



Contributions à la modélisation des structures minces et d'assemblages multicouches

Michele Serpilli

► To cite this version:

Michele Serpilli. Contributions à la modélisation des structures minces et d'assemblages multicouches. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2008. Français. NNT: . tel-00303320

HAL Id: tel-00303320

<https://theses.hal.science/tel-00303320>

Submitted on 21 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II

Spécialité : MÉCANIQUE ET GÉNIE CIVIL
Ecole Doctorale : INFORMATIONS, STRUCTURES ET SYSTÈMES

Présentée par

Michele SERPILLI

Sujet de la thèse :

**CONTRIBUTIONS À LA MODÉLISATION DES
STRUCTURES MINCES ET
D'ASSEMBLAGES MULTICOUCHES**

Soutenue le 13 Juin 2008 devant le jury composé de :

Mme Bernadette MIARA	Rapporteur
M. Roberto PARONI	Rapporteur
M. Dominique CHAPELLE	Examineur
M. Giuseppe GEYMONAT	Examineur
M. Stefano LENCI	Examineur
M. René MOTRO	Examineur
Mme Françoise KRASUCKI	Directrice de Thèse
M. Philippe G. CIARLET	Co-directeur de Thèse

Remerciements

Les travaux qui vont suivre sont le fruit de collaborations et d'échanges entre différentes personnes que je voudrais saluer et remercier.

En premier lieu, je souhaite exprimer ma gratitude à Françoise Krasucki et Giuseppe Geymonat qui ont dirigé ce travail de thèse. Je leur suis reconnaissant pour m'avoir proposé des sujets de recherche très riches tout en me laissant libre dans mon travail, dans mes idées et propositions. Leur soutien et amitié ont été précieux tout au long de ma thèse.

Une partie de ma thèse a été effectuée dans le Departement of Mathematics de la City University de Honk Kong à l'aide d'un Strategic Research Grant [Project No. 7002222]. Je tiens à remercier très vivement Philippe Ciarlet pour avoir su me guider malgré la distance dans mon travail, pour sa confiance et sa disponibilité lors de mon séjour à la City University de Hong Kong. Je remercie aussi Liliana Gratie pour sa collaboration scientifique, pour son accueil et sa générosité.

En second lieu, je remercie Bernadette Miara et Roberto Paroni d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et d'avoir consacré de leur temps à la lecture de mon manuscrit.

Je remercie également René Motro, Dominique Chapelle et Stefano Lenci qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse. Je tiens à remercier tout particulièrement Stefano Lenci pour son soutien durant les trois ans à Montpellier, pour son aide et son honnêteté intellectuelle qui me sont si chères.

Je remercie Messieurs René Motro et Pierre Alart, ancien directeur et directeur actuel du LMGC, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler dans ce Laboratoire. Je tiens à remercier les membres du LMGC, en particulier Mesdames Elisabeth Boulet et Reine Bonnet-Causse pour leur extrême gentillesse et leur efficacité.

Je souhaite remercier ensuite les personnes avec qui j'ai partagé ma "vie" de Laboratoire, Anne-Laure, Chiara, Simone et Marine, pour leur soutien, leur encouragement et les interminables pauses café et fous rires.

Enfin, et surtout, je remercie mes parents, mon grand-père, Thomas, Cinzia et mes amis loins en Italie pour m'avoir soutenu et avoir toujours été aussi proches dans tous les instants.

Table des matières

Introduction	7
Principales notations	9
I Préliminaires	11
1 Géométrie Différentielle Tridimensionnelle	13
1.1 Les coordonnées curvilignes	13
1.2 Dérivée covariante d'un champ de vecteur	14
1.3 Conditions d'existence d'une immersion pour un tenseur métrique donné	15
1.4 Problème de l'élasticité linéaire tridimensionnelle en coordonnées curvilignes . .	16
2 Géométrie Différentielle des Surfaces	19
2.1 Les coordonnées curvilignes pour une surface	19
2.2 Le tenseur de courbure pour une surface	20
2.3 Applications à quelques surfaces simples	21
2.3.1 Le cylindre circulaire	21
2.3.2 La sphère	22
2.3.3 Le parabolioïde hyperbolique	23
2.4 Dérivée covariante d'un champ de vecteur défini sur une surface	24
2.5 Condition d'existence d'une surface avec première et deuxième forme fonda- mentale données	25
2.6 Les tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure pour une surface . .	26
2.6.1 Cas du cylindre circulaire	27
2.6.2 Cas de la sphère	27
3 Théorie Asymptotique des Coques Élastiques	29
3.1 Le modèle linéaire de coque de Koiter	29
3.2 Comportement asymptotique	30
3.2.1 Coques à flexion pure non inhibée	31
3.2.2 Coques à flexion pure inhibée	32
4 Les Équations de Compatibilité de Saint-Venant et la Formule de Cesàro- Volterra	39
4.1 Position du problème	39
4.2 La compatibilité : les théorèmes classiques de Saint-Venant et de Donati	40

4.3	Le théorème de Saint-Venant en coordonnées curvilignes	43
4.4	Comparaison avec les équations de Saint-Venant en coordonnées Cartésiennes	44
4.5	Les équations de compatibilité de Saint-Venant pour une surface	46
4.6	La formule intégrale de Cesàro-Volterra	48
II Dédution Purement Géométrique de la Cinématique des Structures Minces		51
5	Dédution Géométrique de la Cinématique des Plaques	53
5.1	Introduction	53
5.2	Dédution de la cinématique de Kirchhoff-Love	54
5.2.1	Les équations de compatibilité : développements asymptotiques	54
5.2.2	La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques	56
5.2.3	La fonction d'Airy	58
5.3	Dédution de la cinématique de Reissner-Mindlin	58
5.3.1	Les équations de compatibilité : développements asymptotiques	58
5.3.2	La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques	59
5.4	Conclusions	61
G. Geymonat, F. Krasucki, M. Serpilli, The kinematics of plate models : a geometrical deduction, J. Elasticity, 88, 299-309, (2007)		62
6	Dédution Géométrique de la Cinématique des Surfaces et des Coques	75
6.1	Introduction	75
6.2	La formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes	75
6.2.1	Deux exemples simples : l'identité et la rotation	77
6.3	La géométrie d'une coque	78
6.4	Dédution de la cinématique de Kirchhoff-Love généralisée	79
6.4.1	La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques	79
6.5	Dédution de la cinématique de Naghdi	83
6.5.1	La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques	83
6.6	Conclusions	86
III Étude Asymptotique d'Assemblages Multicouches		87
7	Inclusions Élastiques de Grande Rigidité de Type Coque	89
7.1	Introduction	89
7.2	Inclusion de type coque	90
7.2.1	Problème physique en coordonnées curvilignes	90
7.2.2	Problème physique posé dans un domaine fixe	91
7.2.3	Préliminaires géométriques et mécaniques pour la couche de type coque	93
7.2.4	Développements asymptotiques et problèmes limites	93
7.2.5	Forme locale des conditions de transmission	99
7.3	Conclusions	101
A.L. Bessoud, F. Krasucki, M. Serpilli, Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 346, 697-702, (2008)		103

8 Modèles Limites pour Poutres Multicouches	109
M. Serpilli, S. Lenci, Limit models in the analysis of three different layered elastic strips, Eur. J. Mech. A Solids, 27, 247-268, (2008)	111
Conclusions et Perspectives	133
Bibliographie	135

Introduction

Nous donnons dans ce document une contribution à la modélisation des structures minces et des assemblages multicouches. Cette thèse est divisée en deux parties indépendantes : la première partie concerne la déduction purement géométrique de la cinématique des modèles classiques de plaque et de coque (chapitres 5 et 6) ; la deuxième partie est relative à l'étude du comportement asymptotique d'une inclusion de type coque de grande rigidité dans un milieu tridimensionnel (chapitre 7) et de trois différentes poutres multicouches (chapitre 8).

La déduction géométrique de la cinématique des structures minces s'appuie sur la forte analogie qui existe entre la théorie de l'élasticité linéaire (nonlinéaire) et la géométrie différentielle. La théorie de l'élasticité étudie les déformations possibles des solides élastiques soumis à des forces extérieures. Ce problème peut être transposé en géométrie différentielle avec l'étude des immersions, qui sont l'équivalent des déformations, définies sur une variété différentielle, qui représente le solide dans une configuration de référence. Pour une présentation plus approfondie sur quelques relations entre la mécanique des milieux continus et la géométrie, on renvoie le lecteur à la thèse de Doctorat de S. Mardare [31].

Dans ce mémoire de thèse, le lien entre ces deux disciplines est donné par le théorème de Saint-Venant et la formule intégrale de Cesàro-Volterra. Le théorème de Saint-Venant (voir, par exemple, M. E. Gurtin [29]) donne des conditions de compatibilité qu'un tenseur symétrique donné $\mathbf{e}$ doit satisfaire pour être écrit comme le champ de déformation linéarisé d'un certain champ de déplacement $\mathbf{v}$, c'est-à-dire $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$. En effet, ce théorème peut être considéré comme la version linéarisée du théorème de Riemann-Christoffel sur les variétés Riemanniennes plates. L'intégrale de Cesàro-Volterra (voir E. Cesàro [9] et V. Volterra [43]) représente une solution explicite du système différentiel $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = \mathbf{e}$: cette formule exprime le déplacement $\mathbf{v}$ comme une intégrale de ligne sur un chemin arbitraire d'une fonction qui ne dépend que du champ de matrice $\mathbf{e}$ donné.

La déduction géométrique de la cinématique des modèles classiques de plaque et de coque est ainsi obtenue à partir des équations de compatibilité de Saint-Venant et de la formule de Cesàro-Volterra : le fait que cette déduction ne se base que sur des considérations géométriques et n'utilise aucun renseignement dérivant de la loi constitutive du matériau, de l'équilibre ou encore du chargement, lui donne un caractère original.

On considère tout d'abord un domaine de type plaque simplement connexe de petite épaisseur, définie par un paramètre petit ε . Afin d'étudier le comportement asymptotique de la déformation et du déplacement lorsque l'épaisseur tend vers zéro, on applique un développement asymptotique formel aux conditions de Saint-Venant et à la formule intégrale de Cesàro-Volterra. En caractérisant les termes principaux du développement, on obtient les hypothèses cinématiques des deux modèles classiques de plaque : le modèle de Kirchhoff-Love et le modèle de Reissner-Mindlin, (voir l'article G. Geymonat et al. [27]).

Dans le cas de la déduction géométrique de la cinématique des coques, la méthode est la même que celle décrite précédemment. On considère un développement asymptotique formel de la formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes, adaptée au cas d'une géométrie de type coque. On caractérise les termes d'ordre inférieur du développement et on retrouve la cinématique des modèles de Kirchhoff-Love généralisé dans le cas des coques et de Naghdi, (voir l'article sur la formule de Cesàro-Volterra pour une surface P.G. Ciarlet et al. [19]).

Dans la deuxième partie de la thèse, on considère le problème lié à la modélisation d'une inclusion de type coque dans un milieu tridimensionnel et l'analyse asymptotique de trois différentes poutres multicouches.

En ce qui concerne l'inclusion de grande rigidité, on utilise l'approche à deux champs analogue à D. Chapelle et A. Ferent [10]. On étudie la situation géométrique où la couche mince est de type coque et ses matériaux sont élastiques linéaires isotropes avec les modules élastiques d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^p}$, $p = 1$ ou $p = 3$, par rapport aux modules du solide qui l'entoure. Quand $p = 1$ l'énergie surfacique d'interface du problème limite correspond à l'énergie d'une coque membranaire. Quand $p = 3$ l'énergie surfacique d'interface associée au problème limite correspond à l'énergie d'une coque en flexion pure.

Ces premiers résultats sont le sujet d'une Note, A.L. Bessoud et al. [6], jointe à la thèse, et ils sont en cours d'approfondissement en ce qui concerne l'étude de la convergence du problème tridimensionnel vers le problème limite et le cadre fonctionnel pour l'existence et l'unicité des solutions des problèmes variationnels.

Enfin, on a poursuivi une analyse asymptotique dans le cas de trois différentes poutres stratifiées. Pour ce sujet, on a joint directement l'article correspondant (M. Serpilli et S. Lenci [41]). Le but de cette partie est la justification mathématique des modèles classiques, utilisés dans la pratique de l'ingénieur, des poutres multicouches. On essaye de couvrir divers types de modélisation des structures stratifiées en changeant les rapports d'épaisseur et de rigidité entre les différentes couches. Le premier modèle étudié est celui d'une poutre à trois couches dont les épaisseurs et les rigidités de chaque couche ont des ordres de grandeur comparables : ceci est le cas, par exemple, des poutres en bois lamellaire. Le deuxième modèle est une poutre dont la couche intermédiaire est plus faible par rapport aux adhérents : ceci est le cas du collage des poutres avec connecteurs déformables. Le dernier modèle concerne une poutre stratifiée dont la couche du milieu est plus rigide et mince par rapport à la couche supérieure et inférieure : ceci représente le cas du soudage ou du renforcement structurel.

À l'aide de la méthode asymptotique, on étudie les problèmes limites pour chaque cas, en retrouvant des modèles déjà utilisés dans la littérature de l'ingénieur. En ce qui concerne le premier modèle, on établit la convergence forte dans H^1 de la solution du problème général vers la solution du problème limite. Dans le deuxième et troisième modèle, on n'obtient pas de résultats de convergence à cause probablement d'un problème de couche limite aux extrémités. Comme contre exemple, on donne une interprétation numérique de ce phénomène avec une simulation par éléments finis : on met en évidence que la convergence faible est impossible à obtenir étant donné que certaines normes des fonctions "explosent" à l'infini lorsque l'épaisseur de la poutre tend vers zéro.

Principales Notations

Les indices et exposants Latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, les indices et exposants Grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$. On utilise la convention d'Einstein sur la somme des indices répétés.

Tous les espaces, matrices, etc., sont réels.

- $\mathbb{M}^n$: ensemble des matrices carrées d'ordre n .
- $\mathbb{A}^n$: ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .
- $\mathbb{S}^n$: ensemble des matrices symétriques d'ordre n .
- $\mathbb{S}_{>}^n$: ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n .
- $\mathbb{O}^n$: ensemble des matrices orthogonales d'ordre n .
- $\delta_j^i = \delta_{ij} = \delta^{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$: symboles de Kronecker.
- $\varepsilon_{ilk} = \varepsilon^{ilk} := \begin{cases} +1, & \text{si } \{i, \ell, k\} \text{ est une permutation paire de } \{1, 2, 3\} \\ -1, & \text{si } \{i, \ell, k\} \text{ est une permutation impaire de } \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{si au moins deux indices sont égaux} \end{cases}$: opérateurs d'orientation de Ricci.
- (t_{ij}) : matrice $\mathbb{M}^3$ d'éléments t_{ij} , où le premier indice i est l'indice de ligne.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$: produit scalaire Euclidien, norme Euclidienne, produit vectoriel.
- $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{Cof} \mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}$: Transposée, cofacteur, déterminant de $\mathbf{A}$.
- $\nabla \mathbf{A}$, $\text{div} \mathbf{A}$, $\mathbf{CURL} \mathbf{A}$: Gradient, divergence, rotationnel de $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{E}^3$: espace Euclidien tridimensionnel.
- $\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}^i$: base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
- $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$: coordonnées Cartésiennes d'un point $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$.
- (x_1, x_2, x_3) : coordonnées curvilignes d'un point $\mathbf{x} \in \Omega$.
- Θ : immersion.
- $\mathbf{g}_i$ (resp. $\mathbf{g}^i$) : vecteurs de la base covariante (resp. contravariante).
- $[\mathbf{g}^j]_i$: composante i -ème du vecteur $\mathbf{g}^j$.
- g_{ij} (resp. g^{ij}) : composantes covariantes (resp. contravariantes) du tenseur métrique.
- Γ_{ijq} , Γ_{ij}^p : symboles de Christoffel de première et seconde espèce.
- $\mathcal{R}_{qijk}$: composantes covariantes du tenseur de courbure de Riemann.
- $\mathbf{a}_\alpha$ (resp. $\mathbf{a}^\alpha$) : vecteurs de la base covariante (resp. contravariante) du plan tangent à la surface.
- $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$: vecteur unitaire normal à la surface.
- $a_{\alpha\beta}$ (resp. $a^{\alpha\beta}$) : composantes covariantes (resp. contravariantes) de la première forme fondamentale.
- $b_{\alpha\beta}$ (resp. b_β^α) : composantes covariantes (resp. mixtes) de la deuxième forme fondamentale.
- $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$: tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure.

- $[f]^{\text{lin}}$: partie linéaire de f .
- $\mathbf{e} = \nabla_s \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$: tenseur de déformation linéarisé.
- $f|_U$: restriction à U de la fonction f .
- id_U : application identité de l'ensemble U .
- $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$: operateur de dérivée partielle d'ordre $m \geq 1$, où $\alpha = (\alpha_i)$ est un multi-indice qui satisfait $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$.
- $\partial_i := \partial/\partial x_i$, $\partial_{ij} := \partial^2/\partial x_i \partial x_j$: dérivées partielles de premier et deuxième ordre
- $\mathcal{C}^0(X; Y)$: espace des fonctions continues de $X \subset \mathbb{R}^3$ à l'espace normé Y .
- $\mathcal{C}^0(X)$: espace des fonctions réelles continues, $Y = \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^m(\Omega)$: espace des fonctions réelles qui sont m fois différentiables dans Ω .
- $L^p(\Omega; Y)$: espace de Lebesgue, $p \geq 1$.
- $\|f\|_{L^p(\Omega; Y)} := \left\{ \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p}$.
- $W^{m,p}(\Omega; Y)$: espace de Sobolev, $m \geq 1$, $p \geq 1$.
- $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega; Y)} := \left\{ \int_{\Omega} (|f(\mathbf{x})|^p + \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f(\mathbf{x})|^p) d\mathbf{x} \right\}^{1/p}$.
- $H^m(\Omega; Y) := W^{m,2}(\Omega; Y)$.
- $\|f\|_{0,\Omega} := \|f\|_{L^2(\Omega)}$.
- $\|f\|_{m,\Omega} := \|f\|_{H^m(\Omega)}$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions infiniment dérivables à support compact inclus dans Ω .
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: espace des distributions sur Ω .
- $H_0^m(\Omega)$: fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.
- $H^{-m}(\Omega)$: espace dual de $H_0^m(\Omega)$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: crochets de dualité.
- A^{ijkl} : composantes contravariantes du tenseur d'élasticité.
- $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$: composantes contravariantes du tenseur d'élasticité d'une surface.
- $\llbracket \sigma^{ij} \rrbracket$: saut des contraintes en ω entre Ω^+ et Ω^-

Première partie

Préliminaires

Chapitre 1

Géométrie Différentielle Tridimensionnelle

1.1 Les coordonnées curvilignes

On considère un espace Euclidien tridimensionnel, identifié avec $\mathbf{E}^3$, et tel que les vecteurs $\hat{e}_i = \hat{e}^i$ forment une base orthonormée.

Étant donné un sous-ensemble ouvert $\hat{\Omega}$ de $\mathbf{E}^3$ et supposant qu'il existe un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et une application injective $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ tels que $\Theta(\Omega) = \hat{\Omega}$, alors, chaque point $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ peut être écrit comme

$$\hat{x} = \Theta(x), \quad x \in \Omega,$$

et les trois coordonnées x_i du point x sont appelées les **coordonnées curvilignes** de $\hat{x}$. Naturellement, il y a une infinité de façons de définir les coordonnées curvilignes dans un ouvert $\hat{\Omega}$ donné, selon le choix de l'ouvert Ω et de l'application Θ .

Des exemples de coordonnées curvilignes incluent les bien connues coordonnées cylindriques et sphériques.

On suppose que l'application $\Theta = \Theta_i \hat{e}^i : \bar{\Omega} \rightarrow \{\hat{\Omega}\}^- \subset \mathbf{E}^3$ soit différentiable en $x \in \bar{\Omega}$. Si δx est tel que $(x + \delta x) \in \bar{\Omega}$, donc

$$\Theta(x + \delta x) = \Theta(x) + \nabla \Theta(x) \delta x + o(\delta x),$$

où la matrice $\nabla \Theta(x) \in \mathbb{M}^3$ est définie :

$$\nabla \Theta(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 \Theta_1 & \partial_2 \Theta_1 & \partial_3 \Theta_1 \\ \partial_1 \Theta_2 & \partial_2 \Theta_2 & \partial_3 \Theta_2 \\ \partial_1 \Theta_3 & \partial_2 \Theta_3 & \partial_3 \Theta_3 \end{pmatrix} (x).$$

On définit les trois vecteurs $g_i(x) \in \mathbb{R}^3$ par

$$g_i(x) := \partial_i \Theta(x) = \begin{pmatrix} \partial_i \Theta_1 \\ \partial_i \Theta_2 \\ \partial_i \Theta_3 \end{pmatrix} (x).$$

$g_i(x)$ est l'i-ème vecteur colonne de la matrice $\nabla \Theta(x)$. Soit $\delta x = \delta x^i \hat{e}_i$, alors le développement de Θ en x peut être aussi écrit dans la façon suivante :

$$\Theta(x + \delta x) = \Theta(x) + \delta x^i g_i(x) + o(\delta x).$$

Si, en particulier, $\delta \mathbf{x}$ est de la forme $\delta \mathbf{x} = \delta t \hat{\mathbf{e}}_i$, où $\delta t \in \mathbb{R}$ et $\hat{\mathbf{e}}_i$ est une base des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, cette relation se réduit à

$$\Theta(\mathbf{x} + \delta t \hat{\mathbf{e}}_i) = \Theta(\mathbf{x}) + \delta t \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + o(\delta t). \quad (1.1)$$

Une application $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ est une **immersion** en $\mathbf{x} \in \Omega$ si elle est différentiable en $\mathbf{x}$ et la matrice $\nabla \Theta(\mathbf{x})$ est inversible ou, de façon équivalente, si les trois vecteurs $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \partial_i \Theta(\mathbf{x})$ sont linéairement indépendants.

En supposant que Θ soit une immersion en $\mathbf{x}$, les trois vecteurs $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ constituent la **base covariante** en $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x})$. Dans ce cas, la dernière relation (1.1) montre que chaque vecteur $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ est tangent à la i -ème ligne coordonnée qui passe par $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x})$, définie comme l'image par Θ des points de $\hat{\Omega}$ qui sont situés sur une ligne parallèle à $\hat{\mathbf{e}}_i$ passant par $\mathbf{x}$.

Revenant à l'incrément général $\delta \mathbf{x} = \delta x^i \hat{\mathbf{e}}_i$, on peut aussi déduire du développement de Θ en $\mathbf{x}$ que

$$|\Theta(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \Theta(\mathbf{x})|^2 = \delta \mathbf{x}^T \nabla \Theta(\mathbf{x})^T \nabla \Theta(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x} + o(|\delta \mathbf{x}|^2) = \delta x^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \delta x^j + o(|\delta \mathbf{x}|^2).$$

Donc, la partie principale par rapport à $\delta \mathbf{x}$ de la longueur entre $\Theta(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})$ et $\Theta(\mathbf{x})$ est $\{\delta x^i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \delta x^j\}^{1/2}$. Cette observation suggère de définir une matrice symétrique $(g_{ij}(\mathbf{x}))$ d'ordre trois, telle que

$$g_{ij}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = (\nabla \Theta(\mathbf{x})^T \nabla \Theta(\mathbf{x}))_{ij}.$$

Les éléments $g_{ij}(\mathbf{x})$ de cette matrice symétrique sont appelés les **composantes covariantes du tenseur métrique** en $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x})$.

Les vecteurs $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ étant linéairement indépendants, les neuf relations $\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = \delta_j^i$ définissent trois vecteurs, eux-mêmes linéairement indépendants, $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$, qui forment la **base contravariante** en $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x})$. De même, on peut définir les **composantes contravariantes du tenseur métrique** avec :

$$(g^{ij}(\mathbf{x})) := (g_{ij}(\mathbf{x}))^{-1}.$$

Pour conclure, on rappelle les relations fondamentales qui sont valides entre les vecteurs des bases covariante et contravariante et les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique. En conséquence, on a :

$$\begin{aligned} g_{ij}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad g^{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}^j(\mathbf{x}), \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) &= g_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = g^{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{g}_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

1.2 Dérivée covariante d'un champ de vecteur

On suppose d'avoir un champ de vecteur défini sur un ouvert $\hat{\Omega} \subset \mathbf{E}^3$ à travers ses composantes Cartésiennes $\hat{v}_i : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e. ce champ est défini par ses valeurs $\hat{v}_i \hat{\mathbf{e}}^i$, où les vecteurs $\hat{\mathbf{e}}^i$ appartiennent à un repère orthonormé de $\mathbf{E}^3$.

On considère maintenant que l'ouvert $\hat{\Omega}$ est équipé avec un système de coordonnées curvilignes, par l'intermédiaire d'une immersion $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbf{E}^3$, satisfaisante $\Theta(\Omega) = \hat{\Omega}$.

La façon appropriée pour passer d'un champ de vecteur en coordonnées Cartésiennes à un champ de vecteur en coordonnées curvilignes, est de définir trois fonctions $v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, les composantes covariantes du champ de vecteur, qui satisfont les égalités suivantes :

$$v_i(\mathbf{x}) \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) := \hat{v}_i(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{e}}^i, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

avec $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$, les vecteurs de la base contravariante.

Dans le théorème suivant, on décrit le concept de dérivée covariante d'un champ de vecteur.

Théorème 1.2.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ une immersion et $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme de Ω vers $\hat{\Omega} := \Theta(\Omega)$. Étant donné un champ de vecteur $\hat{v}_i \hat{e}^i : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en coordonnées Cartésiennes de composantes $\hat{v}_i \in \mathcal{C}^1(\hat{\Omega})$, soit $v_i \mathbf{g}^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ le même champ en coordonnées curvilignes.*

Alors $v_i \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $\forall \mathbf{x} \in \Omega$,

$$\hat{\partial}_j \hat{v}_i(\hat{\mathbf{x}}) = (v_{k||\ell} [\mathbf{g}^k]_i [\mathbf{g}^\ell]_j)(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}),$$

où

$$v_{i||j} := \partial_j v_i - \Gamma_{ij}^p v_p \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^p := \mathbf{g}^p \cdot \partial_i \mathbf{g}_j,$$

et

$$[\mathbf{g}^i(\mathbf{x})]_k := \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_k$$

dénote la i -ème composantes de $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$ sur la base $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}$.

Les fonctions $v_{i||j} := \partial_j v_i - \Gamma_{ij}^p v_p$ sont appelées les **dérivées premières covariantes** du champ de vecteur $v_i \mathbf{g}^i$. Ces fonctions peuvent être calculées aussi en utilisant les formules suivantes :

$$\partial_j (v_i \mathbf{g}^i) = v_{i||j} \mathbf{g}^i \iff v_{i||j} = \{\partial_j (v_k \mathbf{g}^k)\} \cdot \mathbf{g}_i.$$

Les fonctions $\Gamma_{ij}^p := \mathbf{g}^p \cdot \partial_i \mathbf{g}_j = \Gamma_{ji}^p$ représentent les **symboles de Christoffel de seconde espèce** et ils satisfont les relations suivantes :

$$\partial_i \mathbf{g}^p = -\Gamma_{ij}^p \mathbf{g}^j \quad \text{et} \quad \partial_j \mathbf{g}_q = \Gamma_{jq}^i \mathbf{g}_i.$$

Si l'espace affine $\mathbf{E}^3$ est identifié avec $\mathbb{R}^3$ et $\Theta = \mathbf{id}_\Omega$, la relation $\partial_j (v_i \mathbf{g}^i) = v_{i||j} \mathbf{g}^i$ se réduit à $\hat{\partial}_j (\hat{v}_i \hat{\mathbf{e}}^i) = (\hat{\partial}_j \hat{v}_i) \hat{\mathbf{e}}^i$. En conséquence, la dérivée covariante est une généralisation de la dérivée partielle en coordonnées Cartésiennes.

1.3 Conditions d'existence d'une immersion pour un tenseur métrique donné

Les composantes $g_{ij} = g_{ji} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ du tenseur métrique d'un ouvert $\Theta(\Omega) \subset \mathbf{E}^3$, défini par une immersion Θ , ne peuvent pas être des fonctions arbitraires. En effet, il est facile d'établir que les symboles de Christoffel du deuxième type satisfont les conditions de compatibilité suivantes :

$$\partial_j \Gamma_{ik}^q - \partial_k \Gamma_{ij}^q + \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^q - \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^q = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où $\Gamma_{ij}^p := g^{pq} \Gamma_{ijq}$ et $\Gamma_{ijq} := \frac{1}{2} (\partial_j g_{iq} + \partial_i g_{jq} - \partial_q g_{ij})$ sont les **symboles de Christoffel de première espèce**.

Ces équations lient, donc, les fonctions g_{ij} à leurs dérivées partielles du premier et deuxième ordre et peuvent être exprimées en fonction des symboles de Christoffel de première espèce :

$$\partial_j \Gamma_{ikq} - \partial_k \Gamma_{ijq} + g^{mn} (\Gamma_{ijn} \Gamma_{qkm} - \Gamma_{ikn} \Gamma_{qjm}) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ou en fonction de tous les deux :

$$\partial_j \Gamma_{ikq} - \partial_k \Gamma_{ijq} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{kpq} - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jqp} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes pour l'existence d'une immersion Θ dont l'on donne le tenseur métrique $\mathbf{C} = (g_{ij})$ sur Ω :

Théorème 1.3.1 *Soit Ω un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathbf{C} = (g_{ij}) \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{S}_{>}^3)$ un champ de matrice qui satisfait*

$$\mathcal{R}_{qijk} := \partial_j \Gamma_{ikq} - \partial_k \Gamma_{ijq} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{kpq} - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jqp} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.2)$$

Alors, il existe une immersion $\Theta \in \mathcal{C}^3(\Omega; \mathbf{E}^3)$ telle que

$$\mathbf{C} = \nabla \Theta^T \nabla \Theta \quad \text{dans } \Omega.$$

Clairement, l'inverse de ce théorème est valide même si Ω n'est pas simplement connexe. De plus, cette immersion est unique à moins d'une déformation rigide de $\mathbb{R}^3$: cela signifie que les autres solutions sont nécessairement de la forme $\mathbf{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{Q}\Theta(\mathbf{x})$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3$ est une matrice d'ordre trois orthogonale.

Les fonctions

$$\mathcal{R}_{qijk} := \partial_j \Gamma_{ikq} - \partial_k \Gamma_{ijq} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{kpq} - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jqp}$$

sont les **composantes covariantes du tenseur de courbure de Riemann** associées au domaine $\Theta(\Omega)$. Le théorème précédent est l'équivalent du **théorème fondamental sur les variétés Riemanniennes plates**.

1.4 Problème de l'élasticité linéaire tridimensionnelle en coordonnées curvilignes

Dans cette section, on présente une simple utilisation des coordonnées curvilignes dans le cadre de l'élasticité linéaire, en particulier, dans la formulation variationnelle du problème de l'élasticité linéaire tridimensionnelle.

Le point de départ est la formulation variationnelle de l'élasticité en coordonnées Cartésiennes. On considère un domaine $\hat{\Omega}$ avec un bord $\partial\hat{\Omega} = {}^u\hat{\Gamma} \cup {}^h\hat{\Gamma}$: ${}^u\hat{\Gamma}$ est la partie du bord avec des déplacements imposés et ${}^h\hat{\Gamma}$ correspond à la partie du bord chargée avec des forces surfaciques données $\hat{h}^i \in L^2({}^h\hat{\Gamma})$. Dans le domaine $\hat{\Omega}$ on applique des forces de volume, notées $\hat{f}^i \in L^2(\hat{\Omega})$.

Le problème consiste donc à trouver une solution $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_i)$ telle que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}) &= \{\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_i) \in H^1(\hat{\Omega}; \mathbb{R}^3); \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \text{ sur } {}^u\hat{\Gamma}\}, \\ \int_{\hat{\Omega}} \hat{A}^{ijkl} \hat{e}_{kl}(\hat{\mathbf{u}}) \hat{e}_{ij}(\hat{\mathbf{v}}) d\hat{\mathbf{x}} &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{f}^i \hat{v}_i d\hat{\mathbf{x}} + \int_{{}^h\hat{\Gamma}} \hat{h}^i \hat{v}_i d\hat{\Gamma}, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}(\hat{\Omega}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $\hat{A}^{ijkl} := \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})$ est le tenseur d'élasticité pour un matériau isotrope et $\hat{e}_{ij}(\hat{\mathbf{v}}) := \frac{1}{2}(\hat{\partial}_j \hat{v}_i + \hat{\partial}_i \hat{v}_j)$ est le tenseur linéarisé de déformation.

L'équation (1.3)₂ est exprimée en terme des coordonnées Cartésiennes du point $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_i) \in \{\hat{\Omega}\}^-$ et des composantes Cartésiennes $\hat{u}_i$, $\hat{f}^i$ et $\hat{h}^i$ des déplacements et forces.

On suppose tout d'abord l'existence d'une immersion $\Theta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{E}^3$ telle que $\Theta(\bar{\Omega}) = \{\hat{\Omega}\}^-$. L'objectif qu'on poursuit est d'exprimer les équations variationnelles de l'élasticité en coordonnées curvilignes x_i du point $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}) \in \{\hat{\Omega}\}^-$, où $\mathbf{x} = (x_i) \in \bar{\Omega}$. Pour cela, on va adopter un changement de variable pour passer du système de coordonnées Cartésiennes à un nouveau système de coordonnées curvilignes.

Dans ce but, il faut définir univoquement des nouvelles inconnues $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport aux anciennes $\hat{u}_i : \{\hat{\Omega}\}^- \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfont la propriété suivante :

$$\hat{u}_i(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{e}}^i =: u_i(\mathbf{x})g^i(\mathbf{x}), \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

où les vecteurs g^i forment la base contravariante associée à Θ .

La même chose doit être faite par rapport aux densités de force $\hat{f}^i$ et $\hat{h}^i$, en définissant deux nouvelles densités f^i et h^i .

On doit alors transformer les intégrales de volume et surface définies en terme de coordonnées $\hat{x}_i$ en intégrales définies en terme de coordonnées x_i :

- L'élément de volume $d\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}) \in \hat{\Omega}$ est donné en fonction de l'élément de volume $d\mathbf{x}$ en $\mathbf{x} \in \Omega$ par

$$d\hat{\mathbf{x}} = |\det \nabla \Theta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \sqrt{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \text{où } g(\mathbf{x}) := \det(g_{ij}(\mathbf{x})).$$

- L'élément de surface $d\hat{\Gamma}(\hat{\mathbf{x}})$ en $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}) \in \partial\hat{\Omega}$ est donné en fonction de l'élément de surface $d\Gamma(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ par

$$d\hat{\Gamma}(\hat{\mathbf{x}}) = |\text{Cof} \nabla \Theta(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})| d\Gamma(\mathbf{x}) = \sqrt{g(\mathbf{x})} \sqrt{n_i(\mathbf{x}) g^{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}),$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x}) := n_i(\mathbf{x})\hat{\mathbf{e}}^i$ est le vecteur unitaire sortant normale à la surface en $\mathbf{x}$ et $\text{Cof} \mathbf{A} := (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}$, avec $\mathbf{A}$ inversible.

Le problème de l'élasticité linéaire tridimensionnelle en coordonnées curvilignes prend ainsi la forme suivante : trouver la solution $\mathbf{u} = (u_i)$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Omega) &= \{ \mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3); \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } {}^u\Gamma \}, \\ \int_{\Omega} A^{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \sqrt{g} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g} d\mathbf{x} + \int_{{}^h\Gamma} h^i v_i \sqrt{g} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \end{aligned} \quad (1.4)$$

où ${}^u\Gamma := \Theta^{-1}({}^u\hat{\Gamma})$, ${}^h\Gamma := \Theta^{-1}({}^h\hat{\Gamma})$, les fonctions $f^i \in L^2(\Omega)$ et $h^i \in L^2({}^h\Gamma)$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \hat{f}^i(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{e}}_i d\hat{\mathbf{x}} &=: \sqrt{g(\mathbf{x})} f^i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \hat{h}^i(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{e}}_i d\hat{\Gamma}(\hat{\mathbf{x}}) &=: \sqrt{g(\mathbf{x})} h^i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

les fonctions $A^{ijkl} := \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk})$, qui respectent les symétries classiques du tenseur d'élasticité, $A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{klij}$, et, enfin, les fonctions $e_{ij}(\mathbf{v}) = e_{ji}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$ définies par :

$$e_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(v_{i||j} + v_{j||i}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \Gamma_{ij}^p v_p,$$

qui représentent les **composantes covariantes du tenseur linéarisé de déformation**, autrement appelé **tenseur linéarisé de variation de métrique**.

On en déduit les **équations locales de l'élasticité tridimensionnelle en coordonnées curvilignes** :

$$\begin{cases} \sigma^{ij}{}_{||j} = f^i & \text{dans } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sur } {}^u\Gamma, \\ \sigma^{ij} n_j = h^i & \text{sur } {}^h\Gamma, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $\sigma^{ij} := A^{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u})$ sont les **composantes contravariantes du tenseur des contraintes** et les fonctions $\sigma^{ij}{}_{||k} := \partial_k \sigma^{ij} + \Gamma_{qk}^i \sigma^{qj} + \Gamma_{pk}^j \sigma^{pi}$ représentent les **dérivées premières covariantes** du tenseur (σ^{ij}) .

Remarque : la dénomination "tenseur linéarisé de variation de métrique " pour $(e_{ij}(\mathbf{v}))$ est dû au fait que les composantes covariantes $e_{ij}(\mathbf{v})$ peuvent être obtenues par différence entre les composantes covariantes g_{ij} du tenseur métrique attaché à l'ensemble $\Theta(\Omega)$ et les composantes covariantes $g_{ij}(\mathbf{v})$ du tenseur métrique attaché à l'ensemble $(\Theta + v_i \mathbf{g}^i)(\Omega)$, où $\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$ est un champ de déplacement arbitraire. De cette différence, on ne considère que la partie linéaire, $[\dots]^{\text{lin}}$, et donc on a :

$$e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}[g_{ij}(\mathbf{v}) - g_{ij}]^{\text{lin}} = \frac{1}{2}(\partial_j \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i + \partial_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j).$$

Chapitre 2

Géométrie Différentielle des Surfaces

2.1 Les coordonnées curvilignes pour une surface

Soit ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\theta : \omega \rightarrow \mathbf{E}^3$. On dénote avec $S := \theta(\omega)$ la **surface** dans $\mathbf{E}^3$. Si l'application θ est injective, alors on peut identifier de façon univoque chaque point $\hat{\mathbf{y}} \in S$ avec

$$\hat{\mathbf{y}} = \theta(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \omega.$$

Le couple de coordonnées y_α représentent les coordonnées curvilignes de $\hat{\mathbf{y}}$. On peut définir un nombre infini de coordonnées curvilignes en choisissant des différents ω et/ou θ . Les exemples plus connus de coordonnées curvilignes pour une surface sont les coordonnées sphériques et stéréographiques.

On suppose que l'application $\theta = \theta_i \hat{\mathbf{e}}^i : \omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ soit différentiable en $\mathbf{y} \in \omega$. Si $\delta \mathbf{y}$ est tel que $(\mathbf{y} + \delta \mathbf{y}) \in \omega$, donc

$$\theta(\mathbf{y} + \delta \mathbf{y}) = \theta(\mathbf{y}) + \nabla \theta(\mathbf{y}) \delta \mathbf{y} + o(\delta \mathbf{y}),$$

où la matrice $\nabla \theta(\mathbf{y}) \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$ est définie par

$$\nabla \theta(\mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \partial_1 \theta_1 & \partial_2 \theta_1 \\ \partial_1 \theta_2 & \partial_2 \theta_2 \\ \partial_1 \theta_3 & \partial_2 \theta_3 \end{pmatrix} (\mathbf{y}).$$

Les deux vecteurs $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3$ sont définis par

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) := \partial_\alpha \theta(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \partial_\alpha \theta_1 \\ \partial_\alpha \theta_2 \\ \partial_\alpha \theta_3 \end{pmatrix} (\mathbf{y}).$$

L'application $\theta : \omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ est une **immersion** en $\mathbf{y} \in \omega$ si elle est différentiable en $\mathbf{y}$ et la matrice $\nabla \theta(\mathbf{y})$ a rang maximal, i.e. rang deux, ou, de façon équivalente, si les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y})$ sont linéairement indépendants.

En outre, les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y})$ forment la **base covariante du plan tangent** à la surface S en $\hat{\mathbf{y}}$. De façon analogue au cas tridimensionnel, si on calcule

$$|\theta(\mathbf{y} + \delta \mathbf{y}) - \theta(\mathbf{y})|^2 = \delta \mathbf{y}^T \nabla \theta(\mathbf{y})^T \nabla \theta(\mathbf{y}) \delta \mathbf{y} + o(|\delta \mathbf{y}|^2) = \delta y^\alpha \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) \delta y^\beta + o(|\delta \mathbf{y}|^2),$$

on peut déduire la partie principale par rapport à $\delta \mathbf{y}$ de la longueur entre les points $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y} + \delta \mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$ de la surface $\hat{\omega}$ est $\{\delta y^\alpha \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) \delta y^\beta\}^{1/2}$. Alors on définit le tenseur symétrique $(a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}))$ de composantes suivantes :

$$a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) := \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) = (\nabla \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})^T \nabla \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}))_{\alpha\beta}.$$

Les composantes $a_{\alpha\beta}(\mathbf{y})$ de ce tenseur sont appelées les **composantes covariantes de la première forme fondamentale**, ou **tenseur métrique** associé à la surface S en $\hat{\mathbf{y}}$.

La **base contravariante du plan tangent** à la surface en $\hat{\mathbf{y}}$, constituée par les vecteurs $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y})$, est définie par les quatre relations $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) = \delta_\beta^\alpha$; en étant les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y})$ linéairement indépendants, aussi les vecteurs $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y})$ seront linéairement indépendants. Les **composantes contravariantes de la première forme fondamentale** $a^{\alpha\beta}(\mathbf{y})$ sont calculées en invertissant la matrice $(a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}))$, et donc :

$$(a^{\alpha\beta}(\mathbf{y})) = (a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}))^{-1}.$$

On rappelle les relations qui lient les vecteurs des bases covariantes et contravariantes du plan tangent et les composantes covariantes et contravariantes de la première forme fondamentale :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) &= \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad a^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}^\beta(\mathbf{y}), \\ \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) &= a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) \mathbf{a}^\beta(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}) = a^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

2.2 Le tenseur de courbure pour une surface

Il existe une différence fondamentale entre une variété tridimensionnelle dans $\mathbf{E}^3$, c'est à dire un ensemble $\boldsymbol{\Theta}(\Omega)$ associé à l'immersion $\boldsymbol{\Theta} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{E}^3$, et une variété bidimensionnelle dans $\mathbf{E}^3$, c'est à dire un ensemble $\boldsymbol{\theta}(\omega)$ associé à l'immersion $\boldsymbol{\theta} : \omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{E}^3$. Une variété 3D dans $\mathbf{E}^3$ est bien définie et complètement déterminée par sa métrique, à moins d'une déformation rigide de $\mathbb{R}^3$: en effet, les composantes covariantes du tenseur métrique g_{ij} satisfont des précises conditions de compatibilité (1.2). Par contre, une variété 2D dans $\mathbf{E}^3$ ne peut être définie que par sa métrique. Le renseignement qui manque est fourni par la courbure de la surface que l'on va lier aux composantes covariantes du tenseur de courbure.

On considère une surface $S = \boldsymbol{\theta}(\omega)$, où $\boldsymbol{\theta}$ est une immersion. Pour chaque point $\hat{\mathbf{y}} \in S$, on peut définir

$$\mathbf{a}_3(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})}{|\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})|}$$

le vecteur normal à la surface en $\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$. Dans la suite on utilisera la notation $|\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})| := \sqrt{a(\mathbf{y})}$, où $a(\mathbf{y}) := \det(a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}))$.

Pour développer le concept de la courbure d'une surface, on doit passer tout d'abord par la définition de la courbure d'une courbe plane. Étant donné un plan normal à la surface en $\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$, i.e. qui contient le vecteur $\mathbf{a}_3(\mathbf{y})$, ce plan coupe la surface en correspondance de la courbe (plane) $\hat{C}$. La **courbure algébrique** de $\hat{C}$ en $\hat{\mathbf{y}}$ peut être écrite comme $\frac{1}{R}$, où R est le **rayon de courbure algébrique** de la courbe $\hat{C}$ en $\hat{\mathbf{y}}$. On peut montrer (voir, par exemple, P.G. Ciarlet [14] et [15]) que la courbure algébrique de $\hat{C}$ est fonction de

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R}(a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}), b_{\alpha\beta}(\mathbf{y})),$$

où $b_{\alpha\beta}(\mathbf{y})$ représentent les **composantes covariantes de la deuxième forme fondamentale** de la surface, ou **tenseur de courbure** et

$$b_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) := \mathbf{a}_3(\mathbf{y}) \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) = -\partial_\alpha \mathbf{a}_3(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) = b_{\beta\alpha}(\mathbf{y}).$$

La courbure d'une surface prend ses valeurs dans un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $\left[\frac{1}{R_1(\mathbf{y})}, \frac{1}{R_2(\mathbf{y})} \right]$, borné par les deux courbures principales $\frac{1}{R_1(\mathbf{y})}$ et $\frac{1}{R_2(\mathbf{y})}$. En connaissant les courbures principales au voisinage d'un point de la surface, on peut avoir des renseignements sur la géométrie et la forme de la surface même. Soit la matrice $(b_\alpha^\beta(\mathbf{y}))$, avec α l'indice de ligne, définie par

$$b_\alpha^\beta(\mathbf{y}) := a^{\beta\sigma}(\mathbf{y}) b_{\alpha\sigma}(\mathbf{y}).$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \kappa_M(\mathbf{y}) &:= \frac{1}{R_1(\mathbf{y})} + \frac{1}{R_2(\mathbf{y})} = b_1^1(\mathbf{y}) + b_2^2(\mathbf{y}) = \text{tr}(b_\alpha^\beta(\mathbf{y})), \\ \kappa_G(\mathbf{y}) &:= \frac{1}{R_1(\mathbf{y})R_2(\mathbf{y})} = b_1^1(\mathbf{y})b_2^2(\mathbf{y}) - b_1^2(\mathbf{y})b_2^1(\mathbf{y}) = \frac{\det(b_{\alpha\beta}(\mathbf{y}))}{\det(a_{\alpha\beta}(\mathbf{y}))}. \end{aligned}$$

Les fonctions $b_\alpha^\beta(\mathbf{y})$ sont les **composantes mixtes de la deuxième forme fondamentale** de la surface et la matrice associée n'est pas nécessairement symétrique ; $\kappa_M(\mathbf{y})$ et $\kappa_G(\mathbf{y})$ sont respectivement la **courbure moyenne** et la **courbure Gaussienne** de la surface S en $\hat{\mathbf{y}}$.

Les surfaces sont souvent caractérisées par rapport à la nature du tenseur de courbure. On rappelle qu'une surface est appelée **elliptique**, **parabolique** ou **hyperbolique** si la **courbure Gaussienne** est **positive**, **zéro** ou **negative**. Par exemple, une portion d'un ellipsoïde est une surface elliptique ; un cylindre, un cône ou les surfaces développables en général sont toutes des surfaces paraboliques ; un paraboloïde hyperbolique est une surface hyperbolique.

Les surfaces générales, utilisées en architecture, ont une nature plus complexe et non uniforme par rapport à la courbure Gaussienne. Cette distinction est quand même fondamentale parce que les coques avec différentes natures géométriques ont un comportement mécanique très divers lorsque l'épaisseur devient petite.

2.3 Applications à quelques surfaces simples

2.3.1 Le cylindre circulaire

Une portion S d'un cylindre circulaire de rayon r correspond à une immersion $\boldsymbol{\theta} : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme

$$(\varphi, z) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Les coordonnées $\varphi =: x_1$ et $z =: x_2$ sont les **coordonnées cylindriques** associées au cylindre S .

Pour le cylindre S , on peut définir les vecteurs de la base covariante du plan tangent qui prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\varphi, z) &:= \mathbf{a}_\varphi(\varphi, z) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{a}_2(\varphi, z) &:= \mathbf{a}_z(\varphi, z) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Le vecteur normal unitaire toujours perpendiculaire à l'axe du cylindre est défini par

$$\mathbf{a}_3 := \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|} \Rightarrow \mathbf{a}_3(\varphi, z) := \mathbf{a}_r(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0).$$

La première forme fondamentale en composantes covariantes associée au cylindre S est de la forme :

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on inverse cette matrice, on obtient la première forme fondamentale en composantes contravariantes. Donc, on a :

$$(a^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base contravariante du plan tangent au cylindre est définie par $\mathbf{a}^\alpha := a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta$ et, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1(\varphi, z) &:= \mathbf{a}^\varphi(\varphi, z) = \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi, \frac{1}{r} \cos \varphi, 0 \right), \\ \mathbf{a}^2(\varphi, z) &:= \mathbf{a}^z(\varphi, z) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Les composantes covariantes de la deuxième forme fondamentale sont calculées à partir de la formule $b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$. Ceci implique :

$$(b_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La courbure moyenne et la courbure de Gauss assument les valeurs suivantes :

$$\kappa_M = -\frac{1}{r}, \quad \kappa_G = 0.$$

La courbure Gaussienne est nulle, donc une portion d'un cylindre est un exemple de surface parabolique.

2.3.2 La sphère

Une portion S d'une sphère de rayon r , qui exclut les deux poles et un méridien, peut être représentée à travers les coordonnées curvilignes définies par l'immersion $\boldsymbol{\theta} : [0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3$, telle que

$$(\varphi, \psi) \rightarrow (r \sin \psi \cos \varphi, r \sin \psi \sin \varphi, r \cos \psi).$$

Les coordonnées $\psi =: x_1$ et $\varphi =: x_2$ sont appelées **coordonnées sphériques** associées à la sphère S .

La base covariante du plan tangent est définie par les vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\varphi, \psi) &:= \mathbf{a}_\psi(\varphi, \psi) = (r \cos \psi \cos \varphi, r \cos \psi \sin \varphi, -r \sin \psi), \\ \mathbf{a}_2(\varphi, \psi) &:= \mathbf{a}_\varphi(\varphi, \psi) = (-r \sin \psi \sin \varphi, r \sin \psi \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Le vecteur normal unitaire radial est défini par

$$\mathbf{a}_3 := \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|} \Rightarrow \mathbf{a}_3(\varphi, \psi) := \mathbf{a}_r(\varphi, \psi) = (\sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi, \cos \psi).$$

La première forme fondamentale en composantes covariantes associée à la sphère S est de la forme :

$$(a_{\alpha\beta}) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \psi \end{pmatrix}.$$

La première forme fondamentale en composantes contravariantes est obtenue en inversant la matrice $(a_{\alpha\beta})$. Donc, on a :

$$(a^{\alpha\beta}) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \psi} \end{pmatrix}.$$

La base contravariante du plan tangent à la sphère est définie par $\mathbf{a}^\alpha := a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta$ et, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1(\varphi, \psi) &:= \mathbf{a}^\varphi(\varphi, \psi) = \left(\frac{1}{r} \cos \psi \cos \varphi, \frac{1}{r} \cos \psi \sin \varphi, -\frac{1}{r} \sin \psi \right), \\ \mathbf{a}^2(\varphi, \psi) &:= \mathbf{a}^\psi(\varphi, \psi) = \left(-\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, 0 \right). \end{aligned}$$

Les composantes covariantes de la deuxième forme fondamentale sont calculées à partir de la formule $b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$. Donc, on a :

$$(b_{\alpha\beta}) = -r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \psi \end{pmatrix}.$$

La courbure moyenne et la courbure de Gauss assument les valeurs suivantes :

$$\kappa_M = -\frac{2}{r}, \quad \kappa_G = \frac{1}{r^2} > 0.$$

La courbure Gaussienne est positive, donc une portion d'une sphère est un exemple de surface elliptique.

2.3.3 Le paraboloïde hyperbolique

Un paraboloïde hyperbolique équilatère S de constante c peut être représenté à travers les coordonnées curvilignes définies par l'immersion $\boldsymbol{\theta} : \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3$, telle que

$$(u, \varphi) \rightarrow (u \cos \varphi, c \tan \varphi, u \sin \varphi).$$

Les coordonnées $u =: x_1$ et $\varphi =: x_2$ sont appelées **coordonnées hyperboliques** associées au paraboloïde hyperbolique S .

