



HAL
open science

Systematisation d'un calcul de boucle par les méthodes d'unitarité : application au processus à six photons.

Christophe Bernicot

► **To cite this version:**

Christophe Bernicot. Systematisation d'un calcul de boucle par les méthodes d'unitarité : application au processus à six photons.. Physique [physics]. Université de Savoie, 2008. Français. NNT : . tel-00308396v2

HAL Id: tel-00308396

<https://theses.hal.science/tel-00308396v2>

Submitted on 4 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE SAVOIE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN PHYSIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE SAVOIE

par

Christophe BERNICOT

Sujet :

**SYSTÉMATISATION D'UN CALCUL DE BOUCLE PAR LES
MÉTHODES D'UNITARITÉ : APPLICATION AU PROCESSUS À
SIX PHOTONS.**

Soutenue le 4 Juillet 2008 après avis des rapporteurs :

Mme. Gudrun Heinrich Rapporteur
Mr. Vittorio Del Duca Rapporteur

devant la Commission d'examen composée de :

Mr. Luc Frappat Président
Mme. Gudrun Heinrich Rapporteur
Mr. Vittorio Del Duca Rapporteur
Mr. Jean-Philippe Guillet Directeur de Thèse
Mr. Patrick Aurenche
Mr. Davison E. Soper

Remerciement

Je tiens à remercier le Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de physique théorique pour m'avoir accueilli in extremis. En particulier, je suis reconnaissant de la grande liberté que m'a offert mon directeur de thèse Jean-Phillipe Guillet tant dans le choix du sujet que dans la façon de le résoudre, ainsi que le directeur du laboratoire Patrick Aurenche qui m'a accepté et qui m'a régulièrement encouragé. J'aimerais aussi remercier ma famille ainsi que tous qui m'ont suivi pendant ces trois années de thèse. Je rend honneur à ma fiancée qui m'a soutenu et défendu. Enfin je veux que toute la gloire soit rendue à mon Dieu sans qui je ne serai pas même pas là.

Résumé :

La découverte de nouvelles physiques, grâce à la détection de nouvelles particules au LHC, pourra être effectuée si le bruit de fond est bien connu. La plupart du temps il est constitué d'un grand nombre de processus multi-particules, et pour avoir une prédiction fiable, il faut le calculer à l'ordre au delà des logarithmes dominants, qui nécessite le calcul de diagrammes à une boucle. Par des méthodes classiques de réduction, il devient difficile de calculer ces diagrammes avec plus de cinq pattes externes. Néanmoins, de nouvelles techniques de calcul de boucles ont été développées. Elles sont basées sur deux principes fondamentaux de la physique : l'unitarité et la causalité.

Cette thèse consiste à combiner la méthode des amplitudes d'hélicités et les méthodes d'unitarité pour créer une procédure systématique de calcul d'amplitude d'un diagramme à une boucle. Cette procédure a été appliquée à l'amplitude à six photons avec une boucle de fermions non massifs puis généralisée, dans certains cas, avec une boucle massive. Les résultats très compacts obtenus sont la preuve de la puissance de cette méthode.

D'autres part ces résultats compacts ont permis l'étude des singularités de Landau particulières aux processus à six pattes externes sans masse : le "double parton scattering". Elles correspondent à une configuration cinématique particulière dans laquelle la boucle virtuelle tend vers deux sous processus physiques d'annihilations. Dans le cas du processus à six photons, ce type de singularités n'engendre pas de divergences.

La section efficace du processus à six photons dans des cas réels a été calculée numériquement.

Mots-clés : Diagramme à une boucle, réduction, spineur, unitarité, tenseurs, intégrales, termes rationnels, six photons.

Abstract :

The discovery of new physics, which leads to new particles, at the LHC can be done if the background is known accurately. It is often made up by many multi-particles processes, which have to be calculated at NLO to have a reliable prediction. Yet standard methods are not efficient enough to compute loops with at least five external legs. Nevertheless, new methods, based of the two fundamental principles of physics : unitarity and causality, have been developed.

The aim of this thesis is to combine the helicity amplitude method and those unitarity methods to create a systematic procedure to calculate a one-loop diagram. This procedure have been applied the six-photon amplitudes with a massless fermion loop, and extended, in some case to a massive loop. The compactness of the result is the proof of the efficiency of this method.

Those compact results lead to the study of special Landau singularities : the double parton scattering. It corresponds to a kinematical configuration where the virtual loop tends to two real juxtaposed scattering processes. In the case of the six-photon amplitudes, those singularities do not create divergences.

The cross section of the six-photon amplitudes have been computed numerically in existing collider energies.

Key words : One-loop diagram, Reduction, Spinor, unitarity, tensor, integrals, rational terms, six photons.

Table des matières

I	QED's, Amplitude d'Hélicités.	15
1	Les différentes théories QED.	17
1.1	La théorie ϕ^3	17
1.2	La théorie QED	18
1.3	La théorie QED scalaire	19
1.4	La théorie QED ^{N=1}	20
2	Méthodes des amplitudes d'hélicités.	23
2.1	La méthode des amplitudes d'hélicités	23
2.1.1	Problèmes rencontrés lors d'un calcul d'amplitude	23
2.1.2	Décomposition de l'amplitude	24
2.2	Représentation spinorielle des vecteurs polarisations	24
2.3	Discussion autour de la méthode	25
3	Liens entre les différentes QED.	27
3.1	Moment magnétique d'un champ de jauge	27
3.1.1	Ressemblance et différence entre la QED et la QED scalaire	27
3.1.2	Moment magnétique	28
3.2	Relation entre une chaîne de fermions et une chaîne de scalaires	29
3.2.1	Chaîne de photons	29
3.2.2	Premier type de chaîne	29
3.2.3	Deuxième type de chaîne	30
3.2.4	Facteur eikonal	32
3.3	Relations entre une boucle de fermions et une boucle de scalaires	32
3.3.1	Décomposition d'une boucle de fermions	32
3.3.2	Décomposition supersymétrique des amplitudes d'hélicité $\mathcal{A}_N^S(\pm + \dots +)$	33
3.3.3	Décomposition supersymétrique d'une boucle de fermions	34
3.3.4	Propriétés d'une boucle de fermions en QED ^{N=1}	34
II	Calcul d'arbres.	35
4	Chaîne de type 1 (parag. 3.2.2).	39
4.1	L'amplitude d'une chaîne de type 1 (parag. 3.2.2).	39
4.2	Démonstration pour dans un espace de Minkowski dimension 4.	40
4.2.1	Chaîne de type 1 avec deux photons	40
4.2.2	Chaîne de type 1 de N photons	41
4.2.3	Écriture de l'amplitude avec les vecteurs polarisations ε_i^μ	42
4.3	Généralisation pour un espace de Minkowski de dimension n	43
4.3.1	L'amplitude, pour une chaîne de type 1, dans un espace de Minkowski de dimension n	43
4.3.2	Chaîne de type 1, de deux photons, dans un espace de Minkowski de dimension n	43
4.3.3	Chaîne de type 1, avec N photons, dans un espace de Minkowski de dimension n	44

5	Chaînes de type 2 (parag. 3.2.3).	45
5.1	L'amplitude d'une chaîne de type 2	45
5.2	Démonstration	45
5.3	Autres écritures	48
5.3.1	Avec le facteur eikonal (déf. 3.2.6)	48
5.3.2	L'amplitude $\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s$	48
5.3.3	Chaîne de type 2 en QED	48
6	Chaîne massive de type 1 (parag. 3.2.2).	49
6.1	Chaîne de type 1 avec deux photons.	49
6.1.1	L'amplitude de la chaîne	49
6.1.2	Démonstration	50
6.2	Chaîne massive de type 1 avec trois photons.	50
6.2.1	L'amplitude	50
6.2.2	Amplitude avec les scalaires hors couche de masse	51
6.2.3	Amplitude avec les scalaires sur couche de masse (6.7)	51
6.3	Chaîne massive de type 1 avec quatre photons.	52
6.3.1	L'amplitude	52
6.3.2	Démonstration	52
III	Étude analytique d'une boucle.	55
7	Notation, Définition et Intégrales scalaires.	57
7.1	Définition et représentation d'une boucle.	57
7.1.1	Notation d'un diagramme avec une boucle	57
7.1.2	Ensemble de définition de l'amplitude d'une boucle	58
7.1.3	Représentation avec les paramètres de Feynman.	59
7.2	Intégrales scalaires	60
7.2.1	Définition	60
7.2.2	Calcul d'une intégrale scalaire	60
7.2.3	Réduction d'une intégrale scalaire	61
7.2.4	Calcul d'une extra-intégrale scalaire	62
8	Divergences ultraviolettes.	65
8.1	Le problème ultraviolet.	65
8.1.1	Les divergences ultraviolettes - Définition et comptage de puissance	65
8.1.2	Recherche de divergences ultraviolettes dans une boucle	66
8.1.3	Conditions de convergences	67
8.2	Divergences ultraviolettes théorie ϕ^3 et en QED	68
8.2.1	Divergences ultraviolettes en théorie ϕ^3	68
8.2.2	Divergences ultraviolettes en QED...	68
8.2.3	Divergences ultraviolettes en QED scalaire	69
8.3	Remarques supplémentaires	70
8.3.1	Calcul en dimension n , schéma de régularisation	70
8.3.2	Comptage de puissance	71
8.3.3	Termes rationnels	71
8.4	Renormalisation d'une théorie.	72
8.4.1	Pourquoi renormalisée?	72
8.4.2	Renormalisation : principe général	72
8.4.3	Renormalisation de la QED	73

9 Singularités de Landau dans une boucle.	75
9.1 Le problème - Définitions des divergences.	75
9.1.1 Le problème	75
9.1.2 Recherche des singularités	76
9.1.3 Divergences infrarouges	77
9.1.4 Divergences molles	79
9.1.5 Divergences colinéaires	79
9.1.6 Divergences infrarouges dans les Bulles	80
9.2 Divergences infrarouges en théorie ϕ^3	80
9.2.1 Divergences molles d'une boucle en théorie ϕ^3	80
9.2.2 Divergences colinéaires	81
9.2.3 Régularisation par les masses	82
9.3 Divergences infrarouges en QED.	82
9.3.1 Divergences molles en QED d'une boucle de fermions	83
9.3.2 Divergences colinéaires en QED dans une boucle de fermions	83
9.3.3 Divergences infrarouges en QED dans une boucle avec au moins un photon	83
9.4 Divergences infrarouges en QED scalaire.	84
9.5 Résumé - Conclusion.	84
9.6 Singularités de Landau et « le double parton scattering ».	85
9.6.1 Résolution des équations de Landau pour des singularités du second ordre.	85
9.6.2 Configurations cinématique : « Double parton scattering »	87
9.6.3 Autour de la singularité de Landau	88
9.7 « Double parton scattering » en théorie ϕ^3	89
9.7.1 Processus $\phi_1 + \phi_2 \rightarrow \phi_3 + \phi_4$	89
9.7.2 Amplitude à six scalaires	91
9.8 Traitement des divergences infrarouges	93
10 Réduction d'une boucle.	95
10.1 Décomposition d'une intégrale tensorielle.	95
10.1.1 Le problème - Décomposition en intégrales scalaires	96
10.1.2 Décomposition en intégrales scalaires	96
10.1.3 Base de décomposition	98
10.2 Unitarité et causalité de l'opérateur S	99
10.2.1 Unitarité et « Théorème optique »	99
10.2.2 Causalité d'une fonction - Relation de dispersion	100
10.3 Unitarité dans une boucle.	102
10.3.1 Théorème optique appliqué à une boucle	102
10.3.2 Calcul d'une amplitude avec deux coupures	104
10.3.3 Calcul avec plus que deux coupures	105
10.4 Calcul des coefficients devant les boîtes et les triangles dans la base \mathcal{B}	106
10.4.1 Coefficients des boîtes : fonctions à quatre points	106
10.4.2 Coefficients des triangles	108
10.5 Calcul des coefficients devant les boîtes et les triangles dans la base \mathcal{B}_1	110
10.5.1 Coefficients des boîtes : fonctions à quatre points	110
10.5.2 Coefficients des triangles	111
10.6 Règles de réduction	113
10.6.1 Existence d'une intégrale scalaire à quatre points avec une masse externe	113
10.6.2 Hélicité des pattes externes d'une boîte	113
10.6.3 Divergences infrarouges	114
10.7 Origine du terme rationnel.	115
10.7.1 Origine de R_1	115
10.7.2 Origine de R_2	116
10.8 Origine des bulles : intégrales scalaires à deux points	117
10.9 Conclusion.	117

IV	Amplitudes à quatre photons.	119
11	Amplitude à quatre photons.	121
11.1	Définitions et hypothèses du problème.	121
11.1.1	Les hypothèses de la réaction et les diagrammes de Feynman	121
11.1.2	Décomposition des amplitudes	122
11.2	Réduction des amplitudes d'hélicités $\mathcal{A}_4^{S/s/\mathcal{N}=1}$	122
12	Calcul du processus à quatre photons avec FORM.	125
12.1	Méthode de calcul de l'amplitude du processus à quatre photons.	125
12.2	Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(+ + + +)$	126
12.3	Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(- + + +)$	127
12.4	Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(- - + +)$	128
12.5	Résumé des résultats de l'amplitude scalaire	129
12.6	Calcul de l'amplitude à quatre photons en QED.	130
12.7	Calcul de l'amplitude à quatre photons en QED $^{\mathcal{N}=1}$	130
13	Amplitude à quatre photons en QED scalaire par la méthode des coupures.	131
13.1	Arbres nécessaires pour le calcul.	132
13.1.1	Deux photons de même hélicité sur une chaîne coupée	132
13.1.2	Deux photons de même hélicité, sur une chaîne non coupée	132
13.1.3	Chaîne avec deux photons d'hélicités différentes	133
13.1.4	Notation sur les propagateurs	134
13.2	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^+, 2^+, 3^+, 4^+)$	134
13.2.1	Méthode à quatre coupures	134
13.2.2	Méthode à trois coupures	134
13.2.3	Méthode à deux coupures	136
13.2.4	Conclusions	136
13.3	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^-, 2^+, 3^+, 4^+)$	137
13.3.1	Méthode à quatre coupures	137
13.3.2	Méthode à trois coupures	138
13.3.3	Méthode à deux coupures	140
13.3.4	Conclusions	140
13.4	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^-, 2^-, 3^+, 4^+)$	141
13.4.1	Méthode à quatre coupures	141
13.4.2	Méthode à trois coupures	142
13.4.3	Méthode à deux coupures	142
13.4.4	Conclusions	144
13.5	Résumé et discussions.	145
13.5.1	L'amplitude à quatre photons en QED scalaire massive	145
13.5.2	Les termes rationnels	145
13.5.3	Méthodes à plusieurs coupures	146
14	Amplitudes à quatre photons en QED et en QED$^{\mathcal{N}=1}$.	147
14.1	Amplitude à quatre photons en QED.	147
14.1.1	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^S(1^\pm, 2^+, 3^+, 4^+)$	147
14.1.2	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^S(- - + +)$ par la méthode des quatre coupures	147
14.1.3	Conclusions	148
14.2	Amplitude supersymétrique $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$	149
14.3	Graphs des amplitudes.	149
V	Amplitudes $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.	153
15	$e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ en QED scalaire.	155
15.1	Hypothèses et réductions.	155
15.2	Les diagrammes du processus.	156

15.2.1	À l'ordre de l'arbre	156
15.2.2	À l'ordre d'une boucle	156
15.3	Renormalisation du propagateur du photon.	157
15.4	Renormalisation du propagateur du scalaire.	157
15.5	Renormalisation du vertex simple.	158
15.6	Renormalisation du vertex double.	159
15.7	Amplitude à l'ordre d'une boucle.	160
16	Processus $e^+ + e^- + \gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow 0$ à l'ordre d'une boucle en QED scalaire	161
16.1	Renormalisation du propagateur du photon	161
16.2	Renormalisation du propagateur du scalaire	162
16.3	Renormalisation du vertex simple	163
16.4	Renormalisation du vertex double	164
16.5	Amplitude	165
VI	Amplitudes à six photons.	167
17	Calcul de l'amplitude à six photons en QED scalaire par la réduction de chaînes.	169
17.1	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(++++)$	170
17.1.1	Les diagrammes et réduction de l'amplitude $\mathcal{A}_6^s(++++)$	170
17.1.2	Calcul de l'amplitude à six photons $\mathcal{A}_6^s(++++)$	170
17.2	Calcul de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(-++++)$	172
17.3	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + +)$	172
17.3.1	Les diagrammes	172
17.3.2	Résultat de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + +)$	173
17.3.3	Conclusion	173
18	Amplitudes à six photons par la méthode des coupures.	175
18.1	Définitions et hypothèses du problème.	175
18.1.1	Les hypothèses de la réaction et les diagrammes de Feynman	175
18.1.2	Décomposition des amplitudes	176
18.2	Réduction des amplitudes $\mathcal{A}_6^{S/s/N=1}$	176
18.2.1	Réduction des amplitudes grâce aux hypothèses 4	176
18.2.2	Amplitudes d'hélicités $\mathcal{A}_6^{S/s/N=1}(\pm + + + +)$	177
18.2.3	Amplitudes d'hélicités MHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/N=1}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+)$	177
18.2.4	Amplitude d'hélicité NMHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/N=1}(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$	178
19	Calcul de l'amplitude MHV : $\mathcal{A}_N^{S/s/N=1}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, \dots, N^+)$.	179
19.1	Généralisation de l'amplitude à six photons en une amplitude à N photons.	179
19.2	Calcul du coefficient e_i^s	180
19.3	Calcul du coefficient c_i^s	181
19.4	Expression de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_N^s(- - + + \dots)$	182
19.5	Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}^{S/N=1}(- - + + \dots)$	183
19.5.1	Passage de la QED scalaire à la QED et $\text{QED}^{N=1}$	183
19.5.2	Amplitude $\mathcal{A}_N^{S/N=1}(- - + \dots)$	184
20	Calcul de l'amplitude NMHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/N=1}(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$.	185
20.1	Calcul du coefficient e_σ^s	185
20.2	Calcul du coefficient e_σ^{s*}	186
20.3	Calcul du coefficient d_σ^s	187
20.4	Calcul de g_σ^s	188
20.5	Calcul de $e_\sigma^{S/N=1}, e_\sigma^{S/N=1*}$ et $d_\sigma^{S/N=1}$	190
20.6	Calcul de g_σ^S et $g_\sigma^{N=1}$	191
20.7	Amplitude $\mathcal{A}_6^{S/s/N=1}(- - - + + +)$	192

21 Etude numérique des amplitudes à six photons.	195
21.1 Amplitudes d'hélicités MHV et NMHV.	195
21.1.1 Configuration cinématique de Nagy-Soper [98]	195
21.1.2 Amplitude MHV dans la configuration de Nagy-Soper	196
21.1.3 Amplitude NMHV dans la configuration de Nagy-Soper	196
21.1.4 Double parton scattering	197
21.2 Singularité de « Double parton Scattering »	198
21.2.1 Configuration cinématiques	198
21.2.2 Autour de la singularité	200
21.3 Étude Analytique de la singularité.	201
21.3.1 D'où vient le problème?	201
21.4 Section efficace de l'amplitude à six photons.	203
21.4.1 Définition de l'espace des phases	203
21.4.2 Fonctions de structures	203
21.4.3 Paramétrisation de l'espace des phases	205
21.4.4 Section efficace intégrée	206
21.4.5 Sections efficaces différentielles.	207
22 Extension à une boucle massive.	209
VII Appendices.	213
A Intégrales scalaires.	215
A.1 Fonction à un point : Tadpole.	216
A.2 Fonction à deux points.	216
A.3 Fonction à trois points.	217
A.3.1 Avec une masse	217
A.3.2 Avec deux masses externes et $M^2 = 0$	217
A.3.3 Avec trois masses externes et $M^2 = 0$	218
A.4 Fonction à quatre points.	218
A.4.1 Sans masse externe	218
A.4.2 Avec une masse externe et $M^2 = 0$	219
A.4.3 Avec deux masses adjacentes externes et $M^2 = 0$	220
A.4.4 Avec deux masses opposées externes et $M^2 = 0$	221
A.4.5 Avec trois masses externes et $M^2 = 0$	221
A.4.6 Avec quatre masses externes et $M^2 = 0$	222
A.5 Fonctions à cinq points et six points	223
B Extra-intégrales scalaires.	225
B.1 Formules analytiques des extra-intégrales scalaires.	225
B.1.1 Pour une boucle non massive	225
B.1.2 Pour une boucle massive	225
B.2 Réduction généralisée des intégrales scalaires.	225
C Réduction d'intégrales tensorielles.	227
D Formules avec spineurs.	229
D.1 Définition d'un spineur.	229
D.2 Matrices de Dirac.	229
D.3 Relation particulières.	230
D.4 Moment magnétique.	230

INTRODUCTION

Le futur collisionneur LHC (Large hadron Colliders) a été construit dans le but de mettre en évidence de la nouvelle physique telle que de la supersymétrie ou du Higgs. Concrètement, on espère observer de nouvelles particules comme le boson de Higgs. Pour cela, on détectera les particules émises de la collision de deux protons, dont chacun aura une énergie de 7 TeV. À cette énergie, on peut considérer un proton comme un plasma de partons. Il y a aura donc une multitude de processus partoniques $2 \rightarrow N$, avec $N = 2, 3, 4..$ qui constituera un bruit de fond, à priori non négligeable. La connaissance précise de ce bruit de fond est absolument indispensable si on veut « voir » de nouvelles particules. Une « Wish List » rassemble tous les processus qui seront présents et qu'ils seraient donc bien de connaître, à l'ordre des logarithmes dominant, pour la mise en marche du LHC, prévue pour 2008-2009 :

Processus ($V \in \{Z, W, \gamma\}$)	Bruit de fond de	Calculé
Calculs effectués depuis 2005		
1. $pp \rightarrow VV\text{jet}$ 2. $pp \rightarrow H+2\text{jets}$ 3. $pp \rightarrow VVV$	$t\bar{t}H$, nouvelle physique H nouvelle physique	$WW\text{jet}$ [1, 2, 3] dans le canal gg [4] dans le canal VBF [5, 6] ZZZ [7] WWZ [8] WWW [9]
Calculs restant depuis 2005		
4. $pp \rightarrow t\bar{t}b\bar{b}$ 5. $pp \rightarrow t\bar{t}+2\text{jets}$ 6. $pp \rightarrow VVb\bar{b}$, 7. $pp \rightarrow VV+2\text{jets}$ 8. $pp \rightarrow V+3\text{jets}$	$t\bar{t}H$ $t\bar{t}H$ VBF $\rightarrow H \rightarrow VV$, $t\bar{t}H$ VBF $\rightarrow H \rightarrow VV$ VBF nouvelle physique	[10] [11, 12, 13]
Calculs NLO ajoutés en 2007		
9. $pp \rightarrow b\bar{b}b\bar{b}$	H, nouvelle physique	
Calculs au delà		
10. $gg \rightarrow W^*W^* \mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s^3)$ 11. NNLO $pp \rightarrow t\bar{t}$ 12. NNLO \rightarrow VBF et $Z/\gamma+\text{jet}$	H H	

En QED comme en QCD, le couplage dépend d'une échelle d'énergie non physique. Pour réduire cette dépendance, il faut augmenter le développement perturbatif. Donc pour avoir une bonne connaissance, du bruit de fond, le calcul des amplitudes à l'ordre de l'arbre n'est pas suffisant, il faut les calculer à l'ordre d'une boucle. La prédictivité en sera d'autant meilleure que le développement sera élevé.

Cependant un processus $2 \rightarrow N$ engendre des diagrammes à une boucle avec N+2 pattes externes. La réduction de ce genre de diagrammes croît exponentiellement avec le nombre de pattes externes. Il est donc nécessaire de trouver un moyen efficace de réduire ces boucles. Récemment

de nouvelles méthodes basées sur l'unitarité d'un processus ont été développées dans le but de réduire très astucieusement les boucles. Cependant il reste un certain nombre de points flous que j'ai essayé de résoudre dans cette thèse.

Ici le but principale n'est pas d'obtenir un calcul de section efficace, mais plutôt d'exposer et d'améliorer ces méthodes, c'est pourquoi, je me suis limité à des amplitudes en QED pour m'éviter le problème des couleurs. Dans les chapitres 1, 2 et 3, j'ai rappelé la structure des différentes QED. Puis dans les chapitres 4, 5 et 6, j'ai calculé tous les arbres nécessaires dans la suite de la thèse. Les chapitres 7, 8, 9 et 10 constituent la partie théorique de la thèse, dans laquelle j'ai étudié la structure analytique des boucles pour en déduire une méthode de réduction. Enfin, j'ai appliqué cette méthode à l'amplitude à quatre photons en théorie massive et non massive dans les chapitres 11, 12, 13 et 14, puis au processus de création de deux photons à partir d'une paire d'électron-positron dans le chapitre 15 et enfin, au processus à six photons dans les chapitres 18, 17, 19, 20, 21 et 22. Le premier processus permet d'étudier le comportement des masses dans la boucle, le deuxième permet d'appréhender les divergences infrarouges et ultraviolettes alors que la troisième permet d'étudier des singularités de Landau particulières, celles qui correspondent à la configuration cinématique du double parton scattering. En fin de thèse, j'ai effectué une étude numérique du processus à six photons qui a conduit au calcul de la section efficace. Dans ce chapitre, on a écrit un espace de phase $2 \rightarrow 4$ qui pourra servir pour d'autres processus.

Première partie

QED's, Amplitude d'Hélicités.

Chapitre 1

Les différentes théories QED.

Sommaire

1.1	La théorie ϕ^3	17
1.2	La théorie QED	18
1.3	La théorie QED scalaire	19
1.4	La théorie QED $^{\mathcal{N}=1}$	20

Dans ce chapitre, on va rappeler les différentes théories, utilisées dans cette thèse, ainsi que les règles de Feynman des propagateurs, des vertexs et des particules externes. Le but de cette thèse est d'étudier les diagrammes à une boucle, plus précisément, la structure analytique et tensorielle des boucles, en vue de les réduire facilement. On va principalement utiliser les théories ϕ^3 , QED, QED scalaire et la théorie supersymétrique QED $^{\mathcal{N}=1}$. Les QED sont des théories de jauge abélienne, il n'y donc aucune structure de couleur, ce qui permet de simplifier les calculs. La théorie ϕ^3 est étudiée car elle sera utile dans la réduction des boucles tensorielles. On note $\mathcal{Q}e$ la charge du fermion, ainsi un électron sera décrit par $\mathcal{Q} = -1$. On peut retrouver toutes ces règles dans des livres tels que [14, 15, 16, 17].

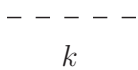
1.1 La théorie ϕ^3

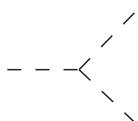
Soit un champ scalaire réel ϕ . Le lagrangien de la théorie ϕ^3 est composé d'un lagrangien libre scalaire de Klein-Gordon et d'un terme d'interaction en ϕ^3 :

$$L_{\phi^3} = \frac{1}{2} \left((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right) - \frac{g}{3!}\phi^3 \tag{1.1}$$

$$= L_1 + L_2. \tag{1.2}$$

Pour chaque terme $L_1 = \frac{1}{2} \left((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right)$ et $L_2 = -\frac{g}{3!}\phi^3$ du lagrangien, on va écrire un diagramme et une amplitude. Le premier terme L_1 du lagrangien de la théorie ϕ^3 , correspond à la propagation libre du champ ϕ , alors que le second terme L_2 correspond à l'interaction. Les diagrammes associés et les règles de Feynman sont :

propagateur scalaire :  $S_{\phi^3} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\lambda} = \frac{i}{D_k^2}$ (1.3)

vertex scalaire :  $-ig$ (1.4)

Pour un scalaire externe on a le diagramme et la règle suivante :

$$\text{scalaire externe : } \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \left\langle \begin{array}{l} / \\ \backslash \end{array} \right. \quad 1 \quad (1.5)$$

1.2 La théorie QED

La QED (Quantum Electro Dynamics) permet de décrire un champ de fermions en interaction avec un champ de photons. On veut décrire la propagation libre d'un champ de fermions ψ . Cependant, ce lagrangien libre n'a qu'une invariance de jauge globale. Pour restaurer l'invariance de jauge locale, il faut et il suffit d'introduire un champ de jauge A^μ et de transformer les dérivées en dérivées covariante : $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iQeA_\mu$ dans le lagrangien libre du fermion. Le tenseur de jauge $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ est déjà invariant de jauge. Le lagrangien de QED, noté L_{QED} est alors composé du lagrangien libre du fermion ψ et du lagrangien libre du champ de jauge A_μ :

$$L_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i \not{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

$$= \bar{\psi} (i \not{\partial}_\mu - m) \psi - Qe \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

$$= \bar{\psi} (i \not{\partial}_\mu - m) \psi + j_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$$= L_1 + L_2 + L_3. \quad (1.9)$$

$j_\mu = -Qe \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ est le courant de Noether associé à la symétrie de jauge locale. Le lagrangien est composé de trois termes dont un terme d'interaction entre les champs. Le premier terme : $L_1 = \bar{\psi} (i \not{\partial}_\mu - m) \psi$ correspond au lagrangien de propagation libre du champ fermionique ψ , il donne le propagateur du champ spinoriel :

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \quad S_\psi = \frac{i}{\not{p} - m + i\lambda} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\lambda}. \quad (1.10)$$

Le deuxième terme du lagrangien (1.8) est $L_2 = j_\mu A^\mu$ est un terme d'interaction linéaire entre le courant fermionique j_μ et le champ de jauge A^μ . Il définit le vertex d'interaction d'amplitude :

$$\begin{array}{c} \mu \\ \sim \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \nearrow \quad \searrow \end{array} \quad V_S^\mu = iQe\gamma^\mu. \quad (1.11)$$

Enfin le troisième terme du lagrangien (1.8) : $L_3 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ est le lagrangien de propagation libre du champ de jauge A_μ . Il donne le propagateur de ce champ :

$$\begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \sim \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ q \end{array} \quad S_A = \frac{i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\lambda}. \quad (1.12)$$

Pour les particules externes, les règles de Feynman sont :

$$\text{fermions externes : } \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad u(p) \quad (\text{initial}) \\ \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad \bar{u}(p) \quad (\text{final}) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$\text{antifermions externes : } \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad \bar{v}(p) \quad (\text{initial}) \\ \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad v(p) \quad (\text{final}) \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$\text{photons externes : } \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad \varepsilon_p^\mu \quad (\text{initial}) \\ \begin{array}{c} \mu \\ \text{---} q \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad \varepsilon_p^{\mu*} \quad (\text{final}) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

1.3 La théorie QED scalaire

La propagation libre d'un champ scalaire complexe ϕ est donnée par le lagrangien de Klein-Gordon, noté L_{KG} :

$$L_{KG} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (1.16)$$

Cependant ce lagrangien ne respecte pas l'invariance de jauge locale. Comme dans le cas de la QED, pour restaurer cette invariance, on introduit la dérivée covariante et un champ de jauge A^μ . Ainsi le lagrangien de QED scalaire, noté L_{QEDs} est composé d'un lagrangien de champ scalaire complexe libre ϕ , écrit avec la dérivée covariante $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, plus du lagrangien de propagation libre du champ de jauge associé A_μ :

$$L_{\text{QEDs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.17)$$

$$= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + i\mathcal{Q}e A_\mu ((\partial^\mu \phi)^\dagger \phi - \phi^\dagger (\partial^\mu \phi)) + \mathcal{Q}^2 e^2 A^2 \phi^\dagger \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.18)$$

$$= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu + \mathcal{Q}^2 e^2 A^2 \phi^\dagger \phi \quad (1.19)$$

$$= L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \quad (1.20)$$

$j_\mu = i\mathcal{Q}e ((\partial^\mu \phi)^\dagger \phi - \phi^\dagger (\partial^\mu \phi))$ est le courant de Noether associé à la symétrie de jauge locale. Le lagrangien est composé de quatre termes dont deux d'interactions entre les deux champs. Le premier terme $L_1 = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$ correspond au lagrangien libre du champ scalaire ϕ . Il donne le propagateur du champ ϕ :

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \end{array} \quad S_\phi = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\lambda}. \quad (1.21)$$

Le deuxième terme $L_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ est le lagrangien libre du champ de jauge A_μ . Il donne le propagateur S_A , en jauge de Feynman :

$$\begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ q \end{array} \quad S_A^{\mu\nu} = \frac{i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\lambda}. \quad (1.22)$$

et au final les règles de Feynman associées aux propagateurs sont :

$$\text{propagateur fermion : } \overrightarrow{p} \quad S_\psi = \frac{i}{\not{p} - m + i\lambda} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\lambda} \quad (1.26)$$

$$\text{propagateur photon : } \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{~~~~~} \\ q \end{array} \quad S_A^{\mu\nu} = \frac{i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\lambda} \quad (1.27)$$

$$\text{propagateur scalaire : } \text{---} \quad S_\phi = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\lambda} \quad (1.28)$$

$$\text{propagateur photino : } \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ p \end{array} \quad S_\lambda = \frac{i}{\not{p} - m + i\lambda} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\lambda}. \quad (1.29)$$

On note \tilde{e} l'électron scalaire. Les interactions sont données par les vertex suivants, que l'on trouve dans [18] :

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad V_s^\mu = iQe\gamma^\mu \quad (1.30)$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad V_s^\mu = iQe(p + p')^\mu \quad (1.31)$$

$$\begin{array}{c} \nu \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad B_s^{\mu\nu} = 2iQ^2e^2\eta^{\mu\nu} \quad (1.32)$$

$$\begin{array}{c} \tilde{e}_i \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad \begin{cases} 2ie^2 & i = j \\ -ie^2 & i \neq j \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\begin{array}{c} \tilde{e} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad \begin{cases} +iQe\sqrt{2}\Pi_+ & \tilde{e} = \phi_L^- \\ -iQe\sqrt{2}\Pi_- & \tilde{e} = \phi_R^{+\dagger} \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\begin{array}{c} \tilde{e} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad \begin{cases} +iQe\sqrt{2}\Pi_- & \tilde{e} = \phi_L^{-\dagger} \\ -iQe\sqrt{2}\Pi_+ & \tilde{e} = \phi_R^+ \end{cases} \quad (1.35)$$

Les règles pour les scalaires (respectivement fermions, photons) externes sont donnés par les formules (1.5) (respectivement (1.13), (1.15)).

Notations : Désormais, l'amplitude d'un arbre, d'une chaîne ou d'une boucle aura en exposant un « ϕ^3 » (respectivement « s », « S », « $\mathcal{N} = 1$ ») pour définir la théorie dans laquelle elle est calculée, c'est à dire, en théorie ϕ^3 (respectivement en QED scalaire, en QED et en QED $\mathcal{N}=1$). On prendra toujours comme fermion un electron, donc on aura $Q = -1$.

Chapitre 2

Méthodes des amplitudes d'hélicités.

Sommaire

2.1	La méthode des amplitudes d'hélicités	23
2.1.1	Problèmes rencontrés lors d'un calcul d'amplitude	23
2.1.2	Décomposition de l'amplitude	24
2.2	Représentation spinorielle des vecteurs polarisations	24
2.3	Discussion autour de la méthode	25

2.1 La méthode des amplitudes d'hélicités

2.1.1 Problèmes rencontrés lors d'un calcul d'amplitude

Soit un processus d'état initial $|i\rangle$, représenté par l'opérateur unitaire S . L'amplitude de probabilité de trouver un état final $|f\rangle$ est donnée par l'élément de matrice $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$. Cette amplitude de probabilité s'écrit au moyen de l'élément de matrice \mathcal{M}_{fi} :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) N \mathcal{M}_{fi}, \quad (2.1)$$

où p_i (respectivement p_f) est l'impulsion dans l'état initial (resp. final). N est un facteur de normalisation qui provient des permutations sur les particules discernables et indiscernables. L'amplitude totale du processus est donnée par la somme sur toutes les contributions de cette amplitude. Dans le cas de la section efficace différentielle $d\sigma$, on intègre l'amplitude sur l'espace de phase de l'état final :

$$d\sigma \propto (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 E_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (2.2)$$

où \mathcal{M}_{fi} peut se décrire par les diagrammes de Feynman. Supposons donc qu'il y ait des bosons entrants caractérisés par i et sortants, caractérisés par j et des fermions entrants d'impulsion p et sortants, d'impulsion q alors on a :

$$\mathcal{M}_{fi} = \varepsilon_i^\mu \varepsilon_j^{*\nu} \bar{v}(p) u(p) A_{\mu\nu} \bar{u}(q) v(q) \quad (2.3)$$

Le tenseur $A_{\mu\nu}$ s'exprime en fonction des règles de Feynman des vertexs et des propagateurs. Cependant pour pouvoir simplifier l'expression il faudrait pouvoir exprimer simplement les vecteurs représentant les particules externes.

Problème : Comment exprimer les vecteurs polarisations $\varepsilon, \varepsilon^*$ et les spineurs u, v, \bar{u} et \bar{v} .

2.1.2 Décomposition de l'amplitude

Les particules externes sont caractérisées par leurs polarisations. L'espace des polarisations des particules sans masse est de dimensions deux. On choisit donc de définir la polarisation des particules externes par leur hélicité. On peut aussi décomposer les polarisations par deux polarisations plates. Le processus est donc caractérisé par son état d'hélicité, qui est la donnée des hélicités des particules externes. L'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_{fi} = \sum_{\text{hélicité}:\sigma} \mathcal{A}_{fi}^\sigma. \quad (2.4)$$

Chaque état d'hélicité fait partie d'un processus, donc les états d'hélicités sont orthogonaux entre eux. Par conséquent le module de l'amplitude s'écrit :

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 = \left| \sum_{\text{hélicité}:\sigma} \mathcal{A}_{fi}^\sigma \right|^2 = \sum_{\text{hélicité}:\sigma} |\mathcal{A}_{fi}^\sigma|^2. \quad (2.5)$$

Maintenant imaginons un faisceau de particules non-polarisées, et des détecteurs ne faisant pas la distinction entre les hélicités des différentes particules alors, l'amplitude de Feynman correspond à la moyenne des amplitudes sur les spins des particules entrantes et sortantes :

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{1}{\prod_i (2s_i + 1)} \sum_{\text{hélicité}:\sigma} |\mathcal{A}_{fi}^\sigma|^2. \quad (2.6)$$

Le problème rencontré est de trouver une représentation simple des vecteurs polarisations des photons externes et les spineurs des fermions externes afin obtenir une amplitude compacte. La solution est donnée dans [19, 20, 21, 22], elle consiste à exprimer les spineurs et les vecteurs polarisations représentant les particules externes en fonction de spineurs chiraux.

Méthode : Au lieu de calculer une amplitude, on calcule chaque état d'hélicité. On représente, dans chaque amplitude d'hélicité, les vecteurs polarisations et les spineurs des particules externes en fonction de spineurs chiraux. Ceci permet d'avoir une écriture compacte de chaque amplitude d'hélicité. On appelle cette méthode la méthode des amplitudes d'hélicités.

Dans la suite, on va exprimer les spineurs et les vecteurs polarisations en fonction de spineurs chiraux.

2.2 Représentation spinorielle des vecteurs polarisations

On se limite à des particules externes non-massives. Il existe une extension de cette représentation à des particules massives. En particulier, les bosons W et Z_0 , et les quarks lourds ont besoin d'une représentation massive dans le cas d'énergie de réaction faible.

Soit un fermion d'impulsion p non-massif : $p^2 = 0$. On note les projecteurs de chiralité : $\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$. Dans le cas de particule non-massive, il y a un équivalence entre hélicité et chiralité.

Définition 2.2.1. Les spineurs représentant les fermions entrants et sortants sont définis par :

$$u_\pm(p) = \Pi_\pm u(p) = v_\mp(p) = \Pi_\mp v(p) = |p_\pm\rangle \quad (2.7)$$

$$\bar{u}_\pm(p) = \bar{u}(p)\Pi_\mp = \bar{v}_\mp(p) = \bar{v}(p)\Pi_\pm = \langle p_\pm|. \quad (2.8)$$

Les spineurs sont normalisés de façon à avoir $\langle p \pm | \gamma^\mu | p \pm \rangle = 2p_\mu$. L'équation de Dirac donne :

$$\not{p} | p \pm \rangle = \langle p \pm | \not{p} = 0. \quad (2.9)$$

On peut développer toute une algèbre autour des spineurs, dont les principales notations utilisées par la suite sont :

$$\langle p_a - | p_b + \rangle = \langle ab \rangle \quad (2.10)$$

$$\langle p_a + | p_b - \rangle = [ab] \quad (2.11)$$

$$\langle p_a - | \not{p}_b | p_c - \rangle = \langle abc \rangle = [cba] = \langle p_c + | \not{p}_b | p_a + \rangle = [p_c p_b] \langle p_b p_a \rangle \quad (2.12)$$

$$\langle p_a + | \not{p}_b \not{p}_c | p_d - \rangle = [abcd] = -[dcba] = -\langle p_d + | \not{p}_c \not{p}_b | p_a - \rangle. \quad (2.13)$$

Grâce à la définition des spineurs dans l'appendice *D*, les deux produits spinoriels $\langle ab \rangle$ et $[ab]$ sont antisymétriques : $\langle ab \rangle^* = [ba]$. Les vecteurs polarisations des photons s'expriment à partir de spineurs.

Définition 2.2.2. *Soit un photon d'impulsion p , sur couche de masse et soit une deuxième impulsion de type lumière $R \neq p$, alors les vecteurs polarisations ε_p^σ des deux états d'hélicités $\sigma = \pm$ sont :*

$$\varepsilon_p^{+\mu} = \frac{\langle R \gamma^\mu p \rangle}{\sqrt{2} \langle Rp \rangle} \quad \varepsilon_p^{-\mu} = \frac{[R \gamma^\mu p]}{\sqrt{2} [pR]}. \quad (2.14)$$

Cette définition respecte les relations d'orthonormalisation habituelles :

$$\varepsilon_p^+ \cdot \varepsilon_p^{-*} = 0 \quad \varepsilon_p^+ \cdot \varepsilon_p^{+*} = -1, \quad (2.15)$$

ainsi que la transversalité des vecteurs de polarisations $\varepsilon_p^* \cdot p = \varepsilon_p \cdot p = 0$. Ils sont de type lumière $\varepsilon_p^{*2} = \varepsilon_p^2 = 0$ et la parité est respectée : $\varepsilon_p^{-*} = \varepsilon_p^+$. Les vecteurs polarisations se contractent avec les matrices γ de la manière suivante :

$$\not{\varepsilon}_p^+ = \frac{\sqrt{2}}{\langle Rp \rangle} (|p-\rangle \langle R-| + |R+\rangle \langle p+|) \quad \not{\varepsilon}_p^- = \frac{\sqrt{2}}{[pR]} (|p+\rangle \langle R+| + |R-\rangle \langle p-|). \quad (2.16)$$

2.3 Discussion autour de la méthode

La méthode des amplitudes d'hélicités à l'avantage certain d'exprimer les vecteurs de polarisations et les spineurs des particules externes en spineurs chiraux. On peut relier les vecteurs les spineurs aux variables de Mandelstam suivant la formule : $\langle ab \rangle [ba] = (p_a + p_b)^2 = s_{ab}$. On peut donc espérer écrire une amplitude d'hélicité en fonction de variable de Mandelstam et de produits spinoriels.

Cependant, cette méthode nous demande de calculer toutes les amplitudes d'hélicités. Dans le cas de particules non-massives, il y a deux états d'hélicité par particules externes et donc 2^N états d'hélicités à calculer, avec N le nombre de particules externes. Dans le cas de particules massives, le problème est encore plus graves, puisqu'une particule massive a trois états d'hélicités différents.

Néanmoins, grâce aux symétries du problème, il y a souvent un nombre considérable d'états d'hélicités facilement déductibles. Les symétries utilisées sont la parité P , la symétrie de Bose, la conjugaison C , et l'inversion T . La parité permet de réduire par deux le nombre d'état d'hélicité calculé, elle change le sens de propagation des particules. Donc la parité inverse l'hélicité de la particule. Elle s'applique sur l'amplitude en prenant le complexe conjugué de l'amplitude.

De plus, expérimentalement on peut créer des détecteurs polarisés et n'observer que des particules, dans un seul état de polarisation. Chaque état d'hélicité est un processus, d'où l'intérêt de calcul chacun d'entre eux.

Chapitre 3

Liens entre les différentes QED.

Sommaire

3.1	Moment magnétique d'un champ de jauge	27
3.1.1	Ressemblance et différence entre la QED et la QED scalaire	27
3.1.2	Moment magnétique	28
3.2	Relation entre une chaîne de fermions et une chaîne de scalaires . .	29
3.2.1	Chaîne de photons	29
3.2.2	Premier type de chaîne	29
3.2.3	Deuxième type de chaîne	30
3.2.4	Facteur eikonal	32
3.3	Relations entre une boucle de fermions et une boucle de scalaires .	32
3.3.1	Décomposition d'une boucle de fermions	32
3.3.2	Décomposition supersymétrique des amplitudes d'hélicité $\mathcal{A}_N^S(\pm + \dots +)$	33
3.3.3	Décomposition supersymétrique d'une boucle de fermions	34
3.3.4	Propriétés d'une boucle de fermions en QED ^{N=1}	34

Dans ce paragraphe, on va relier les trois QED, ce qui nous permettra, par la suite, de simplifier les calculs. Il suffira de connaître l'amplitude dans une théorie pour obtenir les autres. Cette relation entre les QED, initialisée dans [24], fait intervenir le moment magnétique des champs de jauge.

3.1 Moment magnétique d'un champ de jauge

3.1.1 Ressemblance et différence entre la QED et la QED scalaire

Soient $S_S(E, \vec{p})$ (respectivement $S_s(E, \vec{p})$) le propagateur du fermion (resp. scalaire), d'énergie E et de vecteur \vec{p} en QED (QED scalaire). On regarde l'action de l'opérateur conjugaison de charge $C = i\gamma^2\gamma^0$ sur un courant de fermions puis de scalaires. Cette opérateur inverse la charge de la particule. En utilisant les propriétés des matrices gamma (Appendice D), les courants sont transformés :

$$C^{-1} S_S(E, \vec{p}) C = S_S(E, -\vec{p})^T \quad C^{-1} S_s(E, \vec{p}) C = S_s(E, \vec{p}). \quad (3.1)$$

On en déduit que le propagateur fermionique est chargé alors que le propagateur scalaire ne l'est pas. La QED et la QED scalaire sont donc fondamentalement différentes au niveau de la charge de la matière. Donc si l'on veut relier les deux théories, il faut arriver à séparer la QED en une partie « chargée » et une partie « non chargée », qui serait directement liée à la QED scalaire.

Une autre différence entre les deux QED est dans le nombre de vertex. La QED contient un seul vertex linéaire A_S^μ alors que la QED scalaire a un vertex linéaire A_s^μ et un vertex non linéaire $B_s^{\mu\nu}$. La raison est que la QED a un lagrangien avec une dérivée simple alors que pour décrire un champ scalaire il faut une dérivée seconde. On retrouve cette différence dans l'équation qui relie les différents propagateurs :

$$S_S(E, \vec{p}) = (\not{p} + m) S_s(E, \vec{p}). \quad (3.2)$$

3.1.2 Moment magnétique

Pour faire émerger une partie « chargée » d'une partie « non chargée » de la QED, on utilise le moment magnétique, défini à partir des équations de Gordon :

Définition 3.1.1. Soit un champ de jauge d'impulsion p , de vecteur polarisation ε_p et d'hélicité σ . Le moment magnétique M_p^σ associé à ce champ est défini par :

$$\mathcal{M}_p^\sigma = e\sigma^{\mu\nu} p_\nu \varepsilon_p^\mu = \frac{ie}{2} (\not{\varepsilon}_p \not{p} - \not{p} \not{\varepsilon}_p) = \frac{ie}{2} [\not{\varepsilon}_p, \not{p}], \quad (3.3)$$

qui s'écrit plus explicitement, en utilisant les expressions des vecteurs polarisations :

$$\mathcal{M}_p^+ = i e \sqrt{2} |p-\rangle \langle p+| \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_p^- = -i e \sqrt{2} |p+\rangle \langle p-|. \quad (3.4)$$

Maintenant on va réécrire l'expression d'un vertex en QED en fonction du moment magnétique du photon associé à l'interaction fermion-photon. On considère un vertex en QED avec un fermion impulsion k et un photon d'impulsion p entrants. On prend en compte les deux sens de propagations et on transforme l'expression de cet arbre pour faire apparaître le vertex simple en QED scalaire et le moment magnétique :

$$-ie \frac{\not{k} + \not{p}}{D_p^2} \not{\varepsilon}_p - ie \not{\varepsilon}_p \frac{\not{k}}{D_p^2} = -ie (2\not{k} + \not{p} + \not{p}) \frac{\not{\varepsilon}_p}{2D_p^2} - ie \not{\varepsilon}_p \frac{\not{k}}{D_p^2} \quad (3.5)$$

$$= \frac{-ie}{D_p^2} \left((2k+p) \cdot \varepsilon_p - \frac{\not{\varepsilon}_p}{2} (2\not{k} + \not{p}) + \not{p} \frac{\not{\varepsilon}_p}{2} \right) - ie \not{\varepsilon}_p \frac{\not{k}}{D_p^2} \quad (3.6)$$

$$= \frac{-ie}{D_p^2} \left((2k+p) \cdot \varepsilon_p + i\sigma^{\mu\nu} \varepsilon_{p\mu} p_\nu \right) \quad (3.7)$$

$$= \frac{-ie}{D_p^2} (2k^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_\nu) \varepsilon_p^\mu. \quad (3.8)$$

Sur le côté gauche de la relation nous avons deux courants de fermions, un qui entre et un autre qui sort du vertex fermionique. Sur le côté droit de la relation, on reconnaît le vertex simple scalaire et le moment magnétique associé au champ de jauge. On peut représenter schématiquement par l'équation en diagramme :

$$\text{Diagram (3.9)} \quad (3.9)$$

Le dernier diagramme avec le carré représente le moment magnétique. On définit une interaction effective pour décrire la QED : $V_{M,p}^\mu$.

Définition 3.1.2. Soit un fermion d'impulsion k et un champ de jauge d'impulsion p , on définit une interaction effective entre le photon et le fermion par le vertex V_M^μ :

$$V_{M,p}^\mu = -ie(2k^\mu + p^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_\nu) \quad (3.10)$$

On note U_p :

$$U_p = -ie(2k^\mu + p^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_\nu) \varepsilon_p^\mu = -i e(2k^\mu + p^\mu) \varepsilon_p^\mu + \mathcal{M}_p = V_p \cdot \varepsilon_p + \mathcal{M}_p. \quad (3.11)$$

Quelque soit le sens de propagation du fermion, on a :

$$-ie \frac{\not{k} + \not{p}}{D_p^2} \not{\epsilon}_p - ie \not{\epsilon}_p \frac{\not{k}}{D_p^2} = \frac{U_p}{D_p^2} \quad (3.12)$$

Maintenant on va utiliser cette décomposition pour calculer des chaînes de photons puis des boucles de photons en QED.

3.2 Relation entre une chaîne de fermions et une chaîne de scalaires

3.2.1 Chaîne de photons

Définition 3.2.1. On définit une chaîne de N photons et d'impulsions p_1, \dots, p_N et d'hélicité $\sigma_1 \dots \sigma_N$ sur une ligne constituée par des particules entrantes (respectivement sortantes) d'impulsion p_A (respectivement p_B) et d'hélicité σ_A (respectivement σ_B) :

$$\mathcal{A}_{\text{arbre}}(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^{\sigma_1}, \dots, p_N^{\sigma_N}) = \text{Diagramme} \quad (3.13)$$

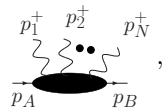
La ligne peut être fermionique ou bosonique. La boule noire rassemble tous les diagrammes à l'ordre de l'arbre correspondant au processus $p_A + p_1 + \dots + p_N \rightarrow p_B$. Une chaîne est donc invariante de jauge à partir du moment où les particules externes sont réelles.

Remarque : Si on a une chaîne de photons sur des fermions non massifs, alors les fermions entrants et sortants ont la même hélicité. En effet un vertex est décrit par une matrice γ de Dirac, et comme les projecteurs de chiralité ne commutent pas avec les matrices de Dirac. La chiralité change lors du passage par une matrice de Dirac : $\prod_{\pm} \gamma_{\mu} = \gamma_{\mu} \prod_{\mp}$. Pour une particule non-massive la chiralité est l'hélicité sont identiques, donc l'hélicité change au niveau d'un vertex. De plus l'hélicité change à nouveau quand on passe d'un bout à l'autre d'un propagateur puisque le fermion qui est sortant sur l'ancien vertex est devenu entrant sur le nouveau vertex. Au final, l'hélicité d'une particule ne change pas le long d'une ligne de fermions.

On va d'abord s'intéresser aux chaînes qui ont des photons avec une seule et même hélicité puis aux chaînes qui ont un photon avec une hélicité différente de celle des autres photons. Dans les chapitres 4, 5, 6, on fera un calcul explicite de ces chaînes.

3.2.2 Premier type de chaîne

Proposition 3.2.2. Soit une chaîne composée de N photons qui ont tous une hélicité positive, et les fermions ou de scalaires externes sont sur couches de masses :



alors l'amplitude de la chaîne en QED : $\mathcal{A}_{\text{arbre}}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_N^+) = \mathcal{A}^S$ et en celle QED scalaire $\mathcal{A}_{\text{arbre}}^s(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_N^+) = \mathcal{A}^s$ sont reliées par :

$$\text{Si } \sigma_A = + \quad \text{alors } \mathcal{A}^S = \frac{\langle RA \rangle}{\langle RB \rangle} \mathcal{A}^s \quad (3.14)$$

$$\text{Si } \sigma_A = - \quad \text{alors } \mathcal{A}^S = \frac{\langle RB \rangle}{\langle RA \rangle} \mathcal{A}^s, \quad (3.15)$$

où tous les photons ont pour vecteur de référence $|R\rangle$.

Démonstration : On considère le cas où l'on a $\sigma_A = +$. L'autre cas d'hélicité se démontre de la même manière. L'amplitude s'écrit en utilisant directement les formulations spinorielles des vecteurs polarisations (2.16) :

$$\mathcal{A}^S = \frac{(-ie)^N i^{N-1} \sqrt{2}^N}{\langle R1 \rangle \dots \langle RN \rangle} [BN] \prod_{i=1}^{N-1} \langle R q_i \rangle = -i (e\sqrt{2})^N \sqrt{2}^N \frac{[BN] \langle RA \rangle}{\sqrt{2} \langle RN \rangle} \prod_{i=1}^{N-1} \varepsilon_{i \cdot q_i} \quad (3.16)$$

$$= -i (2e)^N \frac{\langle RBN \rangle \langle RA \rangle}{\sqrt{2} \langle RB \rangle \langle RN \rangle} \prod_{i=1}^{N-1} \varepsilon_{i \cdot q_i} = -i (2e)^N \frac{\langle RA \rangle}{\langle RB \rangle} \prod_{i=1}^N \varepsilon_{i \cdot q_i} \quad (3.17)$$

On a utilisé les formules scalaires de vecteurs polarisations données par la définition 2.2.2. Puis on a multiplié en haut et en bas par le spineur $\langle RB \rangle$. Les vecteurs polarisations ont tous le même vecteur de référence, donc on a $\forall i, j \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$, par conséquent, tous les vertex doubles de l'amplitude scalaire sont nuls. On reconnaît alors l'amplitude en QED scalaire, dans la dernière équation. \square

Remarque : On peut généraliser cette relation de supersymétrie dans le cas de photons avec des hélicités négatives :

$$\text{Si } \sigma_A = + \text{ alors } \mathcal{A}^S = \frac{[RB]}{[RA]} \mathcal{A}^s \quad \text{et si } \sigma_A = - \text{ alors } \mathcal{A}^S = \frac{[RA]}{[RB]} \mathcal{A}^s \quad (3.18)$$

Maintenant on va utiliser cette formule de supersymétrie pour calculer directement une chaîne de photons d'hélicités identiques.

Proposition 3.2.3. Une chaîne de N photons d'hélicités positives, avec des particules externes sur couches de masses et non massives $p_A^2 = p_B^2 = 0$ a une amplitude nulle :

$$\mathcal{A}_{arbre}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_N^+) = \mathcal{A}_{arbre}^s(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_N^+) = 0 \quad (3.19)$$

Démonstration : On considère une chaîne de N photons d'hélicités positives en QED avec un fermion entrant d'hélicité positif. On pose le vecteur de référence de ces photons comme étant égal à l'impulsion de la particule qui entre $|R\rangle = |A\rangle$. Alors en utilisant la forme spinorielle des vecteurs polarisations (2.16), l'amplitude en QED est directement proportionnelle à $\mathcal{A}^S \propto \langle AA \rangle = 0$ et avec la proposition précédente 3.2.2, on a $\mathcal{A}^s = 0$. Si le fermion d'entrée a une hélicité négative alors on prend le vecteur de référence de photons $|R\rangle = |A\rangle$. \square

On peut facilement calculer une chaîne ne contenant que des photons d'hélicités négatives en appliquant la parité à l'amplitude, puisque la QED est invariante par parité :

$$\mathcal{A}_{arbre}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_N^+) = 0 \quad (3.20)$$

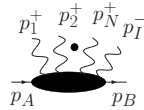
$$\Rightarrow P^\dagger \mathcal{A}_{arbre}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_N^+) P = P^\dagger 0 P \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{arbre}^S(p_A^{-\sigma_A}, p_B^{-\sigma_B}, p_1^-, \dots, p_N^-) = 0. \quad (3.22)$$

3.2.3 Deuxième type de chaîne

Dans cette partie, on regarde une chaîne où tous les photons ont une même hélicité sauf un. On cherche une relation de supersymétrie entre les amplitudes de la chaîne en différentes QED.

Proposition 3.2.4. Soit une chaîne composée de $N+1$ photons. Les N photons d'impulsions $p_1 \dots p_N$ ont tous une hélicité positive et le photon d'impulsion p_I a une hélicité négative.



On suppose que les fermions ou les scalaires externes sont sur couches de masses. Alors l'amplitude de la chaîne en QED, $\mathcal{A}_{\text{arbre}}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_I^-, \dots, p_{N+1}^+) = \mathcal{A}^S$ et l'amplitude en QED scalaire, $\mathcal{A}_{\text{arbre}}^s(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_I^-, \dots, p_{N+1}^+) = \mathcal{A}^s$ sont reliées par :

$$\text{Si } \sigma_A = + \text{ alors } \mathcal{A}^S = \frac{\langle IA \rangle}{\langle IB \rangle} \mathcal{A}^s \quad (3.23)$$

$$\text{Si } \sigma_A = - \text{ alors } \mathcal{A}^S = \frac{\langle IB \rangle}{\langle IA \rangle} \mathcal{A}^s. \quad (3.24)$$

Démonstration : On considère le cas où l'hélicité de la particule entrante est positive : $\sigma_A = +$, si l'hélicité avait été négative alors la démonstration aurait été similaire. On note $|r\rangle$ le vecteur de référence du photon d'hélicité négative et on prend le vecteur de référence des photons d'hélicités positives tel que $|R\rangle = |I\rangle$. Alors l'amplitude s'écrit en utilisant directement les formulations spinorielles de vecteurs polarisations (2.16) :

$$\mathcal{A}^S = \frac{(-ie)^{N+1} i^N \sqrt{2}^{N+1}}{\langle R1 \rangle \dots \langle RN \rangle [Ir]} [BN][BN] \langle I - | \not{q}_N \dots \not{q}_i | I - \rangle \langle r - | \dots \not{q}_1 | 1 - \rangle \langle IA \rangle \quad (3.25)$$

$$= -i \left(e\sqrt{2} \right)^{N+1} \sqrt{2}^{N+1} \frac{[BN] \langle IA \rangle}{\sqrt{2} \langle IN \rangle} \prod_{i=1}^N \varepsilon_i^{\sigma_i} \cdot q_i \quad (3.26)$$

$$= -i (2e)^{N+1} \frac{\langle IA \rangle}{\langle IB \rangle} \prod_{i=1}^{N+1} \varepsilon_i^{\sigma_i} \cdot q_i \quad (3.27)$$

On utilise les formules scalaires de vecteurs polarisations (déf. 2.2.2), puis on multiplie en haut et en bas par le spineur $\langle IB \rangle$. Comme le vecteur de référence des photons d'hélicités positives est égale à l'impulsion du photon d'hélicité négative alors $\forall i, j \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$, et par conséquent, tous les vertex doubles de l'amplitude scalaire sont nuls. Finalement, on reconnaît l'amplitude en QED scalaire dans la dernière équation. \square

On peut obtenir l'amplitude d'une chaîne de photons ne contenant que des photons d'hélicités négatives sauf un. Cette amplitude dans laquelle on a échangé les hélicités des photons, est notée avec une barre : $\overline{\mathcal{A}}^S$.

Proposition 3.2.5. *Soit une chaîne de $N+1$ photons dont N , qui ont tous une hélicité négative sauf un. Alors l'amplitude s'écrit :*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^-, \dots, p_I^+, \dots, p_{N+1}^-) &= \mathcal{A}^S(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_I^-, \dots, p_{N+1}^+)^* \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}^S = \mathcal{A}^{S*} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^s(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^-, \dots, p_I^+, \dots, p_{N+1}^-) &= \mathcal{A}^s(p_A^{\sigma_A}, p_B^{\sigma_B}, p_1^+, \dots, p_I^-, \dots, p_{N+1}^+)^* \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}^s = \mathcal{A}^{s*} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Démonstration : Pour inverser l'hélicité d'un photon, il suffit de prendre le complexe conjugué du vecteur polarisation : $\varepsilon^{-*} = \varepsilon^+$. On considère que l'amplitude de la chaîne \mathcal{A} est décrite par le tenseur $T^{\mu \dots \nu \rho}$:

$$\mathcal{A}^S = \varepsilon_{1\mu}^+ \dots \varepsilon_{N\nu}^+ \varepsilon_{I\rho}^- T^{\mu \dots \nu \rho} = \left(\varepsilon_{1\mu}^+ \dots \varepsilon_{N\nu}^+ \varepsilon_{I\rho}^- T^{\mu \dots \nu \rho} \right)^{**} \quad (3.30)$$

$$= \left(\varepsilon_{1\mu}^{+*} \dots \varepsilon_{N\nu}^{+*} \varepsilon_{I\rho}^- T^{\mu \dots \nu \rho} \right)^* = \left(\varepsilon_{1\mu}^- \dots \varepsilon_{N\nu}^- \varepsilon_{I\rho}^+ T^{\mu \dots \nu \rho} \right)^* \quad (3.31)$$

$$= \overline{\mathcal{A}}^{S*} \quad (3.32)$$

On a utilisé le fait que la QED est invariante par parité pour affirmer $T = T^*$ \square

On peut réviser la proposition 3.2.4 pour révéler une décomposition supersymétrique :

$$\mathcal{A}^S = \left(\frac{\langle IB \rangle}{\langle IA \rangle} + \frac{\langle IA \rangle}{\langle IB \rangle} \right) \mathcal{A}^s = \left(\frac{\langle IA \rangle^2 + \langle IB \rangle^2}{\langle IA \rangle \langle IB \rangle} \right) \mathcal{A}^s \quad (3.33)$$

$$= \left(\frac{(\langle IA \rangle - \langle IB \rangle)^2}{\langle IA \rangle \langle IB \rangle} + 2 \right) \mathcal{A}^s \quad (3.34)$$

$$\mathcal{A}^S = 2 \mathcal{A}^s + \Delta \quad (3.35)$$

L'origine du facteur « 2 » rappelle qu'il suffit de deux champs scalaires complexes pour reconstruire un champ spinoriel en terme de degré de liberté.

3.2.4 Facteur eikonal

Définition 3.2.6. Soit une amplitude \mathcal{A} avec des particules externes d'impulsions $p_1 \dots p_N$ telle que $p_1^2 = 0$. Alors dans la limite des petites énergies, l'amplitude se factorise par un facteur infrarouge :

$$\mathcal{A}(1, \dots, N) \xrightarrow{p_1^2 \rightarrow 0} e\sqrt{2} \frac{\langle PQ \rangle}{\langle P1 \rangle \langle 1Q \rangle} \mathcal{A}(0, 2, \dots, N), \quad (3.36)$$

où $P, Q \in \{p_2 \dots p_N\}$. Le facteur $S_1 = e\sqrt{2} \frac{\langle PQ \rangle}{\langle P1 \rangle \langle 1Q \rangle}$ s'appelle le facteur eikonal [27].

En utilisant des relations de récurrence, on peut calculer un certain nombre d'arbres et de chaînes [25, 26]. Dans les chapitres 4, 5 et 6, on calculera de façon explicite ces types de chaînes. Maintenant, on va s'intéresser aux boucles de fermions ou de scalaires.

3.3 Relations entre une boucle de fermions et une boucle de scalaires

3.3.1 Décomposition d'une boucle de fermions

Proposition 3.3.1. L'amplitude du processus d'annihilation des N photons $\gamma_1 + \dots + \gamma_N \rightarrow 0$ en QED s'écrit :

$$\mathcal{A}_N^S = -\frac{1}{N} \sum_{\sigma(1..N)} \int d^n q \, i^N \frac{\text{tr}(\not{\epsilon}_1(\not{q}_1 + m) \not{\epsilon}_2 \dots \not{\epsilon}_4(\not{q}_N + m))}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^S &= -\frac{1}{2N} \sum_{\sigma(1..N)} \int d^n q \, i^N \frac{\text{tr}(U_1 \dots U_N)}{D_1^2 \dots D_N^2} \\ &+ i^{N-1} \frac{B_S^{12} \text{tr}(U_3 \dots U_N)}{D_2^2 \dots D_N^2} + i^{N-1} \frac{B_S^{23} \text{tr}(U_1 U_4 \dots U_N)}{D_1^2 D_3^2 \dots D_N^2} + \dots \\ &+ i^2 \frac{B_S^{12} B_S^{34} \text{tr}(U_5 \dots U_N)}{D_2^2 D_4^2 \dots D_N^2} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

La structure tensorielle de cette amplitude correspond exactement à la structure de la boucle en QED scalaire, dans laquelle on a remplacé le vertex simple V_s^μ (déf. 1.23), par l'interaction effective V_M^μ (déf. 3.1.2). Cette relation est valable diagramme par diagramme.

Démonstration : On commence par développer l'amplitude d'un diagramme à N photons en QED :

$$\mathcal{A}_N^S = -\frac{1}{N} \sum_{\sigma(1..N)} \int d^n q i^N \frac{\text{tr}(\not{\epsilon}_1(\not{q}_1 + m) \not{\epsilon}_2 \dots \not{\epsilon}_N(\not{q}_N + m))}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (3.39)$$

en 2^N termes. Puis, on applique la formule de Gordon (3.12) pour éliminer toutes les impulsions \not{q}_i dans le numérateur dans chacun des 2^N termes. Ensuite, on réutilise une seconde fois la relation de Gordon, qui inverse le sens du courant dans la boucle et élimine les termes avec un nombre impair d'impulsion q_i . Pour retrouver le sens initial, on applique la relation sur les matrices gamma $\text{tr}(\gamma_1 \dots \gamma_N) = \text{tr}(\gamma_N \dots \gamma_1)$. Enfin, on symétrise la relation afin de créer les vertex doubles de la QED scalaire : B_S^{ij} . \square

Cette relation peut aussi être démontrée, à partir du formalisme de la théorie des cordes. On écrit une action effective pour une boucle de scalaires ou de fermions. Ces deux actions sont reliées par un coefficient affine qui est le moment magnétique [23]. Cette relation est remarquable, puisque qu'une boucle de scalaire avec des photons entrants devient une boucle de fermions en remplaçant juste le vertex simple $V_s^\mu \varepsilon_{p\mu}$ par l'interaction effective U_p . Le théorème de Furry nous dit qu'une amplitude à N photons est non nulle si N est impair. La démonstration de ce théorème est basée sur la conservation de la charge lors de l'inversion du sens de rotation de l'impulsion dans la boucle. On retrouverait ce résultat en remarquant qu'une trace de moment magnétique est impaire en fonction du sens de rotation de la boucle. Toute l'information « chargée » est contenue dans les moments magnétiques des champs de jauge. Maintenant on peut développer l'interaction U_p avec (3.1.2) dans l'expression d'une boucle de fermion (3.38). Comme U_p contient les vertex simples scalaires alors il émerge tous les termes de l'amplitude scalaire, avec un coefficient « -2 » :

$$\mathcal{A}_N^S = -2 \mathcal{A}_N^s + \Delta. \quad (3.40)$$

Tous les termes de Δ contiennent au moins un moment magnétique au numérateur. Le rang des intégrales de ces termes est donc inférieur au rang des intégrales des amplitudes \mathcal{A}_N^S et \mathcal{A}_N^s .

Dans le prochain paragraphe, on va calculer ce terme Δ pour les deux amplitudes d'hélicités les plus simples.

3.3.2 Décomposition supersymétrique des amplitudes d'hélicité $\mathcal{A}_N^S(\pm + \dots + +)$

Proposition 3.3.2. *Les deux premières amplitudes d'hélicités du processus à N photons à l'ordre d'une boucle en QED et QED scalaire, massive et non-massive, sont linéairement reliées par :*

$$\mathcal{A}_4^S(1^\pm, 2^+, \dots, N^+) = -2 \mathcal{A}_4^s(1^\pm, 2^+, \dots, N^+). \quad (3.41)$$

Cette relation est valable diagramme par diagramme.

Démonstration : On considère, premièrement, une boucle de fermion avec N photons entrants d'hélicités positives et de vecteur de référence $|R\rangle$. Par conséquent, les vecteurs polarisations sont tous orthogonaux $\forall(i, j) \in [1..N]$, $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$, et le développement de l'amplitude donne :

$$\mathcal{A} = -e^N \int d^n q \frac{\text{tr}(\not{\epsilon}_1(\not{q}_1 + m) \dots \not{\epsilon}_N(\not{q}_N + m))}{D_1^2 \dots D_N^2} = -e^N \int d^n q \frac{\text{tr}(\not{\epsilon}_1 \not{q}_1 \dots \not{\epsilon}_N \not{q}_N)}{D_1^2 \dots D_N^2}. \quad (3.42)$$

Tous les termes proportionnels à m^2 sont proportionnels à $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$, donc ils s'annulent. Maintenant si on utilise les formules explicites des vecteurs polarisations (2.16), alors on obtient directement (3.41), diagramme par diagramme. Le facteur « 2 » vient du fait que chaque vecteur polarisation se décompose en deux termes, qui correspondent aux deux courants chiraux dans la boucle. Deuxièmement, si l'on a un et un seul photon d'hélicité négative, alors on impose le vecteur de référence des photons d'hélicités positives comme étant égal à l'impulsion du photon d'hélicité

négative. Dans ce cas, on a à nouveau $\forall(i, j) \in [1..N], \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$. Par le même raisonnement que précédemment on trouve le même résultat. \square

Dans ces deux cas particuliers d'amplitudes d'hélicités, le terme Δ est donc nul par identification entre les formules de décomposition supersymétrique (3.40) et (3.41). Maintenant, on va redéfinir ce terme Δ .

3.3.3 Décomposition supersymétrique d'une boucle de fermions

Proposition 3.3.3. *Les amplitudes du processus $\gamma_1 + \dots + \gamma_N \rightarrow 0$ à l'ordre d'une boucle en QED, QED scalaire et $QED^{\mathcal{N}=1}$ sont linéairement reliées par :*

$$\mathcal{A}_N^S = -2 \mathcal{A}_N^s + \mathcal{A}_N^{\mathcal{N}=1}. \quad (3.43)$$

Cette relation est valable diagramme par diagramme.

Démonstration : Soit un diagramme à une boucle du processus $\gamma_1 + \dots + \gamma_N \rightarrow 0$ en QED. Ce diagramme est constitué de photons entrant dans une boucle de fermions. En utilisant le fait que l'on peut soustraire et additionner les degrés de liberté des lignes internes alors on peut décomposer la ligne interne de fermions en une ligne de scalaires et une ligne de sfermions [28] :

$$f = -2 s + (f + 2s) \Rightarrow \mathcal{A}_N^S = -2 \mathcal{A}_N^s + \mathcal{A}_N^{\mathcal{N}=1}. \quad (3.44)$$

\square

Remarque : On comprend alors l'origine du « -2 » devant l'amplitude en QED scalaire. Le signe « - » vient du fait que l'on transforme un scalaire en fermion et le facteur « 2 », du fait que l'on décompose un spineur en deux scalaires complexes, en termes de degrés de liberté. Dans la démonstration de (3.3.2), le facteur « 2 » s'explique par le fait qu'il y a deux courants chiraux dans la boucle. Un scalaire ne peut représenter qu'un seul courant. Il faut donc deux scalaires.

On peut comparer les deux expressions de la décomposition d'une boucle de fermions (3.40) et (3.3.3), et l'on déduit immédiatement que le terme magnétique correspondent à l'amplitude supersymétrique : $\Delta = \mathcal{A}_N^{\mathcal{N}=1}$.

3.3.4 Propriétés d'une boucle de fermions en $QED^{\mathcal{N}=1}$

Dans les paragraphes précédents, on a vu que l'amplitude supersymétrique est constituée de diagrammes avec des moments magnétiques. Dans le numérateur de cette amplitude, les propagateurs et les vecteurs polarisations ont fait place au moment magnétique de l'interaction effective (3.1.2). Ce moment magnétique est non seulement invariant de jauge et mais en plus il ne contient pas l'impulsion de la boucle. Donc l'amplitude supersymétrique est constituée de diagrammes dont leur invariance de jauge a augmenté mais en plus leur rang a diminué. Ce phénomène provient des interférences bosons-fermions qui relèvent des propriétés générales de la QED, principalement l'invariance de jauge.

Dans le cas d'une théorie supersymétrie encore plus « symétrie », par exemple $\mathcal{N} = 4$, alors l'invariance de jauge sera encore plus mise en valeur. Dans le calcul des processus à quatre et à six photons, on va voir que les interférences bosons-fermions annulent certains termes.

Deuxième partie
Calcul d'arbres.

Les chaînes et les arbres sont importants pour calculer le premier ordre non nul d'un grand nombre de processus. Cependant pour augmenter le pouvoir prédictif, il est nécessaire de calculer l'ordre supérieur de l'amplitude. Dans le chapitre 10, on va donner une méthode pour réduire les boucles tensorielles. Cette méthode utilise l'amplitude des arbres et des chaînes, sur couche de masse, contenus dans cette boucle. On va voir que les arbres de type MHV (Maximal Helicity Violating), c'est-à-dire qu'au maximum une seule hélicité sera différente des autres, sont suffisants pour réduire les boucles de toutes les amplitudes des processus $e^+e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \rightarrow 0$ et $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 \rightarrow 0$.

Dans cette partie, on va calculer les deux types de chaînes vues dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3, qui ont une topologie au maximum MHV.

En réalité, les arbres MHV sont suffisants pour calculer toutes les boucles, tant qu'elles sont non massives. La chiralité et l'hélicité deviennent équivalentes quand la masse d'une boucle devient nulle. Si la masse de la particule de la boucle est nulle, alors les courants sélectionnent les hélicités des particules externes. Mais si la masse de la particule dans la boucle est non nulle, alors ce courant massif mélange les hélicités des particules externes et l'hélicité de la particule interne. Dans ce cas il n'y a pas assez d'interférences pour éliminer les configurations d'hélicités qui ne sont pas MHV.

Il a donc été développé des méthodes pour calculer les arbres automatiquement à partir du théorème des résidus. Witten a montré que lorsqu'une amplitude est transformée dans l'espace des twisteurs alors elle a une interprétation géométrique très simple [29, 30]. Cela conduit à introduire seulement les arbres MHV et des propagateurs scalaires pour décrire tous les arbres. Avec l'unitarité, les résidus des limites réelles des propagateurs scalaires sont suffisants pour calculer tous les arbres [31, 32]. Cette méthode a ensuite vu des extensions dans le cas massif [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Mais, dans cette partie, on a choisi de calculer les chaînes avec des méthodes de récurrence ou par calcul direct comme dans les articles précurseurs tels que [40, 41].

Chapitre 4

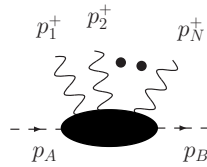
Chaîne de type 1 (parag. 3.2.2).

Sommaire

4.1	L'amplitude d'une chaîne de type 1 (parag. 3.2.2).	39
4.2	Démonstration pour dans un espace de Minkowski dimension 4.	40
4.2.1	Chaîne de type 1 avec deux photons	40
4.2.2	Chaîne de type 1 de N photons	41
4.2.3	Écriture de l'amplitude avec les vecteurs polarisations ε_i^μ	42
4.3	Généralisation pour un espace de Minkowski de dimension n.	43
4.3.1	L'amplitude, pour une chaîne de type 1, dans un espace de Minkowski de dimension n	43
4.3.2	Chaîne de type 1, de deux photons, dans un espace de Minkowski de dimension n	43
4.3.3	Chaîne de type 1, avec N photons, dans un espace de Minkowski de dimension n	44

4.1 L'amplitude d'une chaîne de type 1 (parag. 3.2.2).

Soit une chaîne de N photons d'hélicités positives et de vecteurs de références $|R\rangle$ sur une ligne de scalaires, d'amplitude $\mathcal{A}_N^s(p_A, p_B, p_1^+, \dots, p_N^+) = \mathcal{A}_N^s$. On suppose que les scalaires entrants et sortants de la chaîne sont non massifs mais hors couches de masses. On note $p_A = q_0$ (respectivement $p_B = q_N$) l'impulsion du scalaire qui entre (resp. qui sort). On a alors $p_A^2 \neq p_B^2 \neq 0$.



$$\mathcal{A}_N^s = -i(2e)^N D_N^2 \sum_{\sigma(1..N)} \prod_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2}.$$

On a :

$$\mathcal{A}_N^s = i(-e\sqrt{2})^N D_N^2 D_0^2 \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^N \Phi(N) \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} \quad (4.1)$$

$$= -i(2e)^N D_N^2 D_0^2 \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^N \frac{\chi(i)}{D_{i-1}^2} \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2}, \quad (4.2)$$

avec :

$$\Phi(N) = \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle \langle NR \rangle} \quad (4.3)$$

$$\chi(i) = (-1)^{i+1} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot p_2}{s_{12}} \dots \frac{\varepsilon_{i-1}^+ \cdot p_i}{s_{i-1,i}} \frac{\varepsilon_{i+1}^+ \cdot p_i}{s_{i,i+1}} \dots \frac{\varepsilon_N^+ \cdot p_{N-1}}{s_{N-1,N}}, \quad (4.4)$$

où $\chi(i)$ est une phase que l'on peut exprimer de différentes manières (avec des produits spinoriels ou des produits scalaires de vecteurs polarisations ε_i^μ et impulsion p_i ou même avec les tenseurs champs électromagnétiques $F_i^{\mu\nu}$). On va commencer par montrer la formule dans un espace de Minkowski de dimension 4, puis on généralisera dans un espace un peu particulier en vue du calcul à six photons.

4.2 Démonstration pour dans un espace de Minkowski dimension 4.

La démonstration de ce théorème s'effectue par récurrence. On commence donc par calculer l'amplitude d'une chaîne avec un, puis deux et enfin N photons. On trouve des exemples de démonstration de ce genre dans [25, 26]. Dans le cas où la chaîne n'a qu'un seul photon (N=1), la vérification de (4.2) est triviale :

$$\mathcal{A}_1^s = (-2ie) * D_1^2 \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} = -i 2e \sum_{\sigma(1..1)} \prod_{i=1}^1 D_1^2 \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2} = -i 2e \sum_{\sigma(1..1)} \sum_{i=1}^1 \frac{D_0^2 D_1^2}{D_0^2} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2}. \quad (4.5)$$

On va vérifier (4.2) maintenant pour une chaîne de deux photons.

4.2.1 Chaîne de type 1 avec deux photons

On a cette fois une chaîne de deux photons, donc N=2. On utilise la décomposition des vecteurs polarisations ε_i^\pm en spineurs (def. 2.2.2) :

$$\mathcal{A}_2^s = (-2ie)^2 * i * \sum_{\sigma(1..2)} D_2^2 \prod_{i=1}^2 \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2} = -i(2e)^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \frac{\langle Rq_1 1 \rangle}{\sqrt{2} \langle R1 \rangle D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\sqrt{2} \langle R2 \rangle D_2^2} * \frac{\langle 12 \rangle}{\langle 12 \rangle} \quad (4.6)$$

$$= i(e\sqrt{2})^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \frac{\langle Rq_1 1 2 q_2 R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 2R \rangle D_1^2 D_2^2}, \quad (4.7)$$

On pose $\Phi(1, 2) = \Phi = \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 2R \rangle}$, une phase antisymétrique sur les permutations. Le numérateur de (4.7) se simplifie avec la conservation de l'énergie impulsion au deuxième vertex : $p_2 = q_2 - q_1$ puis au premier vertex $p_1 = q_1 - q_0$:

$$\langle Rq_1 1 2 q_2 R \rangle = \langle Rq_0 1 \rangle q_2^2 - \langle Rq_0 1 q_1 q_2 \rangle = q_2^2 \langle Rq_0 1 R \rangle - q_1^2 \langle Rq_0 q_2 R \rangle + q_0^2 \langle Rq_1 q_2 R \rangle \quad (4.8)$$

$$= q_2^2 \langle Rq_1 1 R \rangle - q_1^2 \langle Rq_0 q_2 R \rangle + q_0^2 \langle Rq_2 2 R \rangle, \quad (4.9)$$

et l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_2^s = i(e\sqrt{2})^2 \sum_{\sigma(1..2)} D_0^2 D_2^2 \Phi(1, 2) \sum_{i=1}^N \frac{\langle Rq_i i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} - i(e\sqrt{2})^2 \sum_{\sigma(1..2)} D_0^2 D_2^2 \Phi(1, 2) \frac{\langle Rq_0 q_2 R \rangle}{D_2^2}. \quad (4.10)$$

Sachant que Φ est antisymétrique par permutation des deux photons ($1 \leftrightarrow 2$), et que $\frac{\langle Rq_0 q_2 R \rangle}{D_2^2}$ ne dépend pas des impulsions des deux photons, alors le deuxième terme de (4.10) est nul. On retrouve (4.2). On peut alors refaire apparaître les vecteurs polarisations à partir de la définition (def. 2.2.2) :

$$\mathcal{A}_2^s = -i(2e)^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \prod_{i=1}^2 \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2} = -i(2e)^2 \sum_{\sigma(1..2)} D_2^2 \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot p_1}{s_{12}} - \frac{D_0^2}{D_1^2} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot p_2}{s_{12}} \varepsilon_2^+ \cdot q_2. \quad (4.11)$$

On va maintenant montrer la formule dans le cas où l'on a une chaîne de N photons.

