



**HAL**  
open science

# Modélisation simplifiée 3D de l'interaction sol-structure: application au génie parasismique.

Stéphane Grange

► **To cite this version:**

Stéphane Grange. Modélisation simplifiée 3D de l'interaction sol-structure: application au génie parasismique.. Matériaux. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT: . tel-00306842

**HAL Id: tel-00306842**

**<https://theses.hal.science/tel-00306842>**

Submitted on 28 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE  
GRENOBLE

*Spécialité : « Modélisation et Expérimentation en Mécanique des Solides »*

préparée au laboratoire SOLS, SOLIDES, STRUCTURES - RISQUES (3S-R)  
dans le cadre de *l'École Doctorale « Mécanique et Energétique »*

présentée et soutenue publiquement  
par

Stéphane GRANGE

le 26 juin 2008

---

Modélisation simplifiée 3D de l'interaction  
sol-structure : application au génie parasismique

---

*Directeur de thèse : Jacky MAZARS*  
*Co-Directeur de thèse : Panagiotis KOTRONIS*

JURY

M. A. PECKER	Professeur à l'ENPC	Président
M. C. DI PRISCO	Professeur au Politecnico di Milano	Rapporteur
M. D. CLOUTEAU	Professeur à l'École Centrale de Paris	Rapporteur
M. P. FORAY	Professeur à l'INP Grenoble	Examinateur
M. D. COMBESCURE	Ingénieur de recherche CEA Saclay	Examinateur
M. J. MAZARS	Professeur à l'INP Grenoble	Directeur de thèse
M. P. KOTRONIS	Maître de Conférences à l'UJF Grenoble	Co-directeur



---

## Remerciements

---

Cette thèse a été réalisée au laboratoire Sols, Solides, Structures - Risques à Grenoble entre Septembre 2005 et Juin 2008.

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants:

- Jacky Mazars pour m'avoir guidé et qui a su trouver les mots dans les moments de doutes. Je le remercie également pour sa gentillesse, sa disponibilité, ses conseils et sa confiance qu'il m'a accordé tout au long de ces 3 ans
- Panos Kotronis que je considère maintenant plus comme un ami qu'un encadrant, qui a su m'aiguiller, me transmettre des compétences, qui a su également trouver le temps pour relire tous mes travaux. Je lui dois beaucoup.

D'une manière générale, j'ai apprécié la liberté qu'ils m'ont accordée dans l'organisation de mes recherches.

Ce travail de thèse a été aussi largement motivé par la participation au programme Européen LESSLOSS qui m'a permis de travailler avec d'autres laboratoires Européens et de rencontrer de nombreux chercheurs qui m'ont aidé à mener à bien mon travail.

J'aimerais également remercier les membres du Jury qui ont accepté de lire et de commenter cette thèse: Alain Pecker, Claudio di Prisco, Didier Clouteau, Didier Combescure et Pierre Foray.

Je souhaite en outre profiter de cette occasion pour remercier les membres de l'AUGC qui ont salué ce travail en me décernant la 4ème place du prix "René Houpert" 2008, des jeunes chercheurs en Génie Civil.

Pendant ces trois ans passés à Grenoble, il faut reconnaître que l'organisation de réunions "aux sommets" a pris une place importante dans nos emplois du temps. Je ne compte d'ailleurs plus le nombre de nuits tronquées pour admirer les levers de soleil lors de ces matinées glaciales d'hiver et de printemps. Ceci nous a permis de regagner le laboratoire assez tôt le matin pour pouvoir avancer véritablement nos travaux, fatigués mais détendus.

Pour cela je tiens à remercier Seb, Florent, Manu, Lionel, Julien toujours partant pour ce genre de plans (surtout Seb et Florent...).

Je voudrais remercier vivement les membres du laboratoire avec qui j'ai passé d'agréables moments, pour l'ambiance très chaleureuse qui règne à 3S-R, pour les dégustations de gâteaux, pour les divers pots, pour les discussions pas toujours très scientifiques: les Luc, Fabrice, les Jérôme, les Cédric, Wen Jie, Marcos, Luisa, Séverine, Gabriela, Thomas, Jean-Patrick, Mohammad, Bastien, Hâ, Jessica, Rachel, la "Greek connection" Elma, Kristina et Panos toujours prêts pour un apéro improvisé à l'*Oυζο*, Sylvain toujours connecté même depuis Reims et qui sait faire face à tous les problèmes (le "*et al.*" dans les références de publications, c'est lui), Hong, Than, Pauline, Olivier, Maxime, Muriel, les deux Brésiliens Jeronimo et Guilherme qui nous font toujours bien rire, Mamadou pour sa gestion des croissants le vendredi matin, et Barth pour sa gestion du café! Enfin un grand merci (le plus grand) à Jeff mon co-bureau à qui je dois toute ma dernière année, qui m'a supporté même dans les nombreux moments de doutes et qui a toujours été là pour détendre l'atmosphère.

Je tiens aussi vivement à remercier mes plus anciens amis et notamment Aurélien, toujours de bons conseils (surtout quand il s'agit de fromages), Mit Mit, Kro, Flavien, Jérôme et les autres, ainsi que mes parents et ma famille pour m'avoir entouré.

Pour finir, j'aimerais dédier cette thèse à une personne qui sait déjà que je lui dois énormément. Pour sa tendresse, sa confiance et son soutien, mes pensées les plus tendres vont à Delphine. Sans elle je ne serais pas arrivé jusque là.

Dans le domaine du génie parasismique, l'Interaction du Sol avec la Structure (ISS) est un phénomène important à considérer pour espérer rendre compte du comportement réel d'une structure et donc évaluer sa vulnérabilité. Ce travail présente la construction d'un élément d'interface 3D modélisant une fondation superficielle de forme circulaire, rectangulaire ou filante reposant sur un massif de sol semi infini et permettant de prendre en compte l'ISS en considérant les non-linéarités matérielles (la plasticité du sol) et les non-linéarités géométriques (le décollement de la fondation).

Basé sur la méthode des macro-éléments, cet élément permet de travailler en variables globales (forces et déplacements) et comporte 5 degrés de libertés. Tous les éléments du tenseur d'effort appliqués à la fondation sont présents excepté le moment de torsion qui n'est pas pris en compte. Cette description globale permet ainsi de simplifier le modèle en minimisant d'une part la préparation des données et du maillage et d'autre part les temps de calculs. Les non-linéarités sont traitées grâce aux théories classiques de plasticité et peuvent ainsi être couplées de manière simple selon la théorie des multi-mécanismes. Une description mathématique de chaque mécanisme est proposée.

Le macro-élément est implémenté dans FedearLab, un code élément finis développé dans Matlab. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux d'une fondation soumise à des chargements cycliques, ainsi que dynamiques mais aussi des simulations modélisant des ouvrages d'arts (bâtiment, pont...) montrent le bon fonctionnement du macro-élément 3D d'ISS. Enfin, l'efficacité et la robustesse de ce genre d'outils permettent de faire des analyses paramétriques faisant évoluer plusieurs paramètres de sols qui seront présentées à l'issue de cette thèse.



In structural engineering, Soil-Structure Interaction (SSI) is an important phenomenon that has to be taken into account. This paper presents a 3D non linear interface element able to compute SSI for rigid circular, rectangular or strip shape footings considering two types of non-linearities. A material non-linearity (plasticity of the soil) and a geometrical non-linearity (uplift mechanism).

Several approaches exist to take this phenomenon into account: the following work is based on the "macro-element" concept. The particularity of the macro-element lies in the fact that the movement of the foundation is entirely described by a system of generalised variables (forces and displacements) defined in the foundation centre with five degrees of freedom. Torque moment is not taken into account. The non linear behaviour of the soil and the uplift mechanism are reproduced using the classical theory of plasticity. Coupling of the different mechanisms is straight forward following the multi-mechanism theory.

The element is able to simulate the 3D behaviour of a rigid shallow foundation under static and dynamic loadings. It is implemented into FedasLab, a finite element Matlab toolbox. Comparisons with experimental results on foundations but also civil engineering structures (buildings and bridges...) under monotonic, cyclic and dynamic loadings show the good performance of the approach. The efficiency of this new tool allows us doing further parametrical studies for different soils that are presented at the end of this document.



<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xvii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xix</b>
<b>Chapitre 1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 2 Étude bibliographique</b>	<b>3</b>
2.1 Notion d'Interaction Sol-Structure (ISS) . . . . .	3
2.2 Les différentes méthodes pour prendre en compte l'ISS . . . . .	4
2.2.1 Les méthodes directes . . . . .	4
2.2.2 La méthode des sous-structures . . . . .	5
2.3 Méthodes hybrides: concept de macro-élément . . . . .	7
2.3.1 Macro-élément de Nova et Montrasio: modèle plastique 2D sous chargement monotone . . . . .	8
2.3.1.1 Comportement sous charge verticale . . . . .	9
2.3.1.2 Diagrammes d'interactions . . . . .	9
2.3.1.3 Adimensionnement des variables . . . . .	9
2.3.1.4 Surface de charge et loi d'écrouissage . . . . .	10
2.3.1.5 Loi d'écoulement . . . . .	10
2.3.1.6 Adaptation à des fondations rectangulaires encastrées dans le sol .	12
2.3.1.7 Commentaires . . . . .	12
2.3.2 Macro-élément de Gottardi et de Cassidy et Martin: Swipe tests, extension à des chargements 3D et prise en compte du moment de torsion .	12

2.3.2.1	Diagrammes d'interactions généralisés pour des chargements 3D et des fondations circulaires . . . . .	13
2.3.2.2	Loi d'écroûissage . . . . .	13
2.3.2.3	Loi d'écoulement . . . . .	14
2.3.2.4	Commentaires . . . . .	15
2.3.3	Macro-élément de Crémer: prise en compte du décollement . . . . .	15
2.3.3.1	Description du modèle de plasticité . . . . .	16
2.3.3.2	Description du modèle de décollement . . . . .	19
2.3.3.3	Commentaires . . . . .	20
2.3.4	Macro-élément de Chatzigogos: modèle hypoplastique et modèle de décollement élastique non-linéaire . . . . .	20
2.3.4.1	Structure générale du modèle . . . . .	20
2.3.4.2	Commentaires . . . . .	21
2.4	Conclusion . . . . .	21
<b>Chapitre 3 Présentation du macro-élément d'ISS 3D</b>		<b>23</b>
3.1	Généralités . . . . .	23
3.2	Formes des fondations et présentation des variables cinématiques et d'efforts	24
3.2.1	Cas de la fondation circulaire . . . . .	25
3.2.2	Cas de la fondation rectangulaire . . . . .	26
3.2.3	Cas de la fondation filante . . . . .	28
3.2.4	Bilan sur les normalisations . . . . .	29
3.3	Modèle de plasticité . . . . .	29
3.3.1	Comportement élastique . . . . .	29
3.3.2	Comportement plastique . . . . .	31
3.3.2.1	Critère de rupture . . . . .	31
3.3.2.2	Surface de charge . . . . .	32
3.3.2.3	Lois d'écroûissages cinématiques . . . . .	32
3.3.2.4	Loi d'écroûissage isotrope . . . . .	35
3.3.2.5	Evolution de la variable $\gamma$ . . . . .	36
3.3.2.6	Loi de tangence . . . . .	37
3.3.2.7	Loi d'écoulement . . . . .	38
3.3.2.8	Hypothèse de normalité . . . . .	39
3.3.2.9	Condition de consistance . . . . .	41
3.4	Modèle de décollement . . . . .	42
3.4.1	Comportement élastique . . . . .	42
3.4.2	Décollement sur sol élastique . . . . .	42
3.4.2.1	Répartition linéaire des contraintes . . . . .	43
3.4.2.2	Répartition réelle des contraintes . . . . .	43
3.4.2.3	Adaptation du problème d'élasto-décollement à une formulation conforme à la théorie de plasticité . . . . .	45
3.4.2.4	Extension à des problèmes chargements-déchargements . . . . .	47

3.4.2.5	Extension à des problèmes cycliques . . . . .	48
3.4.2.6	Loi d'écoulement . . . . .	49
3.4.3	Décollement sur sol plastique . . . . .	51
3.4.3.1	Adaptation du problème d'élasto-plasto-décollement conforme à la théorie de plasticité . . . . .	52
3.4.3.2	Extension à des problèmes chargements-déchargements . . . . .	54
3.4.3.3	Extension à des problèmes cycliques . . . . .	55
3.4.3.4	Loi d'écoulement . . . . .	57
3.4.3.5	Réponse d'une fondation soumise à une sollicitation de chargement-déchargement . . . . .	58
3.4.4	Adaptation 3D du modèle de décollement . . . . .	59
3.4.4.1	Cas de la fondation rectangulaire . . . . .	59
3.4.4.2	Cas de la fondation circulaire . . . . .	60
3.4.5	Adaptation du modèle de décollement pour prendre en compte le couplage avec le modèle de plasticité . . . . .	63
3.4.6	Hypothèse de normalité et condition de consistance . . . . .	64
3.5	Prise en compte de l'effet $P - \theta$ . . . . .	67
3.6	Adaptation du macro-élément à des chargements dynamiques . . . . .	68
3.7	Adaptation du macro-élément pour simuler le comportement d'amortisseurs sismiques (isolateurs) . . . . .	72
3.7.1	Détermination des équations régissant l'évolution des variables d'écrouissages cinématiques . . . . .	72
3.7.2	Hypothèse de normalité et condition de consistance . . . . .	74
3.8	Conclusion . . . . .	75
<b>Chapitre 4 Mise en oeuvre numérique de la méthode</b>		<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Résolution d'un problème élasto-plastique à l'aide de la méthode de Return Mapping . . . . .	80
4.2.1	calcul du déplacement plastique $\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pl}}$ . . . . .	81
4.2.2	calcul de l'effort $\mathbf{F}_{n+1}$ . . . . .	81
4.2.3	calcul de la variable d'écrouissage $q_{n+1}$ . . . . .	82
4.2.4	Résolution de l'équation permettant de calculer $\Delta\lambda$ . . . . .	82
4.3	Application à un modèle faisant évoluer plusieurs mécanismes . . . . .	84
4.4	Prise en compte de l'amortissement pour les calculs dynamiques . . . . .	87
4.5	Conclusion . . . . .	88
<b>Chapitre 5 Validations</b>		<b>91</b>
5.1	Chargement statique monotone . . . . .	91

5.2	Chargement cyclique . . . . .	96
5.2.1	Choix des paramètres du macro-élément . . . . .	96
5.2.2	Confrontation des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	98
5.2.2.1	TRISEE: Phase I . . . . .	98
5.2.2.2	TRISEE: Phase II . . . . .	99
5.2.2.3	TRISEE: Phase III . . . . .	99
5.3	Chargement dynamique . . . . .	101
5.3.1	Modélisation du portique . . . . .	102
5.3.2	Choix des paramètres du macro-élément . . . . .	102
5.3.3	Confrontation des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	103
5.4	Conclusions . . . . .	106
<b>Chapitre 6 Applications à des ouvrages réels</b>		<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Structure Camus IV . . . . .	107
6.2.1	Analyse modale . . . . .	109
6.2.2	Confrontation des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	110
6.2.2.1	Résultats pour l'accélérogramme Nice 0.33g . . . . .	110
6.2.2.2	Résultats pour l'accélérogramme Nice 0.52g . . . . .	111
6.2.2.3	Résultats numériques pour un chargement dans deux directions horizontales . . . . .	112
6.3	Structure NEES . . . . .	115
6.3.1	Partie I: Modélisation en aveugle . . . . .	115
6.3.1.1	Accélérogrammes d'entrées et leur spectre . . . . .	116
6.3.1.2	Discrétisation et maillage . . . . .	116
6.3.1.3	Répartition des masses . . . . .	118
6.3.1.4	Lois de comportement des matériaux . . . . .	119
6.3.1.5	Caractéristiques des sections multifibres . . . . .	120
6.3.1.6	Rigidité de la table sismique . . . . .	121
6.3.1.7	Stratégie numérique . . . . .	121
6.3.1.8	Analyse modale . . . . .	121
6.3.1.9	Analyse dynamique . . . . .	122
6.3.2	Partie II: Résultats corrigés post-essais - Améliorations du modèle numérique . . . . .	125
6.3.2.1	Prise en compte de la continuité des aciers de recouvrement à la base de l'étage 1 . . . . .	125
6.3.2.2	Changement de paramètres matériaux et des données d'amortissement . . . . .	125
6.3.2.3	Influence du premier mode sur le comportement de la structure . . . . .	126
6.3.3	Conclusions sur la structure encastree . . . . .	127
6.3.4	Partie III: Simulations numériques en considérant l'ISS . . . . .	127
6.3.4.1	Typologie de sols utilisés pour les simulations . . . . .	128
6.3.4.2	Résultats numériques et étude paramétrique . . . . .	128

---

6.3.5	Conclusions . . . . .	134
6.4	Viaduc d’Ispra . . . . .	135
6.4.1	Partie I: modélisation de l’essai pseudo-dynamique . . . . .	135
6.4.1.1	Discrétisation du pont et maillage . . . . .	136
6.4.1.2	Paramètres matériaux . . . . .	138
6.4.1.3	Analyse modale . . . . .	138
6.4.1.4	Chargements imposés à la structure . . . . .	138
6.4.1.5	Confrontation des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	139
6.4.2	Partie II: prise en compte de l’ISS . . . . .	139
6.4.2.1	Choix des sols utilisés . . . . .	141
6.4.2.2	Calibration énergétique des ressorts linéaires . . . . .	141
6.4.2.3	ISS, résultats numériques: comparaisons des cas encastrée, avec macro-élément et avec ressort élastique linéaire . . . . .	141
6.4.3	Conclusions . . . . .	143
<b>Chapitre 7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>145</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>150</b>



---

## Table des figures

---

2.1	Principe de superposition de Kausel . . . . .	5
2.2	Termes d'impedance (raideur et amortissement) pour une fondation superficielle circulaire selon Pecker . . . . .	6
2.3	Décomposition en champ proche et champ lointain pour la définition de la frontière du macro-élément d'ISS . . . . .	7
2.4	Critère de rupture et quelques surfaces de charges pour le modèle de Nova. . . . .	11
2.5	Loi d'écroutissage en fonction du déplacement généralisé $v$ pour le modèle élaboré par Nova et Montrasio . . . . .	11
2.6	Critère de rupture et quelques surfaces de charges pour le critère élaboré par Cassidy - Martin - Gottardi . . . . .	14
2.7	Loi d'écroutissage en fonction du déplacement vertical plastique pour le modèle élaboré par Cassidy - Martin - Gottardi . . . . .	15
2.8	Evolution de la surface de charge à l'intérieur du critère de rupture pour le modèle de Crémer . . . . .	17
2.9	Influence du décollement sur le mécanisme de plasticité . . . . .	18
2.10	Relations entre les variables d'écroutissages cinématiques et isotropes dans les plans ( $M' - H'$ ) . . . . .	18
2.11	Structure générale du macro-élément de Chatzigogos . . . . .	21
3.1	Présentation de la structure générale du macro-élément: (a) décomposition en champs proche et champ lointain (b) système analogique . . . . .	24
3.2	Comparaisons de différents critères pour divers auteurs ayant simulé le comportement de fondations de géométries différentes ramenés dans l'espace des efforts adimensionnés. Fondations filantes pour Nova et Pecker, circulaire pour Houlsby. . . . .	25
3.3	Présentation des variables globales: (a) efforts et (b) déplacements sur la fondation circulaire . . . . .	25
3.4	Présentation des variables globales: (a) efforts et (b) déplacements sur la fondation rectangulaire . . . . .	27
3.5	Simulations EF: relations entre $M'$ et $\theta'$ , indépendantes de $V'$ . . . . .	33
3.6	Relations entre les variables d'écroutissages cinématiques et isotropes dans les plans ( $M' - H'$ ) . . . . .	35
3.7	Loi de comportement bilinéaire 1D. . . . .	36
3.8	Loi de tangence dans l'espace $E^* = (H_x^*, M_y^*, H_y^*, M_x^*)$ . . . . .	37

3.9	Cas problématique d'une loi d'écoulement associée - (a) dans un plan ( $H' - V'$ ) projection de $\mathbf{n}_f$ sur l'axe $V'$ peut être négative - et (b) dans un plan ( $H' - M'$ )	38
3.10	Représentation de la loi d'écoulement non-associée $g_c$ , la surface de charge $f_c$ et de sa normale pour un point de charge donné $F$ dans un plan ( $M' - V'$ )	39
3.11	Représentation du pourcentage de semelle décollée $\delta$ si $D$ est la largeur totale de la fondation.	42
3.12	Répartition linéaire des contraintes $\sigma$ sous une fondation rigide.	43
3.13	Répartition des contraintes $\sigma$ sous une fondation rigide.	43
3.14	Evolution moment-décollement sur sol élastique cohérent pour une fondation circulaire et rectangulaire-filante.	44
3.15	Evolution de la surface de charge sur sol élastique en chargement monotone.	46
3.16	Evolution de la surface de charge sur sol élastique en chargement-déchargement.	48
3.17	Evolution de la surface de charge sur sol élastique en cyclique.	49
3.18	Cinématique de la fondation pour un mécanisme de décollement.	50
3.19	Evolution moment-décollement sur sol plastique.	51
3.20	Evolution de la surface de charge sur sol plastique pour un chargement monotone.	53
3.21	Evolution de la surface de charge sur sol plastique avec l'adaptation chargement/déchargement.	54
3.22	Persistance éventuel d'un décollement sur un sol plastique.	55
3.23	Evolution des surfaces de charge sur sol plastique, cas où un seul mécanisme est actif.	57
3.24	Evolution des surfaces de charge sur sol plastique, cas où les deux mécanismes sont actifs.	57
3.25	Représentation 3D des surfaces d'initiation au décollement et de décollement total dans l'espace ( $M'_x, M'_y, V$ ).	58
3.26	Lois moment-rotation, moment soulèvement, moment-pourcentage de décollement, cas où le comportement de la fondation repasse par une zone élastique.	59
3.27	Lois moment-rotation, moment soulèvement, moment-pourcentage de décollement, cas où le comportement de la fondation ne repasse pas par une zone élastique.	59
3.28	Cinématique de décollement pour une fondation rectangulaire, décomposition du mouvement dans les deux directions principales $\vec{u}$ et $\vec{v}$ .	60
3.29	Cinématique de décollement pour une fondation circulaire, calcul de la direction de chargement pour l'évaluation des limites des variables d'écrouissages de décollement.	61
3.30	Représentation graphique de la superposition des critères de rupture en décollement, initiation de décollement et rupture plastique en projection dans les espaces $M_y, H_x, V$ et $M_y, M_x, V$ .	64
3.31	Influence de l'effet $P - \theta$ sur l'effort normal de stabilisation de la fondation.	67
3.32	Effet $P - \theta$ , deux changements de repères à considérer dans le cas de rotations modérées.	68
3.33	Modèle rhéologique avec prise en compte de l'amortissement radiatif.	69
3.34	Sollicitation et réponse du modèle rhéologique 1D pour un essai de relaxation.	70
3.35	Loi de comportement type d'un isolateur en base.	72
3.36	Loi de comportement type d'un isolateur en base, décomposition des deux termes.	73
3.37	Loi de comportement type d'un isolateur en base.	73
4.1	Loi de comportement bilinéaire 1D.	80
4.2	Loi de comportement non linéaire 1D.	83
4.3	Algorithme du return mapping sur plusieurs mécanismes.	89

5.1	Swipe test GG03: Etape 1. un déplacement vertical est atteint, Etape 2. un déplacement horizontal croissant est appliqué à la fondation. . . . .	92
5.2	Swipe test GG07: Etape 1. une fois que l'effort vertical $V_0 = 1600N$ est atteint, il est réduit à $V_0 = 200N$ , Etape 2. un déplacement horizontal croissant est appliqué à la fondation. . . . .	92
5.3	((a), (b)): Résultats expérimentaux et ((c), (d)): résultats numériques pour les Swipe tests GG03 et GG07 dans les plans $(H_x - u_x)$ et $(H_x - V)$ . . . . .	94
5.4	((a), (b)): Résultats expérimentaux et ((c), (d)): résultats numériques pour le Swipe test GG04 dans les plans $(M_y - \theta_y)$ et $(M_y - V)$ . . . . .	94
5.5	(a) Résultats expérimentaux, (b) résultats numériques pour les Swipe test GG06 et GG29 dans le plan $(h - m)$ . . . . .	95
5.6	Simulation numérique du Swipe test 3D: représentation du chemin de réponse en efforts (a) dans les plans $\left(\frac{M_y}{2R} - \frac{M_x}{2R}\right)$ , (b) $\left(\frac{M_y}{2R} - V\right)$ , (c) et dans l'espace $\left(\frac{M_y}{2R} - \frac{M_x}{2R} - V\right)$ . . . . .	95
5.7	TRISEE: Schema du dispositif expérimental (dimensions en m). . . . .	96
5.8	TRISEE: Phase I, comparaison résultats expérimentaux et résultats numériques pour les sables LD et HD. . . . .	98
5.9	TRISEE: Phase I, tassements du centre de la fondation pour les sables LD et HD. . . . .	99
5.10	TRISEE: Phase II, comparaison résultats expérimentaux et résultats numériques pour les sables LD et HD. . . . .	99
5.11	TRISEE: Phase II, tassements du centre de la fondation pour les sables LD et HD. . . . .	100
5.12	TRISEE: Phase III, comparaison résultats expérimentaux et résultats numériques pour les sables LD et HD. . . . .	100
5.13	TRISEE: Phase III, tassements du centre de la fondation pour les sables LD et HD. . . . .	101
5.14	Détail du portique testé en centrifugeuse. . . . .	101
5.15	Modélisation de type brochette du portique pour les essais en centrifugeuse Davis. . . . .	102
5.16	Accélérogramme appliqué dans le cadre des essais en centrifugeuse Davis. . . . .	103
5.17	Essais en centrifugeuse Davis: Moment-Rotation en base et Moment-Temps pour l'essai (EE). . . . .	104
5.18	Essais en centrifugeuse Davis: Déplacement horizontal en base et déplacement vertical en fonction du temps pour l'essai (EE). . . . .	105
5.19	Essais en centrifugeuse Davis: Moment-Rotation en base et Moment-Temps pour l'essai (EW). . . . .	105
5.20	Essais en centrifugeuse Davis: Déplacement horizontal en base et déplacement vertical en fonction du temps pour l'essai (EW). . . . .	106
6.1	(a) Photo et (b) schéma de la fondation pour les essais Camus IV. . . . .	108
6.2	Modélisation de type brochette des essais Camus IV. . . . .	109
6.3	Accélérogrammes utilisés pour les essais Camus IV. . . . .	110
6.4	Camus IV: Courbes moment-rotation, rotation-temps et effort horizontal-temps pour l'essai de niveau 0.33g. . . . .	111
6.5	Camus IV: Courbes moment-soulèvement et soulèvement-temps pour l'essai de niveau 0.33g. . . . .	112
6.6	Camus IV: Courbes rotation-temps et déplacement en tête-temps pour l'essai de niveau 0.33g. . . . .	112

6.7	Camus IV: Courbes moment-rotation, rotation-temps et effort horizontal-temps pour l'essai de niveau 0.52g. . . . .	113
6.8	Camus IV: Courbes Moment-soulèvement et soulèvement-temps pour l'essai de niveau 0.52g. . . . .	113
6.9	Camus IV: Courbes rotation-temps et déplacement en tête-temps pour l'essai de niveau 0.52g. . . . .	114
6.10	Camus IV: Courbes efforts horizontal-vertical-moments pour l'essai 3D de niveau 0.52g dans la direction $\vec{x}$ couplé au niveau 0.33g dans la direction $\vec{y}$ . . .	114
6.11	NEES: (a) Vue Nord-Ouest de la structure (b) Données géométriques de la structure. . . . .	116
6.12	NEES: Accélérogrammes EQ1, EQ2, EQ3 et EQ4. . . . .	117
6.13	NEES: Spectres à 5% d'amortissement des accélérogrammes EQ1, EQ2, EQ3 et EQ4. . . . .	117
6.14	NEES: (a) Maillage éléments finis et représentation des masses concentrées (b) Représentation des fibres dans une section donnée. . . . .	118
6.15	Réponse uniaxiale cyclique du modèle La Borderie. . . . .	120
6.16	NEES: Calibration des raideurs en rotation de la table sismique. . . . .	121
6.17	NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: déformées modales (mode 1: flexion, mode 2: pompage(+flexion), mode 3: flexion). . . . .	122
6.18	NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: moments et efforts tranchants maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues). .	123
6.19	NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: déplacements latéraux et accélérations maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues). . . . .	123
6.20	NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: déplacements latéraux relatifs maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues). .	123
6.21	NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: état d'endommagement aux étages 0 et 1 pour EQ1. . . . .	124
6.22	NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: déplacements latéraux en tête en fonction du temps pour les séquences EQ1 et EQ4. Résultats expérimentaux (pointillés) et résultats numériques en aveugle (lignes continues). . . . .	124
6.23	NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: état d'endommagement de traction aux étages 0 et 1 en considérant la continuité des aciers (EQ1).125	125
6.24	NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: déplacements latéraux en tête en fonction du temps pour les séquences EQ1 et EQ4. Résultats expérimentaux (pointillés) et résultats numériques (lignes continues) en considérant les nouveaux matériaux, les nouveaux coefficients d'amortissement et la continuité des aciers. . . . .	126
6.25	NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: état d'endommagement de traction dans le béton pour la structure modifiée aux niveaux 0 et 1 en considérant les nouveaux matériaux, amortissement et la continuité des aciers (EQ1). . . . .	126
6.26	NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: déformée modale statique pour les déplacements (a) et pour les moments (b) (EQ4). . . . .	127
6.27	NEES - ISS: caractéristiques géométriques de la fondation. . . . .	128

6.28	NEES - ISS: (a) Moment fléchissant maximum, (b) Efforts tranchants, (c) Déplacements latéraux, (d) Déplacements latéraux relatifs et (e) accélérations des planchers pour 5 sols différents et comparaison avec la structure initiale (encastrée) pour la séquence EQ4. . . . .	130
6.29	NEES - ISS: (a) Moment à la base en fonction du temps (b) Déplacement latéral au sommet en fonction du temps pour la structure encastrée et pour la structure simulant l'ISS (sol 1, EQ4). . . . .	131
6.30	NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS et en considérant seulement le mode 2 (c) ou les modes 2 et 3 (d) (sol 1). . . . .	132
6.31	NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 1). . . . .	132
6.32	NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS (sol 3). . . . .	133
6.33	NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 3). . . . .	133
6.34	NEES-ISS: état d'endommagement du béton en traction pour la structure reposant sur le sol 3 de la base du rez-de-chaussée à la base de l'étage 5 (EQ4). . . . .	134
6.35	Viaduc: vue en plan du pont expérimenté à Ispra à l'échelle $\frac{1}{2.5}$ . . . . .	135
6.36	Viaduc: schématisation de l'essai Pseudo-dynamique. . . . .	136
6.37	Viaduc: (a) vue en coupe du tablier modélisé sous Cast3M, et (b) vue en coupe des piles testées à l'échelle $\frac{1}{2.5}$ . . . . .	136
6.38	Viaduc: modèle poutres multifibres et masses concentrées. . . . .	137
6.39	Viaduc: détail de la discrétisation des poutres multifibres pour les piles P1, P2 et P3. . . . .	137
6.40	Viaduc: déformées modales numériques pour les modes 1 à 4 du pont. . . . .	138
6.41	Viaduc: (a) spectre de dimensionnement issu de l'Eurocode 8 pour un amortissement de 5% et spectre de l'accélérogramme synthétique, (b) accélérogrammes faibles pour la structure à échelle 1 et (c) $\frac{1}{2.5}$ . . . . .	139
6.42	Viaduc: comparaison déplacements et efforts tranchants expérimentaux et numériques pour le séisme faible. . . . .	140
6.43	Viaduc: comparaison déplacements et efforts tranchants expérimentaux et numériques pour le séisme fort. . . . .	140
6.44	Viaduc - ISS: calage des raideurs des ressorts élastiques linéaires. . . . .	142
6.45	Viaduc - ISS: comparaison des déplacements, moments et efforts tranchants pour le séisme fort et le sol de classe B. . . . .	142
6.46	Viaduc - ISS: comparaison des déplacements, moments et efforts tranchants pour le séisme faible et le sol de classe C. . . . .	143



---

## Liste des tableaux

---

5.1	Paramètres numériques utilisés pour les Swipe tests . . . . .	93
5.2	TRISEE: Paramètres du macro-élément variants au cours des différentes phases.	97
5.3	TRISEE: Paramètres du macro-élément constants au cours des différentes phases.	98
5.4	Paramètres utilisés pour la modélisation des essais en centrifugeuse Davis . .	103
5.5	Paramètres de plasticité pour les modélisations des essais en centrifugeuse Davis.	104
5.6	Paramètres élastiques, d'amortissements et de ruptures pour la modélisation des essais en centrifugeuse Davis. . . . .	104
6.1	Paramètres utilisés pour la modélisation des essais Camus IV. . . . .	108
6.2	Paramètres de plasticité pour la modélisation des essais Camus IV. . . . .	109
6.3	Comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques pour les essais Camus IV. . . . .	110
6.4	NEES: Détail des masses et des inerties de rotation pour chaque nœud du "web wall. . . . .	118
6.5	NEES: Détail des masses et des inerties de rotation pour chaque noeud du "flange wall". . . . .	118
6.6	NEES: Données matériaux utilisées pour les lois de comportement. . . . .	120
6.7	NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: modes et fréquences de la structure. . . . .	121
6.8	NEES - ISS: caractéristiques des sols utilisés. . . . .	129
6.9	Viaduc: détail des caractéristiques géométriques de la section du tablier. . . .	136
6.10	Viaduc: détail des masses et des inerties de rotation. . . . .	136
6.11	Viaduc: données matériaux utilisées pour les lois de comportement. . . . .	138
6.12	Viaduc: comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques. . .	138
6.13	Viaduc - ISS: caractéristiques des sols utilisés. . . . .	141



# CHAPITRE 1

---

## Introduction générale

---

Dans un monde en pleine croissance démographique, le risque d'avoir des dommages importants lors de séismes au niveau des structures et donc d'avoir un nombre significatif de victimes est en constante augmentation. Pourquoi ce risque augmente-t-il avec le temps? La notion de risque peut s'exprimer de manière simple comme la combinaison de l'aléa et de la vulnérabilité. Une bonne connaissance de l'aléa, c'est à dire la probabilité qu'un événement se produise, est nécessaire pour bien comprendre les phénomènes. C'est le travail du sismologue. La vulnérabilité quant à elle peut être divisée en deux familles. Tout d'abord il y a les aspects humains, c'est à dire la gestion de la crise, le comportement des personnes lors d'un séisme. Mais il y a aussi les aspects techniques, c'est à dire les méthodes de construction. L'ingénieur va travailler sur ce deuxième aspect. D'après ce schéma, il est facile de comprendre que les risques vont croissant avec l'urbanisation et l'augmentation d'équipements sensibles.

Pour diminuer le risque, outre l'aspect sociologique, l'aspect technique et donc la bonne connaissance du comportement des structures sous sollicitations sismiques est très importante. C'est sur ce point que s'articule cette thèse. La réduction de la vulnérabilité d'une structure d'un point de vue technique n'est pas simple. Elle nécessite une bonne connaissance des matériaux, de leur réactions face à des sollicitations dynamiques, mais aussi et surtout une bonne connaissance des conditions aux limites de la structure, c'est à dire l'interface entre le lieu où ces sollicitations prennent naissance et la structure elle-même. Le terme générique désignant l'étude de ces phénomènes porte le nom d'Interaction Sol-Structure (ISS). Le terme interaction est très important puisqu'il met bien en évidence le fait que non seulement la nature du sol a une influence sur le comportement de la structure, mais aussi la structure a une influence sur le comportement du sol qui peut modifier ainsi les composantes de la sollicitation.

Plusieurs méthodes existent pour prendre en compte l'ISS. La plus utilisée est la méthode des éléments finis traitant les problèmes au niveau local (lois constitutives en contraintes-déformations). Elles semblent appropriées puisqu'elles permettent de définir précisément le comportement de tous les éléments composant le problème (sol, fondation, structure etc...).

Néanmoins, à l'échelle d'un bâtiment l'intégration de phénomènes locaux peut s'avérer très coûteuse augmentant ainsi considérablement les temps de calculs et la difficulté du post-traitement des résultats.

Pour traiter l'ISS, nous allons dans cette thèse développer un outil qui permet, tout en ayant une conception simplifiée, de reproduire de manière phénoménologique le comportement d'une fondation superficielle reposant sur un massif de sol semi-infini. Ainsi nous allons nous placer à une échelle intermédiaire entre le niveau global et le niveau local afin de construire des lois de fonctionnement plutôt que de lois de comportements utilisées pour les études locales. Ce type d'outil s'appelle plus communément le "macro-élément". Les motivations pour développer ce genre de formulation seront, nous l'avons vu, d'acquérir efficacité et robustesse en améliorant à la fois le gain machine (temps de calculs diminués) mais aussi le gain humain (temps de préparation de maillage et des données réduits ainsi qu'une analyse simplifiée des résultats). Grâce à de tels outils, des analyses paramétriques, de sensibilité ou probabilistes peuvent être envisagées. Bien sûr l'inconvénient de ce genre d'éléments est leur domaine de validité. Reproduisant des lois phénoménologiques, ces outils sont dédiés à un type de modélisation précis.

Après un rapide état de l'art sur l'ISS et les différentes méthodes pour sa prise en compte dans le chapitre 2, le chapitre 3 présente le développement théorique d'un élément d'interface 3D modélisant une fondation superficielle de forme circulaire, rectangulaire ou filante reposant sur un massif de sol semi-infini. Cet élément permet de prendre en compte l'ISS en considérant la plasticité du sol et le décollement de la fondation. Ces deux types de non-linéarités sont élaborées séparément mais sont néanmoins couplées. Ils sont traités de manière similaire suivant la théorie classique de plasticité. Ce formalisme est essentiel puisqu'il permet de les coupler de manière simple grâce à la théorie des multi-mécanismes. Basés sur la méthode des macro-éléments, les mécanismes considérés sont développés en variables globales (forces et déplacements) à cinq degrés de liberté. Deux directions horizontales de chargements peuvent être ainsi appliquées à la fondation.

Le chapitre 4 explique l'implémentation numérique du macro-élément dans le code de calcul FEDEASLab, un code élément finis développé dans Matlab. La méthode qui permet de gérer numériquement plusieurs mécanismes plastiques sera alors présentée et un algorithme sera proposé.

Le chapitre 5 est consacré aux validations du modèle par rapport à des essais expérimentaux soumis à des chargements monotones, cycliques ou dynamiques. Le chapitre 6 est quant à lui consacré aux applications à des structures de génie civil (bâtiments et ponts). Grâce à sa simplicité de formulation, son utilisation rapide et par le fait qu'il prend en compte bon nombre de phénomènes de l'ISS tout en étant très peu coûteux en temps de calcul, le macro-élément va nous permettre de faire dans ce chapitre des analyses paramétriques. Elles nous permettront de conclure quant à l'importance de la prise en compte de ce phénomène dans le calcul de structures. Enfin le chapitre 7 apportera conclusions et perspectives à ce travail.

Ce thème de recherche s'inscrit dans le cadre du programme Européen LESSLOSS qui vise à réduire la vulnérabilité des ouvrages aux risques naturels.

## 2.1 Notion d'Interaction Sol-Structure (ISS)

La résolution de tout problème de mécanique nécessite une bonne connaissance de ses conditions aux limites. Pour bien comprendre, il est facile d'imaginer, qu'une structure élançée de type poutre encastrée à une extrémité, se comporte de manière totalement différente qu'une poutre dont l'encastrement est remplacé par une rotule avec ressort. Sa rigidité et ses fréquences propres s'en trouvent réduites alors que ses déplacements peuvent être amplifiés. Le même raisonnement peut être effectué pour un immeuble reposant sur une fondation. La connaissance de la fondation et du sol sous-jacent est essentielle pour bien déterminer le comportement réel de la structure.

Parallèlement nous pouvons montrer que la présence de la structure influence elle aussi le comportement du sol, c'est à dire le comportement qu'il aurait en champ libre. En effet, prenons par exemple deux structures, l'une encastrée dans un solide rocher, l'autre reposant sur un sol plus souple. La structure encastrée dans le rocher ne va pas influencer le champ libre. Le sol étant très rigide, le fait d'y ajouter une structure ne change rien à son comportement. La masse de la structure ne change rien non plus puisque les efforts d'inerties engendrés par la structure sur la roche rigide n'ont pas d'effet sur celui-ci. Par contre, pour la structure reposant sur le sol souple, trois phénomènes vont intervenir:

- le fait d'excaver et d'inclure une fondation rigide va modifier le champ libre. En effet par cette inclusion le champ de déplacement du sol va s'en trouver changé. C'est ce que nous appelons l'*interaction cinématique*.
- le fait d'inclure la masse de la structure va induire des efforts d'inerties supplémentaires à la base de la structure et donc dans le sol, ce qui aura pour conséquence de modifier encore une fois le champ de déplacement. C'est ce que nous appelons l'*interaction inertielle*.

- lors de chargement dynamique, en considérant un massif de sol semi infini, l'énergie amenée par le mouvement de la structure est dissipée de deux manières: un amortissement hystérétique (matériel) dû aux non-linéarités présentes dans le sol et dans la fondation, et une dissipation due au rayonnement des ondes dans le milieu semi-infini. Cette dissipation de l'énergie rayonnée par la structure s'appelle l'*amortissement radiatif*.

Ainsi, une influence existe aussi bien du sol sur la structure que de la structure sur le sol. C'est pour cela que nous parlons de problèmes d'interactions entre le sol et la structure.

Un dernier phénomène physique pouvant intervenir lors de sollicitations sismiques sur un massif de sol est la liquéfaction de ce massif de sol. Ce phénomène touche particulièrement les sables lâches saturés. Il provient d'une annulation des contraintes effectives pour un chemin de sollicitation défini en déformation. Dans un état liquéfié, les contraintes effectives disparaissent ce qui implique que les grains de sables semblent flotter dans l'eau. D'un point de vue pratique, la liquéfaction provoque un grand déplacement des couches de sol qui va déstabiliser la structure, mais qui en contre-partie va aussi effectuer un filtrage des ondes sismiques à la manière d'un filtre passe bas [Bühler et Cudmani, 2005]. Ce filtrage peut donc engendrer une sollicitation sismique moins importante sur la structure. Au contraire, dans d'autres cas, les déplacements engendrés par cette liquéfaction peuvent être amplifiés et dramatiques pour la structure. Ce phénomène de liquéfaction est donc important à prendre en compte. Néanmoins ce comportement complexe ne rentre pas dans le cadre des études et des développements qui vont suivre dans ce document.

## 2.2 Les différentes méthodes pour prendre en compte l'ISS

Différentes méthodes existent pour prendre en compte l'ISS. Elles sont décrites et détaillées dans [Pecker, 1984] ou [Wolf, 1988] ou encore dans la thèse [Crémer, 2001]. Nous allons les présenter brièvement dans ce paragraphe.

### 2.2.1 Les méthodes directes

Les méthodes directes consistent à résoudre directement l'équation de la dynamique régissant le comportement du système {sol+fondation+structure}:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\cdot\ddot{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\cdot\dot{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\cdot\mathbf{u} = -\underline{\underline{\mathbf{M}}}\cdot\mathbf{I}a \quad (2.1)$$

Où  $\mathbf{u}$  représente le vecteur de déplacement du système par rapport au repère de référence soumis à l'accélération  $a$  par rapport à un repère galiléen,  $\mathbf{I}$  un vecteur contenant des 1 pour les directions soumises à l'accélération  $a$ , et  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ , et  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  les matrices de masse, amortissement et raideur du système. Le symbole  $\cdot$  représente les dérivées par rapport au temps.

La résolution directe de ce système d'équation utilise les algorithmes classiques de la méthode des éléments finis (méthode de Newton-Raphson et algorithme d'intégration temporelle de Newmark).

La première difficulté est que cette résolution requiert une bonne connaissance des lois de comportements des matériaux et des frontières entre les différentes parties du système. Par exemple, des lois de contacts, entre la fondation et le sol doivent être prises en compte pour bien reproduire les différentes non linéarités (e.g les problèmes de décollement d'une fondation superficielle qui constituent une non-linéarité géométrique).

La deuxième difficulté est la différence de dimension qui existe entre la structure et le massif de sol supportant la fondation. La prise en compte de l'ISS nécessite un très grand nombre d'éléments ce qui engendre des temps de calculs contraignants. Il est d'ailleurs assez difficile de définir de manière précise la frontière de ce massif de sol. En effet, une onde frappant cette frontière peut numériquement se réfléchir et venir solliciter une nouvelle fois la structure, alors qu'en réalité, nous l'avons vu, cette onde part à l'infini et emmène avec elle une partie de l'énergie de la structure et du sol (amortissement radiatif). Des frontières absorbantes devront donc être ajoutées aux limites du massif de sol pour tenir compte de cet amortissement.

### 2.2.2 La méthode des sous-structures

Elle vise à décomposer le problème en la somme de sous problèmes plus simples à résoudre. Dans le cas de fondations rigides cette méthode consiste à utiliser le principe de superposition de [Kausel *et al.*, 1978]. Cette démarche est illustrée par la figure 2.1.

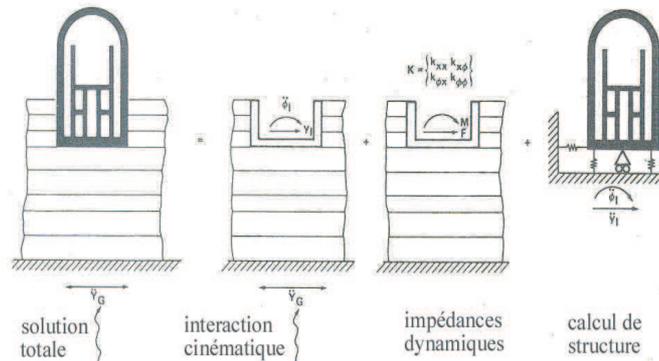


FIG. 2.1 – *Principe de superposition de Kausel*

D'un point de vue pratique, cette méthode consiste à décomposer la résolution du problème en trois étapes successives:

- (i) Nous considérons le milieu {sol+fondation rigide sans masse}. En appliquant la sollicitation sismique à la base de ce milieu nous déterminons l'accélération à laquelle sera soumise la fondation. C'est le calcul de l'interaction cinématique.
- (ii) Nous calculons la matrice d'impédance dynamique de la fondation permettant d'obtenir les raideurs ainsi que les termes d'amortissement dans les différentes directions.
- (iii) Nous calculons la réponse dynamique de la structure supportée par les ressorts d'impédances trouvés en (ii) et soumise à la sollicitation calculée en (i)

De nombreuses méthodes existent pour résoudre la première étape et notamment la méthode des équations intégrales [Aubry, 1986] ou d'éléments frontières [Chebli *et al.*, 2008].

La deuxième étape nécessite le calcul des fonctions d'impédances. L'impédance de la fondation

caractérise l'effort résultant sur la fondation sans masse lorsqu'elle est soumise à un déplacement imposé harmonique unitaire. Le mouvement de la fondation est celui d'une masse posée sur un ressort ayant pour raideur la partie réelle de l'impédance et pour amortissement sa partie imaginaire. Des résultats analytiques pour tout type de fondations sont données dans [Gazetas, 1991] et [Pecker, 1984]. Dans le cas général et pour une fondation possédant six degrés de libertés, la matrice d'impédance reliant les déplacements aux efforts est de dimension  $6 \times 6$ . Cependant, nous pouvons montrer que pour une fondation superficielle, les termes hors-diagonaux de la matrice peuvent être considérés comme nuls [Pecker, 1984], ce qui revient à considérer qu'il n'y a pas de couplage entre les différents degrés de liberté.

Par ailleurs, chaque terme de la matrice est composé d'une partie réelle traduisant la raideur du système {sol+fondation} et d'une partie imaginaire traduisant l'amortissement. Cet amortissement provient de la radiation des ondes de la fondation vers l'infini. Ces deux termes peuvent a priori dépendre de la fréquence de la sollicitation (figure 2.2). Toutefois, dans certains cas, la non dépendance de ces paramètres par rapport à la fréquence pourra constituer une hypothèse acceptable [Pecker, 1984] (voir figure 2.2).

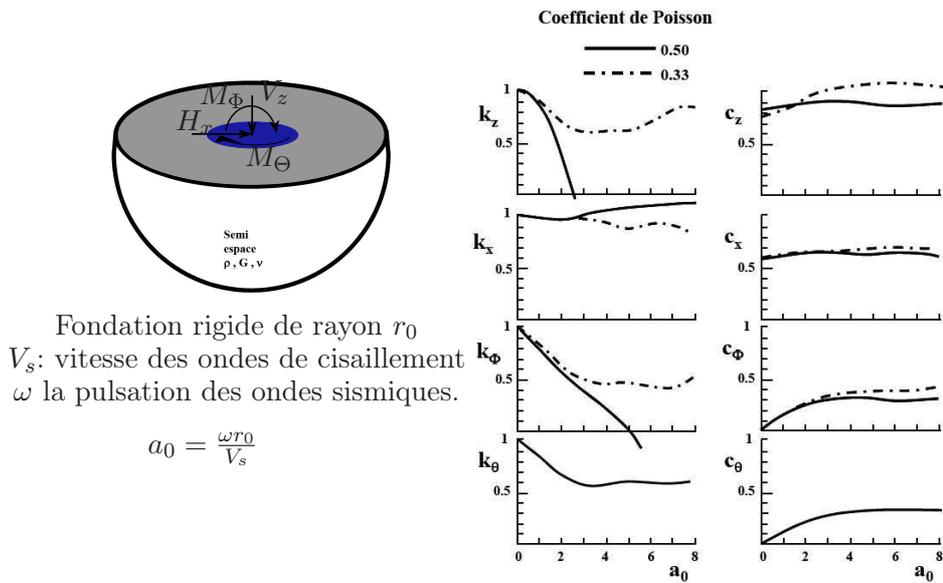


FIG. 2.2 – Termes d'impédance (raideur et amortissement) pour une fondation superficielle circulaire selon Pecker

La troisième étape est en général résolue avec la méthode des éléments finis permettant de résoudre l'équation de la dynamique d'une structure liée au sol par un système de ressorts et d'amortisseurs.

Ces méthodes sont assez restreintes puisque, comme tout problème de superposition, elles ne sont utilisables uniquement que pour des problèmes linéaires.

Cependant de nombreux travaux montrent que cette technique donne de très bon résultats [Pitilakis *et al.*, 2008]

## 2.3 Méthodes hybrides: concept de macro-élément

Les méthodes hybrides consistent à utiliser une combinaison des deux autres méthodes vues plus haut en profitant des avantages de chacune. Ainsi les méthodes hybrides visent à décomposer le système en deux sous-domaines. Le premier sous domaine: le champ lointain est suffisamment loin de la fondation pour être considéré élastique. Son comportement peut alors être régi par les impédances dynamiques. Le deuxième sous-domaine: le champ proche est quant à lui considéré comme ayant un comportement non-linéaire. Nous allons même jusqu'à considérer qu'il englobe toutes les non-linéarités et hétérogénéités du problème. Ce domaine fini peut être traité par exemple avec la méthode des éléments finis.

Afin de traiter les non-linéarités à l'intérieur de ce champ proche, outre la méthode classique des éléments finis, le concept de macro-élément peut être utilisé.

Pour la géomécanique, le concept de macro-élément a été développé par [Nova et Montrasio, 1991]. Imaginons un domaine fini dans lequel sont présentes des non-linéarités. Le concept de macro-élément consiste à considérer ces non-linéarités d'une manière globale (en travaillant en variables généralisées forces et déplacements) et à les concentrer en un point représentatif. Le macro-élément dans le cadre de la méthode des éléments finis est donc une boîte à l'entrée de laquelle nous appliquons des déplacements et qui permet de calculer en sortie le torseur des efforts associés en considérant diverses non linéarités. Ce concept a été aussi largement utilisé pour simuler le comportement macroscopique de liaisons d'éléments structuraux (par exemple liaisons poteaux poutres pour les structures acier [Fléjou, 1993], béton [Davenne, 1998] ou bois [Richard *et al.*, 1999]).

Dans notre cas, le domaine fini est constitué d'une fondation superficielle (de forme quelconque: circulaire, rectangulaire ou filante comme nous le verrons dans le chapitre 3 sur la présentation du modèle) et d'un volume fini du sol sous-jacent regroupés dans le champ proche (figure 2.3). Dans ce volume {sol+fondation} sont donc concentrées toutes les non-linéarités. Deux types de non-linéarités sont présentes: les non-linéarités matérielles qui sont constituées principalement par la plasticité du sol, mais aussi les non-linéarités géométriques composées par le décollement éventuel de la fondation.

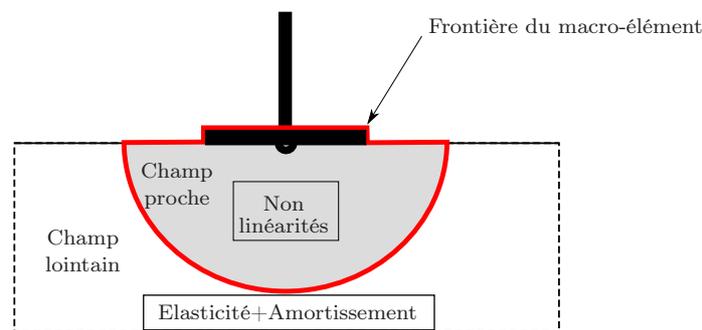


FIG. 2.3 – Décomposition en champ proche et champ lointain pour la définition de la frontière du macro-élément d'ISS

Le reste du volume du sol, c'est à dire la partie semi-infinie sous le macro-élément constitue le champ lointain. Dans ce volume, aucune non-linéarité n'est présente. Le sol se comporte donc de manière élastique. Par contre, c'est dans ce champ lointain, que vont pouvoir être considérés les dissipations d'énergies dues à l'amortissement radiatif.

Les premiers modèles de macro-éléments ont été spécialement développés pour des problèmes statiques de capacité portante de fondations superficielles avec des charges excentrées et inclinées [Nova et Montrasio, 1991], [Cassidy *et al.*, 2002], notamment pour l'industrie off-shore [Martin, 1994], puis ont été étendus à des problèmes cycliques [Montrasio et Nova, 1997], [Pedretti, 1998], [di Prisco *et al.*, 2002], [di Prisco et Galli, 2006], et à des chargements dynamiques [Paolucci et Pecker, 1997a], [Crémer, 2001], [Crémer *et al.*, 2001], [Crémer *et al.*, 2002].

La plupart de ces modèles ont été décrits pour des fondations filantes ou pour des géométries diverses mais sous chargement 2D. Ils sont formulés selon les modèles classiques de plasticité issus du cadre général de la thermodynamique des processus irréversibles [Lemaitre et Chaboche, 1988]. De manière générale, les modèles issus de cette théorie sont décrits en variables locales (contraintes-déformations), alors que nous l'avons vu, la particularité pour un macro-élément est que ces modèles de plasticité sont décrits en variables globales (efforts-déplacements). L'étude des lois plastiques de ce genre est motivée par les travaux antérieurs visant à développer des critères de rupture de fondations pour des chargements inclinés faisant intervenir des combinaisons d'actions horizontales, verticales et des moments. Ces critères de ruptures permettent ensuite de décrire des surfaces de charges évoluant grâce à des variables d'écrouissages vers ces critères de rupture. Ces critères ont été développés soit expérimentalement dans les travaux de [Gottardi *et al.*, 1999], [Byrne et Houlsby, 2001] et [Cassidy *et al.*, 2004], soit grâce à des études d'analyse limite [Paolucci et Pecker, 1997b].

Une autre famille de modèles développée pour prendre en compte des chargements cycliques a été construite selon des lois hypoplastiques. Ces lois sont plus faciles à développer pour des chargements cycliques puisque le module plastique (c'est à dire la pente instantanée de la loi effort-déplacement) est directement calculé grâce à des lois le liant à la distance du point de charge courant à une surface d'appui (Bounding surface) analogue au critère de rupture décrit pour les lois classiques de plasticité.

Certains critères incluent l'effet de l'inertie du sol pour les problèmes dynamiques. Nous noterons particulièrement à ce sujet les travaux de [Paolucci et Pecker, 1997b] et [Chatzigogos, 2007].

Ces différents éléments ont déjà été décrits dans les thèses de [Crémer, 2001] et [Chatzigogos, 2007]. Nous allons maintenant dans les paragraphes suivants faire un bref état des lieux des différents modèles en s'attachant à les décrire de manière générale avant d'aborder les particularités de chacun.

### **2.3.1 Macro-élément de Nova et Montrasio: modèle plastique 2D sous chargement monotone**

Le concept de macro-élément a été pour la première fois développé par [Nova et Montrasio, 1991]. Ce travail commence par l'étude expérimentale d'une fondation superficielle rigide filante de largeur  $B$  (déformations planes) reposant sur un sable lâche, sous chargements statiques excentrés. Cette étude se poursuit avec le développement d'un modèle issu de la plasticité classique faisant évoluer des surfaces de charges à l'intérieur d'un critère de rupture. Cette évolution est régie grâce à une loi d'écrouissage isotrope et une loi d'écoulement non-associée. Les différents points importants du modèle sont les suivants.

### 2.3.1.1 Comportement sous charge verticale

Les essais expérimentaux ont permis d'énoncer une relation analytique très simple. Si  $V$  est l'effort vertical,  $V_M$  l'effort vertical maximum admissible par la fondation sur un sol donné,  $v$  le déplacement vertical et  $R_0$  la pente de la courbe  $V - v$  pour des petits déplacements, [Nova et Montrasio, 1991] propose la relation suivante (suggérée initialement par [Butterfield, 1980]):

$$\frac{V}{V_M} = 1 - e^{-\frac{R_0 v}{V_M}} \quad (2.2)$$

### 2.3.1.2 Diagrammes d'interactions

Nous considérons maintenant que le chargement de la fondation est 2D. Ceci signifie qu'en terme d'efforts elle est soumise à la fois à un effort vertical  $V$ , à un effort horizontal  $H$  et à un moment  $M$ .

[Nova et Montrasio, 1991] montre expérimentalement que le critère de rupture du système {sol+fondation} est indépendant du chemin de chargement et s'écrit d'une part dans le plan  $H - V$  de la manière suivante:

$$F(V, H, V_M) = \frac{H}{\mu V_M} - \frac{V}{V_M} \left(1 - \frac{V}{V_M}\right)^\beta \quad (2.3)$$

et d'autre part dans le plan  $M - V$  de la manière suivante:

$$F(V, M, V_M) = \frac{H}{\psi B V_M} - \frac{V}{V_M} \left(1 - \frac{V}{V_M}\right)^\beta \quad (2.4)$$

Dans ces expressions,  $\mu$  représente le coefficient de frottement sol/fondation,  $\beta$  et  $\psi$  sont des paramètres constitutifs adimensionnels.

A partir de ces diagrammes d'interactions (ou critère de rupture) et pour décrire les non-linéarités à l'intérieur de ces diagrammes, les auteurs ont développé un modèle issu de la plasticité classique permettant de prendre en compte les irréversibilités et de calculer des déplacements permanents. Pour cela, un adimensionnement des grandeurs s'est avéré nécessaire. Ce genre d'adimensionnement est ensuite repris pour bon nombre de macro-éléments.

### 2.3.1.3 Adimensionnement des variables

Le vecteur d'efforts généralisés adimensionné proposé par Nova est le suivant:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \xi \\ h \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{V_M} \begin{Bmatrix} V \\ H/\mu \\ M/(\psi B) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Les paramètres cinématiques correspondants proposés sont les suivants:

$$\underline{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \eta \\ \epsilon \\ \zeta \end{Bmatrix} = V_M \begin{Bmatrix} v \\ \mu u \\ \psi B \theta \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Ce choix pour l'adimensionnement des variables est essentiel puisqu'il permet d'obtenir des variables conjuguées, c'est à dire permettant de calculer le travail des efforts apportés à la fondation [Prager, 1955].

$${}^t\mathbf{Q}\cdot\mathbf{q} = Vv + Hu + M\theta \quad (2.7)$$

Grâce à ce formalisme, le critère de rupture s'écrit de la manière suivante:

$$f(\xi, h, m) \equiv h^2 + m^2 - \xi^2 (1 - \xi)^{2\beta} = 0 \quad (2.8)$$

Cette surface a la forme d'un ballon de rugby dans l'espace des efforts adimensionnés. Il est représenté par la figure 2.4.

### 2.3.1.4 Surface de charge et loi d'écroissage

[Nova et Montrasio, 1991] postule que la surface de charge s'écrit de la manière suivante:

$$f(\mathbf{Q}) \equiv h^2 + m^2 - \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho_c}\right)^{2\beta} = 0 \quad (2.9)$$

A l'intérieur de celle-ci, le comportement est élastique. Lorsque le point de charge appartient à celle-ci et se déplace vers l'extérieur, des déplacements plastiques sont produits. L'évolution de la surface de charge est régie par la variable d'écroissage  $\rho_c$ . Sa valeur détermine le point d'intersection avec l'axe  $\xi$ . La rupture a lieu lorsque  $\rho_c = 1$ , à ce moment, la surface de charge épouse complètement le critère de rupture (figure 2.4).

Comme pour un problème de plasticité classique, la loi d'écroissage est totalement définie en fonction des déplacements (et donc implicitement des déplacements plastiques). [Nova et Montrasio, 1991] propose une évolution de la variable du même type que l'évolution de l'effort vertical vue plus haut, mais cette fois ci, en incluant d'autres déplacements (horizontaux et rotations). En effet ces déplacements vont eux aussi écroire la surface de charge en développant de la plasticité dans le sol. La participation de ces déplacements n'est, a priori, pas la même que pour le déplacement vertical. Ainsi des paramètres constitutifs  $\alpha$  et  $\gamma$  sont ajoutés de la manière suivante pour tenir compte de la participation de chaque déplacement dans l'évolution de la variable d'écroissage:

$$\rho_c = 1 - e \left( -\frac{R_0}{V_M} \left( \eta^2 + \left( \frac{\alpha|\epsilon|}{\mu} \right)^2 + \left( \frac{\gamma|\zeta|}{\psi} \right)^2 \right) \right) \quad (2.10)$$

L'évolution de  $\rho_c$  en fonction du déplacement généralisé  $v = \eta^2 + \left( \frac{\alpha|\epsilon|}{\mu} \right)^2 + \left( \frac{\gamma|\zeta|}{\psi} \right)^2$  est donnée par la figure 2.5.

### 2.3.1.5 Loi d'écoulement

Comme pour bon nombre de lois plastiques pour les sols et notamment pour les sables, la loi d'écoulement proposée par [Nova et Montrasio, 1991] est une loi non-associée. Elle est définie de la manière suivante:

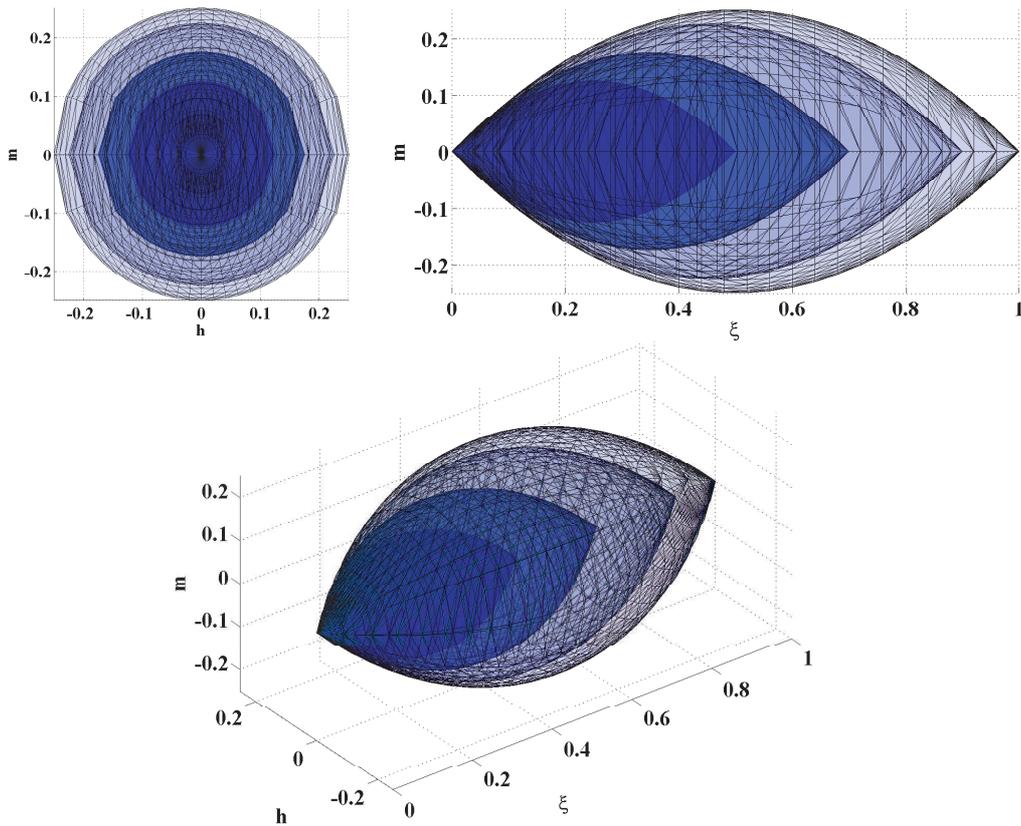


FIG. 2.4 – Critère de rupture et quelques surfaces de charges pour le modèle de Nova.

