



HAL
open science

Sur quelques paramètres et classes de graphes reconstructibles

Oscar Meza

► **To cite this version:**

Oscar Meza. Sur quelques paramètres et classes de graphes reconstructibles. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1983. Français. NNT: . tel-00308110

HAL Id: tel-00308110

<https://theses.hal.science/tel-00308110>

Submitted on 29 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
«Recherche opérationnelle»

par

Oscar MEZA



**SUR QUELQUES PARAMETRES ET CLASSES DE GRAPHS
RECONSTRUCTIBLES.**



Thèse soutenue le 8 décembre 1983 devant la commission d'examen.

C. BENZAKEN	Président
F. JAEGER	Examineurs
C. PAYAN	
N.H. XUONG	



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
DARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie



A MARTHA



R E M E R C I E M E N T S

Je remercie Monsieur C. BENZAKEN qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Messieurs F. JAEGER et C. PAYAN d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie tout particulièrement Messieurs N.H. XUONG et C. PAYAN pour le soutien constant qu'ils m'ont prodigué tout au long de ce travail.

Je remercie tous les membres du service de reprographie pour l'efficacité avec laquelle ils ont effectué le tirage de cette thèse.

Je ne voudrais pas terminer sans remercier la Fondation "Gran Mariscal de Ayacucho" sans l'aide financière de laquelle ce travail n'aurait pu être accompli.

O. MEZA



TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
 <u>CHAPITRE I : RAPPELS SUR LA RECONSTRUCTION DE GRAPHES</u>	
I.1. - Définitions et notations	5
I.2. - Le problème de la reconstruction de graphes	9
I.2.1. - Introduction	9
I.2.2. - Conjecture de la reconstruction des graphes simples ou Conjecture d'Ulam	10
I.2.3. - Conjecture de l'arête-reconstruction des graphes simples	23
I.2.4. - Conjecture de Kelly	28
I.2.5. - Conjecture de l'ensemble-reconstruction des graphes simples ou Conjecture d'Harary	28
I.2.6. - Le cas des graphes orientés et multigraphes	29
 <u>CHAPITRE II : APPLICATION DE TECHNIQUES DE DENOMBREMENT A LA RECONSTRUCTION DE CERTAINS PARAMETRES</u>	
II.1. - Introduction	33
II.2. - Reconstruction des multigraphes partiels non-connexes d'un multigraphe	36
II.3. - Reconstruction du nombre d'arbres et du nombre de multigraphes partiels connexes unicycliques et le cycle de longueur p	39
II.4. - Les paramètres $n^*(F,G)$ et $m^*(F,G)$	43
II.4.1. - Reconstruction de $n^*(F,G)$	43
II.4.2. - Arête-reconstruction de $m^*(F,G)$	48
II.5. - Application à la reconstruction de certains paramètres	49
II.5.1. - Reconstruction de γ, β, i et du nombre de couplages de cardinalité maximum	49
II.5.2. - Arête-reconstruction de q et $\{$	51
II.6. - Une généralisation des propositions 1, 2 et 3	53

CHAPITRE III : UNE CLASSE DE GRAPHERS ARETE-
RECONSTRUCTIBLE ET PROBLEMES OUVERTS

- III.1. - Les graphes adjoints des graphes simples
avec $\Delta(G) > 4$ sont arête-reconstructibles 59
- III.2. - Quelques problèmes ouverts en
reconstruction de graphes 70

BIBLIOGRAPHIE 75

I N T R O D U C T I O N



INTRODUCTION

L'objet du travail présenté dans cette thèse est l'étude du problème de la reconstruction d'un graphe à partir d'une famille de ses sous-graphes. Autrement dit, on s'intéresse à la question de savoir si une liste bien définie de sous-graphes propres d'un graphe, caractérise le graphe à un isomorphisme près.

La Conjecture d'Ulam (ou Conjecture de la reconstruction de graphes) est un des problèmes célèbres de la théorie de graphes. Cette conjecture affirme que tout graphe simple d'ordre ≥ 3 est uniquement déterminé, à un isomorphisme près, par la famille de ses sous-graphes induits propres maximaux. Malgré l'effort considérable qui a été consacré à son étude depuis sa formulation, les progrès vers sa résolution restent faibles.

Un autre problème sur la reconstruction de graphes, et qui semble plus abordable que celui d'Ulam, est celui appelé "Conjecture de l'arête-reconstruction", énoncée par Harary en 1964 : Tout graphe simple avec au moins quatre arêtes peut être reconstruit à partir de ses sous-graphes partiels propres maximaux. Dans le même article, Harary énonce une autre conjecture plus forte que celle d'Ulam : Tout graphe simple d'ordre ≥ 4 , est uniquement déterminé, à un isomorphisme près, par l'ensemble de ses sous-graphes induits propres maximaux.

Une autre conjecture qui généralise celle d'Ulam a été proposée par P.J. Kelly en 1957 : Pour tout entier $k > 0$, il existe un entier $v(k)$ tel que tout graphe simple avec au moins $v(k)$ sommets est uniquement déterminé, à un isomorphisme près, par la famille des sous-graphes obtenus en enlevant k sommets du graphe.

Dans le chapitre I nous faisons un résumé des résultats relatifs aux conjectures présentées ci-dessus. On remarque tout spécialement le rôle important qu'ont joué les techniques de dénombrement dans ces résultats. C'est précisément en nous servant de ces techniques que, dans le chapitre II, nous arrivons à reconstruire le nombre de graphes partiels appartenant à certaines classes de graphes et deux paramètres relatifs au dénombrement de

partitions de l'ensemble des sommets et de l'ensemble des arêtes en des ensembles qui induisent des sous-graphes isomorphes aux graphes d'une liste donnée d'avance. Ces résultats permettent de reconstruire de manière directe le nombre chromatique, le nombre d'absorption, l'arête-connexité, le nombre de couplages de cardinalité maximum, l'indice chromatique et la déficience de Betti.

Le chapitre III présente deux paragraphes indépendants. Le premier porte sur l'arête-reconstruction des graphes adjoints des graphes simples de degré maximum ≥ 4 . Le deuxième paragraphe propose une liste de problèmes ouverts sur la reconstruction de graphes.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LA RECONSTRUCTION DE GRAPHS



I.1. - DEFINITIONS ET NOTATIONS :

Pour toute autre définition ou notation se référer à Berge (3)

I.1.1. - Le concept de graphe :

Un graphe (ou graphe non-orienté) $G=(V,E)$ est un couple constitué :

1° par un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ fini

2° par une famille $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ de paires d'éléments de V .

v_1, v_2, \dots, v_n sont appelés les sommets du graphe G et e_1, e_2, \dots, e_m sont les arêtes de G .

Le nombre de sommets de G est appelé l'ordre de G .

Un graphe est dit simple si l'on a les deux conditions :
1° Il n'y a pas de boucles, 2° entre deux sommets il y a au plus une arête. Dans la suite, par graphe nous entendrons un graphe simple, lorsqu'on considère des arêtes multiples on parlera de multigraphe.

Sous-graphe induit de G (par $U \subseteq V$) :

C'est le graphe $G[U]$ dont les sommets sont les points de U et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans U .

Graphe partiel de G induit par $F \subseteq E$:

C'est le graphe (V, F) dont les sommets sont les points de V et dont les arêtes sont celles de F . Autrement dit, on élimine de G les arêtes dans $E-F$.

Sous-graphe partiel de G (ou sous-graphe de G) :

C'est le graphe (U, F) avec $U \subseteq V$, $F \subseteq E$ et $\forall e = [x_1, x_2] \in F$: $x_1 \in U$ et $x_2 \in U$.

Sous-graphe partiel de G induit par $F \subseteq E$:

C'est le graphe dont les sommets sont les extrémités des arêtes dans F et dont les arêtes sont celles de F , noté $G[F]$.

Graphes distincts, graphes identiques :

Deux graphes $G=(V,E)$ et $G'=(V',E')$ sont distincts si $V \neq V'$ ou $E \neq E'$. On écrit $G \neq G'$. On dira que G et G' sont identiques s'ils ne sont pas distincts, on écrit $G=G'$.

Graphes isomorphes :

Deux graphes $G=(V,E)$ et $G'=(V',E')$ sont isomorphes s'il existe deux applications bijectives φ et ψ , $\varphi: V \rightarrow V'$ et $\psi: E \rightarrow E'$, telles que :

$$\forall e=[x,y] \in E : \psi(e)=[\varphi(x), \varphi(y)]$$

Lorsque G et G' sont des graphes simples, dire que G et G' sont isomorphes revient à dire qu'il existe une application bijective $\varphi: V \rightarrow V'$ qui induit une bijection de E dans E' . L'isomorphisme entre graphes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des graphes étiquetés (c'est-à-dire, à chaque sommet et à chaque arête, on affecte une étiquette). Les classes d'équivalence, induites par cette relation sont appelées classes d'isomorphisme. Dans toute la suite, par graphe nous entendrons un représentant d'une classe d'isomorphisme sauf mention explicite du contraire. Lorsqu'on parlera de liste, famille ou collection de graphes, deux graphes dans la liste (famille ou collection) peuvent être isomorphes.

Graphes disjoints :

Deux graphes $G=(V,E)$ et $G'=(V',E')$ sont disjoints si $V \cap V' = \emptyset$.

Graphe adjoint d'un graphe G sans boucles :

C'est le graphe $L(G)$ dont les sommets sont les arêtes de G , deux sommets étant reliés dans $L(G)$ si et seulement si les arêtes correspondantes dans G ont une extrémité commune.

Un paramètre ou invariant d'un graphe G :

C'est une application $\phi: \mathfrak{G} \rightarrow K$ d'une classe \mathfrak{G} de graphes dans un ensemble K (généralement un anneau ou un corps) telle que quelque soient G et H deux graphes isomorphes de \mathfrak{G} , on a $\phi(G) = \phi(H)$.

Grphe non-séparable :

C'est un graphe connexe qui n'admet pas de point d'articulation. On convient que les graphes non-séparables d'ordre ≥ 2 n'ont pas de boucles et une boucle est un graphe non-séparable.

Complément d'un graphe simple $G=(V,E)$:

C'est le graphe simple \bar{G} dont les sommets sont les points de V et dont les arêtes sont les paires $[x,y]$, $x \in V$, $y \in V$, $x \neq y$ et $[x,y] \notin E$.

G_X ou G_v :

Soit G un graphe et X un sous-ensemble de l'ensemble des sommets de G . G_X est le sous-graphe de G obtenu à partir de G en enlevant les sommets appartenant à X et toutes les arêtes incidentes aux sommets de X . Lorsque $X=\{v\}$, on écrit G_v au lieu de $G_{\{v\}}$. On remarque que la liste des G_v , $v \in V(G)$, est la liste des sous-graphes induits propres maximaux de G .

G_F ou G_e :

Soit G un graphe et F un sous-ensemble de l'ensemble des arêtes de G . G_F est le sous-graphe de G obtenu à partir de G en enlevant les arêtes appartenant à F . Lorsque $F=\{e\}$, on écrit G_e au lieu de $G_{\{e\}}$. On remarque que la liste des G_e , $e \in E(G)$, est la liste des sous-graphes propres maximaux de G .

I.1.2. - Symboles et notations :

- $n(F,G)$: nombre de sous-graphes partiels de G isomorphes à F .
 $s(F,G)$: nombre de sous-graphes induits de G isomorphes à F .
 \equiv : égal par définition.
 $G \sim H$: le graphe G est isomorphe au graphe H .
 C_q^p : coefficient binomial en p et q .
 $\chi(G)$: nombre chromatique de G .
 $\xi(G)$: déficience de Betti de G (nombre minimum de composantes connexes avec un nombre impair d'arêtes dans un coarbre de G).
 $\beta(G)$: nombre d'absorption de G .
 $i(G)$: arête-connexité de G .
 K_n : graphe complet simple à n sommets.
 $K_{n,m}$: graphe biparti simple (X,Y,E) avec $|X|=n$, $|Y|=m$ et $E=X \times Y$.
 $\psi(G)$: nombre achromatique de G (le cardinal d'une partition maximum de $V(G)$ en stables tels que deux stables quelconques sont reliés par au moins une arête de G).
 $h(G)$: nombre de Hadwiger de G (le nombre maximum q pour lequel G est contractible en K_q . Une contraction de G étant l'identification dans G de deux sommets adjacents).
 $q(G)$: indice chromatique de G .
 $|A|$: cardinalité de l'ensemble A .
 $G \neq H$: G et H sont deux graphes distincts.
 $G = H$: G et H sont deux graphes identiques.
 \bar{G} : complément du graphe simple G .
 $L(G)$: graphe adjoint de G .
 $G \subseteq G'$: G est un sous-graphe de G' .
 $G \subset G'$: G est un sous-graphe propre de G' .
 $\Delta(G)$: degré maximum de G .
 $\delta(G)$: degré minimum de G .
 $\Gamma_G(x)$: ensemble des voisins du sommet x dans G .

I.2. - LE PROBLEME DE LA RECONSTRUCTION DE GRAPHES :

I.2.1. - Introduction :

Le problème le plus ancien que l'on trouve dans la littérature concernant la caractérisation d'un graphe par une famille de ses sous-graphes, est considéré de nos jours comme l'un des problèmes ouverts les plus connus de la théorie des graphes : Un graphe simple est-il caractérisé, à un isomorphisme près, par la liste de ses sous-graphes induits propres maximaux, c'est-à-dire, la liste des sous-graphes obtenus en enlevant un sommet et toutes les arêtes qui lui sont incidentes ? Ce problème a été formulé sous la forme d'une conjecture dûe à S.M. Ulam (1941) :

Conjecture d'Ulam ou Conjecture de la reconstruction :

Si G et H sont deux graphes simples avec au moins trois sommets et s'il existe une application bijective $\sigma: V(G) \rightarrow V(H)$ telle que $G_v \sim H_{\sigma(v)}$, pour tout sommet $v \in V(G)$, alors $G \sim H$.

Après la parution de cette conjecture, d'autres conjectures analogues à celle-ci ont été proposées. En 1964, Harary (32) formule une conjecture concernant la caractérisation d'un graphe simple par la liste de ses sous-graphes propres maximaux, c'est-à-dire, ceux qu'on obtient en enlevant une arête :

Conjecture de l'arête-reconstruction :

Si G et H sont deux graphes simples avec au moins 4 arêtes et s'il existe une application bijective $\sigma: E(G) \rightarrow E(H)$ telle que $G_e \sim H_{\sigma(e)}$, pour toute arête $e \in E(G)$, alors $G \sim H$.

On voit intuitivement que cette conjecture semble plus facile à vérifier que celle d'Ulam car chaque G_e est plus proche du graphe original que les G_v . Nous verrons dans le paragraphe I.2.3. qu'effectivement la conjecture d'Ulam entraîne celle de l'arête-reconstruction.

Deux autres conjectures, moins étudiées, concernant toujours la caractérisation d'un graphe par une famille de ses sous-graphes, ont été proposées par P.J. Kelly (46) et par Harary (32).

La Conjecture de Kelly généralise celle d'Ulam en affirmant qu'un graphe simple G d'ordre suffisamment grand est caractérisé par la famille de ses sous-graphes G_B , $|B| =$ constante dépendante de l'ordre de G . Ainsi, la conjecture affirme que non seulement G est caractérisé par la famille des sous-graphes obtenus en enlevant un sommet, mais aussi par la famille des sous-graphes obtenus en enlevant deux, trois, ..., k sommets, où k dépend de l'ordre de G . Plus formellement :

Conjecture de Kelly :

Pour tout entier $k > 0$, il existe un entier $v(k)$, tel que tout graphe simple G d'ordre $n \geq v(k)$ est caractérisé, à un isomorphisme près, par la famille des sous-graphes G_B , $|B|=k$.

D'après Harary (32), l'ensemble des sous-graphes induits propres maximaux suffit à caractériser un graphe simple. Cette affirmation est plus forte que la Conjecture d'Ulam.

Conjecture d'Harary ou Conjecture de l'ensemble-reconstruction

Si G et H sont deux graphes simples avec au moins 4 sommets et si l'ensemble des graphes G_v , pour $v \in V(G)$, est égal à l'ensemble des graphes H_w , pour $w \in V(H)$, alors $G \sim H$.

Dans les paragraphes qui suivent nous donnerons les méthodes les plus couramment employées dans l'étude de ces conjectures, ainsi que les résultats les plus importants.

I.2.2. - Conjecture d'Ulam :

Pour des raisons de nomenclature, nous allons reformuler la conjecture d'Ulam. On dira qu'un graphe H est une reconstruction d'un graphe G si $V(H)=V(G)$ et $H_v \sim G_v$, pour tout $v \in V(G)$. G sera dit reconstructible si toute reconstruction de G est isomorphe à G . Tous les graphes ne sont pas reconstructibles ; par exemple, K_2 et $2K_1$ sont des reconstructions l'un de l'autre. La Conjecture d'Ulam affirme que ce sont les seuls graphes simples non-reconstructibles :

Conjecture d'Ulam : Tous les graphes simples avec au moins 3 sommets sont reconstructibles.

Le premier travail qui a été publié, concernant la Conjecture d'Ulam, paraît en 1957. Dans cet article, P.J. Kelly (46) montre que les arbres satisfont à la conjecture.

Harary (32) a suggéré une formulation informelle de la Conjecture d'Ulam mais très utile de par son caractère intuitif. Soit G un graphe simple dont l'ensemble des sommets est $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Supposons qu'on nous présente n cartes C_1, C_2, \dots, C_n , telles qu'un graphe non-étiqueté isomorphe à G_{v_i} est dessiné sur la carte C_i , $i=1, 2, \dots, n$ (figure 1 et 2). Il est clair qu'il existe des procédés permettant d'obtenir des graphes qui réalisent le paquet des cartes C_1, C_2, \dots, C_n . Harary remarque que la Conjecture d'Ulam équivaut à dire que quelque soit le procédé utilisé pour obtenir un tel graphe à partir des cartes C_1, C_2, \dots, C_n , on aboutit toujours à un graphe isomorphe à G . Cette formulation va nous permettre de donner des démonstrations plus courtes, bien que moins rigoureuses, des résultats présentés ci-après.

