



**HAL**  
open science

# Sur l'approximation rationnelle de fonctions de la variable complexe au sens de la norme de Hardy

M'Barek Fares

► **To cite this version:**

M'Barek Fares. Sur l'approximation rationnelle de fonctions de la variable complexe au sens de la norme de Hardy. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1982. Français. NNT: . tel-00305349

**HAL Id: tel-00305349**

**<https://theses.hal.science/tel-00305349>**

Submitted on 24 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE**  
**"Analyse Numérique"**

*par*

**M'Barek FARES**



**SUR L'APPROXIMATION RATIONNELLE  
DE FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE  
AU SENS DE LA NORME DE HARDY.**



**Thèse soutenue le 28 juin 1982 devant la Commission d'Examen :**

**Monsieur N. GASTINEL : Président**

**Messieurs C. BREZINSKI  
J. DELLA DORA  
M. DUC-JACQUET** } **Examineurs**



Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

M<sup>le</sup> AGNIUS DELORD Claudine

ALARY Josette

MM. AMBLARD Pierre

AMBROISE THOMAS Pierre

ARNAUD Paul

ARVIEU Robert

AUBERT Guy

AYANT Yves

MME BARBIER Marie-Jeanne

MM. BARBIER Jean-Claude

BARJON Robert

BARNOLD Fernand

BARRA Jean-René

BEAUDOING André

BELORISKY Elie

BENZADEN Claude

MME BERTIEL HÉLÈNE

MM. BERNARD Alain

MME BERTRANDIAS Françoise

MM. BERTRANDIAS Jean-Paul

BEZES Henri

BILLET Jean

BONNET Jean-Louis

BONNET EYMARD Joseph

MME BONNIER Jane Marie

MM. BOUCHERLE André

BOUCHET Yves

Biophysique

Chimie analytique Fac. LA TRONCHE

Clinique dermatologique CHR LES SABLONS

Parasitologie CHR LES SABLONS

Chimie organique

Physique nucléaire I.S.N.

Physique C.N.R.S.

Physique approfondie

Electrochimie

Physique expérimentale C.N.R.S.

(labo. de magnétisme)

Physique nucléaire I.S.N.

Biosynthèse de la cellulose-Biologie

Statistiques - Maths appliquées

Clinique pédiatrie et puériculture-LATREILLE-

Physique C.E.N.G. - D.R.F.

Mathématiques pures

Pharmacodynamie Fac. LA TRONCHE

Mathématiques pures

Mathématiques pures

Mathématiques pures

Clinique chirurgicale & traumat. Hôp. SUD

Géographie

Clinique ophtalmologie Fac. LES SABLONS

Clinique hépto-gastro-entérolo Fac. SABLONS

Chimie générale

Chimie et toxicologie Fac. MEVLAN

Anatomie Fac. "La Merci"



MM. BOUCHEZ Robert  
BRAVARD Yves  
BITEL Jean  
CABANEL Guy  
CARTIER Georges  
CAU Gabriel  
CAUQUIS Georges  
CHARACHON Robert  
CHAMPETIER Jean  
CHATEAU Robert  
CHIBON Pierre  
COLIN DE VERDIERE Yves  
COLDERC Pierre  
CRABBE Pierre  
CUSSAC Max  
CYROT Michel  
DAUMAS Max  
DEBELMAS Jacques  
DEGRANGE Charles  
DELOBEL Claude  
DELORMAS Pierre  
DEMENGE Charles  
DENIS Bernard  
DEPORTES Charles  
DESRE Pierre  
DODU Jacques  
DOLIQUE Jean-Michel  
DUCROS Pierre  
FAURE Jacques  
FONTAINE Jean-Marc  
GAGNAIRE Didier  
GASTINEL Noël  
GAVEND Jean-Michel  
GEINDRE Michel  
GERBER Robert  
GERMAIN Jean-Pierre  
GIRAUD Pierre  
IDELMAN Simon

Physique nucléaire I.S.N.  
Géographie  
Orthopédie CHR LES SABLONS  
Clinique rhumatologie et hydro. SABLONS -  
Biologie végétale  
Médecine légale et toxicologie Fac. SABLONS  
Chimie organique  
Clinique O.R.L. CHR LES SABLONS  
Anatomie topographique et app. Fac. "La Merci"  
Clinique neurologique CHR LES SABLONS  
Biologie animale  
Mathématiques pures  
Anatomie pathologique CHR LES SABLONS  
C.E.R.M.O.  
Chimie thérapeutique Fac. LA TRONCHE  
Physique du solide  
Géographie  
Géologie générale  
Zoologie  
M.I.A.G. Mathématiques appliquées  
Pneumo-phtisiologie CHR Pav. D1  
Pharmacodynamique Fac. LA TRONCHE  
Clinique cardiologique CHR LES SABLONS  
Chimie minérale  
Electrochimie  
Mécanique appliquée IUT 1  
Physique des plasmas  
Cristallographie  
Médecine légale (interne & toxicologie) SABLO  
Mathématiques pures  
Chimie physique  
Analyse numérique Mathématiques appliquées  
Pharmacologie Fac. "La Merci"  
Electro-radiologie CHR LES SABLONS  
Mathématiques pures  
Mécanique  
Géologie  
Physiologie animale

MM. JANIN Bernard	Géographie
JLANNIN Charles	Pharmacie galénique Fac. MEYLAN
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANNE André	Physique
Mme KAHANNE Josette	Physique
MM. KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie cellulaire Fac. MEYLAN
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LATREILLE René	Chirurgie thoracique CHR LES SABLONS
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique Fac. LA TRONCHE
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LE NOC Pierre	Bactériologie virologie Fac. "La Merci"
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOTSEUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale Fac. LA TRONCHE
MACHE Régis	Physiologie végétale
MALINAS Yves	Clinique obstétricale CHR pav. maternité
Mlle MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie Fac. LA TRONCHE
MM. MAYNARD Roger	Physique du solide
MAZARE Yves	Clinique médicale A CHR pav. D. Villars
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MICOLID Max	Clinique maladie infectieuses CHR LES SABLONS
MOURIQUAND Claude	Histologie Fac. "La Merci"
NEGRE Robert	Génie civil IUT 1
NOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET Jean	Sémiologie médicales (neurologie)
PERRIAUX Jacques	Géologie

MM. PERRIER Guy  
 PIERRARD Jean-Marie  
 RACHAIL Michel  
 RASSAT André  
 RINARD Michel  
 Mme RENAUDET Jacqueline  
 MM. REVOL Michel  
 RICHARD Lucien  
 Mme RINAUDO Marguerite  
 MM. ROCHAT Jacques  
 DE ROUGEMONT Jacques  
 SARRAZIN Roger  
 Mme SEIGLE MURANDI Françoise  
 MM. SENDEL Philippe  
 SERGERAERT Francis  
 STIBILLE Robert  
 SOUTIF Michel  
 TANCHE Maurice  
 VAILLANT François  
 VALENTIN Jacques  
 VAN CUTSEM Bernard  
 VAUQUOTS Bernard  
 Mme VERAINE Alice  
 MM. VERAINE André  
 VIGNAIS Pierre  
 VIALON Pierre

Géophysique  
 Mécanique  
 Clinique médicale B CHR Calmettes Guérin  
 Chimie systématique  
 Thermodynamique  
 Bactériologie Fac. LA TRONCHE  
 Urologie CHR LES SABLONS  
 Biologie végétale  
 Chimie CERMAV  
 Hygiène et hydrologie Fac. LA TRONCHE  
 Neuro-chirurgie CHR LES SABLONS  
 Clinique chirurgicale B CHR LES SABLONS  
 Botanique et cryptomanie Fac. MEYLAN  
 Biologie animale  
 Mathématiques pures  
 Construction mécanique IUT 1  
 Physique  
 Physiologie Fac. "La Merci"  
 Zoologie  
 Physique nucléaire I.S.N.  
 Mathématiques appliquées  
 Mathématiques appliquées  
 Pharmacie galénique Fac. MEYLAN  
 Biophysique Fac. "La Merci"  
 Biochimie médicale Fac. "La Merci"  
 Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM. ABIBA Michel  
 ARMAND Yves  
 ARMAND Gilbert  
 AURIAULT Jean-Louis  
 BEGUIN Claude  
 BOEHLER Jean-Paul  
 BOITET Christian  
 BORNAREL Jean  
 BOUTHINON Michel  
 BRUGEL Lucien  
 CASTAING Bernard  
 CHARDON Michel

Mathématiques pures  
 Chimie IUT 1  
 Géographie  
 Mécanique  
 Chimie organique  
 Mécanique  
 Mathématiques appliquées  
 Physique  
 EEA. IUT 1  
 Energétique IUT 1  
 Physique  
 Géographie

MM. CHEIKIAN Alain	EEA IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
CONTE René	Physique IUT 1
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires I.S.N.
GOSSE Jean-Pierre	EEA IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
GUTTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude	Géologie
KUHN Gérard	Physique IUT 1
LEBRETON Alain	Mathématiques appliquées
Mme LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.N.S.
MM. LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
MICHOUTIER Jean	Physique IUT 1
Mme MINTER Colette	Physique IUT 1
MM. NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PELMONT Jean	Biochimie
PERARD Jacques	EEA IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PERRIN Claude	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique

M<sup>lle</sup> PIERY Yvette  
MM. RAYNAUD Hervé  
ROBERT Gilles  
ROBERT Jean-Bernard  
ROSSI André  
SAKAROVITCH Michel  
SARROT RFYNAUD Jean  
SAXOD Raymond  
M<sup>lle</sup> SOUTIF Jeannne  
MM. SCHOOL Pierre-Claude  
STUTZ Pierre  
SUBRA Robert  
VIDAL Michel  
VIVIAN Robert

Physiologie animale  
Mathématiques appliquées  
Mathématiques pures  
Chimie physique  
Physiologie végétale  
Mathématiques appliquées  
Géologie  
Biologie animale  
Physique  
Mathématiques appliquées  
Mécanique  
Chimie  
Chimie organique  
Géographie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

MM. BARGE Michel  
BOST Michel  
BOUCHARLAT Jacques  
CHAMBAZ Edmond  
COLOMB Maurice  
COULOMB Max  
M<sup>me</sup> ETERRADOSSI Jacqueline  
MM. GROULADE Joseph  
HOLLARD Daniel  
HUGONOT Robert  
JALBERT Pierre  
MAGNIN Robert  
PHELIP Xavier  
RACINET Claude  
REYMOND Jean-Charles  
STIEGLITZ Paul  
VROUSOS Constantin

Neuro-chirurgie CHR LES SABLONS  
Pédiatrie CHR Enfants 1  
Psychiatrie Hôpital Sud  
Biochimie (hormonologie) CHR Pav. P. Gérin  
Biochimie Hôpital Sud  
Radiologie Hôpital Sud  
Physiologie Fac. "La Merci"  
Biochimie (A) CHR LES SABLONS  
Hématologie CHR LES SABLONS  
Gérontologie CHR Pav. Chatin  
Histologie Fac. "La Merci"  
Hygiène Fac. "La Merci"  
Rhumatologie CHR LES SABLONS  
Gynécologie obstétrique Hôpital Sud  
Chirurgie générale 1, rue de la Liberté  
Anesthésiologie CHR LES SABLONS  
Radiothérapie CHR LES SABLONS

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM. BACHELOT Yvan  
BENABID Alim Louis  
BERNARD Pierre  
CONTAMIN Charles  
CORDONNIER Daniel

Endocrinologie CHR LES SABLONS  
Médecine et chirurgie CHR LES SABLONS  
Gynécologie obstétrique CHR Pav. P. Gérin  
Chirurgie thoracique CHR LES SABLONS  
Néphrologie CHR LES SABLONS

CROUZET Guy	Radiologie CHR LES SABLONS
DEBRU Jean-Luc	Médecine interne CHR LES SABLONS
DUPRE Alain	Chirurgie générale CHR LES SABLONS
DYON Jean-François	Chirurgie infantile CHR LES SABLONS
FAURE Claude	Anatomie et organogénèse Fac. "La Merci"
FAURE Gilbert	Urologie CHR LES SABLONS
FLOYRAC Roger	Biophysique Fac. "La Merci"
FOURNET Jacques	Hépatogastro-entérologie CHR LES SABLONS
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie CHR LES SABLONS
GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale CHR LES SABLONS
GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation) CHR LES SABLONS
JUNTEN-LAVILLAULOY Claude	Clinique ORL CHR LES SABLONS
KOLODIE Lucien	Hématologie biologie CHR LES SABLONS
LETOUBLON Christian	Chirurgie générale CHR LES SABLONS
MASSOT Christian	Médecine interne CHR Pav. D. Villars
MOUILLON Michel	Ophthalmologie CHR LES SABLONS
PARAMELLE Bernard	Pneumologie CHR Pav. D2
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie CHR Médecine Néonatale
RAPHAEL Bernard	Stomatologie CHR LES SABLONS
SCHAERER René	Cancérologie CHR LES SABLONS
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie Fac. "La Merci"
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie CHR LES SABLONS
STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique CHR LES SABLONS



Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD  
M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
BESSON Jean	Chimie Minérale
BLIMAN Samuël	Electronique
BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
BOIS Philippe	Mécanique
BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
BONNIER Etienne	Métallurgie
BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
CHARTIER Germain	Electronique
CHENEVIER Pierre	Electronique
CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaire
CHERUY Arlette	Automatique
CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
COHEN Joseph	Electronique
COUMES André	Electronique
DURAND Francis	Métallurgie
DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
FELICI Noël	Electrotechnique
FOULARD Claude	Automatique
GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
IVANES Marcel	Electrotechnique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
LOURDAIN Geneviève	Traitement du Signal
LACOUME Jean-Louis	Géophysique - Traitement du Signal
LANCIA Roland	Electronique - Automatique
LESIEUR Marcel	Mécanique
LESPINARD Georges	Mécanique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
MOREAU René	Mécanique
MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
PERRET René	Automatique
PERRET Robert	Electrotechnique
PIAU Jean-Michel	Mécanique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
POUPOT Christian	Electronique - Automatique
RAMEAU Jean-Jacques	Electrochimie - Corrosion
ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
ROBERT François	Analyse numérique
SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée



PROFESSEURS DES UNIVERSITES

Mme SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM SCHLENKER Michel	Physique du Solide
SOHM Jean-Claude	Chimie Physique
TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
ZADWORNY François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (Décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM ALLIBERT Michel  
BERNARD Claude  
CAILLET Marcel  
Mme CHATILLON Catherine  
MM COULON Michel  
HAMMOU Abdelkader  
JOURD Jean-Charles  
RAVAINE Denis  
SAINFORT  
SARRAZIN Pierre  
SOUQUET Jean-Louis  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

C.E.N.G.

Laboratoire des Ultra-Réfractaires  
ODEILLO

E.N.S.M.S.E.

MM BISCONDI Michel  
BOOS Jean-Yves  
GUILHOT Bernard  
KOBILANSKI André  
LALAUZE René  
LANCELOT Francis  
LE COZE Jean  
LESBATS Pierre  
SOUSTELLE Michel  
THEVENOT François

THOMAS Gérard  
TRAN MINH Canh  
DRIVER Julian  
RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

BOREL Joseph  
CHEHIKIAN Alain  
VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

BORNARD Guy  
DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
JAUSSAUD Pierre  
JOURDAIN Geneviève  
LEJEUNE Gérard  
PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

COURTIN Jacques  
LATOMBE Jean-Claude  
LUCAS Michel  
VERDILLON André

\*  
\* \*  
\*



*à mes parents.*



Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à :

Monsieur le Professeur **Noël GASTINEL** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Monsieur le Professeur **Marc Duc-Jacquet** pour les suggestions qu'il a apportées à cette étude et pour la sympathie qu'il m'a toujours témoignée.

Monsieur **Jean Della Dora** pour m'avoir accepté au sein de son équipe, conseillé et stimulé sans relâche, durant la préparation de cette thèse.

Que Monsieur le Professeur **Claude Brezinski** me permette de lui exprimer combien je suis sensible à l'honneur qu'il me fait en se déplaçant de Lille à Grenoble spécialement à cette occasion.

Je tiens aussi à remercier Mademoiselle **Claire Di Crescenzo**, Monsieur **André Eberhard** et Monsieur **Gilles Kuntz** qui, à diverses reprises, m'ont apporté leur aide pour la réalisation de la partie numérique de cette thèse.

Pour ses multiples renseignements bibliographiques donnés avec gentillesse, je remercie Madame **Hirtz**.

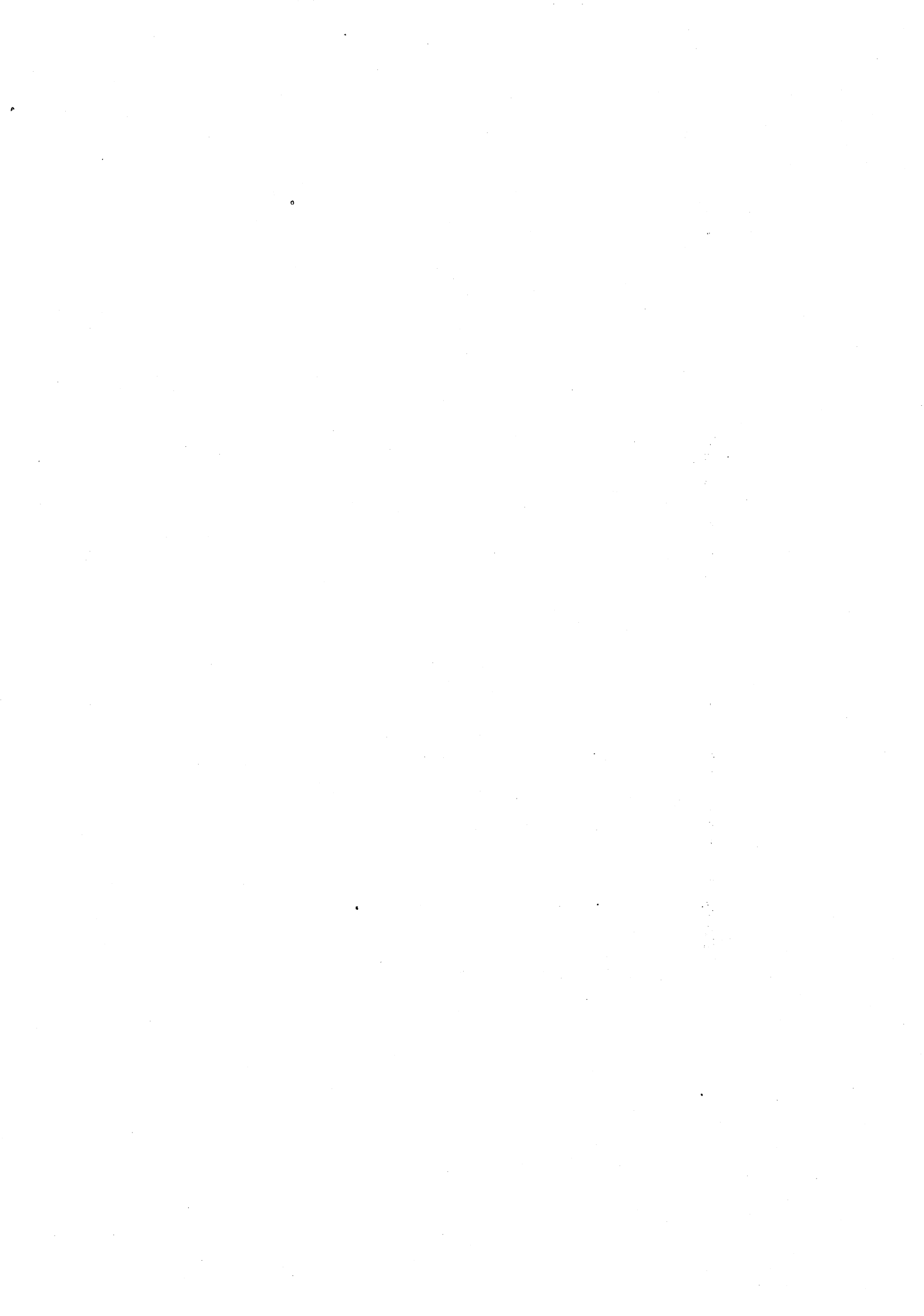
Enfin, je remercie Madame **Claudine MEYRIEUX** qui a effectué avec compétence et beaucoup d'amabilité la frappe d'une grande partie de cette thèse, ainsi que tous les membres du service de reprographie pour l'excellente qualité de leur travail.



**SOMMAIRE.**

1





INTRODUCTION.....	3
-------------------	---

**CHAPITRE 1 : FORMULE EXPLICITE DE L'ERREUR D'APPROXIMATION SOUS FORME DE DIFFERENCES DIVISEES.**

I	-Introduction.....	9
II	-Quelques rappels sur l'espace de Hardy $H^2(D)$ .....	10
III	-Le problème de l'approximation rationnelle au sens de la norme de Hardy dans $H^2(D)$ et formulation du problème en termes du noyau reproduisant de $H^2(D)$ .....	11
IV	-Etude de la partie linéaire du problème et explicitation de la formule de l'erreur.....	17
V	-Etude de la partie non linéaire du problème.....	31
VI	-Propriété de la meilleure approximation.....	35
	a) Non unicité de la meilleure approximation.....	35
	b) Forme de la meilleure approximation.....	36
	c) Conditions nécessaire d'optimalité.....	39
VII	-Conclusion.....	44
VIII	-Expérimentation numérique.....	44

1

**CHPITRE 2 : NON UNCITE DE LA MEILLEURE APPROXIMATION. CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES MEILLEURS APPROXIMANTS D'UNE FONCTION DANS  $R_1^0$  .**

I	-Introduction.....	53
II	-Non unicité de la meilleure approximation : exemples.....	54
III	-Meilleure approximation d'une série à termes positifs dans $R_1^0$ .....	59
IV	-Comparaison entre la non unicité dans le cas de l'approximation rationnelle au sens de Tchebycheff et au sens de la norme de Hardy.....	64
	a) Quelques rappels sur l'approximation au sens de Tchebycheff.....	65
	b) Approximation au sens de la norme de Hardy.....	66
V	-Algorithme de calcul de l'ensemble des meilleurs approximants d'une fonction dans $R_1^0$ .....	75
	a) Théorème des trois cercles de Hadamard.....	77
	b) Principe de l'algorithme.....	80
	c) Algorithme.....	83
VI	-Expérimentation numérique.....	85

**CHAPITRE 3 :**

PREMIERE PARTIE.

APPROXIMATION RATIONNELLE DES  
SERIES DE STIELJES.

I	-Introduction.....	89
II	-Rappels sur les séries de Stieljes.....	90
III	-Approximation d'une série de Stieljes au sens de Padé.....	91
IV	-Approximation d'une série de Stieljes au sens de la norme de Hardy.....	94
V	-Quelques expérimentations numériques.....	102
VII	-Conclusions.....	105

DEUXIEME PARTIE.

CONSTRUCTION DE LA MEILLEURE APPROXIMA-  
TION RATIONNELLE AU SENS DE LA NORME DE  
HARDY D'UNE SERIE DE STIELJES.

I	-Introduction.....	109
II	-Algorithme de résolution des équations normales.....	109
	a) Quelques rappels.....	109
	b) Interpolation rationnelle au sens de Hermite....	110
	c) Algorithme de Rice.....	111
	d) Résolution des équations normales.....	113
III	-Expériences numériques.....	115
IV	-Quelques comparaisons entre l'approximation au sens de Hardy et au sens de Padé.....	119

**ANNEXE :**

PROGRAMME PASCAL POUR EVALUER LA  
FONCTION ERREUR.

a)	Programme.....	126
b)	Exemple d'utilisation.....	130

<b>REFERENCES.....</b>	<b>131</b>
------------------------	------------

**INTRODUCTION.**



On étudie dans le cadre de l'espace de Hardy  $H^2(D)$ , l'approximation d'une fonction  $f$  de développement :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \quad (1)$$

analytique dans le disque unité fermé  $\bar{D}$  par des fractions rationnelles du type :

$$r(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)} \quad (2)$$

où  $P_{n-1}$  (resp.  $P_n$ ) est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n-1$  (resp.  $n$ ),  $P_n$  n'ayant pas de zéros à l'intérieur de  $\bar{D}$ .