La base covariante du plan tangent est définie par les vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\varphi, \psi) &:= \mathbf{a}_u(u, \varphi) = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \\ \mathbf{a}_2(\varphi, \psi) &:= \mathbf{a}_\varphi(u, \varphi) = \left(-u \sin \varphi, \frac{c}{\cos^2 \varphi}, u \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Le vecteur normal unitaire est défini par

$$\mathbf{a}_3 := \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|} \Rightarrow \mathbf{a}_3(u, \varphi) := \mathbf{a}_n(u, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{a}} (-c \tan \varphi, -u \cos \varphi, c),$$

où $\sqrt{a} := (c^2 \tan^2 \varphi + u^2 \cos^2 \varphi + c^2)^{1/2}$.

La première forme fondamentale en composantes covariantes associée au paraboloid hyperbolique S est de la forme :

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + c^2(1 + \tan^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

La première forme fondamentale en composantes contravariantes est obtenue en inversant la matrice $(a_{\alpha\beta})$. Donc, on a :

$$(a^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + c^2(1 + \tan^2 \varphi)} \end{pmatrix}.$$

La base contravariante du plan tangent au paraboloid est définie par $\mathbf{a}^\alpha := a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta$ et, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1(u, \varphi) &:= \mathbf{a}^u(u, \varphi) = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \\ \mathbf{a}^2(u, \varphi) &:= \mathbf{a}^\varphi(u, \varphi) = \frac{1}{u^2 + c^2(1 + \tan^2 \varphi)} \left(-u \sin \varphi, \frac{c}{\cos^2 \varphi}, u \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Les composantes covariantes de la deuxième forme fondamentale sont calculées à partir de la formule $b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$. Ceci implique :

$$(b_{\alpha\beta}) = \frac{c}{\sqrt{a} \cos \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2u \tan \varphi \end{pmatrix}.$$

La courbure moyenne et la courbure de Gauss assument les valeurs suivantes :

$$\kappa_M = -\frac{2cu \sin \varphi}{\sqrt{a}(u^2 \cos^2 \varphi + c^2)}, \quad \kappa_G = -\frac{c^2}{a(u^2 \cos^2 \varphi + c^2)} < 0.$$

La courbure Gaussienne est négative, donc un paraboloid hyperbolique est un exemple de surface hyperbolique.

2.4 Dérivée covariante d'un champ de vecteur défini sur une surface

On suppose d'avoir un champ de vecteur $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \mathbf{a}^i$ défini sur une surface S grâce à ses composantes covariantes $\eta_i : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur la base contravariante formée par les $\mathbf{a}^i$. Cela signifie que $\eta_i(\mathbf{y}) \mathbf{a}^i(\mathbf{y})$ est le vecteur en $\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) \in S$.

On introduit tout d'abord les formules de Gauss et de Weingarten. Les dérivées des vecteurs des bases covariante et contravariante sont données par les **formules de Gauss** :

$$\partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \mathbf{a}_\sigma + b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \quad \text{et} \quad \partial_\alpha \mathbf{a}^\beta = -\Gamma_{\alpha\sigma}^\beta \mathbf{a}^\sigma + b_\alpha^\beta \mathbf{a}^3,$$

et la **formule de Weingarten** :

$$\partial_\alpha \mathbf{a}_3 = \partial_\alpha \mathbf{a}^3 = -b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta = -b_\alpha^\sigma \mathbf{a}_\sigma,$$

où les fonctions $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := \mathbf{a}^\sigma \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$ sont les **symboles de Christoffel de seconde espèce** de la surface S .

Théorème 2.4.1 Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\theta : \omega \rightarrow \mathbf{E}^3$ une immersion et $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme de ω vers $S := \theta(\omega)$. Étant donné un champ de vecteur $\eta_i \mathbf{a}^i$ de composantes $\eta_i \in \mathcal{C}^1(\omega)$ alors les dérivées partielles $\partial_\alpha(\eta_i \mathbf{a}^i)$ sont données par

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(\eta_i \mathbf{a}^i) &= (\partial_\alpha \eta_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3) \mathbf{a}^\beta + (\partial_\alpha \eta_3 + b_\alpha^\beta \eta_\beta) \mathbf{a}^3 = \\ &= (\eta_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta} \eta_3) \mathbf{a}^\beta + (\eta_{3|\alpha} + b_\alpha^\beta \eta_\beta) \mathbf{a}^3,\end{aligned}$$

où $\eta_{\beta|\alpha} := \partial_\alpha \eta_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma$ et $\eta_{3|\alpha} := \partial_\alpha \eta_3$ dénotent les dérivées premières covariantes du champ de vecteur $\eta_i \mathbf{a}^i$.

On se servira de la définition de dérivée covariante d'un champ de vecteur sur une surface pour introduire deux tenseurs très importants dans la théorie des surfaces, qui se réfèrent aux variations de métrique ($\gamma_{\alpha\beta}$) et de courbure ($\rho_{\alpha\beta}$) d'une surface, associées à un certain champ de déplacement. Ces tenseurs seront présentés dans les sections suivantes.

2.5 Condition d'existence d'une surface avec première et deuxième forme fondamentale données

Les composantes covariantes de la première et deuxième forme fondamentale $a_{\alpha\beta} : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $b_{\alpha\beta} : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, associées à l'immersion $\theta : \omega \rightarrow \mathbf{E}^3$, ne peuvent pas être des fonctions arbitraires. Elles doivent satisfaire avec leurs dérivées partielles des conditions nécessaires qui prennent la forme suivante et que constituent respectivement les **équations de Gauss** et de **Codazzi-Mainardi** :

$$\begin{aligned}\partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma\tau} - \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\tau\mu} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\beta\tau\mu} &= b_{\alpha\sigma} b_{\beta\tau} - b_{\alpha\beta} b_{\sigma\tau} \text{ dans } \omega, \\ \partial_\beta b_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma b_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu b_{\beta\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu b_{\sigma\mu} &= 0 \text{ dans } \omega,\end{aligned}$$

où $\Gamma_{\alpha\beta\tau} := \frac{1}{2}(\partial_\beta a_{\alpha\tau} + \partial_\alpha a_{\beta\tau} - \partial_\tau a_{\alpha\beta})$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu := a^{\mu\tau} \Gamma_{\alpha\beta\tau}$ dénotent les **symboles de Christoffel de première et seconde espèce**.

Ces conditions nécessaires deviennent aussi suffisantes pour l'existence d'une immersion $\theta : \omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{E}^3$, dont l'on donne les tenseurs métrique et de courbure sur ω :

Théorème 2.5.1 Soit ω un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Soient aussi $(a_{\alpha\beta}) \in \mathcal{C}^2(\omega; \mathbb{S}_{>}^2)$ et $(b_{\alpha\beta}) \in \mathcal{C}^1(\omega; \mathbb{S}^2)$ deux champs de matrice qui satisfont les équations de Gauss et Codazzi-Mainardi :

$$\begin{aligned}\partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma\tau} - \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\tau\mu} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\beta\tau\mu} &= b_{\alpha\sigma} b_{\beta\tau} - b_{\alpha\beta} b_{\sigma\tau} \text{ dans } \omega, \\ \partial_\beta b_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma b_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu b_{\beta\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu b_{\sigma\mu} &= 0 \text{ dans } \omega.\end{aligned}$$

Il existe alors une immersion $\theta \in \mathcal{C}^3(\omega; \mathbf{E}^3)$ telle que

$$\partial_\alpha \theta \cdot \partial_\beta \theta = a_{\alpha\beta} \text{ et } \partial_\alpha \theta \cdot \frac{\partial_1 \theta \wedge \partial_2 \theta}{|\partial_1 \theta \wedge \partial_2 \theta|} = b_{\alpha\beta} \text{ dans } \omega.$$

De plus, cette immersion est unique à moins d'une déformation rigide de $\mathbb{R}^3$: cela signifie que toutes les autres solutions sont nécessairement de la forme $\mathbf{y} \in \omega \rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{Q}\theta(\mathbf{y})$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3$ est une matrice orthogonale d'ordre trois .

On définit les fonctions

$$\mathcal{R}_{\tau\alpha\beta\sigma} := \partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma\tau} - \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\tau\mu} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\beta\tau\mu},$$

comme les **composantes covariantes du tenseur de courbure de Riemann** associé à la métrique $(a_{\alpha\beta})$, qui en général ne s'annule pas, à la différence du cas des variétés 3D Riemannienne plate discuté dans la Théorème 1.3.1 .

2.6 Les tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure pour une surface

Dans la Section 1.4 on a discuté le problème de l'élasticité linéaire en coordonnées curvilignes et on a défini pour un sous-ensemble $\Theta(\Omega) \subset \mathbf{E}^3$ les composantes covariantes $e_{ij}(\mathbf{v})$ du tenseur linéarisé de variation de métrique , associées à un certain champ de déplacement $\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$. Ces composantes prennent la forme connue suivante :

$$e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}[g_{ij}(\mathbf{v}) - g_{ij}]^{\text{lin}} = \frac{1}{2}(\partial_j \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i + \partial_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j).$$

De façon équivalente, on peut définir un tenseur linéarisé de variation de métrique sur une surface. Soit $\boldsymbol{\eta} := \eta_i \mathbf{a}^i$, un champ de déplacement arbitraire sur une surface $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$, de composantes covariantes suffisamment régulières $\eta_i : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Les **composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique** associées au champ de déplacement sont définies par

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{2}[a_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) - a_{\alpha\beta}]^{\text{lin}},$$

où $a_{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ représentent respectivement les composantes covariantes du tenseur métrique des surfaces $\boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ et $(\boldsymbol{\theta} + \eta_i \mathbf{a}^i)(\bar{\omega})$. En composantes, on écrit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{2}(\partial_\beta \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \partial_\alpha \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}_\beta) = \gamma_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\eta}) = \\ &= \frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} \eta_3 = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\eta_\alpha \in H^1(\omega) \text{ et } \eta_3 \in L^2(\omega) \Rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega).$$

Dans les Sections précédentes, on a mis en évidence le fait que pour bien déterminer une surface on a besoin d'introduire le concept de courbure et, donc, de tenseur de courbure associé à la surface. En conséquence, il devient naturel de définir un tenseur linéarisé de variation de courbure associé à un champ de déplacement quelconque sur la surface.

Les **composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de courbure** ont la forme suivante :

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) := [b_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) - b_{\alpha\beta}]^{\text{lin}},$$

où $b_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ représentent respectivement les composantes covariantes du tenseur de courbure des surfaces $\boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ et $(\boldsymbol{\theta} + \eta_i \mathbf{a}^i)(\bar{\omega})$. En exprimant les composantes, on écrit :

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &= (\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{\eta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\partial_{\sigma}\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{a}_3 = \rho_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\eta}) = \\
&= \eta_{3|\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\sigma}b_{\sigma\beta}\eta_3 + b_{\alpha}^{\sigma}\eta_{\sigma|\beta} + b_{\beta}^{\tau}\eta_{\tau|\alpha} + b_{\beta}^{\tau}|\alpha\eta_{\tau} = \\
&= \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\partial_{\sigma}\eta_3 - b_{\alpha\beta}\eta_3 + \\
&\quad + b_{\alpha}^{\sigma}(\partial_{\beta}\eta_{\sigma} - \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau}\eta_{\tau}) + b_{\beta}^{\tau}(\partial_{\alpha}\eta_{\tau} - \Gamma_{\alpha\tau}^{\sigma}\eta_{\sigma}) + \\
&\quad + (\partial_{\alpha}b_{\beta}^{\tau} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau}b_{\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}b_{\sigma}^{\tau})\eta_{\tau}.
\end{aligned}$$

Et donc,

$$\eta_{\alpha} \in H^1(\omega) \text{ et } \eta_3 \in H^2(\omega) \Rightarrow \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega).$$

Les tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure jouent en rôle essentiel dans la théorie des coques élastiques linéaires : $(\gamma_{\alpha\beta})$ est associé au comportement membranaire de la surface moyenne de la coque ; $(\rho_{\alpha\beta})$ à son comportement en flexion.

2.6.1 Cas du cylindre circulaire

Dans le cas des coordonnées cylindriques, les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\varphi}\eta_{\varphi} + r\eta_z, \\
\gamma_{\varphi z}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{2}(\partial_z\eta_{\varphi} + \partial_{\varphi}\eta_z), \\
\gamma_{zz}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_z\eta_z.
\end{aligned}$$

Les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de courbure en coordonnées cylindriques prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\varphi\varphi}\eta_r - \eta_r - \frac{2}{r}\partial_{\varphi}\eta_{\varphi}, \\
\rho_{\varphi z}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\varphi z}\eta_r - \frac{1}{r}\partial_z\eta_{\varphi}, \\
\rho_{zz}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{zz}\eta_r.
\end{aligned}$$

2.6.2 Cas de la sphère

Dans le cas des coordonnées sphériques, les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\psi\psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\psi}\eta_{\psi} + r\eta_r, \\
\gamma_{\varphi\psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{2}(\partial_{\psi}\eta_{\varphi} + \partial_{\varphi}\eta_{\psi}) + \frac{1}{r \tan \psi}\eta_{\varphi}, \\
\gamma_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\varphi}\eta_{\varphi} + \cos \psi \sin \psi \eta_{\psi} + r \sin^2 \psi \eta_r.
\end{aligned}$$

Les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de courbure en coordonnées sphériques prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho_{\psi\psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\psi\psi}\eta_r - \eta_r - \frac{2}{r}\partial_{\psi}\eta_{\psi}, \\
\rho_{\varphi\psi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\varphi\psi}\eta_r + \frac{1}{r \tan \psi}\partial_{\varphi}\eta_r - \frac{1}{r} \left(\partial_{\varphi}\eta_{\psi} + \partial_{\psi}\eta_{\varphi} + \frac{2}{r \tan \psi}\eta_{\varphi} \right), \\
\rho_{\varphi\varphi}(\boldsymbol{\eta}) &= \partial_{\varphi\varphi}\eta_r + \cos \psi \sin \psi \partial_{\psi}\eta_r - \sin^2 \psi \eta_r - \frac{2}{r}(\partial_{\varphi}\eta_{\varphi} + \cos \psi \sin \psi \eta_{\psi}).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Théorie Asymptotique des Coques Élastiques

Dans la suite, on présente un modèle asymptotique linéaire de coque de type Koiter, qui tient compte du comportement membranaire et en flexion de la coque, avec une discussion sur l'existence et unicité de la solution du problème limite.

3.1 Le modèle linéaire de coque de Koiter

Le modèle bidimensionnel linéaire (ou non linéaire) de coque proposé par W. T. Koiter (voir, exemple, W. T. Koiter [30] et M. Dikmen [23]) est obtenu par les équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire (ou non linéaire) en faisant deux hypothèses *a priori*. Une hypothèse, de nature *cinématique*, est l'*Ansatz* de Kirchhoff-Love : elle affirme que tous les points situés sur la normale à la surface moyenne restent sur la normale à la surface moyenne déformée et, en plus, la distance entre ces points et la surface moyenne reste constante lors de la déformation. L'autre hypothèse, de caractère *mécanique*, suppose que l'état de contrainte dans la coque soit plan et parallèle à la surface moyenne.

Soit γ_0 un sous-ensemble mesurable de $\gamma = \partial\omega$ de longueur positive et soit $\mathbf{V}_K(\omega)$ l'espace des déplacements admissibles de Koiter, défini par

$$\mathbf{V}_K(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \quad \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\}. \quad (3.1)$$

La formulation variationnelle du modèle de Koiter linéaire pour une coque prend la forme suivante :

$$\mathcal{P}_K^\varepsilon(\omega) : \quad \varepsilon A_M(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon^3 A_F(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = G^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}_K(\omega), \quad (3.2)$$

où $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_i) : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur des déplacements inconnus et les formes bilinéaires $A_M(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})$ et $A_F(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})$ ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A_M(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \\ A_F(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\omega} \frac{a^{\alpha\beta\sigma\tau}}{3} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy. \end{aligned}$$

On rappelle que les fonctions

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})$$

dénotent les composantes contravariantes du tenseur d'élasticité de la coque (λ et μ sont les constantes de Lamé du matériau élastique qui constitue la coque), $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ et $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ dénotent les composantes covariantes des tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure associés au champ de déplacement $\boldsymbol{\eta} = \eta_i \mathbf{a}^i$ définis par les formules :

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3, \\ \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &:= \eta_{3|\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\sigma}b_{\sigma\beta}\eta_3 + b_{\alpha}^{\sigma}\eta_{\sigma|\beta} + b_{\beta}^{\tau}\eta_{\tau|\alpha} + b_{\beta}^{\tau}{}_{|\alpha}\eta_{\tau}.\end{aligned}$$

Enfin, l'effet des forces extérieures apparaît à travers le terme

$$G^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}) := \varepsilon^p \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a} dy,$$

où $p^i \in L^2(\omega)$ sont les forces appliquées sur la surface moyenne de la coque. On va spécifier dans la suite le rôle important de l'exposant p en face de l'intégrale des forces : selon le choix fait sur p , on obtiendra différents modèles de coque, en privilégiant soit le comportement membranaire soit la flexion soit, encore, le comportement mixte.

La formulation (3.2) satisfait les conditions de continuité et coercivité :

$$c_{\varepsilon}(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^K)^2 \leq \varepsilon A_M(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon^3 A_F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \leq C_{\varepsilon}(\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^K)^2, \quad (3.3)$$

où

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\omega}^K := \left\{ \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{1,\omega} + \|\eta_3\|_{2,\omega} \right\}^{1/2}.$$

L'inégalité (3.3) implique que le problème variationnel (3.2) est bien posé dans l'espace de solution considéré (3.1).

3.2 Comportement asymptotique

Dans le concept de "coque" est implicite l'idée que l'épaisseur est petite comparée avec les deux autres dimensions. Si on considère la formulation de Koiter du problème, on peut remarquer que le rôle de ε influence les propriétés du modèle, lorsque ce paramètre devient de plus en plus petit. Il est aussi important d'étudier la convergence variationnelle du modèle vers un certain *modèle limite*, quand ε tend vers zéro. Le modèle limite simplifié peut être donc utilisé et analysé à la place du modèle original quand ε est suffisamment petit (voir, par exemple, P.G. Ciarlet [14], J. Sanchez-Hubert, Sanchez-Palencia [39] et D. Chapelle, K.-J. Bathe [12]).

Soit

$$\mathbf{V}(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3); \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma_0\}.$$

Dans l'analyse asymptotique des coques, un sous-espace particulier de $\mathbf{V}(\omega)$ devient crucial, c.a.d.

$$\mathbf{V}_0(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega); A_M(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\} = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega); \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\}. \quad (3.4)$$

Cet espace (3.4) est l'espace des déplacements avec déformations de membrane nulles et donc, il contient les déplacements de flexion pure.

À différence de ce qui se passe dans le cas des structures plus simples comme les poutres ou les plaques, on observe que les conditions qui définissent l'espace $\mathbf{V}_0(\omega)$ constituent un système d'équations bien déterminé. Ce système révèle une spécificité essentielle des coques, lorsque $\mathbf{V}_0(\omega) = \{\mathbf{0}\}$. Cette situation correspond au cas des **coques à flexion pure inhibée** ou **coques membranaires**. On verra dans la suite la distinction fondamentale entre les coques *membranaires elliptiques* et les coques *membranaires généralisées*. Autrement, si l'espace $\mathbf{V}_0(\omega) \neq \{\mathbf{0}\}$, on parlera des **coques à flexion pure non inhibée** ou **coques flexionnelles**.

3.2.1 Coques à flexion pure non inhibée

On rencontre le cas des coques à flexion pure non inhibée dans l'étude, par exemple, des coques plates et donc dans la formulation du problème des plaques. Un autre exemple des coques flexionnelles est celui des coques qui possèdent une surface moyenne cylindrique ou conique avec des conditions aux limites sur une des génératrices (Fig. 3.1).

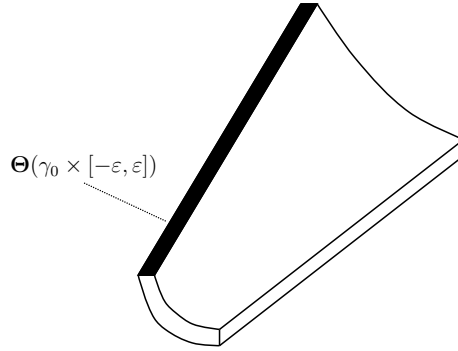


FIGURE 3.1 – *Une coque flexionnelle*. Une coque linéaire élastique dont la surface moyenne $S = \theta(\bar{\omega})$ est un cylindre ou un cône et soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur une des génératrices $\Theta(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (en noir dans la figure).

Pour faire en sorte que la solution du problème de Koiter $\mathcal{P}_K^\varepsilon(\omega)$ reste bornée et non nulle, on doit supposer que la forme linéaire au second membre soit de la forme :

$$G^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}) = \varepsilon^3 F(\boldsymbol{\eta}),$$

où $F(\boldsymbol{\eta})$ est une forme linéaire indépendante de ε . Pour chaque valeur de ε le problème à résoudre devient :

Trouver $\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon) \in \mathbf{V}_K(\omega)$ tel que

$$A_F(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon), \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{\varepsilon^2} A_M(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon), \boldsymbol{\eta}) = F(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}_K(\omega).$$

Si on entreprend une analyse asymptotique sur ce problème, qui apparaît être un problème d'optimisation avec contraintes, on obtient le problème suivant :

Trouver $\boldsymbol{\zeta}^0 \in \mathbf{V}_F(\omega)$ tel que

$$\mathcal{P}_F(\omega) : \quad A_F(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = F(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}_F(\omega),$$

où $\mathbf{V}_F(\omega) := \mathbf{V}_K(\omega) \cap \mathbf{V}_0(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\}$ et

$$A_F(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\omega} \frac{a^{\alpha\beta\sigma\tau}}{3} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy.$$

Le problème $\mathcal{P}_F(\omega)$ est bien posé dans l'espace $\mathbf{V}_F(\omega)$ considéré. L'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel $\mathcal{P}_F(\omega)$ sont une conséquence directe de l'inégalité de Korn pour une surface générale :

$$\left\{ \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{2,\omega}^2 \right\}^{1/2} \leq c \left\{ \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 + \sum_{\alpha,\beta} |\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right\}^{1/2}, \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{V}_K(\omega),$$

du fait que le tenseur d'élasticité de la coque est défini positif et du lemme de Lax-Milgram.

De plus, on peut établir la convergence, dans un certain cadre fonctionnel, du modèle tridimensionnel vers le modèle limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, (voir M. Bernadou et P.G. Ciarlet [3] et M. Bernadou et al. [4]). Pour cela, on a :

Théorème 3.2.1 *Lorsque ε tend vers zéro, la famille de solutions $(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ du problème $\mathcal{P}_K^{\varepsilon}(\omega)$ converge fortement vers $\boldsymbol{\zeta}^0$ dans $\mathbf{V}_K(\omega)$, où $\boldsymbol{\zeta}^0$ satisfait le problème $\mathcal{P}_F(\omega)$. De plus, on a que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} A_M(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon), \boldsymbol{\zeta}(\varepsilon)) = 0. \quad (3.5)$$

L'estimation *a priori* (3.5) entraîne que l'énergie de membrane tend vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ce fait explique pourquoi les coques à flexion pure non inhibée sont des structures dominées par les effets de la flexion.

3.2.2 Coques à flexion pure inhibée

Pour obtenir un bon modèle de coque membranaire, il faut supposer un scaling approprié de la forme linéaire. On suppose que

$$G^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}) = \varepsilon L_M(\boldsymbol{\eta}),$$

où $L_M(\boldsymbol{\eta})$ est une forme linéaire indépendante de ε . Le problème $\mathcal{P}_K^{\varepsilon}(\omega)$ devient :

Trouver $\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon) \in \mathbf{V}_K(\omega)$ tel que

$$A_M(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon), \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon^2 A_F(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon), \boldsymbol{\eta}) = L_M(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}_K(\omega).$$

On a obtenu un problème classique de perturbation singulière d'un problème elliptique. Si on procède à une analyse asymptotique, on peut définir le problème limite suivant :

Trouver $\boldsymbol{\zeta}^0 \in \mathbf{V}(\omega)$ tel que

$$\mathcal{P}_M(\omega) : A_M(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = L_M(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega).$$

On rappelle la forme de l'espace $\mathbf{V}(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{H}^1(\omega); \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma_0\}$ et

$$A_M(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy.$$

En général, le problème variationnel $\mathcal{P}_M(\omega)$ n'est pas bien posé dans l'espace $\mathbf{V}(\omega)$ considéré : en effet, l'existence et l'unicité de la solution du problème limite et, encore, la convergence du modèle général vers le modèle limite lorsque l'épaisseur ε tend vers zéro ne sont pas garanties et donc échouent dans cet espace particulier. Conséquemment, il faudra remplacer l'espace $\mathbf{V}(\omega)$ avec des espaces différents, moins réguliers, en général, et distinguer les deux cas de coques suivants : les coques membranaires elliptiques et les coques membranaires généralisées.

1. Coques membranaires elliptiques

Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ avec bord γ et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ une application injective telle que $\partial_\alpha \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$ sont linéairement indépendants en $\mathbf{y} \in \bar{\omega}$. Une coque élastique avec surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ est définie **coque membranaire elliptique** si les deux conditions suivantes sont vérifiées au même temps :

(i) La coque est soumise à une **condition aux limites de déplacement** sur toute la face latérale $\boldsymbol{\Theta}(\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon])$, i.e. le champ de déplacement s'annule sur le bord ; donc,

$$\gamma_0 = \gamma.$$

(ii) La surface moyenne S est **elliptique**. Donc, il existe une constante c telle que

$$\sum_{\alpha} |\xi^\alpha|^2 \leq c |b_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) \xi^\alpha \xi^\beta|, \quad \forall \mathbf{y} \in \bar{\omega} \text{ et } \forall (\xi^\alpha) \in \mathbb{R}^2,$$

où les fonctions $b_{\alpha\beta} : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sont les composantes covariantes du tenseur de courbure de S . Cette hypothèse signifie que la courbure Gaussienne de S est partout strictement positive.

Un exemple de coque membranaire elliptique est une partie d'un ellipsoïde soumise à une condition aux limites de déplacement nuls sur tout le bord, comme on montre dans Fig. 3.2, ci-dessous.

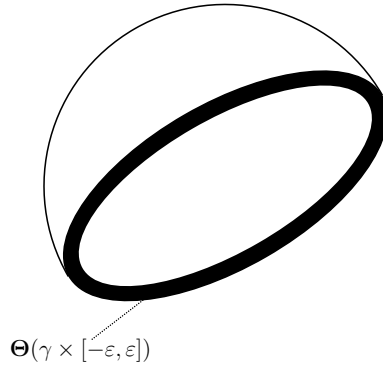


FIGURE 3.2 – *Une coque membranaire elliptique*. Une coque linéaire élastique dont la surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ est une partie d'un ellipsoïde E et, qui est soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur le bord entier $\boldsymbol{\Theta}(\gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (en noir dans la figure) est un exemple de coque membranaire elliptique.

Pour coque élastique membranaire elliptique telle que $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$, l'inégalité de Korn

pour une surface elliptique $S = \theta(\bar{\omega})$ est valide : il existe une constante c_M telle que

$$\left\{ \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{1,\omega}^2 + |\eta_3|_{0,\omega}^2 \right\}^{1/2} \leq c_M \left\{ \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right\}^{1/2}$$

$$\forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{V}_M(\omega) := H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega).$$

Cette inégalité, conséquence de la définition de coque membranaire elliptique, est la clé fondamentale pour l'analyse du problème lié aux coques à flexion pure inhibée. L'indice " M " indique que $\mathbf{V}_M(\omega)$ est l'espace fonctionnel sur lequel les équations bidimensionnelles d'une coque membranaire elliptique seront posées.

Le problème variationnel bidimensionnel $\mathcal{P}_M(\omega)$ pour une coque élastique membranaire elliptique admet la forme suivante :

Trouver $\boldsymbol{\zeta}^0 \in \mathbf{V}_M(\omega) := H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ tel que

$$\mathcal{P}_M(\omega) : A_M(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = L_M(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}_M(\omega).$$

Ce problème est donc bien posé dans l'espace $\mathbf{V}_M(\omega)$: l'existence et l'unicité de la solution limite sont assurées et on peut aussi établir le théorème suivant de convergence fonctionnelle de la solution générale vers la solution du problème limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

Théorème 3.2.2 *Lorsque ε tend vers zéro, la famille de solutions $(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ du problème $\mathcal{P}_K^{\varepsilon}(\omega)$ converge fortement vers $\boldsymbol{\zeta}^0$ dans $\mathbf{V}_M(\omega)$, où $\boldsymbol{\zeta}^0$ satisfait le problème $\mathcal{P}_M(\omega)$. De plus, on a que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 A_F(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon), \boldsymbol{\zeta}(\varepsilon)) = 0. \quad (3.6)$$

L'estimation *a priori* (3.6) implique que l'énergie de flexion devient négligeable lorsque ε tend vers zéro.

2. Coques membranaires généralisées

Les coques membranaire elliptique fournissent un premier exemple de coques élastique membranaires, i.e. celles dont $\mathbf{V}_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$. Dans cette section, on va traiter les cas restants de coques élastique membranaires en identifiant l'espace fonctionnel *ad hoc*, où le problème d'une coque membranaire généralisée vit, et en justifiant mathématiquement tout ceci avec des résultats de convergence.

On a dit auparavant qu'une coque élastique devient une **coque membranaire généralisée** si l'espace

$$\mathbf{V}_F(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \quad \eta_i = \partial_{\nu} \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0, \quad \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\}$$

se réduit à $\{\mathbf{0}\}$. Cette condition est clairement équivalente à dire que la semi-norme définie par

$$|\boldsymbol{\eta}|_{\omega}^M := \left\{ \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right\}^{1/2}$$

pour tous $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ devient une norme pour l'espace

$$\mathbf{V}_K(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \quad \eta_i = \partial_{\nu} \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\}.$$

On a démontré dans la section précédente que si la coque est une membrane elliptique, grâce à l'inégalité de Korn pour une surface elliptique, la semi-norme $|\cdot|_\omega^M$ est déjà une norme pour l'espace $\mathbf{V}_M(\omega)$: donc, l'espace $\mathbf{V}_M(\omega)$ est complet s'il est muni de la norme $|\cdot|_\omega^M$. Ce fait constitue la différence principale entre les membranes elliptiques et les membranes généralisées.

Plus précisément, l'espace fonctionnel, où les équations limites d'une coque membranaire généralisée sont bien posées, est le *complété abstrait* de l'espace $\mathbf{V}(\omega)$ par rapport à la norme $|\cdot|_\omega^M$. On le notera avec

$$\mathbf{V}_M^\sharp(\omega) := \text{complété de } \mathbf{V}(\omega) \text{ par rapport à } |\cdot|_\omega^M.$$

La difficulté majeure dans l'analyse asymptotique des membranes généralisées est sûrement l'identification de l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$, qui, pour certains cas, cesse d'être un espace des distributions. Par exemple, il a été facile dans les cas de membrane elliptique, lorsque $\mathbf{V}(\omega) = \mathbf{H}^1(\omega)$, de reconnaître que le complété $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ se réduisait à $\mathbf{V}_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$.

Les équations limites bidimensionnelles pour une coque membranaire généralisée prennent la forme suivante :

Trouver $\boldsymbol{\zeta}^0 \in \mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ tel que

$$\mathcal{P}_M^\sharp(\omega) : B_M^\sharp(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = L_M^\sharp(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}_M^\sharp(\omega),$$

où $B_M^\sharp$ est l'unique prolongement à $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega) \times \mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ de la forme bilinéaire déjà rencontrée dans le problème de coques membranaire :

$$(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{V}(\omega) \times \mathbf{V}(\omega) \rightarrow \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy,$$

et $L_M^\sharp : \mathbf{V}_M^\sharp(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue déterminée par le comportement des forces admissibles appliquées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. À la différence des coques membranaires elliptiques et des coques flexionnelles, les forces appliquées à une coque membranaire généralisée ne peuvent pas être arbitraires : elles doivent satisfaire certaines conditions d'admissibilité comme il est formellement expliqué dans le livre de P.G. Ciarlet [14].

Pour l'étude des membranes généralisées, il est nécessaire d'entreprendre une analyse fine et cela constitue un problème difficile. Il faut tout d'abord prouver que l'espace $\mathbf{V}_F(\omega)$ se réduit à $\{\mathbf{0}\}$, d'après identifier l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ et les forces admissibles correspondantes.

Comme pour les problèmes de coques précédents, on inclut les résultats de convergence vers la solution limite (voir les articles : P.G. Ciarlet et V. Lods [20], et P.G. Ciarlet et E. Sanchez-Palencia [22]). On a :

Théorème 3.2.3 *Lorsque ε tend vers zéro, la famille de solutions $(\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ du problème $\mathcal{P}_K^\varepsilon(\omega)$ converge fortement vers $\boldsymbol{\zeta}^0$ dans $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$, où $\boldsymbol{\zeta}^0$ satisfait le problème $\mathcal{P}_M^\sharp(\omega)$.*

Un premier exemple est celui d'une coque dont la surface moyenne est une surface elliptique et soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur une partie du bord $\boldsymbol{\Theta}(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$, telle que $0 < \text{longueur} \gamma_0 < \text{longueur} \gamma$ (Fig. 3.3₁). Il a été démontré que l'espace

$$\mathbf{R}(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega); \quad \eta_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0, \quad \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\}$$

se réduit à $\{\mathbf{0}\}$ et donc aussi l'espace $\mathbf{V}_0(\omega) = \{\mathbf{0}\}$.

Les équations qui gouvernent ce problème constituent un exemple de problème sensitif : en effet, l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ n'est pas un espace de distributions et il existe des fonctions $p^i \in \mathcal{D}(\omega)$ telles que les forces appliquées correspondantes à la forme linéaire $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a} d\mathbf{y}$ ne sont pas admissibles.

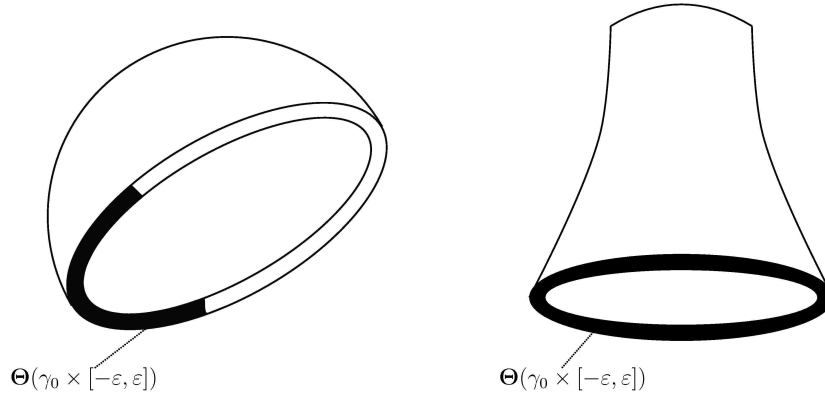


FIGURE 3.3 – Deux coques membranaires généralisées. À gauche, une coque linéaire élastique dont la surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ est une partie d'un ellipsoïde et, qui est soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur une partie du bord $\boldsymbol{\Theta}(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (en noir dans la figure). À droite, une coque linéaire élastique dont la surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ est une hyperboloïde de révolution et, qui est soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur la partie inférieure du bord $\boldsymbol{\Theta}(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (en noir dans la figure).

Remarque : Dans le cas d'une coque elliptique membranaire, l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ est un espace des distributions car il coïncide avec $H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$. Si la coque présente un pli ou un coin, le problème bidimensionnel devient sensitif et l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ cesse d'être un espace de distributions.

Un deuxième exemple est celui d'une coque dont la surface moyenne est une surface hyperbolique (sa courbure Gaussienne est strictement négative partout) : par exemple, une coque, dont la surface moyenne est un hyperboloïde de révolution, et qui est soumise à des déplacements nuls seulement sur le bord inférieur (Fig. 3.3₂). Sous ces hypothèses, l'espace $\mathbf{R}(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ et l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\omega) \times L^2(\omega) \times H^{-1}(\omega)$.

Remarque : Comme pour les coques elliptiques membranaires, si la coque hyperbolique possède un pli, alors le problème relatif devient sensitif.

Un dernier exemple est celui d'une coque avec une surface moyenne parabolique. C'est le cas d'une partie d'un cylindre ou une partie d'un cône, fixes sur le bord inférieur (Fig. 3.4).

On peut démontrer que l'espace $\mathbf{R}(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ et l'espace $\mathbf{V}_M^\sharp(\omega)$ sont des sous-espaces fermés de $H^{-1}(\omega) \times H^{-1}(\omega) \times H^{-2}(\omega)$.

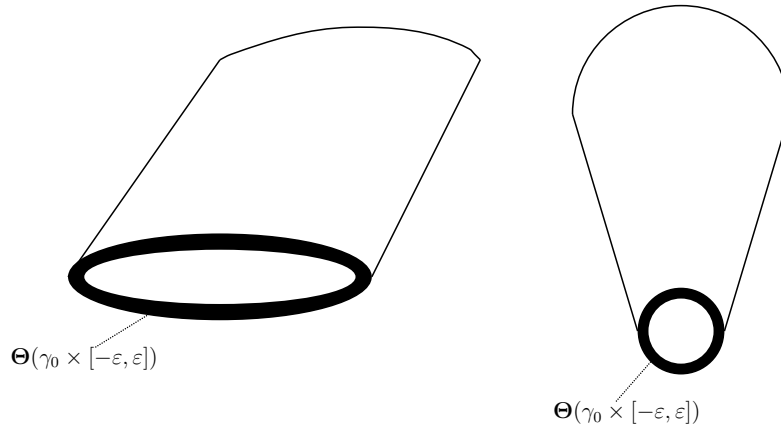


FIGURE 3.4 – *Deux coques membranaires généralisées.* À gauche, une coque linéaire élastique dont la surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ est un cylindre et, qui est soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur le bord inférieur $\boldsymbol{\Theta}(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (en noir dans la figure). À droite, une coque linéaire élastique dont la surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ est un cône et, qui est soumise à une condition aux limites de déplacements nuls sur la partie inférieure du bord $\boldsymbol{\Theta}(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (en noir dans la figure).

Chapitre 4

Les Équations de Compatibilité de Saint-Venant et la Formule de Cesàro-Volterra

4.1 Position du problème

En mécanique des milieux continus, une question fondamentale est d'établir si la répartition des déformations dans un continuum est quelconque ou si elle est soumise à certaines conditions d'admissibilité ou, mieux, de compatibilité. Autrement dit, si on se donne un champ de tenseurs symétriques $\mathbf{e} = (e_{ij})$, existe-t-il un champ de déplacement $\mathbf{v} = (v_i)$ dont il dérive ? Est ce tenseur donné $\mathbf{e} = (e_{ij})$ le champ de déformation associé au déplacement inconnu $\mathbf{v} = (v_i)$? En général, la réponse est négative.

Au niveau géométrique, ceci s'interprète comme suit : si un objet est coupé en morceaux et si ces morceaux sont déformés de manière quelconque, ils ne peuvent pas être juxtaposés sans vides (voir Fig. 4.1). Pour pouvoir le faire, et donc afin que les déformations soient compatibles avec la continuité du milieu, elles doivent satisfaire des conditions de compatibilité.

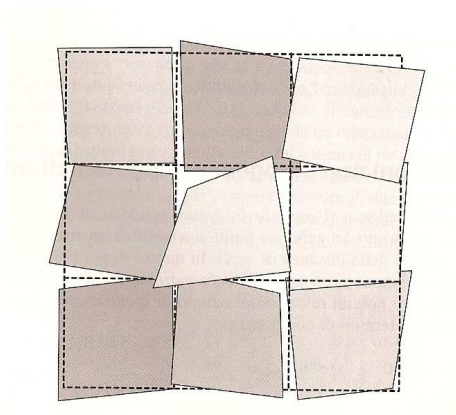


FIGURE 4.1 – Déformation non compatible.

Le tenseur de déformation est défini à partir de la transformation Θ ou, également, à partir

d'un champ de déplacement $\mathbf{v}$: par exemple, le **tenseur de déformation de Cauchy-Green** $\mathbf{C}$ est défini par :

$$\mathbf{C} := \nabla \Theta^T \nabla \Theta = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}^T \nabla \mathbf{v}.$$

Dans le cas linéaire, le **tenseur linéarisé de déformation** $\mathbf{e}$ est défini à partir d'un champ de déplacement $\mathbf{v}$. On a :

$$\mathbf{e} := \nabla_s \mathbf{v},$$

où $(\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$, sont les composantes du gradient symétrique de $\mathbf{v}$.

Par conséquent, les fonctions qui définissent la déformation, soit en terme de $\mathbf{C}$, soit en terme de $\mathbf{e}$, ne sont pas indépendantes : elles sont liées par six relations.

Dans certaines formulations du problème de l'élasticité (P.G. Ciarlet et P. Ciarlet Jr. [16]), le champ de déformation peut être l'inconnue primaire : il faut donc s'assurer que les composantes des déformations vérifient des conditions de compatibilité pour qu'il existe un champ de déplacement associé à une telle déformation donnée.

Par exemple, dans le plan (x_1, x_2) en coordonnées Cartésiennes, soit le champ $\mathbf{e} = (e_{\alpha\beta})$ défini par

$$\mathbf{e}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} a & ax_1x_2 \\ ax_1x_2 & a \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

S'il existe un champ de déplacement $\mathbf{v}(x_1, x_2) = (v_\alpha(x_1, x_2))$ dont le champ donné est le champ linéarisé de déformation, nécessairement on a :

$$\partial_1 v_1(x_1, x_2) = a, \quad \partial_2 v_2(x_1, x_2) = a, \quad \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 = 2ax_1x_2. \quad (4.1)$$

La première équation (4.1)₁ entraîne l'existence d'une fonction $f(x_2)$ telle que

$$v_1(x_1, x_2) = ax_1 + f(x_2),$$

la deuxième équation (4.1)₂ entraîne l'existence d'une fonction $g(x_1)$ telle que

$$v_2(x_1, x_2) = ax_2 + g(x_1).$$

La dernière équation (4.1)₃ implique que

$$f'(x_2) + g'(x_1) = 2ax_1x_2.$$

Cette égalité ne peut jamais être satisfaite. On en déduit que les composantes d'un champ de déformation donné ne peuvent pas être arbitraires.

4.2 La compatibilité : les théorèmes classiques de Saint-Venant et de Donati

Dans cette section, on rappelle la caractérisation classique des champs de matrice comme champs tensoriels linéarisés de déformation et les diverses extensions de cette caractérisation.

Soient Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{v} = (v_i)$ un champ de vecteur (ou déplacement) défini sur Ω . Le champ de matrice $\nabla_s \mathbf{v}$ défini par

$$(\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

est le champ linéarisé de déformation associé au champ de vecteur $\mathbf{v}$.

La première caractérisation d'un champ de matrice symétrique $\mathbf{e} = (e_{ij})$ s'écrivant sous la forme

$$\mathbf{e} = \nabla_s \mathbf{v}, \text{ quelque soit le champ de vecteur } \mathbf{v},$$

a été annoncée par A.J.C.B. de Saint-Venant en 1864, et démontrée rigoureusement par E. Beltrami en 1881. Ce théorème est connu sous le nom de *Théorème de Saint-Venant* et il affirme (voir, par exemple, M.E. Gurtin [29] et C. Amrouche et al. [1]) :

Théorème 4.2.1 (de Saint-Venant) *Soit Ω un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe. Soit $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{S}^3)$ un champ de matrice donné qui satisfait*

$$\mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{e}) := \partial_{lj}e_{ik} + \partial_{ki}e_{jl} - \partial_{li}e_{jk} - \partial_{kj}e_{il} = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.2)$$

Alors, il existe un champ de déplacement $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^3(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$e_{ij} = (\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j),$$

et les autres solutions $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_i)$ de l'équation $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \tilde{v}_i + \partial_i \tilde{v}_j)$ sont de la forme $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{id}_\Omega$, avec $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Clairement, la réciproque de ce théorème est vraie même quand Ω n'est pas simplement connexe. Les **conditions de compatibilité de Saint-Venant** (4.2), $\mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{e}) = 0$, sont mieux connues dans leurs forme implicite

$$\mathbf{CURL\ CURL\ e} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega,$$

où $(\mathbf{CURL\ e})_{ij} := \varepsilon_{ilk} \partial_k e_{jl}$ représente l'opérateur rotationnel matriciel.

Remarque. La matrice $\mathbf{CURL\ CURL\ e}$ est toujours symétrique et ses composantes $\mathcal{R}_{ijkl}$ vérifient les symétries suivantes :

$$\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{klij} = -\mathcal{R}_{ijlk}.$$

Les quatre-vingt une relations $\mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{e})$ se réduisent donc à six relations indépendantes pour $(i, j, k, \ell) = (1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 3), (1, 2, 2, 3), (1, 3, 1, 3), (1, 3, 2, 3), (2, 3, 2, 3)$.

Récemment, les conditions de compatibilité de Saint-Venant ont été généralisées sous des hypothèses de régularité plus faible. P.G. Ciarlet et P. Ciarlet Jr., dans l'article [16], ont établi la version dans $\mathbb{L}_s^2(\Omega)$ du théorème de Saint-Venant, où $\mathbb{L}_s^2(\Omega)$ représente l'espace des matrices symétriques avec composantes dans $L^2(\Omega)$:

Théorème 4.2.2 (de Saint-Venant, version $\mathbb{L}_s^2(\Omega)$) *Soit Ω un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe, avec une frontière Lipschitzienne. Soit $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathbb{L}_s^2(\Omega)$ un champ de matrice donné qui satisfait*

$$\mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{e}) := \partial_{lj}e_{ik} + \partial_{ki}e_{jl} - \partial_{li}e_{jk} - \partial_{kj}e_{il} = 0 \text{ dans } H^{-2}(\Omega).$$

Alors, il existe un champ de déplacement $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$e_{ij} = (\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et les autres solutions $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_i) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ de l'équation $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \tilde{v}_i + \partial_i \tilde{v}_j)$ sont de la forme $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{id}_\Omega$, avec $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Démonstration. Les conditions de compatibilité $\mathcal{R}_{ijk\ell}(\mathbf{e}) = 0$ dans $H^{-2}(\Omega)$ peuvent être écrites également comme suit :

$$\partial_\ell h_{ijk} = \partial_k h_{ij\ell}, \text{ avec } h_{ijk} := \partial_j e_{ik} - \partial_i e_{jk} \in H^{-1}(\Omega).$$

Le théorème de Poincaré implique l'existence des fonctions $p_{ij} \in L^2(\Omega)$, uniques à une constante additive près, telles que

$$\partial_k p_{ij} = h_{ijk} = \partial_j e_{ik} - \partial_i e_{jk} \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

On en déduit que l'on peut choisir p_{ij} telles que $p_{ij} + p_{ji} = 0$ dans $L^2(\Omega)$.

On remarque que les fonctions $q_{ij} := (e_{ij} + p_{ij}) \in L^2(\Omega)$ satisfont

$$\begin{aligned} \partial_k q_{ij} &= \partial_k e_{ij} + \partial_k p_{ij} = \partial_k e_{ij} + \partial_j e_{ik} - \partial_i e_{jk} = \\ &= \partial_j e_{ik} + \partial_j p_{ik} = \partial_j q_{ik} \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \end{aligned}$$

et on en déduit, grâce au théorème de Poincaré, l'existence des fonctions $v_i \in H^1(\Omega)$, uniques à une constante additive près, telles que

$$\partial_j v_i = q_{ij} = e_{ij} + p_{ij} \text{ dans } L^2(\Omega).$$

En conséquence :

$$\frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) = e_{ij} + \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) = e_{ij} \text{ dans } L^2(\Omega),$$

comme il est requis. Il reste à démontrer que les autres solutions diffèrent d'un déplacement rigide infinitésimal. On utilise alors la propriété suivante :

$$\{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3); \partial_j v_i + \partial_i v_j = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\} = \{\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{id}_\Omega; \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}.$$

□

L. Donati, en 1890, a montré la propriété suivante pour un champ linéarisé de déformation (G. Geymonat et F. Krasucki [25] et [26]) :

Théorème 4.2.3 (Donati) *Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{S}^3)$ un champ de matrice symétrique dont les composantes satisfont*

$$\int_{\Omega} e_{ij} s_{ij} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{s} = (s_{ij}) \in \mathcal{V}(\Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{S}^3); \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega\},$$

où $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{S}^3)$ dénote l'espace des tenseurs symétriques dont les composantes sont $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et à support compact dans Ω , alors

$$\mathbf{CURL} \mathbf{CURL} \mathbf{e} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega.$$

Ce théorème combiné avec le théorème de Saint-Venant donne une autre caractérisation des champs linéarisés de déformation, quand Ω est simplement connexe.

Une extension du théorème de Donati a été apporté par T.W. Ting en 1974, [42] :

Théorème 4.2.4 (Ting) Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathbb{L}_s^2(\Omega)$ un champ de matrice symétrique dont les composantes satisfont

$$\int_{\Omega} e_{ij} s_{ij} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{s} = (s_{ij}) \in \Sigma_{ad}(\Omega),$$

où $\Sigma_{ad}(\Omega)$ dénote la fermeture dans $\mathbb{L}_s^2(\Omega)$ de $\mathcal{V}(\Omega) = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{S}^3); \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega\}$.

Alors il existe un champ de vecteur $\mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$e_{ij} = (\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Il faut souligner que dans le théorème de Ting l'hypothèse de simple connexité du domaine n'est plus nécessaire.

J. J. Moreau a proposé en 1979 une autre extension du Théorème de Donati dans le cadre général des distributions, (voir J.J. Moreau [33]) :

Théorème 4.2.5 (Moreau) Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{S}^3)$ un champ de matrice symétrique tel que

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{s} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{s} = (s_{ij}) \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Alors il existe un champ de vecteur $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$e_{ij} = (\nabla_s \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

On dénote avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{S}^3)$ et $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{S}^3)$.

4.3 Le théorème de Saint-Venant en coordonnées curvilignes

Le but de cette section est de généraliser le théorème de Saint-Venant dans le cadre des coordonnées curvilignes. On se réfère aux notations utilisées dans la première partie de la thèse sur les préliminaires géométriques.

Soit Ω un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^3$ et soit $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ une immersion. Soient les vecteur respectivement des bases covariante et contravariante $\mathbf{g}_i \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ et $\mathbf{g}^j \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ définis par

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) := \partial_i \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}) \text{ et } \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) = \delta_i^j.$$

Les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique induit par $\boldsymbol{\Theta}$ sur Ω sont définies par

$$g_{ij}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \text{ et } g^{ij}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}^j(\mathbf{x}),$$

et les symboles de Christoffel associés à la métrique (g_{ij}) sont définis par

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

Enfin, on peut définir la dérivée seconde covariante d'un champ de matrice $e_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$, avec $e_{ij} \in L^2(\Omega)$, comme suit :

$$e_{ij||k\ell} := \partial_\ell e_{ij||k} - \Gamma_{\ell i}^p e_{pj||k} - \Gamma_{\ell j}^p e_{pi||k} - \Gamma_{\ell k}^p e_{ij||p},$$

où $e_{ij||k} := \partial_k e_{ij} - \Gamma_{ki}^p e_{pj} - \Gamma_{kj}^p e_{pi}$ est la dérivée première covariante du même champ de matrice.

On associe à un champ de vecteur arbitraire $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ le tenseur linéarisé de déformation en coordonnées curvilignes, aussi connu comme les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique, défini par

$$e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \partial_j \mathbf{v}) \in L^2(\Omega).$$

On peut alors proposer le théorème de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées curvilignes (voir P.G. Ciarlet et al. [17]) :

Théorème 4.3.1 (de Saint-Venant, en coordonnées curvilignes) *Soient Ω un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe, avec une frontière Lipschitzienne et $\Theta \in \mathcal{C}^3(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ une immersion. Soit $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathbb{L}_s^2(\Omega)$ un champ de matrice donné satisfaisant les équations de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées curvilignes*

$$\mathcal{R}_{ijkl}^{\text{lin}}(\mathbf{e}) := e_{ik||lj} + e_{jl||ki} - e_{jk||li} - e_{il||kj} = 0 \text{ dans } H^{-2}(\Omega). \quad (4.3)$$

Alors, il existe un champ de déplacement $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \partial_j \mathbf{v}) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

et les autres solutions $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_i) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ de l'équation $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \partial_j \tilde{\mathbf{v}})$ sont de la forme $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \Theta$, avec $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Remarque. Les équations de Saint-Venant en coordonnées curvilignes (4.3) ne sont rien d'autre que la linéarisation, ou la version infinitésimal du théorème de Riemann-Christoffel, qui donne des conditions de compatibilité qu'un espace Riemannien tridimensionnel doit satisfaire pour être isométriquement immergé dans un espace Euclidien tridimensionnel. On propose une extension du théorème de Riemann-Christoffel, déjà présenté dans les préliminaires géométriques, dans le cas de faible régularité.