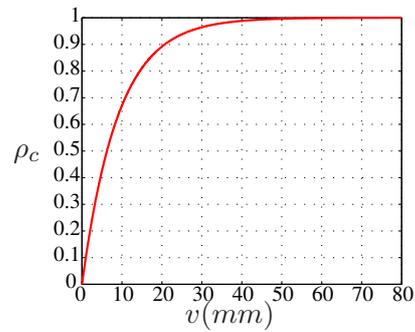


FIG. 2.5 – Loi d'érouissage en fonction du déplacement généralisé  $v$  pour le modèle élaboré par Nova et Montrasio

$$g(\underline{\mathbf{Q}}) \equiv \lambda h^2 + \chi m^2 - \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho_c}\right)^{2\beta} = 0 \quad (2.11)$$

Où les paramètres  $\lambda$  et  $\chi$  sont des paramètres du modèle déterminés expérimentalement.

### 2.3.1.6 Adaptation à des fondations rectangulaires encastrées dans le sol

D'autres essais expérimentaux ont été conduits par [Montrasio et Nova, 1997] afin de caler les différents paramètres de leur modèle. Pour cela, ils ont considéré cette fois-ci non plus des fondations filantes mais des fondations rectangulaires possédant plusieurs ratios longueur-largeur ( $\frac{L}{B}$ ), mais aussi différentes profondeurs d'encastrement ( $d$ ) de la fondation. Des lois empiriques permettant de calculer les paramètres constitutifs du modèle en fonction de  $\frac{L}{B}$  et de  $d$  sont alors proposées, sans pour autant changer la structure générale du modèle.

### 2.3.1.7 Commentaires

Le modèle de [Nova et Montrasio, 1991] fournit de très bons résultats pour des chargements monotones divers. Il donne notamment des estimations satisfaisantes des déplacements résiduels et des tassements. Néanmoins, du fait de sa structure, et plus particulièrement de la présence d'un écoulement purement isotrope, il n'est pas adapté aux chargements cycliques. C'est ce que d'autres auteurs ont essayé d'améliorer en introduisant un écoulement cinématique, comme nous le verrons par la suite.

## 2.3.2 Macro-élément de Gottardi et de Cassidy et Martin: Swipe tests, extension à des chargements 3D et prise en compte du moment de torsion

De manière similaire au modèle de [Nova et Montrasio, 1991], un modèle issu de la plasticité classique a été développé, d'abord pour des chargements 2D à partir de la caractérisation de nouveaux critères de rupture pour le système {sol+fondation} [Butterfield et Gottardi, 1994], [Gottardi *et al.*, 1999], [Byrne et Housby, 2001] et [Cassidy *et al.*, 2002]. Ces critères ont une particularité. Déterminés grâce à des essais expérimentaux, ils permettent d'obtenir directement et de manière rapide leur forme dans un plan donné en un seul essai. Ces essais sont appelés "Swipe tests" et sont présentés ci-dessous.

La procédure d'un Swipe test est la suivante: un déplacement vertical  $v_0$  est appliqué jusqu'à l'obtention d'un effort vertical donné. A partir de là, le déplacement vertical est gardé constant jusqu'à la fin de l'essai. Pendant ce temps, la fondation est soumise à un déplacement soit horizontal, soit une rotation ou une combinaison des deux. La fondation est donc entièrement pilotée en déplacement. Nous montrons dans ce genre d'essais que la courbe réponse dans l'espace conjugué, c'est à dire l'espace des efforts épouse le critère de rupture du système [Tan, 1990] et [Martin, 1994].

En effet, pour comprendre ce phénomène, nous pouvons faire l'analogie avec un essai triaxial non drainé sur une argile normalement consolidée avec forte contrainte axiale ou sur une argile surconsolidée avec faible contrainte axiale (pour avoir de la dilatance). Cet essai est lui aussi purement piloté en déformations puisque son caractère non-drainé lui confère une non variation de volume. Nous montrons, dans cet essai, que le chemin de réponse dans le plan  $p-q$  (pression moyenne, déviateur) a pour asymptote le critère de Mohr-Coulomb. Ceci s'explique par le fait que la loi d'écoulement du matériau ne correspond pas aux déformations imposées à l'échantillon. Il se passe exactement la même chose concernant le Swipe test, c'est à dire que les déformations imposées ne sont pas compatibles avec la loi d'écoulement du système. Le chemin de réponse en efforts aura donc pour asymptote le critère de rupture jusqu'à obtenir

cette rupture.

Ces essais Swipe tests ont donc permis, pour des fondations circulaires, de faire une investigation plutôt complète des critères de rupture dans l'espace  $V - H - M$  pour des chargements 2D dans un premier temps puis dans l'espace  $V - H_x - M_y - H_y - M_x - T$  (où  $T$  est le moment de torsion) pour des chargements 3D [Cassidy *et al.*, 2004].

### 2.3.2.1 Diagrammes d'interactions généralisés pour des chargements 3D et des fondations circulaires

Les différents Swipe tests sur des fondations circulaires de diamètre  $D$  reposant sur des sables (dense ou lâche) ou argiles donnent dans l'espace à 6 dimensions des efforts le critère suivant:

$$\begin{aligned}
F(H_x, M_y, H_y, M_x, T, V) \equiv & \left( \frac{H_x}{h_0 V_0} \right)^2 + \left( \frac{M_y}{D m_0 V_0} \right)^2 \\
& + \frac{2a H_x M_y}{D h_0 m_0 V_0^2} + \left( \frac{H_y}{h_0 V_0} \right)^2 + \left( \frac{M_x}{D m_0 V_0} \right)^2 \\
& - \frac{2a H_y M_x}{D h_0 m_0 V_0^2} + \left( \frac{T}{D t_0 V_0} \right)^2 - \left[ \frac{(\beta_1 + \beta_2)^{(\beta_1 + \beta_2)}}{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}} \right]^2 \left( \frac{V}{V_0} \right)^{2\beta_1} \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right)^{2\beta_2} = 0 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Où  $a$ ,  $h_0$ ,  $m_0$ ,  $t_0$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des paramètres constitutifs du modèle déterminant les tailles des demi-grand axes de l'ellipsoïde.

Sa représentation dans l'espace  $(M_y - H_x - V)$  ainsi que quelques surfaces de charges sont données par la figure 2.6.

En notant  $h_x = \frac{H_x}{h_0 V_M}$ ,  $h_y = \frac{H_y}{h_0 V_M}$ ,  $m_x = \frac{M_x}{D m_0 V_M}$ ,  $m_y = \frac{M_y}{D m_0 V_M}$ ,  $t = \frac{T}{D t_0 V_M}$ ,  $\xi = \frac{V}{V_M}$ , ainsi que  $\rho_c = \frac{V_0}{V_M}$  et  $\underline{\mathbf{Q}} = {}^t [\xi, h_x, m_y, h_y, m_x, t]$ , puis en simplifiant par  $\frac{1}{\rho_c^2}$  nous obtenons:

$$\begin{aligned}
f(\underline{\mathbf{Q}}) \equiv & h_x^2 + m_y^2 + 2a h_x m_y + h_y^2 + m_x^2 \\
& - 2a h_y m_x + t^2 - \left[ \frac{(\beta_1 + \beta_2)^{(\beta_1 + \beta_2)}}{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}} \right]^2 \frac{\xi^{2\beta_1}}{\rho_c^{2(\beta_1 - 1)}} \left( 1 - \frac{\xi}{\rho_c} \right)^{2\beta_2} = 0 \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Nous notons que la forme de cette dernière équation 2.13 est très proche de celui de la surface de charge de [Nova et Montrasio, 1991] (équation 2.9). En fait nous retrouvons quasiment la même expression pour  $a = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1$  et en remarquant que  $\psi$  est un paramètre analogue à  $m_0$  puis que  $\mu \equiv h_0$ .

### 2.3.2.2 Loi d'érouissage

Elle a été proposée par [Cassidy *et al.*, 2004]. Le paramètre  $\rho_c$  est toujours la variable d'érouissage isotrope, mais sa variation diffère un peu de celle proposée par [Nova et Montrasio, 1991].

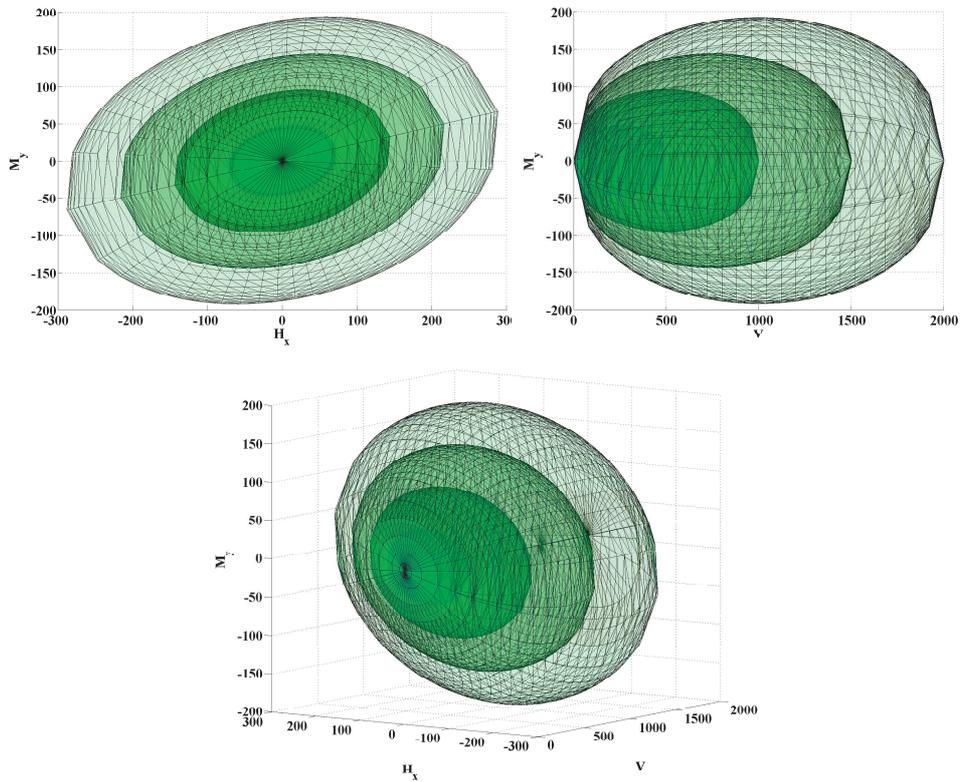


FIG. 2.6 – Critère de rupture et quelques surfaces de charges pour le critère élaboré par Cassidy - Martin - Gottardi

Suivant la même philosophie que pour le modèle de Nova, la relation proposée par [Cassidy *et al.*, 2004] découle de la loi de comportement pour le chargement vertical (loi effort vertical - déplacement vertical). La différence est que cette loi ne possède pas d'asymptote horizontale, mais présente un maximum au point d'abscisse  $w_{pm}$  avant d'avoir un comportement radoucissant pour des grands déplacements plastiques verticaux  $w_p$ . Elle est donnée par l'équation 2.14 et est représentée par la figure 2.7:

$$\rho_c = \frac{(1 - f_p) \frac{k w_p}{V_M} + f_p \left( \frac{w_p}{w_{pm}} \right)^2}{(1 - f_p) \left( 1 - \left( 2 - \frac{k w_{pm}}{V_M} \right) \frac{w_p}{w_{pm}} \right) + \left( \frac{w_p}{w_{pm}} \right)^2} \quad (2.14)$$

Où  $k$  représente la rigidité initiale de la loi et  $f_p$  est un paramètre constitutif de la loi.

### 2.3.2.3 Loi d'écoulement

La loi d'écoulement proposée par [Cassidy *et al.*, 2004] mais aussi par [Gottardi *et al.*, 1999] dans les versions antérieures du modèle est une loi d'écoulement non associée. Plus précisément, cette loi est certes associée dans les différents plans  $(H - M)$  et non associée dans tous les autres. [Gottardi *et al.*, 1999] ne propose pas de loi d'écoulement  $g$  explicite comme pour le modèle de [Nova et Montrasio, 1991] mais directement un rapport entre les différents termes de déplacements plastiques.

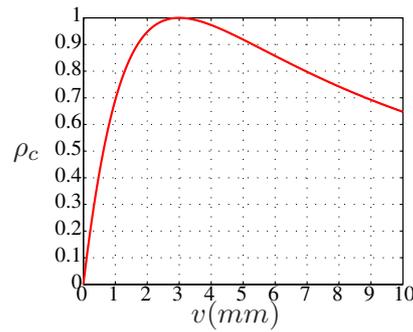


FIG. 2.7 – Loi d'écroûissage en fonction du déplacement vertical plastique pour le modèle élaboré par Cassidy - Martin - Gottardi

#### 2.3.2.4 Commentaires

Ce modèle présente certains avantages:

- Il permet de prendre en compte le sens des moments et efforts horizontaux appliqués à la fondation. En effet, la particularité de ce modèle et surtout du diagramme d'interaction utilisé est que sa projection dans un plan  $H - M$  donne une ellipse possédant des axes principaux ne coïncidant pas avec les axes du repère (paramètre  $a$  dans les équations 2.12 et 2.13). En effet pour un effort horizontal donné la fondation n'aura pas le même comportement suivant le sens du moment appliqué. Ceci paraît évident puisque le problème, avec un tel chargement, n'est pas symétrique.
- De plus la loi d'écroûissage proposée permet de faire diminuer la taille de la surface de charge à partir du moment où le déplacement généralisé atteint la valeur  $w_{pm}$  (comportement radoucissant du modèle, voir figure 2.7).
- Il permet de prendre en compte le moment de torsion. Ce moment est très important dans les études de fondations pour l'industrie off-shore.
- L'adaptation du critère pour les chargements 3D est relativement simple dans ce cas puisque la fondation est circulaire. Afin de garder une axisymétrie du critère de rupture, due à la géométrie de la fondation, les termes relatifs au moment et à l'effort horizontal supplémentaires, sont les mêmes (et avec les mêmes coefficients) que pour le chargement plan initial. Ceci permet d'obtenir un critère de forme circulaire lorsque celle-ci est projetée soit dans le plan des efforts horizontaux ou dans le plan de moments. La forme circulaire dans ces deux plans traduit bien une interaction axisymétrique des deux moments ou des deux efforts horizontaux.

L'inconvénient majeur de ce modèle est que sa description (utilisation d'une seule variable d'écroûissage isotrope) ne lui permet pas d'être utilisé pour des chargements cycliques ou dynamiques.

#### 2.3.3 Macro-élément de Crémer: prise en compte du décollement

Le modèle de [Crémer, 2001] a été développé pour reproduire le comportement d'une fondation filante de largeur  $B$  sous chargement plan (2D). Il s'inscrit dans la même lignée que les modèles vus précédemment, c'est à dire que la plasticité du sol est traitée grâce aux

théories classiques de plasticité issues de la thermodynamique des processus irréversibles. Ce modèle est cependant plus élaboré puisqu'il permet de traiter les chargements cycliques mais aussi les chargements dynamiques. Cela est possible par l'utilisation conjuguée d'une variable d'érouissage isotrope et de variables d'érouissage cinématique. Il permet aussi de coupler plusieurs types de non-linéarité. En effet, pour les macro-éléments précédents seules les non-linéarités matérielles étaient prises en compte (la plasticité du sol). Ce modèle tient compte en plus des non-linéarités géométriques, à savoir le décollement de la fondation. Nous allons dans ce paragraphe décrire très brièvement le modèle de macro-élément de [Crémer, 2001] afin de mieux le cibler par rapport aux autres modèles. C'est sur ce modèle que va se développer notre étude. Une description plus approfondie sera effectuée au fur et à mesure de la description de notre modèle (voir chapitre 3).

### 2.3.3.1 Description du modèle de plasticité

**2.3.3.1.1 Diagramme d'interaction** Comme pour les modèles vus précédemment, le critère de rupture a l'allure générale d'un ballon de rugby. Toutefois sa formulation est différente de celle proposée par [Nova et Montrasio, 1991] ou [Gottardi *et al.*, 1999]. L'ellipse n'est pas excentrée dans le plan  $H - M$ . Il est donné par la relation suivante (où  $H' = \frac{H}{V_M}$ ,  $M' = \frac{M}{BV_M}$  et  $V' = \frac{V}{V_M}$ ):

$$f_\infty \equiv \left( \frac{H'}{aV'^c(1-V')^d} \right)^2 + \left( \frac{M'}{bV'^e(1-V')^f} \right)^2 - 1 = 0 \quad (2.15)$$

Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$  sont des paramètres constitutifs de la loi.

**2.3.3.1.2 Surface de charge et lois d'érouissage** La surface de charge est construite selon le même concept que le critère de rupture. Elle en possède la même forme générale et évolue à l'intérieur de celui-ci. La particularité de celle-ci par rapport aux surfaces de charges des autres macro-éléments vus plus haut est qu'elle fait intervenir plusieurs lois d'érouissage. De la même manière que pour les modèles de [Nova et Montrasio, 1991] et [Cassidy *et al.*, 2004], une variable d'érouissage isotrope  $\rho$  est utilisée, mais pour traiter un éventuel caractère cyclique du chargement, des variables d'érouissages cinématiques regroupées dans le vecteur  $\underline{\tau}$  sont également considérées.

La variable d'érouissage isotrope  $\rho$  sert ici à faire évoluer la taille de la surface sans pour autant la faire évoluer suivant l'axe  $V'$ . Pour faire évoluer sa taille suivant l'axe  $V'$ , une autre variable d'érouissage  $\gamma$  est utilisée.

En effet l'évolution de la surface de charge doit être traitée de manière différente pour les efforts verticaux d'une part et pour les efforts horizontaux et les moments d'autre part. Comme dans [Crémer *et al.*, 2001], son évolution est guidée par la nécessité de reproduire le comportement du sol et de la fondation soumise initialement au poids propre de la structure. Ceci permet de stabiliser dans un premier temps la structure afin qu'elle puisse ensuite être soumise à un chargement quelconque. De la même manière que pour le critère de rupture (équation 2.15), l'interaction entre  $H$  et  $M$  est représentée par la figure 2.8(a), alors que l'interaction entre  $H$  et  $V$  est une courbe passant par l'origine du repère 0 et définie pour  $V \geq 0$  (figure 2.8(b)).

Pendant la phase d'initialisation, le poids propre de la structure est appliqué, la surface de charge est réduite à un segment de droite le long de l'axe  $V'$ , allant de l'origine du repère 0 (figure 2.8) jusqu'au point de coordonnée  $\gamma$

$$f_c \equiv V' - \gamma = 0 \quad (2.16)$$

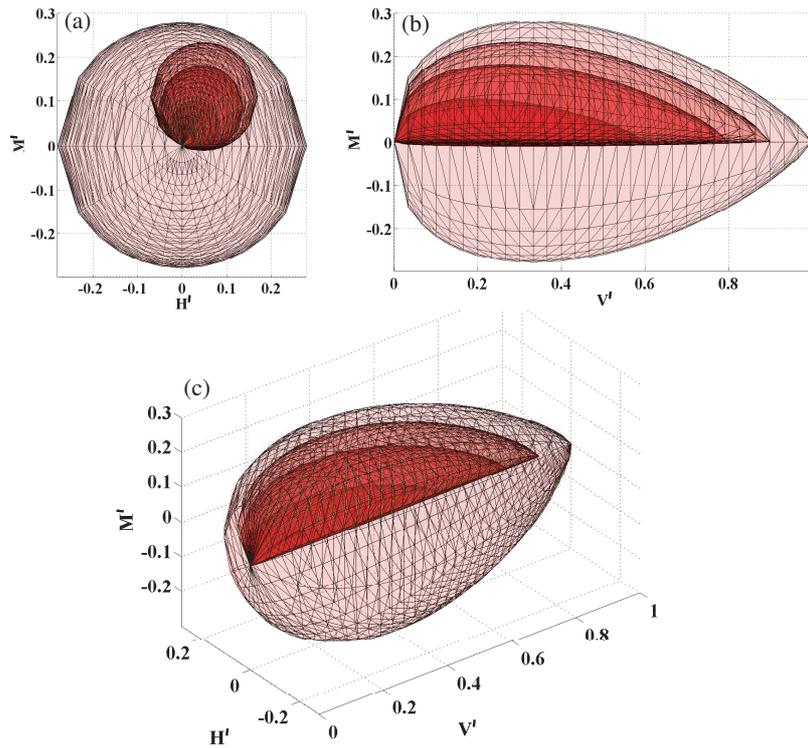


FIG. 2.8 – Evolution de la surface de charge à l'intérieur du critère de rupture pour le modèle de Crémer

Par ailleurs, [Crémer, 2001] a mis en évidence que la plasticité du sol est largement influencée par le mécanisme de décollement de la fondation. Cette influence est expliquée ci-dessous.

Afin de piloter la position des ellipses dans le plan  $(H' - M')$  au cours des pas de chargements, nous l'avons vu, une loi d'écroissage cinématique ( $\mathcal{T}$ ) est également utilisée. Ce type de description est essentiel afin de reproduire le comportement du sol durant un chargement cyclique, c'est à dire le fait que nous retrouvons l'état de plastification et la pente développés au cycle précédent [Crémer, 2001] comme le montre la figure 2.9. En effet, pour une structure réelle, quand le décollement de la fondation est possible, le chargement de la fondation dans une direction n'influence pas son comportement dans l'autre sens de chargement. En d'autres termes, nous pouvons faire l'hypothèse que le décollement de la fondation n'entraîne aucune sollicitation du sol sous la partie de semelle décollée, ce qui implique que le comportement de cette partie de sol reste inchangé lorsque celle-ci vient à être sollicitée (par un chargement dans le sens opposé). Ce comportement est clairement montré par la figure 2.9: quand la fondation subit un chargement qui sollicite la partie "droite" du sol ( $\dot{M} < 0$ ), le sol sous cette partie

droite de fondation se plastifie et aucune contrainte n'est encore appliquée à la partie "gauche" du sol. Si le signe de la sollicitation change ( $\dot{M} > 0$ ), seul le sol situé sous la partie gauche de la fondation va cette fois-ci être plastifié. Le sol sous la partie droite de la fondation va quant à lui cette fois-ci rester inchangé et va demeurer dans le même état de plastification qu'à la fin de l'étape de chargement précédente. C'est à dire que si nous rechargeons une autre fois dans le sens ( $\dot{M} < 0$ ), le sol sous la partie droite de la fondation va se plastifier en repartant exactement de l'état de plastification généré lors de la première phase, ce qui se traduit sur la courbe effort-déplacement par une reprise de la plasticité au même effort et avec la même pente.

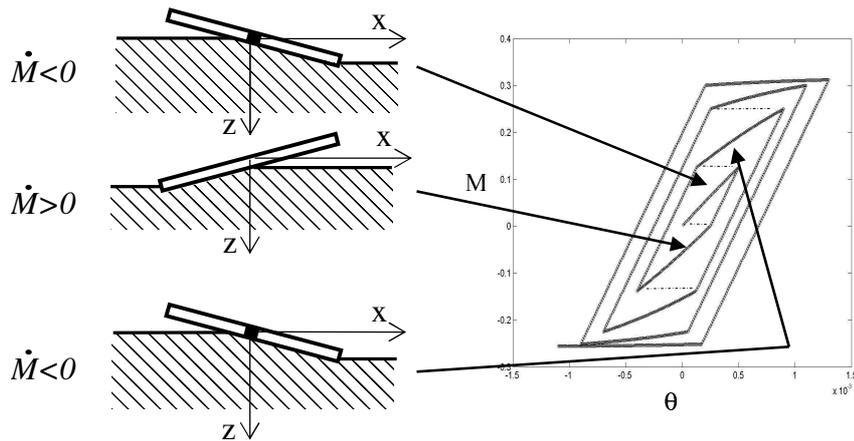


FIG. 2.9 – Influence du décollement sur le mécanisme de plasticité

Ces remarques impliquent une loi d'évolution liant l'évolution de la variable d'érouissage isotrope  $\rho$  aux variables d'érouissage cinématique  $\tau$  traduite par la relation mathématique suivante et qui est représentée sur la figure 2.10:

$$\dot{\rho} = \left| \frac{d\|\underline{\tau}\|}{dt} \right| \quad (2.17)$$

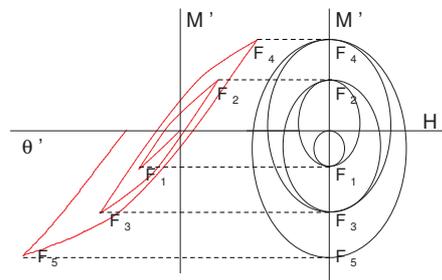


FIG. 2.10 – Relations entre les variables d'érouissages cinématiques et isotropes dans les plans ( $M' - H'$ )

Pour avoir plus d'informations sur l'évolution de ces variables d'érouissages, le lecteur intéressé peut se reporter aux travaux de [Crémer, 2001], [Crémer *et al.*, 2001] et [Crémer *et al.*, 2002].

**2.3.3.1.3 Loi d'écoulement** Etant donnée la forme de la surface de charge, comme pour les critères de [Nova et Montrasio, 1991], [Gottardi *et al.*, 1999] et [Cassidy *et al.*, 2004], une loi d'écoulement non associée doit être utilisée. Une loi centrée sur l'origine du repère est adoptée. Elle permet d'avoir toujours une projection positive de sa normale sur l'axe  $V'$ . Cette condition est nécessaire pour modéliser correctement l'évolution des déplacements verticaux plastiques

$$g \equiv \left(\frac{H'}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{M'}{\xi}\right)^2 + V'^2 - 1 = 0 \quad (2.18)$$

Où  $\kappa$  et  $\xi$  sont des paramètres constitutifs de la loi d'écoulement.

### 2.3.3.2 Description du modèle de décollement

Le mécanisme de décollement de la fondation est un problème géométrique non-linéaire. Il est dû principalement à un changement de zone de contact de la fondation, il est donc relatif à un changement de géométrie. A priori il intervient pour des rotations modérées de la fondation. Or, comme le mentionne [Chatzigogos, 2007] le principe même du macro-élément est de traiter le mécanisme dans sa globalité et de concentrer tout le comportement en un point représentatif (le centre de la fondation). D'un point de vue théorique, le macro-élément est en réalité réduit à un point et ne peut pas prendre en compte de configuration déformée. Conceptuellement, le macro-élément n'est donc pas apte à reproduire phénoménologiquement le mécanisme de décollement.

Cependant [Crémer, 2001] a élaboré un modèle de décollement assez approfondi permettant de prendre en compte la perte de rigidité due à une semelle en décollement et de simuler le soulèvement du centre de la fondation. Pour cela, Crémer introduit le paramètre  $\delta$  qui représente le pourcentage de semelle décollée. Ce paramètre régit le comportement de la fondation car il est relié aux déplacements de la fondation et aux efforts appliqués.

Afin de prendre en compte le couplage qui existe entre décollement et plasticité (et donc surtout ici l'influence de la plasticité sur le décollement), Crémer a étudié le comportement du décollement sur sol élastique et sur sol plastique. Il est alors montré que le mécanisme de décollement est différent dans les deux cas. Sur un sol élastique le comportement de décollement est un mécanisme élastique non-linéaire (donc totalement réversible). A l'inverse, sur un sol plastique, le comportement de décollement est un mécanisme non-linéaire irréversible.

D'un point de vue numérique, la formulation de ce modèle est adaptée à un schéma de résolution où les efforts sont donnés, contrairement à la formulation classique des codes éléments finis où ce sont les déplacements qui sont les données d'entrée du modèle. Le schéma de résolution du problème proposé par Crémer est donc relativement complexe, et rend son couplage avec le mécanisme plastique compliqué. En effet, des tests sont nécessaires pour savoir quels mécanismes sont actifs simultanément. A ce propos, Crémer proposait dans sa thèse de reformuler le problème de décollement comme un problème issu de la plasticité classique afin de traiter son couplage avec la plasticité du sol selon une théorie de multi-mécanismes.

Ce mécanisme de décollement sera détaillé plus amplement dans le chapitre 3, puisqu'il va servir de base à l'élaboration de notre modèle. Il sera d'ailleurs traité suivant la philosophie

d'un mécanisme de plasticité classique (surfaces de charge de décollement, lois d'écrouissages, etc...) comme le préconisait Crémer.

### 2.3.3.3 Commentaires

Grâce à sa formulation et notamment à la prise en compte de deux types de variables d'écrouissages (cinématique et isotrope), le modèle de [Crémer, 2001] est capable de simuler, contrairement aux autres macro-éléments, le comportement cyclique d'une fondation filante. Il présente également une particularité: celle de prendre en compte les non-linéarités géométriques dues au décollement de la fondation grâce à un mécanisme non-linéaire et non réversible le reproduisant de manière phénoménologique. Ce modèle est de plus complet puisqu'il a aussi été étendu aux chargements dynamiques avec la prise en compte de l'amortissement radiatif.

### 2.3.4 Macro-élément de Chatzigogos: modèle hypoplastique et modèle de décollement élastique non-linéaire

Nous allons maintenant étudier le macro-élément mis au point par [Chatzigogos, 2007]. Le modèle qu'il présente reproduit le comportement d'une fondation circulaire reposant sur un sol cohérent pour un chargement uniquement plan et prend en compte un mécanisme de décollement inspiré de celui de [Crémer, 2001].

#### 2.3.4.1 Structure générale du modèle

Une des particularités de ce modèle est que la plasticité du sol n'est plus prise en compte grâce à une loi de plasticité classique mais fait partie de la famille des lois hypoplastiques. Pour cela, il s'inspire des travaux de [Pedretti, 1998], [di Prisco *et al.*, 2002] et [di Prisco et Galli, 2006] qui ont eux aussi développé ce genre de modèle qui se prête a priori mieux, d'un point de vue numérique au comportements cycliques. Une autre grande différence est qu'il propose un critère de rupture (ou plutôt ici une surface d'appui "bounding surface" selon le vocabulaire des modèles hypoplastiques) qui prend en compte simultanément le mécanisme de plasticité mais aussi le mécanisme de décollement. Pour la partie plastique, la fondation est considérée collée sur le massif de sol et donc des contraintes de traction peuvent en théorie apparaître. Ainsi, cela permet d'obtenir un critère de rupture symétrique suivant l'axe des efforts verticaux  $V'$ , et donc symétrique par rapport à l'origine du repère d'efforts. Concernant le décollement maintenant, le critère de rupture est un critère de type Tresca sans résistance à la traction ou Mohr-Coulomb. L'association des deux critères de rupture se fait en considérant toujours le cas le plus restrictif, c'est à dire que le point de charge doit toujours se situer à l'intérieur des deux mécanismes.

L'avantage de cette description se situe surtout dans la manière de formuler le modèle plastique. En effet, grâce à la symétrie du critère de rupture de la loi plastique, une loi d'écoulement associée peut être utilisée, contrairement à tous les autres modèles vus plus haut. L'utilisation d'une loi d'écoulement associée pose bien entendu beaucoup moins de problèmes pour la résolution numérique du problème et nécessite moins de paramètres.

Le modèle de décollement est un peu moins complet que dans le travail de [Crémer, 2001]

puisque Chatzigogos considère un mécanisme de décollement élastique non-linéaire (et donc totalement réversible). Il ne prend donc pas en compte un déchargement différent à la courbe de chargement vue dans le modèle de Crémer. Toutefois cette hypothèse simplifie grandement l'écriture du modèle puisque le comportement élastique est remplacée totalement par le modèle de décollement, ce qui implique qu'il ne reste plus qu'un seul mécanisme non-linéaire et irréversible à traiter (la plasticité). Ainsi cela évite de traiter l'évolution de plusieurs surfaces de charges qui exigerait un traitement faisant appel à la théorie des multi-mécanismes.

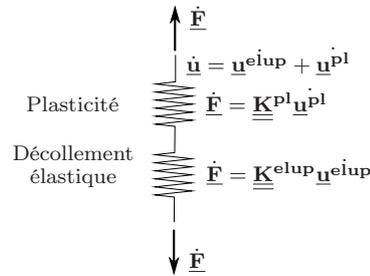


FIG. 2.11 – *Structure générale du macro-élément de Chatzigogos*

#### 2.3.4.2 Commentaires

Nous l'avons vu, le modèle de décollement élaboré par [Chatzigogos, 2007] est relativement novateur puisqu'il se distingue complètement des autres modèles dans la prise en compte de la plasticité et il considère un mécanisme de décollement entièrement réversible ne développant pas de déplacements résiduels (ce qui est une limite du modèle). Sa simplicité est son grand atout. Cependant le manque de comparaisons avec des résultats expérimentaux invite à la prudence quant à l'utilisation de ce modèle.

## 2.4 Conclusion

Cette étude bibliographique nous montre que l'interaction sol-structure est un problème complexe et que sa prise en compte grâce à des modèles simples comme les macro-éléments permet d'obtenir de bons résultats. La succession des travaux ont permis d'augmenter le champ d'application des macro-éléments tout en ayant des résultats fiables et en adéquation avec l'expérience.

Cependant il n'existe pas véritablement de modèle 3D prenant en compte un couplage multi-mécanisme entre le décollement irréversible et la plasticité, ni de modèle valable pour chaque type de forme de fondation.

Le modèle de [Crémer, 2001] qui synthétise les travaux antérieurs paraît être une bonne base pour le développement d'un nouveau macro-élément en 3D capable de combiner tous ces facteurs.



### 3.1 Généralités

Le but de cette étude sera d'examiner le comportement d'une fondation superficielle reposant sur un massif de sol semi-infini et soumis à des chargements statiques, cycliques mais aussi dynamiques. Pour cela, nous allons utiliser une méthode hybride pour modéliser la fondation et le sol sous-jacent par l'intermédiaire d'un macro-élément d'ISS.

Nous l'avons vu dans le chapitre 2, en partant de l'hypothèse d'une fondation infiniment rigide, le concept de macro-élément, développé initialement par [Nova et Montrasio, 1991], consiste à condenser l'ensemble des non-linéarités (qu'elles soient matérielles ou géométriques) dans un domaine de dimension fini: le champ proche.

Toutes ces non-linéarités sont condensées en un point représentatif: le centre de la fondation (figure 3.1). Cette hypothèse permet de travailler en variables globales (forces et déplacements) définies au centre de la fondation. Ainsi, le problème peut donc être traité de manière beaucoup plus simple, puisqu'il suffit de lier le torseur des déplacements qui s'applique au centre de la fondation en fonction du torseur des actions en ce même point. Le champ lointain est quant à lui considéré complètement linéaire.

Comme dans [Crémer, 2001], le nouveau macro-élément d'ISS 3D doit permettre de prendre en compte deux types de non linéarités: la plasticité du sol qui rentre dans la catégorie des non-linéarités matérielles et le décollement de la fondation rentrant dans la catégorie des non-linéarités géométriques. Chaque mécanisme va créer une part de déplacements. Ainsi le déplacement total de la fondation peut s'écrire:  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{\text{el}} + \hat{\mathbf{u}}^{\text{pl}} + \hat{\mathbf{u}}^{\text{up}}$ . Cette décomposition revient à considérer une mise en série des trois mécanismes: élasticité, plasticité, décollement [Crémer, 2001].

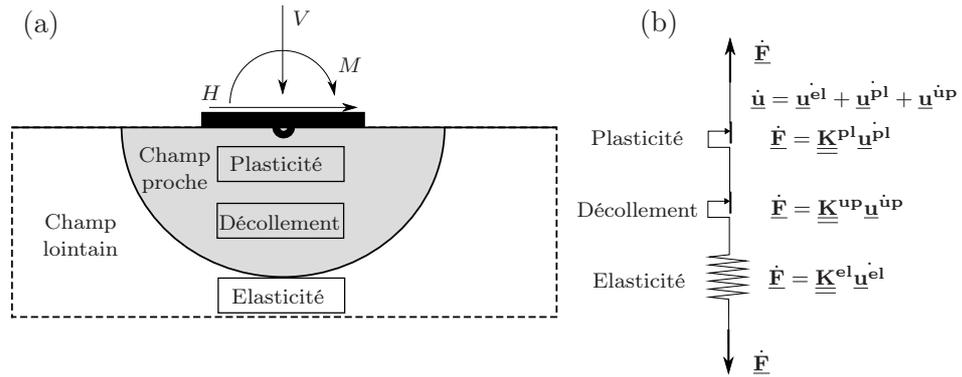


FIG. 3.1 – *Présentation de la structure générale du macro-élément: (a) décomposition en champs proche et champ lointain (b) système analogique*

Les améliorations par rapport au modèle de Crémer seront les suivantes:

- (i) Dans cette étude la plasticité ainsi que le décollement seront pris en compte grâce à des modèles issus de la plasticité classique faisant évoluer des surfaces de charges à l'intérieur d'un critère de rupture par l'intermédiaire de variables d'écrouissages. Des déplacements et rotations résiduels plastiques et de décollement peuvent donc être générés lors d'une sollicitation (théorie des multi-mécanismes).
- (ii) Des chargements 3D peuvent être étudiés, c'est à dire des chargements selon les deux axes horizontaux (forces et moments ou déplacements et rotations), ainsi que l'application d'un effort ou d'un déplacement selon l'axe vertical. La torsion (moment ou rotation selon l'axe vertical) ne sera pas pris en compte.

Ce chapitre est consacré à la présentation générale du nouveau macro-élément ainsi qu'à la description mathématique des deux mécanismes non-linéaires: plasticité et décollement.

### 3.2 Formes des fondations et présentation des variables cinématiques et d'efforts

Initialement les critères de rupture étaient développés pour des géométries de fondations données (fondation filante pour [Nova et Montrasio, 1991] et [Crémer, 2001], et fondations circulaires pour [Gottardi *et al.*, 1999] et [Martin, 1994]). Néanmoins, nous montrons sur la figure 3.2 la comparaison entre ces différents critères dans l'espace des variables adimensionnées. Il apparaît clairement que les différents critères exprimés dans cet espace sont assez proches quelles que soient les géométries considérées. Dans la suite de ce chapitre, afin de simplifier les équations et d'être capable d'utiliser le modèle pour différentes configurations géométriques de la fondation, une notation adimensionnelle est donc utilisée.

La méthode de normalisation pour trois différentes géométries (circulaire, rectangulaire et filante) est explicitée ci-après. Les efforts sont composés d'une force verticale  $V$ , des efforts horizontaux  $H_x$ ,  $H_y$ , et de moments  $M_x$ ,  $M_y$ . Les variables cinématiques associées à ces efforts sont: le déplacement vertical  $u_z$ , les déplacements horizontaux  $u_x$ ,  $u_y$ , et les rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ . Nous l'avons dit précédemment, le moment de torsion  $M_z$  n'est pas pris en compte par le modèle. Dans tout ce qui suit, les variables adimensionnées, qu'elles soient cinématiques ou

d'efforts, sont notées avec un exposant '.

Nous commençons cette présentation par le cas de la fondation circulaire. Cette axisymétrie nous autorise en effet à prendre en compte de manière équivalente les sollicitations dans les deux directions horizontales. Ainsi lors de la rupture, l'axisymétrie permet d'affirmer que les diagrammes d'interaction entre deux forces horizontales d'une part, ou deux moments d'autre part dans les deux directions horizontales sont des cercles.

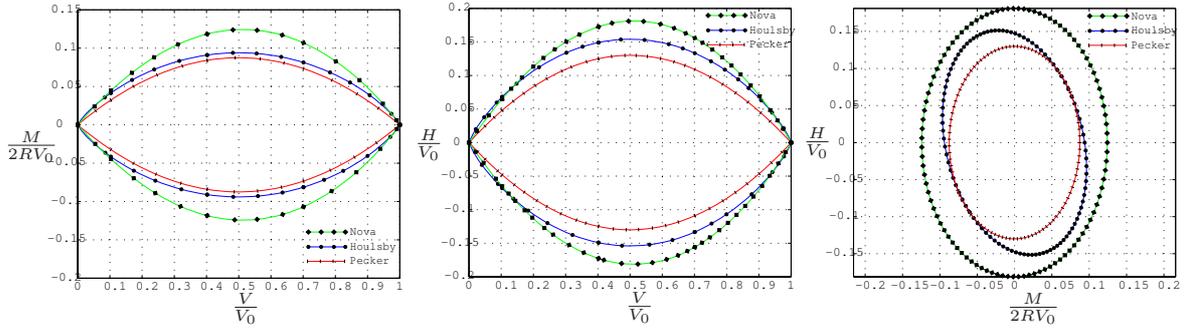


FIG. 3.2 – Comparaisons de différents critères pour divers auteurs ayant simulé le comportement de fondations de géométries différentes ramenés dans l'espace des efforts adimensionnés. Fondations filantes pour Nova et Pecker, circulaire pour Houlsby.

### 3.2.1 Cas de la fondation circulaire

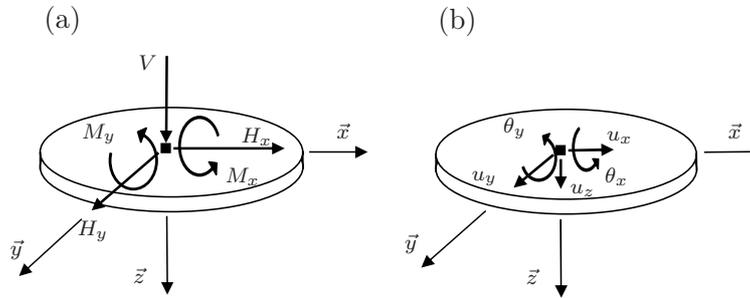


FIG. 3.3 – Présentation des variables globales: (a) efforts et (b) déplacements sur la fondation circulaire

- (i) Forces horizontales réduites:  $H'_x, H'_y$
- (ii) Force verticale réduite:  $V'$
- (iii) Moments réduits:  $M'_x, M'_y$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} V' \\ H'_x \\ M'_y \\ H'_y \\ M'_x \end{bmatrix} = \frac{1}{Sq_{max}} \begin{bmatrix} V \\ \frac{H_x}{D} \\ \frac{M_y}{D} \\ H_y \\ \frac{M_x}{D} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Dans ces expressions  $q_{max}$  représente la contrainte ultime que peut supporter le sol sous la fondation pour un chargement purement vertical,  $D$  représente le diamètre de la fondation, et  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  la surface de la fondation.

La contrainte ultime de compression  $q_{max}$  est donnée par la relation suivante adaptée pour une fondation circulaire [Davis et Booker, 1973], [Matar et Salençon, 1979] et [Philipponnat et Hubert, 2003]:

$$q_{max} = \frac{0.6}{2}\gamma DN_\gamma + q_0 N_q + 1.3cN_c \quad (3.2)$$

où  $q_0$  représente la contrainte verticale effective amenée par le sol à la base de la fondation (dans le cas où cette dernière ne serait pas à la surface du massif de sol mais reposerait à une certaine profondeur),  $\gamma$  est le poids volumique du sol,  $N_\gamma$  est le terme de surface,  $N_q$  le terme dépendant de la profondeur de la fondation, et  $N_c$  le terme de cohésion. Les relations permettant de calculer  $N_\gamma, N_q$  and  $N_c$  sont données dans [Caquot et Kérisel, 1966]. Ces termes ne dépendent seulement que de la cohésion  $c$  et de l'angle de frottement  $\phi$  du sol.

De manière similaire les déplacements du centre de la fondation sont les suivants:

- (i) Déplacements horizontaux réduits:  $u'_x, u'_y$
- (ii) Déplacement vertical réduit:  $u'_z$
- (iii) Rotations réduites:  $\theta'_x, \theta'_y$

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u'_z \\ u'_x \\ \theta'_y \\ u'_y \\ \theta'_x \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} u_z \\ u_x \\ D\theta_y \\ u_y \\ D\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Remarquons que grâce à ce choix de normalisation, les variables  $\underline{\mathbf{F}}$  et  $\underline{\mathbf{u}}$  sont conjuguées. Ce choix est très important car il permet d'exprimer le travail des efforts extérieurs appliqué à la fondation grâce à ces variables comme cela est mentionné dans [Nova et Montrasio, 1991].

Le travail des efforts réduits dans le problème normalisé est donné par:

$$W_{reduit} = {}^t \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \frac{1}{DSq_{max}} (Vu_z + H_x u_x + M_y \theta_y + H_y u_y + M_x \theta_x) = \frac{1}{DSq_{max}} W_{reel} \quad (3.4)$$

Autrement dit, le travail réel se déduit facilement du travail réduit en le multipliant par la quantité constante:  $DSq_{max}$

### 3.2.2 Cas de la fondation rectangulaire

Tout comme pour la fondation circulaire, la normalisation des efforts et des déplacements pour une semelle rectangulaire est importante car elle va permettre d'utiliser le même formalisme

du modèle dans les développements qui vont suivre. Là encore, les variables que nous allons choisir devront être conjuguées afin de retrouver le travail des efforts extérieurs réels. De plus, dans le cas où une dimension de la fondation rectangulaire devient très grande, cette normalisation doit permettre de retrouver le cas de la fondation filante pour lequel le modèle de [Crémer, 2001] a été initialement développé.

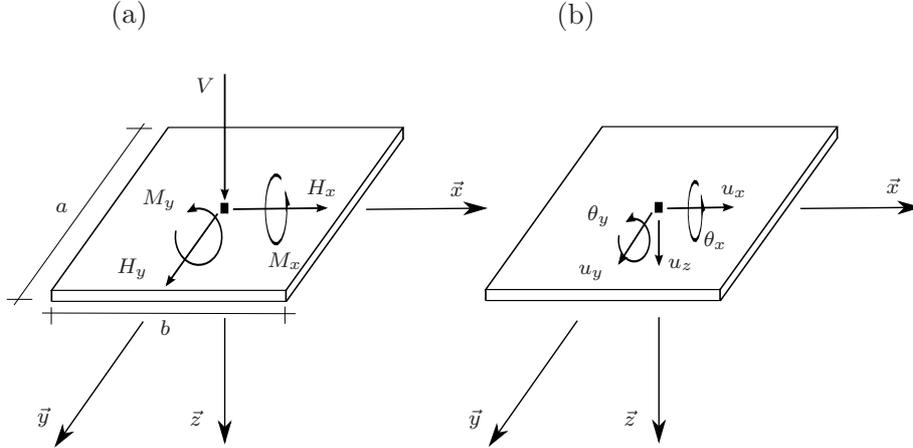


FIG. 3.4 – *Présentation des variables globales: (a) efforts et (b) déplacements sur la fondation rectangulaire*

Pour une semelle rectangulaire (figure 3.4) de dimensions  $a \times b$ , nous proposons donc la normalisation suivante pour les efforts:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} V' \\ H'_x \\ M'_y \\ H'_y \\ M'_x \end{bmatrix} = \frac{1}{abq_{max}} \begin{bmatrix} V \\ H_x \\ \frac{M_y}{b} \\ H_y \\ \frac{M_x}{a} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

et pour les déplacements:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u'_z \\ u'_x \\ \theta'_y \\ u'_y \\ \theta'_x \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \begin{bmatrix} u_z \\ u_x \\ b\theta_y \\ u_y \\ a\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où  $q_{max}$  se calcule de la manière suivante (expression pour une fondation rectangulaire avec  $a$  la plus grande longueur) [Davis et Booker, 1973], [Matar et Salençon, 1979] et [Philipponnat et Hubert, 2003]:

$$q_{max} = \frac{1}{2} \left( 1 - 0.2 \frac{b}{a} \right) \gamma b N_\gamma + q_0 N_q + \left( 1 + 0.2 \frac{b}{a} \right) c N_c \quad (3.7)$$

Là aussi, les efforts et déplacements réduits sont des variables conjuguées et le travail des efforts réduits dans le problème normalisé est donné par:

$$W_{reduit} = {}^t \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{q_{max}(ab)^2} (Vu_z + H_x u_x + M_y \theta_y + H_y u_y + M_x \theta_x) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{q_{max}(ab)^2} W_{reel} \quad (3.8)$$

Autrement dit, le travail réel se déduit facilement du travail réduit en le multipliant par la quantité constante:  $\frac{q_{max}(ab)^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

### 3.2.3 Cas de la fondation filante

Une manière de prouver la légitimité de la normalisation pour la semelle rectangulaire est de faire tendre une des deux dimensions (par exemple  $a$ ) vers l'infini de manière à obtenir une fondation filante. Dans ce cas, le plus simple est de travailler avec des efforts ramenés à un mètre linéaire de fondation (dans la direction  $\vec{y}$ , voir figure 3.4). Cela revient à reprendre le vecteur  $\underline{\mathbf{F}}$  vu plus haut (équation 3.5) en l'écrivant de la manière suivante:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} V' \\ H'_x \\ M'_y \\ H'_y \\ M'_x \end{bmatrix} = \frac{1}{bq_{max}} \begin{bmatrix} \frac{V}{a} \\ \frac{H'_x}{a} \\ \frac{M'_y}{ab} \\ \frac{H'_y}{a} \\ \frac{M'_x}{a^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

En ne prenant en compte que les termes de chargements dans le plan ( $\vec{z}, \vec{x}$ ) (les autres termes hors de ce plan n'ont pas de signification), le vecteur  $\underline{\mathbf{F}}$  de l'équation 3.9 correspond exactement à celui défini dans [Crémer, 2001] pour une fondation filante (équation 3.10):

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} V' \\ H'_x \\ M'_y \end{bmatrix} = \frac{1}{bq_{max}} \begin{bmatrix} \frac{V}{a} \\ \frac{H'_x}{a} \\ \frac{M'_y}{ab} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Concernant le vecteur déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  de l'équation 3.6, en faisant tendre  $a$  vers l'infini, nous obtenons le vecteur déplacement réduit suivant:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u'_z \\ u'_x \\ \theta'_y \\ u'_y \\ \theta'_x \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} u_z \\ u_x \\ b\theta_y \\ u_y \\ a\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Le dernier terme de ce vecteur contient encore la dimension  $a$ . Puisqu'il est très grand cela implique que  $\theta_x$  doit être petit (et proche de 0) pour que le produit donne un nombre fini, ce qui est en accord avec la réalité (si  $a$  est très grand alors la rotation suivant  $\vec{x}$  est nulle). Là non plus, les termes hors plans  $u_y$  et  $\theta_x$  ne sont pas à prendre en compte dans le calcul.

Le calcul du travail de ces efforts pour les déplacements considérés montre là aussi que les variables sont bien conjuguées.

### 3.2.4 Bilan sur les normalisations

Nous l'avons vu, la normalisation des efforts et déplacements est un problème délicat. Il est important que la normalisation permette d'obtenir dans tous les cas des variables conjuguées afin de retrouver le travail des efforts extérieurs appliqués à la fondation.

De plus nous avons montré que les différents critères de rupture déterminés expérimentalement pour des fondations circulaires ou filantes sont finalement assez proches lorsqu'elles sont décrites dans cet espace adimensionné.

Concernant le passage de la fondation filante à la fondation rectangulaire, nous nous sommes efforcés de garder une continuité dans la description: à partir de la description en fondation rectangulaire nous avons retrouvé la normalisation pour une fondation filante de [Crémer, 2001] en faisant tendre une des dimensions de la fondation vers l'infini.

Les modèles de plasticité et de décollement sont donc construits et exprimés en fonction des ces efforts et déplacements adimensionnés. Une description de ces deux modèles est proposée ci-après.

## 3.3 Modèle de plasticité

Le macro-élément développé ici est capable de reproduire le comportement d'une fondation superficielle circulaire, rectangulaire ou filante rigide sous sollicitation statique, cyclique et dynamique dans trois directions en considérant, entre autres, la plasticité du sol. C'est ce modèle de plasticité que nous allons décrire dans ce paragraphe (voir aussi [Grange *et al.*, 2006a], [Grange *et al.*, 2007a], [Grange *et al.*, 2007b] et [Grange *et al.*, 2008a]).

Le modèle de plasticité est issu des lois classiques de la thermodynamique des processus irréversibles [Lemaitre et Chaboche, 1988], [Lemaitre et Chaboche, 1990]. La surface de charge ainsi que le critère de rupture sont inspirés du travail de [Crémer, 2001], [Crémer *et al.*, 2001], [Crémer *et al.*, 2002] et sont écrits dans l'espace des efforts globaux réduits  $V'$ ,  $H'_x$ ,  $M'_x$ ,  $H'_y$ ,  $M'_y$ . Le critère de rupture est celui développé dans les travaux de [Pecker, 1997], [Salençon et Pecker, 1995a] et [Salençon et Pecker, 1995b].

Les points nécessaires à l'étude du modèle de plasticité qui vont être développés sont les suivants:

- (i) Le comportement élastique
- (ii) Le comportement plastique (critère de rupture, surface de charge, variables d'écroutissements cinématiques et isotrope, loi de tangence, loi d'écoulement)

### 3.3.1 Comportement élastique

La loi de comportement peut être écrite à tout instant de la manière suivante:  $\mathbf{F} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} \mathbf{u}^{\text{el}}$  où les vecteurs force et déplacement sont les vecteurs adimensionnés définis précédemment,  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}}$  la matrice de rigidité élastique et  $\mathbf{u}^{\text{el}}$  le vecteur déplacements élastique. Les matrices de rigidité élastique correspondantes aux différents types de fondations sont définies comme suit:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} = \begin{bmatrix} K_{zz}^{\text{tel}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{h_x h_x}^{\text{tel}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta_y \theta_y}^{\text{tel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{h_y h_y}^{\text{tel}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta_x \theta_x}^{\text{tel}} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Avec pour une semelle circulaire:

$$\begin{cases} K_{zz}^{\text{tel}} = \frac{K_{zz}^{\text{el}} D}{S q_{\text{max}}} \\ K_{h_x h_x}^{\text{tel}} = K_{h_y h_y}^{\text{tel}} = K_{hh}^{\text{tel}} = \frac{K_{hh}^{\text{el}} D}{S q_{\text{max}}} \\ K_{\theta_y \theta_y}^{\text{tel}} = K_{\theta_x \theta_x}^{\text{tel}} = K_{\theta\theta}^{\text{tel}} = \frac{K_{\theta\theta}^{\text{el}}}{D S q_{\text{max}}} \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour une semelle rectangulaire:

$$\begin{cases} K_{zz}^{\text{tel}} = \frac{K_{zz}^{\text{el}}}{q_{\text{max}} \sqrt{a^2 + b^2}} \\ K_{h_x h_x}^{\text{tel}} = K_{h_y h_y}^{\text{tel}} = \frac{K_{hh}^{\text{el}}}{q_{\text{max}} \sqrt{a^2 + b^2}} \\ K_{\theta_y \theta_y}^{\text{tel}} = \frac{K_{\theta_y \theta_y}^{\text{el}}}{q_{\text{max}} b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \\ K_{\theta_x \theta_x}^{\text{tel}} = \frac{K_{\theta_x \theta_x}^{\text{el}}}{q_{\text{max}} a^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \quad (3.14)$$

Et pour une semelle filante (avec  $b$  la petite dimension et  $a$  qui tend vers l'infini):

$$\begin{cases} K_{zz}^{\text{tel}} = \frac{K_{zz}^{\text{el}}}{q_{\text{max}}} \\ K_{h_x h_x}^{\text{tel}} = \frac{K_{h_x h_x}^{\text{el}}}{q_{\text{max}}} \\ K_{\theta_y \theta_y}^{\text{tel}} = \frac{K_{\theta_y \theta_y}^{\text{el}}}{b^2 q_{\text{max}}} \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans le cas de la semelle filante, les autres termes ne sont pas calculés.

Les différents termes de cette matrice élastique sont obtenues en utilisant la partie réelle des impédances statiques définies par [Gazetas, 1991].

Pour une fondation circulaire nous avons (équation 3.16):

$$\begin{cases} K_{hh} = \frac{4G_0 D}{2(1-\nu)} \left(1 + 0.5 \frac{D}{2H}\right) \\ K_{zz} = \frac{2G_0 D}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{D}{2H}\right) \\ K_{\theta\theta} = \frac{G_0 D^3}{3(1-\nu)} \left(1 + 0.17 \frac{D}{2H}\right) \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour une fondation rectangulaire nous avons (où  $\beta_{h_x h_x}$ ,  $\beta_{zz}$ , et  $\beta_{\theta_y \theta_y}$  sont des coefficients dépendants du rapport des dimensions  $\frac{a}{b}$  de la fondation donnés dans [Philipponnat et Hubert, 2003]):

$$\begin{cases} K_{h_x h_x} = \frac{G_0}{1-\nu} \beta_{h_x h_x} \sqrt{ab} \\ K_{zz} = \frac{G_0}{1-\nu} \beta_{zz} \sqrt{ab} \\ K_{\theta_y \theta_y} = \frac{G_0}{1-\nu} \beta_{\theta_y \theta_y} b^2 \sqrt{ab} \end{cases} \quad (3.17)$$

et pour une fondation filante [Gazetas, 1991] propose les relations suivantes (pour une longueur d'1m de fondation):

$$\begin{cases} K_{h_x h_x} = \frac{2G_0}{2-\nu} \\ K_{zz} = \frac{0.73G_0}{1-\nu} \\ K_{\theta_y \theta_y} = \frac{\pi G_0}{2(1-\nu)} \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

Les équations 3.16, 3.17 et 3.18 sont fonctions des propriétés géométriques de la fondation (diamètre  $D$ , ou longueurs  $a$  et  $b$ ), des propriétés élastiques du sol (module de cisaillement  $G_0$ , coefficient de Poisson  $\nu$ ) et du profil de la couche de sol ( $H$  étant la profondeur par rapport au sol à laquelle on trouve une couche de sol ayant de très bonne caractéristiques de type "bed-rock").

### 3.3.2 Comportement plastique

Dans ce paragraphe, seules les non-linéarités matérielles sont prises en compte, comme la plasticité du sol. Il est important de rappeler que d'autres non-linéarités peuvent intervenir, comme les non linéarités géométriques (décollement) qui seront étudiées plus tard.

Cette hypothèse nous permet donc d'écrire le déplacement total du centre de la fondation de la manière suivante:  $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^{\text{elpl}} = \underline{\mathbf{u}}^{\text{el}} + \underline{\mathbf{u}}^{\text{pl}}$ , avec  $\underline{\mathbf{u}}^{\text{pl}}$  le vecteur de déplacement plastique.

La comportement de la fondation est ici décrit par une théorie de plasticité classique. Nous allons maintenant en définir les principaux points.

#### 3.3.2.1 Critère de rupture

Le critère de rupture proposé ci-dessous est inspiré du travail de [Salençon et Pecker, 1995a], [Salençon et Pecker, 1995b] et [Pecker, 1997].

Une adaptation de ce critère pour des sollicitations 3D est relativement simple en considérant une fondation circulaire, c'est à dire celle rendant le problème axisymétrique. En effet, dans ce cas, les efforts horizontaux d'une part et les moments d'autre part peuvent être traités de manière similaire dans les deux directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . En d'autres termes les interactions entre les deux efforts horizontaux ou les deux moments peuvent être décrites par des cercles (les dénominateurs pour les efforts horizontaux, ainsi que pour les moments sont les mêmes dans l'équation 3.19). Il en résulte que l'adaptation du critère pour des chargements dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et pour une fondation circulaire consiste simplement à ajouter deux termes à l'équation 2.15, l'un relatif à l'effort horizontal  $H'_x$  et l'autre relatif au moment  $M'_y$  afin d'obtenir la surface de dimension 5 suivante (équation 3.19):

$$\begin{aligned} f_\infty \equiv & \left( \frac{H'_x}{aV'^c(1-V')d} \right)^2 + \left( \frac{M'_y}{bV'^e(1-V')f} \right)^2 \\ & + \left( \frac{H'_y}{aV'^c(1-V')d} \right)^2 + \left( \frac{M'_x}{bV'^e(1-V')f} \right)^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Avec les coefficients:

- (i)  $a, b$  définissant la taille de la surface dans le plan ( $H' - M'$ )
- (ii)  $c, d$  et  $e, f$  définissant la forme parabolique de la surface dans les plans ( $V' - H'$ ) et ( $V' - M'$ ) respectivement.

La valeur de ces paramètres peut être calée par différents résultats expérimentaux. [Crémer, 2001] donne des valeurs pour différents types de sols.

Nous faisons, de plus, l'hypothèse que l'adimensionnement des variables vu plus haut permet de conserver cette adaptation de la surface pour les fondations rectangulaires. En effet la normalisation des variables permet d'obtenir des variables indépendantes des dimensions de la fondation et donc comparables entre elles, comme dans le cas de la fondation circulaire (figure 3.2).

**Remarque:** pour une fondation filante les termes  $H'_y$  et  $M'_x$  ne sont pas calculés puisque la géométrie est 2D.

### 3.3.2.2 Surface de charge

L'expression analytique en 5D de la surface de charge  $f_c$  - représentée par la figure 2.8 projetée dans l'espace 3D ( $V', M', H'$ ) - prend la forme suivante:

$$f_c(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathcal{T}}, \rho, \gamma) \equiv \left( \frac{H'_x}{\rho a V'^c (\gamma - V')^d} - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{M'_y}{\rho b V'^e (\gamma - V')^f} - \frac{\beta}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{H'_y}{\rho a V'^c (\gamma - V')^d} - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{M'_x}{\rho b V'^e (\gamma - V')^f} - \frac{\eta}{\rho} \right)^2 - 1 = 0 \quad (3.20)$$

où  $\underline{\mathcal{T}} = (\alpha, \beta, \delta, \eta)$  est un vecteur contenant les variables d'écroissements cinématiques,  $\rho$  est la variable d'écroissement isotrope,  $\underline{\mathbf{F}} = (V', H'_x, M'_y, H'_y, M'_x)$  le vecteur regroupant les différents efforts courants. Les relations pilotant l'évolution des variables d'écroissements sont données dans les paragraphes suivants.

### 3.3.2.3 Lois d'écroissements cinématiques

Les variables d'écroissements cinématiques  $\alpha, \beta, \delta, \eta$  permettent de définir le centre des ellipses dans les hyper-plans  $(H'_x, M'_y, H'_y, M'_x)$ . L'évolution de ces variables a été obtenue en étudiant le comportement issu de simulations expérimentales et numériques d'une fondation soumise à des chargements statiques monotones. Plus particulièrement, [Gottardi *et al.*, 1999] fournit des relations obtenues lors de campagnes expérimentales pour des fondations circulaires et pour différents types de sols. [Crémer, 2001] utilise des courbes similaires obtenues quant à elles grâce à des simulations numériques. Ces simulations avaient été réalisées grâce au logiciel "Dynaflow" dans lequel sont implantées des lois de sols robustes ainsi que des lois de contact permettant le décollement de la fondation. [Crémer, 2001] soulignait d'ailleurs que ce code a fait ses preuves avec des simulations comparées à des expériences. Ces simulations

ont permis de montrer que les différentes lois efforts-déplacements peuvent être approchées par des relations faisant intervenir la fonction exponentielle et indépendantes de l'effort vertical réduit  $V'$ . Ceci implique que les variables d'écroûissage peuvent être pilotées par des équations différentielles du 1er ordre. Bien sûr les paliers obtenus dans les courbes effort-déplacement (asymptotes horizontales) constituent une approche simplifiée du comportement de la fondation mais justifiée quant au niveau de précision que nous voulons obtenir.