Si nous mesurons la qualité de l'approximation de  $f$  par  $r$  par la distance entre  $f$  et  $r$  issue de la norme de  $H^2(D)$ , soit :

$$\begin{aligned} \|f - r\|^2 &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) - r(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - r(e^{i\theta})|^2 d\theta \end{aligned}$$

puisque  $f$  et  $r$  sont continues sur  $\bar{D}$  ;

on considère le problème suivant :

Etant donnée  $f$  de la forme (1), trouver une fraction rationnelle du type (2) satisfaisant les conditions imposées telle que :

$$\|f - r\|$$

soit minimale.

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs [4],[5],[6],[12],[22],[36],[37], en particulier Walsh [37,p.357] a démontré que le problème a une solution qui n'est pas unique en général.

Le but de cette étude est de calculer numériquement une fraction rationnelle qui réalise une meilleure approximation d'une fonction  $f$  donnée.

Les difficultés propres à la construction d'une telle fraction sont essentiellement de deux ordres :

- 1°/ La non unicité de la solution (on donnera des exemples de fonctions qui ont un ensemble infini de meilleurs approximants).
- 2°/ Le fait que deux ou plusieurs racines du dénominateur de la fraction rationnelle qui réalise la meilleure approximation sont confondues.

En pratique les méthodes de calcul dont nous avons connaissance supposent que les racines du dénominateur sont distinctes [12],[30],[36]. Ces méthodes se basent d'une manière ou d'une autre sur la résolution des équations normales (théorème 4, Chp.I). Mais ne connaissant pas à priori la multiplicité de chacune des racines on ne peut pas écrire ces équations. Il est alors important de trouver des formules donnant les solutions du problème et sans faire intervenir les multiplicités des racines.

Dans le premier chapitre, après avoir formulé le problème d'approximation en termes du noyau reproduisant de  $H^2(D)$ , on introduit un découplage dans le calcul du numérateur et du dénominateur de  $r$ .

On montre alors que les pôles de  $r$  sont obtenus en maximisant une fonction de  $n$  variables :

$$\rho : \bar{D}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ .$$

Cette fonction est explicitement écrite sous forme de différences divisées des fonctions  $z^m \cdot f(z)$ ,  $0 \leq m \leq n-1$ , et c'est ainsi que lorsque deux ou plusieurs racines tendent à se confondre il suffit de remplacer les différences divisées par les dérivées correspondantes.

Dans le deuxième chapitre, on étudie sur des exemples le problème de la non unicité de la meilleure approximation et les difficultés numériques qui en découlent.

Dans ce chapitre, l'approximation est faite en grande partie par des fractions rationnelles du type :

$$r(z) = \frac{a}{1+bz} \quad a \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad b \in D \quad (3)$$

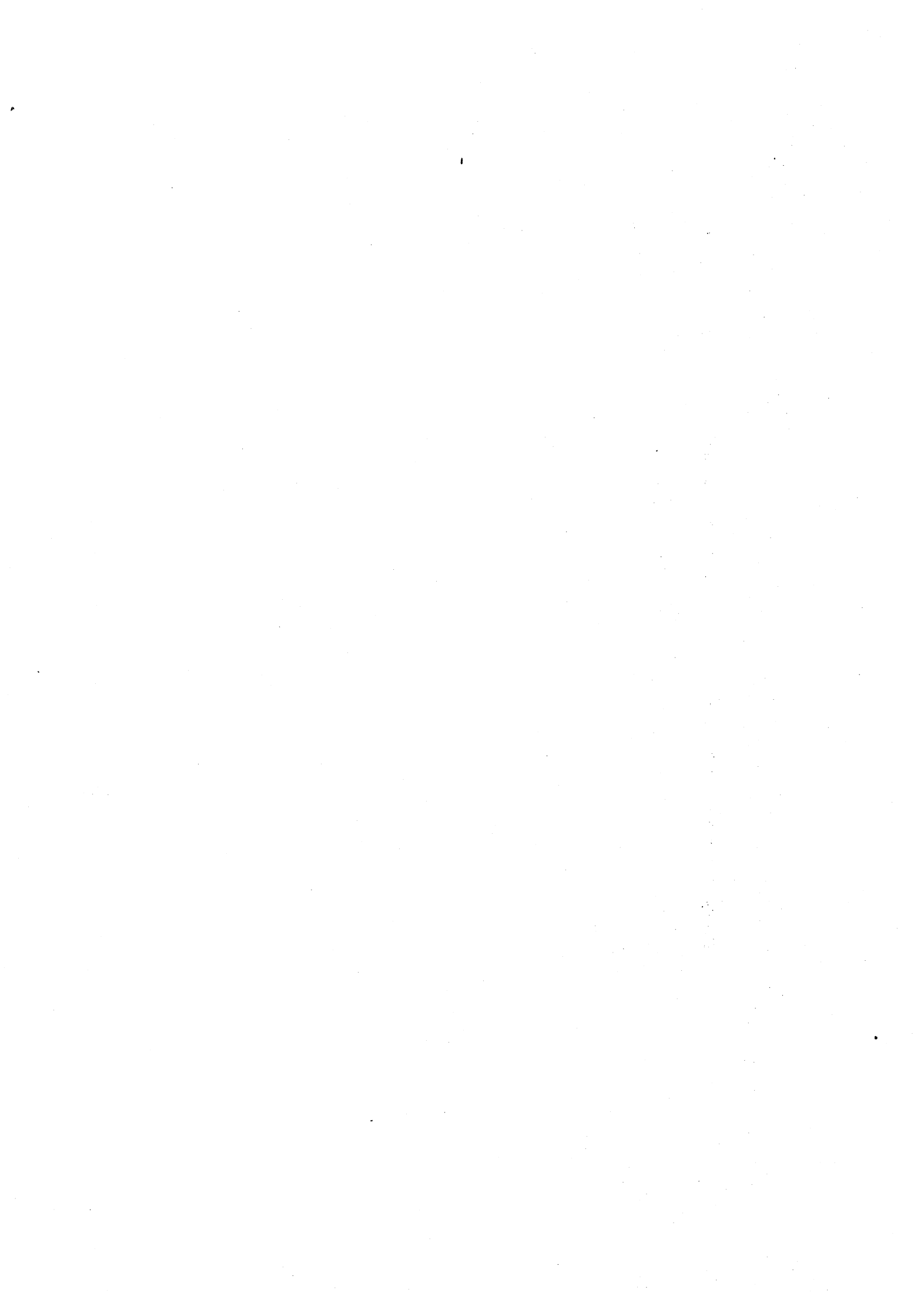
En particulier, on propose un algorithme de calcul de l'ensemble des meilleurs approximants de type (3) d'une fonction  $f$  donnée.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'approximation d'une classe particulière de fonctions : la classe des "séries" de Stieljes .

On montre à l'aide d'une technique utilisée par S.Karlin [27], N.Richter Dyn [35], R.B.Barrar, H.L.Loeb et Werner [4] que les pôles de tout meilleur approximant d'une fonction de cette classe, dans l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels du type (2), sont simples et appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

Les équations normales prennent alors leur forme la plus simple et à l'aide d'un algorithme de J. Rice, on construit un meilleur approximant en calculant une solution des équations normales.





# CHAPITRE 1

## FORMULE EXPLICITE DE L'ERREUR D'APPROXIMATION SOUS FORME DE DIFFERENCES DIVISEES.

I- Introduction.

II- Quelques rappels sur l'espace de Hardy  $H^2(D)$ .

III- Le problème de l'approximation rationnelle au sens de Hardy dans  $H^2(D)$  et formulation du problème en termes du noyau reproduisant de  $H^2(D)$ .

IV- Etude de la partie linéaire du problème et explicitation de la formule de l'erreur.

V- Etude de la partie non linéaire du problème.

VI- Propriétés de la meilleure approximation.

VII- Conclusion.

VIII- Expérimentation numérique.



## I. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, après quelques rappels sur l'espace de Hardy  $H^2(D)$  on pose le problème de l'approximation rationnelle.

En étudiant séparément la "partie" linéaire et la "partie" non linéaire du problème on a reformulé le problème d'approximation au sens de Hardy en un problème de maximisation de fonctions de plusieurs variables.

On donnera ensuite une expression explicite de la meilleure approximation qui nous permettra de donner quelques propriétés de celle-ci.

Enfin on montre comment on peut construire la moitié supérieure de la table des meilleurs approximants introduite par Walsh [37].

## II. QUELQUES RAPPELS SUR L'ESPACE DE HARDY $H^2(D)$ .

Nous noterons :

$$D = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \}$$

$$\bar{D} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \}$$

$H(D)$  désignera l'ensemble des fonctions analytiques dans  $D$ .

Si  $f \in H(D)$  on forme les quantités :

$$M_2(f, r) = \left( \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad r \in [0, 1[$$

et on considère la limite :

$$M_2^*(f) = \sup_{r \in [0, 1[} M_2(f, r)$$

On introduit alors l'espace de Hardy

$$H^2(D) = \{ f : f \in H(D) \text{ et } M_2^*(f) < \infty \}$$

L'application  $f \rightarrow M_2^*(f)$  est une norme sur  $H^2(D)$  [15] qui est en fait un espace hilbertien à noyau reproduisant pour le produit scalaire :

$$(f, g) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Le noyau reproduisant étant :

$$K(z, t) = \frac{1}{1 - \bar{t}z} .$$

On notera par  $\|\cdot\|$  la norme de  $H^2(D)$ .

Rappelons enfin que si  $f \in H^2(D)$  de développement :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2$$

### III . LE PROBLEME DE L'APPROXIMATION RATIONNELLE DANS $H^2(D)$ .

Pour un entier  $n$  non nul on définit :

$$R_n^{n-1} = \left\{ \frac{P_{n-1}}{P_n} : P_{n-1} \in \mathbb{C}_{n-1}[X] ; P_n \in \mathbb{C}_n[X] \right. \\ \left. \text{et } p_n(z) = 0 \Rightarrow z \notin \bar{D} \right\} .$$

Soit  $\Omega$  un ouvert contenant  $\bar{D}$  et soit  $f$  analytique dans  $\Omega$  ( $f \in H^2(D)$ ).

On se propose d'étudier le problème :

Existence	}	d'un élément $r^*$ appartenant
Unicité		
Construction		
		à $R_n^{n-1}$ tel que :

$$\|f - r^*\| < \|f - r\|$$

pour tout  $r$  appartenant à  $R_n^{n-1}$ .

Afin de pouvoir utiliser les propriétés du noyau  $K$  on va reformuler le problème d'approximation sous une autre forme.

Soit  $r$  un élément de  $R_n^{n-1}$ . La fraction  $r$  peut être décomposée sous la forme :

$$r(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} \frac{z^j}{(z-z_i)^{j+1}}$$

avec

$z_i$ ,  $1 < i < m$ , sont les zéros distincts du dénominateur de  $r$  de multiplicité  $m_i$  respectivement, et  $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ .

En posant  $\bar{t}_i = z_i^{-1}$

on a

$$r(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{ij} K^{(j)}(z, t_i)$$

avec

$$K^{(j)}(z, t_i) = \frac{\partial^j}{\partial t^j} K(z, t) \Big|_{t=t_i}$$

Le problème d'approximation se trouve reformulé de la manière suivante:

Soit  $f$  une fonction analytique dans un ouvert contenant  $\bar{D}$ , trouver un ensemble de complexes

$$\{ \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, t_i \in D : 1 < i < m, 0 < j < m_i \text{ et } t_i \neq t_k \text{ pour } i \neq k \}$$

qui pour un entier  $n$  donné minimise :

$$e(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k-1} \alpha_{kj} K^{(j)}(e^{i\theta}, t_k) \right|^2 d\theta$$

avec les contraintes

$$|t_k| < 1, k = 1, 2, \dots, m \text{ et } \sum_{k=1}^m m_k < n.$$

Les points  $t_i$  seront appelés des noeuds et les nombres  $\alpha_{ij}$  des poids.

Il faut noter que dans le problème d'approximation, les inconnues sont les poids, les noeuds et leurs multiplicités.

Le fait que les multiplicités soient des inconnues complique la construction de la meilleure approximation car on ne connaît pas à priori sa forme. C'est précisément pour surmonter cette difficulté qu'on est amené à introduire l'ensemble :

$$S_n^{n-1} = \left\{ r \in R_n^{n-1} : r(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(z, t_i) ; \alpha_i \in \mathbb{C} ; t_i \in D \right. \\ \left. \text{et } t_i \neq t_j \text{ pour } i \neq j \right\}$$

En général la meilleure approximation d'une fonction  $f$  donnée n'appartient pas à l'ensemble  $S_n^{n-1}$ ; ce dernier n'étant pas fermé. Il est nécessaire, pour obtenir sa fermeture  $R_n^{n-1}$ , de lui ajouter les dérivées par rapport à  $\bar{t}$  d'ordre  $j$ ,  $1 < j < n-1$  du noyau  $K(z, t)$ .

On a alors, le théorème suivant :

**THEOREME 1 :**

Si  $f \in H^2(D)$ , alors

$$\inf_{s \in S_n^{n-1}} \|f - s\| = \inf_{r \in R_n^{n-1}} \|f - r\|$$

Démonstration :

Montrons que  $S_n^{n-1}$  est dense dans  $R_n^{n-1}$  pour la norme de  $H^2(D)$ .



Soit  $r$  un élément de  $R_n^{n-1}$  qui n'appartient pas à  $S_n^{n-1}$ . La fraction  $r$  peut être décomposée en éléments simples sous la forme

$$r(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^{j+1}}$$

avec

$$\sum_{i=1}^m m_i < n, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad z_i \notin \bar{D} \quad \text{et} \quad z_i \neq z_j \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  tel que

$$z_i \in K, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{et} \quad K \cap \bar{D} = \emptyset$$

Pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , soit  $m_i$  suites de  $K$

$$(z_{ik}^v)_v \in \mathbb{N}$$

telles que

$$\text{pour } 1 \leq k \leq m_i \quad z_{ik}^v \rightarrow z_i \quad \text{quand } v \rightarrow \infty$$

et

$$\forall v \in \mathbb{N} \quad z_{ij}^v \neq z_{i\ell}^v \quad \text{pour } j \neq \ell.$$

Soit alors la suite des fractions rationnelles:

$$s_v(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{a_{ij}}{j!} \sum_{\ell=1}^{j+1} \frac{g(z, z_{i\ell}^v)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{j+1} (z_{i\ell}^v - z_{ik}^v)}$$

avec

$$g(z, t) = \frac{1}{z - t}.$$

Il est clair que pour tout  $v \in \mathbb{N}$   $s_v$  est un élément de  $S_n^{n-1}$ .

Comme  $g$  a des dérivées de tout ordre par rapport à  $t$  alors d'après la théorie des différences divisées [23] :

$$\forall z \in \bar{D} \quad s_v \rightarrow r(z) \text{ quand } v \rightarrow \infty.$$

Comme  $\bar{D}$  est compact la convergence est uniforme. On en déduit que  $s_v$  converge vers  $r$  au sens de la norme de  $H^2(D)$ .

2°/ Montrons que

$$\inf_{r \in R_n^{n-1}} \|f - r\| > \inf_{s \in S_n^{n-1}} \|f - s\|$$

Soit une suite minimisante  $r_v \in R_n^{n-1}$  :

$$a = \lim_{v \rightarrow \infty} \|f - r_v\| = \inf_{r \in R_n^{n-1}} \|f - r\|$$

or d'après 1°/

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists s_v \in S_n^{n-1} : \|r_v - s_v\| < \varepsilon$$

et comme

$$\|f - s_v\| < \|f - r_v\| + \|r_v - s_v\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

et du fait que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists v_0 : \forall v > v_0 \quad \|f - r_v\| < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\|r_v - s_v\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\|f - s_v\| < a + \varepsilon \quad \forall v > v_0$$

par suite

$$\inf_{s \in S_n^{n-1}} \|f - s\| < \inf_{r \in R_n^{n-1}} \|f - r\| + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

d'où le théorème .

**Remarque :**

Ce théorème montre que si une fonction  $f$  appartient à  $R_n^{n-1}$  et  $f$  n'appartient pas à  $S_n^{n-1}$  alors

$$\inf_{s \in S_n^{n-1}} \|f - s\| = 0 .$$

Ceci montre qu'en général on doit chercher la meilleure approximation d'une fonction dans  $R_n^{n-1}$ .

Dans la suite on va traiter séparément la "partie" linéaire et la "partie" non linéaire du problème d'approximation. Dans cet optique on supposera dans un premier temps que les noeuds  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont fixés et deux à deux distincts. Les poids minimisants s'obtiennent alors par simple projection sur un sous espace de  $H^2(D)$ . On disposera alors d'une fonction erreur  $\rho(t_1, t_2, \dots, t_n)$  définie pour tout  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  vérifiant  $t_i \neq t_j$  pour  $i \neq j$ .

En explicitant l'expression de  $\rho$  on arrive à la mettre sous forme de différences divisées de fonctions  $z^m \cdot f(z)$ ,  $0 \leq m \leq n-1$ . C'est ainsi que la fonction  $\rho$  peut être prolongée en une fonction  $\tilde{\rho}$  sur  $\bar{D}^n$ . On montre alors, à l'aide du théorème 1, que l'ensemble des maxima, dans  $\bar{D}^n$ , de  $\tilde{\rho}$  définit un ensemble d'éléments de  $R_n^{n-1}$ , dont on donnera l'expression explicite, qui est l'ensemble des meilleurs approximants de  $f$  dans  $R_n^{n-1}$ .

## IV. ETUDE DE LA PARTIE LINEAIRE DU PROBLEME.

Soit :

$$N = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in D^n : t_i \neq t_j \} .$$

Nous noterons  $t_{(n)}$  tout élément  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  de  $N$ , et  $K_t(z)$  le noyau  $K(z, t)$  pour tout  $t \in D$ .

Il est clair que tout élément  $t_{(n)}$  de  $N$  définit  $n$  fonctions  $K_{t_1}, K_{t_2}, \dots, K_{t_n}$ , linéairement indépendantes qui engendrent un espace de Hilbert de dimension finie  $H_n \subset R_n^{n-1}$ .

Ainsi chaque élément  $t_{(n)}$  de  $N$  définit  $n$  poids,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , uniques tels que :

$$s_{t_{(n)}}(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{t_i}(z)$$

soit la meilleure approximation de  $f(z)$  dans  $H_n$ .

Les poids minimisants  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont donnés par le système [1, p. 16] :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f, K_{t_i}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (K_{t_j}, K_{t_i}) \\ i=1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (1)$$

et la norme de l'erreur correspondante  $e$  est donnée par [1, p. 16] :

$$|e|^2 = \frac{G(f, K_{t_1}, \dots, K_{t_n})}{G(K_{t_1}, \dots, K_{t_n})} \quad (2)$$

où  $G(g_1, \dots, g_m)$  est le déterminant de Gram relatif aux fonctions  $g_1, \dots, g_m$ .

En tenant compte de la propriété de reproduction du noyau  $K$ , le système (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j K_{t_j}(t_i) \\ i=1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

et  $G(f, K_{t_1}, \dots, K_{t_n})$  peut s'écrire sous la forme :

$$\left| \begin{array}{cccc} \|f\|^2 & \overline{f(t_1)} & \dots & \overline{f(t_n)} \\ f(t_1) & \frac{1}{1-t_1 \bar{t}_1} & \dots & \frac{1}{1-t_1 \bar{t}_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(t_n) & \frac{1}{1-\bar{t}_1 t_n} & \dots & \frac{1}{1-\bar{t}_n t_n} \end{array} \right|$$

En développant ce déterminant on obtient :

$$G(f, K_{t_1}, \dots, K_{t_n}) = \|f\|^2 \cdot G(K_{t_1}, \dots, K_{t_n}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(t_i) \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \overline{f(t_j)} G_{ij} \quad (3)$$

où  $G_{ij}$  désigne le déterminant obtenu à partir de

$G(K_{t_1}, \dots, K_{t_n})$  en lui enlevant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$

colonne.

Dans la suite on va omettre les arguments de  $G(K_{t_1}, \dots, K_{t_n})$ .

Il est à noter que  $G$  ne s'annule pas puisque  $t_{(n)}$  appartient à  $N$  [16, p. 25].

Ainsi on peut donc diviser les deux membres de l'équation (3) par  $G$ , on obtient alors :

$$\|e\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} f(t_i) \overline{f(t_j)} \times \frac{G_{ij}}{G} \quad (4)$$

D'un autre côté puisque le système (1) admet une solution unique on doit avoir :

$$\begin{vmatrix} s_{t_n}(z) & K_{t_1}(z) & \dots & K_{t_n}(z) \\ f(t_1) & K_{t_1}(t_1) & \dots & K_{t_n}(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(t_n) & K_{t_1}(t_n) & \dots & K_{t_n}(t_n) \end{vmatrix} = 0$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ . Et en développant ce déterminant on obtient :

$$s_{t_{(n)}}(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} f(t_i) K_{t_j}(z) \frac{G_{ij}}{G} \quad (5)$$

Comme  $s_{t_{(n)}}$  est la projection de  $f$  dans  $H_n$  alors :

$$\|f - s_{t_{(n)}}\|^2 = \|f\|^2 - \|s_{t_{(n)}}\|^2.$$

Dans toute la suite on posera :

$$\rho(f, t_{(n)}) = \|s_{t_{(n)}}\|.$$

Pour avoir des formules plus explicites de la norme de l'erreur et de la projection de  $f$  sur  $H_n$ , on va commencer par exprimer les rapports :

$$\frac{G_{ij}}{G}, \quad 1 < i, j < n.$$

Lemme 1

$$G_{ij} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq k < \ell \leq n \\ k \neq i, \ell \neq i}} (t_k - t_\ell) \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < \ell \leq n \\ k \neq j, \ell \neq j}} (\bar{t}_k - \bar{t}_\ell)}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i, k \neq j}} (1 - |t_k|^2) \prod_{\substack{1 \leq k < \ell \leq n \\ k \neq i, \ell \neq j}} (1 - t_k \bar{t}_\ell) \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < \ell \leq n \\ k \neq j, \ell \neq i}} (1 - \bar{t}_k t_\ell)}$$

$$G = \frac{\prod_{1 \leq k < \ell \leq n} |t_k - t_\ell|^2}{\prod_{k=1}^n (1 - |t_k|^2) \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} |1 - \bar{t}_k t_\ell|^2}$$

Démonstration :

On va développer le déterminant :

$$G = \begin{vmatrix} \frac{1}{1 - \bar{t}_1 t_1} & \dots & \frac{1}{1 - \bar{t}_1 t_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1 - \bar{t}_1 t_n} & \dots & \frac{1}{1 - \bar{t}_n t_n} \end{vmatrix}$$

et le même raisonnement sera valable pour développer

$$G_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

On peut voir facilement que G peut se mettre sous la forme :

$$G = \frac{P_n}{\prod_{k=1}^n (1 - |t_k|^2) \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} |1 - \bar{t}_k t_\ell|^2} \quad (6)$$

où  $P_n$  est un polynôme de  $2n$  variables  $t_1, t_2, \dots, t_n$  et  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$  de degré  $n$  en chacune des variables .

Le déterminant  $G$  devant être nul quand  $t_p = t_m$  pour  $p \neq m$  alors  $P_n$  est divisible par :

$$U_n = \prod_{1 < k < l < n} (t_k - t_l) \quad \text{et} \quad \bar{U}_n = \prod_{1 < k < l < n} (\bar{t}_k - \bar{t}_l)$$

et comme  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  en chacune des variables alors :

$$P_n = \alpha_n \cdot U_n \cdot \bar{U}_n \quad (7)$$

où  $\alpha_n$  est une constante indépendante de  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

On va montrer que  $\alpha_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En multipliant la dernière ligne de  $G$  par  $(1 - t_n \bar{t}_n)$  et en faisant tendre  $t_n$  vers 1 on obtient que :

$$(1 - t_n \bar{t}_n) \cdot G \rightarrow G_{n-1, n-1} \quad (8)$$

D'un autre côté, en multipliant l'expression (6) de  $G$  par  $(1 - t_n \bar{t}_n)$ , après avoir remplacé  $P_n$  par son expression donnée par (7), et en faisant tendre  $t_n$  vers 1 on obtient :

$$\lim_{t_n \rightarrow 1} (1 - t_n \bar{t}_n) \cdot G = \alpha_n \cdot \frac{G_{n-1, n-1}}{\alpha_{n-1}} \quad (9)$$

Les deux expressions (8) et (9) donnent :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \quad \forall n .$$

Il est alors immédiat de vérifier que  $\alpha_1 = 1$  .

