



HAL
open science

Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions

Aroune Duclos

► **To cite this version:**

Aroune Duclos. Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2007. Français. NNT : . tel-00305480

HAL Id: tel-00305480

<https://theses.hal.science/tel-00305480>

Submitted on 24 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

LE MANS, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

Aroune DUCLOS

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**Diffusion multiple en fluide visco-thermique,
cas du cristal phononique à deux dimensions**

soutenue le 27 juin 2007 devant le jury composé de

A-S. BONNET-BENDHIA	Directeur de Recherches, ENSTA, Paris	Rapporteur
A. MAUREL	Chargée de Recherches, ESPCI, Paris	Rapporteur
P.A. MARTIN	Professeur, Colorado School Mines, USA	Examinateur
A. TOURIN	Maître de Conférences, ESPCI, Paris	Examinateur
J. VASSEUR	Professeur, IEMN, Lille	Examinateur
D. LAFARGE	Chargé de Recherches, LAUM, Le Mans	Co-directeur
V. PAGNEUX	Chargé de Recherches, LAUM, Le Mans	Co-directeur
C. DEPOLLIER	Professeur, LAUM, Le Mans	Directeur

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Anne-Sophie Bonnet-Bendhia et Agnès Maurel pour l'intérêt qu'elles ont porté à ce travail en acceptant de le rapporter. Dans ce sens, je remercie également Paul Martin, Arnaud Tourin et Jérôme Vasseur qui ont accepté de l'examiner.

Je remercie Denis Lafarge, Vincent Pagneux et Claude Depollier, pour avoir initié ces travaux. Je les remercie également de m'avoir permis d'acquérir une grande autonomie au cours de ce travail de thèse.

Un grand merci à Vincent Tournat et Laurent Fillinger pour leurs nombreuses remarques et suggestions concernant la mise en forme de certaines parties de ce travail.

Durant mes travaux de thèse, j'ai eu l'occasion d'effectuer des expériences sur différents échantillons. Je n'aurais pu réaliser ces échantillons sans l'aide précieuse des techniciens du laboratoire. Pour cette aide, je remercie Alain Brunet, Patrick Collas, Eric Egon et Dominique Joly. Je les salue également pour leur disponibilité et leur rigueur dans leurs réalisations en général.

Je n'oublie pas tous les doctorants et ex-doctorants qui ont contribué à la bonne ambiance sans laquelle ce travail n'aurait pas abouti.

Enfin, je remercie Gaëlle pour son soutien et ses encouragements quotidiens.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Notations	vii
Introduction générale	1
I Diffusion multiple en fluide non dissipatif	5
1 Méthode de décomposition en ondes planes	9
1.1 Réseau direct et réseau réciproque	9
1.2 Position du problème	11
1.3 Résolution par la méthode de décomposition en ondes planes	12
1.3.1 Séparation des variables	12
1.3.2 Théorème de Bloch	13
1.3.3 Décomposition en séries de Fourier spatiales	13
1.3.4 Solutions de l'équation du mouvement	15
1.4 Résultats et temps de calcul	15
1.5 Conclusion	18
2 Méthode utilisant les séries de Schlömilch	21
2.1 Position du problème	21
2.2 Étude des propriétés d'une rangée infinie de cylindres	23
2.2.1 Expression du champ de pression acoustique	23
2.2.2 Matrice de diffusion	24
2.2.3 Matrices de réflexion et transmission	25
2.3 Extension à des systèmes contenant plusieurs rangées	31
2.3.1 Système constitué de N_r rangées de cylindres	31

2.3.2	Cristal phononique infini	32
2.4	Résultats et temps de calcul	33
2.5	Conclusion	35
3	Validation des modèles et discussion sur leur limite	37
3.1	Description de la géométrie étudiée	37
3.2	Comparaisons avec les expériences	38
3.3	Limite aux grandes longueurs d'onde	42
3.4	Limites des modèles	44
II	Diffusion multiple en fluide dissipatif	47
4	Concept d'admittance de surface équivalente	51
4.1	Extension du modèle utilisant les séries de Schlömilch	51
4.1.1	Couches limites visqueuse et thermique	51
4.1.2	Expression de l'admittance de surface équivalente	52
4.1.3	Report du résultat dans le problème étudié	53
4.2	Résultats	54
4.3	Limite du concept	58
4.4	Conclusion	59
5	Modèle complet	61
5.1	Position du problème	61
5.2	Étude des propriétés d'une rangée infinie de cylindres	63
5.2.1	Expression des potentiels sur les faces d'entrée et de sortie	63
5.2.2	Matrice de diffusion	65
5.2.3	Matrices de réflexion et transmission	67
5.3	Extension à des systèmes contenant plusieurs rangées	81
5.3.1	Système constitué de plusieurs rangées de cylindres	81
5.3.2	Cristal phononique infini	82
5.4	Résultats et temps de calcul	82
5.5	Conclusion	84
6	Validation et discussion	87

6.1	Validation aux hautes fréquences	87
6.1.1	Domaine d'étude	87
6.1.2	Résultats	88
6.2	Validation aux basses fréquences	89
6.2.1	Domaine d'étude	89
6.2.2	Résultats	91
6.3	Transition (rayon des cylindres fixés à $R = 1 \text{ mm}$)	94
6.4	Transition (rayon des cylindres fixés à $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$)	98
6.5	Conclusion	101
	Conclusion générale	103
A	Calcul explicite des fonctions $P(\vec{G})$ et $C(\vec{G})$ définies dans la relation (1.15)	107
B	Développement de l'équation du mouvement (1.20)	111
C	Calcul explicite des coefficients B_m	113
C.1	Réécriture de l'équation portant sur les coefficients B_m	113
C.2	Utilisation des séries de Schlömilch	114
C.3	Formulation matricielle	115
D	Utilisation du théorème d'addition des fonctions de Bessel	117
D.1	Champ diffusé par le cylindre j	117
D.2	Champ diffusé par l'ensemble des cylindres de la rangée infinie	117
E	Eléments des matrices de réflexion et de transmission	119
E.1	Calcul des coefficients de réflexion sur la face d'entrée $x = 0$	119
E.2	Calcul des coefficients de transmission sur la face de sortie $x = L$	120
F	Description de la propagation aux grandes longueurs d'onde	121
G	Calcul des 9 familles de coefficients de diffusion	125
H	Développement des potentiels sur les fonctions de Bessel	129
H.1	Développement des potentiels extérieurs	129
H.2	Coefficients de pondération des potentiels incidents	132
H.3	Résolution des équations portant sur les coefficients de pondération	135

H.4	Discussion sur les séries de Hankel	138
I	Calcul des 9 familles de coefficients de réflexion et transmission	139
I.1	Coefficients de réflexion	139
I.2	Coefficients de transmission	140
J	Digression sur d'autres fluides	143
J.1	Zone de transition pour un cristal entouré d'eau	143
J.2	Zone de transition pour un cristal entouré d'hélium	145
	Bibliographie	148

Table des figures

1	Matériau poreux. Régime de longueurs d'onde	2
2	Cristal phononique. Régime de longueurs d'onde	3
3	Cristal phononique à deux dimensions	7
1.1	Maille de Wigner-Seitz	10
1.2	Réseau réciproque	11
1.3	Théorème de Bloch	13
1.4	Diagramme de bande	16
1.5	Etude de convergence	17
1.6	Champ de déplacement	18
1.7	Phénomène de Gibbs	19
2.1	Trois problèmes considérés	22
2.2	Coefficients entrants et sortants d'un réseau linéaire	25
2.3	Champ extérieur imposé	26
2.4	Domaine d'étude	30
2.5	Diagramme de bandes	34
2.6	Etude de convergence	35
3.1	Cellule élémentaire	38
3.2	Méthode expérimentale utilisée	39
3.3	Bande passante des transducteurs	40
3.4	Bandes interdites d'échantillons de porosité $\Phi = 0.65$ et $\Phi = 0.50$	41
3.5	Coefficient de transmission d'un échantillon de porosité $\Phi \approx 0.65$ et $\Phi \approx 0.50$	43
3.6	Transition présentant une zone de recouvrement	45
3.7	Transition ne présentant pas de zone de recouvrement	46

4.1	Représentation des couches limites visco-thermiques	52
4.2	Couches limites dans les cas d'un plan et d'un disque	53
4.3	Coefficients de transmission expérimentaux et théoriques pour 2 rangées	56
4.4	Coefficients de transmission expérimentaux et théoriques pour 3 à 6 rangées	57
4.5	Limite du concept d'admittance de surface équivalente	58
5.1	Géométries étudiées	62
5.2	Coefficients entrants et sortants dans une cellule élémentaire	66
5.3	Diagramme de bandes	84
5.4	Etude de la convergence	85
6.1	Définition du domaine des hautes fréquences	88
6.2	Validation aux hautes fréquences	90
6.3	Définition du domaine des basses fréquences	91
6.4	Validation aux basses fréquences	92
6.5	Validation aux basses fréquences	93
6.6	Etude de la transition entre les basses fréquences et les hautes fréquences, cristaux millimétriques dilués	94
6.7	Etude de la transition entre les basses fréquences et les hautes fréquences, cristaux millimétriques	96
6.8	Etude de la transition entre les basses fréquences et les hautes fréquences, cristaux micrométriques	99
A.1	Domaines occupés par le fluide et le cylindre	109
F.1	Grandes longueurs d'onde	121
J.1	Etude de la transition dans l'eau	144
J.2	Ecarts avec et sans la prise en compte des effets dissipatifs dans l'eau	145
J.3	Etude de la transition dans l'hélium	146
J.4	Ecarts avec et sans la prise en compte des effets dissipatifs dans l'hélium	147

Notations

Chapitre 1

R	rayon des cylindres
L	paramètre de maille
(x, y)	coordonnées cartésiennes
(\vec{d}_1, \vec{d}_2)	vecteurs de base du réseau direct
(\vec{r}_1, \vec{r}_2)	vecteurs de base du réseau réciproque
\vec{G}_{m_1, m_2}	repérage dans le réseau réciproque
ρ_0	masse volumique du fluide
c_0	célérité dans le fluide
χ_0	module d'élasticité du fluide
t	variable temporelle
ω	pulsation de l'onde acoustique
$\vec{u}(\vec{r}, t)$	champ de déplacement associé à l'onde acoustique
$\phi(\vec{r}, t)$	potentiel scalaire dérivant le champ de déplacement
k_B	nombre d'onde de Bloch / constante de propagation
$\phi_{k_B}(\vec{G})$	transformée de Fourier spatiale de la fonction $\phi_{k_B}(\vec{r})$
A	aire d'une cellule élémentaire du réseau
A_c	surface occupée par un cylindre
A_f	surface occupée par le fluide interstitiel
N	nombre d'ondes planes utilisé numériquement
P, C, F	fonctions dans le domaine du réseau réciproque

Chapitre 2

p_a	champ de pression acoustique
N_r	nombre de rangées infinies de cylindres
k	nombre d'onde / norme du vecteur d'onde, dans le fluide
c	célérité dans le fluide
n	composante du champ de pression
θ_n	angle des ondes incidentes
j	désigne un cylindre de la rangée infinie
\vec{r}_j	position du cylindre j
l	désigne un autre cylindre
\vec{r}_l	position du cylindre l
m, q	indices de sommation
\vec{r}	vecteurs positions
$a_{n,0}$	amplitudes des composantes du champ de pression, face d'entrée $x = 0$
$a_{n,L}$	amplitudes des composantes du champ de pression, face de sortie $x = L$
$p_{a,ext}$	champ de pression imposé extérieur
$p_{a,inc}$	champ de pression incident
$p_{a,diff}$	champ de pression diffusé
$p_{a,0}$	champ de pression en $x = 0$
$p_{a,L}$	champ de pression en $x = L$
A_m	coefficients de pondération du champ de pression diffusé
B_m	coefficients de pondération du champ de pression incident
D_m	coefficients de diffusion
\vec{a}	désignent l'ensemble des coefficients a_n
[S]	matrice de diffusion d'une rangée infinie
[R]	matrice de réflexion, constituée des éléments R_{mn}
[T]	matrice de transmission, constituée des éléments T_{mn}
F	fonctions faisant intervenir des séries de Hankel

Chapitre 3

Φ	porosité du milieu
s_{ref}	signal de référence (domaine temporel)
S_{ref}	signal de référence (domaine fréquentiel)
s_{ech}	signal après passage dans l'échantillon (domaine temporel)
S_{ech}	signal après passage dans l'échantillon (domaine fréquentiel)
Tr	coefficient de transmission
f	fréquence
$TF[]$	transformée de Fourier d'une grandeur
K_B	nombre d'onde de Bloch adimensionné

Chapitre 4

δ_v, δ_h	épaisseurs de couches limites visqueuse et thermique
ν_v, ν_h	coefficients de viscosité cinématique et de diffusivité thermique
C_p	capacité calorifique massique à pression constante
γ	rapport des capacités
β_0, T_0	coefficient d'augmentation relative de pression isochore, température
β	admittance de surface équivalente
D_m^β	coefficient de diffusion considérant des effets de dissipation locaux

Chapitre 5

\vec{u}	champ de déplacement
τ	champ de température excédentaire
$\phi_a, \phi_h, \vec{\psi}$	potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire
ρ_0, K_0	masse volumique et module de compressibilité adiabatique du fluide
k_a, k_h, k_v	nombres d'ondes acoustique, entropique et tourbillonnaire
$a_{n,0}, h_{n,0}, v_{n,0}$	amplitudes des composantes des potentiels, face d'entrée $x = 0$
$a_{n,L}, h_{n,L}, v_{n,L}$	amplitudes des composantes des potentiels, face de sortie $x = L$
$[\mathbf{R}^D]$	matrice de réflexion incluant les effets dissipatifs
$[\mathbf{T}^D]$	matrice de transmission incluant les effets dissipatifs
$[\mathbf{S}^D]$	matrice de diffusion incluant les effets dissipatifs
$\phi_{a,ext}$	potentiel acoustique extérieur imposé
$\phi_{h,ext}$	potentiel entropique extérieur imposé
ψ_{ext}	potentiel tourbillonnaire extérieur imposé
$\phi_{aa}, \phi_{ha}, \psi_a$	potentiels créés par la présence d'un potentiel acoustique extérieur
$\phi_{ah}, \phi_{hh}, \psi_h$	potentiels créés par la présence d'un potentiel entropique extérieur
$\phi_{av}, \phi_{hv}, \psi_v$	potentiels créés par la présence d'un potentiel potentiel tourbillonnaire extérieur
m, p	indices de sommation
b	désigne soit a pour acoustique, h pour entropique et v pour tourbillonnaire
$\sigma_m(K)$	série infinie de fonction de Hankel d'ordre m et d'argument K , réel ou complexe
$[\mathbf{D}]$	matrice des coefficients de diffusion
$[\mathbf{F}]$	matrice contenant les séries σ

Chapitre 6

λ	longueur d'onde associée à l'onde acoustique
c_θ	vitesse de phase complexe dans le cristal phononique, reliée au nombre d'onde de Bloch

Introduction générale

L'étude de la propagation et de l'absorption d'ondes acoustiques dans les matériaux poreux est un enjeu majeur notamment pour leurs applications dans la lutte contre les nuisances sonores. Ces matériaux sont composés de deux phases : une structure solide entourée d'un fluide saturant. La structure solide peut être continue (comme par exemple les mousses plastiques) ou discontinue (cas des matériaux fibreux). Lorsque la structure est immobile, la propagation des ondes acoustiques s'effectue dans les pores du matériau et est décrite par le modèle de "fluide équivalent" introduit par Johnson [28]. Les pores du matériau sont, dans ce cas, le siège d'importants effets dissipatifs liés à des frottements visqueux [27] d'une part, et à des échanges thermiques [13, 36] d'autre part. La description par ce modèle nécessite la connaissance d'un certain nombre de paramètres dont la détermination constitue la caractérisation du matériau [6]. Si la structure est mise en mouvement, la propagation s'effectue dans les pores et dans la structure du matériau. Dans ce second cas, des effets associés à la déformation du squelette viennent s'ajouter aux effets précédemment cités. La propagation est alors décrite par le modèle de Biot [7, 8].

Les effets visco-thermiques mentionnés précédemment se produisent aux grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire, lorsque la longueur d'onde acoustique est très grande devant la dimension caractéristique du matériau considéré (correspondant à un volume d'homogénéisation à l'échelle duquel les propriétés géométriques du matériau sont invariants par translation). L'hypothèse de grande longueur d'onde, illustrée sur la figure 1 (a), est une condition d'utilisation des modèles décrivant la propagation dans les matériaux poreux. Lorsque la longueur d'onde diminue, et devient comparable à la dimension caractéristique du matériau, des effets de diffusion multiple émergent. Dans cette configuration, illustrée par la figure 1 (b), les modèles classiques cités précédemment (issus de la théorie de l'homogénéisation) ne sont plus capables de décrire la propagation correctement. Les méthodes acoustiques de caractérisation doivent donc être appliquées dans des domaines de fréquences suffisamment éloignés du domaine d'émergence des effets de diffusion multiple.

La difficulté de la prise en compte des effets de diffusion multiple dans les modèles classiques provient de la complexité de la microstructure des matériaux poreux (observable sur la figure 1 (b)). Cependant, pour des géométries simples, ces effets de diffusion multiple sont parfaitement considérés. C'est le cas des systèmes à structures périodiques appelés "cristaux phononiques". Dans ces cristaux, et dans un régime de hautes fréquences, les effets de diffusion multiple se traduisent par l'apparition de domaines fréquentiels dans lesquels aucune onde acoustique ne peut se propager (bandes interdites). La prédiction de l'existence, et auquel cas des positions, de ces bandes interdites a suscité un grand intérêt pour différentes géométries et matériaux à deux dimensions [34, 35, 66]

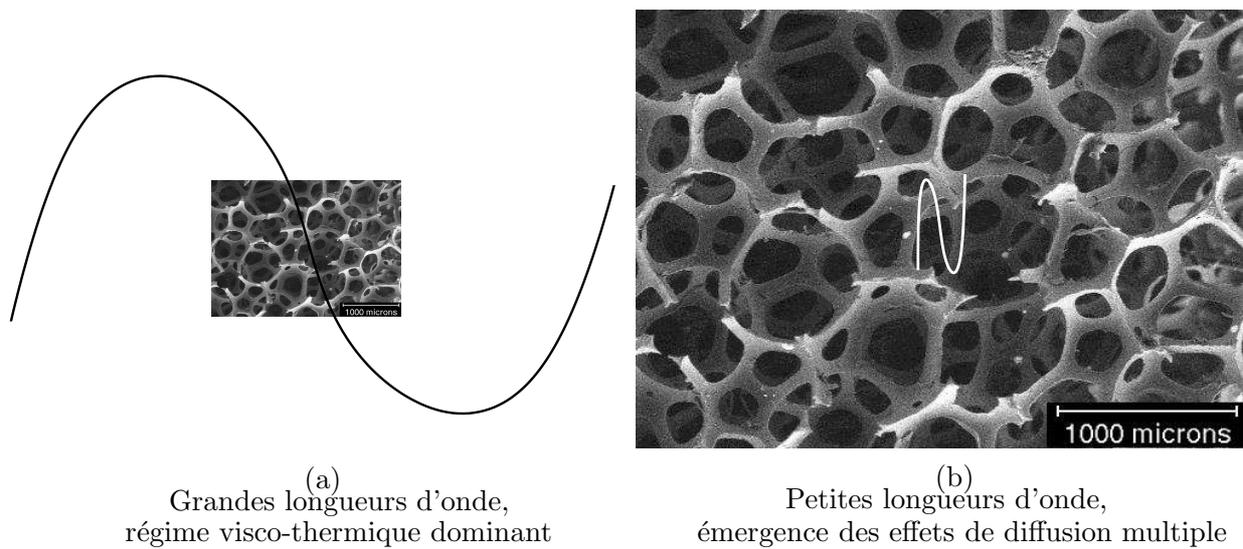


FIG. 1 – Représentation d'un matériau poreux (mousse plastique, photo prise par Frank PARIS, Centre de Transfert et Technologie du Mans). La figure (a) correspond à un régime où la longueur d'onde acoustique est très grande devant les dimensions caractéristiques du matériau. Dans ce cas, les effets visco-thermiques sont prédominants et le comportement du matériau est décrit par les modèles classiques (homogénéisation). La figure (b) illustre un régime où la longueur d'onde acoustique est comparable aux dimensions du matériau. Dans ce second cas, des effets de diffusion multiple interviennent et sont difficiles à intégrer dans les modèles.

et à trois dimensions [57]. Bien que les effets de diffusion multiple soient bien intégrés, très peu d'études [25, 53, 58] considèrent les effets visco-thermiques ayant lieu au cours de la propagation.

Ce travail de thèse a pour objectif l'étude conjointe des effets visco-thermiques et de diffusion multiple pour une géométrie à deux dimensions simple représentée sur les figures 2 (a) et (b). Cette géométrie représente un cristal phononique constitué de cylindres rigides entourés d'air. Aux grandes longueurs d'onde (figure 2 (a)), la propagation est régie par les modèles classiques en considérant les effets visco-thermiques. Une étude basée sur une méthode de calcul par éléments finis a déjà été réalisée par Cortis [17] dans ce cadre. Aux petites longueurs d'onde (figure 2 (b)), la propagation est décrite par des modèles de diffusion multiple négligeant les effets dissipatifs.

L'objectif du travail présenté est dans un premier temps, de caractériser l'importance des effets visco-thermiques qui ont lieu dans un régime de diffusion multiple (petites longueurs d'onde). Dans un second temps, une analyse de la transition entre un régime exclusivement visco-thermique (très grandes longueurs d'onde) et l'émergence des effets de diffusion multiple est proposée. Ce second point permet de mettre en évidence la limite des modèles existants. La démarche adoptée dans ce document se décompose en deux parties.

Dans une première partie, l'intérêt est porté sur l'étude du comportement du cristal phononique à deux dimensions représenté sur la figure 2 (b) en fluide parfait (i.e. non dissipatif). Plus précisément, le premier chapitre rappelle la méthode de décomposition en ondes planes. Celle-ci donne accès aux bandes interdites éventuelles pour un cristal infini. Le chapitre 2 présente un autre modèle de

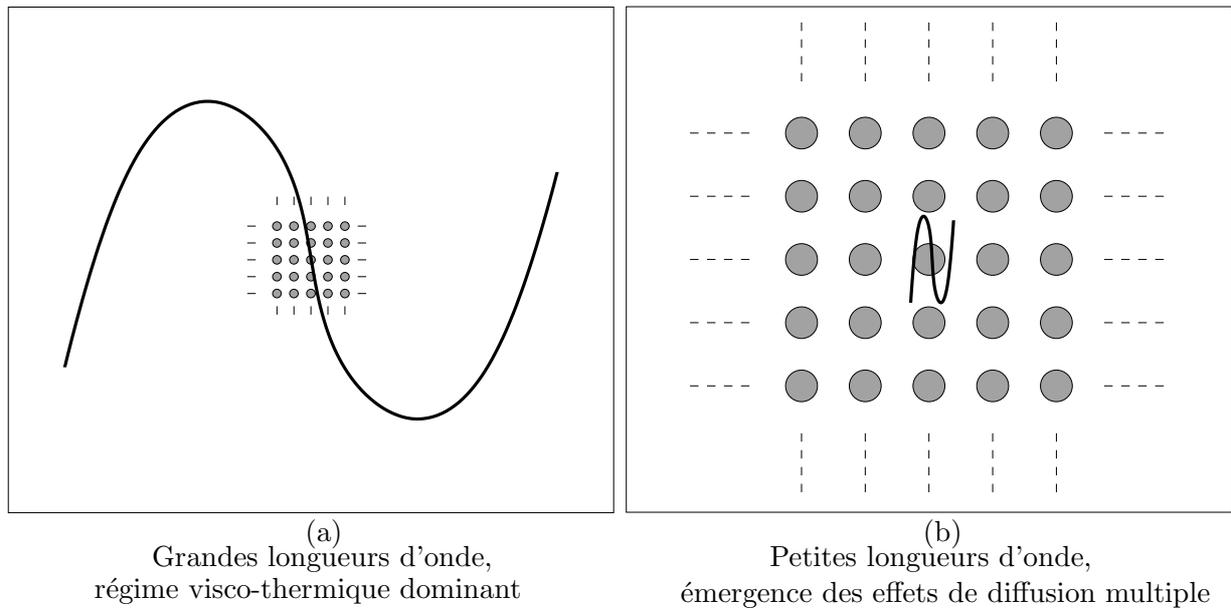


FIG. 2 – Représentation d'un matériau poreux particulier : cristal phononique à deux dimensions. La figure (a) correspond à un régime où la longueur d'onde acoustique est très grande devant les dimensions caractéristiques du matériau. Dans ce cas, les effets visco-thermiques prédominants sont considérés par les modèles classiques (homogénéisation). La figure (b) illustre un régime où la longueur d'onde acoustique est comparable aux dimensions du matériau. Dans ce cas, les effets de diffusion multiple se traduisent notamment par la présence (possible) de bandes interdites. Ces effets sont pris en compte par des modèles de diffusion multiple.

diffusion multiple permettant également de prédire l'existence de ces bandes interdites. En outre, cette deuxième méthode donne accès aux propriétés d'un système fini composé d'une succession de rangées infinies de cylindres. Par ailleurs, ce modèle peut être étendu au problème de la propagation en fluide dissipatif qui fait l'objet de la seconde partie du document. Dans le chapitre 3, une validation des deux méthodes de calcul est proposée : d'une part, en effectuant des comparaisons avec des résultats expérimentaux et d'autre part, en analysant la limite asymptotique aux grandes longueurs d'onde de ces modèles de diffusion multiple. Cette limite doit correspondre à la limite petite longueur d'onde des modèles classiques issus de la théorie de l'homogénéisation. A la fin de ce troisième chapitre, une première problématique concernant l'importance des effets dissipatifs dans un régime de diffusion multiple est soulevée. Une seconde problématique, plus fondamentale, sur la transition entre un régime visco-thermique et l'émergence des effets de diffusion multiple est posée.

La seconde partie du document traite du comportement du même cristal phononique entouré d'un fluide dissipatif. Dans le chapitre 4, des effets visco-thermiques localisés à la frontière des cylindres (faibles dissipation) constituant le cristal sont introduits et conduisent à une première extension du modèle présenté dans le chapitre 2. Cette introduction est réalisée par l'intermédiaire d'un concept d'admittance de surface déjà utilisé dans le cadre de travaux sur des réseaux aléatoires par Tournat et coll. [62]. Des prédictions théoriques et des résultats expérimentaux sont présentés et permettent d'analyser l'efficacité de ce concept. Le chapitre 5 présente une seconde extension du modèle présenté

dans le chapitre 2. Dans cette seconde extension, les effets visco-thermiques ne sont plus nécessairement locaux mais considérés en tout point du fluide entourant (effets dissipatifs importants). Les résultats de ce dernier modèle sont comparés d'une part, aux résultats obtenus par Cortis [17] dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation et d'autre part, aux résultats des modèles de diffusion multiple en fluide parfait et en considérant le concept d'admittance, au cours du chapitre 6. Les comparaisons effectuées permettent d'analyser la transition entre un régime basse fréquence régie par des effets visco-thermiques et haute fréquence accompagnée par des effets de diffusion multiple. Cette analyse donne la limite de validité des modèles existants et montre l'importance des effets en fonction de la longueur d'onde associée à une onde acoustique se propageant dans le cristal phononique considéré.

Première partie

**Diffusion multiple en fluide non
dissipatif**

Introduction

L'objet de cette première partie est d'étudier les caractéristiques de propagation d'une onde acoustique dans un cristal phononique à deux dimensions (x, y) . Ce cristal est constitué de cylindres rigides disposés en réseau périodique carré et entourés d'un fluide parfait. La propagation d'une onde acoustique longitudinale dans un tel système s'effectue donc sans dissipation par effets visco-thermiques.

Une onde acoustique incidente sur un cylindre est partiellement réémise dans toutes les directions par effet de diffusion. Dans le cas plus général, étudié ici, d'un système composé de plusieurs cylindres, ces derniers réémettent tous des ondes acoustiques dans toutes les directions. Dans cette première partie, seuls ces effets de diffusion multiple sont pris en compte dans la description de la propagation d'une onde acoustique dans le cristal. La géométrie du cristal à deux dimensions est présentée sur la figure 3. Elle fait intervenir comme seuls paramètres le rayon R des cylindres et le paramètre de maille L du réseau.

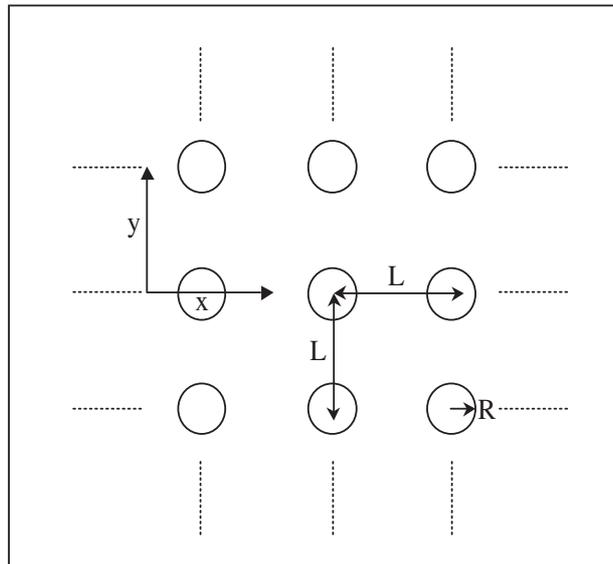


FIG. 3 – *Cristal phononique à deux dimensions constitué d'un ensemble de cylindres disposés en réseau périodique carré. La géométrie de ce cristal est entièrement définie par le rayon R des cylindres et le paramètre de maille L du réseau.*

Des études antérieures [34] et plus récentes [68, 41] montrent qu'une particularité de ce type de cristaux est qu'ils peuvent présenter des domaines fréquentiels dans lesquels aucune onde acoustique

ne peut se propager. Ces domaines sont appelés "bandes interdites". Lorsque la propagation est prohibée quelque soit l'angle d'incidence, les domaines sont appelés "bandes interdites totales". La prédiction de ces bandes a suscité un grand intérêt pour la configuration proposée [33, 56, 67] mais aussi pour d'autres configurations dans les domaines de l'acoustique (cristaux phononiques) et de l'électromagnétisme (cristaux photoniques). Ainsi, plusieurs méthodes numériques permettant ces prédictions ont été développées dans le domaine fréquentiel : la méthode de décomposition en ondes planes donnent les bandes interdites et les champs dans une cellule élémentaire d'un réseau infini de géométrie donnée. Cette méthode a été largement utilisée pour déterminer les bandes interdites présentées par des cristaux photoniques de différentes natures (i.e. milieux divers) [45, 70, 42, 71, 72]. La détermination des propriétés de cristaux phononiques a également suscité un grand intérêt [30, 32, 69].

Une autre méthode utilisant les séries de Schlömilch introduites par Twersky [63, 64], permet également de déterminer ces bandes interdites et ces champs [38]. Parallèlement, une méthode numérique permettant de résoudre ce problème existe aussi dans le domaine temporel ; c'est la méthode de différence finie [59] utilisée également pour les cas acoustique [20, 31] et électromagnétique [23, 48, 60]. Cette dernière consiste à déterminer le champ en tout point de l'espace et différents instants, en discrétisant l'équation de propagation d'une onde dans un cristal phononique (acoustique) ou photonique (électromagnétisme). Un état de l'art sur les différentes méthodes et géométries étudiées est présenté dans [65].

Le travail qui suit porte sur l'étude de la propagation d'une onde acoustique longitudinale en incidence normale sur un cristal phononique constitué de cylindres rigides entourés d'un fluide parfait. Le premier chapitre consiste en un rappel de la méthode classique de décomposition en ondes planes qui permet de déterminer les bandes interdites associées à un cristal phononique de géométrie fixée. Le chapitre suivant présente une autre méthode faisant intervenir les séries de Schlömilch. Cette méthode offre l'avantage de pouvoir être étendue simplement, d'un point de vue formel, à la propagation d'une onde acoustique en fluide dissipatif. Ce travail fait l'objet de la seconde partie de ce document. Dans ce deuxième chapitre, les propriétés de réflexion et de transmission d'un nombre fini de rangées infinies de cylindres (ou réseaux linéaires [54]) seront également mises en évidence. Une analyse des temps de calcul et des caractéristiques de convergence des résultats est réalisée en appliquant ces deux méthodes à un échantillon fictif. Le troisième chapitre est consacré à la validation des résultats obtenus par ces deux méthodes numériques. Dans un premier temps, une comparaison entre les résultats issus des deux simulations numériques et des mesures expérimentales sur des échantillons est proposée. Une deuxième comparaison entre ces mêmes simulations et des données existantes dans la littérature vient appuyer la validité de ces deux modèles. La limite de validité des résultats issus de ces calculs et le problème de la prise en compte des effets visco-thermiques sont discutés à la fin de cette première partie.

Chapitre 1

Méthode de décomposition en ondes planes

La détermination des domaines de fréquences pour lesquels un cristal photonique ou phononique est passant ou non, a suscité un grand intérêt au cours de ces dernières années. De nombreuses méthodes numériques permettant la prédiction du comportement de matériaux inhomogènes présentant un aspect périodique ont été développées. Dans le cadre de ce chapitre, un de ces outils numériques, consistant à décomposer en séries de Fourier spatiales l'équation du mouvement d'une onde acoustique longitudinale dans un cristal phononique particulier est rappelé. Ce cristal, dont la géométrie est représentée sur la figure 3, est constitué d'une infinité de cylindres rigides de rayon R et disposés en réseau périodique carré de paramètre de maille L . Ces cylindres sont entourés d'un fluide considéré comme parfait (i.e. les effets visco-thermiques ne sont pas pris en compte).

Dans un premier temps, les notions de réseau direct et réciproque permettant de décrire la géométrie du cristal sont définies. Elles autorisent, dans un deuxième temps, à réécrire l'équation du mouvement en termes de séries de Fourier spatiales. La méthode de résolution de cette dernière équation est discutée dans un troisième temps. Une étude de la convergence des résultats et de leurs temps de calcul est ensuite effectuée. La fin de ce chapitre est consacrée à une analyse des avantages et inconvénients de cet outil numérique.

1.1 Réseau direct et réseau réciproque

D'un point de vue géométrique, chaque élément du réseau illustré sur la figure 3 peut être représenté à l'aide de deux vecteurs de base \vec{d}_1 et \vec{d}_2 . De plus, le réseau considéré étant à géométrie carré, ces deux vecteurs définissent une base orthogonale dont les normes sont égales au paramètre de maille L ,

$$\|\vec{d}_1\| = \|\vec{d}_2\| = L . \quad (1.1)$$

Ces deux vecteurs de base sont représentés sur la figure 1.1. En fixant pour origine arbitraire le centre d'un cylindre, l'ensemble des positions des centres des cylindres est décrit par les vecteurs

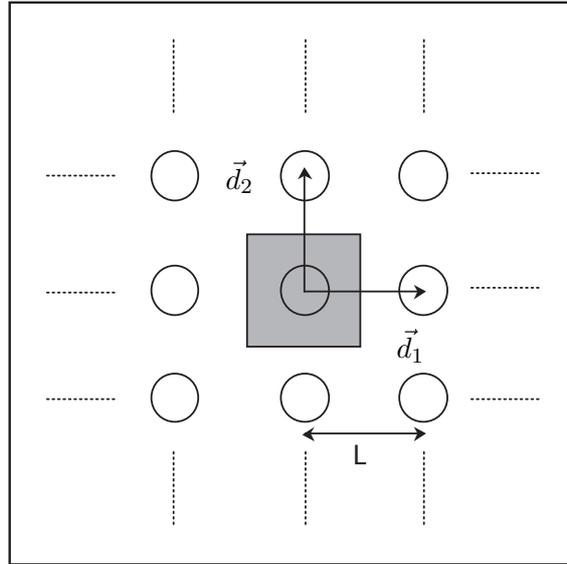


FIG. 1.1 – Vecteurs de base et maille élémentaire de Wigner-Seitz (zone grisée) dans le réseau direct.

\vec{D}_{l_1, l_2} du réseau direct. Ces vecteurs sont définis par la relation,

$$\vec{D}_{l_1, l_2} = l_1 \vec{d}_1 + l_2 \vec{d}_2, \quad (1.2)$$

où l_1 et l_2 sont des entiers relatifs. Les vecteurs \vec{D} désignent les positions du centre des cylindres dans le réseau direct.

Pour décrire totalement ce réseau direct, il suffit de connaître la géométrie complète d'une maille élémentaire. A partir de celle-ci, l'ensemble du réseau est décrit par l'intermédiaire de la relation (1.2). Un exemple de maille élémentaire est représenté en zone grisée sur la figure 1.1.

A tout réseau direct est associé un réseau réciproque également décrit par deux vecteurs de base \vec{r}_1 et \vec{r}_2 définis d'après la propriété suivante,

$$\vec{d}_i \cdot \vec{r}_j = \delta_{i,j}, \quad (1.3)$$

où $\delta_{i,j}$ représente le symbole de Kronecker et les entiers i et j prennent chacun les valeurs 1 ou 2. La norme de ces vecteurs vérifie la relation,

$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = \frac{1}{L}. \quad (1.4)$$

Ces deux vecteurs de base sont représentés sur la figure 1.2. Pour le cas particulier du réseau carré, les deux vecteurs de base du réseau réciproque \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont respectivement colinéaires aux vecteurs de base du réseau direct \vec{d}_1 et \vec{d}_2 . L'ensemble des points du réseau réciproque est décrit par les vecteurs \vec{R}_{m_1, m_2} définis par la relation,

$$\vec{R}_{m_1, m_2} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2, \quad (1.5)$$

où m_1 et m_2 sont des entiers relatifs. Dans le réseau réciproque, ces vecteurs \vec{R} désignent des directions de propagation. La plus petite cellule élémentaire permettant de décrire ce réseau réciproque

est appelé "première zone de Brillouin" [9]. Cette zone est délimitée par le contour ΓXM représenté sur la figure 1.2. En incidence normale, l'onde acoustique se propage suivant l'axe Ox , c'est-à-dire, suivant l'axe ΓX du contour de Brillouin. Pour des raisons de commodité, dans la suite, l'ensemble

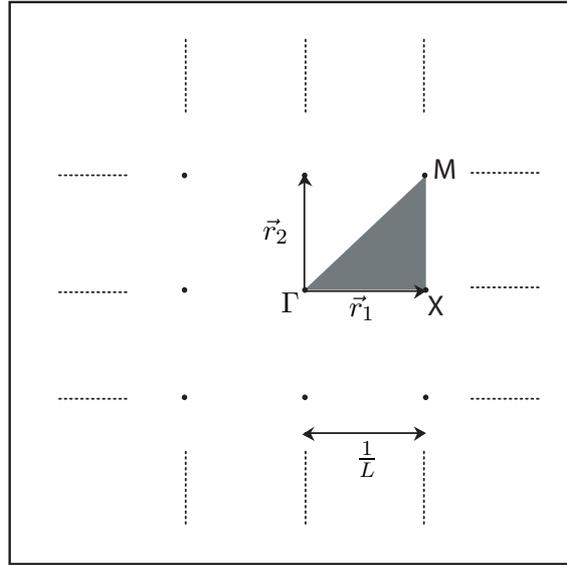


FIG. 1.2 – Vecteurs de base et première zone de Brillouin dans le réseau réciproque. Le contour de cette zone définit toutes les directions possibles de propagation. L'incidence normale d'une onde acoustique selon l'axe Ox est décrite par l'axe ΓX .

des points du réseau réciproque est décrit par les vecteurs \vec{G}_{m_1, m_2} définis par la relation,

$$\vec{G}_{m_1, m_2} = 2\pi m_1 \vec{r}_1 + 2\pi m_2 \vec{r}_2 . \quad (1.6)$$

Ceci permet de rendre les grandeurs mesurées dans le réseau réciproque (décrivant des directions de propagation) homogène à des nombres d'onde (i.e. $[\text{rad.m}^{-1}]$).

1.2 Position du problème

Le cristal phononique à deux dimensions représenté sur la figure 3 est un système inhomogène dont les caractéristiques géométriques sont le rayon R des cylindres et le paramètre de maille L . Le comportement de ce cristal soumis à une onde acoustique dépend d'une part, de ces deux grandeurs géométriques et d'autre part, de la nature des cylindres et du fluide entourant ces derniers. Dans l'étude qui suit, les cylindres sont supposés parfaitement rigides et le fluide est supposé parfait (i.e. l'onde acoustique se propage uniquement dans le fluide parfait sans effets dissipatifs). Ce cristal peut être considéré comme un milieu unique dont les masse volumique $\rho(\vec{r})$, célérité $c(\vec{r})$ et module d'élasticité $\chi(\vec{r})$ prennent tous trois des valeurs différentes suivant que le vecteur \vec{r} pointe un cylindre ou une région du fluide interstitiel. Dans le fluide, ils prennent les valeurs ρ_0 pour la masse volumique, c_0 pour la célérité, χ_0 pour le module d'élasticité, et la célérité est définie par la relation : $c_0^2 = \rho_0 / \chi_0$. Dans les cylindres, où aucune onde n'est censée se propager puisqu'ils sont supposés parfaitement rigides, les masse volumique et célérité sont infinies et le module d'élasticité nul.

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r}, t)$, associé à la propagation d'une onde acoustique longitudinale dans le fluide parfait entourant les cylindres, obéit à l'équation du mouvement suivante [37] :

$$\rho(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}} [\rho(\vec{r}) c^2(\vec{r}) \text{div} \vec{u}(\vec{r}, t)] , \quad (1.7)$$

où seul le champ de déplacement \vec{u} est dépendant du temps. Le gradient s'applique aux grandeurs dépendantes de l'espace. Le champ de déplacement longitudinal, étant à rotationnel nul, dérive d'un potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ suivant la forme,

$$\rho(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t) . \quad (1.8)$$

L'équation du mouvement (1.7) s'écrit alors,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\rho(\vec{r}) c^2(\vec{r}) \text{div} \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t) \right) \right) , \quad (1.9)$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\frac{1}{\rho(\vec{r}) c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \text{div} \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}, t) \right)} . \quad (1.10)$$

Les solutions $\phi(\vec{r}, t)$ de cette équation sont reliées au champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r}, t)$ par l'intermédiaire de la relation (1.8). Leur détermination conduit donc à celle des champs acoustiques pouvant se propager dans le cristal. De ce fait, la résolution de cette équation donne aussi les champs acoustiques correspondant aux bandes interdites d'un cristal phononique de géométrie fixée. L'objet du paragraphe suivant est de résoudre cette équation en utilisant la méthode de décomposition en ondes planes.

1.3 Résolution par la méthode de décomposition en ondes planes

1.3.1 Séparation des variables

Le problème est traité en régime harmonique avec la convention $e^{-i\omega t}$. Dans ce régime, la dépendance temporelle du potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ est portée par l'exponentielle complexe $e^{-i\omega t}$, ce qui permet de séparer la variable spatiale (\vec{r}) de la variable temporelle (t),

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\omega t} , \quad (1.11)$$

où ω est la pulsation de l'onde acoustique. L'équation du mouvement (1.10) associée au potentiel scalaire ϕ devient,

$$-\frac{\omega^2}{\rho(\vec{r}) c^2(\vec{r})} \phi(\vec{r}) = \text{div} \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{r}) \right) . \quad (1.12)$$

Le problème consiste alors à déterminer les potentiels $\phi(\vec{r})$ solutions de l'équation (1.12).

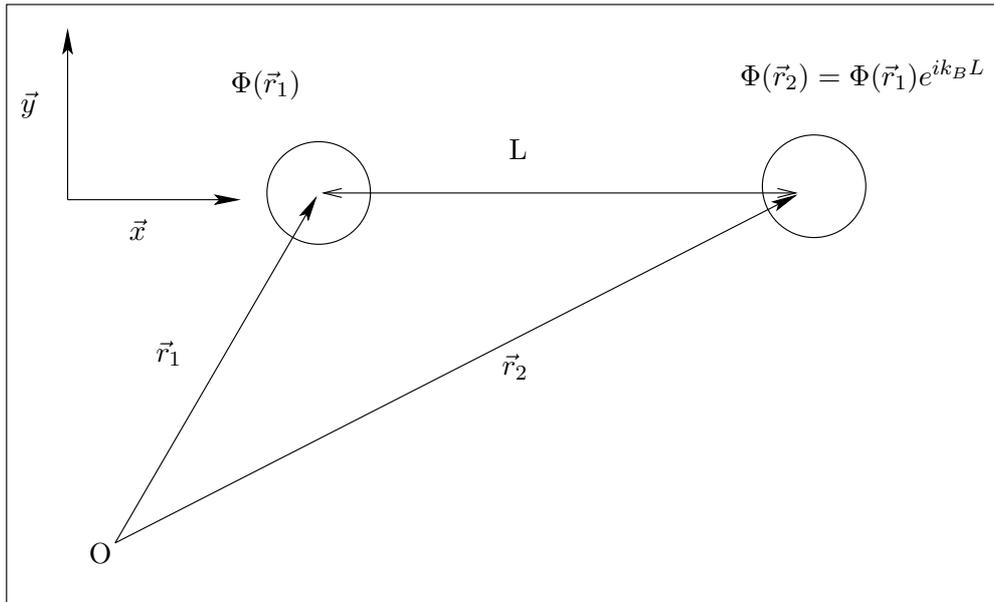


FIG. 1.3 – Illustration d’une conséquence du théorème de Bloch. Le passage d’un point du réseau à un autre espacé d’une maille se traduit par un déphasage de $e^{ik_B L}$.

1.3.2 Théorème de Bloch

Le réseau étant périodique, les potentiels scalaires $\phi(\vec{r})$ sont des fonctions de Bloch [9] définies par la relation,

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{\vec{k}_B}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_B \cdot \vec{r}}, \quad (1.13)$$

où les \vec{k}_B sont les nombres d’onde de Bloch à déterminer correspondants aux constantes de propagation. La fonction $\phi_{\vec{k}_B}(\vec{r})$ est une fonction de période L dans la direction Ox . Cette propriété, illustrée par la figure 1.3, indique que le passage d’une maille à une autre du réseau est entièrement décrit par un facteur d’amplitude porté par la fonction exponentielle apparaissant dans la relation ci-dessus. De plus, les fonctions masse volumique $\rho(\vec{r})$, célérité $c(\vec{r})$ et module d’élasticité $\chi(\vec{r})$ possèdent la même périodicité que les fonctions $\phi_{\vec{k}_B}(\vec{r})$. De ce fait, les fonctions $\frac{1}{\rho(\vec{r})}$ et $\frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})}$ qui apparaissent dans l’équation du mouvement (1.12) satisfont elles aussi cette propriété. L’équation du mouvement fait donc apparaître un ensemble de fonctions ayant toutes la même périodicité. Dans ce cas, et conformément à la méthode de décomposition en ondes planes [34], il est possible de développer toutes ces fonctions en séries de Fourier spatiales.

1.3.3 Décomposition en séries de Fourier spatiales

La décomposition en séries de Fourier spatiales des fonctions périodiques apparaissant dans l’équation du mouvement (1.12) se fait sur la base orthogonale des vecteurs \vec{G} du réseau réciproque (définis

par la relation (1.6)),

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\vec{k}_B}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \\ \frac{1}{\rho(\vec{r})} = \sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \\ \frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})} = \sum_{\vec{G}} C(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \end{array} \right. , \quad (1.14)$$

où les coefficients de Fourier $P(\vec{G})$ et $C(\vec{G})$ dans les séries sont connus et s'écrivent,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{G}) = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{\rho(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} \end{array} \right. , \quad (1.15)$$

avec A l'aire d'une cellule élémentaire. Le calcul explicite de ces deux fonctions, détaillé dans l'annexe A, donne pour $\vec{G} = \vec{0}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\pi R^2}{L^2}\right) \\ C(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left(1 - \frac{\pi R^2}{L^2}\right) \end{array} \right. , \quad (1.16)$$

et, pour tout $\vec{G} \neq \vec{0}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{G}) = -\frac{1}{\rho_0} F(\vec{G}) \\ C(\vec{G}) = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} F(\vec{G}) \end{array} \right. , \quad (1.17)$$

où la fonction $F(\vec{G})$ est définie par la relation,

$$F(\vec{G}) = 2 \frac{\pi R^2}{L^2} \frac{J_1(GR)}{GR} , \quad (1.18)$$

avec G , la norme du vecteur \vec{G} et J_1 , la fonction de Bessel d'ordre un.

L'utilisation conjointe du théorème de Bloch (1.13) et de la décomposition en ondes planes (1.14) permet de décomposer le potentiel scalaire recherché sous la forme d'une série d'ondes planes,

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G})\cdot\vec{r}} . \quad (1.19)$$

Une réécriture complète de l'équation du mouvement (1.12) dans le domaine défini par les vecteurs \vec{G} du réseau réciproque, sous la condition de Bloch, est effectuée dans le paragraphe suivant.

1.3.4 Solutions de l'équation du mouvement

Les fonctions $\phi(\vec{r})$, $\frac{1}{\rho(\vec{r})}$ et $\frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})}$ intervenant dans l'équation (1.12) sont remplacées par leurs décompositions en séries de Fourier spatiales données par les relations (1.14) et (1.19). Dans le réseau réciproque, l'équation du mouvement (1.12) prend la forme suivante,

$$-\omega^2 \left(\sum_{\vec{G}} C(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \right) \left(\sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) = \operatorname{div} \left[\left(\sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \right) \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) \right]. \quad (1.20)$$

L'application des opérateurs divergence et gradient dans l'équation ci-dessus, réalisée dans l'annexe B, conduit à l'équation,

$$\boxed{P(\vec{G}' - \vec{G}) (\vec{k}_B + \vec{G}') \cdot (\vec{k}_B + \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) = \omega^2 C(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G})}, \quad (1.21)$$

où \vec{G} et \vec{G}' sont des vecteurs du réseau réciproque. Il s'agit d'un problème aux valeurs propres. Les valeurs propres sont associées aux solutions de l'équation de dispersion donnant les nombres d'onde de Bloch recherchés. Les vecteurs propres correspondent à la forme des potentiels scalaires reliés à l'expression du champ de déplacement dans le réseau. Les solutions sont obtenues en fixant un nombre d'onde k_B et en recherchant les différentes pulsations ω solutions de l'équation. Ainsi, la résolution de ce problème donne accès aux bandes interdites éventuelles : celles-ci sont définies par les pulsations ω pour lesquelles il n'existe pas de nombre d'onde de Bloch k_B .

D'un point de vue numérique, une troncature est effectuée sur les séries qui font intervenir les vecteurs \vec{G} et \vec{G}' du réseau réciproque. Cette troncature conduit à des sommes finies sur un nombre N d'ondes planes dont l'influence sur les résultats obtenus est discutée dans la section suivante au travers d'un exemple de calcul.

