réelles positives de rayon spectral nul .

#### IV. COMPARAISON DES PROCÉDÉS SÉRIE ET PARALLÈLE

Dans cette partie on s'intéressera à la comparaison du graphe d'itération d'un opérateur  $F$  et de l'opérateur de Gauss-Seidel sous certaines hypothèses (contraction- -monotonie...).

(4.1) Dans ce paragraphe nous allons donner une majoration de l'indice de convergence globale  $\ell_G$  (voir définition ci-dessous) de l'opérateur de Gauss-Seidel associé à  $F$  .

##### DEFINITION

( Soit  $F : X \rightarrow X$  un opérateur contractant  
(  $F$  admet un point fixe unique  $\xi$  , et son graphe est  
( un arbre). Dans toute la suite on posera :

(  $\forall x \in X$  ,  $\ell_F(x) = \min \{p, F^p(x) = \xi\}$  (indice de  
( convergence locale de  $F$  en  $x$ )

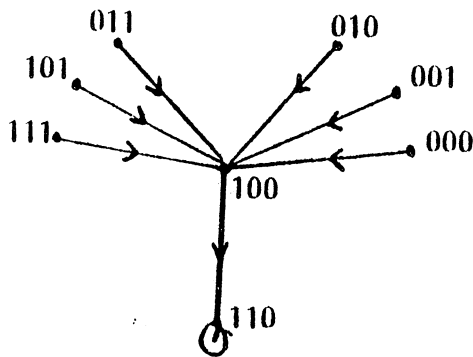
(  $\ell_F = \min \{p, [B(F)]^p = 0\}$   $\ell_F$  est appelé  
( l'indice de convergence globale de  $F$ .

EXEMPLE :

$$X_1 = X_2 = X_3 = \{0, 1\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 \\ x_1 \bar{x}_3 \\ 0 \end{cases}$$

$$B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \ell_F = 2$$



$$\ell_F(100) = 1$$

$$\ell_F(000) = 2$$

$$\text{et } \max_{x \in \{0,1\}^3} \ell_F(x) = 2$$

Graphe d'itération de F.

REMARQUES

1/  $\ell_F \geq \max_{x \in X} \ell_F(x)$  en effet on sait que [ 8 ] :

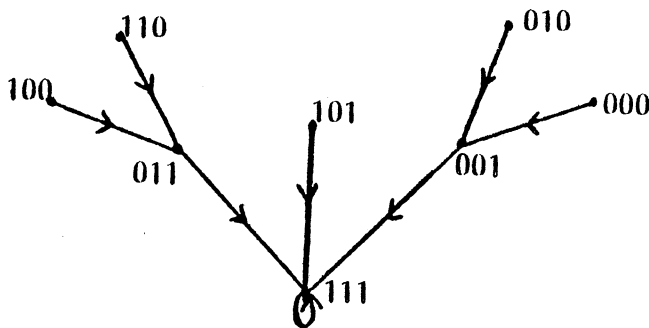
$$\forall x \in X, d(F^P(x), \xi) \leq [B(F)]^P \cdot d(x, \xi)$$

donc  $[B(F)]^P = 0$  entraine  $F^P(x) = \xi, \forall x \in X$ .

Mais l'inégalité est en générale stricte comme le montre l'exemple suivant :

$$F(n) = \begin{cases} x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 1 \end{cases}$$

$$B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \ell_F = 3$$



$$\ell_F(000) = 2$$

$$\ell_F(101) = 1$$

$$\text{et } \max_{x \in \{0,1\}^n} \ell_F(x) = 2$$

Graphe d'itération de F

2. Si  $F$  est contractant  $G$  l'est aussi, et pour toute configuration initiale, l'unique point fixe est atteint en au plus  $n$  pas, par  $F$  et par  $G$  de plus on a  $\ell_G \leq \ell_F \leq n$  d'après le théorème de Stein-Rosenberg boolean [8]

Nous allons maintenant introduire une notion de base dans cette étude :

DEFINITION

(  
( Soit  $F : X \rightarrow X$  un opérateur contractant.  
( On dira que  $G$  est meilleur que  $F$  si  
(  
(  $\forall x \in X$ ,  $F^P(x) = \xi$  implique  $G^P(x) = \xi$ .  
(  
( C'est-à-dire si  $\forall x$ ,  $\ell_G(x) \leq \ell_F(x)$   
(

REMARQUE

$G$  meilleur que  $F$  se traduit sur les graphes d'itérations (graphes orientés) par le fait que pour tout élément  $x$  dans  $X$  la longueur du chemin joignant  $x$  à  $\xi$  dans le graphe d'itération de  $G$  ( $\ell_G(x)$ ) n'est pas plus grande que dans celui de  $F$ .

La question principale qui nous occupe consiste à établir des conditions suffisantes assurant que  $G$  est meilleur que  $F$  dans le cas où  $F$  ( et donc  $G$  ) sont contractants, car alors  $G$  n'est pas toujours meilleur que  $F$  comme le montre

l'exemple suivant :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \\ x_1 + x_3 \\ 1 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0 \\ x_3 \\ 1 \end{cases} \quad B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B(G) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$F$  et  $G$  sont contractants

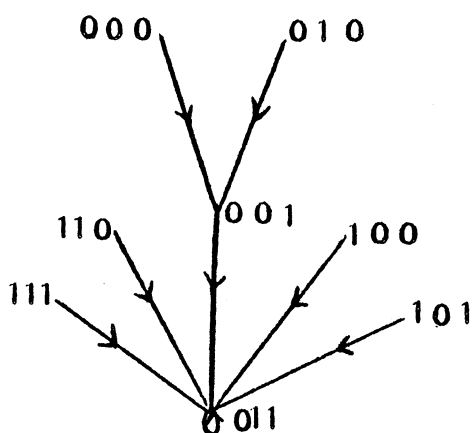
Dressons une table où, pour chaque élément de  $\{0,1\}^3$  on note le nombre de pas le séparant du point fixe (011), par itération sur F ou G.

x	000	001	010	011	100	101	110	111
par F	2	1	2	0	<u>1</u>	1	<u>1</u>	1
par G	2	1	2	0	<u>2</u>	1	<u>2</u>	1

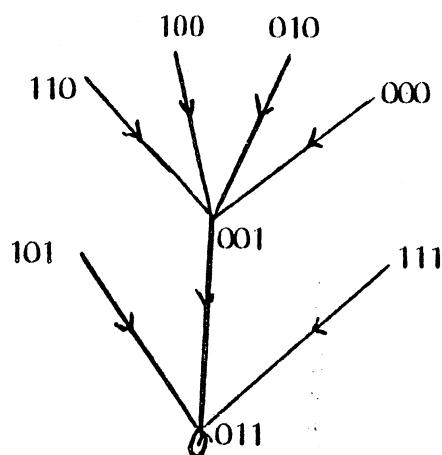
$$l_F = l_G = 2$$

$$l_F(100) = l_F(110) = 1$$

et  $l_G(100) = l_G(110) = 2$



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

PROPOSITION

{ Soit  $F : X \rightarrow X$  un opérateur discret, contractant  
 { tel que  $B(F)$  soit non triangulaire supérieure  
 { stricte alors  $l_G \leq n-1$ .  
 {



DEMONSTRATION

$$B(F) = (a_{ij})_{ij} \quad , \quad i, j=1, \dots, n$$

$$B(G) = (b_{ij})_{ij} \quad , \quad i, j=1, \dots, n$$

Il y a deux cas à distinguer dans la démonstration :

Premier cas : Si  $\exists i_0$  tel que  $a_{i_0 1} = 1$

C'est-à-dire, la  $i_0$  ième composante de  $F$  dépend de  $x_1$ .

$$\textcircled{1} \quad B(F) = \begin{array}{c|cc|c} & 1 & & i_0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ \hline i_0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ & & & 0 \\ & & & \\ & & & 0 \end{array}$$

il y a des zéros sur la diagonale.  $B(F)$  est semblable à une matrice triangulaire stricte.

Dans ce cas on a  $b_{j1} = 0$  pour  $j=1, \dots, n$  (d'après la définition de  $G$  car si  $a_{j1} = 1$ ,  $g_j$  dépend de  $f_1$  mais  $f_1$  est indépendant de  $x_1$  (contraction d'où  $b_{j1} = 0$ ).

Or  $B(F)$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, elle a donc au moins une colonne nulle, cette colonne reste nulle pour  $B(G)$  d'où  $B(G)$  à au moins deux colonnes nulles.

Soit  $P$  une permutation telle que :

$$P^t B(G) P = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & B_1 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B_2 \\ 0 & 0 & \end{array} \right)$$

$B_2$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte d'ordre  $(n-2)$  d'où  $B_2^{n-2} = 0$

cela entraine  $[P^t B(G) P]^{n-1} = 0$

d'où  $[B(G)]^{n-1} = 0$  c'est-à-dire  $\ell_G \leq n-1$ .

Deuxième Cas :  $a_{1j} = 0$  pour  $j=1, \dots, n$

$$\textcircled{2} \quad B(F) = \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 1 \dots i_0 \\ 1 \\ i_0 \end{array} & \\ \hline & 0 & B'_1 \\ \hline & 0 & B'_2 \end{array}$$

Si  $B'_2$  est de la forme  $\textcircled{1}$  on a  $[B'_2]^{n-i_0-1} = 0$   
 ce qui entraîne  $[B(G)]^{n-i_0} = 0$  d'où  $\ell_G \leq n-i_0 \leq n-1$ .  
 Sinon  $B'_2$  sera de la forme  $\textcircled{2}$  d'où

$$B(F) = \begin{array}{c|c|c} 0 & & B'_1 \\ \hline & 0 & B'_2 \\ \hline 0 & 0 & B'_{22} \end{array}$$

Supposons que si  $B(F)$  a  $p$  blocs diagonaux, alors  $\ell_G \leq n-1$   
 et démontrons par récurrence que si  $B(F)$  a  $(p+1)$  blocs  
 diagonaux on aura aussi  $\ell_G \leq n-1$ .

$$B(\ ) = \begin{array}{c|c|c} 0 & & B'_1 \\ \hline & 0 & B'_2 \\ \hline 0 & & B' \\ & 0 & \begin{array}{c|c} 0 & B'_p \\ \hline 0 & B'_{p+1} \end{array} \end{array} \quad n = r_1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{bloc d'ordre } r_2}$

avec  $B'_{p+1}$  de la forme  $\textcircled{1}$  et d'ordre  $r_{p+1}$ ,  
 alors  $B'$  a  $p$  blocs diagonaux et d'après l'hypothèse de récurrence  
 on a  $[B'_G]^{r_2-1} = 0$  ( $B'_G$  est la matrice correspondante à  $B(G)$ )  
 d'où  $[B(G)]^{r_2} = 0$  ce qui entraîne que  $\ell_G \leq r_2 \leq n-1$ .

(4.2) Dans ce paragraphe nous allons alors préciser certains opérateurs  $F$  tels que l'opérateur  $G$  associé soit meilleur que  $F$ .

(4.2.1)  $F$  contractant quelconque :

Cas  $n \leq 3$

\* pour  $n = 1$  trivial  $F(x) = G(x) = \xi \quad \forall x \in X$

\* pour  $n = 2$  on a deux cas pour  $B(F)$

$$\textcircled{1} \quad B(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \textcircled{2} \quad B(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dans le cas  $\textcircled{1}$  on a  $F(x) = G(x) \quad \forall x \in X$

dans le cas  $\textcircled{2}$  on a  $G(x) = \xi \quad \forall x \in X$

\* pour  $n = 3$ , on a vu dans un exemple (page 17) que  $G$  n'est pas toujours meilleur que  $F$  (même si  $F$  et  $G$  sont contractants). Nous allons caractériser (dans le cas  $n=5$ ) les opérateurs contractants où  $G$  est meilleur que  $F$ .

PROPOSITION 2 ( $n = 3$ )

( Soit  $F : X \rightarrow X$  un opérateur contractant et tel que  
(  $G \neq F$  et  $(\exists x \ G(x) \neq \xi)$  ) alors les conditions suivantes sont  
( équivalentes :

( i)  $G$  est meilleur que  $F$

( ii) Si  $F(x) = \xi$  alors  $f_2(\xi_1, x_2, x_3) = \xi_2$ .

DEMONSTRATION

Remarque : pour  $n = 3$

$G$  est 'meilleur' que  $F \iff (F(x) = \xi \text{ entraîne } G(x) = \xi)$   
en effet pour  $p = 3 = n$  on a  $F^3(x) = G^3(x) = \xi \quad \forall x \in X$   
(contraction de  $F$  et de  $G$ ) et pour  $p = n-1 = 2$  puisque  
 $G \neq F$  on a  $\max_{x \in X} \ell_G(x) \leq \ell_G = 2$  (d'après la proposition 1).

Donc pour démontrer la proposition 2 nous allons démontrer l'équivalence suivante :

$$(F(x) = \xi \text{ entraine } G(x) = \xi) \Leftrightarrow (F(x) = \xi \text{ entraine } f_2(\xi_1, x_2, x_3) = \xi_2).$$

Cette dernière est triviale (écrire l'expression de G).

Dans le cas où  $X_i = \{0,1\}$ ,  $i=1,2,3$ , on a une autre caractérisation des opérateurs contractants pour lesquels G est meilleur que F.

PROPOSITION 2 bis (n = 3)

{ Soit  $F : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}^3$ , un opérateur contractant  
 { et tel que  $G \neq F$  et G non constant, alors les con-  
 { ditions suivantes sont équivalentes :  
 { i) G est meilleur que F  
 { ii)  $\forall x \in \{0,1\}^3$  si  $F(x) = \xi$  alors  $F(\bar{x}) \neq \xi$   
 { où  $\xi$  désigne l'unique point fixe de F et de G  
 { et  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  si  $x = (x_1, x_2, x_3)$   
 { avec  $\bar{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

DEMONSTRATION

Remarque : Pour démontrer la proposition ci-dessus nous allons démontrer l'équivalence suivante :

$$(\exists x_0 \in \{0,1\}^3 \text{ tel que } F(x_0) = \xi \text{ et } G(x_0) \neq \xi) \Leftrightarrow$$

$$(\exists \hat{x} ; F(\hat{x}) = \xi \text{ et } F(\bar{\hat{x}}) = \xi)$$

$$(\neg i) \Leftrightarrow \neg ii) \quad \neg : \text{négation}$$

Condition nécessaire :

$$F(x_0) = \xi = \begin{cases} f_1(x_0) = \xi_1 \\ f_2(x_0) = \xi_2 \\ f_3(x_0) = \xi_3 \end{cases} \quad G(x_0) = \begin{cases} f_1(x_0) = \xi_1 \\ f_2(\xi_1, x_3^0) \\ f_3(\xi_1, f_2(\xi_1, x_3^0)) \end{cases}$$

Si  $f_2(\xi_1, x_3^0) = \xi_2$  alors  $G(x_0) = \xi$

et puisque  $G(x_0) \neq \xi$  on a  $f_2(\xi_1, x_3^0) = \bar{\xi}_2 \Rightarrow \begin{cases} x_3^0 = \bar{\xi}_3 \\ x_1^0 = \bar{\xi}_1 \end{cases}$

Notation : j'ai noté  $f_2(\xi_1, x_2^0, x_3^0)$  par  $f_2(\xi_1, x_3^0)$  car  $f_2$  est indépendante de la deuxième composante.

Supposons que  $f_1$  dépende de  $x_2$  alors  $f_2$  est indépendant de  $x_1$  car le graphe de connexion de  $B(F)$  est sans circuit

d'où  $f_2(x_0) = f_2(x_3^0) = \xi_2 \Rightarrow G(x_0) = \xi$  contradiction

donc  $f_1$  ne peut pas dépendre de  $x_2$ ; cela entraîne que

$$f_1(x_1^0, \xi_2, x_3^0) = f_1(x_1^0, \bar{\xi}_2, x_3^0)$$

d'où, si on prend  $\hat{x} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ ,  $\tilde{x} = \xi$ ,

et  $F(\hat{x}) = F(\tilde{x}) = \xi$ .

Condition suffisante :

Si  $\exists \hat{x} \in \{0, 1\}^3$  tel que  $F(\hat{x}) = F(\tilde{x}) = \xi$

alors il n'existe pas de composante de  $F$  dépendant d'une seule variable uniquement.

Et puisque  $F$  est non constante, une composante de  $F$  dépend de deux variables et les deux autres sont constantes d'où trois possibilités pour  $B(F)$  :

$$\textcircled{1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \textcircled{3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si  $B(F) = \textcircled{1}$  on a  $F(x) = G(x) \quad \forall x \in \{0,1\}^3$

Si  $B(F) = \textcircled{2}$  on a  $G(x) = \xi \quad \forall x \in \{0,1\}^3$

Si  $B(F) = \textcircled{3}$  on a  $B(G) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

la deuxième composante de  $G$  dépend d'une seule variable ,  
cela entraine que  $G(x) \neq G(\bar{x}) \quad \forall x \in \{0,1\}^3$

donc si  $G(x) = \xi$  ,  $G(\bar{x}) \neq \xi$  ,

d'où  $x_0 = \hat{x}$  ou  $x_0 = \bar{\hat{x}}$  .

— x —

REMARQUE :

Dans le cas  $n = 3$  , il n'y a que seize opérateurs  $F$   
où  $G$  n'est pas meilleur que  $F$  , nous les avons rassemblés  
dans le tableau suivant :

$f_1$	0	1	1	0	1	0	0	1	$\alpha$	$\alpha'$
$f_2$	$x_1+x_3$	$x_1 x_3$	$\bar{x}_1+\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_3$	$x_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$x_1+\bar{x}_3$	$\bar{x}_1+x_3$	$x_1 x_3$ + $\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_3$ + $x_1 \bar{x}_3$
$f_3$	1	0	0	0	1	1	0	1	$\beta$	$\beta'$

ces deux opérateurs  
sont monotones.

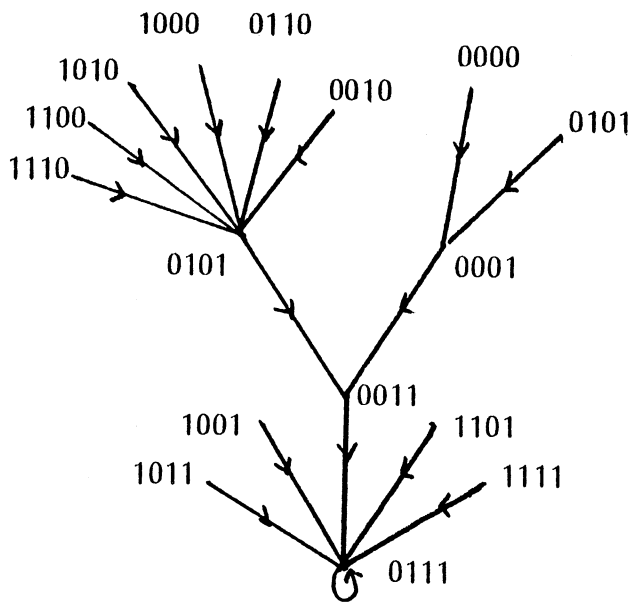
$\alpha'$  ,  $\beta'$  ,  $\alpha$  ,  $\beta$  quelconques dans  $\{0,1\}$

Cas  $n > 3$

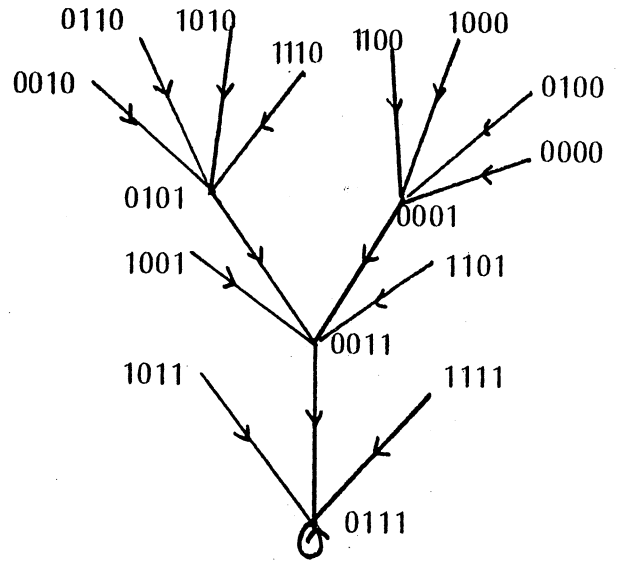
La caractérisation présentée dans le cas  $n = 3$  n'est plus vraie  
comme le montre le contre-exemple ci-dessous :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \\ x_1+x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{cases} \quad B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$F$  est contractant.



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

x	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
par F	3	2	3	1	3	2	3	0
par G	3	2	3	1	3	2	3	0

x	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
par F	3	<u>1</u>	3	1	3	<u>1</u>	3	1
par G	3	<u>2</u>	3	1	3	<u>2</u>	3	1

$$l_F = l_G = 3$$

$$l_F(1001) = l_F(1101) = 1 \text{ et } l_G(1001) = l_G(1101) = 2$$

G n'est pas meilleur que F et pourtant pour tout x tel que  $F(x) = \xi$  alors  $F(\bar{x}) \neq \xi$ .

Dans la proposition ci-après, on caractérise une classe d'opérateurs contractants (n quelconque) où G est meilleur que F.

PROPOSITION 3 (n quelconque)

{  
 { Soit  $F : X \rightarrow X$  un opérateur contractant et tel  
 { que sa matrice d'incidence  $B(F) = (b_{ij})$  vérifie  
 { la condition suivante :  
 {  
 {  $I \cup J = N$   
 { où  $N = \{1, 2, \dots, n\}$   
 {  $I = \{i \in N ; \text{si } b_{ij} = 1 \text{ alors } \left. \begin{array}{l} j > i \text{ et} \\ j \in I \end{array} \right\}$   
 {  $J = \{i \in N ; \text{si } b_{ij} = 1 \text{ alors } \left. \begin{array}{l} j < i \text{ et} \\ j \in I \cup J \end{array} \right\}$   
 {  
 { alors  $G$  est meilleur que  $F$  .  
 {

DEMONSTRATION :

Soit  $x \in X$  tel que  $F^P(x) = \xi$  ( $\xi$  point fixe de  $F$ )

\* pour  $i \in I$  on a  $g_i(x) = f_i(x)$

Or  $f_i$  ne dépend que de  $x_j$  avec  $j \in I$  d'où  $g_i^m(x) = f_i^m(x) \forall m$   
 donc  $g_i^P(x) = f_i^P(x) = \xi_i$  ;

\* pour  $i \in J$

On pose  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$  avec  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$

si  $i = i_1$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i(x) = \xi \\ \text{ou} \\ g_i(x) = f_i(F(x)) \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_i^m(x) = \xi_i, \quad \forall m \\ \text{ou} \\ g_i^m(x) = f_i(F^m(x)), \quad \forall m \end{array} \right.$$

donc  $g_i^P(x) = \xi_i$  ou  $g_i^P(x) = f_i(F^P(x)) = f_i(\xi) = \xi_i$

si  $i \neq i_1$  on a :

$$g_i(x) = f_i((g_k(x))_{k \in I}, (g_k(x))_{\substack{k \in J \\ k < i}})$$

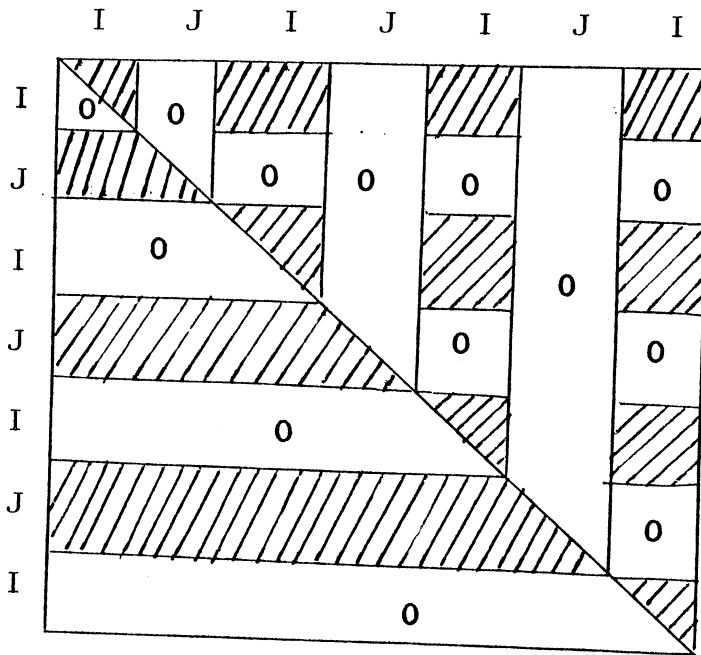
et 
$$g_i^m(x) = f_i((g_k^m(x))_{\substack{k \in I \\ k < i}}, (g_k^m(x))_{\substack{k \in J \\ k < i}})$$

ainsi il est clair que l'on a  $g_i^P(x) = \xi_i$  (par récurrence).



REMARQUE :

La matrice suivante vérifie la condition de la proposition 3.



Les parties hachurées contiennent 0 ou 1.  
La diagonale est nulle.

EXEMPLE :

① : n = 5

$$F(x) = \begin{cases} x_2 + x_4 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_1 x_2 \\ 1 \\ x_1 x_2 + x_3 \bar{x}_4 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x_2 + x_4 \\ \bar{x}_4 \\ 0 \\ 1 \\ x_2 \bar{x}_4 \end{cases} \quad B(F) = \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & I \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & J \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & J \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & I \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & J \end{array}$$

F est contractant, I = {1,2,4} et J = {3,5}

I ∪ J = N = {1,2,3,4,5}



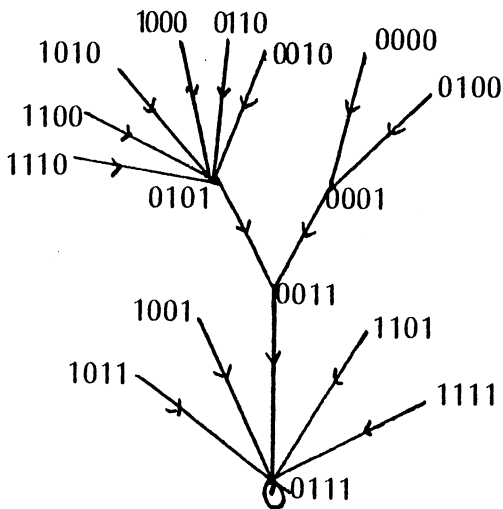
② : n = 4

$$F(x) = \begin{cases} 0 \\ x_1 + x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{cases}$$

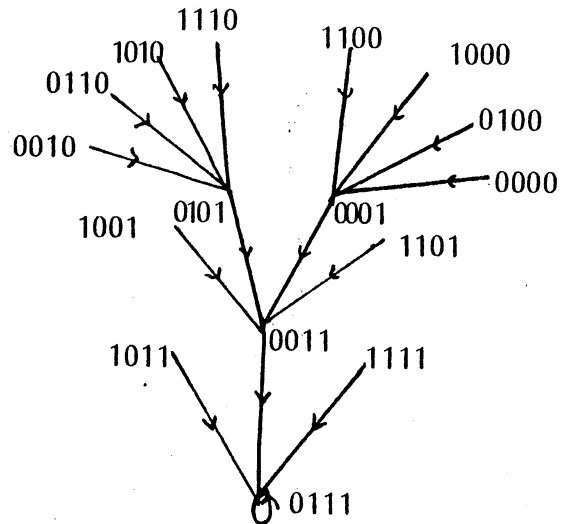
$$G(x) = \begin{cases} 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{cases}$$

$$B(F) = \begin{array}{c|cc|cc|c} & \text{I} & & \text{I} & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{I} \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{I} \end{array}$$

F est contractant , I = {1,3,4} , J =  $\phi$  => I  $\cup$  J = {1,2,3}  $\neq$  N



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

x	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
par F	3	2	3	1	3	2	3	0
par G	3	2	3	1	3	2	3	0

x	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
par F	3	<u>1</u>	3	1	3	<u>1</u>	3	1
par G	3	<u>2</u>	3	1	3	<u>2</u>	3	1

On a  $\ell_F = \ell_G = 3$

$F(1001) = F(1101) = \xi$  et  $G(1001) = G(1101) = 0011 \neq \xi$   
 dans cet exemple il se trouve donc que G n'est pas meilleur que F.

③ n = 7

$$F(x) = \begin{cases} x_3 x_5 + \bar{x}_7 \\ \bar{x}_1 \\ x_5 \bar{x}_7 \\ x_1 x_2 + x_3 \\ \bar{x}_7 \\ x_1 x_2 + x_3 + x_4 \bar{x}_5 \\ 1 \end{cases}$$

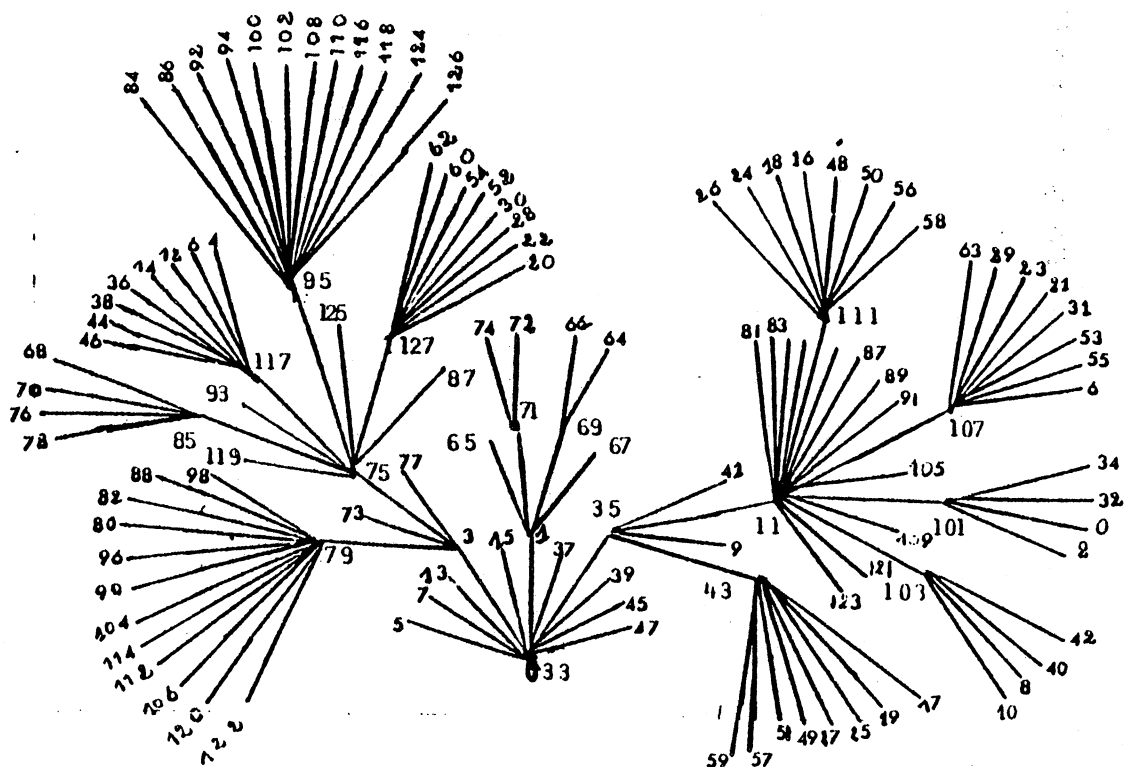
$$B(F) = J \begin{array}{c|ccccccc} & I & J & I & J & I & J & I \\ \hline I & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ J & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ J & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ J & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$G(x) = \begin{cases} x_3 x_5 + \bar{x}_7 \\ (\bar{x}_3 + \bar{x}_5) \cdot x_7 \\ x_5 \bar{x}_7 \\ x_5 \bar{x}_7 \\ \bar{x}_7 \\ x_5 \bar{x}_7 \\ 1 \end{cases}$$

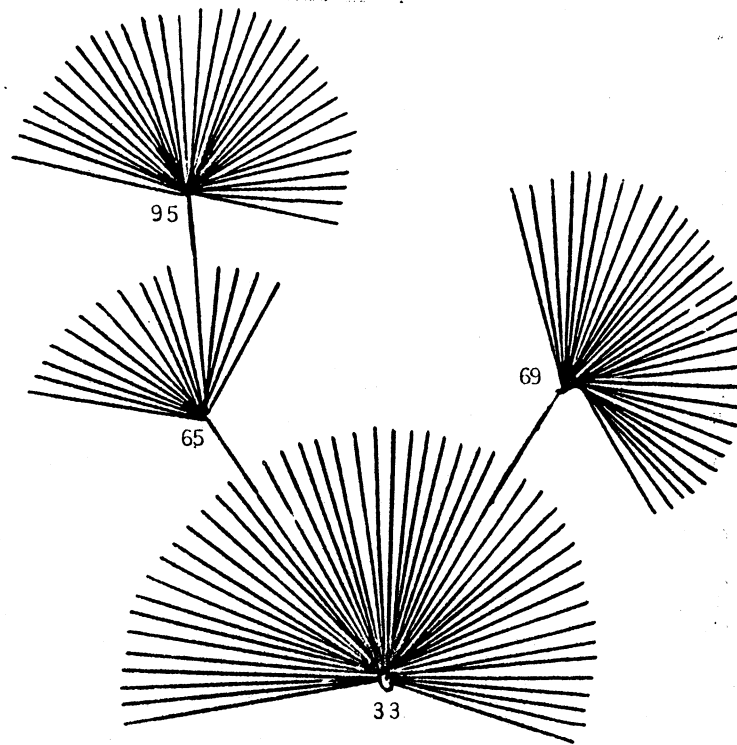
I = {7, 5, 3, 1}    J = {2, 4, 6}

F est contractant

I ∪ J = N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

NOTATION :  $C_F(x) = \{y \in \{0,1\}^n ; F(y) = x\}$

$$C_G(33) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 25, 27, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 57, 59, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 89, 91, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 121, 123\}$$

$$\text{Card}(C_G(33)) = 48$$

$$C_G(69) = \{0, 2, 8, 10, 16, 18, 24, 26, 32, 34, 40, 42, 48, 50, 56, 58, 64, 66, 72, 74, 80, 82, 88, 90, 96, 98, 104, 106, 112, 114, 120, 122\}$$

$$\text{Card}(C_G(69)) = 32$$

$$C_G(95) = \{4, 6, 12, 14, 20, 22, 28, 30, 36, 38, 44, 46, 52, 54, 60, 62, 68, 70, 76, 78, 84, 86, 92, 94, 100, 102, 108, 110, 116, 118, 124, 126\}$$

$$\text{Card}(C_G(95)) = 32$$

$$C_G(65) = \{21, 23, 29, 31, 53, 55, 61, 63, 85, 87, 93, 95, 117, 119, 125, 127\}$$

$$\text{Card}(C_G(65)) = 16$$

Dans l'exemple 3, on vérifie que  $G$  est meilleur que  $F$ . De plus, on constate combien le passage du procédé parallèle ( $F$ ) au procédé série "condense" et "simplifie" le graphe d'itération; il faudrait pouvoir formaliser ces notions, pour le moment intuitives mais systématiques de ces graphes.