En utilisant ce lemme on peut donner l'expression de



$$\frac{G_{ij}}{G}, \quad 1 < i, j < n.$$

En effet, après quelques manipulations algébriques élémentaires on obtient :

$$\frac{G_{ij}}{G} = (-1)^{i+j} \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n (1 - \bar{t}_i t_k) \cdot \prod_{k=1, k \neq j}^n (1 - t_j \bar{t}_k)}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k) \prod_{k=1, k \neq j}^n (\bar{t}_j - \bar{t}_k)} \quad (10)$$

On a alors le :

**Lemme 2 :**

Posons :

$$F(z) = \prod_{i=1}^n (z - t_i)$$

$$H(z) = \prod_{i=1}^n (1 - \bar{t}_i z)$$

alors :

$$\rho^2(f, t_{(n)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_i) \overline{f(t_j)} \frac{H(t_i)}{F'(t_i)} \cdot \frac{\overline{H(t_j)}}{\overline{F'(t_j)}} \cdot \frac{1}{1 - t_i \bar{t}_j} \quad (11)$$

$$s_{t_n}(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_i) K_{t_j}(z) \frac{H(t_i)}{F'(t_i)} \cdot \frac{\overline{H(t_j)}}{\overline{F'(t_j)}} \cdot \frac{1}{1 - t_i \bar{t}_j} \quad (12)$$

Démonstration :

Les expressions de  $\rho^2(f, t_{(n)})$  et  $s_{t_{(n)}}$  données par

le lemme s'obtiennent directement des équations (4) et (5) en

remplaçant  $\frac{G_{ij}}{G}$  par sa valeur donnée par (10).

Remarque :

On peut obtenir l'expression de  $\rho(f, t_{(n)})$  donnée par

le lemme en inversant la matrice  $G$ , cf.[12],[14].

On a préféré développer les rapports  $\frac{G_{ij}}{G}$ , car les

mêmes calculs nous permettent d'avoir les expressions

de  $\rho(f, t_{(n)})$  et de la projection de  $f$  dans  $H_n$ .

Dans le but d'arriver à des expressions de  $\rho(f, t_{(n)})$  et  $s_{t_{(n)}}$  sous forme de différences divisées,

on va continuer à expliciter les calculs.

Explicitons les quantités :

$$h_{ij} = \frac{H(t_i) \times H(t_j)}{1 - t_i \bar{t}_j} \quad 1 < i < n, 1 < j < n.$$

En utilisant la définition de  $H$ , cf. lemme 2, on a :

$$h_{ij} = \begin{cases} (1 - |t_i|^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |1 - t_i \bar{t}_k|^2 & \text{si } i=j \\ (1 - |t_i|^2)(1 - |t_j|^2)(1 - t_i \bar{t}_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n (1 - t_i \bar{t}_k)(1 - \bar{t}_j t_k) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En appliquant l'identité :

$$(1 - t_i \bar{t}_k)(1 - \bar{t}_j t_k) = (1 - t_i \bar{t}_j)(1 - |t_k|^2) + (t_i - t_k)(\bar{t}_j - \bar{t}_k)$$

on a

$$h_{ij} = \begin{cases} (1-|t_i|^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [(1-|t_i|^2)(1-|t_k|^2) + |t_i-t_k|^2] & \text{si } i=j \\ (1-t_i \bar{t}_j)(1-|t_i|^2)(1-|t_j|^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n [(1-t_i \bar{t}_j)(1-|t_k|^2) + (t_i-t_k)(\bar{t}_j-\bar{t}_k)] & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \omega \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [(1-|t_i|^2) + \frac{|t_i-t_k|^2}{1-|t_k|^2}] & \text{si } i=j \\ \omega \cdot (1-t_i \bar{t}_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n [(1-t_i \bar{t}_j) + \frac{(t_i-t_k)(\bar{t}_j-\bar{t}_k)}{1-|t_k|^2}] & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

avec

$$\omega = \prod_{k=1}^n (1-|t_k|^2)$$

d'où une nouvelle expression de  $\rho(f, t_{(n)})$  En remplaçant les quantités  $h_{ij}$  par leur valeur :

$$\rho^2(f, t_{(n)}) = \omega \sum_{i=1}^n \frac{|f(t_i)|^2}{|F'(t_i)|^2} \prod_{k=1, k \neq i}^n [(1-|t_i|^2) + \frac{|t_i-t_k|^2}{1-|t_k|^2}] +$$

(13)

$$\omega \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{f(t_i)}{F'(t_i)} \cdot \overline{\frac{f(t_j)}{F'(t_j)}} (1-t_i \bar{t}_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n [(1-t_i \bar{t}_j) + \frac{(t_i-t_k)(\bar{t}_j-\bar{t}_k)}{1-|t_k|^2}]$$

En développant les deux produits figurant dans l'expression précédente on a :

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left[ (1-|t_i|^2) + \frac{|t_i - t_k|^2}{1-|t_k|^2} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k^{ii} (1-|t_i|^2)^{n-k-1} \quad (14)$$

et

$$(1-t_i \bar{t}_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n \left[ (1-t_i \bar{t}_j) + \frac{(t_i - t_k)(\bar{t}_j - \bar{t}_k)}{1-|t_k|^2} \right] = \sum_{k=0}^{n-2} \sigma_k^{ij} (1-t_i \bar{t}_j)^{n-k-1} \quad (15)$$

avec pour  $1 < i < n$  et  $1 < j < n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^{ij} = 1 \\ \sigma_k^{ij} = \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_k < n} \frac{(t_i - t_{\tau_1})(\bar{t}_j - \bar{t}_{\tau_1}) \dots (t_i - t_{\tau_k})(\bar{t}_j - \bar{t}_{\tau_k})}{\prod_{\ell=\tau_1, \dots, \tau_k} (1-|t_\ell|^2)} \\ k = 1, 2, \dots, n-2 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n-1}^{ii} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{|t_i - t_k|^2}{(1-|t_k|^2)} = \frac{|F'(t_i)|^2}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (1-|t_k|^2)} \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (16)$$

En tenant compte des expressions (13), (14), (15) et (16) on a :

$$\rho^2(f, t_{(n)}) = \sum_{i=1}^n (1 - |t_i|^2) |f(t_i)|^2 +$$

$$+ \omega \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{n-2} \sigma_k^{ij} \frac{f(t_i)}{F'(t_i)} \times \frac{\overline{f(t_j)}}{F'(t_j)} \times (1 - t_i \bar{t}_j)^{n-k-1}}_{U(f, t_{(n)})}$$

$$U(f, t_{(n)}) = \omega \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_k^{ij} \times \frac{f(t_i)}{F'(t_i)} \times \frac{\overline{f(t_j)}}{F'(t_j)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} t_i^m \bar{t}_j^m$$

$$= \omega \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_k^{ij} \frac{t_i^m f(t_i)}{F'(t_i)} \times \frac{\overline{t_j^m f(t_j)}}{F'(t_j)}}_{\theta_{km}^{ij}}$$

En remplaçant  $\sigma_k^{ij}$  par sa valeur on a :

$$\theta_{km}^{ij} = \sum_{1 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_k < n} \frac{1}{\prod_{\lambda=\tau_1, \dots, \tau_k} (1 - |t_\lambda|^2)} \times$$

$$\times \frac{t_i^m f(t_i)}{\prod_{\substack{s=1, 2, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq i}} (t_i - t_s)} \cdot \frac{\overline{t_j^m f(t_j)}}{\prod_{\substack{s=1, 2, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq j}} (\bar{t}_j - \bar{t}_s)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & \rho^2(f, t_{(n)}) = \\
 & = \sum_{i=1}^n (1 - |t_i|^2) |f(t_i)|^2 + \omega \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \times \\
 & \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_k < n} \frac{1}{\prod_{\lambda=\tau_1, \dots, \tau_k} (1 - |t_\lambda|^2)} \times \\
 & \times \frac{t_i^m f(t_i)}{\prod_{\substack{s=1, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq i}} (t_i - t_s)} \times \frac{\overline{t_j^m f(t_j)}}{\prod_{\substack{s=1, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq j}} (\bar{t}_j - \bar{t}_s)}.
 \end{aligned}$$

d'où en permuttant les signes "sommés" :

$$\begin{aligned}
 & \rho^2(f, t_{(n)}) = \\
 & = \sum_{i=1}^n (1 - |t_i|^2) |f(t_i)|^2 + \omega \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \times \\
 & \times \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_k < n} \frac{1}{\prod_{\lambda=\tau_1, \dots, \tau_k} (1 - |t_\lambda|^2)} \cdot \\
 & \times \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m f(t_i)}{\prod_{\substack{s=1, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq i}} (t_i - t_s)} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\overline{t_j^m f(t_j)}}{\prod_{\substack{s=1, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq j}} (\bar{t}_j - \bar{t}_s)}.
 \end{aligned}$$

or

$$\sum_{i=1}^n \frac{t_i^m f(t_i)}{\prod_{\substack{s=1, \dots, n \\ s \neq \tau_1, \dots, \tau_k \\ s \neq i}} (t_i - t_s)} = \delta_{[t_{i_1}, \dots, t_{i_{n-k}}]}(z^m f)$$

où

$$\delta_{[t_{i_1}, \dots, t_{i_{n-k}}]}(z^m f)$$

représente la différence divisée d'ordre  $(n-k-1)$  de la fonction  $z^m \cdot f(z)$  construite sur les points

$$t_{i_1}, \dots, t_{i_{n-k}} :$$

$$i_j \notin \{\tau_1, \dots, \tau_{n-k}\} \quad j = 1, \dots, n-k .$$

finalement :

$$\rho^2(f, t_{(n)}) = \sum_{i=1}^n (1 - |t_i|^2) |f(t_i)|^2 +$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-k} < n} \prod_{\ell=\tau_1, \dots, \tau_{n-k}} (1 - |t_\ell|^2)^{\sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m}} \left| \delta_{[\tau_k]}(z^m f) \right|^2$$

où

$$\tau_k = (t_{\tau_1}, \dots, t_{\tau_{n-k}}) .$$

Et avec la convention  $\delta f(t) = f(t) \quad \forall t \in D$  on a :

$$\rho^2(f, t_{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-k} < n} \prod_{\ell=\tau_1, \dots, \tau_{n-k}} (1-|t_\ell|^2) \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} |\delta_{[\tau_k]}(z^m f)|^2$$

Ce qui donne alors une formule explicite de l'erreur en fonction de  $t_1, t_2, \dots, t_n$  et des différences divisées de  $z^m \cdot f(z)$ ,  $0 < m < n-1$ .

Avant d'annoncer le théorème on va donner l'expression explicite de l'erreur dans le cas  $n = 2$  et  $n = 3$

**n = 2**

$$\rho^2(f, t_{(2)}) = (1-|t_1|^2) |f(t_1)|^2 + (1-|t_2|^2) |f(t_2)|^2 + (1-|t_1|^2)(1-|t_2|^2) \left[ |\delta_{[t_1, t_2]} f|^2 - |\delta_{[t_1, t_2]} z f|^2 \right]$$

**n = 3**

$$\rho^2(f, t_{(3)}) = (1-|t_1|^2) |f(t_1)|^2 + (1-|t_2|^2) |f(t_2)|^2 + (1-|t_3|^2) |f(t_3)|^2 + (1-|t_1|^2)(1-|t_2|^2) \left[ |\delta_{[t_1, t_2]} f|^2 - |\delta_{[t_1, t_2]} z f|^2 \right] + (1-|t_1|^2)(1-|t_3|^2) \left[ |\delta_{[t_1, t_3]} f|^2 - |\delta_{[t_1, t_3]} z f|^2 \right] + (1-|t_2|^2)(1-|t_3|^2) \left[ |\delta_{[t_2, t_3]} f|^2 - |\delta_{[t_2, t_3]} z f|^2 \right] + (1-|t_1|^2)(1-|t_2|^2)(1-|t_3|^2) \left[ |\delta_{[t_1, t_2, t_3]} f|^2 - 2 |\delta_{[t_1, t_2, t_3]} z f|^2 + |\delta_{[t_1, t_2, t_3]} z^2 f|^2 \right]$$



**Théorème 2 .**

Soient un entier  $n$  non nul,  $f$  analytique dans  $\bar{D}$  et  $n$  points distincts,  $t_1, \dots, t_n$  dans  $D$ .

Soit  $s_{t(n)}$ , où  $t(n) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ , la projection

de  $f$  sur le sous espace de  $H^2(D)$  engendré par

$$K_{t_1}, K_{t_2}, \dots, K_{t_n}$$

et soit  $\rho(f, t(n))$  sa norme alors :

$$\rho^2(f, t(n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-k} < n} \prod_{\lambda=\tau_1, \dots, \tau_{n-k}} (1 - |t_\lambda|^2) \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \left| \delta_{[\tau_k]}(y^m f) \right|^2$$

$$s_{t(n)}(z) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-k} < n} \prod_{\lambda=\tau_1, \dots, \tau_{n-k}} (1 - |t_\lambda|^2) \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \delta_{[\tau_k]}(y^m f) \overline{\delta_{[\tau_k]}(y^m z)}$$

où

$$\tau_k = (t_{\tau_1}, \dots, t_{\tau_{n-k}}) \quad \text{et} \quad (y^m \overline{K_z})(t) = \overline{t^m K(z, t)}$$

$\delta_{[\tau_k]}(y^m g)$  représente la différence divisée d'ordre

$(n-k-1)$  de la fonction  $y^m g(y)$  construite sur les

points  $t_{\tau_1}, \dots, t_{\tau_{n-k}}$ .

### V. ETUDE DE LA PARTIE NON LINEAIRE DU PROBLEME.

Ayant à notre disposition la formule de l'erreur on va l'utiliser pour étudier la partie non linéaire du problème c'est à dire la minimisation par rapport aux noeuds.

On va donc étudier le problème :

$$(PI) \quad \inf_{\substack{t \in N \\ (n)}} \left( \|f\|^2 - \rho^2(f, t_{(n)}) \right).$$

Soit

$$(PII) \quad \sup_{\substack{t \in N \\ (n)}} \rho^2(f, t_{(n)}).$$

Puisque

$$\rho(f, t_{(n)}) < \|f\|$$

alors

$$\rho^2(f) = \sup_{\substack{t \in N \\ (n)}} \rho^2(f, t_{(n)}) < \|f\|^2 < \infty.$$

Soit une suite maximisante :

$$\{t_{(n)}^v\}_v \in N$$

telle que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \rho^2(f, t_{(n)}^v) = \rho^2(f).$$

or

$$\{ t_{(n)}^v \} \subset N \subset \bar{D}^n$$

et comme  $\bar{D}^n$  est compact, on peut donc trouver une sous suite de  $\{ t_{(n)}^v \}$ , qu'on ne va pas renuméroter, qui converge dans  $\bar{D}^n$  vers une limite  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ .

la limite  $\tau$  étant un élément de  $\bar{D}^n$  alors il n'appartient pas nécessairement à  $N$  (autrement dit  $\tau$  ne vérifie plus nécessairement les deux conditions  $\tau_i \neq \tau_j$  pour  $i \neq j$  et  $|\tau_i| < 1$ ).

D'autre part la fonction  $\rho$  que nous avons jusqu'ici défini pour  $t_{(n)} \in N$  peut être prolongée en une fonction  $\tilde{\rho}$  définie et continue dans  $\bar{D}^n$  vu son expression donnée dans le théorème 2. Par exemple pour  $n = 2$  la fonction  $\tilde{\rho}$  a pour expression :

$$\tilde{\rho}^2(f, t_{(2)}) = \begin{cases} \rho^2(f, t_{(2)}) & \text{si } t_1 \neq t_2 \\ \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \rho^2(f, t_{(2)}) = 2(1-|t|^2) |f(t)|^2 + \\ (1-|t|^2)^2 (|f'(t)|^2 - |tf'(t) + f(t)|^2) & \text{si } t_1 = t_2 = t \end{cases}$$

Il est alors clair puisque  $N$  est dense dans  $\bar{D}^n$ , que  $\tilde{\rho}(f, t_{(n)})$  atteint son maximum au point  $\tau$ .

d'autre part puisque les fonctions

$$\bar{t}^m \cdot K(z, t)$$

$$0 < m < n-1$$

sont analytiques en  $\bar{t}$  la suite des fractions

$$\left\{ r_{\nu}^{(n)}(z) \right\}_{\nu \in \mathbb{N}} \quad (17)$$

converge uniformément vers une limite  $r^*$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ .  
D'après l'expression explicitée au théorème 2 la limite  $r^*$  est sous la forme :

$$r^*(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} K^{(j)}(z, \tau_i) \quad (18)$$

où  $m$  est le nombre de composantes distinctes de  $\tau$ ,  
 $m_i$  est la multiplicité de  $\tau_i$ ,  $1 < i < m$   
et  $\alpha_{ij}$  sont des nombres complexes.

Par exemple pour  $n = 2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^*(z) = (1-|t_1|^2)f(t_1) \times K(z, t_1) + (1-|t_2|^2) \times K(z, t_2) + (1-|t_1|^2)(1-|t_2|^2) \times \\ \times \left[ \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} \times \frac{K(z, t_1)-K(z, t_2)}{\bar{t}_1-\bar{t}_2} - \frac{t_1 f(t_1)-t_2 f(t_2)}{t_1-t_2} \times \frac{\bar{t}_1 K(z, t_1)-\bar{t}_2 K(z, t_2)}{\bar{t}_1-\bar{t}_2} \right] \quad \text{si } t_1 \neq t_2 \\ \\ r^*(z) = 2(1-|t|^2)f(t)K(z, t) + (1-|t|^2)^2 \times \\ \times [f'(t)K^{(1)}(z, t) - (tf'(t)+f(t))(\bar{t}K^{(1)}(z, t)+K(z, t))] \quad \text{si } t_1=t_2=t \end{array} \right.$$

Enfin  $r^*$  est un élément de  $R_n^{n-1}$  en effet quand le module d'un noeud est égal à 1 alors les coefficients  $\alpha_{ij}$  correspondants sont nuls puisque chaque  $\alpha_{ij}$  est multiplié par  $(1-|\tau_i|^2)^{j+1}$ .

**Théorème 3 :**

Etant donné un entier  $n$  non nul et une fonction  $f$  analytique dans  $\bar{D}$  alors:

1°/Il existe au moins un élément  $r^*$

appartenant à  $R_n^{n-1}$ , de la forme (18)

solution du problème d'approximation (PI).

2°/Un élément  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \bar{D}^n$  définit

un élément  $r^*$  de  $R_n^{n-1}$  solution du problème

d'approximation au sens de Hardy si et

seulement si  $\tau$  est solution du problème (PII)

Démonstration :

Il reste à montrer que  $r^*$  donnée par (18) est bien un meilleur approximant de  $f$  dans  $R_n^{n-1}$ .

En reprenant les notations précédentes on a :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|f - r_{t(n)^v}\| = \inf_{s \in S_n^{n-1}} \|f - s\|.$$

Puisque la suite (17) converge uniformément vers  $r^*$  dans  $\bar{D}$  alors :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|f - r_{t(n)^v}\| = \|f - r^*\|$$

Et finalement en appliquant le théorème 1 :

$$\inf_{r \in R_n^{n-1}} \|f - r\| = \|f - r^*\|$$

## VI. PROPRIETES DE LA MEILLEURE APPROXIMATION .

## a) Non unicité de la meilleure approximation.

Pour des raisons de symétrie on peut construire des exemples de fonctions ayant plusieurs meilleurs approxima-  
nts.

Par exemple soit  $f$  analytique dans  $\bar{D}$  et soit  $g$  définie par

$$g(z) = f(z^\lambda) \quad \lambda > 2$$

soit  $r^*$  un meilleur approximant de  $g$  dans  $R_n^{n-1}$  alors  $g$  admet au moins  $\lambda$  meilleurs approxima-  
nts qui se déduisent de  $r^*$ ,  
en effet :

soit

$$r^*(z) = \sum_{s=1}^m \sum_{j=0}^{m_s-1} \alpha_{sj} K^{(j)}(z, \tau_s)$$

alors

$$r_k^*(z) = \sum_{s=1}^m \sum_{j=0}^{m_s-1} \alpha_{sj} K^{(j)}\left(z, e^{i\frac{2k\pi}{\lambda}} \cdot \tau_s\right)$$

$$k = 1, 2, \dots, \lambda-1$$

sont aussi des meilleurs approxima-  
nts de  $g$ , en effet par  
changement de variable :

$$\|g(z) - r^*(z)\| = \|g(ze^{i\frac{2k\pi}{\lambda}}) - r^*(ze^{i\frac{2k\pi}{\lambda}})\| = \|g - r_k^*\|$$

$$k = 1, 2, \dots, \lambda-1$$

On donnera plus loin des exemples de fonctions ayant un meilleur approximant unique, des fonctions ayant un ensemble fini de meilleurs approxima-  
nts et des exemples de fonctions ayant un ensemble infini non dénombrable de meilleurs approxima-  
nts (dans le cas  $n = 1$ ).

b) Forme de la meilleure approximation.

Dans les paragraphes précédants on a vu que  $\tilde{\rho}(f, t_{(n)})$  atteint son maximum dans  $\bar{D}^n$ . A présent on va voir qu'en fait  $\tilde{\rho}(f, t_{(n)})$  atteint son maximum dans  $D^n$ .

D'après ce qui précède tout meilleur approximant peut s'écrire sous la forme :

$$r^*(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} K^{(j)}(z, t_i) \quad (19)$$

où

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{C} \text{ et } t_i \in \bar{D} : t_i \neq t_j \text{ pour } i \neq j .$$

$$\sum_{i=1}^m m_i < n$$

LEMME 3 :

Si  $f \notin R_n^{n-1}$

alors

$$\sum_{i=1}^m m_i = n .$$

Démonstration :

Supposons que il existe  $i_0$  :

$$\alpha_{i_0, m_{i_0}-1} = 0 .$$

Puisque  $r^*$  est un meilleur approximant de  $f$  alors :

$$\|f - r^*\| < \|f - r\| \quad \forall r \in R_n^{n-1}$$

Soit  $t \in D$  et soit  $\varepsilon$  un nombre réel non nul, alors :

$$r^* + \varepsilon K(z, t)$$

appartient à  $R_n^{n-1}$

par conséquent

$$\| f - r^* \| < \| f - r^* - \varepsilon K_t \| \quad \forall t \in D \text{ et } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

en développant le carré de la norme on obtient :

$$2\varepsilon \operatorname{Re}(f - r^*, K_t) - \varepsilon^2 \| K_t \|^2 < 0 \quad \forall t \in D \text{ et } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

prenons alors  $\varepsilon > 0$ , en simplifiant par  $\varepsilon$  et en le faisant tendre vers zéro on obtient :

$$\operatorname{Re}(f - r^*, K_t) < 0 \quad \forall t \in D$$

Si maintenant on prend  $\varepsilon = 0$  on obtient :

$$\operatorname{Re}(f - r^*) = 0 \quad \forall t \in D$$

et finalement pour avoir :

$$\operatorname{Im}(f - r^*) = 0 \quad \forall t \in D$$

il suffit de considérer :

$$r^* + i\varepsilon K_t$$

Sous l'hypothèse que  $\alpha_{i_0, m_{i_0}-1} = 0$  on a alors :

$$\forall t \in D \quad (f - r^*, K_t) = 0.$$

En tenant compte de la propriété de reproduction du noyau  $K$  on a :

$$\forall t \in D \quad f(t) - r^*(t) = 0$$

et comme  $f$  est analytique dans  $D$  alors par prolongement analytique  $f$  coïncide avec  $r^*$ , ce qui contredit le fait que  $f$  n'est pas une fraction rationnelle.



**COROLLAIRE :**

Si  $f \notin R_n^{n-1}$  et analytique dans  $\bar{D}$  et si  $r^*$  de la forme (19) est un meilleur approximant de  $f$  alors :

$$|t_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

**Démonstration :**

Supposons que il existe  $i_0 : |t_{i_0}| = 1$  .

D'après la formule explicite de la meilleure approximation (théorème 2) on sait que  $\alpha_{i_0, m_{i_0}-1}$  possède le facteur  $(1 - |t_{i_0}|^2)^{m_{i_0}}$  d'où :

$$\alpha_{i_0, m_{i_0}-1} = 0 .$$

ce qui est impossible d'après le lemme 3.

