Étude de quelques modèles de séries chronologiques binaires

Moussedek Bousseboua

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

«mathématiques appliquées»

par

Moussedek BOUSSEBOUA

ETUDE DE QUELQUES MODELES DE SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES

Thèse soutenue le 10 février 1983 devant la commission d'examen

B. VAN CUTSEM	Président
F. BRODEAU	Examinateurs
G. GREGOIRE	
A. LE BRETON	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

année scolaire 1980-1981

Président de l'Université : M. J.J. PAYAN

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

Mlle	AGNIUS DELORD Claudine	Biophysique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Clinique dermatologie
	AMBROISE THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	Physique nucléaire
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique pédiatrie et puériculture
	BELORISKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
M.	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale & traumatologie
	BILLET Jean	Géographie
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET EYMARD Joseph	Clinique Hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Jane-Marie	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie

.../...

MM.	BUTEL Jean	Orthopédie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologie et hydrologie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHARACHON Robert	Clinique O.R.L.
	CHATEAU Robert	Clinique neurologique
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Chimie analytique et bromotologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRABBE Pierre	C.E.R.M.O.
	DAUMAS Max	Géographie
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DELORMAS Pierre	Pneumo-phtisiologique
	DENIS Bernard	Clinique cardiologique
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Electrochimie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée IUT 1
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Jean-Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electro-radiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	JEANNIN Charles	Pharmacie galénique
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique
	KAHANE Josette	Physique
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	LACAZE Albert	Hermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie cellulaire
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique

Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie thoracique
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutiques
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LE NOC Pierre	Bactériologie virologie
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LOUP Jean	Géographie
	LUU DUC Cuong	Chimie générale et minérale
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
Mlle	MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognostie
MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	NEGRE Robert	Mécanique IUT 1
	MOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OMONT Alain	Astrophysique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	PERRIER Guy	Géophysique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	RACHAIL Michel	Clinique médicale B
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
M.	REVOL Michel	Urologie
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
MM.	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
Mme	SEIGLE MURANDI Françoise	Botanique et crytogamie
MM.	SENGEL Philippe	Biologie animale
	SIBILLE Robert	Construction mécanique IUT 1
	SOUTIF Michel	Physique
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

.../...

MM.	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
	VERAIN André	Biophysique
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

MM.	ARNAUD Yves	Chimie IUT 1
	AURIAULT Jean-Louis	Mécanique IUT 1
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BOITET Christian	Mathématiques appliquées
	BOUTHINON Michel	E.E.A. IUT 1
	BRUGEL Lucien	Energétique IUT 1
	BUISSON Roger	Physique IUT 1
	CASTAING Bernard	Physique
	CHARDON Michel	Géographie
	CHEHIKIAN Alain	E.E.A. IUT 1
	COHEN Henri	Mathématiques pures
	COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTE René	Physique IUT 1
	CYROT Michel	Physique du solide
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
	GASPARD François	Physique
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Maurice	Géologie
	GIGNOUX Claude	Sciences nucléaires
	GLENAT René	Chimie organique
	GOSSE Jean-Pierre	E.E.A. IUT 1
	GROS Yves	Physique IUT 1
	GUITTON Jacques	Chimie
	HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
	HERBIN Jacky	Géographie
	HICTER Pierre	Chimie
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
	KERCKOVE Claude	Géologie

MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique IUT 1
	KUPKA Yvon	Mathématiques pures
	LUNA Domingo	Mathématiques pures
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
Mme	MINIER Colette	Physique IUT 1
MM.	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
	OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
	PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie minéralogie
	PERRIN Claude	Sciences nucléaires
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
	ROBERT Gilles	Mathématiques pures
	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	ROSSI André	Physiologie végétale
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
	SARROT REYNAUD Jean	Géologie
	SAXOD Raymond	Biologie animale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	STUTZ Pierre	Mécanique
	VIALON Pierre	Géologie
	VIDAL Michel	Chimie organique
	VIVIAN Robert	Géographie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT PHARMACIE

MM.	ROCHAS Jacques	Hygiène et hydrologie
	DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie

PROFESSEURS SANS CHAIRE (médecine)

M.	BARGE Michel	Neuro-chirurgie

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie (hormonologie)
	CHAMPETIER Jean	Anatomie
	COLOMB Maurice	Biochimie
	COULOMB Max	Radiologie
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GROULADE Joseph	Biochimie A
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Gérontologie
	JALBERT Pierre	Histologie
	MAGNIN Robert	Hygiène
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VROUSOS Constantin	Radiothérapie

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES (médecine)

MM.	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BENABID Alim Louis	Médecine et chirurgie
	BERNARD Pierre	Gynécologie obstétrique
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DEBRU Jean-Luc	Médecine interne
	DYON Jean-François	Chirurgie infantile
	FAURE Claude	Anatomie et organogènèse
	FAURE Gilbert	Urologie
	FLOYRAC Roger	Biophysique
	FOURNET Jacques	Hépato-gastro-entérologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIRARDET Pierre	Anesthésiologie
	GUIDICELLI Henri	Chirurgie générale
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique (réanimation)
	JUNIEN-LAVILLAUROY Claude	Clinique O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie biologique
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MASSOT Christian	Médecine interne
	MOUILLON Michel	Ophtalmologie

.../...

MM.	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
	SCHAEFER René	Cancérologie
	SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-virologie
	SOTTO Jean-Jacques	Hématologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie-pathologique

Je remercie vivement Messieurs VAN CUTSEM et BRODEAU d'avoir accepté de critiquer la rédaction de ce travail et de présider le Jury ou d'y participer.

J'ai plaisir à reconnaître l'aide précieuse que m'a apportée Monsieur GREGOIRE par ses nombreux conseils et l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail. Je l'en remercie tout particulièrement.

Je suis très reconnaissant à Monsieur LE BRETON de m'avoir si généreusement aidé et encouragé au cours de l'élaboration de ce travail. Je lui exprime ici ma profonde gratitude, et je rends hommage à ses qualités pédagogiques et humaines.

Madame STRANO a assuré avec une grande compétence la dactylographie du manuscrit. Les membres du service de reprographie du Laboratoire I.M.A.G. en ont réalisé un tirage de qualité. Je les en remercie beaucoup.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Partant du problème de la modélisation du phénomène climatologique de la succession des jours secs et humides dans une station de mesures, nous avons été naturellement conduits à étudier diverses classes de modèles de séries chronologiques binaires correspondant à différentes hypothèses de dépendance dans une suite de variables aléatoires de Bernoulli. Dans le but de faciliter le choix d'une classe de modèles pour les applications, nous nous sommes efforcés de mener une étude en parallèle des différentes classes qui, d'une part, mette en évidence les caractéristiques de chacune et, d'autre part, rende aisée une comparaison de leurs aptitudes respectives à représenter des données climatologiques, en particulier du point de vue de la persistance de la sécheresse ou de la pluviosité.

Après un premier chapitre où nous présentons le cadre d'étude que nous avons retenu pour les modèles de séries chronologiques binaires, notre travail comprend deux parties. La première, constituée des chapitres II et III, est consacrée à deux classes de modèles qui ont été assez abondamment utilisés dans la littérature concernant la modélisation des séquences climatologiques : d'abord les modèles markoviens (cf. par exemple Gabriel et Neuman (1962) et Klotz (1973)) et ensuite les modèles de processus de renouvellement alterné (cf. par exemple Green (1964) et Buishand (1977)) en particulier ceux basés sur des lois de probabilité binomiales négatives. Dans la deuxième partie, qui comprend les chapitres IV et V, nous étudions des classes de modèles introduits récemment par Jacobs et Lewis (1978), qui sont les analogues pour les séries chronologiques binaires des modèles linéaires classiques autorégressifs, moyennes mobiles et mixtes pour les processus à valeurs réelles.

CHAPITRE I

UN CADRE D'ETUDE POUR LES SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES

Dans la suite nous appelons série chronologique binaire tout processus stochastique $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ basé sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, X_t est une variable aléatoire (binaire) à valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$. De telles séries chronologiques interviennent de manière naturelle lorsqu'on s'intéresse à décrire le dépassement ou non d'un certain niveau de valeur fixé u par les variables d'état d'un processus aléatoire réel $(U_t ; t \in \mathbb{N})$: on est amené à définir par exemple :

$$(1) \qquad X_t = \begin{cases} 1 & \text{si } U_t < u \\ 0 & \text{si } U_t \geq u \end{cases}$$

Une situation typique, à laquelle nous nous référons souvent dans ce qui suit, est celle où on envisage pour une station climatologique donnée, de décrire la succession des jours selon leur caractère sec ou humide : si U_t représente la quantité de précipitation relevée au t-ème jour, et si est déclaré jour sec (resp. humide), un jour où il a été recueilli moins (resp.plus) de u mm de pluie, alors la variable X_t définie par (1) décrit l'état sec ou humide du t-ème jour.

Il est clair que le choix du codage en 0 et 1 de l'espace des valeurs du processus $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est arbitraire ; toutefois il faut noter qu'il est particulièrement commode en ce qu'il conduit à des expressions simples de certaines variables aléatoires fonctions de la série chronologique et rend plus aisé le calcul des probabilités correspondant.

Remarquons que nous ne ferons pas toujours explicitement la distinction entre le processus stochastique binaire $(\Omega, \mathcal{A}, P, \{X_t ; t \in \mathbb{N}\})$ et le processus canonique qui lui correspond défini sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, où $\mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est la tribu sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ engendrée par les cylindres à base finie ; en particulier X_t désignera indifféremment la variable aléatoire "état du processus à l'instant t " et la t-ème application coordonnée du processus canonique.

I. QUELQUES ELEMENTS ALEATOIRES DEFINIS SUR $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

La description des propriétés probabilistes dans une classe de modèles de séries chronologiques binaires et l'analyse statistique correspondante mettent en jeu un certain nombre d'éléments aléatoires fonctions du processus considéré que, selon la remarque précédente, nous assimilons à des fonction mesurables définies sur l'espace des trajectoires $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Lorsqu'une telle fonction T ne dépend que d'un nombre fini de composantes nous choisissons de l'appeler statistique dans la mesure où, si n est l'indice le plus élevé des composantes dont elle dépend, T modélise une mesure dont dispose un observateur qui observe une trajectoire du processus de l'instant 0 jusqu'à l'instant n .

I.1. Statistiques de comptage.

Etant donnée une suite infinie $(x_o, x_1, \ldots, x_t, \ldots\ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on appelle séquence de 1 (resp.0) de longueur $k \geq 1$ commencant à l'instant $t \geq 1$, une suite $(t, \ldots, t+k-1)$ d'instants telle que $x_{t-1} = x_{t+k} = 0$ (resp.1) et $x_{t+i} = 1$ (resp.0) pour $i = 0, \ldots, k-1$. Ainsi si $(x_o, \ldots, x_t, \ldots)$ représente les états successifs des jours dans une station climatologique à partir d'un jour initial 0 , une séquence de 1 (resp.0) commençant au jour t est une séquence sèche (resp. humide) au sens où tous ses jours sont secs (resp. humides) et où elle est immédiatement précédée et suivie par un jour humide (resp. sec).

On définit alors différentes statistiques, en particulier celles comptant les nombres de séquences de certains types entre les instants 0 et n : si on pose

$$S_n^1 = \sum_{t=0}^{n} X_t \quad ; \quad S_n^o = (n+1) - S_n^1 ,$$

qui comptent respectivement le nombre de jours secs et humides sur la période $\{0,\ldots,n\}$, et

$$U_n = \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} \quad ; \quad V_n = \sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-2} \; ; \quad W_n = \sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1} X_{t-2} ,$$

il est facile de voir qu'on peut écrire respectivement

$$Y_n^o = \max(S_n^1 - U_n - 1 , 0)$$

le nombre de séquences humides (entre le premier jour sec et le dernier jour sec) dans la période $\{0,\ldots,n\}$, et

$$Z_n^o = V_n - W_n$$

le nombre de séquences humides réduites à un jour (entre le premier jour sec et le dernier jour sec) dans la période $\{0,\ldots,n\}$.
De même si on pose

$$H_n = X_o + X_n \quad ; \quad K_n = X_1 + X_{n-1} \quad ; \quad L_n = X_o X_1 + X_{n-1} X_n ,$$

la statistique $H_n - L_n$ (resp. $K_n - L_n$) compte parmi les deux jours extrêmes 0 et n ceux qui sont à la fois secs (resp. humides) et voisins d'un jour humide (resp. sec) de la période $\{0,\ldots,n\}$.

I.2. Temps d'entrée et de séjour.

Nous définissons, ici des éléments aléatoires sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui contrairement à ceux envisagés précédemment "dépendent de toute la trajectoire."

Nous appelons T_n^o (resp. T_n^1) la date de la n-ème entrée dans l'état 0 (resp. 1) et D_n^o (resp. D_n^1) la durée du n-ème séjour dans l'état 0 (resp. 1). De façon précise, les suites $(T_n^o \; ; \; n \geq 1)$ et $(D_n^o \; ; \; n \geq 1)$ sont définies par :

$$T_1^o = \text{Inf}\,\{t \geq 0 \; : \; X_t = 0\} \; ;$$

$$D_1^o = \text{Inf}\,\{t > T_1^o \; : \; X_t = 1\} - T_1^o \; ;$$

$$T_n^o = \text{Inf}\,\{t > T_{n-1}^o + D_{n-1}^o \; : \; X_t = 0\} \; , \; n > 1 \; ;$$

$$D_n^o = \text{Inf}\,\{t > T_n^o \; : \; X_t = 1\} - T_n^o \; , \; n > 1 \; ;$$

les suites $(T_n^1 \; ; \; n \geq 1)$ et $(D_n^1 \; ; \; n \geq 1)$ se définissant de manière analogue.

Remarquons que dans le contexte climatologique, pour $n \geq 2$, la suite d'instants $T_n^i, \ldots, T_n^i + D_n^i - 1$ est une séquence sèche (resp. humide), de longueur D_n^i si $i = 1$ (resp. 0) . Remarquons aussi que sur l'ensemble $[X_o = i]$, $i \in \{0,1\}$, on a

$$0 = T_1^i < T_1^{1-i} < T_2^i < T_2^{1-i} < \ldots < T_n^i < T_n^{1-i} < T_{n+1}^i < \ldots$$

$$D_n^{1-i} = T_n^i - T_{n-1}^{1-i} \quad \text{et} \quad T_n^{1-i} = T_n^i + D_n^i \; , \; n \geq 1 \; .$$

II. STRUCTURE PROBABILISTE D'UN MODELE DE SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES.

A un cadre d'hypothèses a priori sur la liaison entre les états successifs du phénomène étudié correspond une classe de modèles de séries chronologiques binaires qui rendent compte de ces hypothèses, c'est-à-dire une famille de lois de probabilité sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ telles que la nature de la dépendance stochastique correspondant à ces lois dans la suite $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ de variables aléatoires de Bernoulli en soit la traduction probabiliste. Dans les chapitres suivants nous nous efforçons de mettre en évidence les hypothèses de base pour les différents modèles et de préciser les propriétés probabilistes qui en découlent, en particulier en ce qui concerne la persistance d'un type d'état.

II.1. Lois marginales de dimensions finies.

Une loi de probabilité P sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ est complètement déterminée par la donnée de la famille des lois marginales de dimensions finies $(P_n ; n \geq 0)$ où P_n est la loi sur $(\{0,1\}^{n+1}, P(\{0,1\}^{n+1}))$ du vecteur aléatoire $(X_o, \ldots, X_n)$.

Remarquons d'abord que l'étude des lois marginales uni et bidimensionnelles coïncide avec celle de la structure du second-ordre du processus : en effet on a

$$P[X_t = 1] = E(X_t) \quad ; \quad P[X_t = 0] = 1 - E(X_t) \ , \ t \in \mathbb{N}$$

et

$$P[X_t = 1, X_s = 1] = E(X_t X_s) \ ; \ P[X_t = 1, X_s = 0] = E(X_t) - E(X_t X_s) \ ;$$

$$P[X_t = 0, X_s = 0] = 1 - E(X_t) - E(X_s) + E(X_t X_s) \ ; \ (s,t) \in \mathbb{N}^2 \ .$$

En particulier les variables aléatoires X_t et X_s sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées. On a

$$C(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s,X_t) = P[X_s=1,X_t=1]-P[X_s=1].P[X_t=1]\ ;\ (s,t)\in \mathbb{N}^2 .$$

Lorsque le processus $(X_t\ ; t\geq 0)$ est stationnaire (auquel cas on dira que P est stationnaire), désignant par p la probabilité

$$P[X_t=1] = P[X_o=1] = p \quad ;\ t\in \mathbb{N} ,$$

la fonction de covariance

$$C(h) = \mathrm{Cov}(X_t,X_{t+h}) = \mathrm{Cov}(X_o,X_h) \quad ;\quad h\in \mathbb{N}$$

s'écrit sous la forme

$$(2)\ C(h) = p\{P[X_h=1/X_o=1]-p\}\ ;\ h\in \mathbb{N} .$$

On peut évidemment écrire pour tout $t\in \mathbb{N}$ et $n\geq 1$:

$$P[X_t=x_o,\ldots,X_{t+n}=x_n] = P[X_t=x_o] . \prod_{k=1}^{n} P[X_{t+k}=x_k/X_t=x_o,\ldots,X_{t+k-1}=x_{k-}$$

Lorsque P est stationnaire, pour $n\geq 1$, la probabilité de passage à l'état x_n sachant que le processus est passé par les états $x_o,\ldots,x_{n-1}$ ne dépend pas de l'instant où ce passage est envisagé, i.e.

$$P[X_{t+n}=X_n/X_t=x_o,\ldots,X_{t+n-1}=x_{n-1}] = P[X_n=x_n/X_o=x_o,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}]$$

et on désigne par $P_{x_o\ldots x_n}$ cette probabilité pour tout $(x_o,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n+1}$.

Il est alors facile, à partir de (2), de voir qu'on a, pour tout $t\in \mathbb{N}$ et $n\geq 1$:

$$(3)\quad P[X_t = x_o, \ldots, X_{t+n} = x_n] = p^{x_o}(1-p)^{1-x_o} \prod_{t=1}^{n} \prod_{(y_o,\ldots,y_t)\in\{0,1\}^{t+1}} p_{y_o \ldots y_t}^{\prod_{\ell=0}^{t} I(x_\ell, y_\ell)}$$

avec

$$I(x_\ell, y_\ell) = \begin{cases} x_\ell & \text{si} \quad y_\ell = 1 \\ 1-x_\ell & \text{si} \quad y_\ell = 0 \end{cases} \quad ; (x_o, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n+1} .$$

En d'autres termes la fonction de vraisemblance $P_n\{(x_o,\ldots,x_n)\}$ correspondant à $(n+1)$ observations successives dans une série chronologique binaire stationnaire est donnée par (3).

L'expression (3) de la fonction de vraisemblance est trop compliquée pour être utilisée. Son calcul dans les différents modèles que nous examinons conduit souvent à une forme qui met en évidence certaines statistiques exhaustives simples et qui est donc plus adaptée au calcul des probabilités et au traitement statistique. Notons toutefois que le résultat suivant fournit une base pour l'approximation d'une telle fonction de vraisemblance par celle d'une chaîne de Markov :

<u>Théorème 1</u>. (cf. Kedem (1979))

Pour toute série chronologique binaire stationnaire $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$ il existe une suite $((X_t^r \,;\, t \in \mathbb{N}) \,;\, r = 1,2,\ldots)$ de chaînes de Markov binaires qui converge en loi vers $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$ de façon telle que pour tout $r = 1,2,\ldots$ $(X_t^r \,;\, t \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'ordre r stationnaire dont les lois marginales r-dimensionnelles coïncident avec celles de $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$.

II.2. Lois de statistiques de comptage.

Nous nous intéressons à la loi de probabilité de certaines statistiques de comptage décrites au paragraphe I.1. Nous donnons ici un résultat général pour la statistique S_n^1.

Définissant la suite des variables $(G_n \, ; \, n \geq 1)$ par :

$$G_1 = \operatorname{Inf} \{ t > 0 : X_t = 1 \}$$

$$G_n = \operatorname{Inf} \{ t > G_{n-1} : X_t = 1 \} \, , \quad n \geq 2 \, ,$$

G_n est le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ jour sec après le jour O et on a :

Théorème 2. (cf. Kedem (1979))

Etant donnée une série chronologique binaire stationnaire $(X_t \, ; t \in \mathbb{N})$, la loi de la statistique S_n^1 vérifie :

$$P[S_n^1 = k] = \begin{cases} 1-(n+1)p + p \, . \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (n+1-r) \, . \, \nu(1,r) & \text{si } k = 0 \\ (n+1)p + p \, . \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (n+1-r) \, . \, [\nu(2,r) - 2 \, . \, \nu(1,r)] & \text{si } k = 1 \\ p \, . \displaystyle\sum_{r=k-1}^{n} (n+1-r) \, . \, [\nu(k+1,r) - 2\nu(k,r) + \nu(k-1,r)] & \text{si } 2 \leq k \leq n+1 \end{cases}$$

où

$$\nu(k,r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < k \\ P[G_k = r / X_o = 1] & \text{si } r = k, k+1, \ldots \end{cases}$$

Notons que lorsque les variables X_t sont indépendantes, $(\nu(k,r), r \geq k)$ est la distribution binomiale négative de paramètres k et p, i.e

$$\nu(k,r) = C_{r-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{r-k} \quad ; \; r \geq k \; .$$

Nous cherchons, dans les cas particuliers qui nous concernent, à exprimer la loi de S_n^1 sous une forme aussi explicite que possible et aussi à écrire des algorithmes permettant son calcul numérique.

Remarquons que l'espérance et la variance de S_n^1 s'écrivent respectivement

$$E(S_n^1) = (n+1)\,p \quad ; \quad \operatorname{var}(S_n^1) = (n+1)\,C(0) + 2 \sum_{h=1}^{n} (n+1-h)\,C(h)$$

où $(C(h)\,;\, h \geq 0)$ est la fonction de covariance donnée par (2).

II.3. Lois des temps de séjour et Persistance d'un type d'état.

Lorsque la série chronologique binaire est stationnaire, pour $i \in \{0,1\}$, on définit la persistance au n-ème jour de l'état i (dans une séquence de i) comme étant la probabilité que le séjour dans l'état i dure strictement plus de n jours, sachant qu'il a déjà duré n jours. On la note

$$q_n^i = P(X_{t+n+1} = i / X_t = 1-i, X_{t+1} = i, \ldots, X_{t+n} = i) \;;\; n \geq 1 \;;\; t \geq 0 \; .$$

Avec la notation introduite au paragraphe II.2 précédent on a donc

$$q_n^i = P_{x_0 \ldots x_{n+1}} \qquad \text{pour } x_0 = 1-i \;,\; x_1 = \ldots = x_{n+1} = i \; .$$

On a évidemment

$$q_n^i = 1 - \frac{P[X_{t+n+1} = 1-i\ ,\ X_{t+n} = i, \ldots, X_{t+1} = i\ ,\ X_t = 1-i]}{P[X_{t+n} = i, \ldots, X_{t+1} = i\ ,\ X_t = 1-i\ ]}$$

et si ρ_n^i désigne pour $n \geq 1$, $t \geq 0$ la probabilité

$$\rho_n^i = P[X_{t+n+1} = 1-i\ ,\ X_{t+n} = i, \ldots, X_{t+1} = i,\ X_t = 1-i\ ]$$

qui, en termes des temps d'entrée et de séjour définis au paragraphe I.2, peut s'écrire :

$$\rho_n^i = P\{ \bigcup_{k \geq 1} [T_k^i = t+1\ ,\ D_k^i = n] \}\ ;\quad n \geq 1\ ,\ t \geq 0$$

on a

$$q_n^i = 1 - \frac{\rho_n^i}{\sum_{k \geq n} \rho_k^i}\ ;\quad n \geq 1\ .$$

On a aussi

$$(3)\quad q_n^i = 1 - \frac{p_n^i}{\sum_{k \geq n} p_k^i}\ ;\quad n \geq 1$$

où

$$(3')\quad P_n^i = P[X_{t+n+1} = 1-i\ ,\ X_{t+n} = i, \ldots, X_{t+1} = i / X_t = 1-i, X_{t+1} = i]$$

$$= P(D_1^i = n / T_1^i = 1)\ ,\quad n \geq 1\ .$$

$(p_n^i\ ;\ n \geq 1)$ est la "loi de la durée d'une séquence de i " et est appelée loi des temps de séjour dans l'état i .

Les suites $(q_n^i\ ;\ n \geq 1)$ de persistances sont des caractéristiques importantes d'un modèle, nous étudions leur comportement (monotonie ou non, convergence lorsque n tend vers l'infini) pour chaque classe de modèles.

Remarquons que si H_i est la fonction de répartition de la loi $(p_n^i\ ;\ n \geq 1)$, alors la persistance au n-ème jour s'écrit

$$q_n^i = \frac{1 - H_i(n+1)}{1 - H_i(n)} .$$

Si la persistance est croissante i.e $q_{n+1}^i \geq q_n^i$, $n \geq 1$ (resp. décroissante), on a :

$$\frac{1 - H_i(n+1)}{1 - H_i(n)} \leq \frac{1 - H_i(n+2)}{1 - H_i(n+1)} \quad \left(\text{resp. } \frac{1 - H_i(n+1)}{1 - H_i(n)} \geq \frac{1 - H_i(n+2)}{1 - H_i(n+1)} \right)$$

et l'ensemble des points $\{ n , (1 - H_i(n))\ ;\ n \geq 1 \}$ représenté sur papier semi-logarithmique a donc une courbure positive (resp. négative).

III. ETUDE STATISTIQUE D'UNE CLASSE DE MODELES DE SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES.

Remarquons que dans les applications on cherche souvent à ajuster un modèle de séries chronologiques binaires à des données climatologiques concernant une période $\{0,\ldots,T\}$ (mois, ensemble de mois,...) de l'année pour plusieurs années consécutives. Si on fait l'hypothèse que pour N années d'observation, le phénomène se reproduit, sur cette période, d'une année à l'autre, dans des conditions d'homogénéïté et d'indépendance, on dispose de données $((x_o^i,\ldots,x_T^i)\ ;\ i=1,N)$ dont l'étude s'inscrit dans le cadre de la statistique classique sur un échantillon indépendant du vecteur aléatoire $(X_o,\ldots,X_T)$. Nous nous plaçons ici plutôt dans la perspective où à partir des observations faites pour plusieurs années, on construit une suite $(x_o,\ldots,x_n)$ dont on admet qu'elle est l'observation d'une trajectoire d'une série chronologique obéissant sur une longue période aux "règles" valables pour le phénomène sur la période $\{0,\ldots,T\}$.
Un procédé d'usage courant (qui se justifie pleinement dans le cas d'hypothèses de renouvellement) pour construire une telle suite consiste à extraire de toutes les données concernant l'ensemble des années, les séquences climatologiques sèches ou humides débutant dans la période considérée et à les mettre bout à bout. L'étude des données relève alors de l'analyse des séries chronologiques. En pratique, le plus souvent, le modélisateur n'a pas une idée précise de la nature de la liaison entre les états successifs du phénomène adaptée à la description des données qu'il veut modéliser.
Après une phase d'analyse descriptive (où en particulier, il examine les analogues empiriques des persistances) il choisit une classe de modèles dont il pense qu'elle est suffisamment riche pour contenir un bon descripteur du phénomène. Il envisage alors de rechercher au sein de cette classe un modèle qui réalise la meilleure adéquation à ses données et est donc confronté à un problème statistique de nature inférentielle.

Chacune des classes de modèles que nous envisageons plus loin est paramétrique au sens que la famille des lois de probabilités sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui lui est associée peut être mise en correspondance biunivoque avec un ensemble

Θ de valeurs d'un paramètre θ , Θ étant contenu dans un certain espace de dimension finie du type $\mathbb{R}^k$. Nous envisageons, suivant le point de vue précisé précédemment, le problème de l'estimation du paramètre θ ou de certaines fonctions de ce paramètre au vu de l'observation d'une trajectoire de la série chronologique. Selon le cas nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moindres carrés où la méthode des moments pour construire des estimateurs dont nous étudions les propriétés, notamment de convergence et de normalité asymptotique. Nous donnons ici un résultat général concernant le problème d'estimation de la probabilité $p = P[X_t = 1]$, lorsque la série chronologique est supposée stationnaire. Si la série chronologique est φ-mélangeante au sens que : il existe une application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$ et pour tous $k, m \geq 0$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{P}(\{0,1\}^{k+1})$ et $B \in \mathcal{P}(\{0,1\}^{m+1})$:

$$|P[(X_{n+k},\ldots\ldots,X_{n+m+k}) \in B/(X_o,\ldots,X_k) \in A] - P[(X_{n+k},\ldots,X_{n+k+m}) \in B]| \leq \varphi(n),$$

on est assuré de la convergence presque sûre et de la normalité asymptotique de l'estimateur sans biais $\dfrac{S_n^1}{n+1}$ de p :

<u>Théorème 3</u>. (Ibragimov-Linnik (1971))

Si la série chronologique $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est stationnaire et φ-mélangeante, alors :

i) $\dfrac{S_n^1}{n+1}$ converge presque sûrement vers p , quand n tend vers ∞ ,

ii) si de plus la série $\sum_{n\geq 1} (\varphi(n))^{1/2}$ est convergente et $\sigma^2 = C(0) + 2 \sum_{n\geq 1} C(n)$ est différente de 0 , $C(.)$ étant la fonction de covariance de $(X_t ; t \in \mathbb{N})$, alors la suite de variables aléatoires $(\sqrt{n}(\dfrac{S_n^1}{n+1} - p) ; n \geq 1)$ converge en loi vers une variable gaussienne, centrée et de variance σ^2 .

Notons que sous les hypothèses assurant la validité de la conclusion figurant en (ii) du Théorème 3, $\frac{S_n^1}{n+1}$ converge aussi en moyenne quadratique vers p (cf. Hannan (1971)).

CHAPITRE II

CHAINES DE MARKOV HOMOGENES A DEUX ETATS

Ce chapitre est consacré aux chaînes de Markov homogènes d'ordre 1 et 2, à deux états 0,1 . Elles ont été abondamment utilisées dans le cadre de la modélisation de divers phénomènes en climatologie (Gabriel (1962)), en génétique (Klotz (1972)), en physique atomique (Johnson et Klotz (1974)), en hydrologie (Yakowitz (1976)) et en télécommunication (Crow et Miles (1977)).

D'abord pour l'ordre 1, puis pour l'ordre 2, nous décrivons la structure probabiliste correspondante et les méthodes d'estimation de leurs paramètres. Notons que nous omettrons souvent le mot homogène qui sera toujours sous-entendu.

I. CHAINES DE MARKOV BINAIRES D'ORDRE 1.

La classe des chaînes de Markov d'ordre 1 est adaptée à la description d'un phénomène dont on suppose que l'état à un instant donné ne dépend des états passés qu'à travers l'état immédiatement antérieur. Cette hypothèse conduit à poser :

<u>Définition</u>. - Une série chronologique binaire $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov homogène d'ordre 1 si

$$P[X_{t+n}=x_n/X_t=x_o,\ldots,X_{t+n-1}=x_{n-1}]=P[X_{t+n}=x_n/X_{t+n-1}=x_{n-1}]=P[X_1=x_n/X_o=x_{n-1}$$

pour tout $t \geq 0$, $n \geq 1$ et $(x_o, x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$.