Dans l'exemple 3 :  $\ell_F = 4$  et  $\ell_G = 3$

Il y a 56 vecteurs  $x$  dans  $\{0,1\}^7$  tel que  $F^3(x) \neq \xi$   
 et  $F^4(x) = \xi$

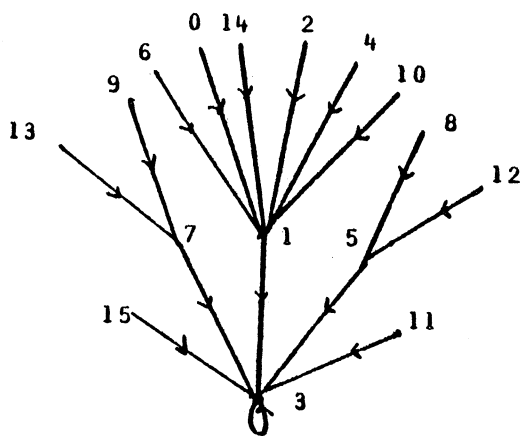
C'est-à-dire les  $\frac{7}{16}$  des vecteurs.

④

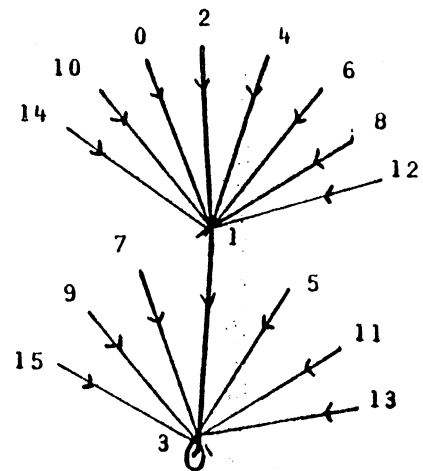
$$F(x) = \begin{cases} 0 \\ x_1 \bar{x}_3 \\ x_4 \\ 1 \end{cases} \quad G(n) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 1 \end{cases} \quad B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$F$  est contractant ,  $I = \{1,3,4\}$   $J = \phi$

$$I \cup J \neq N = \{1,2,3,4\}$$



Graphe d'itération de  $F$



Graphe d'itération de  $G$



DEMONSTRATION

Triviale car si  $F$   $\xi$ -monotone on a  $(F(x) = \xi \Rightarrow G(x) = \xi)$   
 et d'après la proposition 1

Si  $G \neq F$   $\ell_G \leq 2$ , c'est-à-dire  $G^2(x) = \xi \quad \forall x \in X$ .

Cas  $n = 4$

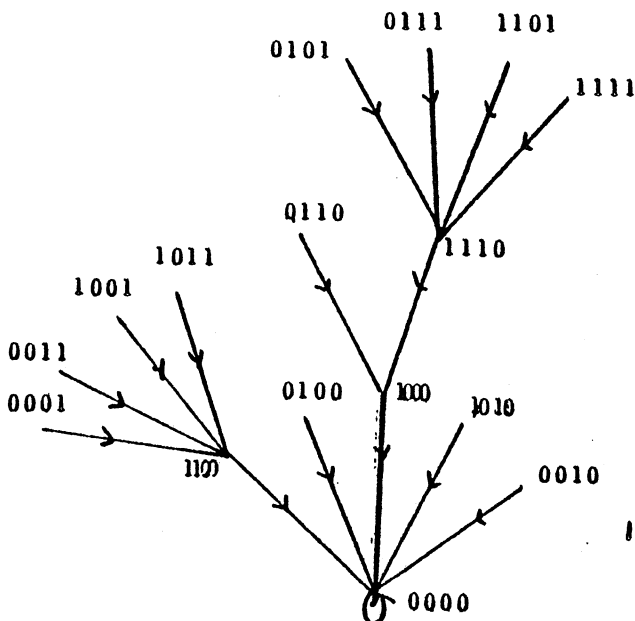
Dans ce cas on n'a pas toujours  $G$  meilleur que  $F$  même si  $F$  est  $\xi$  monotone, comme le montre l'exemple ci-dessous :

$$F(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_4 \\ x_4 \\ x_2 x_4 \\ 0 \end{cases}$$

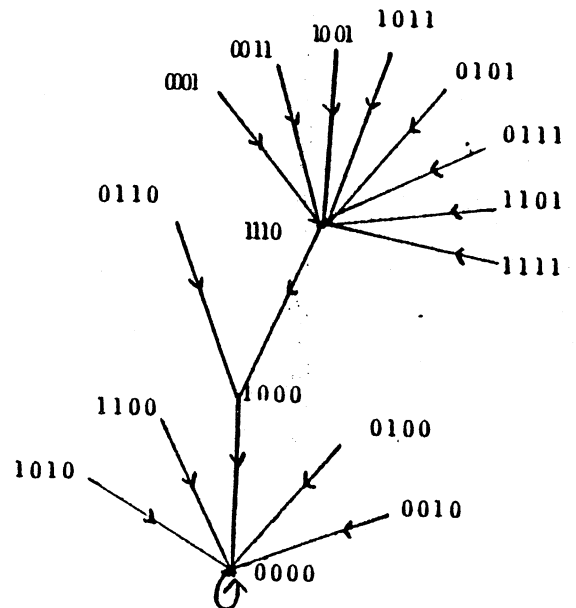
$$G(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{cases}$$

$F$  est contractant et  $\xi$ -monotone \*

$$B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

\* puisque  $\xi = 0$ , il suffit de vérifier que  $F$  est monotone :

$(x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y))$  ce qui est le cas (pas de variables barrées dans l'expression de  $F$ ).



x	0	1	2	3	4	5	6	7
par F	0	<u>2</u>	1	<u>2</u>	1	3	2	3
par G	0	<u>3</u>	1	<u>3</u>	1	3	2	3

x	8	9	10	11	12	13	14	15
par F	1	<u>2</u>	1	<u>2</u>	1	3	2	3
par G	1	<u>3</u>	1	<u>3</u>	1	3	2	3

Dans cet exemple, on a en fait F meilleur que G .

PROPOSITION 5

{ Soit  $F : X \rightarrow X$  ( $X = \prod_{i=1}^4 X_i$ ) un opérateur contractant et  $\xi$ -monotone , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) G meilleur que F

b)  $B(F) \notin \mathcal{S}$  ou F vérifie (P) , avec

$$(P) : \begin{cases} \text{Si } F^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \xi \\ \text{et} \\ x_4 \neq \xi_4 \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} f_2(\xi_1, x_2, f_3(s), \xi_4) = \xi_2 \\ \text{et} \\ f_1(x_1, f_2(x), f_3(z), \xi_4) = \xi_1 \end{cases}$$

$$s = (f_1(x), x_2, x_3, x_4) \quad ; \quad z = (x_1, f_2(x), x_3, x_4)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & ; & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

DEMONSTRATION

Remarque : Pour  $n = 4$  et  $F$  contractant,  $\xi$ -monotone on a :

$G$  meilleur que  $F \Leftrightarrow$  (si  $F^2(x) = \xi$  alors  $G^2(x) = \xi$ )

en effet la  $\xi$ -monotonie  $\Rightarrow$  (si  $F(x) = \xi$  alors  $G(x) = \xi$ )

la proposition 1  $\Rightarrow$  si  $F \neq G$  on a

$\rho_G \leq 3$  donc  $G^3(x) = \xi \quad \forall x \in X$

a  $\Rightarrow$  b) Supposons que  $G$  est meilleur que  $F$

\* Si  $B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  on a si  $F^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \xi$

avec  $x_4 \neq \xi_4$  alors  $G^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \xi$  .

$$G^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} f_1(\xi_4) = \xi_1 \\ f_2(\xi_1, f_3(f_1(x), x_4), \xi_4) = \xi_2 \\ f_3(\xi_1, \xi_4) = \xi_3 \\ \xi_4 \end{cases}$$

Or  $f_2(\xi_1, x_2, f_3(s), \xi_4) = f_2(\xi_1, f_3(f_1(x), x_4), \xi_4) = \xi_2$

la première composante de  $F$ ,  $f_1$  ne dépend que de  $x_4$  d'où

$$f_1(x_1, f_2(x), f_3(z), \xi_4) = f_1(\xi_4) = \xi_1$$

\* Si  $B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  on a si  $F^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \xi$

avec  $x_4 \neq \xi_4$  alors  $G^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \xi$  .

$$G^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} f_1(x_1, f_2(x), f_3(f_2(x), x_4), \xi_4) = \xi_1 \\ f_2(\xi_4) = \xi_2 \\ f_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_3 \\ \xi_4 \end{cases}$$

$$f_3(f_2(x), x_4) = f_3(z) \Rightarrow f_1(x_1, f_2(x), f_3(z), \xi_4) = \xi_1$$

et puisque  $f_2$  ne dépend que de  $x_4$  alors

$$f_2(\xi_1, x_2, f_3(\xi), \xi_4) = f_2(\xi_4) = \xi_2 .$$

b) => a)

On définit les ensembles suivants :

$$L = \{i ; a_{ij} = 0, \forall j\}$$

$$M = \{j ; a_{ij} = 0, \forall i\}$$

puisque F est contractant ces deux ensembles sont non vides.  
Soit  $y \in X$  tel que  $F^2(y) = \xi$

\*\* si  $1 \in L$

$$\text{on a } G(y) = \begin{cases} \xi_1 \\ f_2(\xi_1, y_3, y_4) \text{ noté } f_2(X^2) \\ f_3(\xi_1, f_2(X^2), y_4) \text{ noté } f(X^3); X^3 = (\xi_1, f_2(X^2), y_3, y_4) \\ f_4(\xi_1, f_2(X^2), f_3(X^3)) \text{ noté } f_4(X^4) \end{cases}$$

- Si  $f_3$  est indépendant de  $y_4$  alors la  $\xi$ -monotonie de F entraîne que

$$f_3(X^3) = \xi_3 \text{ et } f_4(X^4) = \xi_4$$

$$\text{d'où } G^2(y) = \xi ;$$

- Sinon on aura  $f_4$  indépendant de  $y_3$  (car le graphe de connexion de  $B(F)$  est sans cycle) d'où  $f_4(X^4) = \xi_4$  d'après la  $\xi$ -monotonie de F

Si  $f_2$  indépendant de  $y_3$  alors  $G^2(y) = \xi$

Sinon  $f_3$  sera indépendant de  $y_2$  et on aura  $G^2(y) = \xi$

\*\* Si  $2 \in L$

$$\text{on aura } G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_3, y_4) = f_1(y) \\ \xi_2 \\ f_3(f_1(y), \xi_2, y_4) \text{ noté } f_3(X^3) \\ f_4(f_1(y), \xi_2, f_3(X^3)) \text{ noté } f_4(X^4) \end{cases}$$

- Si  $f_3$  indépendant de  $y_4$  alors d'après la  $\xi$ -monotonie de F  $f_3(X^3) = \xi_3$  et  $f_4(X^4) = \xi_4$  d'où  $G^2(y) = \xi$ .

- Sinon on aura  $f_4$  indépendant de  $y_3$  d'où  $f_4(X^4) = \xi_4$

et 
$$G^2(y) = \begin{cases} f_1(\xi_2, f_3(X^3), \xi_4) = f_1(X^1_1) \\ \xi_2 \\ f_3(f_1(X^1_1), \xi_2, \xi_4) = f_3(X^1_3) \\ f_4(f_1(X^1_1), \xi_2) \end{cases}$$

Si  $f_1$  indépendant de  $y_3$ , on aura  $g_1(G(y)) = \xi_1 \Rightarrow G^2(y) = \xi$   
 sinon  $f_3$  est indépendant de  $y_1$  et  $d(X^3, \xi) \leq d(y, \xi)$   
 d'où d'après le  $\xi$ -monotonie de  $F$ ,  $G^2(y) = \xi$ .

\*\*\* si  $3 \in L$  on a :

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_3, y_4) = f_1(y) \\ f_2(f_1(y), y_3, y_4) = f_2(X^2) \\ \xi_3 \\ f_4(f_1(y), f_2(X^2), \xi_3) \end{cases}$$

si  $1 \in M$

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y) \\ f_2(y) \\ \xi_3 \\ f_4(f_1(y), f_2(y), \xi_3) = \xi_4 \end{cases} \Rightarrow G^2(y) = \xi$$

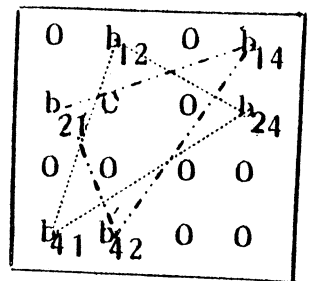
si  $2 \in M$

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_3, y_4) = f_1(y) \\ f_2(f_1(y), y_3, y_4) = f_2(X^2) \\ \xi_3 \\ f_4(f_1(y), \xi_3) = \xi_4 \end{cases} \Rightarrow G^2(y) = \xi$$

si  $3 \in M$  on a :

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_4) = f_1(y) \\ f_2(f_1(y), y_4) = f_3(X^2) \\ \xi_3 \\ f_4(f_1(y), f_2(X^2)) \end{cases}$$

et  $B(F) =$



$$b_{14} b_{42} b_{21} = 0 ; b_{12} b_{24} b_{41} = 0$$

Dans ce cas L contient un autre élément autre que 3 car sinon le graphe de connexion de B(F) contient des cycles (voir la matrice B(F), les  $b_{ij}$  reliées forment un cycle si elles sont toutes égales à 1)

A l'aide de cette remarque il est facile de voir que  $G^2(y) = \xi$ .

• Si  $4 \in M$ , on a :

$$B(F) = \begin{array}{|cccc|} \hline 0 & b_{12} & X & 0 \\ b_{21} & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$b_{12} b_{21} = 0 \quad (\text{pas de cycle})$$

$$X = 0 \text{ ou } 1$$

Si  $f_1$  dépend de  $y_2$  on aura :

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_4) = f_1(y) \\ f_2(y_3) = f_2(y) \\ \xi_3 \\ f_4(f_1(y), f_2(y), \xi_3) = \xi_4 \end{cases}$$

la  $\xi$ -monotonie de  $F \Rightarrow G^2(y) = \xi$  ;  
sinon on aura :

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_3) = f_1(y) \\ f_2(f_1(y), y_3) = f(X^2) \\ \xi_3 \\ f_4(f_1(y), f_2(X^2), \xi_3) \end{cases} \quad \text{et } G^2(y) = \begin{cases} f_1(\xi_3) = \xi_1 \\ f_2(\xi_1, \xi_3) = \xi_2 \\ \xi_3 \\ f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_4 \end{cases}$$

\*\*\* si  $4 \in L$

si  $1 \in M$

$$B(F) = \begin{array}{|cccc|} \hline 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

si  $f_3$  indépendant de  $x_2$  on a  $F = G \Rightarrow G^2(y) = F^2(y) = \xi$   
sinon  $f_2$  est indépendant de  $x_3$  et on aura :

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_3, y_4) = f_1(y) \\ f_2(y_4) = f_2(y) \\ f_3(f_2(y), y_4) = f_3(X^3) \\ \xi_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad G^2(y) = \begin{cases} f_1(f_2(y), f_3(X^3), \xi_4) \\ f_2(\xi_4) = \xi_2 \\ f_3(\xi_2, \xi_4) = \xi_3 \\ \xi_4 \end{cases}$$

si  $y_4 = \xi_4$  on a  $f_3(X^3) = \xi_3 \Rightarrow G^2(y) = \xi$

si  $y_4 \neq \xi_4$  on a par hypothèse  $f_1(y_1, f_2(y), f_3(z), \xi_4) = \xi_1$   
avec  $z = (y_1, f_2(y), y_3, y_4)$  or  $f_3$  dépend seulement de  $x_2$   
et  $x_4$  d'où

$$f_3(z) = f_3(X^3) \Rightarrow f_1(f_2(y), f_3(X^3), \xi_4) = \xi_1$$

d'où  $G^2(y) = \xi$ .

si  $2 \in M$   $B(F) =$ 

0	0	<u>X</u>	X
X	0	X	X
<u>X</u>	0	0	X
0	0	0	0

Si  $f_1$  dépend de  $x_3$  il est facile de voir que  $G^2(y) = \xi$   
sinon on a :

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_4) = f_1(y) \\ f_2(f_1(y), y_3, y_4) \\ f_3(f_1(y), y_4) = f_3(X^3) \\ \xi_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad G^2(y) = \begin{cases} \xi_1 \\ f_2(\xi_1, f_3(X^3), \xi_4) \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{cases}$$

si  $y_4 = \xi_4$  on a  $f_3(X^3) = \xi_3 \Rightarrow G^2(y) = \xi$

si  $y_4 \neq \xi_4$  par hypothèse on a  $f_2(\xi_1, x_2, f_3(s), \xi_4) = \xi_2$  or  
 $f_3$  dépend seulement de  $x_1$  et de  $x_3$  d'où  $f_3(s) = f_3(X^3)$ ,  
et  $G^2(y) = \xi$ .

Si  $3 \in M$

$$B(F) = \begin{vmatrix} 0 & X & 0 & X \\ X & 0 & 0 & X \\ X & X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

si  $f_1$  dépend de  $y_2$

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_4) = f_1(y) \\ f_2(y_4) = f_2(y) \\ f_3(f_1(y), f_2(y), y_4) \\ \xi_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad G^2(y) = \begin{cases} f_1(f_2(y), \xi_4) = \xi_1 \\ f_2(\xi_4) = \xi_2 \\ f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_4) = \xi_3 \\ \xi_4 \end{cases}$$

sinon

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_4) = f_1(y) \\ f_2(f_1(y), y_4) = f_2(X^2) \\ f_3(f_1(y), f_2(X^2), y_4) \\ \xi_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad G^2(y) = \begin{cases} f_1(\xi_4) = \xi_1 \\ f_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 \\ f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_4) = \xi_3 \\ \xi_4 \end{cases}$$

Si  $4 \in M$

$$G(y) = \begin{cases} f_1(y_2, y_3) \\ f_2(f_1(y), y_3) = f_2(X^2) \\ f_3(f_1(y), f_2(X^2)) \\ \xi_4 \end{cases}$$

Il est facile de voir que  $G^2(y) = \xi$  en utilisant le fait que le graphe de connexion de  $B(F)$  ne contient pas de cycles.

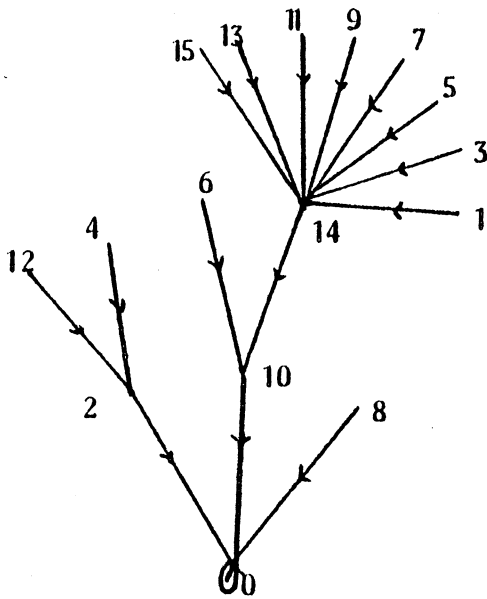
EXEMPLES :  $n = 4$

$$\textcircled{1} \quad F(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_4 \\ x_4 \\ x_2 + x_4 \\ 0 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{cases} \quad G(F) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

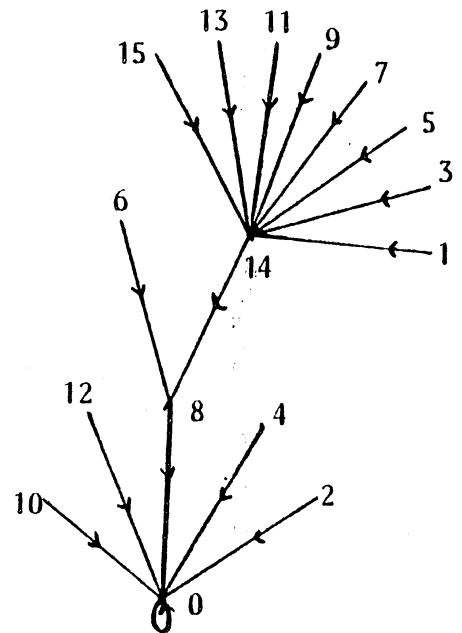
F est contractant et  $\xi$ -monotone \*

$B(F) \in \mathcal{I} \quad \xi = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$

$F^2(x_1, x_2, x_3, 1) = (1 \ 0 \ 1 \ 0) \neq \xi \Rightarrow F$  vérifie (P)



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

x	0	1	2	3	4	5	6	7
par F	0	3	1	3	<u>2</u>	3	2	3
par G	0	3	1	3	<u>1</u>	3	2	3

x	8	9	10	11	12	13	14	15
par F	1	3	1	3	<u>2</u>	3	2	3
par G	1	3	1	3	<u>1</u>	3	2	3

$\ell_F = \ell_G = 3$

mais G est meilleur que F .

\* Là encore le point fixe de F est 0 et F est monotone



② Voir l'exemple de la page 33

Dans cet exemple on a  $F$  contractant et  $\xi$ -monotone  
 $B(F) \in \mathcal{S}$ , et  $F$  ne vérifie pas la propriété (P).

( $\xi = 0$  ;  $F^2(1001) = \xi$  et  $f_1(1,1,f_3(z),0) = f_1(1110) = 1$   
avec  $z = (1,1,0,1)$  et  $f_3(z) = 1$ )

et on a  $G$  non meilleur que  $F$ .

Cas n quelconque

Dans les propositions ci-dessous, nous allons donner  
des classes d'opérateurs contractants,  $\xi$ -monotones et où  $G$   
est meilleur que  $F$ .

PROPOSITION 6 :

{  
 { Soit  $F : X \rightarrow X$  un opérateur contractant et  
 {  $\xi$ -monotone; si  
 {  $G^2 = G \circ F$   
 {  
 { alors  $G$  meilleur que  $F$ .

REMARQUE

$$G^2 = G \circ F \iff G^p = G \circ F^{p-1} \quad \forall p$$

car si  $G^2 = G \circ F$

on a  $G^{r+2} = G^{r+1} \circ F = G^{r-1} \circ (G \circ F) \circ F = G^r \circ F^2$ .

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6

Soit  $x \in \{0,1\}^n$  tel que  $F^p(x) = \xi$  ( $\xi$  = point fixe  
de  $F$ ) ;  $G^p(x) = G \circ F^{p-1}(x)$

On note

$$G^P(x) = \begin{cases} g_1^P(x) \\ \vdots \\ g_n^P(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad F^P(x) = \begin{cases} f_1^P(x) \\ \vdots \\ f_n^P(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_1^P(x) &= g_1(F^{P-1}(x)) = f_1(F^{P-1}(x)) = \xi_1 \\ g_2^P(x) &= g_2(F^{P-1}(x)) = f_2(\underbrace{\xi_1, f_2^{P-1}(x), \dots, f_n^{P-1}(x)}_{Y_1}) \end{aligned}$$

$d(Y_1, \xi) \leq d(F^{P-1}(x), \xi)$  la  $\xi$ -monotonie de F

$$\Rightarrow d(F(y_1), \xi) \leq d(\underbrace{F^P(x)}_{= \xi}, \xi)$$

$$\Rightarrow F(y_1) = \xi$$

$$\text{d'où } g_2^P(x) = \xi_2$$

Supposons que  $g_i^P(x) = \xi_i$  pour  $i \leq r$  et démontrons que  $g_{r+1}^P(x) = \xi_{r+1}$ .

$$g_{r+1}^P(x) = g_{r+1}(F^{P-1}(x)) = f_{r+1}(\underbrace{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, f_{r+1}^{P-1}(x), \dots, f_n^{P-1}(x)}_{Y_r})$$

$$d(Y_r, \xi) \leq d(F^{P-1}(x), \xi)$$

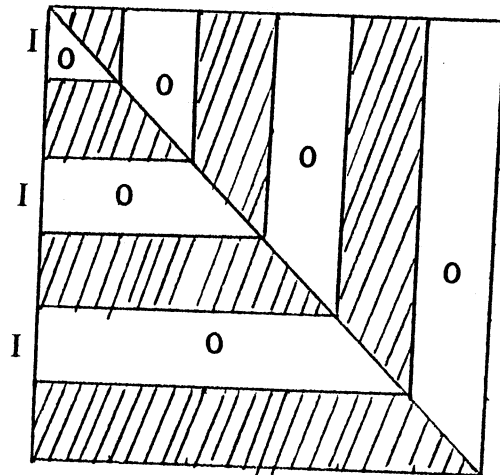
$$\Rightarrow F(y_r) = \xi \quad \text{d'où} \quad g_{r+1}^P(x) = \xi_{r+1}$$

PROPOSITION 7

{  
 { Soit F un opérateur contractant,  $\xi$ -monotone et  
 { tel que  $B(F) = (b_{ij})$  vérifie les conditions suivantes :  
 { 1.  $\forall i \in I$  on a  $b_{ij} = 0 \quad \forall j ; j \leq i$   
 { 2.  $\forall i \notin I \Rightarrow b_{ji} = 0 \quad \forall j ; j \leq i$   
 { alors  $G^P = G \circ F^{P-1}$ ,  $\forall p$   
 { avec  $I = \{i \in \mathbb{N} ; \exists j \in \mathbb{N} \text{ tel que } j < i \text{ et } b_{ji} = 1\} \cup \{1\}$ ,  
 {  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n\}$   
 {

REMARQUES

- α) :  $\forall i \in I$ ,  $f_i(x)$  ne dépend que des variables  $x_j$  avec  $j \in I$  ;
- β) : la matrice ci-dessous est semblable (par permutation) à une matrice triangulaire supérieure stricte et vérifie les conditions 1) et 2) de la proposition 7.



Les parties hachurées contiennent des 0 ou des 1 .

La diagonale est nulle .

γ) si  $B(F)$  vérifie 1) et 2) alors  $\ell_G \leq n - \text{card}(N \setminus I) + 1$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7

• Pour  $i \in I$  on a  $g_i(x) = f_i(x)$

car  $a_{ij} = 0 \quad \forall j, j \leq i$

et d'après la remarque α) on a  $g_i^p(x) = f_i^p(x) \quad \forall p$ ,

d'où  $g_i^p(x) = g_i(F^{p-1}(x))$

• Pour  $i \notin I$

Soit  $i_0$  tel que  $i_0 = \min_{i \notin I} i$ , alors  $f_{i_0}(x)$  ne dépend que

de  $x_j$  avec  $j \in I$  (car si  $j < i_0$ , on a  $j \in I$ ),

alors  $g_{i_0}(x) = f_{i_0}(g_1(x), \dots, g_{i_0-1}(x), x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$  avec  $j_1, \dots, j_s \in I$

d'où  $g_{i_0}^2(x) = f_{i_0}(g_1(F(x)), \dots, g_{i_0-1}(F(x)), f_{j_1}(x), \dots, f_{j_s}(x)) = g_{i_0}(F(x))$ .

Supposons maintenant que  $g_{i_0}^k(x) = g_{i_0}(F^{k-1}(x))$   
 pour  $k \leq p$  et montrons que  $g_{i_0}^{p+1} = g_{i_0}(F^p(x))$

$$\begin{aligned} g_{i_0}^{p+1}(x) &= f_{i_0}(g_1^{p+1}(x), \dots, g_{i_0-1}^{p+1}(x), g_{j_1}^p(x), \dots, g_{j_s}^p(x)) \\ &= f_{i_0}(g_1(F^p(x)), \dots, g_{i_0-1}(F^p(x)), f_{j_1}^p(x), \dots, f_{j_s}^p(x)) \\ &= g_{i_0}(F^p(x)) . \end{aligned}$$

On pose  $N \setminus I = \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$  avec  $i_0 < i_1 < \dots < i_m$ .  
 Supposons que  $g_{i_j}^p(x) = g_{i_j}(F^{p-1}(x))$  pour  $j \leq r$  et  $i_j \in N \setminus I$   
 Et montrons que  $g_{i_{(r+1)}}^p(x) = g_{i_{(r+1)}}(F^{p-1}(x))$ .

NOTATION

Si une application  $f : X \rightarrow X_i$  dépend de certaines variables  $\{i_0, i_1, \dots, i_s\} = L$  et  $\{j_0, j_1, \dots, j_p\} = M$

On note  $f(x)$  par  $f((x_j)_{j \in L}, (x_j)_{j \in M})$

$$\begin{aligned} g_{i_{(r+1)}}^p(x) &= f_{i_{(r+1)}}((g_j^p(x))_{j < i_{(r+1)}}, (g_j^{p-1}(x))_{\substack{j > i_{(r+1)} \\ j \in I}} \text{ et } ) \\ &= f_{i_{(r+1)}}((g_j(F^{p-1}(x)))_{j < i_{(r+1)}}, (f_j^{p-1}(x))_{\substack{j \in I \\ j > i_{(r+1)}}} \text{ et } ) \\ &= g_{i_{(r+1)}}(F^{p-1}(x)) \end{aligned}$$

d'où  $G^p(x) = G \circ F^{p-1}(x)$ ,  $\forall x$ , et  $\forall p$ .

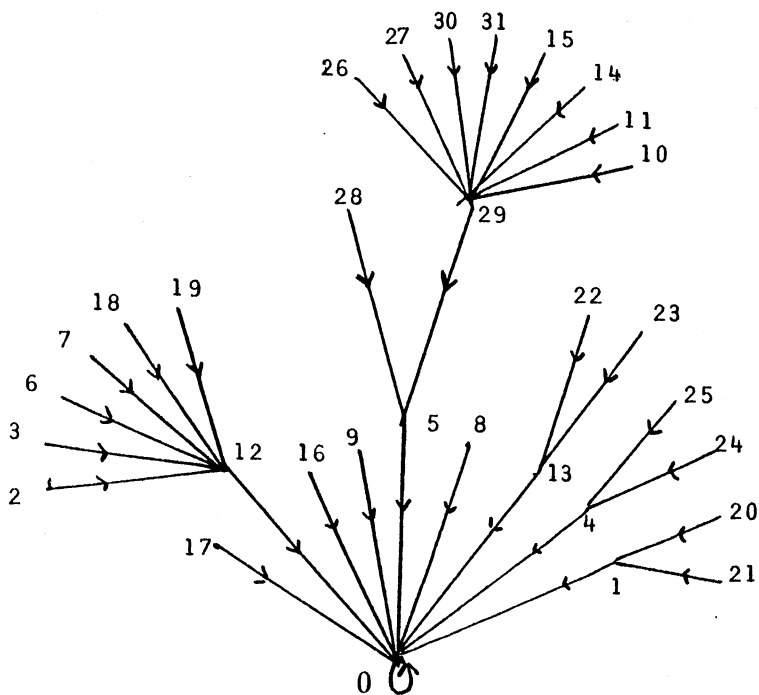
EXEMPLES :

①  $n = 5$

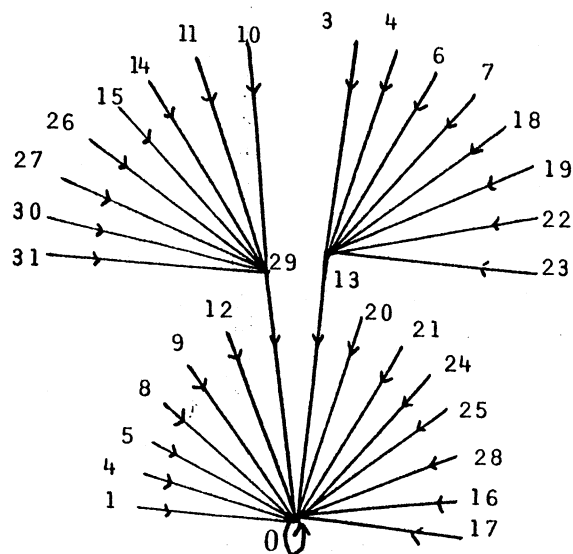
$$F(x) = \begin{cases} x_2 x_4 \\ x_4 \\ x_1 x_2 + x_4 \\ 0 \\ x_4 x_2 + x_1 x_3 \end{cases} \Rightarrow G(x) = \begin{cases} x_2 x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{cases}$$

$$B(F) = \begin{array}{c|ccccc} \mathbf{I} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

; F contractant et  $\xi$ -monotone\*  
B(F) vérifie les conditions de la proposition 7.



