



HAL
open science

Analyse et simulation de réseaux d'automates

Marc Legendre

► **To cite this version:**

Marc Legendre. Analyse et simulation de réseaux d'automates. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT: . tel-00304329

HAL Id: tel-00304329

<https://theses.hal.science/tel-00304329>

Submitted on 22 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble

et à

l' Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR INGÉNIEUR

«Mathématiques appliquées»

par

LEGENBRE Marc



ANALYSE ET SIMULATION DE

RESEAUX D'AUTOMATES



Thèse soutenue le 8 novembre 1982 devant la commission d'examen

N. GASTINEL

Président

E. GOLES

P. JORRAND

F. ROBERT

Examineurs



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépto-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM. BUTEL Jean	Orthopédie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
CHATEAU Robert	Clinique neurologique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
DENIS Bernard	Clinique cardiologique
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electro-radiologie
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Hermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire
LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Sémeiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDQ Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et crytogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MM. VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Biophysique
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
BEGUIN Claude	Chimie organique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
BUISSON Roger	Physique IUT 1
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
COHEN Henri	Mathématiques pures
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CONTE René	Physique IUT 1
CYROT Michel	Physique du solide
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
GLENAT René	Chimie organique
GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KERCKOVE Claude	Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
----	--------------	-----------------

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogénèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépatogastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophthalmologie

MM. PARAMELLE Bernard	Pneumologie
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
RAPHAEL Bernard	Stomatologie
SCHAEFER René	Cancérologie
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie
STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique



INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD

M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

C.E.N.G.

MM. SARRAZIN Pierre
 SOUQUET Jean-Louis
 TOUZAIN Philippe
 URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
 BOOS Jean-Yves
 GUILHOT Bernard
 KOBILANSKI André
 LALAUZE René
 LANCELOT Francis
 LE COZE Jean
 LESBATS Pierre
 SOUSTELLE Michel
 THEVENOT François
 THOMAS Gérard
 TRAN MINH Canh
 DRIVER Julian
 RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
 CHEHIKIAN Alain
 VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
 DESCHIZEAUX Pierre
 GLANGEAUD François
 JAUSSAUD Pierre
 Mme JOURDAIN Geneviève
 MM. LEJEUNE Gérard
 PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
 LATOMBE Jean-Claude
 LUCAS Michel
 VERDILLON André



A MES PARENTS



J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur F.Robert qui a bien voulu diriger cette thèse, pour la sympathie, les critiques et encouragements prodigués au cours de mon travail.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur N.Gastinel en acceptant de présider mon jury. Je tiens à lui exprimer ma sincère reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Messieurs P.Jorrand et E.Goles d'avoir bien voulu prendre siège au sein de mon jury.

Je tiens à remercier les membres de l'Equipe d'Analyse Numérique et tout particulièrement Monsieur M.Tchuente pour ses nombreux conseils et encouragements .

Enfin, que soient remerciés ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail et tout particulièrement Madame C.Meyrieux.



T A B L E D E S M A T I E R E S

[0]	I N T R O D U C T I O N.....	1
[1]	C H A P I T R E 1 :	
	R E S E A U X D ' A U T O M A T E S : N O T I O N S D E B A S E , R E S U L T A T S R E C E N T S.....	5
	1 : I n t r o d u c t i o n.....	7
	2 : D é f i n i t i o n s , N o t a t i o n s , R a p p e l s.....	8
	2.1. R é s e a u x d ' a u t o m a t e s.....	8
	2.2. R é s e a u x d ' a u t o m a t e s l o c a u x....	11
	2.3. A u t o m a t e s c e l l u l a i r e s u n i f o r m e s	14
	3 : R é s e a u x d ' a u t o m a t e s à s e u i l.....	15
	3.1. D é f i n i t i o n s , R a p p e l s.....	15
	3.2. A p p l i c a t i o n f o n c t i o n s d o u b l e s e u i l	16
	3.3. C o m p l é m e n t s , c o n c l u s i o n s.....	18
	4 : C o n c l u s i o n.....	19
[2]	C H A P I T R E 2	
	A U T O M A T E S C E L L U L A I R E S A S E U I L R E F R A C T A I R E S	21
	1 : I n t r o d u c t i o n.....	23

2 :	Présentation de l'automate, rôle des paramètres.....	24
3 :	Cas où $dg(i) = \theta_i$, $(i=1,\dots,n)$	27
4 :	Cas où $\theta_1 = 1$, $(i=1,\dots,n)$	34
	4.1. Notations, Rappels.....	34
	4.2. Analyse du comportement.....	37
	4.3. Application (importante).....	59
5 :	Cas général : $1 < \theta_i < dg(i)$, $(i=1,\dots,n)$	61
6 :	Conclusion.....	68

[3] C H A P I T R E 3

	UN OUTIL POUR L'EXPERIMENTATION : "SYGEDISC"	69
1 :	Introduction.....	71
2 :	Evolution d'un réseau d'automates : Questions posées.....	72
3 :	Description de "Sygedisc".....	75
	3.1. Organigramme.....	76
	3.2. Description des différentes parties du système.....	77
	3.2.1 Première étape : entrée des paramètres.....	77
	3.2.2 Deuxième étape : évolution de l'automate.....	80
	3.3. Indications sur le temps de calcul.....	81
4 :	Conclusion.....	83

[4]	C H A P I T R E 4	
	ETUDE D'UNE CLASSE D'AUTOMATES CELLULAIRES	
	UNIFORME A SEUIL.....	85
	1 : Introduction.....	87
	2 : Présentation, Rappels.....	88
	3 : V = "Voisinage Von Neumann".....	92
	3.1. Notations, Hypothèses.....	92
	3.2. Organisation des cellules dans le cycle.....	94
	3.3. Question du transitoire.....	103
	3.4. Cas non symétrique.....	106
	4 : Voisinage de Moore généralisé.....	112
	4.1. Notations, Hypothèses.....	112
	4.2. Identification avec automate de H.D. SCHULTZ.....	113
	4.3. Analyse du comportement itératif	115
	4.4. Synthèse.....	124
	5 : Conclusion.....	125
[5]	C H A P I T R E 5	
	AUTOMATES CELLULAIRES UNIFORMES REFRACTAIRES	
	A SEUIL	127
	1 : Introduction.....	129
	2 : Présentation de la famille d'automates..	130
	2.1. Définitions, rôle des paramètres	130
	2.2. Liens avec automates existants : Questions posées.....	132

3 :	Analyse du comportement itératif.....	134
3.1.	Cas où $E = R = 1$:	
	Comportement 2-cyclique.....	134
3.2.	Cas général.....	135
3.2.1.	Automate non expansif.....	135
3.2.2.	Cas expansif.....	142
4 :	Conclusion.....	148
[6]	C O N C L U S I O N.....	151
 A N N E X E		
	Déroulement d'une cession de "Sygedisc".....	153
 R E F E R E N C E S		

I N T R O D U C T I O N G E N E R A L E

Cette thèse est consacrée à l'analyse du comportement itératif de réseaux d'automates. D'une façon générale nous nous intéressons aux propriétés de l'itération

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ z_n = f_n(y_1, \dots, y_n) \end{array} \right.$$

les variables y_i étant astreintes à un ensemble fini.

Les réseaux d'automates interviennent dans la modélisation discrète de phénomènes d'origines diverses : modèles en sociologie [17], physique statistique [15], chimie [10]. Cette approche discrète est d'origine relativement récente et on dispose de peu d'outils d'analyse mathématique pour étudier ces modèles.

En règle générale, s'intéresser au comportement itératif d'un réseau d'automates c'est chercher des informations sur la longueur des cycles limites, le nombre de pas nécessaire pour les atteindre à partir de configurations initiales données, sur l'organisation des états d'automates dans le cycle.

En ce qui concerne le premier aspect du problème (longueur du cycle limite), des résultats ont été obtenus récemment pour certains réseaux d'automates, il en sera fait référence par la suite. Il n'en est pas de même en ce qui concerne les autres aspects.

C'est dans ce cadre que parallèlement et en lien avec l'analyse théorique, il nous a paru nécessaire de recourir à une démarche expérimentale afin de mieux comprendre les mécanismes d'évolution de réseaux d'automates. A cet effet, nous avons été amené, dès le début de notre travail à élaborer un système informatique de simulation de réseaux d'automates dont la description est l'objet du chapitre 3 de cette thèse.

Alliant cet outil expérimental aux méthodes d'analyse en notre possession, nous nous sommes intéressés à l'étude (théorique et expérimentale) de certains modèles discrets.

Ainsi, au premier chapitre, après avoir fait quelques rappels et notations, nous nous intéressons au comportement cyclique des fonctions à seuil dont l'étude a fait l'objet de travaux récents ([18] et surtout [6]) ; nous montrons que ces fonctions englobent une famille d'automates servant à la modélisation de phénomènes de ségrégation (fonctions "double seuil" [17]), ceci en opérant une reformulation de ces fonctions. Nous pouvons ainsi répondre à des questions, restées sans réponse jusqu'à présent, concernant la période du cycle limite. Ce résultat trouve une application au chapitre 4 qui traite des fonctions opérant sur Z^2 (automates cellulaires uniformes à seuil) ; en exploitant les possibilités du système "Sygedisc" et en faisant la synthèse de résultats obtenus dans [6] et [19] (sur les fonctions "double seuil"), nous faisons une analyse du comportement spatio-temporel de ces fonctions, étudiant entre autres l'influence des paramètres sur la structure du cycle limite.

Les réseaux d'automates à seuil réfractaires constituent la deuxième classe de fonctions analysée dans

cette thèse. Ces réseaux d'automates sont dérivés de modèles discrets de simulation en chimie (réaction de Bélousov-Zhabotinski [9]) : leur appellation vient du fait que lorsque l'un d'entre eux a été excité (suivant une règle de seuil prenant en compte l'ensemble de ses voisins), il traverse une période réfractaire (il n'exerce ou ne reçoit aucune influence sur ses voisins). Des résultats ont été récemment obtenus dans le cas d'automates opérant sur des pavages réguliers du plan (voir [11] puis [2]). Nous adaptons l'analyse faite aux cas de graphes de connection quelconques (éventuellement planaires) ; utilisant des décompositions de graphes dans des bases de circuits élémentaires, nous établissons des conditions portant sur les paramètres de l'automate permettant de déterminer la longueur des cycles limites.

Le chapitre 5 constitue une application de cette étude aux cas de fonctions opérant sur Z^2 (automates cellulaires uniformes réfractaires à seuil) cette classe englobe des réseaux d'automates étudiés récemment ([9], [18]), sous des motivations différentes, et sans que les liens entre eux aient été dégagés à l'époque.

De la même manière qu'au chapitre 4 pour les fonctions à seuil, nous analysons le comportement spatio-temporel de ces fonctions, ceci pour différentes zones de paramètres.

En conclusion, nous voyons comment l'interaction entre l'analyse conceptuelle et la simulation expérimentale nous a permis d'aller plus loin dans l'analyse du comportement itératif de réseaux d'automates.

C H A P I T R E 1

R E S E A U X D ' A U T O M A T E S

N O T I O N S D E B A S E

R E S U L T A T S R E C E N T S

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons des notions de base sur la théorie des automates cellulaires, fixant ainsi le cadre de notre travail :

l'analyse de leur comportement itératif.

Nous rappelons et introduisons des définitions et notations que nous utiliserons dans la suite de cette thèse. Par ailleurs nous faisons le point sur la théorie des automates à seuil qui forment une classe importante d'automates cellulaires. En effet, l'étude de leur comportement itératif intéresse de nombreux domaines (modèles de sociologie [18], [19], physique statistique [16]) et a fait l'objet de travaux récents [6] : nous donnons quelques exemples d'application.

2. DEFINITIONS, NOTATIONS
et RAPPELS

Dans tout ce qui suit, on désignera par Q un ensemble fini dont les éléments sont appelés états.

On pose $q = [Q]$.

$q_0 \in Q$ est en état particulier appelé état de repos.
La terminologie de la théorie des graphes est celle de C. Berge [4].

2.1. Réseau d'automates.

Définition 1

n étant un entier > 1 , on appelle réseau d'automates la donnée d'un triplet (Q^n, q_0, F) où F désigne une application de Q^n dans lui-même vérifiant :

$$F(q_0, \dots, q_0) = (q_0, \dots, q_0) .$$

On désigne par $\{f_i\}, 1 \leq i \leq n$ les composantes de F .

Définition 2

On appelle matrice d'incidence, notée $B(F)$ la matrice booléenne suivante :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } f_i \text{ dépend de } y_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$1 < i < n$
 $1 < j < n$

avec $y = (y_1, \dots, y_n)$ un vecteur de Q^n .

On appelle graphe de connection noté $G(F)$ le graphe

$G(F) = ([n], U)$ avec :

$$[n] = \{1, \dots, n\}$$

$$u = (i, j) \in U \iff b_{j,i} = 1 .$$

Interprétation

En chaque sommet i du graphe de connection est placé un automate M_i ayant q états possibles ; f_i désigne la règle de transition de cet automate qui admet pour variables d'entrées les états des automates M_j tels que (j,i) est un arc de G .

De façon générale, on s'intéresse à la longueur des cycles de l'itération parallèle

$$\begin{cases} y^{r+1} = F y^r & , \quad r=0,1,2 \\ y^0 \in Q \end{cases}$$

ceci pour différents réseaux d'automates.

Dans la pratique nous aurons la plupart du temps affaire à la situation suivante : le réseau d'automates est défini à partir de son graphe de connection et de la donnée des règles locales de transition.

Plus précisément on désignera par :

- * $G = ([n],U)$ graphe simple orienté ou non suivant les cas
- Pour $i \in [n]$, $V(i) = \{ j / (i,j) \in U \}$.

*

$X \xrightarrow{c} Q$: c application de X dans Q notée configuration.
 C désigne l'ensemble des configurations.

- * $F = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$: opérateur global de transition.

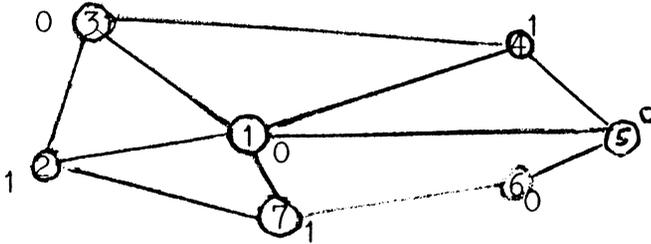
f_i : règle de transition en i définie au sens que f_i ne dépende que des valeurs de c en x_i et ses voisines.

Si $V(i) = \{i, j_1, \dots, j_i\}$ on désigne (abus de notation) par $c(V(i))$ l'ensemble suivant : $\{c(i), c(j_1), \dots, c(j_i)\}$, ceci pour des commodités d'écriture.

On donne ci-dessous l'exemple d'un réseau d'automates défini à partir du graphe de connection et des règles locales de transition.

Exemple 1

Soit le graphe suivant :



$$Q = \{ 0, 1 \}$$

c^0 , configuration de "0s" et de "1s" aux sommets du graphe.

$\forall i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, on pose :

$S_1(i)$ nombre de voisins de i à "1"

$S_0(i)$ nombre de voisins de i à "0"

$F = (f_i)$ est ainsi définie : $F : C \longrightarrow C$

$$f_i(c)(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_1(i) > S_0(i) \\ 0 & \text{si } S_1(i) < S_0(i) \\ c(i) & \text{si égalité} \end{cases}$$

On a ainsi défini un réseau d'automates par son graphe de connection et des règles locales de transition.

Dans le cas de cet exemple, on démontre [6] que

l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ converge vers un point fixe ou

un cycle de longueur 2. Plus généralement, on sait que, X ou Q^n étant de dimension finie, toute itération de ce type converge en un nombre fini de pas vers un cycle de longueur finie.

Etudier le comportement itératif d'un réseau d'automates c'est, tout à la fois s'intéresser au nombre d'éléments du cycle limite, à la longueur du transitoire y aboutissant, ainsi qu'à l'organisation des cellules dans le cycle.

2.2. Réseaux d'automates locaux.

Définition 3

Soit un réseau d'automates. Il sera dit local ssi :

$$f_i(c)(i) = \phi(c(v(i))) \text{ pour } i=1, \dots, n$$

$$\phi : Q^* \rightarrow Q \quad \text{avec } Q^* = Q \vee Q^2 \dots \vee Q^X$$

$$\phi(q_0, \dots, q_0) = q_0$$

interprétation

Connaissant la règle de transition de l'automate M_i placé en i on en déduit la règle de transition de l'automate M_j placé en j

Exemple : fonctions locales en dimension 2

A// Fonctions locales de type 1

On se donne :

$$* \quad X = Z_{n_1} \times Z_{n_2} \quad \text{et} \quad Z_{n_j} = \{\text{entiers modulo } n_j\}$$

$$* \quad Q = \{0, 1, \dots, q\}$$

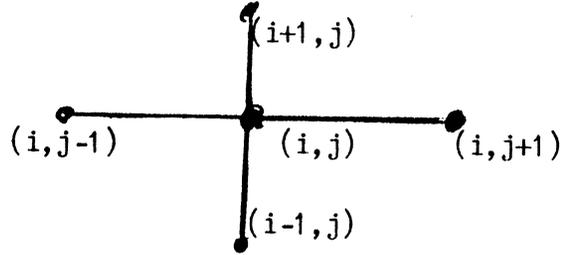
$$* \quad V : X \longrightarrow X^k, \text{ fonction voisinage ainsi définie :}$$

$$\text{si } x=(i, j), V(x) = [(i+v_1, j+v'_1), \dots, (i+v_k, j+v'_k)]$$

$$(v_\ell, v'_\ell) \in Z_{n_1} \times Z_{n_2} .$$

l'addition est prise dans Z_{n_j} ($j=1, 2$).

Exemple : voisinage
Von Neumann



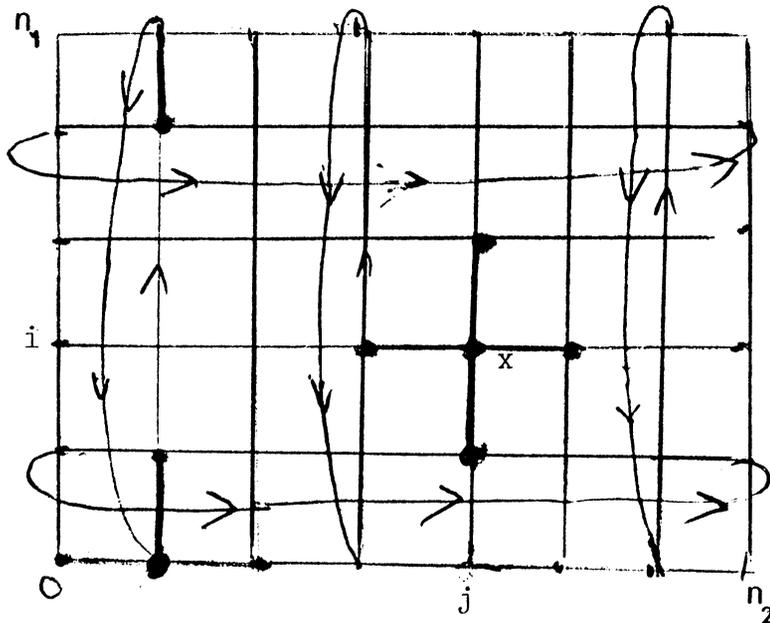
* $F : C \rightarrow C$

$F(c)(x) = \delta(c(V(x)))$, avec $\delta : q^h \rightarrow Q$

opérateur local de transition.

Les fonctions locales de type 1 appartiennent bien à la classe ci dessus .

Représentation fonction locale de type 1.



B// Fonctions locales de type 2

On se donne successivement :

* $X = \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\}$

* $Q = \{0, 1, \dots, q\}$

* Pour k entier fixé on définit la fonction V voisinage :

$$V(x) = \{z \in X / \exists \lambda, 1 < \lambda < k \quad z = x + \tilde{v}_\lambda\}$$

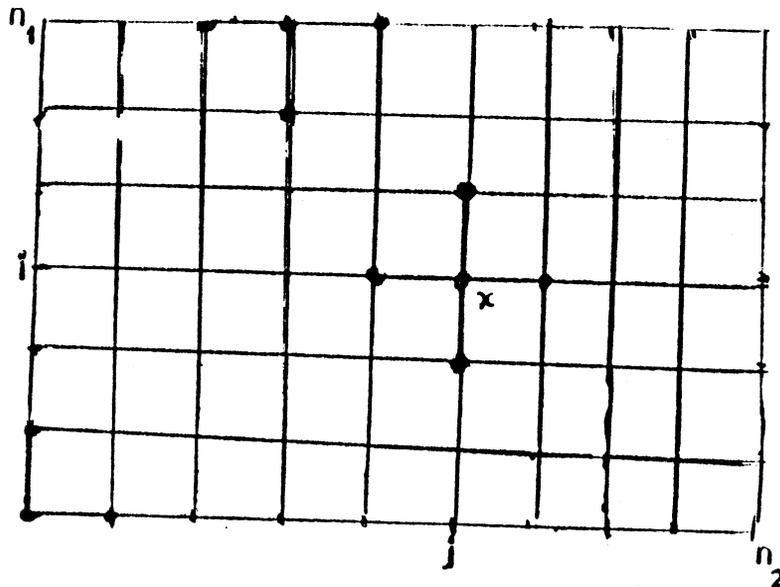
$$\tilde{v}_\lambda = (v_\lambda, v'_\lambda) \in X \cup \{(0,0)\} \quad 1 \leq \lambda < k$$

* $F : C \longrightarrow C$

$$F(c)(x) = \delta(c(V(x)))$$

avec $\delta : Q \cup Q^2 \cup \dots \cup Q^k \rightarrow Q$ règle locale de transition.

**Représentation fonction locale de type 2 :
(Voisinage de Von Neumann) .**



Le graphe de connection est un borné rectangulaire de Z^2 . La notion d'automate cellulaire local sera largement utilisée dans la suite puisqu'elle sert de support mathématique aux modèles de simulation présentés au chapitre III.

2.3. Automates cellulaires uniformes

Définition 4 :

Un automate cellulaire uniforme est caractérisé par la donnée de (Z^n, V, Q, q_0, S) avec :

- Z^n : espace cellulaire ($n = 1, 2$)
- Q, q_0 même définitions qu'en 2.1
- $\delta : Q^n \xrightarrow{\delta} Q$ fonction locale de transition vérifiant
- $\delta(q_0, \dots, q_0) = q_0$

Une configuration c est une application de Z^n dans Q vérifiant $\text{SUPP}(c) = |\{z \in Z^n / c(z) \neq q_0\}| < \infty$.

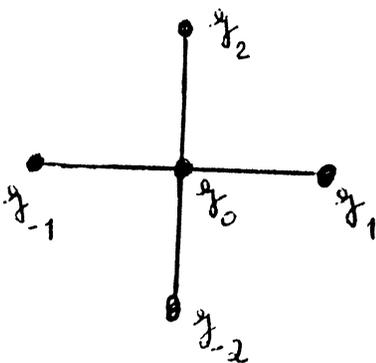
C désigne l'ensemble des configurations.

On appelle fonction globale de transition une application Δ de C dans C vérifiant :

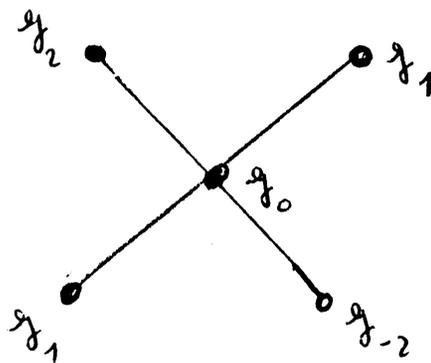
$$\forall c \in C, c' = \Delta c(x) = \delta[c(x+v_{-q}), \dots, c(x+v_p)]$$

Δc s'obtient par application en parallèle de la fonction locale de transition à toutes les cellules de l'espace.

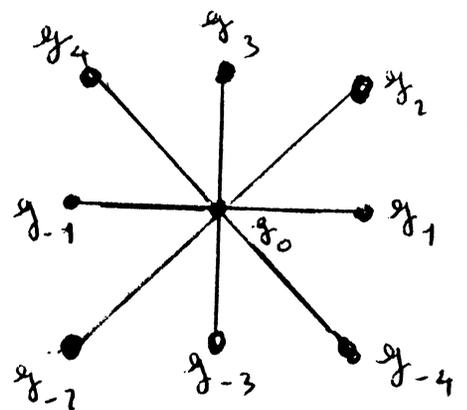
Exemple de voisinages



Von Neumann



Etoile



Moore

Définition 5

Δ est non expansive ssi Δ vérifie
 $SUPP(\Delta^s c) \subset H(c)$, $\forall s \in \mathbb{N}$,
 $H(c)$ étant un ensemble fini ne dépendant que de n

Si Δ est non expansive, l'étude de son comportement itératif se ramène à l'étude du comportement de fonctions locales en dimension 2 de type 2 (le domaine X étant le plus petit rectangle contenant $H(c)$).

3. RESEAUX D'AUTOMATES A SEUIL

Le comportement itératif de fonctions à seuil intéresse de nombreux domaines [6],[15],[17],[18],... Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats récents.

3.1 Définitions, rappels.

Définition 1 :

On appelle réseau d'automates à seuil le triplet $(Q^n, 0, F)$ avec $Q = \{0, 1\}$

$F : Q^n \rightarrow Q$, $F = (f_i)$ avec :

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \times y_j < \theta_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\theta_i, \alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$.

0 désigne l'état de repos.

L'étude du comportement itératif de ces fonctions n'est pas simple. Dans [6], E. Golès montre la proposition suivante :

Proposition 1 [6]

Si $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}$
 alors, l'itération $\begin{cases} y^{r+1} = F y^r \\ y^0 \in Q^n \end{cases}$ converge vers un point fixe
 ou un cycle de longueur 2.

Cette proposition, quoique restrictive, trouve son intérêt dans des domaines variés. L'exemple que nous donnons ci-dessous est dérivé d'un modèle de sociologie [17], repris sous une forme différente au chapitre 3.

3.2. Applications aux fonctions "double seuil".

On se donne successivement :

* $G = (X, U)$ graphe simple non orienté .

* $\theta_0 = \{\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0\}$ $dg(x)$: degré de x dans G
 * $\theta_1 = \{\theta_1^1, \theta_2^1, \dots, \theta_n^1\}$ $1 < \theta_x^j < dg(x)$, $x \in \{1, 2, \dots, n\}$
 $j = 0, 1$

* Si c désigne une configuration de "0_s" et de "1_s" aux sommets du graphe , on désigne par :

a/ Si $c(x) = 0$,
 $S_0(x)$ le nombre de sommets voisins de x dans l'état "0"
 y compris lui-même.

b/ Si $c(x) = 1$,
 $S_1(x)$ le nombre de sommets voisins de x dans l'état "1",
 y compris lui-même.

* F application de C dans C ainsi définie :

$$\text{Si } c(x) = 0 \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} F(c)(x) = 0 \text{ si } S_0(x) > \theta_x^0 \\ F(c)(x) = 1 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

$$\text{Si } c(x) = 1 \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} F(c)(x) = 1 \text{ si } S_1(x) > \theta_x^1 \\ F(c)(x) = 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Proposition 2

F est une application à seuil symétrique. Par conséquent, l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ converge vers un point fixe ou un cycle de longueur 2 .

Démonstration :

$$\text{Soit } S(x) = \sum_{\substack{j \in V(x) \\ j \neq x}} c(j)$$

$$\text{Si } c(x) = 0, \text{ alors : } S_0(x) = dg(x) - S(x) + 1$$

$$\text{d'où : } (S_0(x) > \theta_x^0) \iff (S(x) < dg(x) + 2 - \theta_x^0)$$

$$\text{Si } c(x) = 1, \text{ alors : } S_1(x) = S(x) + 1$$

$$\text{d'où : } (S_1(x) > \theta_x^1) \iff (S(x) > \theta_x^1 - 1)$$

Posant $h_x = \theta_x^1 - 1$ et $\theta_x = dg(x) + 2 - \theta_x^0$, on obtient :

$$F(c)(x) = 1[(\theta_x - h_x) c(x) + S(x) - \theta_x]$$

$$\text{avec : } 1[x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sous cette forme, on reconnaît sans peine que F est une fonction à seuil symétrique ($\alpha_{i,i} = \theta_x - h_x$, $\alpha_{i,j} = 1$ pour $i \neq j$)

Remarque

Quoique simple, ce résultat a un intérêt non négligeable car il permet de relier, comme nous le verrons au chapitre 4, des études menées sur des objets identiques, mais considérés comme différents jusqu'à présent.

3.3. Compléments , conclusion.

Longueur du transitoire :

Les résultats connus jusqu'à présent sont pauvres. Cette constatation n'est d'ailleurs pas particulière aux automates à seuil : en règle générale, il est plus facile d'obtenir la période du cycle limite que la longueur du transitoire. Donnons deux remarques :

- * Dans [7] , E.Golès exhibe une famille d'automates à seuil symétriques où la longueur du transitoire augmente en fonction exponentielle du nombre de sommets.
- * Dans le cas d'une fonction majorité sur Z^2 , nous montrons expérimentalement dans le chapitre 4 de ce travail que la longueur du transitoire est très faible par rapport au nombre de cellules.

Le problème reste donc largement ouvert...

Cas non symétrique

Le comportement itératif est beaucoup plus riche en ce sens qu'on peut obtenir des cycles longs ([6]). Nous verrons au chapitre 4 que le comportement 2-cyclique reste vérifié dans des cas particuliers.

4. C O N C L U S I O N

Ce chapitre sert d'introduction à l'analyse menée dans la suite de cette thèse : au chapitre suivant nous étudions, d'un point de vue théorique, une classe de fonctions généralisant les réseaux d'automates à seuil, ceci, en introduisant des paramètres supplémentaires. L'analyse des réseaux d'automates à seuil est reprise par ailleurs au chapitre 4 dans le cadre de leur extension sur Z^2 (automates cellulaires uniforme à seuil en dimension 2). Par ailleurs, la terminologie introduite à propos des fonctions locales en dimension 2 trouve son intérêt au chapitre 3 où nous présentons un système informatique modélisant le comportement itératif de ces fonctions.