1.4 Résultats et temps de calcul

Le problème aux valeurs propres (1.21) est résolu numériquement pour une géométrie fixée (i.e. les paramètres R et L sont fixés). Les solutions correspondent d'une part, aux fréquences $f = \frac{\omega}{2\pi}$ autorisées et d'autre part, au champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r})$ dans une cellule élémentaire du réseau. Dans un premier temps, un exemple de résultat numérique est présenté. Une discussion sur la précision des résultats et les temps de calcul nécessaires en fonction du nombre N d'ondes planes considéré est ensuite proposée.

Exemple de résultat

L'ensemble des vecteurs \vec{k}_B appartenant au contour ΓXM de la zone de Brillouin décrit toutes les directions de propagation. Pour chacune de ces directions, il existe des fréquences f autorisées qui sont solutions du problème aux valeurs propres. En utilisant 169 ondes planes, ce problème est résolu

pour une géométrie fixée par $R = 1 \text{ mm}$ et $L = 3 \text{ mm}$ (dans l'air). Le diagramme de bandes ainsi obtenu, représentant la fonction $f(\vec{k}_B)$, est présenté sur la figure 1.4. Les bandes interdites totales (i.e. propagation interdite quelque soit l'angle d'incidence) sont définies par les domaines fréquentiels dans lesquels aucun vecteur \vec{k}_B n'existe.

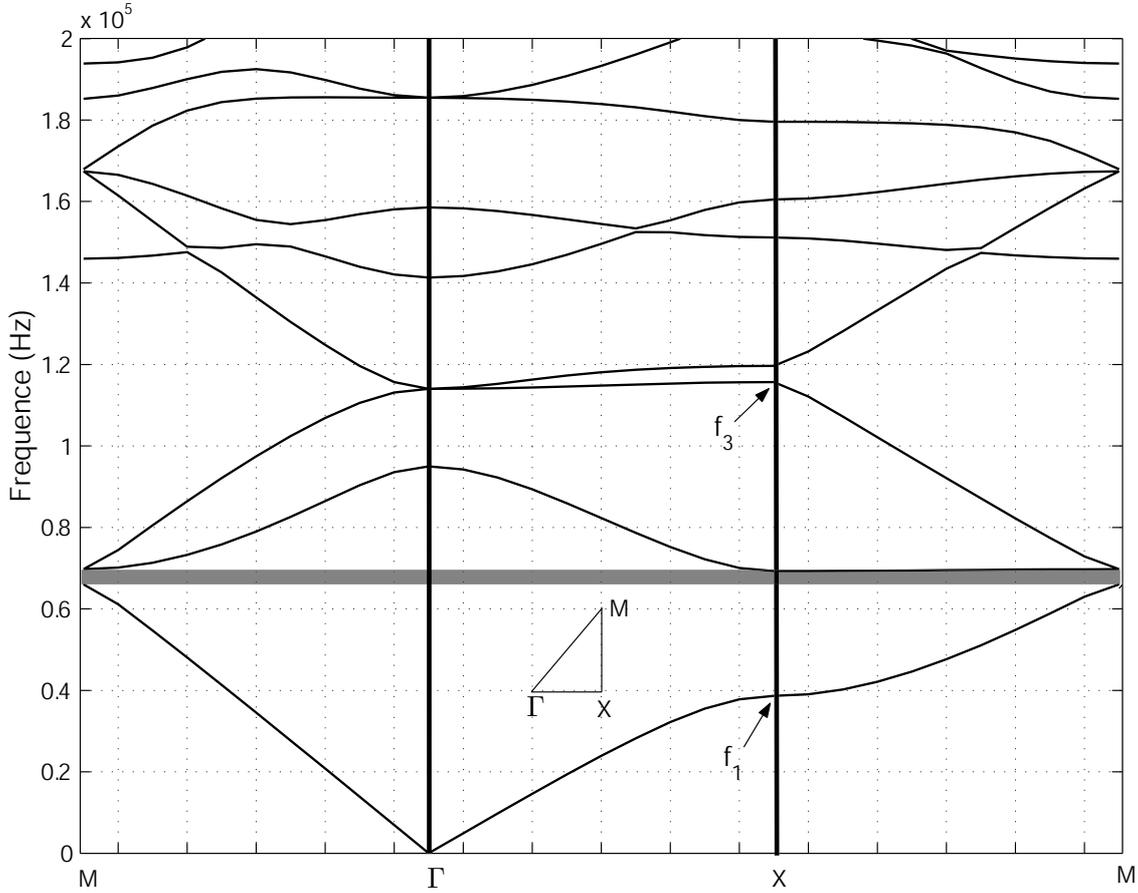


FIG. 1.4 – Diagramme de bandes représentant la fonction $f(\vec{k}_B)$. Le vecteur \vec{k}_B décrit le contour ΓXM de la zone de Brillouin (la direction ΓX correspond au cas de l'incidence normale). La bande interdite totale représentée en gris définit un domaine fréquentiel dans lequel aucun vecteur \vec{k}_B n'existe. Cette figure comporte 100 points obtenus pour 169 ondes planes en $t = 135 \text{ s}$.

Dans la suite du document, l'étude est restreinte au cas de l'incidence normale (direction ΓX du contour de la zone de Brillouin). Cette restriction permet une comparaison plus simple avec les résultats expérimentaux obtenus en incidence normale.

Étude de la convergence

Pour un même échantillon fictif de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et de paramètre de maille $L = 3 \text{ mm}$, l'évolution de deux fréquences f_1 et f_3 (représentées sur la figure 1.4) autorisées en fonction du nombre d'ondes planes considéré est observée. Ces deux fréquences correspondent à un nombre d'onde de Bloch $\vec{k}_B = \vec{\Gamma X}$ fixé. Les résultats et temps de calcul nécessaires sont reportés dans le tableau 1.1 et la figure 1.5 associée.

Nombre d'ondes planes	49	81	121	169	225	289	361
Temps de calcul [s]	6	24	63	135	300	639	1178
$f_1(\vec{k}_B = \vec{\Gamma X})$ [Hz]	39 692	38 661	38 659	38 659	38 657	38 657	38 657
$f_3(\vec{k}_B = \vec{\Gamma X})$ [Hz]	117 870	115 758	115 704	115 694	115 692	115 692	115 692

TAB. 1.1 – Temps de calcul nécessaires pour évaluer les fréquences autorisées en incidence normale et convergence des résultats obtenus pour les première et troisième fréquences associées à $\vec{k}_B = \vec{\Gamma X}$. La géométrie du réseau est fixée par $R = 1$ mm et $L = 3$ mm. La convergence des résultats est étudiée en fonction du nombre d'ondes planes N .

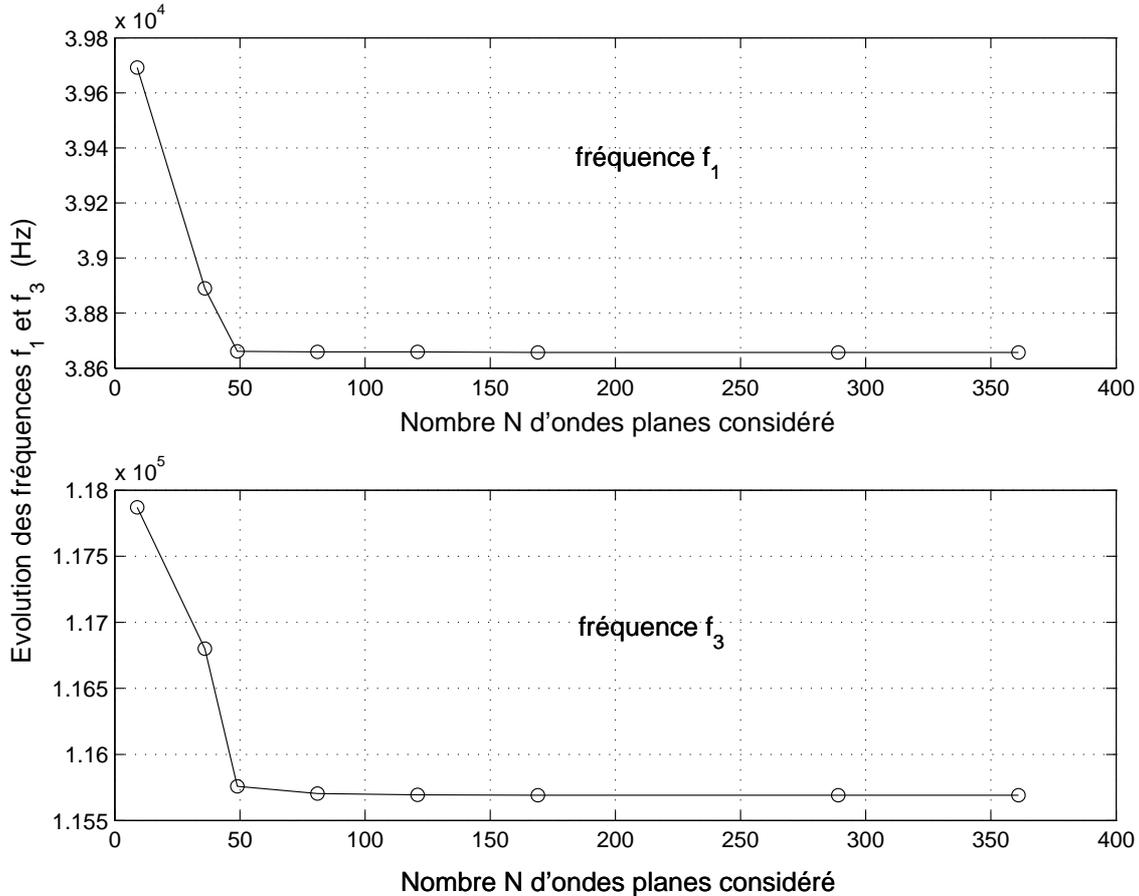


FIG. 1.5 – Evolution des fréquences f_1 et f_3 correspondantes aux deux premières solutions du problème aux valeurs propres (1.21) pour \vec{k}_B fixé tel que $\vec{k}_B = \vec{\Gamma X}$. Ces figures montrent la rapide convergence des deux fréquences en fonction du nombre N d'ondes planes considérés.

Les résultats obtenus (en terme de temps de calculs) dépendent fortement de la configuration matérielle et ne sont présentés que pour comparer les méthodes entre elles à titre d'information. La convergence des résultats est assurée pour 169 ondes planes. Le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r})$ correspondant à la fréquence $f_1(\vec{\Gamma X})$ pour 169 ondes planes est représenté sur la figure 1.6. Ce champ décrit la propagation d'une onde plane dans une cellule élémentaire du réseau. Les cylindres étant supposés parfaitement rigides, la propagation n'a lieu que dans le fluide entourant. Cette hypothèse

n'apparaît pas de manière explicite dans la formulation du problème (pas de conditions limites explicites) mais de manière implicite dans les décompositions en séries de Fourier spatiales (1.14). Les effets de ces décompositions font apparaître un phénomène de Gibbs [22]. Ce phénomène illustré sur la figure (1.7) correspond à la présence d'oscillations, liées à la décomposition en séries de Fourier des deux fonctions $\frac{1}{\rho(\vec{r})}$ et $\frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})}$. Les conséquences se traduisent par une imprécision sur l'évaluation du champ de déplacement à la frontière des cylindres : la composante tangentielle du champ tend vers zéro au lieu d'être maximale.

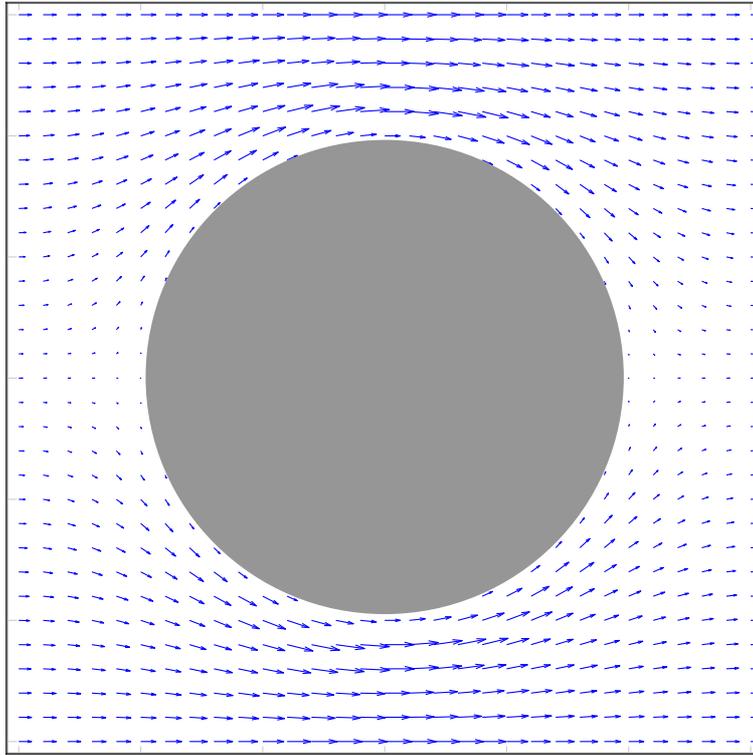


FIG. 1.6 – Représentation du champ de déplacement dans une cellule élémentaire. Le champ de déplacement tend vers zéro à la frontière entre le cylindre et le fluide au lieu de présenter une composante tangentielle maximale.

1.5 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode numérique simple et rapide permettant de prédire d'une part, l'existence et la position de bandes interdites et d'autre part, la forme du champ de déplacement dans une cellule élémentaire d'un réseau de cylindres. Pour une constante de propagation fixée k_B , la résolution du problème aux valeurs propres donne les fréquences autorisées dans le cristal. Le nombre de fréquences obtenues dépend du nombre d'ondes planes retenu.

Malgré une bonne convergence des résultats, des imprécisions sur les pulsations autorisées et sur la forme du champ de déplacement dans une cellule élémentaire sont inévitables. En effet, elles proviennent du phénomène de Gibbs apparaissant au voisinage de chaque cylindre et dû à l'absence

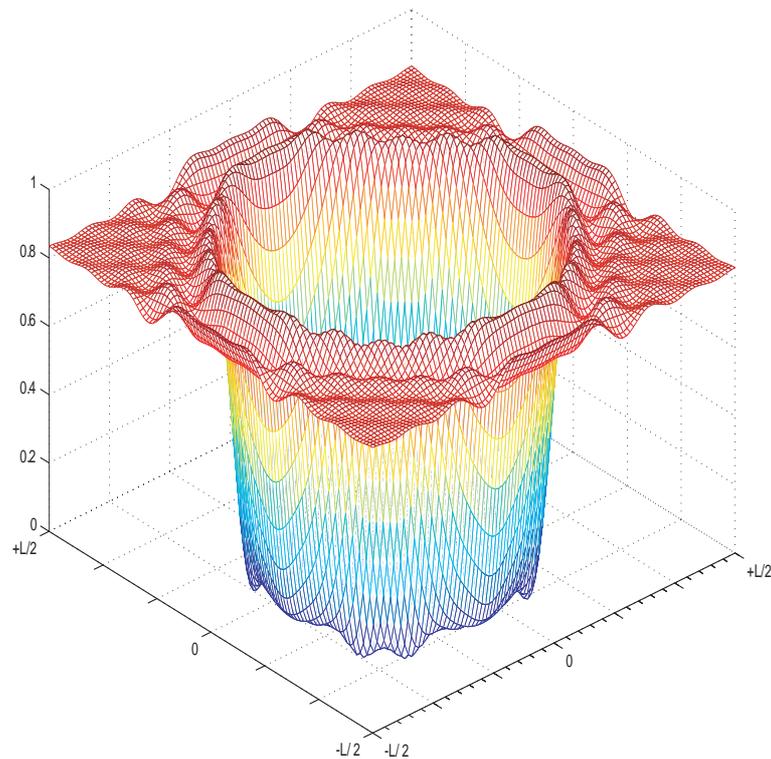


FIG. 1.7 – Représentation de la fonction $\frac{1}{\rho(\vec{r})}$ dans une cellule élémentaire. Le phénomène de Gibbs se traduit par l'apparition d'oscillations à la limite entre le cylindre et le fluide alors que la fonction devrait être constante par morceau. La valeur de la masse volumique de l'air est $\rho_0 = 1.2$ (soit $1/\rho_0 = 0.83$). La masse volumique des cylindres est supposée infinie (soit $1/\rho_c \rightarrow 0$).

de conditions aux limites explicites dans la formulation du problème. Cette concession a permis de considérer le milieu comme unique et, par la même occasion, de développer les fonctions le décrivant (masse volumique, module d'élasticité) en séries de Fourier spatiales.

Chapitre 2

Méthode utilisant les séries de Schlömilch

Ce chapitre présente une méthode numérique permettant de caractériser la propagation d'une onde acoustique au travers d'une rangée contenant une infinité de cylindres (réseau linéaire) parfaitement rigides entourés d'un fluide parfait (i.e pas de dissipation par effets visqueux et thermiques, seuls les effets de diffusion multiple sont pris en compte). La méthode utilisée dans le cadre de ce chapitre a déjà été introduite par différents auteurs [2, 14, 15, 24] pour cette même géométrie. Elle est présentée ici en introduction à la prise en compte des effets visco-thermiques. Dans la seconde partie du document, l'introduction de ces effets ne changera pas les étapes présentées ici.

Dans un premier temps, l'utilisation des séries de Schlömilch, introduites par Twersky [63, 64] et récemment étudiées par Linton [39, 40] et McPedran [43], permet de construire la matrice de diffusion du réseau linéaire et ainsi, de calculer les coefficients de réflexion et de transmission de ce réseau soumis à une onde acoustique. Dans un deuxième temps, une première extension est proposée pour le cas d'une onde acoustique traversant un nombre quelconque de réseaux linéaires (régulièrement espacés) et permet de prédire les coefficients de réflexion et de transmission associés à un tel système. L'introduction du théorème de Bloch [9] dans les calculs précédents donne une seconde extension vers un système composé d'une infinité de réseaux linéaires. Cette dernière étude correspond au cas du cristal phononique représenté sur la figure 3 et rejoint ainsi l'étude effectuée dans le cadre du premier chapitre. Comme dans le chapitre précédent, la fin de celui-ci est consacrée d'une part, à une étude sur la convergence des résultats et d'autre part, à une analyse des avantages et inconvénients de ce deuxième outil numérique.

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, le problème considéré est résolu en trois étapes : dans un premier temps, l'intérêt est porté sur la détermination des propriétés de réflexion et transmission d'une rangée contenant une infinité de cylindres. Un deuxième problème concernant ces mêmes propriétés mais pour une géométrie contenant plusieurs rangées de cylindres est ensuite étudié. Le troisième problème consiste

à déterminer les bandes interdites d'un cristal phononique, ce dernier étant interprété comme une superposition d'un nombre infini de rangées de cylindres. Ce dernier cas correspond à celui étudié dans le cadre du chapitre précédent. La géométrie de ces trois problèmes est représentée sur les figures 2.1 (a), (b) et (c) respectivement.

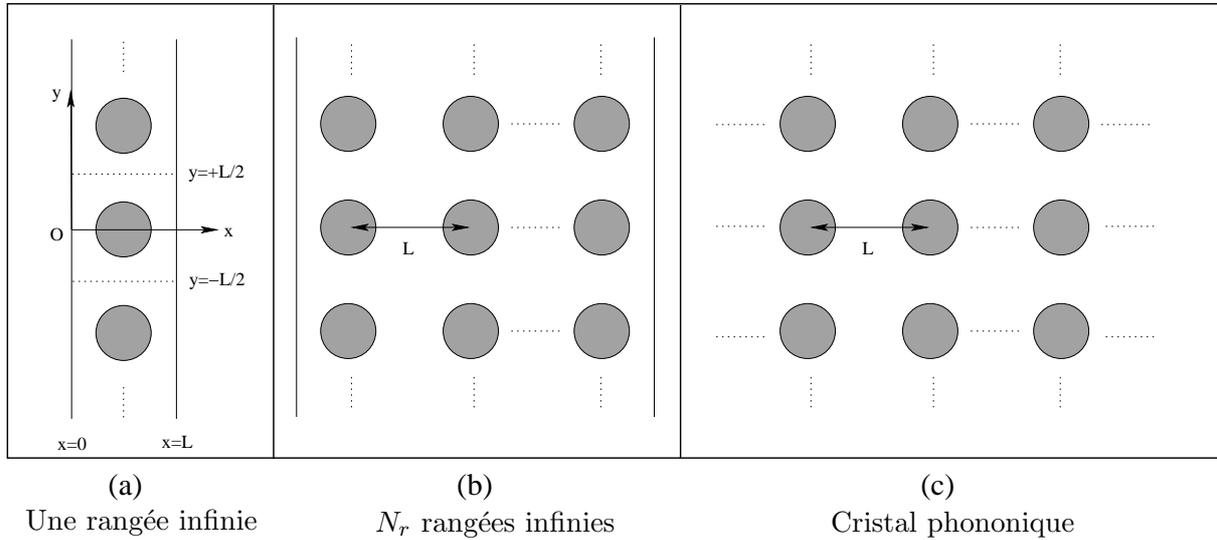


FIG. 2.1 – Illustration des trois problèmes considérés dans ce chapitre. Ces géométries sont caractérisées par le rayon R des cylindres et le paramètre de maille L . La figure (a) représente une rangée contenant une infinité de cylindres. La figure (b) illustre le problème de N_r rangées de cylindres. Enfin, le cristal phononique est représenté sur la figure (c).

Les cylindres, de rayon R , sont parfaitement rigides et le fluide entourant est considéré comme parfait (pas d'effets visqueux et thermiques). Le paramètre de maille séparant les centres de deux cylindres consécutifs est à nouveau noté L . Pour le cas d'une rangée (figure 2.1 (a)), la face d'entrée est située en $x = 0$ et la face de sortie en $x = L$.

La maille élémentaire est symétrique selon l'axe Ox . L'excitation considérée (onde plane de direction Ox) vérifiant aussi cette symétrie, cette dernière se reporte sur le champ de pression qui vérifie donc,

$$p_a(x, y, t) = p_a(x, -y, t) , \quad (2.1)$$

où t représente le temps. De plus, les cylindres étant périodiquement espacés de L selon l'axe Oy , le champ de pression possède cette même propriété,

$$p_a(x, y, t) = p_a(x, y + L, t) . \quad (2.2)$$

Dans la suite, l'expression de ce champ de pression acoustique est explicitée sur les faces d'entrée et de sortie de la rangée en régime harmonique (la convention $e^{-i\omega t}$ est adoptée). Pour ce faire, la matrice de diffusion associée à cette rangée est d'abord construite. Elle permet de prédire les ondes acoustiques entrantes et sortantes lorsqu'une excitation extérieure est imposée. Une extension permettant de caractériser les propriétés de réflexion et transmission pour le cas de N_r rangées est ensuite effectuée. Le cas du cristal phononique, s'interprétant comme une succession (infinie) de rangées de cylindres, est abordé dans une dernière partie.

2.2 Étude des propriétés d'une rangée infinie de cylindres

2.2.1 Expression du champ de pression acoustique sur les faces d'entrée et de sortie

Dans ce paragraphe, les champs de pression acoustique sont exprimés sur les faces d'entrée et de sortie de la rangée infinie de cylindres, représentée sur la figure 2.1 (a), par l'intermédiaire d'une décomposition en ondes planes.

2.2.1.1 Formulation générale

Le champ de pression acoustique $p_a(x, y)$ recherché obéit à l'équation de Helmholtz à deux dimensions [46],

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2)p_a(x, y) = 0, \quad (2.3)$$

où k est le nombre d'onde vérifiant la relation,

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (2.4)$$

avec ω la pulsation de l'onde acoustique et c la célérité dans le fluide. A cette équation de Helmholtz doivent être ajoutées les conditions limites aux frontières de chaque cylindre en $r = R$,

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (2.5)$$

traduisant leur immobilité.

2.2.1.2 Face d'entrée $x = 0$

Sans pertes de généralité, le champ de pression acoustique $p_{a,0}(x, y)$ sur la face d'entrée $x = 0$, solution de l'équation (2.3), peut se décomposer en une somme infinie d'ondes planes. Pour satisfaire aux conditions de parité selon l'axe Ox et de périodicité selon l'axe Oy , données par les relations (2.1) et (2.2) respectivement, le champ de pression est développé sur une base de fonctions cosinus,

$$p_{a,0}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) \left(a_{n,0}^+ e^{ik_{xn}x} + a_{n,0}^- e^{-ik_{xn}x}\right). \quad (2.6)$$

Dans cette relation, les coefficients $a_{n,0}^+$ et $a_{n,0}^-$ sont associés aux amplitudes des différentes composantes du champ de pression sur la face $x = 0$. Ces amplitudes correspondent respectivement à une "onde aller" suivant l'axe des x croissants et une "onde retour" suivant l'axe des x décroissants. Le report de cette solution dans l'équation (2.3) permet d'écrire la relation de dispersion,

$$k_{xn}^2 = k^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2. \quad (2.7)$$

Deux cas sont alors à considérer suivant les valeurs de k et n ,

$$\begin{cases} k_{xn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2}, & k > \frac{2\pi n}{L} \\ k_{xn} = i\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 - k^2}, & k < \frac{2\pi n}{L} \end{cases}, \quad (2.8)$$

qui correspondent aux ondes propagatives (k_{xn} réel) et évanescentes (k_{xn} imaginaire pur).

En résumé, le champ de pression ainsi défini s'interprète comme une somme infinie d'ondes planes se propageant suivant les x croissants (onde aller) et décroissants (onde retour), symétriques par rapport à l'axe Ox , propagatives et évanescentes.

2.2.1.3 Face de sortie $x = L$

La démarche précédemment effectuée pour la face d'entrée $x = 0$ reste valable pour la face de sortie $x = L$. Les conditions de parité et de périodicité étant les mêmes, un développement similaire peut être effectué en $x = L$,

$$p_{a,L}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) \left(a_{n,L}^+ e^{ik_{xn}(x-L)} + a_{n,L}^- e^{-ik_{xn}(x-L)}\right), \quad (2.9)$$

où $a_{n,L}^+$ et $a_{n,L}^-$ représentent les coefficients associés aux composantes aller et retour du champ de pression sur la face $x = L$.

2.2.2 Matrice de diffusion

Les expressions du champ de pression étant connues sur les faces d'entrée et de sortie, l'approche par une matrice de diffusion consiste à exprimer les coefficients sortants $a_{n,0}^-$ et $a_{n,L}^+$ sur les deux faces en fonction des coefficients entrants $a_{n,0}^+$ et $a_{n,L}^-$ sur ces mêmes faces. Les coefficients entrants et sortants de chacune des faces sont représentés sur la figure 2.2 sur laquelle les vecteurs \vec{a} désignent l'ensemble des coefficients a_n . Les matrices de réflexion et transmission qui traduisent le comportement de la rangée sont évaluées sur les faces $x = 0$ et $x = L$. Elles sont respectivement notées $[R_0]$, $[T_0]$, $[R_L]$ et $[T_L]$. Ces quatre matrices interviennent dans l'écriture des coefficients sortants en fonction des coefficients entrants selon les relations suivantes,

$$\begin{cases} \vec{a}_0^- = [T_L]\vec{a}_L^- + [R_0]\vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_L^+ = [R_L]\vec{a}_L^- + [T_0]\vec{a}_0^+ \end{cases}, \quad (2.10)$$

Les coefficients sortants en $x = 0$ portés par le vecteur \vec{a}_0^- représentent la somme de ce qui est transmis en $x = L$ et réfléchi en $x = 0$. De l'autre côté, les coefficients sortants en $x = L$ portés par le vecteur \vec{a}_L^+ s'identifient à la somme de ce qui est réfléchi en $x = L$ et transmis en $x = 0$. Sous forme matricielle et en introduisant la matrice de diffusion $[S]$ telle que,

$$[S] = \begin{bmatrix} [T_L] & [R_0] \\ [R_L] & [T_0] \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

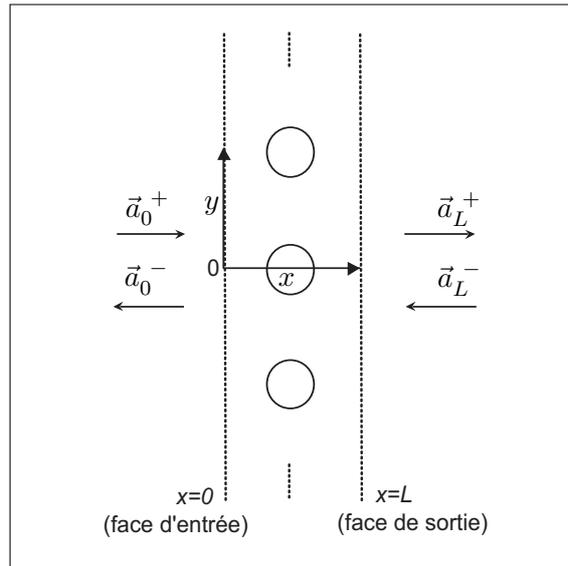


FIG. 2.2 – Représentation des coefficients entrants et sortants de chacune des faces d'une rangée infinie de cylindres.

la relation (2.10) s'écrit,

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_0^- \\ \vec{a}_L^+ \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} \vec{a}_L^- \\ \vec{a}_0^+ \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Pour construire la matrice de diffusion $[S]$, il est nécessaire de déterminer au préalable les matrices de réflexion $[R]$ et de transmission $[T]$ évaluées sur chacune des faces $x = 0$ et $x = L$. La symétrie du problème implique,

$$\begin{cases} [R_0] = [R_L] \\ [T_0] = [T_L] \end{cases}. \quad (2.13)$$

Dans la suite, ces matrices de réflexion et de transmission sont notées respectivement $[R]$ et $[T]$. Leur détermination fait l'objet du paragraphe suivant.

2.2.3 Matrices de réflexion et transmission

Dans ce paragraphe, l'intérêt est porté sur la détermination des matrices de réflexion et transmission sur chacune des faces d'entrée et de sortie d'une rangée infinie de cylindres. Pour cela, il est nécessaire d'explicitier les champs de pression mis en jeu dans cette rangée. Ces derniers sont écrits en fonction des coefficients de réflexion et transmission de la rangée dans un premier temps. Une seconde formulation en fonction des champs de pression diffusés et incidents autour d'un cylindre est ensuite proposée. L'identification entre ces deux formulations permet de construire les matrices de réflexion et transmission recherchées.

2.2.3.1 Champs de pression acoustique réfléchis et transmis en fonction des coefficients de réflexion et transmission de la rangée

Un champ de pression acoustique extérieur $p_{a,ext}(x, y)$ se propageant dans le sens des x croissants est imposé. Deux composantes selon l'axe Oy sont retenues en fixant n . Ces deux composantes sont symétriques selon l'axe Ox . Les résultats pour un champ complexe (somme de plusieurs composantes n) s'obtiendront dans la suite en utilisant le théorème de superposition. Les deux composantes du champ de pression retenues prennent la forme,

$$p_{a,ext}(x, y) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) e^{ik_{xn}x}, \quad (2.14)$$

où le nombre d'onde k_{xn} est donnée par la relation (2.8). A une pulsation ω fixée, ce champ se présente comme la somme de deux ondes planes, propagatives ou évanescentes (selon les valeurs de n) et symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 0$. Les deux ondes planes définissent un angle $\pm\theta_n$ par rapport à l'axe x tel que,

$$\begin{cases} k_{xn} = k \cos(\theta_n) \\ k_{yn} = k \sin(\theta_n) = \frac{2\pi n}{L} \end{cases}, \quad (2.15)$$

et qui est, soit réel (cas d'une onde propagative), soit complexe (cas d'une onde évanescente). La configuration décrite est représentée sur la figure 2.3.

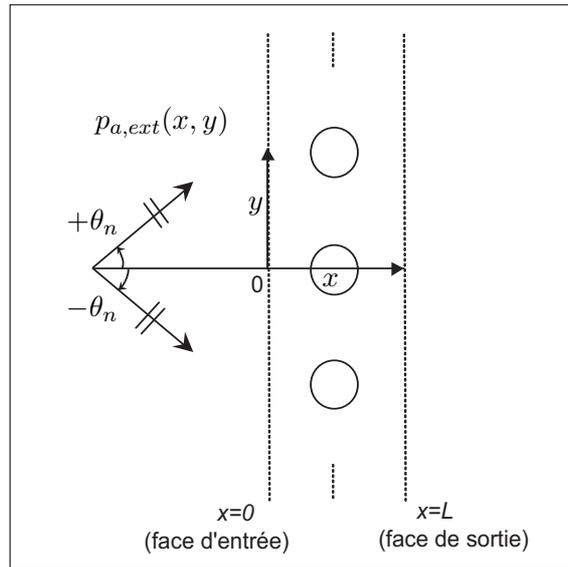


FIG. 2.3 – Champ de pression acoustique extérieur incident fixé $p_{a,ext}(x, y)$ se propageant dans le sens des x croissants. Aucune onde n'est émise dans le sens des x décroissants.

Par effet de diffusion, le champ de pression acoustique imposé et incident sur la rangée infinie de cylindres crée d'une part, une onde réfléchie $p_{a,0}^-(x, y)$ sur la face $x = 0$ et d'autre part, une onde transmise $p_{a,L}^+(x, y)$ sur la face $x = L$. Les expressions des champs de pression associés à ces deux

ondes peuvent, elles aussi, être développées en sommes infinies d'ondes planes,

$$\begin{cases} p_{a,0}^-(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} R_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) e^{-ik_{xm}x} \\ p_{a,L}^+(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} T_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) e^{ik_{xm}(x-L)} \end{cases}, \quad (2.16)$$

où R_{mn} et T_{mn} représentent les $m \times n$ éléments des matrices de réflexion [R] et de transmission [T] respectivement, pour n fixé. Les champs de pression réfléchis $p_{a,0}^-(x, y)$ et transmis $p_{a,L}^+(x, y)$ se présentent comme deux sommes infinies d'ondes planes symétriques, propagatives et évanescentes, dans les directions de propagation adaptées. Le champ $p_{a,0}^-(x, y)$ s'interprète comme la somme des champs diffusés en $x = 0$ par l'ensemble des cylindres constituant la rangée. Le second, $p_{a,L}^+(x, y)$, s'interprète comme la superposition des champs diffusés en $x = L$ par ces mêmes cylindres et du champ extérieur imposé $p_{a,ext}(x, y)$. Afin de déterminer les éléments R_{mn} et T_{mn} constituant la matrice de diffusion [S] recherchée, une deuxième expression de chacun de ces deux champs est développée dans la suite.

2.2.3.2 Champs de pression acoustiques diffusés et incidents autour d'un cylindre appartenant à la rangée

L'objet de ce paragraphe consiste à écrire les champs de pression incident et diffusé par un cylindre quelconque de la rangée créés en réponse à la sollicitation extérieure $p_{a,ext}(x, y)$ définie par la relation (2.14).

En coordonnées cylindriques, le champ de pression $p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j)$ diffusé par le cylindre j situé en \vec{r}_j , appartenant à la rangée infinie, se développe sur les fonctions de Hankel de première espèce,

$$p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}}, \quad (2.17)$$

où les A_m sont des coefficients de pondération associés aux champs diffusés. La rangée de cylindres étant infinie, ces coefficients sont indépendants du cylindre considéré.

Dans le même système de coordonnées, le champ de pression $p_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l)$ incident sur le cylindre l situé en \vec{r}_l est la somme du champ émis $p_{a,ext}$ et du champ diffusé par tous les autres cylindres de la rangée,

$$p_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = p_{a,ext}(\vec{r}) + \sum_{j \neq l} p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j). \quad (2.18)$$

Ce champ incident est nécessairement fini et peut donc se développer sur une base de fonctions de Bessel,

$$p_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m i^m J_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}}, \quad (2.19)$$

où les B_m sont des coefficients de pondération associés aux champs incidents. La remarque faite sur les coefficients A_m s'applique ici aussi : la rangée de cylindres étant infinie, les coefficients B_m sont, eux aussi, indépendants du cylindre considéré.

En outre, les cylindres étant supposés parfaitement rigides, le champ de pression total ($p_{a,inc} + p_{a,diff}$) doit vérifier la condition limite (2.5) qui peut se réécrire,

$$\left. \frac{\partial(p_{a,inc} + p_{a,diff})}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 . \quad (2.20)$$

Le report de l'expression des champs de pression incident (2.19) et diffusé (2.17), dans cette condition donne,

$$A_m = D_m B_m , \quad (2.21)$$

où les coefficients de diffusion D_m s'écrivent,

$$D_m = -\frac{J'_m(kR)}{H'_m(kR)} . \quad (2.22)$$

Le nombre d'onde k étant fixé, ces coefficients sont entièrement déterminés par la géométrie des cylindres. En résumé, pour connaître les champs de pression incident et diffusé recherchés, il suffit donc de connaître l'un des ensembles de coefficients A_m ou B_m , ces derniers étant liés par l'expression (2.21).

2.2.3.3 Coefficients associés aux champs diffusé et incident

L'objet de ce paragraphe est de déterminer les coefficients B_m intervenant dans l'expression (2.19) du champ incident sur un cylindre quelconque (et par la même occasion, les coefficients A_m intervenant dans l'expression (2.17) du champ diffusé par un cylindre quelconque). Pour cela, les deux expressions du champ incident $p_{a,inc}$ données par les relations (2.18) et (2.19) sont développées sur une même base (fonctions de Bessel J_m centrées sur le vecteur \vec{r}_l). D'une part, le champ de pression imposé $p_{a,ext}$, dont l'expression en coordonnées cartésiennes est donnée dans l'équation (2.14), peut se développer, en coordonnées cylindriques, sur les fonctions de Bessel centrées sur le vecteur \vec{r}_l ,

$$p_{a,ext}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k_{zpp}L}{2}} \cos(m\theta_n) i^m J_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}} , \quad (2.23)$$

et d'autre part, la relation (2.21) permet de réécrire le champ de pression $p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j)$ diffusé par le cylindre j et donné par la relation (2.17) en fonction des coefficients B_m ,

$$p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m B_m i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}} . \quad (2.24)$$

Ce champ peut être décomposé, en faisant usage du théorème d'addition des fonctions de Bessel [1], sur les fonctions de Bessel J_m centrées sur le vecteur \vec{r}_l (détail dans l'annexe D),

$$p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} D_q B_q i^{q-m} H_{q-m}(k|\vec{r}_l - \vec{r}_j|) e^{i(q-m)\theta_{\vec{r}_l-\vec{r}_j}} \right) i^m J_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}} \quad (2.25)$$

Le report des nouvelles expressions du champ de pression imposé (2.23) et des champs de pressions diffusés (2.25) dans l'expression du champ incident (2.18) donne l'écriture explicite recherchée du

champ de pression incident $p_{a,inc}$ sur la base des fonctions de Bessel J_m ,

$$p_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{i \frac{k_{zn} L}{2}} \cos(m\theta_n) + \dots \right. \\ \left. \left(\sum_{j \neq l} \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_q B_q i^{q-m} H_{q-m}(k|\vec{r}_l - \vec{r}_j|) e^{i(q-m)\theta_{\vec{r}_l - \vec{r}_j}} \right) i^m J_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l}} \right) \quad (2.26)$$

Dès lors, une identification entre les deux expressions du champ incident (2.19) et (2.26) peut être effectuée et donne la relation suivante sur les coefficients de pondération B_m ,

$$B_m = e^{i \frac{k_{zn} L}{2}} \cos(m\theta_n) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \neq l} H_{q-m}(k|\vec{r}_l - \vec{r}_j|) e^{i(q-m)\theta_{\vec{r}_l - \vec{r}_j}} \right) D_q B_q i^{q-m} . \quad (2.27)$$

Il s'agit d'une expression implicite des coefficients B_m puisque ces derniers apparaissent dans les deux membres. La résolution de ce système d'équations donne l'ensemble des coefficients B_m recherchés. Pour cela, il est nécessaire d'évaluer avec précision la somme sur les fonctions de Hankel H_{q-m} portant sur tous les cylindres j de la rangée infinie tels que $j \neq l$. Cette somme peut être réduite car, les coefficients de réception B_m étant les mêmes pour tous les cylindres, il est possible de choisir arbitrairement le cylindre l tel que $l = 0$. Dans ce cas, la somme portant sur les cylindres $j \neq 0$ se décompose en deux ; la première porte sur les cylindres j tels que $j = 1$ à $j = \infty$ et la seconde, sur les cylindres j tels que $j = -\infty$ à $j = -1$. Les termes en j et en $-j$ peuvent alors se regrouper dans l'expression (2.27). En effet, pour tout entier j et $-j$, d'une part, le module $|\vec{r}_0 - \vec{r}_j|$ est le même et d'autre part, l'angle $\arg(\vec{r}_0 - \vec{r}_j)$ prend alternativement la valeur $\pi/2$ et $-\pi/2$. De plus, la symétrie des fonctions (cosinus et Hankel) impose $B_m = B_{-m}$, ce qui restreint l'étude aux entiers m et l positifs ou nuls. Compte tenu de ces remarques, l'écriture de (2.27) se simplifie à (détail dans l'annexe C),

$$B_m = e^{i \frac{k_{zn} L}{2}} \cos(m\theta_n) + \sum_{q=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{q,0} \right) F_{m,q}^{\sigma}(K) D_q B_q , \quad (2.28)$$

où K représentent les nombres d'onde adimensionnés tels que $K = kL$ et $\delta_{q,0}$, le symbole de Kronecker. Les fonctions $F_{m,q}^{\sigma}(K)$ sont définies pour tout m et pour tout q par la relation suivante,

$$F_{m,q}^{\sigma}(K) = (1 + (-1)^{m+q}) \sum_{j=1}^{\infty} [H_{m+q}(jK) + H_{m-q}(jK)] . \quad (2.29)$$

L'évaluation des fonctions $F_{m,q}^{\sigma}(K)$, où K est réel, passe par le calcul des séries de fonctions de Hankel d'argument jK avec j , entier naturel. Numériquement, une troncature sur les sommes infinies est inévitable. Ces sommes se calculent alors pour des entiers j allant de 1 à J_{Max} . Elles convergent très lentement en fonction de la valeur J_{Max} retenue à cause du comportement des fonctions de Hankel. La solution utilisée pour contourner ce problème, détaillée dans l'annexe C, consiste à développer les fonctions $F_{m,q}^{\sigma}(K)$ en série de Schlömilch permettant d'assurer une convergence rapide des résultats. Ces fonctions $F_{m,q}^{\sigma}(K)$ étant évaluées, une formulation matricielle de l'équation (2.28), détaillée également dans l'annexe C, donne la solution pour les coefficients B_m recherchés. Une fois ces coefficients connus, les coefficients A_m associés au champ diffusé se déduisent de la relation (2.21). La connaissance de ces derniers conduit alors à celle des matrices de réflexion et transmission constituant la matrice de diffusion [S]. La construction de ces matrices fait l'objet du paragraphe suivant.

2.2.3.4 Construction des matrices de réflexion et transmission

Dans ce paragraphe, les matrices de réflexion [R] et de transmission [T] sont déterminées à l'aide des coefficients associés aux champs incident B_m et diffusé A_m connus. Pour cela, les champs de pression diffusés sont calculés sur chacune des faces d'entrée et de sortie pour tout y tel que $0 < y < L/2$ (domaine correspondant à la moitié d'une cellule élémentaire) lorsqu'une onde acoustique extérieure est imposée.

Un champ de pression extérieur $p_{a,ext}$ est imposé sur la rangée infinie de cylindres. Par effet de diffusion multiple, celle-ci réémet un champ de pression diffusé $p_{a,diff}$ dont l'étude, du fait des propriétés de parité et de périodicité, peut se limiter aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$ et pour tout y tel que $0 < y < L/2$. Ces deux domaines sont représentés sur la figure 2.4. L'expression de ce champ de pression en coordonnées cylindriques est,

$$p_{a,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}}, \quad (2.30)$$

où le vecteur \vec{r} désigne une position dans le domaine $0 < y < L/2$ sur les deux faces. Le vecteur \vec{r}_j représente la position du centre du cylindre j . Dans cette expression, les coefficients A_m sont connus. Le calcul de la double sommation sur les indices j et m est réalisé d'une part en utilisant le théorème d'addition présenté dans l'annexe D et d'autre part, en faisant intervenir les séries de Schlömilch (annexe C). Les résultats donnés dans ces annexes permettent d'évaluer le champ de pression diffusé $p_{a,diff}$ en tout point des deux domaines considérés.

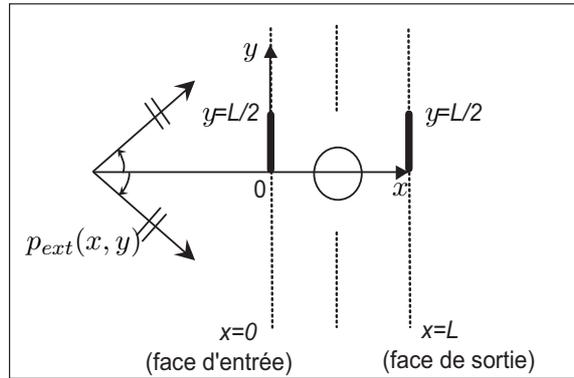


FIG. 2.4 – Représentation des deux domaines d'étude du champ de pression acoustique diffusé (en traits gras).

Dans le domaine délimité par $0 < y < L/2$, les champs de pression acoustiques réfléchis en $x = 0$ et transmis en $x = L$, donnés par la relation (2.16), s'identifient d'une part, au champ diffusé dans la direction des x décroissants et d'autre part, au champ diffusé dans la direction des x croissants. C'est-à-dire, en présence du champ imposé $p_{a,ext}$,

$$\begin{cases} p_{a,0}^-(\vec{r}) &= p_{a,diff}(\vec{r}) \\ p_{a,L}^+(\vec{r}) &= p_{a,ext}(\vec{r}) + p_{a,diff}(\vec{r}) \end{cases} \quad (2.31)$$

Les doubles expressions (2.16) et (2.31) des champs de pression sur les deux faces permettent d'exprimer les éléments R_{mn} des matrices de réflexion et T_{mn} des matrices de transmission en fonction des champs de pression diffusés connus. Le calcul détaillé dans l'annexe E conduit aux relations suivantes [2],

$$\begin{cases} R_{mn} = \frac{4}{L(1 + \delta_{m,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) p_{a,diff}(0, y) dy \\ T_{mn} = \frac{4}{L(1 + \delta_{m,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) p_{a,diff}(L, y) dy + e^{iK_{xn}} \delta_{m,n} \end{cases} \quad (2.32)$$

La dépendance selon l'entier n est portée d'une part, par le champ émis $p_{a,ext}$, dont l'expression fait intervenir le nombre d'onde adimensionné K_{xn} , et d'autre part, par les coefficients A_m intervenant explicitement dans le calcul des champs de pression diffusés $p_{a,diff}$. Les éléments R_{mn} et T_{mn} ainsi calculés permettent de construire la matrice de diffusion $[S]$ d'une rangée infinie de cylindres. Cette matrice de diffusion caractérise le comportement de la rangée : lorsqu'une onde acoustique extérieure d'incidence donnée est imposée, la matrice de diffusion $[S]$ donne les champs de pression sortants dans toutes les directions. Ces champs correspondent aux champs de pression réfléchis et transmis par la rangée. Cette matrice permet notamment de prédire les coefficients de transmission d'une rangée infinie de cylindres soumise à une onde acoustique d'incidence normale. Ces prédictions théoriques feront l'objet d'une comparaison avec des mesures expérimentales sur des échantillons dans le chapitre suivant.

2.3 Extension aux propriétés d'un système constitué de plusieurs rangées de cylindres

L'intérêt est ici porté sur les propriétés d'un système constitué de plusieurs rangées de cylindres [47]. Dans un premier temps, les propriétés d'un tel système constitué de N_r rangées, avec N_r entier fini, sont déduites de celles d'une rangée. Dans un second temps, le problème de la propagation dans un réseau périodique carré à deux dimensions (cristal phononique) est traité en utilisant les résultats relatifs au système contenant une seule rangée de cylindres. Les géométries de ces deux systèmes sont représentées sur les figures 2.1 (b) et (c) respectivement.

2.3.1 Système constitué de N_r rangées de cylindres

L'objet de ce paragraphe est d'exprimer la matrice de diffusion $[S_{N_r}]$ d'un nombre N_r de rangées à partir de la connaissance de la matrice de diffusion $[S]$ d'une seule rangée. Pour cela, une relation de récurrence est écrite entre la matrice $[S]$ d'une rangée et celle, notée $[S_{N_r-1}]$ de $N_r - 1$ rangées, avec $N_r > 2$. Les matrices de diffusion $[S]$ et $[S_{N_r-1}]$ sont connues et prennent respectivement les formes,

$$[S] = \begin{bmatrix} [T] & [R] \\ [R] & [T] \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

et,

$$[\mathbf{S}_{N_r-1}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{N_r-1}] & [\mathbf{R}_{N_r-1}] \\ [\mathbf{R}_{N_r-1}] & [\mathbf{T}_{N_r-1}] \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Ces deux matrices permettent d'écrire les coefficients sortants en fonction des coefficients entrants pour le cas d'une rangée et pour celui de $N_r - 1$ rangées. Conformément aux notations de la figure 2.2, pour une rangée, l'ensemble des coefficients sortants s'écrivent en fonction de l'ensemble des coefficients entrants,

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_0^- \\ \vec{a}_L^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}] & [\mathbf{R}] \\ [\mathbf{R}] & [\mathbf{T}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_L^- \\ \vec{a}_0^+ \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

et pour $N_r - 1$ rangées,

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_L^- \\ \vec{a}_{(N_r-1)L}^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{N_r-1}] & [\mathbf{R}_{N_r-1}] \\ [\mathbf{R}_{N_r-1}] & [\mathbf{T}_{N_r-1}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_{(N_r-1)L}^- \\ \vec{a}_L^+ \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

La matrice de diffusion de N_r rangées est recherchée sous la forme,

$$[\mathbf{S}_{N_r}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{N_r}] & [\mathbf{R}_{N_r}] \\ [\mathbf{R}_{N_r}] & [\mathbf{T}_{N_r}] \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Elle est déterminée en exprimant les coefficients sortants \vec{a}_0^- et $\vec{a}_{(N_r-1)L}^+$ en fonction des coefficients entrants \vec{a}_0^+ et $\vec{a}_{(N_r-1)L}^-$. Les expressions ainsi obtenues donnent les éléments de la matrice $[\mathbf{S}_{N_r}]$ en fonction de ceux des matrices $[\mathbf{S}]$ et $[\mathbf{S}_{N_r-1}]$,

$$\begin{cases} [\mathbf{T}_{N_r}] &= [\mathbf{T}] \left([\mathbf{I}_d] - [\mathbf{R}_{N_r-1}] [\mathbf{R}] \right)^{-1} [\mathbf{T}_{N_r-1}] \\ [\mathbf{R}_{N_r}] &= [\mathbf{R}] + [\mathbf{T}] \left([\mathbf{I}_d] - [\mathbf{R}_{N_r-1}] [\mathbf{R}] \right)^{-1} [\mathbf{R}_{N_r-1}] [\mathbf{T}] \end{cases}, \quad (2.38)$$

où $[\mathbf{I}_d]$ est la matrice identité. La loi de composition décrite par les relations (2.38) donne les coefficients de réflexion et de transmission de N_r rangées à partir de ceux d'une seule. Il est donc possible de déduire les propriétés de réflexion et transmission d'un système constitué de plusieurs rangées à partir de la connaissance de ces mêmes propriétés dans le cas d'une rangée.

