



HAL
open science

Sur la résolution numérique du problème de Navier-Stokes tridimensionnel axisymétrique en fonction de courant-vorticité

José Monsalve

► **To cite this version:**

José Monsalve. Sur la résolution numérique du problème de Navier-Stokes tridimensionnel axisymétrique en fonction de courant-vorticité. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT: . tel-00303290

HAL Id: tel-00303290

<https://theses.hal.science/tel-00303290>

Submitted on 21 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

«Mathématiques appliquées

Analyse numérique»

par

MONSALVE José



**SUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME
DE NAVIER-STOKES TRIDIMENSIONNEL AXISYMETRIQUE
EN FONCTION DE COURANT-VORTICITE.**



Thèse soutenue le 30 Juin 1982 devant la commission d'examen

N. GASTINEL	Président
A. PONCET	} Examineurs
R. ROBERT	
Y. FAUTRELLE	
P.J. LAURENT	
F. THOMASSET	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et crytogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Biophysique
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
BEGUIN Claude	Chimie organique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
BUISSON Roger	Physique IUT 1
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
COHEN Henri	Mathématiques pures
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CONTE René	Physique IUT 1.
CYROT Michel	Physique du solide
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
GLENAT René	Chimie organique
GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KERCKOVE Claude	Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

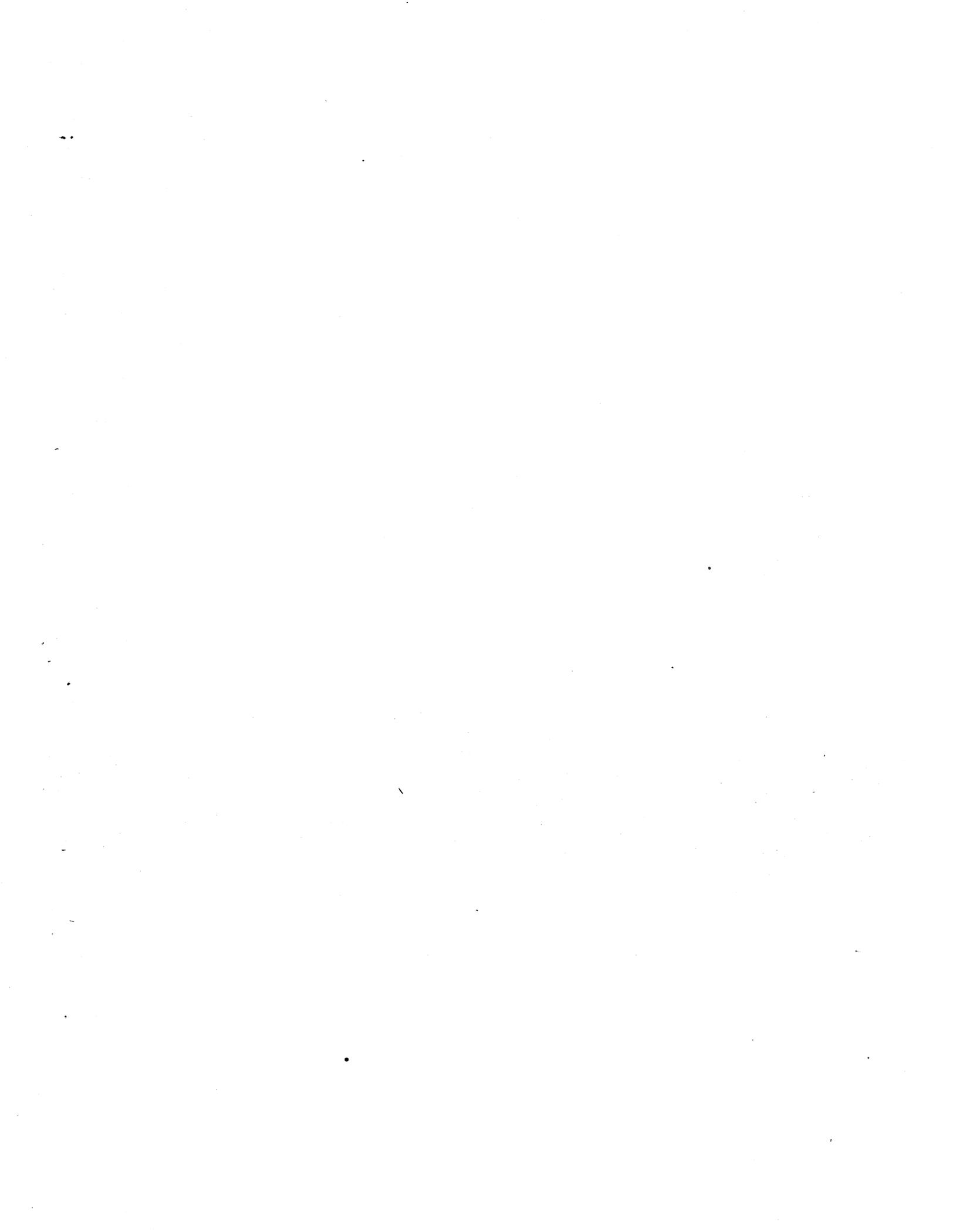
MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépto-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophthalmologie

MM. PARAMELLE Bernard	Pneumologie
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
RAPHAEL Bernard	Stomatologie
SCHAEFER René	Cancérologie
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie
STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique

à ma mère,

à Madou, sans que je laisse,
pour autant, de côté le reste
de la famille Exertier, qui
m'est si cher.

à toute l'Amérique Latine



Je tiens à remercier Monsieur le Professeur N. GASTINEL
qui a bien voulu présider le Jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur A. PONCET qui m'a proposé et a dirigé
ce travail, au Laboratoire IMAG, ainsi que Monsieur R. ROBERT
pour ses précieux conseils et sa participation au Jury.

Je suis reconnaissant à Messieurs F. THOMASSET,
P.J. LAURENT, Y. FAUTRELLE pour l'honneur qu'ils m'ont fait
de participer au Jury.

J'exprime ma gratitude et mon amitié à toutes les personnes
du laboratoire pour la contribution que chacune d'elle a pu
apporter. Tout particulièrement à M. THELIAS et M. HYAMS.

Enfin, je remercie Mme BICAIS pour le soin et la gentillesse
dont elle ne s'est jamais départie lors du travail de
dactylographie.

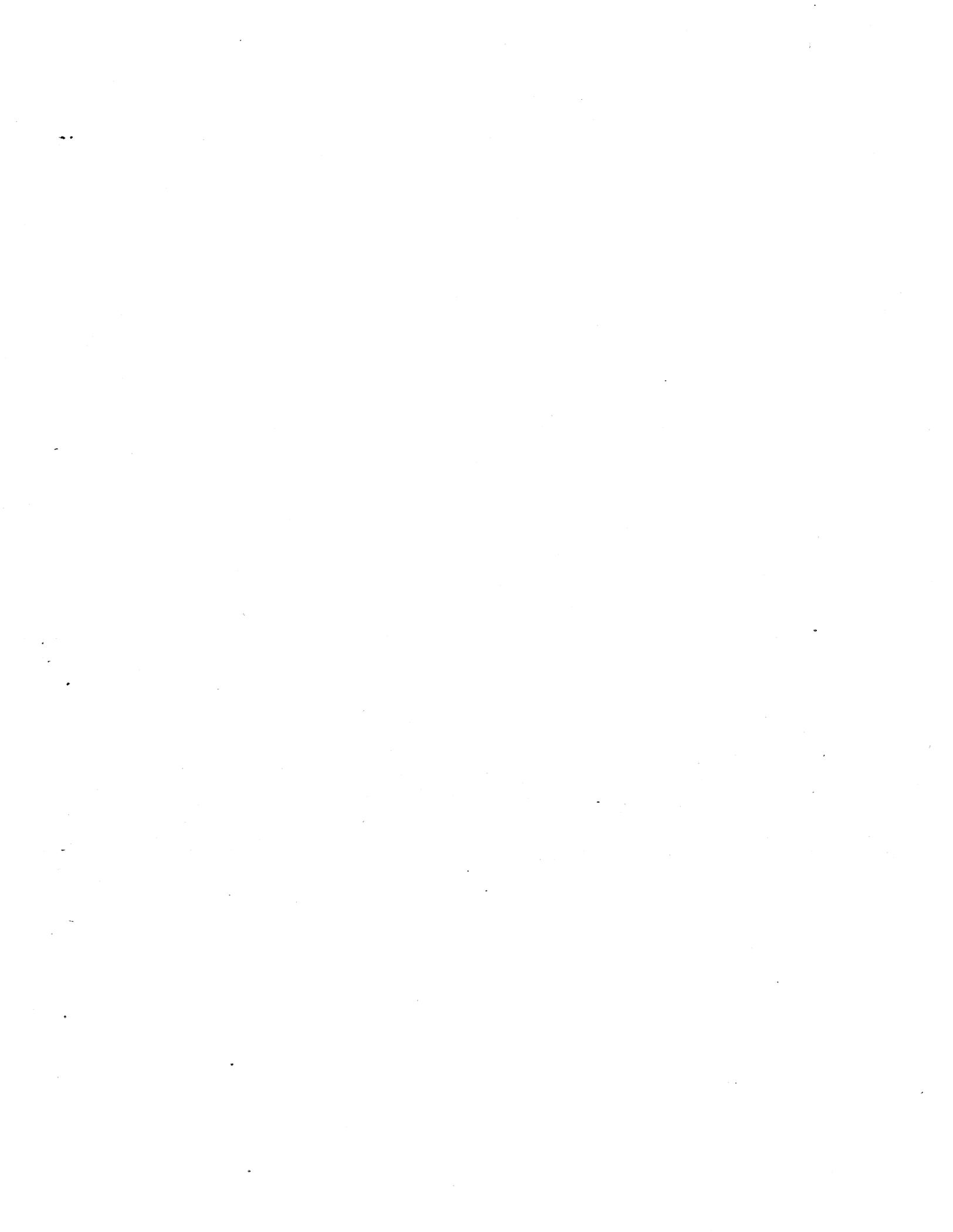


TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION GENERALE</u> -----	1
 <u>CHAPITRE I</u>	
1.0 Introduction -----	7
1.1 Origine du problème -----	7
1.2 Définition de l'espace V -----	13
1.3 Sur l'espace de trace T_α -----	18
1.4 Résultats d'existence et unicité du problème (1.1) --	19
1.5 Une autre définition de l'aspect V -----	20
1.6 Résultats de régularité de la solution -----	25
1.7 Une autre façon de poser le problème (1.1) -----	26
1.8 Remarques et résumé du chapitre I -----	28
 <u>CHAPITRE II</u>	
2.0 Introduction -----	31
2.1 Résultats d'Analyse Fonctionnelle -----	33
2.2 Formulation variationnelle et résultats d'existence -	42
2.3 Problème de l'unicité -----	44
2.4 Découplage du problème (\hat{P}) -----	46
2.5 Résumé de la méthode de découplage -----	56
 <u>CHAPITRE III</u>	
3.1 Discrétisation de Ω , espaces fonctionnels -----	59
3.2 Problèmes discret, existence, unicité -----	61
3.3 Décomposition du problème discret -----	64
3.4 Analogie discret de la proposition 2.4.4. (Ch. II) --	68
3.5 Application de la proposition 3.4.2. à la solution de (\hat{P}_h)-----	70
3.6 Construction et solution du système linéaire équivalent à (3.55) -----	71
3.7 Remarques sur l'utilisation des méthodes itératives -	74
3.8 Etude du problème de Stokes axisymétriques en utilisant l'opérateur $H(u) = B(ru)$ -----	77

3.9	Application de la méthode de découplage pour résoudre les équations de Navier-Stokes stationnaires dans des conditions d'axisymétrie et de nombre de Reynolds petits -----	82
3.10	Intégration de la méthode de découplage à un code général d'éléments finis -----	84

CHAPITRE IV

4.0	Introduction -----	91
4.1	Etude numérique du problème de Dirichlet pour l'opérateur B -----	93
4.2	Etude numérique du problème de Stokes axisymétriques ----	98
4.3	Essais numériques pour le problème de Navier-Stokes axisymétriques -----	121

ANNEXES

ANNEXE A	Tableaux des résultats correspondants aux essais numériques pour le problème $B(u) = f$, $u _{\Gamma} = g$ -----	131
ANNEXE B	Tableaux des résultats correspondants aux essais numériques du problème. $B(rB(u))=f$, $u _{\Gamma} = g_1$, $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} _{\Gamma} = g_2$ -----	135
ANNEXE C	Tableaux des résultats correspondants aux essais numériques pour les équations de Navier-Stokes axisymétriques-----	161

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> -----	169
----------------------------	-----

INTRODUCTION GENERALE

Ce travail présente l'étude et la mise en oeuvre de méthodes de résolution du problème de Dirichlet pour des opérateurs du type $B(rB(.))$. Ces méthodes ont été introduites par GLOWINSKI-PIRONNEAU [7] dans le cas du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique.

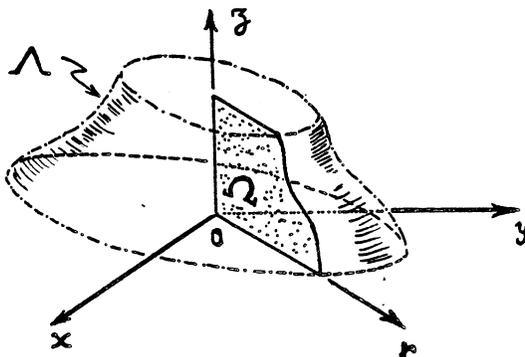
Soit Ω un sous-domaine de \mathbb{R}_+^2 de frontière Γ régulière ; le problème à résoudre est :

$$\begin{aligned}
 (\hat{P}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} B(rB(\psi)) = f \quad \text{dans } \Omega \\ \psi|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2 \end{array} \right. \\
 \text{où} \quad & B(\psi) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

avec (r, z) les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque de \mathbb{R}^2 .

MOTIVATION

- (a) En mécanique des fluides le problème de Stokes modélise un écoulement visqueux incompressible dans $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Dans des conditions d'écoulement axisymétrique, Ω étant simplement connexe et la méridienne de Λ -voir fig. (0.1)-, la fonction de courant ψ satisfait l'équation (\hat{P}) .



- (b) On peut envisager la résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles axisymétriques, en formulation vorticité-fonction de courant par l'utilisation d'un solveur de Stokes.
- (c) On peut envisager aussi la résolution du problème (\hat{P}) avec Ω multiplément connexe.

INTERET DE LA METHODE

- (a) Du point de vue de l'approximation : le problème \hat{P} est un problème d'ordre 4. La méthode présentée est une méthode d'éléments finis mixtes qui consiste à ramener la résolution de (\hat{P}) à :
 - 1) La résolution d'un nombre fini de problèmes de Dirichlet pour l'opérateur B.
 - 2) La résolution d'un système linéaire de matrice symétrique, définie positive et pleine qui s'obtient par discrétisation d'une équation intégrale.

Lors de la discrétisation il suffit alors de prendre des éléments finis de classe C^0 alors que la résolution d'un problème d'ordre 4 demande en général l'utilisation d'éléments de classe C^1 (élément d'Argyris, par exemple).

- (b) La discrétisation de (\hat{P}) par la méthode des différences finies ne peut pas se faire dans le cas où la géométrie de Ω est trop compliquée.
- (c) Du point de vue de la mécanique des fluides : une telle approximation assure la continuité de la fonction de courant ψ mais également celle du tourbillon $\omega = rB(\psi)$ tandis que les approximations qui utilisent des éléments de classe C^1 font apparaître des discontinuités pour le tourbillon.

IDEES PRINCIPALES DE LA METHODE

On définit la fonction vorticité $\omega = rB(\omega)$ qui permet de ramener le problème (\hat{P}) à deux problèmes couplés de Dirichlet pour l'opérateur B :

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\omega) = f \\ rB(\psi) = \omega \\ \psi|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2 \end{array} \right.$$

Supposons $\lambda = \omega|_{\Gamma}$ connue, alors on peut découpler le système (0.1) comme :

$$(0.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\omega) = f, \quad \omega|_{\Gamma} = \lambda \\ rB(\psi) = \omega, \quad \psi|_{\Gamma} = g_1 \end{array} \right.$$

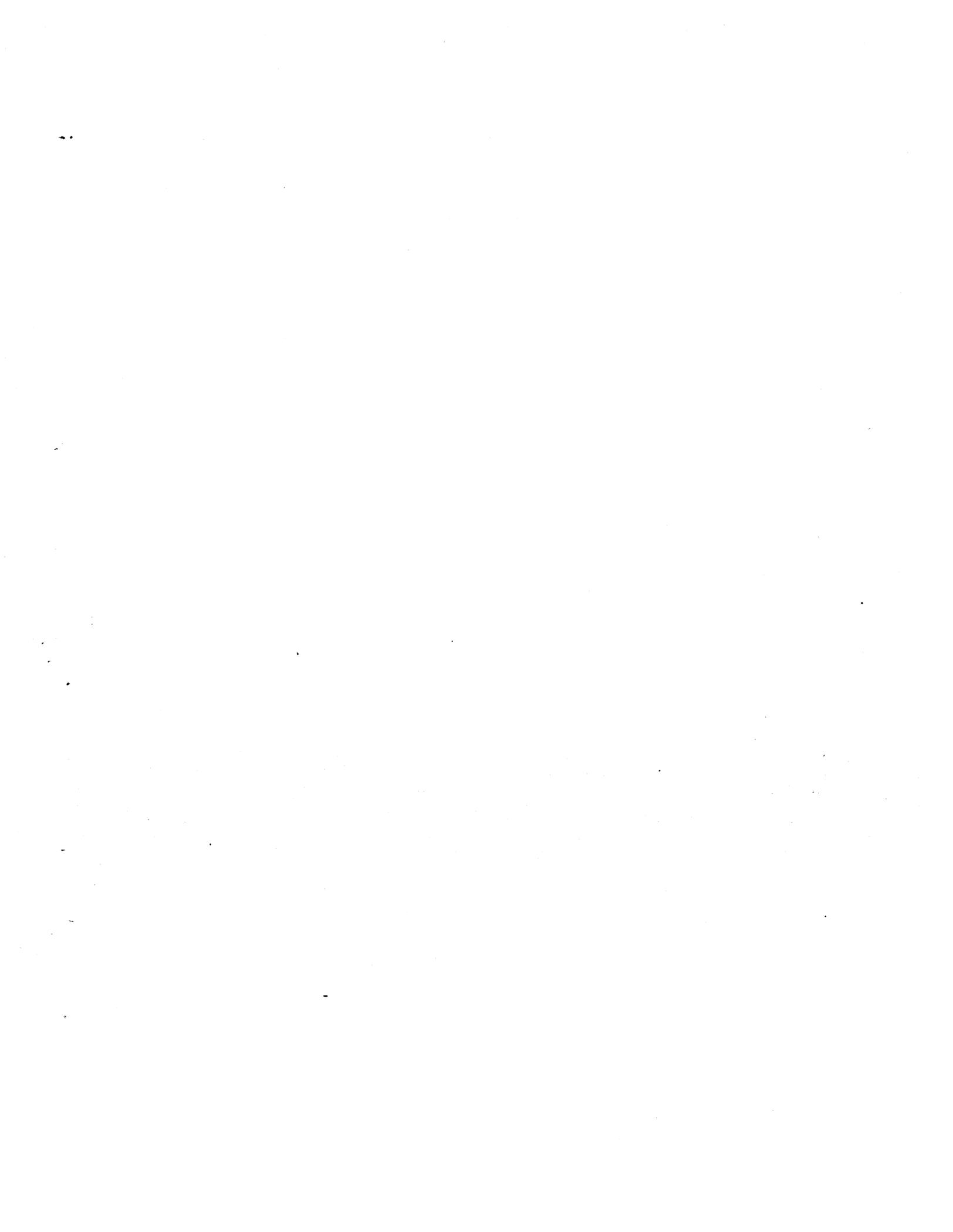
On va définir un opérateur linéaire A sur la frontière qui détermine la relation entre $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma}$ et $\omega|_{\Gamma}$ et qui permettra de calculer λ en fonction de g_2 .

Une fois λ connue, il n'y a qu'à résoudre (0.2) pour avoir ψ solution de (\hat{P}) .

Or, pour avoir λ en fonction de g_2 on devra résoudre un système linéaire à matrice symétrique définie positive, pleine qui n'est pas connue. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour traiter ce système.

L'une de ces méthodes construit la matrice via la solution d'une suite de problèmes de Dirichlet pour l'opérateur B, puis on résoud le système linéaire, par exemple, par Choleski.

Des méthodes itératives sont envisageables pour lesquelles on n'a pas besoin de construire la matrice si l'on résoud, à chaque itération, deux problèmes de Dirichlet pour l'opérateur B, parmi ces méthodes itératives on décrit la méthode du Gradient Conjugué.



CHAPITRE I

On va préciser dans quelles conditions le problème de Dirichlet :
 $B(u) = f$, $u|_{\Gamma} = g$ avec $B(u) = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} u \right)$, a une et une seule solution.
C'est-à-dire, on va définir les espaces V , V'_0 et T_α dans lesquels il faut chercher u , et prendre f et g respectivement. On va construire une formulation variationnelle de ce problème pour laquelle il est facile de démontrer l'existence et l'unicité de sa solution, puis on précise dans quelles conditions ces deux problèmes vont être équivalents.

Ce chapitre comporte les paragraphes suivants :

- 1.0 Introduction
- 1.1 Origine du problème
- 1.2 Définition de l'espace V
- 1.3 Sur l'espace de trace T_α .
- 1.4 Résultats d'existence et unicité du problème (1.1)
- 1.5 Une autre définition de l'espace V
- 1.6 Résultats de régularité de la solution
- 1.7 Une autre façon de poser le problème (1.1)
- 1.8 Remarques et résumé du chapitre I.

Chapitre I1.0 - INTRODUCTION

On veut résoudre le problème suivant

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ B(u) = f \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = g \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec

$$(1.2) \quad B(u) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

et

$$(1.3) \quad \Omega \subset \mathbb{R}_+^2 = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0\} \text{ ouvert borné connexe}$$

$$\text{\`a fronti\`ere } \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ o\`u } \Gamma_0 = \Gamma \cap \{r = 0\}, \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0 ;$$

Γ supposée Lipschitz continue.

Le problème qui se pose est de savoir dans quel contexte il faut situer le problème (1.1) pour avoir l'existence et l'unicité de sa solution. Pour essayer de trouver ce contexte on va étudier l'origine du problème :

1.1 - ORIGINE DU PROBLEME

Soit \vec{u} la vitesse d'un fluide incompressible contenu dans un récipient à symétrie de révolution et soumis à un champ de forces et à des conditions de bord axisymétriques.

En coordonnées cylindriques (à repère $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$) cela se traduit par :

$$(1.4) \quad \vec{u} = u_r(r, z)\vec{e}_r + u_z(r, z)\vec{e}_z$$

$$(1.5) \quad \vec{u}|_{\partial\Lambda} = \vec{\phi} = \phi_r(r, z)\vec{e}_r + \phi_z(r, z)\vec{e}_z \text{ sur } \Gamma' = \partial\Lambda$$

c'est-à-dire que la vitesse \vec{u} (resp. $\vec{\phi}$) n'a pas de composantes dans la direction \vec{e}_θ et que les composantes, u_r et u_z , dans les autres directions ne dépendent pas de θ .

$$(1.6) \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial}{\partial z} u_z = 0 \text{ dans } \Lambda \text{ (incompressibilité)}$$

avec

$$(1.7) \quad \Lambda = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / (r, z) \in \Omega\}$$

Il faut ajouter la condition de compabilité

$$(1.8) \quad \int_{\Gamma'} \vec{\phi} \cdot \vec{\nu}' \, d\Gamma' = 0 \text{ où } \vec{\nu}' : \text{vecteur normal à } \Gamma' .$$

Puisque Λ est à symétrie de révolution, le vecteur normal $\vec{\nu}'$ à $\partial\Lambda$ est aussi vecteur normal à $\Gamma = \partial\Omega$.

D'autre part, comme $\vec{\phi}$ ne dépend pas de θ , la condition (1.8) devient :

$$(1.9) \quad \int_{\Gamma} r \vec{\mu} \cdot \vec{\nu}' \, ds$$

avec ds : mesure sur Γ et

$$\vec{\mu} = \phi_r \vec{e}_r + \phi_z \vec{e}_z$$

En raisonnant dans \mathbb{R}^2 avec le repère cartésien $0, r, z$, soit :

$$(1.10) \quad \vec{\nu} = r u_r \vec{e}_r + r u_z \vec{e}_z$$

De (1.5) et (1.9) on a :

$$(1.11) \quad \vec{\nu}|_{\Gamma} = r \vec{\mu} \text{ avec } \int_{\Gamma} r \vec{\mu} \cdot \vec{\nu} \, ds = 0$$

de (1.4)

$$(1.12) \quad \operatorname{div}(\vec{\nu}) = 0 \text{ dans } \Omega .$$

Si \vec{u} est assez régulière (par exemple $\vec{u} \in [L^2(\Lambda)]^3$, Ω borné) on peut supposer que :

$$(1.13) \quad \vec{\nu} \in [L^2(\Omega)]^2$$

Donc, si Ω est défini par (1.3), les conditions (1.11)-(1.13) déterminent -voir Théorème 3.1 [1] - l'existence d'une fonction , appelée "fonction de courant" de $\vec{\nu}$, telle que :

$$(1.14) \quad \varphi \in H^1(\Omega) \text{ et}$$

$$(1.15) \quad ru_r = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad ru_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

donc \vec{u} veut s'écrire comme :

$$(1.16) \quad \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_z$$

Si l'on définit "vorticité" comme $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ on aura, d'après (1.16) :

$$(1.17) \quad \vec{\nabla} \times \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \vec{e}_\theta$$

ou encore

$$(1.18) \quad \vec{\nabla} \times \vec{u} = -B(\varphi) \vec{e}_\theta$$

si l'on utilise la notation (1.2) .

Remarque :

i) Si Ω est connexe, alors la fonction de courant φ de \vec{u} est unique à une constante additive près.

ii) On a encore l'existence de la fonction de courant φ même si u_θ n'est pas identiquement nulle.

Il suffit que u_θ ne dépende pas de θ . De même pour ϕ_θ . Donc, on a démontré la proposition suivante :

- $\vec{u} \in [L^2(\Lambda)]^3$, \vec{u} ne dépend pas de θ
- Λ comme dans (1.3), (1.7), (1.8)
- $\text{div } \vec{u} = 0$,
- $\vec{u}|_\Gamma = \vec{\phi}$ indépendant de θ avec $\int_\Gamma \vec{\phi} \cdot \vec{\nu}' d\Gamma' = 0$

si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(1.19) \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\varphi}{r} \vec{e}_\theta \right) + u_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{u} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_z \right) + u_\theta \vec{e}_\theta$$

iii) Une façon plus rigoureuse de définir l'indépendance par rapport à θ est la suivante :

$$(1.20) \quad L_S : \mathcal{D}'(\Lambda) \rightarrow \mathcal{D}'(\Lambda)$$

$$u \rightarrow L_S(u) = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(1.21) \quad \vec{L}_V : [\mathcal{D}'(\Lambda)]^3 \rightarrow [\mathcal{D}'(\Lambda)]^3$$

$$\vec{u} \rightarrow \vec{L}_V(\vec{u}) = x \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} - y \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} - \vec{e}_z \times \vec{u}$$

Il est aisé de vérifier que pour $u \in C^2(\Lambda)$ (resp. $[C^2(\Lambda)]^3$) on a

$$L_S u = \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{resp. } \vec{L}_V \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z)$$

On a les propriétés suivantes (voir aussi [2])

P1) L_S (resp. \vec{L}_V) est linéaire continu de $\mathcal{D}'(\Lambda)$ dans $\mathcal{D}'(\Lambda)$ (resp. de $(\mathcal{D}'(\Lambda))^3$ dans $(\mathcal{D}'(\Lambda))^3$).

P2) Pour $m \geq 0$, L_S (resp. \vec{L}_V) est un opérateur linéaire continu de $H^m(\Lambda)$ dans $H^{m-1}(\Lambda)$ (resp. de $(H^m(\Lambda))^3$ dans $(H^{m-1}(\Lambda))^3$).

Donc, une distribution dans $\mathcal{D}'(\Lambda)$ (resp. dans $[\mathcal{D}'(\Lambda)]^3$) est dite à symétrie de révolution par rapport à \vec{e}_z si elle appartient à $\text{Ker } L_S$ (resp. $\text{Ker } \vec{L}_V$)

iv) Supposons Ω simplement connexe (pour simplifier l'exposé)

$$H = \{\vec{v} \in H_0(\text{div}, \Lambda), \text{div } \vec{v} = 0\} \cap \text{Ker}(\vec{L}_V) \quad \text{où}$$

$$H_0(\text{div}, \Lambda) = \{\vec{u} \in [L^2(\Lambda)]^3 : \text{div}(\vec{u}) \in L^2(\Lambda), \vec{u} \cdot \vec{v}' = 0\}$$

\vec{v}' : vecteur normal à $\partial\Lambda$.

Alors, si $\vec{v} \in H$ et φ est une fonction de courant correspondant à \vec{v} alors $\partial\varphi/\partial\tau|_{\Gamma} = 0$, c'est-à-dire :

$$\varphi|_{\Gamma} = \text{une constante}$$

D'après la remarque (i) plus haut, φ sera uniquement déterminée si l'on fixe sa valeur sur Γ . Donc, \vec{v} a une et une seule fonction courant φ qui s'annule sur Γ .

Soit :

$H_0^1(\Omega) = \{\chi \in H^1(\Omega) : \chi|_{\Gamma} = 0\} \subset H^1(\Omega)$ qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. De plus, la semi-norme

$$|u|_{1,\Omega} = \sum_{|i|=1} \int |D^i u|^2 drdz$$

est une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$. Alors, la fonction de courant de $\vec{v} \in H$ qui s'annule sur Γ est l'unique solution du problème :

Trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(1.22) \quad \langle \vec{v} \times \left(\frac{\varphi}{r} \vec{e}_\theta\right), \vec{v} \times \left(\frac{\chi}{r} \vec{e}_\theta\right) \rangle = \langle \vec{u}, \nabla \left(\frac{\chi}{r} \vec{e}_\theta\right) \rangle, \quad \forall \chi \in H_0^1(\Omega)$$

avec

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^3 \int_{\Lambda} u_i v_i dx dy dz = 2\pi \int_{\Omega} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2) r dr dz$$

On peut écrire (1.22) comme :

$$(1.23) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial z} \right) dr dz = \int_{\Omega} \left(-\frac{u_r}{r} \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{u_z}{r} \frac{\partial\chi}{\partial r} \right) r dr dz$$

Si l'on se restreint à $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient :

$$(1.24) \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (u_r) - \frac{\partial}{\partial r} (u_z) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Donc, trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que l'on ait (1.21) équivaut à résoudre le problème suivant :

Trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(1.25) \left\{ \begin{array}{l} B(\varphi) = \text{curl}(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \varphi|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

Si l'on prend $\tilde{H} = \{u \in H : u_\theta \equiv 0\}$ et $V_0 \subset H_0^1(\Omega)$ tel que le problème (1.25) ait une et une seule solution, alors la correspondance, définie par (1.22), est biunivoque.

v) Conditions de bord sur la fonction de courant (cas non-homogène):
De (1.15) on a que

$$(1.26) \quad (ru_z - ru_r) = \vec{\nabla} \varphi$$

Sur $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{r = 0\}$: on a donc $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, si mesure $(\Gamma_0) \neq 0$ alors

$$(1.27) \quad \varphi \text{ est constante sur } \Gamma_0$$

Sur $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$: de (1.26)

$$(1.28) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nu} = r \vec{\phi} \cdot \vec{\tau}$$

avec $\vec{\tau}$: vecteur tangent (voir Figure suivante)

Egalement :

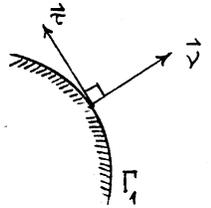
$$(1.29) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\tau} = r \vec{\phi} \cdot \vec{\nu}$$

Si $\vec{\phi}$ est assez régulière ($\vec{\phi} \in (H^{1/2}(\Gamma'))^3$, par exemple), on peut trouver une fonction g_1 définie sur Γ telle que :

$$(1.30) \quad \frac{\partial g_1}{\partial \tau} = r \vec{\phi} \cdot \vec{\nu} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad g_1|_{\Gamma_0} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = r \vec{\phi} \cdot \vec{\nu}$ sur Γ_1 , alors φ coïncide avec g_1 sur Γ_1 .
Alors on peut définir une correspondance biunivoque entre

$$(1.31) \quad \tilde{H} = \{\vec{u} \in H(\text{div}, \Lambda) / \vec{L}_V(\vec{u}) = 0, \quad u_\theta \equiv 0, \quad \text{div}(\vec{u}) = 0\}$$



et un sous-espace de

$$(1.32) \quad \Phi = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\Gamma_0} = 0\}$$

à travers le problème :

$$(1.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi \in \Phi \text{ telle que} \\ B(\varphi) = \text{curl } \vec{u} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \varphi|_{\Gamma_1} = g_1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

où g_1 est telle que (1.30)

Il est évident que le sous-espace de Φ à choisir doit être tel que le problème (1.33) ait une solution.

1.2 - DEFINITION DE L'ESPACE V

1.2.1 - Introduction

Comme d'habitude, on va ramener le problème (1.1) à une formulation variationnelle pour laquelle il est plus facile de prouver l'existence et l'unicité de la solution et ensuite on démontrera l'équivalence des deux problèmes.

D'abord, on remarque que :

$$(1.34) \quad B(\varphi) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = - \text{div} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \varphi \right)$$

ATTENTION : ici, on se place dans le plan \mathbb{R}^2 avec le repère cartésien (\vec{e}_r, \vec{e}_z) :

Si l'on suppose :

$$(1.35) \quad \text{div} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \varphi \right) \in L^2(\Omega)$$

alors, d'après la formule de Green* , on a

$$(1.36) \quad \int_{\Omega} B(\varphi) \mu \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} (\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nu}) \gamma_0(\mu) \, d\Gamma \quad \forall \mu \in H^1(\Omega)$$

*On peut appliquer cette formule car $\frac{1}{r} \vec{\nabla} \varphi \in H(\text{div}, \Omega)$ où

$H(\text{div}, \Omega) = \{ \vec{v} \in [L^2(\Omega)]^2 / \text{div } \vec{v} \in L^2(\Omega) \}$ et il existe l'extension de $\vec{v} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\nu}$

1.2.2 - Remarques

- i) Si dans l'espace V (à déterminer) on peut définir un opérateur de trace sur la frontière Γ_1 alors il suffit de considérer des fonctions qui sont nulles sur toute la frontière.
- ii) On voit donc quelle est la forme bilinéaire rattachée au problème (1.1), à savoir :

$$(1.37) \quad a_V(u,v) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz$$

- iii) Postérieurement, on doit construire des sous-espaces V_h de V de dimension finie et appliquer la méthode des éléments finis pour résoudre le problème approché correspondant à (1.1).
Or, il s'avère difficile de construire un nouvel élément sur l'espace V_h pour lequel la forme (1.37) soit bien définie. Mais, en faisant le changement de variable $u = r\tilde{u}$, $v = r\tilde{v}$, on obtient la nouvelle forme :

$$(1.38) \quad a_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} (r \vec{\nabla} \tilde{u} \cdot \vec{\nabla} \tilde{v} + \frac{1}{r} \tilde{u} \tilde{v}) dr dz$$

Pour le nouvel espace, c'est-à-dire celui où $a_2(\tilde{u}, \tilde{u}) < +\infty$, on pourra trouver des sous-espaces de dimension finie construits avec des éléments standard.

Tout cela sera précisé ultérieurement.

1.2.3. - Définition

$$(1.39) \quad V_1 = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz < +\infty\}$$

Soit le produit scalaire $((\dots))_V : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$(1.40) \quad ((u,v))_{V_1} = \left\{ \int_{\Omega} uv \, dr dz + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz \right\}^{1/2}$$

1.2.4 - Remarque :

Puisque Ω est borné alors, $\forall u \in V_1$

$$\frac{1}{R} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u \, dr dz \leq \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz < +\infty$$

où $R = \sup_{(r,z) \in \Omega} r$. Donc $\vec{\nabla}u \in [L^2(\Omega)]^2$ et, d'après un résultat classique, puisque $\partial\Omega$ est lipschitzienne on a $u \in L^2(\Omega)$ et :

$$(1.41) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega) \|\vec{\nabla}u\|_{[L^2(\Omega)]^2} \text{ et}$$

$$(1.42) \quad \boxed{V_1 \hookrightarrow H^1(\Omega)}$$

1.2.5. - Proposition

V_1 muni avec le produit scalaire $((\cdot, \cdot))_{V_1}$ est un Hilbert.

Preuve : Soit $\{u_n\}$ suite de Cauchy dans V_1 donc

$$\left. \begin{array}{l} u_n \\ r^{-1/2} \vec{\nabla}u_n \end{array} \right\} \text{ suite de Cauchy dans } \begin{cases} L^2(\Omega) \\ [L^2(\Omega)]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u \in L^2(\Omega) \\ r^{-1/2} \vec{\nabla}u_n \rightarrow \vec{\omega} \in [L^2(\Omega)]^2 \end{cases}$$

On sait que si $u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ et $\vec{\nabla}u_n \xrightarrow{[L^2(\Omega)]^2} \theta$ alors $\theta = \vec{\nabla}u$ donc, si l'on démontre que $\vec{\nabla}u_n \xrightarrow{[L^2(\Omega)]^2} \sqrt{r} \omega$ alors $\sqrt{r}\omega = \vec{\nabla}u \in (L^2(\Omega))^2$ donc $\vec{\omega} = \frac{1}{\sqrt{r}} \vec{\nabla}u \in [L^2(\Omega)]^2$ et $u \in V_1$.

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \sqrt{r}\omega|^2 dr dz &= \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{r} \vec{\nabla}u_n - \sqrt{r}\vec{\omega} \right|^2 dr dz \leq \\ &\leq R \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\sqrt{r}} \vec{\nabla}u_n - \vec{\omega} \right|^2 dr dz \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donc, on a bien $\vec{\nabla}u_n \rightarrow \sqrt{r} \vec{\omega} \in L^2(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^2$.

□

1.2.6. - Remarque :

- i) Puisque $V_1 \subset H^1(\Omega)$ on peut bien définir la trace d'une fonction $u \in V_1$. D'autre part, comme l'opérateur de trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ est linéaire continu alors

D'autre part, on a vu que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq K \|u\|_{V_1}$, $K > 0$

donc $\|\gamma_0(u)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{K} \|u\|_{V_1}$

alors la restriction de γ_0 à V_1 est encore un opérateur linéaire continu de V_1 sur $H^{1/2}(\Gamma)$. Attention, il est fort possible que

$$\text{Im}(\gamma_0|_{V_1}) \subsetneq H^{1/2}(\Gamma).$$

1.2.7. - Définition

Soit :

$$(1.43) \quad V = \{u \in V_1 : u|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Il faut remarquer tout de suite que :

$$V \subset \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\} \equiv M$$

$$(1.44) \quad T_\alpha = \text{Im}(\gamma_0|_V)$$

1.2.8. - Proposition

Supposons que Ω est ouvert, borné, connexe de \mathbb{R}_+^2 à frontière lipschitzienne Γ et $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{r = 0\}$ tel que $\text{mesure}(\Gamma_0) > 0$ alors la semi-norme de V_1 définie par

$$|u|_V = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u \, dr dz$$

a la propriété suivante : il existe $c > 0$ tel que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c |u|_V \quad \forall u \in V$$

Démonstration : D'après le résultat classique (voir Lemme 3.1 page 25 [6]) on a que $|\cdot|_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u \, dr dz$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sont deux normes équivalentes dans l'espace

$$M = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

D'autre part, puisque Ω est borné on a $V \subset M$ donc :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c |u|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{c} |u|_V, \quad \forall u \in V.$$

1.2.9. - Conséquence de la proposition (1.2.8.)

| La forme bilinéaire définie par (1.37)
 |
 | $a_V(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \hat{\nabla} u \cdot \hat{\nabla} v \, dr dz$
 |
 | est V_0 -elliptique avec
 |
 (1.45) | $V_0 = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{V_1}}$
 |
 | muni de la norme $\|\cdot\|_{V_1}$ provenant du produit scalaire défini par
 | (1.40).

Démonstration : En effet, soit $u \in V_0$, alors

$$\|u\|_{V_1}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_V(u, u) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + a_V(u, u)$$

mais, d'après la proposition (1.2.8)

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c |u|_V$$

et

$$|u|_V = a_V(u, u) \text{ par définition, donc}$$

$$\|u\|_{V_1}^2 \leq \tilde{c} a_V(u, u).$$

□ c.q.f.d.

1.2.10. - Remarque

On a que $V_0 \subseteq \{u \in V / \gamma_0 u = 0\}$ car $\gamma_0 : V \rightarrow T_{\alpha} \subset H^{1/2}(\Gamma)$ est continu, $\gamma_0 u = 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V_0 , par définition. On se pose la question, de savoir s'il y a égalité entre ces deux espaces.

1.2.11. - Proposition :

| La forme $a_V : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est V_0 -continue. V_0 définie par (1.45)
 | muni de la norme $\|\cdot\|_{V_1}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 |a_V(u,v)| &= \left| \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla u \cdot \nabla v \, dr dz \right| = \left| \sum_{|i|=1} \int_{\Omega} \frac{1}{r} (D^i u \cdot D^i v) \, dr dz \right| \\
 &\leq \sum_{|i|=1} \left| \int_{\Omega} \frac{1}{r} (D^i u \cdot D^i v) \, dr dz \right| \leq \underbrace{\sum_{|i|=1} (\|r^{-1/2} D^i u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|r^{-1/2} D^i v\|_{L^2(\Omega)})}_{\text{(Schwartz)}} \quad (\square)
 \end{aligned}$$

Comme, pour $|i| = 1$:

$$\|r^{-1/2} D^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\{ \sum_{|i| \leq 1} \|r^{-1/2} D^i u\|_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} = \|u\|_{V_1}$$

$$\text{et } \|r^{-1/2} D^i v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{V_1}, \quad |i| = 1$$

$$\text{alors} \quad (\square) \leq 4 \|u\|_{V_1} \cdot \|v\|_{V_1}$$

$$\text{donc} \quad |a_V(u,v)| \leq 4 \|u\|_{V_1} \cdot \|v\|_{V_1}, \quad \forall v \in V_1$$

et l'on a bien $a_V(\dots)$ est V_1 -elliptique.

Puisque V_0 est un s.e.v. fermé de V_1 alors, elle est aussi V_0 -elliptique

□

1.3 - SUR L'ESPACE DE TRACE T_{α}

Dans la remarque (1.2.6) on a vu que, puisque $V_1 \subset H^1(\Omega)$, on peut parler de la trace sur Γ , d'une fonction $u \in V_1$. D'autre part, si γ_0 représente l'opérateur de trace standard de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$, on a défini

$T_{\alpha} = \text{Im}(\gamma_0|_V)$. Pour μ dans T_{α} , on définit

$$(1.46) \quad \|\mu\|_{T_{\alpha}} = \inf_{\substack{v \in V \\ \gamma_0 v = \mu}} \|v\|_{V_1}$$

L'opérateur $\mu \rightarrow \|\mu\|_{T_{\alpha}}$ est une norme sur T_{α} , et T_{α} est un espace de Hilbert pour cette norme. Cela est une conséquence du fait que γ_0 est continu de V sur T_{α} (V avec la norme $\|\cdot\|_{V_1}$ et T_{α} avec la norme $L^2(\Omega)$) et que V_0 défini par :

$$V_0 = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]}^{\|\cdot\|_{V_1}} \text{ est fermé dans } V.$$

Soit T'_α l'espace dual de T_α , normé par

$$(1.47) \quad \|\mu^*\|_{T'_\alpha} = \sup_{\substack{\mu \in T_\alpha \\ \mu \neq 0}} \frac{|\langle \mu^*, \mu \rangle_{T_\alpha, T'_\alpha}|}{\|\mu\|_{T_\alpha}}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_\alpha, T'_\alpha}$ représente la dualité entre T_α et T'_α

1.4 - RESULTATS D'EXISTENCE ET UNITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME (1.1)

1.4.1 - Théorème

Soit $f \in V'_0$ avec $V'_0 = \text{dual de } V_0$ et $g \in T_\alpha$ alors le problème (Q_1) :

$$(Q_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ (1.48) \quad B(u) = f \text{ dans } V'_0 \\ (1.49) \quad u - u_0 \in V_0, \quad u_0 \in V \text{ tel que } \gamma_0 u_0 = g \end{array} \right.$$

a une solution unique.