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

\* même remarque que précédemment.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
par F	0	1	2	2	1	1	2	2	1	1	<u>3</u>	<u>3</u>	1
par G	0	1	2	2	1	1	2	2	1	1	<u>2</u>	<u>2</u>	1

x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
par F	1	<u>3</u>	<u>3</u>	1	1	2	2	<u>2</u>	<u>2</u>	2	2
par G	1	<u>2</u>	<u>2</u>	1	1	2	2	<u>1</u>	<u>1</u>	2	2

x	24	25	26	27	28	29	30	31
par F	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>3</u>
par G	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>

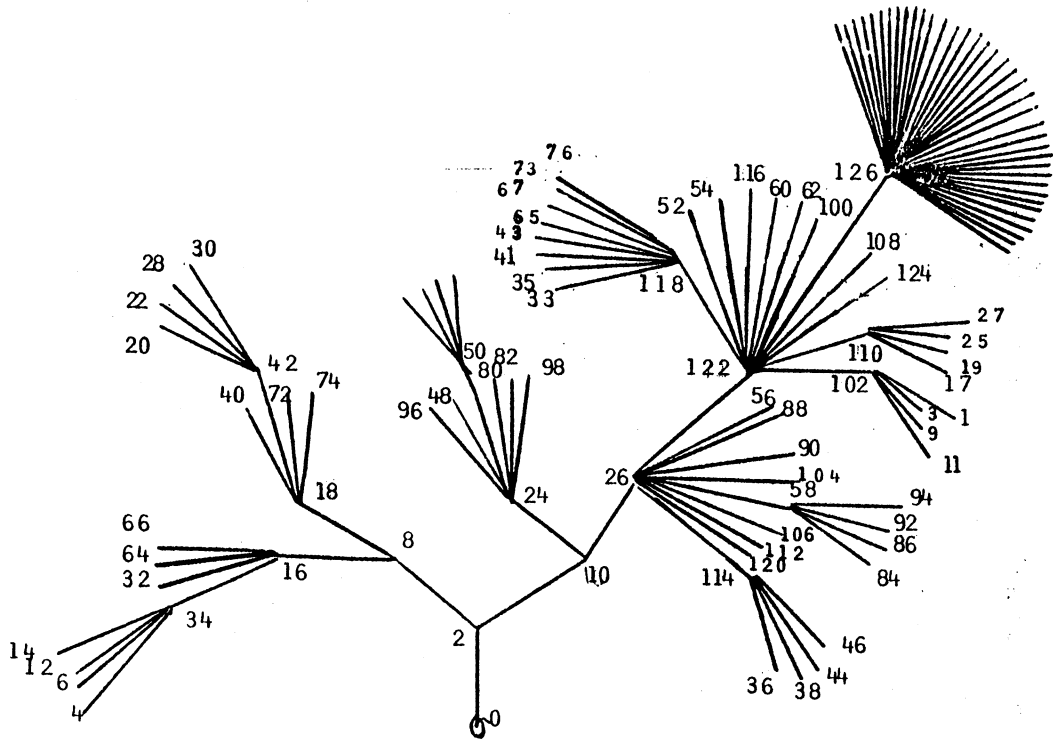
G est meilleur que F

② n = 7

$$F(x) = \begin{cases} x_2 x_5 + x_7 \\ x_5 + x_7 \\ x_1 + x_2 + x_3 x_7 \\ x_1 x_2 + x_3 + x_3 x_7 \\ x_7 \\ x_1 x_2 x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \\ 0 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x_2 x_5 + x_7 \\ x_5 + x_7 \\ x_5 + x_7 \\ x_5 + x_7 \\ x_7 \\ x_4 + x_7 + x_5 \\ 0 \end{cases} \quad B(F) = \begin{array}{|cccccccc|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

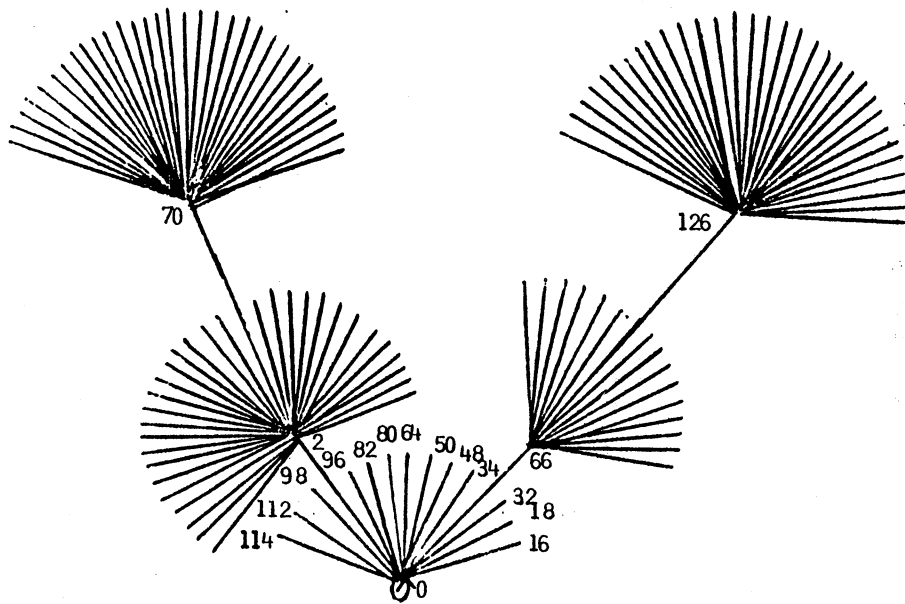
F est contractant et  $\xi$ -monotone.

$I = \{1, 2, 5, 7\}$  , B(F) vérifie les conditions 1 et 2 de la proposition 7.



Graphe d'itération de F

$$C_F(126) = \{5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31, 37, 39, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 69, 71, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127\}$$



Graphe d'itération de G

$$l_F = 6 \quad , \quad l_G = 3$$

G est meilleur que F .





• Pour  $i \in L$

$$f_i(x) = f_i((x_j)_{\substack{j \in L \\ j < i}}) \quad \text{alors} \quad g_i(x) = f_i((g_j(x))_{\substack{j \in L \\ j < i}})$$

On pose  $L = \{i_0, i_1, \dots, i_L\}$  avec  $i_0 < i_1 < \dots < i_L$

$$f_{i_0}(x) = f_{i_0}(x) = \xi_{i_0} \quad (x: \text{ ne dépend d'aucune variable})$$

$$\text{d'où } g_{i_0}(x) = \xi_{i_0}$$

$$f_{i_1}(x) = f_{i_1}(x_{i_0}) \quad \text{d'où } g_{i_1}(x) = f_{i_1}(g_{i_0}(x)) = f_{i_1}(\xi_{i_0}) = \xi_{i_1}$$

Ainsi, par récurrence on démontre que  $\forall i \in L, g_i(x) = \xi_i$ .

• Pour  $i \in I$

$$f_i(x) = f_i((x_j)_{\substack{j \in L \\ j > i}}, (x_j)_{\substack{j \in I \\ j > i}})$$

$$\text{d'où } g_i(x) = f_i((\xi_j)_{\substack{j \in L \\ j < i}}, (x_j)_{\substack{j \in L \\ j > i}}, (x_j)_{\substack{j \in I \\ j > i}})$$

On pose

$$Y^{(i)1} = ((\xi_j)_{\substack{j \in L \\ j < i}}, (x_j)_{\substack{j \in L \\ j > i}}, (x_j)_{\substack{j \in I \\ j > i}}, (\xi_j)_{\substack{j \in N \setminus (L \cup I) \\ \text{ou } (j \in I, j \leq i)}})$$

$$g_i(x) = f_i(Y^{(i)1}) \quad \text{et on a } d(Y^{(i)1}, \xi) \leq d(x, \xi)$$

Pour  $p \geq 2$  on pose :

$$Y^{(i)p} = ((\xi_j)_{\substack{j \in L \\ j < i}}, (f_j(Y^{(j)p-1}))_{\substack{j \in I \\ j > i}}, (\xi_j)_{\substack{j \in N \setminus (L \cup I) \\ (j \in I \text{ et } j \leq i)}})$$

et on a

$$g_i^p(x) = f_i(Y^{(i)p}) \quad \text{avec } d(Y^{(i)p}, \xi) \leq d(F^{p-1}(x), \xi)$$

$$\text{d'où } F(Y^{(i)p}) = \xi \quad \text{d'où } g_i^p(x) = \xi_i$$

Pour  $i \in J$

$$f_i(x) = f_i((x_j)_{\substack{j \in L \\ j < i}}, (x_j)_{\substack{j \in I \\ j < i}}, (x_j)_{\substack{j \in J \\ j < i}})$$

$$g_i(x) = f_i((\xi_j)_{\substack{j \in L \\ j < i}}, (x_j)_{\substack{j \in L \\ j > i}}, (g_j(x))_{\substack{j \in I \\ j < i}}, (x_j)_{\substack{j \in I \\ j > i}}, (g_j(x))_{\substack{j \in J \\ j < i}})$$

d'où pour  $p \geq 2$

$$\begin{aligned} g_i^p(x) &= f_i((\xi_j)_{j \in L}, (g_j^p(x))_{\substack{j \in I \\ j < i}}, (g_j^p(x))_{\substack{j \in J \\ j < i}}, (g_j^{p-1}(x))_{\substack{j \in I \\ j > i}}) \\ &= f_i((\xi_j)_{j \in L}, (f_j(Y^{(j)p}))_{\substack{j \in I \\ j < i}}, (g_j^p(x))_{\substack{j \in J \\ j < i}}, (f_j(Y^{(j)p-1}))_{\substack{j \in I \\ j > i}}) \end{aligned}$$

On pose  $J = \{j_0, j_1, \dots, j_J\}$  avec  $j_0 < j_1 < \dots < j_J$

$$g_{j_0}^p = f_{j_0}((\xi_j)_{j \in L}, (f_j(Y^{(j)p}))_{\substack{j \in I \\ j < j_0}}, (f_j(Y^{(j)p-1}))_{\substack{j \in I \\ j > j_0}})$$

$$Z^{j_0} = ((\xi_j)_{j \in L}, (f_j(Y^{(j)p}))_{\substack{j \in I \\ j < j_0}}, (f_j(Y^{(j)p-1}))_{\substack{j \in I \\ j > j_0}}, (\xi_j)_{\substack{j \in N \setminus (L \cup I) \\ \text{ou } j = j_0}})$$

si  $F^p(x) = \xi$  alors :

$$Z^{j_0} = ((\xi_j)_{j \in L}, (f_j(Y^{(j)p-1}))_{\substack{j \in I \\ j > i}}, (\xi_j)_{\substack{j \in N \setminus (L \cup I) \\ \text{ou } (j \in I, j \leq j_0)}}) = Y^{(j_0)p}$$

d'où  $g_{j_0}^p(x) = f_{j_0}(Z^{j_0}) = \xi_{j_0}$

Supposons maintenant que  $g_{j_s}^p(x) = \xi_{j_s}$  pour  $s = 0, 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} g_{j_{(r+1)}}^p(x) &= f_{j_{(r+1)}}((\xi_j)_{j \in L}, (\xi_j)_{\substack{j \in I \\ j < j_{(r+1)}}}, (\xi_j)_{\substack{j \in J \\ j < j_{(r+1)}}}, \\ &\quad (f_j(Y^{(j)p-1}))_{\substack{j \in I \\ j > j_{(r+1)}}}) \\ &= f_{j_{(r+1)}}(Y^{(j_{(r+1)})p}) \end{aligned}$$

la  $\xi$ -monotonie de  $F$  entraîne que  $f_{j(r+1)}^{(j(r+1))^p} = \xi_{j(r+1)}$

d'où  $g_{j(r+1)}^p(x) = \xi_{j(r+1)}$ .

—————x

EXEMPLES

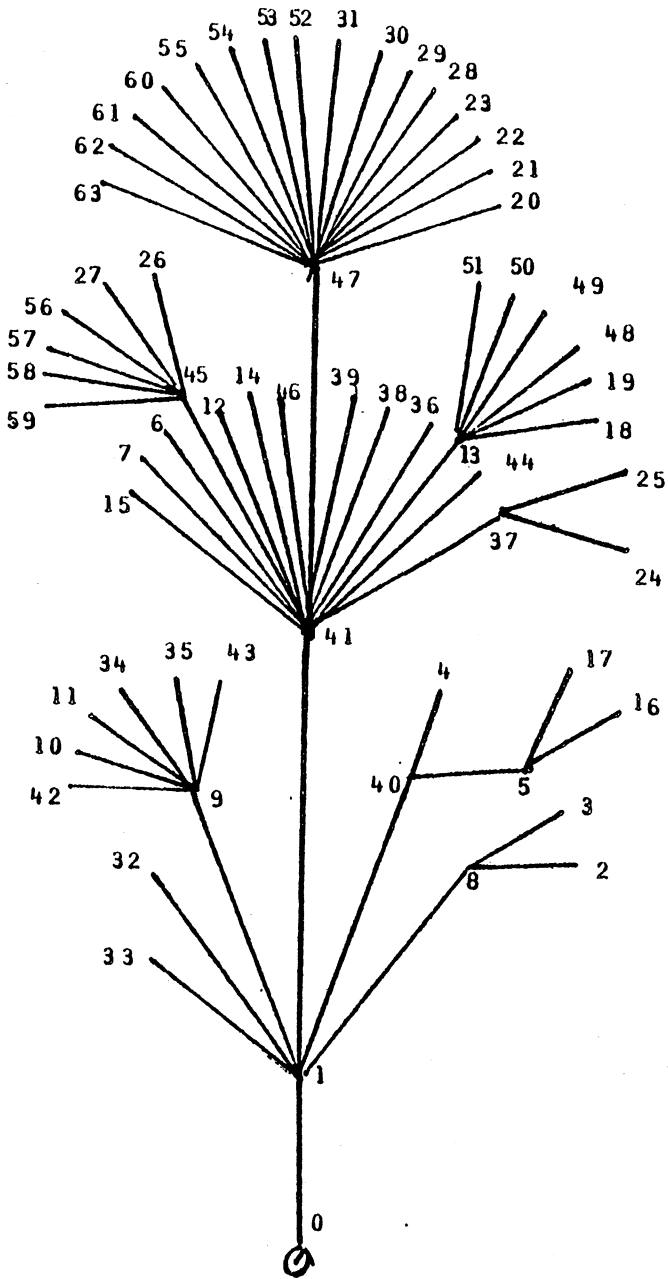
$$\textcircled{1} \quad F(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_4 \\ 0 \\ x_1 x_2 + x_4 + x_5 \\ x_2 \\ x_2 x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \end{cases} = G(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_4 \\ 0 \\ x_4 + x_5 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 x_3 + x_4 + x_5 \end{cases}$$

$$B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

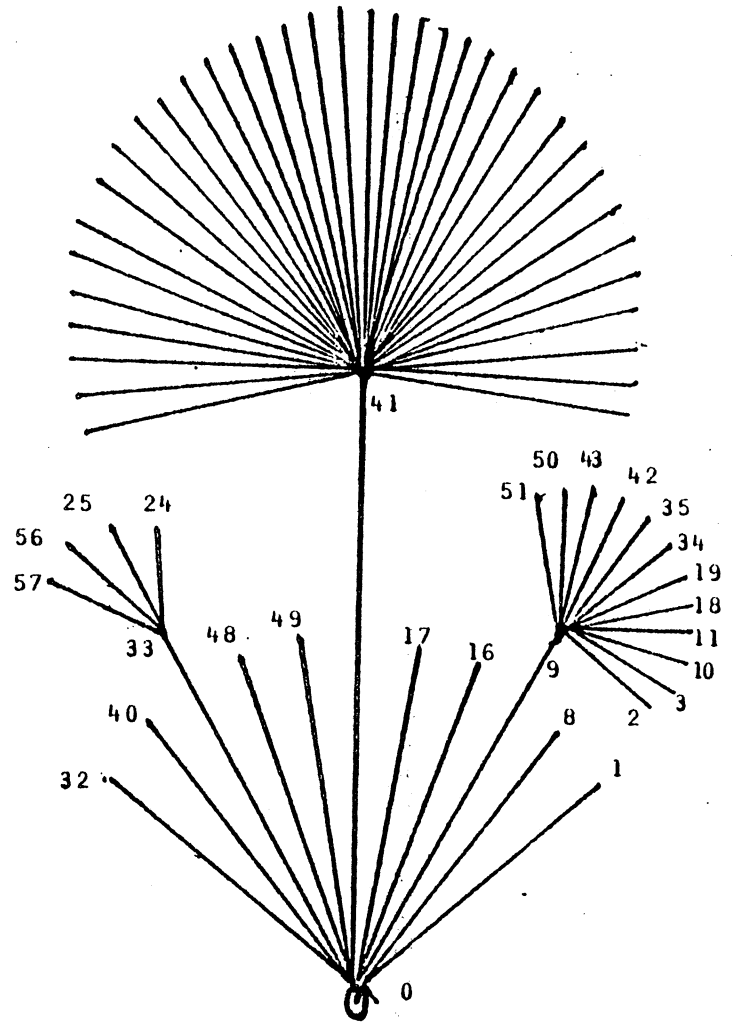
$F$  est contractant,  $\xi$ -monotone et  $B(F)$  vérifie la condition  $\bullet$  (proposition 8)

$L = \{2, 4, 5\}$ ,  $IVL = \{1\}$ ,  $J \setminus (L \cup I) = \{3, 6\}$ .

$C_G(41) = \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 61, 62, 63\}$  , card  $C_G(41) = 36$  .



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

G est meilleur que F

$$l_F = 4 ; l_G = 2$$

(2)  $n = 7$

$$F(x) = \begin{cases} x_2 + x_4 x_5 + x_6 \\ 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 x_6 \\ 0 \\ x_2 x_4 \\ x_2 x_4 + x_5 \\ x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x_2 + x_4 x_5 + x_6 \\ 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

F et G sont contractants,  
 $\xi$ -monotones  
 $L = \{2, 4, 5\}$  ;  
 $I = \{2, 4, 5, 1, 6\}$  ;  
 $J = \{2, 4, 5, 1, 6, 3, 7\}$

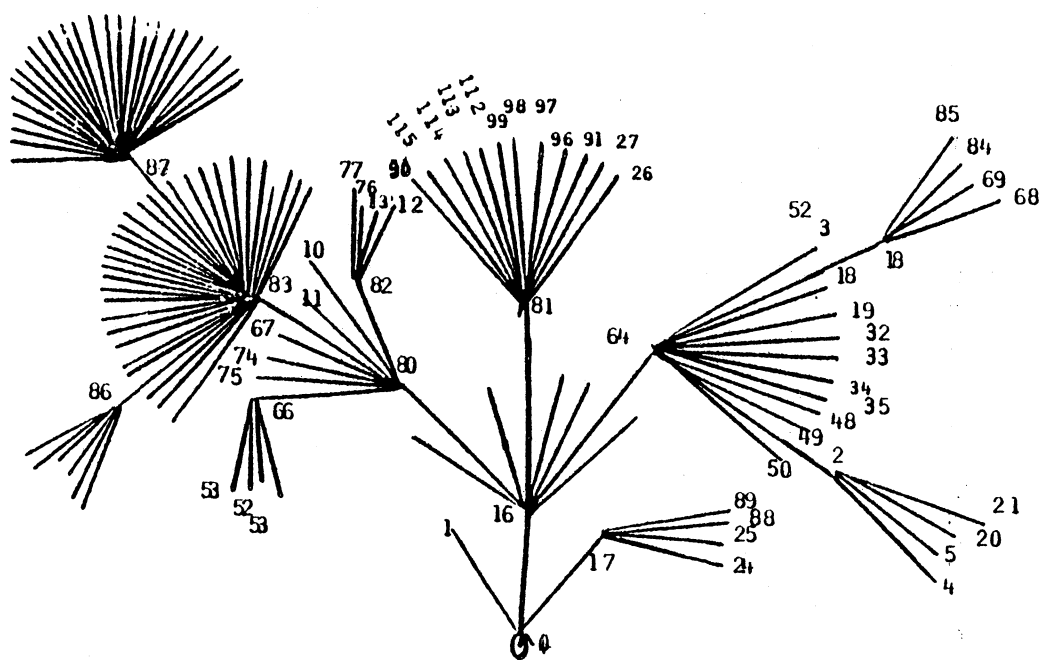
$$C_F(83) = \{6, 7, 14, 15, 22, 23, 28, 29, 30, 31, 38, 39, 54, 55, 70, 71, 78, 79, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 100, 101, 102, 103, 116, 117, 118, 119\}$$

$$C_F(87) = \{46, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127\}$$

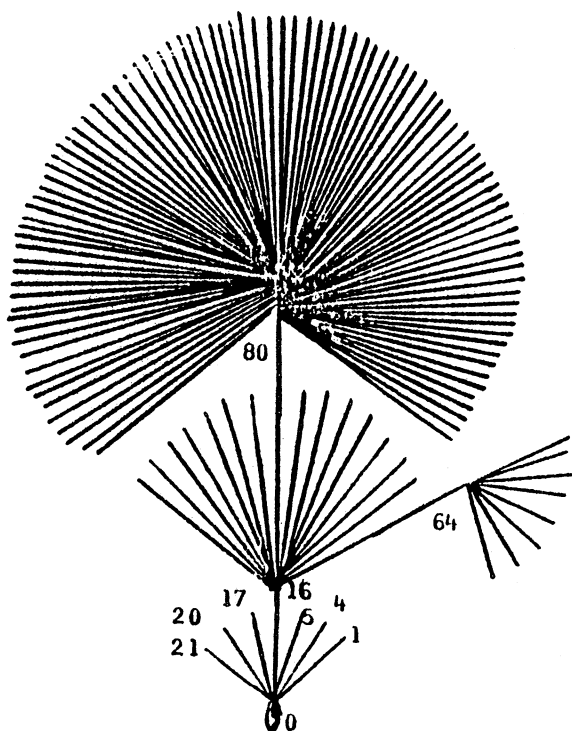
$$C_G(16) = \{8, 9, 24, 25, 64, 65, 68, 69, 72, 73, 80, 81, 84, 85, 88, 89\}$$

$$C_G(64) = \{32, 33, 36, 37, 48, 49, 52, 53\}$$

$$C_G(80) = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 70, 71, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 82, 83, 86, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127\}$$



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

$\text{Card}(C_G(80)) = 96$  ,  $\ell_F = 5$  ,  $\ell_G = 3$

G est meilleur que F

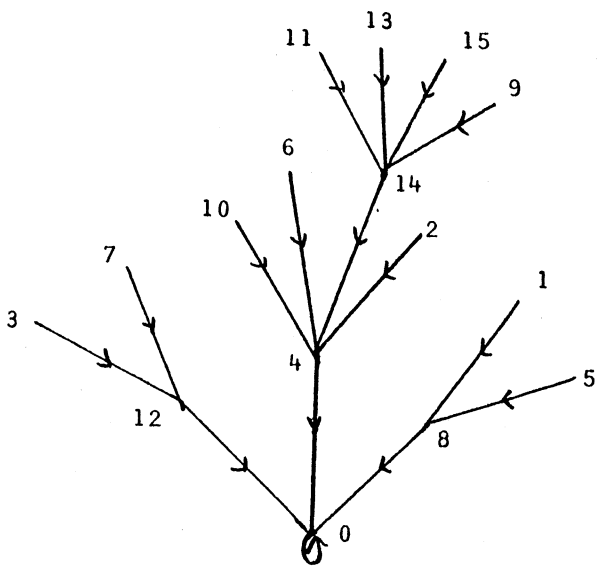
③  $n = 4$

$$F(x) = \begin{cases} x_4 \\ x_1 x_4 + x_3 \\ x_1 x_4 \\ 0 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x_4 \\ x_4 + x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{cases} \quad B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

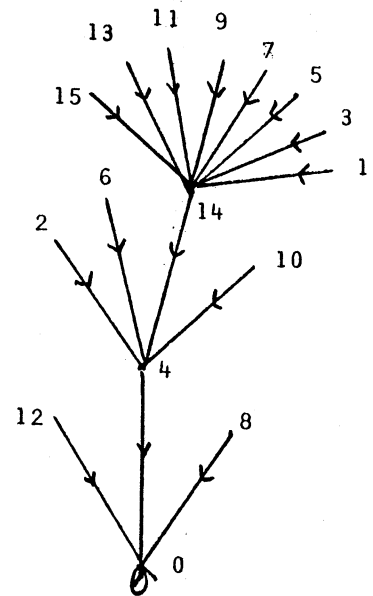
F est contractant,  $\xi$ -monotone

$L = \{4\}$ ,  $I = \{1,4\}$ ,  $J = \{1,4,3\}$ ,

$I \cup J \cup L = \{1,3,4\} \neq N$



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

$$l_F = 3, \quad l_G = 2$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
par F	0	<u>2</u>	2	<u>2</u>	1	<u>2</u>	2	<u>2</u>
par G	0	<u>3</u>	2	<u>3</u>	1	<u>3</u>	2	<u>3</u>

x	8	9	10	11	12	13	14	15
par F	1	3	2	3	1	3	2	3
par G	1	3	2	3	1	3	2	3

G n'est pas meilleur que F.

REMARQUE :

L'opérateur  $F$  de l'exemple (3) est  $\xi$ -monotone, avec  $\xi = (0000)$  de plus  $F(x) \leq G(x)$ ,  $\forall x \in \{0,1\}^n$ , et on remarque d'après la table ci-dessus que  $F$  est meilleur que  $G$ .

Plus généralement : soit  $F : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ , un opérateur contractant vérifiant  $F(x) \leq G(x)$ ,  $\forall x \in \{0,1\}^n$  et  $\xi = 0$  alors  $F$  est meilleur que  $G$ .

Autre cas :  $F$  contractant, linéaire

PROPOSITION 9

(  
 ( Soit  $F : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ , un opérateur booléen  
 ( contractant et tel que  $F(x) = Ax$ ,  $\forall x \in \{0,1\}^n$   
 ( (c'est-à-dire  $A = B(F)$  et  $A$  de rayon spectral  
 ( booléen nul) alors  
 (   
 (  $G$  est meilleur que  $F$  .  
 (

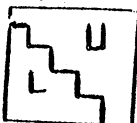
REMARQUES

\* L'opérateur  $F$ , défini ci-dessus est monotone, contractant et puisque  $\xi = 0$ , il est donc  $\xi$ -monotone

$(x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y))$  veut dire

$(d(x,0) \leq d(y,0) \Rightarrow d(F(x),0) \leq d(F(y),0))$

\*  $F$  est linéaire, son opérateur de Gauss-Seidel,  $G$  l'est aussi et  $G(x) = [I+L+L^2+\dots+L^{n-1}] \cup x$

avec  $A =$  

Soit  $A = (a_{ij})_{ij}$ ,  $i, j=1, \dots, n$

$A' = (a'_{ij})_{ij}$ ,  $i, j=1, \dots, n$  et  $G(x) = A'x$

$A'$  sera définie par :



$$* \begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a'_{kj} & \text{pour } j > i \\ a'_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a'_{kj} & \text{pour } j < i \\ a_{ii} = 0 \end{cases}$$

en effet :

pour  $i = 1$ , on a  $g_i(x) = f_i(x)$

d'où  $a'_{ij} = a_{ij}$

pour  $i > j$ , on a  $g_i(x) = f_i(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{i-1}(x), x_i, \dots, x_n)$

donc si  $f_i$  dépend de  $x_k$  ( $k < i$ ) (c'est-à-dire  $a_{ik} = 1$ )

alors  $g_i$  dépend de  $g_k(x)$  cela entraîne que  $g_i$  dépend de  $x_j$

Si  $a'_{kj} = 1$ , et si  $f_i$  dépend de  $x_j$  ( $j > i$ )

(c'est-à-dire  $a_{ij} = 1$ ) alors  $g_i$  dépend aussi de  $x_j$

(c'est-à-dire  $a'_{ij} = 1$ ) d'où  $g_i$  dépend de  $x_j$  avec  $j < i$

si  $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a'_{kj} = 1$ , c'est-à-dire  $a'_{ij} = 1$  si  $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a'_{kj} = 1$

et  $a'_{ij} = 0$  sinon pour  $j < i$

et  $g_i$  dépend de  $x_j$  avec  $j > i$  si  $(a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a'_{kj}) = 1$

d'où  $a'_{ij} = 1$  si  $a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a'_{kj} = 1$

et  $a'_{ij} = 0$  sinon pour  $j > i$

pour  $i = j$  on sait que si  $F$  est contractant,  $G$  l'est aussi d'où  $A'$  à sa diagonale nulle c'est-à-dire  $a'_{ii} = 0$ ,

$\forall i = 1, \dots, n$ .

Maintenant, nous allons donner l'expression de  $a'_{ij}$  en fonction des composantes de  $A$  seulement.

$$a_{j < i}^{i j} = \sum_{k_1=1}^{j-1} \sum_{k_2=j+1}^{i-1} \sum_{k_3=j+1}^{k_2-1} \dots \sum_{k_s=j+1}^{j+1} [a_{ik_1} + a_{ik_2} a_{k_2 k_1} + \dots$$

$$\dots + a_{ik_2} a_{k_2 k_3} \dots a_{k_{s-1} k_s} a_{k_s k_1}] a_{k_1 j}^{i-1} \sum_{k_1=j+1}^{k_1-1} \sum_{k_2=j+1} \dots$$

$$\dots \sum_{k_s=j+1}^{j+1} \sum_{k_{s+1}=1}^{j-1} a_{1k_1} a_{k_1 k_2} \dots a_{k_{s-1} k_s} a_{k_s k_{s+1}} a_{k_{s+1} j}^{i-1}$$

avec  $k_1 < j$  et  $k_{s+1} < j$  ; d'où :

$$a_{j < i}^{i j} = \sum_{k_1=1}^{j-1} \sum_{k_2=j+1}^{i-1} \sum_{k_3=j+1}^{k_2-1} \dots \sum_{k_s=j+1}^{j+1} [a_{ik_1} + a_{ik_2} a_{k_2 k_1} + \dots + a_{ik_1} a_{k_1 k_2} \dots$$

$$\dots a_{k_{s-1} k_s} a_{k_s k_1}] [a_{k_1 j}^{k_1-1} \sum_{\ell_1=1}^{\ell_1-1} \sum_{\ell_2=1}^{\ell_2-1} \dots$$

$$\sum_{(k_1-1)=1}^1 [a_{k_1 \ell_1} a_{\ell_1 j} + a_{k_1 \ell_1} a_{\ell_1 \ell_2} a_{\ell_2 j} + \dots$$

$$\dots + a_{k_1 \ell_1} a_{\ell_1 \ell_2} \dots a_{\ell_{(k_1-2)} \ell_{(k_1-1)}} a_{\ell_{(k_1-1)} j}^{(k_1-1)}]$$

et

$$a_{j > i}^{i j} = a_{ij}^{i-1} \sum_{k_1=1}^{k_1-1} \sum_{k_2=1}^1 \dots \sum_{k(i-1)=1}^1 [a_{ik_1} a_{k_1 j} + a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} + \dots$$

$$\dots + a_{ik_1} a_{k_1 k_2} \dots a_{k(i-2) k(i-1)} a_{k(i-1) j}^{k(i-1)}]$$

Première démonstration de la proposition 9.

Supposons que  $A^p x = 0$  et démontrons que  $A^i p_x = 0$

$$A^p x = 0 \text{ entraine } \begin{cases} a_{it_1} a_{t_1 t_2} \dots a_{t_{p-1} j} = 0 \\ t_s = 1, \dots, n, \text{ et } s = 1, \dots, p-1 \\ \text{pour } i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

il est facile de déduire à partir des expressions de  $a'_{ij}$  pour  $i > j$  et  $i < j$  que :

$$a'_{ij}^{(p)} \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(p)}$$

avec  $a'_{ij}^{(p)}$ ,  $a_{ij}^{(p)}$  sont les composantes respectives de  $A'^p$  et de  $A^p$ , d'où

$$a'_{ij}^{(p)} x_j \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(p)} x_j = 0$$

entraîne que  $a'_{ij}^{(p)} x_j = 0$

donc  $a'_{ij}^p x_j = 0$  pour  $i, j = 1, \dots, n$ .

Deuxième démonstration :

On a vu dans la remarque que  $A' = (I+L+\dots+L^{n-1})U$  donc si on a  $x$  tel que  $A^p x = 0$  il vient  $[L+U]^p x = 0$  (opération booléenne)

alors, si je fais  $[A']^p x = [(I+L+\dots+L^{n-1})U]^p x$  on n'a que des termes de la forme  $A_1 \dots A_p x$  où  $A_i$  est  $L$  ou  $U$ . Ils sont donc tous nuls, donc  $A'^p x = 0$ .