**Remarque :**

Une autre propriété intéressante d'un meilleur approximant mis sous la forme de fraction rationnelle :

$$\frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)}$$

est :

$$\max(\partial P_n, \partial z P_{n-1}) = n$$

le symbole  $\partial Q$  désigne le degré du polynôme  $Q$  .

Pour démontrer ce résultat, le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 3 s'applique .

C'est ce résultat que nous allons utiliser pour donner les conditions nécessaires d'optimalité.

## c) Conditions nécessaires d'optimalité.

Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\bar{D}$  et soit :

$$r^*(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)}$$

un meilleur approximant de  $f$  dans  $R_n^{n-1}$

où

$$P_{n-1}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \quad \text{et} \quad P_n(z) = 1 + \sum_{j=1}^n b_j z^j$$

Puisque  $r^*$  minimise

$$\epsilon^2 = (f - r^*, f - r^*)$$

alors

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_i} = - \left( \frac{\partial r^*}{\partial a_i}, f - r^* \right) = 0 \\ \frac{\partial \epsilon^2}{\partial b_{i+1}} = - \left( \frac{\partial r^*}{\partial b_{i+1}}, f - r^* \right) = 0 \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

mais

$$\begin{cases} \frac{\partial r^*}{\partial a_i} = \frac{z^i}{P_n(z)} \\ \frac{\partial r^*}{\partial b_{i+1}} = - \frac{z^{i+1}}{P_n^2(z)} \cdot P_{n-1}(z) \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

On dispose donc de  $2n$  fonctions rationnelles :

$$\left\{ \frac{1}{P_n(z)}, \frac{z}{P_n(z)}, \dots, \frac{z^{n-1}}{P_n(z)}, \frac{z P_{n-1}(z)}{P_n^2(z)}, \dots, \frac{z^n P_{n-1}(z)}{P_n^2(z)} \right\} = \{\Phi_j\}_1^{2n}$$

Les relations (21) montrent que la fonction erreur  $f - r^*$  est orthogonale à l'espace  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$  engendré par le système  $\{\Phi_j\}$ .

Que peut-on dire alors de la dimension de l'espace  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$ .

La réponse est donnée par le lemme suivant :

**LEMME 4 :**

Supposons que  $r^*$  soit irréductible alors  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$  est un espace de Haar de dimension  $2n-d$  avec

$$d = \min(n-1-\partial P_{n-1}, n-\partial P_n)$$

avec comme convention  $\partial 0 = -\infty$ .

Démonstration : cf[10,p.162].

En appliquant le lemme 4, et la remarque précédente on voit que  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$  est un espace de Haar de dimension  $2n$  ( $d = 0$ ).

Soit alors  $z_i$ ,  $1 < i < m$ , les zéros distincts de  $P_n(z)$  de multiplicité  $m_i$  respectivement.

Les fonctions

$$\frac{z^k}{(z-z_i)^{k+1}}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2m_i - 1$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

appartiennent à  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$  puisque elles peuvent être obtenues comme combinaison linéaire des éléments de  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$ .

En posant

$$\bar{t}_i = \bar{z}_i^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

on aura, puisque  $f - r^*$  est orthogonale  $L(\Phi_1, \dots, \Phi_{2n})$  :

$$\left( f(z) - r^*(z), \frac{z^k}{(1 - \bar{t}_i z)^{k+1}} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, 2m_i - 1 \\ i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

autrement dit

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(z) - r^*(z), K^{(j)}(z, t_i)) = 0 \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2m_i - 1 \\ i = 1, 2, 3, \dots, m \end{array} \right.$$

et finalement d'après les formules de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(k)}(t_i) = r^{*(k)}(t_i) \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2m_i - 1 \\ i = 1, 2, 3, \dots, m \end{array} \right.$$

D'où le théorème :

**THEOREME 4 :**

Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\bar{D}$  et soit  $r^*$  un meilleur approximant irréductible de  $f$  alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(k)}(t_i) = r^{*(k)}(t_i) \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2m_i - 1 \\ i = 1, 2, 3, \dots, m \end{array} \right.$$

où  $t_i, 1 < i < m$ , sont les inverses des pôles de  $r^*$  de multiplicité  $m_i$  respectivement .

## Remarque

Jusqu'ici nous n'avons traité que le cas de la meilleure approximation de  $f$  par des éléments de  $R_n^{n-1}$ . En fait tous les résultats précédents restent valables lorsque on étudie l'approximation d'une fonction  $f$  par des fractions rationnelles de type

$$\frac{P_{n+j}}{P_n}$$

où

$$j > -1, \quad \partial P_{n+j} < n+j, \quad \partial P_n < n \quad \text{et} \quad P_n(z) = 0 \Rightarrow z \notin \bar{D}$$

On désignera par  $R_n^{n+j}$  l'ensemble de ces fractions rationnelles.

On va voir que le problème de l'approximation dans  $R_n^{n+j}$  peut être ramené à celui dans  $R_n^{n-1}$ .

Soit  $S_n^{n+j}$  le sous ensemble des fonctions de  $R_n^{n+j}$  qui s'écrivent sous la forme :

$$s(z) = \sum_{i=1}^j p_i z^i + \sum_{i=1}^n \alpha_i K(z, t_i)$$

où

$p_i, 1 < i < j$ , et  $\alpha_i, 1 < i < n$  sont des complexes

et  $t_i \in D$ ,  $t_i \neq t_k$  pour  $i \neq k$ .

Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\bar{D}$  de développement :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

par application du théorème 1 on a :

$$\inf_{s \in S_n^{n+j}} \|f - s\| = \inf_{r \in R_n^{n+j}} \|f - r\|.$$

puisque

$$K(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{t}^i z^i$$

on aura :

$$s(z) = \sum_{i=0}^j (p_i + \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{t}_k^i) z^i + \sum_{i=j+1}^{\infty} (\sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{t}_k^i) z^i$$

comme

$$\|g\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |g_i|^2 \quad \text{si } g \in H^2, \text{ et } g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i$$

$$\inf_{s \in S_n^{n+j}} \|f-s\|^2 = \inf_{\substack{p_i \in \mathbb{C} \\ \alpha_k \in \mathbb{C} \\ t_k \in D}} \left( \sum_{i=0}^j \left| a_i - p_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{t}_k^i \right|^2 + \sum_{i=j+1}^{\infty} \left| a_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{t}_k^i \right|^2 \right)$$

$$= \inf_{\substack{\alpha_k \in \mathbb{C} \\ t_k \in D}} \left( \sum_{i=j+1}^{\infty} \left| a_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{t}_k^i \right|^2 \right)$$

avec

$$p_i^* = a_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k^* \bar{t}_k^{*i}, \quad 1 < i < j, \text{ et } (p_i^*, \alpha_k^*, t_k^*)$$

sont les paramètres optimaux.

D'autre part

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \left| a_i - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{t}_k^i \right|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left| a_{i+j+1} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \bar{t}_k^{j+1}) \cdot \bar{t}_k^i \right|^2$$

donc :

$$\inf_{s \in S_n^{n+j}} \|f-s\| = \inf_{s \in S_n^{n-1}^j} \|f_j-s\|$$

avec

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+j+1} z^i \quad j > 0.$$

## VII CONCLUSION

Le problème de l'approximation d'une fonction  $f$  analytique dans le disque unité fermé  $\bar{D}$  par des fractions rationnelles du type  $(n+j, n)$ ,  $n > 0$  et  $j > -1$ , se trouve reformulé en un problème de minimisation de fonctions de plusieurs variables.

On peut par une des nombreuses méthodes de calcul du maximum de fonctions de plusieurs variables [7],[13],[19],[20], calculer un meilleur approximant d'une fonction  $f$  donnée.

## VIII. EXPERIMENTATION NUMERIQUE.

Les expériences numériques ci après sont obtenues en maximisant la fonction erreur explicitée dans le théorème 2. La méthode de maximisation est celle décrite dans [20].

Les notations utilisées dans les tableaux suivants sont :

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+j} z^i \quad j = 0, 1, \dots$$

$$e_j(z) = f_j(z) - \frac{P_{n+j-1}(z)}{P_n(z)}$$

$$\|e_j\|^2 = \|f_j\|^2 - \rho^2(t_1^j, t_2^j, \dots, t_n^j)$$

dans le cas de l'approximation de  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  par une fraction rationnelle du type :

$$\frac{P_{n+j-1}}{P_n}$$

**EXEMPLE 1.**  $f(z) = e^z$ .

$m$ $n$	0	1	2	3	4
1	$t^0 = 0.1680339$ $\ e_0\ ^2 = 0.152$	$t^1 = 0.4347754$ $\ e_1\ ^2 = 0.730 \cdot 10^{-2}$	$t^2 = 0.316151$ $\ e_2\ ^2 = 0.211 \cdot 10^{-3}$	$t^3 = 0.243904$ $\ e_3\ ^2 = 0.474 \cdot 10^{-5}$	$t^4 = 0.197284$ $\ e_4\ ^2 = 0.832 \cdot 10^{-7}$
2		$t_1^0 = 0.31438310$ $+i 0.19311778$ $t_2^0 = 0.31438310$ $-i 0.19311779$ $\ e_0\ ^2 = 0.167 \cdot 10^{-3}$	$t_1^1 = 0.24195606$ $+i 0.13128019$ $t_2^1 = 0.24195606$ $-i 0.13128019$ $\ e_1\ ^2 = 0.193 \cdot 10^{-5}$	$t_1^2 = 0.2439$ $+i 0.1037 \cdot 10^{-8}$ $t_2^2 = 0.0000$ $\ e_2\ ^2 = 0.474 \cdot 10^{-5}$	$t_1^3 = 0.1935$ $+i 0.1978 \cdot 10^{-10}$ $t_2^3 = 0.0000$ $\ e_3\ ^2 = 0.831 \cdot 10^{-7}$
3			$t_1^0 = 0.24195607$ $+i 0.13128019$ $t_2^0 = 0.24195606$ $-i 0.13128020$ $t_3^0 = 0.00000000$ $\ e_0\ ^2 = 0.193 \cdot 10^{-5}$	$t_1^1 = 0.1961090$ $+i 0.0943982$ $t_2^1 = 0.1961090$ $-i 0.0943985$ $t_3^1 = 0.0000000$ $\ e_1\ ^2 = 0.202 \cdot 10^{-7}$	$t_1^2 = 0.016458$ $+i 0.722373$ $t_2^2 = 0.164587$ $-i 0.722372$ $t_3^2 = 0.000000$ $\ e_2\ ^2 = 0.185 \cdot 10^{-9}$

La table donne les noeuds d'approximation de la fonction  $f(z) = e^z$  par des fractions rationnelles du type  $(m+j, n)$   $n=1,2,3$  et  $j = -1, 0, \dots, 4-n$ .



## EXEMPLE 2.

$$f(z) = e^z + \frac{1}{1-0.5z}$$

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [1,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f0)\*\*2 = 12.9450700357696 Erreur\*\*2 = 12.9423215114590  
 (Norme(f0)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.2748524310587981D-02  
 Module de t1 = .3985652111220023 Argument de t1 = .4635732604274520  
 Module de t2 = .3985652104666080 Argument de t2 = -.4635732595167254

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [3,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f2)\*\*2 = 2.69507003576963 Erreur\*\*2 = 2.69498800520429  
 (Norme(f2)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.8203056533946478D-04  
 Module de t1 = .2599288416715886 Argument de t1 = -.5192653910934782D-08  
 Module de t2 = .2599291404478806 Argument de t2 = -.8982063340431655D-09

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [4,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f3)\*\*2 = .445070035769627 Erreur\*\*2 = .445063126937088  
 (Norme(f3)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.6908832538877487D-05  
 Module de t1 = .3435653065407898 Argument de t1 = 0.8060561225355457D-08  
 Module de t2 = .7560402449114260 Argument de t2 = 0.7610175050306640D-07

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [5,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f4)\*\*2 = 0.544450357696272D-01 Erreur\*\*2 = 0.544449975076237D-01  
 (Norme(f4)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.3826200345520867D-07  
 Module de t1 = .5281559993699434 Argument de t1 = 0.6439506792908625D-08  
 Module de t2 = .2796799380506841 Argument de t2 = 0.7188009314172623D-08

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [6,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f5)\*\*2 = 0.659347326962715D-02 Erreur\*\*2 = 0.659347307572762D-02  
 (Norme(f5)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.1938995350838542D-09  
 Module de t1 = .4945217214321446 Argument de t1 = 0.3565315873617290D-07  
 Module de t2 = .2308095708719830 Argument de t2 = 0.1469408045709505D-06

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [7,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f6)\*\*2 = 0.968473269627153D-03 Erreur\*\*2 = 0.968473265505106D-03  
 (Norme(f6)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.4122046482862378D-11  
 Module de t1 = .4904109117578840 Argument de t1 = -.1054477747052180D-07  
 Module de t2 = .2127143647837240 Argument de t2 = -.3569555892410626D-06

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [9,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f8)\*\*2 = 0.375002944996020D-04 Erreur\*\*2 = 0.375002942928241D-04  
 (Norme(f8)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.2067778245117522D-12  
 Module de t1 = .4931840653227842 Argument de t1 = 0.8973725778120715D-06  
 Module de t2 = .2578236253620067 Argument de t2 = 0.2737706533362578D-04

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [12,2]

\*\*\*\*\*

Norme(f11)\*\*2 = 0.474517114855613D-06 Erreur\*\*2 = 0.474517097752472D-06  
 (Norme(f11)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.1710314083846439D-13  
 Module de t1 = .5129952273727402 Argument de t1 = 0.2183324714486694D-10  
 Module de t2 = .4647677782359580 Argument de t2 = 0.2639420348266316D-07

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [2, 3]

\*\*\*\*\*

Norme(f0)\*\*2 = 12.9450700357696 Erreur\*\*2 = 12.9449775511369  
 (Norme(f0)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.9248463267929295D-04  
 Module de t1 = .2685750952463866 Argument de t1 = 0.9800873946357009D-01  
 Module de t2 = .2685740541454790 Argument de t2 = -.9800951499220080D-01  
 Module de t3 = 0.0000000000000000 Argument de t3 = 0.0000000000000000

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [3, 3]

\*\*\*\*\*

Norme(f1)\*\*2 = 8.94507003576963 Erreur\*\*2 = 8.94506968423943  
 (Norme(f1)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.3515301993314845D-06  
 Module de t1 = .4130101859573251 Argument de t1 = 0.4565269416050658D-06  
 Module de t2 = .2972552505142119 Argument de t2 = -.8605848112870319  
 Module de t3 = .2972559634692843 Argument de t3 = .8605859149380081

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [4, 3]

\*\*\*\*\*

Norme(f2)\*\*2 = 2.69507003576963 Erreur\*\*2 = 2.69507002416695  
 (Norme(f2)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.1160267761599401D-07  
 Module de t1 = .4593619484322549 Argument de t1 = -.6562175741405480D-06  
 Module de t2 = .2625042201015328 Argument de t2 = -.5882728914196552  
 Module de t3 = .2625034922164874 Argument de t3 = .5882740245096818

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [6, 3]

\*\*\*\*\*

Norme(f4)\*\*2 = 0.544450357696272D-01 Erreur\*\*2 = 0.544450355757276D-01  
 (Norme(f4)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.1938995353913272D-09  
 Module de t1 = .4945216928832390 Argument de t1 = -.2135521322863062D-06  
 Module de t2 = .2308095294413025 Argument de t2 = -.7477091186989115D-06  
 Module de t3 = .230804322578442 Argument de t3 = .74770915534437802D-06

LE TYPE DE LA FRACTION RATIONNELLE EST : [10, 3]

\*\*\*\*\*

Norme(f8)\*\*2 = 0.375002944996020D-04 Erreur\*\*2 = 0.375002881882224D-04  
 (Norme(f8)\*\*2-Erreur\*\*2) = 0.6311379549954704D-11  
 Module de t1 = .4999254996631011 Argument de t1 = -.2811076634790742D-09  
 Module de t2 = 0.2157920272515391D-04 Argument de t2 = -1.429304899641347  
 Module de t3 = 0.2157942187643218D-04 Argument de t3 = 1.429399917635423

Les notations utilisées dans les calculs sont :

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+j} z^i \quad j=0,1,\dots$$

$$(Norme(f_j)**2-Erreur**2) = \|f_j\|_{2-\rho^2}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

dans le cas de l'approximation de  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  par une fraction rationnelle du type :

$$\frac{P_{n+j-1}}{P_n}$$

### Commentaires des résultats numériques.

En général, on remarque sur les expériences numériques que pour  $n > 3$ , un des noeuds d'approximation tend vers zéro. Ceci peut s'expliquer de la manière suivante :

soit la fonction

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad (22)$$

pour  $n=3$ , par exemple, le problème revient à chercher

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad t_1, t_2, t_3 \in D$$

tels que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j - \alpha_1 \bar{t}_1^j - \alpha_2 \bar{t}_2^j - \alpha_3 \bar{t}_3^j|^2 \quad (23)$$

soit minimale.

Les deux premiers termes de la série (23) sont :

$$|a_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3|^2 + |a_1 - \alpha_1 \bar{t}_1 - \alpha_2 \bar{t}_2 - \alpha_3 \bar{t}_3|^2$$

et si un des  $t_i$  est nul, par exemple  $t_1$ , alors :

$$a_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\text{et} \quad a_1 - \alpha_2 \bar{t}_2 - \alpha_3 \bar{t}_3 = 0$$

en effet, d'après les équations normales :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t_1) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k K(t_1, t_k) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k = f(0) = a_0 \\ f'(t_1) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\bar{t}_k}{(1 - \bar{t}_k t_1)^2} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \bar{t}_k = f'(0) = a_1 \end{array} \right.$$

Il est donc tout à fait justifié numériquement de trouver un noeud nul si les deux premiers termes de la série (22) ont des valeurs importantes par rapport aux autres coefficients, par exemple :

$$f(z) = e^z = 1 + 1z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$$

$$f(z) = e^z + \frac{1}{1-0.5z} = 2 + \frac{3}{2}z + \frac{3}{4}z^2 + \dots$$



## C H A P I T R E 2

### NON UNICITE DE LA MEILLEURE APPROXIMATION : EXEMPLES. CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES MEILLEURS APPROXIMANTS D'UNE FONCTION DANS $R_1^0$ .

I- Introduction.

II- Non unicité de la meilleure approximation :  
exemples.

III- Meilleure approximation d'une série à termes  
positifs dans  $R_1^0$ .

IV- Comparaison entre la non unicité dans le cas de  
l'approximation rationnelle au sens de  
Tchebycheff et au sens de Hardy.

V- Meilleure approximation d'une fonction dans  $R_1^0$ .

VI- Algorithme de calcul de l'ensemble des meilleurs  
approximants d'une fonction dans  $R_1^0$ .

VII- Expérimentation numérique.



## I. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème de la non unicité de la meilleure approximation au sens de Hardy et les problèmes que cela pose quand on veut construire une telle approximation.

L'étude est faite en grande partie dans l'ensemble  $R_1^0$ . La formule de l'erreur d'approximation a en effet dans ce cas une forme simple.

Dans une première partie on donne des exemples de fonctions qui ont une infinité non dénombrable de meilleurs approximants et on montre sur un exemple comment on peut caractériser un meilleur approximant et le calculer.

Dans une deuxième partie, après quelques résultats simples sur l'approximation rationnelle au sens de Hardy des séries à termes positifs par des éléments de  $R_1^0$ , on fait une comparaison entre l'approximation rationnelle au sens de Tchebycheff et au sens de Hardy et on montre sur des exemples que dans un cas où l'approximant de Tchebycheff est unique l'approximant de Hardy peut ne pas être unique.

Dans une troisième partie on présente un algorithme permettant de déterminer l'ensemble des maximums de la fonction erreur dans le cas  $n = 1$  en utilisant la technique des majorantes, c'est ainsi qu'il est possible de déterminer numériquement l'ensemble des meilleurs approximants d'une fonction  $f$  dans  $R_1^0$ .

Enfin on présente quelques expérimentations numériques testant ce dernier algorithme.



## II. NON UNICITE DE LA MEILLEURE APPROXIMATION

Dans cette partie on donnera des exemples de fonctions qui ont, pour des raisons de symétrie, plus d'un meilleur approximant. Ensuite on donnera des exemples de la non unicité ne faisant pas intervenir des arguments de symétrie.

Soit  $f$  une fonction analytique sur le disque fermé  $\bar{D}$  telle que :

$$\exists \psi \in ]0, 2\pi[ \text{ et } \exists \theta \in [0, 2\pi[ : \forall z \in \bar{D} \quad f(ze^{i\psi}) = e^{i\theta} \cdot f(z) .$$

Si

$$r^*(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} p_j z^j}{\sum_{j=0}^n q_j z^j}$$

est un meilleur approximant de  $f$  dans  $R_n^{n-1}$  alors :

$$r^{**}(z) = e^{-i\theta} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (p_j e^{ij\psi}) z^j}{\sum_{j=0}^n (q_j e^{ij\psi}) z^j}$$

est aussi meilleur approximant de  $f$  dans  $R_n^{n-1}$ . En effet, par changement de variable on a :

$$\begin{aligned} \| f(z) - r^*(z) \| &= \| f(ze^{i\psi}) - r^*(ze^{i\psi}) \| \\ &= \| e^{i\theta} \cdot f(z) - r^*(ze^{i\psi}) \| = \| f(z) - r^{**}(z) \| . \end{aligned}$$

a) Exemple :

Soit  $f(z) = z^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$

$f$  est telle que :

$$\forall \psi \in [0, 2\pi[ \quad f(ze^{i\psi}) = e^{ik\psi} f(z)$$

ainsi,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n < k$ ,  $f$  admet une infinité non dénombrable de meilleurs approximants dans  $R_n^{n-1}$ .

Dans la suite on va calculer l'ensemble des meilleurs approximants de  $z^k$  dans les cas  $n = 1$  et  $n = 2$ .

$n = 1, \quad k \in \mathbb{N} : k > 2$

Cherchons l'ensemble des meilleurs approximants de  $f$  dans  $R_1^0$ .

On cherche  $r^*(z) = \frac{\alpha^*}{1 - \bar{t}^* z}$ ,  $\alpha^* \in \mathbb{C}$  et  $\bar{t}^* \in D$

tel que

$$\|z^k - r^*(z)\| = \inf_{r \in R_1^0} \|z^k - r(z)\|.$$

D'après le théorème 3 du Chapitre I,  $t^*$  rend maximale la fonction

$$\rho^2(t) = (1 - |t|^2) |f(t)|^2$$

En posant  $t = re^{i\theta}$ , on voit que  $\rho$  est en fait fonction de  $r$  uniquement.

Et un calcul simple montre que :

est atteint pour  $\max_{0 < r < 1} \rho(r)$

$$r = \sqrt{\frac{k}{k+1}}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$S_k = \left\{ \frac{1}{k+1} \frac{re^{ik\theta}}{1-re^{ik\theta}.z} : r^2 = \frac{k}{k+1} \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[ \right\}$$

$n = 2 \text{ et } k = 2$
---------------------------

On cherche  $r^*(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} \in \mathbb{R}_2^1$

tel que

$$\|z^2 - r^*(z)\| = \inf_{r \in \mathbb{R}_2^1} \|z^2 - r(z)\|$$

Posons  $P_2(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 = b_2 (z - z_1)(z - z_2)$

$$\bar{t}_1 = z_1^{-1} = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$\bar{t}_2 = z_2^{-1} = r_2 e^{i\theta_2}$$

D'après le théorème 3 du chapitre I  $t_1$  et  $t_2$  sont solutions du problème :

$$(*) \quad \begin{cases} \text{Max } \rho(t_1, t_2) \\ (t_1, t_2) \in D \times D \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho^2(t_1, t_2) = & (1-r_1^2)r_1^4 + (1-r_2^2)r_2^4 + \\ & + (1-r_1^2)(1-r_2^2)[|t_1+t_2|^2 - |t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2|^2] \end{aligned}$$

Il est alors immédiat sur l'expression de  $\rho$  que si  $(t_1, t_2)$  est solution du problème (\*) alors :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[ , (t_1 e^{i\theta}, t_2 e^{i\theta})$$

est aussi solution du problème (\*).