Par exemple, les relations liant  $M'_y$  et  $\theta'_y = \theta_y^{elpl}$  peuvent être approchées de la manière suivante (figure 3.5):

$$M'_y = M'_y{}^\infty \left( 1 - \exp\left(\frac{-K'_{\theta\theta}{}^{el}}{M'_y{}^\infty} \theta'_y\right) \right) \quad (3.21)$$

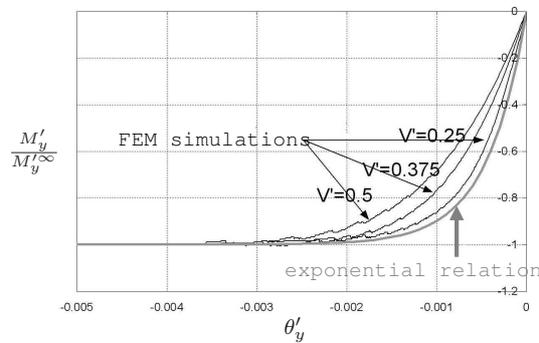


FIG. 3.5 – Simulations EF: relations entre  $M'$  et  $\theta'$ , indépendantes de  $V'$

où  $M'_y{}^\infty$  représente la limite de la courbe  $M'_y$  quand  $\theta'_y$  tend vers l'infini. L'équation différentielle du 1er ordre correspondante est la suivante:

$$\dot{M}'_y = K'_{\theta\theta}{}^{el} \left( 1 - \frac{M'_y}{M'_y{}^\infty} \right) \dot{\theta}'_y \quad (3.22)$$

En faisant encore une fois l'hypothèse d'une décomposition du déplacement total élasto-plastique  $\underline{\mathbf{u}}$  comme la somme d'un déplacement élastique  $\underline{\mathbf{u}}^{el}$  et d'un déplacement plastique  $\underline{\mathbf{u}}^{pl}$  ( $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^{el} + \underline{\mathbf{u}}^{pl}$ ) et en considérant qu'à chaque instant on ait  $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}}^{el} \underline{\mathbf{u}}^{el}$ , il apparaît possible de lier aisément l'incrément de force avec l'incrément de déplacement plastique (équation 3.23):

$$\dot{M}'_y = K'_{\theta\theta}{}^{el} \left( \frac{M'_y{}^\infty}{M'_y} - 1 \right) \dot{\theta}'_y{}^{pl} \quad (3.23)$$

Par ailleurs, comme  $M'_y$  possède la même dimension que le terme  $(\beta + \rho) bV'^e (\gamma - V')^f = 2\beta bV'^e (\gamma - V')^f$  (en effet, dans l'équation 3.20, pour un chargement radial et monotone on a  $\beta + \rho = 2\beta$ , voir paragraphe 3.3.2.4), l'évolution de la variable d'écroûissage cinématique  $\beta$  est pilotée par l'équation suivante:

$$\dot{\beta} = \frac{1}{2bV^{te}(\gamma - V')^f} K_{\theta\theta}^{tel} \left( \frac{M_y^{*\infty}}{\beta} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{pl} \quad (3.24)$$

où  $M_y^{*\infty}$  est la limite de la courbe  $\beta(\theta_y^{pl})$  quand  $\theta_y^{pl}$  tend vers l'infini.

L'évolution des autres variables d'écroissements cinématiques est donnée par le même type d'équations différentielles (pour cela voir l'équation 3.39).

Nous l'avons vu, le comportement plastique est indépendant dans les deux sens d'un chargement de direction donné. Deux familles de variables d'écroissement cinématique doivent donc être utilisées pour modéliser au mieux cette non-dépendance. Ainsi 8 relations et variables d'écroissements cinématiques sont nécessaires pour simuler les 8 sens de sollicitations  $\dot{H}'_x > 0$ ,  $\dot{H}'_x < 0$ ,  $\dot{M}'_y > 0$ ,  $\dot{M}'_y < 0$ ,  $\dot{H}'_y > 0$ ,  $\dot{H}'_y < 0$ ,  $\dot{M}'_x > 0$ , et  $\dot{M}'_x < 0$ . Par exemple, pour un chargement radial, chaque variable d'écroissement cinématique obéit aux relations suivantes (pour des raisons de simplicité, seul le cas de  $\beta$  est présenté ici):

$$\begin{cases} \dot{\beta}^{\oplus} = \frac{1}{2bV^{te}(\gamma - V')^f} K_{\theta\theta}^{tel} \left( \frac{M_y^{*\infty}}{\beta^{\oplus}} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{pl} \\ \dot{\beta}^{\ominus} = \frac{1}{2bV^{te}(\gamma - V')^f} K_{\theta\theta}^{tel} \left( -\frac{M_y^{*\infty}}{\beta^{\ominus}} - 1 \right) \dot{\theta}_y^{pl} \end{cases} \quad (3.25)$$

La première équation du système 3.25 est activée quand  $\dot{\theta}_y^{pl} \geq 0$  (elle correspond aux chargements de signe positif, c'est pourquoi elle est affectée de l'exposant  $\oplus$ ), la seconde équation est activée lorsque  $\dot{\theta}_y^{pl} \leq 0$  (affectée de l'exposant  $\ominus$ ). Finalement à chaque pas,  $\beta$  est calculé de la manière suivante:

$$\beta = \beta^{\oplus} + \beta^{\ominus} \quad (3.26)$$

Pour un chargement non radial (i.e. lorsque les efforts et moments ne sont plus couplés par une relation linéaire), l'évolution des variables d'écroissement cinématique est plus compliquée. En effet, dans certains cas  $\beta_{lim}$  peut décroître alors que  $\dot{M}'_y \geq 0$  ( $\beta_{lim}$  est la valeur vers laquelle tendrait  $\beta$  si le chargement à cet instant restait monotone et dans la direction considérée, voir figure 3.8). En d'autres termes, même si  $M'_y$  croît et que  $\dot{\theta}_y^{pl} \geq 0$ ,  $\beta^{\ominus}$  peut être activé. C'est la raison pour laquelle pour un chargement non radial l'évolution des variables d'écroissement cinématique est pilotée par des relations de la forme suivante (équation 3.27):

$$\begin{cases} \dot{\beta}^{\oplus} = \frac{1}{2bV^{te}(\gamma - V')^f} K_{\theta\theta}^{tel} \left( \frac{M_y^{*\infty}}{\beta^{\oplus}} - 1 \right) |\dot{\theta}_y^{pl}| \\ \dot{\beta}^{\ominus} = \frac{-1}{2bV^{te}(\gamma - V')^f} K_{\theta\theta}^{tel} \left( -\frac{M_y^{*\infty}}{\beta^{\ominus}} - 1 \right) |\dot{\theta}_y^{pl}| \end{cases} \quad (3.27)$$

La valeur de  $M_y^{*\infty}$  est évaluée de la manière suivante:

$$\begin{cases} M_y^{*\infty} = \beta_{lim} - \beta^{\ominus} & \text{si } \dot{\beta} > 0 \\ M_y^{*\infty} = -(\beta_{lim} - \beta^{\oplus}) & \text{si } \dot{\beta} < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

La limite  $M_y^{*\infty}$  est toujours positive, inférieure ou égale à 1.

La première équation du système 3.27 est activée lorsque  $\dot{\beta} \geq 0$  alors que la seconde équation est activée lorsque  $\dot{\beta} < 0$ . Le signe de  $\dot{\beta}$  est, de plus, le même que celui de  $\beta_{lim} - \beta$ , où  $\beta_{lim}$  est calculé grâce à la loi des tangentes explicitée dans le paragraphe 3.3.2.6, et où  $\beta$  est la valeur de la variable d'écroissance calculée au pas précédent (valeur courante).

### 3.3.2.4 Loi d'écroissance isotrope

La non dépendance des sens de chargement dans une direction donnée (pour  $\dot{M} > 0$  et  $\dot{M} < 0$  par exemple) a été montrée dans le paragraphe précédent ainsi que dans le paragraphe 2.3.3.1.2. Elle est en partie prise en compte en utilisant des lois d'écroissance cinématique spécifiques. Cependant, cela ne suffit pas pour reproduire le couplage qui existe entre la plasticité et le décollement de la fondation. En effet, pour bien simuler le fait que l'état de plastification du sol sous la partie de semelle décollée doit rester inchangé et qu'en cas de changement de sens de sollicitation, la courbe effort-déplacement doit de nouveau entrer dans le domaine plastique pour le même effort et avec la même pente (figures 2.9 et 3.6). Une relation entre la loi d'écroissance isotrope et les lois d'écroissance cinématique est nécessaire comme celle décrite dans [Crémer, 2001]. L'évolution de ces surfaces de charges obéissant à cette propriété est représentée par la figure 3.6.

Cette évolution est traduite par la relation mathématique suivante:

$$\dot{\rho} = \left| \frac{d\|\underline{\tau}\|}{dt} \right| = \left| \frac{\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta} + \delta\dot{\delta} + \eta\dot{\eta}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \eta^2}} \right| \quad (3.29)$$

avec  $\|\underline{\tau}\|$  la norme du vecteur  $\underline{\tau}$  et  $\frac{d}{dt}$  le symbole de la dérivée par rapport au temps.

**Remarque:** l'influence du couplage entre plasticité et décollement peut être réduite ou tout simplement annulée en choisissant une évolution arbitraire de la variable d'écroissance isotrope comme suit:

$$\dot{\rho} = k \left| \frac{d\|\underline{\tau}\|}{dt} \right| \quad \text{où} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (3.30)$$

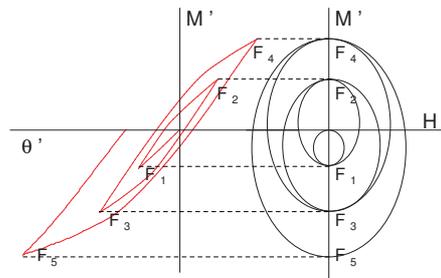


FIG. 3.6 – Relations entre les variables d'écroissages cinématiques et isotropes dans les plans ( $M' - H'$ )

### 3.3.2.5 Evolution de la variable $\gamma$

Son évolution dépend fortement de l'évolution de l'effort vertical  $V'$ . En effet, durant la phase d'initialisation pour laquelle la fondation n'est soumise qu'au poids propre de la structure nous avons  $\gamma = V'$ . Durant cette première phase, l'évolution de  $\gamma$  est donc pilotée par une relation empirique donnée par [Nova et Montrasio, 1991] pour un chargement monotone liant l'effort vertical avec le déplacement vertical. Elle est donnée par l'équation 3.31 et est représentée par la figure 3.7.

$$\gamma = 1 - \exp\left(-K_{zz}^{tel}(u'_z)\right) \quad (3.31)$$

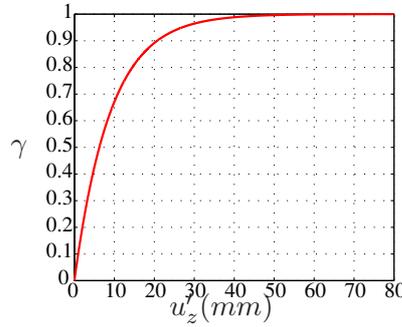


FIG. 3.7 – Loi de comportement bilinéaire 1D.

L'équation 3.31 peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du 1er ordre:

$$\dot{\gamma} = K_{zz}^{tel}(1 - \gamma) \dot{u}'_z \quad (3.32)$$

ou encore en fonction du déplacement vertical plastique:

$$\dot{\gamma} = K_{zz}^{tel} \frac{1 - \gamma}{\gamma} \dot{u}'_z^{pl} \quad (3.33)$$

Pour les phases de chargement quelconque (plus seulement vertical), les autres déplacements plastiques (déplacements horizontaux et rotations plastiques) peuvent aussi accroître la taille de la surface de charge dans la direction de  $V'$ . En conséquence, l'évolution de  $\gamma$  dépend aussi de ces derniers selon l'expression suivante:

$$\dot{\gamma} = \left( a_1 K_{zz}^{tel} \dot{u}'_z^{pl} + a_2 K_{h_x h_x}^{tel} \left| \dot{u}'_x^{pl} \right| + a_3 K_{\theta_y \theta_y}^{tel} \left| \dot{\theta}'_y^{pl} \right| + a_4 K_{h_y h_y}^{tel} \left| \dot{u}'_y^{pl} \right| + a_5 K_{\theta_x \theta_x}^{tel} \left| \dot{\theta}'_x^{pl} \right| \right) \frac{1 - \gamma}{\gamma} \quad (3.34)$$

Où  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  et  $a_5$  sont des paramètres permettant d'ajuster l'influence de chaque composante du vecteur de déplacements plastiques. Par défaut ces paramètres sont tous égaux à l'unité.

### 3.3.2.6 Loi de tangence

Comme dans [Prévost, 1978], une loi de tangence est utilisée afin de s'assurer de la bonne évolution de la surface de charge au moment de la rupture. En effet, à cet instant, le point de charge courant qui appartient à la surface de charge doit venir en contact avec le critère de rupture et de manière à ce que ce soit l'unique point d'intersection entre les deux surfaces. Ceci implique qu'il y ait une tangence parfaite entre la surface de charge et le critère de rupture. En d'autres termes, toute interpénétration du critère de rupture par la surface de charge doit être empêchée.

La loi de tangence a aussi une autre fonction. Grâce à cette loi, dans le cas de chargement non radiaux, le point de charge final de rupture peut être évalué ce qui permet ensuite de déterminer les limites des variables d'écroissements cinématiques vues plus haut.

Cette loi est décrite dans l'espace:  $E^* = (H_x^*, M_y^*, H_y^*, M_x^*)$  où:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x^* = \frac{H'_x}{aV'^c (\gamma - V')^d} \\ M_y^* = \frac{M'_y}{bV'^e (\gamma - V')^f} \\ H_y^* = \frac{H'_y}{aV'^c (\gamma - V')^d} \\ M_x^* = \frac{M'_x}{bV'^e (\gamma - V')^f} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

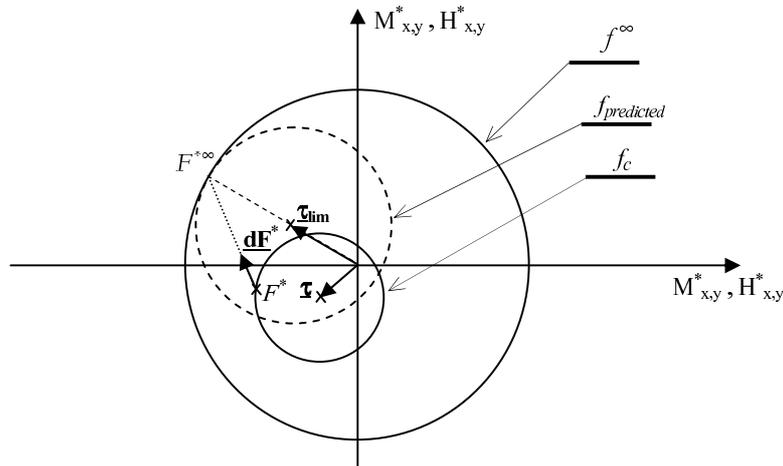


FIG. 3.8 – Loi de tangence dans l'espace  $E^* = (H_x^*, M_y^*, H_y^*, M_x^*)$

A partir des équations 3.20 et 3.35 il apparaît évident que les surfaces de charge sont réduites à des cercles avec pour centre l'extrémité du vecteur  $\underline{\tau} = (\alpha, \beta, \delta, \eta)$  et de rayon  $\rho$ . Elles évoluent à l'intérieur du critère de rupture qui, dans cet espace, est lui aussi décrit par un cercle quand  $\gamma = 1$  (figure 3.8).

La loi de tangence utilisée est basée sur l'hypothèse que le point de charge final à la rupture  $F^{*\infty}$  est donné par la projection du point de charge courant  $F^*$  sur le critère de rupture dans

la direction de l'incrément de force  $d\mathbf{F}^*$  entre les deux pas précédents. Ainsi le centre du cercle de charge final a pour coordonnées l'extrémité du vecteur  $\underline{\tau}_{\text{lim}} = (\alpha_{\text{lim}}, \beta_{\text{lim}}, \delta_{\text{lim}}, \eta_{\text{lim}})$  et se situe nécessairement sur le rayon du cercle de rupture quand  $\gamma = 1$ .  $\underline{\tau}_{\text{lim}}$  est alors calculé en utilisant une procédure itérative: lors de la première itération la taille de la surface de charge est gardée constante (et égale à celle du pas convergé précédent) et le centre de la surface de charge finale est évalué en utilisant la loi de tangence. Lors de la seconde itération, une nouvelle position du centre est évaluée en considérant une augmentation de la taille de la surface de charge d'autant qu'elle est susceptible de se déplacer pour arriver au niveau de la surface de charge finale.

Dans l'espace  $E^* = (H_x^*, M_y^*, H_y^*, M_x^*)$  la surface de charge est un cercle, ce qui implique que la tangence entre surface de charge et critère de rupture est garantie. Cependant pour des chargements complexes (non radial, effort vertical variable) cet algorithme décrit ici peut être à l'origine de problèmes de non convergence du modèle (mauvaise estimation de l'état final). Une loi hypoplastique permettrait d'enrayer ce problème et serait ici beaucoup mieux adaptée.

### 3.3.2.7 Loi d'écoulement

La loi d'écoulement va nous permettre de donner la direction dans l'espace des déplacements réduits dans laquelle vont se développer les déplacements plastiques.

Dans l'espace à 4 dimensions défini par l'hyperplan  $(H'_x, M'_y, H'_y, M'_x)$ , il est légitime que la plasticité se développe selon la normale à la surface de charge  $\underline{\mathbf{n}}_f$ . En effet, si la projection de cette normale selon un axe donné (par exemple  $(H'_x)$ ) est positive, alors la projection du vecteur vitesse plastique  $(u_x^{pl})$  sera aussi positive (figure 3.9 (b)). Dans cet hyperplan, la surface de charge  $f_c$  est suffisante pour décrire la direction du vecteur vitesse plastique et donc la loi d'écoulement est dans cet hyperplan associée.

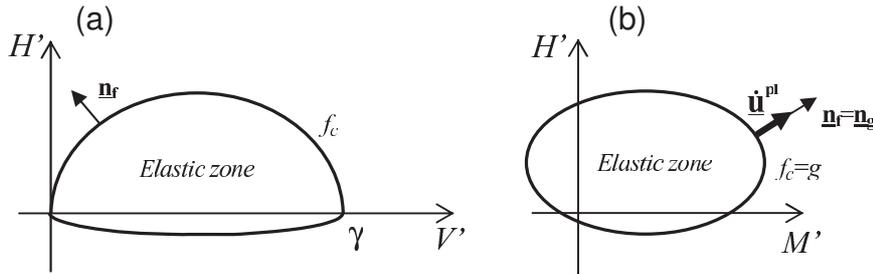


FIG. 3.9 – Cas problématique d'une loi d'écoulement associée - (a) dans un plan  $(H' - V')$  projection de  $\underline{\mathbf{n}}_f$  sur l'axe  $V'$  peut être négative - et (b) dans un plan  $(H' - M')$

Cependant, dans les 4 autres plans, où l'effort vertical intervient (i.e.  $(H'_x, V')$ ,  $(M'_y, V')$ ,  $(H'_y, V')$ ,  $(M'_x, V')$ ), la surface de charge ne peut pas être utilisée pour décrire correctement la direction du vecteur vitesse plastique. En effet, il existe des cas où la projection de la normale à la surface est négative alors que la projection du vecteur vitesse plastique  $\dot{u}_z^{pl}$  doit toujours être positive ou égale à zéro (figure 3.9 (a)) C'est la raison pour laquelle la loi d'écoulement  $g$  n'est pas associée dans ces 4 plans. L'expression de  $g_c$  est donnée par la relation 3.36.

$$\begin{aligned}
g_c(\mathbf{F}, \underline{\tau}, \rho, \gamma, V'_c) &\equiv \left( \frac{H'_x}{\rho \frac{aV'_c}{(\kappa\gamma + V'_c)^d} (\gamma - V')^d (\kappa\gamma + V')^d} - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \\
&+ \left( \frac{M'_y}{\rho \frac{bV'_c}{(\xi\gamma + V'_c)^f} (\gamma - V')^f (\xi\gamma + V')^f} - \frac{\beta}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{H'_y}{\rho \frac{aV'_c}{(\kappa\gamma + V'_c)^d} (\gamma - V')^d (\kappa\gamma + V')^d} - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 \\
&+ \left( \frac{M'_x}{\rho \frac{bV'_c}{(\xi\gamma + V'_c)^f} (\gamma - V')^f (\xi\gamma + V')^f} - \frac{\eta}{\rho} \right)^2 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans cette expression  $V'_c$  représente l'effort vertical courant. Il permet d'assurer que la loi d'écoulement  $g$  et la surface de charge  $f_c$  ont leur intersection située au point d'effort courant  $F$  ( $V'_c$  représente la première composante des coordonnées du point de charge  $F$ ).  $f_c$  et  $g$  sont, comme nous l'avons dit précédemment, identiques dans les plans  $(H'_x, M'_y)$ ,  $(H'_x, M'_x)$ ,  $(H'_x, H'_y)$ ,  $(M'_y, M'_x)$ ,  $(M'_y, H'_y)$ ,  $(M'_x, H'_y)$  (i.e. des ellipses), alors qu'une loi non-associée est utilisée dans les plans  $(H'_x, V')$ ,  $(M'_y, V')$ ,  $(H'_y, V')$ ,  $(M'_x, V')$ .  $\kappa$  et  $\xi$  sont 2 paramètres permettant de modifier la forme de la loi d'écoulement afin d'obtenir une tangente horizontale pour un effort vertical donné  $V'$  qui peut être choisie par l'utilisateur. Cette tangente horizontale est située en  $V' = \frac{\gamma(1-\xi)}{2}$  dans les plans  $(M' - V')$  et en  $V' = \frac{\gamma(1-\kappa)}{2}$  dans les plans  $(H' - V')$ .

La représentation de  $g$  dans les plans  $(M', V')$  est donnée par la figure 3.10 où  $\kappa$  et  $\xi$  sont pris par défaut égaux à 1 afin d'avoir une tangente horizontale en  $V' = 0$ . Une représentation similaire est possible dans les plans  $(H', V')$ .

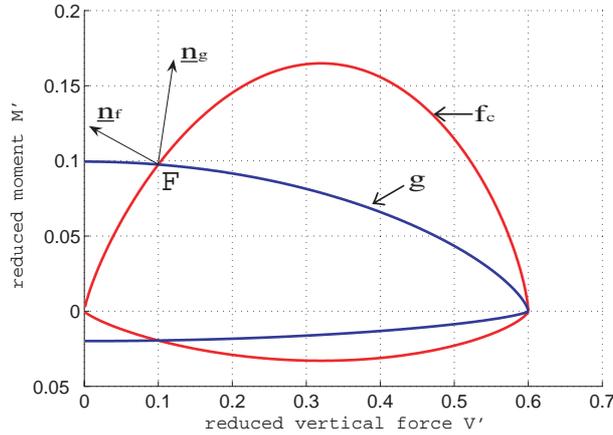


FIG. 3.10 – Représentation de la loi d'écoulement non-associée  $g_c$ , la surface de charge  $f_c$  et de sa normale pour un point de charge donné  $F$  dans un plan  $(M' - V')$

### 3.3.2.8 Hypothèse de normalité

La loi de normalité est définie par:  $\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{pl}} = \langle \dot{\lambda} \rangle \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}}$  où  $g_c$  représente la loi d'écoulement (ou potentiel plastique) et où le multiplicateur plastique  $\langle \dot{\lambda} \rangle = \dot{\lambda}$  si  $\dot{\lambda} \geq 0$  et  $\langle \dot{\lambda} \rangle = 0$  si  $\dot{\lambda} < 0$ .

La direction du vecteur incrément plastique est donc donnée par cette hypothèse qui permet de le relier à la normale de la courbe représentant la loi d'écoulement.

Ainsi nous obtenons:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u}_z^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial V'} \\ \dot{u}_x^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial H'_x} \\ \dot{\theta}_y^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial M'_y} \\ \dot{u}_y^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial H'_y} \\ \dot{\theta}_x^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial M'_x} \end{cases} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.37)$$

Nous pouvons donc introduire la fonction vectorielle d'écrouissage  $\underline{\mathbf{h}}_c(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_c)$  telle que  $\underline{\dot{\mathbf{q}}}_c = -\dot{\lambda} \underline{\mathbf{h}}_c(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_c)$  où  $\underline{\mathbf{q}}_c$  est le vecteur rassemblant les variables d'écrouissage:

$$\underline{\mathbf{q}}_c = \begin{bmatrix} \alpha^\oplus \\ \alpha^\ominus \\ \beta^\oplus \\ \beta^\ominus \\ \delta^\oplus \\ \delta^\ominus \\ \eta^\oplus \\ \eta^\ominus \\ \rho \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Ainsi nous pouvons écrire:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}^\oplus \\ \dot{\alpha}^\ominus \\ \dot{\beta}^\oplus \\ \dot{\beta}^\ominus \\ \dot{\delta}^\oplus \\ \dot{\delta}^\ominus \\ \dot{\eta}^\oplus \\ \dot{\eta}^\ominus \\ \dot{\rho} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = -\dot{\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} v_\alpha^\oplus K_{h_x h_x}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial H'_x} \right| \left( 1 - \frac{H_x^{\star \infty}}{\alpha^\oplus} \right) \\ -v_\alpha^\ominus K_{h_x h_x}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial H'_x} \right| \left( 1 + \frac{H_x^{\star \infty}}{\alpha^\ominus} \right) \\ v_\beta^\oplus K_{\theta_y \theta_y}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial M'_y} \right| \left( 1 - \frac{M_y^{\star \infty}}{\beta^\oplus} \right) \\ -v_\beta^\ominus K_{\theta_y \theta_y}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial M'_y} \right| \left( 1 + \frac{M_y^{\star \infty}}{\beta^\ominus} \right) \\ v_\delta^\oplus K_{h_y h_y}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial H'_y} \right| \left( 1 - \frac{H_y^{\star \infty}}{\delta^\oplus} \right) \\ -v_\delta^\ominus K_{h_y h_y}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial H'_y} \right| \left( 1 + \frac{H_y^{\star \infty}}{\delta^\ominus} \right) \\ v_\eta^\oplus K_{\theta_x \theta_x}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial M'_x} \right| \left( 1 - \frac{M_x^{\star \infty}}{\eta^\oplus} \right) \\ -v_\eta^\ominus K_{\theta_x \theta_x}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial M'_x} \right| \left( 1 + \frac{M_x^{\star \infty}}{\eta^\ominus} \right) \\ - \left| \frac{\alpha^\oplus + \beta^\oplus + \delta^\oplus + \eta^\oplus}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \eta^2}} \right| \\ \left( a_1 K_{zz}^{\prime el} \frac{\partial g_c}{\partial V'} + a_2 K_{h_x h_x}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial H'_x} \right| + a_3 K_{\theta_y \theta_y}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial M'_y} \right| + a_4 K_{h_y h_y}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial H'_y} \right| + a_5 K_{\theta_x \theta_x}^{\prime el} \left| \frac{\partial g_c}{\partial M'_x} \right| \right) \frac{\gamma-1}{\gamma} \end{bmatrix}_{\underline{\mathbf{h}}_c(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_c)} \quad (3.39)$$

où les fonctions  $v^\oplus$  et  $v^\ominus$  sont définies de la manière suivante. Par exemple ici pour la variable  $\alpha$  relative à la direction  $\vec{x}$  (effort  $H'_x$ ), nous définissons une fonction  $v_\alpha$  telle que:

$$\begin{cases} v_{\alpha}^{\oplus} = 1 \\ v_{\alpha}^{\ominus} = 0 \end{cases} \quad \text{si } \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{\alpha}^{\oplus} = 0 \\ v_{\alpha}^{\ominus} = 1 \end{cases} \quad \text{si } \dot{\alpha} \leq 0 \quad (3.40)$$

Ce formalisme va nous permettre de calculer le multiplicateur plastique  $\lambda$  par l'intermédiaire de la condition de consistance.

### 3.3.2.9 Condition de consistance

La condition de consistance va nous servir à calculer le potentiel plastique  $\lambda$ . Cette condition traduit le fait que le point d'effort courant doit toujours être sur la surface de charge. Autrement dit, si  $f_c$  est la surface de charge, nous devons vérifier à chaque instant que:  $\dot{f}_c = 0$  et  $f_c = 0$ . La première condition fournit la relation permettant le calcul du multiplicateur plastique. Elle peut s'écrire (en considérant que  $\dot{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{\text{pl}})$ ):

$$\begin{aligned} \dot{f}_c = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \dot{\mathbf{q}}_c = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\mathbf{u}} - \lambda \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} - \lambda \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \mathbf{h}_c = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\mathbf{u}}}{\frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \mathbf{h}_c} \end{aligned} \quad (3.41)$$

On note  $H_c = \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \mathbf{h}_c$  le module plastique.

Puis suite à l'hypothèse de normalité 3.37:

$$\dot{\mathbf{u}}^{\text{pl}} = \lambda \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\mathbf{u}}}{\frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \mathbf{h}_c} \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\left( \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} \otimes \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \right) \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\mathbf{u}}}{\frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \mathbf{h}_c} \quad (3.42)$$

d'où finalement nous obtenons la matrice tangente élasto-plastique (où  $\otimes$  dénote le produit tensoriel et  $:$  le produit contracté):

$$\dot{\mathbf{F}} = \underbrace{\left( \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} - \frac{\left( \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} : \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} \right) \otimes \left( \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} : \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \right)}{\frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_c}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{q}_c} \cdot \mathbf{h}_c} \right)}_{\underline{\mathbf{K}}^{\text{elpl}}} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.43)$$

La deuxième condition  $f_c = 0$  impose à l'effort d'appartenir à la surface de charge lorsque le multiplicateur plastique est calculé. Ceci va constituer le critère de convergence dans l'algorithme de résolution numérique de Return Mapping. Ce même algorithme permet de calculer le potentiel plastique et la matrice tangente élasto-plastique. Il sera décrit dans le chapitre 4.

### 3.4 Modèle de décollement

Un nouveau modèle de décollement construit suivant la théorie de plasticité est proposé dans cette partie. Il rend compte du comportement d'une fondation rectangulaire-filante ou circulaire reposant sur un sol ayant un comportement élastique ou plastique. Ce modèle sera couplé avec le modèle de plasticité décrit au paragraphe 3.3 en utilisant la théorie des multi-mécanismes [Simo et Hughes, 1998].

La seule grandeur cinématique permettant de quantifier le décollement est le pourcentage de décollement  $\delta$  qui est défini comme le rapport entre la surface de fondation décollée sur la surface totale de la fondation (figure 3.11).

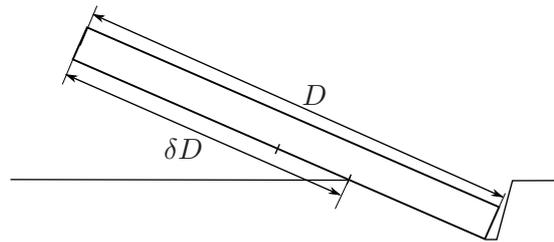


FIG. 3.11 – Représentation du pourcentage de semelle décollée  $\delta$  si  $D$  est la largeur totale de la fondation.

La présentation va se dérouler en 3 étapes:

- d'abord le comportement élastique (sans décollement)
- ensuite le décollement sur sol élastique
- enfin l'étude de l'influence, et donc du couplage, de la plasticité sur le comportement en décollement

#### 3.4.1 Comportement élastique

Ce comportement élastique est le même que celui utilisé par le mécanisme de plasticité (paragraphe 3.3.1). La loi de comportement peut être écrite à tout instant de la manière suivante:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} \underline{\mathbf{u}}^{\text{el}} \quad (3.44)$$

L'expression de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}}$  est la même que dans le paragraphe 3.3.1.

#### 3.4.2 Décollement sur sol élastique

L'incrément de déplacement total est décomposé en la somme du déplacement élastique et du déplacement de décollement  $\underline{\mathbf{u}}^{\text{up}}$ :

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}} = \underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{up}} \quad (3.45)$$

### 3.4.2.1 Répartition linéaire des contraintes

Dans l'hypothèse d'une répartition linéaire des contraintes (hypothèse bonne pour une fondation souple, mais relativement mauvaise pour une fondation rigide [Philipponnat et Hubert, 2003], figure 3.12) nous pouvons distinguer les deux cas suivants.

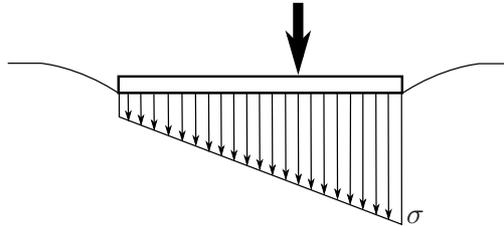


FIG. 3.12 – Répartition linéaire des contraintes  $\sigma$  sous une fondation rigide.

**Cas d'une fondation rectangulaire-filante** Il est assez aisé de montrer qu'il n'y a pas de décollement tant que l'effort vertical est appliqué dans le noyau central. Pour une fondation rectangulaire-filante, le noyau central  $e$  est compris entre  $[-\frac{B}{6}, \frac{B}{6}]$ , où  $B$  est la largeur de la fondation. Le moment d'initiation au décollement vaut alors  $M_0^{(0)} = \frac{V'}{6}$ , et le moment de renversement vaut quant à lui  $M_c' = \frac{V'}{2}$  (s'obtient en écrivant l'équilibre des moments au bord de la fondation).

**Cas d'une fondation circulaire** Pour une fondation circulaire la même démonstration peut être effectuée. Le noyau central  $e$  est cette fois-ci compris entre  $[-\frac{D}{8}, \frac{D}{8}]$ , où  $D$  est le diamètre de la fondation. Nous obtenons un moment d'initiation au décollement de  $M_0^{(0)} = \frac{V'}{8}$ , et un moment de renversement toujours égal à  $M_c' = \frac{V'}{2}$ .

### 3.4.2.2 Répartition réelle des contraintes

En réalité, pour une semelle rigide la répartition des contraintes sous la fondation n'est pas uniforme mais présente deux maximums aux extrémités de la fondation pour un sol cohérent, et un maximum au milieu de la fondation pour un sol pulvérulent (figure 3.13, [Philipponnat et Hubert, 2003]).

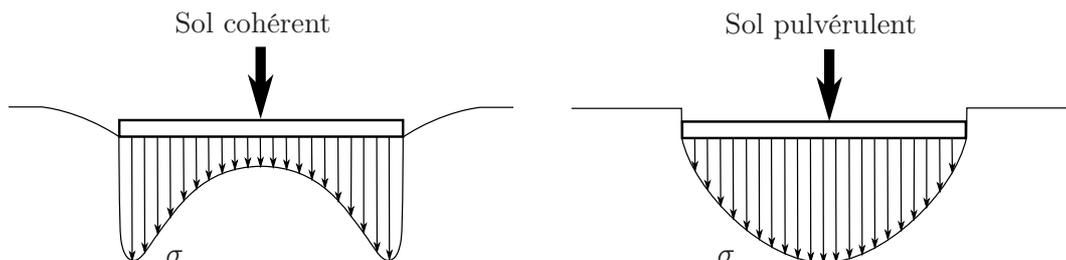


FIG. 3.13 – Répartition des contraintes  $\sigma$  sous une fondation rigide.

**Cas d'une fondation rectangulaire-filante** Les résultats numériques présentés dans ce paragraphe proviennent du travail de [Crémer, 2001] qui a simulé le comportement d'une fondation rectangulaire-filante à l'aide du code aux éléments finis "Dynaflow" pour un sol cohérent. Les simulations numériques nous donnent un moment d'initiation de:  $M_0 = \frac{VB}{4}$  soit  $M'_0 = \frac{V'}{4}$ . Le moment de renversement quant à lui reste le même:  $M'_c = \frac{V'}{2}$ .

Ces simulations ont aussi permis de déterminer les relations qui définissent l'évolution du moment en fonction du pourcentage de décollement  $\delta$ . Elles sont présentées sur la figure 3.14 et par les relations 3.46:

$$\begin{cases} |M| \leq |M_0| \Rightarrow M' = K'_{\theta\theta}\theta' \\ |M| = |M_0| \Rightarrow M' = K'_{\theta\theta}\theta'_0 \quad \text{avec } \theta'_0 = \frac{V'}{4K'_{\theta\theta}} \\ |M| \geq |M_0| \Rightarrow M' = \frac{V'}{4}(1 + \delta) \end{cases} \quad (3.46)$$

$\theta'_0$  est la rotation d'initiation de décollement.

**Cas d'une fondation circulaire** Pour une fondation circulaire, [Wolf, 1988] propose un moment d'initiation au décollement  $M_0 = \frac{VD}{6}$  soit  $M'_0 = \frac{V'}{6}$ . Le moment de renversement quant à lui reste le même:  $M'_c = \frac{V'}{2}$ . En étendant le comportement d'une fondation rectangulaire-filante à la fondation circulaire, c'est à dire un comportement linéaire dans le plan  $(\frac{M'}{V'}, \delta)$ , la pente de la courbe charge-décharge est alors de  $\frac{1}{3}$  au lieu de  $\frac{1}{4}$ . Le comportement de la fondation circulaire sur sol élastique est résumé par la figure 3.14 et par les équations 3.47.

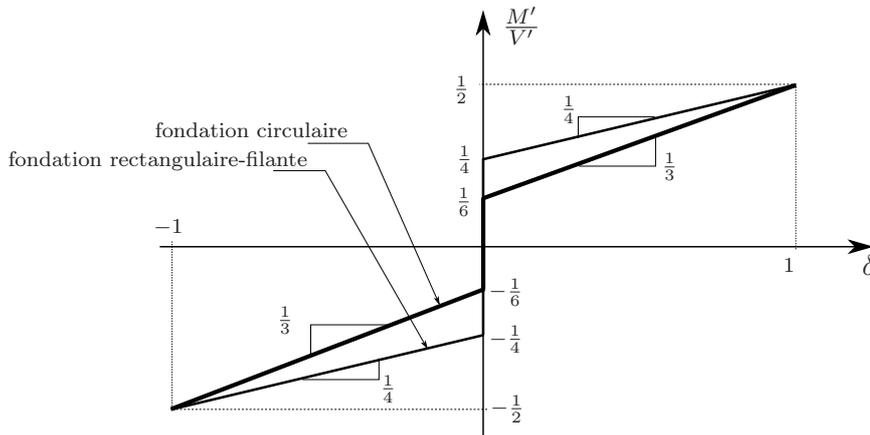


FIG. 3.14 – Evolution moment-décollement sur sol élastique cohérent pour une fondation circulaire et rectangulaire-filante.

$$\begin{cases} |M| \leq |M_0| \Rightarrow M' = K'_{\theta\theta}\theta' \\ |M| = |M_0| \Rightarrow M' = K'_{\theta\theta}\theta'_0 \quad \text{avec } \theta'_0 = \frac{V'}{6K'_{\theta\theta}} \\ |M| \geq |M_0| \Rightarrow M' = \frac{V'}{6}(1 + 2\delta) \end{cases} \quad (3.47)$$

### 3.4.2.3 Adaptation du problème d'élasto-décollement à une formulation conforme à la théorie de plasticité

Contrairement au travail de [Crémer, 2001], le décollement dans notre modèle sera pris en compte de manière à satisfaire la formulation classique de la théorie de plasticité. Ainsi, la 3<sup>ème</sup> équation des systèmes 3.46 et 3.47 peut être vue comme une relation décrivant une surface de charge avec pour variable d'érouissage la variable  $\delta$ .

La définition des différentes surfaces du modèle de décollement est détaillée ci-dessous:

#### 3.4.2.3.1 Définition des surface de charge, limite élastique et critère de rupture

La surface de charge est donnée par l'équation suivante:

$$f \equiv M' - \frac{V'}{q_1} (1 + q_2 \delta) = 0 \quad (3.48)$$

Pour un sol cohérent  $q_1$  et  $q_2$  sont définies ci dessous:

pour une semelle rectangulaire-filante:

$$\begin{cases} q_1 = 4 \\ q_2 = 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

et pour une semelle circulaire:

$$\begin{cases} q_1 = 6 \\ q_2 = 2 \end{cases} \quad (3.50)$$

En imposant dans l'équation 3.48  $\delta = 0$ , nous obtenons bien le moment d'initiation de décollement vu plus haut. Ce moment d'initiation au décollement correspond aussi à la limite élastique du modèle:

$$f_{el} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} = 0 \quad (3.51)$$

Pour  $\delta = 1$ , c'est à dire pour une semelle entièrement décollée, nous obtenons bien le moment de renversement qui correspond à un critère de rupture:

$$f_{\infty} \equiv M' - \frac{V'}{2} = 0 \quad (3.52)$$

Ces surfaces sont illustrées par la figure 3.15 montrant une surface de charge (pour une valeur de la variable d'érouissage  $\delta$  quelconque), le critère de rupture (renversement de la structure pour  $\delta = 1$ ) et la limite élastique (initiation de décollement pour  $\delta = 0$ ). Les symboles  $\oplus$  et  $\ominus$  proche des surfaces donnent les signes des fonctions correspondantes ( $f_{\infty}$ ,  $f$  et  $f_{el}$ ) dans les domaines où ils sont placés.

$$\begin{cases} f(M', V') \leq 0 & \Rightarrow \text{élasticité} \\ f(M', V') > 0 & \Rightarrow \text{décollement} \end{cases} \quad (3.53)$$

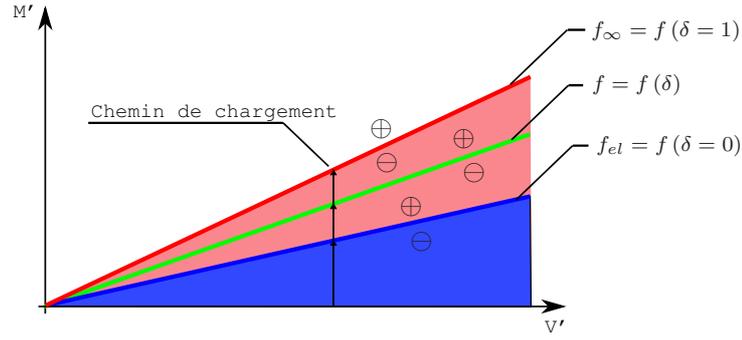


FIG. 3.15 – Evolution de la surface de charge sur sol élastique en chargement monotone.

**3.4.2.3.2 Evolution de la variable d'écroissage  $\delta$**  Les simulations numériques [Crémer, 2001] ont permis de mettre en évidence la relation liant le moment et la rotation totale d'une fondation rectangulaire-filante:

$$\frac{M'}{M'_0} = 2 - \frac{\theta'_0}{\theta'} \quad (3.54)$$

Dans cette équation nous rendons bien compte du fait que lorsque  $\theta'$  tend vers l'infini le moment  $M'$  tend vers  $2M'_0$  soit  $2\frac{V'}{4} = \frac{V'}{2}$ .

Nous proposons ci-dessous une extension de cette formulation à la fondation circulaire. Nous considérons de même que la limite du moment réduit  $M'$  doit être égale à  $\frac{V'}{2}$  lorsque  $\theta'$  tend vers l'infini, alors que le moment d'initiation au décollement vaut cette fois-ci  $M'_0 = \frac{V'}{6}$ . Ainsi la relation liant le moment réduit à la rotation est donnée par l'équation 3.55.

$$\frac{M'}{M'_0} = 3 - \frac{2\theta'_0}{\theta'} \quad (3.55)$$

A partir des relations 3.46 et 3.54 pour une fondation rectangulaire-filante et 3.47 et 3.55 pour une fondation circulaire, il devient aisé de donner la relation entre la rotation totale  $\theta$  et le pourcentage de décollement  $\delta$  (équation 3.56). Cette relation est unique pour les deux formes de fondation considérées. Elle lie en réalité deux variables totalement géométriques. Il paraît donc normal qu'elle soit commune aux deux types de fondation, puisque pour un pourcentage de décollement donné nous avons une rotation donnée quelle que soit la géométrie de la fondation considérée.

$$\theta' = \frac{\theta'_0}{1 - \delta} \quad (3.56)$$

Cette relation est importante car elle va nous permettre de lier le pourcentage de décollement  $\delta$ , qui est aussi la variable d'écroissage du modèle, avec la rotation de décollement  $\theta^{up}$ , comme pour un problème issue de la plasticité classique.

Ainsi en posant  $\theta' = \theta^{el} + \theta^{up}$  et  $M' = K'_{\theta\theta}\theta^{el}$  nous obtenons la relation suivante:

$$\theta'^{up} = \theta'_0 \frac{\delta^2}{1 - \delta} \quad (3.57)$$

L'équation 3.57 peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\frac{\theta'^{up}}{\theta'_0} (1 - \delta) - \delta^2 = 0 \quad (3.58)$$

En différentiant cette équation nous avons facilement:

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{\theta}'^{up} (1 - \delta)^2}{\theta'_0 \delta (2 - \delta)} \quad (3.59)$$

Cette équation différentielle traduit l'évolution de la variable d'écroissance  $\delta$  en fonction des déplacements de décollement (par analogie au déplacement plastique).

L'hypothèse de normalité  $\dot{\theta}'^{up} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial M'}$  donne finalement:

$$\dot{\delta} = -\dot{\lambda} \left[ \frac{q_1 K'_{\theta\theta} (1 - \delta)^2}{V' \delta (\delta - 2)} \frac{\partial g}{\partial M'} \right] \quad (3.60)$$

La partie entre crochets de cette dernière équation n'est autre que la fonction vectorielle d'écroissance (déjà décrite dans la partie 3.3 pour la plasticité)

#### 3.4.2.4 Extension à des problèmes chargements-déchargements

Sur sol élastique et en phase de déchargement, le retour est tel que la courbe moment rotation est la même qu'en phase de chargement. C'est un comportement totalement réversible, nous pouvons donc le qualifier d'élastique non-linéaire. Dans le but de le traiter de la même manière qu'un problème de plasticité classique, il est nécessaire de bien définir la surface de charge et surtout les zones où l'on va trouver des non-linéarités. Ainsi lors d'une phase de déchargement, le test sur le signe de la surface de charge ne doit plus donner un nombre négatif comme cela serait le cas pour un retour élastique linéaire, mais un nombre positif pour rentrer à nouveau dans le domaine de décollement non linéaire.

La surface de charge peut alors s'écrire:

$$f \equiv \left| M' - \frac{V'}{q_1} (1 + q_2 \delta) \right| = 0 \quad (3.61)$$

De cette manière la surface de charge prend la valeur positive quel que soit le sens du chargement (chargement ou déchargement) voir figure 3.16.

Le problème avec ce genre de description est qu'un test sur le signe de la seule fonction  $f$  ne suffit plus pour décrire correctement le comportement de la fondation, notamment le comportement élastique linéaire pour un chargement vierge. L'introduction d'un autre test sur

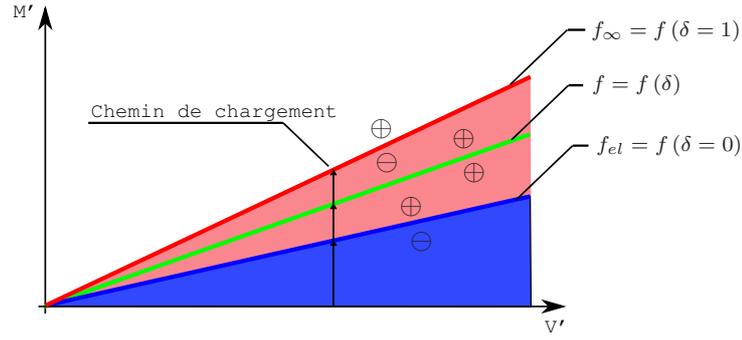


FIG. 3.16 – Evolution de la surface de charge sur sol élastique en chargement-déchargement.

le signe de la surface  $f_{el}$  (qui reste fixe, c'est à dire sans variable d'écroissage) est nécessaire pour délimiter la zone élastique linéaire.

La limite élastique s'écrit toujours de la manière suivante:

$$f_{el} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} = 0 \quad (3.62)$$

Les mécanismes élasticité linéaire et décollement sont donc déclenchés avec les conditions suivantes (voir aussi l'algorithme de résolution numérique au chapitre 4):

$$\begin{cases} f_{el}(M', V') \leq 0 \quad \text{ou} \quad f(M', V', \delta) = 0 & \Rightarrow \text{élasticité} \\ f_{el}(M', V') > 0 \quad \text{et} \quad f(M', V', \delta) > 0 & \Rightarrow \text{décollement} \end{cases} \quad (3.63)$$

### 3.4.2.5 Extension à des problèmes cycliques

Dans l'optique de développer un modèle de décollement sur sol plastique (où des décollements résiduels peuvent persister même durant une phase de chargement opposé: voir paragraphe 3.4.3), 2 variables d'écroissage indépendantes sont choisies  $\delta^{\oplus}$  et  $\delta^{\ominus}$ . L'une,  $\delta^{\oplus}$ , est utilisée pour les phases de chargements positifs et l'autre,  $\delta^{\ominus}$ , est utilisée pour les phases de chargements négatifs.

La loi d'évolution de  $\delta^{\oplus}$  est la même que celle décrite pour  $\delta$  précédemment.  $\delta^{\ominus}$  suit la même formulation, il est activé pour des rotations de décollement négatives et il prend des valeurs comprises entre  $-1$  et  $0$  (contrairement à  $\delta \in [0, 1]$ ). Pour obtenir la loi d'évolution de la variable  $\delta^{\ominus}$ , le changement de variable  $\delta \rightarrow -\delta$  et  $\theta^{up} \rightarrow -\theta^{up}$  est nécessaire. Finalement les deux variables d'écroissages obéissent aux lois suivantes:

$$\begin{cases} \dot{\delta}^{\oplus} = \frac{\dot{\theta}^{up}}{\theta_0} \frac{(1-\delta^{\oplus})^2}{\delta^{\oplus}(2-\delta^{\oplus})} & \delta^{\oplus} \in [0, 1] \\ \dot{\delta}^{\ominus} = \frac{\dot{\theta}^{up}}{\theta_0} \frac{(1+\delta^{\ominus})^2}{-\delta^{\ominus}(2+\delta^{\ominus})} & \delta^{\ominus} \in [-1, 0] \end{cases} \quad (3.64)$$

En posant  $\delta = \delta^{\oplus} + \delta^{\ominus}$ , l'adaptation de la surface de charge, de la limite élastique et du critère

de rupture pour un chargement cyclique est la suivante:

$$\begin{cases} f \equiv \left| M'^2 - \frac{V'^2}{q_1} (1 + q_2 |\delta|) \right| = 0 \\ f_{el} \equiv M'^2 - \frac{V'^2}{q_1} = 0 \\ f_{\infty} \equiv M'^2 - \frac{V'^2}{2} = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

L'ajout des exposants 2 permet d'obtenir des branches symétriques par rapport à l'axe  $V'$ . La représentation graphique des surfaces est donnée par la figure 3.17.

Le test permettant de déclencher les différents mécanismes est le même que pour le cas précédent. Il est donné par l'équation 3.63.

**Remarque:** contrairement à la représentation de la figure 3.11,  $\delta$  est ici une grandeur algébrique qui prend le signe du chargement (positif ou négatif).

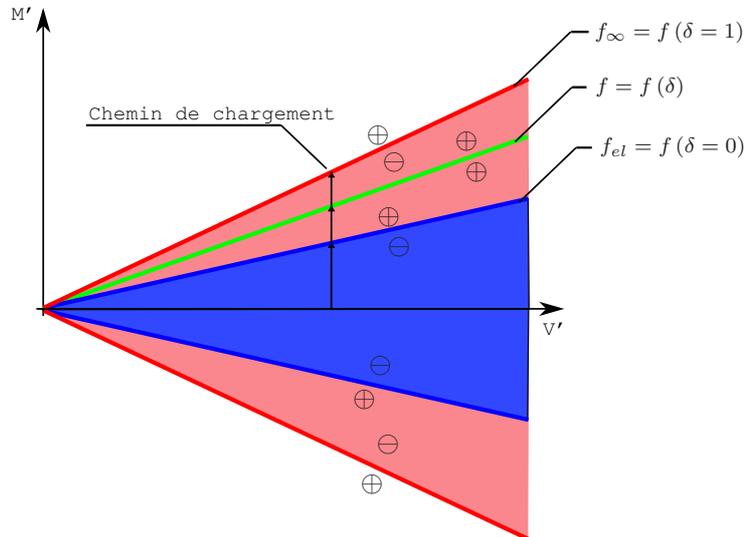


FIG. 3.17 – Evolution de la surface de charge sur sol élastique en cyclique.

### 3.4.2.6 Loi d'écoulement

Pour compléter la présentation du mécanisme de décollement sur sol élastique nous devons définir une loi d'écoulement. Ainsi nous pouvons relier entre eux les incréments de déplacements de décollement (déplacement vertical et rotation dus au décollement de la fondation).

Si nous regardons la cinématique de la fondation lors d'un phénomène de décollement, il est facile de calculer l'incrément de soulèvement du centre de la fondation  $dz'^{up}$  en fonction de la rotation de décollement  $d\theta'^{up}$ . En effet, si nous considérons l'hypothèse que le centre instantané de rotation  $O$  de la fondation (c'est à dire un point fixe verticalement) est au milieu de la partie de fondation non décollée (c'est à dire au milieu de la largeur réduite  $(1 - \delta)D$ , voir figure 3.18 [Crémer, 2001]), alors le déplacement infinitésimale  $dz'^{up}$  créé par une rotation infinitésimale  $d\theta'^{up}$  s'exprime de la manière suivante:

$$dz^{up} = - \left( \frac{D}{2} - \frac{D(1-\delta)}{2} \right) d\theta^{up} = - \frac{D\delta}{2} d\theta^{up} \quad (3.66)$$

Par symétrie, l'incrément de soulèvement  $dz^{up}$  est toujours positif pour un incrément de rotation qui augmente (en valeur absolue) et un incrément de soulèvement négatif pour un incrément de rotation qui diminue (en valeur absolue). Nous pouvons vérifier aisément que l'équation 3.66 permet d'obtenir cela en considérant les différents cas suivants:

- si  $\delta \geq 0$  et que  $d\theta^{up} \geq 0$ , nous devons avoir  $dz^{up} \leq 0 \Rightarrow$  vérifié
- si  $\delta \geq 0$  et que  $d\theta^{up} \leq 0$ , nous devons avoir  $dz^{up} \geq 0 \Rightarrow$  vérifié
- si  $\delta \leq 0$  et que  $d\theta^{up} \geq 0$ , nous devons avoir  $dz^{up} \geq 0 \Rightarrow$  vérifié
- si  $\delta \leq 0$  et que  $d\theta^{up} \leq 0$ , nous devons avoir  $dz^{up} \leq 0 \Rightarrow$  vérifié

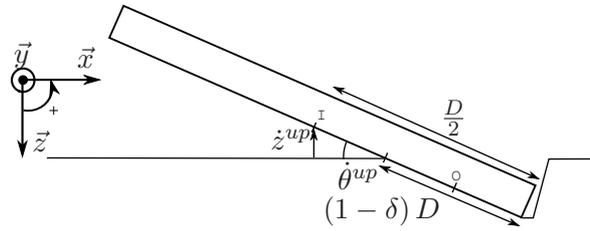


FIG. 3.18 – Cinématique de la fondation pour un mécanisme de décollement.

L'équation 3.66 peut s'écrire en terme de vitesse et avec les grandeurs adimensionnées:

$$\dot{z}^{up} = - \frac{\delta}{2} \dot{\theta}^{up} \quad (3.67)$$

Comme le décollement ne produit aucun autre déplacement (pas de déplacements horizontaux), la loi d'écoulement est ici complètement décrite comme:

$$\frac{\partial g}{\partial V'} = - \frac{\delta}{2} \frac{\partial g}{\partial M'} \quad (3.68)$$

Il est à noter que cette dernière équation 3.68 dépend de la définition du terme  $\frac{\partial g}{\partial M'}$ . Etant donné que la norme de la normale à la loi d'écoulement n'a pas d'importance, celui-ci peut être choisi de manière arbitraire (en effet ce qui compte c'est uniquement la direction de la normale et son sens). Cependant ce terme peut être positif ou négatif suivant le sens du chargement. Ainsi, de façon générale,  $\frac{\partial g}{\partial M'} \geq 0$  si le point de charge se déplace vers l'extérieur de  $f$  (figure 3.17), et  $\frac{\partial g}{\partial M'} \leq 0$  si le point de charge se déplace vers l'intérieur de  $f$ .

Comme  $f$  est toujours positive, une nouvelle fonction  $f_g$  est définie telle qu'elle est négative à l'intérieur et positive à l'extérieur (comme le sont  $f_\infty$  et  $f_{el}$  sur la figure 3.17, équation 3.69).

$$f_g \equiv M'^2 - \frac{V'^2}{q_1} (1 + q_2 |\delta|) = 0 \quad (3.69)$$

Nous pouvons donc imposer que  $\frac{\partial g}{\partial M'} = \frac{f_g}{|f_g|} = \text{sign}(f_g)$ . Le calcul de  $\frac{\partial g}{\partial V'}$  en découle:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial M'} = \frac{f_g}{|f_g|} = \text{sign}(f_g) \\ \frac{\partial g}{\partial V'} = -\frac{\delta}{2} \frac{f_g}{|f_g|} = -\frac{\delta}{2} \text{sign}(f_g) \end{cases} \quad (3.70)$$

### 3.4.3 Décollement sur sol plastique

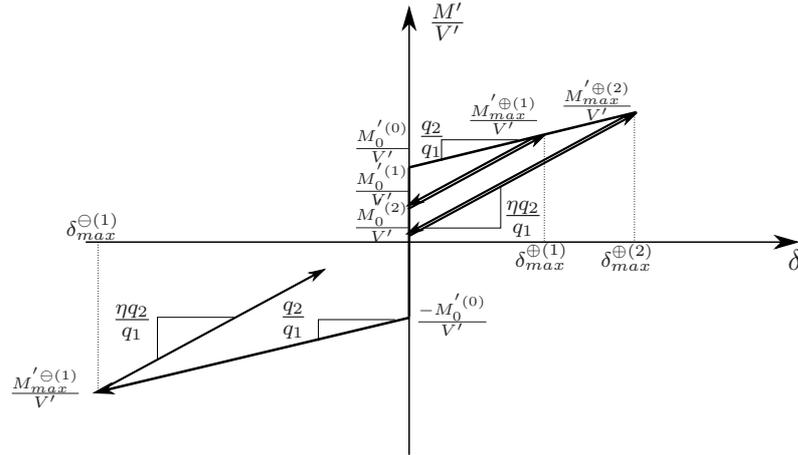


FIG. 3.19 – Evolution moment-décollement sur sol plastique.

Les principaux effets de la plasticité du sol sur le comportement en décollement sont les suivants (figure 3.19, qui représente l'évolution de  $\frac{M'}{V'}$  en fonction de  $\delta$ , pour un effort vertical  $V'$  donné, [Crémer, 2001]):

- Le moment d'initiation du décollement  $M'_0$  n'est plus une fonction linéaire de  $V'$ , mais les simulations nous donnent<sup>1</sup>

$$\frac{M'_0}{V'} = \frac{1}{q_1} e^{-AV'}. \quad (3.71)$$

avec  $A$  un paramètre constitutif de la loi pris égal à 2.5.

- En phase de chargement initial, la pente de la droite  $M - \delta$  vaut toujours  $\frac{q_2}{q_1}$ , alors qu'en phase de déchargement-rechargement, la pente est raidie d'un facteur  $\eta$ . En quelque sorte, la plasticité développée dans le sol due à la rotation de la fondation ne permet pas un retour total de la fondation dans sa position d'origine. Il en résulte donc un déplacement et un décollement permanent.
- En phase de chargement initial, la relation entre le moment et  $\delta$  est donnée par:

$$\delta = \frac{q_1}{q_2 V'} |M' - M'_0{}^{(0)}| \quad (3.72)$$

- En phase de déchargement-rechargement, la relation entre le moment et  $\delta$  est donnée par:

$$\delta = \frac{q_1}{q_2 \eta V'} |M' - M'_0{}^{(i)}| \quad (3.73)$$

1. l'exposant (0) traduit le fait que le moment d'initiation va aussi varier au cours de l'histoire de chargement (il n'y a pas réversibilité du phénomène, et c'est là une des grandes différences avec le cas élastique).

où  $M_0^{(i)}$  est le nouveau moment d'initiation en phase de déchargement-rechargement, l'indice  $(i)$  se réfère au plus grand état de chargement rencontré (voir figure 3.19).

– la relation pour le calcul de  $\eta$  est la suivante:

$$\eta = 4 - 3e^{-4V'} \quad (3.74)$$

**Remarque:** sur la figure 3.19  $M_{max}^{\oplus(i)}$  représente le moment maximum atteint lors d'un chargement dans le sens positif.

### 3.4.3.1 Adaptation du problème d'élasto-plasto-décollement conforme à la théorie de plasticité

Comme pour le modèle de décollement sur sol élastique vu plus haut, une formulation de type modèle de plasticité peut être adoptée. Pour cela une surface de charge, un critère de rupture, une loi d'érouissage, une loi d'écoulement sont nécessaires.

**3.4.3.1.1 Surface de charge** En phase de chargement initial, l'évolution du moment en fonction de  $\delta$  est donné par l'équation 3.72. Finalement pour un chargement dans le sens positif (nous ôtons les valeurs absolues):

$$M' = \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \delta \right) \quad (3.75)$$

En phase de déchargement-rechargement l'évolution du moment fait intervenir le coefficient  $\eta$  selon les équations 3.73 et 3.74. Le nouveau moment d'initiation au décollement  $M_0^{(i)}$  est tel que

$$\delta_{max}^{(i)} = \frac{q_1}{q_2 V'} |M_{max}'^{(i)} - M_0'^{(0)}| \quad (3.76)$$

mais aussi tel que

$$\delta_{max}^{(i)} = \frac{q_1}{q_2 \eta V'} |M_{max}'^{(i)} - M_0'^{(i)}| \quad (3.77)$$

D'où finalement nous obtenons pour un chargement dans le sens positif:

$$M' = \eta \frac{V'}{q_1} q_2 \left( \delta - \delta_{max}^{(i)} \right) + \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \delta_{max}^{(i)} \right) \quad (3.78)$$

Nous vérifions que pour  $\delta = \delta_{max}^{(i)}$  nous nous retrouvons en phase de chargement initial, c'est à dire au point d'intersection des deux droites (équations 3.75 et 3.78).

Nous proposons une nouvelle variable  $\beta = \delta_{max}^{(i)} (1 - \eta) + \eta \delta$  qui prend les valeurs suivantes:

(i)  $\beta = \delta = \delta_{max}^{(i)} = \beta_{max}^{(i)}$  en phase de chargement initial

(ii)  $\beta = \delta_{max}^{(i)} (1 - \eta) + \eta \delta = \eta \left( \delta - \delta_{max}^{(i)} \right) + \delta_{max}^{(i)}$  en phase de déchargement-rechargement

Si nous remplaçons dans ces 2 cas la valeur de  $\beta$  dans les équations 3.75 et 3.78, nous obtenons une seule et unique équation régissant l'évolution de  $M'$  en fonction de  $V'$  et  $\beta$  (que le chargement soit vierge ou non):

$$M' = \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \beta \right) \quad (3.79)$$

En d'autres termes, la surface de charge du problème élasto-plasto-décollement devient:

$$f \equiv M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \beta \right) = 0 \quad (3.80)$$

**3.4.3.1.2 Critère de rupture** La rupture en décollement intervient lorsque  $\delta = 100\%$ . A partir du moment où cette valeur atteinte, nous avons nécessairement  $\delta = \delta_{max}^{(i)} = 1$ , soit encore  $\beta = \beta_{max}^{(i)} = 1$ .

D'où le critère de rupture s'exprime de la manière suivante:

$$f_{\infty} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \right) = 0 \quad (3.81)$$

**3.4.3.1.3 Limite d'élasticité** Comme pour le problème de décollement sur sol élastique, une limite élastique indépendante de la surface de charge est nécessaire. La particularité ici est qu'elle n'est plus fixe comme dans le cas précédent mais cette zone a tendance à diminuer (voir figure 3.19). Le moment d'initiation en décollement pour une phase de déchargement-rechargement peut être déduite des équations précédentes en fonction du premier moment d'initiation  $M_0^{(0)}$  et du décollement maximum atteint  $\delta_{max}^{(i)} = \beta_{max}^{(i)}$  par l'expression suivante:

$$f_{el} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{max}^{(i)} (1 - \eta) - \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} = 0 \quad (3.82)$$

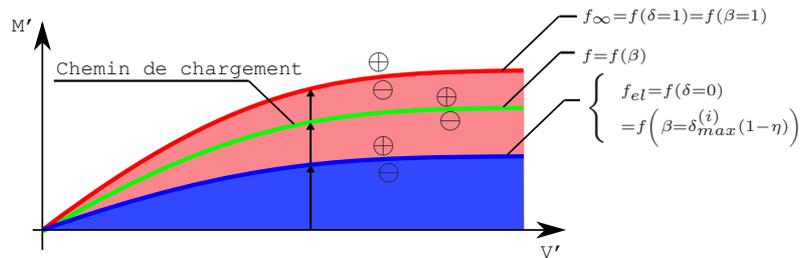


FIG. 3.20 – Evolution de la surface de charge sur sol plastique pour un chargement monotone.