C H A P I T R E 2

A U T O M A T E S C E L L U L A I R E S

A S E U I L R E F R A C T A I R E S

1. INTRODUCTION

La classe d'automates présentée dans ce chapitre est dérivée de modèles discrets de simulation provenant de la chimie (réaction de Belousov-Zhobotinski), de la biologie (comportement de neurones dans le cerveau). On peut décrire ces automates de la manière suivante ; on se donne un ensemble fini de cellules interconnectées , chaque cellule pouvant prendre trois types d'état : l'état de repos, l'état actif (la cellule exerce une influence sur ses voisines), l'état réfractaire (elle n'exerce aucune influence et ne peut être influencée). Le passage de l'état de repos à l'état actif est contrôlé par une règle de seuil (prise en compte des voisines à l'état actif) ; chaque cellule excitée reste active durant une certaine période, puis évolue vers l'état réfractaire avant de revenir à l'état de repos.

Nous donnons, dans des cas simples des résultats portant sur la longueur des cycles limites obtenus à partir de configurations initiales données ; l'analyse menée trouvera une utilisation au chapitre 5 où nous reprenons l'étude de ce type d'automates mais dans un contexte différent.

2. PRESENTATION DE L'AUTOMATE ;

ROLE DES PARAMETRES

On désigne successivement par :

* $G = (X, U)$ graphe simple non orienté connexe
 $\text{card}(X) = n$

* E, R entiers positifs.

* $Q = \{-R+1, \dots, 1, 0, 1, \dots, E\}$ ensemble d'états .

* $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $1 < \theta_i < \text{dg}(x_i)$

* Pour $c \in C$, l'application $F : C \xrightarrow{F} C$

$$F(c)(x) = \begin{cases} c(x)+1 & \text{si } \begin{cases} 1 < c(x) < E-1 \\ \text{ou} \\ -R+1 < c(x) < -1 \end{cases} \\ -R+1 & \text{si } c(x) = E \\ 1 \left[\sum_{y \in V(x)} \tilde{c}(y) - \theta_x \right] & \text{si } c(x) = 0 \end{cases}$$

$V(x)$ désignant l'ensemble des voisins de x dans G

$$\tilde{c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(x) \in [1, E] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$1[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

E s'appelle la période d'excitation.

R s'appelle la période de réfraction.

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse au
 comportement itératif de $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ en fonction des
 paramètres E, R, θ .

Dans des cas simples, nous donnons des conditions portant sur la structure du graphe de connection qui garantissant des périodes limites à 1 ou E+R .

Proposition 1 :

[Si E = R = 1 alors
 l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ converge vers le point fixe
 "0" (état de repos) ou vers un cycle de longueur 2.

Démonstration

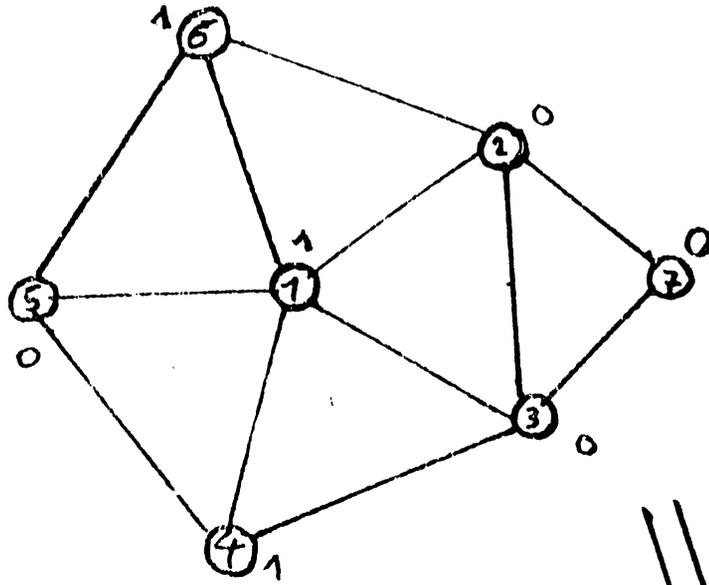
$\forall x \in X$, $\forall c \in C$, on a :

$$F(c(x)) = 1 \left[a_0 c(x) + \sum_{y \in V(x)} c(y) - \theta_x \right]$$

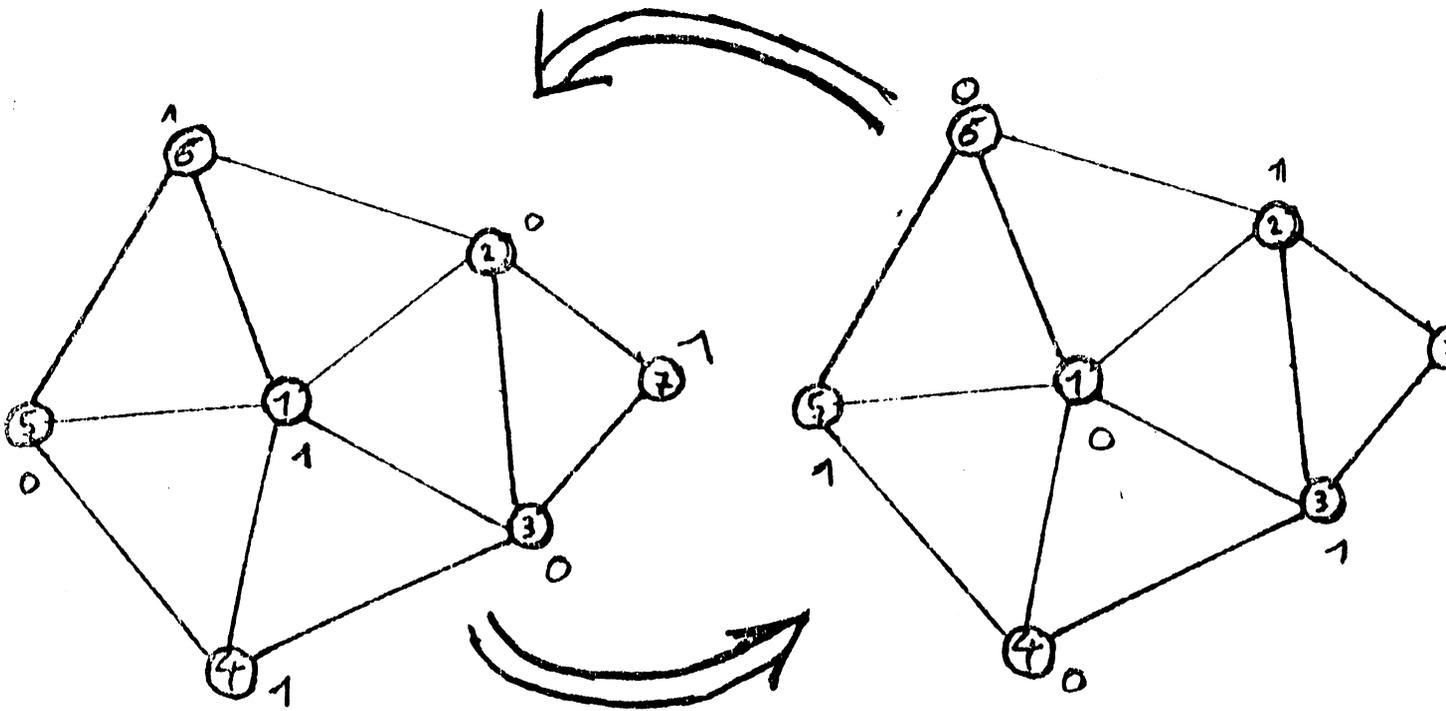
avec $a_0 < -n$.

F est donc une application à seuil symétrique et on peut appliquer les résultats connus.

Exemple :



$$\begin{aligned} \Theta_1 &= 3 \\ \Theta_j &= 2 \quad (j \geq 2) \end{aligned}$$



cycle limite de longueur 2 atteint en 1 pas

Supposons maintenant $(E,R) \neq (1,1)$ et ceci pour toute la suite

Définition 1 [11]

[Soit $q_1, q_2, \in \mathbb{Q}$. On appelle distance de q_1 à q_2 le nombre $\delta(q_1, q_2)$ tel que :
 $\delta(q_1, q_2) = \min(|q_2 - q_1|, E + R - |q_2 - q_1|)$

δ est en fait la distance usuelle sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p = E + R$

Nous allons analyser en détail le comportement itératif de l'automate dans les deux cas extrêmes suivants :

Premier Cas

Une cellule à l'état de repos devient active si toutes les voisines le sont ($\theta_i = dg(i), i = 1, \dots, n$)

Deuxième Cas

Une cellule à l'état de repos devient active si l'une au moins de ses voisines l'est ($\theta_i = 1, i=1, \dots, n$)

Nous donnerons enfin des indications sur le comportement itératif de cet automate dans le cas de seuils quelconques .

3. C A S O U $\theta_i = dg(i), i=1, \dots, n$

Sous cette condition, nous établissons la proposition suivante

Proposition 1 :

1/ Si $E < R$, l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$

converge en un nombre fini de pas vers le point fixe 0

2/ Si $E > R$, alors :

si $c^0 \in C$ vérifie la condition (P) suivante :

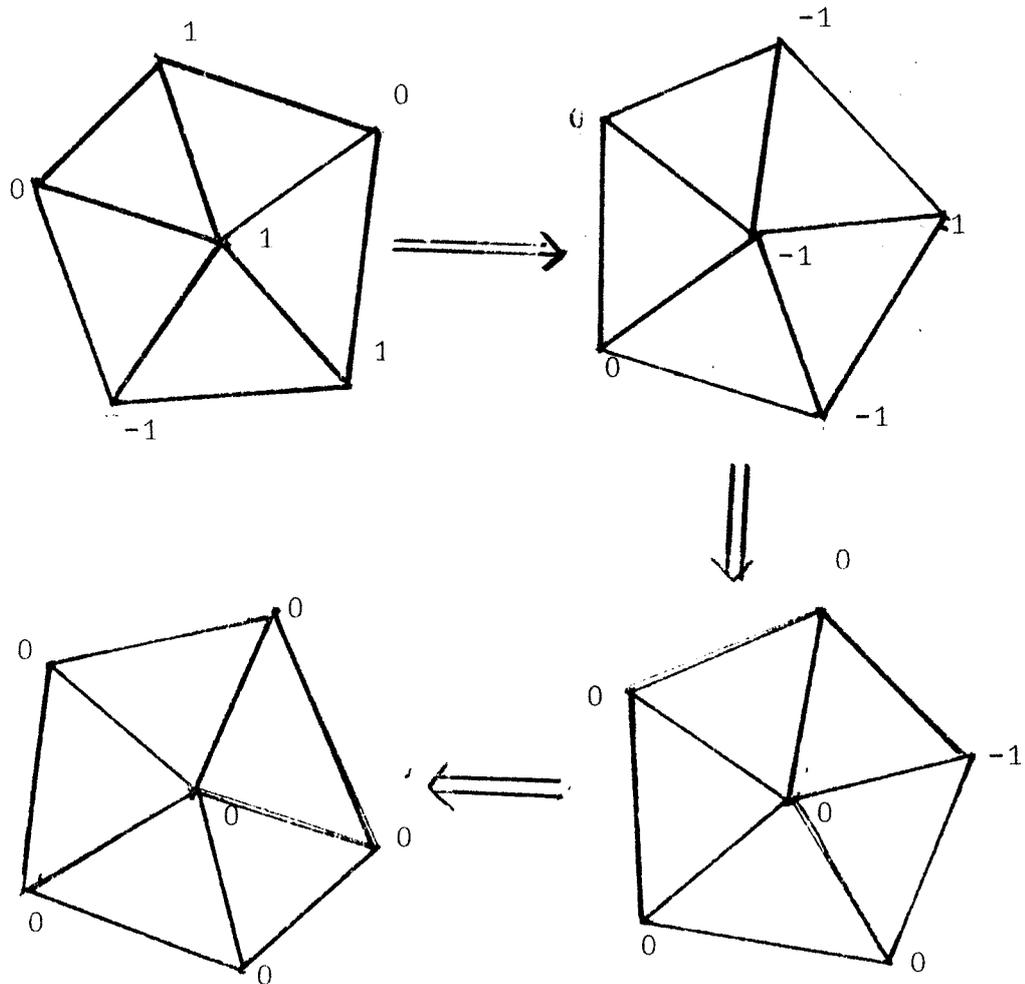
(P) $\forall u = (x,y) \in U : \delta(c^0(x), c^0(y)) > R$

alors c^0 fait partie d'un cycle de longueur $E + R$.

Sinon, l'itération converge en un nombre fini de pas vers le point fixe 0.

EXEMPLES :

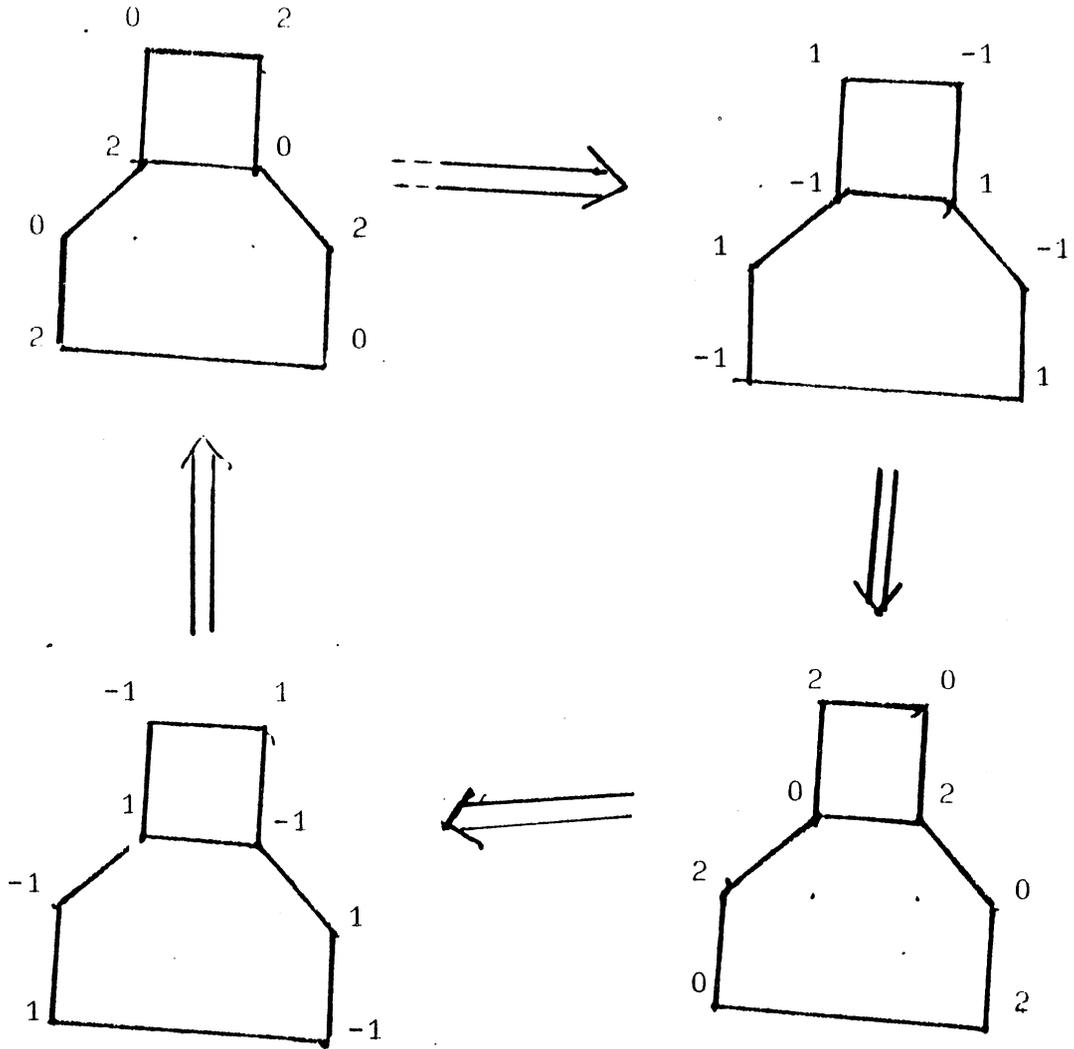
1 / $E = 1, R = 2$



Convergence vers le point fixe 0.

$2 / E = 2, R = 2$

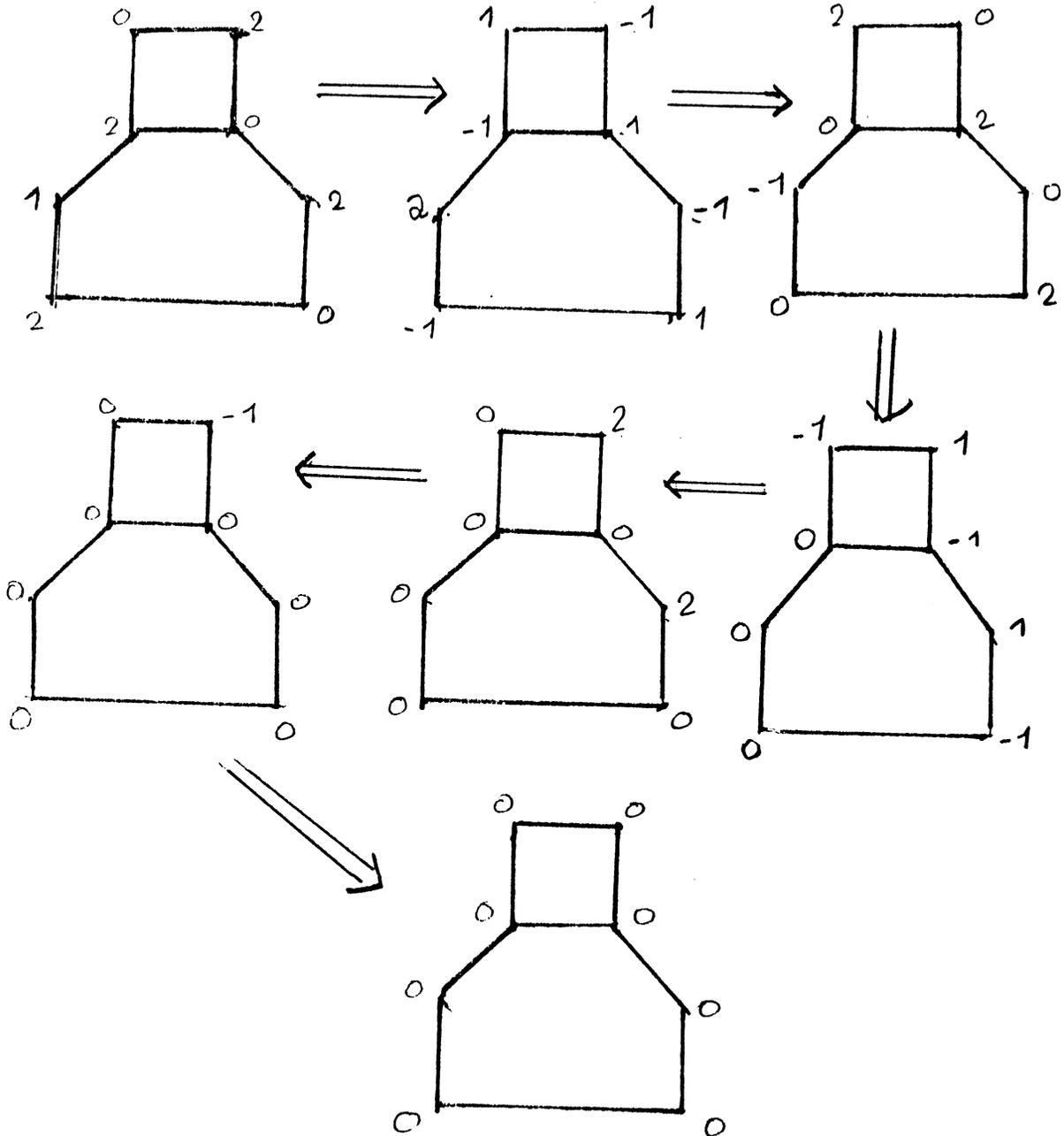
c^0 vérifie (P)



Cycle de longueur $E + R = 4$

3 / E = 2 , R = 3

c⁰ ne vé rifie pas (P)



Convergence en 6 pas vers le point fixe 0 .

Pour établir cette proposition, nous avons besoin de lemmes intermédiaires.

Lemme 1 :

$$\left[\begin{array}{l} \forall c^0 \in C, \text{ l'itération } \begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases} \text{ converge vers le} \\ \text{point fixe "0" ou un cycle de longueur } E + R . \end{array} \right.$$

Démonstration :

Si l'itération ne converge pas vers le point fixe 0, elle converge vers un cycle de longueur $> E + R$. Supposons que le cycle limite soit de longueur strictement supérieure à $E + R$.

On a alors la situation suivante :

$\exists x \in X$, $r > 0$ (r suffisamment grand pour que c^r soit dans le cycle) avec :

$$(1) : \begin{cases} c^{r-1}(x) = c^r(x) = 0 \\ c^{r+1}(x) = 1 \end{cases}$$

$$(1) \implies (2) : \exists y \in V(x), c^r(y) = 1$$

d'où $c^{r-1}(y) = 0$ et $c^{r-1}(x) > 1$ (impossible).

Lemme 2 :

$$\left[\text{Si } c \text{ vérifie (P), } F(c) \text{ vérifie (P)} \right.$$

Démonstration

Si c vérifie (P), on a nécessairement $E > R$.

Soit $u = (x, y)$:

* Si $c(x) \neq 0$ et $c(y) \neq 0$ on a :

$$\delta(c(x), c(y)) = \delta(F(c)(x), F(c)(y)) > R$$

* Si $c(x) = 0$ on a $c(y) > R$.

$$\text{Là encore } \delta(c(x), c(y)) = \delta(F(c)(x), F(c)(y))$$

δ est donc invariante par application de F .

Démonstration de la proposition 1

Si $c^0 \in C$ et vérifie (P), on a $F^{E+R}(c^0) = c^0$.
 c^0 est donc élément d'un cycle de longueur $E + R$;
inversement, supposons c^0 ne vérifie pas (P). (Ce qui
inclut entre autres le cas $E < R$), il existe $u = (x,y)$
avec $\delta(c^0(x), c^0(y)) < R$.
Supposons $c^0(x) = 0$ (on ne perd rien à la généralité).

Premier cas : $c^0(y) \leq 0$.

Pour $r \leq -c^0(y)$ on a : $c^r(x) = c^r(y) = 0$

G étant connexe, ceci implique la stabilité à 0 de
tous les sommets du graphe en nombre fini de pas .

Deuxième cas : $c^0(y) > 0$.

* Si il existe $z \in V(x)$ tel que $c^0(z) > 0$, on est
ramené au premier cas ;

* Sinon pour $r = E + R - c^0(y)$ on a : $\begin{cases} c^r(x) < 0 \\ c^r(y) = 0 \end{cases}$
et on est ramené au premier cas.

La proposition 1 est donc démontrée.

On s'intéresse maintenant au problème d'existence
d'une configuration initiale c^0 vérifiant (P) .

On rappelle que le nombre chromatique d'un graphe G , noté
 $\gamma(G)$ désigne le nombre minimum de couleurs à placer aux
sommets du graphe de telle sorte que deux sommets voisins
soient coloriés de manière différente .

Proposition 2

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe
 c^0 vérifiant (P) s'exprime sous la forme : $\gamma(G) \leq \frac{E}{R} + 2$

Démonstration

Si $\frac{E}{R} > \gamma(G) - 1$ on peut disposer aux sommets du graphe les états $(k \text{ R})$ avec $k \in \{0, 1, \dots, \gamma(G) - 1\}$ de manière telle que deux sommets voisins soient dans des états différents (vérifient P).

Par ailleurs, s'il existe c^0 vérifiant (P) on partitionne Q ainsi : $Q = \underbrace{\{-R+1, \dots, 1\}}_{Q_0} \underbrace{\{0, \dots, R-1\}}_{Q_1} \dots \underbrace{\{[\frac{E}{R}] \times R, \dots, E\}}_{Q_p}$

avec : $p = [E/R] + 1$, $\text{card}(Q_i) < R$.

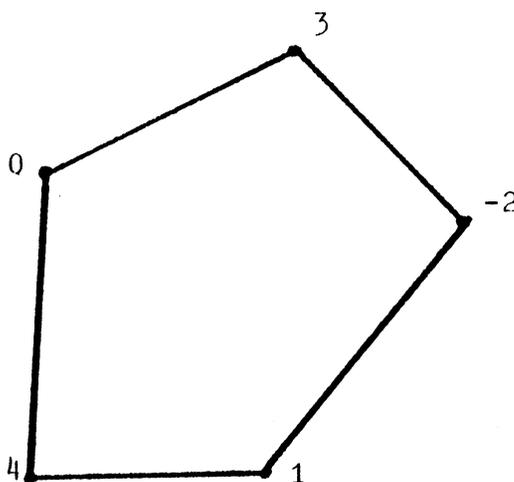
Pour tout $u = (x, y)$ avec : $\begin{cases} c^0(x) \in Q_i \\ c^0(y) \in Q_j \end{cases}$ on a $i \neq j$.

Ceci implique q'il existe une coloration des sommets du graphe en moins de $[\frac{E}{R}] + 2$ couleurs .

D'où $\gamma(G) < \frac{E}{R} + 2$

Cette borne est la meilleure possible , comme le montre l'exemple ci-dessous

$E = 5$
 $R = 2$
 $\gamma(G) = 3$
 $[\frac{E}{R}] = 1$



c^0 vérifie (P)

C A S O U $\theta_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$)

Ce cas constitue une généralisation d'automates étudiés d'une part par R.Shingai [18], d'autre part par J.Greenberg S.Hastings ([9],[10],[11]) notamment dans la modélisation de phénomènes de réaction diffusion en chimie (réaction de Belousov-Zhabotinski). Nous adaptons au cas d'un graphe simple connexe non orienté l'analyse menée par R.Shingai et par Greenberg Hastings (Voir notamment [11] repris et complété dans [2]) dans le cadre d'un pavage régulier du plan.

Nous donnons notamment des conditions portant sur la longueur des circuits élémentaires du graphe assurant une période limite égale à 1 ou $E + R$. Auparavant, nous avons besoin d'introduire des notations et de faire quelques rappels.

4.1. Notations , Rappels

- $u = (x,y)$ arête de G , c une configuration
- * $c(x)$ et $c(y)$ sont reliées ssi $\delta(c(x),c(y)) \leq E$.
 - * $c(x)$ et $c(y)$ sont fortement reliées ssi $\delta(c(x),c(y)) \leq E$
 - * Si $E > 2$, $c(x)$ et $c(y)$ sont faiblement reliées ssi $2 < \delta(c(x),c(y)) \leq E$

On vérifie aisément que :

Proposition 1 [1]

- [1/ Si $c(x)$ et $c(y)$ sont reliées, il en est de même pour $F(c)(x)$ et $F(c)(y)$.
- 2/ Si $c(x)$ et $c(y)$ sont fortement reliées, il en est de même pour $F(c)(x)$ et $F(c)(y)$.
- 3/ Si $c(x)$ et $c(y)$ sont faiblement reliées, on a alors $\delta(F(c)(x),F(c)(y)) \leq \delta(c(x),c(y))$

Conséquence

Dans le cycle limite, δ vérifie les propriétés suivantes :

- 1 $(\delta(c(x),c(y)) < 1) \implies (\delta(F(c)(x),F(c)(y)) < 1)$
- 2 $(\delta(c(x),c(y)) \in [2,E]) \implies (\delta(F(c)(x),F(c)(y)) = \delta(c(x),c(y)))$

La proposition 1 et les trois qui la suivent ont été établies dans [1] par Jp.Allouche C.Reder,dans le cadre d'un pavage régulier du plan. Les démonstrations sont en fait valables dans le cadre considéré (graphe simple connexe non orienté) Nous ne les reproduisons pas en raison de leur simplicité.

Proposition 2

Si dans le cycle limite de l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$

il existe une cellule stable à "0", il en est de même pour toutes les cellules.

Proposition 3:

Si dans le cycle limite de l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$

il existe une cellule de période $E + R$, il en est de même pour toutes les cellules

Proposition 4 :

Si dans le cycle limite de l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$

il existe $u = (x,y) \in U$ tel que x et y sont faiblement reliées, alors toute cellule est de période $E + R$

Introduisons maintenant les définitions suivantes [11] :

Définition 1 :

Une chaîne $ch = [x_0, x_1, \dots, x_p]$ est continue (fortement continue) à l'instant t si elle vérifie $\delta(c^t(x_i), c^t(x_{i+1})) < E$
 $0 < i < p - 1$

$$(\delta(c^t(x_i), c^t(x_{i-1}))) < 1)$$

De la même manière un circuit $C = (x_0, x_1, \dots, x_p = x_0)$ est continu (fortement continu) à l'instant t s'il vérifie

$$\delta(c^t(x_i), c^t(x_{i+1})) < E$$

$$0 < i < p - 1$$

$$(\delta(c^t(x_i), c^t(x_{i+1}))) < 1)$$

Définition 2 :

Si $q_1, q_2 \in Q$ on définit $\sigma(q_1, q_2)$ de la manière suivante :

$$\sigma(q_1, q_2) = \begin{cases} \delta(q_1, q_2) & \text{si } \delta(q_1, q_2) = \begin{cases} q_2 - q_1 \\ \text{ou} \\ E + R + q_2 - q_1 \end{cases} \\ - \delta(q_1, q_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 3 :

Indice d'un cycle continu : soit C un cycle continu à l'instant t ; on note $W_t(C)$ son indice à l'instant t défini de la manière suivante

$$W_t(C) = \frac{1}{E+R} \times \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(c(x_i^t), c(x_{i+1}^t)) \right)$$

On vérifie que [11].

Proposition 5:

Si $E < R$ l'indice d'un cycle continu vérifie les deux propriétés suivantes :

- a/ $W_t(C)$ est un entier
- b/ $W_{t'}(C) = W_t(C)$, $\forall t' > t$.

Remarque:

Cette proposition établie dans [11] pour le cadre d'un pavage régulier du plan reste là aussi valable dans le cas considéré . On trouvera par ailleurs dans [2] et [11] des interprétations de σ et de W_t .

Ces résultats servent d'outil à l'analyse qui suit.