Démonstration : On définit la forme bilinéaire $a_V(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a_V(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz$$

Les propositions (1.2.8) et (1.2.10) démontrent que $a_V(\cdot, \cdot)$ est V_0 -elliptique et V_0 -continue.

Puisque $g \in T_\alpha = \text{Im}(\gamma_0|_V)$, on a bien l'existence d'une $u_0 \in V$ telle que $\gamma_0 u_0 = g$. Examinons le problème variationnel suivant :

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ (1.50) \quad u - u_0 \in V_0 \\ (1.51) \quad a_V(u - u_0, v) = \langle f, v \rangle_{V'_0, V_0} - a_V(u_0, v) \quad \forall v \in V_0. \end{array} \right.$$

Puisque $a_V(\cdot, \cdot)$ est V_0 -continue, l'opérateur

$$v \mapsto \langle f, v \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} - a_V(u_0, v)$$

appartient à V'_0 . Donc, par le théorème de Lax-Milgram, le problème

Il reste à démontrer que u peut être caractérisée comme l'unique solution de (P') .

En prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (1.51) on a :

$$a_V(u, v) = \int_{\Omega} B(u)v \, drdz = \langle f, v \rangle_{V'_0, V_0} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Donc u satisfait :

$$(Q_1) \left\{ \begin{array}{l} (1.50) \quad u - u_0 \in V_0 \\ (1.48) \quad B(u) = f \text{ dans } V'_0 \end{array} \right.$$

Réciproquement, chaque solution de (Q_1) est une solution de (0) par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V_0 .

□

1.4.2 - Remarque

Il est important de remarquer que le problème (Q_1) n'est équivalent au problème (1.1) que si $V_0 = \{u \in V : \gamma_0 u = 0\}$ car, dans ce cas, on aura $\gamma_0(u - u_0) = 0$, donc $\gamma_0 u = g$. Mais, d'après la remarque 1.2.10, on a l'inclusion que dans un seul sens : $V_0 \subseteq \{u \in V : \gamma_0 u = 0\}$.

1.5 - UNE AUTRE FACON DE DEFINIR L'ESPACE V

Il y a une autre façon de définir les espaces V et V_0 sans utiliser les propriétés de $H^1(\Omega)$.

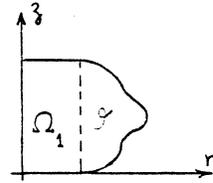
Or, en plus des hypothèses usuelles : $\Omega \subset \mathbb{R}^2_+ = \{(r, z)/r > 0\}$ borné, connexe à frontière Γ lipschitzienne on demande des conditions qui peuvent, dans certains cas, être trop restrictives, à savoir :

1.5.1. - Hypothèses

$$\Omega = \Omega^1 \cup \mathcal{O} \quad \text{avec } \Omega^1 \cap \mathcal{O} = \emptyset$$

Ω^1 = ouvert rectangulaire dont un côté contenu dans l'axe $r = 0$

d : distance de θ à l'axe $r = 0$
 est strictement positive
 Ω aura la forme suivante :



On a introduit les définitions suivantes :

1.5.2 - Définitions

Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < +\infty$

$$W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^{\alpha} D^{\beta} u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\beta| \leq \ell\}$$

muni de la norme

$$(1.52) \quad \|u\|_{W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)} \equiv \left(\sum_{|\beta| \leq \ell} \|r^{\alpha} D^{\beta} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

$$(ii) \quad X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^{\alpha - \ell + |\beta|} D^{\beta} u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\beta| \leq \ell\}$$

muni de la norme

$$(1.53) \quad \|u\|_{X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)} \equiv \left(\sum_{|\beta| \leq \ell} \|r^{\alpha - \ell + |\beta|} D^{\beta} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

$$(iii) \quad \overset{\circ}{W}_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)$$

$$(iv) \quad \overset{\circ}{X}_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)$$

$$(v) \quad K(\Omega) = \{u|_{\Omega} : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2) \text{ avec } \mathbb{R}_+^2 = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 / r > 0\}.$$

Pour la démonstration des propositions suivantes voir [2]

1.5.3. - Proposition

Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $1 < p < +\infty$ $W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)$ (resp. $X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)$) muni de la norme définie par (1.52) (resp. (1.53)) est un espace de Banach (de Hilbert dans le cas $p = 2$).

1.5.4. - Théorème

Soit $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$ alors l'application $u \rightarrow \gamma_1 u = u|_{\Gamma_1}$ de $K(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Gamma_1)$ se prolonge par continuité en une application continue de $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ ou $X_\alpha^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Gamma_1)$.

1.5.5. - Proposition

Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $1 < p < +\infty$

$$i) \quad W_\alpha^{1,p} = \{u \in W_\alpha^{1,p}(\Omega) : \gamma_1 u = 0\}$$

$$\text{si } \alpha + \frac{1}{p} \leq 0 \text{ ou } \ell \leq \alpha + \frac{1}{p}$$

$$ii) \quad X_\alpha^{1,p} = \{u \in X_\alpha^{1,p}(\Omega) : \gamma_1 u = 0\}$$

1.5.6. - Théorème

Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ ($1 < p < +\infty$) alors

$$i) \text{ Si } \ell \geq \alpha + \frac{1}{p} > 0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$$

$$ii) \text{ Si } \alpha + \frac{1}{p} \leq 0 \text{ ou si } 1 \leq \ell \leq \alpha + \frac{1}{p}$$

alors $K(\Omega)$ est dense dans $W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$.

$$iii) K(\Omega) \text{ est dense dans } X_\alpha^{\ell,p}(\Omega), \forall \alpha$$

1.5.7. - Théorème

L'application $u \rightarrow \gamma_0(u) = u(0,z)$ de $K(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $X_{1/2}^{1,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_0)$; cette application, notée encore γ_0 , vérifie, en outre

$$\forall u \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega) ; \gamma_0 u = 0 \text{ dans } L^2(\Gamma_0).$$

** Rappel :

$$\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0, \quad \Gamma_0 = \Gamma \cap \{r = 0\}$$

1.5.8. - Théorème

Soient ℓ entier ≥ 1 , $1 < p < +\infty$. On a alors :
sur $W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$, les normes

$$u \rightarrow \left(\sum_{|\gamma|=\ell} \|r^{\alpha} D^{\gamma} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

$$u \rightarrow \|u\|_{W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)}$$

sont équivalentes.

1.5.9. - Définition

Soient

$$(1.54) \quad V = W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

$$(1.55) \quad V_0 = \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

1.5.10 - Remarques

i) D'après le théorème 1.5.6. on est dans le cas ii) donc $K(\Omega)$ est dense dans V donc $\gamma_0(u) = u|_{\Gamma_0} = 0 \quad \forall u \in V$

ii) D'après le théorème 1.5.4. l'opérateur de trace $\gamma_1 : W_{-1/2}^{1,2} \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ prolongement de $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ dans $K(\Omega)$ a un sens.

Soit

$$\gamma : W_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_1)$$

$$u \rightarrow (\gamma_0(u), \gamma_1(u)), \text{ et}$$

$$(1.56) \quad T_{\alpha} = \text{Im}(\gamma)$$

qui muni de la norme défini par :

$$(1.56 \text{ bis}) \quad T_{\alpha} \ni \mu \mapsto \|\mu\|_{T_{\alpha}} = \inf_{\varphi \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}$$

$$\gamma\varphi = \mu$$

devient un espace de Banach.

On définit aussi T'_α le dual de T_α muni de la norme :

$$T'_\alpha \ni \mu^* \rightarrow \|\mu^*\|_{T'_\alpha} = \sup_{\substack{\mu \in T \\ \mu \neq 0}} \frac{|\langle \mu^*, \mu \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha}|}{\|\mu\|_{T_\alpha}}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha}$ représentant la dualité entre T_α et T'_α .

iii) Du théorème (1.5.8.) dans le cas $\alpha = -1/2$ on a que sur V_0 la semi norme $u \mapsto |u|_V = \left(\sum_{|\beta|=1} \|r^{-1/2} D^\beta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ est une norme

équivalente à la norme $\|\cdot\|_V \stackrel{\text{def}}{=} \|\cdot\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}$ donc la forme bilinéaire

$$a_V : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz$$

est V_0 -elliptique

D'autre part :

$$\begin{aligned} a_V(u, v) &\leq \sum_{|\beta| \leq 1} (r^{-1/2} D^\beta u, r^{-1/2} D^\beta v)_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)} \cdot \|v\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq c |u|_V \cdot |v|_V \end{aligned}$$

donc

$a_V(\cdot, \cdot)$ est V_0 -continue

Si l'on note $V'_0 = \text{dual de } V_0$ et l'on prend $f \in V'_0$, $g \in T_\alpha$ alors, en utilisant les mêmes raisonnements du théorème 1.4.1., le problème (1.1) a une solution unique dans V .

En outre, on n'a plus le problème exposé dans la remarque 1.4.2. car, avec la définition 1.5.9. de V et V_0 , on a d'après la proposition 1.5.5., que :

$$V_0 = \{u \in V : \gamma u = 0\}.$$

1.6. - REGULARITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME (1.1)

On a vu que le problème (1.1) a une solution unique si $f \in V'_0$ et $g \in T_\alpha$.
D'après Lax-Milgram l'opérateur $\ell \mapsto u-u_0$ définit un isomorphisme de V'_0 sur V .
Ici $u_0 \in V$ est tel que $\gamma u_0 = g$ et

$$\ell : v \mapsto \langle f, v \rangle_{V'_0, V_0} - a_V(u_0, v)$$

Donc

$$\|u-u_0\|_V \leq c_2 \|\ell\|_{V'_0}$$

Puisque

$$\|\ell\|_{V'_0} \leq \|f\|_{V'_0} + \|u_0\|_V$$

on a

$$\|u\|_V \leq c_3 \{ \|f\|_{V'_0} + \|u_0\|_V \}, \quad \forall u_0 \in V \quad \gamma u_0 = g$$

De la définition de la norme dans T_α on a :

$$\|u\|_V \leq c_3 \{ \|f\|_{V'_0} + \|g\|_{T_\alpha} \}$$

On a donc démontré la proposition :

1.6.1. - Proposition

Le problème (1.1) a une et une seule solution u dans V et

$$(1.57) \quad \|u\|_V \leq c \{ \|f\|_{V'_0} + \|g\|_{T_\alpha} \}$$

i.e. u dépend continuellement des données de (1.1).

1.6.2. - Conjecture

Soit Ω assez régulière.

Supposons que $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)$ la forme $a_V(\dots)$
 $W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ -elliptique. Soit $u \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ la solution du problème de
Dirichlet $B(u) = f$ dans Ω , $u-u_0 \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$.
Alors $u \in W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)$ et

$$(1.58) \quad \|u\|_{W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)} \leq c \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)} \}$$

Pour les espaces de Sobolev standard il existe des résultats semblables à la conjecture (1.6.2.). Voir, par exemple, le théorème [11] Théo. 2.1. page 201:

1.6.3. - Théorème

Soit $\Omega \in \mathcal{R}(1), 1$

$$A = \sum_{|i|, |j| \leq 1} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j), \quad a_{ij} \in C^{(0), 1}(\bar{\Omega}), \quad u_0 \in W_2^{(2)}(\Omega)$$

la forme $A(v, u)$, $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ -elliptique. Soit $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ la solution du problème de Dirichlet $Au = f$ dans Ω , $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Alors $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^{(2)}(\Omega)})$$

(pour les notations voir Nécas).

On reviendra plus tard sur l'importance de la conjecture (1.4.2.).

1.7. - UNE AUTRE FAÇON DE POSER LE PROBLÈME (1.1)

1.7.1. - Remarque

Si l'on veut résoudre le problème (1.1) de façon approchée, il faudra construire un sous-espace V_h de V de dimension finie. Au lieu de cela on va modifier le problème (1.1) de la façon suivante :

On fait le changement de variable formel

$$\varphi = r\psi$$

et le problème (1.1) devient :

$$(P_H) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi \in \tilde{V} \text{ tel que} \\ (1.59) \quad H(\psi) = fr \text{ dans } \Omega \\ (1.60) \quad r\psi|_{\Gamma} = g \end{array} \right.$$

avec

$$(1.61) \quad H(\Psi) = r^{1/2} B(r\Psi)$$

On définit les espaces

$$(1.62) \quad \tilde{V} = W_{1/2}^{1,2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / r^{1/2} D^\beta u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\beta| \leq 1\}$$

$$(1.63) \quad \tilde{V}_0 = \overset{\circ}{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W_{1/2}^{1,2}(\Omega)}$$

$$(1.64) \quad \tilde{T}_\alpha = \text{Im}(\gamma) \subset L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_1)$$

1.7.2.- Remarque

On a, d'après le théorème 1.5.6. (ii), que

$$(1.65) \quad \gamma_0 u = u|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{si } u \in \tilde{V}$$

donc, dans un voisinage de $r = 0$, la fonction g de (1.60) doit être de l'ordre de r .

C'est-à-dire $\exists c, r_0 > 0$:

$$(1.66) \quad |g(r,z)| \leq cr, \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

Notons

$$(1.67) \quad \tilde{f} = rf, \quad \tilde{g} = g/r$$

et prenons

$$(1.68) \quad \tilde{f} \in \tilde{V}'_0 = \text{dual de } \tilde{V}_0 \text{ et } \tilde{g} \in \tilde{T}_\alpha$$

On peut associer au problème (P_H) le problème variationnel suivant :

$$(1.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Psi \in \tilde{V} \\ \Psi - \Psi_0 \in \tilde{V}_0 \\ a_H(\Psi, v) = \langle \tilde{f}, v \rangle_{\tilde{V}'_0, \tilde{V}_0} - a_H(\Psi, v) \\ \text{avec} \\ a_H : \tilde{V}_0 \times \tilde{V}_0 \rightarrow \mathbb{R} \\ a_H(u, v) = \int_{\Omega} (r \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + \frac{1}{r} uv) dr dz \end{array} \right.$$

$$(1.70) \quad \psi_0 \in \tilde{V} \text{ telle que } \gamma \psi_0 = \tilde{g}$$

Grâce au théorème 1.5.8. on a :

$$(1.71) \quad a_H(\dots) \text{ est } \tilde{V}_0\text{-elliptique.}$$

On peut voir aussi facilement que

$$(1.72) \quad a_H(\dots) \text{ est } \tilde{V}_0\text{-continue,}$$

et que

$$(1.73) \quad \ell : v \mapsto \langle \tilde{f}, v \rangle_{\tilde{V}'_0, \tilde{V}_0} - a_H(\psi_0, v)$$

est linéaire de \tilde{V}_0 sur \mathbb{R} .

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram on a la :

1.7.3. - Proposition

Les problèmes (P_H) et (Q_H) sont équivalents et il existe une et une seule $u \in \tilde{V}$ solution de (P_H) (ou Q_H).

1.8 - REMARQUE ET RESUME DU CHAPITRE

On a développé deux façons de résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{h} \text{ tel que} \\ \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{u}, \quad \vec{u} = \vec{\phi} \text{ sur } \Gamma' \end{array} \right.$$

avec $\vec{u} \in [L^2(\Lambda)]^3$ dans des conditions de symétrie axiale.

On se ramène à résoudre un problème de Dirichlet non-homogène pour l'opérateur $B(\cdot)$ (resp. $H(\cdot)$) dans les espaces V, V'_0, T_α (resp. $\tilde{V}, \tilde{V}'_0, \tilde{T}_\alpha$).

Dans le chapitre IV, on construit une approximation interne de \tilde{V} et une "approximation" formelle externe de V .

CHAPITRE II

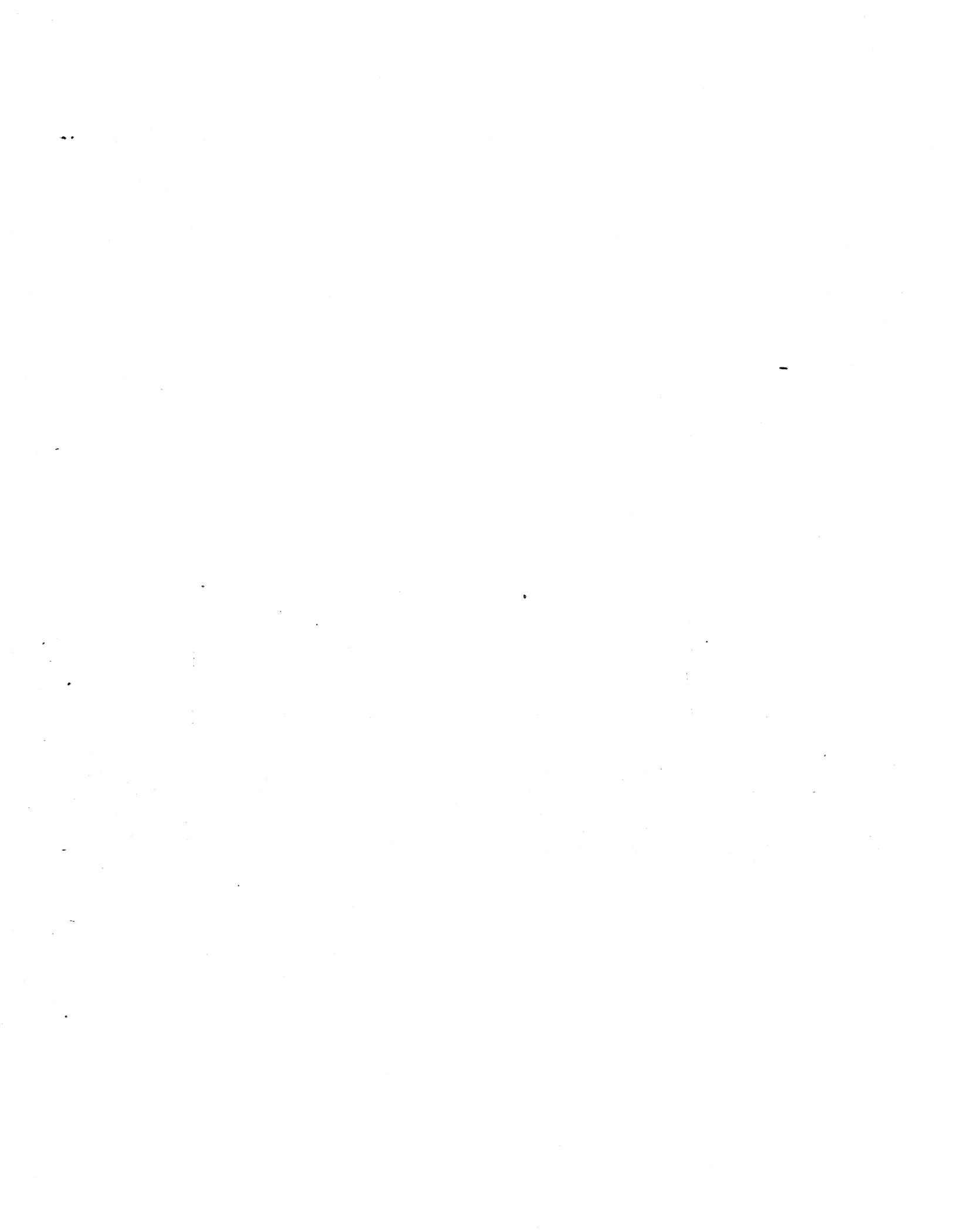
Etant données les fonctions f , g_1 et g_2 et Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^2 avec frontière Γ , on va considérer le problème :

$$(\hat{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi \\ B(rB(\psi)) = f \text{ dans } \Omega \\ \psi|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = g_2 \end{array} \right.$$

Dans ce chapitre on va établir le contexte théorique dans lequel on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution de (P) puis l'adaptation de ce problème de la méthode de découplage du à Glowinski [7] pour résoudre le problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique.

Ce chapitre comporte les paragraphes suivants :

- 2.0 Introduction
- 2.1 Résultats d'Analyse Fonctionnelle
- 2.2 Formulation Variationnelle et résultats d'existence
- 2.3 Problème de l'unicité
- 2.4 Découplage du problème (\hat{P})
- 2.5 Résumé de la méthode de découplage.



2.0 - INTRODUCTION

Etant données trois fonctions f, g_1, g_2 , on va considérer le problème de Dirichlet pour l'opérateur $B(rB(\cdot))$:

$$(\hat{P}) \left\{ \begin{array}{l} (2.1) \quad B(rB(\varphi)) = f \\ (2.2) \quad \psi|_{\Gamma} = g_1 \\ (2.3) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2 \end{array} \right.$$

avec B donné par

$$(1.2) \quad B(u) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

On peut remarquer que B peut aussi s'écrire :

$$(2.4) \quad B(u) = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} u \right)$$

si on se situe dans \mathbb{R}^2 avec les coordonnées euclidiennes $(0, r, z)$.
Si l'on fait le changement de variable

$$(2.5) \quad \varphi = r\psi,$$

dans (2.4), et en notant

$$(2.6) \quad H(\cdot) = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla}(r \cdot) \right),$$

le problème (\hat{P}) peut s'écrire aussi

$$(\hat{P}_H) \left\{ \begin{array}{l} (2.7) \quad H(H\psi) = f \quad \text{dans } \Omega \\ (2.8) \quad r\psi|_{\Gamma} = g_1 \\ (2.9) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial n} = g_2 \end{array} \right.$$

donc, on retrouve la même structure du problème biharmonique. En effet, il suffit de mettre un "1" au lieu d'un r partout dans (\hat{P}_H) pour retrouver le problème de Dirichlet pour l'opérateur Δ^2 .

Mais la similitude ne s'arrête pas là car on se retrouve avec ces deux problèmes quand on traite le problème de Stokes en formulation fonction de Courant-Vorticité.

Le problème biharmonique résulte du cas bidimensionnel tandis que le problème (\hat{P}) correspond au cas axisymétrique.

On va donc utiliser une méthode due à R. Glowinski [7]. Les idées principales de la méthode sont les suivantes :

si ψ_0 dénote la solution de

$$B(rB(\psi_0)) = f \text{ dans } \Omega, \quad rB(\psi_0)|_{\Gamma} = 0, \quad \psi_0|_{\Gamma} = g_1$$

alors $\psi - \psi_0$ est la solution de (\hat{P}) avec $f = 0$, $g_1 = 0$, et g_2 remplacée par $g_2 - \frac{\partial \psi_0}{\partial n}$. Donc, on peut supposer que $f = g_1 = 0$.

Soit $\omega = rB(\psi)$ et supposons que $\lambda = \omega|_{\Gamma}$ soit connue.

Alors le problème (P) se découple en deux problèmes de Dirichlet pour l'opérateur B :

$$(2.10) \quad \begin{cases} B(\omega) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \omega|_{\Gamma} = \lambda \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \begin{cases} B(\psi) = \omega/r \text{ sur } \Omega \\ \psi = 0 \end{cases}$$

Notons A l'opérateur linéaire $\lambda \rightarrow -\frac{1}{r} \partial \psi / \partial n|_{\Gamma}$, avec ψ calculée par (2.10), (2.11). Alors, on démontrera que la solution de (\hat{P}) est la solution de (2.10), (2.11) avec λ la solution du problème linéaire

$$(\hat{E}) \quad A\lambda = -(g_2/r)$$

Plus précisément on peut démontrer que la solution de (2.10), (2.11), (\hat{E}) est la solution d'une formulation variationnelle mixte de (\hat{P}) .

Comme dans la résolution du problème (1.1), il faudrait préciser le contexte théorique dans lequel se situe le problème (\hat{P}) . Or, certains points, n'étant pas encore démontrés, n'auront qu'une valeur tout à fait formelle.

On introduit une approximation de (\hat{P}) par des éléments finis de type mixte et l'on teste la méthode avec un problème dont on connaît la solution exacte en

2.1 - QUELQUES RESULTATS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

On va définir les espaces suivants :

2.1.1. - Définition (voir notations de définition 1.3.1.).

(i)
$$W = W_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \cap W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)$$

(ii)
$$S = \{u \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega) : r^{1/2}B(u) \in L^2(\Omega)\}$$

muni du produit scalaire :

(2.12)
$$(u,v)_S = (u,v)_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)} + \int_{\Omega} r[B(u)]^2 dr dz$$

Ici

$$(u,v)_{W_{-1/2}^{1,2}}^2 = \sum_{|i| \leq 1} \|r^{-1/2} D^i u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

produit scalaire dans $W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$.

2.1.2. - Proposition

(i) S avec le produit scalaire (2.12) est un espace de Hilbert.

(ii) Il existe un opérateur continu de S dans T'_α , noté $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}$, tel que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \Big|_{\Gamma} \quad \text{quand } u \in K(\Omega)$$

De plus, on a pour tout $u \in S$, et $v \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$:

(2.13)
$$\int_{\Omega} B(u) v \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \langle \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}, \gamma v \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha}$$

Démonstration :

i) facile à faire donc je la laisse à vos soins.

ii) Soit $\varphi \in T'_\alpha$ et $v \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ telle que $\gamma v = \varphi$.

On considère l'expression :

(2.14)
$$X_u(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz - \int_{\Omega} B(u) v \, dr dz$$

Cette expression a bien un sens pour $u \in S$ et $v \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$.

Soit v_1 et $v_2 \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ tels que $\gamma v_1 = \gamma v_2 = \varphi$.

Alors $v = v_1 - v_2 \in \dot{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$. Donc il existe $v_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers v dans $\dot{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v_n \, dr dz - \int_{\Omega} B(u) v_n \, dr dz = 0 \quad \forall n$$

Donc, à la limite :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz - \int_{\Omega} B(u) v \, dr dz = 0$$

et $X_u(\varphi)$ ne dépend pas du choix de v .

De (2.14) on obtient, en appliquant l'inégalité de Schwartz et sachant qu'il existe un opérateur γ^* (relèvement) de T_{α} dans $X_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ tel que $\gamma \gamma^* = I$ (identité de $W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$)

$$|X_u(\varphi)| \leq \|u\|_S \|v\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)} \leq c \|u\|_S \|\varphi\|_{T_{\alpha}}$$

Donc X_u est un opérateur linéaire continu de T_{α} dans \mathbb{R} . Il existe donc $g_u \in T'_{\alpha}$ tel que $X_u(\varphi) = \langle g_u, \varphi \rangle_{T'_{\alpha}, T_{\alpha}}$.

De plus $\|g_u\|_{T'_{\alpha}} \leq c \|u\|_S$ et $\frac{1}{r} \partial / \partial n : u \rightarrow g_u$ est un opérateur linéaire continu de S dans T'_{α} .

On a alors démontré (2.13).

$$\text{Rappel : } K(\Omega) = \{\varphi|_{\Omega} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)\}$$

Il reste à démontrer que $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}$ prolonge $u \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma}$ pour $u \in K(\Omega)$.

Soit $v \in K(\Omega)$, alors :

$$\begin{aligned} X_u(\gamma v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz - \int_{\Omega} B(u)v \, dr dz \\ &= \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \right) v d\Gamma \quad (\text{formule de Green}) \\ &= \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}, \gamma v \right\rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} \quad (\text{définition de } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}) \end{aligned}$$

Par continuité ($K(\Omega)$ est dense dans $W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$. voir Th. 1.3.5. (ii)).

$$X_u(\varphi) = \left\langle \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}, \varphi \right\rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} \quad \forall \varphi \in T_\alpha$$

donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} = \begin{cases} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \Big|_{\Gamma_1} & \text{quand } u \in K(\Omega) \\ 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

□

On va avoir besoin du lemme suivant :

2.1.3. - Lemme (Problème de Neumann pour l'opérateur B)

Soient $r^{-1}f \in L^2(\Omega)$, $\phi \in T'_\alpha$ et notons $V = W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$, le problème :

$$(N) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \\ B(u) = r^{-1}f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} = \phi \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

admet une solution unique à une constante additive près si :

$$(2.15) \quad \int_{\Omega} r^{-1/2} f \, dr dz + \langle \phi, 1 \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} = 0$$

Démonstration :

Associons au problème (N) le problème variationnel :

$$(N') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ (2.16) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz = \int_{\Omega} r^{-1} f v \, dr dz + \langle \phi, \gamma v \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

Montrons d'abord que le problème (N') admet une solution unique à une constante additive près.

Définissons $a(.,.): V/\mathbb{R} \times V/\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.17) \quad a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz \quad \forall u \in \dot{u}, v \in \dot{v}$$

Rappel : La norme sur V/\mathbb{R} est définie par $\|\dot{v}\|_{V/\mathbb{R}} = \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_V$

$a(\dot{u}, \dot{v})$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace V/\mathbb{R} . Cela vient du fait, non évident (*), que l'injection de $W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ dans $L_{-1/2}^2(\Omega)$ est COMPACTE.

Il reste donc à vérifier que :

$$(2.17) \quad \ell : \dot{v} \in V/\mathbb{R} \rightarrow \int_{\Omega} r^{-1} f v \, dr dz + \langle \phi, \gamma v \rangle_{T_{\alpha}', T_{\alpha}}$$

est une forme linéaire continue.

Noter que le membre droit de (2.17) est indépendant du choix de $v \in \dot{v}$ grâce à la condition de compatibilité (2.15). En plus, d'après (1.56) bis et l'inégalité de Schwartz, on a :

$$\left| \int_{\Omega} r^{-1} f v \, dr dz + \langle \phi, \gamma v \rangle_{T_{\alpha}', T_{\alpha}} \right| \leq (\|r^{-1/2} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{T_{\alpha}'}) \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}$$

Donc :

$$\|\ell\|_{V'} \leq \|r^{-1/2} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{T_{\alpha}'}$$

et

$$\ell \in V'$$

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram le problème (N') a une solution unique dans V/\mathbb{R} .

Il nous reste à démontrer l'équivalence des problèmes (N) et (N').

(*) Pour sa démonstration on peut appliquer la même technique utilisée dans [10] pour le lemme 4.1 et le théorème 4.8.

Si $u \in V$ est solution de (N) alors $u \in S = \{u \in V : rB(u) \in L^2(\Omega)\}$
 donc, d'après la formule de Green (2.13) :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} f v \, dr dz + \langle \phi, \gamma v \rangle_{T'_\alpha, T'_\alpha} \quad \forall v \in V$$

donc \dot{u} est solution de (N').

Réciproquement, si \dot{u} est solution de (N') alors, $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(2.18) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz = \langle B(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} r^{-1} f v \, dr dz$$

donc $B(u) = r^{-1} f$ dans $L^2(\Omega)$, $\forall u \in \dot{u}$

donc $u \in S$, $\forall u \in \dot{u}$ et on peut appliquer la formule de Green (2.13) :

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz - \int_{\Omega} B(u) v \, dr dz = \langle \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}, \gamma v \rangle_{T'_\alpha, T'_\alpha} \quad \forall v \in V$$

De (2.16), (2.18) et (2.19) on a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} = \phi \quad \forall u \in \dot{u}$$

donc u est solution de (N) $\forall u \in \dot{u}$

□

2.1.4. - Corollaire

L'image de $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}$ est tout l'espace T'_α .

Démonstration :

Soit $\mu^* \in T'_\alpha$ et considérons le problème

$$(N_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi \in W_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \text{ telle que} \\ (2.20) \quad B(\varphi) + \varphi = 0 \text{ dans } \Omega \\ (2.21) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mu^* \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Différemment de ce qui se passe dans le problème de Neumann (N) (Lemme 2.1.2), le problème (N_1) a une solution unique dans $W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$

et d'après (2.20) on a que $\varphi \in S$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u^*$.

Donc

$$\text{Im}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}\right) = T'_\alpha$$

□

2.1.5. - Définition

$$(2.22) \quad T_{\alpha_1} = \text{Im}(\gamma|_S) \subset T_\alpha$$

muni de la norme

$$(2.23) \quad \|u\|_{T_{\alpha_1}} = \inf_{\substack{v \in S \\ \gamma v = u}} \|v\|_S$$

2.1.6. - Proposition :

On a que $X_{-1/2}^{2,2}(\Omega) \subset S$

avec

$$X_{-1/2}^{2,2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^{-\frac{1}{2}-2+|\beta|} D^\beta u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\beta| \leq 2\}$$

Démonstration

Il suffit de voir que si $u \in X_{-1/2}^{2,2}(\Omega)$ alors

$$r^{-3/2} \frac{\partial u}{\partial r}, r^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right), r^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \in L^2(\Omega)$$

et que

$$r^{1/2} B(u) = r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) + r^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{i.e. } r^{1/2} B(u) = -r^{-3/2} \frac{\partial u}{\partial r} + r^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

□

On a besoin du lemme suivant :

2.1.7. - Lemme :

Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, $1 < p < +\infty$ on a les inclusions algébriques et topologiques :

(i) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + 1/p \leq 0$ ou $\ell \leq \alpha + 1/p$ alors :

$$(2.24) \quad W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j, p}(\Omega) \text{ pour } j = 0, 1, \dots, \ell$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \ell$, alors

$$(2.25) \quad W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j, p}(\Omega) \text{ pour } j = 0, 1, \dots, [\alpha + \frac{1}{p}]$$

(où $[\alpha + 1/p]$ désigne le plus grand entier ≥ 0 et $< \alpha + \frac{1}{p}$).

Démonstration : voir [10] . Attention au fait que Ω doit remplir les hypothèses (1.3.0.).

2.1.8. - Corollaire

| Soient ℓ entier ≥ 1 , $1 < p < +\infty$. On a alors

$$(2.26) \quad | \quad W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) \subset X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)$$

$$(2.27) \quad | \quad \text{pour } \alpha + \frac{1}{p} \leq 0 \text{ ou bien } \ell < \alpha + \frac{1}{p}.$$

Démonstration :

D'après le lemme 2.1.7. (i), on a, pour α remplissant les conditions (2.27) :

$$W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha - (\ell - |\beta|)}^{\ell - (\ell - |\beta|), p}(\Omega), \quad |\beta| \leq \ell$$

□

2.1.9. - Remarque

Puisque Ω est supposé borné et $\alpha - (\ell - |\beta|) \leq \alpha$, pour $|\beta| \leq \ell$, alors on a toujours

$$(2.28) \quad - \quad X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega)$$

et (2.26), (2.28) impliquent

$$(2.29) \quad W_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) = X_{\alpha}^{\ell, p}(\Omega) \text{ si (2.18)}$$

2.1.10 - Proposition

On a

$$(2.30) \quad W_{-1/2}^{2,2}(\Omega) \subset S$$

Démonstration

Conséquence directe de la proposition 2.1.5. et de (2.2.9) avec $\lambda = p = 2$ et $\alpha = -1/2$.

□

2.1.11 - Proposition

Sur

$$(2.31) \quad S_0 \equiv \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^S$$

les normes : $u \rightarrow \|u\|_S = \sqrt{(u,u)_S}$ (voir (2.12))

$$u \rightarrow \|r^{+1/2} B(u)\|_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_S$$

sont équivalentes.

Démonstration

On va avoir besoin du lemme suivant :

2.1.12 - Lemme (Inégalité de Hardy)

Soient $1 < p < +\infty$, $\beta \neq 1$ et f une fonction mesurable positive sur $(0, +\infty)$, on pose :

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{+\infty} f(t) dt & \text{si } 1 > \beta \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

On a alors :

$$\int_0^{+\infty} x^{-\beta} [F(x)]^p dx \leq \left(\frac{p}{|\beta-1|} \right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-\beta} (f(x))^p dx$$

Démonstration : cf. [9]

Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

Puisque Ω est supposé borné, il existe $a > 0$ tel que

$$\Omega \subset [0, a] \times [-a, a] = Q$$

D'après le lemme antérieur avec $\beta = -1$, $p = 2$, $f(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$

$$\int_0^{+a} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \leq \int_0^a r^3 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^2 dr \leq a^2 \int_0^a r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^2 dr$$

en intégrant entre $-a$ et a pour la variable z on a

$$\int_Q \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr dz \leq a^2 \int_Q r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^2 dr dz$$

Puisque $\text{supp } u \subset \Omega \subset Q$ alors

$$(2.32) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr dz \leq a^2 \int_{\Omega} r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^2 dr dz$$

De la même façon on peut vérifier que

$$(2.33) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dr dz \leq a^4 \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dr dz, \quad \text{et puisque}$$

$$\int_{\Omega} r B(u)^2 dr dz = \int_{\Omega} r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]^2 dr dz$$

$$= \int_{\Omega} r \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 \right\} dr dz$$

car $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors, pour une constante $c > 0$ convenable on a :

$$(2.34) \quad c \left(\sum_{|\beta|=1} \|r^{-1/2} D^{\beta} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \int_{\Omega} r [B(u)]^2 dr dz$$

En utilisant encore une fois le lemme 2.1.12 (avec $\beta = 3$, $p = 2$, $f(r) = \frac{\partial u}{\partial r}$) on a :

$$(2.35) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r^3} |u|^2 dr dz \leq \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr dz$$

Puisque Ω supposé borné

$$(2.36) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} |u|^2 dr dz \leq a^2 \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr dz$$

Donc, de (4.34), (4.36) on conclut :

$$(2.37) \quad \|u\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}^2 \leq \tilde{c} \int_{\Omega} r[B(u)]^2 dr dz \quad \text{si } u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

qui est encore vrai si

$$u \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) = \frac{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}{\mathcal{D}(\Omega)}$$

et finalement, puisque $\|\cdot\|_S^2 = \|\cdot\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}^2 + \|r^{1/2}B\|_{L^2(\Omega)}$

on a

$$\|u\|_S^2 \leq \tilde{c} \int_{\Omega} r[B(u)]^2 dr dz \quad \text{si } u \in S_0.$$

□

2.2. - FORMULATION VARIATIONNELLE ET RESULTATS D'EXISTENCE

2.2.1. - Formulation variationnelle du problème (\hat{P})

Si l'on multiplie (2.1) par une fonction test $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a, en appliquant la formule de Green de façon formelle, la formulation variationnelle de (\hat{P}) suivante :

$$(\hat{Q}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi \in V \text{ telle que } \varphi - \varphi_0 \in V_0 \text{ et} \\ (2.38) \quad a(\varphi - \varphi_0, \mu) = \int_{\Omega} f \mu dr dz - a(\varphi_0, \mu), \quad \forall \mu \in V_0 \end{array} \right.$$

avec

$$(2.39) \quad a(\varphi, \mu) = \int_{\Omega} r B(\varphi) B(\mu) dr dz : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

et $\varphi_0 \in V$ telle que

$$(2.40) \quad \varphi_0|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2$$

2.2.2. - Remarque

On voit bien que V et V_0 seront des espaces tels que les opérateurs de trace seront bien définis et que la forme $a(\cdot, \cdot)$ sera bilinéaire et elliptique. De même $\ell : \mu \mapsto \int_{\Omega} f \mu dr dz - a(\varphi_0, \mu)$ devra être V -continue.

2.2.3. - Proposition

| Si dans la formulation variationnelle (\hat{Q}) on prend $V = S$, $V_0 = S_0$,
 | $f \in S'_0$ (dual de S_0) $g_1 \in T_{\alpha_1}$, $g_2 \in T'_\alpha$ alors le problème (\hat{Q}) a
 | une et une seule solution dans S .

(Pour la définition de T_{α_1} voir (2.22)).

Démonstration :

Du fait que $u \rightarrow \{\gamma u, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\}$ est bien définie de S sur $T_{\alpha_1} \times T'_\alpha$ et surjective, on a l'existence d'une $\varphi_0 \in S$ telle que

$$(2.41) \quad \gamma \varphi_0 = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = g_2$$

Il est évident qu'il existe $c > 0$ telle que

(Schwartz)

$$\int_{\Omega} r B(u) \cdot B(v) dr dz \leq c \|u\|_{V_0} \|v\|_{V_0}, \text{ donc}$$

$$(2.42) \quad \boxed{a(.,.) \text{ est } V_0\text{-bicontinue}}$$

$$\text{avec } \|u\|_{V_0} = \int_{\Omega} r [B(u)]^2 dr dz = |u|_S$$

D'après la proposition 2.1.10

$$(2.43) \quad \boxed{a(.,.) \text{ est } V_0\text{-elliptique}}$$

Si l'on définit $\ell : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$V_0 \ni \mu \mapsto \langle f, \mu \rangle_{V'_0, V_0} - a(\varphi_0, \mu)$$

avec $\langle \dots \rangle_{V'_0, V_0}$ la dualité entre V'_0 et V_0 alors on a bien

$$(2.44) \quad \ell \in V'_0$$

car $a(\varphi_0, .)$ est linéaire d'après (2.42).

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram, (2.42), (2.43) il existe une et une seule $\varphi^* \in V_0$ telle que

$$a(\varphi^*, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V_0$$

Si l'on note $\varphi = \varphi^* + \varphi_0 \in V$ on a :

$$(2.45) \quad \gamma\varphi = \gamma\varphi^* + \gamma\varphi_0 = g_1 \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = g_2$$

car

$$V_0 \subset \{u \in V : \gamma u = 0 \text{ dans } T_{\alpha_1}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } T'_{\alpha}\}$$

Donc φ est l'unique solution de (\hat{Q}) cherchée. □

2.3 - PROBLEME DE L'UNICITE

2.3.1. - Remarque

(i) Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans S_0 , par définition, alors en prenant $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (2.38), on a

$$a(\varphi, \mu) = \langle B(rB(\varphi)), \mu \rangle_{V'_0, V_0} = \langle f, \mu \rangle_{V'_0, V_0} \quad \forall \mu \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Donc φ satisfait :

$$(\hat{Q}_1) \left\{ \begin{array}{l} (2.46) \quad \varphi - \varphi_0 \in V_0 \\ (2.47) \quad B(rB(\varphi)) = f \text{ dans } V'_0 \end{array} \right.$$

Et de (2.45) et (2.47) on a donc que φ est solution du problème (\hat{P}) . Mais si $\tilde{\varphi}$ est solution de (\hat{P}) on ne peut pas dire que $\tilde{\varphi} - \varphi_0 \in V_0$. En effet, on ne sait que :

$$\gamma(\tilde{\varphi} - \varphi_0) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (\tilde{\varphi} - \varphi_0) = 0$$

et que

$$V_0 \subset \{u \in S : \gamma u = 0 \in T_{\alpha_1}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \in T'_{\alpha}\}.$$

Donc : On a trouvé une solution $\varphi \in V$ de (\hat{P}) qui est unique si

$$\varphi - \varphi_0 \in V_0 \text{ avec } \varphi_0 \in V \text{ telle que}$$

$$\gamma \varphi_0 = g_1 \text{ dans } T_{\alpha_1} \subset T_{\alpha}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = g_2 \text{ dans } T'_{\alpha}$$

Conjecture : Est-il vrai que

$$(2.47) \text{ bis } S_0 = \{u \in S : \gamma u = 0 \text{ dans } T_{\alpha_1}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } T'_{\alpha}\} ?$$

(ii) Supposons que la conjecture (1.4.2) soit vraie, on a alors d'après (1.55) avec $u_0 = 0$, $r^{-1/2} f \in L^2(\Omega)$:

$$\|u\|_{W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)} \leq c \|r^{1/2} B(u)\|_{L^2(\Omega)} = c |u|_S = a(u, u)$$

donc

$$a : \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{2,2}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{2,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{2,2}(\Omega)\text{-elliptique}$$

Donc on a encore l'existence et l'unicité de la solution du problème (\hat{Q}) avec

$$V = W_{-1/2}^{2,2}(\Omega), \quad V_0 = \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{2,2}(\Omega), \quad f \in (\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{2,2}(\Omega))',$$

$g_1 \in T_{\beta}$, $g_2 \in T_{\gamma}$ avec T_{β} (resp. T_{γ}) l'espace de trace correspondant à l'opérateur γ_{β} (resp. γ_{γ}) extension de $u|_{\Gamma}$ (resp. $\frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma}$) avec $u \in K(\Omega) \tilde{a} W_{-1/2}^{2,2}(\Omega)$.