2.3.2 Cristal phononique infini

Pour traiter le cas du réseau périodique carré infini, illustré sur la figure 3, une solution consiste à inclure le théorème de Bloch [9] dans la formulation du problème. Du fait de la périodicité suivant l'axe Ox , ce théorème impose,

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_L^+ \\ \vec{a}_L^- \end{pmatrix} = e^{ik_B L} \begin{pmatrix} \vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_0^- \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

où les k_B sont les nombres d'onde de Bloch à déterminer. L'utilisation conjointe de la matrice de diffusion $[\mathbf{S}]$ (2.33) et du théorème de Bloch (2.39) conduit au problème aux valeurs propres classique (problème analogue obtenu par Poulton et coll.[52]) suivants,

$$\boxed{\begin{bmatrix} [\mathbf{T}] & [\mathbf{R}] \\ [0] & [\mathbf{I}_d] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_L^- \end{pmatrix} = e^{ik_B L} \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_d] & [0] \\ [\mathbf{R}] & [\mathbf{T}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_L^- \end{pmatrix}}. \quad (2.40)$$

Les valeurs propres de ce problème sont liées aux nombres d'onde de Bloch k_B . Ces derniers, portés par la fonction exponentielle, s'identifient aux constantes de propagation dans le milieu. Les vecteurs propres associés représentent les amplitudes des ondes entrantes \vec{a}_0^+ en $x = 0$ et \vec{a}_L^- en $x = L$. Les solutions de ce problème sont obtenues numériquement pour une pulsation ω fixée (contrairement au chapitre précédent où les solutions ω sont obtenues en fixant le nombre d'onde k_B). A chaque pulsation correspond un ensemble de valeurs propres (correspondant aux ondes propagatives et évanescentes dans plusieurs directions) et de vecteurs propres associés. La résolution du problème, pour plusieurs pulsations, permet donc de caractériser le comportement acoustique du cristal phononique étudié. En effet, la connaissance des constantes de propagation conduit à la prédiction d'éventuelles bandes interdites et celle des amplitudes des ondes entrantes informe sur la forme des champs de pression.

2.4 Résultats et temps de calcul

Le problème aux valeurs propres (2.40) est résolu numériquement pour une géométrie fixée (i.e les paramètres R et L sont fixés). Les solutions correspondent d'une part, aux nombres d'onde de Bloch k_B et d'autre part, au champ de pression $p_a(\vec{r})$ dans une cellule élémentaire du réseau. Dans un premier temps, un exemple de résultat numérique est présenté. Une discussion sur la précision des résultats et les temps de calcul nécessaires en fonction du nombre N d'ondes planes considéré est ensuite proposée.

Exemple de résultats

Les solutions k_B du problème aux valeurs propres sont recherchées pour différentes fréquences $f = \frac{\omega}{2\pi}$. En utilisant 144 ondes planes, ce problème est résolu pour une géométrie fixée par $R = 1 \text{ mm}$ et $L = 3 \text{ mm}$ (dans l'air). Le domaine fréquentiel d'étude s'étend de 0 à 200 kHz. Le diagramme de bandes obtenu, représentant le nombre d'onde de Bloch réduit $K_B = k_B L / \pi$ pour le cas des ondes propagatives en incidence normale, est présenté sur la figure 2.5. Les bandes interdites correspondent aux domaines fréquentiels dans lesquels les nombres d'onde de Bloch réduits valent zéro ou un (correspondants aux deux points Γ et X de la zone de Brillouin). Dans la gamme de fréquence d'étude, le cristal choisi présente plusieurs bandes interdites en incidence normale. La première bande est située dans la région fréquentielle allant de 40 kHz à 66 kHz environ. Sur la figure 2.5, trois autres bandes interdites sont observables. La validation des positions de ces bandes interdites est discutée dans le chapitre suivant.

Etude de la convergence

Pour un même échantillon fictif de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et de paramètre de maille $L = 3 \text{ mm}$, l'évolution de deux nombres d'onde réduits K_{B1} et K_{B6} (représentés sur la figure 2.5) en fonction du nombre d'ondes planes considéré est observée. Ces deux nombres d'onde correspondent à des fréquences de $f_1 = 20\,000 \text{ Hz}$ et $f_6 = 180\,000 \text{ Hz}$. Les résultats et temps de calcul nécessaires sont reportés dans le tableau 2.1 et la figure 2.6 associée.

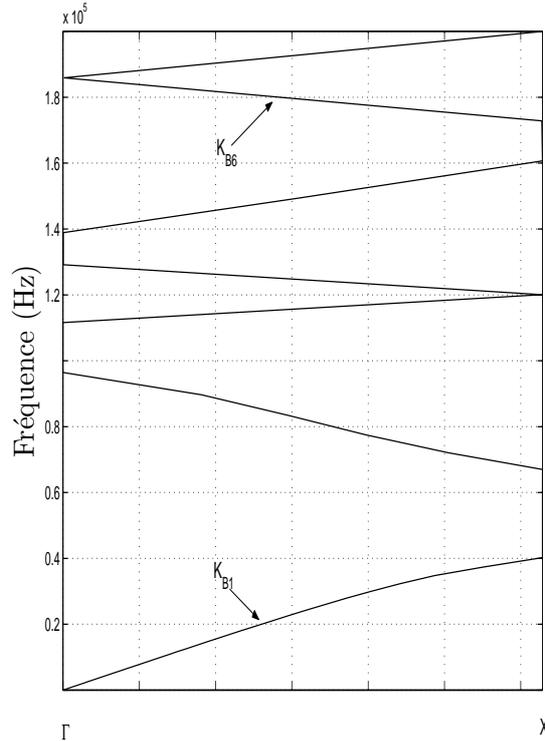


FIG. 2.5 – Diagramme de bandes représentant le nombre d'onde réduit $K_B = k_B L / \pi$ en fonction de la fréquence f pour le cas de l'incidence normale (direction ΓX de la zone de Brillouin). Ce diagramme est représenté dans le domaine de fréquence allant de 0 à 200 kHz. Cette figure comporte 100 points obtenus pour 144 ondes planes en $t = 1\,120$ s (environ 18 minutes). Les bandes interdites sont repérées par les nombres d'onde réduits $K_B = 0$ (correspondant au point Γ) et $K_B = 1$ (au point X).

Valeur de N	2	4	6	8	10	12	14
Nombre d'ondes planes	4	16	36	64	100	144	196
Temps de calcul [s]	25	77	149	328	632	1120	2780
$K_{B1}(f_1 = 20\,000\text{ Hz})$	0.411	0.413	0.414	0.414	0.414	0.414	0.414
$K_{B6}(f_6 = 180\,000\text{ Hz})$	0.801	0.999	0.931	0.897	0.897	0.897	0.897

TAB. 2.1 – Temps de calcul nécessaires pour évaluer les deux nombres d'onde de Bloch K_{B1} et K_{B6} représentés sur la figure 2.5. Ces deux nombres d'onde correspondent à des fréquences $f_1 = 20\,000$ Hz et $f_6 = 180\,000$ Hz respectivement. La géométrie du réseau est fixée par $R = 1$ mm et $L = 3$ mm.

Les résultats obtenus dépendent fortement de la configuration matérielle (temps de calculs) et ne sont présentés que pour comparer les méthodes entre elles à titre d'information. La convergence des résultats est assurée pour 64 ondes planes. Le temps de calcul correspondant est de $t = 328$ s (environ 5 minutes), ce qui est trois fois plus long que le temps de calcul nécessaire avec la méthode de décomposition en ondes planes (convergence assurée pour 169 ondes planes en $t = 135$ s).

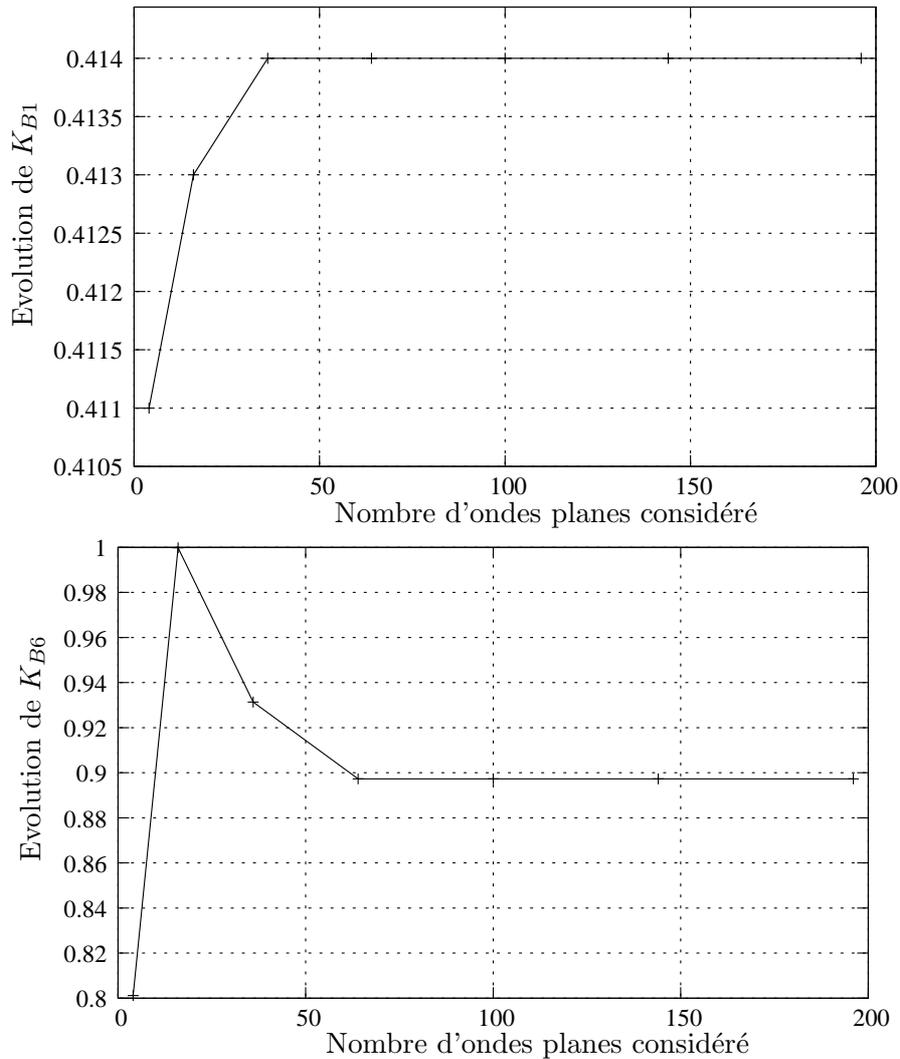


FIG. 2.6 – Evolution des nombres d'onde réduits K_{B1} et K_{B6} correspondants à des solutions du problème aux valeurs propres (2.40). Ces deux nombres d'onde sont associés aux fréquences $f_1=20\ 000$ Hz et $f_6=180\ 000$ Hz respectivement. Ces figures montrent la rapide convergence des nombres d'onde de Bloch en fonction du nombre N d'ondes planes considéré.

2.5 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode numérique basée sur le calcul des séries de Schlömilch. Dans un premier temps, l'application de cette méthode à la caractérisation d'une rangée infinie de cylindres a conduit à la détermination de la matrice de diffusion. Une formule de récurrence introduite dans un deuxième temps a permis de déduire de ce premier calcul la matrice de diffusion de N_r rangées de cylindres. Enfin, l'utilisation du théorème de Bloch a apporté une seconde méthode permettant de traiter le cas du cristal phononique (considéré comme une infinité de rangées de cylindres). Dans ce cas et à l'instar du chapitre précédent, la constante de propagation du milieu est déterminée en résolvant un problème aux valeurs propres.

Malgré l'allongement des temps de calcul, l'avantage donné par l'accès aux conditions limites dans

la formulation permet d'adapter le problème au cas où une fine épaisseur de couches limites traduisant les effets visqueux et thermiques est considérée. Cette première extension réalisable simplement fera l'objet du chapitre 4.

Chapitre 3

Validation des modèles et discussion sur leur limite

Ce chapitre propose une validation des deux modèles présentés dans les chapitres précédents. Dans un premier temps, des expériences dans le domaine ultrasonore (20 kHz à 200 kHz) sont réalisées sur des échantillons constitués de cylindres en aluminium disposés en réseau périodique. Le comportement de ces échantillons est comparé aux prédictions théoriques issues des modèles numériques utilisant respectivement la méthode de décomposition en séries de Fourier spatiales (chapitre 1) et le calcul des séries de Schlömilch (chapitre 2). Dans un second temps, une comparaison est effectuée entre des résultats issus de ces deux méthodes de calcul d'une part, et provenant de données existantes d'autre part.

3.1 Description de la géométrie étudiée

Le système étudié est constitué de cylindres rigides disposés en réseau périodique carré et entourés d'air. La géométrie de ce système, représentée sur la figure 3, est entièrement décrite par le rayon R des cylindres et le paramètre de maille L . Le comportement du système soumis à une onde acoustique dépend de la variation de ces deux paramètres. Une autre manière de décrire cette géométrie consiste à fixer le rayon R des cylindres et à introduire un nouveau paramètre traduisant la porosité Φ du milieu. Cette dernière est reliée au rapport entre le volume occupé par le fluide et celui occupé par le milieu. Dans une cellule élémentaire du réseau (figure 3.1), A_f est la surface occupée par le fluide et A_c celle occupée par le cylindre. Dans ce cas, la porosité du milieu est définie par le rapport entre A_f et $A_f + A_c$, c'est-à-dire,

$$\Phi = 1 - \frac{\pi R^2}{L^2}. \quad (3.1)$$

Cette quantité est comprise entre 0 et 1. Plus précisément la porosité tend vers 1 pour le cas de milieux très dilués (i.e si la distance L entre les centres de deux cylindres tend vers l'infini). La valeur minimale de cette porosité, pour le cas du cristal phononique étudié, correspond au cas limite où deux cylindres sont en contact : $\Phi = 1 - \pi/4 \approx 0,21$. Dans la suite, le rayon R est fixé à 1 mm et l'étude est réalisée pour différentes valeurs de porosité Φ .

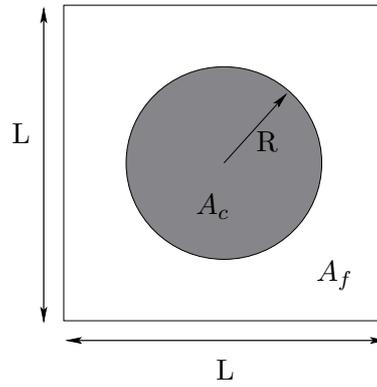


FIG. 3.1 – Représentation d’une cellule élémentaire. $A_f = L^2$ est l’aire du fluide et $A_c = \pi R^2$ celle du cylindre.

3.2 Comparaisons avec les expériences

Deux échantillons composés de 6 rangées contenant chacune 100 cylindres en aluminium sont réalisés. Le premier est composé de cylindres de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et le paramètre de maille L vaut 3 mm, ce qui correspond à une porosité de $\Phi \approx 0.65$ d’après la relation (3.1). Le second, plus concentré, est composé de cylindres de rayon $R = 1 \text{ mm}$ également avec un paramètre de maille $L = 2.5 \text{ mm}$, ce qui correspond à une porosité de $\Phi \approx 0.50$. De tels échantillons peuvent présenter des bandes interdites pour certaines fréquences et sous certains angles d’incidences. Une série de mesures permettant de caractériser les comportements de ces deux échantillons soumis à une onde acoustique se propageant en incidence normale à des fréquences ultrasonores dans l’air est effectuée. Les impédances caractéristiques Z_c traduisant la résistance des deux milieux (air et aluminium) au passage d’une onde acoustique sont définies par la relation,

$$Z_c = \rho c, \quad (3.2)$$

où ρ est la masse volumique du milieu et c , la célérité. Les valeurs de ces impédances pour l’air et l’aluminium sont données dans le tableau 3.1.

Milieu considéré	Air	Aluminium
Température	293 K	293 K
Célérité	$c_0 = 343 \text{ m.s}^{-1}$	$c_{Alu} = 6\,400 \text{ m.s}^{-1}$
Masse volumique	$\rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_{Alu} = 2\,700 \text{ kg.m}^{-3}$
Impédance caractéristique	$Z_{c,0} = 412 \text{ Pa.s.m}^{-1}$	$Z_{c,Alu} = 17\,280\,000 \text{ Pa.s.m}^{-1}$

TAB. 3.1 – Paramètres traduisant les conditions expérimentales et utilisés dans les calculs numériques. Les cylindres en aluminium présentent une impédance caractéristique très grande devant celle de l’air ; ils sont considérés comme immobiles dans les calculs numériques.

La méthode de mesure utilisée et illustrée sur la figure 3.2 consiste à mesurer le coefficient de transmission des 6 rangées de cylindres en fonction de la fréquence. Pour cela, une impulsion ultrasonore est émise par un transducteur large bande centrée à 100 kHz puis reçue par un deuxième

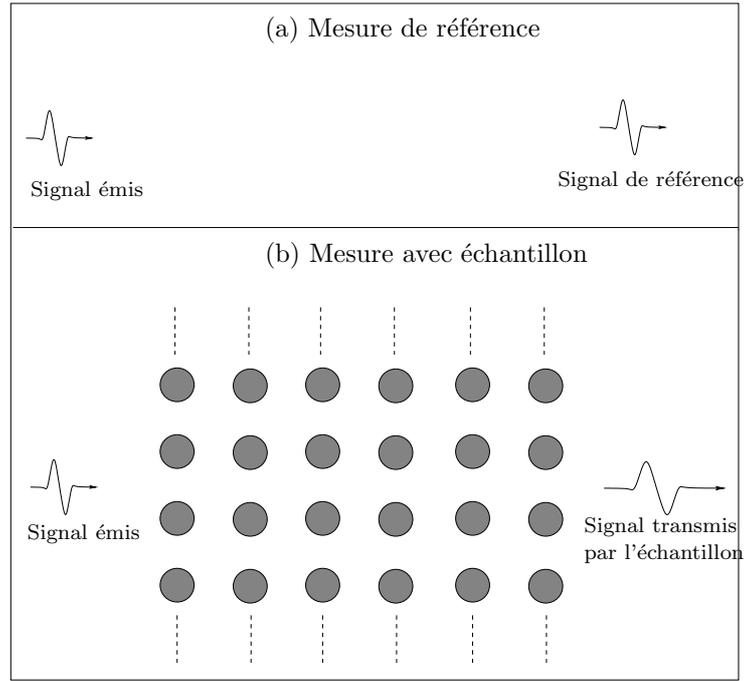


FIG. 3.2 – Méthode utilisée pour la mesure du coefficient de transmission. (a) Mesure de référence s_{ref} sans l'échantillon. (b) Mesure du signal s_{ech} avec l'échantillon. La comparaison de ces deux signaux donne accès au coefficient de transmission grâce à la relation (3.3).

transducteur identique. La bande passante de ces transducteurs, correspondant à la transformée de Fourier $S_{ref}(f)$ du signal $s_{ref}(t)$ reçu par le deuxième transducteur, est représentée sur la figure 3.3. Bien que la bande passante à -3dB soit restreinte, les mesures sont effectuées sur une bande plus large comprise entre 20 kHz et 200 kHz (ce qui correspond à des longueurs d'onde variant de 17 mm à 170 mm, c'est-à-dire d'environ $5L$ à $L/2$). Ce dernier point se trouve justifié par le fait que les signaux acquis après passage dans les échantillons sont systématiquement normalisés par rapport à cette bande passante. Cette méthode de mesures relatives permet donc de travailler sur une bande fréquentielle plus conséquente. La limite est liée aux bruits observables sur cette même figure à gauche et à droite. Après la première mesure de référence, les échantillons sont positionnés entre les deux transducteurs et deux nouveaux signaux $s_{ech65}(t)$ et $s_{ech50}(t)$ sont enregistrés. Les rapports, dans le domaine de Fourier, entre les signaux $S_{ech65}(f)$ et $S_{ech50}(f)$ ayant traversés les échantillons et le signal de référence $S_{ref}(f)$ définissent les coefficients de transmission Tr des deux échantillons en fonction de la fréquence,

$$Tr(f) = \frac{S_{ech}(f)}{S_{ref}(f)} = \frac{TF[s_{ech}(t)]}{TF[s_{ref}(t)]}. \quad (3.3)$$

Les figures 3.4 (b) représentent les coefficients de transmission des deux échantillons en fonction de la fréquence dans l'intervalle allant de 20 kHz à 200 kHz. De part et d'autre de ces deux figures, les prédictions théoriques des deux méthodes de calcul détaillées dans les chapitres 1 et 2 sont présentées sous forme de diagrammes de bandes. Ces diagrammes représentent les nombres d'onde de Bloch réduits $K_B = k_B L / \pi$ pouvant se propager dans un réseau infini en incidence normale (axe ΓX de

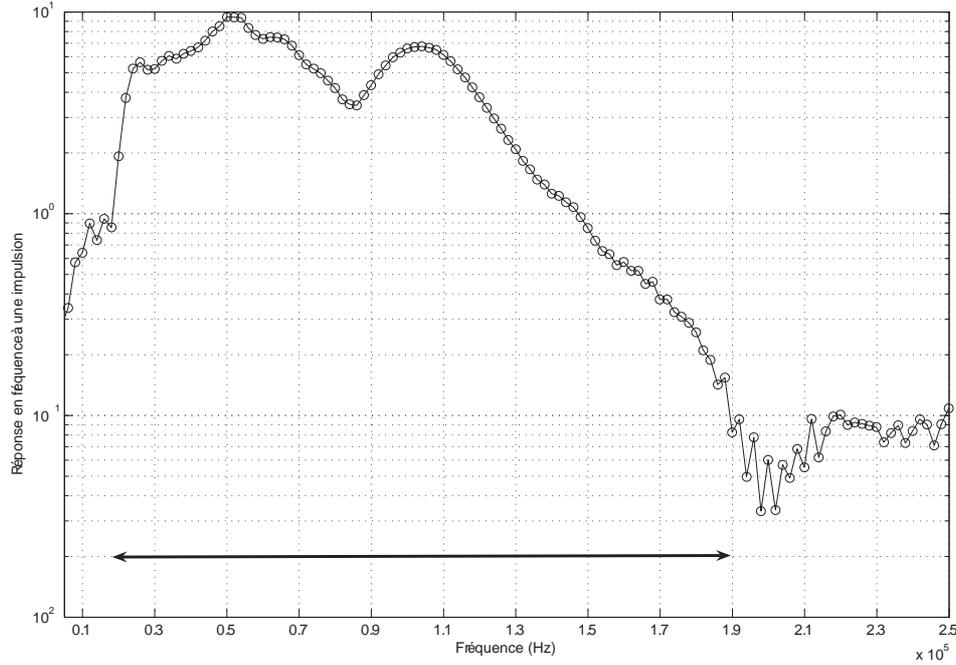


FIG. 3.3 – Réponse des transducteurs large bande dans un domaine fréquentiel allant de 10 kHz à 250 kHz. La flèche représente la bande passante utilisée (rapport signal à bruit suffisant).

la zone de brillouin représentée sur la figure 1.2). Ces nombres d'onde sont les premières solutions des problèmes aux valeurs propres (1.21) et (2.40) obtenus dans les chapitres 1 et 2 respectivement. Les calculs sont effectués en considérant les paramètres de l'air donnés dans le tableau 3.1. Les informations présentées dans ce tableau justifient l'hypothèse d'immobilité des cylindres (le rapport $Z_{c,Alu}/Z_{c,0}$ est de l'ordre de 10^4). La température donnée est celle correspondante aux conditions expérimentales.

Les nombres d'onde de Bloch théoriques obtenus sont représentés dans le domaine allant de 0 à 1 conformément à la définition de l'axe ΓX du contour de Brillouin. Les domaines fréquentiels pour lesquels les nombres d'onde de Bloch sont tels que $K_B = 0$ ou $K_B = 1$ définissent les bandes interdites des deux cristaux phononiques. Les nombres d'onde ne vérifiant pas cette relation correspondent à des ondes pouvant se propager dans ces cristaux.

Les résultats numériques utilisant la méthode de décomposition en séries de Fourier spatiales et les séries de Schlömilch, représentés de part et d'autre des mesures expérimentales, sont en bon accord. D'un point de vue expérimental, les deux prédictions théoriques des domaines fréquentiels pour lesquels aucune onde ne peut se propager en incidence normale se traduisent sur les deux courbes expérimentales 3.4 (b) par des chutes du coefficient de transmission. La position de ces domaines est en très bon accord avec les prédictions théoriques, bien que les échantillons soient d'épaisseur finie. Ainsi, la seule prise en compte des effets de diffusion multiple en fluide non dissipatif par les deux méthodes de calcul permet de prédire convenablement les bandes interdites d'un système constitué de plusieurs rangées de cylindres.

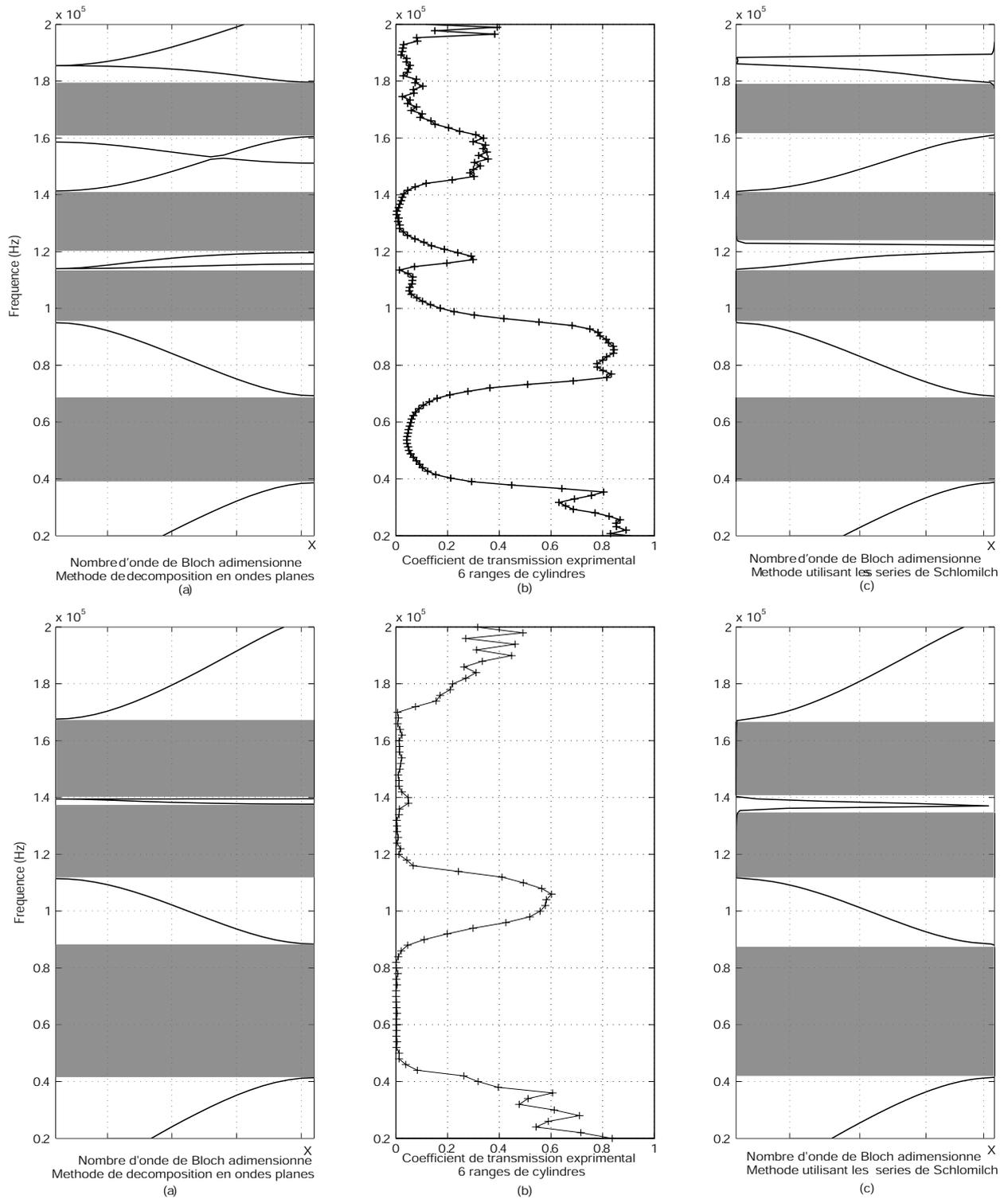


FIG. 3.4 – Dans les trois figures du haut, la porosité est $\Phi \approx 0.65$ et pour celles du bas, $\Phi \approx 0.50$. La mesure des coefficients de transmission de 6 rangées de 100 cylindres est représentée sur les figures au centre (b). Les figures (a) et (c) montrent les prédictions théoriques des bandes interdites d'un cristal phononique infini soumis à une onde acoustique en incidence normale par les méthodes de décomposition en séries de Fourier spatiales et les calculs des séries de Schlömilch. Ces comparaisons montrent la bonne coïncidence entre les minima des coefficients de transmission en (b) et les bandes interdites prédites (zones grisées) pour les deux échantillons.

De plus, la méthode développée dans le chapitre 2 permet de traiter le problème correspondant exactement à 6 rangées de cylindres infinies. Pour cela, la matrice de diffusion $[S]$ d'une seule rangée est d'abord calculée conformément à la relation (2.12). La matrice de diffusion $[S_6]$ de 6 rangées de cylindres est ensuite déduite à partir de la relation de récurrence (2.38). Cette dernière permet notamment de prédire le coefficient de transmission en incidence normale correspondant au système expérimental étudié. Les comparaisons entre les coefficients de transmission prédits et mesurés pour les deux échantillons sont présentées sur la figure 3.5. Les résultats expérimentaux sont ceux présentés sur les figures 3.4 (b) dans lesquels les axes ont été transposés.

Dans les zones associées aux chutes du coefficient de transmission, les résultats théoriques et expérimentaux sont en accord. Ces chutes s'expliquent exclusivement par des phénomènes de diffusion multiple générant des phénomènes d'interférences. Le modèle utilisé et développé dans le chapitre 2 est donc suffisant pour déterminer les positions et étendues de ces zones. Cependant, en dehors de ces zones, des écarts significatifs apparaissent. L'origine de ces écarts provient d'effets de dissipation qui ne sont pas considérés dans le modèle. La conséquence se traduit sur la figure 3.5 par un coefficient de transmission théorique surestimé. La prise en compte de ces effets de dissipation fera l'objet de la seconde partie du document.

3.3 Limite aux grandes longueurs d'onde

Une autre validation de deux calculs numériques utilisant la méthode de décomposition en séries de Fourier spatiales et les séries de Schlömilch consiste à étudier le comportement asymptotique des résultats obtenus dans la limite grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire, lorsque la longueur d'onde associée à l'onde acoustique est grande devant les dimensions caractéristiques du cristal. Dans cette limite, les nombres d'onde calculés par les méthodes prenant en compte les effets de diffusion multiple doivent coïncider avec ceux obtenus par les modèles issus de la théorie de l'homogénéisation [11] pris dans leur limite aux petites longueurs d'onde. En terme de fréquence, la limite basse fréquence des modèles de diffusion multiple doit coïncider avec la limite haute fréquence des modèles issue de la théorie de l'homogénéisation. Cette jonction entre les limites des modèles, restreint au cas du fluide parfait, suscite un intérêt grandissant [12, 61].

L'étude qui suit porte plus précisément sur la tortuosité des matériaux poreux. En toute généralité, cette grandeur, notée α_∞ , traduit le trajet non rectiligne de l'onde acoustique à travers les pores d'un matériau poreux au cours de la propagation [27]. Dans le cas de pores droit, l'onde acoustique suit un trajet parfaitement rectiligne. En conséquence, la tortuosité est égale à 1. Pour tout autre trajet, cette dernière est strictement supérieure à 1.

Du point de vue de la théorie de l'homogénéisation et dans la limite haute fréquence, la tortuosité est reliée au nombre d'onde $k_{Hom}(\omega)$ par la relation (détails dans l'annexe F),

$$\alpha_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k_{Hom}^2(\omega)}{k^2}, \quad (3.4)$$

où $k = \omega/c$, avec c la célérité dans le fluide constituant les pores du matériau. De l'autre côté, dans le cadre des modèles décrivant les effets de diffusion multiple, la limite basse fréquence des nombres

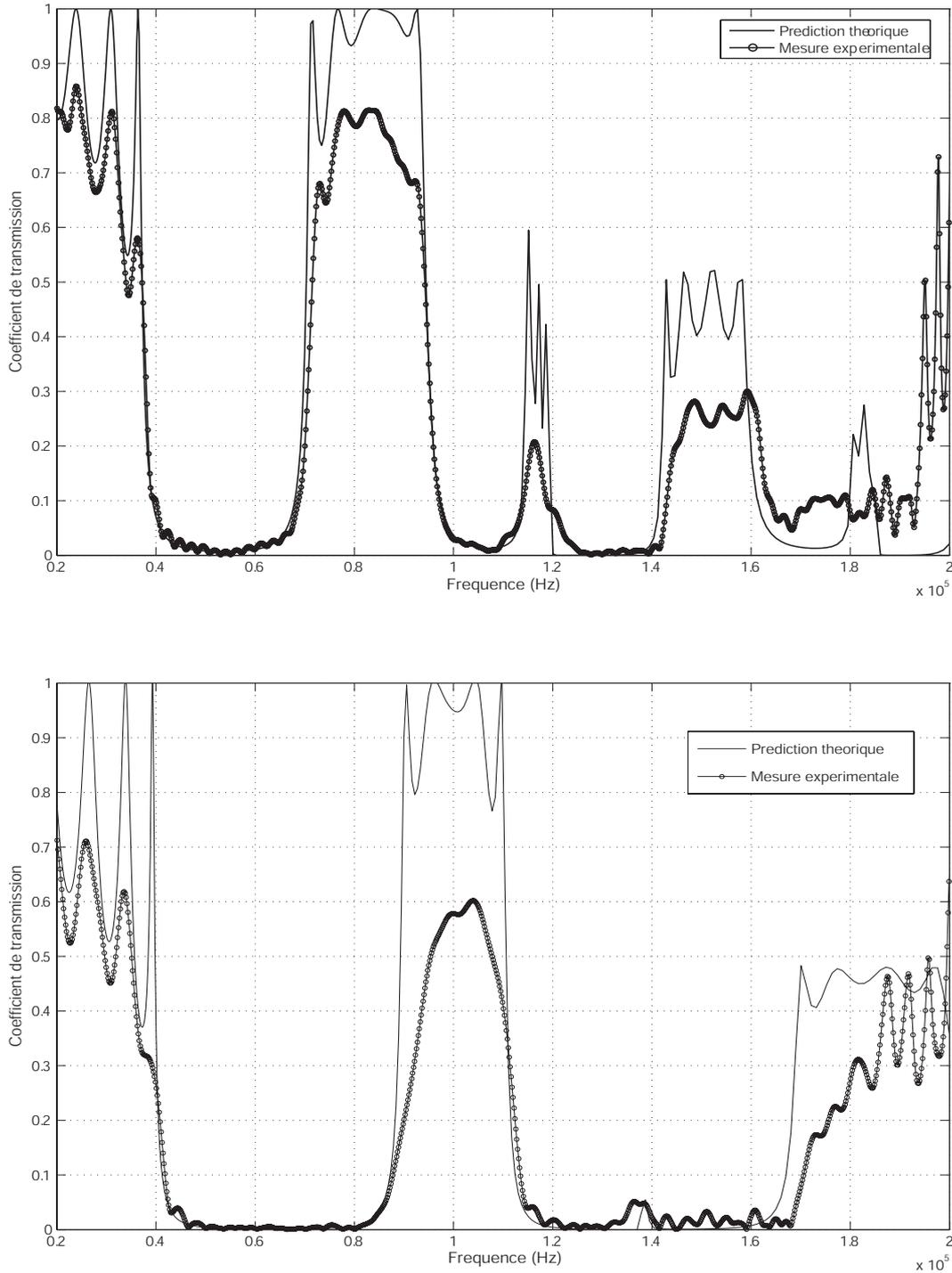


FIG. 3.5 – Coefficients de transmission expérimentaux et prédictions théoriques associées à deux systèmes composés de 6 rangées de 100 cylindres de porosité $\Phi \approx 0.65$ (figure du haut) et $\Phi \approx 0.50$ (figure du bas). Les prédictions théoriques obtenues par la méthode utilisant les séries de Schlömilch (chapitre 2), indiquent d'une part une bonne estimation des positions des bandes interdites et d'autre part, une surestimation du coefficient de transmission hors de celles-ci.

d'onde k_{Diff} obtenue doit correspondre à cette même quantité,

$$\alpha_\infty = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_{Diff}^2(\omega)}{k^2}. \quad (3.5)$$

Ce raisonnement général s'applique au cas particulier du cristal phononique à deux dimensions étudié ici. Le nombre d'onde k_{Diff} dans la relation (3.5) s'identifie alors au nombre d'onde de Bloch k_B . L'utilisation de la relation (3.5), pour différentes porosités Φ , permet de calculer les valeurs de tortuosité en étudiant la limite basses fréquences des nombres d'onde de Bloch k_B , solutions des problèmes aux valeurs propres (1.21) et (2.40) (correspondant aux deux méthodes de calcul développées dans les chapitres 1 et 2). Parallèlement, les valeurs de tortuosité correspondant à des échantillons de même porosité sont obtenues indépendamment par d'autres méthodes : d'une part, par Cortis [17] en utilisant un code de calcul par éléments finis [18] et d'autre part, par Perrins [49] en utilisant une méthode électrique [29]. L'ensemble des résultats ainsi obtenus est reporté dans le tableau (3.2).

Φ	$\alpha_\infty^{Fourier}$	$\alpha_\infty^{Schl\ddot{o}milch}$	α_∞^{Cortis}	$\alpha_\infty^{Perrins}$
0.9	1.0997	1.1000	1.0999	1.1000
0.7	1.3012	1.3021	1.3020	1.3021
0.5	1.5379	1.5401	1.5400	1.5401
0.3	2.2198	2.2298	2.2345	2.2298

TAB. 3.2 – Estimation de la tortuosité α_∞ pour différentes porosités Φ du milieu (première colonne) dans l'air à l'aide de différentes méthodes de calcul. Les deuxièmes et troisièmes colonnes représentent les résultats obtenus par des méthodes de diffusion multiple (chapitres 1 et 2). La quatrième colonne correspond aux résultats obtenus par Cortis [17] en utilisant une méthode d'éléments finis. Les résultats de Perrins [49] sont reportés dans la dernière colonne du tableau et sont obtenus par une méthode électrique.

L'excellente concordance des valeurs théoriques de tortuosité, pour différentes porosités, présentées dans le tableau 3.2 permet de confirmer la validité des calculs utilisant les décompositions en séries de Fourier spatiales et les séries de Schlömilch. Pour observer la transition entre les phénomènes de diffusion multiple et ceux, associés aux effets visqueux et thermiques, il est nécessaire de prendre en compte ces derniers dans les calculs. Dans la suite du document, cette intégration se fera à travers une extension de la méthode de calcul utilisant les séries de Schlömilch ; cette méthode permettant d'intégrer ces effets dissipatifs sans modifier les étapes présentées dans le chapitre 2.

3.4 Limites des modèles

Bien que le tableau 3.2 laisse supposer que la continuité est assurée entre les modèles considérant les effets visco-thermiques d'une part, et ceux associés aux effets de diffusion multiple d'autre part, il ne traduit que la concordance entre les limites asymptotiques de ces différents modèles. Cependant, les données ne permettent pas d'analyser la transition entre les modèles issus de la théorie de l'homogénéisation (grandes longueurs d'onde) et ceux décrivant les effets de diffusion multiple (petites

longueurs d'onde). C'est-à-dire qu'aux grandes longueurs d'onde, les effets visqueux et thermiques sont prépondérants et lorsque la longueur d'onde diminue, les effets de diffusion multiple interviennent. Il existe donc un domaine de longueur d'onde dans lequel s'effectue une transition entre un régime purement visco-thermique et l'émergence de la diffusion multiple. A ce stade de l'étude, les résultats obtenus dans les sections précédentes conduisent à une transition qui peut être de deux types : soit il existe une zone, représentée sur la figure 3.6, dans laquelle les résultats obtenus avec un modèle ou l'autre sont identiques, auquel cas, la continuité est assurée. La propagation d'une onde acoustique est dans ce cas décrite par la théorie de l'homogénéisation aux très basses fréquences et par les modèles de diffusion multiple aux hautes fréquences. Pour les fréquences intermédiaires (i.e. dans la zone de transition), les deux descriptions sont valables. Soit il existe une zone, représentée sur la figure 3.7, dans laquelle les effets visco-thermiques et de diffusion multiple coexistent. Dans cette seconde configuration, les deux modèles négligent un effet important dans la zone de transition. De ce fait, la propagation n'est décrite ni par l'un, ni par l'autre de ces modèles. En outre, la limite de validité d'un modèle ou l'autre n'est plus définie.

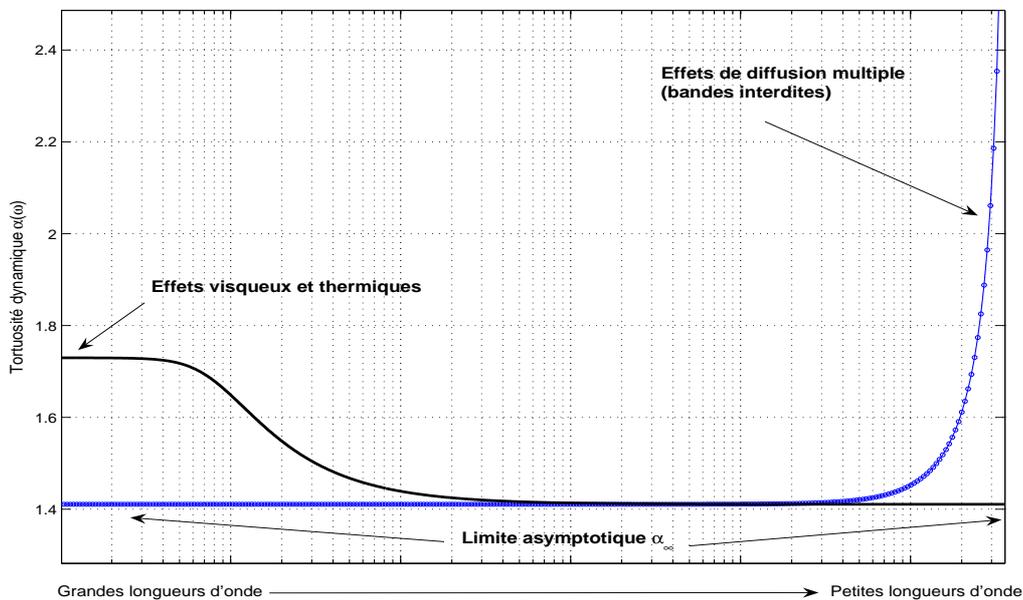


FIG. 3.6 – Schéma de transition entre les modèles classiques issus de la théorie d'homogénéisation (grandes longueurs d'onde) et les modèles prenant en compte la diffusion multiple (petites longueurs d'onde) présentant une zone de recouvrement (données arbitraires).

Le problème soulevé consiste à déterminer s'il existe une zone de recouvrement entre les régimes visco-thermique et de diffusion multiple. Dans le cas contraire, l'intérêt sera porté sur l'étendue de la zone de transition en fonction de la géométrie du cristal phononique étudié. Pour répondre à cette problématique, il est nécessaire de développer un modèle complet prenant en compte aussi bien les effets visco-thermiques que les effets de diffusion multiple. Ce nouvel outil permettra d'étudier l'influence de chacun des effets qui ont lieu au cours de la propagation et, par la même occasion, donnera les limites des modèles classiques issus de la théorie d'homogénéisation d'une part, et celles

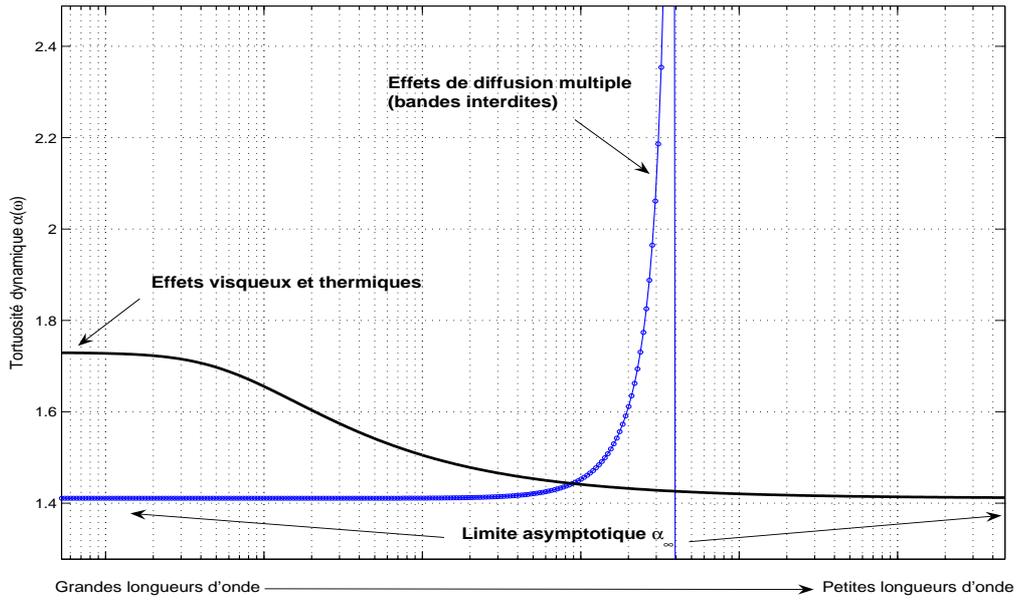


FIG. 3.7 – Schéma de transition entre les modèles classiques issus de la théorie d'homogénéisation (grandes longueurs d'onde) et les modèles prenant en compte la diffusion multiple (petites longueurs d'onde) ne présentant pas de zone de recouvrement (données arbitraires).

des modèles de diffusion multiple d'autre part. Cette étude complète fait l'objet de la seconde partie du document où les effets de dissipation visco-thermiques sont introduits dans la méthode de calcul utilisant les séries de Schlömilch présentée dans le chapitre 2.

Deuxième partie

Diffusion multiple en fluide dissipatif

Introduction

L'extension de la méthode de calcul présentée dans le chapitre 2 de la première partie fait l'objet de cette seconde partie. Le système étudié représenté sur la figure 3 est composé de N_r rangées de cylindres, où N_r peut tendre vers l'infini auquel cas, le système est un cristal phononique. Les résultats de la première partie montrent qu'un tel cristal peut présenter des bandes interdites dans certains domaines de fréquence. Ces domaines sont bien prédits par les modèles de diffusion multiple et le travail effectué précédemment montre que leurs existences proviennent exclusivement d'effets de diffusion multiple (cf. fin du chapitre 3). Cependant, certains problèmes ne sont pas résolus : premièrement, en dehors de ces bandes interdites, les prédictions théoriques ne sont plus aussi satisfaisantes et se traduisent par des coefficients de transmission théoriques surestimés par rapport à ceux obtenus expérimentalement. L'origine des écarts ainsi observés réside dans l'absence de la prise en compte de la dissipation par effets visqueux et thermiques dans les modèles de diffusion multiple utilisés. Deuxièmement, le problème de la transition entre les résultats des modèles classiques issus de la théorie de l'homogénéisation d'une part, et ceux issus des modèles de diffusion multiple d'autre part, soulevé à la fin du chapitre 3 n'est pas non plus résolu.

Le premier point fait l'objet du chapitre 4 où des effets de dissipation visqueux et thermiques sont introduits dans la méthode de calcul utilisant les séries de Schlömilch. Ces faibles effets se produisent aux hautes fréquences et sont considérés par l'intermédiaire d'un concept d'admittance de surface équivalente. Ce concept permet de considérer les pertes localisés à la frontière de chaque cylindre constituant le système étudié. Dans le chapitre 5, un modèle complet utilisant les séries de Schlömilch et décrivant aussi bien les effets visqueux et thermiques que les effets de diffusion multiple est développé. Ce modèle permet d'analyser précisément la transition entre un régime visco-thermique important et un régime de diffusion multiple. En outre, une discussion sur les limites des différents modèles de propagation est proposée dans le chapitre 6. Ce dernier est consacré à une analyse des résultats obtenus avec le modèle complet ainsi développé et permet d'étudier les limites des modèles classiques d'une part, et des modèles de diffusion multiple d'autre part.

Chapitre 4

Concept d'admittance de surface équivalente

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'influence de la prise en compte d'effets visqueux et thermiques sur la propagation d'une onde acoustique dans divers systèmes. Les systèmes étudiés sont composés d'une ou plusieurs rangées infinies de cylindres. Les effets dissipatifs sont considérés au voisinage des cylindres constituant ces systèmes. Pour cela, un concept d'admittance de surface permettant de traduire ces effets localisés est introduit.

Dans un premier temps, une description des couches limites visqueuses et thermiques dans lesquelles sont localisés les effets de dissipation est brièvement effectuée. L'expression de l'admittance de surface équivalente autour d'un cylindre est ensuite donnée. Celle-ci permet d'adapter les conditions aux limites exposées dans la formulation du problème du chapitre 2. Cette extension du modèle utilisant les séries de Schlömilch conduit à de nouveaux résultats qui sont comparés à des mesures expérimentales sur différents échantillons. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une discussion sur la limite du concept utilisée.

4.1 Extension du modèle utilisant les séries de Schlömilch

Cette première section présente l'approche théorique permettant d'intégrer certains effets visqueux et thermiques dans le modèle utilisant les séries de Schlömilch (détaillé dans le chapitre 2). Les effets considérés sont localisés dans le voisinage proche des cylindres du réseau. Leur prise en compte constitue une première extension du modèle présenté dans le chapitre 2.