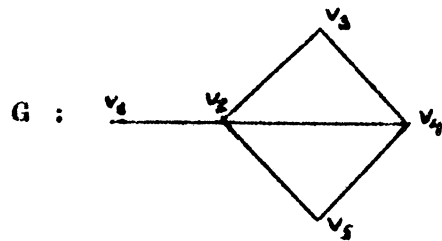


figure 1

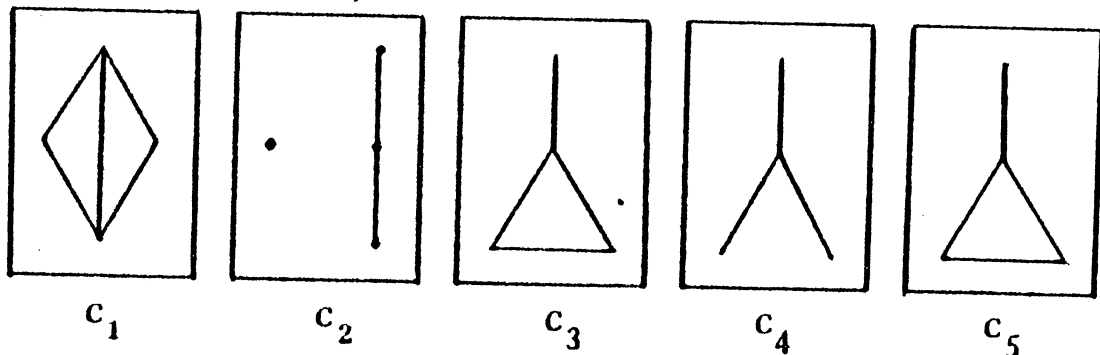


figure 2

Par exemple, on peut déterminer le nombre de stabilité de G , $\alpha(G)$, à partir des cartes C_1, C_2, \dots, C_n : Si aucune carte ne possède d'arêtes alors G ne possède pas d'arêtes et $\alpha(G)=n$, où n est le nombre de sommets de G . Si G possède au moins une arête alors $\alpha(G)=\max_i \alpha(\text{graphe sur la carte } C_i)$.

Par la suite, tous les graphes que nous considérerons seront des graphes simples d'ordre ≥ 3 .

Tous les graphes d'ordre entre 3 et 9 sont reconstructibles (Kelly (46), Harary et Palmer (33), Mc Kay (67), Nijenhuis (73)). Si un graphe est reconstructible alors son complément est lui aussi reconstructible (Harary (32)).

Faute de savoir montrer la conjecture directement, les résultats partiels qui ont été obtenus se placent dans deux catégories :

(i) Des résultats qui montrent que certaines classes de graphes sont reconstructibles. (Nous dirons qu'une classe \mathfrak{g} est reconstructible si chaque graphe dans \mathfrak{g} est reconstructible).
Exemple : les graphes réguliers sont reconstructibles.

(ii) Des résultats qui montrent la reconstruction de paramètres (Un paramètre ou n'importe quelle fonction définie sur une classe \mathfrak{g} de graphes est reconstructible si pour chaque graphe G de \mathfrak{g} , ce paramètre ou fonction prend la même valeur quelque soit la reconstruction de G). Exemple : la connectivité, $k(G)$, d'un graphe G est reconstructible. G est connexe si et seulement si il existe au moins deux cartes parmi C_1, C_2, \dots, C_n , contenant des graphes connexes. D'où, si G est connexe : $k(G)=1 + \min_i k(\text{graphe sur la carte } C_i)$.

Kelly (46) donne un lemme très simple qui a été l'outil le plus utilisé dans les méthodes de reconstruction comme on le remarquera tout au long de ce paragraphe.

Lemme de Kelly (Kelly (46)) :

Soient G et F deux graphes tels que $|V(F)| < |V(G)|$. Le nombre $n(F,G)$ de sous-graphes partiels de G isomorphes à F est reconstructible.

Démonstration :

Chaque sous-graphe partiel de G isomorphe à F apparaît dans exactement $|V(G)| - |V(F)|$ sous-graphes G_v ($v \in V(G)$). Donc,

$$n(F,G) = \sum_{v \in V(G)} n(F,G_v) / (|V(G)| - |V(F)|)$$

Il est clair que le côté droit de cette égalité est reconstituable. $n(F,G)$ est donc reconstituable.

C.Q.F.D.

Corollaire :

Soient G et F deux graphes tels que $|V(F)| < |V(G)|$. Le nombre de sous-graphes partiels de G isomorphes à F et qui possèdent un sommet donné v , est reconstituable.

Démonstration :

Ce nombre est $n(F,G) - n(F,G_v)$

C.Q.F.D.

Si l'on prend $F=K_2$ dans le lemme de Kelly, on obtient que le nombre d'arêtes est reconstituable. En prenant $F=K_2$ dans le corollaire, on obtient la reconstruction de la séquence des degrés.

Plus encore, la séquence des degrés des voisins d'un sommet donné est reconstituable :

Soit G un graphe d'ordre n et v un sommet de G . Soit $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n-1}$ la séquence des degrés des sommets de G différents de v . Soit $d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_{n-1}$ la séquence des degrés de G_v . On sait que la liste $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1}$ s'obtient à partir de la liste d_1, d_2, \dots, d_{n-1} en retranchant d'une unité certains d_i . La liste des valeurs d_i modifiées de cette manière n'est autre que la liste des degrés des voisins de v dans G . Etant donné deux suites croissantes d'entiers d_1, d_2, \dots, d_k et d'_1, d'_2, \dots, d'_k définies comme précédent, nous nous proposons de former la liste des valeurs d_i qui ont été modifiées, en raisonnant par récurrence sur k :

- 1) Pour $k=1$: Les listes sont de longueur 1 : d_1 et d_1' .
 - Si $d_1' = d_1$ alors d_1 n'a pas été modifiée.
 - Sinon, d_1 a été modifiée.

2) Supposons que pour $k=j$, on peut former la liste des valeurs modifiées, à partir de $(d_i)_{1 \leq i \leq j}$ et $(d_i')_{1 \leq i \leq j}$.

- 3) Pour $k=j+1$:

3.1.) - Si $d_1' = d_1$ alors d_1 n'a pas été modifiée.
 - Sinon, d_1 a été modifiée.

3.2.) - $d_2', d_3', \dots, d_{j+1}'$ est la liste obtenue à partir de d_2, d_3, \dots, d_{j+1} en modifiant les d_i autres que d_1 . Par hypothèse de récurrence, on peut former la liste des valeurs modifiées dans d_2, d_3, \dots, d_{j+1} .

D'après (3.1) et (3.2), on a la liste des valeurs modifiées dans d_1, d_2, \dots, d_{j+1} .

Ainsi, la séquence des degrés des voisins de v est reconstituable car la séquence des degrés des sommets de G différents de v et la séquence des degrés de G_v sont reconstituables.

C.Q.F.D.

La reconstruction de la séquence des degrés de G nous permet de montrer que les graphes réguliers sont reconstituables. Soit G un graphe k -régulier. Comme la séquence des degrés est reconstituable, toutes les reconstructions de G sont k -régulières. En plus, toutes les reconstructions de G sont isomorphes car elles peuvent être obtenues, à un isomorphisme près, à partir de n'importe quel G_v en ajoutant un sommet et en le joignant à tous les sommets de G_v de degré $k-1$.

Ce type de démonstration concernant la reconstruction des classes de graphes est très courant. Elle se divise en deux parties : tout d'abord on vérifie que toute reconstruction appartient à la classe (reconnaissance) et ensuite, on reconstruit en supposant que toutes les reconstructions sont dans la classe (faible reconstruction). Ainsi, une classe \mathfrak{g} de graphes est

reconnaissable si pour tout G de \mathfrak{G} , toute reconstruction de G est dans \mathfrak{G} . Elle est faiblement restructurable si pour tout G de \mathfrak{G} , toutes les reconstructions de G qui sont dans \mathfrak{G} sont isomorphes à G . Il s'en suit que \mathfrak{G} est restructurable si et seulement si \mathfrak{G} est reconnaissable et faiblement restructurable.

Une autre classe de graphes qui a été reconstruite est la classe des graphes non-connexes (Harary (32)). Plusieurs démonstrations ont été faites qui montrent comment reconstruire les composantes connexes du graphe. Nous allons énoncer un théorème dû à Bondy et Hemminger (6) qui permet d'obtenir des démonstrations plus simples de quelques uns des principaux résultats en reconstruction, en particulier, la reconstruction des graphes non-connexes. Ce théorème de dénombrement a permis aussi d'unifier les méthodes de reconstruction de certaines classes de graphes.

Soit f une classe de graphes et F et G deux graphes tels que $F \in f$ et $n(F, G) > 0$. Un sous-graphe partiel de G qui appartient à f sera appelé un f -sous-graphe de G ; un f -sous-graphe maximal de G est un f -sous-graphe de G qui n'est pas un sous-graphe d'aucun autre f -sous-graphe de G . Par exemple, si f est la classe des graphes connexes, les f -sous-graphes maximaux de G sont les composantes connexes de G . Une (F, G) -chaîne de longueur n est une suite (F_0, F_1, \dots, F_n) de f -sous-graphes de G telle que $F \sim F_0 C F_1 C \dots C F_n C G$. Deux (F, G) -chaînes sont isomorphes si elles ont la même longueur et les termes correspondants sont des graphes isomorphes. Le rang de F dans G est la longueur de la plus longue (F, G) -chaîne, noté $\text{rang}(F)$.

Théorème de dénombrement (Bondy et Hemminger (6)) :

Soit \mathfrak{G} une classe reconnaissable de graphes et soit f une classe quelconque de graphes, telle que pour tout G dans \mathfrak{G} , chaque f -sous-graphe de G est : (i) sommet propre, (ii) contenu dans un seul f -sous-graphe maximal de G . Alors, pour tout F dans f et tout G dans \mathfrak{G} , le nombre $m(F, G)$ de f -sous-graphes maximaux de G isomorphes à F est restructurable.

Démonstration :

D'après (i) aucun f -sous-graphe maximal n'aura $|V(G)|$ sommets. Donc, $|V(F)| < |V(G)|$ pour tout $F \in f$.

Nous montrons par récurrence sur $\text{rang}(F)$ l'égalité suivante

$$(1) \quad m(F,G) = \sum_{n=0}^{\text{rang}(F)} (-1)^n n(F,F_1)n(F_1,F_2)\dots n(F_{n-1},F_n)n(F_n,G)$$

où la somme interne est prise sur les (F,G) -chaînes non-isomorphes (F_0, F_1, \dots, F_n) de G .

Supposons que le rang de F soit zéro, alors toute (F,G) -chaîne a une longueur égale à zéro, c'est-à-dire, tout sous-graphe de G isomorphe à F est un f -sous-graphe maximal de G et donc $m(F,G) = n(F,G)$.

Supposons maintenant que $\text{rang}(F) = r$:

Soit (F_1, F_2, \dots, F_p) la liste des f -sous-graphes maximaux de G . D'après la condition (ii), tout sous-graphe de G isomorphe à F appartient à un seul F_i . De plus, tout f -sous-graphe de G isomorphe à F est contenu dans un f -sous-graphe maximal de G (à la limite, il serait un f -sous-graphe maximal de G). Donc,

$$n(F,G) = \sum_{i=1}^p n(F,F_i)$$

Si on regroupe les termes $n(F,F_i)$ en mettant ensemble les F_i isomorphes, on a :

$$(2) \quad n(F,G) = \sum_X n(F,X) m(X,G)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des graphes X isomorphes aux f -sous-graphes maximaux de G .

On peut négliger la condition de maximalité de X dans l'égalité (2) car $m(X,G)$ est égal à zéro s'il n'existe pas de f -sous-graphe maximal isomorphe à X . L'égalité (2) peut s'écrire :

$$(3) \quad m(F,G) = n(F,G) - \sum_X n(F,X) m(X,G)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des graphes X isomorphes aux f -sous-graphes de G non isomorphes à F .

On peut considérer dans (3) uniquement les X tels que $n(F,X) \neq 0$. Dans ce cas, le rang de X est inférieur à r (sinon F aurait un rang supérieur à r). Donc, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $m(X,G)$ dans (3), on obtient ainsi l'égalité (1).

Alors, soit H une reconstruction de G . Etant donné que \mathfrak{g} est reconnaissable, H satisfait aux conditions (i) et (ii), et ainsi l'égalité (1) s'applique au graphe H . Pour toute (F,G) -chaîne il existe une (F,H) -chaîne isomorphe à celle-là et vice versa. Cette observation avec le lemme de Kelly implique que le côté droit de l'égalité (1) est égal pour G et H et donc $m(F,G)$ est restructurable.

C.Q.F.D.

Comme on l'a indiqué avant d'énoncer ce théorème, nous le proposons pour montrer une technique de dénombrement, autre que le lemme de Kelly, qui sera utilisée pour avoir des démonstrations plus courtes des résultats connus.

Corollaire 1 (Bondy et Hemminger (7)) :

Les graphes non-connexes sont restructurables.

Démonstration :

Un graphe G est non-connexe si et seulement si au plus un G_v est connexe. Par conséquent, les graphes non-connexes sont reconnaissables. En prenant \mathfrak{f} comme la classe des graphes connexes et \mathfrak{g} la classe des graphes non-connexes, le théorème de dénombrement établit la faible reconstruction de \mathfrak{g} .

C.Q.F.D.

On remarquera que tout graphe dont le complément est non-connexe, est restructurable. Les graphes "joint" sont donc restructurables (un graphe G est le graphe "joint" de deux graphes G_1, G_2 disjoints si $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ et $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x,y) / x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$). En particulier, les graphes n -parti complets sont restructurables.

Les arbres ont été reconstruits par P.J. Kelly (46). La preuve donnée par Kelly est basée essentiellement sur la propriété des arbres qui sont centrés (un seul centre) ou bicentrés (deux centres). Ainsi, son but a été de chercher l'isomorphisme entre les branches de deux reconstructions quelconques. Sa démonstration est trop longue car il doit considérer plusieurs cas séparément. A l'aide du théorème de dénombrement on peut donner une démonstration plus courte de la reconstruction des arbres. Harary et Palmer (35) ont renforcé le résultat de Kelly en reconstruisant les arbres à partir de leurs sous-arbres propres maximaux (on remarque en passant que le théorème 4 dans (35) n'est pas toujours vrai, un contreexemple est donné par la fig. (3.a). Ce qui conduit à restreindre les hypothèses aux arbres avec au moins 4 sommets pendants au lieu de 3. Lovász (55), dans un résumé de la démonstration d'Harary et Palmer, fait une remarque qui n'est pas vraie en général (page 522, cas (2b)). Un contreexemple en est donné par la fig. (3.b)). Bondy (4) est allé plus loin en montrant que les arbres sont reconstructibles à partir des sous-arbres obtenus en enlevant un sommet périphérique (c'est-à-dire, un sommet qui est extrémité d'une plus longue chaîne de l'arbre).

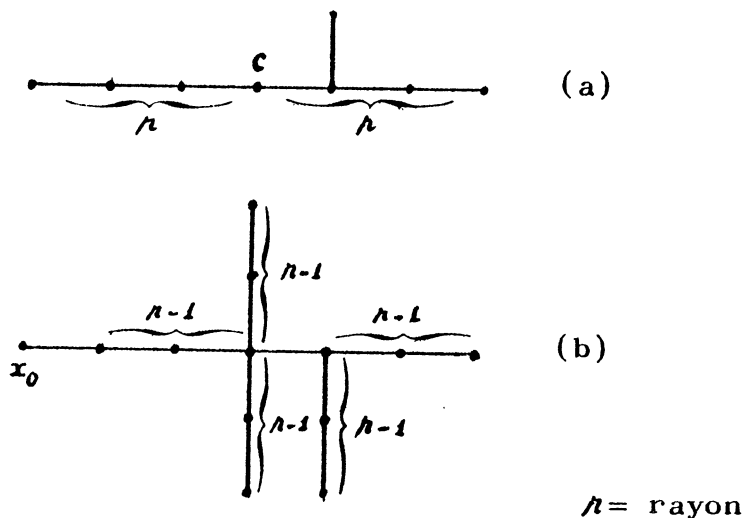


figure 3

Théorème (Bondy et Hemminger (7)) :

Les arbres sont restructurables.

Démonstration :

Les arbres sont reconnaissables car un graphe G est un arbre si et seulement si G est connexe et $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Un arbre est une chaîne si et seulement si $\Delta(G) \leq 2$. Ainsi, les chaînes sont restructurables.

Pour un arbre qui n'est pas une chaîne, toute plus longue chaîne est un sous-graphe propre au sens des sommets. Il résulte du lemme de Kelly que le diamètre et le rayon d'un arbre sont restructurables, ce qui signifie que les arbres centrés (diamètre pair) ou bicentrés (diamètre impair) sont reconnaissables.

Sachant qu'un sommet v est périphérique si et seulement si $d(v) = 1$ et v est sur une plus longue chaîne, on en déduit que le nombre de sommets périphériques est restructurable.

Une branche d'un arbre centré (bicentré) est un sous-arbre de G admettant le centre (l'arête-centrale) comme sommet (arête) pendant et maximal pour cette propriété. Une branche est appelée rayonnante si elle comporte un sommet périphérique de l'arbre. Un arbre bicentré comporte exactement deux branches, toutes deux rayonnantes. Un arbre est dit fondamental s'il possède exactement deux branches, l'une est une chaîne appelée tige, l'autre branche est appelée feuillage.

Un arbre (différent d'une chaîne) de rayon r est fondamental si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe isomorphe à un des graphes de la figure 4 (où les centres sont identifiés par la lettre c et les distances α et β varient entre 1 et $r-1$). Les graphes de la figure 4 sont reconnaissables. Par exemple un arbre G est du type 1 si et seulement si il contient une chaîne de longueur $2r = |V(G)| - 2$ et $r+2$ chaînes de longueur $r+1$. Donc, d'après le lemme de Kelly, les arbres fondamentaux sont reconnaissables.

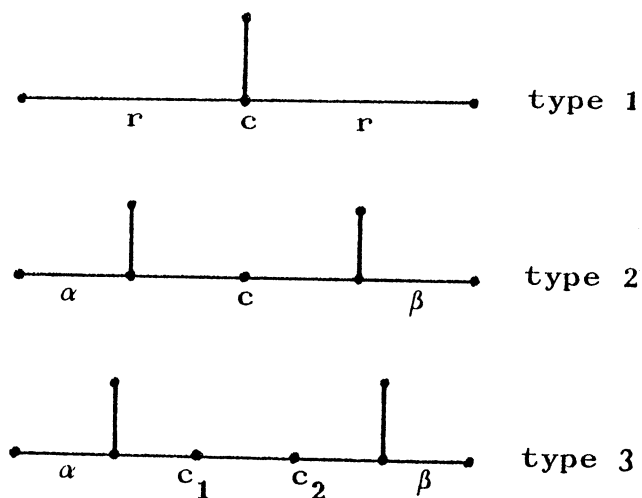


figure 4

Les arbres fondamentaux sont faiblement restructurables. Soit G un arbre fondamental centré (bicentré). Alors toutes les reconstructions de G sont isomorphes à G car elles peuvent s'obtenir à un isomorphisme près, à partir du sous-arbre bicentré (centré) G_v ayant le sommet de degré plus grand que 2 le plus près de l'arête centrale (sommet central), en allongeant d'un sommet une de ses chaînes rayonnantes.