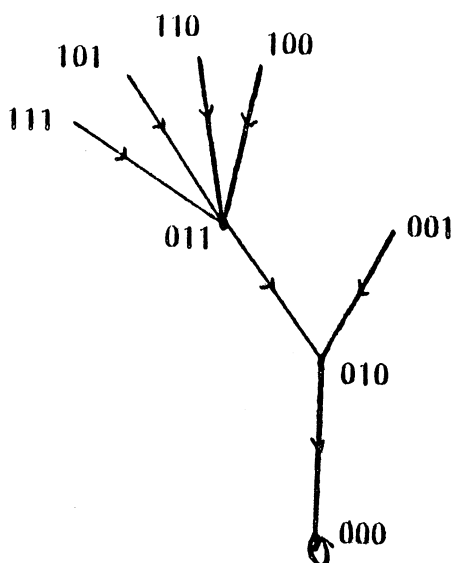
— X —

EXEMPLES :

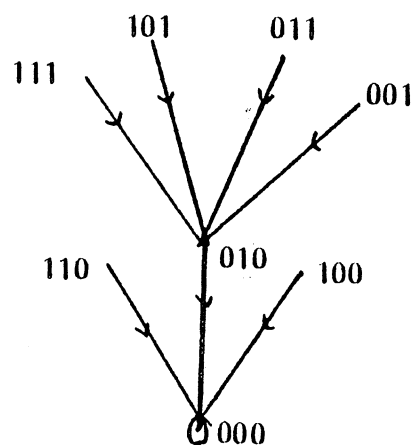
①  $n = 3$

$$F(n) = \begin{cases} 0 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 \end{cases} \quad G(n) = \begin{cases} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{cases} \quad B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$F$  est linéaire contractant,  $F(x) = B(F) \cdot x \quad \forall x \in \{0, 1\}^3$



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

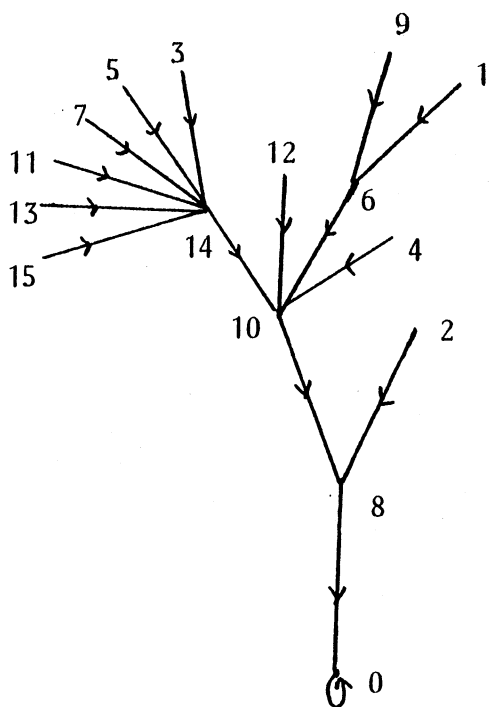
x	000	001	010	011	100	101	110	111
par F	0	2	1	2	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>
par G	0	2	1	2	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>2</u>

G est meilleur que F

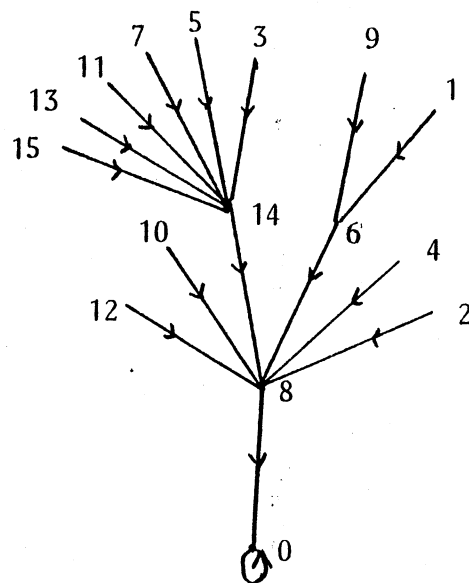
② n = 4

$$F(x) = \begin{cases} x_2 + x_3 \\ x_4 \\ x_2 + x_4 \\ 0 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x_2 + x_3 \\ x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{cases} \quad B(F) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

F est linéaire contractant ,  $F(x) = B(F)x \quad \forall x \in \{0,1\}^4$



Graphe d'itération de F



Graphe d'itération de G

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
par F	0	<u>4</u>	2	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	1
par G	0	<u>3</u>	2	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	1

x	9	10	11	12	13	14	15
par F	<u>4</u>	2	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
par G	<u>3</u>	2	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>3</u>

G est meilleur que F .

## V. CONCLUSION

Sous l'hypothèse (assez forte) de contraction booléenne, d'un opérateur discret nous avons pu élaborer un certain nombre de conclusions suffisantes assurant que le mode opératoire série est "meilleur" que le mode opératoire parallèle. Bien que ces conditions ne soient que suffisantes elles ont l'intérêt d'être explicites (en ce sens qu'elles portent principalement sur la matrice d'incidence  $B(F)$ ). Par ailleurs, il est apparamment difficile d'élargir encore la formulation la plus générale que nous avons pu établir : des exemples montrent que dès qu'on modifie un peu la matrice d'incidence à partir de la forme donnée,  $G$  n'est plus meilleur que  $F$ . Enfin, si l'on sort de la condition de contraction de  $F$ , la comparaison fine de  $F$  et  $G$  semble devenir inextricable. Signalons enfin que les hypothèses prises assurent en fait une "régularisation" très forte du graphe d'itération dans le passage de  $F$  à  $G$ , phénomène évident à l'oeil, (voir les différents exemples), mais qu'il resterait peut être a mieux comprendre, et à formaliser.



**CHAPITRE II**

**ITERATIONS DANS  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  :**

**POINTS FIXES ET CYCLES ATTRACTIFS**





## 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du comportement local d'une itération discrète au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle. Nous considérons des itérations du type approximations successives conduites dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  et nous transposons dans ce contexte discret des résultats classiques d'analyse appliquée (itérations dans  $\mathbb{R}^n$ ).

Ceci est possible à partir de notions topologiques qui nous servent d'outils de base : (distance vectorielle discrète, voisinages, dérivées, etc...). On peut alors caractériser la convergence locale d'une itération discrète vers un point fixe ou vers un cycle.

Cette étude élargit au contexte des ensembles  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  l'analogie développée par F. ROBERT [5,8] entre les itérations dans  $\mathbb{R}^n$  et celles qui opèrent sur le n-cube  $\{0,1\}^n$ .

## 2. NOTATIONS et DEFINITIONS

Dans tout ce chapitre on désignera par  $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ; l'ensemble des entiers modulo  $p$ .

Soit  $A$  l'ensemble défini par  $A = \{x \in \mathbb{N} ; 0 < x < \frac{p}{2}\}$  et  $-A = \{-x ; x \in A\}$ .

On désignera par  $Z_p = A \cup (-A)$  un sous-ensemble des entiers relatifs, sur lequel on va définir une addition et une multiplication, mais tout d'abord précisons certaines notations :

$\sigma(x)$  : désigne le signe de  $x$  ;  $\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\lfloor \alpha \rfloor$  : est la partie entière inférieure de  $\alpha$ .

$+$ ,  $\cdot$  : addition et multiplication dans  $\mathbb{Z}$

$\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\otimes$  : addition, soustraction et multiplication dans  $E$ .

Addition dans  $Z_p$  :

Pour  $x$  et  $y$  quelconques dans  $Z_p$  on définit  
 $x \oplus y = \sigma(x+y) \cdot \min(|x+y| ; \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil)$

Multiplication dans  $Z_p$  :

$x * y = \sigma(x \cdot y) \cdot \min(|x \cdot y| ; \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil)$ .

**Remarques :**

1.  $\oplus$  et  $*$  sont des lois internes sur  $Z_p$ , commutatives et associatives, et l'addition est distributive par rapport à la multiplication dans chacun des ensembles  $A$  et  $(-A)$  mais non dans  $Z_p$ .

Exemple :  $p = 5$ . Alors :

$$A = \{0, 1, 2\} ; -A = \{-2, -1, 0\} ; \text{et } Z_p = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Soient  $a, b, c$  dans  $A$  vérifions que :

$$a * (b \oplus c) = a * b \oplus a * c$$

prenons par exemple  $a = 2$ ,  $b = 1$  et  $c = 2$  :

$$2 * (1 \oplus 2) = 2 * 2 = 2$$

$$2 * 1 \oplus 2 * 2 = 2 \oplus 2 = 2$$

Si on prend maintenant  $a, b, c$  dans  $E$

Par exemple  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$

on a :

$$a * (b \oplus c) = 2 * (1 \oplus (-2)) = 2 * (-1) = -2$$

$$a * b \oplus a * c = 2 * 1 \oplus 2 * (-2) = 2 \oplus (-2) = 0$$

2. Pour  $p = 2$  on prend pour  $Z_p$  l'algèbre booléenne  $B = \{0, 1\}$  et on remarque que  $\oplus$  et  $*$  correspondent dans ce cas à l'addition et à la multiplication booléennes.

### 3. DISTANCES VECTORIELLES DISCRETES

On va définir sur  $E^n$  deux distances  $d_1$  et  $d_2$  (avec  $d_2$  plus fine que  $d_1$ ). On utilisera l'une ou l'autre suivant qu'on aura besoin de majorations fines ou non.

$d_1$  est la métrique de Hamming définie par [10] : pour  $x, y$  dans  $E^n$ .

$$d_1(x, y) = (d_{1i}(x_i, y_i))_{i=1, \dots, n}$$

$$\text{avec } d_{1i}(x_i, y_i) = |x_i - y_i| \text{ mod } p$$

↑

soustraction dans  $Z$

il est clair que  $d_1$  vérifie les axiomes suivants :

$$d_1(x, y) = d_1(y, x)$$

$$d_1(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$d_1(x, y) \leq d_1(x, z) \oplus d_1(z, y)$$

↑

addition dans  $(Z_{2p})^n$

composante à composante

$d_2$  est la métrique obtenue à partir de la fonction poids de Lee  $\omega_L$  [10], avec  $\omega_L(x) = |x|$  pour  $x \in E$  ;

$$\text{et } |x| = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} p \\ -x \text{ mod } p & \text{si } \frac{1}{2} p < x < p-1 \end{cases}$$

$d_2$  sera définie par : pour  $x, y$  dans  $E^n$  :

$$d_2(x, y) = (d_{2i}(x_i, y_i))_{i=1, \dots, n}$$

$$\text{avec } d_{2i}(x_i, y_i) = \omega_L(x_i \ominus y_i)$$

$d_{2i}$  correspond à la longueur du plus court chemin joignant  $x_i$  et  $y_i$ .  
 $d_2$  vérifie les axiomes suivants :

$$\begin{aligned}
 d_2(x,y) &= d_2(y,x) \\
 d_2(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\
 d_2(x,y) &< d_2(x,z) + d_2(z,y) \\
 &\quad \uparrow \text{somme dans } \mathbb{Z}_p^n \\
 &\quad \uparrow \text{inégalité dans } \mathbb{Z}_p^n \\
 &\quad \text{(composantes à composantes)}
 \end{aligned}$$

**Exemple :** Pour  $E^3 = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$ .

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d_1(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d_2(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{on a :}$$

$$d_1(x,y) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d_2(x,y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dans les deux cas on a :

$$d_2(x,y) < d_1(x,y)$$

c'est-à-dire  $d_1$  est plus fine que  $d_2$ .

**Remarques :**

1. Dans le cas où  $p$  est premier,  $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps. On peut donc considérer  $E^n$  comme espace vectoriel sur  $E$ . La loi externe  $\diamond$  est alors définie comme suit : pour  $x$  quelconque dans  $E^n$ , et  $\lambda$  dans  $E$  on définit :

$$\lambda \diamond x = \begin{bmatrix} \lambda \odot x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \odot x_n \end{bmatrix}$$

2. La distance  $d_2$  vérifie alors les propriétés suivantes :

$$d_2(\lambda \diamond x, 0) < |\lambda| * d_2(x, 0)$$

$$d_2(x \oplus y, 0) < d_2(x, 0) * d_2(y, 0)$$

4. Voisinage à gauche et à droite.

Soit  $x \in E^n$ .

On notera par  $V_x^+$  (resp.  $V_x^-$ ) le voisinage à droite de  $x$  (resp. à gauche) ; et par  $V_x$  l'union de  $V_x^+$  et  $V_x^-$ . Ces ensembles sont définis comme suit :

$$V_x^+ = \{ y \in E^n / \exists i; y = x \oplus e_i \text{ ou } y = x \}$$

$e_i$  désigne un vecteur de base de  $E^n$  (toutes les composantes de  $e_i$  sont nulles sauf la  $i^{\text{ème}}$  égale à 1).

$$V_x^- = \{ y \in E^n / \exists i; y = x \ominus e_i \text{ ou } y = x \}$$

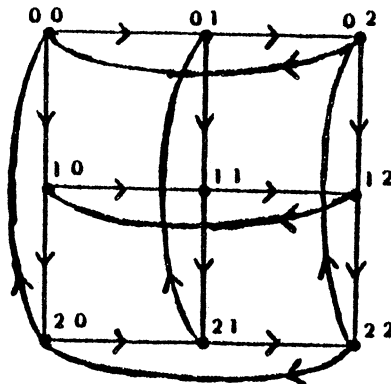
$V_x = V_x^+ \cup V_x^-$  est appelé voisinage immédiat de  $x$ , il peut aussi être défini à l'aide de la distance  $d_2$  de la manière suivante :

$$V_x = \{ y \in E^n / \exists i; d_2(x, y) < e_i \}$$

↑  
composante à composante.

Exemple :

$$E^n = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2.$$



Chaque point de cette grille représente un élément de  $E^2$  (les bords de la grille se raccordent) et de chaque point partent deux flèches vers les voisins à droite, pour déterminer les voisins à gauche on inverse le sens des flèches

$$V_{00}^+ = \{ 01, 10 \} \text{ et } V_{00}^- = \{ 20, 02 \}.$$

### 5. CARACTERISATION DES APPLICATIONS SUR $E^n$ .

Soit  $F : E^n \rightarrow E^n$  elle est définie par  $n$  composantes  $f_i$ ,  $i=1, \dots, n$  et chaque composante peut être identifiée à un polynôme unique  $P_i$ , de degré  $(p-1)^n$  dans  $E[X]$  (ensemble des polynômes sur  $E$ ).

Ce polynôme est défini comme suit :

Soit :

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E^n, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f_{ia}(X) = (1 - (x_1 - a_1)^{p-1}) \dots (1 - (x_n - a_n)^{p-1})$$

alors :

$$P_i(X) = \sum_{a \in E^n} f_i(a) f_{ia}(X) \quad [13]$$

Cette représentation polynomiale de  $F$  à un grand intérêt dans la pratique quand  $x$  et  $p$  sont grand, car  $F$  ne peut être donnée par sa représentation dans  $E^n$  (c'est-à-dire par sa table).

### 6. DERIVEE A DROITE ET A GAUCHE

Soit  $F : E^n \rightarrow E^n$  pour chaque élément  $x$  dans  $E^n$  on définit deux matrices notées  $\Delta^+ F(x)$  et  $\Delta^- F(x)$  qui représentent respectivement la dérivée à droite et la dérivée à gauche de  $F$  en  $x$ .

On pose :

$$x_i^+ = x \oplus e_i \quad ; x_i^+ \quad V_x^+$$

$$x_i^- = x \ominus e_i \quad ; x_i^- \quad V_x^-$$

alors :

$$\Delta^+ F(x) = ( F(x_i^+) \ominus F(x) )_{i=1,2,\dots,n}$$

↑  
différence composante a composante

et

$$\Delta^- F(x) = ( F(x) \ominus F(x_i^-) )_{i=1,2,\dots,n}$$

Exemple :

$$F : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{2} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$$

$$F(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{cases}$$

pour  $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $V_x^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  ;  $V_x^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\Delta^+ F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \left( F \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ominus F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \left( F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ominus F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^- F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \left( F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ominus F \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \left( F \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ominus F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

## 7. DERIVEES ET DISTANCES VECTORIELLES

### Proposition 1

Soit  $x \in E^n$ . Alors :

pour tout  $y$  dans  $V_x$ , on a :

1. Si  $y \in V_x^+$

$$F(x) \ominus F(y) = \Delta^+ F(x) \ominus (x \ominus y)$$

$$F(x) \ominus F(y) = \Delta^- F(y) \ominus (x \ominus y)$$

2. Si  $y \in V_x^-$

$$F(x) \ominus F(y) = \Delta^+ F(y) \ominus (x \ominus y)$$

$$F(x) \ominus F(y) = \Delta^- F(x) \ominus (x \ominus y)$$



Démonstration : triviale ( $y = x \oplus e_1 = \Delta^+ F(x) \oplus (x \oplus y) = [\Delta^+ F(x)]_{.1}$ )

**Proposition 2 :**

Soit  $x \in E^n$ . Alors :

pour tout  $y$  dans  $V_x$  on a

1. Si  $y \in V_x^+$

$$d_1(F(x), F(y)) < \Delta^+ F(x) * d_1(x, y)$$

et

$$d_1(F(x), F(y)) < \Delta^- F(x) * d_1(x, y)$$

2. Si  $y \in V_x^-$

$$d_1(F(x), F(y)) < \Delta^+ F(y) * d_1(x, y)$$

et

$$d_1(F(x), F(y)) < \Delta^- F(x) * d_1(x, y)$$

(\* désigne la multiplication dans  $Z_{2p}^n$ )

Et en utilisant la distance  $d_2$  on a la proposition suivante :

**Proposition 3 :**

Soit  $x \in E^n$ ,  $y \in V_x$ . Alors :

1. Si  $y \in V_x^+$ , on a :

$$d_2(F(x), F(y)) = |\Delta^+ F(x)| * d_2(x, y)$$

$$= |\Delta^- F(y)| * d_2(x, y)$$

2. Si  $y \in V_x^-$ , on a :

$$d_2(F(x), F(y)) = |\Delta^+ F(y)| * d_2(x, y)$$

$$= |\Delta^- F(x)| * d_2(x, y)$$

**Remarque :**

Soit  $B$  une matrice sur  $E$ , avec  $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  ;

$$|B| = (|b_{ij}|)_{i,j=1,\dots,n} \text{ avec } b_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \frac{p}{2} \\ -x \text{ mod } p & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple**

$$F : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$$

x		F(x)	
0	0	2	0
0	1	1	1
0	2	1	0
1	0	1	2
1	1	2	0
1	2	0	0
2	0	1	1
2	1	2	1
2	2	1	0

Sur cet exemple on va vérifier les propositions précédentes pour le voisinage à droite par exemple. pour  $x = 20$  ;  $x_1^+ = 00$  et  $x_2^+ = 21$   
 $F(x) = 11$  ;  $F(x_1^+) = 20$  et  $F(x_2^+) = 21$

$$\Delta^+ F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta^+ F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour  $y = x_1^+ \in V_x^+$  on a :

$$f(x) \ominus F(y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et 
$$\Delta^+ F(x) \ominus (x \ominus y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'où  $F(x) \ominus F(y) = \Delta^+ F(x) \ominus (x \ominus y)$

$$d_1(F(x), F(y)) = d_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta^+ F(x) * d_1(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

↑  
produit dans  $\mathbb{Z}_6 = (\mathbb{Z}_{2 \times 3})$

d'où  $d_1(F(x), F(y)) < \Delta^+ F(x) * d_1(x, y)$

$$d_2(F(x), F(y)) = d_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta^+ F(x)| * d_2(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑  
produit dans  $Z_3$

d'où  $d_2(F(x), F(y)) = |\Delta^+ F(x)| * d_2(x,y)$

A l'aide de la proposition 3, on va maintenant donner une majoration de  $d_2(F(x), F(y))$  pour  $x$  et  $y$  quelconques dans  $E^n$ . Pour cela on prend une chaîne joignant  $x$  et  $y$ .

$$[x = u_{11}, \dots, u_{1k_1}, u_{21}, \dots, u_{2k_2}, \dots, u_{r1}, \dots, u_{rk_r} = y]$$

où chaque point est voisin du suivant et en plus

$$d_2(u_{ij}, u_{i j+1}) = e_{t_i}, \text{ pour } j=1, \dots, k_i-1.$$

Alors :

$$(1) \quad d_2(F(x), F(y)) < d_2(F(u_{11}), F(u_{12})) \diamond d_2(F(u_{12}), F(u_{13})) \diamond \dots$$

$$\dots \diamond d_2(F(u_{rk_r-1}), F(u_{rk_r}))$$

dans la chaîne qu'on a prise, deux éléments successifs sont voisins, mais on n'a pas précisé si ce sont des voisins à droite ou à gauche. D'où la notation suivante :

$$\Delta^+ F(\alpha, \beta) = \begin{cases} \Delta^+ F(\alpha) & \text{si } \beta \in V_\alpha^+ \\ \Delta^+ F(\beta) & \text{si } \beta \in V_\alpha^- \end{cases}$$

de même

$$\Delta^- F(\alpha, \beta) = \begin{cases} \Delta^- F(\alpha) & \text{si } \beta \in V_\alpha^- \\ \Delta^- F(\beta) & \text{si } \beta \in V_\alpha^+ \end{cases}$$

Alors le deuxième membre de l'inégalité (1) est égale à :

$$|\Delta^+ F(u_{11}, u_{12})| * d_2(u_{11}, u_{12}) \diamond |\Delta^+ F(u_{12}, u_{13})| * d_2(u_{12}, u_{13})$$

$$\diamond \dots \diamond |\Delta^+ F(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})| * d_2(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})$$

et en utilisant les dérivées à gauche il devient :

$$|\Delta^- F(u_{11}, u_{12})| * d_2(u_{11}, u_{12}) \diamond |\Delta^- F(u_{12}, u_{13})| * d_2(u_{12}, u_{13}) \\ \diamond \dots \diamond |\Delta^- F(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})| * d_2(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})$$

les vecteurs  $d_2(u_{11}, u_{12}), \dots, d_2(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})$  constituent des vecteurs de base, mais il se peut qu'ils ne soient pas tous distincts même si on prend une chaîne de longueur minimale (à la différence de ce qui se passe pour  $p=2$  ; cf. [8] page 154). Nous allons majorer  $d_2(F(x), F(y))$  d'une façon plus globale en posant :

$$M^+ = \sup_{z \in [x, y]} (|\Delta^+ F(z)|)$$

et

$$M^- = \sup_{z \in [x, y]} (|\Delta^- F(z)|)$$

( $M^+$  et  $M^-$  dépendent de la chaîne choisie  $[x, y]$ ).

Alors

$$d_2(F(x), F(y)) < M^+ * (d_2(u_{11}, u_{12}) \diamond \dots \diamond d_2(u_{rk_r-1}, u_{rk_r}))$$

Or

$$d_2(u_{i k_i}, u_{i+1 l}) \diamond \dots \diamond d_2(u_{i+1 k_{i+1}-1}, u_{i+1 k_{i+1}}) \\ = |\alpha_{i+1}| * e_{t_{i+1}}$$

dans le cas où la chaîne est de longueur minimale on a

$$|\alpha_{i+1}| * e_{t_{i+1}} = d_2(x, z)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_j = x_j & \text{si } j \neq t_{i+1} \\ z_j = y_j & \text{si } j = t_{i+1} \end{array} \right.$$

d'où la :

**Proposition 4 :**

Soient  $x, y \in E^n$ , et  $[x y]$  une chaîne de longueur minimale joignant  $x$  et  $y$  alors :

$$d_2(F(x), F(y)) \leq M^+ * d_2(x, y)$$

et

$$d_2(F(x), F(y)) \leq M^- * d_2(x, y)$$

(\* multiplication dans  $(Z_p)^n$ ).

**Remarques :**

1. Dans la majoration ci-dessus, il aurait suffi de prendre au lieu de  $M^+$  (resp.  $M^-$ ) la quantité suivante :

$$N^+ = \sup ( |\Delta^+ F(u_{11}, u_{12})|; \dots; |\Delta^+ F(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})| )$$

$$( \text{resp. } N^- = \sup ( |\Delta^- F(u_{11}, u_{12})|; \dots; |\Delta^- F(u_{rk_r-1}, u_{rk_r})| ) )$$

2. Pour  $x$  et  $y$  quelconques dans  $E^n$ , il n'existe pas toujours un  $\xi$  dans  $E^n$  tel que  $d_2(F(x), F(y)) = |\Delta^+ F(\xi)| * d_2(x, y)$  sauf pour  $x$  et  $y$  voisins (cf prop.3)

3. On peut donner aussi une majoration de  $d_1(F(x), F(y))$  avec  $x$  et  $y$  quelconques dans  $E^n$ , à l'aide des dérivées à droite et à gauche. Dans la proposition 4 on enlève les  $|$  dans les définitions de  $M^+$  et de  $M^-$ , mais dans ce cas  $*$  et  $\diamond$  désignent la multiplication et l'addition dans  $(Z_{2p})^n$ .

Dans ce cas, même si  $x$  et  $y$  sont voisins on n'a pas toujours

$$d_1(F(x), F(y)) = \Delta^+ F(s) * d_1(x, y) \quad (\text{cf prop.2})$$

On peut faire la même remarque 1 pour  $d_1$ , en enlevant les  $|$  dans l'écriture de  $N^+$  et de  $N^-$ .

**Exemple :**

On prend le même opérateur que l'exemple de la page 75 .

Pour  $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  on choisit une chaîne de longueur minimale.

$$x = u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y$$

$$u_2 = u_1 \oplus e_1 \quad \text{et} \quad u_3 = u_2 \ominus e_2$$

d'où

$$\Delta^+ F(u_1, u_2) = \Delta^+ F(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad |\Delta^+ F(u_1)| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta^+ F(u_2, u_3) = \Delta^+ F(u_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} ; \quad |\Delta^+ F(u_3)| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^+ = \max \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_2(F(x), F(y)) = d_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$d_2(x, y) = d_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N^+ * d_2(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑  
produit dans  $Z_3$

d'où

$$d_2(F(x), F(y)) < N^+ * d_2(x, y).$$

$$d_1(x, y) = d_1 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$d_1(F(x), F(y)) = d_1 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dans ce cas

$$N^+ = \sup (\Delta^+ F(u_1, u_2), \Delta^+ F(u_2, u_3))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N^+ * d_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

↑  
produit dans  $Z_6$

d'où

$$d_1(F(x), F(y)) < N^+ * d_1(x, y).$$

## 8. Application.

### 8.1 Caractérisation de la convergence locale dans un voisinage immédiat d'un point fixe ou d'un cycle.

#### Définition 1 :

Soit  $\xi = F(\xi)$  un point fixe de  $F$  dans  $E^n$ .

$\xi$  sera dit attractif dans son voisinage immédiat à droite  $V_\xi^+$  (resp.  $V_\xi^-$ ) si les conditions suivantes sont satisfaites :

a)  $F(V_\xi^+) \subset V_\xi^+$  (resp.  $F(V_\xi^-) \subset V_\xi^-$ ).

b) Pour tout  $x^0$  pris dans  $V_\xi^+$  (resp. dans  $V_\xi^-$ ) l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$  (qui reste dans  $V_\xi^+$  (resp. dans  $V_\xi^-$ ) d'après a)) finit par stationner en  $\xi$  au bout d'au plus  $n$  pas ( $x^n = F^n(x^0) = \xi$ )

#### Définition 2 :

$\xi$  sera dit attractif dans tout son voisinage immédiat  $V_\xi$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

a)  $F(V_\xi) \subset V_\xi$ .

b) Pour tout  $x^0$  pris dans  $V_\xi$ , l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$ , finit par stationner en  $\xi$  au bout d'au plus  $2n$  pas ( $x^{2n} = F^{2n}(x^0) = \xi$ )

**Définition 3 :**

Soit  $C = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  un cycle de longueur  $r$  pour  $F$ .  
 $(a_i \in E; i=0, \dots, r-1)$ .  $C$  sera dit attractif dans son voisinage immédiat à droite (resp. à gauche) si :

$$a) \quad F(V_{a_0}^+) \subset V_{a_1}^+; F(V_{a_1}^+) \subset V_{a_2}^+; \dots; F(V_{a_{r-1}}^+) \subset V_{a_0}^+.$$

$$(resp. \quad F(V_{a_0}^-) \subset V_{a_1}^-; F(V_{a_1}^-) \subset V_{a_2}^-; \dots; F(V_{a_{r-1}}^-) \subset V_{a_0}^-).$$

b) Pour tout  $x^0$  pris dans l'un quelconque des voisinages immédiat à droite (resp. à gauche) ; disons  $V_{a_1}^+$  (resp.  $V_{a_1}^-$ ) ; l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$  (qui parcourt les  $V_{a_1}^+$  (resp. les  $V_{a_1}^-$ ) d'après a) ) finit par atteindre  $a_1$  au bout de  $(rp)$  pas ( $p < n$ ).

$$\exists p; (0 < p < n) : x^{rp} = F^{rp}(x^0) = a_1.$$

**Remarque :**

La condition a) dans la définition ci-dessus entraîne que les voisinages immédiats à droite (resp. à gauche) des  $a_i$  sont deux à deux d'intersection vide.

En effet si  $x \in V_{a_i}^+ \cap V_{a_j}^+$  avec  $i \neq j$  l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$  partant de  $x^0 = x$  serait alors telle que :

$$x^{rp} = a_i \text{ et } x^{rp'} = a_j \text{ (avec } p \text{ et } p' < n)$$

alors on aurait :  $x^{r(p+p')} = a_i = a_j$  contradiction avec  $a_i \neq a_j$ .

Nous allons établir maintenant une caractérisation pour qu'un point fixe soit attractif dans son voisinage à droite ou à gauche.

**Proposition 5**

Pour que  $\xi$  soit attractif dans son voisinage immédiat à droite il faut et il suffit que :

1-  $\Delta^+ F(\xi)$  ait au plus dans chaque colonne une composante non nulle égale à 1

$$2- \prod_{i=1}^n (\Delta^+ F(\xi))_{ii} = 0 \text{ (produit dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ ) .}$$



**Remarque :**

On a la même proposition pour l'attraction dans le voisinage immédiat à gauche, il suffit de remplacer  $\Delta^+ F(\xi)$  par  $\Delta^- F(\xi)$ .

**Démonstration**

**$\alpha$ ) Condition suffisante**

Si 1) et 2) sont satisfaites alors:

soit  $x \in V_\xi^+$  alors  $F(x) \ominus \xi = \Delta^+ F(\xi) \ominus \underbrace{(x \ominus \xi)}_{=e_i}$

or  $\Delta^+ F(x)$  ne contient qu'un seul 1 par colonne au plus

$$\text{alors } [\Delta^+ F(x)]_{.i} = 0 \quad \text{ou} \quad [\Delta^+ F(x)]_{.i} = e_j$$

$$\text{d'où } F(x) = \xi \quad \text{ou} \quad F(x) = \xi \ominus e_j \quad V_\xi^+$$

alors la suite  $x^{r+1} = F(x^r)$  partant de  $x^0 = x$  reste dans  $V_\xi^+$   
d'où

$$\begin{aligned} x^r \ominus \xi &= F(x^{r-1}) \ominus F(\xi) = \Delta^+ F(\xi) \ominus (x^{r-1} \ominus \xi) \\ &= \Delta^+ F(\xi) \ominus (F(x^{r-2}) \ominus F(\xi)) \\ &= \Delta^+ F(\xi) \ominus \Delta^+ F(\xi) \ominus (x^{r-2} \ominus \xi) \\ &\vdots \\ &= \left( \bigotimes_{i=1}^r \Delta^+ F(\xi) \right) \ominus (x^0 \ominus \xi) \end{aligned}$$

alors

$$x^n \ominus \xi = \left( \bigotimes_{i=1}^n \Delta^+ F(\xi) \right) \ominus (x^0 \ominus \xi)$$

d'où  $x^n = \xi$ .

**$\beta$ ) Condition nécessaire .**

Supposons  $\xi$  attractif dans  $V_\xi^+$ , et admettons qu'une colonne de  $\Delta^+ F(\xi)$  disons la  $j^{\text{ème}}$  comporte plusieurs composantes non nulles

$$F(\xi_j^+) \ominus F(\xi) = \Delta^+ F(\xi) \ominus \underbrace{(\xi_j^+ \ominus \xi)}_{=e_j}$$

d'où

$$F(\xi_j^+) \ominus F(\xi) = [\Delta^+ F(\xi)]_{.j} \neq e_k \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n.$$

alors

$$F(\xi_j^+) \notin V_j^+$$

d'où  $\Delta^+ F(\xi)$  ne peut avoir qu'une composante non nulle et cette dernière ne peut être que 1.

Montrons maintenant que  $(\Delta^+ F(\xi))^{\otimes n} = 0$ .

par hypothèse on a :

$$\forall x \in V_\xi^+ \quad F^n(x) = \xi.$$

il vient  $F^n(\xi_j^+) = \xi$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

$$F^n(\xi_j^+) \otimes \xi = [(\Delta^+ F(\xi))^{\otimes n}] \otimes e_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

d'où

$$[\Delta^+ F(\xi)]^{\otimes n} = 0.$$

Pour les exemples et contres exemples illustrant la proposition 5 (cf. paragraphe 8.2,  $F_1, F_2, H_3, H_4$ ).

Nous allons alors donner une condition seulement suffisante pour la convergence dans tout le voisinage immédiat :

**Proposition 6 :**

Soit  $\xi$  un point fixe de  $F$ ;  $(F(\xi) = \xi)$  tels que

$$1) \quad \Delta^+ F(\xi) \otimes \Delta^- F(\xi) = \Delta^- F(\xi) \otimes \Delta^+ F(\xi).$$

2)  $\Delta^+ F(\xi)$  et  $\Delta^- F(\xi)$  ont au plus une composante non nulle par colonne égale à 1 ou -1 mod p.

$$3) \quad \text{Si } n \text{ impair} \quad (\Delta^+ F(\xi))^{\otimes (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} = (\Delta^- F(\xi))^{\otimes (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} = 0$$

$$\text{Si } n \text{ pair} \quad (\Delta^+ F(\xi))^{\otimes \frac{n}{2}} = (\Delta^- F(\xi))^{\otimes \frac{n}{2}} = 0$$

Alors  $\xi$  est attractif dans son voisinage immédiat  $V_\xi = V_\xi^+ \cup V_\xi^-$ .