**3.4.3.1.4 Loi d'écroissage** La loi régissant l'évolution de  $\delta$  est la même que pour le décollement sur sol élastique puisqu'elle ne dépend que de l'évolution de la rotation de décollement. L'équation 3.59 peut donc être conservée. Ici le paramètre d'écroissage régissant l'évolution de la surface de charge est le paramètre  $\beta$ . En phase de chargement initial, nous avons à tout instant  $\beta = \delta = \delta_{max}^{(i)} = \beta_{max}^{(i)}$ , et donc la loi d'évolution de  $\beta$  est la suivante:

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\theta}'_{up} (1 - \beta)^2}{\theta'_0 \beta (2 - \beta)} \quad \text{si } \beta = \beta_{max}^{(i)} \quad (3.83)$$

$$\begin{cases} f(M', V') \leq 0 & \Rightarrow \text{élasticité} \\ f(M', V') > 0 & \Rightarrow \text{décollement} \end{cases} \quad (3.84)$$

### 3.4.3.2 Extension à des problèmes chargements-déchargements

En phase de déchargement-rechargement nous avons  $\delta \neq \delta_{max}^{(i)}$  et donc de manière générale, comme vu plus haut  $\beta = \delta_{max}^{(i)} (1 - \eta) + \eta \delta$  qui peut s'écrire:  $\delta = \frac{\beta - (1-\eta)\delta_{max}^{(i)}}{\eta}$  ou encore  $\delta = \frac{\beta - (1-\eta)\beta_{max}^{(i)}}{\eta}$ . Ainsi  $\beta$  obéit à la loi d'évolution suivante:

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\theta}'_{up} \eta \left( 1 - \left( \frac{\beta - (1-\eta)\beta_{max}^{(i)}}{\eta} \right)^2 \right)}{\theta'_0 \frac{\beta - (1-\eta)\beta_{max}^{(i)}}{\eta} \left( 2 - \left( \frac{\beta - (1-\eta)\beta_{max}^{(i)}}{\eta} \right) \right)} \quad \text{si } \beta \leq \beta_{max}^{(i)} \quad (3.85)$$

Concernant la surface de charge, une adaptation est nécessaire pour pouvoir rentrer dans le domaine de décollement même en décharge (comme pour le cas élasto-décollement). Ainsi le test sur cette surface doit toujours donner un nombre positif quel que soit le sens du chargement. La surface de charge s'écrit donc de la manière suivante:

$$f \equiv \left| M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \beta \right) \right| = 0 \quad (3.86)$$

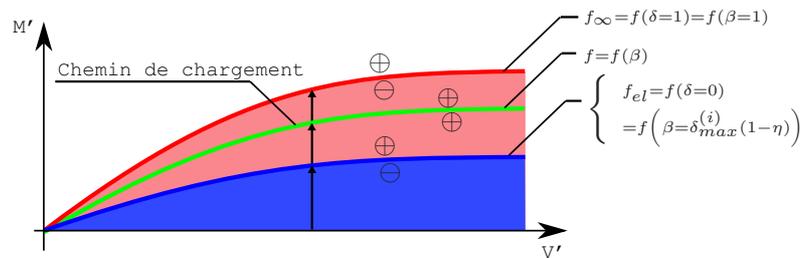


FIG. 3.21 – Evolution de la surface de charge sur sol plastique avec l'adaptation chargement/déchargement.

Un test sur ces 2 surfaces est aussi nécessaire pour piloter les différents mécanismes: élasticité et décollement. Ils sont déclenchés avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} f_{el}(M', V') \leq 0 & \text{ou} & f(M', V', \beta) = 0 & \Rightarrow \text{élasticité} \\ f_{el}(M', V') > 0 & \text{et} & f(M', V', \beta) > 0 & \Rightarrow \text{décollement} \end{cases} \quad (3.87)$$

### 3.4.3.3 Extension à des problèmes cycliques

Sur sol plastique, des décollements résiduels peuvent persister sous les extrémités de la fondation comme le montre la figure 3.22. Ceci est dû aux déformations permanentes plastiques du sol qui induisent une perte de rigidité importante à prendre en compte.

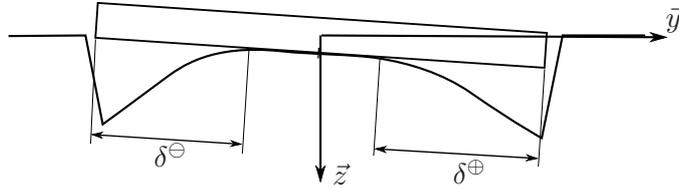


FIG. 3.22 – Persistance éventuel d'un décollement sur un sol plastique.

Pour introduire l'influence des décollements résiduels, a priori indépendants des deux côtés de la fondation, deux mécanismes de décollements sont nécessaires: l'un pour les chargements positifs et l'autre pour les chargements négatifs (la même idée a été aussi adoptée au paragraphe 3.3.2.3). Ainsi 2 types de variables d'érouissage (rappelons qu'elles symbolisent le pourcentage de fondation décollée) sont nécessaires:  $\beta^{\oplus}$  pour les décollements créés par des rotations positives et  $\beta^{\ominus}$  pour les décollements créés par des rotations négatives. De la même manière que pour le cas élasto-décollement (voir paragraphe 3.4.2.5), nous obtenons l'évolution de  $\beta^{\ominus}$  par un changement de variable sur  $\beta$  et  $\dot{\theta}'^{up}$ .

Pour les phases de chargement-déchargement faisant intervenir un décollement dans le sens des rotations positives les équations sont:

$$\begin{cases} \dot{\beta}^{\oplus} = \frac{\dot{\theta}'^{up}}{\theta'_0} \frac{(1-\beta^{\oplus})^2}{\beta^{\oplus}(2-\beta^{\oplus})} & \text{si } \beta^{\oplus} = \beta_{max}^{\oplus(i)} \\ \dot{\beta}^{\oplus} = \frac{\dot{\theta}'^{up}}{\theta'_0} \eta \frac{\left(1 - \left(\frac{\beta^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{max}^{\oplus(i)}}{\eta}\right)\right)^2}{\frac{\beta^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{max}^{\oplus(i)}}{\eta} \left(2 - \left(\frac{\beta^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{max}^{\oplus(i)}}{\eta}\right)\right)} & \text{si } \beta^{\oplus} \leq \beta_{max}^{\oplus(i)} \end{cases} \quad (3.88)$$

Pour les phases de chargement-déchargement faisant intervenir un décollement dans le sens des rotations négatives les équations deviennent:

$$\begin{cases} \dot{\beta}^{\ominus} = \frac{\dot{\theta}'^{up}}{\theta'_0} \frac{(1+\beta^{\ominus})^2}{-\beta^{\ominus}(2+\beta^{\ominus})} & \text{si } \beta^{\ominus} = \beta_{max}^{\ominus(i)} \\ \dot{\beta}^{\ominus} = \frac{\dot{\theta}'^{up}}{\theta'_0} \eta \frac{\left(1 + \left(\frac{\beta^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{max}^{\ominus(i)}}{\eta}\right)\right)^2}{-\frac{\beta^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{max}^{\ominus(i)}}{\eta} \left(2 + \left(\frac{\beta^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{max}^{\ominus(i)}}{\eta}\right)\right)} & \text{si } \beta^{\ominus} \geq \beta_{max}^{\ominus(i)} \end{cases} \quad (3.89)$$

Pour les rotations positives, la surface de charge prend la forme:

$$f^{\oplus} \equiv \left| M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \beta^{\oplus} \right) \right| = 0 \quad (3.90)$$

et la limite d'élasticité:

$$f_{el}^{\oplus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{max}^{\oplus(i)} (1 - \eta) - \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} = 0 \quad (3.91)$$

De même, pour le mécanisme de décollement négatif:

$$f^{\ominus} \equiv \left| M' + \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} - q_2 \beta^{\ominus} \right) \right| = 0 \quad (3.92)$$

$$f_{el}^{\ominus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{max}^{\ominus(i)} (1 - \eta) + \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} = 0 \quad (3.93)$$

Enfin le critère de rupture peut s'écrire:

$$f_{\infty} \equiv M'^2 - \left( \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \right) \right)^2 = 0 \quad (3.94)$$

Un test sur ces 4 surfaces est aussi nécessaire pour piloter les différents mécanismes (élasticité et décollement suivant les 2 sens de chargements). En effet les 2 mécanismes peuvent être actifs simultanément. Ils sont déclenchés avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} f_{el}^{\oplus} (M', V') \leq 0 & \text{ou} & f^{\oplus} (M', V', \beta^{\oplus}) = 0 & \Rightarrow \text{élasticité} \\ f_{el}^{\oplus} (M', V') > 0 & \text{et} & f^{\oplus} (M', V', \beta^{\oplus}) > 0 & \Rightarrow \text{décollement} \end{cases} \quad (3.95)$$

$$\begin{cases} f_{el}^{\ominus} (M', V') \leq 0 & \text{ou} & f^{\ominus} (M', V', \beta^{\ominus}) = 0 & \Rightarrow \text{élasticité} \\ f_{el}^{\ominus} (M', V') > 0 & \text{et} & f^{\ominus} (M', V', \beta^{\ominus}) > 0 & \Rightarrow \text{décollement} \end{cases} \quad (3.96)$$

La figure 3.23 montre le cas où seul le mécanisme  $\oplus$  est actif. Sur cette figure la zone élastique existe encore, c'est à dire qu'à partir de là, en cas de chargement dans le sens  $\ominus$ , le point de charge repassera dans une zone totalement élastique linéaire avant de se décoller dans le sens opposé. En d'autres termes, dans ce cas, il n'y a pas de décollement résiduel dans le sens  $\oplus$  lorsque le décollement dans le sens  $\ominus$  commence.

La figure 3.24 montre le cas où les 2 mécanismes  $\oplus$  et  $\ominus$  sont actifs simultanément. Sur cette figure la zone élastique n'existe plus (dû à un trop fort décollement dans le sens  $\oplus$ ). Dans ce cas un décollement résiduel dans le sens  $\oplus$  persiste lorsque la fondation commence à décoller dans le sens  $\ominus$ . L'évolution des 2 surfaces  $f^{\oplus}$  et  $f^{\ominus}$  est simultanée et les 2 courbes représentatives de ces 2 fonctions sont confondues.

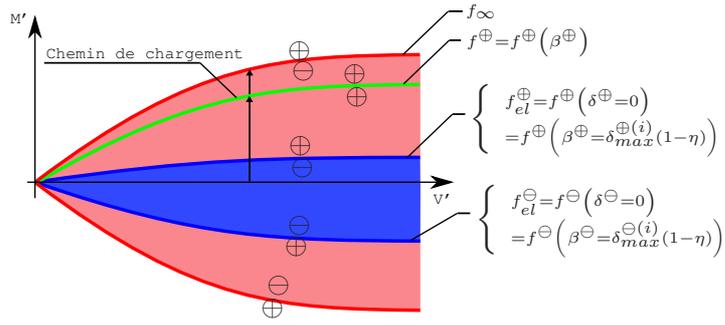


FIG. 3.23 – Evolution des surfaces de charge sur sol plastique, cas où un seul mécanisme est actif.

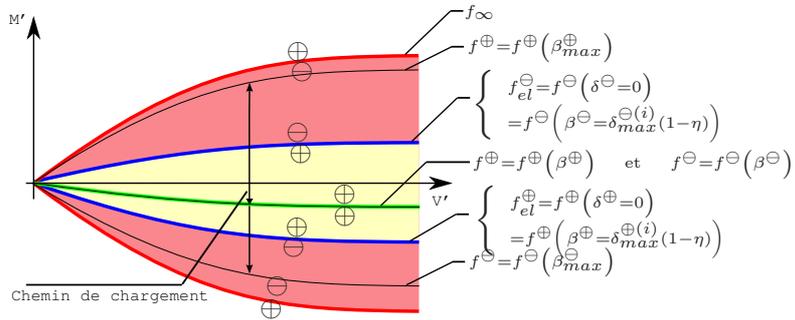


FIG. 3.24 – Evolution des surfaces de charge sur sol plastique, cas où les deux mécanismes sont actifs.

La figure 3.25 est une représentation 3D de la surface d'initiation au décollement ( $f_{el}$  initiale) et de la surface de rupture ( $f_{\infty}$ ) en décollement dans l'espace  $(M'_x, M'_y, V)$ , c'est à dire lorsqu'un décollement de 100% de la fondation est atteint.

### 3.4.3.4 Loi d'écoulement

La loi d'écoulement vue dans le paragraphe 3.4.2.6 est toujours valable pour ce type de description. Deux lois sont nécessaires pour chacun des mécanismes pour les sens de chargement  $\oplus$  et  $\ominus$ . Nous les noterons  $g^{\oplus}$ , et  $g^{\ominus}$ . Chacune est définie avec une fonction  $f_g^{\oplus}$  et  $f_g^{\ominus}$  construite de la même manière qu'au paragraphe 3.4.2.6 suivant les équations 3.97:

$$\begin{cases} f_g^{\oplus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} + q_2 \beta^{\oplus} \right) = 0 \\ f_g^{\ominus} \equiv M' + \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} - q_2 \beta^{\ominus} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.97)$$

Ainsi:

$$\begin{cases} \frac{\partial g^{\oplus}}{\partial M'} = \frac{f_g^{\oplus}}{|f_g^{\oplus}|} = \text{sign}(f_g^{\oplus}) \\ \frac{\partial g^{\oplus}}{\partial V'} = -\frac{\delta^{\oplus}}{2} \frac{f_g^{\oplus}}{|f_g^{\oplus}|} = -\frac{\delta}{2} \text{sign}(f_g^{\oplus}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial g^{\ominus}}{\partial M'} = \frac{f_g^{\ominus}}{|f_g^{\ominus}|} = \text{sign}(f_g^{\ominus}) \\ \frac{\partial g^{\ominus}}{\partial V'} = -\frac{\delta^{\ominus}}{2} \frac{f_g^{\ominus}}{|f_g^{\ominus}|} = -\frac{\delta}{2} \text{sign}(f_g^{\ominus}) \end{cases} \quad (3.98)$$

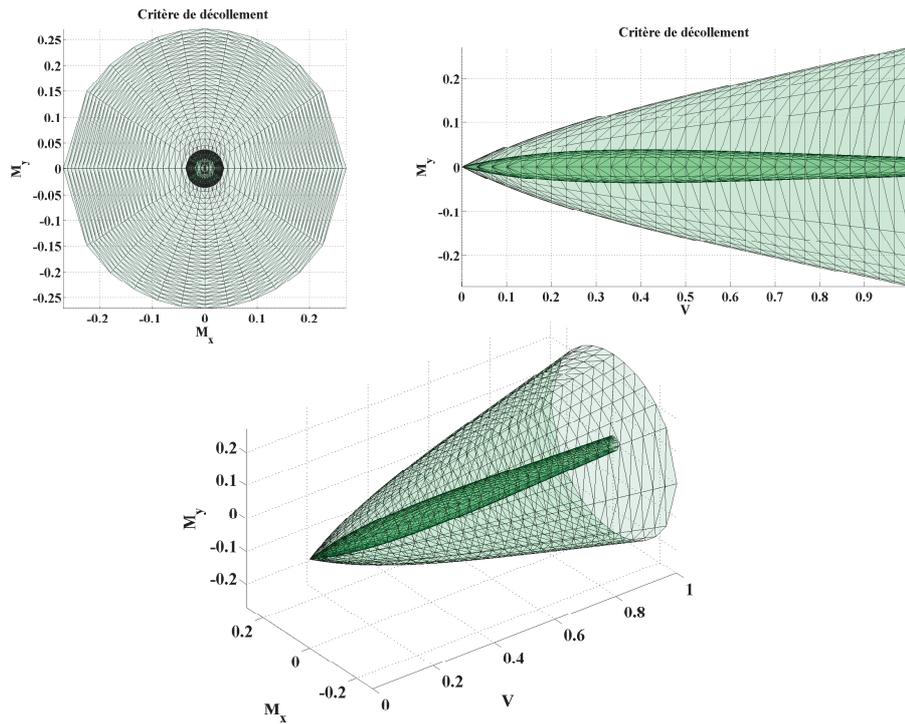


FIG. 3.25 – Représentation 3D des surfaces d'initiation au décollement et de décollement total dans l'espace  $(M'_x, M'_y, V)$ .

Les deux mécanismes peuvent très bien être actifs simultanément, dans ce cas le déplacement vertical sera la somme des déplacements verticaux calculés avec chacun des mécanismes.

### 3.4.3.5 Réponse d'une fondation soumise à une sollicitation de chargement-déchargement

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'évolution des paramètres (écrouissage, moments, rotation, soulèvement) lors d'une sollicitation de chargement-déchargement quelconque avec la formulation de résolution décrite précédemment.

Les figures 3.26 et 3.27 montrent le comportement de la fondation lors d'une sollicitation de chargement-déchargement-rechargement. La figure 3.26 montre le cas où lors du déchargement le comportement de la fondation repasse par une zone élastique linéaire (cas de la figure 3.23 où le domaine élastique n'a pas disparu). Ainsi la variable d'écrouissage  $\delta^\oplus$  repasse par 0 et reste égale à zéro lorsque la variable  $\delta^\ominus$  est activée.

La figure 3.27 montre le cas où lors du déchargement, un décollement dans le sens positif ( $\delta^\oplus$ ) persiste lors de l'activation de la variable  $\delta^\ominus$ . Ceci correspond au cas vu sur la figure 3.24 où la zone élastique a totalement disparu. Ce mécanisme est aussi celui représenté sur la figure 3.22 montrant le décollement résiduel.

La figure 3.27 montre aussi le raccordement des différentes courbes lors du rechargement. En effet lorsque  $\delta^\ominus$  redevient égal à zéro (au point  $P_1$ ), la courbe de chargement est tangente à la

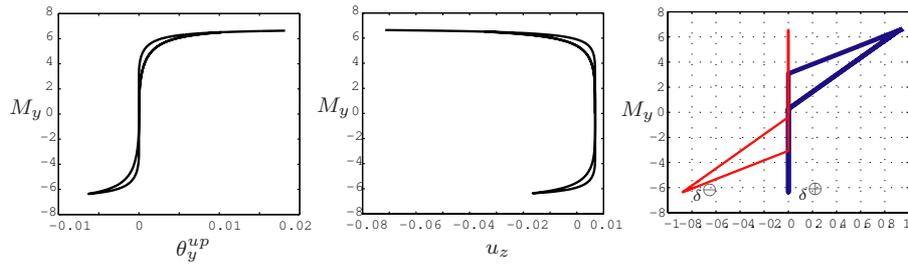


FIG. 3.26 – Lois moment-rotation, moment soulèvement, moment-pourcentage de décollement, cas où le comportement de la fondation repasse par une zone élastique.

courbe de décharge. Si nous poursuivons ce rechargement la courbe se superpose exactement avec la courbe de déchargement. Enfin, lorsque la courbe de rechargement arrive au premier point de déchargement (point  $P_2$ ), la courbe reprend la courbe de chargement vierge.

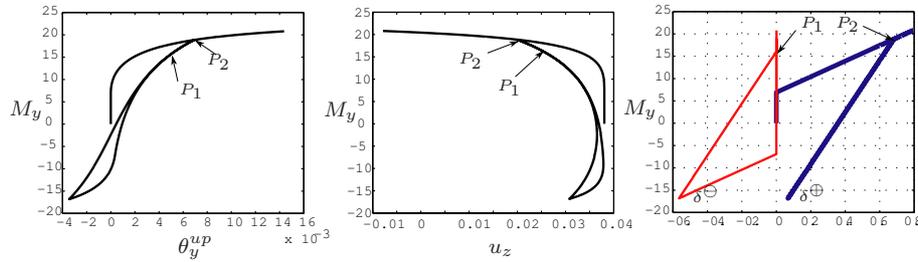


FIG. 3.27 – Lois moment-rotation, moment soulèvement, moment-pourcentage de décollement, cas où le comportement de la fondation ne repasse pas par une zone élastique.

### 3.4.4 Adaptation 3D du modèle de décollement

Dans tous les développements présentés jusqu'à maintenant, le modèle de décollement n'a été considéré que dans le plan. Une adaptation de ce modèle pour des chargements 3D est maintenant nécessaire. Elle est détaillée dans cette section.

La manière d'adapter le modèle va dépendre de la forme de la fondation. Ainsi nous traiterons les cas de la fondation rectangulaire et de la fondation circulaire de manière indépendante. L'adaptation pour la fondation filante n'a évidemment pas lieu d'être due au caractère 2D de sa géométrie.

#### 3.4.4.1 Cas de la fondation rectangulaire

L'adaptation du modèle de décollement en trois dimensions reste assez simple dans le cas d'une fondation rectangulaire pour des rotations modérées. En effet, la cinématique de décollement d'une fondation rectangulaire peut se décomposer aisément en deux mécanismes de décollement dans chacune des 2 directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Ainsi, une sollicitation dans une direction  $\vec{u}$  quelconque créant une rotation  $\theta_v$  est décomposée en deux sollicitations dans les deux directions principales  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . La relation  $\theta_v^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2$  est alors vérifiée à tout instant. La figure 3.28

montre que la sollicitation  $\theta_v$  peut être obtenue par l'application non-simultanée des deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Les surfaces grisées montrent les zones de fondation en contact avec le sol, et les zones blanches représentent les zones décollées.

Le déroulement de la séquence est la suivante:

- (i) Une rotation selon l'axe  $\vec{x}$  est d'abord appliquée créant un décollement  $\delta_x$ . Lors de l'application de cette rotation, la surface de la fondation qui est initialement en contact avec le sol a pour dimensions  $a \times b$ . La longueur participante dans le phénomène de décollement est la longueur  $a$ .
- (ii) Une autre rotation selon l'axe  $\vec{y}$  est ensuite appliquée, telle que  $\theta_v^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2$  créant un décollement  $\delta_y$ . Lors de l'application de cette rotation, la surface de la fondation qui est initialement en contact avec le sol a pour dimensions  $a' \times b$ . Pour le cas des rotations modérées,  $a'$  est considéré égal à  $a$ , et la longueur participante dans le phénomène de décollement est la longueur  $b$ .

De cette manière, dans le cas des rotations modérées nous faisons l'hypothèse que le comportement de décollement dans les deux directions est totalement découplé. Le même résultat aurait été obtenu si les deux rotations avait été appliquées en commençant d'abord par la rotation suivant  $\vec{y}$ .

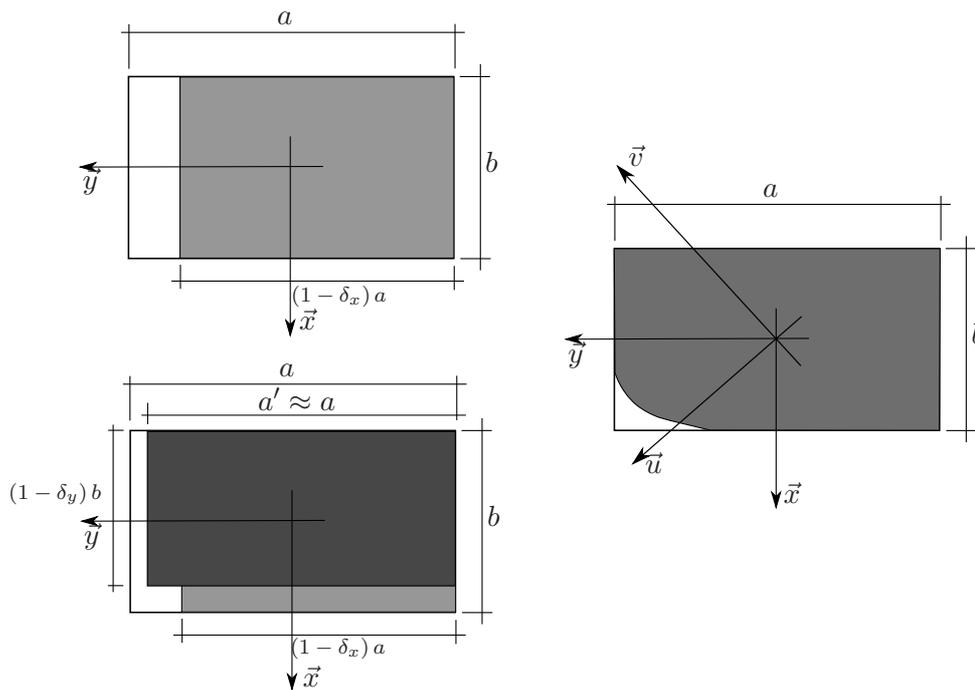


FIG. 3.28 – Cinématique de décollement pour une fondation rectangulaire, décomposition du mouvement dans les deux directions principales  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

### 3.4.4.2 Cas de la fondation circulaire

Dans ce cas, l'axisymétrie du problème nous impose de prendre en compte de la même manière un chargement radial dans la direction  $\vec{u}$  quelconque que le même chargement dans les direc-

tions principales  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$ . Il est alors impossible de reproduire cette axisymétrie en découplant complètement les mécanismes comme dans le cas de la fondation rectangulaire.

Néanmoins, en gardant le même type de formulation que pour la fondation rectangulaire (à savoir deux mécanismes programmés dans chacune des deux directions) une adaptation de l'évolution des surfaces de charges et des variables d'érouissages en fonction de la direction de chargement est proposée ci-dessous. Elle permet d'obtenir la dépendance voulue dans les deux directions. En d'autres termes, le modèle fonctionne comme si l'effort était projeté dans les deux directions principales (figure 3.29).

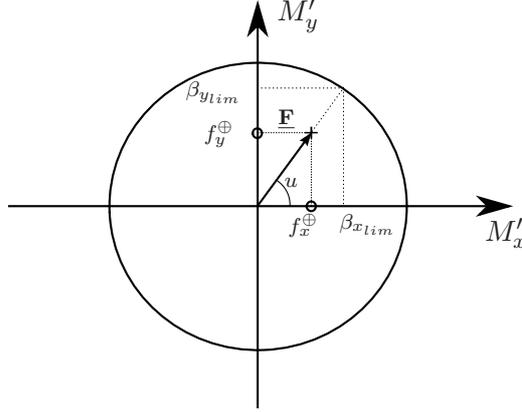


FIG. 3.29 – Cinématique de décollement pour une fondation circulaire, calcul de la direction de chargement pour l'évaluation des limites des variables d'érouissages de décollement.

Nous définissons alors deux mécanismes de décollement couplés. Les surfaces de charges, élastiques et de rupture prennent les formes suivantes:

pour la direction  $\vec{x}$

$$\begin{cases} f_{x_{el}}^{\oplus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} (1 - \eta) - \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} |\cos u| = 0 \\ f_x^{\oplus} \equiv \left| M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} |\cos u| + q_2 \beta_x^{\oplus} \right) \right| = 0 \\ f_{x_{el}}^{\ominus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{x_{max}}^{\ominus(i)} (1 - \eta) + \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} |\cos u| = 0 \\ f_x^{\ominus} \equiv \left| M' + \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} |\cos u| - q_2 \beta_x^{\ominus} \right) \right| = 0 \\ f_{x_{\infty}} \equiv M'^2 - \left( \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} |\cos u| + q_2 \right) \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (3.99)$$

pour la direction  $\vec{y}$

$$\begin{cases} f_{y_{el}}^{\oplus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{y_{max}}^{\oplus(i)} (1 - \eta) - \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} |\sin u| = 0 \\ f_y^{\oplus} \equiv \left| M' - \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} |\sin u| + q_2 \beta_y^{\oplus} \right) \right| = 0 \\ f_{y_{el}}^{\ominus} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{y_{max}}^{\ominus(i)} (1 - \eta) + \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} |\sin u| = 0 \\ f_y^{\ominus} \equiv \left| M' + \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} |\sin u| - q_2 \beta_y^{\ominus} \right) \right| = 0 \\ f_{y_{\infty}} \equiv M'^2 - \left( \frac{V'}{q_1} \left( e^{-AV'} |\sin u| + q_2 \right) \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

Les valeurs limites des variables d'érouissage doivent aussi être remises à jour. Le but est que les variables  $\beta_x^{\oplus}$ ,  $\beta_x^{\ominus}$  d'une part et  $\beta_y^{\oplus}$ ,  $\beta_y^{\ominus}$  d'autre part, tendent respectivement vers

$\beta_{x_{lim}} = |\cos u|$  et  $\beta_{y_{lim}} = |\sin u|$ . Pour cela le calcul des variables se fait de la manière suivante:

Pour les phases de chargement-déchargement faisant intervenir un décollement dans le sens des rotations positives:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta}_x^{\oplus} = \frac{\dot{\theta}_x^{up}}{\theta_0'} \frac{(\beta_{x_{lim}} - \beta_x^{\oplus})^2}{\beta_x^{\oplus} (2\beta_{x_{lim}} - \beta_x^{\oplus})} \quad \text{si } \beta_x^{\oplus} = \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \\ \dot{\beta}_x^{\oplus} = \frac{\dot{\theta}_x^{up}}{\theta_0'} \eta \frac{\left( \beta_{x_{lim}} - \left( \frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta} \right) \right)^2}{\frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta} \left( 2\beta_{x_{lim}} - \left( \frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta} \right) \right)} \quad \text{si } \beta_x^{\oplus} \leq \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \end{array} \right. \quad (3.101)$$

Pour les phases de chargement-déchargement faisant intervenir un décollement dans le sens des rotations négatives:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta}_x^{\ominus} = \frac{\dot{\theta}_x^{up}}{\theta_0'} \frac{(\beta_{x_{lim}} + \beta_x^{\ominus})^2}{-\beta_x^{\ominus} (2\beta_{x_{lim}} + \beta_x^{\ominus})} \quad \text{si } \beta_x^{\ominus} = \beta_{x_{max}}^{\ominus(i)} \\ \dot{\beta}_x^{\ominus} = \frac{\dot{\theta}_x^{up}}{\theta_0'} \eta \frac{\left( \beta_{x_{lim}} + \left( \frac{\beta_x^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\ominus(i)}}{\eta} \right) \right)^2}{-\frac{\beta_x^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\ominus(i)}}{\eta} \left( 2\beta_{x_{lim}} + \left( \frac{\beta_x^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\ominus(i)}}{\eta} \right) \right)} \quad \text{si } \beta_x^{\ominus} \geq \beta_{x_{max}}^{\ominus(i)} \end{array} \right. \quad (3.102)$$

Dans la direction  $\vec{y}$ , nous obtenons la même chose en remplaçant les indices  $x$  par  $y$ .

En procédant de cette manière nous nous assurons qu'à tout instant la relation  $\beta_x^{\oplus} = \beta_{x_{lim}} \beta^{\oplus}$  est vérifiée (avec  $\beta^{\oplus}$  la variable d'écroissage fictive dans la direction principale de rotation). La même relation peut être écrite pour  $\ominus$  et pour la direction  $\vec{y}$ .

**Remarque:** dans ce problème, deux variables de décollement sont calculées (une suivant  $\vec{x}$  et une autre suivant  $\vec{y}$ ). Le risque est donc de générer un trop grand déplacement vertical dû à la prise en compte du décollement dans les deux directions. En effet ce déplacement vertical est directement lié au pourcentage de décollement par la relation 3.67, et ce dans chacune des deux directions. En réalité, il n'en ait rien car en faisant tendre les variables d'écroissages vers les valeurs  $\beta_{x_{lim}}$  et  $\beta_{y_{lim}}$  nous nous assurons qu'en couplant les deux mécanismes le déplacement vertical est correctement calculé.

La démonstration est la suivante:

Imaginons un chargement radial créant une rotation  $\theta_u$  de la fondation selon l'axe  $\vec{u}$ . Soit  $\delta_u$  le pourcentage de décollement crée selon cet axe ( $\delta_u \in [0,1]$ ).

La décomposition de la rotation de décollement dans le repère de la fondation est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_x^{up} = |\cos u| \theta_u^{up} \\ \theta_y^{up} = |\sin u| \theta_u^{up} \end{array} \right. \quad (3.103)$$

Le déplacement vertical est calculé grâce à loi d'écoulement de décollement 3.67. Dans chaque directions, nous avons donc:

$$\begin{cases} u_z'^{up^x} = -\frac{\delta_x}{2}\theta_x'^{up} \\ u_z'^{up^y} = -\frac{\delta_y}{2}\theta_y'^{up} \end{cases} \quad (3.104)$$

Le décollement total généré par les mécanismes vaut donc:

$$u_z'^{up^{tot}} = u_z'^{up^x} + u_z'^{up^y} \quad (3.105)$$

Par ailleurs, à chaque instant, les variables de décollement vérifient:

$$\begin{cases} \delta_x = |\cos u| \delta_u \\ \delta_y = |\sin u| \delta_u \end{cases} \quad (3.106)$$

En remplaçant les équations 3.103, 3.104, 3.106 dans l'équation 3.105, nous obtenons bien (car  $|\cos u|^2 + |\sin u|^2 = 1$ ):

$$u_z'^{up^{tot}} = -\frac{\delta_u}{2}\theta_u'^{up} \quad (3.107)$$

### 3.4.5 Adaptation du modèle de décollement pour prendre en compte le couplage avec le modèle de plasticité

Comme nous l'avons déjà souligné auparavant, les équations différentielles régissant l'évolution des variables de décollement  $\delta$  ont la même forme que dans le cas élastique, sauf pour le déchargement où elles sont raidies d'un paramètre  $\eta$ . Il est cependant nécessaire d'opérer quelques modifications pour inclure le couplage de la plasticité vis à vis du décollement [Crémer, 2001].

La première modification consiste à ne plus faire tendre le décollement vers 1 pour un renversement total mais vers la valeur  $\delta_{max}^{pl}$  qui est la valeur de décollement obtenue lors de la rupture plastique du matériau sol.

Cette valeur de décollement à la rupture plastique est calculée de la manière suivante:

$$\delta_{max}^{pl} = \frac{q_1}{q_2 V'} \left| M'_{max} - M_0'^{(0)} \right| \quad (3.108)$$

où  $M'_{max}$  est le moment maximal plastique atteint à la rupture pour un  $V'$  donné et pour  $H' = 0$ , soit:  $M'_{max} = \pm b V'^e (1 - V')^f$  (voir équation 3.19). Ainsi, les déplacements de décollement ne tendent plus vers l'infini (rupture) lorsque  $\delta = 100\%$ , mais lorsque  $\delta = \delta_{max}^{pl}$ .

La deuxième modification prend en compte le fait que plus  $V'$  est grand, plus le décollement est réduit (stabilisation de la structure, et plasticité accrue). Il faut donc réduire les déplacements de décollement lorsque  $V'$  croit, d'où un facteur  $(1 - V')$  placé arbitrairement dans les lois d'écroissements qui prennent la forme suivante.

Les lois d'érouissage sont donc les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta}_x^{\oplus} = \delta_{max}^{pl} \frac{\dot{\theta}_x^{up}}{(1-V')\theta_0'} \frac{\left(\beta_{x_{lim}} - \frac{\beta_x^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}}\right)^2}{\frac{\beta_x^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}} \left(2\beta_{x_{lim}} - \frac{\beta_x^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}}\right)} \quad \text{si } \beta_x^{\oplus} = \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \\ \dot{\beta}_x^{\oplus} = \delta_{max}^{pl} \frac{\dot{\theta}_x^{up}}{(1-V')\theta_0'} \eta \frac{\left(\beta_{x_{lim}} - \left(\frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}}\right)\right)^2}{\frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}} \left(2\beta_{x_{lim}} - \left(\frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}}\right)\right)} \quad \text{si } \beta_x^{\oplus} \leq \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \end{array} \right. \quad (3.109)$$

De même pour  $\ominus$  et pour la direction  $\vec{y}$ .

**Remarque:** la résolution de cette équation différentielle (écrite en fonction de  $\delta$ ) donne une relation de la forme de l'équation 3.57 liant la rotation  $\theta$  à  $\delta$ . En tenant compte du couplage plasticité/décollement cette équation devient:

$$\theta_x^{up} = (1 - V') \theta_0' \frac{\left(\frac{\delta_x}{\delta_{x_{max}}}\right)^2}{1 - \frac{\delta_x}{\delta_{x_{max}}}} \quad (3.110)$$

L'équation 3.110 montre bien que si  $V'$  est grand alors la rotation de décollement est réduite. Il en est bien entendu de même pour les déplacements verticaux de décollement.

La représentation graphique des surfaces de charge de plasticité et de décollement est donné par la figure 3.30.

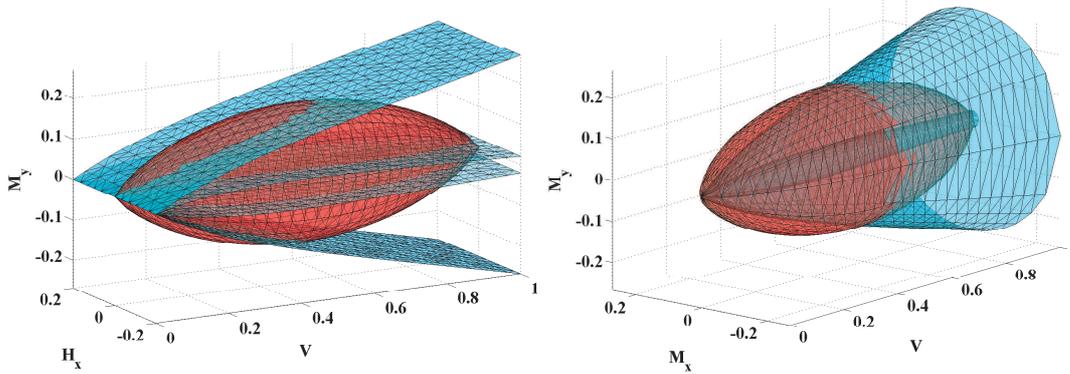


FIG. 3.30 – Représentation graphique de la superposition des critères de rupture en décollement, initiation de décollement et rupture plastique en projection dans les espaces  $M_y, H_x, V$  et  $M_y, M_x, V$ .

### 3.4.6 Hypothèse de normalité et condition de consistance

La direction du vecteur incrément de décollement est là aussi donné par l'hypothèse de normalité qui permet de le relier à la normale de la courbe représentant la loi d'écoulement. La

particularité ici, par rapport au modèle de plasticité est que plusieurs mécanismes de décollements (au nombre de 4) sont mis en jeu simultanément créant autant de déplacements de décollement associés. Pour des raisons de commodité de résolution certains des exposants  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\oplus_x$ ,  $\oplus_y$ , et  $\ominus_y$  sont remplacés respectivement par les indices 1,2,3, et 4.

Ainsi nous obtenons:

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{up}} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial g_1}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial g_2}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \dot{\lambda}_3 \frac{\partial g_3}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \dot{\lambda}_4 \frac{\partial g_4}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [1; 4], \dot{\lambda}_i \geq 0 \quad (3.111)$$

Nous pouvons donc introduire les fonctions vectorielles d'écouissage  $\underline{\mathbf{h}}_1^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_1^{\text{up}})$ ,  $\underline{\mathbf{h}}_2^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_2^{\text{up}})$ ,  $\underline{\mathbf{h}}_3^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_3^{\text{up}})$  et  $\underline{\mathbf{h}}_4^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_4^{\text{up}})$  telles que  $\underline{\mathbf{q}}_1^{\text{up}} = -\dot{\lambda}_1 \underline{\mathbf{h}}_1^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_1^{\text{up}})$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_2^{\text{up}} = -\dot{\lambda}_2 \underline{\mathbf{h}}_2^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_2^{\text{up}})$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_3^{\text{up}} = -\dot{\lambda}_3 \underline{\mathbf{h}}_3^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_3^{\text{up}})$ , et  $\underline{\mathbf{q}}_4^{\text{up}} = -\dot{\lambda}_4 \underline{\mathbf{h}}_4^{\text{up}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_4^{\text{up}})$  où  $\underline{\mathbf{q}}_1^{\text{up}}$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_2^{\text{up}}$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_3^{\text{up}}$ , et  $\underline{\mathbf{q}}_4^{\text{up}}$  sont les vecteurs rassemblant les variables d'écouissages pour un chacun des 4 mécanismes de décollements:

$$\underline{\mathbf{q}}_1^{\text{up}} = [ \beta_x^{\oplus} ], \quad \underline{\mathbf{q}}_2^{\text{up}} = [ \beta_x^{\ominus} ], \quad \underline{\mathbf{q}}_3^{\text{up}} = [ \beta_y^{\oplus} ], \quad \underline{\mathbf{q}}_4^{\text{up}} = [ \beta_y^{\ominus} ] \quad (3.112)$$

**Remarque:** dans ce cas les vecteurs  $\underline{\mathbf{q}}_i^{\text{up}}$  sont de dimension 1, ce sont donc ici des scalaires, tout comme les fonctions vectorielles d'écouissages  $\underline{\mathbf{h}}_i^{\text{up}}$  qui leur sont associées.

Ainsi nous pouvons écrire:

$$\begin{bmatrix} \beta_x^{\oplus} \\ \beta_x^{\ominus} \\ \beta_y^{\oplus} \\ \beta_y^{\ominus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\lambda}_1 \delta_{max}^{pl} \frac{\partial g_1}{\partial M_x'} \frac{1}{(1-V^l)\theta_0'} \left( v_{x_{sup}}^{\oplus} \frac{\frac{(\beta_{x_{lim}} - \frac{\beta_x^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}})^2}{\delta_{max}^{pl}}}{\frac{\beta_x^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}} (\frac{\beta_x^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}} - 2\beta_{x_{lim}})} + v_{x_{inf}}^{\oplus} \eta \frac{(\beta_{x_{lim}} - \frac{(\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)})}{\eta\delta_{max}^{pl}})}^2}{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \left( \frac{\beta_x^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}} \right)} - 2\beta_{x_{lim}} \right)} \\ -\dot{\lambda}_2 \delta_{max}^{pl} \frac{\partial g_2}{\partial M_x'} \frac{1}{(1-V^l)\theta_0'} \left( v_{x_{sup}}^{\ominus} \frac{\frac{(\beta_{x_{lim}} + \frac{\beta_x^{\ominus}}{\delta_{max}^{pl}})^2}{\delta_{max}^{pl}}}{\frac{\beta_x^{\ominus}}{\delta_{max}^{pl}} (\frac{\beta_x^{\ominus}}{\delta_{max}^{pl}} + 2\beta_{x_{lim}})} + v_{x_{inf}}^{\ominus} \eta \frac{(\beta_{x_{lim}} + \frac{(\beta_x^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\ominus(i)})}{\eta\delta_{max}^{pl}})}^2}{\beta_x^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\ominus(i)} \left( \frac{\beta_x^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{x_{max}}^{\ominus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}} \right)} + 2\beta_{x_{lim}} \right)} \\ -\dot{\lambda}_3 \delta_{max}^{pl} \frac{\partial g_3}{\partial M_y'} \frac{1}{(1-V^l)\theta_0'} \left( v_{y_{sup}}^{\oplus} \frac{\frac{(\beta_{y_{lim}} - \frac{\beta_y^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}})^2}{\delta_{max}^{pl}}}{\frac{\beta_y^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}} (\frac{\beta_y^{\oplus}}{\delta_{max}^{pl}} - 2\beta_{y_{lim}})} + v_{y_{inf}}^{\oplus} \eta \frac{(\beta_{y_{lim}} - \frac{(\beta_y^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{y_{max}}^{\oplus(i)})}{\eta\delta_{max}^{pl}})}^2}{\beta_y^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{y_{max}}^{\oplus(i)} \left( \frac{\beta_y^{\oplus} - (1-\eta)\beta_{y_{max}}^{\oplus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}} \right)} - 2\beta_{y_{lim}} \right)} \\ -\dot{\lambda}_4 \delta_{max}^{pl} \frac{\partial g_4}{\partial M_y'} \frac{1}{(1-V^l)\theta_0'} \left( v_{y_{sup}}^{\ominus} \frac{\frac{(\beta_{y_{lim}} + \frac{\beta_y^{\ominus}}{\delta_{max}^{pl}})^2}{\delta_{max}^{pl}}}{\frac{\beta_y^{\ominus}}{\delta_{max}^{pl}} (\frac{\beta_y^{\ominus}}{\delta_{max}^{pl}} + 2\beta_{y_{lim}})} + v_{y_{inf}}^{\ominus} \eta \frac{(\beta_{y_{lim}} + \frac{(\beta_y^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{y_{max}}^{\ominus(i)})}{\eta\delta_{max}^{pl}})}^2}{\beta_y^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{y_{max}}^{\ominus(i)} \left( \frac{\beta_y^{\ominus} - (1-\eta)\beta_{y_{max}}^{\ominus(i)}}{\eta\delta_{max}^{pl}} \right)} + 2\beta_{y_{lim}} \right) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

où les fonctions  $v_{sup}$  et  $v_{inf}$  permettent d'activer ou de désactiver les termes de chaque équation différentielle. Elles sont définies de la manière suivante.

$$\begin{cases} v_{x_{sup}}^{\oplus} = 1 \\ v_{x_{inf}}^{\oplus} = 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \beta_x^{\oplus} = \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \quad \begin{cases} v_{x_{sup}}^{\oplus} = 0 \\ v_{x_{inf}}^{\oplus} = 1 \end{cases} \quad \text{si} \quad \beta_x^{\oplus} \leq \beta_{x_{max}}^{\oplus(i)} \quad (3.114)$$

et

$$\begin{cases} v_{x_{sup}}^{\ominus} = 1 \\ v_{x_{inf}}^{\ominus} = 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \beta_x^{\ominus} = \beta_{x_{max}}^{\ominus(i)} \quad \begin{cases} v_{x_{sup}}^{\ominus} = 0 \\ v_{x_{inf}}^{\ominus} = 1 \end{cases} \quad \text{si} \quad \beta_x^{\ominus} \geq \beta_{x_{max}}^{\ominus(i)} \quad (3.115)$$

La condition de consistance pour chacun des quatre mécanismes va nous servir à calculer les potentiels plastique  $\lambda_i, \forall i$ . Cette condition traduit le fait que le point d'effort courant doit toujours être sur les surfaces de charge. Autrement dit, pour la surface de charge  $f_i$ , nous devons vérifier à chaque instant que  $\dot{f}_i = 0$  et  $f_i = 0$ . La première condition permet de calculer le multiplicateur plastique. Elle peut s'écrire  $\forall i \in [1; M]$  (dans le cas de  $M$  mécanismes actifs  $M \in [1; 4]$ ), en considérant que  $\dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} (\dot{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{u}}^{\text{up}})$ :

$$\begin{aligned} \dot{f}_i = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{F}}} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_j}{\partial \underline{\mathbf{q}}_j^{\text{up}}} \cdot \underline{\mathbf{q}}_j^{\text{up}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} - \sum_{j=1}^4 \dot{\lambda}_j \frac{\partial f_j}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_j}{\partial \underline{\mathbf{F}}} - \dot{\lambda}_j \frac{\partial f_j}{\partial \underline{\mathbf{q}}_j^{\text{up}}} \cdot \underline{\mathbf{h}}_j^{\text{up}} = 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Ces  $M$  équations sont couplées et les multiplicateurs plastiques  $\dot{\lambda}_i$  sont solutions du système:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_M \end{bmatrix} = \left[ \underline{\mathbf{H}}^{\text{up}} + \underline{\mathbf{H}}_0^{\text{up}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

où  $\underline{\mathbf{H}}^{\text{up}}$  est la matrice (diagonale) des modules plastiques  $H_{ij}^{\text{up}} = \delta_i^j \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\mathbf{q}}_i^{\text{up}}} \cdot \underline{\mathbf{h}}_j^{\text{up}}$  sans sommation sur  $i$  et avec  $\delta_i^j$  le symbole de Kronecker et où  $\underline{\mathbf{H}}_0^{\text{up}}$  est la matrice des termes  $H_{0ij}^{\text{up}} = \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g_j}{\partial \underline{\mathbf{F}}}$ .

Si nous considérons maintenant que:

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{T}} = \left[ \underline{\mathbf{H}}^{\text{up}} + \underline{\mathbf{H}}_0^{\text{up}} \right]^{-1} \quad (3.118)$$

Pour  $M$  mécanismes couplés nous obtenons:

$$\dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\left( \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M H_{T_{ij}} \left( \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} : \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) \otimes \left( \frac{\partial f_j}{\partial \underline{\mathbf{F}}} : \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \right) \right)}_{\underline{\mathbf{K}}^{\text{elup}}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} \quad (3.119)$$

En conclusion de ce paragraphe, nous pouvons dire que quatre mécanismes de décollement (deux mécanismes dans chaque directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ) sont nécessaires pour simuler le décollement d'une fondation sous chargement 3D. Le choix de la géométrie de la fondation est laissée à l'utilisateur. Pour une fondation circulaire les deux directions sont considérées couplées alors que pour une fondation rectangulaire elles sont découplées.

La gestion de l'évolution de ces quatre mécanismes (quatre surfaces de charge) fait appel aux schémas de résolution de plasticité multi-surfaces. Il est important de noter finalement que le mécanisme de plasticité du sol va venir également se greffer aux 4 autres mécanismes de décollement, chacun des cinq mécanismes créant ainsi une part du déplacement résiduel (plastique ou de décollement). Ce couplage décollement-plasticité est décrit et détaillé d'un point de vue numérique dans le chapitre 4.

### 3.5 Prise en compte de l'effet $P - \theta$

Pour des petites rotations de la fondation, l'effort normal  $V'$  (effort perpendiculaire à la fondation) et l'effort vertical  $V'_Z$  (dans le repère globale, c'est à dire généralement le poids propre de la structure) appliqués à la fondation sont relativement proches et constants (sous réserve que le mode de pompage n'est pas excité et qu'il n'existe aucune autre sollicitation faisant varier l'effort vertical i.e. une accélération verticale) lorsque la fondation tourne.

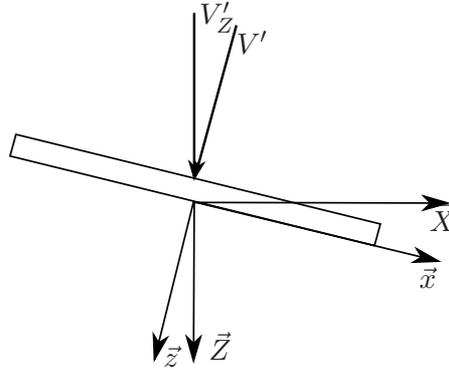


FIG. 3.31 – Influence de l'effet  $P - \theta$  sur l'effort normal de stabilisation de la fondation.

Pour des rotations modérées, l'effort normal  $V'$  peut décroître de manière significative par rapport à l'effort vertical  $V'_Z$  qui lui reste constant (figure 3.31), c'est ce que nous appelons l'effet  $P - \theta$ . L'effort normal diminuant, la stabilisation de la fondation est moindre. Par ailleurs, en regardant les critères de rupture de plasticité ou de décollement (figure 3.30), nous nous rendons bien compte qu'une diminution de cet effort de stabilisation va engendrer une diminution des moments ou efforts horizontaux de rupture. Sur une loi effort-déplacement, cela va se traduire par une variation de la valeur du palier.

Pour bien prendre en compte ce phénomène, une adaptation est nécessaire dans l'élément pour que l'effort normal soit en réalité la projection de l'effort vertical dans le repère local de la fondation.

Soit le vecteur efforts réduits écrit dans le repère global  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  fixe:

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} V'_Z \\ H'_X \\ M'_Y \\ H'_Y \\ M'_X \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

et le vecteur effort écrit dans le repère local de la fondation  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  variable:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} V' \\ H'_x \\ M'_y \\ H'_y \\ M'_x \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

Deux rotations du repère successives et indépendantes peuvent être considérées. La première est une rotation d'angle  $\theta_Y$  (selon l'axe  $\vec{Y}$ ), représentée par l'application linéaire  $M(\text{rot}, \theta_Y)$ . La deuxième est une rotation d'angle  $\theta_x$  (selon l'axe  $\vec{x}$ ) représentée par l'application linéaire  $M(\text{rot}, \theta_X)$ .

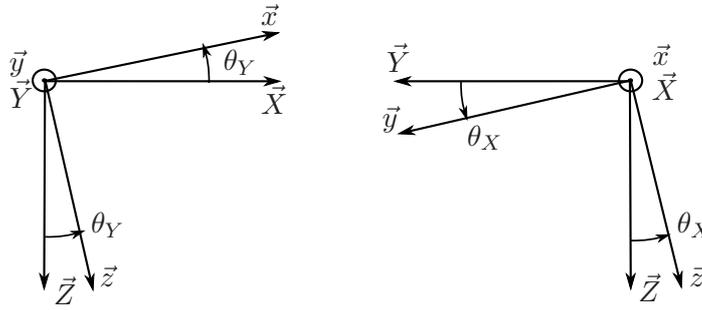


FIG. 3.32 – Effet  $P - \theta$ , deux changements de repères à considérer dans le cas de rotations modérées.

L'hypothèse de rotations modérées permet de dire qu'après rotation  $\theta_Y$ , l'axe  $\vec{x}$  est quasiment égal à l'axe  $\vec{X}$ . Ainsi l'angle  $\theta_x$  vaut presque l'angle  $\theta_X$ . Une petite erreur est donc commise sur le calcul des efforts dans la base locale. Néanmoins cette hypothèse permet de simplifier grandement le problème puisque cela nous permet d'utiliser les deux angles qui nous sont fournis par le code, c'est à dire  $\theta_X$  et  $\theta_Y$ . De plus cette hypothèse permet d'obtenir la commutativité de ces deux transformations  $M(\text{rot}, \theta_Y)$  et  $M(\text{rot}, \theta_X)$ .

La relation liant les 2 vecteurs écrits dans le repère global et dans le repère local dans le cas de rotations modérées est donc la suivante:

$$\begin{bmatrix} V' \\ H'_x \\ M'_y \\ H'_y \\ M'_x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_Y & \sin \theta_Y & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_Y & \cos \theta_Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_Y \end{bmatrix}}_{M(\text{rot}, \theta_Y)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_X & 0 & 0 & -\sin \theta_X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_X & 0 & 0 \\ \sin \theta_X & 0 & 0 & \cos \theta_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M(\text{rot}, \theta_X)} \begin{bmatrix} V'_Z \\ H'_X \\ M'_Y \\ H'_Y \\ M'_X \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

### 3.6 Adaptation du macro-élément à des chargements dynamiques

La résolution dynamique d'un problème d'interaction sol-structure doit prendre en compte l'amortissement radiatif, en d'autres termes l'amortissement qui provient de la dissipation de l'énergie radiative dans un milieu semi-infini (voir paragraphe 2.1).

Cet amortissement est introduit dans le macro-élément selon les lois de visco-plasticité classique et particulièrement selon une description du type [Duvaut et Lions, 1972]. D'un point de vue rhéologique, le problème revient à ajouter un amortisseur en parallèle des deux mécanismes non-linéaires avec écrouissage représentés par les patins (plastique et décollement) sur la figure 3.33.

Les déplacements non linéaires issus des mécanismes de plasticité et de décollement sont maintenant notés respectivement  $\underline{du}^{\text{vpl}}$  et  $\underline{du}^{\text{vup}}$  (l'exposant  $\text{v}$  symbolisant le comportement visqueux du mécanisme).

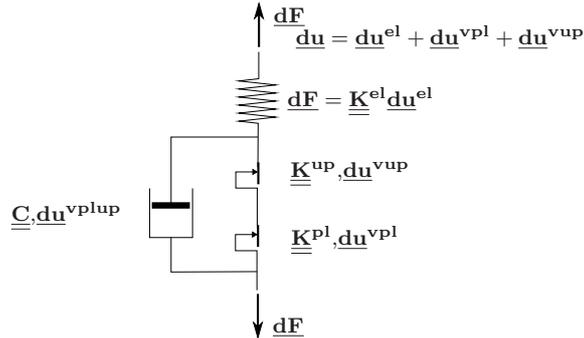


FIG. 3.33 – *Modèle rhéologique avec prise en compte de l'amortissement radiatif.*

La prise en compte de l'amortissement dans ce genre de modèle visco-plastique est relativement simple. Pour bien comprendre, imaginons qu'un déplacement instantané  $\underline{du}$  est imposé à  $t = 0$  au modèle rhéologique de la figure 3.33. Nous pouvons distinguer les deux cas suivants.

Sans l'amortisseur le problème se résout grâce au formalisme vu plus haut (paragraphe 3.4.6) et numériquement grâce à la méthode du “return mapping” vu au chapitre 4. La solution instantanée à  $t = 0$  n'évolue bien entendu pas au cours du temps. L'effort résultant de ce problème est noté:  $\underline{F}$ .

Avec l'amortisseur, la solution varie au cours du temps même si le déplacement imposé reste constant. Néanmoins, la solution en régime permanent est exactement celle trouvée pour le système sans amortisseurs. C'est en quelque sorte un essai de relaxation. En effet, le ressort élastique va se relâcher tout doucement au fur et à mesure que l'amortisseur va s'allonger et que les patins (i.e. les mécanismes non-linéaires) vont développer des déplacements non-linéaires.

Pour bien comprendre, nous allons d'abord considérer un cas plus simple. La résolution pour un modèle de ce genre en 1D pour un essai de relaxation (déplacement total imposé  $u_0$ ) avec un ressort de raideur  $K$ , un amortisseur de viscosité  $\eta_v$  et avec un seul mécanisme non linéaire de type patin plastique parfait d'effort au palier  $F_Y$  est très simple à traiter à la main. Deux cas sont possibles:

- Soit le déplacement imposé est suffisamment faible pour ne pas dépasser la limite élastique du ressort et dans ce cas la solution est la solution élastique.
- Soit le déplacement imposé est suffisamment grand pour que la contrainte dépasse la limite élastique du patin et dans ce cas l'amortisseur va s'allonger au cours du temps pendant que le ressort va se relâcher.

Dans ce deuxième cas, nous obtenons facilement l'équation différentielle régissant l'évolution du déplacement visco-plastique  $u^{vpl}$ . Elle est de la forme suivante:

$$\dot{u}^{vpl} = \frac{1}{K\eta_v} [F(t) - F_Y] \quad (3.123)$$

L'évolution de l'effort au cours du temps est donnée par l'équation suivante:

$$F(t) = [Ku_0 - F_Y] e^{-\frac{Kt}{\eta_v}} + F_Y \quad (3.124)$$

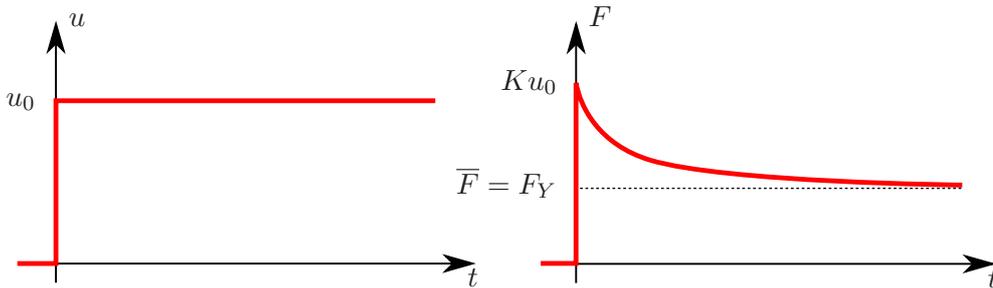


FIG. 3.34 – Sollicitation et réponse du modèle rhéologique 1D pour un essai de relaxation.

L'effort solution est donc connu quel que soit  $t$  et évolue vers la solution en régime permanent (c'est à dire du problème sans amortisseur)  $\bar{F} = F_Y$ . La décroissance de l'effort est exponentielle (figure 3.34).

Une relation similaire pour les déplacements plastiques peut aussi être écrite, c'est à dire que les déplacements plastiques  $u^{vpl}$  vont augmenter avec cette forme d'exponentielle jusqu'à la solution en régime permanent  $\bar{u}^{pl}$ . Dans ce problème très simplifié il n'y a pas de variable d'écrouissage mais la prise en compte d'un patin plastique avec écrouissage permettrait de montrer que la variable d'écrouissage  $q$  évoluerait elle aussi sous forme d'exponentielle jusqu'à la solution en régime permanent  $\bar{q}$ .

Il est important de comprendre que pour tout calcul, qu'il soit dynamique ou statique, le macro-élément va finalement recevoir un incrément de déplacement et va devoir retourner un effort associé à cet incrément et une matrice de rigidité. Pour le calcul statique tout se passe comme si le chargement est très lent entre deux pas de chargement, si bien qu'il tend toujours vers la solution à  $t \rightarrow \infty$  (comme s'il n'y avait pas d'amortisseurs). Pour le calcul dynamique par contre, il faut connaître précisément la solution à la fin du pas de temps  $\Delta t$ . Or nous l'avons vu l'évolution des variables (efforts, déplacements, écrouissage) est connue en fonction du temps et varie toujours selon une exponentielle en tendant vers la solution sans amortisseur. Si  $t_0$  est l'instant pour lequel nous avons imposé l'incrément de déplacement, il suffit alors de calculer les variables à  $t = t_0 + \Delta t$ .

Finalement, en pratique, la résolution du problème dynamique avec effet de la viscosité revient donc tout d'abord à calculer la solution en régime permanent (comme pour un problème statique) et d'évaluer tout simplement les valeurs des variables à la fin du pas de temps considéré grâce à une équation du type 3.124. Les expressions permettant ce calcul sont détaillées dans le chapitre 4.

Par ailleurs, pour un modèle 3D [Duvaut et Lions, 1972] proposent une manière similaire d'écrire l'évolution des déplacements non linéaires grâce à l'équation différentielle ci dessous généralisée au cas 3D.

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{vplup}} = \frac{\underline{\mathbf{K}}^{\text{el-1}}}{\eta_v} [\underline{\mathbf{F}} - \underline{\overline{\mathbf{F}}}] \quad (3.125)$$

Avec cette description, un seul paramètre  $\eta_v$  est nécessaire pour décrire l'amortissement du sol. Finalement la matrice d'amortissement vaut  $\underline{\mathbf{C}} = \eta_v \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}}$ .

En pratique, cette matrice d'amortissement est calculée grâce à la partie imaginaire des impédances dynamiques de la fondation selon Gazetas [1991]. A priori, les termes de la matrice d'amortissement sont donc complètement indépendants des raideurs de la fondation. Les valeurs de la matrice d'amortissement proviennent de la partie imaginaire des impédances dynamiques. Il est licite de les considérer constantes vis à vis des fréquences de sollicitations. En réalité, seule la composante verticale nous intéresse réellement pour le macro-élément. Ce choix n'est pas anodin puisque c'est dans cette direction que le terme d'amortissement radiatif a la plus grande influence (beaucoup moins dans les directions horizontales et suivant les rotations de la fondation, [Betbeder-Matibet, 2003]).

L'expression de ce terme d'amortissement radiatif pour une fondation de forme quelconque superficielle est donnée par l'équation ci-dessous.

$$C_{zz} = \rho V_{S_0} \frac{3.4}{\pi (1 - \nu)} S \quad (3.126)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du sol,  $V_{S_0}$  la vitesse des ondes de cisaillement dans le sol,  $\nu$  son coefficient de Poisson, et  $S$  la surface de la fondation.

Le coefficient  $\eta_v$  doit donc être calculé par les données du terme d'amortissement et de raideur dans la direction verticale:

$$\eta_v = \frac{C_{zz}}{K_{zz}^{\text{el}}} \quad (3.127)$$

De plus, les composantes de la matrice d'amortissement radiatif de l'élément sont ajoutées aux termes de la matrice d'amortissement global (provenant d'un amortissement souvent de type Rayleigh) au niveau de la structure.

La manière dont l'amortissement radiatif est traité ici permet de prendre en compte une perte d'énergie dû à cet amortisseur tout en ayant un problème simple à résoudre sur le plan numérique car issu de la visco-plasticité classique. Néanmoins, ce choix pose un problème sur le plan conceptuel puisque cet amortissement est ramené au niveau du champ proche alors qu'il devrait être pris en compte dans le champ lointain. Une amélioration de ce modèle est donc souhaitable pour mieux reproduire ce phénomène physique. Il serait par exemple plus convenable d'ajouter un amortisseur en parallèle avec le ressort élastique linéaire symbolisant le champ lointain.

### 3.7 Adaptation du macro-élément pour simuler le comportement d'amortisseurs sismiques (isolateurs)

L'objectif de cette dernière section de chapitre est de montrer de nouveaux domaines d'application du macro-élément qui finalement peut se résumer comme une loi non-linéaire et non réversible exprimée en variables généralisées adaptable à d'autres problèmes de l'ingénierie (simulations du comportement des joints, des isolateurs parasismiques, ou d'assemblages).