Il reste à prouver que les arbres non-fondamentaux sont restructurables. Soit G un arbre non-fondamental et F un graphe fondamental de même diamètre que G . D'après le théorème de dénombrement, le nombre de sous-arbres fondamentaux maximaux de G isomorphes à F est restructurable. Nous pouvons utiliser cette information pour trouver les branches rayonnantes de G . Toute branche rayonnante, qui n'est pas une chaîne, comportant k sommets périphériques de G est le feuillage de $(p(G)-k)$ sous-arbres fondamentaux de G , où $p(G)$ est le nombre de sommets périphériques de G . Ceci nous donne les branches rayonnantes de G qui ne sont pas de chaînes. Le nombre de branches rayonnantes qui sont des chaînes est égal à $p(G)$ moins le nombre total de sommets périphériques dans les branches rayonnantes qui ne sont pas de chaînes.

Si G est centré, il reste à reconstruire les branches non-rayonnantes. Mais, ce sont les branches non rayonnantes d'un G_v obtenu en enlevant soit un sommet périphérique d'une branche

rayonnante qui comporte au moins deux tels sommets, si une telle branche existe, soit un sommet pendant non-périphérique d'une branche rayonnante, si une telle branche existe. Autrement, toutes les branches rayonnantes sont des chaînes et les branches non rayonnantes peuvent être obtenues facilement à partir d'un G_v où v est un sommet périphérique.

C.Q.F.D.

Bondy (5) a montré que les graphes séparables sans sommets pendants sont restructurables. Concernant les graphes avec des sommets pendants, peu de résultats ont été obtenus (Bondy (5), Greenwell et Hemminger (29)).

Geller et Manvel (24) ont reconstruit les cactus (c'est-à-dire les graphes connexes dont chaque bloc est soit une arête soit un cycle). Manvel et Weinstein (65) et O'Neil (76) ont reconstruit les graphes dont au moins un des sous-graphes G_v est une forêt. Ces deux résultats, plus la reconstruction des graphes non-connexes impliquent que tous les graphes G avec $|E(G)| \leq |V(G)| + 1$ sont restructurables.

D'autres classes de graphes ont été reconstruites ; ainsi, les 2-arbres (G est un 2-arbre si $G \sim K_2$ ou s'il existe un sommet v de G de degré 2, adjacent à x et à y , (x adjacent à y) et G_v est un 2-arbre), les graphes non-séparables critiques, les graphes non-séparables arête-critiques, les C-graphes (un C-graphe est un graphe comportant une clique telle que toute arête du graphe est incidente à cette clique), les graphes planaires maximaux sont des classes de graphes restructurables (Fiorini (21), Lauri (52)). Greenwell et Hemminger (31) ont généralisé la reconstruction des composantes connexes des graphes non-connexes et la reconstruction des blocs des graphes séparables. Ce résultat, nous le proposons comme un corollaire du théorème de dénombrement.

Corollaire 2 :

Si F est k -connexe et G ne l'est pas, alors le nombre de graphes k -connexes maximaux de G isomorphes à F est restructurable.

Démonstration :

Soit \mathbf{f} la classe des graphes k -connexes et \mathbf{g} la classe des graphes qui ne le sont pas. \mathbf{g} est reconnaissable car la connectivité d'un graphe G connexe est $k(G) = 1 + \min_{v \in V(G)} k(G_v)$. On obtient le résultat en appliquant le théorème de dénombrement.

C.Q.F.D.

La reconstruction des paramètres d'un graphe a un rapport très étroit avec la reconstruction des classes de graphes. En effet, étant donné un paramètre restructurable, chaque valeur du paramètre détermine de manière naturelle une classe de graphes reconnaissable. La plupart de paramètres les plus classiques sont restructurables ; par exemple, le nombre de stabilité, le nombre de couplages maximum (chapitre II), le nombre chromatique (chapitre II), etc. La reconstruction du polynôme dichromatique (Tutte (91), (92), (93)) permet de reconstruire le polynôme chromatique, et donc le nombre chromatique, ainsi que les trois paramètres suivants : le nombre de graphes partiels non-connexes isomorphes à un graphe non-connexe donné, le nombre de graphes partiels séparables dont les blocs sont isomorphes à une liste donnée de graphes (en particulier, le nombre d'arbres est restructurable) et le nombre de graphes partiels non-séparables avec un nombre d'arêtes fixé d'avance (en particulier, le nombre de cycles hamiltoniens). Dans le même ordre d'idée, le polynôme caractéristique est restructurable (Tutte (92), Pouzet (77)).

Ces résultats sont un complément au lemme de Kelly qui donne des renseignements uniquement sur les sous-graphes sommets propres.

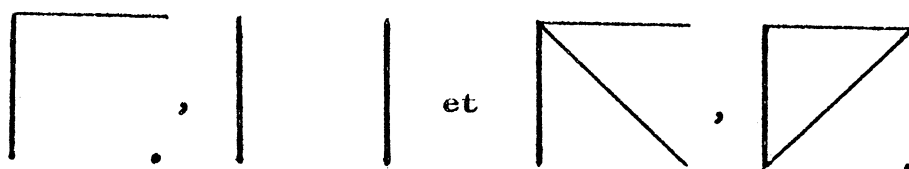
Parmi les paramètres qui n'ont pas été reconstruits jusqu'à présent, citons le genre, le genre maximum et l'indice chromatique. Pour le genre, un premier pas pourrait être celui de montrer que les graphes planaires sont reconnaissables ; mais même cela n'a pas été établi. Cependant les graphes planaires maximaux (52) et les graphes extérieurement planaires (26) sont restructurables.

1.2.3. - La Conjecture de l'arête-reconstruction des graphes simples :

Malgré beaucoup d'efforts, peu de progrès a été réalisé dans l'étude de la Conjecture d'Ulam. Ainsi, les classes de graphes restructuribles sont peu nombreuses et de structure assez simple. Même des classes de graphes suffisamment connues comme les graphes bipartis, les graphes planaires, etc... n'ont pas été encore restructurites.

De manière naturelle, Harary (32) a formulé la conjecture de l'arête-reconstruction, analogue à celle d'Ulam : Tout graphe G est caractérisé par la liste des $G_e, e \in E(G)$, dès que $|E(G)| \geq 4$.

Une arête-reconstruction d'un graphe G est un graphe H tel qu'il existe une bijection $\sigma : E(G) \rightarrow E(H)$ telle que $G_e \sim H_{\sigma(e)}$, pour tout $e \in E(G)$. Les définitions de graphes et paramètres arête-restructuribles, classe de graphes arête-reconnaisable et (faiblement) arête-restructurible, sont analogues à celles du paragraphe précédent. Tous les graphes ne sont pas arête-restructuribles (figure 5). Par la suite, tous les graphes considérés satisfont aux hypothèses de la conjecture de l'arête-reconstruction.



(Deux paires de graphes non-arête-restructuribles)

Figure 5

La conjecture de l'arête-reconstruction semble plus abordable que celle d'Ulam car les graphes $G_e, e \in E(G)$, sont plus proches du graphe G que les $G_v, v \in V(G)$. De fait, la conjecture de l'arête-reconstruction est plus faible que celle d'Ulam car Hemminger (44) montra qu'un graphe est arête-restructurible si et seulement si le graphe adjoint de ce graphe est restructurible.

De façon analogue, nous avons le lemme de Kelly et le théorème de dénombrement pour l'arête-reconstruction de graphes :

Lemme de Kelly (cas des arêtes) (Bondy (6)) :

Soient F et G deux graphes tels que $|E(F)| < |E(G)|$. Le nombre $n(F,G)$ de sous-graphes partiels de G isomorphes à F est arête-reconstructible.

Théorème de dénombrement (cas des arêtes) (Bondy (6)) :

Soit \mathcal{G} une classe de graphes arête-reconnaissable et \mathcal{f} une classe de graphes quelconque telle que pour tout G dans \mathcal{G} , chaque \mathcal{f} -sous-graphe de G est : (i) arête propre ; (ii) contenu dans un unique \mathcal{f} -sous-graphe maximal de G . Alors, pour tout F dans \mathcal{f} et tout G dans \mathcal{G} , le nombre de \mathcal{f} -sous-graphes maximaux de G isomorphes à F est arête-reconstructible.

Greenwell (30) montra que tout graphe sans sommets isolés est arête-reconstructible s'il est reconstructible. Ce résultat se démontre simplement en se servant du théorème de dénombrement ci-dessus.

Lemme 1 :

Le nombre de sommets isolés est arête-reconstructible.

Démonstration :

D'après le lemme de Kelly nous pouvons savoir si la plus longue chaîne de G est de longueur un, deux ou plus. Alors le nombre de sommets isolés de G sera $m-2$, $m-1$ ou m , respectivement, où m est le nombre minimum de sommets isolés parmi les G_e .

C.Q.F.D.

Théorème :

Soit G un graphe sans sommets isolés. Si G est reconstructible alors G est arête-reconstructible.

Démonstration :

Soit \mathcal{g} la classe de toutes les arête-reconstructions de G et \mathcal{f} la classe de tous les graphes d'ordre $|V(G)| - 1$. Etant donné que toutes les arêtes-reconstructions de G n'ont pas de sommet isolé (lemme ci-dessus), alors tous les \mathcal{f} -sous-graphes sont arête propres et on peut appliquer le théorème de dénombrement. Les \mathcal{f} -sous-graphes maximaux de G sont précisément les sous-graphes induits propres maximaux de G (les G_v , $v \in V(G)$). Comme toute arête-reconstruction de G a les mêmes G_v et comme G est restructurable il s'en suit que G est arête-restructurable.

C.Q.F.D.

Le théorème ci-dessus permet d'obtenir tout de suite des classes de graphes arête-restructurables aussi bien que des paramètres arête-restructurables. Les graphes réguliers, les graphes non-connexes avec au moins deux composantes d'ordre ≥ 2 , les arbres, etc., sont arête-restructurables ; il suffit de regarder la liste des graphes et paramètres restructurables donnés dans le paragraphe précédent. Mais il y a des paramètres qui n'ont pas été reconstruits mais qui ont été "arête-reconstruits", comme par exemple la déficience de Betti et l'indice chromatique.

Müller (69), en utilisant une idée de Lovász (54), a démontré que presque tous les graphes sont arête-restructurables. A ce propos, on peut remarquer que la technique utilisée par Lovász et Müller concernant l'arête-reconstruction et celle utilisée par Tutte ((91), (92), (93)) concernant la reconstruction sont purement "formelles", en ce sens qu'elles ne donnent pas un moyen de reconstruire un graphe à partir de la liste des G_e ou celle des G_v .

Nash-Williams (70) a généralisé les résultats de Lovász et Müller ; c'est sous cette forme que nous allons présenter ces résultats. Précisons quelques notations. Si H et G sont deux graphes et F est un graphe partiel de G , on note par $(G \rightarrow H)_F$ l'ensemble des applications injectives $\pi: V(G) \rightarrow V(H)$ telles que pour chaque arête $[u, v]$ de G , $[\pi(u), \pi(v)]$ est une arête de H si et seulement si $[u, v]$ est une arête de F . Par définition $G \rightarrow H \equiv (G \rightarrow H)_G$ et $|G \rightarrow H|_F \equiv |(G \rightarrow H)_F|$.

Théorème de Nash-Williams (70) :

Un graphe G est arête-reconstructible si l'on a une des conditions suivantes.

(i) il existe un graphe partiel F de G tel que $|G \rightarrow H|_F = |G \rightarrow G|_F$ pour toute arête-reconstruction H de G .

(ii) il existe un graphe partiel F de G tel que $|E(G)| - |E(F)|$ est pair et $|G \rightarrow G|_F = 0$.

Démonstration :

Soient G et H deux graphes. Alors, pour tout graphe partiel F de G :

$$|G \rightarrow H|_F = \sum_{G'} (-1)^{|E(G')| - |E(F)|} |G' \rightarrow H| \quad (1)$$

où G' parcourt les graphes partiels de G qui contiennent F

Montrons l'égalité (1), qui résulte de l'application du principe d'inclusion-exclusion :

Soient e_1, e_2, \dots, e_k les éléments de $E(G) - E(F)$ et $A_i \equiv (F + e_i) \rightarrow H$ (où $F + e_i$ est le graphe partiel de G formé par les arêtes de F plus e_i).

$$\text{Ainsi, } (G \rightarrow H)_F = (F \rightarrow H) - \bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

$$\text{où } A_\emptyset = (F \rightarrow H) \text{ et } A_I = \bigcap_{i \in I} A_i = ((F + \{e_i / i \in I\}) \rightarrow H).$$

$$\text{Donc, } (G \rightarrow H)_F = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} |(F + \underbrace{\{e_i / i \in I\}}_{G'}) \rightarrow H|$$

$= \sum_{G'} (-1)^{|E(G')| - |E(F)|} |G' \rightarrow H|$ où G' parcourt les graphes partiels de G qui contiennent F . Donc, on a l'égalité (1).

Si H est une arête-reconstruction de G , on a, d'après le lemme de Kelly :

$$\begin{aligned} |G \rightarrow G|_F - |G \rightarrow H|_F &= \sum_{G'} (-1)^{|E(G')| - |E(F)|} (|G' \rightarrow G| - |G' \rightarrow H|) \\ &= (-1)^{|E(G)| - |E(F)|} (|G \rightarrow G| - |G \rightarrow H|) \end{aligned}$$

D'où :

$$|G \rightarrow H| = |G \rightarrow G| + (-1)^{|E(G)| - |E(F)|} (|G \rightarrow H|_F - |G \rightarrow G|_F) \quad (2)$$

Etant donné que le premier terme du côté droit de l'égalité (2) est positif et que le deuxième terme est non-négatif si F satisfait à l'une des conditions (i) ou (ii), on a $|G \rightarrow H| > 0$. Mais cela signifie que G et H sont isomorphes car ils ont le même nombre d'arêtes.

C.Q.F.D.

Corollaire (Lovász (54)) :

G est arête-reconstructible si $|E(G)| > \frac{1}{2} C^2 |V(G)|$

Démonstration :

Si F est le graphe partiel nul de G, $|G \rightarrow H|_F = |G \rightarrow \bar{H}|$. Si $|E(G)| > \frac{1}{2} C^2 |V(G)|$, $|G \rightarrow \bar{H}|$ est égal à zéro quelque soit H, une arête-reconstruction de G, et donc F satisfait à la condition (i) du théorème de Nash-Williams. (nul \equiv sans arêtes).

C.Q.F.D.

Corollaire (Müller (69)) :

G est arête-reconstructible si $2^{|E(G)| - 1} > |V(G)| !$

Démonstration :

Il existe $2^{|E(G)| - 1}$ graphes partiels F de G tels que $|E(G)| - |E(F)|$ est pair et il existe $|V(G)| !$ permutations de $V(G)$. Alors il doit exister un F qui satisfait à la condition (ii) du théorème car chaque injection de $(G \rightarrow G)_F$ est une permutation de $V(G)$ et si pour chaque F avec $|E(G)| - |E(F)|$ pair on avait $|G \rightarrow G|_F \neq 0$, alors il y aurait au moins $2^{|E(G)| - 1}$ permutations de $V(G)$, ce qui est contradictoire.

C.Q.F.D.

Corollaire :

Un graphe G d'ordre n et de m arêtes est arête-reconstructible si $m > (n \log n) / \log 2$.

Démonstration :

$m > (n \log n / \log 2)$ implique que $2^m > n^n$. D'autre part $n^n \geq 2(n)!$ (car $n \geq 2$). Donc, G est arête-reconstructible d'après le résultat de Müller ci-dessus.

C.Q.F.D.

I.2.4. - Conjecture de Kelly :

Un problème beaucoup moins étudié a été mentionné par Kelly (46) : Un graphe simple peut-il être caractérisé par la famille de ses sous-graphes obtenus en enlevant $k > 1$ sommets ? En général, la réponse est négative. Cependant, il semble qu'à partir d'un certain ordre, tous les graphes simples sont caractérisés ainsi et Manvel (57) a formulé la conjecture suivante :

Pour tout entier $k > 0$, il existe un entier $v(k)$, tel que tout graphe simple G d'ordre $n \geq v(k)$ est caractérisé, à un isomorphisme près, par la famille des sous-graphes G_B , $|B|=k$.

On remarque que, dans le cas $k=2$, si l'on connaît les étiquettes des sommets de B alors G est reconstructible (Lovász (55), page 81, problème 14). W. Giles (28) a vérifié que les arbres satisfont à la conjecture pour $k=2$. Toujours dans le cas $k=2$, Manvel (63) montra que les graphes non-connexes satisfont à la conjecture et qu'on peut reconnaître à partir de la famille des sous-graphes, les classes suivantes : les arbres d'ordre ≥ 6 , les graphes unicycliques d'ordre ≥ 5 , les graphes réguliers d'ordre ≥ 5 et les graphes bipartis d'ordre ≥ 6 . Il donne aussi un nombre infini d'exemples non-triviaux de paires de graphes non-isomorphes ayant la même liste de sous-graphes G_B .

I.2.5. - Conjecture d'Harary ou Conjecture de l'ensemble-reconstruction des graphes simples :

Harary (32) suggère une autre conjecture plus forte que celle d'Ulam : L'ensemble des sous-graphes induits propres maximaux suffisent à caractériser les graphes simples d'ordre ≥ 4 . Plus précisément, on appelle une ensemble-reconstruction d'un graphe G , tout graphe H tel que l'ensemble des sous-graphes induits propres maximaux de H soit égal à celui de G . Harary a conjecturé

que tous les graphes simples avec au moins 4 sommets sont ensemble-reconstructibles.

Manvel ((57), (60), (64)) a montré que certains paramètres (le degré minimum $\delta(G)$, le nombre d'arêtes, l'ensemble des degrés, la connectivité, le nombre de points d'articulation) et certaines classes de graphes (les graphes non-connexes, les arbres, les graphes séparables sans sommets pendants) sont ensemble-reconstructibles ; de même, les graphes unicycliques (1) et les graphes extérieurement planaires (27) sont ensemble-reconstructibles.

1.2.6. - Le cas des graphes orientés et multigraphes :

Tout naturellement, on se pose le problème de l'étude des conjectures d'Ulam et de l'arête-reconstruction concernant les graphes orientés et les multigraphes.

Cas des graphes orientés :

La Conjecture d'Ulam n'est pas vraie en général pour tous les graphes orientés d'ordre ≥ 3 (figure 6). Harary et Palmer (36) ont confirmé la conjecture pour les tournois non-fortement connexes d'ordre ≥ 5 . Ils avaient conjecturé que les tournois fortement connexes sont aussi reconstructibles, mais Stockmeyer ((88), (89)) trouva une classe infinie de tournois fortement connexes non-reconstructibles. Harary et Palmer (35) ont observé que leur démonstration concernant la reconstruction des arbres à partir des sous-arbres maximaux s'applique directement aux arbres orientés ayant au moins trois sommets pendants. Ramachandran (81) reprend la même démonstration de Bondy (5) pour démontrer que les graphes orientés séparables d'ordre ≥ 3 sans sommets pendants sont reconstructibles.



figure 6

En ce qui concerne l'arc-reconstruction, les techniques employées dans l'arête-reconstruction peuvent s'appliquer à l'arc-reconstruction (par exemple, le principe d'inclusion-exclusion utilisé dans la démonstration du lemme de Nash-Williams (page 26)). C'est ainsi qu'on démontre que les tournois sont arc-reconstructibles (Bondy et Hemminger (6)).