4.1.1 Couches limites visqueuse et thermique

Comme abordé dans la première partie, lorsqu'une onde acoustique heurte un cylindre, celui-ci réémet un champ acoustique dans toutes les directions ; c'est l'effet de diffusion (ou diffraction). Dans le cas général d'un système composé de plusieurs cylindres, ces derniers réémettent tous des champs acoustiques dans toutes les directions. Le phénomène ainsi produit est qualifié de diffusion multiple

et constitue un effet d'atténuation de l'onde acoustique. En plus de ce phénomène, viennent s'ajouter des pertes par effets visqueux et thermiques au cours de la propagation de l'onde acoustique. Aux hautes fréquences, ces pertes résultent respectivement de frottements et d'échange de température entre les particules en mouvement dans le fluide et les cylindres rigides immobiles et donc, ont lieu aux voisinages des cylindres. Plus précisément, ces phénomènes s'établissent dans des couches limites visqueuse et thermique, représentées sur la figure 4.1. Leurs épaisseurs, notées respectivement δ_v et δ_h , dépendent des caractéristiques du fluide et de la pulsation ω de l'onde acoustique incidente [10],

$$\begin{cases} \delta_v = \sqrt{\frac{2\nu_v}{\omega}} \\ \delta_h = \sqrt{\frac{2\nu_h}{\omega}} \end{cases}, \quad (4.1)$$

où ν_v et ν_h sont respectivement les coefficients de viscosité cinématique et de diffusivité thermique du fluide entourant les cylindres. Comme le montrent ces relations, les épaisseurs de couches limites, et donc l'importance des effets visqueux et thermiques, augmentent lorsque la pulsation diminue ; c'est-à-dire, aux grandes longueurs d'onde. En outre, l'influence des effets qui ont lieu dans ces couches limites sur la propagation et l'absorption d'une onde acoustique est variable selon la nature du fluide considéré.

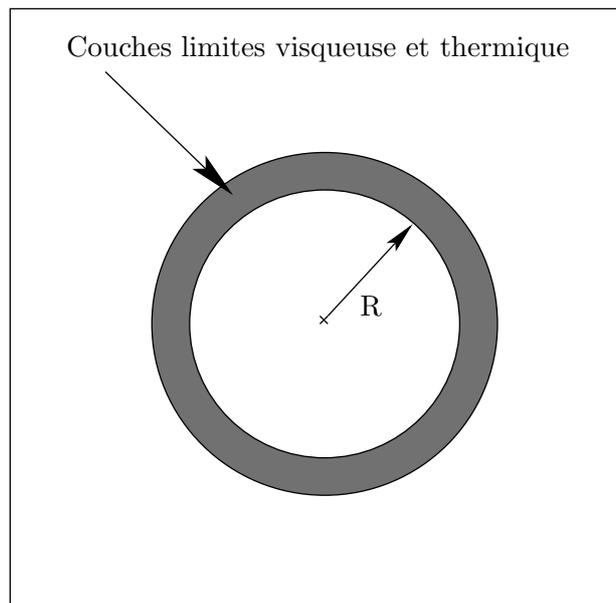


FIG. 4.1 – L'introduction des couches limites permet de considérer les effets visqueux et thermiques dans le voisinage des cylindres.

4.1.2 Expression de l'admittance de surface équivalente

Les phénomènes de dissipation visqueuse et thermique ayant lieu au voisinage des cylindres, décrits dans le paragraphe précédent, peuvent être pris en compte en introduisant une admittance de surface

équivalente. Cette introduction est réalisée en suivant la démarche proposée par Tournat et coll. [62] dans le cadre de l'étude de réseaux de cylindres aléatoires.

L'admittance de surface entoure les cylindres et intègre les phénomènes dissipatifs liés aux effets visqueux et thermiques dans les couches limites. En adoptant la convention $e^{-i\omega t}$, l'expression de cette admittance β est, dans le système de coordonnées cartésien et dans le cas d'une onde plane incidente sur une surface plane [46],

$$\beta(\delta_v, \delta_h, \omega) = \frac{1-i}{2}k \left[\left(1 - \frac{k_N^2}{k^2}\right) \delta_v + (\gamma - 1)\delta_h \right], \quad (4.2)$$

où la dépendance en ω de l'admittance apparaît implicitement dans les expressions de la constante de propagation dans le fluide $k = \omega/c$ et des épaisseurs de couches limites définies dans les relations (4.1). Le nombre d'onde k_N représente la composante normale du vecteur d'onde \vec{k} . Pour le cas à deux dimensions d'une onde plane incidente sur un disque, repéré en coordonnées polaires (r, θ) et illustré par la figure 4.2, le champ de pression incident $p_a(\vec{r}, \theta)$ peut se décomposer sur la base des fonctions de Bessel J_m comme suit,

$$p_a(\vec{r}, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{a,m}(\vec{r}, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2 - \delta_{m,0}) J_m(kR) \cos(m\theta). \quad (4.3)$$

Dans ce cas, l'admittance de surface équivalente correspondante s'écrit, pour chaque composante cylindrique m du champ de pression $p_{a,m}$,

$$\beta_m(\delta_v, \delta_h, \omega) = \frac{1-i}{2}k \left[\frac{m^2}{k^2 R^2} \delta_v + (\gamma - 1)\delta_h \right]. \quad (4.4)$$

Cette expression est obtenue en identifiant dans la relation (4.2), le nombre d'onde normal k_N au nombre d'onde radial k_r en coordonnées cylindriques : $k_r^2 = k^2 - m^2/R^2$.

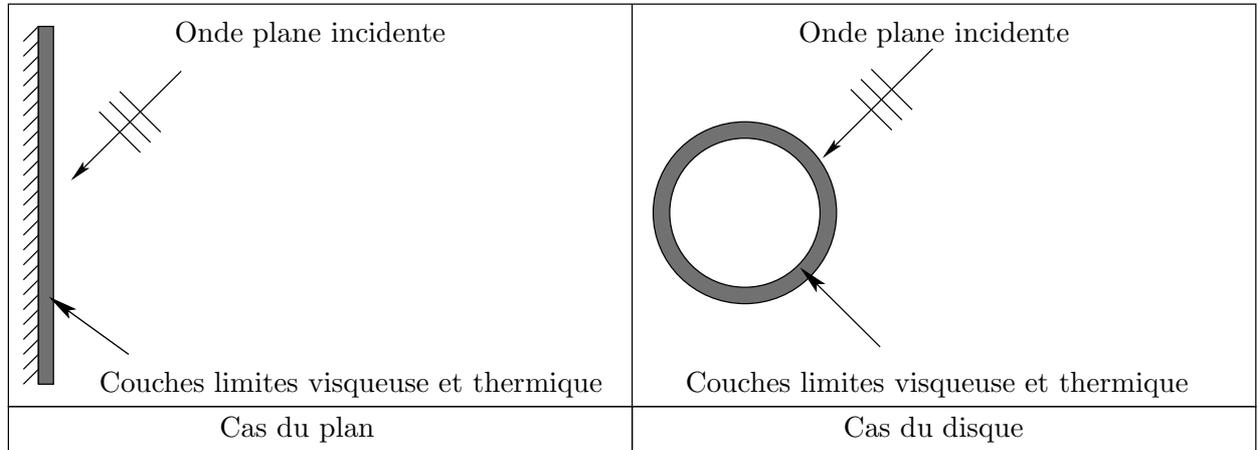


FIG. 4.2 – Représentation des couches limites visqueuse et thermique pour le cas d'une onde plane incidente sur un plan et sur un disque.

4.1.3 Report du résultat dans le problème étudié

Une première extension du modèle présenté dans le chapitre 2 utilisant les séries de Schlömilch consiste à inclure les effets visqueux et thermiques au voisinage des cylindres. Pour cela, il suffit

simplement de modifier la condition limite à la frontière des cylindres (2.3) en $r = R$ par une nouvelle condition faisant intervenir les composantes cylindriques β_m de l'admittance de surface équivalente,

$$-i\beta_m k p_{a,m} = \frac{\partial p_{a,m}}{\partial r} . \quad (4.5)$$

Dans la formulation du problème présenté dans le chapitre 2, la substitution de cette nouvelle condition limite a pour seule conséquence de modifier les coefficients de diffusion D_m donnés par la relation (2.22). Les nouveaux coefficients de diffusion sont notés D_m^β et traduisent les effets visqueux et thermiques aux voisinages des cylindres. Ils sont déterminés en introduisant la somme des champs de pression incident $p_{a,inc}$ et diffusé $p_{a,diff}$, respectivement donnés par les relations (2.19) et (2.17), dans l'expression de la nouvelle condition limite (4.5). Ces coefficients prennent la forme,

$$D_m^\beta = -\frac{J'_m(kR) + i\beta_m J_m(kR)}{H'_m(kR) + i\beta_m H_m(kR)} . \quad (4.6)$$

De la même manière que pour le cas du fluide parfait traité dans le chapitre 2, les deux termes portés par les dérivées des fonctions de Bessel J'_m et Hankel H'_m traduisent les effets de diffusion par les cylindres. Les deux nouveaux termes faisant intervenir l'admittance de surface β_m représentent une correction associée aux effets de dissipation dans les couches limites des cylindres.

Comme discuté dans les paragraphes précédents, les effets de l'introduction du concept d'admittance de surface équivalente se répercute en premier lieu sur les valeurs des coefficients de diffusion D_m qui dépendent maintenant de l'admittance β_m . De ce fait, des modifications sont également apportées sur les valeurs des coefficients de réflexion et transmission constituant la matrice de diffusion d'une rangée de cylindres. Cette dernière sera donc corrigée par la prise en compte de ces effets visqueux et thermiques. Il s'en suit que pour le problème de la propagation d'une onde acoustique dans un cristal phononique, la constante de propagation k_B du système sera également modifiée. L'objet des sections suivantes est de quantifier la correction apportée par l'utilisation de ce concept d'admittance.

4.2 Résultats obtenus en utilisant le concept d'admittance de surface équivalente et discussions

Pour le cas d'un système constitué de plusieurs rangées infinies de cylindres, la correction apportée par l'introduction des effets visqueux et thermiques au voisinage des cylindres peut s'observer aisément à partir de l'évaluation du coefficient de transmission théorique d'un tel système soumis à une onde plane acoustique en incidence normale. Une comparaison peut dès lors être effectuée à partir d'un dispositif expérimental permettant la mesure de ce même coefficient de transmission. Parallèlement, le report des résultats obtenus dans le cadre de l'étude en fluide parfait présenté dans le chapitre 2 permet de quantifier l'intérêt d'utiliser le concept d'admittance de surface. Les temps de calculs nécessaires pour obtenir les résultats présentés sont sensiblement du même ordre que ceux présentés dans le chapitre 2.

La méthode expérimentale permettant de mesurer le coefficient de transmission de N_r rangées infinies de cylindres est celle décrite dans le chapitre 3 et illustrée par la figure 3.2. Deux séries

de mesures sont effectuées sur des échantillons de porosité $\Phi \approx 0.65$ et $\Phi \approx 0.50$ et contenant chacun plusieurs rangées de 100 cylindres entourés d'air. Les largeurs d'une rangée de 100 cylindres sont de $L_{65}=30$ cm et $L_{50}=25$ cm respectivement pour les échantillons de porosité $\Phi \approx 0.65$ et $\Phi \approx 0.50$, et la hauteur de l'échantillon est de 10 cm dans les deux cas. Une impulsion acoustique longitudinale, produite à l'aide d'un transducteur ultrasonore large bande centrée sur 100 kHz, est émise en incidence normale sur ces différents échantillons. Pour chacun d'eux, le signal en sortie est reçu par un transducteur de même type. Le rapport entre le signal de sortie après passage dans un échantillon avec celui reçu sans l'échantillon, constituant un signal de référence, permet d'évaluer le coefficient de transmission de chaque échantillon en fonction de la fréquence dans le domaine de Fourier. Les deux transducteurs ultrasonores utilisés ont un rayon d'environ 2 cm et permettent ainsi de considérer chaque rangée de 100 cylindres comme étant infinie. Cette hypothèse est assurée par la bonne directivité des deux transducteurs dans la gamme ultrasonore d'étude.

Plus précisément, les coefficients de transmission expérimentaux sont mesurés pour des échantillons comportant 2 à 6 rangées de 100 cylindres dans l'air ayant des porosités de $\Phi \approx 0.65$ et $\Phi \approx 0.50$. La gamme fréquentielle d'étude s'étend de 20 kHz à 200 kHz environ et est représentée sous la forme réduite kL/π . Les mesures sont reportées sur les figures 4.3 pour deux échantillons contenant deux rangées. Les résultats pour un nombre de rangée allant de 3 à 6 sont représentés sur les figures 4.4. Dans toutes ces figures ont également été reportés d'une part, les résultats obtenus pour le cas du fluide parfait présenté dans le chapitre 2 (utilisant les coefficients de diffusion D_m) et d'autre part, ceux obtenus en considérant des pertes visqueuses et thermiques au voisinage des cylindres présentés dans ce chapitre (utilisant les coefficients de diffusion D_m^β). Ces deux derniers résultats sont obtenus à partir de la construction des matrices de diffusion $[S]$ d'une rangée pour les cas fluide parfait et admittance de surface. La construction de la matrice de diffusion $[S_{N_r}]$ de N_r rangées est effectuée en utilisant la formule de récurrence (2.38). Cette matrice permet de prédire les coefficients de transmission correspondant aux résultats expérimentaux. Ces prédictions théoriques sont obtenues à partir des seules connaissances de la géométrie des échantillons d'une part (rayon R des cylindres, paramètre de maille L et nombre de rangée N_r), et des paramètres du fluide entourant (masse volumique, célérité, coefficients de viscosité cinématique et diffusivité thermique de l'air) d'autre part. Les paramètres correspondants à la configuration expérimentale et utilisés pour les calculs numériques sont reportés dans le tableau 4.1.

Température	$T_0 = 293 \text{ K}$
Vitesse du son	$c_0 = 343 \text{ m.s}^{-1}$
Masse volumique	$\rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$
Rapport des capacités	$\gamma = 1.4$
Diffusivité thermique	$\nu_h = 2.15 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu_v = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Capacité calorifique massique à pression constante	$C_p = 1\,005 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

TAB. 4.1 – Paramètres de l'air traduisant les conditions expérimentales et utilisés dans les calculs numériques. Les diffusivité thermique et viscosité cinématique apparaissent dans les expressions des couches limites définies par la relation (4.1). Les valeurs reportées ici sont celles données par [37].

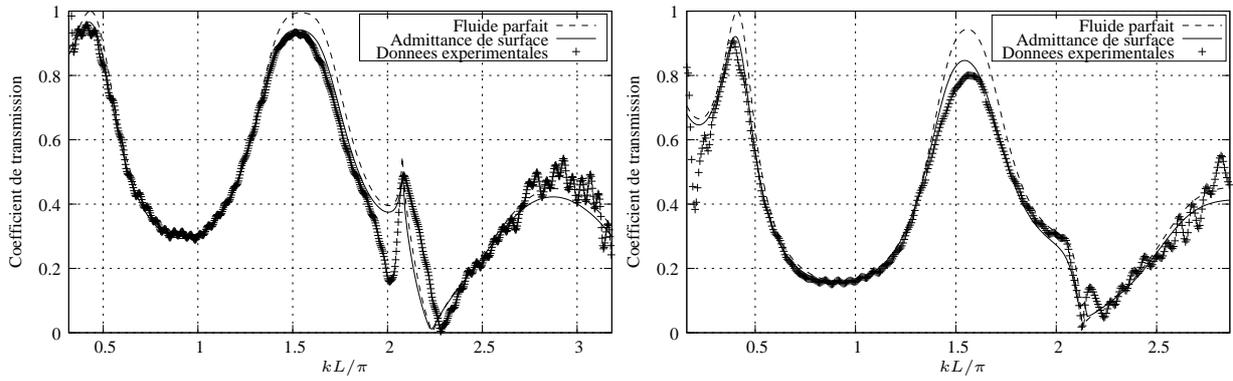


FIG. 4.3 – Représentation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence réduite kL/π (échelle équivalente à un domaine fréquentiel allant de 20 kHz à 200 kHz environ). La figure de gauche représente le coefficient de transmission de 2 rangées pour un échantillon de porosité $\Phi \approx 0.65$. La figure de droite représente ce même coefficient pour un échantillon de porosité $\Phi \approx 0.50$. Dans les deux cas, les échantillons contiennent 100 cylindres, de rayon $R = 1$ mm, par rangée. Trois courbes sont représentées sur chacune des figures : résultats expérimentaux en croix (+), prédiction en fluide parfait en traits discontinus (---) et, prédiction en utilisant le concept d'admittance de surface équivalente en traits pleins (—).

Sur chaque courbe sont représentées trois séries de résultats ; les résultats expérimentaux obtenus avec la méthode de mesure décrite plus haut (courbes en croix (+)) et les prédictions théoriques obtenues numériquement en utilisant la méthode détaillée dans le chapitre 2 pour deux cas. Dans le premier, les calculs numériques sont effectués en considérant le fluide entourant comme parfait (courbes en traits discontinus (---)). Dans le second, le concept d'admittance de surface équivalente est intégré dans le modèle (courbes en traits pleins (—)).

Pour chacune des deux porosités, les coefficients de transmission expérimentaux montrent l'existence de bandes fréquentielles à l'intérieures desquelles l'atténuation est très importante. Cette atténuation est d'autant plus importante que le nombre de rangées considéré est grand. En outre, avec l'augmentation du nombre de rangées, les positions de ces bandes sont de mieux en mieux décrites et s'approchent de celles définies pour le cas de cristaux phononiques infinis. Les positions des bandes interdites en fonction de la fréquence sont présentées dans le chapitre 3 pour des cristaux de mêmes porosités (cf. figure 3.4).

Les positions de ces domaines fréquentiels sont aussi bien décrites par les calculs utilisant les séries de Schlömilch en fluide parfait que par ceux considérant des effets visqueux et thermiques par l'intermédiaire du concept d'admittance de surface équivalente. Cette observation confirme le fait que l'origine de l'apparition des bandes interdites est purement liée aux effets de diffusion multiple au cours de la propagation de l'onde acoustique. Les oscillations périodiques qui apparaissent avant chaque bande interdite traduisent des effets d'interférence dus à la périodicité des cylindres constituant les échantillons (effets visibles aux basses fréquences ultrasonores sur les figures 4.4). La période de ces oscillations diminuent régulièrement avec l'augmentation du nombre de rangées et est associée à des phénomènes d'interférence qui se produisent entre les rangées successives. Les

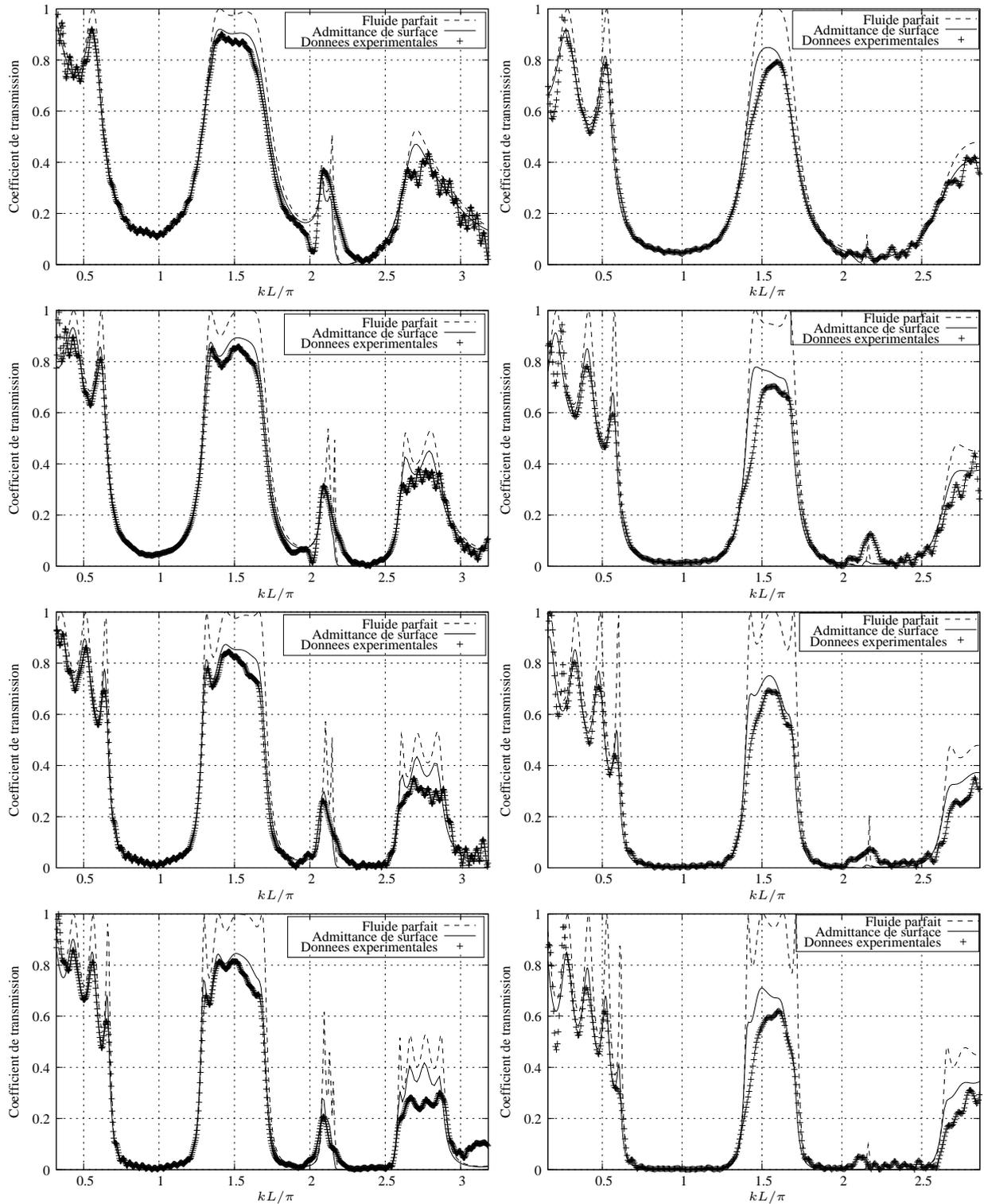


FIG. 4.4 – Représentation du coefficient de transmission en fonction de la fréquence réduite kL/π (échelle équivalente à un domaine fréquentiel allant de 20 kHz à 200 kHz environ) pour des échantillons comportant 3 à 6 rangées de cylindres. Les figures de gauche sont associées à des échantillons de porosité $\Phi \approx 0.65$. Dans les figures de droite, la porosité des échantillons est $\Phi \approx 0.50$. Tous les échantillons contiennent 100 cylindres de rayon $R = 1$ mm. Trois courbes sont représentées sur chacune des figures : résultats expérimentaux en croix (+), prédiction en fluide parfait en traits discontinus (---) et prédiction en utilisant le concept d'admittance en traits pleins (-).

domaines définissant les bandes interdites s'interprètent comme des zones où les ondes acoustiques réémises par les cylindres interfèrent de manière totalement destructive. La prise en compte ou non, d'effets visqueux et thermiques ne changent donc rien à l'apparition de ces bandes interdites.

Cependant, en dehors des bandes fréquentielles où les ondes sont fortement atténuées, l'intérêt de la prise en compte des effets visqueux et thermiques se manifeste par la bonne concordance entre les résultats numériques obtenus en utilisant le concept d'admittance et les résultats expérimentaux. En effet, les résultats théoriques obtenus en fluide parfait prédisent des coefficients de transmission qui sont surestimés par rapport à ceux mesurés. L'origine des différences constatées provient donc d'effets visqueux et thermiques qui ont lieu au voisinage des cylindres. Le concept d'admittance de surface équivalente constitue ainsi une manière simple et efficace de considérer ces effets visqueux et thermiques.

4.3 Limite d'utilisation du concept d'admittance de surface équivalente

L'admittance de surface équivalente utilisée permet de considérer les effets visqueux et thermiques au voisinage des cylindres. Cependant, ce concept n'est valable que sous deux conditions. D'une part, les épaisseurs de couches limites doivent rester très petites devant le rayon R des cylindres et d'autre part, l'espacement $L - 2R$ entre deux cylindres doit être supérieur à ces mêmes épaisseurs. La première condition exprime le fait que la surface doit apparaître localement plane en regard de la longueur d'onde associée à l'onde acoustique incidente. La seconde restreint l'utilisation du concept d'admittance au cas d'un système relativement dilué. La non validation de ces deux hypothèses, respectivement illustrées par les figures 4.5 (a) et (b), constitue une limite d'utilisation. Dans ce cas, les effets visqueux et thermiques ne sont plus pris en compte.

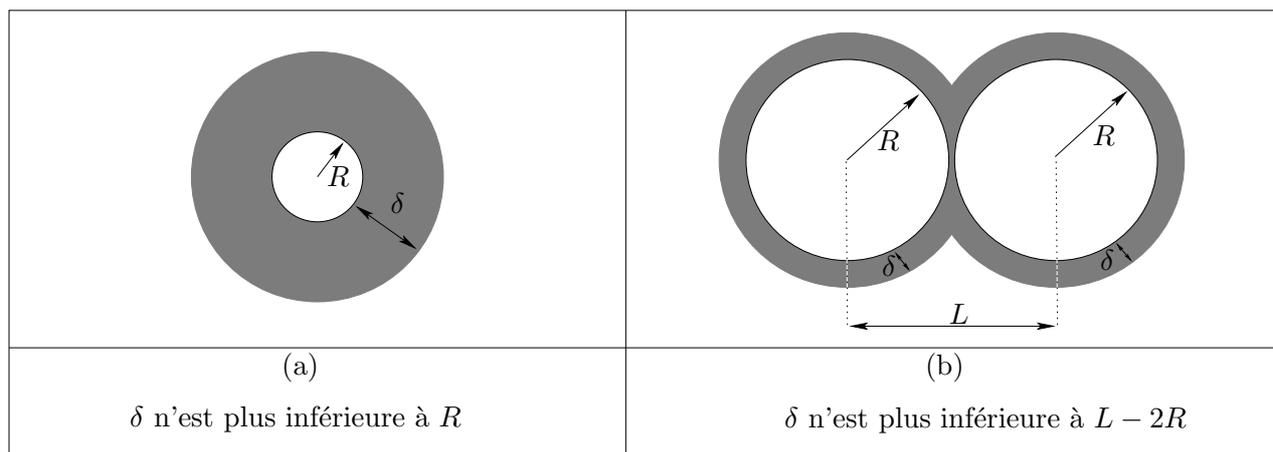


FIG. 4.5 – Illustration des deux cas pour lesquels le concept d'admittance de surface n'est plus valable. Le cas (a) correspond à un régime de grandes longueurs d'onde où les épaisseurs de couches limites ne peuvent plus être considérées comme très petites devant le rayon des cylindres. Le cas (b) représente un milieu très concentré.

4.4 Conclusion

Les résultats expérimentaux et théoriques présentés dans ce chapitre montrent que les effets dissipatifs se produisant au voisinage des cylindres, constituant les réseaux étudiés, ont une importance significative dans un domaine hautes fréquences. Le concept d'admittance équivalente présenté suffit à caractériser la propagation d'une onde acoustique en considérant ces faibles effets visco-thermiques. En effet, dans les cas étudiés dans les sections précédentes, les deux hypothèses évoquées plus haut sont entièrement satisfaites dans la gamme de fréquences considérée. Cependant, pour des milieux plus denses et/ou aux très grandes longueurs d'onde, les hypothèses illustrées sur la figure 4.5 permettant l'utilisation de ce concept ne sont plus validées. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte tous les effets visqueux et thermiques au cours de la propagation, i.e. non nécessairement localisés dans le voisinage des cylindres.

L'objet du chapitre suivant consiste à développer un modèle complet prenant en compte aussi bien les effets de diffusion multiple que les effets visqueux et thermiques sans restriction sur ces derniers. Ce modèle permettra ainsi d'étudier la transition entre un régime visco-thermique important (décrit par les modèles de propagation classique connus aux grandes longueurs d'onde [3]) et l'apparition des effets de diffusion multiple.

Chapitre 5

Modèle complet : diffusion multiple avec prise en compte des effets visqueux et thermiques

Ce chapitre présente une seconde extension du modèle développé dans le chapitre 2 basé sur le calcul des séries de Schlömilch en fluide parfait. Dans le cadre de ce chapitre, les effets visqueux et thermiques ayant lieu au cours de la propagation sont entièrement décrits par l'intermédiaire de deux potentiels : tourbillonnaire et entropique. Ces deux potentiels sont respectivement associés aux effets visqueux et thermiques non nécessairement localisés au voisinage des cylindres (contrairement au chapitre précédent). Le problème est formellement analogue à celui présenté dans le chapitre 2. De manière similaire, dans un premier temps, l'étude porte sur les propriétés d'une rangée contenant une infinité de cylindres périodiquement espacés de L . Plus précisément, l'objectif est de déterminer la matrice de diffusion associée à cette rangée de cylindres. Dans un deuxième temps, les propriétés d'un système composé de plusieurs rangées de cylindres sont déduites en utilisant la même procédure que celle du chapitre 2 (relation de récurrence). L'extension à la détermination des caractéristiques d'un cristal phononique, représenté sur la figure 3, est ensuite réalisée par l'intermédiaire du théorème de Bloch [9]. Dans une dernière partie, des simulations et une analyse des temps de calcul correspondants sont présentées et comparées aux résultats obtenus en fluide parfait dans le cadre du chapitre 2. Dans l'ensemble, la structure de ce chapitre est analogue à celle du chapitre 2.

5.1 Position du problème

Le problème considéré est, comme dans le chapitre 2, résolu en trois étapes : dans un premier temps, les propriétés de réflexion et transmission d'une rangée contenant une infinité de cylindres sont déterminées. Ces mêmes propriétés sont ensuite recherchées pour un système contenant plusieurs rangées. Enfin, l'étude de la relation de dispersion d'un cristal phononique à deux dimensions est réalisée. La géométrie de ces trois problèmes est représentée sur les figures 2.1 (a), (b) et (c), et est rappelée ici sur la figure 5.1

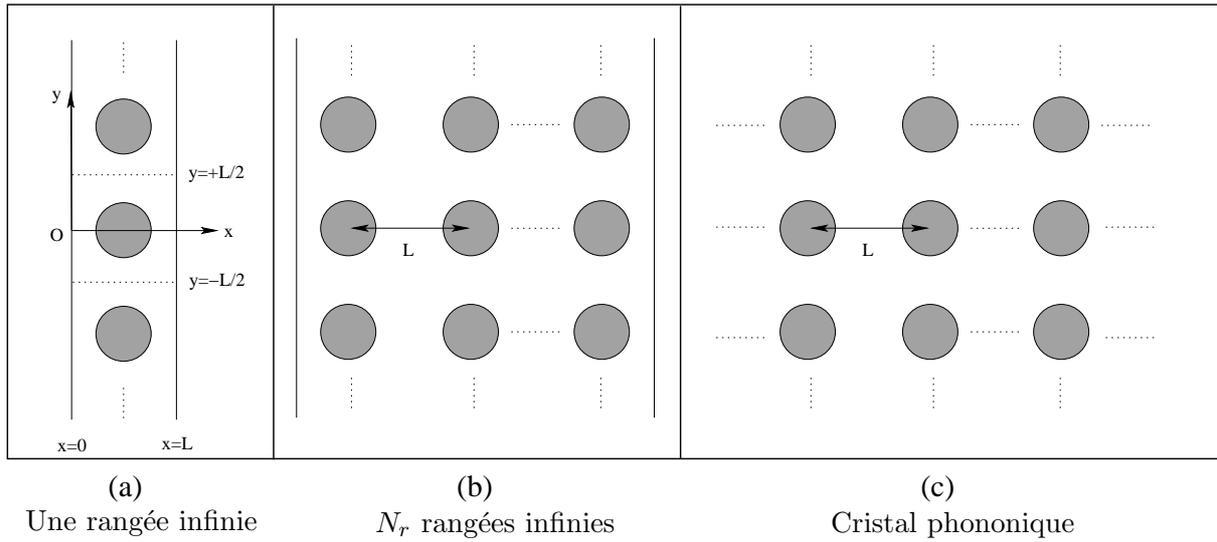


FIG. 5.1 – Illustration des trois problèmes considérés. Ces géométries sont caractérisées par le rayon R des cylindres et le paramètre de maille L . La figure (a) représente une rangée contenant une infinité de cylindres périodiquement espacés. La figure (b) illustre le problème de N_r rangées. Enfin, le cristal phononique est représenté sur la figure (c).

Les cylindres, de rayon R , sont maintenant entourés d'un fluide dissipatif. Le paramètre de maille séparant les centres de deux cylindres consécutifs est toujours noté L . Pour le cas d'une rangée (figure 5.1 (a)), la face d'entrée est située en $x = 0$ et la face de sortie en $x = L$.

Dans ce chapitre, les deux grandeurs d'intérêts sont les champs de déplacement $\vec{u}(x, y, t)$ et de température excédentaire $\tau(x, y, t)$ à deux dimensions. Ces deux champs sont décrits par l'intermédiaire de trois potentiels : acoustique $\phi_a(x, y, t)$, entropique $\phi_h(x, y, t)$ et tourbillonnaire $\vec{\psi}(x, y, t)$. Ces potentiels traduisent respectivement la propagation de l'onde acoustique, les échanges de chaleur et les effets de viscosité au cours de la propagation. Le potentiel vecteur $\vec{\psi}(x, y, t)$ n'a qu'une seule composante dirigée selon l'axe Oz et est notée $\psi(x, y, t)$ dans la suite. La relation entre ces trois potentiels et les deux champs s'écrit,

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_a + \phi_h) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\psi} \\ \tau = \omega^2 \frac{\beta_0 T_0}{C_p} \phi_a - \frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} \phi_h \end{cases}, \quad (5.1)$$

où ω est la pulsation de l'onde acoustique et β_0 , T_0 , C_p et ν_h sont des constantes définies par le fluide entourant les cylindres. Elles représentent respectivement le coefficient d'augmentation relative de pression isochore, la température, la capacité calorifique isobare et la diffusivité thermique,

La maille élémentaire est symétrique selon l'axe Ox . L'excitation considérée vérifiant aussi cette

symétrie, cette dernière se reporte sur les trois potentiels de la manière suivante,

$$\begin{cases} \phi_a(x, y, t) = \phi_a(x, -y, t) \\ \phi_h(x, y, t) = \phi_h(x, -y, t) \\ \psi(x, y, t) = -\psi(x, -y, t) \end{cases} \quad (5.2)$$

De plus, les cylindres étant périodiquement espacés de L selon l'axe Oy , les trois potentiels possèdent cette même propriété,

$$\begin{cases} \phi_a(x, y, t) = \phi_a(x, y + L, t) \\ \phi_h(x, y, t) = \phi_h(x, y + L, t) \\ \psi(x, y, t) = \psi(x, y + L, t) \end{cases} \quad (5.3)$$

Dans la suite, l'expression de ces trois potentiels est explicitée sur les faces d'entrée et de sortie de la rangée en régime harmonique. La matrice de diffusion associée à cette rangée est ensuite construite. Elle permet de prédire les potentiels entrants et sortants lorsqu'une excitation extérieure est émise. Une extension permettant de caractériser les propriétés de réflexion et transmission pour le cas de plusieurs rangées est ensuite effectuée. Le cas du cristal phononique, s'interprétant comme une somme infinie de rangées de cylindres, est abordé dans une dernière partie.

5.2 Étude des propriétés d'une rangée infinie de cylindres

5.2.1 Expression des potentiels sur les faces d'entrée et de sortie

L'objet de cette section est d'exprimer les trois potentiels sur les faces d'entrée et de sortie de la rangée infinie représentée sur la figure 5.1 (a). Leur expression est obtenue par l'intermédiaire d'une décomposition en ondes planes.

5.2.1.1 Formulation générale

Dans le cadre des équations de l'acoustique linéaire (i.e. faibles variations), les trois potentiels décrits dans la relation (5.1) obéissent aux trois équations de Helmholtz suivantes (cf. Pierce [51]) en régime harmonique (la convention $e^{-i\omega t}$ est adoptée),

$$\begin{cases} (\Delta + k_a^2)\phi_a = 0 & , & k_a^2 = \omega^2 \frac{\rho_0}{K_0} \\ (\Delta + k_h^2)\phi_h = 0 & , & k_h^2 = \frac{i\omega}{\nu_h} \\ (\Delta + k_v^2)\psi = 0 & , & k_v^2 = \frac{i\omega}{\nu_v} \end{cases} \quad (5.4)$$

où ρ_0 et K_0 sont respectivement la masse volumique et le module de compressibilité adiabatique du fluide. Les coefficients de viscosité cinématique et de diffusivité thermique du fluide sont, comme dans

le chapitre 4, notés ν_v et ν_h respectivement. Les nombres d'onde k_v et k_h associés à la dissipation par effets visco-thermiques sont complexes et de la forme $\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}|k_{v,h}|$. Le nombre d'onde acoustique k_a est réel positif.

A ces trois équations de Helmholtz doivent s'ajouter les conditions aux limites à la frontière des cylindres en $r = R$. Ces conditions s'appliquent sur les champs de déplacement \vec{u} et de température τ et prennent la forme suivante,

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \tau = 0 \end{cases} . \quad (5.5)$$

Ces deux conditions imposent respectivement un champ de déplacement nul et un champ de température excédentaire nul à la frontière de chaque cylindre et traduisent le couplage des trois équations (5.4).

5.2.1.2 Face d'entrée $x = 0$

Les trois potentiels acoustique ϕ_a , entropique ϕ_h et tourbillonnaire ψ solutions des équations (5.4) peuvent se décomposer en trois sommes infinies d'ondes planes. Pour satisfaire aux conditions de parité selon l'axe Ox et de périodicité selon l'axe Oy , données par les relations (5.2) et (5.3) respectivement, les potentiels acoustique et entropique sont développés sur une base de fonctions cosinus d'une part, et le potentiel tourbillonnaire sur une base de fonction sinus d'autre part,

$$\begin{cases} \phi_{a,0}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) \left[a_{n,0}^+ e^{ik_{a,xn}x} + a_{n,0}^- e^{-ik_{a,xn}x} \right] \\ \phi_{h,0}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) \left[h_{n,0}^+ e^{ik_{h,xn}x} + h_{n,0}^- e^{-ik_{h,xn}x} \right] \\ \psi_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) \left[v_{n,0}^+ e^{ik_{v,xn}x} + v_{n,0}^- e^{-ik_{v,xn}x} \right] \end{cases} . \quad (5.6)$$

Dans ces relations, les coefficients $a_{n,0}$, $h_{n,0}$ et $v_{n,0}$ sont associés aux amplitudes des différentes composantes des potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire respectivement. La notation “+” désigne des potentiels “aller” suivant l'axe des x croissants et la notation “-”, des potentiels “retour” suivant l'axe des x décroissants. Le report de ces solutions dans les équations (5.4) permet d'écrire les trois relations de dispersion,

$$\begin{cases} k_{a,xn}^2 = k_a^2 - \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \\ k_{h,xn}^2 = k_h^2 - \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \\ k_{v,xn}^2 = k_v^2 - \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \end{cases} , \quad (5.7)$$

où les nombres d'onde k_a , k_h et k_v sont définis dans le système d'équations (5.4).

5.2.1.3 Face de sortie $x = L$

La démarche précédemment effectuée pour la face d'entrée $x = 0$ reste valable pour la face de sortie $x = L$,

$$\begin{cases} \phi_{a,L}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) \left[a_{n,L}^+ e^{ik_{a,xn}(x-L)} + a_{n,L}^- e^{-ik_{a,xn}(x-L)} \right] \\ \phi_{h,L}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) \left[h_{n,L}^+ e^{ik_{h,xn}(x-L)} + h_{n,L}^- e^{-ik_{h,xn}(x-L)} \right] \\ \psi_L(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) \left[v_{n,L}^+ e^{ik_{v,xn}(x-L)} + v_{n,L}^- e^{-ik_{v,xn}(x-L)} \right] \end{cases}, \quad (5.8)$$

où les coefficients $a_{n,L}^{\pm}$, $h_{n,L}^{\pm}$ et $v_{n,L}^{\pm}$ sont respectivement associés aux composantes aller et retour pour les trois potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire.

5.2.2 Matrice de diffusion

Les expressions des trois potentiels étant connues sur les faces d'entrée et de sortie, l'approche par une matrice de diffusion consiste à exprimer les amplitudes associées aux trois potentiels sortants en fonction des amplitudes associées aux trois potentiels entrants comme l'illustre la figure 5.2. De la même manière que dans le chapitre 2, en introduisant les matrices de réflexion $[\mathbf{R}^D]$ et de transmission $[\mathbf{T}^D]$ d'une rangée infinie de cylindres en fluide dissipatif (la notation " D " est introduite pour différencier ces matrices de celles utilisées dans le cadre du chapitre 2), les amplitudes des ondes sortantes sont reliées à celles entrantes par la relation,

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_0^- \\ \vec{a}_L^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}^D] & [\mathbf{R}^D] \\ [\mathbf{R}^D] & [\mathbf{T}^D] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_L^- \\ \vec{a}_0^+ \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

où les vecteurs \vec{a} regroupent l'ensemble des amplitudes associées aux trois potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire,

$$\vec{a}_0^- = \begin{pmatrix} a_{n,0}^- \\ h_{n,0}^- \\ v_{n,0}^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}_L^- = \begin{pmatrix} a_{n,L}^- \\ h_{n,L}^- \\ v_{n,L}^- \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\vec{a}_L^+ = \begin{pmatrix} a_{n,L}^+ \\ h_{n,L}^+ \\ v_{n,L}^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}_0^+ = \begin{pmatrix} a_{n,0}^+ \\ h_{n,0}^+ \\ v_{n,0}^+ \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

La matrice de diffusion d'une rangée infinie de cylindres $[S^D] = \begin{pmatrix} [T^D] & [R^D] \\ [R^D] & [T^D] \end{pmatrix}$ est définie par les matrices de transmission $[T^D]$ et de réflexion $[R^D]$ dont les expressions sont,

$$[T^D] = \begin{pmatrix} [T]^{aa} & [T]^{ah} & [T]^{av} \\ [T]^{ha} & [T]^{hh} & [T]^{hv} \\ [T]^{va} & [T]^{vh} & [T]^{vv} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [R^D] = \begin{pmatrix} [R]^{aa} & [R]^{ah} & [R]^{av} \\ [R]^{ha} & [R]^{hh} & [R]^{hv} \\ [R]^{va} & [R]^{vh} & [R]^{vv} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Ces deux expressions font apparaître 18 matrices. Leur présence provient de la contribution des trois potentiels sur les autres. Par exemple, les n amplitudes du potentiel entropique sortant en $x = 0$, notées $h_{n,0}^-$ (cf. figure 5.2) s'écrivent comme la superposition des amplitudes acoustique, entropique et tourbillonnaire transmises en $x = L$ et des amplitudes acoustique, entropique et tourbillonnaire réfléchies en $x = 0$, c'est-à-dire,

$$h_{n,0}^- = [T]^{ha} a_{n,L}^- + [T]^{hh} h_{n,L}^- + [T]^{hv} v_{n,L}^- + [R]^{ha} a_{n,0}^+ + [R]^{hh} h_{n,0}^+ + [R]^{hv} v_{n,0}^+. \quad (5.13)$$

La détermination des éléments constituant ces 18 matrices fait l'objet des paragraphes suivants.

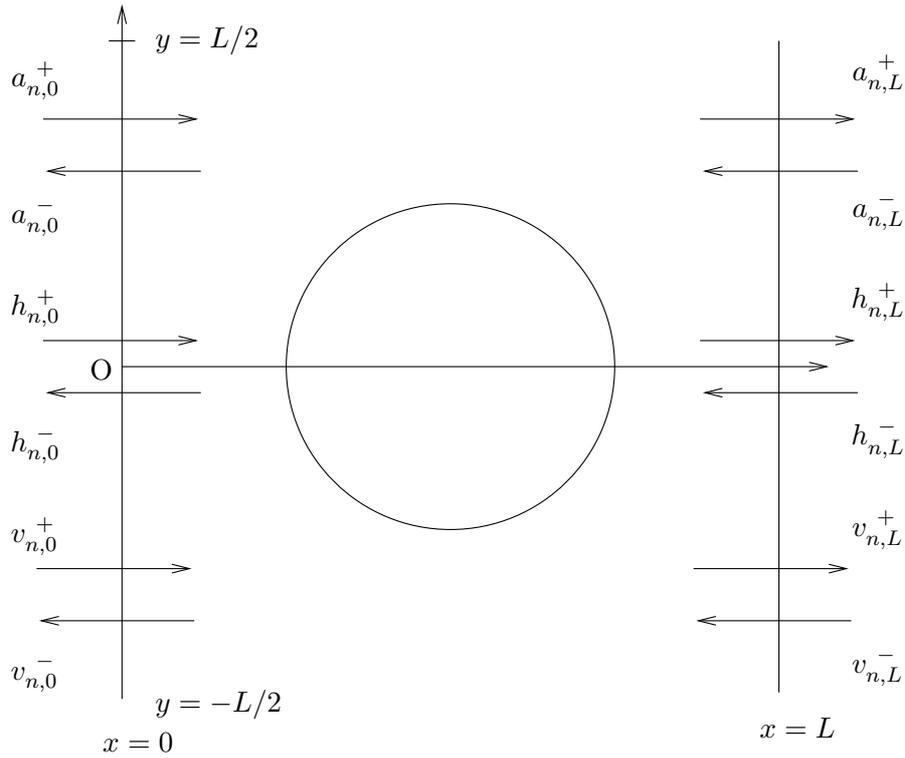


FIG. 5.2 – Amplitudes des différents potentiels entrants et sortants en $x = 0$ et $x = L$ dans une cellule élémentaire. Les n amplitudes notées a_n sont associées aux potentiels acoustique, celles notées h_n aux potentiels entropiques et enfin, celles notées v_n aux potentiels tourbillonnaires. Les notations “+” et “-” font références à des potentiels se propageant dans la direction des x croissants et décroissants respectivement. L’indice “0” est utilisé pour désigner la face d’entrée et “L”, la face de sortie.

5.2.3 Matrices de réflexion et transmission

Pour déterminer l'ensemble des matrices de réflexion et transmission sur chacune des faces d'entrée et de sortie d'une rangée, il est nécessaire d'explicitier les formes des différents potentiels pour chaque cas (acoustique, entropique et tourbillonnaire). Dans un premier temps, ces trois potentiels sont écrits en fonction des coefficients de réflexion et transmission constituant les 18 matrices décrites précédemment. Une seconde formulation où les potentiels sont exprimés en fonction des champs diffusés et incidents autour d'un cylindre de la rangée est ensuite proposée. Une identification entre ces deux formulations conduit à l'expression exacte des coefficients de réflexion et transmission recherchés. Le problème est traité parallèlement pour les trois potentiels mis en jeu.

Expression des potentiels réfléchis et transmis sur les faces d'entrée et sortie de la rangée lorsqu'un potentiel incident est imposé

Dans ce paragraphe, les potentiels réfléchis et transmis sont exprimés sur chacune des faces d'entrée et de sortie lorsqu'une sollicitation extérieure est imposée. Cette sollicitation peut être de type acoustique, entropique ou tourbillonnaire. Chacun des trois cas est présenté ci-dessous.

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

Dans ce premier cas, un potentiel acoustique extérieur $\phi_{a,ext}(x, y)$ se propageant dans la direction des x croissants est imposé. Deux composantes selon l'axe Oy sont retenues. Ces deux composantes sont symétriques selon l'axe Ox . Les résultats pour un potentiel complexe (somme de plusieurs composantes) s'obtiennent dans la suite en utilisant le théorème de superposition. Tenant compte de la symétrie, les deux composantes de ce potentiel s'écrivent sur une base de fonction cosinus,

$$\phi_{a,ext}(x, y) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) e^{ik_{a,xn}x} \quad , \quad (5.14)$$

où $k_{a,xn}$ est définie par la relation (5.7). Les deux composantes selon l'axe Oy et symétriques selon l'axe Ox sont obtenues en fixant n . A une pulsation ω fixée, ce potentiel se présente comme la somme de deux ondes planes, propagatives ou évanescentes (selon la valeur de n) et symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 0$. Les deux ondes planes définissent un angle $\pm\theta_{a,n}$ par rapport à l'axe x . Cet angle est soit réel, soit complexe.

Par effet de diffusion, ce potentiel imposé et incident sur la rangée crée des potentiels acoustique ϕ_{aa} , entropique ϕ_{ha} et tourbillonnaire ψ_a réfléchis et transmis par cette même rangée. Les expressions de ces potentiels peuvent être développées en ondes planes sur les faces d'entrée $x = 0$ et de sortie $x = L$,

$$\begin{cases} \phi_{a,0}^-(x, y) &= \phi_{aa,0}^- + \phi_{ha,0}^- + \psi_{a,0}^- \\ \phi_{a,L}^+(x, y) &= \phi_{aa,L}^+ + \phi_{ha,L}^+ + \psi_{a,L}^+ \end{cases} \quad , \quad (5.15)$$

avec, sur la face d'entrée,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,0}^-(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{aa} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{a,xp}x} \\ \phi_{ha,0}^-(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{ha} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{h,xp}x} \\ \psi_{a,0}^-(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{va} \sin\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{v,xp}x} \end{array} \right. , \quad (5.16)$$

et sur la face de sortie,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,L}^+(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{aa} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{a,xp}(x-L)} \\ \phi_{ha,L}^+(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{ha} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{h,xp}(x-L)} \\ \psi_{a,L}^+(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{va} \sin\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{v,xp}(x-L)} \end{array} \right. , \quad (5.17)$$

où R_{pn}^{ba} et T_{pn}^{ba} (b désigne les différentes contributions : a pour acoustique, h pour entropique et v pour tourbillonnaire) représentent une partie des éléments des matrices de réflexion $[R^D]$ et transmission $[T^D]$ respectivement. L'indice n est associé au choix des deux composantes symétriques retenues pour le potentiel imposé (5.14). Les autres éléments constituant les matrices de réflexion et transmission apparaissent en considérant d'une part, un potentiel entropique imposé et d'autre part, un potentiel tourbillonnaire imposé.

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

Dans ce deuxième cas, un potentiel entropique extérieur $\phi_{h,ext}(x, y)$ se propageant dans la direction des x croissants est imposé. De la même manière, ce nouveau potentiel s'écrit,

$$\phi_{h,ext}(x, y) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) e^{ik_{h,xn}x} , \quad (5.18)$$

où $k_{h,xn}$ est définie par la relation (5.7).