Nous proposons ci-dessous une adaptation du macro-élément afin de simuler le comportement d'un isolateur parasismique ayant un comportement non-linéaire et non réversible. Cet isolateur est généralement placé à la base d'une structure. Il présente un comportement dissipatif mais non visqueux (qui ne dépend donc pas de la vitesse de chargement) [Chung *et al.*, 1999]. La courbe de comportement type est représentée par la figure 3.35. Elle présente une première phase ayant une tangente à l'origine de  $K_{hh}^{el}$  et une deuxième phase composée d'une asymptote oblique de pente  $K_{hh}^2$ . Ce genre de système "n'amortit" que des efforts horizontaux.

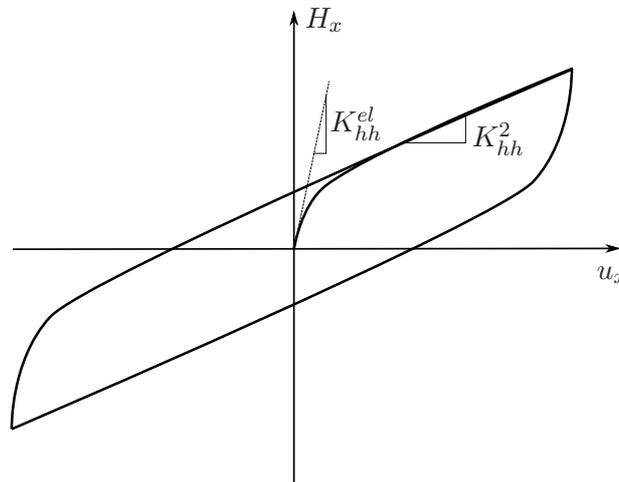


FIG. 3.35 – Loi de comportement type d'un isolateur en base.

Afin de reproduire ce comportement avec le macro-élément, nous considérons:

- une rigidité de rotations infinie (le macro-élément ne génère aucune rotation)
- le comportement de décollement et l'écroutissage isotrope du modèle plastique désactivés
- une loi d'écroutissage adaptée pour reproduire l'asymptote oblique (cette dernière modification est détaillée ci-dessous)

#### 3.7.1 Détermination des équations régissant l'évolution des variables d'écroutissages cinématiques

La démonstration qui va suivre n'est présentée que pour un chargement monotone pour des raisons de simplicité. L'extension à un chargement cyclique se fait de la même manière que pour le modèle plastique du macro-élément d'ISS en ajoutant les variables d'écroutissages qui seront activées pour des chargements négatifs (indices  $\oplus$  et  $\ominus$ ).

Afin de reproduire le comportement de l'amortisseur nous allons ajouter un terme d'écroutissage aux variables déjà établies précédemment qui permettra d'obtenir l'asymptote oblique au lieu de l'asymptote horizontale [Lemaitre et Chaboche, 1988].

Nous posons  $H_x = H_{x_1} + H_{x_2}$

La loi de comportement ci-dessous est considérée:

$$\dot{H}_x = \underbrace{\left( K_{h_x h_x}^{el} - K_{h_x h_x}^2 \right) \left( 1 - \frac{H_{x_1}}{H_x^\infty} \right) \dot{u}_x}_{\dot{H}_{x_1}} + \underbrace{K_{h_x h_x}^2 \dot{u}_x}_{\dot{H}_{x_2}} \quad (3.128)$$

L'évolution des deux termes est schématisée sur la figure 3.36.

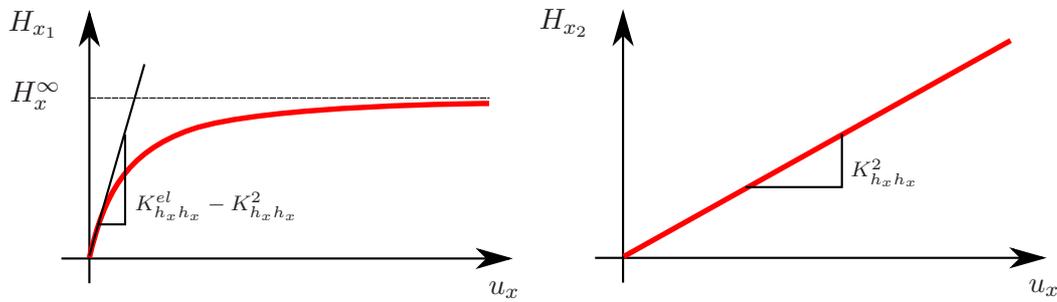


FIG. 3.36 – Loi de comportement type d'un isolateur en base, décomposition des deux termes.

La loi est bien sûr valable aussi bien dans la direction  $\vec{x}$  que dans la direction  $\vec{y}$ . Cette écriture permet bien d'obtenir une courbe  $(H_x - u_x)$  ayant une tangente à l'origine de  $K_{h_x h_x}^{el}$  et une asymptote oblique à l'infini d'équation  $H_x = H_x^\infty + K_{h_x h_x}^2 u_x$  où  $H_x^\infty$  est la valeur de l'asymptote horizontale de la variable d'écroutissage (figure 3.37).

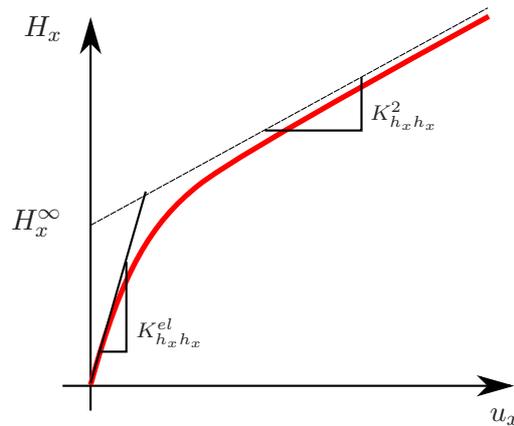


FIG. 3.37 – Loi de comportement type d'un isolateur en base.

En écrivant qu'à chaque instant nous avons (par retour élastique):  $\dot{H}_x = K_{h_x h_x}^{el} u_x^{el}$ , nous pouvons exprimer la loi de comportement en fonction du déplacement anélastique  $u_x^{pl}$

Nous démontrons alors que:

$$\begin{cases} \dot{H}_{x_1} = \frac{(K_{h_x h_x}^{el} - K_{h_x h_x}^2) \left(1 - \frac{H_{x_1}}{H_x^\infty}\right) \left(\frac{\dot{H}_{x_2}}{K_{h_x h_x}^{el}} + \dot{u}_x^{pl}\right)}{1 - \frac{K_{h_x h_x}^{el} - K_{h_x h_x}^2}{K_{h_x h_x}^{el}} \left(1 - \frac{H_{x_1}}{H_x^\infty}\right)} \\ \dot{H}_{x_2} = \frac{K_{h_x h_x}^2}{K_{h_x h_x}^{el} - K_{h_x h_x}^2} \left(\dot{H}_{x_1} + K_{h_x h_x}^{el} \dot{u}_x^{pl}\right) \end{cases} \quad (3.129)$$

qui, lorsque ces deux équations sont découplées, nous donnent:

$$\begin{cases} \dot{H}_{x_1} = K_{h_x h_x}^{el} \left(\frac{H_x^\infty}{H_{x_1}} - 1\right) \dot{u}_x^{pl} \\ \dot{H}_{x_2} = \frac{K_{h_x h_x}^{el} K_{h_x h_x}^2}{K_{h_x h_x}^{el} - K_{h_x h_x}^2} \frac{H_x^\infty}{H_{x_1}} \dot{u}_x^{pl} \end{cases} \quad (3.130)$$

Nous obtenons donc le système de deux équations différentielles découplées nous donnant l'évolution des deux nouvelles variables d'érouissage ( $\alpha_1$  liée à  $H_{x_1}'$  et  $\alpha_2$  liée à  $H_{x_2}'$ ):

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = K_{h_x h_x}^{el} \left(\frac{H_x^\infty}{\alpha_1} - 1\right) \dot{u}_x^{pl} \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{K_{h_x h_x}^{el} K_{h_x h_x}^2}{K_{h_x h_x}^{el} - K_{h_x h_x}^2} \frac{H_x^\infty}{\alpha_1} \dot{u}_x^{pl} \end{cases} \quad (3.131)$$

### 3.7.2 Hypothèse de normalité et condition de consistance

La direction du vecteur incrément plastique est là aussi donné par l'hypothèse de normalité qui permet de le relier à la normale de la courbe représentant la loi d'écoulement.

Ainsi nous obtenons:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u}_x^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial H_x} \\ \dot{u}_y^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial H_y} \end{cases} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.132)$$

Nous pouvons donc introduire les fonctions vectorielles d'érouissage  $\underline{\mathbf{h}}_1(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_1)$  et  $\underline{\mathbf{h}}_2(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_2)$  telles que  $\dot{\underline{\mathbf{q}}}_1 = -\dot{\lambda} \underline{\mathbf{h}}_1(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_1)$  et  $\dot{\underline{\mathbf{q}}}_2 = -\dot{\lambda} \underline{\mathbf{h}}_2(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}_2)$  et où  $\underline{\mathbf{q}}_1$  et  $\underline{\mathbf{q}}_2$  sont les vecteurs rassemblant les variables d'érouissages:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Ainsi nous pouvons écrire:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\delta}_1 \end{bmatrix} = -\dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial H_x} K_{h_x h_x}^{el} \left(1 - \frac{H_x^\infty}{\alpha_1}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial H_y} K_{h_y h_y}^{el} \left(1 - \frac{H_y^\infty}{\delta_1}\right) \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

et

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} = -\dot{\lambda} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial H_x} \frac{K_{h_x h_x}^{el} K_{h_x h_x}^2}{K_{h_x h_x}^2 - K_{h_x h_x}^{el}} \frac{H_x^\infty}{\alpha_1} \\ \frac{\partial g}{\partial H_y} \frac{K_{h_y h_y}^{el} K_{h_y h_y}^2}{K_{h_y h_y}^2 - K_{h_y h_y}^{el}} \frac{H_y^\infty}{\delta_1} \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Ce formalisme va nous permettre de calculer le multiplicateur plastique  $\lambda$  grâce à la condition de consistance.

A l'inverse du modèle de décollement, les deux types de variables d'écroissage ne créent qu'un seul déplacement résiduel (plastique). En effet il n'y a ici qu'un seul mécanisme associé à une seule surface de charge. Autrement dit, si  $f$  est la surface de charge, nous devons vérifier à chaque instant que:  $\dot{f} = 0$  et  $f = 0$ . La première condition permet de calculer le multiplicateur plastique. Elle peut s'écrire (en considérant que  $\dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} (\dot{\underline{\mathbf{u}}} - \dot{\underline{\mathbf{u}}}^{pl})$ ):

$$\begin{aligned} \dot{f} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{F}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_1} \cdot \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_2} \cdot \dot{\underline{\mathbf{q}}}_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \dot{\underline{\mathbf{u}}} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_1} \cdot \underline{\mathbf{h}}_1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_2} \cdot \underline{\mathbf{h}}_2 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \dot{\underline{\mathbf{u}}}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_1} \cdot \underline{\mathbf{h}}_1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_2} \cdot \underline{\mathbf{h}}_2} \end{aligned} \quad (3.136)$$

On note  $H = H_1 + H_2 = \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_1} \cdot \underline{\mathbf{h}}_1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_2} \cdot \underline{\mathbf{h}}_2$  le module plastique.

Puis:

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} = \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \dot{\underline{\mathbf{u}}}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_1} \cdot \underline{\mathbf{h}}_1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_2} \cdot \underline{\mathbf{h}}_2} \quad (3.137)$$

d'où finalement nous obtenons la matrice tangente élasto-plastique (où  $\otimes$  dénote le produit tensoriel et  $:$  le produit contracté):

$$\dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\left( \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} - \frac{\left( \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} : \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} : \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{el} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_1} \cdot \underline{\mathbf{h}}_1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}_2} \cdot \underline{\mathbf{h}}_2} \right)}_{\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{elpl}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} \quad (3.138)$$

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouveau macro-élément d'ISS capable de reproduire le comportement d'une fondation rectangulaire-filante ou circulaire est présenté. Le macro-élément prend en

compte la plasticité du sol et le décollement de la fondation.

Après une description des différentes géométries de fondations considérées une méthode d'adimensionnement des variables a été proposée. La deuxième étape a été de décrire analytiquement les non linéarités matérielles, autrement dit le mécanisme de plasticité du sol sous la fondation. Ensuite, les non-linéarités géométriques ont été prises en compte (décollement).

Ces deux types de mécanismes sont élaborés selon la théorie de plasticité en faisant évoluer des surfaces de charges par l'intermédiaire de variables d'écroûssages à l'intérieur de critères de rupture et créant ainsi des déplacements permanents. Pour prendre en compte le caractère 3D de la fondation, cinq mécanismes de type plastiques sont nécessaires. L'évolution de ces mécanismes est représentée par l'évolution de cinq surfaces de charges à l'intérieur de cinq critères de rupture. Cinq types de déplacements résiduels (de plasticité ou de décollement) peuvent donc être générés. Ces mécanismes sont couplés et peuvent tous être activés en même temps. Le traitement numérique de l'évolution de ces surfaces sera décrit dans le chapitre 4.

La prise en compte de l'amortissement radiatif a été effectuée grâce à un modèle de viscoplasticité classique, par l'ajout d'un amortisseur visqueux en parallèle avec les mécanismes non-linéaires.

Deux adaptations du macro-élément ont été finalement opérées. La première concerne la prise en compte de l'effet  $P-\theta$ . Ce phénomène crée en effet une perte de stabilisation de la fondation par une chute de l'effort normal appliqué à la fondation qui peut ainsi diminuer de manière sensible les capacités de la fondations à reprendre des moments ou des efforts horizontaux.

La deuxième adaptation du modèle permet de modéliser des isolateurs sismiques non visqueux pour lesquels la loi effort horizontal-déplacement horizontal présente une asymptote oblique. Cette adaptation a été possible par l'ajout d'une variable d'écroûssage adéquate.

Les différents résultats numériques prouvant le bon fonctionnement du modèle et de ses adaptations sont présentés dans le chapitre 5. La performance de ce nouvel outil pour des cas ouvrages réels de l'ingénierie conclut ce travail au chapitre 6.

## RÉSUMÉ DU CHAPITRE 3

### MÉCANISME DE PLASTICITÉ:

– **critère de rupture:**

$$f_{\infty} \equiv \left( \frac{H'_x}{aV'^c(1-V')^d} \right)^2 + \left( \frac{M'_y}{bV'^e(1-V')^f} \right)^2 + \left( \frac{H'_y}{aV'^c(1-V')^d} \right)^2 + \left( \frac{M'_x}{bV'^e(1-V')^f} \right)^2 - 1 = 0$$

– **surface de charge:**

$$f_c \equiv \left( \frac{H'_x}{\rho a V'^c (\gamma - V')^d} - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{M'_y}{\rho b V'^e (\gamma - V')^f} - \frac{\beta}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{H'_y}{\rho a V'^c (\gamma - V')^d} - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{M'_x}{\rho b V'^e (\gamma - V')^f} - \frac{\eta}{\rho} \right)^2 - 1 = 0$$

– **variables d'écroissements:**

– cinématiques:  $\alpha = \alpha^{\oplus} + \alpha^{\ominus}$ ,  $\beta = \beta^{\oplus} + \beta^{\ominus} \dots$

elles sont telles que

$$\dot{\beta}^{\oplus} = \frac{1}{2bV'^e(\gamma - V')^f} K'_{\theta\theta}{}^{el} \left( \frac{M'_y}{\beta^{\oplus}} - 1 \right) \left| \dot{\theta}'^{pl} \right| \text{ et } \dot{\beta}^{\ominus} = \frac{1}{2bV'^e(\gamma - V')^f} K'_{\theta\theta}{}^{el} \left( -\frac{M'_y}{\beta^{\ominus}} - 1 \right) \left| \dot{\theta}'^{pl} \right|$$

– isotrope:  $\rho/\dot{\rho} = k \left| \frac{d\|\underline{\tau}\|}{dt} \right|$  où  $0 \leq k \leq 1$

– selon  $V'$ :  $\dot{\gamma} = \left( a_1 K'_{zz}{}^{el} \dot{u}_z^{pl} + a_2 K'_{h_x h_x}{}^{el} \left| \dot{u}_x^{pl} \right| + a_3 K'_{\theta_y \theta_y}{}^{el} \left| \dot{\theta}_y^{pl} \right| + a_4 K'_{h_y h_y}{}^{el} \left| \dot{u}_y^{pl} \right| + a_5 K'_{\theta_x \theta_x}{}^{el} \left| \dot{\theta}_x^{pl} \right| \right) \frac{1-\gamma}{\gamma}$

– **loi d'écoulement:** loi non associée centrée sur l'origine du repère afin de générer des déplacements verticaux positifs (vers le bas).

$$g_c \equiv \left( \frac{H'_x}{\rho \frac{aV'^c}{(\kappa\gamma + V'_c)^d} (\gamma - V')^d (\kappa\gamma + V')^d} - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{M'_y}{\rho \frac{bV'^e}{(\xi\gamma + V'_c)^f} (\gamma - V')^f (\xi\gamma + V')^f} - \frac{\beta}{\rho} \right)^2 + \dots - 1 = 0$$

– **loi de tangence:** permet de calculer les limites des variables d'écroissements  $H_x^{*\infty}$ ;  $M_y^{*\infty} \dots$

– **paramètres constitutifs:**

$a, b, c, d, e$  et  $f$  sont les paramètres de la surface de charge. Ils sont constants pour un type de sol considéré (cohérent ou pulvérulent)

par défaut  $(a_1, \dots, a_5) = (1, \dots, 1)$

### MÉCANISME DE DÉCOLLEMENT:

dans chacune des directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et dans chaque sens  $\oplus$  et  $\ominus$ , soit 4 mécanismes (toutes les surfaces et variables suivantes doivent donc être indexées par ces symboles).

– **critère de rupture:**

$$f_{\infty} \equiv M'^2 - \left( \frac{V'}{q_1} (e^{-AV'} + q_2) \right)^2 = 0$$

– **surface de charge:**

$$f \equiv \left| M' + \frac{V'}{q_1} (e^{-AV'} - q_2\beta) \right| = 0, \text{ toujours positive pour générer des déplacements de décollement en chargement et en déchargement hors de la limite élastique.}$$

– **limite élastique**

$$f_{el} \equiv M' - \frac{V'}{q_1} q_2 \beta_{max}^{(i)} (1 - \eta) + \frac{V'}{q_1} e^{-AV'} = 0$$

– **variables d'écroissements:**  $\beta = \beta_{max}^{(i)} (1 - \eta) + \eta\delta$  où  $\delta$  représente le pourcentage de décollement dans la direction et le sens considéré (elles sont donc au nombre de 4).

– **loi d'écoulement:** cette loi relie rotations et déplacements verticaux.

$$\frac{\partial g}{\partial M'} = \frac{f_g}{|f_g|} = \text{sign}(f_g)$$

$$\frac{\partial g}{\partial V'} = -\frac{\delta}{2} \frac{f_g}{|f_g|} = -\frac{\delta}{2} \text{sign}(f_g) \text{ avec } f_g \equiv M' - \frac{V'}{q_1} (e^{-AV'} + q_2\beta) = 0$$

– **loi de tangence:** permet de calculer les limites des variables d'écroissements dans le cas de fondations circulaires. Cette loi n'existe pas pour des fondations rectangulaires pour lesquelles les directions de décollement sont découplées.

– **paramètres constitutifs:**

$q_1, q_2$  sont les paramètres dépendants de la forme de la fondation.  $q_1 = 4, q_2 = 1$  pour une fondation rectangulaire  $q_1 = 6, q_2 = 2$  dans le cas d'une fondation circulaire.

$\eta = 4 - 3e^{-4V'}$  paramètre de décharge de décollement.

### COUPLAGE MULTI-MÉCANISMES:

Si les 5 mécanismes vus plus haut sont indexés par  $i \in [1; 5]$  alors nous pouvons écrire (pour  $M$  mécanismes actifs):

$$\dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\left( \underline{\mathbf{K}}^{el} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M H_{T_{ij}} \left( \underline{\mathbf{K}}^{el} : \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) \otimes \left( \frac{\partial f_j}{\partial \underline{\mathbf{F}}} : \underline{\mathbf{K}}^{el} \right) \right)}_{\underline{\mathbf{K}}^{elup}} \dot{\underline{\mathbf{u}}}$$

où

$$\underline{\mathbf{H}}_{\underline{\mathbf{T}}} = \left[ \underline{\mathbf{H}}^{up} + \underline{\mathbf{H}}_0^{up} \right]^{-1} \text{ avec } H_{ij}^{up} = \delta_i^j \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\mathbf{q}}_i^{up}} \cdot \underline{\mathbf{h}}_j^{up} \text{ sans sommation sur } i \text{ et avec } H_{0_{ij}}^{up} = \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{el} \frac{\partial g_j}{\partial \underline{\mathbf{F}}}$$

**Résumé 3.1:** Résumé des caractéristiques des mécanismes de plasticité et de décollements



---

## Mise en oeuvre numérique de la méthode

---

Nous allons, dans ce chapitre, faire un rappel des algorithmes utilisés pour résoudre numériquement un modèle de plasticité faisant évoluer plusieurs surfaces de charges. D'un point de vue plus pratique, c'est la plateforme Matlab qui a été utilisée pour programmer le macro-élément. D'une part, l'utilisation d'un langage Matlab permet de simplifier le travail de développement de l'élément puisque la programmation, ainsi que la visualisation des variables sont aisés. D'autre part, ceci nous a permis d'implanter l'élément dans le code de calcul aux éléments finis FedeeasLab, une toolbox de Matlab développée par le Pr. F. Filippou à UC Berkeley [Filippou et Constandines, 2004], afin de l'utiliser couplé avec des structures plus complexes.

### 4.1 Introduction

L'intérêt d'avoir développé un modèle de décollement, qui suit la même logique qu'un modèle de plasticité classique, va nous permettre de les assembler de manière simple en utilisant une méthode qui permet de coupler l'évolution de toutes ces surfaces de charges. Le modèle de décollement va faire évoluer deux surfaces de charges et ce dans chacune des directions ( $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ) soit quatre surfaces. Le modèle de plasticité va faire évoluer une seule surface de charge. En tout, il y a donc cinq mécanismes qui peuvent, a priori, tous être activés simultanément. Pour traiter le couplage nous utilisons une méthode proposée par [Simo et Hughes, 1998] pour intégrer la loi.

## 4.2 Résolution d'un problème élasto-plastique à l'aide de la méthode de Return Mapping

Classiquement, les algorithmes des lois de comportements formulées dans le cadre de la plasticité classique sont écrits à partir de la donnée des déformations, ou pour nous ici des déplacements. Ils sont issus d'une hypothèse cinématique que le code envoie à chaque élément.

Le but de cette partie est de montrer comment est calculé, à l'intérieur de la loi élasto-plastique, l'effort résultant, à partir de la donnée d'un déplacement.

Le problème est donc le suivant. On se donne une loi de comportement quelconque, définie dans le repère  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}})$ . Elle est représentée sur la figure 4.1 en 1D pour simplifier.

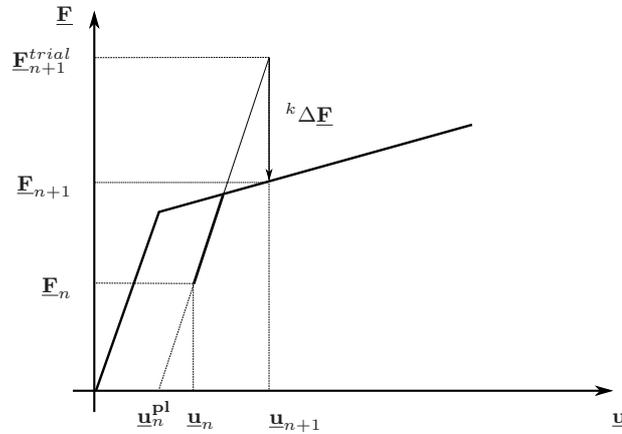


FIG. 4.1 – Loi de comportement bilinéaire 1D.

L'état  $(\underline{\mathbf{u}}_n, \underline{\mathbf{F}}_n)$  est l'état convergé du pas de Newton  $n$  précédent et est donc complètement connu ainsi que les déplacements plastiques associés  $\underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}}$  et les variables internes types variables d'écroutissage  $\underline{\mathbf{q}}_n$ . La donnée du problème est le déplacement  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$  pour lequel on veut connaître l'effort associé  $\underline{\mathbf{F}}_{n+1}$ .

Pour le calculer nous considérons un état auxiliaire paramétré par l'exposant  $^{\text{trial}}$  obtenu en considérant un pas purement élastique. Nous avons donc:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{trial}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} (\underline{\mathbf{u}}_{n+1} - \underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}}) \\ \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{pl}^{\text{trial}}} = \underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}} \\ \underline{\mathbf{q}}_{n+1}^{\text{trial}} = \underline{\mathbf{q}}_n \\ f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{trial}}, \underline{\mathbf{q}}_n) \end{cases} \quad (4.1)$$

**Remarque:** la première équation du système 4.1 peut aussi s'écrire:

$$\underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{trial}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} (\underline{\mathbf{u}}_{n+1} - \underline{\mathbf{u}}_n + \underline{\mathbf{u}}_n - \underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}}) = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{el}} \Delta \underline{\mathbf{u}}_n + \underline{\mathbf{F}}_n \quad (4.2)$$

Le signe de  $f_{n+1}^{\text{trial}}$  va alors nous donner le régime courant à considérer pour la résolution. Nous

avons alors deux possibilités:

- Soit  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$  alors le régime est élastique et donc  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} = \underline{\mathbf{u}}_n^{pl}$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_{n+1} = \underline{\mathbf{q}}_n$  et  $\underline{\mathbf{F}}_{n+1} = \underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{trial}$ .
- Soit  $f_{n+1}^{trial} > 0$  alors le régime est plastique et donc nous devons résoudre l'équation  $f(\underline{\mathbf{F}}_{n+1}, \underline{\mathbf{q}}_{n+1}) = 0$  pour trouver  $\underline{\mathbf{F}}_{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_{n+1}$  mais aussi en déduire  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl}$ .

Dans le cas où le régime est plastique, la méthode de résolution de l'équation  $f(\underline{\mathbf{F}}_{n+1}, \underline{\mathbf{q}}_{n+1}) = 0$  est décrite ci-après. Le but est d'écrire les variables de cette équation en fonction d'une variable scalaire unique qui sera donc l'inconnue de l'équation et des variables convergées connues du pas précédent.

On écrit donc le problème de la façon suivante de manière à expliciter le déplacement plastique  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl}$ , l'effort  $\underline{\mathbf{F}}_{n+1}$  et la variable d'écrouissage  $\underline{\mathbf{q}}_{n+1}$  en fonction respectivement de  $\underline{\mathbf{u}}_n^{pl}$ ,  $\underline{\mathbf{F}}_n$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_n$  et d'une variable scalaire unique. Cette variable est l'incrément du multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$  explicité dans les paragraphes suivants:

#### 4.2.1 calcul du déplacement plastique $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl}$

La loi de normalité nous donne:

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{F}}}$$

Si nous utilisons un schéma d'intégration temporel explicite classique nous obtenons:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}_n^{pl} = \frac{\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} - \underline{\mathbf{u}}_n^{pl}}{\Delta t}$$

Par ailleurs nous avons:

$$\dot{\lambda}_n = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\Delta t} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta t}$$

Finalement on obtient, de manière explicite:

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} = \underline{\mathbf{u}}_n^{pl} + \Delta\lambda \frac{\partial g(\underline{\mathbf{F}}_n, \underline{\mathbf{q}}_n)}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \quad (4.3)$$

L'inconnue dans cette dernière équation permettant de calculer  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl}$  est donc l'incrément du multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$ , les autres grandeurs au pas  $n$  étant connus.

#### 4.2.2 calcul de l'effort $\underline{\mathbf{F}}_{n+1}$

Par définition nous avons:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{n+1} &= \underline{\mathbf{K}}^{el} \left( \underline{\mathbf{u}}_{n+1} - \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} \right) \\ &= \underline{\mathbf{K}}^{el} \left( \underline{\mathbf{u}}_{n+1} - \underline{\mathbf{u}}_n^{pl} \right) - \underline{\mathbf{K}}^{el} \left( \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} - \underline{\mathbf{u}}_n^{pl} \right) \\ &= \underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{trial} + \Delta \underline{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Par ailleurs en utilisant la relation 4.3 nous obtenons de manière explicite:

$$\Delta \underline{\mathbf{F}} = -\underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \left( \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{\text{pl}} - \underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}} \right) = -\underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \Delta \lambda \frac{\partial g(\underline{\mathbf{F}}_n, \underline{\mathbf{q}}_n)}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \quad (4.5)$$

De même que pour le calcul du déplacement plastique, l'inconnue dans cette dernière équation permettant de calculer  $\Delta \underline{\mathbf{F}}$  est l'incrément du multiplicateur plastique  $\Delta \lambda$ , les autres grandeurs au pas  $n$  étant connus.

#### 4.2.3 calcul de la variable d'écroissance $\underline{\mathbf{q}}_{n+1}$

D'une manière générale, l'évolution de la variable d'écroissance  $\underline{\mathbf{q}}$  est donnée par une équation différentielle liant le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  et la fonction vectorielle d'écroissance  $\underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}})$  de la manière suivante:

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}} = -\dot{\lambda} \underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}) \quad (4.6)$$

En utilisant un schéma d'intégration temporel explicite classique nous obtenons là aussi l'expression de  $\underline{\mathbf{q}}_{n+1}$  en fonction de la seule inconnue  $\Delta \lambda$ :

$$\underline{\mathbf{q}}_{n+1} = \underline{\mathbf{q}}_n - \Delta \lambda \underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{F}}_n, \underline{\mathbf{q}}_n) \quad (4.7)$$

#### 4.2.4 Résolution de l'équation permettant de calculer $\Delta \lambda$

Nous l'avons vu précédemment, les valeurs des grandeurs convergées au pas  $n$  étant connues, les grandeurs  $\frac{\partial g(\underline{\mathbf{F}}_n, \underline{\mathbf{q}}_n)}{\partial \underline{\mathbf{F}}}$  et  $\underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{F}}_n, \underline{\mathbf{q}}_n)$  peuvent alors être calculées. La seule inconnue du problème est alors une variable scalaire: l'incrément du potentiel plastique  $\Delta \lambda$ .

Le problème revient donc à résoudre l'équation

$$f_{n+1}(\Delta \lambda) = 0. \quad (4.8)$$

Le calcul de  $\Delta \lambda$  grâce à cette équation va donc permettre de calculer tous les termes au pas  $n+1$  grâce aux équations vues dans les paragraphes précédent.

Il y a cependant deux possibilités quant à la résolution de l'équation 4.8:

- Soit l'équation  $f_{n+1}$  est linéaire. Dans ce cas la résolution de cette équation est simple et ne nécessite aucune itération, comme le montre la figure 4.1 ( $\Delta \lambda$  est alors connue et toutes les grandeurs se déduisent facilement)
- Soit l'équation  $f_{n+1}$  est non-linéaire. Dans ce cas une méthode de Newton est alors nécessaire pour la résoudre (figure 4.2).

Pour cette deuxième possibilité, plusieurs itérations seront donc nécessaires pour résoudre l'équation non-linéaire. Les équations précédentes sont donc toujours vraies mais ne vont plus permettre de passer du pas  $n$  au pas  $n + 1$  mais d'une itération à l'autre dans la résolution par la méthode de Newton. Ces itérations seront notées de niveau  $k$ .

La réécriture du problème en tenant compte de ces indices est la suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{k+1}\underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}} = {}^k\underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}} + {}^k\delta(\Delta\lambda) \frac{\partial g({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n)}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \\ {}^{k+1}\underline{\mathbf{q}}_n = {}^k\underline{\mathbf{q}}_n + {}^k\Delta\underline{\mathbf{q}} \\ {}^k\Delta\underline{\mathbf{q}} = -{}^k\delta(\Delta\lambda) \underline{\mathbf{h}}({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n) \\ \underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{\text{trial}} = {}^0\underline{\mathbf{F}}_n \\ {}^{k+1}\underline{\mathbf{F}}_n = {}^k\underline{\mathbf{F}}_n + {}^k\Delta\underline{\mathbf{F}} \\ {}^k\Delta\underline{\mathbf{F}} = -\underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} {}^k\delta(\Delta\lambda) \frac{\partial g({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n)}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Les variables  ${}^k\underline{\mathbf{u}}_n^{\text{pl}}$ ,  ${}^k\underline{\mathbf{q}}_n$ , et  ${}^k\underline{\mathbf{F}}_n$  sont les variables convergées de l'itération de Newton  $k$ .

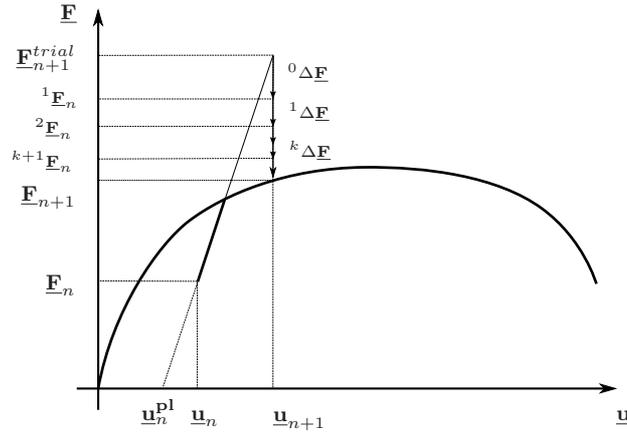


FIG. 4.2 – Loi de comportement non linéaire 1D.

La méthode de Newton va ensuite consister à différentier l'équation 4.8 autour du point courant convergé et connu  $({}^k\underline{\mathbf{q}}_n, {}^k\underline{\mathbf{F}}_n)$ . Nous obtenons donc au premier ordre:

$$f({}^{k+1}\underline{\mathbf{F}}_n, {}^{k+1}\underline{\mathbf{q}}_n) = f({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}}({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n) {}^k\Delta\underline{\mathbf{F}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}}({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n) {}^k\Delta\underline{\mathbf{q}} \quad (4.10)$$

La résolution de l'équation va donc nous permettre de calculer  ${}^k\delta(\Delta\lambda)$ , en effet en remplaçant dans l'équation différentiée précédente les termes 3 et 6 du système 4.9, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
f\left({}^{k+1}\underline{\mathbf{F}}_n, {}^{k+1}\underline{\mathbf{q}}_n\right) &= f\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right) \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}}\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right) \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} {}^k\delta(\Delta\lambda) \frac{\partial g\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right)}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}}\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right) {}^k\delta(\Delta\lambda) \underline{\mathbf{h}}\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

La méthode de Newton consiste ensuite à résoudre l'équation linéaire  $f\left({}^{k+1}\underline{\mathbf{F}}_n, {}^{k+1}\underline{\mathbf{q}}_n\right) = 0$ , ce qui nous permet de trouver  ${}^k\delta(\Delta\lambda)$ :

$${}^k\delta(\Delta\lambda) = \frac{f\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right)}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{F}}}\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right) \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right)}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{q}}}\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right) \underline{\mathbf{h}}\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n\right)} \tag{4.12}$$

Ainsi de proche en proche et après des itérations successives on converge vers la solution du problème et on trouve  $\underline{\mathbf{F}}_{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{q}}_{n+1}$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ .

### 4.3 Application à un modèle faisant évoluer plusieurs mécanismes

Dans la suite du paragraphe, les surfaces de charges ainsi que les différents mécanismes seront indexés à l'aide de l'indice  $m \in [1; M]$  où  $M \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ . Nous omettrons donc les exposants  $\oplus$  et  $\ominus$  vus plus haut. Ainsi nous avons l'activation de 5 surfaces de charges à décrire ( $f^1(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}^1)$ ,  $f^2(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}^2)$ ,  $f^3(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}^3)$ ,  $f^4(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}^4)$  et  $f^5(\underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{q}}^5)$ ) où  $\underline{\mathbf{F}}$  représente le point de charge et  $\underline{\mathbf{q}}^m$  représente le vecteur composé des variables d'écroissements pour le mécanisme  $m$  en lesquels la surface est écrite.

Dans la suite nous désignerons par le terme "plastique" tous les mécanismes non-linéaires. Ainsi même les mécanismes de décollements sont pris en compte comme des mécanismes plastiques.

Nous aurons donc toujours une combinaison de  $M$  mécanismes qui pourront être actifs simultanément.

Dans un formalisme élasto-plastique, les conditions de Kuhn-Tucker suivantes doivent toujours être vérifiées:

$$\dot{\lambda}^m \geq 0 \quad f^m \leq 0 \quad \dot{\lambda}^m f^m = 0 \tag{4.13}$$

Qui se traduit en incrémental par l'équation suivante, [Simo et Hughes, 1998]:

$$f_{n+1}^{m \text{ trial}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^m\left({}^k\underline{\mathbf{F}}_n, {}^k\underline{\mathbf{q}}_n^m\right) = 0 \\ {}^k\delta(\Delta\lambda)^m > 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Le mécanisme  $m$  est alors actif si le test sur la surface de charge au point courant de l'itération est positif ( $f^{m \text{ trial}} > 0$ ) et si le multiplicateur plastique associé est positif ( $\lambda^m > 0$ ).

Par ailleurs, la vitesse plastique totale  $\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{Pl}}$  peut s'écrire comme une contribution de chacun des mécanismes:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{Pl}} = \sum_{m=1}^M \underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{Pl}^m} \quad (4.15)$$

qui peut s'écrire grâce à la loi de normalité:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}^{\text{Pl}} = \sum_{m=1}^M \dot{\lambda}^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \quad (4.16)$$

Afin de résoudre le problème avec la technique du Return Mapping vue plus haut, une méthode de Newton doit être utilisée pour chacun des mécanismes actifs.

Le développement de Taylor au 1er ordre de chacune des  $M$  surfaces de plasticité autour du point courant convergé et connu  $({}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m, {}^k \underline{\mathbf{F}}_n)$  peut s'écrire de la manière suivante:

$$f^m({}^{k+1} \underline{\mathbf{F}}_n, {}^{k+1} \underline{\mathbf{q}}_n^m) = f^m({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) + \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\mathbf{F}}}({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) {}^k \Delta \underline{\mathbf{F}} + \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\mathbf{q}}^m}({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) {}^k \Delta \underline{\mathbf{q}}^m \quad (4.17)$$

avec:

$${}^k \Delta \underline{\mathbf{q}}^m = -{}^k \delta (\Delta \lambda)^m \underline{\mathbf{h}}^m({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) \quad (4.18)$$

et

$${}^k \Delta \underline{\mathbf{F}} = -\underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \sum_{m=1}^M {}^k \delta (\Delta \lambda)^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\mathbf{F}}}({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) \quad (4.19)$$

D'où en remplaçant ces termes dans l'équation 4.17, nous obtenons pour chacun des  $M$  mécanismes actifs:

$$\begin{aligned} f^m({}^{k+1} \underline{\mathbf{F}}_n, {}^{k+1} \underline{\mathbf{q}}_n^m) &= f^m({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) \\ &- \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\mathbf{F}}}({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \sum_{m=1}^M {}^k \delta (\Delta \lambda)^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\mathbf{F}}}({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) \\ &- \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\mathbf{q}}^m}({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) {}^k \delta (\Delta \lambda)^m \underline{\mathbf{h}}^m({}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m) \end{aligned} \quad (4.20)$$

La méthode de Newton consiste à résoudre le système de  $M$  équations linéaires à  $M$  inconnues  $f^m({}^{k+1} \underline{\mathbf{F}}_n, {}^{k+1} \underline{\mathbf{q}}_n^m) = 0$ . Ces inconnues sont pour chaque itération de niveau  $k$  les incréments des multiplicateurs plastiques  ${}^k \delta (\Delta \lambda)^1, {}^k \delta (\Delta \lambda)^2, \dots, {}^k \delta (\Delta \lambda)^M$ .

En allégeant les notations des indices  $k$  et  $n$  nous obtenons donc le système suivant dans le cas où  $M$  mécanismes sont actifs:

$$\begin{cases} f^1 - \frac{\partial f^1}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \left( \delta(\Delta\lambda)^1 \frac{\partial g^1}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \delta(\Delta\lambda)^2 \frac{\partial g^2}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \dots + \delta(\Delta\lambda)^M \frac{\partial g^M}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) - \frac{\partial f^1}{\partial \underline{\mathbf{q}}^1} \delta(\Delta\lambda)^1 \underline{\mathbf{h}}^1 = 0 \\ f^2 - \frac{\partial f^2}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \left( \delta(\Delta\lambda)^1 \frac{\partial g^1}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \delta(\Delta\lambda)^2 \frac{\partial g^2}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \dots + \delta(\Delta\lambda)^M \frac{\partial g^M}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) - \frac{\partial f^2}{\partial \underline{\mathbf{q}}^2} \delta(\Delta\lambda)^2 \underline{\mathbf{h}}^2 = 0 \\ \vdots \\ f^M - \frac{\partial f^M}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \left( \delta(\Delta\lambda)^1 \frac{\partial g^1}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \delta(\Delta\lambda)^2 \frac{\partial g^2}{\partial \underline{\mathbf{F}}} + \dots + \delta(\Delta\lambda)^M \frac{\partial g^M}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \right) - \frac{\partial f^M}{\partial \underline{\mathbf{q}}^M} \delta(\Delta\lambda)^M \underline{\mathbf{h}}^M = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Finalement cela revient à résoudre le système matriciel suivant:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{011} & H_{012} & \dots & H_{01M} \\ H_{021} & H_{022} & \dots & H_{02M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{0M1} & H_{0M2} & \dots & H_{0MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(\Delta\lambda)^1 \\ \delta(\Delta\lambda)^2 \\ \vdots \\ \delta(\Delta\lambda)^M \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & H_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(\Delta\lambda)^1 \\ \delta(\Delta\lambda)^2 \\ \vdots \\ \delta(\Delta\lambda)^M \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

où les termes de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{H}}_0}$  sont:

$$H_{0ij} = \frac{\partial f^i}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{K}}^{\text{el}} \frac{\partial g^j}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \quad (4.23)$$

et où les termes de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  sont:

$$H_{ij} = \delta_i^j \frac{\partial f^i}{\partial \underline{\mathbf{q}}^i} \underline{\mathbf{h}}^j, \quad \text{sans sommation sur } i \text{ et avec } \delta_i^j \text{ est le symbole de Kronecker} \quad (4.24)$$

Finalement dans le cas où la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{H}}_0} + \underline{\underline{\mathbf{H}}}$  est inversible nous obtenons pour chaque itération de Newton:

$$\begin{bmatrix} \delta(\Delta\lambda)^1 \\ \delta(\Delta\lambda)^2 \\ \vdots \\ \delta(\Delta\lambda)^M \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{H}}_0}^{-1} + \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{-1} \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^M \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Un mécanisme est actif si le test sur la surface de charge associé est positif, c'est à dire  $f^m \left( {}^k \underline{\mathbf{F}}_n, {}^k \underline{\mathbf{q}}_n^m \right) > 0$ , sinon ce mécanisme se trouve dans son domaine élastique et il ne génère pas de déplacement plastique. Mais ceci n'est qu'une condition nécessaire. Pour avoir une condition suffisante, il faut rajouter le test sur le signe de l'incrément du multiplicateur

plastique associé au mécanisme  $\delta(\Delta\lambda)^m$ . Ce dernier doit également être positif  $\delta(\Delta\lambda)^m > 0$ . S'il est négatif, l'intégration doit continuer avec uniquement les autres surfaces actives.

L'algorithme de résolution est donné ci-après par la figure 4.3.

**Remarque:** Cet algorithme est donné à titre général pour la programmation de l'évolution de plusieurs surfaces de charge simultanée. Or nous l'avons vu dans le paragraphe 3.4.3, la condition  $f^m > 0$  ne suffit pas pour activer le mécanisme de décollement. Une condition supplémentaire sur la surface élastique est nécessaire pour activer le mécanisme de décollement.

Ainsi dans cet algorithme, si  $m$  symbolise un mécanisme de décollement, la condition  $f^m > 0$  doit être remplacée par la double condition de l'inéquation 3.87 rappelée ici:

$$f_{el}^m(M', V') > 0 \quad \text{et} \quad f^m(M', V', \beta) > 0 \quad (4.26)$$

De la même manière,  $f^m \leq 0$  pour un mécanisme de décollement, doit se substituer à la double condition de l'inéquation 3.87:

$$f_{el}^m(M', V') \leq 0 \quad \text{ou} \quad f^m(M', V', \beta) = 0 \quad (4.27)$$

## 4.4 Prise en compte de l'amortissement pour les calculs dynamiques

L'objet de ce paragraphe est de rappeler brièvement comment est programmé numériquement un modèle visco-plastique décrit suivant la formulation de [Duvaut et Lions, 1972] déjà étudiée dans le chapitre 3.

La résolution numérique est décrite dans [Simo et Hughes, 1998]. Comme nous l'avons déjà expliqué dans le chapitre 3, la résolution d'un problème de visco-plasticité classique est très simple et revient à résoudre un problème de relaxation. En effet, à chaque incrément de chargement, le modèle reçoit de la part des algorithmes au niveau global du code, un incrément de déplacement. Cet incrément de déplacement reste constant durant tout le pas de chargement de longueur  $\Delta t$ . Le but est donc de connaître comment s'est relaxé le mécanisme au bout du pas de temps  $\Delta t$ . La solution est donc comprise entre la solution purement élastique  $X^{trial}$  (pour un pas de temps très petit) instantanée et la solution en régime permanent  $\bar{X}$  (pour un pas de temps très grand).

En résumé on montre que le calcul dynamique avec prise en compte de l'amortisseur revient à calculer la solution en régime permanent (objet des paragraphes précédent ce chapitre) et la solution élastique et d'établir une correction visco-plastique.

La solution en régime permanent est notée de la manière suivante: effort résultant  $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ , variables d'écroûissage  $\bar{\mathbf{q}}_{n+1}$ , déplacements plastique dans chacun des mécanismes  $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl}$ .

La solution élastique provient de l'hypothèse élastique faite en début de pas, c'est à dire  $\bar{\mathbf{F}}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{trial}$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_{n+1} = \bar{\mathbf{q}}_n$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} = \bar{\mathbf{u}}_n$ .

La correction visco-plastique, de paramètre  $\eta$ , s'opère de la manière suivante (une fois que les itérations de niveau  $k$  ont permis d'obtenir la convergence et donc la solution en régime permanent, équations 4.28):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{F}}_{n+1} = \frac{\underline{\mathbf{F}}_{n+1}^{trial} + \frac{\Delta t}{\eta} \underline{\mathbf{F}}_{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\eta}} \\ \underline{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{\underline{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{\eta} \underline{\mathbf{q}}_{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\eta}} \\ \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl^m} = \frac{\underline{\mathbf{u}}_n^{pl^m} + \frac{\Delta t}{\eta} \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl^m}}{1 + \frac{\Delta t}{\eta}}, \quad \forall m \in [1; 5] \end{array} \right. \quad (4.28)$$

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de faire un rappel des méthodes utilisées pour résoudre numériquement un problème issu des lois de plasticité classiques et plus précisément la méthode du "Return Mapping".

Dans un premier temps, un rappel a été effectué concernant la résolution d'un problème simple en 1D et ne faisant intervenir qu'une seule surface de charge. Ensuite une généralisation à un problème multi-surfaces et à plusieurs dimensions a été décrite permettant de résoudre d'une manière générale un problème du type du macro-élément présenté de manière mathématique dans le chapitre 3. Ce modèle fait en effet évoluer au plus cinq surfaces de charges simultanées. Un algorithme adapté à ce type de résolution a ensuite été proposé.

Afin de montrer le fonctionnement du macro-élément, des simulations ont été effectuées et sont présentées dans les chapitre 5 et 6.

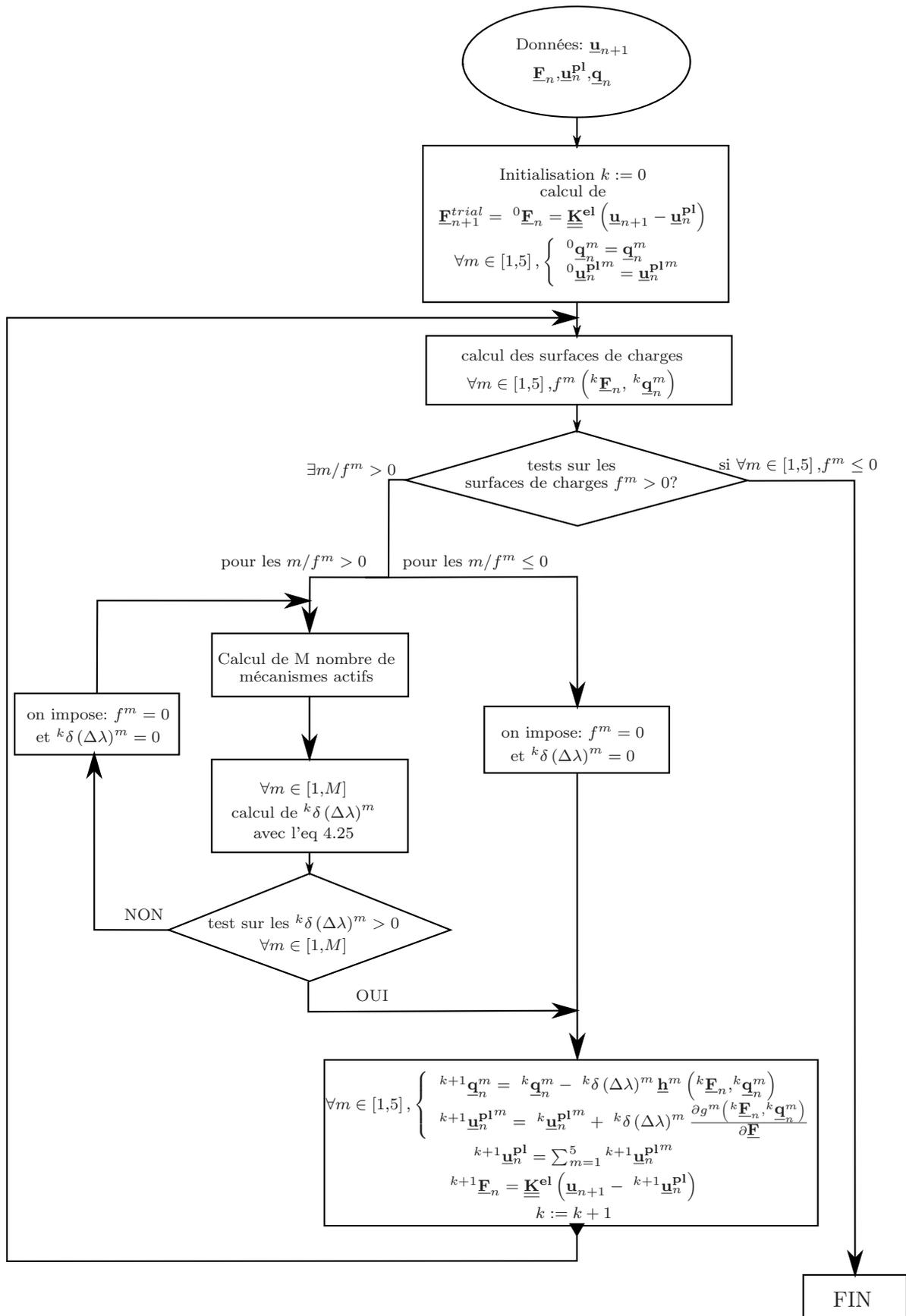


FIG. 4.3 – Algorithme du return mapping sur plusieurs mécanismes.



Afin de valider le macro-élément, des résultats numériques comparés à des résultats expérimentaux sous chargements statique [Gottardi *et al.*, 1999], cyclique [TRISEE, 1998] et dynamique [Rosebrook et Kutter, 2001] sont ici présentés.

Plus spécifiquement, les trois cas tests suivants sont détaillés dans ce chapitre:

- (i) Afin de voir si le macro-élément est capable de reproduire le comportement d'une fondation sous chargement statique monotone des simulations numériques tentent de reproduire les "Swipe tests" donnés dans [Gottardi *et al.*, 1999].
- (ii) La performance du macro-élément sous chargement cyclique est ensuite comparée aux résultats expérimentaux provenant du programme Européen TRISEE [TRISEE, 1998].
- (iii) Enfin, l'adaptation aux chargements dynamiques est évaluée grâce aux essais sur centrifugeuse réalisés à l'université de Davis [Rosebrook et Kutter, 2001].

## 5.1 Chargement statique monotone

Les détails de la présentation de ces essais sont présentés dans [Gottardi *et al.*, 1999]. Ils concernent des Swipe tests sur une fondation circulaire de diamètre  $2R = D = 0.1m$  reposant sur un sable de densité connue. La procédure générale utilisée pour ces essais est décrite dans le paragraphe 2.3.2. Rappelons que ces tests en déplacements imposés permettent de donner une investigation directe du critère de rupture, puisque la courbe de réponse (en effort) l'épouse parfaitement.

Parmi tous les tests réalisés dans [Gottardi *et al.*, 1999], cinq d'entre eux sont étudiés et reproduits numériquement ci-après. Dans [Gottardi *et al.*, 1999] ils ont pour nomenclature GG03, GG04, GG06, GG07 et GG29).

Durant le test GG03, un déplacement vertical est appliqué à la fondation jusqu'à ce qu'un effort vertical égal à  $V_0 = 1600N$  soit atteint (figure 5.1). Pendant le test GG07, un effort vertical de  $V_0 = 1600N$  est atteint, puis celui ci est réduit à  $V_0 = 200N$  (figure 5.2). De cette manière un écrouissage du sol est opéré. Pour ces deux tests, le déplacement imposé lors de la deuxième phase est un déplacement horizontal croissant appliqué à la fondation. Pendant ce temps, le déplacement vertical imposé lors de la première phase est gardé constant.

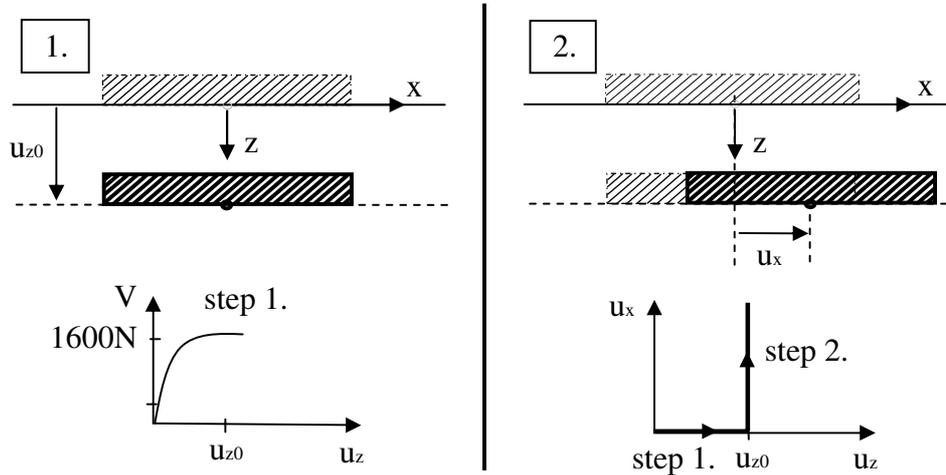


FIG. 5.1 – *Swipe test GG03: Etape 1. un déplacement vertical est atteint, Etape 2. un déplacement horizontal croissant est appliqué à la fondation.*

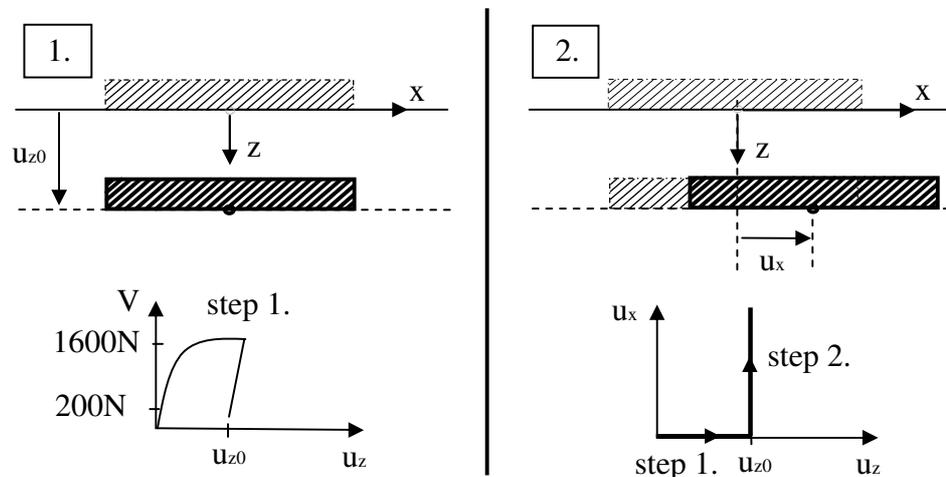


FIG. 5.2 – *Swipe test GG07: Etape 1. une fois que l'effort vertical  $V_0 = 1600N$  est atteint, il est réduit à  $V_0 = 200N$ , Etape 2. un déplacement horizontal croissant est appliqué à la fondation.*

Le test GG04 est réalisé de la même manière que le test GG03. La seule différence réside dans le fait qu'une fois l'effort vertical initial  $V_0 = 1600N$  atteint, c'est une rotation croissante est appliquée à la fondation au lieu du déplacement horizontal.

Les Swipe tests GG06 et GG29 sont pilotés avec une rotation et un déplacement horizontal simultanés et avec un ratio constant entre ces deux sollicitations  $\arctan\left(\frac{Dd\theta}{du}\right) = 126^\circ$  pour GG06 et  $\arctan\left(\frac{Dd\theta}{du}\right) = 157^\circ$  pour GG29. Ce chargement est également appliqué après qu'un effort vertical initial de  $V_0 = 1600N$  soit atteint.

Pour le modèle numérique, la fondation est représentée par le macro-élément qui comporte deux nœuds. Le nœud à la base du macro-élément est considéré encastré, alors que le chargement (déplacements ou efforts) est appliqué au nœud supérieur.

Les paramètres du modèle numérique (voir tableau 5.1) sont calibrés pour reproduire les tests GG03 (pour les composantes horizontales) et GG04 (pour les composantes en rotation). Les résultats concernant les autres tests sont réalisés sans calibration supplémentaire. La figure 5.3 montre le chemin de réponse dans les plans  $(H_x - V)$  et  $(H_x - u_x)$  pour les essais expérimentaux GG03 et GG07 ((a) et (b)) et pour les tests numériques ((c) et (d)). Les figures 5.4 et 5.5 comparent les résultats expérimentaux et numériques pour le test GG04 (dans les plans  $(M_y - V)$  et  $(M_y - \theta_y)$ ), et les tests GG06 et GG29 (dans le plan  $(h = \frac{H'_x}{V_0}; m = \frac{M'_y}{2RV_0})$ ).

TAB. 5.1 – Paramètres numériques utilisés pour les *Swipe tests*

Paramètres	Values	Remarques
Géométrie		
$D$	0.1m	Diametre de la fondation
Rigidité		
$K_{zz}^{el}$	15MN/m	
$K_{hh}^{el}$	0.4MN/m	
$K_{\theta\theta}^{el}$	0.0035MNm/rad	
Plasticité		
$q_{max}$	0.260MPa	capacité ultime
$a$	0.33	coefficients du critère de rupture
$b$	0.28	"
$c$	0.8	"
$d$	0.8	"
$e$	0.8	"
$f$	0.8	"
$\kappa$	0.608	coefficients de la loi d'écoulement
$\xi$	0.412	"

Les figures 5.3, 5.4 et 5.5 montrent que le macro-élément est capable de reproduire les tendances du comportement d'une fondation circulaire sous chargement statique sous différentes combinaisons de déplacements.

Durant l'essai GG03 une diminution de l'effort vertical est observée. Ceci est dû au fait que le chargement horizontal génère un écrouissage isotrope qui développe donc de la plasticité dans toutes les directions. Par ailleurs, du sable est collé sous la fondation. Cela implique qu'un effort de frottement résiduel apparaisse. Cet effort résiduel peut être modélisé en ajustant correctement les paramètres de la loi d'écoulement. Il est aussi intéressant de remarquer que le chemin de réponse en effort épouse parfaitement le critère de rupture.

Pendant l'essai GG07, l'écrouissage isotrope développé durant l'application de la charge verticale explique le comportement quasi-linéaire observée durant la première phase d'application du déplacement horizontal. Puis, l'effort horizontal numérique reste constant alors que l'effort expérimental décroît le long du critère de rupture. Ceci provient du fait que durant l'expérience un couplage entre les différentes directions existe et conduit au fait que l'application d'un effort horizontal peut générer des moments. Ce comportement n'est pas reproduit par le macro-élément parce que celui ci ne prend pas en compte d'interactions entre ces deux direc-

tions dans l'évolution des surfaces de charges (dans le domaine plastique, le macro-élément prend en compte uniquement deux types de liens: le déplacement horizontal avec l'effort vertical et les rotations avec l'effort vertical).

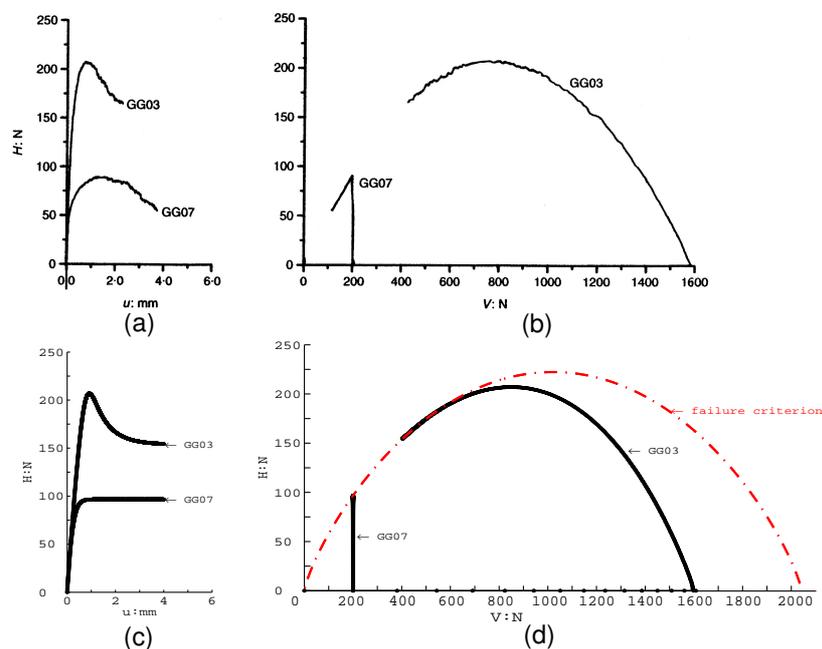


FIG. 5.3 – ((a), (b)): Résultats expérimentaux et ((c), (d)): résultats numériques pour les Swipe tests GG03 et GG07 dans les plans  $(H_x - u_x)$  et  $(H_x - V)$ .

Pendant le test GG04, les résultats numériques épousent là aussi le critère de rupture et reproduisent relativement bien l'évolution des courbes  $\frac{M_y}{2R} - 2R\theta$  et  $\frac{M_y}{2R} - V$ .

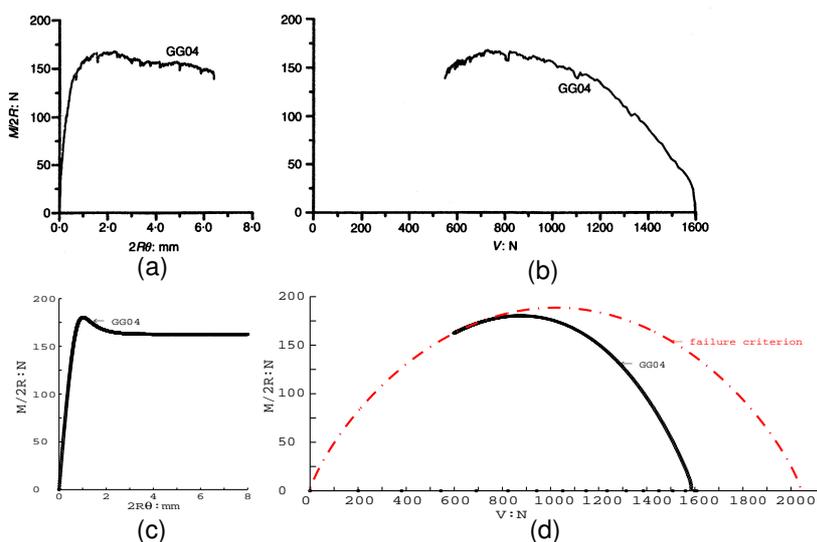


FIG. 5.4 – ((a), (b)): Résultats expérimentaux et ((c), (d)): résultats numériques pour le Swipe test GG04 dans les plans  $(M_y - \theta_y)$  et  $(M_y - V)$ .