Cas des multigraphes :

Ce cas a été très peu étudié. En fait, c'est un problème beaucoup plus compliqué car même si l'on arrive à reconstruire le graphe simple sous-jacent, on ne sait pas comment placer les arêtes multiples. En effet, on peut voir que la Conjecture d'Ulam pour les multigraphes est équivalente à la Conjecture d'Ulam pour les graphes simples avec arêtes colorées (Weinstein (95)) : Etant donné la liste des sous-graphes induits propres maximaux d'un multigraphe on construit une autre liste en remplaçant les arêtes multiples par une seule arête colorée, de sorte que deux arêtes sont de couleurs différentes si le nombre d'arêtes multiples qui correspond à chacune de ces deux arêtes dans le graphe original sont différents. De cette façon, la nouvelle liste est la liste des sous-graphes induits propres maximaux des graphes simples colorés correspondant aux reconstructions du multigraphe. Ainsi, on voit que même si le graphe simple associé est reconstructible, la coloration des arêtes est un problème qui reste à résoudre.

Les multigraphes non-connexes sont reconstructibles. La démarche suivie par Harary et Palmer (35) pour reconstruire les arbres est employée pour reconstruire les multigraphes connexes dont les cycles sont de longueur ≤ 2 (Bondy (5)). Les multigraphes séparables sans sommets pendants sont reconstructibles (Bondy (5)) Tous les paramètres reconstructibles présentés dans le paragraphe (I.2.2.) sont reconstructibles pour les multigraphes.

CHAPITRE II

APPLICATION DE TECHNIQUES DE DENOMBREMENT

A LA RECONSTRUCTION DE CERTAINS PARAMETRES



II.1. - INTRODUCTION :

Le lemme de Kelly tel qu'on a exposé dans le chapitre I a été l'outil le plus couramment utilisé dans le problème de reconstruction. En général, ce sont des techniques de dénombrement combinées avec des raisonnements purement graphiques qui ont permis la reconstruction d'importantes classes de graphes (les graphes non-connexes, les arbres, les graphes séparables sans sommets pendants, etc.).

Le lemme de Kelly permet de reconstruire le nombre de sous-graphes d'un graphe G qui sont isomorphes à un graphe donné, d'ordre inférieur à celui de G . Il en découle tout naturellement le problème de savoir si l'on peut reconstruire le nombre de graphes partiels d'un graphe, isomorphes à un graphe donné. Dans (92), Tutte a montré que le nombre de multigraphes partiels isomorphes à un multigraphe non-connexe donné, le nombre de multigraphes partiels séparables dont les blocs sont isomorphes à une liste spécifiée d'avance, le nombre de multigraphes partiels non-séparables avec un nombre spécifié d'arêtes sont des paramètres reconstructibles. De ces résultats, il découle directement que le nombre de couplages maximum, le nombre d'arbres et le nombre de cycles hamiltoniens sont reconstructibles. Les techniques employées par Tutte pour obtenir ces résultats font appel aux séries génératrices à plusieurs variables. Notre but dans ce chapitre est de montrer que l'on peut obtenir les résultats de Tutte en utilisant des techniques de dénombrement purement graphiques. Ces techniques sont basées sur deux identités établies par Kocay (47). Ces identités vont nous permettre d'obtenir la reconstruction et l'arête-reconstruction respectivement de deux paramètres, $n^*(F,G)$ (page 44) et $m^*(F,G)$ (page 48), qui nous donnent directement la reconstruction du nombre chromatique, du nombre d'absorption et de l'arête-connexité, ainsi que l'arête-reconstruction de l'indice chromatique et de la déficience de Betti.

Nous commençons par donner deux identités fondamentales dues à Kocay.

Lemme 1 (Kocay, (47)) :

Soit $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots\}$ la classe des multigraphes sans sommets isolés. Soit $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de k éléments de \mathcal{G} . Si G est un multigraphe alors :

$$n(h_1, G) n(h_2, G) \dots n(h_k, G) = \sum_{i \geq 1} b_i n(g_i, G)$$

où - $n(h, G)$ est le nombre de sous-graphes de G isomorphes à h .

- b_i est le nombre de recouvrements de $E(g_i)$ à k éléments tels que : $E(g_i) = E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k$ et $g_i [E_j] \sim h_j$,
 $j = 1, 2, \dots, k$.

Démonstration :

1) $\forall g \in \mathcal{G}$, un sous-graphe de G isomorphe à g est uniquement déterminé par la donnée de l'ensemble de ses arêtes car g est sans sommets isolés. Par conséquent les deux écritures : $G [E_i] \sim h$ et $E_i \sim h$ sont équivalentes.

2) On considère deux ensembles construits à partir de $E(G)$.

Premier ensemble :

$$A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$$

Pour i fixé, soit $F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^{n_i}$ les $n_i = n(g_i, G)$ sous-graphes de G isomorphes à g_i ($F_i^j \subseteq E(G)$).

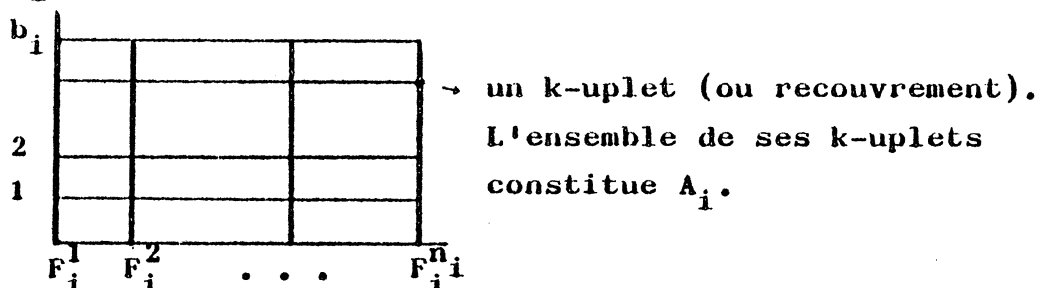
A chaque F_i^j ($j=1, 2, \dots, n_i$) on associe l'ensemble de k -uplets (C_1, C_2, \dots, C_k) satisfaisant à :

$$\begin{aligned} - F_i^j &= \bigcup_{l=1}^k C_l \\ - C_l &\sim h_l \quad (l=1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

Comme F_i^j est isomorphe à g_i pour tout j , à chaque F_i^j correspond b_i recouvrements vérifiant les deux conditions précédentes.

Autrement dit, le nombre de k -uplets associés à F_i^j est b_i .

L'ensemble de tous ces k -uplets, pour $j=1,2,\dots,n_i$, constitue l'ensemble A_i :



On a, $|A_i| = b_i n_i$

D'où, $|A| = \sum_{i > 1} b_i n_i$

Deuxième ensemble :

$$B = \prod_{i=1}^k B_i$$

où pour $1 < i < k$:

$$- B_i = \{ E_i^1, E_i^2, \dots, E_i^{p_i} \}$$

$$- p_i = n(h_i, G)$$

$$- E_i^j \subseteq E(G), j = 1, 2, \dots, p_i$$

$$- E_i^j \sim h_i, j = 1, 2, \dots, p_i$$

On a $|B| = n(h_1, G) n(h_2, G) \dots n(h_k, G)$

B est un sous-ensemble de A car pour chaque k -uplet $(D_1, D_2, \dots, D_k) \in B$, il existe un i unique tel que $D_1 U D_2 \dots U D_k \sim g_i$ ($g_i \in \mathfrak{g}$), comme D_i est isomorphe à h_i , $i = 1, 2, \dots, k$, $D_1 U D_2 \dots U D_k$ est un recouvrement d'un certain F_i^j . Il reste à montrer que $A \subseteq B$, ce qui est évident car soit $F_i^j = C_1 U C_2 \dots U C_k$ un recouvrement, comme $C_1 \subseteq E(G)$ et $C_1 \sim h_1$ ($1 < i < k$) alors il existe p tel que C_1 est le p -ième élément de B_1 , donc $(C_1, C_2, \dots, C_k) \in B$.

Lemme 2 (Kocay, (47)) :

Soit $\mathfrak{g} = \{g_1, g_2, \dots\}$ la classe de tous les multigraphes.
Soit $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de k éléments de \mathfrak{g} . Si G est un multigraphe, alors :

$$s(h_1, G) s(h_2, G) \dots s(h_k, G) = \sum_{i \geq 1} a_i s(g_i, G)$$

où - $s(h, G)$ est le nombre de sous-graphes induits de G isomorphes à h .

- a_i est le nombre de recouvrements de $V(g_i)$ à k éléments tels que : $V(g_i) = V_1 UV_2 \dots UV_k$ et $g_i[V_j] \sim h_j$ ($1 \leq j \leq k$).

Démonstration :

La démonstration est similaire à celle du lemme 1, il suffit de remarquer que tout sous-graphe induit de G isomorphe à un élément g de \mathfrak{g} est uniquement déterminé par son ensemble des sommets.

C.Q.F.D.

II.2. - RECONSTRUCTION DES MULTIGRAPHES PARTIELS NON-CONNEXES D'UN MULTIGRAPHE :

En nous servant du lemme 1 nous obtenons une extension du lemme de Kelly aux multigraphes partiels non-connexes d'un multigraphe. Avant de donner cette extension, nous présentons un résultat concernant le dénombrement des sous-graphes d'un multigraphe.

Lemme 3 :

Soit G un multigraphe d'ordre n . Soit F un multigraphe d'ordre k ($k \leq n$). Soit q le nombre de sommets isolés de F . Soit H le graphe obtenu à partir de F en enlevant p sommets isolés ($p \leq q$). Alors,

$$n(F, G) = n(H, G) \times C_{n-k+p}^p / C_q^p.$$

Démonstration :

Formons la liste des sous-graphes de G isomorphes à F à partir de celle des sous-graphes de G isomorphes à H de la manière suivante. A chaque sous-graphe H_G de G isomorphe à H on ajoute p sommets isolés pris parmi les $(n-k+p)$ sommets dans $V(G)-V(H_G)$. De cette façon à chaque élément de la première liste correspond C_{n-k+p}^p éléments de la deuxième liste (c'est-à-dire, celle que nous construisons). On a les propriétés suivantes dans la deuxième liste :

- 1) Tout sous-graphe de G isomorphe à F apparaît dans cette liste.
- 2) Chaque sous-graphe de G isomorphe à F apparaît exactement C_q^p fois dans la liste.

D'où le résultat.

C.Q.F.D.

Proposition 1 :

(Extension du lemme de Kelly aux multigraphes partiels non-connexes)

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$ et F un multigraphe non-connexe d'ordre n . Alors,

$n(F,G)$ est reconstructible.

Démonstration :

a) Supposons que F comporte q sommets isolés, $q > 0$: Soit H le graphe obtenu à partir de F en enlevant les sommets isolés. En appliquant le lemme 3 avec $k=n$, $q=p$, on a $n(F,G) = n(H,G)$ et d'après le lemme de Kelly, $n(H,G)$ est reconstructible.

b) F ne comporte pas de sommets isolés : Soient h_1, h_2, \dots, h_k ($k > 2$) les composantes connexes de F. On a d'après le lemme 1 :

$$n(h_1, G) n(h_2, G) \dots n(h_k, G) = \sum_{i \geq 1} b_i n(g_i, G) = \sum_{|V(g_i)| < n} b_i n(g_i, G) + \sum_{|V(g_i)| = n} b_i n(g_i, G) \quad (1)$$

Interprétons $\sum_{|V(g_i)| = n} b_i n(g_i, G)$:

Pour $g_i \in \mathfrak{g}$ tel que $|V(g_i)| = n$, tout recouvrement de $E(g_i)$ en $E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k$ avec $g_i[E_j] \sim h_j$, $1 \leq j \leq k$, constitue une partition de $V(g_i)$ car sinon on aurait $|V(g_i)| < \sum |V(h_j)| = n$.

Donc, $|E(g_i)| = \sum_{j=1}^k |E_j| = |E(F)|$ et cela entraîne $g_i \sim F$.

Ainsi le seul $g_i \in \mathfrak{g}$ d'ordre n, pour lequel $b_i \neq 0$, est $g_i \sim F$:

$$\sum_{|V(g_i)| = n} b_i n(g_i, G) = b^* n(F, G) \quad (2)$$

En posant $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$, où k_1 représente le nombre de multigraphes h_1 dans chaque classe d'isomorphisme de la famille (h_i) $1 \leq i \leq k$. Il est facile de voir que $b^* = k_1 ! k_2 ! \dots k_p !$. D'après (1) et (2) :

$$n(F, G) = (n(h_1, G) n(h_2, G) \dots n(h_k, G) - \sum_{|V(g_i)| < n} b_i n(g_i, G)) / b^*$$

le second membre est reconstructible d'après le lemme de Kelly. D'où le résultat.

C.Q.F.D.

II.3. - RECONSTRUCTION DU NOMBRE D'ARBRES ET DU NOMBRE DE MULTIGRAPHES PARTIELS CONNEXES UNICYCLIQUES ET LE CYCLE DE LONGUEUR P :

Naturellement, la première étape d'une généralisation de la proposition 1 consiste à reconstruire le nombre d'arbres d'un multigraphe, isomorphes à un arbre donné. Ce problème a été abordé par Kocay (48) mais il reste irrésolu. Néanmoins, Tutte (92), par une méthode longue et difficile a montré que le nombre de chaînes hamiltoniennes et le nombre d'arbres d'un multigraphe sont reconstitables. Nous en donnons ici une démonstration simple de la reconstruction de ce dernier paramètre.

Proposition 2 :

Le nombre d'arbres d'un multigraphe G d'ordre $n > 3$ est reconstituable.

Démonstration :

Le nombre de multigraphes partiels de G comportant $n-1$ arêtes est reconstituable car il est égal à $C_{|E(G)|}^{n-1}$. Ce nombre est égal au nombre d'arbres de G , $a(G)$, plus le nombre de multigraphes partiels non-connexes de G ayant $(n-1)$ arêtes.

Soit θ la classe des multigraphes non-connexes d'ordre n et de $(n-1)$ arêtes. On a :

$$a(G) = C_{|E(G)|}^{n-1} - \sum_{g \in \theta} n(g, G).$$

D'après la proposition 1, $n(g, G)$ est reconstituable quelque soit g appartenant à θ .

C.Q.F.D.

Dans la suite, nous montrons la reconstruction du nombre de multigraphes partiels connexes unicycliques et le cycle de longueur p .

Lemme 4 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$, avec m arêtes.
Soit L_p^i la classe des multigraphes d'ordre n , avec n arêtes et comportant exactement i cycles élémentaires de longueur p , $i > 1$ et $p < n-1$. Soit O_p un cycle de longueur p . Alors :

$$n(O_p, G) C_{m-p}^{n-p} = \sum_{i > 1} i \times \left(\sum_{g \in L_p^i} n(g, G) \right)$$

Démonstration :

Soit C_p un cycle de longueur p de G . Le nombre de multigraphes partiels de G avec n arêtes et contenant C_p est C_{m-p}^{n-p} .

Notons par $J_i(C_p)$ la liste des multigraphes partiels de G avec n arêtes, comportant exactement i cycles de longueur p parmi lesquels se trouve C_p . On a :

$$\sum_{i > 1} |J_i(C_p)| = C_{m-p}^{n-p}$$

D'où :

$$n(O_p, G) \times C_{m-p}^{n-p} = \sum_{C_p} \left(\sum_{i > 1} |J_i(C_p)| \right) = \sum_{i > 1} \left(\sum_{C_p} |J_i(C_p)| \right)$$

Chaque multigraphe partiel de G avec n arêtes et comportant exactement i cycles de longueur p est contenu dans exactement i des listes :

$J_i(C_p^1), J_i(C_p^2), \dots$, où les C_p^j sont les cycles de longueur p de G .

Donc, $\sum_{C_p} |J_i(C_p)| = i \times$ (nombre de multigraphes partiels de G avec n arêtes et exactement i cycles de longueur p) = $i \times \left(\sum_{g \in L_p^i} n(g, G) \right)$

Et on a donc l'égalité annoncée.

C.Q.F.D.

Proposition 3 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$ et de m arêtes. Le nombre de multigraphes partiels de G , connexes, ayant n arêtes et exactement un cycle de longueur $p < n-1$, $a_p(G)$, est restructurable.

Démonstration :

Soit $d_p(G)$ le nombre de multigraphes partiels de G ayant n arêtes et exactement un cycle de longueur p . Soit $b_p(G)$ le nombre de multigraphes partiels de G , non-connexes, de n arêtes et avec exactement un cycle de longueur p . On a :

$$a_p(G) = d_p(G) - b_p(G)$$

- 1) $b_p(G)$ est restructurable d'après la proposition 1
- 2) $d_p(G)$ est restructurable. En effet, on a :

$$d_p(G) = \sum_{g \in L_p^1} n(g, G)$$

D'où, d'après le lemme 4 :

$$d_p(G) = n(O_p, G) C_{m-p}^{n-p} - \sum_{i > 2} ix \left(\sum_{g \in L_p^i} n(g, G) \right).$$

Pour $p < n-1$, $n(O_p, G)$ est restructurable. $n(g, G)$ est restructurable quelque soit $g \in L_p^i$, $i > 2$, car g est non-connexe (proposition 1). Donc, $d_p(G)$ est restructurable.

(1) et (2) entraînent la reconstruction de $a_p(G)$.

C.Q.F.D.

Il reste à reconstruire le nombre de multigraphes partiels de G , connexes, avec n arêtes et un cycle de longueur n , c'est-à-dire le nombre de cycles hamiltoniens de G .

Proposition 4 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$, avec m arêtes. Alors, le nombre de cycles hamiltoniens de G est reconstructible.

Démonstration :

Soit F_n la liste des multigraphes partiels de G avec n arêtes, C_n la liste des cycles hamiltoniens de G , D_n la liste des multigraphes partiels de G , connexes, avec n arêtes et un cycle de longueur inférieure ou égale à $(n-1)$, I_n la liste des multigraphes partiels de G , non-connexes, avec n arêtes.

On a les propriétés suivantes :

$$1) |F_n| = |C_n| + |D_n| + |I_n|$$

$$2) |F_n| = C_m^n$$

$$3) |D_n| = \sum_{p=1}^{n-1} a_p(G) \quad (\text{voir proposition 3})$$

$$4) |I_n| = \sum_{g \in \theta} n(g, G) \quad \text{où } \theta \text{ est la classe des multigraphes non-connexes d'ordre } n \text{ et de } n \text{ arêtes.}$$

Les égalités (2), (3) et (4) impliquent que $|F_n|$, $|D_n|$ et $|I_n|$ sont reconstructibles (d'après la proposition 3 et la proposition 1). Ainsi,

$|C_n|$ est reconstructible d'après l'égalité (1).

C.Q.F.D.

Proposition 5 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$. On a :

- 1) Le nombre de multigraphes partiels de G ayant exactement un cycle.
- 2) Le nombre de multigraphes partiels connexes de G ayant exactement un cycle.