4.2. Analyse du comportement itératif

Nous allons tout d'abord montrer qu'il n'est pas nécessaire de distinguer les deux cas : $E > R$ et $E < R$. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 6 :

Désignons $F_{E,R}$ l'automate paramétré par E et R . Si $E > R$ alors :

- 1/ S'il existe $u = (x,y) \in U$ tels que :

$$\delta(c^0(x), c^0(y)) > R$$

la période limite de l'automate est : $E + R$

- 2/ Sinon on a équivalence entre l'itération

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{r+1} = F_{E,R} c^r \\ c^0 \in \bar{C} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} c^{r+1} = F_{E',R'} c^r \\ c^0 \in \bar{C}' \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} E' = R - 1 \\ R' = E + 1 \\ \bar{C}' = \{ c \in C \ / \forall u = (x,y) \in U , \delta(c^0(x) , c^0(y)) < R - 1 \} \end{array} \right.$$

Application :

Si $R = 1$, la période limite de l'automate est
 $E + 1 = E + R$

En effet, si toutes les cellules de la configuration initiale ont le même état $0 < x < E$, l'automate évolue vers le point fixe 0 en un nombre fini de pas ; sinon, il existe $u = (x,y)$ tel que $\delta(c^0(x),c^0(y)) > 1$ et on peut alors appliquer la première partie de la proposition 6.

Démonstration de la proposition

* Supposons qu'il existe $u = (x,y)$ vérifiant :

$$\delta(c^0(x) , c^0(y)) > R$$

Si $c^0(x) = 0$ (resp. $c^0(y) = 0$) on obtient :
 $F(c^0)(x) = 1$ (resp. $F(c^0)(y) = 1$) car $E > R$

D'où : $\delta(F(c^0)(x),F(c^0)(y)) = \delta(c^0(x),c^0(y)) > R$
 et plus généralement :

$$\delta(F^r(c^0)(x) , F^r(c^0)(y)) = \delta(F^{r+1}(c^0)(x),F^{r+1}(c^0)(y)) > R$$

Par application des propositions 3 et 4 on obtient le résultat demandé (périodicité $E+R$ de l'automate).

* Supposons maintenant : $\forall u = (x,y) , \delta(c^0(x),c^0(y)) < R$

. Par application de la proposition 1 on obtient :

$$\delta(c^r(x),c^r(y)) < R \quad (R < E)$$

Ceci veut dire que les états excitateurs sont en fait :

$$E = \{ 1,2,\dots,R-1 \} \quad \text{et que en posant} \quad \begin{cases} E' = R-1 \\ R' = E+1 \end{cases}$$

On se ramène à l'étude de l'itération :

$$\begin{cases} c^{r+1} = F_{E',R'}c^r \\ c^0 \in \bar{C} \end{cases}$$

avec $\bar{C} = \{ c \in C / \forall u = (x,y) \in U, \delta(c^0(x),c^0(y)) < E' \}$

La proposition qui suit est essentielle pour la suite de notre analyse.

Proposition 7 :

Soit $E < R$.

Supposons que l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ ne converge pas

vers le point fixe "0" et que de plus, dans le cycle limite, il n'existe pas deux cellules faiblement reliées. Alors tout $x \in X$ est relié dans le graphe de connection à un circuit élémentaire fortement continu par une chaîne fortement continue. De plus l'indice de ce circuit est non nul.

Démonstration

Soit $x_0 \in X$. D'après la proposition 2, x est non stable à 0.

$$\text{Donc : } \exists r > 0 \quad / \quad \begin{cases} c^r(x_0) = 0 \\ F(c^r)(x_0) = 1 \end{cases} \quad (\text{A})$$

(r est pris suffisamment grand pour être dans le cycle limite)

$$(\text{A}) \implies (\exists x_1 \in V(x_0) / c^r(x_1) = 1)$$

$$\text{Donc : } c^{r-1}(x_1) = 0 \quad \text{avec} \quad c^{r-1}(x_0) = 0 \quad \text{ou} \quad -1$$

Par conséquent :

$$\exists x_2 \in V(x_1), x_2 \neq x_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c^{r-1}(x_2) = 1 \\ c^{r-1}(x_1) = 0 \end{cases}$$

$c^r(x_1)$ et $c^r(x_2)$ sont fortement reliés dans le cycle limite.

Soit (x_k) une suite dans G et n_k une suite d'entiers définie comme suit

$$n_0 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k \in V(x_{k-1}) \\ x_k \neq x_{k-2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} c^{r-n_{k-1}}(x_k) = 1 \\ c^{r-n_{k-1}}(x_{k-1}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } \begin{array}{l} 1/ \quad n_k = n_{k-1} + 1 \quad \text{si } c^r(x_k) \neq 1 \\ 2/ \quad n_k = 1 \quad \text{si } c^r(x_k) = 1 \end{array}$$

On vérifie que :

- 1/ les suites (x_k) et (n_k) sont définies pour tout k
- 2/ les itérés successifs de la suite (x_k) sont fortement reliés avec de plus : $\sigma(c^r(x_k), c^r(x_k)) = 0$ ou 1

X étant fini, la suite (x_k) aboutit nécessairement en un nombre fini de pas à un circuit élémentaire de longueur p .

Soit C ce circuit.

$$C = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p-1}, x_{k+p} = x_k)$$

$$\text{posons : } t' = r - n_k$$

A l'instant t' , l'état des cellules dans le cycle C est de la forme $(1, 2, \dots, E, -R+1, \dots, -1, 0^+)^+$, a^+ désignant une suite finie du mot a . On en déduit

$W_t(C) = k$, $k \neq 0$, k désignant le nombre d'occurrences de la suite $(1, 2, \dots, E, -R+1, \dots, -1, 0^+)$.

Ceci clôt la démonstration de cette proposition.

Le théorème ci dessous décrit le comportement itératif de l'automate pour le cas de graphes n'admettant pas de circuit élémentaire de longueur supérieure à $E+R-1$.

Théorème 1

Si G n'admet pas de circuit élémentaire de longueur supérieure à $E + R - 1$, alors l'itération :

$$\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases} \text{ converge en un nombre}$$

fini de pas vers le point fixe O ou vers un cycle de longueur $E + R$.

Plus précisément :

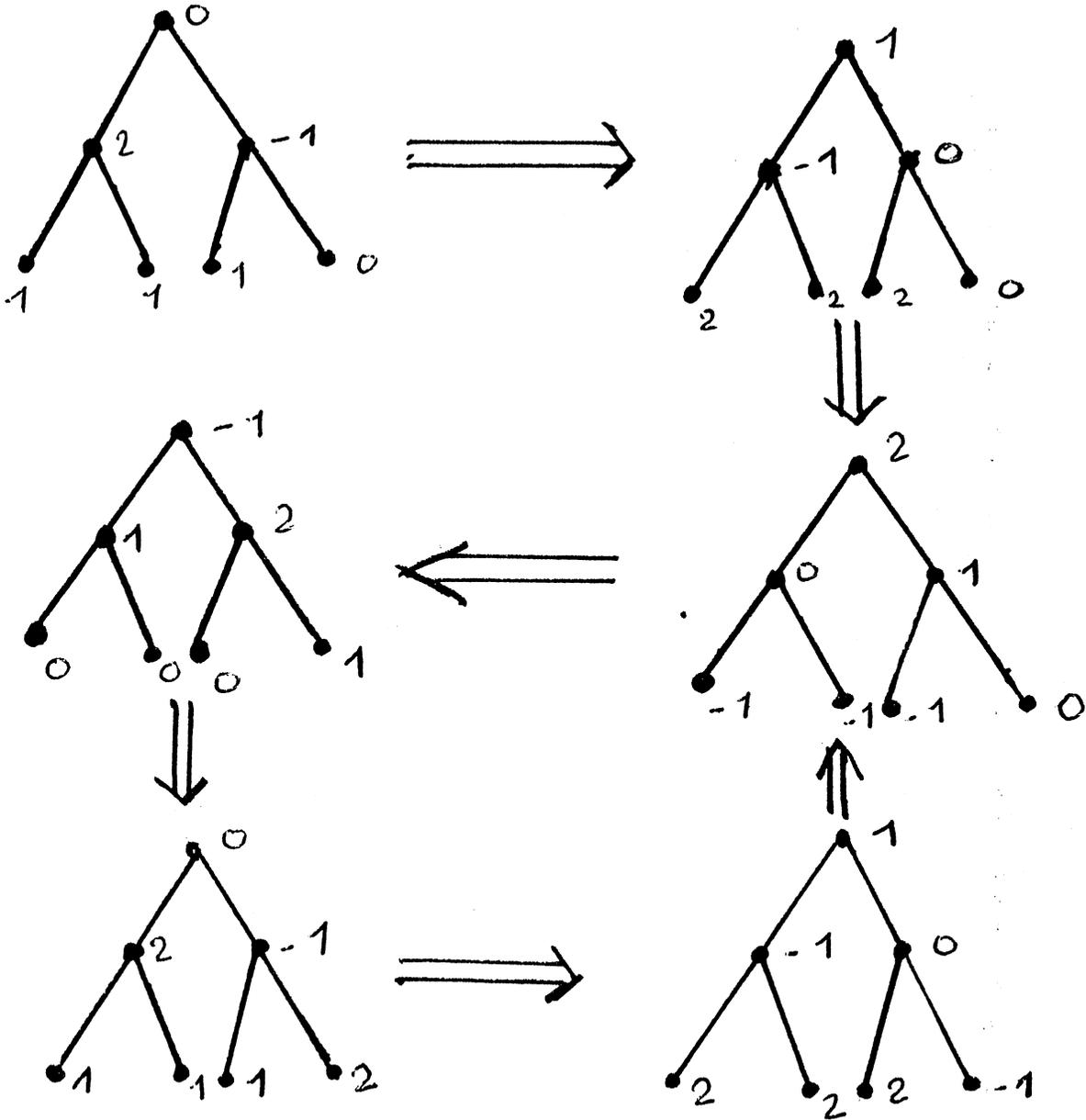
- 1/ Si $E = 1$, l'itération aboutit au point fixe "0" .
- 2/ Si G est un arbre, alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'itération aboutisse à un cycle de longueur $E + R$ s'exprime sous la forme :

$$(P) \exists (x, y) \in U / \delta(c^0(x), c^0(y)) > R$$

Exemples : pages suivantes

$E = 2, R = 2.$

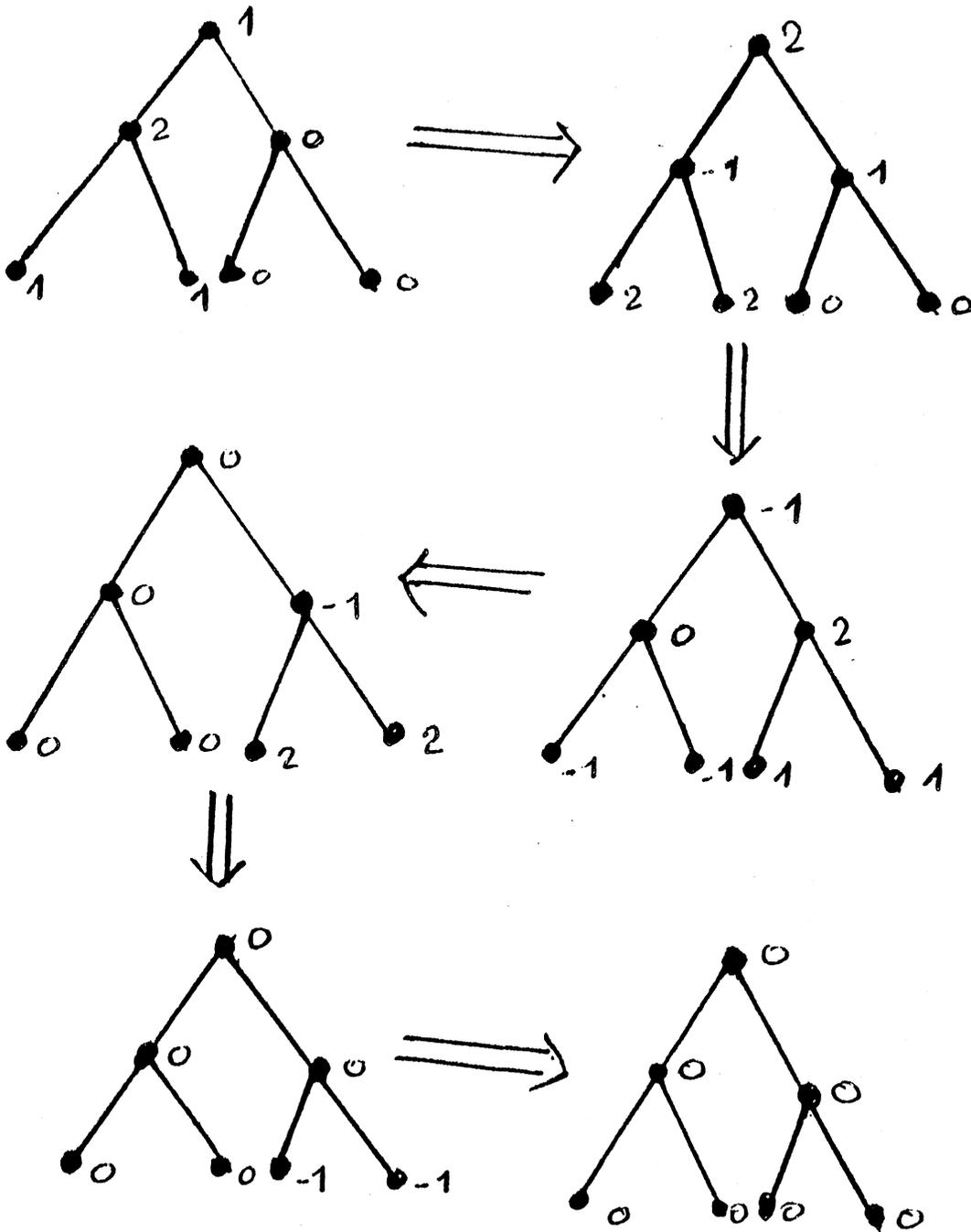
G est un arbre, c^0 vérifie (P)



Cycle de longueur $E + R = 4$

2 / E = 2 , R = 2

G est un arbre , c^0 ne vérifie pas (P) .



Point fixe 0 atteint en 5 pas

Démonstration du théorème 1

* Par application de la proposition 6, si c^0 vérifie (P), on obtient la périodicité $E + R$ pour l'automate.

* Supposons pour toute la suite c^0 ne vérifie pas (P). Si dans le cycle limite, il existe deux cellules faiblement reliées, alors la proposition 4 prouve la périodicité

$E + R$ pour l'automate. Montrons que si cette dernière condition n'est pas réalisée la période limite est 1.

En effet, si le cycle limite n'est pas réduit au point fixe 0 nous pouvons appliquer la proposition 7. Il existe un circuit élémentaire $C = (y_0, \dots, y_{p-1}, y_p = y_0)$ et un instant t tel que :

$$1/ \quad c^t(y_0) = 1$$

$$2/ \quad c^{t-p}(y_0 = y_p) = 1$$

La cellule y_0 est deux fois (au moins) à l'état "1" entre les instants $t-p$ et p : ceci implique $p > E + R$ ce qui est impossible car G ne possède pas de circuit élémentaire de longueur supérieure ou égale à $E + R$.

Nous ne sommes pas dans les conditions d'application de la proposition 7 et la période limite est donc 1.

* Cas particulier

$E = 1$; il ne peut pas y avoir de cellules faiblement reliées dans le cycle limite, la période limite est donc 1.

* Supposons, et pour la suite de cette démonstration $E > 2$.

Lemme 1 :

[Si G est un arbre, et si de plus c^0 ne vérifie pas
	(P) l'itération $\left\{ \begin{array}{l} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{array} \right.$ aboutit au point fixe
	0 en un nombre fini de pas.

Démonstration du lemme

Si c^0 ne vérifie pas (P), il en est de même pour $c^r = F c^{r-1}$, $\forall r > 0$.

Plaçons-nous alors dans le cycle limite de l'itération que nous supposons non réduit au point fixe "0".

Il existe t_0, x_0 avec : $c^{t_0}(x_0) = 0$ et $c^{t_0+1}(x_0) = 1$

Donc : $\exists x_1 \in V(x_0) / c^{t_0}(x_1) = \lambda_1$

avec : $\lambda_1 \in [0, \min(E, R - 1)]$

à $t_0 - \lambda_1$ nous avons
$$\begin{cases} c^{t_0 - \lambda_1}(x_1) = 0 \\ c^{t_0 - \lambda_1}(x_0) < 0 \end{cases}$$

d'où $\exists x_2 \in V(x_1) / c^{t_0 - \lambda_1}(x_2) = \lambda_2$

$\lambda_2 \in [0, \min(E, R - 1)]$

à $t_0 - \lambda_1 - \lambda_2$ nous avons
$$\begin{cases} c^{t_0 - \lambda_1 - \lambda_2}(x_2) = 0 \\ c^{t_0 - \lambda_1 - \lambda_2}(x_1) = 0 \end{cases}$$

De proche en proche on exhibe (λ_k, x_k) de la manière suivante

$$\begin{cases} x_k \in V(x_{k-1}), & x_k \neq x_{k-2} \\ \lambda_k = c^{t_0 - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j}(x_k) \end{cases}$$

avec $\lambda_k \in]0, \min(0, R-1)]$.

X étant fini, soit on ne peut plus construire la suite à partir d'un certain rang soit on exhibe un circuit élémentaire C' de longueur q

$$C' = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+q} = x_k)$$

mais $q \geq 2$ et donc : $x_k = x_{k+1}$ ou $x_k = x_{k+2}$ ce qui est impossible...

Remarque 1

La démonstration de ce lemme n'utilise pas le fait que la période limite de l'automate est 1 ou $E + R$.

Ce lemme clôt la démonstration du théorème 1 ...

Remarque 2:

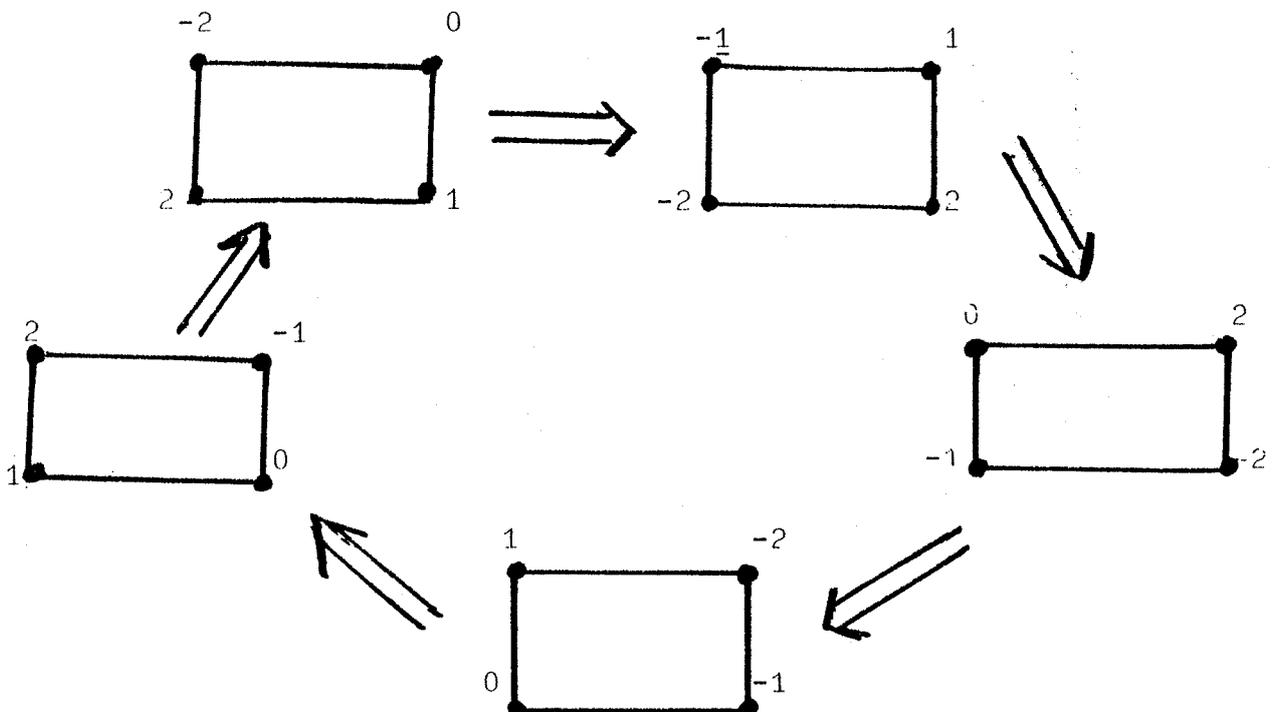
Il existe G admettant des circuits de longueur égale

à trois tels que l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ admette

des cycles de longueur $E + R$ sans que c^0 vérifie P .

Exemple

$$E = 2, R = 3$$



Plaçons-nous maintenant dans le cas où G admet des circuits élémentaires de longueur supérieure ou égale à $E + R$.
 Supposons, et pour toute la suite, que G est planaire. Toujours en utilisant la terminologie de [4], désignons aussi par G une représentation planaire de G (graphe planaire topologique). Appellons par n_G le maximum des longueurs des circuits élémentaires qui sont contour extérieur d'une face finie de G . sous ces conditions le comportement itératif de l'automate est contrôlé par le résultat suivant :

Théorème 2

Soit G planaire, simple, connexe. Si l'une des trois propriétés suivantes est vérifiée, alors l'itération

$$\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases} \text{ converge vers un cycle de longueur}$$

$E + R$ ou vers le point fixe 0 .

1/ $E > R$ et $E + R > n_G$

2/ $E < R$ et $E > n_G - 2$

3/ $E < R$, $c^0 \in \bar{C}$ et $E + R > n_G$
 avec $\bar{C} = \{ c \in C \mid \forall u = (x,y) \in U, \delta(c(x), c(y)) < E \}$

Remarque :

Le théorème 2 généralise, comme nous le verrons au paragraphe 4.3 ainsi qu'au chapitre 5 des résultats obtenus dans [1] sur des réseaux rectangulaires.

Démonstration du théorème :

Supposons que l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ ne converge pas vers le point fixe 0 .
 S'il existe deux cellules faiblement reliées dans le cycle limite la proposition 4 assure la périodicité $E + R$ de l'automate. Supposons pour toute la suite cette condition non réalisée. L'idée de la démonstration consiste alors à dégager

suivant les cas, soit des contradictions entre les hypothèses du théorème 2 et le fait qu'il n'existe pas deux cellules faiblement reliées, soit directement la période de l'automate. Si $E > R$, on applique la proposition 6, et soit on obtient directement la périodicité $E + R$ de l'automate, soit on se ramène au cas $E < R$ (en prenant c^0 dans \bar{C}). Autrement dit la condition 3 assure la condition 1.

Appliquons la proposition 7. Soit C le circuit fortement continu d'indice non nul relié à x ($x \in X$) par une chaîne fortement continue.

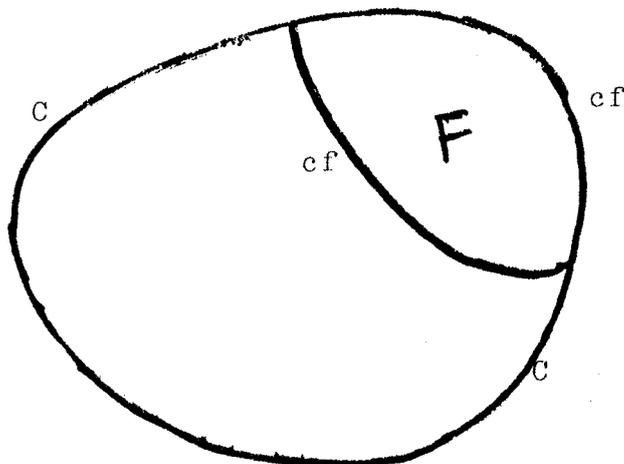
Désignons par p la longueur de C (on a $p > E + R$ d'après la démonstration du théorème 1).

A ce niveau démontrons le résultat suivant :

Lemma 1

Si C n'est pas le contour extérieur d'une face finie, il existe une face F entièrement contenue dans C dont le contour extérieur cf vérifie la propriété (P_1) : "l'intersection de cf avec C est constituée d'une chaîne élémentaire et d'une seule".

Figure 1



Démonstration du lemme 1

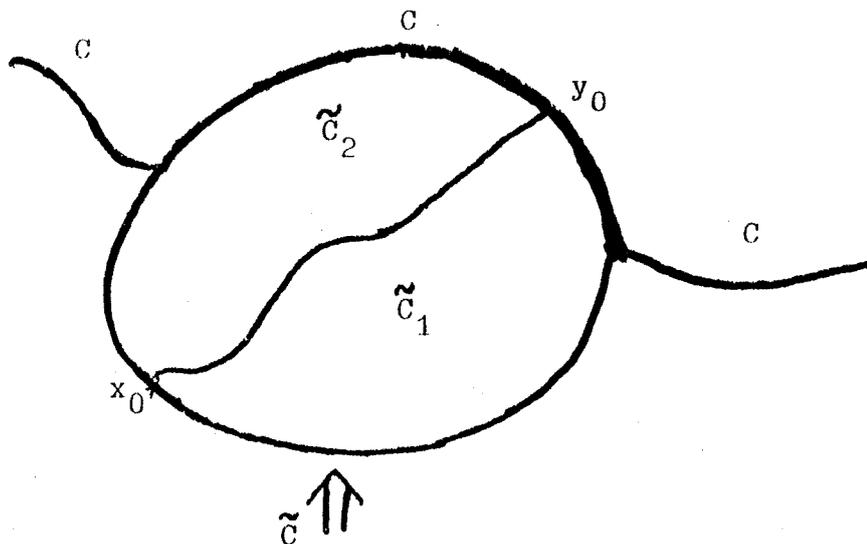
Supposons que C n'est pas contour extérieur d'une face finie. C vérifie (P_1) .

Soit \tilde{C} tel que :

- 1/ \tilde{C} à l'intérieur de C
- 2/ \tilde{C} vérifie (P_1)
- 3/ S'il existe \tilde{C}' à l'intérieur de \tilde{C} alors \tilde{C}' ne vérifie pas (P_1) .

\tilde{C} existe car X fini et C vérifie P_1 . Montrons \tilde{C} contour extérieur d'une face finie F . Si ce n'est pas le cas, il existe x_0 et y_0 éléments de \tilde{C} reliés par une chaîne élémentaire située à l'intérieur de \tilde{C} (voir schéma ci dessous). Cette chaîne partage \tilde{C} en deux circuits élémentaires \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 qui sont à l'intérieur de \tilde{C} (schéma); l'un des deux (au moins) vérifie P_1 , ce qui est impossible.

Figure 2



\tilde{C} est donc bien contour extérieur d'une face finie F , qui vérifie alors les conditions du lemme 1.

Montrons maintenant la partie 3 de la proposition.
On suppose $c_0 \in \bar{G}$ et $E + R > n_G$.

Toutes les cellules adjacentes sont fortement reliées dans G

On a : $p > E + R$, p désignant la longueur de C .

Supposons que C soit contour extérieur d'une face finie;

Ceci implique : $lg(C) = E + R$ ($lg(C)$ désigne le nombre d'éléments de C)

$$\text{car : } lg(C) < n_G < E + R$$

De plus, C étant fortement continu, la répartition des états sur ce circuit est de la forme : $(1, 2, \dots, E, -R+1, \dots, -1, 0)$

En effet on a : $1 < W_t(C) < \frac{lg(C)}{E + R} < 1$ et donc $W_t(C) = 1$

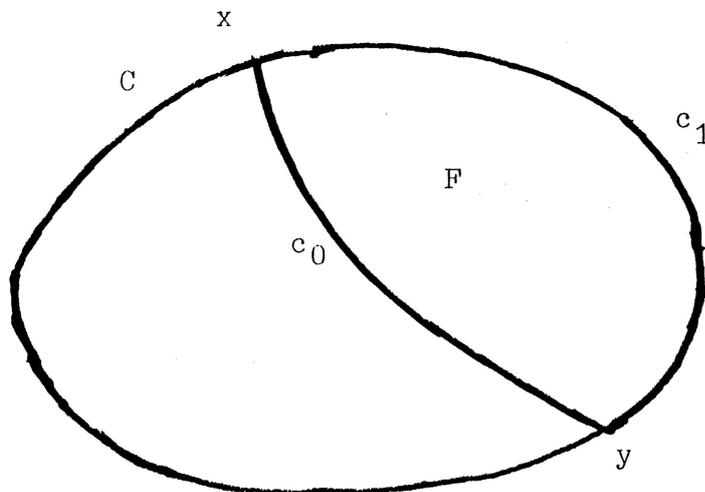
Cette répartition d'états assure pour chaque cellule de C , et par suite pour tout l'automate une période limite à : $E + R$.

Supposons pour toute la suite que C n'est pas contour extérieur d'une face finie, et soit n_f le nombre de faces finies à l'intérieur de C .

On a : $n_f > 2$.

Désignons par F une face finie intérieure à C vérifiant les conditions du lemme 1.

Figure 3



Désignons par c_0 la chaîne élémentaire reliant x à y à l'intérieur de C , c_1 chaîne élémentaire reliant x à y sur C .

$$c_0 = [x, y]_0 = [x_0 = x, x_1, \dots, x_q, x_{q+1} = y]_0$$

$$c_1 = [x, y]_1 = [x = y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+s} = y]_1$$

Désignons par c le circuit élémentaire contour extérieur de F ($c = c_1 \cup c_0$).

$lg(c)$: nombre d'éléments dans c .

On a : $lg(c) < \frac{n}{t} < E + R$

De plus, c est fortement continu.

$$\text{Ceci implique : } W_t(c) < \frac{lg(c)}{E + R} < 1$$

a/ Si $W_t(c) = 1$, on a alors $lg(c) = E + R$ et comme c est fortement continu, la répartition des états sur ce circuit est de la forme :

$$(0, 1, \dots, E, -R+1, \dots, -1, 0).$$

ceci assure que les cellules de c et par suite de l'automate sont de période $E + R$.

b/ Si $W_t(c) = 0$, on a :

$$\sum_{j=0}^{s-1} \sigma(c^t(y_{k+j}), c^t(y_{k+j+1})) = \sum_{j=0}^q \sigma(c^t(x_j), c^t(x_{j+1})) \quad (a)$$

Soit C_1 le cycle obtenu à partir de C en substituant c_0 à c_1 .

Le nombre de faces finies à l'intérieur de C_1 est $< nf - 1$

de plus, d'après (a) on a : $W_t(C_1) = W_t(C)$ donc C_1 est fortement continu d'indice non nul.