Enfin, pour les essais GG06 et GG29, la simulation permet bien d'obtenir une boucle comme pour le comportement expérimental. Quelques différences apparaissent néanmoins. Elles proviennent de la définition de la loi d'écoulement qui lie entre eux l'évolution des déplacements

plastiques. Une calibration de cette loi et des paramètres la composant pourrait sans doute améliorer les résultats.

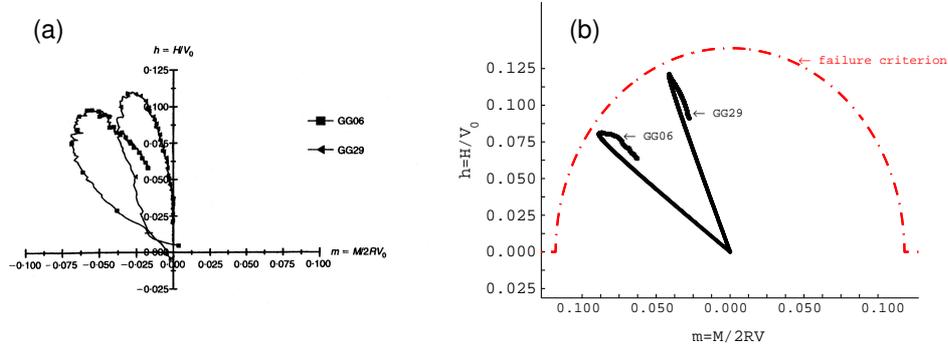


FIG. 5.5 – (a) Résultats expérimentaux, (b) résultats numériques pour les Swipe test GG06 et GG29 dans le plan  $(h - m)$ .

Afin de montrer le comportement 3D du macro-élément un Swipe test sous chargement tridimensionnel est réalisé. Un déplacement vertical est imposé initialement puis gardé constant durant tout le reste de l'essai. Ensuite, la fondation est pilotée avec l'application d'une rotation croissante  $\theta'_y$  jusqu'à ce que le moment  $M'_y$  atteigne une certaine valeur. A ce stade la rotation est gardée constante et une nouvelle rotation croissante  $\theta'_x$  est imposée à la fondation. La figure 5.6 montre le chemin de réponse en effort dans l'espace  $\left(\frac{M_x}{2R} - \frac{M_y}{2R} - V\right)$ . Les moments dans les deux directions sont développés et le chemin de réponse en effort épouse à aussi le critère de rupture.

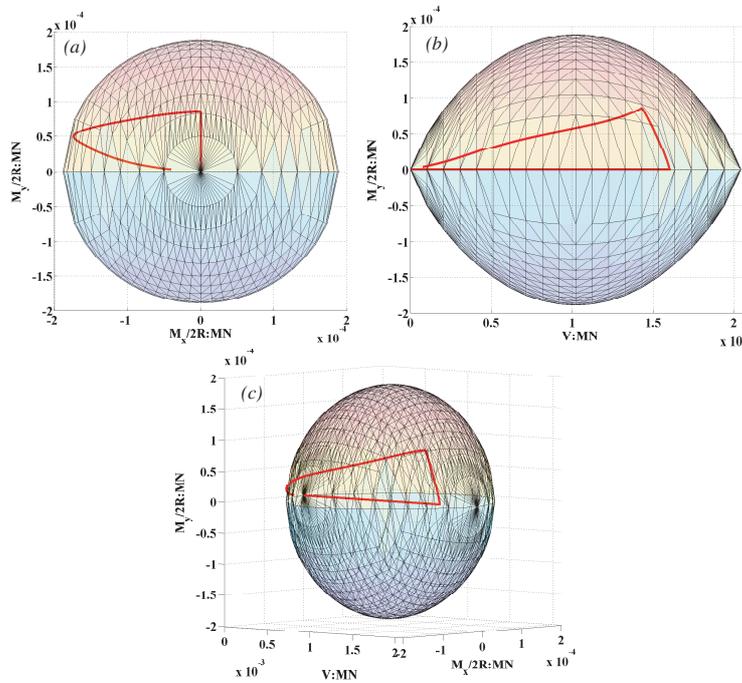


FIG. 5.6 – Simulation numérique du Swipe test 3D: représentation du chemin de réponse en efforts (a) dans les plans  $\left(\frac{M_y}{2R} - \frac{M_x}{2R}\right)$ , (b)  $\left(\frac{M_y}{2R} - V\right)$ , (c) et dans l'espace  $\left(\frac{M_y}{2R} - \frac{M_x}{2R} - V\right)$ .

## 5.2 Chargement cyclique

Dans le cadre du programme Européen TRISEE, des essais expérimentaux ont été réalisés sur une semelle rectangulaire de dimensions  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  reposant sur deux types de sable: un sable de faible densité (dit “Low Density sand” LD) et un sable de forte densité (dit “High Density sand” HD) [TRISEE, 1998]. Le caisson dans lequel repose ces deux types de sable a pour dimensions  $4.60\text{ m} \times 4.60\text{ m}$  pour une profondeur de  $4\text{ m}$  (figure 5.7). Les parois de ce caisson sont rigides et imperméables. Bien que la fondation soit faite d’acier, l’interface entre la fondation et la massif de sol est du béton.

Sur cette fondation, repose un poteau d’une hauteur de  $0.9\text{ m}$  à l’extrémité duquel divers chargements horizontaux sont appliqués. Un effort vertical est quant à lui gardé constant pour tous les essais. Ce dernier vaut  $V = 300\text{ kN}$  pour la sable HD et  $V = 100\text{ kN}$  pour le sable LD. Trois phases de chargements sont appliquées à la structure pour les 2 types de sols, leur fréquence étant suffisamment faible pour les considérer quasi-statiques:

- Phase I, de petits cycles d’efforts horizontaux de forme sinusoïdale.
- Phase II, une sollicitation pseudo-dynamique imposée en effort représentant une sollicitation sismique.
- Phase III, des déplacements horizontaux variant sinusoïdalement au cours du temps.

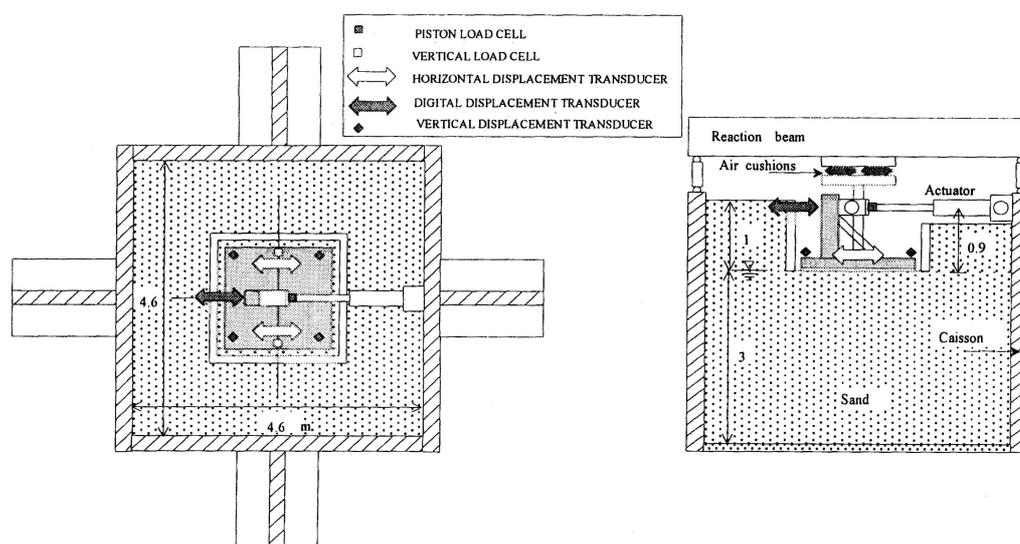


FIG. 5.7 – TRISEE: *Schema du dispositif expérimental (dimensions en m).*

Numériquement, la structure est modélisée en utilisant le macro-élément d’interaction sol-structure et une poutre verticale élastique. Le nœud à la base du macro-élément est comme auparavant considéré encasté. Le chargement est appliqué à l’extrémité de l’élément poutre.

### 5.2.1 Choix des paramètres du macro-élément

Les relations permettant de calculer les paramètres du macro-élément exposées dans le chapitre 3 sont valables pour une fondation reposant sur un massif de sol semi-infini, et pour des

sols purement cohérents ou purement frottants. Compte tenu des dimensions de la structure expérimentale et plus particulièrement de la taille du massif de sol, mais aussi à cause de la nature du sable, saturé à 80-90%, ces relations ne sont pas applicables. Les termes d'impédances élastiques ainsi que les paramètres des surfaces de charge doivent donc être identifiés directement à l'aide des essais. De plus, ces conditions de sols engendrent des variations des paramètres du sol tout au long de l'expérience. Notamment, il est montré dans [TRISEE, 1998] que les raideurs initiales (impédances de la fondations) diminuent au cours des différents chargements.

Les remarques précédentes ont conduit à considérer une diminution de ces paramètres de la phase II à la phase III pour les deux types de sols (les paramètres ont été considérés inchangés de la phase I à la phase II du fait que la sollicitation durant la phase I n'a que très peu plastifié le sol). Ceci n'est pas dû à une mauvaise représentation des phénomènes par le macro-élément mais provient des conditions expérimentales qui font évoluer d'un essai à un autre les caractéristiques du sol, par un réarrangement du matériau le constituant.

De la même manière il semble évident, à la vue des différents paliers des moments ou des efforts horizontaux pour les différentes phases, que la contrainte ultime à la rupture  $q_{max}$  varie aussi grandement entre les phases II et III. En effet, lors de la sollicitation de la fondation le sol sous-jacent se tasse et augmente ainsi la capacité portante de la fondation.

Les paramètres du modèle numérique, qui évoluent au cours des trois phases, sont présentés dans le tableau 5.2. Les paramètres constants sont donnés dans le tableau 5.3.

TAB. 5.2 – *TRISEE*: Paramètres du macro-élément variants au cours des différentes phases.

Phase	HD	LD
I	$K_{\theta\theta}^{el} = 52MNm/rad$	$K_{\theta\theta}^{el} = 25MNm/rad$
	$K_{hh}^{el} = 105MN/m$	$K_{hh}^{el} = 45MN/m$
	$K_{zz}^{el} = 120MN/m$	$K_{zz}^{el} = 65MN/m$
	$q_{max} = 0.58MPa$	$q_{max} = 0.14MPa$
II	$K_{\theta\theta}^{el} = 52MNm/rad$	$K_{\theta\theta}^{el} = 15MNm/rad$
	$K_{hh}^{el} = 105MN/m$	$K_{hh}^{el} = 35MN/m$
	$K_{zz}^{el} = 120MN/m$	$K_{zz}^{el} = 40MN/m$
	$q_{max} = 0.58MPa$	$q_{max} = 0.14MPa$
III	$K_{\theta\theta}^{el} = 35MNm/rad$	$K_{\theta\theta}^{el} = 5MNm/rad$
	$K_{hh}^{el} = 75MN/m$	$K_{hh}^{el} = 14MN/m$
	$K_{zz}^{el} = 80MN/m$	$K_{zz}^{el} = 26.6MN/m$
	$q_{max} = 1.5MPa$	$q_{max} = 0.185MPa$

Durant l'expérience, aucun décollement n'a été observé pour le sable de faible densité (LD) (il n'y eu a que du tassement du sable sous la fondation). D'une manière générale, il est à noter que dans ces essais, le sol a subit une part importante de plastification. Une adaptation du mécanisme de plasticité s'est alors avérée nécessaire: il a fallu annuler le mécanisme qui permet d'avoir le retour élastique lors d'un déchargement. En imposant  $\dot{\rho} = 0$  ( $k = 0$  voir équation 3.30), en d'autres termes en ajustant l'évolution de la contrainte d'écrouissage isotrope par rapport à l'écrouissage cinématique, l'agrandissement de la taille de la surface de charge est annulé, et ainsi le domaine élastique pour le mécanisme de plasticité est limité. De cette façon plus de plasticité est générée lors d'un déchargement ou d'un changement de direction de chargement.

TAB. 5.3 – *TRISEE*: Paramètres du macro-élément constants au cours des différentes phases.

Paramètres de plasticité	HD	LD	Paramètres de plasticité	HD	LD
$a$	0.93	1.1	$\kappa$	1	1
$b$	0.8	0.9	$\xi$	1	1
$c$	1	0.8	$a_1$	1	1
$d$	1	0.8	$a_2$	1	1
$e$	1	0.8	$a_3$	1	1
$f$	1	0.8	$a_4$	1	1
			$a_5$	1	1

### 5.2.2 Confrontation des résultats expérimentaux et numériques

Les résultats numériques et expérimentaux pour les phases I, II et II et pour les sables HD et LD sont donnés par les figures 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, et 5.12, 5.13. Pour chacune des phases sont présentés les lois moment-rotation, effort horizontal-déplacement horizontal, ainsi que le tassement en fonction du temps.

#### 5.2.2.1 *TRISEE*: Phase I

Les figures 5.8, 5.9 montrent le comportements des sables LD et HD durant la phase I.

Cette phase ne génère que très peu de non linéarités. Cependant de faibles écarts apparaissent entre les résultats numériques et expérimentaux. La raison semble être le fait que les déplacements verticaux sont très petits (de l'ordre du dixième de millimètre) et peuvent provenir de la mise en place de la structure sur la massif de sol et des bruits des différents capteurs.

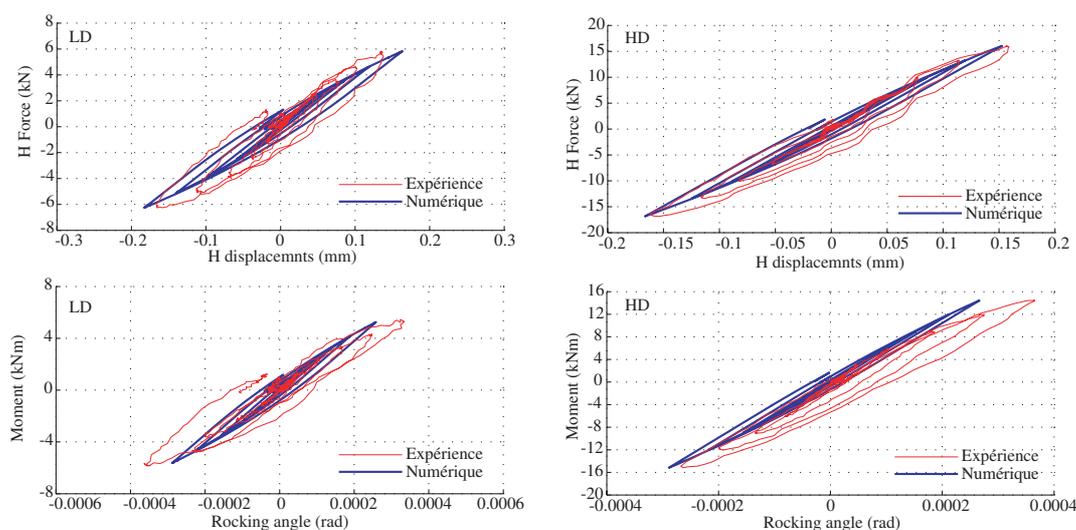


FIG. 5.8 – *TRISEE*: Phase I, comparaison résultats expérimentaux et résultats numériques pour les sables LD et HD.

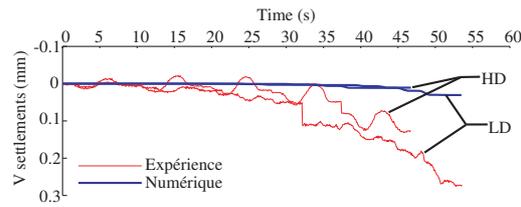


FIG. 5.9 – *TRISEE: Phase I, tassements du centre de la fondation pour les sables LD et HD.*

### 5.2.2.2 TRISEE: Phase II

Les figures 5.10, 5.11 montrent le comportements des sables LD et HD durant la phase II.

La plasticité est ici plus développée pour les deux sables comme le montrent les boucles des lois efforts-déplacements. Le tassement du sol est plus important que dans la phase I (de l'ordre du centimètre) et il est à noter que pour les deux sables, aucun décollement du centre de la fondation n'est observé.

Le modèle reproduit assez bien ce comportement et met aussi en évidence l'inexistence des non-linéarités géométriques (décollement) durant cette phase. La taille des boucles efforts-déplacements est assez bien reproduite, ce qui d'un point de vue énergétique prouve que le modèle dissipe une quantité d'énergie similaire à celle qui a été dissipée par l'expérience. Bien que les tests et la simulation soient pilotés en efforts, il est ainsi important de remarquer que les déplacements horizontaux et rotations résiduels sont bien reproduits par le modèle. Ceci est particulièrement visible pour le sable lâche (LD).

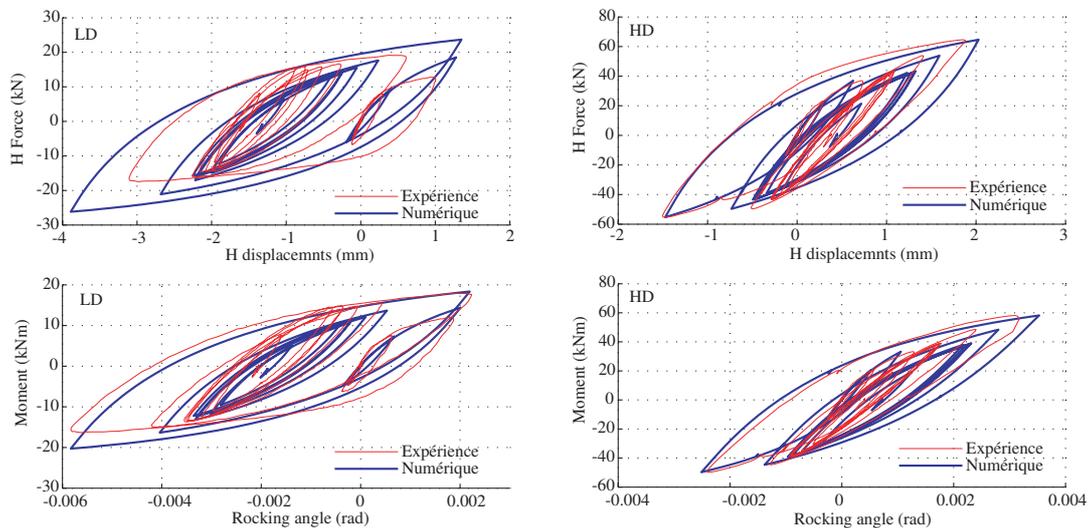


FIG. 5.10 – *TRISEE: Phase II, comparaison résultats expérimentaux et résultats numériques pour les sables LD et HD.*

### 5.2.2.3 TRISEE: Phase III

Les figures 5.12, 5.13 montrent le comportements des sables LD et HD durant la phase III.

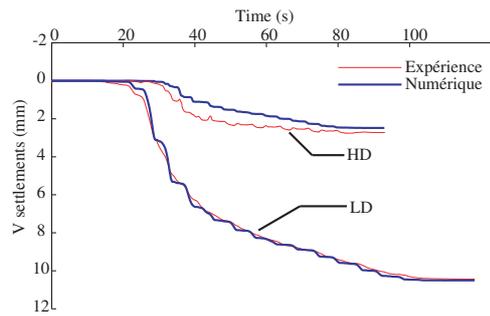


FIG. 5.11 – *TRISEE: Phase II, tassements du centre de la fondation pour les sables LD et HD.*

Durant cette phase pilotée en déplacements, les non-linéarités développées sont beaucoup plus importantes que pour les autres phases. Pour le sable LD, uniquement la plasticité du sol est développée. Le tassement résultant est donc très important.

Le modèle numérique reproduit assez bien de manière quantitative la taille des boucles efforts-déplacements. Néanmoins, la courbe effort horizontal-déplacement horizontal n'est pas très bien reproduite. En effet, l'expérience montre un décalage de cette courbe et l'apparition de déplacements horizontaux résiduels.

La courbe numérique effort horizontal-déplacement horizontal génère aussi un peu plus de plasticité que dans la réalité (boucles un peu plus grandes), ce qui justifie le tassement de la fondation plus important que dans l'expérience.

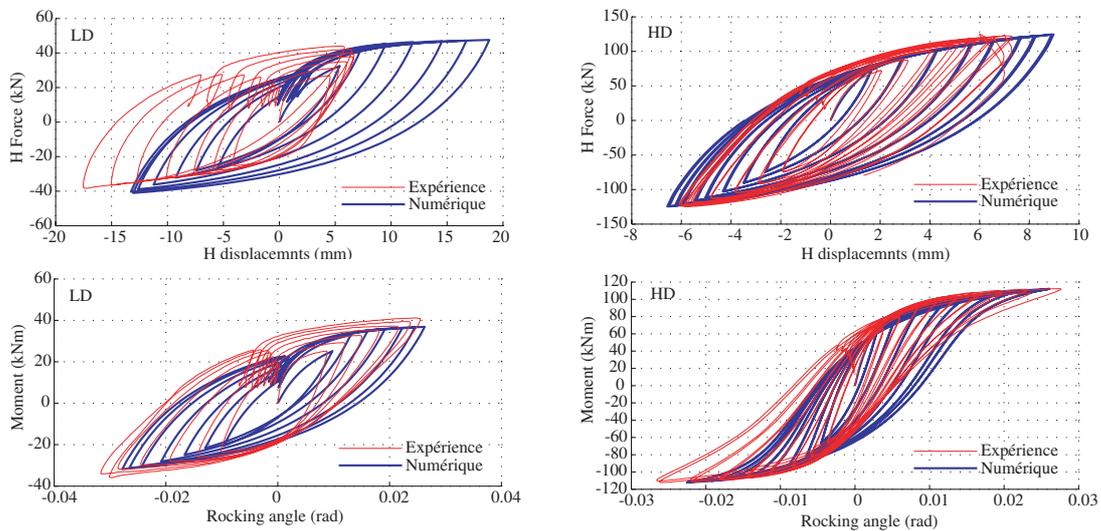


FIG. 5.12 – *TRISEE: Phase III, comparaison résultats expérimentaux et résultats numériques pour les sables LD et HD.*

Pour le sable HD, une composante de décollement apparaît clairement. Elle est mise en évidence d'une part sur la courbe moment rotation par une courbe significative en forme de "S", mais aussi sur la courbe montrant le déplacement vertical en fonction du temps. Là aussi la taille des boucles efforts-déplacements est assez bien reproduite, ce qui justifie que le tassement numérique soit proche du tassement expérimental. La part de décollement par rapport

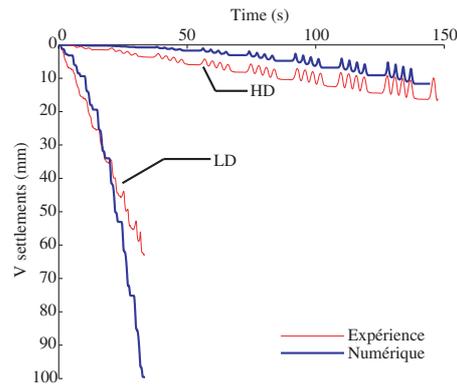


FIG. 5.13 – *TRISEE: Phase III, tassements du centre de la fondation pour les sables LD et HD.*

au tassement (qui est dû à la plastification du sol) est elle aussi bien simulée, ce qui permet de conclure de manière positive sur le choix des lois d'écoulements des différents mécanismes.

### 5.3 Chargement dynamique

Nous proposons maintenant d'étudier le comportement dynamique d'une fondation superficielle. Pour cela une étude des essais dynamiques KRR01 [Rosebrook et Kutter, 2001] sur centrifugeuse de l'Université de Californie à Davis a été réalisée.

La structure étudiée est un portique en aluminium constitué de deux voiles reliés par une masse rigide et reposant sur deux fondations rectangulaires (figure 5.14). L'échelle de la structure est  $\frac{1}{20^e}$ . Les fondations reposent sur une couche de 20.3cm de sable du Nevada de densité relative  $D_r = 60\%$  (pour les essais présentés dans cette thèse). Les dimensions présentées ici sont celles du modèle réduit. Un chargement dynamique est appliqué à la structure selon sa plus grande longueur (direction  $\vec{y}$ ).

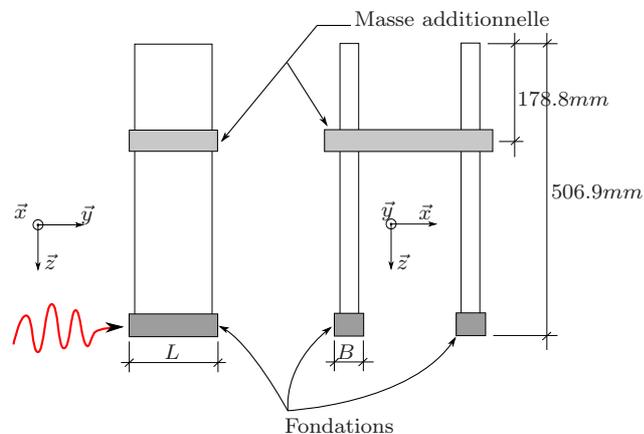


FIG. 5.14 – *Détail du portique testé en centrifugeuse.*

### 5.3.1 Modélisation du portique

La structure est modélisée à l'échelle 1, c'est à dire que les longueurs sont multipliés par 20, les masses par  $20^3$ . Deux configurations de fondations sont testées (essais KRRO1D14EE et KRRO1D14EW).

- Pour le premier essai (EE) les dimensions réelles (à échelle 1) de la fondation sont les suivantes:  $L = 197.2 \times 10^{-3} \times 20m$ ,  $B = 54 \times 10^{-3} \times 20m$ .
- Pour le deuxième essai (EW) les dimensions réelles (à échelle 1) de la fondation sont les suivantes:  $L = 133.6 \times 10^{-3} \times 20m$ ,  $B = 34.3 \times 10^{-3} \times 20m$ .

La modélisation de la structure est présentée sur la figure 5.15. La masse des voiles étant importante (notamment par rapport à la masse additionnelle), nous avons choisi de la décomposer en trois masses afin de tenir compte au mieux de la répartition massique. Il est à noter que la masse des fondations n'est pas négligeable par rapport au reste de la structure, surtout pour la structure de l'essai (EE). La masse  $M_3$  représente la masse additionnelle faisant le lien entre les deux voiles. Nous modélisons une seule fondation, c'est à dire une moitié de structure.

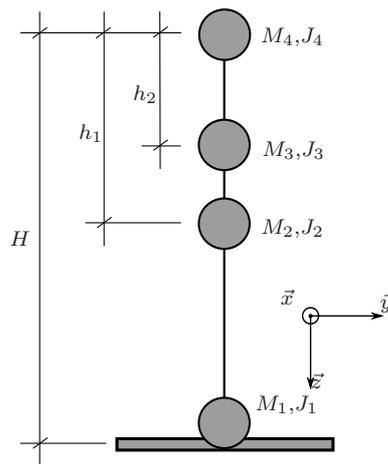


FIG. 5.15 – Modélisation de type brochette du portique pour les essais en centrifugeuse Davis.

Les dimensions géométriques et les valeurs des masses du modèle pour chacun des essais (EE) et (EW) sont données dans le tableau 5.4. L'accélérogramme appliqué au modèle numérique provient de l'accélération mesurée à la base de la structure lors de l'essai. Il est donné par la figure 5.16.

### 5.3.2 Choix des paramètres du macro-élément

Tout comme pour les essais TRISEE, les conditions de bon fonctionnement du modèle ne sont pas respectées. Ainsi, il est difficile de calculer les raideurs provenant des formules justement établies pour un sol semi-infini. Pour ces essais nous proposons donc de caler les raideurs initiales ainsi que les paliers des courbes efforts-déplacements par rapport aux résultats expérimentaux.

TAB. 5.4 – Paramètres utilisés pour la modélisation des essais en centrifugeuse Davis

Dimensions (mm)	EE	EW
$H$	$506.9 \times 20$	$506.9 \times 20$
$h_1$	$253.4 \times 20$	$253.4 \times 20$
$h_2$	$178.8 \times 20$	$178.8 \times 20$
Masses (kg)	EE	EW
$M_1$	$3.03 \times 20^3$	$1.36 \times 20^3$
$M_2$	$1.48 \times 20^3$	$1.48 \times 20^3$
$M_3$	$0.98 \times 20^3$	$0.98 \times 20^3$
$M_4$	$0.74 \times 20^3$	$0.74 \times 20^3$
Inerties (kg.m <sup>2</sup> )	EE	EW
$J_1$	$12.650 \times 10^{-3} \times 20^5$	$5.470 \times 10^{-3} \times 20^5$
$J_2$	$8.980 \times 10^{-3} \times 20^5$	$8.980 \times 10^{-3} \times 20^5$
$J_3$	$1.360 \times 10^{-3} \times 20^5$	$1.360 \times 10^{-3} \times 20^5$
$J_4$	$4.490 \times 10^{-3} \times 20^5$	$4.490 \times 10^{-3} \times 20^5$

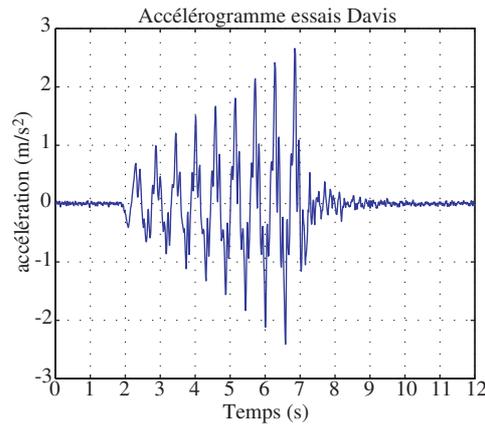


FIG. 5.16 – Accélérogramme appliqué dans le cadre des essais en centrifugeuse Davis.

Les conditions de sol (non semi-infini) ne permettent pas non plus de calculer les termes de l'amortissements radiatifs établies analytiquement. De plus, vu la faible épaisseur de sol, cet amortissement est assez réduit et même limité par les phénomènes de réflexions d'ondes. Des valeurs faibles mais non nulles sont donc choisies.

Les paramètres matériaux pour chacune des deux configurations de fondations sont donnés dans les tableaux 5.5 et 5.6.

### 5.3.3 Confrontation des résultats expérimentaux et numériques

Les résultats expérimentaux et numériques pour les essais krr01d14EE sont présentés par les figures 5.17 et 5.18.

La figure 5.17 montre l'évolution du moment à la base de la structure en fonction de la rotation

TAB. 5.5 – Paramètres de plasticité pour les modélisations des essais en centrifugeuse Davis.

Paramètres de plasticité	EE	EW	Paramètres de plasticité	EE	EW
$a$	0.52	0.52	$\kappa$	1	1
$b$	0.35	1	$\xi$	1	1
$c$	1	1	$a_1$	1	1
$d$	1	1	$a_2$	1	1
$e$	1	1	$a_3$	1	1
$f$	1	1	$a_4$	1	1
			$a_5$	1	1

TAB. 5.6 – Paramètres élastiques, d'amortissements et de ruptures pour la modélisation des essais en centrifugeuse Davis.

EE	EW
$K_{\theta\theta}^{el} = 170MNm/rad$	$K_{\theta\theta}^{el} = 160MNm/rad$
$K_{hh}^{el} = 70MN/m$	$K_{hh}^{el} = 50MN/m$
$K_{zz}^{el} = 200MN/m$	$K_{zz}^{el} = 100MN/m$
$C_{\theta\theta} = 1.27MNms/rad$	$C_{\theta\theta} = 2.4MNms/rad$
$C_{hh} = 0.52MN/s/m$	$C_{hh} = 0.75MN/s/m$
$C_{zz} = 1.5MN/s/m$	$C_{zz} = 1.5MN/s/m$
$q_{max} = 0.3MPa$	$q_{max} = 0.3MPa$

et du temps. Malgré un moment un peu réduit par rapport à l'expérience, les simulations permettent d'obtenir une bonne tendance de ce qu'il se passe d'un point de vue expérimental. De plus, la courbe en fonction du temps montre que les fréquences sont assez bien représentées (car les courbes numériques et expérimentales sont en phase).

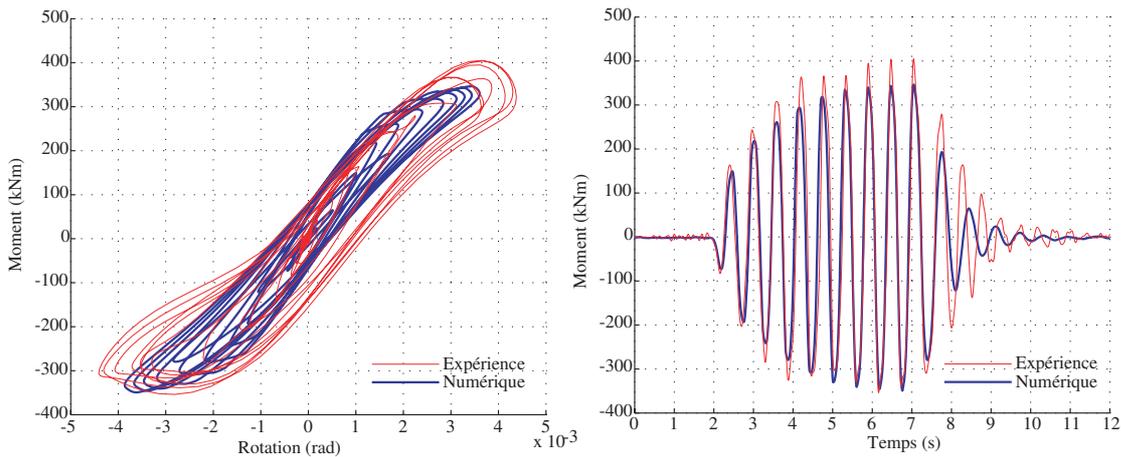


FIG. 5.17 – Essais en centrifugeuse Davis: Moment-Rotation en base et Moment-Temps pour l'essai (EE).

La figure 5.18 montre l'évolution du déplacement horizontal à la base de la structure et du déplacement vertical en fonction du temps. Les déplacements horizontaux sont bien représentés

(en terme d'extremum et de fréquence), contrairement au déplacement vertical pour lequel le tassement simulé est beaucoup moins important que le tassement apparu expérimentalement. Ceci est dû au fait que des bourrelets de sables ont probablement été engendrés autour de la fondation expérimentale, ce qui évidemment ne peut pas être pris en compte par les simulations.

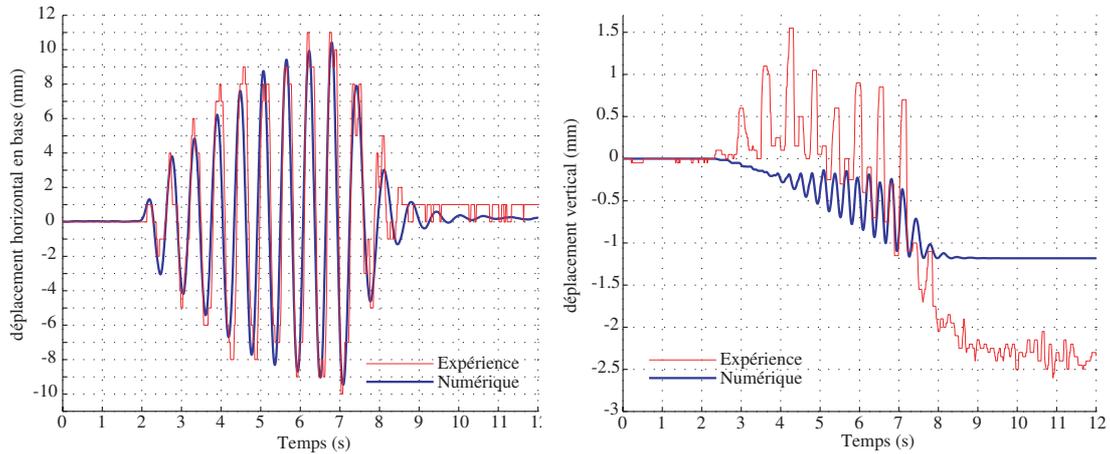


FIG. 5.18 – *Essais en centrifugeuse Davis: Déplacement horizontal en base et déplacement vertical en fonction du temps pour l'essai (EE).*

Les résultats expérimentaux et numériques pour les essais (EW) sont présentés par les figures 5.19 et 5.20.

Les mêmes remarques peuvent être effectuées pour cet essai. La taille de fondation étant plus faible dans ce cas, il est normal de trouver des tassements verticaux plus grands, ainsi que des moments un peu plus petits.

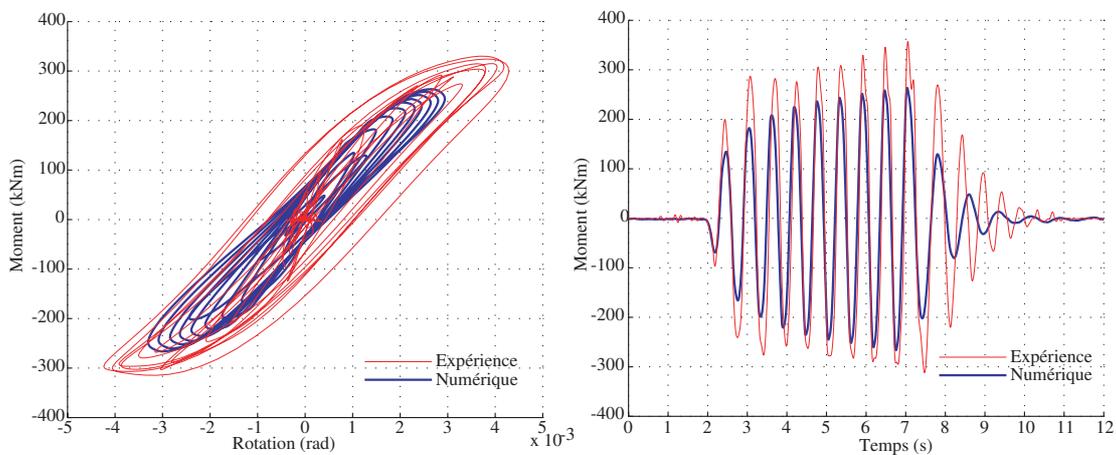


FIG. 5.19 – *Essais en centrifugeuse Davis: Moment-Rotation en base et Moment-Temps pour l'essai (EW).*

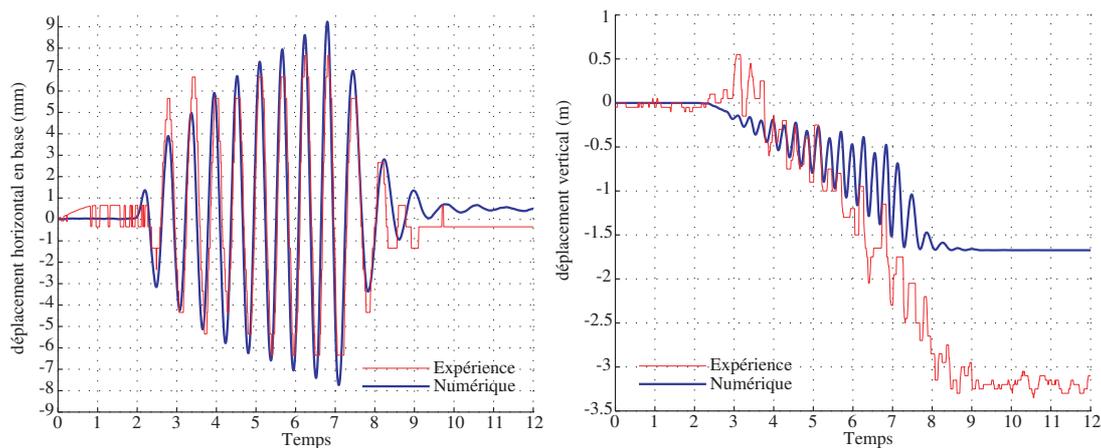


FIG. 5.20 – Essais en centrifugeuse Davis: Déplacement horizontal en base et déplacement vertical en fonction du temps pour l’essai (EW).

## 5.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons validé la capacité du macro-élément d’interaction sol-structure à reproduire le comportement d’une fondation rectangulaire ou circulaire soumise à des chargements statique, cyclique ou dynamique. Confronté à plusieurs résultats expérimentaux de la littérature, le macro-élément génère correctement la plasticité ainsi que les décollements engendrés. Les boucles des lois efforts-déplacements ont des tailles similaires ce qui est correct d’un point de vue énergétique. Les déplacements résiduels expérimentaux sont aussi reproduits numériquement ainsi que les courbes de tassements en fonction du temps. La part de décollement par rapport au tassement dû à la plasticité dans les différents essais est simulé correctement dû à un choix judicieux des paramètres de plasticité permettant de reproduire les paliers expérimentaux.

Le prochain chapitre est consacré à la modélisation d’ouvrages en béton armé (bâtiment, viaduc) qui vont permettre de mettre en avant l’ISS.

## 6.1 Introduction

Dans cette partie nous allons étudier le cas de trois ouvrages réels en béton armé et leur comportement dynamique en tenant compte de l'ISS.

Le premier ouvrage est la structure Camus IV. C'est un bâtiment de 5 étages à échelle  $\frac{1}{3}$  reposant sur un bac de sable. Ce bâtiment est testé sur une table sismique et les résultats expérimentaux seront comparés aux simulations avec le macro-élément.

La deuxième structure est un autre bâtiment en béton armé de 7 étages encastré directement sur une table sismique. Son comportement à base encastrée est d'abord étudié puis comparé à une modélisation multifibres non-linéaire. Ensuite l'ajout du macro-élément d'interface permet de faire une étude paramétrique sur le comportement de la structure en considérant différents sols.

La troisième structure étudiée est un viaduc testée expérimentalement grâce à des essais pseudo-dynamiques. Les piles de ce viaduc sont là aussi encastrées. Une première étude montre sa modélisation avec des éléments multifibres non-linéaires. Ensuite, une étude du comportement du viaduc en tenant compte de l'ISS avec le macro-élément est comparée avec une étude de type ingénierie où des ressorts linéaires sont introduits à la base de la structure.

## 6.2 Structure Camus IV

Camus IV s'inscrit dans la lignée d'une série d'essais dynamiques effectués au sein du CEA de Saclay sur la table sismique Azalée. Ces essais sont réalisés dans le cadre des projets

de recherche nationaux et européens (e.g ICONS-TMR<sup>1</sup>, ECOEST PREC8, SAFERR). Les maquettes représentent un bâtiment de 5 étages à l'échelle 1/3 (5,1m de haut), constitué de 2 voiles en béton armé, de 6 planchers, et de 2 fondations. Les différences entre les 4 premiers essais Camus concernent les règles de dimensionnement (PS92, Eurocode 8) et les conditions d'appuis. Pour les essais Camus I, II et III, la maquette était encastrée sur la table sismique. Au contraire, pour Camus IV la structure était seulement posée sur un bac de sable de 4m par 4m encastré sur la table. Sa masse était d'environ 36200kg pour la structure et 2300kg pour les fondations (soit 38500kg au total).

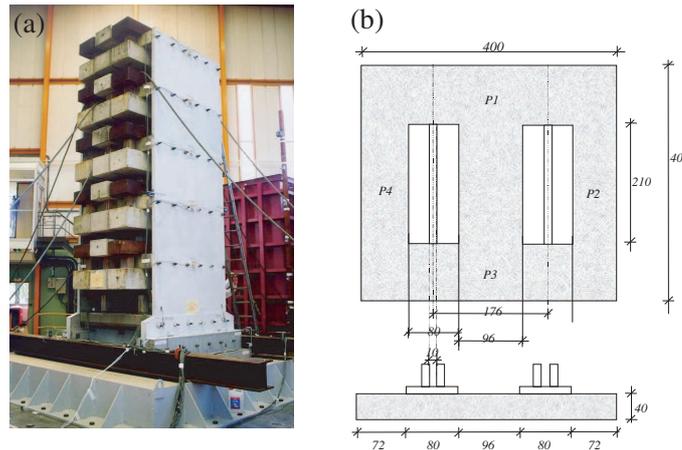


FIG. 6.1 – (a) Photo et (b) schéma de la fondation pour les essais Camus IV.

**Remarque:** toute la description de l'essai se trouve dans [ICONS, 2001], [Combescure et Chaudat, 2000] ainsi que dans [Taylor et Combescure, 2001] pour les photos.

Une modélisation simple de type brochette a été choisie. Pour chaque étage, une masse  $M_i$  et un moment d'inertie  $J_i$  sont appliqués correspondant aux masses de chaque plancher. Le bâtiment compte alors six masses (figure 6.2, et tableau 6.1). Les éléments utilisés pour modéliser la structure sont des éléments poutre Bernoulli ayant un comportement élastique linéaire. En effet lors de l'essai, quasiment aucun endommagement n'a été développé dans la structure, les non linéarités se concentrant exclusivement au niveau de la fondation et du sol.

TAB. 6.1 – Paramètres utilisés pour la modélisation des essais Camus IV.

Hauteur (m)	Masses (kg)	inerties ( $kg.m^2$ )
$h_1 = 0.1$	$M_1 = 4786$	$J_1 = 1600$
$h_2 = 1.4$	$M_2 = 6825$	$J_2 = 3203$
$h_3 = 2.3$	$M_3 = 6825$	$J_3 = 3203$
$h_4 = 3.2$	$M_4 = 6825$	$J_4 = 3203$
$h_5 = 4.1$	$M_5 = 6825$	$J_5 = 3203$
$h_6 = 5$	$M_6 = 6388$	$J_6 = 3124$

Comme pour les essais de la centrifugeuse réalisés à Davis (voir chap. 5), les conditions de sol ne correspondent pas au domaine d'utilisation du modèle. En effet, le massif de sol est d'épaisseur trop faible pour le considérer comme un milieu semi-infini. Les raideurs de sol sont

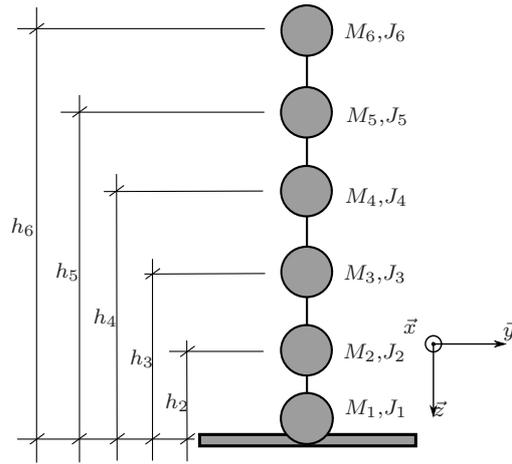


FIG. 6.2 – Modélisation de type brochette des essais Camus IV.

donc évaluées grâce aux résultats expérimentaux en calant les raideurs initiales des courbes efforts-déplacements. Les paramètres du critère de rupture sont évalués grâce aux paliers de ces courbes pour des déplacements importants. Nous obtenons finalement les paramètres donnés dans le tableaux 6.2.

TAB. 6.2 – Paramètres de plasticité pour la modélisation des essais Camus IV.

Paramètres de plasticité		Paramètres élastiques	
$a$	1	$K_{\theta\theta}^{el}$	280MNm/rad
$b$	1	$K_{hh}^{el}$	70MN/m
$c$	1	$K_{zz}^{el}$	200MN/m
$d$	1	Amortissement radiatif	
$e$	1	$C_{\theta\theta}$	0.28MNms/rad
$f$	1	$C_{hh}$	0.07MNs/m
$\kappa$	1	$C_{zz}$	0.2MNs/m
$\xi$	1		
$a_1$	1		
$a_2$	1		
$a_3$	1		
$a_4$	1		
$a_5$	1		
$q_{max}$	0.35MPa		

### 6.2.1 Analyse modale

Malgré la modélisation simplifiée, les fréquences propres du modèle numérique sont proches de celles de la structure testée. Le tableau 6.3 compare la simulation et l'expérience pour les 2 premiers modes (les autres n'ayant pas été déterminés expérimentalement). Le premier mode (mode de flexion) est très bien reproduit puisque la fréquence est identique à celle obtenue expérimentalement. Le deuxième mode, qui est ici un mode de pompage, est un peu moins bien reproduit et la structure numérique apparaît légèrement plus rigide que la structure expérimentale.

TAB. 6.3 – Comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques pour les essais Camus IV.

mode	fréquence Hz	
	Test	Numérique
1 (flexion)	3.5	3.5
2 (pompage)	13	14.8

## 6.2.2 Confrontation des résultats expérimentaux et numériques

Le chargement de la maquette s'effectue dans le sens des voiles et pour deux niveaux d'accélération du signal synthétique de Nice (0.33g et 0.52g, voir figure 6.3). Cet accélérogramme est représentatif du spectre de dimensionnement français. Les comparaisons des résultats expérimentaux et numériques sont données par les figures 6.4, 6.5, 6.6 pour l'accélérogramme à 0.33g et 6.7, 6.8, 6.9 pour l'accélérogramme à 0.52g.

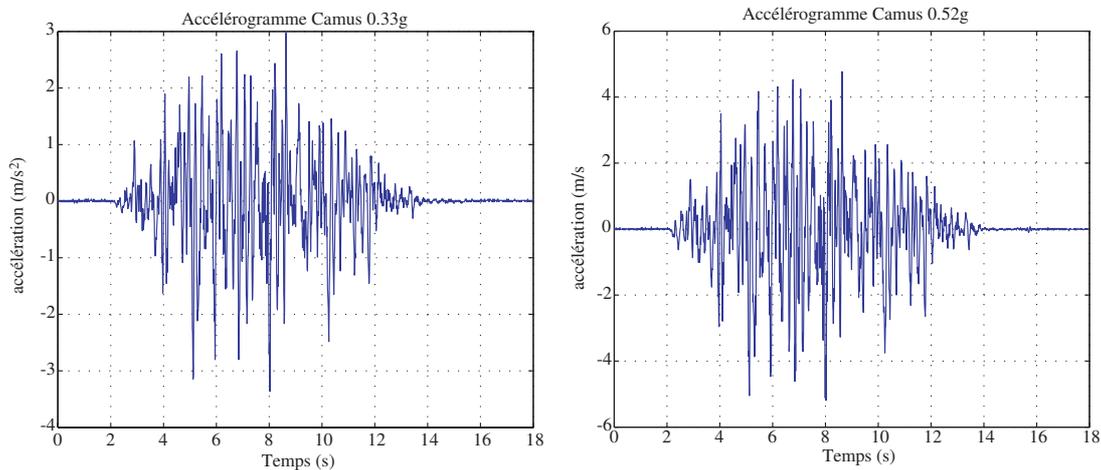


FIG. 6.3 – Accélérogrammes utilisés pour les essais Camus IV.

### 6.2.2.1 Résultats pour l'accélérogramme Nice 0.33g

La figure 6.4 montre que les efforts (moment et effort horizontal à la base de la structure) sont assez bien reproduits par le modèle. Les courbes en fonction du temps sont relativement en phase avec l'expérience et les pics sont correctement représentés. La courbe moment-rotation montre aussi que les extrema sont bien décrits. Néanmoins, les boucles numériques sont moins ouvertes que les courbes expérimentales. Le modèle numérique semble donc dissiper moins d'énergie que l'expérience.

La figure 6.5 montre le déplacement vertical du centre de la fondation. Nous remarquons clairement l'existence d'un tassement du sol au cours du temps mais aussi la présence d'une forte composante en décollement du centre de la fondation. Là aussi les extrema en décollement sont assez bien représentés alors que le tassement dû à la plastification du sol est surestimé. Cette surestimation vient sans doute du fait que la structure expérimentale repose sur un

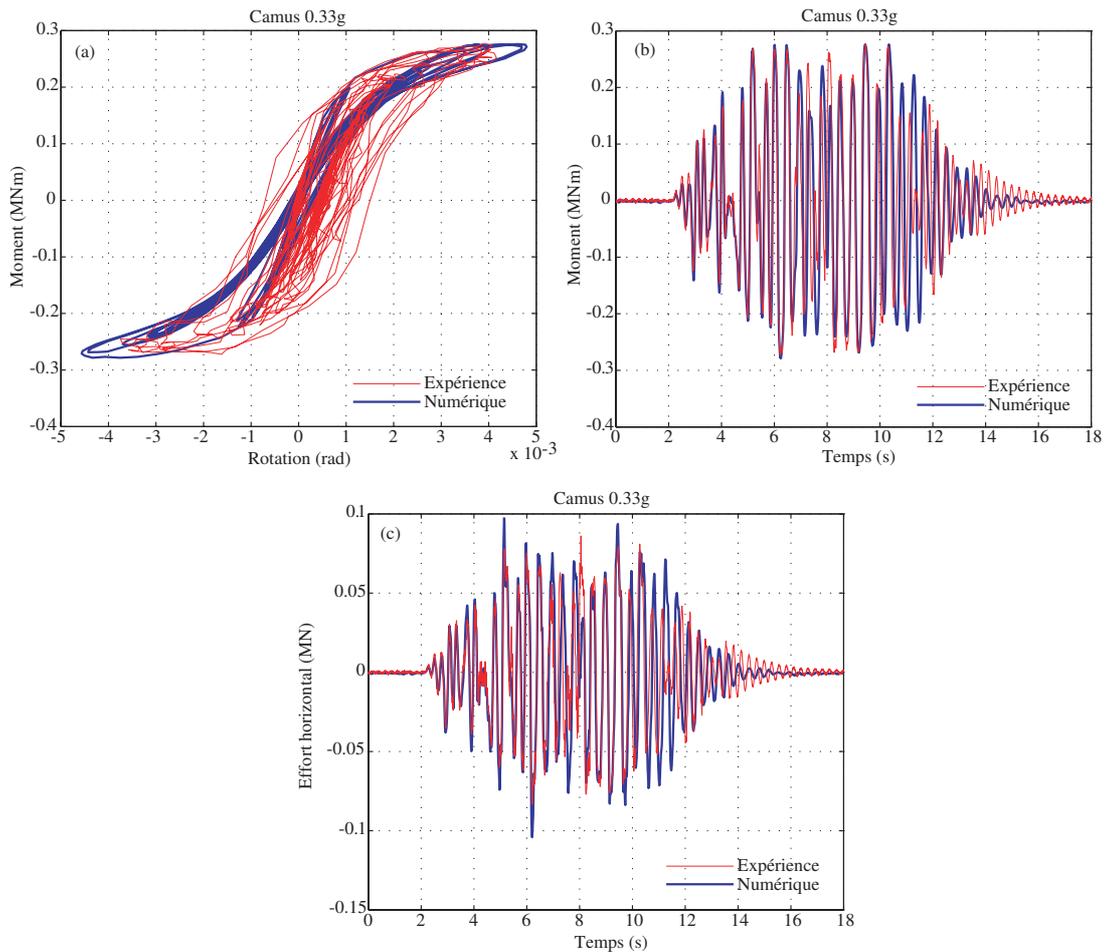


FIG. 6.4 – *Camus IV: Courbes moment-rotation, rotation-temps et effort horizontal-temps pour l’essai de niveau 0.33g.*

massif de sol d’épaisseur très faible possédant donc une “réserve de plastification” moindre que pour un massif de sol semi-infini.

Les déplacements horizontaux en tête ainsi que la rotation en base au cours du temps sont représentés par la figure 6.6. Les maxima sont bien représentés et les courbes sont en phase avec les courbes expérimentales. Cependant, un déplacement résiduel expérimental existant n’est pas reproduit par les simulations.

### 6.2.2.2 Résultats pour l’accélérogramme Nice 0.52g

Les remarques précédentes sont aussi valables pour ce nouveau niveau de sollicitation. Les efforts et déplacements sont en phase avec les résultats expérimentaux. Les maxima sont bien représentés. De même que précédemment, les tassements de la fondation sont plus importants que dans l’expérience. Ceci peut être expliqué par le fait que pendant les essais, les séismes ont été lancés les uns après les autres sans remaniement du sable. La réserve de plastification s’est donc épuisée au cours des différents essais, ce qui n’est pas reproduit par la simulation numérique. Une manière de prendre en compte ce phénomène serait de faire varier les paramètres

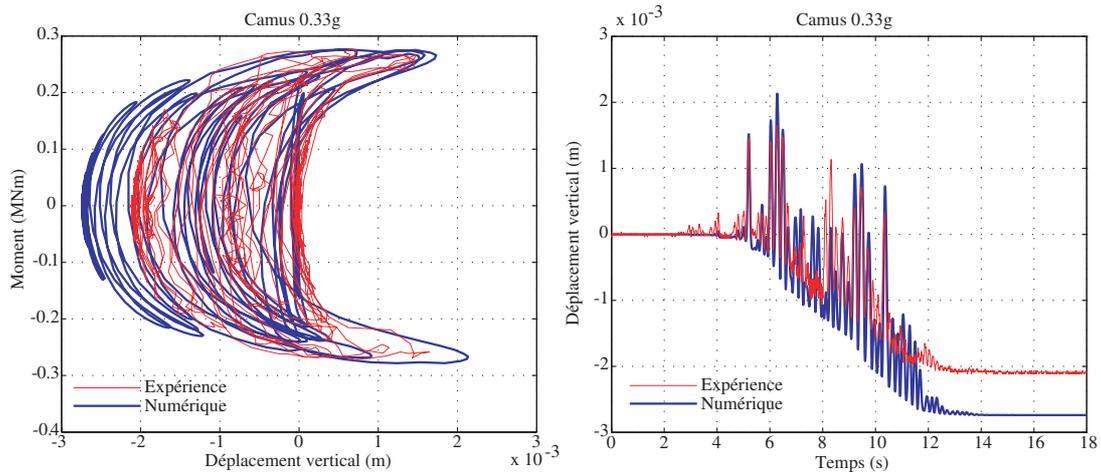


FIG. 6.5 – *Camus IV: Courbes moment-soulèvement et soulèvement-temps pour l'essai de niveau 0.33g.*

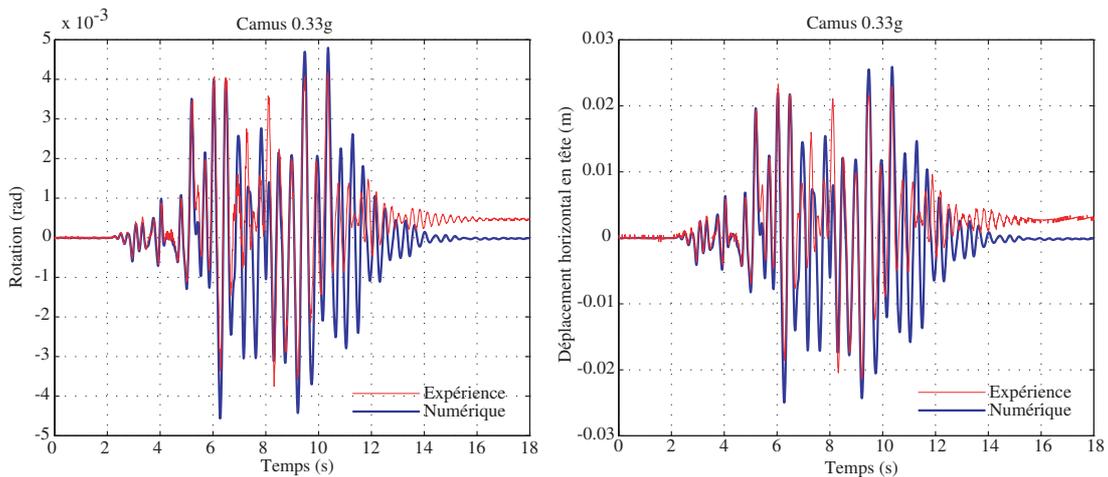


FIG. 6.6 – *Camus IV: Courbes rotation-temps et déplacement en tête-temps pour l'essai de niveau 0.33g.*

du sol, comme par exemple la capacité ultime de la fondation  $q_{max}$  qui aurait tendance à augmenter dû à la densification du massif. Rappelons qu'une adaptation de paramètres similaires a été utilisée pour reproduire le comportement des essais cycliques TRISEE au paragraphe 5.2.

### 6.2.2.3 Résultats numériques pour un chargement dans deux directions horizontales

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que le macro-élément 3D fonctionne avec un chargement dans deux directions horizontales. L'accélérogramme Nice 0.52g est appliqué dans la direction  $\vec{x}$  tandis que l'accélérogramme Nice 0.33g est appliqué dans la direction  $\vec{y}$ . Cette simulation est purement numérique puisqu'expérimentalement le chargement n'était que dans

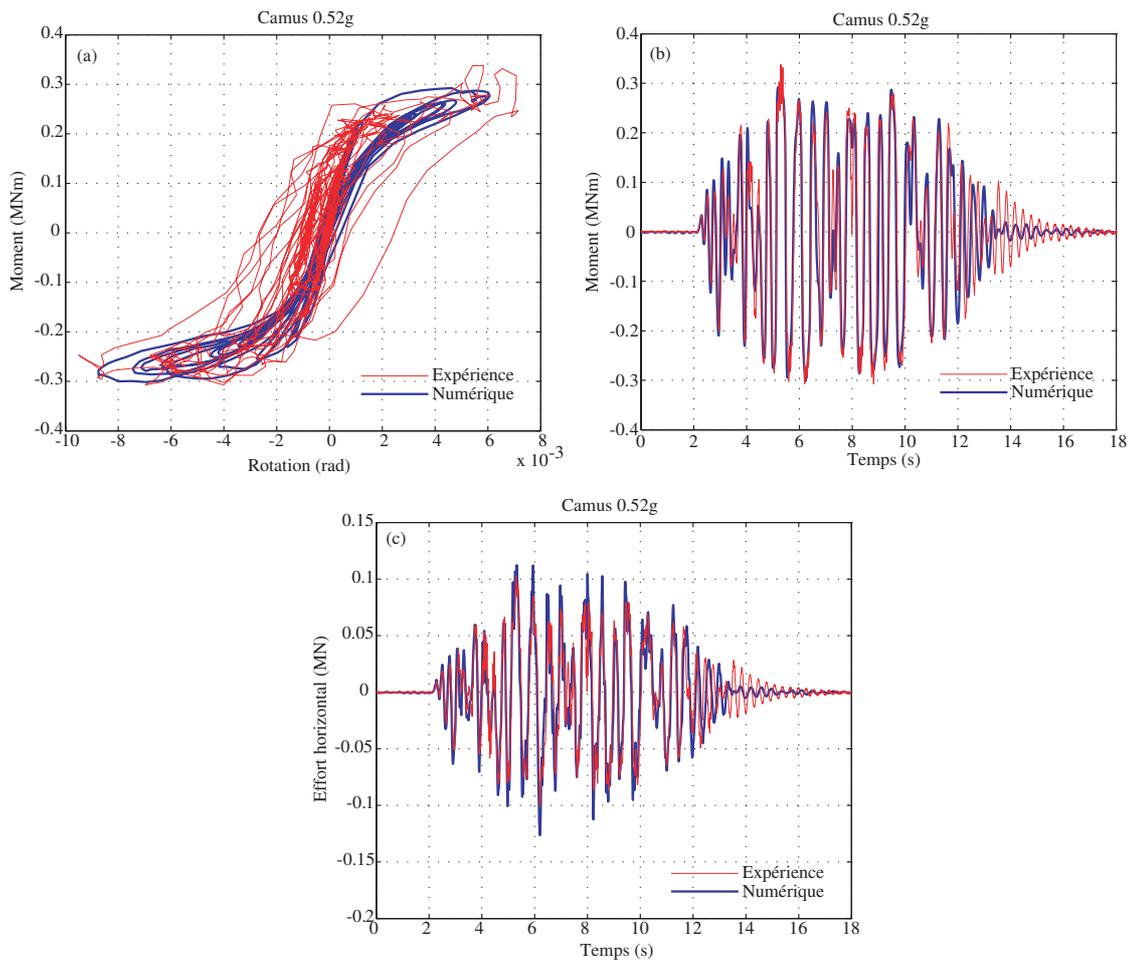


FIG. 6.7 – Camus IV: Courbes moment-rotation, rotation-temps et effort horizontal-temps pour l'essai de niveau 0.52g.