- 3) Le nombre de multigraphes partiels connexes de G avec n arêtes et comportant exactement un cycle de longueur $p < n$.

sont des paramètres restructurables.

Démonstration :

- 1) Ce nombre est égal à $\sum_{g \in \theta} n(g, G) + \sum_{p=1}^n a_p(G)$, où θ est la classe des multigraphes non-connexes d'ordre n et avec exactement un cycle. Les deux termes de cette somme sont restructurables d'après la proposition 1 et les propositions 3 et 4 respectivement.
- 2) Ce nombre est égal à $\sum_{p=1}^n a_p(G)$, qui est restructurable d'après les propositions 3 et 4.
- 3) Ce n'est rien d'autre que les propositions 3 et 4.

C.Q.F.D.

II.4. - LES PARAMETRES $n^*(F, G)$ et $m^*(F, G)$:

On considère la reconstruction de deux paramètres relatifs au dénombrement des partitions de l'ensemble des sommets et de l'ensemble des arêtes respectivement, en des ensembles qui induisent des sous-graphes isomorphes aux multigraphes d'une liste donnée d'avance.

II.4.1. - Reconstruction de $n^*(F, G)$:

A l'aide du lemme 2 nous obtenons la reconstruction d'un paramètre, $n^*(F, G)$, qui a un rapport très étroit avec le nombre de multigraphes partiels non-connexes dont les composantes connexes sont isomorphes aux éléments d'une famille spécifiée d'avance.

Proposition 6 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$.

Soit $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de $k > 2$ multigraphes disjoints tel

que $\sum_{i=1}^k |V(h_i)| = n$. Soit $F \equiv \bigcup_{i=1}^k h_i$. Alors,

$n^*(F, G) \equiv$ le nombre de partitions de $V(G)$ en k sous-ensembles V_1, V_2, \dots, V_k , telles qu'il existe une permutation φ de $\{1, 2, \dots, k\}$ pour laquelle : $G[V_{\varphi(i)}] \sim h_i, i=1, 2, \dots, k$, est reconstructible.

Démonstration :

D'après le lemme 2 :

$$s(h_1, G) s(h_2, G) \dots s(h_k, G) = \sum_{\substack{i > 1 \\ |V(g_i)| < n}} a_i s(g_i, G) = \sum_{\substack{i > 1 \\ |V(g_i)| = n}} a_i s(g_i, G).$$

Interprétons $\sum_{\substack{i > 1 \\ |V(g_i)| = n}} a_i s(g_i, G) :$

Pour g_i tel que $|V(g_i)| = n$, on a $s(g_i, G) = 1$ si $g_i \sim G$ et 0 sinon.

Donc, $\sum_{\substack{i > 1 \\ |V(g_i)| = n}} a_i s(g_i, G) = a_G$ où a_G est le nombre de k -uplets

(V_1, V_2, \dots, V_k) tels que $V_1 \cup V_2 \dots \cup V_k$ est une partition de $V(G)$ et $G[V_i] \sim h_i, i=1, 2, \dots, k$.

Soit $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$, où k_1 représente le nombre de multigraphes h_1 dans chaque classe d'isomorphisme de la famille $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$. On a

$$n^*(F, G) = a_G / (k_1 ! k_2 ! \dots k_p !)$$

D'où le résultat.

C.Q.F.D.

Applications de la proposition 6 :

Corollaire 1 : Soit $G=(V,E)$ un graphe simple, connexe, d'ordre $n>3$. Alors :

- (a) La liste des $G_{\{x,y\}}$ avec $[x,y] \in E(G)$ est reconstructible.
- (b) La liste des $G_{\{x,y\}}$ avec $[x,y] \notin E(G)$ est reconstructible.

Démonstration :

(a) Soit f la classe des graphes simples F d'ordre n , $F=h_1 \cup h_2$, où h_1, h_2 sont deux graphes disjoints, $h_1 \sim K_2$ et h_2 un graphe simple quelconque d'ordre $(n-2)$. Dans ce cas, $n^*(F,G)$ est égal au nombre de graphes partiels de G qui sont l'union de deux sous-graphes induits disjoints de G isomorphes à h_1 et h_2 respectivement. Alors on peut former la liste décrite en (a) de la manière suivante : pour chaque $F \in f$ tel que $n^*(F,G) > 0$, on ajoute à la liste $n^*(F,G)$ graphes isomorphes au graphe h_2 .

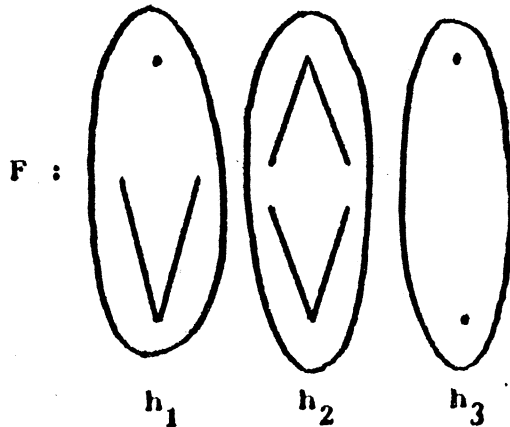
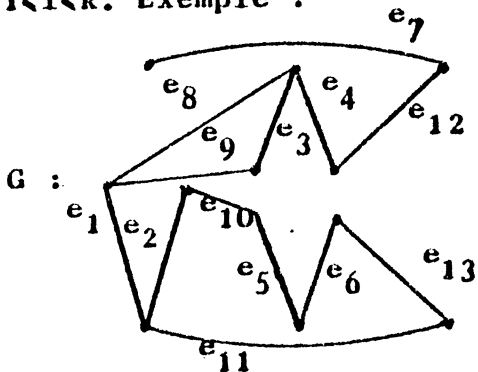
(b) On peut reconstruire d'après le lemme de Kelly, la liste de tous les $G_{\{x,y\}}$ de G , $x \neq y$. Alors la liste décrite en (b) n'est autre que celle qu'on obtient en supprimant de la liste de tous les $G_{\{x,y\}}$, les $G_{\{x,y\}}$ trouvés en (a).

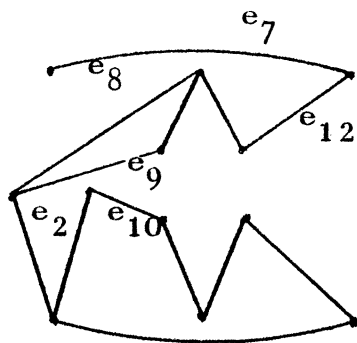
C.Q.F.D.

Soient $F = \bigcup_{i=1}^k h_i$ et G comme dans la proposition 6. Soit $n^*(F,G)$

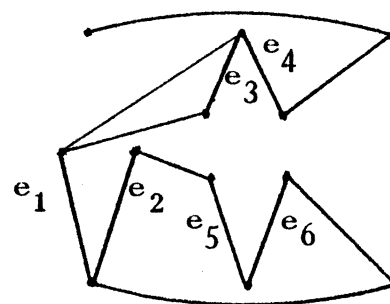
le nombre de multigraphes partiels de G union disjointe de $k > 2$ sous-graphes induits de G , h_1, h_2, \dots, h_k , tels que $h_i \sim h_i$,

$1 < i < k$. Exemple :





Le multigraphe partiel dont les arêtes sont $e_2, e_{10}, e_8, e_9, e_7, e_{12}$ est isomorphe à F mais il ne peut pas s'exprimer comme étant l'union de sous-graphes induits disjoints de G isomorphes à h_1, h_2, h_3 , car le sous-graphe $G[\{e_8, e_9\}]$ n'est pas un sous-graphe induit de G .



Le multigraphe partiel dont les arêtes sont $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ est isomorphe à F et il peut se décomposer en l'union de sous-graphes induits isomorphes à h_1, h_2, h_3 .

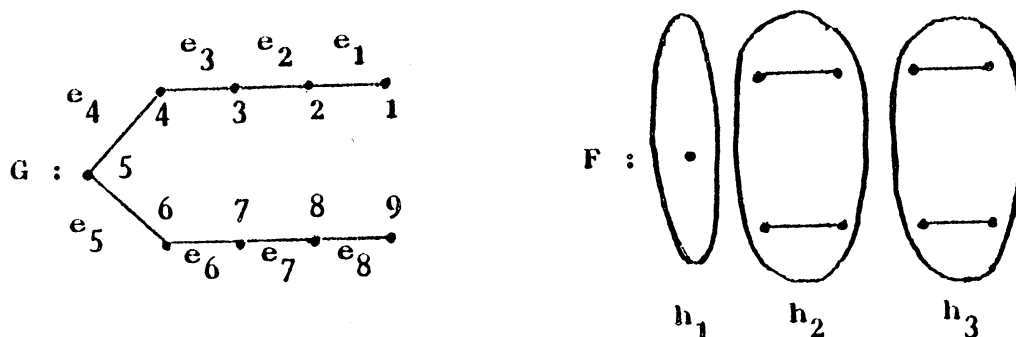
Corollaire 2 : La propriété : $n'(F, G) > 0$, est reconstructible.

Démonstration : $n'(F, G) > 0$ si et seulement si $n^*(F, G) > 0$.

C.Q.F.D.

On remarque que $n'(F, G) < n^*(F, G)$. En effet, soient $L_1 = l_1^1 \cup l_2^1 \dots \cup l_k^1$ et $L_2 = l_1^2 \cup l_2^2 \dots \cup l_k^2$ deux multigraphes partiels de G vérifiant les propriétés énoncées plus haut. Soit V_i^j l'ensemble des sommets du graphe l_i^j . Comme $V(L_1) = V(L_2)$, on doit avoir $E(L_1) \neq E(L_2)$, donc il existe $x, y \in V(G)$ tels que $[x, y] \in E(L_1)$ et $[x, y] \notin E(L_2)$. Par conséquent, il existe i tel que $x \in V_i^1$ et $y \in V_i^1$, tandis que x et y n'appartiennent pas à un même V_j^2 , quelque soit j , car sinon on aurait $[x, y] \in E(L_2)$ (car les l_j^2 sont des sous-graphes induits de G). Donc, à chaque multigraphe partiel de G vérifiant les propriétés, on peut associer une partition de $V(G)$ différente, satisfaisant aux propriétés énoncées dans la définition de $n^*(F, G)$. D'où le résultat.

L'inégalité peut être stricte, comme le montre l'exemple suivant :



Il y a trois multigraphes partiels de G union disjointe de trois sous-graphes induits isomorphes à h_1 , h_2 et h_3 , à savoir $F_1 = (V(G), \{e_1, e_3, e_6, e_8\})$, $F_2 = (V(G), \{e_1, e_3, e_5, e_7\})$ et $F_3 = (V(G), \{e_2, e_4, e_6, e_8\})$. Par contre, il y a quatre partitions de $V(G)$ en V_1, V_2, V_3 telles que les sous-graphes induits par V_1, V_2, V_3 soient isomorphes à h_1, h_2, h_3 , à savoir :

$$\left\{ \{5\}, \{4, 3, 6, 7\}, \{1, 2, 8, 9\} \right\}, \left\{ \{5\}, \{3, 4, 8, 9\}, \{1, 2, 6, 7\} \right\},$$

$$\left\{ \{1\}, \{4, 5, 8, 9\}, \{2, 3, 6, 7\} \right\} \text{ et } \left\{ \{9\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\} \right\}.$$

Mais lorsque les h_i sont connexes on a l'égalité :

Corollaire 3 : Si $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille de k multigraphes connexes disjoints et $F \equiv \bigcup_{i=1}^k h_i$, alors :

$$n^*(F, G) = n^*(F, G).$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que $n^*(F, G) < n^*(F, G)$. Soit $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ une partition de $V(G)$ telle que $G[V_i] \sim h_i$, $1 < i < k$. Le multigraphe partiel de G , $F' = \bigcup_{i=1}^k G[V_i]$, vérifie les propriétés énoncées dans la définition de $n^*(F, G)$. Considérons la relation d'équivalence de connexité du multigraphe F' . L'ensemble quotient de cette relation n'est autre que $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$. Donc, on peut faire correspondre à chaque partition de $V(G)$ vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus, un multigraphe partiel de G différent vérifiant les propriétés énoncées dans la définition de $n^*(F, G)$, d'où le résultat.

II.4.2. - Arête - Reconstruction de $m^*(F,G)$:

Le résultat donné dans ce paragraphe va nous permettre d'étudier l'arête-reconstruction de certains paramètres. En particulier, nous montrons directement que l'indice-chromatique est restructurable et cela sans passer par le graphe adjoint (on remarque que l'indice-chromatique d'un multigraphe G est égal au nombre chromatique du graphe adjoint de G , $L(G)$).

Proposition 7 :

Soient G, h_1, h_2, \dots, h_k des multigraphes sans sommets isolés. $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m > 4$, $\sum_{i=1}^k |E(h_i)| = m$, $k > 2$, $F \equiv (h_1, h_2, \dots, h_k)$. Alors le nombre $m^*(F,G)$ de partitions de $E(G)$ en k ensembles E_1, E_2, \dots, E_k , tel qu'il existe une permutation φ de $\{1, 2, \dots, k\}$ pour laquelle $G[E_{\varphi(i)}] \sim h_i$, $i=1, 2, \dots, k$, est arête-restructurable.

Démonstration :

Cette proposition est une conséquence directe de l'égalité donnée dans le lemme 1 :

$$n(h_1, G)n(h_2, G)\dots n(h_k, G) = \sum_{i>1} b_i n(g_i, G)$$

Nous allons décomposer la somme du côté droit de cette égalité :

$$\sum_{i>1} b_i n(g_i, G) = \sum_{\substack{i>1 \\ |E(g_i)| < m}} b_i n(g_i, G) + \sum_{\substack{i>1 \\ |E(g_i)| = m}} b_i n(g_i, G) \quad (1)$$

Interprétons $\sum_{\substack{i>1 \\ |E(g_i)| = m}} b_i n(g_i, G)$:

Si $|V(g_i)| < n$ et $|E(g_i)| = m$ alors $n(g_i, G) = 0$ car G ne comporte pas de sommets isolés.

Si $|V(g_i)| = n$ et $|E(g_i)| = m$ alors $n(g_i, G) = 1$ si $g_i \sim G$ et 0 sinon.

Donc, $\sum_{\substack{i>1 \\ |E(g_i)| = m}} b_i n(g_i, G) = b_G =$ nombre de recouvrements de $E(G)$ en

$E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k$, tels que $G[E_i] \sim h_i$ $i=1, 2, \dots, k$.

Soit $k=k_1+k_2+\dots+k_p$, où k_i représente le nombre de multigraphes h_i dans chaque classe d'isomorphisme de la famille $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$.

$$m^*(F,G) = b_G / (k_1! k_2! \dots k_p!)$$

D'après l'égalité (1), b_G est arête-reconstructible si $m > 4$ et ainsi $m^*(F,G)$ est arête-reconstructible.

C.Q.F.D.

II.5. - APPLICATION A LA RECONSTRUCTION DE CERTAINS PARAMETRES :

II.5.1. - Reconstruction de $\gamma(G)$, $\beta(G)$, $i(G)$ et le nombre de couplages de cardinalité maximum :

Tutte a montré (92) que le polynôme chromatique est reconstructible. Par conséquent, le nombre chromatique est reconstructible. Nous donnons une démonstration directe de ce résultat.

Proposition 8 :

Si G est un graphe simple d'ordre $n > 3$ alors $\gamma(G)$ est reconstructible.

Démonstration :

Soient h_1, h_2, \dots, h_k , $k > 2$ stables disjoints et $\sum_{i=1}^k |V(h_i)| = n$.
Posons $F_k = \bigcup_{i=1}^k h_i$. Sachant que $|E(G)|$ est reconstructible, on a :

- 1) Si $|E(G)| = 0$ alors $\gamma(G) = 1$
- 2) Si $|E(G)| > 0$ alors $\gamma(G) = \min (k/n^*(F_k, G) > 0)$

Donc, $\gamma(G)$ est reconstructible d'après la proposition 6.

C.Q.F.D.

Proposition 9 :

Soit $G=(V,E)$ un graphe simple, connexe, d'ordre $n > 3$. Le nombre d'absorption de G , $\beta(G)$, est reconstructible.

Démonstration :

Sachant que $\Delta(G)$ est reconstructible, on a :

(1) Si $\Delta(G)=n-1$ alors $\beta(G)=1$

(2) Si $\Delta(G) \leq n-2$: on considère l'ensemble $f = \{F/F=(X,Y,E_F)\}$, biparti, non-connexe, $|X| > 2$, $\forall x \in X : d(x) > 1$, $\forall y \in Y : d(y)=1$, $|X|+|Y|=n$.

Dans ce cas, $\beta(G) = \min_{F \in f} |X|$. Donc, $\beta(G)$ est reconstructible d'après la proposition 1.

C.Q.F.D.

Proposition 10 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n > 3$. L'arête-connexité de G , $i(G)$, est reconstructible.

Démonstration :

$i(G) \equiv$ nombre minimum d'arêtes dont l'enlèvement déconnecte G .

Soit f la classe des multigraphes non-connexes d'ordre n .

Montrons que :

$$i(G) = \min_{\substack{F \in f \\ n(F,G) > 0}} (|E(G)| - |E(F)|)$$

a) $|E(G)| - |E(F^*)| > i(G)$, pour tout multigraphe partiel non-connexe F^* de G .

b) Soit F^* un multigraphe partiel non-connexe de G obtenu à partir de G en enlevant $i(G)$ arêtes : $F^* \in f$ et $n(F^*,G) > 0$, donc

$$\min_{\substack{F \in f \\ n(F,G) > 0}} (|E(G)| - |E(F)|) < |E(G)| - |E(F^*)| = i(G)$$

Comme $n(F,G)$ est reconstructible pour tout $F \in f$ (proposition 1) alors $i(G)$ est reconstructible.

C.Q.F.D.

Proposition 11 :

Soit G un multigraphe d'ordre $n \geq 3$. Le nombre de couplages de cardinalité maximum de G , $C(G)$, et la cardinalité du couplage maximum sont restructuribles.

Démonstration :

Soit \mathcal{f} la classe des multigraphes d'ordre n et degré maximum inférieur ou égal à 1. Sachant que $|E(G)|$ est restructurible, on a :

- 1) Si $|E(G)| = 0$ alors $C(G) = 0$
- 2) Si $|E(G)| \neq 0$ alors $C(G) = n(F^*, G)$, où F^* est le graphe de \mathcal{f} ayant le plus grand nombre de composantes connexes isomorphes à K_2 et dont $n(F^*, G) > 0$. Comme $n(F, G)$ est restructurible pour tout $F \in \mathcal{f}$, alors $n(F^*, G)$ est restructurible et par suite, $C(G)$ est restructurible.

La cardinalité du couplage maximum est égale au nombre de composantes isomorphes à K_2 dans F^* .

C.Q.F.D.