(iii) On aurait pu prendre f telle que $r^{1/2} f \in L^2(\Omega)$ et on aurait encore l'opérateur $\mu \mapsto \int_{\Omega} f \mu \, dr dz \in S'_0$.

2.4 - DECOUPLAGE DU PROBLEME (\hat{P})2.4.0.- Introduction

Le problème (\hat{P}) peut aussi s'écrire comme :

$$(2.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\omega) = f \\ rB(\psi) = \omega \\ \gamma(\psi) = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = g_2 \end{array} \right.$$

L'idée de découplage consiste à trouver la trace de ω sur Γ ce qui permet d'avoir deux problèmes de Dirichlet pour l'opérateur B , à savoir

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\omega) = f, \quad \omega|_{\Gamma} = \lambda \\ B(\psi) = \omega/r, \quad \psi|_{\Gamma} = g_1 \end{array} \right.$$

On a donc deux choses à régler :

1°) Est-ce qu'il y a un sens pour la trace de ω ?

2°) Quel est le rapport entre $\lambda = \omega|_{\Gamma}$ et $g_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}$?

On a démontré que si $r^{1/2}f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in T_{\alpha_1}$, $g_2 \in T'_{\alpha}$ on a l'existence et l'unicité⁽⁴⁾ de la solution ψ du problème (\hat{P}) dans S . - Voir proposition 2.2.3 et remarque 2.3.1. (iii) =

Donc,

$$r^{-1/2}\omega = r^{1/2}B(\psi) \in L^2(\Omega) \quad \text{car } \psi \in S$$

et

$$r^{1/2}B(\omega) = r^{1/2}f \in L^2(\Omega)$$

Si l'on appelle :

$$(2.50) \quad M = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^{-1/2}u \in L^2(\Omega), r^{1/2}B(u) \in L^2(\Omega)\}$$

on a

$$(2.51) \quad \underline{\omega \in M.}$$

(4) Pourvu que la conjecture (2.47)bis soit vraie.

On se pose la question de savoir si on peut encore définir un opérateur de trace sur M qui corresponde à $u|_{\Gamma}$ si $u \in K(\Omega)$.
(Remarque : on a $K(\Omega) \subset M$).

Cette question, ainsi que beaucoup d'autres n'ont pas encore de réponse ce qui fait que la méthode qui va être exposée plus loin n'est pas justifiée du point de vue théorique. Cela n'a pas empêché d'avoir fait quelques pas dans ce sens.

2.4.1.- Définitions

$$(2.52) \quad \tilde{S}_0 = W_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \cap S$$

$$(2.53) \quad T_\delta = \text{Im}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}_0}\right) \subset T'_\alpha$$

Attention : dans la définition de T_α on prend pour $\gamma : W_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \rightarrow T_\alpha$ l'opérateur linéaire continu extension de $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ de $K(\Omega)$ sur $\mathcal{D}(\Gamma)$.

On aura besoin de la proposition suivante :

2.4.2.- Proposition

Soit $\lambda \in T'_\alpha$; alors

(i) Le problème variationnel

Trouver $\psi \in \tilde{S}_0$ telle que

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} (2.54) \quad \int_{\Omega} rB(\psi)B(v)drdz = -\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \lambda \right\rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} \quad \forall v \in \tilde{S}_0 \end{array} \right.$$

a une solution unique.

(ii) Si ψ est solution de (\mathcal{P}) dans \tilde{S}_0 , l'opérateur A défini par :

$$(2.55) \quad A\lambda = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

est un isomorphisme de T'_α sur T_δ .

(iii) La forme bilinéaire $a : T_\alpha \times T_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(2.56) \quad a(\lambda, \mu) = \langle A\lambda, \mu \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha}$$

est continue, symétrique :

Démonstration :

i) D'après la proposition 2.1.11*, $\|r^{1/2}B(v)\|_{L^2(\Omega)}$ définit sur \tilde{S}_0 une norme $\|\cdot\|_{\tilde{S}_0}$ équivalente à la norme induite par S . Donc, la forme $(u, v) \rightarrow \int_\Omega r B(u)B(v)drdz$ est continue et \tilde{S}_0 -elliptique. D'autre part, l'opérateur $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}$ est linéaire continu de S sur T'_α - voir proposition 2.1.11.- donc :

$$\left| \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \lambda \right\rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} \right| \leq \|\lambda\|_{T_\alpha} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{T'_\alpha} \leq c \|\lambda\|_{T_\alpha} \|v\|_S \leq c_1 \|\lambda\|_{T_\alpha} \|v\|_{\tilde{S}_0}$$

et l'opérateur $v \mapsto \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \lambda \right\rangle_{T'_\alpha, T_\alpha}$ est linéaire continu sur \tilde{S}_0 .
Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram, on a l'existence et l'unicité de $\psi \in \tilde{S}_0$ solution de (\mathcal{P}).

ii) Evidemment, A est linéaire. Il est aussi une injection puisque, d'après la proposition 2.2.3., $\psi \equiv 0$ est l'unique solution dans S_0 de

$$\int_\Omega rB(\psi)B(v)drdz = 0, \quad \gamma\psi = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

La surjectivité de A découle directement de la proposition 2.2.3. (avec $f = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 \in T_\delta$ quelconque). Donc, A est un isomorphisme algébrique de T_α sur T_δ .

Démonstrons que A est continu ; il est facile de voir que :

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{T'_\alpha} \leq c \|r^{1/2}B(v)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \tilde{S}_0, \quad c > 0.$$

* Dans la démonstration de la proposition 2.1.11 on n'utilise pas le fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans S_0 mais que $\|\cdot\|_{W_{-1/2}^{1,2}(\Omega)} \leq \|r^{1/2}B(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ dans $\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$

En effet, dans la proposition 2.1.2. on a vu que

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{T'_\alpha} \leq c \|v\|_S. \text{ Or, dans } \tilde{S}_0 : \|v\|_S \leq c \|v\|_S = c \|r^{1/2} B(v)\|_{L^2(\Omega)}, \quad c > 0$$

d'après la proposition 2.1.11.

Donc, en prenant $v = \psi \in \tilde{S}_0$ dans (2.54) on trouve

$$\|r^{1/2} B(\psi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\lambda\|_{T'_\alpha} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\|_{T'_\alpha} \leq c \|\lambda\|_{T'_\alpha} \|r^{1/2} B(\psi)\|_{L^2(\Omega)}$$

i.e. $\|r^{1/2} B(\psi)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\lambda\|_{T'_\alpha}$. Donc, l'opérateur

$\lambda \mapsto \psi : T'_\alpha \rightarrow \tilde{S}_0$ est continu, et la continuité de A suit de la continuité de $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} : S \rightarrow T'_\alpha$.

La continuité de $A^{-1} : T'_\sigma \rightarrow T'_\alpha$ suit de la continuité de A par l'application du théorème de Banach de l'application ouverte : "Si $T : X \rightarrow Y$ est une bijection linéaire continue entre X, Y de Banach alors T^{-1} est continue".

iii) La continuité de A implique la continuité de $a(.,.)$.

Démontrons la symétrie de $a(.,.)$ soient $\lambda_1, \lambda_2 \in T'_\sigma$ et $\psi_1, \psi_2 \in \tilde{S}_0$ les solutions correspondantes du problème (2.47).

De (2.54)

$$(2.57) \quad \int_{\Omega} r B(\psi_1) B(\psi_2) dr dz = \langle A \lambda_2, \lambda_1 \rangle_{T'_\alpha, T'_\alpha} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in T'_\alpha$$

et, en permutant λ_1 avec λ_2 on a :

$$\int_{\Omega} r B(\psi_2) B(\psi_1) dr dz = \langle A \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{T'_\alpha, T'_\alpha} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in T'_\alpha$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\lambda_1, \lambda_2) = \langle A \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{T'_\alpha, T'_\alpha} = \langle A \lambda_2, \lambda_1 \rangle_{T'_\alpha, T'_\alpha} = a(\lambda_2, \lambda_1) \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in T'_\alpha. \end{array} \right.$$

□

2.4.3. - Remarques :

(i) Rappelons la définition de l'espace M :

$$M : \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^{-1/2}u \in L^2(\Omega), r^{1/2}B(u) \in L^2(\Omega), \text{ et}$$

SUPPOSONS :

(I) l'existence de l'opérateur de trace noté $\bar{\gamma}$, de M sur $L^2(\Gamma)$ qui correspond à $u|_{\Gamma}$ si $u \in K(\Omega)$.⁽¹⁾ Notons $T_{\gamma} = \text{Im}(\bar{\gamma}|_M)$. En plus $T_{\gamma} \subset T_{\alpha}$.

(II) l'existence de la formule de Green suivante :

$$(2.58) \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} B(\omega)v \, drdz - \int_{\Omega} \omega B(v) \, drdz &= \langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \bar{\gamma}\omega \rangle_{T'_{\alpha}, T_{\alpha}} - \langle \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial n}, \gamma v \rangle_{T'_{\alpha}, T_{\alpha}} \\ \forall \omega \in M, \forall v \in S \end{aligned} \right.$$

(III) Que si $\mathcal{V} = \{u \in M : B(u) = 0\}$ alors $\bar{\gamma} : \mathcal{V} \rightarrow T_{\sigma}$ est un isomorphisme algébrique et topologique.

Alors on peut démontrer la proposition suivante :

2.4.4. - Proposition

Soit $\lambda \in T_{\gamma}$; alors

(i) Le problème

$$(2.59) \left\{ \begin{aligned} B(rB(\psi)) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \gamma\psi &= 0 && \text{sur } \Gamma \\ \bar{\gamma}(rB(\psi)) &= \lambda && \text{sur } \Gamma \end{aligned} \right.$$

a une solution unique dans \tilde{S}_0 .

(ii) Si ψ est la solution de (2.59) dans S_0 l'opérateur A_1 défini par :

(1) $K(\Omega) = \{\varphi|_{\Omega} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)\}$

$$(2.60) \quad A_1 \lambda = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

est un isomorphisme de T_Y sur T'_Y

(iii) La forme bilinéaire $a : T_Y \times T_Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(2.61) \quad a_1(\lambda, \mu) = \langle A_1 \lambda, \mu \rangle_{T'_Y, T_Y}$$

est continue, symétrique et T_Y -elliptique.

Démonstration

i) On a vu déjà que le problème :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \tilde{S}_0 \text{ tel que} \\ (2.54) \quad rB(\psi)B(v)drdz = -\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \lambda \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha} \quad \forall v \in \tilde{S}_0 \end{array} \right.$$

a une solution unique si $\lambda \in T_Y \hookrightarrow T'_\alpha$.

Puisque on suppose $T_Y \hookrightarrow T_\alpha$ alors $T'_\alpha \hookrightarrow T'_Y$; donc on a aussi l'existence et l'unicité de la solution de

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \tilde{S}_0 \text{ telle que} \\ (2.62) \quad \int_{\Omega} rB(\psi)B(v)drdz = -\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \lambda \rangle_{T'_Y, T_Y} \quad \forall v \in \tilde{S}_0 \end{array} \right.$$

On va démontrer l'équivalence des problèmes (\mathcal{P}_1) et (2.59).

Soit ψ solution de (\mathcal{P}_1) . Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset \tilde{S}_0$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{r} \vec{\nabla} v \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors d'après (2.62)

$$(2.63) \quad \begin{array}{l} \text{donc} \\ \int_{\Omega} rB(\psi) \cdot B(v)drdz = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ B(rB(\psi)) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{array}$$

D'autre part, d'après la formule de Green (2.58)

$$(2.64) \quad \int_{\Omega} B(\omega)vdrdz = \int_{\Omega} \omega B(v)drdz + \langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \bar{\gamma} \omega \rangle_{T'_Y, T_Y} - \langle \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial n}, \gamma v \rangle_{T'_\alpha, T_\alpha}$$

si $\omega \in M$ et $v \in S$.

Si $\omega = rB(\psi)$ alors $\omega \in M$ et de (2.63) et (2.64)

$$(2.65) \quad \int_{\Omega} rB(\psi) \cdot B(v) dr dz = -\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \bar{\gamma} \omega \right\rangle_{T'_{\gamma}, T_{\gamma}} \quad \forall v \in \tilde{S}_0$$

En comparant (2.62) et (2.65) on obtient

$$(2.66) \quad \bar{\gamma} \omega = \lambda$$

et ψ est alors solution de (2.59).

Réciproquement, soit ψ est solution de (2.59) et prenons $v \in \tilde{S}_0$ dans (2.64), alors

$$\int_{\Omega} rB(\psi) \cdot B(v) dr dz = -\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n}, \lambda \right\rangle_{T'_{\gamma}, T_{\gamma}} \quad \forall v \in \tilde{S}_0$$

et ψ est donc solution de (\mathcal{P}_1) .

ii) Puisque la solution de (2.59) appartient à M on peut toujours définir l'opérateur A_1 par (2.60). Comme pour l'opérateur A de la proposition 2.4.2. on peut démontrer que A_1 est un isomorphisme algébrique de T_{γ} sur T'_{γ} .

Puisque $T'_{\alpha} \subset T'_{\gamma}$ et

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{T'_{\alpha}} \leq c \left\| r^{1/2} B(v) \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \tilde{S}_0 \quad \text{et} \quad c > 0$$

on a:

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{T'_{\gamma}} \leq \bar{c} \left\| r^{1/2} B(v) \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \tilde{S}_0 \quad \text{et} \quad \bar{c} > 0$$

donc, en prenant $v = \psi$ dans (2.62) on trouve

$$\left\| r^{1/2} B(\psi) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \lambda \right\|_{T_{\gamma}} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\|_{T'_{\gamma}} \leq \bar{c} \left\| \lambda \right\|_{T_{\gamma}} \left\| r^{1/2} B(\psi) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{i.e.} \quad \left\| r^{1/2} B(\psi) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{c} \left\| \lambda \right\|_{T_{\gamma}}.$$

Donc l'opérateur $\lambda \mapsto \psi: T_{\gamma} \rightarrow \tilde{S}_0$ est continu et la continuité de A_1 découle de la continuité de $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n}: S \rightarrow T'_{\alpha}$ et du fait que $T'_{\alpha} \subset T'_{\gamma}$. La continuité de $A^{-1}: T'_{\gamma} \rightarrow T_{\gamma}$ découle de la continuité de A_1 par l'application du théorème de l'application ouverte.

iii) La continuité de $a_1(\dots)$ découle de la continuité de A_1 . La symétrie de a_1 suit du fait que :

$$(2.67) \quad a(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\Omega} r B(\psi_2) B(\psi_1) dr dz \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in T_{\gamma}$$

où ψ_i est la solution de (\mathcal{S}_1) puisque $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2$).

Démontrons maintenant la T_{γ} -ellipticité :

Soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ dans (2.67), donc

$$(2.68) \quad \int_{\Omega} r |B(\psi)|^2 dr dz = \langle A_1 \lambda, \lambda \rangle_{T_{\gamma}, T_{\gamma}} \quad \forall \lambda \in T_{\gamma}$$

D'autre part :

$$(2.69) \quad \bar{\gamma}(\omega) = \lambda \in T_{\gamma}.$$

D'après la supposition (III), $\bar{\gamma} : \mathcal{A} \rightarrow T_{\gamma}$ est un isomorphisme algébrique et topologique, donc :

$$(2.70) \quad \|r^{-1/2} \omega\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|\bar{\gamma}(\omega)\|_{T_{\gamma}}^2$$

et de (2.68)-(2.70) :

$$a_1(\lambda, \lambda) = \langle A_1 \lambda, \lambda \rangle_{T_{\gamma}, T_{\gamma}} \geq c \|\lambda\|_{T_{\gamma}}^2.$$

donc $a_1(\dots)$ est T_{γ} -elliptique.

□

2.4.5.. - Conjecture : La forme bilinéaire

$$M_0 \times M_0 \ni \{u, v\} \mapsto a(u, v) = \int_{\Omega} r B(u) B(v) dr dz$$

est M_0 -elliptique avec $M_0 = \{u \in M : \bar{\gamma}u = 0\}$

$$\text{et } M_0 = \overline{\mathcal{D}(\Omega)^M}.$$

2.4.6. - Proposition

Sous les suppositions de la remarque 2.4.3 et la conjecture 2.4.5. si $r^{1/2}f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in T_{\alpha}$ alors le problème

Trouver $(\omega_0, \psi_0) \in M \times S$ tel que

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{l} (2.71) \quad B(\omega_0) = f \text{ dans } \Omega, \quad \bar{\gamma}\omega_0 = 0 \\ (2.72) \quad rB(\psi_0) = \omega_0 \text{ dans } \Omega, \quad \gamma\psi_0 = g_1 \end{array} \right.$$

a une solution unique :

Démonstration

Pour le premier problème (2.71) il suffit de l'écrire sous la forme variationnelle

$$(2.73) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} B(\omega_0) \cdot B(v) dr dz = \int_{\Omega} f B(v) dr dz \quad \forall v \in M_0.$$

D'autre part il est évident que $v \mapsto \int_{\Omega} f B(v) dr dz$ est M_0 -linéaire. Donc, d'après la conjecture 2.4.5 et le théorème de Lax-Milgram le problème (2.73) a une solution unique.

Vérifier l'équivalence des problèmes (2.71) et (2.73) se fait de la façon usuelle.

Pour avoir l'existence et l'unicité de la solution ψ_0 de (2.72) il suffit de se rapporter au chapitre I.

□

2.4.7. - Proposition

Admettons les suppositions de la remarque 2.4.3 et la conjecture 2.4.5.

Soient $\psi \in S$ la solution de (\hat{P}) , $\omega = rB(\psi)$ et $\lambda = \bar{\gamma}(\omega)$.

Si $(\bar{\omega}, \bar{\lambda})$ est la solution du problème (2.59) avec $\lambda = \bar{\gamma}(\omega)$ et (ω_0, ψ_0) la solution de (P_0) alors

$$\psi = \psi_0 + \bar{\psi} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 + \bar{\omega}$$

Démonstration

Conséquence directe du fait que B, γ et $\bar{\gamma}$ sont des opérateurs linéaires.

□

La relation entre $\bar{\gamma}\omega$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}$ est donnée par la proposition :

2.4.8. - Proposition

Avec les mêmes hypothèses de la proposition 2.4.7, si ψ (resp. ψ_0) est la solution du problème (\hat{P}) (resp. (P_0)). Alors la trace λ de $rB(\psi)$ sur Γ est la solution de l'équation variationnelle linéaire

$$(2.74) \quad a_1(\lambda, \mu) = \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} - g_2, \mu \right\rangle_{T'_Y, T_Y} \quad \forall \mu \in T_Y$$

Démonstration :

De la proposition 2.4.4. on a

$$\langle A_1 \lambda, \mu \rangle_{T'_Y, T_Y} = - \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n}, \mu \right\rangle_{T'_Y, T_Y} \quad \forall \mu \in T_Y$$

puisque $\bar{\psi} = \psi - \psi_0$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = g_2$ sur Γ ,

$$\langle A_1 \lambda, \mu \rangle_{T'_Y, T_Y} = \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} - g_2, \mu \right\rangle_{T'_Y, T_Y} \quad \forall \mu \in T_Y$$

qui montre que λ est une solution de (2.74). L'unicité de la solution de (2.74) suit (via le théorème de Lax-Milgram) du fait que $\{\lambda, \mu\} \mapsto \langle A_1 \lambda, \mu \rangle_{T'_Y, T_Y}$ est bilinéaire, continue et T_Y -elliptique (voir proposition 2.2.4) et, de la continuité de la forme linéaire,

$$\mu \mapsto \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} - g_2, \mu \right\rangle_{T'_Y, T_Y} : T_Y \rightarrow \mathbb{R}$$

□

2.4.9. - Remarques

i) On voit donc qu'on n'a pu justifier le découplage du problème (\hat{P}) qu'en supposant la validité de certaines propriétés des espaces M et S dont la démonstration implique une connaissance plus profonde des espaces de Sobolev avec poids et qui est un travail encore à faire.

ii) Soit $\tilde{\mu}$ l'extension de μ sur Ω . D'une façon formelle, par la formule de Green :

$$\begin{aligned} a_1(\lambda, \mu) &= \langle A_1 \lambda, \mu \rangle_{T'_Y, T_Y} = - \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}, \mu \right\rangle_{T'_Y, T_Y} = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi \right) \tilde{\mu} \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \tilde{\mu} \, dr dz = \\ &= \int_{\Omega} B(\psi) \tilde{\mu} \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \tilde{\mu} \, dr dz \end{aligned}$$

$$(2.75) \quad a_1(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega \tilde{\mu} \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \tilde{\nabla} \psi \cdot \tilde{\nabla} \mu \, dr dz$$

où ψ est la solution de (2.59) et $\omega = rB(\psi)$.

De la même façon on peut voir que

$$(2.76) \quad \langle \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial n}, \mu \rangle_{T'_Y, T_Y} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \tilde{\nabla} \psi_0 \cdot \tilde{\nabla} \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_0 \tilde{\mu} \, dr dz$$

Si μ est suffisamment régulière (disons $\mu \in T_Y$), donc il existe $\tilde{\mu} \in S$, alors (2.75) et (2.76) peuvent être justifiées. L'intérêt de (2.75) (2.76) est que maintenant on peut évaluer (2.74) sans connaître $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial n}$ explicitement.

2.5 - RESUME DE LA METHODE DE DECOUPLAGE

Soit ψ la solution de

$$(\hat{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(rB(\psi)) = f \quad \text{sur } \Omega \\ \psi|_{\Gamma} = g_1 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = g_2 \end{array} \right.$$

et $\omega = rB(\psi)$, $\lambda = \omega|_{\Gamma}$. Alors résoudre (\hat{P}) est équivalent (moyennant les suppositions de 2.2.3 et la conjecture 2.2.6) à résoudre les problèmes suivants :

$$(2.77) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\omega_0) = f \\ \omega_0|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.78) \quad \left\{ \begin{array}{l} rB(\psi_0) = \omega_0 \\ \psi_0|_{\Gamma} = g_1 \end{array} \right.$$

$$(2.79) \quad A_1 \lambda = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} - g_2$$

$$(2.80) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\omega) = f \\ \omega|_{\Gamma} = \end{array} \right.$$

$$(2.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} rB(\psi) = \omega \end{array} \right.$$

CHAPITRE III

On définit le problème approché (\hat{P}_h) , discrétisation formelle de (\hat{P}) qu'on va résoudre par une méthode d'éléments finis mixtes. On profite de la structure particulière du problème pour le ramener à la solution d'une suite de systèmes linéaires avec la même matrice K et d'un système linéaire (E_h) dont on ne connaît pas la matrice A_h . La matrice K va être creuse symétrique, définie positive tandis que A_h va être symétrique définie positive et pleine. Pour résoudre le système (E_h) on est obligé de résoudre une suite de systèmes linéaires avec la même matrice K .

On introduit une autre discrétisation du problème (\hat{P}) qui suit le même traitement que celui de (P_h) .

On applique la méthode décrite avant pour résoudre les équations de Navier-Stokes stationnaires pour des nombres de Reynolds petits.

Finalement, on trace les lignes générales pour l'adaptation de cette méthode à un code général d'éléments finis.

Ce chapitre a les paragraphes suivants :

- 3.1 Discrétisation de Ω , Espaces Fonctionnels
- 3.2 Problèmes Discret, Existence, Unicité
- 3.3 Décomposition du Problème Discret
- 3.4 Analogue discrète de la proposition 2.4.4.(Ch. II)
- 3.5 Application de la proposition 3.4.2 à la solution de (\hat{P}_h)
- 3.6 Construction et Solution du système linéaire équivalent à (3.55)
- 3.7 Remarques sur l'utilisation des méthodes itératives.
- 3.8 Etude du problème de Stokes axisymétrique en utilisant l'opérateur $H(u) = B(ru)$
- 3.9 Application de la méthode de découplage pour résoudre les équations de Navier-Stokes stationnaires dans des conditions d'axisymétrie et de nombres de Reynolds petits.
- 3.10 Intégration de la méthode de découplage à un code général d'éléments finis

3.1 - DISCRETISATION DE Ω , ESPACES FONCTIONNELS

On va supposer, par simplicité, que Ω est un domaine polygonal.

Soit \mathcal{T}_h , une triangulation de Ω telle que :

$$(3.1) \quad \mathcal{T}_h \text{ est finie, } T \subset \bar{\Omega} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\Omega}$$

T et $T' \in \mathcal{T}_h$, $T \neq T' \Rightarrow \overset{\circ}{T} \cap \overset{\circ}{T'} = \emptyset$ et $T \cap T'$ ont un côté ou un sommet en commun seulement.

Soit P_k l'espace des polynômes en deux variables de degré $\leq k$; on introduit les espaces de dimension finie :

$$(3.2) \quad V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_k \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

$$(3.3) \quad V_{oh} = \{v_h \in V_h : v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$(3.4) \quad \mathcal{B}_h \subset V_h : V_h = V_{oh} \oplus \mathcal{B}_h \quad (\mathcal{B}_h \text{ sera précisé postérieurement})$$

$$(3.5) \quad W_{gh} = \{(v_h, q_h) \in V_h \times V_h / v_h|_{\Gamma} = g_{1h} \text{ et } \beta((v_h, q_h), \mu_h) = \\ = \int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h d\Gamma \quad \forall \mu_h \in V_h\}$$

$$(3.6) \quad W_{oh} = \{(v_h, q_h) \in V_{oh} \times V_h / \beta((v_h, q_h), \mu_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in V_h\}$$

$$(3.7) \quad \mathcal{W}_h = \{(v_h, g_h) \in V_{oh} \times V_h / \beta((v_h, q_h), \mu_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in V_{oh}\}$$

avec

$$(3.8) \quad \beta((v_h, q_h), \mu_h) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} v_h \cdot \vec{\nabla} \mu_h \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} q_h \mu_h \, dr dz$$

- (3.9) . g_{1h} : "approximation" de g_1 appartenant à γV_h
- . g_{2h} : "approximation" de g_2 telle que $\int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h d\Gamma$ doit facile à calculer
- . f_h : approximation de f telle que $\int_{\Omega} f_h v_h dr dz$ soit "facile" à calculer. Dans la pratique f_h est l'interpolée de Lagrange associée à f et la restriction de f_h à $T \in \mathcal{T}_h$ est un polynôme du même degré que celui des fonctions de base dans V_h .

3.1.1. - Remarque

L'espace V_h défini par (3.2) est tel que : si l'on intègre exactement :

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} u_h \, dr dz = + \infty$$

si $u_h \in V_h$ et $\text{support}(u_h) \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$

Mais les intégrales du type (3.10) sont calculées de façon approchée, c'est à dire, on fait :

$$\int_{\Omega} f \, dr dz \approx \sum_i p_i f(x_i)$$

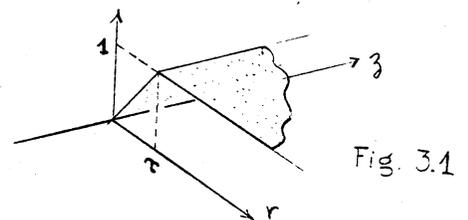
où les x_i sont des points dans Ω dits points d'intégration numérique et $p_i \in \mathbb{R}$ sont des poids d'intégration [13].

Puisque on peut choisir les x_i , on va le faire de façon à ce qu'ils ne soient pas sur Γ_0 (où $r = 0$). Donc, si l'on veut que les intégrales (3.10) soient finies sur V_h il faudrait modifier les fonctions de V_h au voisinage de $r = 0$. Une façon simple de le faire est la suivante : on définit l'espace V_h comme :

$$(3.11) \quad V_h = \{ \phi v \mid v \in C^0(\Omega), v|_T \in P_k \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

où $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (voir Fig. 3.1)

$$\phi(r, z) = \begin{cases} r/\tau & \text{si } 0 \leq r \leq \tau \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



et $0 < \tau \leq \min \{ r_i : (r_i, z_i) \text{ est point d'intégration numérique} \}$.

Donc, près de l'axe z les fonctions de base de V_h sont comme dans la Fig. 3.2 a et b.

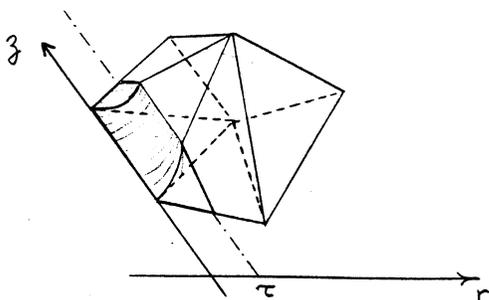


Fig. 3.2 a (vue en perspective)

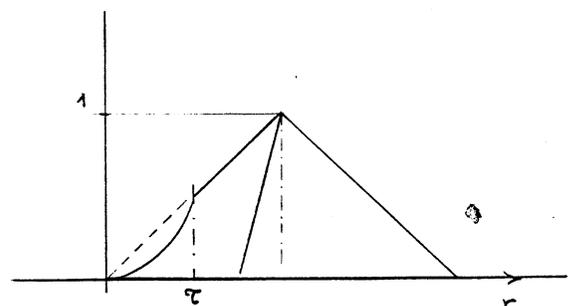


Fig 3.2 b (vue profil)

Or, du point de vue du calcul, c'est comme si l'on n'a pas changé d'espace.

(ii) Une autre façon d'agir est de changer d'opérateur -voir remarque 1.7.1.- en faisant le changement de variable $u \mapsto ru$ et dans ce cas on a besoin de :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(ru) \cdot \vec{\nabla}(rv) < \infty \quad \forall u \in V_h$$

c'est bien le cas pour la première définition de V_h .

On reviendra sur ce point dans le paragraphe 3.8.

3.2. - PROBLEME DISCRET, EXISTENCE, UNICITE

3.2.1 - Problème Discret : Soit le problème

$$(P_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\psi_h, \omega_h) \in W_{gh} \text{ tel que} \\ J_h(\psi_h, \omega_h) \leq J_h(v_h, q_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in W_{gh} \end{array} \right.$$

où

$$(3.12) \quad J_h(v_h, q_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{r} |q_h|^2 dr dz - \int_{\Omega} f_h v_h dr dz$$

3.2.2. - Proposition

Le problème (P_h) a une solution unique.

Démonstration

Notons $U = (\psi_h, \omega_h)$, $V = (v_h, q_h)$

Soit b_h la forme bilinéaire $b_h(U, V) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h q_h dr dz$

$$b_h : W_{gh} \times W_{gh} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cdot \ell \text{ la forme linéaire : } \ell(V) = \int_{\Omega} f_h v_h dr dz$$

$$\ell : W_{gh} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un résultat classique est : le problème (P_h) est équivalent à (P'_h) :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in W_{gh} \\ b_h(U, V-U) \geq \ell(V-U) \quad \forall V \in W_{gh} \end{array} \right.$$

Soit $V_0 = V - U$

On a :

$$(3.14) \left\{ \begin{array}{l} V \in W_{gh}, v_h|_{\Gamma} = g_{1h} \text{ et } \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} v_h \cdot \vec{\nabla} \mu_h \, drdz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} q_h \mu_h \, drdz + \int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h \, d\Gamma, \\ V \in W_{gh}, \psi_h|_{\Gamma} = g_{1h} \text{ et } \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} \mu_h \, drdz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h \cdot \mu_h \, drdz + \int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h \, d\Gamma, \end{array} \right. \quad \forall \mu_h \in V_h$$

De (3.14) on voit que $V_0 \in W_{oh}$ d'où (\hat{P}'_h) est équivalent à

$$(3.15) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in W_{gh} \\ b_h(U, V_0) \geq \ell(V_0) \quad \forall V_0 \in W_{oh} \end{array} \right.$$

W_{oh} est un espace vectoriel donc l'inégalité est remplacée par une égalité.
 (\hat{P}'_h) est finalement équivalent à (\hat{P}''_h) :

$$(3.16) (\hat{P}''_h) \left\{ \begin{array}{l} b_h(U, V) = \ell(V) \quad \forall V \in V_{oh} \\ U \in W_{gh} \end{array} \right.$$

Soit $V_1 = (v_{h1}, q_{h1})$ un élément quelconque de W_{gh}

$$U = U - V_1 + V_1 = U_0 + V_1 \quad \text{avec } U_0 \in W_{oh}$$

d'où le problème :

$$(3.17) (\hat{P}'''_h) \left\{ \begin{array}{l} b_h(U_0 + V_1, V) = \ell(V) \quad \forall V \in W_{oh} \\ V_0 \in W_{oh} \end{array} \right.$$

on encore

$$(3.18) (\hat{P}'''_h) \left\{ \begin{array}{l} b_h(U_0, V) = \ell(V) - b_h(V_1, V) \quad \forall V \in W_{oh} \\ U_0 \in W_{oh} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit } \ell'(V) = \ell(V) - b_h(V_1, V) = \int_{\Omega} f_h v_h \, drdz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} q_{1h} q_h \, drdz$$

Puisque on va utiliser comme f_h l'interpolée de Lagrange associée à f , (la restriction de f_h à $T \in \mathcal{T}_h$ est un polynôme de même degré que celui des fonctions de base utilisées) et $v_{h1} \in V_h$ alors $\ell'(V)$ est linéaire et continue sur W_{oh} . (avec la norme produit). Il faut montrer que la forme bilinéaire $b_h(U,V)$ est coercive sur W_{oh} . On va utiliser le lemme suivant :

3.2.3. - Lemme

Soit $W = \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \times L_{-1/2}^2(\Omega)$ $V \in W, V = (v,q)$

La norme $\|V\|_* = \|q\|_{L_{-1/2}^2}$ est une norme équivalente à la norme produit sur l'espace $\tilde{W} = \{V \in W \mid \forall \mu \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) : \beta((v,q),\mu) = 0\}$

Démonstration

La norme produit sur W est

$$\|V\|_W = \{\|v\|_{\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}^2 + \|q\|_{L_{-1/2}^2(\Omega)}^2\}^{1/2}, \quad \forall V \in W$$

D'autre part, d'après le théorème 1.5.8., chapitre I, les normes $v \rightarrow \|r^{-1/2} \overset{\Delta}{\nabla} v\|_{[L^2(\Omega)]}$ et $\|v\|_{\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)}$ sont équivalentes donc il existe $c > 0$ telle que :

$$\|V\|_W \leq \{c \|r^{-1/2} \overset{\Delta}{\nabla} v\|_{[L^2(\Omega)]} + \|q\|_{L_{-1/2}^2(\Omega)}\}^{1/2}, \quad \forall V \in \tilde{W}$$

donc, il existe $c' > 0$ telle que

$$\|V\|_W \leq c' \|q\|_{L_{-1/2}^2(\Omega)} \quad \forall V = (v,q) \in \tilde{W}.$$

□

L'espace W_{oh} défini est contenu dans \tilde{W} . Alors d'après le lemme 3.2.3.,

$\|V\|_{W_{oh}} = \|q_h\|_{L_{-1/2}^2(\Omega)}$ définit une norme sur W_{oh} . De plus

$b_h(V,V) = \int_{\Omega^r} \frac{1}{r} (q_h)^2 dr dz = \|V\|_{W_{oh}}^2$ donc b_h est W_{oh} -elliptique. Le théorème de

Lax-Milgram donne alors l'existence et l'unicité de $U = (\psi_h, \omega_h) \in W_{gh}$ solution du problème (\hat{P}_h''') .

□

Rappel : $L_{-1/2}^2(\Omega) = \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{0,2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^{-1/2}u \in L^2(\Omega)\}$

3.2.4. - Remarque :

On n'a pas étudié la convergence de la solution discrète vers la solution exacte du problème (P).

3.3. - DECOMPOSITION DU PROBLEME DISCRET

D'abord quelques définitions :

$$(3.19) \quad \mathcal{W} = \{(v, q) \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \times L_{-1/2}^2(\Omega) / \beta((v, q), \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)\}$$

$$(3.20) \quad J(v, q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{r} |q|^2 dr dz - \int_{\Omega} f v dr dz$$

et le Lagrangien

$$(3.21) \quad L((v, q), \mu) = J(v, q) + \beta((v, q), \mu)$$

Maintenant quelques résultats intéressants :

3.3.1 - Proposition Soit $\mathcal{M} \subset \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ tel que $\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) = \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \oplus \mathcal{M}$

Etant donné $\lambda \in \mathcal{M}$, le problème :

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{\lambda}, q_{\lambda}) \in \mathcal{W} \text{ tel que} \\ L((u_{\lambda}, q_{\lambda}), \lambda) = \min_{(v, q) \in \mathcal{W}} L((v, p), \lambda) \end{array} \right.$$

a une solution unique qui peut aussi être obtenue en résolvant les problèmes de Dirichlet suivants pour l'opérateur B :

$$(3.23) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} q_{\lambda} \cdot \vec{\nabla} v dr dz = \int_{\Omega} f v dr dz \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega), \quad q_{\lambda} - \lambda \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

$$(3.24) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u_{\lambda} \cdot \vec{\nabla} v dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} q_{\lambda} v dr dz \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega), \quad u_{\lambda} \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

Démonstration : D'abord, on observe que le problème (3.22) a une solution unique puisque le premier terme $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{r} |q|^2 dr dz$ du Lagrangien L est le carré d'une norme sur l'espace \mathcal{W} . Par définition (voir (3.19)) un couple $(v, q) \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \times L_{-1/2}^2(\Omega)$ appartient à l'espace \mathcal{W} si

$$(3.25) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} q \mu \, dr dz \quad \forall \mu \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

Puisque pour une fonction $q \in L_{-1/2}^2(\Omega)$ quelconque, il existe une unique fonction $v \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ qui satisfait (3.25), on peut écrire $v = Aq$; l'opérateur linéaire

$$(3.26) \quad A : L_{-1/2}^2(\Omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

ainsi défini est continu.

On peut donc considérer la minimisation d'une fonction à deux variables (λ fixé) à savoir

$$L((\cdot, \cdot), \lambda) : (v, q) \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \times L_{-1/2}^2(\Omega) \rightarrow L((v, q), \lambda)$$

quand ces deux variables satisfont la contrainte

$$\Phi(v, q) = 0$$

où

$$\Phi : \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \times L_{-1/2}^2(\Omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega) \text{ est défini par}$$

$$(3.27) \quad \Phi(v, q) = Aq - v$$

Puisque les fonctions $L((\cdot, \cdot), \lambda)$ et Φ sont Fréchet-différentiables, il existe un unique multiplicateur de Lagrange $T_{\lambda} \in (\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega))'$ (*) tel que

$$DL((u_{\lambda}, q_{\lambda}), \lambda) = T_{\lambda} \cdot D\Phi(u_{\lambda}, q_{\lambda}) \quad (*)$$

(*) Notation : $(\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega))' = \text{dual de } \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: dualité entre $\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ et $(\overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega))'$

$Df(a)$: Fréchet-dérivée de f en a .

En prenant des dérivées partielles par rapport à chacune des variables, on trouve

$$(3.28) \quad \langle T_\lambda, v \rangle + \int_\Omega \frac{1}{r} \vec{\nabla} \lambda \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz = \int_\Omega f v \, dr dz \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

$$(3.29) \quad \langle T_\lambda, Ap \rangle + \int_\Omega p \lambda \, dr dz = \int_\Omega q_\lambda p \, dr dz \quad \forall p \in L_{-1/2}^2(\Omega)$$

donc, les équations (3.28) et (3.29) plus

$$(3.30) \quad u_\lambda = Aq_\lambda$$

nous permettent de déterminer u_λ et q_λ . Pour mettre les relations (3.28) et (3.29) dans une forme plus explicite, il est convenable d'introduire l'unique fonction $\xi_\lambda \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$ qui satisfait :

$$(3.31) \quad \langle T_\lambda, v \rangle = \int_\Omega \frac{1}{r} \vec{\nabla} \xi_\lambda \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

Donc, d'une part l'équation (3.28) devient

$$(3.32) \quad \int_\Omega \frac{1}{r} \vec{\nabla} (\xi_\lambda + \lambda) \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz = \int_\Omega f v \, dr dz \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_{-1/2}^{1,2}(\Omega)$$

et d'autre part, en prenant en compte la définition de l'opérateur A de (3.27), l'équation (3.29) peut s'écrire comme suit :

$$\int_\Omega (\xi_\lambda + \lambda - q_\lambda) p \, dr dz = 0 \quad \forall p \in L_{-1/2}^2(\Omega)$$

$$\text{donc} \quad q_\lambda = \xi_\lambda + \lambda.$$

□

De la même façon on peut démontrer le lemme suivant :

3.3.3. - Lemme

Etant donné $\lambda_h \in \mathcal{U}_h$, le problème

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, q_h) \in \mathcal{W}_h \text{ tel que} \\ L((u_h, g_h), \lambda_h) = \min_{(v_h, p_h) \in \mathcal{W}_h} L((v_h, p_h), \lambda_h) \end{array} \right.$$

a une solution unique qui peut être aussi obtenue en résolvant les problèmes de Dirichlet discrets suivants :

$$(3.34) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} q_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} f_h v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, q_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.35) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} q_h v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, u_h \in V_{oh}$$

Par définition de \mathcal{V}_h , $V_h = V_{oh} \oplus \mathcal{V}_h$. Soit (ψ_h, ω_h) la solution de (\hat{P}_h) et soit λ_h la composante de ω_h dans \mathcal{V}_h , c'est-à-dire

$$(3.36) \quad \omega_h = (\omega_h - \lambda_h) + \lambda_h; \quad \omega_h - \lambda_h \in V_{oh}, \lambda_h \in \mathcal{V}_h$$

3.3.4 - Théorème

Soit (ψ_h, ω_h) la solution de (\hat{P}_h) ; soit λ_h la composante de ω_h dans \mathcal{V}_h ; $(\psi_h, \omega_h, \lambda_h)$ est aussi l'unique élément de $V_h \times V_h \times \mathcal{V}_h$ tel que

$$(3.37) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} f_h v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \omega_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.38) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \psi_h \in V_h, \psi_h|_{\Gamma} = g_{1h}$$

$$(3.39) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} \mu_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h \mu_h \, dr dz + \int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h \, d\Gamma, \quad \forall \mu_h \in \mathcal{V}_h$$

Démonstration : Puisque $(\psi_h, \omega_h) \in W_{gh}$, on a tout de suite (3.38) et (3.39). D'autre part, on a vu dans la proposition 3.2.2 que le problème (\hat{P}_h) équivaut à :

$$(3.40) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h \cdot q_h \, dr dz = \int_{\Omega} f_h v_h \, dr dz, \quad \forall (v_h, q_h) \in W_{oh} = V_{oh} \times V_h$$

Puisque $(v_h, q_h) \in W_{oh}$ on a

$$(3.41) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} v_h \cdot \vec{\nabla} v'_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} q_h v'_h \, dr dz \quad \forall v'_h \in V_h$$

donc, en prenant $v'_h = \omega_h$ dans (3.41) et (3.40)

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} f_h v_h \, dr dz$$

qui est encore valable pour tout $v_h \in V_{oh}$ car il suffit de prendre $q_h = B(v_h) \in V_h$ et on a bien $(v_h, q_h) \in W_{oh}$. Réciproquement, si $((\psi_h^*, \omega_h^*), \lambda_h^*) \in V_h \times V_h \times \mathcal{C}_h$ vérifie (3.37)-(3.39) on voit donc que $(\psi_h^*, \omega_h^*) \in W_{gh}$ et la relation (3.40), donc (ψ_h^*, ω_h^*) est aussi solution de (\hat{P}_h) . Or, d'après l'unicité de sa solution, il ne nous reste que

$$(\psi_h^*, \omega_h^*) = (\psi_h, \omega_h) .$$

□

3.4. - ANALOGUE DISCRETE DE LA PROPOSITION 2.4.4 (Ch. II)

3.4.1. - Définition

Soit $\lambda_h \in \mathcal{C}_h$ et ω_h , respectivement ψ_h les solutions des problèmes de Dirichlet, pour l'opérateur B, suivants :

$$(3.42) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = 0 \quad \forall v_h \in V_{oh}, \quad \omega_h \in V_h, \quad \omega_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.43) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \quad \psi_h \in V_{oh}$$

On va définir la forme bilinéaire $a_h : \mathcal{C}_h \times \mathcal{C}_h \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(3.44) \quad a_h(\lambda_h, \mu_h) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h \mu_h \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} \mu_h \, dr dz \quad \forall \mu_h \in \mathcal{C}_h .$$

3.4.2. - Proposition

La forme $a_h(\dots)$ est symétrique positive définie.