En prenant : 
$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

On voit que, pour  $r_1$  et  $r_2$  fixés, il existe une solution unique au problème (\*) sous la forme

$$(r_1 e^{i\theta}, r_2 e^{-i\theta}) , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} .$$

Tout calcul fait on trouve :

$$\begin{aligned} \rho^2(r_1 e^{i\theta}, r_2 e^{-i\theta}) &= (1-r_1^2)r_1^4 + (1-r_2^2)r_2^4 + (1-r_1^2)(1-r_2^2) \times \\ &\quad \times [r_1^2 + r_2^2 - r_1^4 - r_2^4 - r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 (1 - r_1^2 - r_2^2) \times \\ &\quad \times \cos 2\theta - 2r_1^2 r_2^2 \cos 4\theta] \end{aligned}$$

Cherchons le maximum par rapport à  $\theta$ .

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial \theta} = 0 \iff \cos 2\theta = \frac{1-r_1^2-r_2^2}{4r_1 r_2} \quad \text{ou} \quad \sin 2\theta = 0$$

En prenant 
$$\cos 2\theta = \frac{1-r_1^2-r_2^2}{4r_1 r_2}$$

et en reportant dans l'expression de  $\rho$  on a à chercher :

$$\max_{\substack{0 < r_1 < 1 \\ 0 < r_2 < 1}} F(r_1, r_2)$$

où

$$F(r_1, r_2) = (1-r_1^2)r_1^4 + (1-r_2^2)r_2^4 + \frac{1}{2} (1-r_1^2)(1-r_2^2) \times \\ \times [r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{2} - (r_1^2 - r_2^2)^2]$$

un calcul simple montre que  $\text{grad } F(r_1, r_2) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ .  
Finalement on trouve qu'au maximum

$$r_1^2 = r_2^2 = \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

et

$$\rho^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{7}{16} = 0.4375 \dots$$

En prenant

$$\sin 2\theta = 0$$

on est amené à chercher

$$\max_{r \in [0, 1]} \{ F(r) = 2(1-r^2)r^4 + (1-r^2)^2(r^2 - 9r^4) \}$$

or

$$F'(r) = \left( r^2 - \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) \left( r^2 - \frac{2}{3} \right) \left( r^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right)$$

et le maximum est atteint au point  $r_0^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$   
ce qui donne :

$$\rho^2(r_0, r_0) = \frac{9+2\sqrt{3}}{36} = 0.3462 \dots$$

En résumé la fonction  $f(z) = z^2$  admet une infinité non dénombrable de meilleurs approximatns dans  $R_2^1$ , cet ensemble est :

$$S_2 = \left\{ \frac{-1 + 4 e^{i\psi} z}{8 - 8 e^{i\psi} z + 4 e^{i2\psi} z^2} ; \psi \in [0, 2\pi[ \right\} .$$

b) Autres types d'exemples :

En fait, toujours pour des raisons de symétrie, on peut construire des fonctions qui ont un nombre donné de meilleurs approximatns. En effet :

Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\bar{D}$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ , définissons

$$g(z) = f(z^m) .$$

$$g \text{ vérifie } i \frac{2k\pi}{m} \quad g(ze^{i \frac{2k\pi}{m}}) = g(z) \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

Ainsi d'après ce qui précède  $g$  admet au moins  $m$  meilleurs approximatns dans  $R_n^{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , à moins que  $f$  soit un polynôme de degré  $d$  et dans ce cas  $g$  admet au moins  $m$  meilleurs approximatns dans  $R_n^{n-1}$  si  $n < m.d$ .

### III. SERIE A TERMES POSITIFS

La non unicité de la meilleure approximation conduit à se poser les deux questions suivantes :

1°) Caractériser la nature de l'ensemble des meilleurs approximatns d'une fonction  $f$  donnée ou d'une classe de fonctions (ensemble fini, ou infini...);

2°) Dans le cas où l'ensemble des meilleurs approximants contient plus d'un élément, peut-on caractériser un élément de cet ensemble et éventuellement le calculer.

On a pu obtenir de réponses à ces questions que dans un cas très particulier: celui de l'approximation des séries à termes non négatifs par des éléments de  $R_1^0$ .

On va voir en effet que si  $f$  est analytique dans  $\bar{D}$  de développement

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad (1)$$

avec  $a_j \in \mathbb{R}^+$  et  $f(z) \neq cz^k$ ;  $c > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$

alors :

L'ensemble  $S$  des meilleurs approximants de  $f$  dans  $R_1^0$  est fini et il contient au moins un élément de la forme :

$$r^*(z) = \frac{a}{1-xz}$$

avec

$$a > 0 \quad \text{et} \quad 0 < x < 1$$

En effet :

D'après le théorème 3, chapitre I, l'ensemble  $S$  est de même nature que l'ensemble des maximums, notons le  $M$ , dans  $D$  de la fonction erreur :

$$\rho^2(t) = (1-|t|^2) |f(t)|^2$$

Mais come  $f$  est une série à termes positifs, elle vérifie :

$$|f(t)| < f(|t|)$$

On en déduit que si  $t \notin [0,1]$  rend maximale  $\rho$  alors nécessairement  $\rho(t) = \rho(|t|)$  et donc  $|t| \in M$ .

D'autre part, du fait que  $f$  est analytique dans  $\bar{D}$  alors l'ensemble des maximums de  $\rho$  dans  $[0,1]$ , notons le  $MR$ , est un ensemble fini, de plus pour  $r \in ]0,1[$  fixé l'ensemble des maximums de  $\rho$  sur le cercle de rayon  $r$  est fini.

On notera par  $MC$  l'ensemble  $M \setminus MR$ .

Le problème de l'approximation d'une série à termes positifs par des éléments de  $R_1^0$  revient donc à chercher l'ensemble  $MR$ ; et pour chaque  $r_0 \in MR$  fixé, chercher l'ensemble, fini, des maximums de  $\rho$  sur le cercle de rayon  $r_0$ , vérifiant  $\rho(t) = \rho(|t|)$ .

Maintenant on va voir que l'ensemble  $MC$  s'obtient directement de l'ensemble  $MR$  et de la lacunarité de la série (1).

En effet, si  $t \notin [0,1]$  rend maximale la fonction  $\rho$  alors on doit avoir

$$\rho(t) = \rho(|t|)$$

et la condition d'interpolation, voir théorème 4, chapitre I, nous donne les deux meilleurs approximants de  $f$  dans  $R_1^0$  correspondants à  $t$  et à  $|t|$ :

$$r_1(z) = \frac{\alpha}{1-\bar{t}z} \quad \text{avec} \quad \alpha = (1-|t|^2)f(t)$$

et

$$r_2(z) = \frac{\beta}{1-|t|z} \quad \text{avec} \quad \beta = (1-|t|^2)f(|t|) = |\alpha|$$



$r_1$  et  $r_2$  sont tels que :

$$\| f - r_1 \| = \| f - r_2 \|$$

ou encore :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - \alpha \bar{t}^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - |\alpha| |t|^n)^2$$

En développant on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [ a_n^2 - 2a_n \operatorname{Re}(\alpha \bar{t}^n) + |\alpha|^2 |t|^{2n} ] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [ a_n^2 - 2a_n |\alpha| |t|^n + |\alpha|^2 |t|^{2n} ] \end{aligned}$$

En posant  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$  et  $t = |t| e^{i\psi}$

on a :

$$|\alpha| \sum_{n=0}^{\infty} a_n |t|^n [ 1 - \cos(\theta - n\psi) ] = 0$$

Il est facile de voir que :

$$f \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$$

et comme  $a_n > 0$  on doit avoir :

$$\forall n : a_n \neq 0 \quad \theta - n\psi = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$  la suite des coefficients

non nuls de la série (1) alors :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \theta - n_1 \psi = 2k_0 \pi \quad k_0 \in \mathbb{Z} \\ (n_{i+1} - n_i) \psi = 2k_i \pi \quad k_i \in \mathbb{Z} \\ i = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Cherchons l'ensemble des solutions du système (\*) .

Soit  $p$  le plus grand commun diviseur de la suite  $(n_{i+1}-n_i)$ ,  $i=1,2,3,\dots$ . Il est clair que l'ensemble des solutions du système (\*) est :

$$\left\{ \psi_j = \frac{2j\pi}{p} : j = 1, 2, \dots, p-1 \right\} .$$

Ainsi, pour une série à termes positifs qui n'est pas réduit à un monôme, l'ensemble de ses meilleurs approximants dans  $R_1^0$  est fini et a exactement  $p.m$  éléments,  $m$  étant le nombre des maximums de la fonction erreur dans  $[0,1]$  et  $p$  le plus grand commun diviseur de la suite des entiers  $(n_{i+1}-n_i)$ ,  $i=1,2,\dots$  où  $n_i$  est tel que  $a_{n_i} \neq 0$ .

Exemples :

$$1^\circ) f(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

$e^z$  étant une série à termes positifs, cherchons donc

$$\max_{0 < x < 1} \{ \rho^2(x) = (1-x^2) e^{2x} \} .$$

$$\max_{0 < x < 1} \rho^2(x) \text{ est atteint en l'unique point } x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La série (2) n'étant pas lacunaire alors  $e^z$  admet un unique meilleur approximant dans  $R_1^0$  qui est :

$$r(z) = \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - z}$$

$$2^\circ) \quad f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

avec le changement de variable  $z = -iz$  alors

$$F(z) = -if(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (3)$$

est une série à termes positifs.

$$\rho^2(x) = (1-x^2) F^2(x) = (1-x^2) \sin^2 x$$

et  $\max_{0 < x < 1} \rho^2(x)$  est atteint au point

$$x_0 = 0.676253074\dots$$

La série (2) étant lacunaire d'ordre 2 alors  $\sin z$  admet deux meilleurs approximants dans  $R_1^0$  qui sont :

$$r_1(z) = \frac{\alpha}{1-ix_0} \quad \text{et} \quad r_2(z) = \frac{\alpha}{1+ix_0}$$

$$\text{avec} \quad \alpha \neq i(1-x_0^2) \sin(ix_0)$$

#### IV. COMPARAISON ENTRE LA NON UNICITE DANS LE CAS DE L'APPROXIMATION RATIONNELLE AU SENS DE TCHEBYCHEFF ET AU SENS DE HARDY

Après quelques brefs rappels sur l'approximation rationnelle au sens de Tchebycheff on énoncera un théorème dû à J. Rice [34] assurant que sous certaines conditions l'approximant de Tchebycheff est unique et ensuite on montrera sur des exemples simples que sous les mêmes conditions l'approximant de Hardy n'est pas unique en général.

a) Quelques rappels sur l'approximation rationnelle au sens de Tchebycheff

Soit  $B$  un compact de  $\mathbb{C}$ .

Nous noterons :

$$R_m^n(B) = \left\{ \frac{P_n}{Q_m} ; P_n \in \mathbb{C}_n[X] \text{ et } Q_m \in \mathbb{C}_m[X] \text{ et } Q_m(z) = 0 \Rightarrow z \notin B \right\}$$

$$C(B) = \{ f : B \rightarrow \mathbb{C} ; \text{continue} \}$$

Le problème de l'approximation rationnelle au sens de Tchebycheff est :

$$\text{Déterminer } r^* \in R_m^n(B)$$

$$\| f - r^* \|_\infty = \inf_{r \in R_m^n(B)} \| f - r \|_\infty$$

où

$$\| \zeta \|_\infty = \max_B |\zeta(z)|$$

La réponse est donnée par le théorème suivant :

**Théorème :**

Si  $B$  est un compact du plan complexe sans points isolés alors tout élément  $g \in C(B)$  possède un meilleur approximant dans  $R_m^n(B)$ .

Pour la démonstration de ce théorème voir [29],[34]. Mais comme très souvent dans l'approximation complexe il n'y a pas unicité de la meilleure approximation [34]. Par contre si on se limite à l'approximation par des fractions rationnelles réelles et si on restreint convenablement le compact  $B$  et l'ensemble  $R_m^n(B)$  alors un théorème de J. Rice [34] nous

assure l'unicité du meilleur approximant.

En effet :

$$\text{Soit } B = [-1, +1]$$

et

$$V_m^n = \left\{ \frac{P_n}{Q_m} ; P_n \in \mathbb{R}_n[X], Q_m \in \mathbb{R}_m[X] \right. \\ \left. \text{et } Q_m(x) > 0 \text{ pour } x \in [-1, +1] \right\}$$

On a alors le théorème :

**Théorème :**

Si  $f \in C[-1, +1]$  alors il existe un meilleur approximant de  $f$  au sens de Tchebycheff dans  $V_m^n$  qui est unique.

Pour plus de détails sur ces questions, en particulier la caractérisation de la meilleure approximation voir [29], [34], [37].

**b) Approximation au sens de Hardy.**

On va montrer sur des exemples simples que sous les mêmes conditions, qui sont suffisantes pour que l'approximant de Tchebycheff soit unique, l'approximant de Hardy peut ne pas être unique en général.

Exemple :

Soit 
$$f_a(z) = \frac{1}{1-az^4} \quad 0 \leq a < 1$$

$f_a$  est un élément de  $H^2(D)$ , développable en une série à termes positifs.

$f_a$  vérifie :

$$\begin{cases} f_a(ze^{i\theta_k}) = f_a(z) \\ \theta_k = k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Ainsi, d'après ce qui précède,  $f_a$  admet au moins quatre meilleurs approximants dans  $R_1^0$  dont au moins un qui est tel que :

$$r^*(z) = \frac{a}{1-xz} \quad a > 0 \text{ et } 0 < x < 1$$

Pour avoir l'ensemble des meilleurs approximants de  $f_a$  dans  $R_1^0$  il suffit de résoudre le problème :

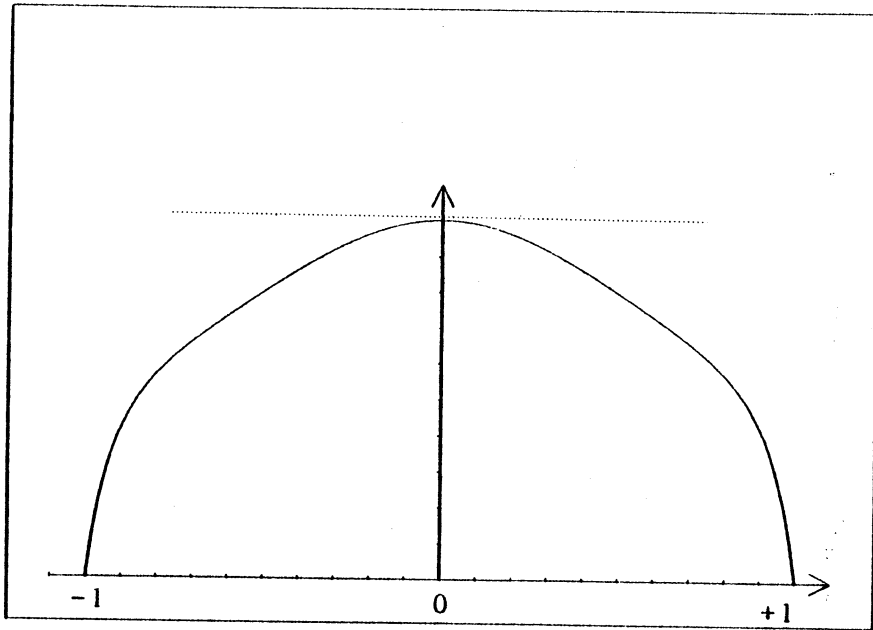
$$\max_{0 < x < 1} \{ \rho_a^2(x) = (1-x^2) f_a^2(x) \}$$

Tout calcul fait on trouve que :

Si 
$$\boxed{0 \leq a < \frac{3}{4}}$$

alors  $f_a$  admet un meilleur approximant unique dans  $R_1^0$  qui est :

$$r(z) = 1$$



Courbe de  $\rho_a^2(x)$  pour  $a = 0.5$ .

!

Si

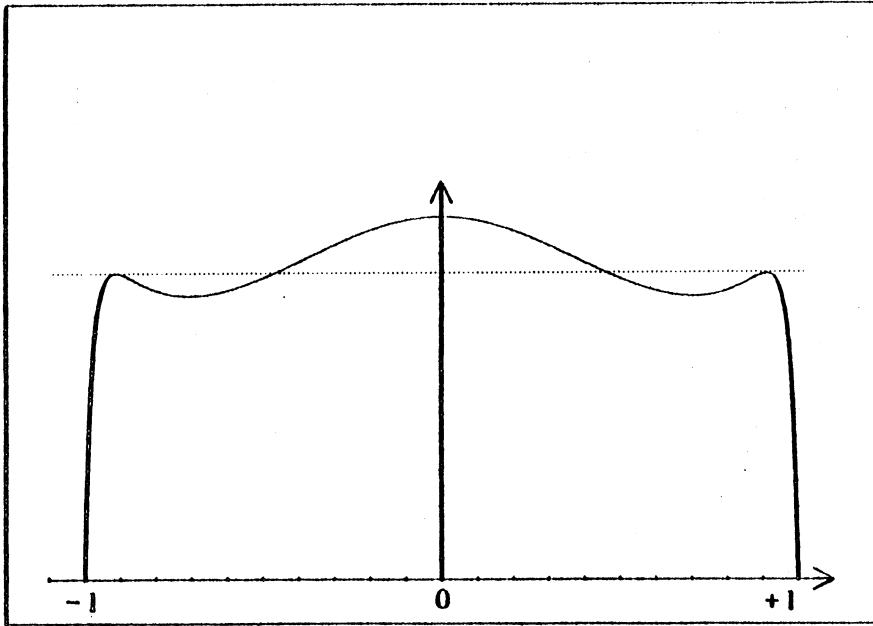
$$\boxed{\begin{array}{l} 3 \\ - < a < 1 \\ 4 \end{array}}$$

alors trois cas sont possibles :

$$i) \quad \frac{3}{4} < a < \frac{27}{32}$$

dans ce cas aussi  $f_a$  admet un meilleur approximant unique dans  $R_1^0$  qui est  $r(z) = 1$  mais en plus il a quatre approximants locaux qui sont :

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_k(z) = \frac{\alpha_k}{1 - x_k z} \\ x_k = x e^{ik\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \alpha_k = (1 - x_k^2) f_a(x_k) \\ x = \frac{2a + \sqrt{a(4a-3)}}{3a} \end{array} \right. \quad k=0,1,2,3.$$

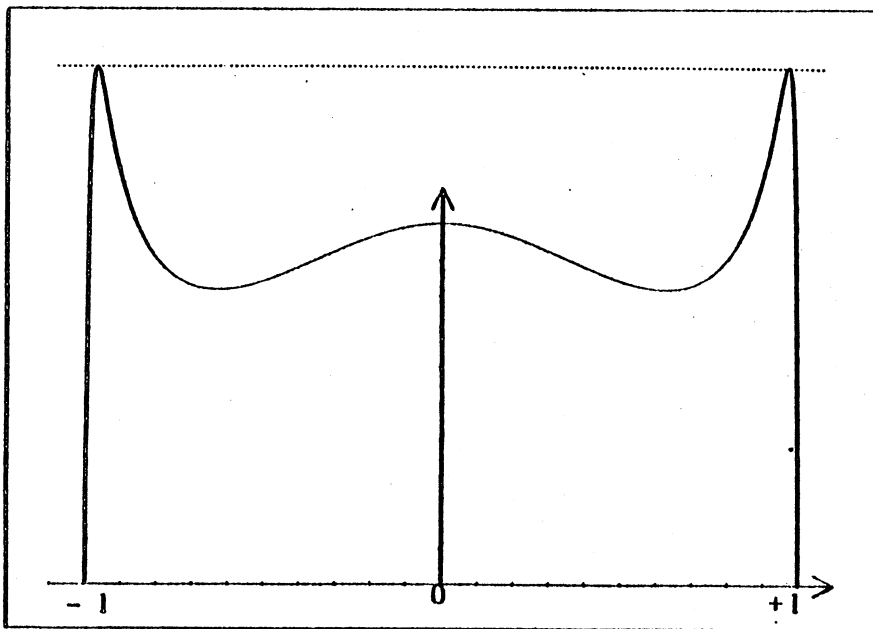


Courbe de  $\rho_a^2(x)$  pour  $a = 0.8$ .

ii)  $\frac{27}{32} < a < 1$

$f_a$  admet quatre meilleurs approximants dans  $R_1^0$

donnés par (\*\*).



Courbe de  $\rho_a^2(x)$  pour  $a = 0.9$ .



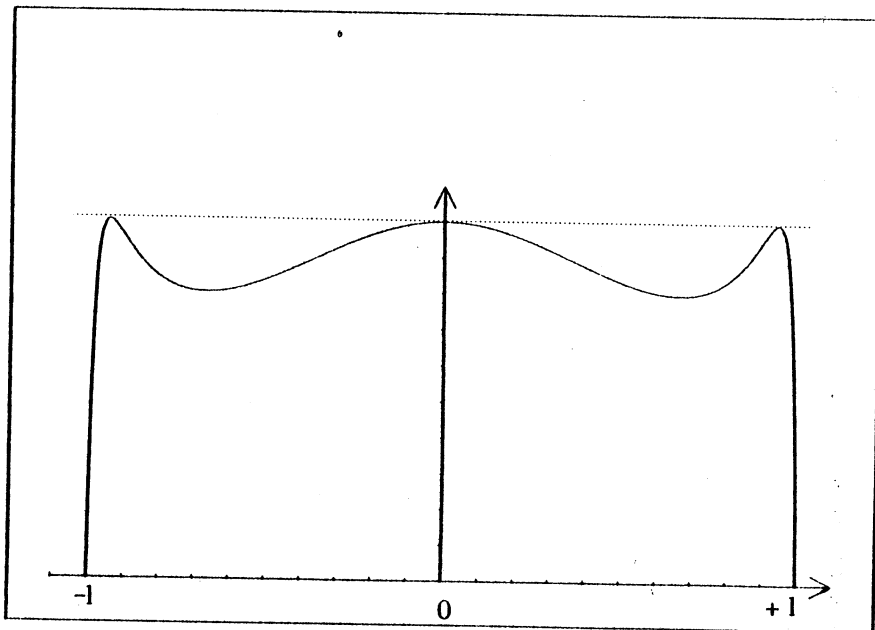
si

$$a = \frac{27}{32}$$

$f_a$  admet exactement cinq meilleurs approximants

dans  $R_1^0$  qui sont :

$$\left\{ 1, \frac{1}{3-\sqrt{8}x}, \frac{1}{3+\sqrt{8}x}, \frac{17}{3-i\sqrt{8}z}, \frac{17}{3+i\sqrt{8}z} \right\}$$



Courbe de  $\rho_a^2(x)$  pour  $a = \frac{27}{32}$

Dans ce cas  $f_a$  admet trois meilleurs approximants

dans  $V_1^0$  qui sont :

$$\left\{ 1, \frac{1}{3-\sqrt{8}x}, \frac{1}{3+\sqrt{8}x} \right\}$$

Cet exemple montre donc que même dans  $V_1^0$  la meilleure approximation au sens de Hardy peut ne pas être unique contrairement à l'approximation au sens de Tchebycheff.

Toutefois, on peut reprocher à l'exemple :

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{27}{32} z^4}$$

le fait d'être une série lacunaire.

Voici un autre exemple :

Soit :

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

où

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \quad \text{et} \quad a_3 > 0$$

On a étudié numériquement l'ensemble des meilleurs approximations de  $f$  dans  $R_1^0$  en fonction des paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . Plus précisément on a cherché par une méthode numérique des coefficients  $a_1, a_2, a_3$  tels que  $f$  admette deux meilleurs approximations dans  $V_1^0$ .

Puisque  $f$  est une série à termes positifs il suffit de choisir des coefficients  $a_1, a_2$  et  $a_3$  tels que la fonction erreur :

$$\rho^2(x) = (1 - x^2) f^2(x)$$

admette deux maximums entre 0 et 1.

D'abord il est facile de voir par un calcul simple que si

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 < \frac{1}{2}$$

alors  $\rho^2(x)$  a un maximum en  $x = 0$  qui peut être local ou global suivant les valeurs de  $a_3$ .

Exemple 1 :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = 0 .$$

$$\frac{d}{dx} \rho^2(x) = -8a_3 x(1+a_3 x) \Psi(x)$$

où

$$\Psi(x) = x^3 - \frac{3}{4} x + \frac{1}{4a_3}$$

$\Psi$  a trois racines réelles si et seulement si :

$$\Delta = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + 27 \left(\frac{1}{4a_3}\right)^2 = \frac{27}{16} \left(-1 + \frac{1}{2a_3}\right) < 0$$

ou encore

$$a_3^2 > 1$$

Si  $a_3^2 > 1$  , soient  $X_1(a_3), X_2(a_3)$  et  $X_3(a_3)$  les trois racines réelles de  $\Psi$  .