A partir de C_j ($j > 1$), on exhibe, en appliquant à C_j la même opération qu'à C , soit la période $E + R$ de l'automate, soit C_{j+1} vérifiant :

1/ $W_t(C_{j+1}) = W_t(C_j)$

2/ le nombre de faces finies à l'intérieur de C_{j+1} est $< n_f - (j+1)$.

Pour j au plus = $n_f - 1$, C_j est contour extérieur d'une face finie tout en étant d'indice non nul.

Or : $W_t(C) < \frac{\lg(C)}{E + R} < \frac{n G}{E + R} < 1$

Ceci implique : $W_t(C_j) = 1$ d'où $\lg(C_j) = E + R$.

C_j étant fortement continu on en déduit une répartition des états sur ce circuit de la forme $(1, 2, \dots, E, -R+1, \dots, -1, 0)$ et la périodicité $E+R$ recherchée pour l'automate.

Ceci clôt la partie 3 de ce théorème.

Supposons maintenant $\left\{ \begin{array}{l} E < R \\ E + 2 > n_G \end{array} \right.$ (condition 2).

Soit C le circuit élémentaire fortement continu d'indice non nul exhibé ci-dessus.

Supposons de plus C minimal pour sa propriété, c'est à dire :

il n'existe pas C' à l'intérieur de C fortement continu d'indice non nul (on s'y ramène facilement).

Deux cas peuvent se présenter :

- 1/ C est le contour extérieur d'une face finie
- 2/ C n'est pas contour extérieur d'une face finie.

Premier cas :

Désignons par lg la longueur de C .
 lg vérifie : $lg < n_G < E + 3$

$$\text{On a : } W_t(C) < \frac{n_G}{E+R} < \frac{E+3}{E+R}$$

* Si $R > 3$, on obtient $W_t(C) = 0$, et on en déduit ainsi la périodicité recherchée pour l'automate (contradiction avec $W_t(C) \neq 0$).

* Si $R = 2$ (le cas $R = 1$ est impossible), on obtient successivement $E = 1$, puis $n_G = 3$ Ceci implique C circuit élémentaire de longueur 3 (car la longueur de C est > 3) ce qui nécessite une répartition des états sur C de la forme $:(0, 1, -1)$, répartition qui elle-même assure une périodicité à $3 = E + R$ pour chaque cellule de C donc de G (par application de la proposition 3).

Deuxième cas :

C n'est pas le contour extérieur d'une face finie. Alors nous avons le résultat suivant ,démontré en fin de proposition .

Lemme 2 :

Il existe un circuit élémentaire \tilde{C} à l'intérieur de C , contour extérieur d'une face finie ayant la propriété (a)

$$\tilde{C} = (d_0, d_1, \dots, d_q = d_0)$$

(a) $\delta(c^t(d_i), c^{t+1}(d_{i+1})) < 1$ pour $i \neq i_0$ ($0 \leq i_0 \leq q-1$)

$$\delta(c^t(d_{i_0}), c^t(d_{i_0+1})) > E$$

\tilde{C} étant contour extérieur d'une face finie on a $lg(\tilde{C}) \leq n_G$. Par ailleurs, on a :

$$\delta(c^t(d_{i_0}), c^t(d_{i_0+1})) < \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^q \delta(c^t(d_i), c^t(d_{i+1})) < n_G - 1$$

avec $E > n_G - 2$.

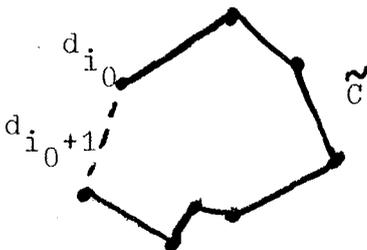
* Si $E > n_G - 1$, on obtient $\delta(c^t(d_{i_0}), c^t(d_{i_0+1})) < E$

ce qui est contradictoire avec la propriété (a) du lemme 2; par conséquent, la période limite de l'automate est donc 1 ou $E + R$.

* Si $E = n_G - 2$, on peut supposer, sans perte de généralité $c^t(d_{i_0}) = 0$.

On a alors :

$$c^t(d_{i_0+1}) < 0 = 1 - n_G = -E - 1$$



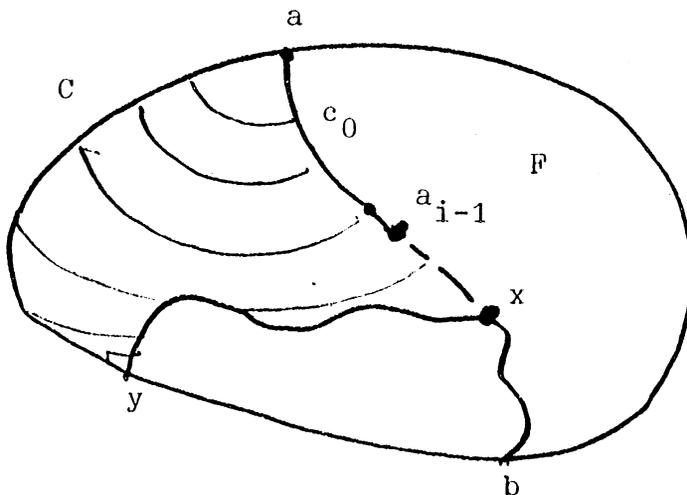
d'où : $c^{t+1}(d_{i_0}) = 1$ car sinon, on aurait :

$$\delta(c^{t+1}(d_{i_0}), c^{t+1}(d_{i_0+1})) = E$$

Ceci assure une périodicité $E + R$ à la cellule d_{i_0} et par suite à toutes les cellules de l'automate par application de la proposition 3. La démonstration du lemme 2 donnée ci-dessous clôt celle de ce théorème.

Démonstration du lemme 2.

Figure 4



Appliquons le lemme 1. Il existe une face F entièrement contenue dans C telle que l'intersection de son contour extérieur avec C soit une chaîne élémentaire $[a, b]$ de C .

Soit c_0 la chaîne élémentaire joignant a à b à l'intérieur de C (voir schéma) ; c_0 n'est pas continue sinon on montre (voir partie 3 de la proposition) que le circuit C' obtenu à partir de C en substituant c_0 à $[a, b]$ est fortement continu d'indice non nul. (Or C est minimal pour cette propriété...).

Posons $c_0 = [a, b] = [a_0 = a, a_1, \dots, a_p = b]$

Soit $x = a_i$ ($1 \leq i \leq p$) tel que :

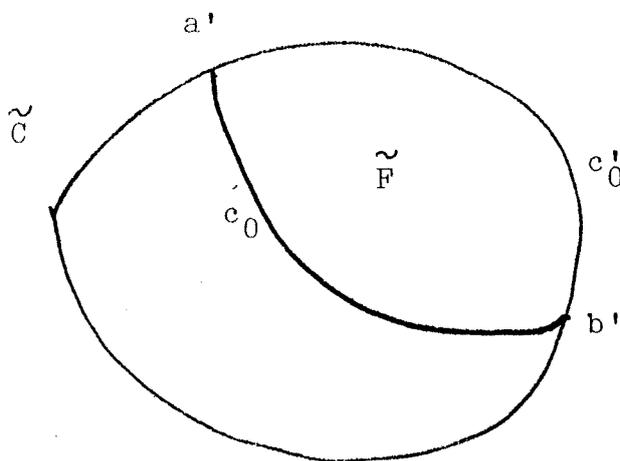
$$\begin{cases} a_{i-1} \text{ et } a_i \text{ non reliés} \\ a_j \text{ et } a_{j+1} \text{ reliés pour } j < i - 1 \end{cases}$$

D'après la proposition 7, x est relié à un circuit fortement continu d'indice non nul par une chaîne fortement continue. Cette chaîne coupe (d'après les propriétés de minimalité de C) C en un point y .

Soit C_1 le circuit constitué des chaînes élémentaires $[a, x]$ $[x, y]$ et $[y, a]$ (C_1 entoure la région hachurée de la figure 4).

Par "construction" C_1 vérifie la propriété (a) du lemme 2. Soit \tilde{C} (à l'intérieur de C_1) minimal pour la propriété (a). Montrons que \tilde{C} est contour extérieur d'une face F ; Si ce n'est pas le cas, on peut appliquer à \tilde{C} le lemme 1. Soit \tilde{F} la face exhibée.

Figure 5



Désignons par c_0 la chaîne élémentaire (frontière de \tilde{F} reliant a' à b') à l'intérieur de \tilde{C} .

Si c_0 est continue, alors :

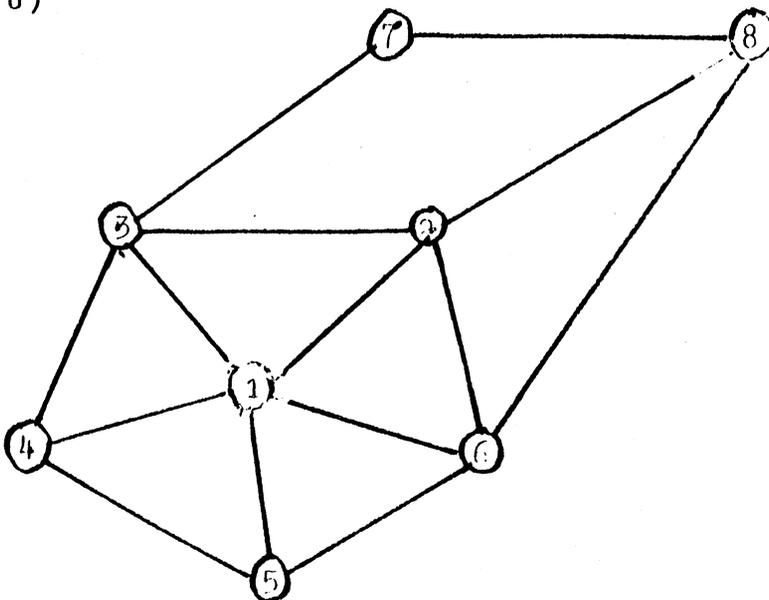
- 1/ Si c'_0 (chaîne de \tilde{C} reliant a' à b') contient les points non reliés de \tilde{C} , alors le contour extérieur de \tilde{F} ($c_0 \vee c'_0$) vérifie la propriété (a) du lemme 2 tout en étant dans \tilde{C} : impossible.
- 2/ De même, si c'_0 est continue, \tilde{C}' obtenue à partir de \tilde{C} en substituant c'_0 à c_0 vérifie la propriété (a) du lemme 2 ce qui est également impossible...

Donc c_0 n'est pas continue ; mais alors, par une démarche analogue à celle qui nous a permis d'exhiber \tilde{C} en fonction de C , on fait apparaître un circuit \tilde{C}' à l'intérieur de \tilde{C} vérifiant la propriété (a) du lemme 2 (en choisissant la chaîne élémentaire de ce circuit qui appartient à \tilde{C} de manière telle qu'elle ne comprenne pas les deux sommets non reliés de \tilde{C}) : là encore on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse de minimalité sur \tilde{C}

\tilde{C} est donc bien contour extérieur d'une face finie de G , ce qui clôt la démonstration du lemme 2 et par suite du théorème.

Exemple d'application

$G = (X, U)$



On vérifie $n_G = 4$

Les conditions du théorème 2 s'expriment sous la forme

- (1) $E > R$, $E + R > 4$
- (2) $E < R$, $E > 2$
- (3) $E < R$, $E + R > 5$, $c_0 \in \bar{C}$

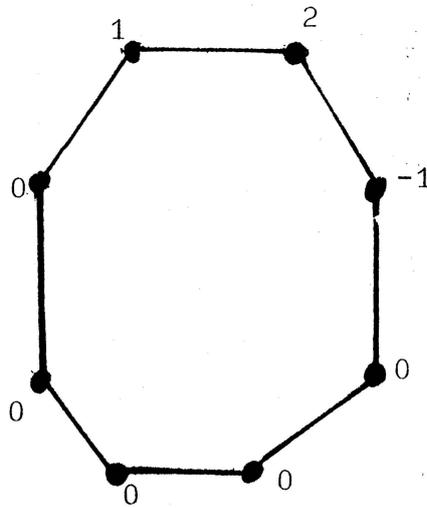
Remarque 1 :

Si on s'affranchit des conditions d'applications du théorème 2, on peut obtenir des cycles limites de longueur supérieure à $E + R$.

Exemple :

$E = 1$, $R = 3$

$n_G = 8$



On vérifie sans peine que la période limite est 8
($E + R = 4$).

Remarque 2 :

L'analyse faite plus haut ne "passe" pas dans le cas d'un graphe non planaire (à cause des notions d'"intérieur" et d'"extérieur"). Il serait intéressant d'exhiber, dans ce cas, des conditions assurant encore une période limite à $E + R$. Signalons que si $G = K_n$ (graphe complet d'ordre n) ou si $G = K_{p,q}$ (graphe biparti complet) on montre que la période limite de l'itération

$$\begin{cases} c^{r+1} = F c^r \\ c^0 \in C \end{cases} \text{ est égale à } E + R \text{ ou } 1 .$$

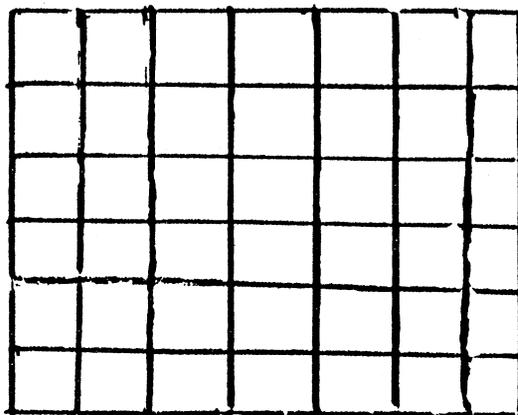
4.3. Application (importante)

Supposons que G , pris en tant que graphe planaire topologique soit la représentation d'une portion d'un pavage régulier du plan.

Les conditions d'application du théorème 2 s'expriment alors très simplement pour chaque type de pavage (il y en à 3).

1/ Pavage du plan par des rectangles :

G est de la forme :



On a $n_G = 4$.

Proposition 8 :

Pour les valeurs des couples (E,R) suivantes la période limite de l'automate est $E + R$ (au maximum) :

- 1/ $E > 2$
- 2/ $E = 1 ; R = 1,3$

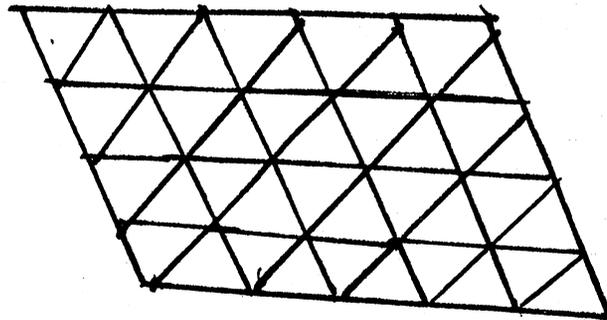
Démonstration

* Le théorème 2 assure la périodicité $E + R$ pour $(E > 2 ; R > 2)$ (en reliant les conditions 1 et 2) ainsi que pour $(E = 1 , R = 3)$; le cas $(E,R) = (1,1)$ a été également traité page 26 de ce chapitre
reste les cas $((E , R) = (2,2) \text{ et } (E > 2, R = 1))$.
Ces situations se règlent immédiatement par application de la proposition 6.

2/ Pavage du plan par des triangles :

G de la forme :

$$n_G = 3$$



Proposition 9 :

⌈ Pour tout couple (E,R) , la période limite de l'automate est $E + R$ (au maximum).

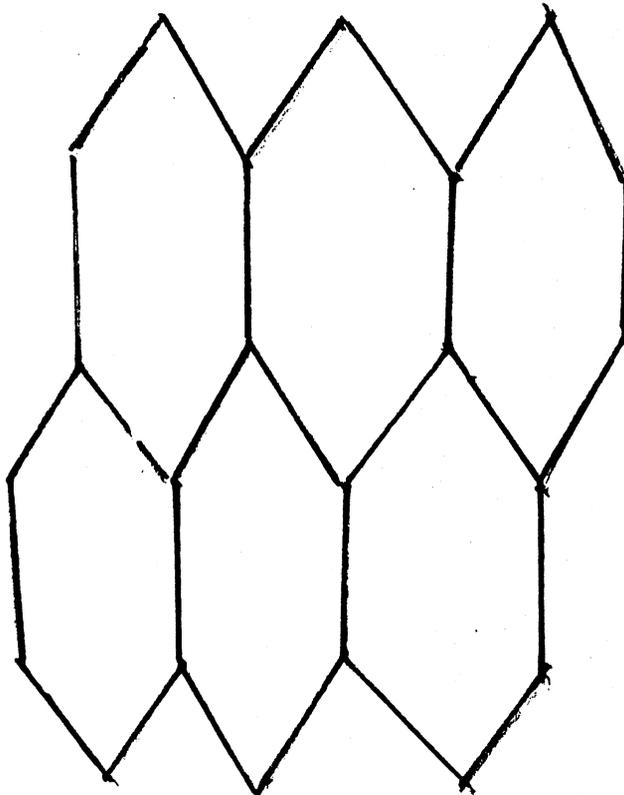
Démonstration :

Application immédiate du théorème 2 ainsi que de la proposition 6.

3/ Pavage du plan par des hexagones

G de la forme :

$$n_G = 6$$



là encore, on exhibe le résultat suivant :

Proposition 10

[La période maximum de l'automate est $E + R$ pour les valeurs des paramètres (E,R) suivant :

$$E > 4$$
$$E = R = 1$$

On retrouve à ce niveau, comme cas particulier du théorème 2 des résultats déjà montrés dans [1] notamment pour des réseaux rectangulaires. Nous aurons l'occasion d'y revenir au chapitre 5 dans un contexte un peu différent.

5. C A S G E N E R A L :

$$1 < \theta_i < dg(i)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Dans ce paragraphe, nous nous limitons à l'exposé de quelques applications de l'analyse précédemment faite aux cas de règles de seuils non simples.

Notations , rappels

Soit : $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_n)$
 On notera : $\theta < \theta'$ si $\theta_i < \theta'_i$ ($i = 1, \dots, n$)

On désigne par $F_{E,R}^\theta$ l'automate paramétré par E, R, θ .

$F_{E,R}$ désigne l'automate associé au vecteur seuil
 $\theta = (1, \dots, 1)$

Proposition 1

Si le graphe d'itération de l'automate $F_{E,R}^\theta$ admet un cycle de longueur E + R noté :
 $C = (d^0, d^1, \dots, d^{E+R} = d^0)$, alors
 l'itération : $\begin{cases} c^{r+1} = F_{E,R}^\theta c^r \\ c^0 \text{ pris dans } C \end{cases}$ avec $\theta' < \theta$ converge en un nombre fini de pas vers un cycle de longueur : E + R.

Démonstration

On peut supposer sans perte de généralité $c^0 = d^0$
 Alors X se partitionne de la manière suivante : $X = X_1 \cup X_2$

$$X_1 = \{ x \in X / x \text{ est de période } E + R \text{ pour } F_{E,R}^\theta \}$$

$$X_2 = \{ x \in X / d^i(x) = 0 \text{ (} i = 0, \dots, E+R-1 \text{)} \}$$

Lemme 1

$$[\forall x \in X_1, c^p(x) = d^p(x) \quad (0 < p < E+R-1) \quad (A_1)]$$

Démonstration du lemme 1

* (A_1) est vraie pour $p = 0$

* Supposons (A_1) vraie pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$
 et établissons là pour $k = p$.

Si $c^{p-1}(x) \neq 0$ on obtient : $c_p(x) = d_p(x)$

Si $c_{p-1}(x) = d_{p-1}(x) = 0$, on a alors $d_p(x) = 1$

D'où : $\left| \{ y \in V(x) \cap X_1 / d_{p-1}(y) > 1 \} \right| > \theta_x$

Mais : $\theta_x > \theta'_x$ et : $d^{p-1} = c^{p-1}$ sur X_1

On en déduit : $\left| \{ y \in V(x) \cap X_1 / c_{p-1}(y) > 1 \} \right| \geq \theta'_x$

ce qui revient à dire : $c^p(x) = d^p(x) = 1$

Le lemme 1 est de ce fait démontré.

Ce lemme assure entre autres : $\forall x \in X_1, c^{E+R}(x) = c^0(x)$

Plaçons nous maintenant dans le cycle limite

$$\text{de l'itération : } \begin{cases} c^{r+1} = P_{E,R}^{\theta'} c^r \\ c^0 = d^0 \end{cases}$$

Ce cycle est de longueur p ($p > E + R$ d'après le lemme 1)

X se partitionne de la manière suivante $X = X'_1 \cup X'_2$ avec :

$X'_1 = X - X'_2$ (ensemble des cellules non stables à 0)

$X'_2 = \{ x \in X / c^t(x) = 0 \text{ à partir d'un certain rang} \}$

Désignons de plus par \tilde{X}_1 l'ensemble des cellules de période $E + R$ dans le cycle limite ; on a la relation d'inclusion suivante : $X_1 \subset \tilde{X}_1 \subset X'_1$ ceci d'après le lemme 1.

Pour établir la proposition 1 il suffit de prouver que

$$\tilde{X}_1 = X'_1$$

Pour $x \in A = X'_1 - X_1$, désignons par $r(x)$ l'entier suivant

$$r(x) = \min \{ p > 0 / c^{p+1}(x) = 1 \}$$

$$\text{puis } m = \max_{x \in A} \{ r(x) \}$$

on a la décomposition: $A = \bigcup_{i=0}^m A(i)$, avec : $A(i) = \{x \in A / r(x) = i\}$

Lemme 2

$$\left[\forall i \in \{0, \dots, m\}, A(i) \subset \tilde{X}_1 \quad (A_2) \right]$$

Ce lemme prouve alors : $A \subset \tilde{X}_1$ et donc $\tilde{X}_1 = X_1^*$ et par suite la proposition

Démonstration du lemme 2

* Montrons que (A_2) est vraie pour $i = 0$.

Soit $x \in A(0)$; on a : $c^0(x) = 0$ et $c^1(x) = 1$.

$$\text{D'ou : } |E_x^0| = |\{y \in X \cap V(x) / c^0(y) > 1\}| > \theta'_x$$

$$\text{Mais : } E_x^0 \subset \tilde{X}_1 \quad (\text{car } E_x^0 \subset X_1)$$

$$\text{Par consequent : } \forall y \in E_x^0, \forall k > 1, c^{k(E+R)}(y) > 1$$

Et par suite : $c^{k(E+R)+1}(x) = 1$, ce qui prouve x de période $E + R$.

* Supposons (A_2) vraie pour tout $k < i - 1$ et montrons le pour $k = i$

$$x \in A(i) \text{ vérifie : } \begin{cases} c^i(x) = 0 \text{ et } c^{i+1}(x) = 1 \\ c^j(x) = 0 \text{ pour tout } j < i - 1 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } |E_x^i| = |\{y \in X \cap V(x) / c^i(y) > 1\}| > \theta'_x$$

$$\text{Mais on a aussi : } E_x^i \subset X_1 \bigcup_{j=1}^{i-1} A(j), \text{ ceci}$$

par construction des ensembles $A(j)$. Ceci implique, d'après l'hypothèse de récurrence $E_x^i \subset \tilde{X}_1$ et par suite : $c^{i+k(E+R)}(y) > 1 \forall k > 0$

ceci pour tout y dans E_x^i

par conséquent : $c^{(k(E+R)+1)}(x) = 1$, $\forall k > 0$,
ce qui prouve que x est de période $E + R$.
(A₂) est donc vraie pour $k = i$.

Ceci clôt la démonstration du lemme 2 et en même temps de la proposition 1

Application

Si $c^0 \in C$ vérifie la propriété
(P) : $\forall u = (x, y) \in U$, $\delta(c^0(x), c^0(y)) > R$
alors l'itération : $\begin{cases} c^{r+1} = F_{E,R}^\theta c^r \\ c^0 \end{cases}$ converge vers un
cycle de longueur $E + R$ pour tout $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Démonstration

D'après la proposition 1 du paragraphe 3 de ce chapitre, c^0 fait partie d'un cycle de longueur $E + R$ pour le graphe d'itération de l'automate

$F_{E,R}^\theta$ avec $\tilde{\theta} = (dg(x_1), \dots, dg(x_n))$. On peut donc

appliquer le résultat précédent; on pourrait montrer en fait directement que c^0 fait elle même partie d'un cycle de longueur $E + R$.

Remarque

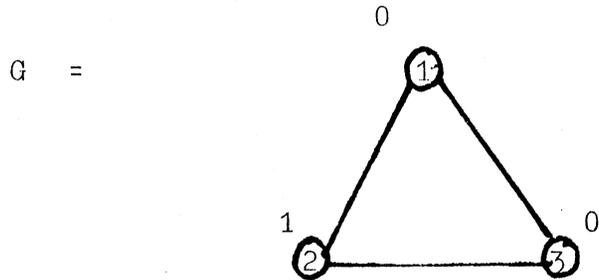
Si l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F_{E,R}^\theta c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ converge vers un

cycle de longueur $E + R$, il n'en est pas forcément de même

pour l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F_{E,R}^{\theta'} c^r \\ c^0 \end{cases}$ avec $\theta' < \theta$

Exemple

$$E = R = 2.$$



1/ $\theta = (2, 1, 1)$

l'itération associée converge vers un cycle de longueur $E + R$.

2/ $\theta = (1, 1, 1)$

l'itération converge alors, avec la même configuration initiale vers le point fixe 0.

Proposition 2

[Si $E < R$, et si G est un arbre ,
alors l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = F_{E,R}^{\theta} c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$ converge vers le
point fixe "0" en un nombre fini de pas.

Démonstration

La démonstration est identique à celle donnée pour prouver le lemme 1 du théorème 1 du paragraphe 4 (page 44) à ceci près qu'il faut remplacer l'expression $\min(E, R - 1)$ par E .

Proposition 3

Si $E = 1$ et si G n'admet pas de circuit de longueur supérieure à R , alors l'itération $\left\{ \begin{array}{l} c^{r+1} = F_{1,R}^{\theta} c^r \\ c^0 \in C \end{array} \right.$ évolue en nombre fini de pas vers le point fixe "0".

Démonstration

Là encore, nous utilisons les résultats précédents.

Tout d'abord, par une argumentation de même type que celle qui prouve la proposition 7 du paragraphe 4, nous montrons que si le cycle limite de l'itération considérée n'est pas réduit au point fixe "0" il existe x dans G relié à un circuit élémentaire C fortement continu, et ceci par une chaîne fortement continue.

De plus, il existe t tel que l'état des cellules sur C soit de la forme : $(1, 2, \dots, -R+1, 0^+)$, ce qui implique que la longueur p de ce cycle est de longueur supérieure ou égale à $R + 1$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de la proposition ...

Remarque

Dans un contexte plus simple (pavage régulier du plan), nous verrons au chapitre 5 comment pousser plus loin l'analyse. Toutefois l'analyse du comportement itératif de l'automate dans le cas général semble très complexe à aborder avec les outils que nous disposons.

6. C O N C L U S I O N

Les rappels et l'analyse développée au cours des deux premiers chapitres serviront d'appui à l'étude d'automates cellulaires uniformes de même type que les réseaux d'automates qui viennent d'être étudiés. (voir chapitre 4 et 5 de cette thèse). En même temps, nous nous rendons compte de la limite des outils utilisés ; c'est ainsi que, en ce qui concerne les automates à seuil dans le chapitre 1 nous connaissons peu de choses concernant la longueur du transitoire, l'organisation spatiale des cellules dans le cycle limite, le comportement itératif dans le cas non symétrique. De la même manière dans le chapitre 2, si nous obtenons des résultats pour des valeurs particulières des paramètres, le cas général paraît très complexe à aborder, du moins avec les outils d'analyse dont nous disposons.

Pour aller plus loin, il nous semble nécessaire d'allier une démarche expérimentale à l'analyse théorique. Dans ce cadre, nous avons été amenés à élaborer un système informatique pour simuler l'évolution au cours du temps, de réseaux d'automates : la présentation de ce système constitue l'objet du chapitre 3 de ce travail. Nous poursuivons ainsi un double objectif : d'une part nous voulons visualiser les résultats connus et ceci sur de gros exemples (ce qui nécessite l'utilisation de l'ordinateur), d'autre part nous voulons mieux comprendre ce qui se passe au cours de l'évolution (question du transitoire, organisation des cellules dans le cycle...) et en tirer ainsi des enseignements sur la manière d'analyser les comportements.

C H A P I T R E 3

U N O U T I L P O U R L ' E X P E R I M E N T A T I O N

S Y G E D I S C .

1. INTRODUCTION

Soit $A = (Q^n, q_0, F)$ un réseau d'automates.

$\forall y^0 \in Q^n$, l'itération $\begin{cases} y^{r+1} = F y^r \\ y^0 \in Q^n \end{cases}$ converge vers un point fixe ou vers un cycle de longueur finie notée p .

Dans ce chapitre, nous présentons "Sygedisc" (Système graphique pour l'expérimentation d'itérations discrètes). Ce système est constitué d'un ensemble de sous programmes dont l'activation permet, par prise en compte des différents paramètres de A , la simulation de son évolution à partir d'une configuration initiale donnée. L'entrée des données ainsi que le contrôle de l'évolution se font de manière conversationnelle afin que l'utilisateur puisse disposer d'un maximum de souplesse. Nous donnons les conditions d'utilisation de "Sygedisc" ainsi que des indications sur la place mémoire et les temps de calcul.

2. EVOLUTION D'UN RESEAU

D' AUTOMATES

QUESTIONS POSEES

En règle générale nous voulons des informations sur :

- 1/ Le nombre d'éléments du cycle limite.
- 2/ L'organisation des cellules dans le cycle, en particulier dans le cas de fonctions locales en dimension 2 : indications des blocs stables, des zones instables...
- 3/ La longueur du transitoire aboutissant au cycle. Ce problème nous intéresse à double titre ; d'une part nous disposons (cf chapitres précédents) en règle générale de peu de résultats concernant cette question, d'autre part la recherche pratique du cycle limite est conditionnée par un transitoire de longueur pas trop grande, ceci pour des raisons évidentes de temps de calcul.

Algorithme proposé pour la recherche du cycle :

- a/ Supposons dans un premier temps que l'on sache que tous les cycles sont de longueur $\leq p$ (p pas trop grand). On peut alors utiliser l'algorithme suivant pour trouver le cycle issu de y^0

Algorithme cycle (P) :

début

1 Faire évoluer à partir de y^0 . A pendant un nombre de pas q' fixé par l'utilisateur . Soit \tilde{y} la configuration obtenue :

$$\tilde{y} = F^{q'}(y^0)$$

2/ Tant que (cycle limite non atteint) faire

début

Tester si \tilde{y} appartient au cycle limite par comparaisons successives des itérés $F^r(\tilde{y})$ avec \tilde{y} pour $r=2,3,\dots,p$.