Démonstration : Pour $j = 1, 2$, soient $\lambda_{jh} \in \mathcal{C}_h$ et ω_{jh}, ψ_{jh} respectivement les solutions de (3.42) et (3.43).

Par définition de $a_h(\dots)$ on a :

$$(3.45) \quad a_h(\lambda_{1h}, \lambda_{2h}) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{1h} \lambda_{2h} \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{1h} \cdot \vec{\nabla} \psi_{2h} \, dr dz .$$

En prenant $\lambda_{2h} = (\lambda_{2h} - \omega_{2h}) + \omega_{2h}$, (3.45) devient :

$$(3.46) \quad a_h(\lambda_{1h}, \lambda_{2h}) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{1h} \omega_{2h} \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{1h} \cdot \vec{\nabla} \omega_{2h} \, dr dz \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{1h} \cdot \vec{\nabla} (\omega_{2h}^{-\lambda_{2h}}) \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{1h} (\omega_{2h}^{-\lambda_{2h}}) \, dr dz$$

De (3.42) et puisque $\psi_{1h} \in V_{oh}$:

$$(3.47) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_{2h} \cdot \vec{\nabla} \psi_{1h} \, dr dz = 0$$

Egalement, de (3.43) et puisque $\omega_{2h}^{-\lambda_{2h}} \in V_{oh}$:

$$(3.48) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{1h} \cdot \vec{\nabla} (\omega_{2h}^{-\lambda_{2h}}) \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{1h} (\omega_{2h}^{-\lambda_{2h}}) \, dr dz$$

De (3.46)-(3.48) on a :

$$(3.49) \quad a_h(\lambda_{1h}, \lambda_{2h}) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{1h} \omega_{2h} \, dr dz \quad \forall \lambda_{jh} \in \mathcal{C}_h, \quad j = 1, 2$$

ce qui démontre la symétrie de $a_h(\dots)$.

Pour démontrer qu'elle est définie positive, prenons

$\lambda_{1h} = \lambda_{2h} = \lambda_h$ dans (3.49) ; alors

$$(3.50) \quad a_h(\lambda_h, \lambda_h) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h^2 \, dr dz$$

Si $a_h(\lambda_h, \lambda_h) = 0$ alors $\omega_h = 0$ donc $\lambda_h = 0$ car λ_h est la composante de ω_h dans \mathcal{C}_h .

3.4.3. - Remarque

On a vu, dans le paragraphe 2 du chapitre II, que la forme $a(\dots)$ n'était elliptique qu'à condition (voir remarque 2.4.3) que certaines suppositions soient vraies. Or dans notre définition discrète de $a_h(\dots)$ on n'a plus ce problème.

3.5. - APPLICATION DE LA PROPOSITION 3.4.2. A LA SOLUTION DE (\hat{P}_h)

3.5.1. - Proposition

Soit $\{\psi_h, \omega_h\}$ la solution de (\hat{P}_h) et λ_h la composante de ω_h dans \mathcal{C}_h .
Soient $\bar{\omega}_h, \bar{\psi}_h$ les solutions de :

$$(3.51) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \bar{\omega}_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = 0 \quad \forall v_h \in V_{oh}, \bar{\omega}_h \in V_h, \bar{\omega}_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.52) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \bar{\psi}_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \bar{\omega}_h \cdot v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, -\bar{\psi}_h \in V_{oh}$$

Soient ω_{oh} et ψ_{oh} les solutions de

$$(3.53) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_{oh} \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} f_h v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \omega_{oh} \in V_{oh}$$

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} v_h \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} v_h \, dr dz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \psi_{oh} = g_{1h} \text{ sur } \Gamma$$

alors

$$\psi_h = \bar{\psi}_h + \psi_{oh}, \quad \omega_h = \bar{\omega}_h + \omega_{oh}.$$

Démonstration

Conséquence directe de la linéarité de l'opérateur $\vec{\nabla}$.

Cette proposition est l'analogie discrète de la proposition 2.4.7.

Maintenant on va montrer que λ_h est la solution d'un problème variationnel dans \mathcal{C}_h .

3.5.2. - Proposition

Soit $\{\psi_h, \omega_h\}$ la solution de (\hat{P}_h) et λ_h la composante de ω_h dans \mathcal{C}_h .
Alors λ_h est l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$(3.55) \quad \begin{cases} a_h(\lambda_h, \mu) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} \mu \, dr dz \\ \quad - \int_{\Gamma} g_{2h} \mu \, d\Gamma, \quad \lambda_h \in \mathcal{C}_h, \mu \in \mathcal{C}_h \end{cases}$$

Démonstration

Soit $\{\bar{\psi}_h, \bar{\omega}_h\}$ la solution de (3.42), (3.43) avec λ_h ; donc

$$\begin{aligned}
 (3.56) \quad a_h(\lambda_h, \mu) &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \bar{\omega}_h \cdot \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \bar{\psi}_h \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz \\
 &= \int_{\Omega} (\omega_h - \omega_{oh})_{\mu} \, dr dz - \int_{\Omega} \vec{\nabla} (\psi_h - \psi_{oh}) \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz \\
 &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh}^{\mu} \, dr dz \\
 &\quad - \left(\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h^{\mu} \, dr dz \right) \quad \forall \mu \in \mathcal{C}_h
 \end{aligned}$$

mais, d'après (3.39)

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h^{\mu} \, dr dz = \int_{\Gamma} g_{2h}^{\mu} \, d\Gamma \quad \forall \mu \in \mathcal{C}_h$$

avec (3.56) prouve (3.55).

L'unicité est conséquence du fait que $a_h(\dots)$ est définie positive.

□

3.5.3. - Remarque :

Pour calculer le côté droit de (3.55) il est nécessaire de résoudre deux problèmes approchés de Dirichlet pour l'opérateur B ((3.53) et (3.54)). Egalement si λ_h est connue, pour calculer ω_h et ψ_h il faut résoudre les deux problèmes de Dirichlet pour l'opérateur B : (3.37) et (3.38).

3.6. - CONSTRUCTION ET SOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE EQUIVALENT A (3.55)3.6.1. - Généralités

Soient $N_h = \dim(\mathcal{C}_h)$ et $\mathcal{B}_h = \{\theta_i\}_{i=1}^{N_h}$ une base de \mathcal{C}_h ; si $\lambda_h \in \mathcal{C}_h$ alors :

$$(3.57) \quad \lambda_h = \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_j \theta_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

3.6.2. - Proposition

Le problème (3.55) est équivalent au système linéaire

$$(E_h) \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} a_h(\theta_j, \theta_i) \lambda_j &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} \theta_i \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} \theta_i \, dr dz \\ &- \int_{\Gamma} g_{2h} \theta_i \, d\Gamma, \quad i = 1, \dots, N_h \end{aligned} \right.$$

On notera $a_{ij} = a_h(\theta_j, \theta_i)$, $A_h = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N_h}$.

Maintenant on va étudier la construction de A_h et du second membre de (E_h) pour un choix approprié de la base (\mathcal{B}_h) .

3.6.3. - Choix de \mathcal{A}_h

L'espace \mathcal{A}_h doit se faire de façon que le calcul des a_{ij} et du second membre de (E_h) soit facile. Donc les fonctions de base $\theta_i \in \mathcal{B}_h$ doivent être à support petit.

On a fait le choix (standard [7]) suivant :

\mathcal{A}_h : complémentaire de V_{oh} dans V_h

(3.58) $v_h \in \mathcal{A}_h \Rightarrow v_h|_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad T \cap \Gamma = \emptyset.$

En particulier, si V_h est défini par des éléments finis du type Lagrange, alors \mathcal{A}_h est l'espace des fonctions qui s'annulent sur les noeuds de \mathcal{T}_h qui n'appartiennent pas à Γ . Alors

(3.59)
$$\left\{ \begin{aligned} N_h &= \dim(\mathcal{A}_h) = \text{Cardinal}(\Sigma_h), \text{ avec} \\ \Sigma_h &= \{P \in \Gamma_1 / P \text{ noeud de } \mathcal{T}_h\} \end{aligned} \right.$$

(rappel : $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ et $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{r = 0\}$).

et un bon choix pour \mathcal{B}_h est la base canonique $\mathcal{B}_h = \{\theta_i\}_{i=1}^{N_h}$ avec

(3.60)
$$\left\{ \begin{aligned} \theta_i &\in V_h \\ \theta_i(P_i) &= 1, \quad P_i \in \Sigma_h, \quad \theta_i(Q) = 0 \quad \forall Q \text{ noeud de } \mathcal{T}_h, \quad Q \neq P_i. \end{aligned} \right.$$

Si l'on numérote Σ_h de 1 jusqu'à N_h et avec le choix de \mathcal{C}_h et \mathcal{B}_h dits plus haut, les coefficients λ_j de λ_h dans (3.57) sont précisément les valeurs de λ_h sur les noeuds frontière P_j , $j = 1, \dots, N_h$.

C'est-à-dire :

$$\lambda_j = \lambda_h(P_j) \quad \forall P_j \in \Sigma_h, \quad j = 1, \dots, N_h.$$

3.6.4. - Calcul du membre droit de (E_h)

Soit $\vec{b}_h = \{b_1, \dots, b_{N_h}\}$ le vecteur membre droit de (E_h) :

$$(3.61) \quad \begin{cases} b_i = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} \theta_i \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} \cdot \theta_i \, dr dz - \int_{\Gamma} g_{2h} \theta_i \, d\Gamma \\ i = 1, \dots, N_h. \end{cases}$$

3.6.5. - Remarque

Pour calculer b_i on a besoin de connaître ω_{oh} et ψ_{oh} . Cela se fait en résolvant (3.53), (3.54). Le calcul de \vec{b}_h est d'autant plus rapide que le support des θ_i est petit. De plus, si \mathcal{C}_h vérifie (3.58), il suffit de connaître ω_{oh} et ψ_{oh} sur les triangles $T \in \mathcal{T}_h$ tels que $T \cap \Gamma \neq \emptyset$. Cette remarque permet éventuellement de réduire l'espace en mémoire pour sauvegarder ω_{oh} et ψ_{oh} .

3.6.6. - Calcul de la matrice A_h

Soit $\theta_j \in \mathcal{B}_h$. Pour simplifier la notation on va oter l'indice h de ω et ψ . Soit ω_j , resp. ψ_j , la solution de (3.42), resp. (3.43), correspondant à θ_j ; c'est-à-dire :

$$(3.62) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_j \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz = 0 \quad \forall \mu \in V_{oh}, \quad \omega_j - \theta_j \in V_{oh}$$

$$(3.63) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_j \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_j \mu \, dr dz \quad \forall \mu \in V_{oh}, \quad \psi_j \in V_{oh}$$

De (3.44) on trouve

$$(3.64) \quad a_{ij} = a_h(\theta_j, \theta_i) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_j \theta_i \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_j \cdot \vec{\nabla} \theta_i \, dr dz \quad 1 \leq i, j \leq N_h.$$

3.6.7. - Remarques

(i) Pour calculer la j -ième colonne de A_h il est nécessaire de résoudre deux problèmes approchés de Dirichlet (3.62), (3.63) et après évaluer les intégrales dans (3.64). La remarque 3.6.5. est aussi valable pour le calcul des a_{ij} .

(ii) Comme A_h est symétrique, dans le calcul de la j -ième colonne, il suffit de calculer a_{ij} pour $1 \leq j \leq i \leq N_h$.

3.7. - REMARQUES SUR L'UTILISATION DES METHODES ITERATIVES

3.7.1. - Généralités

Le problème (E_h) peut être résolu par des méthodes itératives telles que la méthode de la plus grande descente ou la méthode du gradient conjugué. On verra que, dans les deux cas, on peut résoudre (E_h) sans connaître A_h explicitement. Il suffit de résoudre, à chaque itération, deux problèmes de Dirichlet appropriés.

Il est utile d'introduire l'isomorphisme :

$$(3.65) \quad \begin{aligned} x_h &: \mathcal{A}_h \rightarrow \mathbb{R}^{N_h} \\ \mu_h &= \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \theta_i \rightarrow \{\mu_1, \dots, \mu_{N_h}\}. \end{aligned}$$

Soit $(\cdot, \cdot)_h$ le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^{N_h} et $\|\cdot\|_h$ la norme correspondante. Alors

$$(3.66) \quad a_h(\lambda_h, \mu_h) = (A_h x_h \lambda_h, x_h \mu_h)_h \quad \forall \lambda_h, \mu_h \in \mathcal{A}_h, \text{ et}$$

$$(3.67) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} \mu \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} \mu \, dr dz - \int_{\Gamma} g_{2h} \mu d\Gamma &= (\vec{b}_h, x_h \mu)_h \\ \forall \mu \in \mathcal{A}_h \end{aligned} \right.$$

où A_h et \vec{b}_h sont comme dans (3.6.2.) et (3.6.4.) respectivement.

3.7.2. - Solution de (E_h) par une méthode du Gradient Conjugué

Puisque la matrice A_h est symétrique définie positive il est naturel de résoudre (E_h) par une méthode du Gradient Conjugué.

3.7.2.(I) - Rappels sur la méthode du Gradient Conjugué

Dans \mathbb{R}^N , soit \mathcal{A} une $N \times N$ -matrice symétrique définie positive et $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^N$. Le système linéaire

$$(3.68) \quad \mathcal{A} \xi = \vec{\beta}$$

a une solution unique dans \mathbb{R}^N . Pour ce problème, la méthode du gradient conjugué s'écrit : (voir par exemple [5])

$$(3.69) \quad \xi^0 \in \mathbb{R}^N, \text{ choisi arbitrairement}$$

$$(3.70) \quad g^0 = \mathcal{A} \xi^0 - \vec{\beta}, \quad n = 0$$

$$(3.71) \quad \rho_n = (z^n, g^n) / (\mathcal{A} z^n, z^n)$$

$$(3.72) \quad \xi^{n+1} = \xi^n - \rho_n z^n$$

$$(3.73) \quad \gamma_n = (g^{n+1}, g^{n+1}) / (g^n, g^n)$$

$$(3.74) \quad z^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n z^n,$$

$n = n+1$ et retour à (3.71).

Noter que (3.40) implique

$$(3.75) \quad g^{n+1} = g^n - \rho_n \mathcal{A} z^n$$

Cette relation joue un rôle important dans la résolution de (E_h) . Ici (\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans \mathbb{R}^N .

3.7.2.(II) - Implémentation de la méthode du Gradient Conjugué sur (E_h)

Dans le cas particulier de (E_h) , (3.69)-(3.74) prend la forme :

$$(3.76) \quad \lambda_h^0 \in \mathcal{C}_h, \text{ choisi arbitrairement}$$

$$(3.77) \quad g_h^0 = A_h x_h \lambda_h^0 - b_h$$

$$(3.78) \quad z_h^0 = g_h^0, \quad n = 0$$

$$(3.79) \quad \rho_n = (z_h^n, g_h^n)_h / (A_h z_h^n, z_h^n)_h$$

$$(3.80) \quad x_h \lambda_h^{n+1} = x_h \lambda_h^n - \rho_n z_h^n$$

$$(3.81) \quad g_h^{n+1} = A_h x_h \lambda_h^{n+1} - b_h$$

$$(3.82) \quad \gamma_n = (g_h^{n+1}, g_h^{n+1})_h / (g_h^n, g_h^n)_h$$

$$(3.83) \quad z_h^{n+1} = g_h^{n+1} + \gamma_n z_h^n$$

$n = n+1$ et retour à (3.79).

3.7.2.(III) - Remarques

(i) En regardant (3.79), (3.81), il semblerait que l'on ait besoin de résoudre quatre problèmes de Dirichlet pour implémenter (3.76)-(3.83) (deux pour $A_h z_h^n$ -resp. $A_h x_h \lambda_h^{n+1}$ -).

Mais, du fait que

$$(3.84) \quad g_h^{n+1} = g_h^n - \rho_n A_h z_h^n$$

on peut réduire à deux le nombre de problèmes de Dirichlet à résoudre par itération. Pour cela on utilise l'algorithme (3.76)-(3.80), (3.84), (3.82), (3.83). On peut donc se rendre compte qu'une fois z_h^n, g_h^n connus, deux problèmes de Dirichlet sont nécessaire pour calculer $A_h z_h^n$. Une fois ce vecteur connu on peut calculer $\rho_n, \lambda_h^{n+1}, g_h^{n+1}$ par (3.79), (3.80), (3.84), ensuite la connaissance de g_h^{n+1} nous permet de calculer γ_n et z_h^{n+1} par (3.82), (3.83).

(ii) Tous les problèmes de Dirichlet à résoudre ont la forme

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Omega} f v \, dr dz, \quad u|_{\Gamma} = g \text{ pour } u \in V_h, v \in V_{0h}$$

et $g \in \mathcal{M}_h$. Donc, la matrice est toujours la même et il ne suffit de la calculer et la triangulariser qu'à la 1ère itération et de la garder pour les itérations suivantes.

(iii) Pour l'algorithme du Gradient Conjugué décrit, on utilise le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^N :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

On pourrait auparavant utiliser un autre produit scalaire rattaché à une matrice symétrique définie positive S_h . Dans le chapitre correspondant aux résultats numériques on verra qu'en changeant le produit scalaire on va modifier la vitesse de convergence.

(iv) Dans le calcul de g_h^0 comme dans le calcul de $A_h z_h^n$ par (3.77), (3.79) on aura besoin de calculer des termes du type :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega^n \theta_k \, dr dz - \sum_{\substack{P_j \text{ noeud} \\ \text{de } \mathcal{T}_h}} \psi_j^n \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \theta_j \cdot \vec{\nabla} \theta_k \, dr dz$$

avec ω^n, ψ^n dépendant de l'itération.

Puisque les fonctions de base θ_j ont comme support des triangles

$T \in \mathcal{T}_h$ tels que $T \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$, il suffit de sauvegarder les termes $\int_T \frac{1}{r} \vec{\nabla} \theta_j \cdot \vec{\nabla} \theta_k$, $T \in \mathcal{T}_h$, $T \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ et $i, k = 1, \dots, N_h$ à la 1ère itération.

3.8. - ETUDE DU PROBLEME DE STOKES AXISYMETRIQUE EN UTILISANT L'OPERATEUR $H(u) = B(ru)$

3.8.0. Introduction

D'après ce que l'on a dit dans la remarque 3.1.1. (ii) on fait le changement de variable : $\psi = \varphi r$ dans (2.1) et on obtient une autre expression du problème (P) :

$$\begin{array}{l}
 (\hat{P}_H) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \varphi \text{ telle que} \\
 H(H(\varphi)) = f \\
 \varphi|_{\Gamma} = h_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = h_2
 \end{array} \right. \\
 \text{avec} \\
 H(u) = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{r} \vec{\nabla}(ru)\right).
 \end{array}$$

Une possible formulation variationnelle est la suivante :

$$(3.85) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \varphi \text{ telle que} \\
 \int_{\Omega} r H(\varphi) \cdot H(v) \operatorname{drdz} = \int_{\Omega} f v r \operatorname{drdz} \\
 \varphi|_{\Gamma} = h_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma} = h_2
 \end{array} \right.$$

Bien sûr, il faudrait faire toute l'étude théorique concernant l'existence et l'unicité de la solution de (\hat{P}_H) ainsi l'équivalence de (\hat{P}_H) et (3.85).

Dans le cadre de ce travail, on ne le fait pas et on se contente de travailler de façon formelle.

Comme pour le cas de l'opérateur B, on verra que la résolution d'une "discrétisation" de (\hat{P}_H) est basée sur la résolution d'une suite des problèmes du type :

$$(3.86) \left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(ru) \cdot \vec{\nabla}(rv) \operatorname{drdz} = \int_{\Omega} f v r \operatorname{drdz} \\
 \forall v \in V_{oh}, \quad u \in V_h.
 \end{array} \right.$$

Mais, que dans ce cas on n'a plus de problèmes sur l'axe $r = 0$; c'est-à-dire l'espace V_{oh} décrit dans (3.3) est tel que :

$$(3.87) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(ru) \cdot \vec{\nabla}(ru) \operatorname{drdz} = \int_{\Omega} \left(r \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}u + \frac{u^2}{r} \right) \operatorname{drdz} < +\infty$$

donc que l'on peut parler d'une approximation interne de (\hat{P}_H) par des éléments finis.

3.8.1. - Problème Approché ($\widehat{H}P_h$) :

Trouver $(\omega_h, \psi_h, \lambda_h) \in V_h \times V_h \times \mathcal{A}_h$ telle que

$$(3.86) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\omega_h) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = \int_{\Omega} f_h v r drdz \quad \forall v \in V_{oh}, \quad \omega_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.87) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_h) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = \int_{\Omega} \omega_h v drdz \quad \forall v \in V_{oh}, \quad r\varphi_h|_{\Gamma} = g_{1h}$$

$$(3.88) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_h) \cdot \vec{\nabla}(r\mu) drdz = \int_{\Omega} \omega_h \mu drdz + \int_{\Gamma_1} g_{2h} \mu r d\Gamma \quad \forall \mu \in \mathcal{A}_h$$

3.8.2. - Définition de la forme H_{a_h} :

Soit $\lambda_h \in \mathcal{A}_h$ et $(\bar{\omega}_h, \bar{\varphi}_h)$ la solution du problème

$$(3.89) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\bar{\omega}_h) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = 0 \quad \forall v \in V_{oh}, \quad \bar{\omega}_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.90) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\bar{\varphi}_h) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = \int_{\Omega} \bar{\omega}_h v drdz \quad \forall v \in V_{oh}, \quad \bar{\varphi}_h \in V_{oh}$$

On définit $H_{a_h} : \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(3.91) \quad H_{a_h}(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \bar{\omega}_h \mu r drdz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\bar{\varphi}_h) \cdot \vec{\nabla}(r\mu) drdz, \quad \forall \mu \in \mathcal{A}_h$$

3.8.3. - Remarque

On a aussi l'équivalent de la proposition 3.4.2 :

$H_{a_h}(\dots)$ est symétrique positive définie, et la

3.8.4. - Proposition

Soit $\{\varphi_h, \omega_h\}$ la solution de $(\widehat{H}P_h)$ et λ_h la composante de ω_h dans \mathcal{A}_h . Soient $\bar{\omega}_h, \bar{\varphi}_h$ les solutions de :

$$(3.92) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\bar{\omega}_h) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = 0 \quad \forall v \in V_{oh}, \quad \bar{\omega}_h \in V_h, \quad \bar{\omega}_h - \lambda_h \in V_{oh}$$

$$(3.93) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\bar{\varphi}_h) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = \int_{\Omega} \bar{\omega}_h v drdz \quad \forall v \in V_{oh}, \quad \bar{\varphi}_h \in V_{oh}$$

Soient ω_{oh} et φ_{oh} les solutions de

$$(3.94) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\omega_{oh}) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = \int_{\Omega} f_h v r drdz, \quad \forall v \in V_{oh}, \omega_{oh} \in V_{oh}$$

$$(3.95) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_{oh}) \cdot \vec{\nabla}(rv) drdz = \int_{\Omega} \omega_{oh} v drdz, \quad \forall v \in V_{oh}, \varphi_{oh}|_{\Gamma_1} = g_1/r$$

alors $\varphi_h = \bar{\varphi}_h + \varphi_{oh}, \quad \omega_h = \bar{\omega}_h + \varphi_{oh}$

également l'équivalent de la proposition 3.5.2. :

3.8.5. - Proposition

Soit $\{\varphi_h, \omega_h\}$ la solution de $(H_{\hat{p}_h})$ et λ_h la composante de ω_h dans \mathcal{A}_h . Alors λ_h est l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$(3.96) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{a_h}(\lambda_h, \mu) &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_{oh}) \cdot \vec{\nabla}(r\mu) drdz - \int_{\Omega} \omega_{oh} \mu drdz \\ &- \int_{\Gamma} g_{2h} \mu r dr, \quad \forall \mu \in \mathcal{A}_h, \lambda_h \in \mathcal{A}_h. \end{aligned} \right.$$

3.8.6. - Remarque

On fait le même choix de \mathcal{A}_h dans (3.6.3.) et on note encore $N_h = \dim(\mathcal{A}_h)$, $B_h = \{\theta_i\}_{i=1}^{N_h}$ une base de \mathcal{A}_h . Alors λ_h la solution de (3.96) qui écrite dans la base \mathcal{B}_h donne :

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_j \theta_j$$

On a encore la proposition suivante équivalente à la proposition 3.6.2.

3.8.7. - Proposition

Le problème (3.96) est équivalent au système linéaire en $(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_h})$:

$$(H_{E_h}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} H_{a_h}(\theta_j, \theta_i) \lambda_j &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_{oh}) \cdot \vec{\nabla}(r\theta_i) drdz - \int_{\Omega} r\omega_{oh} \theta_i drdz \\ &- \int_{\Gamma_1} g_{2h} \theta_i r dr \\ i &= 1, \dots, N_h. \end{aligned} \right.$$

On va noter $H_{a_{ij}} = H_{a_h}(\theta_j, \theta_i), \quad H_{a_h} = [H_{a_{ij}}]_{i,j=1}^{N_h}$.

3.8.8. - Calcul du membre droit de $({}^H E_h)$

Soit $\vec{c}_h = \{c_1 \dots c_{N_h}\}$ le vecteur membre droit de $({}^H E_h)$: alors

$$(3.97) \left\{ \begin{array}{l} c_i = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_{oh}) \cdot \vec{\nabla}(r\theta_i) drdz - \int_{\Omega} r\omega_{oh}\theta_i drdz - \int_{\Gamma_1} g_{2h}\theta_i r d\Gamma \\ i = 1, \dots, N_h. \end{array} \right.$$

3.8.9. - Remarque

La remarque 3.6.5. est encore valable pour les c_i .

3.8.10 - Calcul de la matrice ${}^H A_h$

Comme dans (3.6.6.) on trouve

$$(3.98) \left\{ \begin{array}{l} {}^H a_{ij} = {}^H a_h(\theta_j, \theta_i) = \int_{\Omega} \omega_j \theta_i drdz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_j) \cdot \vec{\nabla}(r\theta_i) drdz \\ 1 \leq i \leq j \leq N_h \end{array} \right.$$

où (ω_j, φ_j) est la solution du problème :

$$(3.99) \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\omega_j) \cdot \vec{\nabla}(r\mu) drdz = 0 \quad \forall \mu \in V_{oh}, \quad \omega_j - \theta_j \in V_{oh}$$

$$(3.100) \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}(r\varphi_j) \cdot \vec{\nabla}(r\mu) drdz = \int_{\Omega} \omega_j \mu drdz \quad \forall \mu \in V_{oh}, \quad \varphi_j \in V_{oh}$$

3.8.11 - Remarque

La remarque (3.6.7.) est encore valable pour les ${}^H a_{ij}$.

3.8.12 - Solution de $({}^H E_h)$ par la méthode du Gradient Conjugué

On va avoir le même algorithme décrit par les équations (3.76)-(3.80), (3.84), (3.82), (3.83). Il suffit de changer A_h par ${}^H A_h$ et b_h par c_h . La définition de x_h reste inchangée -voir (3.65)-

3.9. - APPLICATION DE LA METHODE DE DECOUPLAGE POUR RESOUDRE LES EQUATIONS DE NAVIER STOKES STATIONNAIRES DANS DE CONDITIONS D'AXISYMETRIE ET NOMBRE DE REYNOLDS "PETITS".

3.9.1. Introduction

Dans des conditions de symétrie de révolution on a vu que les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire, en formulation vorticité-fonction de courante, comme [8] :

$$(3.101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathbb{R}_e} B(\omega) - J(\omega, \psi) = \text{rot } \vec{f} = q \\ rB(\psi) = \omega \end{array} \right.$$

avec $J(\omega, \psi)$ terme non-linéaire défini par

$$(3.102) \quad J(\omega, \psi) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

$$(3.103) \quad \vec{f} \text{ ("forcing")} \text{ densité des forces extérieures et}$$

$$(3.104) \quad \mathbb{R}_e : \text{ nombre de Reynolds : constante qui dépend de la nature du fluide et des conditions de l'écoulement.}$$

Quand le nombre de Reynolds est "petit" on voit que le terme linéaire $B(rB(\psi))$ va dominer sur le terme convectif $J(\omega, \psi)$. On va introduire un procédé itératif qui profite de ce fait en ramenant le problème (3.101) à une suite de problèmes de Stokes de la forme (\hat{P}) avec \hat{f} , g_1 et g_2 variables. Puis on va résoudre chacun de ces problèmes de façon approchée en utilisant les outils qui viennent d'être exposés dans les paragraphes précédents de ce même chapitre.

Et on aboutit finalement à la méthode itérative suivante :

3.9.2. - Méthode itérative pour les équations de Navier-Stokes

(pas 0) Soit $(\omega_h^0, \psi_h^0) \in V_h \times V_h$ quelconque

(dans les exemples numériques on va prendre $\omega_h^0 = \psi_h^0 = 0$).

(Pas n). Résoudre le problème :

$$(3.105) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\tilde{\omega}_h^n, \tilde{\psi}_h^n) \in V_h \times V_h \text{ tel que} \\ B(\tilde{\omega}_h^n) = \mathbb{R}_e \{J(\omega_h^n, \psi_h^n) + r \dot{\omega} \vec{f}\}, \quad \tilde{\omega}_h^n|_{\Gamma} = \tilde{\lambda}^n \\ rB(\tilde{\psi}_h^n) = \tilde{\omega}_h^n, \quad \tilde{\psi}_h^n|_{\Gamma} = g_1 \end{array} \right.$$

. Mettre au jour ω_h^n et ψ_h^n :

$$(3.106) \left\{ \begin{array}{l} \psi_h^{n+1} = \psi_h^n + \rho (\tilde{\psi}_h^n - \psi_h^n) \quad , \rho > 0 \text{ (à choisir)} \\ \omega_h^{n+1} = \omega_h^n + \rho (\tilde{\omega}_h^n - \omega_h^n) \end{array} \right.$$

. Faire $n = n+1$ et retour à 3.105.

3.9.5. - Remarque

- i) La trace λ_h^n de $\tilde{\omega}_h^n$ sur Γ n'est pas connue, bien évidemment. Mais, du fait que l'on connaisse $\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}_h^n}{\partial n} = g_{2h}$, on va pouvoir la calculer en résolvant l'équation (3.55).
Puisque la définition de la forme bilinéaire $a_h(\dots)$ -voir (3.44)- ne dépend pas de f_h , la matrice A_h associée à cette forme va être la même pour toutes les itérations de l'algorithme 3.9.2. En conséquence, il suffit de la calculer et de la factoriser à la première itération, puis de la garder en mémoire.
- ii) Sans rentrer dans tous les détails, on va exposer une autre méthode possible pour résoudre les équations de Navier-Stokes (3.101).

Il s'agit d'utiliser la formulation par moindres carrés -contrôle optimal, utilisée dans [4] pour résoudre les mêmes équations de Navier-Stokes en variables primitives (\vec{u} : vitesse- p : pression).

On doit résoudre :

$$(3.107) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } C(u) \\ u \in W_{gh} \end{array} \right.$$

avec W_{gh} défini dans (3.5) et

$$(3.108) \quad C(u) = \frac{1}{2R_e} \int_{\Omega} |B(u-\xi)|^2 r \, dr dz$$

Dans (3.108), ξ et u sont reliées par l'équation d'état :

$$(3.109) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{R_e} B(rB(\xi)) = q - K(u), \quad \xi \in W_{gh} \\ \text{où} \\ K(u) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{B(u)}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B(u)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{array}$$

En résolvant (3.107)-(3.109) par la méthode du gradient conjugué on va être obligé de résoudre à chaque itération deux problèmes de Stokes du type

$$(3.110) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(rB(u)) = f \\ u \in W_{gh} \end{array} \right.$$

donc, encore une fois, on a intérêt à avoir un solveur efficace du problème de Stokes. (3.110).

3.10 - INTEGRATION DE LA METHODE DE DECOUPLAGE A UN CODE D'ELEMENTS FINIS GENERAL

Dans ce paragraphe, on va tracer les lignes générales à suivre pour intégrer la solution du problème (\hat{P}_h) à un code d'éléments finis.

En récapitulant, résoudre (\hat{P}_h) équivaut à résoudre les problèmes :

$$(\hat{P}_0) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_{oh} \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = \int_{\Omega} f_h v_h \, drdz \quad \forall v \in V_{oh}, \omega_{oh} \in V_{oh} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} v_h \, drdz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \psi_{oh} \in V_h, \psi_{oh}|_{\Gamma} = g_1 \end{array} \right.$$

$$(E_h) \quad a_h(\lambda_h, \mu_h) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_{oh} \cdot \vec{\nabla} \mu_h \, drdz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_{oh} \mu_h \, drdz - \int_{\Gamma} g_{2h} \mu_h \, d\Gamma$$

$$(\hat{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \omega_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = \int_{\Omega} f_h v_h \, drdz \quad \forall v \in V_{oh}, \omega_h \in V_h, \omega_h|_{\Gamma} = \lambda_h \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h v_h \, drdz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \psi_h \in V_h, \psi_h|_{\Gamma} = g_{1h} \end{array} \right.$$

Or pour résoudre le système linéaire (E_h) , il faut résoudre une suite de problèmes du type :

$$(\hat{P}_{\bar{\lambda}}) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \bar{\omega}_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = 0 \quad \bar{\omega}|_{\Gamma} = \bar{\lambda} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \bar{\psi}_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \bar{\omega}_h \cdot v_h \, drdz \quad \forall v_h \in V_{oh}, \bar{\psi}_h \in V_{oh} \end{array} \right.$$

Donc, si l'on construit la matrice A_h (méthode dite "directe")

-voir § 3.6.6.- on a $\bar{\lambda} = \theta_j$ avec θ_j fonction de base de \mathcal{C}_h .

On pourra résoudre simultanément tous les couples des problèmes

(\hat{P}_{θ_j}) mais on sera obligé de résoudre le système linéaire $A_h \chi_h \lambda_h = b_h$.

Si, par contre, on utilise une méthode itérative pour résoudre (E_h)

on doit résoudre chaque couple de problèmes (\hat{P}_{λ_h}) un nombre indéterminé

de fois ; or on va perdre la simultanéité, λ_h c'est-à-dire :

pour connaître λ_h^{n+1} il faut déjà connaître λ_h^n . Mais on aura l'avantage

de ne pas avoir besoin de connaître la matrice A_h .

Donc, à la base de deux méthodes on aura besoin de résoudre des problèmes du style :

$$(3.111) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, drdz = \int_{\Omega} p_h v_h \, drdz \quad \forall v_h \in V_{oh} \\ u_h|_{\Gamma} = q_h \end{array} \right.$$

Avant de continuer on va introduire quelques notations :

$$(3.112) \left\{ \begin{array}{l} \cdot \tilde{N}_h = \dim V_h, N_h = \dim \mathcal{C}_h \Rightarrow \tilde{N}_h - N_h = \dim V_{oh} \\ \cdot \mathcal{B}_{V_k} = \{\theta_i : i = 1 \dots \tilde{N}_h\} : \text{base de } V_h \\ \cdot \mathcal{B}_{V_{oh}} = \{\theta_i : i = N_h + 1, \dots, \tilde{N}_h\} : \text{base de } V_{oh} \\ \cdot \mathcal{B}_h = \{\theta_i : i = 1 \dots N_h\} : \text{base de } \mathcal{C}_h \end{array} \right.$$

où les fonctions de base θ_i sont définies par (3.60) (avec P_i noeud $\in \mathcal{C}_h$) et le choix de \mathcal{C}_h est celui de 3.6.3.

Donc, résoudre un problème du type (3.111) équivaut à résoudre le système linéaire :

$$(3.113) \quad [K]\hat{u} = \vec{F} - [\tilde{K}]\hat{q}$$

avec

$$[K] = [k_{ij}], [\tilde{K}] = [\tilde{k}_{ij}], \vec{F} = (F_j), \hat{u} = (\tilde{u}_j)$$

et

$$(3.114) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad k_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \theta_i \cdot \vec{\nabla} \theta_j \, dr dz \quad i, j = (N_h + 1), \dots, \tilde{N}_h \\ \text{(ii)} \quad \tilde{k}_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \theta_i \cdot \vec{\nabla} \theta_j \, dr dz \quad \begin{cases} i = (N_h + 1), \dots, \tilde{N}_h \\ j = 1 \dots N_h \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad F_j = \int_{\Omega} p_h \theta_j \, dr dz \quad j = (N_h + 1), \dots, \tilde{N}_h \end{array} \right.$$

donc

$$[K] \in \mathcal{C}_{(\tilde{N}_h - N_h) \times (\tilde{N}_h - N_h)}, [\tilde{K}] \in \mathcal{C}_{(\tilde{N}_h - N_h) \times N_h}$$

$$\vec{F} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}_h - N_h}, \hat{q} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

(avec $\mathcal{C}_{m \times n}$: ensemble des matrices de m lignes et n colonnes).

On va décomposer le vecteur \vec{F} de la façon suivante :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{fixe}} + \vec{F}_{\text{var}}$$

où \vec{F}_{fixe} représente un vecteur qui ne sera calculé qu'une fois et sauvegardé en mémoire, tandis que \vec{F}_{var} sera un vecteur qui doit être calculé à chaque fois, comme c'est bien le cas du vecteur

$$\left[\int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega_h \theta_j \, dr dz \right]_{\theta_j} \in \mathfrak{B}_{V_{oh}}$$

De même, pour le vecteur \vec{q} on a :

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{fixe}} = \vec{q}_{\text{var}}$$

avec les mêmes remarques.

Maintenant, on va introduire des "modules" au niveau desquels vont s'effectuer certaines opérations : chaque module va être représenté sous la forme suivante :

$$M_i(x, y, \dots; \rightarrow c, d, \dots)$$

où x, y, \dots sont des arguments ou données à fournir au module et c, d, \dots sont les "produits" du module.

DESCRIPTION DES MODULES

$M_1(\mathcal{C}_h, \text{élément fini, forme bilinéaire, options ; } [K], [\tilde{K}], [\tilde{\tilde{K}}] \dots)$

Actions :

Construire les matrices $[K]$ et $[\tilde{K}]$ décrites dans (3.114)

En plus, calculer ou récupérer en option la matrice

$[\tilde{\tilde{K}}]$ où $\tilde{\tilde{k}}_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}_{\theta_i} \cdot \vec{\nabla}_{\theta_j} \, dr dz$ avec $\theta_j \in B_h$ et $\theta_i \in B_{V_h}$ telle que $\text{supp}(\theta_i) \cap \text{supp}(\theta_j) \neq \emptyset$. Les $\tilde{\tilde{k}}_{ij}$ peuvent être calculés élément par élément mais, qui n'étant pas utilisés dans la suite d'un calcul standard d'éléments finis, ils peuvent être perdus lors de l'assemblage des éléments et de la prise en compte des conditions aux limites.

Le tableau $[\tilde{\tilde{K}}]$ est nécessaire pour le calcul de \vec{b}_h , de A_h (si on utilise la méthode dite directe pour résoudre le problème E_h) ou de ρ^n (si on utilise la méthode du Gradient Conjugué -voir 3.7.2.-). $[\tilde{\tilde{K}}]$ peut aussi être utilisé dans le calcul de $\frac{\partial u}{\partial n}$ avec u solution du problème $B(u) = f$ dans Ω .

Remarque

Tandis que le calcul et le stockage de $[\tilde{K}]$ peuvent se faire de façon automatique (moyennant une réponse affirmative à la question si l'on fait ou pas cette action), l'utilisation que l'on fait de cette information est tout-à-fait spécifique du problème traité, donc il n'est pas question que le module se charge du traitement de $[\tilde{K}]$. Le traitement de $[\tilde{K}]$ devra se faire dans un autre module introduit en option. Or cela implique une structure de données assez simple à exploiter.

$M_2(\mathcal{C}_h, \text{élément fini, forme linéaire} ; \rightarrow \vec{F}_{\text{fixe}}, \vec{F}_{\text{variable}})$

Actions :

Lorsque la forme linéaire est donnée, le modèle doit être capable de reconnaître s'il s'agit de la 1ère fois qu'on la lui fournit, donc il calcule et stocke le vecteur \vec{F} ; ou par contre \vec{F} a été déjà calculé ; dans ce cas, il ne reste qu'à le récupérer en mémoire. L'appellation de \vec{F}_{fixe} ou $\vec{F}_{\text{variable}}$ vient du fait que la mémoire réservée à \vec{F} soit récupérable ou pas lors d'un passage par M_2 .

$M_3([\tilde{K}], \vec{q} ; \rightarrow [\tilde{K}]\vec{q})$

Actions :

Calcul et stockage du second membre provenant des conditions de bord. Si la condition de bord \vec{q} est utilisée plus d'une fois, M_3 calcule $[\tilde{K}]\vec{q}$ et le garde dans une partie de la mémoire appelée "fixe", et dans le cas contraire on le garde dans une partie récupérable appelée "variable".

$M_4([K], \vec{c} ; \rightarrow \vec{u})$

Actions :

Calcul et sauvegarde de \vec{u} solution du système linéaire :

$$(3.115) \quad [K]\vec{u} = \vec{c}$$

Il faut remarquer que, puisque $[K]$ est symétrique définie positive, il suffit d'avoir la triangularisée de $[K]$ pour pouvoir résoudre le système linéaire (3.115).

$M_5([\tilde{K}], \vec{x}, \vec{y} ; \rightarrow [\tilde{K}]\vec{x}+\vec{y})$

Actions :

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}h}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^N h$ on calcule $\vec{z} = [\tilde{K}] \vec{x} + \vec{y}$

Il faut remarquer que M_5 est un module spécifique à ce problème. De même, le calcul de $\int_{\Gamma} g_{2h}^{\mu} d\Gamma$, $\forall \mu \in \mathcal{C}_h$ doit être fait dans un module spécifique.

Donc, il ne reste qu'à introduire un module, dit de gestion, qui permette l'enchaînement des actions de tous les autres modules de sorte qu'il y ait la moindre intervention de l'utilisation.

Remarque:

Puisque on a utilisé la version 1980 du code DELTA de A. PONCET [12] pour résoudre le problème (\hat{P}_h) , on va dire de quelle façon les modules décrits auparavant sont implémentés dans ce code. Strictement parlant on ne peut pas dire que la structure du code corresponde exactement à cette idée de module que l'on vient d'exposer.

Les modules M_1 , M_2 , M_3 sont en partie générés dans une commande, appelée EQUATION et sont activés par l'une des commandes résultat ou équation. Par contre, la matrice $[K]$ est calculée mais pas sauvegardée de façon automatique.

Il n'y a pas de séparation entre la construction et la triangulation de la matrice $[K]$ car, dans DELTA, cela se fait simultanément quand on utilise la méthode frontale [12] pour résoudre le système (3.115). De même, les actions du module M_5 et du module dit de gestion sont remplies par les commandes RESULTAT ou SOLUTION.

En résumant, la version 1980 du code DELTA ne peut itérer que dans les conditions suivantes :

- i) matrice fixe, symétrique
- (3.116) ii) conditions de bord fixes
- iii) deuxième membre variable.

Il y a une nouvelle version (1981) du code qui permet de traiter d'autres procédés itératifs que celui déterminé par les conditions (3.116).

CHAPITRE IV

4.0 - INTRODUCTION

On va tester dans des cas où l'on connaît la solution exacte, les différentes méthodes exposées dans les chapitres précédents.