II.5.2. - Arête-reconstruction de $q(G)$ et $\chi(G)$:

Une application directe de la proposition 7 est l'arête-reconstruction de l'indice chromatique $q(G)$.

Proposition 12 :

Si G est un multigraphe sans boucles d'ordre n et de $m \geq 4$ arêtes. Alors $q(G)$ est arête-restructurible.

Démonstration :

Soit h_1, h_2, \dots, h_k une liste de $k \geq 2$ multigraphes sans boucles dont chaque composante connexe est isomorphe à K_2 et $\sum_{i=1}^k |E(h_i)| = m$. Sachant que la séquence des degrés est arête-restructurible, si $m \geq 4$, on a :

- 1) Si $\forall x \in V(G)$, $d_G(x) = 1$ alors $q(G) = 1$

2) Si $\exists x \in V(G)$ tel que $d_G(x) \geq 2$ alors $q(G) \geq 2$ et $q(G) = \min_k m^*(F, G) > 0$ où F est défini à partir de h_1, h_2, \dots, h_k , comme dans la proposition 7.

$m^*(F, G)$ est positif s'il existe une partition de $E(G)$ en k couplages isomorphes à h_1, h_2, \dots, h_k et $q(G)$ est le cardinal minimum d'une partition de $E(G)$ en couplages.

Comme $m^*(F, G)$ est arête-reconstructible pour F d'après la proposition 7, donc $q(G)$ est arête-reconstructible.

C.Q.F.D.

Soit G un multigraphe connexe d'ordre n et de $m \geq 4$ arêtes. Soit F un multigraphe d'ordre n et de $(m-n+1)$ arêtes. Soit T un arbre d'ordre n .

Lemme 5 :

La propriété A : G admet un coarbre isomorphe à F dont l'arbre correspondant est isomorphe à T , est arête-reconstructible.

Démonstration :

Sachant que $|E(G)| = m$ est arête-reconstructible, on a :

- 1) Si $m=n-1$ alors le seul coarbre de G est un stable d'ordre n .
- 2) Si $m > n-1$: Soit F' le multigraphe obtenu à partir de F en enlevant tous les sommets isolés. D'après la proposition 7, $m^*((F, T); G)$ est arête-reconstructible (car $m \geq 4$) et la propriété A est vraie si et seulement si $m^*((F, T); G) > 0$.

C.Q.F.D.

Proposition 13 :

La déficience de Betti, $\beta(G)$, est arête-reconstructible.

Démonstration :

D'après le lemme 5, on sait arête-reconstruire l'ensemble des coarbres de G et donc on peut déterminer $\beta(G)$ car c'est le nombre minimum de composantes connexes avec un nombre impair d'arêtes dans un coarbre de G .

C.Q.F.D.

II.6. - UNE GENERALISATION DES PROPOSITIONS 1, 2 et 3 :

Les propositions 1, 2 et 3 se généralisent facilement comme suit.

Proposition 14 :

Soient n, p, q trois entiers avec $n \geq 3$, $p < n, q$ classes $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_q$ de multigraphes ayant moins de n sommets. Pour tout multigraphe G d'ordre n , le nombre de suites (G_1, G_2, \dots, G_q) telles que $G_i \in \mathfrak{g}_i$, G_i est un sous-graphe partiel de G et $\left| \bigcup_{i=1}^q V(G_i) \right| = p$, est restructurable.

Lemme 6 :

Soit $G = \bigcup_{i=1}^k h_i$ un recouvrement d'un multigraphe G par $k \geq 1$ sous-graphes partiels non-séparables distincts. On a :

$$|V(G)| - q < \sum_{i=1}^k (|V(h_i)| - 1), \text{ où } q \text{ est le nombre de composantes connexes de } G.$$

Avec égalité si et seulement si chaque h_i est un bloc de G (par correction une boucle est un graphe non-séparable).

Démonstration :

Evidemment, il suffit de démontrer le lemme pour les multigraphes connexes. Dans ce cas, on procède par récurrence sur k .

- Pour $k=1$, la propriété est évidente.

- Supposons la propriété vraie pour $k=j$. Nous allons montrer que pour $k=j+1$, la propriété est vraie. On a $G_{j+1} = \bigcup_{i=1}^{j+1} h_i$. Sans perte de généralité on peut supposer que $G_j = \bigcup_{i=1}^j h_i$ est connexe. Il y a deux cas à envisager :

1) $|V(G_j) \cap V(h_{j+1})| = 1$. Dans ce cas h_{j+1} est un bloc de G_{j+1} et on a :

$$|V(G_{j+1})| - 1 = (|V(G_j)| - 1) + |V(h_{j+1})| - 1$$

Donc, si h_1, \dots, h_j sont des blocs de G_j alors h_1, h_2, \dots, h_{j+1} sont les blocs de G_{j+1} et par hypothèse de récurrence :

$|V(G_{j+1})| - 1 = \sum_{i=1}^{j+1} (|V(h_i)| - 1)$. Sinon, h_1, h_2, \dots, h_{j+1} ne sont pas les blocs de G_{j+1} et par hypothèse de récurrence :

$|V(G_{j+1})| - 1 < \sum_{i=1}^{j+1} (|V(h_i)| - 1)$.

2) $|V(G_j) \cap V(h_{j+1})| = p \geq 2$. Dans ce cas h_{j+1} n'est pas un bloc de G_{j+1} et on a :

$$|V(G_{j+1})| - 1 = (|V(G_j)| - 1) + |V(h_{j+1})| - p < \sum_{i=1}^{j+1} (|V(h_i)| - 1)$$

C.Q.F.D.

Proposition 15 :

Soit G un multigraphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$, une famille de $k \geq 2$ multigraphes non-séparables d'ordre ≥ 2 et $< n$. Alors le nombre $l(h_1, h_2, \dots, h_k; G)$ de multigraphes partiels séparables de G dont les blocs sont isomorphes à h_1, h_2, \dots, h_k , est reconstructible.

Démonstration :

1) Si $\sum_{i=1}^k (|V(h_i)| - 1) \neq n-1$ alors d'après le lemme 6 il n'existera pas de multigraphe partiel séparable de G dont les blocs soient isomorphes à h_1, h_2, \dots, h_k , donc $l(h_1, h_2, \dots, h_k; G) = 0$.

2) On considère le cas où $\sum_{i=1}^k (|V(h_i)| - 1) = n-1$.

D'après le lemme 1, on a :

$$\begin{aligned} n(h_1, G)n(h_2, G) \dots n(h_k, G) &= \sum_{i \geq 1} b_i n(g_i, G) = \\ &= \sum_{\substack{i \geq 1 \\ |V(g_i)| < n \\ \text{ou } g_i \text{ non-connexe}}} b_i n(g_i, G) + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ |V(g_i)| = n \\ g_i \text{ connexe}}} b_i n(g_i, G) \end{aligned} \quad (1)$$

Interprétons $\sum_{i \geq 1} b_i n(g_i, G)$:

$$\sum_{\substack{i \geq 1 \\ |V(g_i)| = n \\ g_i \text{ connexe}}}$$

2.1) J'affirme que b_i est non-nul si et seulement si les blocs de g_i sont isomorphes à h_1, h_2, \dots, h_k :

En effet, si $b_i \neq 0$ alors il existe un recouvrement $E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k$ de $E(g_i)$ tel que $g_i[E_j] \sim h_j$, $1 \leq j \leq k$. Pour ce recouvrement on a : $|V(g_i)| - 1 = n - 1 = \sum_{j=1}^k (|V(g_i[E_j])| - 1)$.

En plus, les $g_i[E_j]$, $j=1, \dots, k$, sont tous distincts (car sinon on n'aurait pas l'égalité ci-avant). Donc, on peut appliquer le lemme 6, obtenant ainsi que les $g_i[E_j]$, $j=1, 2, \dots, k$, sont les blocs de g_i . La condition suffisante est évidente.

2.2) b_i ne dépend pas de g_i : En effet, en posant $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$, où k_1 représente le nombre de multigraphes h_1 ($1 \leq i \leq k$) dans chaque classe d'isomorphisme de la famille $(h_i)_{1 \leq i \leq k}$. On a $b_i = k_1! k_2! \dots k_p!$

D'après (2.1) et (2.2) :

$$c \equiv \sum_{\substack{i \geq 1 \\ |V(g_i)| = n \\ g_i \text{ connexe}}} b_i n(g_i, G) = \prod_{i=1}^k (k_i!) \sum_{\substack{g_i \text{ connexe} \\ \text{dont les blocs sont} \\ \text{isomorphes à } h_1, \dots, h_k}} n(g_i, G) =$$

$$= \prod_{i=1}^k (k_i!) l(h_1, h_2, \dots, h_k; G) \quad (2)$$

D'après le lemme de Kelly, la proposition 1 et l'égalité (1), c est reconstructible. Donc, d'après l'égalité (2), $l(h_1, h_2, \dots, h_k; G)$ est reconstructible.

C.Q.F.D.



CHAPITRE III

UNE CLASSE DE GRAPHES ARÊTE-RECONSTRUCTIBLE

ET PROBLÈMES OUVERTS



**III.1 - LES GRAPHES ADJOINTS DES GRAPHES SIMPLES AVEC $\Delta(G) \geq 4$
SONT ARÊTE-RECONSTRUCTIBLES :**

Dans ce paragraphe tous les graphes considérés seront des graphes simples. Nous montrons que les graphes adjoints des graphes simples avec $\Delta(G) \geq 4$ sont arête-reconstructibles.

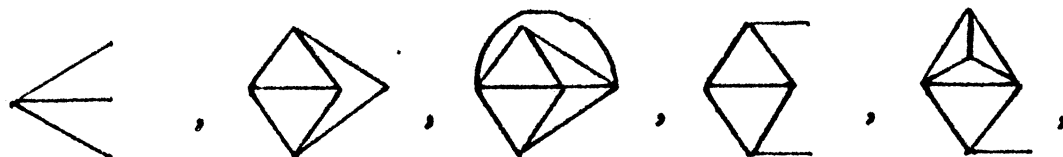
(I) Les propriétés suivantes sont équivalentes (Berge (3), page 388) :

a) G est un graphe adjoint

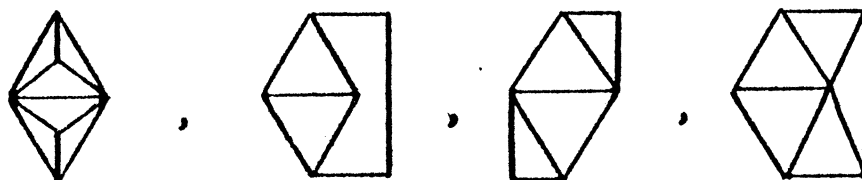
b) Il existe une partition de $E(G)$ telle que chaque élément de la partition induit une clique de G et chaque sommet de G appartient au plus à deux de ces cliques.

c) G ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit et si deux triangles impairs ont une arête commune, alors le sous-graphe induit par leurs sommets est K_4 (un triangle de G est appelé impair s'il existe un sommet de G adjacent à un nombre impair de ses sommets).

d) Aucun graphe de la liste (1) n'est un sous-graphe induit de G :



liste 1



Soit \mathcal{G} la classe des graphes adjoints des graphes de degré maximum ≥ 5 . Si $G \in \mathcal{G}$ alors G contient une 5-clique.

Lemme 1 :

\mathcal{G} est arête-reconnaissable.

Démonstration :

Soit $G \in \mathcal{G}$. Il faut montrer que toute arête-reconstruction H de G est un graphe adjoint comportant une 5-clique :

1) Si G est isomorphe à K_5 alors K_5 est la seule arête-reconstruction de G car K_5 est arête-reconstructible (Harary (33)).

2) Si G n'est pas isomorphe à K_5 alors :

- G comporte un sous-graphe sommet propre isomorphe à K_5 .
Donc, d'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), H contient une 5-clique.

- Pour montrer que H est un graphe adjoint, il suffit de montrer qu'il ne comporte pas de sous-graphe induit isomorphe à un des graphes de la liste 1 donnée plus haut : H ne peut pas être isomorphe à un élément de la liste 1 car H comporte une 5-clique ; par conséquent, si H contenait un des graphes de la liste 1, alors ce graphe serait un sous-graphe propre de H . Donc, d'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), il serait aussi sous-graphe de G ce qui est impossible car $G \in \mathcal{G}$.

C.Q.F.D.

Proposition 1 :

\mathcal{G} est arête-reconstructible.

Démonstration :

Soit $G \in \mathcal{G}$ et $(G_e)_{e \in E(G)}$ la liste des sous-graphes propres maximaux de G . Comme G comporte une 5-clique alors il existe G_{e^*} comportant un sous-graphe induit isomorphe à :

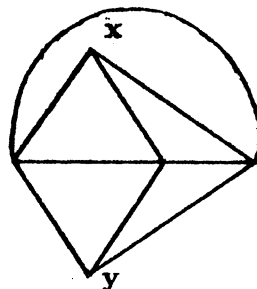


figure 1

Montrons que toute arête-reconstruction de G est isomorphe au graphe obtenu à partir de G_{e^*} en reliant les sommets x et y . En effet, s'il n'était pas ainsi, alors il existerait une arête-reconstruction de G avec un sous-graphe induit isomorphe au graphe de la fig. 1 qui fait partie de la liste 1, ce qui est impossible d'après le lemme 1.

C.Q.F.D.

Soit \mathcal{g}' la classe des graphes adjoints des graphes de degré maximum égal à 4. Si $G \in \mathcal{g}'$ alors une clique d'ordre maximum de G est une 4-clique.

Lemme 2 :

\mathcal{g}' est arête-reconnaissable.

Démonstration :

Soit $G \in \mathcal{g}'$ et H une arête-reconstruction de G . Il faut montrer que H est un graphe adjoint dont la clique maximum est d'ordre 4 :

1) Si G est isomorphe à K_4 , alors K_4 est la seule arête-reconstruction de G car K_4 est arête-reconstructible (Harary (33)).

2) Si G n'est pas isomorphe à K_4 alors :

- G comporte un sous-graphe sommet propre isomorphe à K_4 , D'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), H comporte une 4-clique. Alors, cette 4-clique est maximum car sinon H serait isomorphe à K_5 et donc G serait isomorphe à K_5 ce qui est impossible, ou H contiendrait proprement une 5-clique et donc G contiendrait une 5-clique d'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), ce qui est impossible.

- Pour montrer que H est un graphe adjoint, il suffit de montrer qu'il ne comporte pas de sous-graphe induit isomorphe à un des graphes de la liste 1 : Il ne peut pas être isomorphe à un élément de cette liste car les graphes de cette liste comportant une 4-clique sont tous arête-reconstructibles (Harary et Palmer (33)); de plus, aucun élément de la liste 1 ne peut pas être isomorphe à un sous-graphe induit propre de H car dans ce cas G contiendrait aussi un tel sous-graphe d'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), ce qui est impossible. Donc, H est un graphe adjoint.

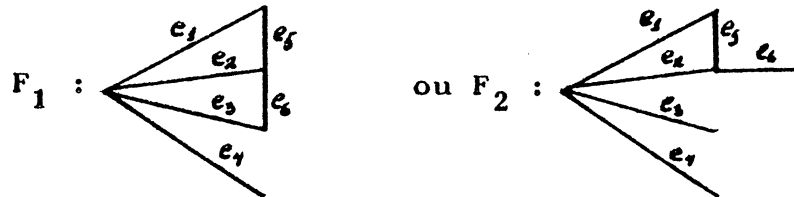
Proposition 2 :

g' est arête-reconstructible.

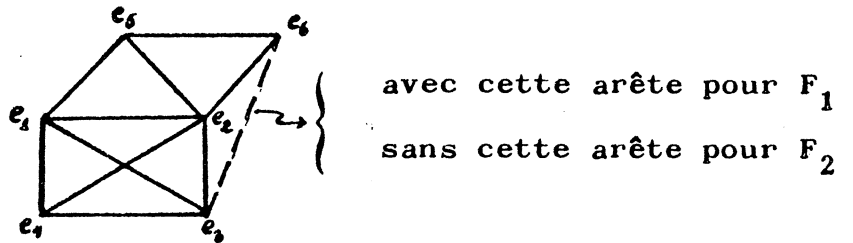
Démonstration :

Soit $G \in g'$ et $(G_e)_{e \in E(G)}$ la liste des sous-graphes propres maximaux de G . Soit F un graphe sans sommets isolés avec $L(F) \sim G$. On sait que $\Delta(F)=4$. Considérons un sommet de F de degré 4 :

1) Supposons que F contient un sous-graphe partiel isomorphe à :



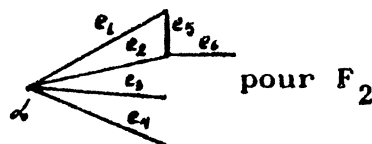
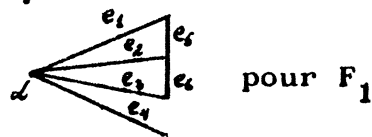
Alors, G contient le sous-graphe induit :



Donc, il existe un G_{e^*} avec un sous-graphe induit isomorphe à :



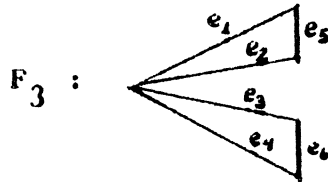
Etant donné que toute arête-reconstruction de G contient un sous-graphe partiel isomorphe à g_1 alors tout graphe g' dont le graphe adjoint est une arête-reconstruction de G , contient le sous-graphe partiel :



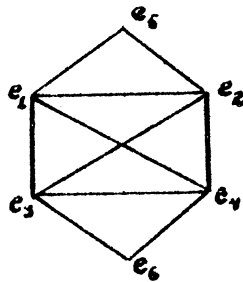
Dans g_1 , e_6 est adjacent à e_2 . Il ne peut pas être adjacent à α dans g' car $\Delta(g')=4$. Par conséquent, e_6 est adjacent à e_5 dans g_1 .

Ainsi, toute arête-reconstruction de G s'obtient à partir de G_{e^*} en joignant e_5 et e_6 , deux sommets bien précis de G_{e^*} .

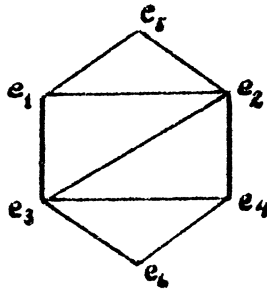
2) Supposons que F ne contient pas de sous-graphe isomorphe à F_1 ou F_2 mais il contient un sous-graphe partiel isomorphe à :



G contient alors le sous-graphe induit :



Donc, il existe G_{e^*} contenant le sous-graphe induit :



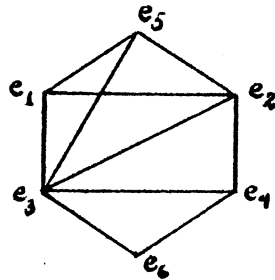
tel que e^* appartient à une 4-clique pour toute arête-reconstruction de G . (D'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), le nombre de 4-cliques contenant une arête spécifique est arête-reconstructible. Donc, on choisit un G_{e^*} dont ce nombre est positif).