Alors une loi de probabilité P sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ telle que la série chronologique $(X_t \; ; \; t \in \mathbb{N})$ soit une chaîne de Markov d'ordre 1, est complètement déterminée par la donnée des probabilités de transition

$$P_{ij} = P[X_{t+1} = j / X_t = i] \;\; ; \;\; (i,j) \in \{0,1\}^2 \;\; ; \;\; t \geq 0$$

et des probabilités initiales

$$P[X_o = 1] = p \quad \text{et} \quad P[X_o = 0] = 1-p \; .$$

De façon précise la donnée d'une telle loi P équivaut à celle du triplet (p, P_{01}, P_{11}) correspondant.

I.1. Etude probabiliste.

I.1.1. Lois marginales de dimensions finies.

On a bien sûr

$$(1) \;\; P[X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n] = p^{x_o} . (1-p)^{(1-x_o)} \prod_{(i,j) \in \{0,1\}^2} P_{ij}^{N_n^{ij}(x_o, \ldots, x_n)} \;\; ;$$

$(x_o, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$, où pour $(i,j) \in \{0,1\}^2$, N_n^{ij} désigne la statistique $N_n^{ij} = \text{card} \; \{t \in \{1, \ldots, n\} : X_{t-1} = i \; , \; X_t = j \}$ comptant le nombre de passages de l'état i à l'état j entre l'instant 0 et l'instant n .
Avec les notations du chapitre I on a :

$$N_n^{11} = \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} \qquad \text{soit} \quad N_n^{11} = U_n ,$$

$$N_n^{10} = \sum_{t=1}^{n} (1-X_t) . X_{t-1} \qquad \text{soit} \quad N_n^{10} = S_n^1 - U_n - X_n ,$$

$$N_n^{01} = \sum_{t=1}^{n} X_t (1-X_{t-1}) \qquad \text{soit} \quad N_n^{01} = S_n^1 - U_n - X_o$$

et $N_n^{00} = n - [N_n^{11} + N_n^{10} + N_n^{01}]$.

L'égalité (1) montre que la statistique $(X_o, N_n^{11}, N_n^{10}, N_n^{01})$ est exhaustive pour (p, P_{01}, P_{11}) lorsqu'on observe la série chronologique sur la période $\{0,\dots,n\}$.

La chaîne de Markov $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est stationnaire, si et seulement si $P[X_t = 1] = p ; t \geq 1$. (Notons que la stationnarité équivaut ici à la réversibilité au sens que pour tout $n \geq 1$, $(X_o,\dots,X_n)$ et $(X_n,\dots,X_o)$ ont même loi).
Alors si $0 < p < 1$, la matrice des probabilités de transition s'écrit

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2p+\lambda p)/(1-p) & p(1-\lambda)/(1-p) \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\max(0, \frac{2p-1}{p}) \leq \lambda \leq 1$;

Pour $(p,\lambda) = \theta \in \Theta = \{ (p,\lambda) : 0 < p < 1 \ , \ \max(0, \frac{2p-1}{p}) \leq \lambda < 1 \}$ $(X_t ; t \in \mathbb{N}) \sim M(1;p,\lambda)$ signifiera que $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'ordre 1 stationnaire de paramètres (p,λ) et $P^\theta = P^{p,\lambda}$ désignera la loi de probabilité correspondante sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}} , \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. On a

Lemme 1. Si $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N}) \sim M(1;p,\lambda)$, $(p,\lambda) = \theta \in \Theta$ alors la loi conjointe des variables $X_o, X_1, \dots, X_n$ s'écrit

$$(2)\quad P_n^\theta\{(x_o,x_1,\dots,x_n)\} = p^{(s-u)}.(1-p)^{-(n-1-s+h)}.\lambda^u.(1-\lambda)^{2(s-u)-h}$$

$$.(1-2p+\lambda p)^{(n-2s+u+h)}$$

où s,u et h désignent respectivement les valeurs des statistiques S_n^1 , U_n et H_n pour l'observation $(x_o,\dots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$.

L'égalité (2) montre que (S_n^1, U_n, H_n) est une statistique exhaustive pour $\theta = (p,\lambda)$ lorsque la chaîne est stationnaire. Il est facile de voir que la statistique $(N_n^{11}, N_n^{10} + N_n^{01})$ est exhaustive pour λ lorsque p est connu. On démontre aisément le résultat suivant :

Lemme 2. La fonction de covariance d'une chaîne $M(1;p,\lambda)$ s'écrit

$$C_\theta(h) = p(1-p)\ .\ \left(\frac{\lambda - p}{1-p}\right)^h \quad , \quad h \in \mathbb{N}\ .$$

Remarquons que C_θ est du type d'une fonction de covariance de processus autorégressif d'ordre 1 . En fait $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ admet alors une représentation autorégressive classique AR(1) :

Proposition 1. Une chaîne $M(1\ ;\ p,\lambda)$ peut se représenter sous la forme :

$$X_t = \frac{\lambda - p}{1-p}\ .\ X_{t-1} + \varepsilon_t\ ;\ t \geq 1$$

où $(\varepsilon_t\ ;\ t \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans

$\{-\frac{\lambda - p}{1 - p}, 0, \frac{1-\lambda}{1-p}, 1\}$, deux à deux non corrélées et telles que, pour tout $t \geq 1$, ε_t est non corrélée avec $\{X_s ; s < t\}$.

Il est facile de préciser la loi commune des variables $\varepsilon_t ; t \geq 1$. Pour des résultats plus généraux on renvoie à Laî (1977).

I.1.2. Lois de certaines statistiques.

Klotz (1972) a déterminé la loi de la statistique (S_n^1, U_n, H_n) :

Théorème 1.

Pour une chaîne $M(1 ; p, \lambda)$, $(p, \lambda) = \theta \in \omega$, la loi de probabilité de la statistique (S_n^1, U_n, H_n) est donnée par :

$$P^\theta [S_n = s, U_n = u, H_n = h] = C_2^h . C_{n-s}^{s-u-h} . C_{s-1}^u . p^{(s-u)} . (1-p)^{(s-h-n+1)} . \lambda^u$$
$$. (1-\lambda)^{(2s-2u-h)} . (1-2p+\lambda p)^{-(2s+u+h+n)}$$

pour $0 \leq s \leq n+1$, $0 \leq u \leq s-1$ et $h \in \{0,1,2\}$, avec la convention $C_{-1}^{-1} = 1$.

La loi de probabilité de la statistique $(N_n^{11}, N_n^{10}, N_n^{01})$ se déduit de celle de (S_n^1, U_n, H_n) :

Corollaire 1.

Pour une chaîne $M(1 ; p, \lambda)$, $(p, \lambda) = \theta \in \omega$ on a :

$$P^{\theta}[N_n^{11}=u, N_n^{01}=u, N_n^{10}=w] = \begin{cases} P^{\theta}[U_n=u, S_n^1=u+v, H_n=0] + P^{\theta}[U_n=u, S_n^1=u+v+1, H_n=2] \text{ si } v=w, \\ \frac{1}{2} P^{\theta}[U_n=u, S_n^1=u+v+1, H_n=1] \quad \text{si} \quad w=v+1 \ , \\ \frac{1}{2} P^{\theta}[U_n=u, S_n^1=u+v, H_n=1] \quad \text{si} \quad w=v-1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

pour $0 \leq u \leq n$, et $0 \leq v, w \leq n-u$.

La loi de la statistique S_n^1 peut aussi être obtenue comme loi marginale de la loi de (S_n^1, U_n, H_n) :

$$(3) \quad P^{\theta}[S_n^1=s] = \begin{cases} (1-p)^{-(n-1)} . (1-2p+\lambda p)^n \quad \text{si} \quad s=0 \\ (1-2p+\lambda p)^{(n-2)} . p . (1-p)^{-(n-1)} . (1-\lambda)^2 . \sum_{u=0}^{s-1} \sum_{h=0}^{2} C_2^h . C_{n-s}^{s-u} . C_{s-1}^u \times \\ \qquad \times \left(\frac{\lambda(1-2p+\lambda p)}{p(1-\lambda)}\right)^u . \left(\frac{1-2p+\lambda p}{(1-p)(1-\lambda)}\right)^h \text{si} \quad 1 \leq s \leq n+1 \ . \end{cases}$$

Nous renvoyons aux articles de Gabriel (1959) et de Helgert (1970) pour deux autres formes de la loi de S_n .

Quoique explicite, la forme (3) de la loi de S_n est en pratique difficile à utiliser. Kedem (1979) a proposé une méthode itérative simple pour le calcul numérique de cette loi. L'algorithme est le suivant : on a :

$$P^{\theta}[S_n^1=k] = P^{\theta}[S_n^1=k, X_n=0] + P^{\theta}[S_n^1=k, X_n=1] \ ,$$

où

i) pour $n = 0$

$$P^{\theta}[S_o^1 = 0, X_o = 0] = 1-p \ , \quad P^{\theta}[S_0^1 = 1, X_o = 1] = p \quad \text{et}$$

$$P^{\theta}[S_o^1 = 0, X_o = 1] = P^{\theta}[S_o^1 = 0 \ , \ X_o = 1] = 0$$

ii) pour $n \geq 1$ et $k = 0$

$$P^{\theta}[S_n^1 = 0 \ , \ X_n = 1] = P^{\theta}[S_n^1 = n+1, X_n = 0] = 0 \ ,$$

$$P^{\theta}[S_n^1 = 0 \ , \ X_n = 0] = (1-p) \, . \left(\frac{1-2p+\lambda p}{1-p}\right)^n \quad \text{et} \quad P^{\theta}[S_n^1 = n+1, X_n = 1] = p \, . \, \lambda^n \ ,$$

iii) pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$

$$P^{\theta}[S_n^1 = k, X_n = 0] = \frac{(1-2p+\lambda p)}{(1-p)} \, . P^{\theta}[S_{n-1}^1 = k, X_{n-1} = 0] + (1-\lambda) P^{\theta}[S_{n-1}^1 = k, X_{n-1} = 1]$$

$$P^{\theta}[S_n^1 = k, X_n = 1] = \frac{p(1-\lambda)}{(1-p)} \, . \, P^{\theta}[S_{n-1}^1 = k-1, X_{n-1} = 0] + \lambda \, P^{\theta}[S_{n-1}^1 = k-1, X_{n-1} = 1] \, .$$

I.1.3. Lois des temps de séjour et persistance.

Pour une chaine $(X_t \ ; \ t \geq 0) \sim M(1 \, ; p, \lambda), (p, \lambda) \in \Theta$, conditionnellement à $X_o = 1$, les variables aléatoires "temps de séjour" D_n^1 (resp. D_n^o) dans l'état 1 (resp. 0) sont indépendantes entre elles, et sont équidistribuées selon la loi géométrique de paramètre $(1-\lambda)$ (resp. $\frac{p(1-\lambda)}{(1-p)}$) , et les suites $(D_n^1 \ ; \ n \geq 1)$, $D_n^o \ ; \ n \geq 0)$ sont indépendantes. La chaîne $(X_t \, ; t \geq 0)$ est alors un processus de renouvellement alterné stationnaire correspondant à des lois de séjour dans les états alternatifs de type géométrique, les lois de retard coïncidant avec les lois de séjour (cf. Chapitre III).

La durée moyenne d'un séjour dans l'état 1 (resp. 0) est $1/(1-\lambda)$ (resp. $(1-p)/p(1-\lambda)$) et la variance correspondante est $\lambda/(1-\lambda)^2$ (resp. $\dfrac{(1-p)(1-p+p\lambda)}{p^2(1-\lambda)^2}$).

La persistance au n-ème jour d'une séquence sèche (resp. humide) est constante égale $q_1^1(\theta) = \lambda$ (resp. $q_1^o(\theta) = \dfrac{1-2p+\lambda p}{1-p}$).

I.2. Etude statistique.

On se place sous l'hypothèse de stationnarité ; on envisage l'étude d'estimateurs de certaines fonctions du paramètre $\theta = (p,\lambda)$ construits par l'une des trois méthodes classiques d'estimation : la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moments et celle des moindres carrés.

I.2.1. Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

On examine ici le problème d'estimation du paramètre $\theta = (p,\lambda)$ lui-même.

La fonction de log de vraisemblance $L_n(x_o,\ldots,x_n;p,\lambda) = \mathrm{Log}\ P_n^\theta\{(x_o,\ldots,x_n)\}$ où $P_n^\theta\{(x_o,\ldots,x_n)\}$ est donnée par (2), conduit aux équations de vraisemblance

$$L_n^{(1)}(x_o,\ldots,x_n;p,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L_n}{\partial \lambda} & (x_o,\ldots,x_n;\ p,\lambda) \\ \\ \dfrac{\partial L_n}{\partial p} & (x_o,\ldots,x_n;\ p,\lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad :$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{u}{\lambda} - \dfrac{2(s-u)-h}{(1-\lambda)} + \dfrac{(n-2s+h+u).p}{1-2p+\lambda p} = 0 \\[2ex] \dfrac{s-u}{p} + \dfrac{n-1+s+h}{(1-p)} + \dfrac{(n-2s+h+u)\ (\lambda-2)}{(1-2p+\lambda p)} = 0\ . \end{cases}$$

Le système (4) est équivalent (cf. Devoré (1976)) à :

$$(4')\quad \begin{cases} \lambda = u/(s-h+p) \\ p(s-u-h+p)\,.\,(n-s+h-1-p) - (1-p)(s-h+p)(s-u-p) = 0\ . \end{cases}$$

La deuxième équation du système (4') admet au moins une racine dans l'intervalle $[0,1]$.
On vérifie facilement que les conditions de régularité permettant de préciser le comportement asymptotique des estimateurs solutions des équations de vraisemblance sont satisfaites (cf. par exemple Billingsley (1961) et Feigin (1975) :

<u>Théorème</u> 2.

Soit (p_o, λ_o) la vraie valeur du paramètre (p,λ) dans Θ .

i) Il existe une suite $((\hat{p}_n, \hat{\lambda}_n)\,;\, n \geq 1)$ d'estimateurs basés respectivement sur les observations $((X_o,\ldots,X_n)\,;\, n\geq 1)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} P^{p_o,\lambda_o}[\, L_n^{(1)}(\,.\,;\,\hat{p}_n\,,\hat{\lambda}_n) = 0] = 1$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} (\hat{p}_n, \hat{\lambda}_n) = (p_o, \lambda_o)$ en probabilité relativement à P^{p_o,λ_o} .

ii) Pour toute suite $((\tilde{p}_n, \tilde{\lambda}_n)\,;\, n\geq 1)$ d'estimateurs vérifiant les mêmes conditions que la suite $((\hat{p}_n, \hat{\lambda}_n); n \geq 1)$, la suite $\left(\sqrt{n}\begin{pmatrix} \tilde{p}_n - p_o \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_o \end{pmatrix}; n \geq 1\right)$ de vecteurs aléatoires converge en loi relativement à P^{p_o,λ_o}, vers un vecteur gaussien, centré et de matrice de covariance

$$(5) \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} p_o(1-p_o)(1-2p_o+\lambda_o)/(1-\lambda_o) & (1-p_o)\lambda_o \\ (1-p_o)\cdot\lambda_o & \lambda_o(1-\lambda_o)/p_o \end{pmatrix}$$

En fait les estimateurs dont il est question dans l'énoncé précédent sont asymptotiquement efficaces.

Notons que pour p connu, une solution de l'équation de vraisemblance pour λ est la racine de la première équation du système (4), donnée par :

$$\hat{\lambda}^1_n(x_o,\ldots,x_n;p) = \{(u-(1-p)(2s-h)+(n-1)p) + [(u-(1-p)(2s-h)+(n-1)p)^2 + 4(n-1)\,u.p(1-2p)]^{1/2}\}/2(n-1)p\ .$$

De même la première équation du système (4') suggère d'estimer λ par $\hat{\lambda}^2_n(x_o,\ldots,x_n;p) = u/(s-h+p)$.

On a le résultat suivant (Klotz (1973)) :

Théorème 3.

Les estimateurs $(\hat{p}_n, \hat{\lambda}_n)$, $\left(\frac{S^1_n}{n+1}, \hat{\lambda}^1_n(\,.\,;\frac{S^1_n}{n+1})\right)$ et $\left(\frac{S^1_n}{n+1}, \hat{\lambda}^2_n(\,.\,;\frac{S^1_n}{n+1})\right)$

sont asymptotiquement équivalents au sens que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat{P}_n - S^1_n/(n+1) \\ \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}^i_n(\,.\,;S^1_{n/(n+1)}) \end{pmatrix} = ($

en probabilité relativement à P^{p_o,λ_o}, $i \in \{1,2\}$.

Cela implique en particulier que les estimateurs $\left(\frac{S_n^1}{n+1}, \hat{\lambda}_n^1\left(\cdot\ ; \frac{S_n^1}{n+1}\right)\right)$ et $\left(\frac{S_n^1}{n+1}, \hat{\lambda}_n^2\left(\cdot\ ; \frac{S_n^1}{n+1}\right)\right)$ sont aussi asymptotiquement gaussiens et efficaces. Ils présentent l'avantage d'être faciles à calculer à partir des observations.

I.2.2. Estimation par la méthode des moments.

On envisage ici l'estimation de la fonction $(p, \lambda p)$ du paramètre (p,λ). Notons que $\mu = \lambda . p$ est la probabilité $P^{p,\lambda}[X_t = 1, X_{t+1} = 1] = E_{p,\lambda}(X_t X_{t+1})$. La méthode des moments conduit aux estimateurs sans biais :

$$\begin{cases} \overline{P}_n = S_n^1/(n+1) \\ \overline{\mu}_n = U_n/n \end{cases}$$

pour lesquels on a :

Proposition 2.

La suite $((\overline{P}_n, \overline{\mu}_n) ; n \geq 1)$ d'estimateurs de $(p, \lambda.p)$ est convergente presque sûrement et de plus pour tout $(p_o, \lambda_o) \in \Theta$, relativement à P^{p_o,λ_o}, la suite $\left(\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{p}_n - p_o \\ \overline{\mu}_n - \lambda_o p_o \end{pmatrix}, n \geq 1\right)$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} p_o(1-p_o)\ (1-2p_o+\lambda_o)/(1-\lambda_o) & 2\lambda_o p_o(1-p_o)^2/(1-\lambda_o) \\ 2\lambda_o p_o(1-p_o)^2/(1-\lambda_o) & p_o\lambda_o(1-p_o\lambda_o) + \dfrac{2p_o\lambda_o^2(1-p_o)^2}{(1-\lambda_o)} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Observons d'abord que pour $\theta = (p,\lambda) \in \Theta$ la chaîne $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ est irréductible et apériodique. Alors il existe une distribution invariante unique, à savoir $(1-p)\,\delta_o + p\,\delta_1$, et on a :

$$(6) \qquad |P_{ij}(n) - p^j(1-p)^{(1-j)}| < \left(\frac{\lambda - p}{1-p}\right)^n$$

où $P_{ij}(n) = P^{p,\lambda}[X_n = j \mid X_o = i]$, $i,j \in \{0,1\}$.

On montre facilement à l'aide de (6) que la chaîne $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ est φ-mélangeante, avec

$$\varphi(n) = \left(\frac{\lambda - p}{1-p}\right)^n, \quad n \geq 1 .$$

La chaîne $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ est alors transitive et les processus $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ et $(X_t\,.\,X_{t-1}\ ;\ t \geq 1)$ sont ergodiques au sens de la convergence presque sûre. La normalité asymptotique du vecteur aléatoire $\sqrt{n}\begin{pmatrix}\overline{p}_n - p \\ \overline{\mu}_n - \lambda p\end{pmatrix}$ s'obtient par application des théorèmes 7.7 et 20.1 de Billingoley (1968) au processus vectoriel $\begin{pmatrix}X_t - p \\ X_t X_{t-1} - \lambda p\end{pmatrix}$. ∎

Définissant $\overline{\lambda}_n = \dfrac{\overline{\mu}_n}{\overline{p}_n} = \dfrac{U_n/n}{S_n^1/(n+1)}$, on en déduit immédiatement le :

Corollaire 2.

La suite $((\bar{p}_n, \bar{\lambda}_n)\ ;\ n \geq 1)$ d'estimateurs de (p, λ) est convergente presque sûrement et pour tout $(p_o, \lambda_o) \in \Theta$, relativement à P^{p_o, λ_o}, la suite $\left(\sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{p}_n - p_o \\ \bar{\lambda}_n - \lambda_o \end{pmatrix}\ ;\ n \geq 1 \right)$ de vecteurs aléatoires converge en loi vers un vecteur gaussien, centré, de matrice de covariance Λ donnée par (5).

Ainsi l'estimateur $(\bar{p}_n, \bar{\lambda}_n)$ de (p, λ) est asymptotiquement efficace.
Remarquons que l'estimateur $(\bar{p}_n, \bar{\lambda}_n)$ est asymptotiquement équivalent à l'estimateur déduit par les relations

$$P_{11}^{\theta} = \lambda \qquad ; \qquad P_{01}^{\theta} = p(1-\lambda)/(1-p)$$

des estimateurs de ces probabilités de passage

$$\hat{P}_{11}^{(n)} = \frac{N_n^{11}}{N_n^{10} + N_n^{11}} = \frac{U_n}{S_n^1 - X_n} \qquad ; \qquad \hat{P}_{01}^{(n)} = \frac{N_n^{01}}{N_n^{00} + N_n^{01}} = \frac{S_n^1 - U_n - X_o}{n - S_n^1 + X_n}$$

solutions des équations correspondant à la Log-vraisemblance approchée obtenue à partir de (1) en négligeant les termes en p.

Signalons que, Price (1976) a montré que $\bar{\lambda}_n$ a, pour n grand, un biais négatif $\left(E_{p,\lambda}(\bar{\lambda}_n) = \lambda - \dfrac{\lambda(1-p)}{np} + 0(n^{-2})\right)$ et a constaté à partir de résultats de simulation que les erreurs en moyenne quadratique de $\bar{\lambda}_n$ et $\hat{\lambda}_n^1$ (. ; $S_n^1/(n+1)$) sont sensiblement égales.

Un autre estimateur de λ, proposé par Kim et Baï (1980), est défini par :

$$\lambda_n^* = \begin{cases} U_n / (S_n^1 - 1) & \text{si} \quad 2 \leq S_n^1 \leq n+1 \\ 1 & \text{si} \quad S_n^1 = 0 \\ 0 & \text{si} \quad S_n^1 = 1 \end{cases}$$

λ_n^* est asymptotiquement équivalent à $\overline{\lambda}_n$ et a un biais positif négatif ou nul selon que $p > \frac{1}{2}$, $p < \frac{1}{2}$ ou $p = \frac{1}{2}$.

I.2.3. Estimation par la méthode des moindres carrés.

La représentation A.R(1) de la chaîne $(X_t \,;\, t \geq 0)$ (cf. paragraphe I.1.1)

$$X_t - p = \frac{\lambda - p}{1 - p} \cdot (X_{t-1} - p) + \tilde{\varepsilon}_t \ , \quad \tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - E(\varepsilon_t) \ ,$$

nous amène à envisager l'estimation par la méthode des moindres carrés du paramètre d'autorégression $c = \dfrac{\lambda - p}{1 - p}$ qui n'est autre que le coefficient de corrélation entre X_t et X_{t+1} (paramètre utilisé en particulier par Lindquist (1978)).

Si p est connu, l'estimateur des moindres carrés de c au vu des observations $X_o, \ldots, X_n$ peut s'écrire :

$$\text{(7)} \qquad \hat{C}_n(p) = \frac{U_n - p(2S_n^1 - H_n) + np^2}{np^2 + (1-2p)\,(S_n^1 - X_n)} \ .$$

L'estimateur correspondant de λ est :

$$\check{\lambda}_n(.;p) = \frac{(n - H_n + 2X_n)\,p^2 - (S_n^1 + U_n - H_n + X_n)\,p + U_n}{np^2 + (1-2p)\,(S_n^1 - X_n)} \ .$$

On peut encore montrer que l'estimateur $\left(\frac{S_n^1}{n+1}, \check{\lambda}_n\left(\,.\,;\frac{S_n^1}{n+1}\right)\right)$ de (p,λ) est presque sûrement convergent et asymptotiquement gaussien et efficace.

II. CHAINES DE MARKOV BINAIRES D'ORDRE 2

Lorsqu'on s'oriente vers l'utilisation de modèles markoviens pour représenter le phénomène climatologique qui nous intéresse, les modèles d'ordre 1 sont souvent insuffisants pour rendre compte de la réalité. On est alors amené à considérer des modèles d'ordres plus élevés. En pratique (en raison du nombre des paramètres) on se restreint (cf. par exemple Galloy, Martin et Le Breton (1983) à ceux d'ordre 2 qui correspondent à l'hypothèse que l'état à un instant donné ne dépend des états passés qu'à travers les deux états immédiatement antérieurs. Cette hypothèses conduit à poser :

Définition. - Une série chronologique binaire $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov homogène d'ordre 2 si

$$P[X_{t+n} = x_n / X_t = x_o, \ldots, X_{t+n-1} = x_{n-1}] = P[X_{t+n} = x_n / X_{t+n-2} = x_{n-2}, X_{t+n-1} = x_{n-1}]$$

$$= P[X_2 = x_n / X_o = x_{n-2}, X_1 = x_{n-1}]$$

pour $t \geq 0$, $n \geq 2$ et $(x_o, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$.

Une loi de probabilité P sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}} , \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ telle que la série chronologique $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$ soit une chaîne de Markov d'ordre 2 est complètement déterminée par la donnée des probabilités de transition
$P_{ij} = P[X_1 = j / X_o = i]$; $P_{ijk} = P[X_t = k / X_{t-2} = i , X_{t-1} = j]$;
$(i,j,k) \in \{0,1\}^3$, $t \geq 2$ et des probabilités initiales $P[X_o = 1] = p$,
et $P[X_o = 0] = 1 - p$.

La donnée d'une telle probabilité P équivaut à celle du sept-uplet $(p, p_{01}, p_{11}, p_{001}, p_{101}, p_{011}, p_{111})$ correspondant.

II.1. Etude probabiliste.

II.1.1. Lois marginales de dimensions finies.

On a, pour $n \geq 2$,

$$(1) \quad P[X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n] = p^{x_o}.(1-p)^{(1-x_o)}.P_{01}^{x_1(1-x_o)}.(1-P_{01})^{(1-x_o)(1-x_1)} \times$$

$$\times (1-P_{11})^{x_o(1-x_1)}.P_{11}^{x_o x_1}. \prod_{(i,j,k)\in\{0,1\}^3} P_{ijk}^{N_n^{ijk}(x_o,\ldots,x_n)} \; ;(x_o,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n+1}$$

où pour $(i,j,k) \in \{0,1\}^3$, N_n^{ijk} désigne la statistique

$N_n^{ijk} = \text{card}\{ t \in \{2,\ldots,n\} : X_{t-2} = i , X_{t-1} = j , X_t = k \}$ comptant le nombre de passages de l'état i à l'état k transitant par l'état j entre l'instant 0 et l'instant n .

Avec les notations du chapitre I, on a bien sûr :

$$N_n^{111} = W_n \quad ; \quad N_n^{011} = U_n - W_n - X_o X_1 \quad ; \quad N_n^{101} = V_n - W_n \; ;$$

$$N_n^{110} = U_n - W_n - X_{n-1}.X_n \quad ; \quad N_n^{010} = S_n^1 - 2U_n + W_n - H_n + L_n \quad ;$$

$$N_n^{100} = S_n^1 - U_n - V_n + W_n - (X_{n-1} + X_n) + X_{n-1}.X_n \; ;$$

$$N_n^{001} = S_n^1 - U_n - V_n + W_n - (X_o + X_1) + X_o X_1$$

$$\text{et} \quad N_n^{000} = (n-1) - (N_n^{111} + N_n^{011} + N_n^{110} + N_n^{101} + N_n^{010} + N_n^{100} + N_n^{001}) \; .$$

L'égalité (1) montre que la statistique $(X_o, X_1, N_n^{111}, N_n^{010}, N_n^{101}, N_n^{110}, N_n^{011}, N_n^{100}, N_n^{001})$ est exhaustive pour $(p, P_{01}, P_{11}, P_{001}, P_{011}, P_{101}, P_{111})$ lorsqu'on observe la série chronologique sur la période $\{0,\ldots,n\}$.

La chaîne de Markov $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est stationnaire si et seulement si $P[X_t = 1] = p$ et $P[X_{t+1} = 1 / X_t = i] = P_{i1}$, $i \in \{0,1\}$, $t \geq 0$. Dans ce cas, la loi P peut être paramétrée par le quadruplet

$\theta = (p, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ où $\lambda_1 = P_{11}$, $\lambda_2 = P[X_t = 1 / X_{t-2} = 1]$, $t \geq 2$ et $\mu = P_{111}$.

Les probabilités de transition (P_{ijk}) sont données par :

$$\begin{bmatrix} P_{000} & P_{001} \\ P_{010} & P_{011} \\ P_{100} & P_{101} \\ P_{110} & P_{111} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-p(3-\lambda_2-\lambda_1(2-\mu))}{1-2p+p\lambda_1} & \dfrac{p(1-\lambda_2-\lambda_1(1-\mu))}{1-2p+p\lambda_2} \\ \dfrac{1-2\lambda_1+\lambda_1\mu}{1-\lambda_1} & \dfrac{\lambda_1(1-\mu)}{1-\lambda_1} \\ \dfrac{1-\lambda_2-\lambda_1(1-p)}{1-\lambda_1} & \dfrac{\lambda_2-\lambda_1 \cdot \mu}{1-\lambda_1} \\ 1-\mu & \mu \end{bmatrix}$$

pour $0 < p < 1$; $\max\{0, \dfrac{2p-1}{p}\} \leq \lambda_1 \leq 1$; $\max\{0, \dfrac{2\lambda_1 - 1}{\lambda_1}\} \leq \mu \leq 1$ et

$$\max\{\frac{3p-2p\lambda_1-1}{p+\lambda_1\mu}, \lambda_1\mu\} \leq \lambda_2 \leq 1-\lambda_1(1-\mu) .$$

Pour $(p, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = \theta \in \Theta = \{(p, \lambda_1, \lambda_2, \mu) : 0 < p < 1$, $\max\{0, \dfrac{2p-1}{p}\} \leq \lambda_1 < 1$; $\max\{0, \dfrac{2\lambda_1-1}{\lambda_1}\} \leq \mu < 1$; et $\max\{\dfrac{3p-2p\lambda_1-1}{p+\lambda_1\mu}, \lambda_1\mu\} \leq \lambda_2 \leq 1-\lambda_1(1-\mu)\}$

$(X_t ; t \in \mathbb{N}) \sim M(2 ; \theta)$ signifiera que $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'ordre 2 stationnaire de paramètres $\theta = (p, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ et

$P^{\theta} = P^{p,\lambda_1,\lambda_2,\mu}$ désignera la loi correspondante sur $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

On a

Lemme 1. Si $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N}) \sim M(2\,;\theta)$; $\theta \in \Theta$ alors la loi conjointe des variables $X_o, X_1, \ldots, X_n$ s'écrit

$$(2)\quad P_n^{\theta}\{(x_o,\ldots,x_n)\} = p^{(s-u-v+w)}.\mu^{w}.\lambda_1^{(u-w)}.(1-\mu)^{(2u-2w-\ell)}.(\lambda_2-\mu.\lambda_1)^{(v-w)}$$

$$.(1-\lambda_1)^{(-2s+2u+2h+k-2\ell)}.(1-2p+\lambda_1 p)^{(-n+2+2s-u-2h-k+\ell)}$$

$$.(1-2\lambda_1+\lambda_1\mu)^{(s-2u+w-h+\ell)}.(1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\mu)^{(2s-2u-2v+2w-h-k+\ell)}$$

$$.(1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu))^{(n-1-3s+2u+v-w+2h+h-\ell)}$$

où $s,u,v,w,h,k,$ et ℓ désignent respectivement les valeurs des statistiques S_n^1, U_n, V_n, W_n, H_n, K_n et L_n pour l'observation $(x_o,\ldots,x_n)$.