Il comprend :

4.1 Etude numérique du problème de Dirichlet : (Ch. I)

$$B(u) = f, \quad u|_{\Gamma} = g$$

4.2 Etude numérique du problème de Dirichlet:(Ch. II)

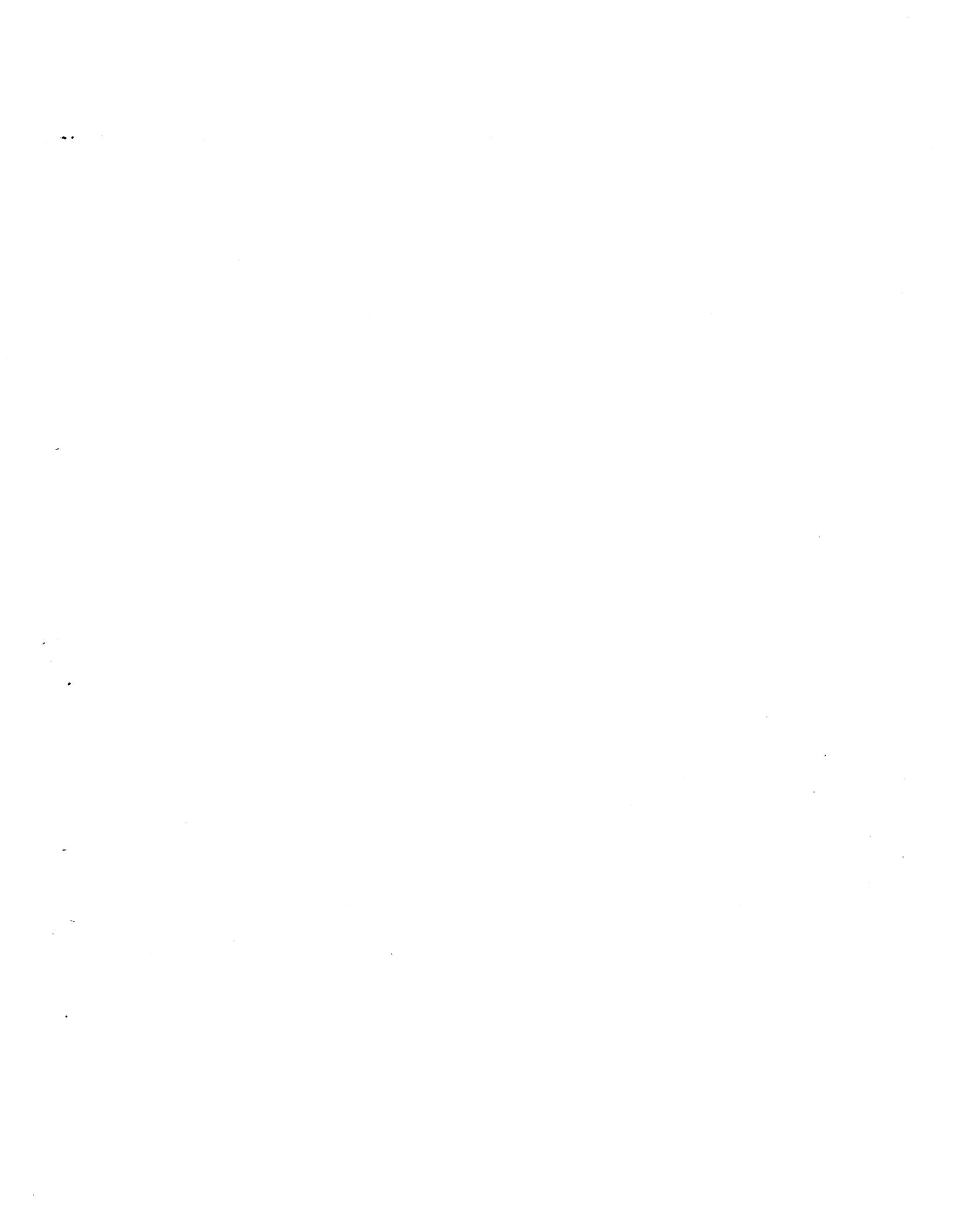
$$B(rB(u)) = f \quad u|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2$$

4.3 Etude numérique du problème de Navier-Stokes axisymétrique en formulation fonction de courant-vorticité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Re} B(rB(u)) + J(u) = f \\ u|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } J(u) = \text{div}\left(\frac{B(u)}{r} \left(-\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)$$

$$\text{et } B(u) = -\text{div}(\vec{\nabla}u) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$



4.1 - ETUDE DU PROBLEME DE DIRICHLET POUR L'OPERATEUR B

On va résoudre le problème :

$$(4.1) \left\{ \begin{array}{l} B(u) = f \\ u|_{\Gamma} = g \end{array} \right.$$

dans l'espace V_h introduit dans (3.3) et pour différentes formulations variationnelles, dans un cas précis, c'est-à-dire : on va se donner des fonctions f et g pour lesquelles on connaît la solution exacte du problème (4.1). Le voici :

4.1.1. - Problème Test

$$(4.2) \quad \text{domaine : } \bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

$$(4.3) \quad \text{solution exacte } \psi = 256 r^2(1-r)^2 z^2(1-z)^2$$

$$(4.4) \quad \text{second membre } f = B(\psi) = -512 (4r-z)z^2(1-z)^2 + r(1-r)^2(1-6z+6z^2)$$

$$(4.5) \quad \text{condition de bord } g = \psi|_{\Gamma} \equiv 0.$$

On va introduire aussi :

4.1.2. - Test d'erreur :

Soient : $\psi_{h,i}$: la solution approchée au noeud $n^\circ i$

ψ_i : la solution exacte au noeud $n^\circ i$

alors :

$$(4.6) \quad \text{erreur} = \frac{\sum_{P_i:\text{noeud}} |\psi_i - \psi_{h,i}|}{\sum_{P_i:\text{noeud}} |\psi_i|}.$$

4.1.3. - Formulations variationnelles possibles du problème (4.1)

On va résoudre des problèmes variationnels du type

$$a_i(u, v) = \ell_i(v) \quad \forall v \in V_{oh}, \quad u \in V_h$$

pour les choix de $a_i(\dots)$ et $\ell_i(\dots)$ suivants :

$$(4.7) \quad \text{Forme n}^\circ 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dr dz \\ \ell_1(v) = \int_{\Omega} f v \, dr dz \end{array} \right.$$

$$(4.8) \quad \text{Forme n}^\circ 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2(u, v) = \int_{\Omega} r [\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + 2 \frac{\partial u}{\partial v} v] dr dz \\ \ell_2(v) = \int_{\Omega} f v r^2 dr dz \end{array} \right.$$

Remarque 4.1 - La forme n° 2 résulte de la précédente en changeant v par $r v$. On n'a plus de problème avec le facteur $1/r$ mais elle n'est pas symétrique ce qui peut déranger du point de vue numérique.

$$(4.9) \quad \text{Forme n}^\circ 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_3(u, v) = \int_{\Omega} [r^2 (\frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}) + 4 r u v] dr dz \\ \ell_3(v) = \int_{\Omega} f v r^2 dr dz \end{array} \right.$$

Remarque 4.2 - La forme n° 3 résulte de la précédente en changeant u par $r^2 u$. Il n'y a plus le problème avec le facteur $1/r$ et elle est symétrique.

$$(4.10) \quad \text{Forme n}^\circ 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_4(u, v) = \int_{\Omega} [r (\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{u v}{r}] dr dz \\ \ell_4(v) = \int_{\Omega} u v r \, dr dz \end{array} \right.$$

Remarque 4.3 - La forme n° 4 résulte de la forme n° 1 en changeant u (resp. v) par ru , (resp. rv). Elle est encore symétrique et le problème avec le facteur $1/r$ persiste.

4.1.4. - Sur l'intégration numérique :

Sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, on utilise la formule de quadrature :

$$(4.11) \quad \sum_{q=1}^N w_q f(X_q) \text{ pour approcher } \int_T f(X) dX$$

où w_q est le poids associé au point X_q (point d'intégration) et où N est le nombre de points d'intégration numériques sur T .

On va appeler ordre d'intégration le degré de f (pour f un polynôme) pour lequel l'intégrale $\int_T f(x) dx$ est calculée sans erreur par la formule de quadrature (4.11).

Pour éviter des problèmes avec le facteur $1/r$ on va choisir les points d'intégration à l'intérieur de chaque triangle.

4.1.5. - Type de Triangulation :

On va trianguler le carré $[0,1] \times [0,1]$ de la façon indiquée sur la figure 4.1 :

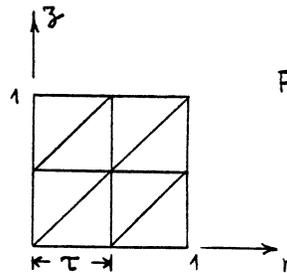


Fig. 4.1

La triangulation va être donc déterminée par le pas d'échantillonnage τ , constant sur la frontière.

Sur le tableau suivant on donne les caractéristiques de chaque triangulation :

Triangulation	pas (τ)	nombre de triangles	nombre de noeuds
\mathcal{T}_{h1}	0.25	32	16
\mathcal{T}_{h2}	0.10	200	100
\mathcal{T}_{h3}	0.05	800	400

Tableau 4.1.1

4.1.6. - Remarque

(i) On va appeler lag1 et lag2 l'élément fini qui résulte d'utiliser $K=1$ ou $K=2$ dans la définition de l'espace V_h :

$$V_h = \{u \in C^0(\bar{\Omega}) : u|_T \in \mathbb{P}_K \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

(ii) Les résultats sont affichés dans le tableau 4.1.2. voir Annexe A.

4.1.7. - Interprétation des résultats

(i) La forme n° 3, malgré le fait qu'il n'y a plus de problèmes avec le facteur $1/r$, donne de très mauvais résultats.

(ii) La forme n° 2 donne des résultats légèrement meilleurs que ceux de la forme n° 1 mais moins bons que ceux de la forme n° 4. Du point de vue théorique elle est la mieux adaptée pour traiter le problème (4.1) car on n'a plus le facteur $1/r$. Mais, du point de vue calcul, elle pose des problèmes parce qu'on ne doit pas seulement garder la matrice triangularisée (correspondante à la forme bilinéaire) mais aussi la matrice de factorisation, (si l'on veut résoudre une suite des problèmes avec la même forme bilinéaire). Or, puisque les calculs sont fait avec l'aide -très importante d'ailleurs- du CODE DELTA, et puisque dans la version utilisée on n'a pas la sauvegarde de la matrice de factorisation, alors on ne pourra pas utiliser la forme n° 2 pour résoudre le problème (4.1).

(iii) D'après les remarques (i) et (ii) il ne nous reste donc que le choix entre la forme n° 1 et la forme n° 4.

On va noter $err(i)$ l'erreur pour la forme n° i dans certaines conditions (fixées à l'avance) de triangulation, élément, ordre d'intégration. Puis on va regarder le rapport $erreur(1)/erreur(4)$:

Triangulation	Element	Ordre d'int. num.	$\frac{\text{erreur (1)}}{\text{erreur (2)}}$
\mathcal{T}_{h1}	lag1	01	0.935
\mathcal{T}_{h1}	lag2	04	2.243
\mathcal{T}_{h2}	lag1	01	1.287
\mathcal{T}_{h3}	lag1	01	1.511

On voit donc que l'écart des erreurs se fait plus important au fur et à mesure que la triangulation est plus fine.

D'autre part, quand on utilise lag2, au lieu de lag1, l'erreur se divise par 2 en utilisant la forme n° 4 au lieu de la forme n° 1.

Il semble donc que la forme n° 4 est la bonne candidate.

(iv) Sur l'effet d'ordre d'intégration numérique sur l'erreur pour la forme n° 4 : il est évident que plus on augmente l'ordre d'intégration numérique mieux les intégrales dans $a_1(.,.)$ et $a_4(.,.)$ sont approchées ; donc on peut attendre une décroissance de l'erreur -voir tableau 4.1.2.- Or, cette diminution de l'erreur n'est pas régulière. En prenant en compte aussi le fait que le coût de calcul augmente avec l'ordre d'intégration, on doit faire un compromis : chercher à réduire l'erreur à moindre coût. Dans ce cas particulier, il semble suffisant de prendre l'ordre d'intégration égal à 02.

4.2. - ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME DE STOCKES AXISYMETRIQUE

4.2.0. - Introduction

Comme dans le cas du paragraphe 4.1, on va approcher la solution (connue) du problème :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(rB(\psi)) = f \\ \psi|_{\Gamma^-} = g_1 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2 \end{array} \right.$$

pour des fonctions f , g_1 et g_2 données, dans l'espace V_h défini par (3)

On va utiliser le procédé de découplage exposé dans le chapitre III. On va dire qu'on utilise la méthode DIRECTE si l'on construit la matrice correspondante au système linéaire (E_h) -voir 3.6.2.-

Autrement, on va utiliser la méthode du GRADIENT CONJUGUE pour résoudre de façon itérative le système linéaire (E_h) sans construire la matrice A_h .

Dans le cas de la méthode du Gradient Conjugué on va utiliser deux produits scalaires dans \mathbb{R}^{N_h} . A savoir :

Produit scalaire n° 1 ou standard

$$(4.13) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{N_h} x_i \cdot y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^{N_h}$$

Produit scalaire n° 2

$$(4.14) \quad (x, y)_2 = \sum_{i=1}^{N_h} \frac{1}{r_i} x_i y_i \frac{(|P_i P_{i+1}| + |P_{i-1} P_i|)}{2}$$

où r_i , P_{i-1} , P_i , P_{i+1} sont comme dans la figure 4.2.

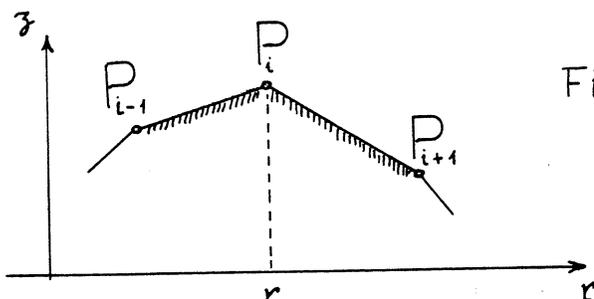


Fig.4.2

On verra dans les essais numériques que le fait de changer le produit scalaire dans \mathbb{R}^{N_h} va modifier la vitesse de convergence de l'algorithme du Gradient Conjugué.

Remarque 4.2. - Pour le choix (4.14) du produit scalaire, l'algorithme du Gradient Conjugué décrit par (3.76)-(3.80), (3.84), (3.82), (3.83) s'écrit de la façon suivante :

$$(4.15) \quad \lambda_h^0 = (\lambda_k^0)_{k=1}^{N_h} \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ quelconque}$$

$$(4.16) \quad g_k^0 = z_k^0 = \frac{r_k}{\tau} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \omega^0 \theta_k \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \psi^0 \cdot \vec{\nabla} \theta_k \, dr dz \right\}, \quad k = 1 \dots N_h$$

$$(4.17) \quad (A_h z_h^n)_k = \frac{r_k}{\tau} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \tilde{\omega}^n \theta_k \, dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \tilde{\psi}^n \cdot \vec{\nabla} \theta_k \, dr dz \right\}, \quad k = 1 \dots N_h$$

$$(4.18) \quad \rho_n = \left[\sum_{k=1}^{N_h} ((z_k^n \cdot g_k^n)/r_k) \right] / \left[\sum_{k=1}^{N_h} ((A_h z_h^n)_k \cdot g_k^n)/r_k \right]$$

$$(4.19) \quad \lambda_k^{n+1} = \lambda_k^n - \rho_n z_k^n, \quad k = 1 \dots N_h$$

$$(4.20) \quad g_k^{n+1} = g_k^n - \rho_n (A_h z_h^n)_k, \quad k = 1 \dots N_h$$

$$(4.21) \quad \gamma_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{N_h} [(g_k^{n+1})^2/r_k]}{\sum_{k=1}^{N_h} [(g_k^n)^2/r_k]}$$

$$(4.22) \quad z_k^{n+1} = g_k^{n+1} + \gamma_n z_k^n, \quad k = 1 \dots N_h$$

$n = n+1$, retour à (4.17).

où $\{\omega^0, \psi^0\}$ (resp. $\{\tilde{\omega}^n, \tilde{\psi}^n\}$) est la solution du système (3.42), (3.43) avec $\lambda_h = (\lambda_1^0 \dots \lambda_{N_h}^0)$ (resp. $\lambda_h = (z_1^n \dots z_{N_h}^n)$), et τ est le pas d'échantillonnage sur la frontière -voir figure 4.2.-.

On va aussi étudier le même problème (4.12) quand on fait le changement de variable $\psi = r\varphi$ pour passer à l'opérateur $H(\cdot) = B(r \cdot)$ -voir paragraphe 3.4.- On aura donc le découplage du problème et l'apparition de l'équation variationnelle (3.66) sur la frontière qui donne la trace de $\omega = H(\varphi)$ sur la frontière. On va résoudre cette équation par une méthode DIRECTE (construction de H_A)

4.2.1. - Problème Test

$$(4.23) \quad \text{Domaine : le carré } \Omega =]0,1[\times]0,1[$$

$$(4.24) \quad \text{Fonction de courante : } \psi = 1024 r^4(1-r)^2 z^2(1-z)^2$$

$$(4.25) \quad \text{Vorticité : } \omega = rB(\psi) = -2048\{(4r^2-15r^3+12r^4)z^2(1-z)^2+r^4(1-r)^2(1-6z+6z^2)$$

$$(4.26) \quad \text{Forcing : } f = B(\omega) = 2048\{3(32r-15)z^2(1-z)^2+ \\ 12r^3(1-r)^2+4r(4-15r+12r^2)(1-6z+6z^2)\}$$

$$(4.27) \quad \text{Conditions de bord : } \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial \Omega$$

4.2.2. - Test d'erreur

Comme dans 4.1.2., on va définir

$$(4.28) \quad \text{err}(u) = \frac{\sum_{P_i:\text{noeud}} |u_i - u_{h,i}|}{\sum_{P_i:\text{noeud}} |u_i|}$$

$$(4.29) \quad \text{avec } u_i = u(P_i) \text{ et } u : \text{ solution exacte}$$

$$(4.30) \quad u_{h,i} = u_h(P_i) \quad u_h : \text{ solution approchée } \in V_h$$

4.2.3. - Remarque

On va s'intéresser au calcul de $\text{err}(\lambda)$, $\text{err}(\omega)$ et $\text{err}(\psi)$.

Pour le calcul de $\text{err}(\lambda)$ les noeuds concernés dans la définition (4.28) sont les noeuds sur la frontière Γ_1 .

Pour le calcul de $\text{err}(\omega)$ les noeuds concernés sont tous les noeuds sauf ceux de $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{r = 0\}$; et pour $\text{err}(\psi)$ les noeuds "intérieurs", c'est-à-dire qui ne sont pas sur $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$.

4.2.4. - Test d'arrêt pour la méthode du Gradient Conjugué

Avec la notation (4.30) on va définir les tests d'arrêt suivants :

$$(4.31) \text{ arrêt}_1(\lambda) = \frac{\sum_{P_i: \text{noeud de } h} |\lambda_{h,i}^{n+1} - \lambda_{h,i}^n|}{\sum_{P_i: \text{noeud de } h} |\lambda_{h,i}^{n+1}|}$$

où λ_h^n est la solution approchée de (E_h) à la ni-ième itération.

$$(4.32) \text{ arrêt}_2(\lambda) = \|A_h \lambda_h^n - b_h\|_{\mathbb{R}^{N_h}} = \|g_h^n\|_{\mathbb{R}^{N_h}}$$

-voir 3.2.2. (ii) pour les définitions de A_h , λ_h^n et g_h^n .

4.2.5. - Description des triangulations

Comme dans la partie 4.1 de ce chapitre, on a choisit des triangulations générées par trois familles de lignes parallèles -voir Fig. 4.1- La construction des triangulations est faite de façon automatique par la commande DOMAINE du code DELTA [12], et l'information est gardée dans des tableaux dont la taille peut être choisie à convenance.

Les caractéristiques des triangulations sont rassemblées dans le tableau suivant :

Triangulation	Pas d'échantillonnage à la frontière (τ)	Nbe de Elements	Nbre de noeuds	Nbre de noeuds frontière
\mathcal{T}_{h1}	0.5	8	9	8
\mathcal{T}_{h2}	0.333	18	16	12
\mathcal{T}_{h3}	0.125	128	64	32

Tableau 4.2.1.

4.2.6. - Remarque :

Dans le tableau 4.2.2. on donne les conditions correspondantes à chacun des tableaux 4.2.3. - 4.2.23. (voir Annexe B).

4.2.6. - Interprétation des résultats

(i) Etude de la variation de l'erreur de la vorticité quand on s'approche de la frontière.

Ce qui va être dit est valable pour les deux opérateurs B et H.

Avant tout on va introduire la notion suivante :

$$(4.33) \quad \text{err}(u, \Omega_k) = \frac{\sum_{P_i \in \Omega_k} |u_i - u_{h,i}|}{\sum_{P_i \in \Omega_k} |u_i|}$$

$$\text{avec} \quad u_i = u(P_i), \quad u_{h,i} = u_h(P_i)$$

et u : solution exacte, u_h : solution approchée.

On va choisir les ensembles de points suivants :

$$\Omega_1 = \{(r,z) \in [0,1] \times [0,1] / r = n \times 0.125, n = 1 \dots 7, z = 0.\}$$

$$\Omega_2 = \{(r,z) \in [0,1] \times [0,1] / r = n \times 0.125, n = 1 \dots 7, z = 0.125\}$$

$$\Omega_3 = \{(r,z) \in [0,1] \times [0,1] / r = n \times 0.125, n = 1 \dots 7, z = 0.5\}$$

$$\Omega_4 = \{ \quad " \quad / r = 0.125, z = n \times 0.125 \quad n = 1 \dots 7 \}$$

$$\Omega_5 = \{ \quad " \quad / r = 0.250, z = n \times 0.125 \quad n = 1 \dots 7 \}$$

$$\Omega_6 = \{ \quad " \quad / r = 0.5, \quad z = n \times 0.125 \quad n = 1 \dots 7 \}$$

$$\Omega_7 = \{ \quad " \quad / r = 0.750, z = n \times 0.125 \quad n = 1 \dots 7 \}$$

$$\Omega_8 = \{ \quad " \quad / r = 0.875, z = n \times 0.125 \quad n = 1 \dots 7 \}$$

$$\Omega_9 = \{ \quad " \quad / r = 1, \quad z = n \times 0.125 \quad n = 1 \dots 7 \}$$

Dans le cas de l'opérateur B avec la triangulation \mathcal{T}_{h3} , l'élément lagrange 1 et la méthode directe on obtient les résultats suivants :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$err(\omega, \Omega_k)$	0.071	0.046	0.026	0.300	0.348	0.051	0.05	0.58	0.151

Des résultats semblables vont être obtenus pour les autres conditions : de triangulation, d'éléments finis, de la méthode -directe ou gradient conjugué- utilisée.

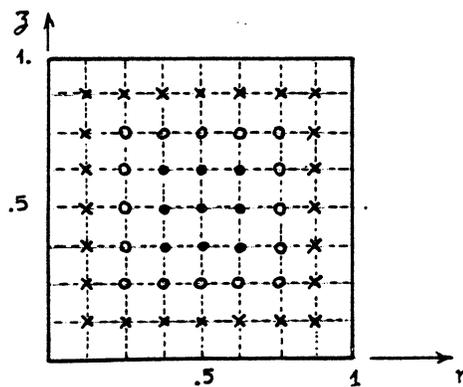
On peut donc dire que :

c-1°) "La vorticité est mal approchée vers la frontière du domaine".
-voir Fig. 4.3 et tableau 4.2.24

c-2°) Le fait que l'on passe de lagrange 1 à lagrange 2 n'arrange pas tellement cette mauvaise approximation de la vorticité à la frontière bien que l'erreur globale sur la vorticité ($err(\omega)$) diminue -voir tableau 4.2.24 (Annexe B) et la figure 4.4.

(ii) Comportement de l'erreur sur la fonction de courant :

On va évaluer l'erreur $err(\psi, \Omega_k)$ d'après la formule (4.33) avec ψ au lieu de ω et avec les ensembles Ω_k décrits par la figure suivante :



- Ω_{10} : l'ensemble des (x)
- Ω_{11} : " des (o)
- Ω_{12} : " des (.)

Pour le cas de l'opérateur B avec la triangulation \mathcal{T}_{h3} l'élément lagrange1 et la méthode directe on obtient les résultats suivants :

k	10	11	12
$err(\psi, \Omega_k)$	0.0889	0.0915	0.0732

Il est aussi intéressant de voir le tableau 4.2.25, 4.2.26 (Annexe B) et les figures 4.6 et 4.7.

On peut donc dire :

- c-3°) La fonction de courant est partout mieux approchée que la vorticité.
- c-4°) La variation de l'erreur par rapport à la distance à la frontière est plus faible que celle de la vorticité.

iii) Sur la convergence de la méthode du Gradient Conjugué

Les conclusions suivantes vont être tirées de l'observation des tableaux 4.2.3 - 4.2.23, 4.2.26, 4.2.27 (Annexe B) et des figures 4.8 - 4.15.

- c-5°) La vitesse de convergence est très liée au produit scalaire utilisé. Pour l'opérateur B on a pu trouver le produit scalaire n° 2 (4.14) qui permet d'augmenter la vitesse de convergence de façon notable. Or, pour l'opérateur H on n'a pas pu en trouver un. Il y a deux idées, auparavant contradictoires, qui vous guident pour choisir le produit scalaire :

a) Que la matrice symétrique définie positive qui définit le produit scalaire soit le plus simple possible, voire diagonal.

b) Refléter la nature de l'espace, des fonctions, définies sur le bord, dans lequel on résoud l'équation variationnelle qui donne la trace de la vorticité -voir éq. 3.55-. Plus précidément :

soit $s_h(...): \mathcal{C}_h \times \mathcal{C}_h \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie positive et symétrique ; on aurai donc l'existence d'une matrice S_h , symétrique définie positive, telle que :

$$s_h(\lambda_h, \mu_h) = (S_h x_h \lambda_h, x_h \mu_h)_h,$$

avec $x_h: \mathcal{C}_h \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$: définie par (3.65) et $(...)_h$ produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^{N_h} .

Il serait raisonnable de prendre comme $s_h(...)$ la discrétisation d'une forme $s(...)$ sur T_Y qui soit T_Y -elliptique. T_Y étant l'espace de trace pour la vorticité. Or, comme on l'a déjà dit dans l'introduction 2.2.0 au chapitre II, on ne connait pas cet espace. Donc, dans notre cas, on ne peut que se rapporter directement à l'espace \mathcal{C}_h et essayer de trouver des formes qui soient symétriques définies positives sur cet espace.

Dans le cas du produit scalaire dit n° 2 (4.14), on a pris comme forme bilinéaire sur \mathcal{M}_h l'application :

$$\mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_h \quad (\mu_h, \lambda_h) \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \mu_h \lambda_h d\Gamma$$

puis, pour avoir une matrice diagonale, on a approché l'intégrale sur Γ par :

$$\sum_{i=1}^{N_h} \frac{1}{r_i} \mu_i \lambda_i \frac{(|P_{i-1}P_i| + |P_iP_{i+1}|)}{2}$$

où μ_i (resp. λ_i) est la valeur de μ_h (resp. λ_h) sur le noeud P_i et $|P_{i-1}P_i|$ est la distance euclidienne de P_{i-1} à P_i (de même pour $|P_iP_{i+1}|$) -voir Figure 4.2.-.

c-6°) Sur le test d'arrêt

On peut constater -voir tableau 4.2.28- que l'erreur de la vorticité sur la frontière ($err(\lambda)$), se stabilise assez rapidement tandis que la valeur de l'arrêt₁(λ) met beaucoup plus de temps à la faire.

Par contre, le test d'arrêt arrêt₂(λ) semble mieux suivre l'évolution de $err(\lambda)$ comme on peut le constater dans la figure 4.13.

Tableau 4.2.28

Cas : opérateur B, triang. \mathcal{E}_{h3} , élément lagrange2 et ordre d'int. 04				
Nbre d'itérations	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	$err(\lambda)$	$err(\lambda)$
12	0.71×10^{-3}	0.14×10^{-3}	0.639×10^{-1}	0.51×10^{-2}
30	0.51×10^{-6}	0.17×10^{-11}	0.64×10^{-1}	0.47×10^{-2}

Dans notre exemple test cela n'est pas grave car on connaît la solution exacte et l'on peut voir l'évolution de l'erreur ($err(\lambda)$) ; or dans le cas usuel, où on ne connaît pas la solution exacte, il est décisif d'avoir un bon test d'arrêt pour éviter les dépenses inutiles.

D'autre part il est facile de construire un exemple qui explique ce comportement du test d'arrêt (arrêt₁(λ)) : plaçons nous dans \mathbb{R}^2 et supposons que l'on approche le point $\lambda = (10.0)$ par une suite de points $\lambda_n = (x_n, 0)$ tels que

$$111 \leq x_{n+1} < x_n \leq 112$$

alors

$$\frac{2}{10} \geq \text{err}(\lambda) \geq \frac{1}{10}$$

avec

$$\text{err}(\lambda) = \frac{|x^n - 10|^2}{10^2}$$

D'autre part on peut se débrouiller pour que $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ tende vers zéro très lentement, donc que

$$\text{arrêt}_1(\lambda) = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{10^2}$$

tende vers zéro très lentement.

Par contre, le comportement du test d'arrêt $\text{arrêt}_2(\lambda)$ est étroitement lié à la nature du problème à résoudre du fait que

$$\text{arrêt}_2(\lambda) = \|A_h x_h \lambda^n - b_h\|_h.$$

En regardant le tableau 4.2.26 (Annexe B) on peut se rendre compte que le nombre de problèmes de Dirichlet à résoudre pour l'opérateur B dans la méthode du Gradient Conjugué est plus petit que celui dont on a besoin dans la méthode dite directe.

Donc, si l'on n'a qu'un seul problème (\tilde{P}_h) à résoudre on a intérêt à utiliser la méthode du gradient conjugué. Par contre, si on a une suite de problèmes du type (\tilde{P}_h) à résoudre, comme il serait le cas du problème de Navier Stokes axisymétrique, il est préférable d'utiliser la méthode directe car la matrice A_h ne serait calculée et triangularisée qu'une fois puis gardée en mémoire.

Méthode Directe pour l'opérateur B

VORTICITE

Cas : Z_{h3} , lag 2, ordre d'int 04

Solution exacte : trait continu

Solution approchée : $\begin{cases} \times & \text{si } \beta = 0 \\ \diamond & \text{si } \beta = 0.25 \\ \circ & \text{si } \beta = 0.50 \end{cases}$

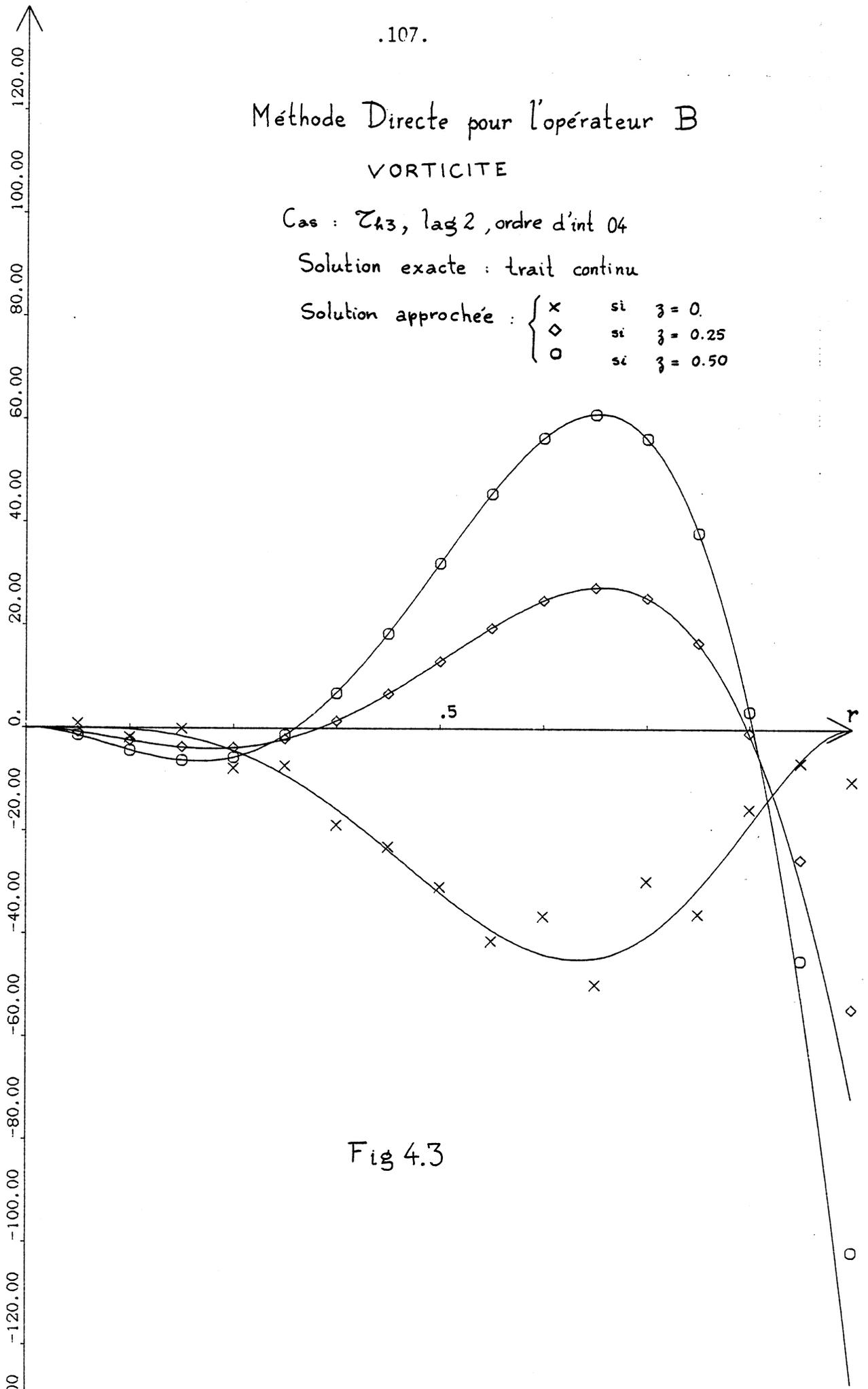


Fig 4.3

Méth. du Grad. Conj. pour l'opérateur B VORTICITE

Solution exacte : trait continu

Solution approchée :

$\zeta=0.$	x lag1	$\zeta=.5$	o lag1
	o lag2		+ lag2

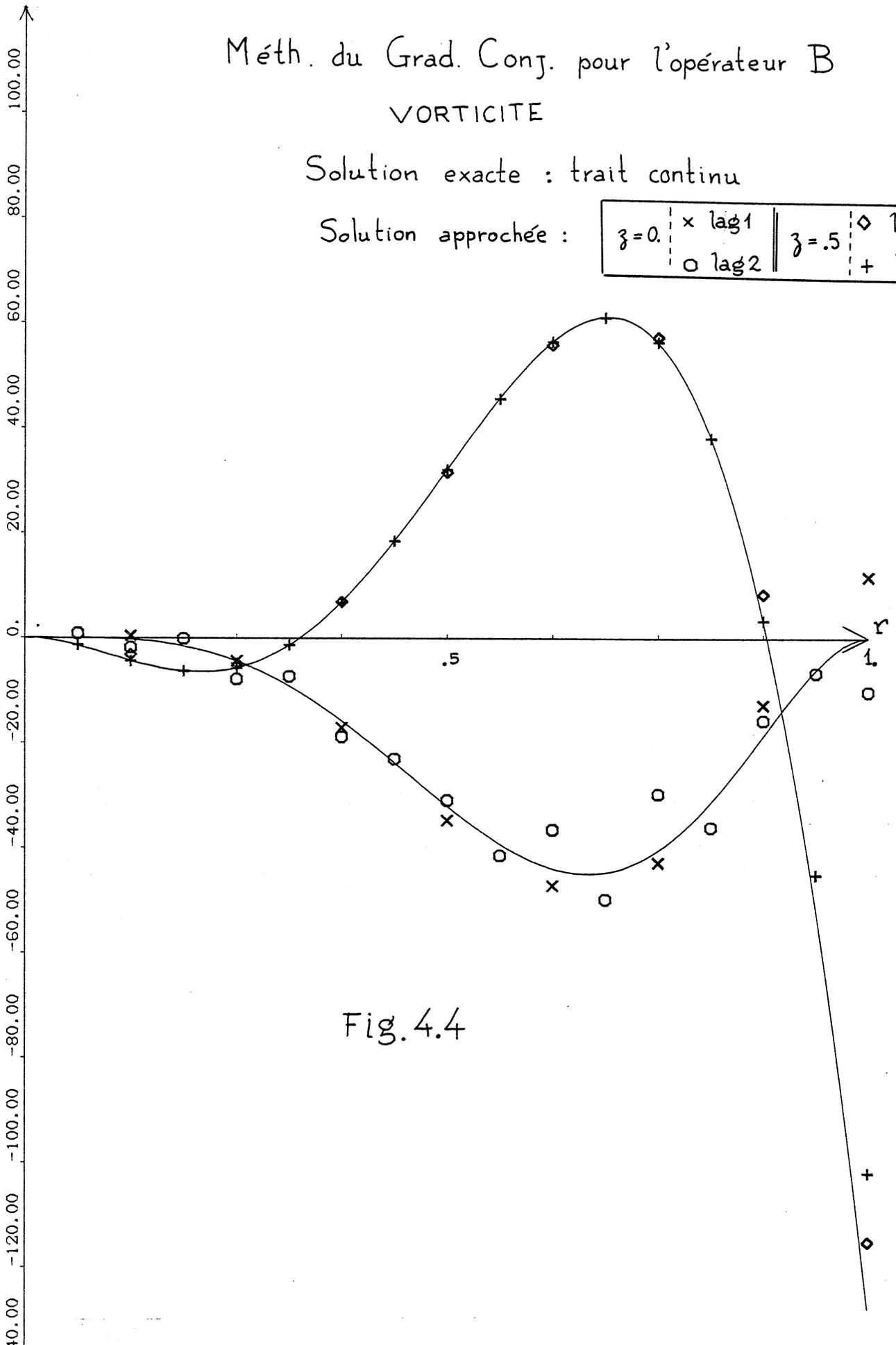


Fig. 4.4

Méthode Directe pour l'opérateur H

VORTICITE

Cas : \mathcal{Z}_{13} , lag 2, ordre d'int. 04

Solution exacte : trait continu

Solution approchée : $\begin{cases} \times & \text{si } \beta = 0. \\ \diamond & \text{si } \beta = 0.25 \\ \circ & \text{si } \beta = 0.50 \end{cases}$

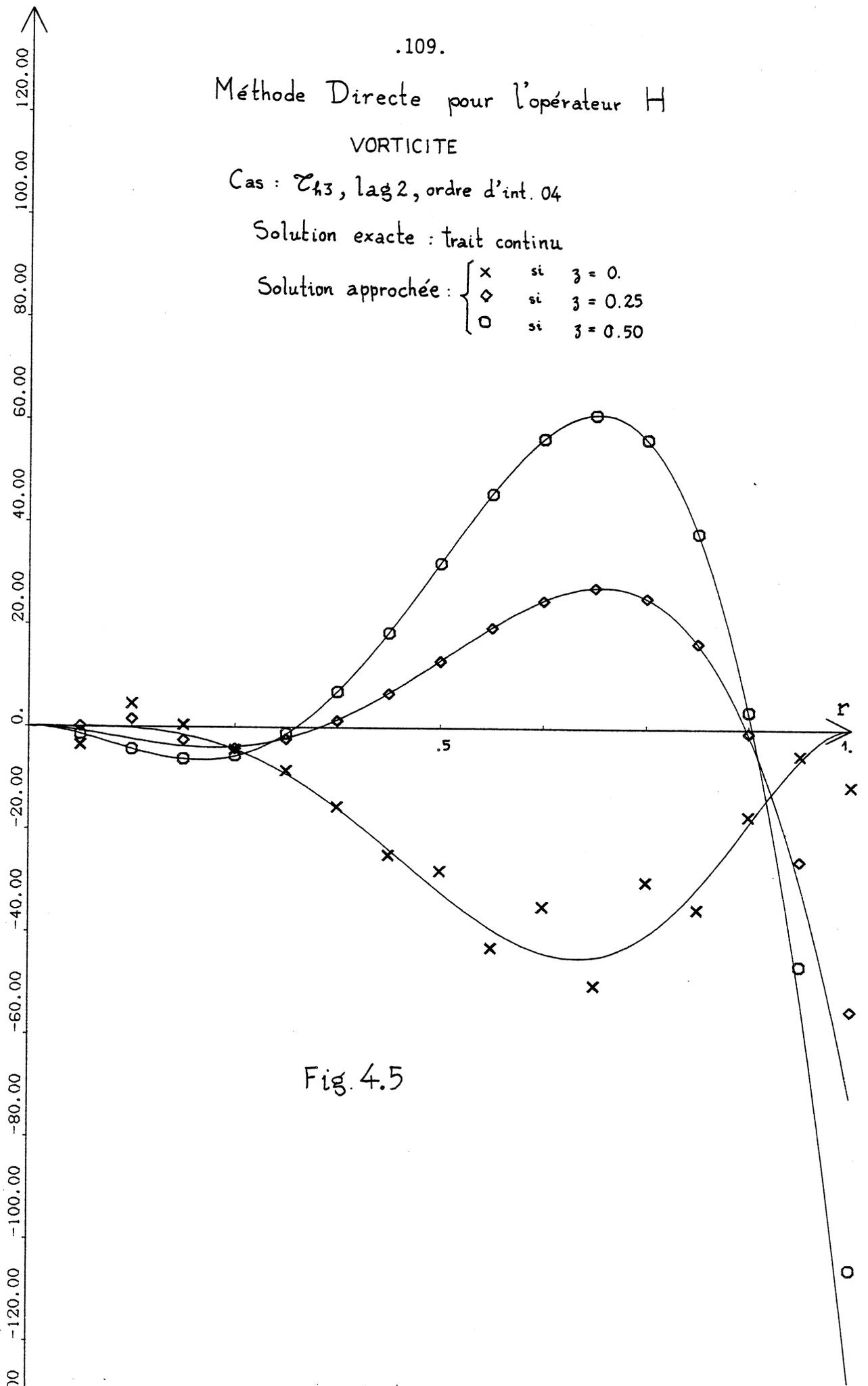


Fig. 4.5

Fig.4.6

Méthode Directe pour l'opérateur H

FONCTION DE COURANT

Solution exacte : trait continu

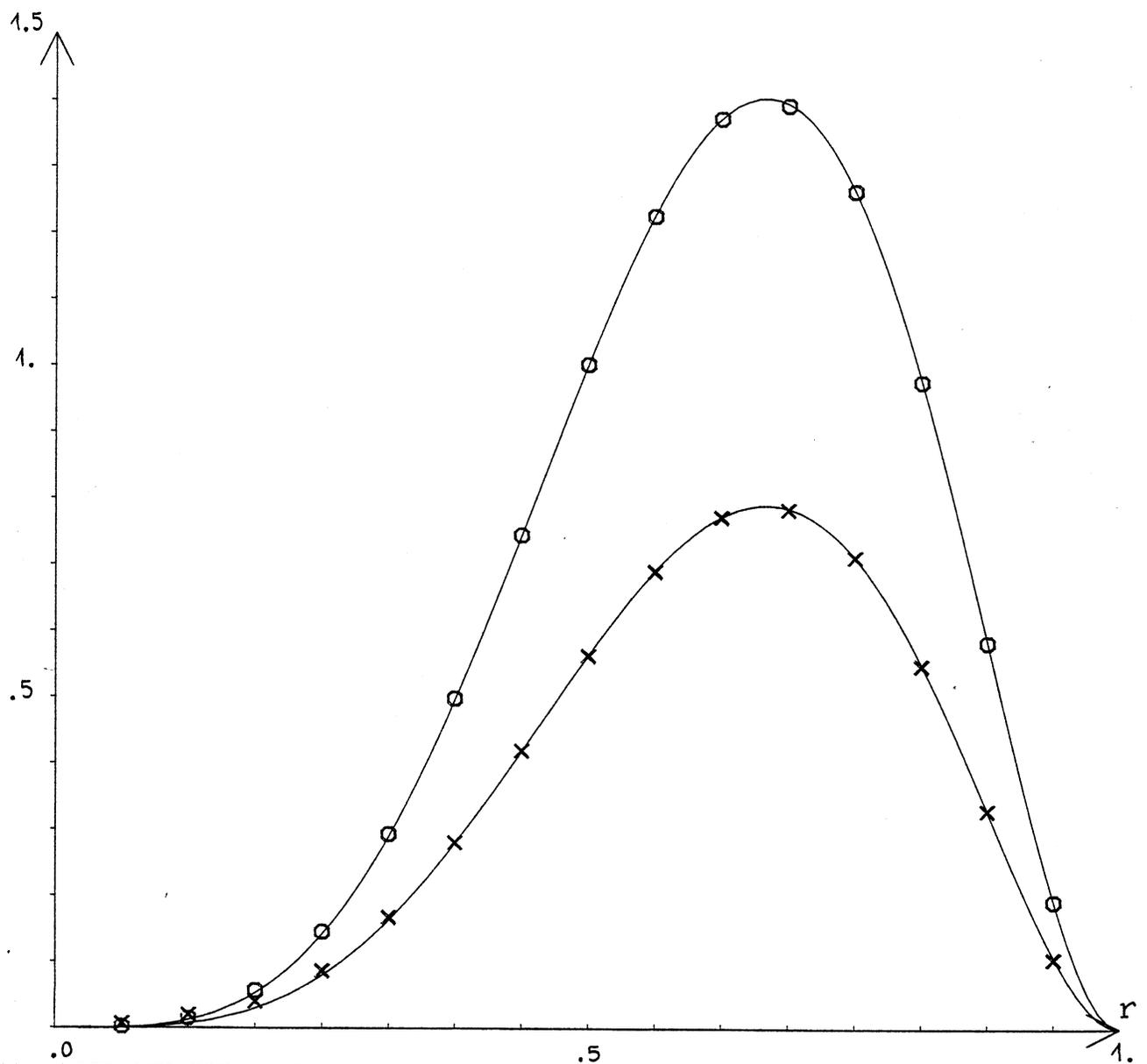
 Solution approchée : $\begin{cases} \circ & \text{si } \zeta = 0.5 \\ \times & \text{si } \zeta = 0.25 \end{cases}$