Par une méthode numérique on a cherché  $a_3 > 1$  :

$$\rho^2(X_3(a_3)) = 1$$

Les résultats numériques sont :

$$a_3 = 1.14992888353898368$$

$$X_1(a_3) = -0.9852235301860297$$

$$X_2(a_3) = 0.3442846041418494$$

$$X_3(a_3) = 0.6409389260441803$$

$$\rho^2(X_2(a_3)) = 0.9661387376412527$$

$$\rho^2(X_3(a_3)) = 1.0000000000000000$$

Les deux meilleurs approximants de la fonction :

$$f(z) = 1 + a_3 z^3$$

dans  $V_1^0$  sont :

$$r_1(x) = 1$$

$$r_2(x) = \frac{1.1976}{1.5602-x}$$

et les deux meilleurs approximants de  $f$  dans  $R_1^0 \setminus V_1^0$  sont :

$$r_3(z) = \frac{-1.1976}{(0.7801 - i 1.3511) + z}$$

$$r_4(z) = \frac{-1.1976}{(0.7801 + i 1.3511) + z}$$

Cet exemple montre qu'il n'y a unicité ni dans l'ensemble  $V_1^0$  ni dans  $R_1^0 \setminus V_1^0$

Enfin, voici un dernier exemple qui en dehors de toute symétrie admet deux meilleurs approximants dans  $R_1^0$  qui appartiennent à  $V_1^0$ .

Exemple 2 :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0.001$$

Si  $a_3 = 1.1$

$\Psi(x)$  à trois racines réelles qui sont :

$$x_1 = -0.98$$

$$x_2 = 0.3701$$

$$x_3 = 0.6189$$

$$\rho^2(x_2) = 0.9622$$

$$\rho^2(x_3) = 0.9812$$

Si  $a_3 = 1.2$

$\Psi(x)$  a trois racines réelles qui sont :

$$x_1 = -0.9697$$

$$x_2 = 0.3216 \quad \rho^2(x_2) = 0.9697$$

$$x_3 = 0.6587 \quad \rho^2(x_3) = 1.0216$$

On peut donc, puisque  $\rho$  est une fonction continue du paramètre  $a_3$ , affirmer que :

$$\exists a_3 \in ]1.1, 1.2[ \text{ tel que } \rho^2(x_3(a_3)) = 1$$

Numériquement on trouve :

$$a_3^* = 1.14836834895592648$$

$$x_1 = -0.98545$$

$$x_2 = 0.3441258889251811$$

$$x_3 = 0.6406730869006691$$

$$\rho^2(x_2) = 0.9662399558407087$$

$$\rho^2(x_3) = 1.0000000000000000$$

Les deux meilleurs approximants de  $f$  dans ce cas sont :

$$r_1(x) = 1$$

$$r_2(x) = \frac{1.1984}{1.5608 - x}$$

Cet exemple montre un autre aspect de la difficulté que pose le calcul de la meilleure approximation c'est l'indiscernabilité numérique possible de celle-ci.

En effet :

Si dans l'exemple 2' on perturbe un peu le paramètre  $a_3^*$ , par exemple si on lui ajoute la "précision machine", alors il est impossible numériquement de savoir si le noeud d'approximation est en  $x_1 = 0$  ou en un point  $x_2 \neq 0$ .

#### V. SERIE A TERMES QUELCONQUES

Dans le cas où l'on ne peut rien dire sur l'ensemble des meilleurs approximants d'une fonction  $f$  donnée et qu'on ne peut pas caractériser un élément particulier de cet ensemble, la question qui se pose alors est :

Peut-on calculer l'ensemble des meilleurs approximants.

D'après le théorème 3 du Chapitre I, la recherche de l'ensemble des meilleurs approximants d'une fonction revient à la recherche de l'ensemble des maximums de la fonction erreur explicitée dans le théorème 2 du chapitre I. On peut donc numériquement appliquer une des méthodes de recherche de l'ensemble des maximums globaux d'une fonction étudiées par les auteurs [7], [8],[9], [32] ; ou chercher des algorithmes de calcul de l'ensemble des maximums spécifiques à la fonction erreur.

Dans la suite on va proposer un algorithme pour calculer l'ensemble des meilleurs approximants d'une fonction  $f$  dans  $R_1^0$ .

Le problème revient donc à chercher l'ensemble des maximum dans le disque unité de la fonction

$$\rho^2(t) = (1 - |t|^2) |f(t)|^2$$

Posons :

$$t = re^{i\theta}$$

On a :

$$\max_{t \in D} \rho^2(t) = \max_{0 < r < 1} [ (1-r^2) \max_{0 < \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 ]$$

Posons :

$$M^2(r) = \max_{0 < \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \quad \text{pour } 0 < r < 1$$

et

$$g(r) = (1-r^2)M^2(r)$$

Soient :

$$\phi = \max_{0 < r < 1} g(r)$$

et

$$\Phi = \{ r \in [0,1] : g(r) = \phi \}$$

On va voir dans la suite qu'il est possible, en utilisant le théorème des trois cercles d'Hadamard de construire un algorithme permettant de déterminer numériquement l'ensemble  $\Phi$ .

**Théorème des trois cercles d'Hadamard [21] :**

Soit

$$0 < r_1 < r < r_2 < 1$$

alors :

$$M(r) < M(r_1)^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} \times M(r_2)^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}}$$

**Application :**

Pour  $0 < r_1 < r < r_2 < 1$

alors :

$$g(r) = (1-r^2)M^2(r) < (1-r^2) M^2(r_1)^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} \times M^2(r_2)^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}}$$

$$= (1-r^2) \left( \frac{M^2(r_2)}{M^2(r_1)} \right)^{\frac{\log r}{\log r_2 - \log r_1}} \times \left( \frac{M^2(r_1) \log r_2}{M^2(r_2) \log r_1} \right)^{\frac{1}{\log r_2 - \log r_1}} \quad (4)$$

$$= c \times (1 - r^2) r^a$$

où

$$c = b^a, \quad b = \frac{M^2(r_1) \log r_2}{M^2(r_2) \log r_1}, \quad a = \frac{1}{\log r_2 - \log r_1}$$



et

$$\alpha = a \times \log\left(\frac{M^2(r_2)}{M^2(r_1)}\right)$$

$M(r)$  étant une fonction croissante de  $r$  on a donc  $\alpha > 0$ .

Posons pour  $0 < r_1 < r < r_2 < 1$

$$C \times (1-r^2) r^\alpha = \Delta_{r_1}^{r_2}(r)$$

D'après l'inégalité (4) la suite des fonctions  $\Delta_{r_1}^{r_2}$  majore  $g$ .

Un calcul simple montre que pour  $0 < r_1 < r < r_2 < 1$  on a

$$\Delta_{r_1}^{r_2}(r_\lambda) = g(r_\lambda) \quad \lambda = 1, 2.$$

mais

$$\Delta_0^\varepsilon > g(0) \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

On va introduire une nouvelle majorante  $\delta_0^\varepsilon$  au voisinage de zéro qui vérifiera la condition d'interpolation  $\delta_0^\varepsilon(0) = g(0)$ , il suffit de prendre :

$$\delta_0^\varepsilon(r) = \min(1 \cdot r + g(0), \Delta_0^\varepsilon)$$

où  $l$  est tel que :  $\forall r \in [0, \varepsilon] \quad |g(r) - g(0)| < l \cdot r$

Un calcul simple montre que  $l$  est facile à estimer.

Pour la commodité de l'écriture on va poser

$$\delta_0^\varepsilon \equiv \Delta_0^\varepsilon$$

La suite des majorantes ainsi définies a les propriétés suivantes :

$$1^\circ) \Delta_{r_1}^{r_2}(r_\lambda) = g(r_\lambda) \quad \lambda = 1, 2 \quad \text{pour } 0 < r_1 < r < r_2 < 1$$

$$2^\circ) \forall r \in [r_1, r_2] \quad g(r) < \Delta_{r_1}^{r_2}(r)$$

$$3^\circ) \Delta_{r_3}^{r_4}(r) < \Delta_{r_1}^{r_2}(r) \quad \text{pour } 0 < r_1 < r_3 < r < r_4 < r_2 < 1$$

$$4^\circ) \max_{0 < r < 1} \Delta_{r_1}^{r_2}(r) \text{ est atteint au point } r^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2}}$$

On peut alors définir une suite  $r_0, r_1, r_2, \dots$  de points de  $[0, 1]$  par :

$$r_0 \in [0, 1]$$

$$r_{n+1} \text{ tel que } F_n(r_{n+1}) = M_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

où

$$M_n = \max_{0 < r < 1} F_n(r) \quad (5)$$

$$F_n = \max_{0 < r < 1} \Delta_{r_\ell}^{r_{\ell+1}}(r) \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

On a le théorème :

**Théorème :**

$$1^\circ) \{M_n\}_n \text{ et } \{g(r_n)\} \text{ sont des suites}$$

$$\text{convergentes vers } \max_{0 < r < 1} g(r) = \phi.$$

$$2^\circ) \text{ Tout point d'accumulation de la suite } \{r_n\}_n$$

est un point où  $g$  atteint son maximum.

**Démonstration :**

Pour montrer que  $\{M_n\}$  est une suite convergente vers  $\phi$  il suffit de montrer que de toute sous suite de  $\{M_n\}$  on peut extraire une sous suite convergente vers  $\phi$ .

De la suite  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  on peut extraire une sous suite  $\{F_n\}_{n \in N'}$  qui converge uniformément vers une fonction continue.

Ainsi,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $m$  tel que pour tout  $n$  et  $p$  éléments de  $N'$  :  $n > m$  et  $p > m$  on ait  $\|F_n - F_m\|_\infty < \epsilon$

On a alors :

$$\phi > g(r_n) = F_p(r_n) > F_n(r_n) - \|F_p - F_n\|_\infty > M_n - \epsilon$$

donc

$$\forall n \in N' : n > m \text{ on a } M_n - \epsilon < \phi < M_n$$

ou encore  $\{M_n\}_{n \in N'}$  converge vers  $\phi$ .

Même démonstration pour montrer que  $\{g(r_n)\}_n$  converge vers  $\phi$ .

**Principe de l'algorithme :**

Pour  $n=1,2,3,\dots$  la fonction  $F_n$  défini par (6) doit être conservée dans un tableau.

Voici une manière commode de réserver l'ensemble des données :

$$D_n = \{ (t_1, z_1), (t_2, z_2), \dots, (t_{H_n}, z_{H_n}) \}$$

où  $z_1 < z_2 < \dots < z_{H_n}$

et les vecteurs  $(t_i, z_i)$  sont les coordonnées des maxima de  $F_n$  et par (5) on a :

$$z_{H_n} = M_n$$

Le nouveau point de la suite  $\{M_n\}$  et  $r_{n+1} = t_{H_n}$

on forme  $D_{n+1}$  de la manière suivante :

- on enlève à  $D_n$  le vecteur  $(t_{H_n}, z_{H_n})$
- on forme deux nouveaux vecteurs :

$$(t_p, z_p) \text{ et } (t_k, z_k)$$

en formant les deux majorantes relatives aux deux intervalles

$$[r_m, t_{H_m}] \text{ et } [t_{H_m}, r_{m+1}]$$

avec

$$r_m \in \{r_n\} : r_m < t_{H_n} < r_{m+1}$$

L'ensemble

$$D_{n+1} = \{ (t_1, z_1), \dots, (t_{H_{n-1}}, z_{H_{n-1}}), (t_p, z_p), (t_k, z_k) \}$$

est obtenu en réordonnant en croissant l'ensemble  $(z_\mu, \dots, z_\nu)$ .  
On itère ainsi jusqu'à ce que :

$$z_{H_n} - \phi_n < \varepsilon$$

avec

$$\phi_0 = g(r_0)$$

$$\phi_{n+1} = \max(\phi_n, y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = g(r_{n+1})$$

D'après le théorème l'algorithme converge.

Remarque :

L'algorithme localise l'ensemble  $P$  des rayons  $r_0 \in [0,1]$  :

$$\exists \theta_0 \in [0, 2\pi[ : g(r_0 e^{i\theta_0}) = \max_{\substack{0 < \theta < 2\pi \\ 0 < r < 1}} \rho^2(re^{i\theta})$$

Pour calculer alors l'ensemble des maximums de  $\rho^2$  dans  $D$  il suffit de calculer pour  $r_0 \in P$  fixé l'ensemble des maximums dans  $[0, 2\pi]$  de la fonction à une variable :

$$\Gamma(\theta) = \rho^2(r_0 e^{i\theta})$$

On peut utiliser une des méthodes proposées dans [7], [8], [9], [32].

**Algorithme :****Initialisation :**

. choisir  $r_0 \in ]0,1[$  et calculer  $M(0), M(r_0), M(1)$  .

. former  $\Delta_0^{r_0}$  et  $\Delta_{r_0}^1$

.  $em := \max (g(0), g(r_0))$

.  $zg := \max_{0 < r < 1} \Delta_0^{r_0}(r) = \Delta_0^{r_0}(t_g)$

.  $zd := \max_{0 < r < 1} \Delta_{r_0}^1(r) = \Delta_{r_0}^1(t_d)$

si ( $zd < em$  ou  $td \notin [r_0, 1]$ )

    poser  $I_0 = [0, r_0]$ ,  $t_0 := tg$  et  $z_0 := zg$

sinon

    si ( $zg < zd$ )

        poser  $I_0 = [0, r_0]$  et  $I_1 = [r_0, 1]$   
          $t_0 := tg$ ,  $z_0 := zg$  et  $t_1 := td$ ,  $z_1 := zd$

    sinon

        poser  $I_0 = [r_0, 1]$  et  $I_1 = [0, r_0]$

$t_0 := td$ ,  $z_0 := zd$  et  $t_1 := tg$ ,  $z_1 := zg$

**Boucle :**

données: \*  $I_0, I_1, \dots, I_\lambda$  suite d'intervalles tels que  $\Phi \subset \bigcup_{i=1}^{\lambda} I_i$

\*  $(t_0, z_0), \dots, (t_\lambda, z_\lambda) : z_0 < \dots < z_\lambda$

et  $z_i = \max_{I_i} \Delta_{I_i}(r) = \Delta_{I_i}(t_i) \quad i=1, 2, \dots, \lambda$

.  $y := g(t_\ell)$   
 . former  $\Delta_a^\ell$  et  $\Delta_{t_\ell}^b$  où  $[a, b] = I_\ell$   
 .  $z_g := \max \Delta_a^\ell(r) = \Delta_a^\ell(t_g)$   
 .  $z_d := \max \Delta_{t_\ell}^b(r) = \Delta_{t_\ell}^b(t_d)$   
 .  $em := \max(em, y)$   
**si** (( $z_g < em$  ou  $t_g \notin [a, t_\ell]$ ) et ( $z_d < em$  ou  $t_d \notin [t_\ell, b]$ ))  
     poser  $\ell := \ell - 1$   
     aller à BOUCLE.

**sinon**

**si**(( $z_g > em$  et  $t_g \in [a, t_\ell]$ ) et ( $z_d > em$  et  $t_d \in [t_\ell, b]$ ))  
     **si** ( $z_g < z_d$ )  
         poser  
              $I_{\ell+1} = [t_\ell, b]$  ,  $I_\ell = [a, t_\ell]$   
              $t_{\ell+1} := t_d$  ,  $t_\ell := t_g$  , et  $z_{\ell+1} := z_d$  ,  $z_\ell := z_g$   
     **sinon**  
         poser  
              $I_{\ell+1} = [a, t_\ell]$  ,  $I_\ell = [t_\ell, b]$   
              $t_{\ell+1} := t_g$  ,  $t_\ell := t_d$  et  $z_{\ell+1} := z_g$  ,  $z_\ell := z_d$   
     **sinon**  
         **si** ( $z_g > em$  et  $t_g \in [a, t_\ell]$ )  
             poser  $I_\ell = [a, t_\ell]$  ,  $t_\ell := t_g$  et  $z_\ell := z_g$   
         **sinon**  
             poser  $I_\ell = [t_\ell, b]$  ,  $t_\ell := t_d$  et  $z_\ell := z_d$

Si test arrêt vérifié aller à ARRET

sinon éliminer tous les intervalles  $I_k$  tels que  
 $z_k > em$  et réordonner en croissant l'ensemble  
 $\{z_\mu, \dots, z_s\}$  .

Aller à BOUCLE.

Paramètres retournés par l'algorithme :

réunion d'intervalles, de longueur inférieure à une précision donnée, qui contient l'ensemble des maximums de  $c$ 'est à dire  $\Phi$ .

## VII. EXPERIENCES NUMERIQUES.

Premier exemple :

$$f(z) = e^z$$

On traite cet exemple car on connaît exactement la valeur du meilleur approximant de  $f$  dans  $R_1^0$  qui est :

$$r(z) = \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - z}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.618033988\dots$$

L'algorithme donne :

1ere localisation =	[ .6180339880250951	, .6180339886106254	]
2eme localisation =	[ .6180339886106254	, .6180339886126782	]
3eme localisation =	[ .6180339886126782	, .6180339887231313	]



Deuxième exemple :

$$f(z) = -\log(1-0.5z)$$

L'algorithme donne cinq localisations :

1ere localisation = [ .7487402780689120 , .7487402780828267 ]  
 2eme localisation = [ .7487402780828267 , .7487402780839302 ]  
 3eme localisation = [ .7487402780839302 , .7487402783935653 ]  
 4eme localisation = [ .7487402783935653 , .7487402784187844 ]  
 5eme localisation = [ .7487402784187844 , .7487402785342086 ]

Troisième exemple :

$$f(z) = \frac{1}{1-az^4}$$

Cet exemple admet deux meilleurs approximants dans  $V_1^0$  .

L'algorithme donne :

1ere localisation = [0.1479184143174421D-09, 0.2217297030622393D-09]  
 2eme localisation = [0.1381128874443116D-09, 0.1479184143174421D-09]  
 3eme localisation = [0.0000000000000000 , 0.1381128874443116D-09]  
 4eme localisation = [ .9428090414623245 , .9428090419072546 ]  
 5eme localisation = [ .9428090413919115 , .9428090414623245 ]

# C H A P I T R E 3

## P R E M I E R E P A R T I E

### APPROXIMATION RATIONNELLE DES SERIES DE STIELJES.

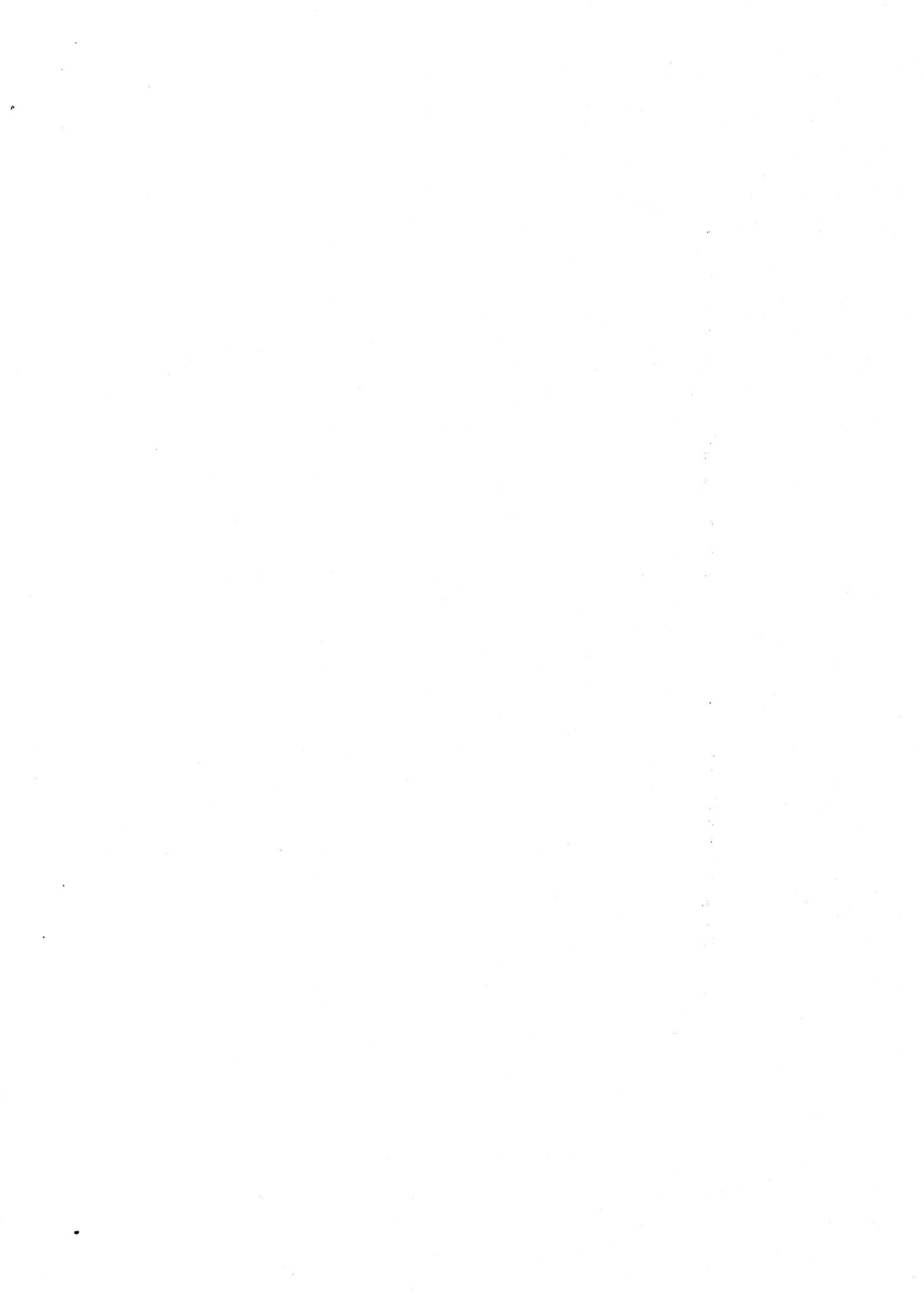
I- Introduction.

II- Rappels sur les séries de Stieljes.

III- Approximation d'une série de Stieljes au sens de Padé.

IV- Approximation d'une série de Stieljes au sens de La norme de Hardy.

V- Quelques expérimentations numériques.



## I. INTRODUCTION

Nous allons, dans cette partie, étudier l'approximation rationnelle d'une classe importante de fonctions : la classe des "séries" de Stieljes. Cette classe de fonctions s'introduit dans de nombreux problèmes mathématiques : formules optimales d'intégration pour des fonctions analytiques dans le disque unité [28], [35], et aussi dans des problèmes physiques comme les problèmes des moments [3].

De nombreux auteurs ont étudié diverses approximations rationnelles des séries de Stieljes, en particulier G. Baker [3] a montré que les pôles des approximants de Padé d'une telle série du type  $[n+j, n]$ ,  $n > 1$  et  $j > -1$ , sont simples et appartiennent à  $]-\infty, 0[$ .

Dans ce travail, en appliquant des méthodes dûes aux auteurs S Karlin [27], N. Richeter Dyn [35] et R.B. Barrar, H.L. Loeb et H. Werner [4] on montre que les pôles de la meilleure approximation au sens de Hardy par des fractions rationnelles à coefficients réels du type  $[n+j, n]$ ,  $n > 1$  et  $j > -1$ , d'une série de Stieljes représentable sous la forme :

$$(1) \quad s(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\psi(x)}{1+xz} \quad R > 1$$

où  $\psi : [0, R^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continue à droite, croissante et bornée sont simples et appartiennent à  $]-\infty, -R]$ .

Quant à l'approximation d'une fonction du type (1) par des fractions rationnelles à coefficients complexes, le problème reste posé. Toutefois, toutes les expérimentations numériques faites à ce sujet ont donné des pôles qui sont simples et réels ( cf.exemples).

On présentera ensuite, sur des exemples, quelques comparaisons entre la meilleure approximation au sens de Hardy et l'approximation de Padé d'une série de Stieljes.

## II. RAPPELS SUR LES SERIES DE STIELJES

Après quelques rappels sur la classe des séries de Stieljes et quelques résultats concernant l'approximation au sens de Padé, d'une série de Stieljes, on montre que l'on peut caractériser l'ensemble des meilleurs approximants d'une série de Stieljes dans l'ensemble des fractions rationnelles réelles.