Théorème 4.3.2 *Soit Ω un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ et soit $(g_{ij}) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{S}_>^3)$ un champ de matrice défini positif.*

Si le tenseur de courbure de Riemann associé au champ de matrice (g_{ij}) s'annule (les dérivées sont prises au sens des distributions)

$$\mathcal{R}_{qijk} := \partial_j \Gamma_{ikq} - \partial_k \Gamma_{ijq} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{kpq} - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jqp} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

Alors, il existe une immersion $\Theta \in W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ telle que

$$g_{ij} = \partial_i \Theta \cdot \partial_j \Theta \text{ dans } \Omega.$$

4.4 Comparaison avec les équations de Saint-Venant en coordonnées Cartésiennes

Dans la suite, on utilisera la notation " $\hat{\cdot}$ " pour toutes les grandeurs en coordonnées Cartésiennes. Soit $\hat{\Omega}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées Cartésiennes d'un point $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ sont dénotées par $\hat{x}_i$. L'opérateur de dérivée est noté par $\hat{\partial}_i := \partial/\partial \hat{x}_i$. Avec ces notations, le théorème de Saint-Venant en coordonnées Cartésiennes s'écrit :

Théorème 4.4.1 Soit $\hat{\Omega}$ un sous-ensemble ouvert, connexe et simplement connexe, avec une frontière Lipschitzienne. Soit $\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_{ij}) \in \mathbb{L}_s^2(\hat{\Omega})$ un champ de matrice donné qui satisfait

$$\hat{\mathcal{R}}_{ijk\ell}^{\text{lin}}(\hat{\mathbf{e}}) := \hat{\partial}_{\ell j} \hat{e}_{ik} + \hat{\partial}_{ki} \hat{e}_{j\ell} - \hat{\partial}_{\ell i} \hat{e}_{jk} - \hat{\partial}_{kj} \hat{e}_{i\ell} = 0 \text{ dans } H^{-2}(\hat{\Omega}).$$

Alors, il existe un champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}} \in H^1(\hat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_j \hat{v}_i + \hat{\partial}_i \hat{v}_j) \text{ dans } L^2(\hat{\Omega}).$$

Les conditions de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées Cartésiennes présentées dans le théorème précédent peuvent être interprétées comme un cas particulier des conditions de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées curvilignes quand $\Theta = \text{id}_{\Omega}$.

Il est possible de démontrer que les conditions de Saint-Venant Cartésiennes impliquent celles curvilignes si l'immersion Θ est bijective. On a :

Théorème 4.4.2 Les équations de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées curvilignes sont une conséquence des équations de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées Cartésiennes si on considère une immersion $\Theta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijective.

Démonstration. Comme dans le Théorème 4.3.1, on suppose que Ω soit simplement connexe et que $\Theta \in \mathcal{C}^3(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ soit une immersion. Le champ de matrice donné $(e_{ij}) \in \mathbb{L}_s^2(\Omega)$ satisfait les conditions de Saint-Venant en coordonnées curvilignes :

$$\mathcal{R}_{ijk\ell}^{\text{lin}} := e_{ik}\ell_j + e_{j\ell}k_i - e_{jk}\ell_i - e_{i\ell}k_j = 0.$$

Puisque Θ est bijective, le théorème de la fonction inverse entraîne que Θ est un $\mathcal{C}^3$ -difféomorphisme de Ω vers $\hat{\Omega} := \Theta(\Omega)$. Le théorème de l'invariance du domaine implique que $\hat{\Omega}$ est encore ouvert, connexe et simplement connexe, et, donc, qu'il satisfait les hypothèses du Théorème 4.4.1.

Soit $\mathbf{g}_i$ et $\mathbf{g}^j$ les vecteurs des bases covariante et contravariante et soit $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}^k)$ l'inverse de $\Theta = (\Theta_k)$. On a alors :

$$(\hat{\partial}_k \hat{\Theta}^i)(\hat{\mathbf{x}})(\partial_j \Theta_k)(\mathbf{x}) = \delta_j^i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathbf{w}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = \delta_j^i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

où $\mathbf{w}^i(\mathbf{x})$ sont les vecteurs de composantes $(\hat{\partial}_k \hat{\Theta}^i)(\hat{\mathbf{x}})$. Ceci implique que $\mathbf{w}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^i(\mathbf{x})$ et donc :

$$(\hat{\partial}_k \hat{\Theta}^i) \circ \Theta = [\mathbf{g}^i]_k \text{ dans } \Omega,$$

où $[\mathbf{g}^i]_k$ est la k -ème composante du vecteur $\mathbf{g}^i$.

On définit la matrice $(\hat{e}_{pq}) \in \mathbb{L}_s^2(\hat{\Omega})$ comme suit :

$$\hat{e}_{pq} \circ \Theta := e_{ij}[\mathbf{g}^i]_p[\mathbf{g}^j]_q \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et

$$\hat{\mathcal{R}}_{srpq}^{\text{lin}} := \hat{\partial}_{sq} \hat{e}_{pr} + \hat{\partial}_{pr} \hat{e}_{sq} - \hat{\partial}_{sp} \hat{e}_{qr} - \hat{\partial}_{qr} \hat{e}_{sp} \text{ dans } H^{-2}(\hat{\Omega}).$$

On veut prouver que $\hat{\mathcal{R}}_{srpq} = 0$. En utilisant les définitions de dérivées première et seconde covariantes qui suivent :

$$\begin{aligned}(\hat{\partial}_r \hat{e}_{pq}) \circ \Theta &= e_{ij||k} [g^i]_p [g^j]_q [g^k]_r, \\(\hat{\partial}_{sr} \hat{e}_{pq}) \circ \Theta &= e_{ij||k\ell} [g^i]_p [g^j]_q [g^k]_r [g^\ell]_s,\end{aligned}$$

on obtient que

$$\hat{\mathcal{R}}_{srpq}^{\text{lin}} \circ \Theta = (e_{ik||\ell j} + e_{j\ell||ki} - e_{jk||\ell i} - e_{i\ell||kj}) [g^i]_p [g^j]_q [g^k]_r [g^\ell]_s = \mathcal{R}_{ijkl}^{\text{lin}} [g^i]_p [g^j]_q [g^k]_r [g^\ell]_s$$

dans $H^{-2}(\Omega)$, et donc $\hat{\mathcal{R}}_{srpq}^{\text{lin}} = 0$ dans $H^{-2}(\hat{\Omega})$.

Les hypothèses du Théorème 4.4.1 étant toutes satisfaites, il existe alors un champ de vecteur $\hat{\mathbf{v}} \in H^1(\hat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_j \hat{v}_i + \hat{\partial}_i \hat{v}_j) \text{ dans } L^2(\hat{\Omega}).$$

Le champ de vecteur $\mathbf{v} := \hat{\mathbf{v}} \circ \Theta \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ vérifie les relations :

$$\frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \partial_j \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_p \hat{v}_q + \hat{\partial}_q \hat{v}_p) [g_i]^p [g_j]^q = (\hat{e}_{pq} \circ \Theta) [g_i]^p [g_j]^q \text{ dans } L^2(\Omega),$$

où $[g_i]^p$ indique la p -ième composante du vecteur $\mathbf{g}_i$. La définition des fonctions $\hat{e}_{pq}$ implique :

$$\frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \partial_j \mathbf{v}) = e_{k\ell} [g_i]^p [g_j]^q [g^k]_p [g^\ell]_q = e_{k\ell} \text{ dans } L^2(\Omega),$$

ce qui achève la démonstration. □

4.5 Les équations de compatibilité de Saint-Venant pour une surface

Un résultat classique de géométrie différentielle des surfaces, déjà exposé dans la Section 2.5, montre qu'une surface simplement connexe peut être reconstruite globalement à partir de sa première et deuxième formes fondamentales, $(a_{\alpha\beta})$ et $(b_{\alpha\beta})$. Les deux formes fondamentales doivent satisfaire des conditions de compatibilité ad hoc, qui prennent le nom d'équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi. Ces conditions ont la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\alpha\sigma\tau}^\nu &= b_{\alpha\tau} b_\sigma^\nu - b_{\alpha\sigma} b_\tau^\nu, \\ \partial_\sigma b_{\alpha\tau} - \partial_\tau b_{\alpha\sigma} + \Gamma_{\alpha\tau}^\mu b_{\mu\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu b_{\mu\tau} &= 0,\end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\mathcal{R}_{\alpha\sigma\tau}^\nu := \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\tau}^\nu - \partial_\tau \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu + \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\mu\tau}^\nu$ sont les composantes mixtes du tenseur de courbure de Riemann associé à la métrique $(a_{\alpha\beta})$.

De plus, étant donné un champ de déplacement $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$, on a défini le tenseur linéarisé de variation de métrique :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \partial_\alpha \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}_\beta) \in L^2(\omega),$$

et le tenseur linéarisés de variation de courbure :

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = (\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{\eta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\partial_{\sigma}\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{a}_3 \in H^{-1}(\omega).$$

On définit ainsi la dérivée première covariante des composantes covariantes $t_{\alpha\beta} \in L^2(\omega)$:

$$t_{\alpha\beta|\sigma} := \partial_{\sigma}t_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu}t_{\nu\beta} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\nu}t_{\alpha\nu},$$

et la dérivée deuxième covariante des composantes covariantes $t_{\alpha\beta} \in L^2(\omega)$:

$$t_{\alpha\beta|\sigma\tau} := \partial_{\tau}t_{\alpha\beta|\sigma} - \Gamma_{\alpha\tau}^{\nu}t_{\nu\beta|\sigma} - \Gamma_{\tau\beta}^{\nu}t_{\alpha\nu|\sigma} - \Gamma_{\tau\sigma}^{\nu}t_{\alpha\beta|\nu}.$$

Les équations de Saint-Venant pour une surface représentent des conditions de compatibilité que les tenseurs $(\gamma_{\alpha\beta})$ et $(\rho_{\alpha\beta})$ doivent satisfaire. On peut montrer que telles équations sont la version infinitésimale des équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi (4.4).

Le Théorème de Saint-Venant pour une surface assume la forme suivante (voir P.G Ciarlet et al. [18]) :

Théorème 4.5.1 *Soit ω un domaine simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$ et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ une immersion. Soient $(\gamma_{\alpha\beta})$ et $(\rho_{\alpha\beta})$, deux champs de matrice symétriques dans $L^2(\omega; \mathbb{S}^2)$ qui satisfont les équations de Saint-Venant pour une surface (les dérivées sont prises au sens des distributions) :*

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma\alpha|\beta\tau} + \gamma_{\beta\tau|\alpha\sigma} - \gamma_{\sigma\beta|\alpha\tau} - \gamma_{\alpha\tau|\sigma\beta} + \mathcal{R}_{\cdot\alpha\sigma\tau}^{\nu}\gamma_{\beta\nu} - \mathcal{R}_{\cdot\beta\sigma\tau}^{\nu}\gamma_{\alpha\nu} &= b_{\tau\alpha}\rho_{\beta\sigma} + b_{\beta\sigma}\rho_{\tau\alpha} - b_{\sigma\alpha}\rho_{\tau\beta} - b_{\tau\beta}\rho_{\sigma\alpha}, \\ \rho_{\sigma\alpha|\tau} - \rho_{\alpha\tau|\sigma} &= b_{\sigma}^{\nu}(\gamma_{\alpha\nu|\tau} + \gamma_{\tau\nu|\alpha} - \gamma_{\tau\alpha|\nu}) - b_{\tau}^{\nu}(\gamma_{\alpha\nu|\sigma} + \gamma_{\sigma\nu|\alpha} - \gamma_{\sigma\alpha|\nu}). \end{aligned}$$

Il existe alors un champ de vecteur (ou déplacement) $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_{\beta}\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}_{\beta}) \text{ dans } L^2(\omega), \\ \rho_{\alpha\beta} &= (\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{\eta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\partial_{\sigma}\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{a}_3 \text{ dans } H^{-1}(\omega). \end{aligned}$$

Résumé de la démonstration : la démonstration de ce théorème fournit un algorithme explicite pour déterminer le champ de vecteur $\boldsymbol{\eta}$ à partir des champs de tenseur $(\gamma_{\alpha\beta})$ et $(\rho_{\alpha\beta})$: il faut résoudre tout d'abord le système différentiel

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta|\sigma} + b_{\alpha\sigma}\lambda_{\beta} - b_{\beta\sigma}\lambda_{\alpha} &= \gamma_{\sigma\beta|\alpha} - \gamma_{\sigma\alpha|\beta}, \\ \lambda_{\alpha|\sigma} + b_{\sigma}^{\nu}\lambda_{\alpha\nu} &= \rho_{\sigma\alpha} - b_{\sigma}^{\nu}\gamma_{\alpha\nu}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où les inconnues sont le champ de matrice antisymétrique $(\lambda_{\alpha\beta}) \in L^2(\omega; \mathbb{A}^2)$ et le champ de vecteur $(\lambda_{\alpha}) \in L^2(\omega; \mathbb{R}^2)$; après

$$\partial_{\alpha}\boldsymbol{\eta} = (\gamma_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta})\mathbf{a}^{\beta} + \lambda_{\alpha}\mathbf{a}^3 \text{ dans } \omega. \tag{4.6}$$

Le champ de vecteur $\boldsymbol{\eta}$ trouvé de cette façon a les propriétés désirées. On remarque que le premier système (4.5) admet solution parce que $(\gamma_{\alpha\beta})$ et $(\rho_{\alpha\beta})$ satisfont les conditions de compatibilité de Saint-Venant pour une surface et le deuxième (4.6) admet solution parce que les tenseurs $(\gamma_{\alpha\beta})$ et $(\rho_{\alpha\beta})$ sont symétriques.

□

4.6 La formule intégrale de Cesàro-Volterra

On considère le problème lié à un champ de déplacement $\mathbf{v} = (v_i)$ tel que, étant donné un champ de matrice symétrique $\mathbf{e} = (e_{ij})$, $\mathbf{v}$ est la solution du système différentiel aux dérivées partielles $\nabla_s \mathbf{v} = \mathbf{e}$.

En 1906, E. Cesàro, [9], a proposé une formule intégrale explicite, en revisitant et adaptant une autre formule trouvée par V. Volterra, [43], qui résout le système différentiel précédent (voir aussi l'article de R. Fosdick et G. Royer-Carfagni [24]). La formule de Cesàro-Volterra exprime les composantes de déplacement comme une intégrale de ligne sur un chemin arbitraire contenu dans le domaine Ω d'une fonction qui ne dépend que du champ de matrice (e_{ij}) donné.

On considère que les fonctions impliquées dans la formule sont suffisamment régulières. Soit $\mathbf{e} = (e_{ij})$ un champ de matrice symétrique donné défini sur Ω . Étant donnés un point fixe $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ et un point $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \in \Omega$, et un chemin $\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ de $\mathbf{x}_0$ à $\mathbf{x}$, la **formule intégrale de Cesàro-Volterra** est définie comme suit :

$$v_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{ij}(\mathbf{y}) + (x_k - y_k)(\partial_k e_{ij}(\mathbf{y}) - \partial_i e_{kj}(\mathbf{y}))] dy_j, \quad (4.7)$$

ou, dans sa forme implicite :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [\mathbf{e}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{CURL} \mathbf{e}(\mathbf{y}))^T d\mathbf{y}].$$

Il s'impose maintenant de s'interroger si l'intégrale (4.7) est indépendante du chemin considéré. Si on choisit deux chemins différents, obtient-on la même fonction de déplacement ?

La réponse dépend des propriétés intrinsèques, topologiques du domaine où la formule est définie. Si le domaine Ω est **simplement connexe**, il est possible d'appliquer le théorème de Stokes, qui est équivalent à appliquer l'indépendance du chemin à l'intégrale. On obtient par cette indépendance les équations de compatibilité de Saint-Venant pour le champ de matrice $\mathbf{e} = (e_{ij})$:

$$\partial_{\ell j} e_{ik} + \partial_{ki} e_{j\ell} - \partial_{\ell i} e_{jk} - \partial_{kj} e_{i\ell} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

La formule de Cesàro-Volterra est déduite à partir d'un concept plus général de primitive d'une fonction. La fonction de déplacement en $\mathbf{x}$ est définie comme l'intégrale sur un chemin arbitraire $\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ d'une certaine forme différentielle. On a :

$$v_i(\mathbf{x}) = v_i^0 + \int_{\gamma} \partial_j v_i(\mathbf{y}) dy_j,$$

où $v_i^0 := v_i(\mathbf{x}_0)$ est la valeur de v_i calculée en correspondance du point fixe $\mathbf{x}_0$. On peut prolonger l'intégrale suivant l'arc de $\mathbf{x}_0$ à $\mathbf{x}$ et réécrire la formule comme suit :

$$v_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = v_i^0 + \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} e_{ij}(\mathbf{y}) dy_j + \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} q_{ij}(\mathbf{y}) dy_j, \quad (4.8)$$

où $e_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ sont les composantes du tenseur linéarisé de déformation et $q_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j)$ sont les composantes de la rotation infinitésimale.

Afin que les composantes du tenseur linéarisé de déformation e_{ij} apparaissent dans la deuxième partie de l'intégrale (4.8), on applique l'intégration par partie suivante :

$$\int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} q_{ij}(\mathbf{y}) dy_j = - \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} q_{ik}(\mathbf{y}) d(x_k - y_k) = -(x_k - x_k^0) q_{ik}^0 + \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} (x_k - y_k) dq_{ik},$$

où $q_{ik}^0 := q_{ik}(\mathbf{x}_0)$ représente la rotation infinitésimale en $\mathbf{x}_0$ et $dq_{ik} = \partial_j q_{ik}(\mathbf{y}) dy_j$. On remarque que :

$$\partial_j q_{ik}(\mathbf{y}) = \partial_k e_{ij}(\mathbf{y}) - \partial_i e_{kj}(\mathbf{y}).$$

Donc,

$$v_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = v_i^0 - (x_k - x_k^0) q_{ik}^0 + \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{ij}(\mathbf{y}) + (x_k - y_k)(\partial_k e_{ij}(\mathbf{y}) - \partial_i e_{kj}(\mathbf{y}))] dy_j.$$

La formule de Cesàro-Volterra donne une représentation explicite des déplacements v_i en connaissant les composantes de la déformation linéarisée donnée e_{ij} . Les constantes v_i^0 et q_{ij}^0 sont arbitraires.

Si on dérive la fonction v_i par rapport à la coordonnée x_j et la fonction v_j par rapport à x_i , on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_j v_i(\mathbf{x}) &= -q_{ij}^0 + e_{ij}(\mathbf{x}) + \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} (\partial_j e_{ik}(\mathbf{y}) - \partial_i e_{kj}(\mathbf{y})) dy_k, \\ \partial_i v_j(\mathbf{x}) &= -q_{ji}^0 + e_{ji}(\mathbf{x}) + \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} (\partial_i e_{jk}(\mathbf{y}) - \partial_j e_{ki}(\mathbf{y})) dy_k. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En additionnant les dérivées (4.9) et grâce à la symétrie de e_{ij} et l'antisymétrie de q_{ij}^0 , on a :

$$e_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i(\mathbf{x}) + \partial_i v_j(\mathbf{x}))$$

Cette représentation de la fonction de déplacement est la solution du système différentiel $\frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) = e_{ij}$.

Deuxième partie

Déduction Purement Géométrique de la Cinématique des Structures Minces

Chapitre 5

Déduction Géométrique de la Cinématique des Plaques

5.1 Introduction

La justification des modèles classiques de plaques minces a été le sujet de nombreuses recherches dans les vingt dernières années, (P. G. Ciarlet, [13] et sa bibliographie, et S. Müller, [34]). Les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love ont été obtenues par développement asymptotique des équations de l'élasticité tridimensionnelle en considérant les forces appliquées et la géométrie propre à la plaque. Ces développements asymptotiques formels ont été justifiés dans un cadre fonctionnel spécifique. C'est seulement dernièrement que B. Miara et P. Podio-Guidugli [32], et R. Paroni et al. [36] ont donné une justification du modèle de plaque de Reissner-Mindlin à l'aide respectivement de la méthode de scaling formel et de la Γ -convergence. Dans ce chapitre (qui reprend G. Geymonat et al., [27]), on donne une déduction *purement géométrique* des cinématiques de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin, à l'aide d'un développement formel appliqué aux équations de compatibilité de Saint-Venant,

$$\mathcal{R}_{ijkl}(\mathbf{e}) := \partial_{\ell j} e_{ik} + \partial_{ki} e_{j\ell} - \partial_{\ell i} e_{jk} - \partial_{kj} e_{i\ell} = 0, \quad (5.1)$$

et à la formule de Cesàro-Volterra,

$$v_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{ij}(\mathbf{y}) + (x_k - y_k)(\partial_k e_{ij}(\mathbf{y}) - \partial_i e_{kj}(\mathbf{y}))] dy_j, \quad (5.2)$$

Afin de reconstruire la cinématique de Reissner-Mindlin, on a besoin, tout d'abord, d'imposer certaines liaisons internes au champ de matrice donné $\mathbf{e} = (e_{ij})$. L'utilisation des liaisons internes en élasticité est bien connu dans la littérature, e.g., B. Miara et P. Podio-Guidugli [32], P. Podio-Guidugli [38].

Notamment, on dit qu'un champ de matrice symétrique, noté par $\mathbf{e}^{RM} = (e_{ij}^{RM})$, est un champ de matrice de Reissner-Mindlin dans un domaine Ω , si pour tous $\mathbf{x} = (x_i) \in \Omega$, il satisfait les liaisons suivantes :

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^{RM}(\mathbf{x}) &:= e_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \\ e_{\alpha 3}^{RM}(\mathbf{x}) &:= e_{\alpha 3}(x_1, x_2), \\ e_{33}^{RM}(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il faut remarquer que les prescriptions (5.3)_{2,3} sont formellement équivalentes à $\partial_{33}v_\alpha = 0$ et $\partial_3v_3 = 0$, où $\mathbf{v} = (v_i)$ est un champ de déplacement.

Dans ce cas, les équations de compatibilité (5.1) se spécialisent comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_{33}e_{\alpha\beta} &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}e_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}e_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}e_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}e_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{3\tau}e_{\sigma\alpha} - \partial_{3\sigma}e_{\tau\alpha} &= \partial_{\tau\alpha}e_{\sigma 3} - \partial_{\sigma\alpha}e_{\tau 3}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

La formule (5.4)₁ implique que $e_{\alpha\beta}$ est une fonction linéaire en x_3 :

$$e_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}(x_1, x_2). \quad (5.5)$$

Donc, en remplaçant (5.5) dans (5.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha}c_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}c_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}c_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}c_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}r_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}r_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}r_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}r_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{\tau}r_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}r_{\tau\alpha} &= \partial_{\tau\alpha}e_{\sigma 3} - \partial_{\sigma\alpha}e_{\tau 3}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Soit $\Omega^\varepsilon := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ un domaine de type plaque d'épaisseur 2ε , et soient (x_1, x_2) , les coordonnées planes, et x_3 , la coordonnée transversale associée à la plaque. Alors, les équations (5.6) représentent les conditions de compatibilité de Reissner-Mindlin définies sur le plan moyen ω de la plaque pour le champ $\mathbf{e}^{RM}$.

Si on considère le champ de matrice $\mathbf{e}^{RM}$ de composantes définies par (5.3) et (5.5), la représentation de Cesàro-Volterra du champ de déplacement $\mathbf{v} = (v_i)$ devient :

$$\begin{aligned} v_\alpha(\mathbf{x}) &= \int_\gamma [c_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}) + y_3(r_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma r_{\alpha\beta} - \partial_\alpha r_{\sigma\beta})) + \\ &\quad + (x_3 - y_3)(r_{\alpha\beta} - \partial_\alpha e_{3\beta})] dy_\beta + [e_{\alpha 3} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta} - \partial_\alpha e_{3\sigma})] dy_3, \\ v_3(\mathbf{x}) &= \int_\gamma [e_{3\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta} - r_{\sigma\beta})] dy_\beta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ici et dans la suite, on omettra la dépendance explicite de la fonction intégrande par rapport à $\mathbf{y}$ et de la courbe γ par rapport au point initial et final $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}$.

5.2 Dédution de la cinématique de Kirchhoff-Love

5.2.1 Les équations de compatibilité : développements asymptotiques

Soit ε un petit paramètre positif qui tend vers zéro. Soit ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère un domaine plaque d'épaisseur $2\varepsilon > 0$ et occupant la configuration de référence $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) = (e_{ij}^\varepsilon)(\mathbf{x}^\varepsilon)$ un champ de déformation symétrique donné, défini dans le domaine variable Ω^ε , et qui satisfait les conditions des compatibilité :

$$\partial_{\ell j}^\varepsilon e_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) + \partial_{ki}^\varepsilon e_{j\ell}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) - \partial_{\ell i}^\varepsilon e_{jk}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) - \partial_{kj}^\varepsilon e_{i\ell}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon. \quad (5.8)$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique de la déformation $\mathbf{e}^\varepsilon = (e_{ij}^\varepsilon)$ lorsque l'épaisseur tend vers zéro, on introduit le changement de variable standard qui permet de transformer le domaine ε -dépendant en un domaine fixe (P.G. Ciarlet, [13]). Soient $\Omega := \omega \times]-1, 1[$ et

$\mathbf{x} = (x_i)$ le point générique de $\overline{\Omega}$; à chaque point $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, on associe le point $\mathbf{x}^\varepsilon \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ à l'aide de la bijection (Fig. 5.1) :

$$\Pi^\varepsilon : \mathbf{x} = (x_i) \in \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{x}^\varepsilon = (x_i^\varepsilon) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon. \quad (5.9)$$

Par conséquent,

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha \text{ and } \partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3$$

et $e_{ij}(\varepsilon)(\mathbf{x}) = e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$ est le champ transformé par Π^ε . Dans la suite, on omettra la dépendance de $e_{ij}(\varepsilon)$ par rapport à $\mathbf{x}$.

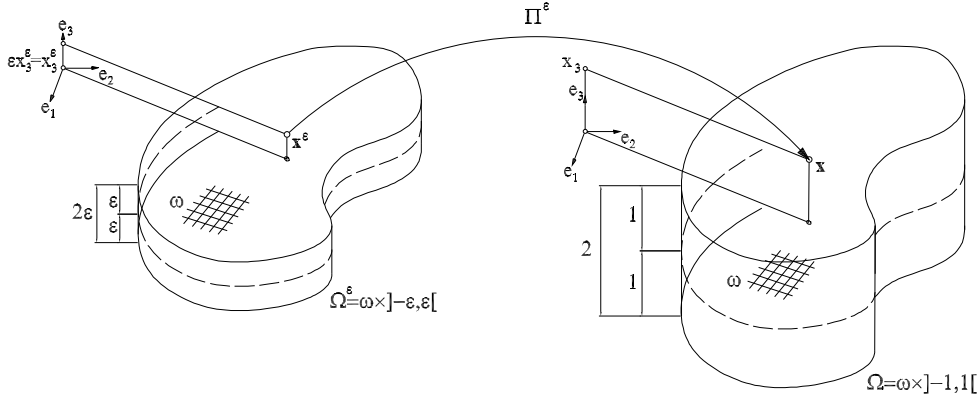


FIGURE 5.1 – Le changement de variable standard

Si on applique le changement de variable Π^ε (5.9) à (5.8), on obtient les équations suivantes dans le domaine fixe

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha} e_{\beta\tau}(\varepsilon) + \partial_{\beta\tau} e_{\sigma\alpha}(\varepsilon) - \partial_{\tau\alpha} e_{\beta\sigma}(\varepsilon) - \partial_{\beta\sigma} e_{\tau\alpha}(\varepsilon) &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{33} e_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\alpha 3} e_{\beta 3}(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\beta 3} e_{\alpha 3}(\varepsilon) + \partial_{\alpha\beta} e_{33}(\varepsilon) &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\tau 3} e_{\sigma\alpha}(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\sigma 3} e_{\tau\alpha}(\varepsilon) + \partial_{\sigma\alpha} e_{\tau 3}(\varepsilon) - \partial_{\sigma\tau} e_{\alpha 3}(\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Puisque, dans les équations mises à l'échelle (5.10), le paramètre apparaît en forme polynomiale, on suppose qu'il existe le développement asymptotique formel des déformations $e_{ij}(\varepsilon)$:

$$e_{ij}(\varepsilon) = e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1 + \varepsilon^2 e_{ij}^2 + \dots \quad (5.11)$$

En remplaçant le développement (5.11) dans (5.10) et en isolant les termes d'ordre zéro e_{ij}^0 , on a :

$$\begin{aligned} \partial_{33} e_{\alpha\beta}^0 &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha} e_{\beta\tau}^0 + \partial_{\beta\tau} e_{\sigma\alpha}^0 - \partial_{\tau\alpha} e_{\beta\sigma}^0 - \partial_{\beta\sigma} e_{\tau\alpha}^0 &= 0, \\ \partial_{3\tau} e_{\sigma\alpha}^0 - \partial_{3\sigma} e_{\tau\alpha}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Par (5.12)₁, on en déduit la caractérisation des composantes principales $e_{\alpha\beta}^{KL} := e_{\alpha\beta}^0$:

$$e_{\alpha\beta}^{KL} = c_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}(x_1, x_2). \quad (5.13)$$

On peut remarquer que le champ de déformation est décomposé en deux parties, bien connues dans les théories des plaques : $c_{\alpha\beta}$, le **tenseur de déformation plane**, qui gouverne les déformations membranaires ; $r_{\alpha\beta}$, le **tenseur de courbure**, qui caractérise les déformations de flexion.

Si on remplace (5.13) dans (5.12)_{2,3}, on obtient les conditions de compatibilité que les composantes $c_{\alpha\beta}$ et $r_{\alpha\beta}$ doivent satisfaire :

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha}c_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}c_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}c_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}c_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{\tau}r_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}r_{\tau\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aucune condition n'a été trouvée en ce qui concerne les composantes de déformation e_{i3}^{KL} . Les renseignements manquants seront obtenus à l'aide de la formule de Cesàro-Volterra.

5.2.2 La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques

La représentation de Cesàro-Volterra du champ de déplacement $\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon)$ associé au chemin $\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0^\varepsilon, \mathbf{x}^\varepsilon)$ a cette forme :

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) = \int_{\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0^\varepsilon, \mathbf{x}^\varepsilon)} [e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{y}^\varepsilon) + (x_k^\varepsilon - y_k^\varepsilon)(\partial_k^\varepsilon e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{y}^\varepsilon) - \partial_i^\varepsilon e_{kj}^\varepsilon(\mathbf{y}^\varepsilon))] dy_j^\varepsilon.$$

Comme la formule est indépendante du chemin choisi, on considère un point fixe $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, 0) \in \omega$ et un chemin particulier :

$$\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^\varepsilon) := \hat{\gamma}((x_{01}, x_{02}, 0), (x_1, x_2, 0)) \cup \gamma_*^\varepsilon((x_1, x_2, 0), (x_1, x_2, \varepsilon x_3)),$$

où $\hat{\gamma}$ est une courbe arbitraire dans le plan moyen ω de la plaque et γ_*^ε est un segment droit transversal suivant x_3 (Fig. 5.2).

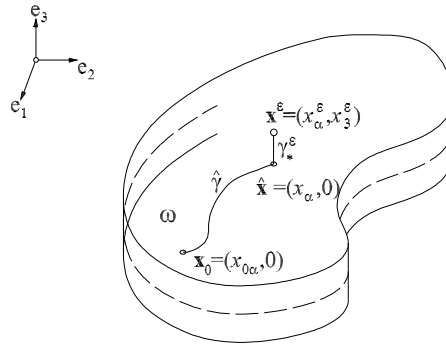


FIGURE 5.2 – Décomposition du chemin

On étudie séparément les déplacements plans v_α et le déplacement transversal v_3 . Si on applique le changement de variable standard (5.9), on obtient la formule de Cesàro-Volterra

mise à l'échelle :

$$\begin{aligned}
v_\alpha(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}})} [e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y})) + \\
&\quad + \varepsilon x_3 (\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \partial_\alpha e_{3\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}))] dy_\beta + \\
&\quad + \varepsilon \int_{\gamma_*(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})} [e_{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + \varepsilon (x_3 - y_3) (\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \partial_\alpha e_{33}(\varepsilon)(\mathbf{y}))] dy_3, \quad (5.15) \\
v_3(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}})} [e_{3\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\sigma\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}))] dy_\beta + \\
&\quad + \varepsilon \int_{\gamma_*(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})} e_{33}(\varepsilon)(\mathbf{y}) dy_3,
\end{aligned}$$

où $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, 0)$, $\hat{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\hat{\gamma}(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}) \subset \omega$, $\gamma_*(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ est le segment transversal de $\hat{\mathbf{x}}$ à $\mathbf{x}$ et $v_i(\varepsilon)(\mathbf{x}) = v_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$ est le déplacement transformé par Π^ε .

Dans la suite, on omettra la dépendance par rapport à $\mathbf{y}$ de la fonction intégrande et la dépendance de $\hat{\gamma}$ et γ_* respectivement par rapport aux points initiaux et finaux $\mathbf{x}_0$ et $\hat{\mathbf{x}}$, et $\hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{x}$.

Sous les hypothèses (5.11) sur le développement asymptotique de $e_{ij}(\varepsilon)$, on considère les développements asymptotiques formels des déplacements $v_i(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
v_\alpha(\varepsilon) &= v_\alpha^0 + \varepsilon v_\alpha^1 + \varepsilon^2 v_\alpha^2 + \varepsilon^3 v_\alpha^3 + \dots, \\
v_3(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} v_3^{-1} + v_3^0 + \varepsilon v_3^1 + \varepsilon^2 v_3^2 + \varepsilon^3 v_3^3 + \dots,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
v_\alpha^0(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{\alpha\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}^0) + x_3 \partial_3 e_{\alpha\beta}^0] dy_\beta, \\
v_3^{-1}(\mathbf{x}) &= - \int_{\hat{\gamma}} (x_\sigma - y_\sigma) \partial_3 e_{\sigma\beta}^0 dy_\beta,
\end{aligned}$$

et les termes d'ordre supérieur, pour $i = 1, 2, \dots$, sont :

$$\begin{aligned}
v_\alpha^i(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{\alpha\beta}^i + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{\alpha\beta}^i - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}^i) + x_3 (\partial_3 e_{\alpha\beta}^i - \partial_\alpha e_{3\beta}^{i-1})] dy_\beta + \\
&\quad + \int_{\gamma_*} [e_{\alpha 3}^{i-1} + (x_3 - y_3)(\partial_3 e_{\alpha 3}^{i-1} - \partial_\alpha e_{33}^{i-2})] dy_3, \\
v_3^{i+1}(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{3\beta}^{i+1} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}^{i+1} - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}^{i+2})] dy_\beta + \int_{\gamma_*} e_{33}^i dy_3.
\end{aligned}$$

Les termes principaux des deux développements asymptotiques

$$\begin{aligned}
v_\alpha^0(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{\alpha\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}^0) + x_3 \partial_3 e_{\alpha\beta}^0] dy_\beta, \\
v_3^{-1}(\mathbf{x}) &= - \int_{\hat{\gamma}} (x_\sigma - y_\sigma) \partial_3 e_{\sigma\beta}^0 dy_\beta,
\end{aligned} \quad (5.16)$$

représentent la formule de Cesàro-Volterra dans le cas d'une plaque.

Si on applique l'indépendance du chemin aux intégrales curvilignes (5.16), on obtient encore une fois les équations (5.12) et, par conséquent, (5.13)-(5.14). En remplaçant (5.13) dans les

formules (6.5.1), on parvient aux formules suivantes pour $v_\alpha^{KL} := v_\alpha^0$ et $v_3^{KL} := v_3^{-1}$:

$$\begin{aligned} v_\alpha^{KL}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}) + x_3 \int_{\hat{\gamma}} r_{\alpha\beta} dy_\beta, \\ v_3^{KL}(x_1, x_2) &= - \int_{\hat{\gamma}} (x_\sigma - y_\sigma) r_{\sigma\beta} dy_\beta. \end{aligned} \quad (5.17)$$

En dérivant les formules (5.16) par rapport à la coordonnée transversale x_3 , on montre que les composantes de déformation sont indentiquement nulles :

$$e_{\alpha 3}^{KL} := \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_3^{-1} + \partial_3 v_\alpha^0) = 0 \quad \text{et} \quad e_{33}^{KL} := \partial_3 v_3^{-1} = 0.$$

La différence fondamentale entre e_{i3}^{KL} et e_{i3}^0 est la suivante :

- e_{i3}^{KL} sont calculés à partir de la formule de Cesàro-Volterra et ils représentent les déformations associées aux déplacements v_α^{KL} et v_3^{KL} ;
- e_{i3}^0 ne sont que les termes d'ordre zéro du développement asymptotique du champ de matrice $\mathbf{e}(\varepsilon)$.

5.2.3 La fonction d'Airy

On suppose qu'il existe une fonction d'Airy, notée par $w \in \mathcal{C}^3(\omega)$, telle que $r_{\alpha\beta} := -\partial_{\alpha\beta} w$: donc, les conditions (5.14)₂ sont automatiquement satisfaites. En remplaçant w dans (5.17), on trouve :

$$\begin{aligned} v_\alpha^{KL}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta})] dy_\beta - x_3 \int_{\hat{\gamma}} \partial_{\alpha\beta} w dy_\beta, \\ v_3^{KL}(x_1, x_2) &= \int_{\hat{\gamma}} (x_\sigma - y_\sigma) \partial_{\sigma\beta} w dy_\beta. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\partial_\alpha v_3^{KL} = \int_{\hat{\gamma}} r_{\alpha\beta} dy_\beta = - \int_{\hat{\gamma}} \partial_{\alpha\beta} w dy_\beta = -\partial_\alpha w.$$

Ceci implique la cinématique classique de Kirchhoff-Love pour une plaque :

$$\begin{cases} v_\alpha^{KL}(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha w, \\ v_3^{KL}(x_1, x_2) = w(x_1, x_2), \end{cases} \quad (5.18)$$

où $\bar{v}_\alpha(x_1, x_2) := \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta})] dy_\beta$.

Il est important de mettre en évidence que, pour parvenir à (5.18), on n'a fait aucune hypothèse sur la loi constitutive du matériau ou sur l'équilibre du système.

5.3 Dédution de la cinématique de Reissner-Mindlin

5.3.1 Les équations de compatibilité : développements asymptotiques

Comme auparavant, soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, la configuration de référence d'une plaque d'épaisseur 2ε . On considère un champ de déformation $\mathbf{e}^{RM, \varepsilon}$ de composantes données par

(5.3)-(5.5). Les équations de compatibilité dans Ω^ε sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha}^\varepsilon c_{\beta\tau}^\varepsilon + \partial_{\beta\tau}^\varepsilon c_{\sigma\alpha}^\varepsilon - \partial_{\tau\alpha}^\varepsilon c_{\beta\sigma}^\varepsilon - \partial_{\beta\sigma}^\varepsilon c_{\tau\alpha}^\varepsilon &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}^\varepsilon r_{\beta\tau}^\varepsilon + \partial_{\beta\tau}^\varepsilon r_{\sigma\alpha}^\varepsilon - \partial_{\tau\alpha}^\varepsilon r_{\beta\sigma}^\varepsilon - \partial_{\beta\sigma}^\varepsilon r_{\tau\alpha}^\varepsilon &= 0, \\ \partial_\tau^\varepsilon r_{\sigma\alpha}^\varepsilon - \partial_\sigma^\varepsilon r_{\tau\alpha}^\varepsilon &= \partial_{\tau\alpha}^\varepsilon e_{\sigma 3}^\varepsilon - \partial_{\sigma\alpha}^\varepsilon e_{\tau 3}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Soit Π^ε le changement des variables standard (5.9), qui transforme respectivement $c_{\alpha\beta}^\varepsilon$, $r_{\alpha\beta}^\varepsilon$ et $e_{\alpha 3}^\varepsilon$ en $c_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $r_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et $e_{\alpha 3}(\varepsilon)$. On suppose que $c_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $r_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et $e_{\alpha 3}(\varepsilon)$ possèdent les développements suivants :

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= c_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon c_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 c_{\alpha\beta}^2 + \dots, \\ r_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= r_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon r_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 r_{\alpha\beta}^2 + \dots, \\ e_{\alpha 3}(\varepsilon) &= e_{\alpha 3}^0 + \varepsilon e_{\alpha 3}^1 + \varepsilon^2 e_{\alpha 3}^2 + \dots. \end{aligned} \quad (5.20)$$

En remplaçant (5.20) dans (5.19), on obtient, pour $i = 0, 1, \dots$, les conditions de compatibilité :

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha} c_{\beta\tau}^i + \partial_{\beta\tau} c_{\sigma\alpha}^i - \partial_{\tau\alpha} c_{\beta\sigma}^i - \partial_{\beta\sigma} c_{\tau\alpha}^i &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha} r_{\beta\tau}^i + \partial_{\beta\tau} r_{\sigma\alpha}^i - \partial_{\tau\alpha} r_{\beta\sigma}^i - \partial_{\beta\sigma} r_{\tau\alpha}^i &= 0, \\ \partial_\tau r_{\sigma\alpha}^i - \partial_\sigma r_{\tau\alpha}^i &= \partial_{\tau\alpha} e_{\sigma 3}^i - \partial_{\sigma\alpha} e_{\tau 3}^i. \end{aligned}$$

5.3.2 La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques

On considère la représentation de Cesàro-Volterra (5.7) du champ de déplacement $\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon)$. Si on choisit la décomposition du chemin précédente, i.e.

$$\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^\varepsilon) := \hat{\gamma}((x_{01}, x_{02}, 0), (x_1, x_2, 0)) \cup \gamma_*^\varepsilon((x_1, x_2, 0), (x_1, x_2, \varepsilon x_3)),$$

et si on met à l'échelle le domaine Ω^ε à l'aide de Π^ε , on a :

$$\begin{aligned} v_\alpha(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}(\varepsilon) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}(\varepsilon)) + \varepsilon x_3(r_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \partial_\alpha e_{3\beta}(\varepsilon))] dy_\beta + \\ &\quad + \varepsilon \int_{\gamma_*} e_{\alpha 3}(\varepsilon) dy_3, \\ v_3(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{3\beta}(\varepsilon) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}(\varepsilon) - r_{\sigma\beta}(\varepsilon))] dy_\beta, \end{aligned}$$

où $\mathbf{v}(\varepsilon) = (v_i(\varepsilon))$ est le champ de déplacement $\mathbf{v}^\varepsilon$ transformé par Π^ε .

Les hypothèses (5.20) sur le développement asymptotique de $e_{ij}(\varepsilon)$ induisent le développement asymptotique des fonctions de déplacement $v_i(\varepsilon)$ suivant :

$$v_i(\varepsilon) = v_i^0 + \varepsilon v_i^1 + \varepsilon^2 v_i^2 + \dots,$$

où

$$\begin{aligned} v_\alpha^0(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}^0)] dy_\beta, \\ v_\alpha^1(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^1 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}^1 - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}^1) + x_3(r_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha e_{3\beta}^0)] dy_\beta + \int_{\gamma_*} e_{\alpha 3}^0 dy_3, \\ v_3^0(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{3\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}^0 - r_{\sigma\beta}^0)] dy_\beta, \end{aligned} \quad (5.21)$$

et les termes d'ordre supérieur, pour $i = 1, 2, \dots$, sont :

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^{i+1}(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^{i+1} + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} c_{\alpha\beta}^{i+1} - \partial_{\alpha} c_{\sigma\beta}^{i+1}) + x_3(r_{\alpha\beta}^i - \partial_{\alpha} e_{3\beta}^i)] dy_{\beta} + \int_{\gamma_*} e_{\alpha 3}^i dy_3, \\ v_3^i(\mathbf{x}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{3\beta}^i + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} e_{3\beta}^i - r_{\sigma\beta}^i)] dy_{\beta}. \end{aligned}$$

On peut facilement montrer que v_{α}^0 est indépendant de la coordonnée transversale x_3 . Pour cela,

$$v_{\alpha}^0(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^0 + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} c_{\alpha\beta}^0 - \partial_{\alpha} c_{\sigma\beta}^0)] dy_{\beta} := \bar{v}_{\alpha}^0(x_1, x_2).$$

On remarque que v_{α}^0 ne détermine que l'état de déformation plan, alors qu'on recherche la cinématique de Reissner-Mindlin qui tient compte des comportements membranaire, flexionnel et à cisaillement.

On dérive (5.21)₃ par rapport à x_3 et on a $\partial_3 v_3^0 = 0$. Donc :

$$v_3^0 := w(x_1, x_2). \quad (5.22)$$

Si on dérive v_{α}^1 par rapport à x_3 et v_3^0 par rapport à x_{α} et somme ces deux dérivées, on obtient :

$$e_{\alpha 3}^0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\partial_3 v_{\alpha}^1 + \partial_{\alpha} v_3^0). \quad (5.23)$$

Grâce à (5.22)-(5.23), on a la caractérisation complète des fonctions v_{α}^1 et v_3^0 :

$$\begin{cases} v_{\alpha}^1(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}_{\alpha}^1(x_1, x_2) + x_3(2e_{\alpha 3}^0 - \partial_{\alpha} w), \\ v_3^0(x_1, x_2) = w(x_1, x_2). \end{cases} \quad (5.24)$$

Si on dérive v_{α}^1 par rapport à x_{β} et v_{β}^1 par rapport à x_{α} , on obtient :

$$c_{\alpha\beta}^1(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\partial_{\beta} v_{\alpha}^1 + \partial_{\alpha} v_{\beta}^1),$$

où, avec (5.24),

$$c_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2}(\partial_{\beta} \bar{v}_{\alpha}^1 + \partial_{\alpha} \bar{v}_{\beta}^1) \quad \text{et} \quad r_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}(2\partial_{\beta} e_{\alpha 3}^0 + 2\partial_{\alpha} e_{\beta 3}^0 - \partial_{\alpha\beta} w).$$

On peut enfin définir la cinématique de Reissner-Mindlin :

$$\begin{cases} v_{\alpha}^{RM}(x_1, x_2, x_3) := \bar{v}_{\alpha}^0(x_1, x_2) + \bar{v}_{\alpha}^1(x_1, x_2) + x_3(2e_{\alpha 3}^0 - \partial_{\alpha} w), \\ v_3^{RM}(x_1, x_2) := w(x_1, x_2), \end{cases} \quad (5.25)$$

et conséquemment, on peut calculer le champ de déformation associé :

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^{RM} &:= c_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2) + c_{\alpha\beta}^1(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2), \\ e_{\alpha 3}^{RM} &:= e_{\alpha 3}^0(x_1, x_2), \\ e_{33}^{RM} &= 0. \end{aligned}$$

La quantité $2e_{\alpha 3}^0 - \partial_{\alpha} w$ dans la fonction (5.25)₁ représente la rotation de la fibre transversale de la plaque. Cette fibre ne reste pas perpendiculaire au plan moyen lors de la déformation, comme dans le modèle de Kirchhoff-Love : c'est un modèle de plaque capable de se déformer

à cisaillement. La fonction $e_{\alpha 3}^0$, qui apparaît dans la rotation du segment transversal, mesure la différence avec l'état de déformation de Kirchhoff-Love et identifie l'état de déformation de Reissner-Mindlin d'une plaque qui se déforme à cisaillement.

Il est important de souligner explicitement que, pour obtenir la cinématique de Reissner-Mindlin, on doit imposer des liaisons internes au champ de déformation. Comme B. Miara and P. Podio-Guidugli ont mis en évidence dans [32], ceci est dû au fait que les modèles des structures qui se déforment à cisaillement, comme le modèle de plaque de Reissner-Mindlin, ne peuvent pas être déduits à partir de l'élasticité classique linéaire, mais il est nécessaire d'utiliser une théorie de l'élasticité du second gradient.

5.4 Conclusions

La dérivation de la cinématique des modèles classiques de plaque n'est basée que sur des considérations géométriques, puisque les conditions de compatibilité et la formule de Cesàro-Volterra sont profondément liées à la nature métrique de la déformation et de la variété sur laquelle cette déformation est définie (article [26]). La représentation de Cesàro-Volterra semble importante pour :

- une formulation récente du problème d'élasticité tridimensionnelle, où les composantes de déformation sont considérées comme inconnues primaires (P. G. Ciarlet et P. Jr. Ciarlet [14])
- triangulation FEM.

La généralisation de la formule de Cesàro-Volterra dans le cas des coordonnées curvilignes et de la cinématique des coques et surfaces constitue le sujet du prochain chapitre.

The Kinematics of Plate Models: A Geometrical Deduction

Giuseppe Geymonat · Françoise Krasucki ·
Michele Serpilli

Received: 16 April 2007 / Accepted: 2 July 2007 /
Published online: 24 August 2007
© Springer Science + Business Media B.V. 2007

Abstract We present a deduction of the Kirchhoff–Love and Reissner–Mindlin kinematics of a simply-connected plate by using the formal asymptotic development method applied to the compatibility conditions of Saint-Venant and the formula of Cesàro–Volterra. This formal deduction is *purely geometrical* because we do not use any information coming from the loading or the constitutive behavior.

Keywords Compatibility conditions · Cesàro–Volterra integral ·
Asymptotic expansion · Plate models

Mathematics Subject Classification (2000) 74K20

1 Introduction

The justification of the usual models of thin plates has been a subject of many researches, see, e.g., P. G. Ciarlet [3] and its bibliography, and for more recent and very general results S. Müller [11]. In particular, the Kirchhoff–Love’s *kinematical assumptions* have been obtained by formal asymptotic developments from the 3D equilibrium equations taking into account the loading and the peculiar geometry of the structure (i.e., its *thinness*). Such formal asymptotic expansions have been

G. Geymonat · F. Krasucki · M. Serpilli (✉)
Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR 5508, Université Montpellier II,
Place Eugène Bataillon, 34695 Montpellier Cedex 5, France
e-mail: serpilli@lmgc.univ-montp2.fr

G. Geymonat
e-mail: geymonat@lmgc.univ-montp2.fr

F. Krasucki
e-mail: krasucki@lmgc.univ-montp2.fr

justified by different variational-type arguments. For what concerns the Reissner–Mindlin plate model, a justification has been recently obtained in B. Miara and P. Podio-Guidugli [9], with a suitable scaling method, and in R. Paroni et al. [12], via Γ -convergence. In this paper we give a different *purely geometrical* formal deduction of the Kirchhoff–Love’s kinematical assumptions and we apply the same method to obtain the Reissner–Mindlin kinematics.

1.1 The Saint-Venant Compatibility Conditions

In order to describe the method of analysis employed in this paper, it is useful to recall some classical results about the characterization of linearized strain tensor fields. Let Ω be an open, bounded subset of $\mathbb{R}^3$ and let $\mathbf{u} = (u_i)$ be a smooth enough vector (displacement) field defined over Ω . The symmetric matrix field $\nabla_s \mathbf{u}$ defined over Ω by

$$(\nabla_s \mathbf{u})_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (1)$$

is the *linearized strain tensor field* associated with the vector field $\mathbf{u}$.

A characterization of a symmetric matrix field $\mathbf{e} = (e_{ij})$ which can be written in the form

$$\mathbf{e} = \nabla_s \mathbf{u}, \text{ for some vector (displacement) field } \mathbf{u} \quad (2)$$

was announced in 1864 by A.J.C.B. de Saint-Venant (the so-called *Saint-Venant theorem*), and rigorously proved by Beltrami only in 1886. This result can be summarized in the following form (see, e.g., M. E. Gurtin [8], Section 14): *Let the open region Ω be simply-connected and let $\mathbf{e} = (e_{ij}) \in \mathbb{C}^2(\Omega; \mathbb{S}^3)$ be a symmetric matrix field satisfying the equations:*

$$R_{ijkl}(\mathbf{e}) := \partial_{ij} e_{ik} + \partial_{ki} e_{jl} - \partial_{li} e_{jk} - \partial_{kj} e_{il} = 0 \text{ in } \Omega \text{ for all } i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (3)$$

Then, there is a vector field $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^3(\Omega; \mathbf{E}^3)$ (unique up to infinitesimal rigid displacements) such that $\mathbf{e} = \nabla_s \mathbf{u}$. Clearly, the converse of the statement holds even if Ω is not simply-connected.

Here and in the sequel, we employ the summation convention on repeated indices; moreover, Latin indices take their values in the set $\{1, 2, 3\}$, and Greek indices in the set $\{1, 2\}$.

Several extensions of the *Saint-Venant compatibility conditions* $R_{ijkl}(\mathbf{e}) = 0$ have been provided under substantially weaker regularity assumptions. It must be cited an $\mathbb{L}_s^2(\Omega)$ -version of the *Saint-Venant theorem* established by Ciarlet and Ciarlet Jr. [4] (where $\mathbb{L}_s^2(\Omega)$ is the space of all symmetric matrices with components in $L^2(\Omega)$). Other characterizations (using various functional frameworks) have been given, e.g., in the papers of C. Amrouche et al. [1], G. Geymonat and F. Krasucki [6, 7], J. J. Moreau [10] and T.W. Ting [14].