Toute arête-reconstruction de G est un graphe adjoint. Par conséquent, d'après (I.d), e^* doit relier deux sommets du graphe précédent :

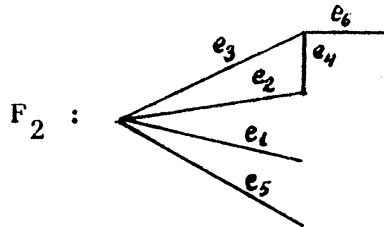
$$e^* = [e_5, e_3], [e_5, e_4], [e_5, e_6], [e_6, e_1], [e_6, e_2] \text{ ou } [e_1, e_4].$$

2.1.) Supposons que $e^* = [e_5, e_3]$:

On aurait une arête-reconstruction de G comportant le sous-graphe induit :



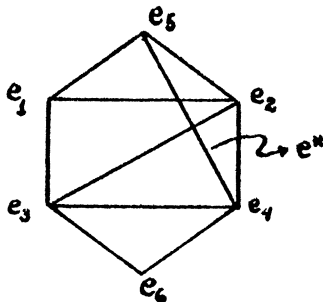
Cette arête-reconstruction ne peut pas être isomorphe au graphe ci-dessus car ce graphe est arête-reconstructible (Harary, (33)) et G serait aussi isomorphe à lui, ce qui est faux. Donc, le sous-graphe ci-dessus est un sous-graphe arête propre de cette arête-reconstruction de G . D'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), toute arête-reconstruction de G contient un sous-graphe induit isomorphe au graphe ci-dessus et cela implique que tout graphe dont le graphe adjoint est une arête-reconstruction de G contient un sous-graphe isomorphe à :



en particulier F , ce qui est impossible d'après les hypothèses. Donc, $e^* \neq [e_3, e_5]$.

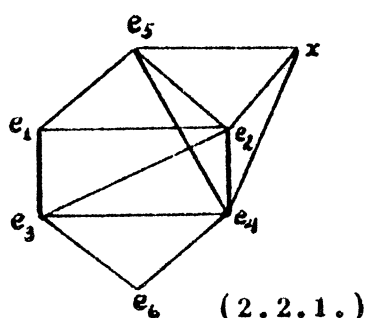
2.2.) Supposons que $e^* = [e_5, e_4]$:

On aurait une arête-reconstruction H de G avec le sous-graphe induit :

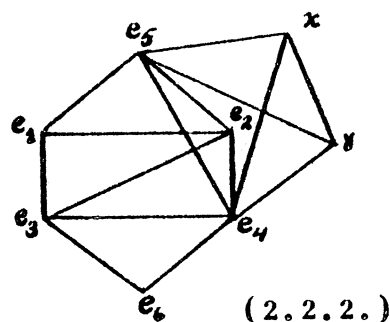


Comme on a supposé que e^* appartient à une 4-clique quelle que soit l'arête-reconstruction de G , cette 4-clique ne peut être induite que par $\{e_5, e_4, e_2, x\}$ ou $\{e_5, e_4, x, y\}$, où x, y sont deux sommets différents de e_1, e_2, \dots, e_6 .

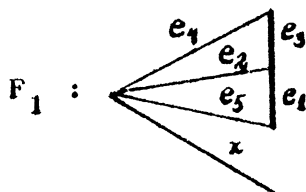
Il doit contenir donc un des sous-graphes partiels :



ou

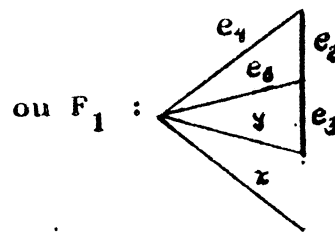
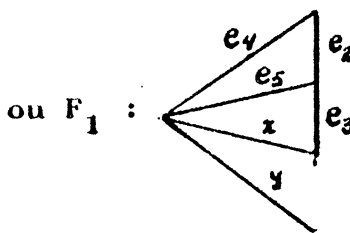
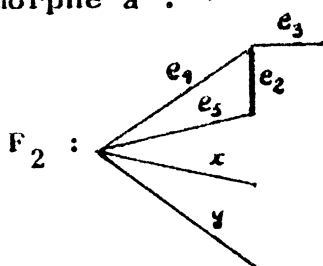


Si on a le cas (2.2.1.), d'après le lemme de Kelly (cas des arêtes) tout graphe dont le graphe adjoint est une arête-reconstruction de G contient le sous-graphe :



en particulier F_1 serait contenu dans F , ce qui est impossible d'après les hypothèses.

Si on a le cas (2.2.2.), tout graphe dont le graphe adjoint est une arête-reconstruction de G contient un sous-graphe partiel isomorphe à :



(Si e_3 n'est adjacent ni à x ni à y)

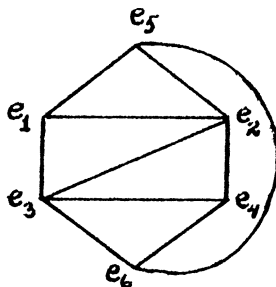
(Si x est adjacent à e_3)

(Si y est adjacent à e_3)

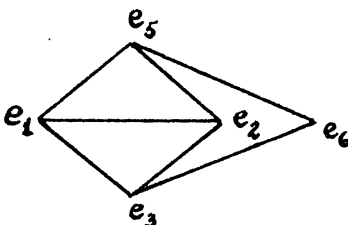
en particulier F contiendrait F_1 ou F_2 , ce qui est impossible d'après les hypothèses. Donc, $e^* \neq [e_5, e_4]$.

2.3.) Supposons que $e^* = [e_5, e_6]$:

On aurait une arête-reconstruction de G contenant le sous-graphe induit :



Donc, on aurait une arête-reconstruction de G contenant le sous-graphe induit :



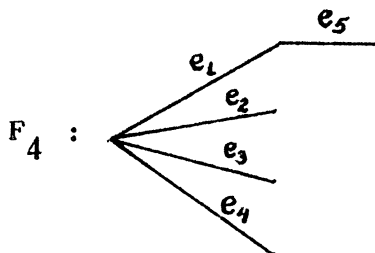
ce qui est impossible car ce graphe est dans la liste 1.

Donc, $e^* \neq [e_5, e_6]$.

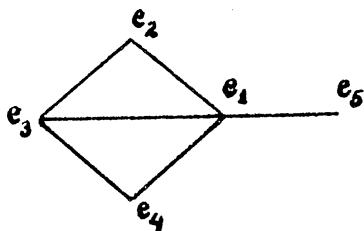
2.4.) Les cas $e^* = [e_6, e_2]$ et $e^* = [e_6, e_1]$ sont similaires aux cas (2.1) et (2.2) respectivement et on arrive à ce que $e^* \neq [e_6, e_2]$ et $e^* \neq [e_6, e_1]$.

Finalement, seul le cas où $e^* = [e_1, e_4]$ convient. Ainsi, toute arête-reconstruction de G est isomorphe au graphe obtenu à partir de G_{e^*} en reliant e_1 et e_4 , deux sommets bien précis dans G_{e^*} .

3) Supposons que F ne contient pas de sous-graphe partiel isomorphe à F_1 , F_2 ou F_3 mais il contient un sous-graphe partiel isomorphe à :



Dans ce cas, il existe G_{e^*} contenant le sous-graphe induit :

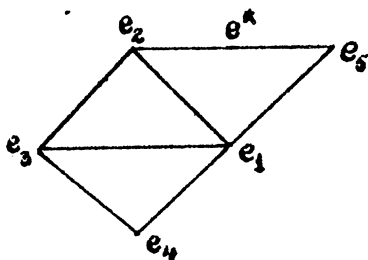


tel que e^* appartient à une 4-clique. (D'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), le nombre de 4-cliques contenant une arête spécifique est arête-reconstructible. Donc, on choisit un G_{e^*} dont ce nombre est positif).

Comme les sommets e_1, e_2, e_4, e_5 induisent $K_{1,3}$, on doit avoir $e^* = [e_2, e_5]$, $[e_4, e_5]$ ou $[e_2, e_4]$.

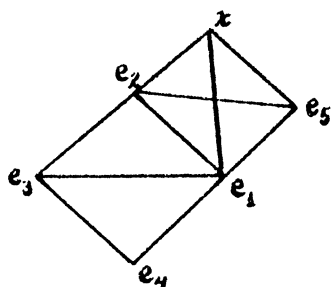
3.1) Supposons que $e^* = [e_2, e_5]$ (le cas $e^* = [e_4, e_5]$ est similaire) :

On aurait une arête-reconstruction de G contenant le sous-graphe induit



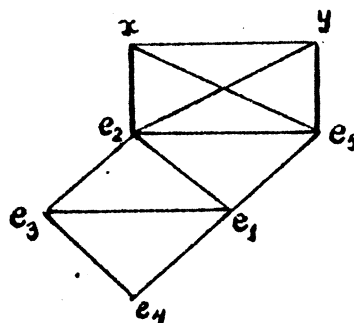
Comme e^* appartient à une 4-clique de cette arête-reconstruction, cette 4-clique serait induite par $\{e_1, e_2, e_5, x\}$ ou $\{e_2, e_5, x, y\}$, où x, y sont deux sommets différents de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 .

On a donc une arête-reconstruction H de G contenant un sous-graphe partiel isomorphe à :



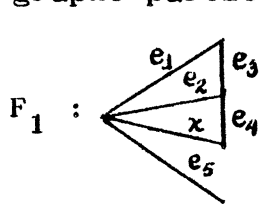
(3.1.1.)

ou

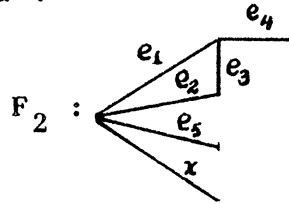


(3.1.2.)

Dans le cas (3.1.1), ou bien H est isomorphe au graphe de la fig. (3.1.1) ou H contient un sous-graphe partiel arête propre isomorphe au graphe de la figure (3.1.1). Dans le premier cas G serait isomorphe à H car H est arête-reconstructible (Harary (33)) Dans le deuxième cas, d'après le lemme de Kelly (cas des arêtes), G contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à celui de la fig. (3.1.1). Quoi qu'il en soit, le graphe F contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à :



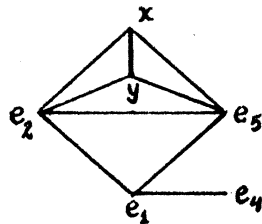
(Si e_4 est adjacent à x)



(Si e_4 n'est pas adjacent à x)

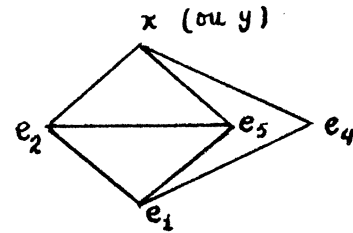
ce qui est impossible d'après les hypothèses.

Dans le cas (3.1.2), H contient un sous-graphe induit isomorphe à :



(Si e_4 n'est adjacent ni à x ni à y)

ou

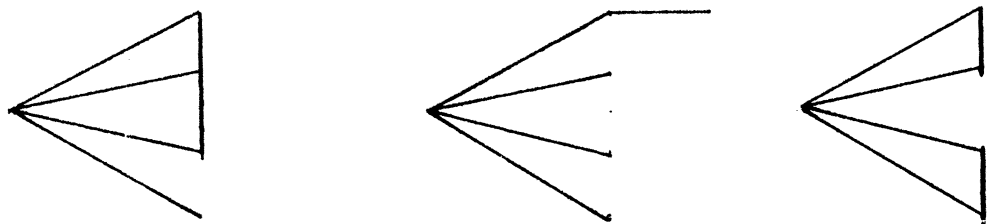


(Si e_4 est adjacent à x (ou y))

D'après le lemme 2 et (I.d), ceci est impossible.

Finalement on a $e^* = [e_2, e_4]$ et toute arête-reconstruction de G est isomorphe au graphe obtenu à partir de G_{e^*} en reliant e_2 et e_4 , deux sommets bien précis de G_{e^*} .

4) Supposons que F ne tombe pas dans les cas (1), (2) ou (3). Donc, F ne contient pas de sous-graphe isomorphe aux graphes :



Donc, pour tout sommet x de degré 4 : $F \setminus \{x\} \cup \Gamma(x)$ induit une composante connexe isomorphe à :



On sait que si F est non-connexe, alors G est non-connexe (car F ne possède pas de sommet isolé) et donc G est arête-reconstructible. Si F est connexe, alors il est isomorphe à F_5 ou F_6 et on sait d'après Harary (33) que $L(F_5)$ et $L(F_6)$ sont arête-reconstructibles.

Finalement (1), (2), (3) et (4) impliquent que g' est arête-reconstructible.

C.Q.F.D.

Théorème 1 :

La classe des graphes adjoints des graphes de degré maximum ≥ 4 est arête-reconstructible.

III.2) - QUELQUES PROBLEMES OUVERTS EN RECONSTRUCTION DE GRAPHS :

On constate que la reconstruction de graphes à partir d'une famille de sous-graphes constitue un problème où il reste beaucoup de choses à faire. On pourrait même établir une longue liste de problèmes concernant ce sujet ; par exemple, beaucoup de classes intéressantes de graphes restent à reconstruire.

La liste des problèmes ouverts que nous proposons ci-dessous est inspirée par les résultats connus et on peut espérer que les mêmes méthodes permettraient d'en venir à bout.

Nous exposons tout d'abord un problème qui est aussi fondamental que la conjecture d'Ulam :

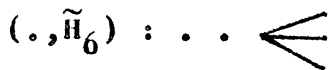
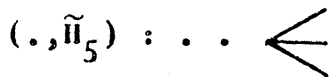
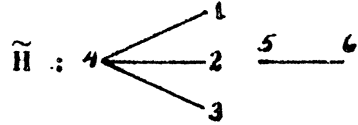
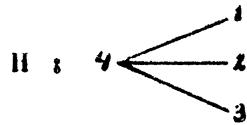
Problème 1 :

Supposons qu'on a une liste de n graphes simples non-étiquetés d'ordre $n-1$, G_1, G_2, \dots, G_n , et on se demande s'il existe un graphe simple dont la liste de ses sous-graphes induits propres maximaux non-étiquetés est G_1, G_2, \dots, G_n . Dans l'affirmative, une telle liste sera appelée graphique. Le problème consiste à caractériser les listes graphiques.

Du point de vue algorithmique, on constate que la caractérisation des listes graphiques est un problème aussi compliqué que la vérification de l'isomorphisme de deux graphes :

En effet, soient G et H deux graphes simples connexes d'ordre $n \geq 3$. Le problème de l'isomorphisme entre G et H peut se ramener au problème de savoir si une liste de graphes est graphique. Soit \tilde{G} (respectivement \tilde{H}) un graphe ayant exactement deux composantes connexes isomorphes à G (resp. H) et K_2 respectivement. Soit $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{n+2}$ la liste des sous-graphes induits propres maximaux non-étiquetés de \tilde{H} . Soit (\cdot, \tilde{H}_i) , $1 \leq i \leq n+2$, le graphe obtenu à partir de \tilde{H}_i en ajoutant un sommet isolé.

Exemple :

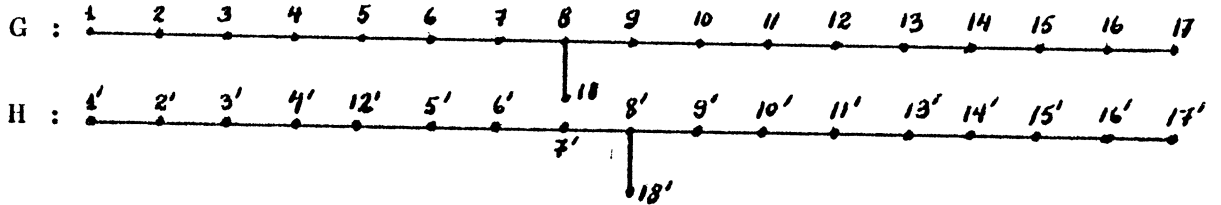


J'affirme que G est isomorphe à H si et seulement si la liste $L=(\tilde{G}, (., \tilde{H}_1), (., \tilde{H}_2), \dots, (., \tilde{H}_{n+2}))$ est graphique :

- Si L est graphique alors tout graphe qui réalise L comporte un sommet isolé (sinon, étant donné qu'il existe une composante connexe d'ordre ≥ 3 alors il existerait deux graphes sans sommets isolés dans la liste, ce qui est impossible). Comme \tilde{G} est le seul graphe sans sommets isolés de la liste L , tout graphe qui réalise la liste L est isomorphe au graphe obtenu à partir de \tilde{G} en ajoutant un sommet isolé. Ainsi, la liste $(., \tilde{G}_1), (., \tilde{G}_2), \dots, (., \tilde{G}_{n+2})$ est la même que la liste $(., \tilde{H}_1), (., \tilde{H}_2), \dots, (., \tilde{H}_{n+2})$ et donc la liste $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \dots, \tilde{G}_{n+2}$ est la même que la liste $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{n+2}$, ce qui implique que $\tilde{G} \sim \tilde{H}$ (car ce sont des graphes non-connexes). D'où $G \sim H$. Donc, l'existence d'un algorithme polynômial qui vérifie si une liste est graphique, rendrait polynômial la vérification de l'isomorphisme de deux graphes.

Smadici (82) propose un algorithme pour déterminer si une liste de graphes simples est graphique et dans le cas affirmatif, il construit un graphe qui réalise la liste. Malheureusement la justification est erronée. Nous donnons ici un contre-exemple qui montre que le procédé employé par Smadici n'est pas correct.

Soit G un graphe simple d'ordre n et v un sommet de G . Soit t_i^v le nombre de sommets de degré i dans G adjacents à v , $1 \leq i \leq n-1$, et $s(G) = \left\{ (t_1^v, t_2^v, \dots, t_{n-1}^v) / v \in V(G) \right\}$. $s(G)$ est reconstructible, c'est-à-dire, on peut l'obtenir à partir des G_v . Soient G_1, G_2, \dots, G_n , n graphes simples d'ordre $n-1$ non-étiquetés dont $q = \sum_{i=1}^n |E(G_i)| / (n-2)$ est un entier non-négatif et $q \geq E(G_i)$, $1 \leq i \leq n$. L'algorithme de Smadici consiste à trouver un graphe H pour lequel $|E(H)| = q$, $s(H_{v_i}) = s(G_i)$, $1 \leq i \leq n$, $H_v \sim G_1$ (pour un $v \in V(H)$) et $s(H)$ soit égal à l'ensemble s obtenu à partir des G_i . Il affirme que si l'on arrive à trouver un tel graphe, alors la liste de ses sous-graphes induits propres maximaux non-étiquetés est G_1, G_2, \dots, G_n . Je donne un contre-exemple à cette affirmation :



On a :- $|E(H)| = |E(G)|$ - $H_{18'} \sim G_{18}$
 - $s(H_{i'}) = s(G_i)$, $1 \leq i \leq 18$ - $s(G) = s(H)$

Mais la liste des $H_{i'}$, non-étiquetés, $1 \leq i \leq 18$, est différente de celle des G_i non-étiquetés, $1 \leq i \leq 18$.