Si (\tilde{y} n'appartient pas au cycle) alors
 $\tilde{y} \leftarrow F^p(\tilde{y})$

Fin

3/ Sortir le cycle.

Fin

Comme la longueur du transitoire est finie l'algorithme fournit bien le cycle limite.

En général, nous ne connaissons pas la période maximum du cycle limite (autre bien sur que q^n inexploitable pratiquement). Par ailleurs la rapidité de convergence dépend de la longueur du transitoire...

On adopte la démarche suivante au centre de laquelle se trouve l'intervention de l'utilisateur.

b/ Cas général

Algorithme recherche cycle

Début

- 1/ Se fixer à priori un nombre p pour le nombre maximum d'éléments du cycle.
- 2/ Faire évoluer A à partir de y^0 pendant un nombre d'itérations q' fixé par l'utilisateur. y^r configuration obtenue :
$$(\tilde{y} + F^{q'}(y^0))$$
- 3/ A partir de \tilde{y} faire

Début

Tester si \tilde{y} appartient à un cycle de longueur $\leq p$ par comparaison successive des itérés $F^r(\tilde{y})$ avec \tilde{y} pour $r=2,3,\dots,p$.

Si test positif Aller à (4)

Sinon deux possibilités

Cas 1 : arrêter expérience : aller à (5)

Cas 2 : continuer recherche cycle ;

$$\tilde{y} + F^p(\tilde{y})$$

$$p + 2p$$

aller à (3)

Fin

4/ Sortir cycle

5/ Arrêt recherche

Fin

L'algorithme permet théoriquement d'aboutir au cycle (les longueurs du transitoire et du cycle étant finies).

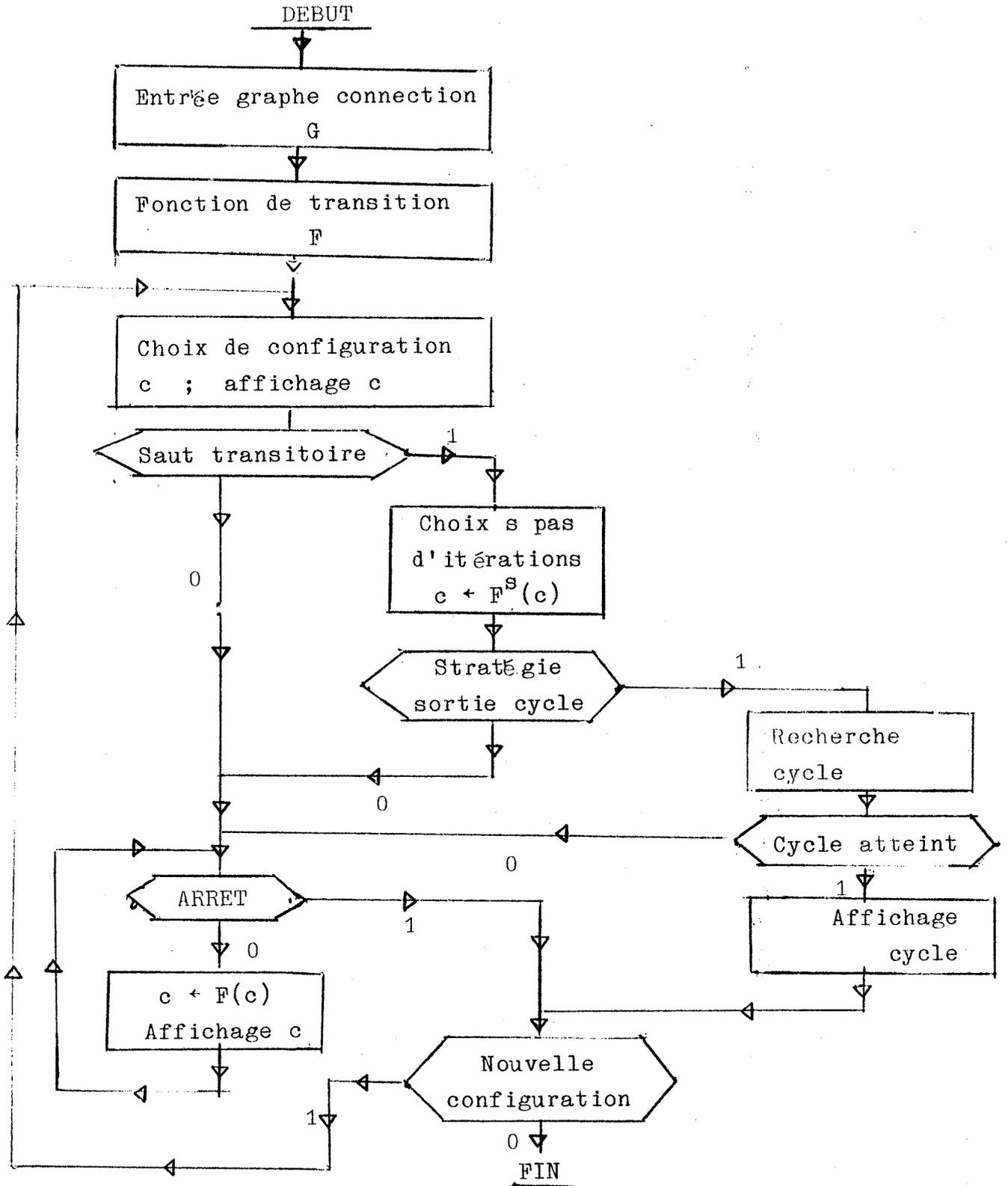
L'intuition joue donc un rôle dominant dans la recherche pratique du cycle limite. C'est à cet effet que nous avons été amené à élaborer le système conversationnel "Sygedisc". Ce système, dont la description est l'objet des lignes qui suivent a été conçu pour permettre à l'utilisateur de contrôler à tout moment l'évolution de l'automate étudié.

3. DESCRIPTION DE "SYGEDISC"

"Sygedisc" est constitué d'un ensemble de sous programmes (22) représentant environ 1500 instructions fortran qui, prenant en compte les différents paramètres de réseaux d'automates cellulaires locaux, permettent la simulation de leur évolution à partir d'une configuration initiale donnée.

Nous donnons ci-dessous l'organigramme des différentes parties de ce système avant de revenir en détail sur chacune d'entre elles. Une documentation de programmes a été rédigé séparément et le déroulement d'une expérimentation se trouve en annexe.

3.1. Organigramme de SYGEDISC



3.2 Description des différentes parties du système .

On peut distinguer deux étapes principales dans le fonctionnement de "Sygedisc".

Première étape : entrée des paramètres de l'automate A.

Deuxième étape : Evolution de l'automate avec sortie des résultats.

Nous allons analyser dans le détail chacune de ces étapes en nous plaçant du point de vue de l'utilisateur.

3.2.1. Première étape : Entrée des paramètres de A .

Il s'agit de définir la structure du graphe de connection et les règles locales de transition.

A/ Entrée graphe connection :

Il y a deux manières d'aborder le problème suivant que A représente (ou non) une fonction locale en dimension 2 .

a) Premier cas :

A ne représente pas une fonction locale en dimension 2 .

Le programme demande à l'utilisateur le nom du segment dans lequel figure les caractéristiques de G qui y ont été préalablement inscrites à l'aide d'un programme auxiliaire.

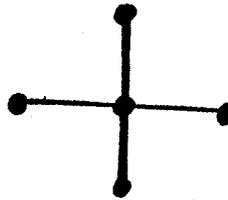
b) Deuxième cas :

A représente une fonction locale en dimension 2. Le graphe de connection est alors soit un pavé de Z^2 (fonction locale de type 2) ; soit un tore (fonction locale de type 1). Le programme demande dans l'ordre.

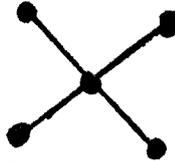
1/ La fonction de voisinage utilisée

Trois possibilités sont offertes dans l'état actuel du système.

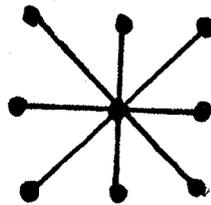
α / Voisinage type Von Neumann



β / Voisinage en étoile



γ / Voisinage de Moore (k)



plus précisément :

Si $x = (i,j)$, $V(x) = \{ z = (p,q) / \delta_L(p,i) < k , \delta_\lambda(p,i) < k \}$

avec :

$\delta_n(p,q) = |p - q|$ si A fonction locale de type 1 .

$\delta_n(p,q) = \min (|p - q|, n - |p - q|)$ si A fonction locale de type 2 n étant une des dimensions du tore.

2/ Les dimensions du réseau (torique ou rectangulaire)

On prendra dimensions du domaine < 30 .

3/ Le type de la fonction locale étudiée (I ou II)

Le type I correspond à un automate agissant sur un tore.

Le type II correspond à un automate opérant sur un rectangle de Z^2 (cas type de simulation d'automate cellulaire uniforme). La détermination des voisins d'un sommet situé au "Bord" du domaine se fera automatiquement selon que l'automate est de type 1 ou 2.

B/ Entrée fonction locale de transition

Le programme demande dans un premier temps à l'utilisateur quel type de fonction il veut faire évoluer aux sommets du graphe puis dans un deuxième temps les paramètres de la fonction. Dans l'état actuel du système "Sygedisc" sait prendre en compte :

- 1/ Dans le cas de graphes de connection "quelconque" des fonctions de type majorité ([15]).
- 2/ Dans le cas de fonctions locales en dimension 2 deux types de fonctions :
 - a/ fonctions à seuil "généralisée" dont on trouvera une définition précise au chapitre 3,
 - b/ automates de type "fenêtre" que l'on peut ainsi définir

Soit une cellule x influencée par x_1, \dots, x_k
deux états possible : 0 ou 1. On pose :
pour c configuration donnée,
 $S(c(x)) =$ nombre de voisines de x à 1

$$\delta(c(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_1 < S(c(x)) < \theta_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

θ_1, θ_2 étant deux entiers.

Le comportement de ces fonctions (qui constituent une variante de l'automate de Conway) est très riche et complexe à analyser.

L'introduction dans le système de nouvelles fonctions ne pose pas d'autre problème que l'écriture d'un sous-programme fortran décrivant la règle d'évolution voulue

Ceci étant fait, nous avons introduit tous les paramètres de l'automate.

3.2.2. Deuxième étape : évolution de l'automate

1/ Entrée configuration initiale

Deux possibilités sont offertes à l'utilisateur :

- a/ La configuration est entrée "à la main" sommet par sommet.

- b/ Répartition des états aux sommets du graphe de manière aléatoire ; plus précisément,
 - * Si $Q = \{0,1\}$ la répartition se fait suivant une loi binomiale de paramètre p p étant la proportion de "1" désirée par l'utilisateur .
 - * Si $Q = \{0,1,\dots,q\}$ ($q > 2$) , il y a répartition des états aux sommets du graphe suivant une loi uniforme sur Q .

On utilise à cet effet des générateurs de nombres aléatoires fournis par la bibliothèque N.A.G. Après entrée de la configuration, il y a affichage sur console.

2/ Stratégie d'évolution :

Deux possibilités sont offertes.

- a/ Faire évoluer l'automate pas à pas avec affichage de chaque état jusqu'à décision d'arrêt.

b/ Rechercher le cycle limite suivant l'algorithme décrit plus haut (paragraphe 2). A chaque étape de l'algorithme il y a affichage de la configuration courante. Si la recherche échoue, il y a possibilité de revenir à une évolution de type pas à pas. Sinon, il y a affichage du cycle avec indication du nombre d'éléments et des zones stables.

3/ Test d'arrêt, sorties graphiques :

Quand l'utilisateur décide l'arrêt de l'évolution, le programme lui offre la possibilité de recommencer à partir d'une autre configuration initiale. Sinon, on sort de "Sygedisc". Si l'utilisateur le désire, il y a à chaque pas d'itération, écriture sur fichier de la nouvelle configuration avec indication de l'activité (nombre de cellules changeant d'état au cours d'une itération).

Enfin, il y a possibilité de faire apparaître sur écran graphique (et de faire dessiner) le graphe de connection avec les états aux sommets.

3.3. Indications sur les temps de calcul

Soit F fonction locale de dimension 2. Le temps mis pour le calcul d'une itération est proportionnel au nombre de sommets du domaine. (Quand on passe d'un rectangle de dimension (10,10) à un rectangle de dimension (20,20) il est donc multiplié par 4). Le temps de calcul augmente

également en fonction du cardinal du voisinage utilisé.

Dans le cas d'une fonction de type majorité sur un tore (voir chapitre 3), nous indiquons dans le tableau ci-dessous le temps moyen de calcul pour une itération ceci pour différents types de voisinage et de dimensions du tore.

Rappel

Si $x = (i, j)$, L et λ dimensions du tore

$$V(k)(x) = \{ z = (p, q) / \delta_\lambda(p, q) < k, \delta_L(p, q) < k \}$$

δ_n étant la distance classique dans Z/nZ ainsi définie

$$\delta_n(x, y) = \min (|y - x|, n - |y - x|)$$

L V	1	L = 1 = 10	L = 1 = 20	L = 1 = 30
Von_Neumann		0.02	0.08	0.2
V(1)		0.08	0.31	0.75
V(2)		0.21	0.82	1.92

(Temps donné en secondes)

4. C O N C L U S I O N

Avec "Sygedisc" , nous disposons d'un outil d'analyse expérimental pour l' évolution de réseaux d'automates. Les chapitres suivant constituent des exemples d'utilisation de ce système. Dans l'optique d'une utilisation plus large, il serait intéressant d'améliorer les performances des programmes au niveau du temps de calcul, d'intégrer un plus grand nombre de fonctions de transition , et surtout de résoudre des problèmes liés aux sorties graphiques dans le cas de graphes de connection quelconques

CHAPITRE 4

ETUDE D'UNE CLASSE
D'AUTOMATES CELLULAIRES
UNIFORMES A SEUIL

1. I N T R O D U C T I O N

Dans ce chapitre, nous étudions l'évolution sur Z^2 des fonctions à seuil présentées au chapitre 1 de cette thèse. Les automates cellulaires uniformes à seuil interviennent dans la modélisation de phénomènes de provenances diverses : modèles en sociologie ([17]), en biologie ([18])... Après avoir rappelé et illustré par des exemples les résultats connus, nous approfondissons l'analyse du comportement itératif de ces automates pour deux types de voisinage :

- 1/ Voisinage de Von Neumann ;
- 2/ Voisinage de Moore "généralisé".

Nous nous intéressons particulièrement à l'influence des paramètres de l'automate sur la structure du cycle limite (existence et forme des blocs stables , mesure de l'activité) Par ailleurs, nous établissons un lien avec une étude réalisée par H_D.Schultz [19] sur des fonctions type "double seuil" utilisées dans la modélisation de phénomènes de ségrégation (voir Schelling [17], et aussi le chapitre 1 de ce travail). Nous montrons que ces fonctions constituent une classe d'automates cellulaires uniformes à seuil , ce qui nous permet de répondre à un certain nombre de questions restées en suspens concernant leur comportement itératif.

2. P R E S E N T A T I O N , R A P P E L S .

Dans ce chapitre nous utilisons des notations et définitions introduites et explicitées au chapitre 1.

Définition 1 :

Un automate cellulaire uniforme à seuil est caractérisé par la donnée de $A = (Z^n, V, \{0,1\}, 0, \delta)$ avec :

* / Z^n : espace cellulaire.

* / $V = (v_{-p}, \dots, v_0, \dots, v_p)$
 $v_i \in Z^n \quad . \quad 1 < i < p$

voisinage symétrique quelconque.

* 0 : état de repos.

* $\delta : \{0,1\}^{2p+1} \rightarrow \{0,1\}$, fonction de transition

$$\delta(x_{-p}, \dots, x_0, \dots, x_p) = 1 \left[\sum_{j=-p}^{j=p} a_j x_j - \theta \right]$$

$$a_j, \theta \in \mathbb{R} \\ -p < j < p$$

Rappelons que $1[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (notation déjà introduite au chapitre 2)

Si c désigne une configuration initiale de "0s" et de "1s" on appelle fonction globale de transition Δ , une application de C dans C telle que :

$$\forall x \in Z^2, \Delta(c)(x) = \delta(c(V(x))) \text{ avec } V(x) = x+V.$$

Ainsi si $V(x) = (x_{-p}, \dots, x_0 = x, \dots, x_p)$

$$\text{on obtient : } \Delta(c)(x) = 1 \left[\sum_{j=-p}^{j=p} a_j c(x_j) - \theta \right]$$

Sauf exception nous nous intéresserons exclusivement au cas où $n = 2$.

Le résultat de base établi dans [6] et rappelé au chapitre 1 de cette thèse sur le comportement itératif des fonctions à seuil symétriques s'applique de la manière suivante aux automates cellulaires uniformes à seuil.

Proposition 1 [6]

Si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) A non expansive

(ii) $a_j = a_{-j}$ pour $j = 1, \dots, p$

alors $\forall c \in C ; \exists s \in \mathbb{N} / \Delta^{s+2}(c) = \Delta^s(c)$

Si A est non expansive, l'étude de son comportement itératif se ramène à l'étude du comportement itératif de fonctions opérant sur des ensembles finis (si $n=2$, A est en fait identifiable à une fonction locale en dimension 2 de type 2 (cf. Chapitre 1)). On peut donc à la fois appliquer les résultats connus et faire des simulations par ordinateur (en utilisant l'écran borné d'une console). Une condition suffisante pour que A soit non expansive s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{\sum_{j \in J^+} a_j < 0 \quad \text{avec } J^+ = \{ j, 1 \leq j \leq p / a_j > 0 \}}$$

Au cours de ce chapitre nous nous intéresserons plus particulièrement à une famille d'automates cellulaires uniformes à seuil, dont la description est l'objet des lignes qui suivent . .

Définition 2

On désigne par A la famille d'automates cellulaires uniformes suivante :

$$A = (A_{h,\theta}) \quad \text{avec } h, \theta \in \mathbb{R}$$

$$A_{h,\theta} = (Z^2, V, \{0,1\}, 0, \delta_{h,\theta})$$

$$\delta_{h,\theta}(x_{-p}, \dots, x_0, \dots, x_p) = 1 \left[(\theta - h)x_0 + \sum_{\substack{j=-p \\ j \neq 0}}^p x_j - \theta \right]$$

Tenant compte des notations indiquées plus haut la fonction globale de transition s'écrit $\Delta_{h,\theta}$ avec :

$$\Delta_{h,\theta}(c)(x) = 1 \left[(\theta - h)c(x) + \sum_{\substack{j=-p \\ j \neq 0}}^p c(x_j) - \theta \right]$$

Nous allons maintenant établir quelques propriétés de A. Tout d'abord, nous montrons que ce sont les valeurs entières de h et θ qui exercent une influence sur le comportement de $A_{h,\theta}$. Ceci se traduit par :

Proposition 2

Si $[h] < h < [h] + 1$, ($[\theta] < \theta < [\theta] + 1$)
 alors : $A_{h,\theta} = A_{[h]+1,\theta}$ ($A_{h,\theta} = A_{h,[\theta]+1}$)
 ([h] désigne la partie entière de h)

Démonstration

Remarquons que : $S(x) = \sum_{\substack{x_j \in V(x) \\ x_j \neq x}} c(x_j)$ est entier > 0

Supposons h non entier (la démonstration est identique pour θ).

Si $c(x) = 0$, $\Delta_{h,\theta}(c)(x)$ ne dépend pas de h .

Si $c(x) = 1$, $\Delta_{h,\theta}(c)(x) = 1[S(x) - h]$

Mais $S(x) \in \mathbb{N}$ d'où : $(S(x) > h) \Leftrightarrow (S(x) > [h] + 1)$

Donc : $1[S(x) - h] = 1[S(x) - ([h] + 1)] = \Delta_{[h]+1,\theta}(c)(x)$

La proposition est de ce fait démontrée.

Par ailleurs, on vérifie que :

1/ Si $h < 0$ ($\theta < 0$) , $A_{h,\theta} = A_{0,\theta}$ ($A_{h,\theta} = A_{h,0}$)

2/ Si $h > |V(x)|$ ($\theta > |V(x)|$), $A_{h,\theta} = A_{|V(x)|,\theta}$ ($A_{h,\theta} = A_{h,|V(x)|}$)

On peut donc se ramener à : $0 < h, \theta < |V(x)|$

Dans toute la suite nous poserons :

$$A = (A_{h,\theta}) \text{ avec } \begin{cases} h, \theta \text{ entiers} \\ 0 < h, \theta < |V(x)| \end{cases}$$

Proposition 3 :

Si c est un point fixe de $A_{h,\theta}$, c est également point fixe de $A_{h',\theta'}$ avec $h' < h$, $\theta' > \theta$.

Démonstration

Si $c(x) = 0$ alors : $\Delta_{h,\theta}(c)(x) = 0$

Donc : $S(x) < \theta$

D'où : $S(x) < \theta'$, car $\theta' > \theta$

et : $\Delta_{h',\theta'}(c)(x) = 0$.

Si $c(x) = 1$ alors : $\Delta_{h,\theta}(c)(x) = 1$

d'où : $S(x) > h > h'$

donc : $\Delta_{h',\theta'}(c)(x) = 1$

par conséquent, si c est point fixe de $A_{h,\theta}$, c est point fixe de $A_{h',\theta'}$ avec $h' < h$ et $\theta' > \theta$.

Nous allons pousser plus loin l'analyse du comportement itératif de ces automates dans les deux cas suivants :

- 1/ $V =$ "voisinage de Von Neumann"
- 2/ $V =$ "voisinage de Moore généralisé".

3. V = " VOISINAGE VON NEUMANN .

3.1. Notations , Hypothèses.

Si $x = (i, j)$ on note $V(x) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2)$, avec :

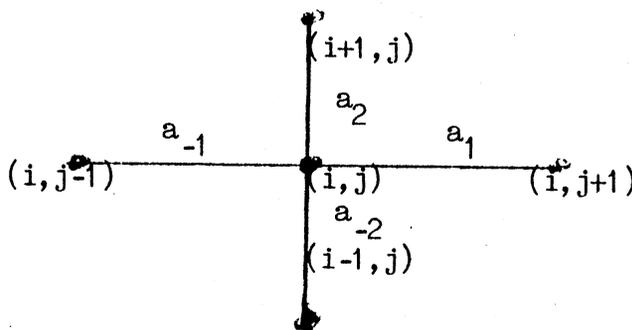
$x_{-2} = (i-1, j)$

$x_{-1} = (i, j-1)$

$x_0 = x$

$x_1 = (i, j+1)$

$x_2 = (i+1, j)$



Si c désigne une configuration de "0s" et de "1s",

$$\Delta \text{ s'écrit : } \Delta(c)(x) = 1 \left[\sum_{j=-2}^2 a_j c(x_j) - \theta \right]$$

avec : $a_j, \theta \in \mathbb{R}, -2 < j < 2$.

On peut, sans perte de généralité, supposer que (à une rotation pres) :

$$\begin{cases} a_{-1} = a - \lambda \\ a_{-2} = b - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = a + \lambda, \lambda > 0 \\ a_2 = b + \mu, \mu > 0 \end{cases}$$

Dans ce cadre, la condition de non expansivité (H) s'exprime sous la forme :

$$(H) : \begin{cases} a + \lambda < \theta \\ b + \mu < \theta \end{cases}$$

Dans tout ce paragraphe, nous supposons (H) réalisée.

De plus nous supposerons que les cellules sont excitatrices, c'est-à-dire que :

$$(H_0) : \begin{cases} a - \lambda > 0 \\ b - \mu > 0 \end{cases}$$

Sous ces conditions la proposition 1 du paragraphe 1 se formule ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \mu = 0 \\ (H) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall c \in C, \exists s \in \mathbb{N} / \Delta^s c = \Delta^{s+2} c$$

Dans un premier temps, nous nous restreignons au cas $\lambda = \mu = 0$ (automate symétrique) et nous nous intéressons au comportement des cellules dans le cycle limite (de longueur < 2) ainsi qu'au problème de la longueur du transitoire γ aboutissant. Dans un deuxième temps, nous aborderons le cas non symétrique.

3.2. Organisation des cellules dans le cycle.

On suppose dans les lignes qui suivent $\lambda = \mu = 0$.

Proposition 1 :

Si $a_0 + a + b < \theta$, il n'existe pas de configuration stable non triviale (non réduite au point fixe "0")

De plus, si $\max(a_0 + a + b, a + b) < \theta$ alors

l'itération $\begin{cases} \Delta c^r = c^{r+1} \\ c^0 \in \mathcal{C} \end{cases}$ converge vers le point fixe "0"

Démonstration :

* Supposons : $a_0 + a + b < \theta$.

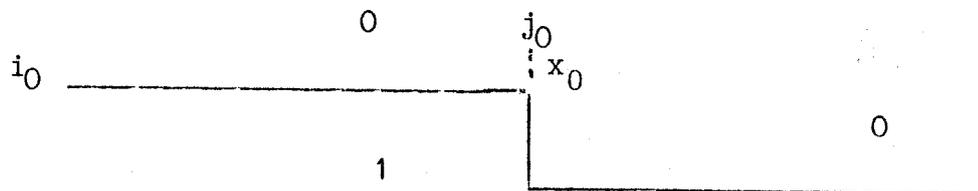
c point fixe non trivial de Δ ;

il existe $x_0 = (i_0, j_0)$ tel que :

$$\forall j > j_0, c(i_0, j) = 0$$

$$\forall i > i_0, c(i, j) = 0$$

$$c(i_0, j_0) = 1$$



On obtient immédiatement : $\Delta(c)(i_0, j_0) = 1$

* Supposons maintenant : $\max(a_0 + a + b, a + b) < \theta$

Plaçons nous dans le cycle limite de cette itération que nous supposons non réduit au point fixe "0". r étant pris suffisamment grand pour que c^r soit dans le cycle, désignons par $x_0 = (i_0, j_0)$ tel que :

$$\forall j > j_0, \quad c^r(i_0, j) = 0$$

$$\forall i > i_0, \quad c^r(i, j) = 0$$

$$c^r(i_0, j_0) = 1$$

Si T est la période de l'automate, nous avons :
 $c^{r+T}(i_0, j_0) = 1$, (A)

Or on vérifie successivement :

$$0 = \Delta c^r(i, j) = \Delta^k c^r(i, j) \text{ pour } i > i_0; \forall k > 1$$

$$\Delta c^r(i_0, j) = \Delta^k c^r(i_0, j) = 0 \text{ pour } j > j_0$$

et enfin :

$$\Delta c^r(i_0, j_0) = \Delta^k c^r(i_0, j_0) = 0 \text{ pour } k = T$$

On a donc $c^{r+T}(i_0, j_0) = 0$ ce qui est contradictoire avec (A)

Le cycle limite de l'itération $\left\{ \begin{array}{l} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in C \end{array} \right.$ est donc

réduit au point fixe "0".

Ceci clôt la démonstration de cette proposition .

Supposons maintenant $a_0 = \theta - h$, On retrouve ainsi la famille $A = (A_{h,\theta})$ dans le cas particulier du voisinage de Von Neumann.

$$\Delta \text{ s'écrit : } \Delta_{h,\theta}(c)(x) = 1[(\theta - h) c(x) + S(x) - \theta]$$

$$\text{avec : } S(x) = \sum_{\substack{j=-2 \\ j \neq 0}}^2 c(x_j)$$

Domaine de variation des paramètres h, θ

La condition (H) de non expansivité s'exprime sous la forme $\tilde{H} : \theta > 2$.

Nous avons donc $\left\{ \begin{array}{l} 2 < \theta < 5 \\ 0 < h < 5 \end{array} \right.$ comme domaine de variation pour h et θ .

- $\theta = 5$: une cellule à "0" reste stable
- $h = 0$: une cellule à "1" reste stable
- $h = 5$: une cellule à "1" passe à "0".

L'objet des lignes qui suivent est d'examiner, \tilde{H} étant réalisée, l'influence des paramètres h et θ sur la structure du cycle limite.

Proposition 2 :

Si $h > 3$, il n'existe pas de configuration stable non

triviale ; de plus si : $\left\{ \begin{array}{l} h > 3 \\ \theta > 3 \end{array} \right.$ (condition P), on a alors

$$\forall c^0 \in C, \bar{s} / \Delta^{\bar{s}} c^0 = 0 \text{ avec : } \bar{s} < p = \max(L, \ell)$$

L et ℓ étant les dimensions du rectangle enfermant la configuration initiale.

Démonstration :

La 1° partie de cette proposition (condition P) n'est autre que la transposition de la proposition 1 au cas considéré (famille A)

Pour évaluer \bar{s} , on procède de la manière suivante :

1/ on montre : $\bar{s} < \tilde{s}$ où \tilde{s} représente le nombre de pas nécessaire à la disparition d'un bloc carré de dimension p .

2/ on établit qu'un bloc carré de dimension p disparaît en p pas

Toujours dans le cas $h > 3$ (pas de configuration stable), imposons $\theta = 2$.

On donne ci dessous des exemples de cycles limites obtenus à partir de configurations initiales introduites à l'aide de générateurs de nombres aléatoires suivant une loi B(p)

($0 < p < 1$) (nombre à 1 avec une proba p)

On appelle activité de l'automate la proportion de cellules changeant d'état au cours d'une itération. On constate que l'activité de l'automate est importante dans le cycle (ce qui est caractéristique d'une grande instabilité). Suivant les cas de 75 % à 100 % des cellules clignotent dans le cycle.

Pour $h = 3$, il est possible d'observer des blocs stables de la forme

		+	
0	1	1	.
	1	1	

Par contre, pour $h = 4$, les seuls blocs stables observables sont composés de cellules à "0" .