In order to recover the Reissner–Mindlin kinematics, we need, at first, some internal constraints to be imposed to the matrix field $\mathbf{e} = (e_{ij})$. The use of internal constraints in elasticity problems is well-known in the literature: see, e.g., B. Miara and P. Podio-Guidugli [9], P. Podio-Guidugli [13].

More precisely, we say that a symmetric matrix field, denoted by $\mathbf{e}^{RM} = (e_{ij}^{RM})$, is a Reissner–Mindlin matrix field defined over Ω , if for all $\mathbf{x} = (x_i) \in \Omega$, it satisfies the following constraints:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^{RM}(\mathbf{x}) &:= e_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \\ e_{\alpha 3}^{RM}(\mathbf{x}) &:= e_{\alpha 3}(x_1, x_2), \\ e_{33}^{RM}(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Let us point out that the last two prescriptions are formally equivalent to $\partial_{33}u_\alpha = 0$ and $\partial_3 u_3 = 0$, where $\mathbf{u} = (u_i)$ is the displacement field.

In this case the compatibility conditions (3) specialize as:

$$\begin{aligned} \partial_{33}e_{\alpha\beta} &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}e_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}e_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}e_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}e_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{3\tau}e_{\sigma\alpha} - \partial_{3\sigma}e_{\tau\alpha} &= \partial_{\tau\alpha}e_{\sigma 3} - \partial_{\sigma\alpha}e_{\tau 3}. \end{aligned} \quad (5)$$

The formulae (5)₁ imply that $e_{\alpha\beta}$ is a linear function of the coordinate x_3 :

$$e_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}(x_1, x_2). \quad (6)$$

Hence, by substituting (6) in (5), one has:

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha}c_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}c_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}c_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}c_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}r_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau}r_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha}r_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma}r_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_{\tau}r_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma}r_{\tau\alpha} &= \partial_{\tau\alpha}e_{\sigma 3} - \partial_{\sigma\alpha}e_{\tau 3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Let $\Omega^\varepsilon := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ (with self-explanatory notation) be a plate-like domain of thickness 2ε , and let (x_1, x_2) be the in-plane coordinates and x_3 the transverse coordinate associated to the plate. Then, (7) represent the so-called Reissner–Mindlin compatibility conditions defined over the middle plane ω of the plate for the field $\mathbf{e}^{RM}$.

1.2 The Formula of Cesàro–Volterra

An explicit formula giving the displacement $\mathbf{u}$ as a line integral on a path contained in Ω of a certain function of the symmetric matrix field $\mathbf{e}$ has been obtained by Volterra in 1906 (see [15]). In 1907 Cesàro re-wrote the formula of Volterra in a more refined way presented in E. Cesàro [2] and M. E. Gurtin [8].

Given a fixed point $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ and a path $\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ from $\mathbf{x}_0$ to $\mathbf{x}$, where $\mathbf{x} \in \Omega$ is a generic point of the set Ω , let $u_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \gamma)$ be defined by the formula of Cesàro–Volterra:

$$u_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \gamma) = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{ij}(\mathbf{y}) + (x_k - y_k)(\partial_k e_{ij}(\mathbf{y}) - \partial_i e_{kj}(\mathbf{y}))] dy_j. \quad (8)$$

This formula gives explicitly the displacements u_i associated with the deformation field $\mathbf{e} = (e_{ij})$ only if the line integral is independent of the path. If the domain is simply-connected (see, e.g., [5]), then the compatibility conditions (3) are sufficient for the integral to be path-independent, as follows from the Stokes theorem.

As in Section 1.1, let us consider the case of matrix field $\mathbf{e}^{RM}$, with components as in (4) and (6). Consequently, the representation of Cesàro–Volterra of the displacement field $\mathbf{u} = (u_i)$ takes the form:

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}) &= \int_\gamma [c_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}) + y_3(r_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma r_{\alpha\beta} - \partial_\alpha r_{\sigma\beta})) + \\ &\quad + (x_3 - y_3)(r_{\alpha\beta} - \partial_\alpha e_{3\beta})] dy_\beta + [e_{\alpha 3} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta} - \partial_\alpha e_{3\sigma})] dy_3, \\ u_3(\mathbf{x}) &= \int_\gamma [e_{3\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta} - r_{\sigma\beta})] dy_\beta. \end{aligned} \quad (9)$$

Here, we have omitted the explicit dependence of the integrand function on $\mathbf{y}$ and of the curve γ on the initial and ending points $\mathbf{x}_0$ and $\mathbf{x}$.

1.3 Paper Outline

In this paper, we obtain a deduction of Kirchhoff–Love and Reissner–Mindlin kinematics by using the formal asymptotic development method applied to the compatibility conditions of Saint-Venant (3) and the formula of Cesàro–Volterra (8), without using any information coming from the equilibrium or the constitutive behavior.

In Section 2, we apply the usual scaling to the plate-like domain $\Omega := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ and to the strain tensor field $\mathbf{e}(\varepsilon)$. Consequently, we scale the Saint-Venant compatibility conditions (3) and we characterize, at least partially, the leading terms of the asymptotic expansion of the strain field at zeroth order $e_{\alpha\beta}^0$. Then, the scaling is applied to the formula of Cesàro–Volterra (8): we focus again our attention to the lower order terms of the expansion for the displacement field, u_α^0 and u_3^{-1} . Finally, we construct the Kirchhoff–Love *Ansatz* by integration.

In Section 3, we deduce the Reissner–Mindlin kinematics for a plate starting from a certain matrix field $\mathbf{e}^{RM}$. Then, as in Section 2, we apply the scaling to a plate-like domain, we perform an asymptotic analysis of the compatibility conditions (7) and the formula of Cesàro–Volterra (9). In this way, we characterize the leading terms of the expansions for both deformation and displacement fields and we obtain the Reissner–Mindlin *Ansatz* by integration.

2 Deduction of the Kirchhoff–Love Kinematics

2.1 The Compatibility Conditions: Asymptotic Expansion

Let ε be a positive “small” parameter which will tend to zero. Let ω be a simply-connected domain of $\mathbb{R}^2$. We consider a *plate* with thickness $2\varepsilon > 0$ occupying the reference configuration $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Let a deformation matrix field $\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) = (e_{ij}^\varepsilon)(\mathbf{x}^\varepsilon)$ be given, defined over the variable domain Ω^ε , and satisfying the compatibility conditions:

$$\partial_{ij}^\varepsilon e_{ik}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) + \partial_{ki}^\varepsilon e_{jl}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) - \partial_{li}^\varepsilon e_{jk}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) - \partial_{kj}^\varepsilon e_{il}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) = 0 \text{ in } \Omega^\varepsilon. \quad (10)$$

In order to study the asymptotic behavior of the deformation field $\mathbf{e}^\varepsilon = (e_{ij}^\varepsilon)$ when the thickness goes to zero, we introduce the usual change of variables that allows us to transform the problem posed on a ε -dependent domain into a problem on a fixed

domain (see [3]). Let $\Omega := \omega \times]-1, 1[$ and let $\mathbf{x} = (x_i)$ denote the generic point of the set $\overline{\Omega}$; at each point $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, we associate the point $\mathbf{x}^\varepsilon \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ through the bijection:

$$\Pi^\varepsilon : \mathbf{x} = (x_i) \in \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{x}^\varepsilon = (x_i^\varepsilon) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon. \quad (11)$$

Consequently,

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha \text{ and } \partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3$$

and $e_{ij}(\varepsilon)(\mathbf{x}) = e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$ is the field transformed by Π^ε . In the sequel, we will omit the explicit dependence of $e_{ij}(\varepsilon)$ on $\mathbf{x}$. By applying the previous change of variables Π^ε to (10), we obtain the following equations in the fixed domain Ω :

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha} e_{\beta\tau}(\varepsilon) + \partial_{\beta\tau} e_{\sigma\alpha}(\varepsilon) - \partial_{\tau\alpha} e_{\beta\sigma}(\varepsilon) - \partial_{\beta\sigma} e_{\tau\alpha}(\varepsilon) &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{33} e_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\alpha 3} e_{\beta 3}(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\beta 3} e_{\alpha 3}(\varepsilon) + \partial_{\alpha\beta} e_{33}(\varepsilon) &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\tau 3} e_{\sigma\alpha}(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\sigma 3} e_{\tau\alpha}(\varepsilon) + \partial_{\sigma\alpha} e_{\tau 3}(\varepsilon) - \partial_{\sigma\tau} e_{\alpha 3}(\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Since in the re-scaled (12) the parameter of smallness ε appears explicitly in a polynomial form, we assume that there is a formal asymptotic expansion of the deformations $e_{ij}(\varepsilon)$:

$$e_{ij}(\varepsilon) = e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1 + \varepsilon^2 e_{ij}^2 + \varepsilon^3 e_{ij}^3 + \dots. \quad (13)$$

By substituting the asymptotic development (13) into (12) and by isolating the zeroth order term e_{ij}^0 , we find:

$$\begin{aligned} \partial_{33} e_{\alpha\beta}^0 &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha} e_{\beta\tau}^0 + \partial_{\beta\tau} e_{\sigma\alpha}^0 - \partial_{\tau\alpha} e_{\beta\sigma}^0 - \partial_{\beta\sigma} e_{\tau\alpha}^0 &= 0, \\ \partial_{3\tau} e_{\sigma\alpha}^0 - \partial_{3\sigma} e_{\tau\alpha}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

From (14)₁ we derive immediately the characterization of the components of the leading term $e_{\alpha\beta}^{KL} := e_{\alpha\beta}^0$:

$$e_{\alpha\beta}^{KL} = c_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}(x_1, x_2). \quad (15)$$

Thus, we can notice that the deformation field is decomposed into two parts, which are well-known in theory of plates: $c_{\alpha\beta}$, the so-called *in-plane strain tensor*, governs the in-plane deformations; $r_{\alpha\beta}$, the so-called *curvature tensor*, characterizes the deformations outside the middle-plane of the plate.

By substituting (15) into (14)_{2,3}, we obtain the compatibility conditions for the fields $c_{\alpha\beta}$ and $r_{\alpha\beta}$ in the case of a plate:

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha} c_{\beta\tau} + \partial_{\beta\tau} c_{\sigma\alpha} - \partial_{\tau\alpha} c_{\beta\sigma} - \partial_{\beta\sigma} c_{\tau\alpha} &= 0, \\ \partial_\tau r_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma r_{\tau\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Let us explicitly remark that no conditions are found for the remaining components of the deformation e_{i3}^{KL} . They are obtained in the following section using the formula of Cesàro–Volterra.

2.2 The Formula of Cesàro–Volterra: Asymptotic Expansion

The representation of Cesàro–Volterra of the displacement field $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ associated with the path $\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0^\varepsilon, \mathbf{x}^\varepsilon)$ takes the following form:

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) = \int_{\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0^\varepsilon, \mathbf{x}^\varepsilon)} [e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{y}^\varepsilon) + (x_k^\varepsilon - y_k^\varepsilon)(\partial_k^\varepsilon e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{y}^\varepsilon) - \partial_i^\varepsilon e_{kj}^\varepsilon(\mathbf{y}^\varepsilon))] dy_j^\varepsilon. \quad (17)$$

Since this formula is path-independent, let us consider a fixed point $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, 0) \in \omega$ and a particular path $\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^\varepsilon) := \widehat{\gamma}((x_{01}, x_{02}, 0), (x_1, x_2, 0)) \cup \gamma_*^\varepsilon((x_1, x_2, 0), (x_1, x_2, \varepsilon x_3))$, with $\widehat{\gamma}$, an arbitrary path over the middle plane of the plate ω and γ_*^ε , a straight line segment along the transverse coordinate x_3 .

We study separately the in-plane displacements u_α and the transverse displacement u_3 . By applying the change of coordinates (11) and denoting with $u_i(\varepsilon)(\mathbf{x}) = u_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$ the displacements transformed by Π^ε , we obtain:

$$\begin{aligned} u_\alpha(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}(\mathbf{x}_0, \widehat{\mathbf{x}})} \left[e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y})) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon x_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \partial_\alpha e_{3\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) \right) \right] dy_\beta + \\ &\quad + \varepsilon \int_{\gamma_*^\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})} \left[e_{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + \varepsilon(x_3 - y_3) \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \partial_\alpha e_{33}(\varepsilon)(\mathbf{y}) \right) \right] dy_3, \\ u_3(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}(\mathbf{x}_0, \widehat{\mathbf{x}})} \left[e_{3\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) + (x_\sigma - y_\sigma) \left(\partial_\sigma e_{3\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) - \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\sigma\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) \right) \right] dy_\beta + \\ &\quad + \varepsilon \int_{\gamma_*^\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})} e_{33}(\varepsilon)(\mathbf{y}) dy_3, \end{aligned} \quad (18)$$

where $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, 0)$, $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$ and $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\widehat{\gamma}(\mathbf{x}_0, \widehat{\mathbf{x}}) \subset \omega$ and $\gamma_*^\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ is a straight segment from $\widehat{\mathbf{x}}$ to $\mathbf{x}$.

In the sequel, we will omit the dependence on $\mathbf{y}$ of the integrand function and the dependence of $\widehat{\gamma}$ and γ_* respectively on the starting and ending points $\mathbf{x}_0$ and $\widehat{\mathbf{x}}$, and $\widehat{\mathbf{x}}$ and $\mathbf{x}$.

Proposition 1 *Under the assumption (13) on the asymptotic expansion of $e_{ij}(\varepsilon)$, the following formal asymptotic developments for the displacements $u_i(\varepsilon)$ hold:*

$$u_\alpha(\varepsilon) = u_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \varepsilon^2 u_\alpha^2 + \varepsilon^3 u_\alpha^3 + \dots, \quad (19)$$

$$u_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} u_3^{-1} + u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon^2 u_3^2 + \varepsilon^3 u_3^3 + \dots, \quad (20)$$

where

$$\begin{aligned} u_\alpha^0(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{\alpha\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha e_{\sigma\beta}^0) + x_3 \partial_3 e_{\alpha\beta}^0] dy_\beta, \\ u_3^{-1}(\mathbf{x}) &= - \int_{\widehat{\gamma}} (x_\sigma - y_\sigma) \partial_3 e_{\sigma\beta}^0 dy_\beta, \end{aligned} \quad (21)$$

and the higher order terms, for $i=1,2,\dots$, are:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^i(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{\alpha\beta}^i + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} e_{\alpha\beta}^i - \partial_{\alpha} e_{\sigma\beta}^i) + x_3(\partial_3 e_{\alpha\beta}^i - \partial_{\alpha} e_{3\beta}^{i-1})] dy_{\beta} + \\ &\quad + \int_{\gamma_*} [e_{\alpha 3}^{i-1} + (x_3 - y_3)(\partial_3 e_{\alpha 3}^{i-1} - \partial_{\alpha} e_{33}^{i-2})] dy_3, \\ u_3^{i+1}(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{3\beta}^{i+1} + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} e_{3\beta}^{i+1} - \partial_{\alpha} e_{\sigma\beta}^{i+2})] dy_{\beta} + \int_{\gamma_*} e_{33}^i dy_3. \end{aligned} \quad (22)$$

The leading terms of the two asymptotic expansions

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^0(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{\alpha\beta}^0 + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} e_{\alpha\beta}^0 - \partial_{\alpha} e_{\sigma\beta}^0) + x_3 \partial_3 e_{\alpha\beta}^0] dy_{\beta}, \\ u_3^{-1}(\mathbf{x}) &= - \int_{\widehat{\gamma}} (x_{\sigma} - y_{\sigma}) \partial_3 e_{\sigma\beta}^0 dy_{\beta}, \end{aligned} \quad (23)$$

represent the formulae of Cesàro–Volterra in the case of a plate.

By applying the independence from the path to the line integrals (23), we obtain once more the (14) and consequently (15)–(16). By substituting (15) into the formulae (23), we get the following formulae of Cesàro–Volterra for $u_{\alpha}^{KL} := u_{\alpha}^0$ and $u_3^{KL} := u_3^{-1}$:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^{KL}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta} + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} c_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} c_{\sigma\beta}) + x_3 \int_{\widehat{\gamma}} r_{\alpha\beta} dy_{\beta}, \\ u_3^{KL}(x_1, x_2) &= - \int_{\widehat{\gamma}} (x_{\sigma} - y_{\sigma}) r_{\sigma\beta} dy_{\beta}. \end{aligned} \quad (24)$$

By differentiating formulae (23) with respect to the transverse coordinate x_3 , it is easy to prove that the components of the deformation are identically equal to zero:

$$e_{\alpha 3}^{KL} := \frac{1}{2}(\partial_{\alpha} u_3^{-1} + \partial_3 u_{\alpha}^0) = 0 \text{ and } e_{33}^{KL} := \partial_3 u_3^{-1} = 0. \quad (25)$$

Let us stress explicitly the difference between e_{i3}^{KL} and e_{i3}^0 :

- e_{i3}^{KL} are calculated starting from the formula of Cesàro–Volterra and they represent the strain functions associated with the displacements u_{α}^{KL} and u_3^{KL} ;
- e_{i3}^0 are only the zeroth order terms of the asymptotic development of the matrix field $\mathbf{e}(\varepsilon)$.

2.3 The Use of the Airy Function

Let suppose that there is an Airy function, noted by $w(x_1, x_2) \in C^3(\omega)$, such that $r_{\alpha\beta} := -\partial_{\alpha\beta} w$: thus, conditions (16)₂ are automatically satisfied. By substituting the function w into (24), we find:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^{KL}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta} + (x_{\sigma} - y_{\sigma})(\partial_{\sigma} c_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} c_{\sigma\beta})] dy_{\beta} - x_3 \int_{\widehat{\gamma}} \partial_{\alpha\beta} w dy_{\beta}, \\ u_3^{KL}(x_1, x_2) &= \int_{\widehat{\gamma}} (x_{\sigma} - y_{\sigma}) \partial_{\sigma\beta} w dy_{\beta}. \end{aligned} \quad (26)$$

We notice that

$$\partial_\alpha u_3^{KL} = \int_{\widehat{\gamma}} r_{\alpha\beta} dy_\beta = - \int_{\widehat{\gamma}} \partial_{\alpha\beta} w dy_\beta = -\partial_\alpha w,$$

hence by substituting the previous expressions into (26), we find the classical Kirchhoff–Love kinematics of a plate:

$$\begin{cases} u_\alpha^{KL}(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha w, \\ u_3^{KL}(x_1, x_2) = w(x_1, x_2), \end{cases} \quad (27)$$

where $\bar{u}_\alpha(x_1, x_2) := \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta})] dy_\beta$.

It is important to remark once more that in order to obtain (27) we did not make any assumption on the constitutive behavior of the material or on the equilibrium conditions of the system.

3 Deduction of the Reissner–Mindlin Kinematics

3.1 The Compatibility Conditions: Asymptotic Expansion

As previously, $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ denotes the reference configuration of a *plate* of thickness 2ε . Let us consider a strain field $\mathbf{e}^{RM, \varepsilon}$, with components indicated in (4) and (6). The set of Reissner–Mindlin compatibility conditions in Ω^ε are defined as follows:

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha}^\varepsilon c_{\beta\tau}^\varepsilon + \partial_{\beta\tau}^\varepsilon c_{\sigma\alpha}^\varepsilon - \partial_{\tau\alpha}^\varepsilon c_{\beta\sigma}^\varepsilon - \partial_{\beta\sigma}^\varepsilon c_{\tau\alpha}^\varepsilon &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}^\varepsilon r_{\beta\tau}^\varepsilon + \partial_{\beta\tau}^\varepsilon r_{\sigma\alpha}^\varepsilon - \partial_{\tau\alpha}^\varepsilon r_{\beta\sigma}^\varepsilon - \partial_{\beta\sigma}^\varepsilon r_{\tau\alpha}^\varepsilon &= 0, \\ \partial_\tau^\varepsilon r_{\sigma\alpha}^\varepsilon - \partial_\sigma^\varepsilon r_{\tau\alpha}^\varepsilon &= \partial_{\tau\alpha}^\varepsilon e_{\sigma 3}^\varepsilon - \partial_{\sigma\alpha}^\varepsilon e_{\tau 3}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

Let Π^ε be the change of coordinates defined in (11). By applying Π^ε , $c_{\alpha\beta}^\varepsilon$ turns into $c_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $r_{\alpha\beta}^\varepsilon$ into $r_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ and $e_{\alpha 3}^\varepsilon$ into $e_{\alpha 3}(\varepsilon)$. We assume that $c_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $r_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ and $e_{\alpha 3}(\varepsilon)$ have the following expansions:

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= c_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon c_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 c_{\alpha\beta}^2 + \varepsilon^3 c_{\alpha\beta}^3 + \dots, \\ r_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= r_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon r_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 r_{\alpha\beta}^2 + \varepsilon^3 r_{\alpha\beta}^3 + \dots, \\ e_{\alpha 3}(\varepsilon) &= e_{\alpha 3}^0 + \varepsilon e_{\alpha 3}^1 + \varepsilon^2 e_{\alpha 3}^2 + \varepsilon^3 e_{\alpha 3}^3 + \dots. \end{aligned} \quad (29)$$

By substituting (29) into (28), one obtains, for $i = 0, 1, \dots$, the compatibility conditions:

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma\alpha}^i c_{\beta\tau}^i + \partial_{\beta\tau}^i c_{\sigma\alpha}^i - \partial_{\tau\alpha}^i c_{\beta\sigma}^i - \partial_{\beta\sigma}^i c_{\tau\alpha}^i &= 0, \\ \partial_{\sigma\alpha}^i r_{\beta\tau}^i + \partial_{\beta\tau}^i r_{\sigma\alpha}^i - \partial_{\tau\alpha}^i r_{\beta\sigma}^i - \partial_{\beta\sigma}^i r_{\tau\alpha}^i &= 0, \\ \partial_\tau^i r_{\sigma\alpha}^i - \partial_\sigma^i r_{\tau\alpha}^i &= \partial_{\tau\alpha}^i e_{\sigma 3}^i - \partial_{\sigma\alpha}^i e_{\tau 3}^i. \end{aligned} \quad (30)$$

3.2 The Formula of Cesàro–Volterra: Asymptotic Expansion

Let us consider the representation of Cesàro–Volterra (9) of the displacement field $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ (with self-explanatory notation). By choosing the previous path decomposition, i.e., $\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^\varepsilon) := \widehat{\gamma}((x_{01}, x_{02}, 0), (x_1, x_2, 0)) \cup \gamma_*^\varepsilon((x_1, x_2, 0), (x_1, x_2, \varepsilon x_3))$, and by rescaling the domain Ω^ε , one has:

$$\begin{aligned} u_\alpha(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}(\varepsilon) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}(\varepsilon)) + \varepsilon x_3(r_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \partial_\alpha e_{3\beta}(\varepsilon))] dy_\beta + \\ &\quad + \varepsilon \int_{\gamma_*} e_{\alpha 3}(\varepsilon) dy_3, \\ u_3(\varepsilon)(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{3\beta}(\varepsilon) + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}(\varepsilon) - r_{\sigma\beta}(\varepsilon))] dy_\beta, \end{aligned} \quad (31)$$

where $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$ is the displacement field $\mathbf{u}^\varepsilon$ transformed by Π^ε .

Proposition 2 *Under the assumptions (29) on the asymptotic expansions, the following asymptotic development for the displacement functions $u_i(\varepsilon)$ holds:*

$$u_i(\varepsilon) = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \varepsilon^3 u_i^3 + \dots, \quad (32)$$

where

$$\begin{aligned} u_\alpha^0(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}^0)] dy_\beta, \\ u_\alpha^1(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^1 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}^1 - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}^1) + x_3(r_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha e_{3\beta}^0)] dy_\beta + \int_{\gamma_*} e_{\alpha 3}^0 dy_3, \\ u_3^0(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{3\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}^0 - r_{\sigma\beta}^0)] dy_\beta, \end{aligned} \quad (33)$$

and the higher order terms, for $i=1,2,\dots$, are:

$$\begin{aligned} u_\alpha^{i+1}(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^{i+1} + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}^{i+1} - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}^{i+1}) + x_3(r_{\alpha\beta}^i - \partial_\alpha e_{3\beta}^i)] dy_\beta + \int_{\gamma_*} e_{\alpha 3}^i dy_3, \\ u_3^i(\mathbf{x}) &= \int_{\widehat{\gamma}} [e_{3\beta}^i + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma e_{3\beta}^i - r_{\sigma\beta}^i)] dy_\beta. \end{aligned} \quad (34)$$

We can easily prove that u_α^0 is independent from the transverse coordinate x_3 . Thus,

$$u_\alpha^0(\mathbf{x}) = \int_{\widehat{\gamma}} [c_{\alpha\beta}^0 + (x_\sigma - y_\sigma)(\partial_\sigma c_{\alpha\beta}^0 - \partial_\alpha c_{\sigma\beta}^0)] dy_\beta := \bar{u}_\alpha^0(x_1, x_2). \quad (35)$$

We notice that u_α^0 governs only the in-plane deformation state, while we are looking for a Reissner–Mindlin kinematics which takes into account not only membranal and flexural but also shear behaviors.

We differentiate (33)₃ with respect to x_3 and we have $\partial_3 u_3^0 = 0$. Hence:

$$u_3^0 := w(x_1, x_2). \quad (36)$$

By differentiating u_α^1 with respect to x_3 and u_3^0 with respect to x_α and by summing up these two derivatives, we find:

$$e_{\alpha 3}^0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_3^0). \quad (37)$$

From (36)–(37) we have the complete characterization of the displacement functions u_α^1 and u_3^0 :

$$\begin{cases} u_\alpha^1(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_\alpha^1(x_1, x_2) + x_3(2e_{\alpha 3}^0 - \partial_\alpha w), \\ u_3^0(x_1, x_2) = w(x_1, x_2). \end{cases} \quad (38)$$

If we differentiate u_α^1 with respect to x_β and u_β^1 with respect to x_α , we have:

$$c_{\alpha\beta}^1(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_\beta^1), \quad (39)$$

where, from (38),

$$c_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2}(\partial_\beta \bar{u}_\alpha^1 + \partial_\alpha \bar{u}_\beta^1) \text{ and } r_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}(2\partial_\beta e_{\alpha 3}^0 + 2\partial_\alpha e_{\beta 3}^0 - \partial_{\alpha\beta} w). \quad (40)$$

We can at last define the Reissner–Mindlin kinematics:

$$\begin{cases} u_\alpha^{RM}(x_1, x_2, x_3) := \bar{u}_\alpha^0(x_1, x_2) + \bar{u}_\alpha^1(x_1, x_2) + x_3(2e_{\alpha 3}^0 - \partial_\alpha w), \\ u_3^{RM}(x_1, x_2) := w(x_1, x_2), \end{cases} \quad (41)$$

and consequently, we can calculate the deformation field as follows:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^{RM} &:= c_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2) + c_{\alpha\beta}^1(x_1, x_2) + x_3 r_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2), \\ e_{\alpha 3}^{RM} &:= e_{\alpha 3}^0(x_1, x_2), \\ e_{33}^{RM} &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

As we can notice from the definition (41) of the Reissner–Mindlin displacements, the quantity $2e_{\alpha 3}^0 - \partial_\alpha w$ represents the rotation of the transverse fiber of the plate. This fiber does not remain perpendicular to the middle plane after the deformation, as in the Kirchhoff–Love plate: hence, this is an example of a plate which can shear. The function $e_{\alpha 3}^0$, which appears in the rotation of the transverse segment, measures precisely the deviation from a Kirchhoff–Love strain state and identifies a new deformation state of a shearable plate, namely the Reissner–Mindlin strain state.

It is important to remark explicitly that, to obtain the Reissner–Mindlin kinematics we have to impose a constraint on the deformation field. As it remarked in B. Miara and P. Podio-Guidugli [9], this is due to the fact that models for a shearable thin structure, such as the Reissner–Mindlin plate model, cannot be obtained starting from the classical linear elasticity, but it is necessary to use a second-order elasticity as a parent theory.

4 Conclusions

Since the compatibility conditions and the formula of Cesàro–Volterra are deeply connected with the *metric* structure of the deformation and the manifold on which

this deformation is applied, our derivation of the Kirchhoff–Love and Reissner–Mindlin kinematics has only a geometric character. At the moment we are developing the analogous approach to various shell and beam kinematics (see P. G. Ciarlet and M. Serpilli, in preparation, and G. Geymonat et al., in preparation). The formula of Cesàro–Volterra seems also important for a recently proposed formulation of the three-dimensional linear elasticity problem, in which the components of the deformation are considered as primary unknowns (see [4]).

References

1. Amrouche, C., Ciarlet, P.G., Gratie, L., Kesavan, S.: On the characterizations of matrix fields as linearized strain tensor fields. *J. Math. Pures Appl.* **86**, 116–132 (2006)
2. Cesàro, E.: Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche. *Rend. Napoli Serie, Anno XLV* **7**(3^a), 311–321 (1906)
3. Ciarlet, P.G.: *Mathematical Elasticity, vol. II: Theory of Plates*, Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland, Amsterdam (1997)
4. Ciarlet, P.G., Ciarlet, P. Jr.: Another approach to linearized elasticity and a new proof of Korn’s inequality. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **15**, 259–271 (2005)
5. Fosdick, R., Royer-Carfagni, G.: A Stokes theorem for second-order tensor fields and its implications in continuum mechanics. *Int. J. Non-Linear Mech.* **40**, 381–386 (2005)
6. Geymonat, G., Krasucki, F.: Some remarks on the compatibility conditions in elasticity. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL* **123**, 175–182 (2005)
7. Geymonat, G., Krasucki, F.: Beltrami’s solutions of general equilibrium equations in continuum mechanics. *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **342**, 359–363 (2006)
8. Gurtin, M.E.: The linear theory of elasticity. In: Truesdell, C. (ed.) *Encyclopedia of Physics*, vol. VIa/2. Springer, Berlin Heidelberg New York (1972)
9. Miara B., Podio-Guidugli, P.: Deduction by scaling: a unified approach to classical plate and rod theories. *Asymptot. Anal.* **51**, 113–131 (2007)
10. Moreau, J.J.: Duality characterization of strain tensor distributions in arbitrary open set. *J. Math. Anal. Appl.* **72**, 760–770 (1979)
11. Müller, S.: Paper presented at the course, classical and advanced theories of thin structures: mechanical and mathematical aspects. CISM, Udine, 5–9 June 2006
12. Paroni, R., Podio-Guidugli, P., Tomassetti, G.: A justification of the Reissner–Mindlin plate theory through variational convergence. *Anal. Appl.* **5**, 165–182 (2007)
13. Podio-Guidugli, P.: An exact derivation of the thin plate equation. *J. Elast.* **22**, 121–133 (1989)
14. Ting, T.W.: St. Venant’s compatibility conditions. *Tensor* **28**, 5–12 (1974)
15. Volterra, V.: Sur l’équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Ann. Sci. Ec. Norm. Super. 3ème Série* **24**, 401–517 (1907)

Chapitre 6

Déduction Géométrique de la Cinématique des Surfaces et des Coques

6.1 Introduction

La justification mathématique des modèles de coques minces a été sujet des nombreuses recherches, voir, par exemple, P. G. Ciarlet [14], J. Sanchez-Hubert et É. Sanchez-Palencia [37]. En particulier, les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love généralisées au cas des coques sont obtenues par développement asymptotique formel des équations de l'élasticité tridimensionnelle en coordonnées curvilignes en tenant compte de la géométrie et des forces appliquées. Les modèles de coque ainsi obtenus sont justifiés dans un cadre fonctionnel bien précis.

Dans la suite, on proposera une déduction originale purement géométrique de la cinématique des coques de Kirchhoff-Love et de Naghdi à l'aide des conditions de compatibilité de Saint-Venant et de la formule intégrale de Cesàro-Volterra (article associé dans le cas des surfaces, P.G. Ciarlet et al. [19]). Aucun renseignement dérivant de l'équilibre ou de la loi constitutive du matériau n'a été utilisé.

6.2 La formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes

On considère la formule classique de Cesàro-Volterra en coordonnées Cartésiennes définie sur un ouvert simplement connexe $\hat{\Omega}$. Étant donné un champ de matrice symétrique $\hat{e} = (\hat{e}_{ij})$ et un chemin arbitraire $\hat{\gamma}(\hat{x}_0, \hat{x})$ entre deux points distincts $\hat{x}_0, \hat{x} \in \hat{\Omega}$, le champ de déplacement $\hat{v} = (\hat{v}_i)$ est défini par :

$$\hat{v}_i(\hat{x}_0, \hat{x}) = \int_{\hat{\gamma}(\hat{x}_0, \hat{x})} [\hat{e}_{ij}(\hat{y}) + (\hat{x}_k - \hat{y}_k)(\hat{\partial}_k \hat{e}_{ij}(\hat{y}) - \hat{\partial}_i \hat{e}_{kj}(\hat{y}))] d\hat{y}_j. \quad (6.1)$$

On suppose l'existence d'une immersion $\Theta = (\Theta_k) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ suffisamment régulière telle que $\hat{\Omega} := \Theta(\Omega)$. À chaque point $x \in \bar{\Omega}$, on associe donc un point $\hat{x} = \Theta(x) \in \{\hat{\Omega}\}^-$. Puisque Θ est une immersion en x , alors les vecteurs $g_i(x) := \partial_i \Theta(x)$ sont linéairement indépendants et forment la base covariante en $\hat{x} = \Theta(x)$. Les vecteurs $g^j(x)$ de la base contravariante sont calculés avec les relations $g_i(x) \cdot g^j(x) = \delta_i^j$.

Notre objectif consiste à exprimer la formule de Cesàro-Volterra (6.1) en terme du nouveau système de coordonnées curvilignes x_i du point $\hat{\mathbf{x}} = \Theta(\mathbf{x}) \in \{\hat{\Omega}\}^-$.

Il est nécessaire de définir des composantes appropriées du champ de déplacement $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_i)$ et du champ de matrice symétrique donné $\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_{ij})$ en terme des coordonnées curvilignes.

Soit $\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{v}_i(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{e}}_i$ le champ de déplacement en coordonnées Cartésiennes, on définit trois nouvelles composantes $v_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\hat{v}_i(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{e}}_i =: v_i(\mathbf{x})\mathbf{g}^i(\mathbf{x}).$$

Les fonctions $v_i(\mathbf{x})$ représentent les composantes covariantes du champ de déplacement en $\hat{\mathbf{x}}$. Si on dénote avec $[\mathbf{g}^j(\mathbf{x})]_i := \mathbf{g}^j(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$ la composante i -ème du vecteur $\mathbf{g}^j(\mathbf{x})$, les composantes Cartésiennes $\hat{v}_i$ du champ de déplacement peuvent être représentées comme suit :

$$\hat{v}_i(\hat{\mathbf{x}}) = v_m(\mathbf{x})[\mathbf{g}^m(\mathbf{x})]_i. \quad (6.2)$$

De même, on peut définir les composantes covariantes $e_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ et exprimer les composantes Cartésiennes $\hat{e}_{ij}$ du champ de matrice symétrique donné. On a :

$$\hat{e}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}) =: e_{ij}(\mathbf{x})[\mathbf{g}^m(\mathbf{x})]_i[\mathbf{g}^n(\mathbf{x})]_j. \quad (6.3)$$

Le passage de coordonnées doit aussi être appliqué aux dérivées partielles $\hat{\partial}_k \hat{e}_{ij}$. Ceci implique :

$$\hat{\partial}_k \hat{e}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}) =: e_{mn||\ell}(\mathbf{x})[\mathbf{g}^m(\mathbf{x})]_i[\mathbf{g}^n(\mathbf{x})]_j[\mathbf{g}^\ell(\mathbf{x})]_k, \quad (6.4)$$

où $e_{mn||\ell} := \partial_\ell e_{mn} - \Gamma_{\ell m}^p e_{pn} - \Gamma_{\ell n}^p e_{pm}$ est la dérivée première covariante des composantes e_{mn} .

En remplaçant les expressions (6.2)-(6.3)-(6.4) dans (6.1) et en réalisant un changement de coordonnées de $\hat{\Omega}$ à Ω , on obtient la **formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes** :

$$v_m(\mathbf{x})[\mathbf{g}^m(\mathbf{x})]_i = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \left\{ e_{mn}(\mathbf{y}) + (\Theta_k(\mathbf{x}) - \Theta_k(\mathbf{y}))(e_{mn||\ell}(\mathbf{y}) - e_{\ell n||m}(\mathbf{y}))[\mathbf{g}^\ell(\mathbf{y})]_k \right\} [\mathbf{g}^m(\mathbf{y})]_i dy_n, \quad (6.5)$$

où $\gamma := \hat{\gamma} \circ \Theta$ est le chemin dans le nouveau système des coordonnées.

Sous forme implicite, on a :

$$v_i(\mathbf{x})\mathbf{g}^i(\mathbf{x}) = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \left\{ \mathbf{g}^i(\mathbf{y})e_{ij}(\mathbf{y})dy_j - (\Theta(\mathbf{x}) - \Theta(\mathbf{y})) \wedge \mathbf{g}_i(\mathbf{y})(\varepsilon^{i\ell k}e_{jk||\ell}(\mathbf{y}))dy_j \right\},$$

où $\varepsilon^{i\ell k} := \frac{1}{\sqrt{g(\mathbf{x})}} \hat{\varepsilon}^{i\ell k}$ représentent les composantes contravariantes du tenseur d'orientation de Ricci.

Si on dérive la fonction $v_m(\hat{\Theta}(\hat{\mathbf{x}}))[\mathbf{g}^m(\hat{\Theta}(\hat{\mathbf{x}}))]_i$ par rapport à $\hat{x}_j$ et la fonction $v_n(\hat{\Theta}(\hat{\mathbf{x}}))[\mathbf{g}^n(\hat{\Theta}(\hat{\mathbf{x}}))]_j$ par rapport à $\hat{x}_i$, où $\hat{\Theta}$ est l'inverse de Θ , on trouve :

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_j(v_m[\mathbf{g}^m]_i) &= e_{mn}[\mathbf{g}^m]_i[\mathbf{g}^n]_j + \int_{\hat{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}})} (e_{mp||\ell} - e_{\ell p||m})[\mathbf{g}^m]_i[\mathbf{g}^n]_p[\mathbf{g}^\ell]_j d\hat{y}_p, \\ \hat{\partial}_i(v_n[\mathbf{g}^n]_j) &= e_{nm}[\mathbf{g}^m]_i[\mathbf{g}^n]_j + \int_{\hat{\gamma}(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}})} (e_{np||\ell} - e_{\ell p||n})[\mathbf{g}^m]_p[\mathbf{g}^n]_j[\mathbf{g}^\ell]_i d\hat{y}_p. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Les dérivées dans le premier membre de (6.6) peuvent être représentées comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_j(v_m[\mathbf{g}^m]_i) &= (\partial_m v_n - \Gamma_{mn}^p v_p)[\mathbf{g}^m]_i[\mathbf{g}^n]_j, \\ \hat{\partial}_i(v_n[\mathbf{g}^n]_j) &= (\partial_n v_m - \Gamma_{mn}^p v_p)[\mathbf{g}^m]_i[\mathbf{g}^n]_j. \end{aligned} \quad (6.7)$$

On remarque que les deux intégrales au deuxième membre de (6.6) sont égales et opposées : si on additionne les deux dérivées (6.7), on obtient :

$$e_{mn} = \frac{1}{2}(\partial_m v_n + \partial_n v_m) - \Gamma_{mn}^p v_p,$$

qui ne sont rien d'autre que les composantes covariantes du gradient symétrique de (v_i) .

La formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes (6.5) comme sa version classique en coordonnées Cartésiennes, est dépendante du chemin γ choisi : ainsi, étant données les composantes du tenseur de déformation, pour chaque chemin choisi, on obtient une fonction différente de déplacement. Afin que la formule ait un sens et que l'unicité du déplacement soit garantie, il faut imposer l'indépendance de l'intégrale par rapport aux chemins. Ceci peut être fait en supposant que le domaine est simplement connexe et en appliquant le théorème de Stokes à l'intégrale de Cesàro-Volterra. On parvient ainsi aux conditions de compatibilité de Saint-Venant en coordonnées curvilignes :

$$\mathcal{R}_{ijkl}^{\text{lin}} = e_{ik}\|_{\ell j} + e_{j\ell}\|_{ki} - e_{jk}\|_{\ell i} - e_{i\ell}\|_{kj} = 0.$$

6.2.1 Deux exemples simples : l'identité et la rotation

Dans cette section, on vérifie que si on choisit l'immersion Θ égale à l'application identité id_Ω ou à une rotation tridimensionnelle $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_3$, on retrouve la formule de Cesàro-Volterra sous sa forme Cartésienne.

1) L'identité

Soit $\Theta := \text{id}_\Omega$. À chaque point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, on associe un point $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \in \{\hat{\Omega}\}^-$. Les grandeurs géométriques liées à $\Theta = \text{id}_\Omega$ sont définies comme suit :

$$\nabla \Theta = \hat{\nabla} \hat{\Theta} = \mathbf{I}, \quad [g^i]_j = \delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^p = 0.$$

Si on remplace les relations ci-dessus dans la formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes, on a :

$$v_m = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{mn} + (x_k - y_k)(\partial_k e_{mn} - \partial_m e_{kn})] dy_n.$$

La formule trouvée est formellement équivalente à celle en coordonnées Cartésiennes.

2) La rotation

Soit $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_3$, i.e. $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ et $\det \mathbf{Q} = 1$. À chaque point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, on associe un point $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{x} \in \{\hat{\Omega}\}^-$. Les grandeurs géométriques sont définies comme suit :

$$\nabla \Theta = \mathbf{Q}, \quad \hat{\nabla} \hat{\Theta} = \mathbf{Q}^T, \quad g^i = g_i, \quad [g^i]_j = Q_{ji}, \quad \Gamma_{ij}^p = 0.$$

En remplaçant les expressions ci-dessus dans la formule, on obtient :

$$v_m = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{mn} + Q_{kp} Q_{k\ell} (x_p - y_p)(\partial_\ell e_{mn} - \partial_m e_{\ell n})] dy_n.$$

En remarquant que le produit $Q_{kp} Q_{k\ell} = \delta_{p\ell}$ (ou également $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$), la formule devient :

$$v_m = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} [e_{mn} + (x_p - y_p)(\partial_p e_{mn} - \partial_m e_{pn})] dy_n.$$

6.3 La géométrie d'une coque

Soit $\Omega^\varepsilon := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ et soit $\mathbf{x}^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ le point générique dans l'ensemble $\overline{\Omega}^\varepsilon$ (donc $x_\alpha^\varepsilon = y_\alpha$). On considère une coque de surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\overline{\omega})$ et d'épaisseur $2\varepsilon > 0$ qui occupe la configuration de référence $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon(\overline{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ (voir, par exemple, P.G. Ciarlet [15]), où

$$\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}_3(\mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) \in \overline{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]. \quad (6.8)$$

Les coordonnées $(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon)$ d'un point générique $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ peuvent être vues comme les coordonnées curvilignes du point $\hat{\mathbf{x}}^\varepsilon = \boldsymbol{\Theta}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$ de la configuration de référence de la coque.

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\overline{\omega}; \mathbf{E}^3)$ une immersion. Alors $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon$ est globalement injective dans $\overline{\Omega}^\varepsilon$, si $\boldsymbol{\theta}$ est globalement injective dans $\overline{\omega}$ et $\varepsilon > 0$ est assez "petit". La régularité de $\boldsymbol{\theta}$ implique que $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\overline{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]; \mathbf{E}^3)$ pour chaque $\varepsilon > 0$. On peut calculer les grandeurs géométriques caractéristiques associées à la coque, en commençant par la base covariante $\mathbf{g}_i^\varepsilon := \partial_i^\varepsilon \boldsymbol{\Theta}^\varepsilon$. On a :

$$\mathbf{g}_\alpha^\varepsilon = \mathbf{a}_\alpha - x_3^\varepsilon b_{\alpha\sigma} \mathbf{a}^\sigma \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_3^\varepsilon = \mathbf{a}_3. \quad (6.9)$$

Donc, les composantes covariantes du tenseur métrique sont données par

$$g_{\alpha\beta}^\varepsilon = a_{\alpha\beta} - 2x_3^\varepsilon b_{\alpha\beta} + (x_3^\varepsilon)^2 c_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad g_{i3}^\varepsilon = \delta_{i3}, \quad (6.10)$$

où $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta} := b_\alpha^\tau b_{\beta\tau}$ sont la première, deuxième et troisième forme fondamentale associées à la surface moyenne de la coque. Ici et dans la suite, on omettra la dépendance explicite des quantités géométriques de la surface moyenne par rapport aux coordonnées $\mathbf{y} = (y_\alpha)$. De plus, on calcule les composantes contravariantes du tenseur métrique avec l'inverse de la matrice (g_{ij}^ε) et donc on a :

$$g^{\alpha\beta, \varepsilon} = \sum_{n \geq 0} (n+1) (x_3^\varepsilon)^n a^{\alpha\sigma} (\mathbf{B}^n)_\sigma^\beta \quad \text{et} \quad g^{i3, \varepsilon} = \delta^{i3}, \quad (6.11)$$

où $(\mathbf{B})_\sigma^\beta := b_\sigma^\beta$ et $(\mathbf{B}^n)_\sigma^\beta := b_\sigma^{\sigma_1} \cdots b_{\sigma_{n-1}}^\beta$, pour $n \geq 2$. $(\mathbf{B}^n)_\sigma^\beta$ dénote l'élément de la σ -ème ligne et de la β -ème colonne de la matrice $\mathbf{B}^n$. La série ci-dessus est absolument convergente dans l'espace $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Les vecteurs de la base contravariante de la coque sont définis par $\mathbf{g}^{i, \varepsilon} := g^{ij, \varepsilon} \mathbf{g}_j^\varepsilon$. Ceci implique que

$$\mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon} = \mathbf{a}^\alpha + x_3^\varepsilon b_\sigma^\alpha \mathbf{a}^\sigma + \sum_{n \geq 2} (x_3^\varepsilon)^n a^{\alpha\sigma} (\mathbf{B}^{n-2})_\sigma^\mu c_{\mu\tau} \mathbf{a}^\tau \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^{3, \varepsilon} = \mathbf{a}^3. \quad (6.12)$$

Enfin, les symboles de Christoffel de seconde espèce $\Gamma_{ij}^{p, \varepsilon}$ ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma, \varepsilon} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \sum_{n \geq 0} (x_3^\varepsilon)^{n+1} b_\alpha^\tau |_\beta (\mathbf{B}^n)_\tau^\sigma, \\ \Gamma_{\alpha 3}^{\beta, \varepsilon} &= - \sum_{n \geq 0} (x_3^\varepsilon)^n (\mathbf{B}^{n+1})_\alpha^\beta, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{3, \varepsilon} &= b_{\alpha\beta} - x_3^\varepsilon c_{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{\alpha 3}^{3, \varepsilon} &= \Gamma_{33}^{p, \varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dans la suite de ce chapitre, on déduira la formule de Cesàro-Volterra pour une coque et une surface en utilisant la méthode des développements asymptotiques formels appliquée à la

représentation de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes. On utilisera ainsi un théorème de géométrie différentielle qui établit l'existence d'une extension canonique d'un champ de vecteur $\eta_i \mathbf{a}^i$ défini sur une surface à un champ de vecteur tridimensionnel $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ défini sur toute la coque (voir P.G. Ciarlet et S. Mardare [21]) : le champ $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ trouvé est tel que les composantes $e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)$ du tenseur linéarisé de variation de métrique ne sont fonction que de $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$ et $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$, les tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure.

Théorème 6.3.1 *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^4(\bar{\omega}; \mathbf{E}^3)$ une immersion injective. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon$ définie en (6.8) est un $\mathcal{C}^3$ -difféomorphisme de $\bar{\Omega}^\varepsilon$ à $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$.*

On associe à un champ de vecteur $\eta_i \mathbf{a}^i$, de composantes covariantes $\eta_\alpha \in \mathcal{C}^3(\omega)$ et $\eta_3 \in \mathcal{C}^4(\omega)$, un champ de vecteur tridimensionnel $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ défini sur $\bar{\Omega}^\varepsilon$ tel que

$$v_i^\varepsilon(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) \mathbf{g}^{i,\varepsilon}(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) = \eta_i(\mathbf{y}) \mathbf{a}^i(\mathbf{y}) - x_3^\varepsilon (\partial_\alpha \eta_3 + b_\sigma^\alpha \eta_\sigma)(\mathbf{y}) \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}). \quad (6.14)$$

Alors les composantes covariantes v_i^ε sont dans $\mathcal{C}^3(\Omega^\varepsilon)$ et les composantes covariantes $e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ du tenseur linéarisé de variation de métrique associé sont données par

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) - x_3^\varepsilon \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) + \\ \quad + \frac{(x_3^\varepsilon)^2}{2} \{b_\alpha^\sigma \rho_{\sigma\beta}(\boldsymbol{\eta}) + b_\beta^\tau \rho_{\alpha\tau}(\boldsymbol{\eta}) - 2b_\alpha^\sigma b_\beta^\tau \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\eta})\}, \\ e_{i3}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

6.4 Dédution de la cinématique de Kirchhoff-Love généralisée

6.4.1 La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques

On considère la représentation de Cesàro-Volterra dans le cas général des coordonnées curvilignes définies sur un domaine Ω^ε par l'intermédiaire de l'immersion $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon = (\boldsymbol{\Theta}_k^\varepsilon)$. Étant donné le champ de matrice symétrique de composantes covariantes e_{mn}^ε et un chemin $\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0^\varepsilon, \mathbf{x}^\varepsilon)$ du point $\mathbf{x}_0^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ à $\mathbf{x}^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$, on a :

$$v_j^\varepsilon = [g_j^\varepsilon]^i \int_{\gamma^\varepsilon} \left\{ e_{mn}^\varepsilon + (\boldsymbol{\Theta}_k^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) - \boldsymbol{\Theta}_k^\varepsilon(\mathbf{z}^\varepsilon))(e_{mn}^\varepsilon|_{\ell} - e_{\ell n}^\varepsilon|_m) [g^{\ell,\varepsilon}]_k \right\} [g^{m,\varepsilon}]_i dz_n^\varepsilon. \quad (6.16)$$

Dans la formule (6.16), on a omis la dépendance explicite de e_{mn}^ε et de v_j^ε par rapport respectivement à $\mathbf{z}^\varepsilon$ et $\mathbf{x}^\varepsilon$.

Soit $\omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe. Le domaine Ω^ε défini par $\Omega^\varepsilon := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ est aussi simplement connexe. On suppose qu'il existe une immersion $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon$ de la forme (6.8) à laquelle sont associées toutes les grandeurs géométriques définies dans la section précédente. L'ensemble $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ représente la configuration de référence d'une coque. On suppose ainsi que la champ de matrice donné (e_{ij}^ε) ait la forme (6.15) : on peut donc définir les composantes covariantes de la matrice (e_{ij}^ε) en connaissant les composantes covariantes des tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure $(\gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon)$ et $(\rho_{\alpha\beta}^\varepsilon)$.

De plus, puisque le domaine de type coque considéré est simplement connexe, l'intégrale de Cesàro-Volterra est indépendante du chemin choisi. On suppose donc la décomposition du chemin suivante : étant donné un point fixe $\mathbf{x}_0 = (y_{01}, y_{02}, 0) \in \omega$ et un point générique $\hat{\mathbf{x}} = (y_1, y_2, 0) \in \omega$ de la surface moyenne, le chemin $\gamma^\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^\varepsilon) := \hat{\gamma}((y_{01}, y_{02}, 0), (y_1, y_2, 0)) \cup$

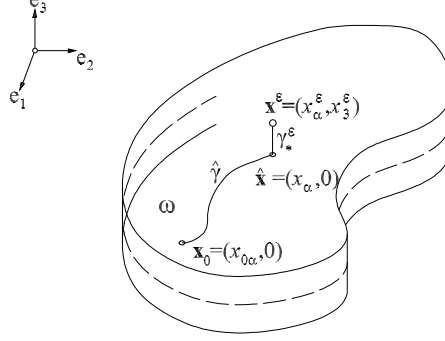


FIGURE 6.1 – Décomposition du chemin

$\gamma_*^\varepsilon((y_1, y_2, 0), (y_1, y_2, x_3^\varepsilon))$ est décomposé en $\hat{\gamma}$, une courbe arbitraire dans la surface moyenne de la coque, et γ_*^ε , un segment suivant la normale à la surface moyenne.