**Démonstration :**

Si les conditions 1), 2), et 3), sont satisfaites alors pour  $x \in V_{\xi}^+$  on a

$$F(x) \ominus F(\xi) = \Delta^+ F(\xi) \ominus \underbrace{(x \ominus \xi)}_{=e_j}$$

si  $[\Delta^+ F(\xi)]_j = e_k$  alors  $F(x) \in V_{\xi}^+$

si  $[\Delta^+ F(\xi)]_j = -e_k$  alors  $F(x) \in V_{\xi}^-$

on a la même chose si  $x \in V_{\xi}^-$   
d'où  $F(x) \in V_{\xi}$  pour tout  $x$  dans  $V_{\xi}$

soit  $x^0 \in V_{\xi}$  la suite  $x^{r+1} = F(x^r)$  reste dans  $V_{\xi}$   
et

$$x^{r+1} \ominus \xi = F(x^r) \ominus F(\xi) = \Delta^+ F(\xi) \ominus (x^r \ominus \xi)$$

(ou  $\Delta^- F(x) \ominus (x^r \ominus \xi)$ )

d'où d'après 1)

$$x^{r+1} \ominus \xi = (\Delta^+ F(\xi))^{\ominus t} \ominus (\Delta^- F(\xi))^{\ominus s} \ominus (x^0 \ominus \xi)$$

avec  $t+s = r+1$ .

pour  $r+1 = n$  et  $n$  pair on a  $t < \frac{n}{2}$  ou  $s < \frac{n}{2}$   
or

$$[\Delta^+ F(\xi)]^{\ominus \frac{n}{2}} = [\Delta^- F(\xi)]^{\ominus \frac{n}{2}} = 0$$

alors  $x^n = \xi$

si  $n$  est impair on a  $t < [\frac{n}{2}] + 1$  ou  $s < [\frac{n}{2}] + 1$   
d'où  $x^n = \xi$

**Remarque :**

Si on remplace dans la proposition 6 la condition 1) par  
 $|\Delta^+ F(\xi)| * |\Delta^- F(\xi)| = |\Delta^- F(\xi)| * |\Delta^+ F(\xi)|$

et 3) par

$$|\Delta^+ F(\xi)|^{\ominus([\frac{n}{2}] + 1)} = |\Delta^- F(\xi)|^{\ominus([\frac{n}{2}] + 1)} = 0 \text{ si } n \text{ est impair}$$

et

$$|\Delta^+ F(\xi)|^{\ominus \frac{n}{2}} = |\Delta^- F(\xi)|^{\ominus \frac{n}{2}} = 0 \text{ si } n \text{ est pair}$$

on aura aussi  $\xi$  attractif dans son voisinage immédiat .

On établit maintenant une caractérisation de la convergence locale vers un cycle. Tout d'abord établissons un :

**Lemme :**

Soit  $C$  l'ensemble des matrices  $A$  d'ordre  $n$  à élément dans  $E$  telles que chaque colonne de  $A$  contient au plus un 1, les autres éléments étant tous nuls.

si  $A, B \in C$  alors :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & = & A \cdot B \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{produit dans} & & \text{produit booléen} \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & & \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes n} = 0 & A^n = 0 & (\text{càd. } \rho(A) = 0, \text{ rayon spectral} \\ \text{puissance dans} & \text{puissance} & \text{booléen cf. [8]) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{booléenne} & \end{array}$$

**Démonstration :**

Chaque colonne de  $B$  est soit 0 soit un vecteur de base, d'où chaque colonne  $i$  de  $A \otimes B$ , ou de  $A \cdot B$  est soit 0 ; si la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $B$  est 0, soit une colonne de  $A$  par exemple la  $j^{\text{ème}}$  si la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $B$  est un vecteur de base égale à  $e_j$ .

**Proposition 7.**

Pour qu'un cycle  $C=(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  de  $F$  soit attractif dans son voisinage immédiat à droite il faut et il suffit que :

1-  $\Delta^+ F(a_1)$  ait au plus un seul 1 par colonne ( $i=1, \dots, n$ )

$$2- S^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^n [\Delta^+ F(a_{r-1}) \otimes \dots \otimes \Delta^+ F(a_0)] = 0$$

Pour les exemples et contres exemples illustrant cette proposition  
(cf. paragraphe 8.2 ; exemples  $H_3$  et  $H_4$  )

**Démonstration .**

**α ) Condition suffisante :**

Si 1) est satisfaite montrons que

$$F(V_{a_i}^+) \subset V_{a_{i+1}}^+ \quad (i = 0, \dots, (r-1) \bmod r).$$

En effet si  $y \in V_{a_i}^+$   $F(y) \ominus F(a_i) = \Delta^+ F(a_i) \ominus \underbrace{(y \ominus a_i)}_{=e_j}$

or  $\Delta^+ F(a_i)$  ne contient qu'un seul 1 au plus par colonne donc la  $j^{\text{ème}}$  colonne est un vecteur de base ou le vecteur nul

$$\text{d'où } F(y) \in V_{F(a_i)}^+ = V_{a_{i+1}}^+$$

$$F \text{ applique } V_{a_i}^+ \text{ dans } V_{a_{i+1}}^+$$

Supposons alors que  $x^0 \in V_{a_0}$  (on peut prendre  $x^0$  dans n'importe quel voisinage  $V_{a_1}$  la démonstration est la même )

$$x^0 \in V_{a_0}$$

$$x^1 \ominus a_1 = \Delta^+ F(a_1) \ominus (x^0 \ominus a_0)$$

$$x^2 \ominus a_2 = \Delta^+ F(a_1) \ominus (x^1 \ominus a_1) \text{ etc ...}$$

d'où

$$x^r \ominus a_0 = \underbrace{(\Delta^+ F(a_{r-1}) \ominus \dots \ominus \Delta^+ F(a_0))}_{=S} \ominus (x^0 \ominus a_0)$$

et alors

$$x^{rn} \ominus a_0 = S^n (x^0 \ominus a_0)$$

d'où

$$x^{rn} = a_0 .$$

**β ) Condition nécessaire :**

Supposons que le cycle C soit attractif dans son voisinage immédiat à droite et supposons par exemple que  $\Delta^+ F(a_0)$  (sans restreindre la généralité cf. Lemme) admette plusieurs composantes non nulles dans une colonne, la  $j^{\text{ème}}$  par exemple, alors avec la même démonstration que pour la proposition 5, on trouve que  $F(V_0) \not\subset V_{a_1}$  donc  $[\Delta^+ F(a_0)]_{.j}$  ne peut contenir qu'une seule composante non nulle et en plus égale à 1.

Pour  $x^0$  pris dans  $V_{a_0}^+$ , les itérés successifs parcourent donc les  $V_{a_j}$  d'où

$$x^{rp} \ominus a_0 = (S^{rp}) \ominus (x^0 \ominus a_0) \text{ pour tout } p$$

et puisque  $x^{rn} = a_0$  alors

$$0 = (S^{rn}) \otimes (x^0 \otimes a_0)$$

donc pour  $x^0 = a^+_{0j}$  on a  $(S^{rn}) \otimes e_j = 0$  pour  $j=1, \dots, n$ .

$$\text{d'où } S^{rn} = 0$$

**Remarques :**

\* On a la même proposition 7 pour les dérivées à gauche.

\* Si  $C=(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  est un cycle de  $F$ , les  $a_i$  ( $i=1, \dots, r-1$ ) sont donc des points fixes de  $H = F^r$ . Si les conditions 1) et 2) de la proposition 7 sont satisfaites il est facile de voir que ces points fixes de  $H$  sont attractifs dans leur voisinage immédiat à droite.

car

$$\Delta^+ H(a_i) = \Delta^+ F(a_{i-1}) \otimes \dots \otimes \Delta^+ F(a_0) \otimes \Delta^+ F(a_{r-1}) \otimes \dots \otimes \Delta^+ F(a_1)$$

pour  $i=0, 1, \dots, r-1$ .

En effet si par exemple  $a_1 = a_0$  et  $r = 2$  on a

$$\begin{aligned} H(a_0) \otimes H(a^+_{0j}) &= F^2(a_0) \otimes F^2(a^+_{0j}) \\ &= F(F(a_0)) \otimes F(F(a^+_{0j})). \end{aligned}$$

or  $F(a_0) = a_1$  et  $F(a^+_{0j}) \in V^+_{a_1}$   
d'où d'après la proposition 1 on a :

$$\begin{aligned} H(a_0) \otimes H(a^+_{0j}) &= \Delta^+ F(a_1) \otimes (F(a_0) \otimes F(a^+_{0j})) \\ &= \Delta^+ F(a_1) \otimes \Delta^+ F(a_0) \otimes \underbrace{(a_0 \otimes a^+_{0j})}_{= \theta e_j} \end{aligned}$$

de même

$$H(a_0) \otimes H(a^+_{0j}) = \Delta^+ H(a_0) \otimes \underbrace{(a_0 \otimes a^+_{0j})}_{= \theta e_j}$$

$$\text{d'où } \Delta^+ H(a_0) = \Delta^+ F(a_1) \otimes \Delta^+ F(a_0).$$

(cf. paragraphe 8.2 pour des exemples et contre exemples illustrant cette remarque. H3 et H4 .

## 8.2 Exemples .

EXEMPLES :  $n=3, p=3$   $\alpha_{ij}^+ = \alpha_i \otimes e_j$  (le jème voisin de  $\alpha_i^+$ )

	X	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_3^+ = H_3$	$F_4$	$F_4^+ = H_4$
$a_0$	0 0 0			2 1 1 $a_1$	0 0 0 $a_0$	0 0 1	0 0 1
$a_{03}^+$	0 0 1			0 1 1 $a_1^+$	0 1 0 $a_{02}^+$	0 0 0	0 0 0
	0 0 2			2 1 1 $a_1^+$	0 0 0 $a_0$	0 1 2 $b_0$	2 0 2 $b_2$
$a_{02}^+$	0 1 0			1 2 0 $a_{22}^+$	2 2 1 $a_{12}^+$	2 0 0 $b_{11}^+$	0 2 2 $b_{02}^+$
$a_{11}^+$	0 1 1						
	0 1 2					1 0 0 $b_1$	0 1 2 $b_0$
	0 2 0						
	0 2 1						
	0 2 2						
$a_{01}^+$	1 0 0			0 1 1 $a_{11}^+$	0 1 0 $a_{02}^+$	1 1 0 $b_{12}^+$	0 0 0
$\xi$	1 0 1	1 0 1	1 0 1			2 0 2 $b_2$	1 0 0 $b_1$
$\xi_3^+$	1 0 2	1 1 1 $\xi_2^+$	0 1 1			2 0 0 $b_{11}^+$	0 2 2 $b_{02}^+$
$\xi_2^+ a_2$	1 1 0	1 0 1 $\xi$	1 0 1 $\xi$			0 0 1	0 0 0
$a_{23}^+$	1 1 1			0 0 0 $a_0$	1 1 0 $a_2$		
$a_{22}^+$	1 1 2			1 0 0 $a_{01}^+$	1 2 0 $a_{22}^+$		
	1 2 0			0 1 0 $a_{02}^+$	2 1 0 $a_{21}^+$	1 0 0 $b_1$	0 1 2 $b_0$
	1 2 1						
	1 2 2						
$\xi_1^+$	2 0 0	1 1 1 $\xi_2^+$	1 1 1 $\xi_2^+$			2 1 2 $b_{22}^+$	1 1 0 $b_{12}^+$
$a_{21}^+$	2 0 1			0 0 0 $a_0$	1 1 0 $a_2$	0 1 2 $b_0$	2 0 2 $b_2$
$a_1$	2 0 2			1 1 0 $a_2$	2 1 1 $a_1$		
$a_{13}^+$	2 1 1			1 1 1 $a_{23}^+$	0 1 1 $a_{11}^+$		
	2 1 2			2 1 0 $a_{21}^+$	2 1 1 $a_1$	2 2 $b_{22}^+$	0 0 1
$a_{12}^+$	2 2 0						
	2 2 1						
	2 2 2						

Les vecteurs non précisés peuvent être quelconques dans  $(Z/3Z)^3$ .

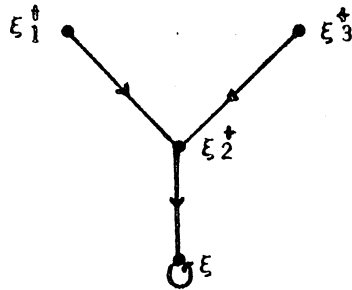
\*  $F_1$  admet un point fixe  $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ( $F(\xi) = \xi$ ).

$$\Delta^+_{F_1}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta^+_{F_1}(\xi) \text{ admet au plus un seul } 1 \text{ par colonne}$$

$$\text{et } \Delta^+_{F_1}(\xi) \otimes \Delta^+_{F_1}(\xi) = 0$$

d'où les conditions 1) et 2) de la proposition 5 sont vérifiées .

Alors une partie du graphe de  $F_1$  est :



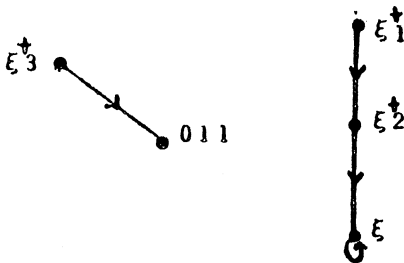
on vérifie que  
 $\xi$  est attractif dans son  
voisinage à droite.

\*  $F_2$  admet le même point fixe que  $F_1$  .  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$$\Delta^+_{F_2}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ la 3}^{\text{ème}} \text{ colonne contient deux composantes non nulles}$$

$[\Delta^+_{F_2}(\xi)]^3 = 0$  . Donc la condition 1 de la proposition 5 n'est pas vérifiée.

D'où une partie du graphe de  $F_2$  :



$\xi$  n'est pas attractif  
dans tout son voisinage  
à droite.

\*  $F_3$  admet un cycle de longueur trois.

$$C(a_0, a_1, a_2); F(a_0) = a_1, F(a_1) = a_2, F(a_2) = a_0.$$

$$\Delta^+_{F_3}(a_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta^+_{F_3}(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{et } \Delta^+_{F_3}(a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta^+_{F_3}(a_i)$  ( $i=0,1,2$ ) contient au plus un 1 par colonne .

$$S = \Delta^+_{F_3}(a_2) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_1) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

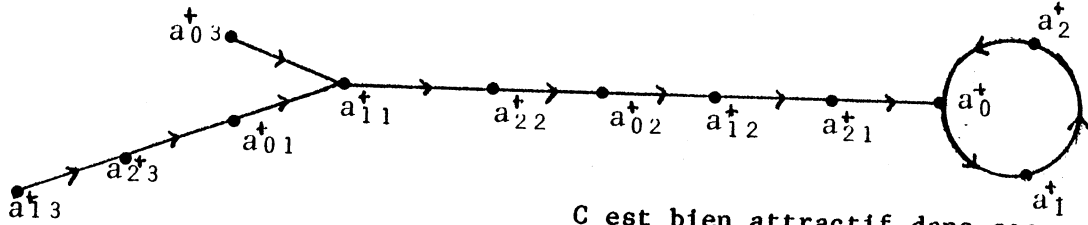


d'où

$$S \otimes S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les conditions 1) et 2) de la proposition 7 sont vérifiées.

D'où une partie du graphe de  $F_3$  est :



C est bien attractif dans son voisinage immédiat à droite.

\*  $H_3(x) = F_3^3(x) \quad \forall x \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  . donc  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sont des points fixes de  $H_3$ .

et on a :

$$\Delta^+_{H_3}(a_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Delta^+_{H_3}(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta^+_{H_3}(a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chaque dérivée  $\Delta^+_{H_3}(a_i)$  ( $i=0,1,2$ ) a au plus un 1 par colonne

$$\begin{aligned} & \Delta^+_{F_3}(a_2) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_1) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_0) \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta^+_{H_3}(a_0) = \Delta^+_{F_3}(a_2) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_1) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_0)$$

de même on a :

$$\Delta^+_{H_3}(a_1) = \Delta^+_{F_3}(a_0) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_2) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_1)$$

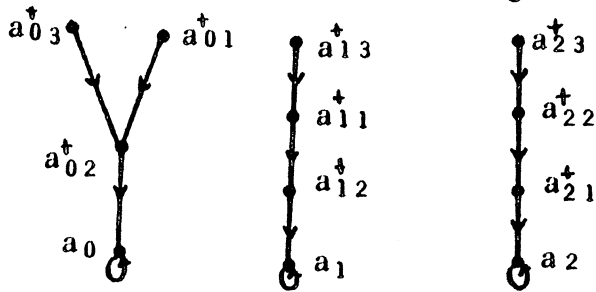
et

$$\Delta^+_{H_3}(a_2) = \Delta^+_{F_3}(a_1) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_0) \otimes \Delta^+_{F_3}(a_2)$$

$$[\Delta^+_{H_3}(a_0)] \theta^2 = 0, \quad [\Delta^+_{H_3}(a_1)] \theta^2 = 0 \quad \text{et} \quad [\Delta^+_{H_3}(a_2)] \theta^3 = 0.$$

Donc les conditions 1) et 2) de la proposition 5 sont vérifiées pour chaque point fixe de  $H_3$  ( $a_0, a_1$  et  $a_2$ ) .

D'où une partie du graphe de  $H_3$  est:



Chaque point  $(a_0, a_1$  et  $a_2)$   
est attractif dans son  
voisinage immédiat à droite

\*  $F_4$  admet un cycle de longueur trois  $C(b_0, b_1, b_2)$

$$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

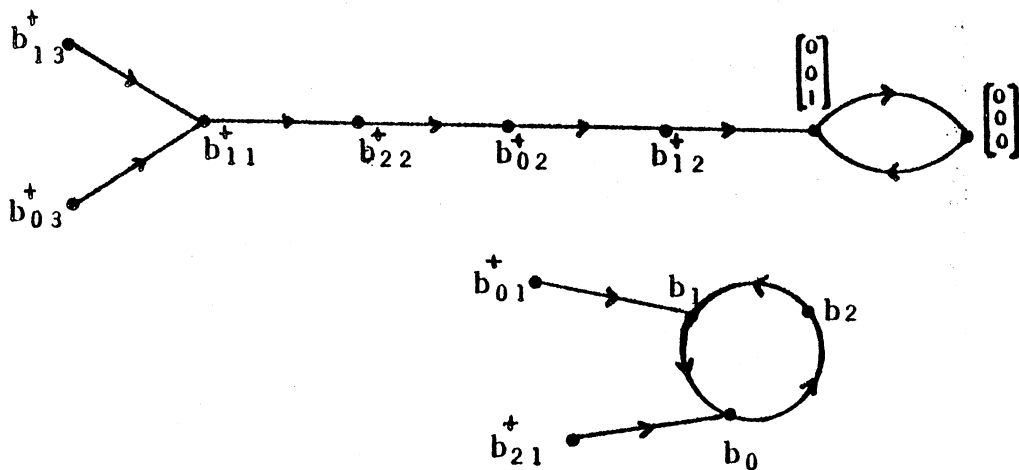
$$\Delta^+_{F_4}(b_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Delta^+_{F_4}(b_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta^+_{F_4}(b_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la deuxième colonne de  $\Delta^+_{F_4}(b_1)$  a plus d'un 1 par colonne et la 3<sup>ème</sup> colonne de  $\Delta^+_{F_4}(b_2)$  contient un 2 donc la condition 1) de la proposition 7 n'est pas vérifiée.

$$S = \Delta^+_{F_4}(b_2) \otimes \Delta^+_{F_4}(b_1) \otimes \Delta^+_{F_4}(b_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où  $S^3 = 0$ .

Une partie du graphe de  $F_4$  est:

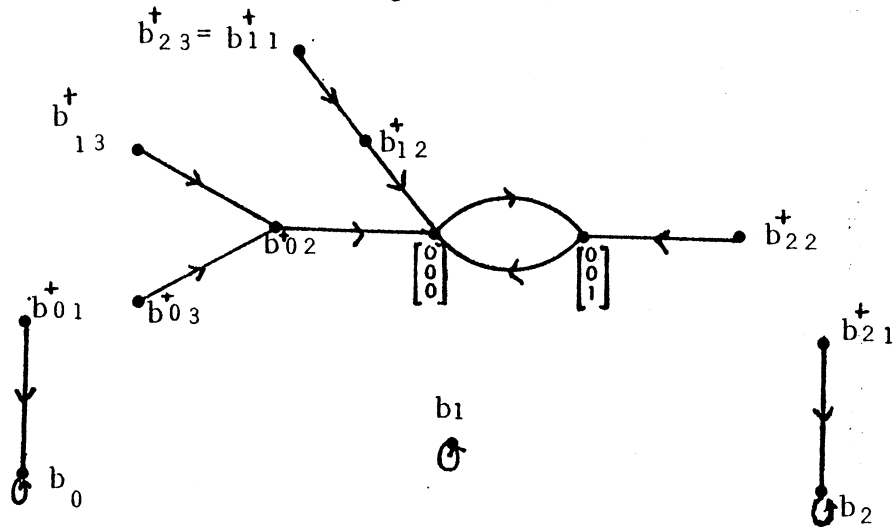


C n'est pas attractif dans tout son voisinage immédiat à droite.

\*  $H_4 = F_4^3$  admet trois points fixes qui sont les éléments du cycle C de  $F_4$ .

$$\Delta^+_{H_4}(b_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Delta^+_{H_4}(b_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta^+_{H_4}(b_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

aucune dérivée ne vérifie les conditions de la proposition 5 d'où une partie du graphe de  $H_3$  est :



$b_0, b_1$  et  $b_2$  ne sont pas attractifs dans leur voisinage immédiat à droite.

### 8.3 Convergence locale dans un voisinage massif d'un point fixe ou d'un cycle.

Nous allons maintenant considérer des voisinages (d'un point fixe ou d'un cycle) plus grands que le simple voisinage immédiat à droite ou à gauche. Nous obtiendrons encore des conditions de convergence locale d'une itération dans  $(Z/pZ)$ . Mais elles ne seront que suffisantes, pas forcément nécessaires, et de plus nous sommes amenés pour que les démonstrations passent, à imposer une condition au voisinage considéré: celle d'être un **voisinage massif** (du point fixe ou de cycle que l'on examine) (une telle étude généralise au cas de  $(Z/pZ)^n$  ce qui avait été fait par F. Robert dans le cas  $\{0,1\}$  [5,8]).

#### Definition 4.

Pour  $x$  quelconque dans  $E^n$ . on appelle voisinage massif de  $x$  relativement à  $d_1$  (resp. relativement à  $d_2$ ), toute partie  $V$  de  $E^n$  contenant  $x$  et telle que :

$\forall u \in V$  et  $v \in E^n$  tel que si  
 $d_1(x, v) < d_1(x, u)$  alors  $v \in V$   
 (resp.  $d_2(x, v) < d_2(x, u)$  alors  $v \in V$ )

**Definition 5.**

Soit  $\xi = F(\xi)$ , un point fixe de  $F$  dans  $E^n$ .  $\xi$  sera dit attractif dans son voisinage massif relativement à  $d_1$  (resp. à  $d_2$ )  $V$  de  $\xi$ , si on a :

- a-  $F(V) \subset V$
- b- Pour tout  $x^0$  pris dans  $V$ , l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$  (qui reste dans  $V$  d'après a-) finit par stationner en  $\xi$ , au bout d'au plus  $n$  pas ( $x^n = F^n(x^0) = \xi$ ).

**Definition 6.**

Soit  $C=(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  un cycle de longueur  $r$  pour  $F$ . Et soit  $W_{a_i}$  un voisinage massif relativement à  $d_1$  (resp. à  $d_2$ ) de  $a_i$  ( $i=0, \dots, r-1$ ).  $C$  sera dit attractif dans  $W = \bigcup_{i=0}^{r-1} W_{a_i}$  si:

- a-  $F(W_{a_0}) \subset W_{a_1}$  ;  $F(W_{a_1}) \subset W_{a_2}$  ;  $F(W_{a_{r-1}}) \subset W_{a_0}$ .
- b- Pour tout  $x^0$  pris dans l'un quelconque des voisinages massifs relativement à  $d_1$  (resp. à  $d_2$ ) ; disons  $W_{a_i}$  ; l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$  (qui reste dans  $W$  d'après a-) finit par atteindre  $a_i$ , au bout de  $rp$  pas ( $p \leq n$ ) :  $\exists p$  ( $0 < p < n$ ) ;  

$$x^{rp} = F^{rp}(x^0) = a_i.$$

**Remarque:**

1. Le voisinage massif relativement à  $d_2$  contient en général plus d'éléments que le voisinage massif relativement à  $d_1$ .
2. La condition a- de la définition 6 implique que

$$W_{a_i} \cap W_{a_j} = \phi \text{ si } i \neq j$$

(en effet si  $x \in W_{a_i} \cap W_{a_j}$  alors l'itération  $x^{r+1} = F(x^r)$

partant de  $x^0 = x$  vérifie  $x^{rp} = a_i$  et  $x^{rp'} = a_j$  avec  $p, p' < n$   
 d'où  $x^{r(p+p')} = a_i = a_j$ )

On va donner maintenant une condition suffisante de la convergence dans un voisinage massif relativement à  $d_2$ .

**Proposition 8**

Soit  $V$  un voisinage massif relativement à  $d_2$  d'un point fixe  $\xi$  de  $F$ ,

$$W = \{ d_2(x, \xi) ; x \in V \}$$

le voisinage massif de 0 associé. On pose  $M = \sup_{z \in V} ( |\Delta^+ F(z)| )$

si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{J} \left\{ \begin{array}{l} M * W \subset W \\ \exists r < n \text{ tel que } M^{*r} = 0 \end{array} \right.$$

alors  $\xi$  est attractif dans  $V$ .

**Remarque :**

On peut avoir la même proposition 8 avec les dérivées à gauche en remplaçant  $M$  par  $N = \sup_{z \in V} ( |\Delta^- F(x)| )$ .

De même on obtient une condition suffisante de la convergence dans le voisinage massif relativement à  $d_1$  en remplaçant  $M$  par  $\sup_{z \in V} ( \Delta^+ F(x) )$ .  
Mais dans ce cas  $*$  est le produit dans  $Z_{2p}$ .

**démonstration :**

Soit  $x \in V$  et soit  $[\xi, x]$  une chaîne de longueur minimale joignant  $x$  à  $\xi$  alors

$$d_2(F(\xi), F(x)) < M^+ * d_2(\xi, x) \quad (\text{cf. prop.4})$$

avec

$$M^+ = \sup_{z \in [\xi, x]} ( |\Delta^+ F(z)| )$$

or  $d_2(u, \xi) < d_2(x, \xi)$  pour tout  $u \in [\xi, x]$

d'où  $u \in V$  et  $M^+ < M$

$$\text{Alors } d_2(F(\xi), F(x)) < M * \underbrace{d_2(\xi, x)}_{=v \in W}$$

et puisque  $M * W \subset W$  et  $W$  est un voisinage massif de 0 alors

$$d_2(F(\xi), F(x)) \in W$$

d'où  $F(x) \in V$ .

Montrons alors que  $\forall x^0 \in V$  on a  $F^n(x^0) = \xi$

$$\begin{aligned}
 d_2(x^1, \xi) &< M * d_2(x^0, \xi) \\
 d_2(x^2, \xi) &< M * M * d_2(x^0, \xi) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 d_2(x^n, \xi) &< \underbrace{(M^{*n})}_{=0} * d_2(x^0, \xi) \\
 &\text{d'où } x^n = \xi .
 \end{aligned}$$

Exemple .

$$E^n = (Z/3Z)^3 .$$

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2x_2^2 x_3 + 2x_2 x_3^2 + x_2^2 + x_2 \\ f_2(x) = x_2^2 \\ f_3(x) = 2x_2 + 2x_2^2 \end{cases}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } v = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

d'où

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} ;$$

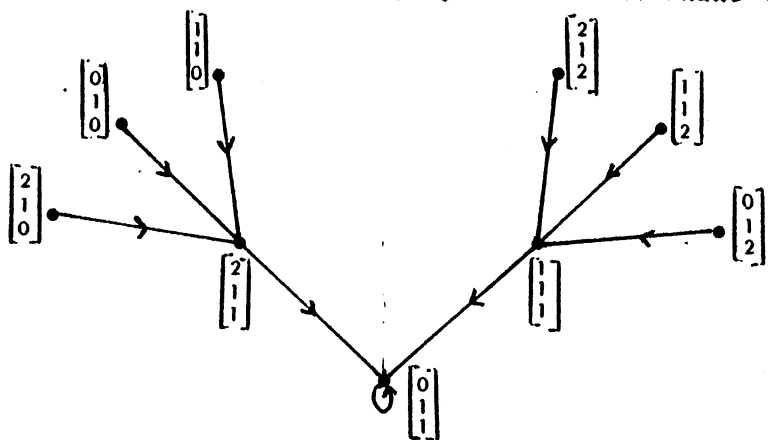
$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} ;$$

d'où

$$M = \sup_{z \in V} (|\Delta^+_{F}(z)|) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M \text{ vérifie les conditions } \mathcal{S} \begin{cases} M * W \subset W \\ M^{*3} = 0 \end{cases}$$

D'où une partie du graphe de F concernant V :



$\xi$  est attractif dans son voisinage massif V

Nous allons établir maintenant des conditions de convergence dans le voisinage massif d'un cycle.

**Proposition 9 :**

Soit  $C=(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  un cycle de F, et soit  $W_{a_i}$  ( $i=0, \dots, r-1$ ) les voisinages massifs de chaque point  $a_i$ , et  $W_{a_i}^0$  le voisinage de 0 associé .

$$W_{a_i}^0 = \{ d_2(x, a_i) , x \in W_{a_i} \}$$

on pose

$$M_i = \sup_{z \in W_{a_i}} ( |\Delta^+ F(z)| )$$

$$W = \bigcup_{i=1}^{r-1} W_{a_i} \quad \text{et} \quad M = M_{r-1} * \dots * M_1 * M_0$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i * W_{a_i}^0 \subset W_{a_i}^0 \quad i=0, \dots, r-1 \\ \exists r < n \quad \text{tel que} \quad M^{*r} = 0 \end{array} \right.$$

alors C est attractif dans W .

**Démonstration :**

Même démarche que les démonstrations des propositions 7 et 8 .

Exemple:  $E = (Z/3Z)^3$

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) = (1-(x_1-1)^2)(1-(x_2-1)^2)(1+x_3+2x_3^2) \\ f_2(x) = (x_1+1)^2(1-x_2)^2 + (1-(x_1-2)^2)(1+2x_2+x_3+2x_2^2+x_3^2+x_3x_2+x_2x_3+2x_2x_3^2) \\ f_3(x) = 2(1-x_1)^2(1-(x_2-1)^2) + 2(1-(x_1-1)^2)(1-(x_2-1)^2) + (1-(x_1-2)^2)(1-(x_3-2)^2) \end{cases}$$

$$C = (a_0, a_1) \text{ avec } a_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(a_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } F(a_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

on prend  $W_{a_0} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  d'où  $W_{a_0}^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

et  $W_{a_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  d'où  $W_{a_1}^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} ; \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{a_0} = \sup_z \left( \left| \Delta^+_{F}(z) \right| \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta^+_{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{a_1} = \sup_z \left( \left| \Delta^+_{F}(z) \right| \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



d'où

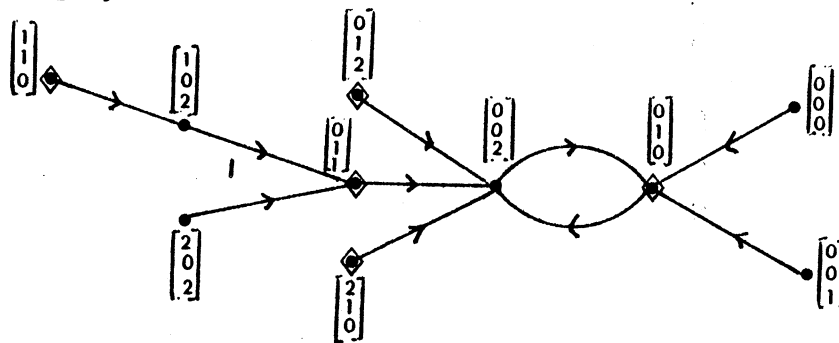
$$M = M_{a_1} * M_{a_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M * M = 0$$

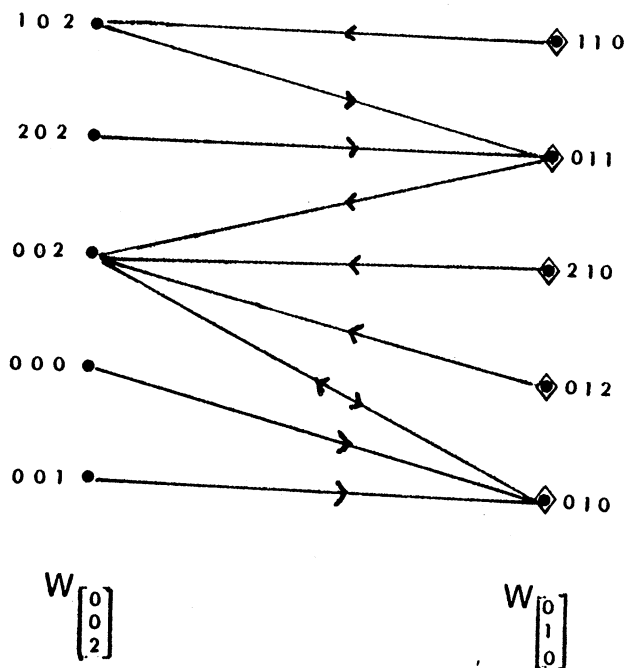
Les conditions de la proposition 9 sont donc vérifiées .

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{a_0} * W_{a_0}^0 \\ M_{a_1} * W_{a_1}^0 \\ M * M = 0 \end{array} \right.$$

d'où une partie du graphe de F :



C est bien attractif dans son voisinage massif.



**CHAPITRE III**

**APPLICATION : METHODE DE NEWTON**

**DANS  $(z/pz)^n$  .**



## 1. INTRODUCTION

Nous considérons dans ce chapitre, la résolution des systèmes d'équations de type :

$$F(x) = 0$$

(où  $x$  est un vecteur de  $(Z/pZ)^n$ ,  $p$  premier, et  $F$  un opérateur à  $n$  composantes).

A l'aide de la méthode de Newton discrète. Cette méthode a été étudiée par F. ROBERT dans  $(Z/2Z)^n$  [7,8] ; et on a pu la généraliser grâce aux outils qu'on a introduits dans le chapitre précédent.

L'intérêt de cette généralisation réside dans le fait que la probabilité de rencontrer une matrice singulière est plus faible quand  $p$  croît, ce qui revient à dire que l'"efficacité" de la méthode croît avec  $p$ .

Par analogie, avec l'analyse usuelle (dans  $R^n$ ), on définit le procédé itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 \text{ quelconque dans } (Z/pZ)^n, p \text{ est premier} \\ x^{r+1} = x^r \ominus [ A_r^{-1} \ominus F(x^r) ] \quad (r=0,1,\dots) \end{array} \right.$$

où  $A_r$  ( $r=0,1,\dots$ ) est une suite de matrices  $(n,n)$  à éléments dans  $Z/pZ$ , inversibles en tant qu'opérateurs dans  $(Z/pZ)^n$ .