L'égalité (2) montre que la statistique $(S_n^1, U_n, V_n, W_n, H_n, K_n, L_n)$ est exhaustive pour $(p, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$. On peut voir aussi que la statistique $(N_n^{111}, N_n^{010}, N_n^{101}, N_n^{100} + N_n^{001}, N_n^{110} + N_n^{011})$ est exhaustive pour le paramètre (λ_2, μ) lorsque p et λ_1 sont connus.

Pour calculer la fonction de covariance, donnée (cf.(2) chapitre I) par

$$C_{\theta}(h) = p.\{P^{\theta}[X_h = 1/X_o = 1] - p\}\ ;\ h \in \mathbb{N}\ ,$$

on est amené à calculer les probabilités de passage :

$$\lambda_h^{\theta} = P^{\theta}[X_h = 1/X_o = 1]\quad ,\quad h \geq 1\ .$$

On a

$$\lambda_h^\theta = \lambda_1 \, P_{111}^\theta(h) + (1-\lambda_1) \, . \, P_{101}^\theta(h) \quad , \quad h \geq 2$$

où $\quad P_{ijk}^\theta(h) = P^\theta[\, X_h = k \,/\, X_o = i \,,\, X_1 = j \,]$.

Ces probabilités peuvent être calculées itérativement selon l'algorithme suivant :

i) pour $n = 1$: $P_{111}^\theta(1) = 1$;

ii) pour $n = 2$: $P_{111}^\theta(2) = \mu$; $P_{101}^\theta(2) = (\lambda_2 - \lambda_1 . \mu)/(1-\mu)$;

$$P_{001}^\theta(2) = \frac{p(1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\,\mu)}{1-2p+p\lambda_1} \; ; \; P_{011}^\theta(2) = \lambda_1(1-\mu)/(1-\lambda_1) \; ;$$

iii) pour $n \geq 3$:

$$P_{111}^\theta(n) = (1-\mu) \sum_{j=1}^{n-1} \mu^{j-1} . P_{111}^\theta(n-j) \; ; \; P_{011}^\theta(n) = \frac{\lambda_1(1-\mu)}{1-\lambda_1} . P_{111}^\theta(n-1) + \frac{1-2\lambda_1+\lambda_1\mu}{1-\lambda_1} P_{101}^\theta(n-1)$$

$$P_{101}^\theta(n) = \frac{1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1\,\mu}{1-\lambda_1} \, . \, P_{001}^\theta(n-1) + \frac{\lambda_2-\lambda_1\,\mu}{1-\lambda_1} \, . \, P_{101}^\theta(n-1)$$

$$P_{001}^\theta(n) = \frac{1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu)}{1-2p+p\lambda_1} \, P_{001}^\theta(n-1) + \frac{p(1-\lambda_2-\lambda_2(1-\mu))}{1-2p+p\lambda_1} \, P_{011}^\theta(n-1) \; .$$

II.1.2. Lois de certaines statistiques.

Kedem (1977) a déterminé la loi de la statistique $(S_n^1, U_n, V_n, W_n, H_n, K_n, L_n)$:

Théorème 1.

Pour une chaîne $M(2;\theta)$, $\theta=(p,\lambda_1,\lambda_2,\mu)\in\Theta$, la loi de probabilité de la statistique $(S_n^1, U_n, V_n, W_n, H_n, K_n, L_n)$ est donnée par :

(3) $$P^\theta[S_n^1=s,\ U_n=u,\ V_n=v,\ W_n=w,\ H_n=h,\ K_n=k,\ L_n=\ell]$$

$$= C_2^{\max(h,k)}\cdot C^{\ell}_{\max(h,k)}\cdot C^{v-w}_{s-u-1}\cdot C^{s-u-v+w-h-k+\ell}_{n-2s+u+h-2}\cdot C^{u-v-w}_{s-u-h}\cdot C^{w}_{u-1}\cdot p^{(s-u-v+w)}\times$$

$$\times\ \lambda_1^{(u-w)}\cdot\mu^{w}\cdot(1-\mu)^{(2u-2w-\ell)}\cdot(\lambda_2-\lambda_1\mu)^{(v-w)}\cdot(1-\lambda_1)^{(2s+2u+2h+k-2\ell)}\times$$

$$\times\ (1-2p+\lambda_1 p)^{(-n+2+2s-u-2h-k+\ell)}\cdot(1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\mu)^{(2s-2u-2v+2w-h-k+\ell)}$$

$$\times\ (1-2\lambda_1+\lambda_1\mu)^{(s-2u+w-h+\ell)}\cdot(1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu))^{(n-1-3s+2u+v-w+2h+k-\ell)},$$

où $0\le s\le n+1$, $0\le u\le s-1$, $0\le v\le s-1$, $0\le w\le \min\{u-1,v\}$, et $(h,k,\ell)\in\{(2,2,2),(2,1,1),(2,0,0),(1,2,1),(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,1,0),(0,0,0)\}$, avec la convention $C_{-1}^{-1}=1$.

La loi de la statistique S_n^1 peut être déduite de (3), comme loi marginale de la loi de $(S_n^1,U_n,V_n,W_n,H_n,K_n,L_n)$. Nous disposons aussi (cf. Kedem (1979)) d'une méthode itérative pour le calcul numérique de cette loi.
L'algorithme est le suivant :
posons, pour $0\le k\le n+1$

$$\alpha(k,n)=P^\theta[S_n^1=k,X_n=0,X_{n-1}=0]\ ;\ \beta(k,n)=P^\theta[S_n^1=k,X_o=0,X_{n-1}=1]\ ;$$

$$\gamma(k,n)=P^\theta[S_n^1=k,X_n=1,X_{n-1}=0]\ ;\ \delta(k,n)=P^\theta[S_n^1=k,X_n=1,X_{n-1}=1]\ .$$

Alors on a :

$$P^\theta[S_n^1=k]=\alpha(k,n)+\beta(k,n)+\gamma(k,n)+\delta(k,n)\ ,$$

où $\alpha(k,n)$, $\beta(k,n)$, $\gamma(k,n)$, $\delta(k,n)$ sont donnés par :

a) $n = 1$

$$\alpha(k,1) = \begin{cases} 1-2p+\lambda_1 p & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k=1,2 \end{cases} \quad ; \quad \beta(k,1) = \begin{cases} p(1-\lambda_1) & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k=0,2 \end{cases}$$

$$\gamma(k,1) = \begin{cases} p(1-\lambda_1) & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k=0,2 \end{cases} \quad ; \quad \delta(k,1) = \begin{cases} p\lambda_1 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k=0,1 \end{cases}$$

b) $n \geq 2$ et $k = n+1$

$$\alpha(n+1,n) = \beta(n+1,n) = \gamma(n+1,n) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(n+1,n) = p.\lambda_1.\mu^{n-1} \ ;$$

c) $n \geq 2$ et $k = 0$

$$\alpha(0,n) = (1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu))^{n-1} / (1-2p+\lambda_1 p)^{n-2} \ ;$$

$$\beta(0,n) = \gamma(0,n) = \delta(0,n) = 0$$

d) $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$,

$$\alpha(k,n) = P^{\theta}_{000}.\alpha(k,n-1) + P^{\theta}_{100}.\beta(k,n-1) \ ;$$

$$\beta(k,n) = P^{\theta}_{010}.\gamma(k,n-1) + P^{\theta}_{110}.\delta(k,n-1) \ ;$$

$$\gamma(k,n) = P^{\theta}_{001}.\alpha(k-1,n-1) + P^{\theta}_{101}.\beta(k-1,n-1) \ ;$$

$$\delta(k,n) = P^{\theta}_{011}.\gamma(k-1,n-1) + P^{\theta}_{111}.\delta(k-1,n-1) \ .$$

II.1.3. Lois des temps de séjour et persistances.

Une chaîne $M(2;\theta)$, $\theta = (p,\lambda_1,\lambda_2,\mu) \in \Theta$ est un processus de renouvellement alterné stationnaire (cf. Chapitre III) correspondant à des lois de séjour $p^o(\theta)$ et $p^1(\theta)$ dans les états 0 et 1 respectivement données par :

$$P^o(\theta) = (P^o_n(\theta); n \geq 1) \quad \text{avec} \quad P^o_n(\theta) = \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1 . \mu)/(1-\lambda_1) & \text{si} \quad n = 1 \\ \dfrac{p(1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\mu)^2(1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu))^{n-2}}{(1-\lambda_1) \;.\; (1-2p+p\lambda_1)^{(n-1)}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$P^1(\theta) = (P^1_n(\theta); n \geq 1) \quad \text{avec} \quad P^1_n(\theta) = \begin{cases} (1-2\lambda_1+\lambda_1\mu) \;/\; (1-\lambda_1) & \text{si} \quad n = 1 \\ \lambda_1(1-\mu)^2 \;\mu^{n-2} / (1-\lambda_1) & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

et à des lois d'attente $\hat{P}^o(\theta)$ et $\hat{P}^1(\theta)$ s'écrivant :

$$\hat{P}^o(\theta) = (\hat{P}^o_n(\theta); n \geq 1) \quad \text{avec} \quad \hat{P}^o_n(\theta) = \begin{cases} p(1-\lambda_1)/(1-p) & \text{si} \quad n = 1 \\ \dfrac{p(1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\mu)}{(1-p)} \cdot \left[\dfrac{(1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu))}{(1-2p+p\lambda_1)}\right]^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et

$$\hat{P}^1(\theta) = (\hat{P}^1_n(\theta); n \geq 1) \quad \text{avec} \quad \hat{P}^1_n(\theta) = \begin{cases} 1-\lambda_1 & \text{si} \quad n = 1 \\ \lambda_1(1-\mu) \,.\, \mu^{n-2} & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

La durée moyenne d'un séjour dans l'état 1 (resp. 0) est $m_1(\theta) = \dfrac{1}{1-\lambda_1}$ (resp. $m_o(\theta) = \dfrac{1-p}{p(1-\lambda_1)}$.) et la variance correspondante est

$$\sigma_1^2(\theta) = \frac{\lambda_1(1-2\lambda_1+\mu)}{(1-\mu)(1-\lambda_1)^2} \quad . \text{(resp. } \sigma_o^2(\theta) = \frac{(1-2p+p\lambda_1)}{p^2(1-\lambda_1)^2(1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\mu)} \cdot \{1-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1\mu)$$

$$-p(3+5\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_1^2+\lambda_1\mu)\}) \ .$$

La persistance d'une séquence sèche (resp. humide) vaut $\frac{\lambda_1(1-\mu)}{1-\lambda_1}$, (resp. $\frac{1-\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1\mu}{1-\lambda_1}$) au premier jour, et constante égale à $q_2^1(\theta) = \mu$ (resp. $q_2^o(\theta) = \frac{1-p(3-\lambda_2-2\lambda_1+\lambda_1\mu)}{1-2p+p\lambda_1}$) au delà du deuxième jour.

II.2. Etude statistique.

On se place sous l'hypothèse de stationnarité et on envisage l'estimation du paramètre $\theta = (p, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ par la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments.

II.2.1. Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

La fonction de Log-vraisemblance $L_n(x_o,\ldots,x_n;\theta) = \text{Log}\, P_n^\theta\{(x_o,\ldots,x_n)\}$, où $P_n^\theta\{(x_o,\ldots,x_n)\}$ est donnée par (2), conduit au système d'équations de vraisemblance

$$L_n^1(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \text{grad}_\theta\, L_n(x_o,\ldots,x_n;\theta) = 0 \ .$$

On peut énoncer :

Proposition 1.

Soit $\theta_o = (p^o, \lambda_1^o, \lambda_2^o, \mu^o)$ la vraie valeur du paramètre θ dans Θ.

i) Il existe une suite $(\hat{\theta}_n \,;\, n \geq 1)$ d'estimateurs de θ basés respectivement sur les observations $((X_o, \dots, X_n) \,;\, n \geq 1)$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} P^{\theta_o} [\, L_n^1(\,.\, ; \hat{\theta}_n) = 0] = 1$$

et $\lim_{n \to \infty} \hat{\theta}_n = \theta_o$ en probabilité relativement à P^{θ_o}.

ii) Pour toute suite $(\tilde{\theta}_n \,;\, n \geq 1)$ d'estimateurs vérifiant les mêmes conditions que la suite $(\hat{\theta}_n \,;\, n \geq 1)$, la suite $(\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_o) \,;\, n \geq 1)$ converge en loi, relativement à P^{θ_o}, vers un vecteur aléatoire gaussien centré et de matrice de covariance Γ^{-1} où Γ est la matrice

(4) $$\Gamma = E_{\theta_o}(\Delta_{\theta_o} \,.\, \Delta'_{\theta_o})$$

avec

$$\Delta_{\theta_o} = \operatorname{grad}_\theta \operatorname{Log} P^\theta_{X_o X_1 X_2} / \theta = \theta_o \,.$$

Démonstration.

Lorsque $\theta \in \Theta$, la chaîne de Markov d'ordre 1, stationnaire $\left(\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{pmatrix} ; t \geq 1\right)$ est irréductible et apériodique. La fonction de vraisemblance s'écrit bien sûr

$$\mathcal{L}_n\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} ; \theta\right) = L_n(x_o, \dots, x_n ; \theta) \,.$$

Les probabilités de passages

$$P^{\theta}_{\binom{j}{i}\binom{k}{\ell}} = P^{\theta}\left[\binom{X_{t+1}}{X_t} = \binom{k}{\ell} \,/\, \binom{X_t}{X_{t-1}} = \binom{j}{i}\right] \quad ; \; \left(\binom{j}{i},\binom{k}{\ell}\right) \in \{0,1\}^4$$

sont données par

$$P^{\theta}_{\binom{j}{i}\binom{k}{\ell}} = \begin{cases} P^{\theta}_{ijk} & \text{si} \quad j = \ell \\ 0 & \text{si} \quad j \neq \ell \end{cases} .$$

Alors on a :

$$D = \left\{\left(\binom{j}{i}\binom{k}{\ell}\right) \in \{0,1\}^4 : P^{\theta}_{\binom{j}{i}\binom{k}{\ell}} > 0\right\} = \left\{\left(\binom{j}{i},\binom{k}{j}\right) \in \{0,1\}^4 : P^{\theta}_{ijk} > 0\right\}$$

et on vérifie facilement que :

- l'ensemble D ne dépend pas de $\theta \in \Theta$
- les probabilités de passages $P^{\theta}_{\binom{j}{i}\binom{k}{\ell}}$ admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 3, continues sur Θ,
- la matrice 4×8 dont les colonnes sont les gradients (par rapport à θ) des probabilités de passages $P^{\theta}_{\binom{j}{i},\binom{k}{\ell}}$, $\left(\binom{j}{i},\binom{k}{\ell}\right) \in D$, est de rang 4 puisque le mineur 4×4

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial P^{\theta}}{\partial p}\binom{1}{0}\binom{0}{1} & \frac{\partial P^{\theta}}{\partial p}\binom{1}{0}\binom{1}{1} & \frac{\partial P^{\theta}}{\partial p}\binom{0}{1}\binom{0}{0} & 0 \\
\frac{\partial P^{\theta}}{\partial \lambda_1}\binom{1}{0}\binom{0}{1} & \frac{\partial P^{\theta}}{\partial \lambda_1}\binom{1}{0}\binom{1}{1} & \frac{\partial P^{\theta}}{\partial \lambda_1}\binom{0}{1}\binom{0}{0} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial P^{\theta}}{\partial \lambda_2}\binom{0}{1}\binom{0}{0} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

a pour déterminant

$$\frac{\partial P^{\theta}_{100}}{\partial \lambda_1} \left[\frac{\partial P^{\theta}_{010}}{\partial p} \cdot \frac{\partial P^{\theta}_{011}}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial P^{\theta}_{010}}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial P^{\theta}_{011}}{\partial p} \right] \neq 0 \; .$$

Alors les conditions de régularité permettant d'assurer les conclusions de la proposition (cf. par exemple Billingsley (1961) ou Feigin (1975)) sont vérifiées. ■

Les équations de Log-vraisemblance étant compliquées, leur résolution nécessite le recours à des méthodes itératives ; on est alors amené à rechercher des estimateurs facilement calculables.

II.2.2. Estimation par la méthode des moments.

On a bien sûr, pour $\theta = (p, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$

$$p = E_\theta(X_t) \; ; \quad \nu_1 = p.\lambda_1 = E_\theta(X_t X_{t-1}) \; ; \quad \nu_2 = p.\lambda_2 = E_\theta(X_t X_{t-2})$$

et $\nu_3 = p.\lambda_1.\mu = E_\theta(X_t . X_{t-1} . X_{t-2})$.

La méthode des moments conduit aux estimateurs sans biais :

$$\bar{P}_n = S^1_n/(n+1) \; ; \; \bar{\nu}_{1,n} = U_n/n \; ; \; \bar{\nu}_{2,n} = V_n/(n-1) \; ; \; \bar{\nu}_{3,n} = W_n/(n-1) \; .$$

On a le résultat suivant :

Proposition 2.

Les estimateurs $\bar{P}_n$, $\bar{\nu}_{1,n}$, $\bar{\nu}_{2,n}$ et $\bar{\nu}_{3,n}$ de p, ν_1, ν_2, ν_3 sont presque sûrement convergents et asymptotiquement gaussiens ; les suites $(\sqrt{n}(\overline{P}_n - p^o)\ ;\ n \geq 1)$ et $(\sqrt{n}(\nu_{i,n} - \nu_i^o)\ ;\ n \geq 1)$, $i = 1,2,3$, convergent en loi, relativement à P^{θ_o} , vers des variables aléatoires gaussiennes centrées de variances respectives $C_{\theta_o}(0) + 2 \sum_{h \geq 1} C_{\theta_o}(h)$ et $C^i_{\theta_o}(0) + 2 \sum_{h \geq 1} C^i_{\theta_o}(h)$, $i = 1,2,3$ où $C^1_{\theta_o}(.)$ (resp. $C^2_{\theta_o}(.)$, $C^3_{\theta_o}(.)$) désigne la fonction de covariance du processus $(X_t X_{t-1}\ ; t \geq 1)$ (resp. $(X_t X_{t-2}; t \geq 2)$, $(X_t . X_{t-1} . X_{t-2}\ ;\ t \geq 2)$) pour la vraie valeur θ_o du paramètre θ dans Θ .

Démonstration.

Si $\theta \in \Theta$, la chaîne $(\binom{X_t}{X_{t-1}}\ ; t \geq 1)$, étant apériodique et irréductible, vérifie (cf. Doob(1953))

$$\left|P^\theta\left[\binom{X_{t+n}}{X_{t+n-1}} = \binom{k}{\ell} \Big/ \binom{X_t}{X_{t-1}} = \binom{j}{i}\right] - P^\theta\left[\binom{X_t}{X_{t-1}} = \binom{k}{\ell}\right]\right| \leq c.\rho^n ; (i,j,k,\ell) \in \{0,1\}^4$$

pour deux constantes $c > 0$ et $0 < \rho < 1$. On en déduit que la chaîne est φ-mélangeante avec φ de la forme $\varphi(n) = c.\rho^n$. Elle est alors transitive, ce qui assure la convergence presque sûre des estimateurs. De plus, comme $\sum_{n \geq 1} (\varphi(n))^{1/2} < +\infty$, les processus $(X_t\ ;\ t \geq 0)$, $(X_t X_{t-1}\ ; t \geq 1)$, $(X_t X_{t-2}\ ;\ t \geq 2)$ et $(X_{t-2} . X_{t-1} . X_t\ ;\ t \geq 2)$ vérifient les conditions assurant la validité de la conclusion (ii) du théorème 3 du chapitre I, le rôle de p étant joué respectivement par ν_1, ν_2, ν_3 pour les trois derniers. ∎

Remarquons que puisque $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ est un processus de renouvellement alterné stationnaire, la variance asymptotique $C_{\theta_o}(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} C_{\theta_o}(h)$ correspondant à l'estimateur $S_n^1/(n+1)$ de p est donnée (cf. chapitre III) par $\dfrac{m_o^2(\theta_o) . \sigma_1^2(\theta_o) + m_1^2(\theta_o)\ \sigma_o^2(\theta_o)}{(m_o(\theta_o) + m_1(\theta_o))^3}$ où $m_i(\theta_o)$, $\sigma_1^2(\theta_o)$ sont les moments des durées de séjour correspondant à la vraie valeur θ_o du paramètre (cf. paragraphe II.1.3).

On déduit évidemment de la proposition 2 que les estimateurs

$$\bar{\lambda}_{1,n} = \frac{\bar{\nu}_{1,n}}{\bar{P}_n} = \frac{n+1}{n} \frac{U_n}{S_n^1} \quad ; \quad \bar{\lambda}_{2,n} = \frac{\bar{\nu}_{2,n}}{\bar{P}_n} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{V_n}{S_n^1}$$

$$\text{et} \quad \bar{\mu}_n = \frac{\bar{\nu}_{3,n}}{\bar{\nu}_{1,n}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{W_n}{U_n} \quad \text{de} \quad \lambda_1, \lambda_2 \ \text{et} \ \mu,$$

sont eux aussi convergents presque sûrement et asymptotiquement gaussiens.

On a les mêmes conclusions pour les estimateurs

$$\tilde{\lambda}_{1,n} = \frac{U_n}{S_n^1} \quad ; \quad \tilde{\lambda}_{2,n} = \frac{V_n}{S_n^1} \quad ; \quad \tilde{\mu}_n = \frac{W_n}{U_n} \,.$$

En fait les estimateurs $\bar{\theta}_n = (\bar{p}_n, \bar{\lambda}_{1,n}, \bar{\lambda}_{2,n}, \bar{\mu}_n)$ et $\tilde{\theta}_n = (\tilde{p}_n, \tilde{\lambda}_{1,n}, \tilde{\lambda}_{2,n}, \tilde{\mu}_n)$ de θ sont asymptotiquement équivalents à l'estimateur déduit par les relations :

$$P_{111}^{\theta} = \mu \ , \ P_{101}^{\theta} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 \mu}{1-\lambda_1} \quad ; \quad P_{011}^{\theta} = \frac{\lambda_1(1-\mu)}{1-\lambda_1} \quad ; \quad P_{001}^{\theta} = \frac{p(1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1\mu)}{1-2p+p\lambda_1}$$

des estimateurs de ces probabilités de passage

$$\hat{P}_{111}^{(n)} = \frac{N_n^{111}}{N_n^{111}+N_n^{110}} \ ; \ \hat{P}_{101}^{(n)} = \frac{N_n^{101}}{N_n^{101}+N_n^{100}} \ ; \ \hat{P}_{011}^{(n)} = \frac{N_n^{011}}{N_n^{011}+N_n^{010}} \ ; \ \hat{P}_{001}^{(n)} = \frac{N_n^{001}}{N_n^{001}+N_n^{000}}$$

solutions des équations correspondant à la Log-vraisemblance approchée obtetenue à partir de (1) en négligeant les termes en p et P_{ij} (cf. Goodman et Anderson (1957)). Ces différents estimateurs de θ sont aussi asymptotiquement équivalents à l'estimateur $\hat{\theta}_n$ solution des équations de vraisemblance (cf. Proposition 1) et par suite sont asymptotiquement gaussiens, la matrice de covariance asymptotique correspondante étant la matrice Γ^{-1} où Γ est donnée par (4). Il est possible de relier Γ^{-1} à la fonction de covariance du processus stationnaire

$$((Z_t^1, Z_t^2, Z_t^3, Z_t^4) = (X_t, X_t . X_{t-1}, X_t . X_{t-2}, X_t . X_{t-1} . X_{t-2}) ; t \geq 2) :$$

par application des théorèmes 7.7 et 20.1 de Billingsley (1968), on montre que la suite $\left(\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar{p}_n - p^o \\ \bar{\nu}_{1,n} - \nu_1^o \\ \bar{\nu}_{2,n} - \nu_2^o \\ \bar{\nu}_{3,n} - \nu_3^o \end{pmatrix} ; n \geq 1\right)$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Sigma = ((\sigma_{ij}))$ où

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}_{\theta_o}(Z_2^i, Z_2^j) + \sum_{h \geq 3} \{\mathrm{Cov}_{\theta_o}(Z_2^i, Z_h^j) + \mathrm{Cov}_{\theta_o}(Z_h^i, Z_2^j)\} ,$$

les termes diagonaux n'étant autres que les variances intervenant dans l'énoncé de la Proposition 2. Alors comme

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_n - p^o \\ \bar{\lambda}_{1,n} - \lambda_1^o \\ \bar{\lambda}_{2,n} - \lambda_2^o \\ \bar{\mu}_n - \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1^o/p_o\bar{p}_n & 1/\bar{p}_n & 0 & 0 \\ -\nu_2^o/p_o\bar{p}_n & 0 & 1/\bar{p}_n & 0 \\ 0 & -\nu_3^o/\nu_1^o\bar{\nu}_{1,n} & 0 & 1/\bar{\nu}_{1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_n - p_o \\ \bar{\nu}_{1,n} - \nu_1^o \\ \bar{\nu}_{2,n} - \nu_2^o \\ \bar{\nu}_{3,n} - \nu_3^o \end{bmatrix}$$

on obtient que

$$\Gamma^{-1} = F\ \Sigma\ F'$$

où

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1^o/p_o^2 & 1/p_o^2 & 0 & 0 \\ -\nu_2^o/p_o^2 & 0 & 1/p_o^2 & 0 \\ 0 & -\nu_3^o/(\nu_1^o)^2 & 0 & 1/\nu_1^o \end{bmatrix} .$$

CHAPITRE III

PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNES A TEMPS DISCRET

Dans ce chapitre, on présente une classe de modèles qui a déjà été utilisée avec succès pour la modélisation des séquences climatologiques : il s'agit de modèles basés sur la notion de renouvellement (cf. Green (1964), Buishand (1977), Galloy, Le Breton et Martin (1983)). Dans une première partie on s'intéresse aux processus de renouvellement alternés à temps discret dans le cas général. Dans une deuxième partie on considère le cas particulier de tels processus construits à partir de la famille des lois Binomiales négatives translatées. Dans une troisième partie on envisage le cas particulier de modèles déduits de certains processus de renouvellement alternés à temps continu.

I. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNES A TEMPS DISCRET.

Les modèles considérés ici correspondent à l'hypothèse qu'à partir de chaque instant de changement d'état le phénomène ne dépend du passé qu'à travers l'état à cet instant. Cela se traduit par le fait que pour tout $n > 2$ et $(x_o,\dots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$

$$P[X_n=x_n/X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_o=x_o] = P[X_n=x_n/X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_k=x_k,X_{k-1}=x_{k-1}]$$

où

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } x_o = \ldots = x_{n-1} \\ \sup\{t \in \{1,\ldots,n-1\} : x_{t-1} \neq x_t\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(T_n^i ; n \geq 1)$ et $(D_n^i ; n \geq 1)$ pour $i \in \{0,1\}$, les dates d'entrées et les temps de séjour dans l'état i tels qu'ils ont été définis dans le paragraphe I.2 du chapitre I.

Etant donné $0 \leq p \leq 1$, $\hat{p}^o = (\hat{p}_n^o ; n \geq 1)$, $\hat{p}^1 = (\hat{p}_n^1 ; n \geq 1)$, $p^o = (p_n^o ; n \geq 1)$ et $p^1 = (p_n^1 ; n \geq 1)$ quatre lois de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, on pose :

Définition.

La série chronologique binaire $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est dite processus de renouvellement alterné de paramètres $(p, \hat{p}^o, \hat{p}^1, p^o, p^1)$ si $P[X_o = 1] = p$, et pour $i \in \{0,1\}$, conditionnellement à $X_o = i$, les durées de séjour $(D_n^i ; n \geq 1)$ (resp. $(D_n^{1-i} ; n \geq 1)$) sont indépendantes de loi $\hat{p}^i$ pour $n = 1$, de même loi p^i pour $n \geq 2$ (resp. de même loi p^{1-i} pour $n \geq 1$), les suites $(D_n^i ; n \geq 1)$ et $(D_n^{1-i} ; n \geq 1)$ étant de plus indépendantes entre elles.

Selon la terminologie déjà utilisée, les lois p^o et p^1 sont les lois des durées de séjour dans les états 0 et 1 respectivement, et les lois $\hat{p}_o$ et $\hat{p}_1$ sont appelées lois d'attente ou de retard.

I.1. Etude probabiliste.

I.1.1. Lois marginales de dimensions finies.

Notons Δ_n le temps passé sur la période $\{0,\ldots,n\}$ dans l'état initial à partir de l'instant 0 (jusqu'à l'éventuel premier instant de changement d'état) i.e.

$$\Delta_n = \operatorname{Inf}\{n+1,\ D_1^0\ \mathbb{1}_{[X_0=0]} + D_1^1 .\ \mathbb{1}_{[X_0=1]}\} .$$

Soit Y_n^0 (resp. Y_n^1) le nombre de séquences de 0 (resp. de 1) débutant et se terminant sur la période $\{0,\dots,n\}$ i.e. (cf. Chapitre I,II)

$$Y_n^0 = \operatorname{Sup}\{S_n^1 - U_n - 1, 0\} = \operatorname{Sup}\{N_n^{10} + X_n - 1,\ 0\}$$

$$Y_n^1 = \operatorname{Sup}\{S_n^1 - U_n - X_0 - X_n, 0\} = \operatorname{Sup}\{N_n^{01} - X_n,\ 0\} .$$

Si $\Delta_1^0,\dots,\Delta_k^0,\dots$ (resp. $\Delta_1^1,\dots,\Delta_k^1,\dots$) désignent les durées des séquences successives de 0 (resp. de 1) apparaissant après l'instant 0 , il est clair que le temps Γ_n passé dans l'état final (à partir de l'instant $\tau_n = \operatorname{Inf}\{t \geq 0 : X_t = X_{t+1} = \dots = X_n\}$) s'écrit

$$\Gamma_n = (n+1) - \Delta_n - \sum_{k=1}^{Y_n^0} \Delta_k^0 - \sum_{\ell=1}^{Y_n^1} \Delta_\ell^1$$

si on adopte la convention que lorsque Y_n^0 (resp. Y_n^1) est nul alors la somme correspondante est également nulle.