Suite aux hypothèses exposées précédemment, la formule de Cesàro-Volterra dans le cas d'une coque, définie dans le domaine Ω^ε ε -dépendant, devient :

$$\begin{aligned}
 v_j^\varepsilon(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) &= [g_j^\varepsilon]^i \left\{ \int_{\hat{\gamma}} \gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon [\mathbf{a}^\alpha]_i dz_\beta + \right. \\
 &+ \int_{\hat{\gamma}} (\theta_k(\mathbf{y}) - \theta_k(\hat{\mathbf{z}})) \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}^\varepsilon - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}^\varepsilon) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - \right. \\
 &\quad \left. - (\rho_{\alpha\beta}^\varepsilon - b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^\varepsilon) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^3]_i [\mathbf{a}^\alpha]_k) \right) dz_\beta + \\
 &+ x_3^\varepsilon [\mathbf{a}^3]_k \int_{\hat{\gamma}} \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}^\varepsilon - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}^\varepsilon) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - \right. \\
 &\quad \left. - (\rho_{\alpha\beta}^\varepsilon - b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^\varepsilon) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^3]_i [\mathbf{a}^\alpha]_k) \right) dz_\beta + \\
 &\left. + [\mathbf{a}^3]_k \int_{\gamma_*^\varepsilon} (x_3^\varepsilon - z_3^\varepsilon) (b_\sigma^\tau \gamma_{\alpha\tau}^\varepsilon - b_\alpha^\tau \gamma_{\sigma\tau}^\varepsilon) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i dz_3^\varepsilon + \mathcal{O}(y_3^\varepsilon) \right\}, \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

où $[g_j^\varepsilon]^i = [\mathbf{a}_\mu]_i + [\mathbf{a}_3]_i - x_3^\varepsilon b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]_i$ dénote la composante i -ème du vecteur $\mathbf{g}_j^\varepsilon$ et $\hat{\mathbf{z}} = (z_\alpha)$.

Afin d'étudier le comportement asymptotique du champ de déplacement $v_j^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$ de la coque lorsque l'épaisseur tend vers zéro, on introduit le changement standard de variable qui permet de transformer la formule de Cesàro-Volterra définie sur un domaine dépendant du paramètre ε en une formule définie sur un domaine fixe. Soient $\Omega := \omega \times]-1, 1[$ le domaine fixe et $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, x_3)$ un point de $\bar{\Omega}$; à chaque point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, on associe un point $\mathbf{x}^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ à l'aide de la bijection (voir Fig. 6.2; P. G. Ciarlet [14]) :

$$\Pi^\varepsilon : \mathbf{x} = (\mathbf{y}, x_3) \in \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{x}^\varepsilon = (\mathbf{y}, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon. \tag{6.18}$$

Pour cela,

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha \text{ et } \partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3$$

et $v_j(\varepsilon)(\mathbf{x}) = v_j^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$, $\gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) = \gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon(\mathbf{y})$ et $\rho_{\alpha\beta}(\varepsilon)(\mathbf{y}) = \rho_{\alpha\beta}^\varepsilon(\mathbf{y})$ représentent respectivement les composantes du champ de déplacement, du champ de variation de métrique et du champ

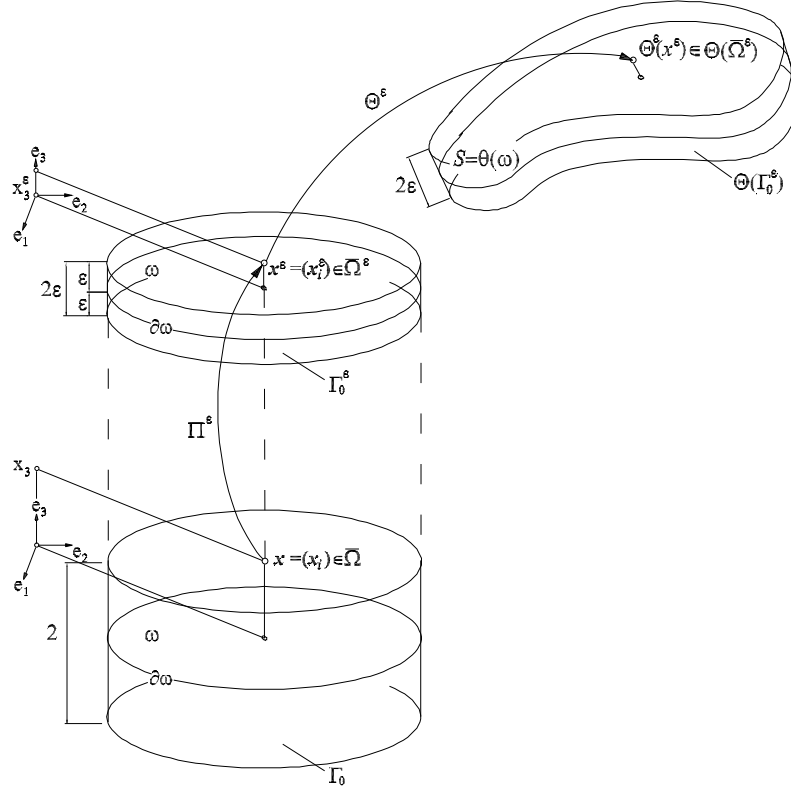


FIGURE 6.2 – Changement de variable standard.

de variation de courbure transformés par Π^ε . En appliquant le changement de variable Π^ε à (6.17), on obtient la formule de Cesàro-Volterra mise à l'échelle sur le domaine fixe Ω :

$$\begin{aligned}
 v_j(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) = & ([\mathbf{a}_j]^i - \varepsilon x_3 b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i) \left\{ \int_{\hat{\gamma}} \gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon) [\mathbf{a}^\alpha]_i dz_\beta + \right. \\
 & + \int_{\hat{\gamma}} (\theta_k(\mathbf{y}) - \theta_k(\hat{\mathbf{z}})) \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}(\varepsilon) - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}(\varepsilon)) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - \right. \\
 & \quad \left. - (\rho_{\alpha\beta}(\varepsilon) - b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^\varepsilon(\varepsilon)) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^3]_i [\mathbf{a}^\alpha]_k) \right) dz_\beta + \\
 & + \varepsilon x_3 [\mathbf{a}^3]_k \int_{\hat{\gamma}} \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}(\varepsilon) - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}(\varepsilon)) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - \right. \\
 & \quad \left. - (\rho_{\alpha\beta}(\varepsilon) - b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^\varepsilon(\varepsilon)) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^3]_i [\mathbf{a}^\alpha]_k) \right) dz_\beta + \\
 & \left. + \varepsilon^2 [\mathbf{a}^3]_k \int_{\gamma_*} (x_3 - z_3) (b_\sigma^\tau \gamma_{\alpha\tau}(\varepsilon) - b_\alpha^\tau \gamma_{\sigma\tau}(\varepsilon)) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i dz_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Puisque la formule de Cesàro-Volterra mise à l'échelle a une structure polynomiale en fonction du paramètre ε , on suppose qu'il existe des développements asymptotiques des champs tensoriels donnés $(\gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon))$ et $(\rho_{\alpha\beta}(\varepsilon))$ de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= \gamma_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 \gamma_{\alpha\beta}^2 + \dots, \\
 \rho_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= \rho_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon \rho_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2 \rho_{\alpha\beta}^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Ceci implique le développement asymptotique suivant des déplacements $v_j(\varepsilon)$:

$$v_j(\varepsilon) = v_j^0 + \varepsilon v_j^1 + \varepsilon^2 v_j^2 + \dots \tag{6.21}$$

En remplaçant les développements asymptotiques formels (6.20)-(6.21) dans la formule de Cesàro-Volterra mise à l'échelle et en isolant les termes du même ordre en ε , on peut caractériser les termes principaux du développement (on s'arrête à l'ordre 1). Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} v_j^0(\mathbf{y}) &= [\mathbf{a}_j(\mathbf{y})]^i \mathcal{I}_i^0(\mathbf{y}), \\ v_\mu^1(\mathbf{y}, x_3) &= [\mathbf{a}_\mu(\mathbf{y})]^i \mathcal{I}_i^1(\mathbf{y}) - x_3 \left(b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 - [\mathbf{a}_\mu]^i [\mathbf{a}_3]^k \mathcal{J}_{ik}^0 \right) (\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (6.22)$$

où, pour $p = 0, 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i^p(\mathbf{y}) &:= \int_{\hat{\gamma}} \left(\gamma_{\alpha\beta}^p + (\theta_k(\mathbf{y}) - \theta_k(\hat{\mathbf{z}}))(\gamma_{\alpha\beta|\sigma}^p - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}^p) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - \right. \\ &\quad \left. - (\theta_k(\mathbf{y}) - \theta_k(\hat{\mathbf{z}}))(\rho_{\alpha\beta}^p - b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^p) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^3]_i [\mathbf{a}^\alpha]_k) \right) dz_\beta, \\ \mathcal{J}_{ik}^0(\mathbf{y}) &:= \int_{\hat{\gamma}} \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}^0 - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}^0) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - \right. \\ &\quad \left. - (\rho_{\alpha\beta}^0 - b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^0) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^\alpha]_k [\mathbf{a}^3]_i) \right) dz_\beta. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Si on applique l'indépendance du chemin aux intégrales (6.22)₁ à l'aide du théorème de Stokes, on obtient que les composantes covariantes des tenseurs linéarisés de variation de métrique ($\gamma_{\alpha\beta}^0$) et courbure ($\rho_{\alpha\beta}^0$) satisfont les conditions de compatibilité de Saint-Venant pour une surface :

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma\alpha|\beta\tau}^0 + \gamma_{\beta\tau|\alpha\sigma}^0 - \gamma_{\sigma\beta|\alpha\tau}^0 - \gamma_{\alpha\tau|\sigma\beta}^0 + \mathcal{R}_{\alpha\sigma\tau}^\nu \gamma_{\beta\nu}^0 - \mathcal{R}_{\beta\sigma\tau}^\nu \gamma_{\alpha\nu}^0 &= b_{\tau\alpha} \rho_{\beta\sigma}^0 + b_{\beta\sigma} \rho_{\tau\alpha}^0 - b_{\sigma\alpha} \rho_{\tau\beta}^0 - b_{\tau\beta} \rho_{\sigma\alpha}^0, \\ \rho_{\sigma\alpha|\tau}^0 - \rho_{\alpha\tau|\sigma}^0 &= b_\sigma^\nu (\gamma_{\alpha\nu|\tau}^0 + \gamma_{\tau\nu|\alpha}^0 - \gamma_{\tau\alpha|\nu}^0) + b_\tau^\nu (\gamma_{\alpha\nu|\sigma}^0 + \gamma_{\sigma\nu|\alpha}^0 - \gamma_{\sigma\alpha|\nu}^0). \end{aligned}$$

On remarque que les déplacements v_μ^0 à l'ordre zéro sont indépendants de la coordonnée transversale x_3 et, donc, ils n'engendrent que des déformations membranaires. Pour cela, afin de retrouver la cinématique complète de Kirchhoff-Love généralisée pour une coque, qui tient compte aussi du comportement en flexion, on couple les déplacements à l'ordre un avec les déplacements à l'ordre zéro.

On pose $v_\mu^{KL} := v_\mu^0 + v_\mu^1$ et $v_3^{KL} := v_3^0$. Les **formules de Cesàro-Volterra pour une coque de Kirchhoff-Love généralisée** sont définies par :

$$\begin{cases} v_\mu^{KL}(\mathbf{y}, x_3) = [\mathbf{a}_\mu(\mathbf{y})]^i (\mathcal{I}_i^0 + \mathcal{I}_i^1)(\mathbf{y}) - x_3 \left(b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 - [\mathbf{a}_\mu]^i [\mathbf{a}_3]^k \mathcal{J}_{ik}^0 \right) (\mathbf{y}), \\ v_3^{KL}(\mathbf{y}) = [\mathbf{a}_3(\mathbf{y})]^i \mathcal{I}_i^0(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (6.24)$$

Si on dérive les expressions (6.22), on peut obtenir les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique e_{i3}^{KL} , définies par les relations :

$$e_{\mu 3}^{KL}(\mathbf{y}, x_3) := \frac{1}{2} (\partial_\mu v_3^0 + \partial_3 v_\mu^1) + b_\mu^\tau v_\tau^0 \quad \text{et} \quad e_{33}^{KL}(\mathbf{y}, x_3) := \partial_3 v_3^0.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \partial_\mu v_3^0 &= -b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 + [\mathbf{a}_\mu]^k [\mathbf{a}_3]^i \mathcal{J}_{ik}^0, \\ \partial_3 v_\mu^1 &= -b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 + [\mathbf{a}_\mu]^i [\mathbf{a}_3]^k \mathcal{J}_{ik}^0, \\ b_\mu^\tau v_\tau^0 &= b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0, \\ \partial_3 v_3^0 &= 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

On remarque que les composantes $\mathcal{J}_{ik}^0$, définies dans (6.23)₂, sont antisymétriques, i.e. $\mathcal{J}_{ik}^0 = -\mathcal{J}_{ki}^0$: en effet, elle représentent les composantes covariantes de la rotation infinitésimale.

Par conséquent, en sommant les dérivées (6.25), on obtient que les composantes e_{i3}^{KL} sont identiquement nulles :

$$e_{\mu 3}^{KL}(\mathbf{y}, x_3) = 0 \quad \text{et} \quad e_{33}^{KL}(\mathbf{y}, x_3) = 0. \quad (6.26)$$

Ceci est conforme aux liaisons internes de la cinématique de Kirchhoff-Love généralisée pour les coques : en effet, les conditions (6.26) expriment le fait que la coque ne s'écrase pas et que la fibre normale à la surface moyenne reste normale à la surface moyenne déformée après la déformation.

Remarque : si on suppose que la coque dégénère en une plaque, on a que

$$\Theta = \text{id}_\Omega, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = b_{\alpha\beta} = b_\alpha^\beta = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{a}^i = \mathbf{e}_i,$$

où $\mathbf{e}_i$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Les tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure donnés, $(\gamma_{\alpha\beta}^\ell)$ et $(\rho_{\alpha\beta}^0)$, se transforment respectivement en les tenseurs de déformation plane et de courbure de la plaque, $(c_{\alpha\beta}^\ell)$, pour $\ell = 0, 1$, et $(r_{\alpha\beta}^0)$.

La formule de Cesàro-Volterra (6.24) dans ce cas particulier prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} v_\mu^{KL}(\mathbf{y}, x_3) &= \int_{\hat{\gamma}} [\bar{c}_{\mu\beta} + (y_\sigma - z_\sigma)(\partial_\sigma \bar{c}_{\mu\beta} - \partial_\mu \bar{c}_{\sigma\beta})] dz_\beta - x_3 \int_{\hat{\gamma}} r_{\mu\beta}^0 dz_\beta, \\ v_3^{KL}(\mathbf{y}) &= \int_{\hat{\gamma}} (y_\sigma - z_\sigma) r_{\sigma\beta}^0 dz_\beta, \end{aligned}$$

où $\bar{c}_{\mu\beta} := c_{\mu\beta}^0 + c_{\mu\beta}^1$. Ce résultat est cohérent à ceux qui sont décrits dans la Section 5.2.2, sur la déduction purement géométrique de la cinématique des plaques.

6.5 Déduction de la cinématique de Naghdi

6.5.1 La formule de Cesàro-Volterra : développements asymptotiques

La modèle de coque de Naghdi correspond au cas généralisé du modèle de Reissner-Mindlin pour une plaque. La coque en question se déforme en cisaillement et, donc, lors de la déformation, la fibre normale à la surface moyenne ne reste pas perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Comme dans le cas de la cinématique de Kirchhoff-Love généralisée pour une coque, on peut considérer l'extension canonique d'un champ de déplacement défini sur une surface à un champ de déplacement tridimensionnel défini sur toute la coque de type Naghdi :

Théorème 6.5.1 *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit $\theta \in \mathcal{C}^4(\bar{\omega}; \mathbf{E}^3)$ une immersion injective. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application Θ^ε définie en (6.8) est un $\mathcal{C}^3$ -difféomorphisme de $\bar{\Omega}^\varepsilon$ à $\Theta^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$.*

On associe à un champ de vecteur défini par le couple $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi})$, de composantes covariantes $\eta_i \in \mathcal{C}^3(\omega)$ et $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^3(\omega)$, un champ de vecteur tridimensionnel $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ défini sur $\bar{\Omega}^\varepsilon$ tel que

$$v_i^\varepsilon(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) \mathbf{g}^{i,\varepsilon}(\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) = \eta_i(\mathbf{y}) \mathbf{a}^i(\mathbf{y}) + x_3^\varepsilon \varphi_\alpha(\mathbf{y}) \mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}). \quad (6.27)$$

Alors les composantes covariantes v_i^ε sont dans $\mathcal{C}^3(\Omega^\varepsilon)$ et les composantes covariantes $e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ du tenseur linéarisé de variation de métrique associé sont données par

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) + x_3^\varepsilon \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}) - (x_3^\varepsilon)^2 \kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varphi}), \\ e_{\alpha 3}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = \zeta_\alpha(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}), \\ e_{33}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

Les tenseurs $(\gamma_{\alpha\beta})$, $(\chi_{\alpha\beta})$ et le vecteur (ζ_α) représentent respectivement les tenseurs linéarisés de variation de métrique et de courbure et le vecteur de cisaillement qui apparaissent dans la cinématique du modèle de coque de Naghdi (P.M. Naghdi, [35]). Ils sont définis par :

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{2}(\eta_{\alpha|\beta} + \eta_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\eta_3, \\ \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}) &:= \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} - b_{\beta}^{\mu}\eta_{\mu|\alpha} - b_{\alpha}^{\mu}\eta_{\mu|\beta}) + c_{\alpha\beta}\eta_3, \\ \kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varphi}) &:= \frac{1}{2}(b_{\beta}^{\mu}\varphi_{\mu|\alpha} + b_{\alpha}^{\mu}\varphi_{\mu|\beta}), \\ \zeta_{\alpha}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}) &:= \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha} + \partial_{\alpha}\eta_3 + b_{\alpha}^{\mu}\eta_{\mu}).\end{aligned}\tag{6.29}$$

Afin d'arriver à une déduction purement géométrique de la cinématique de Naghdi, on va suivre la même procédure qui a été employée pour déduire la cinématique de Kirchhoff-Love généralisée au cas des coques.

On considère la formule de Cesàro-Volterra en coordonnées curvilignes générales (6.16) et l'immersion $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon$, qui définit la géométrie de la coque. Si le domaine coque est simplement connexe, on peut donc supposer la décomposition du chemin déjà présentée dans (Fig. 6.1).

On suppose que le champ de matrice donné (e_{ij}^ε) ait la forme (6.29) et on transforme la formule ainsi obtenue définie sur le domaine ε -dépendant Ω^ε en une formule définie sur un domaine fixe Ω à l'aide de la bijection Π^ε (7.3). La formule de Cesàro-Volterra mise à l'échelle a la forme suivante :

$$\begin{aligned}v_j(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) &= ([\mathbf{a}_j]^i - \varepsilon x_3 b_{\mu}^{\tau}[\mathbf{a}_{\tau}]^i) \left\{ \int_{\hat{\gamma}} (\gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon)[\mathbf{a}^{\alpha}]_i + \zeta_{\beta}(\varepsilon)[\mathbf{a}^3]_i) dz_{\beta} + \right. \\ &+ \int_{\hat{\gamma}} (\theta_k(\mathbf{y}) - \theta_k(\hat{\mathbf{z}})) \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}(\varepsilon) - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}(\varepsilon) + b_{\alpha\beta}\zeta_{\sigma}(\varepsilon) - b_{\sigma\beta}\zeta_{\alpha}(\varepsilon))[\mathbf{a}^{\sigma}]_k[\mathbf{a}^{\alpha}]_i + \right. \\ &\quad \left. + (\chi_{\alpha\beta}(\varepsilon) + b_{\beta}^{\sigma}\gamma_{\alpha\sigma}(\varepsilon) - \partial_{\alpha}\zeta_{\beta}(\varepsilon))([\mathbf{a}^3]_k[\mathbf{a}^{\alpha}]_i - [\mathbf{a}^3]_i[\mathbf{a}^{\alpha}]_k) \right) dz_{\beta} + \\ &+ \varepsilon x_3 [\mathbf{a}^3]_k \int_{\hat{\gamma}} \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}(\varepsilon) - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}(\varepsilon) + b_{\alpha\beta}\zeta_{\sigma}(\varepsilon) - b_{\sigma\beta}\zeta_{\alpha}(\varepsilon))[\mathbf{a}^{\sigma}]_k[\mathbf{a}^{\alpha}]_i + \right. \\ &\quad \left. + (\chi_{\alpha\beta}(\varepsilon) + b_{\beta}^{\sigma}\gamma_{\alpha\sigma}(\varepsilon) - \partial_{\alpha}\zeta_{\beta}(\varepsilon))([\mathbf{a}^3]_k[\mathbf{a}^{\alpha}]_i - [\mathbf{a}^3]_i[\mathbf{a}^{\alpha}]_k) \right) dz_{\beta} + \\ &\left. + \varepsilon [\mathbf{a}^3]_k \int_{\gamma_*} \zeta_{\alpha}(\varepsilon) dz_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}.\end{aligned}\tag{6.30}$$

Puisque la formule de Cesàro-Volterra mise à l'échelle est polynomiale en ε , on suppose l'existence des développements asymptotiques formels des champs tensoriels donnés $(\gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon))$, $(\chi_{\alpha\beta}(\varepsilon))$ et $(\zeta_{\alpha}(\varepsilon))$ de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= \gamma_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon\gamma_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2\gamma_{\alpha\beta}^2 + \dots, \\ \chi_{\alpha\beta}(\varepsilon) &= \chi_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon\chi_{\alpha\beta}^1 + \varepsilon^2\chi_{\alpha\beta}^2 + \dots, \\ \zeta_{\alpha}(\varepsilon) &= \zeta_{\alpha}^0 + \varepsilon\zeta_{\alpha}^1 + \varepsilon^2\zeta_{\alpha}^2 + \dots.\end{aligned}\tag{6.31}$$

Ceci implique le développement asymptotique suivant des déplacements $v_j(\varepsilon)$:

$$v_j(\varepsilon) = v_j^0 + \varepsilon v_j^1 + \varepsilon^2 v_j^2 + \dots\tag{6.32}$$

En remplaçant les développements asymptotiques formels (6.31)-(6.32) dans la formule de Cesàro-Volterra mise à l'échelle et en isolant les termes du même ordre en ε , on peut

caractériser les termes principaux jusqu'à l'ordre un. Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} v_j^0(\mathbf{y}) &= [\mathbf{a}_j(\mathbf{y})]^i \mathcal{I}_i^0(\mathbf{y}), \\ v_\mu^1(\mathbf{y}, x_3) &= [\mathbf{a}_\mu(\mathbf{y})]^i \mathcal{I}_i^1(\mathbf{y}) - x_3 \left(b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 - [\mathbf{a}_\mu]^i [\mathbf{a}_3]^k \mathcal{J}_{ik}^0 \right) (\mathbf{y}) + [\mathbf{a}_\mu(\mathbf{y})]^i \mathcal{K}_i^0(\mathbf{y}, x_3), \end{aligned} \quad (6.33)$$

où les fonctions $\mathcal{I}_i^p$, avec $p = 0, 1$, $\mathcal{J}_{ik}^0$ et $\mathcal{K}_i^0$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i^p(\mathbf{y}) &:= \int_{\hat{\gamma}} (\gamma_{\alpha\beta}^p [\mathbf{a}^\alpha]_i + \zeta_\beta^p [\mathbf{a}^3]_i) dz_\beta + \\ &+ \int_{\hat{\gamma}} (\theta_k(\mathbf{y}) - \theta_k(\hat{\mathbf{z}})) \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}^p - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}^p + b_{\alpha\beta} \zeta_\sigma^p - b_{\sigma\beta} \zeta_\alpha^p) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i + \right. \\ &\quad \left. + (\chi_{\alpha\beta}^p + b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^p - \partial_\alpha \zeta_\beta^p) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^3]_i [\mathbf{a}^\alpha]_k) \right) dz_\beta, \\ \mathcal{J}_{ik}^0(\mathbf{y}) &:= \int_{\hat{\gamma}} \left((\gamma_{\alpha\beta|\sigma}^0 - \gamma_{\sigma\beta|\alpha}^0 + b_{\alpha\beta} \zeta_\sigma^0 - b_{\sigma\beta} \zeta_\alpha^0) [\mathbf{a}^\sigma]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i + \right. \\ &\quad \left. + (\chi_{\alpha\beta}^0 + b_\beta^\sigma \gamma_{\alpha\sigma}^0 - \partial_\alpha \zeta_\beta^0) ([\mathbf{a}^3]_k [\mathbf{a}^\alpha]_i - [\mathbf{a}^\alpha]_k [\mathbf{a}^3]_i) \right) dz_\beta, \\ \mathcal{K}_i^0(\mathbf{y}, x_3) &:= \int_{\gamma_*} \zeta_\alpha^0 [\mathbf{a}^\alpha]_i dz_3. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Si on applique l'indépendance du chemin aux intégrales (6.33), on obtient que les composantes covariantes des tenseurs de variation de métrique et courbure doivent satisfaire les conditions de compatibilité de Saint-Venant pour une surface de Naghdi :

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma\alpha|\beta\tau}^0 + \gamma_{\beta\tau|\alpha\sigma}^0 - \gamma_{\sigma\beta|\alpha\tau}^0 - \gamma_{\alpha\tau|\sigma\beta}^0 + \mathcal{R}_{\alpha\sigma\tau}^\nu \gamma_{\beta\nu}^0 - \mathcal{R}_{\beta\sigma\tau}^\nu \gamma_{\alpha\nu}^0 &= \\ &= b_{\tau\alpha} (\chi_{\beta\sigma}^0 + \zeta_{\beta|\sigma}^0 + \zeta_{\sigma|\beta}^0) + b_{\beta\sigma} (\chi_{\tau\alpha}^0 + \zeta_{\tau|\alpha}^0 + \zeta_{\alpha|\tau}^0) - \\ &\quad - b_{\sigma\alpha} (\chi_{\tau\beta}^0 + \zeta_{\tau|\beta}^0 + \zeta_{\beta|\tau}^0) - b_{\tau\beta} (\chi_{\sigma\alpha}^0 + \zeta_{\sigma|\alpha}^0 + \zeta_{\alpha|\sigma}^0), \\ \chi_{\sigma\alpha|\tau}^0 - \chi_{\alpha\tau|\sigma}^0 + \zeta_\nu^0 \mathcal{R}_{\alpha\tau\sigma}^\nu &= b_\sigma^\nu (\gamma_{\alpha\nu|\tau}^0 + \gamma_{\tau\nu|\alpha}^0 - \gamma_{\tau\alpha|\nu}^0) - b_\tau^\nu (\gamma_{\alpha\nu|\sigma}^0 + \gamma_{\sigma\nu|\alpha}^0 - \gamma_{\sigma\alpha|\nu}^0). \end{aligned}$$

On peut facilement montrer que v_μ^0 est indépendant de la coordonnée transversale x_3 et que la fonction $\mathcal{K}_i^0(\mathbf{y}, x_3)$ est linéaire en x_3 . Donc, on a :

$$\mathcal{K}_i^0(\mathbf{y}, x_3) = \int_{\gamma_*} \zeta_\alpha^0 [\mathbf{a}^\alpha]_i dz_3 = x_3 \zeta_\alpha^0(\mathbf{y}) [\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y})]_i.$$

Pour retrouver la cinématique d'une coque de Naghdi qui se déforme aussi en cisaillement, on couple les déplacements au premier ordre avec ceux d'ordre zéro. Si on pose $v_\mu^N := v_\mu^0 + v_\mu^1$ et $v_3^N := v_3^0$, les **formules de Cesàro-Volterra pour une coque de Naghdi** ont la forme suivante :

$$\begin{cases} v_\mu^N(\mathbf{y}, x_3) = [\mathbf{a}_\mu(\mathbf{y})]^i (\mathcal{I}_i^0 + \mathcal{I}_i^1)(\mathbf{y}) - x_3 \left(b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 - [\mathbf{a}_\mu]^i [\mathbf{a}_3]^k \mathcal{J}_{ik}^0 + \zeta_\mu^0 \right) (\mathbf{y}), \\ v_3^N(\mathbf{y}) = [\mathbf{a}_3(\mathbf{y})]^i \mathcal{I}_i^0(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (6.35)$$

Comme dans le cas des coques de Kirchhoff-Love généralisée, si on dérive les expressions (6.33), on peut calculer les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique e_{i3}^N , définies par :

$$e_{\mu 3}^N(\mathbf{y}, x_3) := \frac{1}{2} (\partial_\mu v_3^0 + \partial_3 v_\mu^1) + b_\mu^\tau v_\tau^0 \quad \text{et} \quad e_{33}^N(\mathbf{y}, x_3) := \partial_3 v_3^0.$$

Donc, on trouve :

$$\begin{aligned}\partial_\mu v_3^0 &= \zeta_\mu^0 - b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 + [\mathbf{a}_\mu]^k [\mathbf{a}_3]^i \mathcal{J}_{ik}^0, \\ \partial_3 v_\mu^1 &= \zeta_\mu^0 - b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0 + [\mathbf{a}_\mu]^i [\mathbf{a}_3]^k \mathcal{J}_{ik}^0, \\ b_\mu^\tau v_\tau^0 &= b_\mu^\tau [\mathbf{a}_\tau]^i \mathcal{I}_i^0, \\ \partial_3 v_3^0 &= 0.\end{aligned}\tag{6.36}$$

On remarque que les composantes $\mathcal{J}_{ik}^0$, définies dans (6.34₂), sont antisymétriques, i.e. $\mathcal{J}_{ik}^0 = -\mathcal{J}_{ki}^0$: en effet, elle représentent les composantes covariantes de la rotation infinitésimale. Par conséquent, en sommant les dérivées (6.36), on obtient que les composantes e_{i3}^N sont de la forme :

$$e_{\mu 3}^N(\mathbf{y}, x_3) = \zeta_\mu^0(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad e_{33}^N(\mathbf{y}, x_3) = 0.\tag{6.37}$$

Ceci est conforme aux liaisons internes de la cinématique de Naghdi pour les coques : en réalité, les relations (6.37) expriment le fait que la coque ne s'écrase pas et que la fibre transversale normale à la surface moyenne réalise une rotation égale à $\zeta_\mu^0(\mathbf{y})$ lors de la déformation, et, donc, elle ne reste pas perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Remarque : si on suppose que la coque devient une plaque, les tenseurs donnés de variation de métrique et courbure, $(\gamma_{\alpha\beta}^\ell)$ et $(\chi_{\alpha\beta}^0)$, et le vecteur de cisaillement (ζ_α^0) se transforment respectivement en les tenseurs de déformation plane et de courbure de la plaque, $(c_{\alpha\beta}^\ell)$, pour $\ell = 0, 1$, et $(r_{\alpha\beta}^0)$, et en $(e_{\alpha 3}^0)$.

La formule de Cesàro-Volterra (6.35) dans ce cas particulier prend la forme de la formule de Cesàro-Volterra en considérant la cinématique de plaque de Reissner-Mindlin :

$$\begin{aligned}v_\mu^{RM}(\mathbf{y}, x_3) &= \int_{\hat{\gamma}} [\bar{c}_{\mu\beta} + (y_\sigma - z_\sigma)(\partial_\sigma \bar{c}_{\mu\beta} - \partial_\mu \bar{c}_{\sigma\beta})] dz_\beta + x_3 \int_{\hat{\gamma}} (r_{\mu\beta}^0 - \partial_\mu e_{\beta 3}^0) dz_\beta + \int_{\gamma_*} e_{\mu 3}^0 dz_3, \\ v_3^{RM}(\mathbf{y}) &= \int_{\hat{\gamma}} [e_{\mu 3}^0 + (y_\sigma - z_\sigma)(\partial_\sigma e_{\beta 3}^0 - r_{\sigma\beta}^0)] dz_\beta,\end{aligned}$$

où $\bar{c}_{\mu\beta} := c_{\mu\beta}^0 + c_{\mu\beta}^1$. Ce résultat est cohérent à ceux qui sont décrits dans la Section 5.3.2, sur la déduction purement géométrique de la cinématique des plaques.

6.6 Conclusions

De façon équivalente au cas de la cinématique des plaques, la déduction de la cinématique de Kirchhoff-Love généralisée et de Naghdi pour une coque que l'on a proposée est obtenue en n'utilisant que des renseignements géométriques, grâce à la formule de Cesàro-Volterra et aux équations de compatibilité de Saint-Venant (voir l'article de P.G. Ciarlet et al. [19] qui concerne le cas de la cinématique des surfaces).

La représentation de Cesàro-Volterra dans le cas des coques peut être utilisée donc dans la formulation du problème de l'équilibre des coques, où les tenseurs linéarisés de variation de métrique et courbure sont considérés comme inconnues primaires.

Troisième partie

Étude Asymptotique d'Assemblages Multicouches

Chapitre 7

Inclusions Élastiques de Grande Rigidité de Type Coque

7.1 Introduction

L'étude d'une inclusion rigide dans un solide tridimensionnel de propriétés mécaniques plus faibles a été sujet des nombreuses recherches à partir, par exemple, des travaux de H. Pham Huy et E. Sanchez-Palencia, [37], H. Brezis et al., [7], et D. Caillerie, [8]. Plus récemment, D. Chapelle et A. Ferent, [10], ont proposé une formulation variationnelle du couplage entre une coque et un milieu 3D plus faible qui l'entoure, pour justifier des techniques utilisées dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis. D. Chapelle et A. Ferent ont étudié le comportement asymptotique d'une inclusion de type coque de rigidité $\frac{1}{\varepsilon^p}$, $p = 1$ ou $p = 3$, dans un domaine tridimensionnel. Dans un contexte légèrement différent au niveau géométrique et mécanique, A.L. Bessoud et al. [5] ont étudié le comportement d'une couche 3D d'épaisseur ε de rigidité de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$. Plus précisément, la couche mince peut être décrite de la façon suivante : $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, où ω est une surface projetable, et que les matériaux sont linéaires élastiques anisotropes. Le problème limite est un problème de transmission de Ventcel entre deux solides tridimensionnels anisotropes. Quand ω est plan et dans le cas isotrope, le terme d'énergie surfacique peut être interprété comme l'énergie de membrane d'une plaque de Kirchhoff-Love.

Dans la Note qui suit, on présente deux situations en utilisant l'approche à deux champs analogue à [10]. On étudie une situation géométrique analogue à [5], quand le matériau de la couche mince est isotrope avec une rigidité $\frac{1}{\varepsilon^p}$, $p = 1$ ou $p = 3$. Quand $p = 3$, l'énergie surfacique du problème limite a la forme de l'énergie flexionnelle d'une plaque de Kirchhoff-Love. Quand $p = 1$, l'énergie surfacique est l'énergie de membrane obtenue dans [5]. On étudie ensuite une nouvelle situation où la couche mince de type coque est obtenue par translation suivant la direction transversale normale d'une surface générale 2D. En utilisant un système de coordonnées curvilignes on déduit les problèmes limites pour $p = 1$ et $p = 3$. Les paragraphes de ce chapitre, détaillent les aspects de la Note concernant uniquement une inclusion de type coque.

7.2 Inclusion de type coque

7.2.1 Problème physique en coordonnées curvilignes

On considère un espace Euclidien tridimensionnel, identifié avec $\mathbf{E}^3$, et tel que les vecteurs $\mathbf{e}_i$ forment une base orthonormée. Soit Ω^+ et Ω^- deux domaines ouverts et disjoints de frontières régulières $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$. Soit $\omega := \{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-\}^\circ$ un domaine dans $\mathbb{R}^2$ ayant une mesure bidimensionnelle non nulle et soit $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ un point générique de $\bar{\omega}$.

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ une application injective telle que les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) := \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$ forment la base covariante du plan tangent de la surface $S := \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ en $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$; les vecteurs du plan tangent $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y})$, définis par les relations $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) = \delta_\beta^\alpha$, forment la base contravariante. On définit ainsi le vecteur unitaire normal à la surface en $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$ par $\mathbf{a}_3(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^3(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})}{|\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})|}$. On rappelle que les composantes covariantes $a_{\alpha\beta}$ et contravariantes $a^{\alpha\beta}$ de la première forme fondamentale, les composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ et mixtes b_α^β de la deuxième forme fondamentale et les symboles de Christoffel de seconde espèce $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ de la surface sont définis par

$$a_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} := \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}^3 \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha, \quad b_\alpha^\beta := a^{\beta\sigma} b_{\alpha\sigma}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := \mathbf{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha.$$

Soit $\Omega^{m,\varepsilon} := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, avec $\Gamma^{\pm,\varepsilon} := \omega \times \{\pm\varepsilon\}$. Soit $\mathbf{x}^\varepsilon$ le point générique de $\bar{\Omega}^{m,\varepsilon}$, avec $x_\alpha^\varepsilon = y_\alpha$. On considère un domaine de type coque de surface moyenne $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ et d'épaisseur $2\varepsilon > 0$, dont la configuration de référence est l'image $\boldsymbol{\Theta}^{m,\varepsilon}(\bar{\Omega}^{m,\varepsilon}) \subset \mathbb{R}^3$ de l'ensemble $\bar{\Omega}^{m,\varepsilon}$ à travers l'application $\boldsymbol{\Theta}^{m,\varepsilon} : \bar{\Omega}^{m,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\boldsymbol{\Theta}^{m,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}_3(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = (\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) = (y_1, y_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^{m,\varepsilon}. \quad (7.1)$$

Les quantités géométriques, notamment la base covariante $\mathbf{g}_i^\varepsilon$ et contravariante $\mathbf{g}^{i,\varepsilon}$, les composantes covariantes g_{ij}^ε et contravariantes $g^{ij,\varepsilon}$ du tenseur métrique et les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}$, ont été déjà définis dans (6.9)-(6.13).

De plus, on suppose qu'il existe une immersion $\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Theta}^\varepsilon := \begin{cases} \boldsymbol{\Theta}^{\pm,\varepsilon} & \text{dans } \bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon} \\ \boldsymbol{\Theta}^{m,\varepsilon} & \text{dans } \bar{\Omega}^{m,\varepsilon} \end{cases}, \quad \boldsymbol{\Theta}^{\pm,\varepsilon}(\Gamma^{\pm,\varepsilon}) = \boldsymbol{\Theta}^{m,\varepsilon}(\Gamma^{\pm,\varepsilon}),$$

où $\boldsymbol{\Theta}^{\pm,\varepsilon} : \bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux immersions sur $\bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon}$ qui définissent les coordonnées curvilignes dans $\bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon}$.

On insère une couche intermédiaire de type coque en translatant l'image $\boldsymbol{\Theta}^{+,\varepsilon}(\Omega^{+,\varepsilon}) \subset \mathbb{R}^3$ du domaine $\Omega^{+,\varepsilon}$, (resp. $\boldsymbol{\Theta}^{-,\varepsilon}(\Omega^{-,\varepsilon})$), suivant la direction $\mathbf{a}^3$, (resp. $-\mathbf{a}^3$), d'une quantité égale à $\varepsilon > 0$, un petit paramètre réel sans dimension. La structure est fixée en $\Gamma_0 \subset (\partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^{m,\varepsilon})$ et chargée avec une densité de force surfacique h^i en $\Gamma_1 \subset (\partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^{m,\varepsilon}) \setminus \Gamma_0$. $\Gamma^{m,\varepsilon} := \partial\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ n'est pas chargée. On suppose que les matériaux occupant Ω^ε soient linéaires élastiques isotropes.

Le problème physique variationnel en coordonnées curvilignes dans le domaine variable Ω^ε est le suivant :

Trouver $(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \in V^\varepsilon := \{(\mathbf{V}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) \in H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega^{m,\varepsilon}; \mathbb{R}^3); \mathbf{V}_{|\Gamma_0}^\varepsilon = \mathbf{v}; \mathbf{V}_{|\Gamma_0^c}^\varepsilon = 0\}$ tel que

$$A^{-,\varepsilon}(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon) + A^{+,\varepsilon}(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon) + A^{m,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = L^\varepsilon(\mathbf{V}^\varepsilon), \quad \forall (\mathbf{V}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) \in V^\varepsilon. \quad (7.2)$$

Les formes bilinéaires $A^{\pm,\varepsilon}(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)$ et $A^{m,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)$ sont définies par

$$A^{\pm,\varepsilon}(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon) := \int_{\Omega^{\pm,\varepsilon}} A_{\pm}^{ijkl,\varepsilon} e_{kl}^\varepsilon(\mathbf{U}^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{V}^\varepsilon) \sqrt{g^{\pm,\varepsilon}} d\mathbf{x}^\varepsilon$$

et

$$A^{m,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) := \int_{\Omega^{m,\varepsilon}} A_m^{ijkl,\varepsilon} e_{kl}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^{m,\varepsilon}} d\mathbf{x}^\varepsilon,$$

où

$$e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) := \frac{1}{2}(\partial_i v_j^\varepsilon + \partial_j v_i^\varepsilon) - \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} v_p^\varepsilon$$

dénotent les composantes covariantes du tenseur linéarisé de variation de métrique et $g^\varepsilon := \det(g_{ij}^\varepsilon)$ est le déterminant du tenseur métrique.

Les composantes contravariantes du tenseur d'élasticité $A^{ijkl,\varepsilon}$ pour un matériau isotrope de constantes de Lamé $\lambda^\varepsilon > 0$ et $\mu^\varepsilon > 0$ sont définies par

$$A^{ijkl,\varepsilon} := \lambda^\varepsilon g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu^\varepsilon (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})$$

avec les symétries classiques $A^{ijkl,\varepsilon} = A^{jikl,\varepsilon} = A^{klij,\varepsilon}$. Grâce à la forme particulière (7.1) de l'immersion $\Theta^{m,\varepsilon}$, le tenseur d'élasticité de la couche intermédiaire satisfait les relations :

$$A_m^{\alpha\beta\sigma 3,\varepsilon} = A_m^{\alpha 333,\varepsilon} = 0.$$

7.2.2 Problème physique posé dans un domaine fixe

Afin d'étudier le comportement asymptotique du problème physique (7.2) lorsque ε tend vers zéro, on a besoin de transformer le problème défini sur un domaine ε -dépendant Ω^ε en un problème défini sur un domaine fixe Ω .

Pour cela, suivant l'approche de P. G. Ciarlet, [14], on considère la bijection $\Pi^\varepsilon : \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{x}^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ définie par

$$\begin{cases} \Pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)), & \text{pour } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{tr}^+, \\ \Pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3), & \text{pour } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^m, \\ \Pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)), & \text{pour } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{tr}^-, \end{cases} \quad (7.3)$$

où $\Omega_{tr}^\pm := \{\mathbf{x} \pm \frac{1}{2}\mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in \Omega^\pm\}$, $\Omega^m := \omega \times]-1, 1[$ et $\Gamma^\pm := \omega \times \{\pm 1\}$. Pour simplifier la notation, on pose $\Omega_{tr}^\pm := \Omega^\pm$, et, donc, $\bar{\Omega} := \bar{\Omega}^\pm \cup \bar{\Omega}^m$.

Par conséquent, dans Ω^m ,

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha \quad \text{et} \quad \partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3.$$

Les domaines $\Omega^{\pm,\varepsilon}$ ne sont pas affectés par la mise à échelle à travers Π^ε : ils ne sont que translatés de la quantité $\pm \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$.

On associe aux inconnues $(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)$ et aux fonctions test $(\mathbf{V}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)$, qui apparaissent dans la formulation variationnelle (7.2), respectivement les inconnues transformées par Π^ε , $(\mathbf{U}, \mathbf{u})$, et les fonctions test transformées par Π^ε , $(\mathbf{V}, \mathbf{v})$, à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) &=: \mathbf{U}(\varepsilon)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) =: \mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \Pi^\varepsilon \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\varepsilon \\ \mathbf{V}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) &=: \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) =: \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \Pi^\varepsilon \mathbf{x} \in \bar{\Omega}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Les hypothèses sur les constantes de Lamé des matériaux et sur les forces appliquées sont décrites dans ce qui suit. On suppose, tout d'abord, qu'il existe des constantes de Lamé indépendantes de ε , $\lambda^\pm > 0$ et $\mu^\pm > 0$, et $\lambda^m > 0$ et $\mu^m > 0$, telles que, pour $p = 1$ ou $p = 3$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda^{\pm,\varepsilon} &= \lambda^\pm \quad \text{et} \quad \mu^{\pm,\varepsilon} = \mu^\pm, \\ \lambda^{m,\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon^p} \lambda^m \quad \text{et} \quad \mu^{m,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^p} \mu^m.\end{aligned}$$

On suppose que la forme linéaire associée au chargement présente la dépendance par rapport au paramètre ε suivante :

$$L^\varepsilon(\mathbf{V}^\varepsilon) = L(\mathbf{V}).$$

En outre, aux fonctions $A_\pm^{ijkl,\varepsilon}$, $g^{\pm,\varepsilon}$, $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} : \bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ sont associées les fonctions mises à l'échelle $A_\pm^{ijkl}$, $g^\pm$, $\Gamma_{ij}^p : \bar{\Omega}^\pm \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned}A_\pm^{ijkl}(\mathbf{x}) &:= A_\pm^{ijkl,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \\ g^\pm(\mathbf{x}) &:= g^{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \\ \Gamma_{ij}^p(\mathbf{x}) &:= \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon),\end{aligned}$$

et aux fonctions $A_m^{ijkl,\varepsilon}$, $g^{m,\varepsilon}$, $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} : \bar{\Omega}^{m,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ sont associées les fonctions mises à l'échelle $A_m^{ijkl}(\varepsilon)$, $g^m(\varepsilon)$, $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon) : \bar{\Omega}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned}A_m^{ijkl}(\varepsilon)(\mathbf{x}) &:= A_m^{ijkl,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \\ g^m(\varepsilon)(\mathbf{x}) &:= g^{m,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \\ \Gamma_{ij}^p(\varepsilon)(\mathbf{x}) &:= \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon).\end{aligned}$$

Enfin, les composantes de déformation linéarisée mises à l'échelle $e_{ij}(\varepsilon; \mathbf{v}) = e_{ji}(\varepsilon; \mathbf{v}) \in L^2(\Omega^m)$, associées à un champ de déplacement $\mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega^m; \mathbb{R}^3)$, sont de la forme :

$$\begin{aligned}e_{\alpha\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)v_p, \\ e_{\alpha 3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3\right) - \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)v_\sigma, \\ e_{33}(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_3.\end{aligned}$$

Les hypothèses précédentes sur le comportement des matériaux et sur les efforts extérieurs permettent d'écrire le problème physique mis à l'échelle dans le domaine fixe Ω sous la forme :

Trouver $(\mathbf{U}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon)) \in V := \{(\mathbf{V}, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega^m; \mathbb{R}^3); \mathbf{V}|_{\Omega^m} = \mathbf{v}; \mathbf{V}|_{\Gamma_0} = 0\}$ tel que

$$A^-(\mathbf{U}(\varepsilon), \mathbf{V}) + A^+(\mathbf{U}(\varepsilon), \mathbf{V}) + \varepsilon A^m(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) = L(\mathbf{V}), \quad \forall (\mathbf{V}, \mathbf{v}) \in V, \quad (7.4)$$

où

$$A^\pm(\mathbf{U}(\varepsilon), \mathbf{V}) := \int_{\Omega^\pm} A_\pm^{ijkl} e_{kl}(\mathbf{U}(\varepsilon)) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^\pm} \, d\mathbf{x}$$

et

$$A^m(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) := \int_{\Omega^m} A_m^{ijkl}(\varepsilon) e_{kl}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) e_{ij}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g^m(\varepsilon)} \, d\mathbf{x}.$$

7.2.3 Préliminaires géométriques et mécaniques pour la couche de type coque

Pour poursuivre une analyse asymptotique formelle du problème physique (7.4), on doit tout d'abord étudier le comportement des fonctions $A_m^{ijk\ell}(\varepsilon)$, $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$, $g^m(\varepsilon) : \overline{\Omega}^m \rightarrow \mathbb{R}$ associée à la couche intermédiaire de type coque, lorsque ε tend vers zéro, vue la forme particulière (7.1) de l'immersion $\Theta^{m,\varepsilon}$. Ces fonctions, qui dépendent de $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, x_3) \in \overline{\Omega}^m = \overline{\omega} \times [-1, 1]$, à la limite pour $\varepsilon = 0$ seront indépendantes de la coordonnée transversale x_3 .

Le comportement asymptotique des quantités géométriques $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$ et $g^m(\varepsilon)$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \varepsilon x_3 b_\beta^\sigma|_\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) &= b_{\alpha\beta} - \varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}, \\ \partial_3 \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) &= -b_\alpha^\sigma - \varepsilon x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \Gamma_{\alpha 3}^3(\varepsilon) &= \Gamma_{33}^p(\varepsilon) = 0, \\ g^m(\varepsilon) &= a + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \tag{7.5}$$

où les symboles d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sont considérés par rapport à la norme $\|\cdot\|_{0,\infty,\overline{\Omega}^m}$ définie par

$$\|w\|_{0,\infty,\overline{\Omega}^m} := \sup\{|w(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in \overline{\Omega}^m\},$$

et $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$, $b_{\alpha\beta}$ et b_α^σ sont respectivement les symboles de Christoffel, les composantes covariantes et mixtes de la deuxième forme fondamentale de la surface moyenne de la coque.

Le comportement des composantes contravariantes du tenseur d'élasticité quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est le suivant :

$$A_m^{ijk\ell}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^p} A_m^{ijk\ell}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1-p}) \text{ et } A_m^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A_m^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0, \tag{7.6}$$

où

$$\begin{aligned} A_m^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) &:= \lambda^m a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu^m (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \\ A_m^{\alpha\beta 33}(0) &:= \lambda^m a^{\alpha\beta}, \quad A_m^{\alpha 3\sigma 3}(0) := \mu^m a^{\alpha\sigma}, \quad A_m^{3333}(0) := \lambda^m + 2\mu^m, \\ A_m^{\alpha\beta\sigma 3}(0) &= A_m^{\alpha 333}(0) = 0. \end{aligned}$$

7.2.4 Développements asymptotiques et problèmes limites

On peut maintenant appliquer la méthode des développements asymptotiques compte tenu des hypothèses faites dans les sections précédentes, et distinguer les deux cas différents quand l'exposant p en face des modules élastiques est égal à 1 ou 3.

On suppose le développement asymptotique formel *a priori* des déplacements inconnus $(\mathbf{U}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon))$:

$$\mathbf{U}(\varepsilon) = \mathbf{U}^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{U}^2 + \dots, \quad \mathbf{u}(\varepsilon) = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2 + \dots \tag{7.7}$$

Le développement asymptotique formel (7.7₂) des inconnues combiné avec le comportement asymptotique (7.5) des fonctions $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$ induit le développement asymptotique suivant pour les déformations linéarisées mises à l'échelle de la coque :

$$e_{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e_{ij}^{-1}(\mathbf{u}) + e_{ij}^0(\mathbf{u}) + \varepsilon e_{ij}^1(\mathbf{u}) + \varepsilon^2 e_{ij}^2(\mathbf{u}) + \dots, \tag{7.8}$$

où

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{u}) = 0, \\ e_{\alpha 3}^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\partial_3 u_\alpha^0, \\ e_{33}^{-1}(\mathbf{u}) = \partial_3 u_3^0, \end{cases} \quad \begin{cases} e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^0 + \partial_\alpha u_\beta^0) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma^0 - b_{\alpha\beta} u_3^0, \\ e_{\alpha 3}^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^0 + \partial_\alpha u_3^0) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^0, \\ e_{33}^0(\mathbf{u}) = \partial_3 u_3^0, \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_\beta^1) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma^1 - b_{\alpha\beta} u_3^1 + x_3(b_\beta^\sigma|_\alpha u_\sigma^0 + b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3^0), \\ e_{\alpha 3}^1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_3^1) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^1 + x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma u_\sigma^0, \\ e_{33}^1(\mathbf{u}) = \partial_3 u_3^1. \end{cases} \quad (7.10)$$

De même, les fonctions $e_{ij}(\varepsilon; \mathbf{v})$ admettent un développement asymptotique formel qui est lié toujours au comportement asymptotique des fonctions $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$. On a donc :

$$e_{ij}(\varepsilon; \mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon} e_{ij}^{-1}(\mathbf{v}) + e_{ij}^0 + \varepsilon e_{ij}^1(\mathbf{v}) + \varepsilon^2 e_{ij}^2(\mathbf{v}) + \dots, \quad (7.11)$$

où

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{v}) = 0, \\ e_{\alpha 3}^{-1}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha, \\ e_{33}^{-1}(\mathbf{v}) = \partial_3 v_3, \end{cases} \quad \begin{cases} e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3, \\ e_{\alpha 3}^0(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\sigma v_\sigma, \\ e_{33}^0(\mathbf{v}) = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^1(\mathbf{v}) = x_3 b_\beta^\sigma|_\alpha v_\sigma + x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} v_3, \\ e_{\alpha 3}^1(\mathbf{v}) = x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma v_\sigma, \\ e_{33}^1(\mathbf{v}) = 0. \end{cases} \quad e_{ij}^k(\mathbf{v}) = -x_3^k \Gamma_{ij}^{p,k} v_p. \quad (7.13)$$

Le comportement asymptotique (7.5)-(7.6) des fonctions $g(\varepsilon)$ et $A_m^{ijkl}(\varepsilon)$ implique que

$$A_m^{ijkl}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon^p} A_m^{ijkl}(0) \sqrt{a} + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} A_m^{ijkl,1} + \frac{1}{\varepsilon^{p-2}} A_m^{ijkl,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2-p}).$$

On injecte les développements asymptotiques (7.7)-(7.11) dans le problème physique mis à l'échelle (7.4) et on isole les termes du même ordre en ε afin de caractériser les champs de déplacements limites et les problèmes limites correspondants. Le problème variationnel équivalent prend la forme :

Trouver $(\mathbf{U}, \mathbf{u}) \in V$ tel que $\forall (\mathbf{V}, \mathbf{v}) \in V$

$$A_0^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \varepsilon A_1^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \dots + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^{p+2}} B_{-(p+2)}^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} B_{-(p+1)}^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \dots \right) = L(\mathbf{V}), \quad (7.14)$$

où les formes bilinéaires $A_j^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, $j \geq 1$, et $B_i^m(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $i \geq -(p+2)$, sont indépendantes de ε .