Par effet de diffusion, ce potentiel imposé et incident sur la rangée crée des potentiels acoustique ϕ_{ah} , entropique ϕ_{hh} et tourbillonnaire ψ_h réfléchis et transmis. Les expressions de ces potentiels se développent en ondes planes sur les faces d'entrée $x = 0$ et de sortie $x = L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{h,0}^-(x, y) = \phi_{ah,0}^- + \phi_{hh,0}^- + \psi_{h,0}^- \\ \phi_{h,L}^+(x, y) = \phi_{ah,L}^+ + \phi_{hh,L}^+ + \psi_{h,L}^+ \end{array} \right. , \quad (5.19)$$

avec, sur la face d'entrée,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,0}^-(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{ah} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{a,xp}x} \\ \phi_{hh,0}^-(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{hh} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{h,xp}x} \\ \psi_{h,0}^-(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{vh} \sin\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{v,xp}x} \end{array} \right. , \quad (5.20)$$

et sur la face de sortie,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,L}^+(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{ah} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{a,xp}(x-L)} \\ \phi_{hh,L}^+(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{hh} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{h,xp}(x-L)} \\ \psi_{h,L}^+(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{vh} \sin\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{v,xp}(x-L)} \end{array} \right. , \quad (5.21)$$

où R_{pn}^{bh} et T_{pn}^{bh} représentent une autre partie des éléments des matrices de réflexion $[R^D]$ et transmission $[T^D]$.

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

Enfin, un potentiel tourbillonnaire extérieur $\psi_{ext}(x,y)$ se propageant dans la direction des x croissants est imposé. En tenant compte de la relation de symétrie (5.2) (différente de celle des deux cas précédents) ce potentiel s'écrit sur une base de fonction sinus,

$$\psi_{ext}(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) e^{ik_{v,xn}x} , \quad (5.22)$$

où $k_{v,xn}$ est définie par la relation (5.7).

Par effet de diffusion, ce potentiel imposé et incident sur la rangée crée des potentiels acoustique ϕ_{av} , entropique ϕ_{hv} et tourbillonnaire ψ_v réfléchis et transmis. Les expressions de ces potentiels se développent en ondes planes sur les faces d'entrée $x = 0$ et de sortie $x = L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^-(x,y) = \phi_{av,0}^- + \phi_{hv,0}^- + \psi_{v,0}^- \\ \psi_L^+(x,y) = \phi_{av,L}^+ + \phi_{hv,L}^+ + \psi_{v,L}^+ \end{array} \right. , \quad (5.23)$$

avec, sur la face d'entrée,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,0}^-(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{av} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{a,xp}x} \\ \phi_{hv,0}^-(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{hv} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{h,xp}x} \\ \psi_{v,0}^-(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} R_{pn}^{vv} \sin\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{-ik_{v,xp}x} \end{array} \right. , \quad (5.24)$$

et sur la face de sortie,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,L}^+(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{av} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{a,xp}(x-L)} \\ \phi_{hv,L}^+(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{hv} \cos\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{h,xp}(x-L)} \\ \psi_{v,L}^+(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} T_{pn}^{vv} \sin\left(\frac{2\pi p}{L}y\right) e^{ik_{v,xp}(x-L)} \end{array} \right. , \quad (5.25)$$

où R_{pn}^{bv} et T_{pn}^{bv} représentent les derniers éléments des matrices de réflexion $[R^D]$ et transmission $[T^D]$ à déterminer.

L'ensemble des trois couples d'équations (5.15), (5.19) et (5.23) constitue une première formulation des potentiels sur les faces d'entrée et de sortie. Ils sont interprétés ici comme résultant de la diffusion par la rangée infinie et s'expriment donc en fonction des coefficients de réflexion et transmission de cette rangée. Pour déterminer ces coefficients, une seconde formulation de ces mêmes potentiels est proposée dans la suite en fonction des potentiels diffusés par les cylindres de la rangée.

Note sur les indices affectés aux différents potentiels :

-le premier indice indique la nature du potentiel considéré (*a* pour acoustique et *h* pour entropique).

-les potentiels de nature tourbillonnaire sont toujours désignés par ψ .

-l'autre indice informe sur la provenance du potentiel considéré.

Exemple 1 : ϕ_{hv} est de nature entropique et provient d'un potentiel extérieur tourbillonnaire.

Exemple 2 : ψ_h est de nature tourbillonnaire et provient d'un potentiel extérieur entropique.

Expression des potentiels diffusés et incidents autour d'un cylindre de la rangée soumise à un potentiel

L'objet de ce paragraphe est d'écrire les potentiels incidents et diffusés par un cylindre quelconque de la rangée soumise à une sollicitation extérieure. Comme précédemment, les potentiels sont exprimés pour des sollicitations imposées de différentes natures (i.e. acoustique, entropique et tourbillonnaire).

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

La forme du potentiel acoustique imposé en coordonnées cartésiennes est celle donnée dans la relation (5.14). En réponse à cette sollicitation et en coordonnées cylindriques, le cylindre j situé en \vec{r}_j diffuse trois potentiels qui se développent sur les fonctions de Hankel de première espèce,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{aa} i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{ha,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{ha} i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{va} i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. , \quad (5.26)$$

où les A_m^{aa} , A_m^{ha} et A_m^{va} sont des coefficients de pondération associés aux potentiels diffusés. La rangée de cylindres étant infinie, ces coefficients sont indépendants du cylindre considéré. Dans le même système de coordonnées, les potentiels incidents sur le cylindre l situé en \vec{r}_l s'écrivent comme la

somme du potentiel imposé et du potentiel diffusé par tous les autres cylindres,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \phi_{aa,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) + \phi_{a,ext}(\vec{r}, \vec{r}_l) \\ \phi_{ha,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \phi_{ha,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) \\ \psi_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \psi_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) \end{array} \right. , \quad (5.27)$$

où le potentiel extérieur n'a de contribution que sur le potentiel acoustique $\phi_{aa,inc}$. Les sommes sur l'indice j apparaissant dans chacune des relations désignent la contribution des champs diffusés par tous les cylindres de la rangée situés en \vec{r}_j tel que $j \neq l$. Ces potentiels sont nécessairement finis et peuvent se décomposer sur les fonctions de Bessel,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{aa} i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \\ \phi_{ha,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{ha} i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \\ \psi_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{va} i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \end{array} \right. , \quad (5.28)$$

où les B_m^{aa} , B_m^{ha} et B_m^{va} sont des coefficients de pondération associés aux potentiels incidents. Ces coefficients sont, eux aussi, indépendants du cylindre considéré.

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

La forme du potentiel entropique imposé en coordonnées cartésiennes est celle donnée dans la relation (5.18). En réponse à cette sollicitation et en coordonnées cylindriques, le cylindre j situé en \vec{r}_j diffuse trois potentiels qui se développent sur les fonctions de Hankel de première espèce,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{ah} i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{hh,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{hh} i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{h,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{vh} i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. , \quad (5.29)$$

où les A_m^{ah} , A_m^{hh} et A_m^{vh} sont des coefficients de pondération associés aux potentiels diffusés. La rangée de cylindre étant infinie, ces coefficients sont indépendants du cylindre considéré. Dans le même système de coordonnées, les potentiels incidents sur le cylindre l situé en \vec{r}_l s'écrivent comme la somme du potentiel imposé et du potentiel diffusé par tous les autres cylindres,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \phi_{ah,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) \\ \phi_{hh,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \phi_{hh,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) + \phi_{h,ext}(\vec{r}, \vec{r}_l) \\ \psi_{h,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \psi_{h,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) \end{array} \right. , \quad (5.30)$$

où le potentiel extérieur n'a de contribution que sur le potentiel entropique $\phi_{hh,inc}$. Les sommes sur l'indice j apparaissant dans chacune des relations désignent la contribution des champs diffusés par tous les cylindres de la rangée situés en \vec{r}_j tel que $j \neq l$. Ces potentiels sont finis et peuvent se décomposer sur les fonctions de Bessel,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{ah} i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \\ \phi_{hh,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{hh} i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \\ \psi_{h,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{vh} i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \end{array} \right. , \quad (5.31)$$

où les B_m^{ah} , B_m^{hh} et B_m^{vh} sont des coefficients de pondération associés aux potentiels incidents. Ces coefficients sont indépendants du cylindre considéré.

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

La forme du potentiel tourbillonnaire imposé en coordonnées cartésiennes est celle donnée dans la relation (5.22). En réponse à cette sollicitation et en coordonnées cylindriques, le cylindre j situé en \vec{r}_j diffuse trois potentiels qui se développent sur les fonctions de Hankel de première espèce,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{av} i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{hv,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{hv} i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{v,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{vv} i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. , \quad (5.32)$$

où les A_m^{av} , A_m^{hv} et A_m^{vv} sont des coefficients de pondération associés aux potentiels diffusés. La rangée de cylindre étant infinie, ces coefficients sont indépendants du cylindre considéré. Dans le même système de coordonnées, les trois potentiels incidents sur le cylindre l situé en \vec{r}_l s'écrivent chacun comme la somme du potentiel imposé et du potentiel diffusé par tous les autres cylindres,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \phi_{av,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) \\ \phi_{hv,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \phi_{hv,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) \\ \psi_{v,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{j \neq l} \psi_{v,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) + \psi_{ext}(\vec{r}, \vec{r}_l) \end{array} \right. , \quad (5.33)$$

où le potentiel extérieur n'a de contribution que sur le potentiel tourbillonnaire $\psi_{v,inc}$. Les sommes sur l'indice j apparaissant dans chacune des relations désignent la contribution des champs diffusés par tous les cylindres de la rangée situés en \vec{r}_j tel que $j \neq l$. Ces potentiels sont finis et peuvent se

décomposer sur les fonctions de Bessel,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{av} i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \\ \phi_{hv,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{hv} i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \\ \psi_{v,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{vv} i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \end{array} \right. , \quad (5.34)$$

où les B_m^{av} , B_m^{hv} et B_m^{vv} sont des coefficients de pondération associés aux potentiels incidents. Ces coefficients sont indépendants du cylindre considéré.

La connaissance de l'ensemble des coefficients de pondération A_m et B_m , apparaissant dans chacun des trois cas, conduit à celle des différents potentiels. La détermination de ces coefficients fait l'objet des deux paragraphes suivants.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites (5.5) imposent l'annulation des champs de déplacement et de température à la frontière des cylindres. L'utilisation de ces conditions aux limites permet, comme dans le chapitre 2, de relier les coefficients A_m aux coefficients B_m . Cette liaison s'effectue par l'intermédiaire des coefficients de diffusion D_m . Ces derniers font intervenir les effets de diffusion multiple ainsi que ceux associés aux effets visqueux d'une part et thermiques d'autre part. L'ensemble des coefficients est regroupé dans une matrice $[D_m]$ explicitée dans la suite. Pour les trois cas, les relations entre les coefficients de pondération des potentiels incidents B_m et diffusés A_m s'écrivent successivement,

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

$$\begin{pmatrix} A_m^{aa} \\ A_m^{ha} \\ A_m^{va} \end{pmatrix} = [D_m] \begin{pmatrix} B_m^{aa} \\ B_m^{ha} \\ B_m^{va} \end{pmatrix} . \quad (5.35)$$

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

$$\begin{pmatrix} A_m^{ah} \\ A_m^{hh} \\ A_m^{vh} \end{pmatrix} = [D_m] \begin{pmatrix} B_m^{ah} \\ B_m^{hh} \\ B_m^{vh} \end{pmatrix} . \quad (5.36)$$

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

$$\begin{pmatrix} A_m^{av} \\ A_m^{hv} \\ A_m^{vv} \end{pmatrix} = [D_m] \begin{pmatrix} B_m^{av} \\ B_m^{hv} \\ B_m^{vv} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Dans ces trois cas, la matrice $[D_m]$ contenant les coefficients de diffusion s'écrit,

$$[D_m] = \begin{pmatrix} D_m^{aa} & D_m^{ah} & D_m^{av} \\ D_m^{ha} & D_m^{hh} & D_m^{hv} \\ D_m^{va} & D_m^{vh} & D_m^{vv} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

où les valeurs des 9 familles de coefficients de diffusion D_m sont explicitées dans l'annexe G. La connaissance de cette matrice permet d'écrire les coefficients A_m en fonction des coefficients B_m et donc, d'écrire les différents potentiels diffusés (5.26), (5.29) et (5.32) en fonction des coefficients B_m . Cette écriture et la détermination des coefficients de pondération font l'objet du paragraphe suivant.

Calcul des coefficients de pondération des potentiels incidents et diffusés

Le but de ce paragraphe est de déterminer l'ensemble des coefficients B_m intervenant dans les expressions des potentiels incidents (5.28), (5.31) et (5.34) (et par la même occasion, les coefficients A_m intervenant dans les expressions des potentiels diffusés (5.26), (5.29) et (5.32)).

Les coefficients de diffusion D_m introduit précédemment permettent d'exprimer les coefficients de pondération A_m en fonction des B_m . Pour chacun des trois cas, les potentiels incidents donnés par les relations (5.27), (5.30) et (5.33) peuvent s'écrire en fonction des coefficients B_m et D_m (ces derniers étant maintenant connus).

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \phi_{a,ext}(\vec{r}, \vec{r}_l) + \dots \\ \phi_{ha,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{aa} B_m^{aa} + D_m^{ah} B_m^{ha} + D_m^{av} B_m^{va}] i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{a,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{va} B_m^{aa} + D_m^{vh} B_m^{ha} + D_m^{vv} B_m^{va}] i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. \quad (5.39)$$

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{aa} B_m^{ah} + D_m^{ah} B_m^{hh} + D_m^{av} B_m^{vh}] i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{hh,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \phi_{h,ext}(\vec{r}, \vec{r}_l) + \dots \\ \psi_{h,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{ha} B_m^{ah} + D_m^{hh} B_m^{hh} + D_m^{hv} B_m^{vh}] i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{h,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{va} B_m^{ah} + D_m^{vh} B_m^{hh} + D_m^{vv} B_m^{vh}] i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. \quad (5.40)$$

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{aa} B_m^{av} + D_m^{ah} B_m^{hv} + D_m^{av} B_m^{vv}] i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{hv,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{ha} B_m^{av} + D_m^{hh} B_m^{hv} + D_m^{hv} B_m^{vv}] i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{v,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \psi_{ext}(\vec{r}, \vec{r}_l) + \dots \\ \psi_{v,inc}(\vec{r}, \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j \neq l} [D_m^{va} B_m^{av} + D_m^{vh} B_m^{hv} + D_m^{vv} B_m^{vv}] i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. \quad (5.41)$$

En résumé, les potentiels incidents sur un cylindre j peuvent s'interpréter de deux manières différentes. D'une part, ils peuvent être écrits comme des potentiels finis et développés sur une base de fonctions de Bessel centrée sur le cylindre situé en \vec{r}_l . Dans ce cas, leur forme est donnée par les relations (5.28), (5.31) et (5.34). D'autre part, ces mêmes potentiels peuvent également être interprétés comme la somme des potentiels diffusés par tous les autres cylindres j situé en \vec{r}_j tels que $j \neq l$. Cette interprétation conduit aux relations (5.39), (5.40) et (5.41) ci-dessus qui font apparaître explicitement la contribution du potentiel extérieur imposé pour chaque cas. Ces relations sont écrites sur une base de fonction de Hankel de première espèce centrée sur les vecteurs \vec{r}_j . Pour déterminer la valeur des coefficients B_m et conformément à la démarche utilisée dans le chapitre 2, il est nécessaire de développer les différentes expressions des potentiels incidents et des potentiels extérieurs imposés sur une même base de fonction. La base retenue est celle utilisée dans les expressions (5.28), (5.31) et (5.34), c'est-à-dire, la base des fonctions de Bessel centrées sur le vecteur \vec{r}_l . Ces développements, ainsi que ceux des potentiels extérieurs, sont réalisés dans l'annexe H en utilisant le théorème d'addition des fonctions de Bessel. Dès lors, une identification entre les différentes formes des potentiels conduit aux trois expressions suivantes (associées à chacun des trois cas),

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

$$B_m^{ba} = \delta_{b,a}(2 - \delta_{m,0})e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(m\theta_{a,n}) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{m,q}^{\sigma,b} \sum_{c=a,h,v} D_q^{bc} B_q^{ca} , \quad (5.42)$$

– **Cas 2 : potentiel entropique imposé**

$$B_m^{bh} = \delta_{b,h}(2 - \delta_{m,0})e^{ik_{h,xn}L/2} \cos(m\theta_{h,n}) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{m,q}^{\sigma,b} \sum_{c=a,h,v} D_q^{bc} B_q^{ch} , \quad (5.43)$$

– **Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé**

$$B_m^{bv} = -2i\delta_{b,v}e^{ik_{v,xn}L/2} \sin(m\theta_{v,n}) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{m,q}^{\sigma,b} \sum_{c=a,h,v} D_q^{bc} B_q^{cv} , \quad (5.44)$$

où δ est le symbole de Kronecker et l'indice b prend les trois valeurs a , h et v correspondant aux cas acoustique, entropique et tourbillonnaire. Les fonctions $F_{m,q}^{\sigma,b}$ ont la forme suivante,

$$F_{m,q}^{\sigma,b} = (1 - \frac{1}{2}\delta_{m,0})(\delta_{b,a} + \delta_{b,h})[\sigma_{m+q}(k_bL) + \sigma_{m-q}(k_bL)] + \delta_{b,v}[\sigma_{m+q}(k_bL) - \sigma_{m-q}(k_bL)] , \quad (5.45)$$

enfin, les fonctions $\sigma_m(k_bL)$ représentent des séries de fonctions de Hankel de première espèce d'argument k_bL et d'ordre m définies par la relation,

$$\sigma_m(k_bL) = \sigma_{-m}(k_bL) = (1 + (-1)^m) \sum_{j=1}^{\infty} H_m(jk_bL) , \quad (5.46)$$

et s'annulent pour tout m impair. De plus, ces séries ont un comportement dépendant de la nature de l'argument k_bL (réel ou complexe). Pour le cas réel, déjà rencontré dans le chapitre 2, les séries de Hankel convergent très lentement et sont développées en séries de Schlömilch [63]. Si l'argument est complexe et de la forme $(1+i)|K|$ avec $|K|$ réel positif, les séries de Hankel convergent naturellement. Le comportement de ces séries, d'argument réel ou complexe, est discuté à la fin de l'annexe H.

Les premiers termes dans les trois équations (5.42), (5.43) et (5.44) représentent les contributions des potentiels extérieurs imposés (dont l'angle d'incidence est fixé par l'entier n). Ces trois équations font apparaître les coefficients B_m d'ordre m en fonction des coefficients B_q d'ordre q . Pour estimer les valeurs de l'ensemble de ces coefficients, une formulation matricielle est proposée dans l'annexe H. Celle-ci donne accès aux solutions des trois équations en effectuant une troncature sur la série portant sur l'entier q à l'ordre M . Cette troncature permet alors d'estimer les B_M premiers coefficients recherchés. L'ordre de cette troncature sera aussi celui utilisé pour déterminer les coefficients de pondération A_m , de diffusion D_m , de réflexion R_m et de transmission T_m dans les calculs numériques. La convergence des résultats ainsi obtenus, dépendant de l'ordre M retenu, sera étudiée dans la suite.

L'ensemble des coefficients B_m étant calculé, les coefficients A_m se déduisent directement des relations (5.35), (5.36) et (5.37) faisant intervenir la matrice des coefficients de diffusion D_m . La connaissance des coefficients A_m conduit à celle des matrices de réflexion et transmission recherchées ; ces dernières constituant la matrice de diffusion $[S^D]$ du problème. La construction de ces matrices fait l'objet du paragraphe suivant.

Construction des matrices de réflexion et transmission

Dans ce paragraphe, les matrices de réflexion $[R^D]$ et transmission $[T^D]$ sont déterminées à l'aide des coefficients associés aux potentiels incidents B_m et diffusés A_m maintenant connus. Pour cela, les potentiels diffusés sont exprimés sur chacune des faces d'entrée et de sortie pour tout y tel que $0 < y < L/2$ lorsqu'un potentiel extérieur est imposé.

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

Un potentiel acoustique extérieur est imposé sur la rangée infinie de cylindres. Par effet de diffusion, celle-ci réémet des potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire dont l'étude, du fait des propriétés de parité et de périodicité, peut se limiter aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$ et pour tout y tel que $0 \leq y \leq L/2$. Ces deux domaines sont présentés dans le chapitre 2 sur la figure 2.4. Les potentiels diffusés s'écrivent, en coordonnées cylindriques,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{aa} i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{ha,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{ha} i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{a,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{va} i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. \quad (5.47)$$

Cette relation représente la somme des potentiels diffusés par tous les cylindres de la rangée infinie. Elle s'écrit donc comme la somme sur l'indice j des potentiels diffusés par un cylindre j appartenant à la rangée, dont les expressions sont données par la relation (5.26). Le calcul de la double sommation sur les indices j et m est effectué selon la méthode détaillée dans l'annexe H.

Dans le domaine délimité par $0 \leq y \leq L/2$, les potentiels réfléchis en $x = 0$ et transmis en $x = L$, donnés par la relation (5.15) s'identifient d'une part, aux potentiels diffusés dans la direction des x décroissants et d'autre part, aux potentiels diffusés dans la direction des x croissants. Soit, en présence du potentiel acoustique extérieur et en $x = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,0}^-(\vec{r}) = \phi_{aa,diff}(\vec{r}) \\ \phi_{ha,0}^-(\vec{r}) = \phi_{ha,diff}(\vec{r}) \\ \psi_{a,0}^-(\vec{r}) = \psi_{a,diff}(\vec{r}) \end{array} \right. , \quad (5.48)$$

et de l'autre côté, en $x = L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,L}^+(\vec{r}) = \phi_{aa,diff}(\vec{r}) + \phi_{a,ext}(\vec{r}) \\ \phi_{ha,L}^+(\vec{r}) = \phi_{ha,diff}(\vec{r}) \\ \psi_{a,L}^+(\vec{r}) = \psi_{a,diff}(\vec{r}) \end{array} \right. . \quad (5.49)$$

Les deux systèmes d'équations (5.48) et (5.49) constituent une deuxième formulation des potentiels réfléchis en $x = 0$ et transmis en $x = L$. Ils s'interprètent ici comme la somme des potentiels diffusés par tous les cylindres de la rangée infinie et évalués sur les faces d'entrée et sortie. Dès lors, une

identification entre ces relations et celles (5.15) obtenues précédemment permet d'exprimer une partie des éléments constituant les matrices de réflexion et transmission recherchées,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{pn}^{aa} = \frac{4}{L(1 + \delta_{p,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{aa,0}^-(\vec{r}) \, dy \\ R_{pn}^{ha} = \frac{4}{L(1 + \delta_{p,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{ha,0}^-(\vec{r}) \, dy \\ R_{pn}^{va} = \frac{4}{L}(1 - \delta_{p,0}) \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \psi_{a,0}^-(\vec{r}) \, dy \end{array} \right. , \quad (5.50)$$

et,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{pn}^{aa} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{aa,L}^+(\vec{r}) \, dy + \delta_{n,p} e^{ik_a x_n/L} \\ T_{pn}^{ha} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{ha,L}^+(\vec{r}) \, dy \\ T_{pn}^{va} = (1 - \delta_{p,0}) \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \psi_{a,L}^+(\vec{r}) \, dy \end{array} \right. , \quad (5.51)$$

le détail des calculs aboutissant à ces résultats est donné dans l'annexe I. Les autres éléments des matrices de réflexion et transmission sont obtenus de la même manière.

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

Un potentiel entropique extérieur est maintenant imposé sur la rangée infinie de cylindres. Par effet de diffusion, celle-ci réémet des potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire dont l'étude, du fait des propriétés de parité et de périodicité, peut se limiter aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$ et pour tout y tel que $0 \leq y \leq L/2$. Les potentiels diffusés s'écrivent, en coordonnées cylindriques,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ah,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{ah} i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{hh,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{hh} i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{h,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{vh} i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. . \quad (5.52)$$

Cette relation représente la somme des potentiels diffusés par tous les cylindres de la rangée infinie. Elle s'écrit donc comme la somme sur l'indice j des potentiels diffusés par un cylindre j appartenant à la rangée, dont les expressions sont données par la relation (5.29).

Dans le domaine délimité par $0 \leq y \leq L/2$, les potentiels réfléchis en $x = 0$ et transmis en $x = L$, donnés par la relation (5.19) s'identifient d'une part, aux potentiels diffusés dans la direction des

x décroissants et d'autre part, aux potentiels diffusés dans la direction des x croissants. Soit, en présence du potentiel entropique extérieur et en $x = 0$,

$$\begin{cases} \phi_{ah,0}^-(\vec{r}) = \phi_{ah,diff}(\vec{r}) \\ \phi_{hh,0}^-(\vec{r}) = \phi_{hh,diff}(\vec{r}) \\ \psi_{h,0}^-(\vec{r}) = \psi_{h,diff}(\vec{r}) \end{cases}, \quad (5.53)$$

et de l'autre coté, en $x = L$,

$$\begin{cases} \phi_{ah,L}^+(\vec{r}) = \phi_{ah,diff}(\vec{r}) \\ \phi_{hh,L}^+(\vec{r}) = \phi_{hh,diff}(\vec{r}) + \phi_{h,ext}(\vec{r}) \\ \psi_{h,L}^+(\vec{r}) = \psi_{h,diff}(\vec{r}) \end{cases}. \quad (5.54)$$

Une identification entre les relations (5.53) et (5.19) d'une part, et les relations (5.54) et (5.19) d'autre part permet d'exprimer une autre partie des éléments constituant les matrices de réflexion et transmission recherchées,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{pn}^{ah} = \frac{4}{L(1 + \delta_{p,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{ah,0}^-(\vec{r}) \, dy \\ R_{pn}^{hh} = \frac{4}{L(1 + \delta_{p,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{hh,0}^-(\vec{r}) \, dy \\ R_{pn}^{vh} = \frac{4}{L}(1 - \delta_{p,0}) \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \psi_{h,0}^-(\vec{r}) \, dy \end{array} \right., \quad (5.55)$$

et,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{pn}^{ah} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{ah,L}^+(\vec{r}) \, dy \\ T_{pn}^{hh} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{hh,L}^+(\vec{r}) \, dy + \delta_{n,p} e^{ik_h x_n / L} \\ T_{pn}^{vh} = (1 - \delta_{p,0}) \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \psi_{h,L}^+(\vec{r}) \, dy \end{array} \right}. \quad (5.56)$$

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

Un potentiel tourbillonnaire extérieur est enfin imposé sur la rangée infinie de cylindres. Par effet de diffusion, celle-ci réémet des potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire dont l'étude, du fait des propriétés de parité et de périodicité, peut se limiter aux coordonnées $x = 0$ et $x = L$ et

pour tout y tel que $0 \leq y \leq L/2$. Les potentiels diffusés s'écrivent, en coordonnées cylindriques,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{av} i^m H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \phi_{hv,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{hv} i^m H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ \psi_{v,diff}(\vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{vv} i^m H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. . \quad (5.57)$$

Cette relation représente la somme des potentiels diffusés par tous les cylindres de la rangée infinie. Elle s'écrit donc comme la somme sur l'indice j des potentiels diffusés par un cylindre j appartenant à la rangée, dont les expressions sont données par la relation (5.32).

Dans le domaine délimité par $0 \leq y \leq L/2$, les potentiels réfléchis en $x = 0$ et transmis en $x = L$, donnés par la relation (5.23) s'identifient d'une part, aux potentiels diffusés dans la direction des x décroissants et d'autre part, aux potentiels diffusés dans la direction des x croissants. Soit, en présence du potentiel acoustique extérieur et en $x = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,0}^-(\vec{r}) = \phi_{av,diff}(\vec{r}) \\ \phi_{hv,0}^-(\vec{r}) = \phi_{hv,diff}(\vec{r}) \\ \psi_{v,0}^-(\vec{r}) = \psi_{v,diff}(\vec{r}) \end{array} \right. , \quad (5.58)$$

et de l'autre coté, en $x = L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{av,L}^+(\vec{r}) = \phi_{av,diff}(\vec{r}) \\ \phi_{hv,L}^+(\vec{r}) = \phi_{hv,diff}(\vec{r}) \\ \psi_{v,L}^+(\vec{r}) = \psi_{v,diff}(\vec{r}) + \psi_{ext}(\vec{r}) \end{array} \right. , \quad (5.59)$$

Une identification entre les relations (5.58) et (5.23) d'une part, et les relations (5.59) et (5.23) d'autre part permet d'exprimer la dernière partie des éléments constituant les matrices de réflexion et transmission recherchées,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{pn}^{av} = \frac{4}{L(1 + \delta_{p,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{av,0}^-(\vec{r}) \, dy \\ R_{pn}^{hv} = \frac{4}{L(1 + \delta_{p,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{hv,0}^-(\vec{r}) \, dy \\ R_{pn}^{vv} = \frac{4}{L}(1 - \delta_{p,0}) \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \psi_{v,0}^-(\vec{r}) \, dy \end{array} \right. , \quad (5.60)$$

et,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_{pn}^{av} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{av,L}^+(\vec{r}) dy \\ \mathbf{T}_{pn}^{hv} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \phi_{hv,L}^+(\vec{r}) dy \\ \mathbf{T}_{pn}^{vv} = (1 - \delta_{p,0}) \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \psi_{v,L}^+(\vec{r}) dy + (1 - \delta_{p,0}) \delta_{n,p} e^{ik_v x_n/L} \end{array} \right. \quad (5.61)$$

La connaissance des éléments \mathbf{R}_{pn} et \mathbf{T}_{pn} permet de construire les matrices de réflexion $[\mathbf{R}^D]$ et de transmission $[\mathbf{T}^D]$ données dans la relation (5.12). Dès lors, la construction de la matrice de diffusion $[\mathbf{S}^D]$ d'une rangée définie par la relation (2.10) s'en déduit. Ces matrices permettent de prédire les coefficients de réflexion et transmission d'une rangée infinie de cylindres en fluide visco-thermique lorsqu'une sollicitation extérieure quelconque (i.e. acoustique, entropique et/ou tourbillonnaire et avec un angle d'incidence quelconque) est imposée.

5.3 Extension aux propriétés d'un système constitué de plusieurs rangées de cylindres

Dans un premier temps, les propriétés de réflexion et transmission d'un système composé de N_r rangées, avec N_r entier fini, sont déduites du problème précédent. Dans un second temps, le problème de la propagation dans un cristal phononique infini est traité. Les géométries de ces deux configurations sont représentées sur les figures 5.1 (b) et (c) respectivement. La démarche utilisée dans le chapitre 2 est aussi valable pour l'extension en fluide dissipatif.

5.3.1 Système constitué de plusieurs rangées de cylindres

L'intérêt est ici porté sur la détermination de la matrice de diffusion $[\mathbf{S}^D_{N_r}]$ d'un nombre N_r de rangées en fluide dissipatif. Pour cela, la relation de récurrence (2.38) détaillée dans le chapitre 2 est réutilisée ici,

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{T}^D_{N_r}] = [\mathbf{T}^D] \left([\mathbf{I}_d] - [\mathbf{R}^D_{N_r-1}] [\mathbf{R}^D] \right)^{-1} [\mathbf{T}^D_{N_r-1}] \\ [\mathbf{R}^D_{N_r}] = [\mathbf{R}^D] + [\mathbf{T}^D] \left([\mathbf{I}_d] - [\mathbf{R}^D_{N_r-1}] [\mathbf{R}^D] \right)^{-1} [\mathbf{R}^D_{N_r-1}] [\mathbf{T}^D] \end{array} \right. , \quad (5.62)$$

où $[\mathbf{I}_d]$ est la matrice identité. Les matrices de réflexion $[\mathbf{R}^D]$ et de transmission $[\mathbf{T}^D]$ sont celles calculées dans la section précédente. La loi de composition décrite par les relations (5.62) donne les coefficients de réflexion et de transmission de N_r rangées à partir de ceux d'une seule rangée. Il est donc possible de déduire la matrice de diffusion de plusieurs rangées de cylindres en fluide dissipatif en connaissant la matrice de diffusion d'une rangée. La connaissance de la matrice de diffusion de

N_r rangées permet de prédire les coefficients de réflexion et transmission en fluide visco-thermique lorsqu'une sollicitation extérieure quelconque est imposée. L'étude du comportement d'un système constitué de plusieurs rangées a déjà fait l'objet du chapitre précédent. Une comparaison entre des résultats expérimentaux et une première extension du modèle présenté dans le chapitre 2 et prenant en considération les effets dissipatifs aux voisinages des cylindres a été réalisée dans ce cadre. Une autre comparaison entre le modèle développé ici et les résultats obtenus précédemment (et validés) sera présentée dans le prochain chapitre et permettra de valider cette seconde extension dans un régime de hautes fréquences (effets de diffusion multiple prépondérants).

5.3.2 Cristal phononique infini

Pour traiter le cas du cristal phononique à deux dimensions illustré sur les figures 3 et 5.1 (c), le théorème de Bloch [9] est une nouvelle fois introduit dans la formulation du problème. Du fait de la périodicité suivant l'axe Ox , ce théorème impose,

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_L^+ \\ \vec{a}_L^- \end{pmatrix} = e^{ik_B L} \begin{pmatrix} \vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_0^- \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

où les k_B sont les nombres d'onde de Bloch à déterminer. Les vecteurs \vec{a} désignent les amplitudes des composantes des potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire. L'utilisation conjointe de la matrice de diffusion $[S^D]$ (5.9) et du théorème de Bloch (5.63) conduit au problème aux valeurs propres suivant,

$$\boxed{\begin{bmatrix} [T^D] & [R^D] \\ [0] & [I_d] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_L^- \end{pmatrix} = e^{ik_B L} \begin{bmatrix} [I_d] & [0] \\ [R^D] & [T^D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_0^+ \\ \vec{a}_L^- \end{pmatrix}}, \quad (5.64)$$

où les matrices de réflexion et transmission sont celles du problème d'une rangée infinie en fluide dissipatif. Les valeurs propres de ce problème sont liées aux nombres d'onde de Bloch k_B . Ces derniers, portés par la fonction exponentielle, s'identifient aux constantes de propagation dans le cristal. Les vecteurs propres associés représentent les amplitudes des différents potentiels entrants \vec{a}_0^+ en $x = 0$ et \vec{a}_L^- en $x = L$. Les solutions de ce problème sont obtenues numériquement pour une pulsation ω fixée. A chaque pulsation correspond un ensemble de valeurs propres et de vecteurs propres. La résolution du problème, pour plusieurs pulsations, permet donc de caractériser le comportement du cristal étudié. En effet, la connaissance des constantes de propagation permet de prédire les éventuelles bandes interdites et celle des amplitudes des ondes entrantes informent sur la forme des potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire. De plus, les effets dissipatifs étant pris en compte, les résultats obtenus peuvent être comparés à ceux existants pour la même géométrie [17] dans la limite grandes longueurs d'onde. Cette comparaison sera réalisée dans le chapitre suivant et permettra de conclure sur la validité du modèle aux grandes longueurs d'onde (effets visqueux et thermiques prédominants).

5.4 Résultats et temps de calcul

Le problème aux valeurs propres (5.64) est résolu numériquement pour la même géométrie que celle utilisée dans le chapitre 2 (i.e. $R = 1 \text{ mm}$ et $L = 3 \text{ mm}$). Les cylindres sont entourés d'air

dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.1 du chapitre précédent. Les solutions donnent notamment les nombres d'onde de Bloch complexe k_B . Dans un premier temps, un exemple de résultats numériques est présenté. Une discussion sur la précision des résultats et les temps de calcul nécessaires en fonction du nombre N d'ondes planes considéré est ensuite proposée.

Exemple de résultats

Les solutions k_B du problème aux valeurs propres sont recherchées à fréquence f fixée. Du fait de la prise en compte des effets dissipatifs, les nombres d'onde de Bloch ont une partie imaginaire associée à ces effets. Dans le cadre de ce chapitre, le nombre d'ondes planes considéré est multiplié par trois ; ceci est dû à la présence des trois potentiels acoustique, entropique et tourbillonnaire. De ce fait, les temps de calcul sont aussi multipliés par trois (au moins, car le traitement numérique des fonctions d'argument complexe est plus long). Le diagramme de bande obtenu sur la figure 5.3 montre les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde de Bloch obtenue pour $N = 432$ ondes planes. La partie réelle, à gauche, est en bon accord avec celle obtenue dans le cadre du chapitre 2 ; les positions des bandes interdites sont sensiblement les mêmes. L'intérêt du modèle en fluide dissipatif apparaît principalement dans la figure de droite. En effet, les augmentations significatives de la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch sont associées à de fortes atténuations à l'intérieur des bandes interdites (ondes évanescentes).

Etude de la convergence

Pour un même échantillon fictif de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et de paramètre de maille $L = 3 \text{ mm}$, l'évolution des deux nombres d'onde de Bloch complexes K_{B1} et K_{B6} en fonction du nombre d'ondes planes considéré est représentée sur la figure 5.3). Ces deux nombres d'onde correspondent à des fréquences de $f_1=20\ 000 \text{ Hz}$ et $f_6=180\ 000 \text{ Hz}$. Les résultats et temps de calcul nécessaires sont reportés dans le tableau 5.1 et la figure 5.4 associée.

Valeur de N	2	4	6	8	10	12	14
Nombre d'ondes planes ($3N^2$)	12	48	108	192	300	432	588
Temps de calcul [s]	80	222	468	960	1402	4052	9500
$Re(K_{B1})(f_1 = 20\ 000 \text{ Hz})$	0.416	0.417	0.418	0.418	0.418	0.418	0.418
$Im(K_{B1})(f_1 = 20\ 000 \text{ Hz}) (\times 10^{-3})$	3.5	4.1	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8
$Re(K_{B6})(f_1 = 180\ 000 \text{ Hz})$	0.799	0.997	0.863	0.861	0.861	0.861	0.861
$Im(K_{B6})(f_1 = 180\ 000 \text{ Hz}) (\times 10^{-2})$	4.43	2.01	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47

TAB. 5.1 – Temps de calcul nécessaire pour évaluer les deux nombres d'onde de Bloch complexes K_{B1} et K_{B6} représentés sur la figure 5.3. Ces deux nombres d'onde correspondent à des fréquences $f_1=20\ 000 \text{ Hz}$ et $f_6=180\ 000 \text{ Hz}$ respectivement. La géométrie du réseau est fixée par $R = 1 \text{ mm}$ et $L=3 \text{ mm}$.

Les résultats obtenus (en termes de temps de calcul) dépendent fortement de la configuration matérielle et ne sont présentés que pour comparer les méthodes entre elles à titre d'information. La

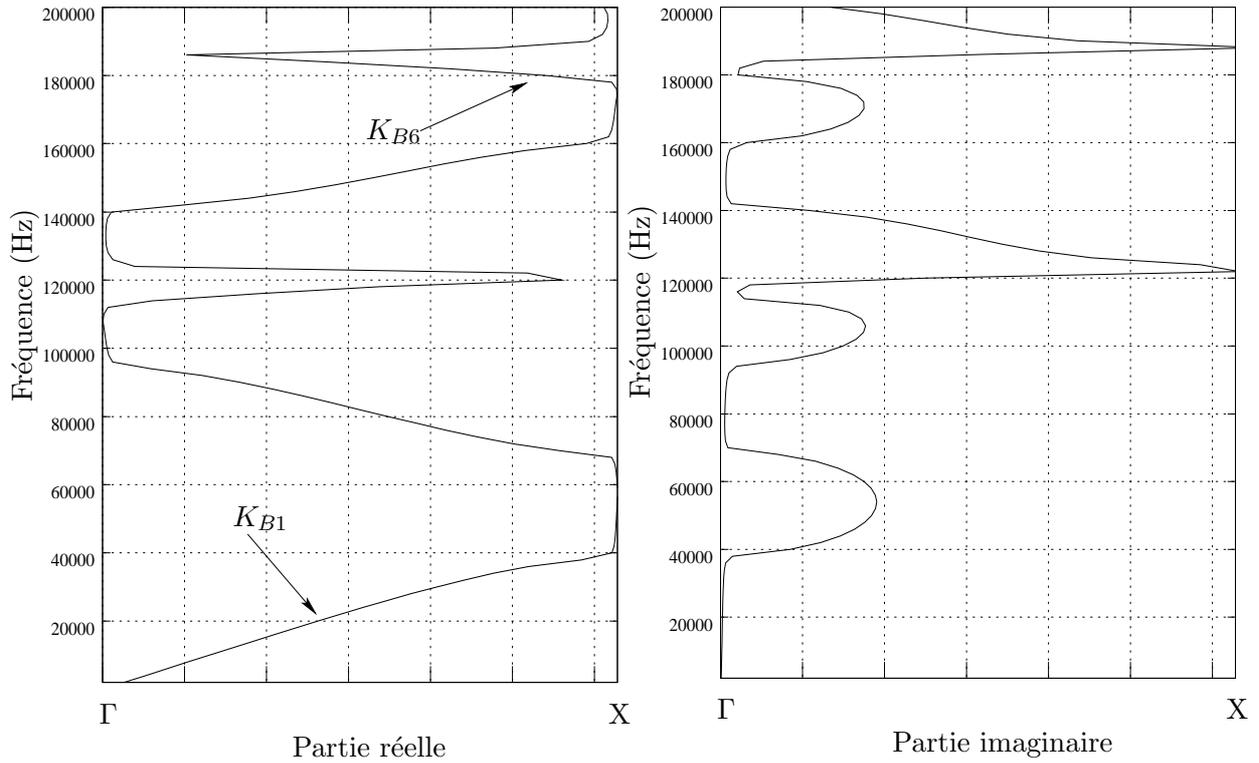


FIG. 5.3 – Diagramme de bandes représentant le nombre d'onde $k_B(f)$ pour le cas de l'incidence normale (direction ΓX de la zone de Brillouin) pour un échantillon de rayon $R = 1$ mm et $L = 3$ mm. La partie réelle de k_B est représentée à gauche et la partie imaginaire à droite. Cette figure comporte 100 points obtenus avec un total de 432 ondes planes en $t = 4\,052$ s (environ 70 minutes).

convergence des résultats est assurée pour $N = 192$ ondes planes. Le temps de calcul correspondant est de $t = 960$ s (environ 16 minutes), ce qui est trois fois plus long que le temps de calcul nécessaire pour le cas du fluide parfait.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une seconde extension de la méthode développée dans le chapitre 2 a été réalisée. Cette seconde extension prend en compte les effets visco-thermiques qu'ils soient localisés au voisinage des cylindres ou non, contrairement au problème traité dans le chapitre 4. La méthode numérique présentée est basée, une fois de plus, sur le calcul des séries de Schlömilch. De plus, de nouvelles séries de Hankel d'argument complexe ont été introduites. Leur comportement diffère de celles d'argument réel; en effet, lorsque l'argument complexe est de la forme $(1 + i)|K|$, avec $|K|$ réel positif, ces nouvelles séries convergent naturellement et n'ont donc pas besoin de traitement particulier. Cette nouvelle méthode ne pose donc pas de problèmes numériques nouveaux. La méthode ainsi développée permet de prédire le comportement d'une ou plusieurs rangées de cylindres en termes de propriétés de réflexion et transmission. Pour un cristal phononique, la résolution d'un problème aux valeurs propres donne la constante de propagation dans le milieu. L'objet du chapitre suivant est de valider

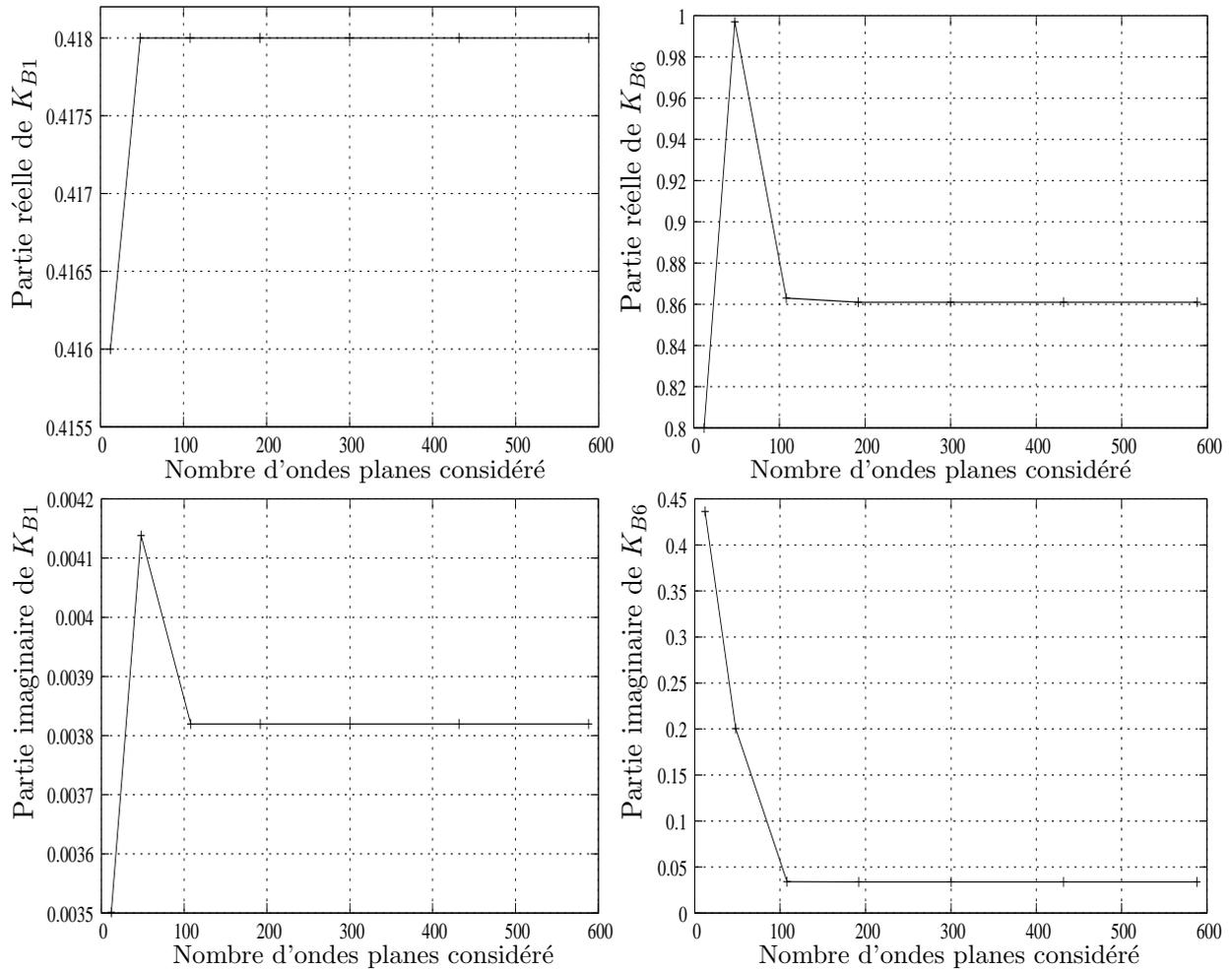


FIG. 5.4 – Evolution des nombres d'onde réduits K_{B1} et K_{B6} correspondant aux deux premières solutions du problème aux valeurs propres (5.64). Les deux figures du haut représentent les parties réelles de ces nombres d'onde. Les parties imaginaires associées sont représentées sur les figures du bas. Les deux nombres d'onde étudiés correspondent à des fréquences $f_1=20\ 000$ Hz et $f_6=180\ 000$ Hz. Ces figures montrent la convergence des nombres d'onde de Bloch en fonction du nombre N d'ondes planes considérés. La convergence est assurée pour 192 ondes planes.

les résultats obtenus ici avec d'une part, ceux présentés dans le cadre du chapitre 4 (régime de diffusion multiple avec dissipation localisée) et d'autre part, avec ceux existants dans la littérature (aux grandes longueurs d'onde). Le modèle permettra ainsi d'étudier précisément la transition entre un régime visco-thermique et l'émergence des effets de diffusion multiple.

Chapitre 6

Validation et discussion sur la transition entre un régime visco-thermique et l'émergence des effets de diffusion multiple

Ce chapitre propose une validation du modèle développé dans le chapitre précédent dans le cadre du cristal phononique entouré d'air illustré sur la figure 5.1 (c). Une première validation est réalisée aux hautes fréquences où les effets de diffusion multiple sont prépondérants. Dans ce cadre, une comparaison entre les résultats du modèle développé dans le chapitre 5 et ceux, obtenus par l'extension proposée et validée dans le chapitre 4 est réalisée. Une seconde validation est discutée dans le domaine des très basses fréquences. La propagation est alors régie par des effets visqueux [28] et thermiques [36] importants. Des études antérieures, basée sur la théorie de l'homogénéisation, permettent de décrire le comportement du cristal phononique dans ce domaine. Une comparaison entre ces résultats existants et ceux, obtenus d'après le modèle du chapitre 5 est effectuée. L'étude de la transition entre les deux domaines est ensuite analysée pour différentes configurations. L'ensemble des études menées dans ce chapitre est exclusivement numérique.

6.1 Validation aux hautes fréquences

6.1.1 Domaine d'étude

Les hautes fréquences correspondent à un régime où les longueurs d'onde acoustique sont comparables (ou inférieures) aux dimensions géométriques caractéristiques du système étudié. Dans le cadre du cristal phononique, la dimension caractéristique est celle de la cellule élémentaire notée L . Dans ce régime, la longueur d'onde acoustique, notée λ est donc du même ordre ou plus petite que L . Cette configuration est illustrée sur la figure 6.1.

La validation dans le domaine des hautes fréquences s'effectue dans un domaine défini par la

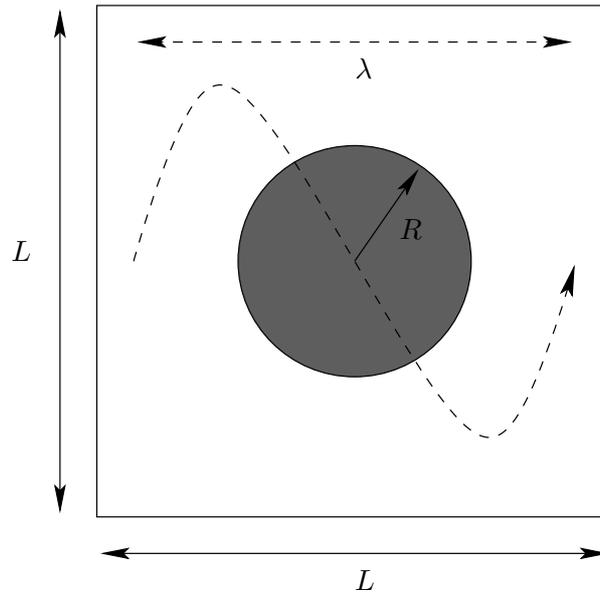


FIG. 6.1 – Illustration du domaine d'étude correspondant aux hautes fréquences en terme de longueur d'onde. La dimension caractéristique du système est la période L du réseau. La longueur d'onde associée à l'onde acoustique est notée λ . Cette dernière est du même ordre (ou inférieure) que la période du réseau.

relation,

$$\frac{k_a L}{\pi} \geq 1, \quad (6.1)$$

où k_a est le nombre d'onde acoustique défini dans la relation (5.4). L'étude dans ce domaine a déjà été réalisée dans le cadre du chapitre 4 en considérant des effets de dissipation non négligeables et localisés au voisinage des cylindres. Les figures 4.4 montrent les coefficients de transmission expérimentaux et théoriques sur un domaine allant de $k_a L/\pi = 0.5$ à $k_a L/\pi = 3$ pour des cristaux constitués de cylindres de rayon $R = 1 \text{ mm}$. La limite $k_a L/\pi = 1$ correspond à un régime où la demi-longueur d'onde acoustique $\lambda/2$ est égale à la dimension L du cristal. Cette limite définit le centre de la première bande interdite conformément à la condition de diffraction de Bragg [9]. Lorsque $k_a L/\pi$ augmente, la longueur d'onde diminue et les effets de diffusion multiple se traduisent notamment par l'apparition de nouvelles bandes interdites.