Notons que :

- sur l'événement $[N_n^{10} + N_n^{01} = 0] = [\Delta_n = n+1]$, on a

  $X_0 = \dots = X_n$; $\Gamma_n = 0$,

- sur l'événement $[N_n^{10} + N_n^{01} = 1]$ on a

  $X_0 = \dots = X_{\Delta_n - 1}$ et $X_{\Delta_n} = \dots = X_n$; $\Gamma_n = (n+1) - \Delta_n$

- sur l'événement $[N_n^{10} + N_n^{01} = 2q] \cap [X_0 = i]$; $q \geq 1$, $i \in \{0,1\}$ on a

$$0 = T_1^i < T_1^{1-i} < T_2^i < \dots < T_q^i < T_q^{1-i} < T_{q+1}^i \le n < T_{q+1}^{1-i} \quad ;$$

$$\Delta_n = T_1^{1-i} \ , \ Y_n^i = q-1 \ , \ Y_n^{1-i} = q \ ; \ \Gamma_n = n - T_{q+1}^i \ ; \ X_n = i \ ;$$

et $\Delta_k^i = D_{k+1}^i = T_{k+1}^{1-i} - T_{k+1}^i$; $k=1,\dots,q-1$; $\Delta_\ell^{1-i} = D_\ell^{1-i} = T_{\ell+1}^i - T_\ell^{1-i}$; $\ell=1,\dots,q$;

. sur l'événement $[N_n^{10} + N_n^{01} = 2q+1] \cap [X_o = i]$; $q \ge 1$, $i \in \{0,1\}$ on a :

$$0 = T_1^i < T_1^{1-i} < T_2^i < \dots < T_q^{1-i} < T_{q+1}^i < T_{q+1}^{1-i} \le n < T_{q+2}^i \quad ;$$

$$\Delta_n = T_1^{1-i}, \ Y_n^i = Y_n^{1-i} = q \ ; \ \Gamma_n = n - T_{q+1}^{1-i} \ ; \ X_n = 1-i \ ;$$

et $\Delta_k^i = D_{k+1}^i = T_{k+1}^{1-i} - T_{k+1}^i$; $k=1,\dots,q$; $\Delta_\ell^{1-i} = D_\ell^{1-i} = T_{\ell+1}^i - T_\ell^{1-i}$; $\ell=1,\dots,q$.

On peut facilement vérifier le résultat suivant :

<u>Lemme</u> 1.

La loi conjointe des variables $X_o,\dots,X_n$ s'écrit

$$(1)\ P_n\{(x_o,\dots,x_n)\} = \begin{cases} p^{x_o}(1-p)^{1-x_o} \cdot \sum_{k \ge n+1} (\hat{p}_k^1)^{x_o} \cdot (\hat{p}_k^o)^{1-x_o} & \text{si } \delta = n+1 \\ p^{x_o}(1-p)^{1-x_o} \cdot (\hat{p}_\delta^1)^{x_o} \cdot (\hat{p}_\delta^o)^{1-x_o} \cdot \prod_{k=1}^{y^o} p^o_{\delta_k^o} \cdot \prod_{\ell=1}^{y^1} p^1_{\delta_\ell^1} \cdot \\ \quad \cdot \sum_{m \ge \gamma} (p_m^1)^{x_n} \cdot (p_m^o)^{1-x_n} & \text{si } \delta \le n \end{cases}$$

pour $(x_o,\dots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$, $\delta, \delta_1^o,\dots,\delta_k^o,\dots,\delta_1^1,\dots,\delta_\ell^1,\dots,\gamma, y^o, y^1$

désignant les valeurs respectives de $\Delta_n, \Delta_1^o, \ldots, \Delta_k^o, \ldots, \Delta_1^1, \ldots, \Delta_\ell^1, \ldots, \Gamma_n, Y_n^o, Y_n^1$ pour l'observation $(x_o, \ldots, x_n)$, avec la convention que si y^o (resp. y^1) est nul alors le facteur correspondant vaut 1.

Il est clair que la statistique $(X_o, \Delta_n, Y_n^i, \Delta_1^i, \ldots, \Delta^i_{Y_n^i}, i \in \{0,1\})$ est exhaustive.

Etant donné deux lois de probabilités p^o et p^1 sur $\mathbb{N}^*$, apériodiques et admettant des moments d'ordre 1 m_o et m_1, on peut montrer (cf. par exemple Grégoire (1982)) :

<u>Théorème</u> 1.

Le processus de renouvellement alterné $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N})$ de paramètres $(p, p^o, p^1, \hat{p}^o, \hat{p}^1)$ est stationnaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) $p = m_1/(m_o + m_1)$;

ii) $\hat{p}^i_k = \dfrac{1}{m_i} \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} p^i_{k+\ell}$; $k \geq 1$; $i \in \{0,1\}$.

Nous dirons alors que la série chronologique binaire $(X_t \,;\, t \geq 0)$ est un processus de renouvellement alterné stationnaire de paramètres p^o et p^1, et noterons $(X_t \,;\, t \in \mathbb{N}) \sim R.A(p^o, p^1)$.

Le calcul de la fonction de covariance d'un processus R.A (p^o, p^1), donnée par la relation (2) du chapitre I, repose sur la détermination des probabilités de transition $P[X_{t+h} = 1/X_t = 1]$. Celles-ci peuvent être déterminées par des récurrences de la manière suivante : étant donné $i \in \{0,1\}$, on a :

- pour $h = 1$

$$P[X_1 = 1-i / X_o = i] = \frac{1}{m_i} ,$$

- pour $h \geq 2$

$$P[X_h = 1-i / X_o = i] = \sum_{\ell=0}^{h-1} \hat{p}^i_{\ell+1} \,.\, P[X_{h-\ell} = 1-i / X_o = i, X_1 = 1-i] ,$$

$$P[X_h = i / X_o = i] = \sum_{\ell \geq h+1} \hat{p}^i_\ell + \sum_{\ell=0}^{h-2} \hat{p}^i_{\ell+1} \,.\, P[X_{h-1} = i / X_o = i, X_1 = 1-i] ,$$

où les probabilités $P[X_k = j / X_o = i, X_1 = 1-i]$; $i,j = 0,1$, $k \geq 0$, sont aussi fournies par une récurrence. On a

- pour $k = 0$

$$P[X_o = j / X_o = i ,\ X_1 = 1-i] = \delta_{ij} ,$$

- pour $k = 1$

$$P[X_1 = j / X_o = i, X_1 = 1-i] = 1 - \delta_{ij}$$

- pour $k = 2$

$$P[X_2 = j / X_o = i, X_1 = 1-i] = \begin{cases} p_1^{1-i} & \text{si } j = i \\ \sum_{\ell \geq 2} p_\ell^{1-i} & \text{si } j = 1-i \end{cases}$$

et pour $k \geq 3$

$$P[X_k = 1-i / X_o = i, X_1 = 1-i] = \sum_{\ell \geq k} p_\ell^{1-i} + \sum_{\ell=1}^{k-2} p_\ell^{1-i} \,.\, P[X_{k-\ell} = 1-i / X_o = 1-i, X_1 = i] ,$$

$$P[X_k = i / X_o = i , X_1 = 1-i] = \sum_{\ell=1}^{k-1} p_\ell^{1-i} \,.\, P[X_{k-\ell} = i / X_o = 1-i, X_1 = i] .$$

Notons que la famille $(P[X_h = 1/X_o = 1]\,;\, h \geq 0)$ admet (cf. Grégoire (1982)) comme fonction génératrice

$$H(s) = \frac{1}{1-s} - \frac{s}{m_1(1-s)^2} \cdot \frac{(1-G_o(s)).(1-G_1(s))}{1-G_o(s).G_1(s)}$$

où pour $i \in \{0,1\}$, $G_i(.)$ est la fonction génératrice de la loi p^i.

I.1.2. Lois des sommes partielles.

En généralisant au cas alterné les méthodes d'Elliot (1965) et Cox (1962) pour le cas des processus de renouvellement ordinaires, on est conduit (cf. Buishand (1977)) a un algorithme de calcul pour la loi de probabilité de la variable S_n^1 : on pose, pour $i \in \{0,1\}$ et $m = 0,1,\dots,n$:

$$R_n^i(m) = P[S_n^1 = m/X_o = i,\ X_1 = 1-i] .$$

Lemme 2.

On a :

- pour $n = 0$

$$R_o^i(1) = \delta_{i1} \quad ; \quad R_o^i(0) = 1-\delta_{i1} ,$$

- pour $n \geq 1$

$$R_n^o(0) = R_n^o(n+1) = R_n^1(0) = R_n^1(n+1) = 0 ,$$

$$R_n^o(n) = m_1 . \hat{p}_n^1 \quad , \quad R_n^1(1) = m_o . \hat{p}_n^o ,$$

$$R_n^o(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ m_0 . p_1^1 . \hat{p}_{n-1}^o & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad ; \quad R_n^1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ m_1 . p_1^o . \hat{p}_{n-1}^1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

- pour $n \geq 2$, $2 \leq m \leq n$

$$R_n^1(m) = \sum_{\ell=1}^{n-m} p_\ell^o . R_{n-\ell}^o(m-1) \quad , \quad R_n^o(m) = \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell^1 . R_{n-\ell}^1(m-\ell+1) \ .$$

<u>Démonstration</u>.

Les résultats des deux premiers cas s'obtiennent facilement. Pour $n \geq 2$, $2 \leq m \leq n$, on peut écrire :

$$R_N^o(m) = \sum_{\ell=1}^{m} P[X_1=1,\ldots,X_\ell=1,\ X_{\ell+1}=0\ ,\ \sum_{j=\ell}^{n} X_j = m-\ell+1/X_o=0, X_1=1]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} P[X_1=1,\ldots,X_\ell=1, X_{\ell+1}=0/X_o=0, X_1=1].P[\sum_{j=\ell}^{n} X_j=m-\ell+1/X_\ell=1, X_{\ell+1}=$$

c'est-à-dire

$$R_N^o(m) = \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell^1 . R_{n-\ell}^1(m-\ell+1) \ .$$

La démonstration est analogue pour $R_n^1(m)$. ■

On pose maintenant, pour $i = 0,1$ et $m = 0,1,\ldots,m$:

$$Q_n^i(m) = P[S_n^1 = m/X_o = i]$$

Lemme 3.

On a :

- pour $n = 0$

$$Q_o^i(0) = 1-\delta_{i1} \quad ; \quad Q_o^1(1) = \delta_{i1} ,$$

- pour $n \geq 1$

$$Q_n^o(n+1) = Q_n^1(0) = 0 ,$$

$$Q_n^o(0) = \sum_{\ell \geq n+1} \hat{p}_\ell^o \quad ; \quad Q_n^1(n+1) = \sum_{\ell \geq n+1} \hat{p}_\ell^1 ,$$

$$Q_n^o(n) = \frac{1}{m_o} \cdot \sum_{\ell \geq n} p_\ell^1 \quad ; \quad Q_n^1(1) = \frac{1}{m_1} \sum_{\ell \geq n} p_\ell^o ,$$

- pour $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n-1$

$$Q_n^o(m) = \sum_{\ell=0}^{n-m} \hat{p}_o(\ell) . R_{n-\ell}^o(m) \quad ; \quad Q_n^1(m) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \hat{p}_1(\ell) . R_{n-\ell}^1(m-\ell) .$$

Nous pouvons calculer maintenant la probabilité $P[S_n^1 = m]$, par la formule évidente :

$$P[S_n^1 = m] = \frac{1}{m_o+m_1} \{ m_o . Q_n^o(m) + m_1 . Q_n^1(m) \} .$$

En particulier on peut évaluer la probabilité qu'au cours de la période $\{0,1,\ldots,n\}$, le processus reste dans l'état 1 par :

$$P[S_n^1 = n+1] = \frac{m_1}{m_o + m_1} . \sum_{\ell \geq n+1} \hat{p}_\ell^1$$

$$= \frac{1}{m_o + m_1} \sum_{\ell \geq 1} \ell . p_{n+\ell}^1$$

I.1.3. Lois des temps de séjour et persistances.

Pour une série chronologique binaire $(X_t, t \in \mathbb{N}) \sim RA(p^o, p^1)$, pour $i \in \{0,1\}$ la loi p^i est la loi des temps de séjour dans l'état i, et la persistance au n-ème jour dans une séquence de i s'écrit

$$q_n^i = 1 - \frac{p_n^i}{\sum_{k \geq n} p_k^i} \quad ; \; n \geq 1 \; .$$

I.2. Etude statistique.

On suppose qu'on observe une trajectoire d'un processus de renouvellement alterné stationnaire, les lois de temps de séjour admettant des moyennes m_o, m_1 et des variances σ_o^2, σ_1^2.

I.2.1. Estimation de $p = P[X_t = 1]$.

En ce qui concerne l'estimateur sans biais $\frac{S_n^1}{n+1}$ de $p = \frac{m_1}{m_o + m_1}$, on a le résultat suivant :

Proposition 2.

L'estimateur $\frac{S_n^1}{n+1}$ converge en probabilité vers $\frac{m_1}{m_o + m_1}$, et de plus la suite $\{\sqrt{n}\,(\frac{S_n^1}{n+1} - \frac{m_1}{m_o + m_1}) ; n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma^2 = (m_1^2\,\sigma_o^2 + m_o^2\,\sigma_1^2)/(m_o + m_1)^3$.

Démonstration.

On peut bien sûr écrire, avec les notations du paragraphe I.1.1

$$S_n^1 = \sum_{\ell=1}^{Y_n^1} \Delta_\ell^1 + \Delta_n \cdot \mathbb{1}_{[X_o=1]} + T_n \cdot \mathbb{1}_{[X_n=1]} .$$

De façon plus précise, sur l'événement $[X_o = 1]$, on a

$$S_n^1 = \begin{cases} D_1^1 + \ldots + D_q^1 & \text{si } T_q^o \leq n < T_{q+1}^1 \ ; \ q = 1,2,\ldots \\ D_1^1 + \ldots + D_q^1 + n - T_{q+1}^1 & \text{si } T_{q+1}^1 \leq n < T_{q+1}^o \ ; \ q = 0,1,\ldots \end{cases}$$

où, conditionnellement à $X_o = 1$, les variables D_j^1, D_j^o ; $j \geq 1$, sont indépendantes, D_1^1 étant de loi $\hat{p}^1$, D_j^1 de loi p^1 ; $j \geq 2$, et D_j^o de loi p^o ; $j \geq 1$.

Soit alors ε_1 une variable aléatoire positive qui, conditionnellement à $X_o = 1$, est de loi p_{ε_1} telle que $\hat{p}^1 \star p_{\varepsilon_1} = p^1$, et indépendante de D_{j+1}^1 et D_j^o ; $j \geq 1$, et définissons

$$\tilde{S}_n^1 = S_n^1 + \varepsilon_1 .$$

D'après un théorème de la limite centrale (cf. Takacs (1957), Renyi (1957)), conditionnellement à $X_o = 1$, la suite $\{\sqrt{n}\,(\frac{\tilde{S}_n^1}{n+1} - \frac{m_1}{m_o + m_1})\ ;\ n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance donnée dans l'énoncé. Comme $\sqrt{n}\,.\,\frac{\tilde{S}_n^1 - S_n}{n+1} = \sqrt{n}\,.\,\frac{\varepsilon_1}{n+1}$ tend vers 0 presque sûrement lorsque n tend vers l'infini, le même résultat est valable pour la suite de l'énoncé.

De manière analogue on montre que la même convergence a lieu conditionnellement à $X_o = 0$. Par suite le résultat de la proposition est démontré. ■

Signalons que Buishand (1979) a précisé le comportement asymptotique de la variance de S_n^1 lorsque les moments d'ordre 3 des lois p^i existent : on a

$$\mathrm{Var}(S_n^1) = \frac{m_1^2 \cdot \sigma_o^2 + m_o \cdot \sigma_1^2}{(m_o + m_1)^3} \cdot (n+1) + \frac{(m_1 \sigma_o^2 - m_o \sigma_1^2)^2}{2(m_o + m_1)^4} - \frac{m_1^2 \cdot \mu_{o,3} + m_o^2 \cdot \mu_{1,3}}{3(m_o + m_1)^3}$$

$$+ \frac{2 m_o m_1 + m_o^2 m_1^2}{6(m_o + m_1)^2} + 0(1)$$

où $\mu_{i,3}$ est le moment centré d'ordre 3 de la loi p^i ; $i=0,1$.

En particulier $\dfrac{S_n^1}{n+1}$ converge en moyenne quadratique vers $\dfrac{m_1}{m_o + m_1}$.

Notons enfin qu'on peut envisager d'utiliser les estimateurs $\dfrac{N_n^{01}}{n}$, $\dfrac{N_n^{10}}{n}$, $\dfrac{Y_n^1}{n}$ et $\dfrac{Y_n^o}{n}$ pour le paramètre $\dfrac{1}{m_o + m_1}$. On a

Lemme 4.

Les estimateurs $\dfrac{N_n^{01}}{n}$, $\dfrac{N_n^{10}}{n}$, $\dfrac{Y_n^1}{n}$ et $\dfrac{Y_n^o}{n}$ de $\dfrac{1}{m_o + m_1}$ sont convergents en probabilité.

Démonstration.

Comme $Y_n^i - N_n^{1-i,i}$ est une variable aléatoire bornée, il suffit de montrer le résultat pour Y_n^i. Montrons alors la convergence pour Y_n^o. Compte tenu des considérations précédant le lemme 1, il est facile de voir que sauf sur l'événement $[X_o = \ldots = X_n = 0]$ (dont la probabilité tend vers zéro) on a :

$$T^1_{Y_n^o + 1} \leq n < T^1_{Y_n^o + 2} .$$

On est alors, d'après les hypothèses de renouvellement, conditionnellement à $X_o = 1$ où $X_o = 0$ dans les conditions de la démonstration du théorème de Takacs (cf. Renyi (1957)) ; par suite on a le résultat annoncé.

La démonstration pour Y_n^i est analogue. ∎

I.2.2. <u>Estimation des moments des lois de temps de séjour</u>.

Les résultats du paragraphe précédent suggèrent les estimateurs $\dfrac{S_n^1}{(n+1).\theta_n}$ (resp. $\dfrac{(n+1) - S_n^1}{(n+1)\ \theta_n}$), $\theta_n \in \left\{ \dfrac{N_n^{01}}{n}, \dfrac{N_n^{10}}{n}, \dfrac{Y_n^1}{n}, \dfrac{Y_n^o}{n} \right\}$ de m_1 (resp. m_o). D'après la proposition 2 et le lemme 4, ces estimateurs sont convergents en probabilité.

L'expression (1) de la fonction de vraisemblance conduit à envisager l'estimation des paramètres des lois p^o et p^1 à partir de la fonction de Log-vraisemblance approchée

$$\sum_{k=1}^{Y_n^o} \operatorname{Log} P^o_{\Delta_k^o} + \sum_{\ell=1}^{Y_n^1} \operatorname{Log} P^1_{\Delta_k^1}$$

et ainsi à se ramener à un problème d'estimation découplé en celui concernant les paramètres de la loi p^o et celui concernant les paramètres de la loi p^1. On envisage donc selon le lemme 4 le problème d'estimation séquentielle de la moyenne m et de la variance σ^2 d'une loi de probabilité au vu de l'observation jusqu'à l'instant aléatoire Y_n d'une suite $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ de variables aléatoires équidistribuées selon cette loi sous l'hypothèse que

(2) $$\lim_{n \to \infty} \frac{Y_n}{n} = c \quad \text{au sens de la convergence en probabilité.}$$

On déduit d'un théorème d'Anscombe (1952) le résultat suivant :

Lemme 5.

Supposons que la loi commune aux variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ admet des moments jusqu'à l'ordre 4 et que l'hypothèse (2) est satisfaite. Alors les suites

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{Y_n}} \sum_{k=1}^{Y_n} \left(\frac{\Delta_k - m}{\sigma} \right) ; n \geq 1 \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{Y_n}} \sum_{k=1}^{Y_n} \frac{\Delta_k^2 - E(\Delta_1^2)}{\sqrt{\operatorname{var}(\Delta_1^2)}} ; n \geq 1 \right\}$$

convergent en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

On peut alors énoncer :

Proposition 3

Sous les hypothèses du lemme 5, les estimateurs $\overline{m}_n = \frac{1}{Y_n} \sum_{k=1}^{Y_n} \Delta_k$ et $\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{Y_n} \sum_{k=1}^{Y_n} (\Delta_k - \overline{m}_n)^2$ de m et σ^2 sont convergents en probabilité et de plus la suite $\{\sqrt{n}(\overline{m}_n - m) ; n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\frac{\sigma^2}{c}$.

Démonstration.

Du lemme 5 on déduit immédiatement la convergence en probabilité de $\frac{1}{Y_n} \sum_{k=1}^{Y_n} \Delta_k$ vers m et celle de $\frac{1}{Y_n} \sum_{k=1}^{Y_n} \Delta_k^2$ vers $E(\Delta_1^2) = m^2 + \sigma^2$ respectivement, puis celle de $\frac{1}{Y_n} \sum_{k=1}^{Y_n} (\Delta_k - \bar{m}_n)^2$ vers σ^2. Comme $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Y_n}}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\sqrt{c}}$ on obtient aussi la convergence en loi annoncée de la suite $\{\sqrt{n}(\bar{m}_n - m) \; ; \; n \geq 1\}$. ∎

On a bien sûr, compte tenu du lemme 4, le corollaire suivant :

Corollaire 1.

Soit une série chronologique $(X_t \; ; \; t \geq 0) \sim RA(p^o, p^1)$ telle que les lois p^i, $i \in \{0,1\}$ admettent des moments jusqu'à l'ordre 4. Les estimateurs $\bar{m}_{i,n} = \frac{1}{Y_n^i} \sum_{k=1}^{Y_n^i} \Delta_k^i$ et $\bar{\sigma}_{i,n}^2 = \frac{1}{Y_n^i} \sum_{k=1}^{Y_n^i} (\Delta_k^i - \bar{m}_{i,n})^2$ de m_i et σ_i^2 respectivement, $i \in \{0,1\}$, sont convergents en probabilité et la suite $\{\sqrt{n}(\bar{m}_{i,n} - m_i) \; ; \; n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $(m_o + m_1) \cdot \sigma_i^2$, $i = 0,1$.

II. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNES A TEMPS DISCRET BASES SUR LES LOIS BINOMIALES NEGATIVES TRANSLATEES.

On examine ici le cas particulier où les lois p^i, $i \in \{0,1\}$ appartiennent à la famille des lois binomiales négatives translatées qui ont déjà été utilisées dans des applications (cf. Le Breton, Martin (1979), Galloy (1982)).

Une telle loi $(p_k \, ; k \geq 1)$ sur $\mathbb{N}^*$ est définie par

$$(3) \qquad p_k = \frac{(r)_{k-1}}{(k-1)\,!} \,.\, \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-r} \,.\, \left(\frac{\mu}{\mu + r}\right)^{k-1} \quad ; \; k \geq 1$$

où μ et r sont deux paramètres réels strictement positifs et

$$(r)_k = \begin{cases} (r+k-1)\,(r+k-2)\,\ldots\,(r+1).r & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \;; \end{cases}$$

elle sera notée $BNT(\mu, r)$.

La fonction génératrice s'écrit

$$G(s) = \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-r} . \, s \, . \left(1 - \frac{\mu}{\mu + 1} \, . \, s\right)^{-r} ,$$

sa moyenne est

$$m = \mu + 1$$

et sa variance

$$\sigma^2 = \mu\left(\frac{\mu}{r} + 1\right) .$$

II.1. Etude des persistances.

Proposition 4.

Soit une série chronologique $(X_t\,;\, t \in \mathbb{N}) \sim RA(BNT(\mu^o, r^o), BNT(\mu^1, r^1))$. Alors la suite $(q_n^i\,;\, n \geq 1)$ des persistances de l'état i ; $i = 0, 1$, est monotone croissante (resp. décroissante) de limite $\dfrac{\mu^i}{\mu^i + r^i}$ si $r^i < 1$ (resp. $r^i > 1$), et constante à $\dfrac{\mu^i}{1+\mu^i}$ si $r^i = 1$.

Pour démontrer cette Proposition il s'agit d'étudier une suite $(q_n\,;\, n \geq 1)$ définie par

$$q_n = 1 - \frac{p_n}{\sum_{k \geq n} p_k}$$

où p_k est donnée par (3). Posant

$$\hat{q}_{n+1} = 1 - q_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\sum_{k \geq n} p_k - p_n} \qquad (4)$$

compte tenu de ce que

$$p_{n+1} = \frac{\mu + (n-1)\mu/r}{n(1+\mu/r)} \cdot p_n$$

on a

$$\hat{q}_{n+1} = \frac{\mu + (n-1)\mu/r}{n(1+\mu/r)} \cdot \frac{\hat{q}_n}{1-\hat{q}_n} .$$

Alors la suite $(\frac{1}{\hat{q}_n}\,;\, n \geq 1)$ vérifie la relation de récurrence

$$\frac{1}{\hat{q}_{n+1}} = \frac{n(1+\mu/r)}{\mu+(n-1)\mu/r} \cdot \frac{1}{\hat{q}_n} - \frac{n(1+\mu/r)}{\mu+(n-1)\mu/r} \quad ; \; n \geq 1$$

avec

$$\frac{1}{\hat{q}_1} = \frac{1}{p_1} = (1+\mu/r)^r .$$

L'étude de la suite $\left(\frac{1}{\hat{q}_n} ; n \geq 1\right)$ (cf. Le Breton, Martin (1979)) et l'utilisation de la relation (4) conduit alors au résultat.

II.2. Etude statistique.

Nous sommes ici dans les conditions du paragraphe I.2. ci-dessus avec $m_i = \mu_i + 1$ et $\sigma_i^2 = \mu_i\left(\frac{\mu_i}{r_i} + 1\right)$, $i \in \{0,1\}$, et les résultats concernant l'estimation de $p = \frac{\mu_1 + 1}{\mu_o + \mu_1 + 2}$, m_i, σ_i^2, $i \in \{0,1\}$ s'appliquent, les moments centrés d'ordre 3 s'écrivant $\mu_{i,3} = \mu_i\left(\frac{\mu_i + r_i}{r_i}\right).\left(1 + \frac{\mu_i + r_i}{r_i}\right)$.

Envisageons maintenant le problème d'estimation des paramètres μ_i, r_i, $i \in \{0,1\}$.
La fonction de Log-vraisemblance correspondant à l'observation $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ d'un échantillon indépendant $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ d'une loi BNT(μ, r) s'écrit :

$$L(\delta_1, \ldots, \delta_n ; \mu, r) = -\sum_{j=1}^{\infty} n_j . r . \mathrm{Log}(1+\mu/r) + \sum_{j=1}^{\infty} n_j (j-1) . \mathrm{Log}\left(\frac{\mu}{\mu+r}\right)$$

$$+ \sum_{j=3}^{\infty} n_j . \left[\mathrm{Log}(r) + \mathrm{Log}(r+1) + \ldots + \mathrm{Log}(r+j-2) - \mathrm{Log}((j-2)!)\right],$$

où n_j est le nombre de δ_k ; $1 \leq k \leq n$, égaux à j et $n = \sum_{j=1}^{\infty} n_j$.

Pour estimer μ et r par la méthode du maximum de vraisemblance, on cherche donc (μ, r) solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \operatorname{Log} L(\delta_1,\dots,\delta_n;\mu,r)}{\partial\mu} = \left(-\sum_{j=1}^{\infty} n_j\right).\dfrac{r}{\mu+r} + \sum_{j=1}^{\infty}(j-1).n_j.\dfrac{r}{\mu(\mu+r)} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \operatorname{Log} L(\delta_1,\dots,\delta_n;\mu,r)}{\partial r} = -\sum_{j=1}^{n} n_j\left\{\operatorname{Log}(1+\mu/r) - \dfrac{\mu}{\mu+r} + \dfrac{j-1}{\mu+r}\right\} + \sum_{j=3}^{\infty} n_j\left\{\sum_{\ell=0}^{j-2}\dfrac{1}{r+\ell}\right\} = 0 . \end{cases}$$

La première équation fournit alors

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty} j.n_j - 1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j - 1 ,$$

et pour $\mu = \hat{\mu}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{r}$ de r est solution de l'équation

$$n.\operatorname{Log}(1+\hat{\mu}/r) = \sum_{j=3}^{\infty} n_j\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{r+j-2}\right) .$$

Cette équation possède une racine positive unique si $s_n^2 > \overline{\delta}_n$ (cf. Anscombe (1950) pour l'existence et Bonitzer (1978) pour l'unicité) où $\overline{\delta}_n$, s_n^2 désignent respectivement la moyenne et la variance empirique de $(\delta_1,\dots,\delta_n)$. Afin de donner des estimateurs explicites de (μ,r) , on a recours à la méthode des moments qui conduit à

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k - 1 = \overline{\Delta}_n - 1$$

$$\hat{r}_n = \frac{\hat{\mu}_n^2}{S_n^2 - \hat{\mu}_n}$$

avec $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k - (\hat{\mu}_n+1))^2$.

Revenant au problème d'estimation séquentielle de μ_i, r_i on est amené à proposer les estimateurs

$$\bar{\mu}_{i,n} = \frac{1}{Y_n^i} \sum_{k=1}^{Y_n} \Delta_k^i - 1 = \bar{m}_{i,n} - 1$$

$$\bar{r}_{i,n} = \bar{\mu}_{i,n} / \{ \frac{1}{Y_n^i} \sum_{k=1}^{Y_n^i} (\Delta_k^i - (\bar{\mu}_{i,n}+1))^2 - \bar{\mu}_{i,n} \} .$$

On déduit immédiatement du corollaire 1 le résultat suivant :

Corollaire 2.

Soit une série chronologique $(X_t ; t \in \mathbb{N}) \sim RA(BNT(\mu_o, r_o), BNT(\mu_1, r_1))$. Alors les estimateurs $\bar{\mu}_{i,n}$ et $\bar{r}_{i,n}$ de μ_i et r_i respectivement ; $i \in \{0,1\}$, sont convergents en probabilité, et la suite $\{\sqrt{n}(\bar{\mu}_{i,n} - \mu_i) ; n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\mu_i(\mu_o + \mu_1 + 2) . (1 + \mu_i / r_i)$, $i \in \{0,1\}$.

III. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNES A TEMPS DISCRET DEDUITS DE PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT A TEMPS CONTINU BASES SUR DES LOIS EXPONENTIELLES.

On décrit ici une classe de modèles de séries chronologiques binaires envisagée par Green (1964) dans le cadre de la modélisation des séquences climatologiques. Plutôt que de déclarer sec un jour où la quantité de précipitation recueillie est moindre qu'un niveau de valeur donné, Green définit un jour sec comme étant un jour ne contenant aucun instant humide. Cela suppose que, contrairement au point de vue décrit dans l'introduction du chapitre I où la série binaire $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ observée est déduite d'un processus de base $(U_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ à temps discret, à valeurs continues, par dichotomisation de l'ensemble de ses valeurs, ici la série binaire décrivant la succession des jours selon leur caractère sec ou humide est construite à partir d'un processus binaire $(V_s\ ;\ s \in \mathbb{R}_+)$ à temps continu (la durée d'un jour étant choisie comme unité de temps, V_s étant égal à 1 ou 0 suivant que l'instant s est un instant sec ou humide) en posant :

$$(5) \qquad X_t = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad V_s = 1\ ;\ s \in [t, t+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $t = 0, 1, 2, \ldots$.

On fait l'hypothèse que $(V_s\ ;\ s \in \mathbb{R}_+)$ est un processus de renouvellement alterné stationnaire à temps continu (cf. par exemple Grégoire (1982)) correspondant à des durées de séjour dans les états 0 et 1 qui sont des lois exponentielles de paramètres respectifs α^0 et α^1 .