On étudie séparément les deux cas pour $p = 1$ et $p = 3$ en identifiant les problèmes limites et les conditions de transmission.

1. **p=1** : le problème (7.14) devient : Trouver $(\mathbf{U}, \mathbf{u}) \in V$ tel que $\forall (\mathbf{V}, \mathbf{v}) \in V$

$$A_0^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \varepsilon A_1^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \dots + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^3} B_{-3}^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon^2} B_{-2}^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \dots \right) = L(\mathbf{V}).$$

Théorème 7.2.1 (Condition de transmission de type coque membranaire) *Si les termes $\mathbf{U}^0$, $\mathbf{u}^0$ et $\mathbf{u}^1$ des développements (7.7) existent, alors le terme principal $\mathbf{u}^0$ est indépendant de x_3 et, pour cela, il peut être identifier avec le champ $\boldsymbol{\zeta}^0 = (\zeta_i^0) : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui, avec $\mathbf{U}^0$, résolvent le problème variationnel de transmission de type coque membranaire suivant :*

Trouver $(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\zeta}^0)$ tel que $\forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_M := \{(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\omega; \mathbb{R}^3); \mathbf{V}|_\omega = \boldsymbol{\eta}, \mathbf{V}|_{\Gamma_0} = 0\}$

$$A_0^-(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_0^+(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_M^m(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = L(\mathbf{V}), \quad (7.15)$$

où

$$\begin{aligned} A_0^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &:= \int_{\Omega^\pm} A_\pm^{ijkl} e_{kl}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^\pm} \, dx, \\ A_M^m(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) &:= \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, dy, \\ a^{\alpha\beta\sigma\tau} &:= \frac{4\lambda^m \mu^m}{\lambda^m + 2\mu^m} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu^m (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \\ \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{2} (\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3. \end{aligned}$$

Démonstration : La démonstration est divisée en trois parties, qui correspondent aux problèmes à l'ordre ε^{-2} , ε^{-1} et ε^0 .

(i) Le problème variationnel que l'on obtient à l'ordre ε^{-2} est :

$$\int_{\Omega^m} A_m^{ijkl}(0) e_{kl}^{-1}(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, dx = 0,$$

ou, de façon équivalente,

$$\int_{\Omega^m} \{\mu^m a^{\alpha\sigma} \partial_3 u_\alpha^0 \partial_3 v_\beta + (\lambda^m + 2\mu^m) \partial_3 u_3^0 \partial_3 v_3\} \sqrt{a} \, dx = 0,$$

Ceci implique $\partial_3 u_3^0 = 0$ et, puisque la matrice $(a^{\alpha\sigma})$ est symétrique et définie positive, $\partial_3 u_\alpha^0 = 0$. Donc, le terme $\mathbf{u}^0$ est indépendant de x_3 et, par conséquent, $e_{ij}^{-1}(\mathbf{u}) = 0$.

(ii) Le problème variationnel à l'ordre ε^{-1} , grâce au résultat précédent $e_{ij}^{-1}(\mathbf{u}) = 0$, est le suivant :

$$\int_{\Omega^m} A_m^{ijkl}(0) e_{kl}^0(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, dx = 0,$$

ce qui équivaut à écrire

$$\int_{\Omega^m} \{2\mu^m a^{\alpha\sigma} e_{\alpha 3}^0(\mathbf{u}) \partial_3 v_\sigma + (\lambda^m a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{u}) + (\lambda^m + 2\mu^m) e_{33}^0(\mathbf{u})) \partial_3 v_3\} \sqrt{a} \, dx = 0.$$

Puisque la matrice $(a^{\alpha\sigma})$ est symétrique et définie positive, on trouve que

$$e_{\alpha 3}^0(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{et} \quad e_{33}^0(\mathbf{u}) = -\frac{\lambda^m}{\lambda^m + 2\mu^m} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{u}).$$

(iii) Le problème variationnel obtenu à l'ordre ε^0 prend la forme :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^+} A_+^{ijkl} e_{kl}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^+} \, dx + \int_{\Omega^-} A_-^{ijkl} e_{kl}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^-} \, dx + \\ &+ \int_{\Omega^m} \{A_m^{ijkl}(0) (e_{kl}^0(\mathbf{u}) e_{ij}^0(\mathbf{v}) + e_{kl}^1(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v})) + A_m^{ijkl,1} e_{kl}^0(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v})\} \sqrt{a} \, dx = L(\mathbf{V}). \end{aligned}$$

Si on choisit des fonctions test $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}$ qui ne dépendent pas de x_3 , la quantité $e_{ij}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ s'annule et le problème se réduit à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} A_+^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^+} d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} A_-^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^-} d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) e_{k\ell}^0(\mathbf{u}) e_{ij}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} d\mathbf{x} = L(\mathbf{V}), \quad \forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_M. \end{aligned}$$

On peut facilement montrer, grâce à (i) et (ii), que

$$\int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) e_{k\ell}^0(\mathbf{u}) e_{ij}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} d\mathbf{x} = \int_{\Omega^m} \frac{a^{\alpha\beta\sigma\tau}}{2} e_{\sigma\tau}^0(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} d\mathbf{x},$$

On identifie $\mathbf{u}^0$ avec $\boldsymbol{\zeta}^0$. en remarquant que $\mathbf{u}^0$ est indépendant de la coordonnée transversale x_3 , la fonction

$$e_{\sigma\tau}^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_\sigma u_\tau^0 + \partial_\tau u_\sigma^0) - \Gamma_{\sigma\tau}^k u_k^0 = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \zeta_\tau^0 + \partial_\tau \zeta_\sigma^0) - \Gamma_{\sigma\tau}^\nu \zeta_\nu^0 - b_{\sigma\tau} \zeta_3^0 = \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0)$$

est indépendante aussi de x_3 . De façon analogue, pour la fonction test $\boldsymbol{\eta}$, la fonction :

$$e_{\alpha\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^k \eta_k = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \eta_\nu - b_{\alpha\beta} \eta_3 = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})$$

est indépendante de x_3 . Ceci implique que le problème variationnel (7.15) est satisfait. □

2. $\mathbf{p}=3$: On définit l'espace

$$V_0 := \{\boldsymbol{\eta} \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3); \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0\}.$$

Le problème (7.14) devient : Trouver $(\mathbf{U}, \mathbf{u}) \in V$ tel que $\forall (\mathbf{V}, \mathbf{v}) \in V$

$$A_0^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \varepsilon A_1^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \dots + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^5} B_{-5}^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon^4} B_{-4}^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \dots \right) = L(\mathbf{V}).$$

Théorème 7.2.2 (Condition de transmission de type coque en flexion) *Si l'espace V_0 ne se réduit pas à $\{\mathbf{0}\}$ et les termes $\mathbf{U}^0$ et $\mathbf{u}^i$, avec $0 \leq i \leq 3$, des développements (7.7) existent, alors le champ $\boldsymbol{\zeta}^0 = (\zeta_i^0) : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dans V_0 qui, avec $\mathbf{U}^0$, résolvent le problème variationnel de transmission de type coque en flexion suivant :*

Trouver $(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\zeta}^0)$ tel que $\forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_F = \{(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^2(\omega; \mathbb{R}^3); \mathbf{V}|_\omega = \boldsymbol{\eta}, \mathbf{V}|_{\Gamma_0} = 0, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\}$

$$A_0^-(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_0^+(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_F^m(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = L(\mathbf{V}), \quad (7.16)$$

où

$$\begin{aligned} A_F^m(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{3} \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \\ \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) &:= \partial_\alpha \eta_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \eta_3 - b_{\alpha\beta} \eta_3 + b_\alpha^\sigma (\partial_\beta \eta_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau \eta_\tau) + \\ &+ b_\beta^\tau (\partial_\alpha \eta_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma \eta_\sigma) + (\partial_\alpha b_\beta^\tau + \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau) \eta_\tau. \end{aligned}$$

Démonstration : La démonstration est divisée en trois parties correspondantes aux problèmes que l'on obtient aux différents ordres. On peut constater que les problèmes variationnels à l'ordre ε^{-4} et ε^{-3} coïncident respectivement avec les problèmes variationnels des parties (i) et (ii) du Théorème 7.2.1. On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_3 u_i^0 = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{u}^0 := \boldsymbol{\zeta}^0 : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ e_{\alpha 3}^0(\mathbf{u}) = 0 \text{ et } e_{33}^0(\mathbf{u}) &= -\frac{\lambda^m}{\lambda^m + 2\mu^m} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Si on suppose que $V_0 \neq \{\mathbf{0}\}$, le problème variationnel à l'ordre ε^{-2} , en choisissant $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}$, est le suivant :

$$\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, d\mathbf{y} = 0.$$

En choisissant $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\zeta}^0$, on obtient alors que $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^0) = 0$ et, donc, $\boldsymbol{\zeta}^0 \in V_0$.

(i) Puisque on cherche des déplacements $\boldsymbol{\zeta}^0 \in V_0$, avec $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^0) = 0$, cela implique que $e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{u}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^0) = 0$ et, donc (7.17)₂ devient :

$$e_{33}^0(\mathbf{u}) = \partial_3 u_3^1 = 0$$

et

$$e_{\alpha 3}^0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_3 u_{\alpha}^1 + \partial_{\alpha} u_3^0) + b_{\alpha}^{\sigma} u_{\sigma}^0 = 0.$$

Donc

$$u_{\alpha}^1 = \zeta_{\alpha}^1 - x_3(\partial_{\alpha} \zeta_3^0 + 2b_{\alpha}^{\tau} \zeta_{\tau}^0) \text{ et } u_3^1 = \zeta_3^1.$$

Pour cela, $\zeta_3^0 \in H^2(\omega)$. Vu que $e_{ij}^0(\mathbf{u}) = 0$, à l'ordre ε^{-2} il ne reste que :

$$\int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Comme dans le problème à l'ordre ε^{-3} , on obtient :

$$e_{\alpha 3}^1(\mathbf{u}) = 0 \text{ et } e_{33}^1(\mathbf{u}) = -\frac{\lambda^m}{\lambda^m + 2\mu^m} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^1(\mathbf{u}). \quad (7.18)$$

On peut facilement montrer que

$$e_{\alpha\beta}^1(\mathbf{u}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^1) - x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}^0).$$

(ii) Le problème à l'ordre ε^{-1} est de la forme (on rappelle que $e_{ij}^{-1}(\mathbf{u}) = e_{ij}^0(\mathbf{u}) = 0$) :

$$\int_{\Omega^m} \{A_m^{ijk\ell}(0)(e_{k\ell}^1(\mathbf{u})e_{ij}^0(\mathbf{v}) + e_{k\ell}^2(\mathbf{u})e_{ij}^{-1}(\mathbf{v})) + A_m^{ijk\ell,1}e_{k\ell}^1(\mathbf{u})e_{ij}^{-1}(\mathbf{v})\} \sqrt{a} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (7.19)$$

Si on considère des fonctions $\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}) = (v_i(\boldsymbol{\eta}))$ définies par

$$v_{\alpha}(\boldsymbol{\eta}) := x_3(2b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \partial_{\alpha} \eta_3) \text{ et } v_3(\boldsymbol{\eta}) := 0,$$

le problème (7.19) se transforme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) e_{ij}^0(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, d\mathbf{x} + \\ & + 4 \int_{\Omega^m} A_m^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\sigma 3}^2(\mathbf{u}) (b_\alpha^\tau \eta_\tau + \partial_\alpha \eta_3) \sqrt{a} \, d\mathbf{x} + \\ & + 4 \int_{\Omega^m} A_m^{\alpha 3 \sigma 3, 1} e_{\sigma 3}^1(\mathbf{u}) (b_\alpha^\tau \eta_\tau + \partial_\alpha \eta_3) \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

(iii) Le problème à l'ordre ε^0 est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} A_+^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^+} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} A_-^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^-} \, d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) (e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) e_{ij}^1(\mathbf{v}) + e_{k\ell}^2(\mathbf{u}) e_{ij}^0(\mathbf{v}) + e_{k\ell}^3(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v})) \sqrt{a} \, d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell, 1} (e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) e_{ij}^0(\mathbf{v}) + e_{k\ell}^2(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell, 2} e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) e_{ij}^{-1}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = L(\mathbf{V}). \end{aligned}$$

Si on choisit des fonctions test $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}$ telles que

$$\begin{aligned} e_{ij}^{-1}(\mathbf{v}) &= 0, \quad e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{v}) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0, \\ e_{\alpha 3}^0(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \partial_\alpha \eta_3 + b_\alpha^\sigma \eta_\sigma, \quad e_{33}^0(\mathbf{v}) = 0, \end{aligned}$$

alors on a l'équation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} A_+^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^+} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} A_-^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^-} \, d\mathbf{x} + \\ & + 4 \int_{\Omega^m} A_m^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\sigma 3}^2(\mathbf{u}) (b_\alpha^\tau \eta_\tau + \partial_\alpha \eta_3) \sqrt{a} \, d\mathbf{x} + \\ & + 4 \int_{\Omega^m} A_m^{\alpha 3 \sigma 3, 1} e_{\sigma 3}^1(\mathbf{u}) (b_\alpha^\tau \eta_\tau + \partial_\alpha \eta_3) \, d\mathbf{x} = L(\mathbf{V}), \quad \forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_F. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Si on soustrait (7.20) à (7.21), on trouve que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} A_+^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^+} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} A_-^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^-} \, d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) \{e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) (e_{ij}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{ij}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})))\} \sqrt{a} \, d\mathbf{x} = L(\mathbf{V}), \quad \forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_F. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Grâce à (7.18) et au fait que

$$e_{\sigma\tau}^1(\mathbf{u}) = -x_3 \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \quad \text{et} \quad e_{\alpha\beta}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{\alpha\beta}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})) = -x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}),$$

on en déduit que la deuxième partie de l'intégrale (7.22) prend la forme :

$$\int_{\Omega^m} A_m^{ijk\ell}(0) \{e_{k\ell}^1(\mathbf{u}) (e_{ij}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{ij}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})))\} \sqrt{a} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, d\mathbf{y},$$

ce qui achève la démonstration. □

7.2.5 Forme locale des conditions de transmission

Dans cette Section, on dérive les équations locales correspondantes aux problèmes variationnels (7.15) et (7.16). Dans la suite, on dénotera avec $\gamma := \partial\omega$, (ν_α) le vecteur unitaire normal sortant de γ , $\tau_1 := -\nu_2$ et $\tau_2 := \nu_1$, et avec $\partial_\tau \psi := \tau_\alpha \partial_\alpha \psi$ la dérivée tangentielle de ψ suivant la direction (τ_α) .

Théorème 7.2.3 *Si la solution $(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\zeta}^0)$ du problème variationnel :*

Trouver $(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\zeta}^0) \in V_M := \{(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\omega; \mathbb{R}^3); \mathbf{V}|_\omega = \boldsymbol{\eta}, \mathbf{V}|_{\Gamma_0} = 0\}$ tel que

$$A_0^-(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_0^+(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_M^m(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta}) = L(\mathbf{V}), \quad \forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_M \quad (7.23)$$

est suffisamment régulière, alors elle satisfait les équations locales suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma_\pm^{ij}|_j = f^i & \text{dans } \Omega^\pm, \\ V_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma_\pm^{ij} n_j = h^i & \text{sur } \Gamma_1, \\ V_i|_\omega = \eta_i & \text{dans } \omega, \end{cases} \quad \begin{cases} n^{\alpha\beta}|_\beta = \llbracket \sigma^{\alpha 3} \rrbracket & \text{dans } \omega, \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \llbracket \sigma^{33} \rrbracket & \text{dans } \omega, \\ n^{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (7.24)$$

où les fonctions

$$\sigma_\pm^{ij} := A_\pm^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}) \quad \text{et} \quad n^{\alpha\beta} := a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0)$$

sont respectivement les composantes contravariantes du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et du tenseur des efforts membranaires de la surface moyenne, $\llbracket \sigma^{i3} \rrbracket$ représente le saut des contraintes en ω entre Ω^+ et Ω^- , et les fonctions

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}|_j &:= \partial_j \sigma^{ij} + \Gamma_{pj}^i \sigma^{pj} + \Gamma_{pj}^j \sigma^{pi}, \\ n^{\alpha\beta}|_\beta &:= \partial_\beta n^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha n^{\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma}^\beta n^{\alpha\sigma}, \end{aligned}$$

sont respectivement les dérivées premières covariantes des tenseurs (σ^{ij}) et $(n^{\alpha\beta})$.

Démonstration : On considère tout d'abord les deux premières intégrales dans le problème (7.23) et, par conséquent, on applique la formule de Green dans les espaces de Sobolev. Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\pm} A_\pm^{ijk\ell} e_{k\ell}(\mathbf{U}^0) e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^\pm} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^\pm} \sigma_\pm^{ij} e_{ij}(\mathbf{V}) \sqrt{g^\pm} \, d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij} \left(\frac{1}{2} (\partial_j V_i + \partial_i V_j) - \Gamma_{ij}^p V_p \right) \, d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij} \partial_j V_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij} \Gamma_{ij}^p V_p \, d\mathbf{x} = \\ & = - \int_{\Omega^\pm} \partial_j (\sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij}) V_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij} \Gamma_{ij}^p V_p \, d\mathbf{x} + \\ & \quad + \int_{\Gamma_1} \sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij} n_j V_i \, d\Gamma + \int_\omega \sqrt{a} \sigma_+^{i3} \eta_i \, d\mathbf{y} - \int_\omega \sqrt{a} \sigma_-^{i3} \eta_i \, d\mathbf{y} = \\ & = - \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} (\sigma_\pm^{ij}|_j) V_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \sqrt{g^\pm} \sigma_\pm^{ij} n_j V_i \, d\Gamma + \int_\omega \sqrt{a} \llbracket \sigma^{i3} \rrbracket \eta_i \, d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

où on a utilisé la propriété pour laquelle $V_i|_\omega = \eta_i$ et le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ à ω coïncide respectivement avec $\mathbf{a}_3$ du côté Ω^+ et avec $-\mathbf{a}_3$ du côté Ω^- et la définition de dérivée première

covariante pour le tenseur (σ^{ij}) . Le saut des contraintes $[\![\sigma^{i3}]\!]$ en ω entre Ω^+ et Ω^- est donc défini :

$$[\![\sigma^{i3}]\!] := (\sigma_+^{i3} - \sigma_-^{i3})|_\omega.$$

On considère maintenant la deuxième partie de l'intégrale (7.23) et on applique la formule de Green. Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} & \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\zeta^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, d\mathbf{y} = \int_\omega n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, d\mathbf{y} = \\ & = \int_\omega \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} (\partial_\beta \eta_\alpha + \partial_\alpha \eta_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3 \right) d\mathbf{y} = \\ & = \int_\omega \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \partial_\beta \eta_\alpha \, d\mathbf{y} - \int_\omega \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma \, d\mathbf{y} - \int_\omega \sqrt{a} n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \eta_3 \, d\mathbf{y} = \\ & = - \int_\omega \partial_\beta (\sqrt{a} n^{\alpha\beta}) \, d\mathbf{y} - \int_\omega \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma \, d\mathbf{y} - \int_\omega \sqrt{a} n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \eta_3 \, d\mathbf{y} + \int_\gamma \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \nu_\beta \eta_\alpha \, d\gamma = \\ & = - \int_\omega \sqrt{a} \left\{ n^{\alpha\beta} |_\beta \eta_\alpha + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} \eta_3 \right\} d\mathbf{y} + \int_\gamma \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \nu_\beta \eta_\alpha \, d\gamma. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Si on combine les intégrales (7.25) et (7.26) avec le problème variationnel (7.23), on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} \left(\sigma_\pm^{ij} |_{\Gamma_j} + f^i \right) V_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \sqrt{g^\pm} \left(\sigma_\pm^{ij} n_j - h^i \right) V_i \, d\Gamma + \\ & + \int_\omega \sqrt{a} \left([\![\sigma^{\alpha 3}]\!] - n^{\alpha\beta} |_\beta \right) \eta_\alpha \, d\mathbf{y} + \int_\omega \sqrt{a} \left([\![\sigma^{33}]\!] - b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} \right) \eta_3 \, d\mathbf{y} + \int_\gamma \sqrt{a} n^{\alpha\beta} \nu_\beta \eta_\alpha \, d\gamma = 0, \end{aligned}$$

pour tous $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_M$. Ceci implique les équations locales définies dans (7.24).

□

Remarque : Dans le cas où la surface de contact est plane, on retrouve la condition de saut des contraintes déjà trouvée par A.L. Bessoud et al. dans [5] :

$$\begin{cases} [\![\sigma^{\alpha 3}]\!] = \partial_\beta n^{\alpha\beta} = (\mathbf{div}_\tau(n^{\sigma\beta}))_\alpha & \text{dans } \omega, \\ [\![\sigma^{33}]\!] = 0 & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Théorème 7.2.4 Si la solution $(\mathbf{U}^0, \zeta^0)$ du problème variationnel :

Trouver $(\mathbf{U}^0, \zeta^0) \in V_F := \{(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^2(\omega; \mathbb{R}^3); \mathbf{V}|_\omega = \boldsymbol{\eta}, \mathbf{V}|_{\Gamma_0} = 0, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ dans } \omega\}$ tel que

$$A_0^-(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_0^+(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_F^m(\zeta^0, \boldsymbol{\eta}) = L(\mathbf{V}), \quad \forall (\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_F \tag{7.27}$$

est suffisamment régulière, alors elle satisfait les équations locales suivantes :

$$\begin{cases} -\sigma_\pm^{ij} |_{\Gamma_j} = f^i & \text{dans } \Omega^\pm, \\ V_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma_\pm^{ij} n_j = h^i & \text{sur } \Gamma_1, \\ V_i|_\omega = \eta_i & \text{dans } \omega, \end{cases} \quad \begin{cases} (b_\sigma^\alpha m^{\sigma\beta})|_\beta + b_\sigma^\alpha (m^{\sigma\beta}|_\beta) = [\![\sigma^{\alpha 3}]\!] & \text{dans } \omega, \\ b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} m^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} = [\![\sigma^{33}]\!] & \text{dans } \omega, \\ m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta = 0 & \text{sur } \gamma, \\ b_\sigma^\alpha m^{\sigma\beta} \nu_\beta = 0 & \text{sur } \gamma, \\ (m^{\alpha\beta} |_\alpha) \nu_\beta + \partial_\tau (m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \tag{7.28}$$

où les fonctions

$$m^{\alpha\beta} := \frac{1}{3} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\zeta^0)$$

sont les composantes contravariantes du tenseur des moments de la surface moyenne et la fonction

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} := \partial_\alpha(m^{\alpha\beta}|_\beta) + \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma(m^{\alpha\beta}|_\beta),$$

est la dérivée seconde covariante du tenseur $(m^{\alpha\beta})$.

Démonstration : En ce qui concerne la partie $A_0^-(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + A_0^+(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ du problème (7.27), on obtient les mêmes expressions (7.25). On applique la formule de Green à la partie $A_F^m(\boldsymbol{\zeta}^0, \boldsymbol{\eta})$ de (7.27). On a alors :

$$\begin{aligned} & \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\zeta}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, d\mathbf{y} = \int_\omega m^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} \, d\mathbf{y} = \\ & = \int_\omega \sqrt{a} m^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \eta_3 \, d\mathbf{y} + \int_\omega \sqrt{a} m^{\alpha\beta} (2b_\alpha^\sigma \partial_\beta \eta_\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \eta_3) \, d\mathbf{y} + \\ & \quad + \int_\omega \sqrt{a} m^{\alpha\beta} (-2b_\beta^\tau \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma \eta_\sigma + b_\beta^\sigma |_\alpha \eta_\sigma - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} \eta_3) \, d\mathbf{y} = \\ & = - \int_\omega \sqrt{a} \{ (b_\sigma^\alpha m^{\sigma\beta})|_\beta + b_\sigma^\alpha (m^{\sigma\beta}|_\beta) \} \eta_\alpha \, d\mathbf{y} + \int_\omega \sqrt{a} \{ m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} m^{\alpha\beta} \} \eta_3 \, d\mathbf{y} + \\ & \quad + \int_\gamma \sqrt{a} m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \partial_\nu \eta_3 \, d\gamma - \int_\gamma \sqrt{a} \{ (m^{\alpha\beta}|_\alpha) \nu_\beta + \partial_\tau (m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) \} \eta_3 \, d\gamma + \\ & \quad + \int_\gamma \sqrt{a} b_\sigma^\alpha m^{\sigma\beta} \nu_\beta \eta_\alpha \, d\gamma. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Si on combine les intégrales (7.25) et (7.26) avec le problème variationnel (7.27), on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^\pm} \sqrt{g^\pm} \left(\sigma_\pm^{ij} \parallel_j + f^i \right) V_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \sqrt{g^\pm} \left(\sigma_\pm^{ij} n_j - h^i \right) V_i \, d\Gamma + \\ & + \int_\omega \sqrt{a} \left(\llbracket \sigma^{\alpha 3} \rrbracket - (b_\sigma^\alpha m^{\sigma\beta})|_\beta - b_\sigma^\alpha (m^{\sigma\beta}|_\beta) \right) \eta_\alpha \, d\mathbf{y} + \int_\omega \sqrt{a} \left(\llbracket \sigma^{33} \rrbracket + m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} m^{\alpha\beta} \right) \eta_3 \, d\mathbf{y} + \\ & + \int_\gamma \sqrt{a} m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \partial_\nu \eta_3 \, d\gamma - \int_\gamma \sqrt{a} \{ (m^{\alpha\beta}|_\alpha) \nu_\beta + \partial_\tau (m^{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) \} \eta_3 \, d\gamma + \\ & + \int_\gamma \sqrt{a} b_\sigma^\alpha m^{\sigma\beta} \nu_\beta \eta_\alpha \, d\gamma = 0, \end{aligned}$$

pour tous $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\eta}) \in V_F$. Ceci implique les équations locales définies dans (7.28).

□

Remarque : Dans le cas où la surface de contact est plane, on retrouve la condition de saut des contraintes déjà trouvée par A.L. Bessoud et al. dans [6] :

$$\begin{cases} \llbracket \sigma^{\alpha 3} \rrbracket = 0 & \text{dans } \omega, \\ \llbracket \sigma^{33} \rrbracket = \partial_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} = -\frac{8\mu^m(\lambda^m + \mu^m)}{3(\lambda^m + 2\mu^m)} \Delta_\tau \Delta_\tau \eta_3 & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

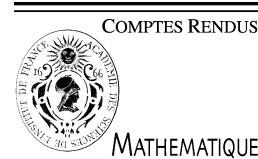
7.3 Conclusions

Comme dans l'article [10] de D. Chapelle et A. Ferent, la définition des problèmes limites (7.15) et (7.16) dépend du caractère Hilbertien des espaces V_M et V_F , et de la coercivité de la forme bilinéaire A_M^m . En effet, le Théorème 7.2.1 doit être adapté pour étudier des cas plus généraux. Par exemple, comme on a déjà montré dans la Section 3, l'espace V_M n'est pas

convenable quand le bord latéral n'est pas complètement fixé ou quand la surface moyenne S n'est pas uniformément elliptique. Dans ces cas, le problème est dit "mal-inhibé", et l'espace de définition est plus large et il ne peut pas être défini de façon simple. En ce qui concerne la position du problème des coques en flexion voir [3], [4], et pour le problème des coques membranaires voir [20], [22].

Available online at www.sciencedirect.com

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ••• (••••) •••••

<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Mathematical Problems in Mechanics

Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity

Anne-Laure Bessoud^{a,b}, Françoise Krasucki^a, Michele Serpilli^b^a Institut de mathématiques et de modélisation de Montpellier – UMR 5149, Université Montpellier II, CC 051, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France^b Laboratoire de mécanique et génie civil – UMR 5508, Université Montpellier II, CC 048, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

Received 27 January 2008; accepted 21 February 2008

Presented by Philippe G. Ciarlet

Abstract

We study the problem of an elastic inclusion with high rigidity in a 3D domain. First we consider an inclusion with a plate-like geometry and then in the more general framework of curvilinear coordinates, an inclusion with a shell-like geometry. We compare our formal models to those obtained by Chapelle–Ferent and by Bessoud et al. **To cite this article:** A.-L. Bessoud et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* ••• (••••).

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Inclusions élastiques de grande rigidité de type plaque ou coque. On étudie le problème d'une inclusion élastique de grande rigidité dans un domaine 3D. Cette inclusion est d'abord vue comme un domaine géométrique de type plaque, puis plus généralement comme un domaine géométrique de type coque. On compare les modèles obtenus formellement à ceux de Chapelle–Ferent et de Bessoud et al. **Pour citer cet article :** A.-L. Bessoud et al., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* ••• (••••).

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

L'étude d'une couche mince élastique insérée entre deux matériaux élastiques et possédant des propriétés d'un ordre de grandeur différent de celles de ces deux matériaux, s'est largement développée à la suite des travaux de Pham Huy–Sanchez [12], Brezis et al. [5] et Caillerie [6]. Plus récemment Chapelle–Ferent [7] ont étudié le comportement limite dans le cas d'une inclusion de type coque d'épaisseur ε dans un domaine 3D, lorsque la rigidité de cette coque est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^p}$ avec $p = 1$ ou $p = 3$. Dans un contexte géométrique et mécanique différent, Bessoud et al. [4] ont étudié le comportement d'une couche 3D, d'épaisseur ε et de rigidité $\frac{1}{\varepsilon}$. Plus précisément cette couche mince est de la forme : $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ où ω est une surface 2D projetable, et les matériaux sont linéairement élastiques et anisotropes. Le problème limite est un problème de transmission de type Ventcel, entre deux corps linéairement élastiques anisotropes.

E-mail addresses: bessoud@lmgc.univ-montp2.fr (A.-L. Bessoud), krasucki@math.univ-montp2.fr (F. Krasucki), serpilli@lmgc.univ-montp2.fr (M. Serpilli).

1631-073X/\$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

doi:10.1016/j.crma.2008.03.002

Please cite this article in press as: A.-L. Bessoud et al., Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* (2008), doi:10.1016/j.crma.2008.03.002

Dans le cas isotrope, lorsque ω , l'énergie de surface associée à cette condition de transmission peut être interprétée comme une énergie membranaire de Kirchhoff–Love.

Ici deux situations sont considérées. Dans la section 2, on étudie la même situation que [4] pour un matériau isotrope dont la rigidité est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^p}$ avec $p = 1$ ou $p = 3$. Plus précisément, dans l'espace Euclidien tridimensionnel $\mathcal{E}^3$ muni du repère Cartésien $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, soient Ω^+ and Ω^- deux ouverts disjoints à bords réguliers $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$. Soit $\omega = \{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-\}^\circ$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ de mesure bidimensionnelle non nulle et soit $y = (y_\alpha)$ un point générique de $\bar{\omega}$. La couche intermédiaire est insérée, en déplaçant Ω^+ (respectivement Ω^-) suivant $\mathbf{e}_3$ (respectivement $-\mathbf{e}_3$), d'une quantité $\varepsilon > 0$, où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre réel positif. Soient $\Omega^{\pm, \varepsilon} := \{x^\varepsilon := x \pm \varepsilon \mathbf{e}_3; x \in \Omega^\pm\}$, $\Omega^{m, \varepsilon} := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, et $\Omega^\varepsilon := \Omega^{-, \varepsilon} \cup \Omega^{+, \varepsilon} \cup \Omega^{m, \varepsilon}$. La structure est fixée sur $\Gamma_0 \subset (\partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^{m, \varepsilon})$ et $\Gamma^{m, \varepsilon} := \partial\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ est un bord libre. Le problème physique sur le domaine variable Ω^ε s'écrit sous la forme variationnelle (2). On utilise alors une formulation à deux champs, de façon analogue à [7]. Afin d'étudier le problème limite, on transforme l'ouvert variable en un ouvert fixe, grâce au changement de variables usuel (voir [11]).

Le premier terme du développement asymptotique du déplacement $(U(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon))$ où $U(\varepsilon) = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \dots$, $\mathbf{u}(\varepsilon) = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2 + \dots$ vérifie alors, dans le cas $p = 1$ le problème (3). L'énergie de surface associée correspond au terme d'énergie membranaire de [4] et s'écrit :

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} \left(\frac{4\lambda^m \mu^m}{\lambda^m + 2\mu^m} e_{\sigma\sigma}(\mathbf{u}) e_{\tau\tau}(\mathbf{u}) + 4\mu^m e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \right) dy.$$

Dans le cas $p = 3$, le problème limite obtenu formellement à l'aide des développements asymptotiques s'écrit sous la forme (4). L'énergie de surface associée à cette formulation est alors celle d'une plaque de Kirchhoff–Love en flexion et est donnée par :

$$\frac{1}{6} \int_{\omega} \left(\frac{4\lambda^m \mu^m}{\lambda^m + 2\mu^m} \Delta_\tau u_3 \Delta_\tau u_3 + 4\mu^m \partial_{\alpha\beta} u_3 \partial_{\alpha\beta} u_3 \right) dy.$$

Dans la section 3 on s'intéresse à une couche mince de type coque. Plus précisément, soit $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ une application injective telle que les vecteurs $\mathbf{a}_\alpha(y) := \partial_\alpha \theta(y)$ forment la base covariante du plan tangent à la surface $S := \theta(\bar{\omega})$ au point $\theta(y)$. On considère le domaine de type coque de surface moyenne $S := \theta(\bar{\omega})$ et d'épaisseur 2ε , dont la configuration de référence est l'image $\Theta^{m, \varepsilon}(\bar{\Omega}^{m, \varepsilon}) \subset \mathbb{R}^3$ de $\bar{\Omega}^{m, \varepsilon}$ par l'application $\Theta^{m, \varepsilon} : \bar{\Omega}^{m, \varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\Theta^{m, \varepsilon}(x^\varepsilon) := \theta(y) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}_3(y), \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = (y, x_3^\varepsilon) = (y_1, y_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^{m, \varepsilon}. \quad (1)$$

On suppose de plus qu'il existe une immersion $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\Theta^\varepsilon := \begin{cases} \Theta^{\pm, \varepsilon} & \text{sur } \bar{\Omega}^{\pm, \varepsilon}, \\ \Theta^{m, \varepsilon} & \text{sur } \bar{\Omega}^{m, \varepsilon}, \end{cases} \quad \Theta^{\pm, \varepsilon}(\Gamma^{\pm, \varepsilon}) = \Theta^{m, \varepsilon}(\Gamma^{\pm, \varepsilon}),$$

où $\Theta^{\pm, \varepsilon} : \bar{\Omega}^{\pm, \varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont des immersions sur $\bar{\Omega}^{\pm, \varepsilon}$ qui définissent les coordonnées curvilignes sur $\bar{\Omega}^{\pm, \varepsilon}$. On considère le domaine de type coque de surface moyenne $S := \theta(\bar{\omega})$ et d'épaisseur 2ε , où $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ est une injection permettant de définir la base covariante du plan tangent de la surface S . On insère cette couche mince en translatant d'une quantité égale à ε dans la direction *normale* à S , l'image de Ω^+ (resp. Ω^-) par l'immersion définissant les coordonnées curvilignes dans $\bar{\Omega}^{\pm, \varepsilon}$. Le problème physique sur le domaine variable Ω^ε s'écrit sous la forme variationnelle (6).

Dans le cas $p = 1$, le premier terme du développement asymptotique du déplacement $(U^0, \mathbf{u}^0)$ vérifie alors le problème (7). L'énergie de surface associée est celle d'une coque membranaire :

$$A_M^m(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \sqrt{a} dy,$$

où $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$ sont les composantes covariantes du tenseur de changement de métrique.

Dans le cas $p = 3$, le problème limite obtenu formellement à l'aide des développements asymptotiques s'écrit sous la forme (8). L'énergie de surface associée à cette formulation est alors celle d'une coque en flexion, donnée par :

$$\frac{1}{6} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \sqrt{a} dy,$$

où $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) := \partial_{\alpha\beta}u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\partial_{\sigma}u_3 - b_{\alpha\beta}u_3 + b_{\alpha}^{\sigma}(\partial_{\beta}u_{\sigma} - \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau}u_{\tau}) + b_{\beta}^{\tau}(\partial_{\alpha}u_{\tau} - \Gamma_{\alpha\tau}^{\sigma}u_{\sigma}) + (\partial_{\alpha}b_{\beta}^{\tau} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau}b_{\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}b_{\sigma}^{\tau})u_{\tau}$,
 sont les composantes covariantes du tenseur des variations de courbure.

L'existence d'une solution non identiquement nulle dépend à la fois de la nature hilbertienne des espaces dans lesquels sont définis les problèmes (7) et (8) et de la coercivité des formes bilinéaires associées aux énergies de surface. Pour l'existence des solutions de problèmes de coques en flexion, voir [2,3]. Pour l'existence des solutions de problèmes membranaires de coques, voir [9,10].

1. Introduction

After the pioneering works of Pham Huy–Sanchez [12], Brezis et al. [5] and Caillerie [6], the thin inclusion of a third material between two other ones when the rigidity properties of the inclusion are highly contrasted with respect to those of the surrounding material has been fully investigated. More recently, Chapelle–Ferent [7], in order to justify some methods used in the FEM approximation, have studied the asymptotic behavior of a shell-like inclusion of $\frac{1}{\varepsilon^p}$ -rigidity ($p = 1$ or $p = 3$) in a 3D domain. In a slightly different geometrical and mechanical context, Bessoud et al. [4] have studied the behavior of a ε -thin 3D layer of $\frac{1}{\varepsilon}$ -rigidity. More precisely, they assume that the thin layer can be written as $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ where ω is a projectable 2D surface, and that all the materials are linearly elastic anisotropic. Then the limit problem is a Ventcel-type transmission problem between two 3D linearly elastic anisotropic bodies. When ω is planar and in the isotropic case, the associated surface energy term can be interpreted as the membranal energy of a Kirchhoff–Love plate.

Here two situations are considered using a two field approach analogous to [7]. In Section 2 we study the same geometrical situation as in [4] when the material in the thin layer is isotropic and with a $\frac{1}{\varepsilon^p}$ -rigidity ($p = 1$ or $p = 3$). When $p = 3$, in the formal limit problem the associated surface energy corresponds to a flexural energy for a Kirchhoff–Love plate. When $p = 1$, the associated surface energy corresponds to the membranal energy of [4].

In Section 3 we study a new situation where the shell-like thin layer is obtained by the translation in the normal direction of a general 2D surface, see (5). Using a system of curvilinear coordinates we deduce the formal limit problem for the two cases $p = 1$ and $p = 3$. In this way we obtain the same limit problems as in [7], also if the kinematical assumptions for the physical problem are not the same. Indeed in [7] the authors a priori assume a shell-like energy in the thin layer. As in [7] one must stress that the well-posedness of the limit problems is essentially linked to the well-posedness of the shell models [13,8,1].

2. Plate-like inclusion: asymptotic behavior

In the three-dimensional Euclidean space $\mathcal{E}^3$ referred to the Cartesian coordinate frame $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, let Ω^+ and Ω^- be two disjoint open domains with smooth boundaries $\partial\Omega^+$ and $\partial\Omega^-$. Let $\omega = \{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-\}^\circ$, which is assumed to be a domain in $\mathbb{R}^2$ having a positive two-dimensional measure and let $y = (y_\alpha)$ denote a generic point of $\bar{\omega}$. We insert the intermediate layer moving Ω^+ and Ω^- in the $\mathbf{e}_3$ and $-\mathbf{e}_3$ directions, respectively, by an amount equal to $\varepsilon > 0$, a small dimensionless real parameter. Then let $\Omega^{\pm, \varepsilon} := \{x^\varepsilon := x \pm \varepsilon \mathbf{e}_3; x \in \Omega^\pm\}$, $\Omega^{m, \varepsilon} := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, and $\Omega^\varepsilon := \Omega^{-, \varepsilon} \cup \Omega^{+, \varepsilon} \cup \Omega^{m, \varepsilon}$. The structure is clamped on $\Gamma_0 \subset (\partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^{m, \varepsilon})$ and $\Gamma^{m, \varepsilon} := \partial\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ is traction free. We suppose that the materials occupying Ω^ε are linearly elastic and isotropic. Let

$$V^\varepsilon = \{(V, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega^{m, \varepsilon}; \mathbb{R}^3); V|_{\Omega^{m, \varepsilon}} = \mathbf{v}; V|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

The physical variational problem defined over the variable domain Ω^ε can be written as

$$\begin{cases} \text{Find } (U^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \in V^\varepsilon \text{ such that for all } (V, \mathbf{v}) \in V^\varepsilon \\ A^{-, \varepsilon}(U^\varepsilon, V^\varepsilon) + A^{+, \varepsilon}(U^\varepsilon, V^\varepsilon) + A^{m, \varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = L(V), \end{cases} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} A^{\pm, \varepsilon}(U^\varepsilon, V^\varepsilon) &= \int_{\Omega^{\pm, \varepsilon}} (\lambda^{\pm, \varepsilon} e_{pp}^\varepsilon(U^\varepsilon) e_{qq}^\varepsilon(V^\varepsilon) + 2\mu^{\pm, \varepsilon} e_{ij}^\varepsilon(U^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(V^\varepsilon)) dx^\varepsilon, \\ A^{m, \varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) &= \int_{\Omega^{m, \varepsilon}} (\lambda^{m, \varepsilon} e_{pp}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{qq}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) + 2\mu^{m, \varepsilon} e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)) dx^\varepsilon. \end{aligned}$$

The functional $L(\cdot)$ is the linear application associated with the applied forces.

Let us suppose that the Lamé's constants of the isotropic materials satisfy

$$\lambda^{\pm, \varepsilon} = \lambda^{\pm}, \quad \mu^{\pm, \varepsilon} = \mu^{\pm}, \quad \lambda^{m, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^p} \lambda^m, \quad \mu^{m, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^p} \mu^m,$$

where $p \in \{1, 3\}$, and $\lambda^{\pm}$, λ^m (resp. $\mu^{\pm}$, and μ^m) are of the same order of magnitude.

In order to study the asymptotic behavior of the solution of the physical problem (2) when ε tends to zero, we apply the usual change of variable (see [11]), which transforms the problem posed on a ε -dependent domain into a problem over the fixed domain $\Omega := \Omega^{\pm, 1} \cup \Omega^m$, where $\Omega^m := \omega \times]-1, 1[$ is the rescaled domain of $\Omega^{m, \varepsilon}$. The rescaled problem assumes the following form, with $V = \{(V, v) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega^m; \mathbb{R}^3); V|_{\Omega^m} = v; V|_{\Gamma_0} = 0\}$:

$$\begin{cases} \text{Find}(U(\varepsilon), u(\varepsilon)) \in V \text{ such that for all } (V, v) \in V \\ A^-(U(\varepsilon), V) + A^+(U(\varepsilon), V) + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} A_{\alpha\beta}^m(u(\varepsilon), v) + \frac{1}{\varepsilon^p} A_{\alpha 3}^m(u(\varepsilon), v) + \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} A_{33}^m(u(\varepsilon), v) = L(V), \end{cases}$$

where $A^{\pm}(\cdot, \cdot)$ is the natural bilinear form on $\Omega^{\pm}$, and the bilinear forms $A_{ij}^m(\cdot, \cdot)$ are defined as follows:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^m(u, v) &= \int_{\Omega^m} \left(\lambda^m e_{\sigma\sigma}(u) e_{\tau\tau}(v) + 2\mu^m e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v) + \frac{\mu^m}{2} \partial_{\alpha} u_3 \partial_{\alpha} v_3 \right) dx, \\ A_{\alpha 3}^m(u, v) &= \int_{\Omega^m} \left(\frac{\mu^m}{2} (\partial_{\alpha} u_3 \partial_3 v_{\alpha} + \partial_3 u_{\alpha} \partial_{\alpha} v_3) + \lambda^m (e_{\sigma\sigma}(u) e_{33}(v) + e_{33}(u) e_{\sigma\sigma}(v)) \right) dx, \\ A_{33}^m(u, v) &= \int_{\Omega^m} \left((\lambda^m + 2\mu^m) e_{33}(u) e_{33}(v) + \frac{\mu^m}{2} \partial_3 u_{\alpha} \partial_3 v_{\alpha} \right) dx. \end{aligned}$$

We look for the following formal a priori asymptotic expansion of the solution $(U(\varepsilon), u(\varepsilon))$:

$$U(\varepsilon) = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \dots, \quad u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots.$$

The leading terms (U^0, u^0) of the asymptotic expansion satisfy the limit problems:

(i) $p = 1$:

$$\begin{cases} \text{Find}(U^0, u^0) \in V_M \text{ such that for all } (V, v) \in V_M \\ A^-(U^0, V) + A^+(U^0, V) + A_M^m(u^0, v) = L(V), \end{cases} \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} V_M &= \{(V, v) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\omega; \mathbb{R}^3); V|_{\omega} = v, V|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ A_M^m(u, v) &= \int_{\omega} \left(\frac{4\lambda^m \mu^m}{\lambda^m + 2\mu^m} e_{\sigma\sigma}(u) e_{\tau\tau}(v) + 4\mu^m e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v) \right) dy \end{aligned}$$

is the bilinear form associated with the membrane behavior of the plate.

(ii) $p = 3$:

$$\begin{cases} \text{Find}(U^0, u^0) \in V_F \text{ such that for all } (V, v) \in V_F \\ A^-(U^0, V) + A^+(U^0, V) + A_F^m(u^0, v) = L(V), \end{cases} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} V_F &= \{(V, v) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^2(\omega; \mathbb{R}^3); V|_{\omega} = v, V|_{\Gamma_0} = 0, e_{\alpha\beta}(v) = 0\}, \\ A_F^m(u, v) &= \frac{1}{3} \int_{\omega} \left(\frac{4\lambda^m \mu^m}{\lambda^m + 2\mu^m} \Delta_{\tau} u_3 \Delta_{\tau} v_3 + 4\mu^m \partial_{\alpha\beta} u_3 \partial_{\alpha\beta} v_3 \right) dy \end{aligned}$$

is the bilinear form associated with the flexural behavior of the plate. Δ_{τ} denotes the two-dimensional Laplacian operator in ω .

Remarks. 1. This problem can be studied in the case of anisotropy of materials and with less restrictive assumptions relative to the geometry of the central layer $\Omega^{m,\varepsilon}$.

2. In the case $p = 1$, the convergence is studied with a slightly different formulation in [4].

3. Shell-like inclusion: asymptotic behavior

Let $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ be an injective mapping such that the vectors $\mathbf{a}_\alpha(y) := \partial_\alpha \theta(y)$ form the covariant basis of the tangent plane to the surface $S := \theta(\bar{\omega})$ at the point $\theta(y)$; the two vectors $\mathbf{a}^\alpha(y)$ of the tangent plane, defined by the relations $\mathbf{a}^\alpha(y) \cdot \mathbf{a}_\beta(y) = \delta_\beta^\alpha$, form its contravariant basis. Also let $\mathbf{a}_3(y) = \mathbf{a}^3(y) := \frac{\mathbf{a}_1(y) \wedge \mathbf{a}_2(y)}{|\mathbf{a}_1(y) \wedge \mathbf{a}_2(y)|}$ be the unit normal vector to S . The covariant and contravariant components $a_{\alpha\beta}$ and $a^{\alpha\beta}$ of the first fundamental form, the covariant and mixed components $b_{\alpha\beta}$ and b_α^β of the second fundamental form, and the Christoffel symbols $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ of the surface S are then defined by letting:

$$a_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} := \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}^3 \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha, \quad b_\alpha^\beta := a^{\beta\sigma} b_{\alpha\sigma}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := \mathbf{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha.$$

Let $\Omega^{m,\varepsilon} := \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ be defined as previously, with $\Gamma^{\pm,\varepsilon} := \omega \times \{\pm\varepsilon\}$. Let x^ε denote the generic point in the set $\bar{\Omega}^{m,\varepsilon}$, with $x_\alpha^\varepsilon = y_\alpha$. We consider a shell-like domain with middle surface $S = \theta(\bar{\omega})$ and thickness $2\varepsilon > 0$, whose reference configuration is the image $\Theta^{m,\varepsilon}(\bar{\Omega}^{m,\varepsilon}) \subset \mathbb{R}^3$ of the set $\bar{\Omega}^{m,\varepsilon}$ through the mapping $\Theta^{m,\varepsilon} : \bar{\Omega}^{m,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ given by

$$\Theta^{m,\varepsilon}(x^\varepsilon) := \theta(y) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}_3(y), \quad \text{for all } x^\varepsilon = (y, x_3^\varepsilon) = (y_1, y_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^{m,\varepsilon}. \quad (5)$$

Moreover, we suppose that there exists an immersion $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined as follows:

$$\Theta^\varepsilon := \begin{cases} \Theta^{\pm,\varepsilon} & \text{on } \bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon}, \\ \Theta^{m,\varepsilon} & \text{on } \bar{\Omega}^{m,\varepsilon}, \end{cases} \quad \Theta^{\pm,\varepsilon}(\Gamma^{\pm,\varepsilon}) = \Theta^{m,\varepsilon}(\Gamma^{\pm,\varepsilon}),$$

with $\Theta^{\pm,\varepsilon} : \bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ immersions over $\bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon}$ defining the curvilinear coordinates on $\bar{\Omega}^{\pm,\varepsilon}$.

The physical variational problem in these curvilinear coordinates on the variable domain Ω^ε is

$$\begin{cases} \text{Find } (U^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \in V^\varepsilon \text{ such that for all } (V^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) \in V^\varepsilon \\ A^{-,\varepsilon}(U^\varepsilon, V^\varepsilon) + A^{+,\varepsilon}(U^\varepsilon, V^\varepsilon) + A^{m,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = L(V^\varepsilon), \end{cases} \quad (6)$$

where

$$A^{\pm,\varepsilon}(U^\varepsilon, V^\varepsilon) := \int_{\Omega^{\pm,\varepsilon}} A_{\pm}^{ijkl,\varepsilon} e_{kl}^\varepsilon(U^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(V^\varepsilon) \sqrt{g^{\pm,\varepsilon}} dx^\varepsilon, \\ A^{m,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) := \int_{\Omega^{m,\varepsilon}} A_m^{ijkl,\varepsilon} e_{kl}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^{m,\varepsilon}} dx^\varepsilon.$$

Here $A^{ijkl,\varepsilon} := \lambda^\varepsilon g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu^\varepsilon (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})$ are the contravariant components of the elasticity tensor, $g^\varepsilon := \det(g_{ij}^\varepsilon)$, with $(g_{ij}^\varepsilon) := (\partial_i \Theta^\varepsilon \cdot \partial_j \Theta^\varepsilon)$ and the $(g^{ij,\varepsilon}) := (g_{ij}^\varepsilon)^{-1}$ respectively the covariant and contravariant components of the metric tensor associated with Θ^ε .

As in the previous section, in order to study the asymptotic behavior of the physical problem (6), we apply the usual change of variable, which transforms Ω^ε into a fixed domain Ω .

Now, the leading terms $(U^0, \mathbf{u}^0)$ of the asymptotic expansion satisfy the following limit problems:

(i) $p = 1$:

$$\begin{cases} \text{Find } (U^0, \mathbf{u}^0) \in V_M \text{ such that for all } (V, \mathbf{v}) \in V_M \\ A^-(U^0, V) + A^+(U^0, V) + A_M^m(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = L(V), \end{cases} \quad (7)$$

where

$$V_M = \{(V, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\omega; \mathbb{R}^3); V|_\omega = \mathbf{v}, V|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ A_M^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dy$$

is the bilinear form associated with the membrane behavior of the shell, $a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda^m\mu^m}{\lambda^m+2\mu^m}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + 2\mu^m(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$ are the contravariant components of the elasticity tensor of the shell and $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta}u_3$ are the covariant components of the change of metric tensor.