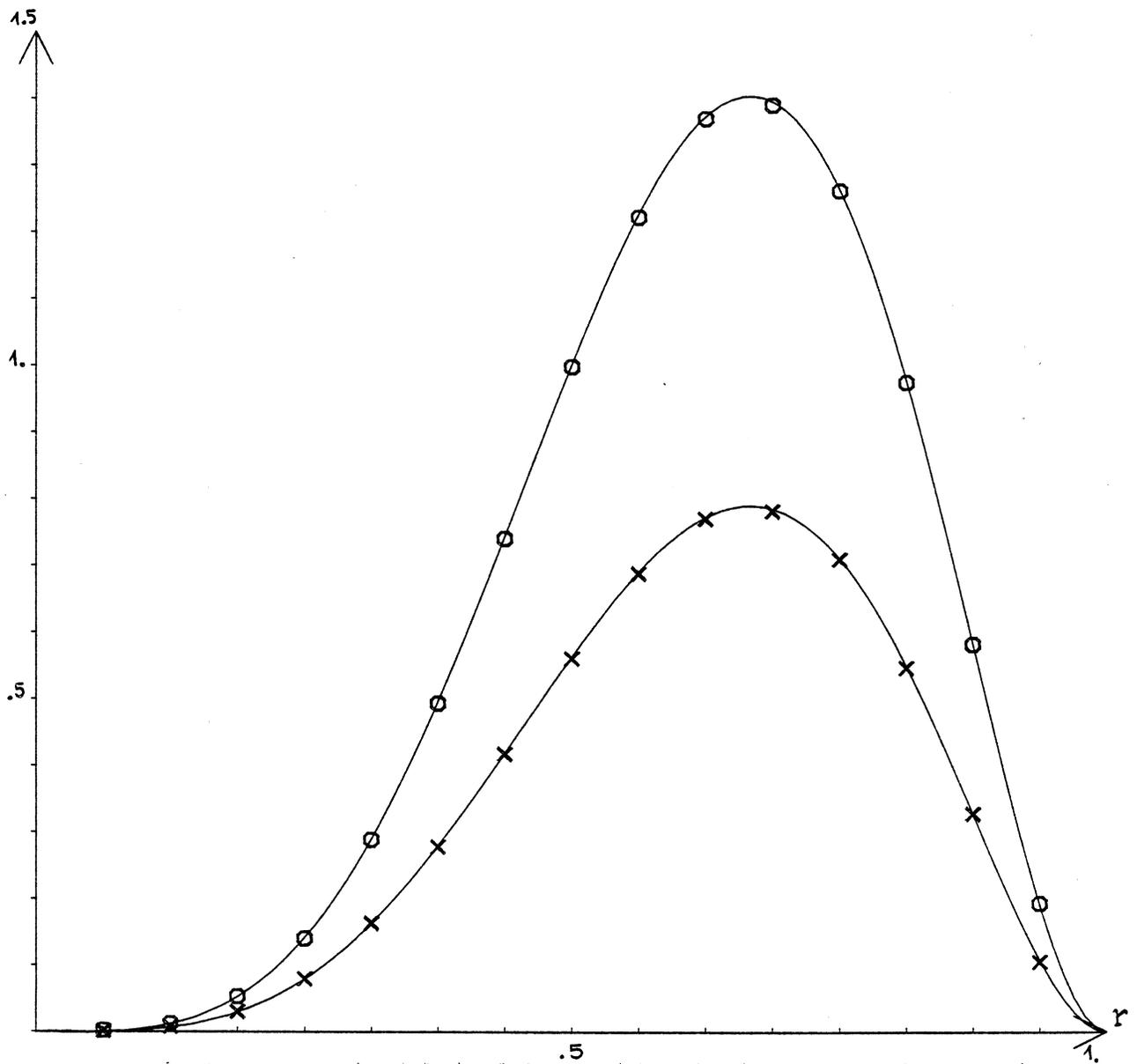
Fig. 4.7

Méthode Directe pour l'opérateur B
FONCTION DE COURANT

Solution exacte : trait continu

Solution approchée : $\begin{cases} \square & \text{si } \zeta = 0.5 \\ \times & \text{si } \zeta = 0.25 \end{cases}$

Cas : ζ_{k3} , $\log 2$, ordre d'int. 04



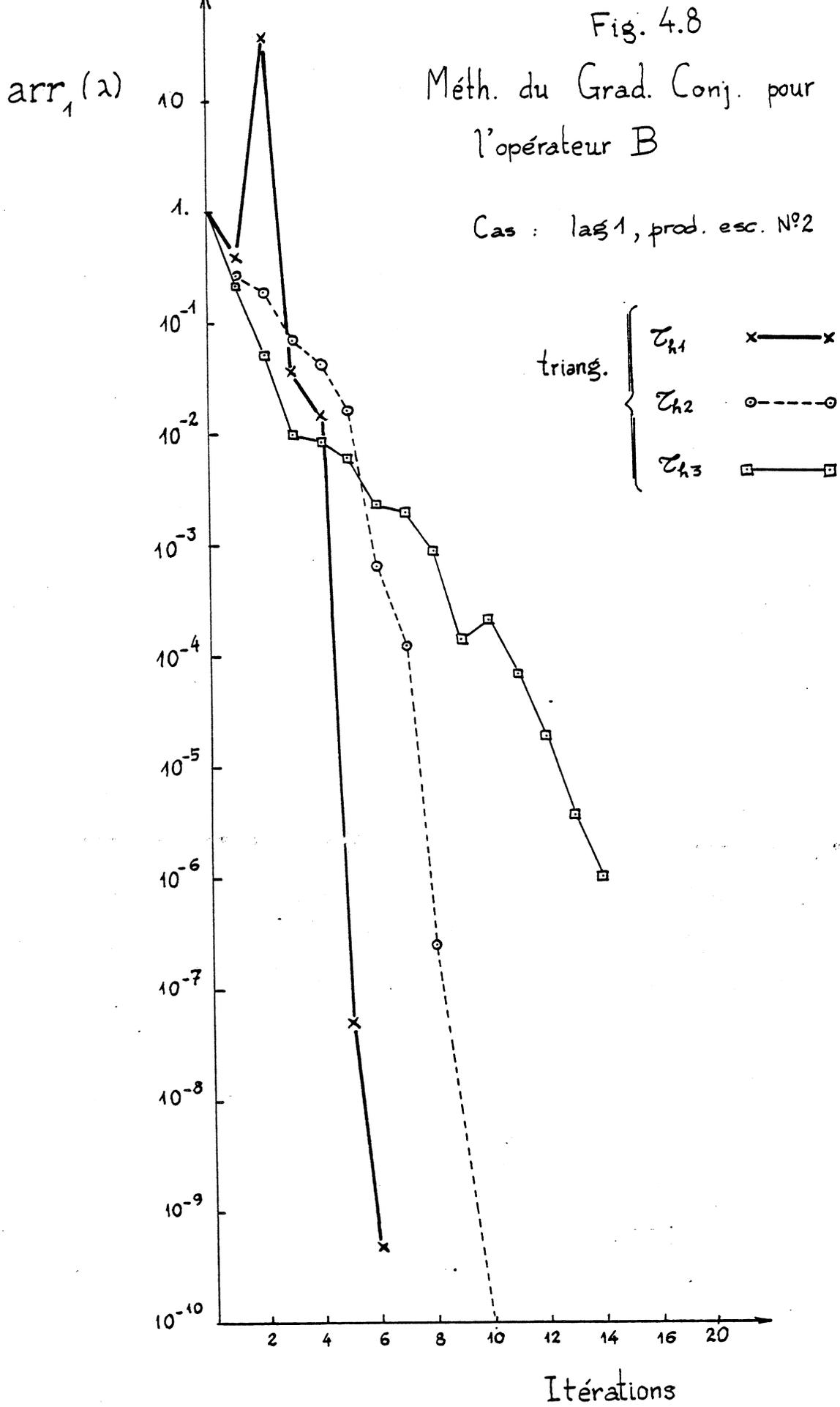


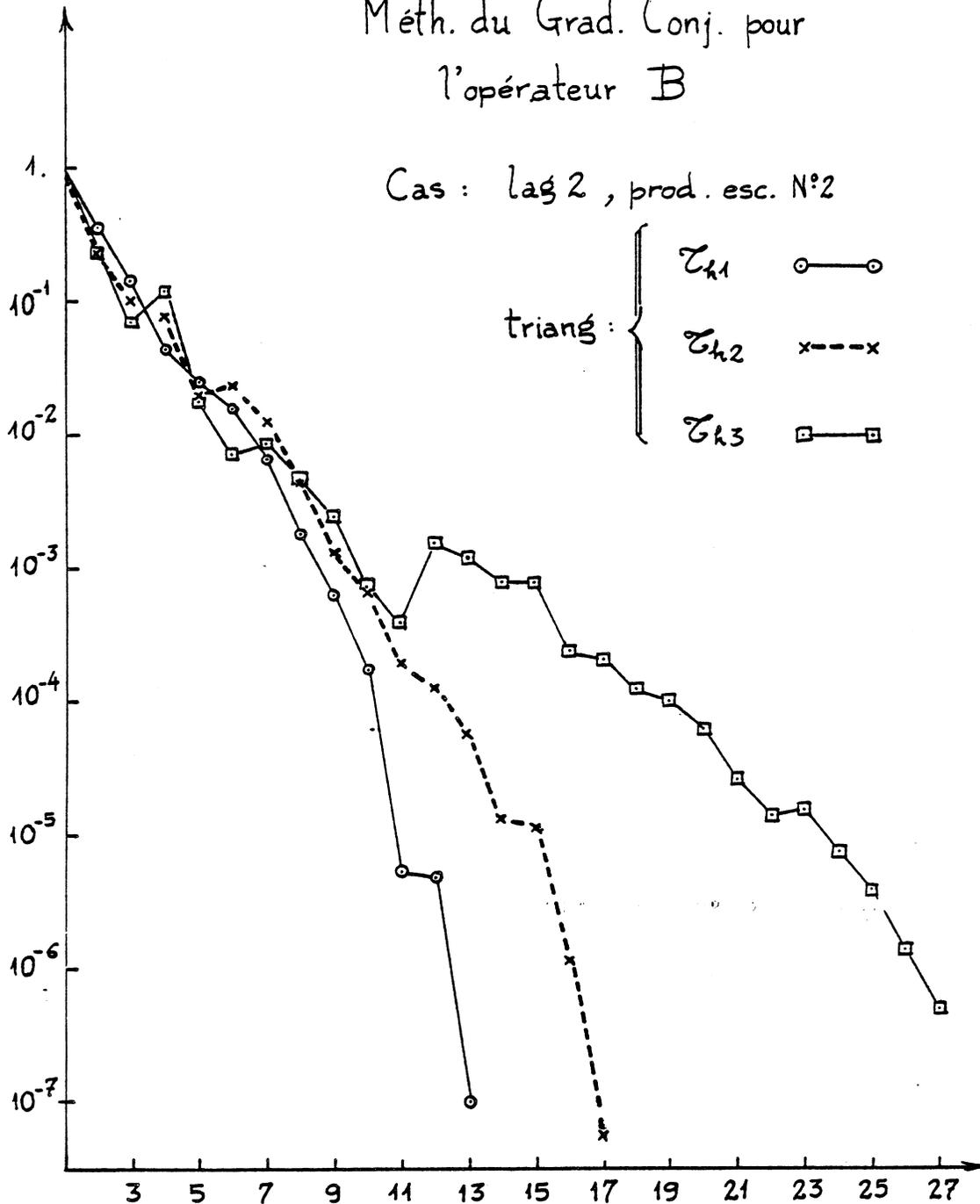
Fig. 4.9

$arr_1(\lambda)$

Méth. du Grad. Conj. pour
l'opérateur B

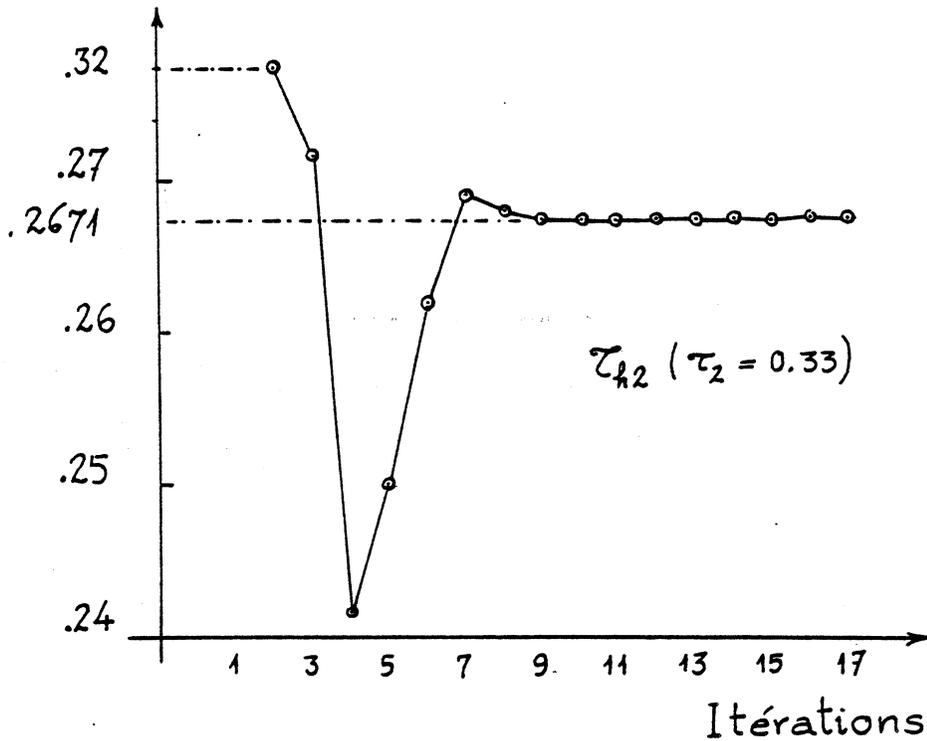
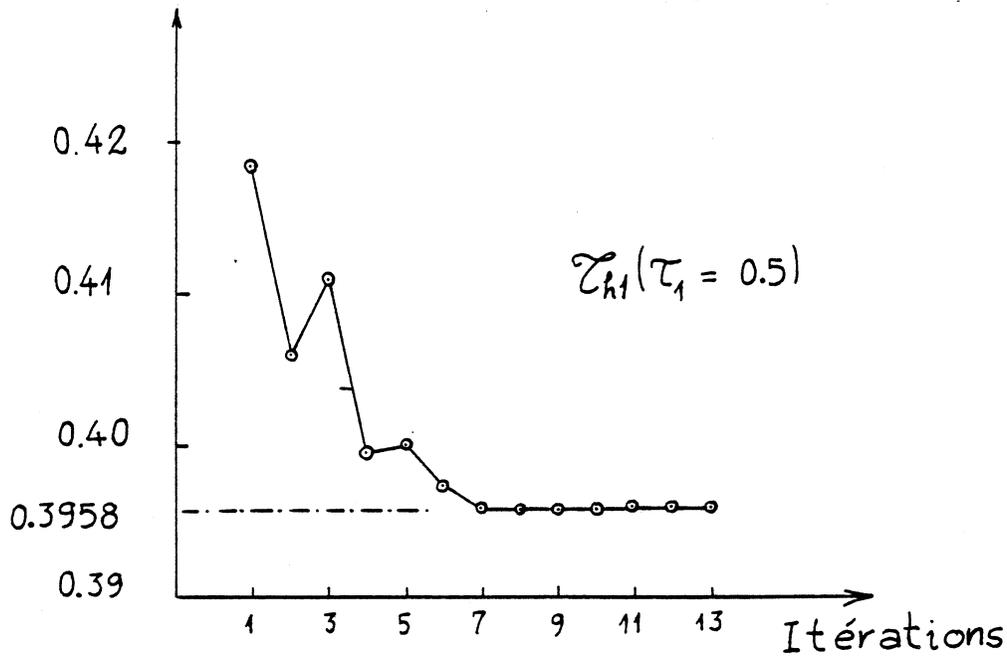
Cas : lag 2 , prod. esc. N°2

triang : $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{h1} \quad \circ - \circ \\ \mathcal{L}_{h2} \quad x - x \\ \mathcal{L}_{h3} \quad \square - \square \end{array} \right.$



Itérations

Fig. 4.10

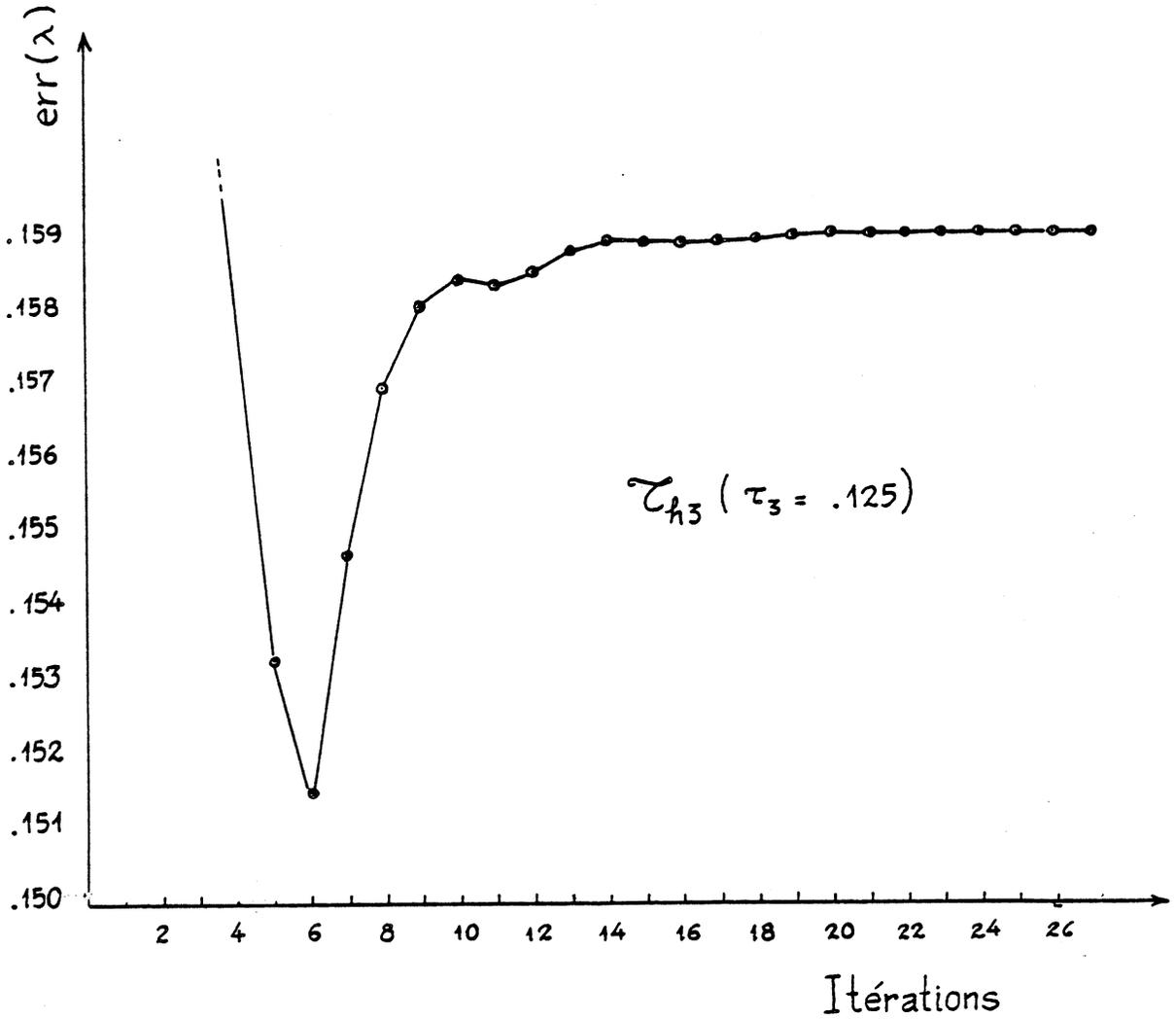


Méth. du Grad. Conj. pour l'opérateur B .

Cas : lag 2 , ordre d'int. 04 , prod. scalaire N°2

Comportement de $err(\lambda)$ pour différentes triangulations

Fig. 4.10 bis



Méth. du Grad. Conj. pour l'opérateur B

Cas : lag 2, ordre d'int. 04, prod. scalaire N°2

Comportement de $err(\lambda)$ pour différentes triangulations (suite)

Fig. 4.11

Méth. du Grad. Conj. pour l'opérateur B

Comportement de $\text{arrêt}_1(\lambda)$, $\text{arrêt}_2(\lambda)$

Cas 1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{lag}_1, \text{prod. esc. N}^\circ 1 \\ \text{triang: } \mathcal{Z}_{h3} \end{array} \right.$

et $\text{arrêt}_2(\lambda)$ dans le

Cas 2 : $\text{lag}_1, \mathcal{Z}_{h3}, \text{prod. esc. N}^\circ 2$

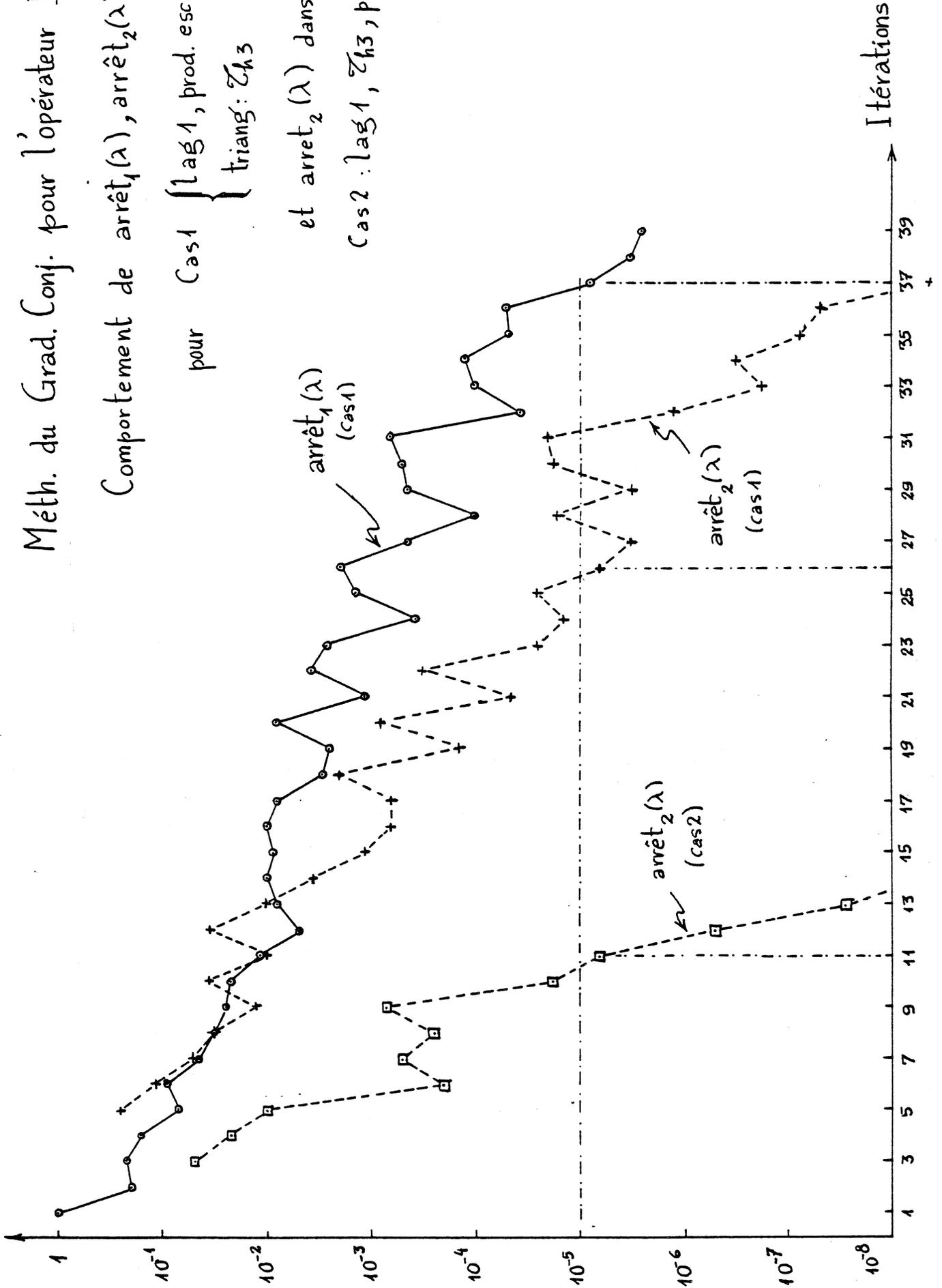


Fig. 4.12

Méth. du Grad. Conj. pour
l'opérateur B

Cas1 $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{k3}, \text{lag}2, \text{ordre d'int.} 04 \\ \text{prod. esc. n}^\circ 1 \end{array} \right.$

Cas2 $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{k3}, \text{lag}2, \text{ordre d'int.} 04 \\ \text{prod. esc. n}^\circ 2 \end{array} \right.$

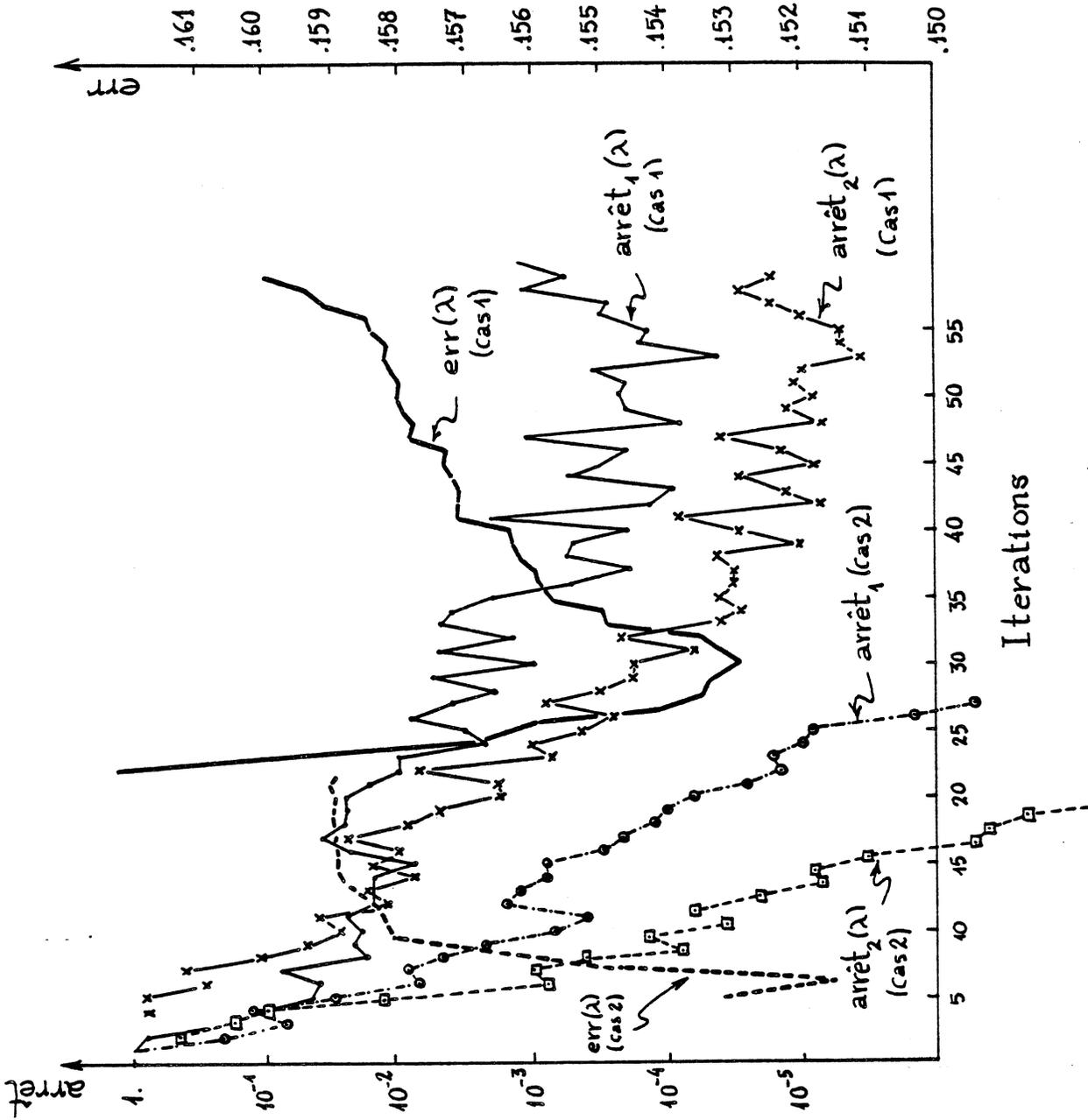


Fig. 4.13

arret

Méth. du Grad. Conj. pour l'op. B

Comportement de
 $err(\lambda)$, $arr_1(\lambda)$ et $arr_2(\lambda)$

Cas : Lag 2 , Prod. Esc. N°2

trig τ_{k3} ($\tau_3 = 0.125$)

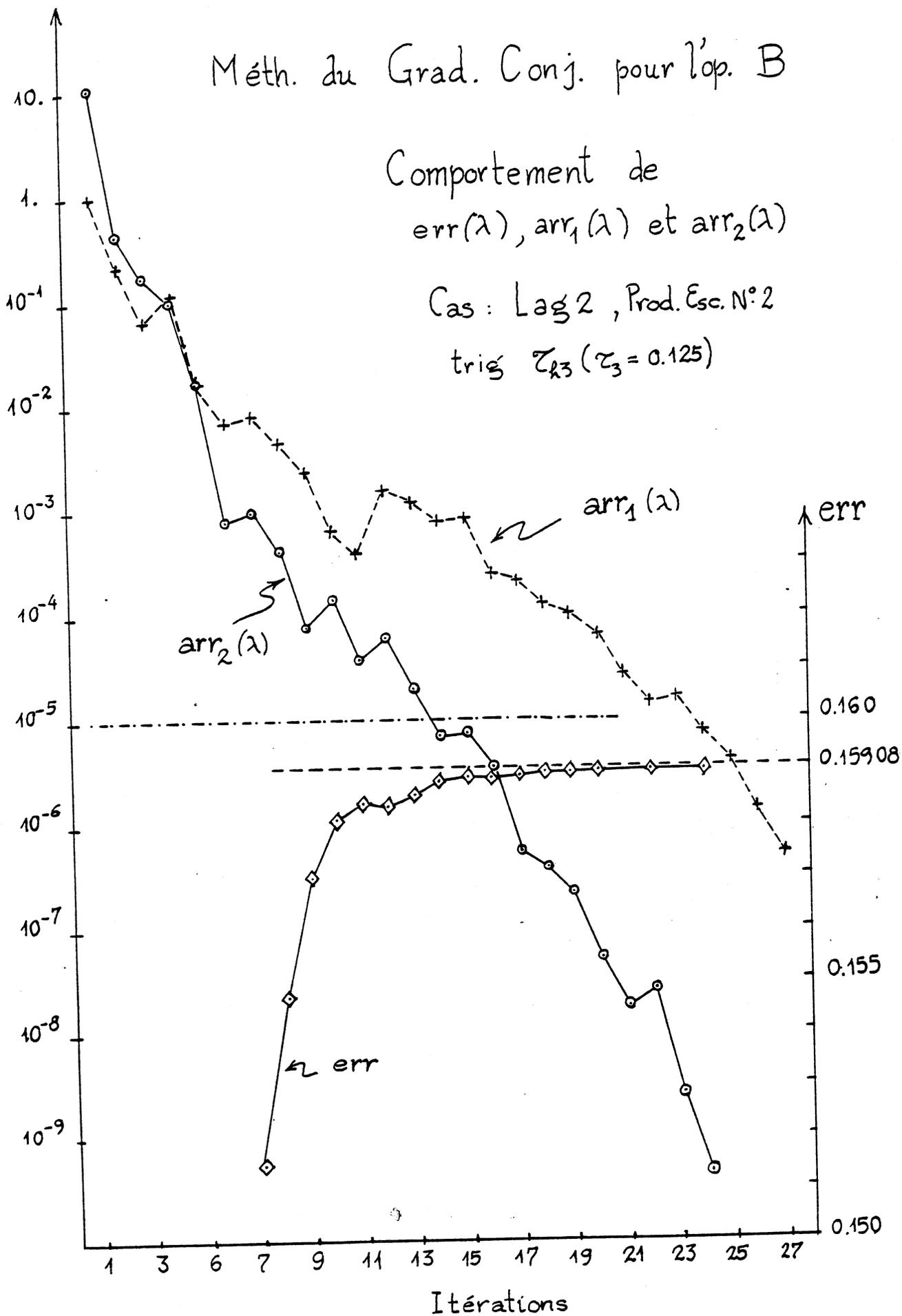


Fig. 4.14

Méth. du Grad. Conj. pour l'opér. H

Cas 1: $\{Z_{k3}, \text{lag}_1, \text{ordre d'int. 02 (inte)}$
prod. esc. N°1

Cas 2: $\{Z_{k3}, \text{lag}_1, \text{ordre d'int. 02 (inte)}$
prod. esc. N°2

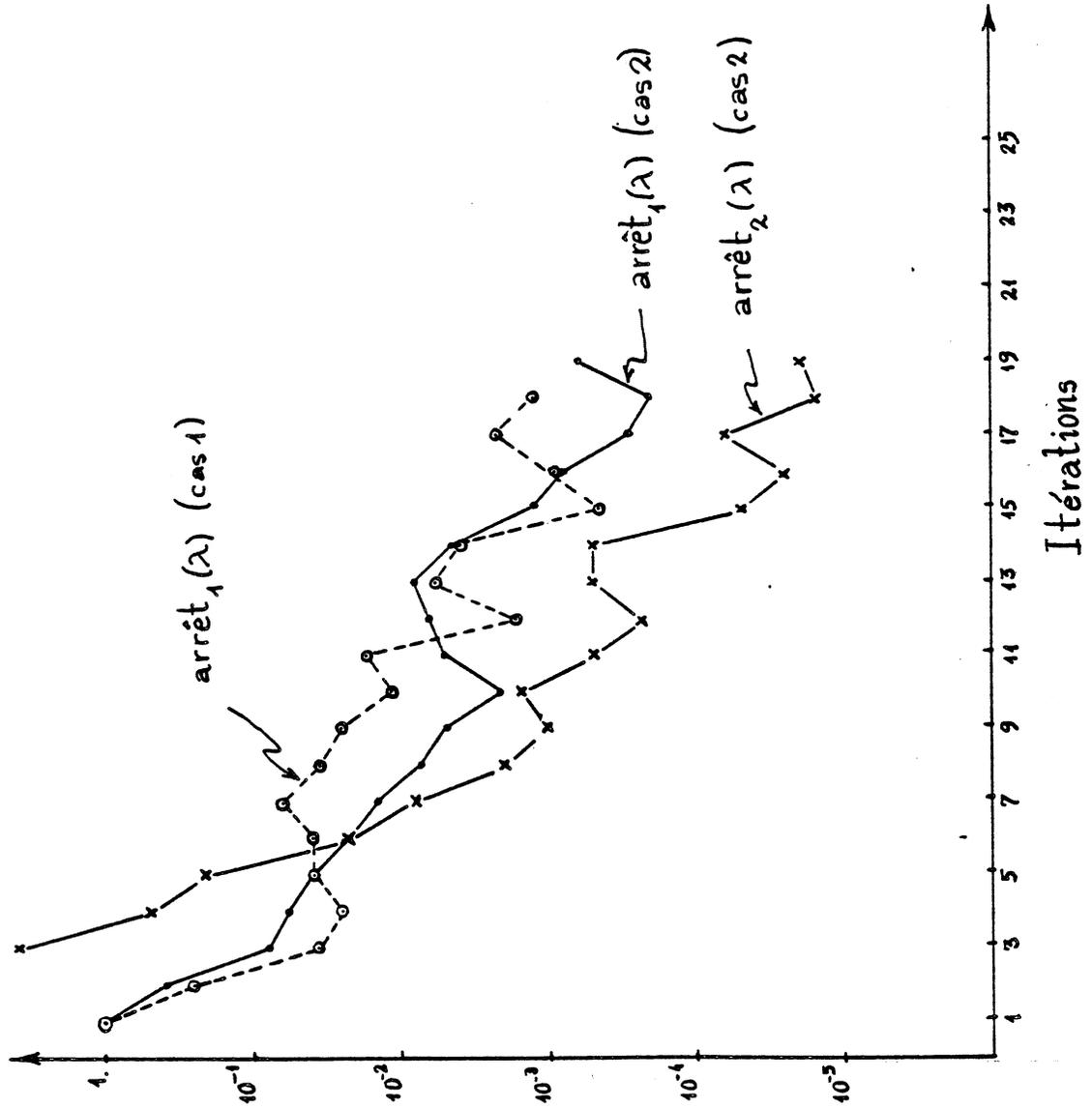
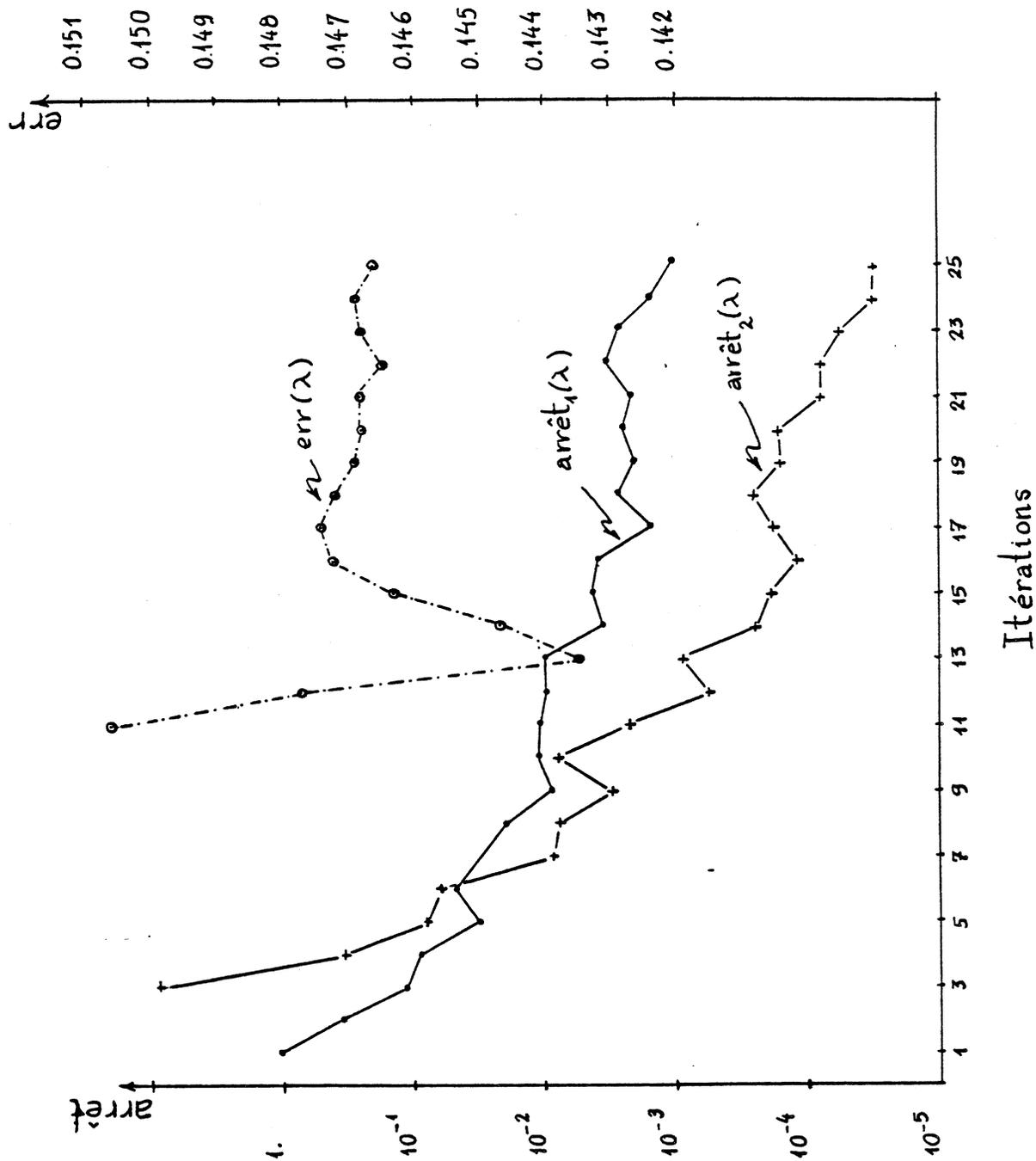


Fig. 4.15 :

Méthode du
Grad. Conjugue pour
l'opérateur H

Cas : Z_{k3} , lag², ordre d'int. 04
prod. esc. N°2



4.3. - ESSAIS NUMERIQUES POUR LE PROBLEME DE NAVIER-STOKES AXISYMETRIQUE

4.3.0. - Comme dans les cas précédents, on va tester l'algorithme 3.9.2. sur un problème test dont on connaît la solution exacte. Puis on va suivre l'évolution de la solution approchée avec la croissance du nombre de Reynolds.