On décrit maintenant les propriétés de la série chronologique binaire correspondante définie par (5).

III.1. Etude probabiliste.

On a le résultat suivant :

Lemme 6.

La série chronologique binaire $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ définie par (5) est un processus de renouvellement alterné stationnaire $RA(p^o, p^1)$ où la loi p^1 est la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\alpha^1}$ et la loi p^o est définie par

$$p_n^o = C_1\ \lambda_1^{n-1}(1-\lambda_1) + C_2\ \lambda_2^{n-1}(1-\lambda_2)\ ;\ n \geq 1$$

où

$$\lambda_i = \frac{1}{2}\ \{1-b+(-1)^{i-1}[(1-b)^2+4(b-a)]^{1/2}\}\ ;$$

$$C_i = (-1)^{i-1}.[(1-b)^2+4(b-a)]^{-1/2}(1-b-\lambda_i+\frac{b-a}{1-e^{-\alpha^1}})\ ;\ i=\overline{1,2}$$

et

$$a = \frac{\alpha^o e^{-\alpha^1}}{\alpha^o+\alpha^1}\ (1-e^{-(\alpha^o+\alpha^1)})\quad ;\quad b = e^{-\alpha^1}(1-e^{-\alpha^o})\ .$$

Démonstration.

On déduit facilement des hypothèses concernant $(V_s\ ;\ s \in \mathbf{R}_+)$ et de la définition (5) que $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ est un processus de renouvellement alterné stationnaire.

D'après les résultats de Green (1964) les suites de persistances dans les états 1 et 0 pour le processus $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ sont respectivement constante égale à $e^{-\alpha^1}$ et donnée par

$$(6)\qquad \begin{cases} q_1^o = 1-b+\dfrac{b-a}{1-e^{-\alpha^1}} \\[2ex] q_n^o = 1-b+\dfrac{b-a}{q_{n-1}^o}\ ;\ n \geq 2\ . \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que la loi des temps de séjour dans l'état 1 est géométrique $1-e^{-\alpha^{1}}$. Afin de préciser la loi des temps de séjour dans l'état 0, constatons que

$$p_1^o = 1 - q_1^o$$

$$p_n^o = q_1^o \dots q_{n-1}^o (1-q_n^o) \ ; \ n \geq 2$$

ou encore

(7) $$p_n^o = \Delta_{n-1} - \Delta_n \ ; \ n \geq 1$$

si

$$\Delta_o = 1$$

$$\Delta_n = q_1^o \dots q_n^o \ ; \ n \geq 1 \ .$$

Or, d'après (6), on a

(8) $$\begin{cases} \Delta_o = 1 \ ; \ \Delta_1 = 1-b + \dfrac{b-a}{1-e^{-\alpha^1}} \ , \\ \Delta_n = (1-b)\,\Delta_{n-1} + (b-a)\,\Delta_{n-2} \ ; \ n \geq 2 \ . \end{cases}$$

L'équation (8) est une équation de récurrence linéaire à deux termes, à coefficients constants ; la solution est fournie par

$$\Delta_n = C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n \ ; \ n \geq 0$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation

$$\lambda_1^2 - (1-b)\,\lambda - (b-a) = 0$$

et C_1 et C_2 sont les solutions du système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\,\lambda_1 + C_2\,\lambda_2 = 1-b + \dfrac{b-a}{1-e^{-\alpha^1}} \ . \end{cases}$$

On trouve pour $\lambda_1, \lambda_2, C_1$ et C_2 les valeurs fournies dans l'énoncé. Utilisant la relation (7) on obtient alors immédiatement la forme annoncée pour la loi p^o . ∎

Remarques. Notons que $b > a$ et $0 < -\lambda_2 < \lambda_1 < 1$. On en déduit que la suite $(q_n^o \,;\, n \geq 1)$ des persistances dans l'état 0 converge vers la constante λ_1 . De plus, les hypothèses validant un résultat de Hardy et Wright (1979) (cf. Lemme 4 du Chapitre IV, §2 plus loin), les suites partielles $(q_{2n}^o \,;\, n \geq 1)$ et $(q_{2n+1}^o \,;\, n \geq 0)$ sont respectivement monotone croissante et monotone décroissante et $q_{2n}^o \leq q_{2n+1}^o$, $n \geq 1$. Ainsi la persistance de l'humidité oscille autour de la valeur limite λ_1 . Nous verrons, dans les Chapitres IV et V, que les persistances dans les modèles DMA et DARMA ont un comportement de même nature.

On peut compléter le lemme 6 par :

Corollaire 3.

La probabilité qu'un jour donné soit sec est

$$p = P[X_t = 1] = \frac{\alpha^o}{\alpha^o + \alpha^1} e^{-\alpha^1} \quad ; \; t \in \mathbb{N} .$$

La moyenne et la variance de la loi des temps de séjour dans l'état 1 (resp.0) sont données par :

$$m_1 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha^1}} \quad ; \quad \sigma_1^2 = \frac{e^{-\alpha^1}}{(1 - e^{-\alpha^1})^2}$$

$$(\text{resp.} \quad m_o = \frac{\alpha^1 + \alpha^o(1 - e^{-\alpha^1})}{\alpha^o e^{-\alpha^1}(1 - e^{-\alpha^1})} \quad ; \quad \sigma_o^2 = C_1 . \frac{1 + \lambda_1}{(1 - \lambda_1)^2} + C_2 \frac{1 + \lambda_2}{(1 - \lambda_2)^2} - m_o^2$$

où $\lambda_1, \lambda_2, C_1$ et C_2 sont des constantes données dans le lemme 1).

La fonction de covariance $C_X(.)$ du processus $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ s'écrit

$$C_X(h) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^o\,\alpha^1}{(\alpha^o+\alpha^1)^2}\, e^{-(h+2)\alpha^1 - h\alpha^o} & \text{si } h > 0 \\[2ex] \dfrac{\alpha^o e^{-\alpha^1}}{(\alpha^o+\alpha^1)^2} \cdot (\alpha^o+\alpha^1-\alpha^o e^{-\alpha^1}) & \text{si } h = 0 . \end{cases}$$

III.2. <u>Etude statistique</u>.

Nous sommes encore dans les conditions du paragraphe I.2. ci-dessus, les moments m_i, σ_i^2 étant donnés dans le Corollaire 1, et les résultats concernant l'estimation de $p = \dfrac{\alpha^o}{\alpha^o+\alpha^1}\, e^{-\alpha^1}$, m_i, σ_i^2 $i \in \{0,1\}$ s'appliquent.

Envisageons maintenant le problème d'estimation des paramètres α^o et α^1. Les expressions de m_1 et m_o en fonction de α^1 et α^o conduisent aux estimateurs

$$\bar{\alpha}_n^1 = -\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{\overline{m}_{1,n}}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_n^o = \frac{\bar{\alpha}_n^1 \cdot \overline{m}_{1,n}}{\overline{m}_{o,n}\, e^{-\bar{\alpha}_n^1} - 1}$$

de α^1 et α^o respectivement, où $\overline{m}_{i,n} = \dfrac{1}{Y_n^i} \displaystyle\sum_{k=1}^{Y_n^i} \Delta_k^i$; $i \in \{0,1\}$.

On déduit immédiatement du Corollaire 1 du paragraphe I.2. le résultat suivant :

Corollaire 4.

Les estimateurs $\bar{\alpha}_n^o$ et $\bar{\alpha}_n^1$ de α^o et α^1 sont convergents en probabilité.

On peut aussi penser à baser l'estimation des paramètres α^o et α^1 sur celle des probabilités de passage

$$P_{11} = P[X_1 = 1 / X_o = 1]$$

et

$$P_{01} = P[X_1 = 1 / X_o = 0]$$

qui sont données respectivement (cf. §I.1.1 et §III.1) par :

$$P_{11} = e^{-\alpha^1}$$

$$P_{01} = \frac{\alpha^o e^{-\alpha^1}(1-e^{-\alpha^1})}{\alpha^1 + \alpha^o(1-e^{-\alpha^1})} .$$

Des estimateurs naturels de P_{11} et P_{01} sont fournis par :

$$\hat{P}_{11}^{(n)} = \frac{N_n^{11}}{N_n^{10}+N_n^{11}} = \frac{U_n}{S_n^1 - X_n} \; ; \; \hat{P}_{01}^{(n)} = \frac{N_n^{01}}{N_n^{00}+N_n^{01}} = \frac{S_n^1 - U_n - X_o}{n - S_n^1 + X_n}$$

qui sont (cf. Chapitre II §I.2) des estimateurs de maximum de vraisemblance approchée dans le cas d'une chaîne de Markov d'ordre 1. Ici bien sûr le processus n'est pas markovien mais, compte tenu de ce que la loi p^1 est géométrique et la loi p^o peut être approchée par une loi géométrique (rappelons que $0 < -\lambda_2 < \lambda_1 < 1$), il paraît raisonnable d'utiliser ces estimateurs. On est alors amené à proposer les estimateurs

$$\hat{\alpha}_n^1 = -\mathrm{Log}\ \hat{P}_{11}^{(n)}$$

et

$$\hat{\alpha}_n^o = -\frac{\hat{P}_{01}^{(n)} \cdot \mathrm{Log}\ \hat{P}_{11}^{(n)}}{(\hat{P}_{11}^{(n)} - \hat{P}_{01}^{(n)})(1 - \hat{P}_{111}^{(n)})}$$

pour α^1 et α^o.

On déduit immédiatement de la Proposition 2 et du Lemme 4 le résultat suivant :

Corollaire 5.

Les estimateurs $\hat{\alpha}_n^o$ et $\hat{\alpha}_n^1$ de α^o et α^1 sont convergents en probabilité.

CHAPITRE IV

SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AUTOREGRESSIVES OU MOYENNES MOBILES D'ORDRE 1

Des analogues des modèles linéaires classiques autorégressifs et moyennes mobiles pour les processus à valeurs réelles ont été proposés par Jacobs et Lewis (1978) pour les séries chronologiques à valeurs discrètes. Nous n'étudions ici que les modèles d'ordre 1 pour les processus binaires d'abord dans le cas autorégressif puis dans le cas moyenne mobile.

I. MODELES AUTOREGRESSIFS D'ORDRE 1.

Un modèle autorégressif d'ordre 1 est destiné à représenter un phénomène dont le processus d'état $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est construit pour $t \geq 1$ à partir d'une suite $(Y_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes équidistribuées de la manière suivante :

$$X_t = \begin{cases} X_{t-1} & \text{avec probabilité } \gamma \\ Y_t & \text{avec probabilité } 1-\gamma \end{cases}$$

De façon précise on pose

Définition.

Une série chronologique binaire $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ est dite autorégressive d'ordre 1 de paramètres $(p, \alpha, \gamma) \in]0,1[^3$, si X_o est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et si pour $t \in \mathbb{N}^*$:

$$X_t = U_t \cdot X_{t-1} + (1-U_t)Y_t$$

où $(Y_t\ ;\ t \in \mathbb{N}^*)$ et $(U_t\ ;\ t \in \mathbb{N}^*)$ sont deux suites de variables aléatoires de Bernoulli équidistribuées de paramètres respectifs $\alpha = P[Y_t = 1]$ et $\gamma = P[U_t = 1]$, les variables aléatoires $(X_o, Y_t, U_t\ ;\ t \in \mathbb{N}^*)$ étant indépendantes.

I.1. Etude probabiliste.

On démontre immédiatement :

Lemme 1.

Le processus $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov homogène d'ordre 1, dont les probabilités initiales sont

$$P[X_o = 1] = p \quad ; \quad P[X_o = 0] = 1-p\ ,$$

et les probabilités de transition s'écrivent

$$P_{ij} = P[X_t = j/X_{t-1} = i] = \gamma\,\delta_{ij} + (1-\gamma)\,\alpha^j.(1-\alpha)^{(1-j)} \quad ; \ (i,j) \in \{0,1\}^2 .$$

Il suffit alors d'appliquer les résultats du paragraphe I du chapitre II pour décrire les propriétés probabilistes d'une telle série chronologique. Notons que la série chronologique est stationnaire si et seulement si $p = \alpha$; alors nous dirons qu'elle est autorégressive d'ordre 1 stationnaire de paramètre (α, γ) et noterons $(X_t ; t \in \mathbb{N}) \sim DAR(1; \alpha, \gamma)$ (Discrete AutoRégressive). C'est une chaîne de Markov stationnaire particulière dans la mesure où les paramètres (p, λ) (cf. Chapitre II) qui lui correspondent vérifient

$$p < \lambda < 1$$

puisque $\lambda = P_{11} = \gamma + (1-\gamma)\alpha = \alpha + (1-\alpha)\gamma > \alpha = p$.

La fonction de covariance s'écrivant

$$c(h) = \alpha(1-\alpha) . \gamma^h \; ; \; h \in \mathbb{N} \; ,$$

le paramètre γ n'est autre que le coefficient de corrélation entre X_t et X_{t-1}, lequel est donc ici nécessairement positif.

La représentation autorégressive au sens classique d'une série chronologique DAR $(1; \alpha, \gamma)$ pour $(\alpha, \gamma) \in]0,1[^2$ est de la forme

$$X_t = \gamma . X_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \; t \geq 1$$

où $(\varepsilon_t ; t \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires deux à deux non corrélées telle que pour tout $t \geq 1$, ε_t est non corrélée avec $\{X_s ; s < t\}$.
Les variables aléatoires ε_t sont à valeurs dans $\{-\gamma, 0, 1-\gamma, 1\}$ et on a

$$P[\varepsilon_t = -\gamma] = \alpha(1-\gamma)(1-\alpha) \; ; \; P[\varepsilon_t = 0] = (1-\alpha)(1-\alpha+\alpha\gamma) \; ;$$

$$P[\varepsilon_t = 1-\gamma] = \alpha(\alpha+\gamma-\alpha\gamma) \; ; \; P[\varepsilon_t = 1] = \alpha(1-\alpha)(1-\gamma) \; .$$

Renvoyant au paragraphe I.1 du chapitre II pour des expressions donnant les lois de $(X_o, \ldots X_n)$ et de la statistique exhaustive (S_n^1, U_n, H_n) (avec les changements de p et λ en α et $\alpha+(1-\alpha)\gamma$ respectivement), nous soulignons seulement qu'une série chronologique DAR$(1; \alpha, \gamma)$ est aussi un processus de renouvellement alterné stationnaire (cf. chapitre III) correspondant à une loi de séjour dans l'état 1 géométrique de paramètre $(1-\alpha)(1-\gamma)$ et une loi de séjour dans l'état 0 géométrique de paramètre $\alpha(1-\gamma)$.

I.2. Etude statistique.

Compte tenu de ce que l'ensemble $]0,1[^2$ des valeurs du paramètre (α,γ) est en correspondance bijective avec l'ensemble $\{(p,\lambda)\in]0,1[^2 : p<\lambda\}$ par l'application

$$(\alpha,\gamma)\rightsquigarrow(p(\alpha,\gamma),\ \lambda(\alpha,\gamma)) = (\alpha,\alpha+\gamma(1-\alpha))$$

et son inverse

$$(p,\lambda)\rightsquigarrow(\alpha(p,\lambda),\ \gamma(p,\lambda)) = (p,\frac{\lambda-p}{1-p})$$

on est amené à définir des estimateurs $(\tilde{\alpha}_n,\tilde{\gamma}_n)$ de (α,γ) par :

$$(1)\qquad \tilde{\alpha}_n = \alpha(\tilde{p}_n,\tilde{\lambda}_n) = \tilde{p}_n \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}_n = \gamma(\tilde{p}_n,\tilde{\lambda}_n) = \frac{\tilde{\lambda}_n-\tilde{p}_n}{1-\tilde{p}_n}$$

où $(\tilde{p}_n,\tilde{\lambda}_n)$ est l'un des estimateurs du couple (p,λ) envisagés dans le paragraphe I.2 du chapitre II.

On résume les propriétés de ces estimateurs :

Proposition 1.

$(\tilde{p}_n,\tilde{\lambda}_n)$ étant l'un quelconque des estimateurs $(\tilde{p}_n,\tilde{\lambda}_n)$, $(\frac{S_n^1}{n+1},\hat{\lambda}_n^i(\,.\,;\frac{S_n^1}{n+1}))$, $i=1,2$, $(\bar{p}_n,\bar{\lambda}_n)$ définis dans le paragraphe I.2 du chapitre II, la suite $((\tilde{\alpha}_n,\tilde{\gamma}_n)\,;\,n\geq 1)$ d'estimateurs de (α,γ) définis par (1) est presque sûrement convergente et asymptotiquement gaussienne, la suite $\left(\sqrt{n}\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_n - \alpha_o \\ \tilde{\gamma}_n - \gamma_o\end{pmatrix} ; n \geq 1\right)$ convergent en loi, relativement à P^{α_o,γ_o},

vers un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_o(1-\alpha_o)(1+\gamma_o)}{(1-\gamma_o)} & \alpha_o+\gamma_o-\alpha_o\gamma_o-\dfrac{\alpha_o(1+\gamma_o)}{1-\gamma_o} \\ \alpha_o+\gamma_o-\alpha_o\gamma_o-\dfrac{\alpha_o(1+\gamma_o)}{1-\gamma_o} & \dfrac{\alpha_o(1+\gamma_o)}{1-\gamma_o}+\dfrac{(1-\gamma_o)(\alpha_o+\gamma_o-\alpha_o\gamma_o)}{\alpha_o}-\dfrac{2(\alpha_o+\gamma_o-\alpha_o\gamma_o)}{1-\alpha_o} \end{pmatrix}$$

Démonstration.

La convergence presque sûre de $((\tilde{\alpha}_n, \tilde{\gamma}_n) ; n\geq 1)$ est une conséquence immédiate de celle de $((\tilde{p}_n, \tilde{\lambda}_n) ; n\geq 1)$ et de la continuité de l'application $(p,\lambda) \longmapsto \gamma(p,\lambda)$. La normalité asymptotique s'obtient à partir de l'égalité

$$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\gamma}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{p}_n \\ \dfrac{\tilde{\lambda}_n - \tilde{p}_n}{1-\tilde{p}_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{1-\tilde{p}_n} & \dfrac{1}{1-\tilde{p}_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}_n \\ \tilde{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

qui montre, compte tenu de la normalité asymptotique de $((\tilde{p}_n, \tilde{\lambda}_n); n\geq 1)$, que lorsque la vraie valeur du paramètre (α,γ) est (α_o, γ_o), la loi asymptotique de $\sqrt{n}\begin{pmatrix}\tilde{p}_n - \alpha_o \\ \tilde{\gamma}_n - \gamma_o\end{pmatrix}$ est gaussienne centrée de matrice de variance covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{1-p_o} & \frac{1}{1-p_o} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{1-p_o} \\ 0 & \frac{1}{1-p_o} \end{pmatrix}$$

où la matrice Λ est donnée par la formule (5) du chapitre II, avec $p_o = \alpha_o$, $\lambda_o = \alpha_o + (1-\alpha_o)\gamma_o$. Un calcul facile fournit alors le résultat annoncé. ∎

Comme les estimateurs $\tilde{p}_n$ et $\tilde{\lambda}_n$ ne vérifient pas nécessairement $\tilde{p}_n < \tilde{\lambda}_n$ il est raisonnable, pour tenir compte de la contrainte $p(\alpha,\gamma) < \lambda(\alpha,\gamma)$, de choisir de définir des estimateurs de γ par :

$$\gamma_n^* = \max(\gamma(\tilde{p}_n, \tilde{\lambda}_n), 0) .$$

Il est clair que les estimateurs $(\tilde{\alpha}_n, \gamma_n^*)$ ont les mêmes propriétés asymptotiques que les estimateurs $(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\gamma}_n)$.

II. MODELES MOYENNES MOBILES D'ORDRE 1.

Un modèle moyenne mobile d'ordre 1 est destiné à représenter un phénomène dont le processus d'état $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ est construit pour $t \geq 1$ à partir d'une suite $(Y_t\ ;\ t \geq 0)$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes équidistribuées, de la manière suivante :

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \text{avec probabilité } \beta \\ Y_{t-1} & \text{avec probabilité } 1-\beta \end{cases}.$$

De façon précise on pose

<u>Définition</u>.

Une série chronologique binaire $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ est dite moyenne mobile d'ordre 1 de paramètres $(p, \alpha, \beta) \in]0,1[^3$, si X_o est une variable de Bernoulli de paramètre p et si pour $t \in \mathbb{N}^*$:

$$X_t = V_t \cdot Y_t + (1-V_t) \cdot Y_{t-1}$$

où $(Y_t\ ;\ t \in \mathbb{N})$ et $(V_t\ ;\ t \in \mathbb{N}^*)$ sont deux suites indépendantes de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes équidistribuées de paramètres respectifs $\alpha = P[Y_t = 1]$ et $\beta = P[Y_t = 1]$, les variables aléatoires $(X_o, (Y_t, V_t), t \in \mathbb{N}^*)$ étant indépendantes.

II.1. <u>Etude probabiliste</u>.

II.1.1. <u>Lois marginales de dimensions finies</u>.

On a le résultat suivant

Lemme 1.

On a pour $(x_o, x_1) \in \{0,1\}^2$:

$$P[X_o = x_o] = p^{x_o}(1-p)^{(1-x_o)} \;;$$

$$P[X_o = x_o, X_1 = x_1] = \beta\, p^{x_o}(1-p)^{1-x_o}\alpha^{x_1}(1-\alpha)^{1-x_1} + (1-\beta)P[X_o = x_o, Y_o = x_1] \;;$$

et pour $n \geq 2$ et tout $(x_o, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$ la relation de récurrence

$$(1)\; P[X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n] = \alpha^{x_n}(1-\alpha)^{1-x_n} P[X_o = x_o, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}] + (-1)^{(x_n + x_{n-1})} \times$$

$$\times\, \alpha\beta\,.(1-\alpha)(1-\beta)\,.\,P[X_o = x_o, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}]\;.$$

Démonstration.

Remarquons d'abord que pour $t \geq 1$, les variables Y_t, V_t et $\{X_s \;;\; s<t\}$ sont indépendantes. On a pour $n = 1$

$$P[X_o = x_o, X_1 = x_1] = \beta.P[X_o = x_o, X_1 = x_1 / V_1 = 1] + (1-\beta).P[X_o = x_o, X_1 = x_1 / V_1 = 0]$$

$$= \beta.P[X_o = x_o, Y_1 = x_1 / V_1 = 1] + (1-\beta).P[X_o = x_o, Y_o = x_1 / V_1 = 0]$$

$$= \beta.P[X_o = x_o]\,.\,P[Y_1 = x_1] + (1-\beta).\,P[X_o = x_o, Y_o = x_1] \;;$$

et pour $n \geq 2$

$$P[X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n] = \beta.P[X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n / V_n = 1] + (1-\beta).P[X_o = x_o, \ldots X_n = x_n / V_n = 0]$$

$$= \beta.P[X_o = x_o, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, Y_n = x_n / V_n = 1] + (1-\beta) \times$$

$$\times\, P[X_o = x_o, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, Y_{n-1} = x_n / V_n = 0]$$

et donc

$$(2)\ P[X_o=x_o,\dots,X_n=x_n]=\beta.\alpha^{x_n}.(1-\alpha)^{1-x_n}.P[X_o=x_o,\dots,X_{n-1}=x_{n-1}]$$

$$+\ \beta(1-\beta)\,P[X_o=x_o,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},\ Y_{n-1}=x_n]\ .$$

De la même manière, on montre que

$$P[X_o=x_o,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},Y_{n-1}=x_n]=\beta.\delta_{x_n,x_{n-1}}.\alpha^{x_n}.(1-\alpha)^{1-x_n}\ \times$$

$$\times\ P[X_o=x_o,\dots,X_{n-2}=x_{n-2}]+(1-\beta).\alpha^{x_n}(1-\alpha)^{1-x_n}.P[X_o=x_o,\dots,X_{n-2}=x_{n-2},Y_{n-2}=x_{n-1}]$$

Par suite d'après (2) on a :

$$P[X_o=x_o,\dots,X_{n-2}=x_{n-2},Y_{n-2}=x_{n-1}]=P[X_o=x_o,\dots,X_{n-1}=x_{n-1}]-\beta.\alpha^{x_{n-1}}(1-\alpha)^{1-x_{n-1}}\times$$

$$\times P[X_o=x_o,\dots,X_{n-2}=x_{n-2}]\ ;$$

La relation (1) se déduit alors, en reportant ces deux derniers résultats dans (2). ■

Notons que pour $t \geq 1$

$$P[X_t=1] = \alpha\ .$$

On déduit alors :

<u>Proposition</u> 1.

Une série chronologique moyenne mobile d'ordre 1, de paramètre $(p,\alpha,\beta)\in\,]0,1[^3$ est stationnaire si et seulement si $p=\alpha$ et

$P[X_o=1, Y_o=1] = \alpha^2+\alpha\beta-\alpha^2\beta$. (auquel cas nous dirons que la moyenne mobile est stationnaire de paramètre $\theta=(\alpha,\beta)\in\,]0,1[^2$, et noterons $(X_t\,;t\in\mathbb{N}) \sim DMA(1\,;\alpha,\beta)$ Discrete Moving Average). Alors si $P_n^\theta(x_o,\ldots,x_n) = P^\theta[X_t=x_o,\ldots,X_{t+n}=x_n]$; $n\geq 1$, $(x_o,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n+1}$, $t\geq 0$, on a

$$P_o^\theta(1) = \alpha \;;\; P_o^\theta(0) = 1-\alpha ,$$

(3) $$P_1^\theta(x_o,x_1) = \alpha^{(x_o+x_1)}(1-\alpha)^{2-(x_o+x_1)}+(-1)^{(x_o+x_1)}.\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) ,$$

et pour $n\geq 2$, la relation de récurrence

(4) $$P_n^\theta(x_o,\ldots,x_n) = \alpha^{x_n}.(1-\alpha)^{1-x_n}P_{n-1}^\theta(x_o,\ldots,x_{n-1})+(-1)^{(x_n+x_{n-1})}\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\,P_{n-2}^\theta(x_o,\ldots,x_{n-2}) .$$

Démonstration.

D'après (1), la série chronologique $(X_t\,;t\in\mathbb{N})$ sera stationnaire si et seulement si $p=\alpha$ et $P^\theta[X_o=1, X_1=1] = P^\theta[X_1=1,X_2=1]$; cette dernière condition est équivalente à $P^\theta[X_o=1,Y_o=1] = P^\theta[X_1=1,Y_1=1] = \alpha^2+\beta\alpha-\alpha^2\beta$. ∎

Les relations (3) et (4) montrent que la loi d'un processus $DMA(1;\alpha,\beta)$ ne dépend de β qu'à travers $\beta(1-\beta)$. Elles permettent aussi de montrer :

Corollaire 1.

Une série chronologique $DMA(1;\alpha,\beta)$ est un processus à temps réversible.

Démonstration.

On montre comme dans la démonstration de la proposition 1, que

$$(5)\quad P_n^\theta(x_o,\dots,x_n)=\alpha^{x_o}.(1-\alpha)^{1-x_o}.P^\theta[X_1=x_1,\dots,X_n=x_n]+(-1)^{(x_o+x_1)}.\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\times$$
$$\times P^\theta[X_2=x_2,\dots,X_n=x_n]\ .$$

D'après (3), la propriété de reversibilité est vraie pour $n = 1$. Un raisonnement par récurrence sur n, montre en supposant la propriété vraie jusqu'au rang n que :

$$P_{n+1}^\theta(x_o,\dots,x_{n+1})=\alpha^{x_{n+1}}(1-\alpha)^{1-x_{n+1}}.P_n^\theta(x_o,\dots,x_n)\ +$$
$$+(-1)^{(x_n+x_{n+1})}\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)P_{n-1}^\theta(x_o,\dots,x_{n-1})$$
$$=\alpha^{x_{n+1}}(1-\alpha)^{1-x_{n+1}}P^\theta[X_n=x_o,\dots,X_o=x_n]\ +$$
$$+(-1)^{(x_n+x_{n+1})}\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta).P^\theta[X_{n-1}=x_o,\dots,X_o=x_{n-1}]\ .$$

Comme le processus est stationnaire au sens strict, on peut écrire :

$$P_{n+1}^\theta(x_o,\dots,x_{n+1})=\alpha^{x_{n+1}}(1-\alpha)^{1-x_{n+1}}P^\theta[X_{n+1}=x_o,\dots,X_1=x_n]$$
$$+(-1)^{(x_n+x_{n+1})}.\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\times P^\theta[X_{n+1}=x_o,\dots,X_2=x_{n-1}]\ ,$$

alors l'égalité (5) assure le résultat de la proposition. ■

Il est clair qu'une telle série chronologique est un processus 1-dépendant dans la mesure où si $|t-s|>1$, $(s,t)\in\mathbb{N}^2$, alors X_t et X_s sont des variables aléatoires indépendantes. On en déduit immédiatement

Lemme 2.

La fonction de covariance d'une série chronologique DMA$(1;\alpha,\beta)$ s'écrit

$$C_{\alpha,\beta}(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| \geq 2 \\ \alpha(1-\alpha) & \text{si } h = 0 \\ \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) & \text{si } h = \pm 1 . \end{cases}$$

Cette fonction de covariance est du type de celle d'un processus moyenne mobile d'ordre 1, MA(1). En fait une série chronologique DMA$(1;\alpha,\beta)$ admet une représentation en moyenne mobile classique que l'on peut préciser :

Proposition 2.

Une série chronologique $(X_t \, ; \, t \in \mathbb{N}) \sim$ DMA$(1;\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$, peut se représenter sous la forme

$$(6) \qquad X_t = a(\alpha,\beta) \, . \, \eta_{t-1} + \eta_t \quad ; \quad t \geq 1 \, .$$

où $a(\alpha,\beta) = 2\beta(1-\beta) \, / \, [1+(1-4\beta^2(1-\beta)^2)^{1/2}]$, et $((\eta_t) \, ; \, t \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires deux à deux non corrélées, de moyenne $\dfrac{\alpha}{1+a(\alpha,\beta)}$ et de variance $\dfrac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)}{a(\alpha,\beta)}$.

Démonstration.