4.2.2 Chaîne de type 1 de N photons

On suppose que la relation (4.2) est vraie pour une chaîne de $N-1$ photons, et on va vérifier l'exactitude de la formule pour une chaîne de N photons. On applique directement la formule sur les $N-1$ premiers photons d'une chaîne de N photons :

$$\mathcal{A}_N^s = (-ie\sqrt{2})^N i^{N-1} D_N^2 \sum_{\sigma(1..N)} \prod_{i=1}^N \frac{\langle Rq_i i \rangle}{\langle Ri \rangle D_i^2} = e\sqrt{2} D_N^2 \sum_{\sigma(1..N)} \frac{\langle Rq_N N \rangle}{\langle RN \rangle D_N^2} \mathcal{A}_{N-1}^s \quad (4.12)$$

$$= (-1)^{N-1} i (e\sqrt{2})^N D_N^2 \sum_{\sigma(1..N)} \frac{\langle Rq_N N \rangle}{\langle RN \rangle D_N^2} \Phi(1, N-1) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_i i R \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2} \quad (4.13)$$

$$= i (-e\sqrt{2})^N D_N^2 \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N N \rangle \langle iq_i R \rangle \langle Ri \rangle \langle N-1N \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2 \langle N-1R \rangle}. \quad (4.14)$$

On applique la relation de Schouten (D.7) à $\langle Ri \rangle \langle N-1N \rangle$:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(1..N)} \prod_{i=1}^N \frac{\langle Rq_i i \rangle}{\langle Ri \rangle D_i^2} &= (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N N iq_i R \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2} \\ &\quad - (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N-1) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N N \rangle \langle iq_i R \rangle \langle N-1i \rangle}{q_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2 \langle N-1N \rangle}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Grâce à la conservation de l'énergie impulsion au i -ème vertex, le numérateur de (4.15) s'écrit :

$$\langle Rq_N N iq_i R \rangle = q_N^2 \langle Ri q_i R \rangle - q_i^2 \langle Rq_N q_{i-1} R \rangle + q_{i-1}^2 \langle Rq_N q_i R \rangle + \langle Rq_N \Delta_{N-1, i} q_i R \rangle, \quad (4.16)$$

et l'amplitude devient :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(1..N)} \prod_{i=1}^N \frac{\langle Rq_i i \rangle}{\langle Ri \rangle D_i^2} &= (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\langle Ri q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} - \frac{\langle Rq_N q_{i-1} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_N^2} + \frac{\langle Rq_N q_i R \rangle}{D_i^2 D_N^2} \right) \\ &\quad - (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N \Delta_{N-1, i} q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_N^2} \\ &\quad - (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N-1) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N N \rangle \langle iq_i R \rangle \langle N-1i \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2 \langle N-1N \rangle}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

On regarde d'abord le premier terme de (4.17) dans lequel on calcul explicitement la somme :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Ri q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} - \frac{\langle Rq_N q_{i-1} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_N^2} + \frac{\langle Rq_N q_i R \rangle}{D_i^2 D_N^2} = -\frac{\langle Rq_N q_0 R \rangle}{D_0^2 D_N^2} + \frac{\langle RN q_N R \rangle}{D_{N-1}^2 D_N^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Ri q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2}. \quad (4.18)$$

Comme le premier terme : $\frac{\langle Rq_N q_0 R \rangle}{D_0^2 D_N^2}$ ne depend pas de l'ordre des photons, et que la phase $\Phi(1, N)$ est antisymétrique (D.9), alors il s'annule. On rassemble les deux termes dans une même somme, finalement, le premier terme (4.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\langle Ri q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} - \frac{\langle Rq_N q_{i-1} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_N^2} + \frac{\langle Rq_N q_i R \rangle}{D_i^2 D_N^2} \right) \\ = (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^N \frac{\langle Ri q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Maintenant, on effectue une relabélisation cyclique du deuxième terme de (4.17) pour l'annuler avec le troisième :

$$\begin{aligned} \Phi(1, N) \langle Rq_N \Delta_{N-1, i} i q_i R \rangle &= \frac{\langle Rq_N ((i+1) + \dots + (N-1)) i q_i R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle} \quad (4.20) \\ &= \frac{\langle Rq_N N i q_i R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle i-1i \rangle}^* \\ &\quad \frac{1}{\langle iN \rangle \langle Ni+1 \rangle \dots \langle N-1R \rangle} + \frac{1}{\langle ii+1 \rangle \langle i+1N \rangle \dots \langle N-1R \rangle} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\langle ii+1 \rangle \langle i+1i+2 \rangle \dots \langle N-2N \rangle \langle NN-1 \rangle \langle N-1R \rangle}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

On peut mettre en facteur un certain nombre de spineurs :

$$\Phi(1, N) \langle Rq_N \Delta_{N-1, i} i q_i R \rangle = \frac{\langle Rq_N N i q_i R \rangle}{\langle R1 \rangle \dots \langle i-1i \rangle} * \frac{1}{\langle ii+1 \rangle \dots \langle N-1R \rangle} * \sum_{j=i}^{N-1} \frac{\langle jj+1 \rangle}{\langle jN \rangle \langle Nj+1 \rangle}, \quad (4.22)$$

et on simplifie (4.22) avec (D.8) :

$$\frac{\langle Rq_N ((i+1) + \dots + (N-1)) i q_i R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle} = -\Phi(1, N-1) \langle Rq_N N \rangle \langle Rq_i i \rangle \frac{\langle iN-1 \rangle}{\langle NN-1 \rangle}. \quad (4.23)$$

La relation (4.23) montre que les deux derniers termes (4.17) sont opposés. En ne gardant que le premier terme, donné par (4.19), on retrouve l'expression de l'amplitude (4.2). Maintenant, on va la transformer pour faire apparaître les vecteurs polarisations ε_i^μ .

4.2.3 Écriture de l'amplitude avec les vecteurs polarisations ε_i^μ

Pour faire apparaître les vecteurs de polarisations ε_i^μ dans l'amplitude \mathcal{A}_N^s , on modifie la phase $\Phi(1, N) = \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle \langle NR \rangle}$ en multipliant par le facteur unitaire :

$$\frac{[21] \dots [NN-1]}{[21] \dots [NN-1]} * \frac{\langle R2 \rangle \dots \langle Ri \rangle \dots \langle RN-1 \rangle}{\langle R2 \rangle \dots \langle Ri \rangle \dots \langle RN-1 \rangle}, \quad (4.24)$$

puis en développant les spineurs et en les regroupant :

$$\frac{\langle Rq_i i R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle \langle NR \rangle} \quad (4.25)$$

$$= \frac{\langle Rq_i i R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle \langle NR \rangle} * \frac{[21] \dots [NN-1]}{[21] \dots [NN-1]} * \frac{\langle R2 \rangle \dots \langle Ri \rangle \dots \langle RN-1 \rangle}{\langle R2 \rangle \dots \langle Ri \rangle \dots \langle RN-1 \rangle} \quad (4.26)$$

$$= \frac{\langle Rq_i i \rangle}{\langle Ri \rangle} \frac{\langle Ri \rangle \langle Ri \rangle}{\langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle [21] \dots [NN-1]} \frac{\langle R2 \rangle \dots \langle RN-1 \rangle [21] \dots [NN-1]}{\langle R1 \rangle \dots \langle RN \rangle}. \quad (4.27)$$

On retourne les N-i derniers spineurs ($\langle ab \rangle \rightarrow -\langle ba \rangle$) de (4.27) :

$$\frac{\langle Rq_i i R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle N-1N \rangle \langle NR \rangle} = (-1)^{N-i} \frac{\langle R21 \rangle \dots \langle Ri i-1 \rangle \langle Rq_i i \rangle \langle Ri i+1 \rangle \langle RN-1N \rangle}{\langle R1 \rangle \dots \langle RN \rangle s_{12} \dots s_{N-1, N}}. \quad (4.28)$$

Comme les vecteurs de polarisations s'écrivent $\varepsilon_i^{\pm\mu} = \frac{\langle R\gamma^\mu i \rangle}{\sqrt{2} \langle Ri \rangle}$, alors l'amplitude de la chaîne à N photons d'hélicités positives devient :

$$\mathcal{A}_N^s = -i (2e)^N \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \frac{D_0^2 D_N^2}{D_{i-1}^2} \varepsilon_1^+ \cdot p_2 \dots \frac{\varepsilon_{i-1}^+ \cdot p_i}{s_{i-1, i}} \varepsilon_i^+ \cdot q_i \frac{\varepsilon_{i+1}^+ \cdot p_i}{D_i^2} \dots \frac{\varepsilon_N^+ \cdot p_{N-1}}{s_{N-1, N}} \quad (4.29)$$

4.3 Généralisation pour un espace de Minkowski de dimension n .

La formule (4.2) permet de transformer un produit de propagateurs en une somme de propagateurs. Une chaîne de N photons contient N propagateurs. Plus on applique la formule et plus le nombre de propagateur diminue. Imaginons que cette chaîne soit dans une boucle. Alors on va voir dans le chapitre 8 que moins il y a de propagateurs, plus la boucle peut diverger dans l'ultraviolet. Pour y remédier, on étend l'espace de Minkowski à un espace à $n = 4 - 2\epsilon$ dimensions. On suppose que les premières réductions n'engendrent pas de divergences, mais que la dernière réduction, crée des divergences. Donc, le dernier propagateur se trouvera dans un espace à $n = 4 - 2\epsilon$ dimensions. Pour étendre l'espace, on ajoute un espace de dimension -2ϵ , appelé extra-espace, orthogonal à l'espace quatre dimensions. Les impulsions des photons restent dans l'espace initial de dimension quatre, mais le propagateur d'impulsion Q_i de dimension n , se décompose en une impulsion de dimension $n - 4 = -2\epsilon : \hat{q}_i$ et une impulsion de dimension quatre : q_i . On aura alors $Q_i = q_i + \hat{q}_i$. On développera davantage ces notations dans le chapitre 8.

4.3.1 L'amplitude, pour une chaîne de type 1, dans un espace de Minkowski de dimension n

Soit une ligne de N photons dont tous les propagateurs sont dans un espace à quatre dimensions sauf le dernier. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{N,n}^s &= -i(2e)^N \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \frac{D_0^2 D_N^2}{D_{i-1}^2} \varepsilon_1^+ \cdot p_2 \dots \frac{\varepsilon_{i-1}^+ \cdot p_i}{s_{i-1,i}} \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2} \frac{\varepsilon_{i+1}^+ \cdot p_i}{s_{i,i+1}} \dots \frac{\varepsilon_N^+ \cdot p_{N-1}}{s_{N-1,N}} \\ &- i(2e)^N \hat{q}^2 \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i+1} \frac{D_0^2 D_N^2}{D_{i-1}^2 D_N^2} \varepsilon_1^+ \cdot p_2 \dots \frac{\varepsilon_{i-1}^+ \cdot p_i}{s_{i-1,i}} \frac{\varepsilon_i^+ \cdot \Delta_{N,i}}{D_i^2} \frac{\varepsilon_{i+1}^+ \cdot p_i}{s_{i,i+1}} \dots \frac{\varepsilon_N^+ \cdot p_{N-1}}{s_{N-1,N}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Par rapport à la première formule (4.2), il y a un terme supplémentaire proportionnel à « \hat{q}^2 », qui est invariant de jauge. On utilisera encore une récurrence pour montrer cette formule. On commence par vérifier cette formule pour une chaîne de deux photons.

4.3.2 Chaîne de type 1, de deux photons, dans un espace de Minkowski de dimension n

Soit une chaîne de deux photons dont les propagateurs sont dans un espace de dimension n . Comme les vecteurs polarisations sont de dimensions 4, et que l'espace de dimension quatre et l'extra-espace sont orthogonaux, alors : $\varepsilon_i^+ \cdot Q_i = \varepsilon_i^+ \cdot (q_i + \tilde{q}_i) = \varepsilon_i^+ \cdot (q_i)$.

$$\mathcal{A}_{2,n}^s = -i(2e)^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \prod_{i=1}^2 \frac{\varepsilon_i^+ \cdot Q_i}{D_i^2} = i(e\sqrt{2})^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 2R \rangle} \frac{\langle Rq_1 12q_2 R \rangle}{D_1^2 D_2^2}. \quad (4.31)$$

On utilise la conservation de l'énergie impulsion aux vertexs : $p_2 = q_2 - q_1$ et $p_1 = q_1 - q_0$. La différence par rapport au cas à quatre dimensions commence à cette étape, les propagateurs sont de dimensions n , donc $q_i^2 = Q_i^2 + \hat{q}^2$:

$$\mathcal{A}_{2,n}^s = i(e\sqrt{2})^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1,2) \frac{\langle Rq_0 1R \rangle (Q_2^2 - \hat{q}^2) - \langle Rq_0 q_2 R \rangle (Q_1^2 - \hat{q}^2) + \langle Rq_1 q_2 R \rangle (Q_0^2 - \hat{q}^2)}{D_1^2 D_2^2}. \quad (4.32)$$

Comme $\langle Rq_1 1R \rangle - \langle Rq_0 q_2 R \rangle + \langle Rq_1 q_2 R \rangle = \langle R12R \rangle$, et que $\Phi(1, 2)$ est antisymétrique, alors :

$$\mathcal{A}_{2,n}^s = i(e\sqrt{2})^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) D_0^2 D_2^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + i(e\sqrt{2})^2 \tilde{q}^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) D_2^2 \frac{\langle R12R \rangle}{D_1^2 D_2^2}. \quad (4.33)$$

Le premier terme de l'amplitude (4.33) correspond au terme dans un espace uniquement à quatre dimensions. Le second terme est directement proportionnel à la norme de l'impulsion dans l'extra espace. En terme de vecteur polarisation $\varepsilon_{1,2}^+$, on a :

$$\mathcal{A}_{2,n}^s = -i(2e)^2 \left(D_2^2 \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot p_1}{s_{12}} - \frac{D_0^2 D_2^2}{D_1^2} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot p_2}{s_{12}} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_2}{D_2^2} + \tilde{q}^2 \frac{\varepsilon_1^+ \cdot p_2 \varepsilon_2^+ \cdot p_1}{s_{12}} \frac{D_2^2}{D_1^2 D_2^2} \right) \quad (4.34)$$

4.3.3 Chaîne de type 1, avec N photons, dans un espace de Minkowski de dimension n

Le début de la démonstration est similaire à celle en quatre dimensions. Il vient juste se greffer un terme supplémentaire proportionnel à l'extra-impulsion \tilde{q}^2 . D'après les hypothèses, on suppose qu'il n'y a pas besoin de prolonger l'espace de Minkowski si l'on applique la formule sur les $N - 1$ premiers photons. Cependant, pour réduire la chaîne en considérant le dernier photon, il faut étendre les propagateurs restant à un espace à n dimension. On se place à quatre dimensions et on applique la formule à quatre dimensions pour les N-1 premiers photons, puis on passe en dimensions n pour le dernier photon. Donc on peut reprendre directement la formule (4.15) :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(1..N)} \prod_{i=1}^N \frac{\langle Rq_i i \rangle}{\langle Ri \rangle D_i^2} &= (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N N i q_i R \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2} \\ &\quad - (-1)^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N-1) D_0^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle Rq_N N \rangle \langle i q_i R \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2} \frac{\langle N-1i \rangle}{\langle N-1N \rangle}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

La différence provient de la transformation du numérateur du premier terme de (4.35) :

$$\begin{aligned} \langle Rq_N N i q_i R \rangle &= Q_N^2 \langle Ri q_i R \rangle - Q_i^2 \langle Rq_N q_{i-1} R \rangle + Q_{i-1}^2 \langle Rq_N q_i R \rangle + \langle Rq_N \Delta_{N-1, i} i q_i R \rangle \\ &\quad + \tilde{q}^2 \langle R \Delta_{N, i} i R \rangle. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Par la même démonstration que dans un espace à quatre dimensions on transforme la première. Au final, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{N,n}^s &= (-1)^N i(e\sqrt{2})^N \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 D_N^2 \sum_{i=1}^N \frac{\langle RQ_i i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} \\ &\quad + (-1)^N i(e\sqrt{2})^N \tilde{q}^2 \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(1, N) D_0^2 D_N^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle R \Delta_{N, i} i R \rangle}{D_i^2 D_{i-1}^2 D_N^2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

On peut exprimer l'amplitude avec les vecteurs polarisations, de la même manière que pour une chaîne de type 1 dans un espace de Minkowski de dimension quatre :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(1..N)} \prod_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2} &= \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} \frac{D_0^2 D_N^2}{D_{i-1}^2} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot p_2}{s_{12}} \dots \frac{\varepsilon_{i-1}^+ \cdot p_i}{s_{i-1, i}} \frac{\varepsilon_i^+ \cdot Q_i}{D_i^2} \frac{\varepsilon_{i+1}^+ \cdot p_i}{s_{i, i+1}} \dots \frac{\varepsilon_N^+ \cdot p_{N-1}}{s_{N-1, N}} \\ &\quad + \tilde{q}^2 \sum_{\sigma(1..N)} \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i+1} \frac{D_0^2 D_N^2}{D_{i-1}^2 D_N^2} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot p_2}{s_{12}} \dots \frac{\varepsilon_{i-1}^+ \cdot p_i}{s_{i-1, i}} \frac{\varepsilon_i^+ \cdot \Delta_{N, i}}{D_i^2} \frac{\varepsilon_{i+1}^+ \cdot p_i}{s_{i, i+1}} \dots \frac{\varepsilon_N^+ \cdot p_{N-1}}{s_{N-1, N}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Chapitre 5

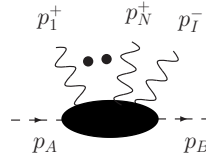
Chaînes de type 2 (parag. 3.2.3).

Sommaire

5.1	L'amplitude d'une chaîne de type 2	45
5.2	Démonstration	45
5.3	Autres écritures	48
5.3.1	Avec le facteur eikonal (déf. 3.2.6)	48
5.3.2	L'amplitude $\bar{\mathcal{A}}_{N,I}^s$	48
5.3.3	Chaîne de type 2 en QED	48

5.1 L'amplitude d'une chaîne de type 2

Soit une chaîne composée N+1 photons avec N photons d'hélicités positives et de vecteur de référence $|I\rangle$ et un photon d'hélicité négative d'impulsion $|I\rangle$, et de vecteur de référence $|r\rangle$. On suppose que la chaîne se trouve sur une ligne de scalaires et que toutes les particules externes sont sur couches de masses.



Alors l'amplitude de cette chaîne de photons s'écrit :

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = i(e\sqrt{2})^{N+1} \frac{\langle IA \rangle \langle IB \rangle}{\prod_{i=1}^N \langle iA \rangle \langle iB \rangle} \langle AB \rangle^{N-1} \quad (5.1)$$

$$= -i(-e\sqrt{2})^{N+1} \sum_{\sigma(1..N)} \Phi(N) \frac{\langle IA1 \rangle \langle IBN \rangle}{D_1^2 D_N^2}, \quad (5.2)$$

avec $\Phi(1, N) = \frac{1}{\langle I1 \rangle \dots \langle NI \rangle}$.

5.2 Démonstration

Comme le vecteur de référence des photons d'hélicités positives est l'impulsion du photon d'hélicité négative, alors d'après la définition 2.2.2 des vecteurs polarisations, ils sont tous orthogonaux : $\forall i, j \in [1..N + 1], \varepsilon_i^\pm \cdot \varepsilon_j^\pm = 0$. Donc l'amplitude est composée seulement de (N+1)!

diagrammes de vertexs simples :

$$\mathcal{A}_{N,I}^S = \mathcal{C}(\sqrt{2})^{N+1} \sum_{\sigma(1..N+1)} \left(\prod_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{D_i^2} \right) \varepsilon_{N+1} \cdot q_{N+1} \quad (5.3)$$

$$= \mathcal{C}(\sqrt{2})^{N+1} \lim_{D_{N+1}^2 \rightarrow 0} D_{N+1}^2 \sum_{\sigma(1..N+1)} \prod_{i=1}^{N+1} \frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{D_i^2}, \quad (5.4)$$

Pour simplifier les notations, on sous-entendra la limite. \mathcal{C} est un coefficient de couleur scalaire dû à la présence de $N+1$ vertexs et N propagateurs :

$$\mathcal{C} = \frac{(-2ie)^{N+1} i^N}{\sqrt{2}^{N+1}} = -i(e\sqrt{2})^{N+1}. \quad (5.5)$$

Considérons l'ensemble des diagrammes tels que le photon d'hélicité négative soit en position i . De chaque coté de ce photon, il y a une chaîne de type 1, composée de photons d'hélicités positives avec un scalaire externe hors couche de masse et l'autre sur couche de masse :

$$\text{Diagram} = \sum_{i=1}^{N+1} \text{Diagram}_i \quad (5.6)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_{N,I}^s = \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{A}_{i-1}^s \frac{\varepsilon_I^- \cdot q_i}{D_i^2} \mathcal{A}_{N-i}^s. \quad (5.7)$$

Il y a trois sortes de topologies de diagrammes : quand le photon négatif se trouve en début, au centre ou en fin de chaîne. On utilise l'expression de la chaîne de type 1 (4.2) sur ces trois topologies :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{N,I}^s &= \frac{\varepsilon_I^- \cdot q_1}{D_1^2} \left\{ (-1)^{N+1} D_1^2 D_{N+1}^2 \Phi(1, N) \sum_{i=1}^N \frac{\langle Rq_{i+1}iR \rangle}{D_i^2 D_{i+1}^2} \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (-1)^{i-1} \Phi(1, i) D_0^2 \sum_{j=1}^i \frac{\langle Rq_j jR \rangle}{D_{j-1}^2 D_j^2} \right\} \frac{\varepsilon_I^- \cdot q_{i+1}}{D_{i+1}^2} \\ &\quad \left\{ (-1)^{(N-i)-1} \Phi(i+1..N) D_{i+1}^2 \sum_{j=i+1}^N \frac{\langle Rq_{j+1}jR \rangle}{D_j^2 D_{j+1}^2} \right\} \\ &+ \frac{(-1)^{N-1} \Phi(1, N)}{D_0^2} \frac{\varepsilon_I^- \cdot q_{N+1}}{D_{N+1}^2} \sum_{i=1}^N \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Comme les scalaires externes sont sur couches de masses alors $D_0^2 \rightarrow 0$ et $D_{N+1}^2 \rightarrow 0$, donc après simplification :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{N,I}^s &= \frac{(-1)^{N-1} \Phi(1, N)}{D_{N+1}^2} \left(\varepsilon_I^- \cdot q_1 \frac{\langle RBNR \rangle}{D_N^2} \right) \\ &+ \frac{(-1)^{N-1} \Phi(1, N)}{D_{N+1}^2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} - \frac{\langle ii+1 \rangle}{\langle iR \rangle \langle Ri+1 \rangle} \frac{\langle RA1R \rangle}{D_1^2} \frac{\langle RBNR \rangle}{D_N^2} \varepsilon_I^- \cdot q_{i+1} \right) \\ &+ \frac{(-1)^{N-1} \Phi(1, N)}{D_{N+1}^2} \left(\varepsilon_I^- \cdot q_{N+1} \frac{\langle RA1R \rangle}{D_1^2} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

On mélange les vecteurs polarisations dans tous les termes des topologies centrales (deuxième ligne de (5.9)) :

$$\langle RA1R \rangle \langle RBNR \rangle = -q_N^2 \frac{\langle RA1R \rangle}{\langle 1N \rangle} - q_1^2 \frac{\langle RBNR \rangle}{\langle 1N \rangle} + \frac{\langle R1ABNR \rangle}{\langle 1N \rangle}. \quad (5.10)$$

On regroupe (5.10) dans (5.9) et après simplification :

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = (-1)^{N-1} \frac{\Phi(1, N)}{D_{N+1}^2} \frac{\langle RA \rangle \langle RB \rangle}{[Rr]} \left(\frac{[BNR][Ar]}{D_N^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{[A1NB]}{D_1^2 D_N^2} \chi_i \langle Rq_{i+1}r \rangle + \frac{[A1R][Br]}{D_1^2} \right), \quad (5.11)$$

avec $\chi_i = \frac{\langle i, i+1 \rangle \langle 1R \rangle \langle NR \rangle}{\langle iR \rangle \langle Ri+1 \rangle \langle 1N \rangle}$, qui vérifient $\sum_{i=1}^{N-1} \chi_i = -1$. Comme les scalaires entrants et sortants sont sur couches de masses alors les propagateurs de bout de chaînes s'écrivent comme en produits spinoriels $q_1^2 = \langle 1A1 \rangle$ et $q_N^2 = -\langle NBN \rangle$. On transforme aussi la phase $\Phi(1, N)$ en une phase cyclique $T(1, N)$:

$$\Phi(1, N) = T(1, N) \frac{\langle N1 \rangle}{\langle R1 \rangle \langle NR \rangle} \Rightarrow T(1, N) = \frac{1}{\langle 12 \rangle \dots \langle N1 \rangle}. \quad (5.12)$$

Avec ces deux remarques, l'amplitude devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{N,I}^s = & (-1)^{N-1} \frac{T(1, N)}{[Rr] D_{N+1}^2} * \left(-\frac{\langle RAr \rangle \langle RB \rangle \langle N1 \rangle}{\langle NB \rangle \langle R1 \rangle} \right. \\ & \left. - \frac{\langle 1N \rangle \langle RA \rangle \langle RB \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \sum_{i=1}^{N-1} \langle Rq_{i+1}r \rangle \frac{\langle ii+1 \rangle}{\langle iR \rangle \langle Ri+1 \rangle} - \frac{\langle RA \rangle \langle RBr \rangle \langle N1 \rangle}{\langle 1A \rangle \langle NR \rangle} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pour continuer la simplification, on écrit le terme central de (5.13) comme une somme de termes eikonaux (déf. 3.2.6) $O_i = \frac{\langle ii+1 \rangle}{\langle iR \rangle \langle Ri+1 \rangle}$:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\langle 1N \rangle \langle RA \rangle \langle RB \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \langle R(A+1+\dots i)r \rangle O_i \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\langle 1N \rangle \langle RA \rangle \langle RB \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \left(\langle RAr \rangle \sum_{i=1}^{N-1} O_i + \langle R1r \rangle \sum_{i=1}^{N-1} O_i + \right. \\ & \left. \langle R2r \rangle \sum_{i=2}^{N-1} O_i + \dots + \langle RN-1r \rangle \sum_{i=N-1}^{N-1} O_i \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$= \frac{\langle 1N \rangle \langle RA \rangle \langle RB \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \left(\langle RAr \rangle \frac{\langle 1N \rangle}{\langle 1R \rangle \langle RN \rangle} + \frac{\langle N(B-A-R)r \rangle}{\langle RN \rangle} \right) \quad (5.16)$$

L'amplitude s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{N,I}^s = & (-1)^N \frac{T(1, N)}{[Rr] D_{N+1}^2} \langle RA \rangle \langle RB \rangle * \\ & \left(\frac{[Ar] \langle N1 \rangle}{\langle NB \rangle \langle R1 \rangle} + \frac{[Br] \langle N1 \rangle}{\langle NR \rangle \langle 1A \rangle} + \frac{\langle 1N \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \frac{\langle RAr \rangle \langle 1N \rangle}{\langle 1R \rangle \langle RN \rangle} + \frac{\langle 1N \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \frac{\langle N(B-A-R)r \rangle}{\langle RN \rangle} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Le terme entre parenthèse peut se réduire, juste par des manipulations spinorielles :

$$\frac{[Ar] \langle N1 \rangle}{\langle NB \rangle \langle R1 \rangle} + \frac{[Br] \langle N1 \rangle}{\langle NR \rangle \langle 1A \rangle} + \frac{\langle 1N \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \frac{\langle RAr \rangle \langle 1N \rangle}{\langle 1R \rangle \langle RN \rangle} + \frac{\langle 1N \rangle}{\langle 1A \rangle \langle BN \rangle} \frac{\langle N(B-A-R)r \rangle}{\langle RN \rangle} \quad (5.18)$$

$$= \frac{\langle N1 \rangle}{\langle NB \rangle} \frac{\langle NRr \rangle}{\langle 1A \rangle \langle RN \rangle}. \quad (5.19)$$

On fait réapparaître les propagateurs grâce aux formules spinorielles, et on prend la limite $D_{N+1}^2 \rightarrow 0$. Enfin, on rajoute le facteur de couleur \mathcal{C} calculé (5.5) :

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = \sum_{\sigma(1..N)} (-1)^{N-1} \frac{T(1, N)}{[Rr]} \frac{\langle RA \rangle \langle RB \rangle \langle N1 \rangle \langle NR \rangle [Rr]}{\langle NB \rangle \langle 1A \rangle \langle RN \rangle} \quad (5.20)$$

$$= \sum_{\sigma(1..N)} (-1)^{N-1} T(1, N) \langle N1 \rangle \frac{\langle RA1 \rangle \langle RBN \rangle}{D_1^2 D_N^2}, \quad (5.21)$$

avec (D.9), on retrouve la première expression (5.1).

5.3 Autres écritures

5.3.1 Avec le facteur eikonal (déf. 3.2.6)

On peut réécrire l'amplitude $\mathcal{A}_{N,I}^s$ en fonction de ce facteur eikonal :

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = i(-e\sqrt{2}) \frac{\langle IA \rangle \langle IB \rangle}{\langle AB \rangle} \prod_{i=1}^N S_i, \quad (5.22)$$

avec $S_i = e\sqrt{2} \frac{\langle AB \rangle}{\langle A1 \rangle \langle 1B \rangle}$. On obtient un formule de récurrence :

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = S_N \mathcal{A}_{N-1,I}^s. \quad (5.23)$$

Remarque : Cette formule de récurrence dit que l'amplitude $\mathcal{A}_{N,I}^s$ est égale à sa limite quand l'énergie de chaque photons d'hélicités positives devient nulle. C'est une propriétés de ce type de chaîne.

5.3.2 L'amplitude $\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s$

L'amplitude $\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s$ est définie par l'inversion des hélicités des photons de $\mathcal{A}_{N,I}^s$. Donc avec l'invariance par parité de la QED (prop. 3.2.5), on a :

$$\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s = \mathcal{A}_{N,I}^s(p_1^-, \dots, p_N^-, p_I^+) = \mathcal{A}_{N,I}^{s*}, \quad (5.24)$$

avec $\overline{T}(N) = \frac{1}{[12][23] \dots [N-1N][N1]}$. En utilisant (D.10) :

$$\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s = -i(e\sqrt{2})^{N+1} \sum_{\sigma(1..N)} \overline{T}(1..N) \frac{[IA1]}{Q_1^2} \frac{[IBN]}{Q_N^2} = i(-e\sqrt{2})^{N+1} \frac{[IA][IB]}{\prod_{i=1}^N [iA][iB]} [AB]^{N-1}. \quad (5.25)$$

Donc pour passer de l'amplitude $\mathcal{A}_{N,I}^s$ à l'amplitude $\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s$ il suffit juste de changer les spineurs en antispineurs : $\langle \dots \rangle \rightarrow [\dots]$, et de multiplier par le coefficient $(-1)^{N+1}$.

5.3.3 Chaîne de type 2 en QED

Proposition 5.3.1. *Soit une chaîne de photons N photons d'hélicités positives d'impulsion $p_1 \dots p_N$ et un photon d'hélicité négative d'impulsion $|I\rangle$ en QED. L'amplitude s'écrit :*

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = \chi^- + \chi^+ = \left(\frac{\langle IB \rangle}{\langle IA \rangle} + \frac{\langle IA \rangle}{\langle IB \rangle} \right) \mathcal{A}_{N,I}^s \quad (5.26)$$

$$\overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s = \chi^- + \chi^+ = \left(\frac{[IB]}{[IA]} + \frac{[IA]}{[IB]} \right) \overline{\mathcal{A}}_{N,I}^s. \quad (5.27)$$

χ_- (respectivement χ_+) correspond au cas où l'hélicité du fermion entrant est positive (resp. négative).

Démonstration : La démonstration est évidente. Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.4. \square

Chapitre 6

Chaîne massive de type 1 (parag. 3.2.2).

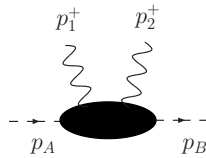
Sommaire

6.1 Chaîne de type 1 avec deux photons.	49
6.1.1 L'amplitude de la chaîne	49
6.1.2 Démonstration	50
6.2 Chaîne massive de type 1 avec trois photons.	50
6.2.1 L'amplitude	50
6.2.2 Amplitude avec les scalaires hors couche de masse	51
6.2.3 Amplitude avec les scalaires sur couche de masse (6.7)	51
6.3 Chaîne massive de type 1 avec quatre photons.	52
6.3.1 L'amplitude	52
6.3.2 Démonstration	52

6.1 Chaîne de type 1 avec deux photons.

6.1.1 L'amplitude de la chaîne

Soit une chaîne de deux photons d'hélicités positives et d'impulsions p_1 et p_2 sur une ligne de scalaires. Le scalaire entrant a une impulsion p_A et le scalaire sortant une impulsion p_B . On suppose que les photons sont sur couche de masses alors que les scalaires sont massifs de masse m^2 et hors couches de masses : $p_A^2 \neq p_B^2 \neq m^2$. Dans ce cas l'amplitude de la chaîne $\mathcal{A}_2^s(p_A, p_B, p_1, p_2) = \mathcal{A}_2^s$ s'écrit :



$$\mathcal{A}_2^s = 2ie^2 D_0^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) \sum_{i=1}^2 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + 2ie^2 m^2 \frac{[12]}{\langle 12 \rangle} \sum_{\sigma(1..2)} \frac{1}{D_1^2}. \quad (6.1)$$

Au premier terme, correspondant à la formule de la chaîne non massive (4.2) vient s'ajouter un second terme, proportionnel à la masse du scalaire.

6.1.2 Démonstration

On suppose que les deux photons ont le même vecteur de référence $|R\rangle$, donc $\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_2^+ = 0$. La chaîne s'écrit :

$$\mathcal{A}_2^s = \mathcal{C} D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_2}{D_2^2} = -\frac{\mathcal{C}}{2} D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) \frac{\langle R q_1 1 2 q_2 R \rangle}{D_1^2 D_2^2}, \quad (6.2)$$

avec $\Phi(1, 2) = \frac{1}{\langle R 1 \rangle \langle 1 2 \rangle \langle 2 R \rangle}$ la phase antisymétrique par permutation $1 \leftrightarrow 2$, et $\mathcal{C} = (-2ie)^2 * i = -4ie^2$ le facteur de couleur. On applique la conservation de l'énergie impulsion au deuxième vertex puis au premier vertex :

$$\mathcal{A}_2^s = -\frac{\mathcal{C}}{2} D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) \frac{\langle R q_0 1 R \rangle q_2^2 - \langle R q_0 q_2 R \rangle q_1^2 + \langle R q_1 q_2 R \rangle q_0^2}{D_1^2 D_2^2}. \quad (6.3)$$

Or les scalaires sont hors couches de masses, donc $q_0^2 = D_0^2 + m^2$, $q_2^2 = D_2^2 + m^2$ et $q_1^2 = D_1^2 + m^2$, avec D_i^2 le dénominateur du propagateur, donc :

$$\mathcal{A}_2^s = -\frac{\mathcal{C}}{2} D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) \left(\frac{m^2 (\langle R q_0 1 R \rangle - \langle R q_0 q_2 R \rangle + \langle R q_1 q_2 R \rangle)}{D_1^2 D_2^2} - \frac{\langle R q_0 q_2 R \rangle}{D_2^2} + \frac{D_0^2 \langle R q_1 q_2 R \rangle + D_2^2 \langle R q_1 1 R \rangle}{D_1^2 D_2^2} \right). \quad (6.4)$$

Grâce à la conservation de l'énergie impulsion aux vertexs, on a : $\langle R q_0 1 R \rangle - \langle R q_0 q_2 R \rangle + \langle R q_1 q_2 R \rangle = \langle R 1 2 R \rangle$. Comme $\langle R q_0 q_2 R \rangle$ en dépend pas de l'ordre des photons et que $\Phi(1, 2)$ est antisymétrique alors le deuxième terme est nul. Il reste :

$$\mathcal{A}_2^s = -\frac{\mathcal{C}}{2} D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) \left(\frac{m^2 \langle R 1 2 R \rangle}{D_1^2 D_2^2} + \frac{D_0^2 \langle R q_1 q_2 R \rangle + D_2^2 \langle R q_1 1 R \rangle}{D_1^2 D_2^2} \right). \quad (6.5)$$

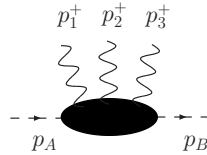
En simplifiant la phase $\Phi(1, 2)$, on retrouve la formule (6.1) :

$$\mathcal{A}_2^s = 2ie^2 m^2 \frac{[12]}{\langle 12 \rangle} \sum_{\sigma(1..2)} \frac{1}{D_1^2} + 2ie^2 D_0^2 D_2^2 \sum_{\sigma(1..2)} \Phi(1, 2) \sum_{i=1}^2 \frac{\langle R q_i i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2}. \quad (6.6)$$

6.2 Chaîne massive de type 1 avec trois photons.

6.2.1 L'amplitude

Soit une chaîne de trois photons entrants d'hélicités positives et d'impulsions p_1, p_2 et p_3 sur une ligne de scalaire. Le scalaire entrant, d'impulsion p_A , et le scalaire sortant, d'impulsion p_B , sont supposés massifs de masse m^2 . Toutes les particules externes sont sur couches de masses. Dans ce cas l'amplitude $\mathcal{A}_3^s(p_A, p_B, p_1, p_2, p_3) = \mathcal{A}_3^s$ de la chaîne s'écrit :



$$\mathcal{A}_3^s = i(e\sqrt{2})^3 m^2 \sum_{\sigma(1..3)} \frac{[31]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle} \left\{ \frac{1}{D_1^2} + \frac{[12 q_3 3]}{[31] D_1^2 D_2^2} \right\} \quad (6.7)$$

$$= i(e\sqrt{2})^3 m^2 \sum_{\sigma(1..3)} \frac{1}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle} \left\{ \frac{[3 q_3 \Delta_{31} 1]}{D_1^2 D_2^2} \right\}. \quad (6.8)$$

6.2.2 Amplitude avec les scalaires hors couche de masse

On suppose que tous les photons ont le même vecteur de référence $|R\rangle$, donc $\forall i \in [1..3]$, $\varepsilon_i^+ \cdot \varepsilon_j^+ = 0$. Par conséquent, la chaîne est décrite par six diagrammes de trois vertexs simples :

$$\mathcal{A}_3^s = \mathcal{C} \lim_{D_3^2 \rightarrow 0} D_3^2 \sum_{\sigma(1..3)} \prod_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2}. \quad (6.9)$$

On applique la formule de la chaîne à deux photons massive hors couche de masse sur la chaîne constituées par les deux premiers photons. On oublie la limite, que l'on reprendra à la fin de la démonstration, et le facteur de couleur $\mathcal{C} = (-2ie)^3 i^2 = -i(2e)^3$, que l'on remettra à la fin du calcul :

$$\mathcal{A}_3^s = - \sum_{\sigma(1..3)} \Phi(1,2) \left\{ D_0^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + m^2 \frac{\langle R12R \rangle}{D_1^2 D_2^2} \right\} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle D_3^2}. \quad (6.10)$$

Maintenant on va arranger les spineurs, des termes non massifs, de la même manière que pour le calcul de la chaîne non massive (4.2). Il va alors apparaître des termes supplémentaires avec masse. On a, en utilisant l'identité de Schouten aux spineurs $\langle Ri \rangle \langle 23 \rangle$ dans (6.11) :

$$\sum_{i=1}^2 \Phi(1,2) \frac{\langle Rq_i iR \rangle \langle Rq_3 3 \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} = - \sum_{i=1}^2 \Phi(1,3) \frac{\langle Ri \rangle \langle 23 \rangle \langle 3R \rangle}{\langle 2R \rangle} \frac{[iq_i R] \langle Rq_3 3 \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} \quad (6.11)$$

$$= - \sum_{i=1}^2 \Phi(1,3) \frac{\langle 3R \rangle}{\langle 2R \rangle} (\langle R3 \rangle \langle 2i \rangle + \langle R2 \rangle \langle i3 \rangle) \frac{[iq_i R] \langle Rq_3 3 \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} \quad (6.12)$$

$$= - \sum_{i=1}^2 \Phi(1,3) \frac{\langle 3R \rangle \langle Rq_3 3 i q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} + \Phi(1,2) \frac{\langle Rq_3 3 \rangle [iq_i R] \langle 2i \rangle \langle R3 \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2 \langle 23 \rangle}, \quad (6.13)$$

avec $\Phi(1,3) = \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 3R \rangle}$. En remettant l'expression (6.13) dans l'amplitude (6.10) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3^s \propto \sum_{\sigma(1..3)} \left\{ D_0^2 \left(\sum_{i=1}^2 \Phi(1,3) \frac{\langle 3R \rangle \langle Rq_3 3 i q_i R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} + \Phi(1,2) \frac{\langle Rq_3 3 \rangle [iq_i R] \langle 2i \rangle \langle R3 \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2 \langle 23 \rangle} \right) \right. \\ \left. - m^2 \phi(1,2) \frac{\langle R12R \rangle \langle Rq_3 3 \rangle}{D_1^2 D_2^2 \langle R3 \rangle D_3^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Maintenant on transforme le numérateur du premier terme de (6.14) :

$$\begin{aligned} \langle Rq_3 3 i q_i R \rangle &= D_3^2 \langle Ri q_i R \rangle - D_i^2 \langle Rq_3 q_{i-1} R \rangle + D_{i-1}^2 \langle Rq_3 q_i R \rangle \\ &\quad - \langle Rq_3 \Delta_{3i} i q_i R \rangle + m^2 \langle R \Delta_{3i} i R \rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

En rajoutant le facteur de couleur, l'amplitude de la chaîne scalaire hors couche de masse devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3^s = i(e\sqrt{2})^3 \sum_{\sigma(1..3)} \left\{ \Phi(1,3) D_0^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + m^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\langle Ri \Delta_{3i} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} \right) \right. \\ \left. + m^2 \phi(1,2) \frac{\langle R12R \rangle \langle Rq_3 3 \rangle}{D_1^2 D_2^2 \langle R3 \rangle D_3^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.2.3 Amplitude avec les scalaires sur couche de masse (6.7)

Dans la limite où les propagateurs initiaux et finaux sont sur couche de masse, $D_3^2, D_0^2 \rightarrow 0$, alors l'amplitude hors couche de masse (6.16) devient l'amplitude sur couche de masse :

$$\mathcal{A}_3^s = -i(e\sqrt{2})^3 m^2 \sum_{\sigma(1..3)} \left\{ \Phi(1,3) \frac{\langle R1 \Delta_{31} R \rangle}{D_1^2 D_3^2} - \phi(1,2) \frac{\langle R12R \rangle \langle Rq_3 3 \rangle}{D_1^2 D_2^2 \langle R3 \rangle D_3^2} \right\}. \quad (6.17)$$

Toutes les particules externes sont sur couche de masse, donc l'amplitude doit être invariante de jauge. Pour le vérifier explicitement, on commence par mettre en facteur la phase $\Phi(1, 3)$:

$$\mathcal{A}_3^s = -i(e\sqrt{2})^3 m^2 \sum_{\sigma(1..3)} \Phi(1, 3) \left\{ \frac{\langle R1\Delta_{31}R \rangle}{D_1^2 D_3^2} + \frac{\langle R12 \rangle \langle Rq_3 3 \rangle \langle 23 \rangle}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} \right\}. \quad (6.18)$$

Puis on fait la manipulation spinorielle $\not{q}_3 \not{p}_3 = -D_2^2 - \not{p}_3 \not{q}_3$ dans l'expression (6.18) :

$$\mathcal{A}_3^s = -i(e\sqrt{2})^3 m^2 \sum_{\sigma(1..3)} \Phi(1, 3) \left\{ \frac{\langle R1\Delta_{31}R \rangle}{D_1^2 D_3^2} - \frac{\langle R12R \rangle}{D_1^2 D_3^2} - \frac{\langle R12 \rangle \langle R3q_3 2 \rangle}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} \right\}. \quad (6.19)$$

Comme $\Delta_{31} = p_3 + p_2$ et $\Phi(1, 3) = \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 3R \rangle}$, alors on trouve directement le résultat (6.7) :

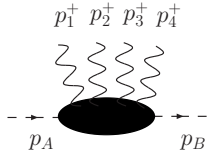
$$\mathcal{A}_3^s = i(e\sqrt{2})^2 m^2 \sum_{\sigma(1..3)} \frac{[31]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle} \left\{ \frac{1}{D_1^2} + \frac{[12q_3 3]}{[31] D_1^2 D_2^2} \right\}. \quad (6.20)$$

Pour obtenir (6.8), il suffit de transformer le numérateur du premier terme de (6.7), sachant que les scalaires externes sont sur couches de masse : $-[13]D_2^2 = [13q_3 3]$. Puis on remplace et en regroupe les produits spinorielles de façon à reconstruire l'impulsion $\Delta_{31} = p_2 + p_3$. Maintenant on va donner la formule pour une chaîne de scalaire massifs de quatre photons.

6.3 Chaîne massive de type 1 avec quatre photons.

6.3.1 L'amplitude

Soit une chaîne de deux photons entrants, d'hélicités positives, et d'impulsions p_1, p_2, p_3 et p_4 sur une ligne de scalaire. Le scalaire entrant d'impulsion p_A et le scalaire sortant d'impulsion p_B sont massifs de masse m^2 . On suppose de plus que toutes les particules externes sont sur couches de masses. Dans ce cas l'amplitude de la chaîne $\mathcal{A}_4^s(p_A, p_B, 1^+, 2^+, 3^+, 4^+) = \mathcal{A}_4^s$ s'écrit :



$$\mathcal{A}_4^s = -i(e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1 \varepsilon_2^+ \cdot q_1 \varepsilon_3^+ \cdot q_3 \varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_1^2 D_2^2 D_3^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s &= -i(e\sqrt{2})^4 (m^2)^2 \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{1}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} \\ &\quad - i(e\sqrt{2})^4 (m^2)^2 \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[14]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{1}{D_1^2 D_3^2} \\ &\quad - i(e\sqrt{2})^4 m^2 \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[4q_4 q_0 1]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{1}{D_1^2 D_3^2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.3.2 Démonstration

Tous les photons ont la même hélicité et le même vecteur de référence $|R\rangle$, donc les diagrammes avec des vertex doubles sont nuls et l'amplitude de la chaîne s'écrit :

$$\mathcal{A}_4^s = D_4^2 * \mathcal{C} * \lim_{D_4^2 \rightarrow 0} \sum_{\sigma(1..4)} \prod_{i=1}^4 \frac{\varepsilon_i^+ \cdot q_i}{D_i^2}. \quad (6.22)$$

On sous-entend le facteur de couleur $\mathcal{C} = (-2ie)^4 i^3 = -i(2e)^4$ et la limite, que l'on rajoutera à la fin de la démonstration. On applique alors l'expression de la chaîne à trois photons hors couches de masses, calculée précédemment (6.16), aux trois premiers photons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s = \sum_{\sigma(1..4)} \left\{ -\Phi(1,4) D_0^2 \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + m^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\langle Ri \Delta_{41} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_4^2} \right) \right. \\ \left. + \Phi(1,3) D_0^2 m^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\langle Ri \Delta_{3i} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle D_4^2} \right. \\ \left. - \Phi(1,2) m^2 \frac{\langle R12R \rangle}{D_1^2 D_2^2} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle D_4^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

avec $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi(1,i) = \frac{1}{\langle R1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle iR \rangle}$. Pour rendre le dernier terme de (6.23) explicitement invariant de jauge, on utilise l'expression de la chaîne scalaire massive à deux photons hors couche de masse (6.1) que l'on applique aux photons 3 et 4 :

$$\sum_{\sigma(3,4)} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle D_4^2} = -\Phi(3,4) \left(D_2^2 \sum_{i=3}^4 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + m^2 \frac{\langle R34R \rangle}{D_3^2 D_4^2} \right). \quad (6.24)$$

L'amplitude de la chaîne scalaire massive à quatre photons (6.23) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s = -i(2e)^4 \sum_{\sigma(1..4)} \left\{ -\Phi(1,4) D_0^2 \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} + m^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\langle Ri \Delta_{41} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_4^2} \right) \right. \\ \left. + \Phi(1,3) D_0^2 m^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\langle Ri \Delta_{3i} R \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2 D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle D_4^2} \right. \\ \left. + m^2 \Phi(1,2) \Phi(3,4) \frac{\langle R12R \rangle}{D_1^2} \sum_{i=3}^4 \frac{\langle Rq_i iR \rangle}{D_{i-1}^2 D_i^2} \right. \\ \left. + m^2 \Phi(1,2) \Phi(3,4) \frac{\langle R12R \rangle \langle R34R \rangle}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

On a obtenu une expression de l'amplitude de la chaîne scalaire massive hors couche de masse avec quatre photons d'hélicités positives. Dans la limite où les scalaires externes sont sur couche de masses $D_0^2, D_4^2 \rightarrow 0$, l'amplitude doit être invariante de jauge :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s = -i(2e)^4 \sum_{\sigma(1..4)} \left\{ -\Phi(1,4) m^2 \frac{\langle R1 \Delta_{41} R \rangle}{D_1^2 D_4^2} \right. \\ \left. + \Phi(1,3) m^2 \frac{\langle R1 \Delta_{31} R \rangle}{D_1^2 D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle D_4^2} \right. \\ \left. + m^2 \Phi(1,2) \Phi(3,4) \frac{\langle R12R \rangle}{D_1^2} \frac{\langle Rq_4 4R \rangle}{D_3^2 D_4^2} \right. \\ \left. + m^2 \Phi(1,2) \Phi(3,4) \frac{\langle R12R \rangle \langle R34R \rangle}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} \right\} \\ = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \end{aligned} \quad (6.26)$$

T_4 étant déjà invariant de jauge. On modifie alors la phase de T_3 : $\Phi(1,2) \Phi(3,4) = \frac{\langle 23 \rangle}{\langle R2 \rangle \langle 34 \rangle \langle 4R \rangle} \Phi(1,3)$:

$$T_3 = m^2 \frac{\langle 12 \rangle}{[12]} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R3 \rangle \langle R4 \rangle D_1^2 D_3^2 D_4^2} = -m^2 \Phi(1,3) \frac{\langle R123 \rangle \langle Rq_4 4 \rangle}{\langle 34 \rangle D_1^2 D_3^2 D_4^2}, \quad (6.27)$$

et on effectue la transformation $\not{q}_4 \not{p}_4 = -D_3^2 - \not{p}_4 \not{q}_4$ ainsi que le changement de phase $\Phi(1,3) =$

$\frac{\langle 34 \rangle \langle 4R \rangle}{\langle 3R \rangle} \Phi(1, 4)$ dans T_2 :

$$T_2 = - \Phi(1, 3) m^2 \frac{\langle R1\Delta_{31}R \rangle \langle R3 \rangle}{D_1^2 D_4^2 \langle 34 \rangle \langle R4 \rangle} - \Phi(1, 3) m^2 \frac{\langle R1\Delta_{31}R \rangle \langle 3q_44 \rangle}{D_1^2 D_3^2 D_4^2 \langle 34 \rangle} \quad (6.28)$$

$$= \Phi(1, 4) m^2 \frac{\langle R1\Delta_{31}R \rangle}{D_1^2 D_4^2} - \Phi(1, 3) m^2 \frac{\langle R1\Delta_{31}R \rangle \langle 3q_44 \rangle}{D_1^2 D_3^2 D_4^2 \langle 34 \rangle}. \quad (6.29)$$

On remplace les nouvelles expressions de T_2 (6.27) et T_3 (6.29) dans l'amplitude (6.27), puis on factorise les termes ayant les mêmes dénominateurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s &= - m^2 \sum_{\sigma(1..4)} \left\{ \Phi(1, 4) \frac{\langle R14R \rangle}{D_1^2 D_4^2} \right. \\ &\quad - \Phi(1, 3) \frac{1}{D_1^2 D_3^2 D_4^2} \{ \langle R1\Delta_{31}R \rangle \langle 3q_44 \rangle - \langle R123 \rangle \langle Rq_44 \rangle \} \\ &\quad \left. - \Phi(1, 2) \Phi(3, 4) \frac{\langle R12R \rangle \langle R34R \rangle}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} \right\} \\ &= T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Dans cette nouvelle expression, seul le terme central T_2 n'est pas explicitement invariant de jauge. Pour cela on transforme le terme entre accolades de T_2 :

$$\langle R1\Delta_{31}R \rangle \langle 3q_44 \rangle - \langle R123 \rangle \langle Rq_44 \rangle \quad (6.31)$$

$$= \langle R1 \rangle \left\{ \langle R31 \rangle \langle 3q_44 \rangle + \langle 321 \rangle D_3^2 \frac{\langle R3 \rangle}{\langle 43 \rangle} + \frac{\langle 3q_44 \rangle}{\langle 43 \rangle} \langle 421 \rangle \langle R3 \rangle \right\} \quad (6.32)$$

$$= \frac{\langle R1 \rangle \langle laR3 \rangle}{\langle 43 \rangle} \left\{ \langle 3q_44 \rangle \langle 4(3+2)1 \rangle + \langle 321 \rangle D_3^2 \frac{\langle R3 \rangle}{\langle 43 \rangle} \right\}, \quad (6.33)$$

que l'on reporte dans l'expression de l'amplitude (6.30). On factorise les deux premiers termes par $\Phi(1, 4) \frac{\langle R14R \rangle}{D_1^2 D_4^2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s &= - m^2 \sum_{\sigma(1..4)} \left\{ \Phi(1, 4) \frac{\langle R14R \rangle}{D_1^2 D_4^2} \left(1 + \frac{\langle 3q_44 \rangle \langle 4(3+2)1 \rangle}{\langle 43 \rangle [14] D_3^2} + \frac{\langle 321 \rangle}{\langle 43 \rangle [14]} \right) \right. \\ &\quad \left. - m^2 \Phi(1, 2) \Phi(3, 4) \frac{\langle R12R \rangle \langle R34R \rangle}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Cette l'amplitude est clairement invariante de jauge. Mais on peut encore transformer cette expression en réduisant au même dénominateur le terme entre parenthèse. On applique la formule $\not{q}_4 \not{p}_4 = -D_3^2 - \not{p}_4 \not{q}_4$:

$$1 + \frac{\langle 3q_44 \rangle \langle 4(3+2)1 \rangle}{\langle 43 \rangle [14] D_3^2} + \frac{\langle 321 \rangle}{\langle 43 \rangle [14]} = \frac{\langle 3q_44 \rangle \langle 3(4+2)1 \rangle}{\langle 43 \rangle [14] D_3^2} + \frac{\langle 3(4+2)1 \rangle}{\langle 43 \rangle [14]} \quad (6.35)$$

$$= \frac{\langle 34q_4 \rangle \langle 4(3+2)1 \rangle}{\langle 43 \rangle [14] D_3^2} = \frac{\langle 34q_4 \rangle \langle q_4 - q_1 \rangle}{\langle 43 \rangle [14] D_3^2}. \quad (6.36)$$

Pour finir, on remplace (6.36) dans l'amplitude (6.34), on développe les deux phases $\Phi(1, 2), \Phi(3, 4)$ et $\Phi(1, 4)$ et on rajoute le facteur de couleur :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s &= - i(e\sqrt{2})^4 m^4 \sum_{\sigma(1..4)} \left\{ \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{1}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} + \frac{[14]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{1}{D_1^2 D_3^2 D_4^2} \right\} \\ &\quad - i(e\sqrt{2})^4 m^2 \sum_{\sigma(1..4)} \frac{1}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{[4q_4 q_1 1]}{D_1^2 D_3^2 D_4^2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Troisième partie

Étude analytique d'une boucle.

Chapitre 7

Notation, Définition et Intégrales scalaires.

Sommaire

7.1	Définition et représentation d'une boucle.	57
7.1.1	Notation d'un diagramme avec une boucle	57
7.1.2	Ensemble de définition de l'amplitude d'une boucle	58
7.1.3	Représentation avec les paramètres de Feynman.	59
7.2	Intégrales scalaires	60
7.2.1	Définition	60
7.2.2	Calcul d'une intégrale scalaire	60
7.2.3	Réduction d'une intégrale scalaire	61
7.2.4	Calcul d'une extra-intégrale scalaire	62

7.1 Définition et représentation d'une boucle.

7.1.1 Notation d'un diagramme avec une boucle

On considère l'amplitude \mathcal{A} d'une boucle avec N pattes externes entrantes (fig 7.1) dans le cas général où l'impulsion de la boucle évolue dans un espace de Minkowski de dimension $n = 4 - 2\epsilon$. L'espace initial de dimension quatre est étendu à un espace de dimension n , en ajoutant un espace de dimension -2ϵ orthogonal à l'espace à quatre dimension. Désormais, on aura une intégrale de dimension n et de mesure :

$$d^4q \rightarrow d^n Q. \quad (7.1)$$

Notations : L'impulsion tournante Q^μ est alors composée d'une partie à quatre dimensions q^μ et d'une partie à -2ϵ dimensions : \hat{q}^μ . Comme les espaces à quatre dimensions et à -2ϵ sont orthogonaux entre eux, on a donc :

$$\begin{cases} Q = q + \hat{q} \\ Q^2 = q^2 + \hat{q}^2 \end{cases} \quad (7.2)$$

On prendra la notation Euclidienne introduit par Mahlon : $\hat{q}^2 = -\mu^2$. La conservation de l'énergie impulsion à chaque vertex implique la conservation de l'énergie impulsion dans la boucle :

$$\sum_{i=1}^N p_i = 0, \quad (7.3)$$

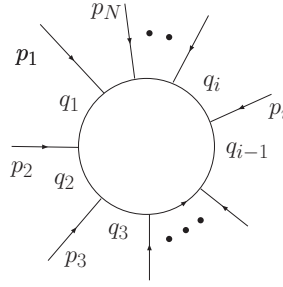


FIG. 7.1 – Structure générale d'une boucle.

et amplitude de la boucle (fig 7.1) s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (7.4)$$

comme une intégrale d'une fonction de l'impulsion Q^μ , dont le numérateur $\text{Num}(Q)$ dépend de l'impulsion. Le numérateur dépend de la théorie, dans laquelle est décrite la boucle. Les dénominateurs s'écrivent :

$$\forall i \in [1..N], D_i^2 = Q_i^2 - m_i^2 + i\lambda. \quad (7.5)$$

L'impulsion du propagateur numéro « i » s'écrit $Q_i^\mu = Q^\mu + r_i^\mu$. La conservation de l'énergie impulsion à chaque vertex s'écrit $p_i = r_i - r_{i-1}$ et dans la boucle $r_N = r_0$. De plus, à cause de la conservation de l'énergie impulsion dans la boucle, les r_i sont définis à une constante près. On peut imposer une valeur à l'un des r_i suivant le problème regardé. L'équation (7.4) est la représentation dans l'espace des impulsions de la boucle de la figure 7.1. On peut aussi la représenter dans l'espace des paramètres de Feynman, mais avant on va s'intéresser à son ensemble de définition.

7.1.2 Ensemble de définition de l'amplitude d'une boucle

On considère la boucle de la figure 7.1, et d'amplitude (7.4), dont on notera par la suite $A(Q)$, l'intégrant : $\mathcal{A} = \int d^n Q A(Q)$. On note \mathcal{D}_A (respectivement \mathcal{D}_{AA}) son ensemble de définition (resp. ensemble d'analyticité). Dans l'espace des impulsions, les lagrangiens des théories de champs standards sont des polynômes des champs. Donc la fonction $\text{Num}(Q)$ est un polynôme de l'impulsion Q^μ de la boucle. Sachant que les dénominateurs D_i^2 sont des trinômes de l'impulsion de la boucle, alors l'intégrant $A(Q)$ est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est un ouvert. Dans ce cas d'une fonction rationnelle $\mathcal{D}_{AA} = \mathcal{D}_A$.

Définition 7.1.1. On appelle pôles les points de coordonnées « finis » de l'espace de phase qui annule le dénominateur de $A(Q)$. On appelle singularités les points de coordonnées « finis » de l'espace des phases où $A(Q)$ n'est pas analytique, c'est à dire non développable en série entière.

L'analyticité est plus contraignante que la non-existence de pôles : $\mathcal{D}_{AA} \subset \mathcal{D}_A$. L'existence de l'amplitude se décompose en deux conditions nécessaires et suffisantes :

Résultat 7.1.2. A existe si et seulement si :

$$- A(Q) \text{ intégrable aux bornes infinies de } \mathcal{D}_A \quad (7.6)$$

$$- A(Q) \text{ intégrable en tous points « finis » de } \mathbb{R}^4 \quad (7.7)$$

Il faut comprendre que même si l'intégrant n'est pas analytique ou possède un pôle, alors il peut être intégrable. Lorsque l'intégrant n'est pas intégrable en l'infinie, on dit qu'il y a divergence ultraviolette, que l'on étudiera dans le chapitre 8. Quant à la deuxième condition, Landau a donné une méthode générale pour rechercher l'ensemble d'analyticité \mathcal{D}_{AA} . On les étudiera dans le chapitre 9.

Maintenant, on va représenter les amplitudes dans l'espace fini des paramètres de Feynman.

7.1.3 Représentation avec les paramètres de Feynman.

Précédemment on a décrit la boucle dans l'espace de dimension n de l'impulsion tournante (7.4). Cette représentation nécessite une intégrale de dimension n sur un ouvert infini. On va transformer cette intégrale sur un borné fini. Cela facilite les développements limités dans l'intégrale et les études locales. On considère l'amplitude d'une boucle de N pattes externes (7.4), et N paramètres de Feynman $z_1 \dots z_N \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^N z_i = 1$. On définit la mesure d'intégration associée à ce borné :

$$\begin{aligned} \int dz_i &= \int_0^1 dz_1 \dots \int_0^1 dz_N \delta \left(1 = \sum_{i=1}^N z_i \right) \\ &= \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \dots \int_0^{1-\dots-z_{N-2}} dz_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_N \delta \left(z_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} z_i \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Comme $A_1 \dots A_N = \Gamma(N) \int dz_i \left(\sum_{i=1}^N z_i A_i \right)^N$, alors l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A} = \Gamma(N) \int d^n Q \int dz_i \frac{\text{Num}(Q)}{\left(\sum_{i=1}^N z_i D_i^2 \right)^N} = \Gamma(N) \int d^n Q \int dz_i \frac{\text{Num}(Q)}{D(Q, z_1, \dots, z_N)}. \quad (7.9)$$

Le dénominateur $D(Q, z_1, \dots, z_N)$ est devenu une somme de dénominateurs $D_i^2 = (Q + r_i)^2 - m_i^2 + i\lambda$:

$$D(Q, z_1, \dots, z_N) = \left(\sum_{i=1}^N z_i D_i^2 \right)^N \quad (7.10)$$

$$= \left(\left(q + \sum_{i=1}^N z_i r_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N z_i (r_i^2 - m_i^2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i z_j r_i \cdot r_j + i\lambda \right)^N \quad (7.11)$$

$$= (L^2 - R^2)^N, \quad (7.12)$$

avec :

$$L = q + \sum_{i=1}^N z_i r_i \quad (7.13)$$

$$R^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i z_j r_i \cdot r_j - \sum_{i=1}^N z_i (r_i^2 - m_i^2) - i\lambda. \quad (7.14)$$

L^μ représente l'impulsion « moyenne » de la boucle, pondérée par les poids des propagateurs alors que R^2 contient l'information de la cinématique externe et interne de la boucle. On peut le réécrire comme un produit scalaire.

Définition 7.1.3. On définit la matrice cinématique d'une boucle par :

$$\mathcal{S}_{ij} = (r_i - r_j)^2 - m_i^2 - m_j^2. \quad (7.15)$$

Cette matrice donne l'ordre d'entrée des impulsions externes dans la boucle ainsi que la masse des propagateurs. La fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{S})$ est bijective, la cinématique d'une boucle est donc entièrement décrite par cette matrice et on peut réécrire R^2 en introduisant le vecteur des paramètres de Feynman $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$, par :

$$R^2 = -\frac{1}{2} \vec{z}^\top \cdot \mathcal{S} \cdot \vec{z} - i\lambda. \quad (7.16)$$

On définit aussi une autre matrice qui intervient régulièrement dans le calcul des intégrales : la matrice de Gram. Cependant il n'existe pas de bijection entre une boucle et une matrice de Gram.

Définition 7.1.4. On définit la matrice de Gram d'une boucle de N pattes externes d'impulsions entrantes $p_1 \dots p_N$ par :

$$G_{ij} = 2 p_i \cdot p_j. \quad (7.17)$$

Le but est de réduire les intégrales tensorielles décrivant les boucles, en intégrales scalaires, que l'on va définir.

7.2 Intégrales scalaires

7.2.1 Définition

On étend encore l'espace de Minkowski de dimension n en un espace de dimension $n = 2t$, $t \in \mathbb{N}$ par l'ajout non pas d'un espace de dimension -2ϵ mais d'un espace de dimension $-2\epsilon + 2t$.

Définition 7.2.1. À partir de l'amplitude (7.4) d'une boucle décrite par la matrice cinématique \mathcal{S}_{ij} , on définit les intégrales scalaires de dimension $n+2t$, $t \in \mathbb{N}$, en imposant la fonction $\text{Num}(Q) = 1$:

$$I_{N,M}^{n+2t}(\mathcal{S}) = \frac{1}{i\pi^{n/2}} \int d^{n+2t}Q \frac{1}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (7.18)$$

$M \leq N$ étant le nombre de pattes externes ayant une masse.

Dans la suite, on notera $I_{4,2A}^n$ (respectivement $I_{4,2B}^n$) l'intégrale scalaire à quatre points deux masses adjacents (resp. opposées), rappelées dans l'appendice A.

On sous entendra le facteur $-i\pi^{-n/2}$ dans la mesure. Ce facteur permet des simplifications dans l'intégration sur l'impulsion de la boucle. On effectuera donc toujours le changement de mesure $d^n Q \rightarrow -i\pi^{-n/2} d^n Q$. Les boucles de dimension n sont normalisées par le facteur spatiale $1/(2\pi)^n$. Pour retrouver la bonne normalisation, on multipliera le résultat final par le facteur :

$$K = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}}. \quad (7.19)$$

On peut étendre la définition pour une extra-intégrale scalaire.

Définition 7.2.2. Soit une boucle, définie par la matrice cinématique \mathcal{S}_{ij} , dont la particule dans la boucle à une masse m^2 sur tous les propagateurs. On définit alors les extra-intégrales en dimension n par :

$$J_N^n(\mathcal{S}) = \int d^n Q \frac{\mu^2}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.20)$$

$$K_N^n(\mathcal{S}) = \int d^n Q \frac{\mu^4}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.21)$$

Dans le cas d'une boucle massive, il peut être commode de faire une extension massive des extra-intégrales scalaires (déf. 11.2.2). Avant de donner des relations liant ces intégrales scalaires, on va les calculer.

7.2.2 Calcul d'une intégrale scalaire

L'absence de numérateur dans l'intégrale scalaire permet de les calculer exactement. Dans cette partie on exposera juste la méthode, mais les résultats sont donnés dans l'appendice A. On peut commencer par remarquer qu'une intégrale scalaire est en fait la description, à un facteur

près, d'une boucle en théorie scalaire dans l'espace de l'impulsion de la boucle. On commence par transformer l'intégrale scalaire en représentation paramétrique, grâce à (7.9) :

$$I_N^n(\mathcal{S}) = \Gamma(N) \int d^n Q \int dz_i \frac{1}{D(Q, z_1, \dots, z_N)}, \quad (7.22)$$

puis on effectue le changement de variable linéaire : $Q \rightarrow L$. L'impulsion de la boucle L se décompose en une partie de dimension 4 : l et une partie de dimension $n-4 = -2\varepsilon : \hat{l}$. Comme les deux espaces de dimension 4 et $n-4$ sont orthogonaux, alors on a : $L = l + \hat{l}$ et $L^2 = l^2 + \hat{l}^2 = \hat{l}^2 - \mu^2$. Maintenant, avant d'intégrer sur L , on commence par transformer l'espace de Minkowski de la boucle en un espace Euclidien indicé par E :

$$I_N^n(\mathcal{S}) = \Gamma(N) \int d^n L \int dz_i \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \quad (7.23)$$

$$= \Gamma(N) \int dz_i \int d^n L_E \frac{1}{(-L_E^2 - R^2)^N} \quad (7.24)$$

$$= \Gamma(N) (-1)^N \int dz_i \int d|L_E| d\Omega_n \frac{l_E^{n-1}}{(L_E^2 + R^2)^N}. \quad (7.25)$$

On utilise l'expression de la surface d'une sphère de dimension n :

$$\forall n \in R^{+*}, \quad \int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (7.26)$$

pour intégrer la partie angulaire et la formule sur les intégrales rationnelles :

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{x^p}{(x^n + z^n)^q} = \frac{1}{n} z^{p+1-nq} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n}) \Gamma(q - \frac{p+1}{n})}{\Gamma(q)}. \quad (7.27)$$

pour la partie spatiale en L_E . L'intégrale scalaire devient :

$$I_N^n(\mathcal{S}) = \Gamma(N) \int d^n L \int dz_i \frac{1}{(L^2 + R^2)^N} = (-1)^N \Gamma(2) \Gamma\left(N - \frac{n}{2}\right) \int dz_i (R^2)^{\frac{n}{2}-N}. \quad (7.28)$$

Maintenant il faut définir la matrice cinématique pour pouvoir intégrer sur les paramètres de Feynman. On peut trouver des exemples d'intégration dans [14, 17]. Les formes analytiques des intégrales scalaires sont données dans [87, 89], que l'on rappelle dans l'appendice A. On remarque qu'elles peuvent s'écrire comme une partie « divergente » plus une partie que l'on appelle « finie ». On va expliciter le lien entre ces deux parties et les intégrales scalaires de dimensions $n+2$ dans le prochain paragraphe.

7.2.3 Réduction d'une intégrale scalaire

Proposition 7.2.3. *Une boucle scalaire avec N , telle que $N \leq 6$, pattes externes, décrite par la matrice cinématique \mathcal{S}_{ij} et une matrice de Gram G_{ij} se réduit :*

$$I_N^n(\mathcal{S}) = \sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} I_{N-1}^n(\mathcal{S} - \{i\}) - (-1)^{N+1} (N-n-1) \frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} I_N^{n+2}(\mathcal{S}). \quad (7.29)$$

On note $I_{N-1}^n(\mathcal{S} - \{i\})$ l'intégrale scalaire à $N-1$ pattes externes en ayant pincé le propagateur $n^\circ i$ à partir de l'intégrale scalaire à N pattes et $\mathcal{S} - \{i\}$ sa matrice cinématique, obtenue en ôtant la ligne et la colonne « i » de la matrice \mathcal{S} .

Démonstration : On considère une intégrale scalaire avec N pattes externes de dimension n en représentation paramétrique (parag. 7.1.3) que l'on transforme en utilisant la définition de la matrice cinématique (7.15) et de R^2 (7.14) :

$$I_N^n(\mathcal{S}) - \sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} I_{N-1}^n(\mathcal{S} - \{i\}) \quad (7.30)$$

$$= \int d^n Q \frac{1 - \sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} D_i^2}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.31)$$

$$= \Gamma(N) \int d^n L \int dz_i \frac{1 - \sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} \left(L + r_i - \sum_{k=1}^N z_k r_k \right)^2}{(L^2 - R^2)^N} \quad (7.32)$$

$$= - \Gamma(N) \sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} \int d^n L \int dz_i \frac{L^2 + R^2}{(L^2 - R^2)^N} \quad (7.33)$$

Dans le cas où $N < 7$ alors les éléments de la matrice cinématique inverse \mathcal{S}^{-1} sont reliés à la matrice de Gram par :

$$\sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} = (-1)^{N+1} \frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})}. \quad (7.34)$$

Si $N > 6$ alors comme il y a plus de d'impulsions externes que de dimensions dans l'espace de Minkowski, le déterminant de la matrice cinématique est nul. On peut généraliser cette expression en faisant intervenir un pseudo-inverse construit à partir des matrices cinématiques réduites [56, 57]. Puis on intègre l'intégrale de dimension n sur l'impulsion L grâce aux intégrales rationnelles (7.27). On voit alors apparaître l'intégrale scalaire de dimension $n + 2$:

$$-\Gamma(N) \int d^n L \int dz_i \frac{L^2 + R^2}{(L^2 - R^2)^N} = (-1)^{N+1} \Gamma\left(N - \frac{n+2}{2}\right) (N - n - 1) \int dz_i \frac{1}{(R^2)^{N-(n+2)/2}} \quad (7.35)$$

$$= -(N - n - 1) I_N^{n+2}(\mathcal{S}). \quad (7.36)$$

□

On a décomposé une intégrale scalaire en une somme d'intégrales scalaires avec moins de points plus un terme contenant une intégrale scalaire de dimension $n + 2$. Ce dernier terme correspond à la partie « finie » de l'intégrale, vue dans le paragraphe précédent. On verra dans les chapitres suivants que la divergence infrarouge de cette intégrale scalaire de dimension $n + 2$ est moindre. Cette transformation permet de mettre à part les divergences infrarouges.

7.2.4 Calcul d'une extra-intégrale scalaire

Dans ce paragraphe, on va présenter une méthode pour calculer les extra-intégrales scalaires.

Proposition 7.2.4. *Les intégrales scalaires et extra-intégrales scalaires représentant une boucle, de matrice cinématique \mathcal{S} non massive, sont reliées par :*

$$J_N^n = -\epsilon I_N^{n+2} \quad (7.37)$$

$$K_N^n = -\epsilon(1 - \epsilon) I_N^{n+4} \quad (7.38)$$

$$\int d^n Q \frac{(\mu^2)^r}{D_1^2 \dots D_N^2} = -\epsilon(1 - \epsilon) \dots (r - 1 - \epsilon) I_N^{n+2r}. \quad (7.39)$$

Démonstration : On prend $r \in \mathbb{N}$. On commence par décomposer l'impulsion en une partie à quatre dimensions et une partie à $n - 4$ dimensions $Q = q + \hat{q} = q + i\mu$. La partie à $n - 4$ dimensions

est déjà euclidienne. Puis on intègre sur la partie angulaire à $n - 4$ dimensions. Ensuite, au lieu d'intégrer la partie spatiale à $n - 4$ dimensions, on la transforme en une partie spatiale à $n - 4 + 2r$ dimensions :

$$\int d^n Q \frac{(\mu^2)^r}{D_1^2 \dots D_N^2} = i \int d^4 q \int d^{n-4} \widehat{q} \frac{\mu^{2r}}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.40)$$

$$= i \int d^{n-4} \mu \mu^{2r} \int d^4 q \frac{1}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.41)$$

$$= i \int d\Omega_{n-4} \int d|\mu| \mu^{2r+n-5} \int d^4 q \frac{1}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.42)$$

$$= i \int d\Omega_{n-4} \frac{\int d^{n-4+2r} \mu}{\int d\Omega_{n-4+2r}} \int d^4 q \frac{1}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (7.43)$$

$$= i \frac{\int d\Omega_{n-4}}{\int d\Omega_{n-4+2r}} \int d^{n-4+2r} \mu \int d^4 q \frac{(-1)^r}{D_1^2 \dots D_N^2} = \frac{\int d\Omega_{n-4}}{\int d\Omega_{n-4+2r}} I_N^{n+2r}. \quad (7.44)$$

Pour finir, on applique la formule sur les intégrales de surfaces (7.26). \square

Dans l'appendice B, on rappelle les extra-intégrales scalaires utilisées dans cette thèse. Dans les deux prochains chapitres, on va étudier le comportement aux bornes de l'ensemble de définition d'une boucle.

Chapitre 8

Divergences ultraviolettes.

Sommaire

8.1	Le problème ultraviolet.	65
8.1.1	Les divergences ultraviolettes - Définition et comptage de puissance	65
8.1.2	Recherche de divergences ultraviolettes dans une boucle	66
8.1.3	Conditions de convergences	67
8.2	Divergences ultraviolettes théorie ϕ^3 et en QED	68
8.2.1	Divergences ultraviolettes en théorie ϕ^3	68
8.2.2	Divergences ultraviolettes en QED...	68
8.2.3	Divergences ultraviolettes en QED scalaire	69
8.3	Remarques supplémentaires	70
8.3.1	Calcul en dimension n , schéma de régularisation	70
8.3.2	Comptage de puissance	71
8.3.3	Termes rationnels	71
8.4	Renormalisation d'une théorie.	72
8.4.1	Pourquoi renormalisée?	72
8.4.2	Renormalisation : principe général	72
8.4.3	Renormalisation de la QED	73

8.1 Le problème ultraviolet.

8.1.1 Les divergences ultraviolettes - Définition et comptage de puissance

Les divergences ultraviolettes apparaissent dans un diagramme à une boucle, d'amplitude :

$$\mathcal{A} = \int d^4q \frac{\text{Num}(q)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (8.1)$$

lors de l'intégration en $+\infty$. Il faut un nombre suffisant de propagateurs pour qu'il n'y ait pas de problème d'intégration sur l'impulsion q^μ . Étudier la limite de l'intégrant en $+\infty$ s'appelle faire un comptage de puissance.

Définition 8.1.1. *On dit qu'une intégrale est divergente dans l'ultraviolet si l'intégrant n'est pas intégrable en $+\infty$.*

On considère un diagramme de Feynman \mathcal{D} avec une ou plusieurs boucles. On calcule le degré superficiel de divergence $\omega(\mathcal{D})$ du diagramme, c'est-à-dire la puissance du module de l'impulsion en l'infini dans les boucles. On note E_B le nombre de lignes externes de bosons entrants de spin 0 ou 1, E_F le nombre de lignes externes de fermions entrants de spin 1/2, n_i le nombre de vertex de type « i » dans \mathcal{D} et δ_i la dimension de la constante de couplage. Pour une boucle à n dimensions, le degré superficiel de divergence s'écrit :

$$\omega(\mathcal{D}) = n - E_B - \frac{3}{2}E_F + \sum_i n_i \delta_i. \quad (8.2)$$

Ce degré est valable quelque soit le diagramme et le nombre de boucle dans le diagramme à partir du moment où la théorie est définie. Dans le cas d'un diagramme à une boucle, si $\omega(\mathcal{D}) < 0$, alors le diagramme est convergent dans l'ultraviolet, mais si $\omega(\mathcal{D}) \geq 0$, alors le diagramme est divergent dans l'ultraviolet. Le degré de divergence est souvent abaissé par des symétries telles que l'invariance de jauge ou de Lorentz. Cependant il est limité, dans le sens où il ne s'applique qu'aux diagrammes. De nombreuses explications sont données dans les livres classiques tels que [14, 45, 46, 47].

On appelle ce phénomène « divergences ultraviolettes », car il intervient pour de grandes impulsions donc de petites longueurs d'ondes. Mais il n'est pas le signe d'une incohérence de la théorie. Un diagramme de Feynman n'a pas de réalité physique et peut contenir des divergences ultraviolettes, cependant un élément de la matrice $\langle f|S|i \rangle$ ou une amplitude, qui est une somme de diagrammes, correspond à une réalité physique et ne doit plus contenir de divergences ultraviolettes à chaque ordre perturbatif. Pour enlever ces divergences, on ajoute des contre-termes à la théorie, dont les constantes sont ajustées pour éliminer les divergences. Dans le dernier paragraphe du chapitre, on abordera plus en détails le principe de la renormalisation qui permet d'ôter les problèmes ultraviolettes. Pour l'instant, on va régulariser les intégrales grâce à la méthode de la régularisation dimensionnelle : c'est-à-dire que l'on va étendre l'espace de l'impulsion de la boucle, qui était initialement de dimension 4, à un espace de dimension $n = 4 - 2\epsilon$. Les divergences seront alors comprises dans limite $\epsilon \rightarrow 0$. Désormais dans ce chapitre, on aura une intégrale de dimension n (parag. 7.1.1).

8.1.2 Recherche de divergences ultraviolettes dans une boucle

On veut connaître le comportement d'une intégrale pour de grandes valeurs de l'impulsion tournante. On la régularise par une « extension » de l'espace de Minkowski, qui va nous permettre d'intégrer sur l'impulsion de la boucle. Il est préférable de commencer par la réécrire en représentation paramétrique (7.9) :

$$\mathcal{A} = \Gamma(N) \int d^n Q \int dz_i \frac{\text{Num}(Q)}{D(Q, z_1 \dots z_N)}, \quad (8.3)$$

dont la mesure d'intégration dz_i est donnée par (7.8) et le dénominateur par (7.12). Avant d'intégrer sur l'impulsion de la boucle Q , on commence par effectuer le changement de variable linéaire : $Q \rightarrow L$. L'impulsion intégrée L se décompose comme une partie de dimension 4 : l et une partie de dimension $n - 4 = -2\epsilon$: \hat{l} . Pour pouvoir intégrer, il faut aussi expliciter le numérateur $\text{Num}(L, z_1 \dots z_N)$. Seule l'intégration sur l'impulsion est importante dans le comptage de puissance. On ne prendra donc pas en compte les paramètres de Feynman dans le numérateur $\text{Num}(L)$. Comme on se place dans des théories de jauge, alors le numérateur sera un polynôme de l'impulsion de la boucle qui, dans le cas général, s'écrit :

$$\text{Num}(L) = (l^2)^r (\hat{l})^s, \quad (8.4)$$

avec $r, s \in \mathbb{N}$. Maintenant que le numérateur est explicité, on peut intégrer l'amplitude. On commence par transformer l'espace de Minkowski de l'impulsion en un espace Euclidien, indicé par

E :

$$\mathcal{A} = \Gamma(N) \int dz_i \int d^4 l \int d^{n-4} \widehat{l} \frac{(l^2)^r (\widehat{l}^2)^s}{(l^2 + \widehat{l}^2 - R^2)^N} \quad (8.5)$$

$$= \Gamma(N) i \int dz_i \int d^4 l_E \int d^{n-4} \widehat{l}_E \frac{(-l_E^2)^r (-\widehat{l}_E^2)^s}{(-l_E^2 - \widehat{l}_E^2 - R^2)^N} \quad (8.6)$$

$$= \Gamma(N) (-1)^{r+s-N} i \int dz_i \int d^{n-4} \widehat{l}_E \widehat{l}_E^{2s} \int d|l_E| d\Omega_4 \frac{l_E^{2r+3}}{(l_E^2 + \widehat{l}_E^2 + R^2)^N}, \quad (8.7)$$

puis on décompose les mesures d'intégrations en parties angulaires et spatiales :

$$\mathcal{A} = \Gamma(N) (-1)^{r+s-N} i \int dz_i \int d\Omega_{n-4} d|l_E| \widehat{l}_E^{2s+n-5} \int d|l_E| d\Omega_4 \frac{l_E^{2r+3}}{(l_E^2 + \widehat{l}_E^2 + R^2)^N}, \quad (8.8)$$

enfin on intègre les parties angulaires avec les intégrales de surface (7.26), et les intégrales spatiales grâce aux intégrales rationnelles (7.27) :

$$\mathcal{A} = (-1)^{r+s-N} \frac{\Gamma(r+2) \Gamma(\frac{n}{2} - 2 + s) \Gamma(N - r - s - \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - 2)} \int dz_i (R^2)^{\frac{n}{2} - N + r + s}. \quad (8.9)$$

On introduit le paramètre critique $M = N - r - s - 2$:

$$\mathcal{A} = (-1)^{r+s-N} \frac{\Gamma(r+2) \Gamma(s-\epsilon) \Gamma(M+\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \int dz_i (R^2)^{-M-\epsilon}, \quad (8.10)$$

qui traduit l'équilibre entre le poids de l'impulsion dans le numérateur et dans le dénominateur. Ce paramètre critique va donner les conditions de divergences. Dans le cas où une boucle est un diagramme, alors ce paramètre est directement relié au degré superficiel de divergence :

$$M + \epsilon = -\frac{\omega(\mathcal{D})}{2}. \quad (8.11)$$

8.1.3 Conditions de convergences

La limite ultraviolette se définit lorsque l'impulsion de la boucle tend vers l'infini $Q \rightarrow +\infty$. On a régularisé cette intégrale par une extension de l'espace de Minkowski, donc la limite ultraviolette est atteinte quand cette extension devient nulle : $\epsilon \rightarrow 0$. L'amplitude d'une boucle (8.3), étant égale à (8.9), est convergente en $+\infty$ si et seulement si :

$$\mathcal{A} \text{ converge} \Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(s-\epsilon) \Gamma(M+\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \text{ converge} \quad (8.12)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon(s-1)! \Gamma(M+\epsilon) \text{ converge} \quad (8.13)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ s > 0 \cup M > 0 \right\} \text{ ou } \left\{ s = 0 \cap M > 0 \right\} \quad (8.14)$$

Maintenant on a besoin de connaître la boucle et donc les paramètres r et s du numérateur pour pouvoir continuer. On remarque tout de suite que plus le nombre de propagateur est grand et plus l'intégrale a des chances d'être convergente. De plus, on remarque immédiatement, que si il apparaît au numérateur une puissance non nulle de l'extra-impulsion ($s > 0$), alors l'intégrale est convergente. La régularisation joue bien son rôle, puisque tant que l'extra-espace n'est pas nul, l'intégrale reste finie.