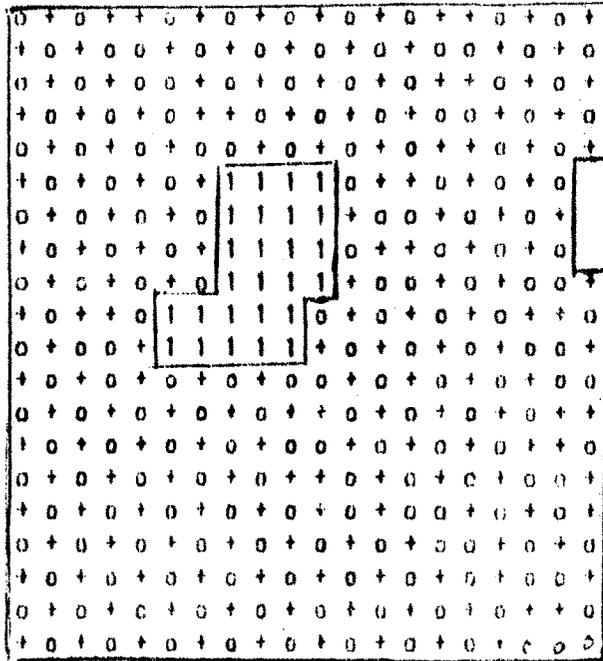
Exemples :

1/ $\theta = 2$, $h = 3$

$$\Delta c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -c(x) + \sum_{\substack{j = -2 \\ j \neq 0}}^2 c(x_j) > 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On donne (figure 1) le cycle limite obtenu à partir d'une configuration initiale choisie à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires ($p = 0.7$). (loi B(p)).

Figure 1

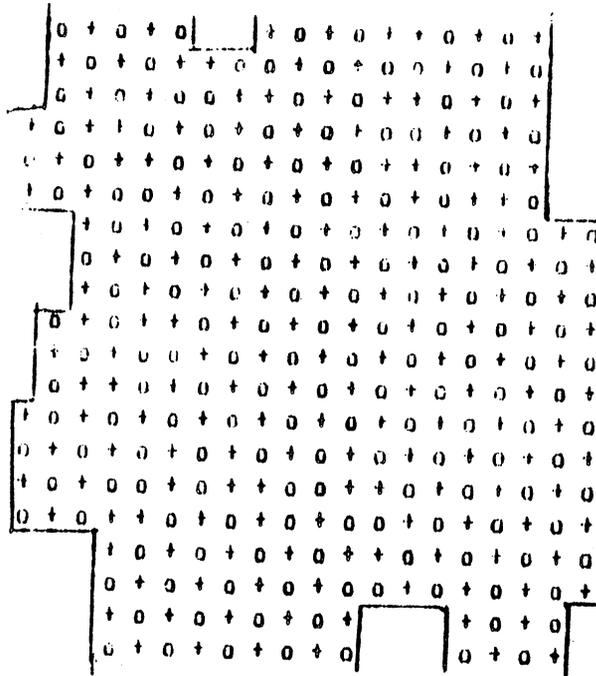


2/ $\theta = 2$, $h = 4$

$$\Delta(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } : -2 c(x) + \sum_{\substack{j = -2 \\ j \neq 0}}^2 c(x_j) > 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que le cycle obtenu ne comporte pas de blocs stables de "1s". La configuration initiale est choisie avec $p = 0.4$

Figure 2



Etudions maintenant le cas : $\begin{cases} h < 2 \\ \theta > 2 \end{cases}$

Proposition 3 :

Il existe des configurations stables non triviales .

Démonstration

Le bloc de "1" suivant est stable :

	0	0	
0	1	1	0
0	1	1	0
	0	0	

La proportion des configurations stables augmente quand h diminue et θ augmente (application directe de la proposition 3 du paragraphe 1). Par ailleurs la proportion de blocs stables de "1s" et de "0s" est contrôlée par les valeurs des paramètres h et θ . (Quand h diminue la

proportion des "1" stables augmente, quand θ augmente la proportion des "0s" stables fait de même).

Cas limite :

$(h, \theta) = (0, 5)$: toute configuration est stable.

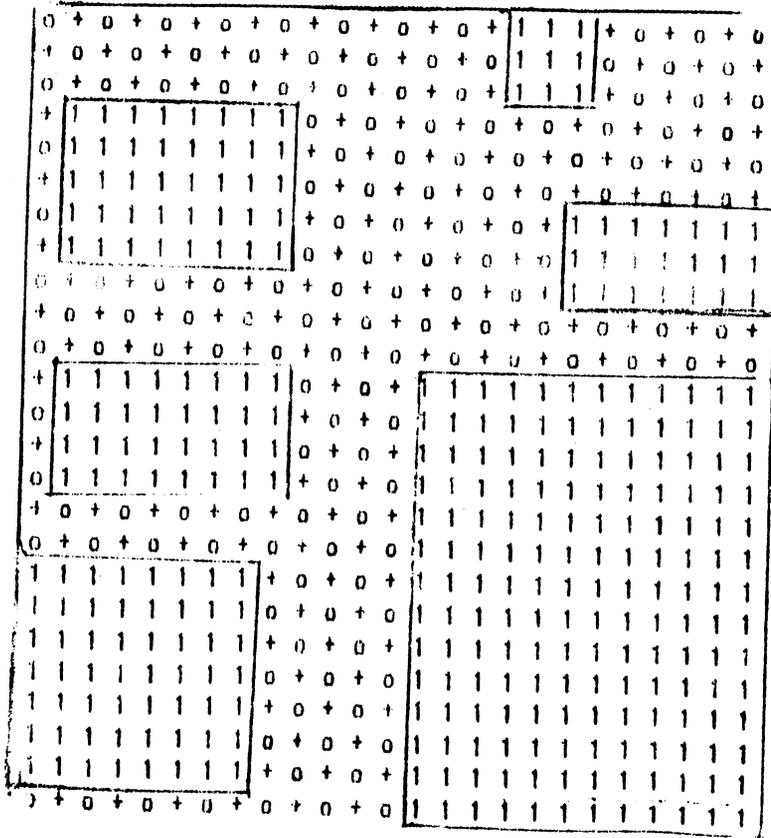
Exemples :

1/ $(h, \theta) = (2, 2)$

$$\Delta(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si : } \sum_{\substack{j = 2 \\ j = -2 \\ j \neq 0}} c(x_j) > 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

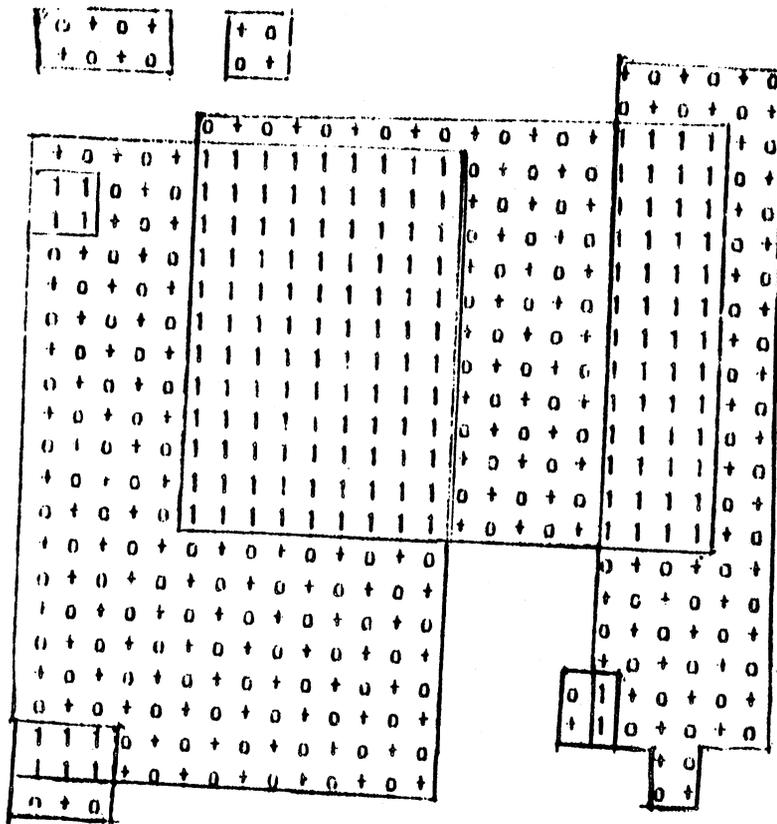
On donne deux exemples d'évolution (figures 3 et 4) à partir de configurations initiales obtenues suivant une loi $B(p)$ avec $p = 0.25$ puis $p = 0.20$. Signalons que la longueur du transitoire aboutissant au cycle limite est supérieure au diamètre de la configuration initiale.

Figure 3



$L = \lambda = 25$
 $p = 0.25$
 $a_0 = 0$
 $\theta = 2$

Figure 4



$L = \lambda = 25$
 $p = 0.2$
 $a_0 = 0$
 $\theta = 2$

2/ $(h, \theta) = (2, 3)$.

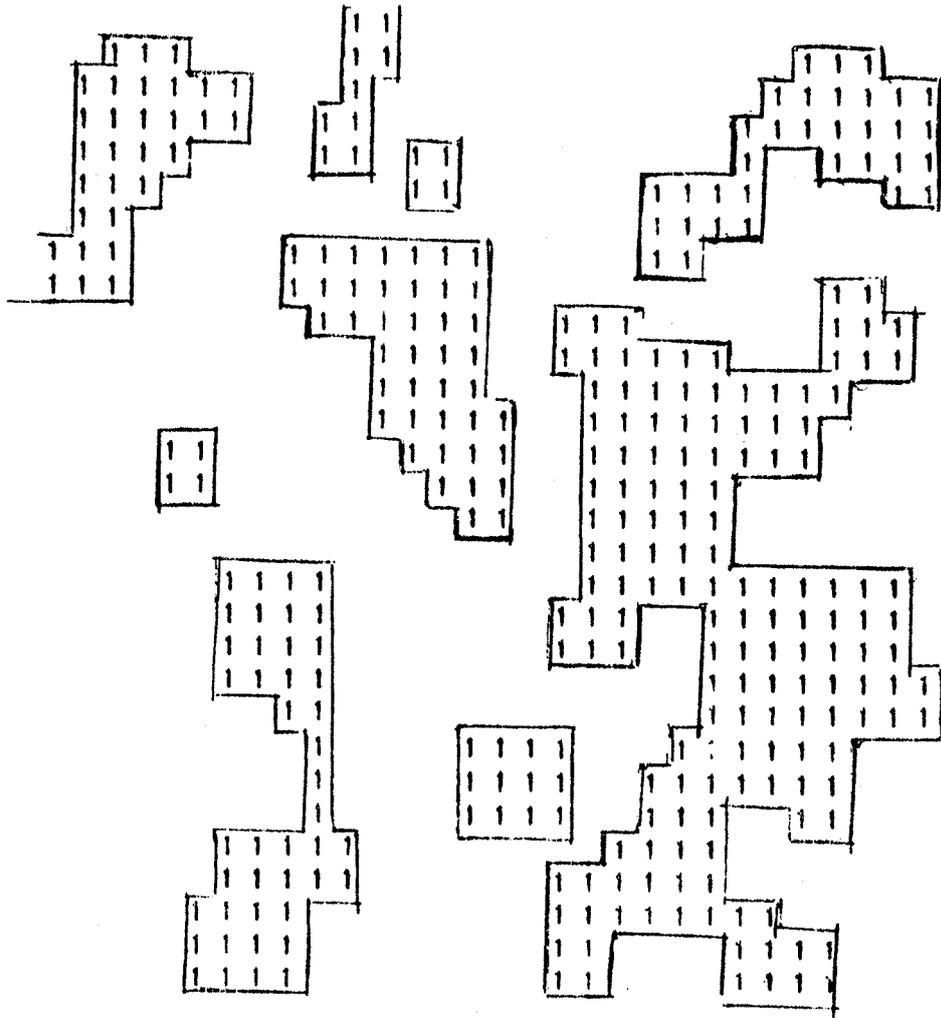
$$\Delta(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si : } c(x) + \sum_{\substack{j = -2 \\ j \neq 0}}^2 c(x_j) > 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Δ s'appelle fonction "majorité" sur Z^2 (Pour plus de précisions sur cette fonction voir par exemple [15]). Le cycle limite obtenu à partir d'une configuration initiale donnée se caractérise par :

- 1/ une grande stabilité des cellules : la proportion des cellules clignotantes ne dépasse pas 3 à 4 % ;
- 2/ un regroupement des "1" et des "0s" en blocs stables bien délimités.

l'exemple suivant fait clairement apparaitre ces propriétés

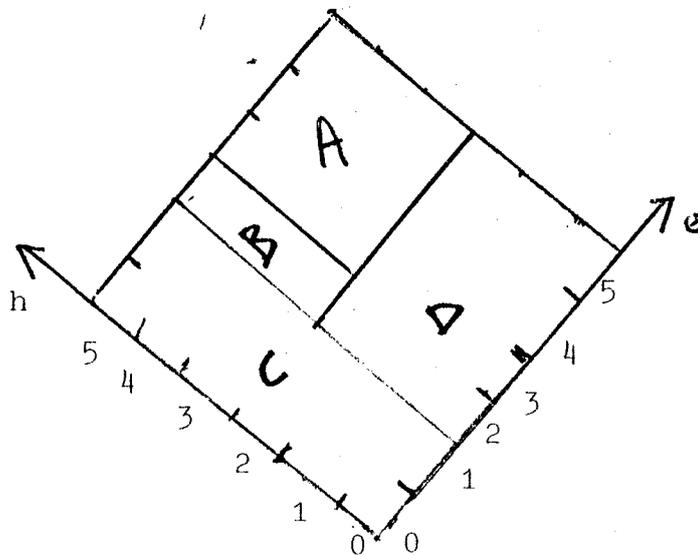
Figure 5



$L = \ell = 30$
 $p = 0.5$

Synthèse des résultats

On peut résumer les remarques précédentes dans le tableau suivant :



Commentaires

- A : $\forall c^0 \in C ; \exists s / \Delta^B c = 0 .$
- B : région d'instabilité de l'automate , possibilité blocs stables de 0^s et de "1" (pour $h=3$).
- C : Expansivité automate (peu d'intérêt pratique)
- D : Existence de configurations stables, la proportion de configurations stables augmentant quand h diminue et θ augmente .

Ces exemples, simples, donnent une idée de l'influence évidente des paramètres de l'automate sur la structure du cycle limite. Nous reprendrons cette étude au paragraphe suivant dans le cas, plus riche, du voisinage de Moore.

3.3 question du transitoire

La question du nombre de pas nécessaires pour atteindre le cycle limite à partir d'une configuration initiale donnée n'est en général pas simple. Dans [7], E.Golès exhibe une famille de fonctions à seuil dont la longueur du transitoire augmente exponentiellement en fonction du nombre de sommets (ceci pour des configurations initiales judicieusement choisies) En ce qui concerne les automates cellulaires uniformes, on peut faire les remarques suivantes :

1/ Nous avons montré à la proposition 1 du paragraphe 2 que pour certains automates "corrosifs" le nombre de pas

était inférieur au diamètre de la configuration initiale ,
ceci au sens de la distance d_{∞} ainsi définie :

$$d_{\infty}(x,y) = \max(|i - i'| , |j - j'|)$$

avec $x = (i , j)$, $y = (j , j')$

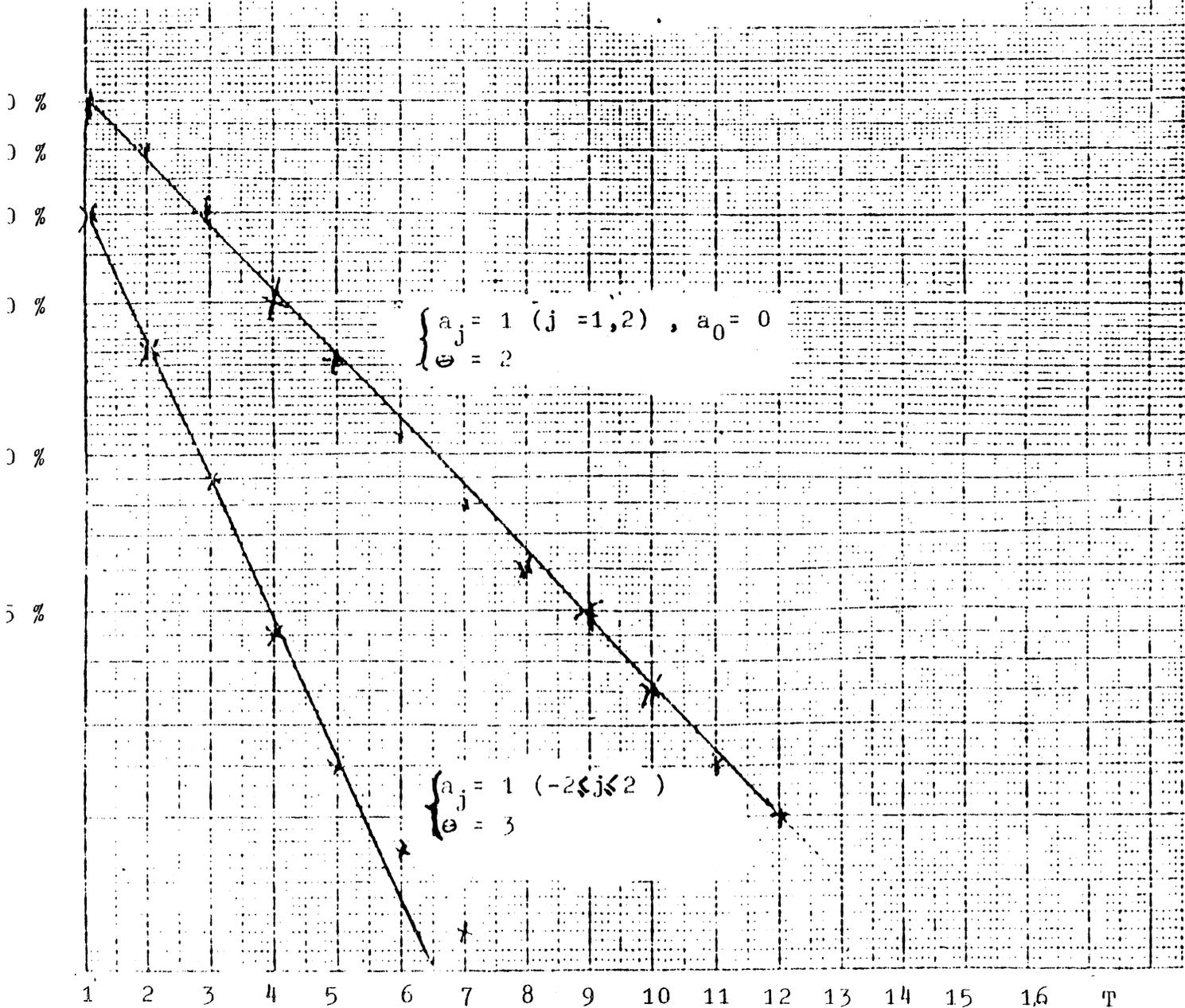
Cette propriété n'est pas vraie en général (en particulier pour les fonctions de type majorité , où nous avons trouvé des contre exemples)

La majoration conjecturée dans [6] ,voir aussi [22], (longueur du transitoire $\leq n$, nombre de cellules de la configuration initiale) n'est pas satisfaisante d'un point de vue pratique (pour $L = \lambda = 30$, il faut 900 pas d'itérations pour être assuré d'atteindre le résultat)

2/ Toutes les simulations effectuées à l'aide de "Sygedisc" ont montré que le cycle était atteint en quelques dizaines de pas. Dans le cas de la fonction majorité sur Z^2 , nous avons abordé le problème de manière un peu différente. Nous avons vu plus haut, que pour cette fonction , les cycles limites obtenus à partir de configurations initiales choisies de manière aléatoire se caractérisent par une très faible activité de l'automate (voisine de 0). On s'est donc intéressé à l'évaluation de l'activité le long du transitoire, ceci à partir d'un grand nombre de configurations initiales (choisies bien sur avec la même proportion de "1s") et nous avons constaté que cette activité décroissait de manière exponentielle le long de ce transitoire comme le fait apparaitre le graphe ci-dessous :

ACTIVITE

ACTIVITE = f(T)



3.4. Cas non symétrique

L'objet des lignes qui suivent est d'examiner dans quelles conditions le comportement 2-cyclique de l'automate reste vérifié lorsqu'il n'est plus symétrique (c'est à dire en dehors des hypothèses assurant une période limite inférieure ou égale à 2)

Plaçons nous sous les conditions (H) (non expansivité)

et (H₀) (cellules excitatrices)

$$(H_0) : \begin{cases} a - \lambda > 0 \\ b - \mu > 0 \end{cases}$$

$$(H) : \begin{cases} a + \lambda < \theta \\ b + \mu < \theta \end{cases}$$

Notons $\Delta_{\lambda, \mu}$ la fonction globale de transition paramétrée par λ et μ

$$\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si : } a_0 c(x) + (a - \lambda) c(x_{-1}) + (a + \lambda) c(x_1) \\ & + (b - \mu) c(x_{-2}) + (b + \mu) c(x_2) > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Delta_{0,0}$ est l'opérateur symétrique à seuil dont il a été question dans les pages précédentes (qui vérifie donc les hypothèses assurant le comportement 2-cyclique)

Proposition 2 :

Si $\max(a_0 + a + b - \lambda - \mu, a + b - \lambda - \mu) < \theta$ alors l'itération

$$\begin{cases} \Delta_{\lambda, \mu}(c^r) = c^{r+1} \\ c^0 \in \mathbf{C} \end{cases} \quad \text{converge vers "0" en un nombre}$$

fini de pas.

Ce résultat est en fait la proposition 1 (3-2), adaptée au cas étudié. Nous ne reproduisons donc pas la démonstration.

Remarque :

Ce résultat fait appel à des considérations de type topologique (On utilise le fait que l'automate agit sur un domaine fermé du plan). Il ne "passe" pas dans le cas d'un tore, comme le montre l'exemple ci dessous :

Exemple :

Posons :

$$a_0 = 1$$

$$a_{-1} = 1$$

$$a_1 = 1 \quad \theta = 3$$

$$a_{-2} = 0,9$$

$$a_2 = 1,1$$

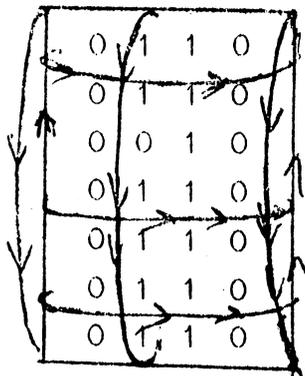
$$\text{On a : } \begin{cases} \theta = 3 \\ a_0 + a_{-1} + a_{-2} = 2,9 < 3 \end{cases}$$

Si l'automate agit sur Z^2 (automate cellulaire uniforme), on peut appliquer les résultats de la proposition 2

$$\forall c^0 \in C, \exists s \in \mathbb{N} \quad \Delta^s(c^0) = 0$$

Supposons maintenant que l'automate agisse sur un tore (fonction locale en dimension 2 de type 1). Si n est la dimension du tore, on peut obtenir des cycles de longueur n

en effet, soit c^0 la configuration initiale suivante :



Toutes les colonnes de c^0 sont à "0" sauf deux :

L'une remplie de "1"

L'autre remplie de "1" sur toutes les lignes sauf une à "0" .

On vérifie sans problème que c^0 appartient à un cycle de longueur n .

Supposons pour la suite que la condition (P) est vérifiée :

$$(P) : \max(a_0 + a + b - \lambda - \mu, a + b - \lambda - \mu) > 0$$

Proposition 3 :

Si $a_0 = 0$, le comportement 2-cyclique de l'automate reste vérifié.

Démonstration :

Posons pour $c \in C$, $E(x) = \{ y \in V(x) / c(y) = 1 \}$

1°/ $|E(x)| = 0, 1$

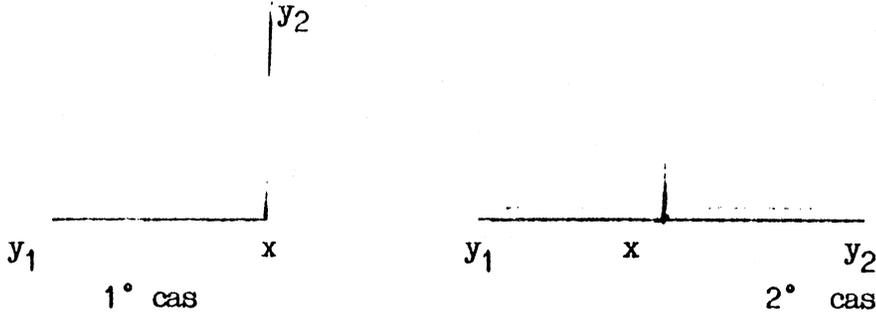
Alors en utilisant (H) , on obtient :

$$\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \Delta_{0, 0}(c)(x) = 0$$

2°/ $|E(x)| = 2$

On a alors $E(x) = \{y_1, y_2\}$

En fait, on se trouve géométriquement dans l'un des deux cas suivant, à une rotation près :



1° cas

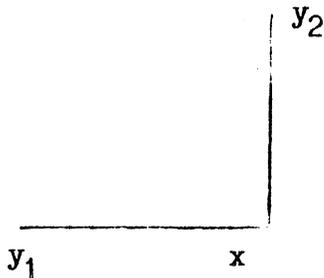
En utilisant l'inégalité : $a + b > a - \lambda + b - \mu > 0$
 on obtient : $\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \Delta_{0,0}(c)(x) = 1$

2° cas

On obtient immédiatement : $\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \Delta_{0,0}(c)(x)$

3°/ $|E(x)| > 3$

Alors il existe y_1, y_2 dans $V(x)$ avec :



Utilisant (H_0) et ce qui vient d'être dit pour $|V(x)| = 2$
 on obtient immédiatement : $\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \Delta_{0,0}(c)(x) = 1$

Par conséquent on a : $\Delta_{\lambda, \mu} = \Delta_{0,0}$, ce qui prouve le comportement 2 - cyclique de $\Delta_{\lambda, \mu}$.

Remarque :

La propriété 2 reste vraie dans le cas d'un tore (démonstration purement algébrique) avec bien entendu $a+b-\lambda-\mu > 0$.

Intéressons-nous maintenant au cas où $a_0 \neq 0$.

Proposition 4

Si $a_0 \notin [\theta - 2(a+b), \theta[$ le comportement 2-cyclique reste vérifié.

Démonstration :

Si $c(x) = 0$ on a : $\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \Delta_{0,0}(c)(x)$
d'après ce qui précède (pas d'influence de a_0)

Si $c(x) = 1$ alors :

$$\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = 1 = \Delta_{0,0}(c)(x) \quad \text{si : } a_0 > \theta$$

$$\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = 0 = \Delta_{0,0}(c)(x) \quad \text{si : } a_0 \in [\theta - 2(a+b), \theta[$$

On a donc $\Delta_{\lambda, \mu}(c)(x) = \Delta_{0,0}(c)(x)$ et on obtient ainsi la périodicité recherchée.

Dans le cas où $a_0 \in [\theta - 2(a+b), \theta[$ nous conjecturons que la période limite est toujours 2 , ceci en nous appuyant entre autres sur les simulations effectuées.

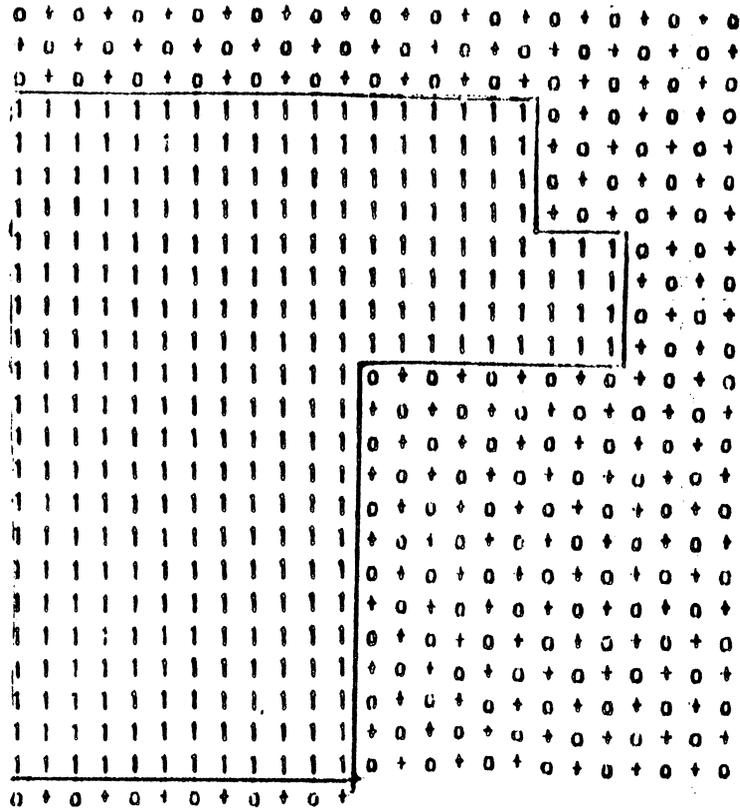
Exemple :

$$a_0 = -0.4, a_1 = 1.2, a_{-1} = 0.8, a_{-2} = 1.1, a_2 = 0.9$$

$$\theta = 1.7$$

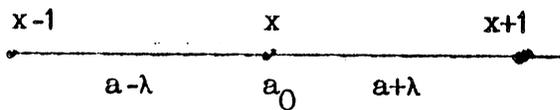
Figure 6

Cycle de longueur 2
 obtenu
 à partir
 de c^0 ($p = 0.65$)



Remarque :

Considérons la restriction de $\Delta_{\lambda, \mu}$ à Z , (automate cellulaire uniforme à seuil en dimension 1).



$$\Delta_{\lambda}(c)(x) = 1 [a_0 c(x) + (a - \lambda) c(x + 1) + (a + \lambda) c(x + 1) - \theta]$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta > 0 \\ a + \lambda < \theta \\ a_0 \in \mathbb{R}, a - \lambda > 0, \lambda > 0 \end{array} \right.$$

On démontre que pour toute configuration initiale c^0 l'itération $\Delta_\lambda c^r = c^{r+1}$ converge vers un point fixe en un nombre fini de pas, inférieur ou égal à la largeur de la configuration .

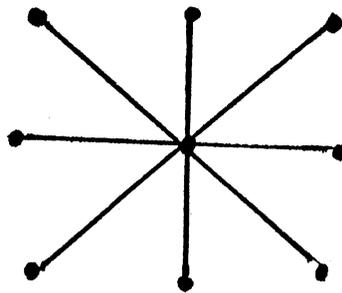
4. VOISINAGE DE MOORE " G E N E R A L I S E "

4.1. Notations , Hypothèses.

Si $x = (i, j)$, $k > 1$ entier. On notera Voisinage généralise de Moore de x , l'ensemble $V_k(x) = \{ z \in \mathbb{Z}^2 / d_\infty(x, z) \leq k \}$

avec $d_\infty(x, z) = \max (|i - \ell| , |j - m|)$
si $z = (\ell, m)$

$$|V_k(x)| = (2k+1)^2 = p .$$



Pour $k = 1$, on retrouve le voisinage de Moore classique .