Soit $a = a(\alpha,\beta)$ et η_o une variable aléatoire de même loi que

$\sum\limits_{t\geq 0} (-a)^t . X_t$, non corrélée avec les variables $X_2, X_3, \ldots$ et telle que $\mathrm{cov}(X_1, \eta_o) = C_{\alpha,\beta}(1)$, (la construction d'une telle variable est possible éventuellement en augmentant l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{a}, P)$). Posons alors pour tout $t \geq 1$

$$\eta_t = X_t - a.\eta_{t-1} .$$

On a bien sûr la représentation (6) de $(X_t ; t \geq 1)$. Il reste à vérifier les propriétés de la suite $(\eta_t ; t \geq 0)$; on peut écrire

$$\eta_t = \sum_{j=1}^{t} (-a)^{t-j} . X_j + (-a)^t . \eta_o \quad ; \quad t \geq 1 .$$

Alors tenant compte de ce que $a = a(\alpha, \beta)$ est la racine dans $[0,1]$ de l'équation

$$\beta(1-\beta) x^2 - x + \beta(1-\beta) = 0 ,$$

et que $\mathrm{var}(\eta_o) = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{(1-a^2)} . (1-2a\beta(1-\beta))$ on montre que :

. les variables η_t sont deux à deux non corrélées puisqu'on a d'une part pour $t \geq 1$

$$\mathrm{cov}(\eta_t, \eta_o) = (-a)^{t-1} \{ C_{\alpha,\beta}(1) - a.\mathrm{var}(\eta_o) \}$$

$$= \frac{(-a)^{t-1}}{1-a^2} \{(1+a^2) C_{\alpha,\beta}(1) - a.\mathrm{var}(X_o)\} = 0$$

et d'autre part pour $\ell, k \quad 1 \leq \ell < k$

$$\mathrm{cov}(\eta_k, \eta_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} (-a)^{\ell-j} . \mathrm{cov}(X_j, \eta_k)$$

$$= (-a)^{k+\ell-1} . C_{\alpha,\beta}(1) + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} (-a)^{\ell+k-(i+j)} \mathrm{cov}(X_j, X_i)$$

$$= (-a)^{k+\ell-1}.C_{\alpha,\beta}(1) + \sum_{j=1}^{\ell} (-a)^{\ell+k-2j} \text{ var } X_1 + C_{\alpha,\beta}(1) \sum_{j=1}^{\ell} (-a)^{\ell+k-2j-1}$$

$$+ C_{\alpha,\beta}(1). \sum_{j=2}^{\ell} (-a)^{\ell+k-2j+1}$$

et finalement

$$\text{cov}(\eta_k, \eta_\ell) = \frac{(-a)^{k+\ell+1}.(1-a^{-2\ell})}{(a^2-1)}.((1+a^2)C_{\alpha,\beta}(1) - a \text{ var } X_1) = 0 \, .$$

• pour $t \geq 0$, les variables η_t et $\{X_s ; s \geq t+2\}$ (resp. η_t et $\{X_s ; s \leq t-1\}$) sont non corrélées, et $\text{cov}(\eta_t, X_{t+1}) = C_{\alpha,\beta}(1)$, la moyenne et la variance de η_t ; $t \geq 0$ étant respectivement données par :

$$\frac{\alpha}{1+a(\alpha,\beta)} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)}{a(\alpha,\beta)} \, . \quad \blacksquare$$

Remarquons que les variables η_t, $t \geq 0$ sont à valeurs dans l'ensemble $\{u \in \mathbb{R} : u = \sum_{t \geq 0} (-a(\alpha,\beta))^t . x_t \ ; \ (x_t ; t \in \mathbb{N}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$ et signalons que Visek (1973) s'est intéressé pour $a(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}$ à la loi sur cet ensemble définie par une série $\sum_{t \geq 0} \frac{\varepsilon_t}{2^t}$ où $(\varepsilon_t ; t \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p, qui n'est autre que la loi uniforme sur $[0,1]$ dans le cas particulier $p = \frac{1}{2}$.

La relation de récurrence (4) ne conduit pas à une forme explicite utilisable de la fonction de vraisemblance associée à l'observation sur $\{0,\ldots,n\}$ (on obtient comme statistique exhaustive la statistique triviale $(X_0,\ldots,X_n)$) ; elle permet toutefois de mener une étude assez complète d'un processus DMA $(1 ; \alpha, \beta)$ du point de vue des lois des sommes partielles S_n^1, des lois des temps de séjour et des persistances.

II.1.2. Lois des sommes partielles.

On dispose d'un algorithme pour calculer la loi de la statistique S_n^1 dans une série chronologique DMA(1 ; θ) , pour $\theta = (\alpha, \beta)$:

Lemme 3.

On a

- pour $n = 0$

$$P^\theta[S_0^1 = 1] = \alpha \quad ; \quad P^\theta[S_0^1 = 0] = 1 - \alpha \; ;$$

- pour $n = 1$

$$P^\theta[S_1^1 = 0] = (1-\alpha)^2 + \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) \; ; \; P^\theta[S_1^1 = 1] = 2\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2) \; ;$$

et $P^\theta[S_1^1 = 2] = \alpha^2 + \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)$;

- pour $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n+1$

$$(7) \; P^\theta[S_n^1 = m] = \alpha . P^\theta[S_{n-1}^1 = m-1] + (1-\alpha) \; P^\theta[S_{n-1}^1 = m] \; +$$

$$+ \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) \; \{ P^\theta[S_{n-2}^1 = m] + P^\theta[S_{n-2}^1 = m-2] - 2P^\theta[S_{n-2}^1 = m-1] \} \; .$$

Démonstration.

Pour les cas $n=0$ et $n=1$ on obtient immédiatement le résultat à partir de la proposition 1.

Pour $n \geq 2$, on peut écrire en utilisant la relation de récurrence (4) :

$$P^{\theta}[S_n^1=m] = \sum_{i,j=0}^{1} P^{\theta}[S_n^1=m\,,\ X_{n-1}=i\,,\ X_n=j\,]$$

$$= \sum_{i,j=0}^{1} \{\,\alpha^j(1-\alpha)^{1-j}\,.\,P^{\theta}[S_{n-1}^1=n-j, X_{n-1}=i\,]+(-1)^{(i+j)}\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)$$

$$.\ P^{\theta}[S_{n-2}^1=m-i-j\,]\,\}$$

$$= \alpha\,.P^{\theta}[S_{n-1}^1=m-1\,]+(1-\alpha)\,.P^{\theta}[S_{n-1}^1=m\,]+\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\ \times$$

$$\times\ (P^{\theta}[S_{n-2}^1=m]-2P^{\theta}[S_{n-2}^1=m-1\,]+P^{\theta}[S_{n-2}^1=m-2\,]\,)\ .\ \blacksquare$$

En particulier pour $n \geq 2$ et $m=(n+1)i$, $i \in \{0,1\}$, l'équation (7) devient

$$P^{\theta}[S_n^1=(n+1)i] = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}\,.\,P^{\theta}[S_{n-1}^1=n.i]+\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\,.\,P^{\theta}[S_{n-2}^1=(n-1).i\,]\ .$$

Alors désignant par $Q_n^i(\theta)$ la probabilité $P^{\theta}[S_n^1=(n+1)i]$ qu'au cours de la période $\{0,1,\ldots,n\}$, le processus reste dans l'état i , $i\in\{0,1\}$, on a

Corollaire 2.

La suite $(Q_n^i(\theta)\ ;\ n\geq 0)$, $i \in \{0,1\}$ satisfait

- pour $n=0$ $\qquad Q_o^i(\theta) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}$,
- pour $n=1$ $\qquad Q_1^i(\theta) = \alpha^{2i}.(1-\alpha)^{2(1-i)}+\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)$,

et pour $n \geq 2$, la relation de récurrence

$$(8)\qquad Q_n^i(\theta) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}\,.\,Q_{n-1}^i(\theta)\ +\ \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\,.\,Q_{n-2}^i(\theta)\ .$$

La relation (8) est une équation de récurrence linéaire à deux termes à coefficients constants, la solution générale est de la forme :

$$(9) \qquad Q_n^i(\theta) = C_1^i(\theta) \,.\, \lambda_{1,i}^n(\theta) + C_2^i(\theta) \,.\, \lambda_{2,i}^n(\theta)$$

où $\lambda_{1,i}(\theta)$, $\lambda_{2,i}(\theta)$ sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} \,.\, \lambda - \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) = 0$$

et $C_1^i(\theta)$, $C_2^i(\theta)$ sont déterminées par les conditions

$$\begin{cases} C_1^i(\theta) + C_2^i(\theta) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} \\ C_1^i(\theta)\lambda_{1,i}(\theta) + C_2^i(\theta)\lambda_{2,i}(\theta) = \alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + \alpha\beta.(1-\alpha)(1-\beta) \,. \end{cases}$$

On trouve

$$\lambda_{1,i}(\theta) = \frac{1}{2}\, \{\alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + (\alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + 4\, C_\theta(1))^{1/2}\}$$

$$\lambda_{2,i}(\theta) = \frac{1}{2}\, \{\alpha^i(1-\alpha)^{1-i} - (\alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + 4\, C_\theta(1))^{1/2}\}$$

$$(10) \qquad C_1^i(\theta) = \frac{\alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + C_\theta(1) - \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} \,.\, \lambda_{2,i}(\theta)}{\lambda_{1,i}(\theta) - \lambda_{2,i}(\theta)}$$

$$C_2^i(\theta) = \frac{\alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + C_\theta(1) - \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} \,.\, \lambda_{1,i}(\theta)}{\lambda_{2,i}(\theta) - \lambda_{1,i}(\theta)} \,.$$

Notons que $-1 < \lambda_{2,i}(\theta) < 0 < \lambda_{1,i}(\theta) < 1$.

La relation (7) conduit immédiatement au résultat suivant concernant la fonction génératrice G_n^θ de la statistique S_n^1 : $G_n^\theta(s) = \sum_{k=0}^{n+1} s^k . P^\theta[S_n^1 = k]$,

Proposition 3.

Si $(X_t\ ;\ t \in \mathbb{N}) \sim \mathrm{DMA}(1\ ;\ \theta)$, $\theta = (\alpha,\beta) \in]0,1[^2$, alors pour $n \geq 2$

(11) $$G_n^\theta(s) = (1-\alpha+\alpha s).G_{n-1}^\theta(s) + C_\theta(1)\ (1-s)^2\ G_{n-2}^\theta(s)\ ,$$

avec les conditions initiales :

$$G_o^\theta(s) = 1-\alpha+\alpha s \quad \text{et} \quad G_1^\theta(s) = (1-\alpha)^2+C_\theta(1)+2(\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1)s+(\alpha^2+C_\theta(1))s^2\ .$$

La relation (11) est une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. La solution générale est de la forme :

$$G_n^\theta(s) = b_1(s,\theta)\ .\ \mu_1^n(s,\theta) + b_2(s,\theta)\ .\ \mu_2^n(s,\theta)$$

où $\mu_1(s,\theta)$, $\mu_2(s,\theta)$ sont les racines de l'équation

$$\mu^2 - (1-\alpha+\alpha s)\mu - C_\theta(1).(1-s)^2 = 0\ ,$$

et $b_1(s,\theta)$, $b_2(s,\theta)$ sont déterminées par les conditions :

$$\begin{cases} b_1(s,\theta) + b_2(s,\theta) = 1-\alpha+\alpha s \\ b_1(s,\theta).\mu_1(s,\theta)+b_2(s,\theta).\mu_2(s,\theta) = (1-\alpha)^2+C_\theta(1)+2(\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))\,s+(\alpha^2+C_\theta(1))s^2\ . \end{cases}$$

II.1.3. Lois des temps de séjours et persistances.

La loi $p^i(\theta) = (p_n^i(\theta)\ ;\ n \geq 1)$ des temps de séjour dans l'état i , $i \in \{0,1\}$, se déduit facilement de la relation (9), puisqu'on peut écrire :

$$p_n^i(\theta) = P^\theta[\, D_1^i = n \,/\, T_1^i = 1 \,]$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1)} \quad (Q_{n-1}^i(\theta) - 2\,.\,Q_n^i(\theta) + Q_{n+1}^i(\theta)) \ .$$

On obtient :

$$p_n^i(\theta) = (\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))^{-1} . [\, C_1^i(\theta).\lambda_{1,i}^{n-1}(\theta).(1-\lambda_{1,i}(\theta))^2 + C_2^i(\theta).\lambda_{2,i}^{n-1}(\theta)(1-\lambda_{2,i}(\theta))^2 \,]$$

où les constantes $C_1^i(\theta)$, $C_2^i(\theta)$, $\lambda_{1,i}(\theta)$, $\lambda_{2,i}(\theta)$ sont données par (10).

Les moments d'ordre 1 et 2 de cette loi $m_j^i(\theta) = \sum_{k \geq 1} k^j \, p_k^i(\theta)$, $j = 1,2$, sont donnés respectivement par

$$(11) \quad \begin{cases} m_1^i(\theta) = (\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))^{-1} . \alpha^i . (1-\alpha)^{1-i} \ ; \\ m_2^i(\theta) = (\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))^{-1} . \left(\dfrac{C_1^i(\theta)(1+\lambda_1^i(\theta))}{1-\lambda_1^i(\theta)} + \dfrac{C_2^i(\theta)(1+\lambda_2^i(\theta))}{1-\lambda_2^i(\theta)} \right) . \end{cases}$$

Etudions maintenant les persistances

<u>Proposition</u> 4.

La persistance au n-ème jour dans l'état i , $i \in \{0,1\}$, satisfait la relation

$$q_n^i(\theta) = \alpha^i (1-\alpha)^{1-i} + \frac{C_\theta(1)}{q_{n-1}^i(\theta)} \quad ; \ n \geq 2$$

où

$$q_1^i(\theta) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + \frac{\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i \; C_\theta(1)}{\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1)} .$$

Les suites partielles $(q_{2n}^i(\theta)\,;\, n \geq 1)$ et $(q_{2n+1}^i(\theta)\,;\, n \geq 0)$ sont respectivement croissante et décroissante, et pour $n \geq 1$: $q_{2n}^i(\theta) < q_{2n+1}^i(\theta)$.
La suite $(q_n^i(\theta)\ ;\ n \geq 1)$ converge vers $\lambda_{1,i}(\theta)$ (donnée par (10)) quand n tend vers l'infini.

Démonstration.

On a, en divisant les deux membres de l'équation (4) :

$$P_{n+1}^\theta\{(x_o,\ldots,x_{n+1})\} = \alpha^{x_n}(1-\alpha)^{1-x_n} . P_n^\theta\{(x_o,\ldots,x_n)\} + (-1)^{(x_n+x_{n-1})} .$$
$$. \; C_\theta(1) \,.\, P_{n-1}^\theta\{(x_o,\ldots,x_{n-1})\}$$

par $P_n^\theta\{(x_o,\ldots,x_n)\}$, où $x_o = 1-i$ et $x_t = i$; $1 \leq t \leq n$,

$$q_n^i(\theta) = \frac{P_{n+1}^\theta\{(1-i,\, i,\ldots,i)\}}{P_n^\theta\{(1-i,i,\ldots,i)\}}$$

$$= \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + \frac{C_\theta(1)}{q_{n-1}^i(\theta)} \quad ; \; n \geq 2$$

et pour $n = 1$

$$q_1^i(\theta) = \frac{P_2^\theta\{(1-i,i,i)\}}{P_1^\theta\{(1-i,i)\}} = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + \frac{\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i \; C_\theta(1)}{\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1)} .$$

Le reste de la démonstration repose sur le lemme suivant de Hardy et Wright (1979) :

Lemme 4.

Soit $(a_n ; n \geq 0)$ une suite de nombres réels positifs, et $(U_n ; n \geq 0)$, $(V_n ; n \geq 0)$, $(x_n ; n \geq 1)$ trois suites définies par :

$$U_o = a_o \ , \ U_1 = a_o a_1 + 1 \ , \ U_n = a_n U_{n-1} + U_{n-2} \quad ; \quad n \geq 2 \ ,$$

$$V_o = 1 \ , \ V_1 = a_1 \ , \ V_n = a_n V_{n-1} + V_{n-2} \quad ; \quad n \geq 2 \ , \text{ et}$$

$$x_n = a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad , \quad n \geq 1$$

(on dit que x_n est une fraction continue). On a .

1. $$x_n = \frac{U_n}{V_n} \quad ; \quad x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{V_n V_{n-1}} \quad ; \quad x_n - x_{n-2} = \frac{(-1)^n . a_n}{V_n V_{n-2}} \quad .$$

2. La suite $(x_{2n} ; n \geq 1)$ (resp. $(x_{2n+1} ; n \geq 0)$) est croissante (resp. décroissante), et pour $n \geq 1$ $x_{2n} \leq x_{2n+1}$.

Remarquons que lorsque n tend vers l'infini, la persistance q_n^i devient une fraction continue infinie.

Notons x_n la fraction continue définie par la suite (a_n^i) , avec

$$a_{2h}^i = \alpha^i (1-\alpha)^{1-i} \quad \text{et} \quad a_{2h+1}^i = \frac{\alpha^i (1-\alpha)^{1-i}}{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)} \quad ; \quad h \geq 0 \ .$$

On a alors pour $n \geq 1$

$$q_{2n}^{i}(\theta) = \frac{\alpha(1-\alpha).(1-\beta+\beta^2)\,U_{2n-1} + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\,U_{2n-2}}{\alpha(1-\alpha)\;(1-\beta+\beta^2)\,V_{2n-1} + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\,V_{2n-2}} ,$$

et

$$q_{2n+1}^{i}(\theta) = \frac{(1-\beta+\beta^2).U_{2n} + \beta(1-\beta)\,\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\,U_{2n-1}}{(1-\beta+\beta^2)\,V_{2n} + \beta(1-\beta)\,\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\,V_{2n-1}} ,$$

où U_n , V_n sont définis dans le lemme 4. En vertu de ce lemme, nous pouvons écrire

$$q_{2n}^{i}(\theta) = \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2).\,x_{2n-1} + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\,.\,x_{2n-2}.\;\dfrac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}}}{\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2) + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\,.\;\dfrac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}}} ,$$

$$q_{2n+1}^{i}(\theta) = \frac{(1-\beta+\beta^2)\,x_{2n} + \beta(1-\beta)\;\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i.x_{2n-1}\;\dfrac{V_{2n-1}}{V_{2n}}}{(1-\beta+\beta^2) + \beta(1-\beta)\;\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\;.\;\dfrac{V_{2n-1}}{V_{2n}}} .$$

On montre maintenant que

$$x_{2n-2} < q_{2n}^{i}(\theta) < x_{2n} \quad , \quad x_{2n+1} < q_{2n+1}^{i}(\theta) < x_{2n-1} \;\; ; \; n \geq 1 \; .$$

Les inégalités $x_{2n-2} < q_{2n}^{i}(\theta)$ et $q_{2n+1}^{i}(\theta) < x_{2n-1}$ sont immédiates ; les deux autres se démontrent de la façon suivante :

$$x_{2n}-q_{2n}^{i}(\theta) = \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2)(x_{2n}-x_{2n-1}) + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\;\dfrac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}}\;.(x_{2n}-x_{2n-2})}{\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2) + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i\;\dfrac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}}}$$

$$= \frac{\dfrac{-\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2)}{V_{2n}\, V_{2n-1}} + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i \cdot \dfrac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}} \quad \dfrac{\alpha^i(1-\alpha)^i}{V_{2n}\, V_{2n-2}}}{\alpha(1-\alpha)\ (1-\beta+\beta^2) + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i \ \dfrac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}}}$$

$$= \beta\alpha(1-\alpha)(1-\beta) \ / \ \{\alpha(1-\alpha)(1-\beta+\beta^2) + \alpha^{1-i}(1-\alpha)^i \frac{V_{2n-2}}{V_{2n-1}}\}. V_{2n}\, V_{2n-1}$$

ce qui assure que $x_{2n} > q^i_{2n}(\theta)$.

De la meme manière, on montre que $x_{2n+1} < q^i_{2n+1}(\theta)$.

Ces inégalités traduisent le fait que les suites $(q^i_{2n}(\theta) \ ; \ n \geq 1)$ et $(q^i_{2n+1} \ ; \ n \geq 0)$ sont respectivement croissantes et décroissantes et que de plus pour $n \geq 1$, $q^i_{2n}(\theta) < q^i_{2n+1}(\theta)$.

La suite $(q^i_n \ ; \ n \geq 1)$ est alors convergente, et sa limite ℓ , est la racine dans $[0,1]$ de l'équation :

$$\ell^2 - \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}\, \ell - \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta) = 0 \ .$$

On constate que

$$\ell = \lambda_{1,i}(\theta) \ .$$

La persistance oscille alternativement autour de la valeur limite $\lambda_{1,i}(\theta)$, l'amplitude des oscillations décroît vers 0 quand n tend vers l'infini.

Etudions maintenant la loi de deux temps de séjours consécutifs.

Notons $p^{i,1-i}(\theta) = (p^{i,1-i}_{n,m}(\theta) \ ; \ n,m \geq 1)$; $i \in \{0,1\}$, la loi de la durée de deux temps de séjours consécutifs dans les états i et $1-i$ respectivement, i.e

$$p^{i,1-i}_{n,m}(\theta) = P^{\theta}\left[\, D^{i}_{1} = n,\ D^{1-i}_{1} = m \,/\, T^{i}_{1} = 1 \,\right]$$

$$= P^{\theta}\left[\, X_1 = i, \ldots, X_n = i,\ X_{n+1} = 1-i, \ldots, X_{n+m} = 1-i,\ X_{n+m+1} = i / X_o = 1-i, X_1 = i \,\right]$$

On a le résultat suivant :

Proposition 5.

Pour $n \geq 1$, $m = 1$

$$p^{i,1-i}_{n,1}(\theta) = (\alpha(1-\alpha) - C_{\theta}(1))^{-1} . \left[C^{i}_{1}(\theta) . \lambda^{n-1}_{1,i}(\theta) . (1-\lambda_{1,i}(\theta)) . (\alpha^{i}(1-\alpha)^{1-i} - \lambda^{2}_{1,i}(\theta)) \right.$$

$$\left. + C^{i}_{2}(\theta) . \lambda^{n-1}_{2,i}(\theta) . (1-\lambda_{2,i}(\theta)) . (\alpha^{i}(1-\alpha)^{1-i} - \lambda^{2}_{2,i}(\theta)) \right] ,$$

et pour $n \geq 1$, $m \geq 2$

$$(12) \quad \begin{aligned} p^{i,1-i}_{n,m}(\theta) = {} & (\alpha(1-\alpha) - C_{\theta}(1))^{-1} . \left[Q^{1-i}_{m-2}(\theta) \left(Q^{i}_{n+1}(\theta) - Q^{i}_{n-1}(\theta) \right) + \right. \\ & \left. + Q^{1-i}_{m-1}(\theta) \times (2Q^{i}_{n-1}(\theta) - Q^{i}_{n}(\theta) - Q^{i}_{n+1}(\theta)) + Q^{1-i}_{m}(\theta)(Q^{i}_{n}(\theta) - Q^{i}_{n-1}(\theta)) \right] \end{aligned}$$

où les constantes $C^{i}_{1}(\theta)$, $C^{i}_{2}(\theta)$, $\lambda_{1,i}(\theta)$, $\lambda_{2,i}(\theta)$ sont données par (10), et les quantités $Q^{j}_{k}(\theta)$; $j \in \{0,1\}$, $k \geq 1$, par (9).

Démonstration.

Dans le cas $n \geq 1$ et $m = 1$, le résultat se déduit immédiatement de la relation (9) , en remarquant que :

$$p^{i,1-i}_{n,1}(\theta) = \{P^{\theta}[X_{n+2}=i].(Q^{i}_{n-1}(\theta)-Q^{i}_{n}(\theta)) - Q^{i}_{n+1}(\theta) + Q^{i}_{n+2}(\theta)\}/(\alpha(1-\alpha)-C_{\theta}(1)) .$$

Pour $n \geq 1$ et $m \geq 2$, on a

$$p^{i,1-i}_{n,m}(\theta) = P^{\theta}[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,X_{n+1}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i]/\alpha(1-\alpha)-C_{\theta}(1),$$

et

$$P^{\theta}[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,\ X_{n+1}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,\ X_{n+m+1}=i]$$

$$=\beta.P^{\theta}[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,\ Y_{n+1}=1-i,X_{n+2}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+2}=i/V_{n+1}=1]$$

$$+(1-\beta).P^{\theta}[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,Y_n=1-i,X_{n+2}=i-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i/V_{n+1}=0].$$

Les événements $\{X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i\}$, $\{Y_{n+1}=1-i,X_{n+2}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,$ $X_{n+m+1}=i\}$ et $\{V_{n+1}=1\}$ sont indépendants ; il en est de même des événements $\{V_{n+1}=0\}$, $\{X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,Y_n=1-i\}$ et $\{X_{n+2}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i\ ,\ X_{n+m+1}=i\}$. Alors, compte tenu de la relation (2) et de sa symétrie

$$\beta.P^{\theta}[Y_{n+1}=1-i\ ,\ X_{n+2}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,\ X_{n+m+1}=i]$$

$$= P^{\theta}[X_{n+1}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i]-(1-\beta)\alpha^{1-i}(1-\alpha)^{i}\times$$

$$\times\ P^{\theta}[X_{n+2}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i]\ ,$$

la proposition en résulte. ∎

Observons que $p^{i,1-i}_{n,m}(\theta)$, pour $n \geq 1$, $m \geq 2$, peut s'écrire en utilisant la relation (9) sous la forme :

$$p^{i,1-i}_{n,m}(\theta) = (\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))^{-1} . \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} C^{1-i}_\ell(\theta).\lambda^{m-2}_{\ell,1-i}(\theta)\{C^i_k(\theta).\lambda^{n-1}_{k,i}(\theta).(1-\lambda_{k,i}(\theta)).$$

$$.[(2+\lambda_{k,i}(\theta)).\lambda_{\ell,1-i}(\theta) - (1+\lambda_{k,i}(\theta)+\lambda^3_{\ell,1-i}(\theta))]\} .$$

Notons $\rho^{i,1-i}_1(\theta)$ la covariance conditionnelle de D^i_1 et D^{1-i}_1 sachant $T^i_1 = 1$. On déduit immédiatement de la proposition 5 :

Corollaire 3.

$$\rho^{i,1-i}_1(\theta) = (\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))^{-1} . \left\{ \sum_{k=1}^{2} \frac{C^i_k(\theta).(\alpha^i(1-\alpha)^{1-i} - \lambda^2_{k,i}(\theta))}{(1-\lambda_{k,i}(\theta))} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} C^{1-i}_\ell(\theta) \frac{(2-\lambda_{\ell,1-i}(\theta))}{(1-\lambda_{\ell,1-i}(\theta))^2} . \left[\frac{C^i_k(\theta)}{(1-\lambda_{k,i}(\theta))} ((2+\lambda_{k,i}(\theta)).\lambda_{\ell,1-i}(\theta) - 1 - \lambda_{k,i}(\theta) - \lambda^3_{\ell,1-i}(\theta)) \right] \right\}$$

$$- m^i_1(\theta).\ m^{1-i}_1(\theta)$$

où les constantes $C^j_1(\theta)$, $C^j_2(\theta)$, $\lambda_{1,j}(\theta)$, $\lambda_{2,j}(\theta)$; $j \in \{0,1\}$, sont données par (10) , et $m^o_1(\theta)$, $m^1_1(\theta)$ par (11).

II.2. Etude statistique.

On se place sous l'hypothèse de stationnarité. Comme la loi d'un processus DMA(1 ; α,β) ne dépend que de α et $\beta(1-\beta)$ on ne s'intéresse dans un premier temps qu'à l'estimation de fonctions de couple. Notons que $c = \beta(1-\beta)$ n'est autre que le coefficient de corrélation entre X_t et X_{t-1}, lequel est donc toujours positif et inférieur à $\frac{1}{4}$.

II.2.1. Estimation de $(\alpha, \beta(1-\beta))$.

Envisageons d'abord l'estimation du paramètre $\alpha = P^{\theta}[X_t = 1] = E_{\theta}(X_t)$ et du paramètre $\lambda = \alpha\beta.(1-\alpha)(1-\beta) + \alpha^2 = E_{\theta}(X_t . X_{t-1})$. La méthode des moments conduit aux estimateurs sans biais

$$(11) \qquad \begin{cases} \bar{\alpha}_n = S_n^1/(n+1) \\ \bar{\lambda}_n = U_n/n \end{cases} .$$

On a le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 6.

L'estimateur $(\bar{\alpha}_n, \bar{\lambda}_n)$ de (α, λ) défini par (11) est presque sûrement convergent et asymptotiquement gaussien, la suite $\left(\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_n - \alpha_o \\ \bar{\lambda}_n - \lambda_o\end{pmatrix}, n \geq 1\right)$ convergeant en loi, relativement à P^{θ_o}, vers un vecteur aléatoire gaussien centré, de matrice de covariance

$$\Lambda = \alpha_o(1-\alpha_o) . \begin{pmatrix} 1+2\beta_o - 2\beta_o^2 & 2\alpha_o + 2\beta_o - 2\beta_o^2 \\ 2\alpha_o + 2\beta_o - 2\beta_o^2 & \alpha_o + c_o + 2\alpha_o c_o + 2\alpha_o^3 + 6\alpha_o^2 c_o + 2\alpha_o c_o^2(1-\alpha_o) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Pour $\theta \in]0,1[^2$, le processus $(X_t\ ; t \geq 0)$ étant 1-indépendant est φ-mélangeant avec $\varphi(n) = 0$, $n \geq 1$.
Il est donc transitif ce qui assure la convergence de l'estimateur (α_n, λ_n) .
Les théorèmes 7.7 et 20.1 de Billingsley (1968), appliqués au processus vectoriel $\left(\begin{pmatrix} Z_t^1 \\ Z_t^2 \end{pmatrix}\right)$; $t \geq 1$, où $Z_t^j = \begin{cases} X_t - \alpha_o & \text{si } j = 1 \\ X_t X_{t-1} - \lambda_o & \text{si } j = 2 \end{cases}$, assurent

la normalité asymptotique de ces estimateurs. La matrice de covariance $\Lambda = (\sigma_{ij}^{(\theta)})$; $i,j = 1,2$, se déduit facilement à l'aide de

$$\sigma_{ij}(\theta) = \operatorname{cov}(Z_1^i, Z_1^j) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\operatorname{cov}(Z_1^i, Z_n^j) + \operatorname{cov}(Z_n^i, Z_1^j)\} \ ; \ i,j = 1,2 \ . \ \blacksquare$$

La relation $c = \dfrac{\lambda - \alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}$ conduit à l'estimateur

$$\bar{c}_n = (\bar{\lambda}_n - \bar{\alpha}_n^2) / \bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)$$

de c . On déduit alors de la proposition 6

Corollaire 3.

L'estimateur $(\bar{\alpha}_n, \bar{c}_n)$ de (α, c) est convergent presque sûrement et asymptotiquement gaussien, le vecteur aléatoire $\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_o \\ \bar{c}_n - c_o \end{pmatrix}$ convergeant en loi, relativement à P^{θ_o} vers un vecteur aléatoire gaussien centré et de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_o(1-\alpha_o)(1+2c_o) & 2(\alpha_o+c_o) - (1+2c_o)(c_o+2\alpha_o-2\alpha_o c_o) \\ 2(\alpha_o+c_o)-(1+2c_o)(c_o+2\alpha_o-2\alpha_o c_o) & \alpha_o+c_o-4\alpha_o c_o+8\alpha_o c_o^2-4\alpha_o^2-2c_o^2+2\alpha_o^3-2\alpha_o^2c_o^2 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Il suffit d'écrire

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_o \\ \bar{c}_n - c_o \end{pmatrix} = B_n \cdot \begin{pmatrix} \alpha_n - \alpha_o \\ \lambda_n - \lambda_o \end{pmatrix}$$

où

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{(\lambda-\alpha_o^2)\ (\bar{\alpha}_n+\alpha_o-1)-\alpha_o(1-\alpha_o)(\bar{\alpha}_n+\alpha_o)}{\alpha_o\ \bar{\alpha}_n\ (1-\alpha_o)\ (1-\bar{\alpha}_n)} & \dfrac{1}{\bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)} \end{pmatrix}$$

et d'appliquer la Proposition 6. ∎

Pour tenir compte de ce que le coefficient c appartient à l'intervalle $]0, \frac{1}{4}[$, il est raisonnable de substituer à l'estimateur $\bar{c}_n$ l'estimateur $\tilde{c}_n = \bar{c}_n \cdot \mathbb{1}_{]0,1/4[}(\bar{c}_n)$. Il est clair que les propriétés asymptotiques de $(\bar{\alpha}_n, \tilde{c}_n)$ sont les mêmes que celles de $(\bar{\alpha}_n, \bar{c}_n)$.