4.3.1. - Problème test

Comme dans le problème test 4.2.1. on a

(4.34) Domaine : le carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$

(4.35) Triangulation : la triangulation \mathcal{T}_{h3} -voir tableau 4.2.1.-

(4.36) Fonction de Courant : comme dans (4.24)

(4.37) Vorticité : comme dans (4.25)

Forcing :

$$(4.38) F = \frac{1}{\mathbb{R}_e} \{f + J(\omega, \psi)\}$$

avec f donné par (4.26) et

$$(4.39) J(\omega, \psi) = m_r + m_z, \text{ où}$$

$$(4.40) m_r = - \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{B(\psi)}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) =$$

$$= 1024 \times 2048 \{ (z^2 - 2z^3 + z^4) (2z - 6z^2 + 4z^3) [(-15 + 24r)(r^4 - 2r^5 + r^6) + (4 - 15r + 12r^3)(4r^3 - 10r^4 + 6r^5)] + (1 - 6z + 6z^2) (2z - 6z^2 + 4z^3) [(2r + 6r^2 + 4r^3)(r^4 + 2r^5 + r^6) + (r^2 - 2r^3 + r^4)(4r^3 - 10r^4 + 6r^5)] \}$$

$$(4.41) m_z = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) =$$

$$= 1024 \times 2048 \{ (4 - 15r + 12r^2)(4r^3 - 10r^4 + 6r^5) [(2z - 6z^2 + 4z^3)(z^2 - 2z^3 + z^4) + (z^2 - 2z^3 + z^4)(2z - 6z^2 + 4z^3)] + (r^2 - 2r^3 + r^4)(4r^3 - 10r^4 + 6r^5) [(2z - 6z^2 + 4z^3)(1 - 6z + 6z^2) + (z^2 - 2z^3 + z^4)(-6 + 12z)] \}.$$

4.3.2. - Remarques

(i) En faisant varier le nombre de Reynolds R_e dans l'expression (4.38) on obtient une famille de problèmes test dont la solution exacte est toujours la même -voir (4.24)-.

(ii) On va utiliser le même test d'erreur défini par (4.28) pour calculer $err(\lambda)$, $err(\omega)$ et $err(\psi)$ (il suffit de prendre comme u (resp. u_h) dans (4.28) la fonction λ , ω ou ψ (resp. λ_h , ω_h ou ψ_h)).

(iii) Comme test d'arrêt on va utiliser celui donné par l'expression (4.31)

4.3.3. - Etude du coefficient de relaxation ρ optimal

Dans l'algorithme 3.9.2. il y a un coefficient ρ (≥ 0), qui, en principe peut être choisi de façon arbitraire.

On va étudier l'évolution du test d'arrêt et des tests d'erreurs ($err(\lambda)$, $err(\omega)$, $err(\psi)$) dans les conditions fixées suivantes :

$$(4.42) \left\{ \begin{array}{l} \text{élément} = \text{lagrange } 1 \\ \text{ordre d'intégration numérique} : 02 \\ \text{triangulation} : \mathcal{T}_{h1} (\tau = 0.5) \\ \text{nombre de Reynolds} : R_e = 1. \end{array} \right.$$

Il aurait fallu essayer avec des autres conditions de triangulation, élément, R_e , etc... or, vu le coût excessif du calcul, on s'est borné à ce seul cas. Donc, les conclusions qui peuvent être tirées sont d'une valeur assez restreinte.

Donc, d'après les résultats affichés, dans le tableau 4.3.1*, il semble que la valeur optimale de ρ soit 1.00.

4.3.4. - Comportement de la solution approchée

On va fixer les conditions d'expérience suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{triangulation} : \mathcal{T}_{h3} \\ \text{élément} : \text{lagrange } 1 \\ \text{ordre d'intégration numérique} : 02 \\ \text{coefficient de relaxation} : \rho = 1. \end{array} \right.$$

Les résultats obtenus sont affichés dans les tableaux 4.3.1. - 4.3.9. *
On peut dire que, en général :

- 1°) La fonction de courant est mieux approchée que la vorticité.
- 2°) Les résultats de $\omega = rB(\psi)$ sur la frontière ne sont pas très précis.
- 3°) Que l'approximation de la vorticité et fonction de courant est de moins en moins bonne au fur et à mesure que l'on monte en nombre de Reynolds.
- 4°) Pour le nombre de Reynolds $R_e = 1$ on a que la solution approchée est assez différente de la solution exacte -voir Fig. 4.20- On se pose la question de savoir : si la solution approchée obtenue correspond à l'approximation d'une autre solution du problème de Navier-Stokes pour $R_e = 1$. ou simplement, une solution fictive due à la méthode même de résolution ?

En tout cas, on peut dire sûrement que la méthode itérative 3.9.2. ne peut pas être utilisé pour des nombres de Reynolds "grands" et, plus précieusement, qu'il ne peut être utilisé que pour des nombres de Reynolds petits (≤ 1 . par exemple).

4.3.5. - Sur la convergence

D'après les résultats obtenus -voir Figure 4.20 par ex.- on a que la convergence se fait de plus en plus lente au fur et à mesure que l'on monte en nombre de Reynolds et qu'à partir d'une certaine valeur on n'a plus de convergence.

Il aurait fallu vérifier si la non convergence était due ou pas au mauvais choix du coefficient de relaxation ρ (que l'on avait fixé égal à 1.).

* Voir Annexe C

Problème de Navier-Stokes

VORTICITE

Cas : τ_{h3} , lag1, ordre d'int. 02

$\zeta = 0.5$ { Solution exacte : trait continu
Solution approchée : { +---+ si $Re = 10^{-2}$
 { □---□ si $Re = 1.$

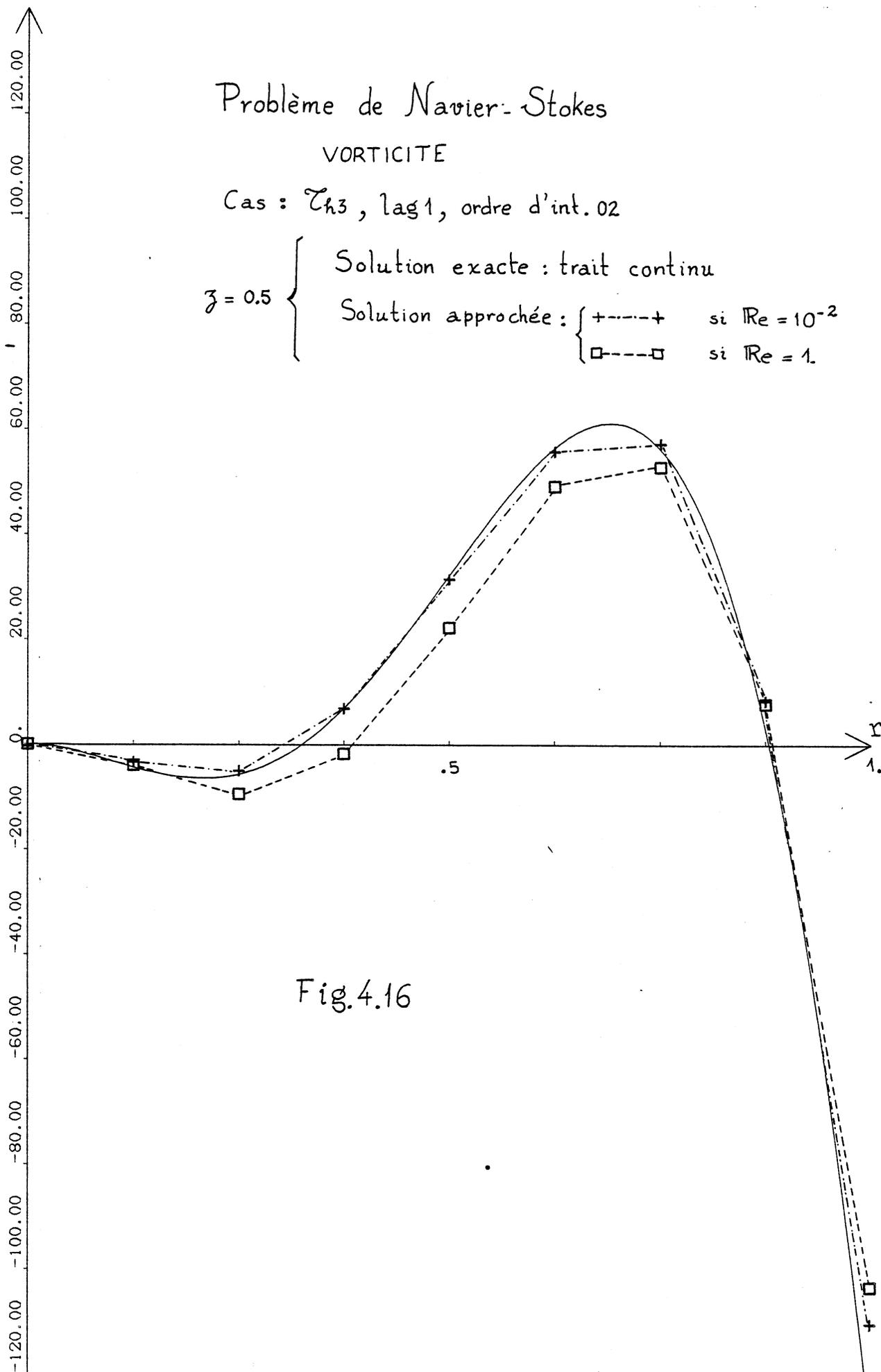


Fig.4.16

Problème de Navier-Stokes

VORTICITE

(Cas : triang. Z_{13} , élém. lag_1 , ordre d'int. 02, $p=1$)

$\zeta = 0.0$ { Solution exacte : trait continu
" approx. : { ---o--- si $Re = 10^{-2}$
 { ---x--- si $Re = 1$.

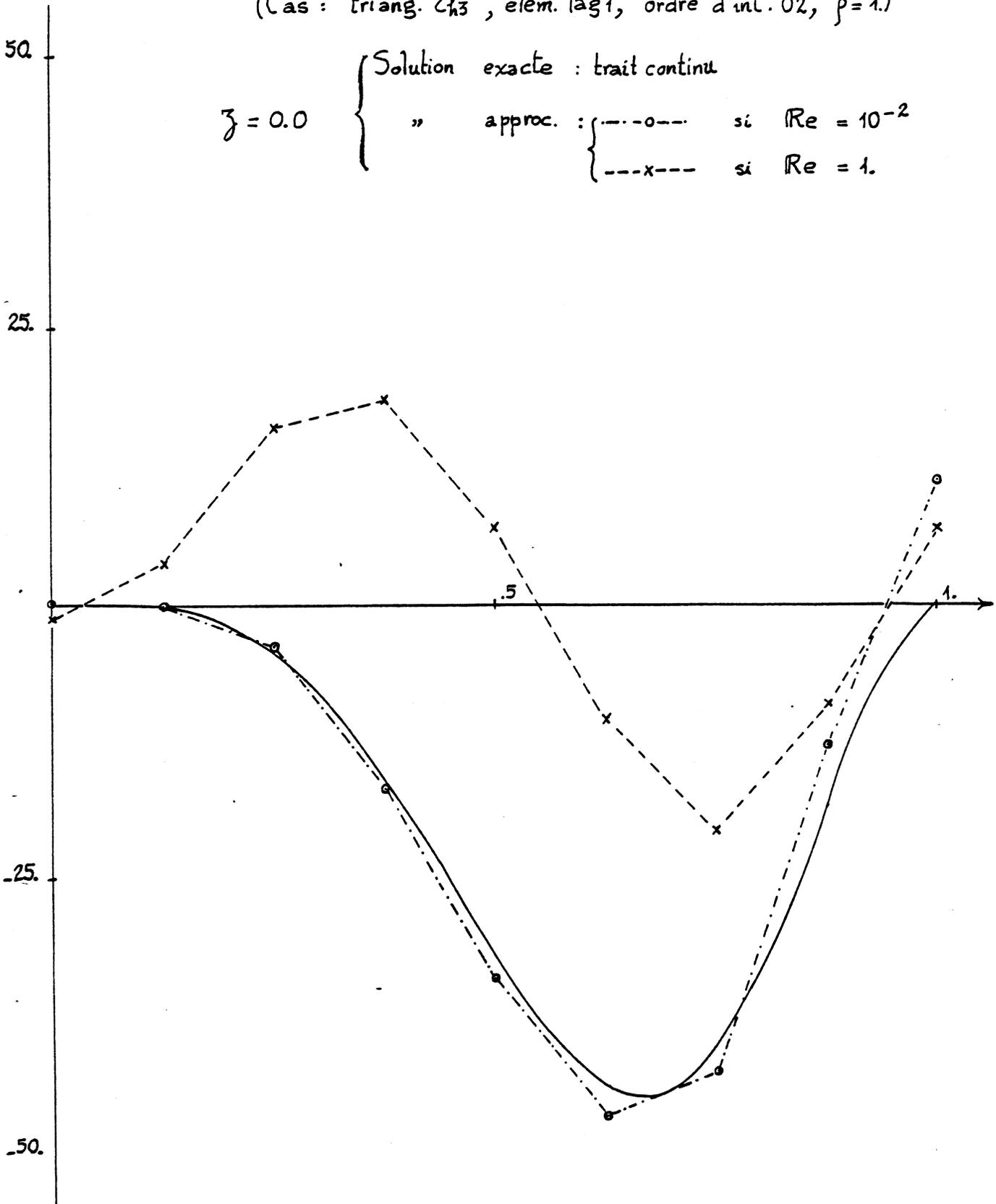


Fig 4.17

Fig. 4.18

Problème de Navier-Stokes

FONCTION DE COURANT

Cas : τ_{43} , lag 1, ordre d'int. 02

$\zeta = 0.5$ { Solution exacte : trait continu
Solution approchée : { x---x Si $Re = 10^{-2}$
 o---o Si $Re = 1.$

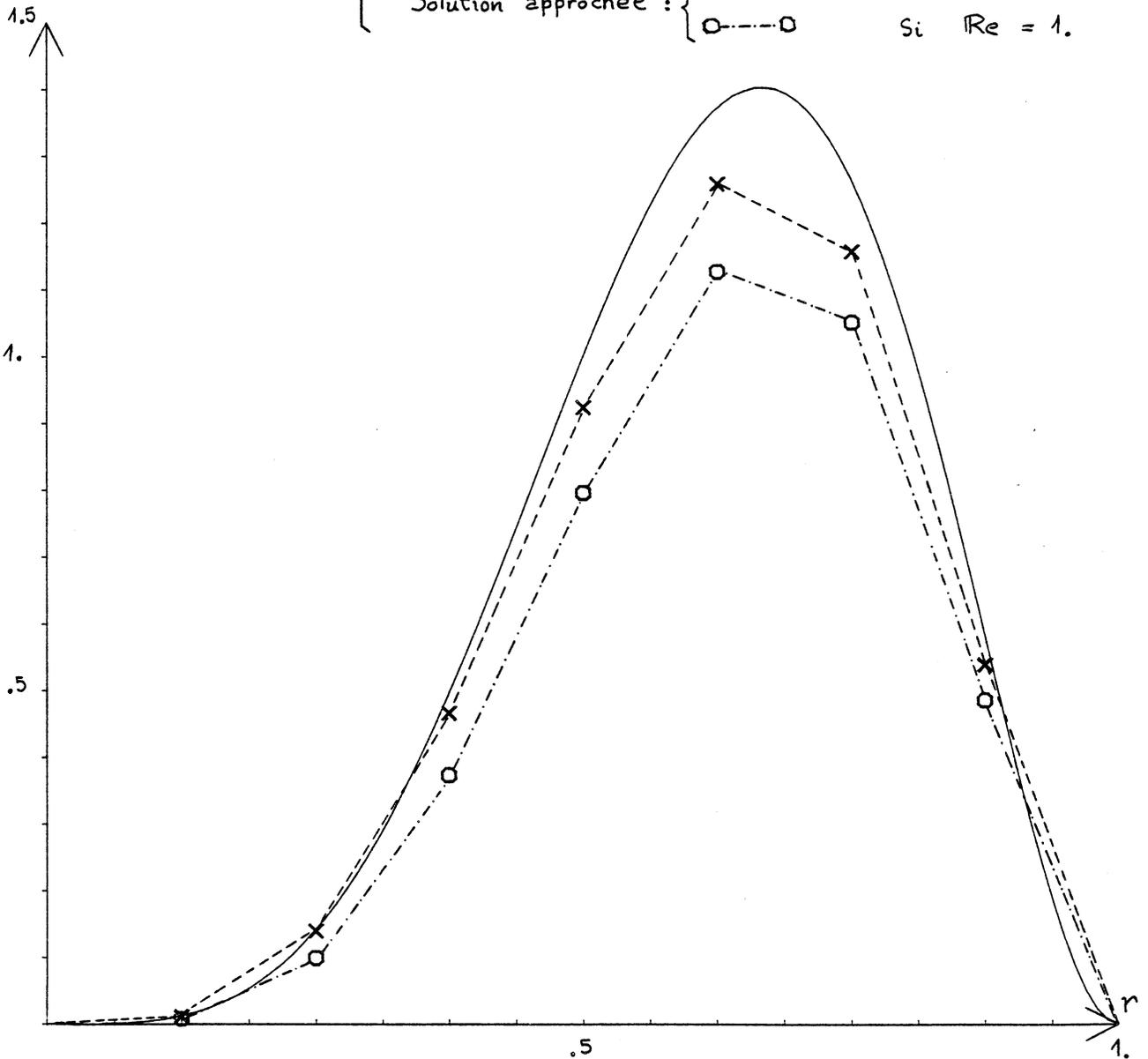


Fig. 4.19

Problème de Navier-Stokes

FONCTION DE COURANT

Cas : \mathcal{Z}_{h3} , $\log 1$, ordre d'int. 02, $\rho = 1$.

$\zeta = 0.25$ { Solution exacte : trait continu
Solution approchée : { x-----x si $\text{Re} = 10^{-2}$
 o-----o si $\text{Re} = 1$.

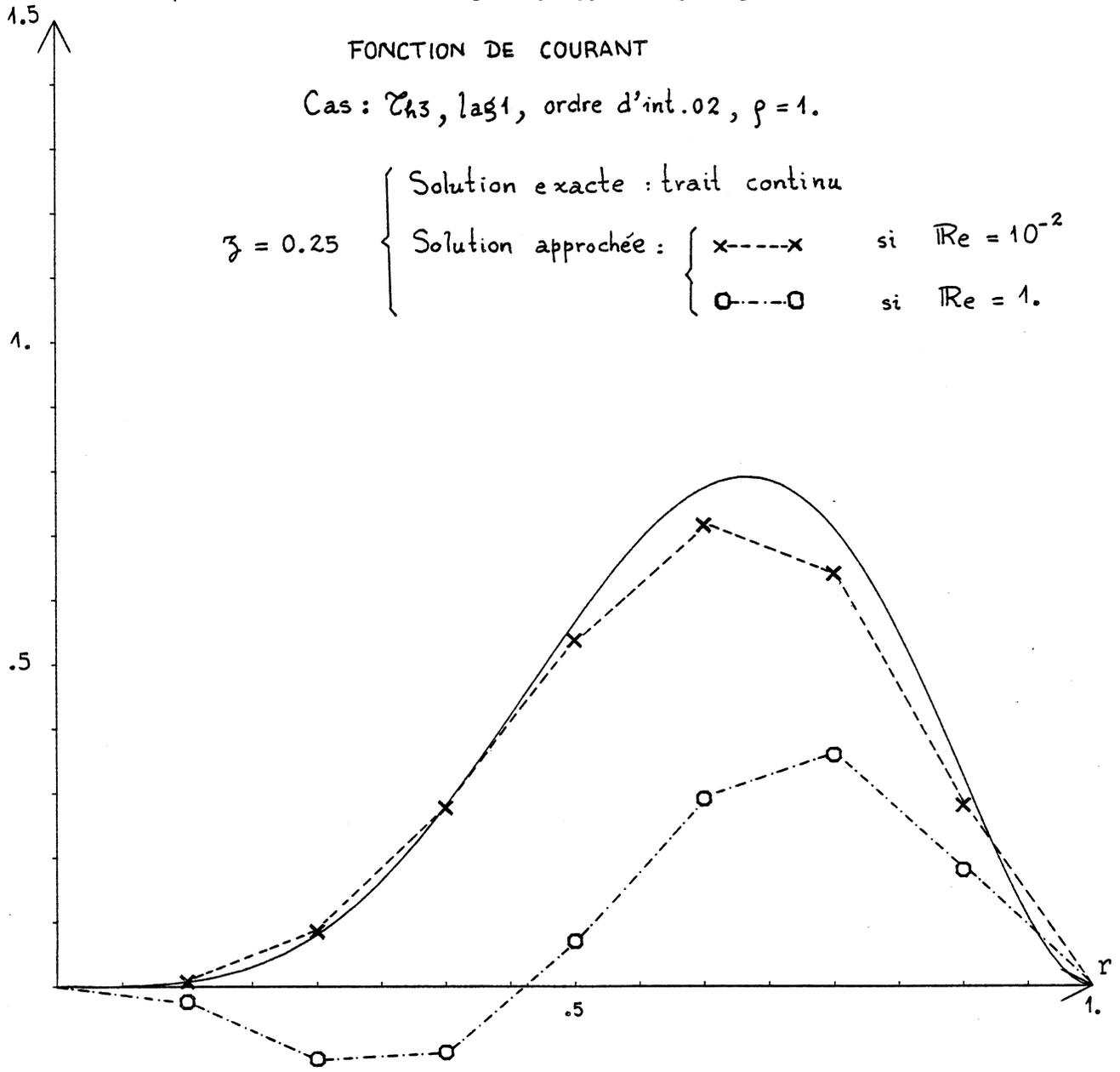
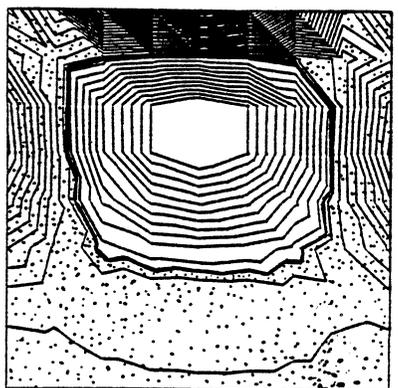
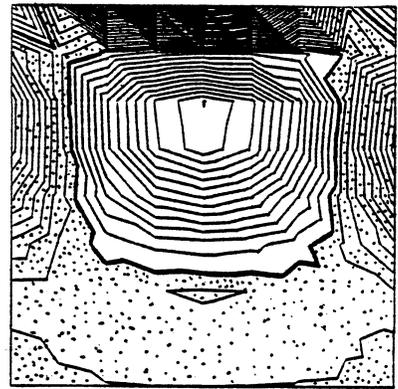
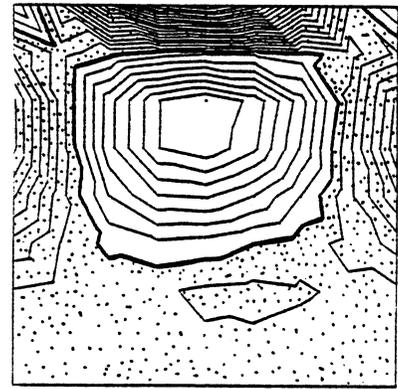
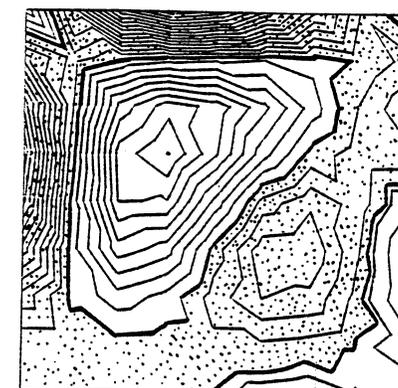
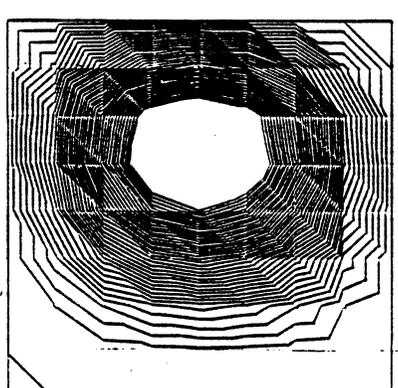
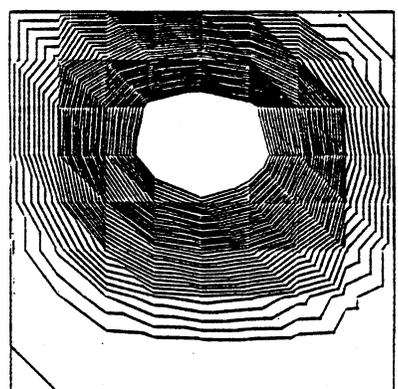
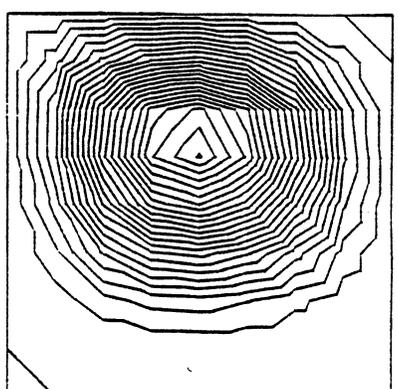
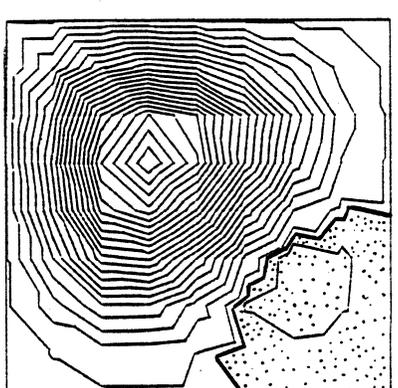


Fig. 4.20

<p>VORTICITE</p>					<p>FONCTION DE COURANT</p>					<p>Solution Exacte (Interpolée de Lagrange)</p>	<p>$Re = 10^{-2}$</p>	<p>$Re = 10^{-1}$</p>	<p>$Re = 1$</p>	<p>Cas : Z_{k3}, lag1, ordre d'int. 02, $\beta = 1$. Legende : partie positive  , partie négative </p>
------------------	---	---	---	---	----------------------------	--	--	--	--	---	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------	---

Problème de Navier-Stokes

Comportement de $\text{arret}_1(\lambda)$ pour
différents valeurs du numero de Reynolds (Re)

(Cas : Z_{h3} , $\text{lag}1$, ordre d'int. 02, $\rho=1$.)

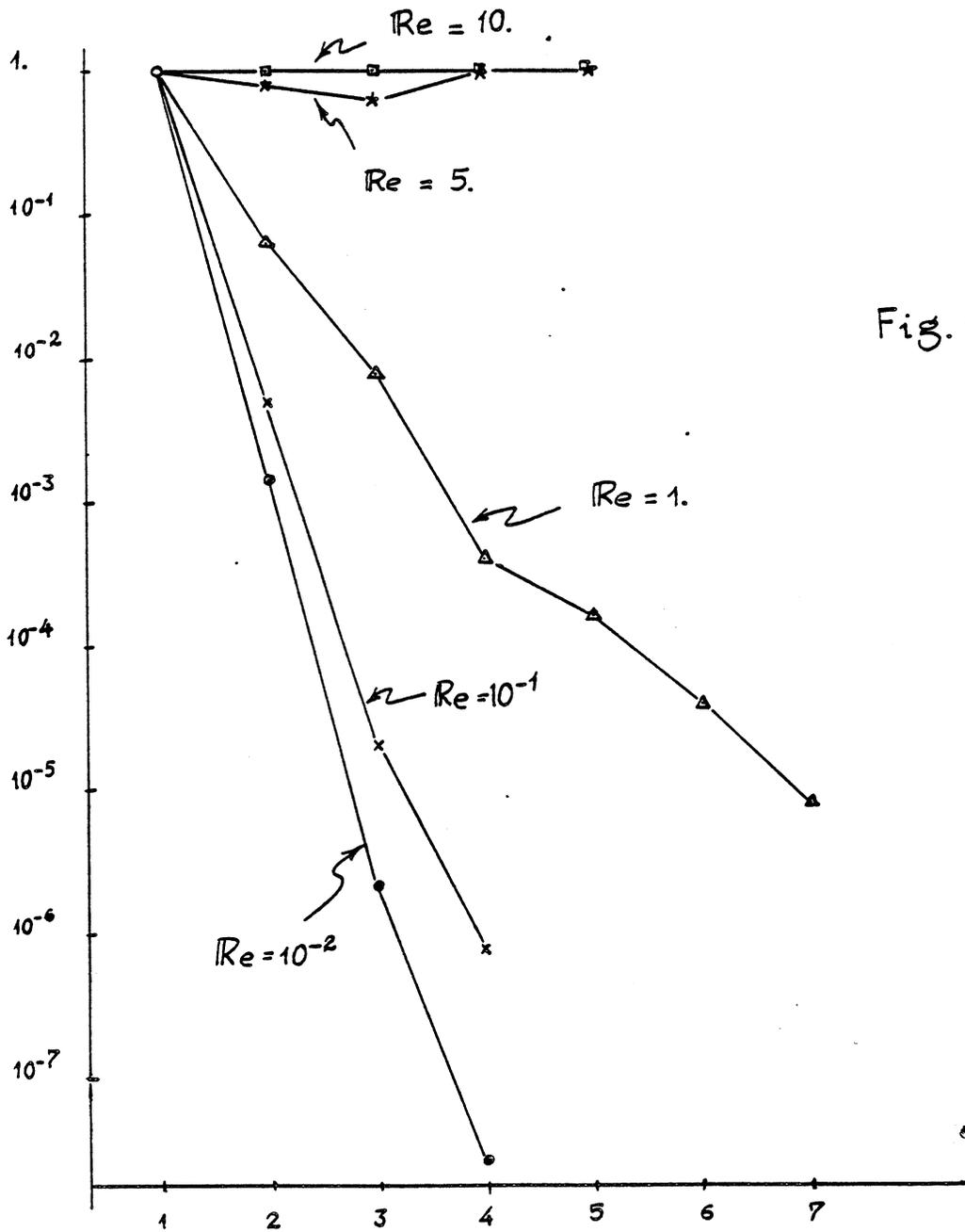


Fig. 4.21

Iterations

A N N E X E A

TABLEAUX DES RESULTATS CORRESPONDANTS
AUX ESSAIS NUMERIQUES POUR LE
PROBLEME

$$\left\{ \begin{array}{l} B(u) = f, \\ u|_{\Gamma} = g \end{array} \right.$$

Tableau 4.1.2

Essai	Forme	Triangulation	Element	Ordre d'Int. Numerique	erreur	COÛT (sec)
e1	1	τ_{h1}	lag1	01	0.1098	0.351
e2	-	-	-	02 (inte)	0.1551	0.45
e3	-	-	-	04	0.1991	0.74
e4	-	-	-	05	0.2116	0.83
e5	-	-	lag2	01	0.59 $\times 10^2$	0.93
e6	-	-	-	02 (inte)	0.173 $\times 10^{-1}$	0.97
e7	-	-	-	04	0.1992 $\times 10^{-1}$	1.32
e8	-	-	-	05	0.2333 $\times 10^{-1}$	1.43
e9	-	τ_{h2}	lag1	01	0.255 $\times 10^{-1}$	2.46
e10	-	-	-	02 (inte)	0.459 $\times 10^{-1}$	3.06
e11	-	-	-	04	0.562 $\times 10^{-1}$	4.86
e12	-	-	-	05	0.595 $\times 10^{-1}$	5.46
e13	-	τ_{h3}	-	01	0.758 $\times 10^{-2}$	12.59
e14	-	-	-	05	0.192 $\times 10^{-1}$	24.59

Tableau 4.1.2 (suite)

Essai	Forme	Triangulation	Element	Ordre d'int.		erreur	Coût (sec)
				Numerique			
e15	2	Z _{h1}	lag1	01	0.1772	0.38	
e16	-	-	-	02 (inte)	0.1311	0.48	
e17	-	-	-	04	0.1326	0.77	
e18	-	-	-	05	0.1324	0.86	
e19	-	-	lag2	01	0.523	1.17	
e20	-	-	-	02 (inte)	0.442	1.21	
e21	-	-	-	04	0.3601	1.56	
e22	-	-	-	05	0.4088	1.67	
e23	-	Z _{h2}	lag1	01	0.399	2.86	
e24	-	-	-	02 (inte)	0.365	3.46	
e25	-	-	-	04	0.365	5.26	
e26	-	-	-	05	0.366	5.86	
e27	-	Z _{h3}	-	01	0.104	16.72	
e28	-	-	-	02 (bord)	0.984	19.12	
e29	-	-	-	05	0.985	28.72	

Tableau 4.1.2 (suite et fin)

Essai	Forme	Triangulation	Élément	Ordre d'Int. Numérique	erreur	Coût (sec)
e30	3	Z _{h1}	lag1	01	0.5765	0.35
e31	-	-	-	02	0.5423	0.45
e32	-	Z _{h2}	-	01	0.6	2.46
e33	-	-	-	05	0.6	3.06
e34	4	Z _{h1}	-	01	0.1174	0.35
e35	-	-	-	02 (inte)	0.4968 × 10 ⁻¹	0.55
e36	-	-	-	04	0.5319 × 10 ⁻¹	0.74
e37	-	-	-	05	0.515 × 10 ⁻¹	0.83
e38	-	-	lag2	01	4.6	0.934
e39	-	-	-	02	0.1354 × 10 ⁻¹	1.16
e40	-	-	-	04	0.888 × 10 ⁻²	1.51
e41	-	-	-	05	0.1106 × 10 ⁻¹	1.43
e42	-	Z _{h2}	lag1	01	0.1981 × 10 ⁻¹	2.46
e43	-	-	-	02 (inte)	0.1036 × 10 ⁻¹	3.66
e44	-	-	-	04	0.1043 × 10 ⁻¹	5.46
e45	-	-	-	05	0.1025 × 10 ⁻¹	6.06
e46	-	Z _{h3}	-	01	0.5015 × 10 ⁻²	12.59
e47	-	-	-	05	0.2673 × 10 ⁻²	26.99

A N N E X E B

TABLEAUX DES RESULTATS CORRESPONDANTS
AUX ESSAIS NUMERIQUES DU PROBLEME

$$\left\{ \begin{array}{l} B(rB(u)) = f, \\ u|_{\Gamma} = g_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g_2 \end{array} \right.$$

Opérateur	Méthode	Produit Scalaire	Triangulation	Élément	Ordre d'intégration	Tableau
B	Grad. Conj.	N°2	\mathcal{T}_{h1}	lag1	02 (inte)	4.2.3
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.4
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.5
"	"	"	\mathcal{T}_{h1}	lag2	04	4.2.6
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.7
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.8
"	"	N°1	\mathcal{T}_{h1}	lag1	02 (inte)	4.2.9
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.10
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.11
"	"	"	\mathcal{T}_{h1}	lag2	04	4.2.12
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.13
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.14
H	"	N°1	\mathcal{T}_{h1}	lag1	02 (inte)	4.2.15
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.16
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.17
"	"	N°2	\mathcal{T}_{h1}	"	"	4.2.18
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.19
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.20
"	"	"	\mathcal{T}_{h1}	lag2	04	4.2.21
"	"	"	\mathcal{T}_{h2}	"	"	4.2.22
"	"	"	\mathcal{T}_{h3}	"	"	4.2.23

Tableau 4.2.2

Nuit	Itération	arrêt ₁ (λ)	err(λ)
6	2	.3776	.9136
8	3	.4814 × 10 ²	.9711
10	4	.4041 × 10 ⁻¹	.9335
12	5	.1463 × 10 ⁻¹	.93085
14	6	.5097 × 10 ⁻⁷	.93085
16	7	.4483 × 10 ⁻⁹	.93085
17	err(ω) = 0.8585		
18	err(ψ) = 0.6928		

Tableau 4.2.3

Nuit	Itération	arrêt ₁ (λ)	err(λ)
6	2	.2674	.5643
8	3	.1846	.5849
10	4	.6985 × 10 ⁻¹	.5930
12	5	.4236 × 10 ⁻¹	.5971
14	6	.1613 × 10 ⁻¹	.59706
16	7	.6304 × 10 ⁻³	.59703
18	8	.1194 × 10 ⁻³	.59703
20	9	.2503 × 10 ⁻⁶	.59703
22	10	.8972 × 10 ⁻¹⁰	.59703
23	err(ω) = 0.4918		
24	err(ψ) = 0.4416		

Tableau 4.2.4

Nuit	Itération	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
6	2	.2149	.6216	.1181
8	3	.4847 × 10 ⁻¹	.4974 × 10 ⁻¹	.1347
10	4	.1661 × 10 ⁻¹	.2149 × 10 ⁻¹	.14147
12	5	.9877 × 10 ⁻²	.9144 × 10 ⁻²	.14679
14	6	.8508 × 10 ⁻²	.1863 × 10 ⁻³	.1483
16	7	.5921 × 10 ⁻²	.4966 × 10 ⁻³	.1487
18	8	.2313 × 10 ⁻²	.2584 × 10 ⁻³	.1495
20	9	.1953 × 10 ⁻²	.6903 × 10 ⁻³	.1493
22	10	.8903 × 10 ⁻³	.167 × 10 ⁻⁴	.1494
24	11	.1375 × 10 ⁻³	.607 × 10 ⁻⁵	.1495
26	12	.2105 × 10 ⁻³	.511 × 10 ⁻⁶	.1495
28	13	.6728 × 10 ⁻⁴	.278 × 10 ⁻⁷	.14953
30	14	.3672 × 10 ⁻⁴	.143 × 10 ⁻⁸	.14953
32	15	.1847 × 10 ⁻⁵	.113 × 10 ⁻⁹	.14953
34	16	.1008 × 10 ⁻⁵	.137 × 10 ⁻¹⁰	.14953
35	err(ω) = .1202			
36	err(ψ) = .78 × 10 ⁻¹			

Tableau 4.2.5

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.646 × 10 ¹	0.4182
6	2	0.366	0.20 × 10 ¹	0.406
8	3	0.143	0.101 × 10 ⁰	0.411
10	4	0.436 × 10 ⁻¹	0.673 × 10 ⁻²	0.3997
12	5	0.243 × 10 ⁻¹	0.618 × 10 ⁻²	0.3999
14	6	0.16 × 10 ⁻¹	0.602 × 10 ⁻³	0.3973
16	7	0.687 × 10 ⁻²	0.148 × 10 ⁻³	0.3958
18	8	0.184 × 10 ⁻²	0.170 × 10 ⁻⁴	0.3959
20	9	0.645 × 10 ⁻³	0.326 × 10 ⁻⁶	0.3958
22	10	0.173 × 10 ⁻⁵	0.575 × 10 ⁻⁸	0.39579
24	11	0.549 × 10 ⁻⁵	0.229 × 10 ⁻⁸	0.39580
26	12	0.499 × 10 ⁻⁵	0.146 × 10 ⁻¹¹	0.39580
28	13	0.719 × 10 ⁻⁷	0.95 × 10 ⁻²⁰	0.39580
29	err(ω) = 0.322			
30	err(ψ) = 0.207			

Tableau 4.2.6

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.74 × 10 ¹	0.4257
6	2	0.247	0.53 × 10 ⁰	0.3217
8	3	0.101	0.29 × 10 ⁰	0.2717
10	4	0.758 × 10 ⁻¹	0.14 × 10 ⁻¹	0.2417
12	5	0.198 × 10 ⁻¹	0.99 × 10 ⁻²	0.2501
14	6	0.244 × 10 ⁻¹	0.41 × 10 ⁻²	0.26197
16	7	0.119 × 10 ⁻²	0.77 × 10 ⁻³	0.26919
18	8	0.426 × 10 ⁻²	0.58 × 10 ⁻⁴	0.26839
20	9	0.128 × 10 ⁻³	0.23 × 10 ⁻⁴	0.26753
22	10	0.677 × 10 ⁻³	0.21 × 10 ⁻⁵	0.26725
24	11	0.195 × 10 ⁻³	0.20 × 10 ⁻⁵	0.26719
26	12	0.123 × 10 ⁻³	0.12 × 10 ⁻⁶	0.267143
28	13	0.587 × 10 ⁻⁴	0.81 × 10 ⁻⁸	0.267141
30	14	0.133 × 10 ⁻⁴	0.31 × 10 ⁻⁸	0.267136
32	15	0.115 × 10 ⁻⁴	0.52 × 10 ⁻¹⁰	0.267134
34	16	0.115 × 10 ⁻⁵	0.96 × 10 ⁻¹²	0.2671336
36	17	0.563 × 10 ⁻⁷	0.12 × 10 ⁻¹²	0.2671336
37		err(ω) = 0.218		
38		err(ψ) = 0.54 × 10 ⁻¹		

Tableau 4.2.7

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.11 × 10 ²	0.355
6	2	0.217	0.45	0.284
8	3	0.710 × 10 ⁻¹	0.18	0.253
10	4	0.118	0.93 × 10 ⁻¹	0.1706
12	5	0.300 × 10 ⁻¹	0.17 × 10 ⁻¹	0.15329
14	6	0.725 × 10 ⁻²	0.81 × 10 ⁻³	0.15152
16	7	0.863 × 10 ⁻²	0.10 × 10 ⁻²	0.15473
18	8	0.471 × 10 ⁻²	0.42 × 10 ⁻³	0.15698
20	9	0.238 × 10 ⁻²	0.81 × 10 ⁻⁴	0.15809
22	10	0.711 × 10 ⁻³	0.14 × 10 ⁻³	0.15844
24	11	0.399 × 10 ⁻³	0.37 × 10 ⁻⁴	0.15836
26	12	0.154 × 10 ⁻²	0.64 × 10 ⁻⁴	0.15856
28	13	0.121 × 10 ⁻²	0.21 × 10 ⁻⁴	0.15882
30	14	0.802 × 10 ⁻³	0.69 × 10 ⁻⁵	0.15895
32	15	0.777 × 10 ⁻³	0.75 × 10 ⁻⁵	0.158946
34	16	0.302 × 10 ⁻³	0.32 × 10 ⁻⁵	0.158944
36	17	0.216 × 10 ⁻³	0.54 × 10 ⁻⁶	0.158946
38	18	0.124 × 10 ⁻³	0.37 × 10 ⁻⁶	0.158998
40	19	0.103 × 10 ⁻³	0.21 × 10 ⁻⁶	0.159049
42	20	0.623 × 10 ⁻⁴	0.51 × 10 ⁻⁷	0.159078
44	21	0.268 × 10 ⁻⁴	0.17 × 10 ⁻⁷	0.159083
46	22	0.140 × 10 ⁻⁴	0.25 × 10 ⁻⁷	0.1590857
48	23	0.159 × 10 ⁻⁴	0.23 × 10 ⁻⁸	0.1590862
50	24	0.736 × 10 ⁻⁵	0.44 × 10 ⁻⁹	0.1590861
52	25	0.789 × 10 ⁻⁵	0.66 × 10 ⁻¹⁰	0.1590862
54	26	0.143 × 10 ⁻⁵	0.65 × 10 ⁻¹¹	0.1590861
56	27	0.508 × 10 ⁻⁶	0.17 × 10 ⁻¹¹	0.1590861
58		err(ω) = 0.64 × 10 ⁻¹		
60		err(ψ) = 0.47 × 10 ⁻²		

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)
4	1	1.	64.7
6	2	0.609	3.96
8	3	0.207	0.59
10	4	0.225	0.60 × 10 ⁻¹
12	5	0.109	0.47 × 10 ⁻¹
14	6	0.76 × 10 ⁻¹	0.15 × 10 ⁻¹
16	7	0.43 × 10 ⁻¹	0.36 × 10 ⁻²
18	8	0.14 × 10 ⁻¹	0.29 × 10 ⁻³
20	9	0.103 × 10 ⁻²	0.22 × 10 ⁻³
22	10	0.79 × 10 ⁻⁷	0.51 × 10 ⁻¹²
23		err(ω) = 0.99	
24		err(ψ) = 0.774	