Considérons la famille $A = (A_{h, \theta})$ ($0 < h, \theta < |V(x)|$) présentée au paragraphe 1 de ce chapitre et appliquée au

voisinage $V(k)$.

Pour h, θ fixés, on désigne par $\Delta_{h, \theta}$ la fonction globale de transition :

$$\Delta_{h, \theta}(c)(x) = 1 [(\theta - h) c(x) + \sum_{x_j \in V_k(x) - \{x\}} c(x_j) - \theta]$$

Dans un premier temps nous allons montrer que A est identique à une famille d'automates cellulaires uniformes analysée par H D.Schultz [19] dans la modélisation de phénomènes de ségrégation [17]. Combinant l'analyse de H D.Schultz aux résultats connus sur les automates à seuil, nous présentons un tableau d'ensemble du comportement itératif de ces automates suivant les valeurs des paramètres h, θ .

4.2. Identification avec l'automate de H.D.Schultz.

Soient i, j deux entiers positifs. On considère la famille d'automates cellulaires uniforme suivante:

$$S = \{ S_{i, j} \ (i, j \in \mathbb{N}) \}$$

$$\text{avec : } S_{i, j} = (\mathbb{Z}^2, V_{(k)}, \{0, 1\}, 0, \sigma_{i, j})$$

$\sigma_{i, j}$ ainsi définie

Si $c(x) = 0$ alors :

$$\sigma_{i, j}(c)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_0(x) > i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$S_0(x)$ désignant le nombre de sommets voisins de x y compris lui même à "0".

Si $c(x) = 1$ alors :

$$\sigma_{i,j}^{(c)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_1(x) > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$S_1(x)$ désignant le nombre de sommets voisins de x y compris lui même à "1".

La famille d'automates $\mathbf{S} = (S_{ij})$
 $1 < i < (2k+1)^2$, $1 < j < (2k+1)^2$

est utilisée dans la modélisation de phénomènes de ségrégation et est analysée dans [19] du point de vue de l'existence des configurations stables. Toutefois ,on ne sait pas ,jusqu'à présent, déterminer la période limite des automates de cette famille.

Mais ces automates sont aussi l'extension sur Z^2 , dans le cadre du voisinage $V(k)$, des fonctions double seuil introduites au chapitre 1. On peut donc faire état du résultat suivant, qui va nous permettre de répondre à cette question de la période limite de cette famille d'automates.

Proposition 1 :

$$A = S$$

Plus précisément $S_{i,j} = A_{h,\theta}$ avec

$$\begin{cases} h = j-1 \\ \theta = (2k+1)^2 - i + 1 \end{cases}$$

Démonstration :

La démonstration de cette proposition se fait par application de la proposition 2 du paragraphe 3 du chapitre 1 (fonction double seuil)

Il suffit à ce effet de remplacer dans la démonstration de cette proposition $dg(x)$ par : $(2k + 1)^2 - 1$ pour obtenir h et θ en fonction des paramètres i et j .

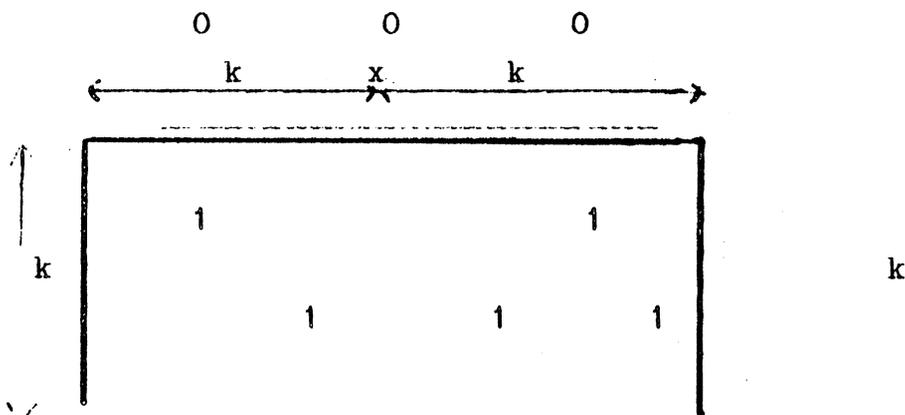
A et S ayant le même nombre d'éléments, ces deux familles sont donc identiques.

Remarque :

$$\text{De } \begin{cases} h = j-1 \\ \theta = (2k+1)^2 - i + 1 \end{cases}, \text{ on déduit } \begin{cases} i = (2k+1)^2 + 1 - \theta \\ j = h + 1 \end{cases}$$

4.3. Analyse du comportement itératif.

Condition de non expansivité



Pour x (à l'état "0") disposé comme ci dessus on a $S(x) = k(2k + 1)$

La condition de non expansivité s'écrit sous la forme (H) :

$$(H) : \theta > k(2k + 1) + 1 = \theta_{\text{exp}}$$

Valeurs de θ_{exp} pour $k = 1, 2, 3, 4$

k	1	2	3	4
θ_{exp}	4	11	22	37
$(2k+1)^2$	9	25	49	81

Dans ce qui suit, nous supposons (H) réalisée.

L'objet des lignes qui suivent est, de la même manière qu'au paragraphe précédent d'étudier l'influence des paramètres h et θ sur la structure du cycle limite de l'itération, la configuration initiale étant prise suivant une loi $B(p)$.

Sous (H), nous pouvons, d'après ce qui précède faire état du résultat suivant concernant la longueur des cycles de cet automate

Proposition 2

$\forall c^0 \in C$, l'itération $\Delta_{h,\theta} c^r = c^{r+1}$ converge vers un point fixe ou un cycle de longueur 2.

L'utilisation de la théorie des fonctions à seuil nous permet donc de répondre à une question restée en suspens concernant "l'automate de H D.Schultz".

On rappelle (paragraphe 1 de ce chapitre) que si c est point fixe de $\Delta_{h,\theta}$ c est point fixe de $\Delta_{h',\theta'}$, avec : $\theta' > \theta$, $h' < h$.

Proposition 3 :

Soit $\lambda_c = k + (2k+1)k + 1$
 Si $h > \lambda_c$, alors il n'existe pas de configuration stable non triviale (non réduite au point fixe "0")

De plus si $\begin{cases} h > \lambda_c \\ \theta > \lambda_c \end{cases}$, alors l'itération

$\begin{cases} \Delta c^r = c^{r+1} \\ c^0 \in C \end{cases}$ converge vers le point fixe "0".

Démonstration :

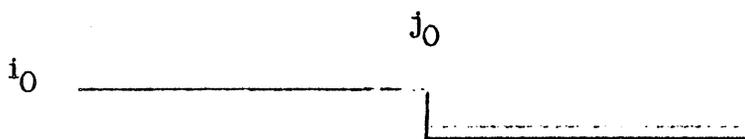
* Supposons : $h > \lambda_c$.

Soit c point fixe non trivial de $\Delta_{h,\theta}$
 il existe $x_0 = (i_0, j_0)$ tel que

$$\forall i \quad i_0 \quad c(i, j) = 0$$

$$\forall j \quad j_0 \quad c(i_0, j) = 0$$

$$c(i_0, j_0) = 1$$



On obtient $S(x_0) < k + (2k + 1)k = \lambda_c$

D'où : $\Delta(c)(i_0, j_0) = 0$ ce qui prouve qu'il n'existe pas de point fixe non trivial.

* Supposons maintenant : $\begin{cases} h > \lambda_c \\ \theta > \lambda_c \end{cases}$

Plaçons nous alors dans le cycle limite de l'itération que nous supposons non réduit au point fixe "0".

r étant pris suffisamment grand pour que c^r appartienne au cycle, désignons par :

$$x_0 = (i_0, j_0) \text{ tel que}$$

$$\forall j > j_0, c^r(i_0, j) = 0$$

$$\forall i > i_0, c^r(i, j) = 0$$

$$c^r(i_0, j_0) = 1$$

On a la relation : $c^{r+2}(i_0, j_0) = 1$ (A)

En même temps, on vérifie successivement que :

$$\Delta(c^r)(i_0, j) = \Delta^2(c^r)(i_0, j) = 0 \text{ pour } j > j_0$$

$$\Delta(c^r)(i, j) = \Delta^2(c^r)(i, j) = 0 \text{ pour } i > i_0$$

$$\text{et enfin : } \Delta(c^r)(i_0, j_0) = \Delta^2(c^r)(i_0, j_0) = 0$$

Cette dernière affirmation est contradictoire avec (A);

Le cycle limite de l'itération considérée est donc réduit au point fixe "0".

Ceci clôt la démonstration de cette proposition.

Valeurs de λ_c pour $k = 1, 2, 3, 4$.

k	1	2	3	4
θ_{exp}	4	11	22	37
λ_c	5	13	25	41
$(2k+1)^2$	9	25	49	81

Intéressons-nous maintenant au cas :

$$\begin{cases} \theta_{\text{exp}} < \theta < \lambda_c - 1 \\ h < \lambda_c \end{cases}$$

Comme les exemples ci-dessous le montrent , il peut exister cependant des blocs stables de "0" et de "1" (en moindre proportion quand h augmente). En même temps , on a constaté expérimentalement une forte instabilité dans le cycle limite (qui ne se retrouve pas dans les exemples ci-dessous choisis pour faire apparaître des blocs de "1").

Exemples :

$$k = 2 , \quad \theta_{\text{exp}} = 11 , \quad \lambda_c = 13)$$

On donne deux exemples d'évolutions (figures 1 et 2) pour :

$$\begin{cases} \theta = 12 \\ h = 13 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta = 10 \\ h = 13 \end{cases}$$

Figure 1

$L = \lambda = 25$
 $p = 0.7$
 $\theta = 12$
 $h = 13$

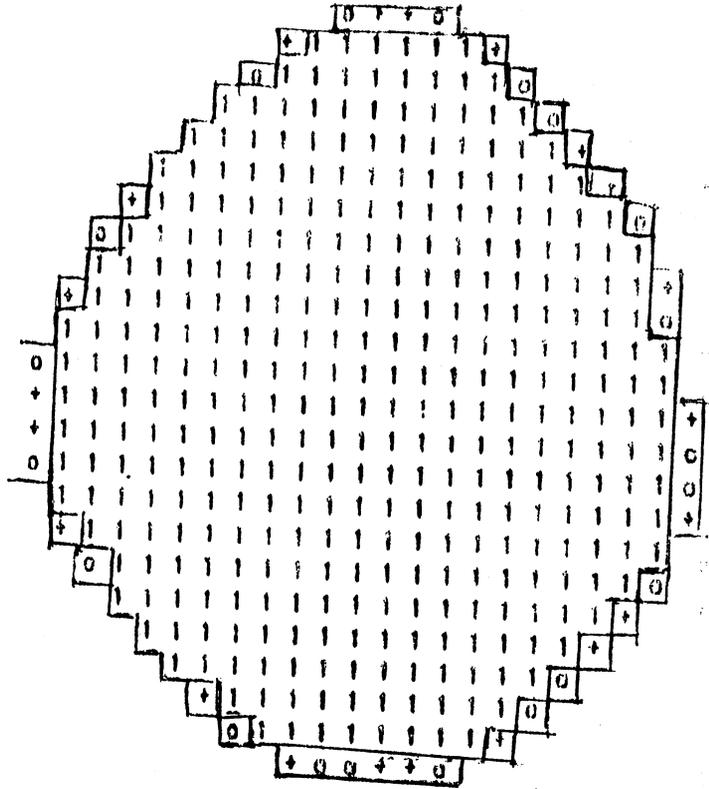
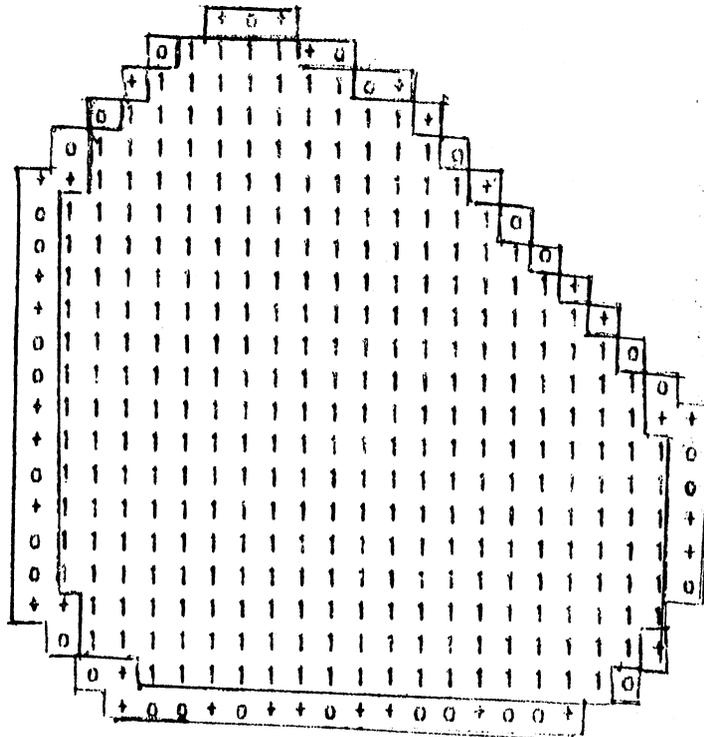


Figure 2

$L = \lambda = 25$
 $p = 0.5$
 $\theta = 10$
 $h = 13$



Supposons maintenant $h < \lambda_c$ (pour toute la suite).

Proposition 4 [19] :

Si $h < \lambda_c$, il existe des blocs stables de "1s", et ceci pour tout k . De plus, si $\theta > \lambda_c$ il existe des blocs stables de "0s" à l'intérieur de blocs stables de "1"

Démonstration

La démonstration de cette proposition est due à H.D.Schultz [19]. Elle consiste à exhiber un algorithme construisant la frontière de blocs stables.

Ce résultat, allié au fait que :

(c point fixe de $\Delta_{h,\theta}$) (c point fixe de $\Delta_{h',\theta'}$, $h' < h$, $\theta' > \theta$) nous permettent d'affirmer que le cycle limite de

$$\text{l'itération : } \begin{cases} \Delta_{h,\theta} c^r = c^{r+1} \\ c^0 \in C \end{cases} \quad (c^0 \text{ obtenu à partir de } B(p)) \text{ se}$$

caractérise en général dans cette zone par une faible activité (blocs stables importants) qui tend d'ailleurs à diminuer quand h diminue et θ augmente (la proportion de configurations stables augmentant).

Cas limite :

* $(h, \theta) = (0, (2k+1)^2)$

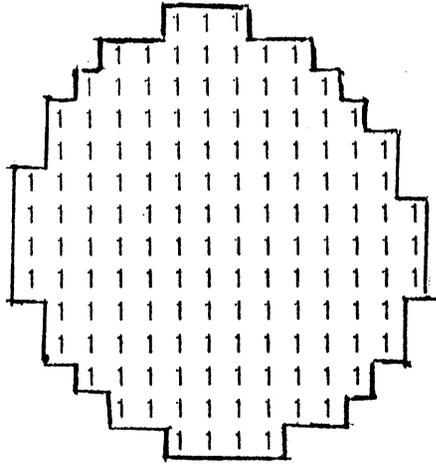
Toute configuration est stable.

Exemples :

1/ $k = 2$ $\theta = 12$, $h = 12$

Nous donnons le cycle limite obtenu à partir d'une configuration initiale introduite à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires.

Figure 3



2/ $k = 2$; $\theta = 13$; $h = 12$.

Cet exemple est l'application pour $k = 2$ de la fonction majorité sur Z^2 associée au voisinage $V(k)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_m = (2k + 1)k + k + 1 = ((2k + 1)^2 + 1) / 2 \\ h_m = \theta_m - 1 \end{array} \right.$$

Les cycles limites correspondant à ce type de fonction se caractérisent par une très faible activité de l'automate et une délimitation très nette des blocs de "1_s" et de "0_s" (cf. paragraphe 3.2.)

On donne deux exemples de point fixe pour $k = 1$, puis $k = 2$

Figure 3

$k = 1$
 $p = 0.5$
 $\theta = 13$
 $h = 12$

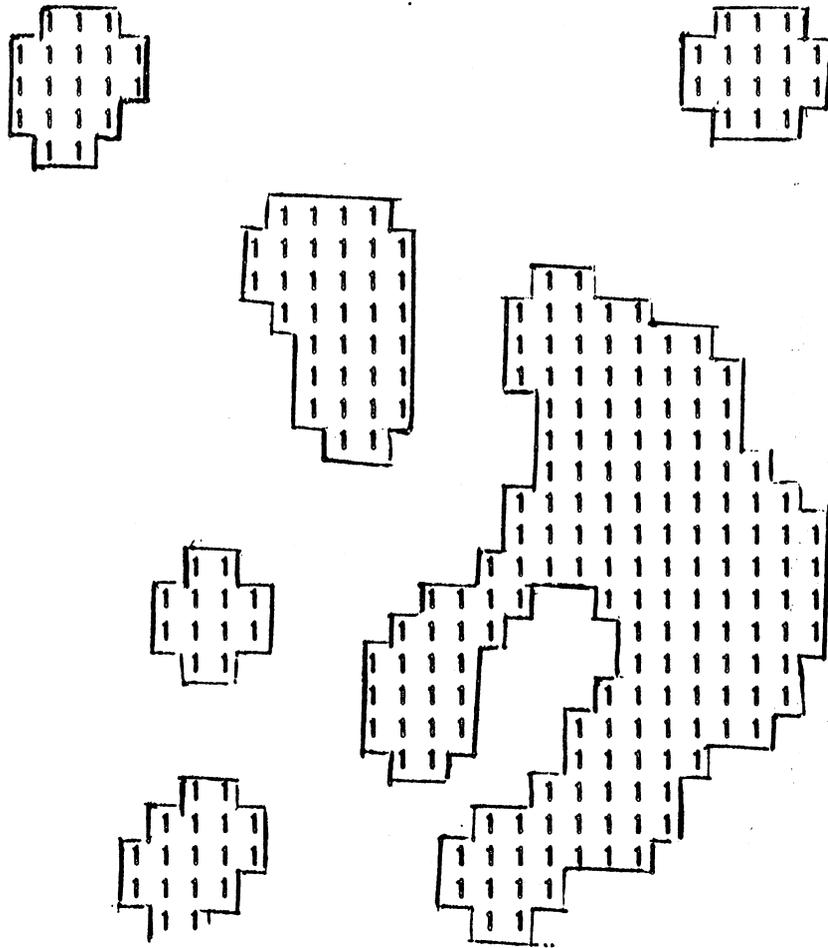
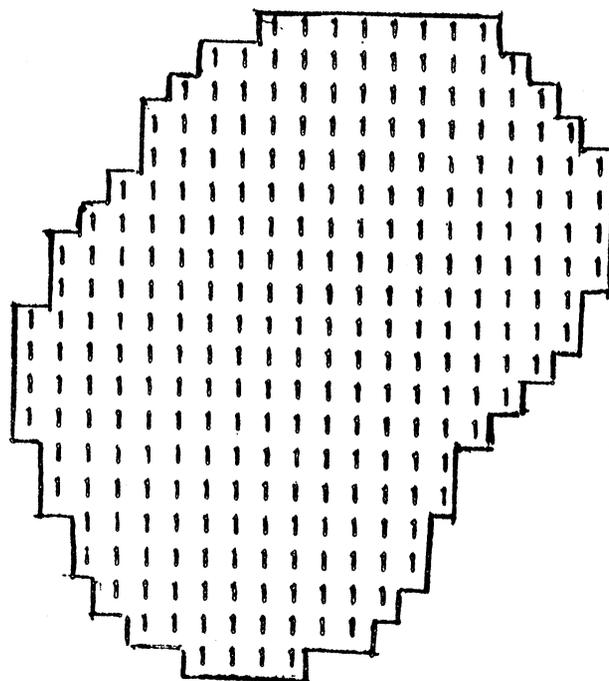


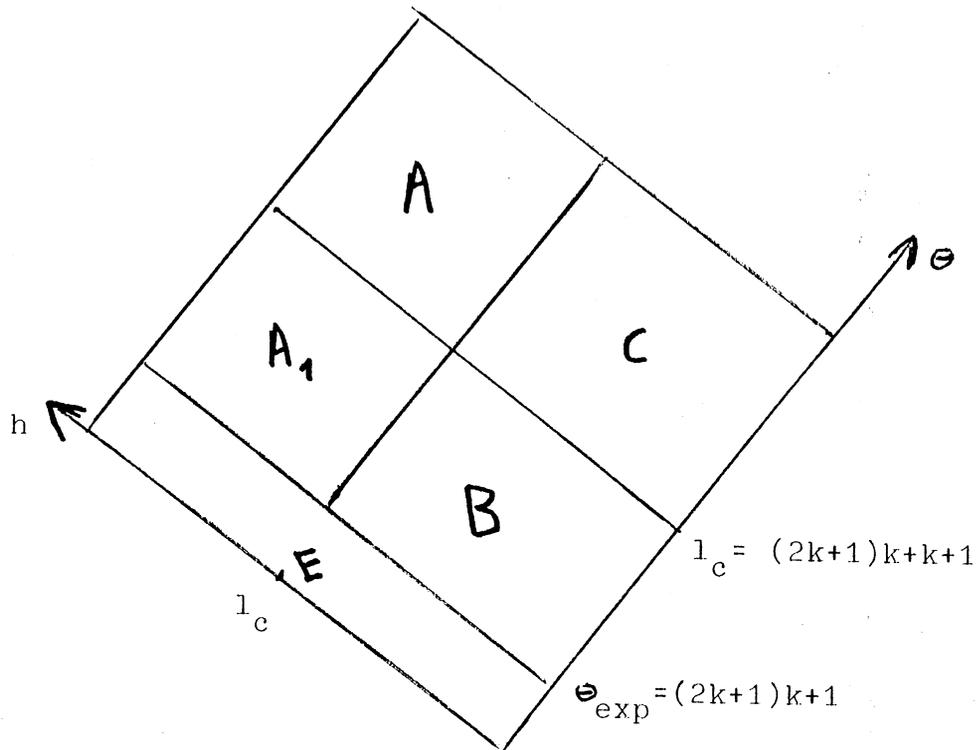
Figure 4

$k = 2$
 $p = 0.5$
 $\theta = 13$
 $h = 12$



-124-
4.4 Synthèse

On peut résumer l'analyse faite dans le tableau suivant :



- E : région où l'automate est expansif
- A : $\forall c^0 \in C, s \in \mathbb{N}, \Delta^s c = 0$.
- A_1 : Pas de configuration stable ; existence blocs stables de "1", forte activité dans le cycle limite .
- B,C : Existence de configurations stables dont la proportion augmente quand θ augmente et h diminue . Dans C , Existence de blocs stables de "0" inclus dans une région stable de "1s"

CONCLUSION

En utilisant à la fois les résultats connus sur la théorie des fonctions à seuil et les possibilités du système "Sygedisc", nous avons pu décrire plus finement le comportement itératif d'automates cellulaires uniformes à seuil et unifier des travaux menés à l'époque sur des objets considérés comme différents mais qui étaient en fait identiques (voir par exemple [17] et [19]).

Dans le cas du voisinage de Von Neumann, reste à approfondir l'étude concernant le cas non symétrique, ainsi que celle concernant la longueur du transitoire.

Dans le cas du voisinage de Moore, il serait intéressant d'avoir une caractérisation plus détaillée des configurations stables (et des blocs stables) suivant les valeurs des paramètres de l'automate ceci en faisant, par exemple une étude expérimentale plus systématique. Par ailleurs, il faudrait analyser l'influence de la fonction de voisinage (c'est à dire du paramètre k) sur la forme de ces blocs stables (par exemple dans le cas de la fonction Majorité) ; on ne peut toutefois, dans l'état actuel de "SYGEDISC", faire des simulations pour des valeurs de k importantes (ceci pour les raisons de temps de calcul exposées au chapitre 3)

CHAPITRE 5

AUTOMATES CELLULAIRES UNIFORMES

REFRACTAIRES A SEUIL

1. I N T R O D U C T I O N

La classe d'automates dont nous analysons le comportement dans ce chapitre est une extension sur Z^2 des fonctions étudiées au chapitre 2. Cette classe constitue en même temps une généralisation des automates cellulaires uniformes à seuil par introduction d'une période d'excitation (la cellule influe sur ses voisines) et de réfraction (elle n'est pas prise en compte par ses voisines), le passage de l'état de repos à l'état actif étant contrôlé par une règle de seuil.

Le formalisme adopté permet , par le jeu des paramètres de relier des modèles discrets issus de problèmes distincts et analysée de manière séparée : sociologie, biologie (neurones dans le cerveau (18)) ou encore en chimie (phénomènes de réaction diffusion (9),(10)...). Nous donnons quelques résultats portant essentiellement sur la longueur des cycles limites de cette famille d'automates.

2. PRESENTATION DE LA

FAMILLE D'AUTOMATES

Dans ce qui suit nous utilisons des notations et définitions introduites et explicités au chapitre 1 .

2.1. Définitions, rôle des paramètres

On désigne successivement par :

$E = \{1, 2, \dots, E\}$, $E > 1$: E période d'excitation

$R = \{-R+1, \dots, -1\}$, $R > 1$: R période de réfraction

$Q = E \cup R \cup \{0\}$: ensemble d'états.

$V = (v_{-2}, v_{-1}, 0, v_1, v_2)$: voisinage de Von Neumann
 $v_j \in \mathbb{Z}^2$ ($-2 < j < 2$)

$\delta : Q^5 \rightarrow Q$: fonction locale de transition.

$$\delta(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \left[\sum_{-2 \leq j \leq 2} a_j \tilde{x}_j - \theta \right] & \text{si } x_0 = 0 \\ x_0 + 1 & \text{si } \begin{cases} 1 < x_0 < E-1 \\ \text{ou} \\ -R+1 < x_0 < -1 \end{cases} \\ -R + 1 & \text{si } x_0 = E \end{cases}$$

avec : a_j , $\theta \in \mathbb{R}$ ($-2 < j < 2$)

$$\text{et } \tilde{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, E] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un élément de la famille d'automates cellulaires uniformes étudiée se définit par la donnée de $A = (Z^2, V, Q, 0, \delta)$.

0 désignant l'état de repos.

Si c désigne une configuration, la fonction globale de transition Δ se définit ainsi :

$$\Delta : C \rightarrow C$$

$$\Delta(c)(x) = \delta(c(x_{-2}), \dots, c(x_2)) = \begin{cases} 1 \left[\sum_{-2 < j < 2} a_j \tilde{c}(x_j) - \theta \right] & \text{si } c(x) = 0 \\ c(x) + 1 & \text{si } \begin{cases} 1 < c(x) < E-1 \\ \text{ou} \\ -R+1 < c(x) < -1 \end{cases} \\ -R + 1 & \text{si } c(x) = E \end{cases}$$

Ceci bien sur en posant $\tilde{c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(x) > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Le passage de l'état de repos à l'état actif se fait donc suivant une de seuil.

2.2. Liens avec automates existants :
Questions posées

La condition de non expansivité s'exprime sous la forme

$$(H) \quad \begin{cases} a_j < 0 \\ j = -2, 2 \end{cases}$$

Remarque n° 1 :

Supposons : $(a_j > 0) \quad j = -2, 2$

$$\text{alors : } 1 \left[\sum_{-2 < j < 2} a_j \tilde{c}(x_j) - 0 \right] = 1 \left[\sum_{-2 < j < 2} \tilde{c}(x_j) - 1 \right]$$

Δ s'écrit alors de la manière suivante :

Si $c(x) = 0$,

$$\Delta(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si l'une des quatre voisines de } x \text{ (au moins)} \\ & \text{est à l'état actif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Sinon } \Delta(c)(x) = \begin{cases} c(x) + 1 & \text{si } \begin{cases} 1 < c(x) < E - 1 \\ \text{ou} \\ -R + 1 < c(x) < -1 \end{cases} \\ -R + 1 & \text{si } c(x) = E \end{cases}$$

A ce niveau, on retrouve dans un contexte un peu différent, puisqu'il s'agit de fonctions opérant sur Z^2 , la classe d'automates analysée au chapitre 2. Or, c'est sous cette forme que ces fonctions avaient été auparavant étudiées (références indiquées au chapitre 2), ceci dans l'optique de la modélisation de phénomènes de réaction diffusion en Chimie. Nous y reviendrons plus en détail dans le paragraphe 3.2.2.

Remarque n° 2 :

Pour $E = 1$, on retrouve un automate analysé par R. Shingai dans [18] sous des motivations différentes que celles à l'origine des articles cités plus haut, et de ce fait, étudié de manière complètement indépendante.

Supposons maintenant : $E = R = 1$.

Δ se définit alors ainsi :

$$\Delta(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (c(x) = 0 \text{ et } : \sum_{x_j} \frac{a_j}{V(x)^j} c(x_j) > \theta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

formulation équivalente à :

$$\Delta(c)(x) = 1 \left[-A c(x) + \sum_{x_j} \frac{a_j}{V(x)^j} c(x_j) - \theta \right]$$

avec $A > \theta - \sum_{j=-2}^2 a_j$

Sous cette formulation, on reconnaît un automate cellulaire uniforme à seuil. (voir chapitre 4)

La classe d'automates introduite recouvre donc partiellement les automates à seuil.

Le but de l'étude qui suit est de déterminer, en fonction des paramètres E, R, θ la période limite de cette famille d'automates.

3. ANALYSE DU

COMPORTEMENT ITERATIF

3.1. Cas où $E = R = 1$;
comportement 2-cyclique :

L'application Δ se formule de la manière suivante :

$$\Delta(c)(x) = 1 \left[-A c(x) + \sum_{x_j} \frac{a_j}{V(x)^j} c(x_j) - \theta \right]$$

avec $A > \theta - \sum_{j=-2}^2 a_j$ / ceci d'après le paragraphe précédent.

Δ vérifie les conditions d'applications de la proposition 4 du paragraphe 3 du chapitre 4 .

Par conséquent l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$ converge vers un

cycle de longueur inférieure ou égale à 2 , ceci sans avoir forcément : $a_j = a_{-j}$

Remarque

Ce résultat avait déjà été obtenu par Shingai dans [17]. L'utilisation de la théorie des automates à seuil simplifie considérablement la démonstration puisque qu'elle la réduit à l'application d'un théorème.