Problème 2 :

On sait que les graphes simples réguliers sont reconstructibles. Est-ce que les graphes simples bi-degrés, c'est-à-dire, dont le degré des sommets vaut p ou q (p, q deux entiers différents) sont reconstructibles ?

Problème 3 (Bondy (6)):

Est-ce que les graphes bipartis sont reconstructibles ?

Problème 4 (Bondy (6), Greenwell (29)):

Est-ce que les graphes simples séparables avec des sommets pendants sont reconstructibles ?

Problème 5 (Bondy (6), Fiorini (20)):

Est-ce que les graphes planaires simples sont reconnaissables ?

Problème 6 (Bondy (6), Fiorini (20)):

Est-ce que les graphes planaires simples sont restructuribles ?

Problème 7 (Kocay (48)):

Est-ce que le nombre de graphes partiels isomorphes à un arbre donné est restructurable ?

Problème 8 (Bondy (6)):

Soit f un paramètre. Est-ce que la classe des graphes simples dont f vaut une valeur donnée est faiblement restructurable ?

Problème 9 :

Montrer que le genre, l'indice chromatique, la déficience de Betti, le nombre de Hadwiger, le diamètre, le nombre achromatique, sont des paramètres restructuribles.

Problème 10 (Bondy (6), Weinstein (95)):

Montrer que les multigraphes d'ordre ≥ 3 sont restructuribles si les graphes simples d'ordre ≥ 3 sont restructuribles.

Les problèmes 2 à 10 restent ouverts pour l'arête-reconstruction (sauf le problème 5 et 7 et les paramètres $\chi(G)$ et $q(G)$ qui sont arête-restructuribles) et l'ensemble-reconstruction.

Problème 11 (Bondy (6)) :

Trouver des méthodes constructives des résultats de Lovasz et Müller (voir chapitre I) concernant l'arête-reconstruction de graphes.



B I B L I O G R A P H I E

- (0) Arjomandi, E. :
 "Some results on Ulam's conjecture".
 M. Sc. thesis, University of Toronto, 1972.
- (1) Arjomandi, E. ; Corneil, D.G. :
 "Unicyclic graphs satisfy Harary's conjecture".
 Canad Math Bull. 17 (1974), 593-596.
- (2) Beineke, L.W. ; Parker, E.T. :
 "On non-reconstructible tournaments".
 J. Combin. Theory 9 (1970), 324-326.
- *(3) Berge, C. :
 "Graphes et hypergraphes". Dunod, 1973.
- *(4) Bondy, J.A. :
 "On Kelly's congruence theorem for trees".
 Proc. Camb. Phil. Soc. 65 (1969), 387-397.
- *(5) Bondy, J.A. :
 "On Ulam's conjecture for separable graphs".
 Pacific J. Math. 31 (1969), 281-288.
- *(6) Bondy, J.A. ; Hemminger, R.L. :
 "Graph Reconstruction - A Survey".
 Journal of Graph Theory, vol. 1 (1977), 227-268.
- *(7) Bondy, J.A. ; Hemminger, R.L. :
 "Reconstruction by enumeration - some applications of a
 counting theorem to the graph reconstruction problem"
 Problèmes Combinatoires et théorie des Graphes (Proceedings
 of the conference held in Paris, 1976) édité par J.C. Bermond,
 J.C. Fournier, M. Las Vergnas et D. Sotteau, 1978, pp 51-55.

- * (8) Bondy, J.A. :
 "Reflections on the legitimate deck problem".
 Lecture notes in math., n° 686, Springer-Verlag, Berlin,
 1978.
- * (9) Bryant, R.M. :
 "On a conjecture concerning the reconstruction of graphs".
 J. Combin. Theory 11 (1971), 139-141.
- *(10) Chartrand, G. ; Kronk, H.V. :
 "On reconstructing disconnected graphs".
 Ann. N.Y. Acad. Sci. 175 (1970), 85-86.
- *(11) Chartrand, G. ; Kronk, H.V. ; Schuster, S. :
 "A technique for reconstructing disconnected graphs".
 Colloq. Math. 27 (1973), 31-34.
- *(12) Chinn, P.Z. :
 "A graph with p points and enough distinct $(p-2)$ - order
 subgraphs is reconstructible". Lecture Notes in math.,
 vol. 186, Springer-Verlag, N.York, 1971, pp. 71-73.
- (13) Cvetkovic, D.M. ; Gutman, I. :
 "The reconstruction problem for characteristic polynomials
 of graphs". Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak.,
 Ser. Mat. Fiz. 498-541, 45-48 (1975).
- (14) Dedo, Ernesto :
 "The reconstructibility of the characteristic polynomial
 of the line-graph of a graph".
 Boll. Un. Mat. Ital. A(5) 18(1981), n° 3, 423-429.
- (15) Dörfler, W. :
 "Some results on the reconstruction of graphs".
 Infinite and Finite Sets, vol. I (Proceedings of the
 colloquium held in honor of Paul Erdős on his 60 th
 birthday, Keszthely, 1973), édité par A. Hajnal, R. Rado,
 V.T. Sós. Colloq. Math. Soc. János Bolyai,
 vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1975, pp. 361-383.

- *(16) Dürfler, W. :
 "On the edge-reconstruction of graphs".
 Bull. Austral. Math. Soc., vol. 10 (1974), 79-84.
- (17) Dutton, Ronald :
 "C-graphs are recognisables and edge-reconstructibles".
 (Proceedings of the Eleven Southeastern Conference on
 Combinatorics, Graph theory and Computing. Florida
 Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1980) Vol. I.
 Congr. Numer. 28(1980), 377-387.
- (18) Fiorini, S. :
 "On the edge-reconstruction of planar graphs".
 Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 83 (1978), n° 1, 31-35.
- (19) Fiorini, S. :
 "A theorem on planar graphs with an application to the
 reconstruction problem. I."
 Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 29 (1978), n° 115, 353-361.
- (20) Fiorini, S. ; Manvel, B. :
 "A theorem on planar graphs with an application to the
 reconstruction problem. II."
 J. Combin. Inform. System Sci. 3 (1978), n° 4, 200-216.
- (21) Fiorini, S. ; Lauri, J. :
 "The reconstruction of maximal planar graphs, I. Recognition".
 J. Combin. theory Ser. B 30 (1981), n° 2, 188-195.
- (22) Fiorini, S. ; Lauri, J. :
 "On the edge-reconstruction of graphs which triangulate
 surfaces". Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 33 (1982)
 n° 130, 191-214.
- (23) Fleischner, H. :
 "The reconstruction of the line-critical blocks".
 Ars Combinatorica vol. VII (1979), 223.

- (24) Geller, D. ; Manvel, B. :
"Reconstruction of cacti".
Canad. J. Math. 21 (1969), 1354-1360.
- (25) Giles, W. :
"On reconstructing maximal outerplanar graphs".
Discrete Math. 8 (1974), 169-172.
- (26) Giles, W. :
"The reconstruction of outerplanar graphs".
J. Combin. Theory (B) 16 (1974), 215-226.
- (27) Giles, W. :
"Point deletions of outerplanar blocks".
J. Combin. theory (B) 20 (1976), 103-116.
- (28) Giles, W. :
"Reconstructing trees from two-point deleted subtrees".
Discrete Math. 15 (1976), 325-332.
- *(29) Greenwell, D.L. ; Hemminger, R.L. :
"Reconstructing graphs". Lecture notes in math., vol. 110,
Springer-Verlag, New-York, pp. 91-114.
- *(30) Greenwell, D.L. :
"Reconstructing graphs". Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971),
431-433.
- *(31) Greenwell, D.L. ; Hemminger, R.L. :
"Reconstructing the n-connected components of a graph".
Aequationes Math. 9 (1973), 19-22.
- *(32) Harary, Frank :
"On the reconstruction of a graph from a collection of
subgraphs". Theory of graphs and its applications.
(Proceedings of the Symposium held in Prague, 1964) édité
par M. Fiedler. Czechoslovak Academy of Science. Prague.
pp. 47-52.

- *(33) Harary, F. ; Palmer, E. :
 "A note on similar points and similar lines of a graph".
 Rev. Roumaine Math. Pures et Appli. 10 (1965), 1489-1492.
- *(34) Harary, F. :
 "On similar points of a graph".
 J. Math. Mech. 15 (1966), 623-630.
- *(35) Harary, F. ; Palmer, E. :
 "The reconstruction of a tree from its maximal subtrees".
 Canad. J. Math. 18 (1966), 803-810.
- (36) Harary, F. ; Palmer, E. :
 "On the problem of reconstructing a tournament from
 subtournements". Monasth Math. 71 (1967), 14-23.
- (37) Harary, F. :
 "Graphical reconstruction". A seminar on graph theory,
 édité par F. Harary. Holt, Rinehart and Winston,
 New York, 1967, pp. 18-20.
- (38) Harary, F. :
 "The four color conjecture and other graphical diseases".
 Proof techniques in Graph theory. (Proceedings of the Second
 Ann Arbor graph theory conference, Ann Arbor, Mich., 1968),
 édité par F. Harary, Academic Press, New York, 1969, pp 1-9.
- *(39) Harary, F. ; Manvel, B. :
 "The reconstruction conjecture for labeled graphs".
 Combinatorial structures and their applications.
 (Proceedings of the Calgary International Conference on
 Combinatorial structures and their applications,
 Calgary, Alberta, 1969), édité par R.K. Guy, H. Hanani.
 Gordon and Breach, New York, 1970, pp 131-146.
- (40) Harary, F. :
 "A survey of the reconstruction conjecture".
 Lecture Notes in Math., vol. 406, Springer-Verlag,
 New York, 1974, pp 1-9.

- (41) Harary, F. :
"Four difficult unsolved problems in graph theory".
Recent Advances in Graph theory (Proceedings of the
Symposium held in Prague, 1974), édité par M. Fiedler.
Academia Prague, 1975, pp 249-256.
- (42) Harary, F. :
"An exposition of the reconstruction conjecture for graphs".
Bull. Malaysian Math. Soc. 7 (1976), 1-7.
- (43) Harary, F. ; Plantholt, M. ; Statman, R. :
"The graph isomorphism problem is polynomially equivalent
to the legitimate deck problem for regular graphs".
Caribbean J. Math. 1 (1982), n° 1, 15-23.
- *(44) Hemminger, R.L. :
"On reconstructing a graph".
Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 185-187.
- (45) Huang, Qing Xiang ; Sheng Xian :
"The reconstruction of a graph of p points with six vertices
unlabelled". J. Huazhong Inst. Tech. 9 (1981), n° 6, 19-26.
- *(46) Kelly, P. :
"A congruence theorem for trees".
Pacific. J. Math. 7 (1957), 961-968.
- *(47) Kocay, W.L. :
"An extension of Kelly's lemma to spanning subgraphs".
Cong. Numer. 31 (1981), 109-120.
- *(48) Kocay, W.L. :
"On reconstructing spanning subgraphs".
Ars Combin. 11 (1981).
- (49) Krishnamoorthy, V. :
"The reconstruction conjecture and some related problems".
PhD thesis, Karnatak University, 1976.

- (50) Krishnamoorthy, V. :
 "The reconstruction of critical blocks".
 J. Math. Phys. Sci. 13 (1979), n° 3, 219-239.
- (51) Lauri, J. :
 "Edge-reconstruction of planar graphs with minimum valency 5".
 J. Graph Theory 3 (1979), n° 3, 269-286.
- (52) Lauri, J. :
 "The reconstruction of maximal planar graphs. II.
 Reconstruction". J. Combin. theory Ser. B 30 (1981),
 n° 2, 196-214.
- (53) Le Fever, J. ; Ray-Chaudhuri, D.K. :
 "Reconstruction of 2-trees".
 Notes Amer. Math. Soc. 23 (1976), A-611.
- *(54) Lovász, L. :
 "A note on the line reconstruction problem".
 J. Combin. Theory (B) 13 (1972), 309-310.
- *(55) Lovász, L. :
 Combinatorial problems and exercises.
 North-Holland Publishing Company, 1979.
- (56) Manoley, J.P. :
 "A non-graph approach to Ulam's conjecture".
 Portugal Math. 36 (1977), n° 1, 1-6.
- *(57) Manvel, B. :
 "On reconstruction of graphs".
 Lecture Notes in Math., vol. 110, Springer-Verlag,
 New York, 1969, pp 207-214.
- *(58) Manvel, B. :
 "Reconstruction of unicyclic graphs".
 (Proceedings of the Second Ann Arbor graph theory conference,
 Ann Arbor, Mich., 1968), édité par F. Harary, Acad. Press,
 New York, 1969, pp 103-107.

- (59) Manvel, B. :
"On reconstruction of graphs".
PhD thesis, University of Michigan, 1970.
- (60) Manvel, B. :
"Reconstruction of trees".
Canad. J. Math. 22 (1970), 55-60.
- (61) Manvel, B. :
"Reconstruction of maximal outerplanar graphs".
Discrete Math. 2 (1972), 269-278.
- (62) Manvel, B. :
"Reconstructing the degree-pair sequence of a digraph".
J. Combin. theory (B) 15 (1973), 18-31.
- *(63) Manvel, B. :
"Some basic observations on kelly's conjecture for graphs".
Discrete Math. 8 (1974), 181-186.
- (64) Manvel, B. :
"On reconstructing graphs from their sets of subgraphs".
J. Combin. theory (B) 21 (1976), 156-165.
- (65) Manvel, B. ; Weinstein, J.M. :
"Nearly acyclic graphs are reconstructible".
J. Graph. Theory 2 (1978), n° 1, 25-39.
- (66) Mc Avaney, K.L. :
"A conjecture on two-point-deleted subgraphs of cartesian products". Lecture Notes in Math., vol. 829,
Springer-Verlag, Berlin, 1980, pp 172-185.
- (67) Mc Kay, B.D. :
"Computer reconstruction of small graphs".
J. Graph Theory 1 (1977), 281-283.

- *(68) Mulla, F.S. :
 "A class of graphs for which the Ulam's conjecture holds".
 Discrete Math. 22 (1978), n° 2, 197-198.
- *(69) Müller, V. :
 "The edge-reconstruction hypothesis is true for graphs
 with more than $n \log_2 n$ edges".
 J. Combin. Theory (B) 22 (1977), 281-283.
- *(70) Nash-Williams, C. St. J.A. :
 "The reconstruction problem".
 Selected Topics in graph theory. Academic Press,
 London, 1978, édité par Lowell et Wilson, pp 205-236.
- (71) Nebesky, L. :
 "Reconstruction of a tree from certain maximal proper
 subtrees".
 Časopis Pěst. Mat. 99 (1974), 44-48.
- (72) Nešetřil, J. :
 "On approximative isomorphisms and the Ulam-Kelly conjecture".
 Theorie der graphen und Netwerke. (Proceedings of the
 Eighteenth International Scientific Colloquium, Ilmenau.
 2, 1973) Technische Hochschule, Ilmenau, pp 17-18.
- (73) Nijenhuis, A. :
 "Note on the unique determination of graphs by proper
 subgraphs". Notices Amer. Math. Soc. 24, A-290.
- *(74) O'Neil, P.V. :
 "Ulam's conjecture and graph reconstructions".
 Amer. Math. Monthly 77 (1970), 35-43.
- (75) O'Neil, P.V. :
 "Nearly planar graphs and the reconstruction problem".
 Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973), A-647.

- *(76) O'Neil, P.V. :
"Reconstruction of a class of blocks".
Notices Amer. Math. Soc. 21 (1974), A-39.
- *(77) Pouzet, M. :
"Quelques remarques sur les résultats de Tutte concernant
le problème d'Ulam".
Publications du département de Math. de Lyon, 1977.
- (78) Ramachandran, S. :
"On the reconstruction conjecture".
(Proceedings of the Symposium on graph theory. Indian Statis
Inst. Calcuta 1976). ISI Lecture Notes, 4, Macmillan of
India, New Delhi, 1979, pp 246-250.
- (79) Ramachandran, S. :
"A test for legitimate decks".
Discrete Math. 25 (1979), n° 2, 165-173.
- (80) Ramachandran, S. :
"Nearly line regular graphs and their reconstruction".
Lecture Notes in Math., vol. 885, 1980, pp 391.
- *(81) Ramachandran, S. :
"On reconstructing separables digraphs".
Lecture Notes in Math. édité par Dold et Eckmann, 1980,
pp 406-409.
- (82) Ramachandran, S. :
"On a new digraph reconstruction conjecture".
J. Combin. theory (B) 31 (1981), n° 2, 143-149.
- (83) Schmeichel, E.F. :
"A note on the edge reconstruction conjecture".
Bull. Austral. Math. Soc. 12 (1975), 27-30.

- (84) Sheehan, J. :
"Fixing subgraphs and Ulam's conjecture".
J. Combin. theory (B) 14 (1973), 125-131.
- *(85) Smadici, C. ; Smadici, L. :
"On a problem of Frank Harary".
An. St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect I a math.
n° 18 (1972), 299-304.
- (86) Statman, R. :
"Reductions of the graph reconstruction conjecture".
Discrete Math. 36 (1981), n° 1, 103-107.
- (87) Stockmeyer, P.K. :
"The reconstruction conjecture for tournaments".
Congressus Numer. vol. 14 (1975), 561-566.
- (88) Stockmeyer, P.K. :
"New counterexamples to the digraph reconstruction conjecture".
Notices Amer. Math. Soc. 23 (1976), A-654.
- (89) Stockmeyer, P.K. :
"The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments".
J. Graph Theory 1 (1977), 19-25.
- (90) Stockmeyer, P.K. :
"Which reconstruction results are significant ?".
The theory and applications of graphs. (Kalamazoo, Mich.,
1980), Wiley, New York, 1981, pp 543-555.
- *(91) Tutte, W.T. :
"On dichromatic polynomials".
J. Combin. Theory 2 (1967), 301-320.

- *(92) Tutte, W.T. :
"All the king's horses (a guide to reconstruction)".
Graph theory and related topics. (Proceedings of the
conference held in honor of W.T. Tutte on the occasion
of the 60th birthday), édité par J.A. Bondy and S.K. Murty,
Academic Press, New York, 1976.
- *(93) Tutte, W.T. :
"The reconstruction problem in graph theory".
The British Polymer Journal, Sept. 1977, 180-183.
- (94) Ulam, S.M. :
"A collection of mathematical problems".
Wiley (Interscience), New York, 1960, pp 29.
- (95) Weinstein, J. :
"Reconstructing colored graphs".
Pacif. J. Math. 57 (1975), 307-314.

(*) : articles consultés.

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. ...**NGUYEN HUY XUONG**...

M. ...**CHARLES PAYAN**

M.**O. MEZA**..... est autorisé

à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR **DE 3È CYCLE**..

.....

Avis favorable

Grenoble, le 22 NOV. 1983

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

M. TANCHE

Chazotte



M. Tanche