Le choix de  $A_r = \Delta^+ F(x^r)$  (ou  $\Delta^- F(x^r)$ ) pour tout  $r$  constitue la méthode de Newton standard. Cette méthode implique à chaque itération, soit l'inversion de la matrice  $\Delta^+ F(x^r)$  (ou  $\Delta^- F(x^r)$ ), soit la résolution d'un système linéaire  $\Delta^+ F(x^r) \ominus z = F(x^r)$  ou  $\Delta^- F(x^r) \ominus z = F(x^r)$ .

Afin d'éviter une répétition de calculs, on utilise parfois le processus simplifié suivant :  $A_r = A$  pour  $r=0,1,2,\dots$  (avec  $A$  inversible).

**2. ETUDE DE LA CONVERGENCE :  
NEWTON SIMPLIFIE.**

Nous allons commencer par étudier la convergence du processus simplifié :

$$x^{r+1} = x^r \ominus [A^{-1} \ominus F(x^r)] \quad (r = 0, 1, \dots)$$

Il s'agit d'une méthode d'approximations successives :

$$x^{r+1} = H(x^r) \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

où  $H(x) = x \ominus (A^{-1} \ominus F(x)) ; \forall x \in (Z/pZ)^n$ .

alors les dérivées à droite et à gauche sont définies par :

$$\Delta^+ H(x) = I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^+ F(x) ; \forall x \in (Z/pZ)^n$$

et

$$\Delta^- H(x) = I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^- F(x) ; \forall x \in (Z/pZ)^n$$

( I est la matrice identité ) .

**2.1 Convergence local dans le voisinage à droite  
ou à gauche d'une racine a de F**

D'après l'expression de H, on voit que toute racine de F est un point fixe de H, donc l'utilisation de ce dernier, va nous permettre d'appliquer des résultats de convergence locale vers un point fixe, établis dans le chapitre 2.

**Proposition 1**

Soit a une racine de F, pour que a soit attractif dans son voisinage immédiat à droite (resp. à gauche), il faut et il suffit que :

1-  $I \ominus [A^{-1} \ominus \Delta^+ F(a)]$  (resp.  $I \ominus [A^{-1} \ominus \Delta^- F(a)]$ ) ait au plus un 1 par colonne.

2-  $k < n$  tel que  $[I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^+ F(a)] \ominus^k =$

( resp.  $[I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^- F(a)] \ominus^k = 0$  ).

**Remarques:**

a. La condition 1) exprime le fait que A n'est pas trop différent de  $\Delta^+ F(a)$ .

b. si  $\Delta_j^+ \Delta_j^- F(a) = 0$  pour  $j=1, \dots, n$  (avec  $\Delta_j^+ F(a) = F(a \oplus e_j) \ominus F(a)$ )

(càd. si  $\Delta^+ F(a) = \Delta^- F(a)$ ) et si 1) et 2) sont vérifiées alors a est attractif dans son voisinage immédiat  $V_a$

c.  $A = \Delta^+ F(a)$  (avec A inverssible alors pour tout  $x^0$  pris dans  $V_a^+$  on a  $x^1 = a$ .

de même si  $A = \Delta^- F(a)$  et  $x^0$  et pris dans  $V_a^-$  on a aussi  $x^1 = a$ .

En effet si  $x^0 = a \oplus e_j$

$$F(x^0) \ominus F(a) = \Delta^+ F(a) \ominus e_j \text{ d'où } F(x^0) = \Delta^+ F(a) \ominus e_j$$

et alors

$$x^1 = x^0 \ominus [\Delta^+ F(a)]^{-1} \ominus F(x^0) = x^0 \ominus e_j = a.$$

**Exemples:**  $n = 2, p = 3.$

x	F(x)
0 0	1 1
0 1	0 2
0 2	2 2
1 0	1 2
1 1	0 0
1 2	0 2
2 0	0 1
2 1	1 0
2 2	1 2

il ya une racine  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  nous prenons

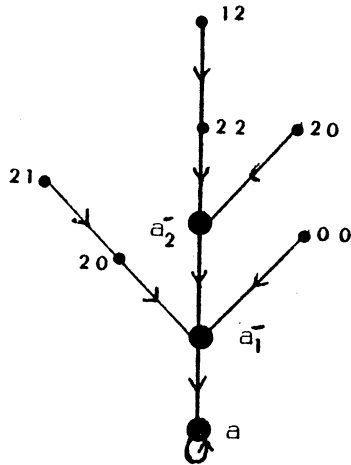
pour A  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  A est inverssible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ; \Delta^- F(a) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^- F(a) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$[I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^- F(a)]$  vérifie bien les conditions 1) et 2) de la proposition 1,

d'où le graphe de l'itération  $x^{r+1} = x^r \ominus A^{-1} \ominus F(x^r)$  est le suivant ;



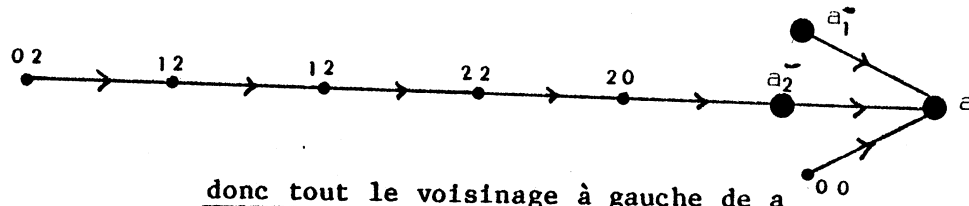
a est bien attractif  
dans son voisinage  
immédiat à gauche.

(convergence en au plus 2 pas)

Pour le même opérateur F, nous prenons maintenant

$$A = \Delta^- F(a) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

et le graphe d'itération de Newton simplifié est le suivant:



donc tout le voisinage à gauche de a

converge vers a en un pas

(ce qui illustre la remarque c.)

### Contre exemple

Toujours pour le même opérateur F, on prend

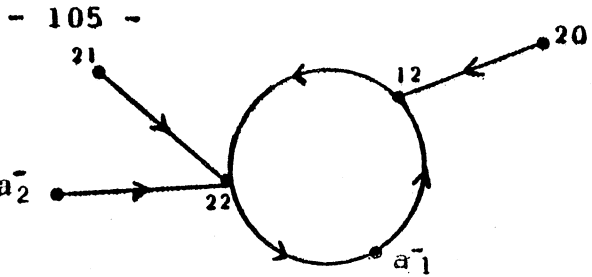
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où  $I \ominus A^{-1} \ominus \Delta^- F(a) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ , ne vérifie aucune condition

de la proposition précédente.

Le graphe de l'itération  $x^{r+1} = x^r \ominus A^{-1} \ominus F(x^r)$  est donc le suivant :

$\mathcal{Q}_a$



la racine a est isolée, donc a n'est pas attractif dans son voisinage immédiat à gauche.

Nous allons donner maintenant des conditions plus fortes que celles de la proposition précédente pour assurer la convergence dans tout le voisinage immédiat d'une racine a de F.

**Proposition 2**

Soit a une racine de F; (donc c'est un point fixe de H) tels que

$$\Delta^+ H(a) \theta \Delta^- H(a) = \Delta^- H(a) \theta \Delta^+ H(a)$$

Alors pour tout  $x^0$  pris dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  si on considère l'itération  $x^{r+1} = x^r \theta A^{-1} \theta F(x^r)$ , et si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1-  $(I \theta A^{-1} \theta \Delta^+ F(a))$  et  $(I \theta A^{-1} \theta \Delta^- F(a))$  ont au plus une composante non nulle égale à 1 ou -1 mod p.

2- Si pour n impair on a

$$[I \theta A^{-1} \theta \Delta^+ F(a)]^{\theta(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} = [I \theta A^{-1} \theta \Delta^- F(a)]^{\theta(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} = 0$$

et pour n pair on a

$$[I \theta A^{-1} \theta \Delta^+ F(a)]^{\theta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = [I \theta A^{-1} \theta \Delta^- F(a)]^{\theta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 0$$

alors a est attractif dans son voisinage immédiat  $V_a$

On rappelle que les deux conditions précédente assurent la convergence de tout point de  $V_a$  vers la racine en au plus n pas (cf. chapitre 2).

**Exemple**

Soit F un opérateur sur  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$  défini par :



$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) = (1-(x_2-2)^2)(x_1x_3+x_1x_3+x_1+x_3+x_1+x_3) \\ f_2(x) = 2(1-(x_1-1)^2)(1-(x_2-2)^2)(1-x_3+x_3) \\ \quad + 2(1-(x_3-1)^2)(x_1+x_2)(1+x_1-x_2+x_1x_2) \\ f_3(x) = (1-x_3)(1-(x_1-1)^2)(1-(x_2-2)^2) \end{cases}$$

une racine de F est  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

si on prend  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  alors  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$V_a^- = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ et } V_a^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta^- F(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta^+ F(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\Delta^+ H(a) = I \otimes A^{-1} \otimes \Delta^+ F(a) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta^- H(a) = I \otimes A^{-1} \otimes \Delta^- F(a) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

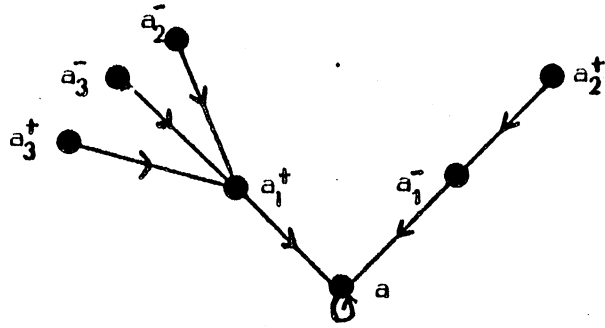
$$\Delta^+ H(a) \otimes \Delta^- H(a) = \Delta^- H(a) \otimes \Delta^+ H(a) = 0 \text{ (matrice nulle)}$$

et

$$[\Delta^- H(a)]^{\otimes 2} = [\Delta^+ H(a)]^{\otimes 2} = 0$$

d'où les conditions 1) et 2) sont vérifiées.

une partie du graphe de l'itération  $x^{r+1} = x^r \otimes A^{-1} \otimes F(x^r)$  est:



n=3  
p=3

a est donc attractif dans tout  
son voisinage immédiat  
( ici deux pas au plus )

### 2.2 Convergence locale dans un voisinage massif d'une racine a de F.

Dans ce cas aussi nous allons appliquer des résultats du 2<sup>ème</sup> chapitre pour donner un résultat de convergence locale dans le voisinage massif (relativement à  $d_1$  ou à  $d_2$ ) de a.

#### Proposition 3

Soit V un voisinage massif relativement à  $d_2$  d'une racine a de F. et  $W = \{ d_2(x,y), x \in V \}$ , le voisinage massif relativement à  $d_2$  associé à 0, on pose

$$M = \sup_{z \in V} ( I \Theta A^{-1} \Theta \Delta^+ F(z) )$$

si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} M * W \quad W \\ \exists r < \infty \text{ tel que } M^{*r} = 0 \end{array} \right. \quad (* : \text{produit dans } \mathbb{Z}_p)$$

alors a est attractif dans V.

#### Remarque

On peut écrire la même proposition en utilisant la dérivée à gauche de H ou en remplaçant  $d_2$  par  $d_1$  (cf. chapitre 2).

**Exemple**

Soit  $F$  un opérateur sur  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$  défini par :

$$F(x) = \begin{cases} x_2 x_3 + x_2 + x_1 \\ x_2 x_3 + x_2 x_3 + 2x_2 + 2x_2 + x_1 \\ x_2 + x_3 + x_2 \end{cases}$$

$F$  admet le vecteur  $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  comme racine .

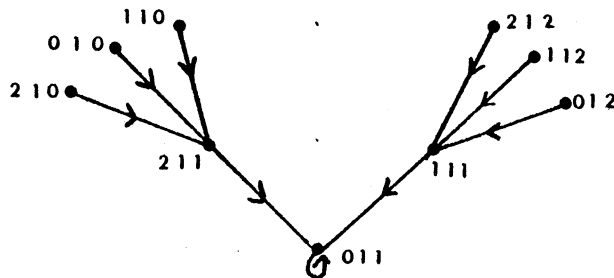
on prend  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  d'où  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

on prend  $V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

d'où  $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

l'opérateur  $F$  est choisi de telle façon que l'opérateur  $H$  associé soit égal à l'opérateur  $F$  défini au chapitre 2 page 95 , donc  $F$  vérifie les conditions de la proposition

Une partie du graphe de l'itération  $x^{r+1} = x^r \theta A^{-1} \theta F(x^r)$  est :



$a$  est attractif dans son voisinage massif.

**Remarque**

Le meilleur choix pour  $A$  est  $A = \Delta^+ F(a)$  ou  $\Delta^- F(a)$  , malheureusement cela suppose que  $a$  est connue d'avance.

### 3. ETUDE DE LA CONVERGENCE : CAS GENERAL.

Nous allons étudier maintenant l'itération dans le cas général :

$$x^{r+1} = x^r \ominus [A_r^{-1} \ominus F(x^r)] \quad r=0,1,\dots$$

Dans le cas de la méthode usuelle ( dans  $\mathbb{R}^n$  ), la convergence a été étudiée dans des cas particuliers, ou sous des hypothèses sur  $F$  et sur le choix du vecteur initial, mais ces conditions sont en général seulement suffisantes (théorie de Kantorovitch basée sur des arguments d'analyse, normes, opérateurs (cf. [12,13]) etc...)

Pour la méthode discrète, cette étude est délicate car il est très difficile de trouver ou de transposer (du cadre continu au cadre discret) des conditions sur  $F$  qui assurent la convergence.

Nous commençons tout d'abord, par étudier le cas où  $F$  est affine, ( $F(x) = T \ominus x \ominus b$  ; avec  $T$  régulier). Pour ces opérateurs les dérivées à droite et à gauche sont les mêmes ; égales à  $T$  ( $\Delta^+ F(x) = \Delta^- F(x) = T$  ;  $\forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ ) donc dans le cas de Newton standard, on a pour tout  $x^0$  pris dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  :

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 \ominus T^{-1} \ominus [T \ominus x^0 \ominus h] \\ &= \ominus T^{-1} \ominus h \quad (\text{solution unique}) \end{aligned}$$

donc comme dans le cas continu, on obtient formellement la solution en un pas quel que soit le vecteur initial.

Nous allons maintenant considérer que l'ensemble  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  est ordonné par l'ordre suivant<sup>(\*)</sup> :  $0 < 1 < 2 < \dots < p-1$ . et on donne une formule d'erreur explicite, qui nous permet d'établir une condition nécessaire et suffisante de "progression monotone" vers une racine de  $F$  (qu'on suppose exister à priori).

On dira qu'on progresse de façon monotone vers une racine  $a$  si

$$x^{r+1} \ominus a \not\prec x^r \ominus a$$

(inégalité composante à composante)

si on progresse de façon monotone vers une racine, on y converge en au plus  $n(p-1)$  pas.

---

(\*) non compatible avec la loi  $\ominus$

**Proposition 4:**

Soit  $a$  une racine de  $F$ , et  $x^r$  le  $r^{\text{ième}}$  itéré.

Soit  $x^r = u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1s_1}, u_{21}, \dots, u_{2s_2}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{ks_k} = a$

une chaîne à gauche reliant  $x^r$  à  $a$ .

$u_{11}$  est voisin à droite de  $u_{12}$ ,  $u_{12}$  est voisin à droite de  $u_{13}$  etc..., et de plus  $u_{ik} = u_{i(k-1)} \theta e_{j_i}$  pour  $k = 1, \dots, s_i - 1$  (cette chaîne n'est pas unique).

il existe des indices  $j_1, j_2, \dots, j_k$  (tous distincts) tels que

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_{11} \theta e_{j_1} \\ u_{13} &= u_{12} \theta e_{j_1} \\ &\vdots \\ u_{1s_1} &= u_{1(s_1-1)} \theta e_{j_1} \\ u_{21} &= u_{1s_1} \theta e_{j_2} \\ &\vdots \\ u_{ks_k} &= u_{k(s_k-1)} \theta e_{j_k} \end{aligned}$$

On a alors la formule de correction suivante:

$$(1) \quad x^{r+1} \theta a = x^r \theta a \theta A_r^{-1} \theta \left( \left[ \Delta_{l=1}^{s_1-1} \bar{F}(u_{1l}) \right] \theta e_{j_1} \right.$$

$$\left. \theta \left[ \Delta_{l=1}^{s_1-1} \bar{F}(u_{1s_1}) \right] \theta \left( \left[ \Delta_{l=1}^{s_1-1} \bar{F}(u_{2l}) \right] \theta e_{j_2} \right) \theta \dots \theta \right.$$

$$\left. \left[ \Delta_{l=1}^{s_k-1} \bar{F}(u_{k-1, s_k-1}) \right] \theta \left( \left[ \Delta_{l=1}^{s_k-1} \bar{F}(u_{kl}) \right] \theta e_{j_k} \right) \right)$$

En effet:

$$x^{r+1} \theta a = x^r \theta a \theta A_r^{-1} \theta [F(x^r) \theta F(a)]$$

$$F(x^r) \theta F(a) = [F(u_{11}) \theta F(u_{12})] \theta [F(u_{12}) \theta F(u_{13})] \theta \dots \theta$$

$$[F(u_{1s_1-1}) \theta F(u_{1s_1})] \theta [F(u_{1s_1}) \theta F(u_{21})] \theta \dots \theta$$

$$[F(u_{ks_k-1}) \theta F(u_{ks_k})]$$

$$(u_{11}) \otimes e_{j_1} \otimes \Delta^- F(u_{12}) \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes \Delta^- F(u_{1s_1-1}) \otimes e_{j_1} \\ \otimes \Delta^- F(u_{1s_1}) \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes \Delta^- F(u_{ks_k-1}) \otimes e_{j_k}$$

$$F(x^r) \otimes F(a) = \left[ \bigoplus_{l=1}^{s_1-1} \Delta^- F(u_{1l}) \right] \otimes e_{j_1} \otimes \left[ \Delta^- F(u_{1s_1}) \otimes \left( \bigoplus_{l=1}^{s_1-1} \Delta^- F(u_{2l}) \right) \right] \otimes e_{j_2} \\ \otimes \dots \otimes \left[ \Delta^- F(u_{k-1 s_{k-1}}) \otimes \left( \bigoplus_{l=1}^{s_1-1} \Delta^- F(u_{kl}) \right) \right] \otimes e_{j_k}.$$

**Remarque**

On peut aussi exprimer la formule de correction à l'aide des dérivées à droite, il suffit de prendre une chaîne à droite reliant  $x^r$  à  $a$ . Par contre si on choisit une chaîne de longueur minimale, l'expression de correction sera exprimée en général en fonction des dérivées à droite et à gauche.

La formule (1) nous permet donc d'obtenir  $(x^{r+1} \otimes a)$  à partir de  $(x^r \otimes a)$  on peut alors déduire une CNS de progression monotone:

**Corollaire:**

une condition nécessaire et suffisante pour que  $x^{r+1} \otimes a \not\leq x^r \otimes a$  est que :

$$1- \omega = \left[ \bigoplus_{l=1}^{s_1-1} \Delta^- F(u_{1l}) \right] \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes$$

$$\left[ \Delta^- F(u_{k-1 s_{k-1}}) \otimes \left( \bigoplus_{l=1}^{s_k-1} \Delta^- F(u_{kl}) \right) \right] \otimes e_{j_k} \neq 0$$

2-  $A_r$  soit telle que :

$$A_r^{-1} \otimes \omega < x^r \otimes a.$$

**Démonstration du corollaire**

pour que  $x^{r+1} \otimes a \not\leq x^r \otimes a$  il faut et il suffit que  $(x^{r+1} \otimes a)$  ait toutes les composante nulles de  $(x^r \otimes a)$  et en plus au moins une inférieure à celle de  $(x^r \otimes a)$ .

Or la condition 1) entraîne que  $x^{r+1} \otimes a \not\leq x^r \otimes a$  et la seconde

entraîne que  $A_r^{-1} \otimes \omega$  reste dans le sous espace engendré par  $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ . et chaque composante de  $A_r^{-1} \otimes \omega$  est inférieure ou égale à la composante correspondante de  $x^r \otimes a$ .

**Exemple**  $n=2$ ,  $p=3$ .

x	F(x)
0 0	2 1
0 1	$\alpha$ $\beta$
0 2	$\nu$ $\mu$
1 0	2 1
1 1	1 1
1 2	a b
2 0	1 1
2 1	c d
2 2	0 0

F est donné par sa table.

il ya une racine  $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$   
 $\alpha, \beta, \gamma, \mu, a, b, c$  et  $d$  sont quelconques dans  $(Z/3Z)$ .

prenons par exemple  $x^r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 on choisit la chaîne :

$$x^r = u_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$u_{13} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = a$$

alors

$$\omega = [\Delta^- F(u_{11}) \otimes \Delta^- F(u_{12})] \otimes e_1 \otimes [\Delta^- F(u_{13}) \otimes \Delta^- F(u_{21})] \otimes e_2$$

$$\Delta^- F(u_{11}) = \begin{bmatrix} 1\theta\alpha & 2 \\ 1\theta\beta & 0 \end{bmatrix}; \Delta^- F(u_{12}) = \begin{bmatrix} \alpha\theta c & \alpha\theta 2 \\ \beta\theta d & \beta\theta 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^- F(u_{13}) = \begin{bmatrix} c\theta 1 & c\theta 1 \\ d\theta 1 & d\theta 1 \end{bmatrix}; \Delta^- F(u_{21}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\omega = \begin{bmatrix} 1\theta c \\ 1\theta d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

si on choisit

$$A_r = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ alors } A_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

et

$$A_r^{-1} \otimes \omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^r \otimes a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\Lambda_r^{-1} \theta \omega < x^r \theta a$$

donc les conditions de la proposition 5 sont vérifiées, et il vient

$$x^{r+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{r+1} \theta a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq x^r \theta a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

on a bien

$$x^{r+1} \theta a \neq x^r \theta a$$

si on prend maintenant  $x^r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , et la chaîne

$$x^r = u_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{13} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = a$$

$$\omega = [\Delta \bar{F}(u_{11}) \theta \Delta \bar{F}(u_{12})] \theta e_1 \theta [\Delta \bar{F}(u_{13})] \theta e_2$$

$$\Delta \bar{F}(u_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & 2\theta a \\ 0 & 1\theta b \end{bmatrix}, \Delta \bar{F}(u_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 2\theta \gamma \\ 0 & 1\theta \beta \end{bmatrix}, \Delta \bar{F}(u_{13}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

et

$$\Lambda_r^{-1} \theta \omega = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^r \theta a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\Lambda_r^{-1} \theta \omega < x^r \theta a$$

alors

$$x^{r+1} \theta a = x^r \theta a \theta \Lambda_r^{-1} \theta F(x^r)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



on a bien

$$x^{r+1} \ominus a \not\approx x^r \ominus a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si on prend  $x^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et la chaîne

$$x^r = u_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

tout calcul fait on trouve

$$\omega = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad A_r^{-1} \ominus \omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \not\approx x^r \ominus a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et enfin si on prend  $x^r = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  ;  $x^r \ominus a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

tout calcul fait on trouve

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_r^{-1} \ominus \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x^r \ominus a$$



la convergence est donc monotone

La condition 2) du corollaire est difficile à exploiter pratiquement. Nous allons donc expliciter quelques cas très particuliers où elle est vérifiée.

**Proposition 5**

Si, à l'étape  $r$  :

$$(s_1-1) \ominus A_r \ominus e_{j_1} = \left[ \bigoplus_{l=1}^{s_1-1} \Delta^- F(u_{1l}) \right] \ominus e_{j_1}$$

$$s_2 \ominus A_r \ominus e_{j_2} = \left[ \Delta^- F(u_{1s_1}) \ominus \left( \bigoplus_{l=1}^{s_k-1} \Delta^- F(u_{kl}) \right) \right] \ominus e_{j_k}$$

⋮

⋮

$$s_k \ominus A_r \ominus e_{j_k} = \left[ \Delta^- F(u_{k-1, s_k-1}) \ominus \left( \bigoplus_{l=1}^{s_k-1} \Delta^- F(u_{kl}) \right) \right] \ominus e_{j_k}$$

alors  $x^{r+1} = a$  la racine cherchée.

En effet le vecteur  $A_r^{-1} \theta \omega$  coincide alors avec  
 $(s_1^{-1}) \theta e_{j_1} \theta s_2 \theta e_{j_2} \theta \dots \theta s_k \theta e_{j_k} = x^r \theta a$

d'après la formule (1)  $x^{r+1} \theta a = 0$  soit  $x^{r+1} = a$ .

**Remarque**

1. Les conditions ci-dessus disent donc comment choisir  $a_r$ , pour aller au plus vite à la racine, elles sont malheureusement inutilisables en pratique, car on ne connaît pas la racine  $a$  donc on ne peut pas connaître le chemin joignant  $x^r$  à  $a$ .
2. Les conditions de la proposition dépendent du choix du chemin joignant  $x^r$  à  $a$ , donc on peut avoir des conditions analogue avec les dérivées à droite, si on choisit une chaîne à droite, ou avec les dérivées à droite et à gauche si on choisit une chaîne de longueur minimale.

**Exemple**

	x	F(x)
$x^r$	0 0	2 1
	0 1	0 1
	0 2	2 1
	1 0	1 1
	1 1	2 2
a	1 2	0 0
	2 0	0 2
	2 1	1 0
	2 2	1 2

F a une racine  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$   
 on prend  $x^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , et choisissons  
 la chaîne:

$$x^r = u_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$u_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a$$

alors

$$\Delta^- F(u_{11}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Delta^- F(u_{12}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^- F(u_{13}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \Delta^- F(u_{21}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on choisit  $A_r$  telle que :

$$2 \otimes A_r \otimes e_1 = [\Delta^- F(u_{11}) \otimes \Delta^- F(u_{12})] \otimes e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et

$$2 \otimes A_r \otimes e_2 = [\Delta^- F(u_{13}) \otimes \Delta^- F(u_{21})] \otimes e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A_r = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } A_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

donc pour  $x^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  on a

$$\begin{aligned} x^{r+1} &= x^r \otimes A_r^{-1} \otimes F(x^r) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a \end{aligned}$$

on a bien convergence de l'itération vers la racine a en un seul pas à partir de  $x^r$ .

Voici maintenant quelques cas particuliers de la proposition 5

#### Cas particulier 1.

Dans la méthode de Newton standard ( $A_r = \Delta^+ F(x^r)$ , resp.  $\Delta^- F(x^r)$ )

- Si  $x^r$  est voisin à gauche de  $a$  ( resp. voisin à droite de  $a$  )
- Si  $\Delta^+ F(x^r)$  ( resp.  $\Delta^- F(x^r)$  ) est régulière

$$\text{alors } x^{r+1} = a$$

ce qui signifie que si, par Newton standard, on arrive dans le voisinage immédiat à gauche (resp. à droite) d'une racine a, alors, au pas suivant, on atteint cette racine.

En effet si  $x^0 \in V_a^-$ ;  $a$  racine de  $F$

$$x^1 = x^0 \otimes [\Delta^+ F(x^0)]^{-1} \otimes F(x^0)$$

une solution du système  $\Delta^+ F(x^0) \otimes z = \otimes F(x^0)$  est  $z = e_j$  (si  $x^0 = a \otimes e_j$ )

$$\text{d'où } x^1 = x^0 \otimes z = x^0 \otimes e_j = a$$

même démonstration pour  $x^0$  dans  $V_a^+$

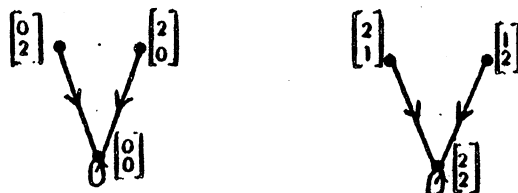
Exemple  $n = 2$ ,  $p = 3$ .

$$F(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2 \\ x_1^2 + x_1 \end{cases} \quad \text{d'où } \Delta^+ F(x) = \begin{bmatrix} 1 \oplus 2x_1 & 1 \\ 1 & 1 \oplus 2x_2 \end{bmatrix}$$

les vecteurs  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  sont des racines de  $F$ .

$$v^- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad v^- \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Une partie du graphe de l'itération  $x^{r+1} = x^r \ominus [F'(x^r)]^{-1} \ominus F(x^r)$  est la suivante :



donc le voisinage à gauche de chaque racine converge vers celle-ci en au plus 1 pas

**Remarque**

Si deux racines distinctes  $a_1$  et  $a_2$  de  $F$  admettent un voisin immédiat à gauche commun (resp. à droite)  $b$ , alors  $\Delta^+ F(b)$  (resp.  $\Delta^- F(b)$ ) n'est pas inversible.

En effet, la méthode de Newton standard, partant de  $x^0 = b$  donne  $x^1 = a_1$  et  $x^1 = a_2$ . Ce qui est impossible si  $\Delta^+ F(b)$  (resp.  $\Delta^- F(b)$ ) est non inversible.

**Cas particulier 2**

Si la dérivée à gauche  $\Delta^- F$  (resp. la dérivée à droite  $\Delta^+ F$ ) est inversible dans un voisinage  $W_a$  d'une racine  $a$  de  $F$  et si  $x^r$  tombe dans  $W_a$ , alors, par la méthode de Newton standard,  $x^{r+1} = a$ .

En effet, avec la notation de la proposition 4, on a

$$A_r = \Delta^- F(u_{11}) = \Delta^- F(u_{12}) = \dots = \Delta^- F(u_{k(s_k-1)})$$

les conditions de la proposition 5 sont donc vérifiées ,d'où le résultat.

On prend un exemple simple où  $F$  est affine dans le voisinage massif de  $a$   
 $W_a$  ( $F(x) = Ax + b$  ,  $\forall x \in W_a$  avec  $A$  inversible )

donc

$$\Delta^+ F(x) = \Delta^- F(x) = A \quad , \quad \forall x \in W_a.$$

la racine dans  $W_a$  est unique et égale à  $A^{-1} \ominus b$  et on sait que quelque soit  $x^0$  pris dans  $W_a$  on a

$$x^1 = A^{-1} \ominus b \quad (\text{racine de } F \text{ dans } W_a)$$

en voici un exemple:

$$n = 3 \quad , \quad p = 3 \quad , \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et

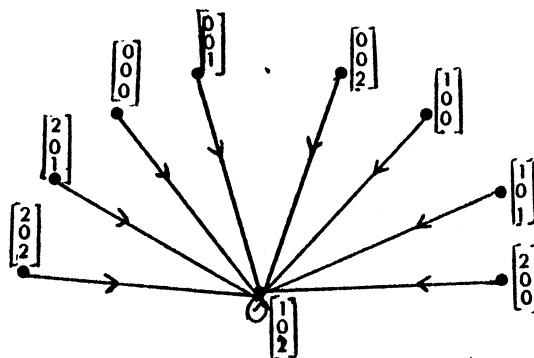
$$W_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} ; \quad x_1, x_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

on prend  $F(x) = Ax \ominus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ,  $\forall x \in W_a$  avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$a$  est bien racine de  $F$  dans  $W_a$  . à l'extérieur de  $W_a$   $F$  peut prendre n'importe quelle valeur.

On vérifie que , partant d'un  $x^0$  dans  $W_a$  la méthode de Newton standard conduit en un pas à la racine  $a$  .



#### 4 EFFICACITE D'UNE METHODE ITERATIVE SUR UN ENSEMBLE FINI

Pour notre problème, c'est à dire pour l'itération:

$$x^{r+1} = x^r \theta y$$

avec

$$F(x^r) y = F(x^r)$$

partant d'un  $x^r$ , l'itération peut mener à un processus finissant (point fixe) à un processus infini (cycle), ou à un blocage (càd. il existe un  $x^r$  qui n'a pas de successeur).

Pour ce qui nous concerne, les blocages et les processus infinis sont peu souhaités. Donc on dira que la méthode est efficace, si on a plus souvent des processus finissants, et que le grahe de l'itération a un diamètre faible (càd. on arrive en un petit nombre de pas au point fixe).

#### 5 EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES

On considère l'opérateur  $F: (Z/7Z)^2 \rightarrow (Z/7Z)^2$ , défini par :

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + (1 - (x_1 - 5)^6)(1 - x_2)^6 + 6(1 - (x_1 - 2)^6)(1 - x_2)^6 + 3 \\ f_2(x) = x_2^2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

La table de  $F$  est la suivante:

	x		F(x)	
0	0	0	3	0
1	0	1	3	1
2	0	2	3	4
3	0	3	3	2
4	0	4	3	2
5	0	5	3	4
6	0	6	3	1
7	1	0	4	0
8	1	1	5	0
9	1	2	6	6
10	1	3	0	5
11	1	4	1	6
12	1	5	2	2
13	1	6	3	0
14	2	0	6	0
15	2	1	2	3
16	2	2	4	1
17	2	3	6	1
18	2	4	1	3
19	2	5	3	0
20	2	6	5	6
21	3	0	5	0
22	3	1	1	4
23	3	2	4	3
24	3	3	0	4
25	3	4	3	0
26	3	5	6	5
27	3	6	2	5
28	4	0	5	0
29	4	1	2	5
30	4	2	6	5
31	4	3	3	0
32	4	4	0	4
33	4	5	4	3
34	4	6	1	4
35	5	0	1	0
36	5	1	5	6
37	5	2	3	0
38	5	3	1	3
39	5	4	6	1
40	5	5	4	1
41	5	6	2	3
42	6	0	4	0
43	6	1	3	0
44	6	2	2	2
45	6	3	1	6
46	6	4	0	5
47	6	5	6	6
48	6	6	5	2

Cette fonction n'a aucune racine , nous la notons  $F_0$ .

$F_1$  est obtenue en modifiant la table de  $F_0$  seulement pour  $x = (5 \ 0)$  et en prenons alors  $F_1(5 \ 0) = (0 \ 0)$ .  $F_1$  admet une racine.