3.2. Cas général

Nous supposons dans toute la suite $(E,R) \neq (1,1)$

On va analyser le comportement itératif de l'automate dans deux cas :

- 1/ automate non expansif (H réalisée)
- 2/ $a_j > 0$, $j = -2, 2$.

3.2.1. Automate non expansif :

Nous sommes donc sous la condition

$$(H) \begin{cases} a_j < 0 \\ -2 < j < 2 \end{cases}$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $\begin{cases} a_{-1} < a_1 \\ a_{-2} < a_2 \end{cases}$

Proposition 1 :

Si $a_{-1} + a_{-2} < 0$, alors l'itération $\begin{cases} \Delta c^r = c^{r+1} \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$ converge en un nombre fini de pas vers le point fixe "0" .

Démonstration :

Supposons la proposition fausse et plaçons nous

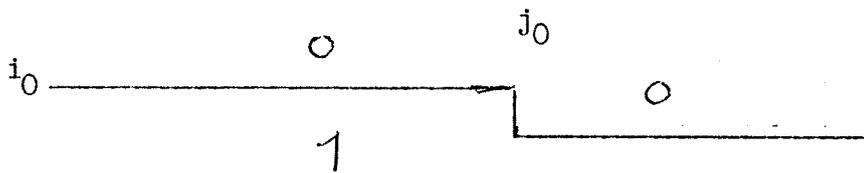
dans le cycle limite de l'itération $\begin{cases} \Delta c^r = c^{r+1} \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$.

Soit t suffisamment grand pour que c^t appartienne au cycle.

Désignons par (i_0, j_0) tels que :

$$\begin{aligned} \forall i > i_0, c^t(i, j) &= 0 \\ \forall j > j_0, c^t(i_0, j) &= 0 \\ c^t(i_0, j_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

(i_0, j_0) existe car Δ non expansive



Il existe T tel que : $c^{t+T}(i_0, j_0) = c^t(i_0, j_0) \neq 0$ (1)

utilisant (Δ non expansive) et $(a_{-1} + a_{-2} < \theta)$ on obtient successivement :

1/ $\Delta^k(c^t)(i, j) = 0$ pour : $(i > i_0)$ et $(i = i_0, j > j_0)$
 $k > 1$

2/ $\Delta^{E+R-c^t(i_0, j_0)}(c^t)(i_0, j_0) = 0 = \Delta^p(c^t)(i_0, j_0)$ (2)

pour $p > E + R - c^t(i_0 - j_0)$

(2) est contradictoire avec (1).

Le cycle limite de l'itération réduit au point fixe "0".

$$\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in C \end{cases} \text{ est donc}$$

proposition 2 :

Si $a_{-1} + a_{-2} > \theta$ et $E < R$ alors l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$ converge vers le point fixe "0".

Remarque :

Supposer que $a_{-1} + a_{-2} > \theta$ est équivalent à poser $\begin{cases} a_j = 1 & \text{et } \theta = 2 \\ j = -2, 2 \end{cases}$

Δ se formule alors ainsi :

$$\Delta(c)(x) = \begin{cases} 1[S(\tilde{c}(x)) - 2] & \text{si } c(x) = 0 \\ c(x) + 1 & \text{si } \begin{cases} 1 < c(x) < E - 1 \\ \text{ou} \\ -R + 1 < c(x) < -1 \end{cases} \\ -R + 1 & \text{si } c(x) = E \end{cases}$$

avec : $S(\tilde{c}(x)) = \sum_{j=-2}^2 \tilde{c}(x_j) \quad (x_0 = x)$

Démonstration de la proposition 2 :

Supposons là encore la proposition fausse et plaçons nous dans le cycle limite de l'itération :

$$\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Soit T la période de l'automate.

Soit de plus $z_0 = (i_0, j_0)$ défini de la manière suivante :

- 1/ z_0 non stable à "0"
- 2/ $z = (i, j)$ stable à "0" pour $(i < i_0)$, et $(j < j_0, i=i_0)$.

z_0 existe car Δ non expansive

. On peut prendre t tel que $c^t(z_0) = 1 = x_1$
 (t suffisamment grand pour que le cycle soit atteint).

On a : $c^{t+1}(z_0) = 1$ (1)

et aussi : $c^{t-1}(i_0, j_0) = 0$ ce qui implique :

$$x_2 = c^{t-1}(i_0, j_0+1) \in \{1, E\}$$

Donc $c^{t-1-x_2}(i_0, j_0+1) = 0$

la cellule (i_0, j_0+1) à l'instant $t-1-x_2$ est excitée par au moins deux voisines ($\theta = 2$).

Or $c^{t-1-x_2}(i_0, j_0) = 0$ ou < 0 ($E < R$)

d'où $x_3 = c^{t-1-x_2}(i_0, j_0+2) \in \{1, E\}$

A partir de x_1 , on construit une suite (x_k) , $k > 1$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_k = c^{t-1-S(x_{k-1})}(i_0, j_0+k-1) \quad (k > 2) \end{cases}$$

avec : $S(x_t) = \sum_{\lambda=2}^t x_\lambda \quad (t > 2)$

vérifiant pour tout $k > 2$

$$\begin{cases} x_k \in \{1, E\} \\ c^{t-1-S(x_{k-1})}(i_0, j_0+k-3) = 0 \text{ ou } < 0 \end{cases}$$

Comme Δ est non expansive, il existe L tel que (i_0, j_0+L) stable à "0" .

A l'instant : $t - 1 - \sum_{\lambda=2}^L x_\lambda$ On a simultanément

$$\left\{ \begin{array}{l} (i_0, j_0 + L) \text{ stable à "0"} \\ x_{L+1} = c^{t-1-S(x_L)} (i_0, j_0 + L) \in \{1, E\} \end{array} \right.$$

Cette situation est impossible. La cellule z_0 n'existe pas , ce qui veut dire que toutes les cellules dans le cycle sont stables à "0" .

Remarque :

Cette démonstration a été établie dans le cas du voisinage de Von Neumann. Elle "passe" dans le cas d'autres types de voisinages sur Z^2 (ceci en prenant $\theta > \theta_{exp}$, θ_{exp} étant la valeur du seuil assurant la non expansivité de Δ).

Exemple : Voisinage de Moore généralisé .

$$V(x) = V_k(x) = \{z \in Z^2 / d_\infty(x,z) \leq k \}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} x = (i, j) \\ z = (l, m) \\ d_\infty(x, g) = \max(|i-l|, |j-m|) \text{ (voir chapitres précédents)} \end{array} \right.$$

Alors, pour $\begin{cases} E < R \\ \theta > \theta_{\text{exp}} = k(2k + 1) + 1 \end{cases}$

l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in C \end{cases}$

converge vers le point fixe "0" en un nombre fini de pas.

Supposons maintenant $E > R$.

On se place bien sur sous la condition :

$a_{-1} + a_{-2} > \theta$ qui s'exprime aussi sous la

forme $\begin{cases} a_j = 1 & (j = -2, \dots, 2) \\ \theta = 2 \end{cases}$

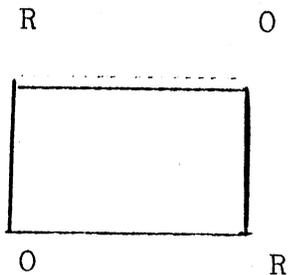
Proposition 3 :



Il existe des cycles de longueur : $E + R$.

Démonstration :

Les quatre cellules suivantes sont périodiques de période $E + R$ (quel que soit l'état des cellules environnantes).



Nous avons constaté expérimentalement que les cycles limites obtenus à partir de configurations initiales introduites aléatoirement suivant une loi uniforme sur Q étaient de longueur $E + R$.

Il serait intéressant de démontrer la conjecture suivante, vraie pour $R = 1$

$$\text{si } \begin{cases} a_{-1} + a_{-2} > \theta \\ E > R \end{cases}, \text{ l'itération } \begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

converge vers un cycle de longueur inférieure ou égale à $E + R$

Automate agissant sur un tore

Nous avons vu que les propositions établies plus haut dans \mathbb{Z}^2 ne "passaient" pas dans le cas d'un tore. Posons $a_j = 1$ ($j=-2,2$). On retrouve, dans le cas d'un tore les fonctions analysées au chapitre 2.

Si $\theta = 4$ (une cellule à l'état de repas devient active si toutes ses voisines le sont), on peut faire état du résultat suivant :

Proposition 4 :

Si $\theta = 4$ L'itération $\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in \mathbb{C} \end{cases}$ converge en un

nombre fini de pas vers le point fixe "0" ou un cycle de longueur $E + R$. Plus précisément, désignons par L et ℓ les dimensions du tore;

1/ Si $E < R$, l'itération aboutit au point fixe 0

2/ Si $E > R$, alors :

a/ Si L et ℓ pairs, il existe des cycles de longueur $E + R$.

b/ Si L ou ℓ impair, une condition suffisante pour qu'il existe des cycles de longueur $E + R$ s'exprime sous la forme : $E > 2R$

Démonstration

Cette proposition est une application directe des résultats du paragraphe 3 du chapitre 2 , en tenant compte de la remarque suivante :

Si $\gamma(G)$ désigne le nombre chromatique du graphe de connection (ici représenté par un tore), on a :

$$\gamma(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } L \text{ et } \ell \text{ pairs} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc entièrement analysé le comportement itératif de l'automate dans le cas non expansif.

3.2.2. Cas expansif :

Δ s'écrit donc de la manière suivante :

$$\Delta : C \xrightarrow{\Delta} C$$

$$\text{Si } c(x) = 0 \quad \Delta(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si une des quatre voisines de } x \text{ est} \\ & \text{à l'état actif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Si } c(x) \neq 0 \quad \Delta(c)(x) = \begin{cases} c(x) + 1 & \text{si } \begin{cases} 1 < c(x) < E-1 \\ \text{ou} \\ -R+1 < c(x) < -1 \end{cases} \\ -R + 1 & \text{si } c(x) = E \end{cases}$$

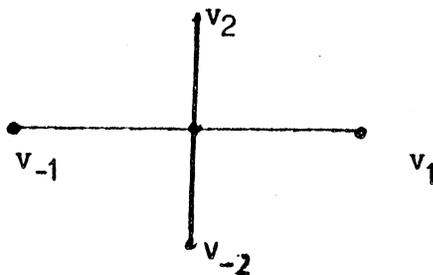
Cet automate a été largement étudié tant du point de vue de son comportement temporel que spatial dans [1], [11] et d'autre part dans [18]. Nous nous bornons de ce fait à voir comment l'analyse faite au chapitre 2 s'applique ici, ainsi qu'à quelques rappels sur le comportement spatial .

Désignons par X un rectangle de \mathbb{Z}^2 .

Pour $x \in X$, $V(x) = \{ y \in X / y = x + \tilde{v}_\lambda, (-2 < \lambda < 2) \}$

avec :

$$v_{-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



On désigne respectivement par :

* \mathcal{C}_X : ensemble des configurations sur X .

* $\Delta_X : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_X$ fonction de transition sur X telle que
Si $c(x) \neq 0$, $\Delta_X(c)(x) = \Delta(c)(x)$

$$\text{Si } c(x) = 0, \Delta_X(c)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y \in V(x) / c(y) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Δ_X est en fait la fonction locale de type 2 restriction de Δ à X (cf chapitre 1)

Pour $c \in \mathcal{C}$ désignons par $H(c)$ le plus petit rectangle contenant c et ses voisins (au sens de la métrique d_∞)

La proposition ci dessous est capitale pour la suite.

Proposition 5 [10]

Soit c une configuration initiale .

Pour tout rectangle R enfermant $H(c)$, on a :

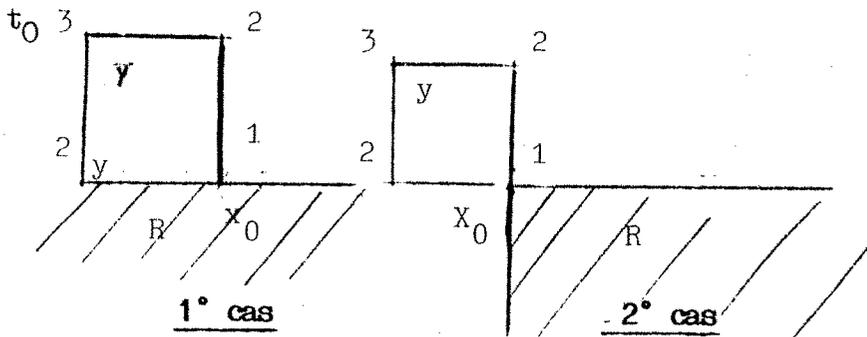
$$\Delta^n(c) = \Delta_R^n(c)$$

démonstration

la démonstration se fait par l'absurde.

Soit t_0 le plus petit entier tel qu'il existe un rectangle R et une cellule x_0 sur sa frontière à l'état de repos et excité à l'instant $t_0 + 1$ par une voisine x_1 à l'extérieur de R .(les voisines de x_0 à l'intérieur de R étant à l'etat de repos ou réfractaire)

Utilisant les propriétés de la distance des états δ et le fait qu'à $t = 0$ les cellules sur la frontière de R (et à l'extérieur) sont à l'état de repos, on montre sans difficulté que l'on se trouve à t_0 dans une des deux situations suivantes :



A l'instant $t = t_0 - 2$, la cellule y a été excitée par une cellule en dehors de R , ce qui est impossible .

Applications

- 1/ La proposition 5 justifie l'étude sur console.
- 2/ c^0 étant fixé (donc à support fini ...), on peut se ramener à l'ensemble fini $H(c^0)$ et appliquer ainsi les résultats du chapitre 2 (en particulier du paragraphe 4.3)

Par conséquent :

Proposition 6

Pour les valeurs des couples (E,R) suivantes (condition P)

l'itération $\begin{cases} c^{r+1} = \Delta c^r \\ c^0 \in C, x \in H(c^0) \end{cases}$ converge vers 0 ou vers un cycle de longueur E + R.

- 1/ $E > 2$
 - 2/ $E = 1, R = 1, 3$
- (P)

Remarque

Dans [17] , R.Shingai montre que pour $E = 1, R = 4c - 2$

($c > 1$) l'itération $\begin{cases} c^{r+1}(x) = \Delta c^r(x) \\ c^0 \in C, x \in H(c^0) \end{cases}$ peut converger

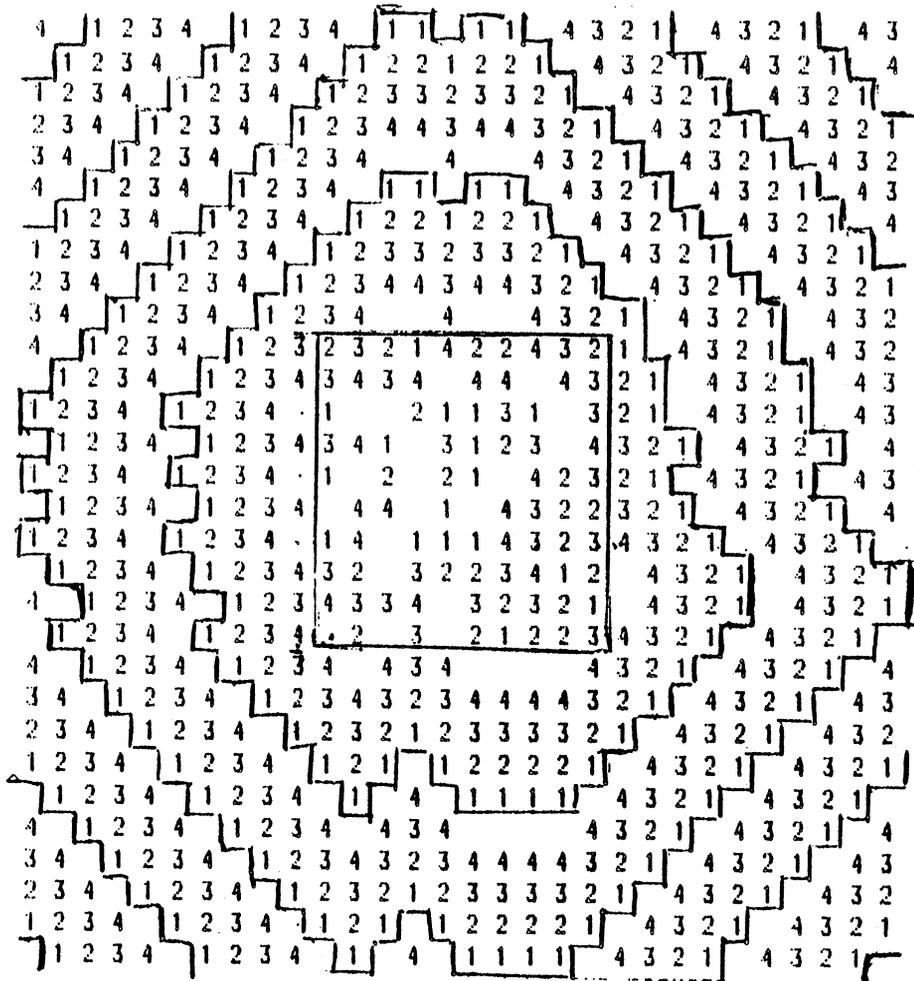
vers un cycle dont longueur est fonction croissante des dimensions de $H(c^0)$

Comportement spatial de l'automate.

le comportement spatial de l'automate est largement décrit dans [2].

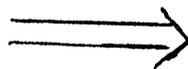
la caractéristique essentielle est l'existence de "fronts d'onde" (courbes fermées isovaleurs de Δ) entourant

Figure 2



Configuration initiale (au centre)

choisie de manière aléatoire



4	4	2	1	4	2	2	4	1	
3	3	4	1	4	4	1	1		
1		2	1	1	3	1	3		
3	4	1		3	1	2	3		
1	2		2	1		4	2	3	
	4	4	1	3	2		4	3	
1	4		1	2	1	4	4	3	3
3	2		3	2	2	4	4	1	2
4	3	3		3	3	3	3	1	
	2	3		2	1	2	2	3	

4 Conclusion

Il serait intéressant d'étendre cette étude pour d'autres types de voisinage (en particulier le voisinage $V(k)$) dont il a été question dans le chapitre précédent.

Dans le cas "non expansif", il serait à notre avis important en soi, de démontrer la conjecture qui y est faite (paragraphe 3.2.1).

dans le cas "expansif", nous reprenons à notre compte des conclusions de [2]

- 1/ Trouver une borne satisfaisante pour le transitoire.
- 2/ Déterminer une C.N.S sur une condition initiale pour que l'itération associée n'aboutisse pas au point fixe "0".
- 3/ modifier les règles de transition en introduisant plusieurs états de repos (reliés entre eux par une règle de seuil) (voir par exemple [20])

C O N C L U S I O N G E N E R A L E

En entamant ce travail, nous nous donnions l'objectif de déterminer comment l'utilisation d'un système de simulation de réseaux d'automates pouvait permettre d'approfondir l'analyse de leur comportement itératif.

La mise au point et l'utilisation de "Sygedisc" a d'une part débouché sur une analyse descriptive des réseaux d'automates à seuil (chapitre 4) et de visualiser des résultats connus. Aller plus loin dans ce domaine, et notamment dans le sens des remarques faites en conclusion du chapitre 4 nécessite d'améliorer les performances en terme de temps de calcul de ce système : on peut à cet égard s'inspirer de [23]. Il est par ailleurs nécessaire d'enrichir ce système en y intégrant de nouvelles règles de transition différentes de celles utilisées dans cette thèse. Mais l'apport essentiel qu'à constitué, pour nous "Sygedisc" est avant tout d'ordre pédagogique : en effet la conception et l'utilisation de ce système nous ont permis pour les réseaux d'automates étudiés de mieux saisir les règles d'évolution et de dégager des liens existant entre eux.

C'est ainsi que nous avons pu faire apparaître l'identification entre des réseaux d'automates formulés de manière différente (fonction à seuil et à double seuil) et unifier des études menées de manière indépendante. (chapitres 2 et 3).

Pour aller plus loin dans l'analyse effectuée dans cette thèse les recherches suivantes peuvent être faites, qui s'ajoutent à celles proposées dans chacun des chapitres la constituant.

- 1/ En ce qui concerne les réseaux d'automates à seuil réfractaires, il serait intéressant d'étendre l'analyse aux cas de règles de connection non symétrique (en prenant éventuellement un graphe de connection fortement connexe) .
- 2/ D'une manière plus générale, nous avons peu de résultats concernant la longueur des transitoires aboutissant aux cycles limites.

Enfin, il convient de remarquer l'analogie existant entre les analyses faites au chapitre 2 et celles [6] concernant le comportement 2-cyclique des fonctions à seuil : dans les deux cas, l'exhibition d'un opérateur invariant pour l'automate joue un rôle décisif dans la démonstration des résultats.

R E F E R E N C E S

- (1) J.P. ALLOUCHE, Ch. REDER : Période des oscillations d'un automate cellulaire. Séminaire d'Analyse Numérique à l'IMAG, n° 376, Grenoble (1982).
- (2) J.P. ALLOUCHE, Ch. REDER : Oscillations spatio-temporelles engendrées par un automate cellulaire. Note UER Mathématiques Informatiques, Bordeaux 1.(1982)
- (3) H. ATLAN, F. FOLGELMAN SOULIE S. SALOMON, C. WEISBUCH "Random Boolean networks". (1981) to appear in "Journal of Cybernetic".
- (4) C. BERGE : "Graphes et hypergraphes". Dunod (1973).
- (5) F. FULGELMON SOUHE, E. GOLES CHACC, G. WEISBUCH : Specific roles of the different boolean laws in random networks.
- (6) E. GOLES CHACC : Comportement oscillatoire d'une famille d'automates cellulaires non uniformes. Thèse de Docteur-Ingénieur, IMAG, Grenoble (1980).
- (7) E. GOLES CHACC : Certaines propriétés de convergence des automates cellulaires à seuil. Séminaire d'Analyse Numérique de l'I.M.A.G., n° 380, (1982). Grenoble.

- (8) **E. GOLES CHACC** : "Fixed point behaviour of threshold functions on a finite set". SIAM Journal on Algebraic and discrete methods, à paraître.
- (9) **J.M. GREENBERG S.P. HASTINGS**, : "Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media". SIAM J. of Appl. Math. Vol. 34, (mai 1978).
- (10) **J. GREENBERG, B.D. HASSARD, S.P. HASTINGS** : "Pattern formation and periodic structures in systems modeled by reaction diffusion equations". (1978) Bull of Math. Soc. 846, 1296-1327.
- (11) **J. GREENBERG, C. GREENE, S. HASTINGS** : "A combinatorial problem arising on the study of reaction diffusion equations". S.I.A.M. Journal Alg. Discr. Maths, vol. 1, N° 1, (mars 1980).
- (12) **S. KAUFFMAN** (1969) : "Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets". Theoretical Biology 22, 437-467.
- (13) **Y. KOBUCHI** : "Signal propagation in 2 dimensional threshold cellular space". Journal of Mathematical Biology, 3, 297-312 (1976).
- (14) **M. LEGENDRE** : "Utilisation de "Sygedisc" pour l'expérimentation d'automates cellulaires uniformes à seuil". Séminaire d'Analyse Numérique IMAG, N° 372 (1981). Grenoble.
- (15) **F. ROBERT** : Une approche booléenne du problème de la frustration. Séminaire d'Analyse Numérique de l'IMAG, n° 302 (1978). Grenoble.
- (16) **F. ROBERT** : "Itérations discrètes". Polycopié Université de Grenoble (1981). Laboratoire IMAG.

- (17) **T.C. SCHELLING** : "Dynamic models of segregation".
Journal of Mathematical Sociology, Vol. 1, (1971).
- (18) **R. SHINGAI** : "Maximum period of 2 dimensional uniform
neural networks". Information control 41 (1979) 324-
341.
- (19) **H.D. SCHULTZ** : "Zellular automaten zur bearbeitung
der Lokal-global Problematik". Thèse, Darmstadt (RFA)
1981.
- (20) **STAQUET-SACCHETINI** : Rapport de D.E.A., Analyse
Numérique. Laboratoire IMAG, (Juin 1982). Grenoble.
- (21) **M. TCHUENTE** : "Quelques propriétés des automates
cellulaires uniformes". Séminaire d'Analyse
Numérique, n° 249 Grenoble .
- (22) **M. TCHUENTE** : Evolution de certains automates
cellulaires uniformes binaires à seuil. Séminaire
d'Analyse Numérique n° 265. Laboratoire IMAG,
(27/01/77), Grenoble.
- (23) **J. T. BUTLER** : A note on cellular automata simulations.
Information and control 26, 286-295 (1974).
- (24) **E.H. SNOUSSI** : "Structure et comportement itératif de
certains modèles discrets". Thèse Troisième Cycle,
IMAG, (Juin 1980), Grenoble.
- (25) **J.Ch. ANGLES D'AURIAC** "Thèse de Docteur-Ingénieur".
IMAG. (Novembre 1980), Grenoble.

ANNEXE

DEROULEMENT D'UNE CESSION

DE SYGEDISC

(Fonction Majorité sur Z^2)

trace2
OPTION GRAPHIQUE OU NON ?
RETOUR CHARIOT SI NON 01 SI OUI

TRAVAILLE T'ON SUR UN GRAPHE REGULIER ?
REPOUDRE PAR :01 SI OUI,RETOUR CHARIOT SI NON
01

REGLE DE VOISINAGE UTILISE ?

3 REPONSES POSSIBLES :

- 1 :TYPE NEUMANN TAPER RETOUR CHARIOT
- 2 :TYPE ETOILE TAPER 01
- 3 :TYPE MOORE TAPER 02

} voisinage
} utilise

DONNEES RELATIVES AU DOMAINE DE TRAVAIL
DONNER DANS L'ORDRE AU FORMAT (1X,12) LE NOMBRE DE SOMMETS
SUR LA LONGUEUR (LONG),PUIS SUR LA HAUTEUR (HAUT)

LONG = ?

25

HAUT = ?

25

TRAITEMENT DES BORDS :3 POSSIBILITES
NE PAS FAIRE DE RACCORDEMENTS :RETOUR CHARIOT

SIMULATION D'UN TORE :TAPER 01

RACCORDER FRONTIERES A ZERO :TAPER 02

02

CHOIX DE LA REGLE D'EVOLUTION UTILISEE

2 TYPES DE FONCTIONS AU CHOIX

1 :FONCTION A SEUIL,TAPER 01

2 :FONCTION FENETRE,TAPER 02

TYPE D'EVOLUTION CHOISI ?

01

VALEUR DU PARAMETRE ALPHA

(CENTRE DU VOISINAGE)

REPOUDRE AU FORMAT :(1X,13)

001

PARAMETRES DE LA FONCTION DE TRANSITION
POUR CHAQUE EXTREMITE DU VOISINAGE LES DONNER
AU FORMAT (1X,12) COMME INDIQUE.

SUR (I+1,J) ?

01

SUR (I-1,J) ?

01

SUR (I,J+1) ?

01

SUR (I,J-1) ?

01

VALEUR DU SEUIL

ITETA= ? (FORMAT (1X,12))

PAR DEFAUT LA VALEUR CHOISIE CORRESPOND A L'EVOLUTION
D'UNE FONCTION MAJORITE (NECESSITE D'AVOIR
DES PARAMETRES EGAUX A 1

03

PERIODE DE REFRACTION ?

REPOUDRE AU FORMAT :1X,12

EVOLUTION SERIE OU PARALLELE ?

TAPER 01 DANS LE 1E CAS RETOUR CHARIOT DANS LE 2E

OPTION PLONGEON ? 01 SI OUI,0 SINON

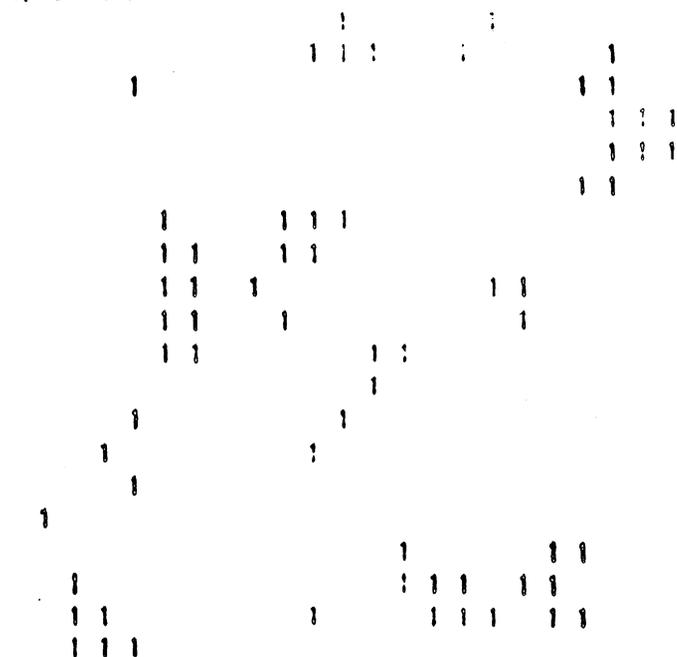
Domaine
de
travail

Fonction

de

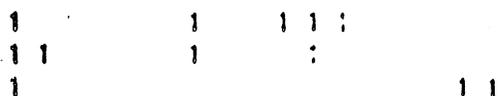
transition

VALEURS AUX SOMMETS DU GRAPHES



Evolution

pas à pas



EST-CE TERMINE ?
 OI SI OUI, RETOUR CHARIOT SINON

VALEURS AUX SOMMETS DU GRAPHES



EST-CE TERMINE ?
 OI SI OUI, RETOUR CHARIOT SINON

EST CE TERMINE ?
01 SI OUI, RETOUR CHARIOT SINON

VALEURS AUX SOMMETS DU GRAPHE

1 1 1
1 1 1

1 1
1 1
1 1
1 1

1 1 1 1
1 1 1 1

EST CE TERMINE ?
01 SI OUI, RETOUR CHARIOT SINON
01
DESIRE T'ON REPREDRE L'EXPERIMENTATION
EN CHANGEANT DE CONFIGURATION INITIALE ?
REPONDRE PAR 01 RSI OUI RETOUR CHARIOT SINON

Sortie de

SYGEDISC

17:04 23.857 37

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 21 octobre 1982

Le Président de la thèse



N. GASTINEL

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

Le Président

M. TARDIEU