II.2.2. Estimation de (α,β) .

Comme la loi d'un processus DMA$(1;\alpha,\beta)$ est la même que celle d'un processus DMA$(1;\alpha,(1-\beta))$ on peut restreindre le domaine de variation du paramètre β à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$ et envisager d'estimer

$(\alpha,\beta) \in]0,1[X]0,\frac{1}{2}]$ au vu de l'observation d'une trajectoire du processus. On est bien sûr amené à choisir comme estimation $\tilde{\beta}_n$ de β celle des solutions de l'équation

$$\beta(1-\beta) = \tilde{c}_n$$

qui appartient à $]0,\frac{1}{2}]$ à savoir

$$\tilde{\beta}_n = \frac{1-(1-4\,\tilde{c}_n)^{1/2}}{2} \quad .$$

On déduit alors du corollaire 3

Corollaire 4.

L'estimateur $(\overline{\alpha}_n, \overline{\beta}_n)$ de (α,β) est convergent presque sûrement, et asymptotiquement gaussien, le vecteur aléatoire $\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{\alpha}_n - \alpha_o \\ \tilde{\beta}_n - \beta_o \end{pmatrix}$ converge en loi, relativement à P^{θ_o}, vers un vecteur aléatoire gaussien centré et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha_o(1-\alpha_o)\,(1+2\,c_o) & \dfrac{2(c_o+\alpha)-(1+2c_o)(c_o+2\alpha_o-2\alpha_o c_o)}{\sqrt{1-4c_o}} \\ \dfrac{2(\alpha_o+c_o)-(1+2c_o)(c_o+2\alpha_o-2\alpha c_o)}{\sqrt{1-4c_o}} & \dfrac{\alpha_o+c_o-4\alpha_o c_o+8\alpha_o c_o^2-4\alpha_o^2-2c_o^2+2\alpha_o^3-2\alpha_o^2 c_o^2}{(1-4c_o)} \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Il suffit d'écrire

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n - \alpha_o \\ \\ \tilde{\beta}_n - \beta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{1-4\tilde{c}_n} + \sqrt{1-4c_o}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n - \alpha_o \\ \\ \tilde{c}_n - c_o \end{pmatrix}$$

et d'appliquer le corollaire 3. ■

CHAPITRE V

SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES MIXTES AUTOREGRESSIVES-MOYENNES MOBILES D'ORDRE (1,1).

De même qu'ils ont proposé pour les processus à valeurs discrètes des analogues des modèles classiques autorégressifs et moyennes mobiles pour les processus à valeurs réelles, Jacobs et Lewis (1978) ont défini les modèles mixtes correspondants. Nous étudions ici les modèles autorégressifs-moyennes mobiles pour les séries chronologiques binaires dans le cas de l'ordre (1,1). Buishand (1977) a utilisé de tels modèles dans le cadre d'une application

Un modèle autorégressif-moyenne mobile d'ordre (1,1) est destiné à représenter un phénomène dont le processus des états $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est construit pour $t \geq 1$, à partir d'une série chronologique $(A_t ; t \in \mathbb{N})$ autorégressive d'ordre 1 basée sur une suite $(Y_t ; t \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, équidistribuées (cf. ch.IV. § I), de la manière suivante :

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \text{avec probabilité } \beta \\ A_{t-1} & \text{avec probabilité } 1-\beta . \end{cases}$$

De façon précise on pose :

<u>Définition</u>.

Une série chronologique binaire $(X_t ; t \in \mathbb{N})$ est dite autorégressive moyenne mobile d'ordre $(1,1)$, de paramètres $(p,p' ; \alpha,\beta,\gamma) \in [0,1]^5$, si X_o est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p', et si pour $t \in \mathbb{N}^*$

$$X_t = V_t.Y_t + (1-V_t).A_{t-1}$$

où $(A_t ; t \geq 0)$ est une série chronologique autorégressive d'ordre 1 de paramètres (p,α,γ) définie pour $t \geq 1$ par

$$A_t = U_t.A_{t-1} + (1-U_t).Y_t$$

et $(Y_t ; t \geq 1)$, $(V_t ; t \geq 1)$, $(U_t ; t \geq 1)$ sont trois suites indépendantes de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, équidistribuées de paramètres respectifs $\alpha = P[Y_t = 1]$, $\beta = P[V_t = 1]$, $\gamma = P[U_t = 1]$, les variables aléatoires $((X_o, A_o), (Y_t, U_t, V_t), t \in \mathbb{N}^*)$ étant indépendantes.

Notons que

- lorsque $\beta = 0$, $(X_{t+1} ; t \in \mathbb{N})$ est une série chronologique autorégressive d'ordre 1 de paramètre (p, α, γ)

- lorsque $\gamma = 0$, $(X_{t+1} ; t \in \mathbb{N})$ est une série chronologique moyenne mobile d'ordre 1 de paramètre $(\alpha\beta + p(1-\beta), \alpha, \beta)$

- lorsque $\beta = \gamma = 0$, $(X_{t+1} ; t \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre α.

I. ETUDE PROBABILISTE.

I.1. Lois marginales de dimensions finies.

On montre facilement le résultat suivant :

Lemme 1.

Le processus $\left(\begin{pmatrix} X_t \\ A_t \end{pmatrix} ; t \geq 0\right)$ est une chaîne de Markov homogène d'ordre 1 , dont les probabilités de transition s'écrivent :

$$P_{\binom{i}{j},\binom{k}{\ell}} = P[X_{t+1} = k,\ A_{t+1} = \ell / X_t = i,\ A_t = j]$$

$$= \beta.\gamma.\alpha^k.(1-\alpha)^{1-k}.\delta_{j\ell} + \beta(1-\gamma)\alpha^k.(1-\alpha)^{1-k}.\delta_{k\ell} + \gamma(1-\beta)\delta_{jk}.\delta_{j\ell}$$

$$+ (1-\beta)(1-\gamma).\alpha^\ell.(1-\alpha)^{1-\ell}.\delta_{jk} \quad ; \quad (i,j,k,\ell) \in \{0,1\}^4 \ ,\ t \geq 0 \ .$$

Notons que $P_{\binom{i}{j},\binom{k}{\ell}}$ ne dépend pas de i , et que la série chronologique $(X_t \ ; \ t \geq 0)$ n'est pas markovienne en général.

Le caractère markovien de $\left(\binom{X_t}{A_t} ; t \geq 0\right)$ permet d'écrire la loi de $(X_o, \ldots, X_n)$ sous la forme :

$$P[X_o = x_o, \ldots, X_n = x_n] = (P[X_o = x_o, A_o = 0]\ ,\ P[X_o = x_o, A_o = 1]).\,Q(x_1)\ldots Q(x_n).\binom{1}{1}\ ,$$

$(x_o, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$, où $Q(x)$, $x \in \{0,1\}$, est la matrice 2×2 s'écrivant :

$$Q(x) = \begin{pmatrix} P[X_{n+1} = x,\ A_{n+1} = 0 / A_n = 0] & P[X_{n+1} = x,\ A_{n+1} = 1 / A_n = 0] \\ P[X_{n+1} = x,\ A_{n+1} = 0 / A_n = 1] & P[X_{n+1} = x,\ A_{n+1} = 1 / A_n = 1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)\delta_{ox} + (\beta\gamma + \beta(1-\gamma)\delta_{ox})\alpha^x.(1-\alpha)^{1-x} & \alpha(1-\beta)(1-\gamma)\delta_{ox} + \beta(1-\gamma)\alpha^x(1-\alpha)^{1-x}\delta_{1x} \\ (1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)\delta_{1x} + \beta(1-\gamma)\alpha^x(1-\alpha)^{1-x}\delta_{ox} & (1-\beta)(\alpha+\gamma-\alpha\gamma)\delta_{1x} + (\beta\gamma + \beta(1-\gamma)\delta_{1x})\alpha^x(1-\alpha)^{1-x} \end{pmatrix}$$

Afin de mener l'étude probabiliste d'une telle série chronologique, il est plus commode de disposer de la forme récurrente suivante de la fonction de vraisemblance :

Proposition 1

On a pour $(x_o,x_1) \in \{0,1\}^2$:

$$P[X_o=x_o] = p'^{x_o}.(1-p')^{1-x_o} ,$$

$$P[X_o=x_o,X_1=x_1] = \beta.p'^{x_o}(1-p')^{1-x_o}.\alpha^{x_1}.(1-\alpha)^{1-x_1}+(1-\beta).P[X_o=x_o,A_o=x_1] ;$$

et pour $n \geq 2$, et tout $(x_o,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$, la relation de récurrence :

$$(1)\quad P[X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n]=H_1(x_{n-1},x_n).P[X_o=x_o,\ldots,X_{n-1}=x_{n-1}] + H_2(x_{n-1},x_n).P[X_o=x_o,\ldots,X_{n-2}=x_{n-2}] ,$$

où $H_1(x_{n-1},x_n) = (1-\gamma+\beta\gamma)\alpha^{x_n}(1-\alpha)^{1-x_n}+(-1)^{(x_n+x_{n-1})}\beta\gamma.\alpha^{x_{n-1}}(1-\alpha)^{1-x_{n-1}} + \gamma(1-\beta)\,\delta_{x_n,x_{n-1}}$;

$$H_2(x_{n-1},x_n)=(-1)^{(x_n+x_{n-1})}.\{\beta(1-\beta)[\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)-\gamma\alpha^{x_{n-1}}(1-\alpha)^{1-x_{n-1}}] - \beta^2\gamma\alpha^{2x_{n-1}}(1-\alpha)^{2(1-x_{n-1})}\} .$$

La démonstration étant analogue à celle du lemme 1 du chapitre IV.§II.1. est omise.

Notons que pour $t \geq 1$

$$P[X_t = 1] = \alpha\beta + (1-\beta).P[A_{t-1}=1] ,$$

on déduit alors facilement de la Proposition 1 :

Proposition 2

Une série chronologique autorégressive, moyenne mobile d'ordre (1,1), de paramètres $(p,p',\alpha,\beta,\gamma) \in]0,1[^5$, est stationnaire si et seulement si $p = p' = \alpha$ et $P[X_o = 1, A_o = 1] = \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)$, (auquel cas nous dirons que la série chronologique mixte est stationnaire, de paramètre $\theta = (\alpha,\beta,\gamma) \in]0,1[^3$, et noterons $(X_t, t \in \mathbb{N}) \sim$ DARMA $((1,1),\theta)$ (Discrete Auto-Regressive Moving-Average)). Alors, si

$$P_n^\theta(x_o,\dots,x_n) = P^\theta[X_t = x_o,\dots,X_{t+n} = x_n],\quad n \geq 1,\ (x_o,\dots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1},$$

$t \geq 0$, on a :

$$P_o^\theta(1) = \alpha \quad ; \quad P_o^\theta(0) = 1-\alpha,$$

$$P_1^\theta(x_o,x_1) = [1-(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)]\,\alpha^{(x_o+x_1)}(1-\alpha)^{2-x_o-x_1} + (1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)\delta_{x_o,x_1}\,\alpha^{x_o}(1-\alpha)^{1-x_o}$$

et pour $n \geq 2$, la relation de récurrence

$$(2)\quad P_n^\theta(x_o,\dots,x_n) = H_1(x_{n-1},x_n;\theta)\,P_{n-1}^\theta(x_o,\dots,x_{n-1}) + H_2(x_{n-1},x_n;\theta)\,P_{n-2}^\theta(x_o,\dots,x_{n-2})$$

où

$$(3)\quad \begin{cases} H_1(x,x;\theta) = \alpha^x.(1-\alpha)^{1-x}\,(1-\gamma+2\beta\gamma) + \gamma(1-\beta), \\ H_2(x,x;\theta) = \alpha\beta.(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) - \beta\gamma\alpha^x(1-\alpha)^{1-x}.(1-\beta+\beta\alpha^x(1-\alpha)^{1-x}) ; \\ H_1(1-x,x;\theta) = H_1(x,x;\theta) - \gamma \ ;\ H_2(x,1-x;\theta) = -H_2(x,x;\theta),\quad x \in \{0,1\}. \end{cases}$$

On a aussi

Lemme 2.

La fonction de covariance d'une série chronologique DARMA $((1,1),\theta)$, $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in]0,1[^3$, s'écrit :

$$C_\theta(h) = \begin{cases} \alpha(1-\alpha) & \text{si } h = 0 \\ \alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma).\gamma^{|h|-1} & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Pour $t \geq 0$, $h \geq 1$, conditionnellement à A_t, les variables X_t et X_{t+h} sont indépendantes. Alors

$$P^\theta[X_t = 1, X_{t+h} = 1] = \sum_{j=0}^{1} P^\theta[X_t = 1/A_t = j].P^\theta[X_{t+h} = 1/A_t = j].P^\theta[A_t = j]$$

$$= \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\beta).(\beta+\gamma-2\beta\gamma)\gamma^{h-1}. \blacksquare$$

Cette fonction de covariance est du type de celle d'un processus autorégressif-moyenne mobile d'ordre $(1,1)$ classique. En fait une série chronologique DARMA $((1,1); \alpha, \beta, \gamma)$ admet une représentation autorégressive moyenne mobile usuelle que l'on va préciser. On a le résultat suivant :

Proposition 3.

Une série chronologique $(X_t\ ; t \geq 0) \sim$ DARMA $((1,1),(\alpha,\beta,\gamma))$ admet la représentation markovienne :

$$(4)\qquad \begin{cases} X_t = (1,0).Z_t \ ; \ t \geq 0 \\ \\ Z_t = A.Z_{t-1} + W_t \ ; \ t \geq 1 \end{cases}$$

où $Z_t = \begin{bmatrix} X_t \\ A_t \end{bmatrix}$, $t \geq 0$, A est la matrice 2×2 s'écrivant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$,

et $(W_t, t \geq 1)$ une suite de vecteurs aléatoires deux à deux non corrélés, de moyenne $m = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \alpha(1-\gamma) \end{pmatrix}$, et de matrice de covariance

$$G = \alpha(1-\alpha).\begin{pmatrix} \beta(2-\beta) & \beta(1-\gamma) \\ \beta(1-\gamma) & 1-\gamma^2 \end{pmatrix},$$

telle que pour tout $t \geq 1$, W_t est non corrélé avec les variables Z_s ; $s < t$.

<u>Démonstration</u>.

Le processus $(Z_t, t \geq 0)$ est markovien d'ordre 1 stationnaire, et de fonction de covariance

$$R(n) = \alpha(1-\alpha).\gamma^{n-1}.\begin{pmatrix} (1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma) & \gamma(\beta+\gamma-2\beta\gamma) \\ (1-\beta) & \gamma \end{pmatrix}, \quad n > 0,$$

et

$$R(0) = \alpha(1-\alpha).\begin{pmatrix} 1 & \beta+\gamma-2\beta\gamma \\ \beta+\gamma-2\beta\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $A = R(-1).R^{-1}(0)$ et $G = R(0) - A.R(1)$ (G est définie positive), la fonction de covariance $R(.)$ satisfait les équations de Yule-Walker :

$$(5)\qquad \begin{cases} A.R(1-k) = R(-k) & , \; k = 1,2,\ldots \\ A.R(1) + G = R(0). \end{cases}$$

Définissons alors la suite $(W_t \, , \, t \geq 1)$ de vecteurs aléatoires, en posant pour $t \geq 1$:

$$W_t = Z_t - A.Z_{t-1} \; .$$

On a bien sûr la représentation (3) de $(X_t \; ; \; t \geq 0)$. Il reste à vérifier les propriétés de la suite $(W_t \; ; \; t \geq 1)$.

- Les variables W_t sont deux à deux non corrélées : en effet on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(W_t \, , W_{t+h}) &= R(h) - R(h-1)\,{}^tA + A\,[R(h)\,{}^tA - R(h+1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après (5).

- W_t est non corrélée avec les variables $\{Z_s : s < t\}$, $t \geq 1$:

en effet soit $a_o, \ldots, a_{t-1}$ des nombres réels ; on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(W_t \, , \sum_{s=0}^{t-1} a_s.Z_s) &= \sum_{s=0}^{t-1} a_s \, . \, \mathrm{Cov}(W_t \, , Z_s) \\ &= \sum_{s=0}^{t-1} a_s \, . \, \{{}^tR(t-s) - A.R(1-(t-s))\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

en vertu de (5).

Enfin, utilisant la relation (3), on déduit facilement la moyenne et la variance de la variable W_t . ■

Remarques :

(a) La loi de la variable W_t est donnée par :

valeurs de W_t	probabilité	valeurs de W_t	probabilité
$(-(1-\beta),-\gamma)$	$\alpha\beta(1-\alpha)(1-\gamma)$	$(\beta,1-\gamma)$	$\alpha^2+\alpha\gamma(1-\alpha)(1-\beta)$
$(-(1-\beta),1-\gamma)$	$\alpha\beta\gamma(1-\alpha)$	$(0,0)$	$(1-\alpha)^2+\alpha\gamma(1-\alpha)(1-\beta)$
$(\beta,-\gamma)$	$\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$	$(0,1)$	$\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$(1,0)$	$\alpha\beta\gamma(1-\alpha)$	$(1,1)$	$\alpha\beta(1-\alpha)(1-\gamma)$

(b) La suite des variables aléatoires $((0,1)W_t\ ;\ t\geq 1)$ coïncide avec la suite des variables $(\varepsilon_t\ ;\ t\geq 1)$ dont il est question au paragraphe I.1 du chapitre IV, dans la représentation autorégressive de la série chronologique DAR$(1\ ;\ \alpha,\gamma)$ $(A_t\ ;\ t\geq 0)$.

(c) La Proposition 3 conduit à la représentation

$$X_{t+1} = \gamma X_t + (-\gamma,1-\beta)W_t + (1,0)W_{t+1}$$

d'une série chronologique $(X_t\ ;\ t\in\mathbb{N}) \sim$ DARMA $((1,1);(\alpha,\beta,\gamma)),(\alpha,\beta,\gamma)\in\,]0,1[^3$. Compte tenu des propriétés de la suite $(W_t\ ;\ t\geq 1)$ il est facile de voir que le processus $((-\gamma,1-\beta)W_t+(1,0)W_{t+1}\ ;\ t\geq 1)$ a une structure du second-ordre de moyenne mobile d'ordre 1 et admet donc une représentation MA(1). On en déduit une représentation ARMA(1,1) de $(X_t\ ;\ t\in\mathbb{N})$.

La relation de récurrence (2) permet de mener une étude assez complète d'un processus DARMA $((1,1);\alpha,\beta,\gamma)$ du point de vue des lois des sommes partielles, des lois des temps de séjour et des persistances.

I.2. Lois des sommes partielles.

On dispose d'un algorithme pour calculer la loi de la statistique S_n^1, dans une série chronologique DARMA $((1,1);\theta)$, $\theta=(\alpha,\beta,\gamma)\in\,]0,1[^3$:

Lemme 3.

On a

- pour $n = 0$

$$P^{\theta}[S_o^1 = 1] = \alpha \quad ; \quad P^{\theta}[S_o^1 = 0] = 1-\alpha \quad ,$$

- pour $n = 1$

$$P^{\theta}[S_1^1 = 0] = (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma) \quad ,$$

$$P^{\theta}[S_1^1 = 1] = 2\alpha(1-\alpha)[1-(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)] \quad , \text{ et}$$

$$P^{\theta}[S_1^1 = 2] = \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma) \quad ,$$

- pour $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n+1$

$$\begin{aligned}(6)\ P^{\theta}[S_n^1=m] = {} & H_1(1,1;\theta).P^{\theta}[S_{n-1}^1=m-1]+H_2(1,1;\theta).\{P^{\theta}[S_{n-2}^1=m-2]-P^{\theta}[S_{n-2}^1=m-1]\\ & + H_1(0,0;\theta).P^{\theta}[S_{n-1}^1=m]+H_2(0,0;\theta)\{P^{\theta}[S_{n-2}^1=m]-P^{\theta}[S_{n-2}^1=m-1]\}\\ & - \gamma.P^{\theta}[S_{n-2}=m-1]\end{aligned}$$

où les $H_j(x,x;\theta)$, $j=1,2$, $x\in\{0,1\}$, sont données par la relation (3).

Démonstration.

Dans les cas $n=0$ et $n=1$ le résultat découle de la proposition 2. Pour $n \geq 2$, on peut écrire, en utilisant la relation de récurrence (2) et tenant compte de ce que

$$H_1(x,x;\theta) = \gamma + H_1(1-x,x;\theta) \quad \text{et} \quad H_2(x,x;\theta) = -H_2(x,1-x;\theta), \; x \in \{0,1\} :$$

$$\begin{aligned} P^\theta[S_n^1 = m, X_n = 1] = {} & H_1(1,1;\theta).P^\theta[S_{n-1}^1 = m-1] + H_2(1,1;\theta)P^\theta[S_{n-2}^1 = m-2] \\ & - H_2(0,0;\theta)\, P^\theta[S_{n-2}^1 = m-1] - \gamma.P^\theta[S_{n-1}^1 = m, X_{n-1} = 1] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P^\theta[S_n^1 = m, X_n = 0] = {} & H_1(0,0;\theta)\, P^\theta[S_{n-1}^1 = m] + H_2(0,0;\theta)\, P[S_{n-2}^1 = m] \\ & - H_2(1,1;\theta)\, P^\theta[S_{n-2}^1 = m-1] - \gamma P^\theta[S_{n-1}^1 = m, X_{n-1} = 1] \; . \end{aligned}$$

Comme

$$P^\theta[S_{n-1}^1 = m-1, X_{n-1} = 0] = P^\theta[S_{n-2}^1 = m-1, X_{n-1} = 0] \; ,$$

$$P^\theta[S_{n-1}^1 = m \; , X_{n-1} = 1] = P^\theta[S_{n-2}^1 = m-1, X_{n-1} = 1] \; ,$$

et

$$P^\theta[S_n^1 = m] = P^\theta[S_n^1 = m, X_n = 1] + P^\theta[S_n^1 = m, X_n = 0] \; ,$$

la relation (5) en résulte. ∎

En particulier pour $n \geq 2$ et $m = (n+1)i$, $i \in \{0,1\}$, l'équation (5) devient

$$P^\theta[S_n^1 = (n+1)i] = H_1(i,i;\theta)P^\theta[S_{n-1}^1 = ni] + H_2(i,i;\theta)\, P^\theta[S_{n-2}^1 = (n-1)i] \; .$$

Alors, suivant les notations du chapitre IV, §II.1.2, posant $Q_n^i(\theta)=P^\theta[S_n^1=(n+1)i]$ on a :

Corollaire 1.

La suite $(Q_n^i(\theta)\,;\, n\geq 0)$, $i\in\{0,1\}$ satisfait

- pour $n = 0$ $\quad Q_o^i(\theta) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}$,
- pour $n = 1$ $\quad Q_1^i(\theta) = \alpha^{2i}.(1-\alpha)^{2(1-i)}+\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)$,
- pour $n\geq 2$, la relation de récurrence

$$Q_n^i(\theta) = H_1(i,i\,;\theta).\,Q_{n-1}^i(\theta) + H_2(i,i\,;\theta).\,Q_{n-2}^i(\theta) \tag{7}$$

où les $H_j(i,i\,;\theta)$; $j=1,2$, $i\in\{0,1\}$ sont données par la relation (3).

La relation (6) est une équation de récurrence linéaire à deux termes à coefficients constants ; la solution générale est de la forme :

$$Q_n^i(\theta) = C_1^i(\theta)\,.\,\lambda_{1,i}^n(\theta) + C_2^i(\theta).\,\lambda_{2,i}^n(\theta) \tag{8}$$

où $\lambda_{1,i}(\theta)$, $\lambda_{2,i}(\theta)$ sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - H_1(i,i\,;\theta)\,\lambda - H_2(i,i\,;\theta) = 0$$

et $C_1^i(\theta)$, $C_2^i(\theta)$ sont déterminées par les conditions

$$\begin{cases} C_1^i(\theta) + C_2^i(\theta) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i} \\ C_1^i(\theta).\lambda_{1,i}(\theta) + C_2^i(\theta)\,\lambda_{2,i}(\theta) = \alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + C_\theta(1)\,. \end{cases}$$

On trouve

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda_{1,i}(\theta) = \frac{1}{2}\ \{H_1(i,i;\ \theta) + (H_1^2(i,i;\theta) + 4\,H_2(i,i;\theta))^{1/2}\} \\[2ex] \lambda_{2,i}(\theta) = \frac{1}{2}\ \{H_1(i,i;\ \theta) - (H_1^2(i,i;\theta) + 4\,H_2(i,i;\theta))^{1/2}\} \\[2ex] C_1^i(\theta) = \dfrac{C_\theta(1) + \alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} - \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}\ .\ \lambda_{2,i}(\theta)}{\lambda_{1,i}(\theta) - \lambda_{2,i}(\theta)} \\[2ex] C_2^i(\theta) = \dfrac{\alpha^i(1-\alpha)^{1-i}\ \lambda_{1,i}(\theta) - C_\theta(1) - \alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)}}{\lambda_{1,i}(\theta) - \lambda_{2,i}(\theta)} \end{cases}$$

avec $C_\theta(1) = \alpha(1-\alpha)\ (1-\beta)\ (\beta+\gamma-2\beta\gamma)$.

Notons que le discriminant

$$H_1^2(x,x;\theta) + 4\,H_2(x,x;\theta) = (\gamma-\beta\gamma+(1-\gamma)\,\alpha^x(1-\alpha)^{1-x})^2 + 4\alpha\,\beta(1-\beta)(1-\beta)(1-\gamma)^2$$

est toujours positif et que $0 < |\lambda_{2,i}(\theta)| < \lambda_{1,i}(\theta) < 1$.

La relation (5) conduit immédiatement au résultat suivant concernant la fonction génératrice G_n^θ de la statistique S_n^1 :

Proposition 4.

Si $(X_t\,;\ t\in\mathbb{N}) \sim \mathrm{DARMA}((1,1);\ \theta)$, $\theta = (\alpha,\beta,\gamma) \in\,]0,1[^3$, alors

$$G_o^\theta(s) = 1-\alpha+\alpha s\ ;\ G_1^\theta(s) = (1+\alpha)^2 + C_\theta(1) + 2(\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))\,s + (\alpha^2 + C_\theta(1))\,s^2 ,$$

et pour $n \geq 2$

$$(10) \quad G_n^{\theta}(s) = (H_1(1,1;\theta).s + H_1(0,0;\theta)).G_{n-1}^{\theta}(s) + [H_2(1,1;\theta)s^2 - $$
$$- (H_2(0,0;\theta) + H_2(1,1;\theta)+\gamma)s + H_2(0,0;\theta)]\, G_{n-2}^{\theta}(s) .$$

La solution générale de l'équation (9) est de la forme :

$$G_n^{\theta}(s) = b_1(s;\theta).\mu_1^n(s;\theta) + b_2(s;\theta).\mu_2^n(s;\theta)$$

où $\mu_1(s;\theta)$, $\mu_2(s;\theta)$ sont les racines de l'équation

$$\mu^2 - (H_1(1,1;\theta)s + H_1(0,0;\theta)).\mu - \{H_2(1,1;\theta)s^2 - [H_2(0,0;\theta) + H_2(1,1;\theta)+\gamma]s + H_2(0,0;\theta)\} = 0$$

et $b_1(s;\theta)$, $b_2(s,\theta)$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1-\alpha+\alpha s \\ b_1.\mu_1(s;\theta) + b_2.\mu_2(s;\theta) = (1-\alpha)^2 + C_\theta(1) + 2(\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))s + (\alpha^2 + C_\theta(1))s^2 \end{cases} .$$

1.3. Lois des temps de séjour et persistances.

La loi $p^i(\theta) = (p_n^i(\theta) ; n \geq 1)$ des temps de séjour dans l'état i ; $i \in \{0,1\}$, se déduit facilement de la relation (7) ; on a de façon précise

$$p_n^i(\theta) = (\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))^{-1} . \{ Q_{n-1}^i(\theta) - 2Q_n^i(\theta) + Q_{n+1}^i(\theta) \}$$

$$(11) \qquad = (\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1))^{-1} . \{ C_1^i(\theta).\lambda_{1,i}^{n-1}(\theta)(1-\lambda_{1,i}(\theta))^2 +$$
$$+ C_2^i(\theta).\lambda_{2,i}^{n-1}(\theta).(1-\lambda_{2,i}(\theta))^2 \}$$

où les constantes $C_1^i(\theta)$, $C_2^i(\theta)$, $\lambda_{1,i}(\theta)$, $\lambda_{2,i}(\theta)$ sont données par (8). Les moments d'ordre 1 et 2 de cette loi , $m_j^i(\theta) = \sum_{k\geq 1} k^j . p_k^i(\theta)$, $j = 1,2$, sont donnés respectivement par

$$(12)\begin{cases} m_1^i(\theta) = (\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))^{-1}.(C_1^i(\theta).\lambda_{1,i}(\theta) + C_2^i.\lambda_{2,i}(\theta)) , \\ m_2^i(\theta) = (\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))^{-1}.\left\{\dfrac{C_1^i(\theta).\lambda_{1,i}(\theta).(1+\lambda_{1,i}(\theta))}{1-\lambda_{1,i}(\theta)} + \dfrac{C_2^i(\theta).\lambda_{2,i}(\theta)(1+\lambda_{2,i}(\theta))}{1-\lambda_{2,i}(\theta)}\right\} \end{cases}$$

Etudions maintenant les persistances.

Proposition 5.

La persistance au n-ème jour dans l'état i ; $i \in \{0,1\}$ satisfait la relation

$$(13) \qquad q_n^i(\theta) = H_1(i,i;\theta) + \frac{H_2(i,i;\theta)}{q_{n-1}^i(\theta)} \qquad ; n \geq 2$$

où

$$q_1^i(\theta) = H_1(i,i;\theta) + \frac{\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i.H_2(i,i;\theta)}{\alpha(1-\alpha) - C_\theta(1)} .$$

La suite $(q_n^i ; n \geq 1)$ converge vers $\lambda_{1,i}(\theta)$ donnée par (9), quand n tend vers l'infini. De plus si $\gamma < \alpha(1-\alpha)(1-\beta)/\{\alpha^i(1-\alpha)^{1-i}+\alpha(1-\alpha)(1-\beta)\}$ la suite $(q_{2n}^i, n \geq 1)$ (resp. $(q_{2n+1}^i ; n \geq 0)$) est monotone croissante (resp. décroissante), et pour $n \geq 1$ $q_{2n}^i(\theta) < q_{2n+1}^i(\theta)$.

Démonstration.

L'équation (13) est une conséquence directe de la relation (2).