Proposition 8.1.2. *Les extra-intégrales vérifiant les conditions : $\{s > 0 \cap M > 0\}$ sont nulles au premier ordre en ϵ et les extra-intégrales scalaires vérifiant les conditions $\{s > 0 \cap M \leq 0\}$ sont rationnelles au premier ordre en ϵ .*

Démonstration : Les extra-intégrales scalaires sont définies pour $s > 0$. Si $M > 0$ alors on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(s - \epsilon) \Gamma(M + \epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0. \quad (8.15)$$

Si maintenant on a $M \leq 0$ alors, au premier ordre en ϵ , l'amplitude est proportionnelle à une intégrale sur un polynôme de paramètre de Feynman, qui donne un scalaire :

$$\mathcal{A} \propto_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon} \int dz_i (R^2)^{-M}. \quad (8.16)$$

□

Remarque : Le résultat de convergence précédent peut être généralisé pour une intégrale scalaire de dimension $n+2t$ où t est un entier naturel. Dans ce cas les conditions de convergences deviennent :

$$\mathcal{A} \text{ converge} \Leftrightarrow \left\{ s + t + 1 > 0 \bigcup N - r - s - t > 2 \right\}. \quad (8.17)$$

Maintenant, on va regarder le cas de chacune des théories étudiées dans le chapitre 1.

8.2 Divergences ultraviolettes théorie ϕ^3 et en QED

8.2.1 Divergences ultraviolettes en théorie ϕ^3

On utilise le degré superficiel de divergence (8.2). En théorie ϕ^3 , il n'y a qu'un type de vertex et la constante de couplage à une dimension $\delta_i = -1$.

Proposition 8.2.1. *Les boucles en théorie ϕ^3 et en dimension n sont divergentes dans l'ultraviolet si et seulement si elles ont deux points.*

Démonstration : Le degré superficiel de divergence pour une boucle de N scalaire s'écrit :

$$\omega(\mathcal{D}) = 2 - N. \quad (8.18)$$

Il y a divergence si le degré est positif donc si la boucle a au maximum deux pattes externes. □

On peut généraliser le résultat à des intégrales scalaires de dimensions supérieures.

Proposition 8.2.2. *Une intégrale scalaire à N points en dimension $n+2t$ avec $t > 0$ est divergente dans l'ultraviolet si :*

$$t = 0 \Rightarrow I_2^{n+2t} \text{ divergentes} \quad (8.19)$$

$$t = 1 \Rightarrow I_2^{n+2t}, I_3^{n+2t} \text{ divergentes.} \quad (8.20)$$

8.2.2 Divergences ultraviolettes en QED...

On étudie le comportement ultraviolet de diagrammes en QED donc on utilise le degré superficiel de divergence. La constante du vertex fermion-photon a une dimension $\delta_i = \epsilon$.

Avant d'étudier le comportement ultraviolet d'une boucle de fermions, il faut se rappeler le théorème de Furry qui dit qu'une boucle de fermions a une contribution nulle si il y a un nombre

impair de photons entrants dans la boucle. On a donc $N = \text{pair}$. La démonstration de ce théorème est basée sur le fait que le vertex fermion-photon ne conserve pas la conjugaison de charge. Par conséquent il faut un nombre pair de vertex pour que la conjugaison de charge soit conservée dans la boucle [15].

Proposition 8.2.3. *Une boucle de fermions en QED et en dimension n est convergente dans l'ultraviolet si et seulement si il y a au moins $N=6$ photons entrants dans la boucle.*

Démonstration : Le degré superficiel de divergence pour une boucle de N fermions s'écrit :

$$\omega(\mathcal{B}) = n - N + N\epsilon. \quad (8.21)$$

Il faut donc au moins cinq photons entrant dans la boucle pour que le degré soit négatif et donc la boucle convergente. On peut aussi retrouver ce résultat en remarquant qu'une boucle de fermions est caractérisée par les paramètres : $r + s \leq \frac{N}{2}$. Alors les conditions de convergences (8.14) deviennent :

$$A \text{ converge} \Leftrightarrow \left\{ \left(s > 0 \cup N - s - r > 2 \right) \cap \left(r + s \leq \frac{N}{2} \right) \cap (N \text{ pair}) \right\} \quad (8.22)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left(s > 0 \cup N > 4 \right) \cap (N \text{ pair}) \right\} \quad (8.23)$$

Comme s peut être nul, par conséquent une boucle avec au moins six photons converge dans l'ultraviolet, qu'une boucle de deux ou quatre photons a des divergences ultraviolettes. \square

Proposition 8.2.4. *Une boucle de fermions en QED, avec un propagateur de photon est convergente dans l'ultraviolet en dimension n si et seulement si il y a au moins deux photons externes entrants dans la boucle.*

Démonstration : Le degré superficiel de divergence pour une boucle de N photons et $N-2$ fermions externes en dimension n s'écrit :

$$\omega(\mathcal{B}) = n - N - 1 + N\epsilon. \quad (8.24)$$

Le diagramme est convergent $\omega(\mathcal{B}) < 0 \Leftrightarrow N > 4$. Il faut donc au moins deux photons externes entrants dans la boucle. Cette boucle est caractérisée par les paramètres : $r + s \leq E\left(\frac{N-2}{2}\right)$, avec E la fonction partie entière. Alors les conditions de convergences (8.14) deviennent :

$$A \text{ converge} \Leftrightarrow \left\{ \left(s > 0 \cup N - s - r > 2 \right) \cap \left(r + s \leq E\left(\frac{N-2}{2}\right) \right) \right\} \quad (8.25)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ s > 0 \cup N > 3 \right\}. \quad (8.26)$$

\square

8.2.3 Divergences ultraviolettes en QED scalaire

En QED scalaire, il y a deux vertex, il faut donc regarder les divergences des boucles avec les deux vertex. Cependant le vertex double, correspond au pincement d'un propagateur et de deux vertex simples en terme de puissance de l'impulsion de la boucle l :

$$\frac{\epsilon_1 \cdot l_1 \epsilon_2 \cdot l_2}{D_1} \sim \epsilon_1 \cdot \epsilon_2. \quad (8.27)$$

Les deux morceaux de diagramme ont le même comportement ultraviolet. Or, les règles de Feynman indiquent que si il y a un diagramme avec un vertex double alors il existe les diagrammes équivalents avec deux vertex simples et un propagateur non pincé. Il suffit donc de regarder les diagrammes contenant seulement des vertex simples pour connaître le comportement ultraviolet d'une boucle

en QED scalaire. La dimension de ce vertex est $\delta = -\epsilon$. Ce vertex à la même dimension que celui en QED, donc la différence de structure ultraviolette ne viendra que de la nature des particules entrantes dans la boucle.

Le théorème de Furry peut-être étendu à la QED scalaire bien qu'un scalaire n'ait pas de charge.

Proposition 8.2.5. *Une boucle de scalaires est convergente dans l'ultraviolet si et seulement si il y a au moins $N = 6$ photons entrants.*

Démonstration : La divergence ultraviolette d'une boucle de N scalaire est :

$$\omega(\mathcal{D}) = n - N - N\epsilon \quad (8.28)$$

Comme en QED, il faut au moins cinq photons externes. Les paramètres, caractérisant une boucle de photon en QED scalaire, sont encore : $r + s \leq \frac{N}{2}$. Les conditions sont les mêmes en QED scalaire et en QED. \square

Proposition 8.2.6. *Une boucle de scalaires avec un photon dans cette boucle est convergente dans l'ultraviolet si $N \geq 5$.*

Démonstration : Le degré superficiel de divergence de cette boucle s'écrit encore :

$$\omega(\mathcal{D}) = n - N - N\epsilon. \quad (8.29)$$

Il faut encore au moins $5 - 2$ photons externes. Les paramètres, caractérisant cette boucle en QED scalaire, sont : $r + s \leq \frac{N}{2}$ et les conditions de convergences (8.14) deviennent :

$$A \text{ converge} \Leftrightarrow \left\{ \left(s > 0 \cup N - s - r > 2 \right) \cap \left(r + s \leq \frac{N}{2} \right) \right\} \quad (8.30)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ s > 0 \cup N > 4 \right\}. \quad (8.31)$$

\square

Résultat 8.2.7. *Une boucle de scalaires ou de fermions ont une structure ultraviolette équivalente, par contre, si un photon se glisse dans la boucle, alors la structure ultraviolette devient différente.*

Cette différence de structure ultraviolette est liée à la dimension du scalaire qui est différente de celle du fermion. Cette différence se retrouve dans le deuxième vertex en QED scalaire, le premier vertex ayant la même dimension que celui en QED.

8.3 Remarques supplémentaires

8.3.1 Calcul en dimension n , schéma de régularisation

Pour régulariser une boucle, on étend l'espace de Minkowski à n dimensions. Ceci est raisonnable dans le sens où les particules dans la boucle sont virtuelles. Pour rester proche de la réalité physique, on gardera les particules externes dans un espace à quatre dimensions : c'est le schéma de régularisation appelé « the four-dimensional helicity scheme », noté FDHS. Ce schéma n'est pas unique, mais il a l'avantage de décrire les processus à une boucle. Dans le cas où la boucle s'insert dans un diagramme, il existe le schéma de régularisation qui consiste à mettre toutes les particules en dimension n .

On utilisera toujours le schéma FDHS. On commence par étendre la métrique à l'espace de dimension -2ϵ , orthogonal à l'espace initial de dimension quatre [44] :

$$\eta^{\mu\nu} \Rightarrow \eta_n^{\mu\nu} = \eta_4^{\mu\nu} + \eta_{n-4}^{\mu\nu}. \quad (8.32)$$

Par définition de la métrique, on a : $\eta_n^{\mu\mu} = n$, $\eta_4^{\mu\mu} = 4$ et $\eta_{n-4}^{\mu\mu} = n - 4$. Les matrices gammas sont aussi étendues dans cet espace :

$$\gamma^\mu \Rightarrow_n \gamma_n^\mu = \gamma_4^\mu + \gamma_{n-4}^\mu. \quad (8.33)$$

Comme les deux espaces sont orthogonaux, alors on a les règles de commutations suivantes :

$$\{\gamma_n^\mu, \gamma_n^\nu\} = \eta_n^{\mu\nu} \quad \{\gamma_4^\mu, \gamma_4^\nu\} = \eta_4^{\mu\nu} \quad (8.34)$$

$$\{\gamma_{n-4}^\mu, \gamma_{n-4}^\nu\} = \eta_{n-4}^{\mu\nu} \quad \{\gamma_n^\mu, \gamma_4^\nu\} = 0 \quad (8.35)$$

On utilisera cette décomposition dans le calcul du processus d'annihilation à quatre photons. Dans toute la suite, on notera les impulsions à quatre dimensions en minuscules et l'impulsion équivalente à n dimensions en majuscules.

8.3.2 Comptage de puissance

Le comptage de puissance en $+\infty$ est une règle simple pour connaître le comportement d'un diagramme dans l'ultraviolet. Cependant il y a une subtilité auquel il faut faire attention dans le passage à la limite ultraviolette qui mène à une contraction d'indice :

$$\frac{\text{Num}(q_1, q_2, \dots)}{q_1^2 \dots q_N^2} = \frac{\text{Num}(\dots)^{\mu\nu}}{q_1^2 \dots q_N^2} q_{1\mu} q_{2\nu} \xrightarrow{|q| \rightarrow +\infty} \frac{\text{Num}(\dots)^{\mu\nu}}{(q^2)^N} \eta_{\mu\nu} q^2 = \frac{\text{Num}(\dots)_\mu^\mu}{(q^2)^{N-1}} \quad (8.36)$$

Il est tout à fait possible que cette contraction rende le scalaire $\text{Num}(\dots)_\mu^\mu$ nul. Dans ce cas la boucle diverge dans l'ultraviolet mais il y a des compensations de ces divergences grâce aux propriétés physiques de la boucle. Cependant, même si la boucle ne diverge plus dans l'ultraviolet, il faut quand même imposer une impulsion dans la boucle de dimension $n = 4 - 2\epsilon$ car l'extra-dimension crée des termes non divergents que l'on n'obtient pas par un calcul à quatre dimensions : ces termes sont des termes rationnels.

8.3.3 Termes rationnels

Pour étudier plus attentivement la structure analytique de l'amplitude, on repart de l'expression d'une boucle (7.4) après intégration sur l'impulsion de la boucle (8.10) :

$$\mathcal{A} = (-1)^{r+s-N} \frac{\Gamma(r+2) \Gamma(s-\epsilon) \Gamma(M+\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \int dz_i (R^2)^{-M-\epsilon}, \quad (8.37)$$

dont les conditions de convergences dans l'ultraviolet (8.14) sont :

$$\text{A converge} \Leftrightarrow \left\{ s > 0 \bigcup N - r - s - 2 = M > 0 \right\}. \quad (8.38)$$

La fonction R^2 est un polynôme des paramètres de Feynman. L'intégration de ce polynôme, sachant qu'il peut avoir une puissance négative, va produire des termes rationnels et des fonctions polylogarithmes. Ces dernières n'apparaîtront que si il y a plusieurs paramètres de Feynman à intégrer. La structure analytique provient directement de la structure de la boucle, mais les termes rationnels sont des constantes d'intégrations qui donnent la valeur de la boucle en un point de l'espace de phase (limite en infini), ce qui le rend délicat à calculer. Pour trouver un moyen de

l'obtenir, on va comprendre son origine en effectuant un développement limité en ϵ au premier ordre dans l'intégrale d'une boucle (8.37) :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\epsilon=0} (-1)^{2-M} \frac{\Gamma(r+2)\Gamma(s-\epsilon)\Gamma(M+\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)} \int dz_i (R^2)^{-M} (1 - \epsilon \ln(R^2) + o(\epsilon)). \quad (8.39)$$

De cette dernière expression, on tire les conditions suffisantes pour que l'intégrale soit rationnelle :

$$\begin{cases} \epsilon \rightarrow 0 \\ M \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{intégrale rationnelle}, \quad (8.40)$$

Pour que la réciproque soit valable, il faut que les conditions de convergences (8.14) soient vérifiées :

$$\mathcal{A} \text{ rationnelle} \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon \rightarrow 0 \\ M \leq 0 \\ s > 0 \end{cases}. \quad (8.41)$$

De la condition $s > 0$, on en déduit que les termes rationnels sont calculés à partir des extra-intégrales scalaires. La deuxième condition $N - r - s - 2 = M \leq 0$ donne un équilibre entre les puissances de deux parties de l'impulsion tournante et le dénominateur pour avoir une fonction rationnelle. Les impulsions au numérateur « $r + s$ » ont tendance à rendre la diagramme de plus en plus divergent dans l'ultraviolet alors que les dénominateurs « N » ont plutôt tendance à réduire la divergence dans l'ultraviolet.

Proposition 8.3.1. *Les termes rationnels de l'intégration d'une boucle sont données par les extra-intégrales vérifiant $2 - N + r + s = M \leq 0$: $J_2^n, J_3^n, K_4^n, \dots$*

Démonstration : Une extra-intégrale scalaire est définie pour $r = 0$ et $s > 0$. Avec la condition (8.41), on obtient directement le résultat. \square

8.4 Renormalisation d'une théorie.

8.4.1 Pourquoi renormalisée ?

Certaines intégrales scalaires ou tensorielles sont divergentes dans l'ultraviolet, donc un diagramme ou même une amplitude peuvent être divergents dans l'ultraviolet, ce qui n'est pas physique à priori. Par exemple, chacun des six diagrammes, de l'amplitude à quatre photons en QED, est constitué d'une boucle de fermions avec quatre photons entrants, ils sont donc tous divergents dans l'ultraviolet, d'après la proposition 8.2.3. On en déduit donc que la somme des diagrammes est, à priori, divergente dans l'ultraviolet. Cependant si on mesure l'interaction de deux photons, on n'observe pas de divergences. Il faut donc améliorer la théorie pour annuler ces divergences ultraviolettes. On effectue ce qu'on appelle une opération de renormalisation de la théorie. On va expliquer rapidement le principe renormalisation de la QED.

8.4.2 Renormalisation : principe général

Les lagrangiens du chapitre 1 sont des lagrangiens dits « nus », dans le sens où les constantes physiques : la charge de l'électron e et la masse de l'électron m sont « nues » elles aussi. Elles sont nues car elles représentent la charge et la masse de l'électron, en considérant l'électron sans aucune interaction. Dans la réalité, cet électron absorbe et émet des photons virtuels, tout se passe comme si l'électron était habillé d'un nuage de photons virtuels. Cette interaction « fournit » à l'électron une masse supplémentaire δm . La masse mesurée expérimentalement est :

$$m_e = m + \delta m. \quad (8.42)$$

De même, l'interaction de l'électron avec le vide engendre autour de l'électron un nuage de paires électron-positron virtuelles, qui « modifient » la charge de l'électron de δe . La charge réelle mesurée est :

$$e_e = e + \delta e. \quad (8.43)$$

Les lagrangiens nus ne nous donnent pas les valeurs expérimentales. On rajoute donc des contre-terme, contenant les valeur δm et δe aux lagrangiens nus, pour qu'ils deviennent « habillés » et qu'ils contiennent les valeurs expérimentales m_e et e_e . On contraint les constantes des contres termes afin d'éliminer les divergences ultraviolettes. On ajoutera des diagrammes et des règles de Feynman associés à ces contre-terme. Ici, le but n'est pas de faire un développement complet de la renormalisation, mais d'expliquer le calcul à une boucle et le traitement des divergences. Dans l'étude du processus $ee \rightarrow \gamma\gamma$, on fera la renormalisation de la théorie QED scalaire.

8.4.3 Renormalisation de la QED

D'après les deux propositions 8.2.3 et 8.2.4, il y a seulement quatre diagrammes connexes et irréductibles divergents en QED. Ils sont donnés dans la figure 8.1. Le premier diagramme correspond à l'énergie propre du photon, le deuxième à l'énergie propre de l'électron, le troisième à la correction du vertex et la quatrième à la diffusion photon-photon.

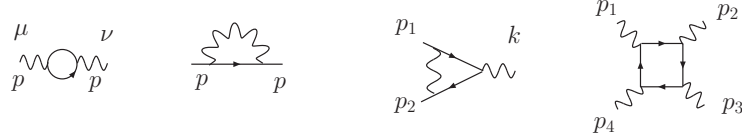


FIG. 8.1 – Diagrammes divergents en QED

Considérons le diagramme de l'énergie propre du photon d'amplitude $P(p)$. Le développement de cette amplitude autour de l'impulsion nulle du photon externe :

$$P(p) = -e^2 \int d^n Q \frac{\text{tr}(\gamma^\mu \not{q}_1 \gamma^\nu \not{q}_2)}{D_1^2 D_2^2} = P(0) + p^\mu P_{1\mu} + \frac{p^\mu p^\nu}{2} P_{2\mu\nu} + P_R(p), \quad (8.44)$$

fait introduire quatre constantes qui sont égales à des dérivées premières et secondes. Par comptage de puissance, comme une dérivée apporte une puissance supplémentaire au dénominateur, alors les tenseurs $P(0)$, $P_{1\mu}$ et $P_{2\mu\nu}$ sont a priori infinies alors que la constante $P_R(p)$ est finie : c'est l'intégrale renormalisée. Cependant l'invariance relativiste entraîne que le développement ne dépend que de p^2 donc $P_{1\mu} \cdot p^\mu = 0$ et $\frac{p^\mu p^\nu}{2} P_{2\mu\nu} = p^2 P_2$. De même, pour le diagramme de l'énergie propre de l'électron $\Sigma(p)$, le développement limité de l'amplitude autour de la valeur p_0 de l'électron :

$$\Sigma(p) = -e^2 \int d^n Q \frac{\langle P \gamma^\mu \not{Q}_1 \gamma_\mu P \rangle}{D_1^2 D_2^2} = \Sigma(p_0) + \Sigma_1(p_0) (\not{p} - \not{p}_0) + \Sigma_R(p), \quad (8.45)$$

fait intervenir trois constantes dont $\Sigma(p_0)$ et $\Sigma_1(p_0)$ sont infinies par comptage de puissance et $\Sigma_R(p)$ correspond à l'intégrale renormalisée. Enfin, si on note $\Lambda(p_1, p_2, k)^\mu$ l'amplitude du vertex et $\Omega(p_1, p_2, p_3, p_4)$ l'amplitude de la diffusion photon-photon alors ils s'écrivent :

$$\Lambda(p_1, p_2, k)^\mu = \Lambda(p_1, p_2, 0) \gamma^\mu + \Lambda_R(p_1, p_2, k)^\mu \quad (8.46)$$

$$\Omega(p_1, p_2, p_3, p_4) = \Omega_0 + \Omega_R(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (8.47)$$

où les constantes $\Lambda(p_1, p_2, 0)$ et Ω_0 sont infinies alors que le tenseur $\Lambda_R(p_1, p_2, k)^\mu$ ainsi que la constante $\Omega_R(p_1, p_2, p_3, p_4)$ correspondent au vertex et à l'amplitude photon-photon renormalisés.

Nous avons donc six constantes infinies $P(0)$, P_2 , $\Sigma(p_0)$, $\Sigma_1(p_0)$, $\Lambda(p_1, p_2, 0)$ et Ω_0 . À partir des trois principes physiques, on peut faire disparaître les « infinies » de ces constantes. Les trois principes physiques sont : la renormalisation de la charge, la renormalisation de la masse et l'invariance

de jauge. Premièrement, l'invariance de jauge nous dit que les observables physiques ne doivent pas dépendre du champ de jauge A^μ mais du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}(p) = p^\mu A^\nu - A^\mu p^\nu$. Il s'ensuit qu'avec $p^\mu = 0$, les observables doivent s'annuler, donc $P(0) = \Omega_0 = 0$. Puis, la renormalisation de la masse implique l'ajout d'un contre-terme proportionnel à δm . Dans ce cas l'énergie propre de l'électron s'écrit :

$$\Sigma(p) \rightarrow \Sigma(p_0) + \Sigma_1(p_0)(\not{p} - \not{p}_0) + \Sigma_R(p) + \delta m. \quad (8.48)$$

On absorbe alors les divergences de $\Sigma(p_0)$ dans δm . $\Sigma(p_0)$ contient alors la masse véritablement mesurée m_e . Ensuite, la renormalisation de la charge de l'électron implique l'ajout d'un contre terme faisant intervenir δe . Pour rendre compte de la polarisation du vide, on va transformer le tenseur de jauge par un facteur comprenant la modification de la charge : $F^{\mu\nu}(p) \rightarrow F^{\mu\nu}(p) \left(1 + (\alpha \delta e)^2\right)^{1/2}$. Dans ce cas le graphe d'énergie propre du photon devient :

$$P(p) = p^2 P_2 + P_R(p) + \alpha \delta e f p^2. \quad (8.49)$$

On utilise alors δe pour compenser la divergence de P_2 . Enfin, il reste encore deux divergences non compensées : $\Sigma_1(p_0)$ et $\Lambda(p_1, p_2, 0)^\mu$. Cependant, le calcul explicite montre que l'introduction des renormalisations de la masse et de charge implique que les deux constantes se simplifient entre elles. On peut le démontrer de façon très générale par les identités de Ward [14, 45, 46, 47].

Chapitre 9

Singularités de Landau dans une boucle.

Sommaire

9.1	Le problème - Définitions des divergences.	75
9.1.1	Le problème	75
9.1.2	Recherche des singularités	76
9.1.3	Divergences infrarouges	77
9.1.4	Divergences molles	79
9.1.5	Divergences colinéaires	79
9.1.6	Divergences infrarouges dans les Bulles	80
9.2	Divergences infrarouges en théorie ϕ^3	80
9.2.1	Divergences molles d'une boucle en théorie ϕ^3	80
9.2.2	Divergences colinéaires	81
9.2.3	Régularisation par les masses	82
9.3	Divergences infrarouges en QED.	82
9.3.1	Divergences molles en QED d'une boucle de fermions	83
9.3.2	Divergences colinéaires en QED dans une boucle de fermions	83
9.3.3	Divergences infrarouges en QED dans une boucle avec au moins un photon	83
9.4	Divergences infrarouges en QED scalaire.	84
9.5	Résumé - Conclusion.	84
9.6	Singularités de Landau et « le double parton scattering ».	85
9.6.1	Résolution des équations de Landau pour des singularités du second ordre.	85
9.6.2	Configurations cinématique : « Double parton scattering »	87
9.6.3	Autour de la singularité de Landau	88
9.7	« Double parton scattering » en théorie ϕ^3.	89
9.7.1	Processus $\phi_1 + \phi_2 \rightarrow \phi_3 + \phi_4$	89
9.7.2	Amplitude à six scalaires	91
9.8	Traitement des divergences infrarouges	93

9.1 Le problème - Définitions des divergences.

9.1.1 Le problème

On considère une boucle, dans le cas général (7.4), d'amplitude

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (9.1)$$

dans laquelle les dénominateurs s'écrivent $D_i^2 = (Q + r_i)^2 - m_i^2 + i\lambda$. On note $A(Q)$ l'intégrant de l'amplitude : $\mathcal{A} = \int d^n Q A(Q)$, qui se trouve être une fonction rationnelle de l'impulsion Q^μ dans le cas des théories de jauge standards. L'ensemble de définition est donc égale à l'ensemble d'analyticité (parag. 7.1.2). Landau a donné des conditions générales pour démasquer ces singularités. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes dans le sens mathématique mais seulement nécessaires au sens physique, il faut vérifier que toutes les singularités correspondent à une réalité physique. L'intégration sur l'impulsion de la boucle autour de la singularité engendre, à priori, des divergences. Cependant il faut étudier en détails le numérateur pour voir si il n'y a pas de compensations et si l'intégration ne reste pas finie. On observera ce phénomène dans le cas des divergences infrarouges en QED et QED scalaire. De plus, on peut aussi s'attendre à avoir des diagrammes divergents, mais assister à des compensations entre diagrammes, c'est ce que l'on observera dans le cas du double parton scattering en QED et QED scalaire. Dans tous les cas, les propagateurs fermioniques ont tendance à annuler les résidus et donc à compenser les divergences mais premièrement, on va donner la méthode de Landau pour rechercher ces singularités.

9.1.2 Recherche des singularités

On recherche les singularités de l'amplitude d'une boucle de bosons ou de fermions décrite par (7.4). Pour pouvoir étudier le comportement autour de la singularité, on effectue une régularisation dimensionnelle en étendant l'espace de Minkowski à quatre dimensions en un espace à $n = 4 - 2\epsilon$ dimensions. On prend les mêmes conventions que dans le chapitre précédent (parag. 8.3.1). Pour étudier le comportement autour d'une singularité, il est préférable de se placer dans l'espace des paramètres de Feynman plutôt que dans l'espace des impulsions. L'intérêt de cet espace de Feynman est de transformer le dénominateur de la fonction à intégrer d'un produit en une somme de termes. Il est donc plus facile de faire des développements limités autour de la singularité.

On considère les paramètres de Feynman $z_1 \dots z_N \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^N z_i = 1$ (parag. 7.1.3). Comme on cherche seulement à localiser les singularités et à définir le comportement autour de ces singularités, on écrira donc l'amplitude à une constante multiplicative près C :

$$\mathcal{A} = C \int d^n Q \int dz_i \frac{\text{Num}(Q)}{D(Q, z_1, \dots, z_N)}, \quad (9.2)$$

avec

$$D(Q, z_1, \dots, z_N) = \left(\sum_{i=1}^N z_i (Q + r_i)^2 + i\lambda \right)^N = (L^2 - R^2)^N \quad (9.3)$$

$$L = Q + \sum_{i=1}^N z_i r_i \quad (9.4)$$

$$R^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i z_j r_i \cdot r_j - \sum_{i=1}^N z_i (r_i^2 - m_i^2) - i\lambda. \quad (9.5)$$

À partir de cette écriture de l'amplitude, on peut calculer son ensemble d'analyticité \mathcal{D}_{AA} . Il est donné par les conditions de Landau [48].

Conditions de Landau 1. Une singularité est un point de l'espace des phases où l'intégrant de l'amplitude (9.2) n'est pas analytique. On considère le dénominateur D comme une fonction de $N+1$ inconnues : $D = D(Q, z_1 \dots z_N)$ (9.3). Dans les cas standards, le numérateur de l'intégrant est un polynôme, donc une singularité est un point de l'espace à $N+1$ inconnues, solution du système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1..N], z_i D_i^2 = 0 \\ \text{et } \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{i=1}^N z_i D_i^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1..N], z_i = 0 \text{ ou } Q_i^2 = m_i^2 \\ \text{et } \sum_{i=1}^N z_i Q_i^\mu = 0 \end{array} \right. \quad (9.6)$$

La première condition nous donne tout simplement les points où le dénominateur s'annule. Cependant, on a étendu l'espace d'intégration \mathbb{R}^4 en un espace complexe \mathbb{C}^4 . Pour qu'il y ait non analyticité, il faut non seulement qu'il y ait un pôle sur l'axe réel mais en plus que l'on ne puisse pas déformer le contour d'intégration autour de ce pôle (Fig. 9.1), que l'on appelle une condition de pincement (deuxième condition). Ces conditions sont aussi rappelées dans [15, 49, 50, 51]. Elles ne

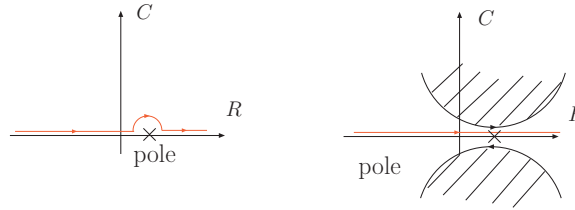


FIG. 9.1 – Pôles et conditions de pincements.

sont pas commodes à manipuler, on va donc l'intégrer sur l'impulsion de la boucle et transformer les conditions de Landau.

Remarque : Ces conditions sont nécessaires mais pas suffisantes pour avoir une singularité. En effet, les solutions de ces conditions donnent une valeur pour les variables $(Q, z_1 \dots z_N)$, cependant, elles doivent aussi respecter les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N z_i = 1 \\ \forall i \in [1..N], z_i \in [0..1] \end{array} \right. \quad (9.7)$$

Enfin, les solutions des conditions de Landau peuvent donner des solutions non physiques (masses complexes...). Seules les solutions physiques nous intéresseront par la suite.

  cause de la conservation de l'énergie impulsion dans la boucle, les r_i^μ sont définis à une constante près. On décide de les relier par la relation linéaire :

$$\sum_{i=1}^N z_i r_i^\mu = 0, \quad (9.8)$$

qui simplifie légèrement les conditions de Landau :

$$(9.6) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1..N], z_i = 0 \text{ ou } Q_i^2 = m_i^2 \\ \text{et } Q^\mu = - \sum_{i=1}^N z_i r_i^\mu = 0 \end{array} \right. \quad (9.9)$$

□

Cette dernière forme des conditions de Landau sera celle que l'on utilisera par la suite.

On appelle les « leading singularities », les singularités pour laquelle tous les paramètres de Feynman sont nuls. Elles sont d'ordres inférieurs, quand le nombre de paramètres de Feynman non-nuls augmente. On représente les singularités par un diagramme pincé, diagramme auquel on a pincé les propagateurs correspondant aux paramètres de Feynman nuls. Maintenant, on va faire le lien entre les singularités de Landau et les divergences infrarouges que l'on trouve dans la littérature.

9.1.3 Divergences infrarouges

Les divergences infrarouges sont définies dans le cas où les particules de la boucle sont non massives. Il existe deux cas particuliers de divergences infrarouges, qui correspondent aux singularités du premier et du second ordre dans le cas non massif.

On considère la singularité de Landau définie par :

$$\forall i \in [2..N], z_i = 0 \text{ et } z_1 \neq 0. \quad (9.10)$$

D'après les équations de Landau (9.9) : $Q^\mu = r_1^\mu = 0$ donc $D_1^2 = (Q + r_1)^2 = 0$. Le propagateur 1 a une impulsion nulle, il n'y a pas de transfert d'énergie dans le propagateur 1. Cette singularité s'appelle une divergence molle.

Définition 9.1.1. *On appelle divergence soft ou molle, la limite nulle de l'impulsion d'un propagateur dans une boucle.*

On considère maintenant la singularité de Landau définie par :

$$\forall i \in [3..N], z_i = 0 \text{ et } z_1, z_2 \neq 0. \quad (9.11)$$

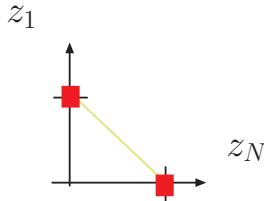
En introduisant la condition sur les paramètres de Feynman $\sum_{i=1}^N z_i = 1$ dans la condition de pincement, alors on obtient directement :

$$(9.7) \Rightarrow r_1^\mu = -z_2 p_2^\mu \quad r_2^\mu = z_1 p_2^\mu \quad (9.12)$$

Puisque l'impulsion de la particule de la boucle est nulle ($Q^\mu = 0$), on en conclut que les deux propagateurs entourant la particule externe 2 sont colinéaires à cette particule : $Q_1^\mu \propto Q_2^\mu \propto p_2^\mu$.

Définition 9.1.2. *On appelle limite colinéaire dans une boucle, lorsque l'impulsion des deux propagateurs adjacents à une particule externe deviennent proportionnels à l'impulsion de cette particule.*

Remarque : Dans la limite où l'un des paramètres de Feynman z_1 ou z_2 devient nul, les deux divergences colinéaires et molles deviennent équivalentes.



La somme des deux paramètres de Feynman doit être égal à 1. Les extrémités de ce simplexe correspondent aux divergences molles. L'espace en vert correspond aux divergences colinéaires et en rouge aux divergences molles. L'espace des paramètres de Feynman n'est pas séparé en divergences sans recouvrement. Cependant on peut effectuer des changements de variables pour le séparer.

Il existe bien d'autres cas de singularités de Landau. Cependant on étudiera que les deux plus rencontrées, c'est-à-dire les divergences infrarouges. On fera aussi un paragraphe sur les singularités de Landau qui conduisent au « double parton scattering ». Les conditions de Landau sont des conditions nécessaires pour avoir une singularité, mais comme on peut le voir dans les deux exemples précédents, les conditions suffisantes définissent la singularité comme une réalité physique. Ces divergences sont appelées « infrarouges » puisqu'elles correspondent à la limite où l'impulsion de la particule de la boucle tend vers zéro, c'est à dire quand sa longueur d'onde devient petite, d'où le nom de divergences infrarouges. Les singularités de Landau, lorsqu'elles sont physiques, correspondent toujours à la limite réelle des particules virtuelles. Elles mettent donc toujours en évidence un processus physique interne.

Maintenant, on va chercher à comprendre le comportement autour des divergences infrarouges. Pour cela, il faut continuer d'intégrrer l'amplitude \mathcal{A} , donnée par (9.2). La particule tournante est non massive, donc $m_i^2 = 0$ et son impulsion tend vers zéro. On peut alors simplifier la formule de l'amplitude. On effectue le changement de variable linéaire $Q \rightarrow L$ et dans la limite infrarouge, quelque soit le numérateur $\text{Num}(L^\mu, z_1, \dots, z_N)$, l'impulsion tend vers zéro dans celui-ci. Il restera seulement des paramètres de Feynman :

$$\mathcal{A}_N = C \int d^n L \int dz_i \frac{\text{Num}(L^\mu, z_1, \dots, z_N)}{(L^2 - R^2)^N} \quad (9.13)$$

$$\xrightarrow{IR} C \int d^n L \int dz_i \frac{\text{Num}(0, z_1, \dots, z_N)}{(L^2 - R^2)^N} = C \int dz_i \text{Num}(0, z_1, \dots, z_N) (R^2)^{-N + \frac{n}{2}}. \quad (9.14)$$

Remarque : On peut redéfinir les conditions de Landau dans le cas où l'intégration sur l'impulsion a été faite (9.14). On peut montrer que les conditions de Landau (9.9) sont équivalentes à :

$$(9.9) \Leftrightarrow \forall i \in [1..N], \begin{cases} z_i = 0 \\ \text{ou } \frac{\partial R^2}{\partial z_i} = 0. \end{cases} \quad (9.15)$$

□

Pour pouvoir regarder le comportement de l'amplitude autour de chacune des deux divergences infrarouges, il faut faire des approximations sur le dénominateur R^2 . Ces approximations vont dépendre de la divergence regardée. On va commencer par traiter les divergences molles puis les divergences colinéaires. Le cas des bulles sera traité séparément.

9.1.4 Divergences molles

On regarde, par exemple, la divergence molle du propagateur 1 de la boucle d'amplitude (9.14). Cette divergence molle correspond aux conditions de Landau : $\forall i \neq 1, z_i = 0$. Donc on introduit une grandeur $\delta \ll 1$, caractérisant la valeur des paramètres :

$$\begin{cases} z_1 \simeq O(1) \\ z_2, z_N \simeq O(\delta) \\ z_3, \dots, z_{N-1} \simeq O(\delta^2). \end{cases} \quad (9.16)$$

Ces conditions, ne sont valables que pour $N > 2$. Avec ces approximations (9.16), à l'ordre $O(\delta^2)$, le dénominateur R^2 devient :

$$R^2 = \sum_{i=3}^{N-1} z_i \mathcal{S}_{i1} + z_2(z_2 - 1)\mathcal{S}_{21} + z_N(z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + z_2 z_N (\mathcal{S}_{21} + \mathcal{S}_{1N} - \mathcal{S}_{2N}) + O(\delta^2). \quad (9.17)$$

On remplace R^2 , par son approximation molle dans l'amplitude \mathcal{A} , puis on intègre sur les $N - 3$ paramètres de Feynman les plus petits ($z_3 \dots z_{N-1}$), qui ne sont pas contraints par la fonction delta. On ne garde que la partie divergente de l'amplitude :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) \text{Num}(0, z_1, z_2, 0 \dots 0, z_N) \\ (z_2(z_2 - 1)\mathcal{S}_{21} + z_N(z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + z_2 z_N (\mathcal{S}_{21} + \mathcal{S}_{1N} - \mathcal{S}_{2N}) + O(\delta^2))^{\frac{\alpha}{2} - 3} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Il suffit de regarder alors le comportement de la fonction à ce pôle en intégrant sur les derniers paramètres de Feynman. Mais cette fois, ça dépend de la fonction $\text{Num}(0, z_1, z_2, 0 \dots 0, z_N)$ et donc de la théorie.

9.1.5 Divergences colinéaires

On regarde la divergence colinéaire des deux propagateurs autour de la particule 1. Cette divergence correspond au cas particulier des conditions de Landau : $\forall i \neq N, 1, z_i = 0$. On introduit $\delta \ll 1$ caractérisant les paramètres de Feynman :

$$\begin{cases} z_1, z_N \simeq O(1) \\ z_2, \dots, z_{N-1} \simeq O(\delta^2) \end{cases} \quad (9.19)$$

Là encore, ces conditions ne sont valables que pour $N > 2$. Avec ces approximations (9.19), à l'ordre $O(\delta^2)$, le dénominateur R^2 s'écrit :

$$R^2 = \sum_{i=3}^{N-1} z_i \mathcal{S}_{i1} (2z_N - 1) + z_N(z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + O(\delta^2). \quad (9.20)$$

On remplace R^2 , dans l'amplitude, par son approximation colinéaire (9.20), puis on intègre l'amplitude \mathcal{A} sur les $N - 2$ paramètres de Feynman les plus petits ($z_2 \dots z_{N-1}$) non contraints par la fonction delta. Le pôle de l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_N = C \int dz_1 dz_N \delta(1 - z_1 - z_N) \text{Num}(0, z_1, 0 \dots 0, z_N) (z_N(z_N - 1) \mathcal{S}_{N1} + O(\delta^2))^{\frac{\epsilon}{2} - 2} \quad (9.21)$$

Parmi ces pôles, il y a ceux qui viennent des divergences molles qu'il faut soustraire. Il suffit de regarder alors le comportement de la fonction à ce pôle en intégrant sur les derniers paramètres de Feynman. Le comportement au pôle va dépendre de la fonction $\text{Num}(0, z_1, 0 \dots 0, z_N)$, qui elle-même dépend de la théorie dans laquelle nous nous trouvons.

Ces deux formules approchées (9.18, 9.21) ne sont valables que pour les boucles de plus de trois propagateurs. On va donc commencer par étudier les divergences infrarouges dans les boucles à deux pattes externes que l'on appelle « bulles ».

9.1.6 Divergences infrarouges dans les Bulles

Proposition 9.1.3. *Quelque soit la théorie, une bulle non-massive avec des particules externes massives : $p_1^2 = \mathcal{S}_{12} \neq 0$, ne présente pas de divergence infrarouge. Si au contraire la particule externe est non massive alors, il y a divergence.*

Démonstration : Soit une boucle avec deux pattes externes massives : $\mathcal{S}_{12} \neq 0$. L'amplitude s'écrit, dans la limite infrarouge, d'après (9.2) et (9.5) :

$$\mathcal{A}_2 = C \int_0^1 dz_2 \int dz_1 \delta(1 - z_1 - z_2) \text{Num}(0, z_1, z_2) (z_2 z_1 \mathcal{S}_{21})^{-\epsilon}. \quad (9.22)$$

Le numérateur est un polynôme des paramètres de Feynman. L'intégration sur z_1 est évidente et l'intégration sur z_2 ne présente aucune divergence particulière par comptage de puissance. Dans le cas d'une divergence colinéaire on a un raisonnement équivalent. On voit immédiatement que si l'une des pattes externes est sans masse, alors le dénominateur tend vers zéro et donc il y a divergence. \square

Remarque : Dans un cas physique d'une réaction, les particules externes d'une bulle doivent être hors couches de masses ou avoir une masse.

Ce résultat aura une importance capitale dans la suite, principalement dans le paragraphe sur la réduction des intégrales. Dans la suite, on va étudier les divergences molles et colinéaires dans les quatre théories ϕ^3 , QED, QED scalaire, et QED $^{\mathcal{N}=1}$ pour des boucles avec au moins trois propagateurs.

9.2 Divergences infrarouges en théorie ϕ^3

L'intégrant de l'amplitude d'une boucle donnée par (9.2), en théorie ϕ^3 a un numérateur constant $\text{Num}(0, z_1, z_2, \dots, z_N) = 1$. Suivant le type de divergences, on regarde l'approximation de l'amplitude associée : (9.18) en limite molle et (9.21) en limite colinéaire.

9.2.1 Divergences molles d'une boucle en théorie ϕ^3

Dans l'approximation molle du propagateur 1 (9.18) d'une boucle de $N > 2$ propagateurs, l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_N^{\phi^3} = C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) (z_2(z_2 - 1)\mathcal{S}_{21} + z_N(z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + z_2 z_N (\mathcal{S}_{21} + \mathcal{S}_{1N} - \mathcal{S}_{2N}) + O(\delta^2))^{\frac{n}{2}-3}. \quad (9.23)$$

Il y a trois cas différents à distinguer suivant que les particules externes 1 et 2 entourant le propagateur 1 ont une masse ou pas. Premièrement, si les deux particules 1 et 2 sont sur couches de masses et non massives, alors les deux éléments non diagonaux de la matrice cinématique sont nuls $\mathcal{S}_{21} = \mathcal{S}_{1N} = 0$. L'amplitude (9.23) devient :

$$\mathcal{A}_N^{\phi^3} = C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) (z_2 z_N \mathcal{S}_{2N} + O(\delta^2))^{-1-\epsilon} \propto \frac{1}{\epsilon^2}. \quad (9.24)$$

Il y a un problème « régularisé » de divergence lors de l'intégration sur z_2 , qui fait apparaître le facteur ϵ^{-1} et lors de l'intégration de z_N à cause de la puissance de R^2 . Si maintenant, seule la particule 1 est sur couche de masse et sans masse, alors seul un élément de matrice est nul $\mathcal{S}_{1N} = 0$, il en sera de même pour la particule 2 :

$$\mathcal{A}_N^{\phi^3} = C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) z_2^{\frac{n}{2}-3} ((z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + z_2 (\mathcal{S}_{21} - \mathcal{S}_{2N}) + O(\delta^2))^{-1-\epsilon} \propto \frac{1}{\epsilon}. \quad (9.25)$$

Il y a toujours le même problème d'intégration sur z_2 mais celui sur z_N a disparu. L'introduction d'une masse a réduit un peu le problème infrarouge mais ne l'a pas totalement éliminé. Enfin, si les deux particules, entourant le propagateur 1, sont massives et ou hors couches de masses alors il n'y a plus de problème d'intégration sur tous les paramètres de Feynman comme le montre (9.23).

Proposition 9.2.1. *Les intégrales scalaires non-massives avec des pattes non massives à trois points une masse, quatre points sans masse, quatre points une masse et quatre points deux masses adjacentes ont des divergences molles alors que les intégrales scalaires à trois points deux masses, trois points trois masses, quatre points deux masses opposées, quatre points trois masses et quatre points quatre masses n'ont pas de divergences molles.*

On peut généraliser le résultat pour des intégrales de dimensions supérieures.

Proposition 9.2.2. *Une intégrale scalaire non-massive et avec des pattes sans masse et sur couche de masse de dimension $n + 2t$ avec $t > 0$, n'a pas de divergences molles.*

Démonstration : Soit une intégrale scalaire de dimension $n + 2$. Dans la limite des divergences molles,

$$\mathcal{A}_4^{\phi^3 n+2} = C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) (z_2(z_2 - 1)\mathcal{S}_{21} + z_N(z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + z_2 z_N (\mathcal{S}_{21} + \mathcal{S}_{1N} - \mathcal{S}_{2N}) + O(\delta^2))^{\frac{n}{2}-2}, \quad (9.26)$$

La puissance de R^2 est $-\epsilon$, donc l'intégration fait apparaître un facteur $(1 - \epsilon)^{-1}$ qui n'est pas divergent. \square

9.2.2 Divergences colinéaires

On regarde l'approximation colinéaire autour de la particule externe 1 (9.21) d'une boucle de $N > 2$ propagateurs :

$$\mathcal{A}_N^{\phi^3} = C \int dz_1 dz_N \delta(1 - z_1 - z_N) (z_N(z_N - 1)\mathcal{S}_{N1} + O(\delta^2))^{\frac{n}{2}-2}. \quad (9.27)$$

Or l'élément de matrice du dénominateur est la masse de la particule 1 : $\mathcal{S}_{1N} = p_1^2$. On voit immédiatement que si la particule 1 est sur couche de masse et sans masse alors il y a divergence

mais que si elle est hors couche de masse ou non-massive alors il n'y a plus aucun problème de divergence et l'on peut intégrer sur les deux derniers paramètres de Feynman. Dans le cas où la patte 1 est non massive, en poussant plus loin le développement limité de R^2 alors on se rend compte que la divergence à un comportement en ϵ^{-1} .

Proposition 9.2.3. *Les intégrales scalaires non massive avec des pattes non massives à trois points une masse, trois points deux masses, quatre points sans masse, quatre points une masse, quatre points deux masses adjacentes, quatre points deux masses opposées et quatre points trois masses ont des divergences colinéaires alors que les intégrales scalaires à trois points trois masses et quatre points trois masses n'ont pas de divergences colinéaires.*

Proposition 9.2.4. *Une intégrale scalaire non massive avec des particules entrantes sans masse et sur couche de masse de dimension $n + 2t$ avec $t > 0$, n'a pas de divergence colinéaire.*

Démonstration : Soit une intégrale scalaire de dimension $n + 2$ dans la limite des divergences colinéaires. Dans la limite colinéaire

$$\mathcal{A}_N^{\phi^3} = C \int dz_1 dz_N \delta(1 - z_1 - z_N) (z_4(z_4 - 1) \mathcal{S}_{N1})^{\frac{n}{2}-1}, \quad (9.28)$$

l'intégrale est régularisée car la puissance de R^2 est de $1 - \epsilon$. Il n'y a aucune divergence qui apparaît lors de l'intégration. \square

9.2.3 Régularisation par les masses

On remarque dans les deux paragraphes précédents que l'introduction d'une particule massive ou d'une particule sans masse mais hors couche de masse élimine les divergences molles et les divergences colinéaires. On appelle ce phénomène « la régularisation par les masses ». Il est encore plus pertinent lors de la restitution de la masse à la particule de la boucle.

Proposition 9.2.5. *Une amplitude décrite par une boucle massive n'a aucune divergence infrarouge.*

Démonstration : Pour simplifier, on considère que la masse de la particule dans les propagateurs est la même tout au long de la boucle : $\forall i \in [1..N], m_i^2 = M^2$. Dans la limite molle où les pattes externes sont sans masse, il n'y a aucun problème d'intégration dans l'amplitude

$$\mathcal{A}_N^{\phi^3} = C \int dz_i (R^2(M=0) + M^2)^{-N+\frac{n}{2}} \rightarrow C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) (M^2 + O(\delta))^{-1-\epsilon}, \quad (9.29)$$

grâce à l'introduction de la masse M^2 . Il en est de même pour la limite colinéaire. \square

Remarque : Le fait qu'il y ait une masse pour la particule tournante, rend la résolution des équations de Landau physiquement impossible dans la limite infrarouge.

9.3 Divergences infrarouges en QED.

On considère cette fois une boucle, d'amplitude (9.2), en QED. Dans les deux premiers paragraphes, on regarde le comportement des divergences pour une boucle de fermions, puis dans le troisième on regardera le cas d'un photon s'incrutant dans la boucle.

9.3.1 Divergences molles en QED d'une boucle de fermions

Proposition 9.3.1. *Une boucle de fermions avec au moins quatre photons sur couches de masses n'a pas de divergences molles.*

Démonstration : On regarde la divergence molle du propagateur 1, donc le numérateur s'écrit : $\text{Num}(Q^\mu) = \dots \not{Q}_2 \not{z}_2 \not{Q}_1 \not{z}_1 \not{Q}_N \dots$. Comme les r_N ne sont pas tous fixés, on pose $\sum_{i=1}^N z_i r_i = 0$. Dans l'approximation molle (9.16), le numérateur devient, sachant que $z_2 + z_N = 1$ et que les deux photons sont sur couches de masses :

$$\text{Num}(0, z_1, z_2, 0, \dots, z_N) = (z_2 r_2 + z_N r_N)^\mu (z_2 r_2 + z_N r_N + p_1)^\nu (z_2 r_2 + z_N r_N - p_2)^\rho \dots \not{\gamma}_\rho \not{z}_2 \not{\gamma}_\mu \not{z}_1 \not{\gamma}_\nu \quad (9.30)$$

$$= z_2 z_N T, \quad (9.31)$$

où T est un polynôme des paramètres de Feynman, dont les coefficients sont des chaînes de matrices « gamma ». Le numérateur $\text{Num}(0, z_1, z_2, 0, \dots, z_N)$ est proportionnel aux paramètres de Feynman z_2 et z_N . L'amplitude de la boucle, dans l'approximation molle (9.18), sachant que tous les photons qui entrent sont sur couches de masses, se simplifient :

$$\mathcal{A}_N^S = C \int dz_1 dz_2 dz_N \delta(1 - z_1) T(z_2)^{-\epsilon} (z_N)^{-\epsilon}. \quad (9.32)$$

Il est donc possible d'intégrer sur z_2 et sur z_N sans avoir aucun problème de divergence, car leur puissance a augmenté d'une unité. \square

Si les photons sont hors couches de masses alors il n'y a aucun problème non plus.

9.3.2 Divergences colinéaires en QED dans une boucle de fermions

Proposition 9.3.2. *Une boucle de fermions avec au moins quatre photons sur couches de masses n'a pas de divergence colinéaire. Si les photons sont hors couches de masses alors il n'y a aucune divergence non plus.*

Démonstration : On regarde la divergence colinéaire autour du photon 1 sur couche de masse. Le numérateur de la boucle de fermion, $\text{Num} = \dots \not{z}_2 \not{q}_1 \not{z}_1 \not{q}_N \not{z}_N \dots$, se simplifie car tous les r_N^μ ne sont pas tous fixés. On pose $r_1 = 0$. Dans l'approximation colinéaire autour du photon 1 (9.19), sachant que $z_1 + z_N = 1$, il devient :

$$\text{Num} = (-z_1 r_1 - z_N r_N)^{\mu_1} (r_N - z_1 r_1 - z_N r_N)^{\mu_N} \dots \not{z}_2 \not{\gamma}_{\mu_1} \not{z}_1 \not{\gamma}_{\mu_N} \not{z}_N \dots \quad (9.33)$$

$$= -z_N z_1 r_N^{\mu_1} r_N^{\mu_N} \dots \not{z}_2 \not{\gamma}_{\mu_1} \not{z}_1 \not{\gamma}_{\mu_N} \not{z}_N \dots = 0. \quad (9.34)$$

Comme $r_N = -p_1$, alors le numérateur s'annule. Comme le photon 1 est sur couche de masse et que son vecteur polarisation est transverse, alors $\not{p}_1 \varepsilon_1 \not{p}_1 = 0$. Par conséquent l'amplitude est nulle dans la limite colinéaire. \square

9.3.3 Divergences infrarouges en QED dans une boucle avec au moins un photon

Le numérateur d'une boucle en QED dont le propagateur 1 est un photon s'écrit :

$$\text{Num}(Q^\mu) = \langle N \gamma_\mu Q_N \dots Q_2 \gamma_\nu 1 \rangle \eta^{\mu\nu} = -2 \langle N Q_2 \dots Q_N 1 \rangle + 2\epsilon \langle N Q_N \dots Q_2 1 \rangle. \quad (9.35)$$

On a contracté le tenseur métrique en dimension n , sachant qu'il y a un nombre impair de matrice γ dans la chaîne. On suppose encore que $r_1 = 0$. Maintenant, on va regarder le comportement du numérateur dans le cas d'une limite molle du propagateur 1 puis d'une limite colinéaire autour de la particule 1.

Proposition 9.3.3. *Une boucle en QED dont l'un des propagateurs est un photon n'est pas régularisée dans la limite molle de ce propagateur.*

Démonstration : On peut faire une démonstration analytique mais il suffit de remarquer que le propagateur du photon se comporte comme le propagateur d'un scalaire en terme d'impulsion. Donc d'après la proposition 9.2.1, la divergence n'est pas régularisée en dimension quatre. Dans le cas des autres propagateurs fermionique il suffit d'utiliser le même genre de démonstration que dans la proposition 9.3.1. \square

Les divergences molles dans une ligne de fermions sont régularisées provient du fait que le propagateur fermionique a une puissance non nulle de l'impulsion de la boucle au numérateur ce qui n'est pas le cas pour le propagateur de photon ou du scalaire.

Proposition 9.3.4. *On considère une boucle en QED dont le propagateur 1 est un photon. Alors les deux limites colinéaires autour de ce propagateur ne sont régularisées.*

Démonstration : Là encore, une démonstration analytique n'est pas nécessaire. On remarque que ce type de divergence est régularisée pour une ligne fermionique car les numérateurs des propagateurs entourant la particule 1 tendent vers l'impulsion de la particule externe 1. Dans le cas d'une ligne avec un photon, il y a un double problème, non seulement le propagateur du photon n'a pas d'impulsion au numérateur, mais en plus ce numérateur contient la métrique $\eta^{\mu\nu}$ qui inverse le sens de la chaîne de matrice γ comme le montre le numérateur (9.35). Il n'y a donc plus aucune compensation possible. Pour les autres limites colinéaires, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 9.3.2. \square

9.4 Divergences infrarouges en QED scalaire.

Proposition 9.4.1. *En QED scalaire, une boucle non massive de scalaires n'a pas de divergences molles ni colinéaires.*

Démonstration : La boucle est décrite par l'amplitude (9.2). Il faut donc regarder les divergences autour des deux vertex. Cependant le vertex double a pour amplitude $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j$. Donc, tout se passe comme si il y avait un photon massif qui entre dans la ligne de scalaire à un vertex double. Or les masses régularisent les divergences molles et colinéaires. Donc il ne peut y avoir de divergences molles dans un propagateur touchant un vertex double ni de divergences colinéaires autour des photons du vertex double. On regarde maintenant les divergences dans une boucle de vertex simples. Le numérateur s'écrit $\text{Num} = q_1^{\mu_1} \dots q_N^{\mu_N} \varepsilon_{1\mu_1} \dots \varepsilon_{N\mu_N}$. La structure du numérateur est identique en QED scalaire et en QED donc, en reprenant la même démonstration qu'en QED, on arrive au même résultat. \square

Proposition 9.4.2. *On considère une boucle en QED scalaire dont le propagateur 1 est un photon. La divergence molle et les divergences colinéaires autour de ce propagateur ne sont pas régularisées.*

Démonstration : On utilise les mêmes arguments qu'en QED. \square

9.5 Résumé - Conclusion.

On peut donner des conditions nécessaires dans la matrice cinématique pour qu'il ait des divergences infrarouges. Une boucle d'amplitude :

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (9.36)$$

peut avoir une divergence molle sur le propagateur 2 si la matrice cinématique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X & 0 & X & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ X & 0 & X & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (9.37)$$

et une divergence colinéaire sur la patte externe 2 si la matrice cinématique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & X & \dots \\ 0 & 0 & X & \dots \\ X & X & X & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

Cependant le numérateur peut régulariser la divergence.

Résultat 9.5.1. *Les propagateurs fermioniques et les vertices en QED scalaire compensent les divergences contrairement aux propagateurs de photons et de scalaires. Une boucle en QED ou en QED scalaire à la même structure infrarouge. Les seules divergences molles possibles dans une*

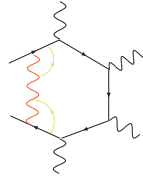


FIG. 9.2 – En rouge le propagateur mou non régularisé et en vert les colinéarités non régularisées dans une boucle de fermions ou de scalaires.

boucle en QED et en QED scalaire sont les photons dans la boucle et les divergences colinéaires autour des particules non massive adjacents au photon.

9.6 Singularités de Landau et « le double parton scattering ».

Dans cette partie, on considère un diagramme avec une boucle non massive et six pattes externes entrantes sans masses. Les résultats sont extensibles pour des boucles de plus de six pattes externes.

9.6.1 Résolution des équations de Landau pour des singularités du second ordre.

On étudie les singularités de Landau du second ordre dans une boucle à six pattes externes sans masse. Il y a donc deux paramètres de Feynman nuls ou deux propagateurs pincés. Si il y a plus de trois propagateurs non pincés adjacents, alors les singularités de Landau correspondent à des cas particuliers dans lesquels les pattes externes sont colinéaires. On ne s'intéressera donc qu'aux solutions qui correspondent à des propagateurs adjacents deux à deux (fig. 9.3). Les conditions sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = z_5 = 0 \text{ et } Q_1^2 = Q_6^2 = Q_3^2 = Q_4^2 = 0 \\ \text{et } \frac{\partial}{\partial Q_\mu} \sum_{i=1}^6 z_i Q_i^2 = 0. \end{array} \right. \quad (9.39)$$

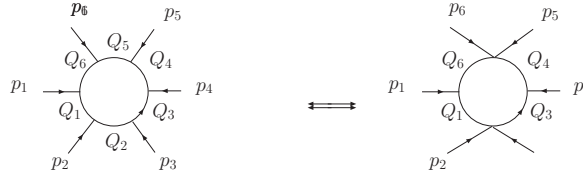


FIG. 9.3 – Singularité de Landau et son diagramme pincé

On a trois relations supplémentaires dues, à la relation linéaire sur les paramètres de Feynman, à la conservation de l'énergie impulsion et au degré de liberté sur les r_i^μ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 z_i = 1 \\ \forall i \in [1..6], r_i - r_{i-1} = p_i \\ \sum_{i=1}^6 z_i r_i^\mu = 0. \end{cases} \quad (9.40)$$

Sachant que $\forall i \in [1..6], Q_i = Q + r_i$, alors on obtient une condition sur r_i , $i \in [1, 3, 4, 6]$:

$$(9.39) \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = z_5 = 0 \text{ et } r_1^2 = r_6^2 = r_3^2 = r_4^2 = 0 \\ Q^\mu = - \sum_{i=1}^6 z_i r_i^\mu = 0 \\ \sum_{i=1}^6 z_i = 1. \end{cases} \quad (9.41)$$

Maintenant, on va réécrire les équations de Landau de façon à faire intervenir le déterminant de la matrice cinématique associé au diagramme pincé.

Proposition 9.6.1. *Soit une boucle non massive avec six pattes externes sans masses. Alors les conditions de Landau s'écrivent :*

$$\begin{cases} z_2 = z_5 = 0 \text{ et } r_1^2 = r_6^2 = r_3^2 = r_4^2 = 0 \\ Q^\mu = - \sum_{i=1}^6 z_i r_i^\mu = 0 \\ \forall i \neq 2, 5, z_i \in]0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = z_5 = 0 \text{ et } Q^\mu = - \sum_{i=1}^6 z_i r_i^\mu = 0 \\ \det(\mathcal{S}) = 0 \\ \forall i \neq 2, 5, z_i \in]0, 1]. \end{cases} \quad (9.42)$$

\mathcal{S} est la matrice cinématique du diagramme pincé correspondant à cette singularité de Landau. Les relations de signe sur les paramètres de Feynman sont absolument indispensables.

Démonstration : On prend le premier système et on transforme la deuxième équation en la multipliant par $r_{j\mu}$ de chaque coté de l'équation de façon à faire apparaître la matrice cinématique du diagramme pincé :

$$\sum_{i=1 \neq 2, 5}^6 z_i r_i^\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1 \neq 2, 5}^6 z_i r_i \cdot r_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1 \neq 2, 5}^6 z_i \left((r_i - r_j)^2 - r_i^2 - r_j^2 \right) = 0. \quad (9.43)$$

Or comme on a $Q_1^2 = Q_6^2 = Q_3^2 = Q_4^2 = 0 \Leftrightarrow r_1^2 = r_6^2 = r_3^2 = r_4^2 = 0$, alors on reconnaît la matrice cinématique $\mathcal{S} \propto (r_i - r_j)^2$ du diagramme pincé puisque la masse de la particule de la boucle est nulle et que l'on somme sur les propagateurs dont les paramètres de Feynman ne sont pas nuls :

$$\sum_{i=1 \neq 2, 5}^6 z_i r_i^\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1 \neq 2, 5}^6 z_i \mathcal{S}_{ij} = 0 \Leftrightarrow \det(\mathcal{S}) = 0. \quad (9.44)$$

Comme aucune des composantes du vecteur \vec{z}_i n'est nulle, alors ce vecteur est vecteur propre de la matrice cinématique \mathcal{S} de valeur propre nulle, donc le déterminant est nul. Pour la réciproque, on suppose que le système de droite de (9.42) est vrai. La condition $\det(\mathcal{S}) = 0$, sachant que tous les paramètres de Feynman sont strictement positifs, implique :

$$\forall j \neq 2, 5, \sum_{i \neq 2, 5} z_i (r_i - r_j)^2 = 0 \Rightarrow \forall i \neq 2, 5, r_i^2 = 0. \quad (9.45)$$

La condition $\det(\mathcal{S}) = 0$ est indépendante de l'impulsion Q^μ et n'est donc pas suffisante, il faut forcément une condition faisant intervenir l'impulsion la boucle Q^μ , par exemple, la condition $Q^\mu = \sum_{i=1}^6 z_i r_i^\mu = 0$. Dans ce cas la réciproque est vérifiée immédiatement. \square

Maintenant on va traduire de façon géométrique cette singularité.

9.6.2 Configurations cinématique : « Double parton scattering »

Définition 9.6.2. Une boucle non massive avec six pattes externes sans masse se trouve dans une configuration cinématique de « double parton scattering » si et seulement si les conditions suivantes sont respectées (fig. 9.4) :

$$\begin{cases} p_1 + p_4 \rightarrow p_2 + p_3 + p_5 + p_6 \\ Q_1^\mu, Q_6^\mu \propto p_1 \\ Q_3^\mu, Q_4^\mu \propto p_4. \end{cases} \quad (9.46)$$

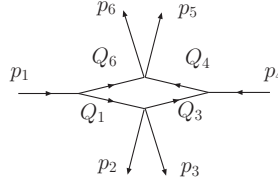


FIG. 9.4 – Configuration cinématique des pattes externes d'une boucle en "double parton scattering"

Les deux particules externes de l'état initial se décomposent en deux particules colinéaires qui elles-mêmes interagissent entre elles pour émettre quatre particules. Cette configuration cinématique correspond au cas particulier où la boucle, composée de particules virtuelles, résonne avec un sous processus physiques. On va chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser le double parton scattering et pour le repérer facilement dans l'espace des phases.

Proposition 9.6.3. Une boucle en configuration cinématique de double parton scattering est caractérisée par les conditions nécessaires et suffisantes :

$$(9.6.2) \Leftrightarrow \begin{cases} \det(\mathcal{S}) \rightarrow 0 \\ s_{23}, s_{56} > 0 \\ s_{123} = s_{456}, s_{234} = s_{156} < 0, \end{cases} \quad (9.47)$$

où \mathcal{S} est la matrice cinématique du diagramme associé.

Démonstration : Pour démontrer le sens direct de la relation, on se place dans le centre de masse de l'état initial, composé par les particules 1 et 4. On considère les hypothèses de (9.6.2). En introduit les deux paramètres $x, y \in [0, 1]$ pour exprimer les propagateurs sur la base $\{p_1^\mu, p_4^\mu\}$:

$$\begin{cases} Q_1 = xp_1 \\ Q_6 = (x-1)p_1 \\ Q_3 = (y-1)p_4 \\ Q_4 = yp_4, \end{cases} \quad (9.48)$$

ce qui impose la valeur des variables de Mandelstam :

$$s_{123} = (Q_3 - Q_6)^2 = -(1-y)(1-x) s_{14} \quad s_{234} = (Q_4 - Q_1)^2 = -xy s_{14} \quad (9.49)$$

$$s_{23} = (Q_3 - Q_1)^2 = (1-y)x s_{14} \quad s_{56} = (Q_6 - Q_4)^2 = (1-x)y s_{14}. \quad (9.50)$$

Sachant que $x, y \in [0, 1]$, on vérifie les inégalités de (9.47). De plus, on a immédiatement $\det(\mathcal{S}) = (s_{123}s_{234} - s_{23}s_{56})^2 = 0$. On suppose que l'on a une boucle dont les conditions (9.47) sont vérifiées. On se place dans le référentiel du centre de masse de l'état composé par les particules (1,4). La condition $s_{23} = 2p_2 \cdot p_3 > 0$ signifie que les deux particules 2 et 3 sont dans le même état (initial ou final). Il en est de même pour les particules 5,6 (initial ou final). Les conditions $s_{123}, s_{234} < 0$, signifient que les particules 1,4 ne sont pas dans le même état que les particules 2,3. De même pour les deux conditions $s_{156}, s_{456} < 0$. Donc les inégalités nous donnent les états initiaux et finaux du processus : $p_1 + p_4 \rightarrow p_2 + p_3 + p_5 + p_6$. Maintenant on utilise le même raisonnement que dans la proposition 9.6.1, la nullité du déterminant de la matrice cinématique implique :

$$\forall i \neq 2, 5, \sum_{i \neq 2, 5} z_i (Q_i - Q_j)^2 = 0 \Rightarrow \forall i \neq 2, 5, Q_i^2 = 0. \quad (9.51)$$

Puis en utilisant la conservation de l'énergie-impulsion à chaque vertex $Q_i - Q_{i-1} = p_i$, on obtient les produits scalaires $Q_6 \cdot p_1 = Q_1 \cdot p_1 = 0$ et $Q_3 \cdot p_4 = Q_4 \cdot p_4 = 0$. Puisque les impulsions sont des vecteurs lumières, alors :

$$\begin{cases} Q_1 \propto Q_6 \propto p_1 \\ Q_3 \propto Q_4 \propto p_4. \end{cases} \quad (9.52)$$

□

9.6.3 Autour de la singularité de Landau

Dans le paragraphe précédent, on a vu que la nullité de déterminant de la matrice cinématique est nécessaire pour obtenir le double parton scattering. Cependant, cette configuration cinématique correspond à des points de l'espace de phase où l'amplitude peut diverger. Pour étudier le comportement de l'amplitude, il faut l'étudier localement autour de la singularité. On va donc généraliser les conditions de double parton scattering.

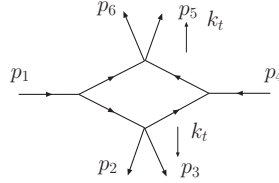


FIG. 9.5 – Boucle hors de la configuration de « double parton scattering ».

Proposition 9.6.4. Soit une boucle non massive, avec six pattes externes sans masse (fig. 9.5), dont on note $k_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k}_t \end{pmatrix}$ l'impulsion transverse de chaque paire (2,3) et (5,6). Alors, le déterminant de la matrice cinématique du diagramme à quatre points deux masses opposées s'écrit :

$$\det(\mathcal{S}) = (s_{123}s_{234} - s_{23}s_{56})^2 = (s_{14}k_t^2)^2. \quad (9.53)$$

Démonstration : On commence par exprimer les deux paires de photons sur la base $\{p_1, p_4, k_t\}$:

$$p_{23} = -xp_1 - (1-y)p_4 + k_t \quad (9.54)$$

$$p_{56} = -(1-x)p_1 - yp_4 - k_t, \quad (9.55)$$

pour calculer les quatre variables de Mandelstam utilisées dans le déterminant :

$$s_{123} = (p_1 + p_{23})^2 = -(1-x)(1-y) s_{14} + k_t^2 \quad (9.56)$$

$$s_{234} = (p_4 + p_{23})^2 = -xy s_{14} + k_t^2 \quad (9.57)$$

$$s_{23} = (p_{23})^2 = x(1-y) s_{14} + k_t^2 \quad (9.58)$$

$$s_{56} = (p_{56})^2 = y(1-x) s_{14} + k_t^2. \quad (9.59)$$

En remplaçant dans le déterminant, on obtient directement le résultat. \square

Ce résultat très général est obtenu sans faire aucune hypothèse sur les propagateurs et la cinématique de la boucle, exceptée l'alignement des deux particules 1 et 4 sur l'axe z . Cet alignement implique que $s_{14} \neq 0$. Donc la condition d'existence de double parton scattering devient :

$$\det(\mathcal{S}) = 0 \Leftrightarrow k_t^2 = 0 \Rightarrow k_t^\mu = 0, \quad (9.60)$$

car l'impulsion transverse est un vecteur spatiale d'énergie nulle.

Résultat 9.6.5. *Dans une boucle (fig. 9.5), le double parton scattering est caractérisé par la nullité des impulsions transverses des deux paires émises. k_t est donc un régulateur qui permet d'approcher la singularité.*

9.7 « Double parton scattering » en théorie ϕ^3

9.7.1 Processus $\phi_1 + \phi_2 \rightarrow \phi_3 + \phi_4$

On suppose le processus, en théorie ϕ^3 , $\phi_1 + \phi_2 \rightarrow \phi_3 + \phi_4$, dans lequel seul les deux scalaires finaux sont massifs de masse m_3^2 et m_4^2 . Un scalaire massif est équivalent à deux scalaires non massifs dans la limite du double parton scattering. On a une configuration équivalente au paragraphe précédent. On pose $s = (p_1 + p_3)^2$ et $t = (p_1 + p_4)^2$. L'amplitude de ce processus :

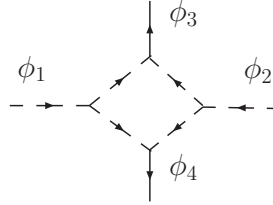


FIG. 9.6 – Configuration en double parton scattering d'une boucle de quatre scalaires dont deux massifs.

$$\mathcal{A}_4^{\phi^3} = g^4 I_{4,2B}^n(s, t, m_3^2, m_4^2), \quad (9.61)$$

est une fonction à quatre points deux masses opposées, donnée dans l'appendice A :

$$I_{4,2B}^n(s, t, M^2, M^2) = \frac{1}{st - m_3^2 m_4^2} \left(\frac{2}{\epsilon^2} ((-s)^{-\epsilon} + (-t)^{-\epsilon} - (-m_3^2)^{-\epsilon} - (-m_4^2)^{-\epsilon}) - 2 F_{2B}(s, t, m_3^2, m_4^2) \right). \quad (9.62)$$

On pose $\Delta^2 = (st - m_3^2 m_4^2)^2$ le déterminant de la matrice cinématique. Dans la limite du double parton scattering, ce déterminant s'annule. On va donc effectuer un développement en série de Laurent de cette intégrale scalaire autour du pôle. Il faut faire attention à la continuation analytique dans les polylogarithmes. Le double parton scattering impose les inégalités suivantes :

$$s, t < 0 \quad \text{et} \quad m_3^2, m_4^2 > 0. \quad (9.63)$$

À chacune des quatre variables de Mandelstam on ajoute une petite partie imaginaire $s \rightarrow s + i\lambda$. et on transforme alors les logarithmes et les dilogarithmes de façon à faire apparaître une variable avec partie réelle positive, par exemple :

$$\ln(-m_3^2 - i\lambda) = \ln(m_3^2 + i\lambda) - i\pi \quad (9.64)$$

$$\ln(s + i\lambda) = \ln(-s - i\lambda) + i\pi. \quad (9.65)$$

La partie divergente de l'intégrale à quatre points deux masses opposées devient, on sous entend la partie imaginaire dans chaque polylogarithme :

$$\frac{2}{\epsilon} \left(\ln \frac{m_3^2 m_4^2}{st} + 2i\pi \right) + \ln^2(-s) + \ln^2(-t) - \ln^2(m_3^2) - \ln^2(m_4^2) + 2\pi^2 + 2i\pi \ln(m_3^2 m_4^2), \quad (9.66)$$

et la partie finie de la fonction scalaire s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{2B}(s, t, m_3^2, m_4^2) = & -Li_2\left(1 - \frac{m_3^2 m_4^2}{st}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{s}\right) \\ & + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{t}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) \end{aligned} \quad (9.67)$$

On commence par rassembler tous les dilogarithmes entre eux, sachant que le déterminant tend vers zéro. On va utiliser la formule [106] :

$$Li_2\left(1 - \frac{1}{z}\right) + Li_2(1 - z) = -\frac{1}{2} \ln^2(z). \quad (9.68)$$

Ici le problème dans F_{2B} , c'est que les parties imaginaires des différents dilogarithmes ne correspondent pas entre elle, par exemple, en utilisant $\Delta = 0$:

$$Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t}\right) = Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{s} + i\lambda\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t} + i\lambda\right) \quad (9.69)$$

$$= Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2} - i\lambda\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t} + i\lambda\right), \quad (9.70)$$

on ne peut pas utiliser directement la formule (9.68), on va donc ajouter et soustraire des termes avec la bonne partie imaginaire pour pouvoir l'appliquer :

$$Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t}\right) \quad (9.71)$$

$$= Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{s} + i\lambda\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t} + i\lambda\right) + Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2} - i\lambda\right) - Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2} - i\lambda\right) \quad (9.72)$$

$$= Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2} + i\lambda\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_4^2}{t} + i\lambda\right) + Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2} - i\lambda\right) - Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2} - i\lambda\right) \quad (9.73)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{m_4^2}{t} - i\lambda\right) + 2\text{Im} Li_2\left(1 - \frac{t}{m_4^2}\right) \quad (9.74)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{m_4^2}{t} - i\lambda\right) + 2i\pi \ln\left(1 - \frac{t}{m_4^2}\right) \quad (9.75)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln^2\left(-\frac{m_4^2}{t}\right) + \frac{\pi^2}{2} + i\pi \ln\left(-\frac{m_4^2}{t}\right) + 2i\pi \ln\left(1 - \frac{t}{m_4^2}\right). \quad (9.76)$$

On a posé $z = m_4^2/t - i\lambda$ dans (9.73) et utilisé (9.68). À la fin on enlève les parties imaginaires qui sont sous-entendues. En recommençant l'opération pour les deux autres dilogarithmes. Pour le premier dilogarithme, il ne faut pas oublier le terme de phase qui s'écrit, à cause des signes des

variables de Mandelstam [106] :

$$Li_2 \left(1 - \frac{m_3^2 m_4^2}{st} \right) + \eta \left(\frac{m_3^2 + i\lambda}{s + i\lambda}, \frac{m_4^2 + i\lambda}{t + i\lambda} \right) \ln \left(1 - \frac{m_3^2 + i\lambda}{s + i\lambda} \frac{m_4^2 + i\lambda}{t + i\lambda} \right) \quad (9.77)$$

$$= Li_2 \left(1 - \frac{m_3^2 m_4^2}{st} \right) + 2 i \pi \operatorname{Im} Li_2 \left(1 - \frac{m_3^2 + i\lambda}{s + i\lambda} \frac{m_4^2 + i\lambda}{t + i\lambda} \right). \quad (9.78)$$

En rassemblant tous les résultats, on trouve, au final :

$$\mathcal{A}_4^{\phi^3} = 2 i \pi \frac{g^4}{\Delta} \left\{ \ln \left(\frac{\Delta}{s_{12}} \right) + \frac{1}{\epsilon} \right\}. \quad (9.79)$$

Ce résultat contient encore des parties divergentes dans l'infrarouge. Le pôle est en racine du déterminant de la matrice cinétique.

9.7.2 Amplitude à six scalaires

On considère une boucle non massive en théorie ϕ^3 avec six pattes entrantes sans masse :

$$\mathcal{A}_6^{\phi^3} = (-ig)^6 i^6 \sum_{\sigma(1,2,3,4,5,6)} \int d^n Q \frac{1}{D_1^2 \dots D_6^2} = g^6 \sum_{\sigma(1,2,3,4,5,6)} A_i. \quad (9.80)$$

La réduction d'une intégrale à six points est donnée dans le dernier paragraphe de l'appendice A. Ici, on désire calculer le pôle de l'amplitude dans le cas où il y a double parton scattering décrit dans la figure (fig. 9.7).

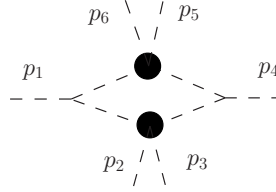


FIG. 9.7 – Configuration en double parton scattering d'une boucle de scalaire

La nullité du déterminant de la matrice cinématique du diagramme pincé est une condition nécessaire pour avoir le double parton scattering (9.47). En théorie ϕ^3 , les intégrales correspondent aux intégrales scalaires, on va donc effectuer un développement limité de l'intégrale scalaire à six points en fonction du déterminant de la matrice cinématique :

$$\Delta^2 = \det \mathcal{S}_4 = (s_{234} s_{345} - s_{23} s_{45})^2 \rightarrow 0. \quad (9.81)$$

Pour connaître le pôle de l'amplitude (9.80) au premier ordre en ϵ , on commence d'abord par décomposer les intégrales scalaires à six points I_6^n en intégrales scalaires à quatre points I_4^n grâce à la formule (A.72, A.74) :

$$A_i = \sum_{i,j=1}^6 \sum_{k,l=1, k,l \neq i}^6 \mathcal{S}_{6ij}^{-1} \mathcal{S}_{5kl}^{-1} I_4^n(s_{ii+1}, s_{kk+1}) + O(\epsilon). \quad (9.82)$$

Les matrices cinématiques inverses des pentagones à une masse externe sont inversement proportionnelles aux déterminants de la matrice cinématique de la fonction quatre points deux masses opposées associées (Fig. 9.8) :

$$\det \mathcal{S}_5 = 2 s_{34} s_{45} s_{56} (s_{456} s_{345} - s_{12} s_{45}) = 2 \operatorname{sign}(s_{456} s_{345} - s_{12} s_{45}) s_{34} s_{45} s_{56} \sqrt{\det \mathcal{S}_4}. \quad (9.83)$$

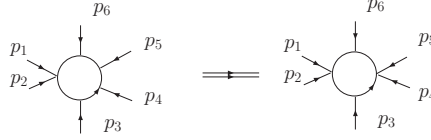


FIG. 9.8 – Intégrales quatre points deux masses opposées associées à un pentagone une masse.

Donc seuls deux déterminants de pentagones divergent dans la limite du double parton scattering. Le pôle d'un diagramme s'écrit :

$$A_{i\text{div}} = g^6 \sum_{\sigma(2,6) \text{ et } \sigma(3,5)} \sum_{i=1}^6 \mathcal{S}_{6,i2}^{-1} I_5^n(s_{23}) + O(\epsilon, \Delta). \quad (9.84)$$

La permutation traduit l'axe de symétrie constitué par les deux particules 1 et 4. La somme des éléments de la matrice inverse, au premier ordre en Δ , est :

$$\sum_{i=1}^6 \mathcal{S}_{6,i2}^{-1} = \frac{s_{45}s_{15} - s_{16}s_{46}}{s_{45}s_{234}s_{12} - s_{456}s_{16}s_{34}} + O(\Delta) = \frac{\alpha}{\text{Dem}} + O(\Delta) \quad (9.85)$$

On recommence exactement la même manipulation pour réduire les intégrales à cinq points. La réduction fait apparaître alors un déterminant Δ au numérateur devant l'intégrale scalaire à quatre points deux masses opposées. Ce déterminant compense celui de la divergence. Cette intégrale est donc la seule à ne pas avoir de pôle. L'amplitude devient :

$$A_{i\text{div}} = g^6 \sum_{\sigma(2,6) \text{ et } \sigma(3,5)} \frac{\alpha^2}{2\Delta \text{Dem}} \left\{ \frac{1}{s_{16}} \left(I_{4,1}^n(s_{45}, s_{56}, s_{123}) - \frac{s_{234}}{s_{56}} I_{4,2A}^n(s_{45}, s_{156}, s_{16}, s_{23}) \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{s_{45}} \left(I_{4,1}^n(s_{16}, s_{56}, s_{234}) - \frac{s_{456}}{s_{56}} I_{4,2A}^n(s_{16}, s_{123}, s_{23}, s_{45}) \right) \right\} + O(\epsilon, \Delta), \quad (9.86)$$

et on réduit le pole, en décomposant les intégrales scalaires en intégrales à trois points et en intégrales en six dimensions grâce à la proposition 7.2.3. On utilisera plutôt les fonctions F_1 et F_{2A} qui sont les intégrales à $n+2$ dimensions au déterminant de Gram près (Appendice A). On obtient après rassemblement et simplification :

$$A_{i\text{div}} = - \sum_{\sigma(2,6) \text{ et } \sigma(3,5)} \frac{\alpha^2}{\Delta \text{Dem}} \frac{1}{s_{16}s_{45}s_{56}} \{ F_1(s_{45}, s_{56}, s_{123}) - F_{2A}(s_{45}, s_{156}, s_{16}, s_{23}) \\ - F_1(s_{16}, s_{56}, s_{234}) + F_{2A}(s_{16}, s_{123}, s_{23}, s_{45}) \} + O(\epsilon, \Delta). \quad (9.87)$$

Pour chaque diagramme, toutes les divergences infrarouges se compensent. On continue de simplifier en exprimant les fonctions F_1 et F_{2A} en fonction de logarithmes et dilogarithmes (Appendice A). Pour les rassembler, il faut faire attention aux continuations analytiques. Les variables de Mandelstam sont définies à une partie imaginaire positive près : $s \rightarrow s + i\lambda$ et le double parton scattering leur impose un signe. Pour simplifier, on change les notations $s = s_{234}, t = s_{456}$ et $m_1^2 = s_{23}, m_2^2 = s_{56}$, et on a les inégalités suivantes (9.47) : $m_1^2, m_2^2 > 0$ $s, t < 0$. ce qui implique $Li_2\left(1 - \frac{m_2^2}{t}\right) = Li_2\left(1 - \left(\frac{m_2^2}{t} - i\lambda\right)\right)$ et par conséquence [106] :

$$Li_2\left(1 - \frac{m_2^2}{t}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_1^2}{s}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{m_2^2}{t}\right) + 2i \text{Im} Li_2\left(1 - \frac{m_1^2}{s}\right) \quad (9.88)$$

$$\log\left(\frac{m_2^2}{t}\right) = \log\left(\frac{m_2^2}{t} - i\lambda\right) = -i\pi + \log\left(-\frac{m_2^2}{t}\right) \quad (9.89)$$

On a transformé les logarithmes de façon à avoir des variables avec une partie réelle positive, on peut alors additionner avec les règles habituelles et on obtient :

$$\mathcal{A}_6^{\phi^3}{}_{div} = -2 i\pi \frac{g^6}{\Delta} \sum_{\sigma(2,3)} \sum_{\sigma(5,6)} \sum_{\sigma(2,6) \text{ et } \sigma(3,5)} \frac{\alpha^2}{\text{Dem } s_{16}s_{45}s_{56}} \log \left(\frac{s_{45} (s - m_2^2)}{s_{16} (t - m_2^2)} \right) + O(\epsilon, \Delta). \quad (9.90)$$

Ce pôle n'est pas nul, ni pour un diagramme, ni pour l'ensemble des diagrammes. La singularité n'est pas compensée, il y a divergence, comme dans le cas précédent de l'interaction à quatre scalaires. De même que dans le cas précédent, le pôle est imaginaire pur et diverge suivant l'inverse de la racine du déterminant de la matrice cinématique. Cependant, cette fois, toutes divergences infrarouges ont disparu. Elles disparaissent diagramme par diagramme.