(ii) $p = 3$:

$$\begin{cases} \text{Find } (U^0, \mathbf{u}^0) \in V_F \text{ such that for all } (V, \mathbf{v}) \in V_F \\ A^-(U^0, V) + A^+(U^0, V) + A_F^m(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = L(V), \end{cases} \quad (8)$$

where

$$V_F = \{(V, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^2(\omega; \mathbb{R}^3); V|_\omega = \mathbf{v}, V|_{\Gamma_0} = 0, \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = 0 \text{ in } \omega\},$$

$$A_F^m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{3} \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} \, dy$$

is the bilinear form associated with the flexural behavior of the shell and $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) := \partial_\alpha u_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma u_3 - b_{\alpha\beta}u_3 + b_\alpha^\sigma(\partial_\beta u_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau u_\tau) + b_\beta^\tau(\partial_\alpha u_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma u_\sigma) + (\partial_\alpha b_\beta^\tau + \Gamma_{\alpha\sigma}^\tau b_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau)u_\tau$ are the covariant components of the change of curvature tensor.

Remark. As in [7] the well-posedness of the limit problems (i) and (ii) depends both on the Hilbertian character of V_M and V_F , and the coerciveness of the bilinear form A_M^m . For the well-posedness of the flexural shell model see [2,3] and for the well posedness of the membrane shell model see [9,10].

References

- [1] K.J. Bathe, D. Chapelle, *The Finite Element Analysis of Shells-Fundamentals*, Springer, Berlin, 2003.
- [2] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter, in: R. Glowinski, J.L. Lions (Eds.), *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, in: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 134, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976, pp. 89–136.
- [3] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, B. Miara, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, *J. Elasticity* 34 (1994) 111–138.
- [4] A.L. Bessoud, F. Krasucki, G. Michaille, Multi-materials with strong interface: variational modelings, *Asymptotic Anal.*, in press.
- [5] H. Brezis, L.A. Caffarelli, A. Friedman, Reinforcement problems for elliptic equations and variational inequalities, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 123 (1980) 219–246.
- [6] D. Caillerie, The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body, *Math. Methods Appl. Sci.* 2 (1980) 251–270.
- [7] D. Chapelle, A. Ferent, Modeling of the inclusion of a reinforcing sheet within a 3D medium, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 13 (2003) 573–595.
- [8] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity*, vol. III: *Theory of Shells*, *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [9] P.G. Ciarlet, V. Lods, Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 136 (1996) 119–161.
- [10] P.G. Ciarlet, E. Sanchez-Palencia, An existence and uniqueness theorem for the two-dimensional linear membrane shell equations, *J. Math. Pures Appl.* 75 (1996) 51–67.
- [11] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci, Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive, *Math. Mech. Solids* 4 (1999) 201–225.
- [12] H. Pham Huy, E. Sanchez-Palencia, Phénomène de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée, *J. Math. Anal. Appl.* 47 (1974) 284–309.
- [13] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Coques élastiques minces : propriétés asymptotiques*, Masson, Paris, 1997.

Chapitre 8

Modèles Limites pour Poutres Multicouches

Limit models in the analysis of three different layered elastic strips

Michele Serpilli ^{a,*}, Stefano Lenci ^b

^a *Laboratoire de Mécanique et Genie Civil – UMR 5508, Université Montpellier II, CC 048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France*

^b *Dipartimento di Architettura, Costruzioni e Strutture, Università Politecnica delle Marche, Via Brecce Bianche 1, I-60131 Ancona, Italy*

Received 6 November 2006; accepted 26 June 2007

Available online 20 July 2007

Abstract

The mechanical behavior of three types of laminated strips is investigated. They are made of three layers filled with homogeneous, isotropic and elastic materials; the upper and lower layer are called *adherents*, the middle layer is called *adhesive*. The first model studies a strip consisting of three layers made of materials with similar stiffness; the second one concerns with a strip in which the adhesive is soft; in particular, we suppose that the elastic stiffness of the middle layer is two orders of magnitude smaller than that of the upper and lower layers; the third case is a strip in which the core is thinner and stiffer than the two adherents: the elastic moduli of the adherents are one order of magnitude bigger than those of the adhesive. After identifying a parameter of smallness ε (which measures the thickness and the stiffness of each layer), the limit of the solution when ε tends to zero has been considered. Afterwards, it has been shown that each solution of the simplified models verifies the so-called limit problems, written using a “weak” and a “strong” formulation. The existence and uniqueness of the solutions of each limit problem have been established. The strong convergence of the exact solutions towards the solution of the limit problem of the first model has been established, too.

© 2007 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Keywords: Asymptotic expansion; Two-dimensional elasticity; Layered strips and beams

1. Introduction

This paper is aimed at giving a mathematical and theoretical justification to the classical models of layered composite strips of beams. Multi-layer constructions are used in various structural assemblies which involve composite materials. Their philosophy is to combine mechanically different materials to form a composite that satisfies specific requirements of resistance and comfort. The advantage of such composites is that their mechanical performances and properties are designed to be superior to those of the constituent materials acting independently. Nowadays, composites have been more frequently used in civil, naval, aeronautical and mechanical engineering, in general. We focus our attention to a specific type of composite structure, named as laminates, which consist of stacks of two or more laminae bonded together.

* Corresponding author.

E-mail addresses: serpilli@lmgc.univ-montp2.fr (M. Serpilli), lenci@univpm.it (S. Lenci).

The present work attempts to cover various types of multi-layer structure models just changing thickness and stiffness ratios among each layer. Mechanical models of three different three-layers laminated strips are studied. In the first one the layers are made of materials of similar stiffness: this model makes it possible to study the behavior of various multi-layer structural components from lamellar timber beams to parts of wings and tails of aircrafts. The second one is a strip in which the middle layer is weaker than the upper and lower ones: this is the case of panels bonded with soft materials, sandwich structures or composite beams with deformable connectors. The last model is about a strip in which the central adhesive layer is thinner and stiffer than the upper and lower ones: in this case, models of welded panels or structural reinforcement for timber beams can be studied. The analyzed models are two-dimensional. This choice is due to two reasons: a simplification of calculations and the fact that it is possible to study the mechanics of the problem while focusing on the main effects of bending, stretching and shear. These effects dominate in this type of structures.

The method of analysis utilizes the technique of asymptotic expansion (Ciarlet, 1997; Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia, 1992). This particular method has been used in the justification of classical theories of beams (Trabucho and Viaño, 1996; Irago and Viaño 1999, 2002) plates, shells (Destuynder, 1980; Ciarlet, 1997) and multi-structure (Ciarlet, 1990). The asymptotic expansion is distinct from classical formulations in that it does not rely on a priori assumptions that are sometimes mechanically unjustified but are used to reduce the number of unknowns and simplify the three-dimensional elastic problem. The main idea of asymptotic methods is to approximate the solution of the actual elastic problem through the successive terms of a power series with respect, for instance, to the diameter of the section and in our case the thickness of each layer, considered as a small parameter. In this way, it has been possible to give a theoretical background to some laminates theories such as the Equivalent Single-layer Theories (ESL) and the Layer-wise Theories (Babuska et al., 1992; Frostig, 2003; Frostig and Baruch, 1990; Icardi, 2001; Noor et al., 1995; Reddy and Robbins, 1994, 1993; Swanson, 1999; Thomsen, 2000a, 2000b): in the former, the laminate is treated as a statically equivalent single layer structure with a more complex constitutive behavior and the displacement field is assumed a priori to be regular through the thickness; in the latter, the displacement field is considered to be a piece-wise continuous function along the through-the-thickness coordinate. Thus, the layer-wise displacements give a more kinematically correct representation of the warping of sections.

We refer to other important mathematical analysis concerning with models of adhesive joints (Abdelmoula et al., 1998; Geymonat and Krasucki 1996, 1997; Geymonat et al. 1987, 1999; Licht and Michaille, 1996; Lenci, 2000; Serpilli, 2005), bonded joints with thin adhesive layer (Klarbring, 1991; Klarbring and Movchan, 1998) and adhesively bonded non-linearly elastic plates (Åslund, 2005); in those papers, existence and uniqueness of the solution of the limit problem and weak, strong and Γ -convergence results have been fully described.

The layout of this paper is as follows. Each section is referred to one type of layered beam and each model is numbered from 1 to 3. For each model, we introduce the mathematical problem and we define the “small” parameter ε and the geometrical and mechanical quantities related to it; then, we apply the asymptotic method which allows us to obtain a simplified model of the actual elastic two-dimensional problem. The displacement field at zeroth order $\mathbf{u}^0$ is characterized, finding the so-called limit problem in its variational and differential formulation. For each type of layered beam, existence and uniqueness of the solution of the simplified models is established using classical tools of variational analysis, as the Lax–Milgram Lemma. For the first model, it is also proved that the solution $\mathbf{u}(\varepsilon)$ of the actual elastic problem converges towards the solution $\mathbf{u}^0$ of the simplified model when the thickness of the layers, and thus the parameter of smallness ε , tends to zero. This fundamental result shows that the latter is a good approximation of the former. For what concern with the convergence of the other two models, we encounter some remarkable analytical difficulties to bound the norms of certain subsequences of functions. For this reason the problem of the convergence of the solution of the limit problem in some appropriate functional space is open and absolutely non-trivial. Thus, we try to give a numerical interpretation of this problem using CASTEM, a software which employs the finite element method. In this paper we give just some brief numerical examples of the lack of convergence. Extensive numerical simulations are left for future works.

2. Model 1

In this section we analyze a three-layer compound two-dimensional strip clamped at both ends. It consists of three similar homogeneous, isotropic, and linear elastic material layers. This model makes it possible to study the behavior of various structural elements of importance to civil, aeronautical and naval engineering, such as lamellar timber

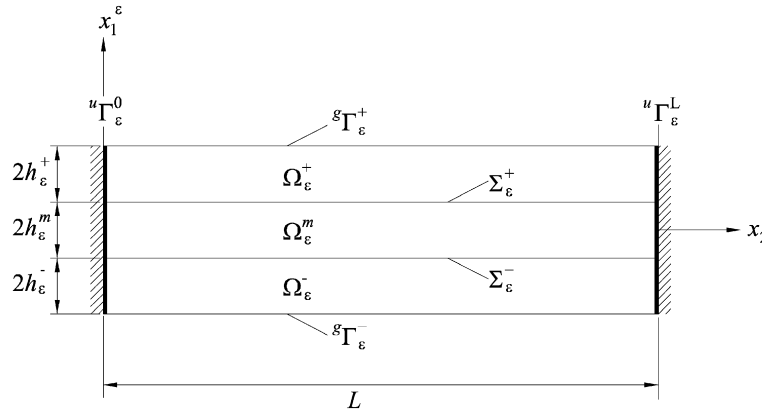


Fig. 1. The reference configuration.

beams, reinforced safety glasses, panels for thermal and acoustic insulation, parts of the wings and the tail of an aircraft or parts of a ship hull. Using asymptotic expansion method, we derive a mathematical one-dimensional model from two-dimensional linear elasticity equations.

2.1. The mathematical formulation of the problem

We consider the Euclidean space $\mathcal{E}^2$ with a Cartesian coordinate frame $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Let ε be a positive real “small” parameter which will tend to zero (so that we can assume $\varepsilon < 1$). Given the constant $L > 0$ we define the following domain, as shown in Fig. 1:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_\varepsilon &= \bar{\Omega}_\varepsilon^+ \cup \bar{\Omega}_\varepsilon^m \cup \bar{\Omega}_\varepsilon^- \subset \mathbb{R}^2, \\ \Omega_\varepsilon^m &= (-h_\varepsilon^m, h_\varepsilon^m) \times (0, L), \\ \Omega_\varepsilon^+ &= (h_\varepsilon^m, h_\varepsilon^m + 2h_\varepsilon^+) \times (0, L), \\ \Omega_\varepsilon^- &= (-h_\varepsilon^m - 2h_\varepsilon^-, -h_\varepsilon^m) \times (0, L), \\ {}^u\Gamma_\varepsilon^a &= (-h_\varepsilon^m - 2h_\varepsilon^-, h_\varepsilon^m + 2h_\varepsilon^+) \times \{a\}, \quad a = 0, L, \quad {}^g\Gamma_\varepsilon^\pm = \{\pm h_\varepsilon^m \pm 2h_\varepsilon^\pm\} \times (0, L), \\ \Sigma_\varepsilon^\pm &= \bar{\Omega}_\varepsilon^\pm \cap \bar{\Omega}_\varepsilon^m = \{\pm h_\varepsilon^m\} \times [0, L]. \end{aligned} \quad (1)$$

We consider a two-dimensional three-layer strip of length L occupying the reference configuration $\bar{\Omega}_\varepsilon$. We study the physical problem corresponding to the mechanical behavior of a two-dimensional compound three-layer beam, supposed to be fixed at both ends. The thicknesses $h_\varepsilon^{\pm, m}$ are linearly dependent of ε : $h_\varepsilon^{\pm, m} = \varepsilon h^{\pm, m}$. The total height of the beam is $2h^+ + 2h^m + 2h^- = 2h$. The sets Ω_ε^+ , Ω_ε^m , Ω_ε^- , are filled in by three homogeneous, isotropic and linearly elastic materials characterized by the Lamé’s coefficients $\lambda_\varepsilon^{\pm, m}$ and $\mu_\varepsilon^{\pm, m}$, which are independent of ε :

$$\lambda_\varepsilon^{\pm, m} = \lambda^{\pm, m}, \quad \mu_\varepsilon^{\pm, m} = \mu^{\pm, m}. \quad (2)$$

The beam is submitted to body forces $\mathbf{f}_\varepsilon^{\pm, m} = (f_{\varepsilon, i}^{\pm, m}) \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ and to surface forces $\mathbf{g}_\varepsilon^\pm = (g_{\varepsilon, i}^\pm) \in L^2({}^g\Gamma_\varepsilon^\pm)$. We will employ the summation convention on repeated indices; moreover, we suppose Latin indices (except m) take their values in the set $\{1, 2\}$. Indices m is only used to denote those functions related to the middle layer.

Let $V(\Omega_\varepsilon)$ be the following space of admissible displacements:

$$V(\Omega_\varepsilon) = \{\mathbf{u}_\varepsilon \in [H^1(\Omega_\varepsilon)]^2 \mid \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ on } {}^u\Gamma_\varepsilon^a, a = 0, L\}. \quad (3)$$

The variational or “weak” formulation of the two-dimensional linear elastic problem is given by:

problem P_ε : find $\mathbf{u}_\varepsilon \in V(\Omega_\varepsilon)$ with $\mathbf{u}_\varepsilon = \{\mathbf{u}_\varepsilon^+ \text{ in } \Omega_\varepsilon^+, \mathbf{u}_\varepsilon^m \text{ in } \Omega_\varepsilon^m, \mathbf{u}_\varepsilon^- \text{ in } \Omega_\varepsilon^-\}$ such that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^{\pm, m}} \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{v}_\varepsilon) d\mathbf{x}^\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon^{\pm, m}} f_{\varepsilon, i}^{\pm, m} v_{\varepsilon, i} d\mathbf{x}^\varepsilon + \int_{{}^g\Gamma_\varepsilon^\pm} g_{\varepsilon, i}^\pm v_{\varepsilon, i} dx_2^\varepsilon \\ \text{for all } \mathbf{v}_\varepsilon \in V(\Omega_\varepsilon), \mathbf{v}_\varepsilon &= \{\mathbf{v}_\varepsilon^+ \text{ in } \Omega_\varepsilon^+, \mathbf{v}_\varepsilon^m \text{ in } \Omega_\varepsilon^m, \mathbf{v}_\varepsilon^- \text{ in } \Omega_\varepsilon^-\}, \end{aligned} \quad (4)$$

where $\mathbf{e}^\varepsilon = (e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon))$ is the linearized strain tensor: $e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = (\partial_i^\varepsilon u_{\varepsilon,j} + \partial_j^\varepsilon u_{\varepsilon,i})$ (where $\partial/\partial x_i^\varepsilon = \partial_i^\varepsilon$) and $\sigma^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)$ is the stress tensor, related to the displacement field $\mathbf{u}_\varepsilon = (u_{\varepsilon,i})$ by Hooke's generalized law: $\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon e_{pp}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu_\varepsilon e_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)$.

2.2. The rescaled problem

In order to study the behavior of $\mathbf{u}_\varepsilon$ when the thickness of the three layers goes to zero, we introduce the following change of variable that allows to transform the problem posed on a variable domain (dependent of ε) onto a problem on a fixed domain (independent of ε):

$$\begin{aligned}\pi_\varepsilon^+ : \mathbf{x}^+ &= (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}^+ \rightarrow \mathbf{x}_\varepsilon^+ = \pi_\varepsilon^+(\mathbf{x}^+) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (\varepsilon + \varepsilon x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_\varepsilon^+, \\ \pi_\varepsilon^m : \mathbf{x}^m &= (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}^m \rightarrow \mathbf{x}_\varepsilon^m = \pi_\varepsilon^m(\mathbf{x}^m) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (\varepsilon x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_\varepsilon^m, \\ \pi_\varepsilon^- : \mathbf{x}^- &= (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}^- \rightarrow \mathbf{x}_\varepsilon^- = \pi_\varepsilon^-(\mathbf{x}^-) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (-\varepsilon + \varepsilon x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_\varepsilon^-.\end{aligned}\quad (5)$$

First, we introduce the following scaling of unknowns and test functions (Ciarlet, 1997; Trabuco and Viaño, 1996):

$$\begin{aligned}u_1^{\pm,m}(\mathbf{x})(\varepsilon) &= \varepsilon u_{\varepsilon,1}^{\pm,m}(\mathbf{x}_\varepsilon), & u_2^{\pm,m}(\mathbf{x})(\varepsilon) &= u_{\varepsilon,2}^{\pm,m}(\mathbf{x}_\varepsilon), \\ v_1^{\pm,m}(\mathbf{x})(\varepsilon) &= \varepsilon v_{\varepsilon,1}^{\pm,m}(\mathbf{x}_\varepsilon), & v_2^{\pm,m}(\mathbf{x})(\varepsilon) &= v_{\varepsilon,2}^{\pm,m}(\mathbf{x}_\varepsilon).\end{aligned}\quad (6)$$

Then, we suppose the following orders of magnitude for the forces, using the rule that the work made by those forces through the displacements (6) is left invariant by the transformation of coordinates, as in the books of Ciarlet (1997) and Trabuco and Viaño (1996):

$$\begin{aligned}f_{\varepsilon,1}^{\pm,m}(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon f_1^{\pm,m}(\mathbf{x}), & f_{\varepsilon,2}^{\pm,m}(\mathbf{x}_\varepsilon) &= f_2^{\pm,m}(\mathbf{x}), \\ g_{\varepsilon,1}^{\pm}(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 g_1^{\pm}(\mathbf{x}), & g_{\varepsilon,2}^{\pm}(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon g_2^{\pm}(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (7)$$

where the functions $f_i^{\pm,m}$ and $g_i^{\pm}$ are independent of the parameter ε . Hence, we can derive the following equivalent problem for the scaled displacements $\mathbf{u}(\varepsilon)$:

rescaled problem $P(\varepsilon)$: find $\mathbf{u}(\varepsilon) \in V(\Omega)$ such that for all $\mathbf{v} \in V(\Omega)$

$$a_0(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + \varepsilon^{-2} a_{-2}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + \varepsilon^{-4} a_{-4}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) = L^{\pm,m}(\mathbf{v}), \quad (8)$$

where the bilinear forms a_0 , a_{-2} , a_{-4} and the linear $L^{\pm,m}$ forms are defined as follows:

$$\begin{aligned}a_0(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{\pm,m}} (\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m}) e_{22}(\mathbf{u}(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ a_{-2}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{\pm,m}} [\lambda^{\pm,m} e_{11}(\mathbf{u}(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) + \lambda^{\pm,m} e_{22}(\mathbf{u}(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) + 4\mu^{\pm,m} e_{12}(\mathbf{u}(\varepsilon)) e_{12}(\mathbf{v})] d\mathbf{x}, \\ a_{-4}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{\pm,m}} (\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m}) e_{11}(\mathbf{u}(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ L^{\pm,m}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{\pm,m}} f_i^{\pm,m} v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^\pm} g_i^\pm v_i dx_2.\end{aligned}\quad (9)$$

The solution and the admissible displacements belong to $V(\Omega) = \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ on } {}^u\Gamma^a, a = 0, L\}$. Classical tools of elliptic partial differential equations guarantee existence and uniqueness of the solution (8). The aim of the present work is to study the behavior of the problem when ε tends to zero and to characterize the limit solution. From a practical point of view, this means that we are looking for a simplified model of the original problem whose solution is easier to compute and still a good approximation of the actual solution $\mathbf{u}(\varepsilon)$: mathematically, this means to evaluate the limit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\varepsilon)$. This will be performed in Section 2.4.

2.3. The limit problem for vanishing thickness: asymptotic expansion

Since in the rescaled variational problem (8) the parameter of smallness ε appears explicitly in a polynomial form, we will look for the solution of the problem as a series of powers of ε :

$$\mathbf{u}(\varepsilon) = \mathbf{u}^0 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2 + \varepsilon^4 \mathbf{u}^4 + h.o.t., \quad h.o.t. = \text{higher order terms.} \quad (10)$$

By substituting (10) into the scaled variational problem (8) and by identifying the terms with identical power of ε , we obtain, as customary, the following sequence of equations:

$$\begin{aligned} P_{-4}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \\ P_{-2}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \\ P_0: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^4, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = L^{\pm, m}(\mathbf{v}), \\ P_{2j}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{2j+2}, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^{2j}, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^{2j-2}, \mathbf{v}) = 0, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (11)$$

First, we define the first and second order moments:

$$\begin{aligned} S^+ &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} x_1 dx_1, & S^- &= \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} x_1 dx_1, \\ I^+ &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} x_1^2 dx_1, & I^m &= \int_{-h^m}^{h^m} x_1^2 dx_1, & I^- &= \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} x_1^2 dx_1. \end{aligned} \quad (12)$$

We have to impose some hypothesis on the regularity of the applied forces

$$\begin{aligned} f_1^{\pm, m} &\in L^2(\Omega), & f_2^{\pm, m} &\in H^1(0, L; L^2(-h^m - 2h^-, h^m + 2h^+)), \\ g_1^{\pm} &\in L^2(0, L), & g_2^{\pm} &\in H^1(0, L), \end{aligned} \quad (13)$$

to study each variational problem (11) and thus, to obtain the characterization of the limit problem. Consequently, the limit displacement field $\mathbf{u}^0 = (u_1^{\pm, m0}, u_2^{\pm, m0})$ takes the form of the classical Bernoulli–Navier displacement field:

$$\begin{cases} u_1^{\pm, m0}(x_1, x_2) = \eta(x_2), & \eta \in H_0^2(0, L), \\ u_2^{\pm, m0}(x_1, x_2) = v(x_2) - x_1 \partial_2 \eta(x_2), & v \in H_0^1(0, L). \end{cases} \quad (14)$$

We will denote the space of the Bernoulli–Navier displacements (14) with $V_{BN}(\Omega)$. The functions η, v are solutions of the coupled problem (we denote with $\phi' = \partial_2 \phi(x_2)$)

$$\begin{aligned} \int_0^L [(\tilde{E}^+ I^+ + \tilde{E}^m I^m + \tilde{E}^- I^-) \eta'' - (\tilde{E}^+ S^+ + \tilde{E}^- S^-) v'] v_1'' dx_2 &= \int_0^L (F_1 v_1 - M_1 v_1') dx_2, \\ \forall v_1 &\in H_0^2(0, L), \\ \int_0^L [(2\tilde{E}^+ h^+ + 2\tilde{E}^m h^m + 2\tilde{E}^- h^-) v' - (\tilde{E}^+ S^+ + \tilde{E}^- S^-) \eta''] v_2' dx_2 &= \int_0^L F_2 v_2 dx_2, \\ \forall v_2 &\in H_0^1(0, L), \end{aligned} \quad (15)$$

where $\tilde{E}^{\pm, m} = \frac{4\mu^{\pm, m}(\lambda^{\pm, m} + \mu^{\pm, m})}{\lambda^{\pm, m} + 2\mu^{\pm, m}} = \frac{E^{\pm, m}}{1 - (\nu^{\pm, m})^2}$ stands for the equivalent elastic modula of the bodies $\Omega^{\pm, m}$ which appears commonly in the two-dimensional theory of elasticity, and F_1, M_1 and F_2 represent the resultants of forces and moments, as we show in (81) of Appendix A.

The limit variational problem (15) is equivalent to the following differential problem (coupled bending-stretching equations):

$$\begin{aligned}
& (\tilde{E}^+ I^+ + \tilde{E}^m I^m + \tilde{E}^- I^-) \eta'''' - (\tilde{E}^+ S^+ + \tilde{E}^- S^-) v''' = F_1 + M_1', \\
& (\tilde{E}^+ S^+ + \tilde{E}^- S^-) \eta''' + (2\tilde{E}^+ h^+ + 2\tilde{E}^m h^m + 2\tilde{E}^- h^-) v'' = F_2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Remark. The limit displacement field $\mathbf{u}^0$, which represent the first term of the asymptotic expansion of the solution, is a Bernoulli–Navier displacement field. Therefore, the simplified model reduces the three layers strip to one consisting of just one layer. This corresponds to the classical laminates theories known as the Equivalent Single-layer Theory which considers the multi-layer panel as a single layer one with a complex constitutive behavior. Analyzing the limit problem, we notice that it is strongly coupled and the coefficients of the equations are a combinations of flexural and axial stiffness of each layer. This coupling is due to the geometry of the strip and to the material reference frame we choose at the beginning of the analysis: indeed, by taking a symmetric beam with respect to the adhesive layer, the coupling immediately disappears. Whether the beam is not symmetric, we can decouple the problem by choosing an appropriate origin of the reference frame. This amounts to saying that there exists a *neutral material axis*.

2.3.1. Existence and uniqueness

In order to prove the uniqueness of the limit problem we use the Lax–Milgram’s Lemma showing that the bilinear form associated to the limit problem is coercive in $V_{\text{BN}}(\Omega)$, hence the solution of the problem exists and is unique. In all this section we suppose that $h^{\pm,m} = h$ just for simplicity of calculations.

Taking problem P_0 and substituting test functions belonging to the space of admissible displacements of Navier–Bernoulli, i.e. $\mathbf{v} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$, we obtain the limit problem P_{BN} associated to the limit displacement field:

$$P_{\text{BN}}: \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L^{\pm,m}(\mathbf{v}), \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{\pm,m}} \tilde{E}^{\pm,m} e_{22}(\mathbf{u}) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \tag{17}$$

where $\mathbf{u} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$. $V_{\text{BN}}(\Omega)$ is a Hilbert space endowed with the natural norm $\|\mathbf{u}\|_{V_{\text{BN}}(\Omega)} = \|v\|_{1,(0,L)} + \|\eta\|_{2,(0,L)}$.

We also define the two semi-norms in $L^2(0, L)$, as follows:

$$|v|_{1,(0,L)} = \left\{ \int_0^L |v'|^2 dx_2 \right\}^{1/2}, \quad |\eta|_{2,(0,L)} = \left\{ \int_0^L |\eta''|^2 dx_2 \right\}^{1/2}. \tag{18}$$

Then, taking $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$, we have that

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) & \geq c \int_{\Omega^{\pm,m}} e_{22}(\mathbf{u}) e_{22}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} = c \int_{\Omega^{\pm,m}} (v' - x_1 \eta'')^2 d\mathbf{x} = \\
& = c \int_0^L \left(v'^2 + \frac{1}{3} h^2 \eta''^2 \right) dx_2 = c \{ |v|_{1,(0,L)}^2 + |\eta|_{2,(0,L)}^2 \} \\
& \geq \frac{c}{k^2} \{ \|v\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2 \} = C^2 \|\mathbf{u}\|_{V_{\text{BN}}(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{19}$$

where c takes account of the geometric quantities and k^2 comes out as a consequence of Poincaré’s inequality. Hence, $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C^2 \|\mathbf{u}\|_{V_{\text{BN}}(\Omega)}^2$, $\forall \mathbf{u} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$, the bilinear form is coercive in $V_{\text{BN}}(\Omega)$ and thanks to the Lax–Milgram’s Lemma we can deduce that the solution of the problem (17) exists and is unique.

2.4. Convergence

2.4.1. Weak convergence

To begin with, we introduce some notations that will be repeatedly used in this and next sections. First, we let

$$\mathbf{A}^{\pm,m} \mathbf{B} : \mathbf{C} = \lambda^{\pm,m} b_{pp} c_{qq} + 2\mu^{\pm,m} b_{ij} c_{ij} = (\lambda^{\pm,m} b_{pp} \delta_{ij} + 2\mu^{\pm,m} b_{ij}) c_{ij} \tag{20}$$

for all symmetric matrices $\mathbf{B} = (b_{ij})$ and $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Let $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$ denote the space of all symmetric matrix-valued functions whose components are in $L^2(\Omega)$. With the scaled displacement $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon)) \in H^1(\Omega)$, we next associate the tensors of the scaled strains $\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon) = (\kappa_{ij}^{\pm,m}(\varepsilon)) \in \mathbf{L}_s^2(\Omega)$ defined by

$$\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon) = e_{22}(\mathbf{u}(\varepsilon)), \quad \kappa_{12}^{\pm,m}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} e_{12}(\mathbf{u}(\varepsilon)), \quad \kappa_{11}^{\pm,m}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} e_{11}(\mathbf{u}(\varepsilon)). \quad (21)$$

Then the variational equations of the scaled problem take the particularly condensed form

$$a^{\pm,m}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) = L^{\pm,m}(\mathbf{v}), \quad (22)$$

where

$$a^{\pm,m}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon) : \boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon; \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (23)$$

We now establish the main result of this section: first, the scaled displacement $\mathbf{u}(\varepsilon)$ converges weakly in $H^1(\Omega)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$; second, the limit $\mathbf{u}$ belongs to the space of displacement of Bernoulli–Navier and it is the solution of the limit problem. We establish first the boundedness of the $H^1(\Omega)$ -norms of the scaled displacements, which allows us to extract a weakly convergent subsequence; we then identify and characterize the weak limit; finally, we prove the strong convergence of the whole family in the next section.

To prove the weak convergence, let $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$ in the variational problem (22). Thus, it takes a very simple form

$$\int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon) : \boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon) \, d\mathbf{x} = L^{\pm,m}(\mathbf{u}(\varepsilon)). \quad (24)$$

Clearly, $2\mu^{\pm,m} c_{ij} c_{ij} \leq \mathbf{A}^{\pm,m} \mathbf{C} : \mathbf{C}$ for all symmetric matrices $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Therefore

$$\begin{aligned} c_1 \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 &\leq c_1 |\mathbf{e}(\mathbf{u}(\varepsilon))|_{0,\Omega}^2 \leq c_1 |\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \leq a^{\pm,m}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon)) = \\ &= L^{\pm,m}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \leq c_2 \{\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (25)$$

where c_1 and c_2 are, as usual, two positive constants. The first inequality follows from the proprieties of tensors $\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon)$ and from Korn's inequality with boundary conditions, whereas the second is a consequence of the continuity of linear forms. From (25), it follows that

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq c, \quad |\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq c. \quad (26)$$

The inequalities (26) prove that the norms are bounded and thus there exists a subsequence such that $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u}$ weakly in $H^1(\Omega)$, $\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon) \rightharpoonup \boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}$ weakly in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$, where $\mathbf{u}$ is a certain element of $H^1(\Omega)$ and $\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}$ is a certain element of $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$.

The weak convergence is important because it is a necessary step in proving the strong convergence, that is a more satisfactory result obtained in the sequel.

We now establish the weak convergence of the sequence $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ towards the first term of the asymptotic expansion of the scaled displacement field $\mathbf{u}^0 \in V_{\text{BN}}(\Omega)$, that is given by (14).

For clarity, the proof is broken into three parts, numbered (i) to (iii). First, we establish that the weak limit $\mathbf{u}$ of the subsequence $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ is such that $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \in V_{\text{BN}}(\Omega)$; then, we show that not just a subsequence, but all the family $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converges weakly to $\mathbf{u}^0 \in V_{\text{BN}}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

(i) Denote by $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ the subsequence, from the previous theorem, which converges weakly in $H^1(\Omega)$ and let $\mathbf{u}$ be its limit.

Since $\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon)$ are bounded in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$ by (26), we can deduce by the definition of tensors $\boldsymbol{\kappa}^{\pm,m}(\varepsilon)$ that

$$|e_{11}(\mathbf{u}(\varepsilon))|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^2, \quad |e_{12}(\mathbf{u}(\varepsilon))|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon, \quad |e_{22}(\mathbf{u}(\varepsilon))|_{0,\Omega} \leq c. \quad (27)$$

From (27) it follows that

$$\begin{aligned} e_{11}(\mathbf{u}(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega), \\ e_{12}(\mathbf{u}(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (28)$$

But $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$ weakly in $H^1(\Omega)$, implies that $e_{ij}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow e_{ij}(\mathbf{u})$ in $L^2(\Omega)$. Hence, $e_{11}(\mathbf{u}) = e_{12}(\mathbf{u}) = 0$, i.e. $\mathbf{u} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$.

(ii) We now show that the components of the weak limit $\kappa^{\pm,m} = (\kappa_{ij}^{\pm,m}) \in \mathbf{L}_s^2(\Omega)$ of the subsequence $(\kappa^{\pm,m}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ satisfy

$$\kappa_{22}^{\pm,m} = e_{22}(\mathbf{u}), \quad \kappa_{12}^{\pm,m} = 0, \quad \kappa_{11}^{\pm,m} = -\frac{\lambda^{\pm,m}}{\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m}} e_{22}(\mathbf{u}). \quad (29)$$

Since $\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon) = e_{22}(\mathbf{u}(\varepsilon))$ and $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$ converges weakly in $H^1(\Omega)$, it follows that $\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon) \rightarrow \kappa_{22}^{\pm,m} = e_{22}(\mathbf{u})$ weakly in $L^2(\Omega)$. The variational equations (8) can be written as

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\pm,m}} [(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon) + \lambda^{\pm,m}\kappa_{11}^{\pm,m}(\varepsilon)] \partial_2 v_2 \, d\mathbf{x} + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega^{\pm,m}} 2\mu^{\pm,m}\kappa_{12}^{\pm,m}(\varepsilon) (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) \, d\mathbf{x} \\ + \varepsilon^{-2} \int_{\Omega^{\pm,m}} [(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{11}^{\pm,m}(\varepsilon) + \lambda^{\pm,m}\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon)] \partial_1 v_1 \, d\mathbf{x} = L^{\pm,m}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (30)$$

Letting $v_1 = 0$ in this equations and multiplying by ε , we find that

$$2\mu^{\pm,m} \int_{\Omega^{\pm,m}} \kappa_{12}^{\pm,m}(\varepsilon) \partial_1 v_2 \, d\mathbf{x} = -\varepsilon \int_{\Omega^{\pm,m}} [(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon) + \lambda^{\pm,m}\kappa_{11}^{\pm,m}(\varepsilon)] \partial_2 v_2 \, d\mathbf{x} + \varepsilon L^{\pm,m}(\mathbf{v}) \quad (31)$$

for all $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ such that $v_1 = 0$. Passing to the limit for $\varepsilon \rightarrow 0$, the left-hand side converges to $2\mu^{\pm,m} \int_{\Omega^{\pm,m}} \kappa_{12}^{\pm,m} \partial_1 v_2 \, d\mathbf{x}$ by definition of weak convergence, and the right-hand side converges to 0, since a weakly convergent sequence is bounded. Hence

$$\int_{\Omega^{\pm,m}} \kappa_{12}^{\pm,m} \partial_1 v_2 \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v_2 \in H^1(\Omega) \text{ that vanish on } {}^u\Gamma^a. \quad (32)$$

Integrating by parts along the through-the-thickness coordinate, we obtain that $\kappa_{12}^{\pm,m} = 0$.

Letting $v_2 = 0$ and multiplying by ε^2 , we likewise find that

$$\int_{\Omega^{\pm,m}} [(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{11}^{\pm,m}(\varepsilon) + \lambda^{\pm,m}\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon)] \partial_1 v_1 \, d\mathbf{x} = \varepsilon^2 L^{\pm,m}(\mathbf{v}) - \varepsilon \int_{\Omega^{\pm,m}} 2\mu^{\pm,m}\kappa_{12}^{\pm,m}(\varepsilon) \partial_2 v_1 \, d\mathbf{x} \quad (33)$$

for all $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ such that $v_2 = 0$; hence passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ gives

$$\int_{\Omega^{\pm,m}} [(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{11}^{\pm,m} + \lambda^{\pm,m}\kappa_{22}^{\pm,m}] \partial_1 v_1 \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v_1 \in H^1(\Omega) \text{ that vanish on } {}^u\Gamma^a, \quad (34)$$

thus $(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{11}^{\pm,m} + \lambda^{\pm,m}\kappa_{22}^{\pm,m} = 0$. Since $\kappa_{22}^{\pm,m} = e_{22}(\mathbf{u})$, the assertion is established.

(iii) The third part of the proof shows that $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$, and not only a subsequence, but all the family $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converges weakly to $\mathbf{u}^0$.

To begin with, we restrict functions $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$ appearing in the variational equations of the problem (22) to lie in the subspace $V_{\text{BN}}(\Omega)$. Since $e_{12}(\mathbf{u}) = 0$, the equation reduces to

$$\int_{\Omega^{\pm,m}} [(\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m})\kappa_{22}^{\pm,m}(\varepsilon) + \lambda^{\pm,m}\kappa_{11}^{\pm,m}(\varepsilon)] e_{22}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = L^{\pm,m}(\mathbf{v}) \quad (35)$$

for all $\mathbf{v} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$. Passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, we thus find that

$$\int_{\Omega^{\pm,m}} \tilde{E}^{\pm,m} e_{22}(\mathbf{u}) e_{22}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = L^{\pm,m}(\mathbf{v}) \quad (36)$$

for all $\mathbf{v} \in V_{\text{BN}}(\Omega)$, since $\kappa_{22}^{\pm,m} = e_{22}(\mathbf{u})$, $\kappa_{11}^{\pm,m} = -\frac{\lambda^{\pm,m}}{\lambda^{\pm,m} + 2\mu^{\pm,m}} e_{22}(\mathbf{u})$ by part (ii). Hence $\mathbf{u}$ solves problem P_{BN} and therefore is equal to $\mathbf{u}^0$, which is its unique solution. We may repeat this reasoning for any subsequence $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ weakly convergent in $H^1(\Omega)$. The uniqueness of solution of problem P_{BN} (see Section 2.3.1) implies that the whole sequence $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converges weakly to $\mathbf{u}^0$ in $H^1(\Omega)$.

2.4.2. Strong convergence

In this section we will prove that the sequence $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converges strongly to $\mathbf{u}^0$ in $H^1(\Omega)$ and the sequence $(\kappa^{\pm,m}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converges strongly to $\kappa^{\pm,m}$ in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$.

To show this, it suffices to prove that $(\mathbf{e}(\mathbf{u}(\varepsilon)))_{\varepsilon>0}$ strongly converges to $\mathbf{e}(\mathbf{u}^0)$ in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$ (this is a consequence of Korn's inequality with boundary conditions). The strong convergence will in turn be a consequence of a sharper result, namely the strong convergence of $(\kappa^{\pm,m}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ to $\kappa^{\pm,m}$ in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$.

Using the variational formulation of the problem (22), we infer that

$$\begin{aligned} c|\kappa^{\pm,m}(\varepsilon) - \kappa^{\pm,m}|_{0,\Omega}^2 &\leq \int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m}(\kappa^{\pm,m}(\varepsilon) - \kappa^{\pm,m}) : (\kappa^{\pm,m}(\varepsilon) - \kappa^{\pm,m}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \kappa^{\pm,m} : (\kappa^{\pm,m} - 2\kappa^{\pm,m}(\varepsilon)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \kappa^{\pm,m}(\varepsilon) : \kappa^{\pm,m}(\varepsilon) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \kappa^{\pm,m} : (\kappa^{\pm,m} - 2\kappa^{\pm,m}(\varepsilon)) d\mathbf{x} + L^{\pm,m}(\mathbf{u}(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (37)$$

Since we already established that $\kappa^{\pm,m}(\varepsilon) \rightarrow \kappa^{\pm,m}$ weakly in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$, and that $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$ weakly in $H^1(\Omega)$, the right-hand side of the last inequality converges to

$$\Lambda = - \int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \kappa^{\pm,m} : \kappa^{\pm,m} d\mathbf{x} + L^{\pm,m}(\mathbf{u}), \quad (38)$$

but knowing that $\int_{\Omega^{\pm,m}} \mathbf{A}^{\pm,m} \kappa^{\pm,m} : \kappa^{\pm,m} d\mathbf{x} = L^{\pm,m}(\mathbf{u})$ (see (22)), we infer that $\Lambda = 0$, hence, $|\kappa^{\pm,m}(\varepsilon) - \kappa^{\pm,m}|_{0,\Omega} \rightarrow 0$ strongly in $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$.

The strong convergence implies that the limit displacement field is a good approximation of the original problem; it gives us another important information, namely, that the energy of the limit model approximates in a good way the mechanical energy of the original problem.

3. Model 2

In this section we consider a compound two-dimensional strip clamped at both ends consisting of three layers, with the middle one being softer in comparison to the upper and lower ones. This situation corresponds, for instance, to two layers bonded together by an adhesive joint made of glue or other soft materials, to composite beams with deformable connectors or such reinforced glasses. Using the asymptotic method, a one-dimensional beam model has been derived. The analysis performed in this section is quite similar to the previous one, thus only the points in which the two cases are different will be emphasized.

3.1. The mathematical formulation of the problem

We consider the Euclidean space $\mathcal{E}^2$ with a Cartesian coordinate frame $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, we define the same domain introduced in Section 2.1, as shown in Fig. 1. The geometrical configuration and the constraints of the three-layer strip are, thus, the same of the previous section, namely, the thicknesses $h_{\varepsilon}^{\pm,m}$ are linearly dependent of ε : $h_{\varepsilon}^{\pm,m} = \varepsilon h^{\pm,m}$ and it is fixed at both ends.

The mechanical behavior differs in being the Lamé's constants of Ω_{ε}^+ and Ω_{ε}^- independent of ε :

$$\lambda_{\varepsilon}^{\pm} = \lambda^{\pm}, \quad \mu_{\varepsilon}^{\pm} = \mu^{\pm}, \quad (39)$$

while the elastic modula of Ω_{ε}^m , which is assumed to be softer than the upper and lower layers, depend on ε in such a way that:

$$\lambda_{\varepsilon}^m = \varepsilon^2 \lambda^m, \quad \mu_{\varepsilon}^m = \varepsilon^2 \mu^m. \quad (40)$$

The beam is submitted to body forces $\mathbf{f}_{\varepsilon}^{\pm,m} = (f_{\varepsilon,i}^{\pm,m}) \in L^2(\Omega_{\varepsilon})$ and to surface forces $\mathbf{g}_{\varepsilon}^{\pm} = (g_{\varepsilon,i}^{\pm}) \in L^2({}^g\Gamma_{\varepsilon}^{\pm})$.

Remark. The choice of this particular scalings for the geometrical and mechanical properties of each layer is motivated by various reasons. The most important is that we want to emphasize the physical assumption of significantly small stiffness of Ω_ε^m , by employing elastic modula two order of magnitude smaller than the ones of the adherents. Secondarily, using different powers of ε for the properties of the material we obtain limit models which we do not consider appealing from a mechanical point of view. Besides, we want to study situations which are different from those previously investigated, such as Klarbring and Movchan (1998) and Åslund (2005) which employ different scalings, i.e. ε and ε^3 for the Lamé's coefficients of the adhesive and ε^2 for its thickness. The limit model obtained by these authors is similar to that of this work. This confirms that the limit model, being obtained in different situations, is a reliable approximation of the real cases of layered strips where the middle layer is thinner and softer.

3.2. The rescaled problem

As in Section 2, we introduce the change of variable (5) that allows to transform the problem posed on a domain dependent of ε onto a problem on a domain independent of ε . We introduce the same scaling of unknowns and test functions are the same as in (6) and we suppose the following orders of magnitude for the forces, using the rule that the work is left invariant by the transformation of coordinates (Ciarlet, 1997; Trabucho and Viaño, 1996):

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,1}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon f_1^\pm(\mathbf{x}), & f_{\varepsilon,2}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= f_2^\pm(\mathbf{x}), \\ f_{\varepsilon,1}^m(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^3 f_1^m(\mathbf{x}), & f_{\varepsilon,2}^m(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 f_2^m(\mathbf{x}), \\ g_{\varepsilon,1}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 g_1^\pm(\mathbf{x}), & g_{\varepsilon,2}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon g_2^\pm(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (41)$$

where the functions $f_i^{\pm,m}$ and $g_i^\pm$ are independent of the parameter ε .

We can derive the following equivalent problem for the scaled displacements $\mathbf{u}(\varepsilon)$: rescaled problem $P(\varepsilon)$: find $\mathbf{u}(\varepsilon) \in V(\Omega)$ such that for all $\mathbf{v} \in V(\Omega)$

$$\varepsilon^2 a_2(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + \varepsilon^{-2} a_{-2}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + \varepsilon^{-4} a_{-4}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) = L^\pm(\mathbf{v}) + \varepsilon^2 L^m(\mathbf{v}), \quad (42)$$

where the bilinear forms a_2 , a_0 , a_{-2} , a_{-4} and the linear $L^{\pm,m}$ forms are defined as follows:

$$\begin{aligned} a_2(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^m} (\lambda^m + 2\mu^m) e_{22}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ a_0(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^m} [\lambda^m e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) + \lambda^m e_{22}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) \\ &\quad + 4\mu^m e_{12}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{12}(\mathbf{v})] d\mathbf{x} + \int_{\Omega^\pm} (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) e_{22}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ a_{-2}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} [\lambda^\pm e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) + \lambda^\pm e_{22}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) \\ &\quad + 4\mu^\pm e_{12}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{12}(\mathbf{v})] d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} (\lambda^m + 2\mu^m) e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ a_{-4}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ L^\pm(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} f_i^\pm v_i^\pm d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^\pm} g_i^\pm v_i^\pm dx_2, \\ L^m(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^m} f_i^m v_i^m d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (43)$$

The admissible displacements belongs to $V(\Omega) = \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ on } {}^u\Gamma^a, a = 0, L\}$. The solution of (42) is guaranteed to exist and to be unique thanks to classical tools of elliptic problems. At this point we are looking for a simplified model which can be a good approximation of the real problem.

3.3. The limit problem: asymptotic expansion

We can clearly notice that the rescaled problem has a polynomial structure in ε : this suggests to look for the asymptotic expansion of the solution (see (10)). By substituting (10) into the scaled variational problem (42) and by identifying the terms with identical power of ε , we obtain, as customary, the following sequence of equations:

$$\begin{aligned} P_{-4}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{\pm 0}, \mathbf{v}) = 0, \\ P_{-2}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{\pm 2}, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \\ P_0: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{\pm 4}, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = L^{\pm}(\mathbf{v}), \\ P_2: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{\pm 6}, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^4, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + a_2(\mathbf{u}^{m2}, \mathbf{v}) = L^m(\mathbf{v}), \\ P_{2j}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{\pm 2j+4}, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^{2j+2}, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^{2j}, \mathbf{v}) + a_2(\mathbf{u}^{m2j-2}, \mathbf{v}) = 0, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (44)$$

If the system of applied forces verifies

$$\begin{aligned} f_1^{\pm} &\in L^2(\Omega^{\pm}), \quad f_2^{\pm} \in H^1(0, L; L^2(\pm h^m, \pm h^m \pm 2h^{\pm})), \\ g_1^{\pm} &\in L^2(0, L), \quad g_2^{\pm} \in H^1(0, L), \end{aligned} \quad (45)$$

by studying each variational problem (44), we obtain the following characterization of the limit problem at the zeroth order. The limit displacement field $\mathbf{u}^0 = (u_1^{\pm, m0}, u_2^{\pm, m0})$ assumes the form:

$$\begin{cases} u_1^{\pm, m0}(x_1, x_2) = \eta(x_2), & \eta(x_2) \in H_0^2(0, L), \\ u_2^{+0}(x_1, x_2) = v(x_2) - x_1 \partial_2 \eta(x_2), & v \in H_0^1(0, L), \\ u_2^{-0}(x_1, x_2) = w(x_2) - x_1 \partial_2 \eta(x_2), & w \in H_0^1(0, L), \\ u_2^{m0}(x_1, x_2) = \frac{v(x_2) + w(x_2)}{2} + x_1 \left(\frac{v(x_2) - w(x_2)}{2h^m} - \partial_2 \eta(x_2) \right). \end{cases} \quad (46)$$

As consequence of the asymptotic analysis we performed, the limit displacement field presents a Bernoulli–Navier structure for bodies Ω^+ and Ω^- , with the same transverse displacement for each layer and two different axial displacements for the upper and lower layers; the middle layer behaves as an elastic interface, whose displacements are an appropriate linear combinations of the displacements of the adherents.

We denote the space of admissible displacements of the form (46) by $W(\Omega)$. The functions η , v and w are solutions of the coupled problem

$$\begin{aligned} \int_0^L [(\tilde{E}^+ I^+ + \tilde{E}^- I^-) \eta'' - \tilde{E}^+ S^+ v' + \tilde{E}^- S^- w'] v_1' dx_2 &= \int_0^L (F_1 v_1 - M_1 v_1') dx_2, \quad \forall v_1 \in H_0^2(0, L), \\ \int_0^L [K^2 (v - w) v_2 + (2\tilde{E}^+ h^+ v' - \tilde{E}^+ S^+ \eta'') v_2'] dx_2 &= \int_0^L F_2^+ v_2 dx_2, \quad \forall v_2 \in H_0^1(0, L), \\ \int_0^L [K^2 (w - v) \underline{v}_2 + (2\tilde{E}^- h^- w' - \tilde{E}^- S^- \eta'') \underline{v}_2'] dx_2 &= \int_0^L F_2^- \underline{v}_2 dx_2, \quad \forall \underline{v}_2 \in H_0^1(0, L). \end{aligned} \quad (47)$$

In Eqs. (47), $\tilde{E}^{\pm} = \frac{4\mu^{\pm}(\lambda^{\pm} + \mu^{\pm})}{\lambda^{\pm} + 2\mu^{\pm}} = \frac{E^{\pm}}{1 - (\nu^{\pm})^2}$ are the equivalent elastic modula for $\Omega^{\pm}$, $K^2 = \frac{\mu^m}{2h^m}$ is an interface stiffness and F_1 , M_1 and $F_2^{\pm}$ are the resultant forces and moment, as shown in (82) of Appendix A.

The limit variational problem (47) is equivalent to the following differential problem (coupled bending-stretching equations):

$$\begin{aligned}
(\tilde{E}^+ I^+ + \tilde{E}^- I^-) \eta'''' - \tilde{E}^+ S^+ v'''' - \tilde{E}^- S^- w'''' &= F_1 + M_1', \\
K^2(v - w) + \tilde{E}^+ S^+ \eta'''' - 2\tilde{E}^+ h^+ v'' &= F_2^+, \\
K^2(w - v) + \tilde{E}^- S^- \eta'''' - 2\tilde{E}^- h^- w'' &= F_2^-.
\end{aligned} \tag{48}$$

Remark. The previous system shows that the central adhesive layer behaves as an elastic interphase of stiffness K^2 , which reacts to the gap between the axial displacements of the two adherents. The fourth order equation, associated with the flexural behavior of the beam, is strongly coupled with the axial displacements of the two adherents. The heterogeneity of the strip, due to the presence of the adhesive, and the choice of the material frame lead to a strong coupling of the system. However, in the case of a symmetric strip ($\tilde{E}^+ = \tilde{E}^- = \tilde{E}$, $S^+ = -S^- = S$, $I^+ = I^- = I$ and $h^+ = h^- = h$), by defining a new variable $\psi(x_2) := v(x_2) - w(x_2)$, we can re-write Eqs. (48) in a decoupled form:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{E}(2Ih - S^2)}{S} \psi'''' - \frac{2K^2 I}{S} \psi' &= F_1 + M_1' - \frac{I}{S} (F_2^+ - F_2^-)', \\
v'' &= -\frac{1}{4\tilde{E}h} (F_2^+ + F_2^-) + \frac{1}{2} \psi'', \\
w'' &= -\frac{1}{4\tilde{E}h} (F_2^+ + F_2^-) - \frac{1}{2} \psi'', \\
\eta'''' &= \frac{1}{2\tilde{E}S} (F_2^+ - F_2^-) + \frac{h}{S} \psi'' - \frac{K^2}{\tilde{E}S} \psi.
\end{aligned} \tag{49}$$

In general, in the model 2 it is not evident how to define a *neutral material axis* associated to the strip, so we do not look for alternative reference systems allowing for the decoupling of the equations in non-symmetrical cases.