$F_2$  est obtenue en modifiant la table de  $F_1$  seulement pour  $x = (2 \ 3)$  et en prenant alors  $F_2(2 \ 3) = (0 \ 0)$ .  $F_2$  admet 2 racines ; on définit de façon analogue  $F_4$  ,  $F_5$  ,  $F_6$  et  $F_7$  .

Dans les pages suivantes , on visualise le graphe de l'itération de Newton simplifié et de Newton standard, pour  $F_0$  ,  $F_1$  ,  $F_2$  ,  $F_4$  ,  $F_5$  ,  $F_6$  et  $F_7$ .

De nombreux autres exemples sont expérimentés par Zequ Jianq (cf. [19]).



$P = 7$   
 $n = 2$

		RECAPITULATION							
		longueur maximum des cycles	nombre de points aboutissant à coup sûr sur un cycle	nombre de puits (système insoluble)	longueur maxi d'une itération aboutissant à un point fixe quelconque	longueur maxi d'une itération aboutissant à un cycle quelconque	longueur maxi d'une itération aboutissant à un puits		
NEWTON SIMPLIFIE									
F0	0	3	49	0	-	10	-		
F	1	3	48	0	0	10	10		
F	32	3	17	0	9	4	-		
F	42	1	7	0	9	4	-		
F	42	1	7	0	9	4	-		
F	42	1	7	0	7	4	-		
F	42	1	7	0	5	4	-		
F	0	5	27	13	-	3	5		
F	15	4	12	13	2	0	5		
F	17	3	10	13	2	0	5		
F	17	2	8	11	6(*)	7(**)	5		
F	28	1	6	11	4	6	5(***)		
F	27	0	-	11	5(****)	-	4		
F	23	0	-	10	5	-	4		
NEWTON STANDARD									
F0	0	3	49	0	-	10	-		
F	1	3	48	0	0	10	10		
F	32	3	17	0	9	4	-		
F	42	1	7	0	9	4	-		
F	42	1	7	0	9	4	-		
F	42	1	7	0	7	4	-		
F	42	1	7	0	5	4	-		
F	0	5	27	13	-	3	5		
F	15	4	12	13	2	0	5		
F	17	3	10	13	2	0	5		
F	17	2	8	11	6(*)	7(**)	5		
F	28	1	6	11	4	6	5(***)		
F	27	0	-	11	5(****)	-	4		
F	23	0	-	10	5	-	4		

Newton standard  
taux de matrices  
régulières observées

F0	0.714
F1	0.714
F2	0.714
F4	0.694
F	0.673
F7	0.633

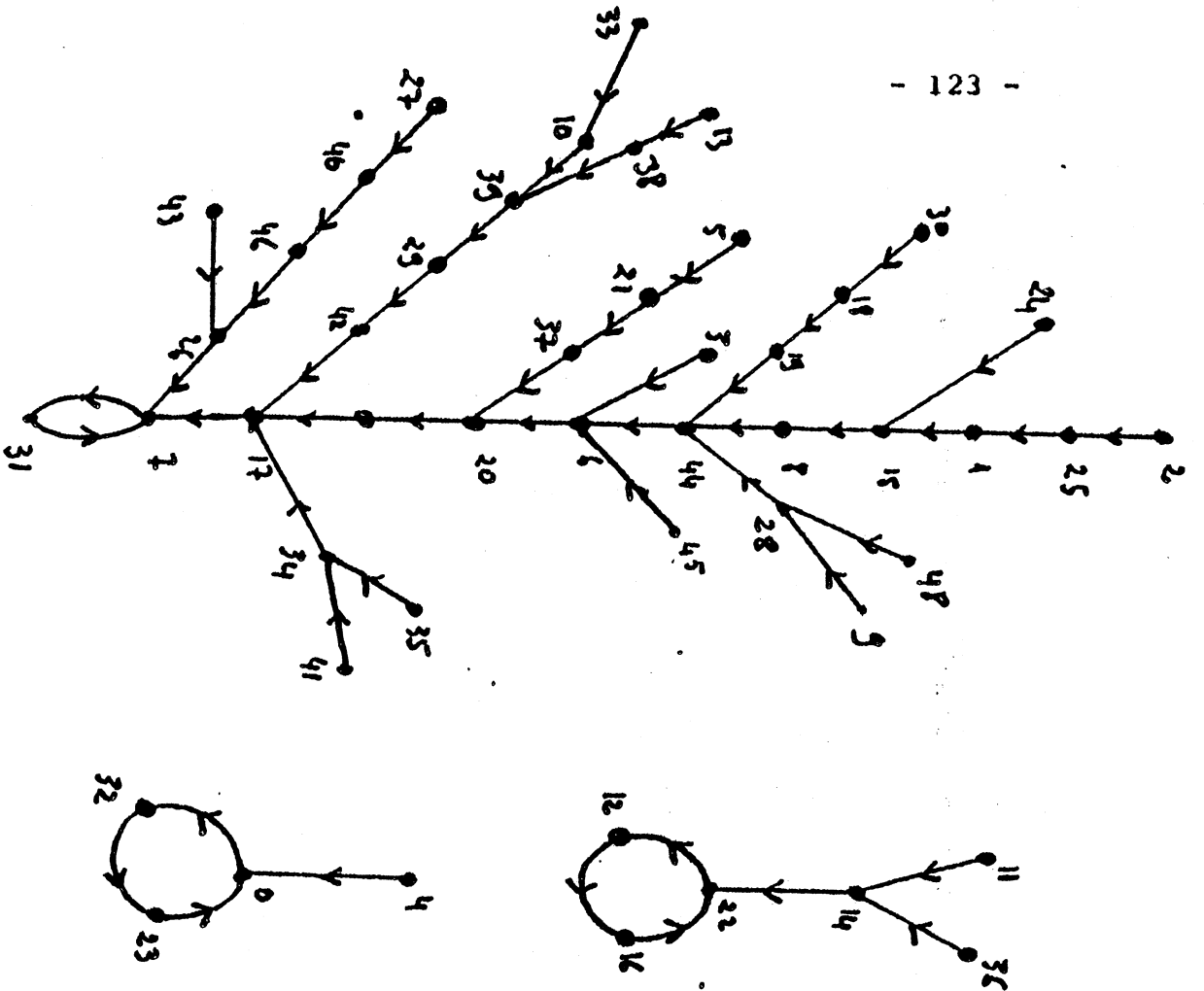
Taux théorique:  
 $\lambda_2^2 = 0.839$

Newton standard  
taux de systèmes  
solubles observés

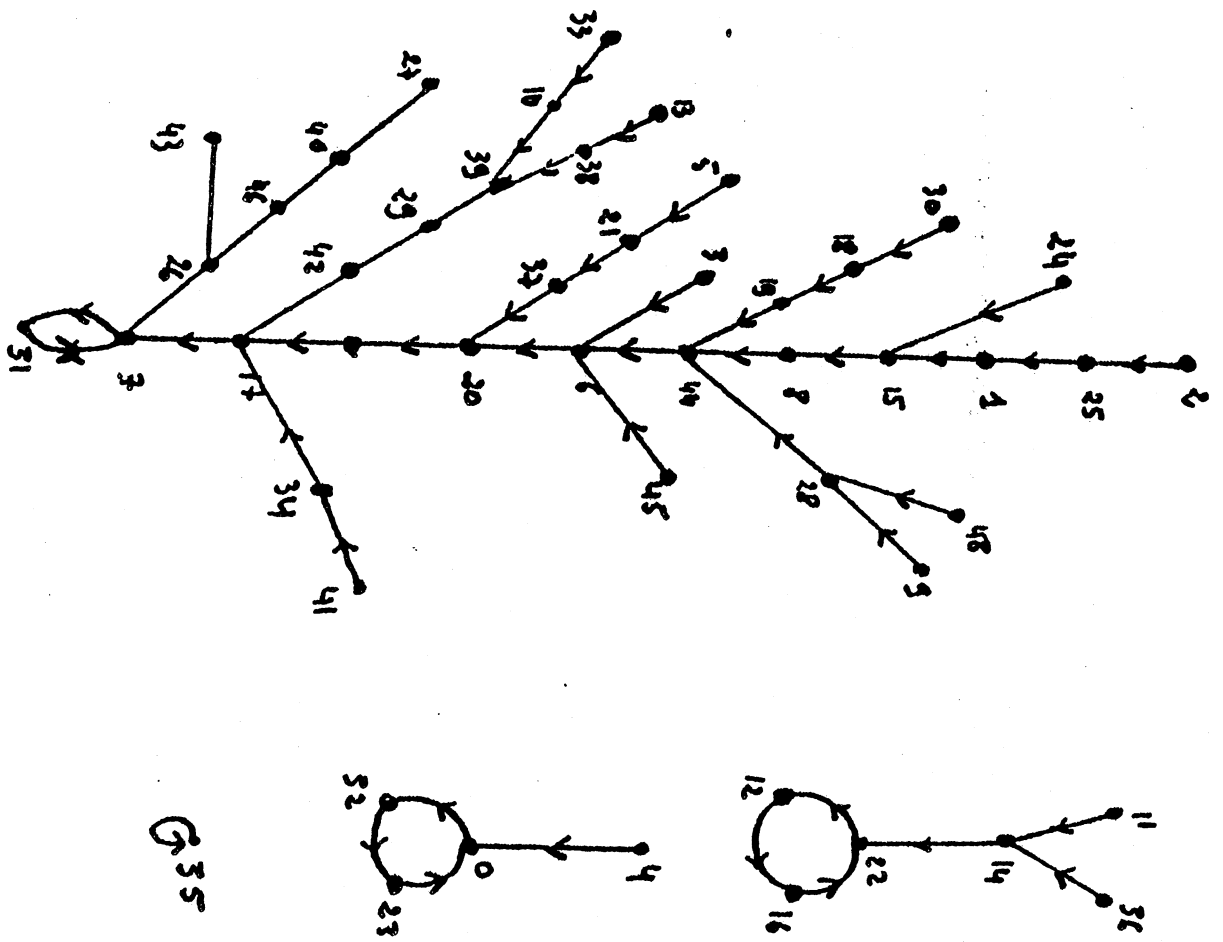
F0	0.735
F1	0.735
F4	0.735
Fu	0.755
F6	0.775
F7	0.816

Taux théorique:  
 $\lambda_2^2 = 0.862$

(\*) 20 +38 +14 +7 +42 +21 +22  
 (\*\*) 20 +38 +14 +7 +42 +21 +22 +27  
 (\*\*\*) 20 +38 +14 +7 +42 +24  
 (\*\*\*\*) 33 +39 +27 +2 +45 +8

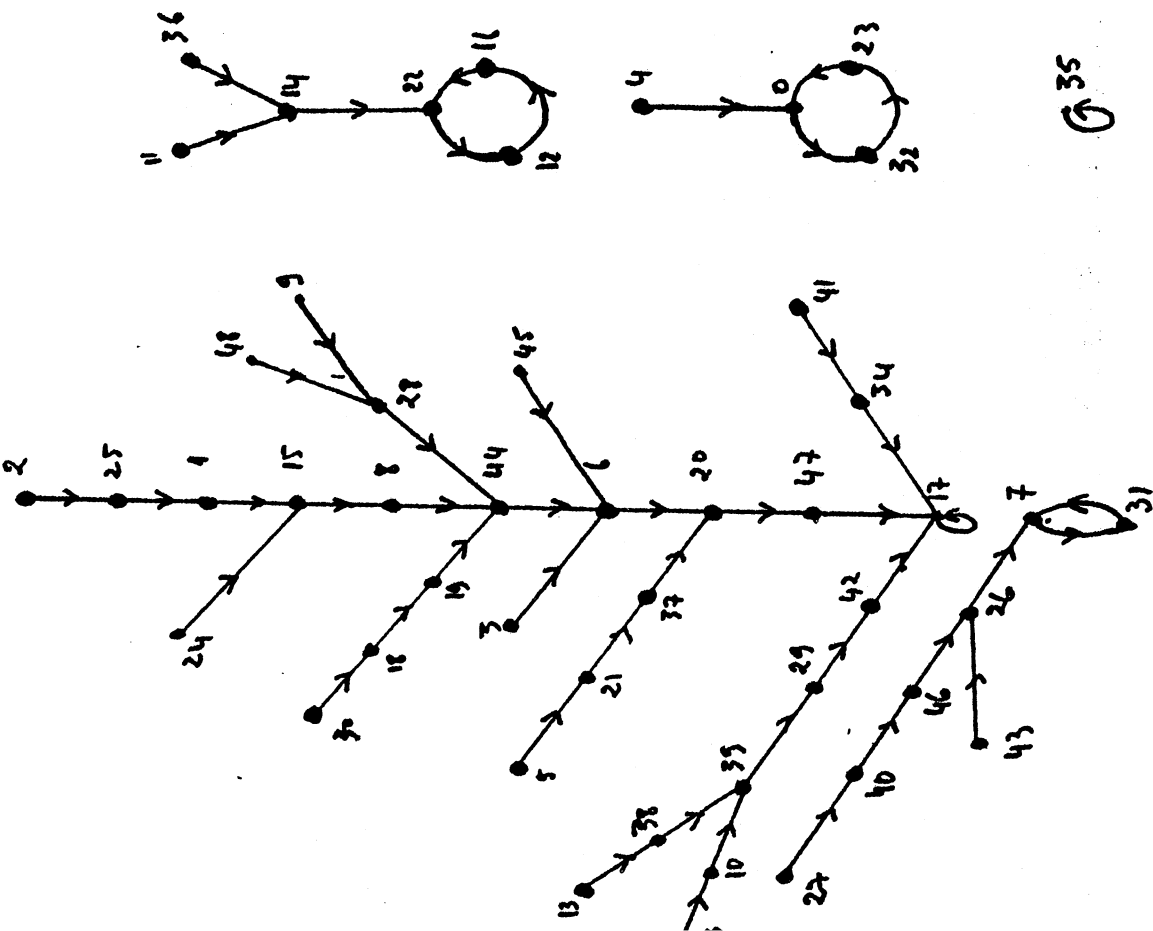


Newton simplifié sur  $F_0$

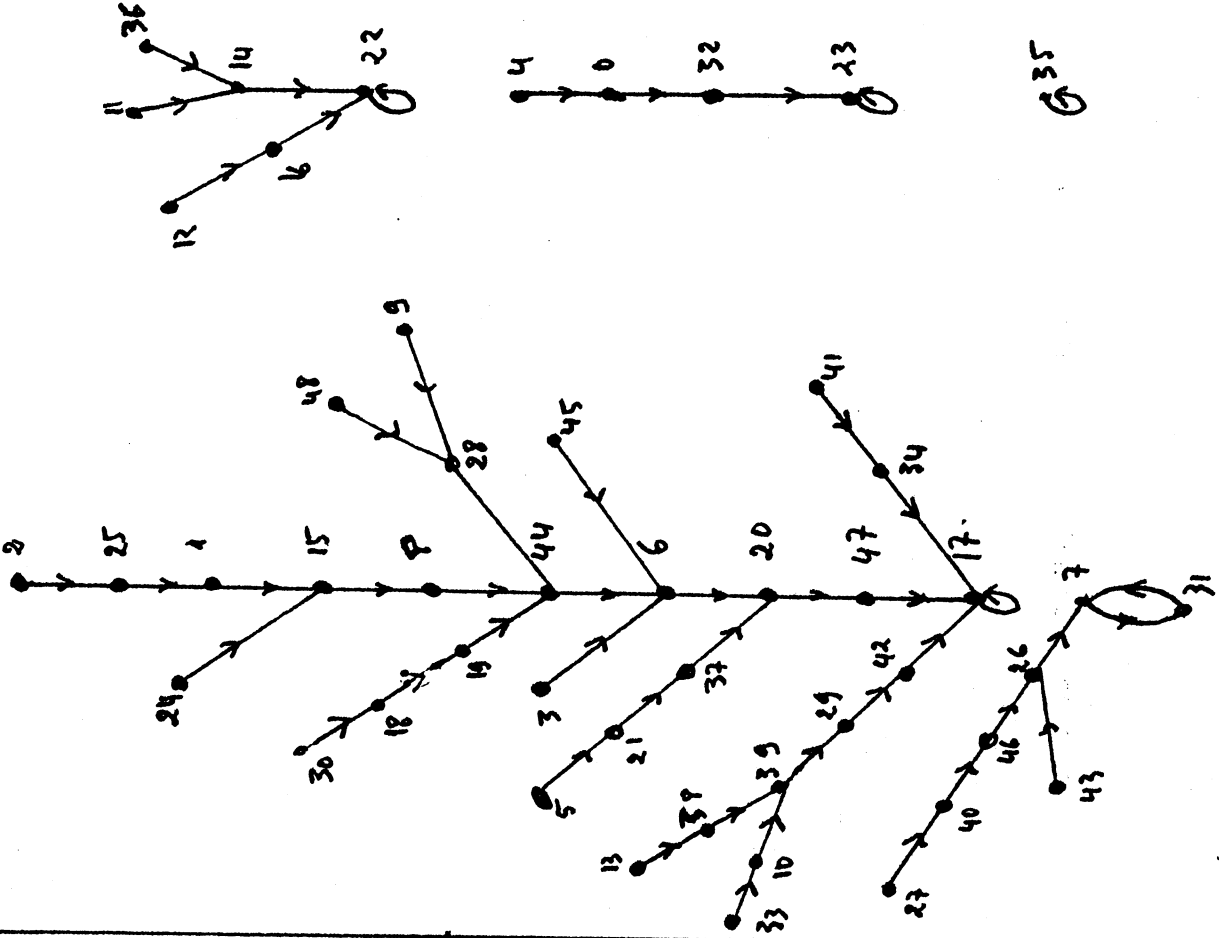


Newton simplifié sur  $F_1$

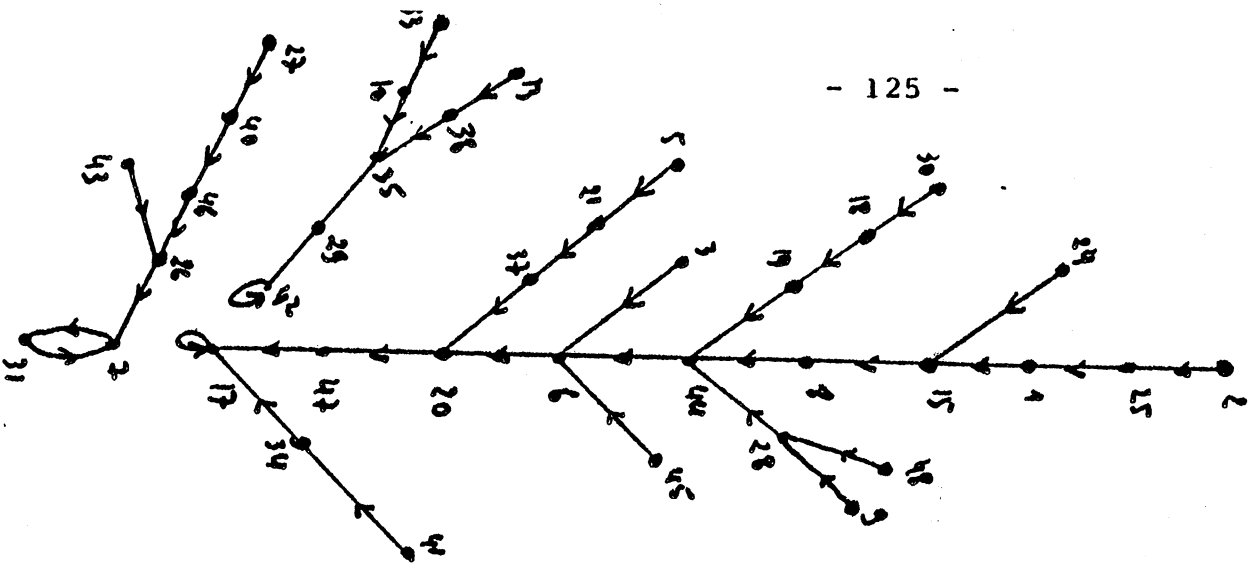
G 35



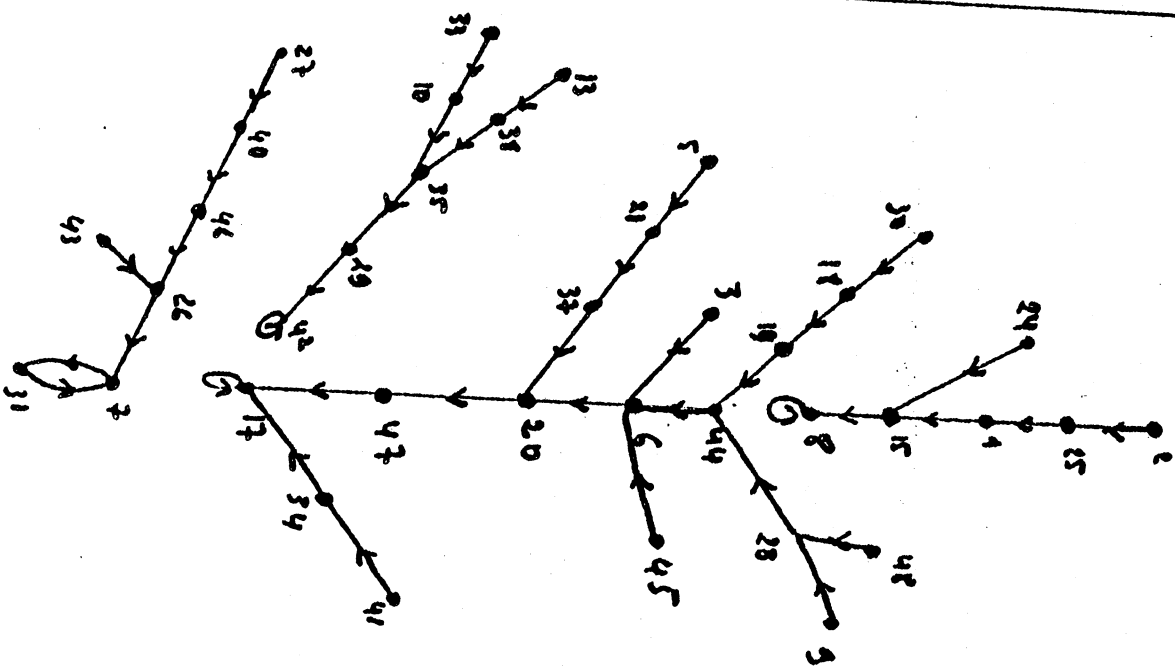
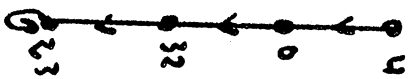
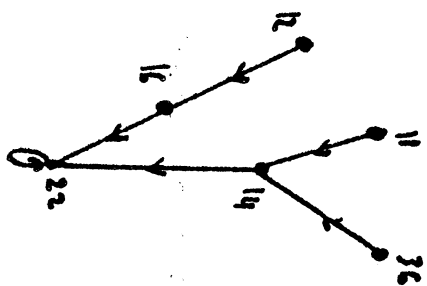
Newton simplifié sur F<sub>2</sub>



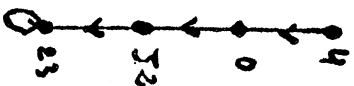
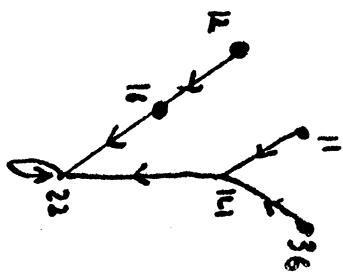
Newton simplifié sur F<sub>4</sub>



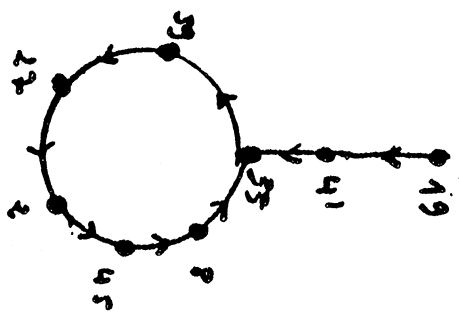
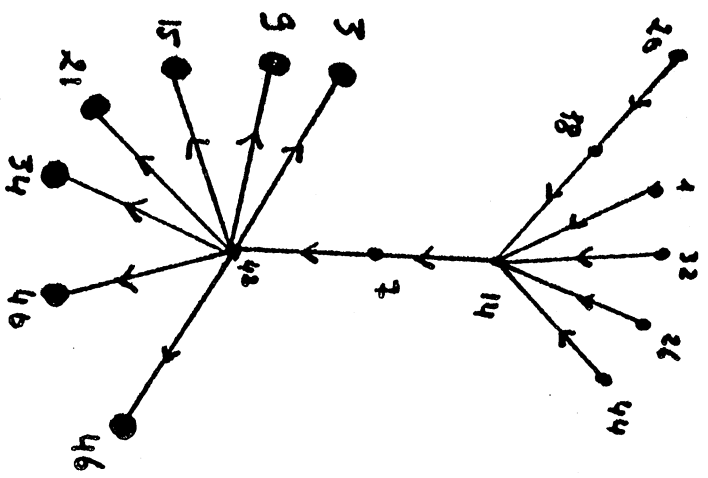
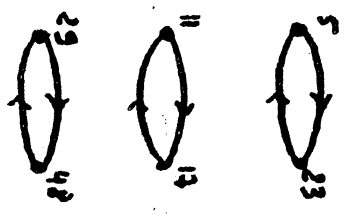
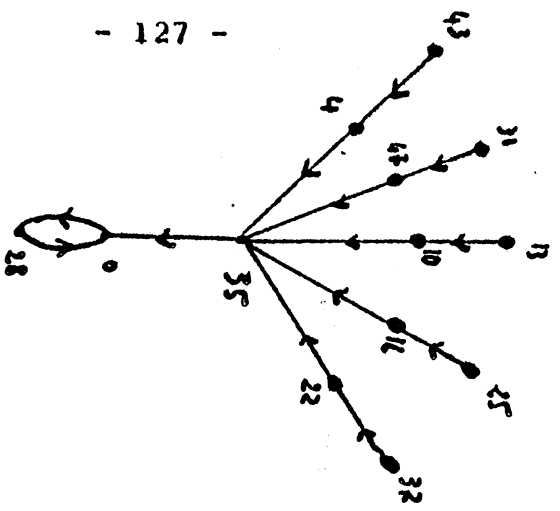
Newton simplifié sur F<sub>5</sub>



Newton simplifié sur F<sub>6</sub>

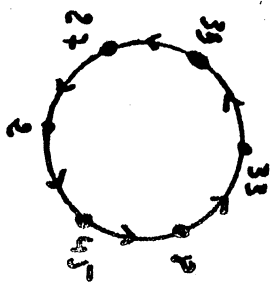
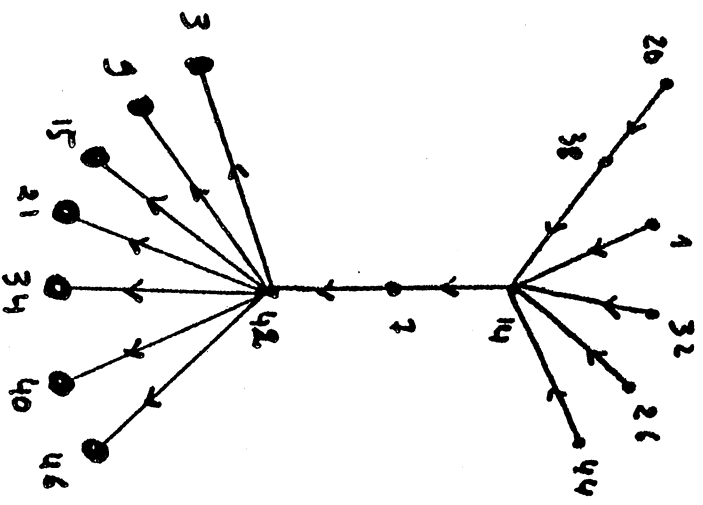
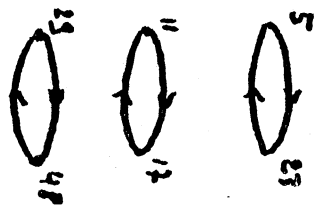
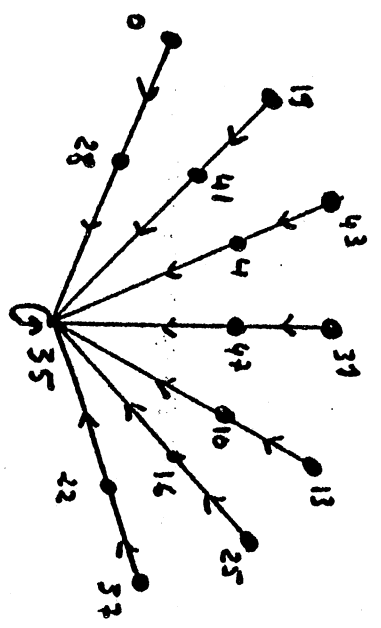






- 6
- 12
- 18
- 24
- 30
- 36

Newton standard sur F<sub>1</sub>

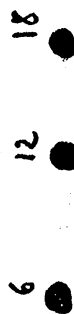
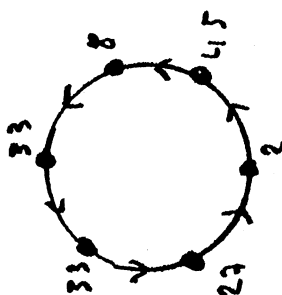
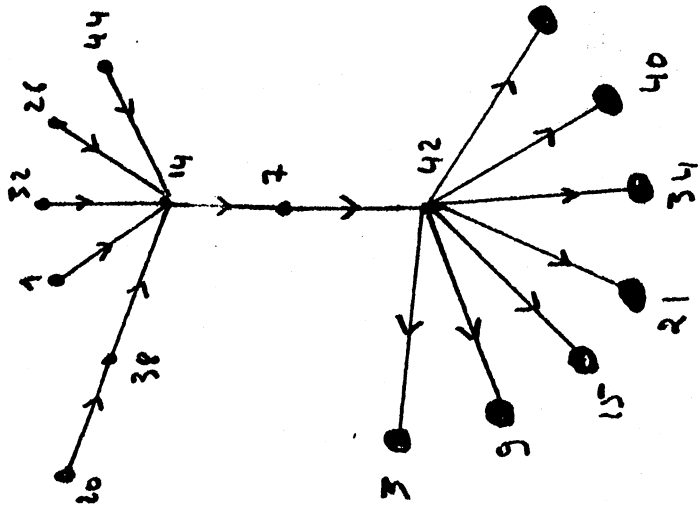
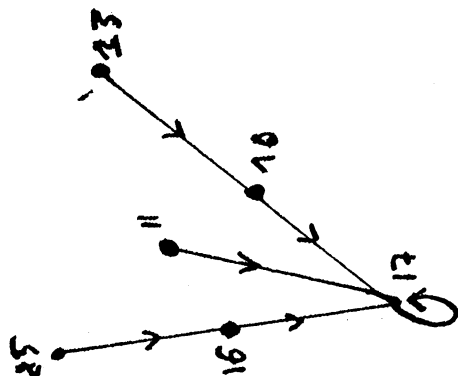
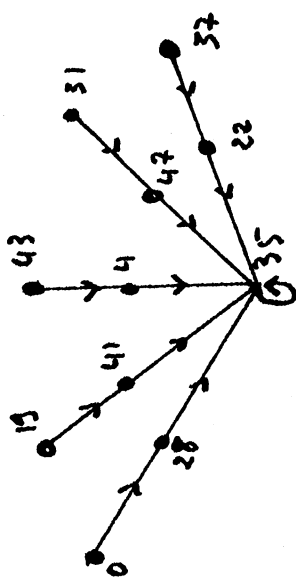