9.8 Traitement des divergences infrarouges

Les divergences infrarouges ne sont pas une incohérence de la théorie mais elles viennent en général du fait que l'état final considéré n'est pas une observable ou une quantité physique. En fait les forces électromagnétique et faible ont une portée infinie. Or le développement perturbatif suppose que les états initiaux et finaux soient libres, ce qui n'est pas le cas en QED comme en QCD. On ne peut donc pas supposer distinguer dans un état final la production de hadrons ou la production de hadrons + jet. Le théorème KLM (Kinoshita, Lee, Naunenberg) [52] montre que les divergences infrarouges (corrections virtuelles) à un ordre donné sont compensées par les divergences infrarouges (corrections réelles), obtenues par l'ajout d'un gluon en QCD ou d'un photon en QED.

Chapitre 10

Réduction d'une boucle.

Sommaire

10.1 Décomposition d'une intégrale tensorielle.	95
10.1.1 Le problème - Décomposition en intégrales scalaires	96
10.1.2 Décomposition en intégrales scalaires	96
10.1.3 Base de décomposition	98
10.2 Unitarité et causalité de l'opérateur S.	99
10.2.1 Unitarité et « Théorème optique »	99
10.2.2 Causalité d'une fonction - Relation de dispersion	100
10.3 Unitarité dans une boucle.	102
10.3.1 Théorème optique appliqué à une boucle	102
10.3.2 Calcul d'une amplitude avec deux coupures	104
10.3.3 Calcul avec plus que deux coupures	105
10.4 Calcul des coefficients devant les boîtes et les triangles dans la base \mathcal{B}.	106
10.4.1 Coefficients des boîtes : fonctions à quatre points	106
10.4.2 Coefficients des triangles	108
Notation pour la méthodes à trois coupures	108
Calcul de l'impulsion Q^μ de la boucle	109
Calcul du coefficient devant l'intégrale scalaire de la figure 10.7	109
10.5 Calcul des coefficients devant les boîtes et les triangles dans la base \mathcal{B}_1.	110
10.5.1 Coefficients des boîtes : fonctions à quatre points	110
10.5.2 Coefficients des triangles	111
10.6 Règles de réduction	113
10.6.1 Existence d'une intégrale scalaire à quatre points avec une masse externe	113
10.6.2 Hélicité des pattes externes d'une boîte	113
10.6.3 Divergences infrarouges	114
10.7 Origine du terme rationnel.	115
10.7.1 Origine de R_1	115
10.7.2 Origine de R_2	116
10.8 Origine des bulles : intégrales scalaires à deux points	117
10.9 Conclusion.	117

10.1 Décomposition d'une intégrale tensorielle.

10.1.1 Le problème - Décomposition en intégrales scalaires

L'amplitude avec une boucle à N pattes externes entrantes, s'écrit dans le cas général (7.4) :

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (10.1)$$

Dans le cas d'un diagramme en théorie de jauge standards, le numérateur $\text{Num}(Q)$ est un polynôme des impulsions des particules externes ($p_1 \dots p_N$) entrantes dans la boucle et de l'impulsion de la boucle Q^μ . L'objectif est de pouvoir calculer une section efficace différentielle ou intégrée. Les méthodes numériques les obtiennent par l'intégration de l'amplitude sur un grand nombre de points de l'espace de phase. Il faut donc commencer par calculer l'intégrale de la boucle. Le souci est de pouvoir intégrer numériquement cette boucle. La fonction à intégrer dans la boucle est une fonction rationnelle, donc elle admet des pôles. Il existe des méthodes d'intégrations numériques par déformation de contours dans le plan complexe en appliquant le théorème de Cauchy, pour contourner les pôles et pouvoir calculer l'intégrale. Cependant, il s'avère que ces méthodes sont très coûteuses en temps et en calculs. De plus une méthode numérique ne donne pas de résultat analytique et nous prive de toute études. Il est donc préférable de les réduire analytiquement.

La solution proposée dans cette partie, consiste à réécrire l'intégrale sous forme d'une combinaison linéaire d'intégrales scalaires, notées ϑ_i [53, 54, 55]. L'intérêt des intégrales scalaires est qu'elles ont des expressions analytiques connues. On peut donc les calculer numériquement très facilement. On écrira donc une amplitude (10.1) sous la forme :

$$\mathcal{A} = \sum_i c_i \vartheta_i. \quad (10.2)$$

Les coefficients c_i sont des fonctions scalaires des impulsions entrantes dans la boucle. Les expressions des intégrales scalaires sont données dans les appendices *A* et *B*. Il suffit donc de calculer les c_i devant chacune des intégrales scalaires, pour avoir une expression analytique compacte de l'amplitude. Mais il existe au moins deux problèmes à cette méthode. Le premier problème est qu'une intégrale tensorielle engendre un très grand nombre d'intégrales scalaires si on la réduit par les méthodes classiques [56, 57, 58, 59, 60]. Ce nombre croît avec le rang de l'intégrale tensorielle et le nombre de points dans cette intégrale. Par exemple, la décomposition d'une boucle de fermions avec quatre photons entrants engendre environ 10.000 termes et une boucle de fermions avec six photons entrants environ 10.000.000 termes contenant des intégrales scalaires. Le deuxième problème est que la réduction en intégrales scalaires fait intervenir des déterminants de Gram au dénominateur du coefficient :

$$c_i \propto \det(G)^{-r}, \quad r \in \mathbb{N}^* \quad (10.3)$$

Ces déterminants peuvent s'annuler pour certaines configurations cinématiques et donc créer des divergences. Ces divergences n'étant pas physiques, sont factices et doivent donc se compenser. En réalité, il est possible de regrouper les termes afin de factoriser un déterminant de Gram au numérateur et de le simplifier. Mais ces regroupements ne sont pas automatiques.

Dans la suite, on va exposer une méthode non standard de réduction en intégrales scalaires.

10.1.2 Décomposition en intégrales scalaires

Pour réduire une intégrale tensorielle, en intégrales scalaires, il existe le point de vue des méthodes classiques où l'on regarde l'intégrale tensorielle, que l'on réduit en intégrales scalaires par des méthodes comme la réduction de Passarino-Veltman (Appendice *C*) ou des méthodes plus sophistiquées, en utilisant des intégrales de dimensions supérieures [56, 57]. À la fin de la réduction, on factorise les intégrales scalaires. Ici le point de vue est différent : on va commencer par chercher une base de décomposition en intégrales scalaires \mathcal{B} , puis connaissant cette base alors, par

projection avec un produit scalaire, on calculera les coefficients devant tous les vecteurs de cette base.

L'ensemble des boucles à N points, de type (10.1), telles que leur numérateur soit un polynôme de l'impulsion Q^μ , est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} avec les lois de composition « + » et « . », que l'on note $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$. Il est clair que cet espace est constitué d'espaces vectoriels emboîtés de boucle avec un nombre points moindres. Par extension, $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$ est aussi l'espace vectoriel des amplitudes à une boucle avec N pattes extérieures. Le but de ce paragraphe est de définir une base de cet espace vectoriel à partir de cet emboîtement. On va commencer par donner une famille génératrice de cet espace vectoriel dans les deux prochaines propositions.

Proposition 10.1.1. *L'amplitude (10.1) d'une boucle avec N pattes externes peut se décomposer linéairement sur la famille d'intégrales scalaires $\mathcal{B} = \{I_1^n, \dots, I_N^n, J_1^n, \dots, J_N^n, K_1^n, \dots\}$:*

$$\mathcal{A} = a I_1^n + b I_2^n + c I_3^n + d I_4^n + e I_5^n + \dots + f I_N^n + g J_1^n + \dots \quad (10.4)$$

Démonstration : Cette décomposition vient de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle avec une variable tensorielle. Le numérateur $\text{Num}(Q)$ est un polynôme des variables q^μ et μ^2 . L'intégrand de l'amplitude est une fraction rationnelle $\frac{\text{Num}(q^\mu, \mu^2)}{D_1^2 \dots D_N^2}$ de variable q^μ , et elle peut se réduire en éléments simples :

$$\frac{\text{Num}(q^\mu, \mu^2)}{D_1^2 \dots D_N^2} = \sum_r \sum_j a_j \frac{\mu^{2r}}{D_j^2} + \sum_r \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\mu^{2r}}{D_i^2 D_j^2} + \dots + \sum_{r,i,\dots,N} n_{i,j,\dots,N} \frac{\mu^{2r}}{D_1^2 \dots D_N^2} + \text{constantes} \quad (10.5)$$

Si on intègre sur l'impulsion Q^μ de chaque coté de cette équation alors on retrouve exactement la décomposition. Il existe un terme supplémentaire à cause des constantes. Cependant par normalisation dans la théorie des champs, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \int d^n Q Q^\alpha \rightarrow 0 \quad (10.6)$$

Donc ce terme n'intervient pas. □

L'ensemble \mathcal{B} des intégrales scalaires de dimension n est suffisant pour générer une amplitude à une boucle dans le cas général, \mathcal{B} est donc une famille génératrice de l'espace des boucles $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$. Maintenant pour rendre cette famille libre, on ne va garder que les intégrales scalaires nécessaires et suffisantes à la décomposition.

Proposition 10.1.2. *L'espace de Minkowski est de dimensions $n = 4 - 2\epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$. Les intégrales scalaires I_5^n et I_N^n , $N > 5$ se décomposent en intégrales scalaires I_4^n à l'ordre $O(\epsilon)$ et I_4^n, I_5^n à tout ordre en ϵ :*

$$I_5^n = \sum_i a_i I_{4_i}^n + O(\epsilon) \quad (10.7)$$

$$I_N^n = \sum_i a_i I_{N-1_i}^n, \quad N > 5. \quad (10.8)$$

Démonstration : De la proposition 7.2.3, on avait obtenu la décomposition suivante pour $N < 7$:

$$I_N^n = \sum_{ij} S_{ij}^{-1} I_{N-1}^n (\mathcal{S} - \{i\})_i - (-1)^{N+1} (N - n - 1) \frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} I_N^{n+2}(\mathcal{S}). \quad (10.9)$$

Considérons le cas d'une boucle de N pattes externes en dimensions $n = 4 - 2\epsilon$ avec $|\epsilon| \ll 1$. Les impulsions externes sont contraintes par la conservation de l'énergie-impulsion ainsi que par des contraintes venant de la dimension de l'espace de Minkowski. Ces contraintes apparaissent quand le nombre d'impulsions indépendantes rejoint la dimension de l'espace. Il y a donc $N - 5$ contraintes de dimensions à partir de $N = 6$ et aucune si $N < 6$. Seulement toutes ces contraintes (dimensions et conservation de énergie-impulsion) annule le déterminant de la matrice cinématique $\det(\mathcal{S})$ pour

$N > 6$ [56, 57]. Dans ce cas, la formule de réduction (10.9) doit être modifiée. On crée un pseudo-inverse avec la matrice cinématique réduite, et cela n'empêche pas la réduction. La formule (10.9) reste valable pour tout N , mais il faut faire attention à la signification du déterminant de la matrice cinématique.

Dans la régularisation FDHS (parag. 8.3.1), les pattes externes sont dans un espace à quatre dimensions. Cependant on a une relation linéaire entre les pattes externes qui est la conservation de l'énergie-impulsion. On ne peut pas trouver plus de $4+1$ quadri-vecteurs indépendants. Alors le déterminant de la matrice de Gram est nul pour une boucle d'au moins six pattes externes, $\forall N \geq 6, \det(G_N) = 0$. Donc on obtient directement le décomposition (10.8). De plus pour I_5^n , on remarque que le coefficient devant I_5^{n+2} est $N - n - 1 = 2\epsilon$ et l'on retrouve la relation (10.7). \square

Cette proposition signifie que les intégrales scalaires I_5^n et I_6^n ne sont pas nécessaires pour un calcul à l'ordre $O(\epsilon^0)$ mais que I_5^n devient nécessaire pour un calcul à l'ordre supérieur en ϵ . Ce résultat est totalement logique : si la boucle évolue dans un espace à quatre dimensions alors seul quatre dénominateurs d'une intégrale scalaire sont indépendants, cependant si la boucle est à $n = 4 - 2\epsilon$ dimensions alors il peut y avoir cinq ou plus dénominateurs indépendants. Comme ici $|\epsilon| \ll 1$, alors cinq dénominateurs sont suffisants.

Avec ces deux propositions, nous avons une famille génératrice de l'espace des amplitudes $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$. On peut montrer que la famille génératrice est libre. Il suffit de prendre une combinaison linéaire nulle des éléments de cette famille génératrice :

$$\sum_i a_i \vartheta_i = 0, \quad \vartheta_i \in \mathcal{B} = \{I_1^n, \dots, I_5^n, J_1^n, \dots, J_5^n, K_1^n, \dots\} \quad (10.10)$$

. Cette relation doit être vraie quelque soit les impulsions d'entrées. Comme les intégrales à trois points, à deux points et les parties divergentes des intégrales à quatre points sont divergentes avec des structures analytiques différentes alors leur coefficient est nul. De même comme les extra-intégrales scalaires ont des termes rationnelles plus une structure analytique proportionnelle à ϵ alors chacun de leur coefficient est nul. On peut aussi vérifier grâce aux expressions analytiques des intégrales scalaires (Appendice A), que chaque coefficient de la combinaison linéaire doit être nul pour que la somme soit nul. Par conséquent, cette famille est libre. Suivant que l'on se place en dimension quatre ou n , I_5^n appartient ou n'appartient pas à cette famille. Les tadpoles ne sont que des cas particuliers des bulles, comme la combinaison doit-être valable quelques soient les impulsions d'entrées, alors les coefficients devant les tadpoles sont nuls. Le résultat suivant nous donne une base de l'espace vectoriel des amplitudes $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$.

Résultat 10.1.3. *Soit une boucle à N pattes entrantes d'amplitude (10.1) et appartenant à l'espace vectoriel $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$. Alors il existe une base \mathcal{B} ou \mathcal{B}' de décomposition en intégrale scalaire :*

$$\text{à l'ordre } O(\epsilon), \quad \mathcal{A} = \sum_i a_i \vartheta_i + O(\epsilon) \quad (10.11)$$

$$\text{Pour tout ordre en } \epsilon, \quad \mathcal{A} = \sum_i a_i \vartheta'_i \quad (10.12)$$

Avec $\vartheta_i \in \mathcal{B} = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^n, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$ $\vartheta'_i \in \mathcal{B}' = \{I_1^n, I_2^n \dots I_5^n, J_i^n, K_i^n \dots i \leq 5\}$.

Ici nous avons explicité une base de décomposition, celle qui est principalement utilisée dans la littérature. Dans le paragraphe suivant, je vais expliciter une autre base qui est plus commode.

10.1.3 Base de décomposition

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où l'on veut calculer une amplitude au premier ordre en ϵ , donc on décompose les amplitudes sur la base \mathcal{B} (10.11). Pour le cas général, pour tout ordre en ϵ , les raisonnements sont encore valables, mais plus subtils.

Dans le paragraphe précédent, on a exprimé une base de décomposition de l'espace vectoriel des amplitudes. Cette base \mathcal{B} n'est pas unique. Comme les intégrales scalaires à trois et quatre points en dimension n sont divergentes dans l'infrarouge, donc elle ne sépare pas les parties finies des parties divergentes dans l'infrarouge ou dans l'ultraviolet. Dans les chapitres précédents, on a vu que les fonctions de dimensions n à deux points sont divergentes dans l'ultraviolet, alors que les intégrales scalaires à trois ou quatre points sont divergentes dans l'infrarouge. Cependant les intégrales de dimension $n+2$ à deux et trois points sont divergentes dans l'ultraviolet, alors que celles à quatre points ne sont plus divergentes. Donc une base dans laquelle on sépare les parties divergentes dans l'infrarouge, dans l'ultraviolet et les parties finies serait :

$$\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n I_4^{n+2}, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}. \quad (10.13)$$

Maintenant il faut s'assurer que l'ensemble \mathcal{B}_1 est bien une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$.

Résultat 10.1.4. Soit l'amplitude (10.1) d'une boucle avec N pattes entrantes appartenant à l'espace $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$. \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont des bases de décomposition de cet espace :

$$\mathcal{A} = \sum_i a_i \vartheta_i + O(\epsilon) \quad (10.14)$$

$$\mathcal{A} = \sum_i a_i \vartheta'_i, \quad (10.15)$$

avec $\vartheta_i \in \mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$ $\vartheta'_i \in \mathcal{B}'_1 = \{I_1^n, I_2^n, \dots, I_4^{n+2}, I_5^n, J_i^n, K_i^n \dots i \leq 5\}$.

Démonstration : La famille $\mathcal{B} = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^n, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$ est une base de décomposition (10.1.3). Or il existe une relation linéaire qui relie la base \mathcal{B} et la famille \mathcal{B}_1 :

$$I_N^n(\mathcal{S}) = \sum_{i,j=1}^N \mathcal{S}_{ij}^{-1} I_{N-1}^n(\mathcal{S} - \{i\})_i - (-1)^{N+1} (N-n-1) \frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} I_N^{n+2}(\mathcal{S}). \quad (10.16)$$

Cette relation est valable pour tout $N \leq 5$. On en déduit que \mathcal{B}_1 est une base de l'espace. On peut effectuer le même genre de démonstration pour la base \mathcal{B}'_1 . \square

Une amplitude, étant un vecteur de l'espace des amplitudes $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$, est donc complètement décrite par les coefficients devant les vecteurs de la base d'intégrales scalaires. Il suffit donc de trouver un produit scalaire pour projeter une boucle sur les différents vecteurs de la base. Avec des propriétés analytiques des amplitudes et les divergences des intégrales, on va pouvoir développer un pseudo-produit scalaire.

10.2 Unitarité et causalité de l'opérateur S .

Dans cette section, on va utiliser deux grands principes généraux de la physique, que l'on va appliquer à une amplitude à boucle pour en déduire un certain nombre de propriétés de cette amplitude. Le premier principe est l'unitarité de l'amplitude, c'est-à-dire la conservation de la probabilité et le deuxième principe, la causalité.

10.2.1 Unitarité et « Théorème optique »

Une propriété essentielle de l'amplitude de probabilité est la conservation de probabilité. On considère un processus représenté par l'opérateur S , alors la somme de toutes les probabilités d'avoir un état final $|f\rangle$ sachant un état initial $|i\rangle$ doit être égale à un. Cette conservation de l'amplitude de probabilité se traduit par l'équation :

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1, \quad (10.17)$$

qui signifie que l'opérateur S est unitaire. On extrait souvent une identité faisant apparaître la matrice de diffusion T , définie par $T = -i(S - 1)$. Cet opérateur est directement calculé à partir des règles de Feynman. On nomme généralement dispersive (respectivement absorptive) les grandeurs $\frac{T+T^*}{2}$ (resp $\frac{T-T^*}{2i}$). L'équation de conservation de l'amplitude de probabilité (10.17) en terme de matrice de diffusion T s'écrit alors :

$$-i(T - T^\dagger) = TT^\dagger. \quad (10.18)$$

On considère le processus $\langle f|T|i\rangle = T_{fi}$. Compte tenu du fait que $T_{fi}^\dagger = T_{if}^*$, alors l'équation précédente s'écrit en projetant sur les états $\langle f|$ et $|i\rangle$:

$$(10.18) \Rightarrow i(T - T^\dagger)_{fi} = \sum_P T_{fp} T_{pi}^* \quad (10.19)$$

$$\Leftrightarrow i(T_{fi} - T_{if}^*) = \sum_P T_{fp} T_{in}^* \quad (10.20)$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{Im}(\mathcal{A}_{i \rightarrow f}) = \sum_P \mathcal{A}_{p \rightarrow f} \mathcal{A}_{i \rightarrow p}^* (2\pi)^4 \delta(p_i - p_p) \delta(p_p - p_f), \quad (10.21)$$

où $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$ représente l'amplitude du processus d'état initial « i » et d'état final « f ». Dans la dernière étape, on a utilisé le renversement du temps $T_{fi} = T_{if}$. Le coté gauche de cette équation correspond à la partie imaginaire (absorptive) de l'amplitude. Dans la région physique la partie absorptive et la partie imaginaire sont équivalentes. Dans le coté droit de l'équation (10.21), il y a une somme implicite sur tous les états intermédiaires $|p\rangle$ entre les processus définis par T et T^\dagger . Les états intermédiaires diffèrent des états initiaux et finaux par le spin ou le nombre de particules ou juste la direction des impulsions. Il faut noter que ces états intermédiaires sont des états physiques. Les particules sont toutes réelles. On peut représenter cette équation par des diagrammes :

$$2 \operatorname{Im} \left(\langle i | \text{---} \bigcirc \text{---} \langle f | \right) = \sum_P \langle i | \text{---} \bigcirc \text{---} \langle p | \quad |p\rangle \text{---} \bigcirc \text{---} \langle f | \quad (10.22)$$

Cette équation (10.21), qui s'appelle le théorème optique, nous dit qu'il est possible de calculer la partie imaginaire d'un processus en calculant une boucle en coupant deux propagateurs [61]. Il faut maintenant à partir de la partie imaginaire reconstruire toute l'amplitude. Mais avant d'effectuer ce travail, on va considérer dans le théorème optique, le cas où l'état final est équivalent à l'état initial $|i\rangle = |f\rangle$:

$$(10.21) \Rightarrow 2 \operatorname{Im}(\mathcal{A}_{i \rightarrow i}) = \sum_P \|\mathcal{A}_{p \rightarrow i}\|^2 (2\pi)^4 \delta(p_i - p_p) \delta(p_p - p_i) \quad (10.23)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(\mathcal{A}_{i \rightarrow i}) = 2E p \sigma_t, \quad (10.24)$$

où E (respectivement p) est l'énergie (resp. l'impulsion) totale initiale dans le référentiel du centre de masse (resp. initiale d'une particule dans le référentiel du centre de masse). σ_t est la section efficace de tous les processus « $i \rightarrow \sum_p p$ ». Cette section efficace est proportionnelle à la partie imaginaire. La partie imaginaire est suffisante pour calculer une section efficace. Mais si on veut pouvoir reconstruire toute l'amplitude il faut calculer la partie réelle. On la reconstruit grâce à la causalité d'un processus.

10.2.2 Causalité d'une fonction - Relation de dispersion

On considère un processus physique décrit par une amplitude $\mathcal{A}(s)$, fonction de la variable réelle s . On considère un plan engendré par l'extension complexe de la variable s . Le processus est causal signifie que la réponse du processus ne dépend que linéairement des entrées passées. L'amplitude est donc analytique, au moins, sur le plan supérieur et cette amplitude tend vers zero à l'infini « assez » rapidement. Les singularités ne peuvent apparaître que sur l'axe réel ou dans le demi plan inférieur. La causalité conduit aux hypothèses suivantes :

Hypothèses 1. Soit une phénomène physique représenté par l'amplitude \mathcal{A} et la variable s . La causalité d'un phénomène physique engendre les hypothèses suivantes :

$\mathcal{A}(s)$ est analytique sur le plan supérieur et a des singularités que sur l'axe réel.

$\mathcal{A}(s)$ décroît plus vite que $1/s$ en l'infini.

À partir de ces deux hypothèses, le théorème de Cauchy s'écrit :

$$\mathcal{A}(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} ds' \frac{\mathcal{A}(s')}{s' - s}, \quad (10.25)$$

où \mathcal{C} est le contour du demi plan supérieur dans l'espace des s (fig. 10.1). On a régularisé en ajoutant une petite partie imaginaire à la variable s : $s \rightarrow s + i\lambda$. On peut alors transformer cette

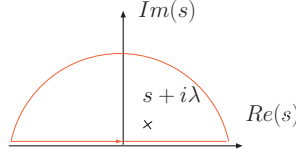


FIG. 10.1 – Contour d'intégration pour le théorème de Cauchy. La fonction est analytique dans la plan supérieur.

équation en utilisant la relation sur les distributions :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{s' - s \pm i\lambda} = \mathcal{P} \frac{1}{s' - s} \mp i\pi \delta(s' - s), \quad (10.26)$$

où \mathcal{P} est la distribution « partie principale », définie par

$$\mathcal{P}(f(x)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} f(x) dx \right\}. \quad (10.27)$$

Grâce à la régularisation de la variable s , l'amplitude s'écrit alors :

$$\mathcal{A}(s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(s + i\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\mathcal{A}(s')}{s' - s} + \frac{\mathcal{A}(s)}{2} + K_{\infty}. \quad (10.28)$$

Le complexe K_{∞} est la valeur de l'amplitude sur le demi cercle supérieur à l'infini qui est nulle d'après les hypothèses ($K_{\infty} = 0$). Si on prend les parties réelles et imaginaires de cette équation, on obtient :

$$\operatorname{Re}\mathcal{A}(s) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im}\mathcal{A}(s')}{s' - s} \quad (10.29)$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{A}(s) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Re}\mathcal{A}(s')}{s' - s}. \quad (10.30)$$

La première équation (10.29) n'est que la partie réelle de l'équation :

$$\mathcal{A}(s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(s + i\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im}\mathcal{A}(s')}{s' - s - i\lambda}. \quad (10.31)$$

On appelle cette équation : une relation de dispersion. Les relations de dispersions permettent de reconstruire immédiatement l'amplitude totale à partir de la partie imaginaire, mais l'inconvénient c'est qu'elle nécessite encore une intégrale. (10.29) permet de relier les parties imaginaires et les parties réelles des amplitudes. Ce sont des relations tirées de l'électromagnétisme. Elles ont été écrites par Kramers et Kronig en 1926 [62, 63], pour décrire la propagation d'une onde lumineuse dans un matériau. La partie imaginaire représente l'onde absorbée alors que la partie réelle représente l'onde dispersée. Dans le cas d'une amplitude en mécanique quantique, la partie imaginaire représente la quantité d'information perdue dans le processus et la partie réelle, la quantité d'information dispersée lors du processus de diffusion.

Remarque : Lorsque l'amplitude ne décroît pas assez vite à l'infini alors il faut faire intervenir la constante K_∞ , que l'on obtient grâce à la connaissance de l'amplitude en un point de l'espace par exemple s_0 . La relation de dispersion s'écrit dans ce cas :

$$\mathcal{A}(s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(s + i\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(s_0 + i\lambda) + \frac{s - s_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\text{Im}\mathcal{A}(s')}{(s' - s - i\lambda)(s' - s_0 - i\lambda)}. \quad (10.32)$$

Dans ce cas, on dit que l'on fait une relation de dispersion à une soustraction.

L'unitarité d'un processus permet de calculer la partie imaginaire de l'amplitude, et la causalité d'un processus permet de reconstruire la partie réelle de ce même processus. On va donc appliquer ces deux principes, très généraux, à une amplitude à une boucle.

10.3 Unitarité dans une boucle.

10.3.1 Théorème optique appliqué à une boucle

On applique le théorème optique à un diagramme de Feynman avec une boucle, d'amplitude (7.4) :

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (10.33)$$

dans laquelle les dénominateurs s'écrivent : $D_i^2 = Q_i^2 + i\lambda$. L'amplitude s'écrit comme l'intégrale sur l'impulsion Q^μ de la fonction $A(Q) = \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 \dots D_N^2}$. L'impulsion peut prendre toutes les valeurs possibles, et elle peut donc annuler les dénominateurs $Q_i^2 = 0$. Il y a donc deux cas possibles. Imaginons que l'impulsion de la boucle est telle qu'elle ne se trouve pas sur un pôle. Alors $D_i^2 \rightarrow Q_i^2$. Dans ce cas l'amplitude est réelle à une phase près. Si maintenant cette impulsion se trouve sur un pôle et annule le dénominateur « j », alors $D_j^2 \rightarrow i\lambda$. Dans ce cas, l'amplitude devient imaginaire pure mais infini dans la limite où $\lambda \rightarrow 0$. L'amplitude devient imaginaire si des dénominateurs deviennent nuls à $i\lambda$ près, c'est à dire quand des particules virtuelles deviennent sur couches de masses ou réelles. La partie imaginaire d'une boucle apparaît lorsque les virtualités tendent vers un processus physique. Maintenant, à partir de cette remarque, on va calculer la partie imaginaire d'un diagramme de Feynman.

Cette méthode a été développée par Cutkosky en 1960 [64]. Ici on ne fait qu'une démonstration approchée pour comprendre le phénomène. À la fin, on arrive aux règles de Cutkosky. Cependant, avant de donner les règles de Cutkosky, on définit d'abord un invariant.

Définition 10.3.1. *Dans une boucle, un invariant ou un canal est une masse non nulle constituée par une ou plusieurs pattes externes adjacentes.*

Maintenant on considère l'amplitude \mathcal{A} comme fonction analytique de l'invariant s . Il est constitué par les pattes extérieures d'impulsions p_1 et p_2 , donc $s = (p_1 + p_2)^2$. On appelle Q_0 et Q_1 les

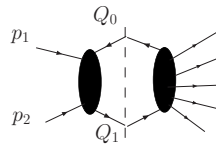


FIG. 10.2 – Théorème optique appliqué à une boucle.

propagateurs de la boucle entourant cette invariant. Puis on étudie le processus physique :

$$p_1 + p_2 \rightarrow Q_0 + Q_1. \quad (10.34)$$

Ce processus physique est décrit par l'énergie seuil s_0 . Si $s < s_0$ alors il ne peut y avoir de processus et les particules représentées par les propagateurs Q_0 et Q_1 sont virtuelles. Dans ce cas les propagateurs Q_0 et Q_1 ne peuvent être sur couche de masse et donc l'amplitude $\mathcal{A}(s)$ est analytique. Cependant si $s > s_0$ et $s \in \mathbb{R}$, alors l'état final de (10.34) est réel, et les particules d'impulsions

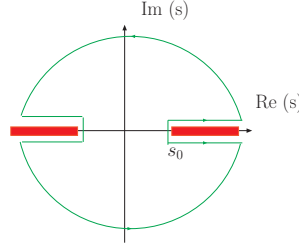


FIG. 10.3 – Analyticité d'une amplitude.

Q_0 et Q_1 peuvent être sur couches de masses. Sachant que le dénominateur de l'intégrand est proportionnel à $(Q_0^2 + i\lambda)(Q_1^2 + i\lambda)$, il diverge si les particules sont sur couches de masses. Il y a donc une branche de coupure le long de l'axe réel, à partir de $s = s_0$, où la fonction $\mathcal{A}(s)$ n'est plus analytique (fig. 10.3). On appelle le point s_0 : point de branchement. La fonction \mathcal{A} est prolongeable par analyticité. Pour avoir la partie imaginaire de l'amplitude \mathcal{A} , on regarde le comportement de l'amplitude \mathcal{A} quand les propagateurs Q_0 et Q_1 , qui entourent cet invariant deviennent sur couches de masses. Dans ce cas, on se trouve sur la partie de l'axe réel appartenant à la branche de coupure. Proche de l'axe réelle, $\text{Im}(\mathcal{A}(s + i\lambda)) = -\text{Im}(\mathcal{A}(s - i\lambda))$. La discontinuité le long de l'axe réel vaut :

$$\text{Disc}_s \mathcal{A} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} i \{ \text{Im}(\mathcal{A}(s + i\lambda)) - \text{Im}(\mathcal{A}(s - i\lambda)) \} = 2i \text{Im}(\mathcal{A}(s)). \quad (10.35)$$

Ici, on a considéré que l'amplitude \mathcal{A} n'avait qu'un invariant s . En réalité, elle peut avoir plusieurs invariants, dans ce cas le résultat est exprimé par le théorème optique pour une boucle.

Théorème 10.3.2. Soit un diagramme à boucle d'amplitude \mathcal{A} . On note $s_1 \dots s_m$ les « m » invariants de ce diagramme. Alors la partie imaginaire de l'amplitude s'écrit :

$$2i \text{Im}(\mathcal{A}(s_1 \dots s_m)) = \sum_{i=1}^m \text{Disc}_{s_i} \mathcal{A}(s_1 \dots s_m). \quad (10.36)$$

Notations : « Disc_{s_i} » signifie que l'on calcule la discontinuité autour de la branche de coupure le long de l'axe réel engendré par l'invariant s_i .

Il est plus facile de calculer une discontinuité autour de la branche engendrée par l'invariant s : Disc_s plutôt que la partie imaginaire d'une amplitude. Le calcul des discontinuités se fait à partir des règles de Cutkosky.

Règle de Cutkosky 1. Pour calculer la discontinuité d'une amplitude \mathcal{A} , autour de la branche de coupure engendrée par l'invariant s , on calcule l'amplitude en mettant les deux propagateurs qui entourent cet invariant sur couche de masse. En pratique, on remplace ces deux propagateurs par une fonction delta :

$$\frac{i}{D_i^2} \rightarrow 2\pi\delta^{(+)}(D_i^2). \quad (10.37)$$

« Mettre un propagateur sur couche de masse » se dit aussi « couper un propagateur ». On calcule

alors explicitement l'intégrale en intégrant sur l'espace de phase des états internes. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 \text{Disc}_{s_{12}}(\mathcal{A}) &= \text{Diagram} \\
 &= (2\pi)^2 \int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \delta^{(+)}(D_2^2) \mathcal{A}_{\text{arbre2}}(Q_2, Q_4, \dots) \\
 &\quad \delta^{(+)}(D_4^2) \mathcal{A}_{\text{arbre1}}(Q_4, Q_2, p_1, p_2)
 \end{aligned}$$

Les fonctions deltas imposent que les arbres $\mathcal{A}_{\text{arbre1}}$ et $\mathcal{A}_{\text{arbre2}}$ soient sur couche de masse.

Cette discontinuité donne la partie imaginaire (absorption) de l'amplitude. Pour avoir l'amplitude totale, il faut calculer la partie réelle de l'amplitude \mathcal{A} . Pour la reconstruire, on utilise une relation de dispersion (voir partie précédente), basée sur l'analyticité de l'amplitude. Cette relation de dispersion permet de relier la partie d'absorptive à la partie dispersive (partie réelle). Les parties imaginaires et réelles sont reliées par le taux d'informations perdues. La relation de dispersion est une intégrale, ce qui est pose encore un problème d'intégration. Dans la pratique, on ne veut pas faire explicitement cette reconstruction. Mais on va plutôt utiliser le fait qu'il existe une décomposition en intégrales scalaires pour effectuer ce travail de reconstruction. On va expliciter cette reconstruction dans le paragraphe suivant.

10.3.2 Calcul d'une amplitude avec deux coupures

On considère une amplitude \mathcal{A} à une boucle que l'on décompose sur une base d'intégrales scalaires $\vartheta_i \in \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ (résul. 10.1.4) :

$$\mathcal{A} = \sum_i a_i \vartheta_i + O(\epsilon), \quad (10.38)$$

et on calcule la discontinuité de l'amplitude dans le canal s_{12} . Pour éviter de calculer explicitement la discontinuité dans ce canal (10.39), on remplace l'espace de phase $d^n Q (2\pi)^2 \delta^{(+)}(D_2^2) \delta^{(+)}(D_4^2)$ par une intégrale de Feynman qui a les bonnes coupures (10.40). Les deux arbres $\mathcal{A}_{\text{arbre1}}$ et $\mathcal{A}_{\text{arbre2}}$ sont donc encore sur couches de masses. Le trait vertical annonce l'invariant. Il est possible alors d'intégrer cette intégrale de Feynman sachant que les arbres sont sur couches de masse. Cette intégrale de Feynman, se décompose comme une combinaison linéaire d'intégrales scalaires (10.41). Par identification avec la décomposition initiale (10.38), on en déduit directement les coefficients devant les intégrales scalaires. La reconstruction est automatique car les intégrales scalaires forment une base de l'espace vectoriel, il n'y a donc pas de confusion possible.

$$\text{Disc}_{s_{12}}(\mathcal{A}) = (2\pi)^2 \int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \delta^{(+)}(D_2^2) \mathcal{A}_{\text{arbre2}} \delta^{(+)}(D_4^2) \mathcal{A}_{\text{arbre1}} \quad (10.39)$$

$$= \int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \frac{i}{D_2^2} \mathcal{A}_{\text{arbre2}} \frac{i}{D_4^2} \mathcal{A}_{\text{arbre1}} \Big|_{s_{12}} \quad (10.40)$$

$$= \sum_j c_j \vartheta_j^n \Big|_{s_{12}} = \sum_j c_j \text{Disc}_{s_{12}}(\vartheta_j^n) \quad (10.41)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \sum_j c_j \vartheta_j^n + \Delta. \quad (10.42)$$

Les tadpoles n'ayant qu'une coupure, ils ne peuvent être obtenus par une discontinuité à deux coupures. Par définition d'un invariant, il faut qu'il y ait un ensemble de pattes adjacentes dont la masse totale ne soit pas nulle. Cela veut dire que les intégrales scalaires obtenues dans la décomposition de l'intégrale de Feynman coupée (10.41) doivent être coupées autour de cet invariant. Or, toutes les intégrales scalaires de la décomposition initiale (10.38) ne peuvent pas forcément être coupées

autour de cet invariant. C'est pourquoi avec une discontinuité, on obtient les coefficients devant seulement une partie des intégrales scalaires de la base de décomposition. En général, une boucle a plusieurs invariants, et il est nécessaire de calculer plusieurs discontinuités pour avoir tous les coefficients. Il peut arriver que deux discontinuités donnent le coefficient devant la même intégrale scalaire. Dans ce cas, la consistance de la théorie de l'unitarité fait en sorte que l'on retrouve le même coefficient quelque soit la discontinuité de la branche que l'on calcule.

Il y a une question fondamentale pour les termes rationnels. Un terme rationnel n'a pas de coupure à priori. Cependant les résultats sur les termes rationnels (prop. 8.3.1) nous dit que les termes rationnels sont donnés par les extra-intégrales scalaires. Les termes rationnels apparaissent quand l'amplitude ne décroît pas assez vite à l'infini. On a besoin alors d'effectuer une relation de dispersion à soustraction. Cependant si l'on se place dans un espace à n dimensions, alors il n'y a plus de problème de convergences à l'infini. L'amplitude redevient analytique et les discontinuités, calculées dans un espace à n dimensions, suffisent pour reconstruire totalement toute l'amplitude. Ce qui paraît cohérent dans le sens où les termes rationnels proviennent des extra-intégrales scalaires.

Proposition 10.3.3. *Les coefficients des intégrales scalaires I_1^n, I_2^n, I_3^n et I_4^n de la décomposition d'une amplitude $\mathcal{A} \in (\mathcal{A}_N, +, \cdot)$ sont donnés par les discontinuités en dimension quatre. Mais les termes rationnels sont donnés par les discontinuités en dimension n grâce aux extra-intégrales scalaires.*

Dans ce paragraphe, on a seulement coupé une boucle en deux. Mais ces dernières années, des progrès ont été fait pour réduire une boucle grâce à l'unitarité. Ces récents progrès nous amène à couper une boucle avec trois ou quatre coupures.

10.3.3 Calcul avec plus que deux coupures

L'intérêt des règles de Cutkosky est de pouvoir calculer toute la partie imaginaire de l'amplitude, cela vient du fait que l'on calcule la discontinuité de l'amplitude autour de tous les invariants. Il y a donc une condition nécessaire et suffisante : considérer tous les invariants.

Maintenant imaginons que nous reprenions la même amplitude de départ \mathcal{A} et que l'on coupe la boucle en deux, trois ou quatre coupures ou que l'on coupe autour d'une patte externe sans masse, qui n'est pas un invariant. Si l'on a plus que deux coupures, alors on ne calcule pas toute la discontinuité autour de cette branche, et on perd des informations sur l'amplitude. Cependant plus une discontinuité a de coupures, plus elle est simple à calculer.

L'amplitude \mathcal{A} s'écrit comme une combinaison linéaire d'intégrales scalaires au premier en ϵ :

$$\mathcal{A} = \sum_i a_i I_4^n + b_i I_3^n + c_i I_2^n + d_i I_1^n + e_i J_4^n + f_i K_4^n + g_i J_3^n + h_i J_2^n. \quad (10.43)$$

Maintenant imaginons que l'on coupe l'amplitude en quatre propagateurs, notés « i,j,k,l ». Alors on applique l'application linéaire « $\text{Disc}_{i,j,k,l}$ » de chaque coté de l'équation (10.43). Dans ce cas, il ne reste du coté droit de l'équation que les intégrales scalaires qui respectent les quatre coupures. Donc avec cette discontinuité, on ne pourra obtenir que les coefficients qui sont devant les intégrales scalaires qui respectent cette coupure a_i, e_i et f_i . De même, si on fait trois coupures dans le diagramme précédent, on obtiendra les informations devant les intégrales scalaires à trois points et quatre points respectant cette coupure a_i, b_i, e_i, f_i et g_i . Enfin si on fait deux coupures alors on obtiendra les informations devant les intégrales scalaires à deux, trois et quatre points qui respectent cette coupure $a_i, b_i, c_i, e_i, f_i, g_i$ et h_i .

Il est donc évident que plus l'on effectue de coupures, plus de propagateurs sont sur couches de masses et donc plus le numérateur de l'intégrale est simple à calculer. Cependant, plus on a de coupures et plus on perd d'informations sur l'amplitude totale. Néanmoins, regardons d'un peu plus près le cas d'une boucle avec quatre pattes externes sans masses.

Proposition 10.3.4. *Il n'y a pas de pertes d'informations lors du passage du calcul d'une discontinuité avec deux coupures à une discontinuité à trois coupures pour une boucle avec quatre pattes externes sans masses.*

Démonstration : Si l'amplitude a au maximum quatre pattes non massives et sur couches de masses, alors il faut au moins deux pattes consécutives pour fabriquer un invariant. On considère

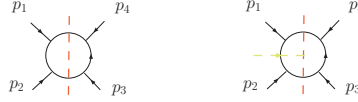


FIG. 10.4 – Passage de deux à trois coupures..

le diagramme à quatre pattes sans masse de la figure 10.4, il y a alors deux invariants que l'on note $s = (p_1 + p_2)^2$ et $t = (p_1 + p_4)^2$. On coupe le diagramme en deux autour dans le canal s . À partir de là, on décide de couper le diagramme en trois en rajoutant une coupure. Cette nouvelle coupure, va couper l'arbre de deux pattes sans masses $\mathcal{A}(1, 2)$ en deux arbres avec une patte sans masse, qui ne sont pas des invariants. Seulement la coupure, ne coupe qu'un arbre, il reste donc un arbre non coupé $\mathcal{A}(3, 4)$. Avec trois coupures, on coupe toujours autour de l'invariant s (avec la coupure rouge) tout comme avec deux coupures. On ne perd donc aucune information en coupant à trois coupures plutôt que deux. \square

On vérifiera ce résultat dans le calcul des l'amplitudes à quatre photons.

Grâce aux coupures, on peut calculer directement les coefficients devant les intégrales scalaires sans besoin de réduire explicitement les intégrales. À l'ordre ϵ , une amplitude se décompose sur des fonctions à scalaires à $N \leq 4$ points. Il existe des méthodes pour calculer les coefficients devant toutes les intégrales basées sur [65, 66, 67], puis étendues par [68, 70, 71, 72, 73, 74, 75]. Il a alors, à partir des méthodes d'unitarité, été mis en place une procédure pour calculer automatiquement une boucle [76, 77, 78, 79]. On va rappeler les méthodes pour les intégrales scalaires à trois et quatre points. Il existe une méthode pour les bulles. Ces méthodes sont valables que dans le cas où l'on réduit les boucles sur la base $\mathcal{B} = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^n, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$. Dans la section d'après, je présenterai une méthode pour trouver les coefficients directement devant les intégrales scalaires de la base $\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$.

10.4 Calcul des coefficients devant les boites et les triangles dans la base \mathcal{B} .

10.4.1 Coefficients des boites : fonctions à quatre points

Proposition 10.4.1. *Soit un diagramme à une boucle d'amplitude \mathcal{A} dont la masse de la particule interne est m^2 . Cette amplitude se décompose en intégrales scalaires suivant le résultat 10.1.4. On considère un type d'intégrale à quatre points, alors le coefficient, devant ces intégrales, est donné par :*

$$\mathcal{A} = aI_4^n + bJ_4^n + cK_4^n + \dots \quad (10.44)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_1(Q_i) \mathcal{A}_2(Q_i) \mathcal{A}_3(Q_i) \mathcal{A}_4(Q_i) = a + b(m^2 + \mu^2) + c(m^2 + \mu^2)^2, \quad (10.45)$$

où N est le nombre de solutions Q_i du système composé par les quatre coupures :

$$\{\forall i \in [1..4], D_i^2 = 0\}. \quad (10.46)$$

Cette formule a été présenté pour la première fois dans [65].

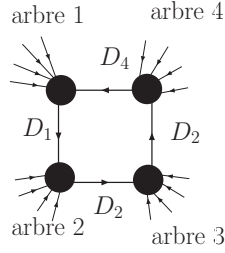


FIG. 10.5 – Diagramme avec quatre coupures.

On va donner une démonstration partielle. Elle donne le moyen de calculer le coefficient.

Démonstration partielle: On reprend la décomposition en éléments simples de la fonction dans l'intégrale de l'amplitude \mathcal{A} . Elle est donnée dans la preuve de (10.1.1) :

$$\frac{\text{Num}(Q^\mu)}{D_1^2 \dots D_N^2} = \sum_j \frac{d_j}{D_j^2} + \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{D_i^2 D_j^2} + \dots + \frac{a_{ijkl}}{D_i^2 D_j^2 D_k^2 D_l^2} + \text{constantes} \quad (10.47)$$

On multiplie de chaque côté par les produits des propagateurs sur les coupures $D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2$ et on prend la limite quand tous les propagateurs s'annulent :

$$a_{1234} = \lim_{D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2 \rightarrow 0} \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2 \text{Num}(Q^\mu)}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (10.48)$$

$$= \lim_{D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2 \rightarrow 0} \mathcal{A}_1(Q_i) \mathcal{A}_2(Q_i) \mathcal{A}_3(Q_i) \mathcal{A}_4(Q_i) \quad (10.49)$$

□

Les coefficients devant les intégrales scalaires à quatre points sont tout simplement des résidus. L'impulsion de la boucle Q^μ est définie dans un espace de dimension n . Seulement on a vu que l'extra-dimension se comporte comme une masse. Il suffit donc de connaître les composantes de la partie à quatre dimensions de l'impulsion. Comme il y a quatre conditions (10.46) qui définissent l'impulsion Q^μ , alors il n'y a qu'un nombre fini de solution du système (10.46).

Proposition 10.4.2. *On suppose que l'on calcul le coefficient devant l'intégrale scalaire, dans*

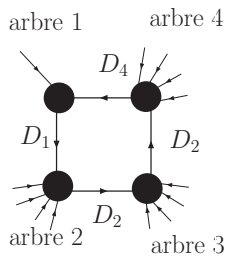


FIG. 10.6 – Diagramme avec quatre coupures.

laquelle, on pose p_i les impulsions des masses externes et on suppose que la masse 1 est nulle : $p_1^2 = 0$. Alors en dimension quatre, les quatre coupures imposent que l'impulsion soit :

$$q_1^\mu = -\frac{\langle 1\gamma^\mu \not{p}_2 \not{p}_3 \not{p}_4 1 \rangle}{2\langle 1\not{p}_3 \not{p}_4 1 \rangle} \quad \text{ou} \quad q_1^\mu = -\frac{[1\gamma^\mu \not{p}_2 \not{p}_3 \not{p}_4 1]}{2[1\not{p}_3 \not{p}_4 1]} \quad (10.50)$$

Démonstration : Et on vérifie tout simplement que les deux expressions de q_1^μ sont solutions du

système :

$$\begin{cases} q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = (q_1 + p_2)^2 = 0 \\ q_3^2 = (q_1 + p_2 + p_3)^2 = 0 \\ q_4^2 = (q_1 - p_1)^2 = 0 \end{cases} \quad (10.51)$$

□

Les deux solutions sont conjuguées l'une de l'autre. La conjugaison est le signe de la parité, et correspond aux deux sens de propagations ou aux deux hélicités de la particule interne. Pour trouver ces solutions, on a pris en compte les impulsions des photons entrants mais pas leurs hélicités. Comme la masse de la particule interne est nulle, alors il n'y a pas de terme d'interférence entre ces deux hélicités.

10.4.2 Coefficients des triangles

Une boucle à trois points, n'a que trois propagateurs. Elle ne peut donc avoir que trois coupures au maximum. Cependant les fonctions à quatre points peuvent aussi avoir que trois coupures. Donc si on coupe un diagramme en trois, alors on obtient les coefficients devant les intégrales à trois points et à quatre points. Comme on ne souhaite que les coefficients des intégrales à trois points, il faut donc soustraire la contribution des intégrales à quatre points. On trouve la méthode dans [74, 75].

Notation pour la méthodes à trois coupures

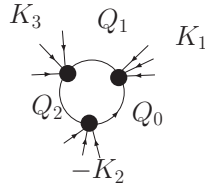


FIG. 10.7 – Diagramme avec trois coupures.

$K_1, -K_2$ et K_3 sont les impulsions sortantes de la boucle. Ces impulsions peuvent être de type lumière. On a les relations de conservation énergie-impulsion, aux vertices :

$$Q_1 = Q_0 - K_1 \quad Q_2 = Q_0 + K_2, \quad (10.52)$$

et on définit alors les grandeurs :

$$\gamma = 2 (K_1^b \cdot K_2^b) \quad (10.53)$$

$$\gamma_{\pm} = K_1 \cdot K_2 \pm \sqrt{\Delta} \quad (10.54)$$

$$\Delta = (K_1 \cdot K_2)^2 - K_1^2 K_2^2. \quad (10.55)$$

Plutôt que d'utiliser les impulsions massives K_1 et $-K_2$ des pattes sortantes, on définit des impulsions de type lumière :

$$K_1^b = \frac{K_1 - (K_1^2/\gamma) K_2}{1 - (K_1^2 K_2^2/\gamma^2)} \quad (10.56)$$

$$K_2^b = \frac{K_2 - (K_2^2/\gamma) K_1}{1 - (K_1^2 K_2^2/\gamma^2)}, \quad (10.57)$$

donc $K_1^{b^2} = K_2^{b^2} = 0$. De plus on définit les grandeurs :

$$\alpha_{01} = \frac{K_1^2 (\gamma - K_2^2)}{\gamma^2 - K_1^2 K_2^2} \quad \alpha_{02} = \frac{K_2^2 (\gamma - K_1^2)}{\gamma^2 - K_1^2 K_2^2}. \quad (10.58)$$

Maintenant on va calculer l'impulsion Q_0^μ , sachant qu'il n'y a que trois coupures définies par le système :

$$\begin{cases} D_0^2 = 0 \\ D_1^2 = 0 \\ D_2^2 = 0. \end{cases} \quad (10.59)$$

Calcul de l'impulsion Q^μ de la boucle

L'impulsion Q_0^μ est un vecteur à n dimensions qui se décompose en une partie à quatre dimensions et une partie à $n - 4 = -2\epsilon$ dimensions : $Q_0 = q_0 + \hat{q}$. On a $Q_0^2 = q_0^2 - \mu^2$. q_0 est un vecteur à quatre dimensions dans l'espace de Minkowski. On choisit donc une base de cet espace $\mathcal{B}_M = \{K_1^{b^\mu}, K_2^{b^\mu}, \langle K_1^b \gamma^\mu K_2^b \rangle, \langle K_2^b \gamma^\mu K_1^b \rangle\}$. On peut écrire l'impulsion q_0 comme une combinaison linéaire de ces quatre vecteurs :

$$q_0^\mu = aK_1^{b^\mu} + bK_2^{b^\mu} + \frac{c}{2} \langle K_1^b \gamma^\mu K_2^b \rangle + \frac{d}{2} \langle K_2^b \gamma^\mu K_1^b \rangle. \quad (10.60)$$

Maintenant à partir des trois conditions données par le fait que les trois propagateurs sont sur couches de masses :

$$q_0^2 = \mu^2 \quad (10.61)$$

$$2q_0 \cdot K_1 = K_1^2 \quad (10.62)$$

$$2q_0 \cdot K_2 = K_2^2. \quad (10.63)$$

On calcule les coefficients a, b, c et d . On commence par substituer la forme de l'impulsion (10.60) dans la première équation du système (10.61) :

$$(10.61) \Rightarrow ab - cd = \frac{\mu^2}{\gamma}, \quad (10.64)$$

puis on utilise les deux autres équations (10.62, 10.63) :

$$(10.62, 10.63) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \langle K_1^b \cdot K_1 \rangle + 2b \langle K_2^b \cdot K_1 \rangle = K_1^2 \\ 2a \langle K_1^b \cdot K_2 \rangle + 2b \langle K_2^b \cdot K_2 \rangle = K_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha_{02} \\ b = \alpha_{01}. \end{cases} \quad (10.65)$$

Donc l'impulsion Q_0^μ s'écrit au final :

$$Q_0^\mu = \alpha_{02} K_1^{b^\mu} + \alpha_{01} K_2^{b^\mu} + \frac{c}{2} \langle K_1^b \gamma^\mu K_2^b \rangle + \frac{\alpha_{01} \alpha_{02} - \mu^2 / \gamma}{2c} \langle K_2^b \gamma^\mu K_1^b \rangle + \hat{q}^\mu. \quad (10.66)$$

On a écrit l'impulsion de façon à ce qu'elle respecte les trois coupures. Comme il n'y a que trois coupures, alors il n'y a que trois conditions, or l'impulsion est définie par quatre paramètres, donc l'un des paramètres n'est pas définie. Ici il reste le paramètre c . On n'a pas pu définir l'impulsion totalement comme dans le cas à quatre coupures.

Calcul du coefficient devant l'intégrale scalaire de la figure 10.7

On cherche le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_3^n(K_1^2, K_2^2, K_3^2)$ de la figure 10.7. On applique l'application linéaire « Disc_{1,2,3} », qui coupe les trois propagateurs, sur l'amplitude de l'ensemble de diagrammes qui donneront cette intégrale scalaire :

$$\text{Disc}_{1,2,3} \int d^n Q \mathcal{A}_{\text{arbre1}}(Q_0, Q_1) \frac{i}{D_1^2} \mathcal{A}_{\text{arbre2}}(Q_1, Q_2) \frac{i}{D_2^2} \mathcal{A}_{\text{arbre3}}(Q_2, Q_3) \frac{i}{D_0^2} \quad (10.67)$$

$$= \int d^n Q \delta(D_0^2) \delta(D_1^2) \delta(D_2^2) \mathcal{A}_{\text{arbre1}}(Q_0, Q_1) \mathcal{A}_{\text{arbre2}}(Q_1, Q_2) \mathcal{A}_{\text{arbre3}}(Q_2, Q_3). \quad (10.68)$$

Les trois fonctions deltas sont équivalentes au système (10.59). La résolution de ce système, nous a mené à une expression analytique de l'impulsion Q_0^μ (10.66). L'impulsion est une fonction du paramètre c . On reporte cette expression dans la discontinuité et on effectue le changement de variable ainsi que les trois intégrations $d^n Q \delta(D_0^2) \delta(D_1^2) \delta(D_2^2) \rightarrow d^n c$, dont le jacobien est $J_c = \frac{1}{\gamma c}$:

$$\text{Disc}_{1,2,3} \int d^n Q \mathcal{A}_{\text{arbre}1}(Q_0, Q_1) \frac{i}{D_1^2} \mathcal{A}_{\text{arbre}2}(Q_1, Q_2) \frac{i}{D_2^2} \mathcal{A}_{\text{arbre}3}(Q_2, Q_3) \frac{i}{D_0^2} \quad (10.69)$$

$$= \int d^n Q \delta(D_0^2) \delta(D_1^2) \delta(D_2^2) \mathcal{A}_{\text{arbre}1}(c) \mathcal{A}_{\text{arbre}2}(c) \mathcal{A}_{\text{arbre}3}(c) \quad (10.70)$$

$$= \int dc J_c \mathcal{A}_{\text{arbre}1}(c) \mathcal{A}_{\text{arbre}2}(c) \mathcal{A}_{\text{arbre}3}(c). \quad (10.71)$$

Maintenant on peut transformer l'expression des arbres en série de Laurent (on enlève l'indice « arbre » pour simplifier les notations) :

$$\mathcal{A}_1(c) \mathcal{A}_2(c) \mathcal{A}_3(c) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i c^i + \sum_{j \in \text{pole}} \frac{\text{Res}_{c=c_j}(\mathcal{A}_1(c) \mathcal{A}_2(c) \mathcal{A}_3(c))}{c - c_j}. \quad (10.72)$$

Les termes avec les résidus et les pôles en c_j correspondent aux coefficients des intégrales à quatre points que l'on peut obtenir grâce à trois coupures. Dans le polynôme, on peut montrer que tous les termes qui ont une puissance non nulle en c ont une contribution nulle [74, 75]. Donc au final, le calcul de la discontinuité, en enlevant les parties correspondantes aux intégrales à quatre points, s'écrit :

$$\text{Disc}_{1,2,3} \int d^n Q \mathcal{A}_{\text{arbre}1}(Q_0, Q_1) \frac{i}{D_1^2} \mathcal{A}_{\text{arbre}2}(Q_1, Q_2) \frac{i}{D_2^2} \mathcal{A}_{\text{arbre}3}(Q_2, Q_3) \frac{i}{D_0^2} = f_0 \int dc J_c, \quad (10.73)$$

$\int dc J_c$ est l'intégrale scalaire à trois points.

Résultat 10.4.3. *Le coefficient χ devant l'intégrale scalaire $I_3^n(K_1^2, K_2^2, K_3^2)$ s'écrit $\chi = i \cdot f_0 \cdot f_0$ étant défini par la somme (10.72).*

Le facteur « i » vient du fait qu'il faut enlever le i des propagateurs pour avoir la bonne définition des intégrales scalaires. Il ne faut pas oublier que cette méthode donne le coefficient devant l'intégrale scalaire à trois points à condition que les intégrales scalaires à quatre points de la base de décomposition soient de dimension n . Si elles sont de dimension $n+2$ alors il faut rajouter des contributions supplémentaires dues à la réduction des intégrales scalaires à quatre points de dimension n en intégrales scalaires à quatre points en dimension $n+2$.

Il existe aussi une méthode pour calculer les coefficients devant les intégrales à deux points. Cette méthode est similaire à la méthode pour trouver le coefficient devant les intégrales à trois points. Elle est donnée dans [74, 75]. Dans le prochain paragraphe, je vais donner une méthode pour obtenir les coefficients devant les intégrales scalaires de la base $\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$.

10.5 Calcul des coefficients devant les boîtes et les triangles dans la base \mathcal{B}_1 .

10.5.1 Coefficients des boîtes : fonctions à quatre points

Proposition 10.5.1. *Soit un diagramme à une boucle d'amplitude \mathcal{A} dont la masse de la particule interne est m^2 . Cette amplitude se décompose en intégrales scalaires suivant le résultat 10.1.4. On considère un type d'intégrale à quatre points, alors le coefficient, devant ces intégrales, est donné par :*

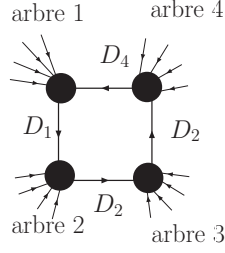


FIG. 10.8 – Diagramme avec quatre coupures.

$$\mathcal{A} = -\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} a I_4^{n+2} + b J_4^n + c K_4^n + \dots \quad (10.74)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_1(Q_i) \mathcal{A}_2(Q_i) \mathcal{A}_3(Q_i) \mathcal{A}_4(Q_i) = a + b(m^2 + \mu^2) + c(m^2 + \mu^2)^2, \quad (10.75)$$

où N est le nombre de solutions Q_i du système composé par les quatre coupures :

$$\{\forall i \in [1..4], D_i^2 = 0\}, \quad (10.76)$$

et G et \mathcal{S} les matrices de gram et cinématique de l'intégrale scalaire.

Démonstration : On reprend la démonstration de la proposition 10.4.1 pour avoir les coefficient a , b et c . Puis on applique la formule de réduction de la proposition 7.2.3 à la discontinuité à quatre coupures « Disc_4 » de la fonction à quatre points :

$$\text{Disc}_4 I_4^n = -\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} \text{Disc}_4 I_4^{n+2}. \quad (10.77)$$

□

10.5.2 Coefficients des triangles

On considère l'amplitude d'une boucle non massive à quatre pattes externes massives ou pas, d'amplitude

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2}, \quad (10.78)$$

que l'on décompose sur la base $\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$:

$$\mathcal{A} = -a \frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} I_4^{n+2} + \sum_{i=1}^4 T_i I_{3,i}^n + \sum_{i=1}^2 \gamma_i I_2^n + \Delta \quad (10.79)$$

Δ contient les extra-intégrales scalaires. Mais ici, ce qui nous intéresse ce sont les triangles. Dans ce paragraphe, on veut calculer les coefficients devant les triangles. D'après la proposition 10.4.1, le coefficient devant l'intégrale scalaire à quatre points s'écrit $a = \text{Num}(Q_0)$ où Q_0 est solution du système composé par les quatres coupures $\{\forall i \in [1..4], D_i^2 = 0\}$. Maintenant d'après la démonstration de la proposition 7.2.3, on a :

$$-\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} I_4^{n+2} = \int d^n Q \frac{1 - \sum_{i=1}^4 b_i D_i^2}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2}, \quad (10.80)$$

avec $b_i \sum_{j=1}^4 \mathcal{S}_{ij}^{-1}$. Donc la réduction de l'amplitude \mathcal{A} s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} = \text{Num}(Q_0) \int d^n Q \frac{1 - \sum_{i=1}^4 b_i D_i^2}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 T_i \int d^n Q \frac{D_i^2}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} + \sum_{i=1}^2 \gamma_i I_2^n + \Delta. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Maintenant on suppose que l'on veut calculer le coefficient devant l'intégrale scalaire à trois points une masse en pinçant le propagateur 1. Donc on applique la discontinuité à trois coupures « $\text{Disc}_{2,3,4}$ » à quatre dimensions de chaque côté de l'équation de décomposition :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{2,3,4} \mathcal{A} &= \text{Disc}_{2,3,4} \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} = \text{Num}(Q_0) \text{Disc}_{2,3,4} \int d^n Q \frac{1 - \sum_{i=1}^4 b_i D_i^2}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 T_i \text{Disc}_{2,3,4} \int d^n Q \frac{D_i^2}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2}. \end{aligned} \quad (10.82)$$

On ne garde que les intégrales scalaires avec au moins trois points. On simplifie et on transforme les discontinuités par des fonctions delta :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{2,3,4} \mathcal{A} &= \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q)}{D_1^2} \delta(2,3,4) = \text{Num}(Q_0) \int d^n Q \frac{1 - b_1 D_1^2}{D_1^2} \delta(2,3,4) \\ &\quad + T_1 \int d^n Q \delta(2,3,4), \end{aligned} \quad (10.83)$$

avec $\delta(2,3,4) = \delta(D_2^2) \delta(D_3^2) \delta(D_4^2)$. De la même façon que dans la section précédente, en reprenant les mêmes notations, les trois coupures imposent la forme pour le propagateur q_3 . Il est une fonction du paramètre c :

$$q_3(c) = \alpha_{04} K_3^{b\mu} + \alpha_{03} K_4^{b\mu} + \frac{c}{2} \langle K_3^b \gamma^\mu K_4^b \rangle + \frac{\alpha_{03} \alpha_{04}}{2c} \langle K_4^b \gamma^\mu K_3^b \rangle. \quad (10.84)$$

On effectue le changement de variable $q_3 \rightarrow q_3(c)$ dans l'équation de décomposition précédente, puis on effectue l'intégration sur les trois fonction deltas, on obtient :

$$\int dc J_c \frac{\text{Num}(c)}{D_1(c)^2} = \text{Num}(Q_0) \int dc J_c \frac{1 - b_1 D_1(c)^2}{D_1(c)^2} + T_1 \int dc J_c. \quad (10.85)$$

Si on veut le coefficient devant l'intégrale à trois point alors il suffit de résoudre l'équation en c :

$$1 - b_1 D_1(c_0)^2 = 0 \quad (10.86)$$

Et on injecte ces I solutions $c_0^{(i)}$ dans l'équation.

Résultat 10.5.2. Dans la base \mathcal{B}_1 , le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_{3,1}^n$, s'écrit :

$$T_1 = b_1 \sum_{i=1}^I \text{Num}(c_0^{(i)}), \quad (10.87)$$

où c_0 est solution de l'équation (10.86). Il en est de même pour les autres intégrales à trois points.

On voit l'intérêt de la décomposition sur la base \mathcal{B}_1 plutôt que sur la base \mathcal{B} . Non seulement la base \mathcal{B}_1 sépare les divergences infrarouges des parties finies mais en plus les coefficients devant les intégrales à trois points sont plus simples à calculer. Ici, il n'y a plus le problème de retrouver les coefficients des fonctions à quatre points si on coupe avec trois coupures. La résolution de l'équation (10.86) est souvent évidente. Si l'une des deux pattes p_3 ou p_4 a une masse nulle, alors la solution de l'équation est $c_0 = 0$. Les coefficients des intégrales scalaires à trois points sont donc de simples limites.

Maintenant on va donner un certain nombre de règles pour savoir si un coefficient devant une intégrale scalaire est nul ou pas sans avoir besoin de le calculer. Là encore on va s'apercevoir que la base de décomposition \mathcal{B}_1 permet de déduire immédiatement la nullité d'un certain nombre de coefficients.

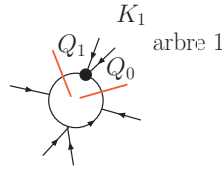
10.6 Règles de réduction

À partir des méthodes données dans la littérature, on peut démontrer des règles très générales, qui permettent de savoir immédiatement si un coefficient devant une intégrale scalaire est nul. On considère des boucles non massives avec N pattes externes non massives.

10.6.1 Existence d'une intégrale scalaire à quatre points avec une masse externe

Proposition 10.6.1. *Le coefficient d'une intégrale scalaire à quatre points avec une masse externe, issue de la décomposition d'une amplitude, est nul si l'arbre constitué par cette masse est nul. Cependant, il peut alors y avoir des coefficients non nuls devant les extra-intégrales.*

Démonstration : Imaginons que l'on cherche à calculer le coefficient devant la fonction à quatre points :



Le coefficient χ devant l'intégrale scalaire sera proportionnel à l'arbre sur couche de masse : $\chi \propto \mathcal{A}_{\text{arbre1}}(Q_0, Q_1)$. Si l'amplitude de l'arbre sur couche de masse est nulle alors le coefficient de devant l'intégrale scalaire est nul. \square

Dans le cas particulier d'une boucle de fermion ou de scalaire.

Corollaire 10.6.2. *Le coefficient d'une intégrale scalaire ayant une masse externe venant de la réduction d'une boucle de fermion ou de scalaire est nul si la masse externe est issue de photons de même hélicité.*

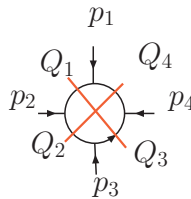
Démonstration : Le coefficient est proportionnel à une chaîne de photons. Or, d'après la proposition 3.2.3 cet arbre sur couche de masse à une amplitude nulle, donc le coefficient sera nul. \square

10.6.2 Hélicité des pattes externes d'une boîte

Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'aux fonctions scalaires à quatre points.

Proposition 10.6.3. *Considérons une boîte scalaire venant de la réduction d'une boucle de scalaires ou de fermions non massifs. La nullité de la masse de la particule interne, impose qu'il y ait une alternance d'hélicité des photons entrants à chaque vertex de l'intégrale scalaire.*

Démonstration : On considère, pour faire simple, une boucle à quatre photons et on cherche le coefficient devant l'intégrale scalaire quatre points sans masse. On coupe en quatre cette intégrale et on calcule le propagateur Q_1 :



D'après la proposition 10.4.2, les impulsions q_1^μ qui vérifient les quatre coupures sont :

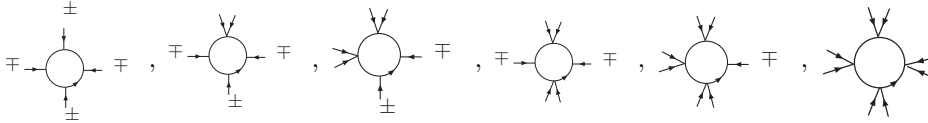
$$q_1^\mu = -\frac{\langle 1\gamma^\mu 23 \rangle}{2\langle 13 \rangle} \quad \text{ou} \quad q_1^\mu = -\frac{[1\gamma^\mu 23]}{2[13]}. \quad (10.88)$$

On considère juste la première solution, le raisonnement est équivalent avec la deuxième solution. On a $q_1^\mu = -\frac{\langle 1\gamma^\mu 23 \rangle}{2\langle 13 \rangle}$ donc $q_2^\mu = \frac{\langle 12\gamma^\mu 3 \rangle}{2\langle 13 \rangle}$. Maintenant considérons que l'on soit en QED scalaire, alors le coefficient χ devant cette intégrale scalaire s'écrit :

$$\chi \propto \varepsilon_1 \cdot q_1 \varepsilon_2 \cdot q_2. \quad (10.89)$$

Cependant la structure des impulsions q_1 et q_2 est telle que le projecteur de chiralité devant la matrice γ^μ s'est inversé. Donc, connaissant les formules des vecteurs polarisations, données par la définition 2.2.2, pour que le coefficient χ soit non nul, il faut que les hélicités des photons 1 et 2 soient alternées. On étend ce raisonnement à toute la boucle et à la QED. \square

Le fait que la particule dans la boucle soit sans masse est absolument indispensable. L'hélicité et la chiralité de la particule deviennent équivalentes quand la masse devient nulle. Considérons une ligne de fermions, par exemple. L'hélicité d'une particule ne change pas le long d'une ligne de fermion. Donc deux vertex adjacents voit un fermion avec une même hélicité. Seulement la structure de l'impulsion dans la boucle est telle qu'elle voit un photon avec une hélicité alternée. Donc pour qu'il y ait interférences constructives aux vertex, il faut donc que les photons soient d'hélicités alternées. Dans le cas d'un fermion massif, l'impulsion n'est plus un état propre de chiralité, la masse mélange les deux états. Donc, quelque soit l'hélicité du photon, il y a aura des interférences constructives. On va dessiner toutes les intégrales scalaires non massives, qui ont un coefficient non nul en fonction des hélicités des photons entrants. Néanmoins, ces coefficients peuvent être nuls pour une autre raison.



10.6.3 Divergences infrarouges

Proposition 10.6.4. *On considère la décomposition, d'un diagramme avec une boucle non massive, sur la base $\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}\}$. Si ce diagramme n'a pas de divergence infrarouge, alors les coefficients devant les intégrales à trois points une masse et trois points deux masses sont nuls.*

Démonstration : Considérons un diagramme qui n'a pas de divergence infrarouge. On le réduit par les méthodes de réduction classique. La réduction engendre des « sous-diagrammes » par pincement d'un propagateur. Si l'on pince, par exemple, le propagateur « i » alors il peut apparaître des divergences infrarouges qu'autour de ce propagateur pincé. Cependant un propagateur pincé engendre une particule externe avec une masse, qui régularise toutes divergences infrarouges autour d'elle. Donc chaque sous-diagramme n'est pas divergent. On peut continuer à réduire de la même manière chaque sous-diagramme. On finit par n'avoir que des sous-diagrammes à trois points et des intégrales scalaires à quatre points de dimension $n+2$. Un sous diagramme à trois points ne peut se décomposer que sur un type d'intégrale à trois points. Or comme le sous diagramme n'a pas de divergence alors le coefficient de décomposition du sous-diagramme devant l'intégrale à trois points est nul. Or comme on a vu que seules les intégrales scalaires à trois points avec une ou deux masses en dimension n sont divergentes dans l'infrarouge, alors le diagramme initial ne se décompose pas sur ces deux types d'intégrales scalaires. \square

On peut améliorer ce résultat et considérer un diagramme avec un type de divergence infrarouge.

Proposition 10.6.5. *On considère la décomposition d'un diagramme à une boucle, possédant une divergence molle sur le propagateur « i », sur la base $\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}\}$. Les coefficients*

devant les intégrales à trois points une masse et trois points deux masses sont nuls sauf celui qui correspond à l'intégrale scalaire à trois points une masse dont le propagateur « i » n'est pas adjacent à un propagateur pincé.

$$\begin{array}{c} p_i \\ \downarrow \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow \\ Q_i \\ \downarrow \\ p_{i+1} \end{array} = \sum_i a_i I_4^{n+2} + b \left(\begin{array}{c} p_i \\ \downarrow \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow \\ Q_i \\ \downarrow \\ p_{i+1} \\ \bullet \end{array} \right) + \sum_i c_i I_2^n$$

Proposition 10.6.6. Soit un diagramme a boucle, qui a une divergence colinéaire autour de la particule externe « i ». Alors ce diagramme se décompose sur la base $\{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}\}$ et les coefficients devant les intégrales à trois points une masse et trois points deux masses sont nuls sauf ceux qui correspondent aux intégrales scalaires à trois points deux masses dont la particule « i » n'appartient pas à l'une des masses.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow \\ p_i \end{array} = \sum_i a_i I_4^{n+2} + \sum_j b_j \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow \\ p_i \\ \bullet \\ \downarrow \\ j \end{array} \right) + \sum_i c_i I_2^n$$

Démonstration : Comme précédemment avec les sous-diagrammes, et le fait que les masses régularisent les divergences. \square

Remarque : Comme on a pu le voir dans le résultat 9.5.1 seul les photons dans une boucle de fermions ou de scalaires engendrent des divergences infrarouges. Donc dans un diagramme à une boucle, on en déduit directement les intégrales à trois points avec un coefficient nul, lorsque l'on décompose sur la base \mathcal{B}_1 .

Les trois propositions 10.6.4, 10.6.5, 10.6.6 révèle l'avantage certain de la base \mathcal{B}_1 , par rapport à la base \mathcal{B} .

10.7 Origine du terme rationnel.

Dans ce paragraphe, on va chercher à comprendre les origines des termes rationnels et enfin expliquer comment les calculer. On rappelle que les termes rationnels viennent des intégrales dont il apparaît des puissances non nulles de l'extra-impulsion μ^2 . On considère une boucle, que l'on régularise en plaçant l'impulsion de la boucle en dimension n

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\text{Num}(Q^\mu)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (10.90)$$

dans laquelle, on décompose l'impulsion Q^μ de la boucle suivant la partie à quatre dimensions et sa partie -2ϵ dimensions : $Q^\mu = q^\mu + \tilde{q}^\mu$. Le numérateur se divise en deux parties :

$$\text{Num}(Q^\mu) = \text{Num}(q^\mu) + \text{Num}(q^\mu, \mu^2). \quad (10.91)$$

L'amplitude est donc la somme de deux amplitudes \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 correspondant à ces deux termes. Chacun fournit un terme rationnel que l'on va appeler R_1 et R_2 . La deuxième amplitude \mathcal{A}_2 peut être un terme rationnel pur, au premier ordre en ϵ , si il y a présence de μ^2 au numérateur.

10.7.1 Origine de R_1

Lors de la réduction de la première partie de l'amplitude générale

$$\mathcal{A}_1 = \int d^n Q \frac{\text{Num}(q^\mu)}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (10.92)$$

il va apparaître au numérateur des termes de la forme q_i^2 . Si on veut le réduire avec le dénominateur alors il faut translater l'impulsion du propagateur

$$q_i^2 \rightarrow D_i^2 + (m^2 + \mu^2), \quad (10.93)$$

de façon à reconstruire D_i^2 . On voit alors apparaître l'origine de ces termes rationnels R_1 . Ces termes rationnels sont toujours liés à la masse de la particule interne. En réalité, pour calculer ces termes rationnels, il suffit de modifier la masse de la particule interne :

$$m^2 \rightarrow m^2 + \mu^2. \quad (10.94)$$

R_1 est donc calculable par la méthode des cuts à n dimensions. On peut aussi remarquer que ces termes sont reliés aux divergences ultraviolettes. Reprenons l'amplitude \mathcal{A}_1 et calculons la limite ultraviolette :

$$\mathcal{A}_1 = \int d^n Q \frac{\text{Num}(q^\mu)}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (10.95)$$

$$= \text{Num}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_N}) \int d^n Q \frac{(q^{\mu_1} \dots q^{\mu_i})}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (10.96)$$

$$\rightarrow \text{Num}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_i}) \int d^n L \frac{(l^{\mu_1} \dots l^{\mu_i})}{(L^2 - m^2)^2} \quad (10.97)$$

$$\rightarrow \text{Num}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_i}) T_{\mu_1 \dots \mu_i} \int d^n L \frac{l^{2i}}{(L^2 - m^2)^{2N}} \quad (10.98)$$

$$\rightarrow \text{Num}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_i}) T_{\mu_1 \dots \mu_i} \int d^n L \frac{\{(L^2 - m^2) + (m^2 + \mu^2)\}^i}{(L^2 - m^2)^{2N}} \quad (10.99)$$

On voit donc apparaître les termes en « $m^2 + \mu^2$ » au numérateur.

10.7.2 Origine de R_2

Le terme R_2 vient du fait que l'on régularise la boucle. On peut alors séparer le numérateur de la boucle en une partie à quatre dimensions et une partie à n dimensions. Ce terme rationnel peut donc avoir une origine ultraviolette ou infrarouge. Cependant on compense les divergences infrarouges par les corrections réelles, donc les termes rationnels associés à ces divergences sont aussi compensés. Par exemple, imaginons un photon dans la boucle à N pattes externes en QED scalaire. Les deux particules externes qui entourent le photon ont des impulsions p_1 et p_2 . L'amplitude du diagramme

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\dots \eta_{\mu\nu} (Q_0 - p_1)^\mu (Q_2 + p_2)^\nu \dots}{D_1^2 \dots D_N^2}, \quad (10.100)$$

fait apparaître un produit scalaire à n dimensions, et donc des termes en μ^2 . Si $N = 3$ alors le diagramme initial est divergent dans l'infrarouge, pas dans l'ultraviolet. Ces termes peuvent être seuls, c'est-à-dire sans être accompagnés de la masse des particules internes. On peut encore les calculer par la méthode des cuts à n dimensions. Cependant si on coupe le photon, alors il faudra faire attention que ce photon soit comme « massif » de masse μ^2 et donc il a trois hélicités.

Ce terme rationnel dépend beaucoup du schéma de régularisation dans lequel on calcul la boucle. Suivant ce schéma, les particules externes sont à quatre ou à n dimensions. Lors de la décomposition du numérateur :

$$\text{Num}(Q^\mu) = \text{Num}(q^\mu) + \text{Num}(q^\mu, \mu^2), \quad (10.101)$$

le premier terme ne dépend pas de la nature de la régularisation puisque l'on ne garde que les parties à quatre dimensions. Cependant le second terme est directement lié au schéma. Par exemple, considérons une boucle de scalaire en schéma « four dimension helicity scheme » (parag. 8.3.1)

où les particules externes évoluent seulement dans l'espace à quatre dimensions, alors la boucle s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{\prod_{i=1}^N \varepsilon_i \cdot Q_i}{D_1^2 \dots D_N^2} = \int d^n Q \frac{\prod_{i=1}^N \varepsilon_i \cdot q_i}{D_1^2 \dots D_N^2}. \quad (10.102)$$

On a utilisé le fait que les espaces de dimensions 4 et de dimensions $n-4 = -2\epsilon$ sont orthogonaux. On voit alors tout de suite que $R_2 = 0$. Dans un autre schéma, $R_2 \neq 0$. Il a été développé des méthodes qui permettent justement de passer d'un schéma de régularisation à un autre juste par l'ajout d'un terme rationnel [82, 83, 84].

10.8 Origine des bulles : intégrales scalaires à deux points

Les bulles ont une origine un peu plus complexe que ce qui a été présenté. Précédemment, on n'a pas fait de différence entre le régulateur infrarouge et le régulateur ultraviolet ce qui peut amener à des erreurs de compréhension. Une bulle I_2^n est divergente dans l'ultraviolet par comptage de puissance. Cependant la réduction en bulles d'un diagramme ne traduit forcément pas l'origine l'ultraviolette du diagramme.

Les bulles ont deux origines bien distinctes. La première c'est bien évidemment la partie ultraviolette du diagramme qui se répercute lors de la réduction dans les bulles. On peut obtenir le coefficient de ces bulles, en prenant la limite ultraviolette dans les diagrammes. Mais la deuxième origine provient de la divergence ultraviolette de triangle tensorielle de rang au moins deux. Par exemple, on considère un triangle avec une masse externe de rang 1 :

$$\mathcal{A} = \int d^n Q \frac{q^\mu}{D_1^2 D_2^2 D_3^2}, \quad (10.103)$$

qui n'est pas divergent dans l'ultraviolet. Avec des formules classiques de réduction (Appendice C), on voit que ce triangle se réduit en bulles et en un triangle scalaire. Ces bulles viennent du fait que le triangle tensoriel est divergent dans l'infrarouge et que l'on n'a pas différencié le régulateur infrarouge du régulateur ultraviolet. Ce coefficient de ces bulles n'est pas obtenu facilement.

10.9 Conclusion.

Les amplitudes à une boucle avec N points forment un espace vectoriel noté $(\mathcal{A}_N, +, \cdot)$. Cet espace vectoriel est constitué de l'emboîtement des espaces des amplitudes avec un nombre de points moindres. Au premier ordre en ϵ , la famille $\mathcal{B}_1 = \{I_1^n, I_2^n, I_3^n, I_4^{n+2}, K_4^n, J_3^n, J_2^n\}$ est une base de cet espace (fig. 10.9).