Tableau
4.2.9

Nuit	Itér	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)
4	1	1.	88.2
6	2	0.83	57.9
8	3	0.12	4.1
10	4	0.230	1.95
12	5	0.99 × 10 ⁻¹	0.29
14	6	0.18	0.25
16	7	0.79 × 10 ⁻¹	0.53 × 10 ⁻¹
18	8	0.78 × 10 ⁻¹	0.63 × 10 ⁻¹
20	9	0.13 × 10 ⁻¹	0.94 × 10 ⁻²
22	10	0.25 × 10 ⁻¹	0.36 × 10 ⁻¹
24	11	0.24 × 10 ⁻¹	0.36 × 10 ⁻²
26	12	0.81 × 10 ⁻²	0.96 × 10 ⁻³
28	13	0.11 × 10 ⁻²	0.57 × 10 ⁻³
30	14	0.16 × 10 ⁻²	0.13 × 10 ⁻⁴
32	15	0.40 × 10 ⁻⁶	0.13 × 10 ⁻⁸
33		err(ω) = 0.52	

Tableau
4.2.10

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)
4	1	1.	62.5
6	2	0.85	90.3
8	3	0.216	3.13
10	4	0.161	6.76
12	5	0.69 × 10 ⁻¹	0.45
14	6	0.80 × 10 ⁻¹	1.01
16	7	0.43 × 10 ⁻¹	0.25
18	8	0.31 × 10 ⁻¹	0.11
20	9	0.25 × 10 ⁻¹	0.54 × 10 ⁻¹
22	10	0.23 × 10 ⁻¹	0.31 × 10 ⁻¹
24	11	0.11 × 10 ⁻¹	0.12 × 10 ⁻¹
26	12	0.51 × 10 ⁻²	0.35 × 10 ⁻¹
28	13	0.79 × 10 ⁻²	0.10 × 10 ⁻¹
30	14	0.92 × 10 ⁻²	0.35 × 10 ⁻²
32	15	0.84 × 10 ⁻²	0.12 × 10 ⁻²
34	16	0.87 × 10 ⁻²	0.61 × 10 ⁻³
36	17	0.74 × 10 ⁻²	0.59 × 10 ⁻³
38	18	0.29 × 10 ⁻²	0.20 × 10 ⁻²
40	19	0.25 × 10 ⁻²	0.14 × 10 ⁻³
42	20	0.74 × 10 ⁻²	0.85 × 10 ⁻³
44	21	0.11 × 10 ⁻²	0.43 × 10 ⁻⁴
46	22	0.36 × 10 ⁻²	0.33 × 10 ⁻³
48	23	0.27 × 10 ⁻²	0.25 × 10 ⁻⁴
50	24	0.36 × 10 ⁻³	0.14 × 10 ⁻⁴
52	25	0.14 × 10 ⁻²	0.24 × 10 ⁻⁴
54	26	0.19 × 10 ⁻²	0.65 × 10 ⁻⁵
56	27	0.45 × 10 ⁻³	0.32 × 10 ⁻⁵
58	28	0.95 × 10 ⁻⁴	0.17 × 10 ⁻⁴

Tableau 4.2.11 (1^{ère} partie)

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)
60	29	0.45 × 10 ⁻³	0.32 × 10 ⁻⁵
62	30	0.51 × 10 ⁻³	0.17 × 10 ⁻⁴
64	31	0.65 × 10 ⁻³	0.20 × 10 ⁻⁴
66	32	0.36 × 10 ⁻⁴	0.12 × 10 ⁻⁵
68	33	0.94 × 10 ⁻⁴	0.17 × 10 ⁻⁶
70	34	0.13 × 10 ⁻³	0.30 × 10 ⁻⁶
72	35	0.47 × 10 ⁻⁴	0.72 × 10 ⁻⁷
74	36	0.16 × 10 ⁻³	0.48 × 10 ⁻⁷
76	37	0.82 × 10 ⁻⁵	0.41 × 10 ⁻⁸
78	38	0.32 × 10 ⁻⁵	0.38 × 10 ⁻⁸
80	39	0.26 × 10 ⁻⁵	0.16 × 10 ⁻⁸
81	err(w) = 0.12		
82	err(ψ) = 0.08		

Tableau 4.2.11 (2^{ème} et dernière partie)

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	142.3	0.8897
6	2	0.790	173.7	0.5226
8	3	0.257	3.71	0.4735
10	4	0.86 × 10 ⁻¹	3.06	0.4147
12	5	0.164	3.52	0.4561
14	6	0.647 × 10 ⁻¹	1.07	0.4560
16	7	0.650 × 10 ⁻¹	0.18	0.4338
18	8	0.62 × 10 ⁻¹	0.80 × 10 ⁻¹	0.4168
20	9	0.18 × 10 ⁻¹	0.64 × 10 ⁻²	0.4219
22	10	0.30 × 10 ⁻²	0.70 × 10 ⁻²	0.4229
24	11	0.15 × 10 ⁻¹	0.77 × 10 ⁻²	0.42785
26	12	0.11 × 10 ⁻¹	0.16 × 10 ⁻²	0.42794
28	13	0.11 × 10 ⁻¹	0.91 × 10 ⁻³	0.42599
30	14	0.59 × 10 ⁻²	0.24 × 10 ⁻³	0.42762
32	15	0.86 × 10 ⁻³	0.37 × 10 ⁻³	0.42779
34	16	0.35 × 10 ⁻²	0.44 × 10 ⁻³	0.42752
36	17	0.18 × 10 ⁻²	0.37 × 10 ⁻³	0.42719
38	18	0.98 × 10 ⁻⁴	0.15 × 10 ⁻⁴	0.42724
40	19	0.67 × 10 ⁻³	0.23 × 10 ⁻⁴	0.42761
42	20	0.11 × 10 ⁻³	0.43 × 10 ⁻⁵	0.42758
43		err(w) = 0.35		
44		err(ψ) = 0.22		

Tableau 4.2.12

N_{uit}	Itér.	$\text{arrêt}_1(\lambda)$	$\text{arrêt}_2(\lambda)$	$\text{err}(\lambda)$
4	1	1.	0.1×10^3	0.8644
6	2	0.80	0.15×10^3	0.5884
8	3	0.23	0.49×10^1	0.4713
10	4	0.14	0.12×10^2	0.3968
12	5	0.106	0.23×10^1	0.3571
14	6	0.71×10^{-1}	0.68×10^0	0.3438
16	7	0.40×10^{-1}	0.66×10^0	0.3323
18	8	0.51×10^{-1}	0.23×10^0	0.3167
20	9	0.59×10^{-1}	0.15×10^0	0.2897
22	10	0.47×10^{-1}	0.32×10^{-1}	0.2811
24	11	0.41×10^{-1}	0.25×10^{-1}	0.2677
26	12	0.15×10^{-1}	0.13×10^0	0.2637
28	13	0.17×10^{-1}	0.64×10^{-2}	0.2590
30	14	0.15×10^{-1}	0.13×10^{-2}	0.2665
32	16	0.34×10^{-2}	0.50×10^{-2}	0.2685
34	18	0.15×10^{-1}	0.40×10^{-2}	0.2764
36	19	0.35×10^{-2}	0.82×10^{-3}	0.2779
38	20	0.11×10^{-1}	0.48×10^{-2}	0.2816
40	21	0.10×10^{-1}	0.48×10^{-3}	0.2864
42	22	0.34×10^{-3}	0.41×10^{-3}	0.2865
44	23	0.25×10^{-2}	0.81×10^{-4}	0.2863
46	24	0.11×10^{-2}	0.14×10^{-3}	0.2860
48	25	0.82×10^{-3}	0.25×10^{-4}	0.2856
50	26	0.22×10^{-2}	0.64×10^{-4}	0.28436
52	27	0.59×10^{-4}	0.37×10^{-5}	0.28439
54	28	0.29×10^{-3}	0.58×10^{-5}	0.2845
56	29	0.18×10^{-3}	0.67×10^{-6}	0.28445
57	$\text{err}(w) = 0.23$			
58	$\text{err}(\psi) = 0.60 \times 10^{-1}$			

Tableau 4.2.13

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.37 × 10 ²	0.8793
6	2	0.83	0.68 × 10 ²	0.5314
8	3	0.18	0.28 × 10 ¹	0.4298
12	5	0.99 × 10 ⁻¹	0.82	0.3305
14	6	0.45 × 10 ⁻¹	0.84	0.3280
16	7	0.40 × 10 ⁻¹	0.29	0.3162
18	8	0.80 × 10 ⁻¹	0.40	0.2914
20	9	0.18 × 10 ⁻¹	0.11	0.2855
22	10	0.23 × 10 ⁻¹	0.53 × 10 ⁻¹	0.2747
24	11	0.21 × 10 ⁻¹	0.29 × 10 ⁻¹	0.2645
26	12	0.24 × 10 ⁻¹	0.42 × 10 ⁻¹	0.2542
28	13	0.16 × 10 ⁻¹	0.12 × 10 ⁻¹	0.2483
30	14	0.15 × 10 ⁻¹	0.18 × 10 ⁻¹	0.2425
32	15	0.15 × 10 ⁻¹	0.78 × 10 ⁻²	0.2376
34	16	0.88 × 10 ⁻²	0.16 × 10 ⁻¹	0.2344
36	17	0.27 × 10 ⁻¹	0.99 × 10 ⁻²	0.2210
38	18	0.40 × 10 ⁻¹	0.27 × 10 ⁻¹	0.1996
40	19	0.27 × 10 ⁻¹	0.92 × 10 ⁻²	0.1858
42	20	0.24 × 10 ⁻¹	0.52 × 10 ⁻²	0.1757
44	21	0.17 × 10 ⁻¹	0.33 × 10 ⁻²	0.1673
46	22	0.94 × 10 ⁻²	0.34 × 10 ⁻²	0.1622
48	23	0.91 × 10 ⁻²	0.70 × 10 ⁻²	0.1579
50	24	0.22 × 10 ⁻²	0.69 × 10 ⁻³	0.1569
52	25	0.30 × 10 ⁻²	0.96 × 10 ⁻³	0.1559
54	26	0.75 × 10 ⁻²	0.43 × 10 ⁻³	0.1542
56	27	0.40 × 10 ⁻²	0.26 × 10 ⁻³	0.1535
58	28	0.20 × 10 ⁻²	0.80 × 10 ⁻³	0.1534

Tableau 4.2.14 (1^{ère} partie)

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
60	29	0.58 × 10 ⁻²	0.33 × 10 ⁻³	0.1527
62	30	0.98 × 10 ⁻³	0.18 × 10 ⁻³	0.1527
64	31	0.51 × 10 ⁻²	0.18 × 10 ⁻³	0.1532
66	32	0.13 × 10 ⁻²	0.59 × 10 ⁻⁴	0.1535
68	33	0.51 × 10 ⁻²	0.22 × 10 ⁻³	0.1549
70	34	0.39 × 10 ⁻²	0.41 × 10 ⁻⁴	0.1550
72	35	0.19 × 10 ⁻²	0.28 × 10 ⁻⁴	0.1557
74	36	0.48 × 10 ⁻³	0.40 × 10 ⁻⁴	0.1559
75	err(ω) = .6371 × 10 ⁻¹			
76	err(ψ) = .3337 × 10 ⁻²			
78	37	0.19 × 10 ⁻³	0.31 × 10 ⁻⁴	0.1560
80	38	0.55 × 10 ⁻³	0.32 × 10 ⁻⁴	0.1562
82	39	0.40 × 10 ⁻³	0.43 × 10 ⁻⁴	0.1563
84	40	0.19 × 10 ⁻³	0.11 × 10 ⁻⁴	0.1564
86	41	0.21 × 10 ⁻²	0.28 × 10 ⁻⁴	0.1571
87	err(ω) = .6402 × 10 ⁻¹			
88	err(ψ) = .3301 × 10 ⁻²			
90	42	0.12 × 10 ⁻³	0.78 × 10 ⁻⁴	0.157128
92	43	0.92 × 10 ⁻⁴	0.69 × 10 ⁻⁵	0.157143
94	44	0.56 × 10 ⁻³	0.12 × 10 ⁻⁴	0.1572
96	45	0.34 × 10 ⁻³	0.28 × 10 ⁻⁴	0.15732
98	46	0.20 × 10 ⁻³	0.74 × 10 ⁻⁵	0.15738
100	47	0.11 × 10 ⁻²	0.14 × 10 ⁻⁴	0.1578
101	err(ω) = 0.6424 × 10 ⁻¹			
102	err(ψ) = 0.3326 × 10 ⁻²			
104	48	0.84 × 10 ⁻⁴	0.37 × 10 ⁻⁴	0.15784
106	49	0.19 × 10 ⁻³	0.70 × 10 ⁻⁵	0.15788
108	50	0.27 × 10 ⁻³	0.12 × 10 ⁻⁴	0.15796

Tableau 4.2.14 (2 ème partie)

Nuit	Itér.	$\text{arrêt}_1(\lambda)$	$\text{arrêt}_2(\lambda)$	$\text{err}(\lambda)$
110	51	0.20×10^{-3}	0.83×10^{-5}	0.15805
112	52	0.35×10^{-3}	0.11×10^{-4}	0.15818
113	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\text{err}(\omega) = 0.6428 \times 10^{-1}$ $\text{err}(\psi) = 0.3381 \times 10^{-2}$ </div>			
114				
116	53	0.42×10^{-4}	0.97×10^{-5}	0.15818
118	54	0.16×10^{-3}	0.36×10^{-5}	0.158175
122	58	0.14×10^{-3}	0.50×10^{-5}	0.15823
124	59	0.31×10^{-3}	0.52×10^{-5}	0.15846
126	60	0.29×10^{-3}	0.97×10^{-5}	0.15848
128	61	0.13×10^{-2}	0.17×10^{-4}	0.15914
130	62	0.54×10^{-3}	0.28×10^{-4}	0.15944
132	63	0.12×10^{-2}	0.16×10^{-4}	0.16019
133	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\text{err}(\omega) = 0.6463 \times 10^{-1}$ $\text{err}(\psi) = 0.3328 \times 10^{-2}$ </div>			
134				

Tableau 4.2.14 (3ème et dernière partie)

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.12 × 10 ³	0.7200
6	2	0.42	0.52 × 10 ¹	0.8315
8	3	0.27	0.66	0.8350
10	4	0.19	0.20	0.9098
12	6	0.21	0.13	0.8882
14	8	0.12	0.54 × 10 ⁻¹	0.8523
16	9	0.95 × 10 ⁻¹	0.44 × 10 ⁻¹	0.8662
18	10	0.11 × 10 ⁻²	0.34 × 10 ⁻⁵	0.86604
20	11	0.65 × 10 ⁻⁴	0.17 × 10 ⁻⁵	0.86608
22	12	0.19 × 10 ⁻⁷	0.23 × 10 ⁻¹³	0.86608
23		err(ω) = 0.7831		
24		err(ψ) = 0.3102		

Tableau 4.2.15

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.47 × 10 ³	0.3890
6	2	0.37	0.78 × 10 ¹	0.4492
8	3	0.19	0.20 × 10 ¹	0.5042
10	4	0.15	0.33	0.5418
12	5	0.15	0.18	0.5469
14	6	0.14	0.12	0.5319
16	7	0.34 × 10 ⁻¹	0.20 × 10 ⁻¹	0.4891
18	8	0.17 × 10 ⁻¹	0.24 × 10 ⁻²	0.5287
20	9	0.19 × 10 ⁻¹	0.17 × 10 ⁻²	0.5299
22	10	0.27 × 10 ⁻²	0.69 × 10 ⁻³	0.5287
24	11	0.58 × 10 ⁻²	0.73 × 10 ⁻³	0.5293
26	12	0.15 × 10 ⁻¹	0.49 × 10 ⁻³	0.5289
27		err(ω) = 0.4602		
28		err(ψ) = 0.2994		

Tableau 4.2.16

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.21 × 10 ⁴	0.1972
6	2	0.25	0.15 × 10 ²	0.1062
8	3	0.36 × 10 ⁻¹	0.54	0.1138
10	4	0.26 × 10 ⁻¹	0.52 × 10 ⁻¹	0.1208
12	5	0.40 × 10 ⁻¹	0.29 × 10 ⁻¹	0.1255
14	6	0.41 × 10 ⁻¹	0.17 × 10 ⁻¹	0.1365
16	7	0.63 × 10 ⁻¹	0.14 × 10 ⁻¹	0.1326
18	8	0.35 × 10 ⁻¹	0.19 × 10 ⁻¹	0.1286
20	9	0.26 × 10 ⁻¹	0.82 × 10 ⁻²	0.1259
22	10	0.11 × 10 ⁻¹	0.18 × 10 ⁻¹	0.1277
23	err(ω) = 0.1024			
24	err(ψ) = 0.6816 × 10 ⁻¹			
26	11	0.17 × 10 ⁻¹		
28	12	0.67 × 10 ⁻²		
30	13	0.53 × 10 ⁻²		
32	14	0.39 × 10 ⁻²		
34	15	0.46 × 10 ⁻³		
36	16	0.85 × 10 ⁻³		
38	17	0.22 × 10 ⁻²		
40	18	0.12 × 10 ⁻²		0.1265
41	err(ω) = 0.101			
42	err(ψ) = 0.6968 × 10 ⁻¹			

Tableau 4.2.17

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.97 × 10 ²	0.7646
6	2	0.57	0.53 × 10 ¹	0.9092
8	3	0.13	0.60	0.8307
10	4	0.86 × 10 ⁻²	0.53 × 10 ⁻³	0.8336
12	5	0.65 × 10 ⁻³	0.55 × 10 ⁻⁵	0.833854
14	6	0.16 × 10 ⁻⁶	0.82 × 10 ⁻¹¹	0.833854
15	err(ω) = 0.755			
16	err(ψ) = 0.255			

Tableau 4.2.18

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.41 × 10 ³	0.4262
6	2	0.5	0.91 × 10 ¹	0.4585
8	3	0.17	0.25 × 10 ¹	0.5050
10	4	0.13	0.45	0.5342
12	5	0.65 × 10 ⁻¹	0.95 × 10 ⁻¹	0.5186
14	6	0.33 × 10 ⁻¹	0.19 × 10 ⁻¹	0.5166
16	7	0.32 × 10 ⁻²	0.20 × 10 ⁻³	0.5162
18	8	0.17 × 10 ⁻²	0.51 × 10 ⁻⁴	0.5169
20	9	0.51 × 10 ⁻³	0.87 × 10 ⁻⁴	0.516683
22	10	0.23 × 10 ⁻⁶	0.12 × 10 ⁻¹⁰	0.516683
23	err(ω) = 0.4570			
24	err(ψ) = 0.2851			

Tableau 4.2.19

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1	0.19 × 10 ⁴	0.2650
6	2	0.39	0.21 × 10 ²	0.1729
8	3	0.84 × 10 ⁻¹	0.24 × 10 ¹	0.1621
10	4	0.57 × 10 ⁻¹	0.50	0.1478
12	5	0.40 × 10 ⁻¹	0.21	0.1049
14	6	0.22 × 10 ⁻¹	0.23 × 10 ⁻¹	0.1255
16	7	0.14 × 10 ⁻¹	0.75 × 10 ⁻²	0.1279
18	8	0.72 × 10 ⁻²	0.19 × 10 ⁻²	0.1274
20	9	0.51 × 10 ⁻²	0.10 × 10 ⁻²	0.1258
22	10	0.21 × 10 ⁻²	0.15 × 10 ⁻²	0.1262
24	11	0.51 × 10 ⁻²	0.47 × 10 ⁻³	0.1263
26	12	0.65 × 10 ⁻²	0.23 × 10 ⁻³	0.1260
28	13	0.79 × 10 ⁻²	0.52 × 10 ⁻³	0.1262
30	14	0.46 × 10 ⁻²	0.52 × 10 ⁻³	0.1264
32	15	0.13 × 10 ⁻²	0.48 × 10 ⁻⁴	0.1263
34	16	0.87 × 10 ⁻³	0.26 × 10 ⁻⁴	0.1264
35	err(ω) = 0.102			
36	err(ψ) = 0.684 × 10 ⁻¹			
38	17	0.28 × 10 ⁻³	0.66 × 10 ⁻⁴	0.1263
40	18	0.21 × 10 ⁻³	0.15 × 10 ⁻⁴	0.1264
42	19	0.64 × 10 ⁻³	0.21 × 10 ⁻⁴	0.1266

Tableau 4.2.20

.154.
Tableau 4.2.21

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.28 × 10 ³	0.4259
6	2	0.38	0.46 × 10 ¹	0.3408
8	3	0.22	0.30 × 10 ¹	0.2172
10	4	0.17	0.60	0.2871
12	5	0.65 × 10 ⁻¹	0.38 × 10 ⁻¹	0.2912
14	6	0.23 × 10 ⁻¹	0.75 × 10 ⁻²	0.3029
16	7	0.29 × 10 ⁻¹	0.40 × 10 ⁻²	0.3121
18	8	0.11 × 10 ⁻¹	0.54 × 10 ⁻³	0.3082
20	9	0.13 × 10 ⁻²	0.22 × 10 ⁻⁴	0.3088
22	10	0.61 × 10 ⁻⁴	0.77 × 10 ⁻⁶	0.3088
24	11	0.13 × 10 ⁻³	0.17 × 10 ⁻⁶	0.3087
26	12	0.32 × 10 ⁻⁴	0.22 × 10 ⁻⁶	0.30872
28	13	0.39 × 10 ⁻⁴	0.39 × 10 ⁻⁸	0.30873
29	err(ω) = 0.2643			
	err(ψ) = 0.1663			

Tableau 4.2.22

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.43 × 10 ³	0.4992
6	2	0.40	0.76 × 10 ¹	0.3133
8	3	0.18	0.25 × 10 ¹	0.2081
10	4	0.35 × 10 ⁻¹	0.21	0.2175
12	5	0.65 × 10 ⁻¹	0.19 × 10 ⁻¹	0.2221
14	6	0.34 × 10 ⁻¹	0.12	0.2386
16	7	0.40 × 10 ⁻¹	0.12	0.2581
18	8	0.51 × 10 ⁻¹	0.15	0.2865
20	9	0.56 × 10 ⁻¹	0.21	0.3211
22	10	0.53 × 10 ⁻¹	0.25	0.3470
24	11	0.49 × 10 ⁻¹	0.25	0.3602
25	err(ω) = 0.2821			
26	err(ψ) = 0.6519 × 10 ⁻¹			

Nuit	Itér.	arrêt ₁ (λ)	arrêt ₂ (λ)	err(λ)
4	1	1.	0.11 × 10 ⁴	0.4480
6	2	0.35	0.10 × 10 ²	0.3007
8	3	0.11	0.11 × 10 ¹	0.2305
10	4	0.86 × 10 ⁻¹	0.35	0.1898
12	5	0.33 × 10 ⁻¹	0.81 × 10 ⁻¹	0.1790
14	6	0.49 × 10 ⁻¹	0.65 × 10 ⁻¹	0.1631
16	7	0.30 × 10 ⁻¹	0.88 × 10 ⁻²	0.1540
18	8	0.21 × 10 ⁻¹	0.81 × 10 ⁻²	0.1526
20	9	0.90 × 10 ⁻²	0.32 × 10 ⁻²	0.1531
22	10	0.11 × 10 ⁻¹	0.80 × 10 ⁻²	0.1529
24	11	0.11 × 10 ⁻¹	0.23 × 10 ⁻²	0.1506
26	12	0.1 × 10 ⁻¹	0.59 × 10 ⁻³	0.1472
28	13	0.1 × 10 ⁻¹	0.90 × 10 ⁻³	0.1435
29	err(ω) = 0.5717 × 10 ⁻¹			
30	err(ψ) = 0.3770 × 10 ⁻²			
32	14	0.37 × 10 ⁻²	0.26 × 10 ⁻³	0.1447
34	15	0.47 × 10 ⁻²	0.19 × 10 ⁻³	0.1463
36	16	0.39 × 10 ⁻²	0.12 × 10 ⁻³	0.1472
38	17	0.15 × 10 ⁻²	0.18 × 10 ⁻³	0.1474
40	18	0.29 × 10 ⁻²	0.26 × 10 ⁻³	0.1472
42	19	0.21 × 10 ⁻²	0.16 × 10 ⁻³	0.1469
44	20	0.27 × 10 ⁻²	0.17 × 10 ⁻³	0.1468
46	21	0.22 × 10 ⁻²	0.73 × 10 ⁻⁴	0.1468
48	22	0.35 × 10 ⁻²	0.77 × 10 ⁻⁴	0.1465
50	23	0.28 × 10 ⁻²	0.56 × 10 ⁻⁴	0.1468
52	24	0.15 × 10 ⁻²	0.31 × 10 ⁻⁴	0.1469
54	25	0.11 × 10 ⁻²	0.30 × 10 ⁻⁴	0.1466
55	err(ω) = 0.5813 × 10 ⁻¹			
56	err(ψ) = 0.3904 × 10 ⁻²			

Tableau 4.2.23

Opérateur	B									
	exacte					approchée				
			lagrange 1			lagrange 2				
Méthode		Directe	Grad. Conj (avec produit scalaire N°2)	Directe	Grad. Conj (avec produit scalaire N°2)	Directe	Grad. Conj (avec produit scalaire N°2)	Directe	Grad. Conj (avec produit scalaire N°2)	
Coordonnée	r	z								
	.0	.0	.1781	.0	.1781	.0	.0	-.177	-.366	
	.125	"	.2969	.3828	.2969	.314	.314	-1.921	-1.935	
	.250	"	-4.3236	4.5	-4.3236	4.464	4.464	-7.940	-7.975	
	.375	"	-17.0502	15.8203	-17.0502	17.162	17.162	-18.874	-18.866	
	.5	"	-34.6607	32.	-34.6607	34.753	34.753	-30.934	-30.899	
	.625	"	-47.1060	43.945	-47.1060	47.163	47.163	-36.514	-36.514	.156.
	.750	"	-42.7667	40.5	-42.7667	42.792	42.792	-29.732	-29.759	
	.875	"	-12.8160	18.7578	-12.8160	12.818	12.818	-15.746	-15.566	
	1.	"	11.60	.0	11.60	11.604	11.604	-10.272	-7.12	
	.0	.5	.30	.0	.30	1.8×10^{-19}	1.8×10^{-19}	-.260	-2.2×10^{-19}	
	.125	"	3.499	4.4336	3.499	3.244	3.244	-4.499	-4.47	
	.250	"	5.165	5.75	5.165	4.989	4.989	-5.806	-5.80	
	.375	"	6.749	6.7852	6.749	6.862	6.862	6.732	6.735	
	.5	"	31.374	32.	31.374	31.437	31.437	31.971	31.968	
	.625	"	55.749	56.35	55.749	55.77	55.77	56.361	56.354	
	.750	"	57.200	56.25	57.200	55.20	55.20	56.314	56.302	
	.875	"	8.321	3.2539	8.321	8.293	8.293	3.345	3.350	
	1.	"	115.128	128.	115.128	115.194	115.194	-102.035	-101.998	

bleau 4.2.24

eurs de la

RTICITE

points dont les
rdonnées sont (r,z)

Opérateur		B												
Solution		exacte					approchée							
Élément		Lagrange 1					Lagrange 2							
Méthode		Directe		Grad. Conj. (avec produit scalaire N°2)			Directe		Grad. Conj. (avec produit scalaire N°2)					
Coordonnées		r	z											
		.0	.125	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
		.125	"	.22897 × 10 ⁻²	.2979 × 10 ⁻²	.3152 × 10 ⁻²	.2979 × 10 ⁻²	.3152 × 10 ⁻²	.245 × 10 ⁻²	.245 × 10 ⁻²	.245 × 10 ⁻²	.245 × 10 ⁻²	.245 × 10 ⁻²	.245 × 10 ⁻²
		.250	"	.2692 × 10 ⁻¹	.3266 × 10 ⁻¹	.3325 × 10 ⁻¹	.3266 × 10 ⁻¹	.3325 × 10 ⁻¹	.274 × 10 ⁻²	.274 × 10 ⁻²	.274 × 10 ⁻²	.274 × 10 ⁻²	.274 × 10 ⁻²	.274 × 10 ⁻²
		.375	"	.9463 × 10 ⁻¹	.1015	.1022	.1015	.1022	.9461 × 10 ⁻¹	.9461 × 10 ⁻¹	.9461 × 10 ⁻¹	.9461 × 10 ⁻¹	.9461 × 10 ⁻¹	.9461 × 10 ⁻¹
		.5	"	.1914	.1902	.1907	.1902	.1907	.1902	.1902	.1902	.1902	.1902	.1902
		.625	"	.2629	.2460	.2463	.2460	.2463	.2605	.2605	.2605	.2605	.2605	.2605
		.750	"	.2423	.2120	.2122	.2120	.2122	.2401	.2401	.2401	.2401	.2401	.2401
		.875	"	.1122	.8510 × 10 ⁻¹	.8514 × 10 ⁻¹	.8510 × 10 ⁻¹	.8514 × 10 ⁻¹	.1127	.1127	.1127	.1127	.1127	.1127
		1.	"	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
		.5	"	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
		.125	"	.1196 × 10 ⁻¹	.1054 × 10 ⁻¹	.1244 × 10 ⁻¹	.1054 × 10 ⁻¹	.1244 × 10 ⁻¹	.1210 × 10 ⁻¹	.1210 × 10 ⁻¹	.1210 × 10 ⁻¹	.1210 × 10 ⁻¹	.1210 × 10 ⁻¹	.1210 × 10 ⁻¹
		.250	"	.1406	.1384	.1419	.1384	.1419	.1402	.1402	.1402	.1402	.1402	.1402
		.375	"	.4944	.4652	.4690	.4652	.4690	.4931	.4931	.4931	.4931	.4931	.4931
		.5	"	1.	.9238	.9270	.9238	.9270	.9978	.9978	.9978	.9978	.9978	.9978
		.625	"	.1773 × 10 ¹	.1259 × 10 ¹	.1261 × 10 ¹	.1259 × 10 ¹	.1261 × 10 ¹	.1370 × 10 ¹	.1370 × 10 ¹	.1370 × 10 ¹	.1370 × 10 ¹	.1370 × 10 ¹	.1370 × 10 ¹
		.750	"	.1266 × 10 ¹	.1159 × 10 ¹	.1160 × 10 ¹	.1159 × 10 ¹	.1160 × 10 ¹	.1263 × 10 ¹	.1263 × 10 ¹	.1263 × 10 ¹	.1263 × 10 ¹	.1263 × 10 ¹	.1263 × 10 ¹
		.875	"	.5862	.5403	.5407	.5403	.5407	.5830	.5830	.5830	.5830	.5830	.5830
		1.	"	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n

Tableau 4.2.25

urs de la
de COURANT
points dont les
données sont (r,z)

Tableau 4.2.26 (Opérateur B)

		Lagrange 1			Lagrange 2		
		τ_{h1}	τ_{h2}	τ_{h3}	τ_{h1}	τ_{h2}	τ_{h3}
Grad. Conjugué (*)	err(λ)	0.931	0.597	0.149	0.396	0.267	0.159
	err(ω)	0.859	0.492	0.120	0.322	0.218	0.64×10^{-1}
	err(ψ)	0.693	0.442	0.78×10^{-1}	0.207	0.54×10^{-1}	0.47×10^{-2}
	M^{GC}	16()	22()	24 (26)	24 (22)	36(24)	52 (32)
Directe	err(λ)	1.03	0.626	0.152	0.427	0.284	0.161
	err(ω)	0.94	0.518	0.121	0.351	0.232	0.65×10^{-1}
	err(ψ)	0.77	0.463	0.8×10^{-1}	0.219	0.57×10^{-1}	0.48×10^{-2}
	M^P	20	22	68	36	40	128
M^{GC}/M^P		4/5()	1()	0.5 (0.38)	0.666(0.611)	0.9 (0.6)	0.40(0.25)

Legende : M^{GC} : Nbre de prob. de Dirichlet à résoudre pour la meth. Grad. Conj.
 pour avoir $err(\lambda) \leq 10^{-5}$ (resp. $err_2(\lambda) \leq 10^{-5}$)
 M^P : Nbre de prob. de Dirichlet à résoudre pour la meth. directe.

Tableau 4.2.27 (Opérateur H)

		Lagrange 1			Lagrange 2		
		τ_{h1}	τ_{h2}	τ_{h3}	τ_{h1}	τ_{h2}	τ_{h3}
Grad. Conj. (*)	err(λ)	0.834	0.517	0.127	0.309	0.360	0.147
	err(ω)	0.755	0.457	0.102	0.264	0.282	0.58×10^{-1}
	err(ψ)	0.255	0.285	0.68×10^{-1}	0.166	0.65×10^{-1}	0.39×10^{-2}
	M^{4c}	16	24	42	30	26	54
Méthode Directe	err(λ)	0.866	0.529	0.127	0.319	0.228	0.152
	err(ω)	0.783	0.460	0.102	0.276	0.189	0.79×10^{-1}
	err(ψ)	0.310	0.299	0.69×10^{-1}	0.162	0.47×10^{-1}	0.62×10^{-2}
	M^p	20	22	68	36	40	128

Legende : M^{4c} : Nbre. de prob. de Dirichlet à résoudre pour la méth. du Grad. Conj.
 M^p : Nbre. de prob. de Dirichlet à résoudre pour la méth. directe.
 (*) avec le produit scalaire n°2

A N N E X E C

TABLEAUX DES RESULTATS CORRESPONDANTS
AUX ESSAIS NUMERIQUES POUR LES
EQUATIONS DE NAVIER-STOKES
AXISYMETRIQUES

Iteration →	1	2	3	4	5	6	7	8
$\rho \downarrow$								
0.5	0.14×10^{-1}	0.97×10^{-3}	0.59×10^{-3}	0.34×10^{-2}	0.19×10^{-2}	0.10×10^{-2}	0.57×10^{-2}	0.32×10^{-3}
0.75	0.37×10^{-1}	0.79×10^{-2}	0.23×10^{-2}	0.37×10^{-3}	0.24×10^{-3}			
0.85	0.37×10^{-1}	0.84×10^{-2}	0.19×10^{-2}					
1.0	0.43×10^{-1}	0.40×10^{-2}	0.39×10^{-3}	0.36×10^{-4}	0.34×10^{-5}	0.31×10^{-6}		
1.5	0.62×10^{-1}	0.22×10^{-1}						
2.	0.82×10^{-1}	0.79×10^{-1}						
2.5	0.11×10^1	0.19	0.17					

Tableau 4.3.1

Legende : { Problème de Navier-Stokes , Nbre. de Reynolds (Re) : 1.00

Opérateur B

élément : lag1

triangulation : Z_{41}

VORTICITE					
r	z	Solution Exacte	Re = 10 ⁻²	Re = 10 ⁻¹	Re = 1.
0	0.5	0.0	- 0.3801	- 0.3736	- 0.0137
0.125	»	- 4.4336	- 3.3981	- 3.5371	- 3.9800
0.250	»	- 5.75	- 5.0971	- 5.2037	- 9.4980
0.375	»	6.7852	6.7874	6.6141	- 1.8039
0.5	»	32.	31.3843	31.1422	22.2116
0.625	»	56.35	55.7386	55.5028	49.0813
0.750	»	56.25	57.1875	57.0233	52.7600
0.875	»	3.2539	8.3357	8.3907	7.6806
1.	»	-128.	- 115.0974	- 114.404	- 103.461

FC. DE COURANT					
0	0.5	0.	0.	0.	0.
0.125	»	0.1196 × 10 ⁻¹	0.1092 × 10 ⁻¹	0.1103 × 10 ⁻¹	0.81 × 10 ⁻²
0.250	»	0.1406	0.1394	0.1391	0.993 × 10 ⁻¹
0.375	»	0.4944	0.4664	0.4643	0.3737
0.5	»	1.	0.9244	0.9198	0.7970
0.625	»	1.3733	1.2593	1.2530	1.1285
0.750	»	1.2666	1.1585	1.1525	1.0526
0.875	»	0.5862	0.5401	0.5368	0.4865
1.	»	0.	0.	0.	0.

Cas : Triang. Z_{h3}, élém. lag₁, ordre d'int. 02, prob. Navier - Stokes

Tableau 4.3.2

VORTICITE					
r	ξ	Solution Exacte	$Re = 10^{-2}$	$Re = 10^{-1}$	$Re = 1.$
0.	0.	.0	.1663	.4108 $\times 10^{-1}$	-.1235 $\times 10^1$
0.125	"	-.3828	.3216	.6092	.3693 $\times 10^1$
0.250	"	-.45 $\times 10^1$	-.4140 $\times 10^1$	-.2296 $\times 10^1$.1621 $\times 10^2$
0.375	"	-.1582 $\times 10^2$	-.1670 $\times 10^2$	-.1330 $\times 10^2$.1855 $\times 10^2$
0.5	"	-.32 $\times 10^2$	-.3423 $\times 10^2$	-.3014 $\times 10^2$.7094 $\times 10^1$
0.625	"	-.4395 $\times 10^2$	-.4672 $\times 10^2$	-.4319 $\times 10^2$	-.1043 $\times 10^2$
0.750	"	-.405 $\times 10^2$	-.4252 $\times 10^2$	-.4044 $\times 10^2$	-.2055 $\times 10^2$
0.875	"	-.1876 $\times 10^2$	-.1277 $\times 10^2$	-.1239 $\times 10^2$	-.8918 $\times 10^1$
1.	"	.0	.1155 $\times 10^2$.1113 $\times 10^2$.7215 $\times 10^1$

Tableau 4.3.3

Fc. de COURANT					
r	ξ	Solution Exacte	$Re = 10^{-2}$	$Re = 10^{-1}$	$Re = 1$
0.125	0.250	0.	0.	0.	0.
0.125	"	.6729 $\times 10^{-2}$.7066 $\times 10^{-2}$.4335 $\times 10^{-2}$	-.2407 $\times 10^{-1}$
0.250	"	.7910 $\times 10^{-1}$.8517 $\times 10^{-1}$.6761 $\times 10^{-1}$	-.1133
0.375	"	.2781	.2770	.2424	-.1025
0.5	"	.5625	.5365	.4927	.7019 $\times 10^{-1}$
0.625	"	.7725	.7150	.6747	.2910
0.750	"	.7119	.6398	.6133	.3593
0.875	"	.3297	.2806	.2711	.1805
1.	"	.0	.0	.0	.0

Itération	1	2	3	4
arrêt ₁ (λ)	1.	0.14×10^{-2}	0.21×10^{-5}	0.25×10^{-7}
err(λ)	0.1496	0.1498	0.1498	0.1495
arrêt ₁ (ω)	1.	0.16×10^{-2}	0.31×10^{-5}	0.157×10^{-7}
err(ω)	0.1182	0.1190	0.1190	0.11881
arrêt ₁ (ψ)	1.	0.98×10^{-3}	0.14×10^{-5}	0.58×10^{-8}
err(ψ)	0.79×10^{-1}	0.79×10^{-1}	0.79×10^{-1}	0.79×10^{-1}

Tableau 4.3.5 (TRe = 10^{-2})

Itération	1	2	3	4
arrêt ₁ (λ)	1.	0.53×10^{-2}	0.195×10^{-4}	0.75×10^{-6}
err(λ)	0.1485	0.1509	0.150889	0.150888
arrêt ₁ (ω)	1.	0.63×10^{-2}	0.53×10^{-4}	0.134×10^{-5}
err(ω)	0.1423	0.1453	0.14526	0.14526
arrêt ₁ (ψ)	1.	0.318×10^{-2}	0.49×10^{-4}	0.88×10^{-6}
err(ψ)	0.8305×10^{-1}	0.8389×10^{-1}	0.8392×10^{-1}	0.8393×10^{-1}

Tableau 4.3.6 (TRe = 10^{-1})

Iteration	1	2	3	4
arrêt ₁ (λ)	1.	0.61×10^{-1}	0.75×10^{-2}	0.399×10^{-3}
err(λ)	0.5887	0.6436	0.6355	0.63589
arrêt ₁ (ω)	1.	0.99×10^{-1}	0.21×10^{-1}	0.1506×10^{-2}
err(ω)	0.7017	0.7710	0.7520	0.7535
arrêt ₁ (ψ)	1.	0.7248×10^{-1}	0.1577×10^{-1}	0.93×10^{-3}
err(ψ)	0.4176	0.4591	0.4448	0.4463
Iteration	5	6	7	8
arrêt ₁ (λ)	0.156×10^{-3}	0.38×10^{-4}	0.84×10^{-5}	
err(λ)	0.6358	0.635819	0.635825	
arrêt ₁ (ω)	0.366×10^{-3}	0.924×10^{-4}	0.246×10^{-4}	
err(ω)	0.7533	0.7532	0.7533	
arrêt ₁ (ψ)	0.2170×10^{-3}	0.61×10^{-4}	0.176×10^{-4}	
err(ψ)	0.4462	0.44613	0.44615	

Tableau 4.3.7

(Re = 1.)

Itér.	1	2	3	4	5
arrêt, (λ)	1.	0.77	0.63	0.98	1.002
err (λ)	2.66	4.21	7.3	25.49	1.7×10^3
arrêt, (ω)	1.	0.93	0.92	1.02	1.005
err (ω)	3.30	5.72	12.28	61.42	2.9×10^3
arrêt, (ψ)	1.	0.85	1.03	1.01	1.002
err (ψ)	2.03	2.50	4.88	31.09	1.2×10^3

Tableau 4.3.8

(Re = 5.)

Itér.	2	3	4	5	6
arrêt, (λ)	0.969	0.982	0.999	1.000	0.999
err (λ)	2.4×10^2	2.8×10^2	1.4×10^6	8.1×10^{10}	2.7×10^{22}
arrêt, (ω)	1.01	1.002	0.999	1.00	1.00
err (ω)	3.72×10^1	5.77×10^2	2.8×10^6	1.5×10^{11}	5.1×10^{22}
arrêt, (ψ)	1.07	1.002	1.000	1.00	1.00
err (ψ)	9.72	1.83×10^2	1.73×10^5	8.6×10^{10}	2.5×10^{21}

Tableau 4.3.9

(Re = 10.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BERTRAND
"Analyse et Résolution Numérique de Problèmes de Fluides en Rotation"
Thèse Docteur Ingénieur Université Claude Bernard (Lion I) 1980.
- [2] P. BOLLEY, J. CAMUS :
"Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids".
Séminaires d'Analyse Fonctionnelle de l'Université de Rennes (1968-1969).
- [3] J.F. BURGAT
"Numerical study of a dual iterative method for solving a finite
element approximation of the biharmonic equation".
Comp. Meth. Appl. Mech. Engng . 9 (1976)
- [4] M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX, P. PERRIER, O. PIRONNEAU,
G. POIRIER
"Application of optimal control and finite element methods to the
calculation of transonic flows and incompressible viscous flows"
IRIA Laboria, rapport de recherche n° 294 (1978).
- [5] J. CEA
"Optimisation : Théorie et Algorithmes"
Dunod, Paris 1961
- [6] V. GIRAULT, P.A. RAVIART
"Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations"
Lecture Notes in Mathematics. n° 749. Springer-Verlag.
- [7] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU
"Numerical Methods for the first biharmonic problem and the
two-dimensional Stokes problem"
SIAM STREV Vol. 21, n° 2, (1979)
- [8] J. HAPPEL, H.B. BRENNER
"Low Reynolds Number Hydrodynamics"
Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. (1965)
- [9] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA

- [10] B. MERCIER, G. RAUGEL
"Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique
par éléments finis en r, z et séries de Fourier en θ "
à paraître dans la revue R.A.I.R.O. d'analyse numérique.
- [11] J. NECAS
"Les méthodes directes en théories des équations elliptiques"
Ed. Masson (1967).
- [12] A. PONCET
"Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis"
Thèse Docteur es Sciences Mathématiques. Université de Grenoble I
INPG (1979)
- [13] M. VIDRASCU
"Sur la solution numérique du problème de Dirichlet pour l'opérateur
biharmonique"
Thèse 3ème Cycle Math. Appli. Analyse Numérique, Paris VI (1978)
- [14] O.C. ZIENKIEWICZ
"The Finite Element Method"
in Engineering Science. Mc. Graw Hill London (1971).

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 27 mai 1982

Le Président de la thèse

N. GASTINEL



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 8.6.82

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

M. TANC