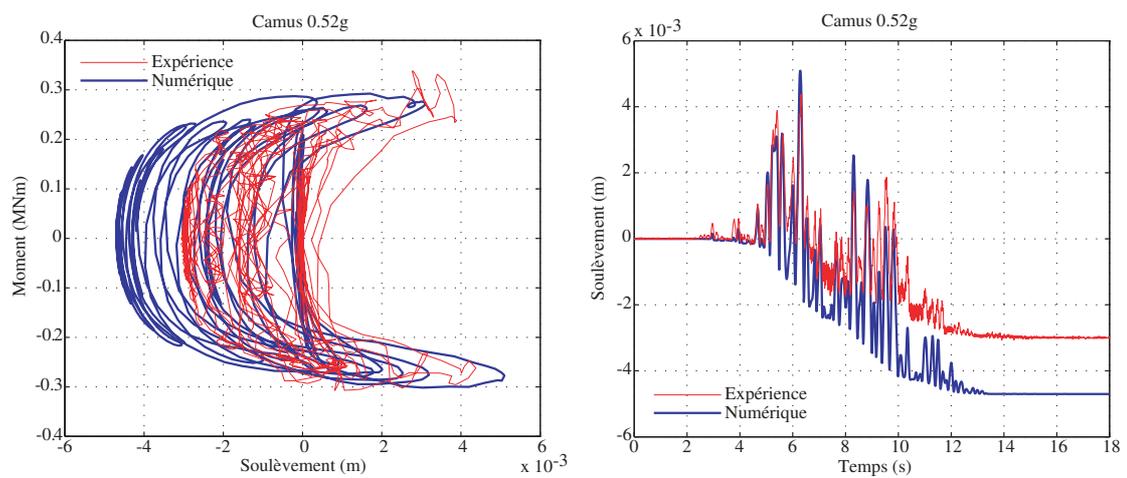


FIG. 6.8 – Camus IV: Courbes Moment-soulèvement et soulèvement-temps pour l'essai de niveau 0.52g.

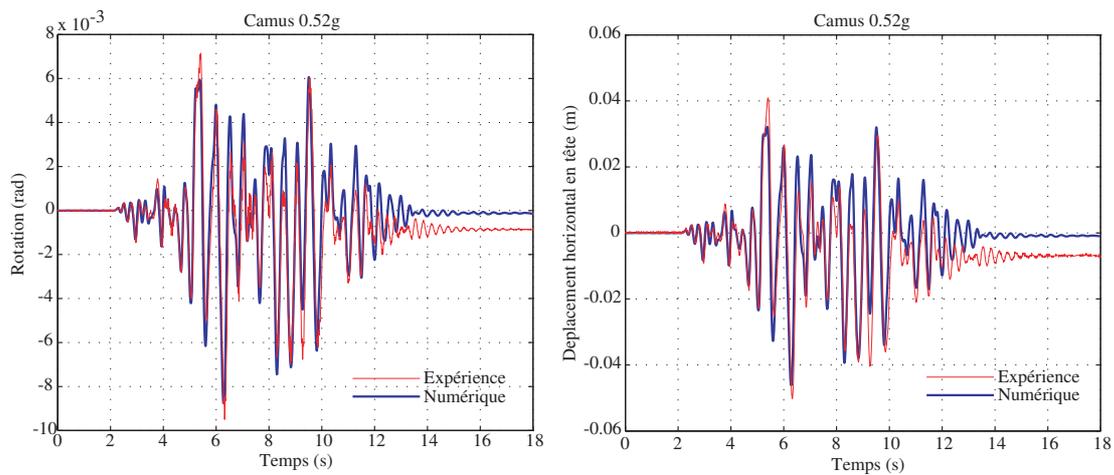


FIG. 6.9 – *Camus IV: Courbes rotation-temps et déplacement en tête-temps pour l'essai de niveau 0.52g.*

la direction  $\vec{x}$ . Néanmoins, ce calcul donne une idée qualitative et quantitative du comportement de la structure sous un chargement dynamique dans deux directions. Il est donné par la figure 6.10.

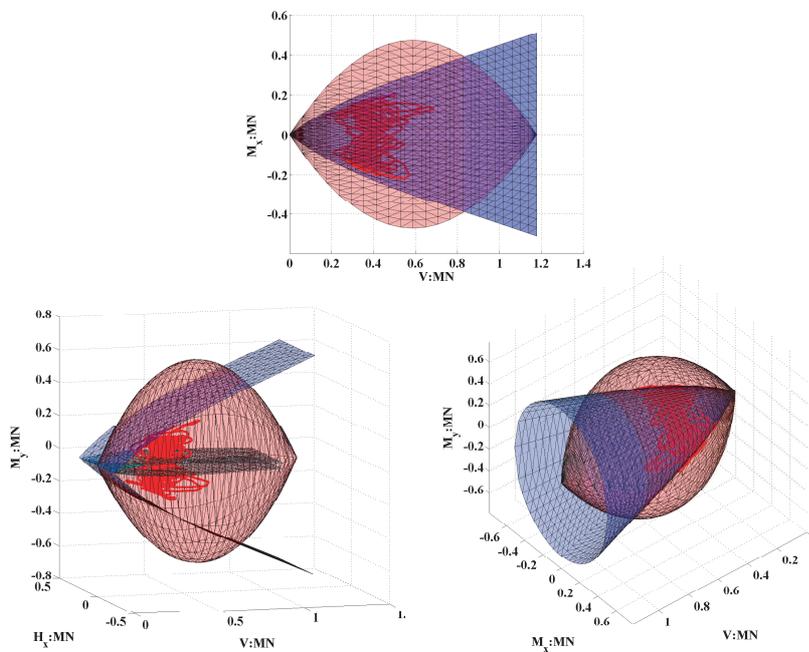


FIG. 6.10 – *Camus IV: Courbes efforts horizontal-vertical-moments pour l'essai 3D de niveau 0.52g dans la direction  $\vec{x}$  couplé au niveau 0.33g dans la direction  $\vec{y}$ .*

## 6.3 Structure NEES

Dans le cadre d'un partenariat entre le consortium Américain NEES, l'université de Californie de San Diego (UCSD) et l'association du ciment Portland (PCA), des essais dynamiques d'une structure de grande hauteur soumise à des séismes d'intensités croissantes ont été réalisés. Il s'agit d'une structure en béton armé de 7 étages à échelle 1 d'une hauteur de 20m composée de deux murs perpendiculaires reliés par les planchers et encastrée sur une table sismique de haute performance (masse embarquable 400 tonnes). Cette table est située proche de l'université de Californie à San Diego.

Dans cette section nous détaillons la modélisation de la structure NEES avec comme objectif de montrer l'influence de l'ISS (voir aussi [Grange *et al.*, 2006b] et [Grange *et al.*, 2008b]). Cette étude, qui est la première dans ce document à coupler les non-linéarités dans la structure avec l'ISS par l'intermédiaire du macro-élément, est détaillée en trois parties:

- Dans la partie I, une modélisation en aveugle (i.e les résultats expérimentaux n'étaient pas connus - blindtest) de la structure NEES encastrée sur la table vibrante est présentée. Cette étude constitue notre contribution au benchmark international NEES/UCSD [NEES7story, 2006].
- Ensuite (Partie II), une amélioration de la modélisation précédente est proposée en tenant compte des résultats expérimentaux.
- Enfin (Partie III), l'ISS est étudiée avec en plus une étude paramétrique en considérant plusieurs types de sols.

Nous montrons ici d'une manière quantitative que la modélisation effectuée permet de décrire de manière assez précise le comportement expérimental de la structure, et d'une manière qualitative que le modèle donne de bons résultats concernant la distribution de l'endommagement. D'après ces résultats il apparaît alors possible d'utiliser ce genre d'approche pour faire des études paramétriques sur de larges variétés de configurations impossible d'étudier expérimentalement.

### 6.3.1 Partie I: Modélisation en aveugle

Le but de cette partie est de proposer une modélisation en aveugle des essais dynamiques sur la structure NEES encastrée sur la table sismique (figure 6.11). La structure est composée de deux murs principaux perpendiculaires en béton armé: le mur d'âme (web wall) et le mur de semelle (flange wall) liés par les planchers. Une colonne précontrainte est présente permettant de limiter tout comportement de torsion de la structure (le comportement est considéré comme plan). Des colonnes permettent également de supporter le grand porte-à-faux des planchers. Celui-ci est présent puisque la structure étudiée n'est en réalité qu'une partie d'un bâtiment réel courant construit aux Etats-Unis.

Le chargement est appliqué seulement dans la direction  $\vec{Y}$  (parallèlement au mur d'âme). Quatre séismes d'amplitude croissante allant de 0.15g à 0.85g sont appliqués à la structure. La modélisation est effectuée avec des éléments multifibres Timoshenko [Kotronis et Mazars, 2005] et [Mazars *et al.*, 2006]. Les lois de comportement des matériaux sont basées sur les lois d'endommagement du béton [La-Borderie, 1991] et sur la plasticité des aciers [Menegoto et

Pinto, 1973], [Filippou *et al.*, 1983]. L'élément poutre multifibre Timoshenko et la loi d'endommagement ont été introduits dans FEDEASLab [Filippou et Constandines, 2004]. Nous présentons en détail ci-dessous les accélérogrammes, le maillage, les paramètres matériaux ainsi que les résultats du modèle numérique comparés aux résultats expérimentaux.

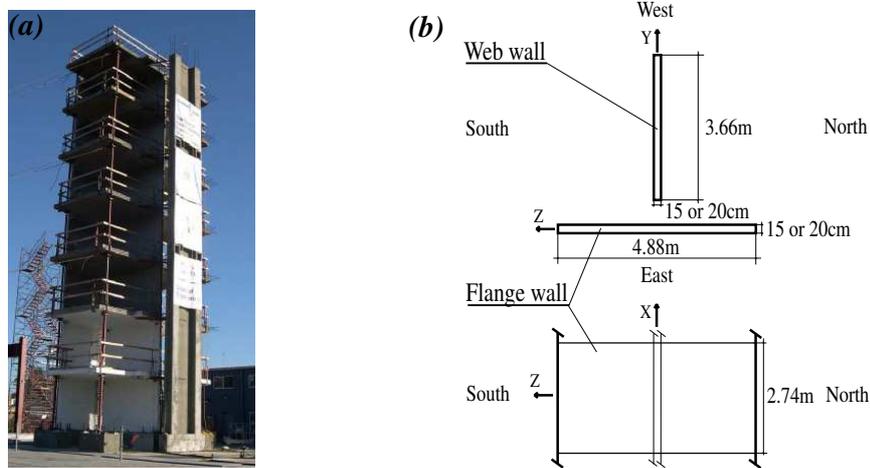


FIG. 6.11 – NEES: (a) Vue Nord-Ouest de la structure (b) Données géométriques de la structure.

### 6.3.1.1 Accélérogrammes d'entrées et leur spectre

Quatre accélérogrammes d'entrée (dénommés EQ1, EQ2, EQ3 and EQ4) ont été utilisés pour les expériences. Leur amplitude, c'est à dire leur accélération maximale varie entre 0.15g et 0.85g. Les deux premiers accélérogrammes EQ1 et EQ2 proviennent des composantes longitudinales et transversales du séisme de San Fernando en 1971, EQ3 provient de la composante longitudinale du séisme de Northridge en 1994 et enfin EQ4 correspond au séisme de Northridge de 1994 à Sylmar (figure 6.12). Ils sont reproduits par la table vibrante NEES-UCSD.

Les pics d'accélération de EQ1 et EQ2 sont respectivement 0.15g et 0.26g. EQ3 et EQ4 sont très proches en terme de contenu fréquentiel et leur pic d'accélération est respectivement de 0.33g et 0.85g. Le contenu fréquentiel de EQ3 et EQ4 est plutôt riche aux alentours de 3.2Hz (soit  $T = 0.31s$ ), fréquence plutôt éloignée de la première fréquence propre de la structure expérimentale (mesurée à 1.82Hz ( $T = 0.55s$ )) (figure 6.13). Cependant les spectres de EQ3 et EQ4 présentent d'autres pics aux alentours de 10Hz ( $T = 0.1s$ ), cette fois ci très proches du second mode de flexion de la structure calculé numériquement.

### 6.3.1.2 Discrétisation et maillage

Afin de réaliser un maillage simple et le plus représentatif possible, une analyse du fonctionnement mécanique réelle de la structure est indispensable. Celle-ci est composée de deux murs principaux : le mur d'âme et le mur de semelle liés entre eux par une liaison ayant une très faible rigidité en rotation. Ils constituent en fait le squelette de la structure qui permet aussi de soutenir les 7 planchers. Les étais permettent de supporter les extrémités des planchers qui ont d'importants porte-à-faux. La sollicitation dynamique est appliquée dans la direction du mur d'âme selon la direction Y (figure 6.14). Afin d'éviter tout effet 3D et particulièrement les

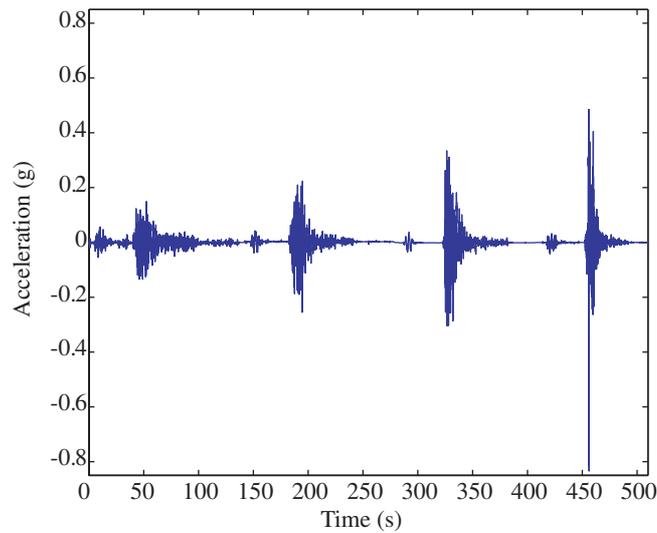


FIG. 6.12 – NEES: Accélérogrammes EQ1, EQ2, EQ3 et EQ4.

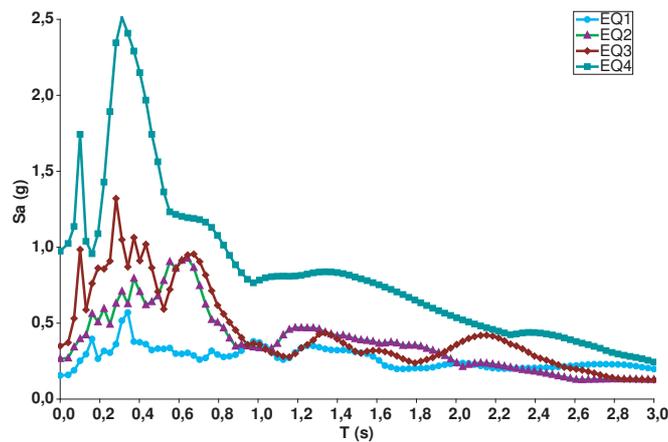


FIG. 6.13 – NEES: Spectres à 5% d'amortissement des accélérogrammes EQ1, EQ2, EQ3 et EQ4.

modes de torsion de la structure, une colonne précontrainte ainsi qu'un système de bracons sont utilisés.

La sollicitation dynamique étant unidirectionnel, les étais, la colonne précontrainte ainsi que les bracons ne sont pas pris en compte dans le modèle numérique. La figure 6.14(a) donne une représentation du maillage éléments finis. Le mur d'âme et le mur de semelle sont décomposés en 19 éléments poutres multifibres Timoshenko (4 éléments pour le niveau 1 et 2, 3 éléments pour le niveau 3 et 2 éléments pour les niveaux 5, 6 et 7). La liaison entre les 2 murs est modélisée par des éléments barres. 4 éléments poutres Bernoulli linéaires sont utilisés pour reproduire la table sismique.

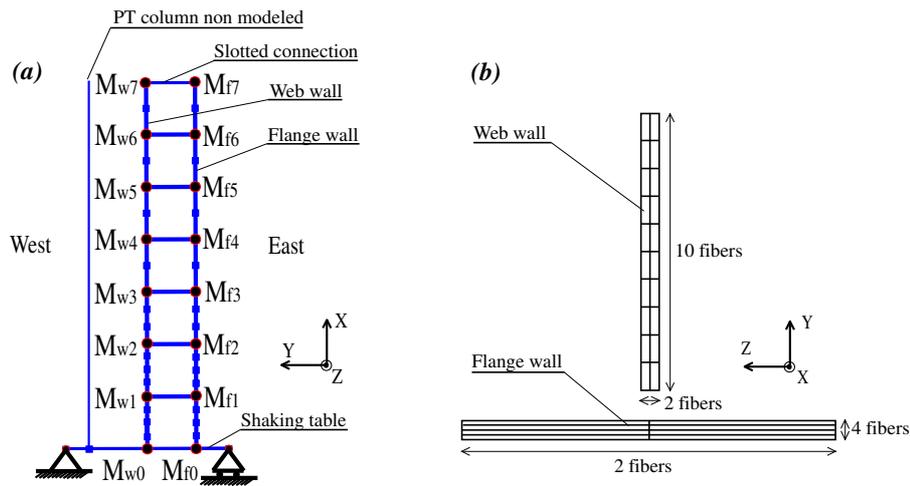


FIG. 6.14 – NEES: (a) Maillage éléments finis et représentation des masses concentrées (b) Représentation des fibres dans une section donnée.

### 6.3.1.3 Répartition des masses

Des masses concentrées sont considérées à chaque étage prenant en compte les masses du plancher correspondant, ainsi que les demi-hauteurs de murs en dessous et au dessus de l'étage considéré. Elles sont présentées dans les tableaux 6.4, 6.5 et par la figure 6.14(a). La masse totale de la structure est d'environ  $M_{tot} = 182000kg$ .

TAB. 6.4 – NEES: Détail des masses et des inerties de rotation pour chaque nœud du “web wall”.

Nœud	Masses $M_w$ (kg)	Inerties de rotation $I_{wz}$ ( $kg.m^2$ )
$w_0$	11780	20080
$w_1$	18470	23100
$w_2$	17910	22000
$w_3$	17910	22000
$w_4$	17910	22000
$w_5$	17910	22000
$w_6$	17910	22000
$w_7$	16200	22000

TAB. 6.5 – NEES: Détail des masses et des inerties de rotation pour chaque nœud du “flange wall”.

Node	Masses $M_f$ (kg)	Inerties de rotation $I_{fz}$ ( $kg.m^2$ )
$f_0$	15500	5499
$f_1$	5376	3582
$f_2$	4576	3071
$f_3$	4576	3071
$f_4$	4576	3071
$f_5$	4576	3071
$f_6$	4576	3071
$f_7$	2126	1535

### 6.3.1.4 Lois de comportement des matériaux

Les lois de comportement pour le béton soumis à des chargements cycliques doivent prendre en compte plusieurs phénomènes comme une perte de rigidité du matériau causée par son endommagement, une restitution de la raideur grâce à la refermeture des fissures, et la création de déformations permanentes en traction et en compression liées aux endommagements. Pour simuler ce comportement, le modèle d'endommagement [La-Borderie, 1991] avec 2 variables scalaires d'endommagement (une en compression et une en traction) est utilisée (figure 6.15).

La déformation totale est donnée par:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{\text{in}} \\ \epsilon^e = \frac{\langle \sigma \rangle_+}{E(1-D_1)} + \frac{\langle \sigma \rangle_-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E} (\sigma - \text{Tr}(\sigma) \mathbf{I}) \\ \epsilon^{\text{in}} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} \mathbf{I} \end{cases} \quad (6.1)$$

Où:

$$\begin{cases} \text{Tr}(\sigma) \in [0, +\infty) \rightarrow \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = \mathbf{I} \\ \text{Tr}(\sigma) \in [-\sigma_f, 0] \rightarrow \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = \left(1 - \frac{\text{Tr}(\sigma)}{\sigma_f}\right) \mathbf{I} \\ \text{Tr}(\sigma) \in (-\infty, -\sigma_f] \rightarrow \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \cdot \mathbf{I} \end{cases} \quad (6.2)$$

Avec  $\epsilon^e$  la déformation élastique,  $\epsilon^{\text{in}}$  la déformation anélastique et  $\sigma$  le tenseur de contraintes.  $\mathbf{I}$  représente le tenseur identité,  $\text{Tr}(\sigma) = \sigma_{ij}$ ,  $f$  est la fonction de refermeture des fissures et  $\sigma_f$  la contrainte de refermeture des fissures.  $\langle \cdot \rangle_+$  représente la partie positive et  $\langle \cdot \rangle_-$  la partie négative des tenseurs.  $E$  est le module d'Young initial et  $\nu$  le coefficient de Poisson.  $D_1$  et  $D_2$  sont respectivement les variables d'endommagements en traction et en compression,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des constantes matériaux. Le critère d'endommagement est exprimé de la manière suivante  $f_i = Y_i - Z_i$  ( $i = 1$  pour la traction ou 2 pour la compression,  $Y_i$  est l'effort associé à la variable d'endommagement  $D_i$  et  $Z_i$  est une limite dépendant des variables d'écroutissements). Les lois d'évolutions pour les variables d'endommagements  $D_i$  sont les suivantes:

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i (Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad (6.3)$$

Où  $Y_{0i}$  est la limite élastique initiale ( $Y_{0i} = Z_i(D_i = 0)$ ) et  $A_i, B_i$  des constantes du matériau. Pour les calculs présentés ici une version uniaxiale du modèle d'endommagement est utilisée (le cisaillement est considéré linéaire). La figure 6.15 donne la réponse uniaxiale contrainte-déformation du modèle pour un chargement en traction-compression.

Une version modifiée du modèle classique Menegoto-Pinto [Filippou *et al.*, 1983], [Menegoto et Pinto, 1973] avec un écroutissage isotrope est utilisé pour l'acier.

Les données matériaux du béton et de l'acier ont été calées par rapport aux valeurs des essais sur matériaux fournis par le règlement du benchmark. Pour simplifier le problème, seulement un type de béton parmi les 15 différents présents dans la structure réelle a été utilisé pour la modélisation (béton de type c3 dans la nomenclature du concours qui semblait être le plus

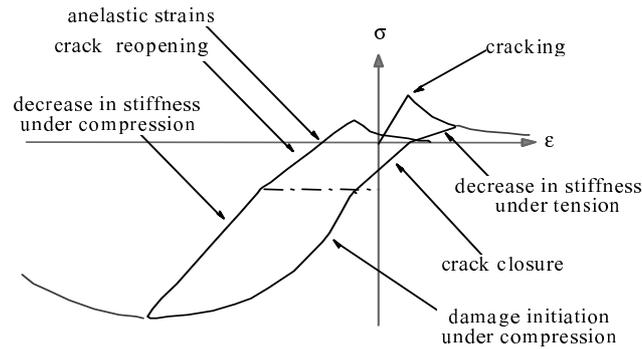


FIG. 6.15 – Réponse uniaxiale cyclique du modèle La Borderie.

représentatif). Ce béton a les propriétés suivantes : une contrainte ultime en compression de  $f_c = 37.4MPa$  ( $= 5.43ksi$ )<sup>2</sup> pour une déformation de compression  $\epsilon_{cu} = 0.00259$ , un module d'Young  $E = 24.46GPa$  ( $= 3549ksi$ ), une contrainte ultime en traction de  $f_t = 3MPa$  ( $= 0.43ksi$ ) (obtenu grâce à la relation du [BAEL91, 2000]  $f_t = 0.6+0.06f_c$ ). De même pour l'acier, le plus représentatif a été choisi pour toute la structure. Cet acier a les propriétés suivantes : une contrainte de rupture  $f_{su} = 710MPa$  ( $= 103ksi$ ) pour une déformation  $\epsilon_{su} = 0.10$ , et une limite élastique  $f_y = 450MPa$  ( $= 65.3ksi$ ) pour une déformation  $\epsilon_{sh} = 0.0060$ . Ces propriétés nous permettent de choisir les paramètres matériaux utilisés dans les lois de comportement. Elles sont répertoriées dans le tableau 6.6.

TAB. 6.6 – NEES: Données matériaux utilisées pour les lois de comportement.

Paramètres du béton		Paramètres de l'acier	
$E$	$24.46GPa$	$E$	$200GPa$
$\nu$	$0.2$	$f_y$	$450MPa$
$Y_{01}$	$335Pa$	$f_{su}$	$710MPa$
$Y_{02}$	$0.05MPa$	$\epsilon_{sh}$	$0.0060$
$A_1$	$4000MPa^{-1}$	$\epsilon_{su}$	$0.10$
$A_2$	$4.01MPa^{-1}$		
$B_1$	$1.2$		
$B_2$	$1.335$		
$\beta_1$	$1MPa$		
$\beta_2$	$-40MPa$		
$\sigma_f$	$3.5MPa$		

### 6.3.1.5 Caractéristiques des sections multifibres

Les éléments multifibres composant le mur d'âme sont décomposés en 20 fibres de béton et ceux du mur de semelle en 8 fibres de béton (figure 6.14 (b)). Le nombre et la position des fibres représentant les aciers longitudinaux sont les mêmes que ceux données par les plans du concours (voir le détail des sections dans les règles du concours [NEES7story, 2006]).

<sup>2</sup> les unités du système américain, les seules acceptées pour participer au benchmark, sont données à titre indicatif

### 6.3.1.6 Rigidité de la table sismique

La table sismique est modélisée par quatre éléments poutre Bernoulli linéaires. La longueur totale des poutres est égale à la longueur de la table sismique. Deux d'entre elles sont basées sous l'emprise de la structure et ont des rigidités de flexion très grandes. La rigidité de flexion des deux autres poutres est calée sur la rigidité en rotation expérimentale donnée dans les règles du concours (figure 6.16).

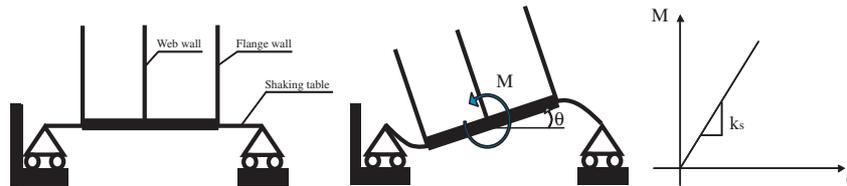


FIG. 6.16 – NEES: Calibration des raideurs en rotation de la table sismique.

### 6.3.1.7 Stratégie numérique

Un schéma classique d'intégration temporelle de Newmark est utilisé pour les calculs en faisant l'hypothèse d'une variation constante de l'accélération entre 2 pas ( $\gamma = \frac{1}{2}$  and  $\beta = \frac{1}{4}$ ). La matrice sécante est utilisée lors de la résolution de la méthode de Newton. L'amortissement de Rayleigh a été ajusté à 2% sur les premier et quatrième modes. L'effet P- $\delta$  est négligé et pour des raisons numériques et de coût de calculs les 4 séismes (EQ1, EQ2, EQ3, EQ4) sont lancés indépendamment, c'est-à-dire que cela revient à considérer que la structure n'est pas du tout endommagée à chaque nouveau départ de séisme.

### 6.3.1.8 Analyse modale

L'analyse modale du modèle numérique nous permet d'obtenir les fréquences et les déformées modales données dans le tableau 6.7 et par la figure 6.17.

Le premier mode, qui est un mode de flexion, se trouve à la fréquence relativement faible de 1.74Hz. Cette valeur est assez proche de celle mesurée expérimentalement de 1.82Hz durant un test où la structure a été soumise à un bruit blanc. Le second mode est en réalité un mode de flexion et de pompage couplé. La forme de ce mode (flexion et pompage) provient du fait que la structure est excentrée sur la table sismique ce qui génère des déplacements non symétriques.

TAB. 6.7 – NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: modes et fréquences de la structure.

Modes	Fréquences Hz	Type de déformée modale
1	1.74	flexion 0.25T
2	7.94	pompage(+flexion)
3	10.33	flexion 0.5T

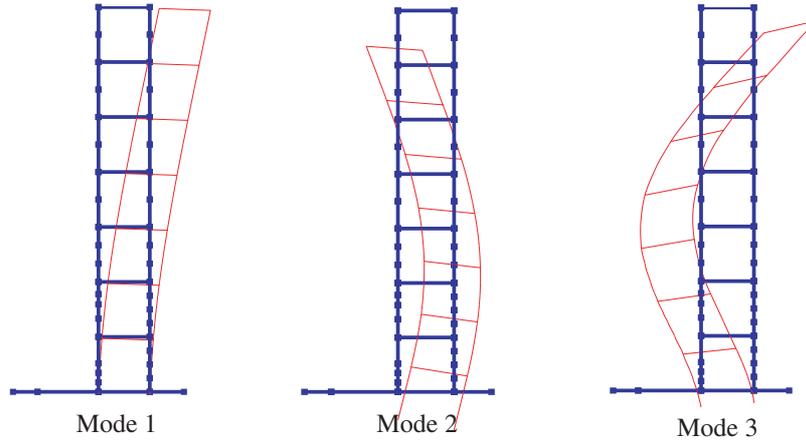


FIG. 6.17 – *NEES - Structure encastree, résultats en aveugle: déformées modales (mode 1: flexion, mode 2: pompage(+flexion), mode 3: flexion).*

### 6.3.1.9 Analyse dynamique

Les valeurs maximales expérimentales et numériques des moments et des efforts tranchants pour chaque niveau et chacun des 4 séismes (EQ1, EQ2, EQ3, EQ4) sont présentés dans la figure 6.18. Les déplacements latéraux, les accélérations totales et les déplacements latéraux relatifs entre étages sont présentés dans les figures 6.19 et 6.20.

Le moment à l'étage  $i$  ( $M_i$ ) et l'effort tranchant à l'étage  $V_i$  sont calculés à l'aide des accélérations des masses situés au dessus de cet étage avec les formules suivantes (equations 6.4 and 6.5):

$$M_i = \sum_{k=i+1}^7 (M_{wi} + M_{fi}) \ddot{u}_{Yk} (X_k - X_i) \quad i \in [0; 6] \quad (6.4)$$

$$V_i = \sum_{k=i+1}^7 (M_{wi} + M_{fi}) \ddot{u}_{Yk} \quad i \in [0; 6] \quad (6.5)$$

Où  $\ddot{u}_{Yk}$  est l'accélération horizontale selon l'axe  $Y$  du nœud  $k$ ,  $M_{wk}$  et  $M_{fk}$  les masses concentrées, et  $X_k$  la hauteur (selon l'axe  $X$ ) du nœud  $k$  où  $i \in [0; 6]$ .

Le déplacement latéral relatif entre deux étages entre les nœuds  $i$  et  $i+1$  ( $ID_{i,i+1}$ ) est calculé grâce à la relation 6.6:

$$ID_{i,i+1} = \frac{u_{Yi+1} - u_{Yi}}{X_{i+1} - X_i} \quad i \in [0; 6] \quad (6.6)$$

Où  $u_{Yk}$  est le déplacement horizontal selon l'axe  $Y$  du nœud  $k$  et  $X_k$  est la hauteur (selon l'axe  $X$ ) du nœud  $k$ .

Les résultats numériques sont généralement proches des résultats expérimentaux. Les moments ainsi que les efforts tranchants sont en général sous-estimés pour EQ1 et EQ2 alors qu'ils sont

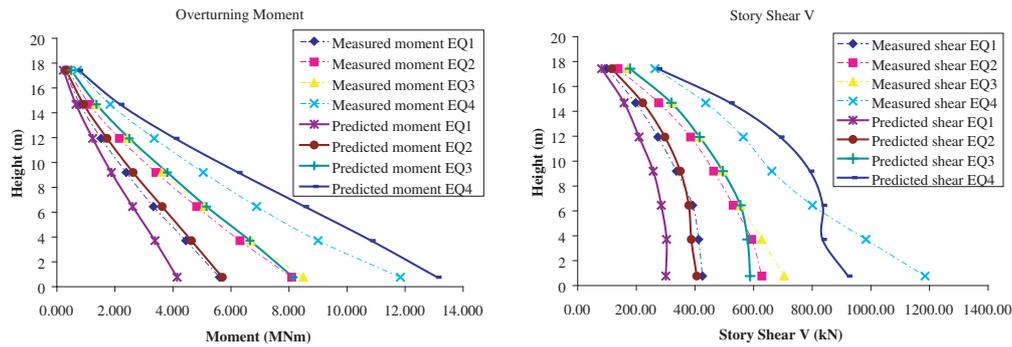


FIG. 6.18 – NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: moments et efforts tranchants maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).

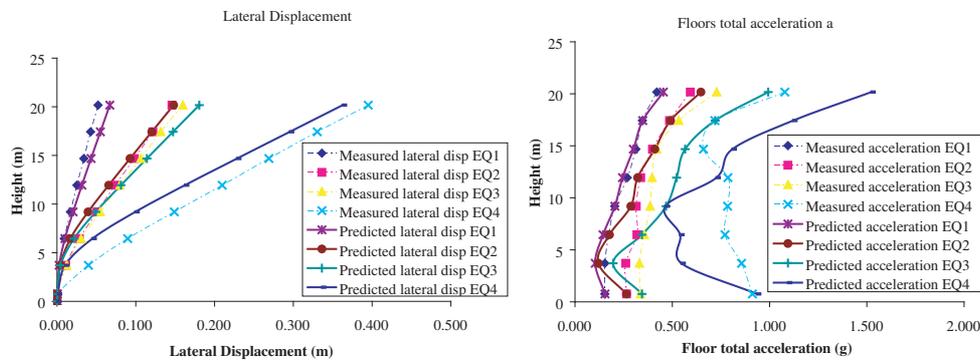


FIG. 6.19 – NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: déplacements latéraux et accélérations maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).

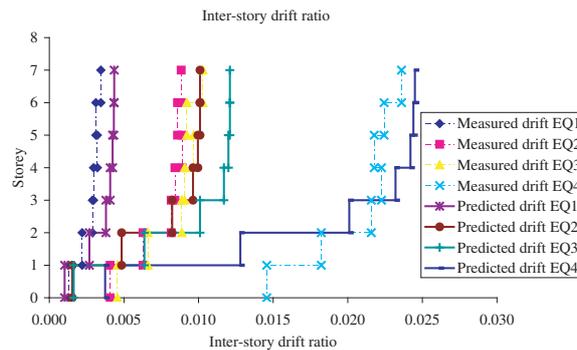


FIG. 6.20 – NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: déplacements latéraux relatifs maximum à différents niveaux pour les quatre séquences, comparaisons entre le comportement expérimental (pointillés) et numériques (lignes continues).

surestimés pour EQ4. Les déplacements latéraux sont proches de l'expérience pour EQ1, EQ2, et EQ3 et légèrement sous-estimés pour EQ4. Cette différence semble provenir du fait que les quatre accélérogrammes ont été lancés indépendamment, ce qui génère un peu moins d'endommagement qu'en réalité. De plus une rotule plastique s'est développée au 1er étage dans le modèle numérique, alors que dans l'expérience cette rotule s'est créée seulement à

la base de la structure (en effet il existe un point anguleux sur la courbe de déplacements maximum, voir figure 6.19). Cette différence vient du fait que les barres d'aciers à la jonction entre les étages 0 et 1 n'ont pas été prises en compte lors de la simulation numérique. Ceci entraîne dans la simulation une répartition de l'endommagement sur les 2 premiers étages comme le montre la figure 6.21 (cette variable d'endommagement varie entre 0: section non endommagée et 1: section complètement endommagée. En filtrant ces valeurs entre 0.95 et 1.0, nous pouvons avoir une image de la distribution des fissures apparentes dans la structure).

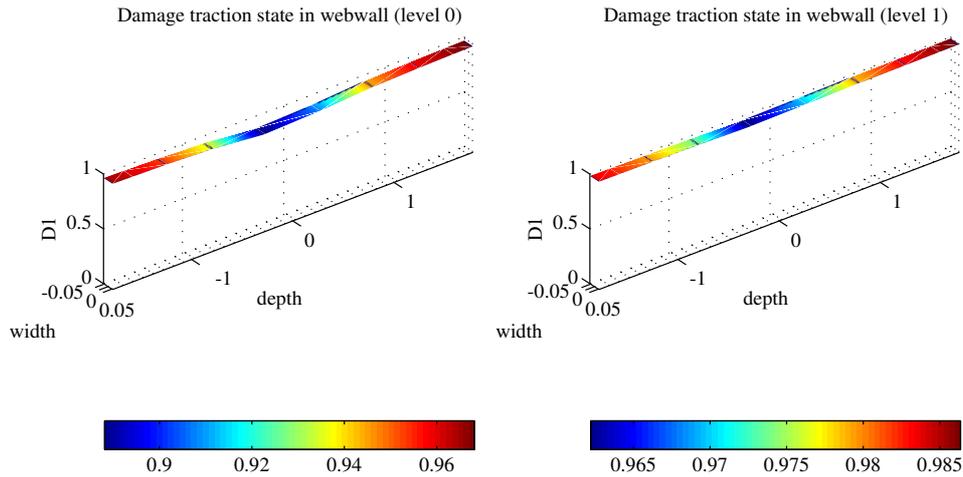


FIG. 6.21 – *NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: état d'endommagement aux étages 0 et 1 pour EQ1.*

Par ailleurs, les déplacements en tête en fonction du temps pour les séquences EQ1 et EQ4 sont présentés en figure 6.22. Pour EQ1 la simulation prédit relativement bien le comportement expérimental pendant les dix premières secondes. Après cela, le déplacement est surestimé. Pour la séquence EQ4, les déplacements maximum sont reproduits correctement. Nous remarquons un léger décalage entre les 2 courbes particulièrement à la fin de la séquence EQ1.

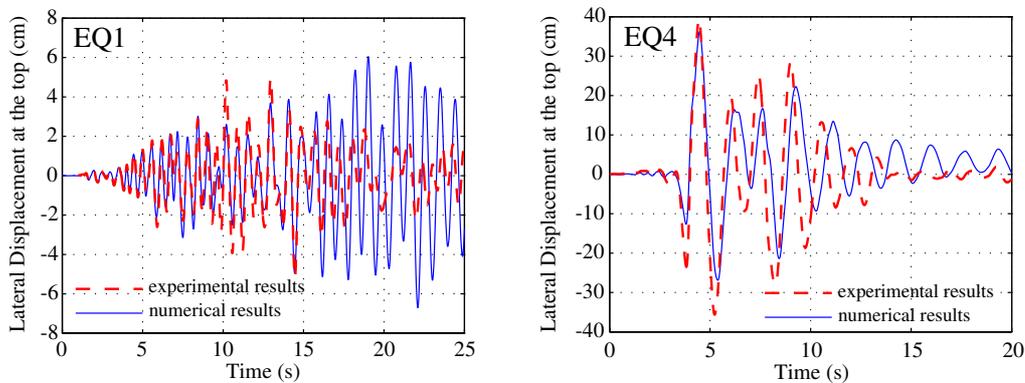


FIG. 6.22 – *NEES - Structure encastrée, résultats en aveugle: déplacements latéraux en tête en fonction du temps pour les séquences EQ1 et EQ4. Résultats expérimentaux (pointillés) et résultats numériques en aveugle (lignes continues).*

### 6.3.2 Partie II: Résultats corrigés post-essais - Améliorations du modèle numérique

Une fois les résultats expérimentaux connus, deux changements majeurs ont été opérés dans le modèle numérique. La première amélioration concerne une meilleure prise en compte des aciers de recouvrement au niveau de la jonction du rez-de-chaussée et du niveau 1. La seconde amélioration consiste au calibrage de certains paramètres des lois de matériaux ainsi que de l'amortissement de la structure. Tous ces changements sont détaillés dans les paragraphes ci-dessous.

#### 6.3.2.1 Prise en compte de la continuité des aciers de recouvrement à la base de l'étage 1

Des aciers de recouvrement ont été ajoutés au niveau de la base de l'étage 1 pour reproduire au mieux la structure réelle. Le rôle de ces aciers est de renforcer la jonction entre les 2 niveaux où l'épaisseur du mur passe de 20cm (8 pouces) à 15cm (6 pouces). La nouvelle modélisation conduit à une distribution de l'endommagement qui semble plus réaliste avec une concentration, cette fois-ci, en base de la structure (figure 6.23).

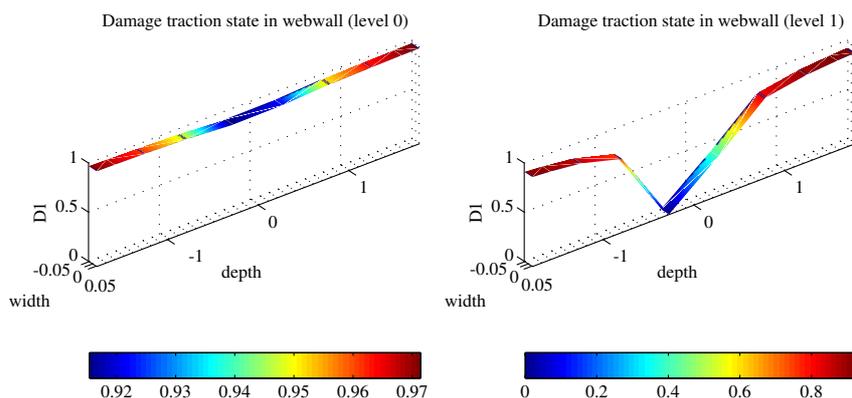


FIG. 6.23 – NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: état d'endommagement de traction aux étages 0 et 1 en considérant la continuité des aciers (EQ1).

#### 6.3.2.2 Changement de paramètres matériaux et des données d'amortissement

Selon la figure 6.22(b), il est clair que la fréquence du modèle numérique est plus faible que la fréquence expérimentale. Afin d'améliorer cette réponse numérique, des paramètres matériaux ont été modifiés, le but étant de "rigidifier" la structure par une diminution de l'endommagement. La contrainte ultime du béton en traction  $f_t$  n'est pas connue précisément. Une nouvelle valeur est alors choisie égale à  $f_t = 4MPa$  ( $= 0.57ksi$ ). De plus, la limite élastique de l'acier  $f_y$  peut être augmentée selon les valeurs données par les règles du concours. La nouvelle valeur est choisie égale à  $f_y = 500MPa$  ( $= 72.5ksi$ ). Le dernier point concerne le changement des coefficients d'amortissement de Rayleigh. Le nouveau pourcentage d'amortissement est pris égal à 2.2% appliqué au premier et au quatrième mode.

Des comparaisons entre les nouveaux résultats numériques tenant compte de ces changements et les résultats expérimentaux pour les séquences EQ1 et EQ4 en termes de déplacements

latéraux au sommet de la structure sont données dans la figure 6.24 (la continuité des aciers est également prise en compte). Les courbes sont maintenant en phase, et les extrema des courbes sont mieux reproduits. L'état d'endommagement à la fin de la séquence EQ1 est donnée par la figure 6.25. Nous pouvons remarquer que l'endommagement au niveau 1 est maintenant réduit (en comparaison de la figure 6.23) et plutôt concentré à la base de la structure (c'est à dire que la rotule plastique se produit plutôt à la base du rez-de-chaussée).

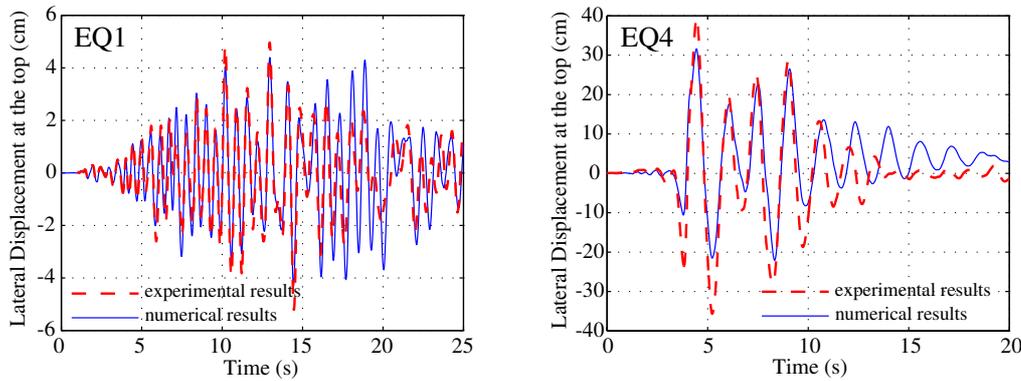


FIG. 6.24 – *NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: déplacements latéraux en tête en fonction du temps pour les séquences EQ1 et EQ4. Résultats expérimentaux (pointillés) et résultats numériques (lignes continues) en considérant les nouveaux matériaux, les nouveaux coefficients d'amortissement et la continuité des aciers.*

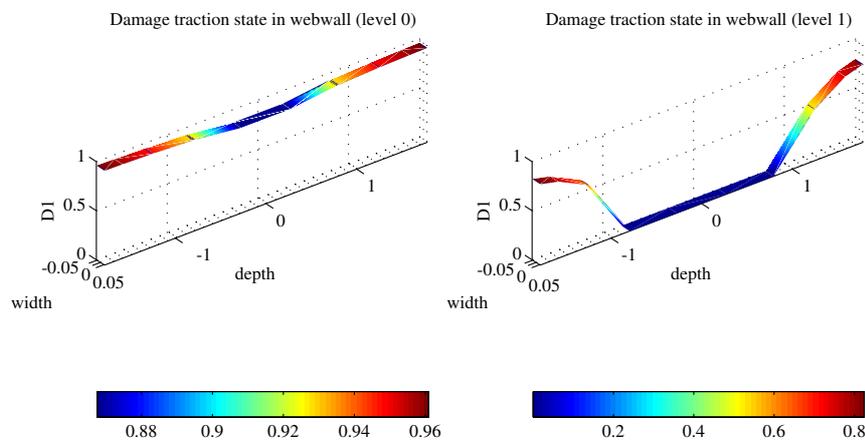


FIG. 6.25 – *NEES - Structure encastree, résultats corrigés post-test: état d'endommagement de traction dans le béton pour la structure modifiée aux niveaux 0 et 1 en considérant les nouveaux matériaux, amortissement et la continuité des aciers (EQ1).*

### 6.3.2.3 Influence du premier mode sur le comportement de la structure

Le comportement de la structure en terme de moments et de déplacements est principalement guidé par le premier mode. Ceci peut être identifié en procédant à la décomposition modale des moments et des déplacements selon la méthode Karhunen-Loève [Gutiérrez et Zaldivar, 2000]. La figure 6.26 (a) et (b) montre la déformée modale statique des déplacements (projection des déplacements dans la base modale) et les moments modaux (projection des moments dans la base modale). Il est clair que le premier mode contribue beaucoup aux moments et

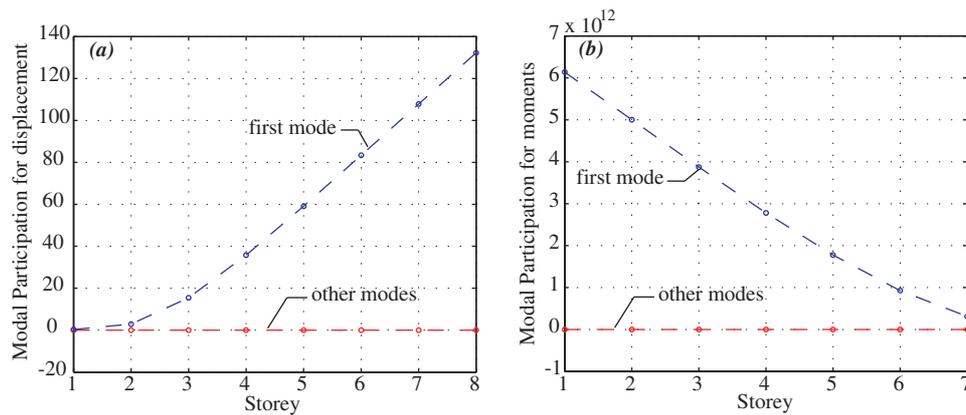


FIG. 6.26 – NEES - Structure encastrée, résultats corrigés post-test: déformée modale statique pour les déplacements (a) et pour les moments (b) (EQ4).

déplacements latéraux développés dans la structure. Les résultats présentés dans la figure 6.26 concernent la séquence EQ4. Cependant les mêmes tendances peuvent être trouvées pour les séquences EQ1, EQ2 et EQ3.

### 6.3.3 Conclusions sur la structure encastrée

La modélisation basée sur l'utilisation d'éléments poutres multifibres Timoshenko couplées avec des lois de comportements issues de la mécanique de l'endommagement et de la plasticité, est capable de reproduire avec une très bonne approximation la réponse globale de cet immeuble de 7 étages (même pour une étude en aveugle). De plus, cette modélisation est capable de donner qualitativement de bonnes indications sur la distribution de l'endommagement de la structure. Restant simplifiée, cette approche permet de réduire significativement les temps de calculs (une séquence de chargement sismique prend environ 2h avec Matlab).

Plusieurs améliorations ont été apportées au premier modèle, d'une part en modélisant correctement les aciers de recouvrement à la jonction entre les étages 0 et 1, d'autre part en ajustant quelques paramètres matériaux et les coefficients d'amortissement de Rayleigh. Il paraît donc important de bien reproduire les aciers de recouvrement dans une structure afin de bien recréer les zones d'endommagement et les lieux où vont se développer des rotules plastiques.

Enfin, l'application de la méthode Karhunen-Loève aux moments et aux déplacements calculés a permis de mettre en évidence le rôle prépondérant du premier mode sur le comportement de la structure.

### 6.3.4 Partie III: Simulations numériques en considérant l'ISS

Dans cette section, le maillage pour les simulations numériques est exactement le même que celui décrit dans le paragraphe 6.3.1.2 avec la prise en compte des améliorations (propriété des matériaux, aciers et amortissement). La seule différence réside dans la prise en compte d'un sol sous-jacent et l'utilisation du macro-élément d'interaction sol-structure. Nous supposons que la structure possède une fondation superficielle rectangulaire rigide reposant sur un massif de

sol semi-infini. Les dimensions de la fondation sont de  $L_y = 4.5m$  dans la direction du séisme (c'est à dire suivant la longueur du "web wall") et  $L_x = 2.8m$  dans la direction transversale (figure 6.27). Le centre de la fondation est situé sous le centre de gravité de la structure (à peu près  $2m$  du bord du "web wall").

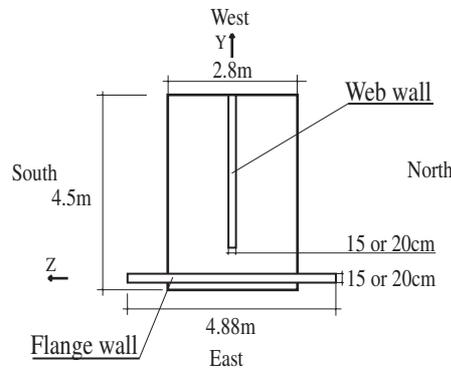


FIG. 6.27 – NEES - ISS: caractéristiques géométriques de la fondation.

#### 6.3.4.1 Typologie de sols utilisés pour les simulations

Différents types de sols sont utilisés pour les simulations. Leurs caractéristiques sont définies dans le tableau 6.8. Tous les sols considérés ici ont une masse volumique  $\rho = 1900kg.m^{-3}$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

La classification utilisée dans le tableau 6.8 provient de [Davidovici, 1999] et de [EC8, 2005]. Le critère permettant de classer les sols est la vitesse des ondes de cisaillements dans le sol (allant de la classe A: rocher à la classe S2 caractérisant des dépôts de sols liquéfiables d'argiles sensibles). Les rigidités élastiques sont calculées grâce aux formules d'impédances dynamiques données dans le paragraphe 3.3 pour une fondation rectangulaire (équation 3.17).

La contrainte ultime de compression du sol sous cette fondation  $q_{max}$  est donnée par l'équation 3.7. Dans ces équations, le terme de surface est considéré nul puisque nous considérons que la fondation repose sur le sol et n'est donc pas encastrée (ainsi le terme  $q_0$  dans cette équation est égale à 0).

#### 6.3.4.2 Résultats numériques et étude paramétrique

Dans cette partie sont présentés les résultats numériques concernant l'essai de la structure NEES reposant sur 5 sols de caractéristiques différentes (tableau 6.8), soumise à la séquence de sollicitation EQ4 (la plus forte).

La figure 6.28 montre les moments, efforts tranchants, déplacements latéraux et les déplacements latéraux relatifs maximum rencontrés durant toute la séquence et suivant la hauteur de la structure. Les efforts internes présentés ici (moments fléchissants et efforts tranchants) sont donnés uniquement pour le "web wall" et diffèrent donc de ceux présentés au paragraphe 6.3.1.9 pour la structure encastrée (ils étaient alors donnés pour la structure entière - somme des moments du "webwall" et "flangewall").

TAB. 6.8 – NEES - ISS: caractéristiques des sols utilisés.

N° du sol	cisaillement module $G_0$ vitesse $V_s$	cohésion $c$ et angle de frottement $\phi$	Rigidité et amortissement [Gazetas, 1991]	contrainte ultime de compression $q_{max}$
Sol 1 (classe S1)	$V_s = 70m/s$ $G_0 = 9.31MPa$	$c_u = 35kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 295.19MNm/rad$ $K_{zz} = 101.22MN/m$ $K_{hh} = 82.35MN/m$ $C_{\theta\theta} = 7.49MNms/rad$ $C_{zz} = 2.57MN s/m$ $C_{hh} = 2.09MN s/m$	$q_{max} = 0.20MPa$
Sol 2 (classe D)	$V_s = 100m/s$ $G_0 = 19MPa$	$c_u = 70kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 601.5MNm/rad$ $K_{zz} = 206.18MN/m$ $K_{hh} = 167.8MN/m$ $C_{\theta\theta} = 10.70MNms/rad$ $C_{zz} = 3.67MN s/m$ $C_{hh} = 2.98MN s/m$	$q_{max} = 0.40MPa$
Sol 3 (classe C)	$V_s = 180m/s$ $G_0 = 61.5MPa$	$c_u = 250kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 1951.4MNm/rad$ $K_{zz} = 668.9MN/m$ $K_{hh} = 544.4MN/m$ $C_{\theta\theta} = 19.50MNms/rad$ $C_{zz} = 6.60MN s/m$ $C_{hh} = 5.40MN s/m$	$q_{max} = 1.43MPa$
Sol 4 (classe B)	$V_s = 360m/s$ $G_0 = 246.2MPa$	$c = 115kPa$ $\phi = 30$	$K_{\theta\theta} = 7805.1MNm/rad$ $K_{zz} = 2675.6MN/m$ $K_{hh} = 2177.7MN/m$ $C_{\theta\theta} = 38.24MNms/rad$ $C_{zz} = 13.20MN s/m$ $C_{hh} = 10.67MN s/m$	$q_{max} = 4.013MPa$
Sol 5 (classe A)	$V_s > 800m/s$		$K_{\theta\theta} = 18302MNm/rad$ $K_{zz} = infinity$ $K_{hh} = infinity$ $C_{\theta\theta} = 0MNms/rad$ $C_{zz} = 0MN s/m$ $C_{hh} = 0MN s/m$	$q_{max} = infinity$

L'influence de l'interaction sol-structure devient claire en comparant sa réponse avec les résultats numériques de la structure encastree sur la table sismique. Les résultats sont très similaires entre la structure encastree et la structure reposant sur le sol n°5 (classe A: rocher de très bonne résistance et sans décollement) en termes d'efforts et de déplacements. Pour les autres cas, l'ISS semble bien "isoler" la structure en termes d'efforts internes. En observant les figures 6.28(a), (b) et 6.29(a), nous pouvons voir que les moments fléchissants et les efforts tranchants sont considérablement réduits d'autant plus que nous considérons un sol de mauvaises caractéristiques.

Concernant les déplacements, les conclusions sont plus nuancées. Nous pourrions nous attendre à ce que plus le sol ait des caractéristiques mauvaises, plus les déplacements maximum sont grands. En réalité, la figure 6.28(c) montre que les déplacements latéraux au sommet de la structure sont d'une part plus faibles pour le sol 1 que pour le sol 2 et 3 et d'autre part plus faibles pour le sol 4 que pour la structure initiale encastree. Tout ceci met bien en évidence qu'il est difficile de prévoir à l'avance laquelle des structures aura le plus grand déplacement en tête au cours du chargement.

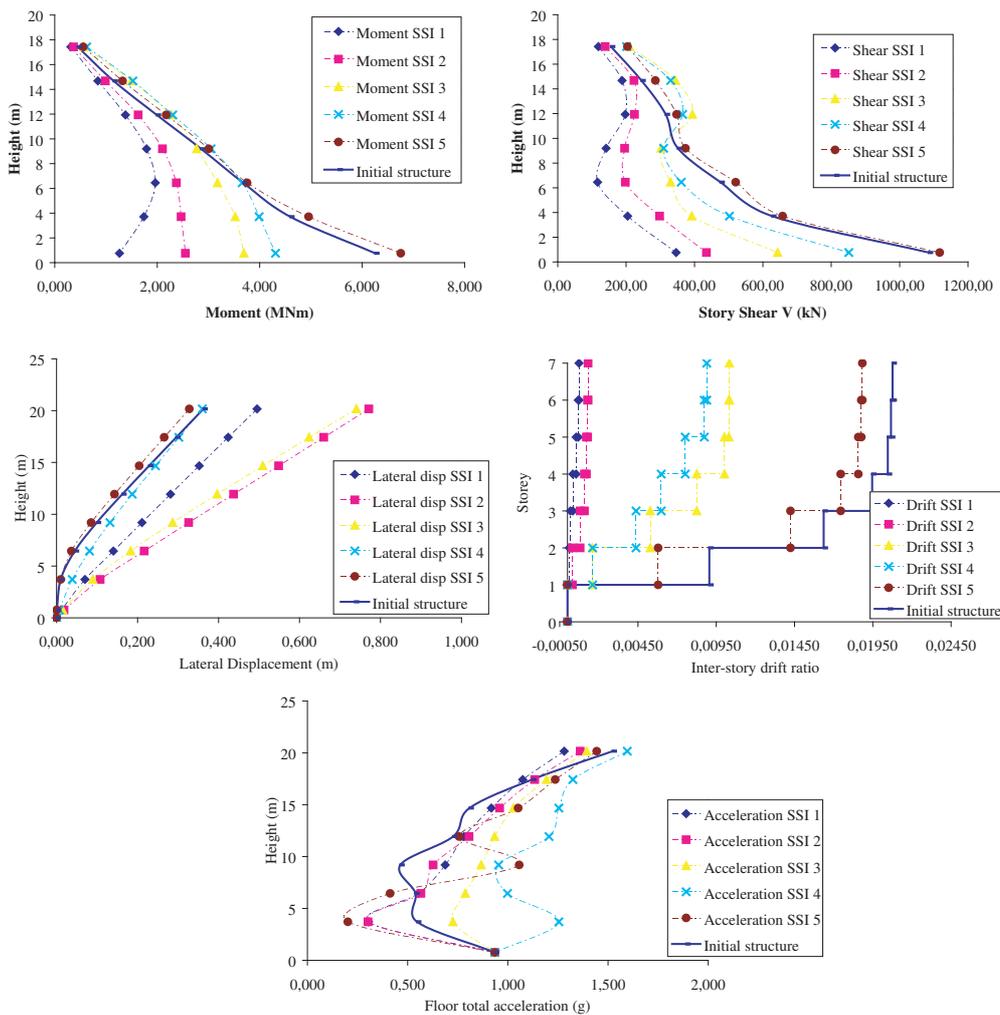


FIG. 6.28 – *NEES - ISS: (a) Moment fléchissant maximum, (b) Efforts tranchants, (c) Déplacements latéraux, (d) Déplacements latéraux relatifs et (e) accélérations des planchers pour 5 sols différents et comparaison avec la structure initiale (encastree) pour la séquence EQ4.*

La figure 6.29(b) compare l'histoire des déplacements entre la structure encastree et celle reposant sur le sol 1. Les déplacements en prenant en compte l'ISS sont 1.35 fois plus grands.

Il est alors évident que le type de sol modifie considérablement le comportement global mais aussi local de la structure. Plus particulièrement:

- Sur la figure 6.28 nous pouvons observer que le comportement local de la structure peut changer en fonction des caractéristiques du sol: pour le sol 1, les prédictions numériques annoncent un moment maximum au cours de la séquence EQ4 proche du 2ème étage et non pas à la base de la structure comme pour la structure encastree et les autres types de sols.
- Le mode 2 a une grande influence sur le comportement de la structure reposant sur le sol 1, particulièrement pour les efforts internes. Ceci peut être identifié en procédant à une décomposition modale des moments selon la méthode Karhunen-Loève [Gutiérrez et Zaldivar, 2000]. La figure 6.30 (a) et (b) montre, pour le sol 1, la participation du mode 2 pour les moments modaux (projection du moment sur la base modale). Cette influence

sur les efforts internes peut encore être vérifiée par la reconstruction de la courbe de moment en fonction du temps en considérant seulement le mode 1 (figure 6.30 (c)) et en considérant à la fois les modes 1 et 2 (figure 6.30 (d)). Les modes 1 et 2 suffisent à reproduire la courbe complète des moments.

- Le mode 2 a une influence bien moindre concernant les déplacements de la structure reposant sur le sol 1. En appliquant la méthode Karhunen-Loève aux courbes de déplacements en fonction du temps, nous pouvons montrer que seul le mode 1 est prépondérant (figure 6.31). D’ailleurs, la déformée maximale de la structure sur le sol 1 de la figure 6.28(c) correspond bien à la forme d’un mode 1.
- Concernant la structure reposant sur les sols 2, 3 et 4, la même analyse sur les moments montre que cette fois-ci, seul le mode 1 joue un rôle prépondérant dans son comportement (la figure 6.32 montre la décomposition des moments pour le sol 3). L’influence du mode 2 est visible mais très faible. Par ailleurs, l’influence du mode 2 se retrouve sur la courbe du moment maximum de la figure 6.28(a) où une légère inflexion de la courbe est présente.
- La décomposition des déplacements pour les sols 2, 3 et 4 (figure 6.33) révèle une importante et quasi exclusive participation du mode 1.
- L’analyse du sol 5 montre que pour les moments ou les déplacements, c’est exclusivement le mode 1 qui régit le comportement de la structure (l’analyse n’est pas représentée ici). Les courbes de moments et déplacements maximum pour ces deux sols (figures 6.28 (a) et (c)) révèlent des déformées proche d’un mode 1.

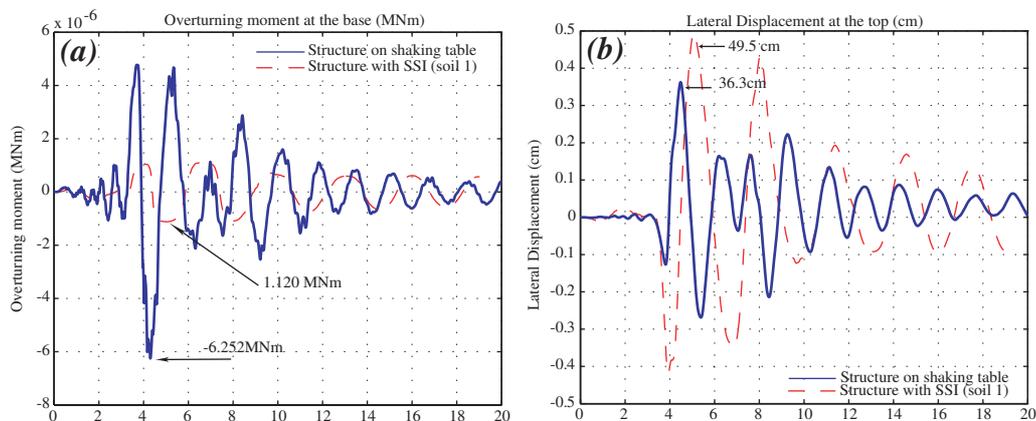


FIG. 6.29 – NEES - ISS: (a) Moment à la base en fonction du temps (b) Déplacement latéral au sommet en fonction du temps pour la structure encastree et pour la structure simulant l’ISS (sol 1, EQ4).

La figure 6.28(d) montre les déplacements latéraux relatifs maximaux. Il est remarquable que cette quantité est quasi-constante pour les sols 1 et 2. Ceci est typique d’une structure restant élastique durant toute la séquence. En effet, ce ratio constant traduit que la déformée de la structure a une forme de droite. Toutes les non-linéarités se retrouvent donc concentrées à la base de la structure, c’est à dire dans le sol au niveau du macro-élément. Cette remarque peut se vérifier aisément à la vue des cartes d’endommagements de différentes sections de la structure (l’endommagement est en effet trouvé égal à 0 pour toutes les sections de la structure).