Les effets se produisant dans ce régime sont essentiellement associés à la diffusion multiple. Néanmoins, de faibles effets visco-thermiques se produisent au voisinage des cylindres. Ces effets peuvent être pris en compte par le concept d'admittance de surface équivalente présenté dans le chapitre 4. Une comparaison entre les résultats obtenus avec ce concept validé et ceux, obtenus avec le modèle du chapitre 5 (modèle complet) est proposée dans ce régime de hautes fréquences.

6.1.2 Résultats

Les grandeurs d'intérêt retenues ici sont les nombres d'onde de Bloch complexes adimensionnés $k_B L/\pi$. Ces derniers sont solutions des deux problèmes aux valeurs propres (2.40) dans lequel le

concept d'admittance est inclu et (5.64) pour le modèle complet. Les parties réelles et imaginaires de ces nombres d'onde sont étudiées en fonction de la fréquence réduite $k_a L/\pi$ où L est la période du réseau et $k_a = \omega/c_0$ désigne la constante de propagation dans le fluide entourant les cylindres. Différents échantillons (numériques) sont utilisés : le rayon des cylindres est fixé à $R = 1 \text{ mm}$ et la période L du réseau varie. La porosité Φ , reliée au rapport entre la surface d'un cylindre et celle de la cellule élémentaire, est définie par la relation,

$$\Phi = 1 - \frac{\pi R^2}{L^2}. \quad (6.2)$$

Cette grandeur, déjà rencontrée dans le chapitre 3 (3.1), permet de différencier les échantillons : une porosité très faible correspond à un milieu très concentré. Les nombres d'onde de Bloch complexes adimensionnés $k_B L/\pi$ obtenus par les deux modèles sont présentés sur les figures 6.2 en fonction de la fréquence réduite $k_a L/\pi$ tel que $0.5 \leq k_a L/\pi \leq 3$. Les figures de gauche représentent les parties réelles et celles de droite sont associées aux parties imaginaires, pour différents échantillons (i.e de porosité différente).

Les bandes interdites correspondent à des nombres d'onde de Bloch adimensionnés de partie réelle nulle ou égale à 1 (auxquels cas il n'y a pas de propagation, cf. chapitre 1) et résultent d'un phénomène d'interférences destructives associé aux effets de diffusion multiple. Cette partie réelle suffit à prédire la largeur et la position des différentes bandes interdites du cristal. Le centre de la première bande interdite est située en $k_a L/\pi = 1$, conformément à la condition de Bragg. Lorsque la porosité du milieu diminue, cette bande s'élargit autour de cette position centrale.

L'intérêt de la prise en compte des effets de dissipation se manifeste sur les figures de droite qui représentent la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch. D'une part, la partie imaginaire permet aussi de prédire la largeur et la position des bandes : ces dernières sont définies par des parties imaginaires de fortes amplitudes. D'autre part, elle renseigne sur l'importance des effets dissipatifs à l'intérieur et à l'extérieur des bandes interdites. Dans le domaine d'étude, les parties imaginaires sont aussi bien prédites par le concept d'admittance de surface que par le modèle complet pour tous les échantillons présentés.

En outre, les coefficients de transmission expérimentaux présentés dans le chapitre 4 sont prédits aussi bien en utilisant le concept d'admittance de surface (chapitre 4) que le modèle complet (chapitre 5). Une comparaison entre ces coefficients de transmission expérimentaux et ceux prédits par le modèle complet conduit aux mêmes figures 4.4. L'écart, pour les parties réelles et imaginaires des nombres d'onde de Bloch, entre les résultats obtenus par les deux méthodes est de l'ordre de 10^{-4} , quelque soit la porosité considérée. Le modèle développé dans le chapitre précédent est donc validé dans le domaine des hautes fréquences.

6.2 Validation aux basses fréquences

6.2.1 Domaine d'étude

Les basses fréquences correspondent à un régime où les longueurs d'onde acoustique sont très grandes par rapport aux dimensions caractéristiques du système étudié. Ce qui se traduit par une

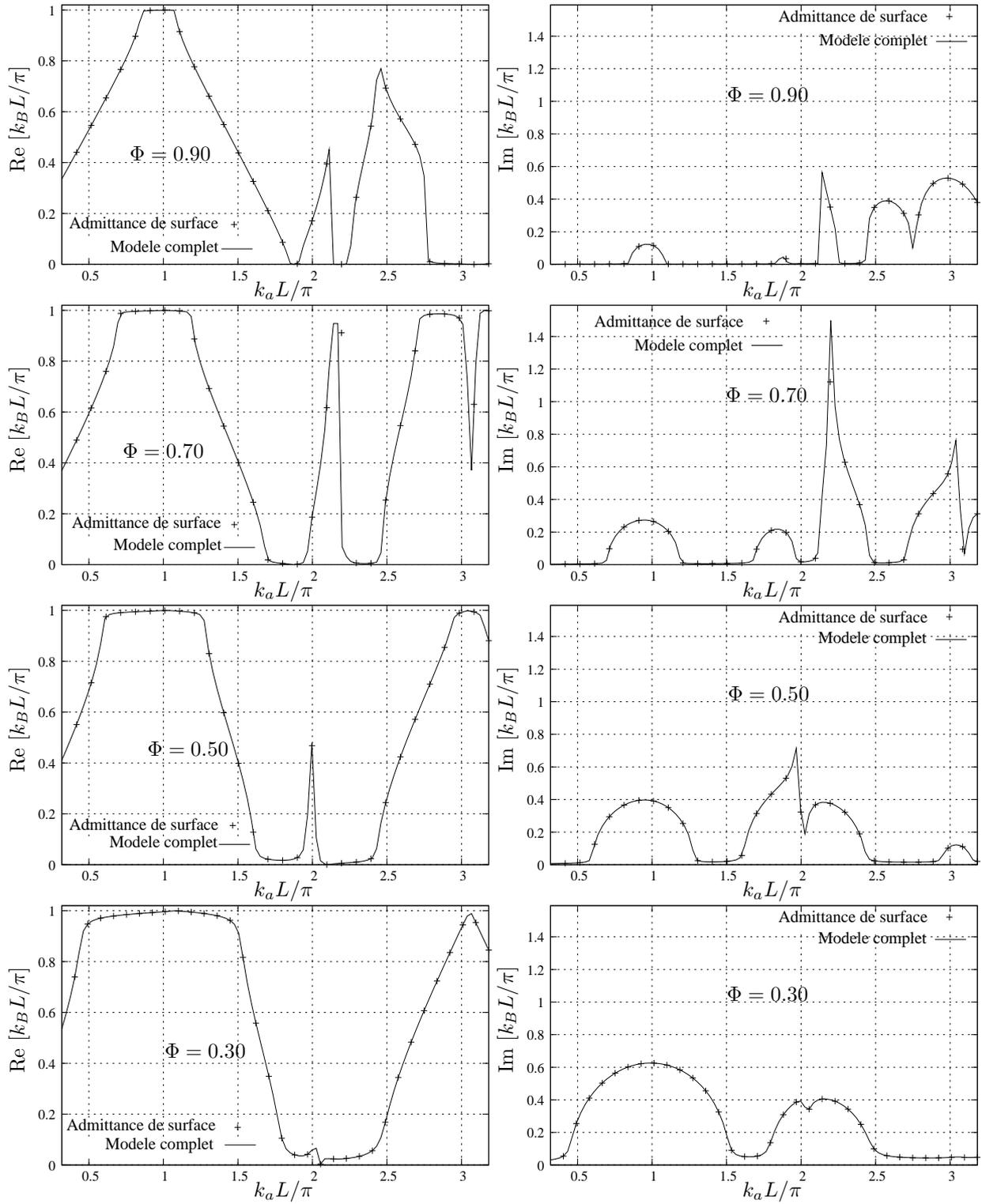


FIG. 6.2 – Représentation des nombres d’onde de Bloch complexes adimensionnés $k_B L/\pi$ en fonction de la fréquence réduite $k_a L/\pi$ dans un régime hautes fréquences. Les courbes en traits pleins (—) représentent les prédictions du modèle complet (chapitre 5). Les courbes en croix (+) sont associées aux résultats obtenus avec le concept d’admittance de surface équivalente (chapitre 4). Cette comparaison permet de valider le modèle complet aux hautes fréquences.

longueur d'onde acoustique λ très grande devant la dimension L d'une cellule élémentaire du réseau. Cette configuration est illustrée sur la figure 6.3.

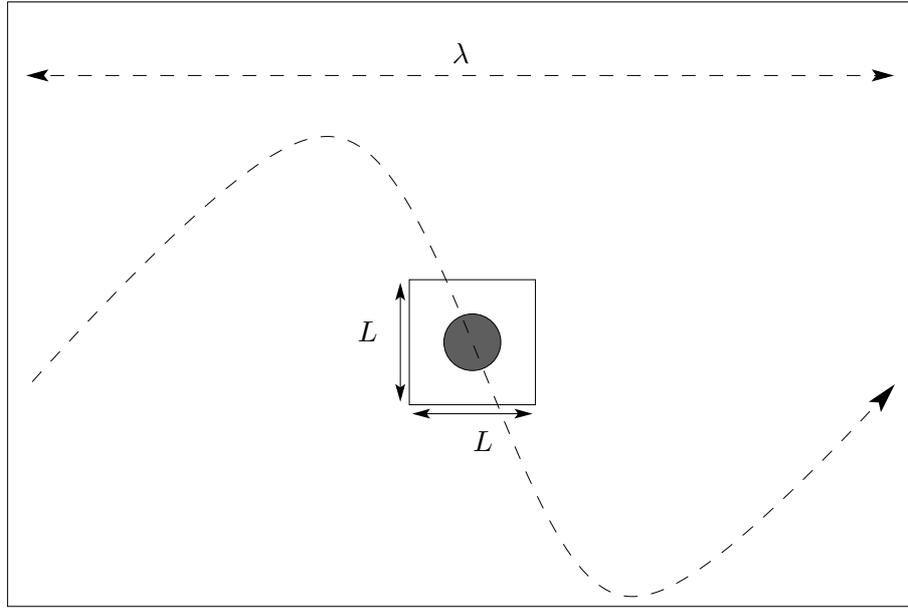


FIG. 6.3 – Illustration du domaine d'étude correspondant aux basses fréquences en terme de longueur d'onde. La dimension caractéristique du système est la période L du réseau. La longueur d'onde associée à l'onde acoustique est notée λ . Cette dernière est très grande devant la période du réseau.

La validation dans le domaine des basses fréquences s'effectue pour un domaine défini par la relation,

$$\frac{k_a L}{\pi} \ll 1, \quad (6.3)$$

où k_a est le nombre d'onde acoustique défini dans la relation (5.4). L'étude dans ce domaine a été réalisée par Cortis [17] pour la même géométrie. A la limite grandes longueurs d'onde, les effets visqueux et thermiques sont prédominants sur les effets de diffusion multiple. La propagation et l'absorption sont alors bien décrites par la théorie de l'homogénéisation [11]. Celle-ci prédit le comportement du cristal phononique en incluant les effets visco-thermiques sous la condition de connaître plusieurs paramètres (cf. annexe F). Une comparaison entre les résultats existants, issus de la théorie de l'homogénéisation, et les résultats du modèle développé dans le chapitre 5 est proposée dans la suite.

6.2.2 Résultats

Dans le domaine des basses fréquences, la comparaison est réalisée sur la vitesse de phase complexe dans le milieu. Le rayon des cylindres est toujours fixé à $R = 1 \text{ mm}$. Le domaine retenu s'étend de $k_a L/\pi = 10^{-3}$ à $k_a L/\pi = 10^{-1}$. Celui-ci assure la validité de l'hypothèse de grandes longueurs d'onde par rapport à la taille de la cellule élémentaire et représente ainsi un domaine où la propagation est régie par des effets visco-thermiques (sans effets de diffusion multiple). La vitesse de phase complexe

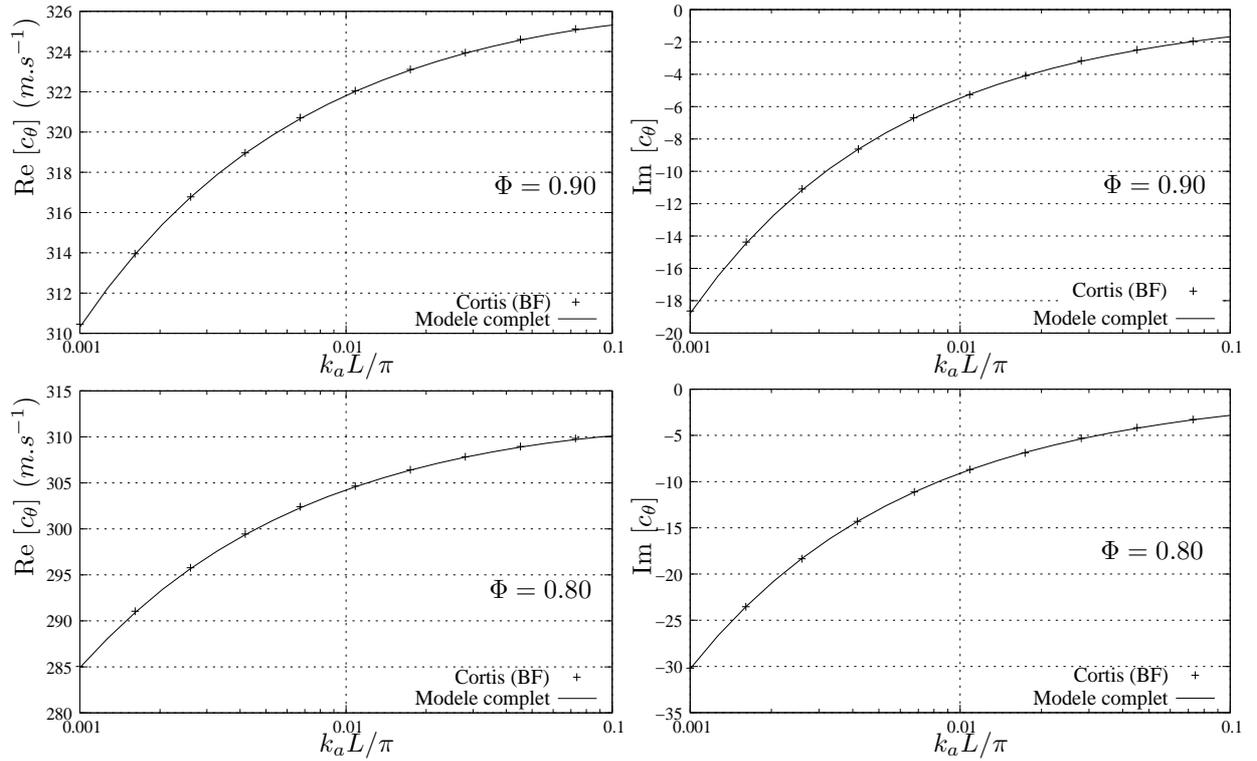


FIG. 6.4 – Représentation de la vitesse de phase complexe c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L/\pi$ dans un régime basses fréquences (l'échelle des ordonnées est différente sur chaque figure). Les porosités des échantillons présentés ici sont de $\Phi = 0.90$ et $\Phi = 0.80$ (milieux relativement dilués). Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats prédits par le modèle complet. Les courbes en croix (+) sont obtenues par Cortis [17] en utilisant une méthode de calcul par éléments finis.

$c_\theta(\omega)$ est obtenue à partir du nombre d'onde de Bloch complexe k_B solution de l'équation aux valeurs propres (5.64). Cette vitesse est reliée au nombre d'onde de Bloch par la relation,

$$k_B(\omega) = \frac{\omega}{c_\theta(\omega)}, \quad (6.4)$$

où ω est la pulsation de l'onde acoustique. La vitesse de phase comporte une partie réelle et une partie imaginaire qui sont toutes deux comparées aux résultats obtenus dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation. Les résultats sont reportés sur la figure 6.4 pour des échantillons de porosité $\Phi = 0.90$ et $\Phi = 0.80$ (relativement dilués) et sur la figure 6.5 pour des échantillons de porosité plus faible. Dans tous les cas, les figures de gauche représentent la partie réelle de la vitesse de phase complexe. Cette vitesse diminue significativement lorsque la fréquence diminue. Sa décroissance est d'autant plus rapide que la porosité du milieu est faible. La partie imaginaire, représentée à droite, montre l'importance des effets visco-thermiques dans ce domaine de fréquence.

Les résultats obtenus avec le modèle développé dans le chapitre 5 sont cohérents avec les résultats de Cortis [17] : les prédictions sont en bon accord dans cette limite grande longueur d'onde, notamment lorsque la porosité est forte. Cependant, lorsque celle-ci diminue, des écarts importants apparaissent aux très basses fréquences (bien visible dans le cas $\Phi = 0.40$ pour $k_a L/\pi \approx 10^{-3}$). L'origine de ces

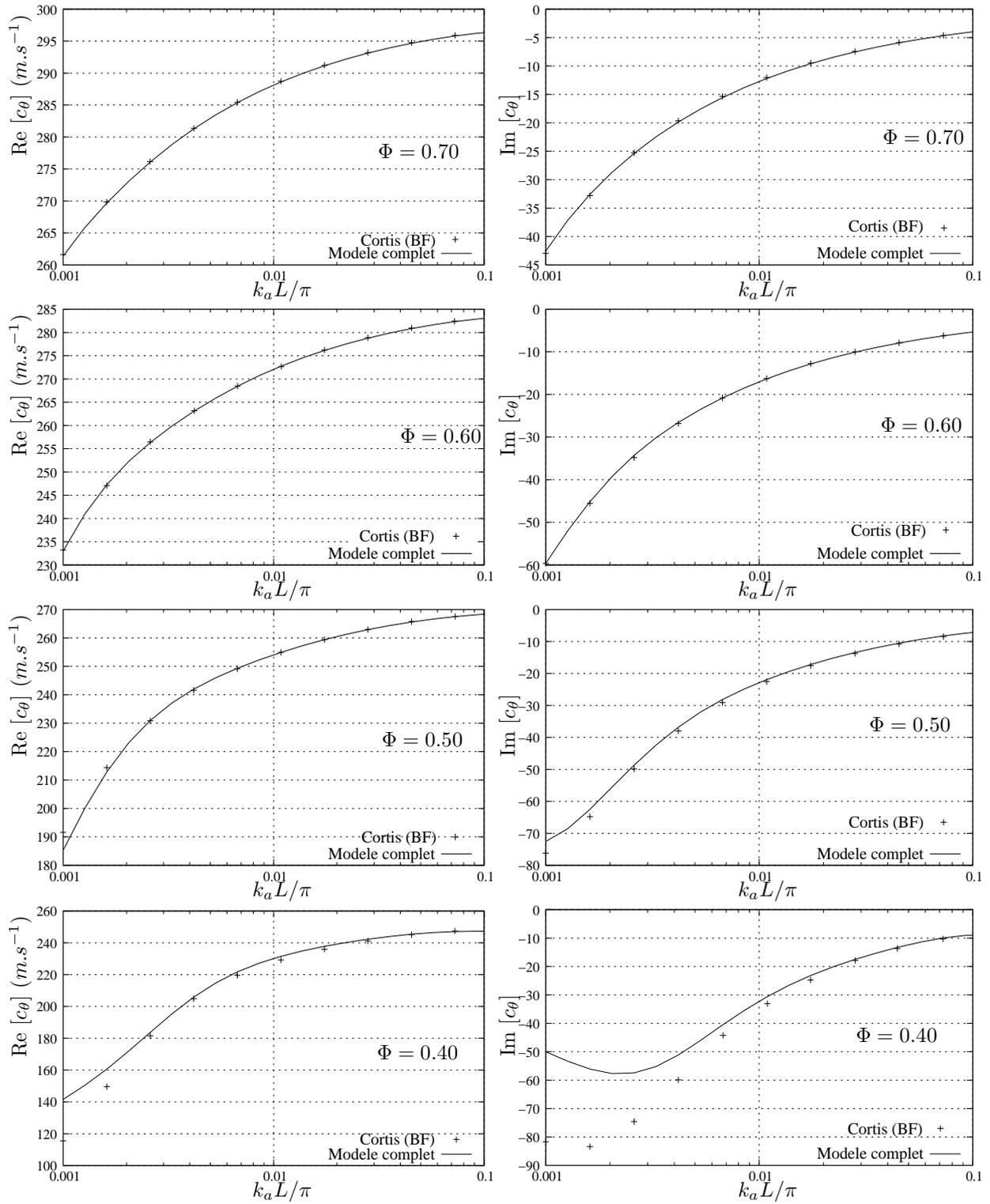


FIG. 6.5 – Représentation des vitesses de phase complexes c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$ dans un régime basses fréquences (l'échelle des ordonnées est différente sur chaque figure). Les porosités des échantillons présentés ici varient de $\Phi = 0.70$ à $\Phi = 0.40$ (milieux concentrés). Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats obtenus avec le modèle complet. Les courbes en croix (+) sont obtenues par Cortis [17] en utilisant une méthode de calcul par éléments finis. Le modèle complet est validé aux grandes longueurs d'onde sous la condition suivante : $k_a L / \pi \geq 10^{-2}$.

écarts provient de problèmes numériques (mauvais conditionnement des matrices) dans l'évaluation des coefficients de pondération A_m (et B_m) associés aux champs diffusés (annexe H et G). Néanmoins, ces écarts n'apparaissent qu'aux très grandes longueurs d'onde et la validité du modèle développé dans le chapitre 5 pour des arguments $k_a L/\pi \geq 10^{-2}$ et des porosités supérieures ou égales à $\Phi = 0.50$ suffit à étudier la transition entre les basses et les hautes fréquences (les écarts sont inférieurs à 1% à partir de cette limite). L'analyse de cette transition fera l'objet de la section suivante où l'étude sera limitée au domaine $2 \times 10^{-2} \leq k_a L/\pi \leq 5 \times 10^{-1}$ et pour des échantillons de porosité supérieure ou égale à 0.50.

6.3 Étude de la transition entre les basses fréquences et les hautes fréquences (rayon des cylindres fixés à $R = 1 \text{ mm}$)

L'objet de cette section est d'étudier la transition entre les régimes basses fréquences et hautes fréquences définis précédemment. L'intérêt est plus particulièrement porté sur l'émergence des effets de diffusion multiple au cours de la propagation lorsque la fréquence augmente. L'étude est toujours réalisée en fonction de la fréquence réduite $k_a L/\pi$ et le rayon des cylindres est fixé à $R = 1 \text{ mm}$. Les figures 6.6 représentent la vitesse de phase complexe c_θ (définie par la relation (6.4)) pour un échantillon de porosité $\Phi = 0.90$. Les résultats pour d'autres porosités sont reportés sur les figures 6.7. Pour toutes les figures et comme précédemment, la partie réelle de la vitesse de phase est représentée à gauche et la partie imaginaire, à droite.

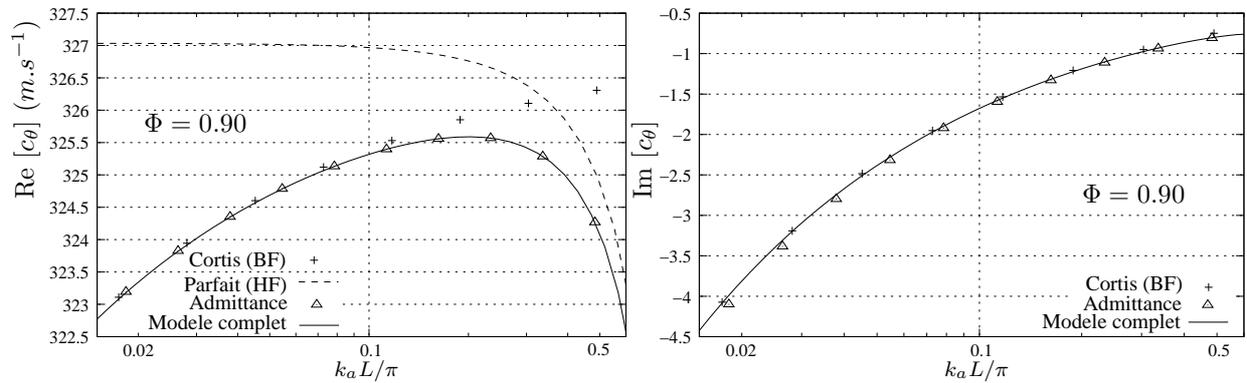


FIG. 6.6 – Représentation de la vitesse de phase complexe c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L/\pi$ dans un régime de transition entre basses et hautes fréquences. La porosité de l'échantillon présenté ici est $\Phi = 0.90$ (milieu dilué). Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats obtenus avec le modèle complet (effets visco-thermiques et de diffusion multiple). Les courbes en croix (+) sont obtenues par Cortis [17] en utilisant une méthode de calcul par éléments finis et décrivent les effets visco-thermiques. La courbe en traits discontinus (---) représente les effets de diffusion multiple seuls. Enfin, les courbes en triangles (Δ) sont associées aux résultats donnés par le concept d'admittance de surface équivalente (chapitre 4).

Pour les parties réelles (figures de gauche), un ensemble de quatre courbes apparaît sur chaque figure. Les courbes en croix (+) représentent les résultats obtenus par Cortis [17]. Les variations de

la vitesse de phase sont, dans ce cas, décrites en considérant les effets visco-thermiques qui ont lieu aux basses fréquences (i.e. $k_a L/\pi \ll 1$). Les courbes en traits discontinus (—) sont obtenues en considérant les effets de diffusion multiple en fluide parfait qui se manifestent aux hautes fréquences (i.e. $k_a L/\pi \geq 1$) (modèle présenté dans le chapitre 2). Les courbes en triangles (Δ) donnent les prédictions obtenues en intégrant le concept d'admittance de surface équivalente (chapitre 4). Ce concept permet de décrire les effets de dissipation localisés au voisinage des cylindres. Enfin, les courbes en traits pleins (—) sont obtenues à partir du modèle complet développé dans le chapitre 5. Ce dernier représente les effets de diffusion multiple en fluide dissipatif.

Pour les parties imaginaires (figures de droite), seules sont représentées les trois courbes associées aux résultats donnés par Cortis, le concept d'admittance et le modèle complet. Les résultats obtenus en fluide parfait conduisent à un nombre d'onde de Bloch de partie imaginaire nulle dans le domaine de fréquence considéré et ne sont pas reportés ici.

Aux très basses fréquences, les longueurs d'onde sont très grandes devant les dimensions caractéristiques du cristal. De ce fait, les effets de diffusion multiple ne présentent pas de contributions significatives. Ceci se traduit par la bonne concordance entre le modèle complet et les résultats issus de la théorie de l'homogénéisation (figures de gauche), quelque soit la porosité du milieu. Plus la fréquence diminue, plus les effets visqueux et thermiques se produisant entre l'onde acoustique et les cylindres constituant les cristaux sont prédominants sur les effets de diffusion multiple. Par conséquent, la partie réelle de la vitesse de phase diminue et la partie imaginaire, associée à la dissipation, augmente (en valeur absolue). De plus, les résultats obtenus en considérant seulement les effets de diffusion multiple en fluide parfait tendent vers une valeur asymptotique constante dépendante de la porosité du milieu (valeur qui sera discutée dans la suite). Ce caractère asymptotique vient appuyer le fait que les effets de diffusion multiple n'ont plus de contributions dans cette limite grande longueur d'onde.

Lorsque les longueurs d'onde se réduisent, les parties réelles des vitesses de phase obtenues dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation (courbes en croix (+) à gauche) tendent vers une valeur asymptotique constante (valeur qui sera aussi discutée dans la suite). Cette tendance traduit maintenant le fait que les effets visco-thermique s'annulent aux hautes fréquences. De plus, les parties imaginaires associées (courbes en croix (+) à droite) tendent à s'annuler également dans cette limite, prévoyant ainsi un caractère non dissipatif du cristal. Cependant, les effets de diffusion multiple se manifestent dès $k_a L/\pi \approx 0.1$ qui correspond donc à la limite de validité des modèles issus de la théorie de l'homogénéisation. A partir de cette limite, correspondante à une longueur d'onde acoustique 20 fois supérieure à la maille du réseau, les écarts entre les prédictions du modèle complet et celles de la théorie de l'homogénéisation augmentent. Ces écarts deviennent très significatifs lorsque $k_a L/\pi$ s'approche de 0.5. La décroissance de la partie réelle de la vitesse de phase s'explique par la proximité de la première bande interdite du cristal phononique. L'augmentation de la partie imaginaire associée (en valeur absolue) est surtout marquée pour les échantillons de faibles porosités ($\Phi = 0.60$ et $\Phi = 0.50$). L'origine de cette particularité est également associée à la proximité de la première bande interdite. En effet, conformément aux résultats présentés dans les figures 6.2, lorsque la porosité diminue, la première bande interdite apparaît plus tôt (élargissement de la bande). Pour une porosité $\Phi = 0.50$, elle apparaît aux environs de $k_a L/\pi \approx 0.5$ sur la figure 6.2, ce qui est en

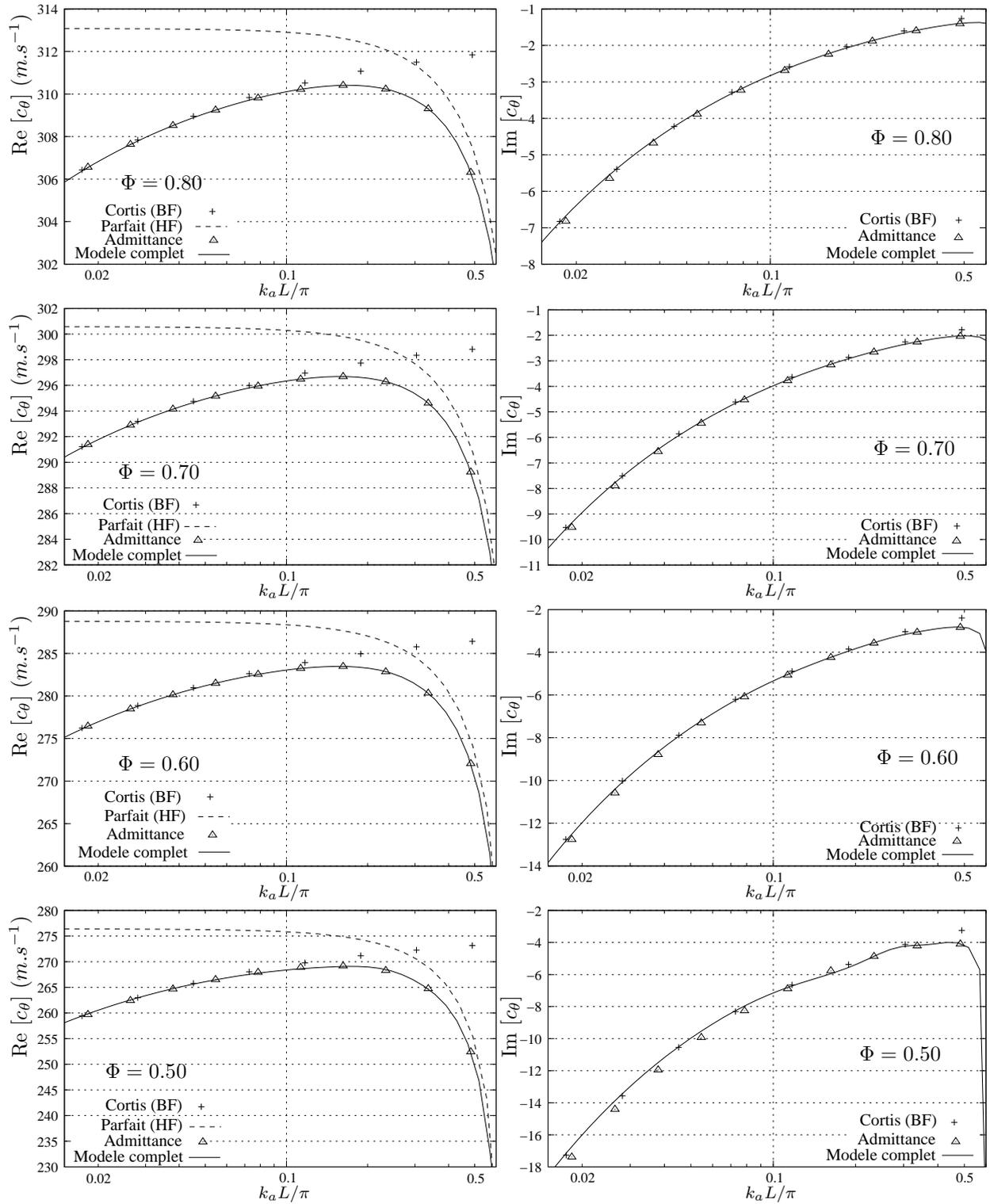


FIG. 6.7 – Représentation de la vitesse de phase complexe c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$ dans un régime de transition entre basses et hautes fréquences pour des échantillons de différentes porosités. Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats obtenus avec le modèle complet. Les courbes en croix (+) sont obtenues par Cortis en utilisant une méthode de calcul par éléments finis et représentent l’impact des effets visco-thermiques. Les courbes en traits discontinus (---) représentent les effets de diffusion multiple seuls. Enfin, les courbes en triangles (Δ) sont associées aux résultats donnés par le concept d’admittance de surface équivalente. Ces figures permettent d’étudier la transition entre un régime visco-thermique et l’émergence des effets de diffusion multiple.

accord avec l'augmentation de la partie imaginaire de la vitesse de phase en $k_a L/\pi \approx 0.5$ également, sur la figure 6.7.

La théorie de l'homogénéisation prévoit une limite asymptotique haute fréquence de la vitesse de phase (partie réelle). Cette limite est caractéristique du matériau considéré. Elle est reliée à la tortuosité dynamique [27] déjà rencontrée dans le chapitre 3 et définie par la relation (3.4) (voir aussi l'annexe F). Les valeurs de tortuosité données par Cortis [17] sont présentées dans la quatrième colonne du tableau 3.2 pour le cas du cristal étudié. De l'autre côté, la partie réelle de la vitesse de phase obtenue par le modèle de diffusion multiple en fluide parfait (chapitre 2) tend vers une limite asymptotique aux grandes longueurs d'onde. Cette limite est également reliée à la tortuosité du matériau. Les valeurs obtenues dans cette seconde limite sont celles données dans la troisième colonne du tableau 3.2 et sont tout à fait cohérentes avec les précédentes.

L'ensemble des parties réelles représentées sur les figures 6.6 et 6.7 fait apparaître un croisement entre les résultats obtenus en fluide parfait (diffusion multiple seule, courbes en traits discontinus (---)) et avec la théorie de l'homogénéisation (effets visco-thermiques seuls, courbes en croix (+)) pour toutes les porosités. Il n'existe donc pas de zone de recouvrement entre le régime visco-thermique et celui dominé par les effets de diffusion multiple (problème soulevé à la fin du chapitre 3 par l'intermédiaire des figures 3.6 et 3.7). Cette conclusion, valable pour toutes les porosités, conduit à l'existence d'un domaine dans lequel les effets de diffusion multiple et ceux, associés à la dissipation coexistent. Dans ce domaine, la propagation ne peut être décrite ni par les modèles de diffusion multiple, ni par la théorie de l'homogénéisation. Ce domaine est notamment caractérisé par un changement de comportement de la partie réelle de la vitesse de phase dû à l'émergence des effets de diffusion multiple. La vitesse présente alors un maximum local dont la valeur et la position dépendent de la porosité du milieu. La détermination numérique de ces maxima est réalisée par le calcul de la dérivée de la vitesse de phase. Cette dernière s'annule aux points recherchés. L'ensemble des valeurs obtenues est résumé dans le tableau 6.1. Ce tableau montre que la position de ces maxima est sensiblement la même pour des échantillons de faible porosité. L'existence de ces maxima locaux

Φ	$k_a L/\pi$	$\text{Re}[c_\theta] \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$
0.90	0.195	325.6
0.80	0.171	310.4
0.70	0.155	296.7
0.60	0.155	283.5
0.50	0.155	269.2

TAB. 6.1 – *Maxima locaux de la partie réelle de la vitesse de phase dans la zone de transition entre les basses fréquences (régime visco-thermique) et les hautes fréquences (régime de diffusion multiple).*

est associée à la transition entre un régime visco-thermique prédominant (décrit par la théorie de l'homogénéisation) et un régime de diffusion multiple (décrit par les théories de diffusion multiple). Aux très grandes longueurs d'onde, l'impact des effets visco-thermiques se traduit par une décroissance de la vitesse de phase. Ce phénomène connu [5, 3] et valable pour tout matériau poreux est d'autant plus important que la fréquence diminue. Pour le cas particulier des cristaux phononiques,

lorsque la fréquence augmente, ceux-ci présentent une première bande interdite dont la conséquence est aussi une décroissance de la vitesse de phase. L'union de ces deux effets explique donc l'origine de l'existence des maxima locaux observés sur les parties réelles des vitesses.

L'étendue du domaine de transition dépend des caractéristiques du fluide considéré. Les paramètres utilisés dans les cas présentés sont ceux de l'air résumés dans le tableau 4.1 du chapitre 4. Une digression sur la transition entre ces deux régimes pour des cristaux phononiques de même géométrie (i.e. cylindres de rayon $R = 1 \text{ mm}$) entourés d'un autre fluide est présentée dans l'annexe J.

D'un point de vue quantitatif, les variations observées dans l'ensemble des figures présentées dans cette section ne sont pas très significatives, notamment pour l'échantillon de porosité $\Phi = 0.90$: la partie réelle de la vitesse ne varie que de 1% sur une décade et la partie imaginaire reste de l'ordre de quelques unités. Malgré la diminution de la porosité, les effets d'atténuation liés aux échanges visco-thermiques restent faibles. Dans le cas présenté ici (rayon des cylindres $R = 1 \text{ mm}$), ces faibles échanges visco-thermiques sont localisés dans le voisinage des cylindres et peuvent donc être pris en compte en utilisant le concept d'admittance de surface. Les figures 6.6 et 6.7 montrent la très bonne concordance entre les résultats donnés par le modèle complet et le concept d'admittance. Dans le domaine considéré, et pour des cristaux phononiques de rayon $R = 1 \text{ mm}$, le rapport entre les épaisseurs de couches limites (définies par la relation (4.1) dans le chapitre 4) et le rayon des cylindres est très inférieur à 1 (rapport de l'ordre de 10^{-1} pour l'échantillon de porosité $\Phi = 0.90$ et de l'ordre de 10^{-2} pour celui de porosité $\Phi = 0.50$). Les deux conditions d'utilisation du concept d'admittance, illustrées sur les figures 4.5 (a) et (b), sont donc validées pour les géométries proposées.

En résumé, pour des cristaux phononiques constitués de cylindres de dimension millimétrique entourés d'air, le concept d'admittance est suffisant pour analyser la transition entre un régime visco-thermique et l'émergence des effets de diffusion multiple. En effet, dans cette configuration géométrique, les effets visco-thermiques sont très faibles et restent localisés au voisinage des cylindres, dans la zone de transition. Cependant, lorsque les effets dissipatifs ne sont plus localisés, ce concept ne peut plus décrire la propagation. Dans ce cadre, l'étude de la transition entre un régime visco-thermique et un régime de diffusion multiple dans des cristaux phononiques constitués de cylindres de dimension micrométrique entourés d'air est proposé dans la section suivante.

6.4 Étude de la transition entre les basses fréquences et les hautes fréquences (rayon des cylindres fixés à $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$)

Dans cette section, le rayon des cylindres est fixé à $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$. L'étude de la transition entre les régimes basses fréquences et hautes fréquences est réalisée dans le domaine de longueur d'onde allant de $k_a L / \pi \approx 0.1$ à $k_a L / \pi \approx 0.5$ (zone de transition). La porosité des échantillons varie de $\Phi = 0.90$ à $\Phi = 0.60$. Les figures 6.8 représentent la vitesse de phase complexe c_θ (définie par la relation (6.4)) pour des échantillons de différentes porosités. Comme dans les deux sections précédentes, la partie réelle de la vitesse de phase est représentée à gauche et la partie imaginaire, à droite.

Aux grandes longueurs d'onde, les résultats obtenus par Cortis d'une part, et avec le modèle complet d'autre part, sont en bon accord. Cet accord traduit la prédominance des effets visco-

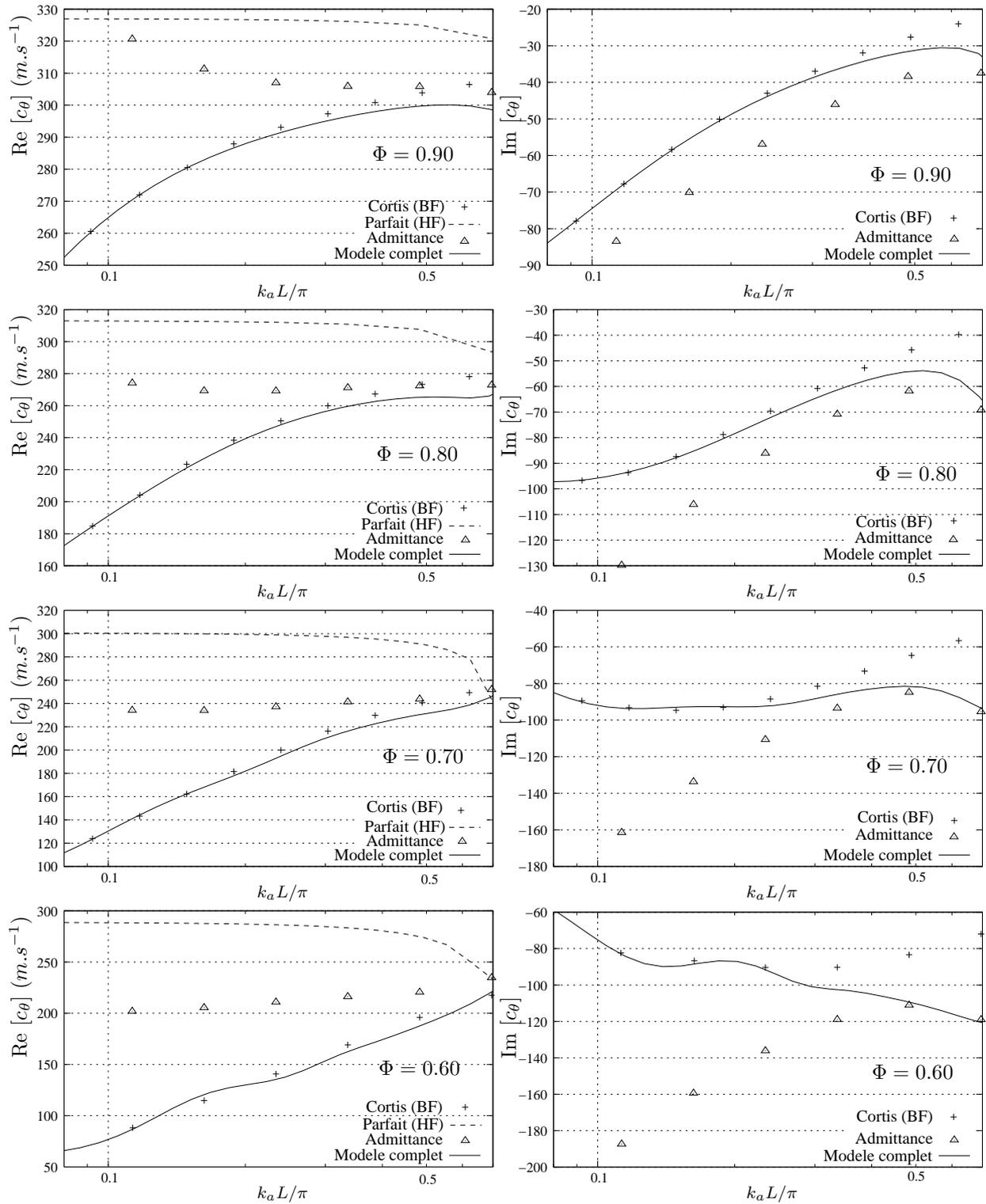


FIG. 6.8 – Représentation de la vitesse de phase complexe c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$ dans la zone de transition entre basses et hautes fréquences pour des échantillons de différentes porosités. Le rayon des cylindres est fixé à $R = 1 \mu\text{m}$. Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats obtenus avec le modèle complet. Les courbes en croix (+) sont obtenus par Cortis en utilisant une méthode d'éléments finis et représentent l'impact des effets visco-thermiques. Les courbes en traits discontinus (---) représentent les effets de diffusion multiple seuls. Enfin, les courbes en triangles (Δ) sont associées aux résultats donnés par le concept d'admittance de surface équivalente. Ces figures montrent l'insuffisance du concept d'admittance en fluide fortement dissipatif.

thermiques sur les effets de diffusion multiple dans cette limite. De plus, les résultats obtenus en considérant les effets de diffusion multiple en fluide parfait tendent vers une asymptote qui, comme dans la section précédente, traduit l'absence d'effets de diffusion.

Dans cette nouvelle configuration, et quelque soit la porosité, les figures 6.8 montrent que le concept d'admittance ne suffit plus à caractériser la transition entre un régime fortement dissipatif et l'émergence des effets de diffusion multiple. Dans le domaine de longueur d'onde considéré, le rapport entre les épaisseurs des couches limites, définies par la relation (4.1), et le rayon des cylindres est maintenant de l'ordre de l'unité. Dans ce cas, les effets visco-thermiques ne sont plus localisés au voisinage des cylindres. Les hypothèses permettant l'utilisation du concept d'admittance, illustrées par les figures 4.5 (a) et (b), ne sont plus validées et expliquent l'incohérence des résultats associés aux courbes en triangles (Δ). Cependant, lorsque la longueur d'onde diminue, le rapport entre les épaisseurs de couches limites et le rayon des cylindres diminue. A une certaine limite hautes fréquences, la valeur de ce rapport permet de réutiliser le concept d'admittance ; ce qui se manifeste par une jonction entre les courbes associées au concept d'admittance et celles données par le modèle complet, visible sur les parties imaginaires correspondant aux échantillons de porosité $\Phi = 0.70$ et $\Phi = 0.60$. Pour ces deux échantillons et dans la limite $k_a L / \pi \approx 0.5$, le rapport entre les épaisseurs de couches limites et le rayon des cylindres est de l'ordre de 0.3 (et de l'ordre de l'unité pour $k_a L / \pi \approx 0.1$).

D'un point de vue quantitatif, les variations observées dans cette nouvelle configuration géométrique sont très significatives pour toutes les porosités. La partie réelle de la vitesse augmente de 20% sur une décade (environ) pour l'échantillon de porosité $\Phi = 0.90$. Pour un échantillon de $\Phi = 0.60$, la partie réelle de la vitesse est multipliée par trois sur une décade. De plus et quelque soit la porosité considérée, les parties imaginaires présentent des valeurs dix fois plus élevées que dans le cas de cylindres de $R = 1 \text{ mm}$. L'importance des variations et des valeurs des vitesses de phase complexes, soulignée par les figures 6.8, traduit une forte dissipation dans les cristaux phononiques micrométriques entourés d'air.

En présence de ces effets dissipatifs importants, la chute de la partie réelle de la vitesse de phase aux hautes fréquences n'est pas aussi marquée que sur les figures 6.7 associées aux échantillons millimétriques. Ce qui signifie que l'effet de la première bande interdite n'est plus visible sur la partie réelle. Par contre, l'influence de cette première bande est bien traduite par l'augmentation de la partie imaginaire (en valeur absolue) prédite par le modèle complet aux environs de $k_a L / \pi \approx 0.5$. Cette décroissance est d'autant plus marquée que la porosité du milieu est faible (dû à l'élargissement de la première bande interdite, comme discuté précédemment).

Dans le cadre de cristaux phononiques micrométriques entourés d'air, la zone de transition, où les effets visco-thermiques et de diffusion multiple coexistent, est marquée par des effets dissipatifs très importants. Ces derniers entraînent de grandes variations sur la vitesse de phase complexe. La propagation et l'absorption dans la zone de transition, où les effets visco-thermiques sont conséquents, est décrite correctement par le modèle complet.

6.5 Conclusion

Une validation du modèle présenté dans le chapitre précédent a été réalisée. D'une part, aux hautes fréquences, la comparaison entre les résultats validés dans le chapitre 4 utilisant le concept d'admittance de surface équivalente et ceux obtenus dans le chapitre 5 (modèle complet) permet de valider ce dernier aux hautes fréquences. D'autre part, aux très grandes longueurs d'onde, le modèle complet rejoint les résultats obtenus par des méthodes issues de la théorie de l'homogénéisation dans une certaine limite. En effet, des problèmes numériques apparaissent aux environs de $k_a L / \pi \approx 10^{-2}$ et dans ce cas, les modèles de diffusion multiple présentés ne permettent plus de décrire la propagation. Cette limite correspond à un régime exclusivement visco-thermique, parfaitement décrit par les modèles existants et qui se situe loin de la zone de transition d'intérêt. Malgré cet inconvénient, l'étude de la transition entre les régimes grandes longueurs d'onde et de diffusion multiple a donc été réalisée sur deux types de cristaux phononiques (millimétriques et micrométriques) entourés d'air. Dans les deux cas, les études montrent l'existence d'une zone de transition où les effets visco-thermiques et ceux, associés à la diffusion multiple coexistent. Pour les cristaux phononiques dont les cylindres sont de rayon $R = 1 \text{ mm}$, les effets dissipatifs sont faibles et la transition peut être décrite par le concept d'admittance introduit dans le chapitre 4. Lorsque les rayons constituant les cristaux sont de l'ordre du micromètre, les effets visco-thermiques sont très importants dans la zone de transition. Dans ce second cas, le rapport entre les épaisseurs de couches limites et le rayon des cylindres, étant de l'ordre de quelques unités, le concept d'admittance ne permet plus de décrire la propagation et l'absorption dans la zone de transition. Le comportement du cristal est alors décrit par le modèle complet.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail a été d'étudier les contributions des effets visco-thermiques et de diffusion multiple au cours de la propagation dans un matériau poreux particulier. Le matériau poreux choisi est un cristal phononique à deux dimensions de géométrie simple. Dans un régime haute fréquence (petites longueurs d'onde), ce type de matériau, de part sa périodicité, peut présenter des bandes interdites où la propagation est prohibée. Ce phénomène est associé aux effets de diffusion multiple. Dans la limite basse fréquence (grandes longueurs d'onde), les caractéristiques microscopiques du matériau (périodicité) n'interviennent pas et la propagation est régie par les modèles classiques issus de la théorie de l'homogénéisation. Le travail réalisé a pour but de déterminer l'importance des effets visco-thermiques et de diffusion multiple en fonction de la longueur d'onde. Plus précisément, la question de l'émergence des effets de diffusion multiple lorsque la longueur d'onde diminue a été traitée.