The limit displacement field $\mathbf{u}^0$ is a piece-wise linear function of the through-the-thickness coordinate: this model reminds to a technical theory of laminates called the Layer-wise Theory, in which the displacement field is assumed a priori to be piece-wise continuous and not regular along the thickness.

3.3.1. Existence and uniqueness

As in Section 2 we use the Lax–Milgram's Lemma to prove the existence and uniqueness of the solution. To simplify calculations in all this section we suppose that $h^{\pm,m} = h$. Taking problem P_0 and substituting test functions $\mathbf{v} \in W(\Omega)$, we obtain, as customary, the limit problem P_W associated to the limit displacement field.

$$\begin{aligned}
P_W : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= L^\pm(\mathbf{v}), \\
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} \tilde{E}^\pm e_{22}(\mathbf{u}^\pm) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} 4\mu^m e_{12}(\mathbf{u}^m) e_{12}(\mathbf{v}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{50}$$

where $\mathbf{u} \in W(\Omega)$, that is a Hilbert space, endowed with the natural norm $\|\mathbf{u}\|_{W(\Omega)}^2 = \|v\|_{1,(0,L)}^2 + \|w\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2$. Supposing $\alpha = v - 2h\partial_2\eta$ and $\beta = w + 2h\partial_2\eta$, we define a new space of admissible displacements

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \eta \in H_0^2(0, L), \alpha \in H_0^1(0, L), \beta \in H_0^1(0, L), \mathbf{u} = (**)\}, \\
(**) \quad &\begin{cases} u_1^{\pm,m0}(x_1, x_2) = \eta(x_2), \\ u_2^{+0}(x_1, x_2) = \alpha(x_2) + 2h\partial_2\eta(x_2) - x_1\partial_2\eta(x_2), \\ u_2^{-0}(x_1, x_2) = \beta(x_2) - 2h\partial_2\eta(x_2) - x_1\partial_2\eta(x_2), \\ u_2^{m0}(x_1, x_2) = \frac{\alpha(x_2) + \beta(x_2)}{2} + x_1 \left(\frac{\alpha(x_2) - \beta(x_2)}{2h} + \partial_2\eta(x_2) \right), \end{cases}
\end{aligned} \tag{51}$$

that is a Hilbert space, equipped with the natural norm $\|\mathbf{u}\|_{\widehat{W}(\Omega)}^2 = \|\alpha\|_{1,(0,L)}^2 + \|\beta\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2$. It is isomorphic to $W(\Omega)$, so that the two norms of $W(\Omega)$ and $\widehat{W}(\Omega)$ are equivalent. By substituting $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in W(\Omega)$, we obtain

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c \left\{ \int_{\Omega^\pm} \tilde{E}^\pm e_{22}(\mathbf{u}^\pm) e_{22}(\mathbf{u}^\pm) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} 4\mu^m e_{12}(\mathbf{u}^m) e_{12}(\mathbf{u}^m) d\mathbf{x} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= c \left\{ \int_{\Omega^+} (v' - x_1 \eta'')^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} (w' - x_1 \eta'')^2 d\mathbf{x} + \frac{h^2}{16} \int_{\Omega^m} (v - w)^2 d\mathbf{x} \right\} \\
&= c \int_0^L \left(\alpha'^2 + \frac{2}{3} h^2 \eta'^2 + \beta'^2 + \frac{h^2}{16} (v - w)^2 \right) dx_2 \\
&\geq c \{ |\alpha|_{1,(0,L)}^2 + |\beta|_{1,(0,L)}^2 + |\eta|_{2,(0,L)}^2 \} \geq \frac{c}{k^2} \{ \|\alpha\|_{1,(0,L)}^2 + \|\beta\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2 \} \\
&= C^2 \|\mathbf{u}\|_{\widehat{W}(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{52}$$

where c is a positive constant which takes account of the geometric quantities and k^2 comes out as a consequence of Poincaré's inequality. Hence, the bilinear form is coercive in $\widehat{W}(\Omega)$ and thus, it is coercive in $W(\Omega)$; then, thanks to the Lax–Milgram's Lemma we can deduce that the solution of problem P_W exists and is unique.

3.4. Convergence features and a numerical counterexample

In the current section we summarize the convergence features obtained for the second model, the mathematical difficulties which occurred and two schematic graphs regarding the numerical simulations we treated. We use the same notations adopted in Section 2.4. As in Section 2.4.1 we can simply obtain the following a priori bounds:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)\|_{1,\Omega^\pm} \leq c, \quad \|\varepsilon \mathbf{u}^m(\varepsilon)\|_{1,\Omega^m} \leq c, \\
&|e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))|_{0,\Omega^\pm} \leq c\varepsilon^2, \quad |e_{12}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))|_{0,\Omega^\pm} \leq c\varepsilon, \quad |e_{22}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))|_{0,\Omega^\pm} \leq c, \\
&|e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))|_{0,\Omega^m} \leq c\varepsilon, \quad |e_{12}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))|_{0,\Omega^m} \leq c, \quad |e_{22}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))|_{0,\Omega^m} \leq \frac{c}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{53}$$

We initially focus on $\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)$. From (53) it follows that, when $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}^\pm(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}^\pm \quad \text{weakly in } H^1(\Omega^\pm), \\
&e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) \rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega^\pm), \\
&e_{12}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) \rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega^\pm).
\end{aligned} \tag{54}$$

From the previous equations we can conclude that $e_{11}(\mathbf{u}^\pm) = e_{12}(\mathbf{u}^\pm) = 0$, which show that for $\mathbf{u}^\pm$ the representation (46) holds.

We now come to the middle layer. From (53)₆ we have that

$$e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) \rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega^m). \tag{55}$$

Using this result and the fact that the L^2 -norms of the traces of $(\mathbf{u}^m(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ on the middle interfaces are bounded from the displacements of the upper and lower layers, from the expression

$$u_1^m(\varepsilon)(x_1, x_2) = u_1^m(\varepsilon)(x_1 = -h^m, x_2) + \int_{-h^m}^{x_1} \partial_1 u_1^m(\varepsilon)(\xi, x_2) d\xi \tag{56}$$

it follows that $u_1^m(\varepsilon)$ converges weakly in $L^2(\Omega^m)$, and that the limit is independent of x_1 . This and the continuity conditions across the middle interfaces prove that the limit of the sequences satisfies (46)₁.

From (53)₇, on the other hand, we also have that $e_{12}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))$ converges weakly in $L^2(\Omega^m)$.

If we want to proceed further, and in particular if we want to prove at least that also $u_2^m(\varepsilon)$ converges weakly in $L^2(\Omega^m)$, and that the limit satisfies (46)₄, we face with the problem of bounding the remaining derivative. In fact, from (53) we only have that

$$\begin{aligned}
&|\partial_2 u_1^m(\varepsilon) + \partial_1 u_2^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m} \leq c, \\
&|\partial_2 u_2^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m} \leq \frac{c}{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{57}$$

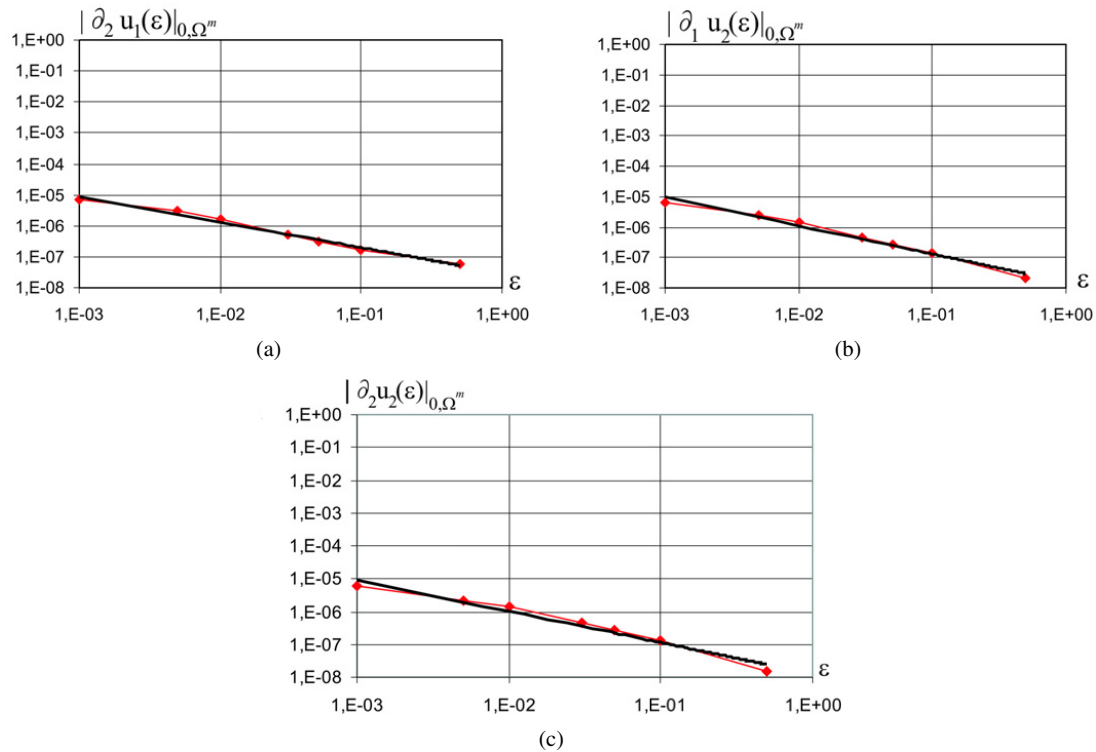


Fig. 2. The L^2 -norms behavior with respect of ε for the model 2.

The last inequality, in particular, suggests that it is not possible to have an ε -independent bound for the previous derivatives, and, consequently, that it is not possible to improve the convergence results obtained up to now.

To prove this guess, we performed some numerical simulations with the code CASTEM. We implement the initial system into the software, namely a three-layer strip clamped at both ends subjected to its own weight, and we calculate the L^2 -norms of the derivatives $|\partial_2 u_1^m(\varepsilon)|_{0, \Omega^m}$, $|\partial_1 u_2^m(\varepsilon)|_{0, \Omega^m}$ and $|\partial_2 u_2^m(\varepsilon)|_{0, \Omega^m}$. We then let the parameter of “smallness” ε tend to zero: in the present case, this means that the thicknesses of each layer and the elastic coefficients of the middle layer tend to zero. Indeed, we obtain what it is expected, namely, that all the three L^2 -norms “explode” when ε tends to zero, as shown in Fig. 2. This proves that our estimations cannot be actually improved and thus, that the weak convergence fails.

From Fig. 2 we can further infer that $|\partial_2 u_1^m(\varepsilon)|_{0, \Omega^m} \sim \varepsilon^{-0.8217}$, $|\partial_1 u_2^m(\varepsilon)|_{0, \Omega^m} \sim \varepsilon^{-0.9271}$ and $|\partial_2 u_2^m(\varepsilon)|_{0, \Omega^m} \sim \varepsilon^{-0.9572}$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. The last estimation, in particular, agrees with $(57)_2$. The first two exponents of ε , on the other hand, are subjected to certain numerical approximations, which is the cause of the fact that they are different, while from $(57)_1$ they should be equal. In fact, from decreasing values of ε we observed numerical instabilities in the simulations; in particular, the solution starts to perform very rapid oscillations close to the boundaries in the middle layer. This phenomenon, which is known to occur from the fracture mechanics theory, is the root of the bad approximation of the exponents, and further confirms the lack of the weak convergence of the considered derivatives.

Actually, combining three layers with very different mechanical properties (in this case, the elastic coefficients of the adhesive are two orders of magnitude smaller than those of the adherents) produces most likely a strong concentration of stresses at the edges, larger than the common one. This phenomenon, which is a boundary layer effect, is not taken into account in the previous analysis, and likely is the mechanical root of the lack of convergence. It can be studied by using a matched asymptotic expansion of the solution and of the boundary layer, or by looking for the convergence in other less regular functional spaces.

4. Model 3

The last model presented is a two-dimensional three-layer composite strip, clamped on the bases, made of three homogeneous, isotropic elastic materials, in which the core is stiffer and thinner than the face sheets. This type of

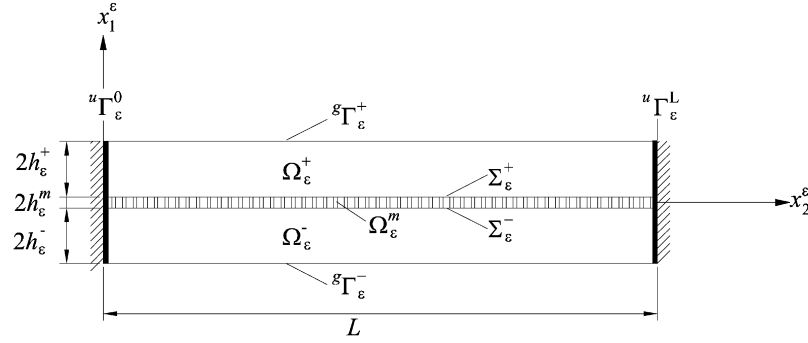


Fig. 3. The reference configuration.

multi-layer panel models the behavior of two welded panels, the structural reinforcement of two timber beams used in restoration or in prestressed concrete beams with a steel cable immersed in the matrix. The technique applied is always the asymptotic expansion method by means of which we derive a mathematical one-dimensional model.

4.1. The mathematical formulation of the problem

We consider the Euclidean space $\mathcal{E}^2$ with a Cartesian coordinate frame $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Let ε be a positive real “small” parameter such that $0 < \varepsilon < 1$. Given the constant $L > 0$ we define the following domain, as shown in Fig. 3:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_\varepsilon &= \bar{\Omega}_\varepsilon^+ \cup \bar{\Omega}_\varepsilon^m \cup \bar{\Omega}_\varepsilon^- \subset \mathbb{R}^2, \\ \Omega_\varepsilon^m &= (-h_\varepsilon^m, h_\varepsilon^m) \times (0, L), \\ \Omega_\varepsilon^+ &= (h_\varepsilon^m, h_\varepsilon^m + 2h_\varepsilon^+) \times (0, L), \\ \Omega_\varepsilon^- &= (-h_\varepsilon^m - 2h_\varepsilon^-, -h_\varepsilon^m) \times (0, L), \\ {}^u\Gamma_\varepsilon^a &= (-h_\varepsilon^m - 2h_\varepsilon^-, h_\varepsilon^m + 2h_\varepsilon^+) \times \{a\}, \quad a = 0, L, \quad {}^g\Gamma_\varepsilon^\pm = \{\pm h_\varepsilon^m \pm 2h_\varepsilon^\pm\} \times (0, L), \\ \Sigma_\varepsilon^\pm &= \bar{\Omega}_\varepsilon^\pm \cap \bar{\Omega}_\varepsilon^m = \{\pm h_\varepsilon^m\} \times [0, L].\end{aligned}\quad (58)$$

We consider a two-dimensional three-layer strip of length L occupying the reference configuration $\bar{\Omega}_\varepsilon$. We study the physical problem corresponding to the mechanical behavior of a two-dimensional compound three-layer beam, supposed to be fixed at both ends with a stiff core. The thicknesses $h_\varepsilon^\pm$ are linearly dependent of ε : $h_\varepsilon^\pm = \varepsilon h^\pm$, while the thickness of the middle layer is thinner and it is scaled with ε^2 : $h_\varepsilon^m = \varepsilon^2 h^m$. The total height of the beam is $2h^+ + 2h^m + 2h^- = 2h$. The sets Ω_ε^+ , Ω_ε^m , Ω_ε^- , are filled by three homogeneous, isotropic and linearly elastic materials characterized by the following Lamé’s coefficients $\lambda_\varepsilon^{\pm,m}$ and $\mu_\varepsilon^{\pm,m}$. The Lamé’s constants of Ω_ε^+ and Ω_ε^- are linearly dependent of ε :

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \varepsilon \lambda^\pm, \quad \mu_\varepsilon^\pm = \varepsilon \mu^\pm, \quad (59)$$

while the elastic moduli of Ω_ε^m , which is assumed to be stiffer than the upper and lower layers, are independent of ε :

$$\lambda_\varepsilon^m = \lambda^m, \quad \mu_\varepsilon^m = \mu^m. \quad (60)$$

The structure is submitted to body forces $\mathbf{f}_\varepsilon^{\pm,m} = (f_{\varepsilon,i}^{\pm,m}) \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ and to surface forces $\mathbf{g}_\varepsilon^\pm = (g_{\varepsilon,i}^\pm) \in L^2({}^g\Gamma_\varepsilon^\pm)$.

Remark. As for the other models, we have made an appropriate choice of the scalings of the geometry and of the mechanical parameters, so that we can find a mechanically consistent limit model.

4.2. Equivalent formulation: the rescaled problem

To begin with, we introduce the following change of variable that allows to transform the problem posed on a variable domain (dependent of ε) onto a problem on a fixed domain (independent of ε): that makes it possible to study the behavior of $\mathbf{u}_\varepsilon$ when the thickness tends to zero:

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon^+ : \mathbf{x}^+ &= (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}^+ \rightarrow \mathbf{x}_\varepsilon^+ = \pi_\varepsilon^+(\mathbf{x}^+) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (\varepsilon^2 + \varepsilon x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_\varepsilon^+, \\
\pi_\varepsilon^m : \mathbf{x}^m &= (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}^m \rightarrow \mathbf{x}_\varepsilon^m = \pi_\varepsilon^m(\mathbf{x}^m) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (\varepsilon^2 x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_\varepsilon^m, \\
\pi_\varepsilon^- : \mathbf{x}^- &= (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}^- \rightarrow \mathbf{x}_\varepsilon^- = \pi_\varepsilon^-(\mathbf{x}^-) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) = (-\varepsilon^2 + \varepsilon x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_\varepsilon^-.
\end{aligned} \tag{61}$$

We introduce the following scaling of unknowns and test functions for bodies $\Omega^\pm$ (Ciarlet, 1997; Trabucho and Viaño, 1996):

$$\begin{aligned}
u_1^\pm(\mathbf{x})(\varepsilon) &= \varepsilon u_{\varepsilon,1}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon), & u_2^\pm(\mathbf{x})(\varepsilon) &= u_{\varepsilon,2}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon), \\
v_1^\pm(\mathbf{x})(\varepsilon) &= \varepsilon v_{\varepsilon,1}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon), & v_2^\pm(\mathbf{x})(\varepsilon) &= v_{\varepsilon,2}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon).
\end{aligned} \tag{62}$$

The displacement functions of middle layer Ω^m has not been scaled; this choice has an important mechanical meaning: since the core is stiffer than the adherents, it behaves approximately as a rod, while the upper and lower layers are considered as beams, thus their flexural behavior is favoured. Then, we suppose the following orders of magnitude for the forces, using the rule that the work is left invariant by the transformation of coordinates (Ciarlet, 1997; Trabucho and Viaño, 1996):

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon,1}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 f_1^\pm(\mathbf{x}), & f_{\varepsilon,2}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon f_2^\pm(\mathbf{x}), \\
f_{\varepsilon,1}^m(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 f_1^m(\mathbf{x}), & f_{\varepsilon,2}^m(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 f_2^m(\mathbf{x}), \\
g_{\varepsilon,1}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^3 g_1^\pm(\mathbf{x}), & g_{\varepsilon,2}^\pm(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 g_2^\pm(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{63}$$

where the functions $f_i^{\pm,m}$ and $g_i^\pm$ are independent of the parameter ε . Now, we can derive the following equivalent problem for the scaled displacements $\mathbf{u}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
&\text{rescaled problem } P(\varepsilon): \text{ find } \mathbf{u}(\varepsilon) \in V(\Omega) \text{ such that, for all } \mathbf{v} \in V(\Omega), \\
&a_0(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + \varepsilon^{-2} a_{-2}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) + \varepsilon^{-4} a_{-4}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) = L^\pm(\mathbf{v}) + \varepsilon^2 L^m(\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{64}$$

where the bilinear forms a_0 , a_{-2} , a_{-4} and the linear $L^{\pm,m}$ forms are defined as following:

$$\begin{aligned}
a_0(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) e_{22}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} [(\lambda^m + 2\mu^m) e_{22}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) + \mu^m \partial_2 u_1^m \partial_2 v_1] d\mathbf{x}, \\
a_{-2}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} [\lambda^\pm e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) + \lambda^\pm e_{22}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) + 4\mu^\pm e_{12}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{12}(\mathbf{v})] d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega^m} [\lambda^m e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{22}(\mathbf{v}) + \lambda^m e_{22}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) + \mu^m (\partial_2 u_1^m \partial_1 v_2 + \partial_1 u_2^m \partial_2 v_1)] d\mathbf{x}, \\
a_{-4}(\mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} (\lambda^\pm + 2\mu^\pm) e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} [(\lambda^m + 2\mu^m) e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon)) e_{11}(\mathbf{v}) + \mu^m \partial_1 u_2^m \partial_1 v_2] d\mathbf{x}, \\
L^\pm(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} f_i^\pm v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^\pm} g_i^\pm v_i dx_2, \\
L^m(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^m} f_i^m v_i d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{65}$$

The admissible displacements belongs to $V(\Omega) = \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ on } {}^u\Gamma^a, a = 0, L\}$.

4.3. The limit problem for vanishing thickness: asymptotic expansion

Since in the rescaled variational problem (64) the parameter of smallness ε appears in a polynomial form, we will look for the solution of the problem as a series of powers of ε (see (10)). By substituting (10) into the scaled variational

problem (64) and by identifying the terms with identical power of ε , we obtain, as customary, the following sequence of equations:

$$\begin{aligned} P_{-4}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \\ P_{-2}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \\ P_0: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^4, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = L^\pm(\mathbf{v}), \\ P_2: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^6, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^4, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) = L^m(\mathbf{v}), \\ P_{2j}: \quad & a_{-4}(\mathbf{u}^{2j+2}, \mathbf{v}) + a_{-2}(\mathbf{u}^{2j}, \mathbf{v}) + a_0(\mathbf{u}^{2j-2}, \mathbf{v}) = 0, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (66)$$

In order to characterize the first term of the asymptotic expansion, we now study each variational problem (66) and we obtain, as customary, the characterization of the so-called limit problem. If the system of applied forces verifies

$$\begin{aligned} f_1^{\pm, m} &\in L^2(\Omega), \quad f_2^{\pm, m} \in H^1(0, L; L^2(-h^m - 2h^-, h^m + 2h^+)), \\ g_1^\pm &\in L^2(0, L), \quad g_2^\pm \in H^1(0, L), \end{aligned} \quad (67)$$

then the limit displacement field $\mathbf{u}^0$ takes the following form:

$$\begin{cases} u_1^{\pm, m0}(x_1, x_2) = \eta(x_2), & \eta \in H_0^2(0, L), \\ u_2^{m0}(x_1, x_2) = w(x_2), & w \in H_0^1(0, L), \\ u_2^{+0}(x_1, x_2) = (w(x_2) + h^m \partial_2 \eta(x_2)) - x_1 \partial_2 \eta(x_2), \\ u_2^{-0}(x_1, x_2) = (w(x_2) - h^m \partial_2 \eta(x_2)) - x_1 \partial_2 \eta(x_2). \end{cases} \quad (68)$$

The limit displacement field assumes a Bernoulli–Navier form for adherents Ω^+ and Ω^- . The stiff middle layer has the function to transfer the deformations, and thus the stresses, within the upper and lower layers.

We denote the space of admissible displacements which takes the form (68) by $U(\Omega)$. The functions η , w are solutions of the coupled problem (we denote with $\phi' = \partial_2 \phi(x_2)$)

$$\begin{aligned} \int_0^L [A_{11}\eta'' + A_{12}w']v_1'' dx_2 &= \int_0^L (F_1 v_1 - M_1 v_1') dx_2, \quad \forall v_1 \in H_0^2(0, L), \\ \int_0^L [A_{22}w' + A_{12}\eta'']v_2' dx_2 &= \int_0^L F_2 v_2 dx_2, \quad \forall v_2 \in H_0^1(0, L), \end{aligned} \quad (69)$$

where

$$\begin{aligned} A_{11} &= \tilde{E}^+ I^+ + \tilde{E}^- I^- + 2h^m(\tilde{E}^+ S^+ + \tilde{E}^- S^-) + 2(h^m)^2(\tilde{E}^+ h^+ + \tilde{E}^- h^-), \\ A_{12} &= \tilde{E}^- S^- + \tilde{E}^+ S^+ + 2h^m(\tilde{E}^+ h^+ - \tilde{E}^- h^-), \\ A_{22} &= 2\tilde{E}^+ h^+ + 2\tilde{E}^- h^- + 2\tilde{E}^m h^m, \end{aligned} \quad (70)$$

and $\tilde{E}^{\pm, m} = \frac{4\mu^{\pm, m}(\lambda^{\pm, m} + \mu^{\pm, m})}{\lambda^{\pm, m} + 2\mu^{\pm, m}} = \frac{E^{\pm, m}}{1 - (\nu^{\pm, m})^2}$ are always the equivalent elastic moduli associated to $\Omega^{\pm, m}$ and F_1 , M_1 and F_2 are resultant forces and moment, as shown in (83) of Appendix A.

The limit variational problem (69) is equivalent to the following differential problem (coupled bending-stretching equations):

$$\begin{aligned} A_{11}\eta'''' - A_{12}w''' &= F_1 + M_1', \\ A_{12}\eta''' - A_{22}w'' &= F_2. \end{aligned} \quad (71)$$

Remark. The limit displacement field $\mathbf{u}^0$ is a piece-wise linear function along the thickness. The central layer, considered to be stiffer than the adherents, behaves as a rod in which displacements are only functions of the axial coordinate: this is physically acceptable and reasonable. Hence, only the upper and lower layers have a flexural behavior.

If the strip is symmetric with respect of the central layer, the differential system automatically decouples. In more general cases, it is possible to find a different (materials- and thicknesses-dependent) reference system which allows us

to decouple Eqs. (71). However, this is not actually required, because even with the present reference system Eqs. (71) can be written in the decoupled form:

$$\left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right) \eta'''' = F_1 + M_1' - \frac{A_{12}}{A_{22}} F_2', \quad (72)$$

$$w'' = \frac{A_{12}\eta''' - F_2}{A_{22}}. \quad (73)$$

4.3.1. Existence and uniqueness

As in the two previous sections we use the Lax–Milgram’s Lemma to prove the uniqueness of the solution. To simplify calculations in all this section we suppose that $h^{\pm,m} = h$.

Taking problem P_0 and substituting test functions $\mathbf{v} \in U(\Omega)$, we obtain, as customary, the limit problem P_U associated to the limit displacement field:

$$P_U: \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L^\pm(\mathbf{v}), \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{\pm,m}} \tilde{E}^{\pm,m} e_{22}(\mathbf{u}) e_{22}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (74)$$

where $\mathbf{u} \in U(\Omega)$. $U(\Omega)$ is a Hilbert space, endowed with the natural norm $\|\mathbf{u}\|_{U(\Omega)}^2 = \|w\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2$. Supposing $\gamma = w - h\partial_2\eta$, we define also a new space of admissible displacements

$$\begin{aligned} \hat{U}(\Omega) &= \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \eta \in H_0^2(0, L), \gamma \in H_0^1(0, L), \mathbf{u} = (**), \} \\ (**): \quad &\begin{cases} u_1^{\pm,m0}(x_1, x_2) = \eta(x_2), \\ u_2^{+0}(x_1, x_2) = \gamma(x_2) + 2h\partial_2\eta(x_2) - x_1\partial_2\eta(x_2), \\ u_2^{-0}(x_1, x_2) = \gamma(x_2) - x_1\partial_2\eta(x_2), \\ u_2^{m0}(x_1, x_2) = \gamma(x_2) + h\partial_2\eta(x_2), \end{cases} \end{aligned} \quad (75)$$

that is a Hilbert space, equipped with the natural norm $\|\mathbf{u}\|_{\hat{U}(\Omega)}^2 = \|\gamma\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2$, isomorphic to $U(\Omega)$. The existence of an algebraic isomorphism $T: U(\Omega) \rightarrow \hat{U}(\Omega)$ implies and guarantees that the two spaces can be identified as the same Hilbert space and that the two norms of $U(\Omega)$ and $\hat{U}(\Omega)$ are formally equivalent. Consequently, by letting $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, we have that

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq c \int_{\Omega^{\pm,m}} \tilde{E}^{\pm,m} e_{22}(\mathbf{u}) e_{22}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} \\ &= c \left\{ \int_{\Omega^+} [(w' + h\eta'') - x_1\eta'']^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega^-} [(w' - h\eta'') - x_1\eta'']^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega^m} w'^2 d\mathbf{x} \right\} \\ &= c \int_0^L \left(4\gamma'^2 + \frac{46}{3} h^2 \eta'^2 \right) dx_2 \geq c_1 \{ |\gamma|_{1,(0,L)}^2 + |\eta|_{2,(0,L)}^2 \} \\ &\geq \frac{c_1}{k^2} \{ \|\gamma\|_{1,(0,L)}^2 + \|\eta\|_{2,(0,L)}^2 \} = C^2 \|\mathbf{u}\|_{\hat{U}(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (76)$$

where c_1 is a positive constant which takes account of the geometric quantities and k^2 comes out as a consequence of Poincaré’s inequality. Hence, the bilinear form is coercive in $\hat{U}(\Omega)$ and thus, it is coercive in $U(\Omega)$, due to the isomorphism T ; then, thanks to the Lax–Milgram’s Lemma we can deduce that the solution of problem P_U exists and is unique.

4.4. Convergence features and a numerical counterexample

As for model 2, in this section we treat a summary of the convergence features obtained for the third model, the mathematical difficulties which occurred and two schematic graphs regarding the numerical simulations.

As for the model 2 (Section 3.4), we have the following a priori bounds in $\Omega^\pm$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)\|_{1,\Omega^\pm} &\leq c, \\ |e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))|_{0,\Omega^\pm} &\leq c\varepsilon^2, \quad |e_{12}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))|_{0,\Omega^\pm} \leq c\varepsilon, \quad |e_{22}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon))|_{0,\Omega^\pm} \leq c, \end{aligned} \quad (77)$$

which proves that, when $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\pm(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{u}^\pm \quad \text{weakly in } H^1(\Omega^\pm), \\ e_{11}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega^\pm), \\ e_{12}(\mathbf{u}^\pm(\varepsilon)) &\rightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega^\pm). \end{aligned} \quad (78)$$

We then conclude that $e_{11}(\mathbf{u}^\pm) = e_{12}(\mathbf{u}^\pm) = 0$, which agrees with (75).

The a priori bounds for the middle layer are now the following, which are different from those of the model 2:

$$\begin{aligned} |e_{11}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))|_{0,\Omega^m} &= |\partial_1 u_1^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m} \leq c\varepsilon^2, \\ \left| \partial_2 u_1^m(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_1 u_2^m \right|_{0,\Omega^m} &\leq c, \\ |e_{22}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))|_{0,\Omega^m} &= |\partial_2 u_2^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m} \leq c. \end{aligned} \quad (79)$$

By using (56) and (79)₁ we prove that $u_1^m(\varepsilon)$ converges weakly in $L^2(\Omega^m)$, and that the limit is independent of x_1 . This and the continuity conditions across the middle interfaces prove that the limit of the sequences satisfies (75)₁.

From the expression

$$u_2^m(\varepsilon)(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \partial_2 u_2^m(\varepsilon)(x_1, \xi) d\xi \quad (80)$$

and from (79)₃ it follows that also $u_2^m(\varepsilon)$ converges weakly in $L^2(\Omega^m)$. Use is made of the boundary condition for $x_2 = 0$.

So far, we have shown that $\mathbf{u}^m(\varepsilon)$ converges weakly in $L^2(\Omega^m)$, which is a better result with respect to model 2, in which we prove the weak convergence in $L^2(\Omega^m)$ of the component u_1^m only. If, however, we want to improve these results, and for example if we want to prove the weak convergence in $H^1(\Omega)$, we have to bound the derivatives, and we face with the same problems encountered for the model 2. In particular, the inequality (79)₂ does not permit to bound separately the derivatives $\partial_2 u_1^m(\varepsilon)$ and $\partial_1 u_2^m(\varepsilon)$, nor $e_{12}(\mathbf{u}^m(\varepsilon))$, which would suffice.

We do not manage to solve this apparently non-trivial problem of boundedness of norms, but, as for model 2, we obtained a numerical counterexample showing the impossibility of bounding the norms.

Hence, the model of a three-layered strip clamped at both extremities with the middle layer stiffer and thinner than the upper and lower ones, has been implemented into CASTEM. For simplicity of calculation, the beam is only subjected to its own weight. The numerically computed L^2 -norms of the derivatives $|\partial_2 u_1^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m}$ and $|\partial_1 u_2^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m}$ are reported in Fig. 4 as a function ε . When ε tends to zero, i.e., when thicknesses and the elastic modula approach zero, we note that both norms tend to infinity, which explains numerically the analytical difficulty encountered to bound those sequences of derivatives, and prove the impossibility of an improvement of our estimations and of the weak converge in $H^1(\Omega)$.

From Fig. 4 we can further infer that $|\partial_2 u_1^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m} \sim \varepsilon^{-1.055}$ and $|\partial_1 u_2^m(\varepsilon)|_{0,\Omega^m} \sim \varepsilon^{-2.0215}$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. This show a different asymptotic behavior for the two derivatives, in agreement with (79)₂.

The impossibility to reach a significant convergence result has important physical reasons and consequences. It has already been noticed that from a mechanical point of view this can be attributed to the significant difference between the elastic modula of each layer, which causes a concentration of stresses at the boundaries. This problem can be overcome by studying this boundary layer effect, by adding some corrector terms to the asymptotic expansion and thus, by focusing attention to what happens at the extremities of the strip.

5. Concluding remarks

We have considered the problem of giving a mathematical justification to the commonly used engineering models for multi-layer panels. We studied the problem of two-dimensional elasticity for each model and its solution $\mathbf{u}(\varepsilon)$ and

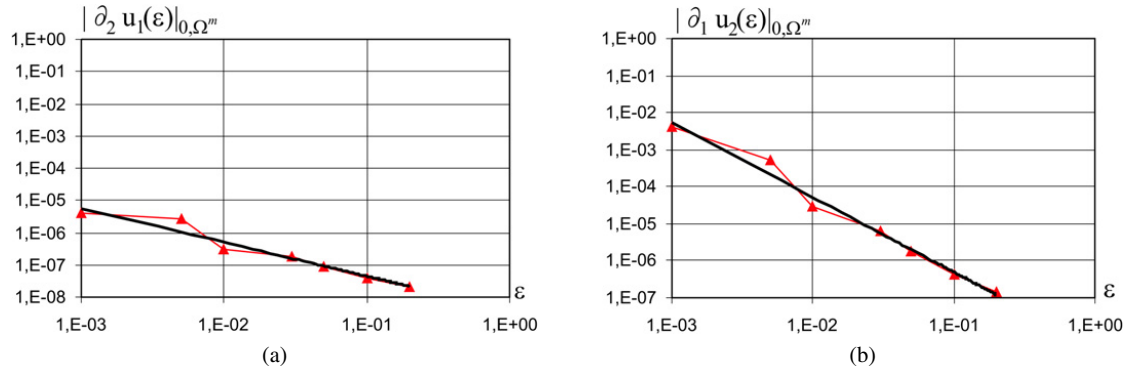


Fig. 4. The L^2 -norms behavior with respect of ε for the model 3.

we have pointed out that it contains a parameter of smallness ε which thickness and stiffness ratios among each layer. For each of the three types of layered beam, it was shown that the classical or engineering model can be obtained by considering the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ of $\mathbf{u}(\varepsilon)$. We have obtained also a strong convergence of the solution of the actual elastic problem towards the solution of the limit problem for the first beam model, which enables one to infer that the simplified limit model is an excellent approximation of the solution of two-dimensional elasticity. We realized that the study of the weak and strong convergence in $L^2(\Omega)$ or $H^1(\Omega)$ of the solutions of the other two models has to be considered a non-trivial problem: indeed, we encountered some analytical and technical difficulties, such as in studying the boundedness of some subsequences of displacements functions, which prevent us from gaining the important result of weak and consequently strong convergence. Since this sort of problem cannot be solved analytically at the moment, we tried to give a brief explanation numerically by using the finite element method. What we obtain in the simulation agrees and confirms the impossibility to find the bounds for those norms we considered. As it has been remarked, the lack of convergence is likely due to the considerable contrast and difference among the mechanical properties of each layer. This can generate a boundary layer effect which is not taken into account in the analysis of these models. Therefore, in our work in progress we propose the use of a matched asymptotic expansion to analyze the boundary layer effects and a mixed variational formulation. Moreover, we will study the problem of convergence in a more general functional framework.

Acknowledgements

The authors would like to thank Prof. G. Geymonat and Prof. F. Krasucki of the Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de l'Université Montpellier II for their useful and helpful suggestions and support in making this work.

Appendix A

The expression of F_1 , M_1 and F_2 for model 1 is as following:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_1^+ dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_1^- dx_1 + \int_{-h^m}^{h^m} f_1^m dx_1 + g_1^+ + g_1^-, \\
 M_1 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_2^+ x_1 dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_2^- x_1 dx_1 + \int_{-h^m}^{h^m} f_2^m x_1 dx_1 + g_2^+ h - g_2^- h, \\
 F_2 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_2^+ dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_2^- dx_1 + \int_{-h^m}^{h^m} f_2^m dx_1 + g_2^+ + g_2^-.
 \end{aligned} \tag{81}$$

The expression of F_1 , M_1 , F_2^+ and F_2^- for model 2 is as following:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_1^+ dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_1^- dx_1 + g_1^+ + g_1^-, \\
M_1 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_2^+ x_1 dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_2^- x_1 dx_1 + g_2^+ h - g_2^- h, \\
F_2^+ &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_2^+ dx_1 + g_2^+, \quad F_2^- = \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_2^- dx_1 + g_2^-.
\end{aligned} \tag{82}$$

The expression of F_1 , M_1 and F_2 for model 3 is as following:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_1^+ dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_1^- dx_1 + g_1^+ + g_1^-, \\
M_1 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_2^+ (h^m - x_1) dx_1 - \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_2^- (h^m + x_1) dx_1 \\
&\quad + g_2^+ (h^m + 2h^+) - g_2^- (h^m + 2h^-), \\
F_2 &= \int_{h^m}^{h^m+2h^+} f_2^+ dx_1 + \int_{-h^m-2h^-}^{-h^m} f_2^- dx_1 + g_2^+ + g_2^-.
\end{aligned} \tag{83}$$

References

- Abdelmoula, R., Coutris, M., Marigo, J.-J., 1998. Comportement asymptotique d'une interphase élastique mince. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib* 326, 237–242.
- Åslund, J., 2005. Asymptotic analysis of adhesively bonded nonlinearly elastic plates. *Z. Angew. Math. Mech.* 85 (1), 23–35.
- Babuska, I., Szabo, B.A., Actis, R.L., 1992. Hierarchic models for laminated composites. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 33, 503–536.
- Ciarlet, P.G., 1997. *Mathematical Elasticity, vol. II: Theory of Plates*. Stud. Math. Appl. North-Holland, Amsterdam.
- Ciarlet, P.G., 1990. *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structure. An Asymptotic Analysis*. Masson & Springer-Verlag, Paris.
- Destuynder P., Sur une justification de modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques. Thèse de Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1980.
- Frostig, Y., 2003. Classical and high-order computational models in the analysis of modern sandwich panels. *Composites Part B* 34, 83–100.
- Frostig, Y., Baruch, M., 1990. Bending of sandwich beams with transversely flexible core. *AIAA J.* 28 (3), 523–531.
- Geymonat, G., Krasucki, F., 1996. A limit model of a soft thin joint. In: Marcellini, P., Talenti, G., Vasantini, E. (Eds.), *Partial Differential Equations and Applications*. Marcel Dekker, New York, pp. 165–173.
- Geymonat, G., Krasucki, F., 1997. Analyse asymptotique du comportement en flexion de deux plaques collées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib* 325, 307–314.
- Geymonat, G., Krasucki, F., Lenci, S., 1999. Mathematical analysis of a bonded joint with soft thin adhesive. *Math. Mech. Solids* 4 (2), 201–225.
- Geymonat, G., Krasucki, F., Marigo, J.-J., 1987. Sur la commutativité des passage à la limite en théorie asymptotique des poutres composites. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II* 305, 225–228.
- Icardi, U., 2001. A three dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams. *Composite Structures* 52, 123–135.
- Irago, H., Viaño, J.M., 1999. Asymptotic error estimation in the Bernoulli–Navier model for elastic rods. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* 328, 631–636.
- Irago, H., Viaño, J.M., 2002. Saint-Venant's principle in the asymptotic analysis of elastic rods with one end fixed. *J. Elasticity* 66, 21–26.
- Klarbring, A., 1991. Derivation of a model of adhesively bonded joints by asymptotic expansion method. *Int. J. Engrg. Sci.* 29 (4), 493–512.
- Klarbring, A., Movchan, A.B., 1998. Asymptotic modelling of adhesive joints. *Mech. Mater.* 28, 137–145.
- Lenci, S., 2000. A limit model in the analysis of steel-concrete beams. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 10 (8), 1233–1250.
- Licht, C., Michaille, G., 1996. Une modélisation du comportement d'un joint collé élastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* 322, 295–300.
- Noor, A.K., Burton, W.S., Peters, J.M., 1995. Hierarchical adaptive modeling of structural sandwiches and multilayered composite panels. *Engrg. Frac. Mech.* 50 (5/6), 801–817.
- Reddy, J.N., Robbins, D.H. Jr., 1994. Theories and computational models for composite laminates. *Appl. Mech. Rev.* 47 (6), 147–169.
- Robbins, D.H. Jr., Reddy, J.N., 1993. Modelling of thick composites using layerwise laminate theory. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 36, 655–677.

- Sanchez-Hubert, J., Sanchez-Palencia, E., 1992. *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation, Application à la mécanique des milieux continus*. Masson.
- Serpilli, M., 2005. Asymptotic analysis of layered elastic beams. *C. R. Acad. Sci. Paris* 333, 593–598.
- Swanson, S.R., 1999. An examination of a higher-order theory for sandwich beams. *Composite Structures* 44, 169–177.
- Thomsen, O.T., 2000a. High-order theory for the analysis of multi-layer plate assemblies and its application for the analysis of sandwich panels with terminating plies. *Composite Structures* 50, 227–238.
- Thomsen, O.T., 2000b. Modelling of multi-layer sandwich type structures using high-order plate formulation. *J. Sandwich Structures and Materials* 50, 331–348.
- Trabucho, L., Viaño, J.M., 1996. Mathematical modelling of rods. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. IV. North-Holland, Amsterdam.

Conclusions et Perspectives

Nous nous sommes intéressés à une déduction géométrique de la cinématique des modèles classiques de plaque et de coque. Cette déduction est basée sur un développement asymptotique formel des équations de compatibilité de Saint-Venant et de la formule intégrale de Cesàro-Volterra. L'appellation "géométrique" est due au fait que les conditions de Saint-Venant et la représentation de Cesàro-Volterra sont profondément liées à la structure métrique de la déformation. De plus, les hypothèses cinématiques obtenues ont été retrouvées sans faire appel à une loi constitutive particulière, à l'équilibre ou à des conditions sur les forces appliquées, comme, par exemple, cela est fait dans les théories asymptotiques des plaques et des coques (voir par exemple P.G. Ciarlet [13] et [14] et leur bibliographie, J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia [39]), dans les théories de scaling formel de P. Podio-Guidugli [32], [38].

La formule de Cesàro-Volterra semble importante pour des nouvelles formulations du problème de l'élasticité linéaire tridimensionnelle et des problèmes des plaques et des coques. Dans ces formulations le tenseur linéarisé de déformation ou les tenseurs linéarisés de variation de métrique et de courbure sont considérés comme des inconnues primaires. Puisque la formule de Cesàro-Volterra est valide dans le cas des foctions régulières, il faudra donc essayer de la représenter dans un cadre fonctionnel non régulier.

De plus, l'intégrale de Cesàro-Volterra est bien définie dans des domaines simplement connexes : en effet, l'hypothèse de simple connexité du domaine a été toujours faite dans le cadre de la déduction géométrique de structures minces que l'on a présentée. Pour cela, un travail sur la généralisation de cette formule dans le cas d'un domaine non nécessairement simplement connexe est en cours de préparation.

En ce qui concerne la partie sur les inclusions de grande rigidité, on a présenté les modèles limites relatifs à une couche mince de type coque immergée dans un milieu tridimensionnel en considérant que les modules élastiques de la couche intermédiaire sont d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^p}$, $p = 1$ ou $p = 3$, par rapport aux modules des solides qui l'entourent. Les problèmes limites dérivant de l'analyse asymptotique ont montré que, dans le cas $p = 1$, l'énergie surfacique d'interface correspond à une énergie de coque membranaire et, dans le cas $p = 3$, la condition de transmission est de type coque en flexion. Ceci est tout à fait conforme avec l'étude parallèle qui a été accomplie dans la Note [6] dans le cas d'une couche mince de type plaque.

La convergence de la solution du problème physique vers la solution du problème limite simplifié et l'étude de l'existence de la solution de ces problèmes variationnels est en cours d'étude. Des premiers résultats de convergence faible ont été déjà obtenus.

Dans la dernière partie de la thèse, grâce à une analyse asymptotique, on a étudié trois modèles de poutres multicouches, avec le but de justifier au niveau théorique des modèles classiques de structures stratifiées utilisés dans la pratique de l'ingénieur. En effet, les modèles limites retrouvés pour chaque poutre correspondent à des modèles déjà employés dans la

littérature, basés sur des hypothèses cinématiques a priori sur le comportement mécanique du stratifié. Dans l'approche asymptotique, aucune hypothèse n'a été faite en ce qui concerne la cinématique : les modèles obtenus dérivent d'une limite lorsque l'épaisseur de la poutre tend vers zéro.

L'étude de la convergence faible dans L^2 ou H^1 des deux derniers modèles s'est heurté à des difficultés pour borner certaines normes des fonctions de déplacement qui ont empêché d'obtenir des résultats satisfaisants de convergence. Pour cela, on a opté pour une simulation numérique qui montre l'impossibilité d'obtenir la convergence faible. Dans l'article [41], on a montré que ce problème de convergence est probablement dû au fait que la différence et le contraste forts entre les modules élastiques de chaque couche ont produit un phénomène de couche limite aux extrémités.

Ce travail doit être bien évidemment enrichi avec l'étude des couches limites grâce à des développements asymptotiques raccordés et à l'étude de la convergence dans un cadre fonctionnel moins régulier.

Bibliographie

- [1] C. Amrouche, P.G. Ciarlet, L. Gratie, S. Kesavan, On the characterizations of matrix fields as linearized strain tensor fields, *J. Math. Pures Appl.*, 86, 116-132, (2006).
- [2] K. J. Bathe, D. Chapelle, *The finite element analysis of shells-fundamentals*, Springer, Berlin, 2003.
- [3] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T : Koiter, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, R. Glowinski and J.L. Lions Editors, pp. 89-136, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 134, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.
- [4] M. Bernadou, P.G. Ciarlet, B. Miara, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, *J. Elasticity*, 34, 111-138, (1994).
- [5] A.L. Bessoud, F. Krasucki, G. Michaille, Multi-materials with strong interface : variational modelings, *accepté Asymptot. Anal.*, (2008).
- [6] A.L. Bessoud, F. Krasucki, M. Serpilli, Plate-like and shell-like inclusions with high rigidity, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 346, 697-702, (2008).
- [7] H. Brezis, L. A. Caffarelli, A. Friedman, Reinforcement problems for elliptic equations and variational inequalities, *Ann. Mat. Pura Appl.*, s. 4, 123, 219-246, (1980) .
- [8] D. Caillerie, The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2, 251-270, (1980).
- [9] E. Cesàro, Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche, *Rend. Napoli Serie 3^a Vol. XII, Anno XLV*, 311-321 (1906).
- [10] D. Chapelle, A. Ferent, Modeling of the inclusion of a reinforcing sheet within a 3D medium, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13, 573-595, (2003).
- [11] D. Chapelle, K.-J. Bathe, Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures, *Comput. & Structures*, 66, 19-36, (1998).
- [12] D. Chapelle, K.-J. Bathe, The mathematical shell model underlying the general shell elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 48, 289-313, (2000).
- [13] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, vol. II : Theory of Plates*, Stud. Math. Appl., North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [14] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, vol. III : Theory of Shells*, Stud. Math. Appl., North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [15] P.G. Ciarlet, *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*, Springer, 2005.
- [16] P.G. Ciarlet, P. Ciarlet Jr., Another approach to linearized elasticity and a new proof of Korn's inequality, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 15, 259-271, (2005).

- [17] P.G. Ciarlet, L. Gratie, C. Mardare, Shen Ming, Recovery of a displacement field from its linearized strain tensor field in curvilinear coordinates, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 344, 535-540, (2007).
- [18] P.G. Ciarlet, L. Gratie, C. Mardare, Shen Ming, Recovery of a displacement field on a surface from its linearized change of metric and change of curvature tensors, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 344, 597-602, (2007).
- [19] P.G. Ciarlet, L. Gratie, M. Serpilli, Cesàro-Volterra path integral formula on a surface, *accepté Math. Models Methods Appl. Sci.* (2008).
- [20] P.G. Ciarlet, V. Lods, Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136, 119-161, (1996a).
- [21] P.G. Ciarlet, S. Mardare, On Korn's inequalities in curvilinear coordinates, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11 (8), 1379-1391, (2001).
- [22] P.G. Ciarlet, E. Sanchez-Palencia, An existence and uniqueness theorem for the two-dimensional linear membrane shell equations, *J. Math. Pures Appl.*, 75, 51-67, (1996).
- [23] M. Dikmen, *Theory of Thin Elastic Shells, Surveys and Reference Works in Mathematics*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1982.
- [24] R. Fosdick, G. Royer-Carfagni, A Stokes theorem for second-order tensor fields and its implications in continuum mechanics, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 40, 381-386, (2005).
- [25] G. Geymonat, F. Krasucki, Some remarks on the compatibility conditions in elasticity, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL*, 123, 175-182, (2005).
- [26] G. Geymonat, F. Krasucki, Beltrami's solutions of general equilibrium equations in continuum mechanics, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 342, 359-363, (2006).
- [27] G. Geymonat, F. Krasucki, M. Serpilli, The kinematics of plate models : a geometrical deduction, *J. Elasticity*, 88, 299-309, (2007).
- [28] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci, Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive, *Math. Mech. Solids*, 4, 201-225, (1999).
- [29] M.E. Gurtin, The linear theory of elasticity, in *Encyclopedia of Physics*, Vol. VIa/2, ed. C. Truesdell Springer-Verlag, 1972.
- [30] W.T. Koiter, On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B73*, 169-195, (1970).
- [31] S. Mardare, Sur quelques problèmes de géométrie différentielle liés à la théorie de l'élasticité, *Thèse de Doctorat, Université Paris VI*, (2003).
- [32] B. Miara, P. Podio-Guidugli, Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 343, 675-678, (2006).
- [33] J.J. Moreau, Duality characterization of strain tensor distributions in arbitrary open set, *J. Math. Anal. Appl.*, 72, 760-770, (1979).
- [34] S. Müller, Paper presented at the course, *Classical and Advanced Theories of Thin Structures : Mechanical and Mathematical Aspects*, CISM, Udine, 5-9 June 2006.
- [35] P.M. Naghdi, Foundations of elastic shell theory, In *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4. North-Holland, Amsterdam, 1963, 1-90.
- [36] R. Paroni, P. Podio-Guidugli, G. Tomassetti, The Reissner-Mindlin plate theory via Γ -convergence, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I*, 343, 437-440, (2006).

- [37] H. Pham Huy, E. Sanchez-Palencia, Phénomène de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée, *J. Math. Anal. Appl.*, 47, 284-309, (1974).
- [38] P. Podio-Guidugli, An exact derivation of the thin plate equation, *J. Elasticity*, 22, 121-133, (1989).
- [39] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Coques élastiques minces : propriétés asymptotiques*, Masson, Paris, 1997.
- [40] M. Serpilli, A geometrical deduction of the kinematics of shells models, en préparation.
- [41] M. Serpilli, S. Lenci, Limit models in the analysis of three different layered elastic strips, *Eur. J. Mech. A Solids*, 27, 247-268, (2008).
- [42] T.W. Ting, St. Venant's compatibility conditions, *Tensor, N. S.*, 28, 5-12, (1974).
- [43] V. Volterra, Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes, *Annales Scientifiques de l' E.N.S., 3ème Série*, 24, 401-517, (1907).