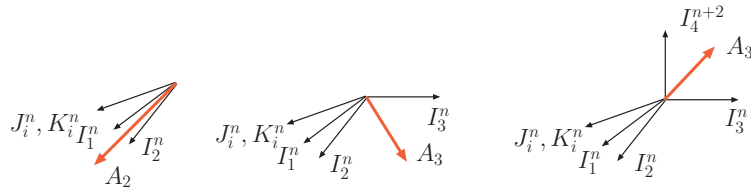


FIG. 10.9 – Espaces vectoriels des amplitudes à une boucle avec 2, 3, 4 points.

On définit un produit scalaire sur ces espaces emboîtés. Le calcul de la discontinuité de l'amplitude suivant les propagateurs de l'intégrale scalaire de la base considérée. Soit une amplitude \mathcal{A} , une intégrale scalaire à quatre points I_4^n de propagateurs i, j, k et l , une intégrale à trois points

I_3^n de propagateur i, j et k et une intégrale scalaire à deux points I_2^n de propagateur i et k , alors :

$$(\mathcal{A}.I_4^n) = \frac{\text{Disc}_{ijkl}\mathcal{A}}{\text{Disc}_{ijkl}I_4^n} \quad (10.104)$$

$$(\mathcal{A}.I_3^n) = \frac{\text{Disc}_{ijk}\mathcal{A} - (\mathcal{A}.I_4^n)\text{Disc}_{ijk}I_4^n}{\text{Disc}_{ijk}I_3^n} \quad (10.105)$$

$$(\mathcal{A}.I_2^n) = \frac{\text{Disc}_{ik}\mathcal{A} - (\mathcal{A}.I_4^n)\text{Disc}_{ik}I_4^n - (\mathcal{A}.I_3^n)\text{Disc}_{ik}I_3^n}{\text{Disc}_{ik}I_2^n}. \quad (10.106)$$

Pour obtenir les termes rationnels, il suffit de considérer les discontinuités dans un espace de Minkowski de dimension n .

Quatrième partie

Amplitudes à quatre photons.

Chapitre 11

Amplitude à quatre photons.

Sommaire

11.1 Définitions et hypothèses du problème.	121
11.1.1 Les hypothèses de la réaction et les diagrammes de Feynman	121
11.1.2 Décomposition des amplitudes	122
11.2 Réduction des amplitudes d'hélicités $\mathcal{A}_4^{S/s/\mathcal{N}=1}$	122

Le principal intérêt expérimental du processus à quatre photons est la mesure du moment magnétique du muon. Théoriquement, ce processus a l'avantage d'avoir que peu de diagrammes d'une complexité moyenne, et en plus l'invariance de jauge amène de très nombreuses compensations. Dans le passé, Karplus [93] fut le premier à avoir calculé ce processus en QED massive, diagramme par diagramme. Puis B. De Tollis [94] retrouva les résultats, en utilisant les règles de Cutkosky. Récemment Bern et al. [97] suivi par Binoth et al. [18] ont calculé ce processus en QED à l'ordre de deux boucles non massives, en utilisant respectivement des méthodes d'unitarité pour le premier et des projecteurs à n dimensions pour le second. Binoth et al. ont étendu le calcul en QED scalaire et QED $^{\mathcal{N}=1, \mathcal{N}=2}$. Ici on va aussi calculer ce processus à quatre photons en QED, QED scalaire, et QED $^{\mathcal{N}=1}$ avec des méthodes d'unitarités à tout ordre en ϵ et avec une boucle massive.

11.1 Définitions et hypothèses du problème.

11.1.1 Les hypothèses de la réaction et les diagrammes de Feynman

Hypothèses 2. *Dans cette partie, on considère le processus à quatre photons au premier ordre non nul en QED (respectivement QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$) :*

$$\gamma_1(p_1) + \gamma_2(p_2) + \gamma_3(p_3) + \gamma_4(p_4) \rightarrow 0, \quad (11.1)$$

dont les amplitudes seront notées : \mathcal{A}_4^S (respectivement $\mathcal{A}_4^s, \mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$). Toutes ces théories sont massives et on imposera la masse du fermion ou du scalaire dans la boucle comme égale à m^2 . De plus on supposera que tous les photons sont entrants et non massifs : $\forall i \in [1..4], p_i^2 = 0$.

À l'ordre de l'arbre cette réaction est nulle, quelque soit la QED donc l'ordre le plus bas est l'ordre d'une boucle. En QED, cette réaction a six diagrammes de quatre photons entrants dans une boucle de fermions alors qu'en QED scalaire, cette réaction a six diagrammes à quatre points, douze diagrammes à trois points et trois diagrammes à deux points.

Comme les trois amplitudes sont reliées par une relation linéaire, (parag. 3.3)

$$\mathcal{A}_4^S = -2 \mathcal{A}_4^s + \mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}, \quad (11.2)$$

on va commencer par calculer l'amplitude scalaire (\mathcal{A}_4^s), puis on utilisera la décomposition de la QED avec des moments magnétiques (chap. 3), pour calculer l'amplitude en QED (\mathcal{A}_4^S). Cette décomposition supersymétrique imposera la forme de l'amplitude supersymétrique ($\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$). On calculera d'abord les trois amplitudes $\mathcal{A}_4^{s/S/\mathcal{N}=1}$ en théorie non massive avec des méthodes de réduction standard dans le chapitre 12. Cette méthode de réduction standard est assez efficace pour cette réaction $2 \rightarrow 2$, mais elle ne sera pas utilisable pour une réaction $2 \rightarrow 4$. En vue du calcul à six photons, on va aussi calculer les amplitudes en QED scalaire \mathcal{A}_4^s par la méthode des coupures dans le chapitre 13, puis les amplitudes en QED et en QED $^{\mathcal{N}=1}$ dans le chapitre 14. On utilisera la méthode des amplitudes d'hélicités pour calculer les amplitudes. Il y a trois amplitudes d'hélicités indépendantes à calculer par théories : $\mathcal{A}_4(++++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$, $\mathcal{A}_4(-+++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$ et $\mathcal{A}_4(--++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$. Par la méthode des coupures, on les obtiendra à tout ordre en ϵ .

11.1.2 Décomposition des amplitudes

Les amplitudes étant calculées à tout ordre en ϵ , on peut toujours réduire une intégrale tensorielle sur une base d'intégrale scalaire de cinq points au plus (résul. 10.1.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{S/s/\mathcal{N}=1} = & \sum_{i \in \sigma(1,2,3,4)} a_i I_5^n + b_i I_{4,4}^n + c_i I_{4,3}^{n+2} + d_i I_{4,2B}^{n+2} + e_i I_{4,2A}^{n+2} \\ & + f_i I_{4,1}^{n+2} + g_i I_{4,0}^{n+2} + h_i I_{3,3}^n + i_i I_{3,2}^n \\ & + j_i I_{3,1}^n + k_i I_2^n + l_i I_1 + \text{termes rationnels.} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Comme il n'y a que quatre photons externes, il est évident que le coefficient devant les intégrales à cinq points sont nuls $a_i = 0$. Il suffit maintenant de calculer les douze coefficients (a_i, \dots, l_i) et les termes rationnels. Les boucles de scalaires et de fermions ont les mêmes structures analytiques dans l'ultraviolet et dans l'infrarouge. Comme la relation linéaire (11.2) les relie à la troisième amplitude, cela veut dire que les trois amplitudes $\mathcal{A}_4^{S/s/\mathcal{N}=1}$ auront les mêmes structures analytiques. Maintenant, on va simplifier cette décomposition grâce aux symétries du problème avant de calculer les coefficients.

11.2 Réduction des amplitudes d'hélicités $\mathcal{A}_4^{S/s/\mathcal{N}=1}$.

Les amplitudes se décomposent selon (11.3). Les hypothèses imposent que tous les photons soient non massifs. Donc il faut au moins deux photons différents pour créer une « masse » externe dans la boucle. Sachant que l'on a que quatre photons, alors on ne peut avoir d'intégrales scalaires à quatre points avec une, deux, trois ou quatre masses, donc $b_i, c_i, d_i, e_i, f_i = 0$. De même il ne peut y avoir d'intégrales scalaires à trois points avec deux ou trois masses, donc $h_i, i_i = 0$.

Comme l'amplitude à quatre photons est nulle à l'ordre de l'arbre, alors il ne peut y avoir de tadpoles dans la réduction, donc $l_i = 0$.

D'après les propositions 8.2.3 et 8.2.5 les diagrammes à quatre photons sont divergents dans l'ultraviolet. Il existe donc des intégrales I_2^n dans la réduction de chaque diagramme. Cependant l'amplitude totale n'est pas divergente, par conséquent les divergences doivent se compenser : $\sum_i k_i = 0$.

Enfin, l'amplitude à quatre photons est calculée de façon à ce que les quatre photons soient entrants dans la boucle. Mais comme tous les photons n'ont pas la même hélicité, il y a une brisure de la symétrie de Bose entre les photons d'hélicités positives et ceux d'hélicités négatives.

Résultat 11.2.1. *Les amplitudes d'hélicités à quatre photons, avec les hypothèses 2, calculées en QED, QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ se réduisent :*

$$\mathcal{A}_4^{S/s/\mathcal{N}=1} = \sum_{i \in \sigma^+ \cup \sigma^-} g_i I_{4,0}^{n+2} + j_i I_{3,1}^n + k_i I_2^n + \text{termes rationnels} \quad (11.4)$$

où σ^\pm représente les permutations sur les photons d'hélicité positives/négatives.

Remarque : D'après le résultat 9.5.1, une boucle de scalaires ou de fermions n'a pas de divergences infrarouges. D'après la proposition 10.6.4, dans le cas d'une théorie non massive, le coefficient devant les intégrales à trois points sera nul : $\lim_{m^2 \rightarrow 0} j_i = 0$, car les intégrales scalaires à quatre points sont de dimension $n + 2$.

Les termes rationnels seront donnés par les extra-intégrales scalaires J_i^n et K_i^n . Dans le cas d'une boucle massive, d'après la remarque précédente, on va obtenir des triangles scalaires et des boîtes avec des coefficients proportionnels à la masse de la particule tournante. On va modifier un peu les extra-intégrales scalaires et en définir de nouvelles qui prennent en compte la masse de la particule tournante.

Définition 11.2.2. *Soit une boucle massive de masse m^2 avec N pattes externes. On définit les intégrales scalaires :*

$$\mathcal{J}_N^n = \int d^n Q \frac{\mu^2 + m^2}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (11.5)$$

$$\mathcal{K}_N^n = \int d^n Q \frac{(\mu^2 + m^2)^2}{D_1^2 \dots D_N^2} \quad (11.6)$$

Chapitre 12

Calcul du processus à quatre photons avec FORM.

Sommaire

12.1	Méthode de calcul de l'amplitude du processus à quatre photons. . .	125
12.2	Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(++++)$	126
12.3	Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(-+++)$	127
12.4	Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(--++)$	128
12.5	Résumé des résultats de l'amplitude scalaire	129
12.6	Calcul de l'amplitude à quatre photons en QED.	130
12.7	Calcul de l'amplitude à quatre photons en QED ^{N=1}	130

Dans ce chapitre, on va calculer les amplitudes d'hélicités du processus à quatre photons par la méthode de réduction standard décrite dans [57], qui a l'avantage de séparer les parties divergentes dans l'infrarouge des autres parties. On supposera que la boucle est non massive.

12.1 Méthode de calcul de l'amplitude du processus à quatre photons.

On a un processus du type « 2 → 2 ». Le nombre de diagrammes reste suffisamment petit pour que l'on puisse tous les écrire sans avoir besoin de générateur de diagrammes. Le calcul de chaque amplitude d'hélicité s'effectue en trois étapes. On commence d'abord par écrire chaque diagramme dans un programme FORM. On prendra l'exemple d'un diagramme en QED, d'amplitude \mathcal{A} . Cette première étape consiste à écrire ce diagramme comme un produit d'un tenseur et d'une intégrale tensorielle :

$$\mathcal{A} = -e^4 \int d^n Q \operatorname{tr} \left(\varepsilon_1 \frac{q_1}{D_1^2} \varepsilon_2 \frac{q_2}{D_2^2} \varepsilon_3 \frac{q_3}{D_3^2} \varepsilon_4 \frac{q_4}{D_4^2} \right) \quad (12.1)$$

$$= -e^4 \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} \varepsilon_{3\rho} \varepsilon_{4\sigma} \operatorname{tr} (\gamma^\mu \gamma_a \gamma^\nu \gamma_b \gamma^\rho \gamma_c \gamma^\sigma \gamma_d) \int d^n Q \frac{Q_1^a Q_2^b Q_3^c Q_4^d}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2}. \quad (12.2)$$

La subtilité vient du développement de la trace. On modifie un peu le schéma de régularisation. On impose que toutes les matrices de Dirac soient dans un espace de Minkowski de dimension n . On développe la trace en dimension n en utilisant les règles de commutation données dans le paragraphe 8.3.1. Puis grâce à une bibliothèque on développe l'intégrale tensorielle en une somme

d'intégrales scalaires avec paramètres de Feynman :

$$\begin{aligned} \int d^n Q \frac{Q_1^a Q_2^b Q_3^c Q_4^d}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} &= \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \Delta_{l_1 1}^a \Delta_{l_2 2}^b \Delta_{l_3 3}^c \Delta_{l_4 4}^d A_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{N4} \\ &+ \sum_{l_1 l_2} (\eta_{ab} \Delta_{l_1 3}^c \Delta_{l_2 4}^d + \eta_{ac} \Delta_{l_1 2}^b \Delta_{l_2 4}^d + \eta_{ad} \Delta_{l_1 2}^b \Delta_{l_2 3}^c \\ &\quad + \eta_{bc} \Delta_{l_1 1}^a \Delta_{l_2 4}^d + \eta_{bd} \Delta_{l_1 1}^a \Delta_{l_2 3}^c + \eta_{cd} \Delta_{l_1 1}^a \Delta_{l_2 2}^b) B_{l_1 l_2}^{N4} \\ &+ (\eta^{ab} \eta^{cd} + \eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc}) C^{N4}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Les facteurs de formes A, B et C sont ces intégrales de Feynman avec paramètres de Feynman. La notation est décrite dans [57]. Les quadri-vecteurs Δ^μ sont définis par $\Delta_{ij}^\mu = p_{i+1}^\mu + \dots + p_j^\mu$. Dans un second temps, on utilise un programme PERL, qui transforme le langage FORM en langage MAPLE. Un programme MAPLE permet de réduire les intégrales avec paramètres de Feynman en intégrales sans paramètre. Par un script PERL inverse, on transforme les intégrales scalaires en langage FORM. On réintroduit la réduction de ces intégrales de Feynman dans la combinaison linéaire obtenue initialement. Enfin on introduit les vecteurs de référence de chaque vecteur polarisation et l'on réduit le résultat sous FORM.

12.2 Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(++++)$.

Pour réduire le nombre de diagrammes, on impose explicitement les vecteurs de références des vecteurs polarisations des photons :

$$R_1 = p_2 \quad R_2 = R_3 = R_4 = p_1. \quad (12.4)$$

Avec ce choix de vecteurs de références, on a $\forall i, j \in [2..4], \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$. Alors parmi les vingt et un diagrammes initiaux, onze sont nuls et il ne reste plus que douze diagrammes non nuls. Or, les douze diagrammes restants sont tous symétriques dans l'inversion du sens de la boucle. En réalité l'amplitude peut se réduire à la somme de six diagrammes :

$$M_1(++++) = 16e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_2}{D_2^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_4^2} \quad (12.5)$$

$$M_2(++++) = 16e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_2}{D_2^2} \frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_4}{D_4^2} \quad (12.6)$$

$$M_3(++++) = 16e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_2}{D_2^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_4^2} \quad (12.7)$$

$$M_4(++++) = -8e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_2^+}{D_2^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_4^2} \quad (12.8)$$

$$M_5(++++) = -8e^4 \int d^n D \frac{\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_3^+}{D_2^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_4^2} \quad (12.9)$$

$$M_6(++++) = -8e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_4^+}{D_2^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_4}{D_4^2}. \quad (12.10)$$

Comme il faut compter deux fois chaque diagramme, on a :

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = 2 \sum_{i=1}^6 M_i(++++) . \quad (12.11)$$

On calcule chaque diagramme $M_i(++++)$ avec FORM et MAPLE, puis on les additionne. L'amplitude s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre phases :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s(++++) &= f(\varepsilon_1^+ \cdot p_3 \varepsilon_2^+ \cdot p_3 \varepsilon_3^+ \cdot p_2 \varepsilon_4^+ \cdot p_2, \varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_2^+ \varepsilon_3^+ \cdot p_2 \varepsilon_4^+ \cdot p_2, \\ &\quad \varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_3^+ \varepsilon_2^+ \cdot p_3 \varepsilon_4^+ \cdot p_2, \varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_4^+ \varepsilon_2^+ \cdot p_3 \varepsilon_3^+ \cdot p_2). \end{aligned} \quad (12.12)$$

Il suffit alors de calculer chacune des quatre phases en fonction de produits spinoriels et des variables de Mandelstam. On met en facteur un produit spinoriel de module un. Avec l'expression spinorielle des vecteurs polarisations (2.2.2), on trouve :

$$\varepsilon_1^+ \cdot p_3 \varepsilon_2^+ \cdot p_3 \varepsilon_3^+ \cdot p_2 \varepsilon_4^+ \cdot p_2 = -\frac{tu}{2}K \quad (12.13)$$

$$\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_2^+ \varepsilon_3^+ \cdot p_2 \varepsilon_4^+ \cdot p_2 = sK \quad (12.14)$$

$$\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_3^+ \varepsilon_2^+ \cdot p_3 \varepsilon_4^+ \cdot p_2 = -uK \quad (12.15)$$

$$\varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_4^+ \varepsilon_2^+ \cdot p_3 \varepsilon_3^+ \cdot p_2 = tK, \quad (12.16)$$

avec :

$$K = -\frac{1}{2} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}. \quad (12.17)$$

Au final après simplification par FORM :

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = 8e^4 K = -4e^4 \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}. \quad (12.18)$$

On peut rendre le résultat plus symétrique en introduisant les tenseurs électromagnétiques des quatre photons $F_i^{\mu\nu} = p_i^\mu \varepsilon_i^\nu - \varepsilon_i^\mu p_i^\nu$. On utilise les formules de l'appendice D sur les tenseurs électromagnétiques et l'appendice A sur les déterminants des matrices cinétiques à quatre points sans masse, alors la phase unitaire peut s'écrire :

$$\frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} = \frac{1}{3} \left(\frac{[12][23][34][41]}{\langle 12 \rangle [23] \langle 34 \rangle [41]} + \frac{[12][24][43][31]}{\langle 12 \rangle [24] \langle 43 \rangle [31]} + \frac{[21][13][34][42]}{\langle 21 \rangle [13] \langle 34 \rangle [42]} \right) \quad (12.19)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{\text{tr}(F_1^+ F_2^+ F_3^+ F_4^+)}{\sqrt{\det(\mathcal{S}_1)}} + \frac{\text{tr}(F_1^+ F_2^+ F_4^+ F_3^+)}{\sqrt{\det(\mathcal{S}_2)}} + \frac{\text{tr}(F_2^+ F_1^+ F_3^+ F_4^+)}{\sqrt{\det(\mathcal{S}_3)}} \right), \quad (12.20)$$

où les \mathcal{S}_i sont les matrices cinématiques des trois diagrammes à quatre pattes externes de base de la réaction. La première amplitude d'hélicité s'écrit

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = -4e^4 \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} = -\frac{e^4}{3} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{\text{tr}(F_1^+ F_2^+ F_3^+ F_4^+)}{\sqrt{\det(\mathcal{S}_1(\sigma))}}, \quad (12.21)$$

où \mathcal{S}_1 est la matrice cinématique de l'intégrale scalaire $I_4^n(1234)$. On peut faire plusieurs remarques. La première est que cette amplitude d'hélicité est purement rationnelle. Il n'y a aucune structure analytique avec des polylogarithmes. Le deuxième est que le résultat est bien invariant par symétrie de Bose, ce qui paraît cohérent vu que les hélicités sont toutes identiques, donc il n'y a pas de brisure de symétrie dans la topologie des hélicités. Enfin le déterminant des matrices cinématiques n'a pas totalement disparu au dénominateur. On s'attend donc que le déterminant ne disparaisse pas totalement non plus dans l'amplitude à six photons. Cette seule source de divergence correspond à la colinéarité de deux photons externes adjacents qui n'a que peu d'intérêt. D'ailleurs cette divergence est factice si on regarde l'expression spinorielle (12.21).

12.3 Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(-+++)$.

Pour calculer l'amplitude $\mathcal{A}_4^s(-+++)$, on suppose que le photon 1 a une hélicité négative. On prend les vecteurs de références suivants :

$$R_2 = R_3 = R_4 = p_1 \quad r = p_2. \quad (12.22)$$

Ces vecteurs de références sont choisis de façon à ce que tous les produits scalaires de vecteurs polarisations soient nuls $\forall i, j \in [1..4]$, $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$. Donc tous les diagrammes contenant un vertex

double sont nuls. Il ne reste donc que les six diagrammes à quatre points, qui sont tous symétriques deux à deux :

$$M_1(-+++)=16e^4\int d^nQ\frac{\varepsilon_1^-\cdot q_1}{D_1^2}\frac{\varepsilon_2^+\cdot q_2}{D_2^2}\frac{\varepsilon_3^+\cdot q_3}{D_3^2}\frac{\varepsilon_4^+\cdot q_4}{D_4^2}\quad (12.23)$$

$$M_2(-+++)=16e^4\int d^nQ\frac{\varepsilon_1^-\cdot q_1}{D_1^2}\frac{\varepsilon_2^+\cdot q_2}{D_2^2}\frac{\varepsilon_4^+\cdot q_4}{D_4^2}\frac{\varepsilon_3^+\cdot q_3}{D_3^2}\quad (12.24)$$

$$M_3(-+++)=16e^4\int d^nQ\frac{\varepsilon_1^-\cdot q_1}{D_1^2}\frac{\varepsilon_3^+\cdot q_3}{D_3^2}\frac{\varepsilon_2^+\cdot q_2}{D_2^2}\frac{\varepsilon_4^+\cdot q_4}{D_4^2}\quad (12.25)$$

L'amplitude, qui est la somme de trois diagrammes :

$$\mathcal{A}_4^s(-+++)=2\sum_{i=1}^3M_i(-+++),\quad (12.26)$$

est proportionnelle à une phase unique $\mathcal{A}_4^s(-+++)=f(\varepsilon_1^-\cdot p_3\varepsilon_2^+\cdot p_3\varepsilon_3^+\cdot p_2\varepsilon_4^+\cdot p_2)$, qui s'écrit sous forme spinorielle :

$$\varepsilon_1^-\cdot p_3\varepsilon_2^+\cdot p_3\varepsilon_3^+\cdot p_2\varepsilon_4^+\cdot p_2=-\frac{tu}{2}K\quad \text{avec}\quad K=\frac{1}{2}\frac{[23]\langle 12\rangle[24]}{\langle 23\rangle[12]\langle 24\rangle}.\quad (12.27)$$

En utilisant FORM, l'amplitude devient :

$$\mathcal{A}_4^s(-+++)=-8e^4K=-4e^4\frac{[23]\langle 12\rangle[24]}{\langle 23\rangle[12]\langle 24\rangle}.\quad (12.28)$$

On peut faire apparaître explicitement l'invariance de Bose en utilisant les tenseurs électromagnétiques :

$$\frac{[23]\langle 12\rangle[24]}{\langle 23\rangle[12]\langle 24\rangle}=\frac{1}{6}\sum_{\sigma(2,3,4)}\frac{[23][34][42]}{s_{23}s_{34}s_{42}}\langle 1241\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{6}\sum_{\sigma(2,3,4)}\frac{\text{tr}(F_2^+F_3^+F_4^+)\langle 1241\rangle}{\sqrt{\det(\mathcal{S}_1)}s_{24}}.\quad (12.29)$$

Cette dernière expression est clairement invariante par symétrie de Bose si on utilise la conservation de l'énergie impulsion pour les trois photons d'hélicités positives. L'amplitude d'hélicité s'écrit :

$$\mathcal{A}_4^s(-+++)=-4e^4\frac{[23]\langle 12\rangle[24]}{\langle 23\rangle[12]\langle 24\rangle}=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^4\sum_{\sigma(2,3,4)}\frac{\text{tr}(F_2^+F_3^+F_4^+)\langle 1241\rangle}{\sqrt{\det(\mathcal{S}_1)}s_{24}}.\quad (12.30)$$

Cette amplitude d'hélicité est encore purement rationnelle et inversement proportionnelle à la racine du déterminant de la matrice cinématique des diagrammes à quatre points. De plus, il apparaît aussi le déterminant de Gram $\det(G)=s_{24}$ au dénominateur. Cependant il est factice, il peut se simplifier avec le produit spinoriel du numérateur.

12.4 Calcul de l'amplitude en QED scalaire $\mathcal{A}_4^s(- - ++)$.

Pour calculer l'amplitude MHV (Maximal Helicity Violating) du processus à quatre photons, on décide de prendre les photons 1,2 avec une hélicité négative et les photons 3,4 avec une hélicité positive. Et on prend les vecteurs de références suivant :

$$R_3=R_3=p_1\quad r_1=r_2=p_3.\quad (12.31)$$

Tous les produits scalaires $\varepsilon_i\cdot\varepsilon_j$ sont nuls sauf $\varepsilon_2^-\cdot\varepsilon_4^+$. Il ne reste donc que huit diagrammes non nuls dont quatre indépendants :

$$M_1(--++)=16e^4\int d^nQ\frac{\varepsilon_1^-\cdot q_1}{D_1^2}\frac{\varepsilon_2^-\cdot q_2}{D_2^2}\frac{\varepsilon_3^+\cdot q_3}{D_3^2}\frac{\varepsilon_4^+\cdot q_4}{D_4^2}\quad (12.32)$$

$$M_2(--++)=16e^4\int d^nQ\frac{\varepsilon_1^-\cdot q_1}{D_1^2}\frac{\varepsilon_2^-\cdot q_2}{D_2^2}\frac{\varepsilon_4^+\cdot q_4}{D_4^2}\frac{\varepsilon_3^+\cdot q_3}{D_3^2}\quad (12.33)$$

$$M_3(- - ++) = 16e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^- \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_2}{D_2^2} \frac{\varepsilon_2^- \cdot q_3}{D_3^2} \frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_4^2} \quad (12.34)$$

$$M_4(- - ++) = -8e^4 \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^- \cdot q_1}{D_1^2} \frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_2}{D_2^2} \frac{\varepsilon_2^- \cdot \varepsilon_4^+}{D_4^2}, \quad (12.35)$$

et

$$\mathcal{A}_4^s(- - ++) = 2 \sum_{i=1}^4 M_i(- - ++). \quad (12.36)$$

Après simplification par Form et MAPLE, l'amplitude est une combinaison linéaire des deux phases $\varepsilon_1^- \cdot p_4 \varepsilon_2^- \cdot p_4 \varepsilon_3^+ \cdot p_4 \varepsilon_4^+ \cdot p_3$ et $\varepsilon_2^- \cdot \varepsilon_4^+ \varepsilon_1^- \cdot p_4 \varepsilon_3^+ \cdot p_4$, qui s'écrivent :

$$\varepsilon_1^- \cdot p_4 \varepsilon_2^- \cdot p_4 \varepsilon_3^+ \cdot p_4 \varepsilon_4^+ \cdot p_3 = \frac{s^2}{2} K \quad (12.37)$$

$$\varepsilon_2^- \cdot \varepsilon_4^+ \varepsilon_1^- \cdot p_4 \varepsilon_3^+ \cdot p_4 = -\frac{s^2}{u} K, \quad (12.38)$$

avec :

$$K = \frac{1}{2} \frac{[34]\langle 12 \rangle}{\langle 34 \rangle [12]}. \quad (12.39)$$

Le résultat de l'amplitude d'hélicité MHV est plus compliqué que les deux autres car il contient une structure analytique en dilogarithme, contenu dans une intégrale scalaire à quatre points :

$$\mathcal{A}_4^s(- - ++) = 4e^4 \frac{[34]\langle 12 \rangle}{\langle 34 \rangle [12]} \left(1 - \frac{2ut}{s} I_{4,0}^{n+2}(t, u) + \frac{u-t}{s} \ln\left(\frac{u}{t}\right) \right). \quad (12.40)$$

On peut arranger cette expression pour faire disparaître les spineurs et faire apparaître les tenseurs électromagnétiques des quatre champs de photons :

$$\mathcal{A}_4^s(- - ++) = 4e^4 \frac{\text{tr}(F_1^- F_2^-) \text{tr}(F_3^+ F_4^+)}{s^3} \left(s - 2ut I_{4,0}^{n+2}(t, u) + (u-t) \ln\left(\frac{u}{t}\right) \right) \quad (12.41)$$

$$= 4e^4 \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle}{s^2} \frac{[34][43]}{s^2} \left(s - 2ut I_{4,0}^{n+2}(t, u) + \frac{u-t}{tu} \ln\left(\frac{u}{t}\right) \right). \quad (12.42)$$

De cette manière, l'invariance par symétrie de Bose entre les photons de même hélicité réapparaît. Cette dernière forme sera utile pour le calcul de l'amplitude à six photons.

12.5 Résumé des résultats de l'amplitude scalaire

L'amplitude de la réaction $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \rightarrow 0$ en QED scalaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s = & 2 * (\mathcal{A}_4^s(++++) + \mathcal{A}_4^s(+++-) + \mathcal{A}_4^s(++-+) + \mathcal{A}_4^s(++--)) \\ & + \mathcal{A}_4^s(+ - ++ +) + \mathcal{A}_4^s(+ - +- +) + \mathcal{A}_4^s(+ - - + +) + \mathcal{A}_4^s(- + + + +). \end{aligned} \quad (12.43)$$

Trois amplitudes d'hélicité sont nécessaires et suffisantes pour calculer toute l'amplitude. Les autres amplitudes sont calculées par permutation. Ces trois amplitudes, en rajoutant le facteur de normalisation des intégrales (7.19), sont (12.21, 12.30, 12.40) :

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = -\frac{i}{4\pi^2} e^4 \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \quad (12.44)$$

$$\mathcal{A}_4^s(- + + +) = -\frac{i}{4\pi^2} e^4 \frac{[23]\langle 12 \rangle [24]}{\langle 23 \rangle [12] \langle 24 \rangle} \quad (12.45)$$

$$\mathcal{A}_4^s(- - + +) = \frac{i}{4\pi^2} e^4 \frac{[34]\langle 12 \rangle}{\langle 34 \rangle [12]} \left(1 - \frac{2ut}{s} I_{4,0}^{n+2}(t, u) + \frac{u-t}{s} \ln\left(\frac{u}{t}\right) \right). \quad (12.46)$$

12.6 Calcul de l'amplitude à quatre photons en QED.

En QED le processus d'annihilation de quatre photons à l'ordre d'une boucle n'a que six diagrammes, dont trois seulement sont indépendants :

$$M_1 = -e^4 \int d^n Q \text{tr} \left(\varepsilon_1 \frac{q_1}{D_1^2} \varepsilon_2 \frac{q_2}{D_2^2} \varepsilon_3 \frac{q_3}{D_3^2} \varepsilon_4 \frac{q_4}{D_4^2} \right) \quad (12.47)$$

$$M_2 = -e^4 \int d^n Q \text{tr} \left(\varepsilon_1 \frac{q_1}{D_1^2} \varepsilon_2 \frac{q_2}{D_2^2} \varepsilon_4 \frac{q_3}{D_3^2} \varepsilon_3 \frac{q_4}{D_4^2} \right) \quad (12.48)$$

$$M_3 = -e^4 \int d^n Q \text{tr} \left(\varepsilon_1 \frac{q_1}{D_1^2} \varepsilon_3 \frac{q_2}{D_2^2} \varepsilon_2 \frac{q_3}{D_3^2} \varepsilon_4 \frac{q_4}{D_4^2} \right). \quad (12.49)$$

Donc l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_4^S = 2 \sum_{i=1}^3 M_i. \quad (12.50)$$

Pour chaque amplitude d'hélicité, on utilise les mêmes vecteurs de référence que pour le calcul des amplitudes en QED scalaire. Le calcul est identique au cas scalaire. Après simplification par FORM, les amplitudes d'hélicités s'écrivent :

$$\mathcal{A}_4^S(++++) = \frac{i}{2\pi^2} e^4 \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} = -2 \mathcal{A}_4^s(++++) \quad (12.51)$$

$$\mathcal{A}_4^S(-+++) = \frac{i}{2\pi^2} e^4 \frac{[23]\langle 12 \rangle [24]}{\langle 23 \rangle [12] \langle 24 \rangle} = -2 \mathcal{A}_4^s(-+++) \quad (12.52)$$

$$\mathcal{A}_4^S(--++) = -\frac{i}{2\pi^2} e^4 \frac{[34]\langle 12 \rangle}{\langle 34 \rangle [12]} \left(1 + \frac{u^2 + t^2}{s} I_{4,0}^{n+2}(t, u) + \frac{u-t}{s} \ln\left(\frac{u}{t}\right) \right). \quad (12.53)$$

Les résultats sont très similaires à ceux en QED scalaire. La structure analytique est exactement la même. Seuls les coefficients devant ces structures diffèrent. ce qui est normal vu qu'une boucle de fermion ou de scalaire a les mêmes structures analytiques infrarouges et ultraviolettes (résul. 8.2.7, 9.5.1). Maintenant, on va calculer les résultats en $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$.

12.7 Calcul de l'amplitude à quatre photons en $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$.

Pour calculer les amplitudes d'hélicité, puisque chacune d'entre elles est un processus, on utilise simplement le fait qu'elles vérifient toute la décomposition supersymétrique (3.3.3) :

$$\mathcal{A}_4^S = -2\mathcal{A}_4^s + \mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}. \quad (12.54)$$

Grâce aux résultats en QED scalaire, obtenus dans les équations (12.21, 12.30, 12.40), et en QED obtenus dans les équations (12.51, 12.52, 12.53), alors on obtient par soustraction :

$$\mathcal{A}_4^S(++++) = 0 \quad (12.55)$$

$$\mathcal{A}_4^S(-+++) = 0 \quad (12.56)$$

$$\mathcal{A}_4^S(--++) = -\frac{i}{2\pi^2} e^4 \frac{[34]\langle 12 \rangle}{\langle 34 \rangle [12]} s I_{4,0}^{n+2}(t, u). \quad (12.57)$$

Seule l'amplitude MHV est non nulle. On remarque que le déterminant de Gram de l'intégrale scalaire « s » est au numérateur. Les interférences entre les bosons et les fermions détruisent tous les termes rationnels et les bulles. Ces interférences éliminent les divergences ultraviolettes dans chaque diagramme, ce qui explique la disparition des bulles et des termes rationnels (parag. 3.3.4). Cette amplitude n'a aucune divergence.

Chapitre 13

Amplitude à quatre photons en QED scalaire par la méthode des coupures.

Sommaire

13.1 Arbres nécessaires pour le calcul.	132
13.1.1 Deux photons de même hélicité sur une chaîne coupée	132
13.1.2 Deux photons de même hélicité, sur une chaîne non coupée	132
13.1.3 Chaîne avec deux photons d'hélicités différentes	133
13.1.4 Notation sur les propagateurs	134
13.2 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^+, 2^+, 3^+, 4^+)$.	134
13.2.1 Méthode à quatre coupures	134
13.2.2 Méthode à trois coupures	134
13.2.3 Méthode à deux coupures	136
13.2.4 Conclusions	136
13.3 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^-, 2^+, 3^+, 4^+)$.	137
13.3.1 Méthode à quatre coupures	137
13.3.2 Méthode à trois coupures	138
13.3.3 Méthode à deux coupures	140
13.3.4 Conclusions	140
13.4 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^-, 2^-, 3^+, 4^+)$.	141
13.4.1 Méthode à quatre coupures	141
13.4.2 Méthode à trois coupures	142
13.4.3 Méthode à deux coupures	142
13.4.4 Conclusions	144
13.5 Résumé et discussions.	145
13.5.1 L'amplitude à quatre photons en QED scalaire massive	145
13.5.2 Les termes rationnels	145
13.5.3 Méthodes à plusieurs coupures	146

Dans ce chapitre, on va calculer par la méthode des coupures les trois amplitudes d'hélicités de l'amplitude à quatre photons en QED scalaire. Pour chaque amplitude d'hélicité, on va appliquer la méthode des coupures avec deux, trois et quatre coupures pour voir quels sont les intérêts et les inconvénients de chacune des méthodes. On note « $\text{Disc}_{2,s}$ » la discontinuité à deux coupures dans l'invariant « s ». Si on rajoute une coupure, alors la discontinuité devient « $\text{Disc}_{3,s}$ ». Il n'y a pas de confusion possible car il n'y a que quatre photons externes sans masse, donc l'ajout d'une coupure ne crée pas d'invariant. Enfin, si on rajoute encore une coupure, la discontinuité devient « Disc_4 », il n'y a plus d'invariant. Ici, on va directement calculer la discontinuité des amplitudes afin

d'obtenir directement la décomposition en intégrales scalaires de l'amplitude (11.4). Dans la suite, on notera $\delta(D_1^2, \dots, D_N^2) = \delta(D_1^2) \dots \delta(D_N^2)$. L'intérêt de ce chapitre, est d'obtenir des expressions très simples, à tout ordre en ϵ , pour une boucle massive contrairement à Karplus [93], qui avait obtenu des expressions beaucoup plus longues et valable qu'au premier ordre en ϵ . Mais on va commencer par donner l'expression de tous les arbres nécessaires pour le calcul des discontinuités.

13.1 Arbres nécessaires pour le calcul.

13.1.1 Deux photons de même hélicité sur une chaîne coupée

Proposition 13.1.1. *On considère deux photons d'hélicités positives joints et entourés par un propagateur sur couche de masse (fig. 13.1). Dans ce cas on a :*

$$\frac{\langle Rq_1 1 \rangle \langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle} = -(\mu^2 + m^2) \frac{[12]}{\langle 12 \rangle}, \quad (13.1)$$

avec des photons d'hélicités négatives, on a :

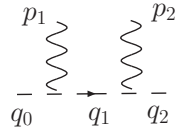


FIG. 13.1 – Chaîne coupée, composée de deux photons avec une même hélicité.

$$\frac{[Rq_1 1] [Rq_2 2]}{[1R] [2R]} = -(\mu^2 + m^2) \frac{\langle 12 \rangle}{[12]}. \quad (13.2)$$

Démonstration : On suppose que les deux photons ont une hélicité positive. On note $q_0 = q_1 - p_1$ et comme les propagateurs sont sur couches de masses, alors $2(p_1 \cdot q_0) = 2(p_2 \cdot q_2) = 0$. L'amplitude s'écrit alors :

$$\frac{\langle Rq_1 1 \rangle \langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle} = \frac{\langle Rq_0 1 2 q_2 R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle \langle 12 \rangle} = \frac{2(p_2 \cdot q_2) \langle Rq_0 1 R \rangle - 2(p_1 \cdot q_0) \langle Rq_2 2 R \rangle + \langle R1 q_0 q_2 2 R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle \langle 12 \rangle} \quad (13.3)$$

$$= \frac{q_1^2 \langle R1 2 R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle \langle 12 \rangle} = \frac{(\mu^2 + m^2) \langle R1 2 R \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle \langle 12 \rangle} = -(\mu^2 + m^2) \frac{[12]}{\langle 12 \rangle}. \quad (13.4)$$

Pour des photons d'hélicité négatives, on a la même démonstration.

13.1.2 Deux photons de même hélicité, sur une chaîne non coupée

Proposition 13.1.2. *On considère une chaîne de scalaires, constituée de deux photons d'hélicités positives avec des impulsions p_1 et p_2 . Les scalaires sont massifs et dans un espace de dimension n et les scalaires externes sont sur couches de masses (fig. 13.2). On a alors :*

$$\sum_{\sigma(1,2)} \frac{\langle Rq_1 1 \rangle}{\langle R1 \rangle} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} = -(\mu^2 + m^2) \frac{[12]}{\langle 12 \rangle} \sum_{\sigma(1,2)} \frac{i}{D_1^2}. \quad (13.5)$$

Si les photons avaient une hélicité négative alors l'amplitude de la chaîne serait :

$$\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[Rq_1 1]}{[1R]} \frac{i}{D_1^2} \frac{[Rq_2 2]}{[2R]} = -(\mu^2 + m^2) \frac{\langle 12 \rangle}{[12]} \sum_{\sigma(1,2)} \frac{i}{D_1^2}. \quad (13.6)$$

Si le propagateur reliant les deux photons se trouve sur couches de masses lui aussi, alors on retrouverait la formule (13.1).

Démonstration : Cette chaîne avait presque déjà été calculée (6.1) dans le chapitre 6. Elle avait été calculée pour des scalaires dans un espace de dimensions 4. En dimensions n , il suffit de « traduire » la valeur de la masse $m^2 \rightarrow m^2 + \mu^2$. \square

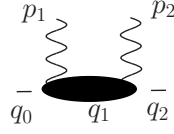


FIG. 13.2 – Chaîne composée de deux photons avec une même hélicité.

13.1.3 Chaîne avec deux photons d'hélicités différentes

Proposition 13.1.3. *Soit une chaîne de scalaires avec deux photons : un d'hélicité positive et d'impulsion p_2 et l'autre d'hélicité négative et d'impulsion p_1 . De plus on suppose qu'un troisième photon est attaché à cette chaîne d'impulsion p_3 (fig. 13.3). Les propagateurs entourant la première chaîne de deux photons sont sur couches de masses : $D_0^2 = 0$ et $D_2^2 = 0$. L'amplitude de cette chaîne s'écrit :*

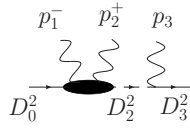


FIG. 13.3 – Chaîne composée de deux photons d'hélicités différentes puis d'un autre photon.

$$\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} = -\frac{i}{\langle 231 \rangle} \left(\frac{\langle 1q_2 232 \rangle - D_3^2 \langle 1q_2 2 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]}{D_1^2} \right) - \frac{i}{\langle 231 \rangle} \left(\frac{-D_3^2 \langle 1q_2 2 \rangle + \langle 1q_2 312 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]}{D_1'^2} \right). \quad (13.7)$$

On pose $D_1^2 = (q_0 + p_1)^2$ et $D_1'^2 = (q_0 + p_2)^2$.

Démonstration :

$$\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} = -\frac{i \langle 1q_2 2 \rangle^2}{s_{12}} \sum_{\sigma(1,2)} \frac{1}{D_1^2} \quad (13.8)$$

$$= -\frac{i}{s_{12} \langle 231 \rangle} \left(\frac{\langle 1q_2 231q_2 2 \rangle}{D_1^2} + \frac{\langle 1q_2 231q_2 2 \rangle}{D_1'^2} \right) \quad (13.9)$$

$$= -\frac{i}{s_{12} \langle 231 \rangle} \left(\frac{2(p_1 \cdot q_2) \langle 1q_2 232 \rangle - 2(p_3 \cdot q_2) \langle 1q_2 212 \rangle + 2(p_2 \cdot q_2) \langle 1q_2 312 \rangle - q_2^2 \langle 12312 \rangle}{D_1^2} \right) - \frac{i}{s_{12} \langle 231 \rangle} \left(\frac{2(p_1 \cdot q_2) \langle 1q_2 232 \rangle - 2(p_3 \cdot q_2) \langle 1q_2 212 \rangle + 2(p_2 \cdot q_2) \langle 1q_2 312 \rangle - q_2^2 \langle 12312 \rangle}{D_1'^2} \right) \quad (13.10)$$

$$= -\frac{i}{\langle 231 \rangle} \left(\frac{\langle 1q_2 232 \rangle - D_3^2 \langle 1q_2 2 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]}{D_1^2} \right) - \frac{i}{\langle 231 \rangle} \left(\frac{-D_3^2 \langle 1q_2 2 \rangle + \langle 1q_2 312 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]}{D_1'^2} \right). \quad (13.11)$$

□

13.1.4 Notation sur les propagateurs

Dans la suite, on notera un propagateur avec un prime, le propagateur sans prime ayant subi une permutation sur les deux photons entrants dans les deux bouts du propagateurs. Par exemple :

13.2 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^+, 2^+, 3^+, 4^+)$.

13.2.1 Méthode à quatre coupures

On calcule la discontinuité à quatre coupures. Comme seuls les diagrammes sans vertex double ont quatre propagateurs, alors les diagrammes contribuant à la discontinuité $\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(++++)$) sont :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(++++)) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Gamma \\ \diagdown \quad \diagup \\ p_2 \quad D_3^2 \\ D_1^2 \quad D_2^2 \end{array}$$

Les propagateurs sont définis par $Q_i = Q_{i-1} + p_i$ et $Q_0 = Q_4$. Avec les règles de Feynman la discontinuité $\text{Disc}(\mathcal{A}_4^s(++++))$ s'écrit :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(++++)) = (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \int d^n Q \frac{\langle RQ_1 1 \rangle \langle RQ_2 2 \rangle \langle RQ_3 3 \rangle \langle RQ_4 4 \rangle}{\langle R1 \rangle \langle R2 \rangle \langle R3 \rangle \langle R4 \rangle} \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \quad (13.12)$$

Le calcul dans le schéma de régularisation « FDHS » impose que les vecteurs polarisations soient à quatre dimensions. De plus, comme les deux espaces à quatre dimensions et à -2ϵ dimensions sont orthogonaux, alors on peut simplifier les produits spinorielles : $\langle RQ_2 2 \rangle = \langle Rq_2 2 \rangle + \langle R\mu 2 \rangle = \langle Rq_2 2 \rangle$. On effectuera toujours cette simplification dans la suite. On partage l'intégrand en deux groupes de photons (p_1, p_2) et (p_3, p_4) , et on utilise la formule des arbres donnée par (13.1) pour simplifier l'expression. L'amplitude (13.12) devient :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(++++)) = (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \int d^n Q (\mu^2 + m^2)^2 \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \quad (13.13)$$

$$= (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \text{Disc}_4(\mathcal{K}_4^n(1234)) \quad (13.14)$$

Dans la dernière étape, on a juste transformé l'intégrale coupé en la discontinuité d'une intégrale scalaire.

13.2.2 Méthode à trois coupures

La méthode à trois coupures impose que trois propagateurs soient sur couche de masse. Or, chaque diagramme a au maximum quatre pattes externes sur couche de masse. Donc si trois propagateurs sont coupés, alors il ne peut y avoir qu'un invariant entre les coupures (il faut au moins deux photons adjacents pour créer un invariant). Un diagramme à quatre pattes externes non massives, possède quatre branches de coupures, mais seulement deux sont indépendantes. En effet par exemple, la branche de coupure autour de s_{12} et équivalente à la branche de coupure autour de s_{34} . On multiplierà donc l'amplitude par un facteur 1/2. Comme on rassemble les diagrammes deux

par deux pour créer des chaînes, il faut encore un facteur $1/2$. Enfin il n'y a que six diagrammes différents, néanmoins pour ne pas briser l'invariance de Bose, on permute sur $4! = 24$ diagrammes, il faut donc encore diviser par quatre la discontinuité totale :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_3 (A_4^{\text{scalar}}(+ + +)) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \left(\begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \left(\begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

On peut rassembler les diagrammes grâce aux permutations :

$$\text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^s(+ + +)) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array}. \quad (13.15)$$

Avec les règles de Feynman, la discontinuité s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^s(+ + +)) &= \frac{(e\sqrt{2})^4}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \int d^n Q \left(\sum_{\sigma(1,2)} \frac{\langle Rq_1 1 \rangle}{\langle R1 \rangle} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} \right) \\ &\left(\frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2). \end{aligned} \quad (13.16)$$

On utilise l'expression de l'arbre (13.1) pour le second groupe de photons (p_3, p_4) , alors que pour le premier groupe de photons (p_1, p_2) , les propagateurs entourant le groupe sont sur couches de masses mais pas le propagateur reliant les deux photons. On utilise alors la chaîne calculée dans l'équation (13.5). La discontinuité s'écrit :

$$\text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^s(+ + +)) = \frac{(e\sqrt{2})^4}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \int d^n Q \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2) \sum_{\sigma(1,2)} \frac{i(\mu^2 + m^2)^2}{D_1^2} \quad (13.17)$$

$$= \frac{(e\sqrt{2})^4}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \text{Disc}_{3,s_{12}} (\mathcal{K}_4^n(1234)) + \text{Disc}_{3,s_{12}} (\mathcal{K}_4^n(2134)) \quad (13.18)$$

Maintenant il faut rassembler les branches de coupures pour reconstruire la discontinuité totale d'une intégrale scalaire. Pour cela on utilise les permutations et le fait que $\frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}$ soit invariant par permutation :

$$\text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^s(+ + +)) = \frac{(e\sqrt{2})^4}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \text{Disc}_{3,s_{12}} (\mathcal{K}_4^n(1234)) + \text{Disc}_{3,s_{14}} (\mathcal{K}_4^n(4123)) \quad (13.19)$$

$$= \frac{(e\sqrt{2})^4}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \text{Disc}_3 (\mathcal{K}_4^n(1234)). \quad (13.20)$$

Dans la dernière étape, on a rassemblé les deux branches de coupures de l'intégrale scalaire \mathcal{K}_4^n pour reconstruire entièrement sa discontinuité. En fait, le calcul peut être plus simple dans le sens où il suffit de calculer la discontinuité d'une des deux branches. La consistance de la théorie fait que l'on retrouve exactement le même coefficient devant chacune des branches.

13.2.3 Méthode à deux coupures

Cette fois, seuls deux propagateurs sont coupés. Comme nous n'avons que des photons sur couche de masse, alors un diagramme ne peut avoir que deux invariants différents. La partie absorptive de l'amplitude sera donc égale à la somme des discontinuités des deux branches de coupures. Pour chaque diagramme, on décide de couper les propagateurs D_2^2, D_4^2 puis les propagateurs D_1^2, D_3^2 . Une fois que l'on a regroupé les diagrammes, la partie imaginaire s'écrit :

$$2 \operatorname{Im} (\mathcal{A}_4^s(++)) = \operatorname{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(++)) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma(2,3,4)} \left(\begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad / \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad D_4^2 \quad p_4 \\ \diagdown \quad | \quad / \\ D_1^2 \quad \text{---} \quad D_3^2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ p_2 \quad D_2^2 \quad p_3 \end{array} \right) \quad (13.21)$$

Le facteur numérique $\frac{1}{4}$ vient du fait que l'on a rassemblé les diagrammes et évité de les compter plusieurs fois. L'intérêt de rassembler les diagrammes, sachant que les propagateurs coupés sont sur couches de masses, est de créer des chaînes sur couches de masses et donc invariante de jauge. Les deux chaînes sont équivalentes à des labélisations de photons près. Grâce aux permutations, un certain nombre de diagrammes deviennent égaux. On les rassemble et la discontinuité $\operatorname{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(++))$ s'écrit, en utilisant (13.5) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(++)) &= \frac{(e\sqrt{2})^4}{2} \sum_{\sigma(2,3,4)} \int d^n Q \left(\sum_{\sigma(1,2)} \frac{\langle Rq_1 1 \rangle}{\langle R1 \rangle} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} \right) \\ &\quad * \left(\sum_{\sigma(3,4)} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{i}{D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \delta(D_2^2, D_4^2). \end{aligned} \quad (13.22)$$

On utilise l'expression de la chaîne (13.5) pour les deux groupes de photons (1, 2) et (3, 4). La discontinuité $\operatorname{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(++))$ s'écrit :

$$\operatorname{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(++)) = 2(e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \operatorname{Disc}_{2,s_{12}} (\mathcal{K}_4^n(1234)). \quad (13.23)$$

Nous retrouvons qu'une seule branche de coupure de l'intégrale scalaire \mathcal{K}_4^n , ce qui est normal puisque par symétrie, nous avons rassemblé les diagrammes des deux branches, en diagramme d'une seule branche. Mais on peut effectuer l'opération inverse en utilisant la conservation de l'énergie impulsion des moments externes. Comme $\frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}$ est invariant par permutation, on peut donc partager l'amplitude en deux termes et utiliser la conservation de l'énergie impulsion et une permutation dans l'un des termes pour retrouver la discontinuité autour de la deuxième branche de coupure :

$$\operatorname{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(++)) = (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} (\operatorname{Disc}_{2,s_{12}} (\mathcal{K}_4^n(1234)) + \operatorname{Disc}_{2,s_{14}} (\mathcal{K}_4^n(1234))) \quad (13.24)$$

$$= (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \operatorname{Disc}_2 (\mathcal{K}_4^n(1234)). \quad (13.25)$$

13.2.4 Conclusions

Quelque soit la méthode, la discontinuité s'écrit de la même façon (13.14, 13.20, 13.25). Ceci est dû au fait que l'amplitude ne contient que des fonctions à quatre points, donc on ne perd aucune

information avec une méthode à quatre coupures plutôt qu'à deux ou trois coupures. On multiplie le résultat par le facteur $K = i(4\pi)^{-n/2}$ et la reconstruction est automatique :

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = i \frac{(e\sqrt{2})^4}{(4\pi)^{n/2}} \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \mathcal{K}_4^n(1234) = 4i\alpha^2 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \mathcal{K}_4^n(1234), \quad (13.26)$$

où $\alpha = e^2/4\pi$. Nous retrouvons les résultats de [96]. Comme $\frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}$ est invariant par permutation, alors l'amplitude $\mathcal{A}^s(++++)$ peut être écrite au premier ordre en ϵ (AppendiceA) :

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = -4i\alpha^2 \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} + 4i\alpha^2 m^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} I_4^n(1234) + O(\epsilon). \quad (13.27)$$

Dans la limite où la masse du scalaire devient nulle $m^2 \rightarrow 0$, nous retrouvons les résultats connus [97, 18], et celui calculé dans le chapitre précédent de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(++++)$:

$$\mathcal{A}_4^s(++++) \xrightarrow{m^2 \rightarrow 0} -4i\alpha^2 \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} + O(\epsilon). \quad (13.28)$$

Maintenant on va calculer l'amplitude d'hélicité suivante avec trois photons d'hélicités positives et un photon d'hélicité négative $\mathcal{A}_4^s(-+++)$.

13.3 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^-, 2^+, 3^+, 4^+)$.

13.3.1 Méthode à quatre coupures

Les quatre propagateurs sont coupés, donc la discontinuité $\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(-+++))$ s'écrit :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(-+++)) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_4^+ \end{array} .$$

Avec les règles de Feynman, la discontinuité $\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(-+++))$ s'écrit :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(-+++)) = (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \int d^n Q \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2). \quad (13.29)$$

On coupe l'intégrant en deux groupes de deux photons : (p_1, p_2) et (p_3, p_4) . Pour le premier groupe de photons, on utilise la chaîne (13.7) dans la limite où tous les propagateurs sont sur couches de masses :

$$\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} = \lim_{D_1^2, D_3^2 \rightarrow 0} (13.7) = -\frac{1}{\langle 231 \rangle} (\langle 1q_2 232 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]). \quad (13.30)$$

Pour le second groupe de photon (p_3, p_4) , on utilise la chaîne (13.1). La discontinuité (13.29) s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(-+++)) &= \sum_{\sigma(2,3,4)} (e\sqrt{2})^4 \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \int d^n Q (\mu^2 + m^2)^2 \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\ &+ \sum_{\sigma(2,3,4)} (e\sqrt{2})^4 \frac{[34]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \int d^n Q \langle 1q_2 232 \rangle (\mu^2 + m^2) \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2). \end{aligned} \quad (13.31)$$

Maintenant on transforme les discontinuités en intégrales tensorielles ayant les bonnes coupures, comme dans le paragraphe 10.3.2. Nous avons deux moyens pour terminer le calcul. Le premier est

d'employer les techniques de réduction standard (C.3) pour calculer les intégrales tensorielles. Le deuxième est d'utiliser le fait que l'on a quatre conditions qui définissent totalement l'impulsion de la boucle. On va faire le calcul par cette deuxième voie. On commence par choisir une base de l'espace de Minkowski à quatre dimensions : $\mathcal{B} = \{p_2^\mu, p_3^\mu, \langle 2\gamma^\mu 3 \rangle, \langle 3\gamma^\mu 2 \rangle\}$. Ici l'impulsion de la boucle s'écrit $Q_2^\mu = q_2^\mu + \mu^\mu$. L'impulsion q_2^μ est à quatre dimensions donc on peut l'écrire comme une combinaison linéaire des quatre vecteurs de la base \mathcal{B} :

$$q_{2i}^\mu = a_i p_2^\mu + b_i p_3^\mu + \frac{c_i}{2} \langle 2\gamma^\mu 3 \rangle + \frac{d_i}{2} \langle 3\gamma^\mu 2 \rangle. \quad (13.32)$$

Et q_{2i} vérifie les quatre conditions :

$$D_1^2 = 0 \Leftrightarrow (q_2 - p_2)^2 - (m^2 + \mu^2) = 0 \quad (13.33)$$

$$D_2^2 = 0 \Leftrightarrow q_2^2 - (m^2 + \mu^2) = 0 \quad (13.34)$$

$$D_3^2 = 0 \Leftrightarrow (q_2 + p_3)^2 - (m^2 + \mu^2) = 0 \quad (13.35)$$

$$D_4^2 = 0 \Leftrightarrow (q_2 + p_3 + p_4)^2 - (m^2 + \mu^2) = 0. \quad (13.36)$$

On résoud le système. Les conditions (13.33) et (13.34) imposent $b = 0$. Les conditions (13.34) et (13.35) imposent $a = 0$. Cependant la deuxième condition (13.34) dit $cd = -\frac{m^2 + \mu^2}{s_{23}}$. Enfin, avec les deux conditions (13.35) et (13.36), on obtient $c\langle 243 \rangle + d\langle 342 \rangle = -s_{34}$. La méthode des quatre coupures nous dit que le coefficient devant la deuxième intégrale tensorielle à quatre points de (13.31) sera :

$$\frac{1}{2} \langle 1 \sum_{i=1}^2 q_{2i} 232 \rangle = -\frac{t}{2} \langle 123 \rangle \sum_i c_i = \frac{st}{2} \frac{\langle 123 \rangle}{\langle 243 \rangle}. \quad (13.37)$$

Cette dernière expression est le coefficient devant l'intégrale scalaire \mathcal{J}_4^n de (13.31). Au final cette discontinuité s'écrit :

$$\text{Disc}_4 (\mathcal{A}_4^s(-+++)) = (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \text{Disc}_4 \left(\mathcal{K}_4^n + \frac{ts}{2u} \mathcal{J}_4^n \right). \quad (13.38)$$

13.3.2 Méthode à trois coupures

La méthode à trois coupures impose trois propagateurs sur couches de masses. Cette fois il y a un photon d'hélicité négative. Pour ne pas briser les symétries, plutôt que de calculer la discontinuité de deux branches de coupures, on calculera la discontinuité autour de trois branches de coupures et on multipliera par un facteur 1/2. La conservation de la symétrie nous permet de reconstruire plus facilement les discontinuités. En terme de diagrammes coupés, cette discontinuité $\text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^s(-+++))$ s'écrit :

$$\text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^{scalar}(-+++)) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma(2,3,4)} \left(\begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ \text{---} \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_1^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \end{array} \right) + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ \text{---} \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_1^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ \text{---} \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_1^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \end{array} \right),$$

et grâce aux règles de Feynman :

$$\begin{aligned}
\text{Disc}_3 (A_4^{\text{scalar}}(-+++)) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma(2,3,4)} (-i\sqrt{2}e)^4 \\
&\int d^n Q \left(\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} \right) \left(\frac{\langle Rq_3 3 \rangle \langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R3 \rangle \langle R4 \rangle} \right) \delta(D_2^2) \delta(D_3^2) \delta(D_4^2) \\
&+ \int d^n Q \left(\sum_{\sigma(2,3)} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} \frac{i}{D_2^2} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \right) \left(\frac{\langle Rq_4 4 \rangle [rq_1 1]}{\langle R4 \rangle [1r]} \right) \delta(D_1^2) \delta(D_3^2) \delta(D_4^2) \\
&+ \int d^n Q \left(\sum_{\sigma(3,4)} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{i}{D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \left(\frac{[rq_1 1] \langle Rq_1 2 \rangle}{[1r] \langle R2 \rangle} \right) \delta(D_1^2) \delta(D_2^2) \delta(D_4^2). \quad (13.39)
\end{aligned}$$

On calcule la première chaîne $\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle}$ grâce à la chaîne (13.7) dans la limite où le propagateur D_3^2 est sur couches de masses :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} &= \lim_{D_3^2 \rightarrow 0} (13.7) \\
&= -\frac{i}{\langle 231 \rangle} \left(\frac{\langle 1q_2 232 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]}{D_1^2} + \frac{\langle 1q_2 312 \rangle + (\mu^2 + m^2) [231]}{D_1'^2} \right). \quad (13.40)
\end{aligned}$$

Pour les deux chaînes $\frac{\langle Rq_4 4 \rangle [rq_1 1]}{\langle R4 \rangle [1r]}$ et $\frac{[rq_1 1] \langle Rq_1 2 \rangle}{[1r] \langle R2 \rangle}$, on utilise encore la chaîne (13.7) dans la limite où le propagateur interne est sur couches de masses. On obtient :

$$\frac{\langle Rq_4 4 \rangle [rq_1 1]}{\langle R4 \rangle [1r]} = \lim_{D_1'^2 \rightarrow 0} (13.7) = (-s_{12} + D_2^2) \frac{[4q_4 1]}{\langle 421 \rangle} - (\mu^2 + m^2) \frac{[421]}{\langle 421 \rangle} \quad (13.41)$$

$$\frac{[rq_1 1] \langle Rq_1 2 \rangle}{[1r] \langle R2 \rangle} = \lim_{D_1'^2 \rightarrow 0} (13.7) = (-s_{14} + D_3^2) \frac{[2q_1 1]}{\langle 231 \rangle} - (\mu^2 + m^2) \frac{[231]}{\langle 231 \rangle}. \quad (13.42)$$

Les deux autres chaînes ont déjà été calculées. On rassemble les différents termes dans la discontinuité (13.39). On obtient un certain nombre d'intégrales tensorielles que l'on intègre avec (C.3, C.4). Parmi ces intégrales, il y a des triangles tensoriels. Un certain nombre d'entre eux sont nuls. Par exemple, considérons un triangle tensoriel linéaire à une masse externe $s_{23} : I_3(s_{23})(q_i^\mu)$. Ce triangle, par réduction, s'exprime comme une combinaison linéaire de tenseurs constitués par ces deux pattes externes (Appendice C) : $I_3(s_{23})(q_i^\mu) = A p_1^\mu + B p_4^\mu$. Comme les impulsions p_1 et p_4 sont de type lumière, alors la contraction de cette intégrale par le produit spinoriel $\langle 1\gamma^\mu 4 \rangle$ est nulle : $I_3(s_{23})(\langle 1\gamma^\mu 4 \rangle) = 0$. Après intégration, nous avons une combinaison linéaire de discontinuité d'intégrales à deux, trois et quatre points. Certaines d'entre elles sont factices. Par exemple s_{ij} est un invariant d'une fonction à trois points une masse $I_3(s_{kl})$ si la masse s_{kl} de ce triangle correspond à cet invariant $s_{kl} = s_{ij}$. Pour les fonctions à deux points il se passe exactement la même chose. Les triangles et les bulles dont les masses externes ne correspondent pas à l'invariant sont factices. On les enlève du résultat. Elles apparaissent car on a transformé les discontinuités en intégrales de Feynman. Pour reconstruire la discontinuité d'une fonction à quatre points, on a besoin de deux coupures alors que pour les fonctions à deux et trois points, seule une coupure est suffisante. Au final la discontinuité s'écrit :

$$\begin{aligned}
\text{Disc}_3 (\mathcal{A}_4^s(-+++)) &= (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \text{Disc}_3 \left(\mathcal{K}_4^n(1234) + \frac{st}{2u} \mathcal{J}_4^n(1234) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{s^2 + t^2 + u^2}{2tu} \right) \mathcal{J}_3^n(s) \right). \quad (13.43)
\end{aligned}$$

13.3.3 Méthode à deux coupures

Chaque diagramme est coupé dans les deux canaux. On a :

$$\text{Disc}_2 (A_4^{\text{scalar}}(-+++)) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma(2,3,4)} \left(\begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_4^+ \end{array} + \begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_4^+ \end{array} \right).$$

Comme les diagrammes sont doubles, on les rassemble et on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_2 (A_4^s(-+++)) &= \frac{(e\sqrt{2})^4}{2} \sum_{\sigma(2,3,4)} \int d^n Q \left(\sum_{\sigma(1,2)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 2 \rangle}{\langle R2 \rangle} \right) \\ &\quad * \left(\sum_{\sigma(3,4)} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{i}{D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \delta(D_2^2) \delta(D_4^2). \end{aligned} \quad (13.44)$$

Les deux chaînes correspondent à (13.7) et (13.5). On intègre les intégrales tensorielles avec (C.3) et (C.4). Comme dans le paragraphe précédent, on ne garde que les intégrales non factices, puis on reconstruit les discontinuités :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_2 (\mathcal{A}_4^s(-+++)) &= \sum_{\sigma(2,3,4)} (e\sqrt{2})^4 \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \text{Disc}_2 \left(\mathcal{K}_4^n(1234) + \frac{st}{2u} \mathcal{J}_4^n(1234) \right) \\ &\quad + \left(\frac{s^2 + t^2 + u^2}{2tu} \right) \mathcal{J}_3^n(s). \end{aligned} \quad (13.45)$$

13.3.4 Conclusions

Le résultat de la méthode à quatre coupures (respectivement à trois et deux coupures) est donné dans (13.38) (respectivement (13.43) et (13.45)). On voit que la méthode à quatre coupures n'est pas suffisante pour reconstruire toute l'amplitude $\mathcal{A}^s(-+++)$, on doit utiliser la méthode à deux ou trois coupures. Cependant, la méthode à quatre coupures permet d'obtenir très facilement les coefficients devant les boîtes, mais pas les coefficients devant les triangles et les bulles, ce qui paraît normal puisqu'elle impose de couper quatre propagateurs. L'amplitude $\mathcal{A}^s(-+++)$ s'écrit en rajoutant le facteur K :

$$\mathcal{A}_4^s(-+++)= \sum_{\sigma(2,3,4)} 4i\alpha^2 \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \left(\mathcal{K}_4^n(1234) - \frac{st}{2u} \mathcal{J}_4^n(1234) + \left(\frac{s^2 + t^2 + u^2}{2tu} \right) \mathcal{J}_3^n(s) \right). \quad (13.46)$$

Grâce à l'identité de Schouten, on montre que $\frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle}$ est invariant par permutation, donc l'amplitude $\mathcal{A}^s(-+++)$ s'écrit au premier ordre en ϵ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s(-+++)= & -4i\alpha^2 \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} + 4i\alpha^2 m^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} I_4^n(1234) \\ & + 4i\alpha^2 m^2 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \left(-\frac{st}{2u} I_4^n(1234) + \left(\frac{s^2 + t^2 + u^2}{2tu} \right) I_3^n(s) \right) + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (13.47)$$

Dans la limite non massive $m^2 \rightarrow 0$, en utilisant les formules sur les intégrales scalaires (Appendice A) :

$$\mathcal{A}_4^s(-+++)= \xrightarrow{m^2 \rightarrow 0} -4i\alpha^2 \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} + O(\epsilon), \quad (13.48)$$

on retrouve les résultats connus [18, 97]. Maintenant, on va calculer la dernière amplitude d'hélicité avec deux photons d'hélicité négatives et deux d'hélicité positives : $\mathcal{A}_4^s(--++)$. On appelle souvent cette amplitude d'hélicité : MHV.

13.4 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^s(1^-, 2^-, 3^+, 4^+)$.

13.4.1 Méthode à quatre coupures

L'une des difficultés de cette amplitude d'hélicité est le fait qu'il y a deux topologies d'hélicités différentes. La topologie la plus simple est constituée de photons adjacents de même hélicité, alors que la plus compliquée possède une alternance des hélicités. La discontinuité à quatre coupures de ces deux topologies s'écrit :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(- - ++)) = \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_2^- \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_4^+ \end{array} + \sum_{\sigma(1,2)} \begin{array}{c} p_1^- \\ \text{---} \\ D_1^2 \\ \text{---} \\ p_3^+ \\ \text{---} \\ D_2^2 \\ \text{---} \\ p_2^- \\ \text{---} \\ D_3^2 \\ \text{---} \\ p_4^+ \end{array}.$$

Avec les règles de Feynman, on a :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_4(A_4^{\text{scalar}}(- - ++)) &= (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{[rq_2 2]}{[2r]} \frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\ &\quad + (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2)} \int d^n Q \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{\langle Rq_2 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{[rq_3 2]}{[2r]} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \end{aligned} \quad (13.49)$$

$$= I_1 + I_2. \quad (13.50)$$

On a séparé les deux topologies en deux intégrales I_1 et I_2 . En appliquant deux fois la chaîne (13.1), la première topologie I_1 s'écrit directement :

$$I_1 = (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \text{Disc}_4(\mathcal{K}_4^n(1234)). \quad (13.51)$$

Pour calculer la deuxième topologie I_2 , on transforme les spineurs pour rétablir l'invariance de jauge en multipliant le numérateur et le dénominateur par le spineur $[12]$ ou le spineur $\langle 34 \rangle$ puis en effectuant des rotations de matrices gamma comme dans la démonstration de la la formule (13.1) :

$$\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{[rq_3 2]}{[2r]} = \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{[rq_3 2]}{[2r]} \frac{[12]}{[12]} = -\frac{\langle 1q_1 q_3 2 \rangle}{[12]} = -\frac{\langle 12 \rangle (\mu^2 + m^2) + \langle 14q_3 2 \rangle}{[12]} \quad (13.52)$$

$$\frac{\langle Rq_2 3 \rangle \langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R3 \rangle \langle R4 \rangle} = \frac{\langle Rq_2 3 \rangle \langle Rq_4 4 \rangle \langle 34 \rangle}{\langle R3 \rangle \langle R4 \rangle \langle 34 \rangle} = -\frac{[3q_2 q_4 4]}{\langle 34 \rangle} = -\frac{[34] (\mu^2 + m^2) + [3q_2 24]}{\langle 34 \rangle}. \quad (13.53)$$

Avec (13.52) et (13.53), la topologie I_2 devient une somme de quatres termes que l'on développe et que l'on intègre avec (C.3, C.4) :

$$I_2 = 2(e\sqrt{2})^4 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(\text{Disc}_4(\mathcal{K}_4^n(1324)) + \frac{2ut}{s} \text{Disc}_4(\mathcal{J}_4^n(1324)) + \frac{u^2 t^2}{2s^2} \text{Disc}_4(I_4^n(1324)) \right). \quad (13.54)$$

La discontinuité contient des intégrales à quatre points en dimension n : I_4^n . Cette intégrale scalaire en théorie non massive a des divergences infrarouges. Cependant aucun diagramme ne diverge dans l'infrarouge, donc cette divergence doit être compensée par la présence d'autres intégrales scalaires divergentes dans l'infrarouge, comme des intégrales scalaires à trois points. Si on a des triangles en théorie non massive alors il y en aura très certainement en théorie massive. Pour simplifier le problème, il est préférable de transformer les boites de dimension n en boites de dimension $n+2$, qui ne sont plus divergentes dans l'infrarouge. On espère, avec cette transformation, éliminer toutes les intégrales divergentes dans l'infrarouge et avoir un résultat plus compact. Cette transformation linéaire ($I_4^n \rightarrow I_4^{n+2}$) est donnée par la formule (B.9). Finalement l'intégrale I_2 devient :

$$I_2 = 2(e\sqrt{2})^4 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(\text{Disc}_4(\mathcal{K}_4^n(1324)) - \frac{tu}{s} \text{Disc}_4(I_4^{n+2}(1324)) \right). \quad (13.55)$$

Après réduction, comme la discontinuité $\text{Disc}_4(\mathcal{A}^s(- - ++))$ est la somme de l'intégrale I_1 donnée par (13.51) et de l'intégrale I_2 donnée par (13.55), on a :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}^s(- - ++)) = (e\sqrt{2})^4 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(-\frac{2tu}{s} \text{Disc}_4(I_4^{n+2}(1324)) + \sum_{\sigma(2,3,4)} \text{Disc}_4(\mathcal{K}_4^n(1234)) \right). \quad (13.56)$$

13.4.2 Méthode à trois coupures

On coupe l'amplitude $\mathcal{A}_4^s(- - ++)$ dans deux canaux différents avec trois coupures. La discontinuité s'écrit, en terme de diagrammes coupés :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_3(A^{scalar}(- - ++)) &= \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \left(\begin{array}{c} p_1^- \quad D_1^2 \quad p_1^+ \\ | \quad | \quad | \\ D_1^2 \quad D_2^2 \quad D_3^2 \\ | \quad | \quad | \\ p_2^- \quad D_2^2 \quad p_3^+ \end{array} + \begin{array}{c} p_3^+ \quad D_1^2 \quad p_2^- \\ | \quad | \quad | \\ D_1^2 \quad D_2^2 \quad D_3^2 \\ | \quad | \quad | \\ p_4^+ \quad D_2^2 \quad p_1^- \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(1,3)} \sum_{\sigma(2,4)} \left(\begin{array}{c} p_1^- \quad D_1^2 \quad p_1^+ \\ | \quad | \quad | \\ D_1^2 \quad D_2^2 \quad D_3^2 \\ | \quad | \quad | \\ p_3^+ \quad D_2^2 \quad p_2^- \end{array} + \begin{array}{c} p_1^- \quad D_1^2 \quad p_3^+ \\ | \quad | \quad | \\ D_1^2 \quad D_2^2 \quad D_3^2 \\ | \quad | \quad | \\ p_4^+ \quad D_2^2 \quad p_2^- \end{array} \right). \end{aligned}$$

Grâce aux règles de Feynman, cette discontinuité devient :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_3(\mathcal{A}^s(- - ++)) &= \frac{(-i\sqrt{2}e)^4}{4} \left[\right. \\ &\sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{[rq_2 2]}{[2r]} \right) \frac{\langle Rq_3 3 \rangle \langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R3 \rangle \langle R4 \rangle} \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\ &+ \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \sum_{\sigma(3,4)} \left(\frac{\langle Rq_1 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \frac{[rq_3 1] [rq_4 2]}{[1r] [2r]} \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\ &+ \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(1,3)} \sum_{\sigma(2,4)} \int d^n Q \sum_{\sigma(1,3)} \left(\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \right) \frac{[rq_3 2] \langle Rq_4 4 \rangle}{[2r] \langle R4 \rangle} \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\ &+ \left. \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(1,3)} \sum_{\sigma(2,4)} \int d^n Q \sum_{\sigma(1,4)} \left(\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \frac{[rq_3 2] \langle Rq_4 3 \rangle}{[2r] \langle R3 \rangle} \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2) \right]. \quad (13.57) \end{aligned}$$

On ne va pas développer tout le calcul car il n'y a aucune difficulté. Toutes les chaînes ont déjà été calculées. On réduit les intégrales tensorielles avec les formules (C.3, C.4). Puis, on utilise la formule (B.9) pour transformer les boîtes à n dimensions en boîtes à $(n+2)$ dimensions. Au final on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_3(\mathcal{A}^s(- - ++)) &= (e\sqrt{2})^4 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left[-\frac{2tu}{s} \text{Disc}_3(I_4^{n+2}(1324)) + \sum_{\sigma(2,3,4)} \text{Disc}_3(\mathcal{K}_4^n(1234)) \right. \\ &\left. + \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{t-u}{s} \text{Disc}_3(I_2^n(u)) + 4\frac{u}{s} \text{Disc}_3(\mathcal{J}_3^n(u)) \right) \right]. \quad (13.58) \end{aligned}$$

13.4.3 Méthode à deux coupures

On a deux topologies d'hélicités. Pour chaque topology, on calcule la discontinuité dans chaque branche. La discontinuité de l'amplitude $\mathcal{A}_4^s(- - ++)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_2(\mathcal{A}^s(- - ++)) &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} p_1^- \\ D_1^2 \\ p_2^- \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_4^+ \\ D_3^2 \\ p_3^+ \end{array} + \begin{array}{c} p_1^- \\ D_1^2 \\ p_2^- \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_4^+ \\ -D_3^2 \\ p_3^+ \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\sigma(1,2)} \left(\begin{array}{c} p_1^- \\ D_1^2 \\ p_3^+ \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_4^+ \\ D_3^2 \\ p_2^- \end{array} + \begin{array}{c} p_1^- \\ D_1^2 \\ p_3^+ \end{array} \begin{array}{c} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \end{array} \begin{array}{c} p_4^+ \\ -D_3^2 \\ p_2^- \end{array} \right). \end{aligned}$$

Les diagrammes coupés sont doubles. On les rassemble et on les écrit formellement :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_2(\mathcal{A}^s(- - ++)) &= (-i\sqrt{2}e)^4 \int d^n Q \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{[rq_2 2]}{[2r]} \right) \\ &\quad \sum_{\sigma(3,4)} \left(\frac{\langle Rq_3 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \frac{i}{D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \delta(D_2^2, D_4^2) \\ &+ (-i\sqrt{2}e)^4 \sum_{\sigma(1,2)} \int d^n Q \sum_{\sigma(1,3)} \left(\frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} \right) \\ &\quad \sum_{\sigma(2,4)} \left(\frac{[rq_3 2]}{[2r]} \frac{i}{D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} \right) \delta(D_2^2, D_4^2). \end{aligned} \quad (13.59)$$

On a mélangé les topologies pour former des chaînes invariantes de jauge. La plupart des chaînes ont déjà été calculées, sauf dans la deuxième intégrale où il est préférable de reconstruire une unique chaîne de spineurs au numérateur :

$$\sum_{\sigma(1,3)} \frac{[rq_1 1]}{[1r]} \frac{i}{D_1^2} \frac{\langle Rq_2 3 \rangle}{\langle R3 \rangle} = -\frac{i}{u} [3q_4 1]^2 \sum_{\sigma(1,3)} \frac{1}{D_1^2} \quad (13.60)$$

$$\sum_{\sigma(2,4)} \frac{[rq_3 2]}{[2r]} \frac{i}{D_3^2} \frac{\langle Rq_4 4 \rangle}{\langle R4 \rangle} = -\frac{i}{u} [4q_2 2]^2 \sum_{\sigma(2,4)} \frac{1}{D_3^2}. \quad (13.61)$$

En rassemblant les expressions, la discontinuité $\text{Disc}_2(\mathcal{A}^s(- - ++))$ devient :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_2(\mathcal{A}^s(- - ++)) &= (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \text{Disc}_{2,s_{12}}(\mathcal{K}_4^n(1234)) \\ &- (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2)} \frac{1}{u^2} \int d^n Q \left([3q_4 1]^2 \sum_{\sigma(1,3)} \frac{1}{D_1^2} \right) \left([4q_2 2]^2 \sum_{\sigma(2,4)} \frac{1}{D_3^2} \right) \delta(D_2^2, D_4^2) \end{aligned} \quad (13.62)$$

$$= I_1 + I_2. \quad (13.63)$$

Maintenant on simplifie la deuxième intégrale I_2 . On commence par introduire les deux spineurs $\langle 34 \rangle$ et $[12]$ pour former quatre intégrales avec une même chaîne spinorielle :

$$\begin{aligned} I_2 &= (e\sqrt{2})^4 \sum_{\sigma(1,2)} \frac{i^2 \langle 12 \rangle [34]}{u^2 s^2 [12] \langle 34 \rangle} \int d^n Q \langle 1q_1 3q_3 21q_1 3q_3 21 \rangle \\ &\quad \left(\frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_1'^2} \right) \left(\frac{1}{D_3^2} + \frac{1}{D_3'^2} \right) \delta(D_2^2, D_4^2). \end{aligned} \quad (13.64)$$

On a quatre intégrales de rangs quatres. On utilise les techniques standards de réduction. Mais ici il y a un axe de coupure qui est un axe de symétrie pour les topologies. La distribution des hélicités est symétrique ou antisymétrique autour de cet axe. On utilise cette axe de symétrie pour simplifier

l'expression de I_2 . On commence par simplifier les notations : $q_2 = q$, et on écrit le numérateur comme le carré du scalaire P , selon l'axe de symétrie :

$$\langle 1q_134q_321q_134q_321 \rangle = \langle 1q_34q_21q_34q_21 \rangle = \langle 1q_34q_21 \rangle \langle 1q_34q_21 \rangle = P^2. \quad (13.65)$$

Pour diminuer le rang de P , on transforme P comme une combinaison linéaire de dénominateurs D_i^2 :

$$\langle 1q_34q_21 \rangle = 2(q.4)\langle 1q_321 \rangle - 2(q.3)\langle 1q_421 \rangle + (\mu^2 + m^2)\langle 13421 \rangle. \quad (13.66)$$

Le rang de P a bien diminué. Maintenant pour continuer de simplifier P , il faut connaître la distribution exacte des photons dans la boucle. Les produits scalaires $2(p_j.q_i)$ peuvent être écrit comme une somme de dénominateurs et de variables de Mandelstam. Beaucoup de triangles tensoriels sont nuls et peuvent être simplifiés avec (C.2). Enfin comme la QED n'a pas de structure de couleur, alors les permutations simplifient le résultat. On réitère le processus et on finit le calcul avec les formules d'intégration (C.3, C.4). On rassemble les deux intégrales I_1 et I_2 pour reconstruire la discontinuité $\text{Disc}_2(\mathcal{A}^s(- - ++))$:

$$\begin{aligned} \text{Disc}_2(\mathcal{A}^s(- - ++)) = & (e\sqrt{2})^4 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left[-\frac{2tu}{s} \text{Disc}_2(I_4^{n+2}(1324)) + \sum_{\sigma(2,3,4)} \text{Disc}_2(\mathcal{K}_4^n(1234)) \right. \\ & \left. + \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{t-u}{s} \text{Disc}_2(I_2^n(u)) + 4\frac{u}{s} \text{Disc}_2(\mathcal{J}_3^n(u)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.67)$$

13.4.4 Conclusions

Les formules (13.56, 13.58, 13.67) donnent les discontinuités $\text{Disc}_i(\mathcal{A}^s(- - ++))$ avec respectivement quatre, trois et deux coupures. La méthode à quatre coupures n'est pas suffisante pour reconstruire toute l'expression de l'amplitude $\mathcal{A}^s(- - ++)$, alors qu'elle est vraiment efficace pour calculer les coefficients devant les intégrales à quatre points. On reconstruit l'amplitude sans oublier le facteur K :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s(- - ++) = & 4 i\alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(-\frac{2tu}{s} I_4^{n+2}(1324) + \sum_{\sigma(2,3,4)} \mathcal{K}_4^n(1234) \right. \\ & \left. + \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{t-u}{s} I_2^n(u) + 4\frac{u}{s} \mathcal{J}_3^n(u) \right) \right). \end{aligned} \quad (13.68)$$

Cette expression est valable pour tout ordre en ϵ . La compacité du résultat vient du fait qu'il y a une symétrie dans la structure des hélicités : il y a autant d'hélicités négatives que positives. De plus, grâce à l'utilisation d'intégrales scalaires à quatre points à $n+2$ dimensions plutôt qu'à n dimensions, tous les triangles sauf les « extra-triangles » \mathcal{J}_3 ont été éliminés. Le développement au premier ordre en ϵ nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s(- - ++) = & 4 i\alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(1 - \frac{2tu}{s} I_4^{n+2}(1324) + \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{t-u}{s} I_2^n(u) + 4m^2 \frac{u}{s} I_3^n(u) \right) \right. \\ & \left. + m^4 \sum_{\sigma(2,3,4)} I_4^n(1234) \right) + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (13.69)$$

Avec quatre coupures, on ne peut pas obtenir les coefficients devant les intégrales scalaires à deux et trois points. Cependant, on remarque que la méthode à trois coupures est suffisamment puissante pour calculer les coefficients devant toutes les intégrales scalaires. Les termes rationnels

sont décrits par les extra-intégrales scalaires \mathcal{J}_i^n et \mathcal{K}_i^n . Si on prend la limite des scalaires de masses nulles ($m^2 \rightarrow 0$), alors on retrouve les résultats connus [18, 97]. Au premier ordre en ϵ , on a :

$$\mathcal{A}_4^s(--++) \xrightarrow{m^2 \rightarrow 0} 4 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left\{ 1 - \frac{2ut}{s} I_4^{n+2}(1324) + \frac{t-u}{s} (I_2^n(u) - I_2^n(t)) \right\} + O(\epsilon). \quad (13.70)$$

13.5 Résumé et discussions.

13.5.1 L'amplitude à quatre photons en QED scalaire massive

Les trois amplitudes d'hélicités à quatre photons sont (13.26, 13.46, 13.68) :

$$\mathcal{A}_4^s(++++) = 4 i \alpha^2 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[12][34]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \mathcal{K}_4^n(1234) \quad (13.71)$$

$$\mathcal{A}_4^s(-+++)= 4 i \alpha^2 \sum_{\sigma(2,3,4)} \frac{[34][231]}{\langle 34 \rangle \langle 231 \rangle} \left(\mathcal{K}_4^n + \frac{st}{2u} \mathcal{J}_4^n(1234) + \left(\frac{s^2 + t^2 + u^2}{2tu} \right) \mathcal{J}_3^n(s) \right) \quad (13.72)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^s(--++) = 4 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} & \left(-\frac{2tu}{s} I_4^{n+2}(1324) + \sum_{\sigma(2,3,4)} \mathcal{K}_4^n(1234) \right. \\ & \left. + \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{t-u}{s} I_2^n(u) + 4 \frac{u}{s} \mathcal{J}_3^n(u) \right) \right). \end{aligned} \quad (13.73)$$

Seule l'amplitude MHV a une structure analytique au premier ordre en ϵ , alors que les deux amplitudes $\mathcal{A}_4^s(++++)$ et $\mathcal{A}_4^s(-+++)$ ne sont que des termes rationnels. Dans la limite non massive, on retrouve les résultats obtenus dans le chapitre 12.