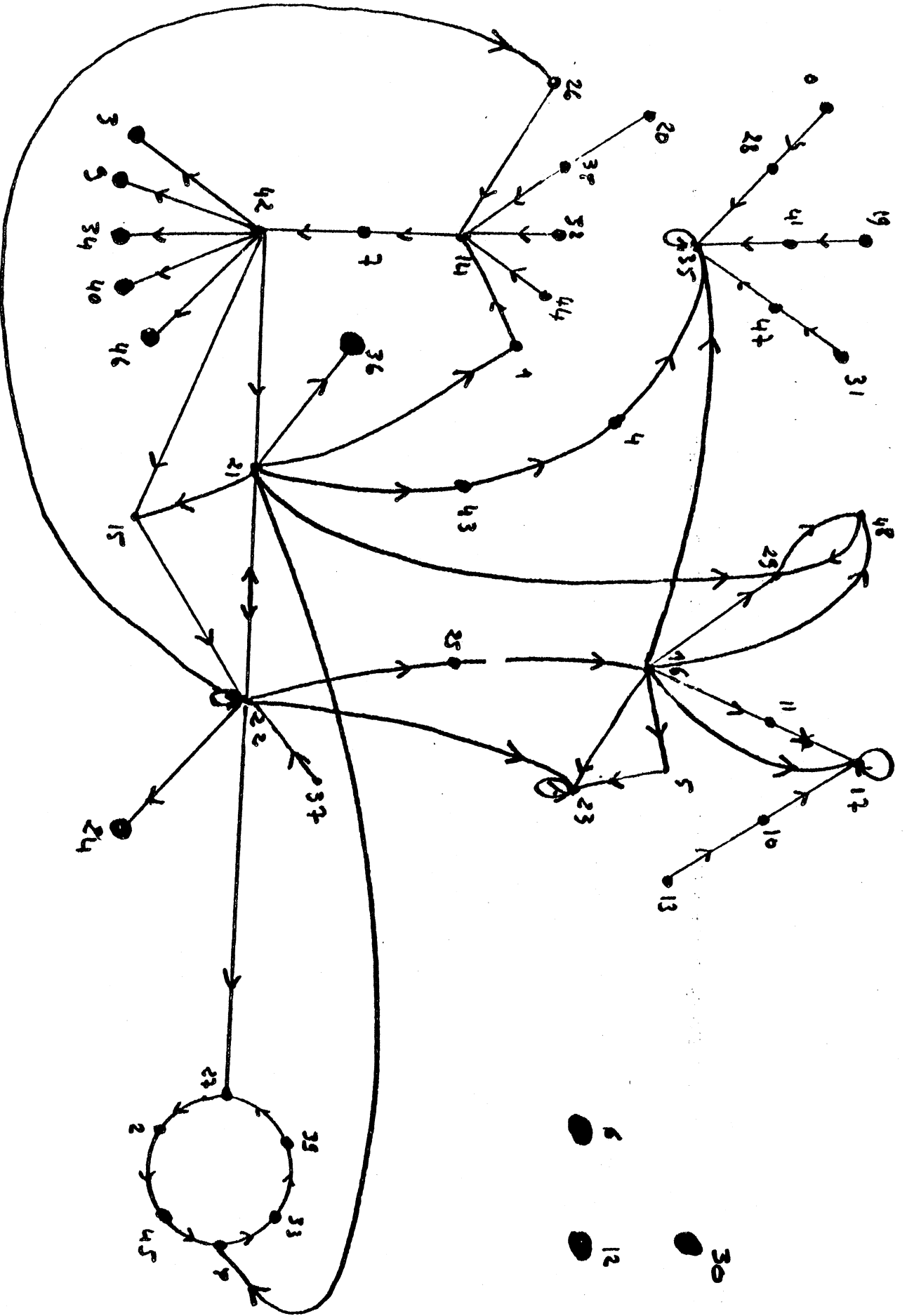
- 6
- 12
- 18
- 24
- 30
- 36

Newton standard sur F<sub>1</sub>

V<sub>35</sub> = { 28, 41 }

Newton standard sur  $F_2$





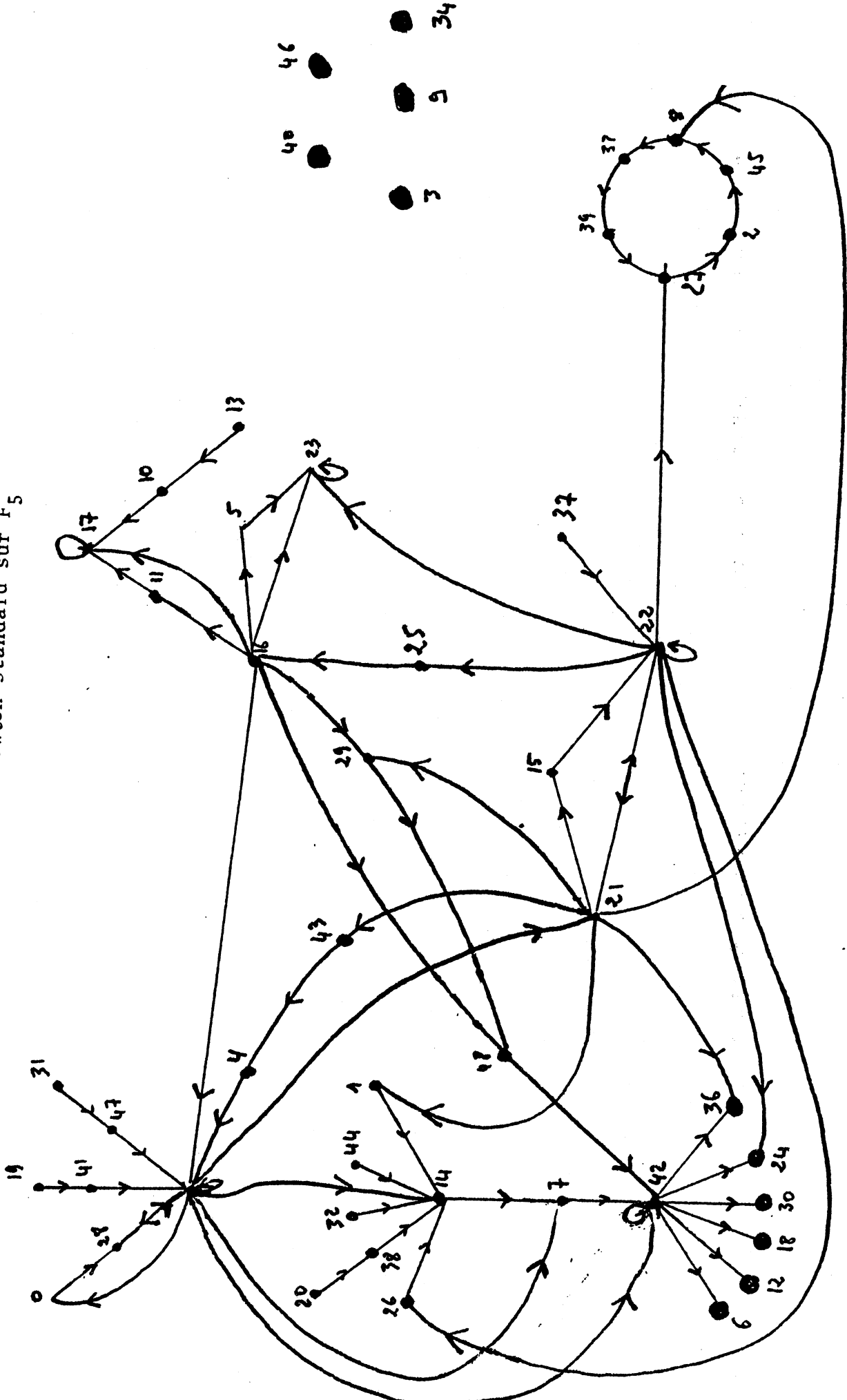
$$V_{22}^+ = \{ 21, 15 \}$$

$$V_{23}^+ = \{ 22, 16 \}$$

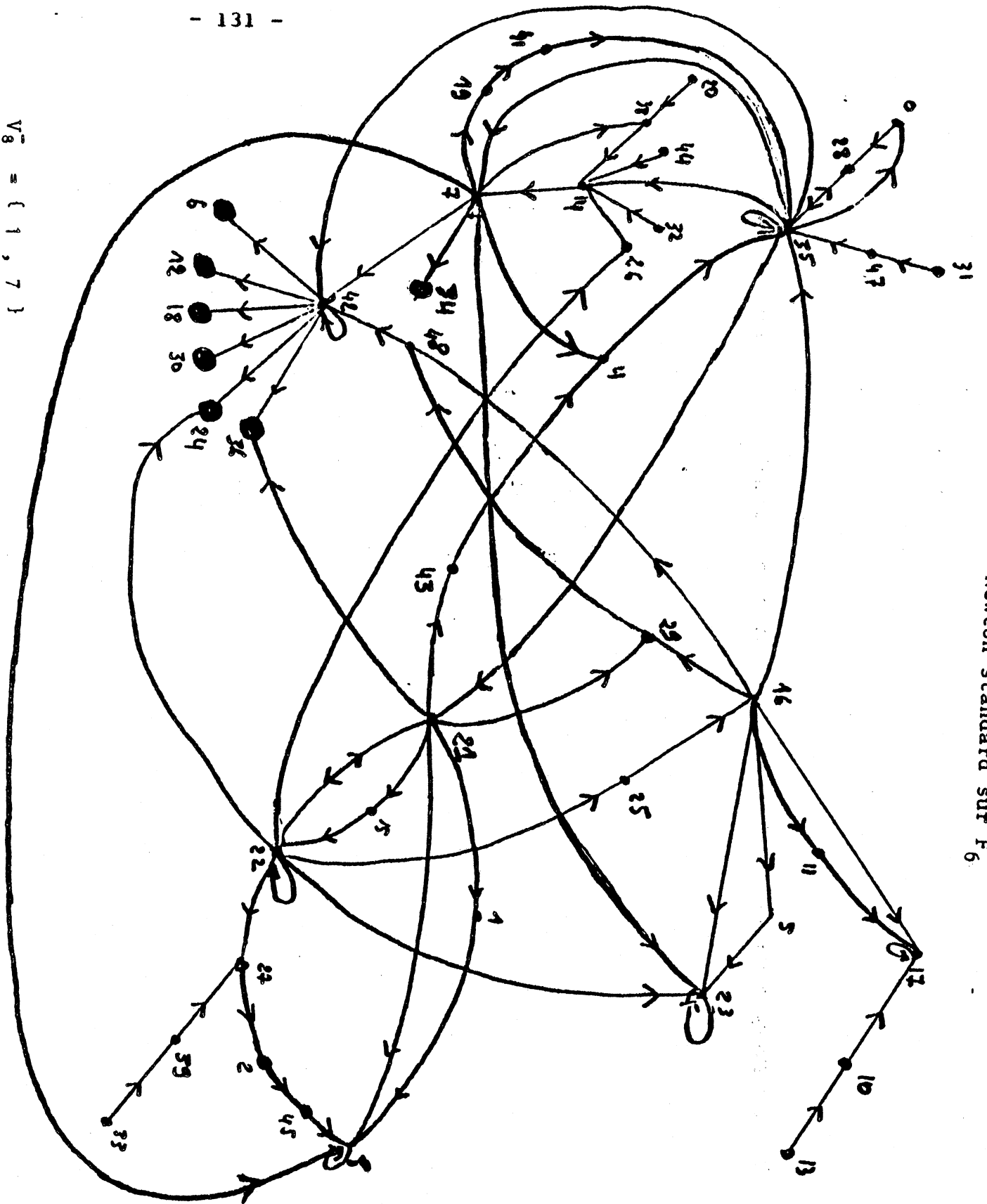
Newton standard sur  $F_4$



Newton standard sur  $F_5$



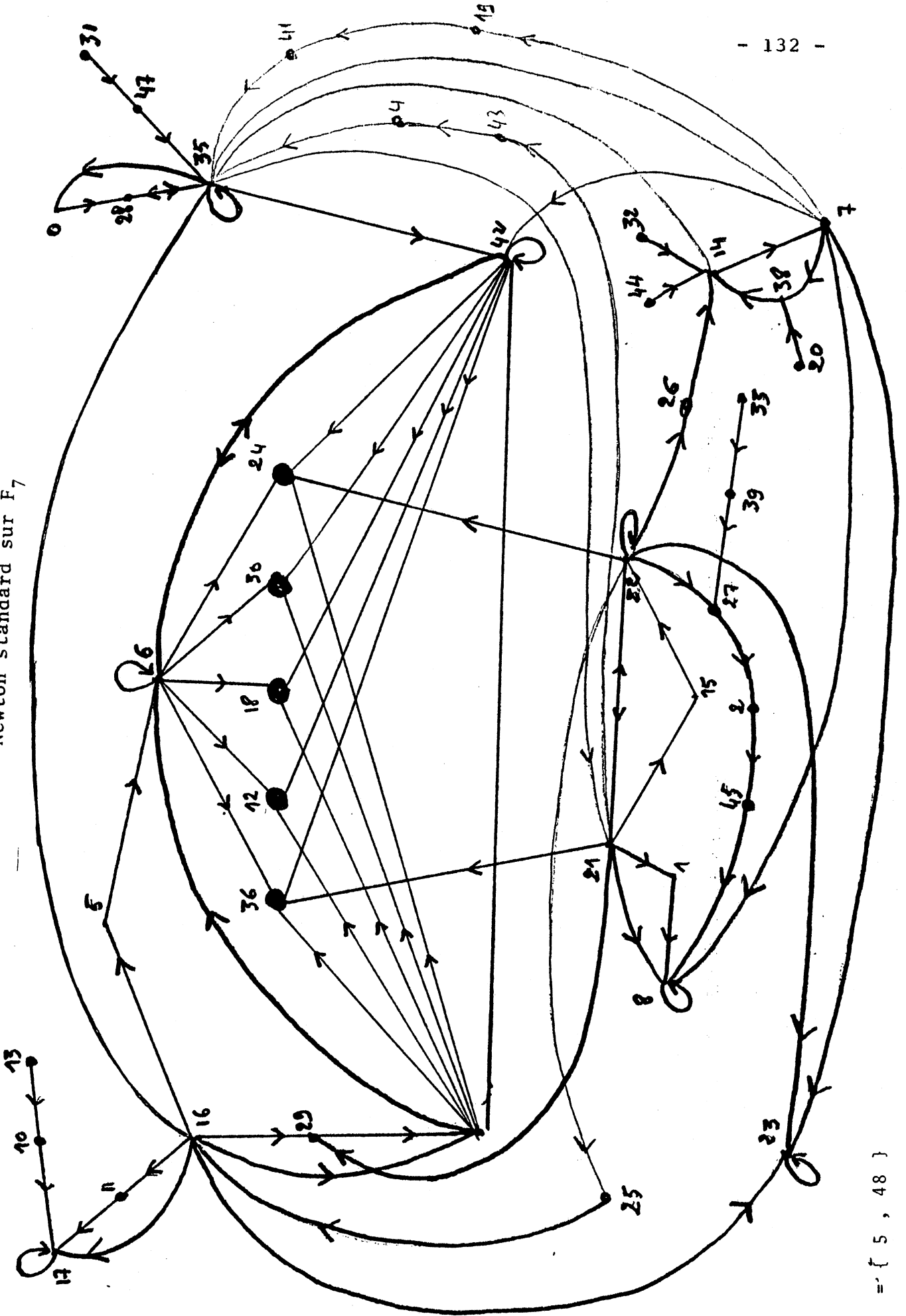
$V_{42} = \{ 35, 48 \}$



- 3
- 9
- 40
- 46

$$V_8 = \{ 1, 7 \}$$

Newton standard sur  $F_7$



## 6 COMMENTAIRES

L'examen des différents graphes et du tableau récapitulatif, nous permet de faire les observations suivantes:

\* Pour ce qui concerne l'évolution du graphe en fonction du nombre de racines introduites dans la fonction  $F_1$  considérée ( $F_0, F_1, F_2, F_4, F_5, F_6, F_7$ ) on remarque que des parties du graphe se conservent tandis que d'autres sont changées:

- Pour Newton simplifié cette évolution est simple, à partir du graphe de  $F_0$  ( on "casse" le graphe en chaque racine introduite et on la "boucle" sur elle même ), car pour calculer  $x^{r+1}$  on a besoin seulement de  $x^r$  et de  $F(x^r)$ .

- Pour Newton standard, cette évolution est plus compliquée car quand on introduit une racine  $a$ , toutes les flèches partant de  $a$  sont modifiées, ainsi que des éléments de son voisinage immédiat (voisinage immédiat à droite (resp. à gauche) si on utilise la dérivée à gauche (resp. à droite)), et parfois quelques puits.

\* Les deux méthodes fonctionnent d'autant mieux que  $F$  a un nombre plus grand de racines. Newton standard ne demande qu'un petit nombre de pas pour converger ( sur les exemples examinés on remarque que le nombre de pas pour aller à une racine est inférieur à  $p$ , de même que la longueur des cycles).

Dans le cas où plusieurs racines existent, on constate que partant d'un élément  $x^0$  qui conduit vers une racine, celle-ci n'est pas toujours la plus proche de  $x^0$  ( au sens de la distance de Lee définie par :

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^p \omega_L(x_i - y_i)$$

et où  $\omega_L$ , désigne la fonction poids définie dans le chapitre 2), (pour  $F_2$  on a deux racines 35 et 17 avec  $d(35,19) = 5$  et  $d(17,19) = 2$  et pourtant une partie du graphe de l'itération est:  $19 \rightarrow 41 \rightarrow 35$  (càd. partant de  $x^0 = 19$ , on aboutit en deux pas au point fixe 35 et non à 17).

\* Pas de problèmes pour passer de  $x^r$  à  $x^{r+1}$  dans la méthode de Newton simplifié : par le choix de  $A$  régulière  $x^{r+1}$  est toujours défini. Ce n'est

plus le cas dans Newton standard; mais la fréquence de matrices  $F'(x^r)$  régulières augmente avec  $p$  (cf.annexe [7,8]) (par exemple pour  $p = 7$  et  $n = 2$  il y a à peu près 84 % de matrices régulières). Quand le système  $F'(x^r) \theta z = F(x^r)$  est singulier, on cherche néanmoins à le résoudre, car pour  $p$  grand, le nombre de systèmes solubles est grand, (par exemple pour  $p = 7$  et  $n = 2$ , 86% des systèmes sont solubles (cf.[19]), on a donc une impossibilité ou bien plusieurs solutions. Le phénomène se traduit sur le graphe d'itération par le fait qu'il ya des blocages (systèmes impossibles) alors que par de nombreux points partent plusieurs flèches (plusieurs solutions possibles).

Toutes ces observations conforment et complètent ce qui avait été expérimenté dans  $(Z/2Z)^n$ , avec le fait supplémentaire qu'on obtient beaucoup moins de systèmes impossibles.

**A N N E X E**

**FORMULE DE TAYLOR DANS  $Z/Z$**



Soit  $F : (Z/2Z)^n \rightarrow (Z/2Z)$ .

Pour un élément  $x$  quelconque dans  $(Z/2Z)^n$ , on considère ses  $n$  voisins  $\tilde{x}_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ( $\tilde{x}_1 = x \oplus e_i$ ;  $e_i$  est un vecteur de base) alors la dérivée de  $F$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable est :

$$\Delta_1 F(x) = F(\tilde{x}_1) \oplus F(x)$$

Notations :

$$N = \{ 1, 2, \dots, n \}$$

$$I_r = \{ i_1, i_2, \dots, i_r \} \quad \text{avec } i_s \in N \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

$$J_r = \{ j_1, j_2, \dots, j_r \} \quad \text{avec } j_s \in N \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

On note par  $+$  (resp. par  $\cdot$ ) l'addition (resp. la multiplication) dans  $(Z/2Z)$ , pour faciliter l'écriture des formules.

Lemme :

Pour tout  $k$  ( $k \leq n$ ) et pour tout ensemble  $I_k$  dans  $N$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta_{i_1 \dots i_k} F(x) &= F(x + \sum_{j=1}^k e_{i_j}) + \sum_{\substack{j_1 \in I_k \\ j_1 < \dots < j_{k-1}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-1}}) \\ &+ \sum_{\substack{j_1 \in I_k \\ j_1 < \dots < j_{k-2}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}}) + \dots + \sum_{j_1 \in I_k} F(x + e_{j_1}) + F(x) \end{aligned}$$

Démonstration : récurrence sur  $k$ .

\*  $k = 1$

$$\Delta_{i_1} F(x) = F(x + e_{i_1}) + F(x) \quad (\text{par définition}).$$

\* supposons que la formule est vraie pour  $(k-1)$ , alors on a

$$\begin{aligned} \Delta_{i_1 \dots i_{k-1}} F(x) &= F(x + \sum_{j=1}^{k-1} e_{i_j}) + \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-2}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}}) \\ &+ \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-3}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-3}}) + \dots + \sum_{j_1 \in I_{k-1}} F(x + e_{j_1}) + F(x) \end{aligned}$$



en dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à  $x_{i_k}$  (on suppose que  $i_k < i_s$   $s = 1, \dots, k-1$  sans perte de généralité), on a :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i_1 \dots i_k} F(x) &= [ F(x + \sum_{j=1}^k e_{i_j}) + F(x + \sum_{j=1}^{k-1} e_{i_j}) ] \\
 &+ \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-2}}} [ F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}} + e_{i_k}) + F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}}) ] \\
 &+ \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-3}}} [ F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-3}} + e_{i_k}) + F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-3}}) ] \\
 &+ \dots + \sum_{j_1 \in I_{k-1}} [ F(x + e_{j_1} + e_{i_k}) + F(x + e_{j_1}) ] + [ F(x + e_{i_k}) + F(x) ] \\
 &= F(x + \sum_{j=1}^k e_{i_j}) + [ F(x + \sum_{j=1}^{k-1} e_{i_j}) + \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-2}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}} + e_{i_k}) ] \\
 &+ [ \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-2}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}}) + \sum_{\substack{j_1 \in I_{k-1} \\ j_1 < \dots < j_{k-3}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-3}} + e_{i_k}) ] \\
 &+ \dots + [ \sum_{j_1 \in I_{k-1}} F(x + e_{j_1}) + (F(x + e_{i_k})) ] + F(x) \\
 &= F(x + \sum_{j=1}^k e_{i_j}) + \sum_{\substack{j_1 \in I_k \\ j_1 < \dots < j_{k-1}}} F(x + e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_{k-1}}) \\
 &+ \sum_{\substack{j_1 \in I_k \\ j_1 < \dots < j_{k-2}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{k-2}}) + \dots + \sum_{j_1 \in I_k} F(x + e_{j_1}) + F(x)
 \end{aligned}$$

**Proposition**

Pour  $x, y$  quelconques dans  $(Z/2Z)^n$ , on a :

$$F(x+y) = F(x) + \sum_{i=1}^n \Delta_{i_1} F(x) \cdot y_{i_1} + \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2 \in I_n}} \Delta_{i_1 i_2} F(x) \cdot y_{i_1} \cdot y_{i_2} + \dots +$$

$$\sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{n-1} \\ i_j \in I_n}} \Delta_{i_1 \dots i_{n-1}} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_{n-1}} + \Delta_{i_1 \dots i_n} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_n}$$

Nous allons démontrer cette formule par récurrence sur le nombre  $p$  d'éléments non nuls de  $y$ .

\* si  $y = e_{i_1}$  (vecteur de base), on a :

$$F(x + y) = F(x) + \Delta_{i_1} F(x) \cdot y_{i_1} \quad (\text{par définition}).$$

\* supposons que la formule est vraie pour  $p < r-1$  et démontrons la pour  $p=r$ . d'après le lemme on a

$$F(x+y) = \Delta_{i_1 \dots i_r} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_r} + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{r-1}})$$

$$+ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} F(x + e_{j_1} + \dots + e_{j_{r-2}}) + \dots + \sum_{j_1 \in I_r} F(x + e_{j_1}) + F(x)$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence il vient

$$F(x + y) = \Delta_{i_1 \dots i_r} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_r} + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} [ F(x) + \sum_{k_1 \in J_{r-1}} \Delta_{k_1} F(x) \cdot y_{k_1}$$

$$+ \sum_{k_1 < k_2} \Delta_{k_1 k_2} F(x) \cdot y_{k_1} \cdot y_{k_2} + \dots + \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_{r-1} \\ k_s \in J_{r-1}}} \Delta_{k_1 \dots k_{r-1}} F(x) \cdot y_{k_1} \dots y_{k_{r-1}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta_{j_1 \dots j_{r-1}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-1}} ] + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} [ F(x) + \sum_{k_1 \in J_{r-2}} \Delta_{k_1} F(x) \cdot y_{k_1} \\
 & + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1, k_2 \in J_{r-2}}} \Delta_{k_1 k_2} F(x) \cdot y_{k_1} \cdot y_{k_2} + \dots + \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_{r-2} \\ k_s \in J_{r-2}}} \Delta_{k_1 \dots k_{r-2}} F(x) \cdot y_{k_1} \dots y_{k_{r-2}} \\
 & + \Delta_{j_1 \dots j_{r-2}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-2}} ] + \dots + \sum_{j_1 \in I_r} [ F(x) + \Delta_{j_1} F(x) \cdot y_{j_1} ] + F(x)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 F(x + y) & = \Delta_{i_1 \dots i_r} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_r} + [ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} F(x) + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} F(x) \\
 & + \dots + \sum_{j_1 \in I_r} F(x) + F(x) ] \\
 & + [ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} \sum_{k_1 \in J_{r-1}} \Delta_{k_1} F(x) \cdot y_{k_1} + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} \sum_{k_1 \in J_{r-2}} \Delta_{k_1} F(x) \cdot y_{k_1} \\
 & + \dots + \sum_{j_1 \in I_r} \Delta_{j_1} F(x) \cdot y_{j_1} ] \\
 & + [ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} \sum_{\substack{k_1, k_2 \in J_{r-1} \\ k_1 < k_2}} \Delta_{k_1 k_2} F(x) \cdot y_{k_1} \cdot y_{k_2} \\
 & + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} \sum_{\substack{k_1, k_2 \in J_{r-2} \\ k_1 < k_2}} \Delta_{k_1 k_2} F(x) \cdot y_{k_1} \cdot y_{k_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \sum_{\substack{j_1, j_2 \in I_r \\ j_1 < j_2}} \Delta_{j_1 j_2} F(x) \cdot y_{j_1} \cdot y_{j_2} ] + \dots + \\
 & + [ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} \sum_{\substack{k_s \in J_{r-2} \\ k_1 < \dots < k_{r-2}}} \Delta_{k_1 \dots k_{r-2}} F(x) \cdot y_{k_1} \dots y_{k_{r-2}} \\
 & + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} \Delta_{j_1 \dots j_{r-2}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-2}} ] \\
 & + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} \Delta_{j_1 \dots j_{r-1}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-1}}
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 F(x + y) &= \Delta_{i_1 \dots i_r} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_r} + [ C_r^{r-1} + C_r^{r-2} + \dots + C_r^1 + C_r^0 ] \cdot F(x) \\
 &+ [ C_{r-1}^{r-2} + C_{r-1}^{r-3} + \dots + C_{r-1}^0 ] \cdot [ \sum_{j_1 \in I_r} \Delta_{j_1} F(x) \cdot y_{j_1} ] \\
 &+ [ C_{r-2}^{r-3} + \dots + C_{r-2}^0 ] \cdot [ \sum_{\substack{j_1, j_2 \in I_r \\ j_1 < j_2}} \Delta_{j_1 j_2} F(x) \cdot y_{j_1} \cdot y_{j_2} ] + \dots + \\
 &+ [ C_2^1 + C_2^0 ] \cdot [ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-2}}} \Delta_{j_1 \dots j_{r-2}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-2}} ] \\
 &+ [ \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} \Delta_{j_1 \dots j_{r-1}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-1}} ]
 \end{aligned}$$

Remarque:

$$(1 + 1)^1 = 1 + C_1^{1-1} + C_1^{1-2} + \dots + C_1^0 = 0$$

d'où

$$F(x+y) = F(x) + \sum_{j_1 \in I_r} \Delta_{j_1} F(x) \cdot y_{j_1} + \dots + \sum_{\substack{j_s \in I_r \\ j_1 < \dots < j_{r-1}}} \Delta_{j_1 \dots j_{r-1}} F(x) \cdot y_{j_1} \dots y_{j_{r-1}} \\ + \Delta_{i_1 \dots i_r} F(x) \cdot y_{i_1} \dots y_{i_r}$$

c.q.f.d.

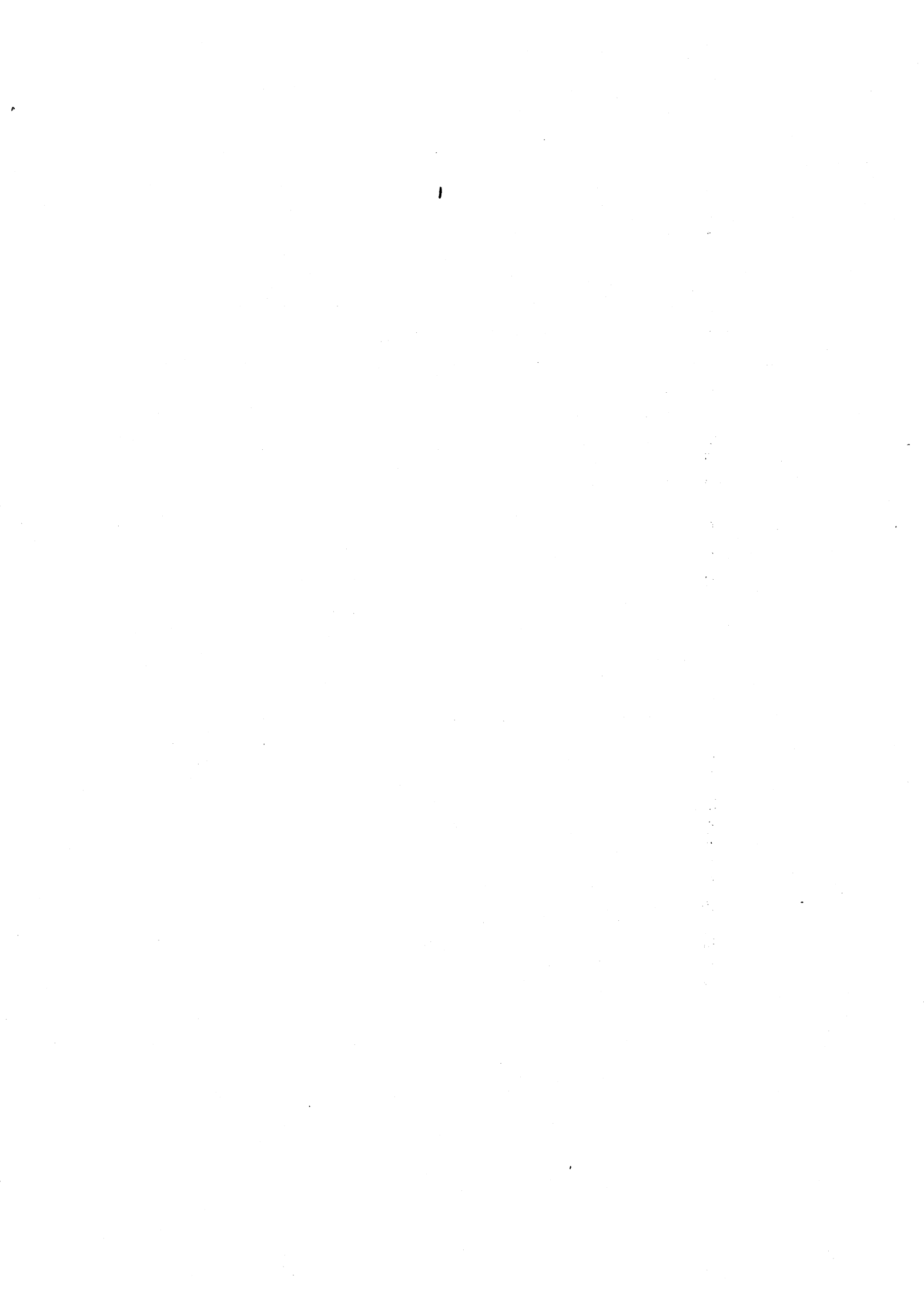
### CONCLUSION GENERALE

Nous avons donc développé dans ce travail des outils d'analyse de quelques problèmes d'itérations discrètes.

Les outils utilisés essayent de transposer les outils usuels d'analyse (voisinage , dérivées , outils métriques etc...) mais il est clair que les outils discrets que nous manipulons s'utilisent de façon différente : du fait de la structure discrète des problèmes étudiés , nos démonstrations sont beaucoup plus à caractère algébrique qu'analytique. Il n'y a pas de raisonnement par continuité , mais souvent à la place des raisonnement par convergence stationnaire (en un nombre fini de pas) ou des manipulations formelles de variables (cf. Chap.1)

Quelques résultats peuvent sembler simples , mais sont le fruit de démonstrations longues et techniques .

Sans prétendre que ce type d'outils puisse tout analyser , on peut penser qu'il reste encore pas mal de choses à comprendre et à formaliser pour ce type d'approche.(itérations discrètes).



**REFERENCES.**

- (1) E.H Snoussi (1980) : Structure et comportement itératif de certains modèles discrets. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle , Grenoble.
- (2) F.Robert (1973-1974) : Matrices non négatives et normes vectorielles. Polycoié , Université de Grenoble.
- (3) F.Robert (1976) : Comparaison des modes opératoires d'un automate cellulaire fini. R.R n° 31. IMAG (Grenoble).
- (4) F.Robert (1978) : Théorème de Perron Frobenius et Stein-Rosenberg booléens. Linear Algebra and its Appl. 19. 237-250.
- (5) F.Robert (1979) : Dérivée discrète et convergence locale d'une itération booleenne . R.R n° 163. IMAG (Grenoble). A paraitre dans linear Algebra and its Appl.
- (6) F.Robert (1980) : Itérations sur des ensembles finis ; et automates cellulaires contractants. Linear Algebra and its Appl. 29. 393-412.
- (7) F.Robert (1981) : Une méthode de Newton en variables discrètes. R.R n° 225 IMAG (Grenoble).
- (8) F.Robert (1981) : Itérations discrètes . Polycoié Univercité de Grenoble.
- (9) H.Atlan , F.Fogelman , J.Salomon , G.Weisbersh (1981) : Random boolean networks . A paraitre dans Cygemetics.
- (10) Ian.F.Blake , Ronald.C.Mullin (1975) : The mathématiqueal théory of coding.
- (11) J.M.Greenberg , B.D.Hassard , S.P.Hastings (1978) : Pattern formation and periodic structures in systems modeled by reaction-diffusion equations. Bull; Am. Math.Soc. 84 6 1296-1327.
- (12) J.Ortega , W.C.Rheinboldt (1970) : Iterative solution of non linear equations in several variables. Academic Press.



- (13) **J.R.Joli** (1973) : Equations et variétés algébriques sur un corps fini. Enseign.Math. TXIX , fasc. 1-2 .
- (14) **P.Ciarlet** : Cours d'analyse numérique aux Ponts et Chaussées. (Polycopié).
- (15) **R.Thomas** (1979) : Kinetic logic . Lecture Notes in Biomathematics. Springer Verlay. n°29.
- (16) **R.S.Varga** (1962) : Matrix Iterative Analysis . Prentice Hall.
- (17) **S.EL Bernuossi** (1981) : Comparaison de procédés série et parallèle d'un opérateur discret sous hypothèse de contraction . RR n°286 IMAG (Grenoble).
- (18) **V.A.Ladye F.F** (1974) : Survey of research in the theory of homogenous structur and their applications . Math. Biosciences Z.Z 121-154 .
- (19) **Zequ Jiang** (1982) : Expérimentation des méthodes itératives de Newton et Gauss-Seidel en variables discrètes. Thèse d'Université (Grenoble).

Dernière page d'une thèse

---

VU

Grenoble, le 20 Avril 82.

Le Président de la thèse

*PLaurent*

P. J. LAURENT

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 21.4.82

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



*STanche*

TANCHE