Ecrivant

$$q_n^i(\theta) = P^\theta[X_o=1-i,\ X_1=i,\dots,X_{n+1}=i] \,/\, P^\theta[X_o=1-i, X_1=i,\dots,X_n=i]$$

$$= \sum_{k\geq n+1} p_k^i(\theta) \,/ \sum_{k\geq n} p_k^i(\theta) \ ,$$

compte tenu de la relation (11), on obtient

$$q_n^i(\theta) = \frac{C_1^i(\theta)\,(1-\lambda_{1,i}(\theta)).\,\lambda_{1,i}^n(\theta) + C_2^i(\theta).(1-\lambda_{2,i}(\theta)).\lambda_{2,i}^n(\theta)}{C_1^i(\theta)\,(1-\lambda_{1,i}(\theta))\ \lambda_{1,i}^{n-1}(\theta) + C_2^i(\theta)\,(1-\lambda_{2,i}(\theta))\ \lambda_{2,i}^{n-1}(\theta)} \ .$$

On en déduit facilement que :

$$\lim_{n\to\infty} q_n^i(\theta) = \lambda_{1,i}(\theta) \ ,$$

puisque $|\lambda_{2,i}(\theta)| < \lambda_{1,i}(\theta)$.

Lorsque $\gamma < \alpha(1-\alpha)(1-\beta) \,/\, \{\alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + \alpha(1-\alpha)(1-\beta)\}$, la constante $H_2(i,i;\theta)$ est positive. Ainsi les hypothèses validant le résultat de la proposition 4 du chapitre IV. §I.3, sont satisfaites et par suite la persistance oscille autour de la valeur limite $\lambda_{1,i}(\theta)$, l'amplitude des oscillations tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. ∎

Etudions maintenant la loi de deux temps de séjours consécutifs dans les états i et $1-i$ respectivement, $i\in\{0,1\}$. Notons $p^{i,1-i}(\theta) = (p_{n,m}^{i,1-i}(\theta), n,m\geq 1)$ cette loi, et posons

$$R_n^{j,i}(\theta) = P^\theta[X_1=i,\dots,X_n=i/A_o=j] \ , \ n\geq 1 \ , \ i,j\in\{0,1\} \ .$$

<u>Lemme</u> 4.

La suite $(R_n^{j,i}(\theta)\ ;\ n\geq 1)$, $i,j\in\{0,1\}$ satisfait

- pour $n = 1$

$$R_1^{j,i}(\theta) = \beta.\alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + (1-\beta).\delta_{j,i} \quad ;$$

- pour $n = 2$

$$R_2^{j,i}(\theta) = \beta^2\alpha^{2i}(1-\alpha)^{2(1-i)} + \beta(1-\beta)(1-\gamma+(1+\gamma)\delta_{j,i})\alpha^i(1-\alpha)^{1-i} + $$
$$+ \delta_{j,i}.(1-\beta^2).(\gamma+\alpha^i(1-\alpha)^{1-i}(1-\gamma)) \; ;$$

- et pour $n \geq 3$ la relation de récurrence

$$(14)\quad R_n^{j,i}(\theta) = H_1(i,i;\theta).R_{n-1}^{j,i}(\theta) + H_2(i,i;\theta).R_{n-2}^{j,i}(\theta) \; .$$

La solution générale de l'équation (14) est de la forme :

$$(15)\quad R_n^{j,i}(\theta) = C_{1,j}^i(\theta).\lambda_{1,i}^{n-1}(\theta) + C_{2,j}^i(\theta).\lambda_{2,i}^{n-1}(\theta) \; ,$$

où $\lambda_{1,i}(\theta)$, $\lambda_{2,i}(\theta)$ sont données par la relation (9), et $C_{1,j}^i(\theta)$, $C_{2,j}^i(\theta)$ sont les solutions du système

$$(16)\quad \begin{cases} C_{1,j}^i(\theta) + C_{2,j}^i(\theta) = R_1^{j,i}(\theta) \\ C_{1,j}^i(\theta).\lambda_{1,i}(\theta) + C_{2,j}^i(\theta).\lambda_{2,i}(\theta) = R_2^{j,i}(\theta) \; . \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant concernant la loi $p^{i,1-i}(\theta)$.

<u>Proposition</u> 6.

On a pour $n \geq 1$, $m \geq 1$:

$$p_{n,m}^{i,1-i}(\theta) = [(1-\beta)(\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))]^{-1}.\{[-\beta.\alpha^i(1-\alpha)^{1-i}.Q_{n-1}^i(\theta) +$$

$$+ (1+\beta\alpha^i(1-\alpha)^{1-i})Q_n^i(\theta) - Q_{n+1}^i(\theta)] \times (R_m^{i,1-i}(\theta)-R_{m+1}^{i,1-i}(\theta)) +$$

$$+ [(1-\beta\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i)Q_{n-1}^i(\theta)-(2-\beta\alpha^{1-i}(1-\alpha)^i)Q_n^i(\theta)+Q_{n+1}^i(\theta)] \times$$

$$\times (R_m^{1-i,1-i}(\theta)-R_{m+1}^{1-i,1-i}(\theta))\} .$$

Démonstration.

Conditionnellement à $A_n = j$, $j = 0,1$, les événements $\{X_o = 1-i, X_1 = i,\ldots,X_n = i\}$ et $\{X_{n+1} = 1-i,\ldots,X_{n+m} = 1-i, X_{n+m+1} = i\}$ sont indépendants. Alors on peut écrire

$$(17)\quad p_{n,m}^{i,1-i}(\theta) = (\alpha(1-\alpha)-C_\theta(1))^{-1}.\{P^\theta[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,A_n=i] \times$$

$$\times P^\theta[X_{n+1}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i/A_n=i] +$$

$$+ P^\theta[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,A_n=1-i] \times$$

$$\times P^\theta[X_{n+1}=1-i,\ldots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i/A_n=1-i]\} .$$

D'une part pour, $j \in \{0,1\}$, on a

$$P^\theta[X_o=1-i,X_1=i,\ldots,X_n=i,A_n=j] = \frac{1}{(1-\beta)}.[P_{n+1}^\theta\{(1-i,i,\ldots,i)\} -$$

$$- \beta\alpha^j(1-\alpha)^{1-j} P_n\{(1-i,i,\ldots,i)\}]$$

c'est-à-dire

$$P^{\theta}[X_o=1-i,X_1=i,\dots,X_n=i,A_n=i] = \frac{1}{(1-\beta)} \cdot [-\beta\alpha^{i}(1-\alpha)^{1-i}.Q^{i}_{n-1}(\theta) +$$

$$+ (1+\beta\alpha^{i}(1-\alpha)^{1-i})Q^{i}_{n}(\theta)-Q^{i}_{n+1}(\theta)] ,$$

et

$$P^{\theta}[X_o=1-i,X_1=i,\dots,X_n=i,A_n=1-i] = \frac{1}{(1-\beta)} \cdot [1-\beta\alpha^{1-i}(1-\alpha)^{i}\, Q^{i}_{n-1}(\theta) -$$

$$- (2-\beta\alpha^{1-i}(1-\alpha)^{i})\; Q^{i}_{n}(\theta) + Q^{i}_{n+1}(\theta)] .$$

D'autre part, comme la chaîne $((X_t,A_t)\ ;\ t\geq 0)$ est stationnaire, on peut écrire :

$$P^{\theta}[X_{n+1}=1-i,\dots,X_{n+m}=1-i,X_{n+m+1}=i/A_n=j] = R^{j,1-i}_{m}(\theta) - R^{j,1-i}_{m+1}(\theta) .$$

En reportant ces résultats dans la relation (17), on obtient l'égalité annoncée. ∎

A l'aide des relations (8) et (15), on obtient une expression des $p^{i,1-i}_{n,m}(\theta)\ ;\ n\geq 1\ ,\ m\geq 1$ se prêtant à un calcul de la covariance

$$\rho^{i,1-i}_{1}(\theta) = \mathrm{Cov}(D^{i}_{1},\ D^{1-i}_{1}/T^{i}_{1}=1)$$

conduisant à :

<u>Corollaire</u> 2. On a

$$\rho^{i,1-i}_{1}(\theta) = [(1-\beta)(\alpha(1-\alpha)-C_{\theta}(1))]^{-1} \times$$

$$\times \left\{\left[\sum_{\ell=1}^{2} \frac{C^{i}_{\ell}(\theta)\ (\lambda_{\ell,i}(\theta)-\beta\alpha^{i}(1-\alpha)^{1-i})}{1-\lambda_{\ell,i}(\theta)}\right] \times \left[\sum_{\ell=1}^{2} \frac{C^{1-i}_{\ell,i}(\theta)}{1-\lambda_{\ell,1-i}(\theta)}\right] +\right.$$

$$+\left[\sum_{\ell=1}^{2} \frac{C_{\ell}^{i}(\theta)\,(1-\beta\,\alpha^{1-i}(1-\alpha)^{i}-\lambda_{\ell,i}(\theta))}{1-\lambda_{\ell,i}(\theta)}\right] \times \left[\sum_{\ell=1}^{2} \frac{C_{\ell,1-i}^{1-i}(\theta)}{1-\lambda_{\ell,1-i}(\theta)}\right]\Bigg\} -$$

$$-\quad m_1^{o}(\theta).\,m_1^{1}(\theta)$$

où les constantes $C_{\ell}^{i}(\theta)$, $\lambda_{\ell,i}(\theta)$, $C_{\ell,i}^{j}(\theta)$, $\ell \in \{1,2\}$, $i,j \in \{0,1\}$ sont données par (9) et (16), et les moyennes $m_1^{i}(\theta)$, $i \in \{0,1\}$ par (12).

II. ETUDE STATISTIQUE.

On se place sous l'hypothèse de stationnarité. On envisage l'étude d'estimateurs de certaines fonctions du paramètre $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in]0,1[^3$. L'étude du comportement asymptotique des estimateurs s'appuie sur le résultat préliminaire suivant :

Lemme 4.

Une série chronologique $(X_t ; t \in \mathbb{N}) \sim \text{DARMA}((1,1), \theta)$, $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in]0,1[^3$, est φ-mélangeante, avec $\varphi(n) = \gamma^{n-1}$, $n \geq 1$.

Démonstration.

Soient $B \in \mathcal{J}(X_o, \ldots, X_k)$ et $C \in \mathcal{J}(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \ldots)$; $\mathcal{J}(X_o, \ldots, X_k)$ et $\mathcal{J}(X_{k+n+1}, X_{k+n+1}, \ldots)$ désignant respectivement les tribus engendrées par $(X_o, \ldots, X_k)$ et $(X_{k+n}, X_{n+k+2}, \ldots)$; $k \geq 0$, $n \geq 1$.

Conditionnellement à A_k , les événements B et C sont indépendants et donc on a :

$$P^\theta[B \cap C] = \sum_{j=0}^{1} P^\theta[B / A_k = j] \,.\, P^\theta[A_k = j] \,.\, P^\theta[C / A_k = j] \,.$$

D'autre part, par le lemme 1, il vient :

$$P^\theta[C / A_k = j] = \sum_{i=0}^{1} P^\theta[C / A_{k+n-1} = i] \,.\, P^\theta[A_{k+n-1} = i / A_k = j] \,.$$

Or on a :

$$P^\theta[A_{k+n-1} = i / A_k = j] = \delta_{ij} \,.\, \gamma^{n-1} + (1 - \gamma^{n-1}) \,.\, \alpha^i (1-\alpha)^{1-i} \,.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$P^{\theta}(B\cap C) - P^{\theta}(B).P^{\theta}(C) = \sum_{i,j} \{ P^{\theta}[B/A_k=j].P^{\theta}[A_k=j].P^{\theta}[C/A_{k+n-1}=i] .$$

$$.(\delta_{ij} - \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}).\gamma^{n-1}\}$$

$$= \gamma^{n-1}.\{\sum_{j=0}^{1} P^{\theta}[B/A_k=j].P^{\theta}[A_k=j].P^{\theta}[C/A_{k+n-1}=j]$$

$$- P^{\theta}(B).P^{\theta}(C)\} .$$

De cette égalité, on déduit facilement que

$$|P^{\theta}(B\cap C) - P^{\theta}(B).P^{\theta}(C)| < \gamma^{n-1} P(B) . \blacksquare$$

II.1. <u>Estimation de</u> $(E_{\theta}(X_t), E_{\theta}(X_t X_{t-1}), E_{\theta}(X_t X_{t-2}))$.

On s'intéresse ici à l'estimation du paramètre $(\alpha, \lambda_1, \lambda_2)$ où :

$\alpha = E_{\theta}(X_t)$,

$\lambda_1 = E_{\theta}(X_t X_{t-1}) = \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)$,

$\lambda_2 = E_{\theta}(X_t X_{t-2}) = \alpha^2 + \alpha\gamma(1-\alpha)(1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)$.

La méthode des moments conduit aux estimateurs sans biais

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{\alpha}_n = S_n^1/(n+1) , & \\ \bar{\lambda}_{1,n} = U_n/n & , n \geq 1 , \\ \bar{\lambda}_{2,n} = V_n/(n-1) & ; n \geq 2 . \end{cases}$$

On a le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 7.

L'estimateur $(\bar{\alpha}_n, \bar{\lambda}_{1,n}, \bar{\lambda}_{2,n})$ de $(\alpha, \lambda_1, \lambda_2)$ défini par (18) est presque sûrement convergent et asymptotiquement gaussien, la suite $(\sqrt{n}\,[\bar{\alpha}_n-\alpha_o,\ \bar{\lambda}_{1,n}-\lambda_1^o,\ \bar{\lambda}_{2,n}-\lambda_2^o]'\ ,\ n\geq 2)$ convergeanten loi, relativement à P^{θ_o}, $\theta_o=(\alpha_o,\beta_o,\gamma_o)$, vers un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance

(19) $$\Lambda(\theta_o) = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

où

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \alpha_o(1-\alpha_o) & \lambda_1^o\,(1-\alpha_o) & \lambda_2^o\,(1-\alpha_o) \\ \lambda_1^o(1-\alpha_o) & \lambda_1^o\,(1-\lambda_1^o) & \omega^o-\lambda_1^o\,\lambda_2^o \\ \lambda_2^o(1-\alpha_o) & \omega^o-\lambda_1^o\,\lambda_2^o & \lambda_2^o\,(1-\lambda_2^o) \end{pmatrix} ,$$

où $\omega^o = E(X_o\,X_1\,X_2) = C_1^1(\theta_o)\,.\,\lambda_{1,1}^2(\theta_o) + C_2^1(\theta_o).\,\lambda_{2,1}^2(\theta_o)$, et

$$\Lambda_2 = ((\sigma_{ij}))\ ,\ i,j = 1,2,3$$

avec

$$\sigma_{11} = 2\alpha_o(1-\alpha_o).(1-\beta_o)\,(\beta_o+\gamma_o-2\beta_o\gamma_o)/(1-\gamma_o)$$

$$\sigma_{22} = 2\,.\sum_{\ell\geq 3}\{E_{\theta_o}(X_1.X_2.X_{\ell-1}.X_\ell)-(\lambda_1^o)^2\}$$

$$\sigma_{33} = 2\,.\sum_{\ell\geq 3}\{E_{\theta_o}(X_o\,X_2\,X_{\ell-2}\,X_\ell)-(\lambda_2^o)^2\}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sum_{\ell\geq 3}\{E_{\theta_o}(X_2.X_{\ell-1}.X_\ell)+E_{\theta_o}(X_1\,X_2\,X_\ell)-2\alpha_o.\lambda_1^o\}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sum_{\ell\geq 3}\{E_{\theta_o}(X_2.X_{\ell-2}.X_\ell)+E_{\theta_o}(X_o.X_2.X_\ell)-2\alpha_o.\lambda_2^o\}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sum_{\ell\geq 3}\{E_{\theta_o}(X_1.X_2.X_{\ell-2}.X_\ell)+E_{\theta_o}(X_o.X_2.X_{\ell-1}.X_\ell)-2\lambda_1^o\,\lambda_2^o\}\ .$$

Démonstration.

On a

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_o \\ \bar{\lambda}_{1,n} - \lambda_1^o \\ \bar{\lambda}_{2,n} - \lambda_2^o \end{pmatrix} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \sum_{t=2}^{n} \begin{pmatrix} X_t - \alpha_o \\ X_t X_{t-1} - \lambda_1^o \\ X_t X_{t-2} - \lambda_2^o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{X_o + X_1}{n+1} \\ \frac{X_o X_1}{n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la convergence presque sûre de l'estimateur est une conséquence immédiate du lemme 4 (cf. théorème 3, chapitre I) et la normalité asymptotique s'obtient par application des théorèmes 7.7 et 20.1 de Billingsley (1968), au processus vectoriel $((Z_t^1, Z_t^2, Z_t^3)', t \geq 2)$ où pour $t \geq 2$

$$Z_t^j = \begin{cases} X_t - \alpha_o & \text{si } j = 1 \\ X_t X_{t-1} - \lambda_1^o & \text{si } j = 2 \\ X_t X_{t-2} - \lambda_2^o & \text{si } j = 3 . \end{cases}$$

La matrice de covariance asymptotique $\Lambda(\theta_o) = ((b_{ij}))$ est donnée par

$$b_{ij} = E_{\theta_o}(Z_2^i . Z_2^j) + \sum_{n \geq 3} \{E_{\theta_o}(Z_2^i . Z_n^j) + E_{\theta_o}(Z_n^i . Z_2^j)\} , \quad i,j = 1,2,3,$$

et posant

$$\Lambda_1 = ((E_{\theta_o}(Z_2^i . Z_2^j))) \quad i,j = 1,2,3$$

et

$$\Lambda_2 = ((\sum_{n \geq 3} \{E_{\theta_o}(Z_2^i . Z_n^j) + E_{\theta_o}(Z_n^i . Z_2^j)\})); \quad i,j = 1,2,3$$

on peut écrire

$$\Lambda(\theta_o) = \Lambda_1 + \Lambda_2 .$$

Il est facile d'écrire les termes de cette décomposition sous la forme figurant dans l'énoncé de la proposition. ▪

II.2. Estimation de (α,β,γ) .

Notons $d = (1-\beta)(\beta+\gamma-2\beta\gamma)$ le coefficient de corrélation entre X_o et X_1 . Les relations $d = \dfrac{\lambda_1 - \alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}$ et $\gamma = \dfrac{\lambda_2 - \alpha^2}{d\,\alpha(1-\alpha)}$ conduisent aux estimateurs

$$\bar{d}_n = \frac{\bar{\lambda}_{1,n} - \bar{\alpha}_n^2}{\bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_n = \frac{\bar{\lambda}_{2,n} - \bar{\alpha}_n^2}{\bar{\lambda}_{1,n} - \bar{\alpha}_n^2}$$

de d et γ respectivement. On déduit alors de la proposition 7 :

Corollaire 3.

L'estimateur $(\bar{\alpha}_n, \bar{d}_n, \bar{\gamma}_n)$ de (α, d, γ) est convergent presque sûrement et asymptotiquement gaussien, la suite $\{\sqrt{n}(\alpha_n - \alpha_o, \bar{d}_n - d_o, \bar{\gamma}_n - \gamma_o)' \ ; \ n \geq 2\}$ convergeant en loi, relativement à P^{θ_o}, $\theta_o = (\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$, vers un vecteur aléatoire gaussien centré et de matrice de covariance

$$\Gamma(\theta_o) = H(\theta_o) . \Lambda(\theta_o)\, {}^t H(\theta_o) ,$$

où

$$H(\theta_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-2\alpha_o(1-d_o)-d_o}{\alpha_o(1-\alpha_o)} & 0 & \dfrac{1}{\alpha_o(1-\alpha_o)} \\ \dfrac{-2\alpha_o(1-\alpha_o)}{d_o(1-\alpha_o)} & \dfrac{1}{\alpha_o d_o(1-\alpha_o)} & \dfrac{-\gamma_o}{\alpha_o d_o(1-\alpha_o)} \end{bmatrix}$$

et $\Lambda(\theta_o)$ est donnée par (19).

Démonstration.

On peut écrire

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_o \\ \bar{d}_n - d_o \\ \bar{\gamma}_n - \gamma_o \end{pmatrix} = H_n(\theta_o) . \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_n - \alpha_o \\ \bar{\lambda}_{1,n} - \lambda_1^o \\ \bar{\lambda}_{2,n} - \lambda_2^o \end{pmatrix}$$

où

$$H_n(\theta_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-(1-d_o)(\bar{\alpha}_n+\alpha_o)-d_o}{\bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)} & 0 & \dfrac{1}{\bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)} \\ f_n(\theta_o) & \dfrac{1}{\bar{\alpha}_n \bar{d}_n(1-\bar{\alpha}_n)} & \dfrac{-\alpha_o\gamma_o(1-\alpha_o)}{\bar{\alpha}_n^2 \bar{d}_n(1-\bar{\alpha}_n)^2} \end{bmatrix}$$

avec

$$f_n(\theta_o) = \left\{ \left(\frac{\alpha_o \gamma_o (1-\alpha_o)(1-d_o)}{\bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)} - 1 - \gamma_o \bar{d}_n \right).(\bar{\alpha}_n + \alpha_o) - \gamma_o \bar{d}_n + \frac{\alpha_o \gamma_o d(1-\alpha_o)}{\bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n)} \right\} /$$

$$/ \bar{d}_n . \bar{\alpha}_n(1-\bar{\alpha}_n) .$$

La première partie de la proposition 7 assure que $H_n(\theta_o)$ converge presque sûrement vers $H(\theta_o)$. Il suffit alors d'appliquer les résultats de cette proposition pour vérifier les assertions du corollaire. ∎

Venons-en maintenant au problème d'estimation de β. Remarquons que le coefficient de corrélation d vérifie pour toute valeur de β et γ dans $]0,1[$:

$$0 < d < 1 .$$

Une étude élémentaire du trinôme du second degré en β

$$(1-2\gamma)\beta^2 - (1-3\gamma)\beta + (d-\gamma)$$

pour γ et d fixés dans $]0,1[$, montre que

- si $\gamma \geq \frac{1}{3}$ et $d < \gamma$ ou si $\gamma < \frac{1}{3}$ et $d \in \left]0,\gamma\right] \cup \left\{\frac{(1-\gamma)^2}{4(1-2\gamma)}\right\}$, ce trinôme possède une racine unique dans l'intervalle $]0,1[$ donnée par :

$$(20) \qquad \beta(\gamma,d) = \begin{cases} \dfrac{(1-3\gamma) + ((1-\gamma)^2 - 4d(1-2\gamma))^{1/2}}{2(1-2\gamma)} & \text{si } \gamma \neq \frac{1}{2} \\ 1-2d & \text{si } \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- si $\gamma < \frac{1}{3}$ et $\gamma < d < \frac{(1-\gamma)^2}{4(1-2\gamma)}$, ce trinôme possède deux racines distinctes dans l'intervalle $]0,1[$ données par :

$$\frac{(1-3\gamma) \pm ((1-\gamma)^2 - 4d(1-2\gamma))^{1/2}}{2(1-2\gamma)} .$$

• sinon, ce trinôme ne possède pas de racine dans $]0,1[$. Cela montre que dans le modèle $\{P^\theta ; \theta = (\alpha,\beta,\gamma) \in]0,1[^3\}$ le paramètre β n'est pas identifiable à l'aide de la statistique $(\overline{\gamma}_n, \overline{d}_n)$. Par contre dans le modèle $\{P^\theta ; \theta \in]0,1[^2 \times]\frac{1}{3}, 1[\}$ le paramètre β peut être identifié par l'estimateur

$$\overline{\beta}_n = \beta(\overline{d}_n, \overline{\gamma}_n)\, \mathbb{1}_{[\overline{\gamma}_n > \frac{1}{3}, \overline{d}_n < \overline{\gamma}_n]}$$

qui, d'après le Corollaire 3, est convergent presque sûrement.

En fait le paramètre β n'est pas identifiable dans le modèle $\{P^\theta ; \theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in]0,1[^3\}$. En fait à l'aide des relations (2) et (3) on peut voir que si $\alpha = \frac{1}{2}$ la loi P^θ ne dépend de (β, γ) qu'à travers la valeur de (d,γ) ; or d'après ce qui précède lorsque $\gamma < \frac{1}{3}$ une valeur de $d \in]\gamma, \frac{(1-\gamma)^2}{4(1-2\gamma)}[$ peut être obtenue à l'aide de deux valeurs différentes de β.

On peut restreindre l'espace des paramètres à

$$\Theta = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in]0,1[^3 : \alpha \neq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(\tfrac{1}{2}, \beta, \gamma) : \beta \in]0,1[, \tfrac{1}{3} \leq \gamma < 1\}$$
$$\cup \{(\tfrac{1}{2}, \beta, \gamma) : 0 < \gamma < \tfrac{1}{3}, \frac{1-3\gamma}{2(1-2\gamma)} \leq \beta < 1\} .$$

Dans le modèle $\{P^\theta, \theta \in \Theta\}$ le paramètre β est alors identifiable. En effet un calcul élèmentaire montre que posant

$$\mu = P^\theta_2(1,0,1) = E_\theta(X_t(1-X_{t+1})X_{t+2})$$

on a

$$\mu = \alpha(1-\alpha)\{\gamma d(1-2\alpha)\beta + \alpha(1-2d+\gamma d)\}$$

et donc, si $\alpha \neq \frac{1}{2}$

$$\beta = \left\{ \frac{\mu}{\alpha(1-\alpha)} - \alpha(1-2d+\gamma d) \right\} \Big/ \gamma d(1-2\alpha)$$

On peut alors construire un estimateur convergent de β à l'aide des estimateurs $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\delta}_n$, d_n, μ_n, de α, γ, d, et μ où

$$\mu_n = \frac{1}{n-1}(V_n - W_n).$$

BIBLIOGRAPHIE

ANSCOMBE,F.J.-(1950).Sampling theory of the negative binomiale and logarithmic series distributions.Biometrika, p.358-382.

ANSCOMBE,F.J.-(1952).Large sample theory of sequential estimation. Proc. Cambridge Phil. Soc.,48,p.600.

BILLINGSLEY,P.-(1961).Statistical inference for Markov processes. Univ. of Chicago Press.

BILLINGSLEY,P.-(1968).Convergence of probability measures.Wiley N-York.

BONITZER,J.-(1978).Unicité de la solution de l'équation de vraisemblance de la loi binomiale négative.Revue de statistique appliquée,vol.XXVI,n°4.

BUISHAND,T.A.-(1977).Stochastic modelling of daily rainfall sequences.Commun. Agric. Univ. Wageningen.77-3,the Netherlands.

BUISHAND,T.A.-(1978).The binary DARMA(1,1)process as a model for wet-dry sequences.Technical Note 78-01.Agric. Univ. Wageningen,the Netherlands.

COX,D.R.-(1962).Renewal theoty.Methuen and Co, London.

CROW,E.L. and MILES,M.J.-(1977).Confidence limits for digital error rates from dependent transmission. Office of telecom. Report 77-118. Washington,D.C.:Government Printing Office.

DEVORE,J.L.-(1976).A note on the estimation of parameters in a Bernoulli model with dependence.Ann. Statist. 4,990-2.

ELLIOT,E.O.-(1965).A model of the switched telephone network of data communications.Bell Syst. Tech. J.,44,89-109

FEIGIN,P.D.-(1975).Maximum likelihood estimation for stochastic processes a martingale approach. These,Australian Univ..

HANNAN,E.J.-(1971).Multiple time series.New-York,ed. Wiley.

HARDY,G.H. and WRIGHT,E.M.-(1979).An introduction to the theory of numbers.5-eme édition,Oxford Science Publications.

HELGERT,H.J.-(1970).On sums of random variables defined on a two states Markov chain. J. App. Prob. 7,761-5.

GABRIEL,K.R.-(1959).The distribution of the number of successes in a sequence of dependent trials.Biometrika,46, p.454-460.

GABRIEL,K.R.and NEUMAN,J.-(1962).A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel-Aviv.Quart.J.Roy. Meteo.Soc. 88.p.90-9.

GALLOY,E.-(1982).Contribution à l'étude de la sécheresse.Thèse de 3-eme cycle,Laboratoire de géographie physique. Grenoble.

GALLOY,E.,LE BRETON,A. et MARTIN,S.-(1983).A model for weather cycle based on daily rainfall occurrence.To appear in lectures notes in Biomathematics.

GOODMAN,L.A.and ANDERSON,T.W.-(1957).Statistical inference about Markov chain.Ann. Math. Stat.,28,89-109.

GREEN,J.R.-(1964).A model for rainfall occurrence.J.of the Roy.Stat. Soc. B. 26,p.345-353.

GREGOIRE,G.-(1982).Processus de renouvellement et generalisations. Une presentation en vue des applications.Laboratoire IMAG. Equipe de statistique.

IBRAGIMOV,I.A.,and LINNIK,YU.V.-(1971).Independent and stationary sequences of random variables.Wolters Noordhoff Publishing Groningen,the Netherlands.

JACOBS,P.A.and LEWIS,P.A.W.-(1978.a).Discrete time series generated by Mixture I : correlationnal and runs properties. J.R.Statist.Soc. B.40,n°1,p.94-105.

JACOBS,P.A.and LEWIS,P.A.W.-(1978.b).Discrete time series generated by mixture II:asymptotique properties.J.R.Statist.Soc. B.40,n°2,p.222-228.

KIM,S.I.and BAI,DO.S.-(1980).On parameter estimation in Bernoulli trial with dependence.Commun.Statist.Theor.Meth. A9. (13).1401.

JOHNSON,C.A.and KLOTZ,J.H.-(1974).The atom probe and Markov chain statistics of clustering.Technometrics 16,483-93.

KEDEM,B.-(1976).Sufficient statistics associated with a two states second order Markov chain.Biometrika 63,p.127-132.

KEDEM,B.-(1977).Counting the number of 0-1 stationnary time series having the same likelihood.Discrete mathematics, 18,p.285-289.

KEDEM,B.-(1979).Binary time series.Lecture notes in pure and applied mathematics.vol.52.

KLOTZ,J.-(1972).Markov chain clustering of births by sex.Proc.Sixth. Berkeley Symp. mathematics Statist.Prob.

KLOTZ,J.-(1973).Statistical inference in Bernoulli trials with dependence.Ann.Statist. 1,p.373-9.

LAI,C.D.-(1977).First order autoregressive Markov processes.Stoch. Processes and their appl.

LINDQVIST,B.-(1978).A note on Bernoulli trials with dependence.Scand.J.Statist.5,p.205-208.

LE BRETON,A. et MARTIN,S.-(1979).Un modèle pour l etude des sequences climatologiques.Séminaire de statistique,laboratoire IMAG,p.3-34.

PRICE,B.-(1976).A note on estimation in Bernoulli trials with dependence.Commun.Statist.A5.p.661-71.

RENYI ,A.-(1957).On the asymptotique distribution of the sum of a random number of a independent random variables. Acta Math.Acad.Sci.Hung.,8,p.193-199.

TAKAKS,L.-(1957).On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes.Acta Math.Acad.Sci.Hung. , 8,p.169-191.

VISEK,J.A.-(1974).On properties of binary random numbers.Aplikace matematiky.19,p.375.

YAKOWITZ,S.J.-(1976).Small sample hypothesis tests of Markov order with application to similated and hydrologique chains.J.Amer.Statist.Assoc. 71,p.132-6.

Résumé : Le travail présenté concerne l'étude de différents modèles de séries chronologiques binaires susceptibles d'être utilisés dans le cadre de la description de la succession des jours dans une station climatologique selon leur caractère sec ou humide. On précise les caractéristiques de chaque modèle et on examine le problème statistique de l'estimation de ses paramètres.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 6 janvier 1983

Le Président de la thèse

B. Van Cutsem

B. VAN CUTSEM

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

Le Président

M. TANCHE