### DEFINITION 1 [3] :

Une série :

$$s(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (-z)^j$$

est une série de Stieljes si et seulement si il existe une fonction  $\Psi$  croissante, bornée telle que :

$$a_j = \int_0^{\infty} u^j d\Psi(u)$$

Cette classe de fonctions a des propriétés intéressantes [3], [2], en particulier :

Tous les déterminants de Hankel :

$$D(m, n) = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m+n} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m+n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+n} & a_{m+n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m+2n} \end{vmatrix}$$

sont positifs ou nuls  $\forall m > 0$ ,  $\forall n > 0$ .

### III. APPROXIMATION D'UNE SERIE DE STIELJES AU SENS DE PADE

a) Quelques rappels sur l'approximation au sens de Padé.

DEFINITION 2 :

Soit

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad c_j \in \mathbb{C}$$

une série formelle. On appelle approximant de Padé de  $f$ , s'il existe, de type  $[m,n]$  la fraction rationnelle

$$r(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$$

où

$$\partial P_m < m, \partial Q_n < n \text{ et } Q_n(0) = 1$$

$$(1) \quad Q_n(z) \cdot f(z) - P_m(z) = O(z^{m+n+1})$$

Si

$$P_m(z) = \sum_{i=0}^m p_i z^i \quad \text{et} \quad Q_n(z) = \sum_{i=0}^n q_i z^i$$

alors l'égalité (1) peut se traduire par :

$$(1)' \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^m c_{k-i} q_i = -p_k & \text{si } k=0, \dots, n \\ \sum_{i=0}^m c_{k-i} q_i = 0 & \text{si } k=n, \dots, n+m \end{cases}$$

où  $c_i = 0$  si  $i < 0$ .

On voit donc que l'existence des approximants de Padé d'une fonction  $f$  est liée à l'existence d'une solution du système (1)'. Pour plus de détails sur ces questions voir [3].

b) Propriétés de l'approximant de Padé d'une série de Stieljes.

**THEOREME 1 [3]**

Les pôles de l'approximant de Padé du type  $[n+j, n]$ ,  $n > 1$  et  $j > -1$ , sont simples et appartiennent à  $]-\infty, 0]$ . En plus si

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

désignent les pôles de  $[n+j, n]$  et

$$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$$

désignent les pôles de  $[n+j+1, n+1]$ ; alors

$$y_1 < x_1 < y_2 < \dots < x_n < y_{n+1}$$

Ce théorème est important. En effet :  
si  $s(z)$  est une série de Stieljes de rayon de convergence  $R$  alors

$$s(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\Psi(u)}{1+uz}$$

d'où  $f$  est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -R]$ . Dans [3] on montre que les pôles de l'approximant de Padé de type  $[n+j, n]$  appartiennent à  $]-\infty, -R]$ .

Le problème alors est :

Peut-on caractériser l'ensemble des meilleurs approximations d'une série de Stieljes au sens de la norme de Hardy.

On ne peut aborder ce problème que si on restreint convenablement l'ensemble des séries de Stieljes.

On ne peut étudier en effet que l'approximation des séries de Stieljes qui sont analytiques sur le disque fermé, contrairement à l'approximation au sens de Padé que l'on peut définir pour une série formelle.

On va donc étudier l'approximation au sens de Hardy des séries :

$$s(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (-z)^j$$

qui ont un rayon de convergence  $R > 1$ , et telles qu'il existe une fonction  $\Psi$  croissante et bornée :

$$a_j = \int_0^{1/R} u^j d\Psi(u) .$$

On a alors :

$$s(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\Psi(u)}{1+uz}$$

ou encore en changeant  $z$  en  $-z$  :

$$s(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\Psi(u)}{1-uz} = \int_0^{1/R} K(z,u) d\Psi(u) \quad (2)$$

avec

$$K(z,u) = \frac{1}{1-uz} \quad t \in D$$



IV. APPROXIMATION DES SERIES DE STIELJES PAR DES FRACTIONS  
RATIONNELLES AU SENS DE HARDY

Nous noterons :

$$D = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \}$$

$$\mathbb{R}_n^{n-1} = \left\{ \frac{P_{n-1}}{Q_n} : P_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X], Q_n \in \mathbb{R}_n[X] \right.$$

$$\left. \text{et } Q_n(z)=0 \Rightarrow z \notin \bar{D} \right\} .$$

Nous allons étudier l'ensemble des meilleurs approximants d'une fonction de la forme (2) au sens de Hardy dans  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ .

Remarque :

Nous avons étudié, dans le premier chapitre, l'approximation au sens de Hardy d'une fonction analytique dans le disque fermé par des éléments de  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ .

Tous les résultats de ce chapitre restent valables dans le cas de l'approximation d'une fonction par des éléments de  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ .

Soit donc :

$$a(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}$$

un meilleur approximant de  $s$  dans  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ . D'après les résultats du premier chapitre,  $a$  peut se mettre sous la forme :

$$a(z) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} \frac{z^j}{(1-x_i z)^{j+1}} + \sum_{i=1}^{p'} \sum_{j=0}^{m'_i-1} [ b_{ij} \frac{z^j}{(1-x'_i z)^{j+1}} + \bar{b}_{ij} \frac{z^j}{(1-\bar{x}'_i z)^{j+1}} ] \quad (3)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} \in \mathbb{R} & b_{ij} \in \mathbb{C} \\ x_i \in ]-1, +1[ & x'_i \in D \setminus [-1, +1] \\ \sum_{i=1}^p m_i + 2 \sum_{i=1}^{p'} m_i = n. & \end{array} \right.$$

Le but cherché est de montrer qu'en fait :

$$p = n \text{ et } m_i = 1, \quad i=1, 2, \dots, n$$

et ainsi on va montrer que  $a$  se met sous la forme simple :

$$a(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-x_i z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i K(z, x_i)$$

$$\text{avec } \lambda_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i \in ]0, R^{-1}[$$

### DEFINITION 3 :

Un sous ensemble de  $C[a, b]$  de  $m$  fonctions est un système de Tchebycheff si toute combinaison linéaire non nulle des  $m$  fonctions admet au plus  $m-1$  zéros dans  $[a, b]$ .

**LEMME 1 :**

Etant donnés  $p$  nombres distincts  $x_1, x_2, \dots, x_p$  de l'intervalle  $[-1, +1]$ ,  $p$  entiers  $m_1, m_2, \dots, m_p$ ,  $p'$  nombres distincts  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{p'}$  de  $D \setminus [-1, +1]$  et  $p'$  entiers  $m'_1, m'_2, \dots, m'_{p'}$  :

$$\text{avec} \quad \sum_{i=1}^p m_i + 2 \sum_{i=1}^{p'} m'_i = n$$

alors les  $2n$  fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ij}(u) = K^{(j)}(u, x_i) \\ g_{ij}(u) = \operatorname{Re} K^{(j)}(u, x'_i) \\ h_{ij}(u) = \operatorname{Im} K^{(j)}(u, x'_i) \end{array} \right\} \begin{array}{l} j=0, 1, \dots, 2m_i-1 \\ i=1, 2, \dots, p \\ j=0, 1, \dots, 2m'_i-1 \\ i=1, 2, \dots, p' \end{array}$$

où

$$K^{(j)}(u, v) = \frac{\partial^j}{\partial \bar{t}^j} K(u, t) \Big|_{t=v}$$

forment un système de Tchebycheff de  $C[0, R^{-1}]$ .

**Démonstration :**

C'est immédiat puisqu'en prenant une combinaison linéaire non nulle de ces  $2n$  fonctions et en réduisant au même dénominateur alors le numérateur est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n-1$ .

**THEOREME 2** : Karlin [25] ;

Soit  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  un système de Tchebycheff de  $C[\alpha, \beta]$  ;  $[\alpha, \beta]$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Si

$$c_i = \int_{\alpha}^{\beta} f_i(x) d\sigma(x) \quad i=1, 2, \dots, k$$

où  $\sigma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continue à droite, croissante et bornée, alors :

Il existe des nombres strictement positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  et des nombres distincts  $(t_1, t_2, \dots, t_d) \in [\alpha, \beta]$  tels que :

$$c_i = \sum_{j=1}^d \lambda_j f_i(t_j) \quad i=1, 2, \dots, k$$

avec  $d =$  partie entière de  $\frac{k+1}{2}$ . En plus si  $k$  est

pair alors  $(t_1, t_2, \dots, t_d) \in ]\alpha, \beta[$ .

Démonstration : cf. [25 p. 42] .

On déduit de ce théorème :

**LEMME 2** :

soient  $p$  nombres distincts  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in [-1, +1]$ ,  $p$  entiers  $m_1, m_2, \dots, m_p$ ,  $p'$  nombres distincts  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p'}) \in D \setminus [-1, +1]$  et  $p'$  entiers  $m'_1, \dots, m'_{p'}$  tels que

$$\sum_{i=1}^p m_i + 2 \sum_{i=1}^{p'} m'_i = n$$

alors il existe des nombres strictement positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  et des nombres distincts  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in ]0, R^{-1}[$  tels que la fonction

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-xt_i}$$

ait les propriétés suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{(k)}(x_i) = s^{(k)}(x_i) \\ g^{(k)}(x'_i) = s^{(k)}(x'_i) \\ g^{(k)}(\bar{x}'_i) = s^{(k)}(\bar{x}'_i) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k=0,1,\dots,2m_i-1 ; \\ i=1,2,\dots,p \\ k=0,1,\dots,2m'_i-1 \\ i=1,2,\dots,p' \end{array}$$

**Démonstration :**

Par le lemme 1 et le théorème 2, il existe des nombres strictement positifs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et des nombres distincts  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  appartenant à  $]0, R^{-1}[$  tels que :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^{(k)}(x_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j K^{(k)}(x_i, t_j) \\ \text{Re } s^{(k)}(x'_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Re } K^{(k)}(x'_i, t_j) \\ \text{Im } s^{(k)}(x'_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Im } K^{(k)}(x'_i, t_j) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k=0,1,\dots,2m_i-1 \\ i=1,2,\dots,p \\ k=0,1,\dots,2m'_i-1 \\ i=1,2,\dots,p' \end{array}$$

Ainsi, les deux équations (6) et (7) donnent :

$$s^{(k)}(x'_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j K^{(k)}(x'_i, t_j)$$

En prenant les conjugués des deux membres de cette égalité on a le résultat annoncé.

**THEOREME 3 :**

Soit la fonction

$$s(z) = \int_0^R \frac{1/R d\psi(u)}{1-uz} \quad R > 1$$

où  $\psi : [0, R^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue à droite croissante et bornée. Alors tout meilleur approximant de  $s$  dans  $\mathbb{R}_n^{n-1}$  s'écrit :

$$a(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{1-t_j z}$$

avec  $\lambda_j > 0$ ,  $t_j \in ]0, R^{-1}[$   $j = 1, 2, \dots, n$

et  $t_i \neq t_j$  pour  $i \neq j$ .

**Démonstration :**

Soit  $a \in \mathbb{R}_n^{n-1}$  un meilleur approximant de  $s$  mis sous la forme (3).

Montrons que :

$$p=n \text{ et } m_i=1, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

On sait d'après le théorème 4 du chapitre I, que  $a$  vérifie les équations normales :

$$(8) \quad \begin{cases} a^{(k)}(x_i) = s^{(k)}(x_i) & k=0, 1, \dots, 2m_i-1 \\ & i=1, 2, \dots, p \\ a^{(k)}(x'_i) = s^{(k)}(x'_i) & k=0, 1, \dots, 2m'_i-1 \\ a^{(k)}(\bar{x}'_i) = s^{(k)}(\bar{x}'_i) & i=1, 2, \dots, p' \end{cases}$$

Par le lemme 2 et les relations (8) on a :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{(k)}(x_i) = g^{(k)}(x_i) \\ a^{(k)}(x'_i) = g^{(k)}(x'_i) \\ a^{(k)}(\bar{x}'_i) = g^{(k)}(\bar{x}'_i) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k=0,1,\dots,2m_i-1 \\ i=1,2,\dots,m \\ k=0,1,\dots,2m'_i-1 \\ i=1,2,\dots,p' \end{array}$$

Considérons la fraction rationnelle

$$r(z) = a(z) - g(z)$$

Il est clair que  $r(z)$  est du type  $(2n-1, 2n)$ . Mais les relations (9) montrent que  $r$  a  $2n$  zéros dans  $D$  alors

$$r \equiv 0$$

c'est-à-dire

$$a(z) \equiv g(z) .$$

Donc

$$a(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-t_i z} \quad t_i \in ]0, R^{-1}[ \quad \lambda_i > 0$$

**Remarques :**

1°) Ce résultat concerne uniquement des séries de Stieljes du type

$$s(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\Psi(u)}{1-uz}$$

avec  $R > 1$  ,  $\Psi : [0, R^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}^+$  continue à droite croissante et bornée.

Le problème reste donc posé dans le cas général.

- 2) Le fait de supposer que  $a \in \mathbb{R}_n^{n-1}$  nous a été utile à deux reprises dans les raisonnements conduisant au théorème 3.

a/ l'ensemble des pôles de  $a$  est invariant par conjugaison

b/ dans la démonstration du lemme 2 l'égalité (4)' est obtenue uniquement par conjugaison de l'égalité (4), ce qui n'est pas vrai si  $a \notin \mathbb{R}_n^{n-1}$ .

- 3°) En appliquant les résultats du chapitre II, il est facile de voir que tout meilleur approximant de  $s$  dans  $R_1^0$  s'écrit sous la forme :

$$r(z) = \frac{\lambda}{1-tz}$$

avec .

$$\lambda > 0 \text{ et } t \in ]0, R^{-1}[ .$$

Ainsi le théorème est vrai dans ce cas particulier et le problème reste posé dans le cas général.

- 4°) Le théorème reste vrai dans le cas de l'approximation de  $s$  par des éléments de  $\mathbb{R}_n^{n+j}$ ,  $j > -1$ , c'est à dire des fractions rationnelles à coefficients réels du type  $(n+j, n)$ .

En effet d'après la remarque du chapitre I, l'étude de l'approximation d'une série de Stieljes

$$s(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

dans  $\mathbb{R}_n^{n+j}$  revient à étudier l'approximation de la série

$$s_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+j+1} z^i$$

dans  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ .



Or il est facile de voir que  $\forall j \in \mathbb{N}$   $s_j$  est aussi une série de Stieljes puisque :

$$s_j(z) = \int_0^1 \frac{1/R u^{j+1} d\psi(u)}{1-uz} = \int_0^1 \frac{1/R d\psi_j(u)}{1-uz} .$$

**V. QUELQUES EXPERIENCES NUMERIQUES SUR L'APPROXIMATION  
D'UNE SERIE DE STIELJES DANS  $R_n^{n-1}$ .**

On considère deux exemples de séries de Stieljes, dans le premier exemple on prendra pour  $\psi$  une fonction en escalier sur  $[0,1]$  et dans le deuxième on prendra  $\psi = x$ .

Pour calculer les pôles d'un meilleur approximant du type  $(n-1,n)$  on a cherché un maximum de la fonction de  $2n$  variables

$$\rho : [0,1]^n \times [0,2\pi]^n \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

donnée dans le théorème 2 du chapitre I.

Exemple 1.

$$s(z) = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{1-x_i z},$$

$$0 < d_i \quad \text{et} \quad 0 < x_i < 1$$

Les points  $t_1, \dots, t_n$  sont les noeuds d'approximation de  $s$  par des éléments de  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ .

i)  $d_i = i$  et  $m = 3$

$x_1=0.1$	$x_2=0.2$	$x_3=0.3$
$ t_1  = 0.1339$ $\arg(t_1) = 0.30 \cdot 10^{-6}$	$ t_2  = 0.2891$ $\arg(t_2) = 0.98 \cdot 10^{-7}$	

$$|s|^2 = 38.10003$$

$$|s|^2 - \rho^2(t_1, t_2) = 0.98 \cdot 10^{-7}$$

ii)  $d_i = i$  et  $m = 4$

$x_1=0.1$	$x_2=0.2$	$x_3=3$	$x_4=0.4$
$ t_1  = 0.1720$ $\arg(t_1) = 0.12 \cdot 10^{-6}$	$ t_2  = 0.3778$ $\arg(t_2) = 0.28 \cdot 10^{-7}$		

$$|s|^2 = 110.1450$$

$$|s|^2 - \rho^2(t_1, t_2) = 0.126 \cdot 10^{-5}$$

iii) pour  $d_i = 1$  et  $m = 5$

$x_1=0.3$	$x_2=0.4$	$x_3=0.5$	$x_4=0.7$	$x_5=0.8$
$ t_1  = 0.3995$ $\arg(t_1) = 0.312 \cdot 10^{-8}$		$ t_2  = 0.7671$ $\arg(t_2) = 0.510 \cdot 10^{-8}$		
$ t_1  = 0.3360$ $\arg(t_1) = 0.45 \cdot 10^{-6}$	$ t_2  = 0.5662$ $\arg(t_2) = 0.87 \cdot 10^{-7}$	$ t_3  = 0.7852$ $\arg(t_3) = 0.74 \cdot 10^{-7}$		

$$\|s\|^2 = 37.324788$$

$$\|s\|^2 - \rho^2(t_1, t_2) = 0.296 \cdot 10^{-3}$$

$$\|s\|^2 - \rho^2(t_1, t_2, t_3) = 0.348 \cdot 10^{-4}$$

exemple 2

$$s(z) = \int_0^b \frac{du}{1-uz} = -z^{-1} \log(1 - bz) \quad 0 < b < 1$$

i)  $b = 0.5$

$ t_1  = 0.1153$ $\arg(t_1) = 0.82 \cdot 10^{-7}$		$ t_2  = 0.4036$ $\arg(t_2) = 0.63 \cdot 10^{-8}$		
$ t_1  = 0.0625$ $\arg(t_1) = 0.77 \cdot 10^{-5}$	$ t_2  = 0.2649$ $\arg(t_2) = 0.13 \cdot 10^{-6}$	$ t_3  = 0.4494$ $\arg(t_3) = 0.23 \cdot 10^{-6}$		

$$\|s\|^2 = 1.070610$$

$$\|s\|^2 - \rho^2(t_1, t_2) = 0.22 \cdot 10^{-6}$$

$$\|s\|^2 - \rho^2(t_1, t_2, t_3) = 0.78 \cdot 10^{-10}$$

ii)  $b = 0.7$

$ t_1  = 0.1799$	$ t_2  = 0.5810$	
$\arg(t_1) = 0.35 \cdot 10^{-8}$	$\arg(t_2) = 0.47 \cdot 10^{-7}$	
$ t_1  = 0.1001$	$ t_2  = 0.3993$	$ t_3  = 0.6394$
$\arg(t_1) = 0.78 \cdot 10^{-6}$	$\arg(t_2) = 0.66 \cdot 10^{-6}$	$\arg(t_3) = 0.71 \cdot 10^{-7}$

$$|s|^2 = 1.160078$$

$$|s|^2 - \rho^2(t_1, t_2) = 0.7210 \cdot 10^{-5}$$

$$|s|^2 - \rho^2(t_1, t_2, t_3) = 0.13 \cdot 10^{-7}$$

#### CONCLUSION.

Les arguments des pôles des approximants obtenus sont nuls à la précision du programme de calcul (qui est de l'ordre de  $10^{-6}$ ).

Les inverses des pôles appartiennent à l'intervalle d'intégration (ouvert).

Dans les trois derniers exemples les pôles des approximants (1,2) et (2,3) s'interlacent.



**C H A P I T R E 3**

**D E U X I E M E P A R T I E**

**CONSTRUCTION DE LA MEILLEURE APPROXIMATION  
RATIONNELLE AU SENS DE LA NORME DE HARDY  
D'UNE SERIE DE STIELJES.**

**I- Introduction.**

**II- Algorithme de résolution des équations normales.**

**III- Expériences numériques.**

**IV- Quelques comparaisons entre l'approximation au sens de  
Hardy et au sens de Padé.**



## I. INTRODUCTION.

Dans la première partie de ce chapitre on a montré que les pôles de tout meilleur approximant d'une série de Stieljes sous la forme :

$$s(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\phi(u)}{1-uz} \quad R > 1 \quad (1)$$

$\phi : [0, R^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continue à droite, croissante et bornée, dans l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels du type  $(n+j, n)$ ,  $n > 1$  et  $j > -1$ , dont le dénominateur ne s'annule pas dans le disque unité fermé sont simples et appartiennent à  $[R, \infty[$ .

Ce résultat est intéressant de point de vue numérique car les équations normales prennent alors leur forme la plus simple.

Dans cette deuxième partie on va chercher un meilleur approximant de la fonction (1) en résolvant les équations normales par un algorithme basé sur une méthode utilisée par D.W.Kammeler [24] pour l'approximation au sens de la norme de  $L_2$  des fonctions complètement monotones par des sommes d'exponentielles. La méthode de D.W.Kammeler est basée sur un algorithme de J.Rice [33] pour la résolution de certains problèmes d'interpolation rationnelle au sens de Hermite.

On présentera ensuite quelques expériences numériques illustrant cet algorithme.

## II. RESOLUTION DES EQUATIONS NORMALES.

### a) Quelques rappels.

Rappelons que si  $f$  est analytique dans  $\bar{D}$  alors tout meilleur approximant



$$r^*(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} K^{(j)}(z, t_i)$$

de  $f$  dans  $\mathbb{R}_n^{n-1}$  vérifie les équations normales :

$$\begin{cases} r^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i) \\ i = 1, 2, \dots, m \\ k = 0, 1, \dots, 2m_i - 1 \end{cases} \quad (2)$$

ces équations sont en nombre de  $2n$  ce qui est théoriquement suffisant pour déterminer  $r^*$ .

Dans le cas de l'approximation d'une fonction (1) par des éléments de  $\mathbb{R}_n^{n-1}$ , les équations (2) prennent la forme simple:

$$(3) \quad \begin{cases} r(t_i) = f(t_i) \\ r'(t_i) = f'(t_i) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

avec en plus

$$t_i \in ]0, R^{-1}[ \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

#### b) Interpolation rationnelle au sens de Hermite.

Etant données  $n$  points distincts de  $]0, R^{-1}[$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , le problème d'interpolation de Hermite est de trouver une fraction sous la forme :

$$\begin{cases} h(x) = \sum_{i=1}^n a_i K(x, \lambda_i) \\ a_i > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i \in ]0, R^{-1}[ \end{cases}$$

telle que :

$$\begin{cases} f(x_i) = h(x_i) \\ f'(x_i) = h'(x_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

c'est un problème non linéaire en les paramètres

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

c) Algorithme de Rice pour la recherche des paramètres :

On se donne  $n$  nombres strictement positifs

$$a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$$

et  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0$  :

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \dots < \lambda_n^0 < R^{-1}$$

et on cherche des "perturbations" :

$$a_1^{0'}, a_2^{0'}, \dots, a_n^{0'} \text{ et } \lambda_1^{0'}, \lambda_2^{0'}, \dots, \lambda_n^{0'}$$

telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (a_j^0 + a_j^{0'}) K(x_i, \lambda_j^0 + \lambda_j^{0'}) = f(x_i) \\ \sum_{j=1}^n (a_j^0 + a_j^{0'}) K'(x_i, \lambda_j^0 + \lambda_j^{0'}) = f'(x_i) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

avec

$$K'(x_i, \lambda_j^0 + \lambda_j^{0'}) = \left. \frac{\partial}{\partial x} K(x, \lambda_j^0 + \lambda_j^{0'}) \right|_{x=x_i}$$

un développement de Taylor du premier ordre donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (a_j^0 + a_j^{0'}) [K(x_i, \lambda_j^0) + \lambda_j^{0'} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} K(x_i, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j^0}] = f(x_i) \\ \sum_{j=1}^n (a_j^0 + a_j^{0'}) [K'(x_i, \lambda_j^0) + \lambda_j^{0'} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} K'(x_i, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j^0}] = f'(x_i) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

Pour avoir les paramètres

$$a_1^{0'}, \dots, a_n^{0'} \text{ et } \lambda_1^{0'}, \dots, \lambda_n^{0'}$$

il suffit de résoudre le système linéaire :

$$M v = \varepsilon \quad (4)$$

où

$$v = ( a_1^{0'}, \dots, a_n^{0'}, a_1^0 \lambda_1^{0'}, \dots, a_n^0 \lambda_n^{0'} )^T$$

$\varepsilon$  est un vecteur à  $2n$  composantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_i = f(x_i) - \sum_{j=1}^n a_j^0 K(x_i, \lambda_j^0) \\ \varepsilon_{i+n} = f'(x_i) - \sum_{j=1}^n a_j^0 K'(x_i, \lambda_j^0) \\ i=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$M$  est une matrice carrée d'ordre  $2n$  avec :

$$(5) \begin{cases} M_{ij} = K(x_i, \lambda_j^0) \\ M_{i, j+n} = M_{i+n, j} = K'(x_i, \lambda_j^0) \\ M_{i+n, j+n} = \frac{\partial}{\partial \lambda} K'(x_i, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_j^0} \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Ainsi en résolvant le système (4) on obtient un nouveau point :

$$\begin{aligned} a_i^1 &= a_i^0 + a_i^{0'} \\ \lambda_i^1 &= \lambda_i^0 + \lambda_i^{0'} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

L'existence d'une solution au système (4) est assurée par le lemme suivant:

**Lemme :**

Pour

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < R^{-1}$$

et

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \dots < \lambda_n^0 < R^{-1}$$

la matrice M définie par les relations (5) est non singulière.