La figure 6.34 montre l’évolution de l’endommagement dans la hauteur de la structure (pour les 4 premiers niveaux) pour le sol 3. Nous pouvons vérifier que l’endommagement est présent

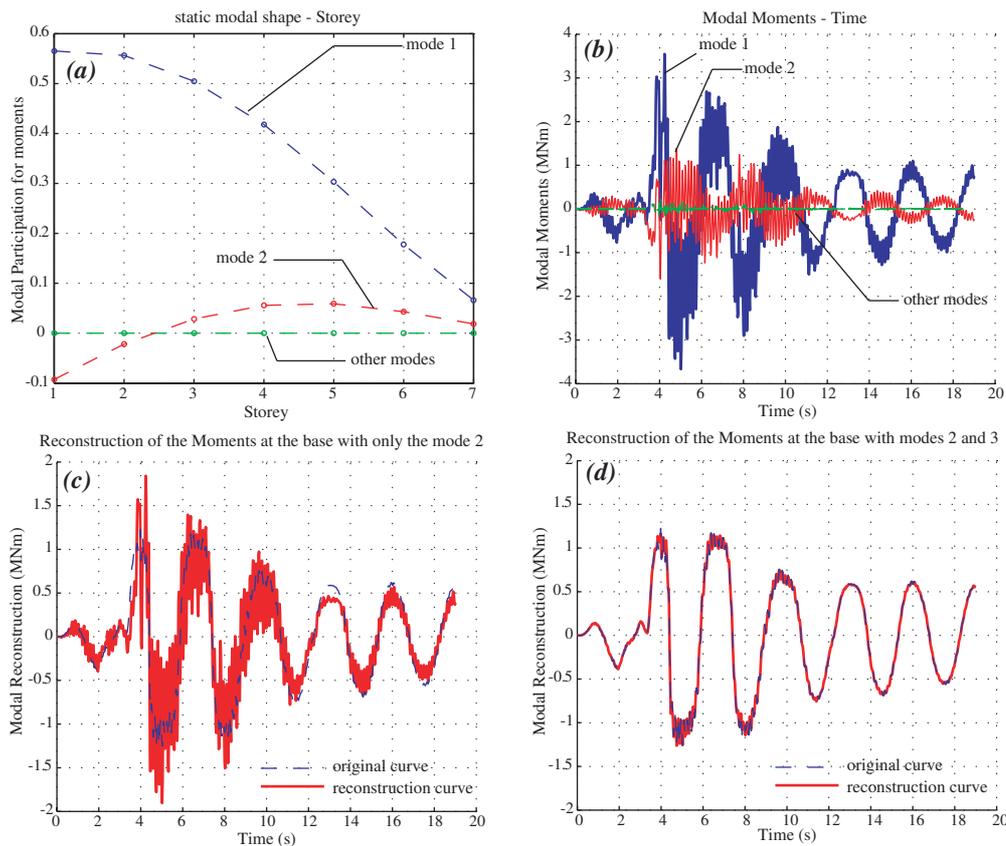


FIG. 6.30 – NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS et en considérant seulement le mode 2 (c) ou les modes 2 et 3 (d) (sol 1).

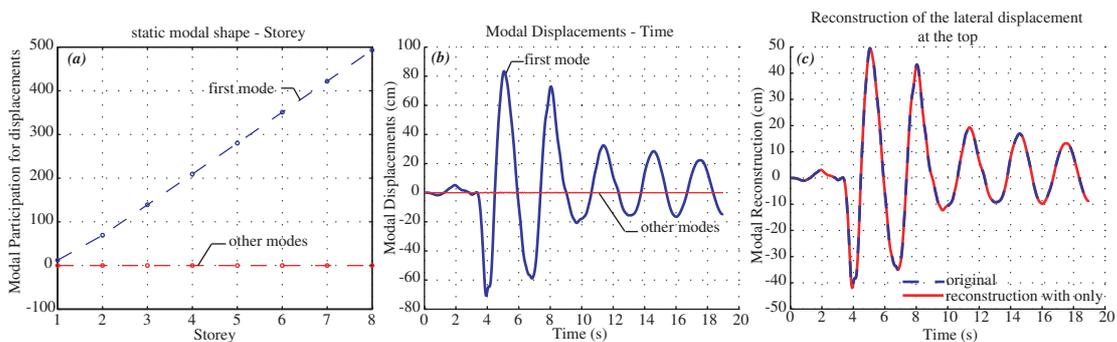


FIG. 6.31 – NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 1).

principalement du rez-de-chaussée à la base de l'étage 4 et non pas localisée à la base du rez de chaussée et de l'étage 1, comme c'est le cas pour la structure sur le sol 5 ou la structure encastree. Ceci provient du fait que plus on monte dans les étages et plus l'effort normal dans la structure est faible. Le moment résistant maximal dans la section considéré s'en trouve donc réduit ce qui génère des endommagements plus grands. Pour la structure sur le sol 5 la sollicitation en base est plus importante, ce qui a généré des endommagements plus grands à la

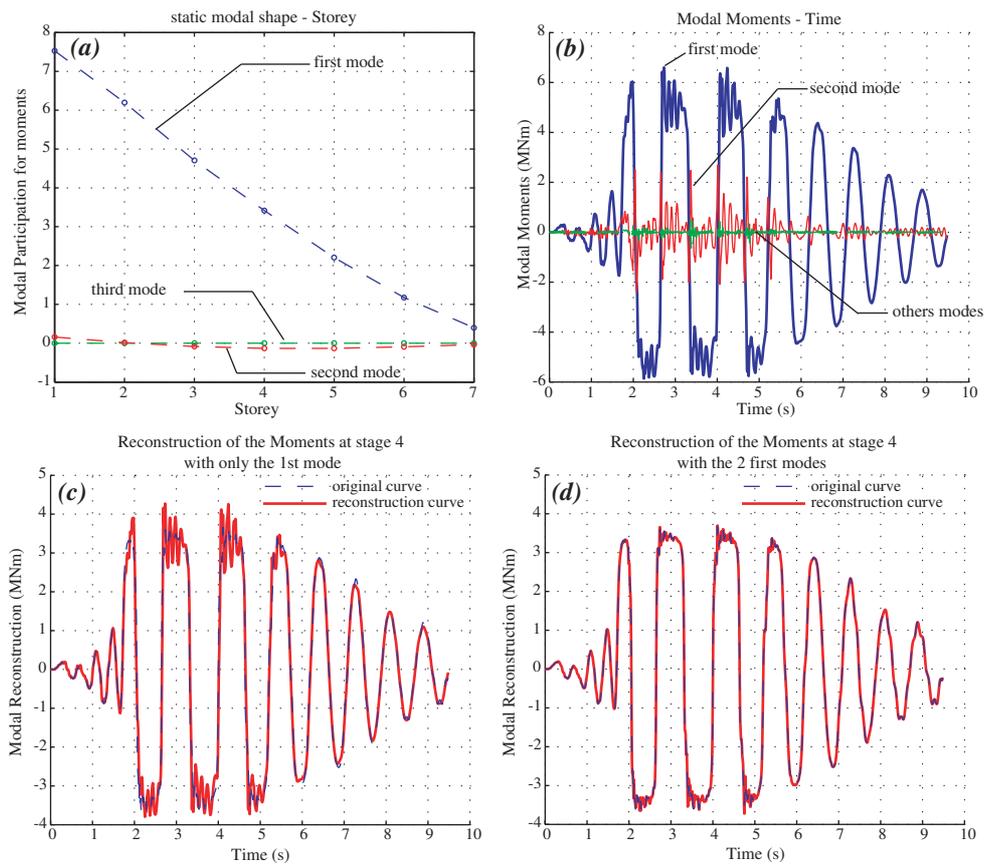


FIG. 6.32 – NEES - ISS: déformée modale statique des moments (a), moments modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des moments à la base de la structure simulant l'ISS (sol 3).

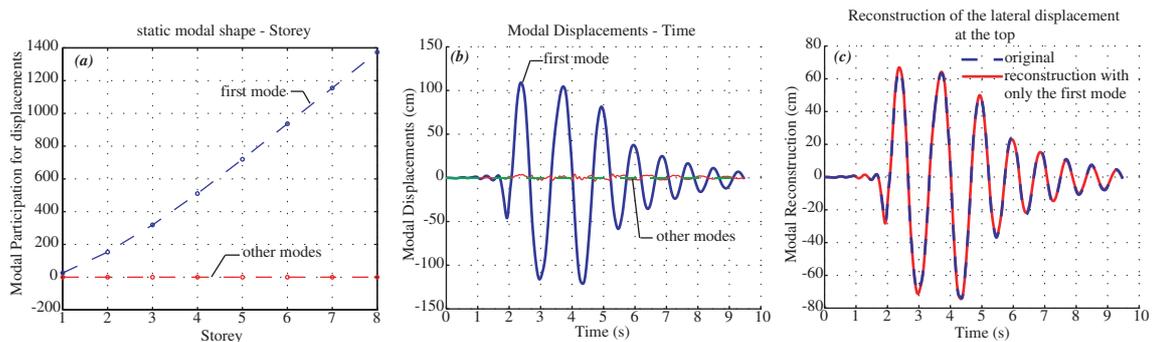


FIG. 6.33 – NEES - ISS: déformée modale statique des déplacements (a), déplacements modaux en fonction du temps (b), et (c), reconstruction des déplacements latéraux au sommet de la structure simulant l'ISS (sol 3).

base, le moment résistant ayant été atteint rapidement ce qui a préservé le reste de la structure. Il n'est donc, a priori, pas évident à première vue de déterminer clairement où vont se situer les dommages. Pour les sols 1 et 2, l'analyse de cette même variable d'endommagement montre que la structure n'est pratiquement pas endommagée. La structure reste quasiment linéaire.

L'endommagement dans la structure pour les sols 4 et 5 est plus grand que pour le sol 3 qui

est lui même bien entendu plus grand que pour les sols 1 et 2. Ceci confirme le fait que plus les caractéristiques du sol sont faibles, plus la structure est préservée des endommagements et des efforts internes importants. En contrepartie, bien sûr les non-linéarités se retrouvent concentrées au niveau de la fondation et dans le sol, ce qui peut générer des déplacements résiduels importants.

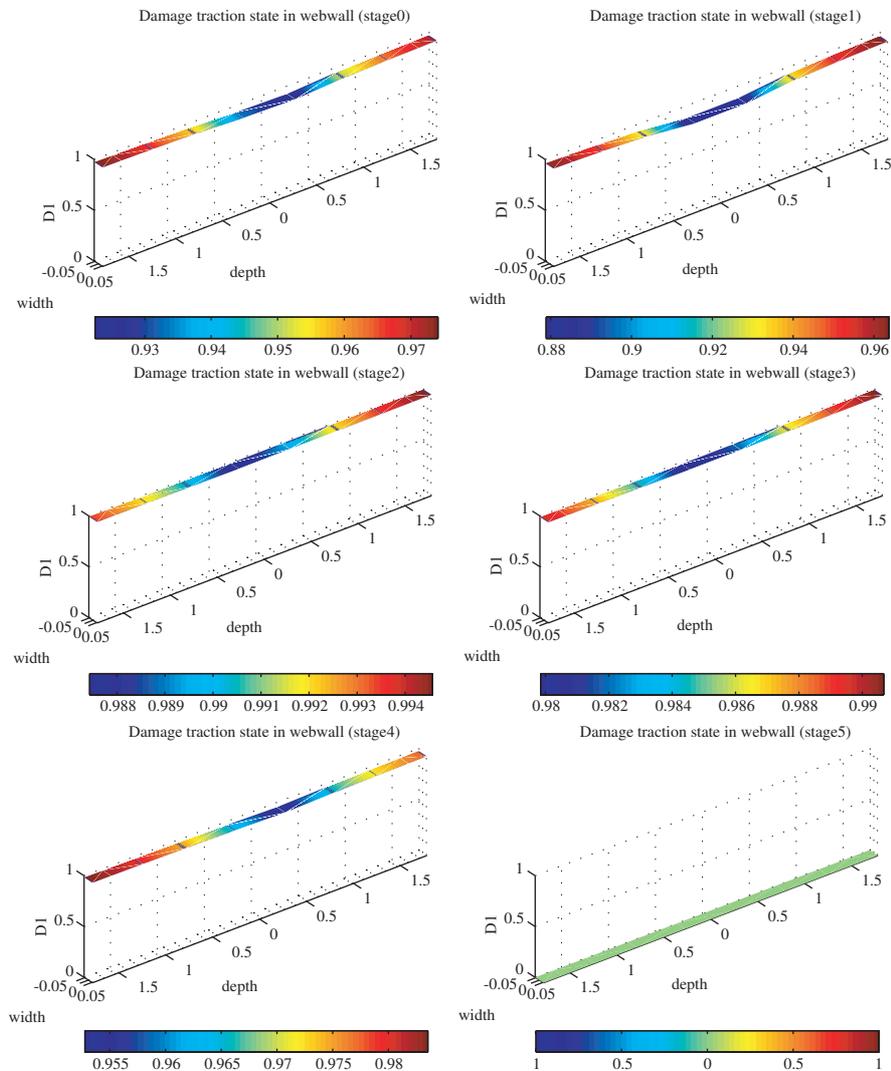


FIG. 6.34 – NEES-ISS: état d'endommagement du béton en traction pour la structure reposant sur le sol 3 de la base du rez-de-chaussée à la base de l'étage 5 (EQ4).

### 6.3.5 Conclusions

Le macro-élément a été introduit à la base de la structure NEES pour simuler son comportement et voir l'influence de l'interaction sol-structure. Cinq sols différents ont été considérés. L'ISS isole de manière significative la structure du point de vue des efforts internes et des endommagements. Cette interaction avec le sol introduit également un comportement local différent selon le type de sol en changeant la position des lieux où l'endommagement est maximum (rotules plastiques) et en augmentant l'influence des modes supérieurs. Une diminution des propriétés mécaniques du sol n'entraîne pas nécessairement une augmentation des

déplacements maximum.

## 6.4 Viaduc d'Ispra

Dans cette section nous proposons d'étudier le comportement dynamique d'un viaduc composé de 3 piles de hauteur différentes et d'un tablier en béton précontraint, ainsi que de l'influence de l'ISS sur celui-ci. Cette étude est détaillée en deux parties:

- Dans la partie I, une modélisation de la structure avec des piles encastrées est présentée ainsi que la comparaison avec des résultats expérimentaux.
- Ensuite (Partie II), l'ISS est étudiée avec le macro-élément et une approche "ingénieur" avec des ressorts élastiques à la base de la structure. Une comparaison entre ces deux approches est effectuée (voir également [Botruno *et al.*, 2008]).

### 6.4.1 Partie I: modélisation de l'essai pseudo-dynamique

Une maquette partielle de ce pont à l'échelle  $\frac{1}{2.5}$  a été réalisée au laboratoire ELSA d'Ispra (figure 6.35).

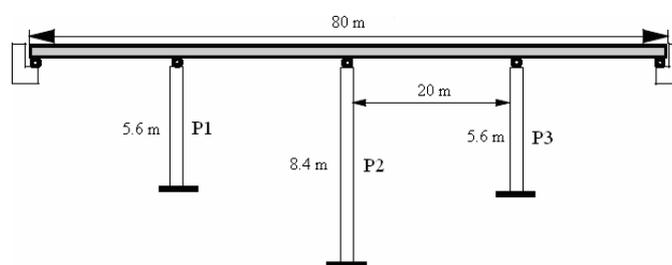


FIG. 6.35 – Viaduc: vue en plan du pont expérimenté à Ispra à l'échelle  $\frac{1}{2.5}$ .

Le viaduc a été testé grâce à un essai pseudo-dynamique. Ce genre d'essai hybride permet de ne pas tester expérimentalement la totalité de la structure mais d'en tester une partie tout en modélisant le reste à l'aide d'un logiciel de calcul. Ainsi, seulement les trois piles à base encastrée sont expérimentées. Le tablier quant à lui est modélisé numériquement à l'aide du logiciel Cast3M (voir figure 6.36). Lors de l'essai, l'interaction entre les piles et le tablier est calculée en temps réel grâce à l'intégration numérique de l'équation de la dynamique. Les efforts d'inertie sont eux aussi calculés et réinjectés dans l'expérience.

Le détail du tablier et des piles (à l'échelle) est donné par les dessins en coupe des figures 6.37(a) et 6.37(b). Les piles sont en béton armé de section rectangulaire creuse. Le tablier est composé de voussoirs creux en béton précontraint. Son comportement peut donc être considéré linéaire. Le détail des caractéristiques géométriques de cette section est donné par la tableau 6.9.

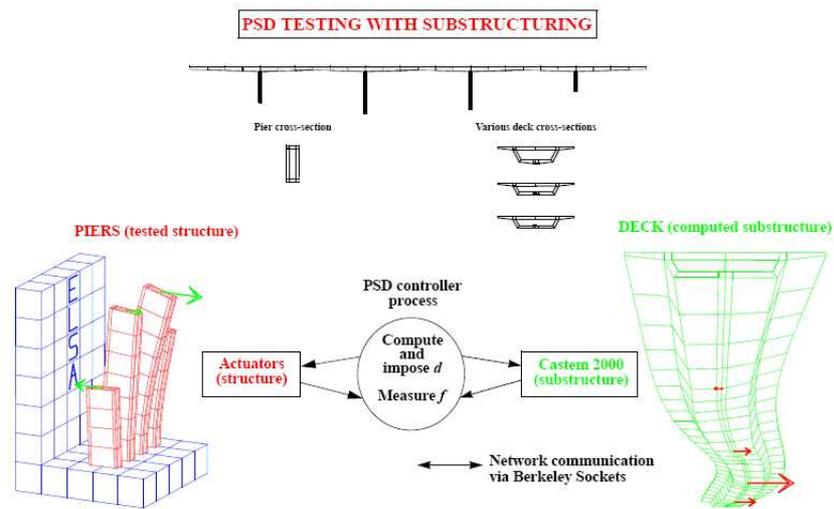


FIG. 6.36 – Viaduc: schématisation de l’essai Pseudo-dynamique.

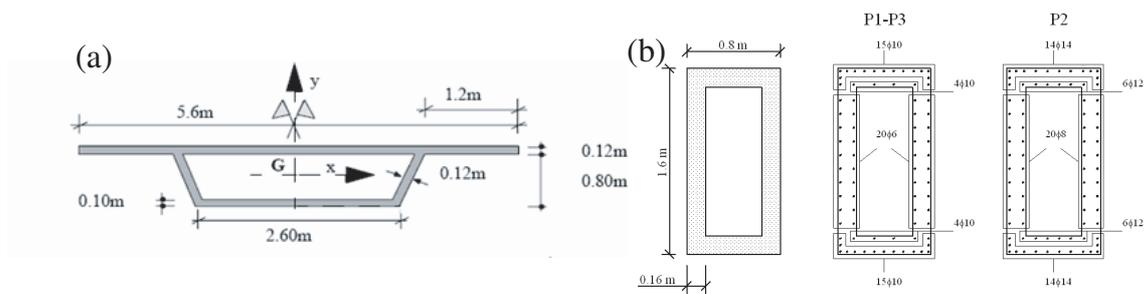


FIG. 6.37 – Viaduc: (a) vue en coupe du tablier modélisé sous Cast3M, et (b) vue en coupe des piles testées à l’échelle  $\frac{1}{2.5}$

TAB. 6.9 – Viaduc: détail des caractéristiques géométriques de la section du tablier.

$A(m^2)$	$I_x(m^4)$	$I_y(m^4)$	$J(m^4)$	$E_b(Pa)$
1.11	0.13	2.26	2.39	$25 \cdot 10^9$

### 6.4.1.1 Discrétisation du pont et maillage

Pour reproduire le comportement de la structure, un modèle de type “brochette” est considéré (figure 6.38). Le détail des masses et des inerties de rotations utilisées pour la modélisation est donné dans le tableau 6.10.

TAB. 6.10 – Viaduc: détail des masses et des inerties de rotation.

n°	Masse $M$ (kg)	Inertie de rotation $I_x$ ( $kg \cdot m^2$ )	Inertie de rotation $I_z$ ( $kg \cdot m^2$ )
A	27.5	285	234
B	32	287	271
C	34	288	322
D	13.75	143	117

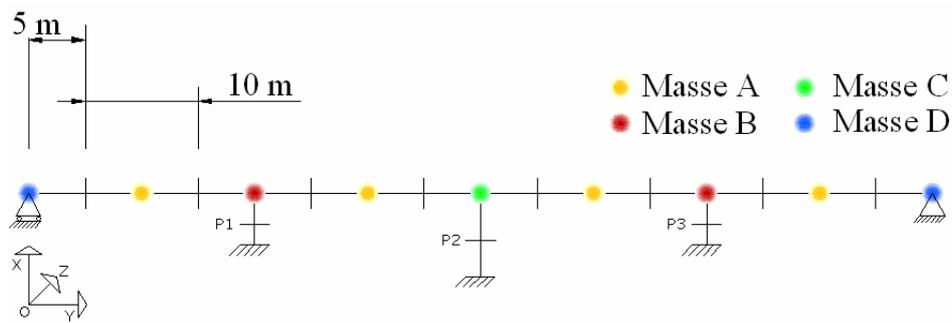


FIG. 6.38 – Viaduc: modèle poutres multifibres et masses concentrées.

Comme pour la structure NEES, des poutres multifibres Timoshenko non linéaires sont utilisées pour représenter le comportement des piles [Kotronis et Mazars, 2005] et [Mazars *et al.*, 2006]. Six éléments sont utilisés pour modéliser les piles P1 et P3 et neuf éléments pour la pile P2. La discrétisation est plus fine à la base des piles, là où l'endommagement risque d'être le plus important (figure 6.39). Le tablier étant en béton précontraint, nous pouvons considérer qu'il a un comportement linéaire. C'est pourquoi sa modélisation passe par l'utilisation d'éléments poutres linéaires.

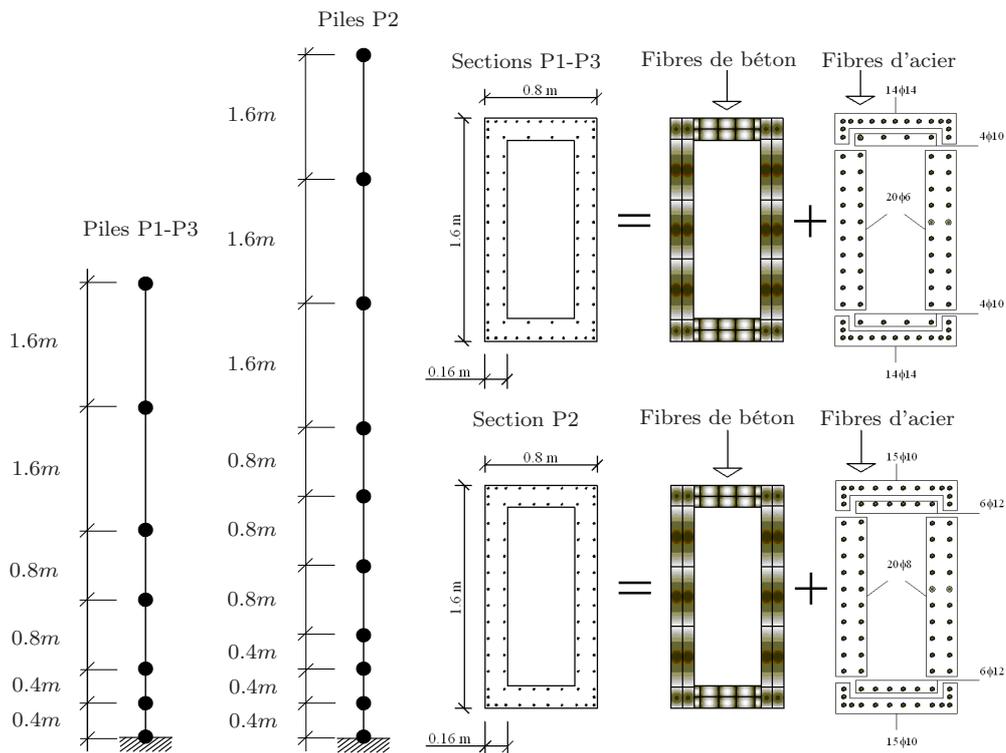


FIG. 6.39 – Viaduc: détail de la discrétisation des poutres multifibres pour les piles P1, P2 et P3.

Le détail des fibres utilisées pour les piles P1-P3 et P2 sont données respectivement par la figure 6.39. 40 fibres de béton et 80 fibres d'acier représentant les armatures à leurs positions réelles sont utilisées dans chaque section.

### 6.4.1.2 Paramètres matériaux

La loi [La-Borderie, 1991] est utilisée pour reproduire le comportement du béton tandis que la loi [Menegoto et Pinto, 1973] est utilisée pour reproduire celui de l'acier. Les paramètres de béton sont calées sur les résultats d'essais (proposé dans [ECOEST PREC8, 1996]). Le détail des paramètres matériaux est synthétisé dans le tableau 6.11.

TAB. 6.11 – *Viaduc: données matériaux utilisées pour les lois de comportement.*

Paramètres du béton		Paramètres de l'acier	
$E$	29.4GPa	$E$	200GPa
$\nu$	0.175	$f_y$	450MPa
$Y_{01}$	1000Pa	$f_{su}$	710MPa
$Y_{02}$	0.0001MPa	$\epsilon_{sh}$	0.0060
$A_1$	7000MPa <sup>-1</sup>	$\epsilon_{su}$	0.10
$A_2$	6.0MPa <sup>-1</sup>		
$B_1$	1.0		
$B_2$	1.3		
$\beta_1$	0.5MPa		
$\beta_2$	-19MPa		
$\sigma_f$	3.0MPa		

**Remarque:** étant donné que l'essai est pseudo-dynamique, l'amortissement de Rayleigh introduit dans le modèle numérique pour reproduire le comportement expérimental est très faible. Il a été choisi égal à 0.5%.

### 6.4.1.3 Analyse modale

Les fréquences propres pour cette structure à base encastree sont données dans le tableau 6.12. Les déformées modales sont quant à elle données par la figure 6.40.

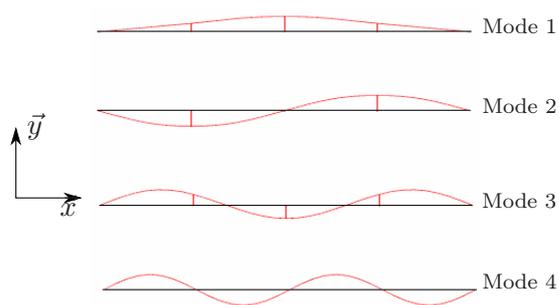


FIG. 6.40 – *Viaduc: déformées modales numériques pour les modes 1 à 4 du pont.*

mode	fréquence Hz	
	Test	Numérique
1	4.2	4.2
2	6.6	6.8
3	9.8	10.4
4	16.1	16.8

TAB. 6.12 – *Viaduc: comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques.*

### 6.4.1.4 Chargements imposés à la structure

Le chargement imposé à la structure est un accélérogramme synthétique dont le spectre de réponse à 5% d'amortissement a été calé sur celui proposé par l'Eurocode 8 pour un sol de

classe B. La figure 6.41(a) montre la comparaison entre le spectre synthétique et celui proposé par l'Eurocode 8.

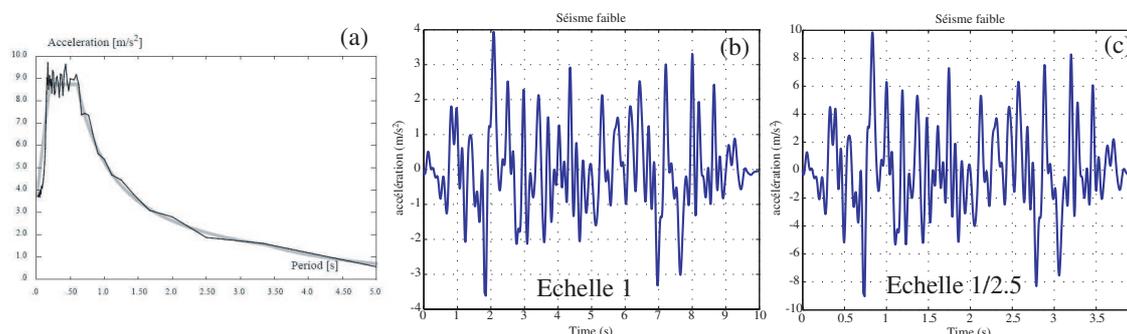


FIG. 6.41 – Viaduc: (a) spectre de dimensionnement issu de l'Eurocode 8 pour un amortissement de 5% et spectre de l'accélérogramme synthétique, (b) accélérogrammes faibles pour la structure à échelle 1 et (c)  $\frac{1}{2.5}$

L'accélérogramme correspondant à ce spectre est représenté sur la figure 6.41(b). Le pic d'accélération est  $0.35g$  (séisme faible). Un deuxième accélérogramme similaire (dilaté, non représenté ici), mais plus fort, est également imposé à la structure. Il a pour pic d'accélération deux fois celui du précédent soit  $0.7g$  (séisme fort).

L'essai expérimental étant réalisé à l'échelle  $\frac{1}{2.5}$ , ces accélérogrammes doivent être modifiés en multipliant les accélérations par 2.5 et en divisant le temps par 2.5 pour respecter les similitudes du problème. L'accélérogramme correspondant aux  $0.35g$  mis à l'échelle est représenté sur la figure 6.41(c).

#### 6.4.1.5 Confrontation des résultats expérimentaux et numériques

Les résultats expérimentaux et numériques pour la structure à base encastrée sont présentées pour les deux accélérogrammes par les figures 6.42 et 6.43. Elles représentent l'évolution de l'effort tranchant à la base et le déplacement en tête des trois piles en fonction du temps.

La modélisation numérique à l'aide d'éléments multifibres reproduit correctement le comportement de la structure et ce pour les trois piles. Les pics sont correctement simulés dans les deux directions, ainsi que le contenu fréquentiel de la réponse. Une fois cette modélisation validée, nous allons ci-dessous l'utiliser pour étudier l'influence de l'ISS sur le viaduc.

### 6.4.2 Partie II: prise en compte de l'ISS

Dans cette partie, deux types de modélisation sont proposés afin de prendre en compte l'ISS. La première avec le macro-élément, et la deuxième en considérant des ressorts élastiques linéaires à la base de chaque pile. Des études paramétriques sur deux types de sols et la confrontation des deux stratégies de modélisation sont détaillées ci-dessous.

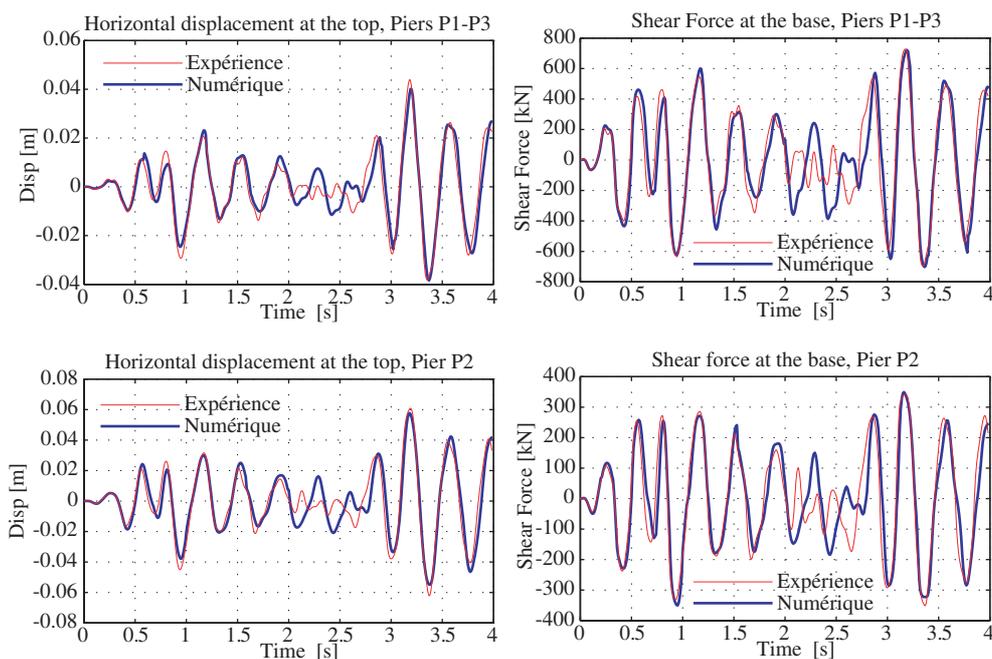


FIG. 6.42 – Viaduc: comparaison déplacements et efforts tranchants expérimentaux et numériques pour le séisme faible.

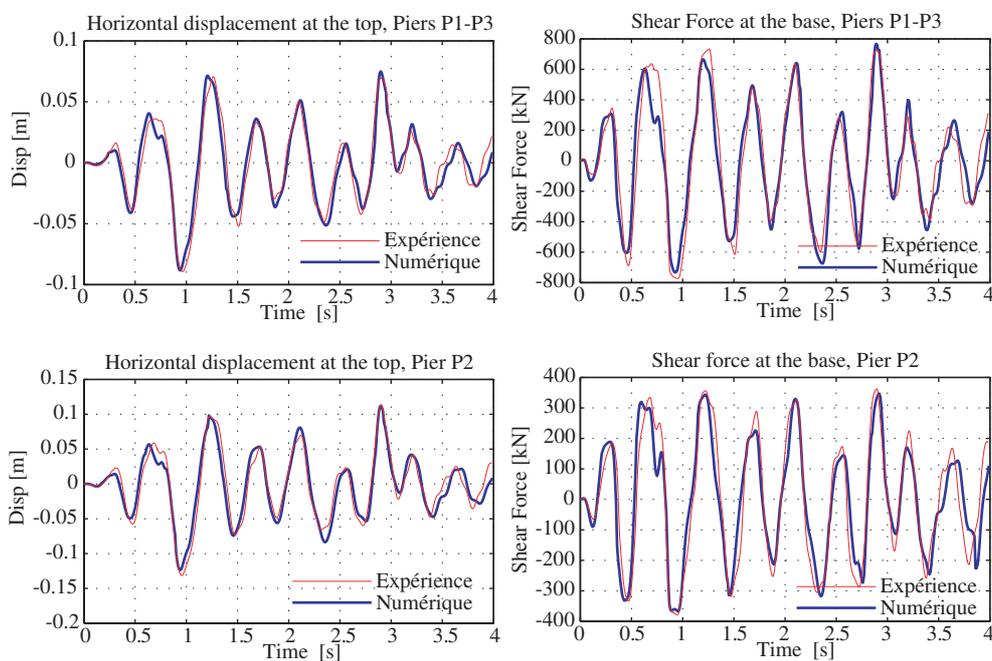


FIG. 6.43 – Viaduc: comparaison déplacements et efforts tranchants expérimentaux et numériques pour le séisme fort.

### 6.4.2.1 Choix des sols utilisés

Le premier est un sol de classe B au sens de [EC8, 2005]. C'est en fait le type de sol qui avait été proposé pour l'expérimentation de la pile encastrée et notamment pour le choix du spectre. Les piles reposent sur des fondations de dimensions  $L_x = 4.2m$  et  $L_y = 2.1m$ . Le deuxième est un sol de classe C ayant des caractéristiques mécaniques plus faibles. Afin d'amplifier l'influence de l'ISS, les fondations ont cette fois-ci des dimensions  $L_x = 3.2m$  et  $L_y = 1.6m$ . Les caractéristiques des sols sont regroupées dans le tableau 6.13.

TAB. 6.13 – Viaduc - ISS: caractéristiques des sols utilisés.

Type de sol	cisaillement module $G_0$ vitesse $V_s$	cohésion $c$ et angle de frottement $\phi$	Rigidité et amortissement [Gazetas, 1991]	contrainte ultime de compression $q_{max}$
Sol de classe C	$V_s = 150m/s$ $G_0 = 45MPa$	$c_u = 200kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 1112.5MNm/rad$ $K_{zz} = 298.68MN/m$ $K_{hh} = 244.36MN/m$ $C_{\theta\theta} = 4.34MNms/rad$ $C_{zz} = 1.17MN/m$ $C_{hh} = 1.00MN/m$	$q_{max} = 1.1MPa$
Sol de classe B	$V_s = 360m/s$ $G_0 = 259.2MPa$	$c_u = 370kPa$ $\phi_u = 0$	$K_{\theta\theta} = 144484.1MNm/rad$ $K_{zz} = 1845.5MN/m$ $K_{hh} = 2260.2MN/m$ $C_{\theta\theta} = 23.17MNms/rad$ $C_{zz} = 3.61MN/m$ $C_{hh} = 2.95MN/m$	$q_{max} = 2100MPa$

### 6.4.2.2 Calibration énergétique des ressorts linéaires

Afin de reproduire le comportement des sols considérés, les caractéristiques des ressorts linéaires (rigidité) doivent être calibrés. Pour cela, nous utilisons les résultats du macro-élément. La raideur de ces ressorts est choisie de manière telle que le ressort emmagasine autant d'énergie lors d'un chargement que pourrait emmagasiner le macro-élément d'ISS (équivalence énergétique, voir figure 6.44). Pour ce calcul, l'énergie dissipée à l'intérieur des boucles d'hystérésis produite par le macro-élément n'est pas prise en compte.

### 6.4.2.3 ISS, résultats numériques: comparaisons des cas encastrée, avec macro-élément et avec ressort élastique linéaire

Les résultats présentés ici montrent la comparaison des comportements du viaduc pour les différents types de conditions aux limites et pour les différents sols.

**6.4.2.3.1 Comparaisons en considérant le sol de classe B** Seuls les résultats pour le séisme fort sont présentés (figure 6.45). Nous pouvons noter que pour ce sol les comportements de la structure pour la base encastrée (Fixe), le macro-élément (ME) et le ressort linéaire (EL) sont très peu différents en termes d'efforts. Nous remarquons néanmoins une augmentation

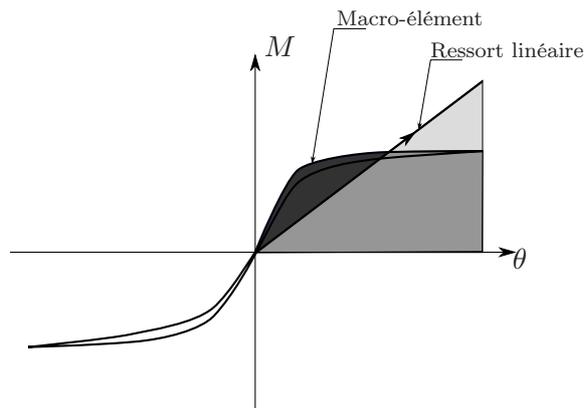


FIG. 6.44 – Viaduc - ISS: calage des raideurs des ressorts élastiques linéaires.

significative des déplacements maximum en têtes de piles pour les cas macro-élément et ressort linéaire (augmentation de facteur 2).

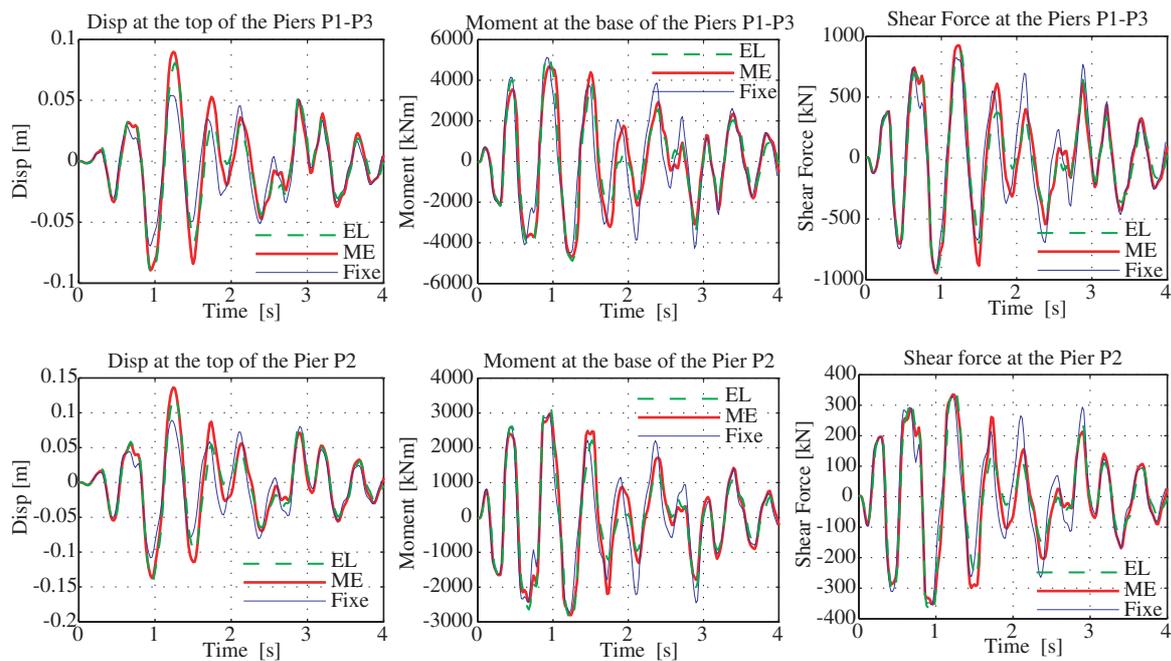


FIG. 6.45 – Viaduc - ISS: comparaison des déplacements, moments et efforts tranchants pour le séisme fort et le sol de classe B.

Pour le séisme faible, le comportement de la structure est quasiment le même quelle que soit la condition aux limites utilisée (les maximum d'efforts ainsi que d'endommagements sont similaires). La raison de ce comportement est que finalement, pour un sol rigide, l'endommagement et les non-linéarités vont plutôt se produire dans la structure. C'est à dire que le moment résistant du béton est atteint à la base de la pile avant celui du système {sol+fondation}. Ainsi, du point de vue des efforts tout se passe comme si la structure était encastree dans le sol. Par

contre du point de vue des déplacements, la souplesse amenée par le macro-élément engendre un peu plus de rotation de la fondation et donc un peu plus de déplacements en tête de la structure.

**6.4.2.3.2 Comparaisons en considérant le sol de classe C** Pour le sol de classe C les résultats pour le séisme faible sont présentés par la figure 6.46.

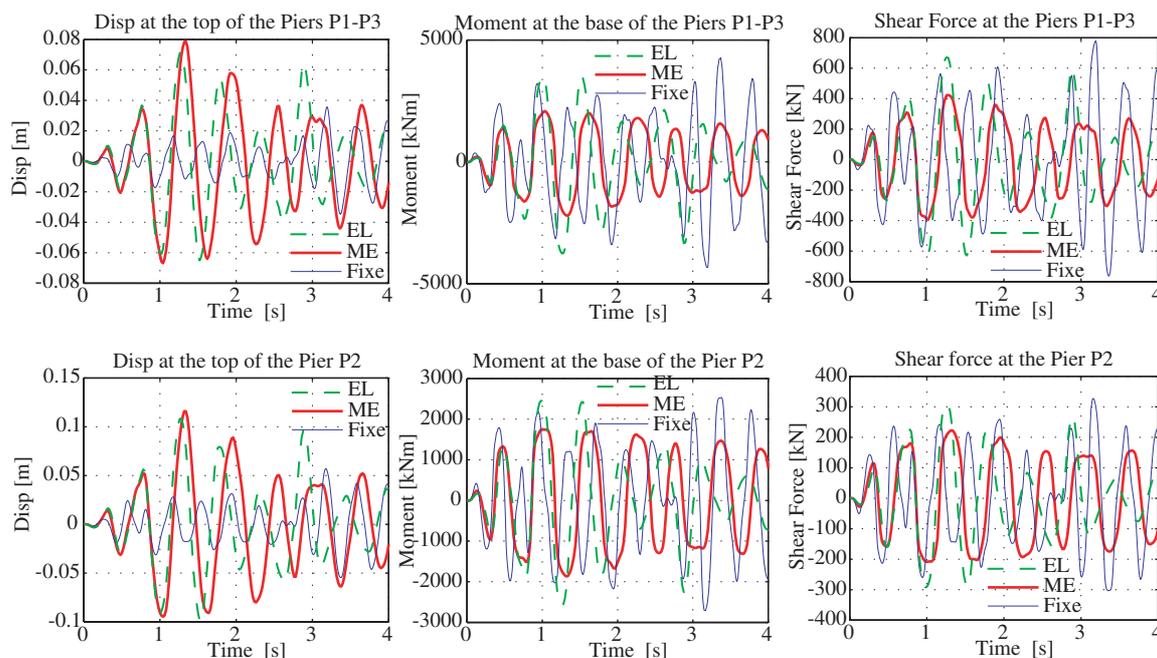


FIG. 6.46 – Viaduc - ISS: comparaison des déplacements, moments et efforts tranchants pour le séisme faible et le sol de classe C.

Le comportement de la structure est ici très différent pour les trois cas de conditions aux limites. En effet, il est clair sur ces figures que les déplacements sont grandement amplifiés dans le cas de la structure reposant sur le macro-élément et sur le ressort linéaire (augmentation de facteur 4). Concernant les moments et efforts tranchants à la base de la structure, ils sont quant à eux réduits de manière significative pour le macro-élément. Par contre ils sont quasiment équivalents pour la structure fixe et pour la structure sur ressorts linéaire.

**Remarque:** les résultats pour le séisme fort ne sont pas présentés puisque les simulations avec le macro-élément n'ont pas convergé. Cette non convergence semble provenir de la loi de tangence chargée de calculer les limites des variables d'érouissages.

### 6.4.3 Conclusions

Dans cette partie nous avons utilisé deux stratégies de modélisation afin de prendre en compte l'ISS sur un viaduc sur deux types de sol. La première consiste à utiliser le macro-élément, et la deuxième des ressorts élastiques linéaires calibrés avec le macro-élément grâce à une

méthode énergétique. Les deux modélisations montrent que le comportement du viaduc peut varier grandement en fonction du type de conditions aux limites considérées à la base des piles.

Pour un sol de classe C (de faibles caractéristiques), les efforts en base sont réduits par rapport au pont considéré encasté, et les déplacements en tête des piles sont amplifiés d'un facteur 4.

Pour un sol de classe B (de meilleures caractéristiques), les non-linéarités se concentrent principalement à la base de la pile. C'est à dire que c'est dans le béton que se créent les non linéarités. La souplesse créée à cet endroit efface l'influence de l'ISS en terme d'efforts internes puisque c'est le moment résistant de la pile et non pas du système {sol+fondation} qui est atteint. Tout se passe donc comme si la pile était encastée sauf pour les déplacements qui sont amplifiés (facteur 2).

Dans cette étude, nous avons aussi démontré les limites de l'utilisation des ressorts élastiques linéaires. Les résultats issus d'une telle modélisation sont conservatifs. Les efforts internes et les déplacements sont supérieurs à ceux issus du macro-élément qui est censé reproduire plus fidèlement la réalité. De plus, la calibration des ressorts linéaires est difficile si l'on ne dispose pas des résultats du macro-élément.

Finalement, pour le dimensionnement des viaducs ce sont les conditions en déplacements qui sont les plus importantes. En effet, de grands déplacements seraient préjudiciables pour ces structures qui ont un fort caractère hyperstatique. L'accès à un outil performant comme le macro-élément permet de dimensionner correctement la fondation et donc de limiter les déplacements.

---

## Conclusions et perspectives

---

Ce mémoire présente un outil permettant de prendre en compte l'interaction sol-structure et plus particulièrement le comportement non-linéaire d'une fondation superficielle de forme rectangulaire, filante ou circulaire. La connaissance de ce comportement est très importante puisqu'il conditionne en grande partie celui de la structure. Cet outil numérique simple, facile d'utilisation et très peu coûteux en temps de calcul permet de faire des études paramétriques et ainsi de déterminer clairement le comportement d'un ouvrage sous des chargements divers et reposant sur des sols de caractéristiques différentes.

Plus précisément, le modèle développé dans cette thèse s'inscrit dans la lignée des macro-éléments et permet de prendre en compte les non-linéarités matérielles (plasticité du sol) et les non-linéarités géométriques (décollement de la fondation). Il traite le problème de manière globale en condensant les non-linéarités en un point représentatif (le centre de la fondation), si bien qu'il travaille en efforts et déplacements généralisés. Le nouveau macro-élément d'interaction sol-structure présenté dans ce document permet de relier un incrément d'efforts à un incrément de déplacements. Ses efforts (et déplacements) sont au nombre de cinq: 2 efforts horizontaux, 2 moments et l'effort vertical (associés aux déplacements correspondants). Le moment de torsion (autrement dit le couple suivant l'axe vertical) n'est pas pris en compte par le modèle.

Les comportements non-linéaires comme la plasticité et le décollement de la fondation sont considérés de manière phénoménologique, c'est à dire qu'ils ne reproduisent pas précisément localement ce qu'il se passe dans le sol ou encore ne tiennent pas compte réellement des contraintes qui sont appliquées à la fondation (par exemple lors d'un décollement). Ce genre de modélisation est donc tout naturellement dédié à un certain type de problème pour lequel il a été conçu (domaine de sol semi-infini, effort vertical permettant le décollement de la fondation, etc...).

Les deux mécanismes plasticité et décollement sont traités suivant la théorie mathématique de plasticité. Chacun de ces deux mécanismes fait donc évoluer des surfaces de charge, des lois

d'écrouissage à l'intérieur de leur critère de rupture. Ils créent aussi des déplacements permanents qu'il convient d'ajouter. L'évolution de ces mécanismes au cours d'un chargement est gérée par un assemblage multi-mécanismes classique. Outre cet assemblage, ces deux mécanismes sont couplés dans leur conception, c'est à dire que le décollement phénoménologique tient compte du fait que le sol peut se plastifier. De la même manière, le développement de la plasticité tient compte du fait que la fondation peut se décoller. En effet, le sol ne supporte pas les même contraintes si le décollement de la fondation est permis ou non.

Plusieurs exemples montrant la performance du macro-élément sont présentés dans cette thèse. Le chapitre 5 donne idée du comportement du macro-élément comparé avec des résultats expérimentaux pour des chargements statique, cyclique, et dynamique. Après l'ajustement de quelques paramètres constitutifs des lois, dus au léger décalage de l'expérience avec le domaine d'application de l'élément, celui-ci montre qu'il donne de bonnes tendances du comportement des fondations modélisées. Le chapitre 6 quant à lui a permis d'utiliser le macro-élément sur des ouvrages du génie civil (bâtiments, viaduc). Les études paramétriques ont aussi mis en évidence l'importance primordiale de la prise en compte de l'ISS. Dans la plupart des cas, l'ISS permet d'isoler la structure d'un point de vue des efforts internes et lui permet même d'être beaucoup moins endommagée que dans le cas d'une structure encastree. Cependant l'ISS génère souvent en contrepartie des déplacements plus grands qui peuvent être déterminants pour l'intégrité de la structure. Par ailleurs, un sol souple n'est pas synonyme de plus grands déplacements engendrés dans la structure. L'évaluation des déplacements maximum est donc relativement difficile à opérer sans le macro-élément. L'étude à l'aide de la méthode de décomposition modale [Gutiérrez et Zaldivar, 2000] montre justement que des modes supérieurs peuvent être excités changeant le comportement global de la structure. Une comparaison avec une approche ingénierie en prenant en compte des ressorts linéaires prouve que même avec des raideurs de ressorts calibrées à l'aide du macro-élément, ces ressorts ne permettent pas de reproduire complètement le comportement du sol et de la structure. En effet des différences significatives apparaissent sur les déplacements ainsi que sur les efforts internes.

Le traitement 3D du macro-élément a nécessité l'implantation d'une loi de tangence qui permet de calculer les limites des variables d'écrouissages. Le calcul de ces limites est essentiel pour assurer que la surface de charge n'interpénètre pas le critère de rupture. Ce genre de loi de tangence pose des problèmes numériques lorsque le chargement est fortement non-radial (c'est à dire lorsque les limites des variables d'écrouissages changent souvent). Les lois plastiques classiques ne sont donc pas très adaptées pour ce genre de résolution. Au contraire les lois hypoplastiques, pour lesquelles le module plastique est une fonction directe de la distance séparant la surface de charge au critère de rupture, sont mieux adaptés à ce genre de résolution et assurent une tangence parfaite entre les surfaces au cours de l'évolution des surfaces de charges. C'est sans doute la plus grande amélioration à apporter à ce modèle.

D'autre part, la philosophie de ce genre de modèle permettrait d'envisager une adaptation de ce macro-élément afin de reproduire le comportement d'autres éléments de liaisons. Un premier exemple est l'adaptation de cet élément pour reproduire le comportement d'isolateurs présenté au chapitre 3, ou alors une adaptation pour des fondations profondes ou des joints poteaux-poutres ou des liaisons ossatures bois.

---

## Bibliographie

---

- AUBRY, D. (1986). Sur une approche intégrée de l'interaction sismique sol-structure, journées communes fondations, propriétés des sols et impératifs sismiques, cfms-afps. *Revue française de Géotechnique*, Presses ENPC(ed.), Paris, pages 81–100.
- BAEL91 (2000). *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états-limites*. Eyrolles, Paris, France.
- BETBEDER-MATIBET, J. (2003). *TSeismic Engineering*. ISTE, Wiley.
- BÜHLER, M. et CUDMANI, R. (2005). Numerical investigation of the seismic behaviour of structures on soft and liquefiable soils considering the non-linear soil-foundation-structure interaction. *250th anniversary of the 1755 Lisbon earthquake*.
- BOTRUNO, L., KOTRONIS, P. et GRANGE, S. (2008). *Analisi della riposta sismica di un ponte in cemento armato*. Mémoire de Master - Université de Perugia/INP Grenoble - Laboratoire 3S-R.
- BUTTERFIELD, R. (1980). A simple analysis of the load capacity of rigid footings on granular materials. *Journée de Géotechnique*, pages 128–134.
- BUTTERFIELD, R. et GOTTARDI, G. (1994). A complete three-dimensional failure envelope for shallow footings on sand. *Géotechnique*, 44(1):181–184.
- BYRNE, B. et HOULSBY, G. (2001). Observations of footing behaviour on loose carbonate sands. *Géotechnique*, 51(5):463–466.
- CAQUOT, A. et KÉRISEL, J. (1966). *Traité de mécanique des sols*. Gautiers-Villars, France.
- CASSIDY, M., BYRNE, B. et HOULSBY, G. (2002). Modelling the behaviour of circular footings under combined loading on loose carbonate sand. *Géotechnique*, 52(10):705–712.
- CASSIDY, M., MARTIN, C. et HOULSBY, G. (2004). Development and application of force resultant models describing jack-up foundation behaviour. *Marine Structures*, 17:165–193.
- CHATZIGOGOS, C. (2007). *Comportement sismique des fondations superficielles: Vers la prise en compte d'un critère de performance dans la conception*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, France.
- CHEBLI, H., OTHMAN, R., CLOUTEAU, D., ARNST, M. et DEGRANDE, G. (2008). 3d periodic be-fe model for various transportation structures interacting with soil. *Computers and Geotechnics*, 35:22–32.

- CHUNG, W., YUN, C., KIM, N. et SEO, J. (1999). Shaking table and pseudodynamic tests for the evaluation of the seismic performance of based isolated structure. *Engineering Structures*, 21:365–379.
- COMBESCURE, D. et CHAUDAT, T. (2000). *ICONS european program seismic tests on R/C walls with uplift; CAMUS IV specimen, ICONS project*. CEA, Direction des Réacteurs Nucléaires, Département de Mécanique et de Technologie. Rapport, semt/emsi/rt/00-27/4.
- CRÉMER, C. (2001). *Modélisation du comportement non linéaire des fondations superficielles sous séismes*. Thèse de doctorat, LMT Cachan - ENS, Cachan, France.
- CRÉMER, C., PECKER, A. et DAVENNE, L. (2001). Cyclic macro-element for soil-structure interaction: material and geometrical non-linearities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25(13):1257–1284.
- CRÉMER, C., PECKER, A. et DAVENNE, L. (2002). Modelling of nonlinear dynamic behaviour of a shallow strip foundation with macro-element. *Journal of Earthquake Engineering*, 6(2):175–211.
- DAVENNE, L. (1998). *Analysis of seismic response of reinforced concrete frames with macro-element*. Proc. 11th Eur. Conf. Engng., Paris. Balkema (ed.). Rotterdam.
- DAVIDOVICI, V. (1999). *La construction en zone sismique*. Le Moniteur, France.
- DAVIS, E. et BOOKER, J. (1973). The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays. *Géotechnique*, 23(4):551–563.
- di PRISCO, C. et GALLI, A. (2006). *Mechanical behaviour of shallow foundations under cyclic loads*. ALERT Workshop 2006 (without proceedings), Technical University (Politecnico) of Milan Italy.
- di PRISCO, C., NOVA, R. et SIBILIA, A. (2002). Analysis of soil-structure interaction of towers under cyclic loading. *invited lecture, Proc. NUMOG 8, Rome, G.N.Pande & S. Pietruszczak editors, Swets & Zeitlinger, Lisse*, pages 637–642.
- DUVAUT, G. et LIONS, J. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris.
- EC8 (2005). *NF P 06 030-1, NF EN 1998-1, Eurocode 8: Calcul des structures pour leur résistance aux séismes*. AFNOR. Partie 1: Règles générales, actions sismiques et règles pour les bâtiments, Septembre.
- ECOEST PREC8 (1996). *Pseudodynamic and shaking table tests on R.C bridges*. European Commission - Human Capital and Mobility Programme - Prenormative research in support of Eurocode 8. V. Pinto.
- FILIPPOU, F. et CONSTANDINES, M. (2004). *FedeasLab Getting Started Guide And Simulations Examples*. Dpt of civil and env. Engng. UC Berkeley.
- FILIPPOU, F., POPOV, E. et BERTERO, V. (1983). *Effects of bond deterioration on hysteretic behaviour of reinforced concrete joints*. Earthquake Engrg. Res. Ctr. Univerity of California, Berkeley. Technical report EERC-83/19.
- FLÉJOU, J. (1993). *Comportement dynamique des structures de génie civil avec liaisons semi-rigides*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, France.
- GAZETAS, G. (1991). *Foundation Engineering Handbook, Chapter 15*. Fang H-Y (ed.), van Nostrand Reinhold: New York.
- GOTTARDI, G., HOULSBY, G. et BUTTERFIELD, R. (1999). Plastic response of circular footings under general planar loading. *Géotechnique*, 49(4):453–469.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2006a). *Advancement of simplified modelling strategies for 3D phenomena and/or boundaries conditions for base-isolated buildings or specific soil-structure interactions*. Deliverable 67, European Contract LESSLOSS, Project No.: GOCE-CT-2003-505488, Risk Mitigation for Earthquakes and Landslides, Sixth Framework Programme, 2006. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00102513>.

- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2006b). *Seven-story building-slice earthquake blind prediction contest: a simplified modeling using multifiber Timoshenko beams*. Workshop and Seminar on Analytical Modeling of Reinforced Concrete Walls for Earthquake Resistance, San Diego, USA-California, December 15-16, 2006.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2007a). *3D macro element for soil structure interaction*. 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, Thessaloniki, Greece, June 25-28.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2007b). *Extensive validation of the SSI macro element using experimental and numerical results*. Deliverable [D8-2], European Contract LESSLOSS, Project No.: GOCE-CT-2003-505488, Risk Mitigation for Earthquakes and Landslides, Sixth Framework Programme, 2007. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00138210>.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2008a). A macro-element for a circular foundation to simulate 3d soil-structure interaction. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.*, 32(10):1205–1227.
- GRANGE, S., KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2008b). Numerical modelling of the seismic behaviour of a 7-story building: Nees benchmark. *Materials and structures, submitted*.
- GUTIÉRREZ, E. et ZALDIVAR, J. (2000). The application of karhunen-loève, or principal component analysis method, to study the non-linear seismic response of structures. *Earthquake Engng Struct. Dyn.*, 29:1261–1286.
- ICONS (2001). *Thematic report N.5. Shear Walls Structures*. CAFEEL-ECOEST/ICONS. Editors JM Reynouard, MN Fardis, gen. eds R. T. Severn and R. Bairrão (LNEC, ISBN 972-49-1891-2) September.
- KAUSEL, E., WHITMAN, A., MURRAY, J. et ELSABEE, F. (1978). The spring method for embedded foundations. *Nuclear Engng. and Design*, 48.
- KOTRONIS, P. et MAZARS, J. (2005). Simplified modelling strategies to simulate the dynamic behaviour of r/c walls. *Journal of Earthquake Engineering*, 9(2):285–306.
- LA-BORDERIE, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, France.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. (1988). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Bordas, Paris, France.
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- MARTIN, C. (1994). Physical and numerical modelling of offshore foundations under combined loads. Mémoire de D.E.A., DPhil Thesis, University of Oxford.
- MATAR, M. et SALENÇON, J. (1979). Capacité portante des semelles filantes. *Revue française de Géotechnique*, 9:51–76.
- MAZARS, J., KOTRONIS, P., RAGUENEAU, F. et CASAUX, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion. applications to concrete structural elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7264–7281.
- MENEGOTO, M. et PINTO, P. (1973). Method of analysis of cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending. *IABSE Symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well-defined repeated loads, final report, Lisbon*, page 328p.
- MONTRASIO, L. et NOVA, R. (1997). Settlements of shallow foundations on sand: geometrical effects. *Géotechnique*, 47(1):49–60.

- NEES7STORY (2006). *NEES/UCSD seven-story building-slice earthquake blind prediction contest*. <http://nees.ucsd.edu/7Story.html>.
- NOVA, R. et MONTRASIO, L. (1991). Settlements of shallow foundations on sand. *Géotechnique*, 41(2):243–256.
- PAOLUCCI, R. et PECKER, A. (1997a). Seismic bearing capacity of shallow strip foundations on dry soils. *Soils and Foundations, Japanese Geotechnical Society*, 37(3):95–105.
- PAOLUCCI, R. et PECKER, A. (1997b). Soil inertia effects on the bearing capacity of rectangular foundations on cohesive soils. *Engineering structures*, 19(8):637–643.
- PECKER, A. (1984). *Dynamique des sols*. Presse, ENPC, Paris, France.
- PECKER, A. (1997). *Seismic Behavior of Ground and Geotechnical Structures*, chapitre Analytical formulae for the seismic bearing capacity of shallow strip foundations, pages 261–268. Seco e Pinto (ed.), Balkema: Rotterdam.
- PEDRETTI, S. (1998). *Nonlinear seismic soil-foundation interaction: analysis and modelling method*. Thèse de doctorat, Dpt Ing Strutturale, Politecnico di, Milano.
- PHILIPPONNAT, G. et HUBERT, B. (2003). *Fondations et ouvrages en terre*. Eyrolles, Paris, France.
- PITILAKIS, D., DIETZ, M., WOOD, D. M., CLOUTEAU, D. et MODARESSI, A. (2008). Numerical simulation of dynamic soil-structure interaction in shaking table testing. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28:453–467.
- PRAGER, W. (1955). The theory of plasticity: a survey of recent achievements. James clayton lecture. *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 169:41–57.
- PRÉVOST, J. (1978). Anisotropic undrained stress strain behaviour of clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, GT8:1075–1090.
- RICHARD, N., DAUDEVILLE, L. et DAVENNE, L. (1999). *Simulation par élément finis de la réponse sismique de murs de contreventements de structures à ossature en bois*. Proc. Vieme Coll. Nat. AFPS, Cachan. 2:574-582.
- ROSEBROOK, K. et KUTTER, B. (2001). *Soil-Foundation-Structure interaction: shallow foundations centrifuge data report for KRRO1*. Center for geotechnical modelling UCD/CGMDR-01/09 Department of civil and environmental engineering University of California at Davis.
- SALENÇON, J. et PECKER, A. (1995a). Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. part i: purely cohesive soil. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 14(3):349–375.
- SALENÇON, J. et PECKER, A. (1995b). Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. part ii: purely cohesive soil without tensile strength. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 14(3):377–396.
- SIMO, J. et HUGHES, T. (1998). *Computational Inelasticity, vol. 7*. Mechanics and materials, Springer Interdisciplinary applied mathematics.
- TAN, F. (1990). *Centrifuge and theoretical modelling of conical footings on sand*. Thèse de doctorat, University of, Cambridge.
- TAYLOR, C. et COMBESURE, D. (2001). *soil dynamic and foundation structures*. LNEC - Laborat´orio Nacional de Engenharia Civil, ECOEST2, ICONS. Rapport technique.
- TRISEE (1998). *Large-scale geotechnical experiments on soil-foundation interaction*. European Commission, Directorate General XII for science, Research and Development. TRISEE, 3D Site Effects and Soil-Foundation Interaction in Earthquake and vibration Risk Evaluation, Part 4.
- WOLF, J. (1988). *Soil-Structure-Interaction Analysis in time domain*. Prentice Hall International Series, Englewood Cliffs, New Jersey.