Au cours de la première partie, les propriétés d'un cristal phononique ont été déterminées par deux méthodes différentes (chapitre 1 et chapitre 2) en fluide non dissipatif. Ces deux méthodes ont chacune conduit à un problème aux valeurs propres dont les solutions, obtenues numériquement, donnent accès au comportement du cristal phononique étudié. Les résultats ainsi obtenus ont été validés au cours du chapitre 3. Une première validation, réalisée par comparaison avec des résultats expérimentaux, a montré que la détermination des positions et largeurs des bandes interdites présentées par un cristal phononique est satisfaisante. Une autre comparaison a été réalisée sur des systèmes constitués de plusieurs rangées de cylindres. Les propriétés de transmission de tels systèmes ont été obtenues d'une part, à l'aide du modèle présenté dans le chapitre 2 et d'autre part, expérimentalement. La comparaison entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux a montré une insuffisance des modèles de diffusion multiple à traduire le comportement de tels systèmes. Les écarts observés proviennent d'effets visco-thermiques ayant lieu dans ce régime de diffusion multiple et constitue une première problématique à résoudre. Une seconde validation sur la limite aux grandes longueurs d'onde des deux modèles a ensuite été réalisée. Cette seconde validation a montré un excellent accord avec la limite petites longueurs d'onde des modèles issus de la théorie de l'homogénéisation (traduisant les effets visco-thermiques). Néanmoins, le problème de la transition entre un régime visco-thermique et l'émergence des effets de diffusion multiple ne peut être résolu sans considérer à la fois les effets dissipatifs et ceux liés à la diffusion multiple et constitue une seconde problématique.

Dans le chapitre 4, une extension du modèle présenté dans le chapitre 2 a permis de considérer des effets visco-thermiques localisés au voisinage des cylindres constituant le réseau. Cette extension a été réalisée en introduisant un concept d'admittance de surface équivalente. Pour ce faire, les conditions

limites utilisées dans le chapitre 2 ont été substituées à une condition d'admittance intégrant ces effets dissipatifs localisés. Ce concept simple a permis de décrire les effets visco-thermiques se produisant dans un régime de diffusion multiple. Des comparaisons avec les coefficients de transmission obtenus expérimentalement sur deux échantillons présentant chacun plusieurs rangées de cylindres ont été proposées au cours de ce même chapitre. Ces comparaisons ont montré l'efficacité de ce concept et répondent, par la même occasion, à la première problématique posée dans la première partie du document : les écarts observés entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux présentés dans le chapitre 3 proviennent d'effets dissipatifs non négligeables qui ont lieu dans un régime de diffusion multiple (petites longueurs d'onde).

Au cours du chapitre 5, une seconde extension du modèle présenté dans le chapitre 2 a été réalisée. Dans cette seconde extension, le cristal phononique est entouré d'un fluide dissipatif. Ces effets ne sont plus nécessairement localisés dans le voisinage des cylindres (cas du chapitre 4). La méthode développée est formellement analogue à celle détaillée dans le cadre du chapitre 2. Le problème a été traité autour de trois potentiels : un potentiel acoustique associé à la propagation d'une onde acoustique dans le réseau, un potentiel entropique exprimant les effets thermiques et enfin, un potentiel tourbillonnaire traduisant les effets visqueux. A l'instar du chapitre 2, un problème aux valeurs propres a été obtenu. La résolution de ce nouveau problème a permis de déterminer le comportement du cristal phononique dans tous les domaines de fréquences.

Dans le chapitre 6, une validation du modèle présenté précédemment a été réalisée d'une part, dans un régime de diffusion multiple (petites longueurs d'onde) et d'autre part, dans un régime visco-thermique (grandes longueurs d'onde). Pour le premier cas, une comparaison avec les résultats obtenus avec le modèle présenté et validé dans le chapitre 4 (incluant le concept d'admittance de surface équivalente) a montré un très bon accord et a ainsi permis de valider le modèle complet du chapitre 5 dans un régime de diffusion multiple. Dans le second cas, une comparaison a été effectuée avec des résultats obtenus indépendamment dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation (effets visco-thermiques seuls). Des problèmes numériques sont apparus aux très grandes longueurs d'onde correspondant à un régime exclusivement visco-thermique. Néanmoins, le modèle a été validé dans une limite grandes longueurs d'onde suffisante ; c'est-à-dire permettant d'analyser la transition entre un régime visco-thermique et l'émergence des effets de diffusion multiple. Cette analyse a été réalisée pour deux types de cristaux phononiques à deux dimensions entourés d'air : les premiers sont définis par des cylindres de rayon $R = 1 \text{ mm}$ et les seconds, par des cylindres de rayon $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$. L'analyse de la transition a montré l'existence d'une zone de transition dans laquelle les effets visco-thermiques et de diffusion multiple coexistent. Dans cette zone, la propagation ne peut être décrite ni par la théorie de l'homogénéisation, ni par les théories de diffusion multiple et donne ainsi la limite de ces modèles. Pour le cristal de dimension millimétrique entouré d'air, les effets visco-thermiques sont faibles et localisés au voisinage des cylindres. De ce fait, la transition a pu être caractérisée par le concept d'admittance. Pour le cristal de dimension micrométrique, la dissipation est très importante dans la zone de transition et n'est plus localisée dans le voisinage proche des cylindres. Dans ce second cas, la transition n'a pu être décrite par le concept d'admittance mais a été considérée par le modèle complet.

Au delà de l'étude réalisée dans le cadre de cristaux phononiques simples, la question de l'émer-

gence des effets de diffusion multiple dans des matériaux poreux plus complexes peut être soulevée. En effet, l'un des enjeux majeurs de l'utilisation des matériaux poreux, en raison de leurs diverses applications, réside dans la caractérisation expérimentale conduisant aux "paramètres caractéristiques". Une fois ces paramètres connus, la théorie de l'homogénéisation permet de décrire la propagation et l'absorption des ondes acoustiques dans ces matériaux. La caractérisation des matériaux est réalisée par différentes méthodes dont certaines, acoustiques, sont basées sur l'hypothèse de grandes longueurs d'ondes conformément aux hypothèses de la théorie de l'homogénéisation. L'importance de l'éventuelle émergence des effets de diffusion multiple, susceptible d'influencer les mesures, doit être considérée. Pour cela, le domaine de fréquence d'étude doit être défini de manière à éviter ces effets. Pour ce faire, et connaissant la taille moyenne des pores d'un matériau poreux donné (longueur caractéristique [4]), il est possible de déterminer le domaine de validité expérimental compatible avec l'hypothèse de grande longueur d'onde en se référant aux résultats obtenus dans le cadre de l'étude menée sur les cristaux phononiques.

Concernant les cristaux phononiques, l'intégration des effets visco-thermiques dans les modèles de diffusion multiple pour des cristaux à deux ou trois dimensions constitués de milieux divers (solides, fluides) peut être envisagée. Les nombreuses études réalisées autour de ces cristaux montrent un fort intérêt dans la détermination des bandes interdites et des phénomènes ayant lieu à l'intérieur de ces bandes. Pour autant, les effets dissipatifs se manifestant dans les domaines fréquentiels considérés ont une importance non négligeable. Dans ce sens, et selon la nature du cristal phononique considéré, les contributions des effets visco-thermiques et de diffusion multiple peuvent être différentes du cas étudié dans cette thèse (cylindres rigides entourés d'air). De ce fait, l'étude du comportement acoustique d'autres cristaux peut conduire à des résultats intéressants : en plus des propriétés connues de bandes interdites, la considération des effets visco-thermiques permet d'estimer l'atténuation d'un signal acoustique en dehors de ces bandes. Ainsi, la considération simultanée des effets visco-thermiques et de diffusion multiple permettrait de prédire le pouvoir d'absorption d'un cristal phononique et ce, dans un large domaine fréquentiel.

Annexe A

Calcul explicite des fonctions $P(\vec{G})$ et $C(\vec{G})$ définies dans la relation (1.15)

Les deux intégrales définies dans la relation (1.15) et rappelées ci-dessous représentent les décompositions en séries de Fourier spatiales des deux fonctions $\frac{1}{\rho(\vec{r})}$ et $\frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})}$ du réseau réciproque,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{\rho(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

où $A = L^2$ est l'aire d'une cellule élémentaire, \vec{G} est un vecteur du réseau réciproque. La cellule est constituée de deux domaines dont l'un désigne un cylindre et l'autre, le fluide entourant. Ces domaines, respectivement notés A_f et A_c (tels que $A = A_f + A_c$), sont représentés sur la figure A.1.

Cette annexe a pour objectif de déterminer les expressions des deux intégrales ci-dessus. En séparant les deux domaines, ces intégrales s'écrivent,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \iint_{A_f} \frac{1}{\rho(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} + \frac{1}{L^2} \iint_{A_c} \frac{1}{\rho(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \iint_{A_f} \frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} + \frac{1}{L^2} \iint_{A_c} \frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})} e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d^2\vec{r} \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

où les fonctions $\frac{1}{\rho(\vec{r})}$ et $\frac{1}{\rho(\vec{r})c^2(\vec{r})}$ sont constantes dans chacun des domaines A_f et A_c et prennent respectivement les valeurs $\frac{1}{\rho_0}$, $\frac{1}{\rho_0 c_0^2}$ et $\frac{1}{\rho_c}$, $\frac{1}{\rho_c c_c^2}$. Les constantes ρ_0 , ρ_c et c_0 , c_c sont les masses volumiques et célérités dans le fluide et le cylindre. Il en suit, pour $\vec{G} = \vec{0}$,

$$\begin{cases} P(\vec{0}) = \frac{L^2 - \pi R^2}{L^2} \frac{1}{\rho_0} + \frac{\pi R^2}{L^2} \frac{1}{\rho_c} \\ C(\vec{0}) = \frac{L^2 - \pi R^2}{L^2} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} + \frac{\pi R^2}{L^2} \frac{1}{\rho_c c_c^2} \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} P(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0} \Phi + \frac{1}{\rho_c} (1 - \Phi) \\ C(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \Phi + \frac{1}{\rho_c c_c^2} (1 - \Phi) \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

avec $\Phi = 1 - \frac{\pi R^2}{L^2}$ la porosité du milieu. Et, pour $\vec{G} \neq \vec{0}$,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\rho_0} \iint_{A_f} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} + \frac{1}{L^2} \frac{1}{\rho_c} \iint_{A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \iint_{A_f} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} + \frac{1}{L^2} \frac{1}{\rho_c c_c^2} \iint_{A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} \end{cases}, \quad (\text{A.5})$$

qui peut se réécrire, en faisant apparaître la somme des deux domaines A_f et A_c dans le premier terme,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\rho_0} \iint_{A_f + A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} + \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_0} \right) \iint_{A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \iint_{A_f + A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} + \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{\rho_c c_c^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right) \iint_{A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

où la première intégrale de chacune des deux fonctions portant sur le domaine $A_f + A_c$ est nulle. Les deux termes restants font apparaître la même intégrale notée $F(\vec{G})$,

$$F(\vec{G}) = \frac{1}{L^2} \iint_{A_c} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d^2 \vec{r} = 2 \frac{\pi R^2}{L^2} \frac{J_1(GR)}{GR}, \quad (\text{A.7})$$

ainsi, pour $\vec{G} \neq \vec{0}$,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_0} \right) F(\vec{G}) \\ C(\vec{G}) = \left(\frac{1}{\rho_c c_c^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right) F(\vec{G}) \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

Dans le cadre de l'hypothèse de cylindres parfaitement rigides, les constantes $\frac{1}{\rho_c}$ et $\frac{1}{\rho_c c_c^2}$ tendent vers zéro. Dans ce cas, les fonctions P et C prennent la forme, en $\vec{G} = \vec{0}$,

$$\begin{cases} P(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0} \Phi \\ C(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \Phi \end{cases}, \quad (\text{A.9})$$

et pour $\vec{G} \neq \vec{0}$,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = -\frac{1}{\rho_0} F(\vec{G}) \\ C(\vec{G}) = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} F(\vec{G}) \end{cases}, \quad (\text{A.10})$$

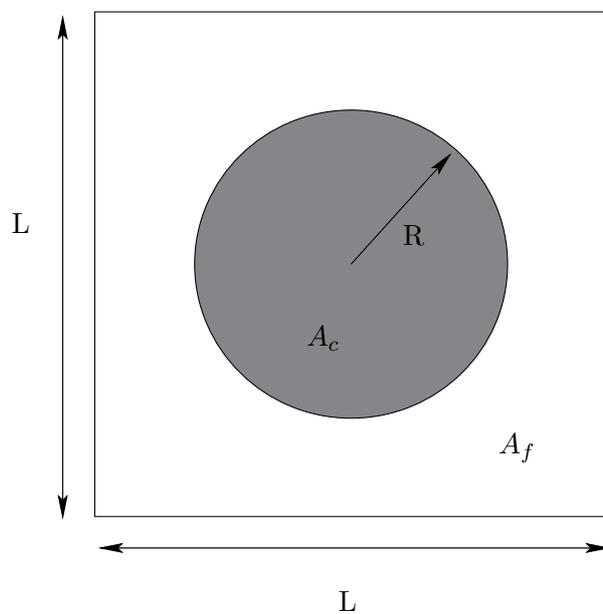


FIG. A.1 – Représentation des deux domaines A_f et A_c associés respectivement au fluide et au cylindre constituant une cellule élémentaire. L'aire totale de la cellule est $A = A_c + A_f$ et la porosité Φ du milieu est définie par la relation, $\Phi = 1 - \frac{\pi R^2}{L^2}$.

où la fonction $F(\vec{G})$ connue est définie par la relation (A.7).

Annexe B

Développement de l'équation du mouvement (1.20)

Cette seconde annexe au premier chapitre a pour but de développer l'équation du mouvement donnée par la relation (1.20) rappelée ci-dessous,

$$-\omega^2 \left(\sum_{\vec{G}} C(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \right) \left(\sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) = \operatorname{div} \left[\left(\sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \right) \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) \right]. \quad (\text{B.1})$$

où les sommes sont effectuées sur l'ensemble des vecteurs \vec{G} du réseau réciproque représentant les différentes directions de propagation. La fonction $\Phi_{\vec{k}_B}$ étant indépendante de la position \vec{r} , il s'en suit,

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) = \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right), \quad (\text{B.2})$$

c'est-à-dire,

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) = \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) i \left(\vec{k}_B + \vec{G} \right) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}}, \quad (\text{B.3})$$

et, en notant \vec{G}'' l'argument des fonctions C et P dans le but de développer les produits à gauche d'une part, et à droite d'autre part, l'équation (B.1) se réécrit,

$$-\omega^2 \left(\sum_{\vec{G}''} C(\vec{G}'') e^{i\vec{G}'' \cdot \vec{r}} \right) \left(\sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) = \operatorname{div} \left[\left(\sum_{\vec{G}''} P(\vec{G}'') e^{i\vec{G}'' \cdot \vec{r}} \right) \left(\sum_{\vec{G}} i \left(\vec{k}_B + \vec{G} \right) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \right) \right] \quad (\text{B.4})$$

Le regroupement des sommes portant sur \vec{G} et \vec{G}'' conduit ensuite à,

$$-\omega^2 \sum_{\vec{G}''} \sum_{\vec{G}} C(\vec{G}'') \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G} + \vec{G}'') \cdot \vec{r}} = \operatorname{div} \sum_{\vec{G}''} \sum_{\vec{G}} i \left(\vec{k}_B + \vec{G} \right) P(\vec{G}'') \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G} + \vec{G}'') \cdot \vec{r}} \quad (\text{B.5})$$

A ce stade, un autre changement de variable \vec{G}'' en $\vec{G}' - \vec{G}$ est effectué dans les membres de gauche et de droite,

$$-\omega^2 \sum_{\vec{G}' - \vec{G}} \sum_{\vec{G}} C(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}') \cdot \vec{r}} = \operatorname{div} \sum_{\vec{G}' - \vec{G}} \sum_{\vec{G}} i \left(\vec{k}_B + \vec{G} \right) P(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}') \cdot \vec{r}}, \quad (\text{B.6})$$

et le développement de l'opérateur divergence donne enfin,

$$\omega^2 \sum_{\vec{G}' - \vec{G}} \sum_{\vec{G}} C(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}') \cdot \vec{r}} = \sum_{\vec{G}' - \vec{G}} \sum_{\vec{G}} \left(\vec{k}_B + \vec{G} \right) \cdot \left(\vec{k}_B + \vec{G}' \right) P(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G}') \cdot \vec{r}}. \quad (\text{B.7})$$

Cette dernière équation conduit au problème aux valeurs propres,

$$\omega^2 C(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) = \left(\vec{k}_B + \vec{G} \right) \cdot \left(\vec{k}_B + \vec{G}' \right) P(\vec{G}' - \vec{G}) \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}), \quad (\text{B.8})$$

dont les solutions, pour \vec{k}_B fixé, correspondent à l'ensemble des pulsations ω autorisées par le réseau.

Annexe C

Calcul explicite des coefficients B_m

L'objectif de cette partie est de détailler la procédure aboutissant au calcul de la valeur des coefficients de pondération B_m associés au champ de pression incident sur un cylindre donné. Pour cela, dans un premier temps, une mise en forme matricielle de l'équation (2.27) portant sur le calcul de ces coefficients est proposée. Cette nouvelle expression permet de calculer les coefficients recherchés en introduisant les séries de Schlömilch qui sont étudiées dans un deuxième temps.

C.1 Réécriture de l'équation portant sur les coefficients B_m

A fréquence fixée, les coefficients de pondération B_m associé au champ incident sur le cylindre l situé à la position \vec{r}_l sont donnés par la relation (2.27) rappelée ici,

$$B_m = e^{i\frac{k_{xn}L}{2}} \cos(m\theta_n) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \neq l} \mathbb{H}_{q-m}(k|\vec{r}_l - \vec{r}_j|) e^{i(q-m)\theta_{\vec{r}_l - \vec{r}_j}} \right) D_q B_q i^{q-m}. \quad (\text{C.1})$$

L'ensemble des vecteurs \vec{r}_j désignent les positions des cylindres j . Pour tout cylindre l arbitrairement choisi, il existe une infinité de couples j et $-j$ de cylindres telle que les deux vecteurs $\vec{r}_l - \vec{r}_j$ et $\vec{r}_l - \vec{r}_{-j}$ soient d'une part de même module, c'est-à-dire, $|\vec{r}_l - \vec{r}_j| = |\vec{r}_l - \vec{r}_{-j}| = jL$ et d'autre part, d'argument opposé, c'est-à-dire, $\theta_{\vec{r}_l - \vec{r}_j} = -\theta_{\vec{r}_l - \vec{r}_{-j}} = \pm \frac{\pi}{2}$. De plus, la symétrie impose $B_m = B_{-m}$, ce qui restreint l'étude aux m et l positifs ou nuls. De ce fait, la somme sur l'indice $j \neq l$ dans l'équation (C.1) se décompose en deux parties :

$$B_m = e^{i\frac{K_{xn}}{2}} \cos(m\theta_n) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{H}_{q-m}(jK) i^{q-m} (e^{-i(q-m)\pi/2} + e^{i(q-m)\pi/2}) \right) D_q B_q, \quad (\text{C.2})$$

où K et K_{xn} représentent le nombre d'onde normalisé et sa composante selon x ($K_{xn} = k_{xn}L$ et $K = kL$). En utilisant l'identification $i^{q-m}(e^{-i(q-m)\pi/2} + e^{i(q-m)\pi/2}) = (1 + (-1)^{q-m})$ la relation (C.2) se réécrit,

$$B_m = e^{i\frac{K_{xn}}{2}} \cos(m\theta_n) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{H}_{q-m}(jK) (1 + (-1)^{q-m}) \right) D_q B_q. \quad (\text{C.3})$$

Et, en faisant usage des propriétés de symétrie des fonctions de Hankel H et des coefficients B_m ,

$$B_m = e^{i\frac{K\pi n}{2}} \cos(m\theta_n) + \sum_{q=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{q,0}\right) (1 + (-1)^{m+q}) \left(\sum_{j=1}^{\infty} (H_{m-q}(jK) + H_{m+q}(jK)) \right) D_q B_q \quad (\text{C.4})$$

où $\delta_{q,0}$ est le symbole de kronecker.

Dans la suite, la somme portant sur l'indice j est traitée indépendamment par l'intermédiaire des fonctions $F_{m,q}^\sigma$ défini comme suit,

$$F_{m,q}^\sigma(K) = (1 + (-1)^{m+q}) \sum_{j=1}^{\infty} (H_{m-q}(jK) + H_{m+q}(jK)) . \quad (\text{C.5})$$

En introduisant les séries de Schlömilch σ , les fonctions $F_{m,q}^\sigma$, nulles pour tout m impair, s'écrivent,

$$F_{m,q}^\sigma(K) = \sigma_{m-q}(K) + \sigma_{m+q}(K) , \quad (\text{C.6})$$

où les séries σ sont de la forme

$$\sigma_m(K) = (1 + (-1)^m) \sum_{j=1}^{\infty} H_m(jK) , \quad (\text{C.7})$$

Leur comportement est discuté dans la section suivante pour les cas où m est pair exclusivement.

C.2 Utilisation des séries de Schlömilch

L'objet de ce paragraphe est d'étudier le comportement des séries $\sigma_m(K)$, pour m pair. Pour des arguments K réels positifs, les fonctions de Hankel $H_m(K)$ tendent très lentement vers 0 lorsque l'argument K augmente. Les séries $\sigma_m(K)$ sont donc particulièrement mal adaptées aux calculs numériques. Les travaux de Twersky [63, 64] et, plus récemment de Linton [39], montrent que les séries $\sigma_m(K)$ peuvent se développer en séries de Schlömilch. A l'ordre $m = 0$,

$$\sigma_0(K) = -1 - \frac{2i}{\pi} \left(\gamma + \ln\left(\frac{K}{4\pi}\right) \right) + \frac{2}{K} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{4}{K \sin(\chi_p)} + \frac{2i}{\pi p} \right) , \quad (\text{C.8})$$

et pour tout $m > 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_{2m}(K) = & \frac{2}{K} + 2(-1)^m \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2e^{i2m\chi_p}}{K \sin(\chi_p)} \right) \\ & + \frac{i}{\pi} \sum_{p=0}^m \left(\frac{(-1)^p 2^{2p} (m+p-1)!}{(2p)!(m-p)!} \left(\frac{2\pi}{K} \right)^{2p} B_{2p}(0) \right) , \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

où γ est la constante d'Euler, $B_{2p}(0)$ les nombres de Bernoulli [1] et $\chi_p = \arcsin\left(\frac{2\pi p}{K}\right)$. Les deux sommes infinies sur l'indice p sont tronquées à l'ordre P_{MAX} . Ecrite sous cette forme, les séries $\sigma_m(kL)$ convergent très rapidement en fonction de l'ordre P_{MAX} retenu.

C.3 Formulation matricielle

L'utilisation des fonctions $F_{m,q}^\sigma$, développées dans la section précédente, dans l'équation (C.4) donne,

$$\sum_{q=0}^{\infty} (\delta_{q,m} - F_{m,q}^\sigma D_q) B_q = e^{i \frac{K_{xx} n}{2}} \cos(m\theta_n). \quad (\text{C.10})$$

Cette dernière expression peut s'écrire sous la forme matricielle suivante,

$$[M_B] \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{pmatrix} = e^{i \frac{K_{xx} n}{2}} \begin{pmatrix} \cos(0.\theta_n) \\ \cos(1.\theta_n) \\ \vdots \\ \cos(M.\theta_n) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

avec $[M_B]$ la matrice carrée d'ordre M définie par la relation,

$$[M_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{0,0}^\sigma & F_{0,1}^\sigma & \cdots & F_{0,M}^\sigma \\ F_{1,0}^\sigma & F_{1,1}^\sigma & \cdots & F_{1,M}^\sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{M,0}^\sigma & F_{M,1}^\sigma & \cdots & F_{M,M}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_M \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

où la matrice faisant intervenir les coefficients de diffusion D_m , obtenus à partir des conditions limites, est diagonale. Les coefficients B_m recherchés se déduisent donc de la matrice $[M_B]$. L'évaluation des coefficients B_m est réalisée numériquement en utilisant la procédure itérative suivante,

$$[I_d](B_m) - [F][D](B_m) = (\cos_m), \quad (\text{C.13})$$

où $[I_d]$ est la matrice identité et (\cos_m) le vecteur portant le produit des fonctions exponentielles et cosinus. En utilisant cette écriture, le système d'équation s'écrit successivement,

$$(B_m) = (\cos_m) - [F][D](B_m) \quad (\text{C.14})$$

$$(B_m) = (\cos_m) - [F][D]((\cos_m) - [F][D](B_m)) \quad (\text{C.15})$$

$$(B_m) = (\cos_m) - [F][D](\cos_m) + ([F][D])^2(\cos_m) - \dots \quad (\text{C.16})$$

c'est-à-dire, en utilisant un procédé itératif [16, 26],

$$(B_m)^{k+1} = (\cos_m) - [F][D](B_m)^k, \quad (\text{C.17})$$

où l'itération est effectuée sur l'indice k et permet d'obtenir les coefficients recherchés.

Annexe D

Utilisation du théorème d'addition des fonctions de Bessel

L'objectif de cette annexe est de détailler le théorème d'addition des fonctions de Bessel permettant notamment d'exprimer le champ de pression diffusé par un cylindre donné par la relation (2.24) et par l'ensemble des cylindres de la rangée (2.30).

D.1 Champ diffusé par le cylindre j

L'expression du champ diffusé par le cylindre j est rappelée ci-dessous,

$$p_{a,diff}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m B_m i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{im\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}} . \quad (\text{D.1})$$

Le théorème d'addition des fonctions de Bessel [1] utilisé permet de projeter une base de fonction de Hankel centrée sur le vecteur \vec{r}_j sur une base de fonction de Bessel centrée sur un vecteur choisi,

$$i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{im\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_j}} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} i^{m-q} H_{m-q}(k|\vec{r}_l - \vec{r}_j|) e^{i(m-q)\Phi_{\vec{r}_l-\vec{r}_j}} i^q J_q(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{iq\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} , \quad (\text{D.2})$$

où le vecteur \vec{r}_l désigne la position du cylindre l . L'utilisation de ce théorème dans l'expression du champ diffusé (D.1) donne, après permutation des indices q et m , la relation (2.25).

D.2 Champ diffusé par l'ensemble des cylindres de la rangée infinie

Le théorème précédent est également utilisé pour le calcul de la double sommation dans l'équation (2.30) portant sur les indices j et m . L'indice j traduit la contribution de tous les cylindres de la rangée infinie et l'indice m , l'ordre des fonctions de Hankel. Dans les développements qui suivent, l'intérêt est porté sur la sommation de l'indice j . La fonction G_m d'intérêt est la suivante,

$$G_m(k, \vec{r}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{im\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_j}} . \quad (\text{D.3})$$

Cette fonction est projetée sur une base de fonction de Bessel centrée sur le vecteur \vec{r}_l en utilisant le théorème d'addition (D.2),

$$G_m(k, \vec{r}) = i^m \mathbf{H}_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j \neq l} i^{m-q} \mathbf{H}_{m-q}(k|\vec{r}_l - \vec{r}_j|) e^{i(m-q)\Phi_{\vec{r}_l - \vec{r}_j}} i^q \mathbf{J}_q(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{iq\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} , \quad (\text{D.4})$$

où, conformément aux résultats de l'annexe C, les vecteurs $(\vec{r}_l - \vec{r}_j)$ et $(\vec{r}_l - \vec{r}_{-j})$ sont de même module, $|\vec{r}_l - \vec{r}_j| = |\vec{r}_l - \vec{r}_{-j}| = jL$ et d'argument opposé $\Phi_{\vec{r}_l - \vec{r}_j} = -\Phi_{\vec{r}_l - \vec{r}_{-j}} = -\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, l'équation (D.5) se développe,

$$G_m(k, \vec{r}) = i^m \mathbf{H}_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} (1 + (-1)^{m+q}) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbf{H}_{m-q}(jK) + \mathbf{H}_{m+q}(jK) \right) i^q \mathbf{J}_q(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{il\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} , \quad (\text{D.5})$$

et fait apparaître les fonctions $F_{m,q}^\sigma(K) = (1 + (-1)^{m+q}) \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{H}_{m-q}(jK) + \mathbf{H}_{m+q}(jK))$ définies par la relation (C.5) se développent en série de Schlömilch (cf. annexe C). Les fonctions recherchées s'écrivent donc,

$$G_m(k, \vec{r}) = i^m \mathbf{H}_m(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{m,q}^\sigma i^q \mathbf{J}_q(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{il\Phi_{\vec{r}-\vec{r}_l}} , \quad (\text{D.6})$$

avec \vec{r}_l la position d'un cylindre choisi arbitrairement.

Annexe E

Eléments des matrices de réflexion et de transmission

L'objet de ce paragraphe est de détailler le calcul permettant de déterminer les éléments R_{mn} de la matrice de réflexion et T_{mn} de celle de transmission. Pour cela, les propriétés d'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus suivantes sont utilisées [1],

$$\begin{cases} I_{\cos} = \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \\ I_{\sin} = \int_{y=0}^{y=L/2} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \end{cases}, \quad (\text{E.1})$$

où p et q sont des entiers. En notation plus compacte ces deux intégrales s'écrivent,

$$\forall(p, q) \begin{cases} I_{\cos} = \frac{L}{4} \delta_{p,q} (1 + \delta_{p,0}) \\ I_{\sin} = \frac{L}{4} \delta_{p,q} (1 - \delta_{p,0}) \end{cases}, \quad (\text{E.2})$$

où δ représente le symbole de Kronecker.

E.1 Calcul des coefficients de réflexion sur la face d'entrée $x = 0$

La relation (2.31) montre qu'en $x = 0$, le champ de pression $p_{a,0}^-$ réfléchi s'identifie au champ de pression $p_{a,diff}$ diffusé par l'ensemble des cylindres de la rangée infinie. Les coefficients R_{mn} recherchés sont donc reliés au champ diffusé en $x = 0$ par la relation,

$$\sum_{m=0}^{\infty} R_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) = p_{a,diff}(0, y), \quad (\text{E.3})$$

qui sont ensuite projetés sur les fonctions $\cos(\frac{2\pi n}{L}y)$,

$$\int_{y=0}^{y=L/2} \sum_{m=0}^{\infty} R_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) dy = \int_{y=0}^{y=L/2} p_{a,diff}(0, y) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) dy, \quad (\text{E.4})$$

et, en utilisant les propriétés d'orthogonalité (E.2), la relation précédente devient,

$$R_{mn} = \frac{4}{L(1 + \delta_{m,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) p_{a,diff}(0,y) dy . \quad (\text{E.5})$$

E.2 Calcul des coefficients de transmission sur la face de sortie

$x = L$

De la même manière, la relation (2.31) montre qu'en $x = L$, le champ de pression $p_{a,L}^+$ transmis s'identifie à la somme du champ de pression $p_{a,diff}$ diffusé par l'ensemble des cylindres de la rangée infinie et du champ extérieur imposé $p_{a,ext}$. Les coefficients de transmission T_{mn} recherchés sont donc reliés au champ diffusé et au champ émis en $x = L$ par la relation

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) = p_{a,ext}(L,y) + p_{a,diff}(L,y) , \quad (\text{E.6})$$

qui peut se réécrire,

$$\int_{y=0}^{y=L/2} \sum_{m=0}^{\infty} T_{mn} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) dy = \int_{y=0}^{y=L/2} \left(p_{a,ext}(L,y) + p_{a,diff}(L,y) \right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) dy , \quad (\text{E.7})$$

et, en utilisant les propriétés d'orthogonalité (E.2) et l'expression (2.14) du champ de pression extérieur émis en coordonnées cartésiennes $p_{a,ext}(x,y) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}y\right) e^{ik_{xn}x}$ écrit en $x = L$,

$$T_{mn} = \frac{4}{L(1 + \delta_{m,0})} \int_{y=0}^{y=L/2} \cos\left(\frac{2\pi m}{L}y\right) p_{a,diff}(L,y) dy + e^{iK_{xn}} \delta_{m,n} . \quad (\text{E.8})$$

Annexe F

Description de la propagation aux grandes longueurs d'onde

La limite grandes longueurs d'onde correspond à un régime où la longueur d'onde acoustique λ est très grande devant les dimensions caractéristiques L du système étudié. Une illustration de cette limite est présentée sur la figure F.1 pour le cas d'un cristal phononique à deux dimensions. Cette limite grande longueur d'onde permet de définir un volume d'homogénéisation pour lequel les paramètres géométriques du matériau sont invariants par translation.

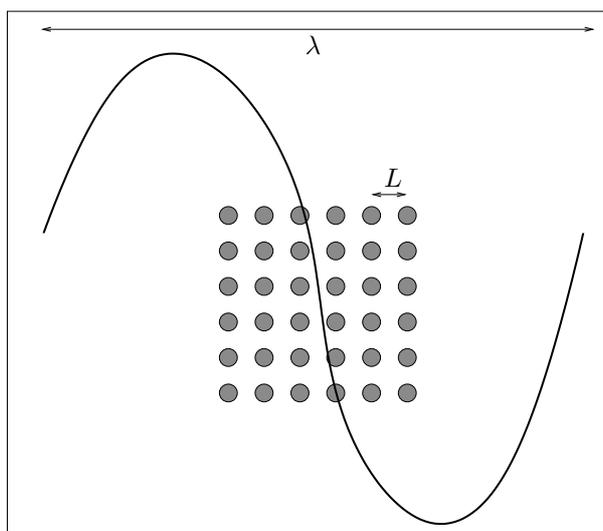


FIG. F.1 – *Domaine de grandes longueurs d'onde λ devant les dimensions caractéristiques L d'un cristal phononique à deux dimensions. Il est possible de définir un volume d'homogénéisation à l'échelle duquel les paramètres géométriques du matériau sont invariants par translation de ce volume.*

A cette échelle, d'importants effets dissipatifs ont lieu au cours de la propagation. Dans l'hypothèse où la structure du matériau est immobile, ces effets dissipatifs sont liés aux interactions inertielles, frottements visqueux et échanges thermiques se produisant dans les pores du matériau. Dans ce cas, la propagation et l'absorption sont décrites par le modèle de "fluide équivalent". Cette description

est réalisée par l'introduction d'un nombre d'onde effectif k_e définissant la propagation à l'échelle macroscopique (i.e. à l'échelle du volume d'homogénéisation) et intégrant les effets dissipatifs mentionnés,

$$k_e^2 = k^2 \frac{\rho_e / \rho_0}{K_e / K_0}, \quad (\text{F.1})$$

où ρ_e et K_e sont respectivement les masse volumique et module de compressibilité effectifs également définis à l'échelle macroscopique. K_0 représente le module de compressibilité adiabatique et ρ_0 la masse volumique du fluide. Le nombre d'onde dans le fluide $k = \omega/c$ est défini par la relation (2.4) dans le chapitre 2. La fonction ρ_e permet de considérer les effets visqueux et inertiels, et la fonction K_e , les effets thermiques. Ces fonctions dépendent de la fréquence et prennent la forme,

$$\begin{cases} \rho_e(\omega) &= \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\Phi} \left(1 - \frac{1}{ix} \sqrt{1 - \frac{M}{2} ix} \right) \\ K_e(\omega) &= \frac{K_0}{\Phi} \left(\gamma - (\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{ix'} \sqrt{1 - \frac{M'}{2} ix'} \right)^{-1} \right)^{-1} \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Ces deux fonctions font apparaître la porosité Φ et la tortuosité α_∞ caractéristiques du matériau : la porosité est reliée au rapport entre les volumes occupés par le fluide et le matériau et la tortuosité traduit le trajet non rectiligne (que doivent subir les ondes acoustiques) à travers les pores du matériau. Les constantes M et M' dépendent, notamment, de ses caractéristiques géométriques,

$$\begin{cases} M &= \frac{8k_0 \alpha_\infty}{\Phi \Lambda^2} \\ M' &= \frac{8k'_0}{\Phi \Lambda'^2} \end{cases}, \quad (\text{F.3})$$

avec d'une part, k_0 et Λ les perméabilité et longueur caractéristique visqueuses [19, 28] et d'autre part, k'_0 et Λ' les perméabilité et longueur caractéristique thermiques [13, 36]. Ces deux couples de paramètres traduisent respectivement les effets visqueux et thermiques se produisant entre l'onde acoustique et le matériau. La dépendance en fréquence des deux fonctions définies par la relation (F.2) est portée par x et x' ,

$$\begin{cases} x &= \omega \frac{\alpha_\infty \rho_0 k_0}{\eta \Phi} \\ x' &= \omega \frac{\text{Pr} \rho_0 k'_0}{\eta \Phi} \end{cases}, \quad (\text{F.4})$$

où η et Pr représentent respectivement la viscosité et le nombre de Prandtl, caractéristiques du fluide.

Sous la condition de connaître un certain nombre de paramètres caractéristiques du matériau (Φ , α_∞ , k_0 , Λ , k'_0 et Λ'), les relations (F.2) permettent de décrire la propagation et l'absorption d'ondes acoustiques aux grandes longueurs d'ondes en tenant compte des effets visqueux et thermiques.

Lorsque la longueur d'onde se réduit, ces effets visco-thermiques tendent à s'annuler. Les limites asymptotiques, quand ω tend vers l'infini, des fonctions ρ_e et K_e s'écrivent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \rho_e(\omega) = \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\Phi} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} K_e(\omega) = \frac{K_0}{\Phi} \end{array} \right. . \quad (\text{F.5})$$

La substitution de ces deux valeurs asymptotiques dans la relation (F.1) conduit à,

$$\boxed{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k_e^2}{k^2} = \alpha_\infty} . \quad (\text{F.6})$$

La limite asymptotique aux petites longueurs d'onde du rapport k_e^2/k^2 est donc indépendant de la fréquence et est reliée à la tortuosité α_∞ du matériau considéré.

Annexe G

Calcul des 9 familles de coefficients de diffusion

L'objectif de cette annexe est de déterminer l'ensemble des coefficients de diffusion D_m pour chacun des trois cas (acoustique, entropique et tourbillonnaire). Ces coefficients, à l'instar du chapitre 2, sont obtenus en utilisant les conditions aux limites.

Cas 1. Potentiel acoustique incident

En réponse à un potentiel acoustique incident de la forme,

$$\phi_{aa,inc}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_m B_m^{aa} i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_i|) \cos(m\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}) \quad , \quad (\text{G.1})$$

le cylindre i diffuse trois types d'ondes sortantes respectivement acoustique, entropique et tourbillonnaire décrites par les potentiels,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,diff}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_m D_m^{aa} B_m^{aa} H_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_i|) \cos(m\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}) \\ \phi_{ha,diff}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_m D_m^{ha} B_m^{aa} H_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_i|) \cos(m\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}) \\ \psi_{a,diff}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_m D_m^{ta} B_m^{aa} H_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_i|) \sin(m\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}) \end{array} \right. \quad , \quad (\text{G.2})$$

Les conditions aux limites (5.5) imposent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}|_{r=R,\forall\theta} = \vec{0} \\ \tau|_{r=R,\forall\theta} = 0 \end{array} \right. \quad . \quad (\text{G.3})$$

C'est-à-dire, en coordonnées cylindriques,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r|_{r=R,\forall\theta} = \frac{\partial\phi_{aa}}{\partial r} + \frac{\partial\phi_{ha}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_a}{\partial\theta} = 0 \\ u_\theta|_{r=R,\forall\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi_{aa}}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi_{ha}}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_a}{\partial r} = 0 \\ \tau|_{r=R,\forall\theta} = \frac{\omega^2}{C_p} \phi_{aa} - \frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} \phi_{ha} \end{array} \right. \quad , \quad (\text{G.4})$$

avec,

$$\begin{cases} \phi_{aa} &= \phi_{aa,inc} + \phi_{aa,diff} \\ \phi_{ha} &= \phi_{ha,diff} \\ \psi_a &= \psi_{a,diff} \end{cases} . \quad (G.5)$$

Le report des expressions des potentiels incident (G.1) et diffusés (G.2) dans les conditions limites (G.4) donne successivement, pour $r = R$ et pour tout θ ,

$$\begin{cases} k_a J'_m(k_a R) + D_m^{aa} k_a H'_m(k_a R) + D_m^{ha} k_h H'_m(k_h R) + D_m^{va} \frac{m}{R} H_m(k_v R) = 0 \\ \frac{m}{R} J_m(k_a R) + D_m^{aa} \frac{m}{R} H_m(k_a R) + D_m^{ha} \frac{m}{R} H_m(k_h R) + D_m^{va} k_v H'_m(k_v R) = 0 \\ \omega^2 \frac{1}{C_p} J_m(k_a R) + \omega^2 \frac{1}{C_p} D_m^{aa} H_m(k_a R) - \frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} D_m^{ha} H_m(k_h R) = 0 \end{cases} , \quad (G.6)$$

$$\begin{cases} D_m^{aa} k_a H'_m(k_a R) + D_m^{ha} k_h H'_m(k_h R) + D_m^{va} \frac{m}{R} H_m(k_v R) = -k_a J'_m(k_a R) \\ D_m^{aa} \frac{m}{R} H_m(k_a R) + D_m^{ha} \frac{m}{R} H_m(k_h R) + D_m^{va} k_v H'_m(k_v R) = -\frac{m}{R} J_m(k_a R) \\ D_m^{aa} \omega^2 \frac{1}{C_p} H_m(k_a R) - D_m^{ha} \frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} H_m(k_h R) = -\omega^2 \frac{1}{C_p} J_m(k_a R) \end{cases} , \quad (G.7)$$

Ce système d'équation s'écrit sous une forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} k_a H'_m(k_a R) & k_h H'_m(k_h R) & \frac{m}{R} H_m(k_v R) \\ \frac{m}{R} H_m(k_a R) & \frac{m}{R} H_m(k_h R) & k_v H'_m(k_v R) \\ \frac{\omega^2}{C_p} H_m(k_a R) & -\frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} H_m(k_h R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_m^{aa} \\ D_m^{ha} \\ D_m^{va} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_a J'_m(k_a R) \\ -\frac{m}{R} J_m(k_a R) \\ -\frac{\omega^2}{C_p} J_m(k_a R) \end{pmatrix} , \quad (G.8)$$

La résolution de ce système d'équation est réalisée numériquement. Pour les deux autres cas, respectivement potentiel entropique incident et potentiel tourbillonnaire incident, la matrice est la même. Seuls changent les deux vecteurs dont le premier porte sur les coefficients de diffusion D_m et le second, sur la nature du potentiel incident. Les deux autres systèmes d'équation s'écrivent, sous forme matricielle,

Cas 2. Potentiel entropique incident

$$\begin{pmatrix} k_a H'_m(k_a R) & k_h H'_m(k_h R) & \frac{m}{R} H_m(k_v R) \\ \frac{m}{R} H_m(k_a R) & \frac{m}{R} H_m(k_h R) & k_v H'_m(k_v R) \\ \frac{\omega^2}{C_p} H_m(k_a R) & -\frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} H_m(k_h R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_m^{ah} \\ D_m^{hh} \\ D_m^{vh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & k_h J'_m(k_h R) \\ - & \frac{m}{R} J_m(k_h R) \\ + & \frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} J_m(k_h R) \end{pmatrix}, \quad (\text{G.9})$$

Cas 3. Potentiel tourbillonnaire incident

$$\begin{pmatrix} k_a H'_m(k_a R) & k_h H'_m(k_h R) & \frac{m}{R} H_m(k_v R) \\ \frac{m}{R} H_m(k_a R) & \frac{m}{R} H_m(k_h R) & k_v H'_m(k_v R) \\ \frac{\omega^2}{C_p} H_m(k_a R) & -\frac{i\omega}{\beta_0 \nu_h} H_m(k_h R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_m^{av} \\ D_m^{hv} \\ D_m^{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \frac{m}{R} J_m(k_v R) \\ - & k_v J'_m(k_v R) \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.10})$$

Annexe H

Développement des potentiels sur les fonctions de Bessel

L'objectif de cette annexe est d'écrire les différents potentiels sur une même base de fonction de Bessel centrée sur un vecteur \vec{r}_l .

H.1 Développement des potentiels extérieurs

Dans cette première section, l'intérêt est porté sur le développement des potentiels incidents extérieurs, dont les formes sont données par les relations (5.14), (5.18) et (5.22) et rappelées ci-dessous. Ces potentiels sont projetés sur les fonctions de Bessel J_m centrées sur un vecteur \vec{r}_l arbitraire. Ces développements sont effectués pour chacun des trois cas acoustique, entropique et tourbillonnaire. Pour cela, la formule générale

$$e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_l)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k|\vec{r}-\vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}}-\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l})} \quad , \quad (\text{H.1})$$

est utilisée.

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

Un potentiel acoustique extérieur imposé et fixé par sa composante n de Fourier prend la forme,

$$\phi_{a,ext}(x, y) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{a,xn}x} \quad . \quad (\text{H.2})$$

Ce potentiel s'écrit en coordonnées polaires en utilisant la formule d'Euler,

$$\phi_{a,ext}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}_a^+ \cdot \vec{r}} + e^{i\vec{k}_a^- \cdot \vec{r}}}{2} \quad , \quad (\text{H.3})$$

où les composantes des différents vecteurs en coordonnées cartésiennes sont,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}_a^+ = \begin{pmatrix} k_{a,xn} \\ \frac{2n\pi}{L} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}_a^- = \begin{pmatrix} k_{a,xn} \\ -\frac{2n\pi}{L} \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{H.4})$$

Les deux exponentielles qui apparaissent dans la relation (H.3) se développent sur les fonctions de Bessel J_m centrée sur un vecteur \vec{r}_l arbitraire par l'intermédiaire de la relation (H.1),

$$\begin{cases} e^{i\vec{k}_a^+ \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_a^+ \cdot \vec{r}_l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}_a^+} - \theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})} \\ e^{i\vec{k}_a^- \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_a^- \cdot \vec{r}_l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}_a^-} - \theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})} \end{cases}, \quad (\text{H.5})$$

où le vecteur \vec{r}_l désigne la position du cylindre l et a pour composantes en coordonnées cartésiennes

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.6})$$

et $\theta_{\vec{k}_a^+} = -\theta_{\vec{k}_a^-} = \theta_{a,n}$ donc,

$$\begin{cases} \vec{k}_a^+ \cdot \vec{r}_l = \frac{k_a L}{2} \cos(\theta_{a,n}) = \frac{k_{a,xn} L}{2} \\ \vec{k}_a^- \cdot \vec{r}_l = \frac{k_a L}{2} \cos(-\theta_{a,n}) = \frac{k_{a,xn} L}{2} \end{cases}, \quad (\text{H.7})$$

Le potentiel extérieur incident s'écrit donc, en coordonnées cylindriques, sur les fonctions de Bessel J_m centrée sur le vecteur \vec{r}_l ,

$$\phi_{a,ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k_{a,xn} L}{2}} \cos(m\theta_{a,n}) i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})}, \quad (\text{H.8})$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes $m > 0$ et $m < 0$,

$$\boxed{\phi_{a,ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \left((2 - \delta_{m,0}) e^{i\frac{k_{a,xn} L}{2}} \cos(m\theta_{a,n}) \right) i^m J_m(k_a |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})}, \quad (\text{H.9})$$

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

$$\phi_{h,ext}(x, y) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L} y\right) e^{ik_{h,xn} x}. \quad (\text{H.10})$$

Ce potentiel s'écrit en coordonnées polaires en utilisant la formule d'Euler,

$$\phi_{h,ext}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}_h^+ \cdot \vec{r}} + e^{i\vec{k}_h^- \cdot \vec{r}}}{2}, \quad (\text{H.11})$$

où les composantes des différents vecteurs en coordonnées cartésiennes sont,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_h^+ = \begin{pmatrix} k_{h,xn} \\ \frac{2n\pi}{L} \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_h^- = \begin{pmatrix} k_{h,xn} \\ -\frac{2n\pi}{L} \end{pmatrix}. \quad (\text{H.12})$$

Les deux exponentielles qui apparaissent dans la relation (H.11) se développent sur les fonctions de Bessel J_m centrée sur un vecteur \vec{r}_l arbitraire par l'intermédiaire de la relation (H.1),

$$\begin{cases} e^{i\vec{k}_h^+ \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_h^+ \cdot \vec{r}_l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}_h^+} - \theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})} \\ e^{i\vec{k}_h^- \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_h^- \cdot \vec{r}_l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}_h^-} - \theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})} \end{cases}, \quad (\text{H.13})$$

où le vecteur \vec{r}_l désigne la position du cylindre l et a pour composantes en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.14})$$

et $\theta_{\vec{k}_h^+} = -\theta_{\vec{k}_h^-} = \theta_{h,n}$ donc,

$$\begin{cases} \vec{k}_h^+ \cdot \vec{r}_l = \frac{k_h L}{2} \cos(\theta_{h,n}) = \frac{k_{h,xn} L}{2} \\ \vec{k}_h^- \cdot \vec{r}_l = \frac{k_h L}{2} \cos(-\theta_{h,n}) = \frac{k_{h,xn} L}{2} \end{cases}, \quad (\text{H.15})$$

Le potentiel extérieur incident s'écrit, en coordonnées cylindriques, sur les fonctions de Bessel J_m centrée sur le vecteur \vec{r}_l ,

$$\phi_{h,ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k_{h,xn} L}{2}} \cos(m\theta_{h,n}) i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})}, \quad (\text{H.16})$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes $m > 0$ et $m < 0$,

$$\boxed{\phi_{h,ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \left((2 - \delta_{m,0}) e^{i\frac{k_{h,xn} L}{2}} \cos(m\theta_{h,n}) \right) i^m J_m(k_h |\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(m\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})}, \quad (\text{H.17})$$

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

$$\psi_{ext}(x, y) = \sin\left(\frac{2n\pi}{L} y\right) e^{ik_{v,xn} x}. \quad (\text{H.18})$$

Ce potentiel s'écrit en coordonnées polaires en utilisant la formule d'Euler,

$$\psi_{ext}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}_v^+ \cdot \vec{r}} - e^{i\vec{k}_v^- \cdot \vec{r}}}{2i}, \quad (\text{H.19})$$

où les composantes des différents vecteurs en coordonnées cartésiennes sont,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_v^+ = \begin{pmatrix} k_{v,xn} \\ \frac{2n\pi}{L} \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_v^- = \begin{pmatrix} k_{v,xn} \\ -\frac{2n\pi}{L} \end{pmatrix}. \quad (\text{H.20})$$

Les deux exponentielles qui apparaissent dans la relation (H.19) se développent sur les fonctions de Bessel J_m centrée sur un vecteur \vec{r}_l arbitraire par l'intermédiaire de la relation (H.1),

$$\begin{cases} e^{i\vec{k}_v^+ \cdot \vec{r}} &= e^{i\vec{k}_v^+ \cdot \vec{r}_l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}_v^+} - \theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})} \\ e^{i\vec{k}_v^- \cdot \vec{r}} &= e^{i\vec{k}_v^- \cdot \vec{r}_l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{im(\theta_{\vec{k}_v^-} - \theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})} \end{cases}, \quad (\text{H.21})$$

où le vecteur \vec{r}_l désigne la position du cylindre l et a pour composantes en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.22})$$

et $\theta_{\vec{k}_v^+} = -\theta_{\vec{k}_v^-} = \theta_{v,n}$ donc,

$$\begin{cases} \vec{k}_v^+ \cdot \vec{r}_l = \frac{k_v L}{2} \cos(\theta_{v,n}) = \frac{k_{v,xn} L}{2} \\ \vec{k}_v^- \cdot \vec{r}_l = \frac{k_v L}{2} \cos(-\theta_{v,n}) = \frac{k_{v,xn} L}{2} \end{cases}, \quad (\text{H.23})$$

Le potentiel extérieur incident s'écrit, en coordonnées cylindriques, sur les fonctions de Bessel J_m centrée sur le vecteur \vec{r}_l ,

$$\psi_{ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k_{v,xn} L}{2}} \sin(m\phi_{v,n}) i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) e^{-im(\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})}, \quad (\text{H.24})$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes $m > 0$ et $m < 0$,

$$\boxed{\psi_{ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-2i(1 - \delta_{m,0}) e^{i\frac{k_{v,xn} L}{2}} \sin(m\theta_{v,n}) \right) i^m J_m(k_v |\vec{r} - \vec{r}_l|) \sin(m\theta_{\vec{r} - \vec{r}_l})}, \quad (\text{H.25})$$

H.2 Coefficients de pondération des potentiels incidents

Le but de ce paragraphe est de donner l'expression des coefficients B_m intervenant dans les expressions des potentiels incidents (5.28), (5.31) et (5.34) (et par la même occasion, les coefficients A_m intervenant dans les expressions des potentiels diffusés (5.26), (5.29), et (5.32)). Les expressions des potentiels incidents (5.28), (5.31) et (5.34) sont écrites sur des bases de fonctions de Bessel. Pour déterminer les coefficients B_m , les potentiels incidents (5.27), (5.30) et (5.33) vont être exprimés sur ces mêmes bases.