13.5.2 Les termes rationnels

Dans cet exemple très simple, l'amplitude à quatre photons, tous les termes rationnels viennent des extra-intégrales scalaires \mathcal{J}_i^n et \mathcal{K}_i^n . On peut discuter un peu de l'origine de ces termes rationnels. Si on considère une boucle dans le schéma de régularisation FDHS (parag. 10.7), alors tous les termes rationnels viennent de la première origine dans ce paragraphe. L'amplitude à quatre photons en QED scalaire s'écrit pour un diagramme :

$$\mathcal{A}_4 = \int d^n Q \frac{\varepsilon_1 \cdot Q_1 \varepsilon_2 \cdot Q_2 \varepsilon_3 \cdot Q_3 \varepsilon_4 \cdot Q_4}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2}. \quad (13.74)$$

Le schéma d'hélicité impose que les vecteurs polarisations soient à quatre dimensions. Par conséquent, comme les deux espaces à quatre et a -2ϵ dimensions sont orthogonaux, alors : $\varepsilon_i \cdot Q_i \rightarrow \varepsilon_i \cdot q_i$. Lors de la réduction des intégrales, des termes q_i^2 vont apparaître. Seulement, si on veut les simplifier avec les dénominateurs, alors il faut ajouter et soustraire $m^2 + \mu^2$:

$$q_i^2 \rightarrow D_i^2 + (m^2 + \mu^2). \quad (13.75)$$

Pour calculer les termes rationnels, il suffit alors d'effectuer une transformation linéaire de la masse des scalaires : $m^2 \rightarrow m^2 + \mu^2$.

13.5.3 Méthodes à plusieurs coupures

Nous avons utilisé trois méthodes d'unitarité : la méthode à deux, trois ou quatre coupures. On remarque que plus il y a de coupures et plus on a de propagateurs sur couche de masse et plus le calcul est simple. Mais, plus on a de coupures, et moins de coefficients devant les intégrales sont calculables. Avec quatre coupures, on ne peut calculer que les coefficients devant les boîtes, alors qu'avec deux et trois coupures, on peut calculer les coefficients devant les boîtes, les triangles et les bulles.

On considère une boucle à quatre photons avec deux coupures. On l'appelle la coupure principale : elle entoure un invariant. Maintenant on rajoute une coupure. Cette coupure partage un invariant constitué de deux photons sur couches de masses en deux arbres ayant chacun un photon sur couche de masse. Ces arbres ne sont pas des invariants, donc aucun invariant n'a été créé, ni perdu, puisqu'il reste l'invariant entouré par la coupure principale. Donc, en passant de la méthode à deux coupures à la méthode à trois coupures, l'on a ni perdu, ni gagné d'information sur la structure analytique de l'amplitude. Ceci explique pourquoi nous obtenons le même résultat avec deux ou trois coupures et pourquoi lors des réductions de la méthode à trois coupures, les bulles respectant la coupure principale ne sont pas factices. Cependant la méthode à trois coupures a l'avantage d'imposer une condition de réalité en plus et donc de simplifier la réduction (parag. 10.3.3).

Chapitre 14

Amplitudes à quatre photons en QED et en QED $\mathcal{N}=1$.

Sommaire

14.1 Amplitude à quatre photons en QED.	147
14.1.1 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^S(1^\pm, 2^+, 3^+, 4^+)$	147
14.1.2 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^S(- - ++)$ par la méthode des quatre coupures .	147
14.1.3 Conclusions	148
14.2 Amplitude supersymétrique $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$.	149
14.3 Graphs des amplitudes.	149

14.1 Amplitude à quatre photons en QED.

14.1.1 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^S(1^\pm, 2^+, 3^+, 4^+)$

Grâce à la proposition 3.3.2, on a directement :

$$\mathcal{A}_4^S(\pm +++) = -2\mathcal{A}_4^s(\pm +++) . \quad (14.1)$$

14.1.2 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^S(- - ++)$ par la méthode des quatre coupures

La méthode à quatre coupures impose que les quatre propagateurs soient sur couches de masses. On utilise la décomposition supersymétrique d'une boucle de fermion en terme de moments magnétiques, donnée dans la proposition 3.3.1. Comme les quatre propagateurs $D_1^2 \dots D_4^2$ sont coupés alors, la discontinuité $\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^S(- - ++))$ s'écrit simplement :

$$\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^S(- - ++)) = -\frac{1}{2} \sum_{\sigma(2,3,4)} \int d^n Q \text{tr}(U_1 U_2 U_3 U_4) \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \quad (14.2)$$

On rappelle l'interaction effective (déf. 3.1.2) : $U_p = -ie(2k^\mu + p^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_\nu) \varepsilon_p^\mu$. La discontinuité a donc $2^4 = 16$ termes. Cependant grâce à l'expression des moments magnétiques (3.4), on voit tout de suite que la trace d'un seul moment est nulle $\text{tr}(M_i) = 0$ et qu'une trace, contenant des moments

magnétiques issus de champs de jauges d'hélicités différentes, est également nulle (Appendice D). Le développement de la discontinuité ne contient en fait que cinq termes. Parmi ces termes, on reconnaît la discontinuité en QED scalaire à un facteur « -2 » près :

$$\begin{aligned}
\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^S(- - ++)) &= -2 \text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(- - ++)) \\
&+ (e\sqrt{2})^2 \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \text{tr}(M_3 M_4) \varepsilon_1 \cdot q_1 \varepsilon_2 \cdot q_2 \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\
&+ (e\sqrt{2})^2 \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \text{tr}(M_1 M_2) \varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4 \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\
&+ \frac{(e\sqrt{2})^2}{2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \text{tr}(M_3 M_4) \varepsilon_1 \cdot q_1 \varepsilon_2 \cdot q_3 \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\
&+ \frac{(e\sqrt{2})^2}{2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4)} \int d^n Q \text{tr}(M_1 M_2) \varepsilon_3 \cdot q_2 \varepsilon_4 \cdot q_4 \delta(D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2) \\
&= -2 \text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(- - ++)) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

Le facteur « 2 » devant la discontinuité en QED scalaire vient du fait qu'il faut et qu'il suffit de deux champs scalaires complexes pour fabriquer un champ spinorielle en terme de degré de liberté. Le signe « - » vient du fait qu'on transforme des bosons en fermions lors du passage de la QED scalaire à la QED. On retrouve le facteur de la décomposition supersymétrique de la proposition 3.3.3. Maintenant on calcule toutes les chaînes dans la discontinuité. Les traces des moments magnétiques sont données par (D.12) et les arbres par (13.1). Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^S(- - ++)) &= -2 \text{Disc}_4(\mathcal{A}_4^s(- - ++)) \\
&+ (e\sqrt{2})^4 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} s \left(\sum_{\sigma(2,3,4)} \text{Disc}_4(\mathcal{J}_4^n(1234)) - 2 \text{Disc}_4(I_4^{n+2}(1324)) \right).
\end{aligned} \tag{14.4}$$

Par la méthode à deux ou trois coupures, on aurait trouvé exactement le même résultat.

14.1.3 Conclusions

Avec la méthode à deux coupures ou à quatre coupures, les discontinuités s'écrivent de la même manière. On reconstruit l'amplitude et on multiplie par le facteur $K = 1/(4\pi)^{-n/2}$:

$$\mathcal{A}_4^S(- - ++) = -2 \mathcal{A}_4^s(- - ++) + 4 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} s \left(\sum_{\sigma(2,3,4)} \mathcal{J}_4^n(1234) - 2 I_4^{n+2}(1324) \right) \tag{14.5}$$

Grâce à l'expression de l'amplitude en QED scalaire calculée précédemment (13.68), l'amplitude en QED s'écrit :

$$\mathcal{A}^S(- - ++) = -8 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(\frac{t^2 + u^2}{s} I_4^{n+2}(1324) + \sum_{\sigma(1,2)} \left(\frac{t-u}{s} I_2^n(u) + 4 \frac{u}{s} \mathcal{J}_3^n(u) \right) \right) \tag{14.6}$$

$$+ \sum_{\sigma(2,3,4)} \left(\mathcal{K}_4^n(1234) - \frac{s}{2} \mathcal{J}_4^n(1234) \right), \tag{14.7}$$

et dans la limite non massive, au premier ordre en ϵ , on retrouve les résultats connus [18, 97] :

$$\mathcal{A}^S(- - ++) = -8 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} \left(1 + \frac{t^2 + u^2}{s} I_4^{n+2}(1324) + \frac{t-u}{s} (I_2^n(u) - I_2^n(t)) \right) + O(\epsilon). \tag{14.8}$$

14.2 Amplitude supersymétrique $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$.

On utilise directement la décomposition supersymétrique (3.3.3) pour extraire l'amplitude supersymétrique $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$. Comme l'amplitude \mathcal{A}_4^S obéit cette décomposition, alors on peut directement identifier $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}$ sans avoir besoin de calculer tous les diagrammes supersymétriques. Avec la formule (14.1) on peut identifier les amplitudes d'hélicité $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(\pm +++)$ et avec la formule (14.5) on peut identifier l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(- -++)$:

$$\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(+ +++) = 0 \quad (14.9)$$

$$\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(- +++) = 0 \quad (14.10)$$

$$\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(- -++) = 4 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} s \left(\sum_{\sigma(2,3,4)} \mathcal{J}_4^n(1234) - 2I_4^{n+2}(1324) \right). \quad (14.11)$$

Dans le cas non massif, au premier ordre en ϵ , les amplitudes s'écrivent :

$$\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(+ +++) = 0 \quad (14.12)$$

$$\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(- +++) = 0 \quad (14.13)$$

$$\mathcal{A}_4^{\mathcal{N}=1}(- -++) = -8 i \alpha^2 \frac{\langle 12 \rangle [34]}{[12] \langle 34 \rangle} s I_4^{n+2}(1324) + O(\epsilon). \quad (14.14)$$

On retrouve les résultats de [18] et ceux du chapitre 12. Que ce soit en théorie massive ou non massive, les amplitudes supersymétriques n'ont pas de bulles, ni de triangles ni de termes rationnels, seulement des boites.

On va commencer par prouver que les diagrammes de l'amplitude à quatre photons en QED supersymétrique : $\mathcal{N} = 1$ ne sont pas divergents dans l'ultraviolet. On identifie la décomposition d'une boucle de fermions avec les moments magnétiques (prop. 3.3.1) et la formule de décomposition supersymétrique (prop. 3.3.3). Comme la trace d'un moment magnétique est nulle alors on voit que le numérateur d'un diagramme supersymétrique contient au moins deux moments magnétiques. On peut alors effectuer un comptage de puissance, on définit r la puissance de l'impulsion d'une boucle supersymétrique de l'amplitude à N photons. On a alors :

$$r \leq n - 1 + N - 2 - 2N = 1 - 2\epsilon - N \quad (14.15)$$

Par conséquent, si $N \geq 3$ alors la boucle n'est pas divergente dans l'ultraviolet. Donc chaque diagramme de l'amplitude à quatre photons en QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ n'est pas divergent dans l'ultraviolet contrairement aux boucles en QED et en QED scalaire. Cependant, ce résultat n'est pas suffisant pour affirmer qu'il n'y a pas de bulles I_2 dans la réduction d'un diagramme. On peut toujours envisager des compensations entre divergences. Néanmoins les techniques de réductions standards montrent qu'une boucle supersymétrique n'engendre pas de bulles.

On suppose que la boucle est non massive. D'après les propositions 9.3.1, 9.3.2, 9.4.1 et 9.4.2 une boucle de fermions ou de scalaires n'a pas de divergence infrarouge. Donc, utilisant la proposition 10.6.4 sur la nullité des coefficients devant les triangles, une boucle de fermions ou de scalaires n'aura pas de triangles dans leur décomposition. Par extension supersymétrique, une boucle en QED $^{\mathcal{N}=1}$ n'aura pas de triangles non plus. Si maintenant la boucle est massive, alors ce raisonnement n'est pas exact car les divergences infrarouges sont régularisées. Cependant aucun triangle n'est attendu sauf des extra-triangles scalaires.

14.3 Graphs des amplitudes.

On considère les deux processus physiques $\gamma_1^- + \gamma_2^- \rightarrow \gamma_3^+ + \gamma_4^+$ et $\gamma_1^- + \gamma_2^+ \rightarrow \gamma_3^- + \gamma_4^+$ dans une boucle non massive. Les hélicités sont données pour des photons entrants. On suppose que l'état

initial est constitué par les deux photons 1 et 2 d'hélicités négatives, d'énergie $\sqrt{s}/2$ et se trouvant alignés le long de l'axe z. Par conservation de l'énergie impulsion, l'état final se trouve aussi le long d'un axe, appelé u. Initialement on prend cet axe u confondu avec l'axe z, puis on le modifie en le faisant tourner autour de l'axe y, perpendiculaire à l'axe z. On a tracé les amplitudes en fonction de l'angle de rotation θ (Fig. 14.1).

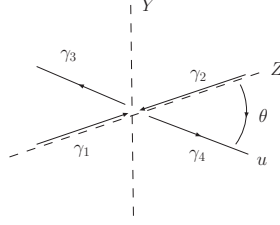


FIG. 14.1 – Configuration cinématiques du processus à quatre photons

L'amplitude ne dépend pas de l'énergie initiale et on observe clairement les interférences entre les bosons et les fermions (Fig. 14.2).

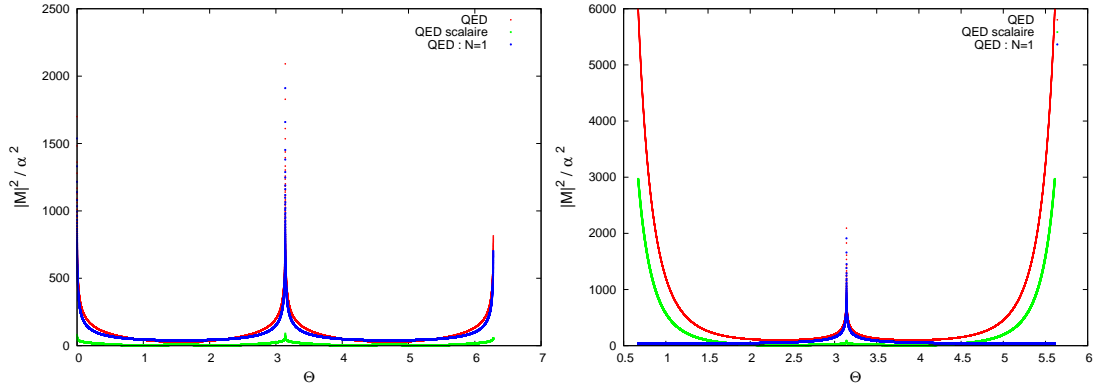


FIG. 14.2 – Amplitudes d'hélicité $\gamma^- \gamma^- \rightarrow \gamma^+ \gamma^+$ à gauche et $\gamma^- \gamma^+ \rightarrow \gamma^- \gamma^+$ à droite du processus à quatre photons.

Les divergences observées dans les deux amplitudes correspondent aux divergences de Coulomb lorsque les deux photons émis sont dans la même direction que les deux photons initiaux. L'amplitude de droite est disymétrique à cause des hélicités. La divergence de Coulomb est plus large quand les photons d'entrés et de sortis ont la même hélicité. Les limites des amplitudes en $\theta \simeq 0$ et π dans le processus $-- \rightarrow ++$ sont :

$$\mathcal{A}_4^{s/S/N=1} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} A_0 \log(\theta) + B_0 \log^2(\theta) \quad (14.16)$$

$$\mathcal{A}_4^{s/S/N=1} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} A_\pi \log(\pi - \theta) + B_\pi \log^2(\pi - \theta), \quad (14.17)$$

avec A_0, A_π, B_0, B_π des constantes et on a $A_0^{N=1} = A_\pi^{N=1} = 0$. Toutes les divergences proviennent de la fonction à quatre points qui diverge lorsque quatre pattes externes deviennent colinéaires deux à deux et de la fonction à deux points qui diverge lorsque la masse de la patte externe devient nulle. Ce sont les variables « t » ou « u » qui s'annulent, il n'y a plus de transfert d'énergie entre l'état initial et l'état final. Pour le processus $-+ \rightarrow -+$, les amplitudes sont de la forme :

$$\mathcal{A}_4^{s/S} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{A_0}{(\pi - \theta)^4} \quad (14.18)$$

$$\mathcal{A}_4^{N=1} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} A_0 \quad (14.19)$$

$$\mathcal{A}_4^{s/S/N=1} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} A_\pi \log(\pi - \theta) + B_\pi \log^2(\pi - \theta), \quad (14.20)$$

En $\theta \simeq 0$ la divergence des amplitudes scalaires et spinorielles vient de la variable de Mandelstam « s » au dénominateur qui s'annule. Cette variable correspond au déterminant de Gram de

l'intégrale à quatre points. La supersymétrie fait remonter la puissance du déterminant de Gram et annule la divergence. La variable « s » s'annule, il n'y a plus d'échange d'énergie entre les deux états initiaux et finaux. Or cette variable est la masse de deux photons de même hélicité. Donc, en plus de l'absence d'échange d'énergie, il y a la non-conservation de l'hélicité qui fait diverger l'amplitude. En $\theta \simeq \pi$ les divergences viennent des limites des fonctions à quatre et deux points. Là encore les divergences correspondent au fait qu'il n'y a plus de transfert d'énergie de l'état initial à l'état final. Dans le cas supersymétrique, les interférences bosons-fermions annulent la divergence de Coulomb dû à la non conservation de l'hélicité. La particule supersymétrique qui relie les deux états transfère ou tamponne les hélicités qui résout les problèmes de divergences. Cette étude rapide des divergences nous montre que la différence de comportement entre les amplitudes scalaires, spinorielles et supersymétrique ne vient pas des termes rationnelles ni des bulles (logarithmes), origine des divergences ultraviolettes, mais de la présence du déterminant de Gram au numérateur ou au dénominateur. De plus, l'amplitude en QED scalaire a la particularité de s'annuler. Enfin, on peut aussi remarquer que la partie imaginaire de chacun des processus, quelque soit la théorie, est nulle. L'amplitude est purement réelle, ce qui est normal vu que les particules sont alignées deux à deux, les spineurs sont tous réels. En QED et en QED^{N=1} cette amplitude reste strictement

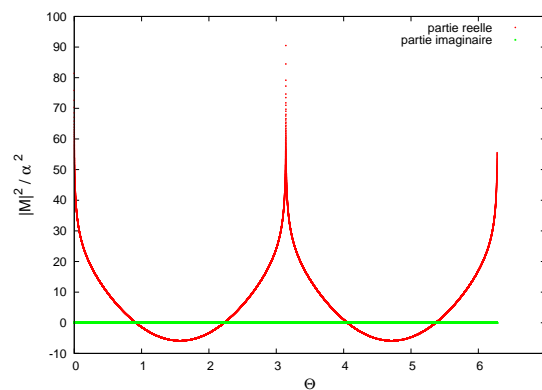


FIG. 14.3 – Partie réelle et partie imaginaire de l'amplitude du processus $\gamma_1^- + \gamma_2^- \rightarrow \gamma_3^+ + \gamma_4^+$.

positive, alors qu'en QED scalaire l'amplitude change de signe (Fig.14.3).

Cinquième partie

Amplitudes $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$.

Chapitre 15

$e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ en QED scalaire.

Sommaire

15.1 Hypothèses et réductions.	155
15.2 Les diagrammes du processus.	156
15.2.1 À l'ordre de l'arbre	156
15.2.2 À l'ordre d'une boucle	156
15.3 Renormalisation du propagateur du photon.	157
15.4 Renormalisation du propagateur du scalaire.	157
15.5 Renormalisation du vertex simple.	158
15.6 Renormalisation du vertex double.	159
15.7 Amplitude à l'ordre d'une boucle.	160

Dans ce chapitre, on va étudier le processus $e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ en QED scalaire. Contrairement au processus à quatre photons, il contient des divergences infrarouges et ultraviolettes. Les divergences ultraviolettes seront traitées par renormalisation. L'intérêt est d'appliquer les méthodes de réduction du chapitre 10, en vue du calcul du processus $\bar{q}q \rightarrow gggg$.

15.1 Hypothèses et réductions.

Hypothèses 3. *Dans cette partie, on veut calculer le processus $e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ en QED scalaire à l'ordre d'une boucle. On supposera que toutes les particules externes sont non massives, et que la particule dans la boucle n'a pas de masse non plus. On notera \mathcal{A}_{ee}^i l'amplitude du processus à l'ordre i .*

Les scalaires externes n'ont pas de polarisations, cependant les deux photons externes ont des états d'hélicités. On utilisera donc la méthode des amplitudes d'hélicités. Pour chaque ordre il y a seulement deux états d'hélicités indépendants à calculer :

$$\mathcal{A}_{ee}^i(1^+, 2^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{ee}^i(1^-, 2^+), \quad (15.1)$$

les deux autres états sont obtenus en utilisant la parité. À l'ordre de l'arbre, le processus est non nul : $\mathcal{A}_{ee}^0 \neq 0$. On le calculera en utilisant les formules de chaînes calculées dans les chapitres 4 et 5, alors que l'on calculera l'ordre d'une boucle avec la méthode des coupures (chap. 10). Comme les quatre particules externes et internes sont sans masse, alors l'amplitude à l'ordre d'une boucle aura la même décomposition que celle de l'amplitude à quatre photons.

Résultat 15.1.1. Les amplitudes d'hélicités du processus $e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$, avec les hypothèses 3, décrites en QED scalaire s'écrivent :

$$\mathcal{A}_{ee} = \mathcal{A}_{ee}^0 + \sum_{i \in \sigma^+ \cup \sigma^-} g_i I_{4,0}^{n+2} + j_i I_{3,1}^n + k_i I_2^n + \text{termes rationnels.} \quad (15.2)$$

où σ^\pm représente les permutations sur les photons d'hélicités positives/négatives.

15.2 Les diagrammes du processus.

15.2.1 À l'ordre de l'arbre

À l'ordre de l'arbre, le processus $e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$ en QED scalaire est décrit par trois diagrammes de Feynman :

$$\mathcal{A}_{ee}^0(\sigma_3, \sigma_4) = \text{Diagramme à un vertex noir} \quad (15.3)$$

Ces diagrammes correspondent exactement à ceux des chaînes de type 1 et 2. Grâce à leurs expressions (4.2, 5.1), on obtient directement, en faisant attention que les deux scalaires sont entrants :

$$\mathcal{A}_{ee}^0(++) = 0 \quad \mathcal{A}_{ee}^0(-+) = -i \left(e\sqrt{2} \right)^2 \frac{\langle 32 \rangle \langle 31 \rangle}{\langle 42 \rangle \langle 41 \rangle}. \quad (15.4)$$

15.2.2 À l'ordre d'une boucle

À l'ordre d'une boucle, le processus est constitué de 29 diagrammes que l'on rassemble en deux types de blocs :

$$\text{Diagramme à un vertex gris} = \text{Diagramme à un vertex gris avec p1} + \text{Diagramme à un vertex gris avec p2} + \text{Diagramme à un vertex gris avec p3} \quad (15.5)$$

$$\text{Diagramme à un vertex gris avec p3, p4} = \sum_{\sigma(3,4)} \left(\text{Diagramme à un vertex gris avec p3, p4} \right) + \text{Diagramme à un vertex gris avec p3, p4} \quad (15.6)$$

L'amplitude est une fonction de Green réduite, dans le sens où l'on « enlève » les propagateurs de pattes externes : c'est la réduction LSZ [14, 15, 16]. On ne renormalisera donc pas les propagateurs externes. En terme de blocs, l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_{ee}(\sigma_3, \sigma_4) = \text{Diagramme à un vertex gris avec p1, p2, p3, p4} + \sum_{\sigma(3,4)} \left(\text{Diagramme à un vertex gris avec p1, p2, p3, p4} + \text{Diagramme à un vertex gris avec p1, p2, p3, p4} + \text{Diagramme à un vertex gris avec p1, p2, p3, p4} \right). \quad (15.7)$$

Maintenant, on va calculer les différents diagrammes divergents, puis les renormaliser afin de pouvoir calculer les différents blocs de l'amplitude nue (15.7).

15.3 Renormalisation du propagateur du photon.

Le premier diagramme divergent en QED scalaire

d'amplitude $i\Pi^{\mu\nu}$, s'appelle le tenseur de polarisation du vide, car il traduit la présence de paire « fermion-antifermion », bien qu'ici ce soit des scalaires qui polarisent le vide autour du scalaire. Son amplitude s'écrit :

$$i\Pi^{\mu\nu} = (-ie)^2 i^2 \mu^{(4-n)} i (4\pi)^{-n/2} \int d^n Q \frac{(Q_1 + Q_2)^\mu (Q_1 + Q_2)^\nu}{D_1^2 D_2^2} \quad (15.8)$$

$$= -2i(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} K I_2^{n+2} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \quad (15.9)$$

$$= i\Pi(q^2) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right), \quad (15.10)$$

avec $\Pi(q^2) = -2(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} K I_2^{n+2}$. Ce tenseur est donc proportionnel à une intégrale à deux points qui est divergente dans l'ultraviolet. On élimine cette divergence par l'ajout d'un contre-terme de diagramme et de règle de Feynman :

$$- i(Z_3 - 1) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 \quad (15.11)$$

Avec l'ajout de ce contre-terme, le tenseur polarisation devient renormalisé :

$$i\Pi^{\mu\nu} \rightarrow i\Pi_R^{\mu\nu} = i \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) (\Pi(q^2) - q^2 (Z_3 - 1)) \quad (15.12)$$

On note $\Pi_R(q^2) = \Pi(q^2) - q^2 (Z_3 - 1)$. On ajuste alors constante $Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ de façon à éliminer les divergences ultraviolettes. Maintenant, on peut calculer le propagateur exact du photon à l'ordre d'une boucle, qui est la fonction de Green à deux points $\mathcal{S}_{eA}^{\mu\nu} = \text{TF} \langle 0|T A^\mu(x) A^\nu(y)|0\rangle$ de la propagation d'un champ de jauge A^μ en représentation d'Heisenberg, calculée non perturbativement. Si on additionne tous les diagrammes irréductibles à une boucle, alors le propagateur exacte du photon s'écrit :

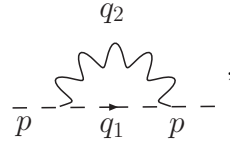
$$\mathcal{S}_{eA}^{-1}{}_{\mu\nu} = S_A^{-1}{}_{\mu\nu} - i\Pi_R^{\mu\nu}, \quad (15.13)$$

où $S_{A\mu\nu} = -\frac{i}{q^2 + i\lambda} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + S_A^{(l)}(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$ est le propagateur libre du photon qui contient une partie transverse et une partie longitudinale proportionnelle à $S_A^{(l)}(q^2)$. C'est la forme généralisée du propagateur vu dans le chapitre 1. Il s'écrit

$$\mathcal{S}_{eA}^{\mu\nu} = -\frac{i}{q^2 - \Pi_R(q^2)} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + S_A^{(l)}(q^2) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (15.14)$$

15.4 Renormalisation du propagateur du scalaire.

Le deuxième diagramme divergent en QED scalaire



s'appelle opérateur de masse, car il traduit l'interaction du scalaire avec son propre champ électromagnétique par l'émission et l'absorption d'un photon virtuel. La masse mesurée, qui est la masse exacte du scalaire, n'est pas la masse nue. Son amplitude s'écrit :

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 i(-i)\mu^{(4-n)} i(4\pi)^{-n/2} \int d^n Q \frac{(p+p+Q_2) \cdot (p+p+Q_2)}{D_1^2 D_2^2} \quad (15.15)$$

$$= -2i(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} p^2 I_2^n \quad (15.16)$$

$$= -i p^2 \Sigma(p^2). \quad (15.17)$$

La présence d'une intégrale I_2^n dans $\Sigma(p^2) = 2(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} I_2^n$ introduit des divergences l'ultraviolettes. On élimine cette divergence par l'ajout d'un contre-terme de diagramme et de règle de Feynman :

$$- - \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ p \end{array} - - \quad i(Z_2 - 1) p^2. \quad (15.18)$$

L'opérateur de masse devient renormalisé :

$$-i\Sigma(p) \rightarrow -i\Sigma_R(p) = -i p^2 (\Sigma(p^2) - (Z_2 - 1)). \quad (15.19)$$

On note $\Sigma_R(p^2) = \Sigma(p^2) - (Z_2 - 1)$. On ajuste la constante $Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ pour éliminer les divergences ultraviolettes. Maintenant, on peut calculer le propagateur exact du scalaire à une boucle, qui est égal à la fonction de Green à deux points $\mathcal{S}_{e\phi^3} = \text{TF} \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle$ de la propagation d'un champ ϕ en représentation d'Heisenberg. Si on additionne tous les diagrammes irréductibles à une boucle, alors ce propagateur exact s'écrit :

$$\mathcal{S}_{e\phi^3}^{-1} = S_{\phi^3}^{-1} - (-i\Sigma_R(p)), \quad (15.20)$$

où $S_\phi = \frac{i}{p^2 + i\lambda}$ est le propagateur libre du scalaire. On en déduit alors le propagateur exact du scalaire :

$$\mathcal{S}_{e\phi^3} = \frac{i}{p^2 - p^2 \Sigma_R(p^2)}. \quad (15.21)$$

L'interaction du scalaire avec son propre champ électromagnétique lui crée une masse de valeur $m^2 = p^2 \Sigma_R(p^2)$.

15.5 Renormalisation du vertex simple.

On considère l'ensemble des diagrammes du premier bloc (15.5). Toutes les particules sont

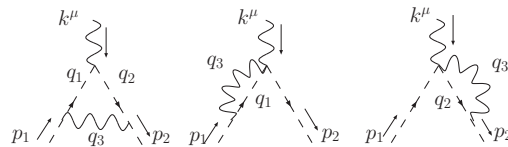


FIG. 15.1 – Diagrammes associés au vertex simple en QED scalaire

entrantes et l'on suppose que les deux scalaires sont non massifs mais hors couche de masse. En utilisant les règles de Feynman, l'amplitude associée à ces trois diagrammes s'écrit :

$$- i e (p_1^\mu + p_2^\mu) \mu^{\frac{(4-n)}{2}} \Lambda(k, p_1, p_2) \quad (15.22)$$

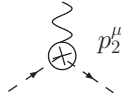
$$= - e^3 \mu^{\frac{3(4-n)}{2}} i(4\pi)^{-n/2} \left\{ 2p_1^\mu I_2^n(p_1^2) + 2p_2^\mu I_2^n(p_2^2) + (p_1^2 + p_2^2) \int d^n Q \frac{(D_1 + D_2)^\mu}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} \right\} \quad (15.23)$$

$$= 2 e^3 \mu^{\frac{3(4-n)}{2}} i(4\pi)^{-n/2} \left\{ \frac{p_1^2}{p_2^2 - p_1^2} p_1^\mu I_2^n(p_1^2) + \frac{p_2^2}{p_1^2 - p_2^2} p_2^\mu I_2^n(p_2^2) \right\}. \quad (15.24)$$

Les propositions 10.6.4, 10.6.5 et 10.6.6 impliquent immédiatement la nullité du coefficient de la fonction à trois points. Ici on ne produit que deux photons avec des électrons non massifs, on aura donc $p_1^2 = 0$

$$-ie(p_1^\mu + p_2^\mu) \mu^{\frac{(4-n)}{2}} \Lambda(k, p_1, p_2) = -e^2 (4\pi)^{-n/2} \mu^{\frac{(4-n)}{2}} (p_1^\mu + p_2^\mu) I_2^n(p_2^2). \quad (15.25)$$

L'intégrale à deux points contient des divergences ultraviolettes que l'on va compenser par un contre-terme :



$$- i e \mu^{\frac{(4-n)}{2}} (Z_1 - 1) (p_1^\mu + p_2^\mu) \quad (15.26)$$

Le vertex simple devient renormalisé :

$$\Lambda(k, p_1, p_2) \rightarrow \Lambda_R(k, p_1, p_2) = \Lambda(k, p_1, p_2) + (Z_1 - 1). \quad (15.27)$$

On ajuste alors constante $Z_1 = 1 + \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ de façon à éliminer les divergences ultraviolettes. On trouve $Z_1 = Z_3$. Cette égalité est découlée directement de l'invariance de jauge par les identités de Ward.

15.6 Renormalisation du vertex double.

On considère l'ensemble des diagrammes du deuxième bloc (15.6). Les deux scalaires sont en-

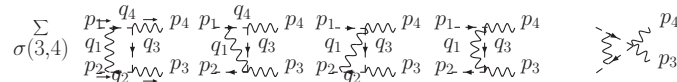


FIG. 15.2 – Diagrammes associés au vertex double en QED scalaire

trants et non massifs. En utilisant les règles de Feynman, l'amplitude associée à ces sept diagrammes s'écrit, après simplification :

$$2ie^2 \mu^{(n-4)} \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \Upsilon = \frac{(2e)^4}{4} \mu^{2(n-4)} K \int d^n Q \sum_{\sigma(3,4)} \left(\frac{2\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4 s_{12}}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} + \frac{\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4}{D_2^2 D_3^2 D_4^2} \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_3 \cdot (p_1 + p_4) \varepsilon_4 \cdot q_4}{D_1^2 D_3^2 D_4^2} + \frac{\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot (p_2 + p_3)}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} - \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_1^2 D_3^2} \right) - s_{12} \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_1^2 D_2^2 D_4^2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_2^2 D_4^2} \quad (15.28)$$

Il y a eu des compensations entre les différents diagrammes et la seule source de divergences ultraviolettes est contenue dans trois intégrales tensorielles, alors que les autres intégrales engendrent des divergences infrarouges :


$$\frac{(2e)^4}{4} \int d^n Q \sum_{\sigma(3,4)} \left(\frac{\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4}{D_2^2 D_3^2 D_4^2} - \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_1^2 D_3^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_2^2 D_4^2} \quad (15.29)$$

$$= -2 e^4 J_3^n(s_{12}) \frac{\text{tr}(\not{\varepsilon}_3 \not{p}_3 \not{\varepsilon}_4 \not{p}_4)}{s_{12}} - 4e^4 \left(I_2^n(s_{13}) + I_2^n(s_{14}) - \frac{I_2^n(s_{12})}{2} \right) \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \quad (15.30)$$

De façon à séparer les différents types de divergences, on réécrit l'amplitude :

$$2ie^2\mu^{(n-4)}\varepsilon_3.\varepsilon_4\Upsilon = -4e^4\mu^{2(n-4)}i(4\pi)^{-n/2}\left(I_2^n(s_{13}) + I_2^n(s_{14}) - \frac{I_2^n(s_{12})}{2}\right)\varepsilon_3.\varepsilon_4 + 4e^4\mu^{2(n-4)}i(4\pi)^{-n/2}\Delta, \quad (15.31)$$

où Δ est fini dans l'ultraviolet mais pas dans l'infrarouge. On va éliminer ces divergences ultraviolettes grâce à un contre-terme :



$$2 i e \mu^{(4-n)} (Z_0 - 1) \eta^{\mu\nu}, \quad (15.32)$$

et le vertex double renormalisé est :

$$\Upsilon \rightarrow \Upsilon_R = \Upsilon + (Z_0 + 1) \quad (15.33)$$

On ajuste alors constante $Z_0 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\epsilon}(1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ de façon à éliminer les divergences ultraviolettes. On a $Z_0 = Z_2$, qui est une conséquence directe de l'invariance de jauge. Si les hélicités des deux photons sont positives alors on prend le même vecteur de référence $|R\rangle = |1\rangle$ pour les deux photons et on a :

$$\Delta^{++} = -2 \sum_{\sigma(3,4)} \varepsilon_3.p_2\varepsilon_4.p_1 \frac{I_2^n(t)}{t} = 0 \quad (15.34)$$

Si maintenant le photon 1 a une hélicité négative et un vecteur de référence $|R_1\rangle = |2\rangle$ et le photon 2 a une hélicité positive et un vecteur de référence $|R_2\rangle = |1\rangle$ alors, en utilisant les techniques à quatre, trois et deux coupures, on a :

$$\Delta^{-+} = s \frac{[413]}{\langle 413 \rangle} \left(I_4^{n+2}(1234) + I_4^{n+2}(1243) + I_3^n(s) + \frac{t}{s^2} I_2^n(t) + \frac{u}{s^2} I_2^n(u) \right) \quad (15.35)$$

avec $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_4)^2$, $u = (p_1 - p_3)^2$.

15.7 Amplitude à l'ordre d'une boucle.

Une fois renormalisée, l'amplitude, s'écrit :

$$\mathcal{A}_{ee}^1(++) = -4e^4\mu^{2(n-4)} \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{[34]}{\langle 34 \rangle} J_3(s) \quad (15.36)$$

$$\mathcal{A}_{ee}^1(-+) = 4e^2\mu^{2(4-n)}i(4\pi)^{-n/2}\Delta^{-+} - i(2e)^2 \frac{\langle 314 \rangle}{[314]} \left\{ \frac{u}{s} \left(2\Lambda_R(t) + \frac{1}{1 - \Sigma_R(t)} \right) + \frac{t}{s} \left(2\Lambda_R(u) + \frac{1}{1 - \Sigma_R(u)} \right) \right\}. \quad (15.37)$$

Chapitre 16

Processus $e^+ + e^- + \gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow 0$ à l'ordre d'une boucle en QED scalaire

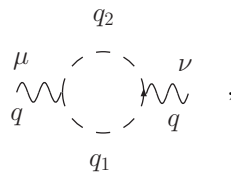
Sommaire

16.1 Renormalisation du propagateur du photon	161
16.2 Renormalisation du propagateur du scalaire	162
16.3 Renormalisation du vertex simple	163
16.4 Renormalisation du vertex double	164
16.5 Amplitude	165

Dans ce chapitre, on veut l'amplitude du processus à une boucle. Dans un premier temps, on va commencer par calculer les différents diagrammes divergents, puis les renormaliser afin de pouvoir calculer les différents blocs de l'amplitude nue (15.7).

16.1 Renormalisation du propagateur du photon

Le premier diagramme divergent en QED scalaire



d'amplitude $i\Pi^{\mu\nu}$, s'appelle le tenseur de polarisation du vide, car il traduit la présence de paire « fermion-antifermion », bien qu'ici ce soit des scalaires qui polarisent le vide autour du scalaire. Son amplitude s'écrit :

$$i\Pi^{\mu\nu} = (-ie)^2 i^2 \mu^{(4-n)} i(4\pi)^{-n/2} \int d^n Q \frac{(Q_1 + Q_2)^\mu (Q_1 + Q_2)^\nu}{D_1^2 D_2^2} \quad (16.1)$$

$$= -2i(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} KI_2^{n+2} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \quad (16.2)$$

$$= i\Pi(q^2) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right), \quad (16.3)$$

avec $\Pi(q^2) = -2(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} K I_2^{n+2}$. Ce tenseur est proportionnel donc une intégrale à deux points qui est divergente dans l'ultraviolet. On élimine cette divergence par l'ajout d'un contre-terme de diagramme et de règle de Feynman :

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ q \end{array} \quad - i (Z_3 - 1) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 \quad (16.4)$$

Avec l'ajout de ce contre-terme, le tenseur polarisation devient renormalisé :

$$i\Pi^{\mu\nu} \rightarrow i\Pi_R^{\mu\nu} = i \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) (\Pi(q^2) - q^2 (Z_3 - 1)) \quad (16.5)$$

On note $\Pi_R(q^2) = \Pi(q^2) - q^2 (Z_3 - 1)$. On ajuste alors constante $Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ de façon à éliminer les divergences ultraviolettes. Maintenant, on peut calculer le propagateur du photon exact, qui est la fonction de Green à deux points $\mathcal{S}_{eA}^{\mu\nu} = \text{TF} \langle 0|T A^\mu(x) A^\nu(y)|0\rangle$, associée à la propagation d'un champ de jauge A^μ , calculée non perturbativement. Si on additionne tous les diagrammes irréductibles à une boucle, alors le propagateur exacte du photon s'écrit :

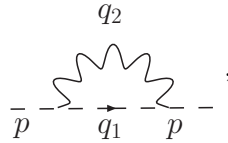
$$\mathcal{S}_{eA}^{-1}{}_{\mu\nu} = S_A^{-1}{}_{\mu\nu} - i\Pi_R^{\mu\nu}, \quad (16.6)$$

où $S_A^{-1}{}_{\mu\nu} = -\frac{i}{q^2 + i\lambda} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + S_A^{(l)}(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$ est le propagateur libre du photon qui contient une partie transverse et une partie longitudinale proportionnelle à $S_A^{(l)}(q^2)$. C'est la forme généralisée du propagateur vu dans le chapitre 1. Il s'écrit

$$S_{eA}^{\mu\nu} = -\frac{i}{q^2 - \Pi_R(q^2)} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + S_A^{(l)}(q^2) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (16.7)$$

16.2 Renormalisation du propagateur du scalaire

Le deuxième diagramme divergent en QED scalaire



s'appelle opérateur de masse, car il traduit l'interaction du scalaire avec son propre champ électromagnétique par l'émission et l'absorption d'un photon virtuel. La masse mesurée n'est alors pas la masse exacte du scalaire. Son amplitude s'écrit :

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 i(-i)\mu^{(4-n)} i(4\pi)^{-n/2} \int d^n Q \frac{(p+p+Q_2) \cdot (p+p+Q_2)}{D_1^2 D_2^2} \quad (16.8)$$

$$= -2i(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} p^2 I_2^n \quad (16.9)$$

$$= -i p^2 \Sigma(p^2). \quad (16.10)$$

La présence d'une intégrale I_2^n dans $\Sigma(p^2) = 2(4\pi)^{-n/2} e^2 \mu^{(4-n)} I_2^n$ introduit des divergences l'ultraviolettes. On élimine cette divergence par l'ajout d'un contre-terme de diagramme et de règle de Feynman :

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ p \end{array} \quad i(Z_2 - 1) p^2. \quad (16.11)$$

L'opérateur de masse devient renormalisé :

$$-i\Sigma(p) \rightarrow -i\Sigma_R(p) = -i p^2 (\Sigma(p^2) - (Z_2 - 1)). \quad (16.12)$$

On note $\Sigma_R(p^2) = \Sigma(p^2) - (Z_2 - 1)$. On ajuste la constante $Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ pour éliminer les divergences ultraviolettes. Maintenant ; on peut calculer le propagateur exact du scalaire qui est égal à la fonction de Green à deux points $\mathcal{S}_{e\phi^3} = \text{TF} \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle$. Si on additionne tous les diagrammes irréductibles à une boucle, alors ce propagateur exact s'écrit :

$$\mathcal{S}_{e\phi^3}^{-1} = S_{\phi^3}^{-1}{}_{\mu\nu} - (-i\Sigma_R(p)), \quad (16.13)$$

où $S_{\phi^3}^{-1}{}_{\mu\nu} = \frac{i}{p^2 + i\lambda}$ est le propagateur libre du scalaire. On en déduit alors le propagateur exact du scalaire :

$$\mathcal{S}_{e\phi^3} = \frac{i}{p^2 - p^2\Sigma_R(p^2)} \quad (16.14)$$

L'interaction du scalaire avec son propre champ électromagnétique lui crée une masse de valeur $m^2 = p^2\Sigma_R(p^2)$.

16.3 Renormalisation du vertex simple

On considère l'ensemble des diagrammes du premier bloc (15.5). Toutes les particules sont

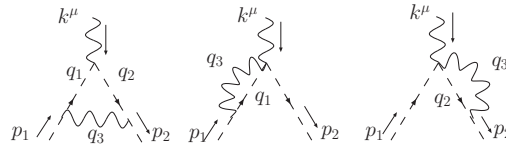


FIG. 16.1 – Diagrammes associés au vertex simple en QED scalaire

entrantes et l'on suppose que les deux scalaires sont non massifs mais hors couche de masse. En utilisant les règles de Feynman, l'amplitude associée à ces trois diagrammes s'écrit :

$$- i e (p_1^\mu + p_2^\mu) \mu^{\frac{(4-n)}{2}} \Lambda(k, p_1, p_2) \quad (16.15)$$

$$= - e^3 \mu^{\frac{3(4-n)}{2}} i(4\pi)^{-n/2} \left\{ 2p_1^\mu I_2^n(p_1^2) + 2p_2^\mu I_2^n(p_2^2) + (p_1^2 + p_2^2) \int d^n Q \frac{(D_1 + D_2)^\mu}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} \right\} \quad (16.16)$$

$$= 2 e^3 \mu^{\frac{3(4-n)}{2}} i(4\pi)^{-n/2} \left\{ \frac{p_1^2}{p_2^2 - p_1^2} p_1^\mu I_2^n(p_1^2) + \frac{p_2^2}{p_1^2 - p_2^2} p_2^\mu I_2^n(p_2^2) \right\}. \quad (16.17)$$

Les propositions 10.6.4, 10.6.5 et 10.6.6 impliquent immédiatement la nullité du coefficient de la fonction à trois points. Ici on ne produit que deux photons avec des électrons non massifs, on aura donc $p_1^2 = 0$

$$-ie(p_1^\mu + p_2^\mu) \mu^{\frac{(4-n)}{2}} \Lambda(k, p_1, p_2) = -e^2 (4\pi)^{-n/2} \mu^{\frac{(4-n)}{2}} (p_1^\mu + p_2^\mu) I_2^n(p_2^2). \quad (16.18)$$

L'intégrale à deux points contient des divergences ultraviolettes que l'on va compenser par un contre-terme :

$$\text{Diagramme} \quad - i e \mu^{\frac{(4-n)}{2}} (Z_1 - 1) (p_1^\mu + p_2^\mu) \quad (16.19)$$

Le vertex simple devient renormalisé :

$$\Lambda(k, p_1, p_2) \rightarrow \Lambda_R(k, p_1, p_2) = \Lambda(k, p_1, p_2) + (Z_1 - 1). \quad (16.20)$$

On ajuste alors constante $Z_1 = 1 + \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon \ln(4\pi))$ de façon à éliminer les divergences ultraviolettes. On trouve $Z_1 = Z_3$.

16.4 Renormalisation du vertex double

On considère l'ensemble des diagrammes du deuxième bloc (15.6). Les deux scalaires sont en-

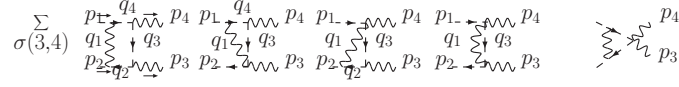


FIG. 16.2 – Diagrammes associés au vertex double en QED scalaire

trants et non massifs. En utilisant les règles de Feynman, l'amplitude associée à ces sept diagrammes s'écrit, après simplification :

$$2ie^2 \mu^{(n-4)} \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \Upsilon = \frac{(2e)^4}{4} \mu^{2(n-4)} K \int d^n Q \sum_{\sigma(3,4)} \left(\frac{2\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4 s_{12}}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2} + \frac{\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4}{D_2^2 D_3^2 D_4^2} \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_3 \cdot (p_1 + p_4) \varepsilon_4 \cdot q_4}{D_1^2 D_3^2 D_4^2} + \frac{\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot (p_2 + p_3)}{D_1^2 D_2^2 D_3^2} - \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_1^2 D_3^2} \right) - s_{12} \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_1^2 D_2^2 D_4^2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_2^2 D_4^2} \quad (16.21)$$

Il y a eu des compensations entre les différents diagrammes et la seule source de divergences ultraviolettes est contenue dans trois intégrales tensorielles, alors que les autres intégrales engendrent des divergences infrarouges :

$$\frac{(2e)^4}{4} \int d^n Q \sum_{\sigma(3,4)} \left(\frac{\varepsilon_3 \cdot q_3 \varepsilon_4 \cdot q_4}{D_2^2 D_3^2 D_4^2} - \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_1^2 D_3^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4}{D_2^2 D_4^2} \quad (16.22)$$

$$= -2 e^4 J_3^n(s_{12}) \frac{\text{tr}(\not{\varepsilon}_3 \not{p}_3 \not{\varepsilon}_4 \not{p}_4)}{s_{12}} - 4e^4 \left(I_2^n(s_{13}) + I_2^n(s_{14}) - \frac{I_2^n(s_{12})}{2} \right) \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \quad (16.23)$$

De façon à séparer les différents types de divergences, on réécrit l'amplitude :

$$2ie^2 \mu^{(n-4)} \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \Upsilon = -4e^4 \mu^{2(n-4)} i(4\pi)^{-n/2} \left(I_2^n(s_{13}) + I_2^n(s_{14}) - \frac{I_2^n(s_{12})}{2} \right) \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \\ + 4e^4 \mu^{2(n-4)} i(4\pi)^{-n/2} \Delta, \quad (16.24)$$

où Δ est fini dans l'ultraviolet mais pas dans l'infrarouge. On va éliminer ces divergences ultraviolettes grâce à un contre-terme :

$$2 i e \mu^{(4-n)} (Z_0 - 1) \eta^{\mu\nu}, \quad (16.25)$$

et le vertex double renormalisé est :

$$\Upsilon \rightarrow \Upsilon_R = \Upsilon + (Z_0 + 1) \quad (16.26)$$

On ajuste alors constante $Z_0 = 1 - \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} (1 - \gamma\epsilon + \epsilon n(4\pi))$ de façon à éliminer les divergences ultraviolettes. On a $Z_0 = Z_2$. Si les hélicités des deux photons sont positives alors on prend le même vecteur de référence $|R\rangle = |1\rangle$ pour les deux photons et on a :

$$\Delta^{++} = -2 \sum_{\sigma(3,4)} \varepsilon_3 \cdot p_2 \varepsilon_4 \cdot p_1 \frac{I_2^n(t)}{t} = 0 \quad (16.27)$$

Si maintenant le photon 1 a une hélicité négative et un vecteur de référence $|R_1\rangle = |2\rangle$ et le photon 2 a une hélicité positive et un vecteur de référence $|R_2\rangle = |1\rangle$ alors, en utilisant les techniques à quatre, trois et deux coupures, on a :

$$\Delta^{-+} = s \frac{[413]}{\langle 413 \rangle} \left(I_4^{n+2}(1234) + I_4^{n+2}(1243) + I_3^n(s) + \frac{t}{s^2} I_2^n(t) + \frac{u}{s^2} I_2^n(u) \right) \quad (16.28)$$

avec $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_4)^2$, $u = (p_1 - p_3)^2$.

16.5 Amplitude

Une fois renormalisée, l'amplitude, s'écrit :

$$\mathcal{A}_{ee}^1(++) = -4e^4 \mu^{2(n-4)} \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{[34]}{\langle 34 \rangle} J_3(s) \quad (16.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ee}^1(-+) &= 4e^2 \mu^{2(4-n)} i (4\pi)^{-n/2} \Delta^{-+} \\ &\quad - i(2e)^2 \frac{\langle 314 \rangle}{[314]} \left\{ \frac{u}{s} \left(2\Lambda_R(t) + \frac{1}{1 - \Sigma_R(t)} \right) + \frac{t}{s} \left(2\Lambda_R(u) + \frac{1}{1 - \Sigma_R(u)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (16.30)$$

Sixième partie

Amplitudes à six photons.

Chapitre 17

Calcul de l'amplitude à six photons en QED scalaire par la réduction de chaînes.

Sommaire

17.1 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(++++)$.	170
17.1.1 Les diagrammes et réduction de l'amplitude $\mathcal{A}_6^s(++++)$	170
17.1.2 Calcul de l'amplitude à six photons $\mathcal{A}_6^s(++++)$	170
17.2 Calcul de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(-++++)$.	172
17.3 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + + +)$.	172
17.3.1 Les diagrammes	172
17.3.2 Résultat de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + + +)$	173
17.3.3 Conclusion	173

Le processus à six photons, n'a pas un grand intérêt expérimental. Cependant, bien que cette amplitude soit constituée, au premier ordre, d'un grand nombre de diagrammes à une boucle avec six pattes externes, elle présente une structure analytique particulièrement simple (absence de termes rationnels et de divergences). Ce processus est donc un bon laboratoire pour étudier des méthodes de réductions de boucles et comprendre les mécanismes de simplifications. Dans le passé, Mahlon, fut le premier à calculer l'amplitude MHV en QED d'une boucle de fermions [42] grâce à des techniques de récurrences sur les spineurs. Puis Nagy et Soper ont obtenu numériquement toutes les amplitudes à six photons en QED par intégration directe des intégrales [98]. Récemment Papadopoulos et al. les ont aussi obtenu numériquement par des méthodes d'unitarité [100]. Dans le même temps, une équipe a calculé analytiquement les amplitudes à six photons en QED grâce aux nouvelles méthodes d'unitarité et de réduction de tenseurs. Ses expressions compactes sont données dans [101]. Ici on va étendre le calcul en QED, QED scalaire et $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$. Les amplitudes seront encore plus compactes que dans l'article [101], ce qui permettra une étude des singularités de Landau ainsi qu'un calcul de section efficace. On étendra les techniques pour une boucle massive dans le cas de la première amplitude d'hélicité du processus à six photons.

Dans ce chapitre, on calcule l'amplitude du processus à six photons par une méthode de réduction standard. Mais pour l'améliorer, on commencera par simplifier l'expression des diagrammes grâce aux chaînes que l'on a calculées précédemment. On calculera seulement les trois premières amplitudes d'hélicités $\mathcal{A}_6^s(++++)$, $\mathcal{A}_6^s(-++++)$ et $\mathcal{A}_6^s(- - + + + +)$ en QED scalaire.

17.1 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(+ + + + +)$.

17.1.1 Les diagrammes et réduction de l'amplitude $\mathcal{A}_6^s(+ + + + +)$

Comme tous les photons ont la même hélicité, on leur choisit le même vecteur de référence $|R\rangle$, de façon à ce que tous les vecteurs de polarisations soient orthogonaux : $\forall i, j \in [1..6] \varepsilon_i^+ \cdot \varepsilon_j^+ = 0$, donc tous les diagrammes comportant des vertex doubles sont nuls. L'amplitude $\mathcal{A}_6^s(+ + + + +) = \mathcal{A}_6^s$ est donc décrite par les $5! = 120$ diagrammes à six points :

$$\mathcal{A}_6^s = (2e)^6 \sum_{\sigma(2..6)} \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{D_1^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^+ \cdot q_2}{D_2^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_3}{D_3^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{D_4^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_5^+ \cdot q_5}{D_5^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_6^+ \cdot q_6}{D_6^2} \right). \quad (17.1)$$

Désormais, dans cette section, puisque tous les photons ont une hélicité positive, pour alléger les notations, on omettra plus le signe + :

$$\mathcal{A}_6^s = (2e)^6 \sum_{\sigma(2..6)} \int d^4q \prod_{i=1}^6 \left(\frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{q_i^2} \right). \quad (17.2)$$

La boucle est composée d'une chaîne de photons avec des scalaires hors couches de masses. On va donc appliquer le résultat obtenu sur les chaînes de type 1 hors couches de masses (4.2, 4.30). Supposons que l'on applique cette réduction sur une chaîne de quatre photons, alors un comptage de puissance :

$$\mathcal{A}_4^{6s} \sim \int d^4q \prod_{i=1}^6 \left(\frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{D_i^2} \right) \sim \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{q_i^2} \right)^3 \sim \int d^4q \left(\frac{1}{q^2} \right)^3, \quad (17.3)$$

nous dit qu'il n'y a pas de divergences ultraviolettes dans chacun des termes du résultat. On peut donc appliquer le résultat (4.2). Maintenant, supposons que l'on applique le résultat (4.2) sur une chaîne de cinq photons :

$$\mathcal{A}_6^s \sim \int d^4q \prod_{i=1}^6 \left(\frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{D_i^2} \right) \sim \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{D_i^2} \right)^2 \sim \int d^4q \left(\frac{1}{q^2} \right)^2, \quad (17.4)$$

les termes divergents dans l'ultraviolet par comptage de puissance. Il faut donc régulariser la boucle $d^4q \rightarrow d^n Q$, à partir de la réduction de la chaîne à quatre photons pour pouvoir réduire la chaîne à cinq photons. Ce changement de dimension d'espace correspond exactement aux hypothèses de la chaîne décrit par (4.30).

17.1.2 Calcul de l'amplitude à six photons $\mathcal{A}_6^s(+ + + + +)$

On applique directement le résultat de la chaîne (4.30) à la chaîne constituée par les photons 2,3,4,5,6. On note $\Phi(2,6) = \frac{1}{\langle R2 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle 6R \rangle}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6^s &= (2e)^6 \sum_{\sigma(2..6)} \int d^n Q \sum_{i=2}^6 \Phi(2..6) \left(\frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{\sqrt{2}^5} \right) \frac{(-1)^{6-2} \langle Rq_i iR \rangle}{Q_{i-1}^2 Q_i^2} \\ &+ (2e)^6 \sum_{\sigma(2..6)} \int d^n Q \sum_{i=2}^5 \Phi(2..6) \left(\frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{\sqrt{2}^5} \right) \frac{(-1)^{6-2} \hat{q}^2 \langle R\Delta_{6i} iR \rangle}{Q_{i-1}^2 Q_i^2 Q_6^2} \end{aligned} \quad (17.5)$$

$$= \frac{(2e)^6}{\sqrt{2}^5} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^6 \Phi(2..6) \int d^n Q \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1 \langle Rq_i iR \rangle}{Q_{i-1}^2 Q_i^2} \quad (17.6)$$

$$+ \frac{(2e)^6}{\sqrt{2}^5} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^6 \Phi(2..6) \int d^n Q \hat{q}^2 \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1 \langle R\Delta_{6i} iR \rangle}{Q_{i-1}^2 Q_i^2 Q_6^2} \quad (17.7)$$

$$= I_1 + I_2 \quad (17.8)$$

On a noté $\Delta_{6i} = p_6 + p_5 + \dots + p_{i+1}$. La première intégrale (17.6) correspond à une fonction à deux points tensorielle dont l'une des pattes est un photon. Comme les deux vecteurs de polarisations sont orthogonaux et que les deux propagateurs sont non massifs, alors elle est nulle. L'amplitude se réduit :

$$\mathcal{A}_6^s = \frac{(2e)^6}{\sqrt{2}^5} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^6 \Phi(2..6) \int d^n Q \hat{q}^2 \frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1 \langle R\Delta_{6i}iR \rangle}{Q_{i-1}^2 Q_i^2 Q_6^2}. \quad (17.9)$$

Pour continuer le calcul, on utilise la représentation paramétrique (parag. 7.1.3), en introduisant trois paramètres de Feynman x, y et z :

$$\mathcal{A}_6^s = \Gamma(3) \frac{(2e)^6}{\sqrt{2}^5} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^6 \Phi(2..6) \int d^n Q \int dz_i \hat{q}^2 \frac{\varepsilon_1 \cdot q_1 \langle R\Delta_{6i}iR \rangle}{(xQ_{i-1}^2 + yQ_i^2 + zQ_6^2)^3}. \quad (17.10)$$

La mesure d'intégration dz_i est donnée par (7.8) et le dénominateur s'écrit :

$$D(Q) = (z_1 Q_{i-1}^2 + z_2 Q_i^2 + z_3 Q_6^2)^3 = (L^2 - R^2)^3 \quad (17.11)$$

$$L = Q_{i-1} + z_1 \Delta_{i,i-1} + z_3 \Delta_{6,i-1} \quad (17.12)$$

$$R^2 = 2z_1 z_3 p_i \cdot \Delta_{6,i-1} + z_3 (1 - z_3) (\Delta_{6,i-1})^2. \quad (17.13)$$

On effectue le changement de variable linéaire Q^μ en L^μ puis on intègre sur la partie à quatre dimensions de l'impulsion : l grâce aux intégrales elliptiques (7.27) :

$$\mathcal{A}_6^s = \Gamma(3) \frac{i(2e)^6}{2(4\pi)^2 \sqrt{2}^5} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^6 \Phi(2..6) \int dz_i \langle R\Delta_{6i}iR \rangle \varepsilon_1 \cdot (-z_1 p_i + (1 - z_3) \Delta_{6,i-1}). \quad (17.14)$$

Comme l'intégrand est un polynôme des paramètres de Feynman, il n'y a donc aucune difficulté pour intégrer dessus :

$$\mathcal{A}_6^s = i \frac{(e\sqrt{2})^6}{12(4\pi)^2} \sqrt{2} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^5 \Phi(2..6) \langle R\Delta_{6i}iR \rangle \varepsilon_1 \cdot (-p_i + 2\Delta_{6,i-1}) \quad (17.15)$$

$$= i \frac{(e\sqrt{2})^6}{12(4\pi)^2} \sqrt{2} \sum_{\sigma(2..6)} \sum_{i=2}^5 \Phi(2..6) \langle R\Delta_{6i}iR \rangle \varepsilon_1 \cdot (\Delta_{1,i} - \Delta_{i-1,6}). \quad (17.16)$$

Cette amplitude d'hélicité à six photons en QED scalaire est un terme rationnel. L'expression est généralisable pour une amplitude avec $N \geq 4$ photons.

Résultat 17.1.1. *L'amplitude d'hélicité du processus d'annihilation de N photons d'hélicités positives, à l'ordre d'une boucle, est un terme rationnel qui s'écrit :*

$$\mathcal{A}_N^s(+ + \dots +) = -i \frac{(e\sqrt{2})^N}{12(4\pi)^2} \sqrt{2} \sum_{\sigma(2..N)} \sum_{i=2}^{N-2} \frac{\langle Ri\Delta_{Ni}N \rangle \varepsilon_1 \cdot (p_N)}{\langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \dots \langle N2 \rangle \langle RN \rangle}. \quad (17.17)$$

Cette expression n'est pas clairement invariante de jauge. En utilisant un système de relabélisation, comme la phase $\Phi(2,6)$ est cyclique, alors à cause des permutations, pour $N > 4$, l'amplitude est non seulement invariante de jauge, mais en plus nulle. Si $N = 4$, alors l'amplitude n'est pas nulle [99]. En explicitant le vecteur polarisation du photon 1, l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_N^s(+ + \dots +) = -i \frac{(e\sqrt{2})^N}{12(4\pi)^2} \sum_{\sigma(2..N)} \sum_{i=2}^{N-2} \frac{\langle Ri\Delta_{Ni}N1 \rangle}{\langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \dots \langle N2 \rangle \langle R1 \rangle}. \quad (17.18)$$

17.2 Calcul de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(-++++)$.

On suppose que le photon d'hélicité négative est le photon 1 et on impose le vecteur de référence des photons d'hélicités positives est égal à l'impulsion du photon 1 : $|R\rangle = |1\rangle$. On en déduit que tous les vecteurs polarisations sont orthogonaux $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$, et que tous les diagrammes comportant des vertex doubles sont nuls. L'amplitude $\mathcal{A}_6^s(-++++) = \mathcal{A}_6^s$ est donc décrite par les 120 diagrammes à six pattes. Pour alléger les notations, on ne mettra plus les signes des hélicités des photons :

$$\mathcal{A}_6^s = (2e)^6 \sum_{\sigma(2..6)} \int d^4q \prod_{i=1}^6 \left(\frac{\varepsilon_i \cdot q_i}{D_i^2} \right) \quad (17.19)$$

L'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(-++++)$ a la même structure que l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(++++)$ calculée précédemment, dans le sens où tous les vecteurs polarisations sont orthogonaux et qu'elle contient une chaîne de cinq photons d'hélicités positives. La seule hypothèse pour obtenir la réduction de la première amplitude d'hélicité est l'orthogonalité des vecteurs polarisations, ce qui est encore vérifiée ici, donc par le même raisonnement, on obtient le résultat suivant :

Résultat 17.2.1. *En QED scalaire, les deux amplitudes d'hélicités du processus d'annihilation de N photons d'hélicités positives sauf un, à l'ordre d'une boucle, sont des termes rationnels qui s'écrivent :*

$$\mathcal{A}_N^s(\pm + \dots +) = -i \frac{(e\sqrt{2})^N}{12(4\pi)^2} \sqrt{2} \sum_{\sigma(2..N)} \sum_{i=2}^{N-2} \frac{\langle Ri \Delta_{Ni} N \rangle \varepsilon_1^\pm \cdot (p_N)}{\langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \dots \langle N2 \rangle \langle RN \rangle}, \quad (17.20)$$

avec

$$\begin{cases} Si \ \sigma_1 = + \text{ alors } |R\rangle \neq |1\rangle \\ Si \ \sigma_1 = - \text{ alors } |R\rangle = |1\rangle \end{cases} \quad (17.21)$$

Ce résultat affirme que chaque diagramme s'est réduit en un terme rationnel non nul et que les permutations annulent toutes structure analytiques. En réalité, on peut montrer que les permutations annulent aussi les termes rationnels. On aurait pu croire que chaque diagramme n'a pas de terme rationnel vu qu'il ne diverge pas dans l'ultraviolet. Cependant lorsque l'on réduit le diagramme, on finit par créer des termes divergents dans l'ultraviolet et donc des termes rationnels. Comme toutes les divergences d'un seul diagramme doivent se compenser, on s'attend alors que tous les termes rationnels se simplifient par diagramme, ce qui n'est pas le cas.

17.3 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + + +)$.

17.3.1 Les diagrammes

On suppose que les photons 1 et 2 ont une hélicité négative et que les quatre autres une hélicité positive. De plus, on suppose que les photons d'hélicités positives ont tous le même vecteur de référence : l'impulsion du photon 1. Les deux photons d'hélicités négatives ont aussi tous les deux le même vecteur de référence. Donc les seuls produits scalaires de vecteurs de polarisations non nuls sont : $\forall j \in [3..6], \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_j \neq 0$. Il n'y a donc possibilité que d'un vertex double par diagramme. On va partager l'ensemble des diagrammes de Feynman en cinq topologies d'hélicités différentes. Une topologie d'hélicité est décrite par la position des hélicités des photons entrants dans la boucle et non la position des impulsions entrantes. Trois d'entre elles ne contiennent que des vertex simples

et les deux autres ont un vertex double :

$$\mathcal{A}_6^s = 2(2e)^6 \sum_{\sigma(3..6)} \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_1^- \cdot q_1}{Q_1^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^- \cdot q_2}{Q_2^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_3}{Q_3^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{Q_4^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_5^+ \cdot q_5}{Q_5^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_6^+ \cdot q_6}{Q_6^2} \right) \quad (17.22)$$

$$+ 2 \frac{-(2e)^6}{2} \sum_{\sigma(3..6)} \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{Q_1^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^- \cdot \varepsilon_3^+}{Q_3^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{Q_4^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_5^+ \cdot q_5}{Q_5^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_6^+ \cdot q_6}{Q_6^2} \right) \quad (17.23)$$

$$+ 2(2e)^6 \sum_{\sigma(3..6)} \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_1^- \cdot q_1}{Q_1^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_2}{Q_2^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^- \cdot q_3}{Q_3^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_4}{Q_4^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_5^+ \cdot q_5}{Q_5^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_6^+ \cdot q_6}{Q_6^2} \right) \quad (17.24)$$

$$+ 2 \frac{-(2e)^6}{2} \sum_{\sigma(3..6)} \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_1^+ \cdot q_1}{Q_1^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_2}{Q_2^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^- \cdot \varepsilon_4^+}{Q_4^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_5^+ \cdot q_5}{Q_5^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_6^+ \cdot q_6}{Q_6^2} \right) \quad (17.25)$$

$$+ (2e)^6 \sum_{\sigma(3..6)} \int d^4q \left(\frac{\varepsilon_1^- \cdot q_1}{Q_1^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_3^+ \cdot q_2}{Q_2^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_4^+ \cdot q_3}{Q_3^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^- \cdot q_4}{Q_4^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_5^+ \cdot q_5}{Q_5^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_6^+ \cdot q_6}{Q_6^2} \right). \quad (17.26)$$

Le facteur « 2 » devant chaque terme sauf le dernier provient du fait que chaque topologie a son symétrique par rapport à l'axe axial passant par le photon 1, excepté pour le dernier qui est lui-même son symétrique. On n'a donc pas besoin de rajouter son symétrique.

17.3.2 Résultat de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + +)$

On a décomposé l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(- - + + +)$ en cinq topologies, qui ont toutes des chaînes de scalaires non massifs avec des photons d'hélicités positives. On les simplifie grâce aux réductions de ces chaînes (4.2). On peut décomposer l'amplitude sur une base d'intégrales scalaires (résultat 10.1.3) :

$$\mathcal{A}_6^s(- - + + +) = \sum_i a_i I_4^{n+2} + b_i I_3^n + c_i I_2^n + d_i I_1^n + \text{termes rationnels}. \quad (17.27)$$

Numériquement, on vérifie que les coefficients devant les intégrales scalaires à un, deux et trois points sont nuls et les termes rationnels aussi. L'amplitude s'écrit comme une combinaison linéaire d'intégrales scalaires à quatre points de dimension $n + 2$. Une fois avoir simplifié les chaînes, on utilise MAPLE pour calculer les intégrales tensorielles restantes. Il ne reste que des intégrales à quatre points rang deux au maximum. Avec MAPLE, on réduit chacune des intégrales et on transforme les intégrales à quatre points scalaires de dimension n en intégrales scalaire à quatre de dimension $n + 2$ (prop. 7.2.3). On obtient alors des expressions contenant des produits de spineurs devant les intégrales scalaires que l'on simplifie à la main. On retrouve l'invariance de jauge, ce qui est rassurant :

$$\mathcal{A}_6^s(- - + + +) = i \frac{e^6}{4\pi^2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,4,5,6)} \frac{\langle 1351 \rangle \langle 2352 \rangle}{s_{35} \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 63 \rangle} \left(I_{4,1}^{n+2}(s_{31}, s_{15}, s_{246}) - I_{4,2B}^{n+2}(s_{342}, s_{425}, s_{42}, s_{61}) \right). \quad (17.28)$$

Le déterminant de Gram apparaît explicitement au dénominateur : « s_{35} ». Les intégrales scalaires étant de dimension $n + 2$ ne peuvent éliminer ce déterminant de Gram, mais il est compensé par les spineurs [35] au numérateur.

17.3.3 Conclusion

Pour calculer les trois amplitudes d'hélicités du processus à six photons, on a commencé par réduire les diagrammes grâce aux calculs de chaînes que l'on avait effectué. Cependant ces calculs ne sont pas évidents pour des scalaires hors couches de masses. Plus les chaînes de photons de

même hélicités sont longues et plus cette méthode est efficace. Elle est donc bien adaptée pour les deux amplitudes $\mathcal{A}_6^s(++++)$ et $\mathcal{A}_6^s(-++++)$ mais commence à révéler ses limites pour l'amplitude MHV $\mathcal{A}_6^s(--+++)$. Dans ce cas de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_6^s(---++)$, elle n'est plus du tout adaptée. C'est pourquoi dans les prochains chapitres on va recalculer toutes les amplitudes d'hélicités pour la méthode des coupures.

Chapitre 18

Amplitudes à six photons par la méthode des coupures.

Sommaire

18.1 Définitions et hypothèses du problème.	175
18.1.1 Les hypothèses de la réaction et les diagrammes de Feynman	175
18.1.2 Décomposition des amplitudes	176
18.2 Réduction des amplitudes $A_6^{S/s/\mathcal{N}=1}$.	176
18.2.1 Réduction des amplitudes grâce aux hypothèses 4	176
18.2.2 Amplitudes d'hélicités $A_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(\pm + + + +)$	177
18.2.3 Amplitudes d'hélicités MHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+)$	177
18.2.4 Amplitude d'hélicité NMHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$	178

Comme on a pu le voir précédemment, les méthodes de réductions standards ne sont pas adaptées au processus à six photons. On va donc utiliser la méthode des coupures. On commence par définir le problème, puis par décomposer l'amplitude sur une base d'intégrales scalaires. Avec des symétries, on va simplifier un certains nombre de coefficients. Les coefficients non nuls seront calculés par la méthode des coupures.

18.1 Définitions et hypothèses du problème.

18.1.1 Les hypothèses de la réaction et les diagrammes de Feynman

Hypothèses 4. *On étudie le processus à six photons au premier ordre en QED (respectivement QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$) :*

$$\gamma_1(p_1) + \gamma_2(p_2) + \gamma_3(p_3) + \gamma_4(p_4) + \gamma_5(p_5) + \gamma_6(p_6) \rightarrow 0 \quad (18.1)$$

dont les amplitudes seront notées : \mathcal{A}_6^S (respectivement $\mathcal{A}_6^s, \mathcal{A}_6^{\mathcal{N}=1}$). On supposera que la masse du fermion ou du scalaire dans la boucle sera nulle et que les photons sont tous entrants et non massifs : $\forall i \in [1..6], p_i^2 = 0$.

À l'ordre de l'arbre cette réaction est nulle quelque soit la QED, donc le premier ordre non nul est l'ordre d'une boucle. En QED, cette réaction a 120 diagrammes de six photons entrants dans

une boucle de fermions alors qu'en QED scalaire, cette réaction a 120 diagrammes à six points, 360 diagrammes à cinq points, 120 diagrammes à quatre points et 15 diagrammes à trois points.

Les trois amplitudes sont reliées par une relation linéaire (prop. 3.3.3) :

$$\mathcal{A}_6^S = -2 \mathcal{A}_6^s + \mathcal{A}_6^{\mathcal{N}=1} \quad (18.2)$$

On va calculer l'amplitude scalaire (A_6^s), puis on transformera l'amplitude en QED (A_6^S), afin de retrouver la décomposition supersymétrique (18.2) et l'amplitude scalaire. Par identification, cette décomposition imposera la forme de l'amplitude en QED et de l'amplitude supersymétrique (chap. 19,20). Enfin, on terminera par une étude numérique des amplitudes dans le chapitre 21.

On fait appel à la méthode des amplitudes d'hélicités, dont seules quatre d'entre elles sont indépendantes : $A_6(++++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$, $A_6(-++++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$, $A_6(--++++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$ et $A_6(---++)^{S/s/\mathcal{N}=1}$. Chaque amplitude d'hélicité sera calculée au premier ordre en ϵ par à la méthode des coupures. Mais premièrement, on va décomposer les amplitudes sur une base d'intégrales scalaires. Les symétries du problème vont permettre d'en déduire la nullité de certains coefficients. Alors on calculera les coefficients non nuls par la méthode des coupures.

18.1.2 Décomposition des amplitudes

Les amplitudes étant calculées au premier ordre en ϵ , on réduit les amplitudes sur la base d'intégrales scalaires du résultat 10.1.3 :

$$\begin{aligned} A_6^{S/s/\mathcal{N}=1} = & \sum_{i \in \sigma(1,2,3,4,5,6)} a_i I_{4,4}^n + b_i I_{4,3}^{n+2} + c_i I_{4,2B}^{n+2} + d_i I_{4,2A}^{n+2} \\ & + e_i I_{4,1}^{n+2} + f_i I_{4,0}^{n+2} + g_i I_{3,3}^n + h_i I_{3,2}^n \\ & + i_i I_{3,1}^n + j_i I_2^n + k_i I_1^n + \text{termes rationnels} \end{aligned} \quad (18.3)$$

Il suffit maintenant de calculer les onze coefficients (a_i, \dots, k_i) et les termes rationnels. Comme une boucle de fermions ou de scalaires ont les mêmes structures ultraviolettes (résul. 8.2.7) et infrarouges (résul. 9.5.1), et qu'il y a une relation linéaire entre les trois amplitudes (18.2), alors elles auront toutes les trois la même structure analytique. Maintenant, grâce aux symétries du problème, on va simplifier cette décomposition.

18.2 Réduction des amplitudes $A_6^{S/s/\mathcal{N}=1}$.

18.2.1 Réduction des amplitudes grâce aux hypothèses 4

Les trois amplitudes se décomposent suivant (18.3). Or les hypothèses imposent que tous les photons soient non massifs. Il faut donc au moins deux photons différents pour créer une masse externe. Sachant qu'il y a seulement six photons externes, alors on ne peut avoir d'intégrales scalaires à quatre points avec trois ou quatre masses : $a_i, b_i = 0$. Néanmoins, comme tous les diagrammes imposent que les six photons entrent dans la boucle, donc il y aura au moins une masse dans la boucle : $f_i = 0$.

Comme on calcule les amplitudes dans des théories non massives, alors il n'y a pas de tadpole dans la réduction : $k_i = 0$, mais il peut y avoir des divergences infrarouges. Or d'après les propositions 9.3.1, 9.3.2, 9.4.1 et 9.4.2, une boucle de fermions ou de scalaires, n'a pas de divergences infrarouges. Or d'après la proposition 10.6.4, le coefficient devant les triangles à une et deux masses est nul, à condition d'avoir des boîtes à $n + 2$ dimensions, donc $h_i, i_i = 0$.

D'après [80], les termes rationnels de l'amplitude à six photons en QED sont nuls quelque soit l'amplitude d'hélicité. L'amplitude supersymétrique étant moins divergente dans l'ultraviolet que l'amplitude fermionique, elle n'aura donc pas de termes rationnels et par conséquent grâce à la relation de linéarité (18.2) les termes rationnels de l'amplitude scalaire seront nuls aussi. De plus, une boucle de six photons n'a pas de divergences ultraviolettes (résul. 8.2.3, 8.2.5), donc la réduction ne devrait pas introduire de divergences ultraviolettes : $j_i = 0$.

Enfin, comme les six photons sont entrants dans la boucle, mais qu'ils n'ont pas tous la même hélicité, alors il y a brisure de la symétrie de Bose entre les photons d'hélicités positives et ceux d'hélicités négatives. À partir de toutes ces remarques, on peut alors réécrire la décomposition en intégrales scalaires des trois amplitudes :

Résultat 18.2.1. *Les amplitudes à six photons, avec les hypothèses 4, calculées en QED, QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ s'écrivent quelque soit l'amplitude d'hélicité :*

$$A_6^{S/s/\mathcal{N}=1} = \sum_{i \in \sigma^+ \cup \sigma^-} c_i I_{4,2B}^{n+2} + d_i I_{4,2A}^{n+2} + e_i I_{4,1}^{n+2} + g_i I_{3,3}^n \quad (18.4)$$

où σ^\pm représente les permutations sur les photons d'hélicité positives/négatives.

Maintenant, on va continuer à réduire cette décomposition de l'amplitude pour chaque type d'amplitude d'hélicité.

18.2.2 Amplitudes d'hélicités $A_6^{S/s/\mathcal{N}=1} (\pm + + + +)$

Comme la boucle est non massive, d'après le corollaire 10.6.2 pour qu'une masse externe existe, il faut qu'il y ait au moins deux photons d'hélicités différentes entrants dans cette masse. Or ici il y a au maximum un photon négatif, donc il ne peut y avoir d'intégrales scalaires avec plus d'une masse : $c_i, d_i, g_i = 0$. Dans le cas où tous les photons sont positifs, alors il ne peut y avoir d'intégrales scalaires avec une masse et donc $e_i = 0$. Pour le cas où un seul photon est négatif, le corollaire 10.6.2 n'est pas suffisant, il faut aussi utiliser la proposition 10.6.3, qui dit que toutes les pattes externes sans masse d'une intégrale scalaire doivent provenir de photons avec des hélicités alternées ; ce qui n'est pas le cas dans l'amplitude avec une seul photon d'hélicité négative, puisque celui ci se retrouve dans la masse. On aura donc encore $e_i = 0$.

Résultat 18.2.2. *Les deux amplitudes d'hélicités à six photons $A_6^{S/s/\mathcal{N}=1} (\pm + + + +)$, avec les hypothèses 4, calculées en QED, QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ sont nulles :*

$$\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1} (\pm + + + +) = 0 \quad (18.5)$$

Juste par des considérations de symétrie, on a pu montrer ce résultat très simple, que Mahlon avait obtenu par de nombreuses récurrences dans [99], que l'on a retrouvé dans le chapitre précédent. Maintenant on va réduire les amplitudes MHV.

18.2.3 Amplitudes d'hélicités MHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1} (1^-, 2^-, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+)$

Les amplitudes d'hélicités $A_6^{S/s/\mathcal{N}=1} (- - + + +)$ ne contiennent que deux photons d'hélicités négatives, donc d'après le corollaire 10.6.2, il ne peut y avoir des intégrales scalaires qu'avec au maximum deux masses, donc $g_i = 0$.

Dans les intégrales scalaires avec deux masses, les deux photons négatifs sont dans les masses externes, donc les pattes « seules » sont issues de photons d'hélicités positives. La proposition 10.6.3, nous dit que les pattes seules doivent provenir de photons d'hélicités alternées donc : $d_i = 0$.

Donc les coefficients des intégrales à quatre points deux masses adjacents sont nuls. Seuls les coefficients des intégrales à quatre points une masse, dont un des photons négatifs sera dans la masse et l'autre dans sur la patte à l'opposée de la masse, seront non nuls.

Résultat 18.2.3. *Les amplitudes $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - + + +)$, avec les hypothèses 4, calculées en QED, QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ se décomposent :*

$$\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - + + +) = 2i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{i \in \sigma(1,2) \cap \sigma(3,4,5,6)} \left\{ \frac{c_i}{2 \cdot 2!} I_{4,2A}^{n+2}(s_{215}, s_{415}, s_{15}, s_{26}) + \frac{e_i}{2 \cdot 2!} I_{4,1}^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{156}) \right\}. \quad (18.6)$$

On peut encore simplifier le résultat en regardant, par exemple, la limite molle du photon 5 ($|\vec{p}_5| \rightarrow 0$). Une boucle MHV coupée en deux est composée de deux arbres MHV. Or ces arbres MHV sont égaux à leurs limites molles (5.23) :

$$\mathcal{A}_{N,I}^s = \lim_{i \in [2..N], |\vec{p}_i| \rightarrow 0} \mathcal{A}_{N,I}^s. \quad (18.7)$$

Donc prendre la limite molle ne fait perdre aucune information sur les coefficients $c_i = \lim_{|\vec{p}_5| \rightarrow 0} c_i$ et $e_i = \lim_{|\vec{p}_5| \rightarrow 0} e_i$. De plus, d'après l'appendice A, la limite molle d'une patte appartenant à une masse d'une intégrale scalaire à quatre points deux masses opposées est une intégrale scalaire à quatre points une masse :

$$\lim_{|\vec{p}_5| \rightarrow 0} I_4^{n+2}(s_{215}, s_{415}, s_{15}, s_{26}) = \lim_{|\vec{p}_5| \rightarrow 0} I_4^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{156}). \quad (18.8)$$

Or le théorème de Furry nous dit qu'une boucle de photons avec un nombre impair de photons est nulle. Donc le côté gauche de l'équation (18.6) tend vers zéro. Au final, dans la limite soft, on en déduit $c_i = -e_i$.