**Démonstration :**

Cela découle du fait que  $\det(M) > 0$  car le noyau

$$K(x,y) = \frac{1}{1-xy}$$

est un noyau totalement positif, voir [26].

L'algorithme de J.Rice consiste à itérer le processus et générer une suite de vecteurs :

$$(a_1^v, a_2^v, \dots, a_n^v, \lambda_1^v, \lambda_2^v, \dots, \lambda_n^v) \quad v=0,1,2,\dots$$

qui peut converger vers une solution des équations (3) si on part d'un point initial proche de la solution.

**d) Algorithme de résolution des équations normales.**

Remarquons que dans le cas de l'interpolation rationnelle au sens de Hermite on se donne n points  $x_1 x_2 \dots x_n$  et on cherche une fraction rationnelle qui interpole f ainsi que sa dérivée aux points  $x_i$ .

Par contre dans le cas de la résolution des équations normales on cherche n points distincts  $t_1 t_2 \dots t_n$  qui interpole f au sens de Hermite et les points  $t_i$  déterminent la fraction rationnelle cherchée.

En effet la fraction rationnelle est donnée par

$$r(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(z, t_i)$$

avec  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  solution du système linéaire

$$\begin{cases} f(t_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(t_j, t_i) \\ j=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

On utilise l'algorithme de J.Rice, pour résoudre les équations normales (3) de la manière suivantes :

On se donne

$$(t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0) : 0 < t_1^0 < \dots < t_n^0 < R^{-1}$$

et on génère successivement une suite de vecteurs :

$$(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \dots, \alpha_n^v, t_1^v, t_2^v, \dots, t_n^v) \quad v=1, 2, \dots$$

telle que

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j^{v+1} K(t_i^v, t_j^{v+1}) = f(t_i^v) \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j^{v+1} k'(t_i^v, t_j^{v+1}) = f'(t_i^v) \\ i=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

A chaque pas on peut calculer:

$$\|f - \sum_{i=1}^n \alpha_i^v K(\cdot, t_i^{v+1})\|^2 = \|f\|^2 - \rho^2(t_1^{v+1}, t_2^{v+1}, \dots, t_n^{v+1})$$

à l'aide de l'expression explicite de la fonction erreur  $\rho$ , qui prend une forme simple dans ce cas, et tester à chaque pas la convergence de l'algorithme.

Si l'algorithme ne converge pas il faudrait alors changer le point de départ.

## III. EXPERIENCES NUMERIQUES

## Exemple 1.

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z-1.5} + \frac{1}{z-1.7} + \frac{1}{z-1.9} + \frac{1}{z-2.1} \\ + \frac{1}{z-2.3} + \frac{1}{z-2.5} + \frac{1}{z-2.7} + \frac{1}{z-2.9} + \frac{1}{z-3.1}$$

Les poids et les noeuds de l'approximant de Hardy du type (1,2) calculés par l'algorithme aux différents pas sont donnés par le tableau suivant :

LES POINTS DE DEPART SONT : t1 = 0.20000

t2 = 0.70000

\*\*\*\*\*

N = 1	POIDS CALCULES	NOEUDS CALCULES
	a1 = 2.171103713452233	t1 = .3404442378938132
	a2 = 1.958312014975804	t2 = .6362282728999624
N = 2	POIDS CALCULES	NOEUDS CALCULES
	a1 = 2.387796099779102	t1 = .3900874086611542
	a2 = 1.742044881883412	t2 = .6235730131351094
N = 3	POIDS CALCULES	NOEUDS CALCULES
	a1 = 2.542550241901058	t1 = .3969519020249646
	a2 = 1.587319274279040	t2 = .6269982753501805
N = 4	POIDS CALCULES	NOEUDS CALCULES
	a1 = 2.547460942621021	t1 = .3968872215590760
	a2 = 1.582403705991143	t2 = .6274908105832202
N = 5	POIDS CALCULES	NOEUDS CALCULES
	a1 = 2.547581092995151	t1 = .3968947822222129
	a2 = 1.582283362619203	t2 = .6274985359828882

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 6 ITERATIONS

\*\*\*\*\*

a1 = 2.547585608263101	t1 = .3968950450417339
a2 = 1.582278838564665	t2 = .6274987969158837

Si on change les points de depart on obtient les valeurs suivantes :

LES POINTS DE DEPART SONT : t1=0.0100 t2 = 0.0200  
 \*\*\*\*\*

N - 20	POIDS CALCULES a1 = .1653263470095449 a2 = 3.877667017066048	NOEUDS CALCULES t1 = .9550460150904264 t2 = .6224490472481729
N - 21	POIDS CALCULES a1 = .1246166658295530 a2 = 3.940078317219909	NOEUDS CALCULES t1 = .9319666277785220 t2 = .5066037119974085
N - 22	POIDS CALCULES a1 = 0.9550881469685254D-01 a2 = 4.020724072340077	NOEUDS CALCULES t1 = .8995166823985754 t2 = .4861037636747877
N - 23	POIDS CALCULES a1 = .1700033170147568 a2 = 3.951341768024005	NOEUDS CALCULES t1 = .8074122728221948 t2 = .4774000652425900
N - 24	POIDS CALCULES a1 = .5325350012253923 a2 = 3.594443171455055	NOEUDS CALCULES t1 = .6241046082758218 t2 = .4519625074264236
N - 25	POIDS CALCULES a1 = 2.128688053504873 a2 = 2.001056343426636	NOEUDS CALCULES t1 = .5823019737465539 t2 = .3946195821581435
N - 26	POIDS CALCULES a1 = 1.120288857777833 a2 = 3.009558205649691	NOEUDS CALCULES t1 = .6398556623539402 t2 = .4154299538503693
N - 27	POIDS CALCULES a1 = 1.585867851486631 a2 = 2.543964376370275	NOEUDS CALCULES t1 = .6237686335261879 t2 = .3990162416021852
N - 28	POIDS CALCULES a1 = 1.581507600081942 a2 = 2.548356854568631	NOEUDS CALCULES t1 = .6275942120701261 t2 = .3968950746951247
N - 29	POIDS CALCULES a1 = 1.582244646317773 a2 = 2.547619753075426	NOEUDS CALCULES t1 = .6275007929692582 t2 = .3968969655246200
N - 30	POIDS CALCULES a1 = 1.582277522115056 a2 = 2.547586922161505	NOEUDS CALCULES t1 = .6274988727592143 t2 = .3968951215622006

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 31 ITERATIONS

\*\*\*\*\*

a1 = 1.582278638810040	t1 = .6274988084222407
a2 = 2.547585807628123	t2 = .3968950566570151

Les noeuds et les poids des approximants de Hardy de  $f$  du type (2,3) et (3,4) calculés par l'algorithme sont :

$n = 3$

LES POINTS DE DEPART SONT :  $t_1 = 0.01$   $t_2 = 0.02$   $t_3 = 0.1$   
 \*\*\*\*\*

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 15 ITERATIONS

\*\*\*\*\*  
 $a_1 = .9006983451291411$        $t_1 = .6581310059864010$   
 $a_2 = 1.657216429944598$        $t_2 = .5112204056272560$   
 $a_3 = 1.572054334540983$        $t_3 = .3584023274034112$   
 \*\*\*\*\*

$n = 4$

LES POINTS DE DEPART SONT :  $t_1 = 0.01$   $t_2 = 0.3$   $t_3 = 0.07$   $t_4 = 0.5$   
 \*\*\*\*\*

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 22 ITERATIONS

\*\*\*\*\*  
 $a_1 = 1.384764874148087$        $t_1 = .4413339285899053$   
 $a_2 = 1.021648393137732$        $t_2 = .3407610359019288$   
 $a_3 = .7116956095229052$        $t_3 = .6653471071044685$   
 $a_4 = 1.011860559374251$        $t_4 = .5639107603517260$   
 \*\*\*\*\*

Remarque :

Les noeuds de l'approximant  $(n-1, n)$  s'interlacent avec ceux de  $(n, n+1)$ ,  $n=1, 2, 3$ .



## Exemple 2.

Soit la fonction :

$$f(z) = -z^{-1} \log(1 - 0.5z)$$

Les noeuds et les poids des approximants de Hardy de  $f$  du type (1,2), (2,3) et (3,4) calculés par l'algorithme sont :

n = 2
-------

LES POINTS DE DEPART SONT : t1 = 0.7    t2 = 0.02  
\*\*\*\*\*

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 10 ITERATIONS

```
*****
a1 = .2664181277455841            t1 = .1153557692511409
a2 = .2335813753055637            t2 = .4036176708541105
*****
```

n = 3
-------

LES POINTS DE DEPART SONT : t1 = 0.02    t2 = 0.06    t3 = 0.8  
\*\*\*\*\*

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 27 ITERATIONS

```
*****
a1 = .1260060606304052            t1 = .4495742631536489
a2 = .1523379099413260            t2 = 0.6267091668789129D-01
a3 = .2216560291914955            t3 = .2652929038674570
*****
```

n = 4
-------

LES POINTS DE DEPART SONT : t1 = 0.04    t2 = 0.02    t3 = 0.39    t4 = 0.6  
\*\*\*\*\*

SOLUTION TROUVEE AU BOUT de 50 ITERATIONS

```
*****
a1 = 0.9678663703208032D-01       t1 = 0.3898245213084475D-01
a2 = .1697720690860498            t2 = .1792667029004361
a3 = .1557027996878250            t3 = .3488355236143990
a4 = 0.7773849419394368D-01       t4 = .4692382224964995
*****
```

**Commentaire :**

Les noeuds calculés par l'algorithme sont les mêmes que ceux obtenus en maximisant la fonction erreur sur le disque unité, voir exemple 2 page 118.

On remarque aussi sur cet exemple que les noeuds de deux approximants successifs s'interlacent.

**IV. COMPARAISON ENTRE APPROXIMANT DE PADE  
ET APPROXIMANT DE HARDY.**

Dans les deux tableaux suivant on présente respectivement les valeurs des approximants de Hardy et de Padé de la fonction :

$$f(z) = z^{-1} \log(1 - 0.5z)$$

en un certain nombre de points.

Il ressort des deux tableaux que l'approximant de Hardy approche mieux les valeurs de de la fonction  $f$  en tout point.

$\frac{n}{x}$	1	2	3	$-x^{-1} \log(1-0.5x)$
-0.6000	0.4372149768	0.4372731966	0.4372737685	0.4372737741
-0.8000	0.4204775288	0.4205887183	0.4205902739	0.4205902957
-1.0000	0.4052776270	0.4054616452	0.4054650449	0.4054651081
-1.5000	0.3726138163	0.3730630424	0.3730767655	0.3730771919
-2.0000	0.3457227774	0.3465368297	0.3465720239	0.3465735902
-5.0000	0.2463573511	0.2500638743	0.2504966962	0.2505525936
-10.000	0.1700913940	0.1772548340	0.1787785320	0.1791759469
-50.000	0.0503935444	0.0577597119	0.0614793529	0.0651619307
-100.00	0.0269002384	0.0317561496	0.0346906821	0.0393182563
-1000.0	0.00286669746	0.0035046156	0.0039729021	0.0062166061

Le tableau donne la valeur de l'approximant de HARDY du type  $(n-1, n)$  au point  $x$  de la fonction  $f(x) = -x^{-1} \log(1-0.5x)$ .

$\frac{n}{x}$	1	2	3	$-x^{-1} \log(1-0.5x)$
-0.6000	0.8835958509	0.8745474474	0.8745475477	0.4372737741
-0.8000	0.8555133079	0.8411801632	0.8411805883	0.4205902957
-1.0000	0.8310249307	0.8109289617	0.8109302030	0.4054651081
-1.5000	0.7815275310	0.7461465869	0.7461542301	0.3730771919
-2.0000	0.7438016528	0.6931216931	0.6931464160	0.3465735902
-5.0000	0.6242774566	0.5005611672	0.5010541016	0.2505525936
-10.000	0.5454545454	0.3557422969	0.3578790111	0.1791759469
-50.000	0.3707093821	0.1176675734	0.1243634454	0.0651619307
-100.00	0.2805755395	0.0650822046	0.0706392161	0.0393182563
-1000.0	0.0537741912	0.0072388901	0.0081774514	0.0062166061

Le tableau donne la valeur de l'approximant de PADE du type  $(n-1, n)$  au point  $x$  de la fonction  $f(x) = -x^{-1} \log(1-0.5x)$ .



**A N N E X E**

**PROGRAMME PASCAL POUR EVALUER LA FONCTION ERREUR**



Dans cet annexe, on présente une procédure Pascal pour évaluer la fonction erreur explicitée au chapitre I.

La fonction FONCTERREUR calcule la valeur de :

$$\rho^2(x[1], x[2], \dots, x[npt])$$

relative au polynôme :

$$P(z) = \sum_{j=1}^{nc} a[j] z^{j-1}$$

où  $x[1], x[2], \dots, x[npt]$  sont des complexes quelconques.



```

procedure pascal;
  var i, j, k, m1, m2: integer;
  begin
    c[1]:=1; c[2]:=1; c[3]:=1;
    k:=4;
    for i:=3 to npt+1 do
      begin
        c[k]:=1;
        for j:=2 to i-1 do
          begin
            m1:=k+j;
            m2:=m1-i;
            c[pred(m1)]:=c[m2]+c[pred(m2)]
          end;
        k:=k+i;
        c[pred(k)]:=1;
      end;
    end;
  end;

```

```

FUNCTION FONCTERREUR(x: vectcomp): real;
  (* calcule la valeur de la fonction erreur au points
  x[1], x[2], ..., x[npt] *)
  var i, j: integer;
      v: vectcomp;
  function pol(z: cvomplexe): real;
    (* calcule le carré du module du polynôme au point z *)
  var          i: integer;
      v1, v2, w1, w2: real;
  begin
    pol:=0;
    w1:=a[nc]*z.re+a[pred(nc)];
    w2:=a[nc]*z.im;
    for i:=nc-2 downto 1 do
      begin
        v1:=w1; v2:=w2;
        w1:=v1*z.re-v2*z.im+a[i];
        w2:=v1*z.im+v2*z.re
      end;
    pol:=sqr(w1)=sqr(w2)
  end;

```

```

function difdiv(v:vectcomp;np:integer):real;
  (* calcule les carrés des modules des différences
     divisées du polynôme sur les points
     (v[1],v[2]),(v[1],v[2],v[3]),..., (v[1],v[2],...,v[np]),
     multiplie chaque terme par le coefficient du triangle
     de Pascal correspondant et somme tous les résultats *)
var i,j,k,km,mm,m:integer;
    s,q1,q2,w,dif:real;
    d:vectcomp;
begin
  dif:=0;
  d[1]:=v[1];
  for i:=2 to pred(nc) do
    begin
      d[i].re:=d[pred(i)].re*v[1].re-d[pred(i)].im*v[1].im;
      d[i].im:=d[pred(i)].im*v[1].re+d[pred(i)].re*v[1].im;
    end;
  for i:=2 to np do
    begin
      d[1].re:=d[1].re+v[i].re;
      d[1].im:=d[1].im+v[i].im;
      w:=1; km:=i*(i-1) div 2;
      for j:=2 to pred(nc) do
        begin
          d[j].re:=d[j].re+d[j-1].re*v[i].re-d[j-1].im*v[i].im;
          d[j].im:=d[j].im+d[j-1].re*v[i].im+d[j-1].im*v[i].re;
        end;
      mm:=-1; s:=0;
      if(np=1) or (i>2) then
        begin
          for j:=1 to i do
            begin
              w:=w*(1-sqr(v[j].re)+sqr(v[j].im));
              q1:=a[i-j+1]; q1:=0;
              for k:=i-j+2 to nc do
                begin
                  m:=k-i+j-1;

```

```

        q1:=q1+a[k]*d[m].re;
        q2:=q2+a[k]*d[m].im
    end;
    mm:=-mm;
    s:=s+mm*c[km+j]*(sqr(q1)+sqr(q2))
end;
dif:=dif+s*w
end
end;
difdiv:=dif
end;

function trans(x:vectcomp):real;
(* forme tous les k-uples possibles de x[1],x[2],...,x[npt],
  2<k<npt , dans l'ordre croissant des indices *)
var i,j,k,l,np:integer;
    tr:real;
    v,w:vectcomp;
begin
    tr:=0;
    for i:=1 to npt-2 do
        begin
            for j:=i to npt do v[j-i+1]:=x[j];
            np:=npt-i;
            w[1]:=v[1];
            for j:=2 to np do
                begin
                    w2:=v[j];
                    for k:=1 to np-j+1 do
                        begin
                            for l:=j+1 to np-k+2 do
                                w[l-j+2]:=v[l+k-1];
                                tr:=tr+difdiv(w,np-j-1+4)
                            end
                        end
                    end
                end
            end;
        trans:=tr;
    end;
end;

```

```

BEGIN
  for i:=1 to npt-1 do
    begin
      erreur:=0;
      v[1]:=x[i];
      for j:=succ(i) to npt do
        begin
          v[2]:=x[j];
          erreur:=erreur+difdiv(v,2)
        end
      end;
      if npt>2 then erreur:=erreur+trans(x);
      for i:=1 to npt do
        erreur:=erreur+(1-sqr(x[i].re)+sqr(x[i].im))*pol(x[i]);
      foncterreur:=erreur
    END
  END

```

#### Description des paramètres :

npt : nombre de variables de  $\rho$  .

nc : nombre des coefficients du polynôme P.

a : vecteur de dimension nc contenant les coefficients du polynôme P.

c : vecteur de dimension  $npt*(npt+1)/2$  qui contient, après exécution de la procédure pascal, les npt premières lignes du triangle de Pascal.

x : vecteur de type complexe, qui contient les points en lesquels on évalue FONCTERREUR.

Exemple d'utilisation de FONCTERREUR.

```
PROGRAM test(input,output);
  const npt=3, nc=30;
  type complexe=record re,im:real end;
    vectcomp=array[1..npt] of complexe;
  var i:integer;
      erreur:real;
      c:array[1..100] of real;
      a:array[1..nc] of real;
      x:vectcomp;
  procedure pascal;
  .
  .
  .
  end;

  function foncterreur(x:vectcomp):real;
  .
  .
  .
  end;

BEGIN
  pascal;
  for i:=1 to npt do
    begin
      read(x[i].re);
      read(x[i].im);
    end;
  erreur:=foncterreur(x);
  write('erreur = ',erreur)
END.
```

**REFERENCES.**



1. N.I. Achieser, Theory of Approximation.  
New-York, Ungr (1956).
2. G.D. Allen ,C.K. Chul, W.R. Madych, F.J. Narcowich and P.W. Smith,  
Padé Approximant of Stieljes séries  
Journal of approximation theory 14,302-316(1975)
3. G. Baker, JR. Essantial of Padé approximants  
Academic press , New York 51975)
4. R.B. Barrar, H.L. Loeb, and H. Werner.  
On the existence of optimal Integration Formulas for  
Analytic Functions  
Numer. Math. 23, 105-117 (1974).
5. R.B. Barrar and H.L. Loeb, On the existence of closest points for non-  
linear approximating families,  
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 36 (1971),33-44.
6. R.B. Barrar and H.L. Loeb, Nonlinear  $L_p$  Approximation,  
Journal of Mathematical Analysis and Applications 40,  
pp 427-435 (1972).
7. P. Basso Méthodes de localisation du maximum global et des zéros d'une  
fonction sur un intervalle de la droite numérique.  
Thèse (1978) Univ. Scient. Med. de Grenoble.
8. R.P. Brent, Algorithms for Minimization without derivatives.  
Yorktown Heights, New-York (1973).
9. Bruno O.Shubert, A sequential method seeking the global maximum of  
function  
SIAM J. Numer. Anal. Vol 9 N° 3,september 1972.
10. E.W. Cheney, Introduction to approximation theory  
Mc Graw-Hill ,New York ,1966
11. P. Davis, Interpolation and Approximation.  
Blaisdell (1950).
12. J. Della Dora, Contribution à l'approximation de fonctions de la  
variable complexe au sens Hermite-Padé et de Hardy.  
Thèse d'Etat (1980). Grenoble.
13. I.C.W. Dixon and G.P. Szegö, Towards global optimisation.  
North-Holland, New York 1975.



14. M. Duc-Jacquet, Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces Hilbertiens à noyaux reproduisants.  
Thèse d'Etat (1973). Grenoble.
15. H. Duren, Theory of  $H^p$  spaces.  
Academic Press.
16. B. Epstein, Orthogonal families of analytic functions.  
The MacMillan Company, New-York (1965).
17. M. Fares, An explicit formula of the error function for the rational Hardy approximation  
Rapport de recherche N° 284 Grenoble(1982)
18. M. Fares, Approximation des séries de Stieljes au sens de la norme de Hardy  
Séminaire d'analyse numérique N° 366 Grenoble (1981).
19. R. Fletcher, Function minimisation without derivative  
comp. J.8, 33-41 .
20. P.E. Gill and W. Muray, Minimization subject to bounds on the variables,  
National Physical Laboratory, report NAC 72, (1976).
21. G.H. Hardy ,J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities  
Cambridge university press 1959.
22. C.R. Hobby and J.R. Rice, Approximation from a curve of functions,  
Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 24 (1967) 91-106.
23. C. JORDAN, Calculus of finite differences.  
Rotting and Romwalter, Sorpon, Hungary 1939.
24. D.W Kammler, least squares approximation of completely monotonic functions by sums of exponentials  
SIAM J.Numer.Anal. vol.16 N° 5 october 1978 pp.801-818.
25. S. Karlin ,S.Studden,W,S : Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics  
Academic press ,New York (1975).
26. S. Karlin, Total Positivity  
Stanford University Press, Stanford ,Calif.,1968.
27. S. Karlin, On a class of non linear approximation problems,  
Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 43-49.

28. F.M. Larkin, Optimal Approximation in Hilbert Spaces with reproducing Kernel  
Mathematics of computation ,Volume 24, Number 112  
October 1970,pp.911-921.
29. G. Meinardus, Approximation of functions : Theory and numerical methods  
Springer Tracts in natural Philosophy Vol 13,1967.
30. G. Miller, An iterative solution to the equations of Aigrain and Williams  
IEEE Trans.Circuit theory pp.155-158 (February 1970).
31. P. Wynn, Upon the Padé table derived from a Stieljes series  
SIAM J.Numer. Anal. Vol. 5, N° 4 Dec. 1968 pp805-833
32. T. Reboul, une classe de méthodes pour la recherche du maximum global d'une fonction numérique.  
Rapport de recherche N°230 Laboratoire IMAG, (1981)  
Grenoble.
33. J. Rice, Minimization and techniques in nonlinear approximation  
Studies in numerical analysis 2,J.M.Ortega and W.C. Rheinboldt,eds.Society for industrial and applied matimatics ,Philadelphia,1970,pp.80-88.
34. J. Rice, The approximation of functions  
vol I et II ,Addison Wesley.
35. N. Richter Dyn, properties of minimal integration rules  
SIAM J.Numer.Analy.vol.8.N°3,September 1971  
pp.379-388.
36. E. Rosencher, approximation rationnelle des filtres à un et deux indices : une approche Hilbertienne .  
Thèse troisième cycle Paris IX 1978.
37. J.L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.  
Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. XX, Providence (1960).



Dernière page d'une thèse

---

VU

Grenoble, le 4 juin 1982

Le Président de la thèse



N. GASTINEL.

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 4.6.82

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



M. TANCHE