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

Les résultats de la section précédente donnent l'écriture du potentiel imposé sur une base de fonction de Bessel centrée sur le vecteur \vec{r}_l . L'utilisation du théorème d'addition des fonctions de

Bessel (D.2) permet de réécrire les potentiels diffusé (5.26) sur la même base de fonctions de Bessel,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{aa,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{aa} B_m^{aa} + D_m^{ah} B_m^{ha} + D_m^{av} B_m^{va}] G_m^{\cos}(k_a, \vec{r} - \vec{r}_l) + \phi_{a,ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) \\ \phi_{ah,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{ha} B_m^{aa} + D_m^{hh} B_m^{ha} + D_m^{hv} B_m^{va}] G_m^{\cos}(k_h, \vec{r} - \vec{r}_l) \\ \psi_{a,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{va} B_m^{aa} + D_m^{vh} B_m^{ha} + D_m^{vv} B_m^{va}] G_m^{\sin}(k_v, \vec{r} - \vec{r}_l) \end{array} \right. \quad (\text{H.26})$$

où les fonctions $G_m^{\cos}(k)$ et $G_m^{\sin}(k)$ sont définies par,

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m^{\cos}(k, \vec{r}) = \sum_{j \neq l} i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) \cos(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \\ G_m^{\sin}(k, \vec{r}) = \sum_{j \neq l} i^m H_m(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) \sin(m\theta_{\vec{r}-\vec{r}_j}) \end{array} \right. , \quad (\text{H.27})$$

et peuvent s'écrire, en utilisant une nouvelle fois le théorème d'addition des fonctions de Bessel (D.2),

$$\left\{ \begin{array}{l} G_m^{\cos}(k, \vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{q=0}^{\infty} [\sigma_{|m-q|}(kL) + \sigma_{m+q}(kL)] i^q J_q(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) \cos(q\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) (1 - \frac{1}{2}\delta_{q,0}) \\ G_m^{\sin}(k, \vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{q=0}^{\infty} [\sigma_{|m-q|}(kL) - \sigma_{m+q}(kL)] i^q J_q(k|\vec{r} - \vec{r}_l|) \sin(q\theta_{\vec{r}-\vec{r}_l}) \end{array} \right. \quad (\text{H.28})$$

et les fonctions $\sigma_m(kL)$ représentent des séries de Hankel d'ordre m ,

$$\sigma_m(kL) = \sigma_{-m}(kL) = (1 + (-1)^m) \sum_{j=1}^{\infty} H_m(jkL) \quad . \quad (\text{H.29})$$

Le comportement de ces séries, déjà rencontrées dans le cadre du chapitre 2 pour des arguments réels, est discuté à la fin de cette annexe.

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

De la même manière, les potentiels diffusé (5.29) sont écrits sur la même base de fonctions de Bessel centrée sur le vecteur \vec{r}_l ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{ha,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{aa} B_m^{ah} + D_m^{ah} B_m^{hh} + D_m^{av} B_m^{vh}] G_m^{\cos}(k_a, \vec{r} - \vec{r}_l) \\ \phi_{hh,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{ha} B_m^{ah} + D_m^{hh} B_m^{hh} + D_m^{hv} B_m^{vh}] G_m^{\cos}(k_h, \vec{r} - \vec{r}_l) + \phi_{h,ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) \\ \psi_{h,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{va} B_m^{ah} + D_m^{vh} B_m^{hh} + D_m^{vv} B_m^{vh}] G_m^{\sin}(k_v, \vec{r} - \vec{r}_l) \end{array} \right. \quad (\text{H.30})$$

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

Dans ce dernier cas, les potentiels diffusé (5.32) sont aussi écrits sur la base des fonctions de Bessel,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{va,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{aa} B_m^{av} + D_m^{ah} B_m^{hv} + D_m^{av} B_m^{vv}] G_m^{\cos}(k_a, \vec{r} - \vec{r}_l) \\ \phi_{vh,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{ha} B_m^{av} + D_m^{hh} B_m^{hv} + D_m^{hv} B_m^{vv}] G_m^{\cos}(k_h, \vec{r} - \vec{r}_l) \\ \psi_{v,inc}(\vec{r} - \vec{r}_l) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m^{ta} B_m^{av} + D_m^{vh} B_m^{hv} + D_m^{vv} B_m^{vv}] G_m^{\sin}(k_v, \vec{r} - \vec{r}_l) + \psi_{ext}(\vec{r} - \vec{r}_l) \end{array} \right. \quad (\text{H.31})$$

Une identification entre les deux expressions des potentiels incidents pour chacun des trois cas, respectivement entre (5.28) et (H.26) , (5.31) et (H.30) , (5.34) et (H.31), conduit à l'écriture explicite des coefficients de pondération B_m recherchés,

– **Cas 1 : potentiel acoustique imposé**

$$B_m^{ba} = \delta_{b,a}(2 - \delta_{m,0}) e^{ik_a, xnL/2} \cos(m\theta_{a,n}) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{m,q}^{\sigma,b} \sum_{c=a,h,v} D_q^{bc} B_q^{ca} . \quad (\text{H.32})$$

– **Cas 2 : potentiel entropique imposé**

$$B_m^{bh} = \delta_{b,h}(2 - \delta_{m,0}) e^{ik_h, xnL/2} \cos(m\theta_{h,n}) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{m,q}^{\sigma,b} \sum_{c=a,h,v} D_q^{bc} B_q^{ch} . \quad (\text{H.33})$$

– **Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé**

$$B_m^{bv} = -2i\delta_{b,v} e^{ik_v, xnL/2} \sin(m\theta_{v,n}) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{m,q}^{\sigma,b} \sum_{c=a,h,v} D_q^{bc} B_q^{cv} , \quad (\text{H.34})$$

où δ est le symbole de Kronecker et l'indice b prend les trois valeurs a, h et v . Les fonctions $F_{m,l}^{\sigma,b}$ ont la forme suivante :

$$F_{m,q}^{\sigma,b} = (1 - \frac{1}{2}\delta_{m,0})(\delta_{b,a} + \delta_{b,h})[\sigma_{m+q}(k_bL) + \sigma_{m-q}(k_bL)] + \delta_{b,v}[\sigma_{m+q}(k_bL) - \sigma_{m-q}(k_bL)] \quad (\text{H.35})$$

et les fonctions $\sigma_m(k_bL)$ sont discutées à la fin de cette annexe.

La résolution des trois équations ci-dessus donne l'ensemble des coefficients B_m recherchés (et donc, les coefficients A_m). Pour ce faire, une réécriture des trois relations sous forme matricielle est effectuée.

H.3 Résolution des équations portant sur les coefficients de pondération

La matrice des coefficients de diffusion $[D_m]$ étant connue, les trois systèmes d'équations (H.32), (H.33) et (H.34) peuvent être résolues. Pour cela, une écriture matricielle de ces trois systèmes est proposée pour chacun des trois cas et pour $m = [0 : M]$ et $q = [0 : M]$.

– Cas 1 : potentiel acoustique imposé

$$\begin{pmatrix} B_0^{aa} \\ B_1^{aa} \\ \vdots \\ B_M^{aa} \\ \hline B_0^{ha} \\ B_1^{ha} \\ \vdots \\ B_M^{ha} \\ \hline B_0^{va} \\ B_1^{va} \\ \vdots \\ B_M^{va} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(0.\theta_{a,n}) \\ 2e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(1.\theta_{a,n}) \\ \vdots \\ 2e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(M.\theta_{a,n}) \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + [F] \cdot [D] \begin{pmatrix} B_0^{aa} \\ B_1^{aa} \\ \vdots \\ B_M^{aa} \\ \hline B_0^{ha} \\ B_1^{ha} \\ \vdots \\ B_M^{ha} \\ \hline B_0^{va} \\ B_1^{va} \\ \vdots \\ B_M^{va} \end{pmatrix}, \quad (\text{H.36})$$

avec les matrices $[F]$ et $[D]$ définies comme suit :

$$\begin{pmatrix} F_{0,0}^a & F_{0,1}^a & \dots & F_{0,M}^a & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ F_{1,0}^a & F_{1,1}^a & \dots & F_{1,M}^a & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ F_{M,0}^a & F_{M,1}^a & \dots & F_{M,M}^a & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & F_{0,0}^h & F_{0,1}^h & \dots & F_{0,M}^h & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & F_{1,0}^h & F_{1,1}^h & \dots & F_{1,M}^h & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F_{M,0}^h & F_{M,1}^h & \dots & F_{M,M}^h & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & F_{0,0}^v & F_{0,1}^v & \dots & F_{0,M}^v \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & F_{1,0}^v & F_{1,1}^v & \dots & F_{1,M}^v \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & F_{M,0}^v & F_{M,1}^v & \dots & F_{M,M}^v \end{pmatrix}, \quad (\text{H.37})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
D_0^{aa} & & 0 & D_0^{ah} & & 0 & D_0^{av} & & 0 \\
& D_1^{aa} & & & D_1^{ah} & & & D_1^{av} & \\
& & \ddots & & & \ddots & & & \\
0 & & & D_M^{aa} & & D_M^{ah} & 0 & & D_M^{av} \\
\hline
D_0^{ha} & & 0 & D_0^{hh} & & 0 & D_0^{hv} & & 0 \\
& D_1^{ha} & & & D_1^{hh} & & & D_1^{hv} & \\
& & \ddots & & & \ddots & & & \\
0 & & & D_M^{ha} & & D_M^{hh} & 0 & & D_M^{hv} \\
\hline
D_0^{va} & & 0 & D_0^{vh} & & 0 & D_0^{vv} & & 0 \\
& D_1^{va} & & & D_1^{vh} & & & D_1^{vv} & \\
& & \ddots & & & \ddots & & & \\
0 & & & D_M^{va} & & D_M^{vh} & 0 & & D_M^{vv}
\end{array} \right) \cdot \quad (H.38)$$

La matrice [F] contient trois blocs de matrices disposées sur la diagonale. La matrice [F] contient neuf matrices diagonales.

La solution du système d'équations (H.36) est obtenue en résolvant le problème,

$$\left[[I_d] - [F][D] \right] \left(\begin{array}{c} B_0^{aa} \\ B_1^{aa} \\ \vdots \\ B_M^{aa} \\ \text{---} \\ B_0^{ha} \\ B_1^{ha} \\ \vdots \\ B_M^{ha} \\ \text{---} \\ B_0^{va} \\ B_1^{va} \\ \vdots \\ B_M^{va} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(0.\theta_{a,n}) \\ 2e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(1.\theta_{a,n}) \\ \vdots \\ 2e^{ik_{a,xn}L/2} \cos(M.\theta_{a,n}) \\ \text{---} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{---} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \cdot \quad (H.39)$$

– Cas 2 : potentiel entropique imposé

$$\left[\begin{array}{c} [\mathbf{I}_d] - [\mathbf{F}][\mathbf{D}] \end{array} \right] \begin{pmatrix} B_0^{ah} \\ B_1^{ah} \\ \vdots \\ B_M^{ah} \\ \text{---} \\ B_0^{hh} \\ B_1^{hh} \\ \vdots \\ B_M^{hh} \\ \text{---} \\ B_0^{vh} \\ B_1^{vh} \\ \vdots \\ B_M^{vh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{---} \\ e^{ik_{h,xn}L/2} \cos(0.\theta_{h,n}) \\ 2e^{ik_{h,xn}L/2} \cos(1.\theta_{h,n}) \\ \vdots \\ 2e^{ik_{h,xn}L/2} \cos(M.\theta_{h,n}) \\ \text{---} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.40})$$

– Cas 3 : potentiel tourbillonnaire imposé

$$\left[\begin{array}{c} [\mathbf{I}_d] - [\mathbf{F}][\mathbf{D}] \end{array} \right] \begin{pmatrix} B_0^{av} \\ B_1^{av} \\ \vdots \\ B_M^{av} \\ \text{---} \\ B_0^{hv} \\ B_1^{hv} \\ \vdots \\ B_M^{hv} \\ \text{---} \\ B_0^{vv} \\ B_1^{vv} \\ \vdots \\ B_M^{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{---} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{---} \\ 0 \\ -2ie^{ik_{v,xn}L/2} \sin(1.\theta_{v,n}) \\ \vdots \\ -2ie^{ik_{v,xn}L/2} \sin(M.\theta_{v,n}) \end{pmatrix}. \quad (\text{H.41})$$

La convergence des résultats obtenus pour les différents coefficients B_m dépend de la troncature sur l'ordre M retenue pour le calcul des sommes infinies qui apparaissent dans les relations (H.32), (H.33) et (H.34). La méthode utilisée pour résoudre le problème est celle présentée dans l'annexe C (calcul de ces mêmes coefficients en fluide parfait).

L'ensemble des coefficients B_m étant calculé, les coefficients A_m se déduisent de la relation (5.38) reliant les coefficients B_m aux A_m par la matrice $[\mathbf{D}_m]$ des coefficients de diffusion.

H.4 Discussion sur les séries de Hankel

Les séries de fonction de Hankel introduites dans les sections précédentes sont rappelées ici,

$$\sigma_m(kL) = \sigma_{-m}(kL) = (1 + (-1)^m) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{H}_m(jkL) , \quad (\text{H.42})$$

où L est la période du réseau. Deux cas sont à considérer pour évaluer ces séries. Si l'argument k est réel (cas acoustique $k = k_a$), ces séries correspondent à celles rencontrées dans le cadre du chapitre 2. Dans ce cas, elles sont développées en séries de Schlömilch présentées dans l'annexe C. Si l'argument k est complexe (cas entropique $k = k_h$ et tourbillonnaire $k = k_v$) et de la forme $\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}|k|$, les fonctions de Hankel $\mathbf{H}_m(kL)$ tendent naturellement vers 0 lorsque l'argument k augmente. Dans ce cas précis, les séries $\sigma_m(kL)$ convergent donc très rapidement. Une troncature de la série portant sur les éléments j permet d'estimer, avec une bonne précision, les valeurs de $\sigma_m(k_h L)$ et de $\sigma_m(k_v L)$. Les séries $\sigma_m(kL)$ peuvent donc être remplacées par des sommes,

$$\sigma_m(kL) = \sigma_{-m}(kL) = (1 + (-1)^m) \sum_{j=1}^{J_{MAX}} \mathbf{H}_m(jkL) , \quad (\text{H.43})$$

où le nombre J_{MAX} de sommes retenues est fixé.

Annexe I

Calcul des 9 familles de coefficients de réflexion et transmission

L'objet de ce paragraphe est de détailler le calcul des coefficients de réflexion R_{pn} et de transmission T_{pn} dont les expressions finales sont données par les relations (5.60) et (5.61). Pour cela, les propriétés d'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus [1] présentées dans l'annexe E (E.2) sont réutilisées ici.

I.1 Coefficients de réflexion

Une identification entre les expressions des potentiels réfléchis données par les relations (5.50), (5.55) et (5.60) dépendant des coefficients de réflexion R_{pn} et (5.47), (5.52) et (5.57) dépendant des coefficients A_{mn} donne, en $x = 0$,

$$\begin{cases} R_{pn}^{ab} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) = \phi_{ab,0}^-(\vec{r}) \\ R_{pn}^{hb} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) = \phi_{hb,0}^-(\vec{r}) \\ R_{pn}^{vb} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) = \psi_{b,0}^-(\vec{r}) \end{cases}, \quad (\text{I.1})$$

où l'indice b prend les trois valeurs a , h et v correspondant aux cas acoustique, entropique et tourbillonnaire. Soit, en introduisant les propriétés (E.1),

$$\begin{cases} \int_{y=0}^{y=L/2} R_{pn}^{ab} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy = \int_{y=0}^{y=L/2} \phi_{ab,0}^-(\vec{r}) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \\ \int_{y=0}^{y=L/2} R_{pn}^{hb} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy = \int_{y=0}^{y=L/2} \phi_{hb,0}^-(\vec{r}) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \\ \int_{y=0}^{y=L/2} R_{pn}^{vb} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy = \int_{y=0}^{y=L/2} \psi_{b,0}^-(\vec{r}) \sin\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \end{cases}, \quad (\text{I.2})$$

et, en utilisant les propriétés (E.2),

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{pn}^{ab} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \phi_{ab,0}^-(\vec{r}) \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) dy \\ R_{pn}^{hb} = \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \phi_{hb,0}^-(\vec{r}) \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) dy \\ R_{pn}^{tb} = (1 - \delta_{p,0}) \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \psi_{b,0}^-(\vec{r}) \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) dy \end{array} \right. . \quad (\text{I.3})$$

Les coefficients A_{mn} étant précédemment calculés, l'ensemble des coefficients de réflexion R_{mn} se déduit de l'évaluation des fonctions ϕ et ψ diffusés en $x = 0$ et $y = [0; L/2]$.

I.2 Coefficients de transmission

Une identification entre les expressions des potentiels transmis données par les relations (5.50), (5.55) et (5.60) dépendant des coefficients de réflexion T_{pn} et (5.47), (5.52) et (5.57) dépendant des coefficients d'émission A_{mn} donne, en $x = L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{pn}^{ab} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) = \delta_{a,b} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{a,xn}L} + \phi_{ab,L}^+(\vec{r}) \\ T_{pn}^{hb} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) = \delta_{h,b} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{h,xn}L} + \phi_{hb,L}^+(\vec{r}) \\ T_{pn}^{vb} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) = \delta_{v,b} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{v,xn}L} + \psi_{b,L}^+(\vec{r}) \end{array} \right. , \quad (\text{I.4})$$

Soit, en introduisant les propriétés (E.1),

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{y=0}^{y=L/2} T_{pn}^{ab} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy = \\ \int_{y=0}^{y=L/2} \left(\delta_{a,b} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{a,xn}L} + \phi_{ab,L}^+(\vec{r}) \right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \\ \int_{y=0}^{y=L/2} T_{pn}^{hb} \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy = \\ \int_{y=0}^{y=L/2} \left(\delta_{h,b} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{h,xn}L} + \phi_{hb,L}^+(\vec{r}) \right) \cos\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \\ \int_{y=0}^{y=L/2} T_{pn}^{vb} \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy = \\ \int_{y=0}^{y=L/2} \left(\delta_{v,b} \sin\left(\frac{2n\pi}{L}y\right) e^{ik_{v,xn}L} + \psi_{b,L}^+(\vec{r}) \right) \sin\left(\frac{2q\pi}{L}y\right) dy \end{array} \right. , \quad (\text{I.5})$$

et, en utilisant les propriétés (E.2),

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{pn}^{ab} = \delta_{a,b} \delta_{p,n} e^{ik_a, xnL} + \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \phi_{ab,L}^+(\vec{r}) \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) dy \\ \Gamma_{pn}^{hb} = \delta_{h,b} \delta_{p,n} e^{ik_h, xnL} + \frac{1}{(1 + \delta_{p,0})} \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \phi_{hb,L}^+(\vec{r}) \cos\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) dy \\ \Gamma_{pn}^{vb} = \delta_{v,b} \delta_{p,n} (1 - \delta_{p,0}) e^{ik_v, xnL} + (1 - \delta_{p,0}) \frac{4}{L} \int_{y=0}^{y=L/2} \psi_{b,L}^+(\vec{r}) \sin\left(\frac{2p\pi}{L}y\right) dy \end{array} \right. \quad (I.6)$$

Les coefficients A_{mn} étant précédemment calculés, l'ensemble des coefficients de réflexion T_{mn} se déduit de l'évaluation des fonctions ϕ et ψ diffusés en $x = L$ et $y = [0; L/2]$.

Annexe J

Digression sur d'autres fluides

La digression proposée dans cette annexe au chapitre 6 concerne l'étude de la transition entre un régime visco-thermique et un régime de diffusion multiple dans deux fluides différents. La grandeur d'intérêt est la partie réelle de la vitesse de phase décrite par la relation (6.4). Deux cristaux de porosité différente sont étudiés à chaque fois. La porosité du premier est $\Phi = 0.90$ et celle du second est $\Phi = 0.50$. Le rayon des cylindres est fixé à $R = 1 \text{ mm}$. Les fluides considérés sont l'eau et l'hélium. Leur caractéristique est rappelée dans la suite.

J.1 Zone de transition pour un cristal entouré d'eau

La propagation dans un réseau périodiques entourés d'eau a suscité un intérêt dans la limite grande longueur d'onde [25] pour des applications océanographiques d'une part, et dans les hautes fréquences [44, 50, 73] où les cristaux peuvent présenter des bandes interdites d'autre part. Des études récentes ont également été menées dans le cadre de cavités cylindriques remplies d'eau [55] pour une géométrie à deux dimensions similaires.

Les caractéristiques utilisées pour effectuer les simulations numériques sont celles données dans le tableau J.1. La géométrie du cristal est toujours celle donnée sur la figure 3. Le rayon des cylindres est fixé à $R = 1 \text{ mm}$. Les figures J.1 représentent l'évolution de la partie réelle de la vitesse de phase en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$, avec $k_a = \omega / c_{eau}$. La vitesse du son dans l'eau est donnée dans le tableau J.1.

Les figures J.1 font apparaître un comportement similaire au comportement des mêmes cristaux dans l'air : il existe également une zone de transition entre les régimes visco-thermique et de diffusion multiple caractérisée par un maximum local. Cependant, dans le domaine présenté, la vitesse de phase est décrite de manière satisfaisante par les modèles de diffusion multiple seul. L'origine de cette observation réside dans le caractère faiblement dissipatif de l'eau qui se traduit par une viscosité cinématique et une diffusivité thermique faible (cf. tableau J.1). Les figures J.2 montrent les écarts relatifs entre les vitesses de phase calculées en prenant en compte les effets de diffusion multiple avec et sans dissipation. L'étude est réalisée pour des échantillons de porosité $\Phi = 0.50$ dans l'air et dans l'eau. Les vitesses présentées sont normalisées par rapport aux célérités respectives c_0 et c_{eau}

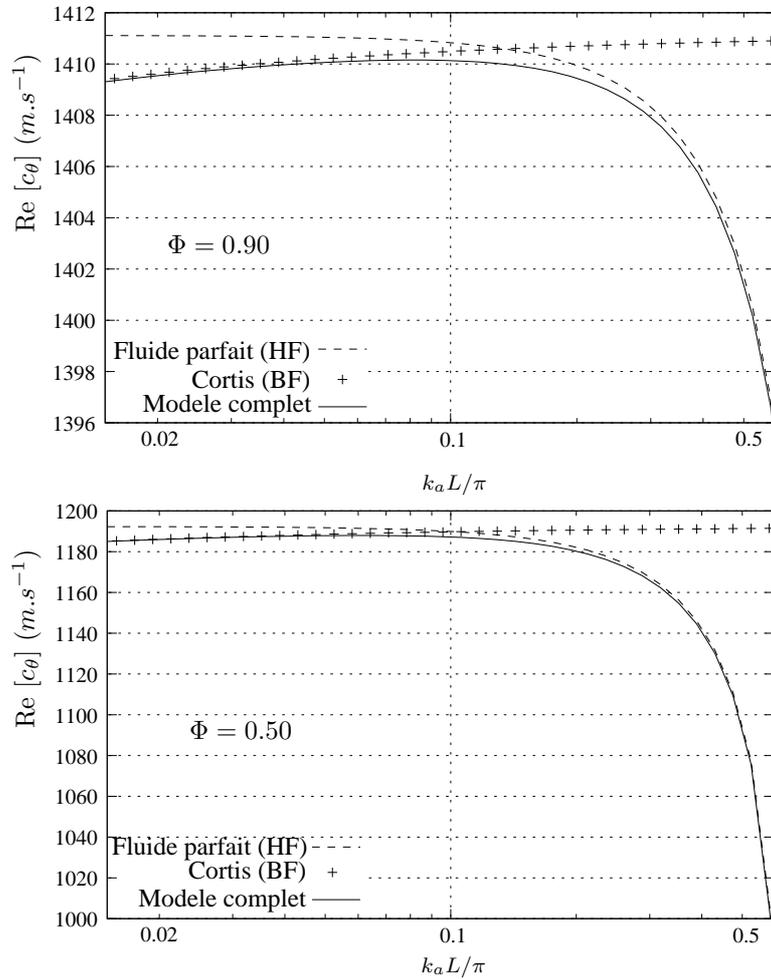


FIG. J.1 – Représentation de la partie réelle de la vitesse de phase complexe c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$ pour un cristal phononique dans l'eau. La figure du haut est associée à un échantillon de porosité $\Phi = 0.90$ et celle du bas, à un échantillon de porosité $\Phi = 0.50$. Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats obtenus avec le modèle complet (le concept d'admittance donne les mêmes résultats). Les courbes en croix (+) sont obtenues par Cortis en utilisant une méthode d'éléments finis et représentent l'impact des effets visco-thermiques. Enfin, les courbes en traits discontinus (---) représentent les effets de diffusion multiple seuls.

Température	$T_{eau} = 293 \text{ K}$
Vitesse du son	$c_{eau} = 1\,480 \text{ m.s}^{-1}$
Masse volumique	$\rho_{eau} = 998 \text{ kg.m}^{-3}$
Rapport des capacités	$\gamma = 1$
Diffusivité thermique	$\nu_h = 1.49 \times 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu_v = 1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Capacité calorifique massique à pression constante	$C_p = 4\,180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

TAB. J.1 – Paramètres de l'eau utilisés pour les simulations numériques. Les valeurs présentées ici sont celles données par [21].

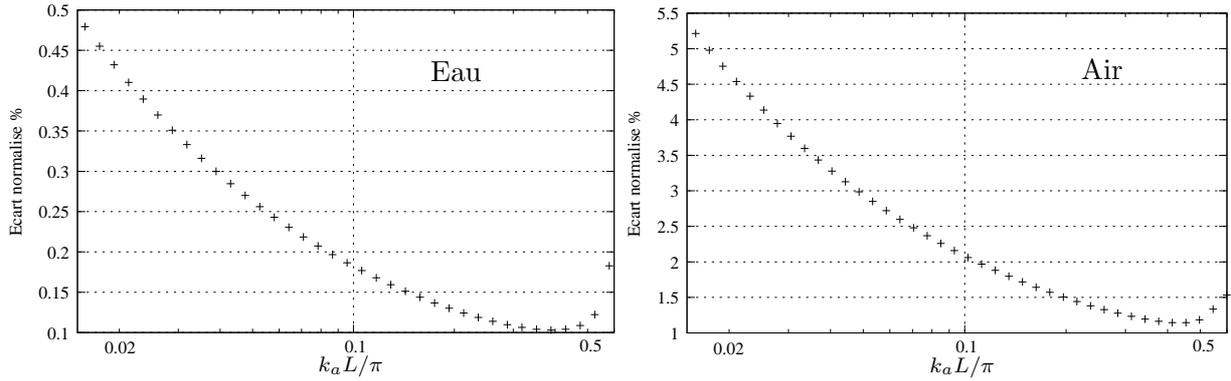


FIG. J.2 – Représentation des écarts normalisés entre les vitesses de phase calculées en prenant en compte les effets de diffusion multiple avec et sans dissipation. La figure de gauche correspond à un cristal phononique de porosité $\Phi = 0.50$ dans l'eau. Celle de droite correspond à un même cristal dans l'air.

données dans les tableaux 4.1 et J.1.

Dans le domaine de longueur d'onde considéré, les figures J.2 justifient la prédominance des effets de diffusion multiple pour le cas d'un cristal phononique dans l'eau. En effet, si les effets dissipatifs sont négligés, l'erreur commise est inférieure à 0.5% (figure de gauche). Cette erreur est dix fois plus grande dans l'air où les effets visco-thermiques sont plus importants (figure de droite). Dans les deux cas, l'augmentation des écarts aux hautes fréquences $k_a L / \pi \approx 0.5$ souligne l'importance de la considération des effets visco-thermiques se produisant au voisinage des cylindres (cf. chapitre 4).

J.2 Zone de transition pour un cristal entouré d'hélium

Les caractéristiques utilisées pour effectuer les simulations numériques dans l'hélium sont maintenant données par le tableau J.2. L'évolution de la partie réelle de la vitesse de phase en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$ avec $k_a = \omega / c_{he}$ est représentée pour les deux échantillons sur les figures J.3.

Pour le cas de l'hélium, les figures J.3 font apparaître un comportement similaire à celui observé

Température	$T_{he} = 300 \text{ K}$
Vitesse du son	$c_{he} = 1\,020 \text{ m.s}^{-1}$
Masse volumique	$\rho_{he} = 0.1625 \text{ kg.m}^{-3}$
Rapport des capacités	$\gamma = 1.67$
Diffusivité thermique	$\nu_h = 1.80 \times 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu_v = 1.22 \times 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Capacité calorifique massique à pression constante	$C_p = 5\,193 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

TAB. J.2 – Paramètres de l'hélium utilisés pour les simulations numériques. Les valeurs présentées ici sont aussi données par [21].

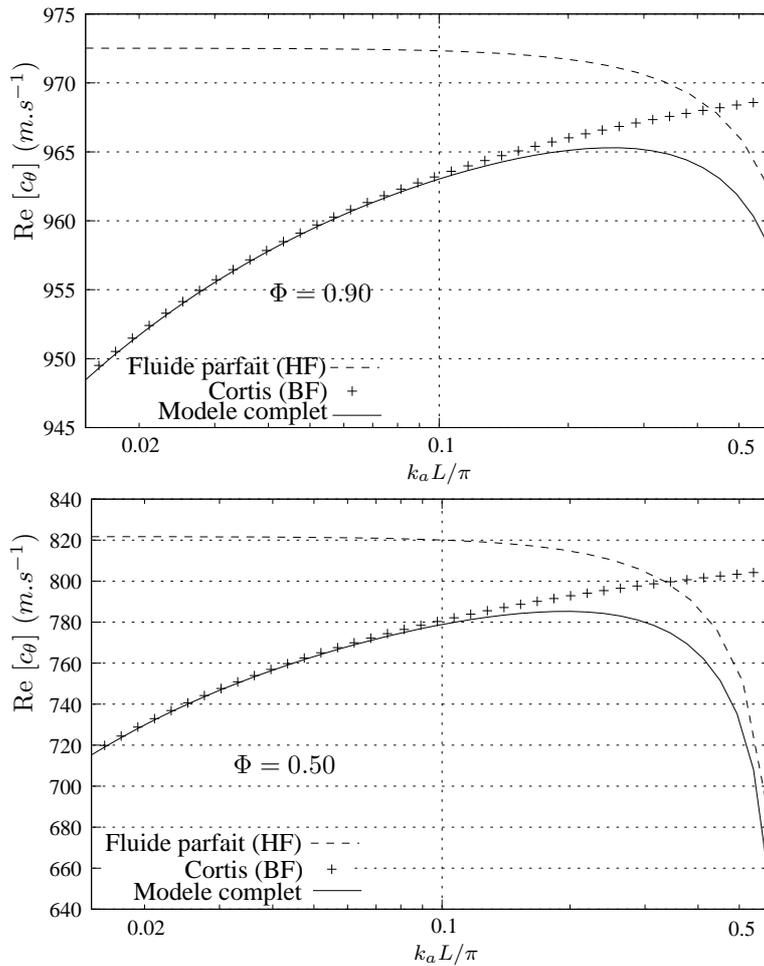


FIG. J.3 – Représentation de la partie réelle de la vitesse de phase complexe c_θ en fonction de la fréquence réduite $k_a L / \pi$ pour un cristal phononique dans l'hélium. La figure du haut est associée à un échantillon de porosité $\Phi = 0.90$ et celle du bas, à un échantillon de porosité $\Phi = 0.50$. Les courbes en traits pleins (—) correspondent aux résultats obtenus avec le modèle complet (le concept d'admittance donne les mêmes résultats). Les courbes en croix (+) sont obtenues par [17] en utilisant une méthode d'éléments finis et représentent l'impact des effets visco-thermiques. Enfin, les courbes en traits discontinus (---) représentent les effets de diffusion multiple seuls.

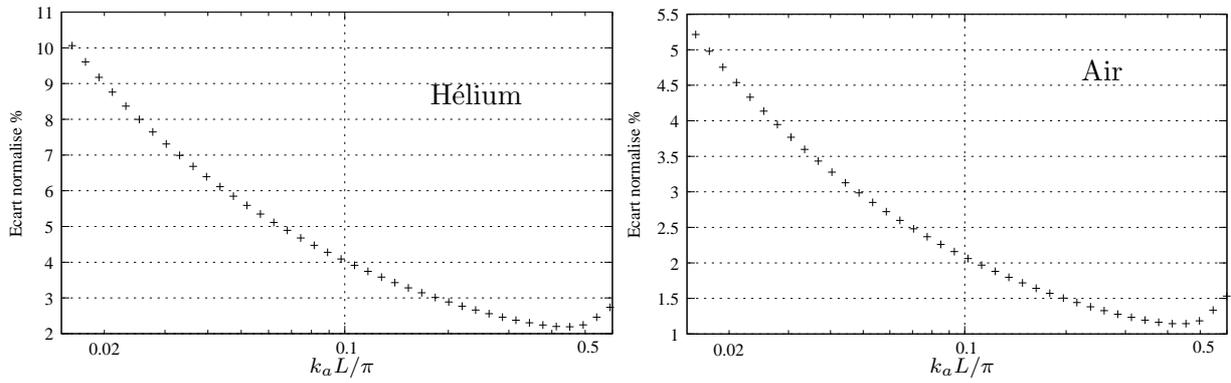


FIG. J.4 – Représentation des écarts normalisés entre les vitesses de phase calculées en prenant en compte les effets de diffusion multiple avec et sans dissipation. La figure de gauche correspond à un cristal phononique de porosité $\Phi = 0.50$ dans l'hélium. Celle de droite correspond à un même cristal dans l'air.

dans l'air. Contrairement au cas précédent (cristal phononique dans l'eau), les effets visco-thermiques dans l'hélium sont plus conséquents que dans l'air et se traduisent ici par une plus forte décroissance de la vitesse de phase aux grandes longueurs d'onde. Ce phénomène se traduit par un maximum local, caractéristique de la transition entre les deux régimes, beaucoup plus marqué pour chacun des échantillons. L'effet associé à la présence de la première bande interdite dépend exclusivement de la dimension de la longueur d'onde acoustique et se manifeste donc toujours au voisinage de $k_a L / \pi \approx 0.5$.

Les figures J.4 montrent les écarts relatifs entre les vitesses de phase calculées en prenant en compte les effets de diffusion multiple avec et sans dissipation. L'étude est réalisée pour des échantillons de porosité $\Phi = 0.50$ dans l'air et dans l'hélium. Les vitesses présentées sont normalisées par rapport aux célérités respectives c_0 et c_{he} données dans les tableaux 4.1 et J.2.

Dans le domaine de longueur d'onde considéré, les figures J.4 montrent l'importance des effets visco-thermiques dans le cas de la propagation dans l'hélium. L'erreur commise en négligeant ces effets dissipatifs est dans ce cas deux fois plus importante que dans l'air (erreur de 10% aux très grandes longueurs d'onde).

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1964.
- [2] J.D. ACHENBACH, Y.C. LU, and M. KITAHARA. 3-d reflection and transmission of sound by an array of rods. *Journal of Sound and Vibration*, 125(3) :463–476, 1988.
- [3] J.F. ALLARD. *Propagation of Sound in Porous Materials*. Elsevier Science, England, 1993.
- [4] J.R. BANAVAR and D.L. JOHNSON. Characteristic pore sizes and transport in porous media. *Physical Review B*, 35(13) :7283–7286, 1987.
- [5] L.L. BERANEK. Acoustic impedance of porous materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 13 :248–260, 1942.
- [6] S. BERGER. *Contribution à la caractérisation des milieux poreux par des méthodes acoustiques : estimation des paramètres physiques*. PhD thesis.
- [7] M.A. BIOT. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28(2) :168–178, 1956.
- [8] M.A. BIOT. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28(2) :179–191, 1956.
- [9] L. BRILLOUIN. *Wave Propagation in Periodic Structures*. McGraw-Hill, New York, 1946.
- [10] M. BRUNEAU. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.
- [11] R. BURRIDGE and J.B. KELLER. Poroelasticity equations derived from microstructure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 70 :1140–6, 1985.
- [12] F. CERVERA, L. SANCHIS, R. SÁNCHEZ-PÉREZ, C. MARTÍNEZ-SALA, R. RUBIO, F. MESEGUER, C. LÓPEZ, D. CABALLERO, and J. SÁNCHEZ-DEHESA. Refractive acoustic devices for airborne sound. *Physical Review Letters*, 88(2) :023902, 2002.
- [13] Y. CHAMPOUX and J.F. ALLARD. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *J. Appl. Phys.*, 70(4) :1975–1979, 1991.
- [14] Y. CHEN and Z. YE. Acoustic attenuation by two-dimensional arrays of rigid cylinders. *Physical Review Letters*, 87(18) :184301, 2001.
- [15] Y. CHEN and Z. YE. Theoretical analysis of acoustic stop bands in two-dimensional periodic scattering arrays. *Physical Review E*, 64 :036616, 2001.
- [16] P.G. CIARLET. *Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation*. Dunod, Paris, 1998.

- [17] A. CORTIS. *Dynamic Acoustic Parameters of Porous Media*. PhD thesis, Università degli Studi di Cagliari geboren te Iglesias (Italy), 2002.
- [18] A. CORTIS and D.M.J. SMEULDERS. On the viscous length scale of wedge-shaped porous media. *International Journal of Engineering Science*, 39 :951–962, 2001.
- [19] A. CORTIS, D.M.J. SMEULDERS, J.L. GUERMOND, and D. LAFARGE. Influence of pore roughness on high-frequency permeability. *Physics of Fluids*, 15(6) :1766–1775, 2003.
- [20] D. GARCÍAS-PABLOS, M. SIGALAS, F.R. MONTERO DE ESPINOSA, M. TORRES, M. KAFESAKI, and N. GARCÍA. Theory and experiments on elastic band gaps. *Physical Review Letters*, 84(19) :4349–4352, 2000.
- [21] P. GERHART, R.J. GROSS, and J. HOCHSTEIN. *Fundamentals of fluid mechanics*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1992.
- [22] J.W. GIBBS. Fourier series. *Nature*, 59, 1899.
- [23] S. HE, S. XIAO, L. SHEN, J. HE, and J. FU. A new finite-difference time-domain method for photonic crystals consisting of nearly-free-electron metals. *J. Phys. A : Math.Gen.*, 34 :9713–9721, 2001.
- [24] M.A. HECKL and L.S. MULHOLLAND. Some recent developments in the theory of acoustic transmission in tube bundles. *Journal of Sound and Vibration*, 179(1) :37–62, 1995.
- [25] X. HU and C.T. CHAN. Refraction of water waves by periodic cylinder arrays. *Physical Review Letters*, 95 :154501, 2005.
- [26] F. JEDRZEJEWSKI. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer, Paris, 2001.
- [27] D.L. JOHNSON, J. KOPLIK, and R. DASHEN. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid saturated porous media. *J. Fluid Mech.*, 176, 1987.
- [28] D.L. JOHNSON, J. KOPLIK, and L.M. SCHWARTZ. New pore-size parameter characterizing transport in porous media. *Physical Review Letters*, 57(20) :2564–2567, 1986.
- [29] D.L. JOHNSON, T.J. PLONA, C. SCALA, F. PASIERB, and H. KOJIMA. Tortuosity and acoustic slow waves. *Physical Review Letters*, 49(25) :1840–1844, 1982.
- [30] M. KAFESAKI and E.N. ECONOMOU. Interpretation of the band-structure results for elastic and acoustic waves by analogy with the LCAO approach. *Physical Review B*, 52(18) :13317–13331, 1995.
- [31] A. KHELIF, A. CHOUJAA, B. DJAFARI-ROUHANI, M. DWILM, S. BALLANDRAS, and V. LAUDE. Trapping and guiding of acoustic waves by defect modes in a full-band-gap ultrasonic crystal. *Physical Review B*, 68 :214301, 2003.
- [32] M.S. KUSHWAHA. Stop-bands for periodic metallic rods : Sculptures that can filter the noise. *Appl. Phys. Lett*, 70(24) :3218–3220, 1997.
- [33] M.S. KUSHWAHA and B. DJAFARI-ROUHANI. Giant sonic stop bands in two-dimensional periodic system of fluids. *Journal of Applied Physics*, 84(9) :4677–4683, 1998.
- [34] M.S. KUSHWAHA, P. HALEVI, L. DOBRZYNSKI, and B. DJAFARI-ROUHANI. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 71(13) :2022–2025, 1993.

- [35] M.S. KUSHWAHA, P. HALEVI, and G. MARTÍNEZ. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review B*, 49(4) :2313–2322, 1994.
- [36] D. LAFARGE, P. LEMARINIER, J.F. ALLARD, and V. TARNOW. Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(4) :1995–2006, 1997.
- [37] L.D. LANDAU and E.M. LIFCHITZ. *Theoretical Physics 6, Fluid Mechanics*. Pergamon, London, 1959.
- [38] P.Y. LE BAS. *Diffusion multiple par des cibles élastiques immergées. Propagation d’ondes cohérentes et interactions résonantes*. PhD thesis.
- [39] C.M. LINTON. Schlömilch series that arise in diffraction theory and their efficient computation. *J. Phys. A. : Math. Gen.*, 39 :3325–3339, 2006.
- [40] C.M. LINTON and D.C. BARNETT. Efficient computation of Schlömilch-type series. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 460 :1177–1191, 2004.
- [41] C.M. LINTON and I. THOMPSON. Resonant effects in scattering by periodic arrays. *Wave motion*, 44 :165–175, 2007.
- [42] R.D. MAEDE, A.M. RAPPE, K.D. BROMMER, and J.D. JOANNOPOULOS. Accurate theoretical analysis of photonic band-gap materials. *Physical Review Letters*, 48(11) :8434–8437, 1993.
- [43] R.C. MCPHEDRAN, N.A. NICOROVICI, and L.C. BOTTEN. Schlömilch series and grating sums. *J. Phys. A. : Math. Gen.*, 38 :8353–8366, 2005.
- [44] J. MEI, Z. LIU, J. SHI, and D. TIAN. Theory for elastic wave scattering by a two-dimensional periodical array of cylinders : An ideal approach for band-structure calculations. *Physical Review B*, 67 :245107, 2003.
- [45] Y. MERLE. *Étude de la dispersion électromagnétique dans les matériaux périodiques diélectriques bidimensionnels*. PhD thesis, Université de Limoges (France), 2003.
- [46] P.M. MORSE and K.U. INGARD. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [47] L.S. MULHOLLAND and M.A. HECKL. Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle. *Journal of Sound and Vibration*, 176(3) :377–398, 1994.
- [48] J.A. PEREDA, L.A. VIELVA, A. VEGAS, and A. PRIETO. The finite difference time-domain (FDTD) method applied to the computation of resonant frequencies and quality factors of open dielectric resonators. *J. Phys. III France*, 3 :539–551, 1993.
- [49] W.T. PERRINS, D.R. MCKENZIE, and R.C. MCPHEDRAN. Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 369 :207–225, 1979.
- [50] M.A. PETER, M.H. MEYLAN, and C.M. LINTON. Water-wave scattering by a periodic array of arbitrary bodies. *J. Fluid Mech.*, 548 :237–256, 2006.
- [51] A.D. PIERCE. *Acoustics, An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1981.
- [52] C.G. POULTON, A.B. MOVCHAN, R.C. MCPHEDRAN, N.A. NICOROVICI, and Y.A. ANTIPOV. Eigenvalue problems for doubly periodic elastic structures and phononic band gaps. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 456 :2543–2559, 2000.
- [53] I.E. PSAROBAS. Viscoelastic response of sonic band-gap materials. *Physical Review B*, 64, 2001.

- [54] S. ROBERT. *Propagation d'ondes cohérentes et résonances dans des milieux élastiques présentant des inclusions cylindriques périodiquement ou aléatoirement distribuées*. PhD thesis.
- [55] S. ROBERT, H. FRANKLIN, and J.M. CONOIR. Elastic resonances of a periodic array of fluid-filled cylindrical cavities embedded in an elastic matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 289 :109–129, 2006.
- [56] J.V. SÁNCHEZ-PÉREZ, D. CABALLERO, R. MÁRTINEZ-SALA, C. RUBIO, J. SÁNCHEZ-DEHESA, F. MESEGUER, J. LLINARES, and F. GÁLVEZ. Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders. *Physical Review Letters*, 80(24) :5325–5328, 1998.
- [57] M.M. SIGALAS and N. GARCÍA. Theoretical study of three dimensional elastic band gaps with the finite-difference time-domain method. *Journal of Applied Physics*, 87(6) :3122–3125, 2000.
- [58] R. SPRIK and G.H. WEGDAM. Acoustic band gaps in composites of solids and viscous liquids. *Solid State Communications*, 106(2) :77–81, 1998.
- [59] A. TAFLOVE. *The Finite-Difference Time-Domain method*. Artech House, Boston, 1998.
- [60] Y. TANAKA, Y. TOMOYASU, and S. TAMURA. Band structure of acoustic waves in phononic lattices : Two-dimensional composites with large acoustic mismatch. *Physical Review B*, 62(11) :7387–7392, 2000.
- [61] D. TORRENT, A. HAKANSSON, F. CERVERA, and J. SÁNCHEZ-DEHESA. Homogenization of two-dimensional clusters of rigid rods in air. *Physical Review Letters*, 96 :204302, 2006.
- [62] V. TOURNAT, V. PAGNEUX, D. LAFARGE, and L. JAOUEN. Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media. *Physical Review E*, 70 :026609, 2004.
- [63] V. TWERSKY. Elementary function representations of Schlömilch series. *Arch. Ration. Mech. Analysis*, 8 :323–332, 1961.
- [64] V. TWERSKY. On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders. *IRE Transactions on antennas and propagation*, 4 :737–765, 1963.
- [65] F. VAN DER BIEST. *Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore dans des milieux périodiques et désordonnés*. PhD thesis.
- [66] J.O. VASSEUR, P.A. DEYMIER, B. CHENNI, B. DJAFARI-ROUHANI, L. DOBRZYNSKI, and D. PREVOST. Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. *Physical Review Letters*, 86(14) :3012–3015, 2001.
- [67] J.O. VASSEUR, P.A. DEYMIER, G. FRANTZISKONIS, G. HONG, B. DJAFARI-ROUHANI, and L. DOBRZYNSKI. Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media. *J. Phys. : Condens. Matter*, 10 :6051–6064, 1998.
- [68] J.O. VASSEUR, P.A. DEYMIER, A. KHELIF, Ph. LAMBIN, B. DJAFARI-ROUHANI, A. AKJOUJ, L. DOBRZYNSKI, N. FETTOUHI, and J. ZEMMOURI. Phononic crystal with low filling fraction and absolute acoustic band gap in the audible frequency range : A theoretical and experimental study. *Physical Review E*, 65 :056608, 2002.
- [69] J.O. VASSEUR, B. DJAFARI-ROUHANI, L. DOBRZYNSKI, M.S. KUSHWAHA, and P. HALEVI. Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials : the carbon/epoxy composite and some metallic systems. *J. Phys. : Condens. Matter*, 6 :8759–8770, 1994.

-
- [70] A.J. WARD. *Transfer Matrices, Photonic Bands and Related Quantities*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine of London (England), 1996.
- [71] E. YABLONOVITCH. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters*, 58(20) :2059–2062, 1987.
- [72] E. YABLONOVITCH. Photonic band structure : The face-centered-cubic case. *Physical Review Letters*, 63(18) :1950–1953, 1989.
- [73] S. YANG, J.H. PAGE, Z. LIU, M.L. COWAN, C.T. CHAN, and P. SHENG. Ultrasound tunneling through 3d phononic crystals. *Physical Review Letters*, 88(10) :104301, 2002.