Résultat 18.2.4. *Les amplitudes d'hélicités MHV, avec les hypothèses 4, calculées en QED, QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ se décomposent :*

$$\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - + + +) = i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{i \in \sigma(1,2) \cap \sigma(3,4,5,6)} \frac{c_i}{2} \left(I_{4,2A}^{n+2}(s_{215}, s_{415}, s_{15}, s_{26}) - I_{4,1}^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{156}) \right). \quad (18.9)$$

18.2.4 Amplitude d'hélicité NMHV : $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$

Ces amplitudes d'hélicités, appelées NMHV, sont constituées de trois photons d'hélicités négatives et de trois photons d'hélicités positives. Considérons une intégrale scalaire à quatre points deux masses opposées. Comme deux des photons d'hélicités négatives sont dans les masses, alors les pattes seules proviennent de deux photons d'hélicités différentes. D'après la proposition 10.6.3, cette configuration engendre un coefficient nul, donc $c_i = 0$.

Résultat 18.2.5. *Les amplitudes d'hélicités NMHV, avec les hypothèses 4, calculées en QED, QED scalaire et QED supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ se décomposent :*

$$\mathcal{A}_6(- - - + +) = i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{i \in \sigma(1,2,3) \cap \sigma(4,5,6)} \left(2 d_i I_{4,2A}^{n+2}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}) + \frac{e_i}{2} I_{4,1}^{n+2}(s_{63}, s_{61}, s_{425}) + \frac{e_i^*}{2} I_{4,1}^{n+2}(s_{25}, s_{24}, s_{136}) + \frac{g_i}{6} I_{3,3}^n(s_{14}, s_{25}, s_{36}) \right). \quad (18.10)$$

Maintenant que l'on a réduit toutes les amplitudes d'hélicités grâce aux symétries et aux hypothèses du problème, on va calculer les coefficients restants grâce à la méthode des coupures.

Chapitre 19

Calcul de l'amplitude MHV :

$$\mathcal{A}_N^{S/s/\mathcal{N}=1} (1^-, 2^-, 3^+, 4^+, \dots, N^+).$$

Sommaire

19.1 Généralisation de l'amplitude à six photons en une amplitude à N photons.	179
19.2 Calcul du coefficient e_i^s	180
19.3 Calcul du coefficient c_i^s	181
19.4 Expression de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_N^{s/N=1}(- - + \dots +)$	182
19.5 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_N^{S/\mathcal{N}=1}(- - + \dots +)$	183
19.5.1 Passage de la QED scalaire à la QED et QED ^{N=1}	183
19.5.2 Amplitude $\mathcal{A}_N^{S/\mathcal{N}=1}(- - + \dots +)$	184

Dans ce chapitre, on va généraliser et calculer l'amplitude MHV du processus d'annihilation à N photons.

19.1 Généralisation de l'amplitude à six photons en une amplitude à N photons.

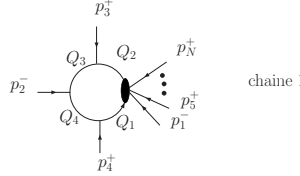
On généralise le calcul de l'amplitude MHV à N photons, avec $N > 4$ pour éviter d'avoir des problèmes ultraviolets. Il y a deux photons d'hélicités négatives et N-2 photons d'hélicités positives. Par les mêmes arguments que dans le chapitre 18, l'amplitude MHV à N photons se décompose (18.9) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^{s/S/\mathcal{N}=1}(- - + \dots +) = & i \frac{(e\sqrt{2})^N}{16\pi^2} \sum_{i \in \sigma(1,2) \cap \sigma(3..N)} \mathcal{C}_e e_i^{s/S/\mathcal{N}=1} I_{4,1}^n(s_{23}, s_{24}, s_{15\dots N}) \\ & + i \frac{(e\sqrt{2})^N}{16\pi^2} \sum_{i \in \sigma(1,2) \cap \sigma(3..N)} \sum_{M=5}^{N-1} \mathcal{C}_c c_i^{s/S/\mathcal{N}=1} I_{4,2B}^n(s_{135\dots M}, s_{145\dots M}, s_{15\dots M}, s_{2M+1\dots N}), \end{aligned} \quad (19.1)$$

où $\mathcal{C}_e = \frac{2}{2(N-4)!}$ et $\mathcal{C}_c = \frac{2}{2(N-4)!(N-M)!}$ sont des facteurs numériques pour prendre en compte toutes les permutations redondantes des photons dans les masses des intégrales scalaires. La multiplication par deux vient du fait que chaque diagramme a son double, en inversant le sens de rotation de l'impulsion dans les boucles, alors que la division par 2 vient du fait que les intégrales scalaires ont

une symétrie axiale et qu'il faut éviter de compter deux fois chaque intégrale. Maintenant, on va calculer les deux coefficients c_i et e_i par la méthode des coupures. On commencera par calculer ces coefficients en QED scalaire, puis grâce à la décomposition supersymétrique (18.2), on les calculera indirectement en QED et $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$.

19.2 Calcul du coefficient e_i^s .



On veut calculer le coefficient devant l'intégrale scalaire de la figure 19.2, dont on note m l'impulsion de la masse externe entrante :

$$m = p_1 + \sum_{i=5}^N p_i. \quad (19.2)$$

D'après les propositions 7.2.3 et 10.4.1, le coefficient devant cette intégrale scalaire de dimension $n + 2$ s'écrit :

$$e_i^s = - \left(\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \{ -2ie \varepsilon_4^+ \cdot q_{1i} \} \{ \text{chaîne } 1_i \} \{ -2ie \varepsilon_3^+ \cdot q_{2i} \} \{ -2ie \varepsilon_2^- \cdot q_{4i} \}, \quad (19.3)$$

où G et \mathcal{S} sont les matrices de Gram et cinématiques de l'intégrale scalaire à quatre points une masse (Appendice A). La chaîne 1 s'écrit :

$$\text{chaîne } 1_i = \mathcal{A}_{arbre}^s(q_{1i}, q_{2i}, p_5^+, \dots, p_i^-, \dots, p_N^+). \quad (19.4)$$

La somme sur l'indice « i » correspond à la somme des impulsions de la boucle solution du système composé des quatre propagateurs coupés :

$$\begin{cases} q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = (q_1 + m)^2 = 0 \\ q_3^2 = (q_1 + m + p_3)^2 = 0 \\ q_4^2 = (q_1 - p_4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{1\ 1}^\mu = -\frac{[4\gamma^\mu m 3]}{2[43]} \\ q_{1\ 2}^\mu = -\frac{\langle 4\gamma^\mu m 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle} \end{cases}. \quad (19.5)$$

Les deux solutions sont conjuguées. La conjugaison est le signe de la parité, et correspond aux deux sens de propagations ou aux deux hélicités des scalaires internes. Ces solutions ne dépendent que des impulsions des photons entrants et non de leurs hélicités. L'interférence entre les hélicités des scalaires internes et des photons externes sera ou constructive ou destructive. Maintenant on peut calculer le coefficient devant les intégrales $I_{4,1}^n(s_{23}, s_{24}, s_{15} \dots N)$ donné par (19.3) en utilisant (19.5). Puisque $\varepsilon_2^- \cdot q_{21} = 0$, alors la première solution de (19.5) apporte une contribution nulle, il y a une interférence destructive. Désormais, on prendra l'impulsion solution égale à la deuxième solution : $q_1 = q_{12}$. On a alors :

$$\varepsilon_4^+ \cdot q_1 \varepsilon_3^+ \cdot q_2 \varepsilon_2^- \cdot q_3 = \frac{\langle 3m 4m 3 \rangle}{\sqrt{2}^3 \langle 34 \rangle^3} \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle, \quad (19.6)$$

en utilisant le fait que $q_3^\mu = q_1^\mu + m^\mu + p_3^\mu = -\frac{\langle 42\gamma^\mu 3 \rangle}{2[43]}$. La chaîne s'écrit d'après la formule (5.2) :

$$\text{chaîne } 1 = i(-e\sqrt{2})^{N-5+2} \sum_{\sigma(5..N)} T(5..N) \langle N5 \rangle \frac{\langle 1q_{12}N \rangle}{(q_1 + p_5)^2} \frac{\langle 1q_{22}N \rangle}{(q_2 - p_N)^2}. \quad (19.7)$$

Or, sachant que $q_1^\mu = -\frac{\langle 4\gamma^\mu m3 \rangle}{2\langle 43 \rangle}$ alors $q_2^\mu = q_1^\mu + m^\mu = \frac{\langle 4m\gamma^\mu 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle}$. Et par conséquence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\langle 1q_15 \rangle}{(q_1 + p_5)^2} = \frac{\langle 1\gamma_\mu 5 \rangle q_1^\mu}{\langle 5\gamma_\mu 5 \rangle q_1^\mu} = \frac{\langle 14 \rangle}{\langle 54 \rangle} \\ \frac{\langle 1q_1 N \rangle}{(q_2 - p_N)^2} = -\frac{\langle 1\gamma_\mu N \rangle q_2^\mu}{\langle N\gamma_\mu N \rangle q_2^\mu} = -\frac{\langle 13 \rangle}{\langle N3 \rangle} \end{array} \right. \quad (19.8)$$

En reportant (19.8) dans (19.7) alors :

$$\text{chaîne 1} = -i(-e\sqrt{2})^{N-5+2}\langle 13 \rangle \langle 41 \rangle \sum_{\sigma(5\dots N)} \frac{T(5\dots N)\langle N5 \rangle}{\langle 45 \rangle \langle N3 \rangle} \quad (19.9)$$

$$= -i(-e\sqrt{2})^{N-5+2}\langle 13 \rangle \langle 41 \rangle \frac{\langle 43 \rangle^{N-5}}{\prod_{j=5}^N \langle 4j \rangle \langle j3 \rangle}. \quad (19.10)$$

Dans la dernière étape, on a utilisé (D.9). Le rapport des déterminants est :

$$\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} = \frac{\det(G)}{\langle 3m4m3 \rangle^2} = \frac{2s_{34}}{st}. \quad (19.11)$$

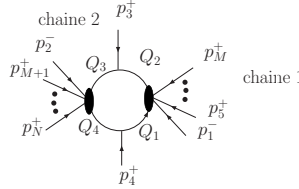
On rassemble les trois parties (19.6),(19.10) et (19.11) pour avoir l'écriture compacte du coefficient e^s :

$$e_i^s = -(-e\sqrt{2})^N \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle \langle 34 \rangle^{N-6}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle s_{34}^2} \left\{ \frac{\langle 3m4m3 \rangle}{-2} \right\} \left\{ \frac{\det(G)}{\langle 3m4m3 \rangle^2} \right\} \quad (19.12)$$

$$= (-e\sqrt{2})^N \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle \langle 34 \rangle^{N-6}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle s_{34}}. \quad (19.13)$$

19.3 Calcul du coefficient c_i^s .

On calcule le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_{4,2B}^n(s_{135\dots M}, s_{145\dots M}, s_{15\dots M}, s_{2M+1\dots N})$. On



note les impulsions des masses externes :

$$m_1 = p_1 + \sum_{i=5}^M p_i \quad m_2 = p_2 + \sum_{i=M+1}^N p_i \quad (19.14)$$

D'après les propositions 7.2.3 et 10.4.1, le coefficient devant cette intégrale scalaire de dimension $n + 2$ s'écrit :

$$c_i^s = -\left(\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ -2ie \varepsilon_4^+ \cdot q_{1i} \right\} \{ \text{chaîne } 1_i \} \left\{ -2ie \varepsilon_3^+ \cdot q_{2i} \right\} \{ \text{chaîne } 2_i \}, \quad (19.15)$$

où G et \mathcal{S} sont les matrices de Gram et cinématiques de l'intégrale scalaire à quatre points deux masses posées. Les chaînes sont de types 2 (chap. 5) :

$$\text{chaîne } 1_i = \mathcal{A}_{arbre}^s(q_{1i}, q_{2i}, p_5^+, \dots, p_I^-, \dots, p_M^+) \quad (19.16)$$

$$\text{chaîne } 2_i = \mathcal{A}_{arbre}^s(q_{3i}, q_{4i}, p_{M+1}^+, \dots, p_I^-, \dots, p_N^+). \quad (19.17)$$

La somme sur l'indice « i », correspond à la somme sur les impulsions de la boucle, solutions du système composé des quatre propagateurs sur couches de masses (prop. 10.4.2) :

$$\begin{cases} q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = (q_1 + m_1)^2 = 0 \\ q_3^2 = (q_1 + m_1 + p_3)^2 = 0 \\ q_4^2 = (q_1 - p_3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{1\ 1}^\mu = -\frac{[4\gamma^\mu m_1 3]}{2[43]} \\ q_{1\ 2}^\mu = -\frac{\langle 4\gamma^\mu m_1 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle} \end{cases} . \quad (19.18)$$

On a encore deux solutions conjuguées l'une de l'autre qui proviennent des deux états d'hélicités du scalaire. Puisque $\varepsilon_3^+ \cdot q_{21} = 0$ alors la première solution de (19.18) apporte une contribution nulle. Désormais, on prendra donc la deuxième solution : $q_1^\mu = q_{1\ 2}^\mu$. On a :

$$\varepsilon_4^+ \cdot q_1 \ \varepsilon_3^+ \cdot q_2 = -\frac{\langle R\gamma_\mu 4 \rangle \langle 4\gamma^\mu m_1 3 \rangle \langle R\gamma_\nu 3 \rangle}{\sqrt{2}\langle R4 \rangle \ 2\langle 43 \rangle \ \sqrt{2}\langle R3 \rangle} \left(-\frac{\langle 4\gamma^\nu m_1 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle} + m_1^\nu \right) = \frac{\langle 3m_1 4m_1 3 \rangle}{2\langle 34 \rangle^2}. \quad (19.19)$$

La chaîne 1 a été calculée dans le chapitre 5 et elle vaut :

$$\text{chaîne 1} = i(-e\sqrt{2})^{M-5+2} \sum_{\sigma(5..M)} T(5..M) \langle M5 \rangle \frac{\langle 1q_1 5 \rangle}{(q_1 + p_5)^2} \frac{\langle 1q_2 M \rangle}{(q_2 - p_M)^2}. \quad (19.20)$$

Or sachant que $q_1^\mu = -\frac{\langle 4\gamma^\mu m_1 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle}$ alors $q_2^\mu = q_1^\mu + m_1^\mu = \frac{\langle 4m_1 \gamma^\mu 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle}$, alors :

$$\text{chaîne 1} = -i(-e\sqrt{2})^{M-5+2} \langle 13 \rangle \langle 41 \rangle \sum_{\sigma(5..M)} \frac{T(5..M) \langle M5 \rangle}{\langle 45 \rangle \langle M3 \rangle} \quad (19.21)$$

$$= -i(-e\sqrt{2})^{M-5+2} \langle 13 \rangle \langle 41 \rangle \frac{\langle 43 \rangle^{M-5}}{\prod_{j=5}^M \langle 4j \rangle \langle j3 \rangle}. \quad (19.22)$$

De la même manière, comme $q_1^\mu = -\frac{\langle 4\gamma^\mu m_1 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle}$ et $q_2^\mu = \frac{\langle 4m_1 \gamma^\mu 3 \rangle}{2\langle 43 \rangle}$, alors $q_3^\mu = \frac{\langle 4m_2 \gamma^\mu 3 \rangle}{2\langle 34 \rangle}$ et $q_4^\mu = \frac{\langle 3m_2 \gamma^\mu 4 \rangle}{2\langle 34 \rangle}$, la chaîne 2 s'écrit :

$$\text{chaîne 2} = -i(-e\sqrt{2})^{N-(M+1)+2} \langle 23 \rangle \langle 42 \rangle \frac{\langle 34 \rangle^{N-(M+1)}}{\prod_{j=M+1}^N \langle 3j \rangle \langle j4 \rangle}. \quad (19.23)$$

Pour finir, il suffit de calculer le rapport des déterminants :

$$\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} = \frac{2s_{34} (st - m_1^2 m_2^2)}{\langle 2m_2 3m_2 2 \rangle^2} = \frac{2s_{34}}{\langle 2m_2 3m_2 2 \rangle}. \quad (19.24)$$

On rassemble les quatre parties (19.19),(19.22),(19.23) et (19.23) pour obtenir une écriture compacte du coefficient c_i^s :

$$c_i^s = (-1)^{M-6} (-e\sqrt{2})^N \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle \langle 34 \rangle^{N-6}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle \ s_{34}}. \quad (19.25)$$

19.4 Expression de l'amplitude d'hélicité $\mathcal{A}_N^s(- - + + \dots +)$.

Si on note $R_N^s = \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle \langle 34 \rangle^{N-6}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle \ s_{34}}$ alors les deux coefficients c_i^s et e_i^s s'écrivent (19.13, 19.25) :

$$c_i^s = (-1)^{M-6} (-e\sqrt{2})^N R_N^s \quad e_i^s = (-e\sqrt{2})^N R_N^s, \quad (19.26)$$

et si on définit $I_1 = I_{4,1}^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{15} \dots N)$ et $I_2 = I_{4,2B}^{n+2}(s_{135} \dots M, s_{145} \dots M, s_{15} \dots M, s_{2M+1} \dots N)$ les deux intégrales scalaires, alors l'amplitude MHV en QED scalaire devient simplement, en rajoutant le facteur K :

$$\mathcal{A}_N^s(- - + \dots +) = i \frac{(e\sqrt{2})^N}{16\pi^2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3..N)} \left\{ \frac{R_N^s}{(N-4)!} I_1 + \sum_{M=5}^{N-1} \frac{(-1)^{M-6} R_N^s}{(N-M)!(M-4)!} I_2 \right\}. \quad (19.27)$$

Dans le cas particulier de l'amplitude à six photons, on a :

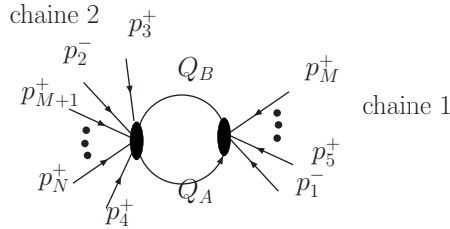
$$\mathcal{A}_6^s(- - + + +) = i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3,6)} \frac{R_6^s}{2} \left\{ I_{4,1}^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{156}) - I_{4,2B}^{n+2}(s_{135}, s_{145}, s_{15}, s_{26}) \right\}. \quad (19.28)$$

Avec $R_6^s = \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle}{\langle 35 \rangle \langle 45 \rangle \langle 36 \rangle \langle 46 \rangle} \frac{1}{s_{34}}$. Le déterminant de Gram « s_{34} » est compensé par les spineurs [34] du numérateur. Il n'y a aucun problème pour effectuer un calcul numérique.

19.5 Amplitude d'hélicité $\mathcal{A}^{S/\mathcal{N}=1}(- - + + \dots +)$.

19.5.1 Passage de la QED scalaire à la QED et QED $^{\mathcal{N}=1}$

On exprime la discontinuité d'un diagramme de l'amplitude à N photons, avec $N > 4$ en QED dans l'invariant $s_{15\dots M}$ de façon à faire apparaître la discontinuité en QED scalaire. Il faut forcément un et un seul photon d'hélicité négative dans l'arbre, sinon elle serait nulle. On note Q_A et Q_B , les deux propagateurs entourant cet invariant, ils sont sur couches de masses. On définit les quatres



chaînes de type 1 sur couche de masses :

$$\mathcal{A}_{\text{arbre}2}^S(p_A^\sigma, p_B^\sigma, p_3^+, \dots, p_M^+, p_2^-) = \mathcal{A}_2^S \quad (19.29)$$

$$\mathcal{A}_{\text{arbre}1}^S(p_B^\sigma, p_A^\sigma, p_{M+1}^+, \dots, p_N^+, p_1^-) = \mathcal{A}_1^S \quad (19.30)$$

$$\mathcal{A}_{\text{arbre}2}^s(p_A, p_B, p_3^+, \dots, p_M^+, p_2^-) = \mathcal{A}_2^s \quad (19.31)$$

$$\mathcal{A}_{\text{arbre}1}^s(p_B, p_A, p_{M+1}^+, \dots, p_N^+, p_1^-) = \mathcal{A}_1^s. \quad (19.32)$$

Alors la discontinuité s'écrit :

$$\text{Disc}(\mathcal{A}_N^S(- - + + +)) = - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \sum_{\sigma \in \sigma^\pm} \mathcal{A}_{\text{arbre}2}^S(\sigma) \mathcal{A}_{\text{arbre}1}^S(\sigma). \quad (19.33)$$

On utilise les décompositions supersymétriques des arbres en QED (3.2.4) et on obtient :

$$\text{Disc}(\mathcal{A}_N^S(- - + + +)) = - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \left(\frac{\langle 1B \rangle \langle 2A \rangle}{\langle 1A \rangle \langle 2B \rangle} + \frac{\langle 1A \rangle \langle 2B \rangle}{\langle 1B \rangle \langle 2A \rangle} \right) \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s \quad (19.34)$$

$$= -2 \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \frac{\langle 1AB2 \rangle^2}{\langle 1AB1 \rangle \langle 2AB2 \rangle} \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s \quad (19.35)$$

$$= -2 \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \langle 12 \rangle^2 \frac{2Q_A \cdot Q_B}{\langle 1AB1 \rangle \langle 2AB2 \rangle} \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s \quad (19.36)$$

$$= -2 \text{Disc}(\mathcal{A}_N^s(- - + + +)) + \text{Disc}(\mathcal{A}_N^{\mathcal{N}=1}(- - + + +)). \quad (19.37)$$

On reconnaît la discontinuité de l'amplitude scalaire dans le premier terme de (19.36). Or, l'application « Disc » est linéaire, donc en utilisant la décomposition supersymétrique d'une boucle

de fermions (18.2), par identification, le second terme de (19.36) correspond à la discontinuité de l'amplitude supersymétrique. À partir de l'équation (19.35), on obtient l'amplitude en QED et à partir de l'équation (19.37), on obtient l'amplitude en QED supersymétrique.

19.5.2 Amplitude $\mathcal{A}_N^{S/\mathcal{N}=1}(- - + \dots +)$

La discontinuité précédente, dans laquelle seuls deux propagateurs sont sur couches de masses, est vérifiée par les deux intégrales scalaires $I_{4,1}^{n+2}$ et $I_{4,2B}^{n+2}$ de la base de décomposition des amplitudes $\mathcal{A}_N^{S/\mathcal{N}=1}(- - + \dots +)$. Les coefficients, devant ces intégrales, scalaires correspondent aux résidus de la discontinuité. Ici nous n'avons que deux coupures alors que les intégrales à quatre points ont quatre coupures. Les deux autres coupures diffèrent suivant le coefficient à calculer. L'impulsion de la boucle tend alors vers une limite différente suivant l'intégrale scalaire. Ces limites correspondent aux solutions des systèmes composés par quatre propagateurs qui s'annulent et ont déjà été calculées dans les paragraphes précédents. Le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{15\dots N})$ correspond à q_{12} , donné par (19.5) :

$$e_i^S = e_i^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \frac{-2\langle 1AB2 \rangle^2}{\langle 1AB1 \rangle \langle 2AB2 \rangle} = -2 \frac{\langle 1342 \rangle^2}{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle} e_i^s \quad (19.38)$$

$$e_i^{\mathcal{N}=1} = -e_i^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \langle 12 \rangle^2 \frac{2Q_A \cdot Q_B}{\langle 1AB1 \rangle \langle 2AB2 \rangle} = -\frac{s_{34}^2 \langle 12 \rangle^2}{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle} d_i^s. \quad (19.39)$$

On retrouve alors le coefficient en QED scalaire multiplié par un autre terme. Et le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_{4,2B}^{n+2}(s_{135\dots M}, s_{145\dots M}, s_{15\dots M}, s_{2M+1\dots N})$ sont :

$$c_i^S = c_i^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \frac{-2\langle 1AB2 \rangle^2}{\langle 1AB1 \rangle \langle 2AB2 \rangle} = -2 \frac{\langle 1342 \rangle^2}{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle} c_i^s \quad (19.40)$$

$$c_i^{\mathcal{N}=1} = -c_i^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \langle 12 \rangle^2 \frac{2Q_A \cdot Q_B}{\langle 1AB1 \rangle \langle 2AB2 \rangle} = -\frac{s_{34}^2 \langle 12 \rangle^2}{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle} c_i^s, \quad (19.41)$$

avec q_{12} donné par (19.18). Au final, les trois amplitudes MHV s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^{S/S/\mathcal{N}=1}(- - + \dots +) &= i \frac{(e\sqrt{2})^N}{16\pi^2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3\dots N)} \frac{R_N^{S/S/\mathcal{N}=1}}{(N-4)!} I_{4,1}^{n+2}(s_{23}, s_{24}, s_{15\dots N}) \\ &+ i \frac{(e\sqrt{2})^N}{16\pi^2} \sum_{\sigma(1,2)} \sum_{\sigma(3\dots N)} \sum_{M=5}^{N-1} \frac{(-1)^{M-6} R_N^{S/S/\mathcal{N}=1}}{(N-M)!(M-4)!} I_{4,2B}^{n+2}(s_{135\dots M}, s_{145\dots M}, s_{15\dots M}, s_{2M+1\dots N}), \end{aligned} \quad (19.42)$$

avec

$$R_N^s = \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle \langle 34 \rangle^{N-6}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle s_{34}} \quad (19.43)$$

$$R_N^S = -2 \frac{\langle 1342 \rangle^2 \langle 34 \rangle^{N-6}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle s_{34}} \quad (19.44)$$

$$R_N^{\mathcal{N}=1} = -\frac{\langle 12 \rangle^2 \langle 34 \rangle^{N-6} s_{34}}{\prod_{j=5}^N \langle 3j \rangle \langle 4j \rangle} \quad (19.45)$$

Remarque 19.5.1. La puissance du déterminant de Gram : $\det(G) \propto s_{34}$ en QED et en QED scalaire est de -1 , alors qu'en QED supersymétrique il est de 1 . Cependant, on peut transformer l'expression et voir facilement que le déterminant de Gram se compense. Par exemple pour l'amplitude en QED scalaire :

$$R_N^s \propto \frac{\langle 1341 \rangle \langle 2342 \rangle}{s_{34}} \propto \langle 13 \rangle \langle 41 \rangle \langle 23 \rangle \langle 42 \rangle \frac{[34]}{\langle 34 \rangle} \quad (19.46)$$

L'amplitude est donc proportionnelle à la phase $[34]/\langle 34 \rangle$ qui contenait initialement le déterminant de Gram. Il n'y aura aucun problème pour tracer l'amplitude numériquement.

Chapitre 20

Calcul de l'amplitude NMHV :

$$\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+).$$

Sommaire

20.1	Calcul du coefficient e_σ^s .	185
20.2	Calcul du coefficient e_σ^{s*} .	186
20.3	Calcul du coefficient d_σ^s .	187
20.4	Calcul de g_σ^s .	188
20.5	Calcul de $e_\sigma^{S/\mathcal{N}=1}, e_\sigma^{S/\mathcal{N}=1*}$ et $d_\sigma^{S/\mathcal{N}=1}$.	190
20.6	Calcul de g_σ^S et $g_\sigma^{\mathcal{N}=1}$.	191
20.7	Amplitude $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - - + + +)$.	192

Dans le chapitre précédent, grâce à des symétries, on avait simplifié la réduction des amplitudes NMHV : (18.10) que l'on rappelle :

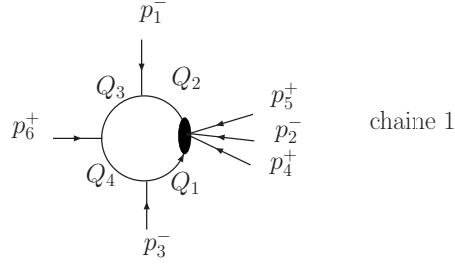
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - - + + +) &= i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{\sigma \in \sigma(1,2,3) \cap \sigma(4,5,6)} 2 d_\sigma^{S/s/\mathcal{N}=1} I_{4,2A}^{n+2}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}) \\ &+ \frac{e_\sigma^{S/s/\mathcal{N}=1}}{2} I_{4,1}^{n+2}(s_{63}, s_{61}, s_{425}) + \frac{e_\sigma^{s*/S/s/\mathcal{N}=1}}{2} I_{4,1}^{n+2}(s_{25}, s_{24}, s_{136}) \\ &+ \frac{g_\sigma^{S/s/\mathcal{N}=1}}{6} I_{3,3}^n(s_{14}, s_{25}, s_{36}) \end{aligned} \quad (20.1)$$

Il y a donc quatre coefficients à calculer pour chaque théorie. On commencera par calculer les coefficients avec la méthode des coupures en QED scalaire. Puis grâce à la décomposition supersymétrique (18.2) d'une boucle de fermions on obtiendra directement les coefficients en QED et en $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$.

20.1 Calcul du coefficient e_σ^s .

On veut calculer le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{63}, s_{61}, s_{425})$ dont on note l'impulsion de la masse externe de l'intégrale scalaire $m^\mu = p_4^\mu + p_2^\mu + p_5^\mu$. D'après la proposition 10.4.1, le coefficient devant cette intégrale scalaire de dimension $n + 2$ s'écrit :

$$e_\sigma^s = - \left(\frac{\det(G)}{\det(S)} \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \{ -2ie \varepsilon_3^- \cdot q_{1i} \} \{ \text{chaîne } 1_i \} \{ -2ie \varepsilon_1^- \cdot q_{2i} \} \{ -2ie \varepsilon_6^+ \cdot q_{4i} \}, \quad (20.2)$$



où G et \mathcal{S} sont les matrices de Gram et cinématiques de cette intégrale scalaire à quatre points une masse. La chaîne de type 2 est défini par :

$$\text{chaîne } 1_i = \mathcal{A}_{arbre}^s(q_{1i}, q_{2i}, p_4^+, p_5^+, p_2^-). \quad (20.3)$$

La somme sur l'indice « i », correspond à la somme sur les impulsions de la boucle, solutions du système obtenu à partir des quatre propagateurs coupés (prop. 10.4.2) :

$$\begin{cases} q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = (q_1 + m)^2 = 0 \\ q_3^2 = (q_1 + m + p_1)^2 = 0 \\ q_4^2 = (q_1 - p_3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{11}^\mu = -\frac{[3\gamma^\mu m 1]}{2[31]} \\ q_{12}^\mu = -\frac{\langle 3\gamma^\mu m 1 \rangle}{2\langle 31 \rangle} \end{cases}. \quad (20.4)$$

Maintenant on peut calculer le coefficient (20.2) devant l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{63}, s_{61}, s_{425})$. Comme $\varepsilon_6^+ \cdot q_{22} = 0$ alors la deuxième solution de (20.4) apporte une contribution nulle. On prendra donc la première solution : $q_1^\mu = q_{11}^\mu$. Comme on a $q_3^\mu = q_1^\mu + m^\mu + p_1^\mu = -\frac{[36\gamma^\mu 1]}{2[31]}$. Et $q_4^\mu = q_1^\mu - p_3^\mu = -\frac{[3\gamma^\mu P_{145} 2]}{2[32]} - p_3^\mu = \frac{[3\gamma^\mu 6 2]}{2[32]}$, alors :

$$\varepsilon_6^+ \cdot q_3 \varepsilon_3^- \cdot q_1 \varepsilon_1^- \cdot q_3 = \varepsilon_3^- \cdot q_{1i} \varepsilon_2^- \cdot (q_{1i} + P_{145}) = \frac{[3m1m3]}{\sqrt{2}^3 [31]^3} [36][61]. \quad (20.5)$$

La chaîne 1 a déjà été calculée dans le chapitre précédent (19.7), sachant $q_1^\mu = -\frac{[3\gamma^\mu m 1]}{2[31]}$ et $q_2^\mu = q_1^\mu + m^\mu = \frac{[3m\gamma^\mu 1]}{2[31]}$, elle vaut :

$$\text{chaîne } 1 = -i(-e\sqrt{2})^3 \sum_{\sigma(4,5)} T(4, 5) \langle 54 \rangle \frac{\langle 2m1 \rangle \langle 2m3 \rangle}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle} \quad (20.6)$$

$$= -i(-e\sqrt{2})^3 \frac{\langle 2m1 \rangle \langle 2m3 \rangle [13] m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle}. \quad (20.7)$$

Enfin, on calcule alors le rapport des déterminants :

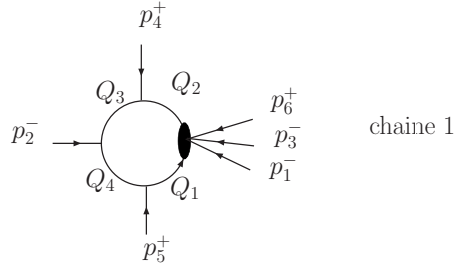
$$\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} = \frac{\det(G)}{\langle 1m3m1 \rangle^2} = \frac{2s_{13}}{st}. \quad (20.8)$$

Le coefficient e_σ^s s'écrit de manière compacte à partir de (20.5), (20.7) et (20.8) :

$$e_\sigma^s = -(-e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{31}} \frac{\langle 2m136 \rangle \langle 2m316 \rangle m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle}. \quad (20.9)$$

20.2 Calcul du coefficient e_σ^{s*} .

On veut calculer le coefficient e_σ^{s*} devant l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{24}, s_{25}, s_{136})$. On note l'impulsion de la masse externe de l'intégrale scalaire $m^{*\mu} = p_1^\mu + p_3^\mu + p_6^\mu$. On peut de la même manière



calculer le coefficient devant cette intégrale scalaire grâce à la méthode à quatre coupures. Cependant, on remarque que cette intégrale scalaire a exactement la même structure que la précédente, sauf que l'on a inversé les hélicités. Pour inverser les hélicités, il suffit d'appliquer l'opérateur parité P . Donc, pour avoir le coefficient devant l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{24}, s_{25}, s_{136})$, il suffit d'appliquer l'opérateur parité P sur le coefficient de l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{63}, s_{61}, s_{425})$, et de changer les labels des photons :

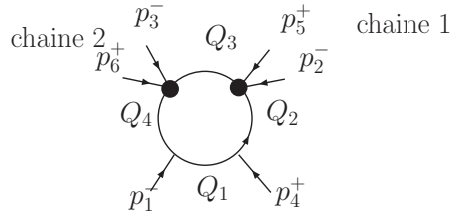
$$P^\dagger e_\sigma^s P = e_\sigma^{s*} \quad (20.10)$$

Cette opérateur change les spineurs en antispineurs : $\langle \dots \rangle \rightarrow [\dots]$, comme on a déjà pu le voir dans le calcul de la chaîne de type 2 dans le chapitre 5. En remarquant que $m_\mu^* = -m_\mu \Rightarrow m^2 = m^{*2}$, on trouve :

$$e_\sigma^{s*} = -(-e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{54}} \frac{[6m542][6m452]m^2}{[1m4][1m5][3m4][3m5]}. \quad (20.11)$$

20.3 Calcul du coefficient d_σ^s .

On veut calculer le coefficient d_σ^s devant l'intégrale scalaire $I_{4,2A}^{n+2}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36})$. On note les



impulsions des pattes externes :

$$m_1^\mu = p_2^\mu + p_5^\mu \quad (20.12)$$

$$m_2^\mu = p_3^\mu + p_6^\mu \quad (20.13)$$

$$s = s_{14} = (p_1 + p_4)^2 \quad t = s_{425} = (p_2 + p_4 + p_5)^2 \quad (20.14)$$

$$T = p_2 + p_4 + p_5. \quad (20.15)$$

D'après la proposition 10.4.1, le coefficient s'écrit :

$$d_\sigma^s = - \left(\frac{\det(G)}{\det(S)} \right) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \{ -2ie \varepsilon_4^+ \cdot q_{1i} \} \{ \text{chaîne } 1_i \} \{ \text{chaîne } 2_i \} \{ -2ie \varepsilon_1^- \cdot q_{1i} \}, \quad (20.16)$$

où G et S sont les matrices de Gram et cinématiques de l'intégrale scalaire à quatre points deux masses adjacentes. On somme sur toutes les solutions du système (prop. 10.4.2) :

$$\begin{cases} q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = 0 \\ q_3^2 = 0 \\ q_4^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^2 = 0 \\ (q_1 - p_1)^2 = 0 \\ (q_1 + p_4)^2 = 0 \\ (q_1 + T)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{11}^\mu = -\frac{t}{2} \frac{\langle 1\gamma^\mu 4 \rangle}{\langle 1T4 \rangle} \\ q_{12}^\mu = -\frac{t}{2} \frac{\langle 4\gamma^\mu 1 \rangle}{\langle 4T1 \rangle} \end{cases}. \quad (20.17)$$

On a encore et toujours deux solutions conjuguées pour traduire les deux hélicités du scalaire. Maintenant on peut calculer le coefficient d_i^s . On remarque que la première solution de (20.17) apporte une contribution nulle car $\varepsilon_4^+ \cdot q_1 = 0$. On prendra alors uniquement la deuxième solution de (20.17) et on notera $q_1 = q$. Dans ce cas, on a :

$$\varepsilon_4^+ \cdot q_1 \varepsilon_1^- \cdot q_4 = \left(-\frac{t}{2}\right)^2 \frac{[r\gamma_\mu 1] \langle 4\gamma^\mu 1 \rangle \langle R\gamma_\nu 4 \rangle \langle 4\gamma^\nu 1 \rangle}{\sqrt{2}[1r] \langle 4T1 \rangle \sqrt{2}\langle R4 \rangle \langle 4T1 \rangle} = -\frac{t^2 s}{2\langle 4T1 \rangle^2}. \quad (20.18)$$

Or, sachant que $q_1^\mu = -\frac{t}{2} \frac{\langle 4\gamma^\mu 1 \rangle}{\langle 4T1 \rangle}$ alors $q_2^\mu = q_1^\mu + p_4^\mu = -\frac{[1T P_{25} \gamma^\mu 4]}{2\langle 4T1 \rangle}$, alors la première chaîne (chaîne 1), de type 2, s'écrit :

$$\text{chaîne 1} = \frac{2ie^2}{s_{25}} \left(\frac{\langle 2q_2 5 \rangle^2}{(q_2 + p_2)^2} + \frac{\langle 2q_2 5 \rangle^2}{(q_2 + p_5)^2} \right) = -2ie^2 \frac{[1T m_1 5] \langle 24 \rangle}{[1T m_1 2] \langle 54 \rangle}. \quad (20.19)$$

On calcule alors la deuxième chaîne (chaîne 2) de la même manière :

$$\text{chaîne 2} = \frac{2ie^2}{s_{36}} \left(\frac{\langle 3q_4 6 \rangle^2}{(q_4 - p_6)^2} + \frac{\langle 3q_4 6 \rangle^2}{(q_4 - p_3)^2} \right) = -2ie^2 \frac{\langle 3m_2 T 4 \rangle [16]}{(6m_2 T 4) [13]}. \quad (20.20)$$

Et le rapport des déterminants donne :

$$\frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} = \frac{-2s \langle 1m_1 4m_2 1 \rangle}{(st)^2} = \frac{2s \langle 1T 4T 1 \rangle}{(st)^2}. \quad (20.21)$$

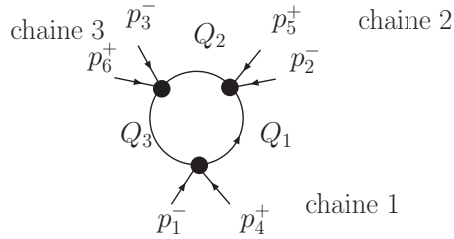
On rassemble les quatre parties (20.18),(20.19),(20.20) et (20.21) pour avoir une écriture compacte du coefficient d_σ^s :

$$d_\sigma^s = i^4 \frac{(-e\sqrt{2})^6}{2} \frac{t^2 s [1T m_1 5] \langle 24 \rangle \langle 3m_2 T 4 \rangle [16]}{\langle 4T 1 \rangle^2 [1T m_1 2] \langle 54 \rangle \langle 6m_2 T 4 \rangle [13]} \frac{\det(G)}{\det(\mathcal{S})} \quad (20.22)$$

$$= (e\sqrt{2})^6 \frac{[1m_2] \langle 24 \rangle [6m_4] [16] \langle 1T 4 \rangle}{[1m_5] \langle 45 \rangle [3m_4] [31] \langle 4T 1 \rangle}. \quad (20.23)$$

20.4 Calcul de g_σ^s .

On désire le coefficient g_σ^s devant l'intégrale scalaire à trois points trois masses $I_{3,3}^n(s_{14}, s_{25}, s_{36})$ dont les impulsions des différentes masses externes, en cohérence avec l'intégrale scalaire à quatre



points deux masses adjacentes sont :

$$m_3^\mu = p_1^\mu + p_4^\mu = K_1^\mu \quad (20.24)$$

$$m_1^\mu = p_2^\mu + p_5^\mu = -K_2^\mu \quad (20.25)$$

$$m_2^\mu = p_3^\mu + p_6^\mu = K_3^\mu. \quad (20.26)$$

On calcule le coefficient par la méthode des trois coupures. Cependant elle permet de calculer le coefficient devant les intégrales à trois points si les intégrales à quatre points sont de dimension n . Ici on a décomposé l'amplitude sur une base où les intégrales à quatre points sont de dimension

$n + 2$. Il faut donc prendre en compte les intégrales à trois points provenant de la réduction des intégrales scalaires à quatre points de dimension n en dimension $n + 2$, qui créent des intégrales à trois points. Cette contribution est notée $g_{I_4}^s$:

$$g_\sigma^s = i \sum_{\gamma_\pm} \lim_{t \rightarrow 0} \{ \text{chaîne 1} \} \{ \text{chaîne 2} \} \{ \text{chaîne 3} \} + g_{I_4}^s = g_1^s + g_{I_4}^s. \quad (20.27)$$

Le coefficient g_1^s est donné par la méthode à trois coupures. On définit :

$$\langle q_i - | = t \langle K_1^b - | + \alpha_{i1} \langle K_2^b - | \quad (20.28)$$

$$\langle q_i + | = \frac{\alpha_{i2}}{t} \langle K_1^b - | + \alpha_{i1} \langle K_2^b - | \quad (20.29)$$

$$K_2^{b\mu} = \frac{1}{\gamma_\pm - m_1^2 m_2^2} (\gamma_\pm K_2^\mu - m_2^2 K_1^\mu) \quad (20.30)$$

$$K_1^{b\mu} = \frac{1}{\gamma_\pm - m_1^2 m_2^2} (\gamma_\pm K_1^\mu - m_1^2 K_2^\mu) \quad (20.31)$$

$$\gamma_\pm = K_1 \cdot K_2 \pm \sqrt{\Delta} \quad (20.32)$$

$$\Delta = (K_1 \cdot K_2)^2 - m_1^2 m_2^2. \quad (20.33)$$

$$(20.34)$$

Les vecteurs $K_1^{b\mu}$ et $K_2^{b\mu}$ sont les projections des vecteurs K_1^μ et K_2^μ pour former des impulsions lumières : $K_1^{b2} = K_2^{b2} = 0$. On calcule chacune des trois chaînes et on fait tendre la limite $t \rightarrow 0$ et on l'arrange pour mettre en facteur une phase :

$$\text{chaîne 1} = 2ie^2 \frac{\langle q_1 1 \rangle \langle q_3 1 \rangle}{\langle q_1 4 \rangle \langle q_3 4 \rangle} = 2ie^2 \frac{(t \langle K_1^b | + \alpha_{01} \langle K_2^b |) 1}{(t \langle K_1^b | + \alpha_{01} \langle K_2^b |) 4} \frac{(t \langle K_1^b | + \alpha_{31} \langle K_2^b |) 1}{(t \langle K_1^b | + \alpha_{31} \langle K_2^b |) 4} \quad (20.35)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 2ie^2 \left(\frac{\langle K_2^b 1 \rangle}{\langle K_2^b 4 \rangle} \right)^2 = 2ie^2 \frac{[4m_1 1] [1K_2^b 1]}{[1m_1 4] [4K_2^b 4]}. \quad (20.36)$$

Comme les trois chaînes ont la même structure d'hélicité, pour obtenir les amplitudes des chaînes, il suffit juste de changer les labels des photons : $(1, 4) \rightarrow (2, 5)$ pour la chaîne 2 et $(1, 4) \rightarrow (3, 6)$ pour la chaîne 3. Le coefficient s'écrit :

$$g_1^s = (e\sqrt{2})^6 \frac{[4m_1 1] [5m_1 2] [6m_1 3]}{[1m_1 4] [2m_1 5] [3m_1 6]} \sum_{\gamma_\pm} \frac{[1K_2^b 1] [2K_2^b 2] [3K_2^b 3]}{[4K_2^b 4] [5K_2^b 5] [6K_2^b 6]} \quad (20.37)$$

En développant le dernier terme, on s'aperçoit que $\sqrt{\Delta}$ disparaît. Le coefficient devant l'intégrale est alors une fonction rationnelle de produits spinoriels et variables de Mandelstam ce qui est plutôt rassurant. Ce facteur en $\sqrt{(\Delta)}^{-1}$ est le déterminant de Gram.

Pour calculer la deuxième partie de la fonction à trois points, il suffit de rappeler la décomposition de l'intégrale scalaire à quatre points deux masses adjacentes de dimensions n en dimensions $n + 2$:

$$I_{4,2A}^n(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}) = \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{t^2 s} I_{3,3}^n(s_{14}, s_{25}, s_{36}) \\ + 2(n-3) \frac{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)}{t^2 s} I_{4,2A}^{n+2}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}) + \dots \quad (20.38)$$

Le coefficient devant l'intégrale scalaire à quatre points en dimensions $n + 2$ s'écrit d_σ^s , donné par : (20.23). Donc le coefficient g_2^s au premier ordre en ϵ s'écrit :

$$g_{I_4}^s = \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{ m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t) \}} d_\sigma^s. \quad (20.39)$$

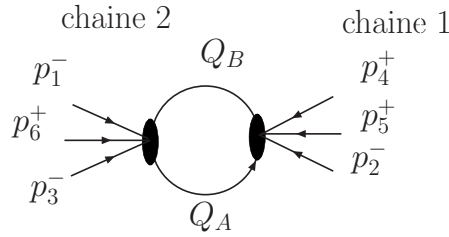
En rassemblant les deux parties du coefficient g_i^s : (20.37, 20.39), il s'écrit :

$$g_\sigma^s = (e\sqrt{2})^6 \frac{[4m_11][5m_12][6m_13]}{[1m_14][2m_15][3m_16]} \sum_{\gamma_\pm} \frac{[1K_2^b1][2K_2^b2][3K_2^b3]}{[4K_2^b4][5K_2^b5][6K_2^b6]} + \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2\{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_\sigma^s. \quad (20.40)$$

Maintenant que l'on a calculé tous les coefficients en QED scalaire, on va les calculer en QED et en $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$ grâce à des relations de passages supersymétriques entre une boucle de fermions et une boucle de scalaires.

20.5 Calcul de $e_\sigma^{S/\mathcal{N}=1}$, $e_\sigma^{S/\mathcal{N}=1*}$ et $d_\sigma^{S/\mathcal{N}=1}$.

On considère l'ensemble des diagrammes en QED qui contiennent l'invariant s_{136} et on calcule la discontinuité. Et on définit les arbres :



$$\mathcal{A}_{arbre2}^S(p_A^\sigma, p_B^\sigma, p_3^-, p_2^-, p_6^+) = \mathcal{A}_2^S(\sigma) \quad (20.41)$$

$$\mathcal{A}_{arbre1}^S(p_B^\sigma, p_A^\sigma, p_4^+, p_5^+, p_2^-) = \mathcal{A}_1^S(\sigma) \quad (20.42)$$

$$\mathcal{A}_{arbre2}^s(p_A, p_B, p_3^-, p_2^-, p_6^+) = \mathcal{A}_2^s \quad (20.43)$$

$$\mathcal{A}_{arbre1}^s(p_B, p_A, p_4^+, p_5^+, p_2^-) = \mathcal{A}_1^s. \quad (20.44)$$

La discontinuité s'écrit alors :

$$\text{Disc}(\mathcal{A}_6^S(- - - + +)) = - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \sum_{\sigma \in \sigma^\pm} \mathcal{A}_2^S(\sigma) \mathcal{A}_1^S(\sigma). \quad (20.45)$$

On la relie à la discontinuité en QED scalaire en utilisant les décompositions supersymétriques des chaînes en QED (3.2.4) :

$$\text{Disc}(\mathcal{A}_6^S(- - - + +)) = - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \left(\frac{\langle 2B \rangle [6B]}{\langle 2A \rangle [6A]} + \frac{\langle 2A \rangle [A6]}{\langle 2B \rangle [6B]} \right) \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s \quad (20.46)$$

$$= - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \frac{\langle 2B6 \rangle^2 + \langle 2A6 \rangle^2}{\langle 2B6 \rangle \langle 2A6 \rangle} \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s \quad (20.47)$$

$$= - \int d^n Q \delta(Q_A^2) \delta(Q_B^2) \left(\frac{\langle 2p_{2456} \rangle^2}{\langle 2B6 \rangle \langle 2A6 \rangle} + 2 \right) \mathcal{A}_2^s \mathcal{A}_1^s \quad (20.48)$$

$$= -2 \text{Disc}(\mathcal{A}_6^s(- - - + +)) + \text{Disc}(\mathcal{A}_6^{\mathcal{N}=1}(- - - + +)). \quad (20.49)$$

Par le même raisonnement que pour l'amplitude MHV, on peut identifier les termes de (20.48) grâce à la relation de supersymétrie (18.2). À partir de l'équation (20.47) on obtient l'amplitude de QED et à partir de l'équation (20.49), on obtient l'amplitude en QED supersymétrique. La discontinuité respecte les coupures des intégrales scalaires de la base de la décomposition $I_{4,1}^{n+2}$ et $I_{4,2A}^{n+2}$. Le coefficient devant ces intégrales scalaires seront donc les résidus lorsque les quatre propagateurs correspondant aux quatre coupures des intégrales scalaires s'annulent. Pour l'intégrale

scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{16}, s_{36}, s_{245})$, les solutions sont données par (20.4) :

$$e_\sigma^S = -e_\sigma^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \frac{\langle 2B6 \rangle^2 + \langle 2A6 \rangle^2}{\langle 2B6 \rangle \langle 2A6 \rangle} = 2(e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{31}} \frac{\langle 2m316 \rangle^2 m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle} \quad (20.50)$$

$$e_\sigma^{\mathcal{N}=1} = -e_\sigma^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \frac{\langle 2p_{245}6 \rangle^2}{\langle 2B6 \rangle \langle 2A6 \rangle} = (e\sqrt{2})^6 \frac{s_{31} \langle 2m6 \rangle^2 m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle}, \quad (20.51)$$

où $m = p_{245}$. Maintenant, pour calculer les coefficients devant l'intégrale scalaire $I_{4,1}^{n+2}(s_{25}, s_{24}, s_{136})$, il suffit juste d'utiliser la parité : c'est à dire en transformant les spineurs en antispineurs $\langle \dots \rangle \rightarrow [\dots]$ et en relabélisant les photons :

$$e_\sigma^{S*} = (e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{54}} \frac{[6m542]^2 m^2}{[1m4][1m5][3m4][3m5]} \quad (20.52)$$

$$e_\sigma^{\mathcal{N}=1*} = (e\sqrt{2})^6 \frac{s_{54} \langle 2m6 \rangle^2 m^2}{[1m4][1m5][3m4][3m5]}, \quad (20.53)$$

où $m = p_{245}$. Puis pour calculer les coefficients devant les intégrales à quatre points deux masses adjacentes $(I_{4,2A}^{n+2}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}))$, on utilise q_{12} donné par (20.17) :

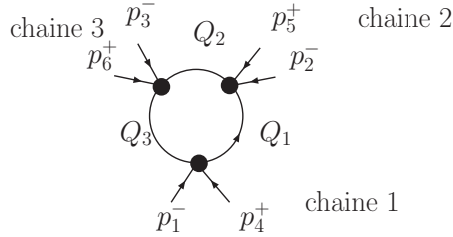
$$d_\sigma^S = -d_\sigma^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \frac{\langle 2B6 \rangle^2 + \langle 2A6 \rangle^2}{\langle 2B6 \rangle \langle 2A6 \rangle} = -(e\sqrt{2})^6 \frac{[1m2]^2 [6m4]^2 + m^4 \langle 24 \rangle^2 [16]^2}{[1m5] \langle 45 \rangle [3m4] [31] m^2} \frac{\langle 1m4 \rangle}{\langle 4m1 \rangle} \quad (20.54)$$

$$d_\sigma^{\mathcal{N}=1} = -d_\sigma^s \lim_{A \rightarrow q_{12}, B \rightarrow q_{22}} \frac{\langle 2p_{245}6 \rangle^2}{\langle 2B6 \rangle \langle 2A6 \rangle} = -(e\sqrt{2})^6 \frac{[6m2]^2}{\langle 45 \rangle [31] \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle} \frac{[1m4m1]}{m^2}, \quad (20.55)$$

où $m = p_{245}$.

20.6 Calcul de g_σ^S et $g_\sigma^{\mathcal{N}=1}$.

On va calculer directement le coefficient g_σ^S devant l'intégrale scalaire $I_{3,3}^n(s_{14}, s_{25}, s_{36})$. On note



les différentes masses, en cohérence avec l'intégrale scalaire à quatre points deux masses adjacentes :

$$m_3^\mu = p_1^\mu + p_4^\mu = K_1^\mu \quad (20.56)$$

$$m_1^\mu = p_2^\mu + p_5^\mu = -K_2^\mu \quad (20.57)$$

$$m_2^\mu = p_3^\mu + p_6^\mu = K_3^\mu. \quad (20.58)$$

Comme dans le cas scalaire, le coefficient est composé de deux termes. L'un calculable par la méthode des trois coupures et l'autre est obtenu à partir de la réduction des intégrales scalaires à quatre points deux masses adjacentes :

$$g_\sigma^S = i \sum_{\gamma_\pm} \lim_{t \rightarrow 0} \{ \text{chaîne 1} \}^S \{ \text{chaîne 2} \}^S \{ \text{chaîne 3} \}^S + g_{I_4}^S = g_1^S + g_{I_4}^S. \quad (20.59)$$

On va relier la discontinuité à trois coupures en QED à la discontinuité à trois coupures en QED scalaire. En QED, la chaîne 1 s'écrit :

$$\text{chaîne 1}^S = 2ie^2 \frac{\langle q_1 1 \rangle \langle q_3 1 \rangle}{\langle q_1 4 \rangle \langle q_3 4 \rangle} \left(\frac{\langle q_1 1 \rangle}{\langle q_2 1 \rangle} + \frac{\langle q_2 1 \rangle}{\langle q_1 1 \rangle} \right) = \text{chaîne 1}^s \left(\frac{\langle q_1 1 \rangle}{\langle q_2 1 \rangle} + \frac{\langle q_2 1 \rangle}{\langle q_1 1 \rangle} \right). \quad (20.60)$$

On extrapole pour les trois chaînes, en faisant attention qu'il n'y ait que deux courants dans la boucle et non deux par chaînes :

$$g_1^S = \sum_{\gamma_{\pm}} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \text{chaîne } 1_{\sigma}^S \right\} \left\{ \text{chaîne } 2_{\sigma}^S \right\} \left\{ \text{chaîne } 3_{\sigma}^S \right\} = -2g_1^s. \quad (20.61)$$

Le calcul de la partie du coefficient de la fonction à trois points trois masses venant de la réduction des intégrales scalaires à quatre points est similaire en QED et en QED scalaire. On obtient directement :

$$g_{I_4}^S = \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_{\sigma}^S. \quad (20.62)$$

En rassemblant les deux parties du coefficient g_{σ}^S : (20.61, 20.62) :

$$g_{\sigma}^S = -2(e\sqrt{2})^6 \frac{[4P_{25}1] [5P_{14}2] [6P_{25}3]}{[1P_{25}4] [2P_{14}5] [3P_{25}6]} \sum_{\gamma_{\pm}} \frac{[1K_2^b1] [2K_2^b2] [3K_2^b3]}{[4K_2^b4] [5K_2^b5] [6K_2^b6]} + \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_{\sigma}^S. \quad (20.63)$$

Le coefficient de la fonction à trois points trois masses en $\text{QED}^{\mathcal{N}=1}$ s'obtient juste par une soustraction, grâce à la décomposition supersymétrique d'une boucle de fermions (18.2). En effet, comme les amplitudes NMHV ont la même décomposition et la même structure analytique, donc cette décomposition supersymétrique s'applique dans le cas particuliers du coefficient devant les intégrales à trois points trois masses :

$$g_{\sigma}^S = -2g_{\sigma}^s + g_{\sigma}^{\mathcal{N}=1}. \quad (20.64)$$

Si on utilise les deux formules des deux coefficients g_{σ}^S et g_{σ}^s , donnés par (20.63) et (20.40), alors on obtient :

$$g_{\sigma}^{\mathcal{N}=1} = \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} (d_{\sigma}^S - 2d_{\sigma}^s) \quad (20.65)$$

$$= \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_{\sigma}^{\mathcal{N}=1}. \quad (20.66)$$

L'amplitude supersymétrique n'a pas de coefficient devant les triangles dans une base où les intégrales à quatre points seraient de dimensions n .

20.7 Amplitude $\mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - - + + +)$.

On récapitule tous les coefficients de l'amplitude NMHV à six photons (20.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6^{S/s/\mathcal{N}=1}(- - - + + +) &= i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{\sigma(1,2,3)} \sum_{\sigma(4,5,6)} 2 d_{\sigma}^{S/s/\mathcal{N}=1} I_{4,2A}^{n+2}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}) \\ &\quad + \frac{e_{\sigma}^{S/s/\mathcal{N}=1}}{2} I_{4,1}^{n+2}(s_{63}, s_{61}, s_{425}) + \frac{e_{\sigma}^{*S/s/\mathcal{N}=1}}{2} I_{4,1}^{n+2}(s_{25}, s_{24}, s_{136}) \\ &\quad + \frac{g_{\sigma}^{S/s/\mathcal{N}=1}}{6} I_{3,3}^n(s_{14}, s_{25}, s_{36}). \end{aligned} \quad (20.67)$$

Les douze coefficients sont donnés par les équations (20.63, 20.40, 20.66) pour les fonctions à trois points trois masses, (20.9, 20.50, 20.51) et (20.11, 20.52, 20.53) pour les fonctions à quatre points

une masse et (20.23, 20.54, 20.55) pour les fonctions à quatre points deux masses adjacentes :

$$e_\sigma^s = - (e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{31}} \frac{\langle 2m136 \rangle \langle 2m316 \rangle m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle} \quad (20.68)$$

$$e_\sigma^{s*} = - (e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{54}} \frac{[6m542][6m452]m^2}{[1m4][1m5][3m4][3m5]} \quad (20.69)$$

$$d_\sigma^s = (e\sqrt{2})^6 \frac{[1m2]\langle 24 \rangle [6m4][16] \langle 1m4 \rangle}{[1m5]\langle 45 \rangle [3m4][31] \langle 4m1 \rangle} \quad (20.70)$$

$$g_\sigma^s = (e\sqrt{2})^6 \frac{[4m_11] [5m_12] [6m_13]}{[1m_14] [2m_15] [3m_16]} \sum_{\gamma_\pm} \frac{[1K_2^b1] [2K_2^b2] [3K_2^b3]}{[4K_2^b4] [5K_2^b5] [6K_2^b6]} + \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_\sigma^s \quad (20.71)$$

$$e_\sigma^S = 2(e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{31}} \frac{\langle 2m316 \rangle^2 m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle} \quad (20.72)$$

$$e_\sigma^{S*} = (e\sqrt{2})^6 \frac{1}{s_{54}} \frac{[6m542]^2 m^2}{[1m4][1m5][3m4][3m5]} \quad (20.73)$$

$$d_\sigma^S = - (e\sqrt{2})^6 \frac{[1m2]^2 [6m4]^2 + m^4 \langle 24 \rangle^2 [16]^2 \langle 1m4 \rangle}{[1m5]\langle 45 \rangle [3m4][31] m^2 \langle 4m1 \rangle} \quad (20.74)$$

$$g_\sigma^S = - 2(e\sqrt{2})^6 \frac{[4P_{25}1] [5P_{14}2] [6P_{25}3]}{[1P_{25}4] [2P_{14}5] [3P_{25}6]} \sum_{\gamma_\pm} \frac{[1K_2^b1] [2K_2^b2] [3K_2^b3]}{[4K_2^b4] [5K_2^b5] [6K_2^b6]} + \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_\sigma^S \quad (20.75)$$

$$e_\sigma^{\mathcal{N}=1} = (e\sqrt{2})^6 \frac{s_{31} \langle 2m6 \rangle^2 m^2}{\langle 4m1 \rangle \langle 5m3 \rangle \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle} \quad (20.76)$$

$$e_\sigma^{\mathcal{N}=1*} = (e\sqrt{2})^6 \frac{s_{54} \langle 2m6 \rangle^2 m^2}{[1m4][1m5][3m4][3m5]} \quad (20.77)$$

$$d_\sigma^{\mathcal{N}=1} = - (e\sqrt{2})^6 \frac{[6m2]^2 [1m4m1]}{\langle 45 \rangle [31] \langle 5m1 \rangle \langle 4m3 \rangle m^2} \quad (20.78)$$

$$g_\sigma^{\mathcal{N}=1} = \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2 \{m_1^2 m_2^2 - t(m_2^2 + m_1^2 - s - t)\}} d_\sigma^{\mathcal{N}=1}, \quad (20.79)$$

avec :

$$m = p_2 + p_4 + p_5 \quad (20.80)$$

$$s = s_{14} \quad (20.81)$$

$$t = m^2 \quad (20.82)$$

$$m_1 = p_2 + p_5 = -K_2^b \quad (20.83)$$

$$m_2 = p_3 + p_6 = K_1^b \quad (20.84)$$

$$K_2^{b\mu} = \gamma_\pm K_2^\mu - m_2^2 K_1^\mu \quad (20.85)$$

$$\gamma_\pm = K_1 \cdot K_2 \pm \sqrt{\Delta} \quad (20.86)$$

$$\Delta = (K_1 \cdot K_2)^2 - m_1^2 m_2^2. \quad (20.87)$$

Remarque : En utilisant les fonction F_i plutôt que les intégrales scalaires I_i^n, I_i^{n+2} (Appendice A) et en jouant sur les permutations, les coefficients de l'amplitude supersymétrique peuvent se

factoriser :

$$\mathcal{A}_6^{\mathcal{N}=1}(- - - + + +) = i \frac{(e\sqrt{2})^6}{16\pi^2} \sum_{\sigma(1,2,3)} \sum_{\sigma(4,5,6)} 2 d_\sigma^{\mathcal{N}=1} \left(F_{2A}(s_{14}, s_{452}, s_{25}, s_{36}) + \frac{F_1(s_{63}, s_{61}, s_{425}) + F_1(s_{25}, s_{24}, s_{136})}{2} \right), \quad (20.88)$$

avec

$$d_\sigma^{\mathcal{N}=1} = - \frac{1}{[31]\langle 45 \rangle} \frac{[6p_{425}2]^2}{[1p_{425}5][3p_{425}4]}. \quad (20.89)$$

Chapitre 21

Etude numérique des amplitudes à six photons.

Sommaire

21.1 Amplitudes d'hélicités MHV et NMHV.	195
21.1.1 Configuration cinématique de Nagy-Soper [98]	195
21.1.2 Amplitude MHV dans la configuration de Nagy-Soper	196
21.1.3 Amplitude NMHV dans la configuration de Nagy-Soper	196
21.1.4 Double parton scattering	197
21.2 Singularité de « Double parton Scattering »	198
21.2.1 Configuration cinématiques	198
21.2.2 Autour de la singularité	200
21.3 Étude Analytique de la singularité.	201
21.3.1 D'où vient le problème?	201
21.4 Section efficace de l'amplitude à six photons.	203
21.4.1 Définition de l'espace des phases	203
21.4.2 Fonctions de structures	203
21.4.3 Paramétrisation de l'espace des phases	205
21.4.4 Section efficace intégrée	206
21.4.5 Sections efficaces différentielles.	207

Dans cette partie, on va tracer les amplitudes d'hélicités du processus à six photons. On commencera par expliquer la cinématique, puis on tracera le module de des amplitudes MHV et NMHV. Grâce aux expressions compactes des amplitudes d'hélicités, les graphes sont très rapidement obtenus (3,4 secondes). On pourra alors étudier les singularités de Landau et même obtenir la section efficace.

21.1 Amplitudes d'hélicités MHV et NMHV.

21.1.1 Configuration cinématique de Nagy-Soper [98]

Plutôt que de considérer l'annihilation de six photons $\sum_{i=1}^6 \gamma_i \rightarrow 0$, on va considérer le cas d'un processus physique d'interaction $2 \rightarrow 4$:

$$\gamma_1^{\sigma_1} + \gamma_4^{\sigma_4} \rightarrow \gamma_2^{\sigma_2} + \gamma_3^{\sigma_3} + \gamma_5^{\sigma_5} + \gamma_6^{\sigma_6}, \quad (21.1)$$

d'état initial les deux photons (1,2) d'hélicités (σ_1, σ_2) , et d'état final les quatre photons (3,4,5,6) d'hélicités $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$. Les hélicités font références aux photons entrants et on se place dans le centre de masse de l'état initial. On considère que les vecteurs des photons 1 et 2 sont suivant l'axe z (fig. 21.1) : $\vec{k}_1 = -\vec{k}_4 \propto \vec{z}$ et l'état final est le point de l'espace de phase :

$$\begin{cases} \vec{k}_2 = (-12, 5, 15.3, 0.3) \\ \vec{k}_3 = (33.5, 15.9, 25.0) \\ \vec{k}_5 = (-10.0, -18.0, -3.3) \\ \vec{k}_6 = (-11.0, -13.2, -22.0) \end{cases}, \quad (21.2)$$

puis on crée de nouvelles configurations cinématiques en faisant tourner l'état final autour de l'axe Y .

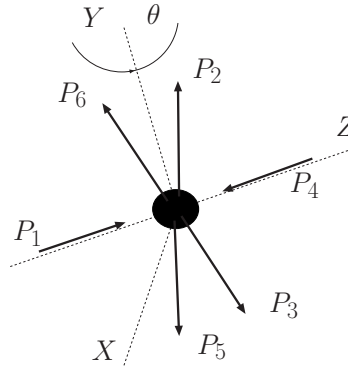


FIG. 21.1 – Configuration cinématique de Nagy et Soper [98].

21.1.2 Amplitude MHV dans la configuration de Nagy-Soper

Dans [98], Nagy et Soper ont tracé le module de l'amplitude en QED avec la configuration ci-dessus pour le processus $\mathcal{A}_N^{s/S/\mathcal{N}=1}(k_1^-, k_4^-, -k_2^+, -k_3^+, -k_5^+, -k_6^+)$. Ils ont directement calculé les diagrammes par déformations de contour. Nous avons alors tracé les trois théories en fonction de l'angle de rotation θ autour de l'axe Y , dans les mêmes conditions, afin de retrouver la courbe de [98]. Le minimum de l'amplitude en QED scalaire n'atteint pas zéro. Les trois amplitudes sont π -périodiques, ce qui est cohérent vu que les deux photons d'hélicités négatives sont dans l'état initial, donc la rotation n'engendre pas de brisure de symétrie de la topologie des hélicités. Les trois courbes ont le même comportement, ce qui est normal vu que les trois amplitudes ont le même schéma de réduction. L'amplitude supersymétrique est plus grande en module que les deux autres amplitudes. Il se passe comme une interférence constructive entre les bosons et les fermions qui rendent cette amplitude plus grande en module.

21.1.3 Amplitude NMHV dans la configuration de Nagy-Soper

On trace le module de l'amplitude MHV : $\mathcal{A}_N^{s/S/\mathcal{N}=1}(k_1^-, k_4^+, -k_2^-, -k_3^+, -k_5^+, -k_6^+)$. Cette configuration correspond à celle de [98]. On retrouve la même courbe en QED. Cette fois l'amplitude n'est plus π -périodique, ce qui s'explique par le fait que la topologie des hélicités n'est plus invariante par rotation autour de l'axe z puisqu'il y a deux hélicités négatives et deux positives dans l'état final. La rotation entraîne une brisure de symétrie. De plus on remarque que l'amplitude à deux « trous » aux angles $\theta \simeq 2,32$ et $\theta \simeq 5.46 \simeq \pi + 2,32$. On va essayer de comprendre l'origine de ces trous.

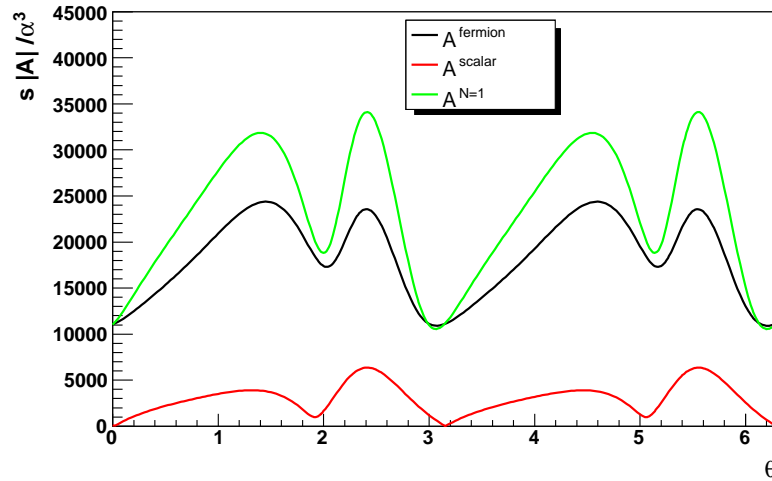


FIG. 21.2 – L'amplitude d'hélicité MHV du processus à six photons dans la configuration cinématique de Nagy et Soper [98] pour les trois théories.

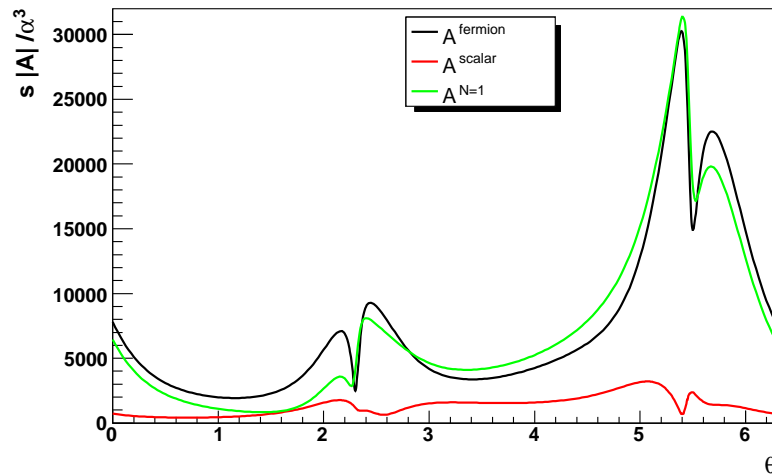


FIG. 21.3 – L'amplitude d'hélicité NMHV du processus à six photons dans la configuration cinématique de Nagy et Soper [98] pour les trois théories.

21.1.4 Double parton scattering

Pour essayer de comprendre l'origine de ces trous, on divise l'état final en deux paires de photons, dont on note k_t l'impulsion transverse de la paire (3, 5) et donc, par conservation de l'énergie impulsion, $-k_t$ est l'impulsion transverse de la paire (2, 6). Puis on trace, seulement l'amplitude en

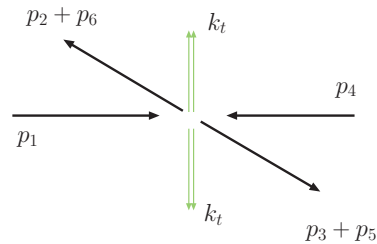


FIG. 21.4 – Configuration cinématique des deux paires de photons (3, 5) et (2, 6).

QED en fonction de l'angle de rotation et la valeur de cette impulsion transverse de chaque paire (fig. 21.5). On remarque alors que les « trous » correspondent à des configurations cinématiques

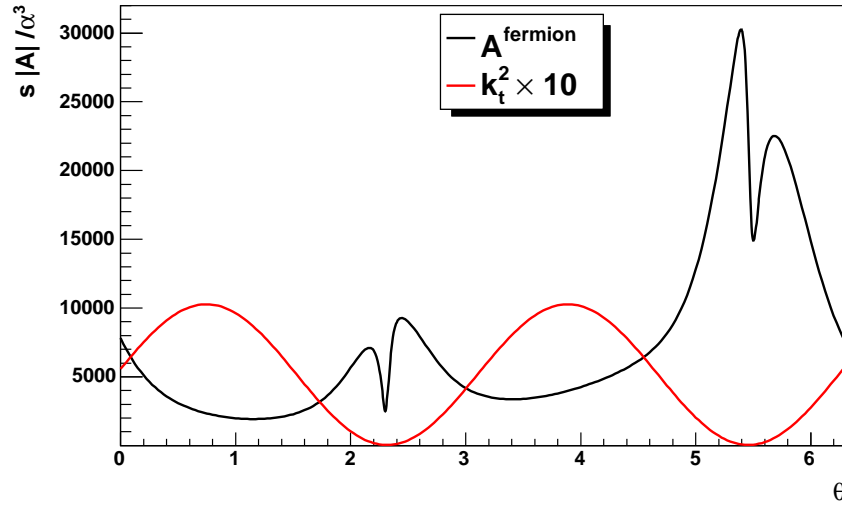


FIG. 21.5 – Signature du double partons scattering dans l'amplitude NMHV.

où l'impulsion transverse des paires devient nulle, c'est la signature du double parton scattering. C'est une configuration cinématique dans laquelle la boucle résonne avec une configuration physique. Considérons les deux photons 1 et 4 qui se désintègrent en une paire de fermion-antifermion. Il y a interaction entre un fermion et un antifermion pour émettre une paire de photons (fig. 21.6). Le double parton scattering est atteint quand les paires de fermion-antifermion sont émis

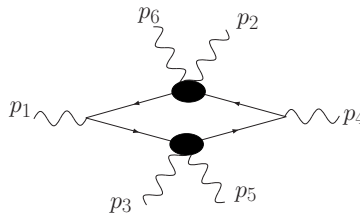


FIG. 21.6 – Configuration cinématiques du double partons scattering.

colinéairement. Dans ce cas $k_t \rightarrow 0$. À partir de la configuration de Nagy-Soper, on s'approche sans atteindre ce point cinématique. On va donc modifier la configuration cinématique initiale de Nagy-Soper pour l'atteindre. Comme on a vu dans le chapitre 9, le double parton scattering correspond à une singularité. Cette étude numérique va nous permettre de voir s'il y a divergence ou pas.

21.2 Singularité de « Double parton Scattering »

21.2.1 Configuration cinématiques

On modifie la cinématique de Nagy-Soper pour atteindre le double parton scattering. On effectue une rotation de l'état final autour de l'axe Y, donc les valeurs des composantes sur l'axe Y au cours de la rotation ne sont pas modifiées. Par conséquent, si on veut atteindre le double

parton scattering, il faut que la composante transverse de chaque paire, projetée sur l'axe Y, soit nulle $\vec{k}_t \cdot \vec{y} = 0$. On commence donc par ajouter ou soustraire (pour garder la conservation de l'énergie-impulsion) un régulateur Δ^y , aux composantes de l'axe Y des paires de photons de l'état final de façon à être déjà en configuration de double parton scattering sur l'axe Y. Le point initial de l'espace de phase devient :

$$\begin{cases} \vec{k}_2 = (-12, 5, 15.3 + \Delta^y, 0.3) \\ \vec{k}_3 = (33.5, 15.9 - \Delta^y, 25.0) \\ \vec{k}_5 = (-10.0, -18.0 + \Delta^y, -3.3) \\ \vec{k}_6 = (-11.0, -13.2 - \Delta^y, -22.0) \end{cases} \quad (21.3)$$

Le double parton scattering est atteint quand $\Delta^y = 1.05$. On trace alors le module des amplitudes en fonction de l'angle de rotation θ pour différentes valeurs de Δ^y autour de la singularité. Quelque soit

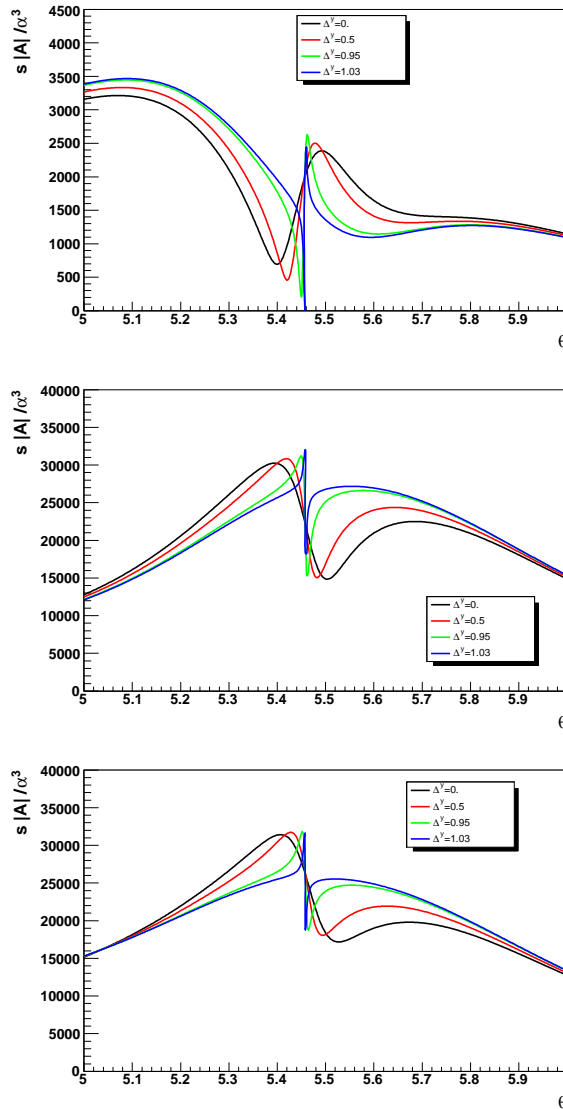


FIG. 21.7 – Amplitudes autour de la singularité de Landau.

la théorie, les modules des amplitudes ont tous le même comportement. Les amplitudes ressemblent à une « vague ». Plus on s'approche de la singularité de Landau, atteinte pour $\Delta^y = 1.05$, plus la largeur de cette vague est étroite. À la singularité, cette vague se transforme en « pique » fini. C'est le signe que les amplitudes doivent s'écrire comme une distribution. La finitude du pique signifie qu'il

n'y a pas de divergence. On va observer le comportement du module de l'amplitude autour de cette singularité. Contrairement aux cas scalaires dans lesquelles les singularités de Landau entraînent des divergences (parag. 9.7), ici elles sont compensées. Les raisons sont les mêmes que pour les divergences infrarouges, le numérateur du propagateur fermionique régularise les divergences.

21.2.2 Autour de la singularité

Pour observer le comportement de l'amplitude, on va tracer un diagramme à trois dimensions avec l'amplitude en ordonnée et la valeur de k_t dans les deux dimensions d'abscisses. On se limite à tracer l'amplitude autour de la singularité, c'est-à-dire autour de $k_t = 0$. On a légèrement modifié la configuration cinématique en effectuant une rotation de façon à ramener la singularité de Landau en $\theta = 0$. Le module de l'amplitude proche de la singularité se comporte comme un col. Il n'y a

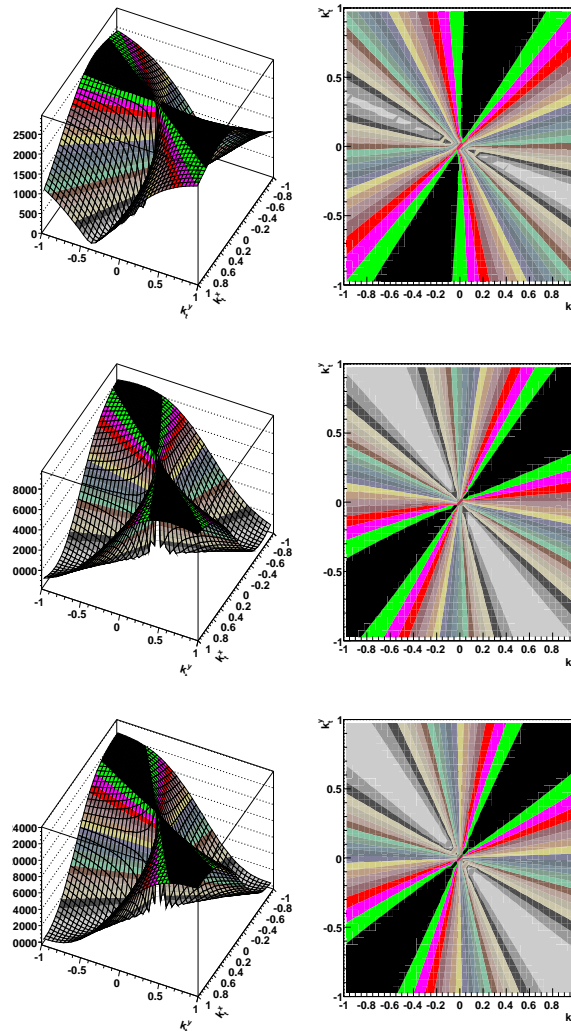


FIG. 21.8 – Amplitudes autour de la singularité de Landau en QED scalaire, QED et QED^{N=1}.

pas de divergence [102].

21.3 Étude Analytique de la singularité.

21.3.1 D'où vient le problème ?

Numériquement, il semble ne pas y avoir de divergence. On va essayer de le montrer analytiquement. On se place proche de la configuration cinématique de double parton scattering correspondant à la figure 9.4. Les deux photons 1 et 4 constituent l'état initial, le long de l'axe Z. Donc les deux impulsions

$$p_1 = \frac{\sqrt{s_{14}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{\sqrt{s_{14}}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (21.4)$$

s'écrivent sous forme de spineurs :

$$|4+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{s_{14}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1+\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{s_{14}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |4-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{s_{14}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad |1-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{s_{14}} \end{pmatrix}, \quad (21.5)$$

et sous forme de spineurs adjoints (D.3) :

$$\langle 1+| = (\sqrt{s_{14}} \ 0 \ 0 \ 0) \gamma_0 = (0 \ 0 \ \sqrt{s_{14}} \ 0) \quad (21.6)$$

$$\langle 4+| = (0 \ 0 \ 0 \ \sqrt{s_{14}}) \quad (21.7)$$

$$\langle 1-| = (0 \ -\sqrt{s_{14}} \ 0 \ 0) \quad (21.8)$$

$$\langle 4-| = (\sqrt{s_{14}} \ 0 \ 0 \ 0). \quad (21.9)$$

On contracte l'impulsion de la paire de photons (2,5) avec les matrices de Dirac :

$$\not{p}_{25} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{25}^+ & k_t^* \\ 0 & 0 & k_t & p_{25}^- \\ p_{25}^- & -k_t^* & 0 & 0 \\ -k_t & p_{25}^+ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21.10)$$

dans laquelle on note $k_t = k_{tx} + ik_{ty}$ l'impulsion transverse. On peut maintenant calculer les produits spinoriels et on obtient :

$$\langle 1+|\not{p}_{25}|4+\rangle = -s_{14}k_t \quad \langle 4+|\not{p}_{25}|1+\rangle = -s_{14}k_t^*. \quad (21.11)$$

Ces deux produits spinoriels sont proportionnels à l'impulsion transverse k_t . Ils deviennent donc nuls dans la limite du double parton scattering. Les coefficients des amplitudes NMHV sont tous récapitulés dans le paragraphe 20.7. Il y a des permutations sur les photons d'hélicités de même signe, donc les coefficients e_σ n'ont que des divergences $|k_t|^{-1}$ alors que les coefficients d_σ et g_σ ont des divergences $|k_t|^{-1}$ et $|k_t|^{-2}$. Il y a donc deux sortes de divergences potentielles : les divergences en $|k_t|^{-1}$ et les divergences en $|k_t|^{-2}$. Si on reprend les démonstrations de chacun des coefficients, on remarque alors que les divergences en $|k_t|^{-2}$ viennent des déterminants de Gram. L'appendice A révèle que le déterminant de Gram d'une intégrale scalaire quatre points deux masses adjacentes à la même structure que le déterminant de la matrice cinématique de la fonction à quatre points deux masses opposées :

$$\det(G_{2A}) \propto \langle 1m4m1 \rangle \propto \sqrt{\det(\mathcal{S}_{2B})} \quad \det(\mathcal{S}_{2B}) \propto \langle 1m4m1 \rangle^2, \quad (21.12)$$

où les pattes d'impulsion p_1 et p_4 sont les deux pattes seules des intégrales scalaires à quatre points deux masses et m l'une des masses des intégrales scalaires. Sous forme spinorielle les déterminants s'écrivent :

$$\det(G_{2A}) \propto \sqrt{\det(\mathcal{S}_{2B})} \propto |k_t|^2. \quad (21.13)$$

La réduction des intégrales tensorielles fait apparaître des inverses de déterminants de Gram : $|k_t|^{-2}$. Au numérateur il apparaît des $|k_t|^2$ dans les coefficients, puisque les intégrales scalaires sont de dimensions $n+2$. Les différents termes s'ajustent de façon à compenser tous les déterminants de Gram restants. Pour l'amplitude supersymétrique, le facteur $|k_t|^2$ est au numérateur du coefficient de l'intégrale scalaire à quatre points deux masses adjacents, le déterminant de Gram se trouve au numérateur et non au dénominateur dans l'amplitude supersymétrique comme dans le cas MHV (rem. 19.5.1) ou à quatre photons (12.21, 12.30, 12.42). Les singularités de Landau sont données par les singularités en $|k_t|^{-1} \propto \det(\mathcal{S})^{-1/4}$ qui sont bien une « racine » du déterminant de matrice cinématique.

D'après les conditions de Landau, les quatre propagateurs sont sur couches de masses. Avec la conservation de l'énergie impulsion dans chaque vertex, on déduit la valeur de ces quatre propagateurs :

$$q_6 = \frac{s}{s_{35} - s} p_1 = \frac{s_{26}}{t - s_{26}} p_1 \quad (21.14)$$

$$q_1 = \frac{t}{t - s_{26}} p_1 = \frac{s_{35}}{s_{35} - s} p_1 \quad (21.15)$$

$$q_3 = \frac{s}{s_{26} - s} p_4 = \frac{s_{35}}{t - s_{35}} p_4 \quad (21.16)$$

$$q_4 = \frac{t}{t - s_{35}} p_4 = \frac{s_{26}}{s_{26} - s} p_4 \quad (21.17)$$

avec $s = (p_1 - p_3 - p_5)^2$ et $t = (p_4 - p_3 - p_6)^2$. On décompose le diagramme en deux réactions

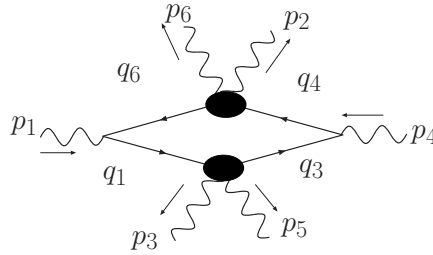


FIG. 21.9 – Cinématique du double parton scattering.

physiques $q_1 - q_3 \rightarrow p_3 + p_5$ et $q_4 - q_6 \rightarrow p_2 + p_6$. Les impulsions des deux états initiaux étant alignés sur l'axe z , on en déduit les états finaux à deux angles près. Par exemple l'angle ϕ et ρ . L'angle

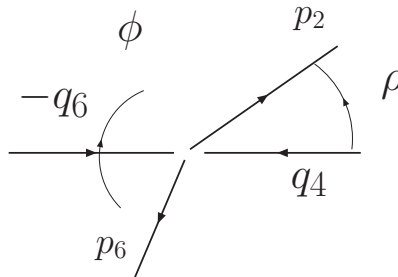


FIG. 21.10 – Cinématique du double parton scattering.

ϕ traduit la rotation de l'état final autour de l'axe z alors que l'angle ρ traduit la rotation par rapport à l'axe z . Bien que l'angle ϕ ne traduise qu'une symétrie de rotation autour de l'axe initial, l'amplitude totale en sera dépendante car il y a deux processus. À un état initial donné, le double parton scattering dans le processus à six photons est caractérisé par un plan de configuration décrit par les quatre angles $\phi_1, \rho_1, \phi_2, \rho_2$, les indices 1 et 2 correspondent aux deux processus physiques.

Avec les expressions exactes des propagateurs, on peut montrer l'égalité spinorielle

$$\frac{[6(4-5-3)3]}{[2(4-5-3)5]} = \frac{s_{35} [5(4-2-6)2]}{s_{62} [3(4-2-6)6]}, \quad (21.18)$$

et on en déduit directement que le résidu du pôle en k_t^{-1} , s'annule à l'ordre zéro dans la limite du double parton scattering de l'amplitude supersymétrique (20.88). Cependant, à l'ordre 1, le calcul est plus difficile. Il faut ajouter une composante transverse $|k_t|$ à chaque paire de photons et effectuer un développement limité de cette impulsion transverse. Néanmoins même si l'impulsion transverse de chaque paire sert petite, l'impulsion transverse de chaque photon peut être non négligeable. Cependant, en observant les courbes, on peut modéliser le comportement des amplitudes autour de la singularité par une distribution du genre :

$$\mathcal{A}_6^{s/S/N=1} \propto \frac{(k_{tx} + k_{t0x})(k_{ty} + k_{t0y})}{(k_{tx} + k_{t0x})^2 + (k_{ty} + k_{t0y})^2}, \quad (21.19)$$

où k_{t0x} et k_{t0y} sont des paramètres. La symétrie de rotation autour de l'axe z est brisée à cause du fait que les deux états finaux des deux sous processus physiques ne sont pas symétriques par rapport à l'axe z. L'amplitude finale dépend donc des quatre variables $\phi_1, \rho_1, \phi_2, \rho_2$ par l'intermédiaire des deux paramètres k_{t0x}, k_{t0y} . Dans le cas supersymétrique, on a vraisemblablement $k_{t0x} = k_{t0y} = 0$.

21.4 Section efficace de l'amplitude à six photons.

21.4.1 Définition de l'espace des phases

On considère le processus à six photons comme un processus physique de type $2 \rightarrow 4$:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 \quad (21.20)$$

Les deux photons γ_1 et γ_2 ont deux origines différentes et sont caractérisées par des fractions $x_1, x_2 \in [0..1]$. On calcule la section efficace dans le centre de masse de l'état initial en intégrant sur tout l'espace de phase final :

$$\sigma = \int dx_1 dx_2 \int \prod_{i=3}^6 \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^6 p_i \right) \prod_{i=3}^6 \delta(p_i^2) |\mathcal{A}_6|^2 F(x_1, x_2), \quad (21.21)$$

où $F(x_1, x_2)$ est une fonction de structure qui dépend de l'origine des photons initiaux. On va décrire deux expériences différentes (LEP et CLIC) et donner leur section efficace. Les fonctions « δ » correspondent aux contraintes de conservation d'énergie impulsion et de réalité des particules finales. Maintenant, on va définir deux origines possibles des photons initiaux.

21.4.2 Fonctions de structures

On considère un cas réaliste de la collision de deux photons, provenant de la désintégration d'un faisceau électrons-positrons : expérience Large Electron-Positron Collider (LEP) au CERN. On se place dans le centre de masse du système électron-positron, ils ont chacun une énergie E (fig. 21.11). Les photons, venant de la désintégration des fermions et antifermions, ont une densité partonique modélisée par la fonction de Weizsäcker-Willians [103, 104, 105] :

$$f_{\text{col}}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 2(1-x) \left(\frac{m_e^2 x}{E^2(1-x)^2 \theta_c^2 + m_e^2 x^2} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1 + (1-x)^2}{x} \log \frac{E^2(1-x)^2 \theta_c^2 + m_e^2 x^2}{m_e^2 x^2} + O(\theta_c^2, m_e^4/E^2) \right\}, \quad (21.22)$$

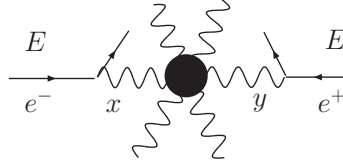
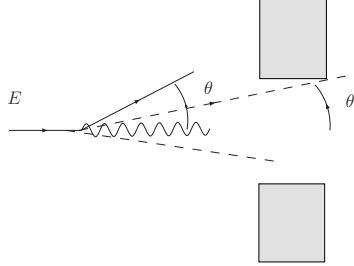
FIG. 21.11 – Interaction à six photons dans un système e^+e^- 

FIG. 21.12 – Expérience de détection d'un électron.

où $m_e^2 = 510^2 \text{ eV}^2$ est la masse de l'électron, et E l'énergie initiale de l'électron. Dans le cas de l'expérience LEP, alors $E = 100 \text{ GeV}$. Cette distribution est valable dans la limite colinéaire $\theta_c \ll 1$ (fig. 21.12). La fonction de structure de la section efficace sera alors :

$$F_{\text{col}}(x_1, x_2) = f_{\text{col}}(x_1)f_{\text{col}}(x_2) \quad (21.23)$$

Dans une deuxième expérience, on suppose que les deux photons de l'état initial proviennent de deux faisceaux lasers. Les faisceaux lasers de hautes énergies sont obtenus par retro-diffusion Compton d'un laser de fréquence ω_0 sur un faisceau d'électrons d'énergies E_f non polarisés. C'est l'expérience Compact Linear Collider (CLIC) du CERN dans laquelle $E_f = 3 \text{ TeV}$. Les photons sont émis dans de multiples directions, et la longueur d'onde du photon émis dépend de l'angle d'émission (fig. 21.13). Tous les photons émis dans une direction donnée sont, idéalement, mono-

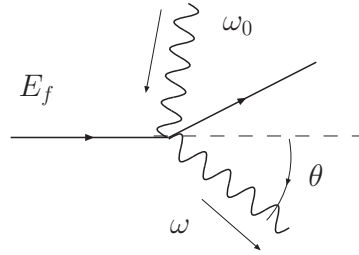


FIG. 21.13 – Création d'un laser de haute énergie.

chromatiques. Dans le cas d'un faisceau d'électrons non polarisés, la densité partonique de photons émis, est [21] :

$$\text{Si } x < \frac{x_0}{1+x_0} \quad f_{\text{las}}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-x} + 1-x - \frac{4x(x_0(1-x)-x)}{x_0^2(1-x)^2} \right\}, \quad (21.24)$$

$$\text{sinon } f_{\text{las}}(x) = 0. \quad (21.25)$$

avec $x_0 = 4 \frac{E_f \omega_0}{m_e^2}$. La fonction de structure sera donc :

$$F_{\text{las}}(x, y) = f_{\text{las}}(x)f_{\text{las}}(y) \quad (21.26)$$

On peut comparer les deux fonctions de structures en les traçant en fonction de la densité partonique. On se place par exemple dans le cas du LEP $E = 100 \text{ GeV}$ et de CLIC $E_f = 3 \text{ TeV}$. On ajuste ω_0 pour avoir $x_0 = 5$.

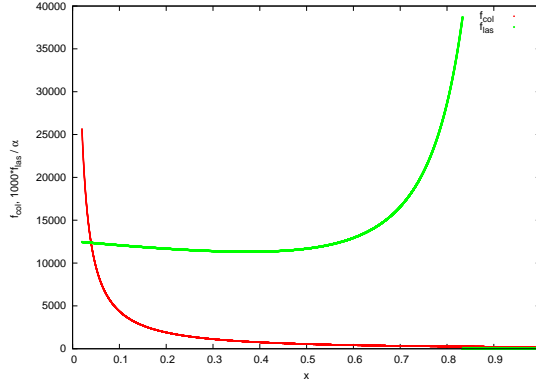


FIG. 21.14 – Fonctions de structure de la désintégration de photons issus de Bremsstrahlung et de la retro-diffusion Compton avec $x_0 = 5$.

Les valeurs numériques ne sont pas forcément pertinentes, mais il est intéressant de voir que dans une expérience, on aura l'interaction de photons avec des petites fractions (expérience de collision e^+e^-), alors que dans l'autre expérience, on aura l'interaction avec une grande fraction (laser).

21.4.3 Paramétrisation de l'espace des phases

On va intégrer les fonctions δ de l'espace de phase pour réduire le nombre d'intégrales, en particuliers, l'intégration de la composante temporelle des impulsions, transforme les mesures :

$$\delta(p_i^2) d^4 p_i \rightarrow \frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i}. \quad (21.27)$$

Ici la description de l'espace des phases est sphérique, mais comme l'état initial est longitudinal, il est préférable de se placer dans une description cylindrique, d'axe z, axe de l'état initial. On introduit deux indices, l'indice \parallel pour définir la composante longitudinale et l'indice \perp pour définir les deux composantes transverses d'un vecteur. On effectue un changement de variable sphérique en cylindrique en introduisant la rapidité du photon « i » :

$$Y_i = \frac{1}{2} \log \left(\frac{E_i + p_{\parallel i}}{E_i - p_{\parallel i}} \right). \quad (21.28)$$

Les rapidités permettent de décrire facilement les boost de Lorentz car elles s'additionnent par changement de référentiels longitudinaux. Par changement de variable, la mesure de chaque photon de l'état final s'écrit :

$$\frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i} \rightarrow \frac{d^2 \vec{p}_{\perp i} dY_i}{2}, \quad (21.29)$$

et la fonction δ de la conservation de l'énergie impulsion devient :

$$\delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^6 p_i \right) \rightarrow \delta^{(2)} \left(\sum_{i=3}^6 \vec{p}_{\perp i} \right) \delta \left\{ (x_1 + x_2) \frac{\sqrt{s}}{2} - \sum_{i=3}^6 M_{\perp i} \cosh(Y_i) \right\} \\ \delta \left\{ (x_1 - x_2) \frac{\sqrt{s}}{2} - \sum_{i=3}^6 M_{\perp i} \sinh(Y_i) \right\}, \quad (21.30)$$

avec $M_{\perp i} = |\vec{p}_{\perp i}|$ la masse transverse et s l'énergie initiale des fermions. On intègre sur les deux paramètres x_1 et x_2 , et finalement, la section efficace se simplifie :

$$\sigma = \frac{2}{16 (2\pi)^8 s} \int \prod_{i=3}^6 dY_i \prod_{i=3}^5 |\vec{p}_{\perp i}| |d\vec{p}_{\perp i}| d\phi_i |\mathcal{A}_6|^2 F(x_1, x_2) \quad (21.31)$$

avec

$$x_1 = \sum_{i=3}^6 \frac{M_{\perp i}}{\sqrt{s}} e^{Y_i} \quad x_2 = \sum_{i=3}^6 \frac{M_{\perp i}}{\sqrt{s}} e^{-Y_i} \quad \vec{p}_{\perp 6} = - \sum_{i=3}^5 \vec{p}_{\perp i}. \quad (21.32)$$

La fonction de structure est donnée par (21.23) ou (21.26) suivant l'expérience. Il ne faut pas oublier les conditions $\theta (0 \leq x_1 \leq 1) \theta (0 \leq x_2 \leq 1)$. Il n'y a donc plus que dix variables. En réalité, comme il y a plus d'impulsions des photons externes, linéairement dépendants, que de dimensions d'espace de Minkowski, alors les impulsions sont reliées par la nullité de leur déterminant de Gram. Il n'y a donc que neuf variables indépendantes. Mais cette dernière contrainte n'est pas forcément facile à programmer. Les rapidités sont intégrées sur \mathbb{R} , alors que les modules des impulsions transverses sur \mathbb{R}^+ et les angles sur 2π . On reconstruit les impulsions avec les rapidités :

$$p_i = \begin{pmatrix} -M_{\perp i} \cosh(Y_i) \\ -p_{\perp i} \cos(\phi_i) \\ -p_{\perp i} \sin(\phi_i) \\ -M_{\perp i} \sinh(Y_i) \end{pmatrix}. \quad (21.33)$$

21.4.4 Section efficace intégrée

Il faut intégrer une fonction sur dix variables. On utilise un intégrateur de type Monte-Carlo : BASES. Le méthode d'intégration de Monte-Carlo est « moyennement » rapide, c'est à dire que la convergence dépend seulement de l'inverse du nombre de points générés $|I_{\text{exact}} - I_{\text{calculée}}| = O(N^{-1})$. Cependant cet intégrateur à la particularité d'être adaptatif. Il découpe l'espace des phases en une grille, puis il calcul la valeur de l'intégrand dans chaque cellule. Il est adaptatif, dans le sens où, plutôt que de choisir une grille homogène sur l'espace des phases, il va créer une grille, avec des cellules d'autant plus petite que la valeur de la fonction est grande. Le calcul se fera donc toujours en deux étapes, premièrement générer une grille adaptée, puis calculer la valeur de la fonction dans chaque cellule de la grille.

On calcule une section efficace non polarisée, c'est à dire qu'on suppose que les détecteurs ne privilégient par une hélicité des photons finaux. On ne calcule que la section efficace en QED, pour deux valeurs d'énergies initiales différentes. On prend un angle $\theta_c = 0.1$ rad.

expérience	énergie initiale	p_t minimum	section efficace ($pBarn$)
coll	$E = 100$ GeV	1 GeV	$2.11 \cdot 10^{-9} \pm 0.9\%$
coll	$E = 7$ TeV	10 GeV	$2.21 \cdot 10^{-11} \pm 2\%$
laser	$E_f = 1.5$ TeV	5 GeV	$1.65 \cdot 10^{-14} \pm 1\%$

Le détecteur est composé de cellules. Si l'on veut distinguer les quatre photons de l'état final, alors il faut que chaque photon arrive sur une cellule différente. Pour cela on introduit une coupure qui imposent une séparation minimale entre deux photons. Cette distance de séparation est liée aux caractéristiques du détecteur. Elle élimine les états avec des photons colinéaires. Dans l'espace rapidité-angle azimutal, on impose une distance minimale entre les deux photons « i » et « j » :

$$d_{ij} = \sqrt{(Y_i - Y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2} \geq 0.3 \quad (21.34)$$

« 0.3 » correspond aux caractéristiques classiques des détecteurs. On peut interpréter cette grandeur en remarquant que le produit scalaire des impulsions de deux photons s'écrit :

$$2p_i \cdot p_j = 2p_{t_i} \cdot p_{t_j} \{ \cosh(Y_i - Y_j) - \cos(\phi_i - \phi_j) \}. \quad (21.35)$$

« d_{ij} » représente une distance angulaire entre les deux photons. De plus on ne peut intégrer que sur un borné fini. Donc on a limité les rapidités des photons au borné :

$$Y_i \in [-2, 2]. \quad (21.36)$$

Enfin pour éviter les problèmes de colinéarité avec les photons initiaux, on impose un « p_t » minimum à chaque photon finaux. De toutes façon, on ne peut détecter sur l'axe du faisceau. Les p_t minimum sont donnés dans le tableau.

21.4.5 Sections efficaces différentielles.

Dans ce paragraphe, on se place dans l'expérience de collision de deux photons venant d'un système électron-positron avec une énergie initiale de type LEP : $E = 100\text{GeV}$.

On commence par tracer la section efficace différentielle en fonction de l'impulsion transverse d'un photon (fig. 21.15). Ce diagramme est en échelle logarithmique. et l'amplitude diverge en zéro. Cette divergence correspond aux mêmes divergence de Coulomb observé dans le cas du processus à quatre photons (parag. 14.3). Des variables de Mandelstam s'annulent et il n'y a plus de transfert d'énergie dans certains photons finaux.

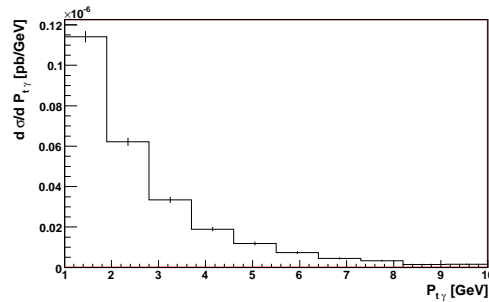


FIG. 21.15 – Section efficace différentielle en fonction de l'impulsion transverse d'un photon.

On peut aussi tracer la section efficace en fonction de la masse invariante de deux photons (fig. 21.16). On remarque que lorsque cette masse tend vers zéro alors l'amplitude tend vers zéro. Tout ce passe comme si les deux photons de cette masse devenaient colinéaires. À la limite où la masse est nulle, alors on se retrouve dans le cas d'une amplitude à cinq photons fois un facteur infrarouge qui est le facteur eikonal (déf. 3.2.6). L'amplitude à cinq photons est nulle, ce qui correspond à la nullité de la courbe.

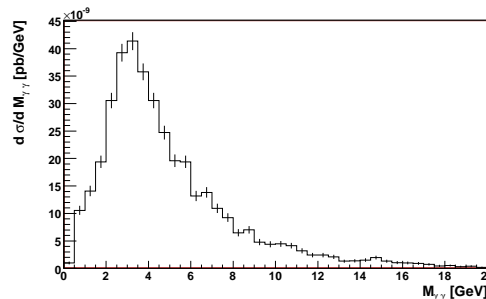


FIG. 21.16 – Section efficace différentielle en fonction de la masse invariante d'une paire de deux photons.

Chapitre 22

Extension à une boucle massive.

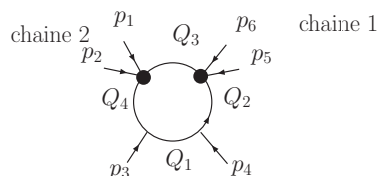
Dans ce chapitre, on va calculer l'amplitude d'hélicité du processus à six photons avec une boucle massive dans laquelle tous les photons ont la même hélicité. Chaque diagramme du processus à six photons n'a aucune divergence (infrarouge et ultraviolette), donc la régularisation dimensionnelle est inutile et il n'y aura pas de triangle à une ou deux masses externes. De plus, avec une méthode standard de réduction, on peut montrer que l'amplitude ne contient ni de bulle ni de termes rationnels. Cette absence de bulles est compliquée à expliquer, l'absence de divergences ultraviolettes n'est pas suffisante. On peut observer numériquement qu'il y a aussi de nombreuses compensations entre diagrammes, dû à l'invariance de jauge qui éliminent les bulles.

On considère un diagramme à six photons que l'on coupe en deux. Il y a deux manières de couper ce diagramme, ou bien on sépare les six photons en deux groupes de trois photons, ou bien on sépare les six photons en un groupe de deux photons et un groupe de quatre photons. Le problème du premier type de coupure est qu'elle ne peut pas donner d'information devant les intégrales à trois points trois masses. On considère donc le deuxième type de discontinuité. On va calculer la discontinuité dans l'invariant s_{56} , par exemple :

$$\text{Disc}_{s_{56}} \mathcal{A}_6^s = \int d^4 q \mathcal{A}_{\text{arbre}}(p_5, p_6) \mathcal{A}_{\text{arbre}}(p_1, p_2, p_3, p_4) \delta(D_4^2) \delta(D_6^2). \quad (22.1)$$

On utilise alors la formule (6.1) de l'arbre à deux photons et (6.21) de l'arbre à quatre photons. On obtient des hexagones scalaires ainsi que des pentagones de rang un. La réduction n'engendrera donc que des intégrales à quatre points. Donc l'amplitude s'écrira comme une combinaison linéaire d'intégrales à quatre points. On va donc regarder le coefficient devant chaque type d'intégrales à quatre points par la méthode à quatre coupures.

On commence par la fonction à quatre points deux masses adjacentes



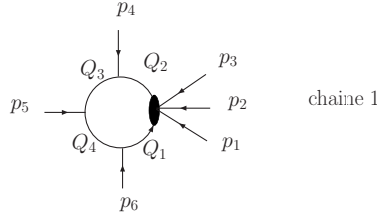
et on calcule la discontinuité autour des deux invariants s_{12}, s_{56} :

$$\text{Disc}_{4, s_{12}, s_{56}}(A_6^s) = \int d^4 q A_{\text{arbre}}(1^+, 2^+) \prod_{i=3}^4 \varepsilon_i^+ \cdot q_i A_{\text{arbre}}(5^+, 6^+) \delta(D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_6^2) \quad (22.2)$$

$$= (i\epsilon\sqrt{2})^6 m^6 \frac{[12][34][56]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 56 \rangle} \text{Disc}_{4, s_{12}, s_{56}}(I_6^n). \quad (22.3)$$

Avec les deux arbres, (13.1, 13.5), le calcul est immédiat ainsi que la reconstruction. Tout le contenu devant les intégrales scalaires à quatre points deux masses adjacentes, est contenu dans la

décomposition de la fonction à six points. Maintenant, on regarde la fonction à quatre points une masse :



La discontinuité à quatre coupures s'écrit :

$$\text{Disc}_{4,s_{123}}(A_6^s) = \int d^4q A_{arbre}(1^+, 2^+, 3^+) \varepsilon_4^+ \cdot q_4 \varepsilon_5^+ \cdot q_5 \varepsilon_6^+ \cdot q_6 \delta(D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2). \quad (22.4)$$

Plutôt que d'utiliser une chaîne à trois photons, on va décomposer la boucle en une chaîne avec deux photons $\mathcal{A}_{arbre}^s(Q_3, Q_1, p_5, p_6)$ d'amplitude (6.1), et une chaîne avec quatre photons $\mathcal{A}_{arbre}^s(Q_1, Q_3, p_1, p_2, p_3, p_4)$ d'amplitude (6.21). On impose les propagateurs q_2 et q_4 sur couches de masses. Il est préférable d'utiliser ce genre de décomposition puisqu'un nombre pair de photons réduit considérablement les formules chaînes contrairement à celle qui ont un nombre paires de photons. Après de très légères réductions, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \text{Disc}_{4,s_{123}}(A_6^s) &= - (e\sqrt{2})^6 m^6 \frac{[12][34][56]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 56 \rangle} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \text{Disc}_{4,s_{123}}(I_6^n) \\ &\quad - (e\sqrt{2})^6 m^4 \frac{[56]}{\langle 56 \rangle} \sum_{\sigma(1,2,3,4)} \int d^4q \frac{[4Mq_61]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle} \frac{1}{D_1^2} \delta(D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2), \end{aligned} \quad (22.5)$$

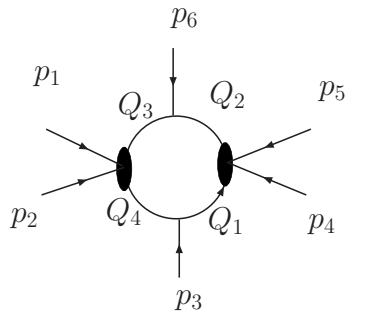
où $M = p_1 + p_2 + p_3$ est l'impulsion de la masse externe. En effectuant une permutation des matrices gammas, et on imposant les nullités des quatres propagateurs, on a :

$$\langle 54Mq_6165 \rangle = D_1^2 \langle 54M65 \rangle + M^2 \langle 54165 \rangle - \langle 54Mq_3165 \rangle. \quad (22.6)$$

On en déduit directement :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{4,s_{123}}(A_6^s) &= - (e\sqrt{2})^6 m^6 \frac{[12][34][56]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 56 \rangle} \text{Disc}_{4,s_{123}}(I_6^n) \\ &\quad + (e\sqrt{2})^6 m^4 \frac{\langle 54M65 \rangle}{2 \langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 61 \rangle} \text{Disc}_{4,s_{123}}(I_{4,1}^n(s_{123})). \end{aligned} \quad (22.7)$$

Maintenant, on regarde la discontinuité autour de l'intégrale à quatre points deux masses opposées



et on calcule la discontinuité autour des deux invariants s_{12} et s_{45}

$$\text{Disc}_{4,s_{12},s_{45}}(A_6^s) = \int d^4q A_{arbre}(1^+, 2^+) \varepsilon_3^+ \cdot q_3 A_{arbre}(4^+, 5^+) \varepsilon_6^+ \cdot q_6 \delta(D_2^2, D_3^2, D_5^2, D_6^2) \quad (22.8)$$

se simplifie plus facilement si on considère deux chaînes à trois photons (6.8). Dans ce cas, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma(1,2,3)\sigma(4,5,6)} \text{Disc}_{4,s_{12},s_{45}} (\mathcal{A}_6^s) \\ &= (e\sqrt{2})^6 m^4 \sum_{\sigma(1,2,3)\sigma(4,5,6)} \int d^4q \frac{[3\mathcal{A}_3 21][6\mathcal{A}_6 54]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle D_1^2 D_4^2} \delta(D_2^2, D_3^2, D_5^2, D_6^2). \end{aligned} \quad (22.9)$$

On arrange juste le numérateur dans l'intégrale on effectuant les permutations des matrices gammas :

$$\begin{aligned} [3\mathcal{A}_3 21][6\mathcal{A}_6 54] &= -\frac{[3216543]}{\langle 16 \rangle \langle 43 \rangle} + D_1^2 D_4^2 \frac{[3(1+2)5(5+4)3]}{\langle 16 \rangle \langle 43 \rangle} \\ &+ D_1^2 s_{12} \frac{[36543]}{\langle 16 \rangle \langle 43 \rangle} - D_1^2 \frac{[3(1+2)\mathcal{A}_2 6543]}{\langle 16 \rangle \langle 43 \rangle} \end{aligned} \quad (22.10)$$

En on déduit directement :

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{4,s_{12},s_{45}} (\mathcal{A}_6^s) &= - (e\sqrt{2})^6 m^6 \frac{[12][34][56]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 56 \rangle} \text{Disc}_{4,s_{12},s_{45}} (I_6^n) \\ &+ (e\sqrt{2})^6 m^4 \frac{[3(1+2)6(5+4)3]}{2\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 61 \rangle} \text{Disc}_{4,s_{12},s_{45}} (I_{4,2B}^n(s_{12}, s_{45})). \end{aligned} \quad (22.11)$$

Dans chaque discontinuité, on retrouve la trace de l'hexagone plus des termes supplémentaires. La reconstruction est immédiate :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6^s &= -i \frac{(e\sqrt{2})^6 m^6}{96\pi^2} \sum_{\sigma(1,2,3,4,5,6)} \frac{[12][34][56]}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 56 \rangle} I_6^n \\ &+ i \frac{(e\sqrt{2})^6 m^4}{96\pi^2} \sum_{\sigma(1,2,3,4,5,6)} \frac{[3(1+2)6(5+4)3]}{2\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 61 \rangle} I_{4,2B}^n(s_{12}, s_{45}) \\ &+ i \frac{(e\sqrt{2})^6 m^4}{96\pi^2} \sum_{\sigma(1,2,3,4,5,6)} \frac{\langle 54M65 \rangle}{2\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 61 \rangle} I_{4,1}^n(s_{123}) \end{aligned} \quad (22.12)$$

Les coefficients devant les intégrales scalaires à quatre points peuvent tous se mettre de la forme :

$$\frac{\det(\mathcal{S})}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 61 \rangle}, \quad (22.13)$$

où $\det(\mathcal{S})$ est le déterminant de la matrice cinématique associée à l'intégrale scalaire. Ce coefficient a une partie totalement invariante par la symétrie de Bose, ce qui est normal vu que toutes les hélicités sont identiques. L'autre partie est le déterminant de la matrice cinématique de la boucle sans masse. Ce déterminant vient du mélange, crée par les masses, des deux courants de chiralités dans la boucle. L'expression finale est compacte. Cependant, on n'a pas utilisé les bases d'intégrales scalaires standards. Il est préférable de les regrouper pour former des intégrales scalaires à six points.

Septième partie
Appendices.

Annexe A

Intégrales scalaires.

Dans cet appendice, on donne des formules analytiques de certaines intégrales scalaires. On se limitera aux intégrales avec une particule interne qui a une même masse quelque soit le propagateur. On note M^2 sa masse. De plus, on donnera la valeur du déterminant de la matrice cinématique $\det(\mathcal{S})$ ainsi que celui du déterminant de Gram $\det(G)$. L'impulsion du propagateur « i » s'écrit

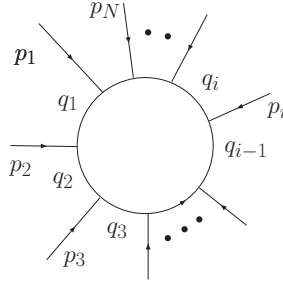


FIG. A.1 – Structure générale d'une boucle.

$Q_i^\mu = Q^\mu + r_i^\mu$. Les r_i ne sont pas tous définis. On rappelle la définition de chacune des matrices (7.15, 7.17) :

$$\mathcal{S}_{ij} = (r_i - r_j)^2 - 2M^2 \quad (\text{A.1})$$

$$G_{ij} = 2p_i \cdot p_j \quad (\text{A.2})$$

On utilisera la fonction dilogarithme Li_2 de définition :

$$Li_2(x) = - \int_0^1 dt \frac{\ln(1 - xt)}{t}. \quad (\text{A.3})$$

Dans [106], on trouve la définition du dilogarithme ainsi que des formules de réduction reliant les polylogarithmes. Les polylogarithmes auront des arguments en fonction des variables de Mandelstam et de la masse interne de la particule tournante. Il y a des difficultés lorsque l'argument d'un logarithme est négatif. On utilise sa continuation analytique en ajoutant une partie imaginaire infinitésimale aux arguments. La prescription analytique est :

$$s \rightarrow s + i\lambda, \quad M^2 \rightarrow M^2 - i\lambda, \text{ avec } \lambda > 0. \quad (\text{A.4})$$

Enfin, on les intégrales angulaires fournissent un facteur commun à toutes les intégrales scalaires :

$$r_\Gamma = \frac{\Gamma(1 + \epsilon)\Gamma(1 - \epsilon)^2}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \quad (\text{A.5})$$

A.1 Fonction à un point : Tadpole.



$$s = s_{12}$$

$$S_1 = (-2M^2). \quad (\text{A.6})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(S_1) = -2M^2 \quad \det(G_1) = s. \quad (\text{A.7})$$

Le tadpole a une valeur non nul que si la particule dans la boucle à une masse : $M^2 \neq 0$.

$$I_1^n = r_\Gamma (M^2)^{n-3} \Gamma(3-n). \quad (\text{A.8})$$

A.2 Fonction à deux points.



$$s = s_{12} = s_{34}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -2M^2 & s - 2M^2 \\ s - 2M^2 & -2M^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(S_2) = -s(s - 4M^2) \quad (\text{A.10})$$

$$\det(G_2) = s. \quad (\text{A.11})$$

Intégrale non massive $M^2 = 0$

La fonction à deux points en théorie non-massive est à n dimensions :

$$I_2^n(s) = \frac{r_\Gamma}{\epsilon(1-2\epsilon)} (-s)^{-\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \ln(-s) + 2 + O(\epsilon), \quad (\text{A.12})$$

et à $n + 2$ dimensions :

$$I_2^{n+2}(s) = -\frac{r_\Gamma}{2\epsilon(1-2\epsilon)(3-2\epsilon)} (-s)^{1-\epsilon}. \quad (\text{A.13})$$

Intégrale massive $M^2 \neq 0$

La fonction à deux points en théorie massive à n dimensions, à l'ordre zéro en ϵ est :

$$I_2(s) = m^{-2\epsilon} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} + 2 + \rho \ln\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right) + O(\epsilon), \quad (\text{A.14})$$

$$\text{où } \rho = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}.$$

A.3 Fonction à trois points.

A.3.1 Avec une masse



$$\mathcal{S}_{3,1} = \begin{pmatrix} -2M^2 & -2M^2 & s - 2M^2 \\ -2M^2 & -2M^2 & -2M^2 \\ s - 2M^2 & -2M^2 & -2M^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(\mathcal{S}_{3,1}) = 2s^2M^2 \quad (\text{A.16})$$

$$\det(G_{3,1}) = -s^2. \quad (\text{A.17})$$

Intégrale non massive $M^2 = 0$

La fonction à trois points une masse en théorie non-massive à n dimensions est :

$$I_3^n(s) = \frac{r_\Gamma (-s)^{-\epsilon}}{\epsilon^2 s} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \ln(-s) + \frac{\ln(-s)^2}{2} \right) + O(\epsilon), \quad (\text{A.18})$$

et à $n + 2$ dimensions :

$$I_3^{n+2}(s) = \frac{r_\Gamma}{2\epsilon(1-\epsilon)(1-2\epsilon)} (-s)^{-\epsilon}. \quad (\text{A.19})$$

Intégrale massive $M^2 \neq 0$

La fonction à trois points une masse en théorie massive à n dimensions, à l'ordre zéro en ϵ est :

$$I_3^n(s) = -\frac{1}{2s} \ln^2 \left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right) + O(\epsilon), \quad (\text{A.20})$$

où $\rho = \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}$.

A.3.2 Avec deux masses externes et $M^2 = 0$



$$\mathcal{S}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & m_2^2 & m_1^2 \\ m_2^2 & 0 & 0 \\ m_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(\mathcal{S}_{3,2}) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\det(G_{3,2}) = (m_1^2 + m_2^2) (m_1^2 - m_2^2)^2 \quad (\text{A.23})$$

La fonction à trois points deux masses en théorie non-massive à n dimensions est :

$$I_3^n(m_1^2, m_2^2) = \frac{r_\Gamma}{\epsilon^2} \frac{(-m_1^2)^{-\epsilon} - (-m_2^2)^{-\epsilon}}{m_1^2 - m_2^2}. \quad (\text{A.24})$$

A.3.3 Avec trois masses externes et $M^2 = 0$



$$\left\{ \begin{array}{l} m_1^2 = s_{14} \\ m_2^2 = s_{25} \\ m_3^2 = s_{36} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & m_2^2 & m_1^2 \\ m_2^2 & 0 & m_3^2 \\ m_1^2 & m_3^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Les déterminants sont données par les relations :

$$\det(G_{3,3}) = m_1^2 m_2^2 - (m_1 \cdot m_2)^2 = -\frac{\Delta}{4} \quad (\text{A.26})$$

$$\det(\mathcal{S}_{3,3}) = 2m_1^2 m_2^2 m_3^2. \quad (\text{A.27})$$

La fonction à trois points trois masses en théorie non-massive à n dimensions est [89] :

$$I_3^n(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left\{ \left(2Li_2 \left(1 - \frac{1}{y_2} \right) + 2Li_2 \left(1 - \frac{1}{x_2} \right) + \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\ln^2 \left(\frac{x_1}{y_1} \right) + \ln^2 \left(\frac{x_2}{y_2} \right) + \ln^2 \left(\frac{x_2}{y_1} \right) - \ln^2 \left(\frac{x_1}{y_2} \right) \right) \right\}, \quad (\text{A.28})$$

où :

$$x_{1,2} = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2m_1^2} \quad (\text{A.29})$$

$$y_{1,2} = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2m_1^2} \quad (\text{A.30})$$

$$\Delta = m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2 - i \operatorname{sign}(m_1^2) \epsilon \quad (\text{A.31})$$

La formule (A.28) est valide dans toutes les régions cinématiques grâce à la partie imaginaire $i\epsilon$:

$$\sqrt{\Delta \pm i\epsilon} = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \pm i\epsilon, & \Delta \geq 0 \\ \pm i\sqrt{-\Delta}, & \Delta \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

A.4 Fonction à quatres points.

A.4.1 Sans masse externe



$$\left\{ \begin{array}{l} s = s_{12} \\ t = s_{14} \\ u = s_{13} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}_{4,0} = \begin{pmatrix} -2M^2 & -2M^2 & s - 2M^2 & -2M^2 \\ -2M^2 & -2M^2 & -2M^2 & t - 2M^2 \\ s - 2M^2 & -2M^2 & -2M^2 & -2M^2 \\ -2M^2 & t - 2M^2 & -2M^2 & -2M^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Les déterminants sont données par :

$$\det(G_{4,0}) = -2st(s+t) = 2stu \quad (\text{A.34})$$

$$\det(\mathcal{S}_{4,0}) = ts[-4M^2(t+s) + ts] = -4M^2(t+s)ts + \langle 24342 \rangle^2. \quad (\text{A.35})$$

Intégrale non massive $M^2 = 0$

La fonction à quatre points sans masses en théorie non-massive à n dimensions est [89] :

$$I_{4,0}^n(s, t) = \frac{2}{st} \frac{r_\Gamma}{\epsilon^2} \{(-s)^{-\epsilon} + (-t)^{-\epsilon}\} - \frac{2}{st} F_0(s, t), \quad (\text{A.36})$$

où :

$$F_0(s, t) = \frac{1}{2} \left\{ \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) + \pi^2 \right\}. \quad (\text{A.37})$$

Et l'intégrale scalaire non massive à quatre points sans masse à $n+2$ dimensions s'écrit :

$$I_{4,0}^{n+2}(s, t) = \frac{F_0(s, t)}{u(n-3)}. \quad (\text{A.38})$$

Intégrale massive $M^2 \neq 0$

La fonction à quatre points sans masse en théorie massive à n dimensions est :

$$I_{4,0}^n(s, t) = -\frac{1}{st} \left\{ H\left(-\frac{um^2}{st}, \frac{m^2}{s}\right) + H\left(-\frac{um^2}{st}, \frac{m^2}{t}\right) \right\} + O(\epsilon), \quad (\text{A.39})$$

où :

$$H(X, Y) = \frac{2}{x_+ - x_-} \left\{ \ln\left(1 - \frac{X}{Y}\right) \ln\left(-\frac{x_-}{x_+}\right) - Li_2\left(\frac{x_-}{y - x_+}\right) - Li_2\left(\frac{x_-}{x_- - y}\right) + Li_2\left(\frac{x_+}{x_+ - y}\right) + Li_2\left(\frac{x_+}{y - x_-}\right) \right\}, \quad (\text{A.40})$$

avec $x_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4X})$ and $y = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4Y})$.

A.4.2 Avec une masse externe et $M^2 = 0$



$$\mathcal{S}_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 & m_1^2 & s & 0 \\ m_1^2 & 0 & 0 & t \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(G_{4,1}) = -2st(s+t-m^2) = 2stu \quad (\text{A.42})$$

$$\det(\mathcal{S}_{4,1}) = (st)^2 = \langle 1m3m1 \rangle^2. \quad (\text{A.43})$$

La fonction à quatre points une masse en théorie non-massive à n dimensions est [89] :

$$I_{4,1}^n(s, t, m^2) = \frac{r_\Gamma}{st\epsilon^2} \{((-s)^{-\epsilon} + (-t)^{-\epsilon}) + ((-s)^{-\epsilon} - (-m^2)^{-\epsilon}) + ((-t)^{-\epsilon} - (-m^2)^{-\epsilon})\} - \frac{2}{st} F_1(s, t, m^2), \quad (\text{A.44})$$

où :

$$F_1(s, t, m^2) = Li_2\left(1 - \frac{m^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m^2}{t}\right) - Li_2\left(-\frac{s}{t}\right) - Li_2\left(-\frac{t}{s}\right) \quad (\text{A.45})$$

$$= F_0(s, t) + \left\{ Li_2\left(1 - \frac{m^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m^2}{t}\right) - \frac{\pi^2}{3} \right\}. \quad (\text{A.46})$$

Et l'intégrale scalaire à quatre points une masse à $n + 2$ dimensions s'écrit :

$$I_{4,1}^{n+2}(s, t, m^2) = \frac{F_1(s, t, m^2)}{u(n-3)}. \quad (\text{A.47})$$

A.4.3 Avec deux masses adjacentes externes et $M^2 = 0$



$$\begin{cases} s = s_{14} \\ t = s_{425} \\ u = s_{125} \\ m_1^2 = s_{25} \\ m_2^2 = s_{36} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{4,2A} = \begin{pmatrix} 0 & m_1^2 & s & 0 \\ m_1^2 & 0 & m_2^2 & t \\ s & m_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.48})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(G_{4,2A}) = -2s(m_1^2 m_2^2 - t(m_1^2 + m_2^2 - s - t)) = -2s(1m_1 4m_2 1) \quad (\text{A.49})$$

$$\det(S_{4,2A}) = (st)^2 \quad (\text{A.50})$$

La fonction à quatre points deux masses adjacentes en théorie non-massive à n dimensions est :

$$I_{4,2A}^n(s, t, m_1^2, m_2^2) = \frac{r_\Gamma}{(st)\epsilon^2} \{(-s)^{-\epsilon} + ((-t)^{-\epsilon} - (-m_1^2)^{-\epsilon}) + ((-t)^{-\epsilon} - (-m_2^2)^{-\epsilon})\} - \frac{2}{st} F_{2A}(s, t, m_1^2, m_2^2), \quad (\text{A.51})$$

où :

$$F_{2A}(s, t, m_1^2, m_2^2) = Li_2\left(1 - \frac{m_1^2}{t}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_2^2}{t}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s}{t}\right) \ln\left(\frac{m_2^2}{t}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s}{m_2^2}\right) \ln\left(\frac{m_1^2}{t}\right). \quad (\text{A.52})$$

Et l'intégrale scalaire à quatre points deux masses adjacents à $n + 2$ dimensions s'écrit :

$$I_{4,2A}^{n+2}(s, t, m_1^2, m_2^2) = \frac{t}{(tu - m_1^2 m_2^2)(n-3)} F_{2A}(s, t, m_1^2, m_2^2) - \frac{2m_1^2 m_2^2 + t(s - m_1^2 - m_2^2)}{2(n-3)(tu - m_1^2 m_2^2)} I_3^n(m_1^2, m_2^2, m_3^2). \quad (\text{A.53})$$

A.4.4 Avec deux masses opposées externes et $M^2 = 0$



$$\begin{cases} s = s_{143} \\ t = s_{243} \\ u = s_{23} \\ m_1^2 = s_{14} \\ m_2^2 = s_{56} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{4,2B} = \begin{pmatrix} 0 & m_1^2 & s & 0 \\ m_1^2 & 0 & 0 & t \\ s & 0 & 0 & m_2^2 \\ 0 & t & m_2^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.54})$$

Les déterminants sont donnés par :

$$\det(G_{4,2B}) = -2 (m_1^2 m_2^2 - st) (m_1^2 + m_2^2 - s - t) = 2u (st - m_1^2 m_2^2) \quad (\text{A.55})$$

$$\det(S_{4,2B}) = (st - m_1^2 m_2^2)^2 = \langle 2m_1 3m_1 2 \rangle^2 = \langle 2m_2 3m_2 2 \rangle^2 \quad (\text{A.56})$$

La fonction à quatre points deux masses opposées en théorie non-massive à n dimensions est [89] :

$$\begin{aligned} I_{4,2B}^n(s, t, m_1^2, m_2^2) &= \frac{r_\Gamma}{(st - m_1^2 m_2^2) \epsilon^2} \{ ((-s)^{-\epsilon} - (-m_1^2)^{-\epsilon}) + ((-s)^{-\epsilon} - (-m_2^2)^{-\epsilon}) \} \\ &+ \frac{r_\Gamma}{(st - m_1^2 m_2^2) \epsilon^2} \{ ((-t)^{-\epsilon} - (-m_1^2)^{-\epsilon}) + ((-t)^{-\epsilon} - (-m_2^2)^{-\epsilon}) \} \\ &- \frac{2}{st - m_1^2 m_2^2} F_{2B}(s, t, m_1^2, m_2^2), \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

où :

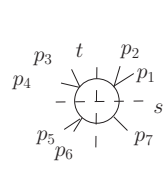
$$\begin{aligned} F_{2B}(s, t, m_1^2, m_2^2) &= -Li_2\left(1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{st}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_1^2}{s}\right) \\ &+ Li_2\left(1 - \frac{m_2^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_1^2}{t}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_2^2}{t}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$= F_1(s, t, m_1^2) + F_1(s, t, m_2^2) - F_0(s, t) - \left\{ Li_2\left(1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{st}\right) - \frac{\pi^2}{6} \right\}. \quad (\text{A.59})$$

Et l'intégrale à quatre points deux masses opposés à $n + 2$ dimensions s'écrit :

$$I_{4,2B}^{n+2}(s, t, m_1^2, m_2^2) = \frac{F_{2B}(s, t, m_1^2, m_2^2)}{u(n-3)}. \quad (\text{A.60})$$

A.4.5 Avec trois masses externes et $M^2 = 0$



$$\begin{cases} s = s_{1234} \\ t = s_{712} \\ u = s_{1256} \\ m_1^2 = s_{12} \\ m_2^2 = s_{34} \\ m_3^2 = s_{56} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & m_1^2 & s & 0 \\ m_1^2 & 0 & m_2^2 & t \\ s & m_2^2 & 0 & m_3^2 \\ 0 & t & m_3^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.61})$$

Le déterminant de la matrice cinématique est :

$$\det(\mathcal{S}_{4,3}) = (st - m_1^2 m_3^2)^2 = \langle 7m_1 m_2 m_1 \bar{7} \rangle^2 = \langle 7m_3 m_2 m_3 \bar{7} \rangle^2. \quad (\text{A.62})$$

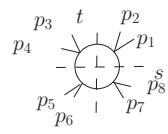
La fonction à quatre points trois masses en théorie non-massive à n dimensions est :

$$I_4^n(s, t, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{r\Gamma}{(st - m_1^2 m_3^2) \epsilon^2} \{ (-s)^{-\epsilon} + (-t)^{-\epsilon} - (-m_1^2)^{-\epsilon} - (-m_2^2)^{-\epsilon} - (-m_3^2)^{-\epsilon} \} \\ - \frac{2}{st - m_1^2 m_3^2} F_3(s, t, m_1^2, m_2^2, m_3^2), \quad (\text{A.63})$$

où :

$$F_3(s, t, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{s}{m_1^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m_2^2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t}{m_3^2}\right) \ln\left(\frac{t}{m_2^2}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s}{t}\right) \\ + Li_2\left(1 - \frac{m_1^2}{s}\right) + Li_2\left(1 - \frac{m_3^2}{t}\right) - Li_2\left(1 - \frac{m_1^2 m_3^2}{st}\right). \quad (\text{A.64})$$

A.4.6 Avec quatre masses externes et $M^2 = 0$



$$\left\{ \begin{array}{l} s = s_{1234} \\ t = s_{7812} \\ u = s_{1256} \\ m_1^2 = s_{12} \\ m_2^2 = s_{34} \\ m_3^2 = s_{56} \\ m_4^2 = s_{78} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}_{4,4} = \begin{pmatrix} 0 & m_1^2 & s & m_4^2 \\ m_1^2 & 0 & m_2^2 & t \\ s & m_2^2 & 0 & m_3^2 \\ m_4^2 & t & m_3^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

Le déterminant de la matrice cinématique est :

$$\det(\mathcal{S}_{4,4}) = (st - m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)^2 - 4m_1^2 m_3^2 m_2^2 m_4^2. \quad (\text{A.66})$$

La fonction à quatre points quatre masses en théorie non-massive à n dimensions est :

$$I_4^n(s, t, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2) = \frac{r\Gamma}{(m_1^2 + m_2^2)^2 (m_2^2 + m_3^2)^2 \rho} F_4(s, t, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2), \quad (\text{A.67})$$

où :

$$F_4(s, t, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2) = \frac{1}{2} \left\{ -Li_2\left(\frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \rho}{2}\right) + -Li_2\left(\frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \rho}{2}\right) \right. \\ \left. - Li_2\left(\frac{1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \rho}{2\lambda_1}\right) + Li_2\left(\frac{1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \rho}{2\lambda_1}\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \ln\left(\frac{1 + \lambda_1 - \lambda_2 + \rho}{1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \rho}\right) \right\}, \quad (\text{A.68})$$

avec :

$$\rho = \sqrt{1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2} \quad (\text{A.69})$$

$$\lambda_1 = \frac{m_1^2 m_3^2}{(m_1^2 + m_2^2)^2 (m_2^2 + m_3^2)^2} \quad (\text{A.70})$$

$$\lambda_2 = \frac{m_2^2 m_4^2}{(m_1^2 + m_2^2)^2 (m_2^2 + m_3^2)^2}. \quad (\text{A.71})$$

A.5 Fonctions à cinq points et six points

La méthode pour réduire les intégrales scalaires à cinq points et plus vient de [56, 57]. Dans [56, 87, 89, 90], on trouve la réduction explicite d'un pentagone non massif.

On note I_6^n l'hexagone scalaire à n dimensions avec six pattes externes non massives et $I_5^n(s_{ij})$ le pentagone scalaire, obtenu en pinçant le propagateur entre les pattes externes d'impulsion p_i et p_j de l'hexagone. On note \mathcal{S}_{6ij} la matrice cinématique de l'hexagone \mathcal{S}_{5ij} la matrice cinématique du pentagone.

La réduction de l'hexagone est :

$$I_6^n = \sum_{k,l=1}^6 \mathcal{S}_{6kl}^{-1} I_5^n(s_{l \ l+1}), \quad (\text{A.72})$$

dans laquelle la matrice cinématique s'écrit :

$$\mathcal{S}_{6kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{23} & s_{234} & s_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{34} & s_{345} & s_{12} \\ s_{23} & 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{456} \\ s_{234} & s_{34} & 0 & 0 & 0 & s_{56} \\ s_{16} & s_{345} & s_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{12} & s_{456} & s_{56} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.73})$$

et son déterminant s'écrit $\det(\mathcal{S}_6) = 4s_{12}s_{23}s_{34}s_{45}s_{56}s_{61} - \text{tr}(123456)^2 = -\text{tr}(\gamma_5 123456)^2$. La réduction à l'ordre zéro en ϵ du pentagone est :

$$I_5^n(s) = \sum_{k,l=1}^5 \mathcal{S}_{5,s_{kl}}^{-1} I_4^n(s, s_{l \ l+1}) + O(\epsilon), \quad (\text{A.74})$$

avec $I_4^n(s, s_{l \ l+1})$ la fonction à quatre points scalaire obtenue en pinçant le propagateur entre les pattes d'impulsion p_l et p_{l+1} du pentagone $I_5^n(s)$. La matrice cinématique du pentagone $I_5(s_{12})$ est :

$$\mathcal{S}_{5,s_{12}kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{34} & s_{345} & s_{12} \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{456} \\ s_{34} & 0 & 0 & 0 & s_{56} \\ s_{345} & s_{45} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{456} & s_{56} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.75})$$

Pour les autres pentagones, on permute les labels. Les pentagones et les hexagones, n'ont pas de divergences infrarouges. On ne garde que les parties finies des intégrales à quatre points.

Annexe B

Extra-intégrales scalaires.

Dans cet appendice, on exprime analytiquement les extra-intégrales scalaires employées dans cette thèse. Pour simplifier, on considère que la particule interne à une même masse quelque soit le propagateur. On note M^2 sa masse.

B.1 Formules analytiques des extra-intégrales scalaires.

B.1.1 Pour une boucle non massive

Pour calculer analytiquement les extra-intégrales scalaires, définies dans 7.2.2, on utilise la formule de réduction dans de la proposition 7.2.4. On obtient alors :

$$J_2^n(s) = (-\epsilon)I_2^{n+2}(s) = -\frac{s}{6} + O(\epsilon) \quad (\text{B.1})$$

$$J_3^n = (-\epsilon)I_3^{n+2} = -\frac{1}{2} + O(\epsilon) \quad (\text{B.2})$$

$$J_4^n = (-\epsilon)I_4^{n+2} = 0 + O(\epsilon) \quad (\text{B.3})$$

$$K_4^n = (-\epsilon)(1 - \epsilon)I_4^{n+4} = -\frac{1}{6} + O(\epsilon). \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Pour une boucle massive

On note M^2 la masse de la particule dans la boucle. On a :

$$\mathcal{J}_N^n = M^2 I_N^n + (-\epsilon)I_N^{n+2} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{K}_N^n = M^2 I_N^n - 2M^2 \epsilon I_N^{n+2} + (-\epsilon)(1 - \epsilon)I_N^{n+4}. \quad (\text{B.6})$$

On utilise alors la formule des intégrales non massive pour calculer les intégrales scalaires de dimensions supérieures.

B.2 Réduction généralisée des intégrales scalaires.

On peut aussi réduire les intégrales scalaires de dimension n en intégrales scalaires de dimension $n+2$ et intégrales scalaires avec un nombre de points inférieurs. Ce sont des formules qui généralisent la proposition 7.2.3 pour tout ordre en ϵ :

$$J_2^n(s) = \frac{s}{2}I_2^n(s) - \frac{1}{2}I_1^n - \frac{3}{2}I_2^{n+2}(s) \quad (\text{B.7})$$

$$J_3^n(s) = -\frac{1}{2}I_2^n(s) - I_3^{n+2}(s) \quad (\text{B.8})$$

$$J_4^n(s, t) = -\frac{st}{4u}I_4^n(s, t) + \frac{s}{2u}I_3^n(s) + \frac{t}{2u}I_3^n(t) - \frac{1}{2}I_4^{n+2}(s, t). \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

Réduction d'intégrales tensorielles.

Dans cet appendice, on donne la réduction de quelques intégrales tensorielles linéaires à deux, trois et quatre points. Dans l'argument de chaque intégrale, on donne le numérateur de l'intégrale [86].

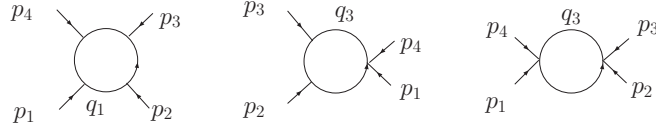


FIG. C.1 – Cinématique des bulles, triangles et boîtes sans masse externe.

On note $t = (p_1 + p_4)^2$. On a alors :

$$I_2^n(q_3^\mu) = \frac{1}{2} (p_2 + p_3)^\mu I_2^n(t) \quad (\text{C.1})$$

$$I_3^n(q_3^\mu) = -\frac{1}{t} I_2^n p_2^\mu + \left(I_3^n(t) + \frac{1}{t} I_2^n(t) \right) p_3^\mu \quad (\text{C.2})$$

$$I_4^n(l_1^\mu) = -\frac{1}{2u} (t I_4^n(1234) - 2I_3^n(s) + 2I_3^n(t)) (p_1^\mu + p_3^\mu) + \frac{1}{2} I_4^n(p_1^\mu + p_4^\mu) \quad (\text{C.3})$$

$$I_4^n((\mu^2 + m^2) l_1^\mu) = -\frac{1}{2u} (t J_4^n(1234) - 2J_3^n(s) + 2J_3^n(t)) (p_1^\mu + p_3^\mu) + \frac{1}{2} J_4^n(1234) (p_1^\mu + p_4^\mu). \quad (\text{C.4})$$

Annexe D

Formules avec spineurs.

Dans cet appendice, on rappelle la définition des spineurs, utilisée, ainsi que des formules reliant les spineurs. On rappelle aussi la définition des matrices de Dirac. Enfin on donnera des formules sur les traces de moments magnétiques et traces de tenseurs de jauge.

D.1 Définition d'un spineur.

La définition d'un spineur provient de [19]. Soit une impulsion :

$$\begin{pmatrix} k_0 \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

On note $k_{\pm} = k_0 \pm k_z$ et $k_{\perp} = k_x + ik_y = |k_{\perp}|e^{i\phi_k}$. Les spineurs sont alors :

$$|k+\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{k_+} \\ \sqrt{k_-}e^{i\phi_k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |k-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{k_-}e^{-i\phi_k} \\ \sqrt{-k_+} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

On définit les spineurs adjoints par :

$$\langle k+| = |k+\rangle^\dagger \gamma^0 \quad \langle k-| = |k-\rangle^\dagger \gamma^0. \quad (\text{D.3})$$

D.2 Matrices de Dirac.

Les matrices de Dirac sont les éléments de l'algèbre définie par :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_4, \quad (\text{D.4})$$

où I_4 est la matrice unité de dimension quatre, γ^μ, γ^ν des matrices et $\eta^{\mu\nu}$ le tenseur métrique de Minkowski. On note $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu, \gamma_0 = \gamma^0, \forall i \in [1..3], \gamma_i = -\gamma^i$. On aura alors $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ et $\forall i \in [1..3], \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$. Enfin, on définit $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

On rappelle la définition des matrices de Dirac γ^μ en représentation de Weyl ou représentation chirale. Cette représentation est adaptée pour les spineurs chiraux définis ci-dessus :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i \in [1..3], \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

où σ_i sont les matrices de Pauli qui vérifient l'algèbre $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\eta_{ij} I_2$. Il existe aussi la représentation de Dirac où l'on échange γ^0 et γ_5 . Les projecteurs de chiralité

$$\mathbb{P}_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad (\text{D.6})$$

permettent de projeter un spineur sur chacun des deux états chiraux.

D.3 Relation particulières.

La relation de Schouten permet de « multiplier » les produits spinorielles :

$$\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle = \langle 13 \rangle \langle 24 \rangle + \langle 14 \rangle \langle 32 \rangle, \quad (\text{D.7})$$

alors que la relation eikonal permet de simplifier les des sommes des spineurs :

$$\sum_{j=i}^{N-1} \frac{\langle jj+1 \rangle}{\langle iN \rangle \langle Nj+1 \rangle} = \frac{\langle iN-1 \rangle}{\langle iN \rangle \langle Ni+1 \rangle}. \quad (\text{D.8})$$

Enfin une relation qui permet de calculer des permutations :

$$\sum_{\sigma(1..N)} \frac{1}{\langle G1 \rangle \langle 12 \rangle \dots \langle ND \rangle} = \frac{\langle GD \rangle^{N-1}}{\prod_{i=1}^N \langle Gi \rangle \langle iD \rangle} \quad (\text{D.9})$$

$$\sum_{\sigma(1..N)} \frac{1}{[p1][12] \dots [N-1N][Nq]} = \frac{(-1)^N [pq]^{N-1}}{\prod_{i=1}^N [pi][qi]}. \quad (\text{D.10})$$

D.4 Moment magnétique.

Le moment magnétique est défini par (3.3). On peut calculer des traces de moments magnétiques :

$$\text{tr}(\mathcal{M}_1^+) = 0 \quad (\text{D.11})$$

$$\text{tr}(\mathcal{M}_1^+ \dots \mathcal{M}_N^+) = (ie\sqrt{2})^N \text{tr}(\langle 12 \rangle \dots \langle N1 \rangle) \quad (\text{D.12})$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \text{tr}(\mathcal{M}_1^+ \dots \mathcal{M}_N^+ \mathcal{M}_I^-) = 0. \quad (\text{D.13})$$

Les moments magnétiques sont de contraction de matrices gamma et de tenseurs électromagnétiques. Le tenseur électromagnétique d'un champ de jauge d'impulsion p et d'hélicité σ est :

$$F_{p,\sigma}^{\mu\nu} = p^\mu \varepsilon^\nu_{p,\sigma} - \varepsilon^\mu_{p,\sigma} p^\nu. \quad (\text{D.14})$$

On note $\text{tr}(F_i F_j) = F_i^{\mu\nu} F_{j\nu\mu}$. On a alors les traces suivantes :

$$\text{tr}(F_i) = 0 \quad (\text{D.15})$$

$$\text{tr}(F_1^+ \dots F_N^+) = \frac{2}{\sqrt{2}^N} [12] \dots [N1] \quad (\text{D.16})$$

$$\text{tr}(F_1^- \dots F_N^-) = \frac{2}{\sqrt{2}^N} \langle 12 \rangle \dots \langle N1 \rangle \quad (\text{D.17})$$

$$\text{tr}(F_1^- \dots F_N^- F_M^+) = 0 \quad (\text{D.18})$$

$$\text{tr}(F_1^+ \dots F_I^- \dots F_J^- \dots F_N^+) = \frac{\text{tr}(F_I^- F_J^-) \text{tr}(F_1^+ \dots F_N^+)}{4}. \quad (\text{D.19})$$

Bibliographie

- [1] S. Dittmaier, S. Kallweit, and P. Uwer, “NLO QCD corrections to WW+jet production at hadron colliders,” *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 062003, [arXiv :0710.1577 [hep-ph]].
- [2] J. M. Campbell, R. K. Ellis, G. Zanderighi, “Next-to-leading order predictions for WW + 1 jet distributions at the LHC,” *JHEP* **12** (2007) 056, [arXiv :0710.1832].
- [3] T. Binoth, Karg, Kauer, G. Sanguinetti in progress.
- [4] J. M. Campbell, R. K. Ellis, G. Zanderighi, “Next-to-Leading order Higgs + 2 jet production via gluon fusion,” *JHEP* **10** (2006) 028, [hep-ph/0608194].
- [5] M. Ciccolini, A. Denner, S. Dittmaier, “Strong and electroweak corrections to the production of Higgs+2jets via weak interactions at the LHC,” *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 161803, [arXiv :0707.0381 [hep-ph]].
- [6] M. Ciccolini, A. Denner, S. Dittmaier, “Electroweak and QCD corrections to Higgs production via vector-boson fusion at the LHC,” *Phys. Rev. D* **77** (2008) 013002, [arXiv :0710.4749 [hep-ph]].
- [7] A. Lazopoulos, K. Melnikov, F. Petriello, “QCD corrections to tri-boson production,” *Phys. Rev. D* **76** (2007) 014001, [hep-ph/0703273].
- [8] V. Hankele, D. Zeppenfeld, “QCD corrections to hadronic WWZ production with leptonic decays,” [arXiv :0712.3544].
- [9] T. Binoth, G. Ossola, C. G. Papadopoulos, R. Pittau, “NLO QCD corrections to tri-boson production,” [arXiv :0804.0350].
- [10] R. Britto, B. Feng, P. Mastrolia “The Cut-Constructible Part of QCD Amplitudes,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 105004, [arXiv :hep-ph/0602178v1].
- [11] B. Jager, C. Oleari, D. Zeppenfeld, “Next-to-leading order QCD corrections to W+W-production via vector-boson fusion,” *JHEP* **07** (2006) 015, [hep-ph/0603177].
- [12] B. Jager, C. Oleari, and D. Zeppenfeld, “Next-to-leading order QCD corrections to Z boson pair production via vector-boson fusion,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 113006, [hep-ph/0604200].
- [13] G. Bozzi, B. Jager, C. Oleari, and D. Zeppenfeld, “Next-to-leading order QCD corrections to W+Z and W-Z production via vector-boson fusion,” *Phys. Rev. D* **75** (2007) 073004, [hep-ph/0701105].
- [14] M. Peskin, D.V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory.”
- [15] C. Itzykson, J.B. Zuber, “Quantum field theory,” McGraw-Hill Editions (1980).
- [16] J.P. Derendinger, “Théorie quantique des champs,” Presses polytechniques et universitaire romandes.
- [17] M. Lebellac, “Des phénomènes critiques aux champs de jauge,” CNRS Éditions, EDP Sciences, ISBN 2-86883-359-4.
- [18] T. Binoth, E. W. N. Glover, P. Marquard and J. J. van der Bij, “Two-loop corrections to light-by-light scattering in supersymmetric QED,” *JHEP* **0205** (2002) 060, [arXiv :hep-ph/0202266].
- [19] Z. Xu, D.H Zhang, L. Chang, “Helicity amplitudes for multiple bremsstrahlung in massless non-abelian gauge theories,” *Nuclear Physics B* **291** (1987) 392-428.
- [20] F. Mahmoudi, “Chromodynamique Quantique aux collisionneurs Hadroniques : vers une automatization du calcul des processus multi-particules à l’ordre d’une boucle. Application à la production de deux photons et d’un jet,” Thèse, Laph, 1058, Université de Savoie.

- [21] V. Lafage, “État à plusieurs particules dans les collisionneurs e^+e^- et $\gamma\gamma$: techniques de calcul et effets d’une Nouvelle Physique, Thèse, LAPP-T, 96-98, Université Paris XI Orsay.
- [22] D.A. Kosower, “The spinor helicity method in dimensional regularization,” *Phys. Lett. B* **254** (1990) 439-443.
- [23] Z. Bern and D. Dunbar, *Nucl. Phys.* **B379** (1992) 562.
- [24] A.G. Morgan, “Second Order Fermions In Gauge Theories,” *Phys.Lett. B* **351** (1995) 249-256, [arXiv :hep-ph/9502230].
- [25] G. Mahlon, “Multiphoton production at high energies in the standard model 1,” *Phys.Rev. D* **47** (1993) 1776-1811, [arXiv :hep-ph/9210213].
- [26] G. Mahlon, “Multiphoton production at high energies in the standard model 2,” *Phys.Rev. D* **47** (1993) 1776-1811, [arXiv :hep-ph/9210214].
- [27] Z. Bern, G. Chalmers, “Factorization in One-Loop Gauge Theory,” *Nucl.Phys.* **B447** (1995) 465-518, [arXiv :hep-ph/9503236].
- [28] L. Dixon, “Calculating scattering amplitudes efficiently,” TASI Lectures, Boulder TASI 95, 539, [arXiv :hep-ph/9601359].
- [29] E. Witten, “Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space,” *Commun. Math. Phys.* **252** 189 (2004), [arXiv :hep-th/0312171].
- [30] R. Penrose, “Twistor Algebra,” *J. Math. Phys.* **8** (1967) 345.
- [31] Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, “ New Recursion Relations for Tree Amplitudes of Gluons,” *Nucl.Phys. B* **715** (2005) 499-522, [arXiv :hep-th/0412308].
- [32] Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, Edward Witten, “Direct Proof Of Tree-Level Recursion Relation In Yang-Mills Theory,” *Phys.Rev.Lett.* **94** (2005) 181602, [arXiv :hep-th/0501052].
- [33] S. D. Badger, E. W. N. Glover, V. V. Khoze, P. Svrcek, “Recursion Relations for Gauge Theory Amplitudes with Massive Particles,” *JHEP* **07** (2005) 025, [arXiv :hep-th/0504159].
- [34] S. D. Badger, E. W. N. Glover, V. V. Khoze, “Recursion Relations for Gauge Theory Amplitudes with Massive Vector Bosons and Fermions,” *JHEP* **01** (2006) 066, [arXiv :hep-th/0507161].
- [35] D. Forde, D. A. Kosower, “All-Multiplicity Amplitudes with Massive Scalars,” *Phys.Rev. D* **73** (2006) 065007, [arXiv :hep-th/0507292].
- [36] L. J. Dixon, E. W. N. Glover, V. V. Khoze “MHV Rules for Higgs Plus Multi-Gluon Amplitudes,” *JHEP* **12** (2004) 015, [arXiv :hep-th/0411092].
- [37] Z. Bern, D. Forde, D. A. Kosower, P. Mastrolia, “Twistor-Inspired Construction of Electroweak Vector Boson,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 025006, [arXiv :hep-ph/0412167].
- [38] C. Schwinn, S. Weinzierl, “Scalar diagrammatic rules for Born amplitudes in QCD,” *JHEP* **05** (2005) 006, [arXiv :hep-th/0503015].
- [39] C. Schwinn, S. Weinzierl, “ SUSY Ward identities for multi-gluon helicity amplitudes with massive quarks,” *JHEP* **0603** (2006) 030, [arXiv :hep-th/0602012].
- [40] F. A. Berends, W. T. Giele, “Recursive calculations for processes with N gluons,” *Nucl. Phys. B* **306** (1988) 759.
- [41] S. J. Parke, T. R. Taylor, “Amplitude for n-Gluon Scattering,” *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 2459 - 2460.
- [42] G. Mahlon, “Beyond the Standard Model IV,” Fermilab-Conf-94/421-T, [arXiv :hep-ph/9412350].
- [43] K.J. Ozeren, W.J. Stirling, “MHV techniques for QED processes,” *JHEP* **0511** (2005) 016, [arXiv :hep-th/0509063].
- [44] S. Aoyama, M. Tonin, “The dimensional regularization of chiral gauge theories and generalized Slavnov-Taylor identities,” *Nucl. Phys. B* **179** (1981) 293-323.
- [45] J. Collins, “Renormalisation,” Cambridge Monographs in Mathematical Physics (1984), ISBN 0-521-31177-2.

- [46] N. Nélipa, “Physique des particules élémentaires,” Éditions Mir, Moscou,
- [47] L. Ryder, “Quantum Field Theory,” Cambridge University Press, ISBN 0-521-47814-6.
- [48] L.D. Landau, *Nucl. Phys* **13** : 181 (1959).
- [49] J.D. Bjorken, S.D.Drell, “Relativistic Quantum field,” ISBN 07-005494-0.
- [50] R.J.Eden, P.V. Landshoff,D.I. Olive, J.C. Polkinghorne, “The analytic S-matrix,”
- [51] R. K. Ellis, G. Zanderighi “Scalar one-loop integrals for QCD,” [arXiv :0712.1851]
- [52] T.D. Lee, M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **133** : 1549 (1963).
- [53] L.M. Brown, R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **85** (1952) 231.
- [54] G. Passarino, M. Veltman,, *Nucl. Phys. B* **160** (1979) 151.
- [55] G.’t Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **153** (1979) 365.
- [56] T.Binoth, J. Ph. Guillet, G. Heinrich, “Reduction formalism for dimensionally regulated one-loop N-point integrals,” *Nucl.Phys. B***572** (2000) 361-386, [arXiv :hep-ph/9911342].
- [57] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich, E. Pilon and C. Schubert, “An algebraic / numerical formalism for one-loop multi-leg amplitudes,” *JHEP* **0510** (2005) 015 ; [arXiv :hep-ph/0504267].
- [58] R. Pittau, “ A simple method for multi-leg loop calculations,” *Comput.Phys.Commun.* **104** (1997) 23-36, [arXiv :hep-ph/9607309].
- [59] S. Weinzierl, “Reduction of multi-leg loop integrals,” *Phys.Lett. B***450** (1999) 234-240, [arXiv :hep-ph/9811365].
- [60] A.Denner, S. Dittmaier, “Reduction schemes for one-loop tensor integrals,” *Nucl.Phys. B* **734** (2006) 62-115, [arXiv :hep-ph/0509141].
- [61] R. G. Newton (1976), “Optical Theorem and Beyond,” *Am. J. Phys* **44** : 639-642.
- [62] R.Krönig, *J. Op. Soc. Am* **12** : 547 (1926).
- [63] H.A.Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisico como* (1927).
- [64] R.E. Cutkosky, “Singularities and Discontinuities of Feynman Amplitudes,” *J. Math. Phys* **1** (1960) 429.
- [65] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, “Computing One-Loop Amplitudes From The Holomorphic Anomaly Of Unitarity Cuts,” *Phys.Rev. D* **71** (2005) 025012, [arXiv :hep-th/0410179]
- [66] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, “Coplanarity In Twistor Space Of N=4 Next-To-MHV One-Loop Amplitude Coefficients,” *Phys.Lett. B***611** (2005) 167-172, [arXiv :hep-th/0411107]
- [67] R. Britto, F. Cachazo and B. Feng, “Generalized unitarity and one-loop amplitudes in N = 4 super-Yang-Mills,” *Nucl. Phys. B* **725**, (2005) 275-305. [arXiv :hep-th/0412103].
- [68] R. Britto, E. Buchbinder, F. Cachazo and B. Feng, “One-loop amplitudes of gluons in SQCD,” *Phys. Rev. D* **72**, (2005) 065012, [arXiv :hep-ph/0503132].
- [69] Z. Bern, L. Dixon, D.A. Kosower, “ One-loop Amplitudes for e^+e^- to four partons,” *Nucl.Phys. B* **513** (1998) 3-86 [arXiv :hep-ph/9708239].
- [70] R. Britto, B. Feng and P. Mastrolia, “The cut-constructible part of QCD amplitudes,” *Phys. Rev. D* **73**, (2006) 105004, [arXiv :hep-ph/0602178].
- [71] P. Mastrolia, “On triple-cut of scattering amplitudes,” *Phys. Lett. B* **644** (2007) 272, [arXiv :hep-th/0611091].
- [72] C. Anastasiou, R. Britto, B. Feng, Z. Kunszt and P. Mastrolia, “D-dimensional unitarity cut method,” *Phys. Lett. B* **645** (2007) 213, [arXiv :hep-ph/0609191],[arXiv :hep-ph/0612277].
- [73] R. Britto and B. Feng, “Unitarity cuts with massive propagators and algebraic expressions for coefficients,” *Phys.Rev. D* **75** (2007) 105006, [arXiv :hep-ph/0612089].
- [74] D. Forde, “Direct extraction of one-loop integral coefficients,” *Phys. Rev. D* **75** (2007) 125019, [arXiv :0704.1835 [hep-ph]].
- [75] W. B. Kilgore, “One-loop Integral Coefficients from Generalized Unitarity,” [arXiv :0711.5015].
- [76] G. Ossola, C. G. Papadopoulos, R. Pittau “a program implementing the OPP reduction method to compute one-loop amplitudes,” [arXiv :0711.3596]

- [77] C. F. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon, D. Forde, D. A. Kosower, “On-Shell Unitarity Bootstrap for QCD Amplitudes,” [arXiv :hep-ph/0610089].
- [78] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, “On-Shell Methods in Perturbative QCD,” [arXiv :0704.2798].
- [79] C. F. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon, F. Cordero, D. Forde, H. Ita, D. A. Kosower, D. Maitre, “An Automated Implementation of On-Shell Methods for One-Loop Amplitudes,” [arXiv :0803.4180].
- [80] T. Binoth, J. P. Guillet and G. Heinrich, “Algebraic evaluation of rational polynomials in one-loop amplitudes,” *JHEP* **0702** (2007) 013. [arXiv :hep-ph/0609054].
- [81] G. Ossola, C. G. Papadopoulos, R. Pittau, “On the Rational Terms of the one-loop amplitudes,” [arXiv :0802.1876].
- [82] S. Catani, M. H. Seymour, Z. Trócsányi, “Regularization Scheme Independence and Unitarity in QCD Cross Sections,” *Phys.Rev.* **D55** (1997) 6819-6829 [arXiv :hep-ph/9610553].
- [83] S. Catani, M. H. Seymour, “A General Algorithm for Calculating Jet Cross Sections in NLO QCD,” *Nucl.Phys.* **B485** (1997) 291-419; Erratum-ibid. **B510** (1998) 503-504, [arXiv :hep-ph/9605323].
- [84] Z. Kunszt, A. Signer, Z. Trócsányi, “One-loop helicity amplitudes for all 2 -i 2 processes in QCD and N=1 supersymmetric Yang-Mills theory,” *Nucl.Phys.* **B411** (1994) 397-442, [arXiv :hep-ph/9305239].
- [85] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar and D. A. Kosower, “One loop n point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits,” *Nucl. Phys. B* **425** (1994) 217, [arXiv :hep-ph/9403226].
- [86] A.Brandhuber, S. McNamara, B. Spence, G. Travaglini, “Loop amplitudes in Pure Yang-Mills from Generalised Unitarity,” *JHEP* **0510** (2005) 011, [arXiv :hep-th/0506068].
- [87] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, “Dimensionally Regulated One Loop Integrals,” *Phys. Lett. B* **302** (1993) 299 [Erratum-ibid. **B 318** (1993) 649]; [arXiv :hep-ph/9212308]; “Dimensionally regulated pentagon integrals,” *Nucl. Phys. B* **412** (1994) 751. [arXiv :hep-ph/9306240].
- [88] C.F. Berger, Z. Bern, L.J. Dixon, D. Forde, D.A. Kosower, “All One-loop Maximally Helicity Violating Gluonic Amplitudes In QCD,” *Phys.Rev.* **D 75** (2007) 016006, [arXiv :hep-ph/0607014].
- [89] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich and C. Schubert, “Calculation of 1-loop hexagon amplitudes in the Yukawa model,” *Nucl. Phys. B* **615** (2001) 385. [arXiv :hep-ph/0106243].
- [90] A. Denner, S. Dittmaier, “Reduction of one-loop tensor 5-point integrals,” *Nucl.Phys. B* **658** (2003) 175-202, [arXiv :hep-ph/0212259].
- [91] W. L. van Neerven and J. A. M. Vermaseren, “Large Loop Integrals,” *Phys. Lett. B* **137** (1984) 241.
- [92] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar and D. A. Kosower, “Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes,” *Nucl. Phys. B* **435** (1995) 59, [arXiv :hep-ph/9409265].
- [93] R. Karplus and M. Neumann, *Phys. Rev.* **80** (1950) 380; **83** (1951) 776.
- [94] B. De Tollis, *Nuovo Cim.* **32** (1964) 757, **35** (1965) 1182.
- [95] E.Lifchitz, L.Pitayevski, “Théorie quantique relativiste (deuxième partie),” éditions mir, Moscou,
- [96] Z.Bern, A.G.Morgan, “Massive Loops from Unitarity,” *Nucl.Phys. B* **467** (1996) 479-509 [arXiv :hep-ph/9511336].
- [97] Z. Bern, A. De Freitas, L. J. Dixon, A. Ghinculov and H. L. Wong, “QCD and QED corrections to light-by-light scattering,” *JHEP* **0111** (2001) 031. [arXiv :hep-ph/0109079].
- [98] Z. Nagy and D. E. Soper, “Numerical integration of one-loop Feynman diagrams for N-photon amplitudes,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 093006, [arXiv :hep-ph/0610028].
- [99] G. Mahlon, “One Loop Multiphoton Helicity Amplitudes,” *JHEP* **0707**, 085 (2007), [arXiv :hep-ph/9311213].

- [100] G. Ossola, C. G. Papadopoulos and R. Pittau, “Numerical Evaluation of Six-Photon Amplitudes,” *JHEP* **0707**, 085 (2007), [arXiv :0704.1271 [hep-ph]].
- [101] T.Binoth, T.Gehrmann, G.Heinrich, P.Mastrolia “Six-Photon Amplitudes,” *Phys. Lett. B* **649** (2007) 422-426, [arXiv :hep-ph/0703311]
- [102] C.Bernicot, “The six-photon amplitudes,” Talk given at 43nd Rencontres de Moriond on QCD and High-Energy Interactions, La Thuile, March 2007, [arXiv :0804.1315].
- [103] C.F.Weizsäcker, *Z. Phys.* **88** (1934) 612.
- [104] E.J.Williams, *Phys. Rev.* **45** (1934) 729.
- [105] S. Frixione, M.L.Mangano, P. Nason, G. Ridolfi “Improving the Weizsäcker-Williams approximations in electron-proton collisions”, *Phys. Lett. B* **319** (1993) 339-345, [arXiv :hep-ph/9310350].
- [106] L.C. Maximon, “The dilogarithm function for complex argument,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **459** (2003) 2807-2819.
- [107] F. Boudjema, N. Le Duc, “Leading Yukawa corrections to Higgs production associated with a tagged bottom anti-bottom pair in the Standard Model at the LHC,” [arXiv :0711.2005].
- [108] Z.Bern et al., “The NLO multileg working,” summary report of the NLO multileg working group of the Les Houches 2007 workshop ”Physics at TeV Colliders”, Les Houches, France, 11-29 June, 2007, [arXiv :0803.0494]